

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER

En Physique

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par

BOUSBAI M'hamed

SUJET :

***ETUDE NUMERIQUE D'UNE COUCHE LIMITE
TURBULENTE SOUMISE A UN CISAILLEMENT
TRANSVERSAL***

Soutenu publiquement le **03 Octobre 2005**, devant le jury composé de :

Mr- A. SALEM	Professeur (USTHB)	Président
Mr- T. BENABID	Maître de Conférences (USTHB)	Directeur de thèse
Mr- S. BENHADID	Professeur (USTHB)	Examineur
Mr- D. KALACHE	Professeur (USTHB)	Examineur
Mme- A. MATAOUI	Maître de Conférences (USTHB)	Examineur
Mr- T. REZOUG	Maître de Conférences (Univ. Blida)	Examineur

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER

En Physique

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par

BOUSBAI M'hamed

SUJET :

***ETUDE NUMERIQUE D'UNE COUCHE LIMITE
TURBULENTE SOUMISE A UN CISAILLEMENT
TRANSVERSAL***

Soutenu publiquement le **03 Octobre 2005**, devant le jury composé de :

Mr- A. SALEM	Professeur (USTHB)	Président
Mr- T. BENABID	Maître de Conférences (USTHB)	Directeur de thèse
Mr- S. BENHADID	Professeur (USTHB)	Examineur
Mr- D. KALACHE	Professeur (USTHB)	Examineur
Mme- A. MATAOUI	Maître de Conférences (USTHB)	Examineur
Mr- T. REZOUG	Maître de Conférences (Univ. Blida)	Examineur

A La Mémoire De Mon Père

AVANT PROPOS

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides Théorique et Appliquée (LMFTA) de la Faculté de Physique – USTHB.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur Tahar BENABID, Maître de Conférences, de m'avoir confié ce travail et me faire bénéficier de ses qualités scientifiques et pour les conseils qu'il m'a prodigués.

J'exprime aussi ma profonde gratitude à Madame Amina MATAOUI, Maître de Conférences. Malgré ses très nombreuses responsabilités, elle n'a jamais hésité à rester disponible, au cours de ces années, pour orienter mon travail et me conseiller très utilement. Je suis très sensible à la confiance qu'elle m'a témoignée à plusieurs reprises.

Monsieur Abdelaziz SALEM Professeur, dont j'ai reçu un enseignement exemplaire, m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Monsieur le Professeur Salah BENHADID, m'a fait l'honneur de juger ce travail malgré ses responsabilités. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma sincère reconnaissance.

Monsieur le Professeur Djamel KALACHE, a bien voulu participer à ce jury de thèse. Je le prie de croire à l'expression de mes remerciements les plus vifs.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Tahar REZOUG, Maître de Conférences à l'Institut d'Aéronautique de l'université de Blida, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Par ailleurs, je suis très reconnaissant envers premièrement ma famille, tous les amis et les collègues enseignants – chercheurs qui m'ont régulièrement ou occasionnellement apporté leur aide au cours de ces années en leur compagnie.

J'exprimer mes sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à ma formation surtout mes enseignants du primaire, CEM, Lycée et de l'université.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Nomenclature

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre 1 : Travaux Antérieurs

1.1. Introduction.....	4
1.2. Simulation numérique des écoulements turbulents (CFD).....	4
1.2.1. <i>Simulation Numérique Directe</i>	4
1.2.2. <i>Simulation à Grandes Échelles LES</i>	5
1.2.3. <i>Modélisation statistique en un point RANS</i>	6
1.3. Revue des travaux expérimentaux	8
1.3.1. Écoulements turbulents tridimensionnels	8
1.3.2. Couche limite turbulente autour d'un cylindre en rotation.....	9
1.4. Revue des prévisions numériques	16
1.4.1. Introduction	16
1.4.2. Modélisation des écoulements bidimensionnels	16
1.4.3. Modélisation des écoulements tridimensionnels.....	17
1.5. Modélisation près de la paroi.....	20

Chapitre 2 : Formulation mathématique et modélisation de la turbulence

2.1. Introduction.....	23
2.2. Géométrie choisie.....	23
2.3. Equations régissant le champ d'écoulement.....	24
2.4. Approches pour la fermeture du système d'équations	27
2.4.1. Introduction	27
2.4.2. Les équations de transport des tensions de Reynolds.....	28
2.4.2.1. Modélisation du terme de dissipation ε_{ij}	30
2.4.2.2. Modélisation de la diffusion D_{ij}	30

2.4.2.3.	Modélisation du terme de corrélation pression – vitesse ϕ_{ij}	31
2.4.2.3.1.	Modélisation du terme $\phi_{ij,1}$	33
2.4.2.3.2.	Modélisation du terme $\phi_{ij,2}$	33
2.4.3.	L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente	36
2.4.4.	L'équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente..	37
2.5.	Les modèles de turbulence examinés	38
2.5.1.	Modèle k - ϵ	38
2.5.2.	Le modèle Algébrique aux tensions de Reynolds ASM.....	40
2.5.3.	Le modèle de transport des tensions de Reynolds RSM.....	43
2.6.	Modélisation près de la paroi.....	44
2.6.1.	Introduction	44
2.6.2.	La loi de paroi pour la vitesse longitudinale	45
2.6.3.	La loi de paroi pour la vitesse transversale	47
2.6.4.	La loi de paroi pour la Température	49
2.6.5.	Energie cinétique de la turbulence à la paroi	51
2.6.6.	Dissipation à la paroi	53
2.7.	Conclusion	53

Chapitre 3 : Méthodes Numériques

3.1.	Introduction.....	54
3.2.	Méthodes des volumes finis.....	55
3.3.	Equation différentielle générale	55
3.4.	Discrétisation des équations de transport	57
3.5.	Schémas d'interpolations.....	60
3.6.	Traitement du terme source	62
3.7.	Traitement du couplage vitesse – pression	63
3.7.1.	Introduction.....	63
3.7.2.	Algorithme SIMPLE	63
3.7.2.1.	Equation de correction de la vitesse.....	64
3.7.2.2.	Equation de correction de la pression.....	64
3.8.	Résolution numérique.....	66

3.8.1. Introduction	66
3.8.2. Critère de convergence	66
3.8.3. Stabilité numérique	67
3.8.4. Les conditions aux limites	68
3.9. Mise en œuvre numérique	73

Chapitre 4 : Résultats et discussion

4.1. Paramètres de l'étude	75
4.1.1. Conditions aérodynamiques	75
4.1.2. Maillage	75
4.2. Comparaison de trois modèles de turbulence pour le cas d'une plaque plane fixe	77
4.2.1. Champ moyen	77
4.2.2. Champ turbulent	77
4.2.3. Champ thermique	79
4.2.4. Conclusion	80
4.3. Etude d'une couche limite sous l'action d'un cisaillement transversal	81
4.3.1. Variation de l'angle β	81
4.3.2. Coefficients de frottement	83
4.3.3. Vitesses moyennes	84
4.3.4. Champ turbulent	89
4.3.5. Champ thermique	96
4.3.6. Conclusion	99
4.4. Etude de la relaxation d'une couche limite sur la partie fixe en aval de la paroi mobile	100
4.4.1. Vitesses moyennes	100
4.4.2. Champ turbulent	101
4.4.3. Champ Thermique	106
4.4.4. Conclusion	106

Conclusion Générale

Conclusion générale	107
Annexe	109
Références bibliographiques	

NOMENCLATURE

NOMENCLATURE

NOTATIONS LATINES

C_{fx}	: Coefficient de frottement longitudinal $\left(C_{fx} = \frac{\tau_{px}}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} \right)$.
C_{fz}	: Coefficient de frottement transversal $\left(C_{fz} = \frac{\tau_{pz}}{\frac{1}{2} \rho U_e W_0} \right)$.
$C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	: Constantes de modélisation.
k	: Energie cinétique de la turbulence.
Nu	: Nombre de Nusselt $\left(Nu = \frac{q_w \delta}{\lambda \Delta T} \right)$.
P	: Pression statique.
p	: Fluctuation de pression.
Pr	: Nombre de Prandtl $\left(Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \right)$
q_w	: Flux de chaleur à la paroi.
Re	: Nombre de Reynolds $\left(Re = \frac{\rho U_e \delta}{\mu} \right)$.
R_T	: Nombre de Reynolds de la turbulence $\left(R_T = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \right)$
R_{ij}	: Tenseur des tensions de Reynolds $\left(R_{ij} = \overline{u_i u_j} \right)$
T	: Température moyenne.
T_w	: Température de la paroi chauffée.
(U, V, W)	: Composantes moyennes de la vitesse dans un repère absolu.
$(U_{\underline{u}}, V_{\underline{u}}, W_{\underline{u}})$	: Composantes moyennes de la vitesse dans un repère relatif.
(u, v, w)	: Composantes fluctuantes de vitesse.
U_e	: Vitesse de l'écoulement extérieur.

U_τ	: Composante longitudinale de la vitesse de frottement $\left(U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{px}}{\rho}} \right)$.
U^+	: Vitesse longitudinale adimensionnelle $\left(U^+ = \frac{U}{U_\tau} \right)$.
W_0	: Vitesse de la paroi mobile.
W_τ	: Composante transversale de la vitesse de frottement $\left(W_\tau = \sqrt{-\frac{\tau_{pz}}{\rho}} \right)$.
W^+	: Vitesse transversale adimensionnelle $\left(W^+ = \frac{W_0 - W}{W_\tau} \right)$.
y^+	: Coordonnée réduite $\left(y^+ = \frac{\rho U_\tau y}{\mu} \right)$.

NOTATIONS GRECQUES

β	: Angle de déviation des lignes de courant.
ε	: Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente k .
θ	: Fluctuation de température.
Φ	: Variable généralisée.
Γ	: Coefficient d'échange.
κ	: Constante de Von Kàrmàn.
ν	: Viscosité cinématique du fluide.
ν_t	: Viscosité cinématique turbulente de l'écoulement.
ρ	: Masse volumique du fluide.
τ_{px}	: Contrainte longitudinale à la paroi $\left(\tau_{px} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \right)$.
τ_{pz}	: Contrainte transversale à la paroi $\left(\tau_{pz} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} \right)$.
δ	: Epaisseur de la couche limite.
δ_{ij}	: Symbole de Kronecker.
λ	: Conductivité thermique.

ABBREVIATIONS

AIAA	: American Institute of Aeronautics and Astronautics
AGARD	: Advisory Group for Aerospace Research & Development
ASM	: Algebraic Stress Model.
ASME	: American Society of Mechanical Engineers
CFD	: Computational Fluid Dynamics.
DNS	: Direct Numerical Simulation.
ERCOTAC	: European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion
EVM	: Eddy-Viscosity Model.
EARSM	: Explicit Algebraic Reynolds Stress Model.
IRPHE	: Institut de Recherche sur les Phenomenes Hors Equilibre
IMST	: Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence.
IUTAM	: International Union of Theoretical and Applied Mathematics.
LDA	: Laser Doppler Anemometry.
LES	: Large Eddy Simulation.
LMFTA	: Laboratoire de Mécanique des Fluides Théorique et Appliquée.
LOADS	: LOcally Analytic Differencing Scheme.
NLEVM	: Non-Linear Eddy-Viscosity Model.
ONERA	: Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales.
PDE	: Partial Differential Equations.
PIV	: Particle Image Velocimetry.
PLDS	: Power Law Differencing Scheme.
QUICK	: Quadratic Upwind Interpolation for Convection Kinematics.
RANS	: Reynolds-Averaged Navier-Stokes.
RSM	: Reynolds Stress Model.
SIMPLE	: Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations.
SUDS	: Skew-Upwind Difference Scheme.
TEAM	: Turbulent Elliptic Algorithm – Manchester.
TDMA	: Tri-Diagonal Matrix Algorithm.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GENERALE

Les écoulements turbulents pariétaux tels que les couches limites se développant sur des parois fixes ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales et numériques. La multiplicité des modèles théoriques et numériques proposés dans la littérature ne concerne à cet effet que la couche limite turbulente bidimensionnelle. Bien qu'en réalité les écoulements pariétaux d'intérêt technologique sont généralement tridimensionnels, tels que les écoulements dans les turbomachines, la couche limite qui se développe autour d'un missile en rotation, l'aéronautique (couche limite se développant autour des ailes d'avion multi volets) etc. En outre certaines propriétés de la turbulence peuvent être mises en évidence par l'étude d'écoulements complexes, notamment en privilégiant une complexité bien déterminée.

La tridimensionnalité introduit une complexité qui se traduit par le non alignement des directions principales du tenseur des tensions de Reynolds et celle du tenseur de déformation. Donc il convient d'étudier non seulement la tension $-\rho \overline{uv}$ qui participe à la diffusion turbulente de la quantité de mouvement longitudinale, mais aussi la tension $-\rho \overline{vw}$ qui participe à celle de la quantité de mouvement transversale.

Une des motivations principales de cette étude a été de mettre en évidence les modifications d'une couche limite turbulente bidimensionnelle sous l'action d'une contrainte supplémentaire, en l'occurrence la mise en mouvement de la paroi dans le sens transversal de l'écoulement. Expérimentalement, la configuration plane n'ayant pas été retenue pour des raisons techniques, les recherches ont été réalisées dans la couche limite axisymétrique se développant sur un cylindre dont la partie située en aval est mise en rotation axiale.

Les modèles de fermeture appliqués au calcul des couches limites tridimensionnelles sont souvent des extensions directes des modèles utilisés en bidimensionnel. Le traitement de proche paroi est l'une des grandes difficultés rencontrées dans la modélisation de la turbulence en couche limite tridimensionnelle.

Malgré la multiplicité des modèles de turbulence présentés dans la littérature, aucun d'eux ne présente une sécurité absolue pour la qualité des résultats qui s'en déduisent. Le modèle le plus couramment testé et utilisé est le modèle de type énergie – dissipation ($k-\varepsilon$) basé sur deux équations de transport une pour l'énergie cinétique de la turbulence et l'autre pour son taux de dissipation. Ce modèle ne peut être appliqué que pour des écoulements loin de la

paroi. Pour étudier des écoulements pariétaux, il convient d'utiliser un modèle à faible nombre de Reynolds qui tient compte des effets de paroi, ou un modèle $k-\varepsilon$ à grands nombres de Reynolds simplement couplé à une loi logarithmique universelle. L'approche de la loi de paroi est une approche économique. Cette méthode a été largement développée pour la couche limite bidimensionnelle. Pour le cas d'une couche limite tridimensionnelle aucun modèle de fermeture utilisant un raccordement par la loi universelle pour les deux composantes du vecteur vitesse longitudinale et transversale n'a été retrouvé dans la littérature.

Dans la présente étude nous avons adopté un modèle énergie – dissipation raccordé à une loi de paroi pour la zone de proche paroi. Nous avons élaboré une loi de paroi pour la vitesse transversale, la formulation universelle de la vitesse longitudinale reste valable.

Le travail présenté dans cette thèse est réparti en quatre chapitres :

Dans le **chapitre 1**, nous présentons une revue des travaux expérimentaux et numériques antérieurs entrepris sur des écoulements pariétaux tels que la couche limite sur des parois mobiles, en particulier sur un cylindre en rotation axiale.

Nous présentons ensuite, dans le **chapitre 2**, la configuration étudiée et les éventuelles applications théoriques et pratiques. Le choix de la configuration de plaque plane mobile est aussi discuté. Ensuite on présente les équations qui gouvernent l'écoulement et les modèles de turbulence examinés. Il s'agit premièrement d'un modèle de type énergie – dissipation ($k-\varepsilon$) avec un raccordement par la loi universelle. Le second modèle utilisé est un modèle algébrique des tensions de Reynolds (ASM). Le dernier modèle utilisé est le modèle des tensions de Reynolds (RSM.) basé sur la résolution de l'équation de transport des tensions de Reynolds. Les lois de paroi pour la vitesse longitudinale et transversale utilisées sont présentées dans ce chapitre.

La méthode numérique choisie est exposée au **chapitre 3**. Il s'agit de la méthode des volumes finis qui consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles sur des volumes de contrôle. Le choix du schéma d'interpolation et l'algorithme de résolution du couplage vitesse – pression ainsi que les conditions aux limites sont discutés dans ce chapitre.

Le **chapitre 4** est consacré à la présentation des différents résultats obtenus. Des comparaisons avec les résultats expérimentaux pour un écoulement autour d'un cylindre en rotation, ont permis de valider le modèle de turbulence et le code de calcul utilisés.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale dans laquelle nous évoquons les perspectives de ce travail.

CHAPITRE 1

TRAVAUX ANTERIEURS

CHAPITRE 1

Travaux antérieurs

1.1. Introduction

Le développement rapide en informatique, principalement au cours des dix dernières années, a donné une impulsion forte au développement et à la validation des algorithmes pour le calcul des écoulements tridimensionnels (3D). En effet, La simulation numérique des écoulements turbulents (CFD) est devenue un outil incontournable très performant pour la prédétermination et la compréhension de certains phénomènes liés à la turbulence. Cette voie trouve de nombreuses applications aussi bien dans l'industrie que dans les recherches fondamentales. Par ailleurs, le CFD permet d'accéder à certaines configurations et à des zones d'écoulement inaccessibles par la voie expérimentale. La simulation numérique se présente sous plusieurs approches qui sont discutées par la suite.

1.2. Simulation numérique des écoulements turbulents (CFD)

Trois approches sont utilisées actuellement pour les prévisions numériques des écoulements turbulents :

- Simulation numérique directe.
- Simulation à grandes échelles.
- Modélisation statistique en un point.

1.2.1. Simulation Numérique Directe DNS (*Direct Numerical Simulation*)

Cette approche est basée sur la résolution des équations tridimensionnelles instationnaires de Navier – Stokes pour toute la gamme du mouvement turbulent des plus grandes échelles jusqu'aux échelles dissipatives (figure 1.1). La DNS ne nécessite aucune modélisation, cette approche donne simultanément toutes les échelles spatiales et temporelles du mouvement turbulent. Ces méthodes sont très fiables, mais exigent plus d'espace mémoire et de temps de calcul que les méthodes de simulation des grandes échelles. Cette technique nécessite alors des moyens de calcul très sophistiqués et coûteux.

Les configurations des écoulements actuellement accessibles à ce type d'approche sont encore simples pour des nombres de Reynolds relativement faibles. Elle ne peut donc pas être envisagée pour des applications pratiques.

La simulation numérique directe, peut servir de support à l'élaboration des nouveaux modèles de turbulence, elle a permis aussi d'améliorer la performance de certains modèles présentés dans la littérature, tels que ceux de Jakirlić et Hanjalić (2002) [1], Antonia et Djenidi (1994) [2], Rodi et Mansour (1993) [3]. Elle est appelée « expérience numérique ».

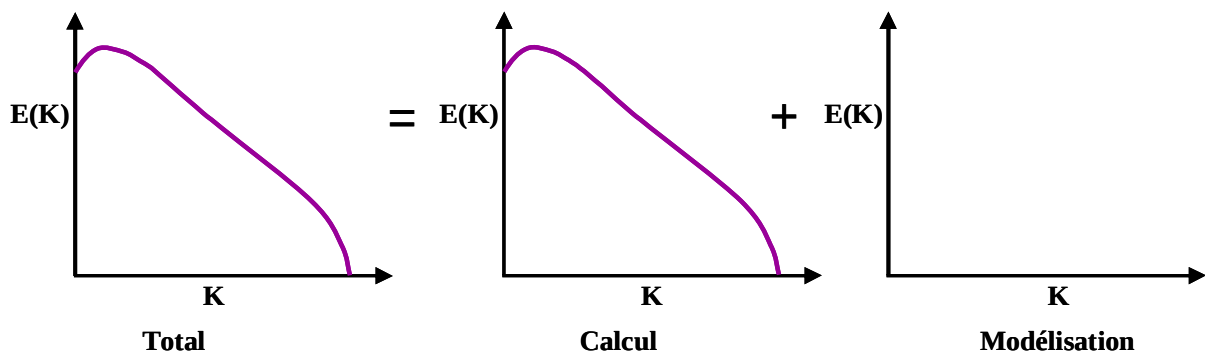


Figure 1.1 : Technique de la simulation numérique directe DNS.

1.2.2. Simulation à Grandes Échelles LES (Large Eddy Simulation)

La simulation des grandes échelles est une technique très prometteuse pour la prédiction et l'analyse des écoulements turbulents instationnaires.

L'idée de la simulation des grandes échelles LES est d'obtenir, par résolution directe des équations de Navier – Stokes les caractéristiques des grandes échelles de la turbulence, alors que les petites échelles seront prises en compte au moyen d'un modèle statistique appelé modèle sous – maille (figure 1.2). Cette technique est utilisée jusqu'à maintenant avec un certain succès dans des configurations géométriques simples car elle est souvent trop coûteuse en temps de calcul. Ainsi une meilleure compréhension de certains phénomènes aérodynamiques fondamentaux a pu être réalisée grâce à l'application de ce type de modélisation (LES) : éclatement tourbillonnaire (aile delta), transition instationnaire pour les turbomachines, sillages tourbillonnaires, aéroacoustique, aéro-optique, contrôle actif.

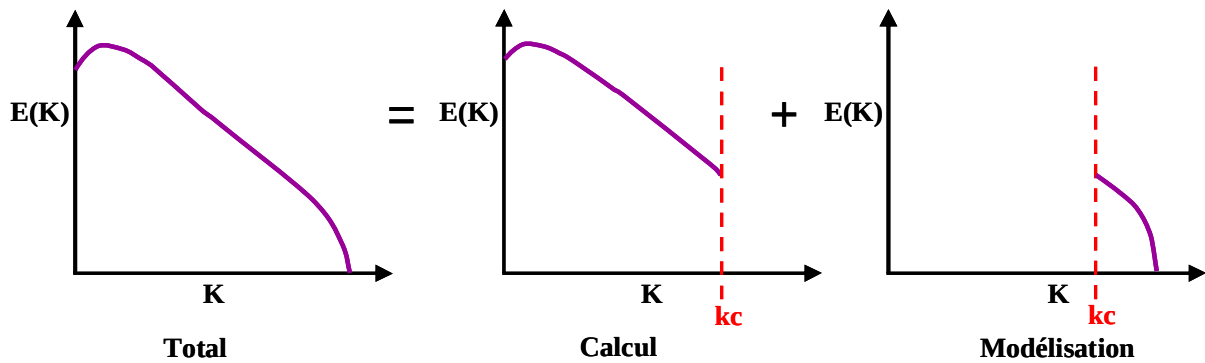


Figure 1.2 : Technique de la simulation à grandes échelles LES.

1.2.3. Modélisation statistique en un point RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes)

Cette approche est basée sur un traitement statistique des équations de Navier – Stokes, moyennant la décomposition de Reynolds, qui consiste à représenter chaque variable aléatoire en une partie moyenne et une fluctuation. Les valeurs moyennes sont calculées à partir des équations de Navier – Stokes moyennées RANS (figure 1.3).

Les tensions de Reynolds apparaissent dans les équations de Reynolds moyennées comme des inconnues supplémentaires. Le problème central de l'analyse statistique des écoulements turbulents consiste en la modélisation de ces tensions. En effet, pour résoudre les équations présentant l'écoulement moyen, il faut établir un modèle permettant le calcul des tensions turbulentes à partir des variables de cet écoulement moyen. Ce problème est désigné généralement sous le nom « **problème de fermeture** ».

Il n'y a pas de représentation unique des tensions de Reynolds en fonction de l'écoulement moyen et les hypothèses de fermeture (modèles de turbulence) utilisées en pratique sont très variées. Les modèles de turbulence se présentent en général sous forme d'un ensemble d'équations dans lesquelles apparaissent les tensions turbulentes. Cet ensemble d'équations complète les équations dynamiques moyennes et doit permettre la résolution simultanée de toutes les équations du mouvement.

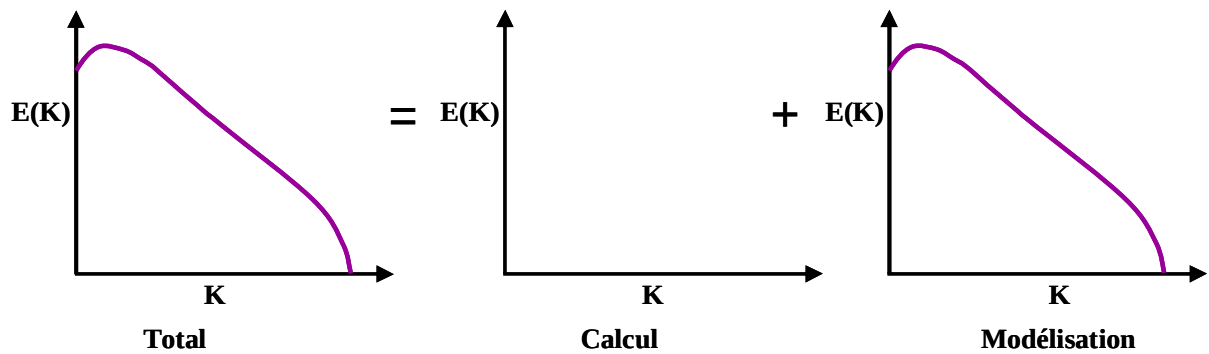


Figure 1.3 : technique de la modélisation en un point RANS.

Les différentes approches pour la simulation numérique des écoulements turbulents sont rassemblées dans la figure (1.4) selon leurs degrés de complexité et leurs précisions.

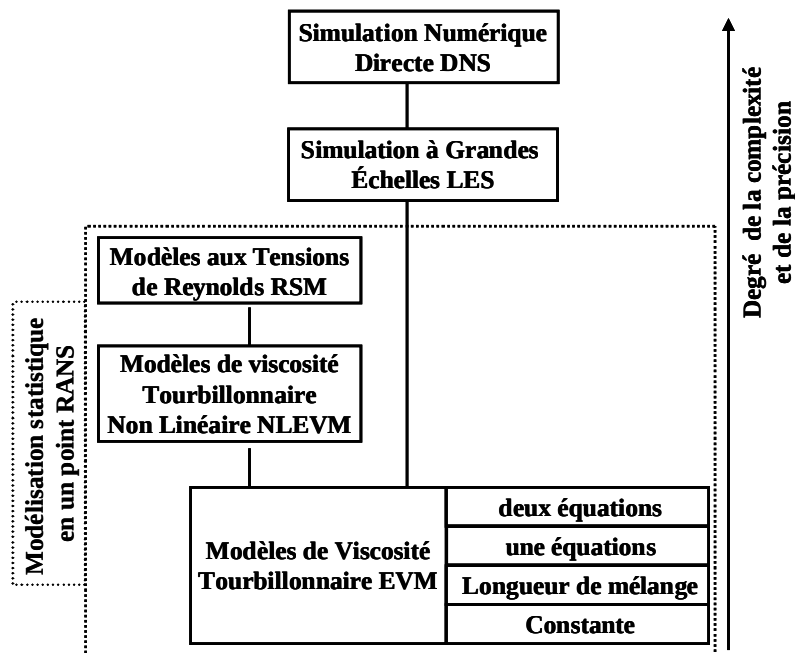


Figure 1.4 : différentes approches pour la simulation des écoulements turbulents.

En pratique, le choix d'une méthode est conditionné par de nombreux facteurs tels que la facilité de mise en œuvre, coût, performance, degré de généralité, souplesse d'utilisation. Dans la suite, nous présentons, une synthèse des travaux expérimentaux et numériques concernant les écoulements sur des parois mobiles.

1.3. Revue des travaux expérimentaux

1.3.1. Écoulements turbulents tridimensionnels

La plupart des écoulements rencontrés dans la nature et dans l'industrie sont turbulents complexes et tridimensionnels. Le jet qui s'échappe d'un turboréacteur, le panache de fumée issu d'une cheminée, la couche limite qui s'établit sur la voilure d'un avion, le fluide tournant dans un réacteur chimique agité etc.

L'étude des écoulements tridimensionnels reste un problème à l'ordre du jour. Différentes configurations d'écoulements ont été étudiées par plusieurs auteurs. On peut trouver dans les documents de Johnston et Flack (1996) [4], Leschziner (1993) [5] une revue sur certains types d'écoulements.

Nous présentons dans le tableau (1.1) quelques configurations des écoulements tridimensionnels étudiées.

Auteurs	Année	Configurations	Etude Expérimentale	Prédictions numériques
Bradshaw et Terrell [6]	1969	Aile en flèche	ü	
Durbin [7]	1993			ü
Rastogi et Rodi [8]	1978	écoulement dans une		ü
Flack et Johnston [9]	1998	conduite coudée	ü	
Nash [10]	1969			ü
Fernholz et Vagt [11]	1981		ü	
Müller [12]	1982	couche limite avec gradient		ü
Pierce et al. [13]	1983	de pression		ü
Cutler et Johnston [14]	1989		ü	
Wilcox [15]	1993			ü
Koosinlin et Lockwood [16]	1974	Ecoulement autour d'un		ü
Launder et al. [17]	1977	cône en rotation		
Rezoug [18]	1990	Ecoulement dans une		ü
Elena [19-20]	1994	cavité en rotation		ü
Cebeci et Abbott [21]	1975	Ecoulement sur un disque		ü
Littell et Eaton [22]	1994	tournant	ü	

Tableau 1.1 : Les différentes configurations des écoulements tridimensionnels étudiées.

Dans la présente étude nous nous intéressons à l'étude d'une couche limite turbulente soumise à un cisaillement transversal (cas de la mobilité de la paroi). Nous ferons dans la suite une synthèse des travaux expérimentaux et numériques qui ont été réalisés sur ce type de configuration d'écoulement.

1.3.2. Couche limite turbulente autour d'un cylindre en rotation

Les premiers travaux de Furuya et al. (1966) [23], Nakamura et Yamashita (1982) [24], ont concerné l'étude d'une couche limite laminaire et turbulente se développant sur un cylindre en écoulement axial, la rotation du cylindre débutant à partir du sommet de l'ogive amont (figure 1.5). Ils ont trouvé que dans le cas d'une couche limite laminaire, l'hodographe montre un point d'inflexion. Par contre pour la couche limite turbulente l'hodographe est presque quasi-collatéral sauf dans la zone de très proche paroi.

Cependant ce type de couche limite tridimensionnelle, où la rotation de la paroi est imposée dès le début, peut tendre à devenir rapidement quasi – hélicoïdale, la couche limite n'étant pas tout à fait tridimensionnelle. Ces auteurs se sont limités au champ moyen et n'ont pas fourni de résultats sur le champ turbulent.

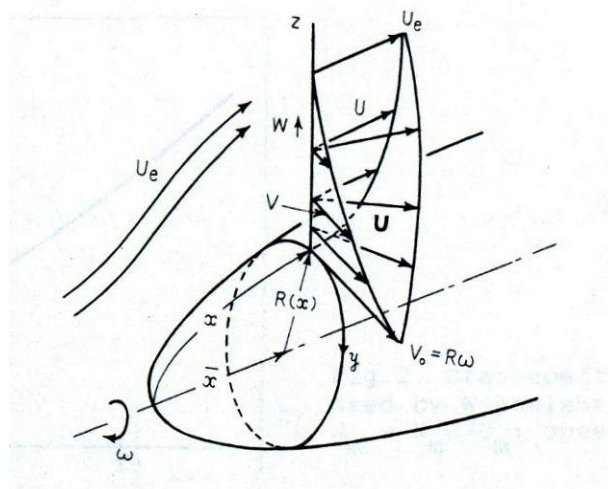


Figure 1.5 : configuration étudiée par Furuya et al., Nakamura et Yamashita.

L'effet d'un gradient de pression et l'effet de rugosité de la paroi sont des facteurs intéressants à étudier dans une couche limite sur une plaque plane. Dans un mémoire soumis à l'université Nagoya (Japon), Furuya et al. (1978) [25] ont traité expérimentalement ces deux effets sur une couche limite se développant autour d'un cylindre en rotation dans un écoulement uniforme. Ces auteurs ont signalé que le rôle important de la rugosité est de détruire l'état

quasi-collatéral qui a été confirmé auparavant. En effet, quatre formes du cylindre ont été proposées. Le premier cas est un cylindre sans rugosité, le deuxième porte une rugosité de 2.5 mm de hauteur et 2.5 mm de largeur, en forme d'anneau entourant le cylindre, le troisième cas avec une rugosité de 5 mm de hauteur et 2.5 mm de largeur, le dernier cas avec une marche de 5 mm de hauteur.

Lorsque le cylindre est immobile et sans gradient de pression, ils trouvent que dans le premier cas la pression statique est constante le long du cylindre. Par contre dans les deux autres cas la pression diminue considérablement à la section de la rugosité. Particulièrement, dans le troisième cas la pression devient immédiatement constante derrière les rugosités. Pour le cas de la marche la pression a une tendance qui est un peu différente de celle du troisième cas. Elle diminue légèrement mais augmente immédiatement derrière la marche. Concernant la vitesse et quand le cylindre est mis en rotation, ils ont trouvé pour le deuxième et troisième cas une zone de recirculation près de la paroi (figure 1.6). Pour toutes les géométries examinées les profils longitudinaux de vitesse montrent une grande déformation près de la rugosité. Par contre les profils transversaux de vitesse sont peu affectés (figure 1.7). Ils ont constaté que la distribution de vitesse montre plus de stabilité dans la direction transversale que dans la direction longitudinale.

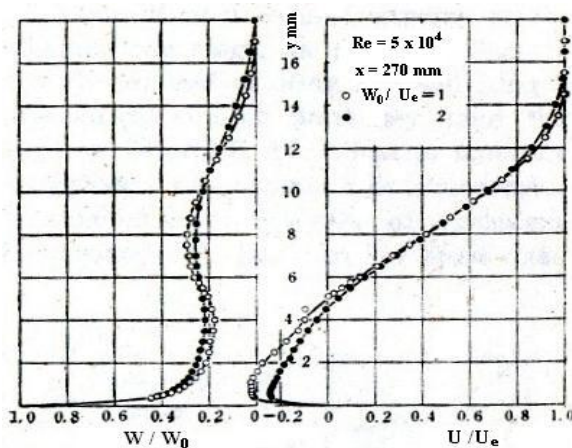


Figure 1.6 : Profils de vitesses à la section $x = 270 \text{ mm}$ (3^{ème} cas)

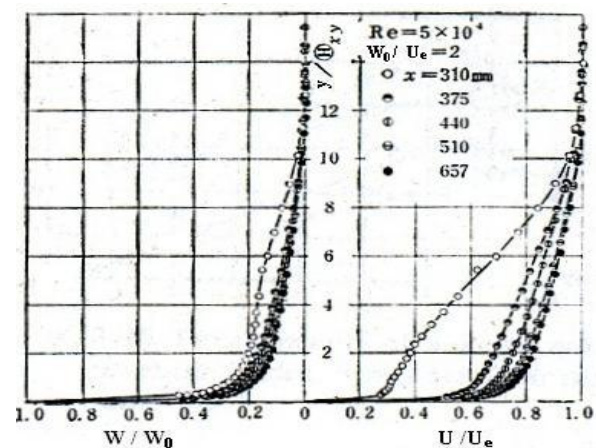


Figure 1.7 : Profils de vitesses 3^{ème} cas à $W_0 / U_e = 2$

L'effet d'un gradient de pression sur une couche limite turbulente se développant autour d'un cylindre tournant a fait l'objet de la deuxième partie des travaux de Furuya et al. (1978) [25]. Le gradient de pression est produit à l'aide d'une douille conique insérée dans le tunnel. Ils ont remarqué que si le gradient de pression est négatif ($\partial P / \partial x < 0$) la vitesse longitudinale

augmente par contre lorsque le gradient de pression est positif ($\partial P/\partial x > 0$) elle diminue. Le gradient de pression (négatif ou positif) n'a pas d'effet sur la vitesse transversale (figure 1.8). Ces auteurs (Furuya et al. (1978) [25]), ont conclu que l'effet d'un gradient de pression est équivalent à l'effet d'un cisaillement transversal appliqué à une couche limite se développant sur une plaque plane. Ils ont mis en évidence l'existence d'une loi de paroi pour la composante transversale du vecteur vitesse.

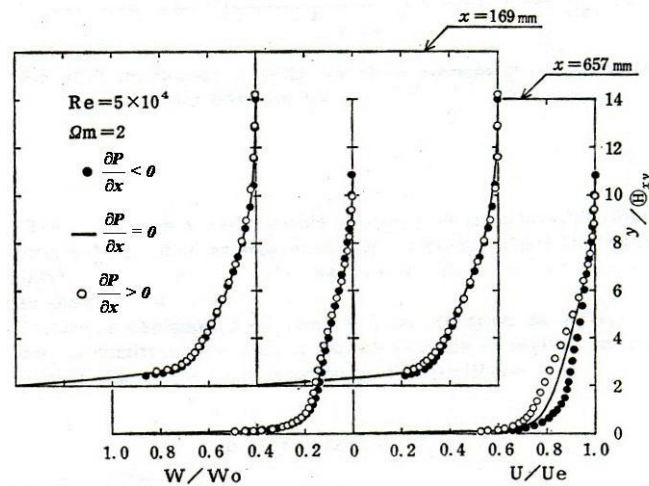


Figure 1.8 : Profils de vitesses avec et sans gradient de pression.

Des expériences analogues, sur des maquettes semblables, ont été effectuées par Bissonnette et Mellor (1974) [26] d'une part et Lohmann (1976) [27] d'autre part, pour une couche limite bidimensionnelle se développant sur un cylindre fixe. Lorsqu'elle est pleinement développée, elle atteint une partie mobile du cylindre et subit donc un brusque changement des conditions aux limites (Figure 1.9). Ces chercheurs n'ont pas fait de comparaison entre le cas fixe et le cas d'un cylindre en rotation pour mettre évidence l'effet de la rotation sur le comportement de l'écoulement. Néanmoins ils sont les premiers à fournir des résultats expérimentaux intéressants concernant le champ turbulent sur ce type de problème. Lohmann (1976) [27] a fait des mesures pour deux rapports de vitesse (W_0/U_e), 1.45 et 2.00. La comparaison des profils de vitesses longitudinales aux différentes vitesses du cylindre tournant indique que la distribution de la vitesse dans la proximité immédiate de la paroi ne dépend pas de ce rapport. Ces auteurs (Bissonnette et Mellor (1974) [26] et Lohmann (1976) [27]), ont montré que la rotation du cylindre entraîne une diminution de la vitesse longitudinale dans les zones de proche paroi (ce qui est similaire à l'effet d'un gradient de pression positif, Furuya et al. (1978) [25]), par contre les tensions de Reynolds augmentent.

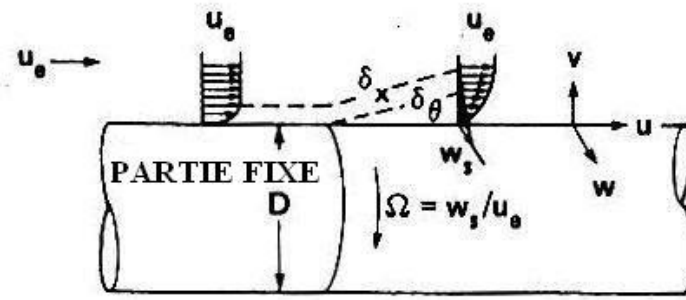


Figure 1.9 : configuration utilisée par Bissonette et Mellor, Lohmann.

L'étude spectrale menée notamment par Lohmann (1976) [27], montre un décalage spectral vers les hautes fréquences lorsque le cylindre est mis en rotation, ce décalage est significatif près de la paroi mobile (figure 1.10). Lohmann attribuait ce phénomène à un processus de redistribution de l'énergie par la rupture des grandes structures. Il a montré aussi qu'en dehors de la couche de rotation, les spectres ont une allure tout à fait comparable à celle des spectres classiques de couche limite sur plaque plane.

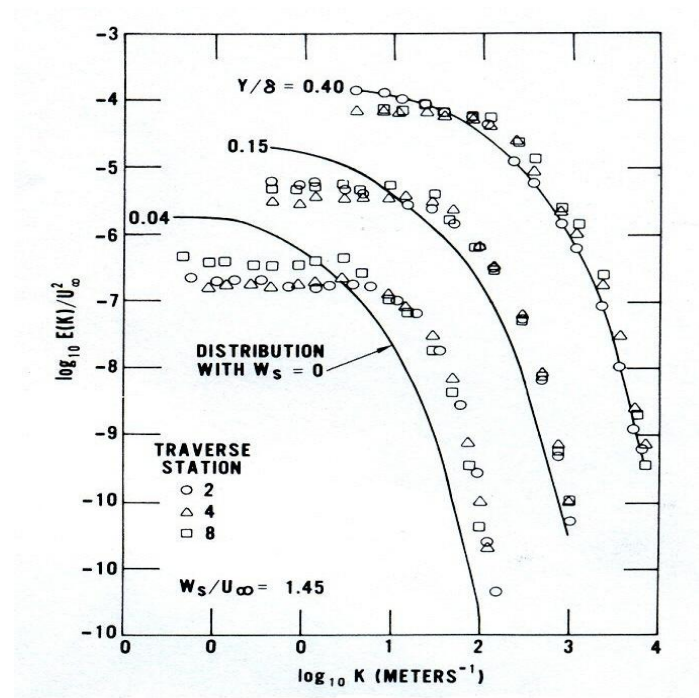


Figure 1.10: la distribution du spectre de l'énergie turbulente
(cf. Lohmann, 1976 [27])

Par la suite, une étude sur cette dernière configuration a été entreprise par plusieurs auteurs à l'IRPHE (ex. IMST), citons les travaux d'Arslanian (1978) [28], qui s'est limité uniquement à étudier le champ moyen et les paramètres de la couche limite à savoir :

- L'épaisseur de quantité de mouvement.
- L'épaisseur de déplacement.
- Les coefficients de frottement.

En 1981, Le Borgne [29] a complété l'étude d'Arslanian, effectuant des mesures pour le champ moyen et le champ turbulent mais uniquement pour deux sections dans la partie tournante. Concernant le champ turbulent cet auteur a fait des comparaisons entre le cas fixe et mobile afin de montrer l'effet du cisaillement sur le comportement de la couche limite.

Lorsqu'on se place dans un repère relatif lié à la paroi mobile, Fulachier et al. (1982) [30], ont mis en évidence la restructuration de la couche limite en une couche bidimensionnelle dans une section bien avancée. Les mesures ont été entreprises à l'aide d'un anémomètre à fil chaud.

Les visualisations faites le long du cylindre par Collini (1984) [31] ont permis de retrouver, au voisinage de la paroi à l'arrêt, la présence de structures striées analogues à celles obtenues par Kline (1967), et d'observer leur stabilisation lors de sa mise en rotation. Il a constaté que le défilement de ces structures est responsable du décalage en fréquence des spectres lorsque la rotation est appliquée.

Le travail d'Arnoux (1986) [32] a concerné la détermination directe des tensions de Reynolds dans les zones de la couche limite relativement loin de la paroi, à l'aide d'une sonde à quatre fils chauds. Dans le voisinage immédiat de la paroi, jusqu'à la sous couche, les mesures spectrales avec une sonde à un seul fil chaud lui ont permis de mettre en évidence l'évolution longitudinale des structures cohérentes liées à celle-ci. Il a constaté que la structure striée de la couche limite turbulente est stabilisée au début de la zone de rotation dans les régions où la tridimensionnalité est forte, mais se déstabilise loin en aval.

L'étude du développement de la turbulence au cours du temps a été abordée par Arzoumanian (1987) [33] à l'aide des corrélations spatiotemporelles. Cette méthode consiste à comparer statistiquement les grandeurs mesurées en deux points différents et à des instants différents. De cette façon, on peut suivre l'évolution de la turbulence. Cette analyse permet de définir des temps et des dimensions caractéristiques pendant lesquels les grandeurs turbulentes sont bien corrélées.

Un décalage spectral a été observé par Arzoumanian (1987) [33], qui est dû selon cet auteur au défilement devant le capteur des stries liées à la paroi et entraînées par celle-ci. En dehors

de la couche de rotation, les spectres classiques de couche limite bidimensionnelle sont retrouvés.

La restructuration d'une couche limite tridimensionnelle pleinement développée en couche limite bidimensionnelle en aval de la partie tournante (figure 1.11) a fait l'objet des études expérimentales à NASA Ames Research Center, notamment par Driver et Hebbar (1985), (1987) [34,35]. Les résultats expérimentaux ont été obtenus à l'aide d'un Vélocimètre Laser à effet Doppler (LDV) tricolore. Il est à noter que ces auteurs n'ont pas mené une étude comparative pour les deux cas, avec et sans rotation.

Une étude également sur la partie fixe en aval du cylindre tournant a été menée au laboratoire de Mécanique des Fluides Théorique et Appliquée (LMFTA) à l'USTHB, par Nait Bouda (1996) [36,37] et Salhi (1998) [38]. Ces auteurs ont fourni des résultats précieux concernant non seulement le champ moyen et le champ turbulent mais aussi les spectres et les densités de probabilité des fluctuations de vitesse.

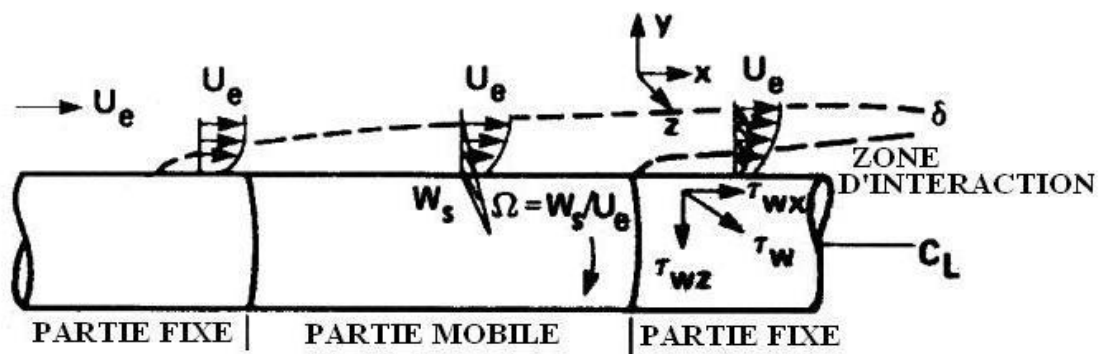


Figure 1.11 : La configuration utilisée par Driver et Hebbar, Nait Bouda et Salhi.

A travers une étude comparative entre le cas fixe et mobile du cylindre ils ont montré que l'effet du cisaillement transversal persiste dans la partie fixe en aval, mais s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la partie tournante. Lorsque la rotation est appliquée, ils ont remarqué que la vitesse longitudinale augmente dans la région interne de la couche limite (ce qui est équivalent à un effet de gradient de pression négatif, Furuya et al. (1978) [25]), par contre la vitesse transversale diminue rapidement. Cependant, l'augmentation des grandeurs turbulentes à savoir les tensions de Reynolds observée dans la partie tournant persiste aussi dans les premières sections de la paroi fixe en aval, mais dans une phase très avancée de la partie fixe en aval les grandeurs turbulentes classiques d'une couche limite sur plaque plane

sont retrouvées. Ceci révèle qu'à cette section ($X_F \approx 700$ mm selon les résultats de Nait Bouda) l'écoulement devient bidimensionnel. En outre, l'étude spectrale a montré un décalage spectral vers les hautes fréquences, qui est dû selon Nait Bouda et al. (2002) [36] à la destruction des grosses structures qui se traduit par une diminution de l'échelle intégrale et la micro échelle de Taylor (figure 1.12 et 1.13).

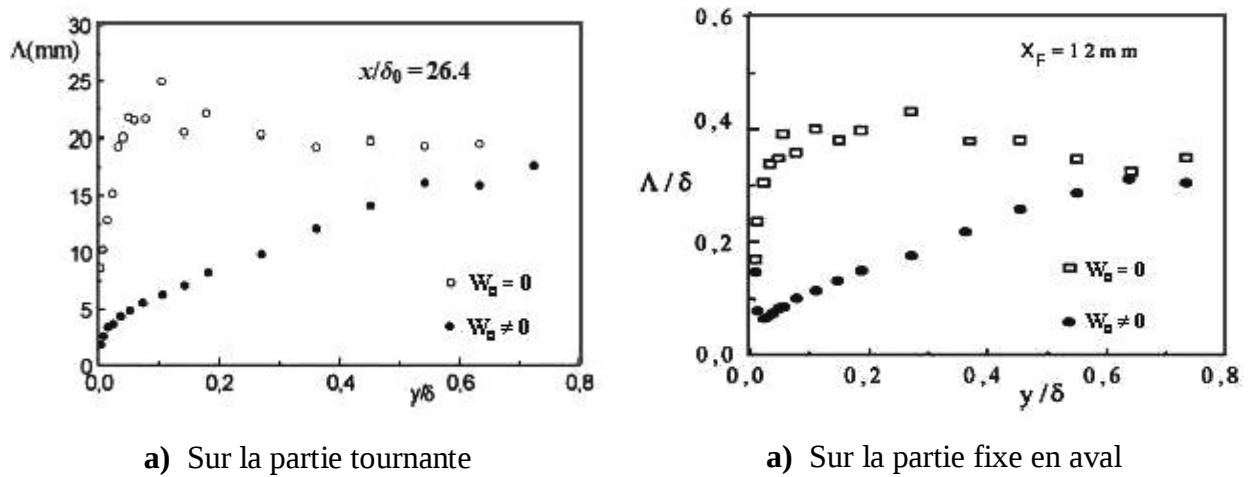


Figure 1.12 : Evolution de l'échelle intégrale (Nait Bouda et al. 2002 [36])

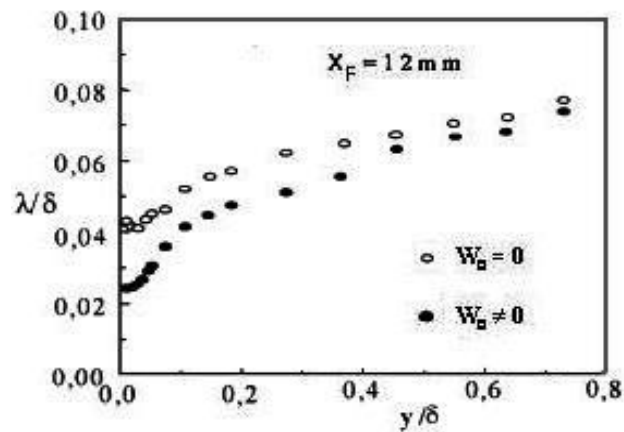


Figure 1.13 : Evolution de la micro échelle de Taylor
(Nait Bouda et al. 2002 [36])

1.4. Revue des prévisions numériques

1.4.1. Introduction

Une des techniques de modélisation de la turbulence la plus répandue consiste à exprimer les tensions de Reynolds en faisant intervenir la notion de viscosité tourbillonnaire, (EVM) proposée initialement par Boussinesq 1877. Pour les couches limites bidimensionnelles cette modélisation donne en général des résultats satisfaisants.

Parmi les modèles proposés dans la littérature on peut distinguer :

- § Le modèle à zéro équation.
- § Le modèle à une équation.
- § les modèles à deux équations, tels que le modèle énergie – dissipation « $k - \varepsilon$ » linéaire fondé initialement par Jones et Launder (1972) [39], le modèle « $k - \varepsilon$ » non linéaire (Speziale 1987 [40], Craft et al. 1996 [41], Lien et Leschziner 1994 [42]) et le modèle $k - w$ de Wilcox [43].
- § Le modèle algébrique des tensions de Reynolds ASM.
- § Le modèle de transport des tensions de Reynolds RSM.

La grande variété des modèles de turbulence qui existent a suscité plusieurs auteurs à mener des discussions à leur sujet. On peut citer les ouvrages de : Wilcox (2000) [43], Bradshaw et al. (1981) [44], Schiestel (1998) [45], Launder et Spalding (1976) [46], Chassaing (2000) [47].

Dans la suite on donne uniquement l'essentiel des différents modèles de turbulence appliqués aux calculs des couches limites bi et tridimensionnelles.

1.4.2. Modélisation des écoulements bidimensionnels

Les écoulements bidimensionnels en moyenne sur paroi plane fixe sont supposés essentiellement quasi parallèles, la seule tension de Reynolds significative est alors $\overline{uv}$ et le taux de déformation est réduit à $\frac{\partial U}{\partial y}$. En tenant compte du concept de viscosité tourbillonnaire proposé initialement par Boussinesq (1877) on a alors :

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.1)$$

ν_t : viscosité turbulente.

Par un raisonnement dimensionnel la viscosité turbulente est donnée par :

$$\nu_t : u_t l_t \quad (1.2)$$

Où u_t et l_t sont respectivement les échelles de vitesse et de longueur de la turbulence.

Dans les modèles à fort nombre de Reynolds, $u_t : k^{1/2}$, $l_t : (k^{3/2}/\varepsilon)$ (l'échelle de temps de la turbulence $T_t : k/\varepsilon$). La viscosité turbulente résultante est donnée par :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.3)$$

C_μ est une constante.

1.4.3. Modélisation des écoulements tridimensionnels

Dans les écoulements tridimensionnels, le vecteur vitesse $\vec{V}$ et son vecteur dérivé $\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}$ ne sont pas alignés en général. Par ailleurs, en ce qui concerne le champ turbulent, on

admet généralement (Tennekes et Lumley, 1974 [48]):

- Les structures turbulentes de grande échelle ont tendance à être orientées suivant l'axe principal du tenseur de déformation de manière à être plus aptes à extraire de l'énergie au mouvement moyen.
- Les structures turbulentes sont approximativement convectées dans la direction de la vitesse moyenne.

Les tensions de Reynolds $(\overline{uv}, \overline{vw}, 0)$ et les gradients de vitesse $\left(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial y}, 0 \right)$ ne sont pas alignés.

Pour le cas d'une couche limite tridimensionnelle les tensions de Reynolds $\overline{uv}$ et $\overline{vw}$ sont prédominantes. En introduisant le concept de viscosité turbulente anisotrope, le modèle de Boussinesq prend la forme suivante :

$$-\overline{uv} = \nu_{tx} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$-\overline{vw} = \nu_{tz} \frac{\partial W}{\partial y} \quad (1.5)$$

L'expérience de Driver et Hebbbar (1987) [34] montre que la viscosité turbulente suivant x (ν_{tx}) et celle suivant z (ν_{tz}) ont la même allure sur la partie tournante (figure 1.13-a), on

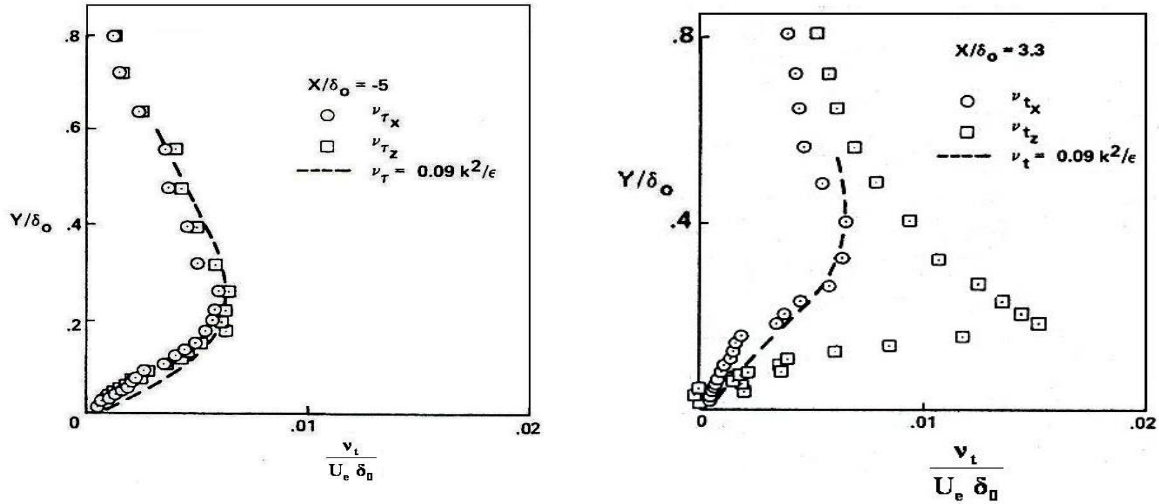
remarque aussi que la viscosité turbulente isotrope introduite dans le modèle ($k - \varepsilon$) reproduit exactement les point expérimentaux. En conséquence, on obtient :

$$\nu_{tx} = \nu_{tz} = \nu_t \quad (1.6)$$

Par contre dans la partie fixe aval la viscosité turbulente n'est pas isotrope (figure 1.13-b).

Donc :

$$\nu_{tx} \neq \nu_{tz} \quad (1.7)$$



a) sur la partie tournante.

b) sur la partie fixe en aval.

Figure 1.13 : Variations de la viscosité turbulente ν_{tx} et ν_{tz} (Driver et Hebbbar (1987) [34])

Bissonnette et Mellor (1974) [26], ont étudié également, l'anisotropie, en traçant le rapport $\frac{\nu_{tz}}{\nu_{tx}}$, ils ont montré que la moyenne de ce dernier est de l'ordre de 0.7, et que la viscosité tourbillonnaire n'est pas une propriété scalaire du champ turbulent.

Après cette introduction sur les différentes techniques de la modélisation de la couche limite turbulente bi et tridimensionnelle, nous ferons maintenant une synthèse des différents travaux numériques concernant une couche limite turbulente soumise à un cisaillement transversal et sa relaxation sur une partie fixe en aval.

Cham et Head (1970) [49] ont été les premiers à faire des prédictions numériques sur la configuration d'un écoulement autour d'un cylindre en rotation dès le bord d'attaque, en utilisant des méthodes intégrales. Les calculs ont été entrepris pour trois valeurs du rapport

W_o/U_e (= 2, 3 et 4). Les prédictions numériques obtenues ont été comparées aux résultats expérimentaux de Parr (1962) (cf. Cham et Head (1970) [49]).

La simulation numérique de ce type d'écoulement a suscité l'intérêt de l'équipe de NASA Ames Research Center ; particulièrement Higuchi et Rubesin en 1981 [50], 1979 [51], 1978 [52] et utilisant quatre modèles de fermeture ;

- Le premier est un modèle de longueur de mélange.
- Le deuxième est une extension directe du modèle « $k - w$ » à faible nombres de Reynolds proposé par Wilcox [43].
- Les deux derniers sont des modèles de transport des tensions de Reynolds (RSM) dans leurs versions à faibles nombres de Reynolds.

Les calculs ont été confrontés aux résultats expérimentaux de Bissonnette et Lohmann. La comparaison entre le calcul et l'expérience montre que l'accord est satisfaisant pour le champ moyen de la vitesse longitudinale et transversale, mais pour le champ turbulent, les écarts sont significatifs.

Spitz (1980) [53], a adapté pour la même configuration un schéma de longueur de mélange modifié, introduisant quatre cas :

- Le premier correspond à l'hypothèse de la viscosité turbulente isotrope (extension directe du cas bidimensionnel).
- Le second cas est le même que le précédent mais prend en compte les effets de courbure sur l'expression de la longueur de mélange.
- Dans le troisième cas, il a considéré deux coefficients de viscosité turbulente différents, pour traduire le non alignement des directions principales du tenseur des tensions de Reynolds et celle du tenseur de déformation.
- Le quatrième cas, c'est le cas précédent avec une correction de courbure.

Les résultats obtenus pour les différents cas, montrent que, les écarts sont très importants aussi bien pour le champ moyen que pour le champ turbulent.

Cousteix et al. (1983) [54] à l'ONERA ont mené des calculs basés sur un modèle à deux équations de type énergie – dissipation ($k - \varepsilon$) à faible nombre de Reynolds afin de tenir compte des effets de paroi, ils ont introduit une hypothèse d'anisotropie de la viscosité turbulente. Les prévisions numériques obtenues ont été comparées aux résultats expérimentaux du groupe de l'IRPHE (Arzoumanian et al. (1979) [55]). Les différentes

comparaisons entre le calcul et l'expérience montrent que dans l'ensemble les résultats sont satisfaisants.

Hanjalić et al. (1994) [56] ont étudié simultanément l'effet d'un cisaillement transversal et l'effet d'un gradient de pression, en utilisant une version améliorée d'un modèle de transport des tensions de Reynolds. Les résultats obtenus sont dans l'ensemble satisfaisants vu la complexité du modèle employé. Néanmoins, certains écarts sont remarqués pour la vitesse moyenne longitudinale U et les tensions de Reynolds. Ces auteurs ont signalé que la configuration plane a été étudiée expérimentalement en 1992 par une équipe de l'université d'Erlangen (Allemagne), mais les résultats obtenus et la technique de déplacement de la paroi transversalement n'ont pas été publiés.

Récemment Hämäläinen (2001) [57], a examiné la performance d'un modèle algébrique explicite des tensions de Reynolds EARSM (Explicit Algebraic Reynolds Stress Model), pour quatre configurations dont l'une concerne l'écoulement autour d'un cylindre en rotation. La comparaison entre les prévisions numériques et l'expérience de Bissonnette et Mellor révèle que le modèle développé donne de bons résultats pour le champ moyen, mais pour le champ turbulent l'écart est parfois très important. Il semblerait selon cet auteur que le modèle EARSM ne tient pas directement compte de la contrainte tangentielle soudaine.

1.5. Modélisation près de la paroi

La région de proche paroi a deux caractéristiques principales qui la distinguent de la région centrale de l'écoulement :

- Les gradients forts pour les propriétés de l'écoulement.
- Le nombre de Reynolds turbulent (R_T) est faible comparé aux effets visqueux prédominants.

Yang et Shih (1993) [58] ont remarqué qu'une singularité paraîtrait si le modèle $k-\varepsilon$ standard est appliqué jusqu'à la paroi à cause de l'énergie cinétique de la turbulence (k) qui disparaît à la paroi, en conséquence l'échelle de temps T_t ($=k/\varepsilon$) tend vers zéro. En effet k/ε ne peut pas représenter l'échelle de temps près de la paroi. Ces auteurs ont supposé que l'échelle de temps doit être l'échelle de temps de Kolmogorov parce que la dissipation visqueuse est prédominante près de la paroi. Donc, l'échelle du temps de la turbulence est

donnée par k/ε loin de la paroi et par l'échelle de temps de Kolmogorov près de la paroi selon la relation suivante :

$$T_t = \frac{k}{\varepsilon} + T_{Kol} \quad (1.8)$$

où

$$T_{Kol} = C_{Kol} \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (1.9)$$

T_{Kol} est une échelle de temps caractéristique de la turbulence de Kolmogorov.

C_{Kol} est une constante comprise entre 0.5 et 3.0 selon Yang et Shih [58].

En effet les modèles à fort nombre de Reynolds sont limités aux régions où cette hypothèse est effectivement vérifiée. Pour soulever cette difficulté, plusieurs approches peuvent ainsi être envisagées :

ü **Modèle à une équation (modèle de longueur de mélange).**

ü **Modèle à fort nombre de Reynolds raccordé par :**

§ **Un modèle à une équation :** on peut citer les travaux de Davidson (1993) [59]. Chen et Patel (1988) [60] ont fait une comparaison d'un modèle à faible nombre de Reynolds avec un modèle à fort nombre de Reynolds couplé d'un modèle à une équation.

§ **Les fonctions de paroi :** Parmi les auteurs qui ont utilisé un raccordement par la loi de paroi, on peut distinguer les travaux de Launder et Spalding (1974) [61], Van Den Berg (1975) [62], Yap 1987 [63], Bradshaw et Huang (1995) [64], Kadem (1999) [65], Bredberg (2000) [66], récemment en 2002 Gant [67] et Mataoui [68]. Saffman et Wilcox (1974) [69] ont pris en considération les modifications de la loi de paroi pour un fluide compressible.

§ **Un modèle à faible nombre de Reynolds.**

ü **Modèle k- ε à faible nombre de Reynolds :** Jones et Launder [39] furent les premiers en 1972 à introduire des modifications au modèle ($k - \varepsilon$) pour la prise en compte des effets visqueux. Ces auteurs ont introduit des modifications sur la formule de la viscosité turbulente (1.3) et sur les équations de l'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation.

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.10)$$

De nombreuses autres propositions suivirent, parmi lesquelles on peut citer Chien (1982) [70], Rodi et Scheuerer (1983) [71], Patel et al. (1985) [72], Chen et Patel (1988) [60], Launder et Shima (1989) [73], Mansour et al. (1989) [74], Nagano et Tagawa (1990) [75], So et al. (1991) [76], Yang et Shih (1993) [58].

CHAPITRE 2

FORMULATION MATHÉMATIQUE ET MODÉLISATION DE LA TURBULENCE

CHAPITRE 2

Formulation Mathématique et Modélisation de la Turbulence

2.1. Introduction

Nous avons décrit au premier chapitre les différentes approches pour la simulation numérique des écoulements turbulents. On a constaté que les méthodes DNS et LES sont les plus coûteuses, et nécessitent des moyens informatiques plus puissants. Pour ces raisons nous avons choisi l'approche de la modélisation statistique en un point (RANS). Cette approche est largement utilisée, surtout pour les recherches fondamentales et industrielles.

2.2. Géométrie choisie

Dumas et al. (1988) [77] ont suggéré que les effets de courbure ne sont pas importants lorsque le rayon du cylindre est suffisamment grand devant l'épaisseur de la couche limite ($R \gg \delta$). Afin de confirmer cette supposition nous avons adopté une configuration plane de mêmes dimensions que la maquette expérimentale étudiée par Nait Bouda (1996) [37]. La partie fixe amont a une longueur de 1499 mm, de sorte que la couche limite turbulente soit pleinement développée au début de la paroi mobile qui a 1000 mm de long. La longueur de la partie mobile a été choisie de sorte que la couche limite se restructure en une couche bidimensionnelle dans une phase bien avancée lorsqu'on se place dans repère relatif lié à la paroi mobile. Ce comportement n'a pas été mis en évidence par Bissonnette et Mellor (1974) [26] et Lohmann (1976) [27], pour des longueurs de la partie tournante de 762 mm et 457 mm respectivement. La partie fixe en aval a été prolongée pour atteindre une longueur de 1300 mm afin d'étudier la relaxation de la couche limite (figure 2.1).

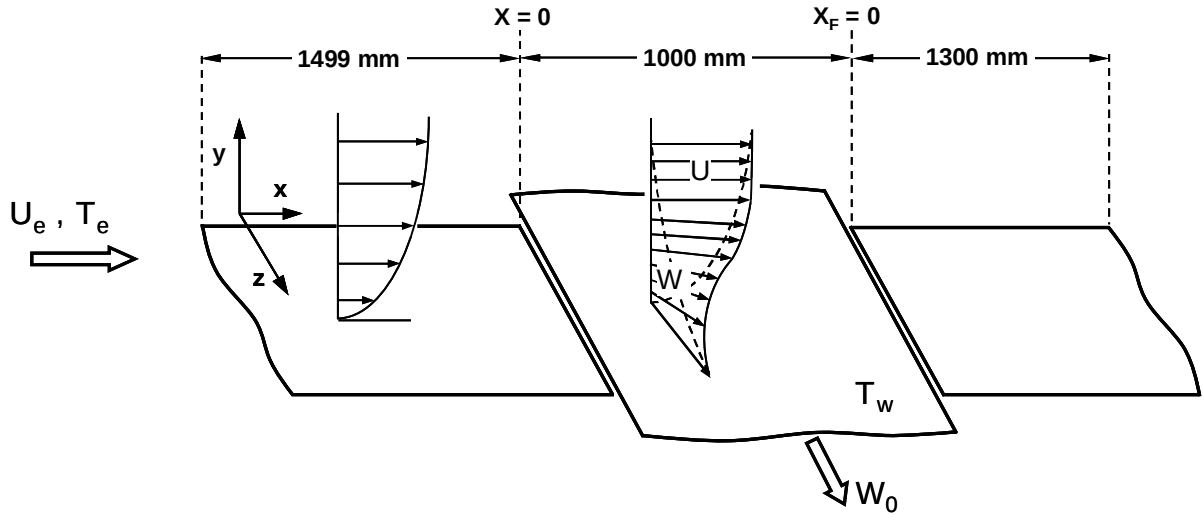


Figure 2.1 : configuration de l'écoulement étudié

2.3. Equations régissant le champ d'écoulement

Les équations mathématiques qui gouvernent le comportement de l'écoulement sont les équations de Navier – Stokes, de l'énergie et de la continuité. Les hypothèses de l'écoulement étudié sont :

- Le régime d'écoulement est stationnaire en moyenne.
- L'écoulement est quasi-bidimensionnel $\left(\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow 0 \right)$.
- Le fluide considéré est Newtonien.
- Le fluide est incompressible.
- Les propriétés thermophysiques du fluide tels que $(\lambda, \mu, C_p, \dots)$ sont supposées constantes.
- Les forces de volume sont négligeables.

Les équations simplifiées instantanées de Navier – Stokes et de continuité peuvent alors s'écrire:

$$\tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

L'équation de conservation d'énergie :

$$\tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) \quad (2.3)$$

où Pr est le nombre de Prandtl du fluide.

U_i , P , et T sont, respectivement, les composantes de la vitesse, la pression, et la température. Les variables surmontées du signe Tilde $\sim$ indiquent des valeurs instantanées.

La décomposition de Reynolds, 1895 (RANS) [78] de toutes les grandeurs physiques consiste à représenter chaque variable instantanée par la somme d'une valeur moyenne et d'une fluctuation.

$$\tilde{U}_i = U_i + u_i \quad ; \quad \tilde{P} = P + p \quad ; \quad \tilde{T} = T + \theta$$

En remplaçant les variables instantanées $\tilde{U}_i$, $\tilde{P}$ et $\tilde{T}$ par leurs décompositions respectives dans les équations (2.1), (2.2) et (2.3), et en effectuant la moyenne statistique de ces équations, on aboutit à :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (2.5)$$

$$U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \right) \quad (2.6)$$

La projection de ces équations (2.4), (2.5) et (2.6) dans les trois directions d'axes donne (Hanjalić et al. 1994 [56]) :

w L'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) = 0 \quad (2.7)$$

w L'équation de transport de la quantité de mouvement dans la direction principale de l'écoulement moyen :

$$\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial x} - \rho \overline{u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \overline{uv} \right) \quad (2.8)$$

w L'équation de transport de la quantité de mouvement dans la direction normale à l'écoulement moyen :

$$\rho \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x} - \rho \overline{uv} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial y} - \rho \overline{v^2} \right) \quad (2.9)$$

w L'équation de transport de la quantité de mouvement dans la direction transversale à l'écoulement moyen :

$$\rho \left(U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial W}{\partial x} - \rho \overline{uw} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial W}{\partial y} - \rho \overline{vw} \right) \quad (2.10)$$

w L'équation de conservation de l'énergie :

$$\rho \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \overline{u\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} - \rho \overline{v\theta} \right) \quad (2.11)$$

En tenant compte des hypothèses simplificatrices de la couche limite, les équations précédentes se réduisent (Johnston et Flak (1996) [4]) à :

w L'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V) = 0 \quad (2.12)$$

w Les équations de transport de la quantité de mouvement :

Suivant la direction x :

$$\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \overline{uv} \right) \quad (2.13)$$

Suivant la direction y :

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.14)$$

Suivant la direction z :

$$\rho \left(U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial W}{\partial y} - \rho \overline{vw} \right) \quad (2.15)$$

w L'équation de conservation de l'énergie :

$$\rho \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} - \rho \overline{v\theta} \right) \quad (2.16)$$

Les équations moyennées de la quantité de mouvement (2.13), (2.14), (2.15) et celle de l'énergie (2.16) font apparaître des termes de corrélations doubles des fluctuations $\rho \overline{uv}$, $\rho \overline{vw}$ (tensions de Reynolds) et $\rho \overline{v\theta}$. Ces corrélations proviennent de la non-linéarité des équations des bilans. Ces termes traduisent l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen. Le système d'équations ainsi obtenu est ouvert. Se pose alors le problème de la fermeture du système, c'est-à-dire du lien entre les corrélations doubles et le champ moyen.

2.4. Approches pour la fermeture du système d'équations

2.4.1. Introduction

Le problème de la modélisation de la turbulence apparaît lorsqu'on applique un traitement statistique aux équations de Navier – Stokes RANS. Les tensions de Reynolds doivent être spécifiées si l'on souhaite déterminer l'écoulement moyen. Il faut utiliser à cet effet un modèle de turbulence. L'objectif de la modélisation est d'établir des relations ou des équations permettant le calcul du tenseur de Reynolds à partir des caractéristiques de l'écoulement moyen. Ces relations permettent de fermer le système.

Il existe une grande variété de modèles de turbulence, qui sont classés suivant deux critères : par leur ordre (un ou deux en général) et par le nombre d'équations de fermeture supplémentaires (une ou deux selon la complexité du modèle de fermeture). Dans la présente étude, trois modèles ont été utilisés :

1. Le modèle de type énergie dissipation dit k-ε [39]. Malgré ses limitations d'applications a été très largement utilisé pour le calcul d'écoulements turbulents variés. En effet, ce modèle constitue un bon compromis entre précision des résultats et facilité de mise en œuvre numérique.

2. Le modèle Algébrique ASM (Algebraic Stress Model), qui utilise deux équations de transport et un ensemble de relations algébriques permettant de calculer les éléments du tenseur des tensions de Reynolds. La mise en œuvre numérique du ASM est plus complexe.
3. Le modèle complet au transport des tensions de Reynolds dit « RSM » (Reynolds Stress Model). Il est basé sur la résolution des équations d'évolutions de celles-ci.

2.4.2. Les équations de transport des tensions de Reynolds

Pour obtenir les équations de transport des tensions de Reynolds on utilise les équations des vitesses fluctuantes :

$$U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \right) \quad (2.17)$$

En effectuant la moyenne de la somme de l'équation pour u_i (eq. 2.17) multipliée par u_j et celle de u_j multipliée par u_i , on obtient les équations de transport des tensions de Reynolds, que l'on peut écrire de façon condensée (2.18) :

$$\begin{aligned} \underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{C_{ij}} &= \underbrace{-\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k}}_{P_{ij}} - \underbrace{\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{ij}} + \underbrace{\frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Phi_{ij}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{P u_j}}{\rho} \delta_{ik} + \frac{\overline{P u_i}}{\rho} \delta_{jk} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right]}_{D_{ij}} \\ &\quad - 2\nu \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Les termes de cette équation peuvent être regroupés sous la forme suivante :

$$C_{ij} - D_{ij} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (2.19)$$

où

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \quad (2.20)$$

est le terme de production résultant du travail des tensions de Reynolds soumises aux gradients de vitesse de l'écoulement moyen. Ce terme, ne fait intervenir que le gradient de vitesse moyenne et le tenseur de Reynolds qui sont les inconnues principales du problème. Donc il n'a pas besoin d'être modélisé.

$$\Phi_{ij} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.21)$$

est le terme de redistribution de l'énergie suivant les diverses composantes du tenseur de Reynolds par l'effet des fluctuations de la pression.

$$D_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{\frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j)} \right] \quad (2.22)$$

ce terme regroupe : la diffusion turbulente (convection au niveau des agitations turbulentes), la diffusion moléculaire et la diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.

$$\varepsilon_{ij} = 2 \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \quad (2.23)$$

est le terme de dissipation due à la viscosité du fluide.

L'équation (2.18) ne résout pas le problème de fermeture puisqu'elle fait apparaître d'autres corrélations d'ordre supérieur. Seuls les termes de dérivée particulaire et de production sont déjà exprimés en fonction des inconnues des équations (2.5).

Afin d'obtenir les autres termes, on pourrait faire appel aux équations de transport régissant leur loi d'évolution. Ces équations, de même que celles pour les tensions de Reynolds, sont obtenues à partir des équations de Navier – Stokes. Toutefois, elles ne résolvent pas le problème de fermeture car, à leur tour, elles font apparaître des corrélations d'ordre supérieur qui sont des nouvelles inconnues. De ce fait, on obtient une chaîne d'équations toujours ouvertes contenant de plus en plus d'inconnues par rapport au nombre d'équations.

La fermeture au second ordre se limite à l'emploi d'équations pour les corrélations d'ordre deux et cherche à représenter les corrélations inconnues de ces équations.

2.4.2.1. Modélisation du terme de dissipation ε_{ij}

Ce terme est essentiellement lié au mouvement fluctuant des plus petites échelles correspondant aux structures dissipatives. On peut considérer qu'à cette échelle les phénomènes sont isotropes. On pose alors :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (2.24)$$

où ε représente le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence. ε est une inconnue qu'on peut déduire à partir de son équation de transport ou à partir d'une échelle de longueur l_t caractéristique des structures turbulentes. En fait, les hypothèses de cascade d'énergie et d'équilibre spectral conduisent à poser le problème du temps nécessaire pour dissiper une quantité d'énergie k équivalent au temps caractéristique des grosses structures. Ce temps est de l'ordre de $\frac{u_t}{l_t}$ (u_t est une vitesse caractéristique de la turbulence $u_t \sim k^{1/2}$). On aboutit alors à la relation suivante :

$$\varepsilon = C \frac{k^{3/2}}{l_t} \quad (2.25)$$

2.4.2.2. Modélisation de la diffusion D_{ij}

Ce terme contient trois types de diffusion :

- La première est une somme de corrélations triples de vitesses fluctuantes qui peut être assimilé à une diffusion turbulente.
- La seconde est due aux fluctuations de pression.
- La dernière représente la diffusion moléculaire qui peut être négligée aux grands nombres de Reynolds qui n'a pas besoin d'être modélisée.

Les formulations proposées par les études antérieures des corrélations triples résultent généralement de l'étude de leur équation de transport.

La forme proposée par Hanjalić et Launder [79-80] :

$$-\overline{u_i u_j u_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad (2.26)$$

Cette expression a été déduite de l'équation de transport aux corrélations triples simplifiée. La constante C_s est fixée par référence aux données expérimentales sur divers écoulements turbulents (couche limite, Jet, ...). $C_s = 0.11$ (Launder et al. 1975 [80]).

La forme proposée par Daly et Harlow (1970) [81] est fréquemment préférée :

$$-\overline{u_i u_j u_k} = C'_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \quad (2.27)$$

C'_s est une constante de valeur différente de celle pour C_s ($C'_s = 0.25$) [81].

A cause du manque de données expérimentales, la diffusion due aux fluctuations de pression est très peu connue. Même si quelques auteurs ont proposé des modèles pour ces corrélations, la plupart la néglige.

2.4.2.3. Modélisation du terme de corrélation pression – vitesse ϕ_j

Le terme de corrélation pression – vitesse joue un rôle fondamental et sa schématisation correcte est l'une des clés assurant une bonne représentation d'un écoulement turbulent.

En effet, la pression est reliée au champ de vitesse par l'équation de Poisson et résulte donc d'un ensemble d'informations contenues dans tout le volume entourant le point où elle est évaluée.

En considérant la divergence de l'équation de la vitesse fluctuante, on aboutit à l'équation pour la fluctuation de pression :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = -2 \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}}_{\text{terme rapide}} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j - \overline{u_i u_j})}_{\text{terme lent}} \quad (2.28)$$

La solution générale de cette équation (eq 2.28) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} &= \frac{1}{4\pi} \int \overline{\left(\frac{\partial^2 u_l u_m}{\partial x_l \partial x_m} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \frac{dVol}{r} \\
&\quad \phi_{ij,1} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \iiint \overline{\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \frac{dVol}{r} \\
&\quad \phi_{ij,2} \\
&+ \frac{1}{4\pi \rho} \iint \overline{\left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} dS \\
&\quad \phi_{ij,w} \\
&= \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,w}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$\phi_{ij,1}$: est la partie quadratique ou terme lent.

$\phi_{ij,2}$: représente la partie linéaire ou terme rapide.

$\phi_{ij,w}$: le terme de paroi.

où les termes avec et sans prime représentent les valeurs aux points A et B respectivement, r ($r = |x - y|$) est la distance entre ces derniers, $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée normale à la surface. Les trois termes composant la corrélation pression – vitesse sont modélisés séparément.

Le terme de corrélation pression – vitesse a été décomposé en trois termes (cf. Elena 1994, [20]). Le premier $\phi_{ij,1}$ ne fait intervenir que les fluctuations des vitesses. Il est seul présent dans le cas d'un écoulement homogène sans gradient de vitesse moyenne et sans rotation. Il est admis que $\phi_{ij,1}$ force l'écoulement, qui est supposé initialement anisotrope, à retourner vers un état isotrope. Le second terme $\phi_{ij,2}$ dépend directement de l'écoulement moyen par les dérivées de sa vitesse. Ce terme est prépondérant dans les premières phases de l'évolution d'un écoulement homogène initialement isotrope, soumis brutalement à l'influence d'un gradient de vitesse. Le dernier terme $\phi_{ij,w}$ n'intervient qu'en présence de paroi.

2.4.2.3.1. Modélisation du terme $\phi_{ij,1}$

Pour un écoulement homogène et anisotrope, sans gradient de vitesse moyenne, il reste uniquement le terme $\phi_{ij,1}$ dans l'expression (2.29). Ce terme a donc un rôle de redistribution de l'énergie de manière isotropique. En 1951, Rotta (cf. Launder et al. 1975 [80]) propose la formulation suivante (2.30) :

$$\phi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \quad (2.30)$$

où C_1 est une constante ($C_1 > 1$) qui exprime la rapidité du retour à l'isotropie et $\frac{k}{\varepsilon}$ le temps caractéristique du phénomène.

2.4.2.3.2. Modélisation du terme $\phi_{ij,2}$

Ce terme est modélisé pour un écoulement homogène pour lequel les gradients de vitesse moyenne sont spatialement constants, le terme $\phi_{ij,2}$ peut être mis sous la forme :

$$\phi_{ij,2} = a_{ij}^{mi} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \quad (2.31)$$

avec

$$a_{ij}^{mi} = -\frac{1}{2\pi} \int_{Vol} \frac{\partial^2 \overline{u_m u_i}}{\partial \xi_l \partial \xi_j} \frac{dVol}{r} \quad (2.32)$$

où les ξ sont les composantes cartésiennes du vecteur position $\vec{r}$.

En turbulence non homogène et lorsque les dérivées secondes de vitesse moyenne sont négligeables, cette décomposition reste une bonne approximation. Rotta (1951) a précisé que le tenseur du quatrième ordre a_{ij}^{mi} devait satisfaire trois conditions :

- conditions de symétrie : $a_{ij}^{mi} = a_{jl}^{mi} = a_{ij}^{im}$

- l'équation de continuité : $a_{ij}^{mi} = 0$

- La formule de Green : $a_{jj}^{mi} = 2 R_{mi}$

Cette dernière condition a_{ij}^{mi} peut être approchée par une fonction tensorielle des composantes du tenseur de Reynolds. Si l'on considère de plus que cette fonction est linéaire, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \phi_{ij,2} = & -\left(\frac{\gamma+8}{11}\right)\left[P_{ij} - \frac{1}{3}P\delta_{ij}\right] - \left(\frac{30\gamma-2}{55}\right)k\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \\ & - \left(\frac{8\gamma-2}{11}\right)\left(D_{ij} - \frac{1}{3}D_k\delta_{ij}\right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec

$$D_{ij} = -\rho \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \rho \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad (2.34)$$

Lauder et al. (1975) [80] font remarquer que le premier terme de l'équation (2.33) est dominant et représente la tendance de la production à l'isotropie. Ils introduisent alors la formulation simplifiée :

$$\phi_{ij,2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{1}{3}P\delta_{ij} \right) \quad (2.35)$$

Le coefficient C_2 est différent de γ , de manière à compenser les deux termes négligés. Malgré ces simplifications, Gibson et Younis (1982) (cf. Elena 1994 [20]) ont obtenu de meilleurs résultats avec la version simplifiée (2.33) pour les jets tourbillonnants en particulier.

- Lorsque l'on s'éloigne de la paroi, le terme $\phi_{ij,w}$ devient rapidement négligeable, mais son rôle est primordial au voisinage de cette dernière. Ce terme est associé aux fluctuations de pression qui ne sont pas nulles à la paroi. Il agit dans le sens opposé du terme $\phi_{ij,1}$. En effet, il redistribue l'énergie sur les composantes du tenseur de Reynolds tendant vers l'anisotropie. Daly et Harlow (1970) [81] ont proposé l'approximation suivante :

$$\phi_{ij,w} = C \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_l u_j} \vartheta_{il} + \overline{u_l u_i} \vartheta_{jl} - \frac{2}{3} \overline{u_l u_m} \vartheta_{lm} \delta_{ij} \right) \quad (2.36)$$

où ϑ_{il} est un tenseur traduisant les effets de paroi. Shir (1973) (cf. Launder et al. 1984 [82]) a remplacé ce tenseur par une fonction scalaire en faisant intervenir le vecteur normal à la paroi :

$$\vartheta_{lm} = n_l n_m f(l_t/y) \quad (2.37)$$

Gibson et Launder (1978) (cf. Launder et al. 1984 [82]) ont appliqué cette hypothèse et suggèrent :

$$\phi_{ij,w} = \phi_{ij,w1} + \phi_{ij,w2} \quad (2.38)$$

avec

$$\phi_{ij,w1} = C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_i n_k \right) f\left(\frac{l_t}{y}\right) \quad (2.39)$$

$$\phi_{ij,w2} = C_2' \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{kj,2} n_i n_k \right) f\left(\frac{l_t}{y}\right) \quad (2.40)$$

Dans ces expressions n représente la direction normale à la paroi. La fonction $f\left(\frac{l_t}{y}\right)$ est introduite pour réduire l'effet de la correction de la paroi avec la distance croissante de la paroi. D'après la relation (2.25) la longueur l_t caractéristique des tourbillons porteurs d'énergie est proportionnelle à $k^{3/2}/\varepsilon$ ($l_t \propto k^{3/2}/\varepsilon$).

$$f\left(\frac{l_t}{y}\right) = \frac{k^{3/2}}{C_w y \varepsilon} \quad (2.41)$$

La constante C_w est choisie pour que la fonction f prenne la valeur de l'unité près de la paroi où la turbulence est en équilibre local. Ce choix conduit à [83] :

$$C_w = \frac{\kappa}{C_\mu^{3/4}} \quad (2.42)$$

2.4.3. L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente

L'énergie cinétique de la turbulence est la demie somme des composantes normales des tensions de Reynolds (la trace du tenseur) :

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) \equiv \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (2.43)$$

En prenant la trace (mettre l'indice $i = j$) dans l'équation (2.18) pour $\frac{1}{2} \overline{u_i u_j}$ nous déduisons alors l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente

$$\underbrace{U_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{C_k} = - \underbrace{\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{P_k} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \overline{u_j \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u_i u_i \right)} \right\}}_{D_k} - \underbrace{\nu \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{D_k} - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\varepsilon} \quad (2.44)$$

Cette équation (2.44) peut se mettre sous la forme suivante :

$$C_k - D_k = P_k - \varepsilon \quad (2.45)$$

L'interprétation de ces termes est analogue à celle donnée pour l'équation de R_{ij} .

$P_k = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$: est la production d'énergie turbulente par action du mouvement moyen sur la turbulence.

$D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[- \left(\frac{\overline{u_j u_i u_i}}{2} \right) - \frac{\overline{p u_j}}{\rho} + \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$: La diffusion turbulente de k où les deux premiers termes représentent la diffusion turbulente due aux corrélations triples des fluctuations de vitesse et de pression, le dernier est la diffusion moléculaire.

Ce terme est modélisé de la même façon que le terme D_{ij} :

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + C_s \overline{u_j u_m} \frac{k}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_m} \right] \quad (2.46)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad \text{La dissipation visqueuse.}$$

Lorsqu'on remplace les équations (2.24) et (2.46) dans l'équation (2.44), on déduit l'équation modélisée de l'énergie cinétique turbulente :

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + C_s \overline{u_j u_m} \frac{k}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_m} \right] - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (2.47)$$

2.4.4. L'équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

L'équation pour $\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$ est déduite à partir de la moyenne de l'équation de u_i dérivée

par rapport à x_j qu'on multiplie par $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$:

$$\begin{aligned} U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & - 2 \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 2 \nu \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\nu u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} + \frac{2 \nu}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \\ & - 2 \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} - 2 \overline{\left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ou encore la forme condensée suivante :

$$C_\varepsilon - D_\varepsilon = P_\varepsilon + \Phi_\varepsilon \quad (2.49)$$

La modélisation de cette équation a été donnée par Hanjalić et Launder [84] :

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon \overline{u_i u_k}}{k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (2.50)$$

où C_ε , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ sont des constantes, dont les valeurs sont fixées à 0.18, 1.44, 1.92 respectivement.

2.5. Les modèles de turbulence examinés

Dans le cas d'une couche limite turbulente sur une plaque plane immobile, trois modèles de fermeture ont été testés qui sont utilisés extensivement dans un grand nombre d'applications. L'essentiel de ceux-ci est donné ci-après.

2.5.1. Modèle $k - \varepsilon$

Le modèle le plus couramment utilisé en raison de la facilité de sa mise en œuvre est le modèle de type énergie – dissipation ($k - \varepsilon$) proposé par Jones et Launder (1972) [39]. Ce modèle repose sur un schéma de type viscosité tourbillonnaire EVM (Eddy Viscosity Model), dans lequel les composantes du tenseur de Reynolds $-\rho \overline{u_i u_j}$ et du flux de chaleur $-\rho \overline{u_i \theta}$ sont reliées directement aux gradients moyens de la vitesse et de la température en faisant intervenir une viscosité turbulente ν_t (pour le champ dynamique) et une diffusivité turbulente Γ_t (pour le champ thermique). L'une et l'autre sont liées aux échelles caractéristiques de la turbulence, à savoir l'énergie cinétique et son taux de dissipation. Le flux de chaleur nécessite l'introduction d'une constante empirique : il s'agit du nombre de Prandtl de turbulence.

La formulation de Boussinesq donne :

- Pour le champ dynamique

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (2.51)$$

Les deux contraintes de cisaillement qui apparaissent dans les équations (2.13) et (2.15) sont exprimées en utilisant la relation (2.51) comme suit :

$$-\overline{uv} = \nu_{tx} \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{et} \quad -\overline{vw} = \nu_{tz} \frac{\partial W}{\partial y}$$

Plusieurs auteurs utilisant le concept de viscosité turbulente ont supposé que $\nu_{tx} = \nu_{tz} = \nu_t$. Nous retiendrons dans l'ensemble de notre étude cette approximation.

- Pour le champ thermique

$$-\overline{u_j \theta} = \Gamma_t \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.52)$$

La viscosité turbulente est donnée par la formule de Prandtl – Kolmogorov:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.53)$$

La diffusivité turbulente est supposée proportionnelle à la viscosité turbulente :

$$\Gamma_t = \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (2.54)$$

où :

ν_t : la viscosité turbulente.

Γ_t : la diffusivité turbulente.

Pr_t : est une constante empirique appelée nombre de Prandtl turbulent.

Les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente k et de sa dissipation ε sont alors mises sous la forme simplifiée suivante :

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (2.55)$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.56)$$

où C_μ , C_1 , C_2 , Pr_k , Pr_ε sont des constantes empiriques de modélisations (tableau 2.1).

C_μ	C_1	C_2	Pr_k	Pr_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Tableau 2.1 : Constantes de modélisation utilisées dans le modèle k - ε

2.5.2. Le modèle Algébrique aux tensions de Reynolds ASM (Algebraic Stress Model)

Souvent, pour obtenir une représentation du tenseur de Reynolds meilleure que par le modèle de viscosité turbulente, on cherche un compromis en simplifiant les équations de transport aux tensions de Reynolds. En effet, les gradients des tensions de Reynolds dans l'équation de celles-ci (2.8) sont remplacés par des modélisations appropriées. Launder (1982) [85] a proposé :

$$C_{ij} = C_k \left[(1 + \alpha) \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \alpha \right] \quad (2.57)$$

et

$$D_{ij} = D_k \left[(1 + \beta) \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \beta \right] \quad (2.58)$$

où α et β sont des constantes empiriques de valeurs 0.3 et -0.8 respectivement.

L'équation aux tensions de Reynolds (2.18) pourrait être alors modélisée (algébrique en $\overline{u_i u_j}$) de la manière suivante :

$$C_k \left[(1 + \alpha) \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \alpha \right] - D_k \left[(1 + \beta) \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \beta \right] = P_{ij} + \Phi_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (2.59)$$

Les équation de k et ε sont données par :

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_s \overline{u_i u_j} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (2.60)$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + C_{\varepsilon 3} \overline{u_i u_j} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (2.61)$$

La substitution des termes modélisés dans l'équation des tensions de Reynolds (2.8) conduit à l'équation (2.62) :

$$\begin{aligned}
C_k \left[(1+\alpha) \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \alpha \right] - D_k \left[(1+\beta) \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \beta \right] &= P_{ij} - C_1 \varepsilon \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \\
&\quad - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \\
&\quad + \Phi_{ij,w1} + \Phi_{ij,w2} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon
\end{aligned} \quad (2.62)$$

Après quelques simplifications algébriques et par application de l'équation (2.45), on déduit l'équation suivante :

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} = \frac{1-c_2}{c_1 + (\lambda-1)(1+\alpha) + (\alpha-\beta)\Lambda} \frac{1}{\varepsilon} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (2.63)$$

$$\text{où : } \quad \lambda = \frac{P}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{D_k}{\varepsilon}$$

En développant l'équation (2.63) pour un écoulement bidimensionnel, l'équation matricielle pour les tensions normales devient (Yap, 1987 [63]):

$$A \cdot S = B \quad (2.64)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} ; \quad S = \begin{bmatrix} \overline{u^2} \\ \overline{v^2} \\ \overline{w^2} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Les éléments de cette matrice sont donnés dans le tableau (2.3).

Une expression explicite de $\overline{uv}$ en termes des tensions normales peut aussi être déduite à partir de l'équation (2.63)

$$\begin{aligned}
\overline{uv} \left[\frac{r_{4,uv}}{r_2} \frac{\varepsilon}{k} + (1,5 + 2,25 r_3 f_x + 2,25 r_3 f_y) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - (1,5 + 2,25 r_5 + 2,25 r_6) j \frac{V}{r} \right] \\
= (1,5 + 2,25 r_3 f_x + 2,25 r_3 f_y) \left(\overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \right)
\end{aligned} \quad (2.65)$$

où $r_{4,\overline{uv}} = r_1 + 1,5 r_7 + 1,5 r_8$

Les constantes empiriques du modèle ASM sont données dans le tableau (2.2)

C_1	C_2	C_1'	C_2'	C_s	C_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$
1,8	0.6	0.5	0.3	0.22	0.17	1.44	1.92	2.0

Tableau 2.2 : Les constantes de modélisation utilisées dans le modèle ASM

Les coefficients de la matrice A et B sont présentés dans le tableau (2.3).

i	1	2	3
a_{i1}	$\frac{r_{4,\overline{u^2}}}{r_2} \frac{\varepsilon}{k} + (2 + 4 r_5 + r_6) \frac{\partial U}{\partial x}$	$-(1 + 2 r_5 + 2 r_6) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{r_8}{r_2} \frac{\varepsilon}{k}$	$(1 + 2 r_5 - r_6) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{r_8}{r_2} \frac{\varepsilon}{k}$
a_{i2}	$-(1 + 2 r_5 + 2 r_6) \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{r_7}{r_2} \frac{\varepsilon}{k}$	$\frac{r_{4,\overline{v^2}}}{r_2} \frac{\varepsilon}{k} + (2 + r_5 + 4 r_6) \frac{\partial V}{\partial y}$	$(1 - r_5 + 2 r_6) \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{r_7}{r_2} \frac{\varepsilon}{k}$
a_{i3}	$-(1 + 2 r_5 - r_6) \frac{V}{r} \cdot j$	$-(1 - r_5 + 2 r_6) \frac{V}{r} \cdot j$	$-\frac{r_1}{r_2} \frac{\varepsilon}{k} - (2 + r_5 + r_6) \frac{V}{r} \cdot j$
b_i	$-(2 + 4 r_5 + r_6) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + (1 + 2 r_5 + 2 r_6) \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{r_1}{r_2} \varepsilon$	$(1 + 2 r_5 + 2 r_6) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - (2 + r_5 + 4 r_6) \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{r_1}{r_2} \varepsilon$	$-(1 + 2 r_5 - r_6) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - (1 - r_5 + 2 r_6) \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{r_1}{r_2} \varepsilon$

Tableau 2.3 : Les coefficients de la matrice A et B.

avec : $r_1 = C_1 + (\lambda - 1)(1 + \alpha) + (\alpha - \beta) \Lambda$, $r_2 = \frac{2}{3}(1 - C_2)$, $r_3 = \frac{C_2 C_2'}{1 - C_2}$,

$r_{4,\overline{u^2}} = r_1 + 2 r_8$, $r_{4,\overline{v^2}} = r_1 + 2 r_7$, $r_5 = r_3 f_x$, $r_6 = r_3 f_y$, $r_7 = C_1' f_y$, $r_8 = C_1' f_x$

$$f_x = \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon x}, \quad f_y = \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y}$$

2.5.3. Le modèle de transport des tensions de Reynolds RSM (Reynolds Stress Model)

Ce modèle est basé sur la résolution des équations de transport des tensions de Reynolds. La substitution des différents termes modélisés dans l'équation (2.18), conduit à l'équation de transport des tensions de Reynolds modélisée (Hanjalić et Launder 1972 [84], Leschziner 1990 [86]):

$$\begin{aligned} U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \\ & - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \\ & + C_1' \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_i u_k} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_j u_k} n_k n_i \right] f \left(\frac{l}{y} \right) \\ & + C_2' \left[\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_k n_i \right] f \left(\frac{l}{y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + C_s \overline{u_k u_m} \frac{k}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \right] + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.66)$$

L'équation de $\overline{u^2}$:

$$U \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{11} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right) - 2 \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - 2 \overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} - \omega \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u^2} - \frac{2}{3} k \right) - \varepsilon \frac{\overline{u^2}}{k} \quad (2.67)$$

L'équation de $\overline{v^2}$:

$$U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{22} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right) + 2 \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial x} - \omega \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{v^2} - \frac{2}{3} k \right) - \varepsilon \frac{\overline{v^2}}{k} \quad (2.68)$$

L'équation de $\overline{w^2}$:

$$U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{33} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} \right) - \omega \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{w^2} - \frac{2}{3} k \right) - \varepsilon \frac{\overline{w^2}}{k} \quad (2.69)$$

L'équation de $\overline{uv}$:

$$U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{12} \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right) - \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} - \omega \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} - \varepsilon \frac{\overline{uv}}{k} \quad (2.70)$$

L'équation de l'énergie cinétique turbulente k :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - (\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{\partial U}{\partial x} - \varepsilon \quad (2.71)$$

L'équation du taux de dissipation ε :

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + 2 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{\partial U}{\partial x} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.72)$$

Daly et Harlow [81] utilisent la fonction suivante pour ω :

$$\omega = \omega_0 - 2 \omega_1 \frac{\overline{u_k u_l}}{\varepsilon} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \quad (2.73)$$

où ω_0 et ω_1 sont des constantes de valeurs 0.5 chacune.

α_{ij} sont des constantes de l'ordre de l'unité ($\alpha_{ij} \approx 1.0$).

2.6. Modélisation près de la paroi

2.6.1. Introduction

Le traitement de proche paroi est l'une des grandes difficultés rencontrées dans la modélisation de la turbulence en couche limite bi et tridimensionnelle. En effet, les modèles de turbulence décrits précédemment ne sont valables que loin de la paroi. Si en couche limite bidimensionnelle (2DTBL) plusieurs techniques sont considérées (modèles à faibles nombres de Reynolds, loi de paroi). En couche limite tridimensionnelle (3DTBL) aucune technique n'est retrouvée dans la littérature. En effet, tous les modèles utilisés sont des extensions directes de leur version à faible nombre de Reynolds employés en bidimensionnelle.

2.6.2. La loi de paroi pour la vitesse longitudinale

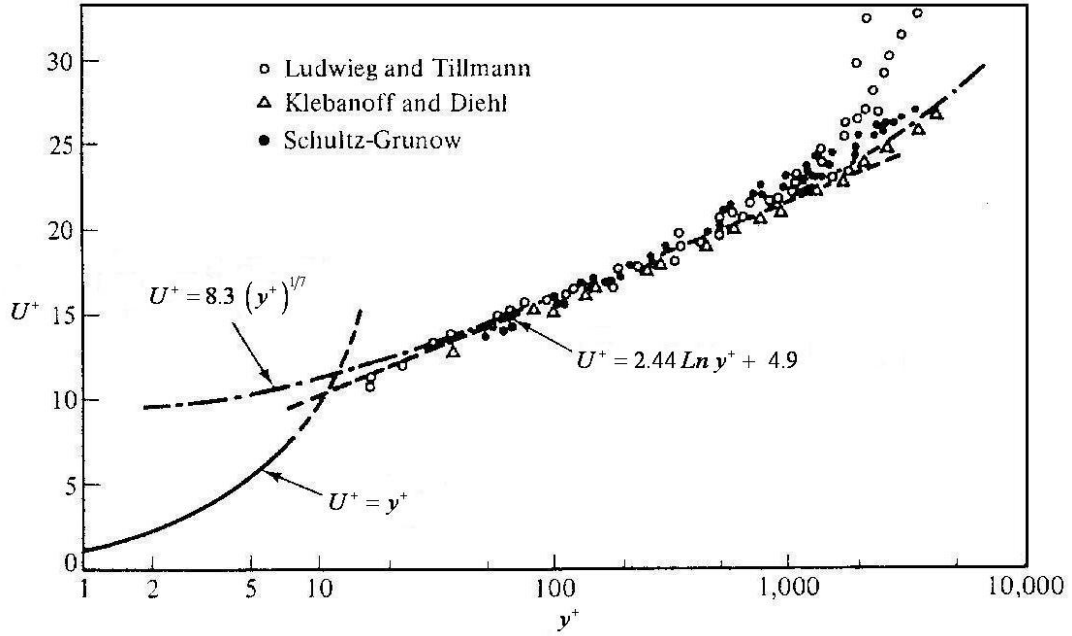


Figure 2.2 : La distribution de la vitesse moyenne longitudinale près de la paroi (cf. Hinze, 1975 [87]).

On choisit les variables de la paroi U_p^+ et y_p^+ définies par :

$$U_p^+ = \frac{U_p}{U_\tau} \quad ; \quad y_p^+ = \frac{U_\tau y_p}{\nu}$$

Où U_τ est la composante longitudinale de la vitesse de frottement :

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{Px}}{\rho}} \quad (2.74)$$

Aux grands nombres de Reynolds, l'équilibre local est satisfait, la production étant égale à la dissipation, en utilisant l'équation (2.53), on peut écrire :

$$-\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{C_\mu k^2}{\nu_t} \quad (2.75)$$

En utilisant cette relation (2.75), la composante longitudinale de la vitesse de frottement peut être exprimée alors comme suit:

$$U_\tau = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \quad (2.76)$$

Nous retiendrons dans la présente étude le formalisme mise en œuvre par Launder et Spalding (1974) [61] :

$$U_p^+ = \begin{cases} y_p^+ & \text{Si } y_p^+ \leq 11.63 \\ \frac{1}{\kappa} \ln(E y_p^+) & \text{Si } y_p^+ > 11.63 \end{cases} \quad (2.77)$$

κ : Constante de Von Kármán. Elle a été déterminée expérimentalement pour divers types d'écoulements, sa valeur est généralement comprise entre 0.40 et 0.42.

E : est une constante ($E = 9.0$).

Le frottement longitudinal à la paroi est donné par :

$$\tau_{px} = \frac{\rho U_p U_\tau}{U_p^+} \quad (2.78)$$

Remplaçons U_τ par leur expression (2.76) dans l'équation (2.78), on aboutit à :

$$\tau_{px} = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} U_p}{U_p^+} \quad (2.79)$$

La force de frottement est définie par :

$$F_{px} = - \tau_{px} A \quad (2.80)$$

Substituant les équations (2.77) et (2.79) dans l'équation (2.80) on trouve :

$$F_{px} = \begin{cases} -\mu \frac{U_p}{y_p} A & \text{Si } y_p^+ \leq 11.63 \\ -\frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} U_p}{\ln(E y_p^+)} A & \text{Si } y_p^+ > 11.63 \end{cases} \quad (2.81)$$

2.6.3. La loi de paroi pour la vitesse transversale

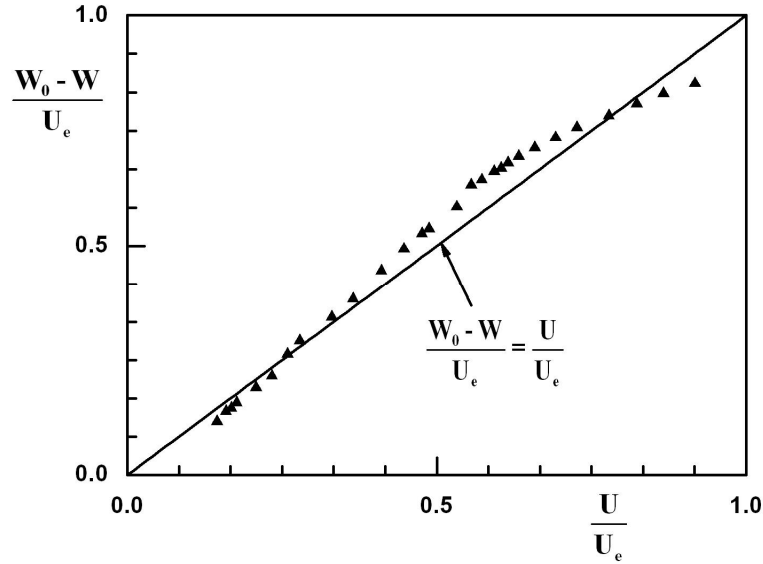


Figure 2.3 : La distribution du profil polaire près de la paroi.

(cf. Arzoumanian et al. 1979 [55])

La partie originale de notre travail consiste à la mise en œuvre d'une loi de paroi pour calculer la composante transversale du vecteur vitesse dans la zone de très proche paroi.

Dans le cas d'une couche limite turbulente sous l'effet d'un cisaillement transversal, plusieurs auteurs ont mis en évidence expérimentalement l'existence d'une loi logarithmique pour la composante transversale du vecteur vitesse. On peut citer ; Arslanian (1972) [28], Lohmann (1976) [27], Furuya et al. (1978) [25], Nakamura et al. (1981) [88], Pierce et al. (1983) [13-89]. Certains autres comme Furuya et al. (1966) [23], Nakamura et Yamashita (1982) [24], Cousteix et al. (1983) [54] ont montré qu'il existe une relation entre les composantes longitudinale et transversale du vecteur vitesse.

Nous retiendrons ici la relation donnée par Arzoumanian et al. (1979) [55], Cousteix et al. (1983) [54], qui relie la vitesse longitudinale à la vitesse transversale près de la paroi (figure 2.3) :

$$\frac{W_0 - W}{U_e} = \frac{U}{U_e} \quad (2.82)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.82) par $\frac{U_e}{U_\tau}$, on trouve :

$$\frac{W_0 - W}{U_\tau} = \frac{U}{U_\tau} \quad (2.83)$$

Si on suppose que : $W_\tau \approx U_\tau$

où W_τ est la composante transversale de la vitesse de frottement définie par :

$$W_\tau = \sqrt{-\frac{\tau_{Pz}}{\rho}} \quad (2.84)$$

L'équation (2.83) peut s'écrire alors comme suit :

$$\frac{W_0 - W}{W_\tau} = \frac{U}{U_\tau} \quad (2.85)$$

Cette équation se réduit en utilisant les variables de la paroi U_p^+ et W_p^+ à :

$$W_p^+ = U_p^+ \quad (2.86)$$

où
$$W_p^+ = \frac{W_0 - W_p}{W_\tau}$$

Par substitution de l'équation (2.77) dans l'équation (2.86), on aboutit à :

$$W_p^+ = \begin{cases} y_p^+ & \text{Si } y_p^+ \leq 11.63 \\ \frac{1}{\kappa} \ln(E y_p^+) & \text{Si } y_p^+ > 11.63 \end{cases} \quad (2.87)$$

Le frottement transversal à la paroi est donné aussi par :

$$\tau_{Pz} = -\frac{\rho (W_0 - W_p) W_\tau}{W_p^+} \quad (2.88)$$

De la même manière que pour U_τ on peut montrer que :

$$W_\tau = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \quad (2.89)$$

Remplaçons W_τ par son expression (2.89) dans l'équation (2.88), on aboutit à :

$$\tau_{Pz} = - \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} (W_0 - W_P)}{W_P^+} \quad (2.90)$$

La force de frottement est définie aussi par :

$$F_{Pz} = - \tau_{Pz} A \quad (2.91)$$

Remplaçant les équations (2.87) et (2.90) dans l'équation (2.91) on obtient :

$$F_{Pz} = \begin{cases} \mu \frac{(W_0 - W_P)}{y_P} A & \text{Si } y_P^+ \leq 11.63 \\ \frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} (W_0 - W_P)}{\ln(E y_P^+)} A & \text{Si } y_P^+ > 11.63 \end{cases} \quad (2.92)$$

2.6.4. La loi de paroi pour la Température

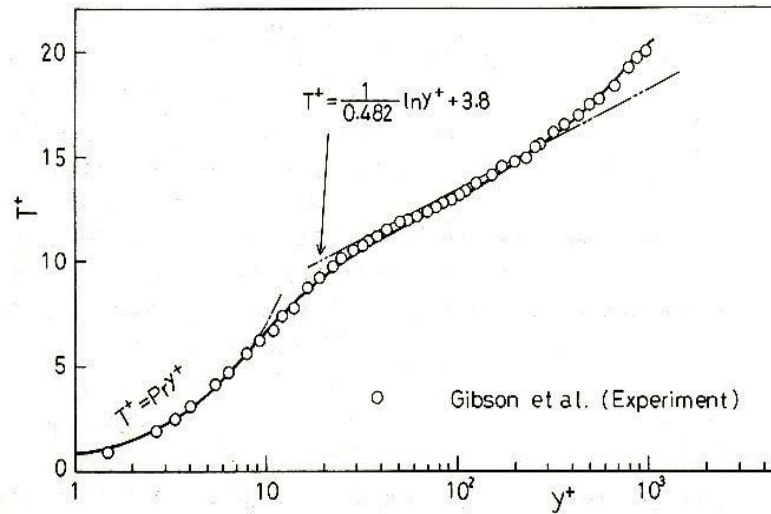


Figure 3.4 : La distribution de la Température moyenne près de la paroi (cf. Nagano et Kim 1988 [90]).

On définit la variable de la paroi pour la température par :

$$T_P^+ = \frac{(T_w - T_P)}{T_\tau} \quad ; \quad T_\tau = \frac{q_w}{\rho C_P U_\tau}$$

T_τ : la température de frottement.

Dans la sous couche visqueuse ($y_p^+ \leq 11.63$), la relation entre T^+ et y^+ est donnée par la loi de la conduction de la chaleur de Fourier :

$$q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.93)$$

L'intégration de cette dernière équation (2.93) donne :

$$T_p^+ = \text{Pr } y_p^+ \quad (2.94)$$

où Pr est le nombre de Prandtl moléculaire $\left(\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$.

Dans la région logarithmique ($y_p^+ > 11.63$):

$$T_p^+ = \frac{1}{\kappa_h} \ln(y_p^+) + c_h \quad (2.95)$$

où les constantes sont données par:

$$\kappa_h = \frac{\kappa}{\text{Pr}_t} \quad ; \quad c_h = \frac{1}{\kappa_h} \ln(E) + \mathbf{P} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right)$$

Nous retiendrons pour la fonction $\mathbf{P}$, la forme proposée par Jayatilke (cf. Schiestel 1998 [45]):

$$\mathbf{P} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right) = 9,24 \left[\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right)^{3/4} - 1 \right] \left\{ 1 + 0,28 \exp \left[-0,007 \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right) \right] \right\} \quad (2.96)$$

Le flux de chaleur est donné par :

$$q_w = \frac{\rho C_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} (T_w - T_p)}{T_p^+} \quad (2.97)$$

où

$$T_p^+ = \begin{cases} \text{Pr } y_p^+ & \text{Si } y_p^+ \leq 11,63 \\ \text{Pr}_t (U_p^+ + \mathbf{P}) & \text{Si } y_p^+ > 11,63 \end{cases} \quad (2.98)$$

2.6.5. Energie cinétique de la turbulence à la paroi

Près de la paroi l'énergie cinétique turbulente k_p , est obtenue par la résolution directe de leur équation de transport en tenant compte des modifications suivantes:

- ♦ La diffusion de k à la paroi est supposée nulle ($D_k = 0$).
- ♦ Le terme de la production P_k est modifié pour tenir compte de la contrainte de cisaillement :

$$P_k = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.99)$$

En couche limite turbulente tridimensionnelle seules les contraintes $\overline{uv}$ et $\overline{vw}$ sont prédominantes, donc P_k se réduit à :

$$P_k = - \left(\rho \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \rho \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \quad (2.100)$$

Les contraintes de cisaillement $\overline{uv}$ et $\overline{vw}$ sont exprimées en utilisant la notion de la viscosité turbulente comme suit :

$$-\rho \overline{uv} = \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad ; \quad -\rho \overline{vw} = \mu_t \frac{\partial W}{\partial y} \quad (2.101)$$

En remplaçant $\overline{uv}$ et $\overline{vw}$ par leurs expressions (2.101) dans l'équation (2.100), on obtient :

$$P_k = \mu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.102)$$

On suppose que :

$$\tau_{Px} = -\rho \overline{uv} = \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad ; \quad \tau_{Pz} = -\rho \overline{vw} = \mu_t \frac{\partial W}{\partial y} \quad (2.103)$$

L'intégration de l'équation (2.100) entre la paroi ($y = 0$) et le premier point de discrétisation ($y = y_p$) de celle-ci, donne :

$$\overline{P_k} = \iiint_V \left(\tau_{Px} \frac{\partial U}{\partial y} + \tau_{Pz} \frac{\partial W}{\partial y} \right) dV = \left(\tau_{Px} \frac{U_p}{y_p} + \tau_{Pz} \frac{W_p - W_0}{y_p} \right) \cdot Vol \quad (2.104)$$

- ♦ Le terme de dissipation ε est aussi modifié pour tenir compte de la contrainte de cisaillement :

Le frottement total τ_p est donné par :

$$\tau_p = \sqrt{\tau_{Px}^2 + \tau_{Pz}^2} \quad (2.105)$$

Par substitution des expressions de τ_{Px} et τ_{Pz} (2.103) dans la formule (2.105), on trouve :

$$\tau_p = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.106)$$

D'où le taux de dissipation ε :

$$\varepsilon = \rho C_\mu \frac{k^2}{\tau_p} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.107)$$

L'intégration de cette dernière équation (2.107) donne :

$$-\rho \overline{\varepsilon} = -\rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\tau_p y_p} \left[U_p^2 + (W_p - W_0)^2 \right]^{1/2} \cdot Vol \quad (2.108)$$

2.6.6. Dissipation à la paroi

Le taux de dissipation près de la paroi, ε_p , est imposé sans résoudre l'équation de ε . Ce choix est basé sur l'observation que l'échelle de longueur liée à k et ε ($l_t = k^{3/2}/\varepsilon$) varie linéairement avec y près de la paroi :

$$l_m = C_\mu^{3/4} \frac{k_p^{3/2}}{\varepsilon_p} = \kappa y_p \quad (2.109)$$

D'où le taux de dissipation au nœud de proche paroi :

$$\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y_p} \quad (2.110)$$

2.7. Conclusion

Dans cette étude nous avons adopté une extension directe du modèle type énergie – dissipation ($k - \varepsilon$) à fort nombre de Reynolds en supposant une viscosité turbulente isotrope. Dans la zone de proche paroi une loi logarithmique a été mise en oeuvre pour le calcul de la vitesse transversale sans considérer les effets de viscosité prédominants. Néanmoins, la loi universelle proposée dans la littérature pour le cas bidimensionnel a été utilisée pour calculer la vitesse longitudinale.

CHAPITRE 3

METHODES NUMERIQUES

CHAPITRE 3

Méthodes Numériques

3.1. Introduction

Les équations décrites au deuxième chapitre sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. En raison de leur complexité, ces équations sont résolues à l'aide d'une méthode numérique. Plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature. On peut distinguer les méthodes suivantes :

- Méthode des différences finis.
- Méthode des volumes finis.
- Méthode des éléments finis.
- Méthodes spectrales.

Dans notre étude nous avons choisi la méthode des volumes finis. Ce choix est justifié par plusieurs raisons :

1. La méthode des volumes finis assure la conservation de la masse pour chaque volume de contrôle.
2. Cette méthode est aussi largement utilisée dans des codes commercialisés tels que : PHOENICS, FLUENT, FLOW3D, STAR-CD, etc.

Nous présentons dans la suite l'essentiel de cette méthode, mais les lecteurs désirant connaître plus de détails sur cette méthode peuvent consulter les ouvrages de Patankar (1980) [91] et Versteeg et Malalasekera (1995) [92].

3.2. Méthodes des volumes finis

La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles sur des volumes entourant chaque point du maillage. Cette méthode, même si elle ne fournit qu'une précision du premier ordre, possède des qualités qui en font l'une des plus adaptées à l'étude des écoulements turbulents. En effet, celle-ci est très robuste et permet de traiter des équations comportant des termes sources complexes et non – linéaires. De plus, elle a l'avantage de satisfaire la conservation de la masse sur chaque volume de contrôle. Enfin, elle peut être utilisée avec des maillages relativement grossiers, ce qui permet la mise en œuvre de code pour un coût raisonnable.

3.3. Equation différentielle générale

Les équations précédentes peuvent être écrites sous la forme généralisée suivante (Patankar, 1980 [91]):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U \Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V \Phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S_{\Phi} \quad (3.1)$$

où

Φ est la variable dépendante ($\Phi = U, V, W, k, \varepsilon, T$)

x et y sont les coordonnées d'espace du domaine de calcul.

U et V sont les composantes du vecteur vitesse.

Γ_{Φ} est le coefficient de diffusion ou coefficient d'échange,

S_{Φ} est le terme source

Les expressions de Γ_{Φ} et S_{Φ} sont données dans le tableau (3.1).

Equation	Φ	Γ_Φ	S_Φ
continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant x	U	μ_{eff}	$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial x} \right)$
Quantité de mouvement suivant y	V	μ_{eff}	$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial y} \right)$
Quantité de mouvement suivant z	W	μ_{eff}	$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial y} \right)$
Energie cinétique de la turbulence	k	$\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}$	$P_k - \rho \varepsilon$
Taux de dissipation	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon}$	$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$
Energie	T	$\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}$	0

Tableau 3.1 : Les coefficients d'échanges et les termes sources des différentes équations.

où :

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad ; \quad \mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.2)$$

et

$$P_k = \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (3.3)$$

3.4. Discrétisation des équations de transport

Considérons le volume de contrôle sur la figure (3.1).

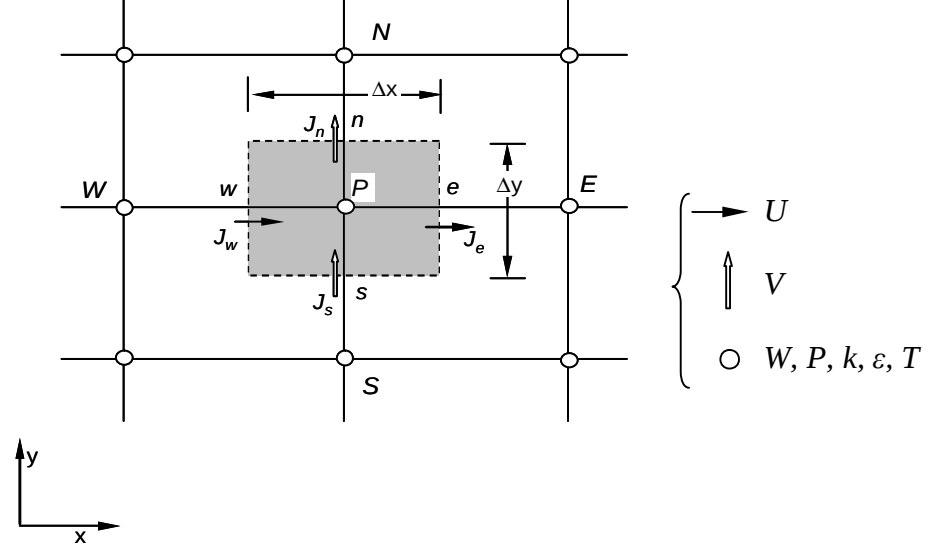


Figure 3.1 : volume de contrôle pour un écoulement bidimensionnel.

L'intégration de l'équation (3.1) sur le volume de contrôle de la figure (3.1) donne :

$$J_e - J_w + J_n - J_s = \iiint_V S_\phi dV \quad (3.4)$$

où les indices e, w, n, s , indiquent que les quantités correspondantes sont évaluées aux faces est, ouest, nord et sud du volume contrôle, respectivement, et les quantités J_e, J_w, J_n et J_s sont les flux totaux intégrés sur les faces du volume de contrôle, où leurs expressions sont donnés par :

$$\begin{aligned} J_e &= \int_s^n \left(\rho U \Phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e dy \\ &= \left[(\rho U)_e \Phi_e - \frac{\Gamma_{\phi,e}}{\Delta x_{EP}} (\Phi_E - \Phi_P) \right] \Delta y_{ns} \end{aligned} \quad (3.5.a)$$

$$\begin{aligned} J_w &= \int_s^n \left(\rho U \Phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w dy \\ &= \left[(\rho U)_w \Phi_w - \frac{\Gamma_{\phi,w}}{\Delta x_{WP}} (\Phi_P - \Phi_W) \right] \Delta y_{ns} \end{aligned} \quad (3.5.b)$$

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_w^e \left(\rho V \Phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n dx \\
 &= \left[(\rho V)_n \Phi_n - \frac{\Gamma_{\phi, n}}{\Delta y_{NP}} (\Phi_N - \Phi_P) \right] \Delta x_{ew}
 \end{aligned} \tag{3.5.c}$$

$$\begin{aligned}
 J_s &= \int_w^e \left(\rho V \Phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s dx \\
 &= \left[(\rho V)_s \Phi_s - \frac{\Gamma_{\phi, n}}{\Delta y_{PS}} (\Phi_P - \Phi_S) \right] \Delta x_{ew}
 \end{aligned} \tag{3.5.d}$$

La tâche la plus difficile dans l'évaluation de J_e , J_w , J_n et J_s est celle de l'approximation des quantités Φ_e , Φ_w , Φ_n et Φ_s .

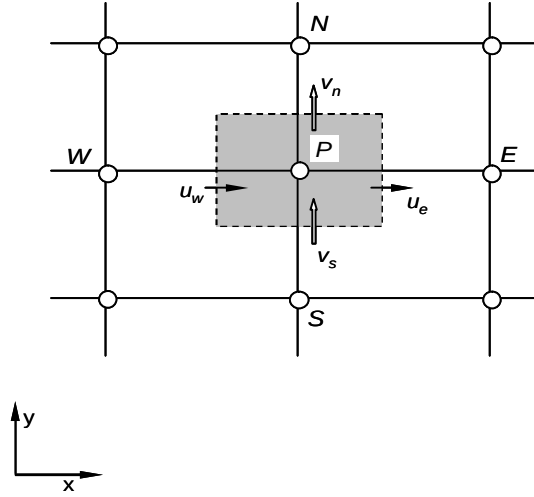


Figure 3.2 : volume d'intégration de l'équation de continuité.

De la même façon, l'intégration de l'équation de continuité sur le volume de contrôle de la figure (3.2) conduit à :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \tag{3.6}$$

où F_e , F_w , F_n et F_s sont les flux de masse de l'écoulement à travers les faces du volume de contrôle définis par :

$$F_e = (\rho U)_e \Delta y_{ns} \tag{3.7.a}$$

$$F_w = (\rho U)_w \Delta y_{ns} \tag{3.7.b}$$

$$F_n = (\rho V)_n \Delta x_{ew} \quad (3.7.c)$$

$$F_s = (\rho V)_s \Delta x_{ew} \quad (3.7.d)$$

L'intégration du terme source est obtenue en supposant que S_ϕ est uniforme sur le volume de contrôle.

$$\iiint_V S_\phi dV \cong S_U + S_P \Phi_P \quad (3.8)$$

Effectuons l'opération (éq. 3.4 - éq. 3.6 $\times \Phi_P$) et remplaçons le terme source par son expression (3.8) dans l'équation (3.4), après quelques manipulations, on obtient :

$$(J_e - F_e \Phi_P) - (J_w - F_w \Phi_P) + (J_n - F_n \Phi_P) - (J_s - F_s \Phi_P) = S_U + S_P \Phi_P \quad (3.9)$$

On utilise de nouvelles notations D (D représente la diffusion) définies par :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} \Delta y_{ns} \quad (3.10.a)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} \Delta y_{ns} \quad (3.10.b)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta y_n} \Delta x_{ew} \quad (3.10.c)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta y_s} \Delta x_{ew} \quad (3.10.d)$$

L'équation discrétisée complète peut alors s'écrire sous la forme :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b \quad (3.11)$$

Cette équation peut être réarrangée comme suit :

$$a_P \Phi_P = \sum_{i=N,S,E,W} a_i \Phi_i + b \quad (3.12)$$

où :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [[-F_e, 0]] \quad (3.13.a)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [[F_w, 0]] \quad (3.13.b)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [[-F_n, 0]] \quad (3.13.c)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [[F_s, 0]] \quad (3.13.d)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \quad (3.13.e)$$

$$b = S_U \quad (3.13.f)$$

P_i est le nombre de Peclet défini pour les différentes faces par :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} ; \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} ; \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} ; \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (3.14)$$

La fonction $A(|P|)$ est choisie en fonction du schéma d'interpolation désiré.

3.5. Schémas d'interpolations

Il existe plusieurs schémas d'interpolation dans la littérature qui sont discutés en détail par Patankar (1980) [91] et Versteeg et Malalasekera (1995) [92]. Les différents schémas proposés par Patankar (1980) [91] sont donnés dans le tableau (3.2). Il existe aussi d'autres schémas comme le schéma quadratique QUICK de Leonard (1979) [93] et Hayase (1992) [94], les schémas proposés par Raithby ; SUDS (Skew-Upwind Difference Scheme) en 1976 et LOADS (LOcally Analytic Differencing Scheme) en 1979 (cf. Huang et al. (1985) [95]).

Les schémas les plus utilisés sont ; loi de puissance PLDS et QUICK. Huang et al. (1985) [95] ont comparé ces deux schémas, faisant apparaître que le QUICK semble plus précis que PLDS, particulièrement en ce qui concerne la fausse diffusion. Néanmoins, le schéma QUICK est plus coûteux et beaucoup moins stable que PLDS. Pour ces deux raisons, nous avons utilisé dans l'ensemble de notre étude le schéma PLDS.

Schémas d'interpolation	Formule de $A(P)$
Centré	$1 - 0.5 P $
Décentré amont (Upwind)	1
Hybride	$[[0, 1 - 0.5 P]]$
Exponentiel	$ P / [\exp(P) - 1]$
Loi puissance	$[[0, (1 - 0.1 P)^5]]$

Tableau 3.2 : Expression de la fonction $A(|P|)$
pour différents schémas.

Pour un maillage uniforme et une vitesse positive, de l'ouest à l'est (figure 3.3), ϕ_w peut être rapprochée par :

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_w + \frac{1}{2}(\phi_P - \phi_w) \frac{(1 - 0.1 Pe_w)^5}{(1 - 0.05 Pe_w)^5} & \text{pour } 0 \leq Pe_w \leq 10 \\ \phi_w & \text{pour } Pe_w > 10 \end{cases} \quad (3.15)$$

Des relations similaires à (315) sont appliquées pour définir aussi ϕ_e , ϕ_n et ϕ_s .

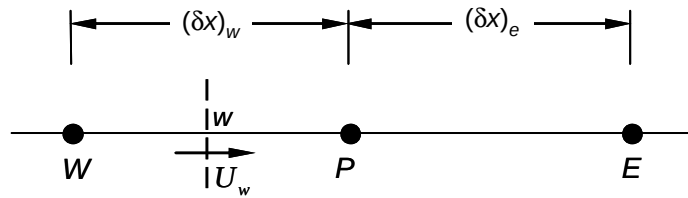


Figure 3.3 : grille uniforme et décalée, unidimensionnel, montrant les noeuds impliqués dans l'évaluation de ϕ_w .

3.6. Traitement du terme source

De façon générale, les termes sources des équations de transport sont non – linéaires et dépendent de la variable Φ . La méthode des volumes finis utilisée ici nécessite de linéariser les termes sources, qui peuvent s'écrire :

$$S_{\phi} = S_U + S_P \Phi \quad (3.16)$$

Les expressions de S_U et S_P sont indiquées dans le tableau (3.3).

Equation	Expression de S_P	Expression de S_U
U	0	$\left[-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \cdot Vol$
V	0	$\left[-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \cdot Vol$
W	0	0
T	0	0
k	$[-C_{\mu} \rho^2 k / \mu_t] \cdot Vol$	$[P_k] \cdot Vol$
ε	$[-C_2 C_{\mu} \rho^2 k / \mu_t] \cdot Vol$	$[-C_1 C_{\mu} \rho k P_k / \mu_t] \cdot Vol$

Tableau 3.3 : Forme linéarisée du terme source pour les différentes équations.

La valeur de S_P doit être toujours négative pour des raisons de stabilité numérique.

Les valeurs de S_U et S_P doivent être recalculées à chaque itération en utilisant les nouvelles valeurs de Φ , dans le but de traiter les non linéarités.

On utilise le choix suivant dont les propriétés numériques se sont avérées satisfaisantes, la source se présentant comme une source algébrique de termes S_i .

$$S = \sum_i S_i \begin{cases} S_U = \sum_i \max(S_i, 0) \\ S_P = -\sum_i \frac{\max(-S_i, 0)}{\Phi_P} \end{cases} \quad (3.17)$$

3.7. Traitement du couplage vitesse – pression

3.7.1. Introduction

Les équations de quantité de mouvement sont couplées par l'intermédiaire du champ de pression. Cette difficulté de couplage vitesse – pression vient de l'absence d'équations explicites qui gouvernent le champ de pression. Pour cette raison, on utilise des méthodes indirectes dont la plus répandue est l'algorithme SIMPLE.

3.7.2. Algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equation)

On se donne un champ de pression estimé au départ, P^* , par la suite on calcul le champ de vitesse (U^*, V^*) . Ce champ ne peut satisfaire l'équation de continuité, la pression P^* nécessite ainsi d'être corrigée et par conséquent (U^*, V^*) de manière à ce que l'équation de continuité soit vérifiée. Ceci étant l'objet de l'algorithme SIMPLE.

Les équations discrétisées pour les deux composantes de la vitesse U et V sont données selon l'équation (3.12) par :

$$a_e U_e = \sum_i a_i U_i + A_e (P_P - P_E) + b \quad (3.18)$$

$$a_n V_n = \sum_i a_i V_i + A_n (P_P - P_N) + b \quad (3.19)$$

Pour un champ de vitesse (U^*, V^*) résultant d'un champ de pression P^* les équations (3.18) et (3.19) s'écrivent :

$$a_e U_e^* = \sum_i a_i U_i^* + A_e (P_P^* - P_E^*) + b \quad (3.20)$$

$$a_n V_n^* = \sum_i a_i V_i^* + A_n (P_P^* - P_N^*) + b \quad (3.21)$$

3.7.2.1. Equation de correction de la vitesse

Soit P' la correction de pression. D'où, les composantes des corrections de U et V sont U' et V' . Ainsi, les champs corrigés de pression et de vitesse peuvent s'écrire comme suit :

$$P = P^* + P' \quad (3.22.a)$$

$$U = U^* + U' \quad (3.22.b)$$

$$V = V^* + V' \quad (3.22.c)$$

Nous pouvons alors déduire les équations pour U' et V' en faisant la différence entre (3.18) et (3.20) et entre (3.19) et (3.21) :

$$a_e U'_e = \sum_i a_i U'_i + A_e (P'_P - P'_E) + b \quad (3.23)$$

$$a_n V'_n = \sum_i a_i V'_i + A_n (P'_P - P'_N) + b \quad (3.24)$$

En négligeant, dans le second membre, les termes qui sont aux nœuds voisins. On obtient :

$$U'_e = d_e (P'_P - P'_E) \quad (3.25)$$

$$V'_n = d_n (P'_P - P'_N) \quad (3.26)$$

$$d_i \equiv \frac{A_i}{a_i} \quad (i = e, w, n, s) \quad (3.27)$$

On remplace (3.25) et (3.26) dans (3.22.b) et (3.22.c), respectivement, les valeurs corrigées des composantes de vitesse sont :

$$U_e = U_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \quad (3.24)$$

$$V_n = V_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \quad (3.25)$$

3.7.2.2. Equation de correction de la pression

L'équation de continuité intégrée (3.6) peut se mettre sous la forme suivante :

$$[(\rho U)_e - (\rho U)_w] \Delta y + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] \Delta x = 0 \quad (3.26)$$

En remplaçant U_e , U_w , V_n , V_s par leurs expressions correspondantes (3.24) et (3.25), on aboutit à l'équation de correction de la pression :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (3.27)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} a_E &= \rho d_e \Delta y \\ a_W &= \rho d_w \Delta y \\ a_N &= \rho d_n \Delta x \\ a_S &= \rho d_s \Delta x \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \\ b &= [(\rho U^*)_w - (\rho U^*)_e] \Delta y + [(\rho V^*)_s - (\rho V^*)_n] \Delta x \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

On remarque que le terme b dans l'équation de la pression, n'est autre que l'équation de continuité discrétisée à un signe moins près. Si b est nul, le champ (U^*, V^*) vérifie la conservation de la masse.

Résumons les différentes étapes de l'algorithme SIMPLE :

- 1 - À partir d'un champ de pression P^*
- 2 - Résolution des équations de quantité de mouvement pour obtenir U^* et V^*
- 3 - Correction de la pression P' en considérant la solution de l'équation de Poisson ($P = P^* + P'$)
- 4 - Correction corrélative des vitesses à partir des équations du mouvement linéarisées ($U = U^* + U'$ et $V = V^* + V'$)
- 5 - Résolution des autres équations ($W, k, \epsilon, T, \dots$)
- 6 - Retour à l'étape 2 jusqu'à convergence.

L'algorithme SIMPLE est efficace pour corriger les composantes de la vitesse puisque à chaque itération, l'équation de continuité est vérifiée.

3.8. Résolution numérique

3.8.1. Introduction

Nous avons décrit auparavant les méthodes de discrétisation des équations qui gouvernent l'écoulement turbulent et le transfert thermique qui peuvent se mettre pour la variable Φ en chaque volume de contrôle élémentaire, sous la forme suivante :

$$a_P \Phi_{i,j} = a_E \Phi_{i+1,j} + a_W \Phi_{i-1,j} + a_N \Phi_{i,j+1} + a_S \Phi_{i,j-1} + b \quad (3.29)$$

Ce processus conduit à un système d'équations algébrique linéaire qui doit être résolu. La complexité et la dimension de l'ensemble d'équations dépendent du dimensionnement du problème, le nombre de noeuds de la grille et la méthode de discrétisation. Il y a deux méthodes pour la résolution des équations algébriques linéaires : les méthodes directes et les méthodes indirectes ou itératives. Les exemples simples des méthodes directes sont la règle de Cramer par l'inversion de la matrice et la méthode de Gauss.

Les méthodes itératives sont basées sur une application répétée d'un algorithme relativement simple qui mène à la convergence éventuelle après un - quelquefois grand - nombre de répétitions. Les exemples les plus connus sont de Jacobi et Gauss Seidel, méthodes d'itérations point par point. Les méthodes itératives sont plus économiques que les méthodes directes.

Les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss – Seidel sont faciles à implémenter dans un programme, mais peuvent être lentes à la convergence lorsque le système d'équations est grand.

En 1949 Thomas a développé une technique pour résoudre rapidement un système Tri diagonal qui est maintenant appelée l'algorithme de Thomas ou TDMA (**T**ri-**D**agonal **M**atrix **A**lgorithm). Le détail de l'algorithme TDMA est donné en Annexe.

3.8.2. Critère de convergence

Si les équations de transport discrétisées (3.12) sont résolues exactement, les deux membres de ces équations seront certainement égaux. Cependant, puisque les équations associées sont non linéaires et couplées et exigent une solution itérative, un déséquilibre ou résidu peuvent exister entre les deux membres de l'équation discrétisée. Le résiduel pour la variable Φ dans chaque volume de contrôle est défini comme suit :

$$R_\phi = a_p \Phi_p - \sum_i a_i \Phi_i - S \quad (3.30)$$

Si le calcul converge complètement la valeur de R_ϕ tend vers zéro.

La convergence de la résolution itérative est contrôlée par l'évolution des résidus au cours des itérations ainsi que par l'évolution des valeurs individuelles de chaque variable.

3.8.3. Stabilité numérique

La sous-relaxation est nécessaire pour assurer la convergence totale des calculs à une solution, parce que les équations sont fortement couplées et non linéaire. Quand des valeurs appropriées de sous-relaxation sont utilisées, de grandes variations des variables sont évitées. En outre, elle donne un moyen pour égaliser les taux de convergence des diverses équations couplées. Donc les deux principales sources d'instabilité dans la solution des équations sont ainsi commandées par la technique de sous-relaxation. Rappelons ici l'essentiel de cette technique :

Soit l'équation discrétisée de la variable Φ :

$$a_p \Phi_p = \sum_{i=N,S,E,W} a_i \Phi_i + b$$

En rajoutant et retranchant la valeur $a_p \Phi_p^*$ dans le membre droite de l'équation précédente on obtient :

$$a_p \Phi_p = a_p \Phi_p^* + \left(\sum_{i=N,S,E,W} a_i \Phi_i + b - a_p \Phi_p^* \right) \quad (3.31)$$

où Φ_p^* représente la valeur de la variable Φ à l'itération précédente.

Le terme entre parenthèse désigne la valeur de la variable Φ à l'itération courante.

Le processus de convergence est atteint lorsque la valeur de Φ_p tend vers celle de Φ_p^* . Afin d'obtenir cela, on introduit un facteur d'amortissement ou de relaxation α ($0 < \alpha < 1$). Donc l'équation (3.31) devient :

$$a_p \Phi_p = a_p \Phi_p^* + \alpha \left(\sum_{i=N,S,E,W} a_i \Phi_i + b - a_p \Phi_p^* \right) \quad (3.32)$$

Elle peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\frac{a_p}{\alpha} \Phi_p = \sum_{i=N,S,E,W} a_i \Phi_i + b + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} a_p \Phi_p^* \quad (3.33)$$

La sous-relaxation pour la pression est réalisée en ajoutant seulement une fraction de P' à P^* , c'est-à-dire :

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (3.34)$$

Après quelques tests, nous avons atteint une bonne convergence avec les valeurs des facteurs de sous-relaxation qui sont données dans le tableau (3.4).

α_U	α_V	α_W	α_P	α_k	α_ε	α_{μ_t}	α_{P_k}	α_T
0.4	0.4	0.4	0.6	0.6	0.6	0.7	0.4	0.5

Tableau 3.4 : Facteurs de sous-relaxation

3.8.4. Les conditions aux limites

A cause de la nature elliptique des équations aux dérivées partielles, les conditions aux limites sont exigées au niveau de toutes les frontières du domaine de calcul et pour toutes les variables.

A/ Entrée

A l'entrée tous les profils doivent être connus le long de cette frontière. Généralement on impose les conditions expérimentales (conditions aux limites de type Dirichlet) :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{in} = U_e, \quad V_{in} = 0, \quad W_{in} = 0 \\ T_{in} = T_o \\ k_{in} = \frac{3}{2} (i U_e)^2 \\ \varepsilon_{in} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{0.09 \delta} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

où :

$$i : \text{est l'intensité de turbulence} \left(i = \frac{\sqrt{u'^2}}{U_e} \right)$$

A/ Axe de symétrie

Sur l'axe de symétrie, on impose un gradient nul pour toutes les variables (conditions aux limites de type Neumann) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \Phi = U, V, W, T, k, \varepsilon \end{cases} \quad (3.36)$$

C/ Frontière libre horizontale

La vitesse V est déduite de l'équation de continuité, pour les autres variables on pose :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = W = 0 \\ \Phi = U, T, k, \varepsilon \end{cases} \quad (3.37)$$

D) Sortie

A la sortie les gradients de toutes les variables sont considérés nuls :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \Phi = U, V, W, T, k, \varepsilon \end{cases} \quad (3.38)$$

E) Paroi

Nous avons vu au deuxième chapitre que le modèle $k - \varepsilon$ n'est applicable que loin de la paroi, dans la zone de proche paroi on utilise un raccordement par les fonctions de paroi. Cette condition est imposée au deuxième point de discrétisation à la paroi.

Le maillage au lieu de s'étendre jusqu'à la paroi, s'achève à une certaine distance de celle-ci, de façon à ce que tous les points de sa frontière se situent dans la zone pleinement turbulente de la région de paroi et la couche limite est alors prise en compte en imposant le frottement, dont la valeur de τ_p est fournie par les fonctions de paroi (figure 3.4).

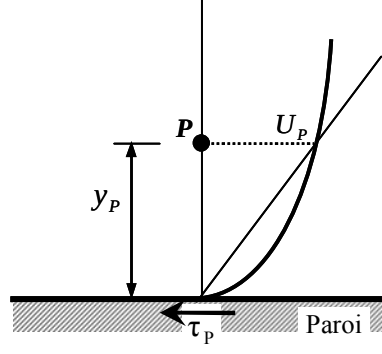


Figure 3.4 : le premier point de discrétisation à la paroi,
où la loi de paroi est imposée

E.1) Condition à la paroi pour la vitesse longitudinale

Le frottement longitudinal à la paroi est donné par :

$$\tau_{px} = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} U_p}{U_p^+} \quad (3.39)$$

La force de frottement peut se mettre sous la forme suivante :

$$F_{px} = \begin{cases} -\mu \frac{U_p}{y_p} A & \text{Si } y_p^+ \leq 11,63 \\ -\frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} U_p}{\ln(E y_p^+)} A & \text{Si } y_p^+ > 11,63 \end{cases} \quad (3.40)$$

U_p paraît explicitement dans les expressions précédentes (3.40) et le terme (F_{px}/U_p) est toujours négatif, on peut mettre la force de frottement à la paroi dans le terme de la source linéarisé S_p :

$$S_p = \frac{F_{px}}{U_p} = \begin{cases} -\frac{\mu}{y_p} A & \text{Si } y_p^+ \leq 11,63 \\ -\frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\ln(E y_p^+)} A & \text{Si } y_p^+ > 11,63 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_U = 0 \quad (3.41)$$

E.2) Condition à la paroi pour la vitesse transversale

Le frottement transversal à la paroi est donné aussi par :

$$\tau_{Pz} = - \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} (W_0 - W_P)}{W_P^+} \quad (2.42)$$

La force résultante du frottement transversal :

$$F_{Pz} = \begin{cases} \mu \frac{(W_0 - W_P)}{y_P} A & \text{Si } y_P^+ \leq 11,63 \\ \frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} (W_0 - W_P)}{\text{Ln}(E y_P^+)} A & \text{Si } y_P^+ > 11,63 \end{cases} \quad (2.43)$$

Cette force (2.43) est mise dans le terme source S_U et S_P comme suit :

$$S_U = \begin{cases} \mu \frac{W_0}{y_P} A & \text{Si } y_P^+ \leq 11,63 \\ \frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} W_0}{\text{Ln}(E y_P^+)} A & \text{Si } y_P^+ > 11,63 \end{cases} \quad (2.44)$$

et

$$S_P = \begin{cases} -\frac{\mu}{y_P} A & \text{Si } y_P^+ \leq 11,63 \\ -\frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\text{Ln}(E y_P^+)} A & \text{Si } y_P^+ > 11,63 \end{cases} \quad (2.45)$$

E.3) Condition à la paroi pour la température

Le flux de chaleur à la paroi est donné par l'expression suivante :

$$q_w = \frac{\rho C_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} (T_w - T_P)}{T_P^+} \quad (2.46)$$

On peut placer cette quantité (2.46) dans le terme source comme suit :

$$S_U = \begin{cases} \frac{\rho C_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} T_w}{\text{Pr } y_P^+} A & \text{Si } y_P^+ \leq 11,63 \\ \frac{\rho C_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} T_w}{\text{Pr}_t (U_P^+ + \mathbf{P})} A & \text{Si } y_P^+ > 11,63 \end{cases} \quad (2.47)$$

et

$$S_p = \begin{cases} -\frac{\rho C_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\text{Pr } y_p^+} A & \text{Si } y_p^+ \leq 11,63 \\ -\frac{\rho C_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\text{Pr}_t (U_p^+ + \mathbf{P})} A & \text{Si } y_p^+ > 11,63 \end{cases} \quad (2.48)$$

E.4) Condition à la paroi pour l'énergie cinétique de la turbulence

Nous avons vu que les conditions aux limites pour l'énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation à la paroi sont données par :

$$\overline{P_k} = \left(\tau_{Px} \frac{U_p}{y_p} + \tau_{Pz} \frac{W_p - W_0}{y_p} \right) \cdot Vol \quad (2.49)$$

et

$$-\rho \bar{\varepsilon} = -\rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\tau_p} \left[\left(\frac{U_p}{y_p} \right)^2 + \left(\frac{W_p - W_0}{y_p} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot Vol \quad (2.50)$$

Ces deux quantités (2.49) et (2.50) sont placées dans le terme source comme suit :

$$S_U = \max \left[\left(\overline{P_k} - \rho \bar{\varepsilon} \right), 0 \right] \cdot Vol \quad (2.51)$$

et

$$S_p = \frac{\min \left[\left(\overline{P_k} - \rho \bar{\varepsilon} \right), 0 \right]}{k_p} \cdot Vol \quad (2.52)$$

E.5) Condition à la paroi pour la dissipation

La condition aux limites pour le taux de dissipation est donnée par :

$$\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y_p} \quad (2.53)$$

D'où :

$$S_U = 10^{30} \varepsilon_p \quad \text{et} \quad S_p = -10^{30} \quad (2.54)$$

Les différentes conditions aux limites citées ci-dessus sont rassemblées dans la figure (3.5)

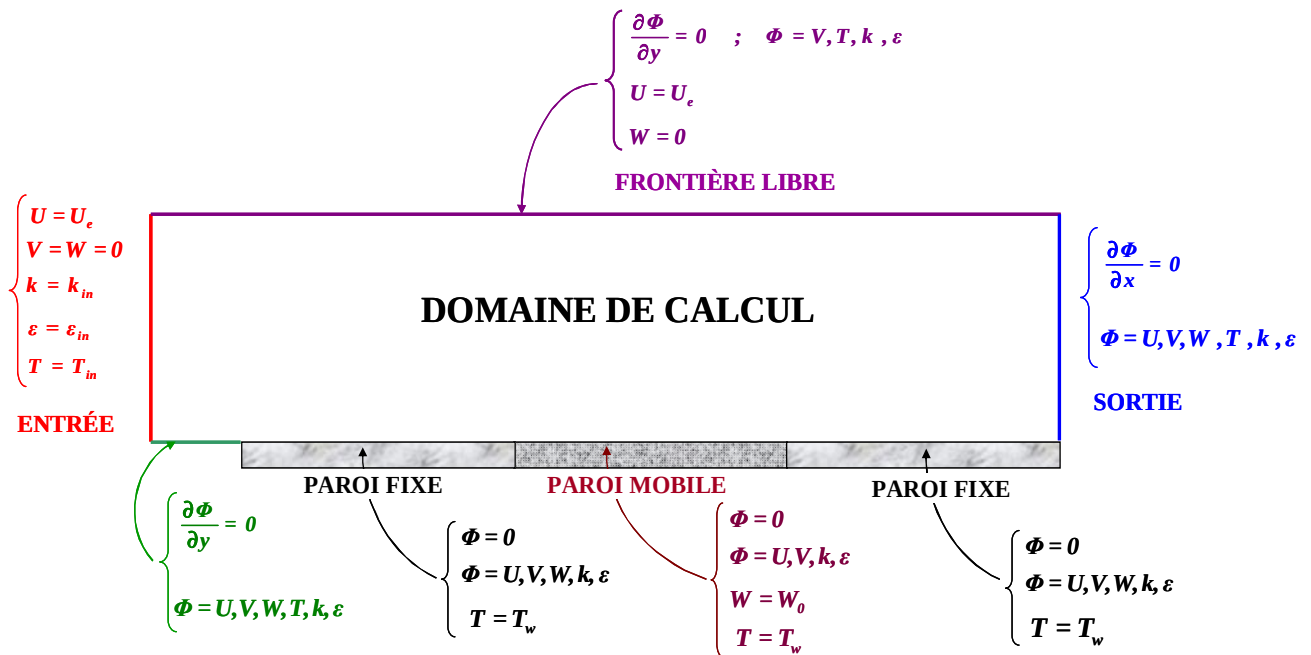


Figure 3.5 : les conditions aux limites

3.9. Mise en œuvre numérique

Le code utilisé pour mettre en œuvre les modèles de turbulence décrits dans le deuxième chapitre, est un code dérivé du code TEAM (Huang et Leschziner 1983 [96], UMIST, Manchester) conçu initialement pour le calcul des écoulements laminaires et turbulents bidimensionnels (couche limite, jet, écoulement dans une cavité etc.). Il utilise la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations aux dérivées partielles. Le couplage vitesse – pression est résolu grâce à l'algorithme SIMPLE.

Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, nous avons généralisé le code de calcul pour les prévisions numériques des écoulements tridimensionnels en rajoutant un sous programme (CALCW), qui permet de calculer la troisième composante du vecteur vitesse (W). En outre, le modèle de turbulence utilisant un raccordement par les lois de paroi pour les deux composantes U et W du vecteur vitesse a été aussi pris en considération dans le code, où elles sont injectées dans un sous programme de conditions aux limites (MODW).

La structure générale du code utilisé est donnée par la figure (3.6) ; elle fait apparaître clairement notre modification.

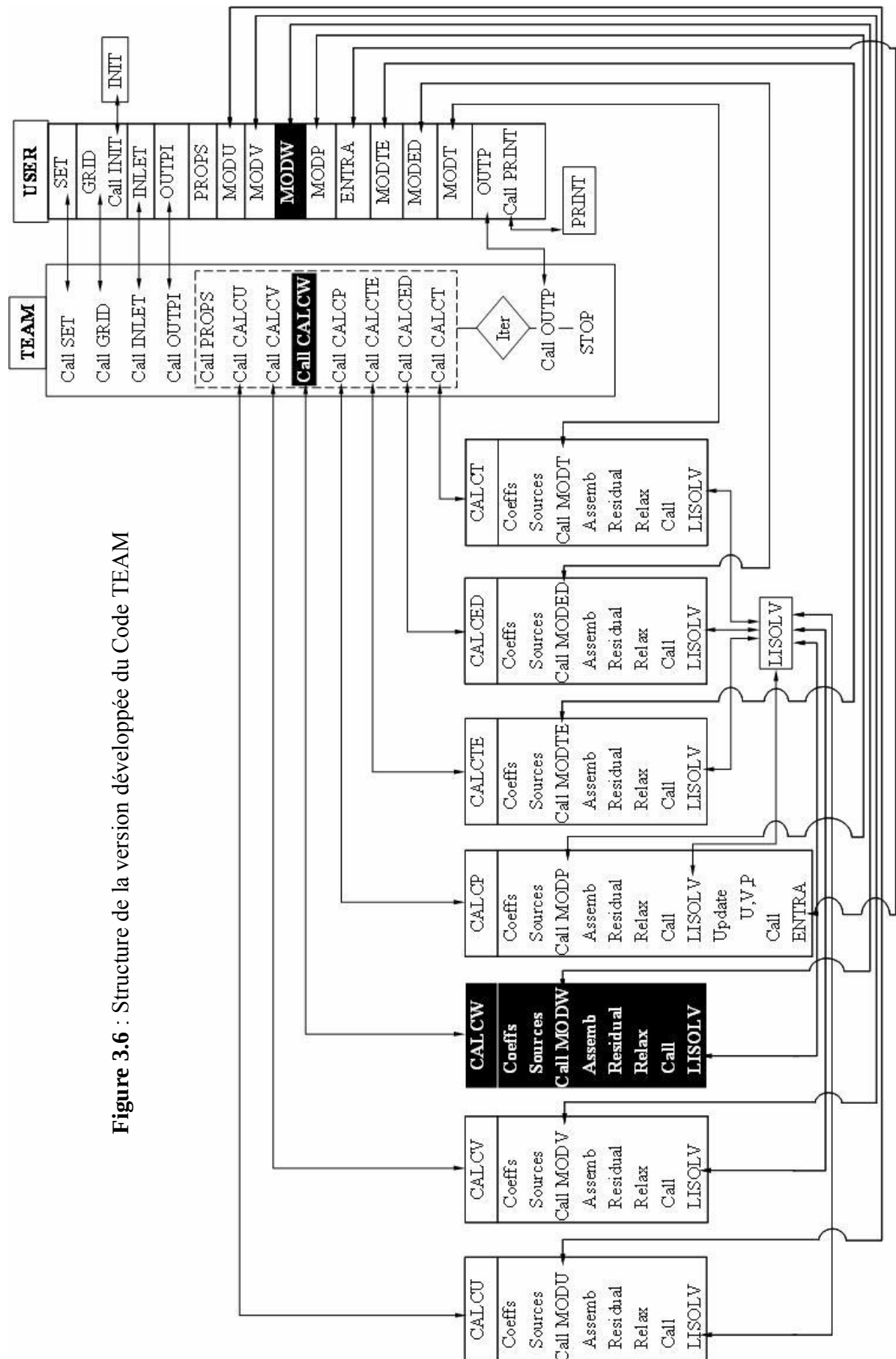


Figure 3.6 : Structure de la version développée du Code TEAM

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSSION

CHAPITRE 4

Résultats et discussion

4.1. Paramètres de l'étude

4.1.1. Conditions aérodynamiques

Dans toute l'étude nous nous sommes situés dans les mêmes conditions de l'expérience. La vitesse extérieure de l'écoulement moyen a une valeur $U_e = 12.4 \text{ m/s}$. La vitesse de la paroi mobile a été choisie très proche de la vitesse extérieure, soit $W_0 = 11.03 \text{ m/s}$ ($W_0/U_e = 0.89$).

La température du fluide $T_e = 300 \text{ K}$

La température de la paroi chauffée $T_w = 320 \text{ K}$

On définit Q_e comme suit : $Q_e = \sqrt{U_e^2 + W_0^2}$

Ce qui donne : $Q_e = 16.6 \text{ m/s}$

4.1.2. Maillage

Il s'agit d'un maillage cartésien structuré et plusieurs résolutions ont été testées. Les résultats obtenus sont indépendants de la longueur des mailles. Dans la direction longitudinale, le maillage est linéaire, un léger resserrement est adapté au bord d'attaque de chaque partie de la plaque afin de tenir compte les effets dus au brusque changement des conditions aux limites comme le montre la figure 4.1. Dans la direction verticale une grille avec une progression géométrique a été utilisée. Le raffinement du maillage près de la paroi permet de bien prendre en compte les forts gradients des différentes grandeurs. Dans la direction normale tous les points ont été pris en dehors de la sous couche visqueuse. Ceci est contrôlé par la variation de y_p^+ ($y_p^+ = \frac{U_\tau y_p}{\nu}$) de la première maille à la paroi (Fig. 4.2). Il est à noter que y_p^+ est supérieur à 11.63 pour les deux cas avec et sans mouvement transversal de la paroi. L'accroissement de y_p^+ dans le cas où W est différent de zéro est dû essentiellement à l'augmentation des coefficients de frottements comme on va le voir ci-après.

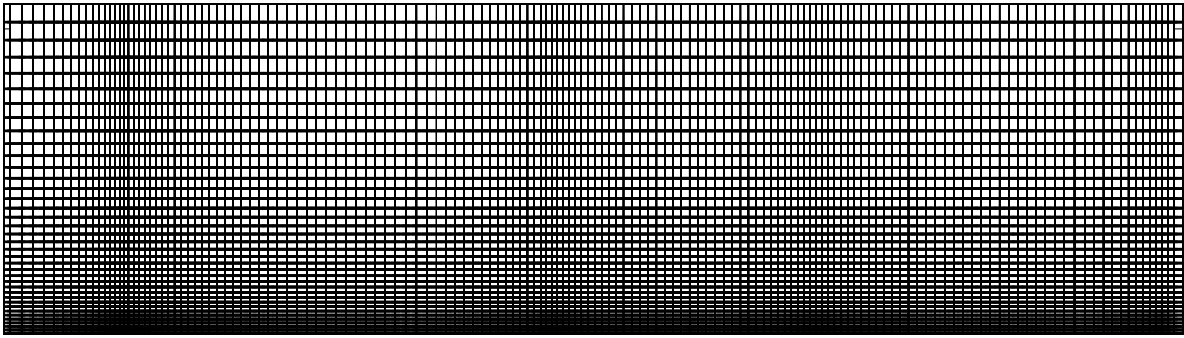


Figure 4.1 : Maillage utilisé (150 x 40)

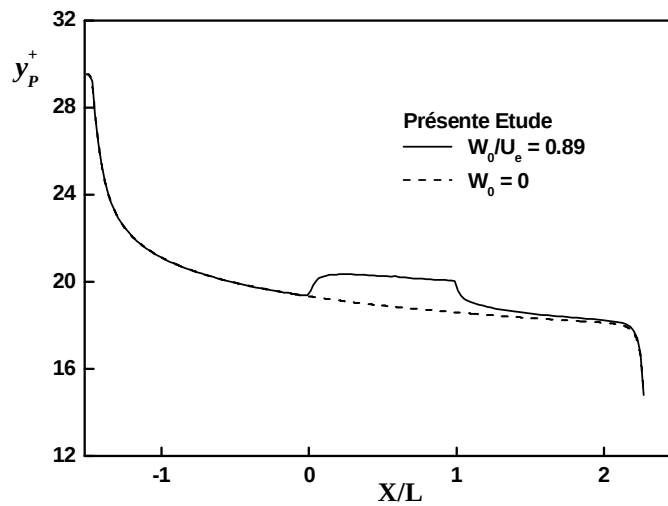


Figure 4.2 : Evolution de y_p^+ le long de la plaque.

Dans cette étude les résultats sont divisés en trois grandes parties. La première concerne la comparaison de trois modèles de fermeture pour les prédictions numériques d'une couche limite turbulente sur une plaque plane immobile. Dans la deuxième partie nous avons examiné l'influence d'un cisaillement transversal sur la couche limite et en dernière partie nous avons étudié la relaxation de la couche limite sur la partie fixe en aval de la paroi mobile.

4.2. Comparaison de trois modèles de turbulence pour le cas d'une plaque plane fixe

L'objectif de cette partie est de : s'initier aux différents modèles de turbulence et d'estimer le temps de calcul requis et la précision de chaque modèle.

4.2.1. Champ moyen

La figure (4.3) donne l'évolution de la vitesse moyenne longitudinale en fonction de la distance normale y rapportée à l'épaisseur locale de la couche limite. Les prédictions numériques par les trois modèles de fermeture (k - ϵ , ASM et RSM) sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de Klebanoff [97].

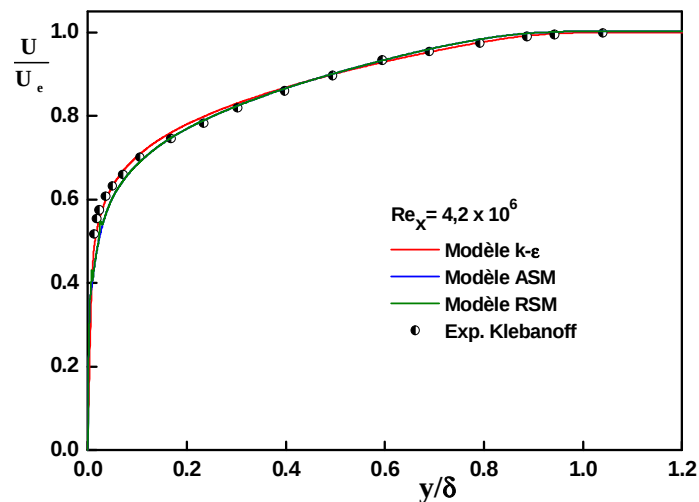


Figure 4.3 : Profil de la vitesse moyenne longitudinale

4.2.2. Champ turbulent

Les figures 4.4, 4.5 et 4.6 représentent les évolutions des écarts types des fluctuations de vitesse. L'accord est en général satisfaisant, à l'exception de la zone de proche paroi où les modèles utilisant un raccordement par la loi logarithmique sous estiment les variances. La comparaison entre les trois modèles montre que ces derniers ont les mêmes allures pour l'écart type des fluctuations longitudinales de vitesse, par contre un écart est observé entre le modèle k - ϵ et deux autres modèles (ASM et RSM). Ceci est dû aux différentes méthodes d'estimation de ces quantités. Le modèle ASM calcule les écarts types à travers des relations algébriques par contre RSM calcule ces quantités directement par leurs équations d'évolutions, mais le modèle k - ϵ les estime à l'aide de l'approximation de Boussinesq sous évalue ces quantités.

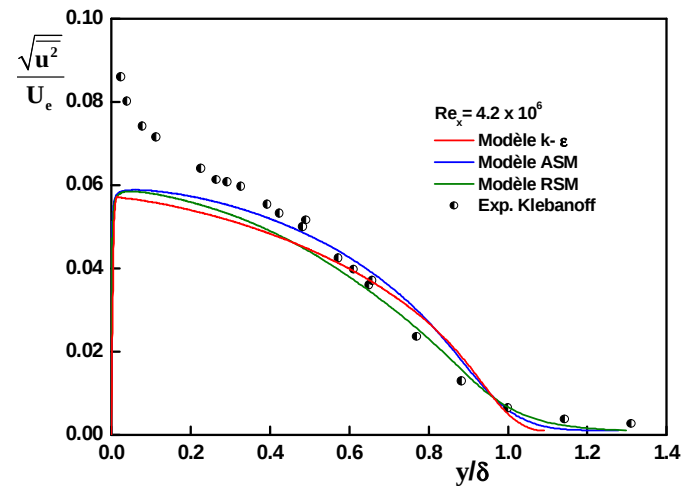


Figure 4.4 : Evolution de l'écart type des fluctuations longitudinales de vitesse.

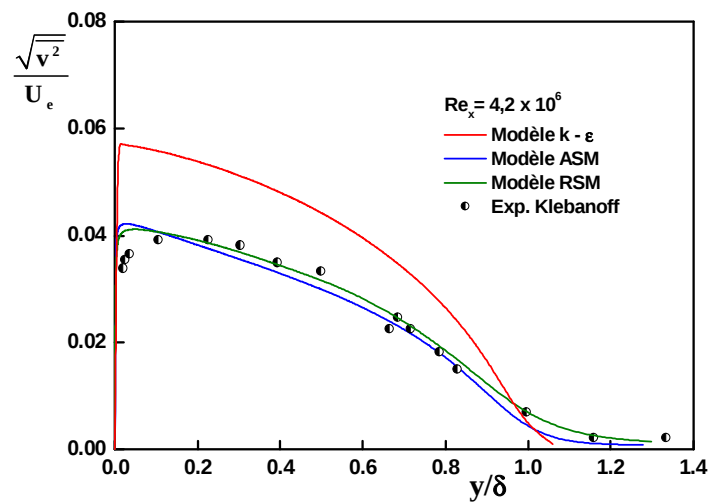


Figure 4.5 : Evolution de l'écart type des fluctuations normales de vitesse.

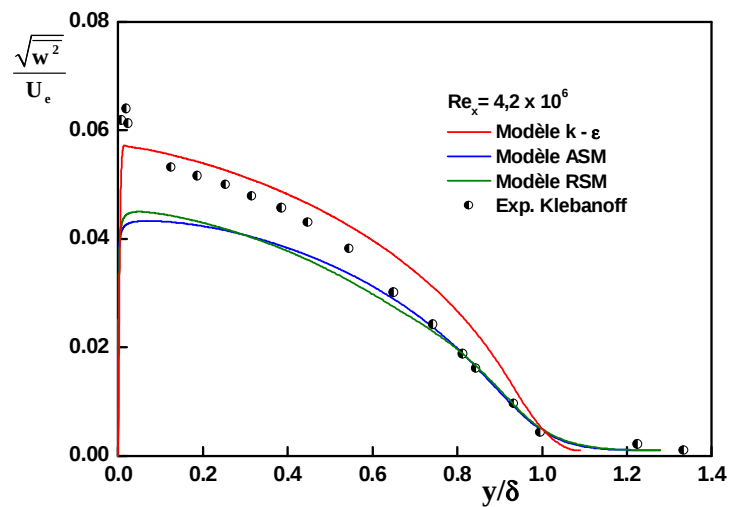


Figure 4.6 : Evolution de l'écart type des fluctuations transversales de vitesse

La contrainte de cisaillement $\overline{uv}$ et l'énergie cinétique de la turbulence sont données respectivement sur les figure 4.7 et 4.8. Le calcul par les trois modèles sont en concordance avec les résultats expérimentaux de Klebanoff [97]. Mais un écart est observé pour k près de la paroi.

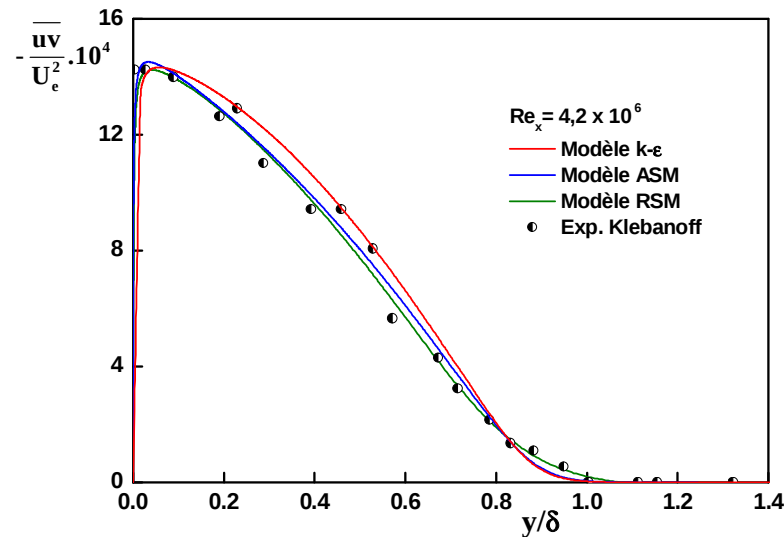


Figure 4.7 : Evolution de la contrainte de cisaillement $\overline{uv}$

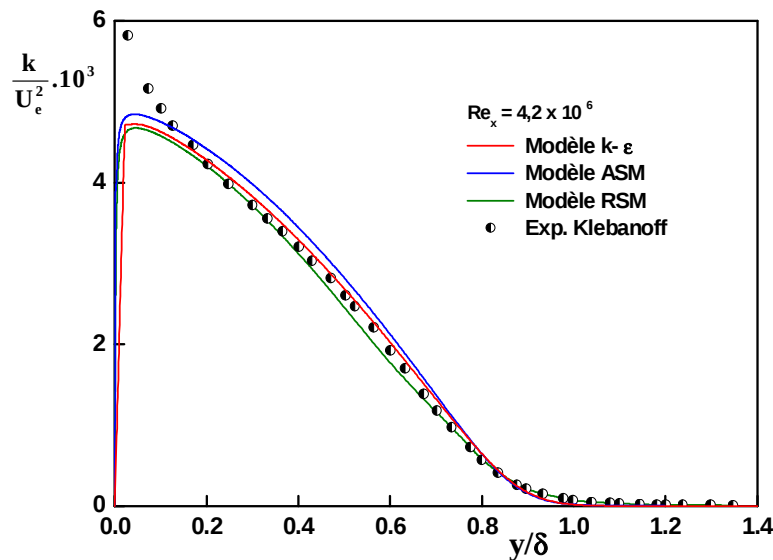


Figure 4.8 : Evolution de l'énergie cinétique turbulente.

4.2.3. Champ thermique

Vu la complexité de la mise en œuvre des modèles ASM et RSM et la lourdeur du calcul nous n'avons adopté que le modèle k- ϵ pour la détermination du champ thermique. L'évolution de la température moyenne en fonction de y/δ est donnée sur la figure 4.9. On

constate que la prédiction numérique par le modèle k- ϵ est en bon accord avec l'expérience de Fulachier [98].

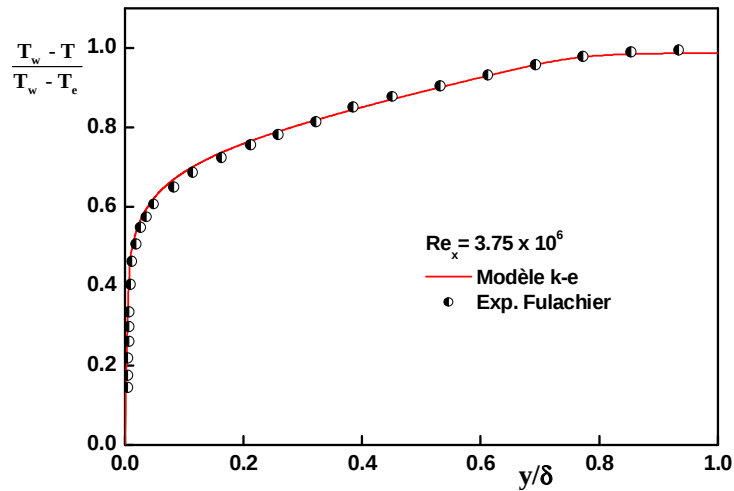


Figure 4.9 : Profil de température moyenne

4.2.4. Conclusion

Les différentes comparaisons entre les résultats obtenus par les trois modèles de fermeture (k- ϵ , ASM et RSM) montrent que l'écart n'est pas vraiment très important entre ces derniers. Cependant, la mise en œuvre du modèle ASM et RSM est très compliquée. Par ailleurs, le modèle RSM nécessite un espace mémoire et temps de calcul très importants.

La mise en œuvre des modèles ASM et RSM pour les prédictions numériques des écoulements tridimensionnels tel que notre cas dans la deuxième et la troisième partie est très délicate. Ces deux modèles nécessitent des moyens de calcul très puissants. Donc pour entamer la deuxième et la troisième partie de notre travail, nous nous sommes limités à l'utilisation d'un seul modèle de fermeture ; il s'agit du modèle k- ϵ .

4.3. Etude d'une couche limite turbulente sous l'action d'un cisaillement transversal

Dans cette partie la couche limite subit à une brusque discontinuité à la paroi par la mise en mouvement de cette dernière dans le sens transversal de l'écoulement. Vu la complexité de la configuration de l'écoulement étudié, nous ne retiendrons dans cette partie que le modèle $k-\varepsilon$ pour les prévisions numériques. Les résultats trouvés par le calcul sont confrontés aux résultats expérimentaux de Le Borgne [29]. Cet auteur n'a porté des mesures que pour deux sections. Pour suivre l'évolution du champ moyen le long de la paroi mobile nous avons fait des comparaisons avec les résultats d'Arslanian [28] qui a mené des mesures du champ moyen sur plusieurs sections.

4.3.1. Variation de l'angle β

Pour la détermination de la direction de la vitesse locale nous avons calculé l'évolution de l'angle $\beta = (\vec{U}_e, \vec{q})$.

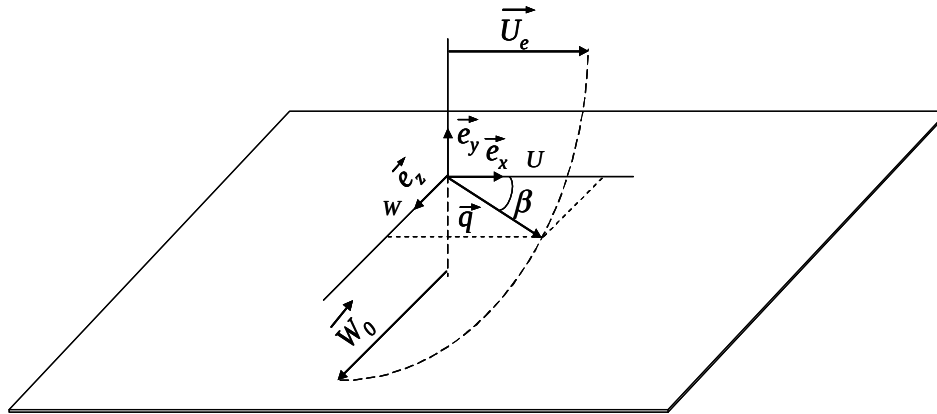


Figure 4.10 : définition de l'angle β .

Les figures 4.11 (a-f) donnent la variation de l'angle β en fonction de la distance normale à la paroi y pour différentes sections. Une concordance est bien remarquable entre les prédictions numériques et les résultats expérimentaux d'Arslanian [28]. L'angle β atteint une valeur maximum à la paroi ($\beta = \pi/2$), où les lignes de courant sont orientées vers la direction transversale. Il diminue rapidement dans les premières sections du bord d'attaque de la partie tournante. Lorsque l'on s'éloigne de la paroi mobile l'angle β diminue de plus en plus et atteint la valeur zéro en dehors de la couche de rotation où les lignes de courant ne sont plus

influencées par le cisaillement transversal. Les courbes montrent par ailleurs que la couche de rotation qui apparaît au sein de la couche limite s'épaissit au fil et à mesure que l'on s'éloigne du bord d'attaque de la paroi mobile. L'épaisseur de cette couche de rotation est de $\delta_1 = 4$ mm à $X = 31$ mm et atteint la valeur $\delta_2 = 32$ mm à $X = 931$ mm.

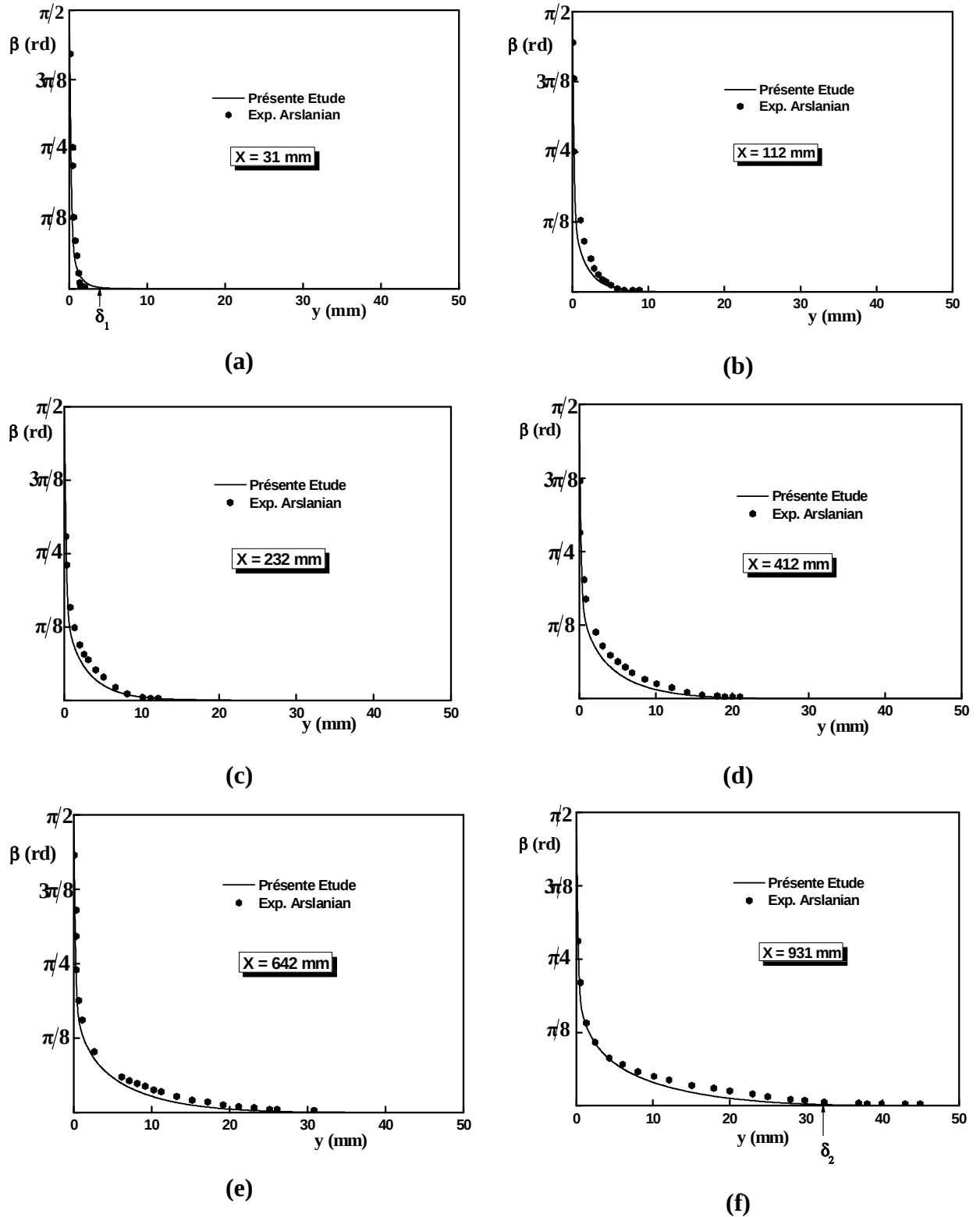


Figure 4.11 : variation de l'angles de déviation β à différentes sections en X

4.3.2. Coefficients de frottement

Les coefficients de frottement longitudinal et transversal sont respectivement donnés par les relations suivantes:

$$C_{fx} = \frac{\tau_{px}}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} \quad ; \quad C_{fz} = \frac{\tau_{pz}}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}$$

avec :

$$\tau_{px} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad ; \quad \tau_{pz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Les figures 4.12 et 4.13 donnent les évolutions des coefficients de frottement longitudinal et transversal en fonction de la distance longitudinale x . Nous avons trouvé des résultats proches de ceux de Cousteix et al. [54] pour le coefficient de frottement longitudinal. On distingue cependant un écart entre les calculs et l'expérience de Le Borgne [29]. Concernant le frottement transversal les résultats obtenus par l'approche de la loi logarithmique sont en bon accord avec l'expérience de Le Borgne [29] sauf au bord d'attaque de la partie mobile. Ceci conforte la validité de la loi de paroi que nous avons proposé. Les prédictions numériques fondées sur une extension d'un modèle à faible nombre de Reynolds (Cousteix [54]) divergent de nos résultats et ceux de l'expérience. L'utilisation d'une extension des modèles à faibles nombres de Reynolds pour les calculs des couches limites tridimensionnelles est mise en défaut.

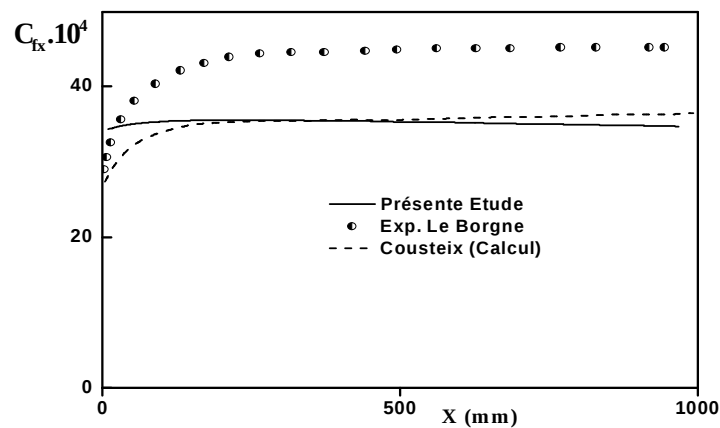


Figure 4.12 : Evolution du coefficient de frottement longitudinal.

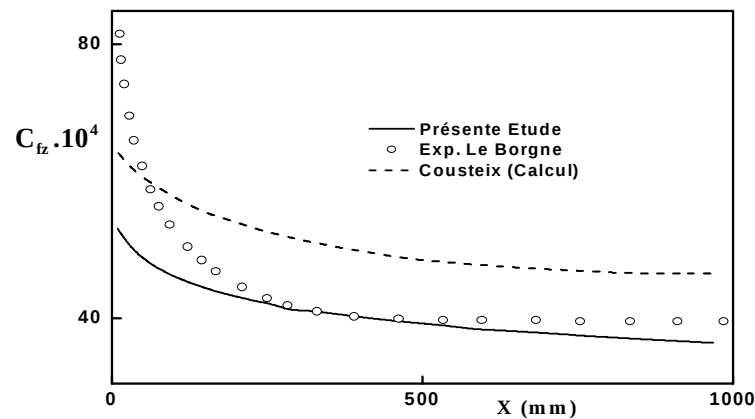
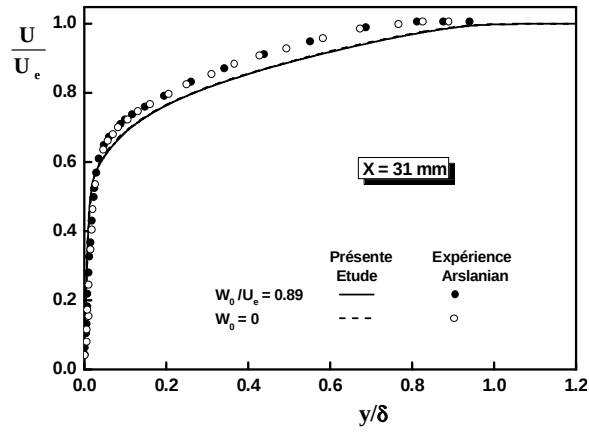


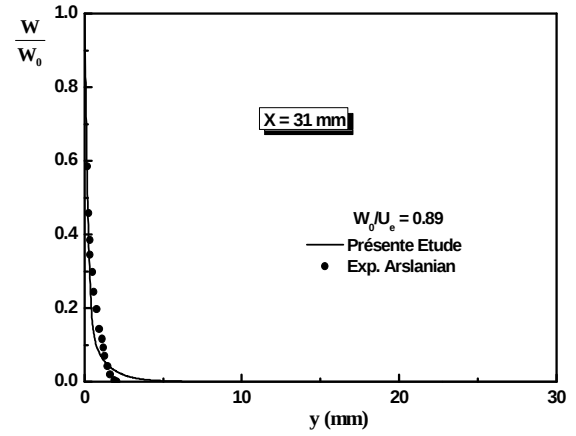
Figure 4.13 : Evolution du coefficient de frottement transversal.

4.3.3. Vitesse moyenne

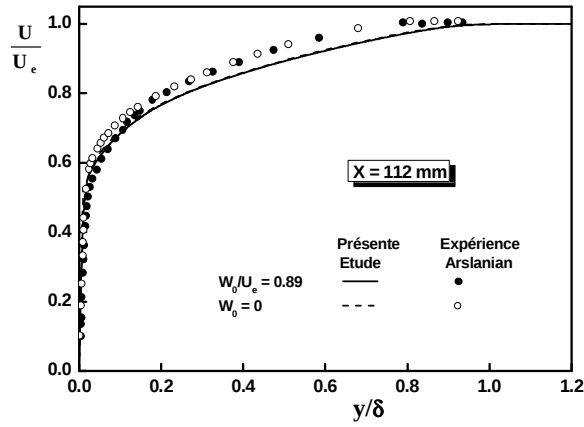
Les figures 4.14 (a-j) et 4.15 (a-d) donnent respectivement les évolutions des composantes longitudinale et transversale du vecteur vitesse à plusieurs sections. Un faible écart est à signaler entre les prédictions numériques et l'expérience d'Arslanian [3]. Mais on constate un bon accord entre le calcul et l'expérience de Le Borgne [29] sauf pour la composante longitudinale U dans le cas de paroi mobile ($W_0 \neq 0$) à la deuxième section (fig.4.15-c). L'expérience montre que le mouvement transversal de la paroi retarde l'écoulement ce qui se traduit par la diminution de la vitesse longitudinale U dans la zone de proche paroi. Par contre les prédictions numériques donnent les mêmes profils avec et sans mouvement de la paroi. Ceci est peut être dû à l'utilisation d'une même loi logarithmique pour la composante longitudinale U dans les deux cas avec et sans mouvement de la paroi. Il est recommandé de modifier la loi de paroi pour U afin de tenir compte de l'effet du cisaillement transversal. Pour la composante transversale W on remarque que le modèle reproduit bien les résultats expérimentaux, ce qui valide la loi de paroi que nous avons mis en œuvre.



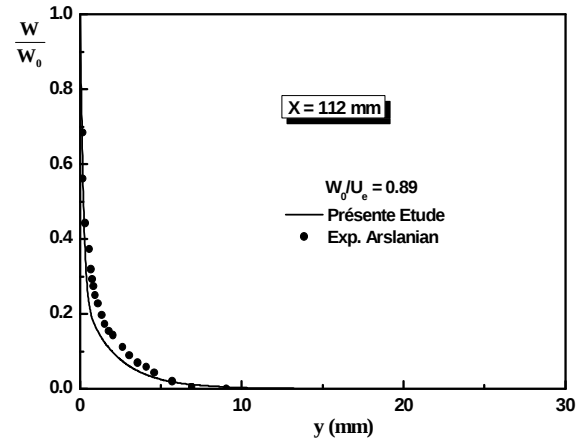
(a)



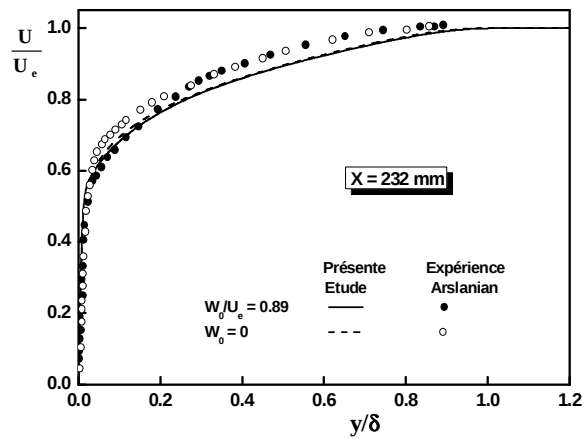
(b)



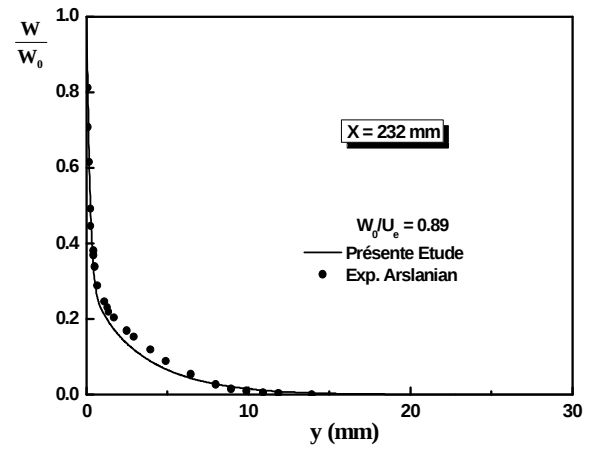
(c)



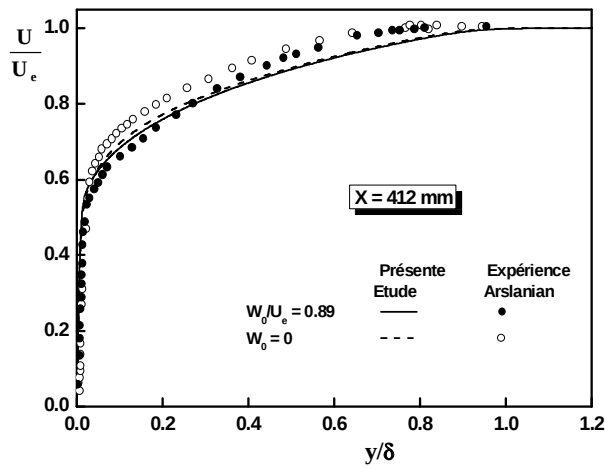
(d)



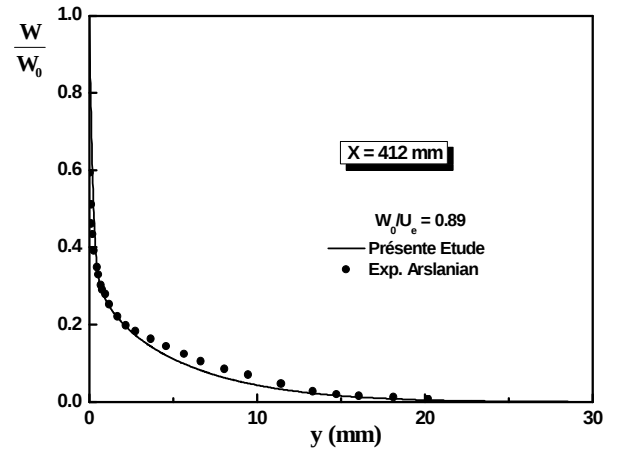
(e)



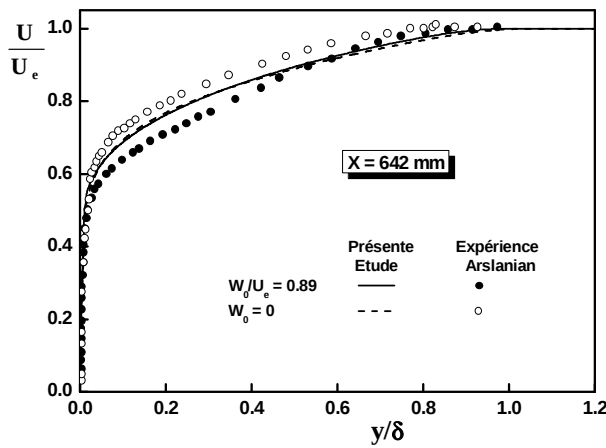
(f)



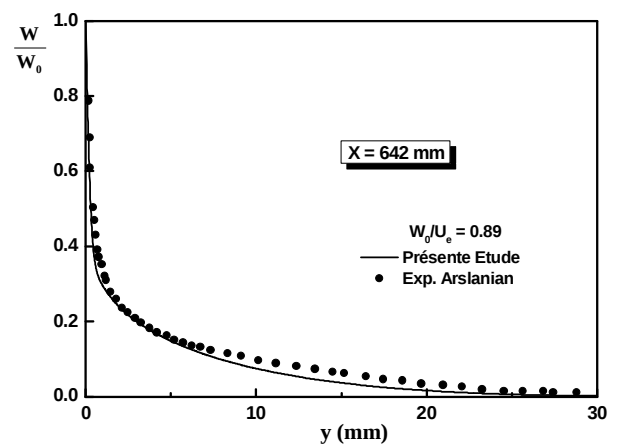
(g)



(h)

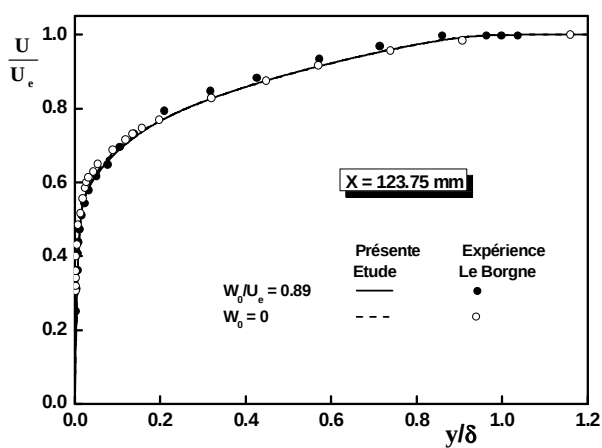


(i)

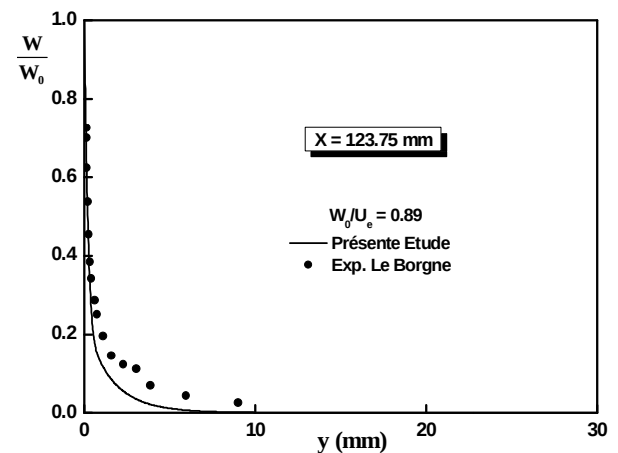


(j)

Figure 4.14 : Profils des vitesses moyennes à différentes sections en X.
(Comparaison avec les résultats d'Arslanian [28])



(a)



(b)

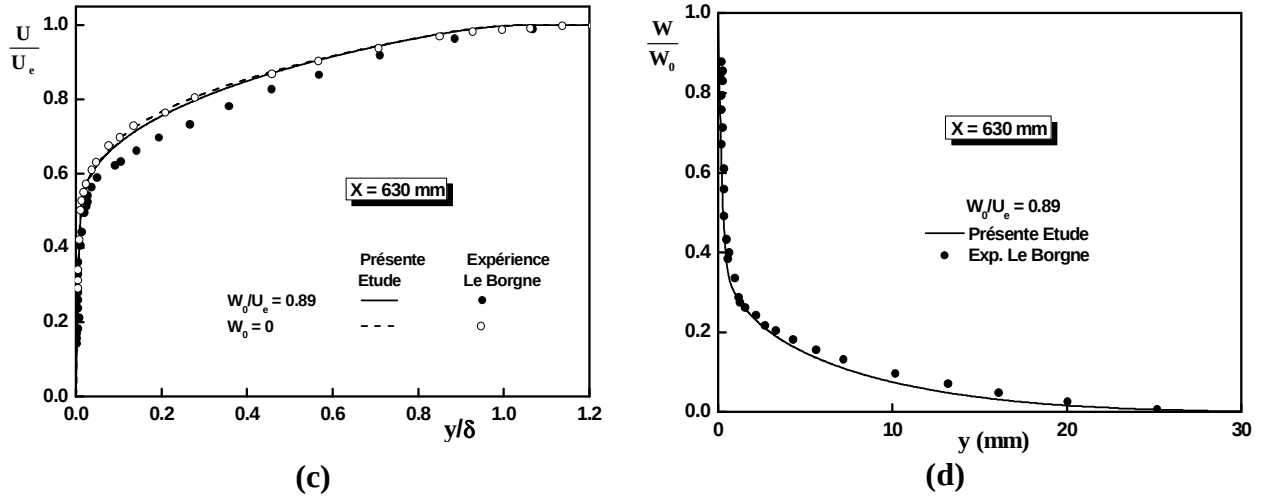


Figure 4.15 : Profils des vitesses moyennes à deux sections en X.

(Comparaison avec les résultats de Le Borgne [29])

Le module du vecteur vitesse q (q est la projection du vecteur vitesse dans le plan parallèle à la paroi) est donné par les figures 4.16 (a-b). On constate que les résultats numériques sont en bon accord avec ceux de l'expérience de Le Borgne [29] mais avec un faible écart loin de la paroi.

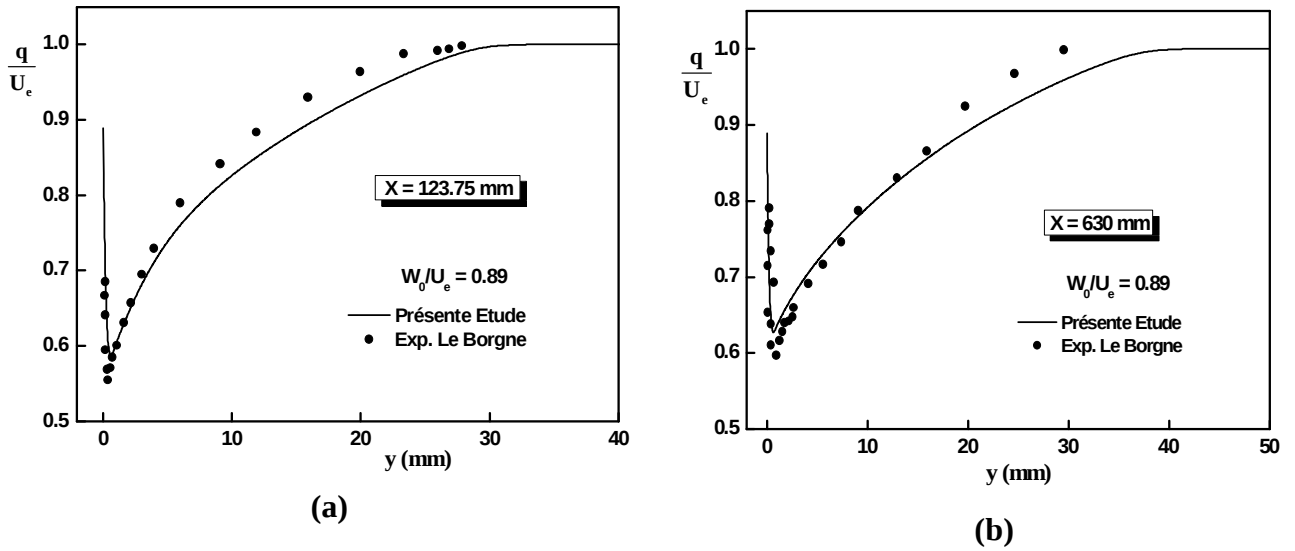


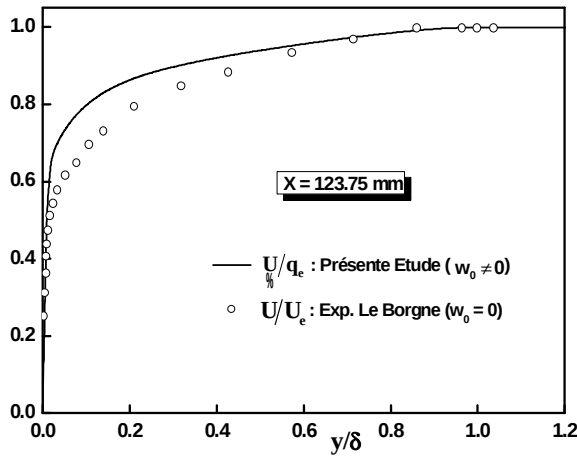
Figure 4.16 : Module du vecteur vitesse moyenne

Le Borgne [29] et Arzoumanian [33] ont mis en évidence une restructuration d'écoulement en bidimensionnel loin en aval du bord d'attaque de la partie mobile dans un repère relatif lié à celle-ci. Dans ce repère les composantes du vecteur vitesse s'écrivent comme suit :

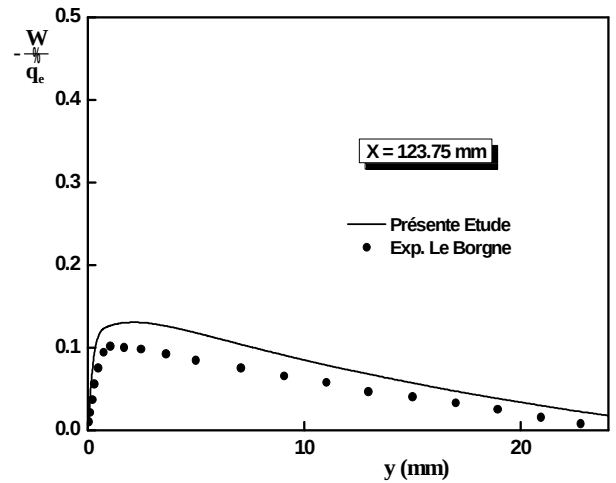
$$U_{\frac{y}{\delta}} = \left(\frac{U_e}{Q_e} \right) U - \left(\frac{W_0}{Q_e} \right) (W - W_0)$$

$$W_{\frac{y}{\delta}} = \left(\frac{W_0}{Q_e} \right) U - \left(\frac{U_e}{Q_e} \right) (W - W_0)$$

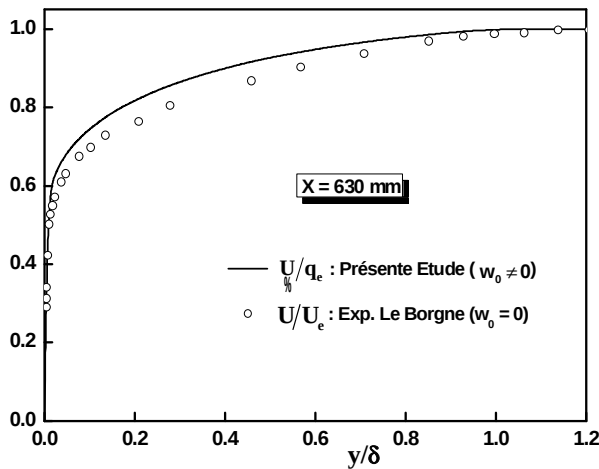
Nous avons représenté sur les figures 4.17 (a-f) les évolutions des composantes longitudinale ($U_{\frac{y}{\delta}}$) et transversale ($W_{\frac{y}{\delta}}$) du vecteur vitesse dans un repère relatif pour des sections différentes. Les calculs numériques avec le mouvement transversal de la paroi ont été comparés à ceux obtenus par Le Borgne [29] et Nait Bouda [37] dans le cas fixe ($W_0 = 0$). On remarque lorsque l'on s'éloigne du bord d'attaque de la paroi mobile ($X = 950.4$ mm) que nos résultats dans un repère relatif se rapprochent de ceux obtenus notamment par Le Borgne et Nait Bouda pour la paroi fixe. Ceci confirme, comme l'on déjà note Le Borgne et Arzoumanain, que la restructuration en couche limite bidimensionnelle se produit bien dans repère lié à la paroi mobile.



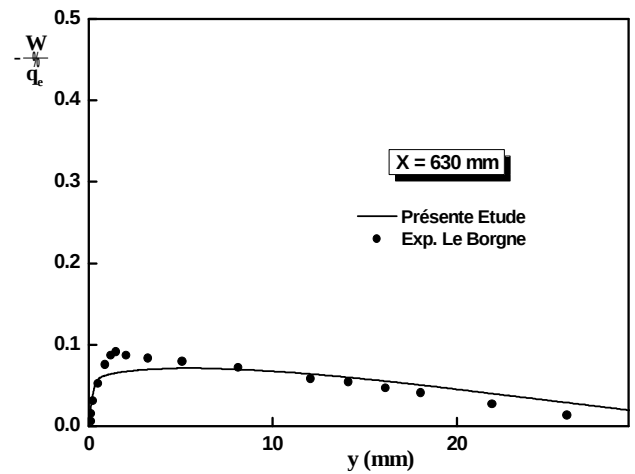
(a)



(b)



(c)



(d)

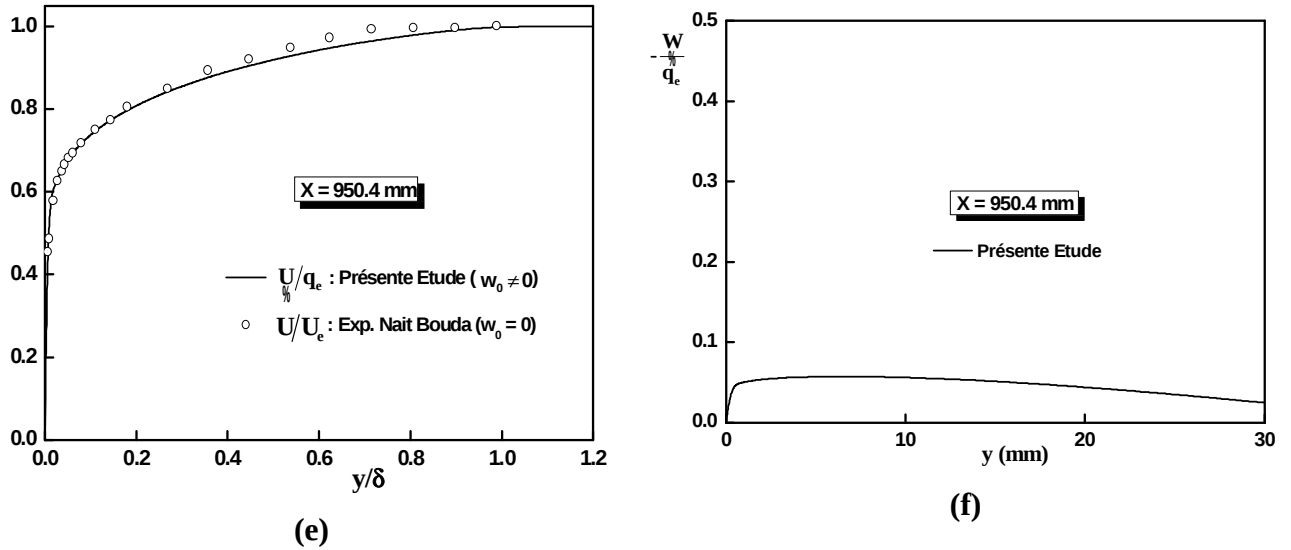


Figure 4.17 : Profil de vitesse longitudinal dans un repère relatif.

4.3.4. Champ turbulent

Sur les figures 4.18 (a-b) nous avons représenté les évolutions de l'énergie cinétique turbulente en fonction de la distance normale à la paroi y rapportée à l'épaisseur de la couche limite pour deux sections distinctes. On constate que l'essentiel de l'influence du cisaillement transversal se manifeste au voisinage de la paroi. Une augmentation considérable de l'énergie cinétique turbulente au voisinage de la paroi est bien remarquable. Ceci est dû à la contribution des gradients de la composante transversale du vecteur vitesse dans le terme de production qui apparaît dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente. Cependant la zone d'influence tend à s'élargir en s'éloignant du bord d'attaque de la partie mobile (fig. 4.18-b).

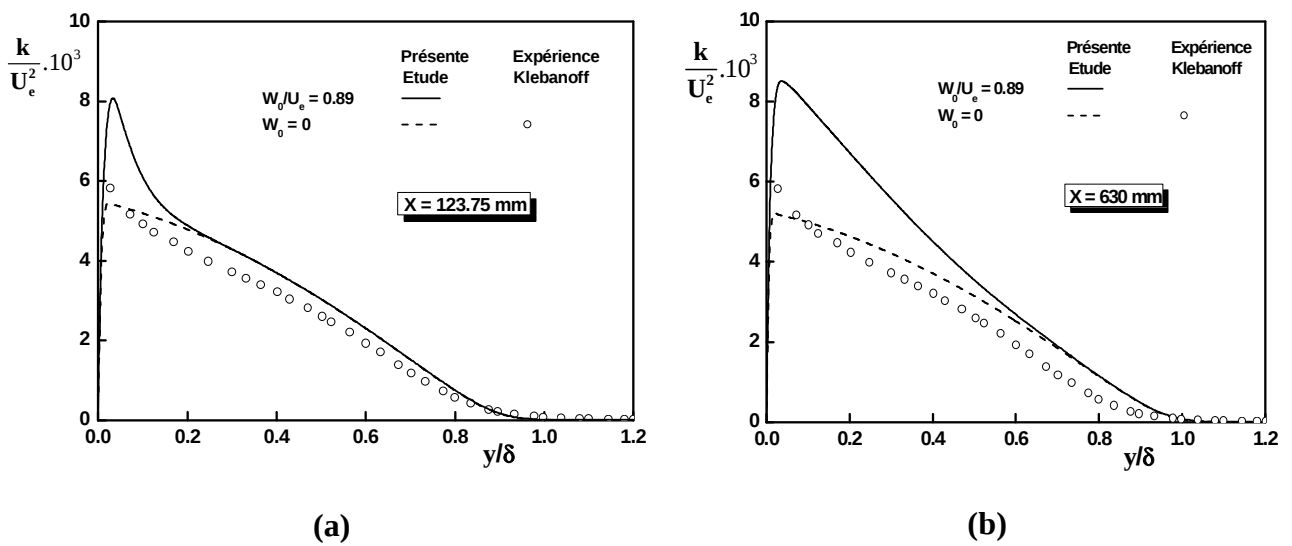


Figure 4.18 : Evolution de l'énergie cinétique turbulente

Les figures 4.19 et 4.20 représentent les évolutions des isoénergies cinétique turbulente le long de la plaque pour les deux cas avec et sans mouvement de la paroi. Lorsque la paroi est soumise à un cisaillement transversal un accroissement des niveaux d'énergie est bien clair. Cet effet persiste même dans la partie fixe en aval. Ceci est dû, comme nous l'avons signalé ci-dessus, à la contribution des gradients de la composante transversale du vecteur vitesse dans le terme de production de la turbulente sur une distance relativement importante.

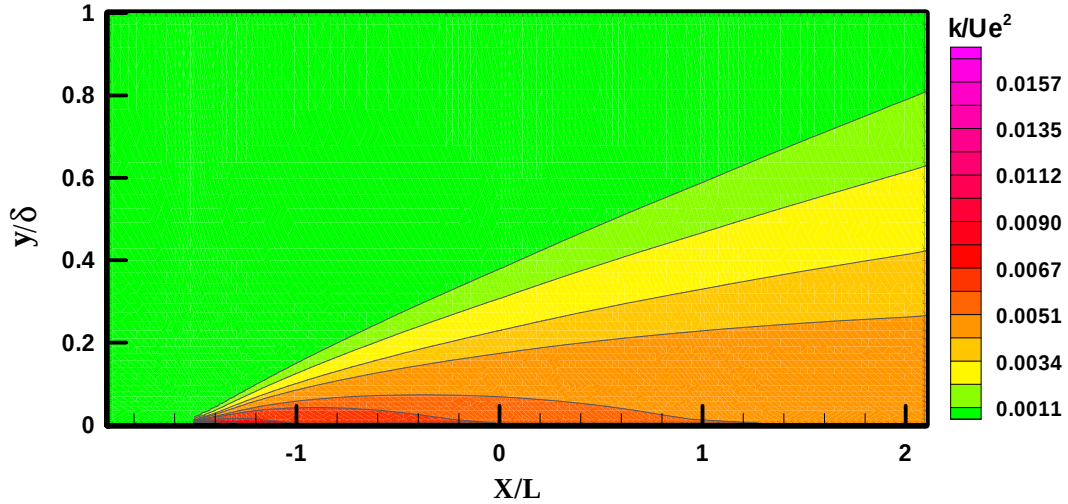


Figure 4.19 : Isoénergies cinétique turbulente le long de la plaque
Cas sans mouvement de la paroi ($W_0 = 0$)

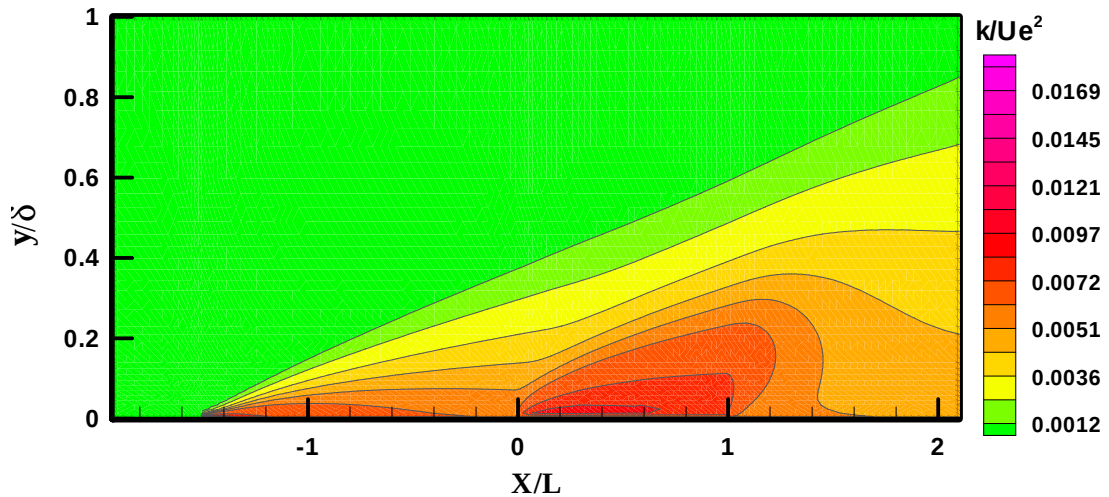


Figure 4.20 : Isoénergie cinétique turbulente le long de la plaque
Cas de paroi mobile ($W_0 \neq 0$)

Les figures 4.21 (a-b) donnent les évolutions du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente (ε) rapporté à la vitesse de frottement et l'épaisseur de la couche limite, pour les deux cas fixe et mobile. Le mouvement transversal de la paroi entraîne une augmentation appréciable du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente. On constate que si l'énergie cinétique turbulente augmente son taux de dissipation augmente aussi.

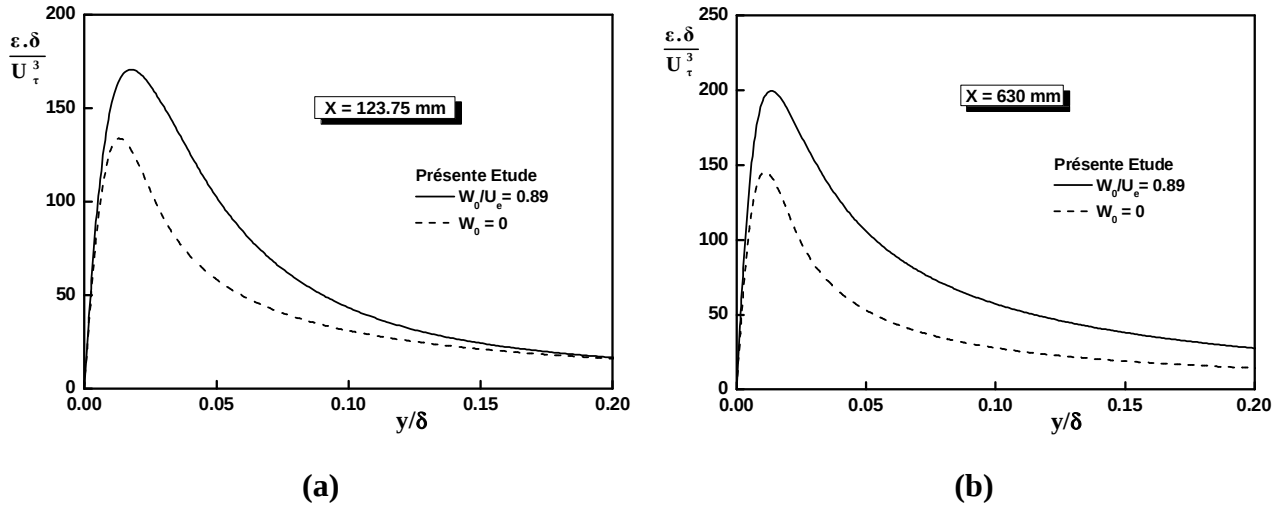


Figure 4.21 : Evolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Les figures 4.22 et 4.23 représentent les évolutions des iso-dissipations de l'énergie cinétique turbulente le long de la plaque. On constate que la dissipation a lieu dans une zone très proche de la paroi où les contraintes visqueuses sont dominantes. Lorsque la paroi est mise en mouvement transversalement il apparaît une augmentation des niveaux des taux de dissipation.

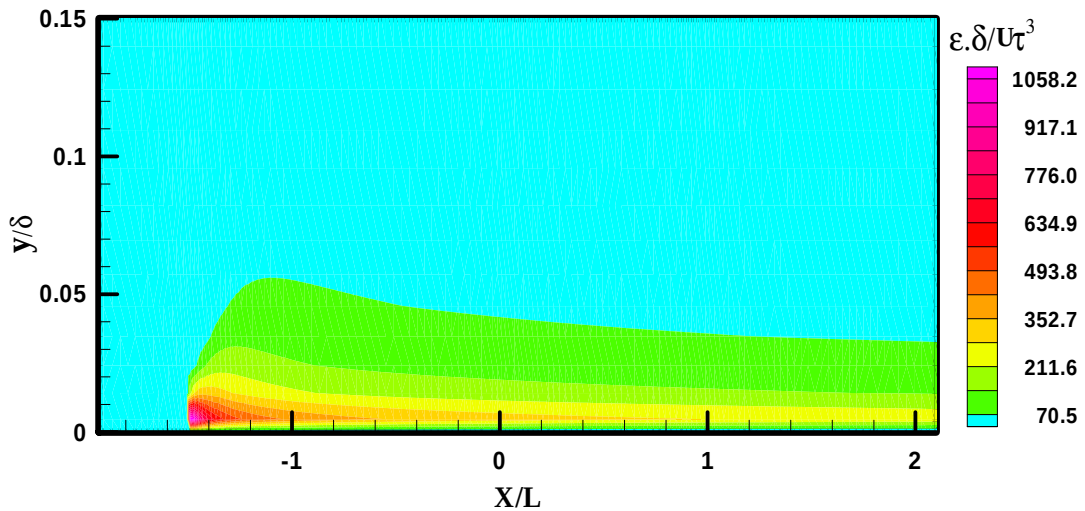


Figure 4.22 : Les iso-dissipations de l'énergie cinétique turbulente le long de la plaque
Cas sans mouvement de la paroi ($W_0 = 0$)

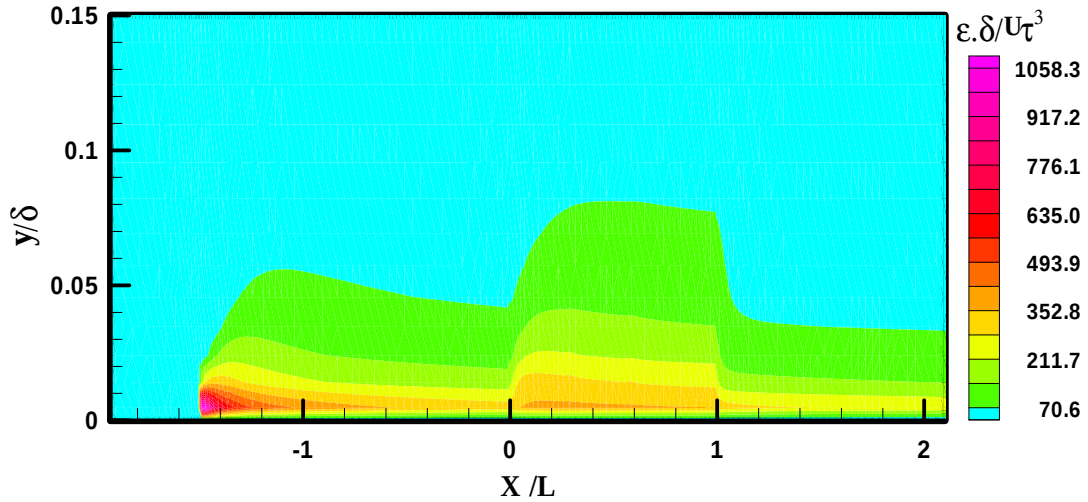


Figure 4.23 : Les iso-dissipations de l'énergie cinétique turbulente le long de la plaque
Cas avec mouvement de la paroi ($W_0 \neq 0$)

Les différentes composantes du tenseur de Reynolds sont calculées à l'aide de la formule de Boussinesq :

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k$$

Les évolutions des écarts types de fluctuations de vitesse sont données par les figures 4.24 (a-b), 4.25 (a-b) et 4.26 (a-b) respectivement. La comparaison des deux cas examinés fixe et mobile est effectuée avec l'expérience de Le Borgne [29] sauf pour les écarts types de fluctuations normales de vitesse où il n'y a pas de résultats expérimentaux. Un accord satisfaisant général est obtenu entre les deux prédictions, sauf dans les zones de proche paroi. Néanmoins un écart est observé entre le cas fixe ($W=0$) et le cas mobile ($W \neq 0$) pour les deux prédictions numérique et expérimentale.

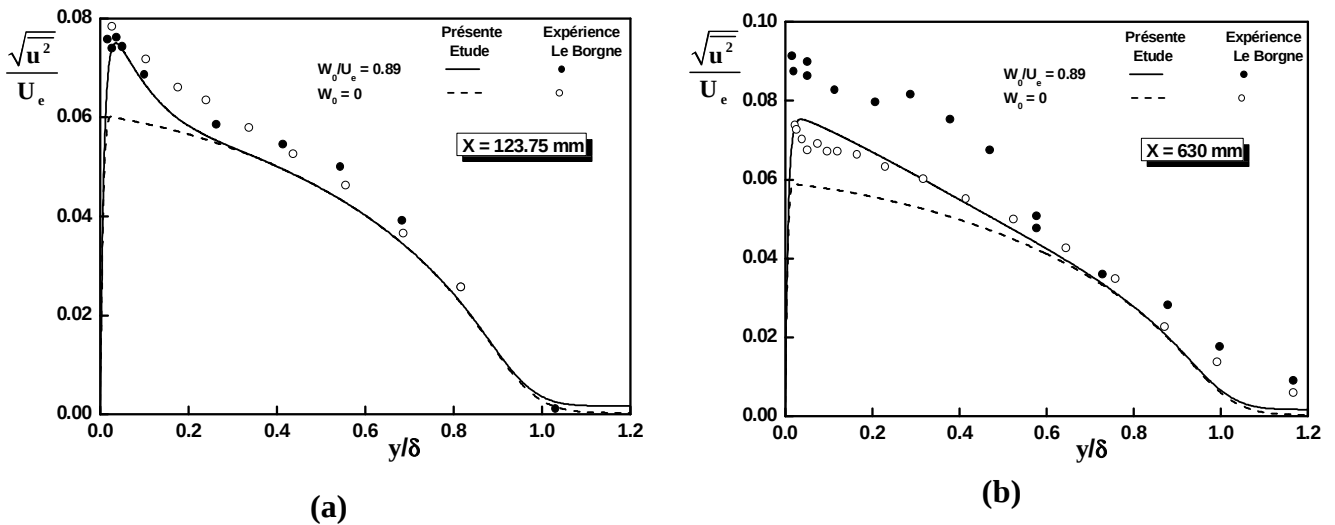


Figure 4.24 : Evolution des écarts types des fluctuations longitudinales de vitesse

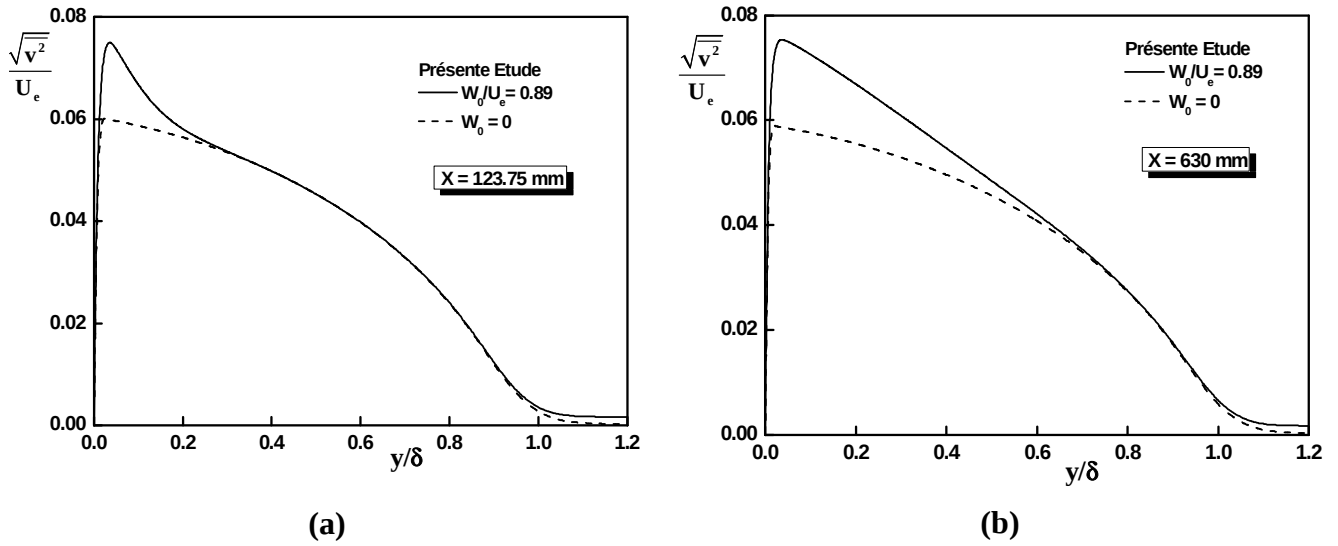


Figure 4.25 : Evolution des écarts types des fluctuations normales de vitesse

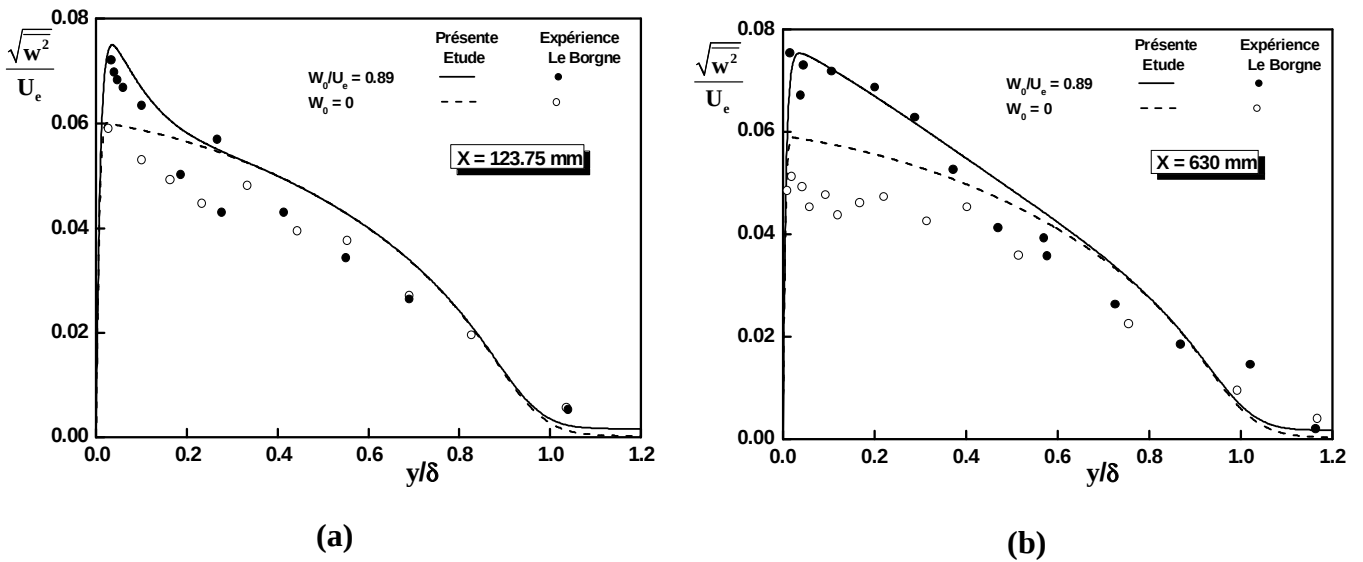


Figure 4.26 : Evolution des écarts types des fluctuations transversales de vitesse

Il apparaît dans la couche limite turbulente tridimensionnelle une contrainte de cisaillement $\overline{vw}$ qui participe à la diffusion de la quantité de mouvement transversale autre que la contrainte $\overline{uv}$ qui participe à la diffusion à la quantité de mouvement longitudinale. Les évolutions de ces tensions sont données par les figures 4.27 (a-b) et 4.28 (a-b). On remarque sur les figures 4.27 (a-b) des écart assez importants entre le calcul et les résultats expérimentaux de Le Borgne surtout à $X = 123.75$ mm pour $\overline{uv}$ et $X = 630$ mm pour $\overline{vw}$. Ces écarts nous semblent dûs d'une part aux techniques de mesures parce que ces deux quantités ont été déterminées indirectement à partir de l'intégration des équations de la

quantité de mouvement. D'autre part à l'utilisation de la formule de Boussinesq. Il serait intéressant d'utiliser un modèle algébrique aux tensions de Reynolds pour avoir une bonne estimations des composantes des tensions de Reynolds.

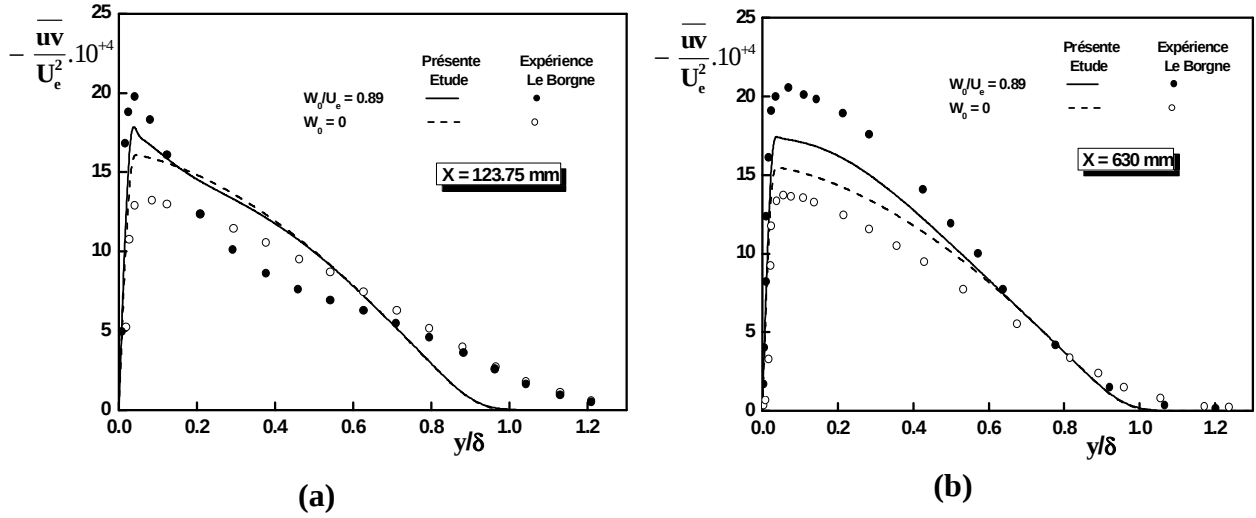


Figure 4.27 : Evolutions de la tension de Reynolds $\overline{uv}$

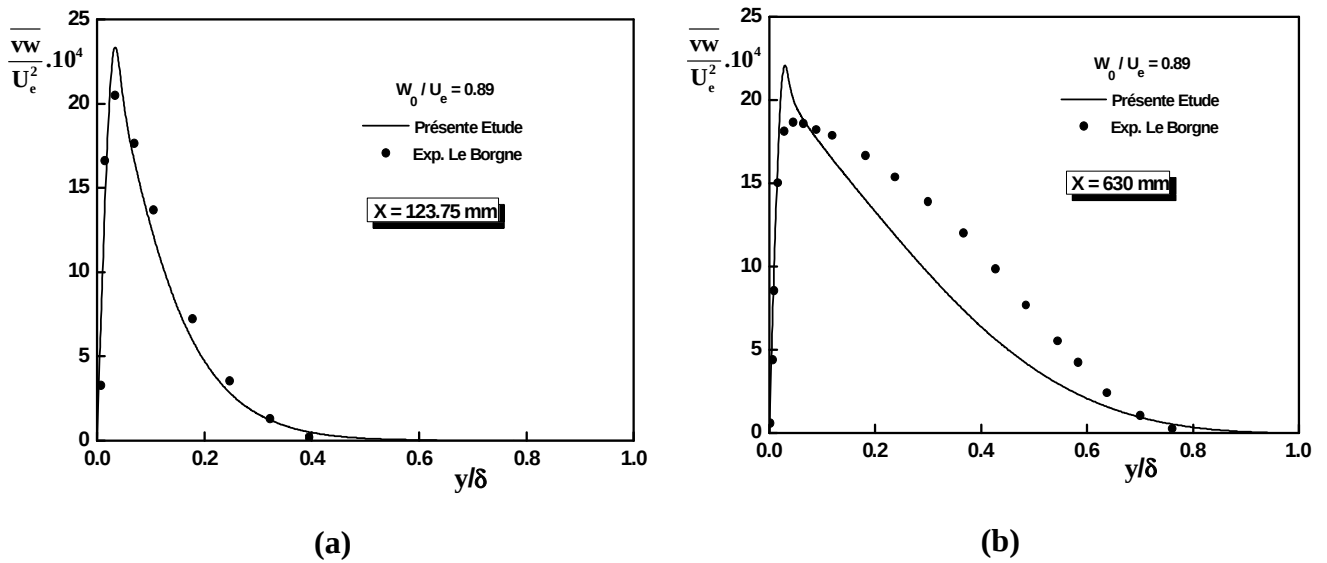


Figure 4.28 : Evolutions de la tension de Reynolds $\overline{vw}$

Les iso-viscosité turbulente sont données par les figures 4.29 et 4.30. On constate que le mouvement transversal de la paroi provoque une augmentation des niveaux de la viscosité turbulente au bord d'attaque. Plus qu'on s'éloigne en aval la viscosité turbulente diminue, ceci pourrait s'expliquer par une destruction des structures tourbillonnaires. Ce résultat a été

signalé par Lohmann [27] et Nait Bouda [36] a travers l'analyse spectrale. Il a trouvé que la rotation du cylindre entraîne un décalage spectral vers les hautes fréquences.

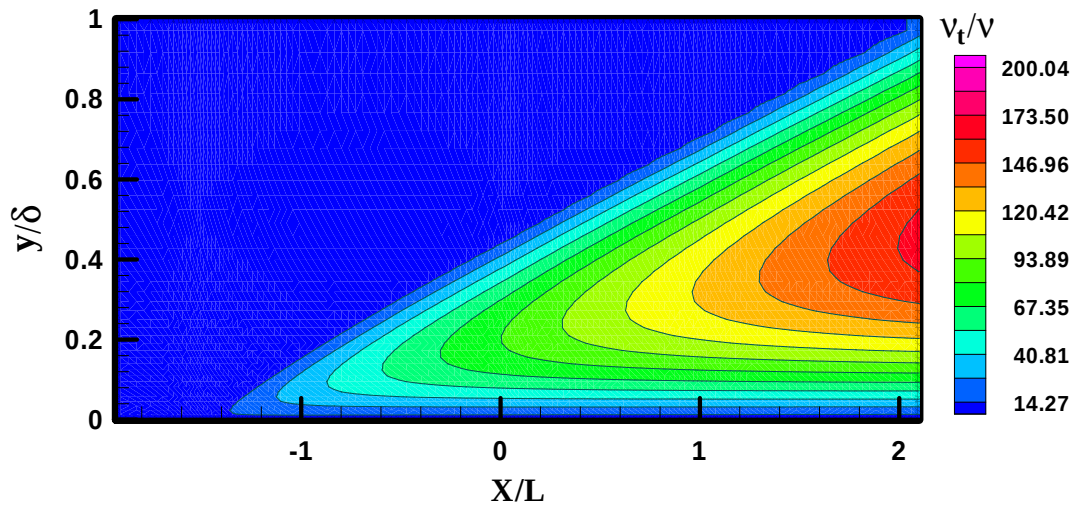


Figure 4.29 : Les iso-viscosité turbulente le long de la plaque
Cas sans mouvement de la paroi ($W_0 = 0$)

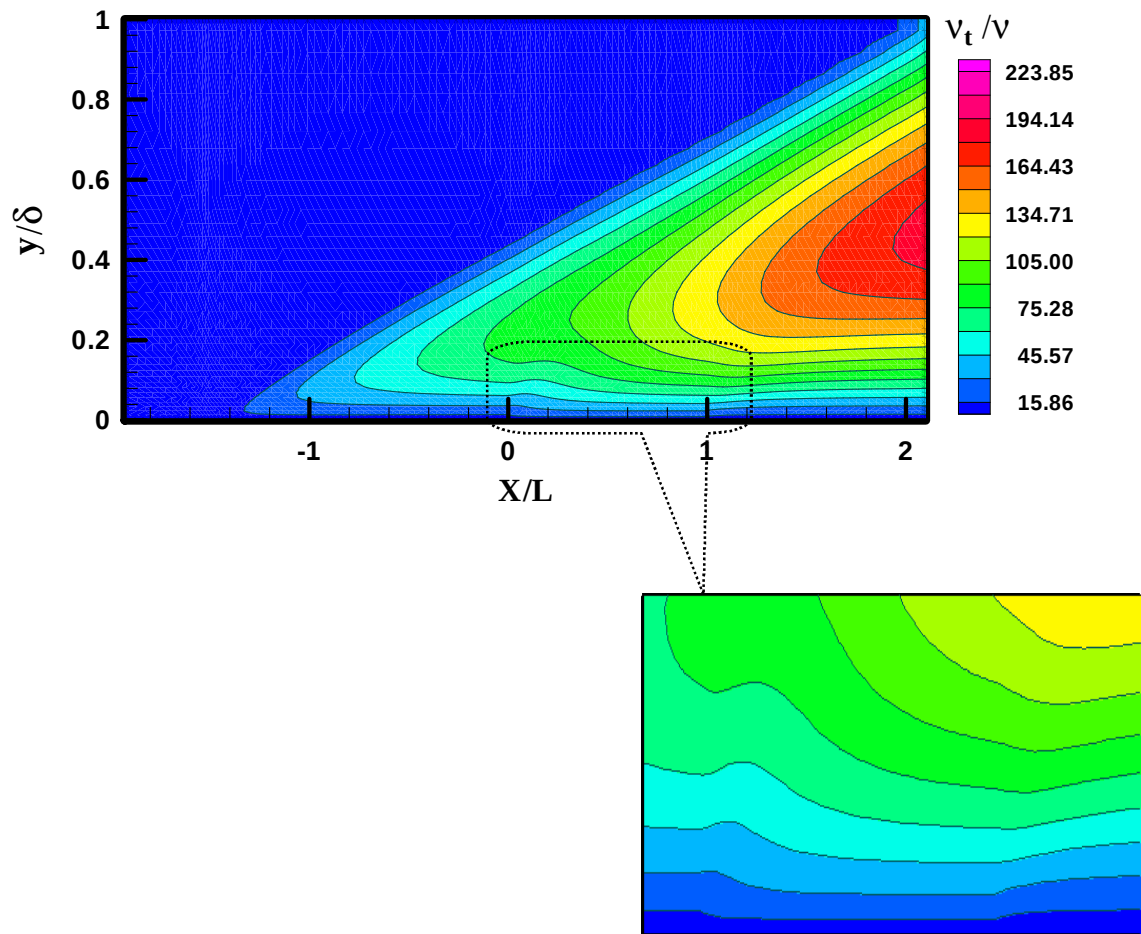


Figure 4.30 : Les iso-viscosité turbulente le long de la plaque
Cas avec mouvement de la paroi ($W_0 \neq 0$)

4.3.5. Champ thermique

Les écoulements rencontrés dans l'industrie sont souvent associés au transfert thermique pour cela nous avons fait les prévisions numériques pour le cas où toute la plaque (fixe – mobile – fixe) est chauffée. L'effet d'un cisaillement transversal sur le transfert de chaleur n'a fait à notre connaissance l'objet d'aucune étude. Expérimentalement, la difficulté de réalisation du montage est liée essentiellement au mouvement transversal de la paroi.

Les figures 4.31 (a-b) représentent les évolutions de la température en fonction de y/δ . On remarque que le mouvement transversal de la paroi entraîne une diminution de température. Ceci s'explique par une augmentation du transfert de chaleur comme le montre la figure 4.32 où l'on constate un accroissement du nombre de Nusselt (Nu) qui persiste même sur la partie fixe en aval.

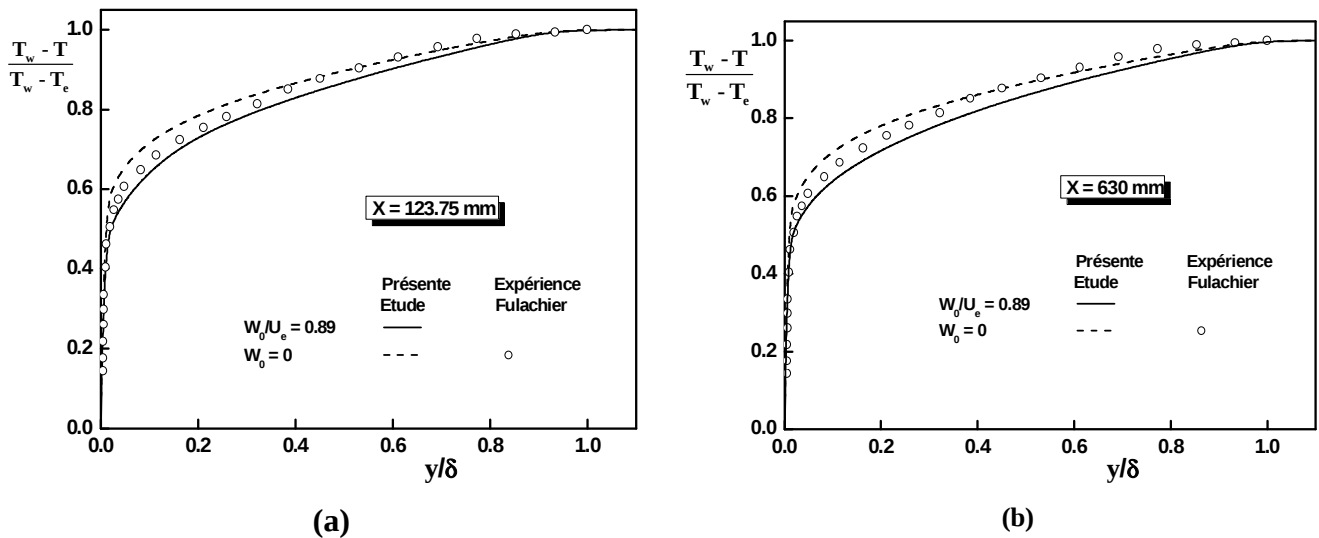


Figure 4.31 : Evolution de profils de la température moyenne

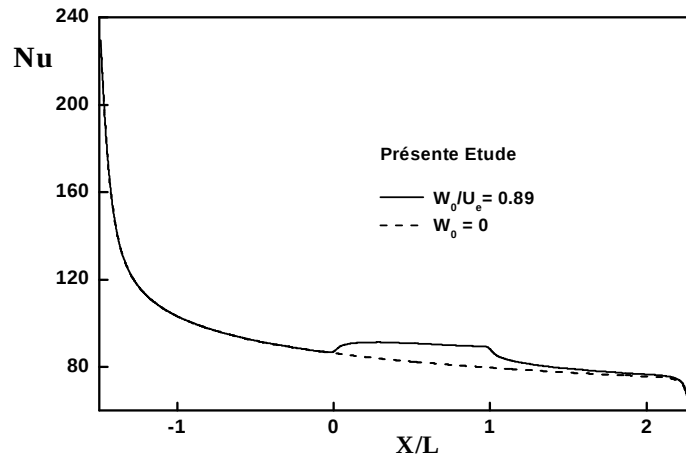


Figure 4.32 : Evolution du nombre de Nusselt le long de la plaque.

Les figures 4.33 et 4.34 montrent les variations des isothermes dans le cas fixe et mobile respectivement. On constate que le mouvement transversal de la plaque entraîne une augmentation des isothermes (Figure 4.35). Ceci s'explique par un dégagement de la chaleur vers les régions extérieures de la couche limite. Donc on peut conclure que la mobilité de la paroi favorise le transfert thermique.

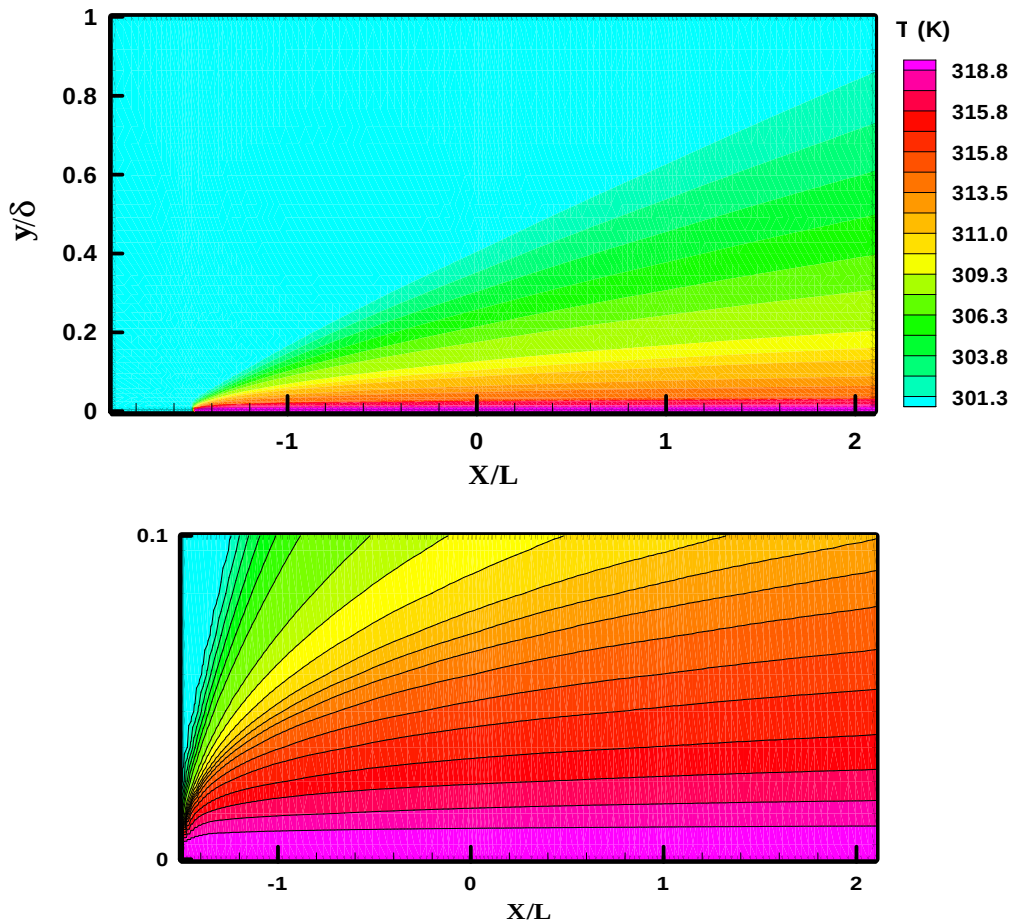


Figure 4.33 : Les Isothermes le long de la plaque
– Cas de paroi fixe ($W_0 = 0$)

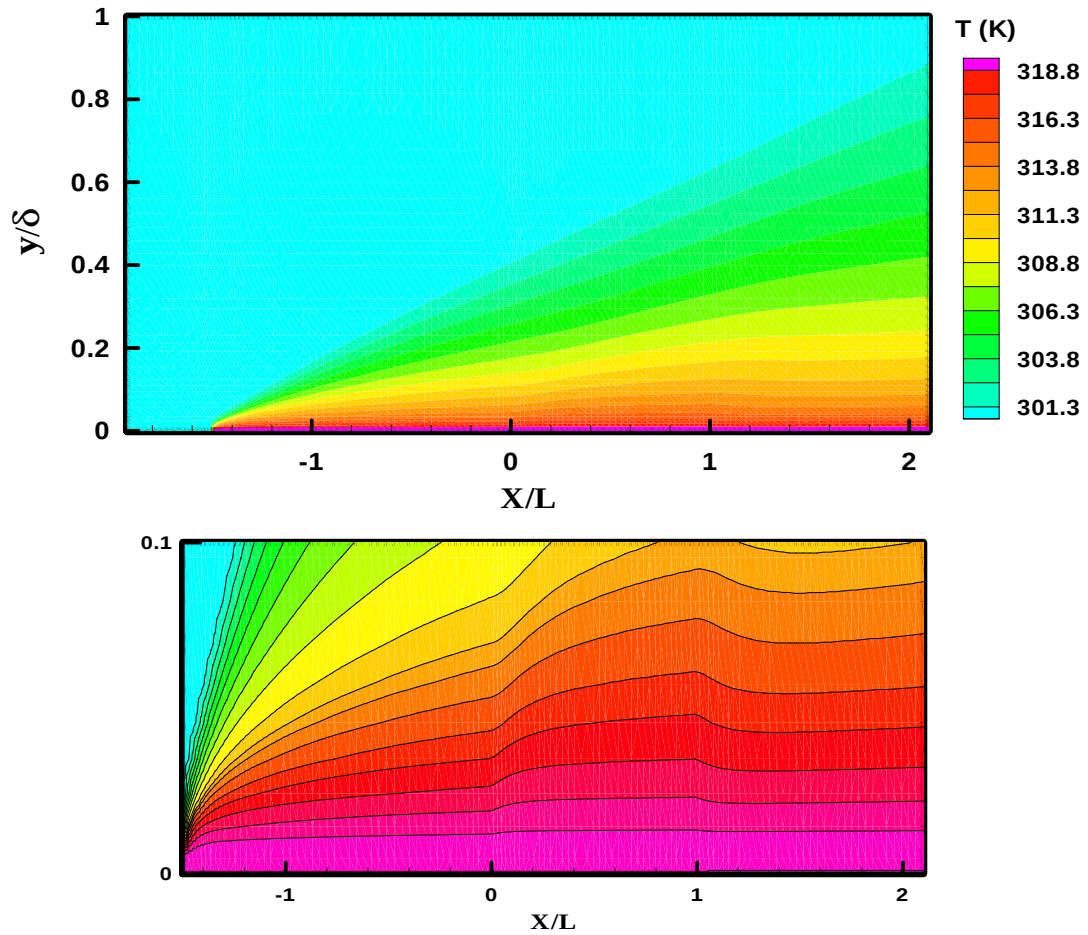


Figure 4.34 : Les Isothermes le long de la plaque
– Cas de paroi mobile ($W_0 \neq 0$)

La figure 4.35 schématise la zone d'influence de la contrainte transversale sur la couche limite. Il apparaît à l'intérieur de cette dernière une couche qu'on la désigne par « couche de rotation ». Cette couche gagne de plus en plus toute l'épaisseur de la couche limite sur la partie mobile. Arzoumanian [33] trouve que l'épaisseur de la couche de rotation suit la formule suivante :

$$\delta_z = 0.335 \times X^{0.66}$$

Cependant, l'épaisseur de la couche de rotation diminue progressivement dans la partie fixe en aval et disparaît totalement dans une section bien avancée.

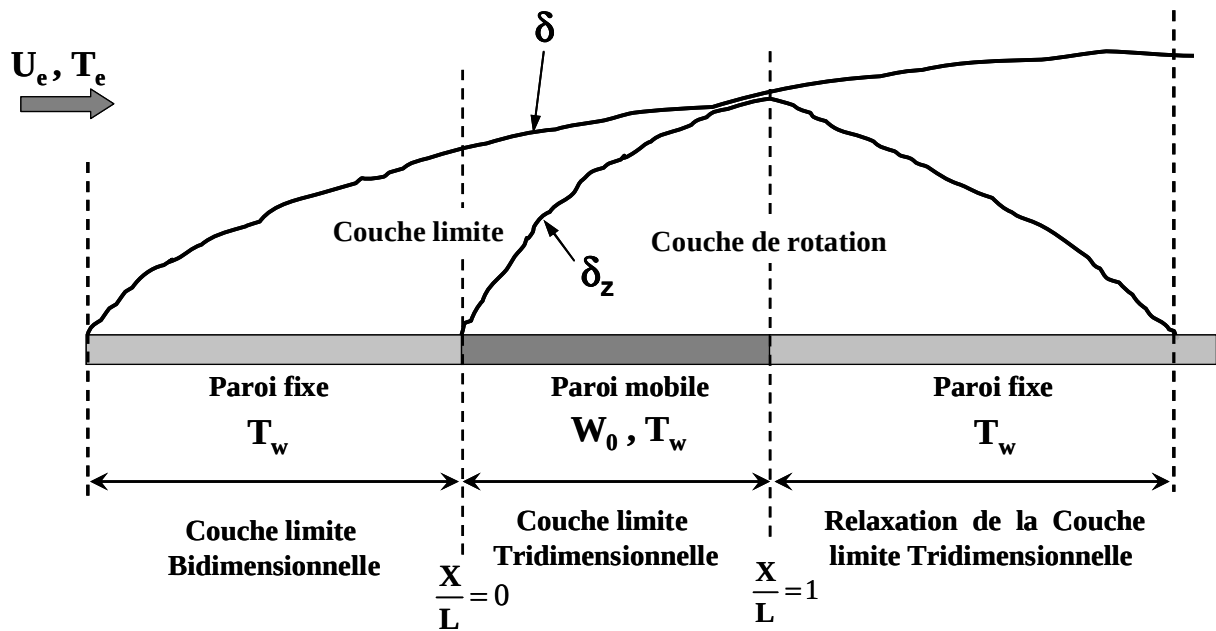


Figure 4.35: Zone d'influence du mouvement transversal de la paroi.

4.3.6. Conclusion

Nous avons remarqué que la contrainte transversale entraîne une augmentation de toutes les grandeurs turbulentes par contre la diminution de la vitesse longitudinale observée par l'expérience n'as pas été retrouvée numériquement à cause de l'emploi d'un raccordement par la même loi logarithmique. Par contre la loi utilisée pour la vitesse transversale donne de très bons résultats.

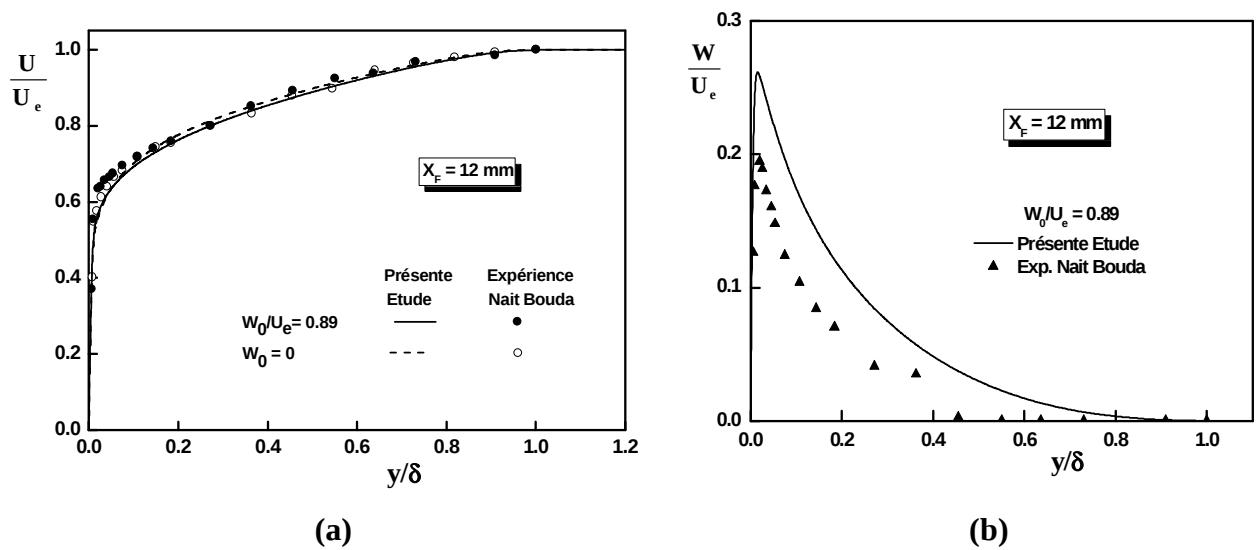
Nous avons observé aussi que la contrainte transversale entraîne d'une part une diminution de la température moyenne et d'autre part une augmentation du transfert thermique. On peut conclure que la mobilité de la paroi favorise le transfert thermique.

4.4. Etude de la relaxation d'une couche limite sur la partie fixe en aval de la paroi mobile

Dans cette partie nous avons étudié la relaxation de la couche limite sur la partie fixe en aval de la paroi mobile. Les différentes prédictions numériques ont été comparées à l'expérience de Nait Bouda [37].

4.4.1. Vitesse moyenne

Les évolutions des composantes longitudinale et transversale du vecteur vitesse sont données par les figures 4.36 (a-f). On observe une concordance entre les prédictions numériques et les résultats expérimentaux de Nait Bouda [37] pour la composante longitudinale U . Cependant un écart est remarqué près de la paroi. Dans le cas où le mouvement transversal de la paroi est appliqué, l'expérience montre une augmentation de la vitesse longitudinale qui s'explique selon Nait Bouda [37] par une accélération de l'écoulement, qui serait provoquée par l'arrivée des masses de fluides énergétique en provenance de l'amont. Par contre le calcul donne les mêmes résultats avec et sans mouvement de la paroi. Pour la composante transversale W , on voit que plus qu'on s'éloigne dans la partie fixe en aval l'écart devient de plus en plus important. Ceci pourrait être dû à la faiblesse du modèle qui est basé sur une viscosité isotrope et utilise un raccordement par la loi logarithmique pour la composante transversale.



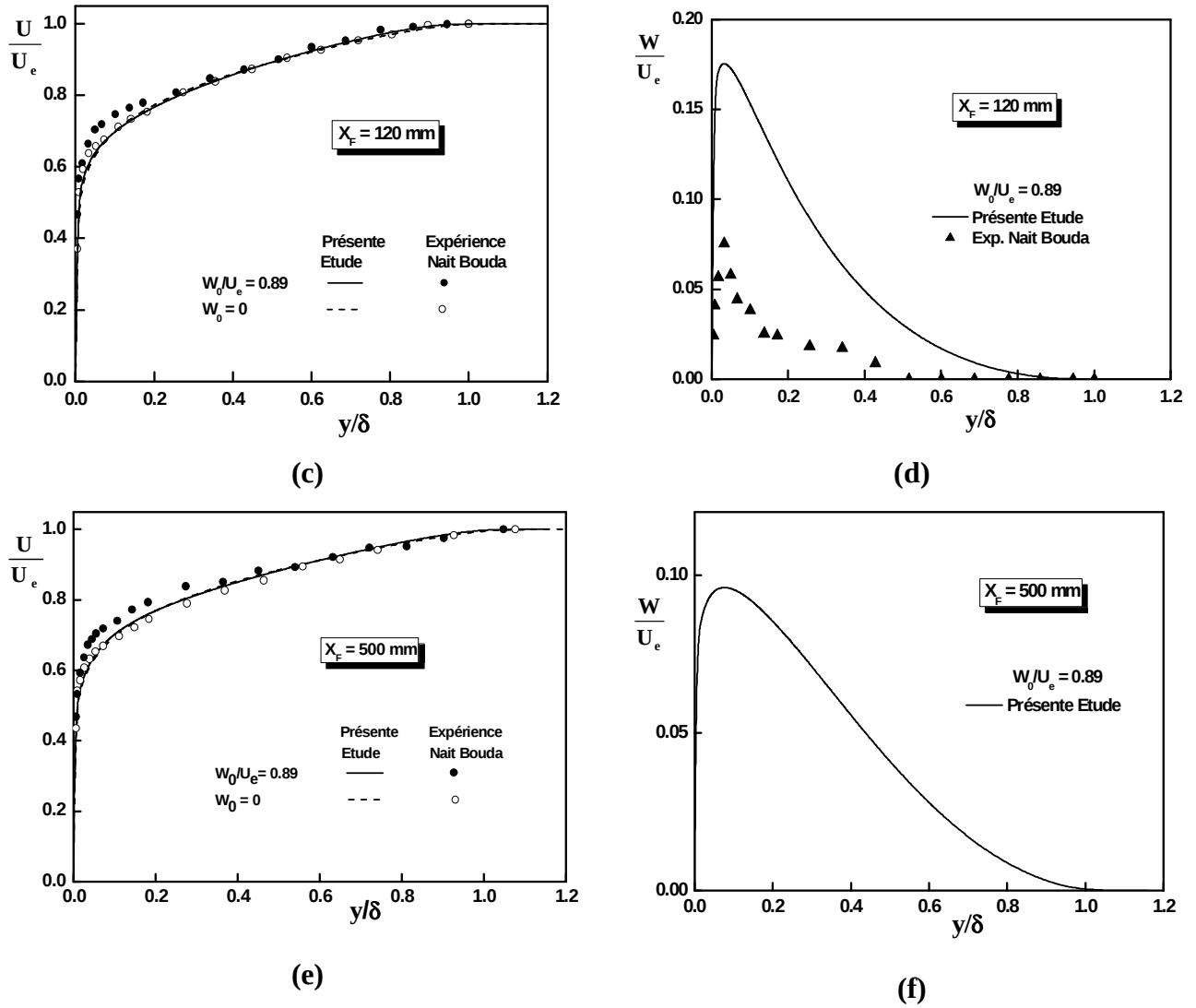


Figure 4.36 : Evolutions des profils des vitesses moyennes longitudinale et transversale

4.4.2. Champ turbulent

Les figures 4.38 (a-d) donnent les variations de l'énergie cinétique turbulente. On remarque que si la paroi est mise en mouvement l'augmentation de k persiste dans la partie fixe en aval (fig. 4.38 (a-b)). Cet accroissement s'atténue progressivement loin du bord d'attaque de cette partie comme le montre les figures 4.38 (c-d). On constate aussi sur ces dernières (figures 4.38 (c-d)) que dans les régions voisines de la paroi ($y < 0.1 \delta$), les valeurs de k sont proches pour le cas fixe et mobile, donc le cisaillement transversal a un effet dans une zone relativement loin de la paroi qu'on peut la situer entre $y = 0.1 \delta$ et $y = 0.8 \delta$.

Les évolutions du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de y/δ sont données par les figures 4.39 (a-d) pour plusieurs sections. On voit que la croissance de ε

persiste aussi (Fig. 4.39 (a-b)). Mais cette augmentation décroît progressivement où on trouve des résultats identiques pour les deux cas avec et sans mobilité de la paroi (Fig. 4.39 (c-d)).

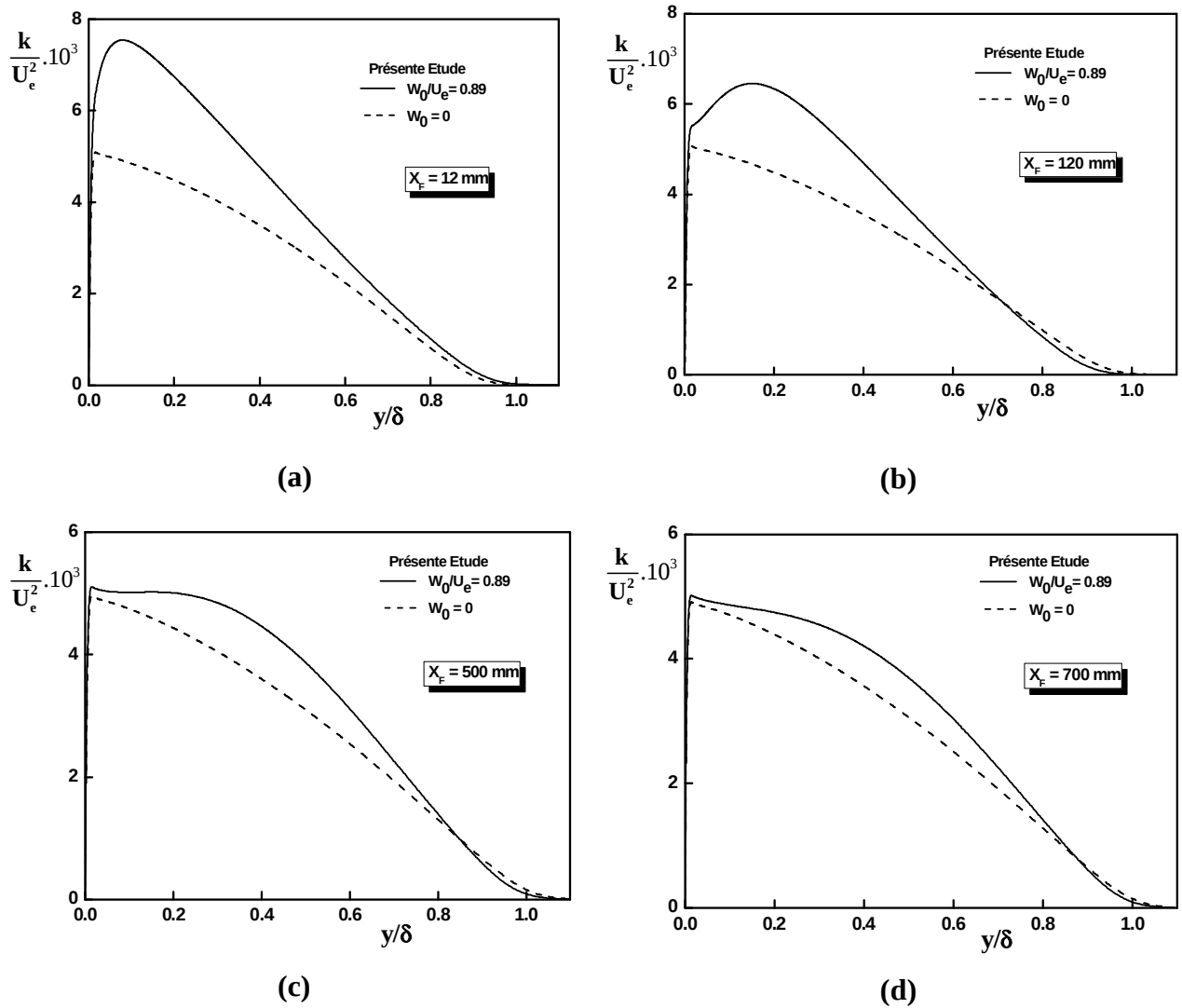
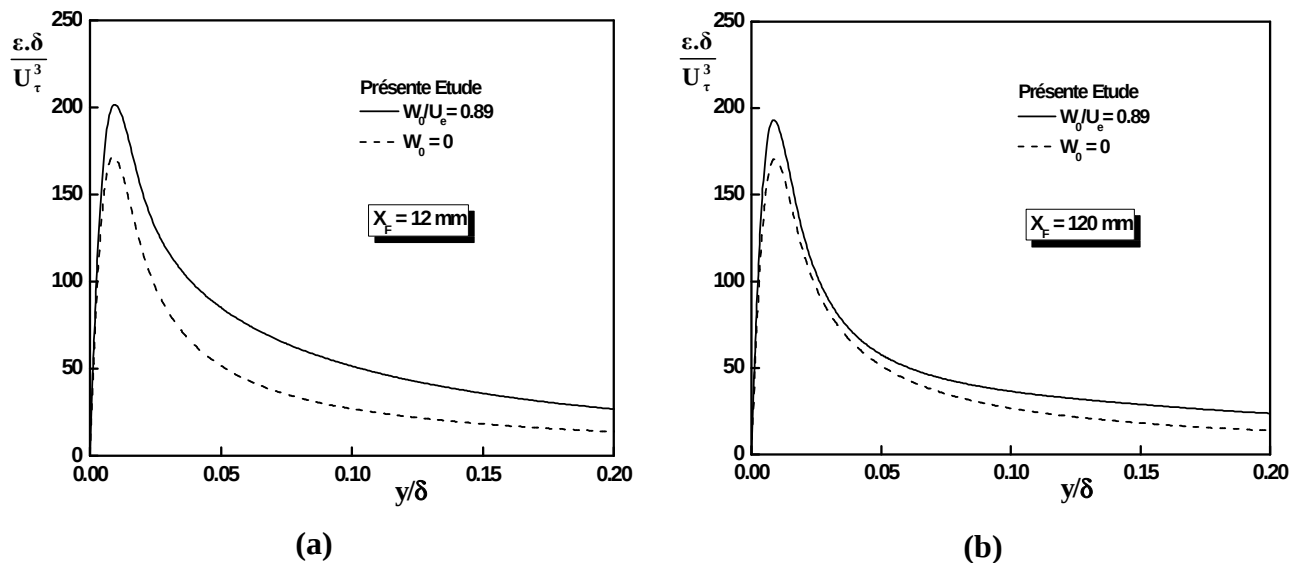


Figure 4.38 : Evolutions des profils de l'énergie cinétique turbulente



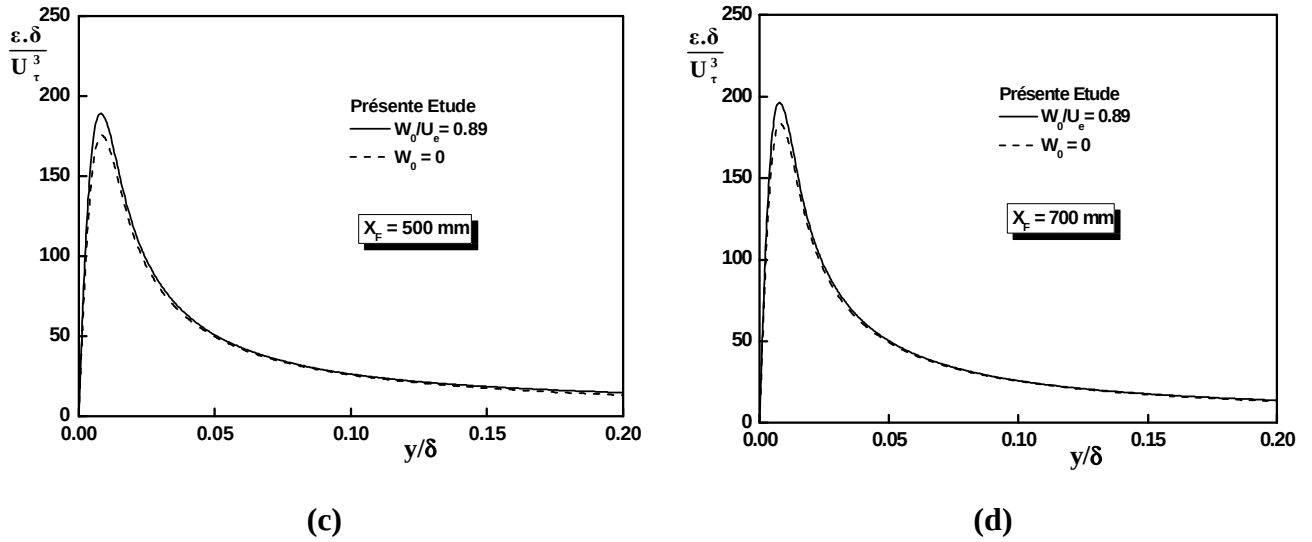


Figure 4.39 : Evolutions des profils du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Les variations des fluctuations de vitesse sont représentées sur les figures 4.36, 4.37 et 4.38 pour les deux valeurs de W_0 . La comparaison expérience – calcul numérique pour les fluctuations longitudinales de vitesse montre un bon compromis entre les deux prédictions sauf dans les régions voisines de la paroi. Pour les fluctuations normales et transversales de vitesse on trouve toujours l'écart entre une paroi fixe et mobile, néanmoins les résultats expérimentaux divergent de ceux obtenus par le calcul.

En outre l'effet du cisaillement est remarquable dans les sections voisines de la paroi mobile. Loin de la partie mobile la bidimensionnalité de l'écoulement est quasi rétablie (X_F ; 700 mm). Il est à noter que les fluctuations $\overline{v^2}$ ont été déterminées expérimentalement (Nait Bouda [37]) à l'aide de l'expression, $\sqrt{w^2} = 0.5 \left(\sqrt{u^2} + \sqrt{v^2} \right)$ qui nous semble être responsable de l'écart trouvé entre le calcul et l'expérience.

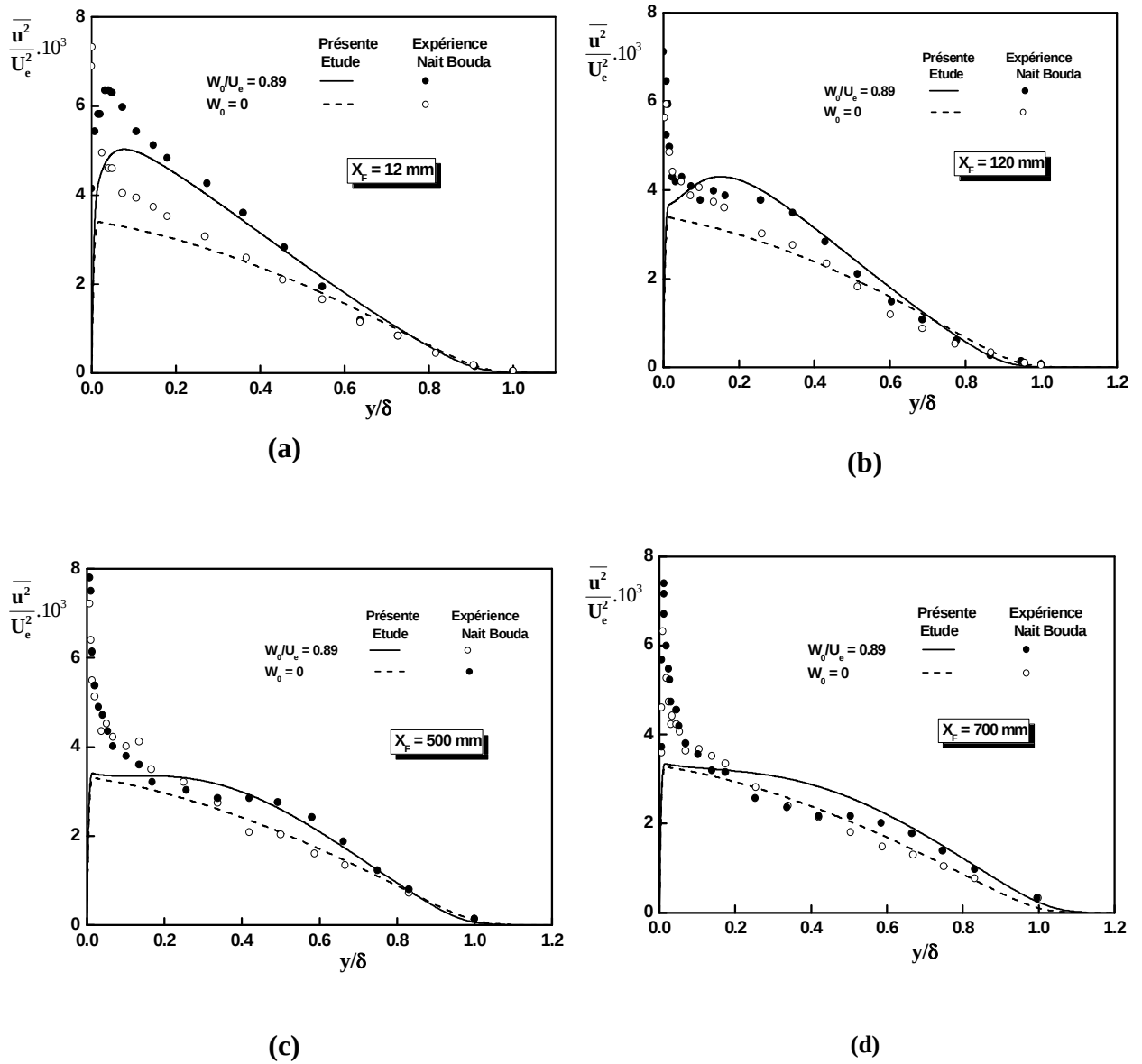


Figure 4.40 : Evolution des profils des fluctuations longitudinales de vitesse.

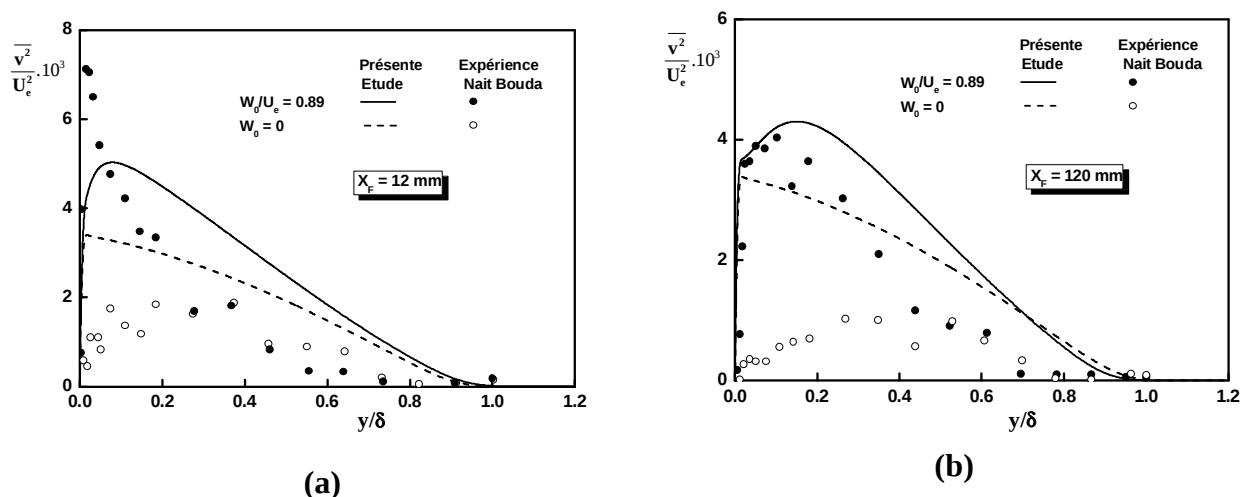


Figure 4.41 : Evolution des profils des fluctuations normales de vitesse

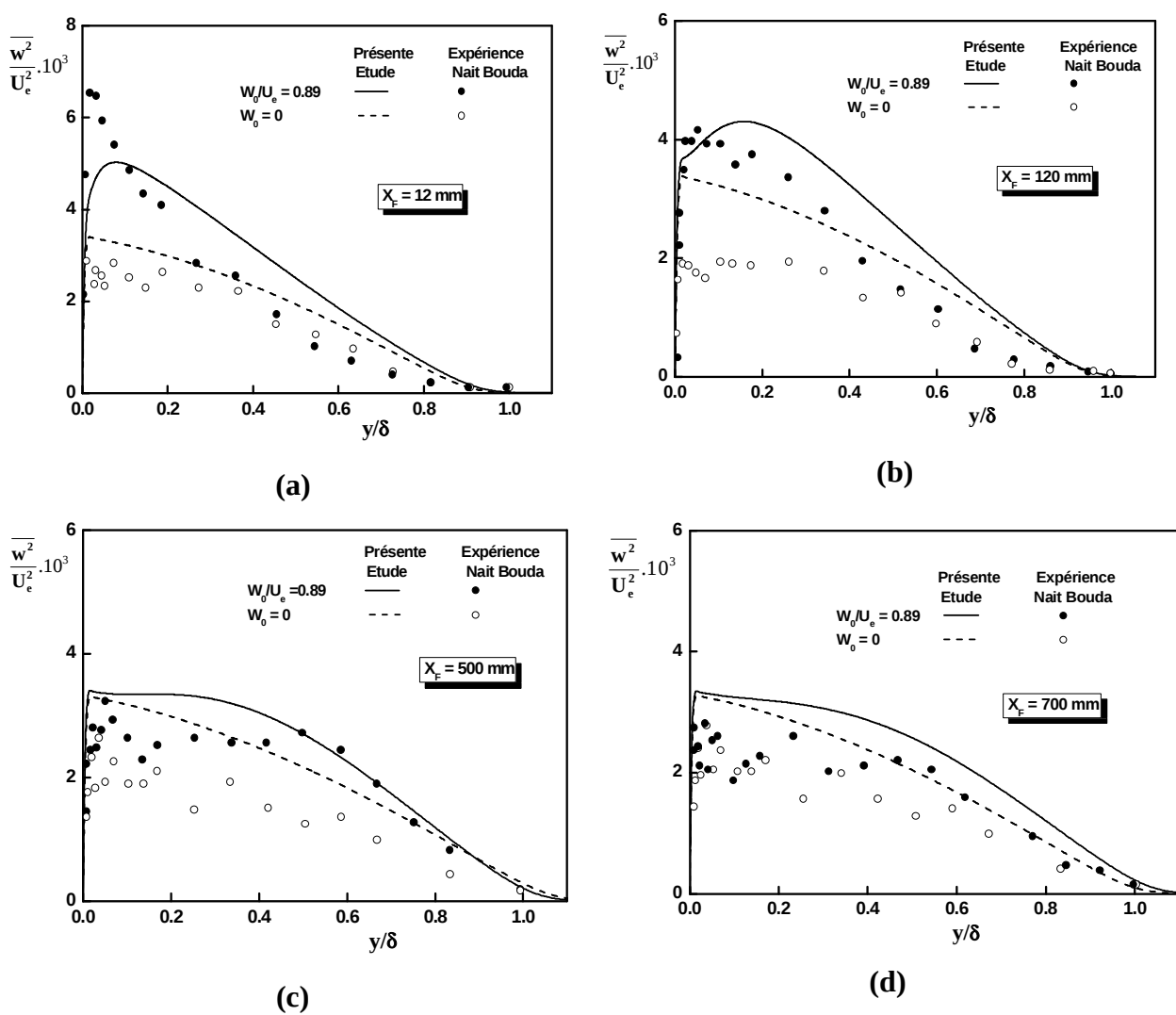


Figure 4.42 : Evolution des profils des fluctuations transversales de vitesse

4.4.3. Champ Thermique

Nous avons étudié également l'effet du mouvement transversal de la plaque sur le champ thermique dans la partie fixe en aval. Les figures 4.44 (a-d) montrent l'évolution de la température moyenne en fonction de y/δ . On remarque que l'écart entre le cas fixe et mobile persiste toujours dans cette partie, mais il s'atténue progressivement loin en aval.

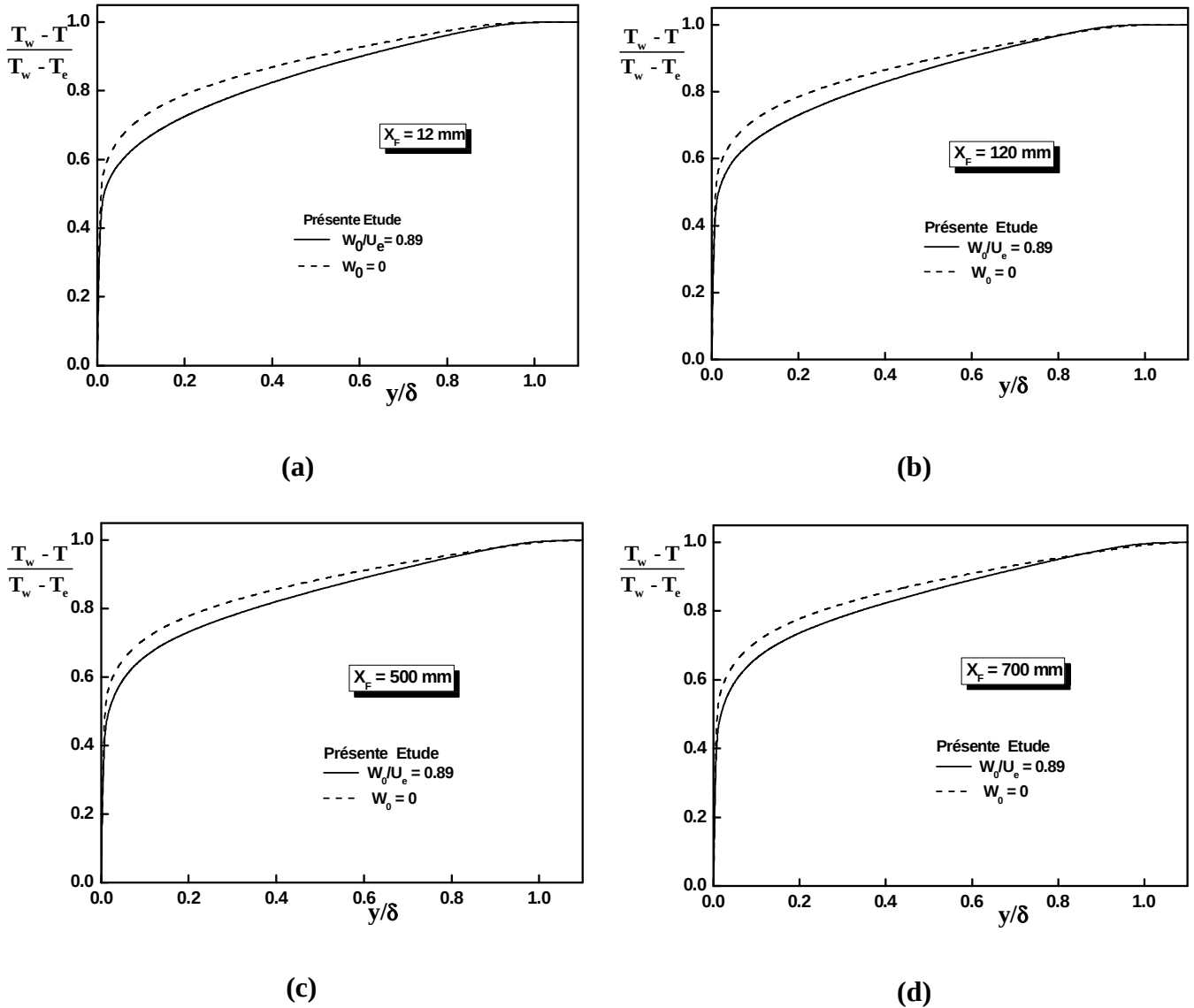


Figure 4.43 : Evolution des profils de températures moyennes.

4.4.4. Conclusion

Il révèle que l'effet de la contrainte transversale persiste dans la partie fixe en aval et entraîne une augmentation de toutes les grandeurs turbulentes. Nous avons remarqué que la loi logarithmique mise en œuvre pour la vitesse transversale ne reproduit pas les résultats expérimentaux. A cet effet il serait intéressant d'utiliser un modèle approprié.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GENERALE

La présente étude est basée sur la modélisation et la simulation numérique d'une couche limite turbulente. La couche limite bidimensionnelle au départ est soumise à l'effet d'un cisaillement transversal par la mise en mouvement d'une partie de la paroi. La couche limite devient complexe et tridimensionnelle aborde ensuite une partie fixe où elle doit se restructurer en couche limite bidimensionnelle.

La comparaison des trois modèles de turbulence pour le calcul d'une couche limite turbulente bidimensionnelle montre que les trois modèles ($k-\epsilon$, ASM et RSM) donnent des résultats proches pour le champ moyen. Les modèles ASM et RSM sont en meilleur accord avec les prédictions expérimentales que le modèle $k-\epsilon$. Cependant leur mise en œuvre est très délicate. En outre le modèle RSM nécessite plus de temps de calcul et d'espace mémoire. De ce fait, le modèle ASM est préférable pour avoir une meilleure représentation du tenseur de Reynolds.

Lorsque la partie centrale de la paroi est mise en mouvement dans le sens transversal de l'écoulement principal, nous avons remarqué une augmentation de toutes les grandeurs turbulentes (l'énergie cinétique turbulente, son taux de dissipation (ϵ) et les tensions de Reynolds). Néanmoins, la diminution de la composante longitudinale de vitesse (U) observée par l'expérience dans la zone de proche paroi n'a pas été retrouvée par le présent modèle. Ceci est dû à l'utilisation d'un raccordement par une même loi logarithmique dans les deux cas examinés avec et sans mobilité de la paroi. En conséquence, il serait nécessaire de faire des modifications sur la loi logarithmique universelle de la vitesse longitudinale U afin de tenir compte de l'effet du cisaillement transversal dans la région de très proche paroi.

Par ailleurs, l'originalité de notre contribution dans la présente étude est la mise en œuvre d'un raccordement par une loi logarithmique pour la composante transversale de vitesse W . Cette technique donne de bons résultats. En particulier elle constitue un bon compromis entre la facilité de mise en œuvre et temps de calcul. En effet elle pourrait être adaptée dans les codes de calcul des écoulements turbulents pariétaux sur des parois mobiles destinés à l'industrie.

Le bon accord obtenu entre nos prédictions numériques, pour une configuration d'une plaque plane mobile et celui d'un cylindre en rotation confirme que la courbure n'a pas d'effet

important lorsque l'épaisseur de la couche limite est suffisamment faible comparée au rayon du cylindre ($\delta \ll R$).

Relativement loin du bord d'attaque de la paroi mobile, dans un repère lié à celle-ci, on observe une restructuration de la couche limite tridimensionnelle en couche limite bidimensionnelle.

L'autre contribution originale apportée par le présent travail concerne l'étude de l'effet du cisaillement transversal sur le champ thermique. Les résultats obtenus montrent que la mobilité de la paroi entraîne :

- Une diminution de la température moyenne dans la région de très proche paroi.
- Une augmentation du transfert thermique par l'accroissement du nombre de Nusselt.

On peut dire que le cisaillement transversal favorise le transfert thermique.

Nous avons aussi examiné le comportement de la couche limite sur la paroi fixe en aval. Les résultats obtenus montrent que l'effet du cisaillement transversal introduit en amont persiste dans les premières sections de cette partie où on observe une augmentation de toutes les grandeurs turbulentes (énergie cinétique turbulente, son taux de dissipation et les tensions de Reynolds). Plus loin en aval l'influence s'atténue progressivement et l'écoulement tend à redevenir bidimensionnel. Cependant, l'augmentation de la vitesse longitudinale observée expérimentalement n'apparaît pas dans les présentes prédictions numériques. Ainsi le raccordement utilisé pour la vitesse transversale par une loi logarithmique ne reproduit pas bien les résultats expérimentaux dans la partie fixe en aval. Donc, il serait préférable d'utiliser dans cette partie un modèle approprié qui peut tenir compte de l'anisotropie de la viscosité tourbillonnaire et les effets de paroi.

ANNEXE

Algorithme de Thomas T.D.M.A

Considérons un système d'équations sous forme tri-diagonale :

$$\phi_1 = C_1 \quad (1.a)$$

$$-\beta_2 \phi_1 + D_2 \phi_2 - \alpha_2 \phi_3 = C_2 \quad (1.b)$$

$$-\beta_3 \phi_2 + D_3 \phi_3 - \alpha_3 \phi_4 = C_3 \quad (1.c)$$

$$-\beta_4 \phi_3 + D_4 \phi_4 - \alpha_4 \phi_5 = C_4 \quad (1.d)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = \quad \cdot \quad \cdot$$

$$-\beta_n \phi_{n-1} + D_n \phi_n - \alpha_n \phi_{n+1} = C_n \quad (1.n)$$

$$\phi_{n+1} = C_{n+1} \quad (1.n+1)$$

ϕ_1 et ϕ_{n+1} sont des valeurs connues (conditions aux limites).

Les équations précédentes peuvent se mettre alors sous la forme générale suivante :

$$-\beta_j \phi_{j-1} + D_j \phi_j - \alpha_j \phi_{j+1} = C_j \quad (2)$$

Les équations (1.b-n) peuvent être réécrite comme suit :

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \phi_3 + \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (3.a)$$

$$\phi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3} \phi_4 + \frac{\beta_3}{D_3} \phi_2 + \frac{C_3}{D_3} \quad (3.b)$$

$$\phi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4} \phi_5 + \frac{\beta_4}{D_4} \phi_3 + \frac{C_4}{D_4} \quad (3.c)$$

.....

$$\phi_n = \frac{\alpha_n}{D_n} \phi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n} \phi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n} \quad (3.n)$$

Ces équations peuvent être résolues par élimination vers l'avant et substitution en arrière. Le processus d'élimination vers l'avant commence par le remplacement de ϕ_2 dans l'équation (3.b) par l'équation (3.a) ce qui conduit à :

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \phi_4 + \left(\frac{\beta_3 \left(\frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \quad (4.a)$$

Dans la suite, on utilise les notations condensées suivantes :

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2} \quad \text{et} \quad C_2' = \frac{\beta_2}{D_2} \phi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (4.b)$$

L'équation (4.a) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi_3 = \left(\frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \phi_4 + \left(\frac{\beta_3 C_2' + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (4.c)$$

On définit aussi les paramètres A_3 et C_3' par :

$$A_3 = \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad \text{et} \quad C_3' = \frac{\beta_3 C_2' + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \quad (4.d)$$

L'équation (4.c) devient :

$$\phi_3 = A_3 \phi_4 + C_3' \quad (5)$$

L'expression (5) peut être utilisée afin d'éliminer ϕ_3 de l'équation (3.c). Cette procédure peut être répétée jusqu'à la dernière équation du système. Ceci constitue le processus d'élimination vers l'avant.

Pour la substitution en arrière nous adoptons la forme générale de la relation récurrente :

$$\phi_j = A_j \phi_{j+1} + C_j' \quad (6.a)$$

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (6.b)$$

$$C_j' = \frac{\beta_j C_{j-1}' + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (6.c)$$

La formule (6.a) est vérifiée aux points de frontière $j=1$ et $j=n+1$ pour les valeurs de A et C' suivantes :

$$A_1 = 0 \text{ et } C'_1 = \phi_1 \quad (7.a)$$

$$A_{n+1} = 0 \text{ et } C'_{n+1} = \phi_{n+1} \quad (7.b)$$

Application de l'algorithme TDMA pour un problème bidimensionnel :

L'algorithme de Thomas peut être appliquée pour résoudre un système d'équations pour un problème bidimensionnel. Considérons la grille de la figure (1) et l'équation de transport discrétisée dans le cas bidimensionnel dont la forme :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b \quad (8)$$

Pour résoudre le système (8), TDMA est appliquée le long d'une ligne choisie, par exemple Nord-Sud. L'équation discrétisée est réarrangé comme suit :

$$-a_S \Phi_S + a_P \Phi_P - a_N \Phi_N = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + b \quad (9)$$

Le membre droit de (9) est supposé temporairement connu. L'équation (9) est de la même forme que l'équation (2) avec : $\alpha_j \equiv a_N$, $\beta_j \equiv a_S$, $D_j \equiv a_P$ et $C_j \equiv a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + b$

La résolution du système le long de la direction $n-s$ de la ligne choisie pour les valeurs $j = 2, 3, 4, \dots, n$ est schématisée par la figure (1).

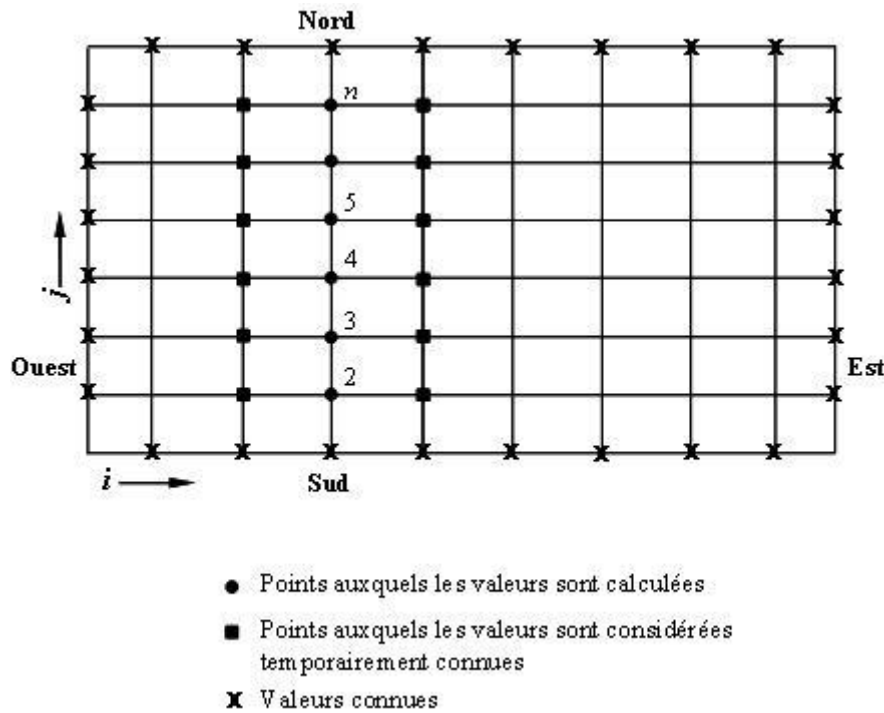


Figure 1. Technique ligne par ligne de la méthode TDMA

Après, on passe sur la ligne Nord-Sud suivante. Ensuite on choisit la direction dominante sud-nord ou est-ouest de l'écoulement pour le balayage. Si nous effectuons un balayage de l'ouest à l'est que les valeurs de ϕ_w à l'ouest du point P sont connues à partir du calcul sur la ligne précédente. Les valeurs de ϕ_E à l'est, cependant, sont inconnues ainsi le processus de solution doit être itératif. À chaque cycle d'itération la valeur de ϕ_E est considérée pour déduire sa valeur à la fin de l'itération précédente ou une valeur initiale donnée (par exemple zéro) à la première itération (conditions aux limites).

Le calcul par procédure ligne par ligne est ainsi répété plusieurs fois jusqu'à ce que la solution converge.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographies

- [1] **S. Jakirlić, K. Hanjalić**, “A new approach to modelling near wall turbulence energy and stress dissipation”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 459**, pp. 139 – 166, **2002**.
- [2] **R. A. Antonia, L. Djenidi**, “Anisotropy of the dissipation tensor in a turbulent boundary layer”, *Phys. Fluids*, **Vol. 6, No. 7**, pp. 2475 – 2479, **July 1994**.
- [3] **W. Rodi, N. N. Mansour**, “Low Reynolds number k - ε modelling with the aid of direct numerical simulation data”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 250**, pp. 509 – 529, **1993**.
- [4] **J. P. Johnston, K.A. Flack**, "Advances in Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers with Emphasis on the Wall-Layer Regions," *ASME J. Fluids Engineering*, **Vol. 118**, pp. 219 – 232, **June 1996**.
- [5] **M. A. Leschziner**, "Computational modelling of complex turbulent flow expectations, reality and prospects", *J. Wind Engineering and Aerodynamics*, **Vol. 46 & 47** pp. 37 – 51, **1993**.
- [6] **P. Bradshaw**, “Effects of streamline curvature on turbulent flow”, *AGARD AG.169*, **1973**.
- [7] **P. A. Durbin**, “On modelling three-dimensional turbulent wall layers”, *Physics of Fluids A*, **Vol. 5, No.5**, pp. 1231 – 1238, **May 1993**.
- [8] **A. K. Rastogi, W. Rodi**, “Calculation of general three dimensional turbulent boundary layers”, *AIAA Journal*, **Vol. 16, No.2**, pp. 151 – 159, **February 1978**.
- [9] **K. A. Flack, J. P. Johnston**, “Near wall flow in a three dimensional boundary layer on the endwall of a 30° bend”, *Experiments in Fluids*, **Vol. 24**, pp. 175 – 184, **1998**.
- [10] **J. F. Nash**, “The calculation of three dimensional turbulent boundary layers in incompressible flow”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 37, Part 4**, pp. 625 – 642, **1969**.
- [11] **H. H. Fernholz, J. –D. Vagt**, “Turbulence measurements in an adverse pressure gradient three dimensional turbulent boundary layer along a circular cylinder”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 111**, pp. 233 – 269, **1981**.
- [12] **U. R. Müller**, “Comparison of three dimensional turbulent boundary layer calculations with experiment”, *Three Dimensional Turbulent Boundary Layers, IUTAM Symposium*, pp. 309 – 324, *Berlin/Germany, March 29 – April 1, 1982*.
- [13] **F. J. Pierce, J. E. McAllister, M. H. Tennant**, “A review of Near wall similarity models in Three-Dimensional turbulent boundary layers”, *Journal of Fluids Engineering*, **Vol. 105**, pp. 251 – 256, **September 1983**.

- [14] **A. D. Cutler, J. P. Johnston**, “The relaxation of a turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 200**, pp. 367 – 387, **1989**.
- [15] **D. C. Wilcox**, “Comparison of two equation turbulence models for boundary layers with pressure gradient”, *AIAA Journal*, **Vol. 31, No.8**, pp. 1414 – 1421, **August 1993**.
- [16] **M. L. Koosinlin, F. C. Lockwood**, “The prediction of axisymmetric turbulent swirling boundary layers”, *AIAA Journal*, **Vol.12, No.4**, pp. 547 – 554, **April 1974**.
- [17] **B. E. Launder, C. H. Priddin, B. I. Sharma**, “The calculation of turbulent boundary layers on spinning and curved surfaces”, *Journal of Fluids Engineering*, **Vol. 99**, pp. 231 – 239, **March 1977**.
- [18] **T. Rezoug**, “Approche numérique de la convection thermique turbulente dans les cavités en rotation”, *Thèse de Doctorat, Université d’Aix-Marseille II*, **Juillet 1990**.
- [19] **L. Elena, R. Schiestel**, “Turbulence modelling of confined flow in rotating disk system”, *AIAA Journal*, **Vol. 33, No.5**, pp. 812 – 821, **May 1995**.
- [20] **L. Elena**, “Modélisation de la turbulence inhomogène en présence de rotation ”, *Thèse de Doctorat, Université d’Aix-Marseille II*, **Décembre 1994**.
- [21] **T. Cebeci, D. E. Abbott**, “Boundary layers on a rotating disk”, *Technical Notes, AIAA Journal*, **Vol. 13, No. 6**, pp. 829 – 832, **June 1975**.
- [22] **H. S. Littell, J. K. Eaton**, “Turbulence characteristics of the boundary layer on a rotating disk”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 266**, pp.175 – 207, **1994**.
- [23] **Y. Furuya, I. Nakamura, H. Kawachi**, “The experiment on the skewed boundary layer on a rotating body”, *Bulletin of Japanese Society of Mechanical Engineers*, **Vol. 9, No. 36**, pp.702 – 710, **1966**.
- [24] **I. Nakamura, S. Yamashita**, “Boundary layers on bodies of revolution spinning in axial flows”, *Three Dimensional Turbulent Boundary Layers, IUTAM Symposium*, pp. 178 – 187, **Berlin/Germany, March 29 – April 1, 1982**.
- [25] **Y. Furuya, I. Nakamura, S. Yamashita**, “The laminar and turbulent boundary layers on some rotating bodies”, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University*, **Vol. 30, No.1**, pp.1 – 58, **1978**.
- [26] **L. R. Bissonnette, G. L. Mellor**, “Experiments on the behaviour of an axisymmetric turbulent boundary layer with a sudden circumferential strain”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 63, Part 2**, pp. 369 – 413, **1974**.
- [27] **R. P. Lohmann**, “The response of a developed turbulent boundary layer to local transverse surface motion”, *Journal of Fluids Engineering*, **Vol. 98**, pp. 354 – 363, **September 1976**.

- [28] **G. Arslanian**, “Champ de vitesse moyenne d’une couche limite turbulente sur un cylindre en rotation dans un écoulement axial”, *Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille II, Septembre 1972*.
- [29] **M. Le Borgne**, “Contribution à l’étude d’une couche limite turbulente soumise à une brusque discontinuité à la paroi (cas du cylindre tournant)”, *Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Université d’Aix-Marseille II, Septembre 1981*.
- [30] **L. Fulachier, E. Arzoumanian, R. Dumas**, “Effect on a developed turbulent boundary layer of a sudden local wall motion”, *Three Dimensional Turbulent Boundary Layers, IUTAM Symposium, pp. 188 – 198, Berlin/Germany, March 29 – April 1, 1982*.
- [31] **P. Collini**, “Visualisation en tunnel hydrodynamique de la distorsion transversale d’une couche limite turbulente sur un cylindre en rotation”, *Mémoire d’ingénieur, Conservatoire national des arts et métiers, centre régional d’Aix en Provence, Marseille, Décembre 1984*.
- [32] **J. Arnoux** “Champ turbulent d’une couche limite tridimensionnelle sur paroi mobile”, *Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille II, Février 1986*.
- [33] **E. Arzoumanian**, “Corrélations spatiotemporelles en couche limites turbulentes, cas d’une mobilité de la paroi”, *Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille II, juin 1987*.
- [34] **D. M. Driver, S. K. Hebbar**, “Experimental study of a three dimensional shear driven turbulent boundary layer”, *AIAA Journal, Vol. 25, No.1, pp. 35 – 42, January 1987*.
- [35] **D. M. Driver, S. K. Hebbar**, “Experimental study of a three dimensional shear driven turbulent boundary layer using a three dimensional Laser Doppler Velocimeter”, *AIAA Paper 85 – 1610, pp. 1 – 17, 1985*.
- [36] **N. Nait Bouda, T. Benabid, L. Fulachier**, “Relaxation of turbulent boundary layer submitted to sudden distortion at the wall”, *AIAA Journal, Vo. 40, No.1, pp. 58 – 66, January 2002*.
- [37] **N. Nait Bouda**, “Etude de la relaxation d’une couche limite turbulente soumise à une distorsion transversal à la paroi”, *Thèse de Magister, USTHB, Septembre 1996*.
- [38] **Y. Salhi**, “Contribution à l’étude d’une couche limite turbulente soumise à une brusque discontinuité à la paroi, relaxation”, *Thèse de Magister, USTHB, Septembre 1998*.
- [39] **W. P. Jones, B. E. Launder**, “The prediction of laminarization with a two equation model of turbulence”, *Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301 – 314, 1972*.
- [40] **C. G. Speziale**, “On nonlinear $k-l$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence”, *J. Fluid Mech., Vol. 178, pp. 459 – 475, 1987*.

- [41] **T. J. Craft, B. E. Launder and K. Suga**, “Development and application of a cubic eddy viscosity model of turbulence”, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **Vol. 17**, **No. 2**, pp. 108 – 115, April 1996.
- [42] **F. S. Lien, M. A. Leschziner**, “Assessment of Turbulence Transport models including non linear RNG Eddy Viscosity formulation and second moment closure for flow over a backward facing step”, *Computers & Fluids*, **Vol. 23**, **No. 8**, pp. 983 – 1004, 1994.
- [43] **D. C. Wilcox**, “Turbulence modeling for CFD”, *DWC Industries Inc., La Cañada, California, Second edition*, 2000.
- [44] **P. Bradshaw, T. Cebeci, J. H. Whitelaw**, “Engineering calculation methods for turbulent flow”, *Edited by Academic Press Inc.*, 1981.
- [45] **R. Schiestel**, “Les écoulements turbulents – Modélisation et simulation”, *Editions HERMES, 2^e édition, Paris*, 1998.
- [46] **B. E. Launder, D. B. Spalding**, “Lectures in Mathematical Models of Turbulence”, *Edited by Academic Press Inc., Second Printing*, 1976.
- [47] **P. Chassaing**, “Turbulence en Mécanique des Fluides”, *Cépaduès – Éditions, Toulouse*, 2000.
- [48] **H. Tennekes, J. L. Lumley**, “A First course in turbulence”, *MIT Press, Massachusetts, USA, December 1974*.
- [49] **T – S Cham, M. R. Head**, “The turbulent boundary layer on a rotating cylinder in axial stream”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 42, Part 1**, pp. 1 – 15, 1970.
- [50] **H. Higuchi, M. W. Rubesin**, “An experimental and computational investigation of the transport of Reynolds stress in an axisymmetric swirling boundary layer”, *AIAA Paper 81 – 0416*, pp. 1 – 12, 1981.
- [51] **H. Higuchi, M. W. Rubesin**, “Behavior of a turbulent boundary layer subjected to sudden transverse strain”, *AIAA Journal*, **Vol. 17, No. 9**, pp. 931 – 941, September 1979.
- [52] **H. Higuchi, M. W. Rubesin**, “Behavior of a turbulent boundary layer subjected to sudden transverse strain”, *AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting*, pp. 1 – 19, January 16 – 18, 1978, Huntsville Alabama.
- [53] **P. B. Spitz**, “Etude numérique et expérimentale d’un écoulement turbulent complexe: couche limite soumise a un brusque cisaillement transversal”, *Thèse de Doctorat de 3^{ème} Cycle, Université d’Aix-Marseille II, Septembre 1980*.
- [54] **J. Cousteix, B. Aupoix, E. Arzoumanian, L. Fulachier**, “Experimental and numerical investigation of a turbulent boundary layer subjected to a sudden transverse strain”, *Phys. Fluids*, **Vol. 26, No. 9**, pp. 2399 – 2407, September 1983.

- [55] **E. Arzoumanian, L. Fulachier, J. Cousteix, B. Aupoix**, “Étude de la restructuration d’une couche limite turbulente axisymétrique en couche limite tridimensionnelle”, *ONERA TP n° 1979 – 127*, **1979**.
- [56] **K. Hanjalić, S. Jakirlić, F. Durst**, “A computational study of joint effects of transverse shear and streamwise acceleration on three-dimensional boundary layers”, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **Vol. 15, No. 4**, pp. 269 – 282, **1994**.
- [57] **V. Hämäläinen**, “implementing an explicit algebraic Reynolds stress model into the three-dimensional FINFLO flow solver”, *Report B-52, Helsinki University of Technology, Espoo Finland* **2001**.
- [58] **Z. Yang, T. H. Shih**, “New time scale based $k-\varepsilon$ model for Near Wall turbulence”, *AIAA Journal*, **Vol. 31, No. 7**, pp. 1191 – 1198, **July 1993**.
- [59] **L. Davidson**, “Implementation of $k-\varepsilon$ model and a Reynolds stress model into a Multiblock code”, *Rept. CRS4-APPMATH-93-21 CRS4 Cagliari, Italy*, **1993**.
- [60] **H. C. Chen, V. C. Patel**, “Near Wall turbulence models for complex flows including separation”, *AIAA Journal*, **Vol. 26, No. 6**, pp. 641 – 648, **June 1988**.
- [61] **B. E. Launder, D. B. Spalding**, “The numerical computation of turbulent flows”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **Vol. 3**, pp. 269 – 289, **1974**.
- [62] **B. Van Den Berg**, “A three dimensional law of the wall for turbulent shear flows”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 70, Part 1**, pp. 149 – 160, **1975**.
- [63] **C. R. Yap**, “Turbulent heat and momentum transfer in recirculating and impinging flows”, *PhD thesis, UMIST, Manchester, January 1987*.
- [64] **P. Bradshaw, G. P. Huang**, “The law of the wall in turbulent flow”, *Proceedings Mathematical and Physical Sciences*, **Vol. 451, No. 1941**, *Osborne Reynolds Centenary Volume*, pp. 165 – 188, **1995**.
- [65] **N. Kadem**, “Modélisation numérique d’un jet turbulent frappant perpendiculairement une paroi”, *Thèse de Magister, USTHB, Septembre 1999*.
- [66] **J. Bredberg**, “On the wall boundary condition for Turbulence Models” *Internal Report 00/4 Dept. Thermo and Fluid Dynamics Univ. of Technology, Göteborg, 2000*.
- [67] **S. Gant**, “A development and application of a new wall function for complex turbulent flows”, *PhD thesis, UMIST, Manchester, November 2002*.
- [68] **A. Mataoui**, “Modélisation numérique d’un jet plan turbulent impactant à l’intérieur d’une cavité de section rectangulaire”, *Thèse de Doctorat, USTHB, Novembre 2002*.
- [69] **P. G. Saffman, D. C. Wilcox**, “Turbulence model predictions for turbulent boundary layers”, *AIAA Journal*, **Vol. 12, No. 4**, pp. 541 – 546, **April 1974**.

- [70] **K. -Y. Chien**, “Predictions of channel and boundary layer flows with a low Reynolds number turbulence model”, *AIAA Journal*, **Vol. 20, No. 1**, pp. 33 – 38, January 1982.
- [71] **W. Rodi, G. Scheuerer**, “Calculation of curved shear layers with two-equation models”, *Phys. Fluids*, **Vol. 26, No. 6**, pp. 1422 – 1436, June 1983.
- [72] **V. C. Patel, W. Rodi and G. Scheuerer**, “Turbulence Models for Near – Wall and Low Reynolds number Flows: A Review”, *AIAA Journal*, **Vol.23, No.9**, pp. 1308 – 1319, September 1985.
- [73] **B. E. Launder, N. Shima**, “Second moment closure for the near wall sublayer: Development and application”, *AIAA Journal*, **Vol. 27, No. 10**, pp. 1319 – 1325, October 1989.
- [74] **N. N. Mansour, J. Kim, P. Moin**, “Near wall k - ε turbulence modelling”, *AIAA Journal*, **Vol. 27, No. 8**, pp. 1068 – 1073, August 1989.
- [75] **Y. Nagano, M. Tagawa**, “An improved k - ε model for boundary layer flows”, *Journal of Fluids Engineering*, **Vol. 112**, pp. 33 – 39, March 1990.
- [76] **R. M. C. So, Y. G. Lai, H. S. Zhang**, “Second order Near Wall turbulence closures: A Review”, *AIAA Journal*, **Vol. 29, No. 11**, pp. 1819 – 1835, November 1991.
- [77] **R. Dumas, E. Arzoumanian, L. Fulachier**, “Couche limite turbulente sur paroi mobile”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **Vol. 7, No. 5**, pp. 507 – 530, 1988.
- [78] **O. Reynolds**, “On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, **Vol. 186**, pp. 123 – 164, 1895.
- [79] **K. Hanjalić, B. E. Launder**, “Contribution towards a Reynolds stress closure for low-Reynolds number turbulence”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 74, Part 4**, pp. 593 – 610, 1976.
- [80] **B. E. Launder, G. J. Reece, W. Rodi**, “Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 68, Part 3**, pp. 537 – 566, 1975.
- [81] **B. J. Dally and F. H. Harlow**, “Transport Equations in Turbulence”, *Physics of Fluids*, **Vol. 13, No. 11**, pp. 2634 – 2649, November 1970.
- [82] **B. E. Launder, W. C. Reynolds, W. Rodi, J. Mathieu, D. Jeandel**, “Turbulence models and their applications”, *Volume 2, Editions Eyrolles, Paris*, 1984.
- [83] **M. Ljuboja, W. Rodi**, “Calculation of Turbulent wall jets with an Algebraic Reynolds Stress Model”, *Journal of Fluids Engineering*, **Vol. 102**, pp. 350 – 356, September 1980.

- [84] **K. Hanjalić, B. E. Launder**, “A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows”, *J. Fluid Mech.*, **Vol. 52, Part 4**, pp. 609 – 638, 1972.
- [85] **B. E. Launder**, “A Generalized algebraic stress transport hypothesis”, *AIAA Journal*, **Vol. 20, No. 3**, pp. 436 – 437, March 1982.
- [86] **M. A. Leschziner**, "Modelling engineering flows with Reynolds stress turbulence closure", *J. Wind Engineering and Aerodynamics*, **Vol. 35**, pp. 21 – 47, 1990.
- [87] **J. O. Hinze**, “Turbulence”, McGraw – Hill, Inc., Second edition, 1975.
- [88] **I. Nakamura, S. Yamashita, T. Watanabe, Y. Sawaki**, “Boundary layers on bodies of revolution spinning in axial flows”, *Third Symposium on Turbulent Shear Flows*, pp. 2.7 – 2.12, Univ. of California Davis, September 9 – 11, 1981.
- [89] **F. J. Pierce, J. E. McAllister**, “Near wall similarity in a shear driven Three-Dimensional turbulent boundary layer”, *Journal of Fluids Engineering*, **Vol. 105**, pp. 263 – 269, September 1983.
- [90] **Y. Nagano, C. Kim**, “A two equation model for heat transport in wall turbulent shear flows”, *Journal of Heat Transfer*, **Vol. 110**, pp. 583 – 589, August 1988.
- [91] **S. V. Patankar**, “Numerical heat transfer and fluid flow”, *Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences*, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [92] **H. K. Versteeg, W. Malalasekera**, “An introduction to Computational Fluid Dynamics – the finite volume method”, *Longman Scientific & Technical*, 1995.
- [93] **B. P. Leonard**, “A stable accurate convective modelling procedure based on Quadratic Upstream Interpolation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **Vol. 19**, pp. 59 – 98, 1979.
- [94] **T. Hayase, J. A. C. Humphry, R. Greif**, “A consistently formulated Quick scheme for fast and stable convergence using finite volume iterative calculation procedures”, *Journal of Computational Physics*, **Vol. 98**, pp. 108 – 118, 1992.
- [95] **P. G. Huang, B. E. Launder, M. A. Leschziner**, “Discretization of nonlinear convection processes a broad range comparison of four schemes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **Vol. 48**, pp. 1 – 24, 1985.
- [96] **P. G. Huang, M. A. Leschziner**, “An introduction and guide to the Computer Code TEAM”, *Report TFD/83/9 (R)*, *Thermofluids Division Dept. Mech. Eng., UMIST*, 1983.
- [97] **P. S. Klebanoff**, “Characteristics of turbulence in boundary layer with zero pressure gradient”, *NACA Technical Note 3178*, May 1953.

- [98] **L. Fulachier**, “Contribution à l’étude des analogies des champs dynamique et thermique dans une couche limite turbulent effet de l’aspiration”, *Thèse de doctorat, Université de Provence, Avril 1972*.
- [99] **Cousteix J.**, “Aérodynamique – Turbulence et couche limite”, *Cépaduès – Éditions, Toulouse, 1989*.
- [100] **W. C. Reynolds**, “Computation of turbulent flows”, *Annual Review Fluid Mechanics, Vol. 8, pp. 183 – 208, 1976*.

Communications dans les Rencontres Scientifiques :

1. **Bousbai M., Mataoui A. and Benabid T.**, “Numerical study of a turbulent boundary layer subjected to sudden transverse strain”, *Third International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering, 30 May-2 June 2005, Ghent-Belgium*.
2. **M. Bousbai, A. Mataoui and T. Benabid**, “ Mise en œuvre d’une loi de paroi pour le calcul d’une couche limite turbulente tridimensionnelle”, *17^{ème} Congrès Français de Mécanique, 29 août – 2 septembre 2005, Troyes*.
3. **Bousbai M., Mataoui A. and Benabid T.**, “ Numerical study of a turbulent flow and heat transfer on moving wall ”, *4th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, HEFAT 2005, 19 – 22 September 2005, Cairo, Egypt*.
4. **M. Bousbai, A. Mataoui et T. Benabid**, “Modelling and numerical simulation of a turbulent boundary layer subjected to sudden transverse strain”, *International Conference on Modelling and Simulation, ICMS’2005, 22, 23, 24 November 2005 Marrakech, Morocco. (Accepté)*
5. **Bousbai M., Mataoui A. et Benabid T.**, “Computational study of momentum transport and heat transfer across turbulent boundary layer subjected to sudden transverse strain", *12th International Meeting on Heat Transfer JITH2005, 15, 16 and 17 November 2005, Tanger, Morocco. (Accepté)*
6. **M’hamed BOUSBAL, Amina MATAOUI & Tahar BENABID**, "Etude numérique d'une couche limite turbulente autour d'un cylindre – Application de trois modèles de turbulence", *6^{ième} Congrès National de la Physique et ses Applications (CNPA – VI'2004), Tizi – Ouzou ,5 – 7 décembre 2004*.

Titre : Etude Numérique d'une couche limite turbulente soumise à un cisaillement transversal

Auteur : M'hamed BOUSBAI

Résumé

Le présent travail consiste à la simulation numérique d'une couche limite turbulente soumise à un cisaillement transversal par la mise en mouvement de la paroi chauffée dans le sens transversal de l'écoulement principal. La tridimensionnalité introduit une complexité qui se traduit par le non alignement des directions principales du tenseur des tensions de Reynolds et celle du tenseur des taux de déformation. Dans cette étude nous avons adopté une extension directe du modèle type énergie – dissipation $k-\epsilon$ à fort nombre de Reynolds conçu initialement au calcul de la couche limite bidimensionnelle, en supposant une viscosité turbulente isotrope. La partie originale de notre travail consiste à la mise en oeuvre d'une loi de paroi pour le calcul de la composante transversale du vecteur vitesse dans la zone de proche paroi sans considérer les effets de viscosité prédominants. Pour la composante longitudinale, nous avons utilisé la loi proposée dans la littérature pour le cas bidimensionnel. Cette méthode est largement utilisée pour les couches limites turbulentes bidimensionnelles. La méthode numérique utilisée pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles en variables primitives est la méthode des volumes finis. Les termes de convection – diffusion sont approchés à l'aide d'un schéma d'interpolation de type loi de puissance et le couplage vitesse – pression est résolu grâce à l'algorithme SIMPLE. L'algorithme TDMA est utilisé pour résoudre les équations discrétisées.

La comparaison entre les prévisions numériques et les résultats expérimentaux trouvés dans la littérature est satisfaisante.

Mots clés : couche limite turbulente, cisaillement transversal, modèle de turbulence, loi de paroi, volumes finis.

Title: Numerical Study of turbulent boundary layer subjected to sudden transverse strain

Abstract

This work consists to the numerical simulation of a turbulent boundary layer subjected to a transverse strain by moving the heated wall in the transverse direction of the mean flow. The three-dimensionality of the flow introduces a complexity which results by the non-alignment of the principal directions of the Reynolds stress tensor and that of deformation. In this study we have used an extension of the $k-\epsilon$ model at high Reynolds number version by supposing an isotropic turbulent viscosity. The original part of our work consists to the implementation of a logarithmic law of the wall for transverse velocity component in the zone close to wall without taking into account the prevalent effects of viscosity. For the longitudinal component, we have used the law suggested in the literature for the two-dimensional case. This approach has widely used in two-dimensional turbulent boundary layer calculations. The numerical method used for the discretization of the partial derivative equations in primitive variables is the finite volume method. The convection diffusion terms are approximated by the power law interpolation scheme (PLDS). The pressure-velocity coupling is obtained by the SIMPLE algorithm. A tri-diagonal matrix algorithm (TDMA) is used for solving the discretized equations.

Comparisons of the numerical prediction results with the experimental data available show good agreement.

Keywords: Turbulent boundary layer, transverse strain, turbulence model, law of the wall, finite volume.