

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie «Houari Boumediene»
Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du grâde de **Docteur En Sciences**

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : **Modèle Stochastiques de Recherche Opérationnelle**

Par: **BENTARZI Ouissam**

Thème

**Sur des modèles de séries chronologiques périodiques
à valeurs réelles ou entières : structure, estimation et applications**

Soutenue publiquement, le 15/05/2018, devant le Jury composé de :

M. M. AIDER	Professeur	USTHB/FMT	Président
M. A. AKNOUCHE	Professeur	USTHB/FMT	Directeur de thèse
M. Y. BERKOUNE	Professeur	U.M.M/Tizi-Ouzou	Examineur
M. A. BIBI	Professeur	U. Constantine	Examineur
M. K. KHALDI	Professeur	U.M.B/Boumerdes	Examineur
M. M. MIHOUBI	Professeur	USTHB/FMT	Examineur
M. M. MAAMRA	Docteur	USTHB/FMT	Invité

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes chaleureux et sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur le professeur, AKNOUCHE Abdelhakim, qui a fait abnégation de son précieux temps pour me parrainer, avec une extrême patience, dans ma quête. Je lui témoigne toute ma gratitude ainsi que ma reconnaissance la plus vive.

Je viens humblement exprimer mes remerciements à Monsieur, le professeur M. AIDER de m'avoir honoré en présidant le jury de cette thèse.

En toute humilité, je voudrais également exprimer ma gratitude à Monsieur A. BIBI, professeur à l'université de Mentouri à Constantine pour l'attention portée à ce travail et à l'honneur qu'il me fait en participant à ce jury.

Toutes mes gratitudes vont aussi à Monsieur Y. BERKOUNE, professeur à l'université de Tizi Ouzou, pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie également Monsieur le professeur M. MIHOUBI, pour avoir accepté d'examiner ma thèse.

Un grand merci à Monsieur M. MAAMRA, pour sa participation à ce jury.

Je ne pourrais pour finir omettre de remercier toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenu de loin ou de près à élaborer et achever ce travail.

Je remercie mes chères parents qui m'ont porté aide et soutien, mes sœurs Wafa et Amel et un grand merci aussi à MANI.

Je remercie aussi mon époux pour son extrême patience.

Un grand merci à M. SAADOUNE et à F. OUZANI, à Mme Rabehi Nadia, MAHI Lamia et à SEGNI Hassina.

A mon père et ma mère, pour leur soutien et leur amour inconditionné, tous les sacrifices consentis et leurs précieux conseils, pour leur assistance et présence dans ma vie. Recevez à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

A mes sœurs Wafa et Amel qui n'ont jamais cessé d'être à mes côtés.

A mon cher époux Brahim.

A mes filles Jana et Chaghaf sources de ma joie et de mon bonheur.

A ma très chère nièce Alaa.

Table des matières

0.1. Introduction Générale	ii
0.2. Présentation de la thèse	vii
I MODELES PERIODIQUES Á VALEURS RÉELLES	1
1 Distribution Asymptotique d'un PVAR(1)	2
1.1 Introduction	2
1.2 Notations, définitions et hypothèses	4
1.2.1 Régions de Stabilité et d'Instabilité	4
1.3 Causalité (Condition de Stabilité)	5
1.3.1 Condition de stationnarité périodique	5
1.3.2 Structure de la covariance et de l'autocorrélation	9
1.3.3 Estimateurs des moindres carrés	11
2 Stabilité d'un modèle diagonal bilinéaire périodique	37
2.1 Introduction	37
2.2 Définitions et hypothèses	39
2.3 Stabilité par rapport à la stationnarité périodique stricte	40
2.4 Stabilité par rapport à la stationnarité périodique de premier ordre	44
2.4.1 Condition de stabilité de premier ordre	44

2.4.2	Structure de la moyenne de la solution périodiquement stationnaire de premier ordre	47
2.5	Stabilité par rapport à la stationnarité périodique de second ordre	48
2.5.1	Condition de stabilité de second ordre	48
2.5.2	Structure d'autocovariance de la solution périodiquement stationnaire au second ordre	53
2.6	Stabilité par rapport à la stationnarité d'ordre r	54
2.6.1	Structure des moments superieurs et Kurtoses de la solution périodiquement stationnaire à l'ordre r	57
2.7	Stabilité par rapport au processus d'innovation	58
2.8	Estimation	61
2.8.1	Estimation de Yule-Walker	61
2.8.2	Etude de simulation des estimateurs de (YW)	62
2.8.3	Estimation des moindres carrés conditionnelle	63
2.8.4	Etude de simulation des estimateurs des moindres carrés conditionnelles	68
2.8.5	Estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelle	69
2.9	Propriétés distributionnelles	70
2.10	Maximum de vraisemblance conditionnelle : Etude de simulation	75

II MODELES PERIODIQUES Á VALEURS ENTIÈRES 76

3	Modèle <i>INGARCH</i> (1,1) Poissonien périodique	81
3.1	INTRODUCTION	81
3.2	Notations, Définitions et hypothèses	82
3.3	Conditions de stationnarité	83
3.3.1	Stationnarité périodique en moyenne	83
3.3.2	Stationnarité périodique de second ordre	85

3.4	Existence des moments d'ordres supérieurs	88
3.4.1	Calcul du moment d'ordre supérieur du processus λ_t	88
3.4.2	Calcul des moments d'ordres supérieurs du processus y_t	91
3.4.3	Coefficients d'asymétrie (Skewness) et d'aplatissement (Kurtosis)	93
3.5	Structure de l'autocovariance	94
3.6	Estimation	96
3.6.1	Estimation de Yule-Walker	97
3.6.2	Estimation du Maximum de Vraisemblance Conditionnel	97
3.7	Etude de simulation	98
3.8	Application	103
4	Modèle autorégressif Poissonnien mélangé périodique	105
4.1	Introduction	105
4.2	Modèle autorégressif Poissonnien mélangé périodique	106
4.3	Propriétés probabilistes du modèle	108
5	Modèle Bilinéaire à Valeurs Entières Périodique	114
5.1	Introduction	114
5.2	Modèle Bilinéaire périodique à valeurs entières	115
5.2.1	Existence du processus périodiquement strictement stationnaire PINBL	117
5.3	Condition de stationnarité périodique	120
5.3.1	Stationnarité périodique en moyenne	120
5.3.2	Stationnarité périodique au second ordre	122
5.4	Structure de l'Autocovariance	128
5.5	Estimation de Yule-Walker	132
5.5.1	Etude de simulation	134

6 Conclusion générale



0.1. Introduction Générale

Durant ces quatre dernières décennies, l'analyse des séries chronologiques a connu une grande évolution dont l'objectif fut la mise en œuvre et l'analyse de modèles adéquats permettant de reproduire et d'expliquer l'évolution des séries chronologiques observées dans le monde réel et qui sont caractérisées par des traits spécifiques. Parmi ces traits que l'on trouve particulièrement en économétrie financière, en sciences d'environnement et de traitement de signal on distingue : la stationnarité empirique, la saisonnalité, la tendance, la persistance, le regroupement de volatilité, la dépendance sans corrélation, l'asymétrie, les changements de régime récurrents, les distributions empiriques asymétriques, à queues lourdes ou multimodales. La quasi-totalité des modèles sont ou peuvent être exprimés au moyen d'équations aux différences stochastiques dans lesquelles combinant, en entrée, un processus stochastique dit d'innovation et un ensemble de paramètres, lequel peut être un processus aléatoire, on obtient, en sortie, un processus d'intérêt qui est destiné à représenter les traits d'une série chronologique sous étude. De nombreuses pistes ont été explorées afin d'identifier une équation particulière destinée à expliquer un certain nombre de traits particuliers et il existe actuellement une panoplie de modèles. La règle générale est que, à un trait donné correspond une spécification propre et lorsqu'une série affiche plusieurs traits à la fois, on combine les spécifications correspondantes. Parmi les traits les plus fréquemment observés figure le phénomène de périodicité ou par abus de langage saisonnalité. Dans d'anciens travaux, cette caractéristique a souvent été expliquée en considérant des équations à coefficients constants dont l'autocorrélation est plus importante pour des retards multiples de la période. Une autre approche plus récente et plus représentative du phénomène de périodicité consiste à faire varier périodiquement les coefficients de l'équation, donnant ce qu'on appelle un modèle périodique. Cependant, l'étude de la structure des modèles périodiques est plus délicate que celle des modèles à coefficients constants puisqu'elle fait appel à des propriétés

probabilistes non-standards telles que la stationnarité périodique stricte, l'ergodicité périodique, le mélange périodique et dont la théorie n'est pas encore complètement achevée. . . De plus, l'analyse statistique asymptotique (théorème ergodique, théorèmes centraux limites des martingales. . .) des modèles périodiques notamment les propriétés asymptotiques de divers estimateurs de ces modèles repose sur leurs propriétés probabilistes. En dépit de l'existence de nombreux modèles périodiques linéaires (ex. Periodic ARMA : PARMA) et non linéaires (ex. Periodic GARCH : PGARCH, periodic Random Coefficient Autoregression : PRCA), de nouvelles spécifications sont nécessaires afin d'expliquer des combinaisons de traits dont figure la périodicité. De plus, dans le cas de séries chronologiques à valeurs entières affectées de périodicité, des modèles périodiques correspondants sont quasiment inexistant.¹

Cette thèse porte, essentiellement, sur l'étude de stabilité et d'instabilité de quelques modèles de séries chronologiques (linéaires périodiques et non linéaires) à valeurs réelles et à valeurs entières. Le modèle autorégressif vectoriel périodique a été présenté, dans la littérature des séries chronologiques, pour capturer et décrire le phénomène de périodicité exhibé par la fonction d'autocorrélation, ce phénomène rencontré dans beaucoup de séries chronologiques vectorielles ceci est un dispositif qui ne peut pas être expliqué par les modèles saisonniers traditionnels, *SARIMA* (voir Box et Jenkins (1976)).

L'étude du comportement de la distribution asymptotique de l'estimateur des moindres (*LSE*) du paramètre d'un modèle autorégressif traditionnel (à coefficient invariant dans le temps) d'ordre 1, revient au premier travail de White (1958). En effet, l'auteur avait établi, dans ce papier, la distribution limite de l'estimateur des moindres (*LSE*) du paramètre autorégressif d'un modèle $AR(1)$ et ceci dans les deux cas instables, à savoir : instable de type racine unitaire et le cas d'instable explosif du même modèle $AR(1)$ scalaire. D'autre part, Anderson (1959) a profondément étudié le comportement de la distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés (*LSE*) du paramètre d'un modèle $AR(1)$ scalaire et vectoriel. Récemment, Aknouche (2015) a présenté une étude approfondie du problème de la distribution limite des estimateurs des moindres carrés (*LSE*) d'un modèle autorégressif scalaire, à coefficient périodique d'ordre 1, et ceci dans les trois cas à savoir : stable, instable à racine unitaire et instable explosif. Le modèle le plus populaire utilisé pour modéliser un

¹Largement inspirée de Aknouche (2014).

processus vectoriel est le modèle autorégressif vectoriel (*VAR*). Les divers avantages et les propriétés intéressantes satisfaits par un modèle de série chronologique vectoriel ont motivé l'extension de ce modèle à un modèle autorégressif vectoriel à coefficients périodiques pour capturer le dispositif de périodicité exhibée par la fonction d'autocorrélation d'une série chronologique multi-variée, et ceci représente un dispositif qui ne peut pas être expliqué par les modèles saisonniers traditionnels, *SARIMA* (voir Box et Jenkins (1976)). Les modèles (*PVAR*) (voir Pagano (1978), Kleibergen et Franses (1999), Franses et Paap (2004), Hallin et Lotfi (2005), Aknouche (2007),...) où les matrices de paramètres ainsi que la matrice de variance-covariance du processus d'innovation vectoriel périodiquement corrélé, (au sens de Gladyshev (1961), (1963)), dans le temps. Dans cette thèse nous avons consacré un chapitre à l'étude de la distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés, qui est sous l'hypothèse de la normalité du processus d'innovation, lui-même l'estimateur du maximum de vraisemblance, de la matrice autorégressive périodique d'un modèle autorégressif vectoriel, à coefficients matriciel périodique (*PVAR*) et ceci dans le cas instable explosif. La distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés d'un modèle Autorégressif vectoriel périodique, d'ordre 1, instable explosif est obtenue. Les résultats obtenus sont des extensions de ceux établis par Anderson (1959) pour un modèle *VAR*(1) au cas d'un modèle *VAR*(1) à coefficients périodiques.

Il est bien connu, de nos jours, que beaucoup de séries chronologiques produites dans divers champs, y compris des études économiques, en particulier les financières, et l'hydrologie, montrent quelques caractéristiques typiques qui ne peuvent pas être capturées et décrites par les modèles linéaires standards de série chronologique. Ceci montre la nécessité et l'intérêt de faire appel à une certaine classe de modèles non linéaires afin de capturer ces divers faits stylisés. Ainsi, la modélisation théorique et pratique de la série chronologique non linéaire, a reçue, ces dernières années, un intérêt considérable. Parmi ces dernières classes de modèles non linéaires, nous citons, sans exhaustivité, la classe des modèles bilinéaires, présentée dans l'analyse des séries chronologiques pour la première fois depuis plus de trois décennies par Granger et Anderson (1978a) et continue à attirer l'attention des chercheurs et à occuper toujours une place importante dans l'analyse de séries chronologiques non linéaires (voir aussi Subba Rao and Gabr (1984); Priestley (1978); Guegan (1994); Cappuccio *et al* (1998); Terdik (1999); Subba Rao and Terdik (2003); Pereira and Scotto (2006); Hili (2008); Sornette

and Pisarenko (2008); Kristensen (2009); Iwueze and Johnson (2011)). Aussi, il est connu qu'il existe une relation entre la classe des modèles bilinéaires et divers classes de modèles de séries chronologiques, ce qui révèle son importance. A titre d'exemple, nous savons actuellement que beaucoup de classes des modèles (linéaires et non linéaires) *GARCH* ont une représentation bilinéaire (Kristensen (2009)). On a proposé beaucoup de généralisations de la formulation bilinéaire originale dans la littérature des séries chronologiques pour refléter diverses caractéristiques de série chronologique telles que la dépendance simultanée (Stensholt and Tjøstheim (1987)), changement de régime (Cappuccio *et al* (1998); Ferrante *et al* (2003); Aknouche and Rabehi, 2010), interaction spatiale (Dai and Billard (1998), (2003)) et discrétion de valeur (Doukhan *et al* (2006); Drost *et al* (2008)). Une extension importante particulière traitant des phénomènes périodiques est la formulation bilinéaire périodique dans laquelle les paramètres varient périodiquement au fil du temps. En effet, le fait identifié que beaucoup de séries chronologiques (économique, financière et environnementale) montrent dans la pratique une caractéristique de périodicité en leur structure de dépendance et, d'autre part, l'utilité bien établie des modèles bilinéaires, a donné de bonnes motivations à l'extension du modèle bilinéaire du cas classique au cas périodique (voir par exemple Bibi and Aknouche (2010); Bibi and Ho (2006); Bibi and Gautier (2006)).

Les séries chronologiques à valeurs entières non négatives sont rencontrées dans divers domaines, tels que l'épidémiologie, l'économie, l'environnement, la criminologie,..., ceci a motivé l'introduction d'une classe de modèles linéaires et non linéaires à valeurs entières dans la littérature des séries chronologiques. Au cours de ces deux dernières décennies, plusieurs chercheurs ont donné une grande importance pour la modélisation et l'étude des propriétés probabilistes et statistiques des séries chronologiques linéaires et non linéaires à valeurs entières, citons, entre autres, Al-Osh and Alzaid (1987) (First order integer-valued autoregressive *INAR*(1) process), Alzaid and Al-Osh (1990) (Integer-valued p th-order Autoregressive structure *INAR*(p) process), Ferland *et al* (2006) (Integer-valued *GARCH* process).

Les modèles autoregressifs Poissonniens ont suscité beaucoup d'intérêt au courant des deux dernières décennies. Hormis leur habileté à modéliser divers traits de séries chronologiques à valeurs entières, l'étude de leur structure a été un défi certain (Ferland *et al* (2006); Fokianos *et al* (2009); Doukhan *et al* (2012); Davis et Liu (2016)).

Il est bien connu, de nos jours, que les modèles de séries chronologiques (linéaires et non linéaires) avec coefficients périodiques sont plus appropriés et ont plus de flexibilité pour modéliser de tel processus périodiquement corrélés. Tenant compte de ce fait et des divers avantages et des intéressantes propriétés satisfaites par le modèle $INGARCH(q, p)$, introduit par Ferland *et al* (2006), ceci donne une motivation à étendre cette classe de modèles invariants dans le temps à celle des modèles périodiques à valeurs entières. Bentarzi and Bentarzi (2017a) ont établie les conditions nécessaires et suffisantes du premier et de second ordre, de la stationnarité périodique du modèle $PINGARCH(1, 1)$.

Aknouche *et al* (2018) ont proposé un modèle autoregressif Poissonnien mélangé dont la distribution conditionnelle est un mélange de lois de Poisson et peut, en particulier, être Poissonnienne ou binomiale négative. En outre la moyenne conditionnelle proposée est une fonction générale périodique des ses valeurs retardées et des observations. Ils ont étudié les propriétés de stationnarité périodique stricte, d'ergodicité périodique et de dépendance faible périodique et d'existence des moments d'ordre supérieurs. Ces propriétés servent, entre autres, à établir les propriétés asymptotiques de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance du modèle sous-jacent.

Bentarzi and Bentarzi (2017b) ont étudié le modèle Périodique Diagonal Bilinéaire, à valeurs entières, $PINBL_S(1, 0, 1, 1)$ qui étende le modèle Diagonal Bilinéaire, à valeurs entières, classique (à paramètres invariants dans le temps) $INBL(1, 0, 1, 1)$ étudié par Doukhan *et al* (2006).

0.2. Présentation de la thèse

Cette thèse de Doctorat en Mathématiques - Méthodes Stochastiques dont l'intitulé est :

"Sur des modèles de séries chronologiques périodiques à valeurs réelles ou entières : structure, estimation et application"

porte, essentiellement, sur l'étude de stabilité et d'instabilité et l'inférence de quelques modèles de séries chronologiques (linéaires périodiques et non linéaires), elle contient deux parties : la première partie est consacrée à l'étude de quelques modèles de séries chronologiques périodiques à valeurs réelles et est composée de deux chapitres, quand à la deuxième partie elle est consacrée à l'étude de quelques modèles de séries chronologiques à valeurs entières, et contient trois chapitres. dont nous passons en revue leurs contenus.

Partie I : MODÈLES PÉRIODIQUES À VALEURS RÉELLES

Chapitre 1 : Distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés d'un PVAR(1)

Le premier chapitre est principalement consacré à l'étude de la distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés, qui est sous l'hypothèse de la normalité du processus d'innovation, lui-même l'estimateur du maximum de vraisemblance, de la matrice autorégressive périodique d'un modèle autorégressif vectoriel, à coefficients matriciel périodique, (*PVAR*) et ceci dans le cas instable explosif.

Chapitre 2 : Stabilité d'un modèle diagonal bilinéaire périodique

Ce chapitre est destiné à l'étude des problèmes de stabilité et leur conséquences du modèle périodique autorégressif bilinéaire diagonal du premier ordre $PBL_S(1, 0, 1, 1)$. Le présent chapitre contient, en outre de la section introduction, six sections. Dans la première section nous établissons les conditions de stabilité de ce processus au sens de la stationnarité stricte, au sens de la stationnarité en moyenne et au sens de la stationnarité du second ordre. Nous passons dans la seconde section à l'établissement de la condition d'existence

des moments d'ordre supérieurs du processus sous-jacent, et nous déterminons le coefficient d'asymétrie et d'aplatissement du processus. Quant à la quatrième section, elle est vouée à l'établissement de la structure de la fonction d'autocovariance du processus $PBL_S(1, 0, 1, 1)$. Dans la cinquième section nous passons à l'estimation des paramètres du modèle par la méthode d'estimation de Yule -Walker, dans le cas où le processus d'innovation est Gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma_{\varepsilon,s}^2$, $s = 1, 2, \dots, S$. Nous terminons ce chapitre par la section six dans laquelle nous présentons une étude de simulation. Quelques résultats de ce chapitre sont originaux et ils sont publiés dans une revue sans impact facteur Aknouche and Bentarzi (2014).

Partie II : MODÈLES PÉRIODIQUES À VALEURS ENTIÈRES

Chapitre 3 : Modèle $INGARCH(1, 1)$ Poissonien périodique : Structure et estimation

Dans ce chapitre nous étudions quelques propriétés probabilistes et statistiques du modèles $GARCH$ périodique à valeurs entières. Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes du premier et de second ordre, de la stationnarité périodique, et nous donnons, sous ces conditions, donné les formes explicites de la moyenne et du moment d'ordre deux.

Chapitre 4 : Modèles autorégressifs Poissonniens mélangés périodiques

Dans ce chapitre nous proposons une classe générale de modèles autorégressifs Poissonniens mélangés dont la forme et les paramètres sont périodiques dans le temps. Sous une condition de *contraction périodique* sur la forme de la moyenne conditionnelle, nous montrons l'existence d'une solution strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante ayant, dans le cas Poissonien pur, des moments d'ordre supérieur finis. Des applications à des modèles spécifiques sont considérées.

Chapitre 5 : Modèle Bilinéaire à valeurs entières périodiques

Dans ce chapitre nous étudions quelques propriétés probabilistes et statistiques du modèle bilinéaire diagonal périodique à valeurs entières. Nous établissons les conditions suffisantes de stationnarité périodique du premier et de second ordre et nous avons donné les formes explicites des deux premiers moments ainsi que la forme explicite de la fonction d'autocovariance. Nous obtenons les estimateurs de Yule-Walker des paramètres du modèle. Le chapitre se termine par une étude de simulation.

Première partie

**MODELES PERIODIQUES Á
VALEURS RÉELLES**

Chapitre 1

Distribution Asymptotique de l'Estimateur des moindres carrées d'un PVAR(1)

1.1 Introduction

Le modèle le plus populaire utilisé pour modéliser un processus vectoriel est le modèle autorégressif vectoriel (*VAR*). Les divers avantages et les propriétés intéressantes satisfaits par un modèle de série chronologique vectoriel ont motivé l'extension de ce modèle à un modèle autorégressif vectoriel à coefficients périodiques pour capturer le dispositif de périodicité exhibée par la fonction d'autocorrélation d'une série chronologique multi-variée.

Le modèle autorégressif vectoriel périodique a été présenté, dans la littérature des séries chronologiques, pour capturer et décrire le phénomène de périodicité exhibé par la fonction d'autocorrélation, ce phénomène rencontré dans beaucoup de séries chronologiques vectorielles ne peut pas être expliqué par les modèles saisonniers traditionnels, *SARIMA* (voir Box et Jenkins (1976)).

L'étude du comportement de la distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés (*LSE*) du paramètre d'un modèle autorégressif traditionnel (à coefficient invariant dans le temps) d'ordre 1, revient au premier travail de White (1958). En effet, l'auteur avait établi, dans ce papier, la distribution limite de l'estimateur des moindres carrés (*LSE*) du paramètre autorégressif d'un modèle $AR(1)$ et ceci dans les deux cas instables, à savoir : instable de type racine unitaire et le cas d'instabilité explosif du même modèle $AR(1)$ scalaire. D'autre part, Anderson (1959) a profondément étudié le comportement de la distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés (*LSE*) du paramètre d'un modèle $AR(1)$ scalaire et vectoriel. Récemment, Aknouche (2015) a présenté une étude approfondie du problème de la distribution limite des estimateurs des moindres carrés (*LSE*) d'un modèle autorégressif scalaire, à coefficient périodique d'ordre 1, et ceci dans les trois cas à savoir : stable, instable à racine unitaire et instable explosif.

Ce chapitre est principalement consacré à l'étude de la distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés, qui est sous l'hypothèse de la normalité du processus d'innovation, lui-même l'estimateur du maximum de vraisemblance, de la matrice autorégressive périodique d'un modèle autorégressif vectoriel, à coefficients matriciel périodique, (*PVAR*) et ceci dans le cas instable explosif.

La distribution asymptotique de l'estimateur des moindres carrés d'un modèle Autorégressif vectoriel périodique, d'ordre 1, instable explosif est obtenue. Les résultats obtenus sont des extensions des résultats établis par Anderson (1959) pour un modèle $VAR(1)$ au cas d'un modèle $VAR(1)$ à coefficients périodiques.

1.2 Notations, définitions et hypothèses

Rappelons qu'un processus de second ordre périodiquement corrélé $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit satisfaire un modèle Autorégressif vectoriel périodique du premier ordre, de période S , noté $P_SVAR(1)$ s'il est solution de l'équation linéaire aux différences stochastique suivante :

$$X_t = \Phi_t X_{t-1} + \varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}, \quad (1.2.1)$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un m -vecteur processus bruit blanc périodique, i.e., une suite de variables aléatoires non corrélées, de vecteur moyen zéro, et matrice variance-covariance périodique Λ_t ; et où les $m \times m$ matrices réelles, Φ_t and Λ_t , sont périodiques dans le temps, de période S (où S est un entier strictement positif; $S > 1$), i.e., $\Phi_{t+rS} = \Phi_t$ et $\Lambda_{t+rS} = \Lambda_t, \forall t, r \in \mathbb{Z}$.

En Posant $t = s + \tau S, s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, on peut réécrire l'équation (1.2.1) sous la forme équivalente suivante :

$$X_{s+\tau S} = \Phi_s X_{s-1+\tau S} + \varepsilon_{s+\tau S}, s = 1, 2, \dots, S \text{ et } \tau \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.2)$$

Ce modèle est capable de capturer et de décrire la périodicité exhibée par la structure d'autocovariance de plusieurs séries chronologiques rencontrées dans divers domaines et qui sont générées par un processus vectoriel périodiquement corrélé dans le sens de Gladyshev (1961).

1.2.1 Régions de Stabilité et d'Instabilité

Considérons la matrice $\Psi = \prod_{k=1}^S \Phi_k$ alors, selon les positions du produit des valeurs propres $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$ de cette matrice, par rapport au cercle unitaire, nous distinguons les trois régions suivantes :

- a) $\prod_{i=1}^m |\lambda_{s,i}| < 1$ (Région de stabilité) le processus périodiquement corrélé $\{X_t, t \in \mathbb{Z}, \}$ est strictement stationnaire et périodiquement stationnaire au second ordre,
- b) $\prod_{i=1}^m |\lambda_{s,i}| = 1$ (Région d'instabilité racine unitaire) le processus périodiquement corrélé $\{X_t, t \in \mathbb{Z}, \}$ est non stationnaire de type racine unitaire,
- c) $\prod_{i=1}^n |\lambda_{s,i}| > 1, 1 \leq n \leq m$ (Région d'instabilité explosive) le processus périodiquement corrélé $\{X_t, t \in \mathbb{Z}, \}$ est non stationnaire explosif.

1.3 Causalité (Condition de Stabilité)

1.3.1 Condition de stationnarité périodique

La proposition suivante établit une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un processus périodiquement stationnaire, du second ordre, qui est solution de l'équation stochastique périodique (1.2.1).

Proposition 1.3.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus périodiquement corrélé $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant l'équation aux différences stochastiques (1.2.1) soit un processus périodiquement stationnaire de second ordre est que les racines de l'équation suivante :*

$$|Iz - \Psi_s| = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.3.1)$$

toutes se trouvent à l'intérieur du disque d'unité, où $\Psi_s = \prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1}$, ce qui a les mêmes valeurs propres que la matrice $\prod_{k=1}^S \Phi_k$. Sous cette condition, le processus périodiquement corrélé $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, est donné, pour $\tau = s + \tau S$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, par l'expression :

$$X_{s+\tau S} = \sum_{r=1}^{\tau} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^{r-1} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} + \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^{\tau} \left[\sum_{j=1}^s \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=k}^s \Phi_{s-k+1} \right) X_0 \right], \quad (1.3.2)$$

ou par son expression de Wold-Cramér

$$X_{s+\tau S} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S}, \quad (1.3.3)$$

$$= \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+\tau S} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S}.$$

De plus, la forme explicite de la matrice variance-covariance, $\text{Var}(X_{s+\tau S}) = \Gamma^{(s)}(0)$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, est, sous cette condition, donnée par

$$\Gamma^{(s)}(0) = \sum_{r=0}^{\infty} \Psi_s^r \left[\sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \Lambda_{s-i+1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k+1} \right) \right] \Psi_s^{r'}, \quad (1.3.4a)$$

ou d'une façon équivalente par :

$$\text{vec}(\Gamma^{(s)}(0)) = \left(I - \prod_{i=1}^S (\Phi_{s-i+1} \otimes \Phi_{s-i+1}) \right)^{-1} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} (\Phi_{s-i+1} \otimes \Phi_{s-i+1}) \right) \text{vec}(\Lambda_{s-j+1}). \quad (1.3.4b)$$

Preuve. En itérant l'équation (1.2.1), on peut obtenir :

$$X_t = \left(\prod_{i=1}^m \Phi_{t-i+1} \right) X_{t-m} + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^j \Phi_{t-i+1} \right) \varepsilon_{t-j}. \quad (1.3.5)$$

Posons $m = t$, on obtient

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-1} \left(\prod_{i=1}^j \Phi_{t-i+1} \right) \varepsilon_{t-j} + \left(\prod_{i=1}^t \Phi_{t-i+1} \right) X_0.$$

Remplaçant, dans la dernière expression, t par $s + \tau S$, et tenant compte de la périodicité de la matrice Φ_t , on obtient

$$X_{s+\tau S} = \sum_{j=0}^{s+\tau S-1} \left(\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \right) \varepsilon_{s-j+\tau S} + \left(\prod_{i=1}^{s+\tau S} \Phi_{s-i+1} \right) X_0.$$

qui peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X_{s+\tau S} &= \left[\left(\prod_{i=1}^0 \Phi_{s-i+1} \right) \varepsilon_{s-1+1+\tau S} + \left(\prod_{i=1}^1 \Phi_{s-i+1} \right) \varepsilon_{s-2+1+\tau S} + \dots + \left(\prod_{i=1}^{S-1} \Phi_{s-i+1} \right) \varepsilon_{s-S+1+\tau S} \right] \\ &+ \left[\prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1} \varepsilon_{s-1+1+(\tau-1)S} + \prod_{i=1}^{1+S} \Phi_{s-i+1} \varepsilon_{s-2+1+(\tau-1)S} + \dots + \prod_{i=1}^{S-1+S} \Phi_{s-i+1} \varepsilon_{s-(S-1)+(\tau-1)S} \right] \\ &+ \left[\prod_{i=1}^{2S} \Phi_{s-i+1} \varepsilon_{s-1+1+(\tau-2)S} + \prod_{i=1}^{1+2S} \Phi_{s-i+1} \varepsilon_{s-2+1+(\tau-2)S} + \dots + \prod_{i=1}^{S-1+2S} \Phi_{s-i+1} \varepsilon_{s-(S-1)+1+(\tau-2)S} \right] \\ &\vdots \\ &= \sum_{r=0}^{\tau-1} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1+rS-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} + \sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{j-1+\tau S} \Phi_{s-i+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=1}^{s+\tau S} \Phi_{s-i+1} \right) X_0, \end{aligned}$$

ou par la forme équivalent suivante :

$$\begin{aligned} X_{s+\tau S} &= \sum_{r=0}^{\tau-1} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} \\ &+ \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^\tau \sum_{j=1}^s \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^\tau \left(\prod_{i=1}^s \Phi_{s-i+1} \right) X_0, \\ &= \sum_{r=0}^{\tau-1} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} \\ &+ \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^\tau \sum_{j=1}^s \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^\tau \left(\prod_{i=1}^s \Phi_{s-i+1} \right) X_0. \end{aligned}$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}
 X_{s+\tau S} &= \sum_{r=1}^{\tau} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^{r-1} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} \\
 &+ \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^{\tau} \left[\sum_{j=1}^s \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=k}^s \Phi_{s-k+1} \right) X_0 \right]. \tag{1.3.6}
 \end{aligned}$$

De la dernière expression, on a

$$\begin{aligned}
 X_{s+\tau S} &- \sum_{r=1}^{\tau} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^{r-1} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} \\
 &= \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^{\tau} \left[\sum_{j=1}^s \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=k}^s \Phi_{s-k+1} \right) X_0 \right].
 \end{aligned}$$

D'où, on a :

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left\{ \left[X_{s+\tau S} - \sum_{r=0}^{\tau-1} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \left[X_{s+\tau S} - \sum_{r=0}^{\tau-1} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} \right]' \right\}, \\
 &= \left\{ \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^{\tau} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^s \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=k}^s \Phi_{s-k+1} \right) X_0 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(\sum_{m=1}^s \varepsilon'_{s-r+1} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \Phi'_{s-k+1} \right) + X'_0 \left(\prod_{k=1}^s \Phi_{s-k+1} \right)' \right) \right] \left(\prod_{k=1}^S \Phi'_{s+k} \right)^{\tau} \right\}, \\
 &= \left\{ \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^{\tau} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^s \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=k}^s \Phi_{s-k+1} \right) X_0 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(\sum_{m=1}^s \varepsilon'_{s-r+1} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \Phi'_{s-k+1} \right) + X'_0 \left(\prod_{k=1}^s \Phi_k \right)' \right) \right] \left(\prod_{k=1}^S \Phi'_{s+k} \right)^{\tau} \right\} = \Phi^{\tau} K(\mathbb{E}(\varepsilon_t^4)) \Phi'^{\tau}.
 \end{aligned}$$

Du fait que la matrice suivante, qui sera calculée ci-dessous

$$\begin{aligned}
 K(\mathbb{E}(\varepsilon_s^2)) &= \mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{j=1}^s \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1} + \left(\prod_{i=k}^s \Phi_{s-k+1} \right) X_0 \right] \left[\sum_{m=1}^s \varepsilon'_{s-r+1} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \Phi'_{s-k+1} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. X'_0 \left(\prod_{k=1}^s \Phi'_k \right) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

est finie et donc la forme quadratique converge, si et seulement si $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_s^{\tau} K(\mathbb{E}(\varepsilon_s^4)) \Phi_s'^{\tau} = 0$,

$s = 1, 2, \dots, S$, i.e., les valeurs propres de la matrice $\Psi_s = \prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1}$ sont tous strictement inférieurs en valeurs absolues à 1. Sous cette condition, on a la convergence, au sens quadratique, de l'expression qui est la représentation de Wold-Cramér

$$X_{s+\tau S} = \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+\tau S} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S}.$$

La matrice variance-covariance $\Gamma^{(s)}(0)$ peut être calculé directement à partir de l'expression précédente. On a :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(s)}(0) &= \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-i+1+\tau S} \varepsilon'_{s-i+1+\tau S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right)' \\ &\quad + \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^l \sum_{j=1}^S \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-j+1+(\tau-l)S} \right] \right\}' \\ &= \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-i+1+\tau S} \varepsilon'_{s-i+1+\tau S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k+1} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{r=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \varepsilon_{s-i+1+(\tau-r)S} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon'_{s-j+1+(\tau-l)S} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi'_{s-k+1} \right) \left(\prod_{k=1}^S \Phi'_{s+k} \right)^l \right] \right\} \end{aligned}$$

alors, on a

$$\Gamma^{(s)}(0) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1} \right)^r \left[\sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k+1} \right) \Lambda_{s-i+1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k+1} \right) \right] \left(\prod_{k=1}^S \Phi'_{s+k} \right)^r.$$

où Λ_t est la matrice de variance-covariance du processus d'innovation. Cependant, pour le besoin ultérieure, on peut avoir une expression équivalente. En effet, en multipliant, à droite par X'_t , l'égalité (1.2.1), tout en prenant l'espérance mathématique, on obtient

$$\Gamma^{(t)}(0) = \Phi_t \Gamma^{(t-1)}(0) \Phi'_t + \Lambda_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

en prenant l'opérateur *vec* des deux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$\text{vec}(\Gamma^{(t)}(0)) = (\Phi_t \otimes \Phi_t) \text{vec}(\Gamma^{(t-1)}(0)) + \text{vec}(\Lambda_t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

En itérant S fois l'équation aux différences précédentes, on obtient

$$\text{vec}(\Gamma^{(t)}(0)) = \left(\prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1}^* \right) \text{vec}(\Gamma^{(t)}(0)) + \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} \Phi_{t-i+1}^* \right) \text{vec}(\Lambda_{t-j+1}),$$

où $\Phi_t^* = (\Phi_t \otimes \Phi_t)$. Alors, si $\rho \left(\prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1}^* \right) = \left[\rho \left(\prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1} \right) \right]^2 < 1$, on a

$$\begin{aligned} \text{vec}(\Gamma^{(s)}(0)) &= \left[I - \left(\prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1}^* \right) \right]^{-1} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} \Phi_{s-i+1}^* \right) \text{vec}(\Lambda_{s-j+1}), \\ &= \left(I - \prod_{i=1}^S (\Phi_{s-i+1} \otimes \Phi_{s-i+1}) \right)^{-1} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} (\Phi_{s-i+1} \otimes \Phi_{s-i+1}) \right) \text{vec}(\Lambda_{s-j+1}). \end{aligned}$$

1.3.2 Structure de la covariance et de l'autocorrélation

La matrice de variance covariance, $\Gamma^{(t)}(h) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_t - \mathbb{E}(X_t))']$, du processus vectoriel X_t donné par (1.2.1) satisfait la propriété suivante.

Propriété 1.3.1. *Soit h un entier positif, alors on a*

$$\Gamma^{(s)}(-h) = \Gamma^{(s+h)'}(h), \quad s = 1, 2, \dots, S \text{ et } h \in \mathbb{N}. \quad (1.3.7)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \Gamma^{(s)}(-h) &= \mathbb{E}(X_{s+\tau S} X'_{s+h+\tau S}) = \mathbb{E}[(X_{s+h+\tau S} X'_{s+\tau S})]' = \mathbb{E}[(X_{s+h+\tau S} X'_{s+h+\tau S-h})]', \\ &= [\mathbb{E}(X_{s+h+\tau S} X'_{s+h+\tau S-h})]' = [\Gamma^{(s+h)}(h)]'. \end{aligned}$$

La matrice de variance covariance $\Gamma^{(t)}(h)$, $h \geq 1$, est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.3.2.

$$\Gamma^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^h \Phi_{s-i+1} \right) \Gamma^{(s-h)}(0), \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad h \geq 1. \quad (1.3.8)$$

ou encore pour $h = \nu + kS$, $\nu = 1, 2, \dots, S$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma^{(s)}(\nu + kS) = \Psi_s^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \Phi_{s-i+1} \right) \Gamma^{(s-\nu)}(0), \quad \nu = 1, 2, \dots, S, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.3.9)$$

où la matrice Ψ_s est donnée par : $\Psi_s = \prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1}$.

Preuve. En multipliant, à droite, les deux cotés de l'expression (1.2.2) par $X'_{s-h+\tau S}$, $h \geq 1$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, tout en prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned} X_{s+\tau S} X'_{s-h+\tau S} &= \Phi_s X_{s+\tau S} X'_{s-h+\tau S} + \varepsilon_{s+\tau S} X'_{s-h+\tau S}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \\ \mathbb{E}(X_{s+\tau S} X'_{s-h+\tau S}) &= \Phi_s \mathbb{E}(X_{s-1+\tau S} X'_{s-1-(h-1)+\tau S}) + \mathbb{E}(\varepsilon_{s+\tau S} X'_{s-h+\tau S}), \\ \Gamma^{(s)}(h) &= \Phi_s \Gamma^{(s-1)}(h-1), \quad h \geq 1, \quad s = 1, 2, \dots, S, \end{aligned}$$

par itération, par rapport à h , on obtient

$$\Gamma^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^k \Phi_{s-i+1} \right) \Gamma^{(s-h)}(0), \quad h \geq 1.$$

Posons $h = \nu + kS$, $\nu = 1, 2, \dots, S$ et $k \in \mathbb{N}$, alors la dernière expression peut être réécrite sous la forme :

$$\Gamma^{(s)}(\nu + kS) = \left(\prod_{i=1}^{\nu+kS} \Phi_{s-i+1} \right) \Gamma^{s-(\nu+kS)}(0) = \Psi_s^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \Phi_{s-i+1} \right) \Gamma^{(s-\nu)}(0), \quad \nu = 1, \dots, S, \quad k \in \mathbb{N},$$

où la matrice Ψ_s est donnée par : $\Psi_s = \prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1}$.

Structure d'autocorrélation

Soient $\underline{\rho}^{(s)}(h) = \text{Cor}(X_s; X_{s-h})$, $h = \nu + kS$, $s, \nu = 1, 2, \dots, S$ et $k \in \mathbb{N}$ la matrice d'autocorrélation du processus périodiquement corrélé $X_{s+\tau S}$, alors on a la proposition suivante.

Proposition 1.3.2.

$$\underline{\rho}^{(s)}(\nu + kS) = \Delta_s^{-1} \Psi_s^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \Phi_{s-i+1} \right) \Delta_{s-\nu} \underline{\rho}^{(s-\nu)}(0), \quad \nu = 1, 2, \dots, S, k \in \mathbb{N}. \quad (1.3.10)$$

où la matrice Ψ_s est donnée par : $\Psi_s = \prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1}$.

Preuve.

$$\begin{aligned} \Gamma^{(s)}(\nu + kS) &= \Psi_s^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \Phi_{s-i+1} \right) \Gamma^{(s-\nu)}(0), \\ \Delta_s \underline{\rho}^{(s)}(\nu + kS) \Delta_{s-\nu} &= \Psi_s^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \Phi_{s-i+1} \right) \Gamma^{(s-\nu)}(0), \\ \underline{\rho}^{(s)}(\nu + kS) &= \Delta_s^{-1} \Psi_s^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \Phi_{s-i+1} \right) \Gamma^{(s-\nu)}(0) \Delta_{s-\nu}^{-1}, \\ \underline{\rho}^{(s)}(\nu + kS) &= \Delta_s^{-1} \Psi_s^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \Phi_{s-i+1} \right) \Delta_{s-\nu} \underline{\rho}^{(s-\nu)}(0), \end{aligned}$$

où Δ_s est la matrice diagonale dont le j -ième élément, $j = 1, 2, \dots, m$ (rappelant que m est la dimension du processus X_t), est donné par

$$(\Delta_r)_{jj} = \sqrt{\Gamma_{jj}^{(r)}(0)}.$$

1.3.3 Estimateurs des moindres carrés

Il est bien connu que l'estimateur des moindres carrés $\widehat{\Phi}_T$, basé sur une série chronologique de taille T , de la matrice Φ est donné par l'expression :

$$\widehat{\Phi}_{s,T} = \left(\sum_{\tau=0}^{T-1} X_{s+\tau S} X'_{s-1+\tau S} \right) \left(\sum_{\tau=0}^{T-1} X_{s-1+\tau S} X'_{s-1+\tau S} \right)^{-1}. \quad (1.3.11)$$

En remplaçant $X_{s+\tau S}$ dans (1.3.11) par sa valeur donnée par (1.2.2), on obtient, pour $s = 1, 2, \dots, S$,

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{s,T} &= \left[\sum_{\tau=1}^T (\Phi_s X_{s-1+(\tau-1)S} + \varepsilon_{s+(\tau-1)S}) X'_{s-1+(\tau-1)S} \right] \left(\sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right)^{-1}, \\ &= \left[\Phi_s \sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} + \sum_{\tau=1}^T \varepsilon_{s+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right] \times \\ &\quad \left(\sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right)^{-1}, \\ &= \Phi_s + \left(\sum_{\tau=1}^T \varepsilon_{s+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right) \left(\sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Donc, on a

$$\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s = \left(\sum_{\tau=1}^T \varepsilon_{s+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right) \left(\sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right)^{-1}. \quad (1.3.13)$$

Soient $A_{s,T}$ et $B_{s,T}$, $s = 1, 2, \dots, S$ deux matrices définies comme suit

$$\begin{aligned} A_{s,T} &= \left(\sum_{\tau=1}^T X_{s+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right) - \Phi_s \sum_{\tau=1}^{T-1} X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S}, \\ &= \Phi_s \sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} + \sum_{\tau=1}^T \varepsilon_{s+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \\ &\quad - \Phi_s \sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} = \sum_{\tau=1}^T \varepsilon_{s+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S}, \\ B_{s,T} &= \sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S}. \end{aligned}$$

En utilisant ces notations, on peut réécrire l'expression (1.3.13) sous la forme

$$\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s = A_{s,T} B_{s,T}^{-1}, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (1.3.14)$$

Comme il a été précité, nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude du comportement asymptotique de l'estimateur des moindres carrés ordinaire du modèle $PVAR(1)$ dans le cas explosif, et plus précisément dans le cas où lrs valeurs propre de la matrice Ψ_s sont toutes supérieures à un.

Soit le processus vectoriel $Z_{s,\tau}$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau = 1, \dots, T - 1$,

$$Z_{s,\tau} = \Psi_s^{-(\tau-2)} X_{s-1+(\tau-1)S}, \quad \tau \geq 2, \quad (1.3.15)$$

où $\Psi_s = \prod_{k=1}^S \Phi_{s-k}$, $s = 1, 2, \dots, S$, est une matrice qui possède clairement les valeurs propres que la matrice $\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k+1}$. Remplaçons $X_{s-1+(\tau-2)S}$ par son expression donnée dans (1.3.2), pour $s - 1$ et $\tau - 1$ ensuite pour s et τ , on obtient

$$\begin{aligned} X_{s-1+(\tau-1)S} &= \sum_{r=0}^{\tau-2} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(\tau-r-1)S} \\ &+ \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right)^{\tau-1} \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0 \right], \end{aligned}$$

Donc, le processus $Z_{s,\tau}$ peut être explicitement réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} Z_{s,\tau} &= \Psi_s^{-(\tau-2)} X_{s-1+(\tau-1)S}, \\ &= \Psi_s^{-(\tau-2)} \left[\sum_{r=0}^{\tau-2} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(\tau-r-1)S} \right] \\ &+ \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0 \right]. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Par itération, par rapport à s de (1.2.2), tout en remplaçant s par $s - 1$, on obtient

$$X_{s-1+\tau S} = \left(\prod_{k=1}^m \Phi_{s-k} \right) X_{s-1-m+\tau S} + \sum_{i=1}^m \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+\tau S}, \quad (1.3.17)$$

en remplaçant m par S , on obtient

$$X_{s-1+\tau S} = \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) X_{s-1+(\tau-1)S} + \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+\tau S}, \quad (1.3.18)$$

En remplaçant, τ par $\tau - 1$, on a

$$X_{s-1+(\tau-1)S} = \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) X_{s-1+(\tau-2)S} + \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(\tau-1)S}, \quad (1.3.19)$$

En multipliant les deux cotés de la dernière expression par $\Psi_s^{-(\tau-2)}$, on obtient, tout en utilisant $Z_{s,\tau} = \Psi_s^{-(\tau-2)} X_{s-1+(\tau-1)S}$:

$$\begin{aligned} Z_{s,\tau} &= \Psi_s^{-(\tau-2)} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) X_{s-1+(\tau-2)S} + \Psi_s^{-(\tau-2)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(\tau-1)S}, \\ &= \Psi_s^{-(\tau-3)} X_{s-1+(\tau-2)S} + \Psi_s^{-(\tau-2)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(\tau-1)S}. \end{aligned}$$

Donc, on a l'équation récurrente

$$Z_{s,\tau} = Z_{s,\tau-1} + F_{s,\tau}, \quad s = 1, 2, \dots, S \text{ and } \tau \geq 2; \quad (1.3.20a)$$

où

$$F_{s,\tau} = \Psi_s^{-(\tau-2)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(\tau-1)S}. \quad (1.3.20b)$$

Par itération, en τ de l'équation précédente, on obtient

$$Z_{s,\tau} = Z_{s,\tau-j} + \sum_{m=0}^{j-1} F_{s,\tau-m}, \quad \tau \geq 2 \text{ and } j \geq 1. \quad (1.3.20c)$$

Si on suppose que la taille N de la série chronologique est un multiple de la période S , i.e., $N = TS$, $T \geq 2$, alors, on a, de (1.3.16)

$$\begin{aligned} Z_{s,T} &= \Psi_s^{-(T-2)} X_{s-1+(T-1)S}, \\ &= \Psi_s^{-(T-2)} \left[\sum_{r=0}^{T-2} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(T-r-1)S} \right] \\ &\quad + \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0 \right]. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Utilisant ces notations et définitions, nous pouvons énoncer le lemme suivant.

Lemme 1.3.1.

$$\begin{aligned} \Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - F_{s,T} &= \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} (F_{T-m} F'_{T-l}) \right) \Psi_s^{-j'} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} Z_{s,T} F'_{T-m} \right) \Psi_s^{-j'} - \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} F_{T-m} Z'_{s,T} \right) \Psi_s^{-j'}, \end{aligned} \quad (1.3.22a)$$

où

$$\begin{aligned} F_{s,T} &= \sum_{j=0}^{T-1} \Psi_s^{-j} (Z_{s,T} Z'_{s,T}) \Psi_s^{-j'}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \\ &= Z_{s,T} Z'_{s,T} + \Psi_s^{-1} (Z_{s,T} Z'_{s,T}) \Psi_s^{-1'} + \Psi_s^{-2} (Z_{s,T} Z'_{s,T}) \Psi_s^{-2'} + \\ &\quad \dots + \Psi_s^{-(T-1)} (Z_{s,T} Z'_{s,T}) \Psi_s^{-(T-1)'}, \quad s = 1, 2, \dots, S. \end{aligned} \quad (1.3.22b)$$

Preuve. De l'expression de $B_{s,T}$ tout en employant la relation $Z_{s,T} = \Psi_s^{-(T-2)} X_{s-1+(T-1)S}$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} &= \Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{\tau=1}^T X_{s-1+(\tau-1)S} X'_{s-1+(\tau-1)S} \right) \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 &= \Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{j=0}^{T-1} X_{s-1+(T-j-1)S} X'_{s-1+(T-j-1)S} \right) \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 &= \Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{j=0}^{T-1} \Psi_s^{(T-j-2)} (Z_{s,T-j} Z'_{s,T-j}) \Psi_s^{(T-j-2)'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 &= \sum_{j=0}^{T-1} \Psi_s^{-j} (Z_{s,T-j} Z'_{s,T-j}) \Psi_s^{-j'} = Z_{s,T} Z'_{s,T} + \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} (Z_{s,T-j} Z'_{s,T-j}) \Psi_s^{-j'},
 \end{aligned}$$

en remplaçant $Z_{s,T-j} Z'_{s,T-j}$, $j \geq 1$, $s = 1, 2, \dots, S$, de l'expression (1.3.20c) pour $\tau = T$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} &= Z_{s,T} Z'_{s,T} + \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} (Z_{s,T-j} Z'_{s,T-j}) \Psi_s^{-j'}, \\
 &= Z_{s,T} Z'_{s,T} + \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left[Z_{s,T} Z'_{s,T} - Z_{s,T} \left(\sum_{m=0}^{j-1} F'_{T-m} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\sum_{m=0}^{j-1} F_{T-m} \right) Z'_{s,T} + \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} F_{T-m} F'_{T-l} \right] \Psi_s^{-j'}.
 \end{aligned} \tag{1.3.23}$$

qui peut être réécrite sous la forme équivalente suivante

$$\begin{aligned}
 \Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} &= Z_{s,T} Z'_{s,T} + \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} (Z_{s,T-j} Z'_{s,T-j}) \Psi_s^{-j'}, \\
 &= Z_{s,T} Z'_{s,T} + \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} (Z_{s,T} Z'_{s,T}) \Psi_s^{-j'} - \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} Z_{s,T} \left(\sum_{m=0}^{j-1} F'_{T-m} \right) \Psi_s^{-j'} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} F_{T-m} \right) Z'_{s,T} \Psi_s^{-j'} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \Psi_s^{-j} (F_{T-m} F'_{T-l}) \Psi_s^{-j'}. \tag{1.3.24} \\
 &= \sum_{j=0}^{T-1} \Psi_s^{-j} (Z_{s,T} Z'_{s,T}) \Psi_s^{-j'} - \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} Z_{s,T} F'_{T-m} \right) \Psi_s^{-j'} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} F_{T-m} Z'_{s,T} \right) \Psi_s^{-j'} + \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} (F_{T-m} F'_{T-l}) \right) \Psi_s^{-j'}.
 \end{aligned}$$

Lemme 1.3.2

$$\begin{aligned}
 A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - G_{s,T} &= - \sum_{j=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} \sum_{m=0}^{j-1} F'_{T-m} \Psi_s^{-j'}, \\
 &= - \left[\sum_{j=1}^T \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^S \left(\varepsilon_{s+(T-j)S} \varepsilon'_{s-i+(T-j+m)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-m'} \right] \Psi_s^{-(T-2)'}, \quad (1.3.25a) \\
 &= \left\{ - \sum_{j=1}^T \left[\sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^S \left(\varepsilon_{s+(T-j)S} \varepsilon'_{s-i+(T-m)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{m'} \right] \Psi_s^{-j'} \right\} \Psi_s^{-(T-2)'},
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 G_{s,T} &= \sum_{j=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} Z'_{s,T} \Psi_s^{-j'}, \\
 &= \varepsilon_{s+(T-1)S} Z'_{s,T} + \varepsilon_{s+(T-2)S} Z'_{s,T} \Psi_s^{-1'} + \dots + \varepsilon_s Z'_{s,T} \Psi_s^{-(T-1)'}. \quad (1.3.25b)
 \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant l'égalité $Z_{s,T} = Z_{s,T-j} + \sum_{m=0}^{j-1} F_{T-m}$, $j \geq 1$ et $s = 1, 2, \dots, S$, on obtient

$$\begin{aligned}
 A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} &= \sum_{j=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} Z'_{s,T-j} \Psi_s^{(T-j-2)'} \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 &= \sum_{j=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} Z'_{s,T-j} \Psi_s^{-j'}, \\
 &= \sum_{j=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} Z'_{s,T} \Psi_s^{-j'} - \sum_{j=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} \sum_{m=0}^{j-1} F'_{T-m} \Psi_s^{-j'}, \\
 &= G_{s,T} - \sum_{j=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} \sum_{m=0}^{j-1} F'_{T-m} \Psi_s^{-j'},
 \end{aligned}$$

en remplaçant F'_{T-m} par son expression $\sum_{i=1}^S \varepsilon'_{s-i+(T-m-1)S} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - G_{s,T} &= - \sum_{j=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{i=1}^S \varepsilon'_{s-i+(T-m-1)S} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'} \Psi_s^{-j'}, \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \left[\sum_{m=0}^{j-1} \sum_{i=1}^S \left(\varepsilon_{s+(T-j-1)S} \varepsilon'_{s-i+(T-m-1)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'} \right] \Psi_s^{-j'}, \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \left[\sum_{m=1}^j \sum_{i=1}^S \left(\varepsilon_{s+(T-j-1)S} \varepsilon'_{s-i+(T-j+m-1)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T+m-2)'} \right], \\
 &= - \left[\sum_{j=1}^T \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^S \left(\varepsilon_{s+(T-j)S} \varepsilon'_{s-i+(T-j+m)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-m'} \right] \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 &= - \left[\sum_{j=1}^T \left(\sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^S \left(\varepsilon_{s+(T-j)S} \varepsilon'_{s-i+(T-m)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{m'} \right) \Psi_s^{-j'} \right] \Psi_s^{-(T-2)'},
 \end{aligned}$$

ce qui accomplit la preuve. La proposition suivante établit la convergence, en probabilité vers 0, de $\Psi_s^{-(T-2)'} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - F_{s,T}$ et $A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - G_{s,T}$.

A) Convergence de $\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} et A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'}$

Proposition 1.3.3.

$$P \lim_{T \rightarrow \infty} (\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - F_{s,T}) = 0, \quad (1.3.26a)$$

$$P \lim_{T \rightarrow \infty} (A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - G_{s,T}) = 0, \quad (1.3.26b)$$

où $F_{s,T}$ et $G_{s,T}$, $s = 1, 2, \dots, S$, sont respectivement donnés par (1.3.22b) et (1.3.25b).

Remarque 1.3.1. Dans le cas invariant de temps les limites de probabilité (1.3.26a) et (1.3.26b) sont réduites à ceux données, par Anderson (1959), dans le Theorem 3.1 et le Theorem 3.2, respectivement.

Preuve. 1.3.26a). Exprimons, d'abord les expressions $\sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} F_{T-m} F'_{T-l}$ et $\sum_{m=0}^{j-1} Z_{s,T} F'_{T-m}$

en terme des ε . En effet, de (1.3.20b), on a

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} F_{T-m} F'_{T-l} &= \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \left[\Psi_s^{-(T-m-2)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(T-m-1)S} \right] \times \\ &\quad \left[\sum_{r=1}^S \varepsilon'_{s-r+(T-l-1)S} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-r-1+k} \right) \Psi_s^{-(T-l-2)'} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \left\{ \Psi_s^{-(T-m-2)} \sum_{i=1}^S \sum_{r=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \left(\varepsilon_{s-i+(T-m-1)S} \varepsilon'_{s-r+(T-l-1)S} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-r-1+k} \right) \Psi_s^{-(T-l-2)'} \right\}, \end{aligned}$$

de (1.3.21) et (1.3.20b) on peut réécrire l'expression $\sum_{m=0}^{j-1} Z_{s,T} F'_{T-m}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{j-1} Z_{s,T} F'_{T-m} &= \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-(T-2)} \left\{ \sum_{r=0}^{T-2} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(T-r-1)S} \right. \\ &\quad \left. + \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) \left(\sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{l=1}^S \varepsilon'_{s-l+(T-m-1)S} \left(\prod_{k=1}^{l-1} \Phi'_{s-l+k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'} \right] \right\}, \quad (1.3.27) \end{aligned}$$

et de (1.3.27), on peut avoir

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{j-1} F_{T-m} Z'_{s,T} &= \Psi_s^{-(T-2)} \sum_{m=0}^{j-1} \left(\Psi_s^m \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(T-m-1)S} \right) \times \\
 &\quad \left[\sum_{r=0}^{T-2} \sum_{i=1}^S \varepsilon'_{s-i+(T-r-1)S} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \left(\prod_{k=1}^S \Phi'_{s-k} \right)^r \Psi_s^{-(T-2)'} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{i=1}^{s-1} \varepsilon'_{s-i} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) + X'_0 \left(\prod_{k=1}^{s-1} \Phi'_k \right) \right) \Psi'_s \right], \quad T \geq 2.
 \end{aligned} \tag{1.3.28}$$

Calculons l'espérance de $\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - F_{s,T}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - F_{s,T} \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} (F_{T-m} F'_{T-l}) \right) \Psi_s^{-j'} \right) \\
 &\quad - \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} Z_{s,T} F'_{T-m} \right) \Psi_s^{-j'} \right) - \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} F_{T-m} Z'_{s,T} \right) \Psi_s^{-j'} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \mathbb{E} (F_{T-m} F'_{T-l}) \right) \Psi_s^{-j'} - \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} (Z_{s,T} F'_{T-m}) \right) \Psi_s^{-j'} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} (F_{T-m} Z'_{s,T}) \right) \Psi_s^{-j'}.
 \end{aligned}$$

Calculons l'expression $\sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \mathbb{E} (F_{T-m} F'_{T-l})$

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \mathbb{E} (F_{T-m} F'_{T-l}) &= \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \Psi_s^{-(T-m-2)} \sum_{i=1}^S \sum_{r=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-i+(T-m-1)S} \varepsilon'_{s-r+(T-l-1)S} \right) \times \\
 &\quad \left(\prod_{k=1}^{r-1} \Phi'_{s-r+k} \right) \Psi_s^{-(T-l-2)'},
 \end{aligned}$$

en tenant compte de l'indépendance des ε , on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \mathbb{E} (F_{T-m} F'_{T-l}) &= \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-(T-m-2)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-i+(T-m-1)S} \varepsilon'_{s-i+(T-m-1)S} \right) \times \\
 &\quad \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'}, \\
 &= \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-(T-m-2)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'} \\
 &= \Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^m \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{m'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'},
 \end{aligned}$$

où $\Omega_s^{(S)} = \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \mathbb{E} (F_{T-m} F'_{T-l}) \Psi_s^{-j'} = \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left[\Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^m \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{m'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'} \right] \Psi_s^{-j'}, \\
 & = \Psi_s^{-(T-2)} \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left[\left(\sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^m \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{m'} \right) \Psi_s^{-j'} \right] \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 & = \Psi_s^{-(T-2)} \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s \left\{ \left[\left(\sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{(m-j)} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{(m-j)'} \right) \right] \right\} \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 & = \Psi_s^{-(T-2)} \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s \left(\sum_{m=1}^j \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 & = \Psi_s^{-(T-2)} \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s \left(\sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-(m+1)} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-(m+1)'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 & = \Psi_s^{-(T-1)} \left[\sum_{j=0}^{T-2} \left(\sum_{m=0}^j \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \right) \right] \Psi_s^{-(T-1)'},
 \end{aligned}$$

où la matrice symétrique $\Omega_s^{(S)} = \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right)$.

D'autre part, l'espérance de $\sum_{m=0}^{j-1} Z_{s,T} F'_{T-m}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} (Z_{s,T} F'_{T-m}), \\
 & = \sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} \left\{ \Psi_s^{-(T-2)} \sum_{r=0}^{T-2} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right)^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(T-r-1)S} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) \sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0 \right\} \times \\
 & \quad \left[\sum_{l=1}^S \varepsilon'_{s-l+(T-m-1)S} \left(\prod_{k=1}^{l-1} \Phi'_{s-l+k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'} \right], \\
 & = \sum_{m=0}^{j-1} \left\{ \Psi_s^{-(T-2)} \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right)^m \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-i+(T-m-1)S} \varepsilon'_{s-i+(T-m-1)S} \right) \times \right. \\
 & \quad \left. \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-i+k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'} \right\} \\
 & \quad + \left(\prod_{k=1}^S \Phi_{s-k} \right) \sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-j} \varepsilon'_{s-j} \right) \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi'_{s-j+k} \right) \Psi_s'.
 \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} (Z_{s,T} F'_{T-m}) & = \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-(T-m-2)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'} \\
 & \quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s', \\
 & = \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-(T-m-2)} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-(T-m-2)'} + \Psi_s \Pi^{(s)} \Psi_s', \\
 & = \Psi_s^{-(T-j-1)} \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \Psi_s^{-(T-j-1)'} + \Psi_s \Pi^{(s)} \Psi_s',
 \end{aligned}$$

où $\Pi^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-j} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi'_{s-k} \right)$. Donc l'espérance mathématique de l'expression

$\sum_{m=0}^{j-1} F_{T-m} Z'_{s,T}$ est, puisque la matrice de variance-covariance $\Omega_s^{(S)}$ est symétrique, donnée

par

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} (F_{T-m} Z'_{s,T}) &= \left(\sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} (Z_{s,T} F'_{T-m}) \right)' \\ &= \Psi_s^{-(T-j-1)} \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \Psi_s^{-(T-j-1)'} + \Psi_s \Pi^{(s)} \Psi_s'. \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de $\mathbb{E} \left(\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - F_{s,T} \right)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - F_{s,T} \right) &= \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1} \mathbb{E} (F_{T-m} F'_{T-l}) \right) \Psi_s^{-j'} \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} (Z_{s,T} F'_{T-m}) \right) \Psi_s^{-j'}, \\ &= \Psi_s^{-(T-1)} \left[\sum_{j=0}^{T-2} \left(\sum_{m=0}^j \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \right) \right] \Psi_s^{-(T-1)'} \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^{T-1} \Psi_s^{-j} \left(\Psi_s^{-(T-j-1)} \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \Psi_s^{-(T-j-1)'} + \Psi_s \Pi^{(s)} \Psi_s' \right) \Psi_s^{-j'}, \\ &= \Psi_s^{-(T-1)} \left[\sum_{j=0}^{T-2} \left(\sum_{m=0}^j \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \right) \right] \Psi_s^{-(T-1)'} \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^{T-1} \left(\Psi_s^{-(T-1)} \sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \Psi_s^{-(T-1)'} + \Psi_s^{-(j-1)} \Pi^{(s)} \Psi_s^{-(j-1)'} \right), \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - F_{s,T} \right) &= \Psi_s^{-(T-1)} \left[\sum_{j=0}^{T-2} \left(\sum_{m=0}^j \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \right) \right] \Psi_s^{-(T-1)'} \\ &\quad - 2 \Psi_s^{-(T-1)} \sum_{j=1}^{T-1} \left(\sum_{m=0}^{j-1} \Psi_s^{-m} \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{-m'} \right) \Psi_s^{-(T-1)'} + \sum_{j=1}^{T-1} \left(\Psi_s^{-(j-1)} \Pi^{(s)} \Psi_s^{-(j-1)'} \right). \end{aligned}$$

Preuve de 1.3.26b). De (1.3.25a), on a l'expression de $A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - G_{s,T}$

$$\mathbb{E} \left(A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - G_{s,T} \right) = - \sum_{j=1}^T \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s+(T-j)S} \sum_{m=0}^{j-2} F'_{T-m} \Psi_s^{-(j-1)'} \right),$$

qui peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left(A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - G_{s,T} \right) \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s+(T-j-1)S} \sum_{m=0}^{j-1} \left[\sum_{i=1}^S \varepsilon'_{s-i+(T-m-1)S} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-m-2)'} \right] \Psi_s^{-j'} \right), \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^S \sum_{m=0}^{j-1} \varepsilon_{s+(T-j-1)S} \varepsilon'_{s-i+(T-m-1)S} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{m'} \right] \Psi_s^{-j'} \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^S \sum_{m=1}^j \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s+(T-j-1)S} \varepsilon'_{s-i+(T-m)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{m'} \right] \Psi_s^{-j'} \Psi_s^{-(T-1)'},
 \end{aligned}$$

la dernière expression n'est pas nulle seulement pour $m = j$ et $i = S$. donc, on a

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left(A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - G_{s,T} \right) \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \left[\sum_{m=1}^j \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s+(T-j-1)S} \varepsilon'_{s+(T-m-1)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{S-1} \Phi'_{s+k} \right) \Psi_s^{(m)'} \right] \Psi_s^{-j'} \Psi_s^{-(T-1)'}, \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \left[\sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s+(T-j-1)S} \varepsilon'_{s+(T-j-1+m)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{S-1} \Phi'_{s-S+k} \right) \Psi_s^{-m'} \right] \Psi_s^{-(T-1)'}, \quad (1.3.29) \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \left[\sum_{m=0}^{j-1} \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s+(T-j-1)S} \varepsilon'_{s+(T-j-1+m)S} \right) \left(\prod_{k=1}^{S-1} \Phi'_{s-S+k} \right) \Psi_s^{-m'} \right] \Psi_s^{-(T-1)'}, \\
 &= - \sum_{j=0}^{T-1} \left[\sum_{m=0}^{j-1} \Lambda_s \left(\prod_{k=1}^{S-1} \Phi'_{s+k} \right) \Psi_s^{-m'} \right] \Psi_s^{-(T-1)'}.
 \end{aligned}$$

Supposons que la matrice Ψ_s , pour tout $s = 1, 2, \dots, S$ fixé, est telle qu'il existe une matrice correspondante non-singulière C_s telle que :

$$C_s \Psi_s C_s^{-1} = \lambda_s, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad (1.3.30)$$

où λ_s est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de la matrice Ψ_s .

Alors, on a

$$\Psi_s = C_s^{-1} \lambda_s C_s \quad \text{et donc} \quad \Psi_s^{-1} = C_s^{-1} \lambda_s^{-1} C_s, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad (1.3.30a)$$

$$\Psi_s^{-r} = C_s^{-1} \lambda_s^{-r} C_s, \quad s = 1, 2, \dots, S \quad \text{et} \quad r \in \mathbb{N}^*. \quad (1.3.30b)$$

En utilisant ces notations et définitions, on peut montrer la propriété suivante.

Propriété 1.3.2. *Le vecteur colonne moyen et la matrice variance-covariance du vecteur colonne $Z_{s,T}$ sont donnés par :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{s,T}) &= \Phi_s \left(\prod_{k=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0, \\ \text{Var}(Z_{s,T}) &= \mathbb{E} \left[\left(Z_{s,T} - \mathbb{E}(Z_{s,T}) \right) \left(Z_{s,T} - \mathbb{E}(Z_{s,T}) \right)' \right], \\ &= \Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-2} \left(\Psi_s^r \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{r'} \right) \right) \Psi_s^{-(T-2)'} + \Psi_s \Pi^{(s)} \Psi_s'.\end{aligned}\tag{1.3.31a}$$

où les matrices $\Omega_s^{(S)}$ et $\Pi^{(s)}$, pour $s = 1, 2, \dots, S$ fixé, sont données par

$$\begin{aligned}\Omega_s^{(S)} &= \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right), \\ \Pi^{(s)} &= \sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-j} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi'_{s-k} \right), \text{ for } s = 1, 2, \dots, S.\end{aligned}\tag{1.3.31b}$$

De plus, la matrice variance-covariance converge, pour tout $s = 1, 2, \dots, S$ fixé, quand $T \rightarrow \infty$, vers la constante matricielle suivante :

$$\begin{aligned}\text{Var}(Z_s) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \Psi_s^{-(T-2)} \left[\left(\sum_{r=0}^{T-1} \Psi_s^r \Lambda_{s-1} \Psi_s^{r'} \right) + \sum_{r=0}^{T-2} \left(\Psi_s^r \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{r'} \right) \right] \Psi_s^{-(T-2)'} \\ &\quad + \Psi_s \Pi^{(s)} \Psi_s', \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_{s,i} \lambda_{s,j}} C_s^{-1} \left[\sum_k \sum_l C_{s,i,k} C_{s,j,l} \left(\sigma_{k,l}^{(s-1)} + \Omega_s^{(S)} \right) \right] C_s^{-1'} + \Psi_s \Pi^{(s)} \Psi_s'.\end{aligned}\tag{1.3.31c}$$

où $\lambda_{s,i}$ est le i -ème éléments, $i = 1, 2, \dots, m$, de la matrice diagonale λ_s , $s = 1, 2, \dots, S$, qui a comme éléments les racines caractéristiques de la matrice Ψ_s .

Preuve. Rappelons que le vecteur colonne $Z_{s,T}$ été donné dans (1.3.16) par

$$\begin{aligned}Z_{s,T} &= \left\{ \Psi_s^{-(T-2)} \varepsilon_{s-1+(T-1)S} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^{S-i} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s+i-1+(r-1)S} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-2)} \varepsilon_{s-1+(r-1)S} + \Psi_s \left[\sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i-1} + \left(\prod_{k=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0 \right] \right\}.\end{aligned}$$

sa moyenne est donnée par

$$\mathbb{E}(Z_{s,T}) = \Psi_s \left(\prod_{k=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0.$$

et sa matrice de variance-covariance sont données par

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Z_{s,T}) &= \mathbb{E} \left[\left(Z_{s,T} - \mathbb{E}(Z_{s,T}) \right) \left(Z_{s,T} - \mathbb{E}(Z_{s,T}) \right)' \right], \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left[\Psi_s^{-(T-2)} \varepsilon_{s-1+(T-1)S} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i-1+rS} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-2)} \varepsilon_{s-1+(r-1)S} + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i-1} \right] \right. \\
 &\quad \left[\Psi_s^{-(T-2)} \varepsilon_{s-1+(T-1)S} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i-1+rS} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-2)} \varepsilon_{s-1+(r-1)S} + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i-1} \right]' \right\} \\
 &\quad \left. + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-2)} \varepsilon_{s-1+(r-1)S} + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i-1} \right] \\
 &\quad \left[\varepsilon'_{s-1+(T-1)S} \Psi_s^{-(T-2)'} + \sum_{r=1}^{T-1} \sum_{i=1}^{S-1} \varepsilon'_{s-i-1+rS} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s^{-(r-1)'} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{r=1}^{T-1} \varepsilon'_{s-1+(r-1)S} \Psi_s^{-(r-2)'} + \sum_{i=1}^{s-2} \varepsilon'_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s' \right] \right\}, \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left[\Psi_s^{-(T-2)} \varepsilon_{s-1+(T-1)S} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i-1+rS} \right. \right. \\
 &= \Psi_s^{-(T-2)} \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-1+(T-1)S} \varepsilon'_{s-1+(T-1)S} \right) \Psi_s^{-(T-2)'} \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-i-1+rS} \varepsilon'_{s-i-1+rS} \right) \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s^{-(r-1)'} \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-2)} \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-1+(r-1)S} \varepsilon'_{s-1+(r-1)S} \right) \Psi_s^{-(r-2)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s-i-1} \varepsilon'_{s-i-1} \right) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s'.
 \end{aligned}$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Z_{s,T}) &= \Phi_s \left(\prod_{k=1}^{s-1} \Phi_{s-k} \right) X_0, \\
 \text{Var}(Z_{s,T}) &= \Psi_s^{-(T-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(T-2)'} \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s^{-(r-1)'} \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(r-2)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Psi_s^{-(T-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(T-2)'} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s^{-(r-1)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s'.
 \end{aligned}$$

la matrice de variance-covariance est alors donnée par

$$\begin{aligned}
 Cov(Z_{s,T}) &= \Psi_s^{-(T-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(T-2)'} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s^{-(r-1)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right)' \Psi_s', \\
 &= \Psi_s^{-(T-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(T-2)'} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(r-1)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s', \\
 &= \Psi_s^{-(T-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(T-2)'} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(T-r-1)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-r-1)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s',
 \end{aligned}$$

ou d'une façon équivalente par

$$\begin{aligned}
 Var(Z_{s,T}) &= \Psi_s^{-(T-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(T-2)'} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(r-1)} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(r-1)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s' \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(T-r-1)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-r-1)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s', \\
 &= \sum_{r=0}^{T-1} \Psi_s^{-(T-r-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(T-r-2)'} + \sum_{r=1}^{T-1} \Psi_s^{-(T-r-1)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-r-1)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s' + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{r=0}^{T-1} \Psi_s^{-(T-r-2)} \Lambda_{s-1} \Psi_s^{-(T-r-2)'} + \sum_{r=0}^{T-2} \left[\Psi_s^{-(T-r-2)} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \right. \\
 &\quad \left. \left(\prod_{k=1}^i \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{-(T-r-2)'} \right] \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s', \\
 &= \Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-1} \Psi_s^r \Lambda_{s-1} \Psi_s^{r'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'} + \Psi_s^{-(T-2)} \sum_{r=0}^{T-2} \left[\Psi_s^r \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{k=1}^i \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \right. \\
 &\quad \left. \left(\prod_{k=1}^i \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s^{r'} \right] \Psi_s^{-(T-2)'} \\
 &\quad + \Psi_s \sum_{i=1}^{s-2} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \Lambda_{s-i-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi'_{s-k} \right) \Psi_s'.
 \end{aligned}$$

Calcul de la limite de la matrice variance

Considérons la relation $\Psi_s^{-r} = C_s^{-1} \lambda_s^{-r} C_s$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $r \in \mathbb{N}^*$, alors nous donnons l'expression de la quadratique $\Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-1} \Psi_s^r \Lambda_{s-1} \Psi_s^{r'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 &\Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-1} \Psi_s^r \Lambda_{s-1} \Psi_s^{r'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'}, \\
 &= C_s^{-1} \lambda_s^{-(T-2)} C_s \left(\sum_{r=0}^{T-1} C_s^{-1} \lambda_s^r C_s \Lambda_{s-1} C_s' \lambda_s^r C_s^{-1'} \right) C_s' \lambda_s^{-(T-2)} C_s^{-1'}, \\
 &= C_s^{-1} \lambda_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-1} \lambda_s^r C_s \Lambda_{s-1} C_s' \lambda_s^r \right) \lambda_s^{-(T-2)} C_s^{-1'} = C_s^{-1} \left(\sum_{r=0}^{T-1} \lambda_s^{-(r-1)} C_s \Lambda_{s-1} C_s' \lambda_s^{-(r-1)} \right) C_s^{-1'},
 \end{aligned}$$

où λ_s est la matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de la matrice Ψ_s

$$\begin{aligned}
 &\lambda_s^{-(r-1)} C_s = \\
 &\begin{pmatrix} \lambda_{s,1}^{-(r-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_{s,i}^{-(r-1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{s,1,1} & C_{s,1,2} & \dots & C_{s,1,j} & \dots & C_{s,1,m} \\ C_{s,2,1} & C_{s,2,2} & \dots & C_{s,2,j} & \dots & C_{s,2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{s,i,1} & C_{s,i,2} & \dots & C_{s,i,j} & \dots & C_{s,i,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{s,m,1} & C_{s,m,2} & \dots & C_{s,m,j} & \dots & C_{s,m,m} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,1} & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,2} & \dots & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,j} & \dots & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,m} \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,2,1} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,2} & \dots & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,j} & \dots & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,i}^{-(r-1)} C_{s,i,1} & \lambda_{s,i}^{-(r-1)} C_{s,i,2} & \dots & \lambda_{s,i}^{-(r-1)} C_{s,i,j} & \dots & \lambda_{s,i}^{-(r-1)} C_{s,i,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,1} & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,2} & \dots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,j} & \dots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,m} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$C'_s \lambda_s^{-(r-1)} = \begin{pmatrix} \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,1} & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,2,1} & \cdots & \lambda_{s,m-1}^{-(r-1)} C_{s,i,1} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,1} \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,2} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,2} & \cdots & \lambda_{s,m-1}^{-(r-1)} C_{s,i,2} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,j} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,j} & \cdots & \lambda_{s,m-1}^{-(r-1)} C_{s,i,j} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,m} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,m} & \cdots & \lambda_{s,m-1}^{-(r-1)} C_{s,i,m} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,m} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $\lambda_s^{-(r-1)} C_s \Lambda_{s-1} =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,1} & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,2,1} & \cdots & \lambda_{s,m-1}^{-(r-1)} C_{s,i,1} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,1} \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,2} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,2} & \cdots & \lambda_{s,m-1}^{-(r-1)} C_{s,i,2} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,j} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,j} & \cdots & \lambda_{s,m-1}^{-(r-1)} C_{s,i,j} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,m} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,m} & \cdots & \lambda_{s,m-1}^{-(r-1)} C_{s,i,m} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,m} \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,1}^{(s-1)} & \sigma_{1,2}^{(s-1)} & \cdots & \sigma_{1,j}^{(s-1)} & \cdots & \sigma_{1,m}^{(s-1)} \\ \sigma_{2,1}^{(s-1)} & \sigma_{2,2}^{(s-1)} & \cdots & \sigma_{2,j}^{(s-1)} & \cdots & \sigma_{2,m}^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{i,1}^{(s-1)} & \sigma_{i,2}^{(s-1)} & \cdots & \sigma_{i,j}^{(s-1)} & \cdots & \sigma_{i,m}^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m,1}^{(s-1)} & \sigma_{m,2}^{(s-1)} & \cdots & \sigma_{m,j}^{(s-1)} & \cdots & \sigma_{m,m}^{(s-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_k \begin{pmatrix} \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,k} \sigma_{k,1}^{(s-1)} & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,k} \sigma_{k,2}^{(s-1)} & \cdots & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,k} \sigma_{k,j}^{(s-1)} & \cdots & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,k} \sigma_{k,m}^{(s-1)} \\ \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,k} \sigma_{k,1}^{(s-1)} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,k} \sigma_{k,2}^{(s-1)} & \cdots & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,k} \sigma_{k,j}^{(s-1)} & \cdots & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,k} \sigma_{k,m}^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,i,k} \sigma_{k,1}^{(s-1)} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,i,k} \sigma_{k,2}^{(s-1)} & \cdots & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,i,k} \sigma_{k,j}^{(s-1)} & \cdots & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,i,k} \sigma_{k,m}^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m} \sigma_{k,1}^{(s-1)} & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m} \sigma_{k,2}^{(s-1)} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m} \sigma_{k,j}^{(s-1)} & \cdots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m} \sigma_{k,m}^{(s-1)} \end{pmatrix}$$

Finalement, on a $\lambda_s^{-(r-1)} C_s \Lambda_{s-1} C'_s \lambda_s^{-(r-1)} =$

$$\begin{aligned}
 & \sum_k \begin{pmatrix} \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,k} \sigma_{k,1}^{(s-1)} & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,k} \sigma_{k,2}^{(s-1)} & \dots & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,k} \sigma_{k,l}^{(s-1)} & \dots & \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,k} \sigma_{k,m}^{(s-1)} \\ \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,k} \sigma_{k,1}^{(s-1)} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,k} \sigma_{k,2}^{(s-1)} & \dots & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,k} \sigma_{k,l}^{(s-1)} & \dots & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,k} \sigma_{k,m}^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,i}^{-(r-1)} C_{s,i,k} \sigma_{k,1}^{(s-1)} & \lambda_{s,i}^{-(r-1)} C_{s,i,k} \sigma_{k,2}^{(s-1)} & \dots & \lambda_{s,i}^{-(r-1)} C_{s,i,k} \sigma_{k,l}^{(s-1)} & \dots & \lambda_{s,i}^{-(r-1)} C_{s,i,k} \sigma_{k,m}^{(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m} \sigma_{k,1}^{(s-1)} & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m} \sigma_{k,2}^{(s-1)} & \dots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m} \sigma_{k,l}^{(s-1)} & \dots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m} \sigma_{k,m}^{(s-1)} \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,1} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,1} & \dots & \lambda_{s,j}^{-(r-1)} C_{s,j,1} & \dots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,1} \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,2} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,2} & \dots & \lambda_{s,j}^{-(r-1)} C_{s,j,2} & \dots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,j} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,j} & \dots & \lambda_{s,j}^{-(r-1)} C_{s,j,l} & \dots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s,1}^{-(r-1)} C_{s,1,m} & \lambda_{s,2}^{-(r-1)} C_{s,2,m} & \dots & \lambda_{s,j}^{-(r-1)} C_{s,j,m} & \dots & \lambda_{s,m}^{-(r-1)} C_{s,m,m} \end{pmatrix} \\
 & = (\lambda_{s,i} \lambda_{s,j})^{-(r-1)} \left(\sum_k \sum_l C_{s,i,k} C_{s,j,l} \sigma_{k,l}^{(s-1)} \right)
 \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
 & \Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-1} \Psi_s^r \Lambda_{s-1} \Psi_s^{r'} \right) \Psi_s^{-(T-2)'} = C_s^{-1} \left(\sum_{r=0}^{T-1} \lambda_s^{-(r-1)} C_s \Lambda_{s-1} C_s' \lambda_s^{-(r-1)} \right) C_s^{-1'}, \\
 & = C_s^{-1} \left(\sum_{r=0}^{T-1} (\lambda_{s,i} \lambda_{s,j})^{-(r-1)} \left(\sum_k \sum_l C_{s,i,k} C_{s,j,l} \sigma_{k,l}^{(s-1)} \right)_{m \times m} \right) C_s^{-1'}, \\
 & = \frac{1 - (\lambda_{s,i} \lambda_{s,j})^{-(T-1)}}{1 - \lambda_{s,i} \lambda_{s,j}} C_s^{-1} \left(\sum_k \sum_l C_{s,i,k} C_{s,j,l} \sigma_{k,l}^{(s-1)} \right) C_s^{-1'}, \\
 & \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \lambda_{s,i} \lambda_{s,j}} C_s^{-1} \left(\sum_k \sum_l C_{s,i,k} C_{s,j,l} \sigma_{k,l}^{(s-1)} \right) C_s^{-1'}.
 \end{aligned}$$

De la même manière on peut calculer l'expression de $\Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-2} \left(\Psi_s^r \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{r'} \right) \right) \Psi_s^{-(T-2)'}$,

on a :

$$\Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-2} \left(\Psi_s^r \Omega_s^{(S)} \Psi_s^{r'} \right) \right) \Psi_s^{-(T-2)'} = \frac{1 - (\lambda_{s,i} \lambda_{s,j})^{-(T-2)}}{1 - \lambda_{s,i} \lambda_{s,j}} C_s^{-1} \left(\sum_k \sum_l C_{s,i,k} C_{s,j,l} \Omega_{k,l}^{(S)} \right) C_s^{-1'},$$

$$\text{d'où } \lim_{T \rightarrow \infty} \Psi_s^{-(T-2)} \left(\sum_{r=0}^{T-2} \left(\Psi_s^r \Omega_S \Psi_s^{r'} \right) \right) \Psi_s^{-(T-2)'} = \frac{1}{1 - \lambda_{s,i} \lambda_{s,j}} C_s^{-1} \left(\sum_k \sum_l C_{s,i,k} C_{s,j,l} \Omega_{k,l}^{(S)} \right) C_s^{-1'},$$

Soit $\mathbf{Y}_{s,T}$ la $m \times m$ -matrice qui a comme $j^{\text{ème}}$ colonne, $j = 1, 2, \dots, m$, le vecteur colonne $Y_{s,j,T} = \sum_{r=0}^{T-1} \gamma_{s,j}^r \varepsilon_{s+(T-1-r)S}$ et $\mathbf{Z}_{s,T}$ la $m \times m$ -matrice diagonale qui a comme $j^{\text{ème}}$ élément le $j^{\text{ème}}$ élément du vecteur colonne $C_s Z_{s,T}$, alors on peut remarquer que les matrices $F_{s,T}$ et $G_{s,T}$, données respectivement par (1.3.21b) et (1.3.24b), vérifient, pour tout $s = 1, 2, \dots, S$, la propriété suivante.

Propriété 1.3.3. *Les matrices $F_{s,T}$ et $G_{s,T}$ peuvent être données par les expressions suivantes :*

$$F_{s,T} = C_s^{-1} \Xi_{s,T} C_s^{-1'}, \quad (1.3.32a)$$

$$G_{s,T} = \mathbf{Y}_{s,T} \mathbf{Z}_{s,T} C_s^{-1'}, \quad (1.3.32b)$$

où $\gamma_s = \lambda_s^{-1}$ et où la matrice $\Xi_{s,T} = \sum_{r=0}^{T-1} \gamma_s^r [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s] \gamma_s^{-r}$ dont l'élément d'ordre p et q est donné par

$$\begin{aligned} (\Xi_{s,T})_{p,q} &= \sum_{r=0}^{T-1} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s]_{p,q} (\gamma_{s,p} \gamma_{s,q})^r, \quad p, q = 1, 2, \dots, m \\ &= \frac{1 - (\gamma_{s,p} \gamma_{s,q})^T}{1 - \gamma_{s,p} \gamma_{s,q}} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s]_{p,q}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \end{aligned} \quad (1.3.32c)$$

et où $(Z'_{s,T} C'_s)_j$ est le $j^{\text{ème}}$ élément du vecteur ligne $Z'_{s,T} C'_s$.

Preuve. 1.3.32a). En utilisant les propriétés (1.3.30a) et (1.3.30b), on peut réécrire $F_{s,T}$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} F_{s,T} &= \sum_{j=0}^{T-1} C_s^{-1} [\lambda_s^{-j} C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s \lambda_s^{-j}] C_s^{-1'}, \\ &= (Z_{s,T} Z'_{s,T}) + C_s^{-1} \lambda_s^{-1} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s] \lambda_s^{-1'} C_s^{-1'} + \\ &\quad + C_s^{-1} \lambda_s^{-2} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s] \lambda_s^{-2'} C_s^{-1'} + \dots + C_s^{-1} \lambda_s^{-(T-1)} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s] \lambda_s^{-(T-1)'} C_s^{-1'}, \end{aligned}$$

alors, on a pour $s = 1, 2, \dots, S$,

$$\begin{aligned} (\Xi_{s,T})_{p,q} &= \sum_{r=0}^{T-1} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s]_{p,q} (\gamma_{s,p} \gamma_{s,q})^r, \quad p, q = 1, 2, \dots, m \\ &= \frac{1 - (\gamma_{s,p} \gamma_{s,q})^T}{1 - \gamma_{s,p} \gamma_{s,q}} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s]_{p,q}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

où la matrice $\gamma_s = \lambda_s^{-1}$. Soit $\Xi_{s,T} = \sum_{r=0}^{T-1} \gamma_s^r [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s] \gamma_s^{-r}$ dont l'élément d'ordre p et

q est donné par :

$$\begin{aligned}
 (\Xi_{s,T})_{p,q} &= \sum_{r=0}^{T-1} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s]_{p,q} (\gamma_{s,p} \gamma_{s,q})^r, \quad p, q = 1, 2, \dots, m \\
 &= \frac{1 - (\gamma_{s,p} \gamma_{s,q})^T}{1 - \gamma_{s,p} \gamma_{s,q}} [C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s]_{p,q}, \quad s = 1, 2, \dots, S,
 \end{aligned} \tag{1.3.34}$$

où $\gamma_{s,p}$, $p = 1, 2, \dots, m$ est le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de γ_s et $[C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s]_{p,q}$ est l'élément d'ordre p, q , $p, q = 1, 2, \dots, m$ de la matrice $[C_s (Z_{s,T} Z'_{s,T}) C'_s]$.

1.3.32b). La $m \times m$ -matrice $G_{s,T}$, pour $s = 1, 2, \dots, S$, peut être donnée par la forme suivante

$$\begin{aligned}
 G_{s,T} &= \sum_{r=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-r-1)S} Z'_{s,T} \Psi_s^{-r'} = \sum_{r=0}^{T-1} [\varepsilon_{s+(T-1-r)S} (Z'_{s,T} C'_s) \lambda_s^{-r}] C_s^{-1'}, \\
 &= \sum_{r=0}^{T-1} \varepsilon_{s+(T-1-r)S} \left\{ \left((Z'_{s,T} C'_s)_1, (Z'_{s,T} C'_s)_2, \dots, (Z'_{s,T} C'_s)_m \right) \right. \\
 &\quad \times \left. \begin{pmatrix} \gamma_{s,1}^r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{s,2}^r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \gamma_{s,m-1}^r & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{s,m}^r \end{pmatrix} \right\} C_s^{-1'}, \\
 &= \sum_{r=0}^{T-1} \left(\begin{matrix} \gamma_{s,1}^r \varepsilon_{s+(T-1-r)S} & \gamma_{s,2}^r \varepsilon_{s+(T-1-r)S} & \dots & \gamma_{s,m}^r \varepsilon_{s+(T-1-r)S} \end{matrix} \right) \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} (C_s Z_{s,T})_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (C_s Z_{s,T})_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & (C_s Z_{s,T})_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (C_s Z_{s,T})_m \end{pmatrix} C_s^{-1'},
 \end{aligned} \tag{1.3.35}$$

où $(C_s Z_{s,T})_j$ (respectivement $(Z'_{s,T} C'_s)_j$), $j = 1, 2, \dots, m$, est le $j^{\text{ème}}$ élément du vecteur colonne $C_s Z_{s,T}$ (respectivement le vecteur ligne $Z'_{s,T} C'_s$). L'utilisation de la notation précédente achève la démonstration. Soit Γ_s , pour tout $s = 1, 2, \dots, S$, la $m \times m$ -matrice qui a $1 / (1 - \gamma_{s,p} \gamma_{s,q})$ comme élément d'ordres p et q , $p, q = 1, 2, \dots, m$. Alors on peut présenter le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.1.

$$P \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - C_s^{-1} \mathbf{Z}_{s,T} \Gamma_s \mathbf{Z}_{s,T} C_s^{-1'} \right) = 0, \tag{1.3.36a}$$

$$P \lim_{T \rightarrow \infty} \left(A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} - \mathbf{Y}_{s,T} \mathbf{Z}_{s,T} C_s^{-1'} \right) = 0. \tag{1.3.36b}$$

Preuve. 1.3.36a). La preuve de cette propriété découle directement de (1.3.25a) et le résultat

$$\frac{1 - (\gamma_{s,p} \gamma_{s,q})^T}{1 - \gamma_{s,p} \gamma_{s,q}} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \gamma_{s,p} \gamma_{s,q}},$$

donné par (1.3.34). La propriété (1.3.36b) découle directement de (1.3.26b) et le résultat (1.3.35).

Remarque 1.3.2. *Il est à noter que les éléments des matrices Γ_s et C_s , pour s fixé, peuvent être des nombres complexes; cependant, les éléments des matrices $C_s^{-1} \mathbf{Z}_{s,T} \Gamma_s \mathbf{Z}_{s,T} C_s^{-1}$ et $\mathbf{Y}_{s,T} \mathbf{Z}_{s,T} C_s^{-1}$ (par conséquent leurs limites $C_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Gamma_s \mathbf{Z}_s C_s^{-1}$ et $\mathbf{Y}_s \mathbf{Z}_s C_s^{-1}$) sont des nombres réels. En effet, elles sont des limites de matrices réelles $\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} et $A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'}$, respectivement.$*

Remarque 1.3.3. *De la définition de la variable aléatoire $\mathbf{Z}_{s,T}$ on peut clairement voir qu'elle converge, en loi, quand $T \rightarrow \infty$, vers la loi d'une certaine variable aléatoire \mathbf{Z}_s .*

Remarque 1.3.4. *Il est important de mentionner que la variable aléatoire $\mathbf{Y}_{s,T}$, à la différence de la variable aléatoire $\mathbf{Z}_{s,T}$, ne converge pas nécessairement en loi.*

B) Distribution limite du couple aléatoire $(\mathbf{Y}_{s,T}, \mathbf{Z}_{s,T})$

Comme il été mentionné, dans la *Remarque 1.3.3* et la *Remarque 1.3.4*, la variable aléatoire $\mathbf{Z}_{s,T}$, pour un s fixé $s = 1, 2, \dots, S$, a une distribution de limite, qui est celle d'une certaine variable aléatoire \mathbf{Z}_s , cependant, la variable aléatoire $\mathbf{Y}_{s,T}$, pour un s fixé $s = 1, 2, \dots, S$, n'a pas nécessairement une distribution limite.

Dans le prochain paragraphe, nous nous plaçons dans le cadre où le processus d'innovation est indépendamment distribué et la variable aléatoire $\mathbf{Y}_{s,T}$ a une distribution limite, et puis, nous prouvons la proposition suivante qui établit, sous ces conditions, la distribution limite du couple de variables aléatoires $(\mathbf{Y}_{s,T}, \mathbf{Z}_{s,T})$. Pour ce faire, considérons les deux hypothèses suivantes :

H_1 : Le processus périodiquement corrélé $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est indépendamment distribué ,

H_2 : La variable aléatoire $\mathbf{Y}_{s,T}$ possède une distribution limite, qui est celle d'une certaine variable aléatoire, soit \mathbf{Y}_s .

Proposition 1.3.4. *Sous les hypothèses H_1 et H_2 , le couple de variables aléatoires $(\mathbf{Y}_{s,T}, \mathbf{Z}_{s,T})$, pour s fixé, $s = 1, 2, \dots, S$, a une distribution limite, disons la distribution du couple de variables aléatoires $(\mathbf{Y}_s, \mathbf{Z}_s)$ où \mathbf{Y}_s et \mathbf{Z}_s sont indépendamment distribuées.*

Preuve. Supposons que la taille N de la série chronologique sous-jacente est un multiple de la période S , i.e., $N = TS$. Prenons encore la variable aléatoire $Z_{s,T}$ donnée par (1.3.21) et remplaçant la matrice Ψ_s^{-1} par son expression (1.3.30a), tenant en tenant compte de la relation $\Psi_s^{-r} = C_s^{-1} \lambda_s^{-r} C_s$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $r \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 Z_{s,T} &= \Psi_s^{-(T-2)} \sum_{r=0}^{T-2} \Psi_s^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(T-r-1)S} \\
 &\quad + \Psi_s \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-i} \right) X_0 \right], \\
 &= \left(C_s^{-1} \lambda_s^{-(T-2)} C_s \right) \left[\sum_{r=0}^{T-2} \left(C_s^{-1} \lambda_s^r C_s \right) \Psi_s^r \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(T-r-1)S} \right] \\
 &\quad + C_s^{-1} \lambda_s C_s \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-i} \right) X_0 \right], \\
 &= \sum_{r=0}^{T-2} \left(C_s^{-1} \lambda_s^{-r} C_s \right) \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(r+1)S} \\
 &\quad + \left(C_s^{-1} \lambda_s C_s \right) \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-i} \right) X_0 \right],
 \end{aligned} \tag{1.3.37}$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned}
 C_s Z_{s,T} &= \sum_{r=0}^{T-2} \lambda_s^{-r} C_s \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(r+1)S} \\
 &\quad + \lambda_s C_s \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-i} \right) X_0 \right],
 \end{aligned} \tag{1.3.38}$$

ou pour $\gamma_s = \lambda_s^{-1}$,

$$\begin{aligned}
 C_s Z_{s,T} &= \sum_{r=0}^{T-2} \gamma_s^r C_s \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(r+1)S} \\
 &\quad + \gamma_s^{-1} C_s \sum_{i=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-j} + \gamma_s^{-1} C_s \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-i} \right) X_0,
 \end{aligned} \tag{1.3.39}$$

De plus, le p ème, $p = 1, 2, \dots, m$, élément de ce vecteur m -périodiquement corrélée, $(C_s Z_{s,T})_p$, pour un p fixé, $p = 1, 2, \dots, m$, peut être réécrit plus explicitement sous la forme :

$$\begin{aligned} C_s Z_{s,T} &= \sum_{r=0}^{T-2} \gamma_s^r C_s \sum_{i=1}^S \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i+(r+1)S} \\ &\quad + \gamma_s^{-1} C_s \left[\sum_{i=1}^{s-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right) \varepsilon_{s-i} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-i} \right) X_0 \right], \\ &= \sum_{r=0}^{T-2} \gamma_s^r \sum_{i=1}^S \mathcal{A}_s^{(i)} \varepsilon_{s-i+(r+1)S} + \gamma_s^{-1} \sum_{i=1}^{s-1} \mathcal{B}_s^{(i)} \varepsilon_{s-i} + \gamma_s^{-1} C_s X_0, \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

où les matrices $\mathcal{A}_s^{(i)} = C_s \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right)$, $\mathcal{B}_s^{(i)} = C_s \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Phi_{s-k} \right)$ et $C_s = \left(\prod_{i=1}^{s-1} \Phi_{s-i} \right)$, $i, s = 1, 2, \dots, S$.

Il est facile de vérifier que le p ème, $i = 1, 2, \dots, m$, élément du vecteur colonne $C_s Z_{s,T}$ peut être donné explicitement comme suit :

$$C_s Z_{s,T} = \sum_{r=0}^{T-2} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^r \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i+(r+1)S} + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^{-1} \mathcal{B}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i} + \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^{-1} C_{s,pk}^{(i)} X_{k,0}. \quad (1.3.41)$$

Par conséquent, le p ème, $i = 1, 2, \dots, m$, élément de la matrice diagonale $\mathbf{Z}_{s,T}$ est donné par

$$(\mathbf{Z}_{s,T})_p = \sum_{r=0}^{T-2} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^r \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i+(r+1)S} + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^{-1} \mathcal{B}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i} + \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^{-1} C_{s,pk}^{(i)} X_{k,0}. \quad (1.3.42)$$

Définissons, à partir de la matrice aléatoire diagonale $\mathbf{Z}_{s,T}$, des deux matrices aléatoires diagonales suivantes $\mathbf{Z}_{L,s,T}$ et $\mathbf{Z}_{U,s,T}$ données par leurs éléments diagonaux

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_{L,s,T})_p &= \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^{-1} C_{s,pk}^{(i)} X_{k,0} + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^{-1} \mathcal{B}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{\lfloor (T-2)/2 \rfloor} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^r \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i+(r+1)S}, \end{aligned} \quad (1.3.43a)$$

$$(\mathbf{Z}_{U,s,T})_p = \sum_{r=\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 1}^{T-2} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^r \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i+(r+1)S}. \quad (1.3.43b)$$

De même, définissons, à partir de la matrice aléatoire $\mathbf{Y}_{s,T} = (Y_{s,1,T}, Y_{s,2,T}, \dots, Y_{s,j,T}, \dots, Y_{s,m,T})$

où $Y_{s,j,T} = \sum_{r=0}^{T-1} \gamma_{s,j}^r \varepsilon_{s+(T-1-r)S}$, les deux matrices aléatoires suivantes $\mathbf{Y}_{L,s,T}$ et $\mathbf{Y}_{U,s,T}$:

$$\mathbf{Y}_{L,s,T} = (Y_{L,s,1,T}, Y_{L,s,2,T}, \dots, Y_{L,s,j,T}, \dots, Y_{L,s,m,T}) \quad (1.3.44a)$$

$$\mathbf{Y}_{U,s,T} = (Y_{U,s,1,T}, Y_{U,s,2,T}, \dots, Y_{U,s,j,T}, \dots, Y_{U,s,m,T}) \quad (1.3.44b)$$

où les vecteurs colonnes $Y_{L,s,p,T}$ et $U_{s,p,T}$, $p = 1, 2, \dots, m$, sont donnés par

$$Y_{L,s,p,T} = \sum_{r=0}^{\lfloor (T-1)/2 \rfloor} \gamma_{s,p}^r \varepsilon_{s+(T-1-r)S} \quad (1.3.45a)$$

$$Y_{U,s,p,T} = \sum_{r=\lfloor (T-1)/2 \rfloor + 1}^{T-1} \gamma_{s,p}^r \varepsilon_{s+(T-1-r)S} \quad (1.3.45b)$$

A partir, des définitions des variables aléatoires $(\mathbf{Z}_{L,s,T})_p$ et $\mathbf{Y}_{U,s,T}$ on peut facilement voir qu'elles sont indépendamment distribuées parce qu'elles contiennent des ensembles disjoints des ε 's. Calculons les variances de $(\mathbf{Z}_{s,T})_p - (\mathbf{Z}_{L,s,T})_p$, $p = 1, 2, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left((\mathbf{Z}_{s,T})_p - (\mathbf{Z}_{L,s,T})_p \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left((\mathbf{Z}_{U,s,T})_p \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{r=\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 1}^{T-2} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^r \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i+(r+1)S} \right]^2, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{r=\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 1}^{T-2} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^r \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i+(r+1)S} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{l=\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 1}^{T-2} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^l \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i+(l+1)S} \right]' \right\}, \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{r=\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 1}^{T-2} \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^m \gamma_{s,p}^r \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \varepsilon_{k,s-i+(r+1)S} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{j=1}^S \sum_{n=1}^m \gamma_{s,p}^r \varepsilon'_{n,s-j+(r+1)S} \mathcal{A}_{s,pn}^{(j)'} \right] \right\}, \\ &= \sum_{r=\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 1}^{T-2} \sum_{i=1}^S \sum_{k,n=1}^m \gamma_{s,p}^{2r} \mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \mathbb{E} \left(\varepsilon_{k,s-i+(r+1)S} \varepsilon'_{n,s-i+(r+1)S} \right) \mathcal{A}_{s,pn}^{(i)'} \\ &= \sum_{r=\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 1}^{T-2} \gamma_{s,p}^{2r} \sum_{k,n=1}^m \left[\sum_{i=1}^S \left(\mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \sigma_{s-i}^{(k,n)} \mathcal{A}_{s,pn}^{(i)'} \right) \right]. \end{aligned}$$

où $\sigma_{s-i}^{(k,n)} = \text{cov}(\varepsilon_{k,s-i}, \varepsilon_{n,s-i}) = \mathbb{E}(\varepsilon_{k,s-i} \times \varepsilon_{n,s-i})$, $k, n = 1, 2, \dots, m$ et $s = 1, 2, \dots, S$. Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left((\mathbf{Z}_{s,T})_p - (\mathbf{Z}_{L,s,T})_p \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left((\mathbf{Z}_{U,s,T})_p \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k,n=1}^m \left[\sum_{i=1}^S \left(\mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \sigma_{s-i}^{(k,n)} \mathcal{A}_{s,pn}^{(i)'} \right) \right] \sum_{r=\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 1}^{T-2} \gamma_{s,p}^{2r}, \\ &= \sum_{k,n=1}^m \left[\sum_{i=1}^S \left(\mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \sigma_{s-i}^{(k,n)} \mathcal{A}_{s,pn}^{(i)'} \right) \right] \left[\sum_{r=0}^{T-2} \gamma_{s,p}^{2r} - \sum_{r=0}^{\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 2} \gamma_{s,p}^{2r} \right], \\ &= \sum_{k,n=1}^m \left[\sum_{i=1}^S \left(\mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \sigma_{s-i}^{(k,n)} \mathcal{A}_{s,pn}^{(i)'} \right) \right] \left[\frac{1 - \gamma_{s,p}^{2(T-1)}}{1 - \gamma_{s,p}^2} - \frac{1 - \gamma_{s,p}^{2(\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 3)}}{1 - \gamma_{s,p}^2} \right], \\ &= \sum_{k,n=1}^m \left[\sum_{i=1}^S \left(\mathcal{A}_{s,pk}^{(i)} \sigma_{s-i}^{(k,n)} \mathcal{A}_{s,pn}^{(i)'} \right) \right] \frac{\gamma_{s,p}^{2(\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 3)} - \gamma_{s,p}^{2(T-1)}}{1 - \gamma_{s,p}^2} \leq \frac{\gamma_{s,p}^{2(\lfloor (T-2)/2 \rfloor + 3)}}{1 - \gamma_{s,p}^2}, \end{aligned}$$

du fait que $\gamma_{s,p} = \lambda_{s,p}^{-1} < 1$, nous avons la convergence

$$\mathbb{E} \left[\left((\mathbf{Z}_{s,T})_p - (\mathbf{Z}_{L,s,T})_p \right)^2 \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \quad (1.3.46)$$

qui montre que $(\mathbf{Z}_{s,T})_p$, pour p fixé, $p = 1, 2, \dots, m$ et $s = 1, 2, \dots, S$, converge, en moyenne quadratique et par conséquent en probabilité, quand $T \rightarrow \infty$, vers $(\mathbf{Z}_{L,s,T})_p$. La variance-covariance du p ème, pour p fixé, $p = 1, 2, \dots, m$, du vecteur colonne $Y_{s,p,T} - Y_{U,s,p,T}$, est donnée par

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[(Y_{s,p,T} - Y_{U,s,p,T}) (Y_{s,p,T} - Y_{U,s,p,T})' \right] = \mathbb{E} \left[Y_{L,s,p,T} Y_{L,s,p,T}' \right], \\ & = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{r=1}^{[(T-1)/2]} \gamma_{s,p}^{(T-r)} \varepsilon_{s+(T-1-r)S} \right) \left(\sum_{m=1}^{[(T-1)/2]} \gamma_{s,p}^{(T-m)} \varepsilon_{s+(T-1-m)S} \right)' \right], \\ & = \sum_{r=1}^{[(T-1)/2]} \gamma_{s,p}^{2(T-r)} \mathbb{E} \left(\varepsilon_{s+(T-1-r)S} \varepsilon_{s+(T-1-m)S}' \right) = \sum_{r=1}^{[(T-1)/2]} \gamma_{s,p}^{2(T-r)} \Lambda_s, \\ & = \Lambda_s \sum_{r=0}^{[(T-1)/2]-1} \gamma_{s,p}^{2(T-r-1)} = \Lambda_s \gamma_{s,p}^{2(T-1)} \frac{1 - \gamma_{s,p}^{-2 \cdot [(T-1)/2]}}{1 - \gamma_{s,p}^{-2}}, \\ & = \Lambda_s \frac{\gamma_{s,p}^{2T} \gamma_{s,p}^{-2 \cdot [(T-1)/2]} - \gamma_{s,p}^{2T}}{1 - \gamma_{s,p}^2} \leq \Lambda_s \frac{\gamma_{s,p}^T}{1 - \gamma_{s,p}^2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

ceci montre que le vecteur colonne $Y_{s,p,T}$, pour p fixé, $p = 1, 2, \dots, m$ et $s = 1, 2, \dots, S$, converge, en moyenne quadratique et par conséquent en probabilité, quand $T \rightarrow \infty$, vers le vecteur colonne $Y_{U,s,p,T}$. En conclusion, nous avons prouvé que $(\mathbf{Z}_{s,T})_p$ et $Y_{s,p,T}$, pour p fixé, $p = 1, 2, \dots, m$ et $s = 1, 2, \dots, S$, convergent, respectivement, vers les variables aléatoires $(\mathbf{Z}_{L,s,T})_p$ et $Y_{U,s,p,T}$ qui sont indépendantes comme il a été prouvé, par conséquent $(\mathbf{Z}_{s,T})_p$ et $Y_{s,p,T}$ sont également indépendantes. Alors si $\mathbf{Y}_{s,T}$ a une distribution limite, qui est celle de \mathbf{Y}_s , nous concluons que $(\mathbf{Y}_{s,T}, \mathbf{Z}_{s,T})$ a une distribution limite, qui est celle de $(\mathbf{Y}_s, \mathbf{Z}_s)$, de plus \mathbf{Y}_s et \mathbf{Z}_s sont indépendantes.

La proposition suivante établit, pour s fixé, $s = 1, 2, \dots, S$, sous l'hypothèse H_2 , la distribution conjointe limite des deux variables aléatoires $A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} et $\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'}$.$

PROPOSITION 1.3.5. *Sous l'hypothèse H_2 , le couple de variables aléatoires $\left(A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'}, \Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'}\right)$, pour s fixé, $s = 1, 2, \dots, S$, a une distribution conjointe limite, qui est celle du couple de variables aléatoires $(\mathbf{Y}_s \mathbf{Z}_s C_s^{-1'}, C_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Gamma_s \mathbf{Z}_s C_s^{-1'})$.*

Preuve. La preuve de cette proposition découle directement du corollaire 1.3.1, de la proposition 1.3.4 et de l'hypothèse H_2 .

Remarque 1.3.5. *Notons que les matrices C_s et λ_s (par conséquent γ_s), pour s fixé, $s = 1, 2, \dots, S$, ne sont pas nécessairement réelles, cependant les matrices $\mathbf{Y}_s \mathbf{Z}_s C_s^{-1'}$ et $C_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Gamma_s \mathbf{Z}_s C_s^{-1'}$ sont réelles.*

Soit Γ_s une matrice dont les éléments (p, q) , $p, q = 1, 2, \dots, m$, sont $1 / (1 - \gamma_{s,p} \gamma_{s,q})$ et considérons la matrice diagonale $\mathbf{Z}_{s,T}$ qui a comme i -ième $i = 1, 2, \dots, m$, élément diagonal le i -ième $i = 1, 2, \dots, m$, élément du vecteur colonne $C_s Z_{s,T}$ où le vecteur colonne $Z_{s,T}$ est donné par (1.3.21).

C) Loi asymptotique de $(\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s) \Psi_s^{(T-2)}$

La proposition suivante établit, pour s fixé, $s = 1, 2, \dots, S$, la loi asymptotique du vecteur aléatoire $(\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s) \Psi_s^{(T-2)}$.

PROPOSITION 1.3.6. *Supposons que, pour s fixé, $s = 1, 2, \dots, S$, la probabilité que chaque élément diagonal de $\mathbf{Z}_{s,T}$ soit différent de zéro est égale à 1 et que la matrice Γ_s est non singulière; alors le vecteur aléatoire $(\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s) \Psi_s^{(T-2)}$ a comme distribution limite la distribution du vecteur aléatoire $\mathbf{Y}_s \Gamma_s^{-1} \mathbf{Z}_s^{-1} C_s$, i.e.,*

$$\left(\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s\right) \Psi_s^{(T-2)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{Law} \mathbf{Y}_s \Gamma_s^{-1} \mathbf{Z}_s^{-1} C_s, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (1.3.48)$$

Remarque 1.3.6. *Il est à noter que la matrice Γ_s^{-1} , pour s fixé, $s = 1, 2, \dots, S$, est non singulière si et seulement si toutes les racines caractéristiques de la matrice Φ_s sont toutes différentes.*

Preuve. Multiplions à droite les deux côtés de l'égalité (1.3.14) par la matrice $\Psi_s^{(T-2)}$, nous obtenons, pour $s = 1, 2, \dots, S$

$$\begin{aligned} (\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s) \Psi_s^{(T-2)} &= A_{s,T} B_{s,T}^{-1} \Psi_s^{(T-2)} = A_{s,T} \left(\Psi_s^{-(T-2)'} \Psi_s^{(T-2)'} \right) B_{s,T}^{-1} \Psi_s^{(T-2)}, \\ &= \left(A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} \right) \left(\Psi_s^{(T-2)'} B_{s,T}^{-1} \Psi_s^{(T-2)} \right) = \left(A_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} \right) \left(\Psi_s^{-(T-2)} B_{s,T} \Psi_s^{-(T-2)'} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

utilisant le résultat de convergence donné par la **Proposition** 1.3.5, nous obtenons

$$\left(\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s \right) \Psi_s^{(T-2)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} (\mathbf{Y}_s \mathbf{Z}_s C_s^{-1'}) (C_s^{-1} \mathbf{Z}_s \Gamma_s \mathbf{Z}_s C_s^{-1'})^{-1}, \quad s = 1, 2, \dots, S,$$

ou de façon équivalente

$$\left(\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s \right) \Psi_s^{(T-2)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\text{Law}} \mathbf{Y}_s \Gamma_s^{-1} \mathbf{Z}_s^{-1} C_s, \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

D) Loi conjointe de $(\mathbf{Y}_{s,T}, \mathbf{Z}_{s,T})$

La proposition suivante établit, la loi conjointe du couple aléatoire $(\mathbf{Y}_{s,T}, \mathbf{Z}_{s,T})$.

PROPOSITION 1.3.7. *Si le processus d'innovation vectoriel ε_t est normalement distribué, de vecteur moyenne nul et de matrice variance-covariance périodique Λ_s , alors la distribution limite du couple aléatoire $(\mathbf{Y}_{s,T}, \mathbf{Z}_{s,T})$, pour s fixé, $s = 1, 2, \dots, S$, est celle du couple aléatoire $(\mathbf{Y}_s, \mathbf{Z}_s)$ où les variables aléatoires \mathbf{Y}_s et \mathbf{Z}_s sont des combinaisons linéaires de deux variables aléatoires indépendantes normalement distribuées.*

Preuve. Rappelons que la variable aléatoire $Z_{s,T}$ (par conséquent Z_s) est, sous la condition de normalité du processus d'innovation, une combinaison linéaire de variables aléatoire de Gauss.

Par conséquent, la variable aléatoire $\mathbf{Z}_{s,T}$ (respectivement \mathbf{Z}_s) est une combinaison linéaire d'un ensemble de variables aléatoire normalement distribuées. Alors le vecteur colonne

$$Y_{s,j,T} = \sum_{r=0}^{T-1} \gamma_{s,j}^r \varepsilon_{s+(T-r-1)S}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \text{ de la matrice aléatoire } \mathbf{Y}_{s,T} \text{ (respectivement}$$

de $Y_{s,j}$) sont aussi des combinaisons linéaires de vecteurs aléatoires indépendants normalement distribués. Il est aussi facile de vérifier que $\mathbf{Z}_{s,T}$ et $\mathbf{Y}_{s,T}$ (alors \mathbf{Z}_s et \mathbf{Y}_s) sont des combinaisons linéaires de deux variables aléatoires normalement distribuées.

Remarque 1.3.7

Il est à noter que si le vecteur initial est nul i.e., $X_0 = 0$, alors la $p \times p$ -matrices aléatoires $\mathbf{Y}_s \Gamma_s^{-1}$ et $\mathbf{Z}_s C_s^{-1}$ sont indépendantes normalement distribuées de matrices nulles et de matrices de variance-covariances Identités. Par conséquent, nous avons

$$\left(\widehat{\Phi}_{s,T} - \Phi_s \right) \Psi_s^{(T-2)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{Law} \mathbf{Y}_s \Gamma_s^{-1} \mathbf{Z}_s^{-1} C_s = \left(\mathbf{Y}_s \Gamma_s^{-1} \right) \left(C_s^{-1} \mathbf{Z}_s \right)^{-1}, s = 1, 2, \dots, S.$$

C'est une loi de type CAUCHY MATRICIELLE

Chapitre 2

Stabilité d'un modèle diagonal bilinéaire périodique

2.1 Introduction

Il est bien connu, de nos jours, que beaucoup de séries chronologiques produites dans divers champs, y compris des études économiques, en particulier les financières, et l'hydrologie, montrent quelques caractéristiques typiques qui ne peuvent pas être capturées et décrites par les modèles linéaires standards de série chronologique. Ceci montre la nécessité et l'intérêt de faire appel à une certaine classe de modèles non linéaires afin de capturer ces divers faits stylisés. Ainsi, la modélisation théorique et pratique de la série chronologique non linéaire, a reçue, ces dernières années, un intérêt considérable.

Parmi ces dernières classes de modèles non linéaires, nous citons, sans exhaustivité, la classe des modèles bilinéaires, présentée dans l'analyse des séries chronologiques pour la première fois depuis plus de trois décennies par Granger et Anderson (1978a) et continue à attirer l'attention des chercheurs et à occuper toujours une place importante dans l'analyse de séries chronologiques non linéaires (voir aussi Subba Rao and Gabr (1984); Priestley (1988); Guegan (1994); Cappuccio *et al* (1998); Terdik (1999); Subba Rao and Terdik (2003); Pereira and Scotto (2006); Hili (2008); Sornette and Pisarenko (2008); Kristenssen (2009); Iwueze and Johnson (2011)).

Aussi, il est connu qu'il existe une relation entre la classe des modèles bilinéaires et divers classes de modèles de séries chronologiques, ce qui révèle son importance. A titre d'exemple, nous savons actuellement que beaucoup de classes des modèles (linéaires et non linéaires) *GARCH* ont une représentation bilinéaire (Kristenssen, 2009). On a proposé beaucoup de généralisations de la formulation bilinéaire originale dans la littérature des séries chronologiques pour refléter diverses caractéristiques de série chronologique telles que la dépendance simultanée (Stensholt and Tjøstheim (1987)), changement de régime (Cappuccio *et al* (1998); Ferrante *et al* (2003); Aknouche and Rabehi, 2010), interaction spatiale (Dai and Billard (1998),(2003)) et discrétion de valeur (Doukhan *et al* (2006); Drost *et al* (2008)).

Une extension importante particulière traitant des phénomènes périodiques est la formulation bilinéaire périodique dans laquelle les paramètres varient périodiquement au fil du temps. En effet, le fait d'identifier que beaucoup de séries chronologiques (économique, financière et environnementale) montrent dans la pratique une caractéristique de périodicité en leur structure de dépendance et, d'autre part, l'utilité bien établie des modèles bilinéaires, a donné de bonnes motivations à l'extension du modèle bilinéaire du cas classique au cas périodique (voir par exemple Bibi and Ho (2006); Bibi and Gautier (2006)).

2.2 Définitions et hypothèses

Rappelons qu'un processus du second ordre $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit satisfaire un modèle S -périodique bilinéaire général, noté $PBL_S(p, q, P, Q)$, s'il est solution de l'équation stochastique non linéaire suivante :

$$y_t = \sum_{i=1}^p \varphi_{t,i} y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_{t,j} \varepsilon_t + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \beta_{t,ij} y_{t-i} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.1)$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus indépendant périodiquement distribué (*i.p.d.*) de moyenne zéro et de variance σ_t^2 . Les coefficients réels $\varphi_{t,i}$, $\beta_{t,ij}$ et σ_t^2 , sont S -périodiques dans le temps t , i.e., $\varphi_{t+rS} = \varphi_t$, $\beta_{t+rS} = \beta_t$ et $\sigma_{t+rS}^2 = \sigma_t^2$, $\forall t, r \in \mathbb{Z}$, où S est le plus petit entier positif satisfaisant les dernières relations. Plusieurs travaux de recherches ont été proposés pour étudier les propriétés probabilistes et statistiques du modèle bilinéaire périodique (2.2.1) (voir par exemple. Bibi and Ho (2006) ; Ha and Lee (2006) ; Bibi and Gautier (2006) ; Bibi and Aknouche, 2010). Cependant, la plupart des résultats existants concernent principalement le cas de modèles superdiagonaux, i.e. $\beta_{t,ij} = 0$ pour $j \leq i$, $t \in \mathbb{Z}$. Le cas important de modèles diagonaux, même du premier ordre, semble ne pas avoir été suffisamment étudié actuellement, excepté quelques aspects particuliers (cf, Aknouche and Bentarzi (2016) and Bibi and Ho (2006)).

Dans ce chapitre nous étudions les problèmes de stabilité et leur conséquences du modèle périodique bilinéaire $PBL_S(1, 0, 1, 1)$. Ce modèle est appelé modèle périodique autorégressif bilinéaire diagonal du premier ordre et est donné par l'équation stochastique suivante

$$y_t = \varphi_t y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_t y_{t-1} \varepsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.2a)$$

où les paramètres sont définis comme dans (2.2.1) et peuvent être représentés par l'ensemble $\{\theta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ avec $\theta_t = (\varphi_s, \beta_s)'$, $1 \leq s \leq S$. Bien que sa structure est particulière, le modèle (2.2.2a) reste utile dans la pratique. En particulier elle inclut comme cas particulier le modèle bilinéaire périodique diagonal pur $PBL_S(0, 0, 1, 1)$ quand $\varphi_t = 0$. Notons que de la S -périodicité des paramètres, le modèle (2.2.2a) peut être écrit comme suit :

$$y_{s+S\tau} = \varphi_s y_{s-1+S\tau} + \varepsilon_{s+S\tau} + \beta_s y_{s-1+S\tau} \varepsilon_{s-1+S\tau}, \quad 1 \leq s \leq S \text{ et } \tau \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.2b)$$

Le processus observé $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ (solution de (2.2.2) si elle existe) est aussi appelé output de (2.2.1) tandis que le processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et le vecteur des paramètres θ sont appelés inputs de (2.2.1). Bien que la stabilité ait généralement plusieurs significations dans la littérature de série chronologique, dans ce chapitre nous lui donnons une signification bien précise. Ainsi, nous considérons deux types de stabilité :

- i*) Stabilité par rapport au processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$
- ii*) Stabilité par rapport au processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

2.3 Stabilité par rapport à la stationnarité périodique stricte

A partir des hypothèses faites sur le modèle (2.2.1) et par conséquent (2.2.2), on sait que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus *i.p.d.* ce qui est un cas spécifique de stationnarité périodique stricte . De plus l'ensemble des paramètres $\{\theta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est non-aléatoire et est périodique, ce qui est également un cas dégénéré de stationnarité périodique stricte. Par conséquent, les entrées $(\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}, \theta)$ de (2.2.2) ont la propriété de stationnarité stricte. Le but de cette propriété de stabilité par rapport à cette propriété est alors de rechercher des conditions suffisantes et/ou nécessaires sur les entrées $(\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}, \theta)$ de l'équation (2.2.2) pour qu'elle ait une unique solution (non anticipative) strictement périodiquement stationnaire $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ comme sortie. Notons que l'hypothèse d'existence du moment de second ordre fini du processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas nécessaire dans cette section et peut être remplacée par la condition suivante :

A0 : $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus *i.p.d.* non dégénéré, avec $\mathbb{E}(|\log |\varepsilon_t||) < \infty$ ($t \in \mathbb{Z}$).

Le modèle (2.2.2) peut être écrit comme équation aux récurrence suivante :

$$y_t = \tilde{A}_t y_{t-1} + \tilde{B}_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.1)$$

où $\tilde{A}_t = \varphi_t + \beta_t \varepsilon_{t-1}$ et $\tilde{B}_t = \varepsilon_t$. La dernière forme peut induire quelques difficultés dans l'étude de stabilité parce que la suite $\{(\tilde{A}_t, \tilde{B}_t), t \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas *i.p.d.* Cependant, on peut écrire (2.2.2a) sous la représentation Markovienne au sens de Pham (1985).

En posant $Z_t = (\varphi_{t+1} + \beta_{t+1}\varepsilon_t) y_t$, on a :

$$y_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.3.2a)$$

$$Z_t = A_t Z_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.2b)$$

où la suite $\{(A_t, B_t), t \in \mathbb{Z}\}$ donnée par $A_t = \varphi_{t+1} + \beta_{t+1}\varepsilon_t$ et $B_t = A_t \varepsilon_t$ est en revanche *i.p.d.* En utilisant (2.3.2), le résultat suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que le modèle $PBL_S(1, 0, 1, 1)$ soit stable par rapport à la stationnarité périodique stricte.

Théorème 2.3.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*) (*Stabilité par rapport à la stationnarité périodique stricte*)

*Sous **A0**, le modèle (2.2.2) admet une unique solution nonanticipative périodiquement stricte $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ si*

$$\sum_{s=1}^S \mathbb{E}(\log |\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1}|) < 0, \quad (2.3.3a)$$

et seulement si

$$\sum_{s=1}^S \mathbb{E}(\log |\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1}|) \leq 0. \quad (2.3.3b)$$

De plus, la solution est périodiquement ergodique et est donnée pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par

$$y_t = z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.3.4a)$$

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{t-j}, \quad (2.3.4b)$$

où les dernières séries convergent presque sûrement. Si, de plus, $\mathbb{E}((\log |\varepsilon_t|)^2) < \infty$ alors (2.3.3b) se réduit à (2.3.3a).

Preuve. Supposons que (2.3.3a) est vérifiée. De la condition **A0** sur $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ il est clair

que $\sum_{s=1}^S \mathbb{E}(|\log |A_s||) < \infty$ et $\sum_{s=1}^S \mathbb{E}(|\log |B_s||) < \infty$. Montrons d'abord que (2.3.3a) implique

la convergence presque sûre des série (2.3.4b) pour tout $t \in \mathbb{Z}$. De (2.3.3a), $\sum_{s=1}^S \mathbb{E}(|\log |A_s||)$ et

$\sum_{s=1}^S \mathbb{E}(|\log |B_s||)$, du fait que $\{(A_t, B_t), t \in \mathbb{Z}\}$ est *i.p.d.* $\{(A_t, B_t), t \in \mathbb{Z}\}$, et de la loi forte

des grands nombres que nous avons

$$\begin{aligned}
 \left(\left| \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{t-j} \right| \right)^{1/j} &= \exp \left\{ \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \log |A_{t-i}| + \frac{1}{j} \log |B_{t-j}| \right\} \\
 &= \exp \left\{ \frac{1}{KS} \sum_{s=1}^S \sum_{l=1}^K \log |A_{t-s-lS}| \right\} + o_{p.s.}(1) \\
 &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbb{E}(\log |A_s|) \right\} < 1, \quad p.s.,
 \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

où $o_{p.s.}(1)$ indique une variable aléatoire qui est presque sûrement nulle quand $K \rightarrow \infty$.

Lors de l'établissement de (2.3.5) nous avons employé le fait, bien connu, que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ alors $\frac{X}{j} = o_{p.s.}(1)$ quand $j \rightarrow \infty$ (Voir par exemple le livre de Francq et Zakoïan 2010).

Ainsi, par le critère de Cauchy, la série donnée par (2.3.4b) converge $p.s.$ Il est clair que le processus $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ donné par (2.3.4b) est une solution de (2.3.2b). Cette solution est clairement strictement stationnaire périodiquement et périodiquement ergodique puisque c'est une fonction mesurable du processus *i.p.d.* processus $\{(A_t, B_t), t \in \mathbb{Z}\}$ qui est aussi strictement stationnaire périodiquement et périodiquement ergodique.

Par le même argument, le processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ donné par (2.3.4a) est une solution strictement stationnaire périodiquement et périodiquement ergodique de (2.2.2). La preuve de l'unicité de $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ ainsi que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est standard et par conséquent est omis.

Pour prouver la nécessité de la condition (2.3.3b) nous suivons Quinn (1982). Supposons que (2.2.2) admet la solution strictement stationnaire périodiquement $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et montrons que la condition :

$$\sum_{s=1}^S \mathbb{E}(\log |\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1}|) > 0, \tag{2.3.6}$$

mène nécessairement à une contradiction. Soit $\{y_t^x, t \in \mathbb{Z}\}$ une série chronologique générée par (2.2.2) pour $t = 1$ avec $y_0^x = x$ et $\{(\varepsilon_t, y_t^x), t \leq 0\}$ des constantes considérées connues avec $\varepsilon_0 \neq 0$. Donc, de (2.2.2) on a pour $x' \neq x$

$$\log |y_t^x - y_t^{x'}| = t \left(\frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \log |\varphi_{t-i} + \beta_{t-i} \varepsilon_{t-i-1}| \right) + \log |y_0^x - y_0^{x'}|. \tag{2.3.7}$$

Par conséquent, si (2.3.6) est vérifiée alors par la loi forte des grands nombres $\log |y_t^x - y_t^{x'}|$ diverge presque sûrement vers ∞ et ainsi $|y_t^x| \xrightarrow{p.s.} \infty$ ou $|y_t^{x'}| \xrightarrow{p.s.} \infty$ quand $t \rightarrow \infty$. Par conséquent, il existe l'unique $x^* \in \mathbb{R}$ pour laquelle $y_t^{x^*}$ ne diverge pas *p.s.* vers ∞ quand $t \rightarrow \infty$. Cependant, chaque réalisation de la solution strictement stationnaire périodiquement $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ coïncide avec un certain $\{y_t^{x^*}, t \in \mathbb{Z}\}$ et donc $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est nécessairement dégénérée *p.s.* à $\{y_t^{x^*}, t \in \mathbb{Z}\}$. Ceci implique que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est aussi dégénéré ce qui est en contradiction avec **A0**. Par conséquent il n'y a aucune solution strictement stationnaire périodiquement quand (2.3.6) est vérifiée.

Finalement supposons que $\mathbb{E}((\log |\varepsilon_t|)^2) < \infty$. Si $\sum_{s=1}^S \mathbb{E}(\log |\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1}|) = 0$, alors (2.3.7) devient une marche aléatoire

$$\log |y_t^x - y_t^{x'}| = \sum_{i=0}^{t-1} \zeta_i + \log |y_0^x - y_0^{x'}|,$$

où $\zeta_i = \log |\varphi_{t-i} + \beta_{t-i} \varepsilon_{t-i-1}|$ et $\{\zeta_i, i \in \mathbb{Z}\}$ est *i.p.d.* de moyenne zéro et de variance S -périodique Δ_i^2 . Puisque $\mathbb{E}((\log |\varepsilon_t|)^2) < \infty$, alors $\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{\zeta_i}{\Delta_i}$ converge en loi quand $t \rightarrow \infty$ et par la loi forte de grands nombres pour les marches aléatoires (voir Stout, 1974) on a $|\sum_{i=0}^{t-1} \zeta_i| \xrightarrow{a.s.} \infty$.

En utilisant le même argument que dans ce qui précède nous concluons que $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ ne peut pas être une solution strictement stationnaire périodiquement de (2.2.2). Ainsi (2.3.3a) est aussi nécessaire pour que le modèle (2.2.2) admette une solution strictement stationnaire périodiquement. Ce qui complète la preuve. ■

2.4 Stabilité par rapport à la stationnarité périodique de premier ordre

2.4.1 Condition de stabilité de premier ordre

Nous posons l'hypothèse suivante :

A1 : $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est *i.p.d.* avec $E(\varepsilon_t) = 0$ ($t \in \mathbb{Z}$) et $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E(\varepsilon_t^2) < \infty$.

Avant d'étudier ce type de stabilité, notons que dans ce qui suit nous utilisons fréquemment solutions de l'équations au différence ordinaire suivante

$$u_t = a_t + b_t u_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.4.1)$$

où a_t and b_t sont S périodiques. Rappelons que, sous la condition $\left| \prod_{s=0}^{S-1} b_s \right| < 1$, l'unique solution est donnée par

$$u_{s+\tau S} = \left(1 - \prod_{s=0}^{S-1} b_s \right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} b_{s-i} a_{s-j}, \quad 1 \leq s \leq S, \tau \in \mathbb{Z}, \quad (2.4.2)$$

Le résultat suivant donne la condition nécessaire pour la stabilité du processus donné par (2.2.2) par rapport à la stationnarité périodique de premier ordre.

Theorem 2.4.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

Sous A1, le modèle (2.2.2) admet l'unique solution périodiquement stationnaire de premier ordre (nonanticipative) donnée par (2.3.4) si

$$\prod_{s=1}^S E |\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1}| < 1, \quad (2.4.3)$$

où la série dans (2.3.4b) converge en moyenne. De plus, la solution est aussi strictement périodiquement stationnaire, périodiquement érgodique et converge presque sûrement.

Preuve Nous montrons d'abord que sous (2.3.4), la série dans (2.3.4b) converge en moyenne pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Le théorème de convergence monotone, la propriété *i.p.d.* de $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et le fait que $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E(\varepsilon_t^2) < \infty$ pour tout t donnent

$$\begin{aligned}
 E \left(\left| \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{t-j} \right| \right) &\leq E \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{t-j} \right| \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\sum_{j=0}^n \left| \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} \right| |B_{t-j}| \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n \prod_{i=0}^{j-1} E |(\varphi_{t+1-i} + \beta_{t+1-i} \varepsilon_{t-i})| E (|\varepsilon_{t-j} \varphi_{t+1} + \beta_{t+1} \varepsilon_{t-j}^2|) \right) \\
 &\leq \sup_{1 \leq s \leq S} E(\lambda_s) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n \prod_{i=0}^{j-1} E |(\varphi_{t+1-i} + \beta_{t+1-i} \varepsilon_{t-i})| \right), \quad (2.4.4)
 \end{aligned}$$

where $\lambda_s = |\beta_{s+1} \varepsilon_s^2| + |\varepsilon_s \varphi_{s+1}|$. Using the S -periodicity of θ and $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ we have

$$\sum_{j=0}^n \prod_{i=0}^{j-1} E |(\varphi_{t+1-i} + \beta_{t+1-i} \varepsilon_{t-i})| \leq K \sum_{j=0}^n \left(\prod_{s=0}^{S-1} E |(\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1})| \right)^{\lfloor \frac{j}{S} \rfloor}, \quad (2.4.5)$$

où $\lfloor \frac{j}{S} \rfloor$ représente la partie entière de $\frac{j}{S}$ et K is an appropriate positive bounding constant. Donc, de (2.4.4) et (2.4.5) on voit que, under la condition (2.4.3), la série dans (2.3.4b) converge en moyenne. Il est claire maintenant que le processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ given by (2.3.4) est une solution nonanticipative de (2.2.2) et en utilisant les arguments standards on en déduit que cette solution est unique. De plus, puisque de l'inégalité de Jensen la condition because condition (2.3.4) implique la condition (2.3.3a), on en déduit que la série dans (2.3.4b) converge presque surement. Finalement, puisque l'unique solution donnée par (2.3.4) est exprimée comme une fonction mesurable du processus *i.p.d.* $\{(\varepsilon_t, \theta_t), t \in \mathbb{Z}\}$, cette solution est aussi strictement périodiquement stationnaire et périodiquement érgodique. ■

La proposition suivante donne une condition nécessaire moins forte pour la stabilité par rapport à la stationnarité périodique de premier ordre.

Proposition 2.4.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

Si le modèle (2.2.2) admet une solution $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement stationnaire de premier ordre et $\beta_t \neq 0$ pour tout t alors

$$\left| \prod_{s=1}^S \varphi_s \right| < 1. \quad (2.4.6)$$

Preuve Si $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une solution périodiquement stationnaire de premier ordre de is a first-order periodically stationary solution to (2.2.2) alors en prenant l'espérance des deux membres de (2.2.2) et en utilisant le fait que $E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ on obtient l'équation S -périodique au difference ordinaire suivante

$$E(y_t) = \varphi_t E(y_{t-1}) + \beta_t \sigma_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.7)$$

Notons $\mathbb{E}(y_t) = \mu_t$, donc

$$\mu_t = \varphi_t \mu_{t-1} + \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}), \quad t \in \mathbb{Z},$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) &= \mathbb{E} \left\{ [\varphi_{t-1} X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \beta_{t-1} X_{t-2} \varepsilon_{t-2}] \varepsilon_{t-1} \right\}, \quad t \in \mathbb{Z}, \\ &= \mathbb{E} \left[\varphi_{t-1} X_{t-2} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{t-1} X_{t-2} \varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1} \right] = \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

alors,

$$\mu_t = \varphi_t \mu_{t-1} + \beta_t \sigma_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Notons $\eta_t = \beta_t \sigma_{t-1}^2$, on a donc $\mu_t = \varphi_t \mu_{t-1} + \eta_t$. En procédant par itérations on obtient :

$$\mu_t = \left(\prod_{i=1}^m \varphi_{t-i+1} \right) \mu_{t-m} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^j \varphi_{t-i+1} \right) \eta_{t-j} + \eta_t.$$

Posons $m = S$ et tenant compte de la périodicité de φ_{t-i+1} et de la moyenne, on obtient :

$$\mu_t = \left(\prod_{i=1}^S \varphi_i \right) \mu_t + \sum_{j=1}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \varphi_{t-i+1} \right) \eta_{t-j} + \eta_t,$$

qui peut être réécrit comme suit :

$$\left[1 - \prod_{i=1}^S \varphi_i\right] \mu_t = \eta_t + \sum_{j=1}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \varphi_i\right) \eta_{t-j},$$

donc la condition de la stationnarité périodique en moyenne du processus est donnée par :

$$\prod_{i=1}^S |\varphi_i| < 1,$$

2.4.2 Structure de la moyenne de la solution périodiquement stationnaire de premier ordre

La proposition suivante donne la forme explicite de la moyenne de l'unique solution périodiquement stationnaire de premier ordre $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ du modèle (2.2.2) sous **A1** et sous la condition de stabilité (2.4.3). Posons $\mu_s = E(y_{s+\tau S})$ ($1 \leq s \leq S, \tau \in \mathbb{Z}$).

Proposition 2.4.2 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

*Sous **A1** et (2.4.3), la moyenne de la solution solution (2.3.2) est explicitement donnée par*

$$E(y_{s+\tau S}) = \frac{\sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{s-i} \beta_{s-j} \sigma_{s-j-1}^2}{1 - \prod_{i=1}^S \varphi_i}, \quad 1 \leq s \leq S. \quad (2.4.8)$$

Preuve : On a vu que

$$\left[1 - \prod_{i=1}^S \varphi_i\right] \mu_t = \eta_t + \sum_{j=1}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \varphi_i\right) \eta_{t-j},$$

en remplaçon η_{t-j} par sa valeur $\beta_t \sigma_{t-1}^2$ on obtient :

$$\mu_t = \frac{\eta_t + \sum_{j=1}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \varphi_i\right) \eta_{t-j}}{1 - \prod_{i=1}^S \varphi_i}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

remplaçons η_{t-j} par sa valeur $\beta_t \sigma_{t-1}^2$ on obtient

$$E(y_{s+\tau S}) = \frac{\sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{s-i} \beta_{s-j} \sigma_{s-j-1}^2}{1 - \prod_{i=1}^S \varphi_i}, \quad 1 \leq s \leq S. \blacksquare$$

Il est clair que pour le cas classique, i.e., $S = 1$ la condition se réduit à $|\varphi| < 1$ et la moyenne à $\mu = \mathbb{E}(X_t) = (1 - \varphi)^{-1} \beta \sigma^2$.

2.5 Stabilité par rapport à la stationnarité périodique de second ordre

2.5.1 Condition de stabilité de second ordre

Nous étudions à présent la stabilité de (2.2.2) par rapport à la stationnarité périodique de second ordre qui est aussi connue dans la littérature de séries chronologique par la *corrélacion périodique* (Gladyshev, 1961). En principe, nous supposons uniquement que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc périodique, i.e. une suite de variables aléatoires non corrélées avec variance périodique finie. Cependant, pour des raisons techniques, nous supposons, en plus, que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est *i.p.d.* avec variance périodique finie. De plus, à cause de la bilinéarité du modèle, nous devons supposer aussi que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ possède un moment d'ordre quatre fini.

A2 : $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est *i.p.d.* avec $E(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$ et $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E(\varepsilon_t^4) < \infty$.

De plus, nous supposons que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait l'hypothèse de non dégénérescence suivante :

A3 : ε_t^2 est presque sûrement une fonction non linéaire de ε_t pour tout t .

Soit $\eta_t = \varphi_{t+1} + \beta_{t+1} \varepsilon_t$, $\psi_t = (\varphi_{t+1} + \beta_{t+1} \mu_t) \varepsilon_t + \beta_{t+1} (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2)$ et $y_{c,t} = y_t - \mu_t$. Le théorème suivant établit une condition nécessaire et suffisante pour que le processus périodiquement stationnaire en moyenne $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant l'équation au différence stochastique (2.2.2a) soit périodiquement stationnaire au second ordre.

Théorème 2.5.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

i) Sous l'hypothèse **A2**, une condition suffisante pour que le modèle (2.2.2) ait une solution (nonanticipative) périodiquement stationnaire de second ordre donnée par (2.3.2) est que

$$\Phi := \prod_{s=1}^S (\varphi_s^2 + \beta_s^2 \sigma_{s-1}^2) < 1, \quad (2.5.1)$$

où la série dans (2.3.2b) converge en moyenne quadratique et presque sûrement. De plus, la solution (2.3.2) est aussi strictement périodiquement stationnaire, périodiquement érgodique et est exprimée via le processus centré $\{y_{c,t}, t \in \mathbb{Z}\}$ par

$$y_{c,s+\tau S} = \varepsilon_{s+\tau S} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{m=0}^{r-1} \prod_{i=1}^S \eta_{s-i+(\tau-m)S} \right) \left(\prod_{i=1}^{j-1} \eta_{s-i+(\tau-r+1)S} \right) \psi_{s-j+(\tau-r+1)S}, \quad (2.5.2)$$

où les dernières séries convergent aussi en moyenne quadratique et presque sûrement.

ii) Si, de plus, **A3** est vérifiée, alors la condition (2.5.1) est aussi nécessaire.

Preuve i) Si on pose

$$P_{t,j} = \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i}, \quad Z_{t,n} = \sum_{j=0}^n P_{t,j} B_{t-j}, \quad R_{t,n} = \prod_{i=0}^n A_{t-i} Z_{t-n-1}, \quad (2.5.3)$$

alors par un remplacement successif dans (2.3.2b) on trouve pour un certain entier positif n

$$Z_t = Z_{t,n} + R_{t,n}.$$

D'abord, montrons que si (2.5.1) est vérifiée alors la série dans then the series in (2.3.2b) converge en moyenne quadratique, i.e. pour tout $1 \leq t \leq S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_{t,n}^2) \text{ est finie,} \quad (2.5.4)$$

Puisque $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est *i.p.d.*, et de la forme particulière de $\{(A_t, B_t), t \in \mathbb{Z}\}$ ($B_t = A_t \varepsilon_t$), on a

$$\begin{aligned} E(Z_{t,n}^2) &= \sum_{j=0}^n E(P_{t,j}^2 B_{t-j}^2) \\ &= \sum_{n=0}^n \prod_{i=1}^j E(A_{t-i+1}^2) E(B_{t-j}^2). \end{aligned}$$

Posons $t = v^{(t)} + S\tau^{(t)}$ et $j = v^{(j)} + S\tau^{(j)}$ tels que $v^{(t)}, v^{(j)} \in \{1, \dots, S\}$, $\tau^{(t)} \in \mathbb{Z}$, $\tau^{(j)} \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_{t,n}^2)$, puisque $E(A_t^2)$ et $E(B_{t-j}^2)$ sont S -périodiques en t , comme suit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_{t,n}^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{l=0}^{S-1} E(A_{v^{(t)}-l}^2) \right)^{\tau^{(j)}} \left(\prod_{l=0}^{v^{(j)}-1} E(A_{v^{(t)}-l}^2) \right) E(B_{v^{(t)}-v^{(j)}}^2),$$

où $\tau^{(j)} = \lfloor \frac{j}{S} \rfloor$. Pour tout t , $E(B_{v^{(t)}-v^{(j)}}^2)$ est finie sous **A2** et $\prod_{l=0}^{v^{(j)}-1} E(A_{v^{(t)}-l}^2)$ est uniformément limité par $\max_{1 \leq v^{(t)} \leq S} \prod_{l=0}^{v^{(j)}-1} E(A_{v^{(t)}-l}^2)$, qui est fini aussi. Donc une condition suffisante pour (2.5.4) est que (2.5.1) soit vérifiée.

Maintenant, posons $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^j A_{t-i+1} B_{t-j}$ la moyenne quadratique limite de $Z_{t,n}$ quand $n \rightarrow \infty$. Il est clair que $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est solution de (2.3.2b) qui est unique. De plus, puisque $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une fonction mesurable de la suite *i.p.d.* $\{(A_t, B_t), t \in \mathbb{Z}\}$, la solution est aussi strictement périodiquement stationnaire et périodiquement érgodique. La série dans (2.3.4b) converge presque sûrement parce que (2.5.1) entraîne (2.3.3a). De (2.3.2a) et **A2** nous concluons pour $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Finalement, pour montrer (2.5.2), la représentation Markovienne (2.3.2) peut être écrite sous la forme centrée suivante

$$Z_{c,t} = \eta_t Z_{c,t-1} + \psi_t, \quad (2.5.5)$$

rappelons que $E(y_t) = \mu_t = \mu_{t-1}^{(Z)}$, où $\mu_t^{(Z)} = E(Z_t)$ et $Z_{c,t} = Z_t - \mu_t^{(Z)}$. Pour $t \geq 0$, en itérant (2.5.5) t fois et en utilisant $Z_{c,t} = y_{c,t-1} - \varepsilon_t$, on obtient

$$y_{c,t} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \eta_{t-i} \right) \psi_{t-j} + \left(\prod_{i=1}^{t-1} \eta_{t-i} \right) Y_{c,0}, \quad (2.5.6)$$

où $Y_{c,0} = y_{c,1} - \varepsilon_1 = (\varphi_1 + b_1 \varepsilon_0) y_{c,0}$. Remplaçons t par $s + \tau S$ dans (2.5.6) ($1 \leq s \leq S, \tau \in \mathbb{Z}$),

et utilisons $\prod_{i=1}^{s-1+\tau S} \eta_{s-i+\tau S} = \left(\prod_{r=1}^{\tau} \prod_{i=1}^S \eta_{s-i+(\tau-r+1)S} \right) \left(\prod_{i=1}^{s-1} \eta_{s-i} \right)$, alors de la S -périodicité de φ_t ,

β_t et σ_t^2 nous trouvons après quelques manipulations

$$\begin{aligned} y_{c,s+\tau S} - \varepsilon_{s+\tau S} - \sum_{r=1}^{\tau} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{m=0}^{r-1} \prod_{i=1}^S \eta_{s-i+(\tau-m)S} \right) \left(\prod_{i=1}^{j-1} \eta_{s-i+(\tau-r+1)S} \right) \psi_{s-j+(\tau-r+1)S} \\ = \prod_{r=1}^{\tau} \prod_{i=1}^S \left(\eta_{s-i+(\tau-r+1)S} \right) \left[\sum_{j=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{j-1} \eta_{s-i} \psi_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \eta_{s-i} \right) Y_{c,0} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Prenons l'espérance des deux membres de (2.5.7), on obtient

$$\begin{aligned} E \left\{ \left[y_{c,s+\tau S} - \varepsilon_{s+\tau S} - \sum_{r=1}^{\tau} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{m=0}^{r-1} \prod_{i=1}^S \eta_{s-i+(\tau-m)S} \right) \left(\prod_{i=1}^{j-1} \eta_{s-i+(\tau-r+1)S} \right) \psi_{s-j+(\tau-r+1)S} \right]^2 \right\} \\ = \Phi^{\tau} E \left[\left(\sum_{j=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{j-1} \eta_{s-i} \psi_{s-j} + \left(\prod_{i=1}^{s-1} \eta_{s-i} \right) Y_{c,0} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Par conséquent, on voit que sous (2.5.1), la partie droite de (2.5.8) converge vers 0 quand $\tau \rightarrow \infty$, ce qui complète la preuve de la partie de suffisance.

ii) Supposons qu'il existe une solution $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement stationnaire de second ordre pour (2.3.2). Alors, en itérant (2.5.5) S fois on obtient :

$$Z_{c,t} = \prod_{j=0}^{S-1} \eta_{t-j} Z_{c,t-S} + \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \eta_{t-i} \psi_{t-j}. \quad (2.5.9)$$

De (2.5.9) et de la structure périodique de $\{(\eta_t, \psi_t), t \in \mathbb{Z}\}$ il en découle :

$$Var(Z_{c,t}) = \left(\prod_{j=0}^{S-1} E(\eta_{t-j}^2) \right) Var(Z_{c,t}) + Var \left(\sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \eta_{t-i} \psi_{t-j} \right). \quad (2.5.10)$$

Si **A3** is satisfaite, alors $\sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \eta_{t-i} \psi_{t-j}$ ne peut pas être écrit comme

$$\sum_{j_1=0}^{S-1} a_{t,j_1} \varepsilon_{t-j_1} + \sum_{j_1 < j_2} a_{t,j_1 j_2} \varepsilon_{t-j_1} \varepsilon_{t-j_2} + \dots + \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_S} a_{t,j_1 \dots j_S} \varepsilon_{t-j_1} \dots \varepsilon_{t-j_S}, \quad (2.5.11)$$

de certaines fonctions $a_{t,j_1\dots j_S}$, ($0 \leq j_i \leq S-1$, $1 \leq i \leq S$, $t \in \mathbb{Z}$) des paramètres du modèle (2.2.2). Therefore, ils n'existent pas de valeurs non-singulières des paramètres pour

les quelles $Var \left(\sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \eta_{t-i} \psi_{t-j} \right) = 0$ et donc de (2.5.10) il s'en suit que

$$Var(Z_{c,t}) \left(1 - \prod_{j=0}^{S-1} E(\eta_{t-j}^2) \right) > 0,$$

ce qui implique (2.5.1). ■

Remarque 2.5.1 Si l'hypothèse **A3** n'est pas vérifiée alors l'équation (2.2.2) peut admettre une solution périodiquement stationnaire de second ordre même lorsque $\prod_{i=1}^S (\varphi_{i+1}^2 + \beta_{i+1}^2 \sigma_i^2) \geq$

1. En effet, si

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_t \varepsilon_t + \sigma_t^2, \quad \alpha_t \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.5.12)$$

alors pour φ_t et β_t tel que

$$\alpha_{t-1} \beta_t + \varphi_t + \beta_t \mu_{t-1} = 0,$$

le processus périodiquement stationnaire de second ordre $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ donné par

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t,$$

est clairement une solution nonanticipative pour (2.2.2) même $\prod_{i=1}^S (\varphi_{i+1}^2 + \beta_{i+1}^2 \sigma_i^2)$ peut être supérieur à 1. Par exemple, si $S = 2$ et (2.5.12) est vérifié alors

$$\sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \eta_{t-i} \psi_{t-j} = a_{t,1} \varepsilon_t + a_{t,2} \varepsilon_{t-1} + a_{t,12} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1},$$

où $a_{t,1} = \varphi_{t+1} + \alpha_t \beta_{t+1} + \beta_{t+1} \mu_t$, $a_{t,2} = \varphi_t \varphi_{t+1} + \alpha_{t-1} \varphi_{t+1} \beta_t + \varphi_{t+1} \beta_t \mu_{t-1}$ et $a_{t,12} = \varphi_t \beta_{t+1} + \alpha_{t-1} \beta_t \beta_{t+1} + \beta_t \beta_{t+1} \mu_{t-1}$

2.5.2 Structure d'autocovariance de la solution périodiquement stationnaire au second ordre

Comme conséquence de la stabilité par rapport à la stationnarité périodique de second ordre, nous donnons dans cette subsection la structure d'autocovariance de l'unique solution $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ du modèle (2.2.2) sous **A2** et sous la condition de stabilité (2.5.1). Posons $\gamma_h^{(s)} = Cov(y_{s+nS}, y_{s+nS-h}) = E(y_{c,s+nS}, y_{c,s+nS-h})$, ($1 \leq s \leq S$, $h \in \mathbb{Z}$) la fonction d'autocovariance de $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 2.5.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

L'autocovariance $\gamma_h^{(s)}$ de $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par

$$\gamma_0^{(s)} = \sigma_s^2 + \frac{\Phi}{1-\Phi} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{s-i}^2 + \beta_{s-i}^2 \sigma_{s-i-1}^2) \right) E(\psi_{s-j}^2), \quad (2.4.13a)$$

$$\gamma_1^{(s)} = \varphi_s \gamma_0^{(s-1)} + C_s \quad (2.4.13b)$$

$$\gamma_h^{(s)} = \left(\prod_{i=1}^S \varphi_i \right)^\vartheta \left(\prod_{i=0}^{v-2} \varphi_{s-i} \right) \left(\varphi_{s-v+1} \gamma_0^{(s-v)} + C_{s-v+1} \right), \quad \begin{array}{l} h \geq 2, h = \nu + \vartheta S \\ 1 \leq s, v \leq S, \vartheta \in \mathbb{N}, \end{array} \quad (2.4.13c)$$

où

$$\begin{aligned} E(\psi_s^2) &= \beta_{s+1}^2 (E(\varepsilon_s^4) - \sigma_s^4) + 2\beta_{s+1} (\varphi_{s+1} + \beta_{s+1} \mu_s) E(\varepsilon_s^3) + (\varphi_{s+1} + \beta_{s+1} \mu_s)^2 \sigma_s^2 \\ C_s &= \beta_s E(\varepsilon_{s-1}^3) + \beta_s \mu_{s-1} \sigma_{s-1}^2, \quad 1 \leq s \leq S. \end{aligned} \quad (2.4.13d)$$

Preuve Des calculs ordinaires et directs donnent (2.4.13). ■

Notons que la forme explicite Note that the explicit formula (2.4.13c) peut être écrite sous la forme récurssive suivante

$$\gamma_h^{(t)} = \varphi_t \gamma_{h-1}^{(t-1)}, \quad h \geq 2, t \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.14)$$

2.6 Stabilité par rapport à la stationnarité d'ordre r

Dans cette section, nous étudions la stabilité de (2.2.2) par rapport à la stationnarité périodique d'ordre r ($r \geq 1$) ce qui signifie que le processus sous-jacent est intégrable jusqu'à l'ordre r et que les moments d'ordre r correspondants sont S -périodique dans le temps. Ainsi, en suivant le même principe utilisé dans la section précédente, nous supposons que les inputs de (2.2.2) sont périodiquement stationnaires d'ordre $2r$ et nous cherchons la conditions pour que ces inputs aient une solution $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nonanticipative périodiquement stationnaire unique d'ordre r comme output. Ainsi nous considérons l'hypothèse suivante :

A4 : $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est *i.p.d.* avec $E(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$ et $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E(\varepsilon_t^{2r}) < \infty$, $r \geq 1$.

Theorem 2.6.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

Sous A4, une condition suffisante pour que le modèle (2.2.2) ait une solution nonanticipative unique périodiquement stationnaire d'ordre r donnée par (2.3.4) est que

$$\prod_{s=1}^S E(|\varphi_s + b_s \varepsilon_{s-1}|^r) < 1, \quad (2.6.1)$$

où la série dans (2.3.4b) converge au sens du moment d'ordre r . De plus, la solution (2.3.4) est également strictement périodiquement stationnaire, périodiquement érgodique et la série dans (2.3.4b) converge presque surement aussi.

Preuve Comme dans la preuve du théorème 2.4.1 soit

$$Z_{t,n} = \begin{cases} \sum_{j=0}^n P_{t,j} B_{t-j} & \text{si } n > 1 \\ B_t & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

où $P_{t,j}$ est donné par (2.5.3). En premier lieu, nous devons montrer que sous (2.6.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|Z_{t,n}|^r) \text{ est finie.} \quad (2.6.2)$$

si on pose

$$\pi_{t,n} = Z_{t,n} - Z_{t,n-1} = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i} B_{t-n} & \text{si } n > 1 \\ B_t & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n < 0, \end{cases} \quad (2.6.3)$$

alors $\pi_{t,n} = A_t \pi_{t-1,n-1}$. Pour montrer (2.6.2) il suffit que

$$E(|\pi_{t,n}|^r) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (2.6.4)$$

Mais de (2.6.3) et **A4** on a

$$\begin{aligned} E(|\pi_{t,n}|^r) &= E\left(\left|\prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i} B_{t-n}\right|^r\right) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} E(|A_{t-i}|^r) E(|B_{t-n}|^r) \\ &\leq K \left(\prod_{s=0}^{S-1} E(|A_s|^r)\right)^{\lceil \frac{n}{S} \rceil} E(|B_{t-n}|^r), \end{aligned}$$

pour une certaine constante positive K . Ceci implique (2.6.4) et donc la série dans series (2.6.2) converge au sens du moment d'ordre r . Soit Z_t la limite du moment d'ordre r de $Z_{t,n}$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors, $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est l'unique solution de (2.3.2b) qui est aussi strictement périodiquement stationnaire et périodiquement érgodique. La série dans (2.3.4b) converge aussi presque surement parceque (2.6.1) implique (2.3.3a). Finalement $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ donné par (2.3.4a) est intégrable jusqu'à l'ordre r parceque $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ le sont. ■

Remarque 2.6.1

i) Quand r est pair, il est claire que

$$\prod_{s=1}^S E(|\varphi_s + b_s \varepsilon_{s-1}|^r) = \prod_{s=1}^S |E((\varphi_s + b_s \varepsilon_{s-1})^r)|$$

et donc la condition (2.6.1) se réduit à la forme plus simple :

$$\prod_{s=0}^{S-1} \left(\left| \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \varphi_{s+1}^{r-j} b_{s+1}^j E(\varepsilon_s^j) \right| \right) < 1. \quad (2.6.5)$$

En particulier pour $r = 2$, on trouve (2.5.1).

ii) Il apparaît que la condition (2.6.1) pourrait aussi être nécessaire pour la stabilité par rapport à la stationnarité périodique d'ordre r mais l'hypothèse non-dégénérescence **A3** devrait aussi être faite. En effet, si **A3** est satisfaite alors (2.6.5) est une condition nécessaire qui est plus stricte quand l'ordre r est impair.

Soit $\mu_{r,s}^{*(Z)} = E \left(\left(Z_{s+\tau S} - \mu_s^{(Z)} \right)^r \right)$ le moment centré d'ordre r de $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 2.6.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

*Sous **A3** et **A4**, si le modèle (2.2.2) admet une solution $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement stationnaire d'ordre r et $\beta_t \neq 0$ pour tout t , alors (2.6.5) est vérifiée.*

Preuve Si $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une solution périodiquement stationnaire d'ordre r de (2.2.2) alors ainsi est $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ donnée par (2.3.2). De (2.5.5) il s'en suit que

$$\mu_{r,t}^{*(Z)} = \delta_{r,t} \mu_{r,t-1}^{*(Z)} + C_t, \quad (2.6.6)$$

où $\delta_{r,t} = E \left((\varphi_{t+1} + b_{t+1} \varepsilon_t)^r \right)$ et $C_t = \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} \mu_{r-k,t-1}^{*(Z)} E \left(\eta_t^{r-k} \psi_t^k \right) + E \left(\psi_t^r \right)$. Si **A3** est satisfaite, alors comme pour (2.5.11), C_t ne peut pas être égale à zéro et donc l'équation au difference périodique ordinaire (2.6.6) devrait avoir une solution unique. Ceci arrive quand (2.6.5) est satisfaite. ■

Ainsi, du Théorème 2.6.1 et Proposition 2.6.1 nous concluons que :

i) Si r est pair, alors (2.6.1) qui coïncide avec (2.6.5), est suffisante pour la stabilité par rapport à la stationnarité périodique d'ordre r sous **A4** et est aussi nécessaire si, de plus, **A3** est vérifiée.

ii) Si, cependant, r est pair alors (2.6.1) est suffisante pour la stabilité par rapport à la stationnarité périodique d'ordre r sous **A4** et (2.6.5) est nécessaire sous **A4** et **A3**. En utilisant de plus l'inégalité de Jensen il s'ensuit que (2.6.1) implique (2.6.5) mais l'inverse n'est pas vrai. Donc, il apparait que pour r impair, la condition (2.6.5) n'est pas suffisante pour la stabilité par rapport à la stationnarité périodique d'ordre r .

$$\left(\prod_{s=1}^S E \left(|\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1}|^r \right) < 1 \right) \implies \begin{array}{c} \text{Stabilité / stationnarité} \\ \text{périodique d'ordre } r \\ r \text{ est impair} \end{array} \implies \left(\prod_{s=1}^S |E \left(\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1} \right)^r| < 1 \right).$$

$$\left(\prod_{s=1}^S E \left(|\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1}|^r \right) < 1 \right) \Leftrightarrow \left(\prod_{s=1}^S |E \left(\varphi_s + \beta_s \varepsilon_{s-1} \right)^r| < 1 \right) \begin{array}{c} \implies \\ \left(\leftarrow \right) \\ \text{Sous } \mathbf{A}_3 \end{array} \begin{array}{c} \text{Stabilité / stationnarité} \\ \text{périodique d'ordre } r \\ r \text{ est pair} \end{array}$$

2.6.1 Structure des moments superieurs et Kurtoses de la solution périodiquement stationnaire à l'ordre r

Comme résultat de la stabilité par rapport à la stationnarité périodique à l'ordre r , la structure des moments de la solution périodiquement stationnaire à l'ordre r $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ du modèle (2.2.2) est donnée sous **A4** et (2.6.1). Soit $\mu_{r,s}^* = E((y_{s+\tau S} - \mu_s)^r)$ le moment centré d'ordre r de $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 2.6.2 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

Sous **A4** et (2.6.1), l'expression de $\mu_{r,s}^*$, ($1 \leq s \leq S$) est donnée par :

$$\mu_{r,s}^* = \mu_{r,s-1}^{*(Z)} + E(\varepsilon_s^r) + \sum_{l=2}^{r-1} \binom{r}{l} \mu_{l,s-1}^{*(Z)} E(\varepsilon_s^{r-l}), \quad 1 \leq s \leq S, \quad (2.6.7a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{k,s}^{*(Z)} &= (1 - \Delta)^{-1} \left[E(\psi_s^k) + \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} \mu_{k-l,s-1}^{*(Z)} E(\eta_s^{k-l} \psi_s^l) \right] + (1 - \Delta)^{-1} \times \\ &\quad \sum_{\nu=1}^{S-1} \left(\prod_{i=0}^{\nu-1} \delta_{k,s-i} \right) \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \mu_{k-l,s-\nu-1}^{*(Z)} E(\eta_{s-\nu}^{k-l} \psi_{s-\nu}^l), \end{aligned} \quad (2.6.7b)$$

où $\Delta = \prod_{s=1}^S E(\delta_{k,s})$.

Preuve La preuve découle immédiatement de (2.6.6) en utilisant (2.4.1)-(2.4.2). Pour $r = 2$, on trouve (2.5.13). Si $r = 4$ alors on a

$$\begin{aligned} \mu_{4,s}^{*(Z)} &= (1 - \Delta)^{-1} E(\psi_s^4) + 4(1 - \Delta)^{-1} \mu_{3,s-1}^{*(Z)} E(\eta_s^3 \psi_s) + 6(1 - \Delta)^{-1} \mu_{2,s-1}^{*(Z)} E(\eta_s^2 \psi_s^2) \\ \mu_{3,s}^{*(Z)} &= (1 - \Delta)^{-1} E(\psi_s^3) + 3(1 - \Delta)^{-2} E(\eta_s^2 \psi_s) E(\psi_{s-1}^2) + \\ &\quad 3(1 - \Delta)^{-2} \sum_{\nu=1}^{S-1} \left[\prod_{i=1}^{\nu} \delta_{2,s-i} E(\eta_s^2 \psi_s) E(\psi_{s-\nu-1}^2) + \prod_{i=1}^{\nu} \delta_{3,s-i+1} E(\psi_{s-\nu-1}^2) E(\eta_{s-\nu}^2 \psi_{s-\nu}) \right] + \\ &\quad 3(1 - \Delta)^{-2} \left(\sum_{\nu=1}^{S-1} \prod_{i=1}^{\nu} \delta_{2,s-\nu-i} E(\psi_{s-2\nu-1}^2) \right) \left(\sum_{\nu=1}^{S-1} \prod_{i=1}^{\nu} \delta_{3,s-i+1} E(\eta_{s-\nu}^2 \psi_{s-\nu}) \right) + \\ &\quad (1 - \Delta)^{-1} \sum_{\nu=1}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^{\nu} \delta_{3,s-i+1} \right) E(\psi_{s-\nu}^3) \\ \mu_{2,s}^{*(Z)} &= (1 - \Delta)^{-1} E(\psi_s^2). \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

De (2.6.7) et (2.6.8) on peut obtenir la S kurtoses de la solution périodiquement stationnaire à l'ordre 4 de (2.2.2).

Corollary 2.6.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)

Sous **A4** et (5.1) avec $r = 4$ la S Kurtoses de la solution périodiquement stationnaire à l'ordre 4 est donnée par

$$K_s = \frac{\mu_{4,s}^*}{(\mu_{2,s}^*)^2} (1 - \Delta)^{-1} \left(E(\psi_s^k) + \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} \mu_{k-l,s-1}^{*(Z)} E(\eta_s^{k-l} \psi_s^l) \right), \quad 1 \leq s \leq S,$$

où $\mu_{4,s}^*$ et $\mu_{2,s}^*$ sont données respectivement par Proposition 2.6.2 et Proposition 2.5.1.

2.7 Stabilité par rapport au processus d'innovation

Tous les types de stabilités étudiés précédemment sont par rapport au processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Dans cette section nous étudions une autre sorte de stabilité qui est plutôt par rapport au processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Ceci signifie grossièrement que, dans la limite, les estimations d'innovation sont insensibles aux valeurs de départ y_0, ε_0 que nous fixons pour l'équation (2.2.1) quand les données sont de $t = 1$ à n . Ceci arrive si et seulement si θ and $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sont tels qu'on puisse exprimer ε_t ($t \in \mathbb{Z}$) comme fonction mesurable de y_t, y_{t-1}, \dots et θ , i.e. $\varepsilon_t = g(\theta; y_t, y_{t-1}, \dots)$ où g existe dans un sens. Si $g(\theta; y_t, y_{t-1}, \dots)$ existe presque sûrement (p.s.) alors le modèles (2.2.1) est dit *fortement (ou p.s.) inversible*. Si, cependant, $E(\widehat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t)^2 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, où

$$\widehat{\varepsilon}_t = y_t - \widehat{Z}_{t-1} \quad \text{et} \quad \widehat{Z}_t = -\beta_t y_t \widehat{Z}_{t-1} + \varphi_t + \beta_t y_t, \quad t \geq 1, \quad (2.7.1)$$

avec \widehat{Z}_0 fixé, dite $\widehat{Z}_0 = 0$, alors g existe en moyenne quadratique et le modèle (2.2.1) est dit *or Granger-Andersen inversible* (voir aussi Granger and Andersen, 1978b). Afin d'étudier l'inversibilité presque sûre nous posons les hypothèses suivantes.

A5 : Il existe une solution périodiquement strictement stationnaire et périodiquement ergodique $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ pour (2.2.1) avec $E|\log |y_t|| < \infty$.

Theorem 2.7.1 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)(Stabilité presque sure/au processus d'innovation)

Sous **A0** et **A5**, le modèle (2.2.1) est presque sûrement inversible si

$$\sum_{s=1}^S E(\log |\beta_s y_{s-1}|) < 0, \quad (2.7.2)$$

et seulement si

$$\sum_{s=1}^S E(\log |\beta_s y_{s-1}|) \leq 0. \quad (2.7.3)$$

De plus, ε_t est donné pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \prod_{i=0}^{j-1} \beta_{t-i} y_{t-i-1} (y_{t-j} - \varphi_{t-j} y_{t-j-1}), \quad (2.7.4)$$

où la dernière série converge presque sûrement.

Preuve. Notons que le modèle (2.2.1) peut être exprimé sous la forme de l'équation au récurrence stochastique suivante $\varepsilon_t = C_t \varepsilon_{t-1} + D_t$, $t \in \mathbb{Z}$, où $C_t = -\beta_t y_{t-1}$ et $D_t = y_t - \varphi_t y_{t-1}$. De **A5**, $\{(C_t, D_t), t \in \mathbb{Z}\}$ est périodiquement stationnaire et périodiquement stationnaire avec $E|\log|C_t|| < \infty$ et $E|\log|D_t|| < \infty$. donc (2.7.2) et (2.7.3) suivent, en utilisant les mêmes démarches que dans la preuve du Théorème 2.3.1. ■

Les conditions d'inversibilité stricte (2.7.2) – (2.7.3) sont clairement difficiles à vérifier analytiquement parce qu'elles dépendent de la loi de y_s ($1 \leq s \leq S$). Retournons maintenant au problème d'inversibilité du modèle (2.2.1) qui est beaucoup plus simple à vérifier. Soit la supposition suivante :

A6 : Il existe une solution périodiquement strictement stationnaire et périodiquement ergodique $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de (1.2) avec $E(y_t^2) < \infty$.

Théorème 2.7.2 (*Aknouche and Bentarzi (2014)*)(Stabilité en moyenne quadratique/ au processus d'innovation)

Sous **A5** et **A6**, le modèle (2.2.1) est inversible en moyenne quadratique si

$$\prod_{s=1}^S \beta_s^2 E(y_s^2) < 1. \quad (2.7.5)$$

De plus, ε_t est donné pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par (2.7.4) où la série correspondante converge en moyenne quadratique.

Preuve. En suivant Granger and Andersen (1978b), et en combinant (2.3.2) et (2.7.1) nous avons

$$\widehat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t = Z_{t-1} - \widehat{Z}_{t-1} \quad \text{et} \quad Z_{t-1} - \widehat{Z}_{t-1} = \beta_{t-1} y_{t-1} \left(\widehat{Z}_{t-2} - Z_{t-2} \right), \quad t \geq 1,$$

par itération de la dernière égalité on obtient

$$(\varepsilon_t - \widehat{\varepsilon}_t)^2 = \beta_{t-1}^2 y_{t-1}^2 \beta_{t-2}^2 y_{t-2}^2 \dots \beta_1^2 y_1^2 \left(Z_0 - \widehat{Z}_0 \right)^2.$$

Parce que $\widehat{Z}_0 = 0$ et du fait que la moyenne géométrique est inférieure que la moyenne arithmétique, on trouve

$$(\varepsilon_t - \widehat{\varepsilon}_t)^2 \leq \left(t^{-1} \sum_{k=1}^{t-1} \beta_k^2 y_k^2 \right)^t Z_0^2,$$

et donc

$$E(\varepsilon_t - \widehat{\varepsilon}_t)^2 \leq E \left(t^{-1} \sum_{k=1}^{t-1} \beta_k^2 y_k^2 \right)^t E(\varphi_1 + \beta_1 \varepsilon_0)^2 E(y_0^2).$$

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}_t &= y_t - \widehat{Z}_{t-1} \\ \widehat{Z}_t &= -\beta_t y_t \widehat{Z}_{t-1} + \varphi_t + \beta_t y_t, \quad t \geq 1, \end{aligned}$$

alors, de **A6** et du théorème de la périodicité ergodique il s'en suit que si (2.7.5) est vérifiée alors $E(\varepsilon_t - \widehat{\varepsilon}_t)^2 \rightarrow 0$ ps $t \rightarrow \infty$. Le fait que la série dans (2.7.4) converge en moyenne quadratique sous **A6** et (2.7.5) est facilement prouvé de la même manière que la preuve du Théorème 2.5.1.

Remarque 2.7.1. Il peut être observé que si **A6** est vérifiée alors de l'inégalité de Jensen, l'inversibilité en moyenne quadratique implique l'inversibilité presque sûre.

2.8 Estimation

Dans la présente section, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres du modèle (2.2.1), via trois méthodes d'estimation, à savoir la méthode d'estimation de Yule-Walker (*YW*), la méthode d'estimation des moindres carrés conditionnelle (*CLS*) et la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle (*CML*). Il est bien connu que la première méthode est moins efficace que la seconde. Cependant, malgré que la méthode d'estimation de Yule-Walker (*YW*), la méthode d'estimation des moindres carrés conditionnelle (*CLS*) sont moins efficaces que la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle (*CML*), elles restent fréquemment utilisées de nos jours. En effet, elles sont simples et produisent des estimateurs consistants qui peuvent être utilisés comme valeurs initiales dans des méthodes sophistiquées telle que *MLE*.

2.8.1 Estimation de Yule-Walker

Nous nous intéressons à l'estimation des paramètres du modèle sous-jacent (2.2.1) en adoptant la méthode d'estimation de Yule-Walker (*YW*), dans le cas où le processus d'innovation est Gaussien de moyenne nulle et de variance périodique $\sigma_{\varepsilon,s}^2$, $s = 1, 2, \dots, S$. La proposition suivante établit l'estimation de (*YW*) des paramètres du modèle donné par (2.2.2).

Proposition 2.9.1. *Si le processus d'innovation $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus Gaussien de moyenne nulle et de variance périodique $\sigma_{\varepsilon,s}^2$, $s = 1, 2, \dots, S$, alors les estimateurs de Yule-Walker des paramètres φ_s , β_s et $\sigma_{\varepsilon,s}^2$, sont donnés, pour $s = 1, 2, \dots, S$, comme suit :*

Etape une : Estimation de φ_s :
$$\widehat{\varphi}_s = \frac{\widehat{\gamma}^{(s)}(1) - \widehat{\mu}_{y,s} \widehat{\mu}_{y,s-1}}{\widehat{\gamma}^{(s-1)}(0) - \widehat{\mu}_{y,s-1}^2},$$

Etape deux : Estimation de $\mathcal{B}_s = \beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2$:
$$\widehat{\mathcal{B}}_s = \widehat{\beta}_s \widehat{\mu}_{\varepsilon,s-1} = \widehat{\mu}_{y,s} - \widehat{\varphi}_s \widehat{\mu}_{y,s-1},$$

Etape trois : Estimation de $\sigma_{\varepsilon,s}^2$:
$$\widehat{\sigma}_{\varepsilon,s}^2 = \frac{1}{3} \frac{3 \widehat{\varphi}_s \mathbb{E}(\widehat{y_{s-1}^3}) \widehat{\mathcal{B}}_s - \widehat{A}_s \mathbb{E}(\widehat{y_{s-1}^2})}{\widehat{\varphi}_s \mathbb{E}(\widehat{y_{s-1}^3}) - \mathbb{E}(\widehat{y_{s-1}^2}) (\widehat{\mu}_{y,s} - 3 \widehat{\mathcal{B}}_s)}, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_s &= \mathbb{E}(\widehat{y_s^3}) - (\widehat{\varphi}_s)^3 \mathbb{E}(\widehat{y_{s-1}^3}) - 9 \widehat{\mathcal{B}}_s \widehat{\gamma}^{(s)}(0) - 9 \widehat{\mathcal{B}}_s \widehat{\varphi}_s^2 \widehat{\mu}_{y,s-1}^2, \\ \widehat{B}_s &= \widehat{\gamma}^{(s)}(0) - \widehat{\varphi}_s^2 \widehat{\gamma}^{(s-1)}(0) - (\widehat{\mu}_{y,s}^2 - \widehat{\varphi}_s^2 \widehat{\mu}_{y,s-1}^2), \end{aligned}$$

Etape quatre : Estimation de β_s :
$$\widehat{\beta}_s = \widehat{\mathcal{B}}_s / \widehat{\sigma}_{\varepsilon,s-1}^2.$$

Remarque. Pour obtenir les estimateurs $\widehat{\varphi}_s$, $\widehat{\beta}_s$ et $\widehat{\sigma}_{\varepsilon,s}^2$, nous procédons comme suit :

a) Les estimateurs $\widehat{\varphi}_s$ et $\widehat{\mathcal{B}}_s$ de φ_s et \mathcal{B}_s , respectivement, dans l'étape 1 et l'étape 2, sont obtenus à partir des deux égalités (2.4.13a) et (2.4.13b), en remplaçant $\gamma^{(s)}(1)$, $\gamma^{(s-1)}(0)$, $\mu_{y,s}$ et $\mu_{y,s-1}$, par leur estimateurs empiriques.

b) Pour calculer $\sigma_{\varepsilon,t}^2$, nous avons le système d'équations en β_t et $\sigma_{\varepsilon,t}^2$, suivant :

$$\begin{aligned} 3 \varphi_t \mathcal{B}_s \mathbb{E}(y_{t-1}^3) \beta_t + 3 (\mu_{y,t} - 3 \mathcal{B}_s) \sigma_{\varepsilon,t}^2 &= A_t, \\ \mathcal{B}_s \mathbb{E}(y_{t-1}^2) \beta_t + \sigma_{\varepsilon,t}^2 &= B_t, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_t &= \mathbb{E}(y_t^3) - \varphi_t^3 \mathbb{E}(y_{t-1}^3) - 9 \mathcal{B}_s \gamma^{(t)}(0) - 9 \mathcal{B}_s \varphi_t^2 \mu_{y,t-1}^2, \\ B_t &= \gamma^{(t)}(0) - \varphi_t^2 \gamma^{(t-1)}(0) - (\mu_{y,t}^2 - \varphi_t^2 \mu_{y,t-1}^2), \end{aligned}$$

à partir duquel nous obtenons $\sigma_{\varepsilon,t}^2$

$$\sigma_{\varepsilon,t}^2 = \frac{3 \varphi_t \mathbb{E}(y_{t-1}^3) B_t - \mathbb{E}(y_{t-1}^2) A_t}{3 [\varphi_t \mathbb{E}(y_{t-1}^3) - \mathbb{E}(y_{t-1}^2) (\mu_{y,t} - 3 \mathcal{B}_s)]}.$$

c) Finalement, l'estimateur $\widehat{\beta}_s$ est défini pour être donné par $\widehat{\mathcal{B}}_s / \widehat{\sigma}_{\varepsilon,s-1}^2$ cette estimation est très commune dans les modèles de séries chronologiques bilinéaires (voir par exemple Doukhan et al (2006), Grahn (1995)).

2.8.2 Etude de simulation des estimateurs de (YW)

La Table 1 donne les moyennes et les *RMSE* des estimateurs de *YW*, pour $r = 1000$ réplifications, de séries périodiques, de période $S = 4$, de tailles $N = 700, 1000, 1200, 1500$ et 2000 , générées à partir d'un modèle $PBL_4(1, 0, 1, 1)$. Nous remarquons que plus la taille de la série augmente les estimateurs des paramètres approchent des vraies valeurs des paramètres et leur *RMSE* diminuent.

n	s	φ_s	$\widehat{\varphi}_s$	$RMSE$	β_s	$\widehat{\beta}_s$	$RMSE$	σ_s^2	$\widehat{\sigma}_s^2$	$RMSE$
700	1	.2	.2002	.0696	.10	.0931	.0930	1	.9789	.2208
	2	.5	.4981	.1115	.20	.1986	.1650	2	2.0024	.5826
	3	.4	.3927	.0698	.15	.1616	.2220	1.25	1.2868	.2779
	4	.3	.3018	.1076	.30	.2929	.1508	1.5	1.5611	.2905
1000	1	.2	.1989	.0562	.10	.1003	.0633	1	.9994	.1610
	2	.5	.4983	.1021	.20	.2038	.1037	2	1.9950	.4162
	3	.4	.3978	.0603	.15	.1556	.0591	1.25	1.2857	.2325
	4	.3	.2967	.0879	.30	.2969	.0878	1.5	1.5580	.2588
1200	1	.2	.1976	.0521	.10	.1005	.0496	1	1.0025	.1463
	2	.5	.4982	.0852	.20	.1999	.0998	2	1.9863	.3688
	3	.4	.3986	.0547	.15	.1546	.0677	1.25	1.2806	.1955
	4	.3	.3021	.0789	.30	.2955	.0806	1.5	1.5503	.2360
1500	1	.2	.1976	.0521	.10	.1005	.0496	1	.9976	.1274
	2	.5	.4982	.0852	.20	.1999	.0998	2	1.9987	.3171
	3	.4	.3986	.0547	.15	.1546	.0677	1.25	1.2731	.1938
	4	.3	.3021	.0789	.30	.2955	.0806	1.5	1.5558	.2111
2000	1	.2	.1993	.0401	.10	.0972	.0387	1	1.0064	.1102
	2	.5	.4984	.0668	.20	.1997	.0711	2	2.0015	.2707
	3	.4	.3981	.0422	.15	.1527	.0344	1.25	1.2850	.1710
	4	.3	.2980	.0632	.30	.2954	.0590	1.5	1.5539	.1906

YW Estimation

Table 1

2.8.3 Estimation des moindres carrés conditionnelle

Ce paragraphe est dédié à l'étude du problème d'estimation des paramètres d'un modèle (2.2.1), bilinéaire diagonal périodique, $BL_S(1, 0, 1, 1)$, via la méthode des Moindres Carrés Conditionnelles (Conditional Least Squares). Brièvement, l'estimation des paramètres sous-jacents du modèle (2.1.1), consiste en deux étapes. Dans la première, on estime le paramètre φ_t , en utilisant la méthode de Yule-Walker. Cette estimation est obtenue à partir de l'équation (4.1c), pour $h = 2$ et $t = s + \tau S$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, lorsque nous remplaçons les autocovariances théoriques par leurs estimations empiriques. En effet, nous avons :

$$\widehat{\varphi}_s = \widehat{\gamma}^{(s)}(2) / \widehat{\gamma}^{(s-1)}(1), \quad s = 1, 2, \dots, S \text{ et } \tau \in \mathbb{Z}.$$

Dans la seconde partie, nous estimons via la procédure des Moindres Carrés Conditionnelle, le paramètre β_t , tout en considérant pour l'obtention de la série résiduelle, notée \hat{v}_t , le modèle suivant :

$$\hat{v}_t = \beta_t y_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

La proposition suivante établit les estimateurs $\hat{\varphi}_t$, $\hat{\beta}_t$ et $\hat{\sigma}_t^2$ des paramètres φ_t , β_t et la variance des innovations $\sigma_{\varepsilon,t}^2$ respectivement.

Proposition 2.9.2. *Les estimateurs des Moindres Carrés Conditionnels, $\hat{\varphi}_t$, $\hat{\beta}_t$ et $\hat{\sigma}_t^2$ des paramètres φ_t , β_t et la variance des innovations $\sigma_{\varepsilon,t}^2$, $s = 1, 2, \dots, S$, sont, respectivement, donnés par :*

$$\hat{\varphi}_s = \hat{\gamma}^{(s)}(2) / \hat{\gamma}^{(s-1)}(1), \quad \hat{\beta}_s = \hat{\delta}_{12,s} / \hat{\delta}_{22,s} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_s^2 = \hat{\delta}_{11,s}, \quad s = 1, 2, \dots, S,$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{11,s} &= \frac{\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 - \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S}}{\Delta_{1,s}}, \\ \hat{\delta}_{12,s} &= \frac{(M-1) \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} - \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2}{\Delta_{1,s}}, \\ \hat{\delta}_{22,s} &= \frac{\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S}^2 \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} (\hat{v}_{s+\tau S} \hat{v}_{s-1+\tau S})}{\Delta_{2,s} - \frac{\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} (\hat{v}_{s+\tau S} \hat{v}_{s-1+\tau S})}{\Delta_{2,s}}}, \end{aligned}$$

où $\Delta_{1,s} = (M-1) \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 - \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \right)^2$,
 $\Delta_{2,s} = \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} \right)^2$,
 $\eta_t = y_t y_{t-1} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$ et $\zeta_t = y_t \varepsilon_t^2$.

Preuve. Dans la deuxième étape, nous considérons la série résiduelle obtenue par :

$$\hat{v}_t = y_t - \hat{\varphi}_t y_{t-1},$$

puis, nous considérons pour la série résiduelle \hat{v}_t , le modèle suivant :

$$\hat{v}_t = \beta_t y_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ce modèle peut être exploité, tout en utilisant le principe fondamental des Moindres Carrés Conditionnel, pour estimer les paramètres β_t et $\sigma_{\varepsilon,t}^2$. Il est facile de vérifier que l'espérance conditionnelle à l'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$, $\mathbb{E}(\hat{v}_t \hat{v}_{t-s} / t-1)$, $t \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}^*$, est donnée par :

$$\mathbb{E}(\hat{\nu}_t \hat{\nu}_{t-r} / t - 1) = \begin{cases} \sigma_{\varepsilon,t}^2 + \beta_t^2 y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2, & r = 0, \\ \beta_t \beta_{t-1} y_{t-1} y_{t-2} \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \beta_t y_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2, & r = 1, \\ 0, & r \geq 2. \end{cases}$$

En posant $\delta_{11,t} = \sigma_{\varepsilon,t}^2$, $\delta_{12,t} = \beta_t^2$, $\delta_{21,t} = \beta_t \beta_{t-1}$, $\delta_{22,t} = \beta_t$, $\eta_t = y_t y_{t-1} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$ et $\zeta_t = y_t \varepsilon_t^2$,

Cette dernière expression peut être écrite de la forme :

$$\mathbb{E}(\hat{\nu}_t \hat{\nu}_{t-r} / t - 1) = \begin{cases} \delta_{11,t} + \delta_{12,t} \zeta_{t-1} y_{t-1}, & r = 0, \\ \delta_{21,t} \eta_{t-1} + \delta_{22,t} \zeta_{t-1}, & r = 1, \\ 0, & r \geq 2. \end{cases}$$

En supposant que la taille de la série, N , est un multiple de S , notée $N = MS$ et en posant $t = s + \tau S$, les estimateurs de $\delta_{11,s}$ et $\delta_{12,s}$, peuvent être obtenus en minimisant la forme quadratique suivante :

$$Q_1 = \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=1}^{M-1} \left[\hat{\nu}_{s+\tau S}^2 - \underline{\delta}'_{1,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \right]^2 = \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=1}^{M-1} \left[\hat{\nu}_{s+\tau S}^4 - 2 \underline{\delta}'_{1,s} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \hat{\nu}_{s+\tau S}^2 + \underline{\delta}'_{1,s} \left(\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \right) \underline{\delta}'_{1,s} \right]^2,$$

où les vecteurs colonnes $\underline{\delta}_{1,s}$ et $\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}$ sont, respectivement, donnés par :

$$\underline{\delta}'_{1,s} = (\delta_{11,s}, \delta_{12,s}) \text{ et } \underline{\mathcal{Y}}'_{s,\tau} = (1, \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S}),$$

En dérivant partiellement, respectivement à $\underline{\delta}_{1,s}$ et en résolvant l'équation normale obtenue, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial \underline{\delta}_{1,s}} &= -2 \sum_{\tau=1}^{M-1} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \hat{\nu}_{s+\tau S}^2 + 2 \sum_{\tau=1}^{M-1} \left(\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Y}}'_{s,\tau} \right) \underline{\delta}_{1,s} \implies \sum_{\tau=1}^{M-1} \left(\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Y}}'_{s,\tau} \right) \underline{\delta}_{1,s} = \sum_{\tau=1}^{M-1} \underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau} \hat{\nu}_{s+\tau S}^2, \\ \begin{pmatrix} M-1 & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11,s} \\ \delta_{12,s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{\nu}_{s+\tau S}^2 \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{\nu}_{s+\tau S}^2 \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \delta_{11,s} \\ \delta_{12,s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M-1 & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{\nu}_{s+\tau S}^2 \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{\nu}_{s+\tau S}^2 \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Finalement, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \delta_{11,s} \\ \delta_{12,s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M-1 & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} M-1 & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \end{pmatrix}, \\
 &= \frac{1}{\Delta_{1,s}} \times \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 & - \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \\ - \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} & (M-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \delta_{11,s} \\ \delta_{12,s} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta_{1,s}} \times \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 \right) \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 - \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \right) \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \\ (M-1) \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} - \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \right) \sum_{\tau=1}^{M-1} \hat{v}_{s+\tau S}^2 \end{pmatrix}, \\
 \text{où } \Delta_{1,s} &= (M-1) \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 y_{s-1+\tau S}^2 - \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} y_{s-1+\tau S} \right)^2,
 \end{aligned}$$

Similairement, les estimateurs de $\delta_{21,s}$ et de $\delta_{22,s}$, peuvent être obtenus en minimisant la forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=1}^{M-1} \left[\hat{v}_{s+\tau S} \hat{v}_{s-1+\tau S} - \underline{\delta}'_{2,s} \underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} \right]^2, \\
 &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=1}^{M-1} \left[(\hat{v}_{s+\tau S} \hat{v}_{s-1+\tau S})^2 - 2 \underline{\delta}'_{2,s} \underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} (\hat{v}_{s+\tau S} \hat{v}_{s-1+\tau S}) + \underline{\delta}'_{2,s} (\underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau}) \underline{\delta}'_{2,s} \right],
 \end{aligned}$$

où les vecteurs colonnes $\underline{\delta}_{2,s}$ et $\underline{\mathcal{Y}}_{s,\tau}$ sont, respectivement, donnés par :

$$\underline{\delta}'_{2,s} = (\delta_{21,s}, \delta_{22,s}) \text{ et } \underline{\mathcal{Y}}'_{s,\tau} = (\eta_{s-1+\tau S}, \zeta_{s-1+\tau S}),$$

en dérivant partiellement, respectivement à $\underline{\delta}_{1,s}$, et en résolvant l'équation normale obtenue, nous auront :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q_2}{\partial \underline{\delta}_{2,s}} &= -2 \sum_{\tau=1}^{M-1} \underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) + 2 \sum_{\tau=1}^{M-1} (\underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Z}}'_{s,\tau}) \underline{\delta}_{2,s}, \\
 \sum_{\tau=1}^{M-1} (\underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Z}}'_{s,\tau}) \underline{\delta}_{2,s} &= \sum_{\tau=1}^{M-1} \underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}), \quad \implies \\
 \sum_{\tau=1}^{M-1} (\underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} \underline{\mathcal{Z}}'_{s,\tau}) &= \sum_{\tau=1}^{M-1} \begin{pmatrix} \eta_{s-1+\tau S} \\ \zeta_{s-1+\tau S} \end{pmatrix} (\eta_{s-1+\tau S}, \zeta_{s-1+\tau S}), \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \\
 \sum_{\tau=1}^{M-1} \underline{\mathcal{Z}}_{s,\tau} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) &= \sum_{\tau=1}^{M-1} \begin{pmatrix} \eta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \\ \zeta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{21,s} \\ \delta_{22,s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \delta_{21,s} \\ \delta_{22,s} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 & - \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} \\ - \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \\ \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \delta_{21,s} \\ \delta_{22,s} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta_{2,s}} \begin{pmatrix} \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 \right) \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \\ \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S}^2 \right) \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \\ - \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} \right) \sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \\ - \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} \right) \sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} (\hat{\nu}_{s+\tau S} \hat{\nu}_{s-1+\tau S}) \end{pmatrix}, \\
 \Delta_{2,s} &= \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \zeta_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=1}^{M-1} \eta_{s-1+\tau S} \zeta_{s-1+\tau S} \right)^2.
 \end{aligned}$$

2.8.4 Etude de simulation des estimateurs des moindres carrés conditionnelles

Dans la table 2 ci-dessous, les notations $\widehat{\varphi}_s, \widehat{\beta}_s, \widehat{\sigma}_s^2$ et $RMSE_s, s = 1, 2, \dots, S$, dénotent La Moyenne Empirique et la Racine de la Moyenne des Erreurs Carrés (Root Mean Squares Errors), pour $r = 1000$ réplifications, des estimateurs *CLS* des paramètres périodiques φ_s, β_s et σ_s^2 de période $S = 4$. et ceci pour plusieurs tailles, $N = 700, 1000, 1200, 1500$ et 2000 , des séries générées à partir d'un modèle $PBL_4(1, 0, 1, 1)$. Nous remarquons que plus la taille de la série augmente les estimateurs des paramètres approchent des vraies valeurs des paramètres et leur *RMSE* diminuent.

n	s	φ_s	$\widehat{\varphi}_s$	$RMSE$	β_s	$\widehat{\beta}_s$	$RMSE$	σ_s^2	$\widehat{\sigma}_s^2$	$RMSE$
700	1	.2	.2002	.0696	.10	.0875	.0578	1	1.0002	.1242
	2	.5	.4981	.1115	.20	.1706	.1248	2	2.0174	.2365
	3	.4	.3927	.0698	.15	.1391	.0415	1.25	1.2667	.1704
	4	.3	.3018	.1076	.30	.2825	.0789	1.5	1.5270	.2395
1000	1	.2	.1989	.0562	.10	.0878	.0470	1	1.0081	.1062
	2	.5	.4983	.1021	.20	.1762	.1031	2	2.0069	.2137
	3	.4	.3978	.0603	.15	.1450	.0326	1.25	1.2565	.1457
	4	.3	.2967	.0879	.30	.2884	.0615	1.5	1.5193	.2046
1200	1	.2	.1976	.0521	.10	.0914	.0436	1	1.0083	.1017
	2	.5	.4982	.0852	.20	.1747	.0973	2	2.0037	.1879
	3	.4	.3986	.0547	.15	.1421	.0309	1.25	1.2604	.1274
	4	.3	.3021	.0789	.30	.2903	.0589	1.5	1.5242	.1950
1500	1	.2	.1968	.0453	.10	.0904	.0375	1	1.0040	.0883
	2	.5	.4982	.0766	.20	.1815	.0839	2	2.0024	.1637
	3	.4	.3997	.0489	.15	.1450	.0289	1.25	1.2566	.1222
	4	.3	.2996	.0703	.30	.2920	.0487	1.5	1.5145	.1702
2000	1	.2	.1993	.0401	.10	.0955	.0309	1	1.0010	.0712
	2	.5	.4984	.0668	.20	.1865	.0707	2	2.0011	.1517
	3	.4	.3981	.0422	.15	.1462	.0228	1.25	1.2543	.1004
	4	.3	.2980	.0632	.30	.2940	.0432	1.5	1.5098	.1432

CLS Estimation

Table 2

2.8.5 Estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelle

La proposition suivante établit l'estimateur du Maximum de vraisemblance Conditionnelle (Conditional Likelihood estimations (*CMLE*)), $\widehat{\varphi}_t$, $\widehat{\beta}_t$ et $\widehat{\sigma}_t^2$ des paramètres φ_t , β_t et de la variance des innovations $\sigma_{\varepsilon,t}^2$, respectivement.

Proposition 2.9.3. *Les estimateurs du Maximum de vraisemblance Conditionnels, $\widehat{\theta}'_s = (\widehat{\varphi}_s, \widehat{\beta}_s)$ et $\widehat{\sigma}_s^2$ des paramètres $\theta'_s = (\varphi_s, \beta_s)$ et $\sigma_{s,s}^2 = 1, 2, \dots, S$, d'un modèle (2.2.1) bilinéaire diagonal périodique, $BL_S(1, 0, 1, 1)$, sont, respectivement, donnés par :*

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_s \\ \widehat{\beta}_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_s} \times \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} y_{s+\tau S} - \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s-1+\tau S} y_{s+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s-1+\tau S} y_{s+\tau S} - \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} y_{s+\tau S} \end{pmatrix} \quad (2.9.5a)$$

$$\text{où } \Delta_s = \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right)^2,$$

$$\widehat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \left(y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \widehat{\theta}_s \right)^2,$$

$$\text{où } \underline{\mathcal{Y}}_s = \begin{pmatrix} y_{s-1} & y_{s-1} \varepsilon_{s-1} \\ y_{s-1+S} & y_{s-1+2S} \varepsilon_{s-1+2S} \\ \vdots & \vdots \\ y_{s-1+(N-2)S} & y_{s-1+(N-2)S} \varepsilon_{s-1+(N-2)S} \\ y_{s-1+(N-1)S} & y_{s-1+(N-1)S} \varepsilon_{s-1+(N-1)S} \end{pmatrix} \quad (2.9.5b)$$

Preuve. Le logarithme de la fonction de vraisemblance conditionnelle est donné par

$$l_n(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = n \lg \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \lg(\sigma_{\varepsilon,t}^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \underline{\mathcal{Y}}'_t \theta_t)^2}{\sigma_{\varepsilon,t}^2},$$

$$l_n(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = n \lg \sqrt{2\pi} - \frac{N}{2} \lg(\sigma_{\varepsilon,s}^2) - \frac{1}{2\sigma_s^2} \sum_{s=1}^S (\underline{Y}'_s \underline{Y}_s - 2\theta'_s \underline{\mathcal{Y}}'_s \underline{Y}_s + \theta'_s \underline{\mathcal{Y}}'_s \underline{\mathcal{Y}}_s \theta_s),$$

où $\underline{Y}_s = (y_s, y_s, \dots, y_{s+(N-2)S}, y_{s+(N-1)S})'$ et la matrice $\underline{\mathcal{Y}}_s$ est donnée dans la formule

(2.9.5b). Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{\underline{\theta}}_s &= (\underline{y}'_s \underline{y}_s)^{-1} \underline{y}'_s \underline{Y}_s, \\ \widehat{\sigma}_s^2 &= \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \left(y_{s+\tau S} - \underline{y}'_{s+\tau S} \widehat{\underline{\theta}}_s \right)^2 = \frac{1}{N} \underline{Y}'_s \left(I - \underline{y}_s (\underline{y}'_s \underline{y}_s)^{-1} \underline{y}'_s \right) \underline{Y}_s.\end{aligned}$$

2.9 Propriétés distributionnelles

Il est facile de vérifier, sous l'hypothèse de la Normalité des innovations, que :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_s \\ \widehat{\beta}_s \end{pmatrix} \Big| \mathcal{F}_{t-1} &\mapsto N \left(\begin{pmatrix} \varphi_s \\ \beta_s \end{pmatrix}, \frac{1}{\Delta_s} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \sigma_s^2 \right), \\ \frac{N \widehat{\sigma}_s^2}{\sigma_s^2} \Big| \mathcal{F}_{t-1} &\mapsto \chi_{N-2},\end{aligned}$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_s \Big| \mathcal{F}_{t-1} &\mapsto N \left(\varphi_s, \frac{1}{\Delta_s} \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \sigma_s^2 \right), \\ \widehat{\beta}_s \Big| \mathcal{F}_{t-1} &\mapsto N \left(\beta_s, \frac{1}{\Delta_s} \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) \sigma_s^2 \right), \\ \frac{N \widehat{\sigma}_s^2}{\sigma_s^2} \Big| \mathcal{F}_{t-1} &\mapsto \chi_{N-2}, \\ \text{où } \Delta_s &= \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right)^2, \\ \text{Var} \left(\widehat{\underline{\theta}}_s \Big| \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \frac{1}{\Delta_s} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 & - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) \\ - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) & \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \end{pmatrix} \sigma_s^2,\end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\text{Var} \left(\widehat{\varphi}_s \Big| \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \widehat{\sigma}_s^2, \\ \text{Var} \left(\widehat{\beta}_s \Big| \mathcal{F}_{t-1} \right) &\mapsto \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) \widehat{\sigma}_s^2, \\ \frac{N \widehat{\sigma}_s^2}{\sigma_s^2} \Big| \mathcal{F}_{t-1} &\mapsto \chi_{N-2},\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E} \left(\hat{\underline{\theta}}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) = \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} (\underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S}) \right]^{-1} \times$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \beta_s \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{E} \left(\hat{\underline{\theta}}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) = \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \beta_s \end{pmatrix},$$

$$\sum_{\tau=0}^{N-1} \begin{pmatrix} y_{s-1+\tau S}^2 & y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \sigma_s^2$$

$$\underline{\mathcal{Y}}'_t = (y_{t-1}, y_{t-1} \varepsilon_{t-1})$$

$$\implies \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S} = \begin{pmatrix} y_{s-1+\tau S} \\ y_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s-1+\tau S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1}^2 & y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1} \\ y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1} & y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \end{pmatrix} \sigma_s^2,$$

$$\hat{\underline{\theta}}_s = \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} (\underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S}) \right]^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} \underline{\mathcal{Y}}'_s \underline{Y}_s,$$

$$\text{Var} \left(\hat{\underline{\theta}}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right)$$

$$= \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} (\underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S}) \right]^{-1} \text{Var} \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S} \varepsilon_{s+\tau S} | \mathcal{F}_{t-1} \right) \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} (\underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S}) \right]^{-1},$$

$$\text{Var} \left(\hat{\underline{\theta}}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) = \left(\begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \sigma_s^2,$$

$$\left(\begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Delta_s} \begin{pmatrix} \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) \\ - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) & \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \end{pmatrix}, \\
 &= \frac{1}{\Delta_s} \begin{pmatrix} \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) \\ - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) & \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \end{pmatrix} \sigma_s^2 \\
 \Delta_s &= \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right)^2, \\
 \text{Var} \left(\hat{\theta}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \begin{pmatrix} \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) & \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) \\ \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) & \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) \end{pmatrix}^{-1} \sigma_s^2, \\
 \text{Var} \left(\hat{\theta}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \frac{1}{\Delta_s} \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 & - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) \\ - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) & \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \end{pmatrix} \sigma_s^2, \\
 \Delta_s &= \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left(\hat{\varphi}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \frac{\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2}{\Delta_s} \\
 &= \frac{\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2}{\left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right)^2}, \\
 \text{Var} \left(\hat{\beta}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \frac{\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2}{\Delta_s} \\
 &= \frac{\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2}{\left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right)^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\widehat{\varphi}_s, \widehat{\beta}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \frac{- \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}}{\Delta_s} \\ &= - \frac{\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}}{\left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \right) \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) - \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right)^2}, \end{aligned}$$

$$\sum_{\tau=0}^{N-1} \left(\underline{y}'_{s+\tau S} \underline{y}_{s+\tau S} \right) = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\widehat{\underline{\theta}}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \sigma_s^2, \\ &= \text{Var} \left(\sum_{\tau=0}^{N-1} \begin{pmatrix} y_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s+\tau S} \\ y_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s+\tau S} \end{pmatrix} | \mathcal{F}_{t-1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\widehat{\underline{\theta}}_s | \mathcal{F}_{t-1} \right) &= \text{Var} \left(\begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s-1+\tau S} \varepsilon_{s+\tau S} \end{pmatrix} | \mathcal{F}_{t-1} \right), \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \sigma_s^2, \end{aligned}$$

$$\text{Var} \left(\widehat{\underline{\theta}}_s \right) = N \begin{pmatrix} \mathbb{E} \left(y_{s-1+\tau S}^2 \right) & \mathbb{E} \left(y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) \\ \mathbb{E} \left(y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \right) & \mathbb{E} \left(y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \right) \end{pmatrix} \sigma_s^2,$$

$$\underline{\widehat{b}} \sim N \left(\underline{b}, (X' X)^{-1} \sigma_{\varepsilon,t}^2 \right)$$

$$\widehat{\underline{\theta}}_s | \mathcal{F}_{t-1} \mapsto N \left(\begin{pmatrix} \varphi_s \\ \beta_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} \\ \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S} & \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s-1+\tau S}^2 \varepsilon_{s-1+\tau S}^2 \end{pmatrix} \sigma_s^2 \right)$$

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\theta}_s)^2 \implies \widehat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \widehat{\underline{\theta}}_s)^2,$$

$$\implies \frac{\widehat{\sigma}_s^2}{\sigma_s^2} = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \left(\frac{y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \widehat{\underline{\theta}}_s}{\sigma_s} \right)^2,$$

$$\implies \sigma_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\theta}_s)^2,$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\theta}_s)' (y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\theta}_s),$$

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \underline{\theta}'_s \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S}) (y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\theta}_s),$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \underline{\theta}'_s \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S}) (y_{s+\tau S} - \underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\theta}_s),$$

$$\widehat{\underline{\theta}}_s = \left[\sum_{\tau=0}^{N-1} (\underline{\mathcal{Y}}'_{s+\tau S} \underline{\mathcal{Y}}_{s+\tau S}) \right]^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} \underline{\mathcal{Y}}'_s \underline{Y}_s,$$

2.10 Maximum de vraisemblance conditionnelle : Etude de simulation

Dans la table 3 ci-dessous, les notations $\widehat{\varphi}_s, \widehat{\beta}_s, \widehat{\sigma}_s^2$ et $RMSE_s, s = 1, 2, \dots, S$, dénotent La Moyenne Empirique et la Racine de la Moyenne des Erreurs Carrés (Root Mean Squares Errors), pour $r = 1000$ réplifications, des estimateurs *CML* des paramètres périodiques φ_s, β_s et σ_s^2 de période $S = 4$. et ceci pour plusieurs tailles, $N = 700, 1000, 1200, 1500$ et 2000 , des séries générées à partir d'un modèle $PBL_4(1, 0, 1, 1)$. Nous remarquons que plus la taille de la série augmente les estimateurs des paramètres approchent des vraies valeurs des paramètres et leur *RMSE* diminuent.

n	s	φ_s	$\widehat{\varphi}_s$	$RMSE_s$	β_s	$\widehat{\beta}_s$	$RMSE_s$	σ_s^2	$\widehat{\sigma}_s^2$	$RMSE_s$
700	1	.2	.2000	.0570	.10	.0975	.0302	1	.0988	.1056
	2	.5	.4982	.0992	.20	.1959	.0661	2	1.9993	.2042
	3	.4	.3952	.0600	.15	.1494	.0247	1.25	1.2418	.1309
	4	.3	.2947	.0860	.30	.2969	.0462	1.5	1.4920	.1582
1000	1	.2	.2003	.0465	.10	.0978	.0255	1	.9970	.0907
	2	.5	.4964	.0889	.20	.2012	.0510	2	1.9888	.1846
	3	.4	.3961	.0503	.15	.1503	.0204	1.25	1.2443	.1143
	4	.3	.2978	.0731	.30	.2965	.0375	1.5	1.4978	.1305
1200	1	.2	.1991	.0422	.10	.1003	.0215	1	.9979	.0815
	2	.5	.4967	.0757	.20	.1981	.0509	2	1.9869	.1610
	3	.4	.3983	.0470	.15	.1485	.0191	1.25	1.2438	.0997
	4	.3	.2965	.0617	.30	.2998	.0324	1.5	1.5018	.1191
1500	1	.2	.1975	.0388	.10	.0987	.0198	1	.9950	.0756
	2	.5	.4970	.0707	.20	.1988	.0440	2	1.9920	.1442
	3	.4	.3991	.0416	.15	.1495	.0172	1.25	1.2462	.0929
	4	.3	.2980	.0594	.30	.2985	.0300	1.5	1.5006	.1122
2000	1	.2	.1991	.0333	.10	.0999	.0183	1	.9974	.0617
	2	.5	.4999	.0590	.20	.1996	.0368	2	1.9943	.1341
	3	.4	.3981	.0366	.15	.1492	.0147	1.25	1.2464	.0789
	4	.3	.2980	.0511	.30	.2986	.0259	1.5	1.4999	.0949

CML Estimation

Table 3

Deuxième partie

**MODELES PERIODIQUES Á
VALEURS ENTIÈRES**

INTRODUCTION GENERALE

La quasi totalité de la bibliographie existante sur l'étude des séries chronologiques à valeurs entières positives concerne les modèles de séries chronologiques, à valeurs entières positives, à coefficients invariants dans le temps, qui font intervenir un opérateur d'amincissement (thinning operator) dont l'opérateur de Steutel-van Harn (1979) est le plus fréquemment utilisé par les analystes des séries temporelles, à valeurs entières positives en particulier les modèles linéaires : les modèles autorégressifs, d'ordre p , $INAR(p)$, (voir Al-Osh and Aly (1992), Al-Osh and Alzaid (1987), Al-Osh and Alzaid (1990), Bourguignon (2016), Doukhan *et al* (2012), Fokianos *et al* (2009), Freeland and McCabe (2004), (2005), Silva (2015), ...). En effet, un processus, à valeurs entières positives $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit un processus $INAR(p)$ s'il satisfait l'équation linéaire stochastique suivante :

$$y_t = \varphi_1 \circ y_{t-1} + \varphi_2 \circ y_{t-2} + \dots + \varphi_p \circ y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où le processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées, à valeurs entières positives, avec une moyenne μ_ε et une variance finies σ_ε^2 et où " \circ " est un opérateur d'amincissement dont le fréquemment utilisé est celui de *Steutel-Van Harn*, Steutel-van Harn (1979), qui est défini, pour le processus stochastique entier $y_{i,t-1}$, et n'importe quelle suite de variables aléatoires non corrélée à valeurs entières non négatives $\{Y_{j,t}, j \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$ où $P(Y_{j,t} = 1) = 1 - P(Y_{j,t} = 0) = \varphi_j \in [0, 1]$ par

$$\varphi_i \circ y_{t-i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{y_{t-i}} Y_{j,t}, & \text{si } y_{t-i} > 0, \\ 0, & \text{si } y_{t-i} \leq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Un processus, à valeurs entières positives $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus moyen mobile, d'ordre q , $INMA(q)$ (voir : Al-Osh and Alzaid (1991), Al-Osh and Alzaid (1988), ...) s'il est donné comme suit :

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \circ \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \circ \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_p \circ \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où le processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées, à valeurs entières positives, avec une moyenne μ_ε et une variance finies σ_ε^2 et où " \circ " est un opérateur d'amincissement dont le fréquemment utilisé est celui de *Steutel-Van Harn*, Steutel-van Harn (1979), qui est définie, pour le processus stochastique entier $y_{i,t-1}$, et n'importe quelle suite de variables aléatoires non corrélée à valeurs entières non négatives $\{Y_{j,t}, j \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$ où $P(Y_{j,t} = 1) = 1 - P(Y_{j,t} = 0) = \varphi_j \in [0, 1]$ par

$$\theta_i \circ \varepsilon_{t-i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\varepsilon_{t-i}} Y_{j,t}, & \text{si } \varepsilon_{t-i} > 0, \\ 0, & \text{si } \varepsilon_{t-i} \leq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Les modèles précédents sont des modèles particuliers de la classe de modèles autorégressifs moyen mobile, à coefficients invariants dans le temps, d'ordre p et q , à valeurs entières positives, $INARMA(p, q)$, (voir : McKenzie (1986), (1988), Weib (2008), Al-Osh and Alzaid (1993),). Cette dernière classe de modèles, qui fait aussi intervenir des opérateurs d'amincissement (thinning operators) dont les opérateurs de Steutel-van Harn (1979) sont les plus fréquemment utilisés par les analystes des séries temporelles, à valeurs entières positives. En effet, un processus, à valeurs entières positives $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus autoregressif moyen mobile, d'ordre p et q , $INARMA(p, q)$ (voir : négatives. enand Alzaid (1993), Benjamin *et al* 2003, ...) s'il est donné comme suit :

$$y_t = \varphi_1 \circ y_{t-1} + \varphi_2 \circ y_{t-2} + \dots + \varphi_p \circ y_{t-p} \\ + \varepsilon_t + \theta_1 \circ \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \circ \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_p \circ \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où le processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées, à valeurs entières positives, avec une moyenne μ_ε et une variance finies σ_ε^2 et où " \circ " est un opérateur d'amincissement dont le fréquemment utilisé est celui de *Steutel-Van Harn*, Steutel-van Harn (1979), qui est définie, pour le processus stochastique entier $y_{i,t-1}$, et n'importe quelles suites de variables aléatoires non corrélées à valeurs entières non négatives et

non corrélées entre elles $\{Y_{j,t}, j \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{Z_{k,t}, j \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$ où

$$\begin{aligned} P(Y_{j,t} = 1) &= 1 - P(Y_{j,t} = 0) = \varphi_j \in [0, 1], \\ P(Z_{k,t} = 1) &= 1 - P(Z_{k,t} = 0) = \theta_k \in [0, 1], \end{aligned}$$

où $P(Y_{j,t} = 1) = 1 - P(Y_{j,t} = 0) = \varphi_j \in [0, 1]$ par

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ y_{t-i} &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{y_{t-i}} Y_{j,t}, & \text{si } y_{t-i} > 0, \\ 0, & \text{si } y_{t-i} \leq 0, \end{cases} & i = 1, 2, \dots, p, \\ \theta_j \circ \varepsilon_{t-j} &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{\varepsilon_{t-j}} Z_{k,t}, & \text{si } \varepsilon_{t-j} > 0, \\ 0, & \text{si } \varepsilon_{t-j} \leq 0, \end{cases} & j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

Parmi les modèles de séries chronologiques, à valeurs entières, non-linéaires qui font aussi intervenir un opérateur d'amincissement (thinning operator) dont le plus utilisé est aussi celui de Steutel-van Harn (1979), nous citons le modèle de séries chronologiques Diagonal Bilinéaire, à valeurs entières, de coefficients invariant dans le temps, $INBL(1, 0, 1, 1)$ qui a été étudié par Doukhan *et al* (2006).

Un processus stochastique, à valeurs entières, $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ du second ordre, est dit satisfaisant un modèle Diagonal Bilinéaire, à valeurs entières, à coefficients invariant dans le temps, $INBL(1, 0, 1, 1)$, s'il est une solution de l'équation linéaire au différence stochastique suivante :

$$y_t = \varphi \circ y_{t-1} + \beta \circ (y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

où le processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées à valeurs entières positives, avec une μ_ε et une variance finie σ_ε^2 et où " \circ " est l'opérateur d'amincissement qui souvent de *Steutel-Van Harn* (1979), qui est définie, pour le processus stochastique entier y_{t-1} et n'importe quelle suite de variables aléatoires non corrélée à valeurs entières non négatives $\{Y_{i,t}, i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$ où $P(Y_{i,t} = 1) = 1 - P(Y_{i,t} = 0) = \varphi \in [0, 1]$ par :

$$\varphi \circ y_{t-1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{y_{t-1}} Y_{i,t}, & \text{si } y_{t-1} > 0, \\ 0, & \text{si } y_{t-1} \leq 0, \end{cases}$$

de même, $\beta_t \circ$ représente l'opérateur d'amincissement de *Steutel-Van Harn* qui est défini, pour le processus stochastique à valeurs entières $y_{t-1} \varepsilon_{t-1}$ et n'importe quelle suite de va-

riables aléatoires non corrélée à valeurs entières non négatives $\{Z_{j,t}, j \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$ tel que $P(Z_{j,t} = 1) = 1 - P(Z_{j,t} = 0) = \beta \in [0, 1]$, par :

$$\beta \circ (y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{y_{t-1} \varepsilon_{t-1}} Z_{i,t}, & \text{si } y_{t-1} \varepsilon_{t-1} > 0, \\ 0, & \text{si } y_{t-1} \varepsilon_{t-1} \leq 0, \end{cases}$$

La modélisation des séries temporelles à valeurs entières a connu à nos jours le développement de quelques modèles non-linéaires, à valeurs entières, de type de régression qui ne fons pas appelle à l'opérateur d'amincissement. Parmi ces modèles nous présentons le modèle Autoregressif Conditionnelment Hétéroscédastique Généralisé à valeurs entières, d'ordres p et q , noté *INGARCH* (p, q), (Chen et al .(2016), Zhu,.F.(2012) ,..).

Un processus stochastique à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit satisfaire un modèle Autoregressif Conditionnelment Hétéroscédastique Généralisé à valeurs entières, d'ordres 1 et 1, noté *INGARCH* (1, 1), s'il est donné par :

$$\begin{aligned} y_t / \mathcal{F}_{t-1} &\rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_t), \\ \lambda_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \beta \lambda_{t-1}. \end{aligned}$$

où \mathcal{F}_t représente la σ -algèbre engendrée par y_0, y_1, \dots, y_t . Ce modèle a été étudié par Ferland *et al* (2006).

Chapitre 3

Modèle *INGARCH* (1, 1) Poissonnien périodique : Structure et estimation

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous étudions quelques propriétés probabilistes et statistiques du modèle *GARCH* périodique à valeurs entières. Nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes de premier et de second ordre, de la stationnarité périodique, et nous donnons, sous ces conditions, les formes explicites de la moyenne et du moment d'ordre deux.

3.2 Notations, Définitions et hypothèses

Un processus stochastique à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit satisfaire un modèle Autoregressif Conditionnel Hétéroscédastique Généralisé à valeurs entières, d'ordres q et p , noté *INGARCH* (q, p), s'il est donné par :

$$\begin{aligned} y_t / \mathcal{F}_{t-1} &\rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_t), \\ \lambda_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j \lambda_{t-j}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

On dit qu'un processus à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfait un modèle Autoregressif Conditionnel Hétéroscédastique Généralisé périodique, de période S , d'ordres q et p , noté *PINGARCH_S* (q, p), s'il est donné par :

$$\begin{aligned} y_t / \mathcal{F}_{t-1} &\rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_t), \\ \lambda_t &= \alpha_{0,t} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t} y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_{j,t} \lambda_{t-j}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

où \mathcal{F}_t représente la σ -algèbre engendrée par y_0, y_1, \dots, y_t . Les paramètres $\alpha_{i,t}$, $i = 0, 1, \dots, q$ et $\beta_{j,t}$, $j = 1, \dots, p$, sont périodiques en t , de S , i.e., $\alpha_{i,t+rS} = \alpha_{i,t}$ et $\beta_{j,t+rS} = \beta_{j,t}$, $t, r \in \mathbb{Z}$. Afin d'éliminer la possibilité d'avoir une moyenne conditionnelle nulle ou négative, nous imposons les conditions suivantes sur les paramètres : $\alpha_{0,t} > 0$, et $\alpha_{i,t} \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ et $\beta_{j,t} \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, $t \in \mathbb{Z}$. Particulièrement, on a, pour $p = q = 1$, le modèle périodique, *PINGARCH_S* (1, 1), qui est l'objectif de notre étude :

$$\begin{aligned} y_t / \mathcal{F}_{t-1} &\rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_t), \\ \lambda_t &= \alpha_{0,t} + \alpha_{1,t} y_{t-1} + \beta_t \lambda_{t-1}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

où les paramètres $\alpha_{i,t}$, $i = 0, 1$ et β_t , sont périodiques dans t , de période S , i.e., $\alpha_{i,t+rS} = \alpha_{i,t}$, $i = 0, 1$ et $\beta_{t+rS} = \beta_t$, $t, r \in \mathbb{Z}$. De plus, ces paramètres sont tels que : $\alpha_{0,t} > 0$, $\alpha_{1,t} \geq 0$ et $\beta_t \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Posons $t = s + \tau S$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\forall \tau \in \mathbb{Z}$, le dernier modèle peut être réécrit sous la forme équivalente suivante

$$\begin{aligned} y_{s+\tau S} / \mathcal{F}_{s+\tau S-1} &\rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_{s+\tau S}), \\ \lambda_{s+\tau S} &= \alpha_{0,s} + \alpha_{1,s} y_{s-1+\tau S} + \beta_s \lambda_{s-1+\tau S}. \end{aligned} \quad (3.2.3a)$$

Ce modèle est une extension du modèle non périodique *INGARCH* (1, 1) donnée par (3.2.4) étudié par Ferland *et al* (2006) au cas périodique :

$$y_t / \mathcal{F}_{t-1} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_t) \quad \text{où } \lambda_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \beta \lambda_{t-1}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.4)$$

3.3 Conditions de stationnarité

Les modèles de séries chronologiques (linéaire, non-linéaire) avec des coefficients périodiques ont reçu, dans ces dernières décennies, un intérêt considérable. En effet, beaucoup de problèmes (l'identification, l'estimation, stationnarité périodique, inversibilité...) liés à ces modèles périodiques ont été intensivement étudiés par plusieurs auteurs (par exemple, Pagano, 1978 ; Tiao et Grupe, 1980 ; Vecchia, 1985 ; Adams et Goodwin 1995 ; Basawa et Lund, 2001 ; Franses et Paap, 2004 ; et autres). Cette section est consacrée à l'établissement des deux conditions de stationnarité périodiques, à savoir la condition de stationnarité périodique en moyenne et la condition de stationnarité périodique au second ordre. Ainsi, nous fournissons les conditions, sur les paramètres du modèle, pour l'existence et pour que ces moments soient finis. L'existence d'un processus strictement corrélé périodique peut être prouvée en adoptant la démonstration par construction de Ferland *et al* (2006).

3.3.1 Stationnarité périodique en moyenne

La proposition suivante établit la condition nécessaire et suffisante pour que le processus à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant (3.2.3) soit stable par rapport au moment d'ordre un. Aussi, nous donnons dans cette proposition la forme explicite du moment d'ordre un sous la condition obtenue.

Proposition 3.3.1.(Bentarzi and Bentarzi (2017a)) *Le processus périodiquement corrélé à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfaisant le modèle INGARCH (1, 1) périodique donné par (3.2.3), est périodiquement stationnaire en moyenne, si et seulement si,*

$$\prod_{i=1}^S (\alpha_{1,i} + \beta_i) < 1. \quad (3.3.1a)$$

De plus, la forme explicite de la moyenne $E(y_s) = \mu_{Y,s}$, $s = 1, 2, \dots, S$, d'un tel processus est, sous cette condition, donnée par :

$$\mu_{Y,s} = \left(1 - \prod_{i=1}^S (\alpha_{1,i} + \beta_i)\right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j (\alpha_{1,i} + \beta_i)\right) \alpha_{0,s-j}, \quad (3.3.1b)$$

avec la convention $\prod_{i=1}^j x_i = 1$ si $j < 1$.

Preuve. La moyenne non-conditionnelle, $\mu_{Y,t} = \mathbb{E}(y_t)$, du processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par

$$\mu_{Y,t} = \psi_t \mu_{Y,t-1} + \alpha_{0,t},$$

où $\psi_t = \alpha_{1,t} + \beta_t$. Par itérations, nous obtenons

$$\mu_{Y,t} = \left(\prod_{i=1}^m \psi_{t-i+1} \right) \mu_{Y,t-m} + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{t-i+1} \right) \alpha_{0,t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

remplaçons m par t , en posant $t = s + \tau S$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mu_{Y,s,\tau} &= \sum_{j=1}^{s+\tau S} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1+\tau S} \right) \alpha_{0,s-j+1+\tau S} + \left(\prod_{i=1}^{s+\tau S} \psi_{s-i+1+\tau S} \right) \mu_{Y,0}(y_0, \lambda_0), \\ &= \sum_{j=1}^{\tau S} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1} \right) \alpha_{0,s-j+1} + \sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{j-1+\tau S} \psi_{s-i+1} \right) \alpha_{0,s-j+1} + \left(\prod_{i=1}^{s+\tau S} \psi_{s-i+1} \right) \mu_{Y,0}(y_0, \lambda_0), \\ &= \sum_{k=0}^{\tau-1} \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1} \right)^\tau \sum_{\nu=1}^S \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \psi_{s-i+1} \right) \alpha_{0,s-\nu+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1} \right)^\tau \sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1} \right) \alpha_{0,s-j+1} + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1} \right)^\tau \left(\prod_{i=1}^s \psi_{s-i+1} \right) \mu_{Y,0}(y_0, \lambda_0), \\ &= \frac{1 - \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1} \right)^\tau}{1 - \prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}} \sum_{\nu=1}^S \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \psi_{s-i+1} \right) \alpha_{0,s-\nu+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1} \right)^\tau \left[\sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1} \right) \alpha_{0,s-j+1} + \left(\prod_{i=1}^s \psi_{s-i+1} \right) \mu_{Y,0}(y_0, \lambda_0) \right], \end{aligned}$$

posons $t \rightarrow \infty$, (d'où $\tau \rightarrow \infty$), alors $\mu_{Y,s,\tau}$, $s = 1, 2, \dots, S$, converge, quand $\tau \rightarrow \infty$, si et seulement si $\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1} < 1$ ou d'une façon équivalente $\prod_{i=1}^S \psi_i < 1$, vers

$$\frac{\sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{s-i+1} \right) \alpha_{0,s-j}}{1 - \prod_{i=1}^S \psi_i}.$$

Dans le cas de modèle à coefficients invariants dans le temps, i.e. $S = 1$, les résultats de cette proposition peuvent être représentés par le corollaire suivant qui donne les mêmes résultats obtenus par Ferland *et al* en (2006) dans leur *Proposition 7*.

Corollaire 3.3.1. *Le processus à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfaisant le modèle classique INGARCH (1,1) donné par (3.2.4), est stationnaire en moyenne si et seulement si $(\alpha_1 + \beta) < 1$. De plus, la forme explicite de la moyenne $\mathbb{E}(y_t) = \mu_Y$ d'un tel processus est, sous cette condition, donnée par : $\mu_Y = \alpha_0 (1 - (\alpha_1 + \beta))^{-1}$.*

3.3.2 Stationnarité périodique de second ordre

La proposition suivante établit une condition nécessaire et suffisante pour que le processus à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant (3.2.3) soit stationnaire, par rapport au moment d'ordre deux. La forme explicite de ce moment est obtenue sous cette condition.

Proposition 3.3.2. (Bentarzi and Bentarzi (2017a)) *Le processus à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant le modèle PINGARCH (1, 1) donné par (3.2.3) est périodiquement stationnaire au second ordre si et seulement si*

$$\prod_{i=1}^S (\alpha_{1,i} + \beta_i) < 1. \quad (3.3.2a)$$

De plus, la forme explicite de la variance $\text{Var}(y_s) = \gamma_Y^{(s)}(0)$, $s = 1, 2, \dots, S$ d'un tel processus et la variance $\text{Var}(\lambda_s) = \gamma_\lambda^{(s)}(0)$ sont, sous cette condition, données par :

$$\gamma_Y^{(s)}(0) = \left(1 - \prod_{i=1}^S \psi_s^2\right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{s-i+1}^2\right) F_{s-j}, \quad (3.3.2b)$$

$$\gamma_\lambda^{(s)}(0) = \left(1 - \prod_{i=1}^S \psi_s^2\right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{s-i+1}^2\right) F_{s-j} - \mu_{Y,s}, \quad (3.3.2c)$$

où $F_s = \mu_{Y,s} - \psi_s^2 \mu_{Y,s-1} + \alpha_{1,s}^2 \mu_{Y,s-1}$, $\psi_s = \alpha_{1,s} + \beta_s$ et $\mu_{Y,s}$ est donné dans Proposition

3.3.1, avec la convention $\prod_{i=1}^j x_i = 1$ si $j < 1$.

REMARQUE 3.3.1. *Il est bon de noter que la condition obtenue (3.3.2a) est la même que celle donnée par (3.3.1a) pour l'existence du moment d'ordre un. En effet cette condition assure, comme nous le verrons ultérieurement, l'existence de tous les moments d'ordres supérieurs. Ce fait a été prouvé, par Ferland et al (2006), dans le modèle classique INGARCH (1, 1).*

Preuve. Le moment d'ordre deux conditionnel du processus y_t est donné par

$$\mathbb{E}(y_t^2) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})] = \mathbb{E}(\lambda_t^2) + \mathbb{E}(\lambda_t), \quad (3.3.3)$$

ou équivalamment, $\gamma_Y^{(t)}(0) = \gamma_\lambda^{(t)}(0) + \mathbb{E}(\lambda_t)$. La moyenne $\mathbb{E}(\lambda_t)$ a été calculée précédemment.

Donc, nous devons calculer $\mathbb{E}(\lambda_t^2)$:

$$\mathbb{E}(\lambda_t^2) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\lambda_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})] = \psi_t^2 \mathbb{E}(\lambda_{t-1}^2) + \alpha_{0,t}^2 + (\alpha_{1,t}^2 + 2\alpha_{0,t} \psi_t) \mathbb{E}(\lambda_{t-1}),$$

ou équivalamment

$$\gamma_\lambda^{(t)}(0) = \psi_t^2 \gamma_\lambda^{(t-1)}(0) + (\alpha_{0,t} + \psi_t \mu_{\lambda,t-1})^2 + \alpha_{1,t}^2 \mu_{\lambda,t-1} - \mu_{\lambda,t}^2.$$

En utilisant (3.2.3), sachant que $\mu_{Y,t} = \mu_{\lambda,t}$ et $\mu_{Y,t} = \alpha_{0,t} + \psi_t \mu_{Y,t-1}$, nous avons

$$\gamma_Y^{(t)}(0) = \psi_t^2 \gamma_Y^{(t-1)}(0) + F_t,$$

où $\psi_t = \alpha_{1,t} + \beta_t$ et $F_t = \mu_{Y,t} - \psi_t^2 \mu_{Y,t-1} + \alpha_{1,t}^2 \mu_{Y,t-1}$. Par itération, nous obtenons

$$\gamma_Y^{(t)}(0) = \left(\prod_{i=1}^m \psi_{t-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(t-m)}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{t-i+1}^2 \right) F_{t-j}.$$

remplaçons m par t et posons $t = s + \tau S$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma_Y^{(t)}(0) &= \left(\prod_{i=1}^t \psi_{t-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(t-m)}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{t-i+1}^2 \right) F_{t-j}, \\ \gamma_Y^{(t)}(0) &= \left(\prod_{i=1}^t \psi_{t-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(t-t)}(0) + \sum_{j=1}^t \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{t-i+1}^2 \right) F_{t-j+1}, \end{aligned}$$

alors nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_Y^{(t)}(0) &= \left(\prod_{i=1}^t \psi_{t-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(t-m)}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{t-i+1}^2 \right) F_{t-j}, \\ \gamma_Y^{(t)}(0) &= \left(\prod_{i=1}^t \psi_{t-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(t-t)}(0) + \sum_{j=1}^t \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{t-i+1}^2 \right) F_{t-j+1}, \\ \gamma_Y^{(s+\tau S)}(0) &= \sum_{j=1}^{s+\tau S} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1}^2 \right) F_{s-j+1+\tau S} + \left(\prod_{i=1}^{s+\tau S} \psi_{s-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(0)}(0), \\ \gamma_Y^{(s+\tau S)}(0) &= \sum_{j=1}^{\tau S} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1}^2 \right) F_{s-j+1+\tau S} + \sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{j-1+\tau S} \psi_{s-i+1}^2 \right) F_{s-j+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2 \right)^\tau \left(\prod_{i=1}^s \psi_{s-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(0)}(0), \\ \gamma_Y^{(s+\tau S)}(0) &= \sum_{j=1}^{\tau S} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1}^2 \right) F_{s-j+1+\tau S} + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2 \right)^\tau \sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1}^2 \right) F_{s-j+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2 \right)^\tau \left(\prod_{i=1}^s \psi_{s-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(0)}(0), \\ &= \sum_{k=0}^{\tau-1} \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2 \right)^k \sum_{i=1}^S \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \psi_{s-i+1} \right) F_{s-j+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2 \right)^\tau \sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1}^2 \right) F_{s-j+1} + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2 \right)^\tau \left(\prod_{i=1}^s \psi_{s-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(0)}(0), \end{aligned}$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_Y^{(s+\tau S)}(0) &= \frac{1 - \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2\right)^\tau}{1 - \prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2} \sum_{i=1}^S \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \psi_{s-i+1}\right) F_{s-j+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2\right)^\tau \left[\sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1}^2\right) F_{s-j+1} + \left(\prod_{i=1}^s \psi_{s-i+1}^2\right) \right] \gamma_Y^{(0)}(0), \end{aligned}$$

où $\psi_s = \alpha_{1,s} + \beta_{s+\tau S}$, $F_s = \mu_{Y,s} - \psi_s^2 \mu_{Y,s} + \alpha_{1,s}^2 \mu_{Y,s}$ et $\gamma_Y^{(0)}(0) = \gamma_\lambda^{(0)}(0) + \mathbb{E}(\lambda_0)$. De la dernière expression, nous voyons que $\gamma_Y^{(s+\tau S)}(0)$ converge, quand $\tau \rightarrow \infty$, vers

$$\gamma_Y^{(s)}(0) = \frac{\sum_{i=1}^S \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \psi_{s-i+1}\right) F_{s-j+1}}{1 - \prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2},$$

si et seulement si $\prod_{i=1}^S \psi_{s-i+1}^2 < 1$ ou équivalentement $\prod_{i=1}^S \psi_i^2 < 1$.

La variance de λ_t est alors donnée par

$$\gamma_\lambda^{(t)}(0) = \gamma_Y^{(t)}(0) - \mu_{Y,t} = \left(1 - \prod_{i=1}^S \psi_{t-i+1}^2\right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{t-i+1}^2\right) F_{t-j} - \mu_{Y,t}. \quad (3.3.4)$$

Remplaçons t par $s + \tau S$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, dans (3.3.3) et (3.3.4), tout en tenant compte de la périodicité, nous obtenons les résultats donnés par la proposition. Dans le cas invariant dans le temps, les expressions (3.3.3) et (3.3.4) se réduisent à :

$$\gamma_Y(0) = \frac{(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2) \mu_Y}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} \quad \text{et} \quad \gamma_\lambda(0) = \frac{\alpha_1^2 \mu_Y}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}.$$

Dans le cas (classique) de modèle à coefficients invariants dans le temps donné par (3.2.4), i.e. $S = 1$, les résultats de cette proposition peuvent être présentés par le corollaire suivant qui donne les mêmes résultats donnés par Ferland *et al* (2006) dans leur *Proposition 8*.

Corollaire 3.3.2. *Le processus périodiquement corrélé à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfaisant le modèle INGARCH model (3.2.4), est stationnaire au second ordre si et seulement si $\alpha_1 + \beta < 1$. De plus, la forme explicite de $\text{Var}(y_t) = \gamma_Y(0)$ d'un tel processus et la variance $\text{Var}(\lambda_s) = \gamma_\lambda(0)$ sont, sous cette condition, données par*

$$\gamma_Y(0) = \frac{(1 - (\alpha_1 + \beta)^2 + \alpha_1^2) \mu_Y}{1 - (\alpha_1 + \beta)^2} \quad \text{and} \quad \gamma_\lambda^{(s)}(0) = \frac{\alpha_1^2 \mu_Y}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}.$$

3.4 Existence des moments d'ordres supérieurs

Cette section, est consacrée à l'obtention de la condition d'existence du moment d'ordre m , $\mathbb{E}(y_t^m)$, et sa formule explicite. Les cas particuliers $\mathbb{E}(y_t^4)$, $\mathbb{E}(y_t^3)$ et $\mathbb{E}(y_t^2)$ sont utilisés lors du calcul des coefficients de skewness et de kurtosis.

3.4.1 Calcul du moment d'ordre supérieur du processus λ_t

Dans cette section, nous obtenons la condition d'existence du moment d'ordre m noté $\mathbb{E}(\lambda_t^m)$. Soit le m -colonnes vecteur $\underline{\Lambda}_t^{(m)} = (\mathbb{E}(\lambda_t^m), \mathbb{E}(\lambda_t^{m-1}), \dots, \mathbb{E}(\lambda_t))'$.

Proposition 3.4.1. (Bentarzi and Bentarzi (2017a)) *Le moment non conditionnelle d'ordre m , $\mathbb{E}(\lambda_t^m)$, existe si et seulement si :*

$$\prod_{i=1}^S (\alpha_{1,s} + \beta_s) < 1. \quad (3.4.1a)$$

Le moment non conditionnelle d'ordre m , $\mathbb{E}(\lambda_t^m)$ est, sous cette condition, donné par :

$$\mathbb{E}(\underline{\Lambda}_s^{(m)}) = \left(I - \Psi_{s,S}^{(m)} \right)^{-1} \sum_{j=1}^S \Psi_{s,j}^{(m)} \underline{\alpha}_{0,s-j+1}^{(m)}, \quad (3.4.1b)$$

où $\Psi_{s,j}^{(m)} = \prod_{i=1}^{j-1} \Theta_{s-i+1}^{(m)}$ et la $m \times m$ matrice périodique $\Theta_s^{(m)}$, $s = 1, 2, \dots, S$, est donnée par

$$\Theta_s^{(m)} = \begin{pmatrix} \psi_{0,s}^m & \phi_{1,s}^{(m)} & \phi_{2,s}^{(m)} & \phi_{3,s}^{(m)} & \dots & \phi_{m-2,s}^{(m)} & \phi_{m-1,s}^{(m)} \\ 0 & \psi_{0,s}^{m-1} & \phi_{1,s}^{(m)} & \phi_{2,s}^{(m)} & \dots & \phi_{m-3,s}^{(m)} & \phi_{m-2,s}^{(m)} \\ 0 & 0 & \psi_{0,s}^{m-2} & \phi_{1,s}^{(m)} & \dots & \phi_{m-4,s}^{(m)} & \phi_{m-3,s}^{(m)} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \psi_{0,s}^2 & \phi_{1,s}^{(m)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \psi_{0,s}^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (3.4.1c)$$

où $\underline{\alpha}_{0,t}^{(m)} = (\alpha_{0,t}^m, \alpha_{0,t}^{m-1}, \dots, \alpha_{0,t})'$, $\psi_s = \alpha_{1,s} + \beta_s$ et les éléments de la matrice sont donnés par

$$\phi_{k,s}^{(m)} = \sum_{n=k+1}^m \sum_{j=n-k}^{n-1} \mathcal{K}_{n,j+1,n-k}^{(t)} \text{ where } \mathcal{K}_{n,j,k}^{(s)} = \binom{i}{n} \binom{n}{j} \alpha_{0,s}^{i-n} \alpha_{1,s}^j \beta_s^{n-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ j-k \end{matrix} \right\}.$$

Preuve. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\lambda_t^i / \mathcal{F}_{t-2})$ est, de (3.2.3a), donnée par

$$\mathbb{E}(\lambda_t^i / \mathcal{F}_{t-2}) = \sum_{n=0}^i \binom{i}{n} \alpha_{0,t}^{i-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_{1,t}^j \beta_t^{n-j} \lambda_{t-1}^{n-j} \mathbb{E}(y_{t-1}^j / \mathcal{F}_{t-2}).$$

Il est bien connu que le moment d'ordre j d'une variable de Poisson de moyenne λ_t est donné, en utilisant la formule des nombres de Stirling de second espèce, par : $\mathbb{E}(y_t^j / \mathcal{F}_{t-1}) =$

$\sum_{k=1}^j \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \lambda_{t-1}^k$, alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda_t^i / \mathcal{F}_{t-2}) &= \alpha_{0,t}^i + \psi_t^i \lambda_{t-1}^i + \sum_{n=1}^{i-1} \binom{i}{n} \alpha_{0,t}^{i-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_{1,t}^j \beta_t^{n-j} \lambda_{t-1}^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^i \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \binom{i}{n} \alpha_{0,t}^{i-n} \alpha_{1,t}^j \beta_t^{n-j} \sum_{k=1}^{j-1} \left\{ \begin{matrix} j \\ j-k \end{matrix} \right\} \lambda_{t-1}^{n-k}, \end{aligned}$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\mathbb{E}(\lambda_t^i / \mathcal{F}_{t-2}) = \alpha_{0,t}^i + \psi_t^i \lambda_{t-1}^i + \sum_{n=1}^{i-1} \binom{i}{n} \alpha_{0,t}^{i-n} \psi_t^n \lambda_{t-1}^n + \sum_{n=1}^i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathcal{K}_{n,j,k}^{(t)} \lambda_{t-1}^{n-k},$$

où pour $i = 1, 2, \dots, m, n = 1, 2, \dots, i, j = 1, 2, \dots, n$ et $k = 1, 2, \dots, j-1$,

$$\psi_t = \alpha_{1,t} + \beta_t \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{n,j,k}^{(t)} = \binom{i}{n} \binom{n}{j} \alpha_{0,t}^{i-n} \alpha_{1,t}^j \beta_t^{n-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ j-k \end{matrix} \right\}.$$

La dernière somme contient λ_{t-1} d'ordres $i-1, i-2, \dots, 2, 1$, alors les deux dernières sommes dans la précédente expression peut être réarrangées comme suit

$$\sum_{n=1}^{i-1} \binom{i}{n} \alpha_{0,t}^{i-n} \psi_t^n \lambda_{t-1}^n + \sum_{n=1}^i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathcal{K}_{n,j,k}^{(t)} \lambda_{t-1}^{n-k} = \sum_{r=1}^{i-1} \phi_{r,t}^{(i)}(\alpha_{0,t}, \alpha_{1,t}, \beta_t) \lambda_{t-1}^r,$$

où

$$\phi_{r,s}^{(i)} = \sum_{n=r+1}^i \sum_{j=n-r}^{n-1} \mathcal{K}_{n,j+1,n-r}^{(t)}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}_{n,j,r}^{(t)} = \binom{i}{n} \binom{n}{j} \alpha_{0,t}^{i-n} \alpha_{1,t}^j \beta_t^{n-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ j-r \end{matrix} \right\}.$$

Alors, nous avons

$$\mathbb{E}(\lambda_t^i / \mathcal{F}_{t-2}) = \alpha_{0,t}^i + \psi_t^i \lambda_{t-1}^i + \sum_{r=1}^{i-1} \phi_r^{(t)} \lambda_{t-1}^r, \quad i = 1, 2, \dots$$

Remplaçons i par $m, m-1, m-2, \dots, 3, 2, 1$, nous obtenons l'équation au différence matricielle suivante :

$$\mathbb{E}(\underline{\Lambda}_t / \mathcal{F}_{t-2}) = \Theta_t^{(m)} \underline{\Lambda}_{t-1} + \underline{\alpha}_{0,t}^{(m)},$$

où le m -colonnes vecteur $\underline{\Lambda}_t = (\lambda_t^m, \lambda_t^{m-1}, \dots, \lambda_t)^t$ et $\underline{\alpha}_{0,t}^{(m)} = (\alpha_{0,t}^m, \alpha_{0,t}^{m-1}, \dots, \alpha_{0,t})^t$ et où la $m \times m$ -matrice $\Theta_t^{(m)}$ est donnée par (3.4.1.c).

En itérant la dernière équation, nous obtenons

$$\mathbb{E}(\Lambda_t / \mathcal{F}_{t-2-n}) = \sum_{j=0}^n \left(\prod_{r=1}^j \Theta_{t-r+1}^{(m)} \right) \underline{\alpha}_{0,t-j}^{(m)} + \left(\prod_{r=1}^{n+1} \Theta_{t-r+1}^{(m)} \right) \Lambda_{t-(m+1)}$$

Posons $n = kS - 2$, alors nous avons, en tenant compte de la matrice $\Theta_t^{(m)}$ et du vecteur colonne $\underline{\alpha}_{0,t}^{(m)}$:

$$\mathbb{E}(\Lambda_t / \mathcal{F}_{t-kS}) = \sum_{j=1}^{kS-1} \left(\prod_{r=1}^j \Theta_{t-r+1}^{(m)} \right) \underline{\alpha}_{0,t-j}^{(m)} + \left(\prod_{r=1}^{kS-1} \Theta_{t-r+1}^{(m)} \right) \Lambda_{t-(kS-1)}.$$

La dernière égalité peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Lambda_t / \mathcal{F}_{t-kS}) &= \sum_{r=0}^{k-2} \left(\prod_{r=1}^S \Theta_{t-r+1}^{(m)} \right)^r \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} \Theta_{t-i+1}^{(m)} \right) \underline{\alpha}_{0,t-(rS+j)+1}^{(m)} \\ &\quad + \left(\prod_{r=1}^S \Theta_{t-r+1}^{(m)} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \Theta_{t-i+1}^{(m)} \right) \underline{\alpha}_{0,t-j+1}^{(m)} + \left(\prod_{i=1}^{S-1} \Theta_{t-i+1}^{(m)} \right) \Lambda_{t-(kS-1)} \right\}. \end{aligned}$$

Remplaçons t par $s + \tau S$ et tenons compte de la périodicité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Lambda_s / \mathcal{F}_{s-kS}) &= \sum_{r=0}^{k-2} \left(\prod_{r=1}^S \Theta_{s-r+1}^{(m)} \right)^r \sum_{j=1}^S \left(\prod_{r=1}^{j-1} \Theta_{s-i+1}^{(m)} \right) \underline{\alpha}_{0,s-(rS+j)+1}^{(m)} \\ &\quad + \left(\prod_{r=1}^S \prod_{r=1}^S \Theta_{s-r+1}^{(m)} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^{S-1} \left(\prod_{r=1}^{j-1} \Theta_{s-i+1}^{(m)} \right) \underline{\alpha}_{0,s-j+1}^{(m)} + \left(\prod_{r=1}^{S-1} \Theta_{s-i+1}^{(m)} \right) \Lambda_{s-(kS-1)} \right\}. \end{aligned}$$

Puisque les matrices $\Theta_{s-r+1}^{(m)}$, $r = 1, 2, \dots, S$ sont diagonales à valeurs propres $\psi_{s-r+1}^m, \psi_{s-r+1}^{m-1}, \psi_{s-r+1}^{m-2}, \dots, \psi_{s-r+1}^2, \psi_{s-r+1}$, alors la condition nécessaire pour que la matrice $\left(\prod_{r=1}^S \Theta_{s-r+1}^{(m)} \right)^{k-1}$ converge, quand $k \rightarrow \infty$, vers la matrice nulle est

$$\left(\prod_{r=1}^S \psi_s \right) = \prod_{r=1}^S (\alpha_{1,s} + \beta_s) < 1.$$

Sous cette condition, nous avons, la forme explicite du vecteur

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Lambda_s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\Lambda_s / \mathcal{F}_{s+\tau S-kS}) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^S \Theta_{s-i+1}^{(m)} \right)^r \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} \Theta_{s-i+1}^{(m)} \right) \underline{\alpha}_{0,s-j+1}^{(m)}, \\ &= \left(I - \Psi_{s,S}^{(m)} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \Psi_{s,j}^{(m)} \underline{\alpha}_{0,s-j}^{(m)}, \text{ où } \Psi_{s,j}^{(m)} = \prod_{i=1}^{j-1} \Theta_{s-i+1}^{(m)}. \end{aligned}$$

Corollaire 3.4.1. *Sous la condition (3.4.1a) le moment non conditionnel d'ordre 4, $\mu_{\lambda,t}^{(4)} = E(\lambda_t^4)$, existe et sa forme explicite est sous cette condition donnée par :*

$$\mathbb{E}(\underline{\Lambda}_s^{(4)}) = \left(I - \Psi_{s,S}^{(4)}\right)^{-1} \sum_{j=1}^S \Psi_{s,j}^{(4)} \underline{\alpha}_{0,s-j+1}^{(4)},$$

où $\underline{\alpha}_{0,t}^{(4)} = (\alpha_{0,t}^4, \alpha_{0,t}^3, \alpha_{0,t}^2, \alpha_{0,t})'$, $\Psi_{s,j}^{(4)} = \prod_{i=1}^{j-1} \Theta_{s-i+1}^{(4)}$ et la 4×4 matrice périodique $\Theta_s^{(4)}$,

$s = 1, 2, \dots, S$, est donnée par

$$\Theta_s^{(4)} = \begin{pmatrix} \psi_s^4 & a_{s;1,2} & a_{s;1,3} & a_{s;1,4} \\ 0 & \psi_s^3 & a_{s;2,3} & a_{s;2,4} \\ 0 & 0 & \psi_s^2 & a_{s;3,4} \\ 0 & 0 & 0 & \psi_s \end{pmatrix}.$$

où $\psi_s = \alpha_{1,s} + \beta_s$ et les éléments de la matrice $\Theta_s^{(4)}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_{s;1,2} &= 4\alpha_{0,s} \psi_s^3 + (6\beta_s^2 + 12\alpha_{1,s} \beta_s + 6\alpha_{1,s}^2) \alpha_{1,s}^2, \\ a_{s;1,3} &= 6\alpha_{0,s}^2 \psi_s^2 + 12\alpha_{0,s} \alpha_{1,s}^2 \beta_s + 12\alpha_{0,s} \alpha_{1,s}^3 + 4\alpha_{1,s}^3 \beta_s + 7\alpha_{1,s}^4, \\ a_{s;1,4} &= 4\alpha_{0,s} \alpha_{1,s}^3 + 6\alpha_{0,s}^2 \alpha_{1,s}^2 + \alpha_{1,s}^4 + 4\alpha_{0,s}^3 \psi_s, \\ a_{s;2,3} &= 3[\alpha_{0,s} \psi_s^2 + \alpha_{1,s}^2 \beta_s + \alpha_{1,s}^3], \\ a_{s;2,4} &= 3\alpha_{0,s}^2 \psi_s + 3\alpha_{0,s} \alpha_{1,s}^2 + \alpha_{1,s}^3, \\ a_{s;3,4} &= 2\alpha_{0,s} \psi_s + \alpha_{1,s}^2. \end{aligned}$$

3.4.2 Calcul des moments d'ordres supérieurs du processus y_t

Soient les vecteurs m -colonnes $\underline{\mu}_{Y,t}^{(m)} = (\mathbb{E}(y_t^m), \mathbb{E}(y_t^{m-1}), \dots, \mathbb{E}(y_t^2), \mathbb{E}(y_t))'$ et $\underline{\Lambda}_t^{(m)} = (\mathbb{E}(\lambda_t^m), \mathbb{E}(\lambda_t^{m-1}), \dots, \mathbb{E}(\lambda_t))'$ et la $m \times m$ -matrice $\Omega(m)$ donnés comme suit :

$$\Omega(m) = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1^{(m)} & \omega_2^{(m)} & \omega_3^{(m)} & \dots & \omega_{m-2}^{(m)} & 1 \\ 0 & 1 & \omega_1^{(m-1)} & \omega_2^{(m-1)} & \dots & \omega_{m-3}^{(m-1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega_1^{(3)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4.2)$$

où

$$\omega_k^{(i-k)} = \left\{ \begin{array}{c} i-1 \\ i-(k+1) \end{array} \right\} + \sum_{r=2}^{i-1} \binom{i-1}{i-r} \left\{ \begin{array}{c} i-r \\ i-(k+1) \end{array} \right\}.$$

En utilisant ces notations et définitions, nous pouvons donner le lemme ci-dessous qui établit l'expression du moment non conditionnel d'ordre m , $\mu_{Y,t}^{(m)} = \mathbb{E}(y_t^m)$, comme fonction du moment non conditionnel d'ordre m , $\mu_{\lambda,t}^{(m)} = \mathbb{E}(\lambda_t^m)$.

Lemme 3.4.1.(Bentarzi and Bentarzi (2017a)) *Les moments non conditionnels d'ordre m du processus, $\Lambda_t^m = \mathbb{E}(y_t^m)$, $s = 1, 2, \dots, S$, sont, sous la condition (3.4.1a), donnés comme fonction des moments non conditionnels d'ordres m de λ_t , par :*

$$\underline{\mu}_{Y,s}^{(m)} = \Omega(m) \mathbb{E}\left(\underline{\Lambda}_s^{(m)}\right).$$

Preuve. Le i ème moment conditionnel $\mathbb{E}(y_t^i / \mathcal{F}_{t-1})$ du processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est donné par

$$\mu_{C,Y,t}^{(i)} = \mathbb{E}(y_t^i / \mathcal{F}_{t-1}) = \lambda_t \sum_{r=1}^i \binom{i-1}{r-1} \mu_{C,Y,t}^{(r-1)}.$$

Il est bien connu que le r ème moment d'une variable de Poisson de moyenne λ_t est donné, en utilisant les nombres de Stirling, par

$$\mu_{C,Y,t}^{(r)} = \mathbb{E}(y_t^r / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=0}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} \lambda_t^k,$$

alors, nous avons

$$\mu_{C,Y,t}^{(i)} = \lambda_t + \lambda_t^i + \sum_{k=2}^{i-1} \left\{ \begin{matrix} i-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \lambda_t^k + \sum_{r=1}^{i-2} \sum_{k=2}^{r+1} \binom{i-1}{r} \left\{ \begin{matrix} r \\ k-1 \end{matrix} \right\} \lambda_t^k,$$

qui peut être réécrit sous la forme :

$$\mu_{Y,t}^{(i)} = \lambda_t^i + \sum_{k=2}^{i-1} \left[\left\{ \begin{matrix} i-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + \sum_{r=1}^{i-2} \binom{i-1}{r} \left\{ \begin{matrix} r \\ k-1 \end{matrix} \right\} \right] \lambda_t^k + E(\lambda_t).$$

D'où, le i ème moment non conditionnel, $\mu_{Y,t}^{(i)} = \mathbb{E}(y_t^i)$, est donné par :

$$\mu_{Y,t}^{(i)} = \mathbb{E}(\lambda_t^i) + \sum_{k=2}^{i-1} \left[\left\{ \begin{matrix} i-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + \sum_{r=1}^{i-2} \binom{i-1}{r} \left\{ \begin{matrix} r \\ k-1 \end{matrix} \right\} \right] \mathbb{E}(\lambda_t^k) + E(\lambda_t),$$

qui peut être écrit sous la forme

$$\mu_{C,Y,t}^{(i)} = \mathbb{E}(\lambda_t^i) + \sum_{k=1}^{i-2} \left[\left\{ \begin{matrix} i-1 \\ i-(k+1) \end{matrix} \right\} + \sum_{r=2}^{i-1} \binom{i-1}{i-r} \left\{ \begin{matrix} i-r \\ i-(k+1) \end{matrix} \right\} \right] \mathbb{E}(\lambda_t^{i-k}) + \lambda_t,$$

d'où, nous avons

$$\mu_{Y,t}^{(i)} = \mathbb{E}(\lambda_t^i) + \sum_{k=1}^{i-2} \psi_k^{(i-k)} \mathbb{E}(\lambda_t^{i-k}) + \mathbb{E}(\lambda_t), \quad (3.4.3)$$

où

$$\omega_k^{(i-k)} = \left\{ \begin{array}{c} i-1 \\ i-(k+1) \end{array} \right\} + \sum_{r=2}^{i-1} \binom{i-1}{i-r} \left\{ \begin{array}{c} i-r \\ i-(k+1) \end{array} \right\}.$$

Alors pour $i = m, m-1, m-2, \dots, 3, 2, 1$, nous obtenons un système qui peut être écrit sous forme matricielle comme suit

$$\underline{\mu}_{Y,t}^{(m)} = \Omega(m) \mathbb{E} \left(\underline{\Lambda}_t^{(m)} \right). \quad (3.4.4)$$

Corollaire 3.4.2. *Les moments non conditionnels d'ordre m du processus périodiquement corrélé $\mu_{Y,t}^{(m)} = \mathbb{E}(y_t^m)$, sont, sous la condition (3.4.1a), donnés par :*

$$\underline{\mu}_{Y,s}^{(m)} = \Omega(m) (I - \Phi_{s,S})^{-1} \sum_{j=1}^S \Phi_{s,j} \underline{\alpha}_{0,s-j+1}^{(m)},$$

où $\Phi_{j,s} = \prod_{i=1}^{j-1} \Theta_{s-i+1}^{(m)}$ et les $m \times m$ matrices $\Theta_s^{(m)}$ et $\Omega(m)$ sont données par (3.4.1c) et (3.4.2), respectivement.

Preuve. La preuve est directe.

Corollaire 3.4.3. *Les quatre premiers moments non conditionnels du processus périodiquement corrélé sont, sous la condition (4.1.1.a), donnés par :*

$$\underline{\mu}_{Y,s}^{(4)} = \Omega(4) (I - \Phi_{s,S})^{-1} \sum_{j=1}^S \Phi_{s,j} \underline{\alpha}_{0,s-j+1}^{(4)},$$

où $\Phi_{s,j} = \prod_{i=1}^{j-1} \Theta_{s-i+1}^{(4)}$ est donné par : $\Omega(4) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

où $\underline{\alpha}_{0,s}^{(4)} = (\alpha_{0,s}^4, \alpha_{0,s}^3, \alpha_{0,s}^2, \alpha_{0,s})'$, $\psi_s = \alpha_{1,s} + \beta_s$ et la 4×4 matrice $\Theta_s^{(4)}$ est explicitement donnée dans le corollaire 3.4.1.

Preuve. La preuve est directe.

3.4.3 Coefficients d'asymétrie (Skewness) et d'aplatissement (Kurtosis)

Pour le besoin des quatre premiers moments dans le calcul des coefficients d'asymétrie (Skewness) et d'aplatissement (Kurtosis), nous présentons le corollaire suivant dans lequel la matrice $\Theta_s^{(4)}$, pour s fixe, est donnée explicitement.

Corollaire 3.4.4. (Bentarzi and Bentarzi (2017a)) *Les coefficients d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis) du processus y_t , sont, sous la condition (3.4.1a), donnés, pour $s = 1, 2, \dots, S$, par :*

$$\mathcal{K}ur_s = \mu_{Y,s}^{*(4)} / \left(\mu_{Y,s}^{*(2)} \right)^2 = \frac{\mu_{Y,s}^{(4)} - 4\mu_{Y,s} \mu_{Y,s}^{(3)} + 6\mu_{Y,s}^2 \mu_{Y,s}^{(2)} - 3\mu_{Y,s}^4}{\left(\mu_{Y,s}^{(2)} - \mu_{Y,s}^2 \right)^2},$$

et

$$\mathcal{S}k_s = \mu_{Y,s}^{*(3)} / \left(\mu_{Y,s}^{*(2)} \right)^{3/2} = \frac{\mu_{Y,s}^{(3)} - 3\mu_{Y,s} \mu_{Y,s}^{(2)} + 2\mu_{Y,s}^3}{\left(\mu_{Y,s}^{(2)} - \mu_{Y,s}^2 \right)^{3/2}},$$

où $\mu_{Y,s}^{(4)}$, $\mu_{Y,s}^{(3)}$, $\mu_{Y,s}^{(2)}$ et $\mu_{Y,s}$ sont donnés, en fonction des paramètres du modèle, par le corollaire 3.4.2.

3.5 Structure de l'autocovariance

La proposition suivante établit la structure de l'autocovariance du processus $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 3.5.1. (Bentarzi and Bentarzi (2017a)) *Les structures d'autocovariances des processus périodiquement corrélés à valeurs entières $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\lambda_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant le modèle (3.2.3) sont, sous la condition (3.4.1a), données comme suit :*

$$\gamma_Y^{(s)}(0) = \left(1 - \prod_{i=1}^S \psi_i^2 \right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \psi_{s-i+1}^2 \right) F_{s-j}, \quad (3.5.1)$$

$$\gamma_Y^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^{h-1} \psi_{s-i+1} \right) \left(\psi_{s-h+1} \gamma_Y^{(s-h)}(0) - \beta_{s-h+1} \mu_{Y,s-h} \right), \quad h \geq 1, \quad (3.5.2)$$

$$\gamma_\lambda^{(s)}(0) = \left(1 - \prod_{i=1}^S \psi_i^2 \right)^{-1} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} \psi_{s-i+1}^2 \right) F_{s-j} - \mu_{Y,s}, \quad (3.5.3)$$

$$\gamma_\lambda^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^h \psi_{s-i+1} \right) \gamma_\lambda^{(s-h)}(0), \quad h \geq 1, \quad (3.5.4)$$

où $F_s = \mu_{Y,s} - \psi_s^2 \mu_{Y,s-1} + \alpha_{1,s}^2 \mu_{Y,s-1}$, $\psi_s = \alpha_{1,s} + \beta_s$ et $\mu_{Y,s}$ est donné dans la Proposition 3.3.1, avec la convention $\prod_{i=1}^j x_i = 1$ si $j < 1$ et $\sum_{j=x}^y a_j = 0$ si $y < x$.

REMARQUE 3.5.1. Posons $h = \nu + kS$, $\nu = 1, 2, \dots, S$ et $k \in \mathbb{N}$, alors les égalités (3.5.2) et (3.5.4) peuvent être écrites sous les formes suivantes :

$$\gamma_Y^{(s)}(\nu + kS) = \left(\prod_{i=1}^S \psi_i \right)^k \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \psi_{s-i+1} \right) \left(\psi_{s-\nu+1} \gamma_Y^{(s-\nu)}(0) - \beta_{s-\nu+1} \mu_{Y,s-\nu} \right) \quad (3.5.5a)$$

$$\gamma_\lambda^{(s)}(\nu + kS) = \left(\prod_{i=1}^S \psi_i \right)^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \psi_{s-i+1} \right) \gamma_\lambda^{(s-\nu)}(0), \quad \nu = 1, 2, \dots, S \text{ et } k \in \mathbb{N}. \quad (3.5.5b)$$

Preuve. Les variances $\gamma_Y^{(s)}(0)$ et $\gamma_\lambda^{(s)}(0)$ ont été établies dans la Proposition 3.3.2. L'autocovariance $\gamma_Y^{(t)}(1)$, peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_Y^{(s)}(1) &= \text{Cov}(y_s; y_{s-1}) = \text{Cov}(\lambda_s; y_{s-1}) = \text{Cov}[(\alpha_{1,s} y_{s-1} + \beta_s \lambda_{s-1}); y_{s-1}], \\ &= \alpha_{1,s} \gamma_Y^{(s-1)}(0) + \beta_s \text{Cov}(y_{s-1}; \lambda_{s-1}) = \psi_s \gamma_Y^{(s-1)}(0) - \beta_s \mu_{Y,s-1}, \quad h = 1. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Plus généralement, calculons l'autocovariance $\gamma_Y^{(t)}(h)$, $h \geq 2$,

$$\begin{aligned} \gamma_Y^{(s)}(h) &= \text{Cov}(y_s; y_{s-h}) = \text{Cov}(\lambda_s; y_{s-h}) = \text{Cov}[(\alpha_{1,s} y_{s-1} + \beta_s \lambda_{s-1}); y_{s-h}], \\ &= \alpha_{1,s} \gamma_Y^{(s-1)}(h-1) + \beta_s \text{Cov}(\lambda_{s-1}; y_{s-1-(h-1)}), \quad h \geq 2, \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

ou équivalamment

$$\gamma_Y^{(s)}(h) = \alpha_{1,s} \gamma_Y^{(s-1)}(h-1) + \beta_s \left[\alpha_{1,s-1} \gamma_Y^{(s-2)}(h-2) + \beta_{s-1} \text{Cov}(\lambda_{s-2}; y_{s-2-(h-2)}) \right], \quad h \geq 2,$$

En utilisant (3.5.7), nous obtenons :

$$\gamma_Y^{(s)}(h) = \psi_s \gamma_Y^{(s-1)}(h-1), \quad h \geq 2,$$

En réitérant la dernière équation, en remplaçant m par $h-1$ alors en utilisant (3.5.6), nous obtenons

$$\gamma_Y^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^{h-1} \psi_{s-i+1} \right) \left(\psi_{s-h+1} \gamma_Y^{(s-h)}(0) - \beta_{s-h+1} \mu_{Y,s-h} \right).$$

L'autocovariance $\gamma_\lambda^{(t)}(h)$, $h \geq 1$, est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda^{(t)}(h) &= \text{Cov}(\lambda_t; \lambda_{t-h}) = \alpha_{1,t} \text{Cov}(\lambda_{t-1}; \lambda_{t-h}) + \beta_t \text{Cov}(\lambda_{t-1}; \lambda_{t-h}), \quad h \geq 1, \\ &= \alpha_{1,t} \text{Cov}(\lambda_{t-1}; \lambda_{t-1-(h-1)}) + \beta_t \text{Cov}(\lambda_{t-1}; \lambda_{t-1-(h-1)}), \quad h \geq 1, \\ &= \psi_t \gamma_\lambda^{(t-1)}(h-1), \quad h \geq 1. \end{aligned}$$

En réitérant l'équation, en remplaçant m par h , nous obtenons

$$\gamma_\lambda^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^h \psi_{s-i+1} \right) \gamma_\lambda^{(s-h)}(0), \quad h \geq 1.$$

Corollaire 3.5.1. (Bentarzi and Bentarzi (2017a)) *Les fonctions d'autocorrélation des processus périodiquement corrélés à valeurs entières $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\lambda_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant le modèle (3.2.3) sont, sous la condition (3.4.1a), données comme suit :*

$$\begin{aligned} \rho_Y^{(s)}(\nu + kS) &= \left(\prod_{i=1}^S \psi_i \right)^k \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \psi_{s-i+1} \right) \sqrt{\frac{\gamma_Y^{(s-\nu)}(0)}{\gamma_Y^{(s)}(0)}} \left(\psi_{s-\nu+1} - \frac{\beta_{s-\nu+1} \mu_{Y,s-\nu}}{\gamma_Y^{(s-\nu)}(0)} \right), \\ \rho_\lambda^{(s)}(\nu + kS) &= \left(\prod_{i=1}^S \psi_i \right)^k \left(\prod_{i=1}^{\nu} \psi_{s-i+1} \right) \sqrt{\frac{\gamma_\lambda^{(s-\nu)}(0)}{\gamma_\lambda^{(s)}(0)}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, S \text{ et } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

où $\psi_s = \alpha_{1,s} + \beta_s$ et $\mu_{Y,s}$ est donné dans Proposition 3.1, avec la convention $\prod_{i=1}^j x_i = 1$ si $j < 1$.

REMARQUE 3.5.2. Le modèle (3.2.3), peut être écrit sous la forme d'un modèle *PARMA*. En effet, considérons la différence de martingale $\varepsilon_t = y_t - \lambda_t$, on peut réécrire le modèle (3.2.3) sous la forme : $y_t = \alpha_{0,t} + \psi_t y_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_t \varepsilon_{t-1}$, où ε_t vérifie $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\sigma_{\varepsilon,t}^2 = \mu_{Y,t}$ et $Cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-h}) = 0, \forall h \geq 1$. Pour cette représentation d'un *PARMA* (1, 1), on peut facilement obtenir

$$\begin{aligned} \gamma_Y^{(t)}(0) &= \psi_t \gamma_Y^{(t)}(1) + \mu_{Y,t} - \alpha_{1,t} \beta_t \mu_{Y,t-1}, \\ \gamma_Y^{(t)}(1) &= \psi_t \gamma_Y^{(t-1)}(0) - \beta_t \sigma_{\varepsilon,t-1}^2, \quad h = 1, \\ \gamma_Y^{(t)}(h) &= \psi_t \gamma_Y^{(t-1)}(h-1), \quad h \geq 2. \end{aligned}$$

Donc la variance $\gamma_Y^{(t)}(0)$ est donnée par :

$$\gamma_Y^{(t)}(0) = \psi_t^2 \gamma_Y^{(t-1)}(0) + \alpha_{1,t}^2 \mu_{Y,t-1} - \psi_t^2 \mu_{Y,t-1} + \mu_{Y,t}.$$

3.6 Estimation

Dans la présente section, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres du modèle (3.2.3), en utilisant la méthode d'estimation de Yule-Walker (*YW*) et la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance conditionnel (*CML*). Il est bien connu que la première méthode est moins efficace que la seconde. Cependant, malgré que la méthode de Yule-Walker soit moins efficace que celle du maximum de vraisemblance, elle est toujours utilisée de nos jours parce qu'elle est simple et produit des estimateurs consistants qui peuvent être utilisés comme des valeurs initiales dans des méthodes sophistiquées comme la méthode du *MLE*.

3.6.1 Estimation de Yule-Walker

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'estimation des paramètres du modèle (3.2.3) satisfaisant la condition (3.4.1a) en adoptant la méthode d'estimation de Yule-Walker. La procédure de l'estimation de Yule-Walker se déroule en trois étapes :

Etape un : Estimation de $\psi_s = \alpha_{1,s} + \beta_s$: $\hat{\psi}_s = \hat{\gamma}_Y^{(s)}(2) / \hat{\gamma}_Y^{(s-1)}(1)$, $s = 1, 2, \dots, S$,

Etape deux : Estimation de $\alpha_{0,s}$: $\alpha_{0,s} = \hat{\mu}_{Y,s} - \hat{\psi}_s \hat{\mu}_{Y,s-1}$, $s = 1, 2, \dots, S$,

Etape trois : Estimation de $\alpha_{1,s}$ et β_s

$$\hat{\alpha}_{1,s} = \frac{\hat{\gamma}_Y^{(s)}(1) - \hat{\psi}_s \left(\hat{\gamma}_Y^{(s-1)}(0) - \mu_{Y,s-1} \right)}{\hat{\mu}_{Y,s-1}} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_s = \frac{\hat{\psi}_s \hat{\gamma}_Y^{(s-1)}(0) - \hat{\gamma}_Y^{(s)}(1)}{\hat{\mu}_{Y,s-1}},$$

où $\hat{\gamma}_Y^{(s)}(h)$ et $\hat{\mu}_{Y,s}$, $s = 1, 2, \dots, S$; $h = \nu + kS$ où $\nu = 1, 2, \dots, S$ et $k = 0, 1, 2, \dots$ sont, respectivement, les autocovariances empiriques :

$$\hat{\gamma}_Y^{(s)}(\nu + kS) = \begin{cases} N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \hat{\mu}_{Y,s})^2, & \nu = k = 0, \\ (N-k)^{-1} \sum_{\tau=k}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \hat{\mu}_{Y,s}) (y_{s-\nu+(\tau-k)S} - \hat{\mu}_{Y,s-\nu}), & \\ \quad \text{si } \nu < s, \quad s, \nu = 1, 2, \dots, S; \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, N-1 \text{ et } k = 0, 1, 2, \dots, \tau, \\ (N-k-1)^{-1} \sum_{\tau=k}^{N-1} (y_{s+\tau S} - \hat{\mu}_{Y,s}) (y_{s-\nu+(\tau-k)S} - \hat{\mu}_{Y,s-\nu}), & \\ \quad \text{si } \nu \geq s, \quad s, \nu = 1, 2, \dots, S; \quad \tau, k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{cases}$$

la moyenne empirique donnée par : $\hat{\mu}_{Y,s} = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} y_{s+\tau S}$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $N = (n-1)/S$.

3.6.2 Estimation du Maximum de Vraisemblance Conditionnel

Soit le vecteur colonne des paramètres $\underline{\theta} = (\underline{\alpha}'_0, \underline{\alpha}'_1, \underline{\beta}')'$ où les vecteurs S -colonnes $\underline{\alpha}_0$, $\underline{\alpha}_1$ et $\underline{\beta}$ sont :

$$\underline{\alpha}_0 = (\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \dots, \alpha_{0,S})', \underline{\alpha}_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,S})', \underline{\beta}_1 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_S)'$$

Pour une simplicité de manipulation, nous considérons une série temporelle observée de taille $N = TS$, $\underline{y}_t = y_1, y_2, \dots, y_N$. Le logarithme de vraisemblance conditionnel est alors donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right) &= \ln\left(L\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right)\right) \\ &= \sum_{t=1}^N [-\ln(y_t!) + y_t \ln \lambda_t - \lambda_t] = C + \sum_{t=1}^N y_t \ln \lambda_t - \sum_{t=1}^N \lambda_t,\end{aligned}$$

où

$$\lambda_t = \alpha_{0,t} + \alpha_{1,t} y_{t-1} + \beta_t \lambda_{t-1}.$$

Soit $t = s + \tau S$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau = 0, 1, 2, \dots, T-1$, alors le logarithme de la fonction de vraisemblance conditionnelle peut être écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right) = C + \sum_{\tau=0}^{T-1} \left[\sum_{s=1}^S y_{s+\tau S} \ln \lambda_{s+\tau S} - \sum_{s=1}^S \lambda_{s+\tau S} \right].$$

Ainsi, les dérivées partielles de $\mathcal{L}\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right)$ par rapport à $\alpha_{0,s}$, $\alpha_{1,s}$ et β_s sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right)}{\partial \alpha_{0,s}} &= \sum_{\tau=0}^{T-1} \left(\frac{y_{s+\tau S}}{\lambda_{s+\tau S}} - 1 \right), & \frac{\partial \mathcal{L}\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right)}{\partial \alpha_{0,s-1}} &= \sum_{\tau=0}^{T-1} (\beta_s + \beta_s \beta_{s-1}), \\ \frac{\partial \mathcal{L}\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right)}{\partial \alpha_{1,s}} &= \sum_{\tau=0}^{T-1} \left(\frac{y_{s+\tau S}^2}{\lambda_{s+\tau S}} - y_{s-1+\tau S} \right), & \frac{\partial \mathcal{L}\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right)}{\partial \alpha_{1,s-1}} &= \sum_{\tau=0}^{T-1} \left(\beta_s \sum_{s=1}^S \frac{y_{s+\tau S} y_{s-2+\tau S}}{\lambda_{s+\tau S}} - y_{s-1+\tau S} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}\left(\underline{\theta}\left|\underline{y}_t\right.\right)}{\partial \beta_s} &= \sum_{\tau=0}^{T-1} \left(\frac{y_{s+\tau S}}{\lambda_{s+\tau S}} - \lambda_{s-1+\tau S} \right).\end{aligned}$$

3.7 Etude de simulation

Dans ce paragraphe, nous évaluons, d'une part, les deux méthodes d'estimation de *YW* et *CML* sur deux séries chronologiques, de tailles petites et modérées relativement au nombre de paramètres (12), $n = 400, 600, 1000, 2000$, générées à partir de deux modèles différents *PINGARCH*₄(1, 1) (Modèle 1 et Modèle 2), et d'autre part, nous discutons la propriété de consistance de ces estimateurs.

Les vraies valeurs dans chaque modèle sont choisies pour qu'elles respectent la condition de stationnarité périodique de second ordre. En effet, $\prod_{i=1}^4 (\alpha_{1,i} + \beta_i)$ égal à 0.21675 pour le premier modèle et à 0.09438 pour le second.

Les *Table 1* et *Table 2* ci-dessous, donnent les vraies valeurs des paramètres (T. V) et les moyenne de leur estimateurs de *YW* et *CML* pour $N = 500$ réplifications, d'une série chronologique périodique, de période 4 et de taille modérée $n = 1000$, générée des Modèle 1 et Modèle 2, respectivement :

s	$\alpha_{0,s}$	$\alpha_{1,s}$	β_s	$\hat{\alpha}_{0,s}$	$\hat{\alpha}_{1,s}$	$\hat{\beta}_s$	$\hat{\alpha}_{0,s}$	$\hat{\alpha}_{1,s}$	$\hat{\beta}_s$
1	3.5	.15	.35	3.5213	.1520	.3457	3.5059	.1517	.3493
2	1.5	.35	.2	1.2764	.3490	.2402	1.4050	.3472	.2197
3	2.5	.55	.4	2.4475	.5493	.4100	2.4248	.5530	.4114
4	2	.25	.1	2.0225	.2491	.0977	1.9624	.2484	.1069

T. V

Y-W Estimation.

CML Estimation.

Table 1

s	$\alpha_{0,s}$	$\alpha_{1,s}$	β_s	$\hat{\alpha}_{0,s}$	$\hat{\alpha}_{1,s}$	$\hat{\beta}_s$	$\hat{\alpha}_{0,s}$	$\hat{\alpha}_{1,s}$	$\hat{\beta}_s$
1	1	.15	.25	1.1005	.1437	.2458	1.0793	.1473	.2442
2	2.5	.45	.4	2.3082	.4551	.4299	2.5471	.4579	.3826
3	3	.25	.6	3.1035	.2559	.5769	3.1017	.2540	.5788
4	4.5	.65	.1	4.3211	.6463	.1268	4.3343	.6492	.1225

T. V

Y-W Est.

CML Est.

Table 2

Les autocorrélations résiduelles des séries chronologiques du Modèle 1 ajustées par *YW* et *CML* sont visualisées dans *Figure 1* et *Figure 2* et celles du Model 2 dans *Figure 3* et 4, respectivement.

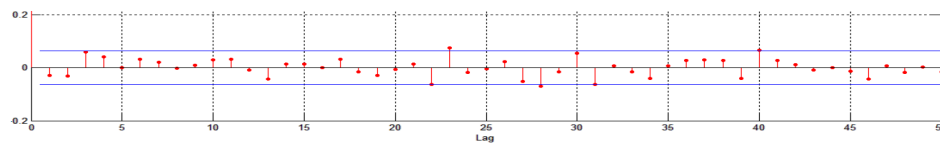


Figure 1

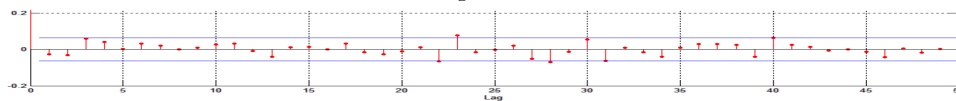


Figure 2

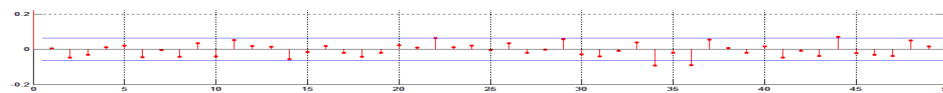


Figure 3

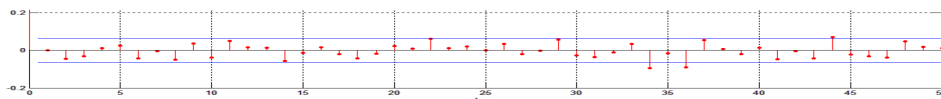


Figure 4

De *Figure 1* et *Figure 2* (respectivement *Figure 3* et *Figure 4*) nous remarquons que la fonction d'autocorrélation estimée de chaque série chronologique ajustée via la méthode d'estimation de *YW* et *CML*, respectivement, ne révèle aucune corrélation significative. Ainsi, ceci est un diagnostic empirique de l'adéquation des modèles estimés.

n	s	$\alpha_{0,s}$	$\hat{\alpha}_{0,s}$	$ERMSE_s$	$\alpha_{1,s}$	$\hat{\alpha}_{1,s}$	$ERMSE_s$	β_s	$\hat{\beta}_s$	$ERMSE_s$
400	1	3.5	3.2684	1.6778	.15	.1598	.1434	.35	.3879	.3939
	2	1.5	1.6450	14.7303	.35	.3571	.4297	.2	.1768	2.1863
	3	2.5	2.5952	1.6543	.55	.5379	.1460	.4	.3927	.3937
	4	2	1.9802	1.1359	.25	.2515	.0889	.1	.1034	.1916
600	1	3.5	3.4387	1.3449	.15	.1480	.1017	.35	.3654	.3366
	2	1.5	1.1992	11.8976	.35	.3517	.2531	.2	.2533	2.0433
	3	2.5	2.3375	1.4809	.55	.5417	.1224	.4	.4418	.3450
	4	2	1.9764	.8997	.25	.2467	.0726	.1	.1080	.1458
1000	1	3.5	3.5060	.9385	.15	.1547	.0773	.35	.3427	.2232
	2	1.5	1.6740	3.6250	.35	.3469	.0715	.2	.1724	.6192
	3	2.5	2.4408	1.0516	.55	.5419	.0930	.4	.4237	.2437
	4	2	1.9712	.7276	.25	.2467	.0552	.1	.1067	.1183
2000	1	3.5	3.4928	.6526	.15	.1521	.0572	.35	.3482	.1562
	2	1.5	1.4033	1.5590	.35	.3488	.0483	.2	.2177	.2840
	3	2.5	2.4730	.6306	.55	.5472	.0626	.4	.4089	.1497
	4	2	1.9397	.5030	.25	.2513	.0393	.1	.1075	.0800

Table 3. YW

n	s	$\alpha_{0,s}$	$\hat{\alpha}_{0,s}$	$ERMSE_s$	$\alpha_{1,s}$	$\hat{\alpha}_{1,s}$	$ERMSE_s$	β_s	$\hat{\beta}_s$	$ERMSE_s$
400	1	3.5	3.2742	1.3502	.15	.159	.1074	.35	.3874	.3120
	2	1.5	1.3597	1.1531	.35	.3519	.09211	.2	.2199	.2077
	3	2.5	2.5015	1.2507	.55	.5351	.1296	.4	.4154	.3029
	4	2	1.8005	0.8871	.25	.2490	.07641	.1	.1323	.1417
600	1	3.5	3.4366	1.0578	.15	.1539	.0905	.35	.3593	.2536
	2	1.5	1.2525	1.1344	.35	.3483	.0730	.2	.2469	.2110
	3	2.5	2.3714	1.2292	.55	.5493	.1074	.4	.4317	.2861
	4	2	1.9238	0.7320	.25	.2463	.0642	.1	.1163	.1113
1000	1	3.5	3.4700	0.8924	.15	.1514	.0680	.35	.3542	.2114
	2	1.5	1.4940	1.0045	.35	.3452	.0570	.2	.2055	.1783
	3	2.5	2.4141	0.9835	.55	.5443	.0795	.4	.4270	.2292
	4	2	1.9205	0.6117	.25	.2457	.0497	.1	.1152	.0932
2000	1	3.5	3.4940	.6274	.15	.1520	.0503	.35	.3481	.1510
	2	1.5	1.4849	.8842	.35	.3482	.0411	.2	.2041	.1577
	3	2.5	2.4721	.6269	.55	.5476	.0556	.4	.4186	.1464
	4	2	1.9384	.4407	.25	.2512	.0368	.1	.1078	.0695

Table 4. CML

Dans toutes les tables $\hat{\alpha}_{0,s}$, $\hat{\alpha}_{1,s}$ et $\hat{\beta}_s$, $s = 1, 2, \dots, S$, représentent l'estimation moyenne, pour $r = 1000$ réplifications, des paramètres correspondant et $ERMSE_s$ représente leur erreurs quadratiques moyenne empiriques. *Table 3* et *Table 4* donnent les résultats de simulation des estimateurs de YW et de CML estimation pour Modèle 1.

De Table 3 et Table 4, on peut facilement observer la convergence des estimateurs de YW et CML des paramètres du Modèle 1. Aussi, pour une série de très petite taille, $n = 400$, (relativement au large nombre de paramètres, 12) les estimateurs sont très proches, en prenant en considération le critère du $RMSE$, de leurs vraies valeurs. Les moyennes théoriques et empirique du Skewness et du Kurtosis du modèle 1 ($n = 1000$ et $r = 1000$) sont données dans la Table 4.a :

s	$T \mathcal{S}k_s$	$\widehat{\mathcal{S}k}_{s,YW}$	$\widehat{\mathcal{S}k}_{s,CML}$	$T Kur_s$	$\widehat{Kur}_{s,YW}$	$\widehat{Kur}_{s,CML}$
1	0.4647	0.4600	0.4581	3.2268	3.2393	3.2359
2	0.5517	0.5846	0.5807	3.4127	3.4229	3.4156
3	0.5418	0.5586	0.5545	3.4147	3.4215	3.4165
4	0.6196	0.5967	0.5944	3.4358	3.4480	3.4331

Table 4.a

Les Tables 5, 6, donnent les résultats des estimations de YW et CML du Modèle 2

n	s	$\alpha_{0,s}$	$\widehat{\alpha}_{0,s}$	$ERMSE_s$	$\alpha_{1,s}$	$\widehat{\alpha}_{1,s}$	$ERMSE_s$	β_s	$\widehat{\beta}_s$	$ERMSE_s$
400	1	1	.8653	1.3299	.15	.1352	.0897	.25	.2347	.1569
	2	2.5	2.0024	2.6678	.45	.4038	.2189	.4	.4303	.5858
	3	3	2.6506	2.2890	.25	.2306	.1624	.6	.5632	.3713
	4	4.5	4.1126	3.7501	.65	.5836	.2241	.1	.1041	.4166
600	1	1	.9836	1.1336	.15	.1499	.0669	.25	.2514	.1204
	2	2.5	2.3177	1.7573	.45	.4447	.1204	.4	.4390	.3586
	3	3	2.9058	1.7667	.25	.2474	.1193	.6	.6160	.2712
	4	4.5	4.3629	2.5348	.65	.6464	.1027	.1	.1189	.3018
1000	1	1	.9945	.8467	.15	.1471	.0530	.25	.2535	.0917
	2	2.5	2.3969	1.1987	.45	.4527	.0909	.4	.4178	.2434
	3	3	2.9625	1.3060	.25	.2493	.0928	.6	.6061	.2087
	4	4.5	4.3845	1.9608	.65	.6453	.0783	.1	.1173	.2406
2000	1	1	.9735	.5795	.15	.1506	.0370	.25	.2513	.0629
	2	2.5	2.4973	.8204	.45	.4516	.0624	.4	.3989	.1662
	3	3	2.9857	.8753	.25	.2534	.0674	.6	.5991	.1384
	4	4.5	4.5396	1.2579	.65	.6489	.0540	.1	.0963	.1531

Table 5. YW

n	s	$\alpha_{0,s}$	$\hat{\alpha}_{0,s}$	$ERMSE_s$	$\alpha_{1,s}$	$\hat{\alpha}_{1,s}$	$ERMSE_s$	β_s	$\hat{\beta}_s$	$ERMSE_s$
400	1	1	.9914	.9680	.15	.1400	.0803	.25	.2193	.1263
	2	2.5	2.3304	1.4729	.45	.4153	.1667	.4	.3565	.2663
	3	3	2.8521	1.8531	.25	.2264	.1314	.6	.5392	.3039
	4	4.5	3.7045	2.1529	.65	.5901	.2124	.1	.1427	.1882
600	1	1	1.0858	.8780	.15	.1507	.0579	.25	.2419	.0965
	2	2.5	2.5333	1.1483	.45	.4527	.0917	.4	.3902	.2192
	3	3	3.0575	1.4754	.25	.2447	.0945	.6	.5974	.2224
	4	4.5	4.0167	1.6346	.65	.6492	.0866	.1	.1543	.1811
1000	1	1	1.0356	.7211	.15	.1484	.0428	.25	.2489	.0767
	2	2.5	2.5422	.9282	.45	.4547	.0712	.4	.3886	.1773
	3	3	3.0132	1.1710	.25	.2474	.0764	.6	.6009	.1812
	4	4.5	4.2770	1.2009	.65	.6473	.0654	.1	.1270	.1363
2000	1	1	.9677	.5386	.15	.1497	.0304	.25	.2528	.0555
	2	2.5	2.5336	.6802	.45	.4516	.0509	.4	.3919	.1281
	3	3	3.0018	.8278	.25	.2509	.0526	.6	.5994	.1264
	4	4.5	4.4360	.8791	.65	.6481	.0475	.1	.1086	.0991

Table 6. CML

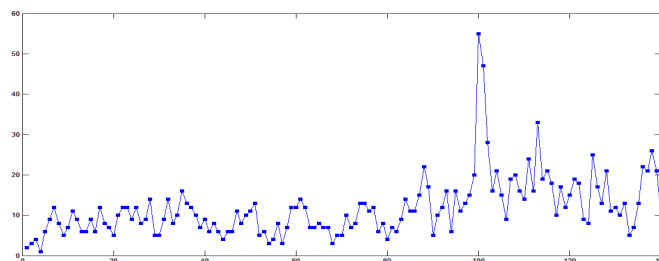
On peut aussi observer, de Table 5 et Table 6, la convergence des estimateurs de YW et CML des paramètres du modèle 2. Les estimateurs sont très proches, en se basant sur le critère RMSE, de leurs vraies valeurs, pour une très petite taille $n = 400$. Les valeurs théoriques et empiriques du Skewness et Kurtosis du modèle 2, ($n = 1000, r = 1000$) sont données dans la Table 6.a.

s	$T S k_s$	$\widehat{S}k_{s,YW}$	$\widehat{S}k_{s,CML}$	$T Kur_s$	$\widehat{K}ur_{s,YW}$	$\widehat{K}ur_{s,CML}$
1	0.5409	0.5463	0.5433	3.3703	3.3761	3.3708
2	0.5172	0.5218	0.5185	3.3593	3.3637	3.3583
3	0.4362	0.4432	0.4382	3.2540	3.2623	3.2546
4	0.4700	0.4744	0.4724	3.3048	3.3092	3.3058

Table 6.a

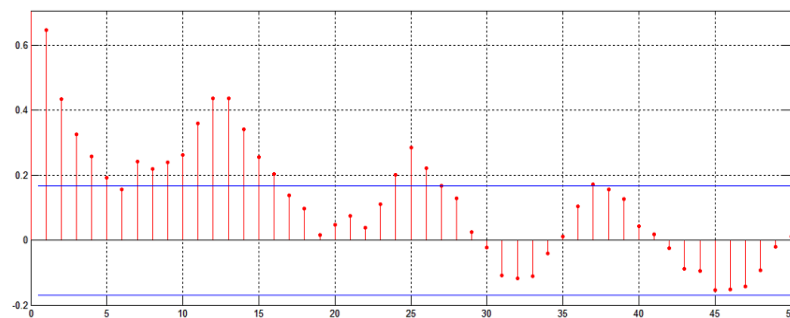
3.8 Application

Nous étudions la série chronologique représentant le nombre d'infections par la bactérie *Campylobacteriosis* récupérés chaque 28 jours à partir du mois de Janvier 1990 jusqu'au mois d'Octobre 2000 (*Grappe 1*). Cette série, qui contient 140 observations, a été modélisée par *Ferland et al* (2006) par un modèle *INGARCH* (1, 13).



Grappe 1

De la fonction d'autocorrélation de la série (*Grappe 2*) nous remarquons que cette série exhibe une structure d'autocorrélation périodique ($S = 13$)



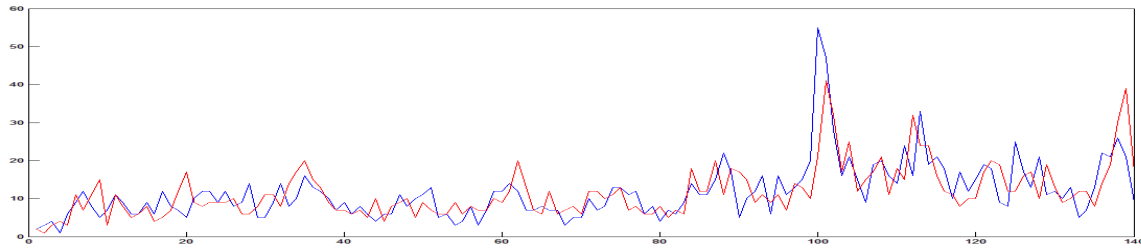
Grappe 2

Les estimateurs du Maximum de vraisemblance conditionnel (*CML*), des paramètres périodiques $\alpha_{0,s}$, $\alpha_{1,s}$, $\beta_{1,s}$, $s = 1, 2, \dots, 13$ sont donnés par la *Table 1*. Il est bon de noter que la taille de la série est très petite pour l'estimation d'un tel nombre de paramètres (39), donc le modèle identifié peut être éventuellement amélioré pour une série de taille plus élevée.

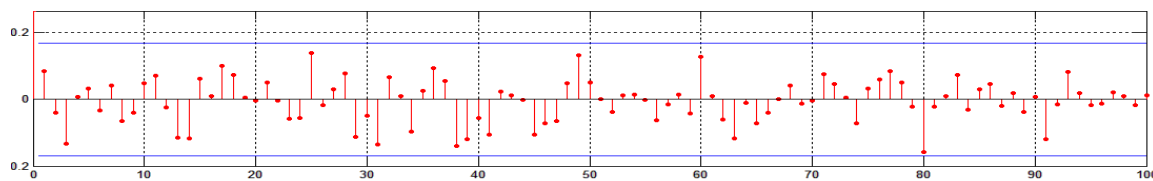
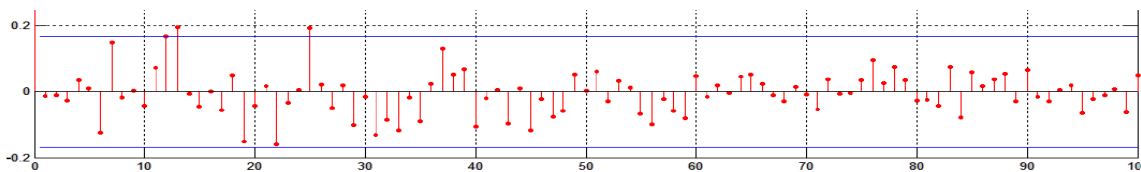
P/s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\hat{\alpha}_{0,s}$.0001	.0001	.0001	.0001	.94154	.7744	.0001	.0001	.00013	.98535	.11191	.8595	.0001
$\hat{\alpha}_{1,s}$.0562	.8164	.0001	.3595	.0001	.7170	.4016	.3317	.6232	.6372	.0001	.2048	.0001
$\hat{\beta}_s$.9999	.1229	.8543	.9210	.8729	.0001	.6304	.8854	.7080	.0001	.6070	.4331	.8259

Table 1

Une trajectoire ajustée, en rouge, du processus y_t et les valeurs réelles, en bleu, sont visualisées dans le *Graph 3* et la fonction d'autocorrélation résiduel empirique est donnée dans *Graph 4*



Graph 3

Graph 4. Residual ACF de $PINGARCH_s(1, 1)$ Graph 5. Residual ACF de $INGARCH(1, 13)$, Ferland *et al* (2006)

A partir de la représentation graphique de la fonction d'autocorrélation ci dessus, nous remarquons que les fonctions d'autocorrélation estimées pour les deux modèles, n'indiquent aucune autocorrélation significative, donc les deux modèles sont adéquats. Néanmoins, pour le modèle $INGARCH(1, 13)$ on remarque que quelques autocorrélations sont plus importantes que celles du modèle $PINGARCH_s(1, 1)$, en particulier dans les 26 premiers décalages). Donc le modèle $INGARCH(1, 13)$ n'a pas complètement capturé l'effet périodique de la série.

Chapitre 4

Modèles autorégressifs Poissonniens mélangés périodiques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre Nous proposons une classe générale de modèles autorégressifs Poissonniens mélangés dont la forme et les paramètres sont périodiques dans le temps. Sous une condition de *contraction périodique* sur la forme de la moyenne conditionnelle, nous montrons l'existence d'une solution strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante ayant, dans le cas Poissonnien pur, des moments d'ordre supérieur finis. Des applications à des modèles spécifiques sont considérées.

Les modèles autorégressifs Poissonniens ont suscité beaucoup d'intérêt au courant des deux dernières décennies. Hormis leur habileté à modéliser divers traits de séries chronologiques à valeurs entières, l'étude de leur structure a été un défi certain (ex. Ferland *et al* (2006) ; Fokianos *et al* (2009) ; Doukhan *et al*, 2012 ; Davis et Liu, 2016). De nombreuses extensions du modèle Poissonnien originel ont été introduites. Parmi elles, Bentarzi et Bentarzi (2017) ont proposé un modèle *autorégressif Poissonnien périodique* afin de représenter la ca-

ractéristique de saisonnalité souvent observée en pratique. La moyenne conditionnelle dans ce modèle est fonction linéaire de ses valeurs retardées et des observations avec des coefficients périodiques dans le temps. Ces auteurs se sont focalisés sur les propriétés "en moyenne" de leur modèle (stationnarité périodique d'ordre supérieur et structure des moments) et ont montré son applicabilité sur des données réelles.

Dans ce chapitre nous proposons un modèle autorégressif Poissonnien mélangé dont la distribution conditionnelle est un mélange de lois de Poisson et peut en particulier être Poissonnienne ou binomiale négative. En outre, la moyenne conditionnelle proposée est une fonction générale périodique de ses valeurs retardées et des observations. Nous en étudions les propriétés de stationnarité périodique stricte, d'ergodicité périodique, de dépendance faible périodique et d'existence des moments d'ordre supérieur. Ces propriétés servent entre autres à établir les propriétés asymptotiques de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance du modèle sous-jacent.

4.2 Modèle autorégressif Poissonnien mélangé périodique

Soit $\{N_t(\cdot), t \in \mathbb{Z}\}$ une suite indépendante de processus de Poisson homogènes d'intensité unité. Considérons une suite $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ positive, indépendante et S -périodiquement distribuée (ipd_S) de moyenne unité et de variance σ_t^2 . La périodicité de la suite de mélange $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ qui est supposée indépendante de $\{N_t(\cdot), t \in \mathbb{Z}\}$ est entendue dans le sens où $Z_t \stackrel{d}{=} Z_{kS+t}$ pour tout $k, t \in \mathbb{Z}$, où $\stackrel{d}{=}$ désigne l'égalité en distribution. En outre, la période S est le plus petit entier positif vérifiant la dernière égalité, laquelle entraîne immédiatement que $\sigma_t^2 = \sigma_{t+kS}^2$ pour tout $k, t \in \mathbb{Z}$. Un processus $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ à valeurs entières est dit processus *autorégressif Poissonnien mélangé périodique* s'il est solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t \lambda_t), \\ \lambda_t = f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.1)$$

où $\{\theta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de paramètres S -périodiques dans le sens où $\theta_t = \theta_{t+kS}$ pour tout $k, t \in \mathbb{Z}$ avec $\theta_t \in \Theta_t \subset \mathbb{R}^{m_t}$ et $m_t \in \mathbb{N}^*$.

La suite de fonctions $\{f_t, t \in \mathbb{Z}\}$ définie par $f_t : \mathbb{N} \times (0, \infty) \times \Theta_t \rightarrow (0, \infty)$ est également S -périodique : $f_t = f_{t+kS}$ pour tout $k, t \in \mathbb{Z}$. En vertu des propriétés de N_t et Z_t , il est clair que $E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \lambda_t$ et $Var(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \lambda_t(1 + \sigma_t^2\lambda_t)$ où \mathcal{F}_t est la σ -algèbre générée par Y_t, Y_{t-1}, \dots . Mieux encore, la loi conditionnelle de Y_t peut être explicitée pour des lois spécifiques de Z_t . En effet, si Z_t est dégénérée en la valeur 1 pour tout $t \in \mathbb{Z}$ alors $Y_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_t)$, la loi de Poisson de paramètre λ_t . De même, si $Z_t \sim G(\sigma_t^{-2}, \sigma_t^{-2})$ alors $Y_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{BN}\left(\sigma_t^{-2}, \frac{\lambda_t}{\sigma_t^{-2} + \lambda_t}\right)$ où $G(a, b)$ et $\mathcal{BN}(k, p)$ désignent respectivement la loi Gamma de paramètre de forme $a > 0$ et d'intensité $b > 0$, et la loi binomiale négative de paramètres $k > 0$ et $p \in (0, 1)$. Pour mettre en relief la périodicité du modèle (4.2.1), on peut mettre ce dernier sous la représentation suivante

$$\begin{cases} Y_{nS+v} = N_{nS+v}(Z_{nS+v}\lambda_{nS+v}), \\ \lambda_{nS+v} = f_v(Y_{nS+v-1}, \lambda_{nS+v-1}; \theta_v) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq v \leq S, \quad (4.2.2)$$

qui retient S fonctions f_v et S paramètres $\theta_v \in \Theta_v \subset \mathbb{R}^{m_v}$ ($1 \leq v \leq S$) correspondant aux différentes saisons. Par saison $v \in \{1, \dots, S\}$ on désigne l'ensemble $\{\dots, v-S, v, v+S, \dots\}$. Ainsi, le modèle (4.2.1) est assez général et couvre une gamme étendue de modèles à valeurs entières bien connus. Par exemple, lorsque $S = 1$ on retrouve le modèle autorégressif Poissonnien mélangé proposé par Christou et Fokianos (2014). D'autres cas particulièrement importants de (4.2.1) sont donnés par les exemples suivants.

Exemple 4.2.1 (Moyenne conditionnelle linéaire) Soit $f_v(y, \lambda; \theta_v) = \omega_v + \alpha_v y + \beta_v \lambda$ où $\theta_v = (\omega_v, \alpha_v, \beta_v)' \in \Theta_v \subset (0, \infty)^3$, $1 \leq v \leq S$.

i) Lorsque Z_v est dégénérée en la valeur 1 pour tout $1 \leq v \leq S$, le modèle (4.2.1) se réduit au modèle *INGARCH* (INteger-valued Generalized AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic) périodique Poissonnien proposé par Bentarzi et Bentarzi (2017).

ii) Lorsque $Z_v \sim G(\sigma_v^{-2}, \sigma_v^{-2})$ ($1 \leq v \leq S$) nous appelons le modèle résultant *INGARCH périodique binomial négatif*. Ce dernier généralise le modèle proposé par Zhu (2011) et Christou et Fokianos (2014).

Exemple 4.2.2 (Moyenne conditionnelle exponentielle). Considérons le modèle (4.2.1) avec

$$f_v(y, \lambda; \theta_v) = \omega_v + \alpha_v y + (\beta_v + \delta_v \exp(-\gamma_v \lambda^2)) \lambda \text{ où } \theta_v = (\omega_v, \alpha_v, \beta_v, \delta_v, \gamma_v)' \in \Theta_v \subset (0, \infty)^5 \text{ (} 1 \leq v \leq S \text{)}.$$

i) Si Z_v est dégénérée pour tout $1 \leq v \leq S$ alors on obtient une version périodique de la spécification proposée par Fokianos *et al* (2009) (voir aussi Doukhan *et al*, 2012).

ii) Pour $Z_v \sim G(\sigma_{0v}^{-2}, \sigma_{0v}^{-2})$, le modèle (4.2.1) se réduit à une extension périodique du modèle autorégressif binomial négatif exponentiel (Christou et Fokianos, 2014).

Exemple 4.2.3 (Moyenne conditionnelle linéaire perturbée). Soit $f_v(y, \lambda; \theta_v) = \omega_v (1 + \lambda)^{-\gamma_v} + \alpha_v y + \beta_v \lambda$. Plus γ_v s'approche de zéro et plus le modèle résultant s'approche du modèle linéaire dont il est une perturbation (voir aussi Gao *et al* 2009). Pour ce modèle $\theta_v = (\omega_v, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)' \in \Theta_v \subset (0, \infty)^4$ ($1 \leq v \leq S$).

4.3 Propriétés probabilistes du modèle

Nous donnons une condition suffisante sur les fonctions f_1, \dots, f_S pour que (4.2.1) admette une solution strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante de moyenne finie. Sous d'autres conditions supplémentaires, cette solution possède des moments d'ordre supérieur finis. Pour une définition plus explicite des propriétés périodiques voir ex. Aknouche *et al* (2016). De même, pour la notion de dépendance faible voir Dedecker et Prieur (2004).

Considérons l'hypothèse suivante que nous qualifions de condition de *contraction périodique* sur f_1, \dots, f_S .

H1 Pour tout $v \in \{1, \dots, S\}$, $y, y' \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \lambda' > 0$:

$$|f_v(y, \lambda) - f_v(y', \lambda')| < \kappa_{v1} |y - y'| + \kappa_{v2} |\lambda - \lambda'|, \quad (4.3.1a)$$

où κ_{v1} et κ_{v2} sont des constantes non-négatives vérifiant

$$\prod_{v=1}^S (\kappa_{v1} + \kappa_{v2}) < 1. \quad (4.3.1b)$$

Notons que si f_1, \dots, f_S sont contractantes dans le sens standard alors elles sont périodiquement contractantes dans le sens de (4.3.1b). Évidemment la réciproque n'est pas vraie. Pour l'Exemple 4.2.1 la condition (4.3.1) se réduit à

$$\prod_{v=1}^S (\alpha_v + \beta_v) < 1, \quad (4.3.2)$$

qui est la même donnée par Bentarzi et Bentarzi (2017). En revanche pour l'Exemple 4.2.2, compte tenu du fait que $\frac{\partial f_v(y, \lambda)}{\partial y} = \alpha_v$ et $\left| \frac{\partial f_v(y, \lambda)}{\partial \lambda} \right| < \beta_v + \delta_v$, la condition (3.1) devient

$$\prod_{v=1}^S (\alpha_v + \beta_v + \delta_v) < 1. \quad (4.3.3)$$

Enfin, pour l'Exemple 4.2.3, puisque $\frac{\partial f_v(y, \lambda)}{\partial y} = \alpha_v$ et $\left| \frac{\partial f_v(y, \lambda)}{\partial \lambda} \right| < \beta_v + \omega_v \gamma_v$ la condition (4.3.1) se traduit par

$$\prod_{v=1}^S (\omega_v \gamma_v + \alpha_v + \beta_v) < 1. \quad (4.3.4)$$

Soit $X_t = (Y_t, \lambda_t)$, $\zeta_t = (N_t, Z_t)$ et $F_t(X_{t-1}, \zeta_t) = (N_t(Z_t f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t)), f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t))$. Alors $\{F_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est S -périodique et le modèle (4.2.2) peut être mis sous la forme Markovienne suivante

$$X_{nS+v} = F_v(X_{nS+v-1}, \zeta_{nS+v}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq v \leq S, \quad (4.3.5)$$

où $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est ipd_S . Nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.3.1 (*Aknouche, Bentarzi and Demouche 2017*)

i) Sous la condition (4.3.1) l'équation (4.3.5) admet une unique solution $\{(Y_t, \lambda_t), t \in \mathbb{Z}\}$ strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante. De plus, elle est de moyenne finie et est donnée par

$$X_{nS+v} = H_v(\xi_{nS+v}, \xi_{(n-1)S+v}, \dots), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq v \leq S, \quad (4.3.6)$$

pour des fonctions mesurables $H_1, \dots, H_S : (\mathbb{N} \times (0, \infty))^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \times (0, \infty)$.

ii) Si de plus Z_v est dégénérée pour tout $1 \leq v \leq S$ alors la solution (4.3.6) est telle que $E(Y_v^k, \lambda_v^k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq v \leq S$.

Preuve. *i)* En réitérant S fois de suite l'équation (4.3.5) on obtient les S équations suivantes :

$$X_{nS+v} = \mathbb{F}_v(X_{(n-1)S+v}, \xi_{nS+v}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq v \leq S, \quad (4.3.7)$$

où $\mathbb{F}_v = F_v \circ F_{v-1} \circ \dots \circ F_{v-S+1}$ et $\{\xi_{nS+v}, n \in \mathbb{Z}\}$ est indépendante et identiquement distribuée pour tout $v \in \{1, \dots, S\}$ avec $\xi_{nS+v} = (\zeta_{nS+v}, \zeta_{nS+v-1}, \dots, \zeta_{nS+v-S+1})'$.

La preuve est alors basée sur le Théorème 4.3.1 de Doukhan et Wintenberger (2008) dont on vérifie seulement la condition (4.3.1) tant les conditions (4.3.2) et (4.3.3) dans le même article nous semblent triviales. Pour tout $x = (y, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $\epsilon > 0$ soit la norme $\|\cdot\|_\epsilon$ sur \mathbb{R}^2 définie par $\|x\|_\epsilon = |y| + \epsilon|\lambda|$. Au vu de (4.3.7), de (4.3.1a), de la propriété de Poisson du processus $N_t(\cdot), t \in \mathbb{Z}$ et de l'indépendance de ce dernier avec la suite indépendante $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ qui vérifie $E(Z_v) = 1$ pour tout $v \in \{1, \dots, S\}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E\left(\left\|\mathbb{F}_v(x, \xi_{nS+v}) - \mathbb{F}_v(x', \xi_{nS+v})\right\|_\epsilon\right) &= (1 + \epsilon) \prod_{k=1}^{v-S+2} (\kappa_{k1} + \kappa_{k2}) |f_{v-S+1}(x) - f_{v-S+1}(x')| \\ &\leq (1 + \epsilon) \prod_{k=1}^{v-S+2} (\kappa_{k1} + \kappa_{k2}) [\kappa_{v-S+1,1} |y - y'| + \kappa_{v-S+1,2} |\lambda - \lambda'|] \\ &\leq (1 + \epsilon) \prod_{k=1}^{v-S+2} (\kappa_{k1} + \kappa_{k2}) \max\left(\frac{\kappa_{v-S+1,1}}{\epsilon}, \kappa_{v-S+1,2}\right) \|x - x'\|_\epsilon. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

En prenant $\epsilon = \frac{\kappa_{v-S+1,1}}{\kappa_{v-S+1,2}}$ l'inégalité (4.3.8) devient

$$E\left(\left\|F_{v,S}(x, \xi_{nS+v}) - F_{v,S}(x', \xi_{nS+v})\right\|_\epsilon\right) \leq \prod_{k=1}^{v-S+1} (\kappa_{k1} + \kappa_{k2}) \|x - x'\|_\epsilon,$$

où par (4.3.1b), $\prod_{k=1}^{v-S+1} (\kappa_{k1} + \kappa_{k2}) = \prod_{k=1}^S (\kappa_{k1} + \kappa_{k2}) < 1$. Ainsi, nous avons montré que sous

H1, la condition (4.3.1) de Doukhan et Wintenberger (2008) est satisfaite pour la norme $\|\cdot\|_\epsilon$. Donc, il existe pour tout $v \in \{1, \dots, S\}$ une solution $\{(Y_{nS+v}, \lambda_{nS+v}), n \in \mathbb{Z}\}$ de (4.3.7) qui est strictement stationnaire, ergodique, faiblement dépendante, de moyenne finie et dont l'expression est donnée par (4.3.6).

ii) Nous montrons que la condition $\kappa^r < 1$ qui est entraînée par (4.3.1b) implique que

$$E(y_t^r) < \infty \text{ et } E(\lambda_t^r) < \infty \text{ pour tout } r \in \mathbb{N} \text{ où } \kappa = \prod_{v=1}^S \kappa_v \text{ et } \kappa_v = \kappa_{v1} + \kappa_{v2},$$

Pour $r \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ soit la norme $\|x\|_{\epsilon,r} = (y^r + \epsilon\lambda^r)^{1/r}$, alors, nous avons

$$E\left(\|X_t\|_{\epsilon,r}^r\right) = E\left(E(Y_t^r / \mathcal{F}_{t-1})\right) + \epsilon E(\lambda_t^r).$$

Puisque $Y_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_t)$ alors la dernière égalité devient

$$E\left(\|X_t\|_{\epsilon,r}^r\right) = (1 + \epsilon) E(\lambda_t^r) + \sum_{i=0}^{r-1} \{r\}_i E(\lambda_t^i), \tag{4.3.9}$$

où $\{r\}_i$ est le nombre de Sterling de seconde espèce (cf. Ferland *et al* (2006) et Doukhan

et al, 2012). Maintenant nous montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$ qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $E \left(\|X_t\|_{\epsilon,r}^r \right) < \infty$ pour tout $t \in \{1, \dots, S\}$. À partir de (4.2.1) et (4.3.1a) nous avons

$$\begin{aligned} E(\lambda_t^r) &= E(f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t)^r) = E((f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t) - f_t(0, 0; \theta_t) + f_t(0, 0; \theta_t))^r) \\ &\leq E((\kappa_{t1} |Y_{t-1}| + \kappa_{t1} |\lambda_{t-1}| + f_t(0, 0; \theta_t))^r) := E((g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}) + b_t)^r) \quad (4.3.10) \\ &= E(g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1})^r) + R_{t,r-1}, \end{aligned}$$

où $g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}) = \kappa_{t1} Y_{t-1} + \kappa_{t1} \lambda_{t-1}$, $b_t = f_t(0, 0; \theta_t)$ et $R_{t,r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} E(g_t^i(Y_{t-1}, \lambda_{t-1})) b_t^{r-i} <$

∞ est un polynôme de degré $r - 1$ et est donc fini par l'hypothèse de récurrence, $\binom{r}{i}$ étant le coefficient binomial. D'autre part, par l'inégalité de Jensen il vient que

$$\begin{aligned} E(g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1})^r) &= \kappa_t^r E\left(\frac{\kappa_{t1}}{\kappa_t} Y_{t-1} + \frac{\kappa_{t1}}{\kappa_t} \lambda_{t-1}\right)^r, \\ &\leq \kappa_t^{r-1} (\kappa_{t1} E(Y_{t-1}^r) + \kappa_{t2} E(\lambda_{t-1}^r)) \leq \kappa_t^r E\left(\|X_{t-1}\|_{\epsilon,r}^r\right), \end{aligned}$$

de sorte que (4.3.10) prend la forme

$$E(\lambda_t^r) \leq \kappa_t^r \|X_{t-1}\|_{\epsilon,r}^r + R_{t,r-1}. \quad (4.3.11)$$

En combinant (4.3.9) et (4.3.11) on obtient l'inéquation aux différences linéaire périodique suivante

$$E\left(\|X_t\|_{\epsilon,r}^r\right) \leq (1 + \epsilon) \kappa_t^r E\left(\|X_{t-1}\|_{\epsilon,r}^r\right) + C_t, \quad (4.3.12)$$

où $C_t = (1 + \epsilon) R_{t,r-1} + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} E(\lambda_t^i)$ et est fini sous l'hypothèse de récurrence.

Par remplacements successifs S fois de suite dans (4.3.12) et en vertu de la stationnarité périodique du modèle on trouve $E\left(\|X_t\|_{\epsilon,r}^r\right) \leq \frac{K_t}{1 - (1 + \epsilon)^S \kappa^r}$, où $K_t = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \kappa_{t-i}^r C_{t-j} (1 + \epsilon)^j$. Il suffit de prendre $\epsilon < \frac{1}{\kappa^{r/S}}$, il en résulte que $E\left(\|X_t\|_{\epsilon,r}^r\right) < \infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $t \in \{1, \dots, S\}$.

Le résultat précédent montre que dans le cas Poissonnien pur, la solution (4.3.6) possède des moments de tous ordres sous la même condition (4.3.1). Pour les cas Poissonniens des Exemples 4.2.1-4.2.3, le Théorème 4.3.1 se traduit comme suit.

Corollaire 4.3.1 (*Aknouche, Bentarzi and Demouche 2017*)

Sous (4.3.2) le modèle *INGARCH Poissonnien périodique linéaire* (cf. Exemple 4.2.1, *i*) admet une solution $\{(Y_t, \lambda_t), t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante telle que $E(Y_v^k, \lambda_v^k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq v \leq S$. $\{(Y_t, \lambda_t), t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante telle que $E(Y_v^k, \lambda_v^k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq v \leq S$.

Corollaire 4.3.2 (*Aknouche, Bentarzi and Demouche 2017*) Sous (4.3.4) et $\sigma_t^2 \equiv 0$ le modèle *INGARCH Poissonnien périodique perturbé* (cf. Exemple 2.3) admet une solution $\{(Y_t, \lambda_t), t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante telle que $E(Y_v^k, \lambda_v^k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq v \leq S$.

Dans le cas non-Poissonnien, les conditions d'existence des moments d'ordre supérieur à un peuvent dépendre de la variance du mélange σ^2 . En particulier, pour le modèle *INGARCH binomial négatif périodique linéaire* (cf. Exemple 4.2.1, *ii*), le résultat suivant montre que ces conditions varient en fonction de l'ordre du moment.

Proposition 4.3.1 (*Aknouche, Bentarzi and Demouche 2017*) Pour que le modèle binomial négatif périodique linéaire (Exemple 4.2.1-*ii*) admette une solution $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ périodiquement ergodique ayant des moments d'ordre un, d'ordre deux et d'ordre quatre finis, des conditions nécessaires et suffisantes sont respectivement (4.3.2),

$$\prod_{v=1}^S (\sigma_v^2 \alpha_v^2 + (\alpha_v + \beta_v)^2) < 1, \quad \text{et} \quad (4.3.13)$$

$$\prod_{v=1}^S ((\alpha_v + \beta_v)^4 + 6\sigma_v^2 \alpha_v^2 (\alpha_v + \beta_v)^2 + \sigma_v^4 \alpha_v^3 (11\alpha_v + 8\beta_v) + 6\sigma_v^6 \alpha_v^4) < 1. \quad (4.3.14)$$

Preuve. *i*) Il suffit de montrer la nécessité de (4.3.2) tant le fait qu'elle soit suffisante découle du Théorème 4.3.1. En prenant l'espérance de Y_t dans (4.2.1) et en exploitant la forme linéaire de f_t (cf. Exemple 4.2.1, *ii*) on trouve l'équation linéaire périodique $E(\lambda_t) = (\alpha_t + \beta_t) E(\lambda_{t-1}) + \omega_t$ dont la solution existe si et seulement si (4.3.2) est satisfaite.

ii) Pour l'existence du moment d'ordre deux, il suffit de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $E(\lambda_t^2) < \infty$. Par un calcul direct on trouve l'équation aux différences linéaire périodique suivante :

$$E(\lambda_t^2) = (\alpha_t^2 (\sigma_t^2 + 1) + 2\alpha_t\beta_t + \beta_t^2) E(\lambda_{t-1}^2) + (2\alpha_t\omega_t + 2\beta_t\omega_t + \alpha_t^2) E(\lambda_{t-1}) + \omega_t^2,$$

dont la solution existe si et seulement si (4.3.13) est vérifiée.

iii) La preuve de (4.3.14) en est similaire. À partir de l'expression des moments d'ordre trois et d'ordre quatre de la loi binomiale négative, on détermine, après un long calcul, l'équation aux différences périodique que vérifie $E(\lambda_t^4)$ dont la solution existe si et seulement si (4.3.14) est satisfaite.

Ainsi pour l'existence des moments d'ordre supérieur à un correspondant à ce dernier modèle, la condition de contraction périodique (4.3.1) n'est que nécessaire.

Chapitre 5

Modèle de Séries Chronologiques Bilinéaire à Valeurs Entières Périodiques

5.1 Introduction

Du fait que les séries chronologiques à valeurs entières non négatives sont rencontrées dans divers domaines, citons entre autre l'épidémiologie (e.g., nombre de personnes infectées), l'économie (e.g., mouvements de prix de transaction discrets sur les marchés financiers), l'environnement (e.g., Nombre de feux sauvages dans certain pays), criminologie (e.g., nombre de certains types de crime), a motivé la recherche dans la classe de séries chronologiques à valeurs entières qui tient compte de la nature discrète et de la. En effet, on a donné beaucoup d'attention dans les deux dernières décennies à l'étude des propriétés probabilistes et statistiques de modèles de séries, à valeurs non négatifs, linéaires et non linéaires.

Cependant, malgré le fait que beaucoup de série à valeurs entières rencontrées dans divers domaines et beaucoup d'autres révèlent la caractéristique de périodicité dans leur structure

d'autocovariance, (*Number of cases of campylobacteriosis infections time series*, Ferland *et al* (2006), *Monthly number of short-term unemployed people in Penamacor County (Portugal)*, Monteiro *et al* (2010), *the number of hospital emergency service arrivals*, Morinã *et al* (2011)), il semble que l'étude de série à valeurs entières périodique (linéaire et non linéaire) n'a pas reçu beaucoup d'attention dans la littérature de série chronologiques. En effet, dans notre connaissance, le premier papier traitant la modélisation du processus périodiquement corrélé, dans le sens de Gladyshev (1963), est celui de Monteiro *et al* (2010). Les diverse avantages et propriétés intéressantes satisfaites par le modèle Bilinéaire diagonal à valeurs entières étudié par Doukhan *et al* (2006), et d'autre part, le fait que plusieurs séries rencontrées à valeurs entières exhibent une caractéristique de périodicité dans leur structures d'autocovariance qui ne peuvent pas être prises en compte et décrites dans la classe des modèles de séries entières à paramètres invariants dans le temps, a donné une bonne raison et une grande motivation à l'extension de cette classe de modèles de bilinear invariables dans le temps à une classe de modèles à paramètres variants dans le temps, ce qui fait l'objectif de ce chapitre.

5.2 Modèle Bilinéaire périodique à valeurs entières

Rappelons qu'un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ réel périodiquement corrélé de second ordre, au sens de Gladyshev (1963), de période S (où S est un entier strictement positif; $S \geq 2$), est dit satisfaisant un modèle Bilinéaire Diagonal du premier ordre Périodique $PBL_S(1, 0, 1, 1)$, s'il est solution de l'équation linéaire au différence stochastique suivante :

$$y_t = \varphi_t y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_t y_{t-1} \varepsilon_{t-1}, t \in \mathbb{Z}, \quad (5.2.1a)$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc périodiquement corrélé, i.e., une suite de variables non corrélées, de moyenne nulle et de variance finie périodique σ_t^2 . Et où les paramètres réels φ_t, β_t et la variance σ_t^2 , sont périodique en t , de période S , i.e., $\varphi_{t+rS} = \varphi_t, \beta_{t+rS} = \beta_t$ et $\sigma_{t+rS}^2 = \sigma_t^2, \forall t, r \in \mathbb{Z}$. Posons $t = s + S\tau, s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, on peut réécrire la dernière équation sous la forme équivalente suivante :

$$y_{s+S\tau} = \varphi_s y_{s-1+S\tau} + \varepsilon_{s+S\tau} + \beta_s y_{s-1+S\tau} \varepsilon_{s-1+S\tau}, s = 1, 2, \dots, S \text{ et } \tau \in \mathbb{Z}.$$

Il est reconnu que ce modèle est capable de capturer et de décrire, en plus des fait stylisés capturé par le modèle Diagonal Bilinéaire classique (à paramètres invariants dans le temps) $BL(1, 0, 1, 1)$, la caractéristique de périodicité exhibée par la structure d'autocovariance de plusieurs séries rencontrées dans divers domaines et qui sont générés par des processus périodiquement corrélés, au sens de Gladyshev (1963), à valeurs entières. Dans ce qui suit, nous étudions quelques propriétés probabiliste et statistiques de base du modèle Bilinéaire du premier ordre périodique à valeurs entières non négatives $PINBL_S(1, 0, 1, 1)$ suivant :

$$y_{s+S\tau} = \varphi_s \circ y_{s-1+S\tau} + \varepsilon_{s+S\tau} + \beta_s \circ y_{s-1+S\tau} \varepsilon_{s-1+S\tau}, s = 1, 2, \dots, S \text{ et } \tau \in \mathbb{Z}. \quad (5.2.1b)$$

où le processus à valeurs entières positives $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, est périodiquement corrélé, de période entières positive S ($S \geq 2$), et le processus d'innovation $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées à valeurs entières positives, avec une moyenne périodique $\mu_{\varepsilon,t}$ et une variance périodique finies $\sigma_{\varepsilon,t}^2$ et où les paramètres $\varphi_t, \beta_t, \mu_{\varepsilon,t}$ et $\sigma_{\varepsilon,t}^2$, sont périodiques, par rapport à t , de période S ($S \geq 2$), i.e., $\varphi_{t+rS} = \varphi_t, \beta_{t+rS} = \beta_t, \mu_{\varepsilon,t+rS} = \mu_{\varepsilon,t}$ et $\sigma_{\varepsilon,t+rS}^2 = \sigma_{\varepsilon,t}^2, \forall t, r \in \mathbb{Z}$, et où " \circ " est l'opérateur d'amincissement de *Steutel-Van Harn*, Steutel-van Harn (1979), qui est définie, pour le processus stochastique entier y_{t-1} et n'importe quelle suite de variables aléatoires non corrélée à valeurs entières non négatives $\{Y_{i,t}, i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$ où $P(Y_{i,t} = 1) = 1 - P(Y_{i,t} = 0) = \varphi_t \in [0, 1]$ par

$$\varphi_t \circ y_{t-1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{y_{t-1}} Y_{i,t}, & \text{si } y_{t-1} > 0, \\ 0, & \text{si } y_{t-1} \leq 0, \end{cases}$$

de même, $\beta_t \circ$ représente l'opérateur d'amincissement de *Steutel-Van Harn* qui est défini, pour le processus stochastique à valeurs entières $y_{t-1} \varepsilon_{t-1}$ et n'importe quelle suite de variables aléatoires non corrélée à valeurs entières non négatives $\{\tilde{Y}_{j,t}, j \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$ tel que

$$P(\tilde{Y}_{j,t} = 1) = 1 - P(\tilde{Y}_{j,t} = 0) = \beta_t \in [0, 1],$$

$$\beta_t \circ (y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{y_{t-1} \varepsilon_{t-1}} \tilde{Y}_{j,t}, & \text{si } y_{t-1} \varepsilon_{t-1} > 0, \\ 0, & \text{si } y_{t-1} \varepsilon_{t-1} \leq 0. \end{cases}$$

Posons $t = s + S\tau, s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, on peut réécrire l'équation au différences stochastiques bilinéaire périodique à valeurs entières (5.2.1) sous la forme équivalente suivante :

$$y_{s+S\tau} = \varphi_s \circ y_{s-1+S\tau} + \beta_s \circ (y_{s-1+S\tau} \varepsilon_{s-1+S\tau}) + \varepsilon_{s+S\tau}, s = 1, 2, \dots, S \text{ and } \tau \in \mathbb{Z}.$$

Notre modèle est une extension du modèle de séries chronologiques bilinéaire à valeurs entières invariant dans le temps $INBL(1, 0, 1, 1)$ qui a été étudié par Doukhan *et al* (2006) :

$$y_t = \varphi \circ y_{t-1} + \beta \circ (y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}. \quad (5.2.2)$$

5.2.1 Existence du processus périodiquement strictement stationnaire PINBL

La proposition suivante établit une condition suffisante sous laquelle il existe un processus périodiquement strictement stationnaire satisfaisant le modèle de série chronologique bilinéaire du premier ordre périodique à valeurs entières $PINBL_S(1, 0, 1, 1)$ donné par (5.2.1).

Proposition 5.2.1. Bentarzi and Bentarzi (2017b) *Sous la condition suivante :*

$$\prod_{i=1}^S (\varphi_i + \beta_i \mu_{\varepsilon, i-1}) < 1, \quad (5.2.3)$$

il existe un unique processus périodiquement stationnaire à valeurs entières $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfaisant le modèle bilinéaire diagonal du premier ordre périodique à valeurs entières (5.2.1), et tel que le processus d'innovation à valeurs entières $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est, pour tout t , indépendant de tout le passé de y_t . Puisque la moyenne $\mu_{\varepsilon, t}$ du processus ε_t est périodique par rapport à t , alors pour $i = 1$, on a $\mu_{\varepsilon, 0} = \mu_{\varepsilon, S}$.

Preuve. La preuve de cette proposition est très similaire à l'élégante démonstration de Doukhan *et al* (2006). Hence, notre contribution dans la preuve est limitée à quelques changements mineurs pour adapter leur démonstration à notre cas périodique. Définissons le processus périodiquement périodique $\{y_t^{(n)}; n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$, au sens de Gladyshev (1963), de période S , comme suit (voir Doukhan *et al* (2006)),

$$y_t^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 0, \\ \varepsilon_t, & \text{si } n = 0, \\ \varphi_t \circ y_{t-1}^{(n-1)} + \beta_t \circ (y_{t-1}^{(n-1)} \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t, & \text{si } n > 0, t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (5.2.3a)$$

où les coefficients φ_t et β_t périodiques, en t de période S .

Lemme 5.2.1. Bentarzi and Bentarzi (2017b))

La suite $\{y_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z}\}$ est

- a) non décroissante pour tout $t \in \mathbb{Z}$,
- b) périodiquement strictement stationnaire, de période S , pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- c) telle que les vecteurs colonnes $(y_t^{(n)}, y_t^{(n-1)})'$ et $(y_{t+\tau S}^{(n)}, y_{t+\tau S}^{(n-1)})'$, sont identiquement distribués $\forall t, h \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons que a), b) and c) sont l'adaptation de *Lemme 2.1*, *Lemme 2.2* et *Lemme 2.3* de Doukhan *et al* (2006), respectivement, à notre cas périodique. D'où, les preuves de Doukhan *et al* (2006) peuvent être facilement adaptées.

Posons $k_{n,t} = \mathbb{E} \left(y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)} \right)$, il est claire que $k_{n,t}$ dépendant, en t , mais d'une façon périodique. Le lemme suivant qui est une adaptation du lemme 2.4 (Doukhan *et al* (2006)), montre que $k_{n,t}$ est une suite géométrique périodique en t .

Lemme 5.2.2 Bentarzi and Bentarzi (2017b)) (adapté au *Lemme 2.4*). La suite $\{k_{n,t}; n \in \mathbb{N}\}$, par rapport à $n \in \mathbb{N}$, pour tout t fixé, est une suite géométrique avec ratio $\prod_{i=1}^S (\varphi_i + \beta_i \mu_{\varepsilon, i-1})$.

Preuve. Puisque $\{y_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite non décroissante (*Lemme 5.2.1a*) alors $y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)} \geq 0$. De plus, on a

$$y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varphi_t \circ \left(y_{t-1}^{(n-1)} - y_{t-1}^{(n-2)} \right) + \beta_t \circ \left[\left(y_{t-1}^{(n-1)} - y_{t-1}^{(n-2)} \right) \varepsilon_{t-1} \right], t \in \mathbb{Z},$$

prenons l'espérance des deux côtés, en utilisant les propriétés de l'opérateur de Steutel-van Harn, on obtient

$$\mathbb{E} \left(y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)} \right) = \varphi_t \mathbb{E} \left(y_{t-1}^{(n-1)} - y_{t-1}^{(n-2)} \right) + \beta_t \mathbb{E} \left[\left(y_{t-1}^{(n-1)} - y_{t-1}^{(n-2)} \right) \varepsilon_{t-1} \right], t \in \mathbb{Z},$$

selon la définition de la suite $y_t^{(n)}$ on peut facilement noter que $(y_{t-1}^{(n-1)} - y_{t-1}^{(n-2)})$ est non corrélé avec ε_{t-1} , alors on a

$$k_{n,t} = (\varphi_t + \beta_t \mu_{\varepsilon, t-1}) k_{n-1, t-1}, n \geq 1, t \in \mathbb{Z}.$$

Par itération, par rapport à n , on a :

$$k_{n,t} = \prod_{i=1}^n (\varphi_{t-i+1} + \beta_{t-i+1} \mu_{\varepsilon, t-i}) k_{0, t-n}, n \geq 1, t \in \mathbb{Z}.$$

Soient $n = \nu + mS$, $\nu = 1, 2, \dots, S$ et $m \in \mathbb{N}$, on a

$$k_{n,t} = \prod_{i=1}^S (\varphi_{t-i+1} + \beta_{t-i+1} \mu_{\varepsilon,t-i})^m \prod_{i=1}^{\nu} (\varphi_{t-i+1} + \beta_{t-i+1} \mu_{\varepsilon,t-i}) k_{0,t-\nu}, n \geq 1, t \in \mathbb{Z},$$

remplaçons t par $s + \tau S$, $s = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, en tenant compte de la périodicité de $k_{n,t}$, par rapport à t , on obtient

$$k_{n,s+\tau S} = \prod_{i=1}^S (\varphi_{s-i+1} + \beta_{s-i+1} \mu_{\varepsilon,s-i})^m \prod_{i=1}^{\nu} (\varphi_{s-i+1} + \beta_{s-i+1} \mu_{\varepsilon,s-i}) k_{0,s-\nu}, n \geq 1.$$

D'où la suite géométrique $k_{n,t}$ avec ratio $\prod_{i=1}^S (\varphi_{t-i+1} + \beta_{t-i+1} \mu_{\varepsilon,t-i})$ et du premier terme

$$\prod_{i=1}^{\nu-1} (\varphi_{s-i+1} + \beta_{s-i+1} \mu_{\varepsilon,s-i}) k_{0,s-\nu}, \text{ converge vers } 0 \text{ si } \prod_{i=1}^S (\varphi_i + \beta_i \mu_{\varepsilon,i-1}) < 1.$$

Pour terminer la preuve de la *Proposition* 5.2.1, il est suffisant de montrer, tout comme

Doukhan *et al* (2006), que la suite $\left\{ y_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z} \right\}$ a une unique limite presque sûrement non

négative à valeur entière, y_t , qui est l'unique solution de l'équation (5.2.1). La preuve est

similaire à l'unicité de Doukhan *et al* (2006). En effet, en utilisant les mêmes définitions et

notations, tout en posant $W_t^{(n)} = \left| y_t^{(n)}(\omega) - Z_t(\omega) > 0 \right|$ avec $W_t^{(0)} = \varepsilon_t$ et Z_t est un proces-

sus périodiquement strictement stationnaire satisfaisant (2.1.1) et tel que ε_t est, pour tout

t , indépendant de tout le passé de Z_t , nous avons $W_t^{(n)} \stackrel{D}{=} \varphi_t \circ W_{t-1}^{(n-1)} + \beta_t \circ (\varepsilon_{t-1} W_{t-1}^{(n-1)})$,

d'où, nous avons, pour $\theta_t = \varphi_t + \beta_t \mu_{\varepsilon,t-1}$, en tenant compte de l'indépendance de ε_{t-1} et

$$W_{t-1}^{(n-1)}, \mathbb{E} \left(W_t^{(n)} \right) = \varphi_t \mathbb{E} \left(W_{t-1}^{(n-1)} \right) + \beta_t \mu_{\varepsilon,t-1} \mathbb{E} \left(W_{t-1}^{(n-1)} \right) = \theta_t \mathbb{E} \left(W_{t-1}^{(n-1)} \right).$$

En itérant cette dernière équation, on obtient :

$$\mathbb{E} \left(W_t^{(n)} \right) = \left(\prod_{i=1}^n \theta_{t-i+1} \right) \mu_{\varepsilon,t-n}.$$

Posons $n = s + mS$ et $t = s + \tau S$, $s = 1, 2, \dots, m \in \mathbb{N}$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ \omega : \left| y_t^{(n)}(\omega) - Z_t(\omega) \right| = k \right\}, \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^s \theta_{j-i+1} \right) \mu_{\varepsilon,j-s} \right) \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^S \theta_i \right)^{\tau} + \left(\prod_{i=1}^S \theta_i \right)^m \sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^s \theta_{j-i+1} \right) \mu_{\varepsilon,j-s}, \end{aligned}$$

où B_n est comme définie dans Doukhan *et al* (2006), $B_n = \left\{ \omega : \left| y_t^{(n)}(\omega) - Z_t(\omega) \right| > 0 \right\}$.

Puisque $\prod_{i=1}^S \theta_i < 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \left(\sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^s \theta_{j-i+1} \right) \mu_{\varepsilon,j-s} \right) \frac{1 - \left(\prod_{i=1}^S \theta_i \right)^m}{1 - \left(\prod_{i=1}^S \theta_i \right)} + \left(\prod_{i=1}^S \theta_i \right)^m \sum_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^s \theta_{j-i+1} \right) \mu_{\varepsilon,j-s},$$

Puisque $m \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, alors on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \left[1 - \left(\prod_{i=1}^S \theta_i\right)\right]^{-1} \left(\sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^s \theta_{j-i+1}\right) \mu_{\varepsilon, j-s}\right) < \infty.$$

Ce qui achève notre démonstration.

5.3 Condition de stationnarité périodique

Dans cette section nous établissons deux conditions de stationnarité périodique à savoir la condition de stationnarité périodique en moyenne et la condition de stationnarité périodique de second ordre.

5.3.1 Stationnarité périodique en moyenne

La proposition suivante établie une condition suffisante pour que le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant (5.2.1) soit stable, par rapport au premier moment. La forme explicite de sa moyenne est sous cette condition obtenue.

Proposition 5.3.1. *Bentarzi and Bentarzi (2017b)) Le processus périodiquement corrélé $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfaisant le modèle bilinéaire diagonal du premier ordre périodique à valeurs entières (5.2.1), est périodiquement stationnaire en moyenne si*

$$\prod_{i=1}^S (\varphi_i + \beta_i \mu_{\varepsilon, i-1}) < 1.$$

De plus, la forme explicite de la moyenne $\mu_{y,s} = \mathbb{E}(y_s)$ et du moment croisé $\mathbb{E}(y_s \varepsilon_s)$ de ce processus sont, sous cette condition, donnés, pour $s = 1, 2, \dots, S$, par :

$$\begin{pmatrix} \mu_{y,s} \\ \mathbb{E}(y_s \varepsilon_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{\varepsilon,s} + \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1} \sigma_{\varepsilon,s}^2 + \sum_{j=1}^{S-1} \Theta_{s,j-1} (\varphi_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s-j} + \beta_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s-j}^{(2)})}{\mu_{\varepsilon,s}^{(2)} - \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \sigma_{\varepsilon,s}^2 + \mu_{\varepsilon,s} \sum_{j=1}^{S-1} \Theta_{s,j-1} (\varphi_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s-j} + \beta_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s-j}^{(2)})} \\ \Delta \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_{s,j} &= \left(\prod_{i=1}^j \theta_{s-i+1}\right), \theta_s = \varphi_s + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1}, \Delta = 1 - \prod_{i=1}^S \theta_i \\ \text{pour } s &= 1, 2, \dots, S, \mu_{\varepsilon,t} = \mathbb{E}(\varepsilon_t) \text{ et } \mu_{\varepsilon,t}^{(2)} = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2), \end{aligned}$$

avec la convention $\prod_{j=1}^i x_j = 1$ si $i < 1$ et $\sum_{j=x}^y a_j = 0$ si $y < x$.

Dans le cas (classique) de modèle à coefficients invariants dans le temps (5.2.2), i.e. $S = 1$, les résultats de cette proposition peuvent être présentés par le corollaire suivant qui donne les mêmes résultats donnés par Doukhan *et al* (2006) dans leur *Proposition 3.1*.

Corollaire 5.3.1. Bentarzi and Bentarzi (2017b)) *Le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfaisant le modèle bilinéaire diagonal du premier ordre à valeurs entières (5.2.2), est stationnaire en moyenne si : $\varphi + \beta \mu_\varepsilon < 1$. De plus, les formes explicites de la moyenne $\mathbb{E}(y_t)$ et du moment croisé $\mathbb{E}(y_t \varepsilon_t)$ de ce processus sont, sous cette condition, données par :*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}(y_t) \\ \mathbb{E}(y_t \varepsilon_t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - (\varphi + \beta \mu_\varepsilon)} \begin{pmatrix} \mu_\varepsilon + \beta \sigma_\varepsilon^2 \\ (1 - \varphi) \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Preuve. La moyenne non conditionnelle $\mu_{y,t} = \mathbb{E}(y_t)$ est donnée par

$$\mu_{y,t} = \varphi_t \mu_{y,t-1} + \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \mu_{\varepsilon,t}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (5.3.1a)$$

où la moyenne non conditionnelle $\zeta_t = \mathbb{E}(y_t \varepsilon_t)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(y_t \varepsilon_t) = \varphi_t \mu_{\varepsilon,t} \mu_{y,t-1} + \beta_t \mu_{\varepsilon,t} \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^2). \quad (5.3.1b)$$

De (5.3.1a) et (5.3.1b), on obtient le système d'équations suivant :

$$\mu_{y,t} = \varphi_t \mu_{y,t-1} + \beta_t \zeta_{t-1} + \mu_{\varepsilon,t}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (5.3.1c)$$

$$\zeta_t = \varphi_t \mu_{\varepsilon,t} \mu_{y,t-1} + \beta_t \mu_{\varepsilon,t} \zeta_{t-1} + \mathbb{E}(\varepsilon_t^2). \quad (5.3.1d)$$

qui peut être écrit sous la forme vectorielle $\underline{\zeta}_t = \Phi_t \underline{\zeta}_{t-1} + \underline{c}_t$, où les deux vecteurs colonnes $\underline{\zeta}_t$, \underline{c}_t et la 2×2 matrice Φ_t sont comme suit :

$$\underline{\zeta}_t = \begin{pmatrix} \mu_{y,t} \\ \zeta_t \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_t = \begin{pmatrix} \mu_{\varepsilon,t} \\ \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_t = \begin{pmatrix} \varphi_t & \beta_t \\ \varphi_t \mu_{\varepsilon,t} & \beta_t \mu_{\varepsilon,t} \end{pmatrix}.$$

Par itération de la dernière équation vectorielle, en tenant compte de la périodicité stricte du processus et de la périodicité de la matrice Φ_t et du vecteur $\underline{\zeta}_t$ et \underline{c}_t , on obtient

$$\left(I - \prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1} \right) \underline{\zeta}_t = \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \Phi_{t-i+1} \right) \underline{c}_{t-j}. \quad (5.3.2)$$

On peut facilement montrer que la matrice $\prod_{i=1}^j \Phi_{t-i+1}$ $1 \leq j \leq S$, peut être explicitement donnée par l'expression suivante :

$$\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} = \left(\prod_{i=1}^{j-1} \theta_{s-i+1} \right) \begin{pmatrix} \varphi_{s-j+1} & \beta_{s-j+1} \\ \varphi_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s} & \beta_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s} \end{pmatrix} = \Theta_{s,j-1} \begin{pmatrix} \varphi_{s-j+1} & \beta_{s-j+1} \\ \varphi_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s} & \beta_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s} \end{pmatrix},$$

où $\Theta_{s,j} = \prod_{i=1}^j \theta_{s-i+1}$ et $\theta_t = \varphi_t + \beta_t \mu_{\varepsilon,t-1}$. En particulier, on a :

$$\prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1} = \prod_{i=1}^S \Phi_i = \Theta_{s,S-1} \begin{pmatrix} \varphi_{s+1} & \beta_{s+1} \\ \varphi_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} \end{pmatrix},$$

alors l'équation (5.3.2) peut être écrite sous la forme :

$$\left(I - \Theta_{s,S-1} \begin{pmatrix} \varphi_{s+1} & \beta_{s+1} \\ \varphi_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} \end{pmatrix} \right) \underline{\zeta}_s = \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \right) \underline{c}_{s-j}, \quad (5.3.3)$$

Donc, nous avons l'équation déterminantale : $[z - \Theta_{s,S-1} (\varphi_{s+1} + \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s})] z = 0$. Notons que $\Theta_{s,S-1} (\varphi_{s+1} + \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s}) = \prod_{i=1}^S \theta_{s-i+1}$, alors $|Iz - \Phi_s| = \left(z - \prod_{i=1}^S \theta_{s-i+1} \right) z$, qui mène à la condition donnée par Proposition 3.1. Donc, sous cette condition, on a de (5.3.3) :

$$\begin{aligned} \underline{\zeta}_s &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 - \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1} \\ \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & 1 - \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \end{pmatrix} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \right) \underline{c}_{s-j}, \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 - \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1} \\ \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & 1 - \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \mu_{\varepsilon,s} \\ \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \right) \begin{pmatrix} \mu_{\varepsilon,s-j} \\ \mu_{\varepsilon,s-j}^{(2)} \end{pmatrix} \right\}, \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \mu_{\varepsilon,s} + \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1} \sigma_{\varepsilon,s}^2 + \sum_{j=1}^{S-1} \Theta_{s,j-1} \left(\varphi_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s-j} + \beta_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s-j}^{(2)} \right) \\ \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} - \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \sigma_{\varepsilon,s}^2 + \mu_{\varepsilon,s} \sum_{j=1}^{S-1} \Theta_{s,j-1} \left(\varphi_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s-j} + \beta_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s-j}^{(2)} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$\Delta = 1 - \prod_{i=1}^S (\varphi_i + \beta_i \mu_{\varepsilon,i-1}) \text{ et } \Theta_{s,j} = \prod_{i=1}^j \theta_{s-i+1}.$$

5.3.2 Stationnarité périodique au second ordre

Afin d'établir la condition suffisante pour l'existence du moment non conditionnel de second ordre $\mathbb{E}(y_t^2)$ du processus, périodiquement stationnaire en moyenne, satisfaisant (5.2.1), et pour trouver sa forme explicite, on a besoin de définir, les vecteurs périodiques $\underline{\xi}_t$, \underline{c}_t et la matrice périodique Φ_t , de période S , suivants :

$$\underline{\xi}_t = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(y_t^2) \\ \mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t) \\ \mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t^2) \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_t = \begin{pmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \\ c_{3,t} \end{pmatrix}, \quad \Phi_t = \begin{pmatrix} \varphi_t^2 & 2\varphi_t \beta_t & \beta_t^2 \\ \varphi_t^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t) & 2\varphi_t \beta_t \mathbb{E}(\varepsilon_t) & \beta_t^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t) \\ \varphi_t^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) & 2\varphi_t \beta_t \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) & \beta_t^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) \end{pmatrix}, \quad (5.3.4)$$

où

$$c_{1,t} = [2\varphi_t \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \varphi_t (1 - \varphi_t)] \mathbb{E}(y_{t-1}) + [2\beta_t \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \beta_t (1 - \beta_t)] \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^2), \quad (5.3.5a)$$

$$c_{2,t} = \varphi_t (1 - \varphi_t) \mathbb{E}(y_{t-1}) \mathbb{E}(\varepsilon_t) + 2\varphi_t \mathbb{E}(y_{t-1}) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + \beta_t [(1 - \beta_t) \mathbb{E}(\varepsilon_t) + 2\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)] \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^3), \quad (5.3.5b)$$

$$c_{3,t} = \varphi_t [(1 - \varphi_t) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + 2\mathbb{E}(\varepsilon_t^3)] \mathbb{E}(y_{t-1}) + \beta_t [(1 - \beta_t) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + 2\mathbb{E}(\varepsilon_t^3)] \mathbb{E}[(y_{t-1} \varepsilon_{t-1})] + \mathbb{E}(\varepsilon_t^4), \quad (5.3.5c)$$

où $\mathbb{E}(y_{t-1})$ et $\mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1})$ sont donnés dans la Proposition 5.3.1

En utilisant ces notations et définitions, on peut présenter la proposition suivante qui établit une condition suffisante pour que le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant (5.2.1) soit stable, par rapport au moment du second ordre. La forme explicite du vecteur $\underline{\xi}_t$ est donc, sous cette condition, obtenue.

Proposition 5.3.2. *Bentarzi and Bentarzi (2017b)) Supposons que le moment d'ordre quatre du processus d'innovation existe et qu'il est fini, alors le processus périodiquement corrélé $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfaisant le modèle bilinéaire diagonal du premier ordre périodique à valeurs entières (5.2.1), est périodiquement stationnaire au second ordre si :*

$$\prod_{i=1}^S \left[(\varphi_i + \beta_i \mu_{\varepsilon, i-1})^2 + \beta_i^2 \sigma_{\varepsilon, i-1}^2 \right] < 1.$$

De plus, les formes explicites du moment d'ordre deux $\mathbb{E}(y_s^2)$ et des moments croisés $\mathbb{E}(y_s^2 \varepsilon_s)$ et $\mathbb{E}(y_s^2 \varepsilon_s^2)$ sont, sous cette condition, données, pour $s = 1, 2, \dots, S$, par :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}(y_s^2) \\ \mathbb{E}(y_s^2 \varepsilon_s) \\ \mathbb{E}(y_s^2 \varepsilon_s^2) \end{pmatrix} = (I - \Psi_s)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \underline{c}_{s-j} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \underline{c}_{s-j},$$

où les éléments matriciels a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - \Theta_{S-1} \beta_{s-(S-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s}^{(2)} - 2\Theta_{S-1} \varphi_{s-(S-1)} \beta_{s-(S-1)} \mu_{\varepsilon, s}, \\ a_{21} &= \Theta_{S-1} \varphi_{s-(S-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s}, \quad a_{31} = \Theta_{S-1} \varphi_{s-(S-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s}^{(2)}, \\ a_{12} &= 2\Theta_{S-1} \varphi_{s-(S-1)} \beta_{s-(S-1)}, \\ a_{22} &= 1 - \Theta_{S-1} \varphi_{s-(S-1)}^2 - \Theta_{S-1}^2 \varphi_{s-(S-1)}^2 \beta_{s-(S-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s}^{(2)}, \\ a_{32} &= 2\Theta_{S-1} \varphi_{s-(S-1)} \beta_{s-(S-1)} \mu_{\varepsilon, s}^{(2)}, \\ a_{13} &= \Theta_{S-1} \beta_{s-(S-1)}^2, \quad a_{23} = \Theta_{S-1} \beta_{s-(S-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s}, \\ a_{33} &= 1 - \Theta_{S-1} \varphi_{s-(S-1)}^2 - 2\Theta_{S-1} \varphi_{s-(S-1)} \beta_{s-(S-1)} \mu_{\varepsilon, s}. \end{aligned}$$

et où

$$\left(\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \right) = \Theta_{j-1} \begin{pmatrix} \varphi_{s-(j-1)}^2 & 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} & \beta_{s-(j-1)}^2 \\ \varphi_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s} & 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} \mu_{\varepsilon, s} & \beta_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s} \\ \varphi_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s}^{(2)} & 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} \mu_{\varepsilon, s}^{(2)} & \beta_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon, s}^{(2)} \end{pmatrix},$$

et $\mu_{\varepsilon, s}^{(2)} = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$, $\Psi_s = \left(\prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1} \right)$, $\Theta_j = \left(\prod_{i=1}^j \omega_{s-i+1} \right)$ où $\omega_s = \varphi_s^2 + 2\varphi_s \beta_s \mu_{\varepsilon, s-1} + \beta_s^2$

$\mu_{\varepsilon, s-1}^{(2)}$, avec la convention $\prod_{i=1}^j x_i = 1$ si $j < 1$.

Dans le cas non périodique, i.e., $S = 1$, la *Proposition* 5.3.2 se réduit au corollaire suivant.

Corollaire 5.3.2. Bentarzi and Bentarzi (2017b)) *Le processus* $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, *satisfaisant le modèle bilinéaire diagonal du premier ordre à valeurs entières* (5.2.2), *est stationnaire au second ordre si* : $(\varphi + \beta\mu_\varepsilon)^2 + \beta^2\sigma_\varepsilon^2 < 1$. *De plus, les forme explicites du moment d'ordre deux* $\mathbb{E}(y_t^2)$ *et des moments croisés* $\mathbb{E}(y_t^2\varepsilon_t)$ *et* $\mathbb{E}(y_t^2\varepsilon_t^2)$ *sont, sous cette condition, données par* :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}(y_t^2) \\ \mathbb{E}(y_t^2\varepsilon_t) \\ \mathbb{E}(y_t^2\varepsilon_t^2) \end{pmatrix} = (I - \Phi)^{-1} \underline{c}_t = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \\ c_{3,t} \end{pmatrix},$$

où $\Phi = \left(\prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1} \right)$, $\Delta = 1 - (\varphi + \beta\mu_\varepsilon)^2 - \beta^2\sigma_\varepsilon^2$ et

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - 2\varphi\beta\mu_\varepsilon - \beta^2\mu_\varepsilon^{(2)}, & a_{12} &= 2\varphi\beta, & a_{13} &= \beta^2, \\ a_{21} &= \varphi^2\mu_\varepsilon, & a_{22} &= 1 - \varphi^2 - \varphi^2\beta^2\mu_\varepsilon^{(2)}, & a_{23} &= \beta^2\mu_\varepsilon, \\ a_{31} &= \varphi^2\mu_\varepsilon^{(2)}, & a_{32} &= 2\varphi\beta\mu_\varepsilon^{(2)}, & a_{33} &= 1 - \varphi^2 - 2\varphi\beta\mu_\varepsilon, \\ c_{1,t} &= [2\varphi\mu_\varepsilon + \varphi(1 - \varphi)]\mu_y + [2\beta\mu_\varepsilon + \beta(1 - \beta)]\mathbb{E}(y_t\varepsilon_t) + \mu_\varepsilon^{(2)}, \\ c_{2,t} &= \varphi(1 - \varphi)\mu_y\mu_\varepsilon + 2\varphi\mu_y\mu_\varepsilon^{(2)} + \beta\left[(1 - \beta)\mu_\varepsilon + 2\mu_\varepsilon^{(2)}\right]\mathbb{E}(y_t\varepsilon_t) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^3), \\ c_{3,t} &= \varphi\left((1 - \varphi)\mu_\varepsilon^{(2)} + 2\mathbb{E}(\varepsilon_t^3)\right)\mu_y + \beta\left((1 - \beta)\mu_\varepsilon^{(2)} + 2\mathbb{E}(\varepsilon_t^3)\right)\mathbb{E}(y_t\varepsilon_t) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^4). \end{aligned}$$

Preuve (de *Proposition* 5.3.2). Le moment d'ordre deux, $\mathbb{E}(y_t^2)$, du processus périodiquement corrélé à valeurs entières donnés par l'équation aux différence (5.2.1), s'il existe, est donné par :

$$\mathbb{E}(y_t^2) = \mathbb{E}(B_t^2) + 2\mathbb{E}(B_t\varepsilon_t) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^2), \quad (5.3.6)$$

où $B_t = (\varphi_t \circ y_{t-1}) + \beta_t \circ (y_{t-1} \varepsilon_{t-1})$. Rappelons que les propriétés bien connues $E[(a \circ X)^2] = a^2 E(X^2) + a(1 - a)E(X)$ et $E[(a \circ X)(b \circ Y)] = abE(XY)$ ont été utilisées dans les premiers travaux d'Al-Osh et Alzaid (1987), Alzaid et Al-Osh, M. A.(1990)Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A.(1990)en (1990)). En utilisant ces propriétés et les nouvelles propriétés données par Silva and Oliveira (2000), on peut, après quelques simples manipulations, obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2) &= \varphi_t^2 \mathbb{E}(y_{t-1}^2) + \beta_t^2 \mathbb{E}[(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2)] + 2\varphi_t \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}) \\ &\quad + \varphi_t(1 - \varphi_t) \mathbb{E}(y_{t-1}) + \beta_t(1 - \beta_t) \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}), \\ \mathbb{E}(B_t \varepsilon_t) &= \varphi_t \mathbb{E}(y_{t-1}) \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) \mathbb{E}(\varepsilon_t). \end{aligned}$$

Remplaçons $\mathbb{E}(B_t^2)$ et $\mathbb{E}(B_t \varepsilon_t)$ par leur expressions dans (5.3.6), on obtient :

$$\mathbb{E}(y_t^2) = \varphi_t^2 \mathbb{E}(y_{t-1}^2) + 2\varphi_t \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}) + \beta_t^2 \mathbb{E}[(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2)] + c_{1,t}, \quad (5.3.7a)$$

où

$$c_{1,t} = [2\varphi_t \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \varphi_t(1 - \varphi_t)] \mathbb{E}(y_{t-1}) + [2\beta_t \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \beta_t(1 - \beta_t)] \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^2). \quad (5.3.7b)$$

Puisque les espérance de $y_t \varepsilon_t$ et de y_t ont été calculées précédemment, nous avons besoin de calculer $\mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t)$ et $\mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t^2)$. En effet, quelques manipulations ennuyeuses mènent au système d'équations suivant :

$$\mathbb{E}(y_t^2) = \varphi_t^2 \mathbb{E}(y_{t-1}^2) + 2\varphi_t \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}) + \beta_t^2 \mathbb{E}[(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2)] + c_{1,t}, \quad (5.3.7c)$$

$$\mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t) = \varphi_t^2 \mu_{\varepsilon,t} \mathbb{E}(y_{t-1}^2) + 2\varphi_t \beta_t \mu_{\varepsilon,t} \mathbb{E}(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}) + \beta_t^2 \mu_{\varepsilon,t} \mathbb{E}(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2) + c_{2,t}, \quad (5.3.7d)$$

$$\mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t^2) = \varphi_t^2 \mu_{\varepsilon,t}^{(2)} \mathbb{E}(y_{t-1}^2) + 2\varphi_t \beta_t \mu_{\varepsilon,t}^{(2)} \mathbb{E}(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}) + \beta_t^2 \mu_{\varepsilon,t}^{(2)} \mathbb{E}(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2) + c_{3,t}. \quad (5.3.7e)$$

où

$$\begin{aligned} \mu_{\varepsilon,t}^{(2)} &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2), \quad \mu_{\varepsilon,t} = \mathbb{E}(\varepsilon_t), \\ c_{1,t} &= [2\varphi_t \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \varphi_t(1 - \varphi_t)] \mathbb{E}(y_{t-1}) \\ &\quad + [2\beta_t \mathbb{E}(\varepsilon_t) + \beta_t(1 - \beta_t)] \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^2), \\ c_{2,t} &= \varphi_t(1 - \varphi_t) \mathbb{E}(y_{t-1}) \mathbb{E}(\varepsilon_t) + 2\varphi_t \mathbb{E}(y_{t-1}) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) \\ &\quad + \beta_t [(1 - \beta_t) \mathbb{E}(\varepsilon_t) + 2\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)] \mathbb{E}(y_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^3), \\ c_{3,t} &= \varphi_t [(1 - \varphi_t) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + 2\mathbb{E}(\varepsilon_t^3)] \mathbb{E}(y_{t-1}) \\ &\quad + \beta_t [(1 - \beta_t) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + 2\mathbb{E}(\varepsilon_t^3)] \mathbb{E}[(y_{t-1} \varepsilon_{t-1})] + \mathbb{E}(\varepsilon_t^4). \end{aligned} \quad (5.3.7f)$$

ou sous la forme vectorielle :

$$\underline{\xi}_t = \Phi_t \underline{\xi}_{t-1} + \underline{c}_t, \quad (5.3.8)$$

où les vecteurs périodiques $\underline{\xi}_t$, \underline{c}_t et la matrice périodique Φ_t , de période S , sont définies dans (5.3.4). Itérons l'équation (5.3.8), tout en tenant compte de la périodicité stricte du processus périodiquement corrélé $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et de la périodicité du vecteur \underline{c}_t et de la matrice $\Psi_t = \prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1}$ qui possède les mêmes valeurs propres que la matrice $\Psi = \prod_{i=1}^S \Phi_i$, la dernière équation peut être réécrite sous la forme

$$\underline{\xi}_t = \prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1} \underline{\xi}_t + \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=1}^j \Phi_{t-i+1} \underline{c}_{t-j}. \quad (5.3.9)$$

Il est bon de noter que la matrice $\prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1}$ est invariante dans le temps. D'où, l'équation (5.3.9) a une solution finie si toutes les valeurs propres de la matrice $\prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1}$ se trouvent à l'intérieur du cercle unité. Notons $\Psi_t = \prod_{i=1}^S \Phi_{t-i+1}$, où Φ_t est donné par (5.3.4), et posons $t = s + \tau S$, on a

$$\Psi_s = \left(\prod_{i=1}^{S-1} \omega_{s-i+1} \right) \begin{pmatrix} \varphi_{s+1}^2 & 2\varphi_{s+1} \beta_{s+1} & \beta_{s+1}^2 \\ \varphi_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s} & 2\varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s} \\ \varphi_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} & 2\varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} & \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} \end{pmatrix},$$

où $\omega_s = \varphi_s^2 + 2\varphi_s \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1} + \beta_s^2 \mu_{\varepsilon,s-1}^{(2)}$. Soit $\Theta_{s,S-1} = \left(\prod_{i=1}^{S-1} \omega_{s-i+1} \right)$, alors

$$\Psi_s = \prod_{i=1}^S \Phi_{s-i+1} = \Theta_{s,S-1} \begin{pmatrix} \varphi_{s+1}^2 & 2\varphi_{s+1} \beta_{s+1} & \beta_{s+1}^2 \\ \varphi_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s} & 2\varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s} \\ \varphi_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} & 2\varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} & \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

D'où, $|Iz - \Psi_s| = 0$, mène à $z = \Theta_{s,S-1} \left(\varphi_s^2 + 2\varphi_s \beta_s \mu_{\varepsilon,s} + \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} \right) = \prod_{i=1}^S \omega_{s-i+1}$, où

$$\omega_s = \varphi_s^2 + 2\varphi_s \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1} + \beta_s^2 \mu_{\varepsilon,s-1}^{(2)} = (\varphi_s + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1})^2 + \beta_s^2 \sigma_{\varepsilon,s-1}^2.$$

D'où la condition suffisante pour l'existence de $\mathbb{E}(y_t^2)$ est donnée par

$$\prod_{i=1}^S \left[(\varphi_{s-i+1} + \beta_{s-i+1} \mu_{\varepsilon,s-i})^2 + \beta_{s-i+1}^2 \sigma_{\varepsilon,s-i}^2 \right] < 1,$$

qui se réduit, dans le cas invariant dans le temps, i.e., $S = 1$, à $(\varphi + \beta \mu_{\varepsilon})^2 + \beta^2 \sigma_{\varepsilon}^2 < 1$.

La forme explicite de $\mathbb{E}(y_t^2)$ est le premier composant du vecteur colonne $\underline{\xi}_t$ donné par

(5.3.9). Soit $t = s + \tau S$, alors $(I - \Psi_s) \underline{\xi}_s = \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \right) \underline{c}_{s-j}$. Il est facile de vérifier

que le déterminant de la matrice $I - \Psi_s$ est $\Delta_s = 1 - \prod_{i=1}^S \left[(\varphi_i + \beta_i \mu_{\varepsilon,i-1})^2 + \beta_i^2 \sigma_{\varepsilon,i-1}^2 \right]$.

La matrice $I - \Psi_s$ est alors, explicitement, donnée par :

$$I - \Psi_s = \begin{pmatrix} 1 - \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1}^2 & -2\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \beta_{s+1} & -\Theta_{s,S-1} \beta_{s+1}^2 \\ -\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s} & 1 - 2\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s} & -\Theta_{s,S-1} \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s} \\ -\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} & -2\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} & 1 - \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} \end{pmatrix},$$

et sa matrice inverse est donnée par $(I - \Psi_s)^{-1} = \Delta^{-1} A_s$ où les éléments matriciels a_{ij} ,

$i, j = 1, 2, 3$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 1 - \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} - 2\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s}, & a_{21} &= \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}, & a_{31} &= \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)}, \\
 a_{12} &= 2\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \beta_{s+1}, & a_{22} &= 1 - \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1}^2 - \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)}, & a_{32} &= 2\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s}^{(2)}, \\
 a_{13} &= \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1}^2, & a_{23} &= \Theta_{s,S-1} \beta_{s+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}, & a_{33} &= 1 - \Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1}^2 - 2\Theta_{s,S-1} \varphi_{s+1} \beta_{s+1} \mu_{\varepsilon,s}.
 \end{aligned}$$

Alors, on a $\underline{\xi}_s = (I - \Psi_s)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \underline{c}_{s-j}$, où la matrice $\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1}$ est explicitement donnée par

$$\prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} = \Theta_{s,j-1} \begin{pmatrix} \varphi_{s-(j-1)}^2 & 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} & \beta_{s-(j-1)}^2 \\ \varphi_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon,s} & 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} \mu_{\varepsilon,s} & \beta_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon,s} \\ \varphi_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} & 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} & \beta_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} \end{pmatrix},$$

et $\mu_{\varepsilon,s}^{(2)} = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$, $\Theta_{s,j} = \prod_{i=1}^j \omega_{s-i+1}$, $\omega_s = \varphi_s^2 + 2\varphi_s \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1} + \beta_s^2 \mu_{\varepsilon,s-1}^{(2)}$, avec mla convention

$\prod_{i=1}^j x_i = 1$ si $j < i$. Finalement, on a :

$$\underline{\xi}_s = (I - \Psi_s)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=1}^j \Phi_{s-i+1} \underline{c}_{s-j} = (I - \Psi_s)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \Theta_{s,j-1} \underline{b}_{s,j},$$

où le vecteur colonne $\underline{b}'_{s,j} = (b_{1,s,j}, b_{2,s,j}, b_{3,s,j})$ est donné par

$$\begin{aligned}
 b_{1,s,j} &= \varphi_{s-(j-1)}^2 c_{1,s-j} + 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} c_{2,s-j} + \beta_{s-(j-1)}^2 c_{3,s-j}, \\
 b_{2,s,j} &= \varphi_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon,s} c_{1,s-j} + 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} \mu_{\varepsilon,s} c_{2,s-j} + \beta_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon,s} c_{3,s-j}, \\
 b_{3,s,j} &= \varphi_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} c_{1,s-j} + 2\varphi_{s-(j-1)} \beta_{s-(j-1)} \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} c_{2,s-j} + \beta_{s-(j-1)}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} c_{3,s-j},
 \end{aligned}$$

où $c_{i,t}$, $i = 1, 2, 3$ sont donnés par (5.3.5). Dans le cas classique (coefficient invariants dans le temps), i.e., $S = 1$, Φ_t et Δ_s se réduisent à

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^2 & 2\varphi\beta & \beta^2 \\ \varphi^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t) & 2\varphi\beta \mathbb{E}(\varepsilon_t) & \beta^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t) \\ \varphi^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) & 2\varphi\beta \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) & \beta^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) \end{pmatrix}, \text{ et } \Delta_s = 1 - (\varphi + \beta \mu_\varepsilon)^2 - \beta^2 \sigma_\varepsilon^2.$$

Alors, on a :

$$\underline{\xi}_t = \frac{1}{\Delta_s} \begin{pmatrix} \left(1 - 2\varphi\beta\mu_\varepsilon - \beta^2\mu_\varepsilon^{(2)}\right) & 2\varphi\beta & \beta^2 \\ \varphi^2 \mu_\varepsilon & \left(1 - \varphi^2 - \varphi^2\beta^2\mu_\varepsilon^{(2)}\right) & \beta^2 \mu_\varepsilon \\ \varphi^2 \mu_\varepsilon^{(2)} & 2\varphi\beta \mu_\varepsilon^{(2)} & (1 - \varphi^2 - 2\varphi\beta\mu_\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \\ c_{3,t} \end{pmatrix},$$

où $c_{i,t}$, $i = 1, 2, 3$ sont donnés par (5.3.5). Ou plus explicitement

$$\underline{\xi}_t = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(y_t^2) \\ \mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t) \\ \mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t^2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_s} \begin{pmatrix} \left(1 - 2\varphi\beta\mu_\varepsilon - \beta^2\mu_\varepsilon^{(2)}\right) c_{1,t} + 2\varphi\beta c_{2,t} + \beta^2 c_{3,t} \\ \varphi^2 \mu_\varepsilon c_{1,t} + \left(1 - \varphi^2 - \varphi^2\beta^2\mu_\varepsilon^{(2)}\right) c_{2,t} + \beta^2 \mu_\varepsilon c_{3,t} \\ \varphi^2 \mu_\varepsilon^{(2)} c_{1,t} + 2\varphi\beta \mu_\varepsilon^{(2)} c_{2,t} + (1 - \varphi^2 - 2\varphi\beta\mu_\varepsilon) c_{3,t} \end{pmatrix}.$$

5.4 Structure de l'Autocovariance

Soit $\gamma^{(t)}(h) = \mathbb{E}(y_t y_{t-h}) - \mu_{y,t} \mu_{y,t-h}$, $t, h \in \mathbb{N}$ la fonction d'autocovariance, à l'instant t et au décalage h , de ce processus. La proposition suivante établit la structure de l'autocovariance du processus périodiquement corrélé $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$, solution du modèle (5.2.1) et satisfaisant la condition de stationnarité périodique de second ordre donnée par la *Proposition* 5.3.2.

Proposition 5.4.1. Bentarzi and Bentarzi (2017b) *La structure de l'autocovariance du processus périodiquement corrélé $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par*

$$\gamma^{(s)}(0) = \varphi_s \gamma^{(s)}(1) + \theta_s \mu_{y,s} \mu_{y,s-1} + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1} \mu_{y,s} - \mu_{y,s}^2 + \beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 \mu_{y,s} + \mu_{\varepsilon,s} \mu_{y,s} + \sigma_{\varepsilon,s}^2, \quad 5.4.1a$$

$$\gamma^{(s)}(1) = \theta_s \gamma^{(s-1)}(0) + \beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 \mu_{y,s-1} - 3\beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 \mu_{\varepsilon,s-1} + \beta_s \left(\mu_{\varepsilon,s-1}^{(3)} - \mu_{\varepsilon,s-1}^3 \right), \quad 5.4.1b$$

$$\gamma^{(s)}(h) = \theta_s \gamma^{(s-1)}(h-1) = \left(\prod_{i=1}^{h-1} \theta_{s-i+1} \right) \gamma^{(s-h+1)}(1), \quad h \geq 2, \quad 5.4.1c$$

où $\mu_{\varepsilon,s-1}^{(3)}$ est le moment d'ordre quatre du processus d'innovations et $\sigma_{\varepsilon,s}^2$ est sa variance et

où $\theta_s = \varphi_s + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1}$, avec la convention $\prod_{j=1}^i x_j = 1$ si $i < 1$ et $\sum_{j=x}^y a_j = 0$ si $y < x$.

où $\mu_{\varepsilon,s-1}^{(3)}$ est le moment d'ordre trois du processus d'innovations et $\sigma_{\varepsilon,s}^2$ est sa variance et où

$\theta_s = \varphi_s + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1}$, avec la convention $\prod_{j=1}^i x_j = 1$ si $i < 1$ et $\sum_{j=x}^y a_j = 0$ si $y < x$.

Remarque. La forme explicite de $\gamma^{(s)}(0) = \mathbb{E}(y_s^2) - (\mathbb{E}(y_s))^2$ peut être obtenue en utilisant les formules d'exploit de $\mathbb{E}(y_s)$ et $\mathbb{E}(y_s^2)$ données, respectivement, dans *Proposition* 5.3.1 et *Proposition* 5.3.2. En effet, on a

$$\begin{aligned} \gamma^{(s)}(0) = & \frac{1}{\Delta_s} \sum_{i=1}^3 a_{1i} c_{i,t} + \frac{1}{\Delta_s} \sum_{j=1}^{S-1} \Theta_{s,j-1} \left\{ a_{11} (\varphi_{s-j+1}^2 c_{1,s-j} + 2\varphi_{s-j+1} \beta_{s-j+1} c_{2,s-j} + \beta_{s-j+1}^2 c_{3,s-j}) \right. \\ & + a_{12} (\varphi_{s-j+1}^2 \mu_{\varepsilon,s} c_{1,s-j} + 2\varphi_{s-j+1} \beta_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s} c_{2,s-j} + \beta_{s-j+1}^2 \mu_{\varepsilon,s} c_{3,s-j}) \\ & \left. + a_{13} (\varphi_{s-j+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} c_{1,s-j} + \varphi_{s-j+1} \beta_{s-j+1} \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} c_{2,s-j} + \beta_{s-j+1}^2 \mu_{\varepsilon,s}^{(2)} c_{3,s-j}) \right\} - (\mathbb{E}(y_s))^2, \end{aligned}$$

où Δ_s , la matrice $\Theta_{s,j}$, $j = 1, 2, \dots, S$ et les éléments a_{1i} , $i = 1, 2, 3$, sont donnés dans *Proposition* 5.3.2 et $c_{1,t}$, $c_{2,t}$ et $c_{3,t}$ sont, respectivement, donnés par (5.3.5a) (5.3.5b) et (5.3.5c) et

où $\mathbb{E}(y_s)$, $s = 1, 2, \dots, S$ sont donnés dans *Proposition* 5.3.1. De plus, en utilisant ce résultat les formes explicites de $\gamma^{(s)}(1)$ et $\gamma^{(s)}(h)$, $h \geq 2$, peuvent être obtenues, respectivement, de (5.4.1b) et (5.4.1c).

Dans le cas important où le processus d'innovations $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus de Poisson de moyenne $\mu_{\varepsilon,s}$, la dernière proposition se réduit au corollaire suivant.

Corollaire 5.4.1. Bentarzi and Bentarzi (2017b) *Dans le cas de processus d'innovations de Poisson $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$, la structure de l'autocovariance du processus périodiquement corrélé $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par*

$$\gamma^{(s)}(0) = \varphi_s \gamma^{(s)}(1) + \theta_s \mu_{y,s} \mu_{y,s-1} + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1} \mu_{y,s} - \mu_{y,s}^2 + (\mu_{y,s} + 1) \mu_{\varepsilon,s}, \quad (5.4.2a)$$

$$\gamma^{(s)}(1) = \theta_s \gamma^{(s-1)}(0) + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1} (\mu_{y,s-1} + 1), \quad (5.4.2b)$$

$$\gamma^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^{h-1} \theta_{s-i+1} \right) \gamma^{(s-h+1)}(1), \quad h \geq 2. \quad (5.4.2c)$$

avec la convention $\prod_{i=1}^j x_i = 1$ si $j < i$.

Remarque. Les résultats donnés par ce corollaire, se réduit, dans le cas invariant dans le temps avec processus d'innovations Poissonier, aux résultats donnés par Doukhan et al (2006) dans la page 568.

Corollaire 5.4.2. Bentarzi and Bentarzi (2017b) *La fonction d'autocorrélation du processus périodiquement corrélé $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par :*

$$\rho^{(s)}(1) = \frac{\sqrt{\gamma^{(s-1)}(0)}}{\sqrt{\gamma^{(s)}(0)}} \theta_s + \frac{1}{\sqrt{\gamma^{(s)}(0)} \sqrt{\gamma^{(s-1)}(0)}} \left[\beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 \mu_{y,s-1} - 3\beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 \mu_{\varepsilon,s-1} + \beta_s \left(\mu_{\varepsilon,s-1}^{(3)} - \mu_{\varepsilon,s-1}^3 \right) \right], \quad (5.4.3)$$

$$\rho^{(s)}(h) = \theta_s \frac{\sqrt{\gamma^{(s)}(0)}}{\sqrt{\gamma^{(s-1)}(0)}} \rho^{(s-1)}(h-1), \quad h \geq 2, \quad (5.4.4)$$

Corollaire 5.4.3. Bentarzi and Bentarzi (2017b) *Dans le cas de processus d'innovations Poissonier, la fonction d'autocorrélation du processus périodiquement corrélé $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est donnée par :*

$$\rho^{(s)}(1) = \frac{\sqrt{\gamma^{(s-1)}(0)}}{\sqrt{\gamma^{(s)}(0)}} \theta_s + \frac{\mu_{y,s-1} + 1}{\sqrt{\gamma^{(s)}(0)} \sqrt{\gamma^{(s-1)}(0)}} \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1} \quad (5.4.5a)$$

$$\rho^{(s)}(h) = \theta_s \frac{\sqrt{\gamma^{(s-1)}(0)} \sqrt{\gamma^{(s-h-1)}(0)}}{\sqrt{\gamma^{(s)}(0)} \sqrt{\gamma^{(s-h)}(0)}} \rho^{(s-1)}(h-1), \quad h \geq 2, \quad (5.4.5b)$$

où $\mu_{y,s}$ est donné par (5.3.1b) et $\theta_s = (\varphi_s + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1})$.

Preuve. Calculons la fonction d'autocorrélation $\gamma^{(t)}(h)$ pour $h \geq 1$. L'espérance $\mathbb{E}(y_t y_{t-h})$ est donnée par $\mathbb{E}(y_t y_{t-h}) = \varphi_t \mathbb{E}(y_{t-1} y_{t-h}) + \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1} y_{t-h} \varepsilon_{t-1}) + \mu_{\varepsilon,t} \mu_{y,t-h}$. En particulier, on a pour $h = 1$

$$\mathbb{E}(y_t y_{t-1}) = \varphi_t \mathbb{E}(y_{t-1}^2) + \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}) + \mu_{\varepsilon,t} \mu_{y,t-1}. \quad (5.4.6)$$

En utilisant (5.3.7c) et (5.3.7d), on obtient, après quelques manipulations

$$\mathbb{E}(y_t^2 \varepsilon_t) = \mu_{\varepsilon,t} \mathbb{E}(y_t^2) + (c_{2,t} - \mu_{\varepsilon,t} c_{1,t}),$$

En remplaçant dans (5.4.6), on obtient

$$\mathbb{E}(y_t y_{t-1}) = \theta_t \mathbb{E}(y_{t-1}^2) + \beta_t (c_{2,t-1} - \mu_{\varepsilon,t-1} c_{1,t-1}) + \mu_{\varepsilon,t} \mu_{y,t-1}, \quad (5.4.7)$$

En utilisant (5.3.5a) et (5.3.5b), on peut calculer la quantité $c_{2,t-1} - \mu_{\varepsilon,t-1} c_{1,t-1}$ et on obtient

$$\begin{aligned} c_{2,t-1} - \mu_{\varepsilon,t-1} c_{1,t-1} &= 2\beta_{t-1} \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \mathbb{E}(y_{t-2} \varepsilon_{t-2}) + 2\varphi_{t-1} \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \mu_{y,t-2} \\ &\quad + (\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^3) - \mu_{\varepsilon,t-1}^3) - \mu_{\varepsilon,t-1} \sigma_{\varepsilon,t-1}^2. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

En remplaçant dans (5.4.7) ceci mène à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_t y_{t-1}) &= \theta_t \mathbb{E}(y_{t-1}^2) + 2\varphi_{t-1} \beta_t \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \mu_{y,t-2} + 2\beta_t \beta_{t-1} \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \mathbb{E}(y_{t-2} \varepsilon_{t-2}) \\ &\quad + \beta_t \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^3) - \beta_t \mu_{\varepsilon,t-1} \mu_{\varepsilon,t-1}^{(2)} + \mu_{\varepsilon,t} \mu_{y,t-1}. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Il est facile de voir, de (5.3.1c) et (5.3.1d), que $\zeta_t = \mathbb{E}(y_t \varepsilon_t) = \mu_{y,t} \mu_{\varepsilon,t} + \sigma_{\varepsilon,t}^2$, en remplaçant dans (5.4.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma^{(t)}(1) &= \theta_t \gamma^{(t-1)}(0) + (\theta_t \mu_{y,t-1} - \mu_{y,t}) \mu_{y,t-1} + 2\varphi_{t-1} \beta_t \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \mu_{y,t-2} \\ &\quad + 2\beta_t \beta_{t-1} \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \mu_{y,t-2} \mu_{\varepsilon,t-2} + 2\beta_t \beta_{t-1} \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \sigma_{\varepsilon,t-2}^2 \\ &\quad + \beta_t \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^3) - \beta_t \mu_{\varepsilon,t-1} \mu_{\varepsilon,t-1}^{(2)} + \mu_{\varepsilon,t} \mu_{y,t-1}. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Après quelques manipulations, en utilisant de nouveau (5.3.1c), on obtient

$$\gamma^{(t)}(1) = \theta_t \gamma^{(t-1)}(0) + \beta_t \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \mu_{y,t-1} - 3\beta_t \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 \mu_{\varepsilon,t-1} + \beta_t (\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^3) - \mu_{\varepsilon,t-1}^3). \quad (5.4.10a)$$

où $\theta_t = (\varphi_t + \beta_t \mu_{\varepsilon,t-1})$. Pour $h \geq 2$, l'autocovariance est donnée par

$$\mathbb{E}(y_t y_{t-h}) = \varphi_t \mathbb{E}(y_{t-1} y_{t-h}) + \beta_t \mathbb{E}(y_{t-1} y_{t-h} \varepsilon_{t-1}) + \mu_{\varepsilon,t} \mu_{y,t-h}. \quad (5.4.11)$$

Après quelques manipulations, on obtient, pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E}(y_{t-1} y_{t-h} \varepsilon_{t-1}) = \varphi_{t-1} \mu_{\varepsilon,t-1} \mathbb{E}(y_{t-2} y_{t-h}) + \beta_{t-1} \mu_{\varepsilon,t-1} \mathbb{E}(y_{t-2} \varepsilon_{t-2} y_{t-h}) + \mu_{\varepsilon,t-1}^{(2)} \mu_{y,t-h}.$$

Remplaçons t par $t - 1$ et h par $h - 1$ dans (5.4.11), on obtient

$$\mathbb{E}(y_{t-1}y_{t-h}) = \varphi_{t-1}\mathbb{E}(y_{t-2}y_{t-h}) + \beta_{t-1}\mathbb{E}(y_{t-2}y_{t-h}\varepsilon_{t-2}) + \mu_{\varepsilon,t-1}\mu_{y,t-h},$$

en multipliant la dernière égalité par $\mu_{\varepsilon,t-1}$, on obtient

$$\mu_{\varepsilon,t-1}\mathbb{E}(y_{t-1}y_{t-h}) = \varphi_{t-1}\mu_{\varepsilon,t-1}\mathbb{E}(y_{t-2}y_{t-h}) + \beta_{t-1}\mu_{\varepsilon,t-1}\mathbb{E}(y_{t-2}y_{t-h}\varepsilon_{t-2}) + \mu_{\varepsilon,t-1}^2\mu_{y,t-h},$$

La dernière égalité peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \mu_{\varepsilon,t-1}\mathbb{E}(y_{t-1}y_{t-h}) &= \left(\varphi_{t-1}\mu_{\varepsilon,t-1}\mathbb{E}(y_{t-2}y_{t-h}) + \beta_{t-1}\mu_{\varepsilon,t-1}\mathbb{E}(y_{t-2}y_{t-h}\varepsilon_{t-2}) + \mu_{\varepsilon,t-1}^{(2)}\mu_{y,t-h} \right) \\ &\quad + \mu_{\varepsilon,t-1}^2\mu_{y,t-h} - \mu_{\varepsilon,t-1}^{(2)}\mu_{y,t-h} \\ &= \mathbb{E}(y_{t-1}y_{t-h}\varepsilon_{t-1}) + \mu_{\varepsilon,t-1}^2\mu_{y,t-h} - \mu_{\varepsilon,t-1}^{(2)}\mu_{y,t-h}. \end{aligned}$$

D'où, on a

$$\mathbb{E}(y_{t-1}y_{t-h}\varepsilon_{t-1}) = \mu_{\varepsilon,t-1}\mathbb{E}(y_{t-1}y_{t-h}) - \left(\mu_{\varepsilon,t-1}^2\mu_{y,t-h} - \mu_{\varepsilon,t-1}^{(2)}\mu_{y,t-h} \right)$$

Remplaçons $\mathbb{E}(y_{t-1}y_{t-h}\varepsilon_{t-1})$ par son expression (5.4.11), en posant $t = s + \tau S$ et tenant compte de la périodicité, on obtient

$$\gamma^{(s)}(h) = \theta_s \gamma^{(s-1)}(h-1) + (\theta_s \mu_{y,s-1} - \mu_{y,s}) \mu_{y,s-h} + (\beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 + \mu_{\varepsilon,s}) \mu_{y,s-h}, \quad h \geq 2, \quad (5.4.12)$$

où $\mu_{y,s}$ est donnée dans *Proposition* 5.3.1 et $\theta_{s-i+1} = \varphi_{s-i+1} + \beta_{s-i+1}\mu_{\varepsilon,s-i}$.

De (3.4.1) et (3.4.2), on a $\zeta_t = \mu_{y,t}\mu_{\varepsilon,t} + \sigma_{\varepsilon,t}^2$, $t \in \mathbb{Z}$, utilisant encore (3.4.1), en remplaçant t par $s + \tau S$, on obtient

$$\mu_{y,s} = \theta_s \mu_{y,s-1} + \mu_{\varepsilon,s} + \beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (5.4.12a)$$

D'où, on a $(\theta_s \mu_{y,s-1} - \mu_{y,s}) = -(\beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 + \mu_{\varepsilon,s})$ en remplaçant $\theta_s \mu_{y,s-1} - \mu_{y,s}$ par sa valeur dans (5.4.10) et (5.4.12), on obtient

$$\gamma^{(s)}(1) = \theta_s \gamma^{(s-1)}(0) + \beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 \mu_{y,s-1} - 3\beta_s \sigma_{\varepsilon,s-1}^2 \mu_{\varepsilon,s-1} + \beta_s \left(\mu_{\varepsilon,s-1}^{(3)} - \mu_{\varepsilon,s-1}^3 \right), \quad (5.4.13a)$$

$$\gamma^{(s)}(h) = \theta_s \gamma^{(s-1)}(h-1), \quad h \geq 2. \quad (5.4.13b)$$

Itérons (5.4.13b), on obtient pour $h \geq 2$

$$\gamma^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^{h-1} \theta_{s-i+1} \right) \gamma^{(s-h+1)}(1). \quad (5.4.14)$$

Remplaçons $\gamma^{(s-h+1)}(1)$ dans (5.4.14) par sa valeur donnée par (5.4.13a), on obtient :

$$\gamma^{(s)}(h) = \left(\prod_{i=1}^{h-1} \theta_{s-i+1} \right) \left\{ \theta_{s-h+1} \gamma^{(s-h)}(0) + \beta_{s-h+1} \sigma_{\varepsilon, s-h}^2 \mu_{y, s-h} - 3\beta_{s-h+1} \sigma_{\varepsilon, s-h}^2 \mu_{\varepsilon, s-h} + \beta_{s-h+1} \left(\mu_{\varepsilon, s-h}^{(3)} - \mu_{\varepsilon, s-h}^3 \right) \right\},$$

avec la convention $\prod_{i=1}^j x_i = 1$ si $j < i$ et $\sum_{j=x}^y a_j = 0$ si $y < x$.

La fonction d'autocorrélation est alors, en posant $h = \nu + kS$, $\nu = 1, 2, \dots, S$ et $k \in \mathbb{N}$, donnée par :

$$\begin{aligned} \rho^{(s)}(\nu + kS) &= \left(\prod_{i=1}^S \theta_s \right)^k \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \theta_{s-i+1} \right) \left\{ \theta_{s-\nu+1} \sqrt{\frac{\gamma^{(s-\nu)}(0)}{\gamma^{(s)}(0)}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma^{(s)}(0) \gamma^{(s-\nu)}(0)}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\beta_{s-\nu+1} \sigma_{\varepsilon, s-\nu}^2 \mu_{y, s-\nu} + 3\beta_{s-\nu+1} \sigma_{\varepsilon, s-\nu}^2 \mu_{\varepsilon, s-\nu} - \beta_{s-\nu+1} \left(\mu_{\varepsilon, s-\nu}^{(3)} - \mu_{\varepsilon, s-\nu}^3 \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où le processus d'innovations est de Poisson périodique avec moyenne $\mu_{\varepsilon, t}$ on a :

$$\rho^{(s)}(\nu + kS) = \left(\prod_{i=1}^S \theta_s \right)^k \left(\prod_{i=1}^{\nu-1} \theta_{s-i+1} \right) \left[\theta_{s-\nu+1} \sqrt{\frac{\gamma^{(s-\nu)}(0)}{\gamma^{(s)}(0)}} + \frac{\beta_{s-\nu+1} \mu_{\varepsilon, s-\nu} (\mu_{y, s-\nu} + 1)}{\sqrt{\gamma^{(s)}(0) \gamma^{(s-\nu)}(0)}} \right],$$

où $\theta_s = (\varphi_s + \beta_s \mu_{\varepsilon, s-1})$.

Dans le cas non périodique avec processus d'innovation de Poisson, on a

$$\rho(h) = (\varphi + \beta \mu_{\varepsilon})^{h-1} \left[\varphi + \beta \mu_{\varepsilon} + \frac{\beta (\mu_Y + 1) \mu_{\varepsilon}}{\gamma(0)} \right], \quad h \geq 1.$$

5.5 Estimation de Yule-Walker

Ce paragraphe se concentre sur l'estimation, adoptant la méthode d'estimation de Yule-Walker, des paramètres sous-jacents du modèle dans le cas de processus d'innovation de Poisson avec moyenne $\mu_{\varepsilon, s}$, $s = 1, 2, \dots, S$. En effet, la proposition suivante établit l'estimation de Yule-Walker.

Proposition 5.5.1. Bentarzi and Bentarzi (2017b) *Si le processus d'innovation $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus suivant une loi de Poisson avec moyenne $\mu_{\varepsilon,s}$, alors les estimateurs de Yule-Walker des paramètres φ_s, β_s et $\mu_{\varepsilon,s}$, $s = 1, 2, \dots, S$, sont donnés, pour $s = 1, 2, \dots, S$, comme suit :*

Etape une (Estimation de θ_s) :

$$\hat{\theta}_s = \frac{\hat{\gamma}^{(s)}(2)}{\hat{\gamma}^{(s-1)}(1)}, \text{ où } \theta_s = (\varphi_s + \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1}).$$

Etape deux (Estimation de $\beta_s \mu_{\varepsilon,s-1}$)

$$\hat{B}_s = \beta_s \widehat{\mu_{\varepsilon,s-1}} = \frac{\hat{\gamma}^{(s)}(1) - \hat{\theta}_s \hat{\gamma}^{(s-1)}(0)}{1 + \widehat{\mu_{y,s-1}}}.$$

Etape trois (Estimation de $\mu_{\varepsilon,s}$) :

$$\widehat{\mu_{\varepsilon,s}} = \widehat{\mu_{y,s}} - \hat{\theta}_s \widehat{\mu_{y,s-1}} - \hat{B}_s.$$

Etape quatre (Estimation de φ_s et β_s) :

$$\hat{\varphi}_s = \hat{\theta}_s - \hat{B}_s, \text{ et } \hat{\beta}_s = \frac{\hat{B}_s}{\widehat{\mu_{\varepsilon,s-1}}}.$$

Remarques

- a) L'estimation de θ_s dans l'étape 1 est obtenue de l'expression (5.4.2c) du corollaire 5.4.1, en remplaçant $\gamma^{(s)}(h)$ et $\gamma^{(s-1)}(h-1)$, pour $h = 2$, par leur estimation empiriques.
- b) L'estimation du produit $B_s = \beta_s \mu_{\varepsilon,s-1}$ dans l'étape 2, est obtenu, de l'expression (5.4.2b) du corollaire 5.4.1, en remplaçant θ_s par son estimateur et les autres termes par leur estimateurs empiriques.
- c) l'estimation de $\mu_{\varepsilon,s}$ dans l'étape 3 est obtenue de l'expression (5.4.12a) du processus d'innovation de Poisson for the Poisson innovation process ($\sigma_{\varepsilon,s}^2 = \mu_{\varepsilon,s}$), en remplaçant B_s et θ_s par leurs estimateurs obtenus.
- d) L'estimateur de φ_s , dans l'étape 4 est obtenu de l'expression définissant θ_s , en remplaçant θ_s et $\beta_s \mu_{\varepsilon,s-1}$ par leurs estimateurs obtenus. Finalement, l'estimateur $\hat{\beta}_s$ donné par $\frac{\hat{B}_s}{\widehat{\mu_{\varepsilon,s-1}}}$ est très commun dans les modèles de séries chronologiques Bilinéaires (voir par exemple Doukhan et al (2006), Grahn (1995)).

5.5.1 Etude de simulation

Dans toutes les tables ci-dessous, les notations $\bar{\varphi}_s$, $\bar{\beta}_s$ et $\bar{\mu}_{\varepsilon,s}$ représentent, pour 1000 réplifications, la moyennes des estimateurs des paramètres correspondants à $\hat{\sigma}_{\varphi_s}$, $\hat{\sigma}_{\beta_s}$ et $\hat{\sigma}_{\mu_s}$ représentent les estimateur empiriques des écart-types des estimateurs des paramètres.

La *Table 1* donne la moyenne des estimateurs, pour 1000 réplifications, d'une série chronologique de taille $N = 1000$ générée par un processus Bilinéaire périodique, de période $S = 4$, à valeurs entières $PINBL_4(1, 0, 1, 1)$:

s	φ_s	$\bar{\varphi}_s$	$\hat{\sigma}_{\varphi_s}$	β_s	$\bar{\beta}_s$	$\hat{\sigma}_{\beta_s}$	$\mu_{\varepsilon,s}$	$\bar{\mu}_{\varepsilon,s}$	$\hat{\sigma}_{\mu_s}$
1	.2	.1966	.1773	.15	.1513	.0955	1	1.0347	.3723
2	.7	.7033	.1244	.1	.1006	.2584	.5	.5216	.1753
3	.4	.4077	.1442	.4	.4179	.3264	1.5	1.5238	.2948
4	.45	.4481	.2216	.3	.2928	.1320	2	2.0650	.4122

Table 1

La *Figure 1* montre en bleu une série chronologique périodique, de période $S = 4$ et de taille $N = 1000$, générée d'un $PINBL_4(1, 0, 1, 1)$ et en rouge la série ajustée \hat{y}_t

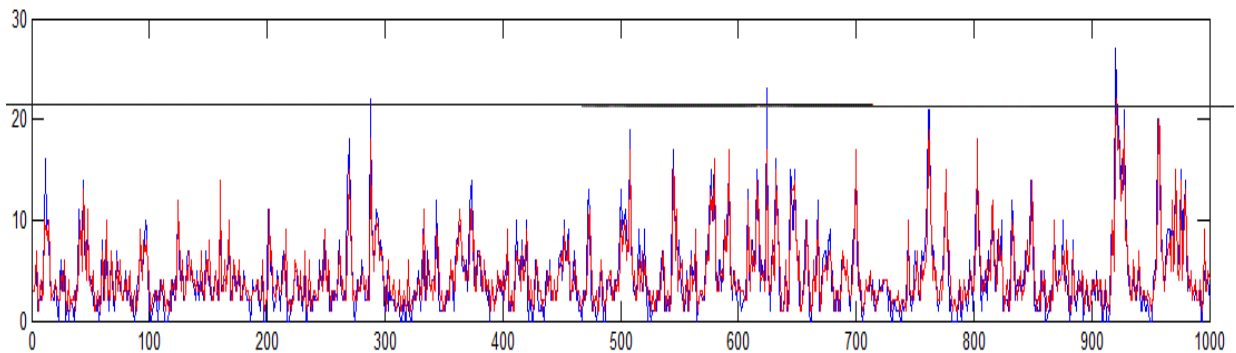


Figure 1

La *Figure 2* représente la fonction d'autocorrélation résiduelle estimée pour chaque pé-

riode :

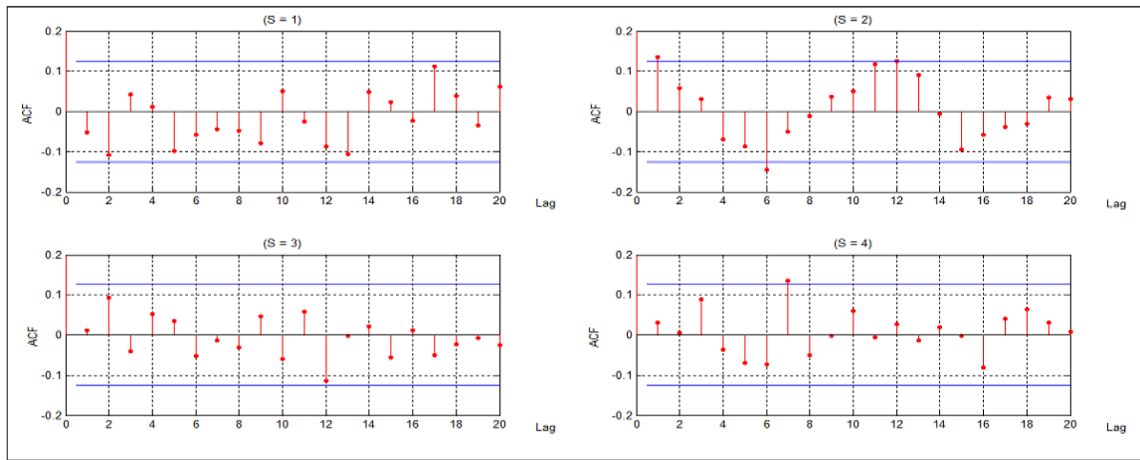


Figure 2

A fin d'étudier empiriquement la propriété de consistance des estimateurs obtenus, nous présentons la *Table 2*, qui montre les résultats d'estimation de Yule-Walker, pour 1000 répliques, des séries de tailles $N = 1200, 1500, 1700$ et 2000 générées.

s	N	φ_s	$\widehat{\varphi}_s$	$\widehat{\sigma}_{\widehat{\varphi}_s}$	β_s	$\widehat{\beta}_s$	$\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_s}$	$\mu_{\varepsilon,s}$	$\widehat{\mu}_{\varepsilon,s}$	$\widehat{\sigma}_{\widehat{\mu}_{\varepsilon,s}}$
1	1200	.2	.2045	.1717	.15	.1496	.0900	1	1.0260	.3516
	1500		.2007	.1555		.1475	.0613		1.0294	.3196
	1700		.2042	.1418		.1458	.0551		1.0221	.3035
	2000		.1954	.1317		.1508	.0591		1.0252	.2729
2	1200	.7	.7032	.1064	.1	.1018	.2451	.5	.5235	.1612
	1500		.7009	.0982		.1071	.2287		.5144	.1431
	1700		.7029	.0914		.0939	.2663		.512	.1355
	2000		.7017	.0845		.1081	.1420		.5123	.1292
3	1200	.4	.3942	.1199	.4	.4097	.3165	1.5	1.5310	.2693
	1500		.3979	.1057		.4084	.3115		1.5310	.2458
	1700		.3974	.1015		.4176	.2348		1.5322	.2377
	2000		.3956	.0944		.4146	.2440		1.5184	.2218
4	1200	.45	.4492	.2173	.3	.2962	.1133	2	2.0318	.3986
	1500		.4494	.2017		.2962	.1078		2.0336	.3329
	1700		.4528	.1907		.2922	.0983		2.0442	.3323
	2000		.4459	.1808		.2979	.0938		2.041	.3186

Table 2

Des résultats de simulation, on peut voir que les moyennes des estimateurs obtenus sont proches des vraies valeurs données et la variance diminue quand N diminue d'où la propriété

de consistance est vérifiée. Cependant les variances sont relativement importantes, ceci est dû au fait que la loi du processus sous-jacent est une circonvolution des lois de Bernoulli et de Poisson. Néanmoins, ces évaluations peuvent être utilisées comme des valeurs initiales pour la méthode d'estimation la plus puissante, à savoir la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance conditionnel.

Chapitre 6

Conclusion générale

Cette thèse porte sur la structure, l'inférence statistique et des applications de quelques modèles de séries chronologiques à valeurs réelles ou entières. Nous avons scindé ce travail en deux parties majeures. La première concerne les modèles périodiques à valeurs réelles tandis que la seconde porte sur des modèles de périodiques à valeurs entières.

Concernant les modèles à valeurs réelles, nous étudions d'abord les propriétés asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés ordinaire d'un modèle autorégressif périodique multivarié explosif dont les valeurs propres de la matrice autorégressive monodromique sont en module à l'extérieur du cercle unité. En particulier, nous en obtenons la loi asymptotique qui est de forme non-standard. Nous étudions ensuite plusieurs types de stabilité stochastique d'un modèle autorégressif bilinéaire diagonal périodique. Des conditions suffisantes et/ou nécessaires pour la stationnarité périodique stricte, l'ergodicité périodique, la stationnarité périodique d'ordre supérieur et l'inversibilité sont proposées. De plus, la structure de covariance du modèle est mise en évidence. Enfin l'estimation des paramètres du modèle est étudiée à travers trois méthodes : la méthode des moments, la méthode des moindres carrés et la méthode du maximum de vraisemblance.

Pour la deuxième partie, nous proposons trois nouveaux modèles périodiques à valeurs entières. Le premier est un modèle autorégressif poissonnien périodique appelé aussi INGARCH périodique, le second est une généralisation du premier à une distribution conditionnelle qui est un mélange de lois de Poisson et dont la moyenne conditionnelle possède une forme quelconque. Enfin, le troisième est un modèle bilinéaire périodique à valeurs entières. Pour ces trois modèles nous en étudions la structure probabiliste, l'estimation des paramètres et des

applications à des données réelles, montrant ainsi la pertinence des modèles et méthodes proposés.

Bibliographie

- [1] Ahmad, A. ; Francq, C. (2016). Poisson qmle of count time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **37**, 291-314.
- [2] Aknouche, A. et Bibi, A. (2009). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic GARCH and periodic ARMA-GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, 30, 19-46.
- [3] Aknouche, A. and Rabehi, N. (2010). On an independent and identically distributed mixture bilinear time-series model. *Journal of Time Series Analysis*. Vol. 31, 113 – 131. 19 – 46.
- [4] Aknouche, A. (2014). *Modèles de séries chronologiques homogènes et périodiquement homogènes : stabilité, inférence et applications*. Mémoire d’Habilitation à Diriger des Recherches (HDR) - Mathématiques appliquées, Section 26, Université de Lille 3, France.
- [5] Aknouche, A and Bentarzi, W. (2014). Stability analysis of the first-order periodic autoregressive diagonal bilinear model. *Random Operators and Stochastic Equations*. Vol. 22, Issue 3, pp. 139-150.
- [6] Aknouche, A. (2015). Explosive strong periodic autoregression with multiplicity one. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 161, 50-72.
- [7] Aknouche, A. (2017). Periodic autoregressive stochastic volatility. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **20**, 139-177.
- [8] Aknouche, A. ; Bendjeddou, S. (2017). Geometric quasi-maximum likelihood estimation for a general class of integer-valued time series models. *Comptes Rendus Mathématique*, **355**, 99-104.

- [9] Aknouche, A., Al-Eid, E. ; Demouche, N. (2017). Generalized quasi-maximum likelihood inference for periodic conditionally heteroskedastic models. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, forthcoming. DOI : 10.1007/s11203-017-9160-x.
- [10] Aknouche, A., Bendjeddou, S. et Touche, N. (2018), Negative binomial quasi-likelihood inference for general integer-valued time series models. *Journal of Time Series Analysis*, forthcoming, DOI : 10.1111/jtsa.12277.
- [11] Aknouche, A. and Bentarzi, M. (2008). On the existence of higher-order moments for periodic *GARCH* models. *Statistics and Probability Letters*, 78, 3262 – 3268.
- [12] Aknouche, A ; and Bentarzi, W. (2014). Stability analysis of the first-order periodic autoregressive diagonal bilinear model. *Random Operators and Stochastic Equations*. Vol. 22, Issue 3, pp. 139 – 150.
- [13] Aknouche, A. (2007). Causality conditions and autocovariance calculations in PVAR models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. Vol. 77, No. 9, 769-780.
- [14] Aknouche, A., Bentarzi, W. and Demouche, N. (2017). On periodic ergodicity of a general periodic mixed Poisson autoregression. *MPRA–paper*. 134, pp. 15 – 21.
- [15] Aknouche, A. et Al-Eid, E. (2012). Asymptotic inference of unstable periodic ARCH processes. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 15, 61-79.
- [16] Al-Osh and Alzaid (1991), Binomial autoregressive moving average models. *Stoch. Models*,7, 261-282.
- [17] Al-Osh, M. A. and Alzaid, A. A. (1987). First order integer-valued autoregressive (INAR(1)) processes. *J. Time. Series Anal.* 8, No. 261-275.
- [18] Al-Osh, M. A. and Alzaid, A. A. (1988). Integer-valued moving average (INMA) process. *Statis*, 29, 281-300.
- [19] Al-Osh, M. A. and Alzaid, A. A. (1993), Some autoregressive moving average processes with generalized Poisson marginal distributions. *ANN. Inst. Statist. Math.*, 45 (2), .
- [20] Al-Osh, M.A. and Aly, E-E A.A. (1992). First-order autoregressive time series with negative binomial and geometric marginals. *Commun. Statist-Theory Meth*, 21,2483-2492.

- [21] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A.(1990). Integer-Valued p th-Order Autoregressive Structure (INAR(p)) *Process. J. App. Prob.* **27**, 314-324.
- [22] Ambach, D. and Croonenbroeck, C. (2015). Obtaining superior wind power predictions from a periodic and heteroscedastic wind power prediction tool. *In Stochastic Models, Statistics and Their Applications, edt*, 225-232.
- [23] Ambach, D. and Schmid, W. (2015). Periodic and long range dependent models for high frequency wind speed data. *Energy*, **82**, 277-293.
- [24] Anderson, T. W., (1959). On Asymptotic Distributions of Estimates of Parameters of Stochastic Difference Equations. *The Annals of Mathematical Statistics*, 676–687.
- [25] Anderson, T. W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*. New York : John Wiley& Sons.
- [26] Andersen, T. and Bollerslev, T. (1997). Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets. *Journal of Empirical Finance*, **4**, 115-158.
- [27] Anderson, P.L., Tesfaye, Y.G. and Meerschaert, M.M. (2007). Fourier-*PARMA* models and their application to river flows. *Journal of Hydrologic Engineering*, **12**, 462-472.
- [28] Benjamin MA, Rigby RA, Stasinopoulos DM. 2003. Generalized autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association* **98** : 214-223.
- [29] Bentarzi, M. and Bentarzi, W. (2017a). Periodic Integer-Valued *GARCH* Model. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. Vol. 46, issue 2, pp. 1167 – 1188.
- [30] Bentarzi, M. and Bentarzi, W. (2017b). Periodic Integer-Valued Bilinear Time Series Model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. Vol. 46, issue 3, pp. 1184–1201.
- [31] Bentarzi, M. and Hallin, M. (1994). On the Invertibility of Periodic Moving Average Models. *Journal of Time Series Analysis*, **15**, 263-268.
- [32] Bentarzi, M.(1998). Model-Building Problem of Periodically Correlated m -Variate Moving Average Processes. *Journal of Multivariate Analysis*. **66**, 1-21.
- [33] Bibi, A. and Aknouche, A. (2009). On the probabilistic properties of periodic GARCH processes. *Mathematical Methods of Statistics*,**17**, 305-316.

- [34] Bibi, A. and Aknouche, A. (2010). Yule–Walker type estimators in periodic bilinear models : strong consistency and asymptotic normality. *Statistical Methods & Applications*. 19 (1), 1 – 30.
- [35] Bibi, A. and Gautier, A. (2006). Propriétés dans L^2 et estimation des processus purement bilinéaires et strictement superdiagonaux à coefficients périodiques. *Canad. J. Statist.* 34, no. 1, 131-148.
- [36] Bibi, A. and Ho, M. (2006). Estimation of Periodic Bilinear Time Series Models. *Communication in Statistics- Theory and Methods*. 35 (9), 1745 – 1756.
- [37] Bibi, A. and Ho, M.R. (2004). Properties of some bilinear models with periodic regime switching. *Statistics & Probability Letters*. Vol. 69, issue 3, pp. 221-231.
- [38] Bibi, A. and Ho, M.R. (2004). Properties of some bilinear models with periodic regime switching. *Statistics & Probability Letters*. Vol. 69, issue 3, pp. 221 – 231.
- [39] Bibi, A. and Oyet, A. J. (2004). Estimation of some bilinear time series models with time varying coefficients. *Stochastic Anal. Appl.* 22, no. 2, 355-376.
- [40] Bloomfield, P., Hurd, H. L. and Lund, R. B.(1994). Periodic correlation in stratospheric ozone data. *J. Time. Ser. Anal.* 15,127-150.
- [41] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [42] Bollerslev, T. and Ghysels, E. (1996). Periodic autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Business & Economic Statistics*, **14**, 139-152.
- [43] Bollerslev, T., Cai, J. and Song, F.M. (2000). Intraday periodicity, long memory volatility, and macroeconomic announcement effects in the US Treasury bond market. *Journal of Empirical Finance*, **7**, 37-55.
- [44] Bose, A. and Mukherjee, K. (2003). Estimating the ARCH parameters by solving linear equations. *Journal of Time Series Analysis*, 24, 127-136.
- [45] Boswijk, H. P. and Franses, P. H. (1996). Unit roots in periodic autoregressions. *Journal of time series analysis*, 17, 221-45.
- [46] Bougerol, P. and Picard, N. (1992). Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. *Journal of Econometrics* 52,115-27.

- [47] Bourguignon, M. (2016). Poisson-geometric INAR(1) process for modeling count time series with overdispersion. *Stistica Neerlandica*, 70, 176-192.
- [48] Box, G. E., and G. M. Jenkins (1976). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, 2nd ed., Holden-Day, Boca-Raton.
- [49] Boyles, R.A. and Gardner, W.A. (1983). Cycloergodic properties of discrete-parameter nonstationary stochastic processes. *IEEE, Trans. Infor. Theory.*, **29**, 105-114.
- [50] Bracher, J. et Held, L. (2017), Periodically stationary multivariate autoregressive models. arXiv preprint arXiv :1707.04635.
- [51] Brandt, A. (1986). The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients. *Advances in Applied Probability*, **18**, 211-220.
- [52] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time series : Theory and methods*, 2nd ed. New York : Springer.
- [53] Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd ed. New York : Springer.
- [54] Cameron C, Trivedi P. 2013. *Regression analysis of count data* (2nd edn). New York : Cambridge University Press.
- [55] Cappuccio, N., Ferrante, M. and Fonseca, G. (1998). A note on the stationarity of a threshold first-order bilinear process. *Statistics & Probability Letters*, 40, 379-384.
- [56] Chen, C.W.S., So, M., Li, J.C. and Sriboonchtta, S. (2016). Autoregressive conditional negative binomial model applied to over-dispersed time series of counts.
- [57] Christou, V. and Fokianos, K. (2014). Quasi-likelihood inference for negative binomial time series models. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 35, pp.55-78.
- [58] Christou, V.; Fokianos, K. (2014). Quasi-likelihood inference for negative binomial time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **35**, 55-78.
- [59] Christou, V.; Fokianos, K. (2015). Estimation and testing linearity for non-linear mixed Poisson autoregressions. *Electronic Journal of Statistics*, **9**, 1357-1377.
- [60] Cline, D.B.H. and Pu, H.H. (2002). A note on a simple Markov bilinear stochastic process. *Statistics & Probability Letters* 56, 283-288.

- [61] Cramér, H. (1961). *On some classes of nonstationary stochastic processes*. Pro. 4th Berkley. Symp. Math. Statist. Prob, Vol. 2,57-78.
- [62] Dai, Y. and Billard, L. (1998). A Space-Time Bilinear Model and its Identification. *Journal of Time Series Analysis*. Vol. 19, No. 6. 657 – 679.
- [63] Dai, Y. and Billard, L. (2003). Maximum likelihood estimation in space time bilinear models. *Journal of Time Series Analysis*. Vol. 24, No. 1. 25 – 44.
- [64] Davis, R.A. and Liu, H. (2016). Theory and Inference for a Class of Observation-driven Models with Application to Time Series of Counts. *Statistica Sinica*. 26, pp. 1673 – 1707.
- [65] Davis, R.A., Holan, S.H., Lund, R.; Ravishanker, N. (2016). *Handbook of discrete-valued time series*. Chapman and Hall.
- [66] Dawid, A. P. (1981). Some Matrix-Variate Distribution Theory : Notational Considerations and a Bayesian Application. *Biometrika*. Vol. 41, pp. 80 – 88.
- [67] Dedecker, J.; Prieur, C. (2004). Coupling for τ -dependent sequences and applications. *Journal of Theoretical Probability*, **17**, 861 – 885.
- [68] Dedecker, J. and Prieur, C. (2005). New dependence coefficients. Examples and applications to statistics. *Probability Theory and Related Fields*. 132, issue 2, pp. 203 – 236.
- [69] Diop ML, Kengne W. 2017. Testing for parameter change in general integer-valued time series. *Journal of Time Series Analysis* **38** : 880-894.
- [70] Douc, R., Doukhan, P.; Moulines, E. (2013). Ergodicity of observation-driven time series models and consistency of the maximum likelihood estimator. *Stochastic Processes and their Applications*, **123**, 2620-2647.
- [71] Doukhan, P. and Wintenberger, O. (2008). Weakly dependent chains with infinite memory. *Stochastic Processes and their Applications*. Vol. 118, pp. 1997-2013.
- [72] Doukhan, P. Latour, A. and Oraichi, D. (2006). A Simple Integer-Valued Bilinear Time Series Model. *Adv. Appl. Prob.* 559-578.
- [73] Doukhan, P.; Fokianos, K. and Tjøstheim, D. (2012). On weak dependence conditions for Poisson autoregressions. *Statistics & Probability Letters*. vol. 82, issue 2, pp. 0–94.

- [74] Drost, F.C. ; Akker, R.van denand Werker, B.J.M. (2008). Note on integer-valued bilinear time series models. *Statistics & Probability Letters*. Vol. 78, issue 8, pp. 992 – 996.
- [75] Engle R.F. (2001). The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, 15 (4), 157-168.
- [76] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, 50,987-1008.
- [77] Feigin, P. D. and Tweedie, R. L. (1985) Random coefficient autoregressive processes :a Markov chain analysis of stationarity and finiteness of moments. *Journal of Time Series Analysis* 6, 1-14.
- [78] Ferland, R., Latour, A. ; Oraichi, D. (2006). Integer-valued *GARCH* process. *Journal of Time Series Analysis*, **27**, 923-942.
- [79] Ferrante, M., Fonseca, G. and Vidoni, P. (2003). Geometric ergodicity, regularity of the invariant distribution and inference for a threshold bilinear Markov process. *Statist.Sinica*, 13(2) : 367 – 384.
- [80] Fokianos, K. ; Rahbek, A. and Tjøstheim, D. (2009). Poisson Autoregression. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 104, Issue 488, pp. 1430 – 1439.
- [81] Fokianos, K. (2009). Integer-valued time series. *Wiley Interdisciplinary Reviews : Computational Statistics*. Vol. 1, issue 3, pp. 361 – 364.
- [82] Fokianos, K., Rahbek, A. ; Tjøstheim, D. (2009). Poisson autoregression. *Journal of the American Statistical Association*, **140**, 1430-1439.
- [83] Fokianos, K. ; Tjøstheim, D. (2011). Log-linear Poisson autoregression. *Journal of Multivariate Analysis*, **102**, 563-578.
- [84] Francq, C. et Zakořian, J. M. (2009). Modèles GARCH : Structure, Inférence Statistique et Applications Financières. *Economica*.
- [85] Franke, J. (2010). Weak dependence of functional *INGARCH* processes. *Technical report, University of Kaiserslautern*.
- [86] Franses, P.H. and Paap. R. (2000). Modeling day-of-the-week seasonality in the S&P 500 Index. *Applied Financial Economics*, **10**, 483-488.

- [87] Franses, P. and Paap, R. (2011). Random-coefficient periodic autoregressions. *Statistica Neerlandica*, **65**, 101-115.
- [88] Franses, P.H. and R. Paap, (2004). *Periodic Time Series Models*, Oxford University Press, Oxford.
- [89] Freeland, R.K. and McCabe. (2004). Analysis of low count of time series data by Poisson autoregression. *Journal of Time Series Analysis*, 25 5, 701-722.
- [90] Freeland, R.K. and McCabe. (2005). Asymptotic properties of CLS estimators in the Poisson AR(1) model. *Statist. Probab. Lett*, 73 (2), 147-153.
- [91] Fuller, W. A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series*, 2nd ed. New York : John Wiley & Sons.
- [92] Ghysels, E., Hall, A. and Lee, H. S. (1996). On Periodic Structures and Testing for Seasonal Unit Roots. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 91, N.436, 1551-1559.
- [93] Ghysels, E. and Osborn, D. (2001). *The econometric analysis of seasonal time series*. Cambridge University Press.
- [94] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet. Math.*, 2,385-88.
- [95] Gladyshev, E. G. (1963). Periodically and almost PC Random processes with continuous time parameter. *Theory Probab. Appl.*, 8, 173-177.
- [96] Gonçalves E, Mendes-Lopes N, Silva F. 2015. Infinitely divisible distributions in integer-valued GARCH models. *Journal of Time Series Analysis* **36** : 503-527.
- [97] Grahn, T. (1995). A Conditional Least Squares Approach To Biliniar Time Series Estimation. *Journal of time series analysis*, Vol 16, No. 5, 509-529.
- [98] Granger, C. W. J. and Anderson, A. P. (1978a). *An introduction to bilinear time series analysis*. Vandehoeck and Ruprecht. Gottingen.
- [99] Granger, C.W.J. and Andersen, A. (1978b) On the invertibility of time series models. *Stochastic Processes and their Applications*. Vol. 8, Issue 1, pp. 87 – 92.
- [100] Grunwald, G.K., Hyndman, R.J., Tedesco, L; Tweedie, R.L. (2000). Non-Gaussian conditional linear AR(1) models. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, **42**, 479-495.

- [101] Guegan, D. (1994). Séries chronologiques non linéaires à temps discret. *Economica*.
- [102] Gupta, A.K., and Varga, T. (1992). Characterization of Matrix Variate Normal Distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 41, pp. 80 – 88.
- [103] Ha, S.Y. and Lee, O.S. (2006). A STUDY ON SOME PERIODIC TIME VARYING BILINEAR MODEL. *Communications of the Korean Mathematical Society*. Volume 21, Issue 2, pp.375-384.
- [104] Hallin, M. and Lotfi, S. (2005). Optimal Detection of Periodicities in Vector Autoregressive Models. *Statistical Modeling and Analysis for Complex Data Problems*, pp 281-307.
- [105] Heinen A. 2003. Modelling time series count data : an autoregressive conditional Poisson model. *Available at SSRN 1117187*.
- [106] Iwueze, I. S. and Johnson, O. (2011). Covariance analysis of the squares of the purely diagonal bilinear time series models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 25, 90-98.
- [107] Jain, G.C; Consul, P.C. (1971). A generalized negative binomial distribution. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **21**, 501-513.
- [108] Jones, R.H. and Brelsford, W.M. (1967). Time series with periodic structure. *Biometrika*, **54**, 403-408.
- [109] Kedem B, Fokianos K. 2002. *Regression models for time series analysis*. New York : Wiley.
- [110] Kleibergen, F. and Franses, P. H. (1999). Cointegration in a periodic vector autoregression. Econometric Institute Report. <http://repub.eur.nl/res/pub/1561/>.
- [111] Kristensen, D. (2009). On Stationarity and Ergodicity of the Bilinear Model with Applications to GARCH Models. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 30, Issue 1, pp.125 – 144.
- [112] McKenzie E. 1985. Some simple models for discrete variate time series. *Water Resources Bulletin* **21** : 645-650.
- [113] McKenzie, E. (1986). Autoregressive moving-average processes with negative binomial and geometric marginal distributions. *Adv. Appl. Prob.*, 18,679-705.

- [114] McKenzie, E. (1988). Some ARMA models for dependent sequences of Poisson counts. *Adv. Appl. Prob.*, 20,822-835.
- [115] McKenzie E. 2003. *Discrete variate time series*, in Handbook of statistics. Amsterdam : Elsevier Science.
- [116] Monteiro, M., Scotto, M. G. and Pereira, I. (2010). Integer-valued autoregressive processes with periodic structure. *Journal Statistical Planning and Inference*. pp. 1529-1541.
- [117] Morinã, D., Puig, P., Ríos, J., Vilella, A., Trilla, A. (2011) : A statistical model for hospital admissions caused by seasonal diseases. *Stat. Med.* 30 (26), 3125-3136.
- [118] Neumann, M.H. (2011). Absolute regularity and ergodicity of Poisson count processes. *Bernoulli*, **17**, 1268-1284.
- [119] Osborn, D.R., Savva, C.S. and Gill, L. (2008). Periodic dynamic conditional correlations between stock markets in Europe and the US. *Journal of Financial Econometrics*, **6**, 307-325.
- [120] Pagano, M. (1978). On periodic and multiple autoregressions. *Annals of Statistics* 1978, Vol. 6, No. 6, 1310-1317.
- [121] Pereira, I. and Scotto, M.G. (2006). On the non-negative first-order exponential bilinear time series model. *Statistics & Probability Letters*, 76, 931-938.
- [122] Pham, D. T. (1985). Bilinear Markovian representation of bilinear models. *Stochastic Process. Appl.* 20, pp.295 – 306.
- [123] Phillip Hans Franses and Richard Paap. (2004). *Periodic time series models*. Oxford University Press Inc, New York.
- [124] Priestley, M.B. (1978). Non-Linear Models in Time Series Analysis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*. 27, 159 – 176.
- [125] Quinn, B. (1982). Stationarity and invertibility of simple bilinear models. *Stochastic Process. Appl.* 12, pp.225-230.
- [126] Rajesh R. Bandekar and Daya K. Nagar. (2003). MATRIX VARIATE CAUCHY DISTRIBUTION. *Statistics.*, Vol. 37, Issue 6, pp. 537 – 550.

- [127] Rossi, E. and Fantazani, D. (2015). Long memory and periodicity in intraday volatility. *Journal of Financial Econometrics*, **13**, 922-961.
- [128] Rydberg, T.H. ; Shephard, N. (2000). *BIN* models for trade-by-trade data. Modelling the number of trades in a fixed interval of time. In World Conference Econometric Society, 2000, Seattle. *Contributed Paper 0740*.
- [129] Sigauke, C. and Chikobvu, D. (2011). Prediction of daily peak electricity demand in South Africa using volatility forecasting models. *Energy Economics*, **33**, 882-888.
- [130] Silva, M. E. (2015). Modelling time series of counts : an *INAR* approach. *Textos de Matematica*. 47, 107-121.
- [131] Silva, M. E. and Oliveira, V. L. (2000). Difference equations for the higher order moments and cumulants of the *INAR*(1) model. . *J. Time. Series Anal.* Vol. 25, No. 3, 317-333.
- [132] Smith, M.S. (2010). Bayesian inference for a periodic stochastic volatility model of intraday electricity prices. In *Statistical Modelling and Regression Structures*, edt, 353-376.
- [133] Sornette, D. and Pisarenko, V.F. (2008). Properties of a simple bilinear stochastic model : Estimation and predictability. *Physica D*. pp. 429 – 445.
- [134] Stensholt, B.K. and Tjøstheim, D. (1987). Multiple Bilinear Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 8, p. 221-233.
- [135] Steutel, F. W. and Van Harn, K. (1979) Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability* 1979, Vol. 7, No. 5, 893 – 899.
- [136] Stout, W. (1974). *Almost Sure Convergence*, Academic Press, New York.
- [137] Subba Rao, T. and Terdik, G. (2003). On the theory of discrete and continuous bilinear time series models. In D.N. Shanbhag and C.R. Rao (Eds.) *Stochastic Processes : Modelling and Simulation*. *Handboof Statistics*, Vol. 21. North-Holland, Amsterdam, pp.373-386.
- [138] Subba Rao, T., Gabr, M.M., (1984). *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models*. Volume 24 of *Lecture Notes In Statistics*. Springer, New York.

- [139] Terdik, G., (1999). *Bilinear Stochastic Models and Related Problems of Nonlinear Time Series Analysis : A Frequency Domain Approach*. Lecture Notes in Statistics, Vol.142. Springer New York.
- [140] Tesfaye, Y.G., Anderson, P.L. and Meerschaert, M.M. (2011). Asymptotic results for Fourier-PARMA time series. *Journal of Time Series Analysis*, **32**, 157-174.
- [141] Truc T. Nguyen. (1997). A Note on Matrix Variate Normal Distribution. *Journal of Multivariate Analysis.*, Vol. 60, pp. 148 – 153.
- [142] Tsiakas, I. (2006). Periodic stochastic volatility and fat tails. *Journal of Financial Econometrics*, **4**, 90-135.
- [143] Wang, C., Liu, H., Yao, J.-F., Davis, R.A. ; Li, W.K. (2014). Self-excited threshold Poisson autoregression. *Journal of the American Statistical Association*, **109**, 777-787.
- [144] White, J.S. (1958). The limiting distribution of serial correlation coefficient in the explosive case. *Ann Math. Stat.*, Vol. 29, pp.1188-1197.
- [145] Yeon Ha, S. and Lee, Oesook. (2006). A Study on some Periodic Time Series Varying Bilinear Model. *Commun. Korean Math. Soc.* 21, No. 2, pp. 375-384.
- [146] Zeger SL. 1988. A regression model for time series of counts. *Biometrika* **75** : 621-629.
- [147] Zhu, F., (2012a). Modeling overdispersed or underdispersed count data with generalized Poisson integer-valued GARCH models. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, 389, 58-71.
- [148] Zhu F. 2012b. Zero-inflated Poisson and negative binomial integer-valued GARCH models. *Journal of Statistical Planning and Inference* **142** : 826-839.
- [149] Zhu F. 2012c. Modeling time series of counts with COM-Poisson INGARCH models. *Mathematical and Computer Modelling* **56** : 191-203.
- [150] Zhu, F., (2011) A negative binomial interger-valued GARCH model. *Journal of Time Series Analysis* 32, 54 – 67.
- [151] Zhu, R. et Joe,H (2006) Modelling count data time series with Markov processes based on binomial thinning . *Journal of Time Series Analysis* 27(5), 725 – 738.

- [152] Ziel, F. (2015). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic autoregressive, conditionally heteroskedastic time series. *In Stochastic Models, Statistics and Their Applications, edt*, 207-214.
- [153] Ziel, F., Steinert, R. and Husmann, S. (2015). Efficient modeling and forecasting of electricity spot prices. *Energy Economics*, **47**, 98-111.
- [154] Ziel, F., Croonenbroeck, C. and Ambach, D. (2016). Forecasting wind power - Modeling periodic and non-linear effects under conditional heteroscedasticity. *Applied Energy*, **177**, 285-297.