



N° d'ordre : 32/2006-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTE DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par

HADJ-ALI RABAH

SUJET

**CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DYNAMIQUE ET THERMIQUE
D'UN ÉCOULEMENT PULSÉ DANS UNE CONDUITE
HORIZONTALE EN PRÉSENCE D'UN OBSTACLE
CYLINDRIQUE CHAUFFÉ**

Soutenu publiquement le : 11/ 10 / 2006, devant le jury composé de :

Mr E.K.SI-AHMED	Professeur	USTHB	Président
Mr A.GHEZAL	C. C	USTHB	Directeur de thèse
Mr H. DJELLOUAH	Professeur	USTHB	Examineur
Mr F. SOUIDI	M. Conférence	USTHB	Examineur
Mr S. HANCI	M. Conférence	EMP	Examineur

RESUME

Les modèles actuels, utilisés pour simuler le comportement d'un écoulement pulsé, basés sur l'approximation quasi-stationnaire, ne permettent pas de prédire les performances des systèmes physiques avec une précision satisfaisante. Cela est dû dans une grande partie, à l'utilisation des approches qui ne tiennent pas compte de l'effet de pulsations sur les paramètres de l'écoulement

On s'intéresse dans ce travail à l'étude numérique des phénomènes caractérisant l'écoulement pulsé dans une conduite cylindrique en présence d'un obstacle chauffé. Ainsi que l'influence de la fréquence et de l'amplitude de l'écoulement d'entrée sur les paramètres dynamiques et thermiques de l'écoulement.

La méthode numérique utilisée pour la résolution des équations gouvernant les différents modes de transfert, est basée sur un schéma implicite de différences finies utilisant l'algorithme de Thomas (T.D.M.A) et la méthode itérative de Gauss Seidel.

Le traitement numérique des équations de Navier Stokes confirme la présence de l'effet annulaire. Nous avons étudié son évolution au cours de temps et sa variation avec la fréquence de l'écoulement d'entrée. Les résultats montrent que la largeur de la couche limite induite par l'effet annulaire diminue avec l'augmentation de la fréquence et de l'amplitude des pulsations. Nous avons aussi étudié l'effet des pulsations sur le comportement de l'amplitude et le déphasage des différents paramètres de l'écoulement, à savoir ; la vitesse, le coefficient de frottement, le gradient de pression, et le nombre de Nusselt.

L'étude est constituée de cinq parties. La première (chapitre I) est une synthèse bibliographique des écoulements pulsés. Dans le second chapitre, on expose le problème physique et sa formulation mathématique, avec les hypothèses retenues pour son étude. La troisième partie est consacrée à la description de la méthode numérique. Les résultats analytiques et numériques sont analysés, discutés et comparés entre eux dans le quatrième chapitre. En dernier, on a présenté une conclusion générale en citant les perspectives envisagées pour ce travail.

Mots clés : *Écoulement pulsé –obstacle chauffé -espace de phase- différences finies*

REMERCIEMENT

Cette recherche a été réalisée au laboratoire de mécanique des fluides théorique et appliquée (faculté de physique -USTHB).

*Je tiens à remercier sincèrement mon directeur de thèse Monsieur **A.GHAZEL**, pour la confiance qu'il m'a accordée et à lui exprimer toute ma gratitude pour son assistance, sa gentillesse, sa disponibilité et ses conseils et qui m'ont beaucoup aidé à réaliser ce travail. Le grand mérite lui revient,*

*Je suis sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur **K.SI-AHMED**, professeur à l'USTHB et mon premier promoteur de magistère, en s'intéressant à mon travail et en acceptant de présider le jury.*

*Je remercie également Monsieur **H. DJELLOUAH** professeur à l'USTHB, Monsieur **F.SOUIDI** Maître de conférence à l'université de l'USTHB, Monsieur **S. HANCI** Maître de conférence à l'EMP, qui malgré leurs occupations ont accepté de prendre place parmi les membres de jury.*

Je remercie tous mes amis, les membres du laboratoire de mécanique des fluides théorique et appliqué et mes Collègues de la protection civile (Cellule SIG) et tous ceux qui ont apporté leur contribution à la réalisation de ce travail.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

يَمْعِشِرَةُ الْجِنِّ وَ الْإِنْسِ إِنْ اسْتَطَعْتُمْ أَنْ تَنْفِذُوا مِنْ أَقْطَارِ السَّمَوَاتِ
وَ الْأَرْضِ فَانْفِذُوا لَا تَنْفِذُونَ إِلَّا بِسُلْطَانٍ

DEDICACES

Je tiens à dédier ce travail à :

A Ma grand mère

A mes très chers parents, à qui je dois tout et ne rendrais jamais assez.

A ma chère femme, qui ma soutenu le long de ce travail de recherche

A mon petit fils Mohamed Yacine

A mes chères frères et sœurs.

A toute ma famille et ma belle-famille.

A mes collègues de la protection Civile.

Je dédie aussi ce travail à tous mes amis

SOMMAIRE

Page

Sommaire :

Nomenclature :

Chapitre I : Introduction générale

I.1. Introduction :	1
I.2. Etude bibliographique :	3

Chapitre II : Formulation du problème

II.1. position du problème :	9
II.2. Equations générales :	9
II.3. Hypothèses :	10
II.4. Equation simplifiées :	11
II.5. Formulation adimensionnelle :	12
II.6. Conditions initiales et aux limites adimensionnelles :	14

Chapitre III : méthode numérique et validation

III.1. Méthode de résolution:	16
III.1.1. Introduction	16
III.1.2. Maillage :	16
a. Maillage régulier :	17
b. Maillage raffiné :	18
III.1.3. Schéma de discrétisation :	19
III.1.3.1. Discrétisation spatiale :	19
III.1.3.2. Discrétisation temporelle :.....	19
III.1.4. Discrétisation du système d'équations :.....	20
III.1.5. Traitement des opérateurs aux frontières :.....	22
III.1.6. Résolution générale du système d'équations discrétisées.....	23
III.1.7. Stabilité et convergence de la méthode de résolution :	24
III.2 Validation du code de calcul :	28
III.2.1. Ecoulement oscillatoire :	28
III.2.2. Ecoulement pulsé.....	30

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV.1. Introduction :.....	33
V.2. Partie dynamique :	33

IV.2.1. Influence de la fréquence et de l'amplitude sur le champ dynamique :	33
IV.2.1 Influence de la fréquence Re_o :	33
a. Sur la vitesse :	35
b. Sur le coefficient de frottement :	36
c. Sur le gradient de pression :	38
IV.2.2. Influence de l'amplitude A_w :	39
a. Sur la vitesse :	39
b. Sur le coefficient de frottement :	41
c. Sur le gradient de pression :	42
IV.2.2. L'effet annulaire :	40
a. Calcul théorique de la position maximum de la vitesse :	43
b. Calcul numérique de la position maximale de la vitesse :	47
IV.2.3. Etude du déphasage dans le plan de phase :	49
IV.2.3.1. Plan de phase :	49
IV.2.3.2. Influence de la fréquence sur les trajectoires :	51
a. Plan de phase (vitesse.gradient de pression) :	51
b. Plan de phase (vitesse.coefficient de frottement) :	53
IV.2.3.3. Etude du déphasage :	54
IV.2.4. Ecoulement de retour :	55
V.3. Partie thermique :	58
IV.3.1. Calcul théorique du nombre de Nusselt :	58
IV.3.2. Influence de l'écoulement pulsé sur le champ Thermique :	63
IV.3.2.1. Influence de la fréquence sur le champ Thermique :	63
a. sur l'évolution de la température :	63
b. Sur les lignes isothermes :	65
c. Sur les profils de température :	67
d. Sur le nombre de Nusselt :	68
IV.3.2.2. Influence de l'amplitude sur le nombre de Nusselt :	70
IV.3.2. Influence de la géométrie :	71

Chapitre V : Conclusion Générale

Conclusion générale :	72
Références bibliographiques :	74
Annexe :	77

Principales notations

A	Amplitude de la vitesse pulsée
C_p	Capacité calorifique du fluide
C_f	Coefficient de frottement
D, L, $\delta_{i,j}$	Opérateurs de différence
h	Pas spatiaux
K	Pas temporel
k	Conductivité thermique du fluide
L	Longueur de la conduite
Nu	Nombre de Nusselt
P	Pression
P_r	Nombre de Prandtl
q	Flux de chaleur
r, z	Coordonnées radiale et axiale
R	Rayon de la conduite
Re	Nombre de Reynolds
St_r	Nombre de Strouhal
S	Frontières
t	Temps
T	Température
u, w	Composantes radiale et axiale du vecteur vitesse
U, W	Composantes adimensionnelles radiale et axiale du Vecteur vitesse
x_i	Cordonnées d'un point

Caractères grecs

λ	Nombre de Womersley
ρ	Masse volumique
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
Π	Rapport de pression
$\overline{\tau}$	Tenseur de contraintes
Θ	Rapport de température
Φ	Dissipation de l'énergie mécanique du système en énergie thermique
ϕ	Déphasage par rapport à l'écoulement imposé

Indices et exposants

s	Cas stationnaire
e	Relatif à l'entrée de la conduite
f	Grandeur physique
i	Position sur l'axe z
j	Position sur l'axe r
m	Valeur moyenne
p	Paroi du solide
ps	Relatif au pulsé par rapport au stationnaire $Nu_{ps} = (Nu - Nu_s)/Nu_s$
o	Etat initial
u, w	Composantes radiale, et axiale du vecteur vitesse
w	Vitesse d'entrée
x	Déplacement maximum pendant un cycle
ω	Relatif au nombre de Reynolds cinétique
+	Grandeur adimensionnée

Chapitre 1 :

INTRODUCTION GENERALE

I. INTRODUCTION GENERALE

I.1 Introduction :

Cette étude entre dans le cadre des travaux de recherche menés dans le laboratoire de la mécanique des fluides et concerne le traitement de l'écoulement des fluides Newtoniens dans des configurations géométriques singulières.

Parmi les modes d'écoulement étudiés ; le mode oscillatoire présente un intérêt particulier sur le plan pratique : machines thermiques, pompes, valves, micro électronique (MEMS), micro fluide, le génie chimique et la biologie. Les effets engendrés par un écoulement soumis à des pulsations sont, l'effet annulaire dit " de Richardson ", le reversement de l'écoulement, l'augmentation des paramètres moyens de l'écoulement comparés au cas stationnaire et aussi le déphasage entre les paramètres dynamiques et thermiques de l'écoulement avec les pulsations imposées. Ces effets sont plus apparents pour les grands nombres de Reynolds cinétiques qui sont équivalents aux fréquences d'oscillations ainsi que pour les grandes amplitudes d'oscillations.

En général, l'écoulement pulsé est la superposition d'une composante moyenne stationnaire de Poiseuille et d'une composante purement oscillatoire. Cette dernière altère la largeur de la couche limite dynamique, affectant aussi la couche limite thermique et par conséquent le transfert de chaleur. Richardson fut le premier à mettre en évidence ce phénomène, caractérisé par le fait que la position du maximum de vitesse est située dans une couche très fine proche de la paroi, contrairement au cas d'un écoulement stationnaire de Poiseuille où le maximum est situé au centre. Certains modèles actuels utilisés pour simuler le comportement d'un écoulement pulsé basé sur l'approximation quasi-stationnaire s'avèrent peu valables. Il est donc indispensable de développer de nouvelles approches qui rendent compte de l'influence de la fréquence et de l'amplitude des pulsations sur l'amplitude et le déphasage des différents paramètres de l'écoulement.

Ce travail s'articule autour de cinq parties. Le premier chapitre porte sur une revue bibliographique des principaux travaux concernant le comportement dynamique et thermique des écoulements pulsés. On propose au deuxième chapitre une modélisation mathématique adaptée à notre problème physique.

Le troisième chapitre est consacré à la description de la méthode numérique basée sur une méthode de différences finies.

Au quatrième chapitre, on traite l'influence de la fréquence et de l'amplitude de pulsation sur le comportement des champs dynamique et thermique. Une approche théorique est effectuée pour décrire le phénomène annulaire à la paroi ainsi que la variation de nombre de Nusselt en fonction de la fréquence.

Enfin, pour conclure notre travail, nous présentons les perspectives et les prolongements possibles à notre étude.

I.2 Etude bibliographique :

L'étude des écoulements oscillatoires est loin d'être nouvelle comme c'est souvent le cas pour les nombreux types d'écoulements. Elle date du début de 20^{ème} siècle. Richardson et Tyler [1929] ont été les premiers à mettre en évidence par des mesures expérimentales, l'existence d'une des principales caractéristiques des écoulements oscillatoires, à savoir l'effet annulaire (dit de Richardson) sur les profils de vitesse et de température. Ceci est caractérisé par la présence d'un maximum près de la paroi et non pas au centre comme c'est le cas pour l'écoulement laminaire stationnaire (écoulement de Poiseuille).

Par la suite, séparément, Womersley [1955] et Uchida [1956] ont déterminé analytiquement l'évolution des profils de vitesse pour un écoulement oscillant dans une conduite horizontale. Cette solution est fonction du nombre de Womersley et de la position radiale. De même, Siegle et Permmutte [1961] ont donné une solution exacte du profil de vitesse pour un écoulement complètement développé à travers un canal formé de deux plans parallèles.

Atabek et Chang [1961] ont développé une solution analytique pour les profils de vitesse en écoulement laminaire pulsé dans un tube cylindrique. Ils ont considéré que l'écoulement est établi avec une vitesse débitante sous forme d'une somme algébrique des pulsations en sinus et cosinus. Ils ont obtenu une expression de la vitesse écrite sous forme d'une série de fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 et 2.

Pour un écoulement à gradient de pression arbitraire, Majdalani et Chibli [2002] ont donné une solution exacte du profil de vitesse sous forme d'une série de coefficients de Fourier. La solution obtenue pour un écoulement pulsé dépend de deux paramètres : le nombre de Reynolds angulaire Re_{ω} et l'amplitude de la composante oscillatoire du gradient de pression. Ils ont montré que l'atténuation de l'écoulement dûe à l'augmentation de la fréquence adimensionnelle est plus rapide pour les grandes que pour les faibles amplitudes de la composante oscillatoire.

Dans toutes les approches théoriques, les profils dépendent fortement de la fréquence adimensionnelle Re_{ω} . Aux faibles valeurs de Re_{ω} , les profils de vitesse sont paraboliques et similaires à ceux obtenus pour un écoulement stationnaire dans le régime laminaire.

Aux grandes valeurs de Re_ω les profils de vitesse s'aplatissent au centre de la conduite et atteignent un maximum au voisinage de la paroi. Ces résultats sont confirmés par des travaux numériques de Creff et al [1985], Chan et al [2002] et Sert et Beskok [2003] et expérimentalement par Habib [2002] et Bouvier [2000].

Pour un écoulement à gradient de pression pulsé dans une cavité rectangulaire Yakhot et al [1999], ont étudié par la méthode des différences finies l'influence de la fréquence et le facteur de forme sur l'évolution du profil de vitesse et de la contrainte à la paroi. Ils ont montré que le déphasage varie de 0° , pour les faibles oscillations, jusqu'à 90° pour les oscillations rapides.

A partir de l'expression de profil de vitesse donnée par Uchida [1956] sur les écoulements pulsés, Seume et Simon [1988], ont obtenu pour un modèle unidimensionnel le déphasage du gradient de pression et de la contrainte par rapport à la vitesse débitante instantanée $u = u_{\max} \cos(\omega t)$. Ils donnent les expressions de la contrainte à la paroi τ_p et de la perte de charge ΔP comme suit :

$$\tau_p = \alpha_\tau 8 \frac{\mu}{D} \cos(\omega t + \varphi_\tau)$$

$$\Delta P = \alpha_p 32 \mu \frac{L}{D^2} \cos(\omega t + \varphi_p)$$

Les amplitudes et le déphasage de τ_p et ΔP sont des fonctions qui augmentent avec la fréquence adimensionnelle Re_ω . Pour un écoulement dont Re_ω varie entre 0 à 1000 et pour $Re=4000$, ils ont montré que la contrainte à la paroi est multipliée par 8 et la perte de charge par 130 par rapport au cas de l'écoulement permanent. Le gradient de pression et la contrainte représentent respectivement un déphasage qui varie de 0° pour les faibles fréquences à 90° et 45° pour les grandes fréquences.

Pour un écoulement oscillatoire, Zhao et Chang [1996] ont obtenu l'expression exacte du coefficient de frottement moyen sur un cycle puis l'ont comparé avec leurs résultats expérimentaux. Ils ont constaté que :

- Le maximum du coefficient de frottement moyen est inversement proportionnel à Re_ω .
- Le déphasage entre la contrainte et le débit varie de 0° à 40° . Cette valeur limite est inférieure de 5° par rapport à celle obtenue par Seume et Simon [1988].

Les auteurs ont confirmé ces résultats par les corrélations suivantes :

$$C_f = \frac{32}{A_0} \times \frac{0.161}{(\text{Re}_\omega^{0.548} - 2.039)} \pm 3.3\%$$

$$\varphi_\tau = 0.647(1 - 1.015 \exp(-0.019 \text{Re}_\omega)) \pm 1.9\%$$

Zhao et Chang [1998] ont utilisé l'expression du coefficient de frottement trouvée par Uchida [1956] pour représenter l'évolution de la différence des coefficients de frottements entre l'écoulement pulsé et l'écoulement moyen. Ils ont montré que le maximum du coefficient de frottement dépend de Re_ω , de l'amplitude et du nombre de Reynolds. Ce coefficient est une fonction croissante de Re_ω , ce qui confirme les résultats de Seume et Simon [1988]

Pour un écoulement pulsé dans une conduite à travers un orifice, Yakhot et Leopold [2003], utilisent le plan de phase pour représenter la trajectoire de vitesse et le gradient de pression imposé pendant un cycle. La représentation des trajectoires à chaque cycle dans le plan de phase pour différentes oscillations est une ellipse. Les résultats montrent que, la trajectoire est une ellipse dont l'axe de révolution et l'aplatissement dépendent de la fréquence et du rapport des amplitudes de la vitesse et du gradient de la pression. Ils montrent aussi que le déphasage pour les hautes fréquences atteint 90° . Ceci correspond à un cercle dans le plan de phase.

Yakhot et al [2004], dans les mêmes conditions et avec la méthode numérique Immersed-Boundar, ont montré que la longueur de la recirculation de l'écoulement possède une forme périodique, de même période que l'écoulement imposé et présente un déphasage de 180° pour le nombre de Womersley $\lambda > 7$.

Une étude analytique faite par Gedeon [1981], montre aussi l'existence du déphasage entre la différence de température et le flux thermique dans le cas de l'écoulement d'un fluide soumis à des pulsations rapides entre des plans parallèles d'une canalisation. Ce déphasage tend vers 90° pour les grandes fréquences.

Seigel et Perlmutter [1962], ont montré que pour l'air ($\text{Pr}=0.7$) et pour le nombre de Womersley λ supérieur à 2.8, l'effet de l'écoulement pulsé sur le transfert thermique dans une

conduite n'est pas important, à cause des faibles fluctuations de l'amplitude de la vitesse. Leur analyse donne une valeur limite de la position axiale : $\frac{x}{a} < \frac{\pi \text{Re}}{40\lambda^2}$ pour laquelle, l'utilisation de l'approximation quasi-stationnaire donne de bons résultats pour le calcul du taux de transfert de chaleur local. Cette approximation est valable à la zone d'entrée de la conduite. Par contre, pour les faibles nombres de Womersley, l'approximation quasi-stationnaire demeure valable le long de toute la conduite.

Des résultats expérimentaux du transfert de chaleur entre la paroi d'une canalisation cylindrique et l'écoulement d'air turbulent pulsé ($\text{Re}_{\text{moyen}}=1.5 \cdot 10^5$) sont obtenus par Andre et Creff [1997]. Ils ont montré une modification importante du mécanisme de transfert convectif lors de la mise en résonance acoustique de la canalisation conduisant à des augmentations importantes de 150% du taux des transferts thermiques locaux par rapport à l'écoulement stationnaire ou pulsé hors résonance.

Dans le but de confirmer ces résultats, les auteurs ont étudié le même problème, en adoptant l'hypothèse d'un écoulement laminaire pulsé. Le résultat de cette analyse a confirmé l'existence de conditions particulières de fréquences de pulsations favorisant l'augmentation du transfert thermique. Les auteurs ont expliqué cette résonance par un accord entre la fréquence de pulsation et la fréquence propre associée aux propriétés physiques et géométriques de l'installation.

Moshandreou et Zamir [1997], se sont basés sur l'expression classique du profil de vitesse donnée par Uchida [1956] pour déterminer la variation de la température et le nombre de Nusselt pour un écoulement pulsé dans un tube à flux de chaleur constant à la paroi. Les résultats montrent qu'autour de la fréquence adimensionnelle, $\omega=15$, le taux de transfert augmente pour atteindre son maximum. Par contre, pour les fréquences approximativement inférieures à 5 et supérieure 25, l'effet de la pulsation s'inverse. Les auteurs, ont expliqué cette variation par l'effet de Richardson dans les basses et les hautes fréquences.

Guo et Sung [1997], ont étudié l'influence de l'amplitude sur quatre versions du nombre de Nusselt suivant la température moyenne du fluide. Ils ont opté pour une température calculée à partir de la moyenne de l'énergie massique. Pour les faibles amplitudes $0 < A_w < 1$, la variation du nombre de Nusselt dépend de la fréquence de pulsation. Cependant

pour les grandes amplitudes $A_w > 1$, le transfert de chaleur augmente quelque soit la fréquence de pulsation.

Zhao et Cheng [1988], ont présenté une synthèse sur le comportement des paramètres dynamiques et thermiques des écoulements oscillatoires pour différents régimes d'écoulements et dans différentes géométries. Ils ont conclu que :

1. Dans le cas d'un écoulement de couche limite laminaire pulsé et pour une amplitude de la vitesse constante, le transfert de chaleur dépend du nombre de Strouhal (Str). Pour les basses et hautes fréquences, le taux de transfert de chaleur n'est pas différent de celui de l'écoulement stationnaire mais plus important pour les fréquences voisines de $Str=1$.
2. L'analogie de Reynolds pour la couche limite stationnaire et l'écoulement dans une conduite est non valable dans le cas d'un écoulement de la couche limite pulsé. D'après les auteurs, ce désaccord est dû à l'effet opposé de la fréquence sur la variation du coefficient de frottement et du transfert de la chaleur.
3. Le nombre de Nusselt moyen pour un écoulement laminaire pulsé dans une conduite dépend de la fréquence. Il peut être inférieur ou supérieur à celui de l'écoulement stationnaire suivant la gamme de la fréquence de pulsation.
4. le transfert de chaleur d'un écoulement pulsé augmente par rapport à son écoulement moyen en fonction de l'augmentation du taux de vitesse A_w .

Habib et al [2002] ont réalisé une étude expérimentale sur les caractéristiques du transfert de chaleur pour un écoulement laminaire pulsé dans une conduite, pour différentes conditions du nombre de Reynolds ($780 < Re < 1987$) et de la fréquence de pulsations ($1 < f < 29.5$ Hz).

Les auteurs ont constaté l'existence d'une bande de fréquences favorisant le transfert de chaleur et qui varie avec le nombre de Reynolds. Une réduction du nombre de Nusselt moyen relatif est enregistrée en dehors de cette bande. Cette réduction est proportionnelle à la fréquence, elle est de 40% pour les fréquences qui varient de 4.1 à 17 Hz et de 20% pour les fréquences qui varient de 17 à 29 Hz. Une équation adimensionnelle empirique a été

développée pour le nombre de Nusselt reliant le nombre de Reynolds ($750 < Re < 2000$) et la fréquence adimensionnelle ($3 < \omega < 18$).

Récemment Yu et al [2004], ont présenté une étude sur le transfert de chaleur par convection d'un écoulement laminaire pulsé dans un tube circulaire avec un flux de chaleur pariétal constant. Une solution analytique des équations de l'énergie et de la quantité de mouvement est obtenue en supposant que la solution est donnée sous forme d'un champ moyen plus une fluctuation. Les résultats, indiquent que la température et le nombre de Nusselt fluctuent périodiquement autour des solutions stationnaires de la convection laminaire, avec des amplitudes qui dépendent de la fréquence et l'amplitude de l'écoulement pulsé. Les auteurs ont montré aussi que les pulsations n'ont aucun effet sur le nombre de Nusselt moyen.

Les résultats publiés sont parfois divergents, probablement en raison des conditions opératoires : des augmentations, des diminutions où pas d'effets sur les paramètres physiques. De plus, les résultats obtenus en écoulement oscillant ne sont pas valides dans l'écoulement pulsé. Car la partie stationnaire n'est pas pris en compte dans la résolution des l'équations de Navier Stocks.

Chapitre 2 :

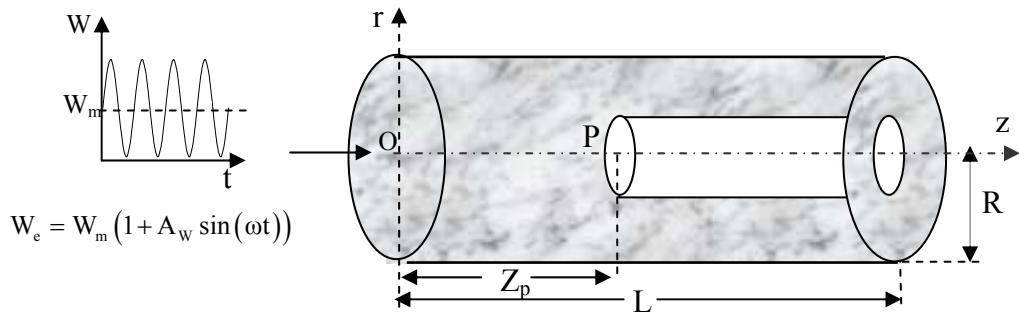
FORMULATION DU PROBLEME

II. FORMULATION DU PROBLEME

II.1 position du problème :

On considère l'écoulement pulsé à faible nombre de Reynolds d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite de rayon R et de longueur L , autour d'un obstacle cylindrique chauffé de rayon r_p , se trouvant à une distance Z_p de l'entrée de la conduite, (voir la figure (II.1)).

A l'instant ($t=0$), le fluide est pulsé à l'entrée de la conduite suivant l'axe de cette dernière avec une vitesse axiale périodique W_e de pulsation ω et d'amplitude A_w . La température de fluide contenu dans la conduite au repos est T_0 .



II.2 Equations générales :

Le comportement dynamique et thermique du fluide est régi par les équations de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur qui sont issues des lois de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Elles s'écrivent comme suit :

a. Equation de continuité :

L'équation de la conservation de la masse est donnée comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1.a})$$

Où $\vec{V}(u, v, w)$ est le champ de vitesse de l'écoulement et ρ , la densité du fluide

b. Equation de quantité de mouvement

$$\frac{D(\rho \vec{V})}{Dt} = -\vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{f} \quad (\text{II.1.b})$$

Où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}$: est la dérivée particulaire, P est la pression, \vec{f} représente les forces extérieures et $\vec{\tau}$, le tenseur des contraintes, qui s'exprime comme suit :

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial_i}{\partial x_k} V_k \delta_{ij} \right]$$

Avec δ_{ij} , le symbole de Kronecker et μ , la viscosité dynamique

c. Equation de l'énergie :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_p \nabla \cdot \vec{V} + \Phi \quad (\text{II.1.c})$$

Avec $q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}$ le flux de chaleur par conduction, k est le coefficient de transfert thermique et Φ , la dissipation de l'énergie mécanique du système sous forme d'énergie thermique.

II.3 Hypothèses :

- 1- Le fluide considéré est supposé incompressible et à propriétés physiques constantes
- 2- Pour un écoulement incompressible, nous négligeons dans l'équation d'énergie (II.1.c), le travail de compression et la dissipation visqueuse.
- 3- Nous négligeons les forces de gravité, ce qui entraîne la symétrie axiale du problème.
- 4- les parois de la conduite sont adiabatiques.

II.4 Equation simplifiées :

Compte tenu des hypothèses énoncées précédemment, les équations régissant l'écoulement étudié se réduisent en coordonnées cylindriques:

a. Equation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.2.a})$$

b. Equation du mouvement :

➤ Selon la coordonnée radiale ;

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \quad (\text{II.2.b})$$

➤ Selon la coordonnée axiale :

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.2.c})$$

c. Equation de l'énergie :

$$\rho C_P \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.2.d})$$

Pour la simplification du traitement des équations et vu le caractère spatio-temporel du système étudié, l'expression de la pression et de la température s'écrivent de la manière suivante :

$$P(r, z, t) = P_0(r, z, 0) + \Pi(r, z, t) \quad \text{et} \quad T(r, z, t) = T_0(r, z, 0) + \Theta(r, z, 0)$$

Où p_0 et T_0 sont respectivement les valeurs de la pression et de la température à l'état initial.

On aura donc :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}$$

II.5. Formulation adimensionnelle :

Afin de rendre les équations mathématiques régissant notre problème sous forme adimensionnelle et d'étudier les propriétés de similitude de cet écoulement, il est nécessaire de réécrire toutes les équations et les conditions aux limites en fonction des grandeurs adimensionnelles.

Le choix des nombres adimensionnels se fait à partir des paramètres de référence qui caractérisent l'écoulement ou le fluide. Dans notre cas, ces grandeurs caractéristiques sont :

Longueur : rayon du cylindre R .

Vitesse : vitesse moyenne à l'entrée W_m .

Température : température à l'état initial T_0

Pression : pression dynamique ρW_m^2

Temps : $\frac{R}{W_m}$

Nous caractérisons les variables adimensionnelles par un indice (+). Elle sont définies comme suit :

$$U^+ = \frac{u}{W_m}, \quad W^+ = \frac{w}{W_m}, \quad r^+ = \frac{r}{R}, \quad z^+ = \frac{z}{R}, \quad t^+ = \frac{tW_m}{R}, \quad \Pi^+ = \frac{\Pi}{\rho W_m^2}, \quad \Theta^+ = \frac{\Theta}{T_0}.$$

Les équations (II.2) deviennent :

$$\frac{\partial U^+}{\partial r^+} + \frac{U^+}{r^+} + \frac{\partial W^+}{\partial z^+} = 0 \quad (\text{II.3.a})$$

$$\left(\frac{\partial U^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial U^+}{\partial r^+} + W^+ \frac{\partial U^+}{\partial z^+} \right) = -\frac{\partial \Pi^+}{\partial r^+} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial^2 U^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial U^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 U^+}{\partial z^{+2}} - \frac{U^+}{r^{+2}} \right] \quad (\text{II.3.b})$$

$$\left(\frac{\partial W^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial W^+}{\partial r^+} + W^+ \frac{\partial W^+}{\partial z^+} \right) = -\frac{\partial \Pi^+}{\partial z^+} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial^2 W^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial W^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 W^+}{\partial z^{+2}} \right] \quad (\text{II.3.c})$$

$$\left(\frac{\partial \Theta^+}{\partial t^+} + U^+ \frac{\partial \Theta^+}{\partial r^+} + W^+ \frac{\partial \Theta^+}{\partial z^+} \right) = \frac{1}{R_e P_r} \left[\frac{\partial^2 \Theta^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial \Theta^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 \Theta^+}{\partial z^{+2}} \right] \quad (\text{II.3.d})$$

Nous avons un système à 4 équations et 4 inconnus (U^+, W^+, T^+, P^+), caractérisé par les nombres adimensionnels suivants :

- $Re = \frac{W_m R}{\nu}$: Nombre de Reynolds moyen qui exprime le rapport des forces d'inertie par rapport aux forces visqueuses.
- $Pr = \frac{\mu C_p}{k}$: Nombre de Prandtl qui exprime les effets thermiques de l'écoulement.

Compte tenu de l'expression de la vitesse d'entrée, on définit deux autres regroupements adimensionnels donnés comme suit:

- $Re_\omega = \frac{R^2 \omega}{\nu}$: Fréquence adimensionnelle appelée aussi le nombre de Reynolds cinétique qui est égale au carré du nombre de Womersley. Il caractérise l'instationnarité de l'écoulement.

- A_W : l'amplitude de la vitesse fluctuante. Elle est donnée en fonction de $A_x = \frac{x_{\max}}{R}$ par :

$$A_W = \frac{A_0 R_e \omega}{2R_e}$$

Avec x_{\max} : Déplacement maximal du fluide pendant un cycle.

Ces nombres adimensionnels Re_ω , A_W sont utilisés dans les conditions aux limites.

L'analyse adimensionnelle, montre que les paramètres de similitude de transfert de chaleur d'un écoulement pulsé complètement développé d'un fluide incompressible sont : Re_ω, Re , A_W ou A_x et Pr .

NB : Par commodité d'écriture, l'étoile est omise de la variable adimensionnelle.

II.6 Conditions initiales et aux limites adimensionnelles :

Pour compléter le problème, outre le système d'équations cité ci-dessus, il faut tenir compte des conditions initiales et aux limites suivantes :

II.6.1 Conditions initiales :

A l'instant $t=0$, le fluide est au repos et dans des conditions normales de pression et de température :

$$U(r, z, 0) = W(r, z, 0) = \Pi(r, z, 0) = \Theta(r, z, 0) = 0$$

La paroi du cylindre est chauffée à la température : $\Theta(r, z, 0) = \Theta_s = \frac{T_p - T_0}{T_0}$

II.6.2 Condition aux limites

Les conditions aux limites traduisent la relation entre le fluide et sa frontière. Elles se résument dans notre cas, à la condition d'adhérence et d'adiabaticité de la paroi de la conduite, ainsi qu'à l'égalité de la température du fluide avec celle du cylindre chauffé. On distingue les conditions suivantes ;

$$\text{a. A l'entrée : } \begin{cases} W(r, 0, t) = \left(1 + A_w \sin\left(\frac{Re_\omega t}{Re}\right) \right) \\ U(r, 0, t) = \Theta(r, 0, t) = \Pi(r, 0, t) = 0 \end{cases}$$

b. Sur les parois :

$$\begin{cases} \text{➤ Paroi de la conduite} \\ \left. \begin{aligned} U(1, z, t) = W(1, z, t) = 0 \\ \frac{\partial \Theta(r, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} \text{➤ Paroi horizontale de l'obstacle} \\ \left. \begin{aligned} U\left(\frac{r_p}{R}, z, t\right) = W\left(\frac{r_p}{R}, z, t\right) = 0 \\ \Theta\left(\frac{r_p}{R}, z, t\right) = \Theta_s \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ Paroi verticale de l'obstacle} \quad & \begin{cases} U\left(r, \frac{z_p}{R}, t\right) = W\left(r, \frac{z_p}{R}, t\right) = 0 \\ \Theta\left(r, \frac{z_p}{R}, t\right) = \Theta_s \end{cases} \end{aligned}$$

c. Sur l'axe :

Vu la symétrie axiale du problème, le gradient radial de la composante radiale de la vitesse et celui de la température sur l'axe est nul.

$$U(0, z, t) = 0 \text{ et } \frac{\partial W(r, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = \frac{\partial \Theta(r, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

d. A la sortie :

En fin, comme condition de sortie on impose la nullité des gradients axiaux des composantes de la vitesses, de la température et de la pression et cela d'après la supposition donnée par (A.GHAZAL et al [1992]), ceci revient à écrire ;

$$\frac{\partial U(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{L}{R}} = \frac{\partial W(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{L}{R}} = \frac{\partial \Theta(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\frac{L}{R}} = 0$$

La condition de sortie sur la température est justifiée par la valeur du nombre de Peclet qui dans le cas de notre étude est de 70. Cette condition imposée pour limiter le domaine de calcul, ne satisfait pas toujours les conditions physiques réelles, mais elle donne des résultats confirmés à la littérature.

Chapitre 3 :

METHODE NUMERIQUE ET VALIDATION

III. METHODE NUMERIQUE ET VALIDATION

III.1 Méthode de résolution:

III.1.1 Introduction :

Les écoulements instationnaires des fluides incompressibles dans une géométrie complexe sont gouvernés par les équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes. Ces équations sont non linéaires et pour lesquelles une solution analytique reste difficile à obtenir. Cela impose le recours aux méthodes de résolutions numériques.

Dans la simulation numérique, la première étape consiste à définir le modèle géométrique représentant le domaine sur lequel la solution numérique devra être calculée. On procède ensuite à la discrétisation du domaine, c'est-à-dire le maillage du domaine suivant les propriétés de la géométrie et de l'écoulement. Par la suite, on choisit un schéma de discrétisation approprié pour chaque terme du système. Une fois les équations discrétisées, on cherche la méthode convenable pour la résolution du système d'équations algébriques résultant.

III.1.2 Maillage :

La spécification du maillage dépend de la complexité de la géométrie. Si cette dernière est cylindrique, comme c'est le cas de notre problème, il est recommandé d'utiliser un maillage rectangulaire.

a. Maillage régulier :

La méthode de résolution choisie est basée sur le remplacement du domaine de variation des variables r , z , t par un ensemble de valeurs discrètes de points, appelés " noeuds " du système, correspondant aux noeuds du maillage ainsi constitué. Les mailles sont carrées de côtés $\Delta r = \Delta z = h$. Chaque cellule est repérée par les indices (i,j) , (Fig (III.1)). L'indice «i» indique la position du domaine sur l'axe (oz) et l'indice «j» sa position sur l'axe (or). Par raison de symétrie

du problème, l'étude a été limitée au domaine OMBA . Les nœuds du maillage ne coïncident pas avec le bord horizontal de l'obstacle cylindrique $r=r_p$. ceci implique que les mailles adjacentes ($j=j_{cy}$) sont de tailles $\Delta r=h/2$ et $\Delta z=h$.

Les composantes (u, w) de la vitesse sont localisées respectivement sur les demi arêtes verticale et horizontale de chaque cellule. Les pressions Π sont positionnées aux centres des mailles et les sommets sont occupés par les températures Θ . C'est ce qu'on appelle un maillage décalé défini par la cellule de M.A.C (Marker And Cell).

Pour un instant donnée $t=nk$, où k est le pas du temps et n l'indice du temps, les différentes inconnues du problème sont positionnées comme suit :

- $W_{i+\frac{1}{2},j}^n$: Valeur de la vitesse axiale W au point $z_{i+\frac{1}{2}} = (i + 1/2)h$, $r_j = jh$

- $U_{i,j+\frac{1}{2}}^n$: Valeur de la vitesse radiale U au point $z_i = ih$, $r_{j+\frac{1}{2}} = (j + 1/2)h$

- $\Pi_{i,j}^n$: Valeur de la pression Π au point $z_i = ih$, $r_j = jh$.

- $\Theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n$: Valeur de la température Θ au point. $z_{i+\frac{1}{2}} = \left(i + \frac{1}{2}\right)h$, $r_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right)h$

Le choix de la taille du pas du maillage dans les deux directions doit assurer d'une part, la convergence de la méthode de calcul, d'autre part tenir compte de forts gradients des différentes grandeurs. C'est ainsi que le maillage est uniforme dans tout le domaine et réduit au voisinage des parois.

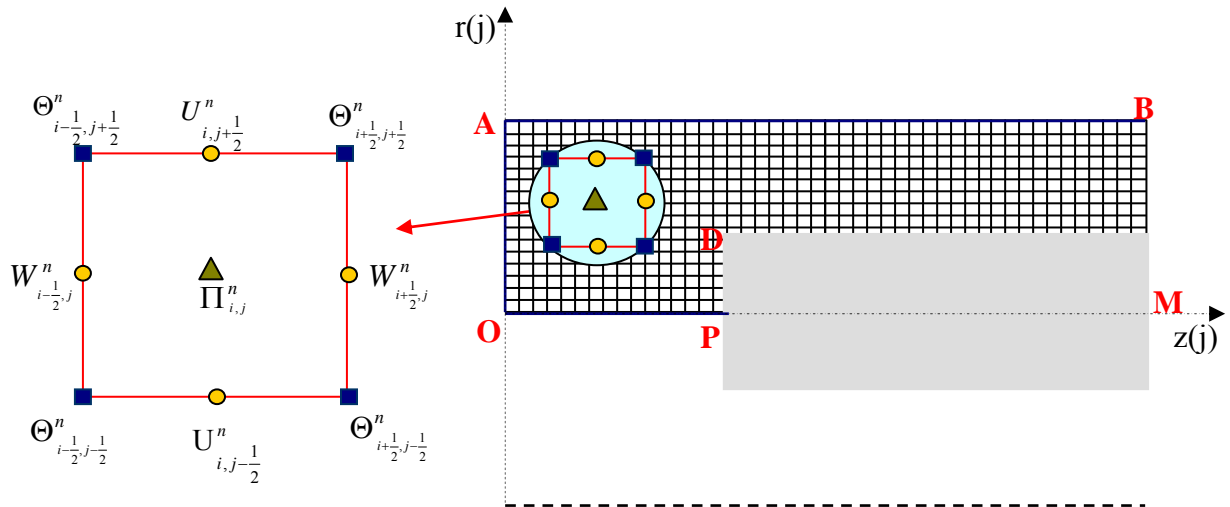


Fig. III.1 Représentation géométrique du domaine d'étude et de la cellule de M.A.C.

b. Maillage raffiné :

Au voisinage des parois le maillage est raffiné. Le raffinement est effectué en remplaçant la maille située près de la paroi de l'obstacle par des sous mailles de taille décroissante suivant une suite géométrique de raison G . Cette raison est calculée de manière à ce que la somme des tailles des sous mailles soit égale à la dimension d'une maille. Les autres mailles gardent la même taille.

La figure ci-dessous (figure.III.2) montre un exemple de raffinement d'une maille de largeur h en 3 sous mailles de pas réduit $((h_1, h_2, h_3))$. On procède de la manière suivante :

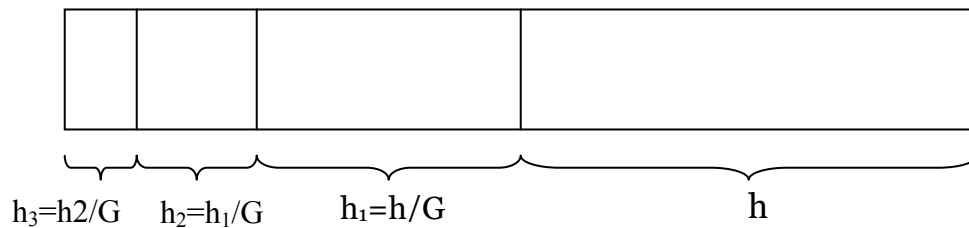


Fig.III.2 : Représentation de la structure du maillage raffiné

La somme des longueurs des trois sous mailles réduites étant égale à la longueur d'une seule maille. Ce qui conduit aux relations suivantes :

$$h_1 + h_2 + h_3 = h \rightarrow (h/G) + (h/G)^2 + (h/G)^3 = h \rightarrow G^3 - G^2 - G - 1 = 0$$

Donc d'une manière générale, pour diviser une maille en n sous mailles, la démonstration conduit à la relation suivante :

$$G^n - G^{n-1} - \dots - G - 1 = 0$$

La résolution de cette équation a été faite à l'aide d'un programme se trouvant dans la bibliothèque du logiciel Fortran. Les détails relatifs à l'utilisation de cette méthode pour le raffinement du maillage sont donnés par B.Dada [2004].

III.1.3 Schéma de discrétisation :

L'objectif de la discrétisation des termes des équations du système est de parvenir à un système matriciel : $Ax = b$

Où A est une matrice, x est le vecteur inconnue recherché et b le vecteur non homogène.

Les termes du système d'équations aux dérivés partielles (II.3) ne sont pas discrétisés de la même manière. On note l'utilisation de deux types de discrétisation ; spatiale et temporelle.

III.1.3.1 Discrétisation spatiale :

Le traitement spatial des différents termes fait appel aux différentes formes des dérivées afin d'assurer la stabilité et la convergence du schéma numérique.

La discrétisation du système (II.3) par rapport aux variables spatiales est donnée en annexe (1).

III.1.3.2. Discrétisation temporelle :

Dans le cas des problèmes transitoires, deux types de schéma sont utilisés :

- schéma explicite
- schéma implicite

a. Schéma explicite :

Un schéma est dit explicite si la solution discrète est connue explicitement en fonction du temps. L'inconvénient du schéma explicite réside dans le fait qu'il est conditionnellement stable, c'est-à-dire que le choix du pas de temps est limité par des contraintes de stabilité numérique.

b. Schéma implicite :

Un schéma est implicite si la grandeur inconnue à l'instant $t+\Delta t$ est exprimée en fonction des grandeurs à l'instant t aussi bien des grandeurs inconnues correspondant à l'instant $(t+\Delta t)$. Cette méthode est inconditionnellement stable et permet d'utiliser un pas de temps assez grands, mais leur mise en œuvre conduit souvent à des calculs compliqués.

Il demeure, cependant, nécessaire de rechercher une méthode intermédiaire, c'est-à-dire, un schéma qui est inconditionnellement stable et qui ne demande pas un temps de calcul élevé. Parmi ces schémas, on cite le schéma de Crank-Nicholson

c. Le schéma de Crank-Nicholson :

Cette méthode consiste à combiner la précision du schéma explicite avec la stabilité du schéma implicite. Sa schématisation est plus difficile à réaliser. Elle présente, cependant, l'avantage d'être précise à l'ordre $O(\Delta t^2)$ sur le demi-intervalle de temps et elle est inconditionnellement stable. Les variations d'un instant t vers un instant $(t+\Delta t)$ se font linéairement et donnent des résultats plus exacts pour un Δt faible relativement aux méthodes complètement implicites, Patankar [1980].

III.1.4 Discrétisation du système d'équations :

Pour la discrétisation des dérivés partielles par rapport au temps, on a utilisé une méthode aux différences finies implicite du type Crank-Nicholson. Elle est très proche de celle utilisée par R.Peret [1976] et d'autres auteurs. Les équations du système (II.3) sont réécrites comme suit :

a. Equation de continuité :

La prise en compte de la contrainte de divergence nulle induit des instabilités dans la résolution des équations du mouvement. Pour raison de conditions initiales incompatibles ou à cause d'une solution itérative incomplète avec un schéma aux méthodes implicites, l'équation de continuité est non nulle. Le terme de pression est dans ce cas instable. Le processus itératif peut en effet causer une amplification de l'erreur de troncature. Pour éviter ces instabilités on impose une compressibilité artificielle pour laquelle l'équation de continuité s'écrit comme suit :

$$\left(\delta_r^- \mathbf{u}\right)_{i,j+1/2}^{n+1} + \left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{r}}\right)_{i,j}^{n+1} + \left(\delta_z^- \mathbf{w}\right)_{i+1/2,j}^{n+1} = 0 \quad (\text{III.1.a})$$

b. équation du mouvement :**➤ Suivant r :**

$$\begin{aligned} & \left(\delta_t^- \mathbf{u}\right)_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{u} \delta_r^0 \mathbf{u}\right)^{n+1} + \left(\mathbf{u} \delta_r^0 \mathbf{u}\right)^n \right]_{i,j+1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{u} \delta_z^0 \mathbf{w}\right)^{n+1} + \left(\mathbf{u} \delta_z^0 \mathbf{w}\right)^n \right]_{i,j+1/2} = \\ & \left(\delta_r^+ \Pi\right)_{i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\delta_r^+ \mathbf{u} + \frac{\delta_r^0 \mathbf{u}}{\mathbf{r}} - \frac{u}{r} + \delta_z^2 \mathbf{u} \right)^{n+1} + \left(\delta_r^+ \mathbf{u} + \frac{\delta_r^0 \mathbf{u}}{\mathbf{r}} - \frac{u}{r} + \delta_z^2 \mathbf{u} \right)^n \right]_{i,j+1/2} \end{aligned} \quad (\text{III.1.b})$$

➤ Suivant z :

$$\begin{aligned} & \left(\delta_t^- \mathbf{w}\right)_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{u} \delta_r^0 \mathbf{w}\right)^{n+1} + \left(\mathbf{u} \delta_r^0 \mathbf{w}\right)^n \right]_{i+1/2,j} + \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{w} \delta_z^0 \mathbf{w}\right)^{n+1} + \left(\mathbf{w} \delta_z^0 \mathbf{w}\right)^n \right]_{i+1/2,j} = \\ & \left(\delta_z^+ \Pi\right)_{i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\delta_r^2 \mathbf{w} + \frac{\delta_r^0 \mathbf{w}}{\mathbf{r}} + \delta_z^2 \mathbf{w} \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 \mathbf{w} + \frac{\delta_r^0 \mathbf{w}}{\mathbf{r}} + \delta_z^2 \mathbf{w} \right)^n \right]_{i+1/2,j} \end{aligned} \quad (\text{III.1.c})$$

c. équation de l'énergie :

$$\begin{aligned} & \left(\delta_t \Theta\right)_{i+1/2,j+1/2}^n + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{\mathbf{u}} \delta_r^0 \Theta\right)^{n+1} + \left(\bar{\mathbf{u}} \delta_r^0 \Theta\right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \frac{1}{2} \left[\left(\bar{\mathbf{w}} \delta_z^0 \Theta\right)^{n+1} + \left(\bar{\mathbf{w}} \delta_z^0 \Theta\right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \\ & = \frac{1}{2\text{RePr}} \left[\left(\delta_r^2 \Theta + \frac{\delta_r^0 \Theta}{\mathbf{r}} + \delta_z^2 \Theta \right)^{n+1} + \left(\delta_r^2 \Theta + \frac{\delta_r^0 \Theta}{\mathbf{r}} + \delta_z^2 \Theta \right)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \end{aligned} \quad (\text{III.1.d})$$

Par un souci de commodité de notation, nous avons introduit les symboles u_h, w_h, Π_h et Θ_h représentant les valeurs des inconnues dans les positions données dans la maille de M.A.C, c'est-à-dire :

$$U_h = U_{ij+1/2}^{n+1}, W_h = W_{i+1/2j}^{n+1}, \Pi_h = \Pi_{i,j}^{n+1} \text{ et } \Theta_h = \Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$$

Le système d'équation discrétisé résultant est mis sous la forme symbolique simple suivante ;

$$\begin{cases} L_U (U_h, W_h, \Pi_h) = 0 \\ L_W (U_h, W_h, \Pi_h) = 0 \\ D (U_h, W_h, \Pi_h) = 0 \\ L_\Theta (U_h, W_h, \Theta_h) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

L_U, L_W, L_Θ et D : sont les opérateurs de différence relatifs au système d'équations auxquelles correspondent respectivement les variables de problème U, W, Π, Θ .

Le choix d'un pas constant dans la discrétisation est dû au faite à la dominance de pas régulier dans le domaine du calcul, et aussi pour éviter de modifier la condition de convergence. Ce choix a permis d'avoir des résultats très fiables.

III.1.5 Traitement des opérateurs aux frontières :

Lorsque les équations sont discrétisées dans les mailles bordant les frontières du domaine, certaines modifications doivent être apportées au schéma de discrétisation. Car les frontières ne coïncident pas avec le maillage géométrique décrit sur la figure (II.3). Pour remédier à ce problème, Il est utile de tenir compte de l'existence d'une maille fictive disposée, à l'extérieur, de l'autre coté de la paroi solide afin de vérifier les conditions à la frontière.

Les conditions aux frontières intervenant dans notre modèle nécessitent une étude pour chacune des frontières représentées sur la figure (III.3). Le détail de ce traitement est dans l'annexe 2.

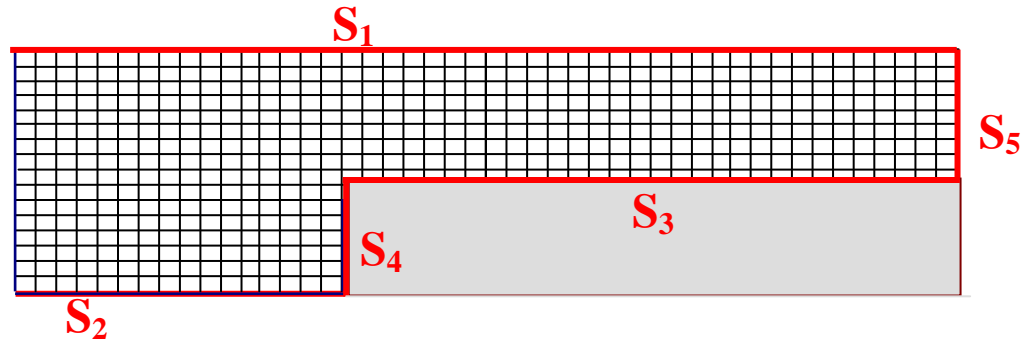


Fig. III.3 : les frontières du domaine

III.1.6. Résolution générale du système d'équations discrétisées :

Une fois les équations discrétisées, l'étape suivante consiste à résoudre le système d'équations algébriques résultant (III.2) à chaque pas de temps. On note que les écoulements pulsés présentent des variations considérables de la direction du vecteur vitesse au voisinage des parois par effet de recirculation du fluide. Nous avons alors procédé à l'application de l'algorithme de Thomas (T.D.M.A) (Tri Diagonal Matrix Algorithm) suivant les deux directions. Ce double balayage est destiné à accroître la stabilité et la convergence du système.

Le système obtenu, est en réalité non linéaire et les équations sont couplées, Le processus de résolution nécessite, alors, l'utilisation de la méthode itérative.

La méthode de résolution choisie pour notre problème, est la méthode itérative déjà utilisée par Fortin [1972], Peyret [1976] et également repris par d'autres auteurs. Le principe de cette méthode est de corriger petit à petit les valeurs estimées des champs U , W , Π , Θ dans chaque itération jusqu'à obtenir des solutions du problème à une certaine valeur de résidu prédéfinie antérieurement par le critère de convergence.

Les variations brutales des variables engendrées au cours des premières itérations sont très déstabilisantes. Dans le but de réduire les amplitudes des variations, des sous relaxations régulières sont utilisées pour les variables générales à l'intérieur d'un pas de temps.

Si ν est l'indice caractérisant l'ordre d'itération, le système algébrique (III.2) est défini donc par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h^{\nu+1} - \mathbf{u}_h^\nu - K\mathbf{L}_u(\mathbf{u}_h^\nu, \mathbf{w}_h^\nu, \Pi_h^\nu) = 0 \\ \mathbf{w}_h^{\nu+1} - \mathbf{w}_h^\nu - K\mathbf{L}_w(\mathbf{u}_h^\nu, \mathbf{w}_h^\nu, \Pi_h^\nu) = 0 \\ \Pi_h^{\nu+1} - \Pi_h^\nu - \beta_u(\mathbf{u}_h^\nu, \mathbf{w}_h^\nu, \Pi_h^\nu) = 0 \\ \Theta_h^{\nu+1} - \Theta_h^\nu - \chi\mathbf{L}_\Theta(\mathbf{u}_h^\nu, \mathbf{w}_h^\nu, \Theta_h^\nu) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Où les coefficients de sous relaxation sont choisis tels que ; $\begin{cases} 0 < K < 1 \\ 0 < \beta < 1 \\ 0 < \chi < 1 \end{cases}$

Les coefficients K , β et χ sont des paramètres qui doivent être choisis de façon à assurer la convergence du système (III.3). Pour cela il est nécessaire d'étudier les conditions de la stabilité du système d'équations (III.3), dont lequel l'indice ν est identifié comme une variable de temps, ce qui rend le système évolutif dans le temps (ν).

III.1.7. Stabilité et convergence de la méthode de résolution :

Pour notre cas, on a utilisé les résultats de l'étude de la stabilité donnée par R.Peyret [1976] et repris par A.Bouhana [1982]. La condition de convergence est assurée seulement, si le rayon spectral de la matrice d'amplification relative au système simplifié, ne dépasse pas l'unité. Cela conduit aux conditions de convergence suivantes ;

$$\begin{cases} K > 0, \beta > 0, \chi > 0 \\ \frac{2K}{h^2} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{h^2}{4K} + \beta \right) < 1 \\ \frac{2\chi}{h^2} \left(\frac{1}{\text{Re } Pe} + \frac{h^2}{4h} \right) < 1 \end{cases}$$

Les valeurs K, β, χ sont déterminées par des tests numériques. Pour des valeurs de K et χ , la meilleure convergence est obtenue avec une valeur de β proche du maximum permis par l'équation.

Afin de limiter le nombre d'itérations et par conséquent le temps de calcul, on impose que la convergence du procédé itératif soit obtenue quand :

$$\max [|L_u|, |L_w|, |L_\Pi|, |L_\Theta|] < \varepsilon, \text{ où } \varepsilon \text{ est choisie égale à } 3.10^{-3}$$

Pour assurer une convergence plus rapide des calculs, on procède à la méthode de Gauss-Seidel. Le principe de cette méthode est l'utilisation dans les calculs la valeur la plus récente d'une inconnue calculée.

Les étapes de la méthode de résolution du système algébrique (III.3) sont résumées par l'algorithme représenté sur la figure (III.4).

Avec :

Q_{\max} et Q_{\min} délimitant le domaine où l'on cherche la valeur optimale de χ assurant la bonne convergence.

NHH : Nombre maximum d'itération demandé.

NNH : Nombre maximum de pas en temps demandé.

K : Compteur des itérations effectuées dans le temps.

G : Compteur des itérations effectuées pour la convergence.

Y : Maximum entre les opérateurs L_U, L_W, D, L_Θ .

On note que ces paramètres sont utilisés avec les mêmes appellations dans le code de calcul.

L'instruction « Transfert » est une simple affectation des éléments des matrices U_1, W_1, P_1 et T_1 respectivement dans les matrices U_0, W_0, P_0 et T_0 pour les remplir au prochain plan du temps.

N.B : Les conditions de stabilité ne dépendent pas de façon explicite de la fréquence de l'écoulement pulsé. Ceci constitue un avantage au plan calcul (moins de contrainte). Cette situation est due au fait qu'on n'a pas utilisé la fréquence dans nos changements de variables adimensionnelles.

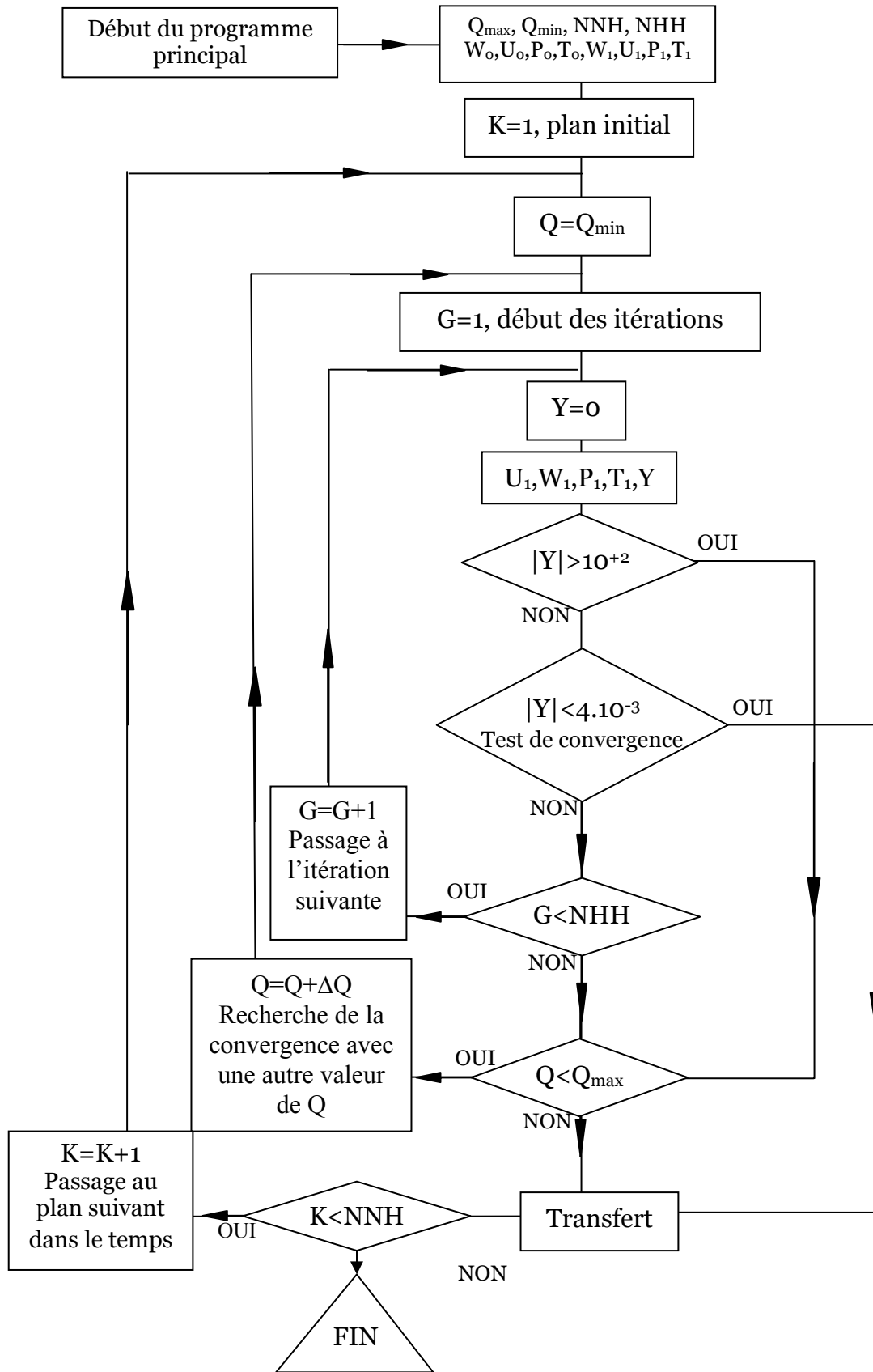


Figure III.4 : Organigramme du processus itératif

La figure (III.5.a,b), montre que l'évolution du nombre d'itérations assurant la convergence dans un écoulement pulsé est périodique et non pas une fonction décroissante comme dans le cas stationnaire .

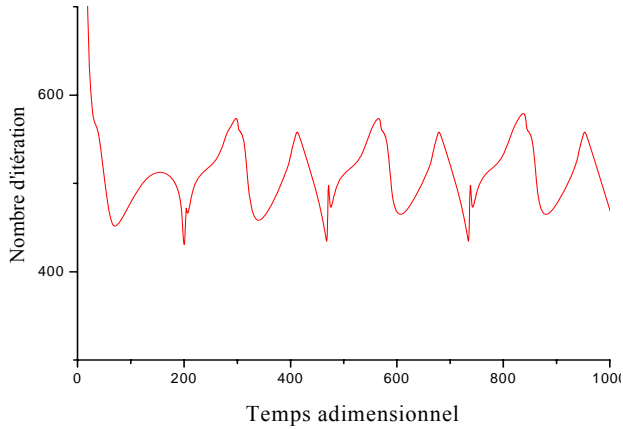


Fig III.5.a : l'évolution du nombre d'itérations, écoulement pulsé , $Re_\omega=100$ et $A_w=0.5$

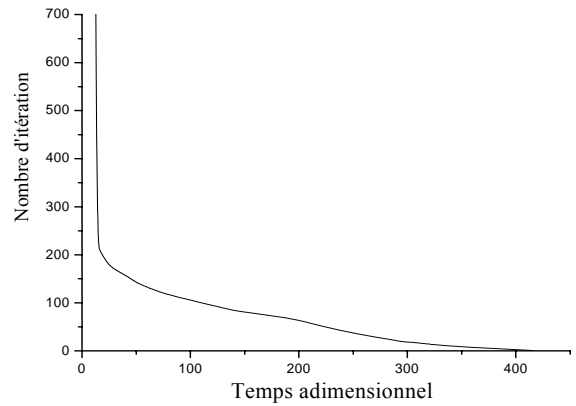


Fig. 5.b : l'évolution du nombre d'itérations, écoulement stationnaire, $Re_\omega=100$ et $A_w=0.5$

Les calculs montrent, que le nombre d'itérations moyen dépend non seulement du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl, Dada [2004], Ouchiha [1998]. Mais, il dépend aussi de la fréquence et de l'amplitude de l'écoulement imposé, ce qui est indiqué dans les figures (III.6.a,b) qui présentent la variation du nombre d'itérations en fonction de la fréquence et de l'amplitude pour $Re=100$ et le $P_r=0.7$. On constate sur ces dernières, que le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence augmente avec l'accroissement de la fréquence et de l'amplitude.

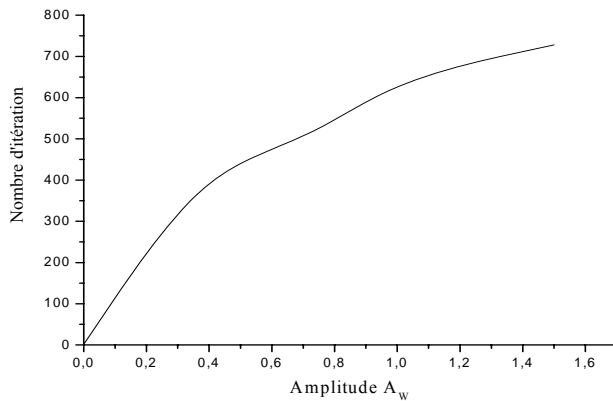


Fig.III.6.a : Variation du nombre d'itérations en fonction de A_w pour $Re_\omega=100$

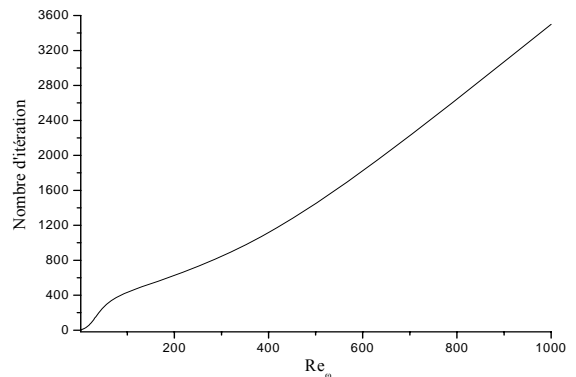


Fig.III.6.b : Variation du nombre d'itérations en fonction de Re_ω pour $A_w=0.5$

III.2 Validation du code de calcul :

La validation du code de calcul est effectuée dans le cas d'un écoulement avec un débit d'entrée oscillatoire et pulsé dans une conduite cylindrique.

1. Dans le cas où l'écoulement est oscillatoire, la comparaison porte sur les résultats analytiques de l'évolution du profil de la vitesse axiale en fonction de Re_ω pour huit (08) instants couvrant ainsi une période.
2. Dans le second cas, on compare la variation du coefficient de frottement d'un écoulement pulsé en fonction de Re_ω , obtenu numériquement par le code de calcul avec ceux des autres études.

III.2.1. Ecoulement oscillatoire :

a. Expression théorique de la vitesse axiale

Atabek et Chang [1961] ont développé une solution analytique pour l'évolution des profils de vitesse dans le cas d'un écoulement pulsé laminaire d'un fluide incompressible dans des conduites cylindriques.

Dans le cas d'un écoulement développé, purement sinusoidale, où la vitesse d'entrée s'écrit sous la forme $W_e(r,t) = W_0 \left(a \cos(n\omega t) + b \sin(n\omega t) \right)$, ils ont obtenu une expression du profil de la vitesse en fonction de la position radiale et du temps sous la forme :

$$W(r,t) = W_0 \operatorname{Re} \left\{ (a + ib) \frac{\left[J_0 \left(i^{3/2} \lambda \frac{r}{R} \right) - J_0 \left(i^{3/2} \lambda \right) \right]}{J_2 \left(i^{3/2} \lambda \right)} e^{i\omega t} \right\}$$

Où λ est le nombre de Womersley, $\lambda = \sqrt{Re_\omega}$, J_0 et J_2 sont les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre 0 et 2.

b. Résultats et discussion²

Les figures (III.7.a,b) représentent respectivement les profils de vitesse obtenus en utilisant notre code de calcul et ceux d'Atabek et Chang [1961]. Ces profils de vitesse sont donnés pour des valeurs de la fréquence ($Re_\omega = 1-100-900$) et sur une période de temps. Dans le cas de valeurs élevées de Re_ω , les forces d'inertie sont plus importantes au niveau de l'axe que dans la zone proche de la paroi. Ceci se traduit par une accélération au niveau de la paroi et par conséquent une décélération au centre. Ce qui explique la structure d'écoulement annulaire qui caractérise les écoulements oscillatoires.

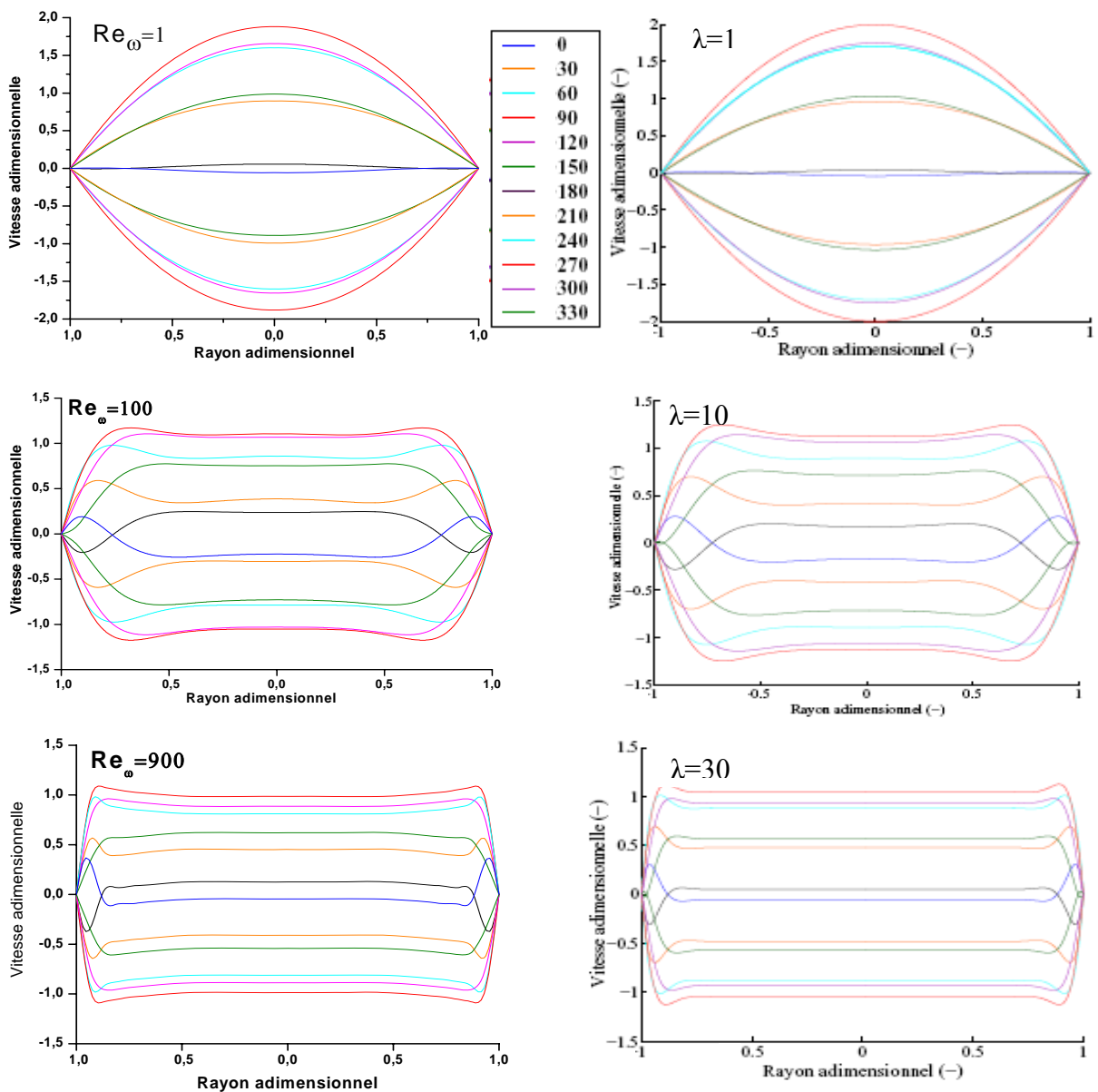


Fig.III.7.a Résultats de l'étude

Fig.III.7.b Résultats d'Atabek et Chang [1961]

La comparaison de nos résultats avec ceux des auteurs, montre une parfaite concordance. Toutefois, on signale un léger écart dû au fait que les résultats théoriques sont obtenus avec l'hypothèse d'un écoulement complètement développé, alors que les nôtres correspondent à un écoulement non développé.

On signale aussi, que la même validation a été faite avec les résultats Atabek et Chang [1961] par Benyahia [2005] en utilisant un schéma numérique progressif des différences finies et en procédant à la méthode de superposition pour extraire de l'écoulement pulsé, l'écoulement oscillatoire.

III.2.2. Ecoulement pulsé :

Dans ce deuxième test, on s'intéresse à l'écoulement pulsé, en comparant le coefficient de frottement moyen obtenu par notre code de calcul avec celui obtenu numériquement par Chan et al [2002].

a. Calcul du coefficient de frottement :

Le calcul du coefficient de frottement dans le cas bidimensionnel présente quelques difficultés. Pour cette raison et afin de mener une comparaison avec les autres études, on a effectué le calcul en se basant sur le cas unidimensionnel utilisé dans la plupart des études. Cela permet aussi la mise en évidence sans grande difficulté du déphasage entre le coefficient de frottement et la vitesse débitante.

Si on considère l'écoulement d'un fluide incompressible avec une vitesse moyenne W_m dans la section droite d'une conduite cylindrique (figure III.8), on peut écrire pour un élément de volume donné l'équation de bilan des forces qui s'exercent sur lui comme suit:

$$-\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial z} = 2\pi R \tau_p + \pi R^2 \rho \frac{\partial w_m}{\partial t} \quad (\text{III.5})$$

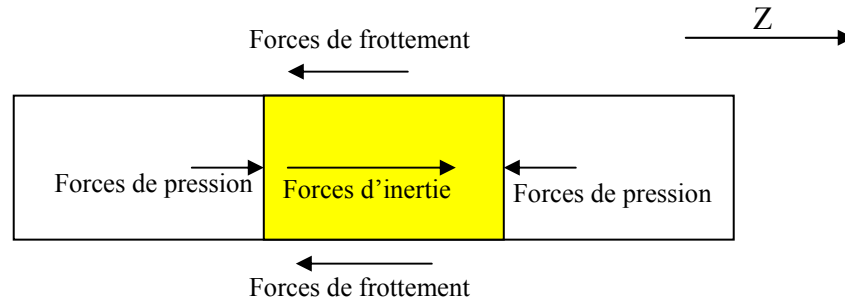


Fig.III.8. : Bilan des forces pour un modèle unidimensionnel

Avec ;

$\pi R^2 \frac{\partial P}{\partial Z}$: Force par unité de longueur due à la pression ;

$2\pi R \tau_p$: Force par unité de longueur due à la contrainte à la paroi ;

$\pi R^2 \rho \frac{\partial W_m}{\partial t}$: Force par unité de longueur due à l'inertie.

A partir de l'équation (III.5), on obtient l'expression suivante par la contrainte pariétale:

$$\tau_p = \frac{R}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial W_m}{\partial t} \right)$$

L'expression du coefficient de frottement est alors :

$$C_f = \frac{R}{\rho W_0^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial W_m}{\partial t} \right)$$

b. Résultats et interprétation

Les figures (III.9.a,b) donnent la variation du coefficient de frottement moyen d'un écoulement pulsé bidimensionnel en fonction de la coordonnée axiale pour un nombre de Reynolds $Re=30$ et une fréquence adimensionnelle égale à 8 dans l'étude de Chan et al [2002] qui correspond à $Re_\omega=226$ dans notre étude. Les résultats de l'auteur sont obtenus par la

résolution numérique des équations de Navier Stokes, ils sont comparés avec les résultats théoriques donnés par la méthode de la couche limite (voire figure (III.9.b)).

La comparaison de nos résultats avec les précédents montre une parfaite concordance. Néanmoins, on signale un petit écart entre les valeurs obtenues proche de l'entrée. Cela est dû à l'approche faite dans notre cas pour le calcul du C_{f_m} .

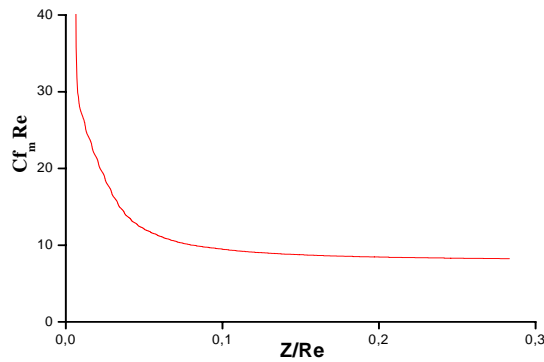


Fig. III.9.a : Résultats de l'étude

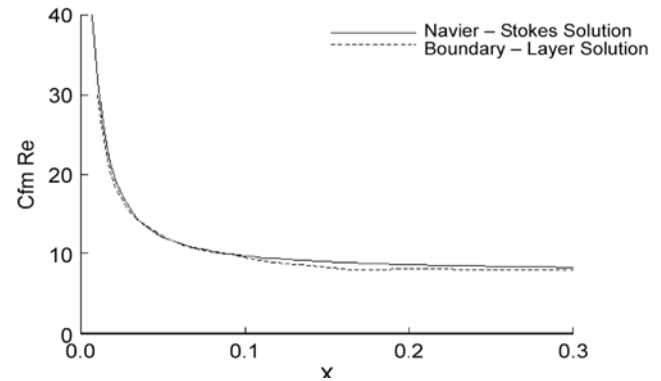


Fig. III.9.b : Résultats de Chan et al [2002]

Chapitre 4 :

RESULTATS ET DISCUSSION

IV. RESULTATS ET DISCUSSION

IV.1 Introduction :

Après la validation du code de calcul dans les deux cas, pulsé et oscillatoire, on l'utilise pour résoudre le problème concernant l'écoulement pulsé dans une conduite en présence d'un obstacle cylindrique chauffé.

On s'intéresse dans ce chapitre à l'influence de la fréquence et de l'amplitude de la vitesse d'entrée sur les paramètres dynamiques et thermiques de l'écoulement et à la description des phénomènes caractérisant l'écoulement pulsé.

IV.2 Partie Dynamique :

IV.2.1 Influence de l'écoulement pulsé sur le champ dynamique :

Afin d'étudier les différents régimes de l'écoulement ; de l'écoulement de type de Poiseuille jusqu'à l'écoulement complètement instationnaire, on fait varier le nombre de Reynolds cinétique Re_ω de 1 à 1000. De même l'amplitude A_w de 0.1 à 2. On note aussi, que les résultats sont obtenus pour $Re=100$, $Pr=0.7$ et $Z=3$.

Concernant la variation temporelle des différentes variables dynamiques, on choisit huit instants couvrant ainsi une période.

IV.2.1.1 Influence de la fréquence Re_ω :

Pour examiner l'influence de la fréquence de l'écoulement débitant sur les variables dynamiques, on fixe A_w et Re respectivement à 0.5 et à 100 et on fait varier Re_ω de 1 à 1500.

a. Sur la vitesse

Pour mieux illustrer l'influence de la fréquence sur les profils de vitesse, on choisit un écoulement oscillatoire pour deux valeurs de la fréquence Re_ω (1 et 900) à des intervalles de temps égaux dans une période, voir les figures (IV.1.a,b) .

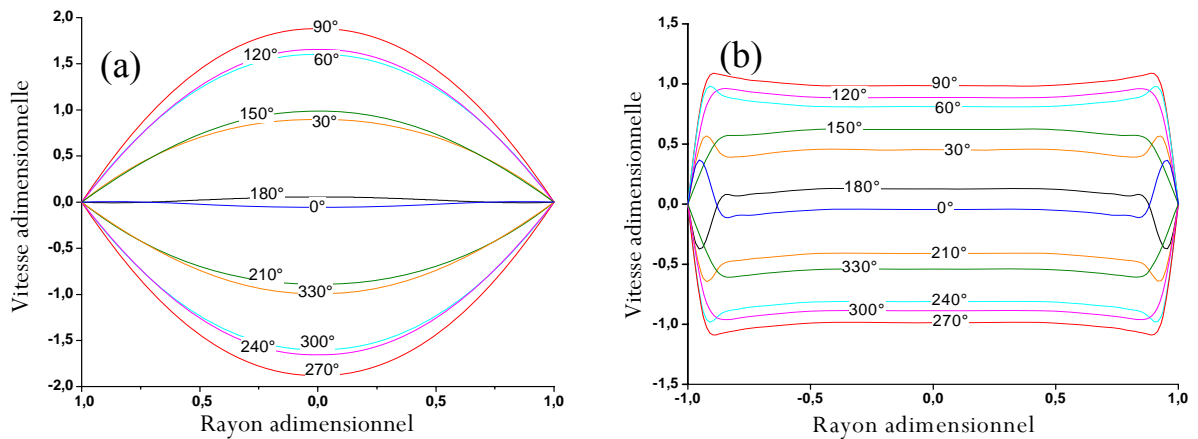


Fig.IV.1 : Evolution du profil de vitesse, (a) : $Re_{\omega}=1$ et (b) : $Re_{\omega}=900$

Dans le cas d'un nombre de Reynolds cinétique faible $Re_{\omega}=1$, on remarque que les profils de vitesse ont une forme parabolique, similaire à celle obtenue en écoulement laminaire. Pour un nombre de Reynolds cinétique important $Re_{\omega}=900$, les profils de vitesse présentent une forme annulaire caractérisée par des maximums au voisinage de la paroi et un plateau au cœur de l'écoulement. En effet, pour les grandes fréquences, la vitesse sur l'axe et dans son voisinage ne suit pas immédiatement les changements de l'écoulement d'entrée. Cela entraîne nécessairement l'accélération de fluide près de la paroi, où l'inertie est faible, ce qui explique la forme annulaire du profil de la vitesse.

L'influence de la fréquence sur la composante radiale de la vitesse est montrée sur la figure (IV.2). On remarque que l'augmentation de la fréquence fait diminuer l'amplitude de la vitesse radiale qui devient presque négligeable par rapport à la composante axiale. Elle est de l'ordre de 1% pour les grandes fréquences, ce qui rend l'écoulement pratiquement unidimensionnel pour les hautes fréquences.

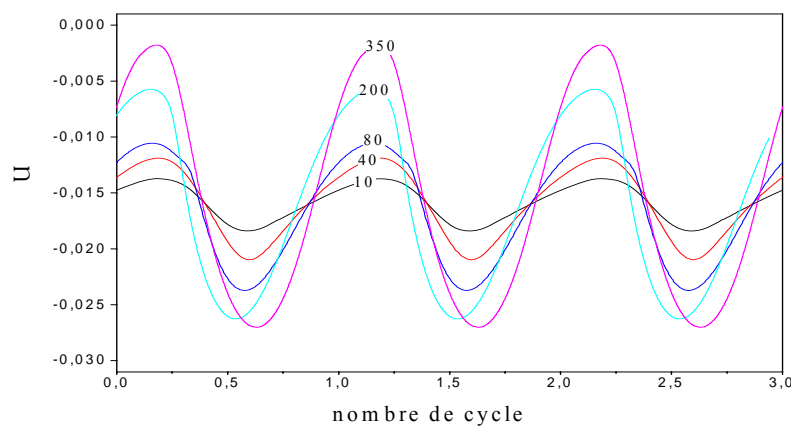


Fig.IV.2 : Evolution de la composante radiale de la vitesse en fonction de la fréquence.

La figure (IV.3.a) représente les lignes de courant pour un écoulement pulsé pour différentes valeurs de Re_ω et pour une phase croissante. Pour une faible valeur de la fréquence, $Re_\omega=1$, les lignes de courant sont parallèles à l'axe comme le cas de l'écoulement laminaire permanent. Pour les grandes fréquences, $Re_\omega=250$ et $Re_\omega=1000$, on constate la création de zones tourbillonnaires au voisinage de la paroi correspondant au renversement de l'écoulement. La largeur de cette zone diminue lorsque la fréquence augmente. Ceci correspond au rapprochement du point de renversement de la vitesse et à la diminution de l'amplitude de la composante radiale de la vitesse comme indiquée sur la figure (IV.2).

Il est à noter que dans le cas d'un écoulement en présence d'obstacle, figures (IV.3.b), la taille des tourbillons est plus importante que celle du cas précédent et on relève la création d'un autre tourbillon au niveau de la paroi de l'obstacle, dans la zone d'entrée de l'espace annulaire qui correspond au décollement.

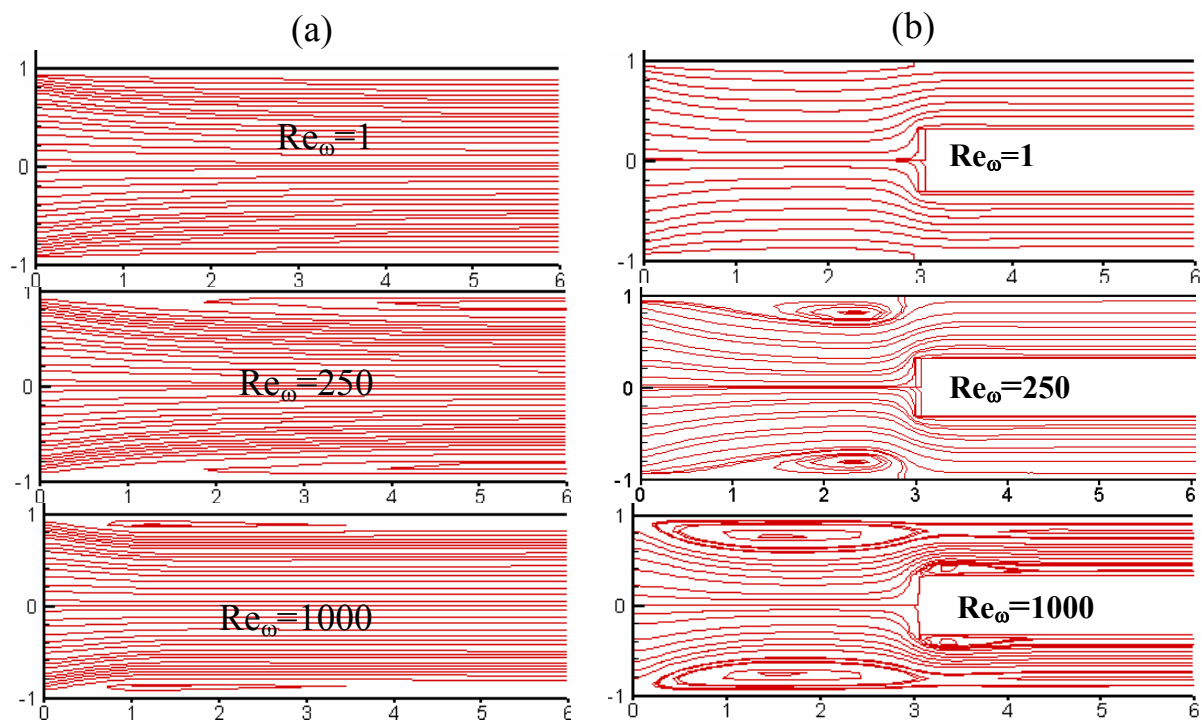


Fig.IV.3 lignes de courant pour $A_w=0.5$ et pour différentes fréquences ;
(a) sans obstacle, (b) avec obstacle

b. Sur le coefficient de frottement

Pour analyser l'influence du nombre de Reynolds cinétique sur l'évolution du coefficient de frottement, on trace la variation de cette grandeur pour différents valeurs du nombres de Reynolds cinétiques (Figure (IV.4)). D'après cette courbe, le coefficient de frottement présente un aspect sinusoidal similaire à celui de l'écoulement d'entrée. Mais avec un déphasage par rapport à ce dernier qui augmente considérablement à partir de la fréquence $Re_{\omega}=100$, pour atteindre une valeur limite autour de 45° , (voir figure (IV.5)). On constate, aussi, que l'augmentation de la fréquence fait accroître les maxima du coefficient de frottement et déforme légèrement l'aspect sinusoidal surtout pour des fréquences $Re_{\omega} > 400$.

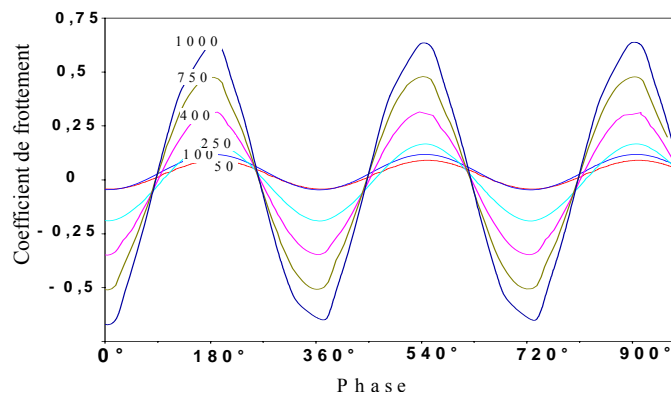


Fig.IV.4: Evolution du coefficient de frottement pour différentes fréquences

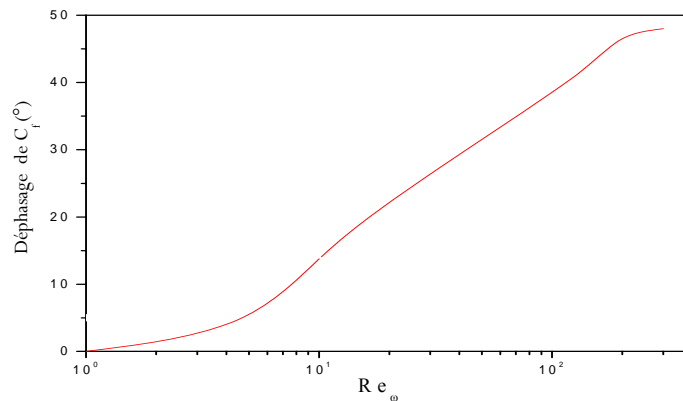


Fig. IV.5 : Variation de déphasage de C_f en fonction de la fréquence

La figure (IV.6) montre que l'amplitude maximale du coefficient de frottement augmente avec la fréquence pour atteindre environ 10 fois sa valeur dans le cas de l'écoulement permanent. Ces résultats concordent avec ceux obtenus par Simon et al [1988]. Néanmoins, on note une légère augmentation pour les faibles fréquences. Cela peut se justifier par la contribution de la deuxième composante de la vitesse.

Le taux d'augmentation C_f/C_{fs} est de l'ordre 1 pour les fréquences $Re_\omega < 100$, ce qui correspond au cas de l'écoulement stationnaire. On signale que l'effet de l'instationnarité sur C_f/C_{fs} commence à partir des fréquences [100-150] correspondant à l'amorçage de l'effet annulaire.

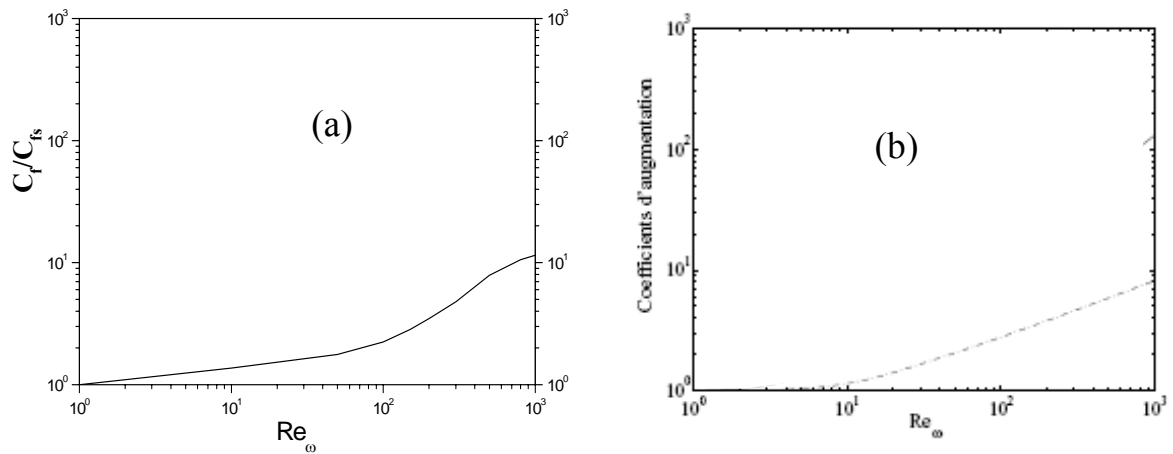


Fig.IV.6 : Taux d'augmentation du coefficient de frottement en fonction des fréquences; (a) notre étude, (b) résultats de Simon et al [1988]

L'étude Zhao et Chang [1988] représente la variation de $C_f/(2Re/A_0)$ en fonction de Re_ω pour un écoulement pulsé unidimensionnel complètement développé dans une conduite cylindrique (voir la figure (IV.7)). La comparaison de nos résultats avec ceux des auteurs, montre une bonne similarité des courbes, surtout pour les grandes fréquences. Ceci peut se justifier par la diminution de l'effet de la composante radiale de la vitesse pour les grandes fréquences.

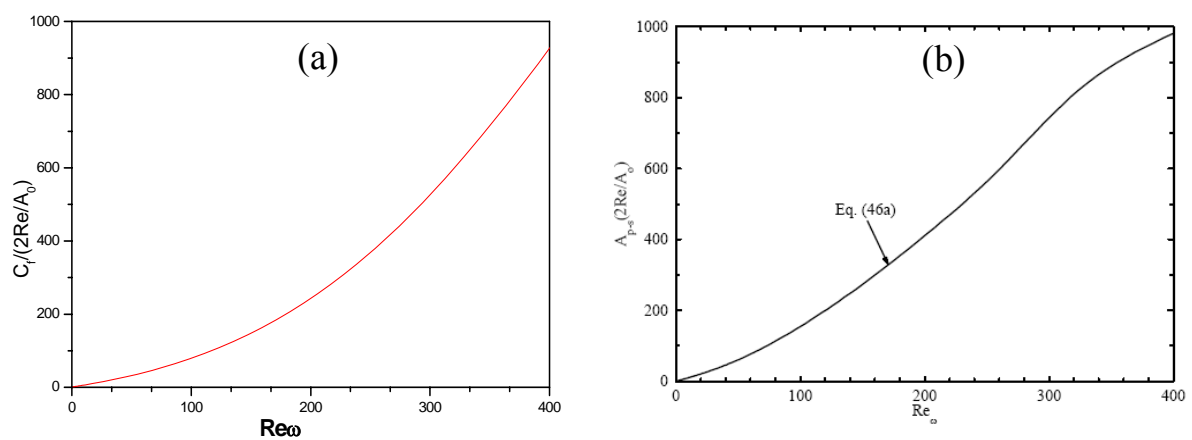


Fig IV.7 : Variation de $C_{fm}/(2Re/A_0)$ en fonctions de la fréquence : (a) : notre étude, (b) : résultats de référence Zhao et Chang [1988]

c. Sur le gradient de pression

On représente, sur la figure (IV.8), l'évolution du gradient de la pression pour différentes fréquences. On constate que le gradient de pression possède un aspect sinusoïdal pour les faibles fréquences $Re_\omega < 500$. Cet aspect se déforme à partir de $Re_\omega = 500$, ce qui est dû à la présence des instabilités dynamiques. On signale l'existence du déphasage par rapport à la vitesse débitante qui augmente avec la fréquence. Ce dernier augmente rapidement pour les faibles fréquences et tend asymptotiquement vers la valeur limite qui est égale à 83° pour les grandes fréquences (figure (IV.9)). Cette valeur limite est légèrement inférieure à celle trouvée par Majdalani et al [2002], Zhao et Cheng [1988] et Yakhot et al [2003], qui est égale à 90° .

La figure (IV.10.a) montre aussi le taux de croissance du gradient de la pression avec la fréquence. L'augmentation pour les grandes fréquences est de l'ordre 40 fois la valeur du maximum qui correspond à l'écoulement stationnaire comme cela est montré sur la figure (IV.10.b). Cette augmentation est presque la moitié de celle obtenue par Simon et al [1988]. Le rapport entre ces deux résultats est dû à la différence du dimensionnement des deux études.

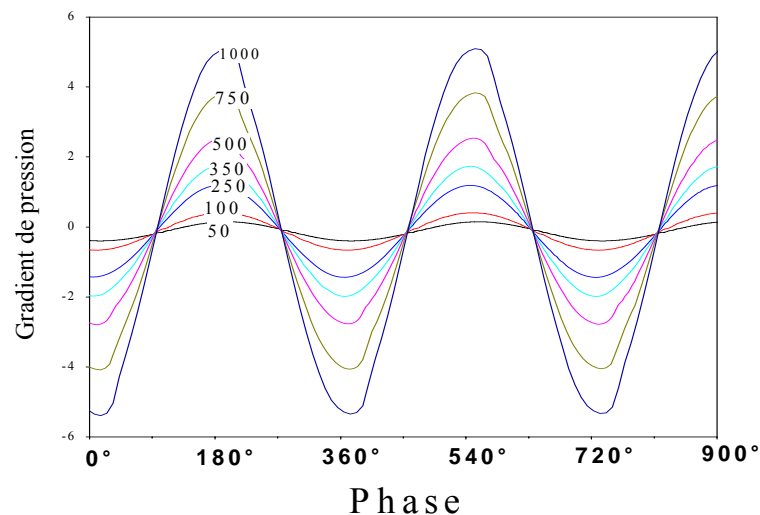


Fig. IV.8 : Variation du gradient de pression en fonction de la fréquence

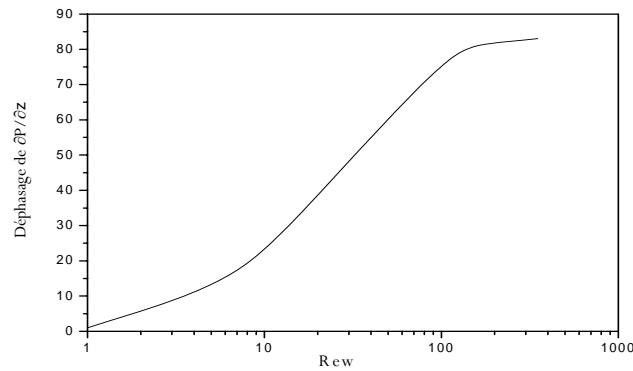


Fig. IV.9 : Variation du déphasage du gradient de pression en fonction de la fréquence

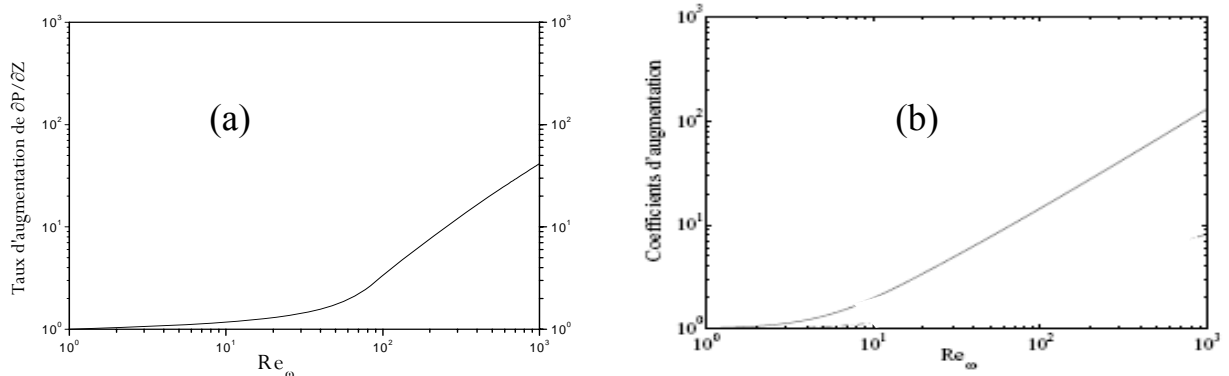


Fig.IV.10.a,b : Le taux d'augmentation du gradient de la pression en fonction des fréquences : (a) ; notre étude, (b) ; résultats de Simon et al [1988]

IV.2.1.2 Influence de l'amplitude A_w de la pulsation :

Pour examiner l'influence de l'amplitude de l'écoulement débitant sur les variables dynamiques, on fixe Re_ω et Re à 100. On fait varier A_w de 0.1 à 2.

a. Sur la vitesse :

L'effet de la variation de l'amplitude A_w sur l'évolution de la vitesse pour une fréquence $Re_\omega=100$ est illustré sur la Figure (IV.11.a,b). On constate que pour le cas d'une faible amplitude $A_w=0.1$ (Fig IV.11.a), le rôle de la pulsation est complètement négligeable devant l'écoulement moyen, ce qui explique la faible présence de l'effet annulaire et la tendance vers un écoulement de type Poiseuille.

On note aussi que pour toutes les phases, les profils de vitesses sont positifs. Ceci indique l'absence de la recirculation dans l'écoulement. Ce résultat est plus apparent sur la figure (IV.12.a) qui représente les lignes de courant pour la phase $3\pi/4$.

Cependant, pour une amplitude $A_w=2$ (Figure (IV.11.b)), la partie oscillatoire de l'écoulement pulsé est plus importante que la partie stationnaire. L'écoulement devient, alors quasiment oscillatoire. Ceci favorise, pour certaines phases décroissantes, l'effet annulaire sur les profils de vitesses et par conséquent l'augmentation du gradient de la vitesse qui fait diminuer la largeur de la couche limite. On remarque, en outre que les profils de vitesse commencent à présenter une symétrie par rapport au profil obtenu pour la phase zéro comme le cas de l'écoulement purement oscillatoire où on trouve dans la phase décroissantes du cycle les mêmes profils de vitesse obtenus pour la phase décroissante avec un signe moins, (voir la figure (IV.11.b)). Ces valeurs négatives indiquent le reversement de l'écoulement au voisinage de la paroi qui est sensible à l'augmentation d'amplitude comme on peut le voir sur la figure (IV.12.b).

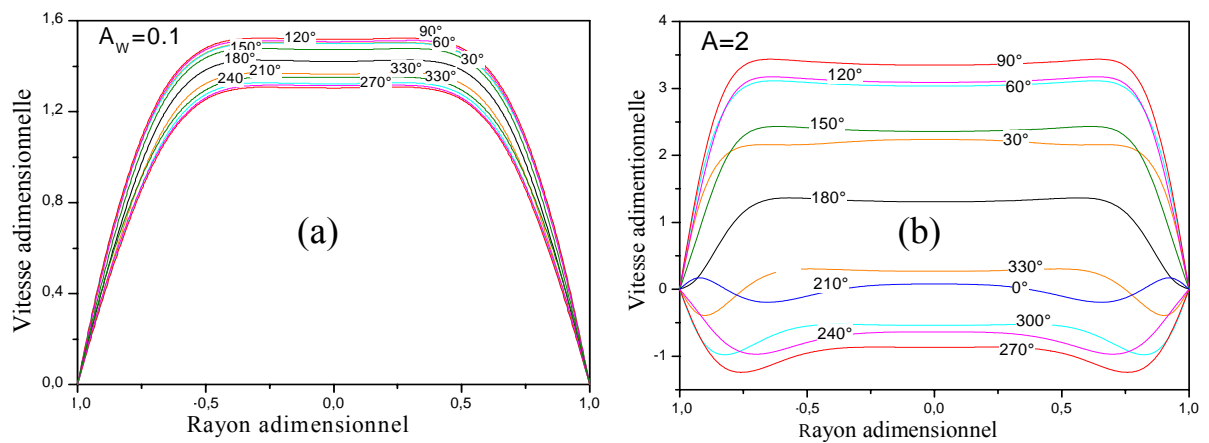


Fig. IV.11.a,b : Evolution des profils de vitesses pour ; (a) $A_w=0.1$, (b) $A_w=2$

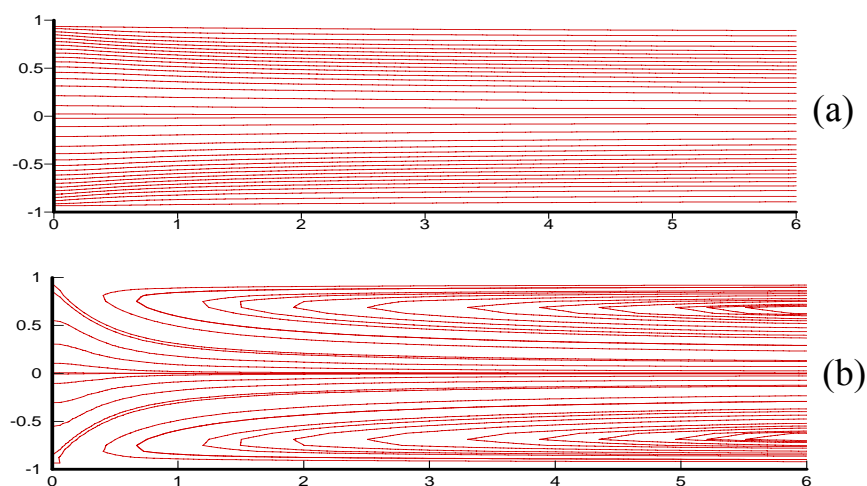


Fig.IV.12. lignes de courant à la phase décroissante pour $Re_\omega=100$ et pour les amplitudes ; (a) $A_w=0.1$, (b) $A_w=2$

b. Sur le coefficient de frottement

La figure (IV.13) montre la variation du coefficient de frottement en fonction de l'amplitude pour une côte $Z=3$. On constate que le comportement du C_f est périodique pour les faibles amplitudes et commence à se déformer pour les grandes valeurs de l'amplitude $A_w > 1.2$ où l'écoulement oscillatoire commence à dominer. Cette déformation est due à l'apparition des instabilités dynamiques et à la limite du code de calcul. On note aussi que l'augmentation de l'amplitude des oscillations engendre une croissance qui atteint pour $A_w=2$ environ 4 fois la valeur dans le cas stationnaire. Cette augmentation obéit à une variation linéaire en fonction de l'amplitude, (figure IV.14).

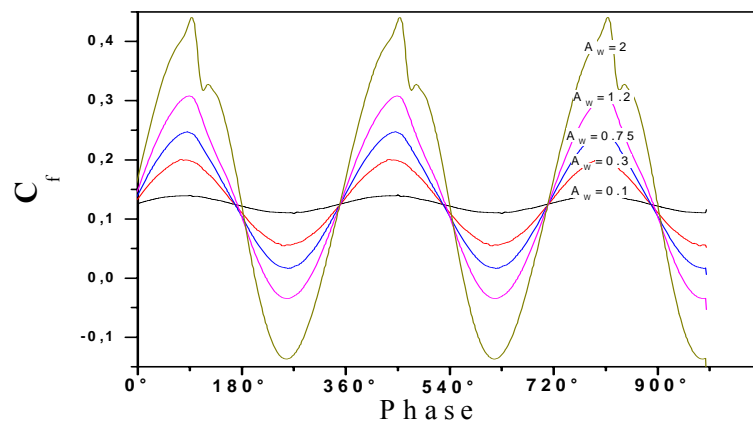


Fig.IV.13 : Variation du coefficient de frottement pour différentes amplitudes

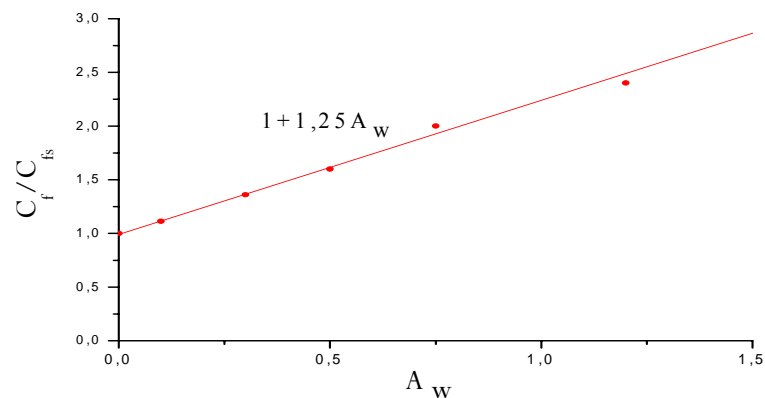


Fig.IV.14 : l'augmentation du coefficient de frottements en fonction de A_w

Concernant la variation du coefficient de frottement moyen C_{fm} le long de la paroi pour différentes valeurs de la fréquence (figure IV.15), on note que l'effet de l'amplitude se manifeste surtout à la zone d'entrée de la conduite. Cependant dans la zone avale, le coefficient de frottement moyen est indépendant de la fréquence. Une plus haute valeur du

coefficient de frottement moyen dans la région d'entrée est observée pour $A_w=1.2$ comparativement à celles de $A_w=0.1$ et 0.5 .

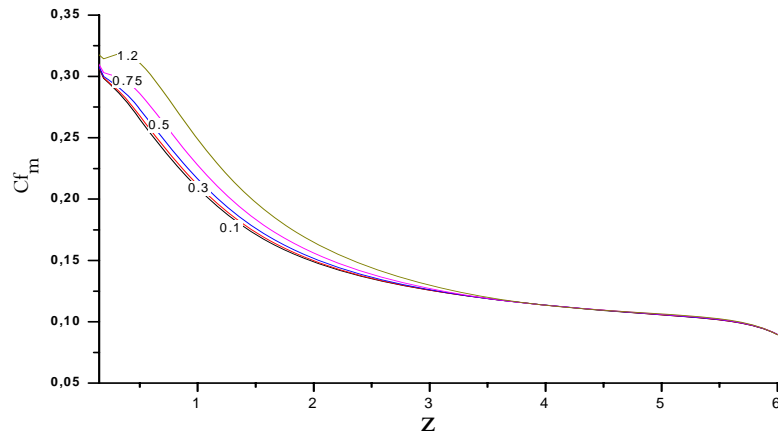


Fig.IV.15 : la variation du coefficient de frottement le long de la paroi en fonctions A_w

c. Sur le gradient de pression

Sur la figure (IV.16), on représente l'évolution du gradient de pression pour différentes valeurs de l'amplitude. On constate que le comportement de ce dernier est périodique pour toutes les amplitudes avec une augmentation des maxima du gradient de pression avec l'élévation de l'amplitude qui atteint pour $A_w=2$ environ 20 fois la valeur dans le cas stationnaire. Cette augmentation obéit à une variation linéaire en fonction de l'amplitude, au même titre que le coefficient de frottement (Figure (IV.17)).

Contrairement à l'effet de la fréquence sur le déphasage du gradient de pression par rapport à l'écoulement débitant, on signale l'absence totale de déphasage pour la variation de l'amplitude de la pulsation.

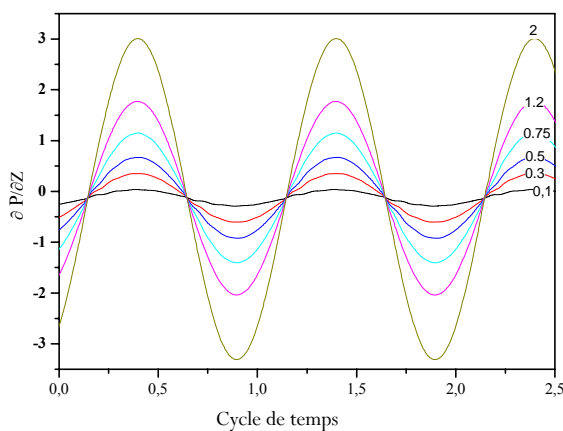


Fig.IV.16 : Evolution du gradient de pression pour différentes amplitudes A_w

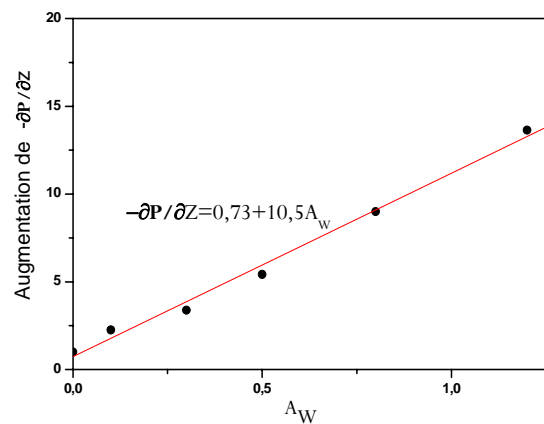


Fig.IV.17 : L'augmentation du gradient de la pression en fonction des amplitudes A_w

IV.2.2. L'effet annulaire :

Parmi les effets engendrés par les écoulements pulsés, on cite l'effet annulaire dit (Effet de Richardson) sur les profils de vitesse. Cet effet est caractérisé par le fait que la vitesse est maximum plutôt près des parois qu'au centre de l'écoulement, comme est le cas en régime laminaire stationnaire.

Dans ce paragraphe, on cherche à mieux cerner les paramètres qui régissent l'effet annulaire à partir de deux études. On commence par le calcul du maximum de la vitesse à partir d'une solution exacte du profil de vitesse d'un écoulement pulsé et unidimensionnel dans une conduite cylindrique. Ensuite on utilise les résultats numériques relatifs aux profils des vitesses d'un écoulement oscillatoire bidimensionnel dans une conduite cylindrique

a. Calcul théorique de la position du maximum de la vitesse :

Le calcul du maximum de la vitesse à partir de l'expression exacte du profil de la vitesse d'un fluide incompressible, en écoulement laminaire, pulsé sinusoïdalement dans une conduite cylindrique s'avère compliqué. A titre d'exemple, le profil de vitesse donné par Uchida [1956] est ;

$$\frac{W(r, t)}{W_m} = \frac{32}{\sigma Re_\omega} (B \cos(\omega t) + (1 - A) \sin(\omega t)) \quad (IV.3.1)$$

Où σ, A, B sont des fonctions de Bessel qui dépendent de la fréquence Re_ω (ou du nombre de Womersley λ). C'est pour cette raison que certains auteurs se sont intéressés à étudier les cas limites ; faibles fréquences et grandes fréquences.

a. Cas d'un écoulement à très faibles fréquences ($Re_\omega < 16$)

$$\frac{W(r, t)}{W_m} \approx \frac{2}{\sigma} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cos(\omega t) + \frac{Re_\omega}{32 \sigma} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^4 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 5 \right) \sin(\omega t) \quad (IV.3.2)$$

b. cas d'un écoulement à très fortes fréquences ($Re_\omega > 16$)

$$\frac{W(r, t)}{W_m} \approx \frac{32}{\sigma Re_\omega} \left[\sin(\omega t) - \frac{e^{-c}}{\sqrt{\frac{r}{R}}} \sin(\omega t - C) \right] \quad (IV.3.3)$$

Où

$$C = \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{\text{Re}_\omega}{2}}$$

La position radiale du maximum de la vitesse est déterminée par la condition de dérivée nulle de la vitesse.

- **Cas de faibles fréquences ($\text{Re}_\omega < 16$)**

La dérivée de l'équation (IV.3.2) est donnée par :

$$\frac{\partial W}{\partial r} \approx \frac{-4}{\sigma} \frac{r}{R^2} \cos(\omega t) + \frac{\text{Re}_\omega}{32 \sigma} \left(\frac{4r^3}{R^4} + \frac{8r}{R^2} \right) \sin(\omega t) \quad (\text{IV.3.4})$$

$$\text{L'équation (IV.3.4) est nulle quelque soit } t \text{ si ; } -\frac{4r}{R^2} = 0 \text{ et } \frac{4r}{R^2} \left(\frac{r^2}{R^2} + 2 \right) = 0 \quad (\text{IV.3.5})$$

Le terme $\left(\frac{r^2}{R^2} + 2 \right)$ est non nul, donc la solution est donnée par $r = 0$.

Le maximum de la vitesse pour les faibles fréquences se situe donc au centre, ce qui correspond bien au cas d'un écoulement stationnaire de Poiseuille.

- **Cas de fortes fréquences ($\text{Re}_\omega > 16$)**

La dérivée de l'équation (IV.3.3) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &\approx \frac{-32}{\sigma \text{Re}_\omega} e^{-C} \left[\left(\frac{\partial(-C)}{\partial r} \times \frac{\sin(\omega t - C)}{\sqrt{\frac{r}{R}}} \right) + \left(\left(\frac{\partial(-C)}{\partial r} \frac{\cos(\omega t - C)}{\sqrt{\frac{r}{R}}} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{\frac{R}{r}} \right) \right) \sin(\omega t - C) \right) \right] = 0 \\ &\approx \frac{-32}{\sigma \text{Re}_\omega} e^{-C} \left[\left(2r \sqrt{\frac{\text{Re}_\omega}{8}} \frac{\sin(\omega t - C)}{R^2 \sqrt{\frac{r}{R}}} \right) + \left(2r \sqrt{\frac{\text{Re}_\omega}{8}} \frac{\cos(\omega t - C)}{R^2 \sqrt{\frac{r}{R}}} + \left(-\frac{1}{2} \frac{\sin(\omega t - C)}{\sqrt{\frac{r^3}{R}}} \right) \right) \right] = 0 \\ &\approx \frac{32}{\sigma} \sqrt{\left(\frac{r}{R} \right)} \frac{1}{2 \text{Re}_\omega} e^{-C} \left(\sin(C - \omega t) + \cos(C - \omega t) - \frac{1}{\sqrt{2 \text{Re}_\omega}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin(C - \omega t) \right) = 0 \quad (\text{IV.3.6}) \end{aligned}$$

L'équation (IV.3.6) est nulle si ;

$$\sin(C - \omega t) + \cos(C - \omega t) - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}_\omega}} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin(C - \omega t) = 0 \quad (\text{IV.3.7})$$

La solution de l'équation (IV.3.7) est donnée par :

$$\tan(C - \omega t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}_\omega}} \left(\frac{R}{r}\right)^2} \quad (\text{IV.3.8})$$

La résolution directe de l'équation ((IV.3.8) s'avère difficile d'où la nécessité de l'utilisation du logiciel Matlab qui comporte des algorithmes puissants capables de résoudre des équations assez complexes. Les racines de l'équation sans approximations sont :

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right) \sqrt{\frac{2}{\text{Re}_\omega}} - \frac{1}{\text{Re}_\omega} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right) \sqrt{\frac{2}{\text{Re}_\omega}}} } \quad (\text{IV.3.9})$$

Pour les grandes fréquences, Richardson a montré par des mesures expérimentales que le maximum de la vitesse se situe au voisinage de la paroi. L'équation (IV.3.8) devient dans ce cas;

$$\tan(C - \omega t) = 1 \quad (\text{IV.3.10})$$

Compte tenue de la symétrie de la vitesse par rapport à la demi période (voir l'équation (IV.3.1)) , $W(r, \omega t + \pi) = -W(r, \omega t)$, la solution de l'équation (IV.3.8) est recherchée dans l'intervalle $\omega t \in [0, \pi]$. Ce qui permet d'avoir l'expression de la position radiale adimensionnelle comme suit ;

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{4} + \omega t\right) \sqrt{\frac{2}{\text{Re}_\omega}}}, \quad \text{avec } 0 < \omega t < \pi. \quad (\text{IV.3.11})$$

On vérifie que pour les grandes valeur de Re_ω , la solution sans approximation (IV.3.9) tend vers la solution (IV.3.11)

Les résultats avec et sans approximations pour différentes fréquences et différentes valeurs de phases ($0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ et π) sont donnés par le tableau (IV.1).

L'analyse de ce tableau montre que la fréquence pour laquelle l'effet de l'écoulement oscillatoire est dominant se situe dans la gamme des fréquences ($75 < Re_\omega < 100$), et ce quelque soit la phase. Certains auteurs ont indiqué que le début de l'influence de la fréquence commence à partir de $Re_\omega = 16$. A notre avis cette valeur ne correspond que pour le début de l'influence de la fréquence sur l'écoulement.

On note un écart important qui peut atteindre 22% entre les valeurs des positions du maximum de la vitesse calculée et approximée pour les faibles fréquences et surtout pour les grandes phases. Contrairement aux basses fréquences, les positions dans les deux solutions sont presque confondues surtout pour les faibles phases. Pour cela, l'utilisation de la formule donnée par l'équation (IV.3.10) n'est valable que pour les grands nombres de Reynolds cinétiques.

ω Re_ω	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
50	0,918	0,84	0,828	0,70	0,727	0,56	0,610	0,40*	0,464*	0,24*
75	0,934	0,88	0,862	0,77	0,784	0,66	0,698	0,55	0,599	0,43*
100	0,943	0,89	0,882	0,79	0,817	0,69	0,746	0,60	0,667	0,52
200	0,960	0,92	0,918	0,90	0,874	0,76	0,828	0,69	0,779	0,60
250	0,964	0,93	0,927	0,86	0,888	0,79	0,848	0,72	0,806	0,65
500	0,975	0,95	0,949	0,89	0,923	0,85	0,895	0,80	0,867	0,75
1000	0,982	0,96	0,964	0,92	0,946	0,89	0,927	0,85	0,908	0,82
1500	0,986	0,97	0,971	0,94	0,956	0,91	0,941	0,89	0,926	0,86

N:B (*) ; indiquent que la valeur calculée n'a pas de sens physique

(a) ; la solution avec l'approximation.

(b) ; la solution sans l'approximation.

Tab.IV.1. Les positions théoriques du maximum de la vitesse pour différentes fréquences et pour différentes phases

On présente sur la figure (IV.18) la variation de la position du maximum de la vitesse en fonction du nombre de Reynolds cinétique pour les différentes valeurs de la phase ($0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ et π). On note que le maximum du profil de vitesse s'approche de plus en plus de la paroi lorsque la fréquence augmente, confirmant ainsi les mesures expérimentales de Richardson.

A partir de certaines valeurs du nombre de Reynolds cinétique Re_ω , la position correspondant au maximum de la vitesse tend asymptotiquement vers une valeur limite très proche de celle relative à la paroi. La valeur du Re_ω est d'autant plus faible que la phase diminue.

Aux faibles valeurs de Re_ω , la position du maximum varie notablement en fonction de la phase, alors que, pour les grandes fréquences, cette variation n'est pas très importante.

Concernant la phase, le maximum de la vitesse s'éloigne de la paroi lorsque la phase augmente. On note que la position du maximum peut atteindre une distance de $0.67R$ de la paroi pour les grandes phases. Contrairement à la phase nulle, cette position est très proche de la paroi et varie de $0.91R$ à $0.98R$. Ce qui montre que l'effet dit « annulaire » ou de « Richardson » ne dépend pas seulement de la fréquence mais aussi de la phase.

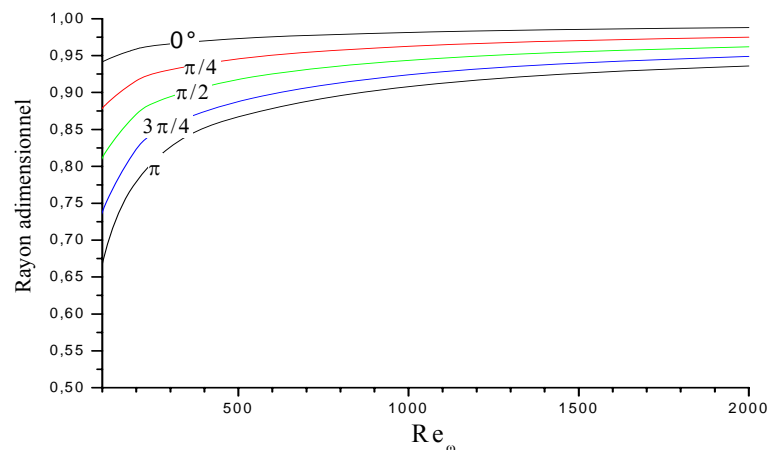


Fig.IV.18. Les positions théoriques du maximum de la vitesse en fonction de la fréquence et de la phase

b. Calcul numérique de la position du maximum de la vitesse :

Dans le but de faciliter la détermination de la position du maximum de la vitesse, on a choisi les profils de vitesses relatifs à l'écoulement oscillant au lieu de ceux de l'écoulement pulsé. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau (IV.2).

Ces résultats numériques montrent que l'influence de la fréquence a lieu à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds cinétique Re_ω située autour de [150-200]. Pour les

valeurs inférieures, le profil de la vitesse est un profil plat où la position du maximum de la vitesse est loin de la paroi.

La figure (IV.19), représente les valeurs des positions du maximum de la vitesse en fonction du nombre de Reynolds cinétique Re_ω , obtenues numériquement pour les valeurs de la phase ($0, \pi/3, \pi/2, 5\pi/6$ et $23\pi/12$). On remarque que quelque soit la valeur de la phase, l'allure de la variation de la position du maximum de la vitesse est la même que celle obtenue avec le calcul théorique. Néanmoins, on constate sur la figure (IV.20) que la position du maximum obtenue théoriquement est loin de la paroi que celle obtenue numériquement, surtout pour la phase décroissante. Cela peut se justifier d'une part, par la contribution de la composante radiale de la vitesse et d'autre part, par le fait qu'on a utilisé dans le deuxième cas, les profils de vitesses relatifs à l'écoulement oscillant au lieu de ceux de l'écoulement pulsé.

ωt Re_ω	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/6$	$23\pi/12$
5	0,82	**	**	**	**
25	0,85	0,52	0,32	**	**
50	0,87	0,65	0,54	0,44	0,00
100	0,90	0,76	0,68	0,61	0,43
200	0,91	0,80	0,75	0,63	0,54
300	0,93	0,85	0,82	0,77	0,69
500	0,94	0,86	0,83	0,77	0,73
1500	0,95	0,89	0,87	0,85	0,85

N : B (**); indiquent que le profil de la vitesse est plat.

Tab.IV.2. Les positions du maximum de la vitesse obtenues numériquement pour différentes fréquences et différentes phases.

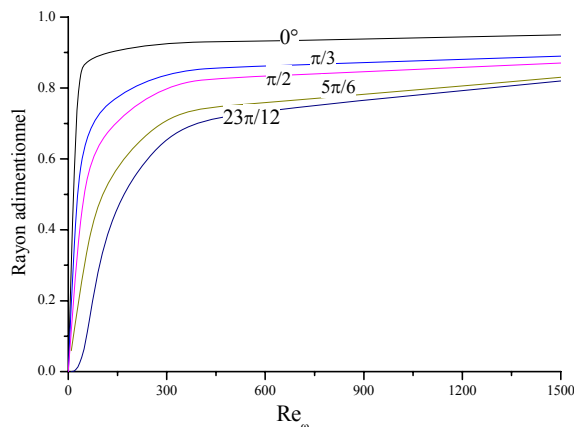


Fig. IV.19. La position du maximum de vitesse obtenue numériquement en fonction de la fréquence et de la phase.

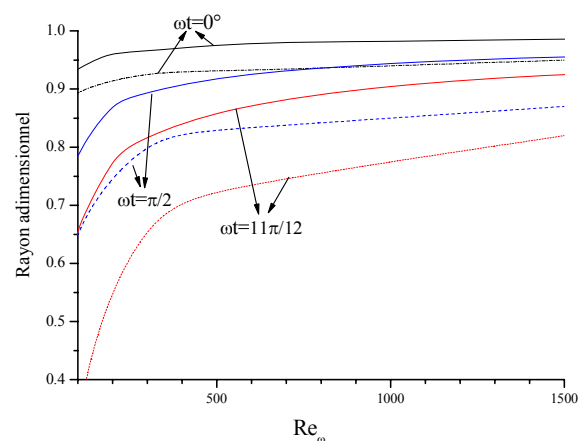


Fig.IV.20. La comparaison de la position radiale du maximum de la vitesse ; calcul théorique (—), calcul numérique (....).

IV.2.3 Etude du déphasage dans le plan de phase :

On a vu précédemment, que les pulsations imposées créent un déphasage entre les propriétés de l'écoulement. Ce dernier est dû principalement à la variation de la fréquence. La détermination de ce déphasage dans le plan temporel présente des difficultés à cause de la déformation dans le temps des propriétés de l'écoulement. Ce qui nous a conduit à utiliser le plan de phase qui détermine le déphasage de manière globale.

IV.2.3.1 Plan de phase :

On a vu dans le paragraphe précédent que pour un écoulement d'un fluide de vitesse d'entrée périodique $W(t) = W_m(1 + A_w \sin(\omega t))$, l'évolution des propriétés de l'écoulement est périodique. Ce qui permet de mettre l'évolution des différentes propriétés de l'écoulement sous la forme :

$$F(t) = F_m(1 + A_f \delta_f(t)).$$

Où

A_f est le coefficient d'augmentation de la propriété $F(t)$ par rapport au cas permanent, $\delta_f(t)$ est une fonction périodique où δ_{\min} et δ_{\max} sont respectivement .1 et 1. Cette dernière présente un déphasage de ϕ_f par rapport à la vitesse, la fonction $F(t)$ s'écrit alors :

$$F(t) = F_m(1 + A_f \sin(\omega t + \phi_f))$$

La détermination dans le domaine temporel du déphasage pour différentes grandeurs de l'écoulement $F(t)$ s'avère difficile. C'est pour cette raison qu'on fait appel au plan de phase.

Soit les amplitudes des oscillations normalisées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de $W(t)$ et $F(t)$ respectivement données par les relations suivantes :

$$\alpha(t) = \frac{W(t) - W_m}{A_w W_m} = \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \beta(t) = \frac{F(t) - F_m(t)}{A_f F_m} = \sin(\omega t + \phi_f)$$

La représentation des trajectoires à chaque cycle dans le plan de phase $(\alpha(t), \beta(t))$ pour différentes oscillations est une ellipse (voir la figure (IV.21)) définie dans le système de coordonnées $Ox'y'$ par l'équation suivante :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \text{ avec } a = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\phi_f}{2}\right), b = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\phi_f}{2}\right)$$

Où

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \beta) \quad \text{et} \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\alpha + \beta)$$

Les deux axes principaux de cette ellipse sont tournés d'un angle φ par rapport aux axes (oxy) . Cet angle de rotation est donné par :

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 A_w A_f}{A_m^2 - A_f^2} \cos(\phi_f)$$

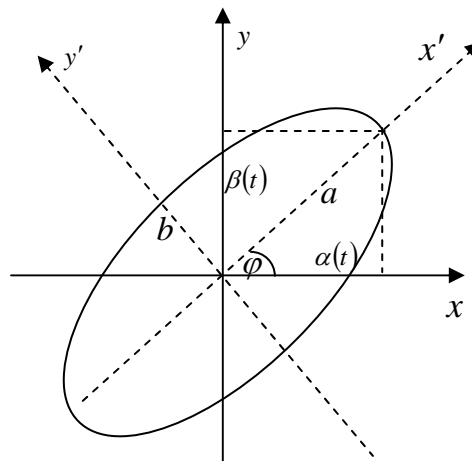


Figure IV.21 : représentation d'une ellipse dans le plan (xoy)

Le déphasage pour les différentes propriétés de l'écoulement est déterminé directement à partir de cette ellipse. Le détail de ces calculs est développé dans l'annexe3.

IV.2.3.2. Influence de la fréquence sur les trajectoires :

Pour analyser l'influence de la fréquence sur les ellipses, on a fixé $Re=100$ et $A_w=0.5$ et on fait varier Re_ω de 1 à 800. On signale que le tracé d'une ellipse pour un cycle nécessite un nombre de points qui est fonction de la fréquence. A titre d'exemple, pour $Re_\omega=1$ le nombre de points est de 40192.

a. Plan de phase (Vitesse-Gradient de pression) :

On remarque sur la figure (IV.22.a) que la trajectoire ($W-\partial P/\partial Z$) dans le plan de phase est une ellipse de l'axe de révolution. Ce qui confirme les résultats théoriques et numériques trouvés par Yakhot [2003] et représentés dans la figure (IV.22.b). Toutefois, on signale certaines différences comme la symétrie par rapport à la première bissectrice dans un cycle rapportée par Yakhot [2003] et qu'on ne retrouve pas dans notre cas pour la phase décroissante de l'écoulement. On note aussi, l'inexistence de la rotation des axes principaux pour les différentes ellipses pour Yakhot [2003].

A notre avis, ces différences sont dues, d'une part, à l'hypothèse d'un écoulement unidimensionnel complètement développé, et d'autre part, au faible nombre de Reynolds utilisé par l'auteur. Notre cas correspond à l'écoulement bidimensionnel à $Re=100$ et Re_ω allant de 1 à 700. On note aussi, que les fréquences utilisées par l'auteur sont équivalentes dans notre étude à la racine du nombre de Reynolds cinétique divisé par deux.

Le cas correspondant à $Re_\omega=1$ donne une ellipse presque aplatie et confondue avec la première bissectrice. Ceci conduit à un angle de déphasage presque nul dans ce cas.

Pendant la phase décroissante et pour les basses fréquences, on relève également que les axes principaux des ellipses sont légèrement tournés par rapport aux bissectrices. La rotation de ces axes par rapport aux deux bissectrices est de l'ordre de 10° . Pour les hautes fréquences, les axes principaux sont confondus aux bissectrices quelque soit la phase.

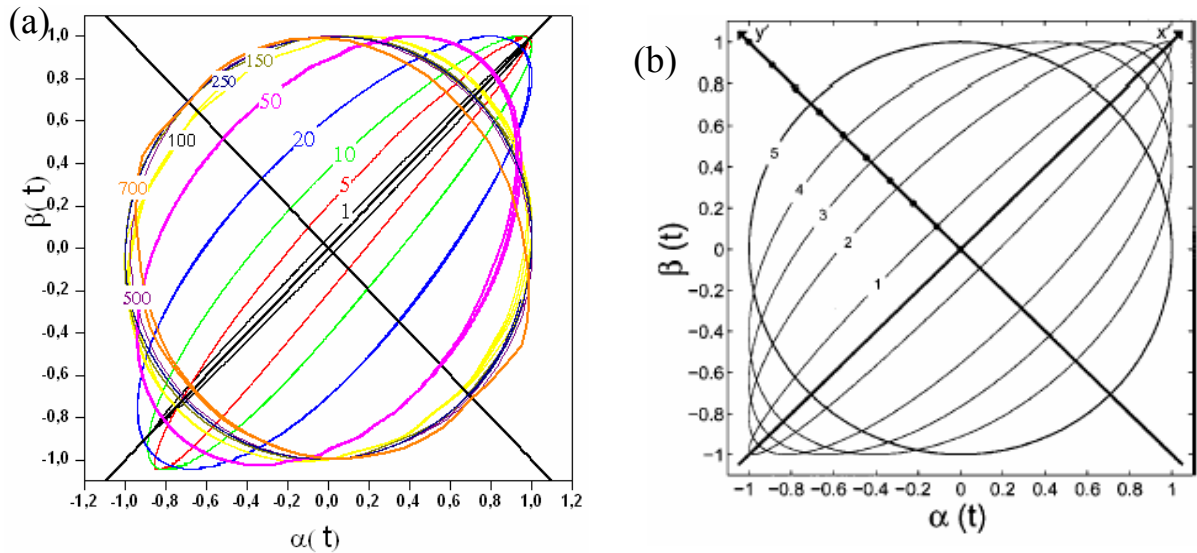


Fig.IV.22 : Représentation dans le plan de phase de la trajectoire $(W, \partial P / \partial Z)$ pour différentes fréquences, (a) : notre étude, (b) : résultats de Yakhot et al [2003] .

La figure (IV.23.a), montre que pour les basses fréquences, les ellipses obtenues pour différents cycles sont confondues et donnent l'impression de l'existence d'une seule ellipse. Ceci correspond dans le domaine temporel à un comportement périodique et des fluctuations homogènes pour tous les cycles, figure (IV.23.b). Contrairement aux hautes fréquences et à partir du nombre de Reynolds cinétique $Re_\omega = 500$, les ellipses tracées pour différents cycles commencent à se détacher les unes des autres et de plus en plus pour se déformer aux très grandes fréquences. Ceci ce qui peut s'expliquer par la déformation des fluctuations dans le domaine temporel. Dans ce cas, la détermination du déphasage ne pourra pas s'effectuer correctement.

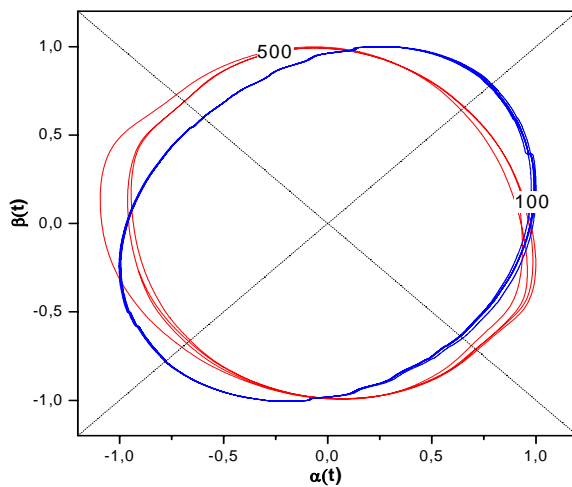


Fig IV.23.a : les trajectoire $(W, \partial P / \partial Z)$, $Re_\omega = 100$ et $Re_\omega = 500$

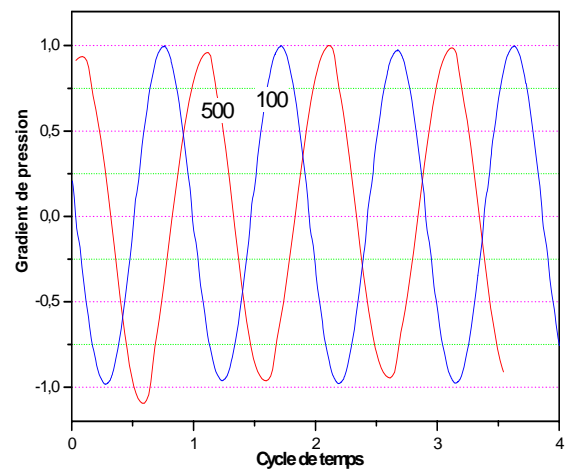


Fig IV.23.b : l'évolution du gradient de la pression, bleu : $Re_\omega = 100$, rouge : $Re_\omega = 500$

b. Plan de phase (Vitesse-coefficient de frottement) :

Comme le cas du gradient de pression, la trajectoire (C_f - W) dans le plan de phase pour différentes fréquences est une ellipse, voir la figure (IV.24). Mais, ces ellipses sont plus aplaties que celles obtenues pour le cas précédent. Ceci indique que le déphasage dû au coefficient de frottement est moins important que celui dû au gradient de pression.

On constate aussi que la rotation des axes principaux est plus importante que celle du gradient de pression, surtout aux basses fréquences, $Re\omega < 200$. Ces derniers oscillent dans la phase décroissante autour des bissectrices avec une rotation qui peut atteindre 15° . Par contre, pour les hautes fréquences $Re\omega > 500$, il est difficile de déterminer la rotation à cause de la déformations des ellipses. Mais elle existe, contrairement, au cas de gradient de pression.

Cette différence de rotation des axes principaux pour les deux grandeurs, est due au fait que l'augmentation du gradient de pression et du coefficient de frottement ne s'effectuent pas de la même façon pour les différentes fréquences. Cette différence n'est pas apparente dans l'espace des temps.

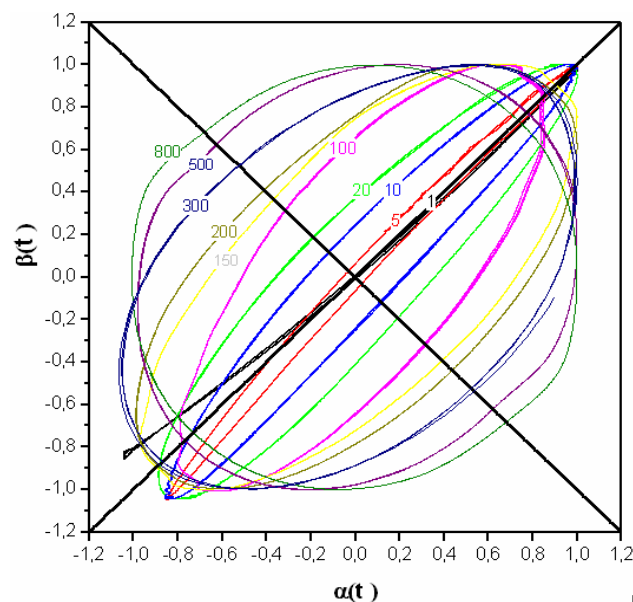


Fig.IV.24 : Représentation dans le plan de phase de trajectoire du C_f pour les valeurs de $Re\omega$; 1,5, 10, 20, 100, 150, 200, 500 et 800.

IV.2.3.3. Etude du déphasage

La figure (IV.25.a) montre que pour les très faibles oscillations ($Re_\omega < 20$), le gradient de pression et le coefficient de frottement sont faiblement déphasés, inférieur à 15° , ce qui correspond à $a \approx 1$ et $b \approx 0$. Dans ce cas, les trajectoires de ces grandeurs dans le plan de phase sont des ellipses de grand aplatissement.

Contrairement aux basses fréquences, le déphasage correspondant aux grandes fréquences pour le gradient de pression et le coefficient de frottement augmente rapidement et tend respectivement vers une valeur limite de 84° et 45° . Ces résultats sont en bon accord avec ceux trouvés analytiquement par Simon et Seume [1988] pour un modèle de l'écoulement oscillatoire monodimensionnel, (Figure IV.25.b), et expérimentalement par Linford, Ryan et Sarpkaya dans l'étude de Goldschmied [1968], (Figure IV.25.c).

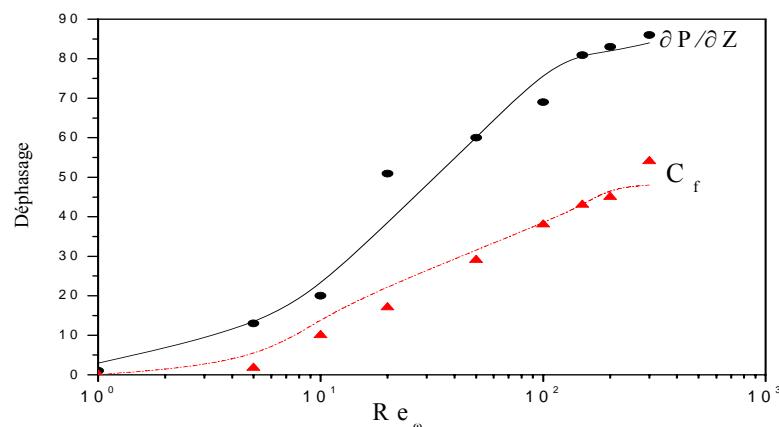


Fig.IV.25.a : déphasage du gradient de pression et du coefficient de frottement : plan phase en ligne, espace de temps en point

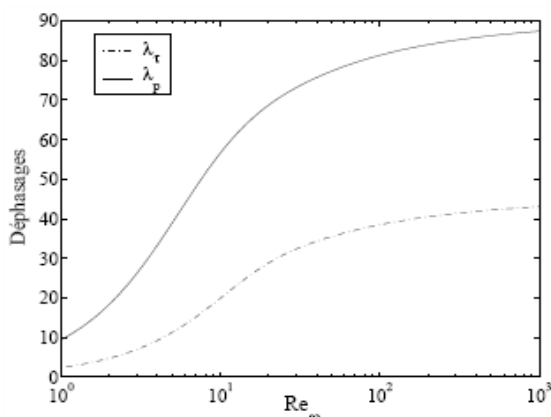


Fig. IV25.b : déphasage du gradient de pression et du coefficient de frottement obtenu par Simon et Seume [1988]

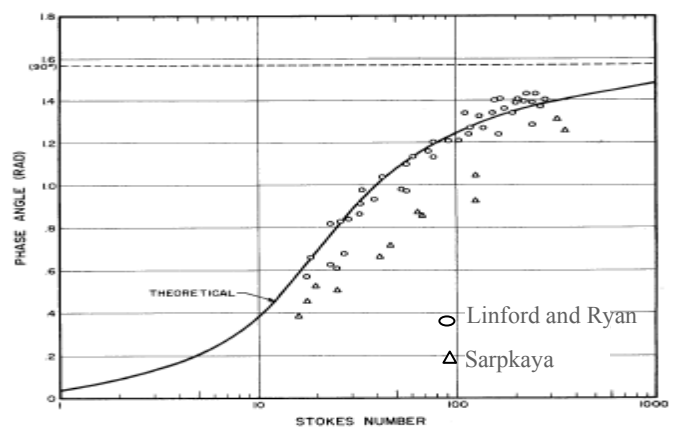


Fig. IV25.c : déphasage du gradient de pression obtenu par Goldschmied [1968]

Le calcul du déphasage peut aussi s'effectuer directement à partir de l'évolution du gradient pression et du coefficient de frottement. Mais, on note qu'il y a un certain écart par rapport au calcul dans le plan de phase. Ceci est dû, aux incertitudes commises pour les basses fréquences où le signal est étendu, et aussi dans les hautes fréquences, où le signal est serré et commence à se déformer d'un instant à un autre. Par contre, l'utilisation du plan de phase permet d'avoir un déphasage global et non local.

Il y a une différence fondamentale entre l'écoulement pulsé généré par les basses et hautes fréquences d'oscillations du débit. La première limite où le nombre de Reynolds cinétique : Re_ω est faible, dans ce cas les champs de vitesse varient faiblement avec le temps et par conséquent les termes instationnaires dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement sont négligeables. Cela conduit à un équilibre entre les forces de viscosité et le gradient de pression, et implique une variation périodique de ces dernières avec la même phase (idem pour le cas permanent).

Dans le cas des oscillations rapides, la force de viscosité peut être négligée sauf dans la zone proche de la paroi, ce qui implique l'équilibre entre les forces instationnaires et la force de pression ; c'est à dire les termes $\rho \partial W / \partial t$ et $\partial P / \partial z$ existent ensemble dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et par conséquent, le fluide se déplace avec un déphasage de 90° par rapport au le gradient de pression.

IV.2.4 Ecoulement de retour :

Au cours de la phase de décélération de l'écoulement pulsé, la composante fluctuante dépendante du temps n'est pas négligeable devant la composante moyenne, le mouvement du fluide près de la paroi s'inverse par rapport au sens du déplacement du fluide dans la conduite. La paroi est donc soumise à une contrainte de cisaillement dont le sens varie en fonction du temps. La position à partir de laquelle l'écoulement change sa direction peut être identifiée en analysant la courbe de la variation du coefficient de frottement le long de la paroi du cylindre, une valeur négative de C_f indique l'existence d'un mouvement de retour des particules fluides.

Pour analyser ce phénomène et étudier l'influence de la fréquence et les amplitude dans le reversement de l'écoulement, on trace sur les figure (IV.26) pour une phase décélérée la variation du coefficient de frottement C_f le long de l'axe en fonction de l'amplitude pour

les fréquences Re_ω (50, 75 et 100). On constate que le reversement de l'écoulement commence à partir d'une amplitude critique A_c pour les grandes fréquences, supérieure à Re_ω . Cette valeur critique est d'autant plus faible que la fréquence est grande.

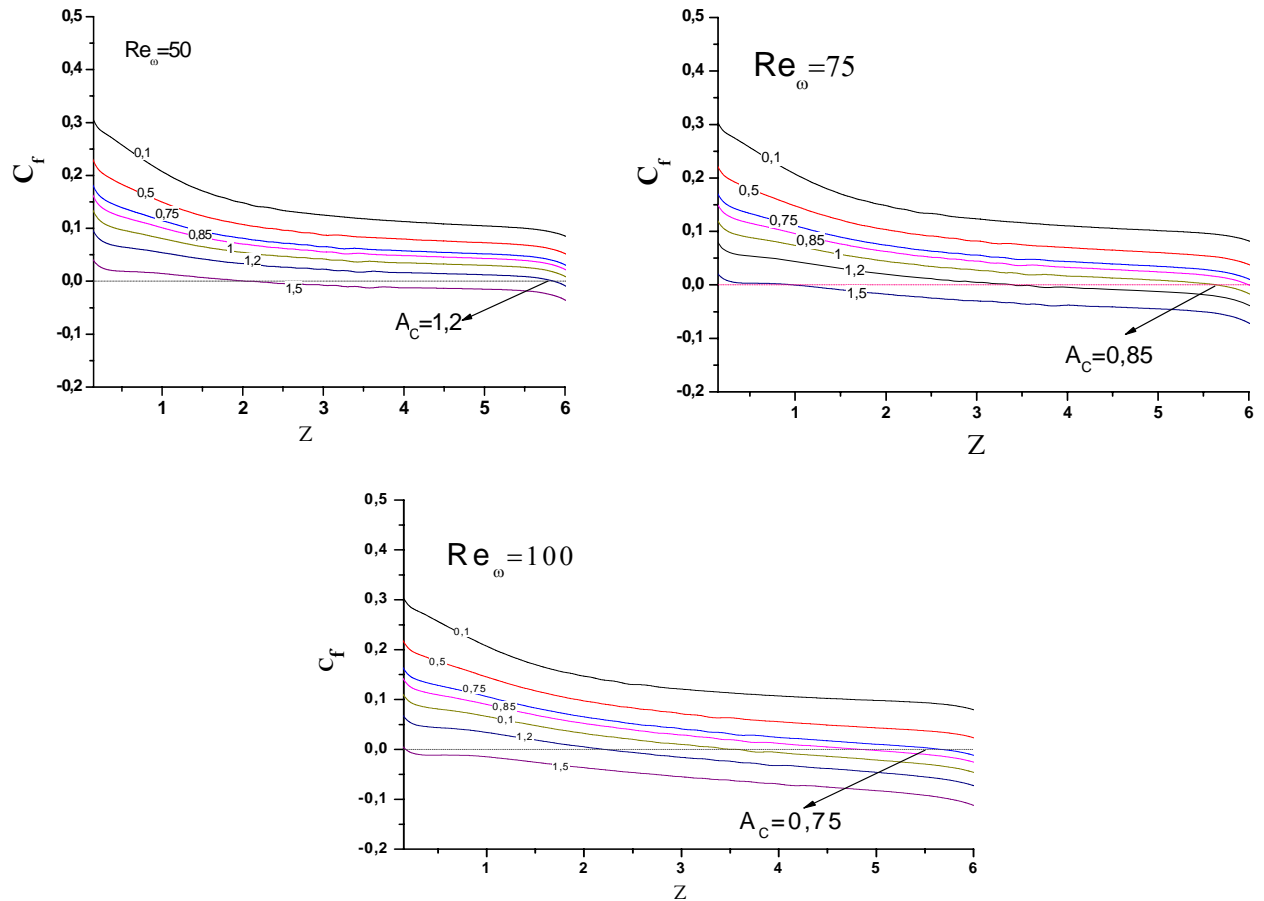


Fig.IV.26. La variation du coefficient de frottement le long de la paroi pour différentes amplitudes et pour différentes fréquences

La figure (IV.27) représente la variation de la position pour laquelle se produit le reversement de l'écoulement pour les différentes fréquences ($Re_\omega=50,75$ et 100). On peut déduire qu'il y a une amplitude critique pour chaque fréquence pour laquelle l'inversion ne se produit que si l'amplitude est plus grande que l'amplitude critique. Cette dernière diminue en fonction de la fréquence. Pour une fréquence $Re_\omega=100$, $A_c=0.7$, pour $Re_\omega=75$, $A_c=0.9$ et pour $Re_\omega=50$, $A_c=1.2$.

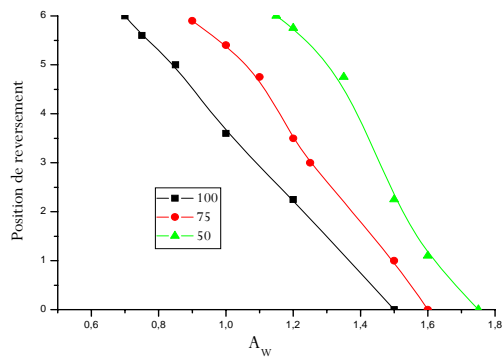


Fig. IV.27 : La position axiale du début de renversement de l'écoulement en fonction de l'amplitude pour $Re_\omega = 50, 75$ et 100

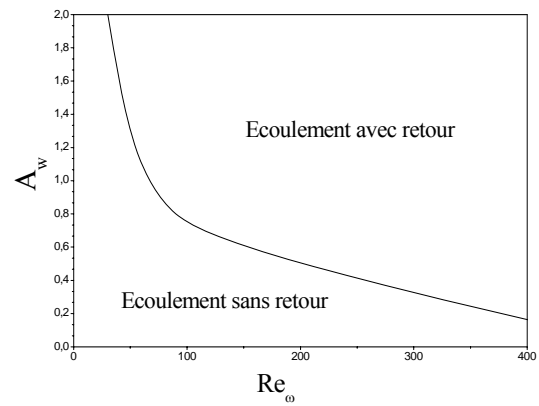


Fig. IV.28 : Courbe de séparation

En conclusion, l'inversion de l'écoulement pulsé dépend de la combinaison de l'amplitude et de la fréquence, d'où l'identification du critère de retour de l'écoulement qui doit obéir aux conditions : $Re_\omega > Re_{\omega c}$ et $A_w > A_c$. Cette condition est représentée dans le plan (Re_ω, A_w) par la courbe de la figure (IV.28) qui désigne la séparation de la zone de l'écoulement de retour et la zone où il n'y a pas de retour de l'écoulement.

IV.3. Partie thermique :

IV.3.1 Calcul théorique du nombre de Nusselt :

Dans le but de caractériser les modifications du mécanisme du transfert de chaleur dûes aux pulsations, nous présentons dans cette partie une étude théorique sur le nombre de Nusselt, basée sur l'approche Kim [2003] pour un écoulement oscillatoire d'un fluide incompressible dans une conduite circulaire et à température de paroi constante.

Cette approche considère que l'écoulement est complètement développé, ce qui permet de négliger les variations de la vitesse et de la température dans la direction axiale. Le gradient de pression est supposé nul dans une section droite de la conduite.

Les équations de la quantité du mouvement et de l'énergie s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (\text{IV-2.1})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\beta T}{\rho C_p} \frac{\partial P}{\partial t} + k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) \quad (\text{IV-2.2})$$

Dans l'équation de l'énergie, l'auteur tient compte du travail de compression, en considérant que le fluide est peu compressible, à cause de la présence de faibles fluctuations de la pression, ce qui est exprimé par les relations suivantes :

$$\text{Le coefficient de dilatation thermique : } \beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V_0}{\partial p} \right)_p = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_p \quad (\text{IV-3.3})$$

$$\text{L'équation d'état : } \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \left[\varepsilon \frac{\partial P}{\partial t} - \beta \frac{\partial T}{\partial t} \right] : \quad (\text{IV-3.4})$$

Où : $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T$: est le coefficient de compressibilité à température constante

Il utilise les faibles fluctuations dans l'expression de la vitesse et de la pression, $u(r,t) = |u(r)|e^{j\omega t}$, $P(x,t) = |P(x)|e^{j\omega t}$. Les équations de quantité de mouvement et de l'énergie sont données comme suit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{j\omega u}{\nu} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} - \frac{j\omega \Delta T}{k} = -\frac{j\omega \beta P \Delta T}{k \rho C_p} \quad (\text{IV-3.5})$$

Où C_p est la chaleur spécifique à pression constante. Les solutions des équations précédentes avec les conditions aux limites à la paroi du tube ($u = \Delta T = 0$ pour $r=D/2$) font appel aux fonctions de Bessel de premier espèce d'ordre zéro, Kim [2003] donne l'expression de la vitesse comme suit :

$$u = \frac{j}{\omega \rho} \frac{dp}{dx} \left[1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} j^{3/2} \right)}{J_0 \left(\frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} j^{3/2} \right)} \right] \quad (\text{IV.3.6})$$

En introduisant dans cette expression (IV.3.6), la largeur de la couche visqueuse

$\delta_v = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$, et le nombre de Stokes visqueux $St_v = \sqrt{\frac{\omega D^2}{\nu}}$. L'expressions de la vitesse s'écrit :

$$u = \frac{j}{\omega \rho} \frac{dp}{dx} \left[1 - \frac{J_0 \left(\frac{1}{2} \frac{2r}{\delta_v} j^{3/2} \right)}{J_0 \left(\frac{1}{2} St_v j^{3/2} \right)} \right] \quad (\text{IV.3.7})$$

De même pour la température :

$$\Delta T = \frac{P}{\rho C_p} \left[1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} \right)}{J_0 \left(\frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} \right)} \right] \quad (\text{IV.3.8})$$

En utilisant la largeur de la couche thermique $\delta_k = \sqrt{\frac{k}{\omega}}$ et le nombre de Stokes thermique

$St_k = \sqrt{\frac{\omega D^2}{k}}$, l'expression de la température devient :

$$\Delta T = \frac{p}{\rho C_p} \left[1 - \frac{J_0 \left(\frac{1}{2} \frac{2r}{\delta_k} j^{3/2} \right)}{J_0 \left(\frac{1}{2} St_k j^{3/2} \right)} \right] \quad (\text{IV.3.9})$$

Pour un problème à paroi isotherme, le nombre de Nusselt est défini par l'expression suivante :

$$Nu = \frac{k(\partial T/\partial r)_{r=D/2}}{h(T_p - T_0)} = \frac{D(\partial T/\partial r)_{r=D/2}}{(T_p - T_B)}$$

Où T_B est la température moyenne, $T_B = \frac{T_p + T_0}{2} \Rightarrow T_p - T_B = \frac{T_p - T_0}{2}$

On calcule $\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=D/2}$ à partir de la distribution de la température donnée par l'équation (IV.3.9) :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=D/2} = \frac{-p}{\rho C_p} \left[\frac{\frac{\partial J_0 \left(r \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} \right)}{\partial r}}{J_0 \left(\frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} \right)} \right]_{r=D/2} \quad (\text{IV.3.10})$$

On a : $\frac{\partial J_0(mr)}{\partial r} = -mJ_1(r)$, avec m une constante

L'expression de nombre de Nusselt est donnée alors :

$$Nu = \frac{p}{\rho C_p} \frac{D}{(T_p - T_B)} \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} \left[\frac{J_1 \left(\frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} \right)}{J_0 \left(\frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} \right)} \right] \quad (\text{IV.3.11})$$

Le nombre de Nusselt s'exprime aussi en fonction du nombre de Nusselt stationnaire Nu , de δ_k et de δ_v par la relation suivante :

$$Nu = Nu_s \sqrt{\text{Re}_\omega} \frac{\delta_k}{\delta_v} j^{3/2} \left[\frac{J_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\text{Re}_\omega} \frac{\delta_k}{\delta_v} j^{3/2} \right)}{J_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\text{Re}_\omega} \frac{\delta_k}{\delta_v} j^{3/2} \right)} \right] \quad (\text{IV.3.12})$$

a. Cas de fréquences modérées:

En posant : $x = \frac{1}{2} \sqrt{\text{Re}_\omega} \frac{\delta_k}{\delta_v} j^{3/2}$

Lorsque x tend vers zéro, le développement aux limites des fonction de Bessel $J_0(x)$ et $J_1(x)$ est donné par les équations suivantes :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} + \dots \right)$$

En reportant les approximation de J_0 et J_1 dans l'équation (IV.3.12), on obtient l'expression suivante :

$$Nu = Nu_s \sqrt{\text{Re}_\omega} \frac{\delta_k}{\delta_v} j^{3/2} \left[\frac{\frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} \right)}{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}} \right]$$

Pour les fréquences modérées ;

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{p}{4\rho C_p} \frac{D^2}{(T_p - T_B)} \frac{\omega}{k} j^3 \approx \frac{p}{4\rho C_p} \frac{D^2}{(T_p - T_B)} \frac{\omega}{k} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) \\ &\approx \frac{p}{4\rho C_p} \frac{1}{(T_p - T_B)} \frac{\nu D^2 \omega}{k \nu} (-j) \end{aligned}$$

D'après l'équation précédente, le nombre de Nusselt peut s'exprimer en fonction du nombre de Nusselt stationnaire:

$$Nu \approx 0.25 Nu_s \frac{\delta_v}{\delta_k} \text{Re}_\omega e^{-j\pi/2}$$

$$\text{Où : } Nu_s = \frac{p}{4\rho C_p} \frac{1}{(T_p - T_B)}$$

Pour les fréquences modérées, le nombre de Nusselt est proportionnel à la fréquence de pulsations Re_ω et au rapport des largeurs de la couche limite visqueuse et thermique. Le déphasage de Nu par rapport à l'écoulement d'entrée tend vers 90° . Ce dernier ne correspond pas à la valeur asymptotique pour le cas stationnaire ($\varphi_{Nu} = 0$).

b. Cas de grandes fréquences :

D'après l'étude Madjdalani [2002], lorsque x est suffisamment grand, le développement limité du rapport $\frac{J_1(x)}{J_0(x)}$ est : $\frac{J_1(x)}{J_0(x)} \approx 1 - \frac{1}{2x}$

On remplace l'approximation de rapport $\frac{J_1}{J_0}$ dans l'équation (IV.3.12), on obtient l'expression

$$\text{suivante : } Nu \approx \frac{p}{\rho C_p} \frac{D}{(T_p - T_B)} \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} \left(1 - \frac{1}{D \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2}} \right)$$

L'écriture de nombre de Nusselt sous forme complexe est donnée comme suit :

$$Nu \approx \frac{p}{\rho C_p} \frac{1}{(T_p - T_B)} \left(D \sqrt{\frac{\omega}{k}} j^{3/2} - 1 \right) = \frac{p}{\rho C_p} \frac{1}{(T_p - T_B)} \left(D \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega}{k}} (j-1) - 1 \right)$$

Le nombre de Nusselt moyen Nu_m est donné par : $|Nu| \approx \frac{p}{\rho C_p} \frac{1}{(T_p - T_B)} \left(1 + D^2 \frac{\omega}{k} + D \sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega}{k}} \right)^{1/2}$

Pour ω suffisamment grande, $\frac{J_1(x)}{J_0(x)} \rightarrow 0$.

L'expression de nombre de Nusselt est donnée alors : $|Nu| \approx Nu_s \frac{\delta_v}{\delta_k} (Re_\omega)^{0.5}$

La phase de Nu est donnée par : $tg(\varphi_{Nu}) = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2 + D \sqrt{\frac{\omega}{k}}}$

Pour les très hautes fréquences, le nombre de Nusselt est proportionnel à la racine carrée de la fréquence de pulsations Re_ω et au rapport des largeurs des couches limites visqueuse et thermique. Ce résultats est en bon accord avec la corrélation établie par Zhao et Cheng [1996] pour un écoulement oscillatoire :

$$\overline{Nu} = 0.02 A_0^{0.85} Re_\omega^{0.58}$$

Où Re_ω varie de 23 à 46 et A_0 de 8.5 à 34.9.

Toute fois, il faut signaler que cette approximation d'ordre 1 ne permet pas de calculer rigoureusement la valeur de déphasage correspondant aux très hautes fréquences. A notre avis, pour une meilleure connaissance de la valeur de déphasage, l'étude asymptotique doit correspondre à un développement supérieur à l'ordre 1.

IV.3.2 Influence de l'écoulement pulsé sur le champ Thermique :

IV.3.2.1 Influence de la fréquence sur le champ thermique :

L'influence de la fréquence sur le champ thermique a été étudiée pour un nombre de Reynolds $Re=100$, une amplitude $A_w=0.5$ et un nombre de Prandtl $Pr=0.7$.

a. Sur l'évolution de la température.

La variation temporelle de la température en un point proche de la paroi horizontale de l'obstacle à différentes sections de la conduite et pour deux valeurs de fréquences ($Re_\omega=200$ et 1000) est donnée par les figures (IV.29.a,b). On constate que pour la faible fréquence ($Re_\omega=200$), le comportement de la température est sinusoïdale pour toutes les sections et est similaire à celui de l'écoulement débitant. Pour la fréquence $Re_\omega=1000$, cet aspect disparaît progressivement en aval de la conduite où l'échange par convection devient de plus en plus faible.

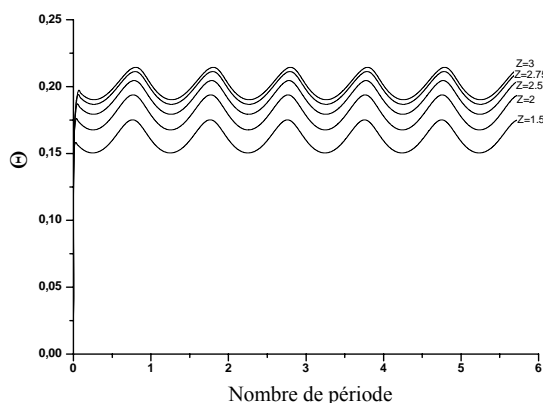


Fig. IV.29.a : l'évolution de la température à différentes sections, $Re_\omega=200$.

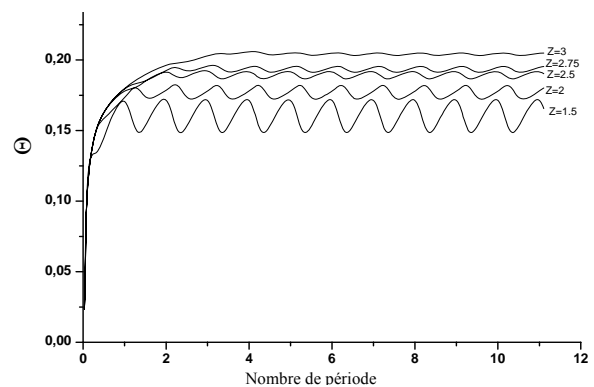


Fig. IV.29.b : l'évolution de la température à différentes sections, $Re_\omega=1000$.

L'évolution de la température (figure IV.30), montre que la phase transitoire est une fonction croissante du nombre de Reynolds cinétique. Elle est d'autant plus longue que Re_ω est plus élevé. Le système met donc beaucoup plus de temps à s'adapter aux nouvelles conditions aux limites imposées à l'entrée

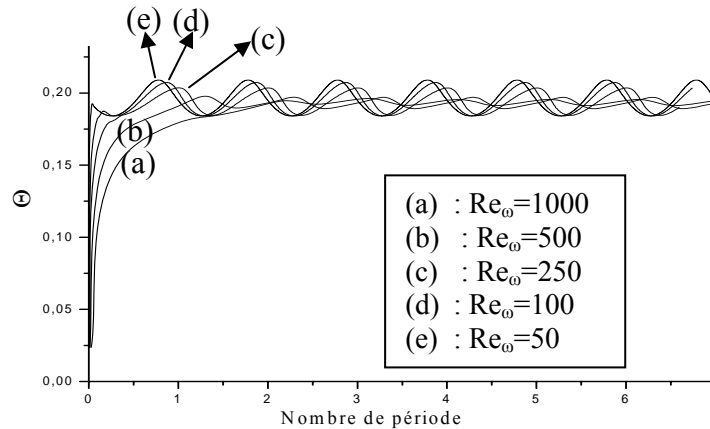


Figure IV.30 : l'évolution de la température à ($Z=2.5, R=0.45$) et pour $Re_\omega = 50, 100, 250, 500, 1000$.

On trace sur la figure IV.31, les trajectoires de la température dans le plan de phase pour différentes valeurs de la fréquence. Cette figure montre que les courbes des trajectoires sont fermées et de formes différentes de celle d'une ellipse. Cela traduit le comportement périodique de la température qui est différent du comportement sinusoïdal de l'écoulement d'entrée, notamment aux grandes fréquences $Re_\omega = 500, 1000$. Cette situation est moins marquée pour les basses fréquences ($Re_\omega = 10$ et 100) où les courbes ont tendance à reprendre la forme elliptique.

L'analyse de l'aplatissement des ellipses, montre que le déphasage de la température par rapport à l'écoulement d'entrée augmente avec la fréquence.

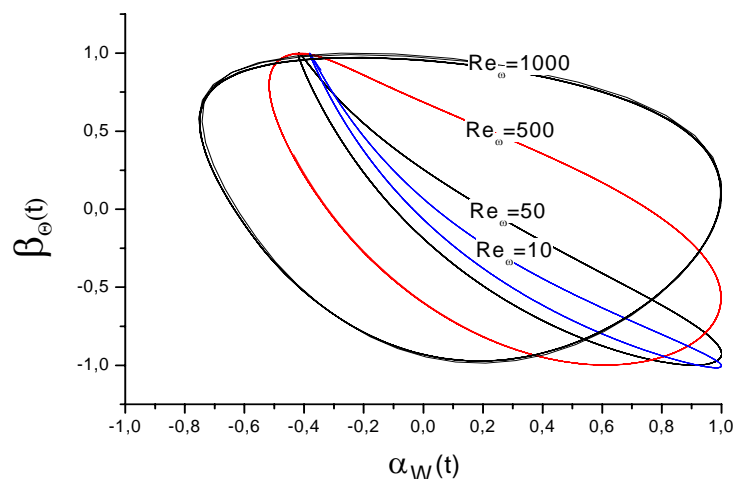


Fig.IV.31 : La trajectoire de température dans le plan de phase pour ($Re_\omega = 10, 50, 500, 1000$).

b. Sur les lignes isothermes

Le comportement des lignes isothermes en fonction des fréquences (les figures (IV.32.a, b, c)) permet de distinguer deux zones : une zone d'échange thermique par conduction au voisinage immédiat des parois de l'obstacle, et une autre zone d'échange thermique par convection au sein de l'écoulement.

On remarque que l'augmentation de la fréquence fait déplacer la zone d'échange par convection vers la paroi de l'obstacle. Cela est dû au fait que l'augmentation de la fréquence favorise l'effet annulaire et le reversement de l'écoulement (accélération des particules près de la paroi).

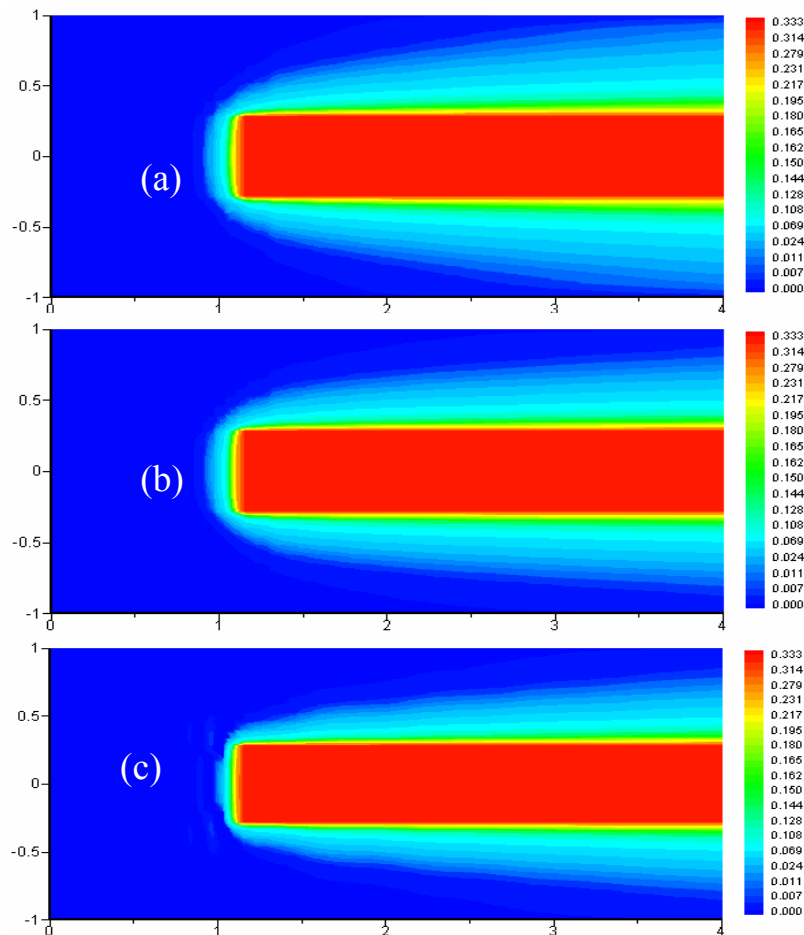


Fig.VI.32. les isothermes pour les fréquences ; (a) ; 100, (b); 250 et (c) ; 1000.

On remarque que l'augmentation de la fréquence implique une croissance du gradient normal à la paroi de la température, (figurIV.33). Ce gradient est plus important dans le cas

de la paroi horizontale que dans le cas de la paroi verticale et notamment dans la zone d'entrée de l'espace annulaire .Cela est dû à la recirculation du fluide créer par l'augmentation de la fréquence des oscillations déjà mentionnée.

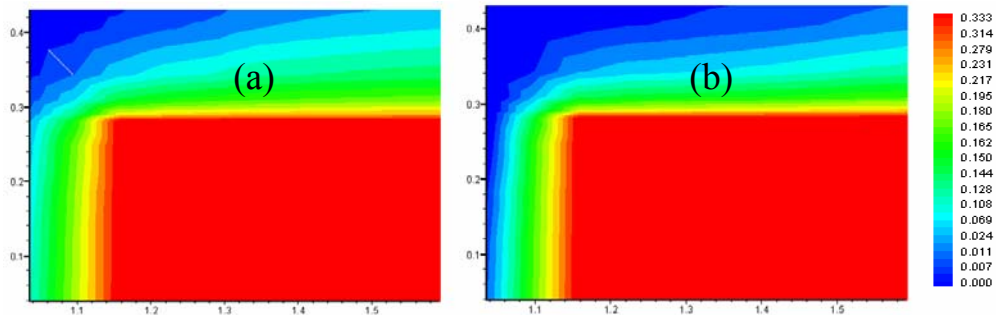


Fig.VI.33. les isothermes proche des parois de l'obstacle pour ; (a) ; $Re_{\omega}=100$ et (b) ; 1000.

Dans l'espace annulaire (figures.IV.34.a, b, c), la zone se trouvant au voisinage de la paroi horizontale est caractérisée par un meilleur échange thermique qui augmente avec la fréquence. De même, pour le reste de l'espace annulaire le transfert de chaleur augmente avec la fréquence mais à un degré moins important par rapport à l'entrée. On note aussi que la largeur de la zone d'échange augmente en aval de l'obstacle pour les faibles fréquences. Ceci montre que les basses fréquences favorisent le transfert thermique par convection entre le solide chauffé et le fluide.

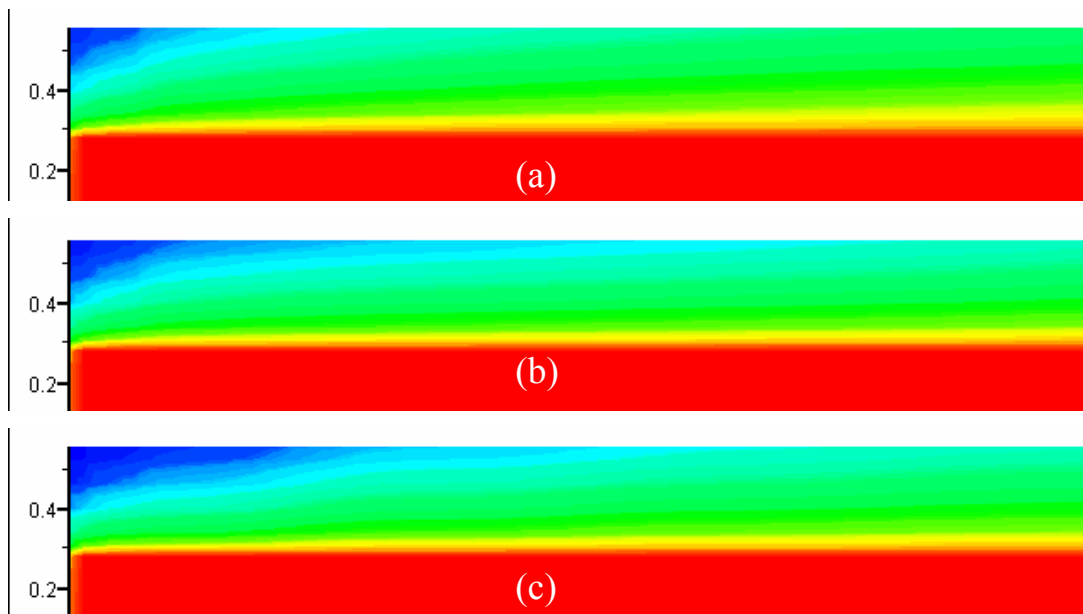


Fig.VI.34. lignes isothermes dans l'espace annulaire pour les fréquences :
(a) :100, (b) : 250 et (c) : 1000.

c. Sur les profils de température

L'influence des oscillations sur le mécanisme de l'échange thermique est représentée aussi par le profil de la température à différentes côtes de l'espace annulaire et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds cinétique, (figures (IV.35.a,b,c)).

D'après ces figures, il ressort que la température adimensionnelle du fluide prend sa valeur maximale, qui est de 0.333, au voisinage immédiat de l'obstacle, puis elle décroît pour atteindre sa plus basse valeur près de la paroi de la conduite. Cette variation s'effectue de la même manière pour les différentes sections de l'espace annulaire. Lorsque la valeur du nombre de Re_{ω} augmente ($Re_{\omega} = 250, 500$), les couches fluides, se trouvant loin de la paroi chauffée, prennent des températures de moins en moins élevées.

On remarque aussi la présence d'un fort gradient radial de la température proche de la paroi de l'obstacle qui décroît en fonction de z . Ce gradient augmente au fur et mesure que la fréquence augmente pour s'établir par la suite à une valeur constante pour les grandes fréquences $Re_{\omega} = 500$ et devient indépendant de la côte z . Ce qui est en conformité avec le rétrécissement de la couche limite thermique avec la croissance de la fréquence.

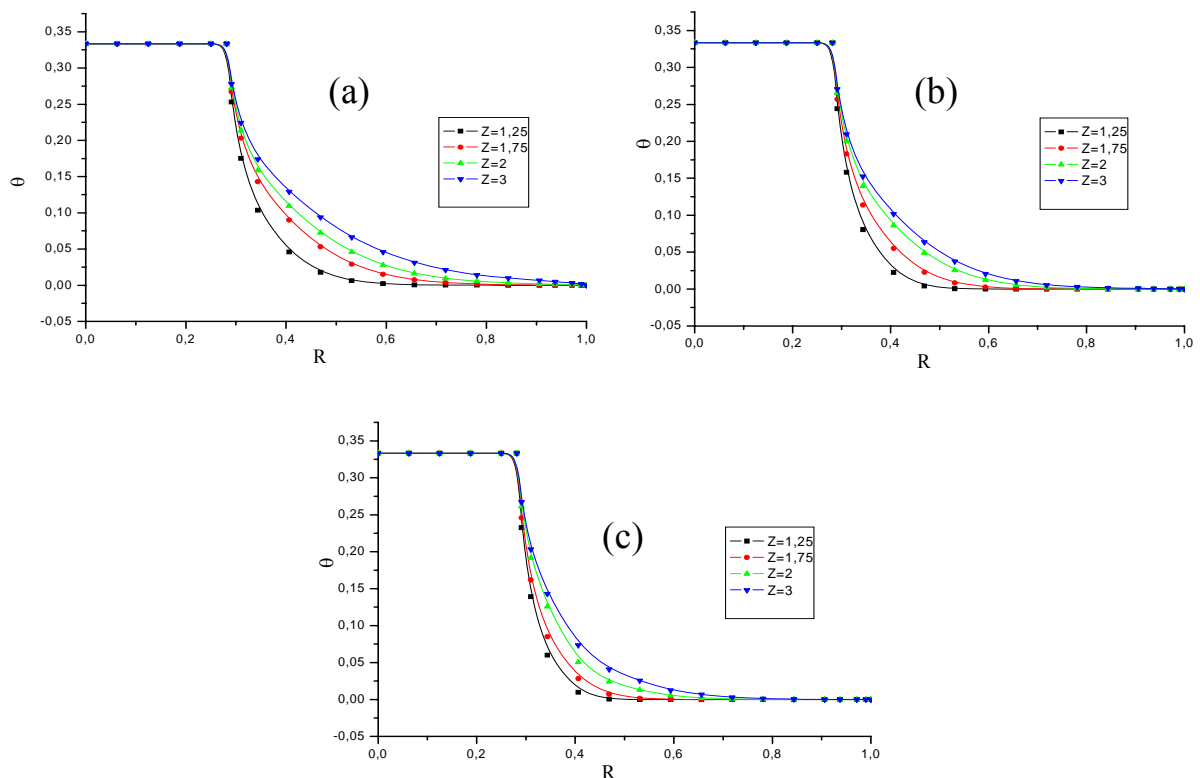


Figure (IV.35] : Variation radiale de la température à différentes côtes de l'espace annulaire et pour différentes fréquences : (a) ; 100, (b); 250 et (c) ; 500

d. Sur le nombre de Nusselt

En pratique, le nombre de Nusselt est une mesure commode du coefficient d'échange de chaleur par convection, car une fois sa valeur connue, on peut calculer le coefficient d'échange de chaleur par convection par la relation : $\bar{h}_c = Nu k/L$ en introduisant une longueur L caractéristique du corps.

la figure (IV.36.a) représente le tracé du nombre de Nusselt le long de l'obstacle, pour un nombre de Reynolds $Re_\omega = 100$. Ce dernier prend sa valeur maximale à l'entrée de l'espace annulaire, puis il décroît progressivement jusqu'à une valeur limite. Ces résultats sont qualitativement en bon accord avec ceux trouvés par Fu et al [1995] relatifs à une étude expérimentale sur l'amélioration du transfert thermique entre deux cylindres horizontaux coaxiaux (figure (IV.36.b)).

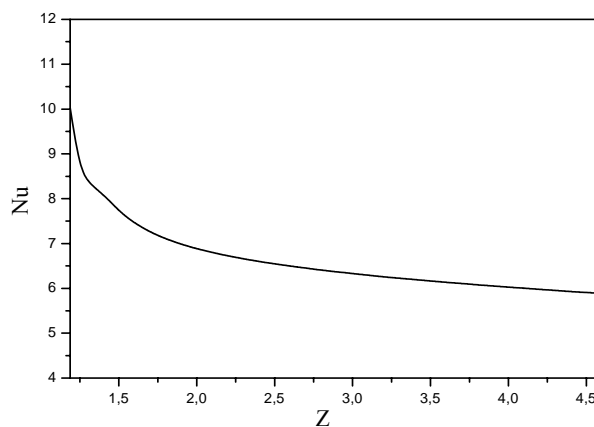


Figure (IV.36.a) : Variation de Nusselt le long de la paroi horizontale de l'obstacle pour $Re_\omega = 100$.

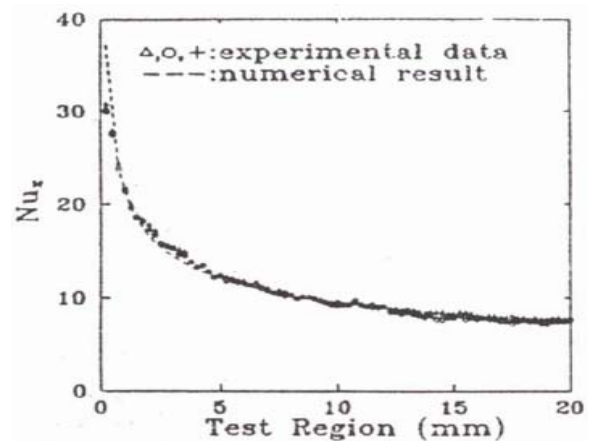


Figure (IV.36.b) : Variation de Nusselt le long de la paroi obtenue par Fu et al [1995].

Les figures (IV.37.a,b) représentent l'effet de la fréquence sur la variation du nombre de Nusselt moyen relatif $(Nu_{ps})_m$ le long de l'obstacle pendant une période. On distingue deux modes de variations $(Nu_{ps})_m$ selon la gamme des fréquences ; le premier mode (figure (IV.37.a)) est donné par les basses fréquences $Re_\omega < 150$ et le deuxième (figure (IV.37.b)) est donné pour les grandes fréquences $Re_\omega > 150$.

Pour les faibles fréquences $Re_\omega < 150$, l'échange de chaleur dû aux pulsations est appréciable le long de la paroi de l'obstacle sauf pour la fréquence $Re_\omega = 20$ qui correspond au cas stationnaire. La variation de $(Nu_{ps})_m$ représente une fonction croissante de la fréquence, ce qui confirme qualitativement le résultat de Kim and al [1993] (figure (IV.38)), où λ dans la figure représente le nombre de Womersely. Pour les hautes fréquences $Re_\omega > 150$, l'échange

de chaleur est important à l'entrée pour les fréquences ($Re_\omega = 500, 1000$), par contre dans la région avale, le transfert de chaleur ne change pratiquement pas avec les pulsations imposées. Zhao and Cheng [1988] expliquent ce comportement par le fait que l'augmentation du transfert de chaleur affecte la largeur de la couche limite qui devient fine. Cependant pour les très hautes fréquences les valeurs de l'amplitude de la vitesse pour un écoulement pulsé décroissent quand la fréquence augmente. Cela implique que le terme de la convection dans l'équation de l'énergie devient moins significatif avec l'augmentation de la fréquence malgré que la couche limite devienne très fine.

A notre avis l'augmentation de la fréquence fait augmenter les frottements et par conséquent l'amélioration du transfert de chaleur jusqu'à une fréquence limite, ou le champ thermique est en phase avec celui des forces de frottement. Mais lorsque la fréquence augmente, le déphasage entre le champ thermique et les forces de frottement commence à croître, ce qui inverse l'effet des forces de frottement sur l'augmentation de la température.

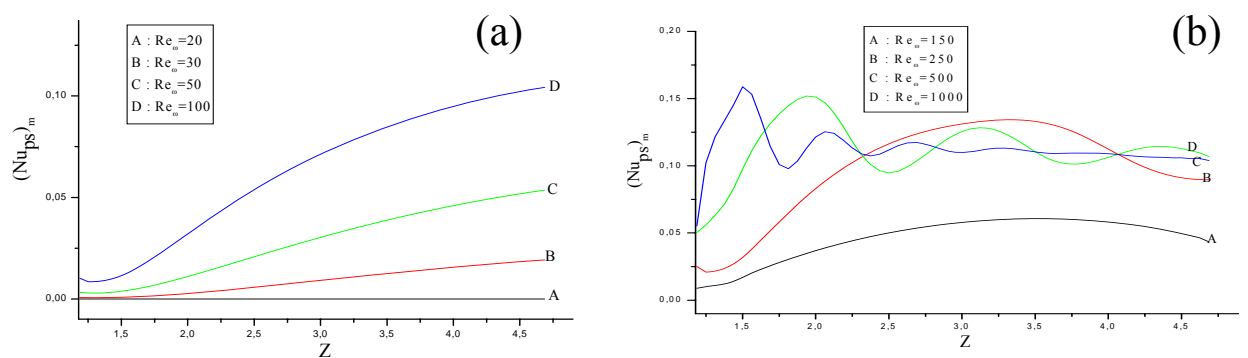


Figure (IV.37) : Variation de $Nu_{p,s}$ le long de l'obstacle, (a) ; $Re_\omega = 20, 30, 50$ et 100 , (b) ; $Re_\omega = 150, 250, 500$ et 1000 .

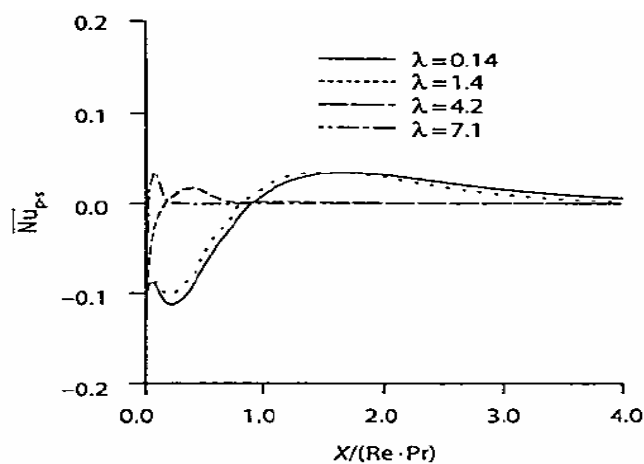


Figure (IV.38) : Variation de $Nu_{p,s}$ local le long de l'obstacle obtenue par Kim [1993]

En conclusion, le transfert de chaleur dans un écoulement pulsé est important dans une gamme des fréquences. En dehors de cette gamme, les pulsations n'ont aucun effet sur le transfert de chaleur.

IV.3.2.2 Influence de l'amplitude sur le nombre de Nusselt :

Le comportement du nombre de Nusselt moyen, le long de l'obstacle, en fonction de l'amplitude est représenté par les figures (IV.39). La fréquence Re_ω choisie est égale à 100. On remarque que le nombre de Nusselt moyen croît avec la croissance de l'amplitude le long de l'espace annulaire. Pour la position $Z=3$, cette croissance est linéaire avec l'amplitude comme le montre la figure (IV.40).

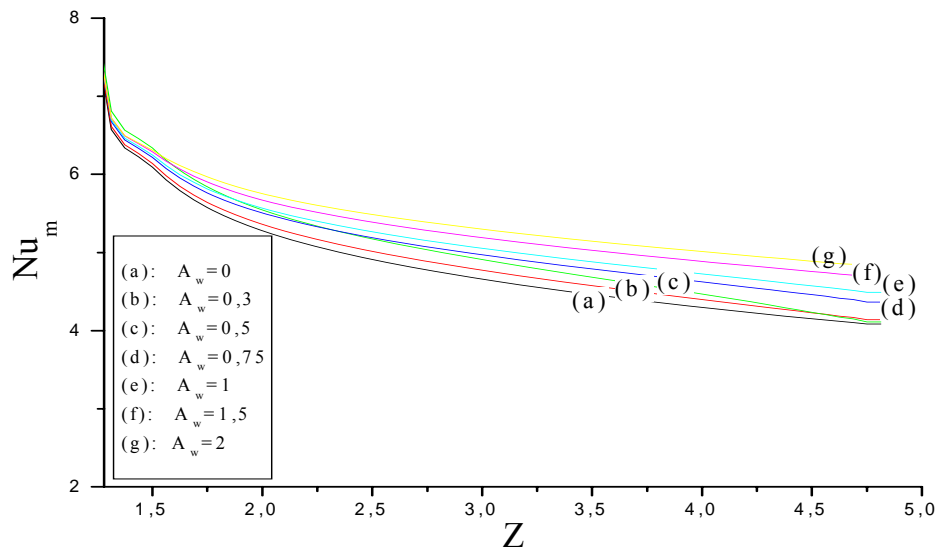


Fig.IV.39 : Variation de Nu_m le long de l'obstacle pour différentes amplitudes.

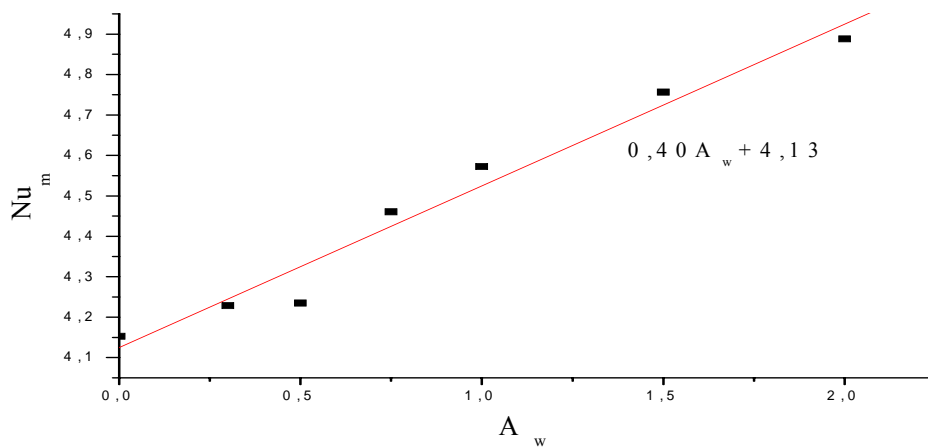


Fig.IV.39 : Variation de Nu_m en $Z=3$ en fonction de l'amplitude.

IV.3.3 Influence de la géométrie :

On a vu précédemment que le transfert de chaleur est plus intense pour des fréquences privilégiées. Dans un travail expérimental et numérique, Andre et Creef [1986], ont montré l'existence d'une fréquence de résonance qui dépend des conditions de l'écoulement à savoir la fréquence et l'amplitude de la vitesse débitante ainsi de la géométrie du problème.

L'influence de la géométrie sur la réponse fréquentielle de l'échange thermique entre la paroi de l'obstacle et le fluide pulsé a été examinée pour une amplitude $A_w=0.5$, en choisissant trois positions de l'obstacle ($Z_p=0.63, 0.94$ et 1.25).

Les courbes représentant le nombre de Nusselt moyen en fonction de la fréquence (voir figure (IV.28)), ont la même allure pour différentes positions de l'obstacle et indiquent l'existence de deux maxima pour deux valeurs critiques de la fréquence. Le premier est dû à l'écoulement pulsé, d'une amplitude supérieure à celle de la seconde harmonique, et croît avec l'éloignement de l'obstacle. Il s'avère qu'un optimum de transfert de la chaleur résulte d'une résonance entre la fréquence de pulsation et les caractéristiques géométriques du problème physique.

Le deuxième maximum est moins intense et d'une amplitude inférieure à celle du premier maximum. Cette amplitude décroît progressivement avec l'éloignement de l'obstacle, ce qui explique que le deuxième pic est dû à la présence des tourbillons créés à l'entrée de l'espace annulaire et qui disparaissent avec l'éloignement de l'obstacle.

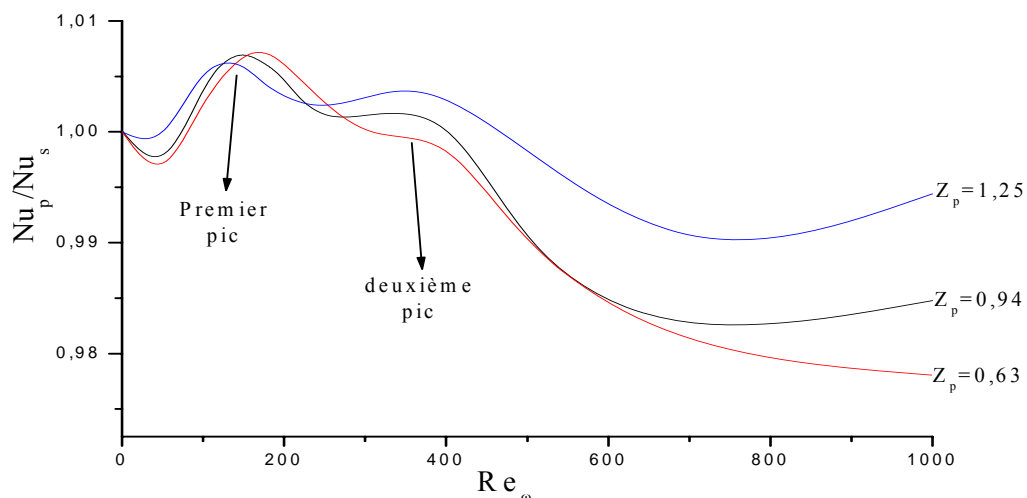


Fig. IV.28 : la réponse fréquentielle de Nusselt moyen pour différentes positions de l'obstacle.

Chapitre 5 :

CONCLUSION GENERALE

V. CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, on a présenté une étude analytique et numérique relative aux effets engendrés par l'écoulement pulsé, à savoir ; l'effet annulaire, le déphasage et l'augmentation des valeurs moyennes des amplitudes des différents paramètres par rapport au cas stationnaire.

L'étude analytique a permis d'établir une expression théorique déterminant la position du maximum de la vitesse en fonction de la fréquence et du temps. Ce résultat est confirmé numériquement. Il montre, d'une part, que l'effet annulaire s'accroît avec la fréquence et diminue avec la phase et d'autre part, que l'influence des oscillations commence à partir d'une fréquence située au delà de $Re_\omega=150$, contrairement à la valeur de la fréquence donnée dans la littérature qui correspond à $Re_\omega=16$.

Les résultats numériques montrent aussi que le comportement des champs dynamique et thermique présentent un aspect périodique similaire aux pulsations imposées surtout pour les faibles fréquences et les faibles amplitudes. Cet aspect a tendance à disparaître pour les fréquences $Re_\omega > 500$, présentant des instabilités au sein de l'écoulement. Ces dernières sont plus visibles dans le plan de phase que dans le domaine temporel.

L'étude de la trajectoire des différents paramètres de l'écoulement dans le plan de phase a permis de déterminer le déphasage de ces derniers par rapport à l'écoulement imposé. Les résultats montrent que le déphasage de gradient de pression et le coefficient de frottement varient respectivement de 0° pour les faibles fréquences jusqu'à 83° et 45° pour les hautes fréquences. De même le déphasage relatif à l'écart de la température augmente avec la fréquence.

L'écoulement de retour ne se produit que si l'amplitude d'oscillation est plus grande qu'une certaine valeur critique. Cette dernière diminue avec l'accroissement de la fréquence.

Le transfert de chaleur dans un écoulement pulsé est important pour une gamme de fréquence qui varie avec la géométrie du problème.

Concernant les perspectives à donner à ce travail. On propose une étude concernant l'amélioration de l'échange thermique par l'adaptation des pulsations imposées et la géométrie du problème.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

- P. Andre, R. Creff**, Etude des Conditions Particulières de Fréquence Favorisant les Transferts Thermiques en Ecoulement Pulses en Canalisation Cylindrique, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.24, N° 7, pp1211-1229, 1981.
- H. B. Atabek , C. C. Chang**, Oscillatory Flow Near the Entry of Circular Tube, *Z .AMP Vol. 12*, pp. 185-201, 1961.
- N. Benyahia**, Interaction Fluide-Paroi Ecoulement à Travers un Tube Elastique, , thèse de Magister, Univ.USTHB, 2005.
- A. Bouhanna**, Contribution à l'étude d'un Ecoulement de Fluide Réel à Symétrie Axiale dans une Cavité Cylindrique, thèse de Magister, Univ.USTHB, 1982.
- P. Bouvier**, Transferts de Thermiques en Ecoulement Oscillant dans une Conduite Cylindrique, Thèse de doctorat, université de Nantes, 2000.
- W.K. Chan, S.L. Lee, C.Y. Liu**, Effects of Frequency And Amplitude of Oscillation on Low Reynolds Number Pulsating Flow in a Circular Pipe, *Engineering Computations*, Vol. 19 , N°1, pp. 119-132, 2002.
- R. Creff, P. Andre, J. Batina**, Dynamic and Convective Results for a Developing Laminar Unsteady Flow, *Inet.J for for Numerical Methods In Fluids*, Vol. N°5, pp.745-760, 1985.
- B. Dadda**. Etude d'un Ecoulement Ascendant en Régime Dynamique et Thermique non Etabli en Présence d'un Cylindre Chauffé avec Effets de Conductivité, Thèse de magister, Univ.USTHB, 2004.
- Fortin**, Thèse de Doctort d'état, Univ. Paris VI, 1972.
- W.S Fu, C.C Tseng, C.S. Huang**, Experimental Study of Heat Transfer Enhancement of an Outer Tube with an Inner-Tube Insertion", *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol. 38, N°18, pp. 3443-3454, 1995.
- D. Gedeon**, Mean-Parameter Modeling of Oscillating Flow, *J. Heat Transfer*, Vol.108, pp. 513-518, 1986.
- A. Ghezal, J.C. Loraud et B. Porterie**, Modélisation du Transfert de Chaleur Entre un Obstacle en Mouvement Hélicoïdal et un Fluide Visqueux en Ecoulement Confiné, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, N°2, pp. 329-341, 1962.
- F.R. Goldschmied**, An Experimental Study of Pulsating Flow of Incompressible Viscous Fluids in Rigid Pipes in the Intermediate Damping Range, *Astrionics laboratory, NASA TM x-53719*, March 25, 1968.
- Z. Guo and H. Sung**, Analysis of Nusselt Number in Pulsating Pipe Flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 40, N° 10, pp.2486-2489, 1997.
- M.A. Habib, A.M. Attya, A.I. Eid, A.Z. Aly**, Convective Heat Transfer Characteristics of Laminar Pulsating Pipe Air Flow, *Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, N°3 ,pp. 221-232, 2002.

- R. HADJ-ALI, A. GHAZEL:** Hydrodynamic Study Of A Pulsatile Flow Around A Cylinder, Inter. Conference on Modelling and Simulation (MS'06), Konya-Turkey, 2006.
- B.H. KIM,** Modeling Pulsed Blowing Systems for Active Flow Control, these de doctorat, Institut de technologie de Illinois Chicago, 2003.
- S.Y. Kim, B.H. Kang and J.M. Hyun,** Heat Transfer in the Thermally Developing Region of a Pulsating Channel Flow, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, No17, pp 4257-4266, 1993.
- J. Majdalani, H..A. Chibli,** Pulsatory Channel Flows with Arbitrary Pressure Gradients,32nd AIAA Fluid Dynamics Conference, AIAA 2002-2981, 2002.
- T. Moshandreu, M. Zamir,** Heat Transfer in a Tube With Pulsating Flow and Constant Heat Flux, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.40, N°10, pp. 2461-2466, 1997.
- Z. Ouchiha,** Ecoulement d'un Fluide Réel dans une Conduite Verticale en Présence d'un Obstacle Cylindre chauffé,Thèse de magister, Univ.USTHB, 1998.
- S.V. Patankar,** Numerical heat transfer and fluid flow, Series in computational Methods in Mechanics and thermal Sciences, 1980.
- R. Peyret, S. Childress,** A Numerical Study of Two-dimensional Convection by Motile Particles. Journal de Mécanique, Vol. 15, N°5, 1976.
- E.G .Richardson, E.Tyler,** The Transverse Velocity Gradient near the Mouths of Pipes in Which an Alternating or Continuous Flow of Air is Established. Proc. Phys Soc. London, Vol. 42, pp. 1-15,1929.
- C. Sert, A. Beskok,** Reciprocating Flow Forced Convection in Two-Dimensional Channels , Journal of Heat Transfer, Vol.125, pp.403-412, 2003.
- R. Siegel, M. Perlmutter,** Heat Transfer for Pulsating Laminar Duct Flow, J. Heat Transfer, May, pp. 111-116, 1962.
- T.W. Simon, J.R. Seume.** A Survey of Oscillating Flow in Stirling Engine Heat Exchangers. NASA Contractor Report 182108, 1986.
- S. Uchida,** Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion, ZAMP Vol. 17, pp. 403-422, 1956.
- J.R. Womersley,** Method for the Calculation of Velocity, Rate of Flow and Viscous Drag in Arteries when Pressure Gradient is Known. J. of Physiology, Vol.127, pp 553-563, 1955.
- A. Yakhot, L.Grinberg,** Phase Shift Ellipses for Pulsating Flows. Physics of Fluids, Vol15, N° 7, pp. 2081-2083, 2003.
- A. Yakhot, L.Grinberg, and Nikitin,** Simulating Pulsating Flows through a pipe Orifice by an Immersed-Boundary Method, Journal of Fluids Engineering, Vol.126, pp.911-915, 2004.
- A.Yakhot, M.Arad, G. Ben-Dor,** Numerical Investigation of Laminar Pulsating Flow In Rectangular Duct, Int.J.for Numerical Methods In Fluids, Vol.29, pp.935-950,1999.

J.C. Yu, Z.X. Li, T.S. Zhao, An Analytical Study of Pulsating Laminar Heat Convection in a Circular Tube with Constant Heat Flux, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol 47, pp 5297–5301, 2004.

T.S. Zhao, P. Cheng, The Friction Coefficient of a Fully developed Laminar Reciprocating flow in a Circular Pipe, *Int.J.Heat and Fluid Flow*, Vol 17, pp167-172, 1996.

T.S. Zhao, P. Cheng: Heat transfer in oscillatory flows. *Annual Review of Heat Transfer*. Vol IX, Edited by Chang Lin Tien, 1998.

ANNEXE

ANNEXE 1. Schéma de discrétisation

1. Discrétisation des dérivées partielles :

Les équations de Navier-Stokes relatives à cette étude sont de type parabolique suivant le temps; leur résolution se fait par une discrétisation du premier ordre dans le temps.

1.1 Approximation de la dérivée première suivant le temps :

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ est remplacée par un opérateur aux différences de premier ordre avec une précision de $O(k)$, à partir d'un développement de Taylor en temps :

$$\delta(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^{n+1} - f_{m,l}^n}{k}$$

1.2 Approximation des dérivées spatiales :

a. Par rapport à la variable r :

A partir du développement de Taylor en r , les dérivées premières sont approchées par des opérateurs selon l'ordre de précision souhaité ;

➤ précision d'ordre un $O(h)$:

$$\delta_r^+(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - f_{m,l}^n}{h}, \quad \text{opérateur progressif}$$

$$\delta_r^-(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^n - f_{m,l-1}^n}{h}, \quad \text{opérateur régressif}$$

➤ précision d'ordre deux $O(h^2)$:

$$\delta_r^0(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - f_{m,l-1}^n}{2h}, \quad \text{opérateur centré}$$

$$\delta_r'(f_{m,l}^n) = \frac{-3f_{m,l}^n + 4f_{m,l+1}^n - f_{m,l+2}^n}{2h}, \quad \text{opérateur progressif avec trois nœuds}$$

$$\delta_r''(f_{m,l}^n) = \frac{3f_{m,l}^n - 4f_{m,l-1}^n + f_{m,l-2}^n}{2h}, \quad \text{opérateur régressif avec trois nœuds}$$

La dérivée partielle seconde $\partial^2 f / \partial r^2$ est approximée, à partir d'un développement de Taylor à

l'ordre deux, par l'opérateur : $\delta_r^2(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l+1}^n - 2f_{m,l}^n + f_{m,l-1}^n}{h^2}$, il est de précision d'ordre deux

b. Par rapport à la variable z :

De manière similaire, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}$ est approchée par :

$$\delta_z^+(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - f_{m,l}^n}{h}, \quad \text{opérateur progressif}$$

$$\delta_z^-(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m,l}^n - f_{m-1,l}^n}{h}, \quad \text{opérateur régressif}$$

$$\delta_z^0(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - f_{m-1,l}^n}{2h}, \quad \text{opérateur centré}$$

$$\delta_z''(f_{m,l}^n) = \frac{3f_{m,l}^n - 4f_{m-1,l}^n + f_{m-2,l}^n}{2h}, \quad \text{opérateur régressif à trois nœuds}$$

$$\delta_z'(f_{m,l}^n) = \frac{-3f_{m,l}^n + 4f_{m+1,l}^n - f_{m+2,l}^n}{2h}, \quad \text{opérateur progressif à trois nœuds}$$

La dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ est approchée par :

$$\delta_z^2(f_{m,l}^n) = \frac{f_{m+1,l}^n - 2f_{m,l}^n + f_{m-1,l}^n}{h^2}$$

l et m sont des nombres entiers ou fractionnaires et définis ainsi :

$$l=j, j \pm 1/2, j \pm 3/2, \dots, \quad m=i, i \pm 1/2, i \pm 3/2, \dots$$

2. Différentiation des équations :

Généralement, la discrétisation d'une équation parabolique s'effectue, non pas en considérant les approximations des dérivées partielles par rapport aux variables spatiales décrites précédemment, mais en introduisant la moyenne pondérée de ces grandeurs pour deux instants différents : $t_0 = nk$ et $t_1 = (n+1)k$. En d'autres termes, cela revient à prendre ces valeurs à l'instant $t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_0 = (n+\alpha)k$ où α est une constante telle que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Le système d'équations (II-3) est transformé comme suit :

a. Equation de continuité :

$$(\delta_r^- \mathbf{u})_{i,j+1/2}^{n+1} + \left(\frac{\mathbf{u}}{r} \right)_{i,j}^{n+1} + (\delta_z^- \mathbf{w})_{i+1/2,j}^{n+1} = 0$$

b. Equations de mouvement :

➤ Par rapport à r :

$$\begin{aligned} & (\delta_t \mathbf{U})_{i,j+1/2}^n + \left[\alpha (\mathbf{U} \delta_r^0 \mathbf{U})^{n+1} + (1-\alpha) (\mathbf{U} \delta_r^0 \mathbf{U})^n \right]_{i,j+1/2} + \left[\alpha (\hat{\mathbf{W}} \delta_z^0 \mathbf{U})^{n+1} + (1-\alpha) (\hat{\mathbf{W}} \delta_z^0 \mathbf{U})^n \right]_{i,j+1/2} = \\ & - (\delta_r^+ \Pi)_{i,j}^{n+\alpha} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\alpha \left(\delta_r^2 \mathbf{U} + \frac{\delta_r^0 \mathbf{U}}{r} + \delta_z^2 \mathbf{U} - \frac{\mathbf{U}}{r^2} \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 \mathbf{U} + \frac{\delta_r^0 \mathbf{U}}{r} + \delta_z^2 \mathbf{U} \right)^n \right]_{i,j+1/2} \end{aligned}$$

➤ Par rapport à z :

$$\begin{aligned} & (\delta_t \mathbf{W})_{i,j+1/2}^n + \left[\alpha (\hat{\mathbf{U}} \delta_r^0 \mathbf{W})^{n+1} + (1-\alpha) (\hat{\mathbf{U}} \delta_r^0 \mathbf{W})^n \right]_{i+1/2,j} + \left[\alpha (\mathbf{W} \delta_z^0 \mathbf{W})^{n+1} + (1+\alpha) (\mathbf{W} \delta_z^0 \mathbf{W})^n \right]_{i+1/2,j} = \\ & - (\delta_z^+ \Pi)_{i,j}^{n+\alpha} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\alpha \left(\delta_r^2 \mathbf{W} + \frac{\delta_r^0 \mathbf{W}}{r} + \delta_z^2 \mathbf{W} \right)^{n+1} + (1-\alpha) \left(\delta_r^2 \mathbf{W} + \frac{\delta_r^0 \mathbf{W}}{r} + \delta_z^2 \mathbf{W} \right)^n \right]_{i+1/2,j} \end{aligned}$$

c. Equation d'énergie :

$$\begin{aligned} & (\delta_t \theta)_{i+1/2,j+1/2}^n + \left[\alpha (\bar{\mathbf{U}} \delta_r^0 \theta)^{n+1} + (1-\alpha) (\bar{\mathbf{U}} \delta_r^0 \theta)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} + \left[\alpha (\bar{\mathbf{W}} \delta_z^0 \theta)^{n+1} + (1-\alpha) (\bar{\mathbf{W}} \delta_z^0 \theta)^n \right]_{i+1/2,j+1/2} \tag{VI-1-d} \\ & - \frac{1}{\text{RePr}} \left[\alpha \left((\delta_r^2 \theta)^{n+1} + \frac{(\delta_r^0 \theta)^{n+1}}{r} + (\delta_z^2 \theta)^{n+1} \right) + (1-\alpha) \left((\delta_r^2 \theta)^n + \frac{(\delta_r^0 \theta)^n}{r} + (\delta_z^2 \theta)^n \right) \right]_{i+1/2,j+1/2} = 0 \end{aligned}$$

On définit les variables moyennes suivantes :

$$\hat{\mathbf{U}}_{i+1/2,j} = \frac{1}{4} (\mathbf{U}_{i,j+1/2} + \mathbf{U}_{i+1,j+1/2} + \mathbf{U}_{i,j-1/2} + \mathbf{U}_{i+1,j-1/2})$$

$$\hat{\mathbf{W}}_{i,j+1/2} = \frac{1}{4} (\mathbf{W}_{i+1/2,j} + \mathbf{W}_{i+1/2,j+1} + \mathbf{W}_{i-1/2,j} + \mathbf{W}_{i-1/2,j+1})$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i,j+1/2} + \mathbf{U}_{i+1,j+1/2})$$

$$\bar{\mathbf{W}}_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_{i+1/2,j} + \mathbf{W}_{i+1/2,j+1})$$

N.B : Le schéma de Crank-Nicolson correspond à $\alpha=1/2$

ANNEXE 2. Traitement des opérateurs aux frontières :

- **Frontière S_1 :**

On distingue sur la figure (1), deux conditions aux limites pour cette frontière, à savoir ; la condition d'adhérence et la condition d'adiabaticité de la paroi. Les composantes u et Θ se trouvent sur la frontière S_1 , donc les opérateurs L_u et L_Θ ne nécessitent pas un traitement à la frontière.

Par contre, la composante w ne coïncide pas avec la surface S_1 , elle se trouve à une distance de $h/2$ de la paroi. Pour la détermination de la valeur de w à la paroi S_1 , on utilise la condition de réflexion pour la vitesse tangentielle tel que $W' = -W$ (le « ' » symbolise une cellule fictive située à l'extérieur de la paroi solide). De plus, on suppose pour ce cas d'indétermination qu'il existe une variation linéaire sur l'intervalle $R-h/2 \leq r \leq R+h/2$ qui aboutit à l'expression suivante :

$$W(r, z, t) = \frac{2(R-r)}{h} W(R-h/2, z, t)$$

Dans l'approximation des dérivées de W par rapport à r , la valeur de W' qui est ainsi définie permet de résoudre L_w au point $(R-h/2, z, t)$.

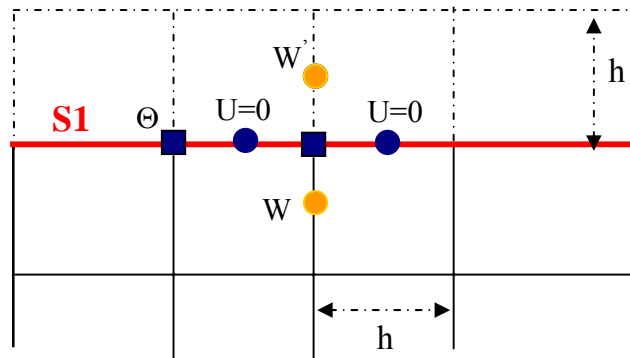


Fig.1 : Positionnement des nœuds au voisinage de la paroi S_1

- **Frontière S_2 :**

Cette frontière caractérisée par la condition de symétrie par rapport à l'axe de cylindre où la vitesse normale est nulle et toutes les autres variables sont régies par la condition de Neumann à savoir les gradients normaux nuls.

On montre que les opérateurs L_U et D intervenant aux noeuds 4 et 5 (figure(2)) avec leurs dérivées par rapport à r ne nécessitent pas de traitement particulier.

- Au noeud 2, où intervient l'opérateur L_W , $W_1=W_2$ à cause de la symétrie axiale.
- Au noeud 3, où la température est définie, l'opérateur L_Θ intervient avec ses dérivées par rapport à r . Il est nécessaire alors de déterminer la valeur de Θ sur l'axe en utilisant un opérateur (δ') dans cette direction.

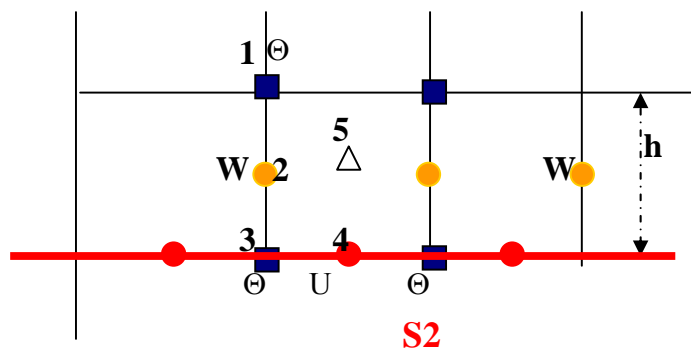


Fig.2 : Positionnement des noeuds sur l'axe de symétrie.

• **Frontière S3 :**

La frontière S_3 passe dans ce cas entre deux lignes du maillage définissant ainsi une demi-maille, (figure. (3)). L'opérateur L_w ne présente pas un débordement à la frontière, par contre les noeuds correspondant aux valeurs à U et de Θ ne coïncident pas avec la frontière ce qui nécessite l'utilisation des variables aux noeuds de la maille fictive pour l'évaluation de L_u et L_Θ à cette frontière S_3 .

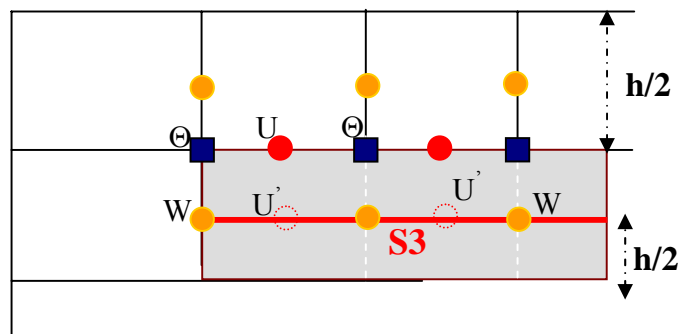


Fig. 3 : Positionnement des noeuds au contact de la paroi horizontale de l'obstacle.

- **Frontière 4 :**

D'après la figure (4), l'opérateur L_w et L_Θ ne présentent pas un débordement à la frontière S4, par contre les noeuds correspondants à l'avaleur de U ne coïncident pas avec la frontière, ce qui nécessite l'utilisation de variables aux noeuds de la maille fictive pour l'évaluation de L_U à cette frontière.

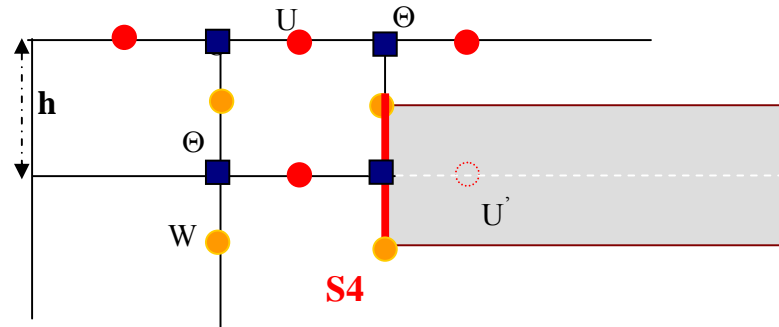


Fig. 4 : Positionnement des noeuds au contact de la paroi verticale de l'obstacle.

- **Frontière S5 :**

A la section de sortie (voir figure (5)), le traitement des conditions aux limites ne diffère pas de celui utilisé pour les parois solides. Cependant l'absence de variation des différentes grandeurs dans la direction axiale OZ, est prise en considération.

Pour la composante axiale de la vitesse normale à la section S_5 et les températures, on utilise une approximation précise à l'ordre 2, grâce à l'opérateur (δ''') . Les opérateurs L_U , L_W , L_Θ et D appliqués aux noeuds respectifs, où sont définis chacun des paramètres, ne débordent pas sur cette frontière.

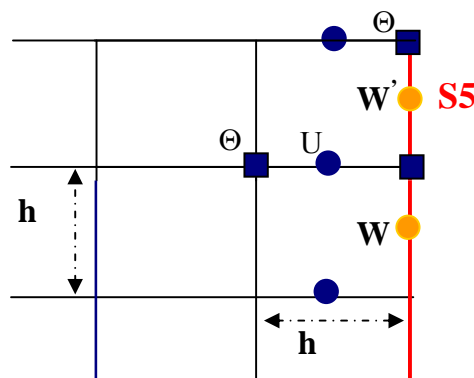


Fig.5 : Positionnement des noeuds au voisinage de la section de sortie

ANNEXE 3. Plan de phase

Les expressions de la vitesse d'entrée et de la grandeur physique sont données comme suit :

$$W(t) = W_0(1 + A_w \sin(\omega t)) \quad (1)$$

$$F(t) = F_0(1 + A_f \sin(\omega t + \phi_f)) \quad (2)$$

On définit les amplitudes des oscillations normalisées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ respectivement de $W(t)$ et $F(t)$ par les relations suivantes :

$$\alpha(t) = \frac{W(t) - W_0}{A_w W_0} = \sin(\omega t) \quad (3)$$

$$\beta(t) = \frac{F(t) - F_0(t)}{A_f F_0} = \sin(\omega t + \phi_f) = \sin(\omega t)\cos(\phi_f) + \cos(\omega t)\sin(\phi_f) \quad (4)$$

Multiplier les équations (4) et (3) avec $\cos(\phi_f)$ et 1, la soustraction des deux donne :

$$\alpha(t)\cos(\phi_f) - \beta(t) = \cos(\phi_f)(\sin(\omega t)\cos(\phi_f) + \cos(\omega t)\sin(\phi_f)) - \sin(\omega t)\sin(\phi_f) \quad (5)$$

La multiplication de l'équations (3) avec $\sin(\phi_f)$ donne :

$$\alpha(t)\sin(\phi_f) = \sin(\omega t)\sin(\phi_f) \quad (6)$$

Prendre au carrée de deux équations (5) et (6) puis les additionne, on trouve

$$(\alpha(t)\cos(\phi_f))^2 + \beta(t)^2 - 2\alpha(t)\beta(t)\cos(\phi_f) + (\alpha(t)\sin(\phi_f))^2 = (\sin(\omega t)\sin(\phi_f))^2 \quad (7)$$

L'équation (6) peut être aussi réarrangé ainsi :

$$\alpha(t)^2 + \beta(t)^2 - 2\alpha(t)\beta(t)\cos(\phi_f) = \sin(\phi_f)^2 \quad (8)$$

L'équation (8) décrit une ellipse dont les axes principaux (de révolutions) ne sont pas (XOY). Les deux axes principaux font un angle φ avec le système de coordonnées (XOY). C'est une ellipse tournée.

On voit que le terme croisé $2\alpha(t)\beta(t)\cos(\phi_f)$, n'existe pas dans l'équation conventionnelle de l'ellipse.

