

N d'ordre : 01/2016-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse et Approximation des Equations aux Dérivées Partielles

Par

BELHASSANI Saliha

Sujet

**Explosion des Solutions pour un Système d'Equations
d'Evolution Fractionnaire**

Soutenu publiquement, le : 04 /12 /2016, devant le jury composé de :

| | | |
|---------------------|--------------------------|-----------|
| Mr.Rachid BEBBOUCHI | Professeur à L'U.S.T.H.B | Président |
| Mr. Amor KESSAB | Professeur à L'U.S.T.H.B | Encadreur |
| Mr.Amar KHEMMOUDJ | Professeur à L'U.S.T.H.B | Examineur |
| Mr.Arezki TOUZALINE | Professeur à L'U.S.T.H.B | Examineur |

Remerciements

Premièrement, je voudrai exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur le professeur Monsieur A.Kessab qui m'a proposé ce sujet intéressant sur le calcul fractionnaire, je le remercie infiniment pour son soutien, sa gentillesse et ses précieux conseils.

J'adresse mes remerciements à Monsieur R.Bebbouchi pour l'honneur qui me fait en acceptant de présider le jury; qu'il trouve ici l'expression de la plus grande reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je tiens également à remercier Messieurs A.Touzaline et A.Khemmoudj d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je remercie tous mes enseignants de l'année théorique 2012/2013 pour leurs dévouements, leurs patience et leurs encouragements.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à ma famille.

Table des matières

| | |
|---|------------|
| Table des matières | iii |
| 0.1 Introduction générale | 1 |
| 1 Rappels et Définitions | 3 |
| 1.1 Notations et définitions de quelques opérateurs différentiels | 3 |
| 1.2 Espaces de fonctions et de distributions | 3 |
| 1.3 Espaces Fonctionnels d'Evolution | 6 |
| 1.4 Transformation de Fourier | 7 |
| 1.4.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ | 7 |
| 1.4.2 Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^N)$ | 8 |
| 1.4.3 Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^N)$ | 8 |
| 1.4.4 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ | 8 |
| 1.5 Semi-groupes et propriétés | 9 |
| 1.5.1 Définitions | 9 |
| 1.5.2 Propriétés | 10 |
| 1.6 Théorèmes et Résultats de base | 12 |
| 2 Calcul Fractionnaire | 13 |
| 2.1 Fonctions spéciales | 13 |
| 2.1.1 La fonction Gamma d'Euler | 13 |
| 2.1.2 La fonction Béta | 14 |
| 2.1.3 La fonction de Mittag-Leffler | 15 |
| 2.2 Intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville | 15 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.2.1 | Propriétés des intégrales fractionnaires | 17 |
| 2.2.2 | Propriétés des dérivées fractionnaires | 18 |
| 2.3 | Dérivée fractionnaire au sens de Caputo | 19 |
| 2.4 | Le laplacien fractionnaire | 20 |
| 2.4.1 | Propriétés du Laplacien Fractionnaire | 21 |
| 3 | Etude d'un problème d'évolution fractionnaire | 22 |
| 3.1 | Introduction | 22 |
| 3.2 | Equation de la chaleur fractionnaire et non locale | 22 |
| 3.2.1 | Introduction | 22 |
| 3.2.2 | Existence locale | 24 |
| 3.2.3 | Explosion des solutions | 28 |
| 4 | Existence locale et explosion des solutions d'un système d'évolution frac- | |
| | tionnaire | 38 |
| 4.1 | Introduction | 38 |
| 4.2 | Existence locale | 39 |
| 4.3 | Explosion des solutions | 44 |
| 5 | Conclusion et Perspectives | 54 |
| | Bibliographie | 55 |

0.1 Introduction générale

Les équations différentielles fractionnaires apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, l'électrochimie,.. etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé les mathématiciens à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un modèle physique qui représente un système d'évolution fractionnaire. Ce modèle décrit un milieu de réaction-diffusion dont la diffusion est anormale. Cette diffusion anormale est caractérisée par le Laplacien fractionnaire. On cherchera l'existence locale des solutions ainsi que l'explosion des solutions en temps fini. Le système qu'on appellera le problème (P) s'écrit:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |v(s)|^{p-1} v(s) ds, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ v_t + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^t (t-s)^{-\delta} |u(s)|^{q-1} u(s) ds, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

auxquelles on ajoute les conditions initiales:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

où: $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$; $\gamma, \delta \in (0, 1)$; $p, q > 1$; $0 < \beta_i \leq 2$ ($i = 1, 2$). L'opérateur non local $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}$ est le laplacien fractionnaire qu'on va définir dans le deuxième chapitre. La fonction Γ est la fonction Gamma d'Euler, et $u_t = \frac{du(x, t)}{dt}$.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres avec un cinquième qui est une conclusion. Dans le premier chapitre, on va exposer quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. On commence par définir les espaces des fonctions et ceux d'évolution; ensuite on donnera quelques propriétés des semi-groupes. On terminera par quelques résultats de base concernant l'existence des solutions. Dans le deuxième chapitre, On donne la définition des dérivées et intégrales fractionnaires et toutes les propriétés concernant le calcul fractionnaire.

Dans le troisième chapitre, on présente l'étude d'un problème de Cauchy sous forme d'une équation de la chaleur qui est non locale en temps et en espace. c'est en quelques sorte le problème (P) dans le cas d'une seule équation, c'est à dire:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u(s)|^{p-1} u(s) ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

Et dans le quatrième chapitre, on étudiera le problème (P): existence locale des solutions mild et unicité, régularité des solutions et ensuite on démontre quand les solutions explosent en temps fini. On termine notre travail par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Rappels et Définitions

1.1 Notations et définitions de quelques opérateurs différentiels

Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ appartenant à \mathbb{R}^N , on note par: $|x| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme euclidienne de x , et pour tout multi indice $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ dans \mathbb{N}^N , l'opérateur différentiel d'ordre λ est donnée par:

$$D^\lambda = \partial^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial^{\lambda_1} x_1 \partial^{\lambda_2} x_2 \dots \partial^{\lambda_N} x_N} \text{ avec: } |\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N.$$

On donne aussi la définition de certains opérateurs différentiels tels que le gradient ∇ , la divergence div et le laplacien Δ par:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right), \text{div } u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}, \Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

pour toute fonction scalaire u .

1.2 Espaces de fonctions et de distributions

Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^N ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, on définit les espaces de fonctions (ou distributions) suivants:

1/ $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions k -fois différentiables dans Ω pour tout $k > 0$, $C^0(\Omega)$ ou $C(\Omega)$ coïncide avec l'espace des fonctions continues sur Ω , et $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω . $C_0(\Omega)$ est l'espace de toutes les fonctions de $C(\bar{\Omega})$ tendant vers 0 à $\partial\Omega$.

2/ $D(\Omega)$ est l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact dans Ω , $D'(\Omega)$ espace des formes linéaires sur $D(\Omega)$, c'est l'espace des distributions.

3/ $S(\mathbb{R}^N)$ (espace de Schwartz) est l'espace des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. On note par $S'(\mathbb{R}^N)$, l'ensemble des formes linéaires continues sur $S(\mathbb{R}^N)$, c'est l'espace des distributions tempérées.

4/ Soit $p \in [1, +\infty[$, et p' son conjugué, c'est à dire: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on définit $L^p(\Omega)$ comme l'espace des fonctions réelles mesurables u tel que:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty,$$

pour la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_N$, et $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles essentiellement bornées. Ce sont des espaces de Banach pour leurs normes respectives:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\text{ess}} |u(x)|.$$

On définit aussi l'espace $L^{p'}(\Omega)$ comme le dual topologique de $L^p(\Omega)$, c'est à dire l'espace des formes linéaires définies sur $L^p(\Omega)$.

Cas particulier: pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx.$$

5/ L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), D^\lambda u \in L^p(\Omega), 1 \leq |\lambda| \leq m\}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda| \leq m} \|D^\lambda u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Il est séparable pour $p \in [1, +\infty[$, et réflexif pour $p \in]1, +\infty [$.

Cas particulier: pour $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ qui est noté $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$((u, v)) = \sum_{|j| \leq m} (D^j u, D^j v)$$

La fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ est notée $W_0^{m,p}(\Omega)$ ($H_0^m(\Omega)$, si $p = 2$); son dual est noté par: $W^{-m,p'}(\Omega)$, ($H^{-m}(\Omega)$, si $p = 2$), muni de la norme:

$$\|f\|_{-m,p'} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega), v \neq 0} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}}.$$

6/ L'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s \geq 0$:

On va s'intéresser dans cette partie seulement pour le cas $p = 2$, Cet espace noté $H^s(\mathbb{R}^N)$ (on peut voir la définition et des propriétés pour le cas général dans [6]) a la faveur d'être un espace de Hilbert et est défini par:

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\} \quad (1.2.1)$$

où \widehat{u} est la transformée de Fourier de u (qu'on définira après). Il est muni par le produit scalaire et la norme associés suivants:

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi,$$

$$\|u\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev homogène $H^s(\mathbb{R}^N)$ est défini par:

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : |\xi|^s \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

Remarque 1.2.1 Lorsque $s \in \mathbb{N}$, la définition (1.2.1) coïncide avec la définition classique donnée au dessus pour $\Omega = \mathbb{R}^N$, (on peut voir la preuve dans [7]).

On définit aussi l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour $s < 0$ par:

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in S' : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Proposition 1.2.1 [7] *L'espace $S(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.*

6/ On donne aussi l'espace $AC[a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) des fonctions qui sont absolument continues sur un l'intervalle $[a, b]$. Cet espace coincide avec l'espace des fonctions dont les dérivées sont intégrables au sens de Lebesgue, c'est à dire:

$$f(x) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, \varphi \in L^1(a, b).$$

Et pour tout $n \in \{1, 2, \dots\}$, on note par $AC^n[a, b]$ l'espace des fonctions qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n-1$, de telle sorte que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$:

$$AC^n[a, b] = \{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C} \text{) et } f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b] \}.$$

Plus de détails et propriétés sur cet espace dans [31].

Avant de terminer cette section, on rappelle quelques inégalités importantes pour la suite de ce travail:

Théorème 1.2.1 (*Inégalité de Hölder*) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et:

$$\int_{\Omega} |f.g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}. \quad (1.2.2)$$

Théorème 1.2.2 (*Inégalité d'interpolation*) Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$, et $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Alors pour tout $r \in [p, q]$, $f \in L^r(\Omega)$ et :

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \quad (1.2.3)$$

Théorème 1.2.3 (*Inégalité de Young*)

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0. \quad (1.2.4)$$

1.3 Espaces Fonctionnels d'Evolution

Soit X un espace de Banach, p un réel tel que: $1 \leq p \leq \infty$.

1/ On définit $L^p(0, T; X)$ comme l'espace des (classes de) fonctions $f : (0, T) \longrightarrow X$ mesurables, telle que: $t \longrightarrow \|f(t)\|_X$ soit dans $L^p(0, T)$ muni de la norme:

$$\|f(t)\|_{L^p(0,T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } p < \infty,$$

$$\|f(t)\|_{L^\infty(0,T; X)} = \sup_{t \in (0,T)} \|f(t)\|_X,$$

L'espace $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach.

2/ L'espace $H^1(0, T; X)$ est défini par:

$$H^1(0, T; X) = \{f, \partial_t f \in L^2(0, T; X)\}$$

muni de la norme:

$$\|f\|_{H^1(0,T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^2 + \|\partial_t f(t)\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

C'est un espace de Banach. Et si X est un espace de Hilbert, alors $H^1(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(f, g)_{H^1(0,T; X)} = \int_0^T (f(t), g(t))_X dt + \int_0^T (\partial_t f(t), \partial_t g(t))_X dt.$$

1.4 Transformation de Fourier

1.4.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$

Définition 1.4.1 Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$. On appelle transformation de Fourier de f la fonction $\mathcal{F}(f)$ ou \widehat{f} définie par:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} f(x) dx, \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

en notant par $x.\xi$ le produit scalaire dans \mathbb{R}^N .

Il est bien clair que \widehat{f} est bien définie quand $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. De plus on peut établir le résultat suivant:

Théorème 1.4.1 (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors \widehat{f} est continue, tend vers 0 à l'infini, et vérifie:

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

On termine par ce résultat donnant la relation entre la transformation de Fourier et la convolution.

Théorème 1.4.2 Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors : $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(v)$.

1.4.2 Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^N)$

Remarquons tout d'abord que toute fonction φ de $S(\mathbb{R}^N)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^N)$; donc on peut définir sa transformée de Fourier de la même manière:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{(-ix \cdot \xi)} \varphi(x) dx, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Proposition 1.4.1 Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$, alors: $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, et on a:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi^{(n)}}(\xi) &= (-ix)^n \widehat{\varphi}(\xi), \\ \widehat{\varphi^{(m)}}(\xi) &= (i\xi)^m \widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Théorème 1.4.3 La transformée de Fourier est un isomorphisme de $S(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, et on a la formule d'inversion suivante:

$$\mathcal{F}^{-1} \widehat{f}(\xi) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

1.4.3 Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^N)$

Définition 1.4.2 La transformée de Fourier d'une distribution tempérée T est la distribution $\mathcal{F}T$ (ou bien \widehat{T}) est définie par:

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^N).$$

Théorème 1.4.4 La transformée de Fourier est un isomorphisme de $S'(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même.

Proposition 1.4.2 Si T est une distribution tempérée, alors:

$$(\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}(-ixT).$$

Et plus généralement:

$$(\mathcal{F}T)^n = \mathcal{F}((-ix)^n T).$$

1.4.4 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

Pour définir la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on utilise l'inégalité de Parseval suivante:

$$\forall \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi = (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

Et si: $\varphi = \psi$, on a: $\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\varphi}|^2 d\xi = (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 dx$.

En utilisant la densité de $S(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$; on peut conclure que la transformation de Fourier \mathcal{F} est aussi un isomorphisme dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

1.5 Semi-groupes et propriétés

1.5.1 Définitions

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|$, $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires et continues dans X .

Définition 1.5.1 Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t \geq 0}$ de $\mathcal{L}(X)$ est un semi-groupe de classe C_0 (fortement continu) sur X , lorsque les conditions suivantes sont réalisées:

- (i) $S(0) = I$,
- (ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\| = 0$, pour tout $x \in X$.

Définition 1.5.2 Le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continu si :

$$\|(S(t) - I)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|S(t)x - x\|_X}{\|x\|_X} \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } t \text{ tend vers l'infini.}$$

Définition 1.5.3 Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X . On appelle générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur linéaire $(A, D(A))$ défini par:

$$D(A) = \left\{ x \in X, \text{ la limite } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \text{ pour tout } x \text{ dans } D(A).$$

Définition 1.5.4 Un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ fortement continu sur X est un semi-groupe de contraction si:

$$\|(S(t))\| \leq 1 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

1.5.2 Propriétés

Théorème 1.5.1 [25] Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X , alors, il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$:

$$\|(S(t))\| \leq Me^{\omega t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Corollaire 1.5.1 Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X , alors pour tout $x \in X$, l'application $: t \longrightarrow S(t)x$ est continue sur X .

Théorème 1.5.2 [25] Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X et A son générateur infintésimal, alors:

i) Pour tout $x \in X$, $\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$ et

$$A \left(\int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x .$$

ii) Pour tout $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, $S(t)x$ est de classe C^1 et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

iii) Pour tout $x \in D(A)$, on a

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AS(\tau)x d\tau.$$

Théorème 1.5.3 (Théorème de Hille-Yosida) [25] Un opérateur linéaire $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) A est fermé et $D(A)$ est dense dans X .

(ii) pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est une application bijective de $D(A)$ sur X , et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant:

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Avant de citer un autre théorème qui est très pratique dans la théorie des semi-groupes, on donne quelques définitions.

Définition 1.5.5 Soit X un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$ et $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire. On dit que A est dissipatif si :

$$\|u\| \leq \|u - \lambda Au\|, \forall u \in D(A), \forall \lambda > 0.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert H muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) , la définition précédente est équivalente à:

Définition 1.5.6 $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire. A est dissipatif si :

$$(Au, u) \leq 0.$$

Définition 1.5.7 A opérateur linéaire sur X . A est m -dissipatif si:

(i) A est dissipatif.

(ii) $R(I - \lambda A) = X$, (l'opérateur $I - \lambda A$ est surjectif), c'est à dire:

$$\forall f \in F, \exists u \in D(A); u - \lambda Au = f$$

Théorème 1.5.4 [25] (Lumer-Philips) A un opérateur linéaire à domaine $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert H (réel ou complexe). Alors A est le générateur infintésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction si et seulement si A est m -dissipatif.

Ce résultat est aussi vrai dans le cas général (X est un espace de Banach), on peut voir la démonstration dans [25].

On donne aussi un résultat important (voir [4]) dans le cas où un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.

Définition 1.5.8 Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert H de domaine dense.

On définit l'adjoint de A la forme linéaire A^* sur H de domaine:

$$D(A^*) = \{v \in H, u \longrightarrow \langle v, Au \rangle \text{ est continue sur } D(A)\},$$

telque:

$$\langle A^*v, u \rangle = \langle v, Au \rangle, \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*)$$

On dit que A est auto-adjoint si est seulement si $A = A^*$. C'est à dire:

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A^*) = D(A) \\ \text{et} \\ Ax = A^*x, \forall x \in D(A). \end{array} \right.$$

Corollaire 1.5.2 Si A est un opérateur auto-adjoint à domaine dense dans H , et si A est dissipatif (c'est à dire $A \leq 0$), alors A est m -dissipatif.

1.6 Théorèmes et Résultats de base

Avant d'énoncer certains théorèmes et résultats utiles dans la suite de ce travail, on donne quelques définitions:

Définition 1.6.1 Soit M un espace métrique complet. Une application f dans M est dite lipschitzienne, s'il existe une constante positive k , satisfaisant:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|, \forall (x, y) \in M \times M.$$

Si $k < 1$, on dit que f est contractante.

Théorème 1.6.1 Théorème du point fixe de Banach

Soit M un espaces métrique complet. Si une application $f : M \longrightarrow M$ est contractante, alors f admet un point fixe dans M , c'est à dire:

$$\exists x \in M, \text{ tel que: } f(x) = x.$$

Théorème 1.6.2 Théorème de la convergence dominé de Lebesgue.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur un ensemble Ω , et convergeant presque partout vers une fonction f . On suppose qu'il existe une fonction positive et intégrable g vérifiant:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \forall n \in \mathbb{N} \text{ presque partout.}$$

Alors:

$$(i) f \in L^1(\Omega).$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| dx = 0$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dx = \int_{\Omega} f dx.$$

On donne aussi un résultat qui représente une inégalité de Gronwall:

Lemme 1.6.1 [4] Soit $T > 0$, $A > 0$, $0 \leq B \leq \alpha$, $1 \leq \gamma \leq \infty$. Soit φ , f deux fonctions positives appartenant respectivement à $C([0, T])$ et $L^\gamma(0, T)$.

Supposons que: $\alpha + \frac{1}{\gamma} < 1$ et que:

$$\varphi(t) \leq At^{-\alpha} + \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\beta} f(s)\varphi(s) ds, \forall t \in (0, T).$$

Alors :

$$\varphi(t) \leq CA t^{-\alpha}, \forall t \in (0, T).$$

Où C dépend seulement de $T, \alpha, \beta, \gamma, \|f\|_{L^\gamma(0, T)}$.

Chapitre 2

Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires en commençant par la fonction Gamma et Béta d'Euler. On termine le chapitre par donner les définitions du Laplacien fractionnaire.

2.1 Fonctions spéciales

2.1.1 La fonction Gamma d'Euler

Définition 2.1.1 *La fonction Gamma est défini par l'intégrale suivante:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.1.1)$$

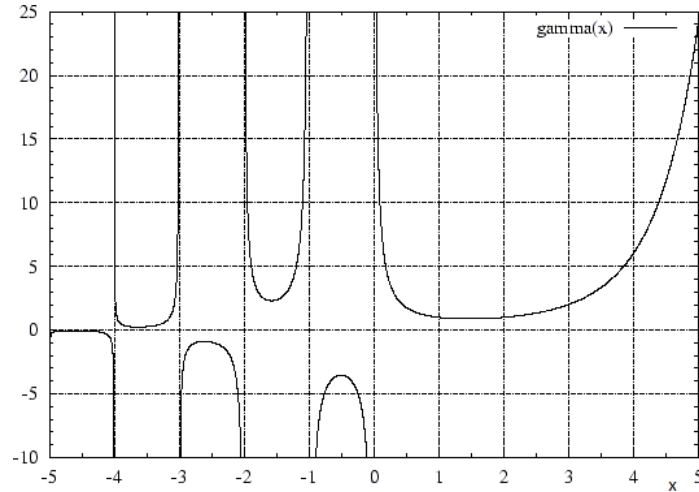
Où: $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$. Cette intégrale est convergente pour tout nombre complexe z vérifiant $\mathcal{R}e(z) > 0$.

La fonction Gamma satisfait l'égalité suivante qu'on peut obtenir en utilisant l'intégration par parties:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathcal{R}e(z) > 0 \quad (2.1.2)$$

En utilisant cette formule, la fonction Gamma peut s'étendre au demi plan $\mathcal{R}e(z) \leq 0$, par:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad (\mathcal{R}e(z) > -n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z \notin \mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, \dots\}), \quad (2.1.3)$$



Le graphe de la fonction Gamma

où (z_n) est le symbole de Pochhammer, défini pour tout complexe z et tout entier $n \in \mathbb{N}$, par:

$$(z)_0 = 1 \text{ et } (z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1), \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.1.4)$$

A partir de (2.1.2) et (2.1.4), on peut déduire que :

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n!, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.5)$$

On peut conclure à partir de (2.1.3) que la fonction Gamma est défini pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$.

On cite quelques propriétés de la fonction Gamma:

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (z \notin \mathbb{Z}, \quad 0 < \mathcal{R}(z) < 1), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad (2.1.6)$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.1.7)$$

2.1.2 La fonction Béta

La fonction est un autre type d'intégrale d'Euler qui représente un outil important dans le calcul fractionnaire.

Définition 2.1.2 Pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, la fonction Béta $B(x, y)$ est donné par:

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt, \quad (\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0).$$

Elle est liée à la fonction gamma par l'équation suivante :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

2.1.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est la généralisation de la fonction exponentielle. Elle joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Elle est donnée par la définition suivante:

Définition 2.1.3 *La fonction de Mittag-Leffler E_α d'indice α , est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, par:*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

On remarque que la fonction exponentielle correspond à $\alpha = 1$.

La fonction de Mittag-Leffler peut être définie aussi avec deux paramètres α et β par:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

On peut voir plus de détails sur ces fonctions dans [20].

2.2 Intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Soit $[a, b]$ un domaine borné de \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ et f une fonction réelle appartenant à $L^p(a, b), (1 \leq p \leq +\infty)$.

Définition 2.2.1 *les intégrales au sens de Riemann-Liouville d'ordre α , $I_{a+}^\alpha f$ et $I_{b-}^\alpha f$ de la fonction f sont données par:*

$$(J_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a. \quad (2.2.1)$$

$$(J_{b^-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t < b. \quad (2.2.2)$$

La première est l'intégrale à gauche et la deuxième est l'intégrale à droite. Ici Γ est la fonction Gamma d'Euler définie auparavant.

Remarque 2.2.1 *Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, chacune des définitions (2.2.1) et (2.2.2) coïncide avec l'intégrale nième de la forme:*

$$\begin{aligned} (J_{a^+}^n f)(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) dt \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} (J_{b^-}^n f)(t) &= \int_t^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (s-t)^{n-1} f(s) dt. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Définition 2.2.2 *Les dérivées fractionnaires (à droite et à gauche) au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha, 0 < \alpha < 1$, d'une fonction $f \in AC[a, b]$, sont définies par:*

$$(D_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad (2.2.5)$$

$$(D_{b^-}^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b (s-t)^{-\alpha} f(s) ds. \quad (2.2.6)$$

Dans la suite, on étudiera nos problèmes dans l'intervalle $[0, T]$, alors on prendra $a = 0, b = T$. On a alors:

$$(J_{0|t}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (2.2.7)$$

$$(J_{t|T}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (2.2.8)$$

$$(D_{0|t}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad (2.2.9)$$

$$(D_{t|T}^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T (s-t)^{-\alpha} f(s) ds. \quad (2.2.10)$$

Remarque 2.2.2 *On voit bien que:*

$$D_{0|t}^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} J_{0|t}^{1-\alpha} f(t) \quad \text{et} \quad D_{t|T}^\alpha f(t) = -\frac{d}{dt} J_{t|T}^{1-\alpha} f(t).$$

Remarque 2.2.3 [31] *On a*

$$\begin{aligned} (D_{0|t}^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[t^{-\alpha} f(0) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \right], \\ (D_{t|T}^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[(T-t)^{-\alpha} f(T) - \int_t^T (s-t)^{-\alpha} f'(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.4 *On a défini les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville seulement pour $0 < \alpha < 1$. pour le cas $\alpha \geq 1$, l'existence de ces dérivées nécessite d'autres conditions. Pour plus de détails, on peut consulter [20].*

2.2.1 Propriétés des intégrales fractionnaires

1/ L'intégration fractionnaire est une opération linéaire, c'est à dire: pour tout A et B dans \mathbb{R} , on a:

$$\begin{aligned} J_{0|t}^\alpha (Af(t) + Bg(t)) &= AJ_{0|t}^\alpha f(t) + BJ_{0|t}^\alpha g(t), \\ J_{t|T}^\alpha (Af(t) + Bg(t)) &= AJ_{t|T}^\alpha f(t) + BJ_{t|T}^\alpha g(t) \end{aligned}$$

2/ Pour tout $\alpha, \beta > 0$, on a:

$$\begin{aligned} J_{0|t}^{\alpha+\beta} f(t) &= J_{0|t}^\alpha \left[J_{0|t}^\beta f(t) \right] = J_{0|t}^\beta \left[J_{0|t}^\alpha f(t) \right], \\ J_{t|T}^{\alpha+\beta} f(t) &= J_{t|T}^\alpha \left[J_{t|T}^\beta f(t) \right] = J_{t|T}^\beta \left[J_{t|T}^\alpha f(t) \right] \end{aligned}$$

3/ On notera que :

$$\left(J_{0|t}^1 f \right) (t) = \left(D_{0|t}^{-1} f \right) (t) = \int_0^t f(t) dt.$$

2.2.2 Propriétés des dérivées fractionnaires

1/ Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \left(D_{0|t}^n f \right) (t) &= \frac{d^n}{dt^n} f(t), \\ \left(D_{t|T}^n f \right) (t) &= \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t). \end{aligned}$$

On trouvera alors pour $n = 0$:

$$\left(D_{0|t}^0 f \right) (t) = \left(D_{t|T}^0 f \right) (t) = f(t).$$

2/ La dérivation fractionnaire est une opération linéaire: pour tout A et B dans \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} D_{0|t}^\alpha (Af(t) + Bg(t)) &= AD_{0|t}^\alpha f(t) + BD_{0|t}^\alpha g(t), \\ D_{t|T}^\alpha (Af(t) + Bg(t)) &= AD_{t|T}^\alpha f(t) + BD_{t|T}^\alpha g(t). \end{aligned}$$

3/ Pour tout $\alpha, \beta > 0$ tel que: $\alpha + \beta < 1$, on a :

$$\begin{aligned} D_{0|t}^{\alpha+\beta} f(t) &= D_{0|t}^\alpha \left[D_{0|t}^\beta f(t) \right] = D_{0|t}^\beta \left[D_{0|t}^\alpha f(t) \right], \\ D_{t|T}^{\alpha+\beta} f(t) &= D_{t|T}^\alpha \left[D_{t|T}^\beta f(t) \right] = D_{t|T}^\beta \left[D_{t|T}^\alpha f(t) \right]. \end{aligned}$$

4/ La dérivée fractionnaire de $(f.g)$ est donnée par la règle de Leibnitz suivante:

$$D_{0|t}^\alpha (f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D_{0|t}^{\alpha-k} f(t).D_{0|t}^k g(t),$$

avec:
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha + 1 - k)}.$$

5/ Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, et toute fonction f dont les dérivées fractionnaires $D_{t|T}^\alpha$ et $D_{t|T}^{m+\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville existent, vérifie les propriétés suivantes (voir [20]):

$$D_{t|T}^{m+\alpha} f = (-1)^m D^m D_{t|T}^\alpha f, \quad m \in \mathbb{N} \tag{2.2.11}$$

6/ Et si $f \in L^q(0, T)$ ($1 \leq q \leq \infty$), on a [20]:

$$\begin{aligned} D_{t|T}^\alpha J_{t|T}^\alpha &= Id_{L^q(0, T)}, \\ D_{0|t}^\alpha J_{0|t}^\alpha &= Id_{L^q(0, T)}. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

7/ On donne aussi la formule d'intégration par parties :

Lemme 2.2.1 [31] *Soit $0 < \alpha < 1$; et f, g des fonctions réelles continues, telles que leurs dérivées fractionnaires respectives $D_{0|t}^\alpha f$ et $D_{t|T}^\alpha g$ existent et soient continues pour tout $t \in [0, T]$. On a:*

$$\int_0^T (D_{0|t}^\alpha f)(t)g(t)dt = \int_0^T f(t)D_{t|T}^\alpha g(t)dt. \quad (2.2.13)$$

Dans la suite, on donne certains résultats concernant les dérivées fractionnaires d'une fonction positive utilisée souvent pour montrer l'explosion des solutions.

Soit: $w(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^\sigma$, $t \geq 0$, $T > 0$, $\sigma > 1$, alors, pour tout $\alpha : 0 < \alpha < 1$, on a d'après [20]:

$$D_{t|T}^\alpha w(t) = \frac{(1 - \alpha + \sigma)\Gamma(\sigma + 1)}{\Gamma(2 - \alpha + \sigma)} T^{-\alpha} \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\sigma - \alpha}, \quad (2.2.14)$$

$$D_{t|T}^{\alpha+1} w(t) = \frac{(1 - \alpha + \sigma)(\sigma - \alpha)\Gamma(\sigma + 1)}{\Gamma(2 - \alpha + \sigma)} T^{-(\alpha+1)} \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\sigma - \alpha - 1}. \quad (2.2.15)$$

On peut déduire de ces deux formules que:

$$(D_{t|T}^\alpha w)(T) = 0 \quad , \quad (D_{t|T}^\alpha w)(0) = CT^{-\alpha}, \quad (2.2.16)$$

où $C = \frac{(1 - \alpha + \sigma)\Gamma(\sigma + 1)}{\Gamma(2 - \alpha + \sigma)}$.

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.3.1 *Les dérivées fractionnaires de Caputo ${}^C D_{0|t}^\alpha f(t)$ et ${}^C D_{t|T}^\alpha f(t)$ (à gauche et à droite) d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction f définie sur un intervalle borné $[a, b]$ sont définies par:*

$$\begin{aligned} {}^C D_{a|t}^\alpha f(t) &= D_{a|t}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right], \\ {}^C D_{t|b}^\alpha f(t) &= D_{t|b}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b - t)^k \right], \end{aligned}$$

respectivement, où $n = [\alpha] + 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = \alpha$ si $\alpha \in \mathbb{N}$.

En particulier, si $0 < \alpha < 1$ et $[a, b] = [0, T]$, on a:

$$\begin{aligned} {}^C D_{0|t}^\alpha f &= D_{0|t}^\alpha [f(t) - f(0)], \\ {}^C D_{t|T}^\alpha f &= D_{t|T}^\alpha [f(t) - f(T)]. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1 *Il existe d'autres formes de dérivée fractionnaire, on cite par exemple: la dérivée fractionnaire de type Hadamard et celle de Grünwald-Letnikov, on peut voir [31].*

2.4 Le laplacien fractionnaire

Dans cette section, on introduit la définition du Laplacien fractionnaire avec quelques unes de ses propriétés qui seront utiles dans l'étude des problèmes de diffusion anormale qu'on va traiter par la suite. Le Laplacien fractionnaire est un cas particulier de l'opérateur de Levy \mathcal{L} qui est un opérateur pseudo-différentiel défini par:

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1} (a(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi))(x), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

où $a(\xi)$ est le semi-groupe de convolution des mesures défini par la formule de Levy-Khéntchine (voir[18]).

Le laplacien fractionnaire est un opérateur non local défini de deux manières (qui sont équivalentes).

Définition 2.4.1 *(en utilisant la transformation de Fourier) Pour tout $s \in (0, 2]$*

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi}(\xi) = |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi), \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N$$

C'est à dire:

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi))(x), x \in \mathbb{R}^N,$$

pour tout $\varphi \in D((-\Delta)^{\frac{s}{2}}) = H^s(\mathbb{R}^N)$, où $H^s(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de Sobolev homogène d'ordre s

Définition 2.4.2 (comme opérateur d'intégrale singulière)

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi(x) &= C(N, s)V.P \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{N+s}} dy, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N, \\ &= C(N, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{C}_{B_\epsilon(x)}} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{N+s}} dy \end{aligned}$$

où: $C(N, s)$ est une constante positive dépendant de N et s donnée par:

$$C(N, s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+s}} d\zeta \right)^{-1}, \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{R}^N,$$

et $V.P$ est l'abréviation de " valeur principale ".

En utilisant des propriétés fondamentales de la transformation de Fourier, on peut montrer l'équivalence entre les deux définitions, (voir [6]).

2.4.1 Propriétés du Laplacien Fractionnaire

Le Laplacien fractionnaire étant un opérateur auto-adjoint, on a alors ce résultat qui représente la formule de l'ntégration par parties pour cet opérateur:

Lemme 2.4.1 Pour tout $u, v \in D((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}) = H^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $0 < \alpha \leq 2$, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)v(x)dx. \quad (2.4.1)$$

Chapitre 3

Etude d'un problème d'évolution fractionnaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente l'étude d'un problème d'évolution fractionnaire en temps et en espace. C'est une équation parabolique non linéaire et comportant un laplacien fractionnaire, on s'intéressera à l'existence locale et à l'explosion des solutions. Pour la démonstration du théorème sur l'explosion des solutions, on suivra la méthode de la fonction test qu'on a choisie différente de celle donnée par A.Fino et M.Kirane dans [12].

3.2 Equation de la chaleur fractionnaire et non locale

3.2.1 Introduction

On va s'intéresser donc à l'étude du problème:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t T(t-s)^{-\gamma} |u(s)|^{p-1} u(s) ds, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où $u(x, t)$ est la température au point x et à temps t , u_t est la dérivée de u par rapport à t , $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ est le Laplacien fractionnaire, $u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N)$, où $C_0(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des fonctions continues qui décroissent vers 0 à l'infini ($|x| \rightarrow \infty$), et Γ est la fonction Gamma d'Euler définie au chapitre précédent, $\beta \in (0, 2]$, $\gamma \in (0, 1)$, $p > 1$.

Le problème (3.2.1) représente une diffusion dans un milieu super-diffusive couplé avec un milieu de diffusion classique. Le terme non linéaire de (3.2.1) (membre de droit) pourrait être interprété comme l'effet d'un milieu à diffusion classique lié à un milieu super-diffusive. Pour plus de détails, on peut voir l'article [30].

Remarquons que le problème (3.2.1) peut être écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u(x, t) = J_{0|t}^\alpha (|u|^{p-1} u)(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

où $J_{0|t}^\alpha$ est l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, et $\alpha = 1 - \gamma$.

Rappelons que la solution fondamentale de l'équation de la chaleur linéaire suivante :

$$u_t(x, t) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u(x, t) = 0. \quad (3.2.3)$$

est la fonction $\mathcal{P}_\beta(t, x)$ qui satisfait les relations suivantes:

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{P}_\beta(t, x) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \mathcal{P}_\beta(t, x) = 0 \\ \mathcal{P}_\beta(0, x) = \delta_0 \end{cases}$$

où δ_0 est la masse de Dirac au point 0. En utilisant la transformation de Fourier, on trouve:

$$\widehat{\mathcal{P}}_\beta(t, \xi) = e^{-t|\xi|^\beta}.$$

Alors

$$\mathcal{P}_\beta(t)(x) = \mathcal{P}_\beta(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \widehat{\mathcal{P}}_\beta(t, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix \cdot \xi - t|\xi|^\beta} d\xi.$$

Cette solution est positive et de classe $C(\mathbb{R}^N)$ et vérifie : $\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{P}_\beta(t, x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$.

On peut démontrer aussi la forme suivante:

$$\mathcal{P}_\beta(t, x) = t^{-\frac{N}{\beta}} \mathcal{P}_\beta(1, xt^{-\frac{1}{\beta}}) \quad (3.2.4)$$

En utilisant l'inégalité de Young pour la convolution et (3.2.4), on aura:

$$\|\mathcal{P}_\beta(t) * v\|_q \leq Ct^{-\frac{N}{\beta}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|v\|_r \quad (3.2.5)$$

$$\|\mathcal{P}_\beta(t) * v\|_q \leq \|v\|_q \quad (3.2.6)$$

pour tout $1 \leq r \leq q \leq \infty$, $t > 0$ et C une constante positive.

3.2.2 Existence locale

Comme l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ est auto-adjoint et défini positif dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $T(t) = e^{-(\Delta)^{\frac{\beta}{2}}}$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ engendré par l'opérateur $-(\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$.

Il est défini par: $T(t)v = \mathcal{P}_\beta(t) * v$.

Définition 3.2.1 (*Solutions Mild*) Soient $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $0 < \beta \leq 2$, $p > 1$ et $T > 0$. On dit que $u \in C([0, T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution Mild (ou bien une solution douce) du problème (3.2.2), si u satisfait l'équation intégrale suivante:

$$u(t) = T(t)u_0(x) + \int_0^t T(t-s) J_{0|s}^\alpha (|u|^{p-1} u)(x, s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (3.2.7)$$

où: $T(t) = e^{-(\Delta)^{\frac{\beta}{2}}}$ est le semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ engendré par l'opérateur $-(\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$.

Théorème 3.2.1 [12] Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $0 < \beta \leq 2$, $p > 1$, il existe un temps maximal $T_{\max} > 0$ et une solution $u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))$ du système (3.2.2), satisfaisant l'alternative suivante:

Soit: $T_{\max} = +\infty$, (la solution est globale)

ou bien: $T_{\max} < +\infty$ et $\lim \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \infty$, quand $T \rightarrow T_{\max}$, (explosion des solutions).

où: $T_{\max} = \sup \{T > 0 : u \text{ est la solution mild de (3.2.2)}\}$.

De plus, si $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $u(t) > 0$ pour tout $0 < t < T_{\max}$; et si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq r < \infty$, alors $u \in C([0, T_{\max}), L^r(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration

Pour la démonstration, on utilise le théorème du point fixe de Banach.

On pose: $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{\infty, T} = \|\cdot\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)}$,

Soit $T > 0$, on définit l'espace de Banach suivant:

$$E_T = \left\{ u \in L^\infty((0, T), C_0(\mathbb{R}^N)); \|u\|_{\infty, T} \leq 2 \|u_0\|_\infty \right\},$$

Ensuite, et pour tout $u \in E_T$, on introduit l'application Ψ définie dans E_T par:

$$\Psi(u) = T(t)u_0 + \int_0^t T_1(t-s) J_{0|s}^\alpha (|u|^{p-1} u) ds, \quad t \in (0, T),$$

c'est à dire:

$$\Psi(u) = T(t)u_0 + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t T_1(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma) ds. \quad (3.2.8)$$

★ Soit $u \in E_T$. Utilisons (3.2.6) et (3.2.8), on a:

$$\begin{aligned} \|\Psi(u)\|_{\infty, T} &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_\infty^p d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0, T)} \\ &= \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_\infty^p ds d\sigma \right\|_{L^\infty(0, T)} \\ \|\Psi(u)\|_{\infty, T} &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{T^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} \|u\|_{\infty, T}^p \\ \|\Psi(u)\|_{\infty, T} &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{2^p T^{2-\gamma} \|u_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma)} \|u_0\|_\infty. \end{aligned}$$

On choisit T assez petit tel que:

$$\frac{2^p T^{2-\gamma} \|u_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma)} \leq 1,$$

c'est à dire:

$$T \leq \left(\frac{\Gamma(3-\gamma)}{2^p \|u_0\|_\infty^{p-1}} \right)^{\frac{1}{2-\gamma}}.$$

On trouvera:

$$\|\Psi(u)\|_{\infty, T} \leq 2 \|u_0\|_\infty,$$

d'où : $\Psi(u) \in E_T$.

★ On montre que Ψ est une contraction sur E_T .

Pour tout $u, v \in E_T$, et avec (3.2.8) et (3.2.6), on obtient:

$$\begin{aligned} \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{\infty, T} &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \| |u|^{p-1} u(\sigma) - |v|^{p-1} v(\sigma) \|_\infty d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0, T)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \| |u|^{p-1} u(\sigma) - |v|^{p-1} v(\sigma) \|_\infty ds d\sigma \right\|_{L^\infty(0, T)} \\ &\leq \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \| |u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v \|_{\infty, T}, \end{aligned}$$

utilisons l'inégalité standard suivante:

$$\| |u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v \| \leq C(p) |u - v| (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}), \quad (3.2.9)$$

on trouve:

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{\infty, T} \leq \frac{C(p)2^p \|u_0\|_\infty^{p-1} T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \|u - v\|_{\infty, T}. \quad (3.2.10)$$

Si on choisit T tel que:

$$\frac{C(p)2^p \|u_0\|_\infty^{p-1} T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} < 1,$$

c'est à dire:

$$T < \left\{ \frac{\Gamma(3-\gamma)}{C(p)2^p \|u_0\|_\infty^{p-1}} \right\}^{\frac{1}{2-\gamma}},$$

on aura:

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{\infty, T} \leq k \|u - v\|_{\infty, T}, \quad k < 1.$$

D'après le théorème du point fixe de Banach, on déduit que le problème (3.2.2) admet une solution mild $u \in E_T$, avec:

$$T < \min \left\{ \left(\frac{\Gamma(3-\gamma)}{2^p \|u_0\|^{p-1}} \right)^{\frac{1}{2-\gamma}}, \left(\frac{\Gamma(3-\gamma)}{C(p)2^p \|u_0\|^{p-1}} \right)^{\frac{1}{2-\gamma}} \right\}.$$

★ Pour l'unicité, on considère $u, v \in E_T$ deux solutions mild de (3.2.2) pour $T > 0$; on utilise (3.2.8), (3.2.6) et (3.2.9), on trouve:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_\infty &\leq \frac{C(p)2^p \|u_0\|^{-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_\infty d\sigma ds \\ &= \frac{C(p)2^p \|u_0\|^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_\infty ds d\sigma \\ &= \frac{C(p)2^p \|u_0\|^{p-1}}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma} \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_\infty d\sigma. \end{aligned}$$

A cet étape on utilise le lemme singulier de Gronwall, on déduit l'unicité de la solution. En utilisant l'unicité des solutions, on peut déduire l'existence d'un intervalle maximale $[0, T_{\max})$, où

$$T_{\max} = \sup \{T > 0; \text{ tel que } u \in L^\infty((0, T), C_0(\mathbb{R}^N)) \text{ est la solution mild de (3.2.2)}\}.$$

★ Enfin, et comme le semi-groupe $T(t)$ est continue, on déduit que:

$$u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N)).$$

On a de plus: pour tout t, τ tel que: $0 \leq t \leq t + \tau < T_{\max}$

$$\begin{aligned} u(t + \tau) &= T(\tau)u(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^\tau T(\tau-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(t+\sigma) d\sigma ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^\tau T(\tau-s) \int_0^t (t+s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

On démontre par contradiction que si $T_{\max} < \infty$: $\lim \|u\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)} = \infty$ lorsque $t \rightarrow T_{\max}$. On suppose que u est une solution de (3.2.7) dans un intervalle $[0, T)$ avec $\|u\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)} < \infty$. On remarque que le dernier terme de (3.2.11) dépend seulement des valeurs de u sur l'intervalle $(0, t)$ et non sur $(t, t + \tau)$. Utilisons encore une fois le théorème du point fixe, on en déduit que si u est solution de (3.2.11) sur un certain intervalle $(0, T)$, u

peut être étendue en une solution sur un certain intervalle $[0, T')$ avec $T' > T$. Répétons cette itération, on trouvera une contradiction avec le fait que la temps maximal T_{\max} est fini.

★ Pour la positivité des solutions: si on considère que $u_0 \geq 0$ et $u_0 \neq 0$, alors en appliquant le théorème du point fixe de Banach dans l'espace de Banach $E_T^+ = \{u \in E_T; u \geq 0\}$, on trouve une solution positive u ; et comme la solution est unique, elle est aussi positive sur $(0, T_{\max})$.

★ Pour la régularité des solutions: soient $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq r < \infty$. On refait les mêmes étapes de la démonstration d'au dessus dans l'espace:

$$E_T = \left\{ u \in L^\infty((0, T), (C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N))); \|u\|_{\infty, T} \leq 2 \|u_0\|_\infty, \|u\|_{L^\infty((0, T), L^r(\mathbb{R}^N))} \leq 2 \|u_0\|_{L^r} \right\}$$

pour trouver une solution unique u satisfaisant:

$$u \in C([0, T_{\max}), (C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N))).$$

3.2.3 Explosion des solutions

On pose dans toute la suite:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} dt dx, \int_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} dx.$$

Définition 3.2.2 (*solution faible*) Soient $T > 0$, $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$. On dit que u est une solution faible du système (3.2.2), si $u \in L^p((0, T), L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N))$ et vérifiant l'équation suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^\alpha (|u|^{p-1} u) \varphi(x, t) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(x, t) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) \quad (3.2.12)$$

pour toute fonction test φ à support compact et appartenant à $C^1([0, T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$, tel que $\varphi(x, T) = 0$, $\varphi \in \mathbb{R}^N$; $\alpha = 1 - \gamma$.

Remarque 3.2.1 Si $T = +\infty$, alors la solution est globalement faible.

Lemme 3.2.1 Soit $T > 0$, et $u \in C([0, T], C_0(\mathbb{R}^N))$. Si u est une solution mild de (3.2.2), alors u est une solution faible de (3.2.2) pour tout $0 < \beta \leq 2$, et $T > 0$.

Démonstration

Soit $T > 0$, $0 < \beta \leq 2$, $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$; et soit $u \in C([0; T], C_0(\mathbb{R}^N))$ une solution de (3.2.2). Soit $\varphi \in C^1([0, T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$ à support compact et vérifiant: $\varphi(x, T) = 0$. Après multiplication de l'équation (3.2.7) par φ , on intègre sur \mathbb{R}^N . On trouve:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t)\varphi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} T(t)u_0(x)\varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^t T(t-s)J_{0|s}^\alpha(|u|^{p-1}u)(x, s)ds \right) \varphi(x, t).$$

Dérivons par rapport au temps:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t)\varphi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}(T(t)u_0(x)\varphi(x, t)) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t T(t-s)J_{0|s}^\alpha(|u|^{p-1}u)(x, s)ds \right) \varphi(x, t). \quad (3.2.13)$$

En utilisant (2.4.1) et le fait que $T(t)$ est un semi-groupe dont le générateur infinitésimal est $A = -(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$, on aura

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}(T(t)u_0(x)\varphi(x, t)) &= \int_{\mathbb{R}^N} A(T(t)u_0(x))(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} T(t)u_0(x)\varphi_t(x, t), \\ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}(T(t)u_0(x)\varphi(x, t)) &= \int_{\mathbb{R}^N} T(t)u_0(x)A\varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} T(t)u_0(x)\varphi_t(x, t), \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t T(t-s)J_{0|s}^\alpha(|u|^{p-1}u)(x, s)ds \right) \varphi(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^\alpha(|u|^{p-1}u)(x, t)\varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} A(T(t-s)J_{0|s}^\alpha(|u|^{p-1}u)) ds\varphi(x, t) \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T(t-s)J_{0|s}^\alpha(|u|^{p-1}u)ds\varphi_t(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^\alpha(|u|^{p-1}u)(x, t)\varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T(t-s)J_{0|s}^\alpha(|u|^{p-1}u)dsA\varphi(x, t) \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T(t-s)J_{0|s}^\alpha(|u|^{p-1}u)ds\varphi_t(x, t). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

On remplace (3.2.14) et (3.2.15) dans (3.2.13), on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} T(t) u_0(x) A \varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} T(t) u_0(x) \varphi_t(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^\alpha (|u|^{p-1} u)(x, t) \varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t (T(t-s) J_{0|s}^\alpha (|u|^{p-1} u)(x, s) ds A \varphi(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T(t-s) J_{0|s}^\alpha (|u|^{p-1} u)(x, s) ds \varphi_t(x, t). \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que u satisfait l'équation (3.2.7); on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) A \varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi_t(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^\alpha (|u|^{p-1} u)(x, t) \varphi(x, t). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport au temps sur $(0, T)$ et en utilisant $\varphi(x, T) = 0$, on peut conclure que:

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) A \varphi(x, t) \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi_t(x, t) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^\alpha (|u|^{p-1} u)(x, t) \varphi(x, t), \end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^\alpha (|u|^{p-1} u)(x, t) \varphi(x, t) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(x, t) \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi_t(x, t), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Théorème 3.2.2 Soient $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ vérifiant $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$. si

$$p \leq 1 + \frac{\beta(2-\gamma)}{(N-\beta+\beta\gamma)_+} \text{ ou } p < \frac{1}{\gamma},$$

pour tout $0 < \beta \leq 2$, alors la solution mild du problème (3.2.2) explose en temps fini. Dans le cas $p = 1 + \frac{\beta(2-\gamma)}{(N-\beta+\beta\gamma)_+}$ et $\beta \in (0, 2)$, on doit prendre $p > \frac{N}{N-\beta}$ avec $N > \beta$.

Démonstration

On procède par contradiction. Supposons que u est une solution nontriviale et non négative de (3.2.2) qui existe globalement en temps. Soit $t \in (0, T^*)$ pour tout $T^* > 0$. On considère T et R deux réels positifs satisfaisant: $0 < TR < T^*$.

D'après le lemme précédent, on a sur Q_T :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x, 0) + \int_{Q_T} J_{0|t}^\alpha(u^p)(x, t)\varphi(x, t) = \int_{Q_T} u(x, t)(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi(x, t) - \int_{Q_T} u(x, t)\varphi_t(x, t),$$

pour toute fonction test φ à support compact vérifiant $\varphi(x, T) = 0$

On choisit φ tel que

$$\varphi(x, t) = D_{t|T}^\alpha \xi(x, t) \text{ et } \xi(x, t) = \phi\left(\frac{t^2 + |x|^{2\beta}}{R^2}\right),$$

où ϕ est la fonction cut-off, qui est régulière et positive et non croissante sur $[0, \infty)$ définie par:

$$\phi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r \geq 2, \end{cases}$$

et vérifiant: $0 \leq \phi(r) \leq 1$, $|\phi'(r)| \leq \frac{c}{r}$, pour tout $r > 0$.

On obtient donc l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)D_{t|T}^\alpha \xi(x, 0) + \int_{Q_T} J_{0|t}^\alpha(u^p)(x, t)D_{t|T}^\alpha \xi(x, t) = \\ \int_{Q_T} u(x, t)(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|T}^\alpha \xi(x, t) - \int_{Q_T} u(x, t)DD_{t|T}^\alpha \xi(x, t), \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

où:

$$\int_{Q_T} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} dt dx.$$

Utilisons (2.2.13) et (2.2.11) dans (3.2.16), on trouve:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)D_{t|T}^\alpha \xi(x, 0) + \int_{Q_T} D_{0|t}^\alpha J_{0|t}^\alpha(u^p)(x, t)\xi(x, t) = \\ \int_{Q_T} u(x, t)(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|T}^\alpha \xi(x, t) + \int_{Q_T} u(x, t)D_{t|T}^{\alpha+1}\xi(x, t). \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

En utilisant (2.2.12), on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|T}^\alpha \xi(x, 0) + \int_{Q_T} u^p(x, t) \xi(x, t) = \\ & \int_{Q_T} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|T}^\alpha \xi(x, t) + \int_{Q_T} u(x, t) D_{t|T}^{\alpha+1} \xi(x, t). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

On a donc sur Q_{TR} :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|TR}^\alpha \xi(x, 0) + \int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) = \\ & \int_{Q_{TR}} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|TR}^\alpha \xi(x, t) + \int_{Q_{TR}} u(x, t) D_{t|TR}^{\alpha+1} \xi(x, t), \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

tel que: $\xi(x, TR) = D_{t|TR}^\alpha \xi(x, t)|_{TR} = 0$.

Pour estimer le membre droit de (3.2.19), on utilise linégalité de Young pour ses deux termes, pour cela on écrit:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR}} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|TR}^\alpha \xi(x, t) &= \int_{Q_{TR}} u(x, t) \xi(x, t)^{\frac{1}{p}} \xi(x, t)^{-\frac{1}{p}} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|TR}^\alpha \xi(x, t), \\ \int_{Q_{TR}} u(x, t) D_{t|TR}^{\alpha+1} \xi(x, t) &= \int_{Q_{TR}} u(x, t) \xi(x, t)^{\frac{1}{p}} \xi(x, t)^{-\frac{1}{p}} D_{t|TR}^{\alpha+1} \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Rappelons l'inégalité de Young:

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^{p'}, \quad a, b > 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad p, p' > 1, \quad (3.2.20)$$

où p' est le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

On aura:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR}} u(x, t) \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|TR}^\alpha \xi(x, t) \right| &\leq \varepsilon \int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) + \\ & C(\varepsilon) \int_{Q_{TR}} \xi^{-\frac{p'}{p}}(x, t) \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|TR}^\alpha \xi(x, t) \right|^{p'} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR}} u(x, t) \left| D_{t|TR}^{\alpha+1} \xi(x, t) \right| &\leq \varepsilon \int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) + \\ & C(\varepsilon) \int_{Q_{TR}} \xi^{-\frac{p'}{p}}(x, t) \left| D_{t|TR}^{\alpha+1} \xi(x, t) \right|^{p'} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

En remplaçant dans (3.2.19), on trouve:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|TR}^\alpha \xi(x, 0) + (1 - 2\epsilon) \int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) \leq C(\epsilon) \left(\int_{Q_{TR}} \xi(x, t)^{-\frac{1}{p-1}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|TR}^\alpha \xi(x, t) \right|^{p'} + \int_{Q_{TR}} \xi(x, t)^{-\frac{1}{p-1}} \left| D_{t|TR}^{\alpha+1} \xi(x, t) \right|^{p'} \right). \quad (3.2.23)$$

D'après la remarque (2.2.3), $D_{t|TR}^\alpha \xi \geq 0$. Donc (3.2.23) implique:

$$\int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) \leq C(\epsilon) \left(\int_{Q_{TR}} \xi(x, t)^{-\frac{1}{p-1}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|TR}^\alpha \xi(x, t) \right|^{p'} + \int_{Q_{TR}} \xi(x, t)^{-\frac{1}{p-1}} \left| D_{t|TR}^{\alpha+1} \xi(x, t) \right|^{p'} \right) \quad (3.2.24)$$

A cette étape, on fait un changement de variable: $\tau = R^{-1}t$, $y = R^{-\frac{1}{\beta}}x$, et on définit la fonction ψ et l'ensemble Ω par:

$$\psi(y, \tau) = \xi(x, t) = \xi(R^{\frac{1}{\beta}}y, R\tau),$$

et

$$\Omega = \left\{ (y, \tau) \in R^N \times R^+ \text{ tel que : } \tau^2 + |y|^{2\beta} \leq 2 \right\} \quad (3.2.25)$$

Le changement de variables choisi donne:

$$\begin{aligned} dt dx &= R^{1+\frac{N}{\beta}} \\ D_{t|TR}^\alpha \xi &= R^{-\alpha} D_{\tau|T}^\beta \psi \\ (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi &= R^{-\beta \times \frac{1}{\beta}} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \psi = R^{-1} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \psi. \end{aligned}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR}} \xi^{-\frac{1}{p-1}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|TR}^\alpha \xi \right|^{p'} &= R^{-(1+\alpha)p'+1+\frac{N}{\beta}} \int_{\Omega} \psi^{-\frac{1}{p-1}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{\tau|T}^\alpha \psi \right|^{p'} \\ \int_{Q_{TR}} \xi^{-\frac{1}{p-1}} \left| D_{t|TR}^{\alpha+1} \xi \right|^{p'} &= R^{-(\alpha+1)p'+1+\frac{N}{\beta}} \int_{\Omega} \psi^{-\frac{1}{p-1}} \left| D_{\tau|T}^{\alpha+1} \psi \right|^{p'}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.2.24), on obtient:

$$\int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) \leq C(\varepsilon) R^\delta \left\{ \int_{\Omega} \psi^{-\frac{1}{p-1}} \left(\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{\tau|T}^\alpha \psi \right|^{p'} + \left| D_{t|T}^{\alpha+1} \psi \right|^{p'} \right) \right\},$$

On pose:

$$C = C(\varepsilon) \left\{ \int_{\Omega} \psi^{-\frac{1}{p-1}} \left(\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{\tau|T}^\alpha \psi \right|^{p'} + \left| D_{t|T}^{\alpha+1} \psi \right|^{p'} \right) d\tau dy \right\}, C > 0.$$

Alors:

$$\int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) \leq C R^\delta, \quad (3.2.26)$$

où

$$\delta = -(1 + \alpha)p' + 1 + \frac{N}{\beta}$$

Remarquons que:

$$\delta \leq 0 \iff p \leq 1 + \frac{\beta(2 - \gamma)}{(N - \beta + \beta\gamma)_+}.$$

On va distinguer trois cas.

Le premier cas: $\delta < 0 \iff p < 1 + \frac{\beta(2 - \gamma)}{(N - \beta + \beta\gamma)_+}.$

Par passage à la limite dans (3.2.26) lorsque $R \rightarrow \infty$, on a:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) = 0,$$

avec le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, la continuité de u et le fait que

$\lim_{R \rightarrow \infty} \xi(x, t) = 1$, on trouve:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^p(x, t) dx dt = 0 \Rightarrow u = 0.$$

ce qui est en contradiction.

Le deuxième cas: $\delta = 0$ qui correspond à $p = 1 + \frac{\beta(2 - \gamma)}{(N - \beta + \beta\gamma)_+}.$

Remplaçant la fonction ξ donnée auparavant par:

$$\xi(x, t) = \phi\left(\frac{t^2}{R^2} + \frac{|x|^{2\beta}}{\left(\frac{R}{S}\right)^2}\right),$$

où $1 \leq S < R$, tel que R et S ne tendent pas vers l'infini en même temps. Avec le changement de variables suivant: $\tau = R^{-1}t$, $y = \left(\frac{R}{S}\right)^{-\frac{1}{\beta}} x$ établi dans la formule (3.2.24), on trouve:

$$\int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) \leq CR^{-(1+\alpha)p'+1+\frac{N}{\beta}} S^{-\frac{N}{\beta}} + C'R^{-(1+\alpha)p'+1+\frac{N}{\beta}} S^{p'-\frac{N}{\beta}},$$

C, C' sont des constantes positives. Comme: $-(1+\alpha)p'+1+\frac{N}{\beta} = 0$, on aura

$$\int_{Q_{TR}} u^p(x, t) \xi(x, t) \leq CS^{-\frac{N}{\beta}} + C'S^{p'-\frac{N}{\beta}}.$$

Alors pour $R \rightarrow \infty$, on a

$$\int_{Q_\infty} u^p(x, t) \leq CS^{-\frac{N}{\beta}} + C'S^{p'-\frac{N}{\beta}}. \quad (3.2.27)$$

En prenant la limite $S \rightarrow \infty$ dans (3.2.27), et utilisant le fait que $p > \frac{N}{N-\beta}$ on obtient:

$$\int_{Q_\infty} |u|^p \xi \leq 0,$$

alors:

$$\int_{Q_\infty} |u|^p = 0.$$

On déduit que: $u = 0$, qui est une contradiction.

Le troisième cas: $p < \frac{1}{\gamma}$.

On suivra la même méthode que celle du premier cas. On choisit la fonction test φ par:

$$\varphi(x, t) = D_{t|T}^\alpha \psi(x, t), \quad \psi(x, t) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(t),$$

$$\text{où} \quad \varphi_1(x) = \phi\left(\frac{|x|}{R}\right), \quad \varphi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\eta,$$

$\eta > \max\left\{\frac{\alpha p + 1}{p-1}, \alpha + 1\right\}$, $T > 0$ et $R \in (0, T)$ assez grand et ne tend pas vers l'infini au même temps que T . On trouve:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_0(x) D_{t|T}^\alpha \psi(x, 0) + \int_{\Omega_T} u^p(x, t) \psi(x, t) = \\ & \int_{\Omega_T} u(x, t) \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \psi(x, t) D_{t|T}^\alpha \psi(x, t) \right| + \int_{\Omega_T} u(x, t) \left| D_{t|T}^{\alpha+1} \psi(x, t) \right|, \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

où

$$\Omega_T = [0, T] \times \Omega, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 2R\}, \quad \int_{\Omega} = \int_{\Omega} dx, \quad \int_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} dx dt.$$

En utilisant (2.2.16), on obtient:

$$\begin{aligned} & CT^{-\alpha} \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_1(x) + \int_{\Omega_T} u^p(x, t) \psi(x, t) \\ & \leq \int_{\Omega_T} u(x, t) \psi^{\frac{1}{p}} \psi^{-\frac{1}{p}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_1(x) D_{t|T}^{\alpha} \varphi_2(t) \right| \\ & \quad + \int_{\Omega_T} u(x, t) \psi^{\frac{1}{p}} \psi^{-\frac{1}{p}} \varphi_1(x) \left| D_{t|T}^{\alpha+1} \varphi_2(t) \right|, \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

On utilise l'inégalité de Young pour les deux termes du membre droit de (3.2.29)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} u(x, t) \psi^{\frac{1}{p}} \psi^{-\frac{1}{p}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_1(x) D_{t|T}^{\alpha} \varphi_2(t) \right| & \leq \varepsilon \int_{\Omega_T} u^p(x, t) \psi + \\ & C(\varepsilon) \int_{\Omega_T} \psi^{-\frac{p'}{p}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_1 D_{t|T}^{\alpha} \varphi_2 \right|^{p'} \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} u(x, t) \psi^{\frac{1}{p}} \psi^{-\frac{1}{p}} \left| D_{t|T}^{\alpha+1} \varphi_2(t) \right| & \leq \varepsilon \int_{\Omega_T} u^p(x, t) \psi + \\ & C(\varepsilon) \int_{\Omega_T} \psi^{-\frac{p'}{p}} \varphi_1^{p'} \left| D_{t|T}^{\alpha+1} \varphi_2 \right|^{p'} \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

On a $u_0, \varphi_1 \geq 0$; en remplaçant (3.2.30) et (3.2.31) dans (3.2.29), on obtient:

$$\begin{aligned} (1 - 2\varepsilon) \int_{\Omega_T} u^p(x, t) \psi(x, t) & \leq C(\varepsilon) \int_{\Omega_T} \psi^{-\frac{p'}{p}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_1(x) D_{t|T}^{\alpha} \varphi_2(t) \right|^{p'} \\ & \quad + C(\varepsilon) \int_{\Omega_T} \psi^{-\frac{p'}{p}} \varphi_1^{p'} \left| D_{t|T}^{\alpha+1} \varphi_2(t) \right|^{p'} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

On fait le changement de variables suivant: $t = T\tau$, $x = Ry$ qu'on va utiliser dans le coté droit de (3.2.32); on utilise (2.2.14) et (2.2.15), on aura:

$$\begin{aligned} & (1 - 2\varepsilon) \int_{\Omega_T} u^p(x, t) \psi(x, t) \leq \\ & C(\varepsilon) C_1 T^{1-\alpha p'} R^{N-\beta p'} \int_0^1 (1 - \tau)^{-\frac{p'}{p} \eta + (\eta - \alpha) p'} d\tau \int_{|y| \leq 2} \phi(y)^{-\frac{p'}{p}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi(y) \right|^{p'} dy \\ & \quad + C(\varepsilon) C_2 T^{1-(1+\alpha) p'} R^N \int_0^1 (1 - \tau)^{-\frac{p'}{p} \eta + (\eta - \alpha - 1) p'} d\tau \int_{|y| \leq 2} \phi(y) dy, \end{aligned}$$

où C_1, C_2 sont des constantes positives qui sont données par (2.2.14) et (2.2.15). On peut écrire:

$$\int_{\Omega_T} u^p(x, t)\psi(x, t)dxdt \leq CT^{1-\alpha p'} R^{N-\beta p'} + C'T^{1-(1+\alpha)p'} R^N, \quad (3.2.33)$$

où

$$C = C(\varepsilon)C_1 T^{1-\alpha p'} R^{N-\beta p'} \int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{p'}{p}\eta+(\eta-\alpha)p'} d\tau \int_{|y|\leq 2} \phi(y)^{-\frac{p'}{p}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi(y) \right|^{p'} dy > 0,$$

$$C' = C(\varepsilon)C_2 T^{1-(1+\alpha)p'} R^N \int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{p'}{p}\eta+(\eta-\alpha-1)p'} d\tau \int_{|y|\leq 2} \phi(y) dy > 0.$$

On rappelle que $p < \frac{1}{\gamma}$ correspond à $1 - \alpha p' < 0$.

On calcule la limite quand $T \rightarrow \infty$ de (3.2.33), on a:

$$\int_0^\infty \int_{\Omega} u^p(x, t)\psi(x, t)dx dt = 0,$$

et enfin, en faisant $R \rightarrow \infty$, on trouve que $u \equiv 0$, qui est une contradiction avec les données.

Donc u ne peut être globale.

Chapitre 4

Existence locale et explosion des solutions d'un système d'évolution fractionnaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présentera le problème (P) qui peut s'écrire aussi de la manière suivante:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = J_{0|t}^{\alpha_1} |v|^{p-1} v, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ v_t + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = J_{0|t}^{\alpha_2} |u|^{q-1} u, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.1.2)$$

où $\alpha_1 = 1 - \gamma \in (0, 1)$, $\alpha_2 = 1 - \delta \in (0, 1)$; $J_{0|t}^{\alpha_1}$ et $J_{0|t}^{\alpha_2}$ sont les intégrales fractionnaires au sens de Rimann-Liouville définies au chapitre 2.

Rappelons que le problème (P) a été étudié par Fino et Kirane [13] dans le cas $\beta_1 = \beta_2 = 2$; c'est à dire le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |v(s)|^{p-1} v(s) ds, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ v_t - \Delta v = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^t (t-s)^{-\delta} |u(s)|^{q-1} u(s) ds, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.1.4)$$

Ils ont démontré un théorème sur l'existence locale, ainsi que le théorème suivant sur l'explosion des solution:

Théorème 4.1.1 *Soient $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ vérifiant $u_0, v_0 \geq 0$ et $u_0, v_0 \neq 0$. Si*

$$\frac{N}{2} \leq \max \left\{ \frac{p(2 - \delta) + pq(1 - \gamma) + 1}{pq - 1}; \frac{q(2 - \gamma) + pq(1 - \delta) + 1}{pq - 1} \right\},$$

ou

$$p < \frac{1}{\delta} \quad \text{et} \quad q < \frac{1}{\gamma},$$

alors toute solution (u, v) du problème (4.1.3)-(4.1.4) explose en temps fini.

On peut suivre la même méthode pour montrer l'explosion des solutions pour le cas $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, c'est à dire le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u = J_{0|t}^{\alpha_1} |v|^{p-1} v, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ v_t + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v = J_{0|t}^{\alpha_2} |u|^{q-1} u, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

On commence notre chapitre par démontrer un théorème sur l'existence locale et l'unicité des solutions Mild du problème (4.1.1)-(4.1.2). Ensuite on s'intéressera à la non existence globale des solutions sous certaines conditions en prouvant un théorème sur l'explosion des solutions faibles. On va suivre une méthode différente à celle utilisée dans [13] avec laquelle, on trouvera quelques difficultés. Pour cela, on introduira deux fonctions tests pour chaque équation du système (P).

4.2 Existence locale

On rappelle que $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}$ ($i = 1, 2$) est un opérateur auto-adjoint défini positif sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $T_1(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}}$ et $T_2(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}}$ sont des semi-groupes fortement continus sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ engendrés respectivement par: $-(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}$ et $-(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}$, (on peut voir [34]).

Définition 4.2.1 (*Solutions Mild*) *Soient $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $0 < \beta_1, \beta_2 \leq 2$, $p, q > 1$ et $T > 0$. On dit que $(u, v) \in C([0, T], C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution Mild (ou bien une*

solution douce) du système (4.1.1)-(4.1.2), si (u, v) satisfait les deux équations intégrales suivantes:

$$\begin{cases} u(t) = T_1(t)u_0(x) + \int_0^t T_1(t-s)J_{0|s}^{\alpha_1}(|v|^{p-1}v) ds, & t \in [0, T], \\ v(t) = T_2(t)v_0(x) + \int_0^t T_2(t-s)J_{0|s}^{\alpha_2}(|u|^{q-1}u) ds, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.2.1)$$

où: $\alpha_1 = 1 - \gamma, \alpha_2 = 1 - \delta$.

Théorème 4.2.1 (Existence locale) Soient $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $0 < \beta_1, \beta_2 \leq 2$, $p, q > 1$, alors il existe un temps maximal $T_{\max} > 0$ et une solution $(u, v) \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N))$ du système (4.1.1)-(4.1.2). De plus, si $u_0, v_0 \geq 0$, $u_0, v_0 \not\equiv 0$, alors $u(t), v(t) > 0$ pour tout $0 < t < T_{\max}$; et si $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq r \leq \infty$, alors $u, v \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration

Pour la démonstration, on utilise le théorème du point fixe de Banach.

On pose : $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{\infty, T} = \|\cdot\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)}$.

Soit $T > 0$, on définit l'espace de Banach suivant:

$$E_T = \{(u, v) \in L^\infty((0, T), C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N)); \|(u, v)\| \leq 2(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty)\},$$

où $\|(u, v)\|$ est une norme sur E_T définie par:

$$\|(u, v)\| = \|u\|_{\infty, T} + \|v\|_{\infty, T}.$$

Ensuite, et pour tout $(u, v) \in E_T$, on introduit l'application Ψ définie dans E_T par $\Psi(u, v) = (\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))$, où:

$$\begin{aligned} \Psi_1(u, v) &= T_1(t)u_0(x) + \int_0^t T_1(t-s)J_{0|s}^{\alpha_1}(|v|^{p-1}v) ds, & t \in (0, T), \\ \Psi_2(u, v) &= T_2(t)v_0(x) + \int_0^t T_2(t-s)J_{0|s}^{\alpha_2}(|u|^{q-1}u) ds, & t \in (0, T). \end{aligned}$$

★ Montrons que pour tout $(u, v) \in E_T$, $\Psi(u, v) \in E_T$. En utilisant (3.2.6), on a:

$$\begin{aligned}
 |||\Psi(u, v)||| &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|v(\sigma)\|_\infty^p d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
 &+ \|v_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\delta} \|u(\sigma)\|_\infty^q d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
 &= \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|v(\sigma)\|_\infty^p ds d\sigma \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
 &+ \|v_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \left\| \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\delta} \|u(\sigma)\|_\infty^q ds d\sigma \right\|_{L^\infty(0,T)}.
 \end{aligned}$$

Intégrons sur (σ, t) puis sur $(0, t)$, on obtient:

$$\begin{aligned}
 |||\Psi(u, v)||| &\leq \|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty \\
 &+ \frac{T^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} \|v\|_{\infty,T}^p + \frac{T^{2-\delta}}{(1-\delta)(2-\delta)\Gamma(1-\delta)} \|u\|_{\infty,T}^q.
 \end{aligned}$$

Utilisons (2.1.2), on aura:

$$|||\Psi(u, v)||| \leq (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) + \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \|v\|_{\infty,T}^p + \frac{T^{2-\delta}}{\Gamma(3-\delta)} \|u\|_{\infty,T}^q,$$

$$|||\Psi(u, v)||| \leq (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) + \max \left\{ \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \|v\|_{\infty,T}^{p-1}; \frac{T^{2-\delta}}{\Gamma(3-\delta)} \|u\|_{\infty,T}^{q-1} \right\} (\|v\|_{\infty,T} + \|u\|_{\infty,T}),$$

et comme $(u, v) \in E_T$, on a:

$$|||\Psi(u, v)||| \leq (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) + 2T(u_0, v_0) (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty),$$

où

$$T(u_0, v_0) = \max \left\{ \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} 2^{p-1} (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty)^{p-1}; \frac{T^{2-\delta}}{\Gamma(3-\delta)} 2^{q-1} (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty)^{q-1} \right\}$$

Si on choisit T de tel sorte que:

$$T(u_0, v_0) \leq \frac{1}{2} \tag{4.2.2}$$

on déduit que:

$$|||\Psi(u, v)||| \leq 2(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty),$$

d'où:

$$\Psi(u, v) \in E_T.$$

★ Montrons que $\Psi(u, v)$ est une contraction.

Pour tout $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E_T$, on a:

$$\begin{aligned} |||\Psi(u, v) - \Psi(\tilde{u}, \tilde{v})||| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left\| |v|^{p-1} v(\sigma) - |\tilde{v}|^{p-1} \tilde{v}(\sigma) \right\|_\infty d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\delta} \left\| |u|^{q-1} u(\sigma) - |\tilde{u}|^{q-1} \tilde{u}(\sigma) \right\|_\infty d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left\| \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \left\| |v|^{p-1} v(\sigma) - |\tilde{v}|^{p-1} \tilde{v}(\sigma) \right\|_\infty ds d\sigma \right\|_{L^\infty(0,T)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \left\| \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\delta} \left\| |u|^{q-1} u(\sigma) - |\tilde{u}|^{q-1} \tilde{u}(\sigma) \right\|_\infty ds d\sigma \right\|_{L^\infty(0,T)}. \end{aligned}$$

Après intégration, on trouvera les estimations suivantes:

$$\begin{aligned} |||\Psi(u, v) - \Psi(\tilde{u}, \tilde{v})||| &\leq \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \left\| |v|^{p-1} v - |\tilde{v}|^{p-1} \tilde{v} \right\|_{\infty, T} \\ &\quad + \frac{T^{2-\delta}}{\Gamma(3-\delta)} \left\| |u|^{q-1} u - |\tilde{u}|^{q-1} \tilde{u} \right\|_{\infty, T}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité standard suivante:

$$\left| |u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v \right| \leq C(p) |u - v| (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}), \text{ pour tout } u, v \text{ et } p > 1,$$

on aura:

$$\begin{aligned} |||\Psi(u, v) - \Psi(\tilde{u}, \tilde{v})||| &\leq C(p) \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \left(\|v\|_{\infty, T}^{p-1} + \|\tilde{v}\|_{\infty, T}^{p-1} \right) \|v - \tilde{v}\|_{\infty, T} \\ &\quad + C(q) \frac{T^{2-\delta}}{\Gamma(3-\delta)} \left(\|u\|_{\infty, T}^{q-1} + \|\tilde{u}\|_{\infty, T}^{q-1} \right) \|u - \tilde{u}\|_{\infty, T}, \end{aligned}$$

$$|||\Psi(u, v) - \Psi(\tilde{u}, \tilde{v})||| \leq 2C(p, q) T(u_0, v_0) |||(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})|||,$$

avec: $C(p, q) = \max(C(p), C(q))$.

Si on choisit T tel que:

$$\max(2C(p, q); 1)T(u_0, v_0) \leq \frac{1}{2}, \quad (4.2.3)$$

on obtient:

$$\|\Psi(u, v) - \Psi(\tilde{u}, \tilde{v})\| \leq \frac{1}{2} \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|.$$

Donc, l'application Ψ est contractante sous la condition (4.2.3); en utilisant le théorème du point fixe de Banach, on déduit que le système (4.1.1)-(4.1.2) admet une solution mild (u, v) dans E_T .

★ Pour l'unicité de la solution: soient $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E_T$ deux solutions mild du système (4.1.1)-(4.1.2). En utilisant (3.2.6) et (3.2.9), et pour tout $t \in [0, T], T > 0$ on a:

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_\infty + \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_\infty &\leq \frac{C(p)2^p}{\Gamma(1-\gamma)} \|v_0\|_\infty^{p-1} \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|v(\sigma) - \tilde{v}(\sigma)\|_\infty d\sigma ds \\ &\quad + \frac{C(q)2^q}{\Gamma(1-\delta)} \|u_0\|_\infty^{q-1} \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\delta} \|u(\sigma) - \tilde{u}(\sigma)\|_\infty d\sigma ds \\ &= \frac{C(p)2^p}{\Gamma(1-\gamma)} \|v_0\|_\infty^{p-1} \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|v(\sigma) - \tilde{v}(\sigma)\|_\infty ds d\sigma \\ &\quad + \frac{C(q)2^q}{\Gamma(1-\delta)} \|u_0\|_\infty^{q-1} \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\delta} \|u(\sigma) - \tilde{u}(\sigma)\|_\infty ds d\sigma \\ &= \frac{C(p)2^p \|v_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma} \|v(\sigma) - \tilde{v}(\sigma)\|_\infty d\sigma \\ &\quad + \frac{C(q)2^q \|u_0\|_\infty^{q-1}}{\Gamma(2-\delta)} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\delta} \|u(\sigma) - \tilde{u}(\sigma)\|_\infty d\sigma. \end{aligned}$$

Posons:

$$C_1 = \max \left\{ \frac{C(p)2^p \|v_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(2-\gamma)}, \frac{C(q)2^q \|u_0\|_\infty^{q-1}}{\Gamma(2-\delta)} \right\}, \quad f(\gamma, \delta) = \begin{cases} \min(\gamma, \delta), & \text{si } (t-\sigma) > 1, \\ \max(\gamma, \delta), & \text{si } (t-\sigma) < 1, \end{cases}$$

on peut écrire alors:

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_\infty + \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_\infty \leq C_1 \int_0^t (t-\sigma)^{1-f(\gamma, \delta)} (\|v(\sigma) - \tilde{v}(\sigma)\|_\infty + \|u(\sigma) - \tilde{u}(\sigma)\|_\infty) d\sigma,$$

à cette étape, on utilise l'inégalité de Gronwall, on obtient:

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_\infty + \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_\infty = 0,$$

d'où l'unicité de la solution mild.

★ Maintenant, on prouve que $(u, v) \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N))$.

Comme la solution est unique, alors il existe un interval maximal $[0, T_{\max})$ du temps de l'existence, où:

$$T_{\max} = \sup \{T(u_0, v_0) > 0 \text{ tel que } (u, v) \in E_T \text{ est une solution de (4.1.1)-(4.1.2)}\} \leq \infty.$$

De plus, on a les semi-groupes $T_1(t)$ et $T_2(t)$ qui sont continues, alors:

$$(u, v) \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N)).$$

★ Positivité des solutions: si on considère que $u_0, v_0 \geq 0$ et $u_0, v_0 \neq 0$, alors et en appliquant le théorème du point fixe de Banach dans l'espace de Banach $E_T^+ = \{(u, v) \in E_T; u, v \geq 0\}$, on trouve une solution positive (u, v) ; et comme la solution est unique, elle est aussi positive sur $(0, T_{\max})$.

★ Régularité des solutions: soient $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq r < \infty$. On refait les mêmes étapes de la démonstration d'au dessus dans l'espace:

$$E_T = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in L^\infty((0, T), (C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)) \times (C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N))) : \\ |||(u, v)||| \leq 2(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty), \quad |||(u, v)|||_r \leq 2(\|u_0\|_{L^r} + \|v_0\|_{L^r}) \end{array} \right\},$$

où:

$$|||(u, v)|||_r = \|u\|_{L^\infty((0, T), L^r(\mathbb{R}^N))} + \|v\|_{L^\infty((0, T), L^r(\mathbb{R}^N))}.$$

On trouvera une solution unique (u, v) satisfaisant:

$$(u, v) \in C([0, T_{\max}), (C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)) \times (C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N))).$$

4.3 Explosion des solutions

Dans cette section, on démontrera un théorème sur l'explosion des solutions faibles du système (4.1.1)-(4.1.2). Premièrement, on donne la définition d'une solution faible du système (4.1.1)-(4.1.2), après on doit prouver que toute solution mild est une solution faible.

On pose dans la suite: $\int_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} dx$, $\int_{Q_T} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} dxdt$, pour tout $T > 0$.

Définition 4.3.1 *solution faible*

Soit $T > 0$, $u_0, v_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$. On dit que (u, v) est une solution faible du système (4.1.1)-(4.1.2), si $(u, v) \in L^q((0, T), L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)) \times L^p((0, T), L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N))$ et vérifiant les deux équations suivantes:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x, 0) + \int_{Q_T} J_{0|t}^{\alpha_1}(|v|^{p-1}v)\varphi = \int_{Q_T} u(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi - \int_{Q_T} u\partial_t\varphi \quad (4.3.1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\psi(x, 0) + \int_{Q_T} J_{0|t}^{\alpha_2}(|u|^{q-1}u)\psi = \int_{Q_T} v(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\psi - \int_{Q_T} v\partial_t\psi \quad (4.3.2)$$

pour toutes fonctions tests φ et ψ à supports compacts et appartenant à $C^1([0, T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$, tel que: $\varphi(x, T) = \psi(x, T) = 0$, $\in \mathbb{R}^N$ et $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$.

Remarque 4.3.1 Les formules (4.3.1)-(4.3.2) sont obtenues en multipliant respectivement les équations de (4.1.1) par les fonctions tests φ et ψ , et en intégrant sur $\int_{\mathbb{R}^N}$ avec l'utilisation des conditions de (4.1.2).

Lemme 4.3.1 Soit $T > 0$, et $u, v \in C([0, T], C_0(\mathbb{R}^N))$. Si (u, v) est une solution mild de (4.1.1)-(4.1.2), alors (u, v) est une solution faible de(4.1.1)-(4.1.2) pour tout $T > 0$.

Démonstration

Soit $T > 0$, $0 < \beta_i \leq 2$ ($i = 1, 2$), $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, et soient $(u, v) \in C([0, T], C_0(\mathbb{R}^N)) \times C([0, T], C_0(\mathbb{R}^N))$ une solution de (4.1.1)-(4.1.2). Soient φ et $\psi \in C^1([0, T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$ à supports compacts et vérifiant: $\varphi(x, T) = \psi(x, T) = 0$. Après multiplication de la première équation de (4.1.1) par φ et la deuxième par ψ , on intègre sur \mathbb{R}^N . On trouve:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t)\varphi(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} T_1(t)u_0(x)\varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^t T_1(t-s)J_{0|s}^{\alpha_1}(|v|^{p-1}v)(x, s)ds \right) \varphi(x, t), \\ \int_{\mathbb{R}^N} v(x, t)\psi(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} T_2(t)v_0(x)\psi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^t T_2(t-s)J_{0|s}^{\alpha_2}(|u|^{q-1}u)(x, s)ds \right) \psi(x, t). \end{aligned}$$

Dérivons par rapport au temps:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t)\varphi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}(T_1(t)u_0(x)\varphi(x, t)) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t T_1(t-s)J_{0|s}^{\alpha_1}(|v|^{p-1}v)(x, s)ds \right) \varphi(x, t), \quad (4.3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} v(x, t) \psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} (T_2(t) v_0(x) \psi(x, t)) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t T_2(t-s) J_{0|s}^{\alpha_2} (|u|^{p-1} u)(x, s) ds \right) \psi(x, t). \quad (4.3.4)$$

En utilisant (2.4.1) et le fait que $T_1(t)$ est un semi-groupe dont le générateur infinitésimal est $A_1 = -(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}$, on aura pour le premier terme de l'équation (4.3.3):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} (T_1(t) u_0(x) \varphi(x, t)) &= \int_{\mathbb{R}^N} A_1(T_1(t) u_0(x)) \varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} T_1(t) u_0(x) \varphi_t(x, t) \\ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} (T_1(t) u_0(x) \varphi(x, t)) &= \int_{\mathbb{R}^N} T_1(t) u_0(x) A_1 \varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} T_1(t) u_0(x) \varphi_t(x, t). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

et le deuxième terme donne:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} \int_0^t T_1(t-s) J_{0|s}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, s) ds \varphi(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, t) \varphi(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t A_1(T_1(t-s) J_{0|s}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, s)) ds \varphi(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T_1(t-s) J_{0|s}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, s) ds \varphi_t(x, t), \\ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} \int_0^t T_1(t-s) J_{0|s}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, s) ds \varphi(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, t) \varphi(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T_1(t-s) J_{0|s}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, s) ds A_1 \varphi(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T_1(t-s) J_{0|s}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, s) ds \varphi_t(x, t). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

On remplace (4.3.6) et (4.3.5) dans (4.3.3), on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} T_1(t) u_0(x) A_1 \varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} T_1(t) u_0(x) \varphi_t(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, t) \varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T_1(t-s) J_{0|s}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, s) ds A_1 \varphi(x, t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t T_1(t-s) J_{0|s}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, s) ds \varphi_t(x, t). \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que u satisfait la première équation de (4.2.1), on obtient:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) A_1 \varphi(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi_t(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, t) \varphi(x, t).$$

En intégrant par rapport au temps sur $(0, T)$, on peut conclure que:

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) A_1 \varphi(x, t) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) \varphi_t(x, t) \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J_{0|t}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, t) \varphi(x, t), \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) + \int_{Q_T} J_{0|t}^{\alpha_1} (|v|^{p-1} v)(x, t) \varphi(x, t) = \int_{Q_T} u(x, t) (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi(x, t) - \int_{Q_T} u(x, t) \varphi_t(x, t),$$

qui est bien la formule (4.3.1).

De la même manière, et en suivant les mêmes étapes pour (4.3.4), on trouvera la formule (4.3.2), ce qui achève la démonstration du lemme.

Théorème 4.3.1 Soient $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ vérifiant $u_0, v_0 \geq 0$ et $u_0, v_0 \not\equiv 0$. si

$$N \leq \max \left\{ \frac{p(2-\delta) + pq(1-\gamma) + 1}{\frac{p-1}{\beta_2} + \frac{p(q-1)}{\beta_1}} ; \frac{q(2-\gamma) + pq(1-\delta) + 1}{\frac{q(p-1)}{\beta_2} + \frac{q-1}{\beta_1}} \right\}, \quad (4.3.7)$$

ou

$$p < \frac{1}{\delta} \text{ et } q < \frac{1}{\gamma}, \quad (4.3.8)$$

alors toute solution (u, v) du problème (4.1.1)-(4.1.2) explose en temps fini.

Démonstration

La méthode qu'on va suivre pour démontrer le théorème d'explosion des solutions est la méthode de la fonction test. On procède encore par contradiction; supposons que la solution mild (u, v) du problème (4.1.1)-(4.1.2) est non triviale, non négative et qui est globale sur $(0, T^*)$, $T^* > 0$. Soient $T > 0$, $R > 0$ tel que: $0 < TR < T^*$.

La première étape: le choix des fonctions tests

Soit ξ_1, ξ_2 deux fonctions définies par:

$$\xi_1(x, t) = \phi\left(\frac{t^2 + |x|^{2\beta_1}}{R^2}\right), \quad \xi_2(x, t) = \phi\left(\frac{t^2 + |x|^{2\beta_2}}{R^2}\right).$$

ϕ est la fonction définie par

$$\phi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r \geq 2, \end{cases}$$

avec $0 \leq \phi(r) \leq 1$, $|\phi'(r)| \leq \frac{c_1}{r}$, pour tout $r > 0$.

Choisissons les deux fonctions tests φ, ψ par:

$$\varphi(x, t) = D_{t|T}^{\alpha_1}(\xi_1(x, t)), \quad \psi(x, t) = D_{t|T}^{\alpha_2}(\xi_2(x, t)),$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left| D_{t|T}^{\alpha_1+1} \xi_1 \right|^{q'} \xi_2^{-\frac{q'}{q}} < \infty, & \quad \int_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|T}^{\alpha_1} \xi_1 \right|^{q'} \xi_2^{-\frac{q'}{q}} < \infty, \\ \int_{Q_T} \left| D_{t|T}^{\alpha_2+1} \xi_2 \right|^{p'} \xi_1^{-\frac{p'}{p}} < \infty, & \quad \int_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} D_{t|T}^{\alpha_2} \xi_2 \right|^{p'} \xi_1^{-\frac{p'}{p}} < \infty, \end{aligned}$$

où: p', q' sont respectivement les conjugués de p et q , ($p' = p(p-1)$, $q' = q(q-1)$).

La deuxième étape: l'estimation et passage à la limite

Comme (u, v) est aussi une solution faible, alors elle vérifie les deux équations suivantes:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1(x, 0) + \int_{Q_{TR}} J_{0|t}^{\alpha_1} (|v|^p) D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 = \int_{Q_{TR}} u (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 - \int_{Q_{TR}} u \cdot \partial_t D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2(x, 0) + \int_{Q_{TR}} J_{0|t}^{\alpha_2} (|u|^q) D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2 = \int_{Q_{TR}} v (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2 - \int_{Q_{TR}} v \cdot \partial_t D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2$$

Utilisons (2.2.13) et (2.2.11), on aura:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1(x, 0) + \int_{Q_{TR}} D_{0|t}^{\alpha_1} J_{0|t}^{\alpha_1} (|v|^p) \xi_1 = \int_{Q_{TR}} u (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 + \int_{Q_{TR}} u \cdot D_{t|TR}^{\alpha_1+1} \xi_1,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2(x, 0) + \int_{Q_{TR}} D_{0|t}^{\alpha_2} J_{0|t}^{\alpha_2} (|u|^q) \xi_2 = \int_{Q_{TR}} v (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2 + \int_{Q_{TR}} v \cdot D_{t|TR}^{\alpha_2+1} \xi_2.$$

Avec (2.2.12), on trouve:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1(x, 0) + \int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 = \int_{Q_{TR}} u (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 + \int_{Q_{TR}} u \cdot D_{t|TR}^{\alpha_1+1} \xi_1, \quad (4.3.9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2(x, 0) + \int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 = \int_{Q_{TR}} v (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2 + \int_{Q_{TR}} v \cdot D_{t|TR}^{\alpha_2+1} \xi_2. \quad (4.3.10)$$

Remarquons que:

$$\begin{aligned} u \cdot \left| D_{t|TR}^{\alpha_1+1} \xi_1 \right| &= u \cdot \xi_2^{\frac{1}{q}} \cdot \left| D_{t|TR}^{\alpha_1+1} \xi_1 \right| \cdot \xi_2^{-\frac{1}{q}}, \\ u \cdot \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 \right| &= u \cdot \xi_2^{\frac{1}{q}} \cdot \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 \right|^{q'} \xi_2^{-\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

utilisons l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\int_{Q_{TR}} u \cdot \left| D_{t|TR}^{\alpha_1+1} \xi_1 \right| \leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} \left| D_{t|TR}^{\alpha_1+1} \xi_1 \right|^{q'} \xi_2^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}},$$

et

$$\int_{Q_{TR}} u (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 \leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 \right|^{q'} \xi_2^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

On déduit que (4.3.9) implique:

$$\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}, \quad (4.3.11)$$

avec

$$\mathcal{A} = \left(\int_{Q_{TR}} \left| D_{t|TR}^{\alpha_1+1} \xi_1 \right|^{q'} \xi_2^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_1} \xi_1 \right|^{q'} \xi_2^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

De même avec l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\int_{Q_{TR}} v \cdot \left| D_{t|TR}^{\alpha_2+1} \xi_2 \right| \leq \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR}} \left| D_{t|TR}^{\alpha_2+1} \xi_2 \right|^{p'} \xi_1^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

et

$$\int_{Q_{TR}} v (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2 \leq \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2 \right|^{p'} \xi_1^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

alors (4.3.10) implique:

$$\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \leq \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{\frac{1}{p}} \mathcal{B} \quad (4.3.12)$$

avec

$$\mathcal{B} = \left(\int_{Q_{TR}} \left| D_{t|TR}^{\alpha_2+1} \xi_2 \right|^{p'} \xi_1^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} D_{t|TR}^{\alpha_2} \xi_2 \right|^{p'} \xi_1^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

En utilisant les inégalités (4.3.11) et (4.3.12), on peut écrire:

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathcal{B}^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}, \quad (4.3.13)$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathcal{B} \mathcal{A}^{\frac{1}{p}}. \quad (4.3.14)$$

A cette étape, on doit faire un changement de variable vers (τ, y) . Dans \mathcal{A} , il est défini par:

$$\tau = \frac{t}{R}, \quad y = \frac{x}{R^{\frac{1}{\beta_1}}},$$

et dans \mathcal{B} par:

$$\tau = \frac{t}{R}, \quad y = \frac{x}{R^{\frac{1}{\beta_2}}}$$

On trouvera les estimations suivantes:

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C R^{\theta_1}, \quad (4.3.15)$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C' R^{\theta_2}, \quad (4.3.16)$$

où

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{p'q} \left(1 + \frac{N}{\beta_2}\right) - \frac{\alpha_2 + 1}{q} + \frac{1}{q'} \left(1 + \frac{N}{\beta_1}\right) - (\alpha_1 + 1), \\ \theta_2 &= \frac{1}{pq'} \left(1 + \frac{N}{\beta_1}\right) - \frac{\alpha_1 + 1}{p} + \frac{1}{p'} \left(1 + \frac{N}{\beta_2}\right) - (\alpha_2 + 1), \end{aligned}$$

et C, C' sont des constantes positives ne dépendant pas de R .

On peut remarquer que (4.3.7) est équivalente à $\theta_1 \leq 0$ ou $\theta_2 \leq 0$. On distinguera trois cas:

- **Le premier cas:** $\theta_1 < 0$ (respectivement $\theta_2 < 0$) :

On passe à la limite quand $R \rightarrow \infty$ dans (4.3.15) (respectivement dans 4.3.16), on trouve:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{TR} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \xi_1 dx dt = 0, \text{ (respectivement } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{TR} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \xi_2 dx dt = 0 \text{)},$$

utilisons le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, ainsi que la continuité de v (respectivement de u), on obtient:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx dt = 0, \text{ (respectivement } \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q = 0 \text{)},$$

et ceci implique que $v = 0$, (respectivement $u = 0$).

Enfin, en utilisant (4.3.11) et (4.3.12), on peut déduire que $u = v = 0$, qui est une contradiction

Le deuxième cas: $\theta_1 = 0$ (respectivement $\theta_2 = 0$) :

On procède de la même manière qu'au chapitre3; considérons deux nouvelles fonctions tests:

$$\xi_1(x, t) = \phi \left(\frac{t^2}{R^2} + \frac{|x|^{2\beta_1}}{\left(\frac{R}{S}\right)^2} \right), \quad \xi_2(x, t) = \phi \left(\frac{t^2}{R^2} + \frac{|x|^{2\beta_2}}{\left(\frac{R}{S}\right)^2} \right) \quad (4.3.17)$$

où $S \in (0, R)$, S et R ne tendent pas vers l'infini simultanément. Reprenons les deux inégalités (4.3.13) et (4.3.14) et faisons dans \mathcal{A} et \mathcal{B} le changement de variables suivant: $t = R\tau$, $x = y \left(\frac{R}{S}\right)^{\frac{1}{\beta_i}}$ $i = 1, 2$. On trouve:

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq CR^{\theta_1} S^{-\frac{N}{\beta_1 q'} - \frac{N}{\beta_2 p' q} + 1 + \frac{1}{q}} \quad (4.3.18)$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C' R^{\theta_2} S^{-\frac{N}{\beta_2 p'} - \frac{N}{\beta_1 q' p} + 1 + \frac{1}{p}}. \quad (4.3.19)$$

On remplace: $\theta_1 = 0$ (respectivement $\theta_2 = 0$); en tendant $R \rightarrow \infty$ dans (4.3.18) (respectivement dans (4.3.19)), on obtient:

$$\left(\int_{Q_\infty} |v|^p \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq CS^{-\frac{N}{\beta_1 q'} - \frac{N}{\beta_2 p' q} + 1 + \frac{1}{q}}, \quad (4.3.20)$$

respectivement

$$\left(\int_{Q_\infty} |u|^q \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C' S^{-\frac{N}{\beta_2 p'} - \frac{N}{\beta_1 q' p} + 1 + \frac{1}{p}}. \quad (4.3.21)$$

On doit avoir $N > \max \left\{ \frac{q+1}{\frac{q-1}{\beta_1} + \frac{p-1}{\beta_2 p}}, \frac{p+1}{\frac{p-1}{\beta_2} + \frac{q-1}{\beta_1 q}} \right\}$. Faisant $s \rightarrow \infty$ dans (4.3.20) (respectivement dans (4.3.21)), on aura

$$\int_{Q_\infty} |v|^p = 0 \Rightarrow v = 0,$$

respectivement

$$\int_{Q_\infty} |u|^q = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Avec (4.3.12) et (4.3.11), on peut conclure que:

$$u = v = 0,$$

qui est une contradiction.

Le troisième cas: $p < \frac{1}{\delta}$ et $q < \frac{1}{\gamma}$.

Dans ce cas, on prendra pour tout $t \in [0, T]$, $T > 0$ et $x \in R^N$:

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) = \xi_2(x, t) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(t) = \phi \left(\frac{|x|}{R} \right) \cdot \left(1 - \frac{t}{T} \right)^\eta,$$

où $R \in (0, T)$ est assez grand tel que T et R ne tendent pas à l'infini au même temps; alors les fonctions tests φ et ψ sont données par :

$$\varphi(x, t) = D_{t|T}^{\alpha_1}(\xi(x, t)), \quad \psi(x, t) = D_{t|T}^{\alpha_2}(\xi(x, t)).$$

Reprenons les deux inégalités (4.3.13) et (4.3.14) pour les nouvelles fonctions tests, on trouvera:

$$\left(\int_{Q_T} |v|^p \xi \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathcal{B}^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}, \quad \left(\int_{Q_T} |u|^q \xi \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathcal{B} \mathcal{A}^{\frac{1}{p}}, \quad (4.3.22)$$

avec \mathcal{A} et \mathcal{B} définis par:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left(\int_{Q_T} \left| \varphi_1(x) D_{t|T}^{\alpha_1+1} \varphi_2(t) \right|^{q'} \xi^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1(x) D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_2(t) \right|^{q'} \xi^{-\frac{q'}{q}} \right)^{\frac{1}{q'}}, \\ \mathcal{B} &= \left(\int_{Q_T} \left| \varphi_1(x) D_{t|T}^{\alpha_2+1} \varphi_2(t) \right|^{p'} \xi^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_1(x) D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2(t) \right|^{p'} \xi^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

En faisant cette fois-ci pour les deux membres de droite de (4.3.22) le changement de variables suivant: $y = R^{-1}x$, $\tau = T^{-1}t$. On trouvera alors:

$$\left(\int_{Q_T} |v|^p \xi \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C [T^{\omega_1} R^{\lambda_1} + T^{\omega_2} R^{\lambda_2}]^{\frac{1}{q}} [T^{\omega_3} R^{\lambda_3} + T^{\omega_4} R^{\lambda_4}], \quad (4.3.23)$$

$$\left(\int_{Q_T} |u|^p \xi \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C' [T^{\omega_1} R^{\lambda_1} + T^{\omega_2} R^{\lambda_2}] [T^{\omega_3} R^{\lambda_3} + T^{\omega_4} R^{\lambda_4}]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.3.24)$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(p-1)N}{p}, \quad \lambda_2 = \frac{(p-1)N}{p} - \beta_2, \quad \lambda_3 = \frac{(q-1)N}{q}, \quad \lambda_4 = \frac{(q-1)N}{q} - \beta_1, \\ \omega_1 &= \frac{p-1}{p} - (\alpha_2 + 1), \quad \omega_2 = \frac{p-1}{p} - \alpha_2, \quad \omega_3 = \frac{q-1}{q} - (\alpha_1 + 1), \quad \omega_4 = \frac{q-1}{q} - \alpha_1, \end{aligned}$$

et C, C' sont des constantes positives ne dépendant pas de T et de R .

Remarquons que $\omega_1 \leq \omega_2, \omega_3 \leq \omega_4$, et que

$$\begin{cases} p < \frac{1}{\delta} \iff \omega_2 < 0 \\ q < \frac{1}{\gamma} \iff \omega_4 < 0. \end{cases}$$

On fait tendre T vers l'infini ($T \rightarrow \infty$) dans (4.3.23) et (4.3.24) on obtient:

$$\int_{Q_\infty} |v|^p \phi \leq 0, \quad (4.3.25)$$

$$\int_{Q_\infty} |u|^p \phi \leq 0. \quad (4.3.26)$$

Finalement, et prenons $R \rightarrow \infty$ dans les inégalités (4.3.25) et (4.3.26), on obtient: $v = u = 0$, qui est une contradiction.

Remarque 4.3.2 On remarque que lorsque $\beta_1 = \beta_2 = 2$, on trouve le théorème 4.1.1.

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude d'un système fractionnaire de réaction-diffusion. On a montré sous certaines conditions la non existence globale des solutions en utilisant la méthode de la fonction test.

On peut s'intéresser prochainement à:

- L'étude du profil de l'explosion lorsqu'elle se produit.
- Voir le taux d'explosion des solutions.
- L'existence globale des solutions.
- L'estimation des solutions locales et globales.
- L'étude de ce problème dans un domaine borné ou extérieur de \mathbb{R}^3 .

Bibliographie

- [1] R.A. Adams; Soblev Spaces. Academic press, NewYork, 1975.
- [2] H.Bresis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise.Masson, 1992.
- [3] F.Bayen, C.Margaria, Distributions analyse de Fourier, transformaion de Laplace. Tome3, Ellipses, 1988.
- [4] T. Cazenave; A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, Paris, (1990).
- [5] T. Cazenave, F. Dickstein and F. D. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, Nonlinear Analysis:TMA, 68 (2008), 862-874.
- [6] El. Di Nezza, G.Palatucci, E.Valdinici, Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bulletin des Sciences Mathématiques, Elsevier, 2011.
- [7] F.Demengel, G.Demengel, Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations, Springer, EDP Sciences, 2007.
- [8] S.D.Eidelman, S.D.Ivasyshen, A.N.Kochubei, Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type, Springer Basel AG, 2004.
- [9] S.D.Eidelman, Basic theory of fractional differential equations, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.2014.

-
- [10] M.Escobedo, M.A.Herrero, Boundedness and blow-up for a semilinear reaction-diffusion system, *J.Diff.Eq.*89(1991), 176-202.
- [11] L.C.Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [12] A.Fino, M.Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation, *Quart. Appl. Math.* 70, 133-157 (2012).
- [13] A.Fino, M.Kirane, Qualitative properties of solutions to a nonlocal evolution system. *Mth. Meth. Appl. Sci.* 34, 1125-1143 (2011).
- [14] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc, New York. 1969.
- [15] H.Fujita, On the blowing-up of solutions of the problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J.Fac. Sci. Univ. Tokyo.* 13(1966), 109-124.
- [16] A.Haraux, *Non Linear Evolution Equations-Global Behavior of Solutions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [17] F.Hirsch, G.Lacombe, *Elements d'analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1997.
- [18] N. Jacob, *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes*, Akademie Verlag, Berlin,1996.
- [19] G.Karch, Nonlinear evolution equations with anomalous diffusion, Part I. Levy operator, Karch notes part 1. 2008.
- [20] A.A.Kilbas, H.M.Srivastava and J.J.Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North Holland-Mathematics Studies, Elsevier, 2006.
- [21] M. Kirane, Y.Laskri, N-e.Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with Spatio-Temporal Fractional derivatives, *J. Math. Anal. Appl.*312 (2005), 488-501.
- [22] M.Kirane, M.Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion system. *J. Math. Anal. Appl*, 268, 217-243 (2002).

- [23] K.S.Meller, B.Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Willey and Sons, Inc, 1993.
- [24] Mitidieri E, Pohozaev SI. A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 2001; 234:1–383.
- [25] A.Pazy, Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations, Springer Verlag 1983.
- [26] C.Pozrikidis, The fractional Laplacian, CRC Press, Taylor and Francis group,
- [27] P.Quittener, P.Souplet, Superlinear Parabolic Problems, Blow-up, Global Existence and Steady States. Birkhauser Verlag AG 2007.
- [28] S.Rihani, A.Kessab, Local, global existence and blow-up of solutio for a nonlocal in time nonlinear heat equation, 4th International Interdisciplinary Chaos Symposium on Chaos and Complex Systems, Antalya Turkey, April 29-May 02,2012.
- [29] S.Rihani, A.Kessab, Existence and no existence of mild solutions for a fractional evolution system, to appear in IJEVE. Vol 4. no 6,2013.
- [30] C. A. Robert, W. E. Olmstead, Blow-up in a subdiffusive medium of infinite extent, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 12 (2009), 179–194.
- [31] S.G.Samko, A.A.Kilbas and O.I.Marichev, Fractional integrals and derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, 1987.
- [32] P.Souplet, Blow up in nonlocal reaction-diffusion equations, *SIAM J. Math. Anal.* 29(1998), 1301-1334.
- [33] R.White, Blow-up in Reaction-Diffusion Equations, Applied Mathematics 4199, Honours Project 2005.
- [34] K.Yosida, Functional Analysis, sixth edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.