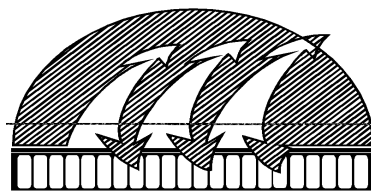


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



جامعة هواري بومدين  
للعلوم والتكنولوجيا  
U S T H B

Université des Sciences et de la Technologie  
HOUARI BOUMEDIENNE

Faculté Génie-Electrique  
Département Télécommunication

Thèse de Magister  
en Electronique, option Electronique des Systèmes  
Présentée par M<sup>r</sup> Farid HARIZI

THÈME

***TRAITEMENT ET MODELISATION  
DE  
SIGNAUX SISMIQUES  
Approche cepstrale***

**Soutenue le 24 février 2001, devant le jury d'examen composé de :**

M<sup>me</sup> R.RAMDANI

M<sup>r</sup> A.DJERADI

M<sup>me</sup> A.BELHADJ-AISSA

M<sup>r</sup> A.HOUACINE

**Maître de conférence**

**Maître de conférence**

**Maître de conférence**

**Maître de conférence**

**(USTHB)**

**(USTHB)**

**(USTHB)**

**(USTHB)**

Présidente

Examinateur

Examinatrice

Rapporteur

# SOMMAIRE

## Notations

## Introduction

### Chapitre I : La sismique réflexion

I.1- Introduction .....	1
I.2- Historique.....	1
I.3- La sismique réflexion.....	1
I.4- Définitions.....	2
I.4.1- Signal sismique.....	2
I.4.2- Les bruits.....	2
I.4.2.1- Bruits naturels et industriels.....	2
I.4.2.2- Bruits provoqués.....	2
I.4.3- Impédance acoustique.....	3
I.4.4- Théorie d'élasticité.....	3
I.4.5- Ondes P et S .....	3
I.4.6- Rayons sismiques.....	3
I.4.7- Terrains homogènes .....	4
I.4.8- Surfaces d'ondes .....	4
I.4.9- Front d'onde .....	4
I.4.10- Milieu isotrope .....	4
I.4.11- La réverbération.....	4
I.4.12- La trace sismique.....	4
I.4.13- Coefficients de réflexions.....	4
I.4.14- Coefficients de transmissions.....	5
I.5- Approches utilisées dans la sismologie .....	5
I.5.1- Introduction .....	5
I.5.2- Approches déterministe et probabiliste .....	5
I.6- Système linéaire .....	6
I.7- Application de la déconvolution aveugle en sismique réflexion .....	7
I.8- Les données du problème en sismique réflexion.....	8
I.8.1- Qualité des données à traiter .....	8
I.8.2- Problèmes dans la base de donnée .....	8
I.8.2.1- Problème de troncature .....	8
I.8.2.2- Problème de lacune .....	8
I.8.2.3- Problème d'alignement spatial des géophones .....	8
I.8.2.4- Problème d'alignement spatial des points de tirs .....	8
I.9- Filtrages et prétraitements .....	9
I.10- Types de système et types de distributions des données d'entrées .....	9
I.10.1- Type de système .....	9
I.10.2- Type de distributions pour les données d'entrées .....	9

### Chapitre II :Domaine Cepstral

II.1- Introduction .....	11
--------------------------	----

II.2- Etude théorique .....	11
II.3- Relation entre le filtrage linéaire et les polycepstres .....	14
II.4- Relation entre le Bicepstre et les coefficients cepstraux .....	16
II.5- Relation entre le domaine polycepstral et les moments d'ordre supérieur ..	17
II.6- Relation entre la réponse impulsionnelle causale et les coefficients cepstrals $\{A^{(k)}\}$ .....	18
II.7- Relation entre la réponse impulsionnelle maximale(anticausale) et les coefficients cepstrals $\{B^{(k)}\}$ .....	18

### **Chapitre III : Méthodes de Déconvolution Aveugle et d'Identifications Paramétriques basées sur les statistiques d'ordre supérieur**

III.1- Introduction .....	19
III.2- Formulation du problème et le rôle des statistiques d'ordre supérieur.....	19
III.3- Les HOS et leurs propriétés .....	21
III.4- Relation entre la réponse impulsionnelle et les HOS .....	21
III.5- Déconvolution Aveugle basée sur les HOS .....	22
III.6- Identification paramétrique basée sur les HOS .....	23
III.6.1- Introduction .....	23
III.6.2- Méthode d'identification.....	24
III.6.2.1- Principe.....	24
III.6.2.2- Choix du critère de la méthode d'estimation.....	25
III.6.2.3- Quelques aspects pratiques de l'identification.....	25
III.6.2.3.a- Choix du modèle.....	25
III.6.2.3.b- Choix de l'ordre du modèle.....	25
III.6.3- Méthode adaptative de phase.....	26
III.6.4- Méthode d'identification basée sur l'adaptation d'amplitude.....	27
III.6.5- Méthode d'identification basée sur la propriété cepstrale.....	28

### **Chapitre IV :Simulation et application à la sismique**

IV.1- Simulation d'une trace sismique .....	30
IV.2- Génération du bruit additif .....	30
IV.2.1- Bruit blanc .....	30
IV.2.2- Filtrage anti-repliement.....	30
IV.3- Applications .....	30
IV.3.1- Modèle AR causal .....	30
IV.3.2- Modèle AR anti-causal .....	33
IV.3.3- Modèle MA à phase minimale .....	34
IV.3.4- Modèle MA à phase nonminimale .....	37
IV.3.5- Modèle ARMA à phase minimale .....	40
IV.3.6- Modèle ARMA à phase nonminimale(PNM) .....	43

<b>Conclusion</b> .....	46
-------------------------	----

<b>Bibliographie</b> .....	47
----------------------------	----

#### **Annexe :**

Annexe A : Les statistiques d'ordre deux.....	50
---	----

Annexe B : Les statistiques d'ordre supérieur (HOS).....	52
Annexe C : Algorithme d'optimisation.....	56
Annexe D : Démonstrations.....	58
Annexe E : - Algorithme1 : Déconvolution aveugle nonparamétrique .....	62
- Algorithme2 : Identification non-paramétrique de la réponse impulsionnelle du système .....	63

## ***DEDICACES***

*A la mémoire de mon très cher père*

*A ma très chère mère*

*A ma très chère sœur*

*A ma famille*

*A tous mes amis*

*Farid HARIZI*

## REMERCIEMENTS

J'exprime ma reconnaissance à Madame R.RAMDANI maître de conférence à l'U.S.T.H.B, d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse et pour sa collaboration éclairée dans l'examen de cette thèse.

Monsieur A.DJERADI maître de conférence à l'U.S.T.H.B, qui me fait l'honneur de participer au jury et pour ses précieux conseils.

Madame A.BELHADJ-AISSA maître de conférence à l'U.S.T.H.B pour son aide, ses précieux conseils et encouragements.

Que Monsieur A.HOUACINE, maître de conférence à l'U.S.T.H.B, trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance pour sa constante disponibilité, son soutien permanent et ces précieux conseils prodigués au cours de l'accomplissement de ce travail.

Je ne saurais oublier dans mes remerciements Mr A.A.OULDAROUSSI, Mr D.TOUILZAG, Mr M.THAALBA pour leur collaboration. Qu'il trouvent ici l'expression de ma très profonde gratitude.

Je tiens à remercier Melle N.HARIZI qui m'a accordé toute son aide lors de la rédaction et le tirage de cette thèse.

J'aimerais exprimer ma profonde gratitude et ma grande reconnaissance à l'égard de Monsieur D.HOURIZI et Madame S.HOURIZI pour leur contribution dans la richesse de ma bibliographie.

Ma gratitude va, enfin, vers tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

## Notations

$Z_n^{-1}[\cdot]$	Transformée en z inverse à n dimension
$F_n^{-1}[\cdot]$	Transformée de Fourier inverse à n dimension
$\hat{\theta}(w)$	Phase estimé
$\phi_{xx}(\tau)$	Fonction d'autocorrélation
$\Phi(\cdot)$	Fonction caractéristique ou génératrice des moments
$\tilde{\Psi}(\cdot)$	Fonction conjointe des cumulants
$\rho$	Masse volumique
$\delta$	Impulsion de Dirac
$\Sigma$	Opérateur somme
$\Pi$	Opérateur produit
$\nabla$	Opérateur gradient
$\beta$	Skewness ou degré d'asymétrie par rapport à la gaussienne
$\delta\theta$	Erreur différentielle de phase
$\Delta\theta$	Erreur de phase
$\theta(w)$	Réponse en phase
$\gamma_{2,x}$	Variance de $\{x(n)\}$
$C_A^{(k)}, C_B^{(k)}, C_C^{(k)}$	Coefficients ceptraux des composants d'un système ARMA à phase nonminimale
$\{w(n)\}$	Séquence du bruit
$\{x(n)\}$	Séquence d'entrée d'un système
$\{y(n)\}$	Séquence de sortie d'un système
$A(n)$	Coefficients ceptraux d'un système à phase minimale
$B(n)$	Coefficients ceptraux d'un système à phase maximale
$B_x(z_1, z_2)$	Bispectre de la séquence $\{x(n)\}$
$C_{n,x}$	Cumulant d'ordre n de la séquence $\{x(n)\}$
$C_r$	Coefficients de réceptions
$C_t$	Coefficients de transmissions
$Cum[\cdot]$	Cumulant
$C_x(n)$	Cepstre complexe de $\{x(n)\}$
$D$	Constante de retard
$E\{\cdot\}$	Opérateur d'espérance
$F_n[\cdot]$	Transformée de Fourier à n dimension
$H$	Opérateur homomorphique
$H$	Le hessien
$h(n)$	Réponse impulsionnelle
$h_{MA}$	Réponse impulsionnelle d'un système MA
$h_{PEMA}$	Réponse impulsionnelle d'un système à phase équivalente à celle d'un système MA
$i(n)$	« inside » réponse impulsionnelle causale
$I(z^{-1})$	Polynôme à phase minimale
<i>i.i.d</i>	identiquement et indépendamment distribué
$J$	Opérateur jacobien
$Mom[\cdot]$	Moment

$o(n)$	« outside » réponse impulsionnelle anticausale
$PM$	Phase Minimale
$PNM$	Phase Non-Minimale
$R_x(m,n)$	Moment d'ordre trois de $\{x(n)\}$
$S_{n,x}$	Spectre de puissance d'ordre n de $\{x(n)\}$
$T$	Opérateur linéaire
$TIP$	Transformation invariante de phase
$U(z)$	Filtre inverse
$V$	Vitesse de propagation
$Z_n[.]$	Transformée en z à n dimension

# Introduction

Des investigations importantes ont été portées sur le domaine de traitement de signal, en combinant les idées, les méthodologies de la théorie des systèmes, les statistiques, l'analyse numérique, la recherche opérationnelle et la technologie des circuits intégrés.

L'objectif du traitement de signal est de traiter un ensemble d'échantillons et d'extraire l'information désirée qui est 'cachée' dans les données. Cet objectif est généralement achevé par combinaison de développement de formules mathématiques avec leurs implémentations sur des données réelles.

Les techniques de traitement du signal, qui ont été le plus fréquemment employées sont liées à l'utilisation de la fonction de corrélation ou de la densité spectrale de puissance (d.s.p) [Nikias & Mendel :90]. L'information présente dans le spectre de puissance ou dans la séquence d'autocorrélation correspond aux statistiques d'ordre deux. Cette dernière suffit pour la description statistique d'un processus stochastique, gaussien à moyenne connue [Haykin :94]. Il existe des situations dans la pratique où il est intéressant d'utiliser le domaine de spectre de puissance ou d'autocorrélation pour l'obtention d'informations sur la déviation par rapport à la gaussienne ou la présence de non linéarités. Les spectres d'ordre supérieur (en anglais High Order Spectra/Statistics(HOS)) contiennent l'information détaillée de la déviation ainsi que le degré de non linéarité [Nikias & Petropulu :93]. Le spectre d'ordre trois, appelé bispectre, qui est défini comme étant la transformation de Fourier bidimensionnelle de la séquence du cumulatif d'ordre trois ainsi que la transformation de Fourier tridimensionnelle du cumulatif d'ordre quatre qui correspond au spectre d'ordre quatre ou trispectre d'un processus aléatoire et stationnaire, représentent deux exemples particuliers de statistiques d'ordre supérieur.

L'un des domaines auquel ces statistiques d'ordre supérieur est d'une importance capitale est celui du domaine de la prospection pétrolière.

Cependant, cette prospection est régie par un ensemble de méthodes à savoir la méthode sismique réflexion à laquelle est décernée la plus grande part dans la prospection du fait de son pouvoir de pénétration qui peut atteindre des dizaine de kilomètres de profondeur [Lavergne :86]. Cette dernière n'est que le fruit de la collaboration entre le géophysicien, le statisticien et le géologue.

Quelques définitions de la sismique réflexion [Encyclopédie de la pléiade :71] [Foucault et Raoul :84] [Lavergne :86] dans son contexte globale et quelques types de bruits existants dans les enregistrements des signaux sismiques ainsi que le type d'approche utilisé, sont illustrés dans le premier chapitre. Nous traiterons principalement dans le second chapitre, la nature des données, le procédé d'acquisition et le traitement de l'information en sismique réflexion.

Le domaine cepstral est utile en traitement de signal sachant qu'il ne nécessite pas de connaissance sur le type de modèle, à priori [Pan & Nikias :88]. Des relations entre filtrage linéaire et cepstres d'ordre supérieur ou encore polycepstre ainsi que les relations reliant les coefficients cepstraux aux moments d'ordre supérieur, sont introduites dans le troisième chapitre.

Revenir à l'entrée d'un système stationnaire, invariant dans le temps avec réponse impulsionnelle inconnue, revient à dire qu'on est en présence d'un problème de déconvolution aveugle [Haykin :94]. Celui ci est traité dans le quatrième chapitre en utilisant les statistiques d'ordre supérieur.

A la fin, simulation et applications des méthodes de déconvolution à la sismique sont données au cinquième chapitre. Dans lequel, les modèles autorégressifs (AR) de type causal et non-causal, et les modèles à moyennes ajustées (MA) à phase minimale et nonminimale et enfin des modèles autorégressives à moyennes ajustées (ARMA) à phase minimale et nonminimale, sont traités.

Des démonstrations et des rappels sur le domaine des statistiques d'ordre supérieur ainsi que l'algorithme d'optimisation sont fournis en annexe.

# Traitement de la sismique réflexion

## I.1- Introduction

Malgré les progrès qui ont été réalisés en matière d'exploitation, il n'existe aucune méthode d'investigation sur ce que recèle la terre qui soit dépourvue d'erreur.

Les travaux de recherche, guidés par la géologie et la géophysique, se sont focalisés à la réduction de la marge d'incertitude sur les emplacements des gisements, qu'ils soient d'or, de fer, de gaz ou de pétrole [Encyclopédie de la pléiade :71].

## I.2- Historique de la sismique réflexion

La prospection sismique apparaît comme le fruit des études effectuées pendant la guerre mondiale [Encyclopédie de la pléiade :71]. C'est l'Allemand Mintrop qui l'appliqua le premier comme développement des essais qu'il avait faits avec un sismographe pour le repérage de l'artillerie ennemie : ses premiers brevets datent de 1919. La première découverte du dôme de sel par sismique réflexion est due à la société «Seismos», qui découvrit l'Orchard dôme au Texas pour la Gulf Oil Co. Depuis cette date, la sismique a connu un développement croissant d'abord sous la seule forme de sismique réfraction, puis à partir de 1927 aussi sous la forme de sismique de réflexion, qui est aujourd'hui très utilisée. La sismique réflexion est devenue peu à peu l'outil indispensable de la recherche pétrolière.

## I.3- La sismique de réflexion

Les méthodes d'exploitation sismique consistent à provoquer des ébranlements dans le sous-sol et à observer en surface les ondes réfléchies sur les couches géologiques ou réfractées le long de certaines interfaces. Les ébranlements ainsi créés se propagent dans le sous-sol par ondes progressives qui donnent naissance à des phénomènes de réflexion et de transmission lorsqu'elles parviennent aux limites des couches géologiques. Les ondes réfléchies remontent vers la surface où elles sont détectées, c'est le principe de la sismique-réflexion (figure.I.2).

En pratique, on opère comme suit : tout d'abord, disposer d'une source d'ébranlement. Quand on travaille à faible profondeur, un coup de marteau peut suffire. Mais, si on se propose d'atteindre le fond d'un bassin sédimentaire épais de plusieurs kilomètres, l'ébranlement doit être perceptible jusqu'à plusieurs dizaines de kilomètres. Il faut dans ce cas disposer d'explosions ou d'ébranlements par vibrateurs. On dépose l'explosif au fond de forages grâce aux sondeuses. L'enregistrement se fait grâce à des sismographes électromagnétiques dans lesquels une bobine, mobile par rapport à un aimant fixe, transforme les mouvements du sol en force électromotrice. Celles-ci sont transmises par des câbles jusqu'à l'enregistrement où elles sont convenablement filtrées et amplifiées. Usuellement, les enregistrements comprennent vingt-quatre «Traces» correspondant à vingt-quatre points du sol alignés sur le profil. La liaison entre le ou les laboratoires et le point de tir se fait par radio. La figure.I.1 illustre bien ce qui a été mentionné.

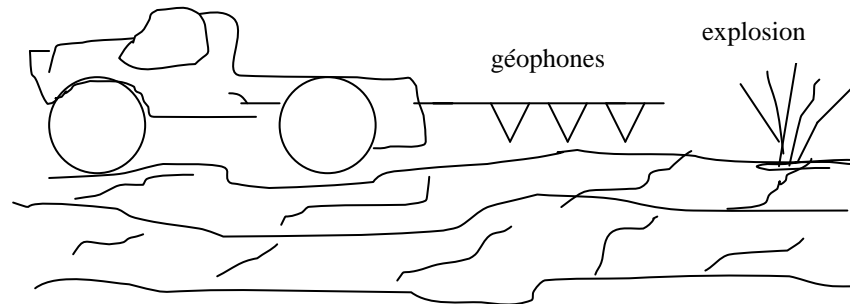


Figure.I.1. Prospection pétrolière

## I.4- Définitions

### I.4.1- Signal Sismique

Il n'est pas aisé de donner une définition du signal sismique car la séparation de ce qu'on appelle le signal du bruit dépend beaucoup des problèmes étudiés.

D'une manière générale, on appelle « signal sismique » tous les événements enregistrés dont on espère tirer une information sur la structure et la géologie du sous-sol. Ce sont par exemple la succession des échos en sismique-réflexion, les arrivées d'ondes coniques en sismique-réfraction, ou même certaines diffractions qui peuvent faciliter la localisation des accidents. Tout ce qui n'est pas du signal est considéré comme du bruit.

### I.4.2- Les bruits

#### I.4.2.1- Bruits naturels et industriels

Ces types de bruit existent sur les enregistrements, même en l'absence d'ébranlement. Les bruits naturels sont souvent des bruits désorganisés, de caractère plus au moins incohérent (vent, microséismes). Les bruits industriels sont généralement plus organisés, comme l'agitation sismique due à la circulation automobile ou l'induction à 50 hertz qui prend naissance dans les câbles sismiques traditionnels au voisinage des lignes à haute tension.

#### I.4.2.2- Bruits provoqués

Les bruits provoqués sont engendrés par l'ébranlement sismique. En sismique terrestre, les ondes de surface sont souvent considérées comme des bruits provoqués, encore qu'elles peuvent dans certains cas contenir des informations utiles à l'interprétation.

### I.4.3- Impédance Acoustique

L'impédance acoustique est par définition [Lavergne :86] [Pomerol et Renard :97] le produit de la masse volumique de la roche par la vitesse de propagation de l'onde sismique. Par ailleurs, les interfaces géologiques repérées en sismique-réflexion sont les interfaces de séparation des milieux d'impédance acoustique différente.

### I.4.4- Théorie d'élasticité

Les solides élastiques, sous l'effet d'une contrainte quelconque, subissent des déformations de deux types : compression et cisaillement.

### I.4.5- Ondes P et S

La théorie de l'élasticité et le principe fondamental de la dynamique montrent qu'il en résulte une propagation d'ondes sismiques par deux mécanismes différents, qui donnent naissance à deux types d'ondes se propageant de manière indépendante : les ondes de compression encore appelées ondes de dilatation (ou ondes longitudinales ou ondes P) ; les ondes de cisaillement encore appelées ondes de distorsion (ou ondes transversales ou ondes S).

### I.4.6- Rayons sismiques

Ce sont des ondes normales aux fronts d'ondes en milieu isotrope.

En sismique-réflexion, les rayons sont sensiblement perpendiculaires aux interfaces géologiques.

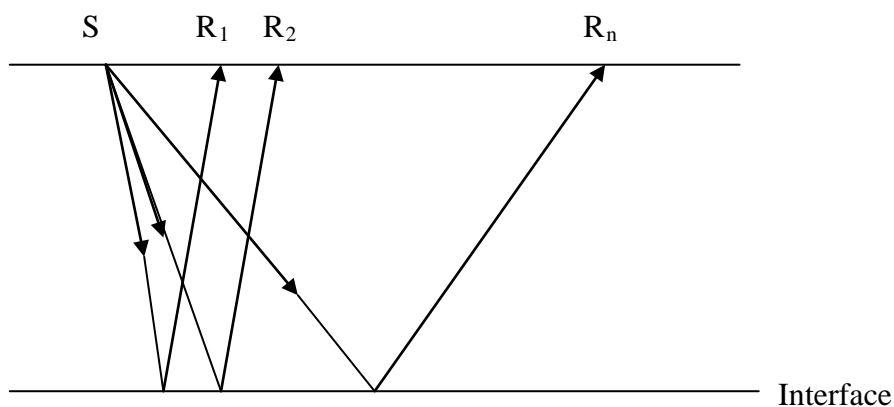


Figure.I.2 Principe de la sismique-réflexion

#### I.4.7- Terrains homogènes

Se sont les terrains pour lesquels les vitesses sismiques sont constantes, les rayons sismiques sont alors des droites. Lorsque les ondes sismiques passent d'un terrain homogène à un autre terrain homogène, les rayons subissent des brisures, comme en optique.

#### I.4.8- Surfaces d'ondes

Au passage des ondes sismiques, les particules du sous-sol se mettent en mouvement. Les surfaces sur lesquelles les mouvements sont en phase s'appellent les surfaces d'ondes.

#### I.4.9- Front d'onde

Entre la surface où les particules du sous-sol sont au repos et la surface où elles sont en mouvement, est définie comme étant le front d'onde.

#### I.4.10- Milieu isotrope

Un milieu isotrope se dit d'un milieu dont les propriétés ne dépendent pas de la direction suivant laquelle on les évalue ; les corps isotropes (gaz, liquide, verre) sont homogènes, sans forme définie, et non cristallisé (atomes constitutifs disposés en désordre) [Foucault et Raoult :84].

#### I.4.11- La Réverbération

La réverbération est le multiple rebondissement des ondes entre les couches minces. Elle est considérée comme étant un bruit qui détériore l'onde incidente dans le cas où l'impédance acoustique est grande par rapport aux couches suivantes.

#### I.4.12- Trace sismique

La trace sismique ou signature sismique est définie comme étant le résultat de la convolution entre la source et la réponse impulsionnelle de la terre.

#### I.4.13- Coefficients de réflexions

Pour une onde incidente par rapport à la normale, ayant comme impédance acoustique  $\rho_1$ , et vitesse de propagation  $V_1$  et pour impédance acoustique  $\rho_2$  et vitesse  $V_2$  pour l'onde réfléchie et  $\rho_3$  et  $V_3$  pour l'onde transmise. On définit le coefficient de réflexion (pour une seule onde) comme étant le rapport énergétique de l'onde incidente et l'onde réfléchie qui est donné par l'équation suivante :

$$C_r = \frac{\rho_2 \cdot V_2 - \rho_1 \cdot V_1}{\rho_2 \cdot V_2 + \rho_1 \cdot V_1} \quad (\text{I.1})$$

#### I.4.14- Coefficients de transmissions

Les coefficients de transmissions ne sont que les rapports énergétiques entre l'onde incidente et l'onde transmise, ce qui est donné par :

$$C_t = \frac{\rho_3 \cdot V_3 - \rho_1 \cdot V_1}{\rho_3 \cdot V_3 + \rho_1 \cdot V_1} \quad (\text{I.2})$$

### I.5-Approches utilisées en sismique

#### I.5-1. Introduction

Les opérateurs linéaires sont utilisés comme outils statistiques dans l'analyse des enregistrements sismiques.

La génération séquentielle dans le temps d'une quelconque variable constitue une série temporelle (série séquentielle).

#### I.5-2. Approches déterministe et probabiliste

Deux types d'approches de base existent pour le traitement des données [Foucault et Raoult :84]. L'une est l'approche déterministe et l'autre est l'approche probabiliste. Des investigations récentes ont montré que ces deux approches sont fondamentalement équivalentes l'une par rapport à l'autre. Jusqu'aux années soixante dix, l'approche déterministe a été la plus utilisée. Les lois de cette dernière sont considérées comme précises dans l'exploitation sur des observations, même si ces observations sont incomplètes, elle utilise les théories de la physique de la propagation d'onde qui fait intervenir les solutions des équations différentielles et intégrales satisfaisant les bornes et les conditions initiales.

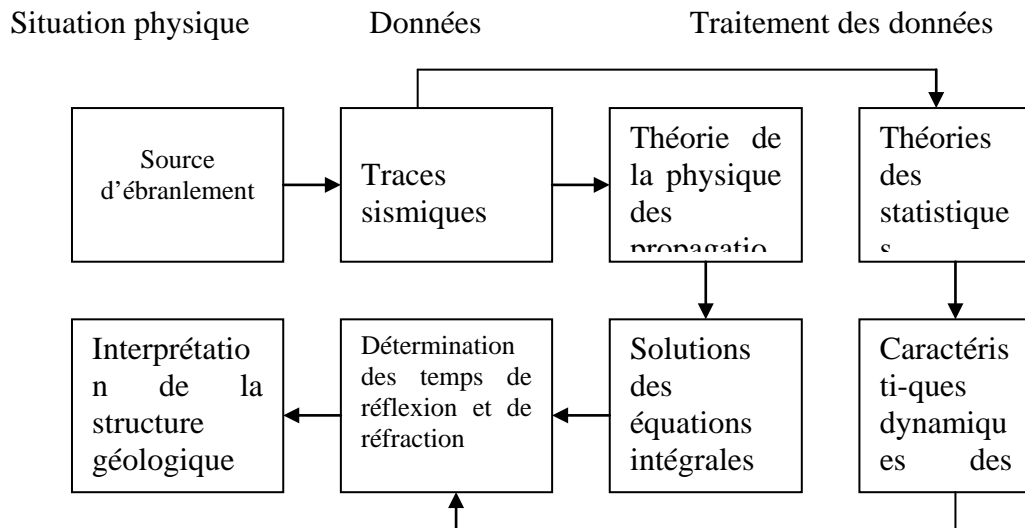
L'autre approche, probabiliste, exploite les données dans la forme où elles sont observées, et utilise les théories des statistiques des séries temporelles.

La figure.I.3 présente les types de traitements logiques de l'exploitation pétrolière.

Notre problème de base est de déterminer :

- (1) les méthodes statistiques adéquates pour séparer les informations utiles des informations présentes dans le sismogramme,
- (2) les relations des informations utiles sous forme statistique avec les variables sismiques et les structures géologiques.

Une fois les informations dynamiques caractérisant les enregistrements sismiques sont déduites par les méthodes statistiques, le problème suivant est de translater ces informations statistiques en informations géologiques.

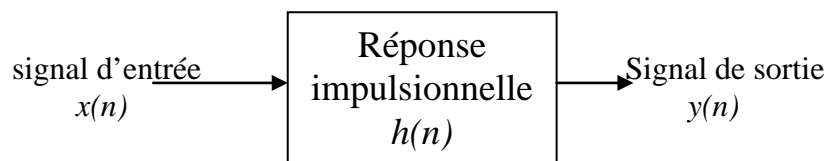


**Figure.I.3- Approches déterministe et probabiliste dans la sismologie**

### I.6- système linéaire

Soit la figure.I.4, représentant un système linéaire, discret et invariant dans le temps. Le signal de sortie  $y(n)$  est défini comme étant la convolution du signal d'entrée  $x(n)$  avec la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du système, soit :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k).x(n - k) = h(n) * x(n) \quad (I.3)$$



**fig.I.4 système linéaire et invariant dans le temps**

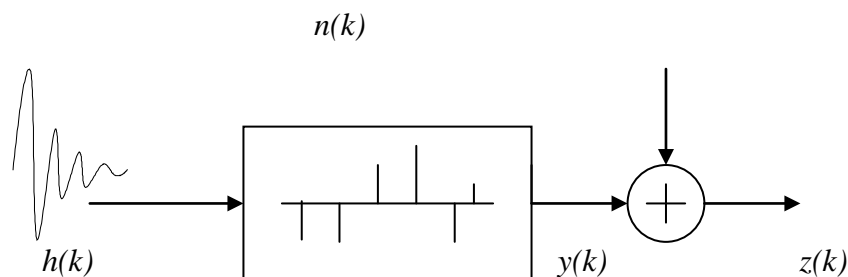
La déconvolution se réfère au problème de détermination du signal d'entrée du système, La sortie du système est accessible, alors que la réponse impulsionnelle peut ne pas être connue. Dans ce cas, la déconvolution est dite aveugle.

Pour accomplir la Déconvolution Aveugle, on est amené à faire certains hypothèses sur les statistiques du signal d'entrée.

### I.7- Application de la déconvolution aveugle en sismique réflexion

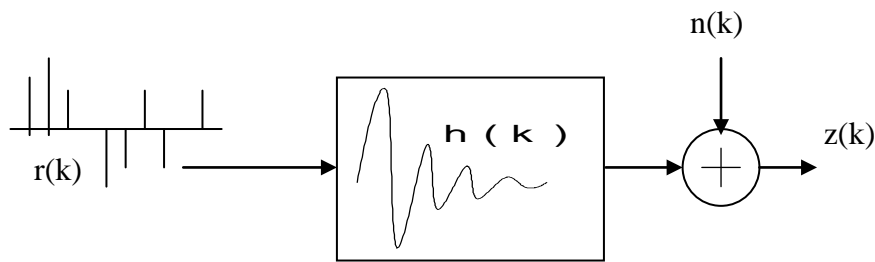
L'utilisation de la Déconvolution aveugle est de plus en plus utilisée en transmission des données, la reconstruction d'images et particulièrement en sismique réflexion [Pan & Nikias :88].

Pour la déconvolution sismique, l'approche usuelle consiste à : supposer un modèle de couches de la terre, le but est d'estimer la séquence des coefficients de réflexions correspondant aux interfaces des couches qui représentent la réflectivité de la terre.



**Fig.I.5 Modèle de la trace sismique**

La représentation exacte du modèle générant la trace sismique est donnée par la figure.I.5. Le signal de sortie  $y(k)$  peut être considéré comme la sortie d'un système linéaire d'ordre  $n$ , excité par une ondelette  $h(k)$  et ayant comme réponse impulsionnelle la série des coefficients de réflexions  $r(k)$ . L'ordre  $n$  du modèle est inconnue. Grâce à la commutativité de la convolution, il est plus commode de représenter le système de la figure.I.5. par le modèle représenté par la figure.I.6. où l'entrée du système correspond à la série des coefficients de réflexions, la réponse impulsionnelle correspond à  $h(n)$  (la source de vibration ou d'explosion) [Haykin :94].



**fig.I.6. Modèle équivalent de la trace sismique**

## **I.8- Les données du problème en sismique réflexion**

### **I.8.1- Qualité des données à traiter**

L'une des questions primordiales qu'on doit se poser lors d'une prospection pétrolière, est de savoir pourquoi on obtient des données de mauvaise qualité sachant qu'on est dans un terrain riche en pétrole ? .

Des vastes étendues dans le monde, possédant des gisements potentiels de pétrole ; néanmoins, il est très difficile de les détecter. Cela revient à la difficulté d'obtention des données sismiques de réflexions fiables. Les raisons sont toutefois inconnues. A partir du point de vue expérimental, toutes les données sismiques sont fiables dans le sens où elles sont répétées. Néanmoins, le problème réel réside dans le fait que les données n'ont aucun sens.

### **I.8.2- Problème dans la base de donnée**

#### **I.8.2.1- Problème de troncature**

Le problème de troncature des données est dû essentiellement au câble d'enregistrement qui est à longueur finie, et comme les ondes perceptibles, généralement, traversant bien ce dernier ; cependant, la trace sismique aura une dimension finie.

#### **I.8.2.2- Problème de lacunes**

Le problème du vide ou de lacunes dans la sismique est généralement imprévisible.

#### **I.8.2.3- Problème d'alignement spatial des géophones**

A cause de l'avancement technologique, le problème d'alignement spatial des géophones se réduit considérablement.

#### **I.8.2.4- Problème d'alignement spatial des points de tirs**

Le progrès technologique a éliminé ce problème d'alignement spatial des points de tirs.

Il faut attendre dix secondes entre les tirs pour que les échos puissent disparaître. Alors, pour un certain espace spatial et temporel de survie des échos, on est amené à spécifier un certain nombre de points de tirs par kilomètre carré.

Ce problème n'existe pas pour la prospection maritime.

#### **I.9- Filtrages et prétraitements**

Il est souvent utile d'utiliser la notion de signal analytique, en particulier en modulation de fréquence, et souvent utilisée par les sismiciens dans le cas de sources vibratoires.

L'importance de l'utilisation de signal sismique causal réside dans le fait qu'on peut déterminer sur les enregistrements sismiques l'amplitude instantanée, parfois indicatrice de la présence d'hydrocarbures, la phase instantanée qui indique avec précision la continuité des horizons sismiques et la fréquence instantanée qui permet d'estimer dans certains cas l'absorption différentielle des fréquences dans les terrains [Lavergne :86].

Pour les filtrages, on a le filtrage de bruits de surface. Ses bruits de surface se répètent à chaque ébranlement, mais ne contiennent pas d'informations sur les structures profondes. Ces bruits, qui viennent perturber les signaux utiles à cause des fortes amplitudes de leurs oscillations, peuvent durer plusieurs secondes. Ils peuvent être atténués par la combinaison de dispositifs de source et de géophones alignés suivant la direction du profil ou étalés en surface. La géométrie des dispositifs doit être choisie en fonction des caractéristiques du signal et du bruit et en particulier de leurs spectres en nombre d'onde qui représente le rapport entre la fréquence et la vitesse de propagation apparente.

#### **I.10- Type de système et types de distributions des données d'entrées**

##### **I.10.1- Type de système**

Soit un système linéaire discret et invariant dans le temps, avec réponse impulsionnelle  $\{h(k)\}$  qui est inconnue. Soit à l'entrée de ce dernier, des données  $\{x(k)\}$ , qui sont identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d), et qui sont des variables aléatoires suivant une fonction de densité de probabilité (p.d.f),  $f_x(x)$  connue. On considère que la variance de  $\{x(k)\}$  est finie, cette condition est présente, en générale, dans la pratique. Il est à noter que,  $\{x(k)\}$  n'est pas toujours l'entrée du système(ou des systèmes), et  $\{h(k)\}$  n'est pas toujours considérée comme étant la réponse impulsionnelle du système. Dans la géophysique, ce qui nous intéresse est le modèle de convolution entre les ondes incidentes normales, enregistrées par le sismogramme, qui représentent les coefficients de réflexions  $\{x(k)\}$  à chaque couche géologique  $k$ , et la source  $\{h(k)\}$  d'émission de l'ondulette qui dépend directement de la source elle-même, du type de propagation de l'onde et de la réponse impulsionnelle des instruments de mesures. C'est pour cette raison que  $\{h(k)\}$  est considérée comme inconnue.

##### **I.10.2- Type de distributions pour les données d'entrées**

Dans plusieurs problèmes, les données d'entrées  $\{x(k)\}$  suivent des fonctions de densité de distributions continues. Cette situation nécessaire pour le problème de Déconvolution se rencontre dans la géophysique, comme un exemple, la fonction de densité de distribution, qui est intéressante, est la distribution Bernoulli-Gaussienne, dans laquelle  $x = 0$  pour une probabilité  $\lambda$  (qui peut être choisie près de 1 ; exemple,  $\lambda = 0.9$ ), qui correspond à une variable aléatoire gaussienne centrée avec une probabilité de  $1-\lambda$ . Une extension de ce modèle, augmente quand un bruit additif intervient, est le mélange de deux distributions gaussiennes avec différentes variances [Haykin :94].

Dans la géophysique, on ne peut connaître complètement, à priori, la distribution des données d'entrées. D'où, lors de l'utilisation des techniques de la Déconvolution Aveugle, on est amené à choisir un ensemble de sources sur lesquelles seront effectuées des tests.

# Domaine Cepstral

## II.1- Introduction

Nous allons dans ce chapitre montrer l'utilité du domaine cepstral pour la caractérisation de la réponse impulsionnelle. Cet aspect est important dans le sens où la déconvolution peut nécessiter la connaissance au préalable de la réponse impulsionnelle.

## II.2- Etude théorique

Considérons la transformation linéaire définie par

$$y = T[x] \quad (\text{II.1})$$

qui satisfait la relation de superposition :

$$T[ax_1 + bx_2] = aT[x_1] + bT[x_2], \quad (\text{II.2})$$

Dans la même perspective donnée par la relation de superposition (II.2), on définit une transformation H d'un signal résultant d'une convolution de signaux  $x = x_1 * x_2$ , telle que

$$H[{}^{(a)}x_1 * {}^{(b)}x_2] = aH[x_1] * bH[x_2], \quad (\text{II.3})$$

a et b étant des facteurs multiplicatifs.

Si a est un entier,  ${}^{(a)}x$  sera a fois la convolution de x avec lui-même. La transformation H est appelé Homomorphique [Ulrych :71], et satisfait au postulat de l'addition vectorielle, qui a été formulé par Oppenheim(1965a).

L'avantage de cette représentation par l'équation (II.3) est que ce type de système, possède une "forme canonique", Oppenheim(1965a), représentée par la figure.II.1.

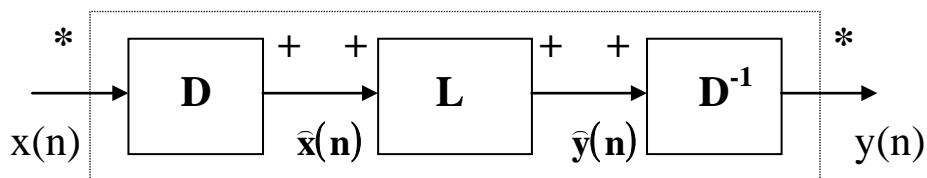


figure.II.1, Représentation canonique d'un système homomorphique

Le système D représente un système homomorphique, qui accomplit le passage de l'espace convolutionnel à un espace additionnel, et qui est défini par la relation suivante :

$$D[(^{(a)}x_1 * (^{(b)}x_2)] = aD[x_1] + bD[x_2], \quad (\text{II.4})$$

Le système L est un système linéaire et le système  $D^{-1}$  est le système inverse de D, qui est un système homomorphique correspondant à la transformation de l'espace additionnel en espace convolutionnel.

La grande flexibilité donnée par la figure.II.1 fait qu'une fois la caractéristique du système D est déterminée, le problème de déconvolution "déconvolution homomorphique" sera à ce moment résolu par filtrage linéaire.

La déconvolution homomorphique est réalisée en utilisant des données échantillonnées d'où l'utilisation de la transformée en Z à la place de la transformation de Fourier.

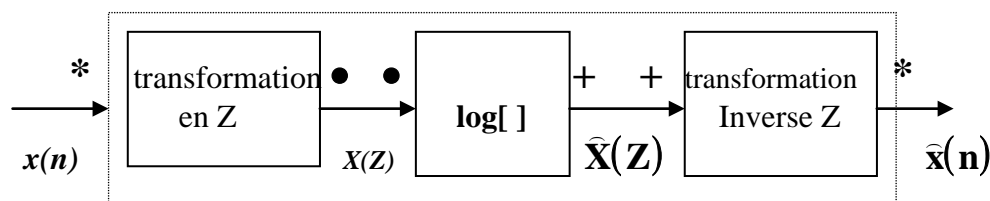
Soit  $\{x(n)\}$  la séquence d'entrée, ayant  $X(z)$  comme transformée en Z définie par l'expression suivante :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (\text{II.5})$$

La fonction caractérisant le système D est de transformer deux signaux de l'espace convolutionnel vers un espace additionnel.

La transformation en Z de la convolution de deux signaux correspond au produit de leur transformée en Z.

La transformation requise pour passer de l'espace convolutionnel vers l'espace additionnel est réalisée en utilisant une fonction logarithme qui est illustrée dans la figure.II.2.



*figure.II.2, Représentation canonique d'un système D*

Les étapes d'une telle transformation sont les suivantes :

- Transformation en  $Z$  de la séquence d'entrée  $x(n)$  pour obtenir  $X(z)$ .
- Application du logarithme sur  $X(z)$  pour obtenir  $\hat{X}(z)$ , qui correspond à la transformation d'un produit en une somme.
- Transformation inverse en  $z$  de  $\hat{X}(Z)$  qui fournit  $\hat{x}(n)$ , qui sera l'entrée du système linéaire  $L$  de la figure.II.1.

Le signal  $\hat{x}(n)$  est appelé "Cepstre Complexe".

Le mot cepstre est inventé par Bogert et al(1962), Le cepstre est le spectre de puissance du logarithme du spectre de puissance de  $x(n)$ . Le mot complexe a été ajouté par Oppenheim et al (1968) pour préciser que le cepstre est calculé en utilisant l'information d'amplitude et de phase de  $x(n)$ .

Le cepstre complexe est défini par

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \log[X(Z)]Z^{n-1} dZ, \quad (\text{II.6})$$

avec  $C$ , le contour circulaire spécifié par

$$z = e^{\sigma + j\omega}, \quad -\pi < \omega < \pi$$

Considérons la séquence d'échantillons  $x(n)$ , qui est composée de l'ondelette  $s(n)$  et de l'écho décalé de  $n_0$  échantillons.

$$x(n) = s(n) + as(n-n_0), \quad (\text{II.7})$$

Avec  $a$  est une constante.

En transformant l'équation (II.7) en un produit de convolution, on obtient :

$$x(n) = s(n) * [\delta(n) + a\delta(n-n_0)], \quad (\text{II.8})$$

Avec  $\delta(n)$ , la fonction Dirac,

En évaluant la transformation en  $Z$  de  $x(n)$  sur le cercle unitaire, on obtient :

$$X(e^{j\omega}) = S(e^{j\omega}) [1 + a.e^{-j\omega n_0}], \quad (\text{II.9})$$

Puis, en appliquant le logarithme de  $X(e^{j\omega})$ , on obtient

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \log\left(S(e^{j\omega})\right) + \log\left[1 + a.e^{-j\omega n_0}\right], \quad (\text{II.10})$$

D'après l'équation (II.10), l'écho est représenté dans le spectre logarithmique comme étant une addition d'une composante périodique. Le cepstre complexe  $\hat{x}(n)$  contiendra un pic situé à un instant égal au retard de l'écho.

### II.3- Relation entre le filtrage linéaire et les polycepstres

Considérons la séquence d'énergie  $\{h(k)\}$  d'un modèle ARMA, avec sa transformée en  $z$ , qui est généralement à phase non-minimale, donnée par :

$$H(z) = A \cdot z^{-r} \cdot I(z^{-1}) \cdot O(z) \quad (\text{II.11})$$

avec  $A$  est une constante,  $r$  un entier et

$$I(z^{-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{L_1} (1 - a_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^{L_2} (1 - c_i \cdot z^{-1})} \quad , \quad (\text{II.12})$$

$$O(z) = \prod_{i=1}^{L_2} (1 - b_i \cdot z) \quad . \quad (\text{II.13})$$

Où  $I(z^{-1})$  et  $O(z)$  sont respectivement, la partie à phase minimale et la partie à phase maximale, avec  $|a_i| < 1$ ,  $|b_i| < 1$  et  $|c_i| < 1$ . Les pôles  $\{c_i\}$  et les zéros  $\{a_i\}$  se situent à l'intérieur du cercle unitaire du plan complexe, alors que les zéros  $\{1/b_i\}$  se situent à l'extérieur de ce dernier. Il n'y a aucune raison d'exclure les pôles à phase maximale. Pour lesquels, l'analyse cepstrale est bien fonctionnelle.

Le terme  $z^{-r}$  correspond à un décalage linéaire de phase, qui est supprimé dans le domaine spectral d'ordre supérieur. Le paramètre d'amplification  $A$  ne contribue pas dans la forme ou l'enveloppe du signal, dans ce cas on peut le supposer positif.

Il est clair que le produit de convolution de la séquence causale, donnée par  $i(k)$ , et de la séquence anti-causale, donnée par  $o(k)$ , donne la réponse impulsionnelle discrète  $h(k)$ .

$$h(k) = i(k) * o(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i(n) \cdot o(k - n), \quad -\infty < k < +\infty \quad (\text{II.14})$$

Où  $i(k)$  et  $o(k)$  correspondent à la transformée de Fourier inverse de  $I(w)$ , et  $O(w)$ , respectivement.

En appliquant le logarithme népérien à  $H(z)$ , on obtient :

$$\text{Log}[H(z)] = \text{Log}(A) + \text{Log}(z^{-r}) + \sum_{i=1}^{L_1} \text{Log}(1 - a_i \cdot z^{-1}) + \sum_{i=1}^{L_2} \text{Log}(1 - b_i \cdot z) + \sum_{i=1}^{L_3} \text{Log}(1 - c_i \cdot z^{-1})$$

Il a été mentionné dans l'étude théorique, le cepstre complexe  $c_h(m)$  d'un signal est défini ([Oppenheim et Schafer, 1989]) comme étant la transformée inverse de  $\text{Log}[H(z)]$ , soit :

$$c_h(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \text{Log}[H(z)] z^{m-1} dz = \text{TZ}_1^{-1}[\text{Log}[H(z)]] \quad (\text{II.15})$$

Cette équation représente l'intégrale curviligne complexe de la fonction  $\text{Log}[H(z)] \cdot z^{m-1}$ , qui est une fonction continue tout au long du contour de convergence  $C$ , incluant le cercle unitaire.

Il est à noter que le cepstre complexe peut être obtenu en utilisant la transformée de Fourier inverse, soit :

$$c_h(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{Log}[H(w)] \cdot \exp\{jwm\} dw = F_1^{-1}[\text{Log}|H(w)| + j\phi_h(w)] \quad (\text{II.16})$$

avec  $z = \exp(j\phi(w))$

$$H(w) = |H(w)| \cdot \exp(j\phi_h(w)).$$

On note les opérateurs  $Z_1[.]$  et  $Z_1^{-1}[.]$  comme étant la transformée en  $z$  à une dimension, et la transformée en  $z$  inverse à une dimension, respectivement. De même que  $F_1[.]$  et  $F_1^{-1}[.]$  définissent la transformée de Fourier à une dimension et la transformée de Fourier inverse à une dimension, respectivement.

En appliquant le développement de Taylor du logarithme complexe, on obtient :

$$\text{Log}(1 - q) = - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{q^j}{j}, \quad -1 < q \leq 1, \quad (\text{II.17})$$

Après transformations algébriques, on obtient l'expression générale du cepstre complexe en fonction des paramètres de la fonction de transfert donnée par [Ulrych :71]:

$$c_h(m) = \begin{cases} \text{Log}|A|, & m = 0 \\ -\frac{A^{(m)}}{m}, & m > 0 \\ \frac{B^{(-m)}}{m}; & m < 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} A^{(m)} = \sum_{i=1}^{L_1} a_i^m - \sum_{i=1}^{L_3} c_i^m \\ B^{(m)} = \sum_{i=1}^{L_2} b_i^m \end{cases}, \quad (\text{II.19})$$

Avec  $A^{(m)}$  et  $B^{(m)}$ , les coefficients cepstraux, contenant l'information de phase, minimale et maximale du système.

On note, que pour un modèle MA, les coefficients cepstraux  $A^{(m)}$  sont nuls.

On donne ici quelques propriétés du cepstre complexe d'un signal (Oppenheim et Schafer, 1989) :

- i- Le cepstre complexe,  $c_h(m)$ , est à durée infinie et inversement proportionnelle à  $m$ ,
- ii- Les coefficients cepstraux,  $A^{(m)}$  et  $B^{(m)}$ , décroissent exponentiellement avec  $|m|$ ,
- iii- Si  $h(k)$  est réel, alors son cepstre complexe  $c_h(m)$ , est aussi réel,
- iv- Si  $h(k)$  est à phase minimal alors  $B^{(m)} = 0$  pour tout  $m < 0$ . De même pour un système à phase maximale,  $A^{(m)} = 0$  pour tout  $m$  positif,
- v- L'opérateur linéaire de convolution, devient une sommation dans le domaine cepstral.

#### **II.4- Relation entre le bicepstre et les coefficients cepstraux (démonstration en annexe D)**

La relation entre le bicepstre (domaine polycepstral) et les coefficients cepstraux est donnée par la relation suivante [Hatzinakos & Nikias :94]:

$$c_x(m, n) = \begin{cases} \ln|\beta.A| & m = 0, n = 0 \\ -\frac{1}{n} A^{(n)} & m = 0, n > 0 \\ -\frac{1}{m} A^{(m)} & n = 0, m > 0 \\ \frac{1}{m} B^{(-m)} & n = 0, m < 0 \\ \frac{1}{n} B^{(-n)} & m = 0, n < 0 \\ -\frac{1}{n} B^{(n)} & m = n > 0 \\ \frac{1}{n} A^{(-n)} & m = n < 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} A^{(k)} = \sum_{i=1}^{L_1} a_i^k - \sum_{i=1}^{L_3} c_i^k \\ B^{(k)} = \sum_{i=1}^{L_2} b_i^k \end{cases}$$

## II.5- Relation entre le domaine polycepstral et les moments d'ordre supérieur(démonstration en annexe D)

La relation qui existe entre les moments d'ordre trois(03) et le domaine cepstral a été l'une des investigations faites par Pan et Nikias [Hatzinakos & Nikias :94] [Pan & Nikias :88], formulant ainsi la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [A^{(k)} \cdot (R_x(m-k, n) - R_x(m+k, n+k)) + B^{(k)} (R_x(m-k, n-k) - R_x(m+k, n))] = -m.R_x(m, n) \quad (\text{II.21})$$

Il a été mentionné auparavant que le cepstre(coefficients cepstraux) suit une loi en exponentielle, ce qu'il le fait converger vers zéro lorsque l'ordre cepstral soit élevé. De ceci, on ramène la sommation sur l'espace  $[1, +\infty[$  en sommation sur l'espace  $[1, s]$  avec  $s$  constante qui dépendra essentiellement de l'ordre cepstral.

Le système d'équation (II.21) devient, après troncature, comme suit :

$$\sum_{k=1}^s [A^{(k)} \cdot (R_x(m-k, n) - R_x(m+k, n+k)) + B^{(k)} (R_x(m-k, n-k) - R_x(m+k, n))] = -m.R_x(m, n) \quad (\text{II.22})$$

La résolution de ce système d'équation est basée sur la méthode des moindres carrée.

## II.6- Relation entre la réponse impulsionnelle causale et les coefficients cepstraux $\{A^{(k)}\}$

Soit  $i(n)$  la partie causale de la réponse impulsionnelle de  $h(n)$ . Celle ci est donnée par :

$$i(n) = Z_1^{-1} [I(z^{-1})] \quad (\text{II.23})$$

Il existe une relation récursive reliant cette dernière avec les coefficients cepstraux  $A^{(m)}$  et  $B^{(m)}$ , soit [Hatzinakos & Nikias :94] [Pan & Nikias :88] :

$$\begin{cases} i(k) = 0, & \text{pour } k < 0, \\ i(0) = 1, & (\text{normalization}) \\ i(k) = -\frac{1}{k} \sum_{n=2}^{k+1} A^{(n-1)} \cdot i(k-n+1), & \text{pour } k = 1, 2, \dots, L_1. \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

## II.7- Relation entre la réponse impulsionnelle anticausale et les coefficients cepstraux $\{B^{(k)}\}$

La partie anticausale  $o(n)$  de La réponse impulsionnelle  $h(n)$  est définie par :

$$o(n) = Z_1^{-1} [O(z^{-1})] \quad (\text{II.25})$$

Il existe une relation récursive entre la réponse anticausale et le domaine cepstral, qui est donnée par la relation suivante [Hatzinakos & Nikias :94] [Pan & Nikias :88] :

$$\begin{cases} o(k) = 0, & \text{pour } k > 0, \\ o(0) = 1, & (\text{normalization}) \\ o(k) = \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^0 B^{(l-n)} \cdot o(k-n+1), & \text{pour } k = -1, -2, \dots, -L_2. \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

## Méthodes de déconvolution aveugle et d'identification paramétrique basées sur les statistiques d'ordre supérieur(HOS)

### III.1- Introduction

Les techniques de déconvolution aveugle, qui ont attiré beaucoup d'intentions sont celles utilisant les moments ou cumulants d'ordre supérieur à deux des données de la sortie d'un système. Les cumulants d'ordre supérieur ou leur transformée de Fourier, appelée encore « Polyspectre », ont une importance particulière dans la résolution des problèmes de traitement de signal.

La déconvolution aveugle peut être classée en deux familles de méthodes :

- Méthodes paramétriques.
- Méthodes non-paramétriques.

Les méthodes paramétriques sont essentiellement des méthodes utilisant l'algorithme du gradient, l'algorithme d'estimation par la méthode des moindres carrés, ainsi que la méthode de factorisation du système.

Les méthodes nonparamétriques sont essentiellement des méthodes Polycepstrales.

Notre thèse considère essentiellement les méthodes polycepstrales, ceci du fait de leur flexibilité, et la rapidité dans la convergence des résultats. Celles ci ne nécessitent pas la connaissance de l'ordre et du type de système à traiter à priori.

### III.2- Formulation du problème et rôle des statistiques d'ordre supérieur

Le schéma de principe de la déconvolution est illustré par la figure.IV.1.

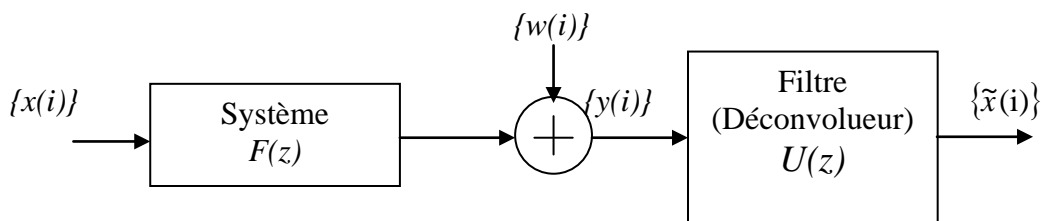


Figure.III.1 :Schéma de principe de la déconvolution

Il est à noter que nous considérons un processus déterministe qui perturbé par un bruit additif. La séquence  $\{y(i)\}$  correspond aux données à traiter est exprimée par la relation (III.1).

$$y(i) = f(i) * x(i) + w(i) = \sum_{k=-L_2}^{L_1} f(k).x(i - k) + w(i), \quad (III.1)$$

Où  $*$  est le produit de convolution. La séquence de données d'entrée  $\{x(i)\}$  est aléatoire, généralement, non-gaussienne, identiquement et indépendamment distribuée (i.i.d). Le bruit additif  $\{w(i)\}$  est à moyenne nulle, gaussien, généralement coloré, et statistiquement

indépendant de  $\{x(i)\}$ . La réponse impulsionnelle  $\{f(k)\}_{k=-L_2, L_1}$  du système est, en général, à phase non-minimale. On suppose  $\{f(k)\}$  change lentement dans le temps d'où pratiquement constante sur une bande de données d'entrées suffisante. La fonction de transfert  $F(z)$  représente la transformée en  $Z$  de  $f(k)$ , soit  $F(z) = \sum_k f(k).z^{-k}$ , qui est supposée factorisable sous la forme suivante [Nita & Hamada :91] :

$$F(z) = A.I(z^{-1}).O(z) \quad (\text{III.2})$$

Avec

$$I(z^{-1}) = \frac{\prod_{k=1}^{L_3} (1 - a_k . z^{-1})}{\prod_{k=1}^{L_4} (1 - c_k . z^{-1})}, \quad |a_k| < 1, |c_k| < 1,$$

$$\text{et } O(z) = \prod_{k=1}^{L_2} (1 - b_k . z), \quad |b_k| < 1.$$

$I(z^{-1})$  est un polynôme à phase minimale, où ses zéros et ses pôles se situent à l'intérieur du cercle unitaire du plan complexe  $Z$ .

$O(z)$  est un polynôme à phase maximale, où ses zéros se situent à l'extérieur du cercle unitaire du plan complexe  $Z$ . Le paramètre  $A$  est le facteur gain qui est constant.

L'objectif de la déconvolution aveugle, avec  $U(z)$  comme étant la fonction de transfert du déconvolveur, est de reconstruire la séquence d'entrée  $\{x(i)\}$  avec une constante de retard  $d$  et une constante de décalage de phase  $\theta$ . La séquence d'entrée estimée  $\{\tilde{x}(i)\}$  peut être formulée par la relation suivante :

$$\tilde{X}(z) = X(z).z^{-d} . e^{j\theta} \quad (\text{III.3})$$

Si on ignore le bruit additif, l'équation (IV.3) peut être réécrite comme suit :

$$F(z).X(z).U(z) = X(z).z^{-d} . e^{j\theta}, \quad (\text{III.4})$$

Le retard inconnu  $d$  n'affecte pas le recouvrement du signal original, et le retard de phase  $\theta$  peut être enlevé par un ajustement adéquat après déconvolution. Aussi, en supposera que  $d$  et  $\theta$  sont nuls, d'où l'équation (III.4) devient :

$$F(z).X(z).U(z) = X(z)$$

d'où 
$$U(z) = \frac{1}{F(z)} \quad (\text{III.5})$$

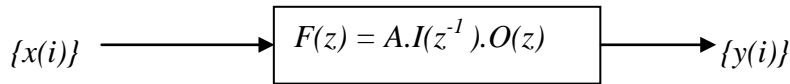
La relation (III.5) montre que le déconvolveur doit au début identifier et estimer les caractéristiques(ou encore les dynamiques) du filtre inverse.

On donne ci-dessous quelques remarques importantes [Chiang & Nikias :90] [Myazaki & Hamada :93] :

- Les méthodes classiques de déconvolution adaptative sont, en général, basées sur les statistiques d'ordre deux, ce qui fait que la déconvolution d'un système à phase non-minimale n'est pas correcte. Ceci est dû à l'incapacité des statistiques d'ordre deux à distinguer la phase minimale de la phase maximale du système.
- Il n'y a aucune solution au problème lorsque la séquence d'entrée suit une loi gaussienne et le système soit à phase non-minimale(PNM).
- Pour résoudre le problème de déconvolution des systèmes à PNM, on fait appel aux statistiques d'ordre supérieur(abréviation en anglais : HOS). Ceci pour leur capacité de préserver les vraies caractéristiques de phase du signal ou système considéré. Toutes les méthodes de déconvolution font intervenir directement ou indirectement des transformations non-linéaires, en utilisant les HOS.

### III.3- Les HOS et leurs propriétés (voir Annexe B)

### III.4- Relation entre la réponse impulsionnelle et les HOS



**Figure III.2 : Système discret de filtrage linéaire .**

Considérons le système linéaire représenté par la figure.III.2. de réponse impulsionnelle invariant  $\{f(k)\}_{k=-L_2, L_1}$ , en son entrée une séquence aléatoire, stochastique  $\{x(i)\}_{i=1,2,\dots}$  à moyenne nulle et dont les éléments sont indépendants et identiquement distribués(i.i.d). La relation reliant la réponse impulsionnelle du système avec les HOS des séquences d'entrée et de sortie, est telle que [Hatzinakos & Nikias :94] :

$$C_{n,y}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \gamma_{n,x} \cdot \sum_{k=-L_2}^{L_1} f(k) \cdot f(k + \tau_1) \dots f(k + \tau_{n-1}). \quad (\text{III.6})$$

où  $C_{n,y}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$  est le cumulants d'ordre n de la séquence de sortie  $\{y(i)\}$  du système et  $\gamma_{n,x}$  est le cumulants d'ordre n de la séquence d'entrée  $\{x(i)\}$  à l'origine ( $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} = 0$ ).

L'équation (III.6) se traduit par le fait que le cumulants d'ordre n de la sortie du système est proportionnel à la corrélation d'ordre n de la réponse impulsionnelle du système.

En appliquant la transformée en z à l'équation (III.6), on obtiendra la relation suivante [Hatzinakos & Nikias :94] :

$$S_{n,y}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \gamma_{n,x} \cdot F(z_1)F(z_2) \dots F(z_{n-1})F(z_1^{-1}z_2^{-1} \dots z_{n-1}^{-1}) \quad (\text{III.7})$$

où  $S_{n,y}(z_1, \dots, z_{n-1})$  est le spectre de puissance d'ordre n.

### III.5- Déconvolution Aveugle basée sur les HOS(algorithme I en annexe E)

Utilisant les équations (III.2) et (III.5) associées à l'algorithme polycepstral, nous aboutissons à l'estimation de la séquence d'entrée  $\{\hat{x}(i)\}$ , selon le schéma de la figure III.3.

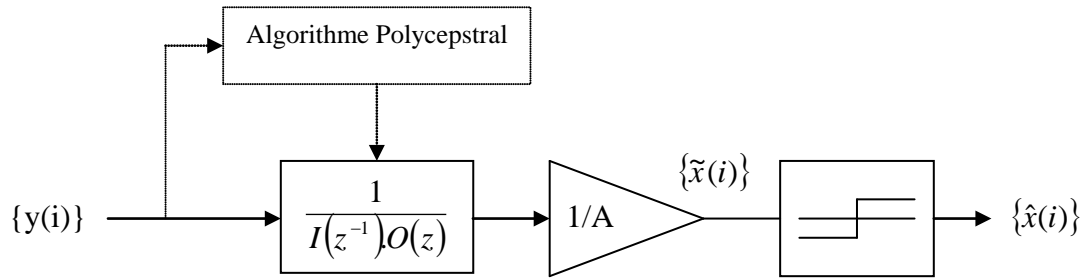


Figure.III.3. Schéma de principe de la déconvolution aveugle

Au chapitre II, il a été mentionné l'existence de relations entre la réponse impulsionnelle (minimale et maximale) et les coefficients cepstraux  $A^{(k)}$  et  $B^{(k)}$ . L'importance de l'utilisation du domaine cepstral dans la déconvolution, réside dans le fait que la réponse impulsionnelle du filtre inverse n'est que la même relation que celle donnée en (II.24) et (II.26) avec une inversion du signe. Ce qui nous conduit à formuler la réponse impulsionnelle du filtre inverse comme suit :

$$\begin{cases} i_{inv}^{(i)}(k) = 0, & \text{pour } k < 0, \\ i_{inv}^{(i)}(0) = 1, & \text{(normalisation)} \\ i_{inv}^{(i)}(k) = -\frac{1}{k} \sum_{n=2}^{k+1} [-A_{(i)}^{(n-1)}] i_{inv}^{(i)}(k-n+1), & \text{pour } k = 1, 2, \dots, L_1. \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{cases} o_{inv}^{(i)}(k) = 0, & \text{pour } k > 0, \\ o_{inv}^{(i)}(0) = 1, & \text{(normalisation)} \\ o_{inv}^{(i)}(k) = \frac{1}{k} \sum_{n=k+1}^0 [-B_{(i)}^{(1-n)}] o_{inv}^{(i)}(k-n+1), & \text{pour } k = -1, -2, \dots, -L_2. \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

On note  $\{i_{inv}^{(i)}(k)\}$  et  $\{o_{inv}^{(i)}(k)\}$ , comme étant la séquence de la réponse impulsionnelle minimale(causale) et maximale(anti-causale) du filtre inverse, respectivement.

La réponse impulsionnelle du filtre inverse  $U(n)$  est le produit de convolution des réponses impulsionnelles minimale et maximale.

$$\begin{aligned}
u_{norm}^{(i)}(k) &= TZ_1^{-1} \left[ \frac{1}{I(z^{-1})O(z)} \right] = i_{inv}^{(i)}(k) * o_{inv}^{(i)}(k) \\
&= \sum_n i_{inv}^{(i)}(n) o_{inv}^{(i)}(k-n), \quad k = -L_2, \dots, 0, \dots, L_1,
\end{aligned} \tag{III.10}$$

L'indice "norm", indique que l'estimé est un estimateur normalisé avec un gain unitaire pour que la condition initiale sur la réponse impulsionnelle minimale et maximale soit réalisée.

Le gain  $A$  est estimé par la relation suivante :

$$|A(i)| \cong \left( \frac{C_{2,y}^{(i)}(0)}{\gamma_{2,x} \cdot \sum_k [u_{norm}^{(i)}(k)]^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{III.11}$$

Avec  $C_{2,y}^{(i)}(0) \cong \gamma_{2,x} \cdot \sum_k (u(k))^2$  l'autocorrélation de la séquence de sortie. Alors que  $\gamma_{2,x}$  est la variance de la séquence d'entrée.

L'estimation de la sortie  $\tilde{x}(i)$  du déconvolveur est obtenue comme produit de convolution entre la réponse impulsionnelle du filtre inverse  $u(i)$ , avec la sortie  $y(i)$ , qui est formulée comme suite :

$$\tilde{x}(i) = \frac{1}{A(i)} \sum_{k=-L_2}^{L_1} u_{norm}^{(i)}(k) y(i-k), \tag{III.12}$$

après détermination de l'estimé  $\tilde{x}(i)$ , la séquence d'entrée  $\{\hat{x}(i)\}$  sera estimé par utilisation de détection par seuil (threshold detection).

### III.6-Identification paramétrique basée sur les HOS (algorithme2 en annexe E)

#### III.6.1-Introduction

Il a été mentionné dans le paragraphe précédent que la méthode cepstrale est une méthode non-paramétrique, ce qui nous amène à faire intervenir une méthode d'identification paramétrique pour rendre cette dernière complète, c'est à dire identifier les paramètres de la réponse impulsionnelle du modèle ainsi que l'entrée du système.

Il est clair que les paramètres d'un modèle MA à phase minimale ne sont que les coefficients de la réponse impulsionnelle  $h(n)$ . Cette dernière est directement identifiable par la méthode cepstrale en utilisant les relations(II.22-26) qui relient les moments d'ordre supérieur et les coefficients cepstraux à la réponse impulsionnelle du système  $H(z)$ . On obtient les coefficients du modèle MA à phase minimale, qui ne sont que les coefficients de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  causale (c'est à dire à phase minimale, noté par  $ie(n)$ ). Dans le cas d'un modèle MA à phase non-minimale, on procède de la même manière que celle utilisée pour le

modèle MA à phase minimale, la seule différence réside au niveau de la réponse impulsionnelle estimée, elle n'est plus causale mais contient une partie causale et une autre partie anti-causale. Ces deux dernières, correspondent aux coefficients à phase minimale  $ie(n)$  et à phase maximale  $oe(n)$  du modèle MA à phase non-minimale, respectivement.

Dans le domaine cepstral, l'identification paramétrique d'un modèle AR (filtre à réponse impulsionnelle infinie) est réalisée, par un filtrage inverse. La réponse impulsionnelle du filtre inverse à savoir sa partie causale représente directement les coefficients du modèle AR causal. L'identification paramétrique d'un modèle AR anti-causal suit la même démarche que celle utilisée pour identifier les coefficients d'un modèle AR causal, sauf que le filtre inverse contiendra dans ce cas l'information sur la partie causale et non-causale du modèle AR anti-causal.

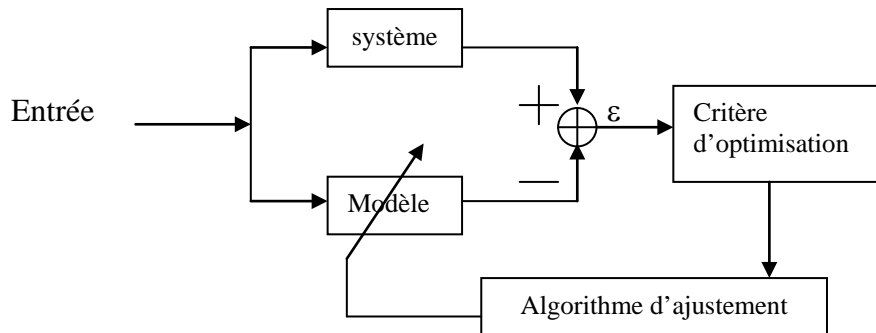
Enfin l'identification paramétrique d'un modèle ARMA(à PM ou à PNM), qui est concerné par les méthodes d'identification décrites par la suite, utilise l'information de phase après avoir identifié la réponse impulsionnelle (réponse en phase et en amplitude) d'un système par la méthode cepstrale, pour aboutir aux coefficients de la réponse impulsionnelle d'un modèle MA à phase équivalente à celle du système ARMA par résolution d'un système d'équations non-linéaires par une méthode d'optimisation, à savoir celle de Levenberg-Marquardt (voir annexe C). Après identification de la réponse impulsionnelle du modèle MA à phase équivalente à celle du système étudié, deux méthodes d'identification des paramètres du système  $H(z)$  sont traitées ; la première méthode utilise la caractéristique d'information de phase, et ceci en utilisant la méthode PET (Phase Equivalente Transform) ou encore « Phase Invariant Transformation », qui est basée sur le fait que la phase reste inchangée en faisant la transformation d'un pôle(zéros) en son image conjugué par rapport au cercle unitaire du plan complexe  $z$  [Chiang & Nikias :90]. La deuxième méthode utilise toujours la réponse impulsionnelle d'un modèle MA à phase équivalente à celle du système à étudier en premier lieu, puis utilise la relation entre la réponse impulsionnelle et les coefficients cepstraux du modèle MA à phase équivalente à celle du système ARMA, où les paramètres seront identifiés par la méthode des moindres carrés récursive ou encore par décomposition UD (décomposition de Bierman) [Ljung :87], les coefficients cepstraux sont alors identifiés, ce qui fait qu'on aboutira à un système dont les coefficients cepstraux, correspondants au modèles  $h_{MA}$  et  $h_{ARMA}$ , et qui sont en relation avec les coefficients des sous modèles ( $h_A$ ,  $h_B$  et  $h_C$ ) qui constituent le modèle ARMA. Après résolution de ce dernier, le modèle est entièrement identifié.

## **III.6.2- Méthode d'identification**

### **III.6.2.1- principe**

Cette méthode cherche à établir une analogie de comportement entre le système physique et le modèle en agissant sur les coefficients de celui-ci, la structure du modèle est choisie préalablement.

La qualité de l'identification est évaluée par un critère mesurant la différence entre la réponse du système et celle du modèle. Les paramètres du modèle sont réajustés par itérations successives jusqu'à la valeur minimale du critère [Ljung & Söderström :71].



**Fig.III-3 :Méthode d'identification**

Comme le montre la figure(III-3), la méthode d'identification du modèle constitue un système en boucle fermée. Le modèle est amélioré à chaque itération, si la convergence est assurée.

### III.6.2.2- Choix du critère et de la méthode d'estimation

Pour juger la qualité de l'identification, nous avons retenu le critère quadratique, car il présente deux avantages : il a une interprétation physique évidente, et il est facile à traiter mathématiquement [Kunt :91] [Lawson & Hanson :74].

Le choix de l'algorithme d'optimisation dépend du modèle considéré et plus particulièrement de l'expression des paramètres dans le critère. Si l'expression des paramètres dans le critère est linéaire, les algorithmes seront fondés sur des méthodes statistiques (du type des moindres carrés), par contre si l'expression est non linéaire, les algorithmes seront développés autour de la programmation non linéaire.

### III.6.2.3- Quelques aspects pratiques de l'identification

Lorsqu'on met en œuvre les algorithmes d'identification, plusieurs aspects pratiques doivent être pris en considération, entre autres, on peut citer les points suivants :

#### III.6.2.3.a- Choix du modèle

Dépend essentiellement de la nature du signal à traiter, par exemple pour la parole il est plus approprié d'utiliser un modèle de type AR.

#### III.6.2.3.b- Choix de l'ordre d'un modèle

Lorsqu'on choisit un modèle particulier, la question la plus délicate réside dans le choix de l'ordre de ce dernier. Il est bien évident qu'il n'existe pas de réponse générale à cette question.

### III.6.3-Méthode adaptative de phase [Miyazaki & Hamada :93a][Miyazaki & Hamada :93b]

La méthode adaptative de phase est basée sur l'exploitation de la réponse en phase du système. Cependant, une estimation des paramètres ou de la réponse impulsionnelle dépend essentiellement de la minimisation de l'erreur de phase  $\Delta\theta(w)$ , qui correspond à la déviation ou écart entre la vraie phase  $\theta(w)$  et la phase estimé  $\hat{\theta}(w)$ .

Un développement mathématique adéquat, basé sur la propriété de symétrie pour un signal réel dans le domaine fréquentiel, nous fait aboutir au résultat suivant :

$$\sum_{n=-q_0}^{q_i} h_{MA}(n) \cdot \sin(nw + \theta(w)) = 0, \quad \forall w. \text{ avec } k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{III.13})$$

Où  $q_i$  représente l'ordre de la partie MA à phase minimale. L'indice  $q_0$  représente l'ordre de la partie MA à phase maximale plus l'ordre de la partie AR.

L'erreur de phase est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta\theta(w) &= \theta(w) - \hat{\theta}(w) \\ \Rightarrow \theta(w) &= \Delta\theta(w) + \hat{\theta}(w), \end{aligned}$$

Remplaçant  $\theta(w)$  dans l'équation (III.13), on aura :

$$\sum_{n=-q_0}^{q_i} h_{MA}(n) \cdot \sin(nw + \Delta\theta(w) + \hat{\theta}(w)) = 0, \quad \forall w. \text{ avec } k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{III.14})$$

On remplace l'erreur de phase  $\Delta\theta(w)$  par sa différentielle de phase  $\delta\theta(w)$  car l'erreur de phase est supposée très petite devant l'unité.

On procède à une normalisation des grandeurs à estimer. D'où, après des transformations trigonométriques adéquates, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\delta\theta(w) = \frac{\sum_{n=-q_0}^{q_i} h_{MA}(n) \cdot \sin(nw + \hat{\theta})}{\sum_{n=-q_0}^{q_i} h_{MA}(n) \cdot \cos(nw + \hat{\theta})}, \quad \text{avec } w = \frac{2\pi k}{N} \text{ et } (k = 0, \dots, N-1), \quad (\text{III.15})$$

$$\text{avec } \begin{cases} |\delta\theta| \ll 1, \\ h_{MA}(0) = 1, \end{cases}$$

Les coefficients  $h_{MA}(n)$  recherchés minimisent l'erreur quadratique de  $\delta\theta(w)$ , soit :

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\delta\theta(k)|^2 \rightarrow \text{MIN} \quad (\text{III.16})$$

Nous avons un problème de minimisation (optimisation) d'un système non linéaire. Celui-ci peut être résolu par une des méthodes d'optimisation, telle que celle de Levenberg-Marquardt [Dennis & Schnabel :83].

La méthode adaptative de phase sera utilisée comme point de départ pour les deux méthodes d'identifications considérées dans ce qui suit.

#### III.6.4- Méthode d'identification basée sur l'adaptation d'amplitude

Après avoir identifié la réponse impulsionnelle  $h_{MA}(n)$ , à phase équivalente à celle du système à traiter, par résolution d'un système non-linéaire, en ayant seulement l'information de phase, la propriété de la transformation invariante de phase (TIP) est utilisée pour qu'il y est une adaptation d'amplitude sachant que la réponse en phase reste inchangée. La TIP est donnée par la relation suivante :

$$\arg(1 - a.z) \Big|_{z=\exp(jw)} = \arg\left(\frac{1}{1 - a^* \cdot z^{-1}}\right) \Big|_{z=\exp(jw)} \quad (\text{III.17})$$

Pour une généralisation de la méthode, on utilise le modèle ARMA à PNM dans tout ce qui suit.

La fonction de transfert du système  $H_{PEMA}(z)$  à phase équivalente à celle de  $H(z)$  est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} H_{PEMA}(z) &= \sum_{i=-(q_0+p)}^{q_i} h_{PEMA}(i) \cdot z^{-i} \\ &= \prod_{i=1}^{q_i} (1 - \hat{a}_i \cdot z^{-1}) \prod_{i=1}^{q_0} (1 - \hat{b}_i \cdot z) \prod_{i=1}^p (1 - \hat{c}_i \cdot z) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

On utilise la transformation invariante de phase  $2^{n_r+n_i/2}$  fois, avec  $n_r$  le nombre de zéros et  $n_i$  le nombre de zéros complexes, jusqu'à l'obtention d'une fonction de transfert dont la réponse en amplitude coïncide avec celle de  $H(z)$ . A la fin, on obtient une totale identification des paramètres du système  $H(z)$  donnée par :

$$\hat{H}(z) = \frac{\prod_{i=1}^{q_i} (1 - \hat{a}_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^p (1 - \hat{c}_i \cdot z^{-1})} \prod_{i=1}^{q_o} (1 - \hat{b}_i \cdot z) \quad (\text{III.19})$$

### III.6.5- Méthode d'identification basée sur la propriété cepstrale

Cette deuxième méthode d'identification paramétrique utilise la méthode d'adaptation de phase, traitée ultérieurement. Le principe de cette méthode est basée sur la relation convolutionnelle entre la réponse impulsionnelle  $h_{MA}(n)$ , à phase équivalente à celle du système traité  $h(n)$ , et les coefficients cepstraux du système  $H_{MA}(z)$ .

On utilise la relation suivante qui relie la réponse impulsionnelle à ses coefficients cepstraux (Annexe D) :

$$\sum_{k=1}^s [A^{(k)} \cdot h_{MA}(n-k) - B^{(k)} \cdot h_{MA}(n+k)] = -n \cdot h_{MA}(n), \quad (\text{III.20})$$

Avec  $A^{(k)}$  et  $B^{(k)}$  sont les coefficients cepstraux du système  $H_{MA}(z)$ .

Comme il a été mentionné, dans le chapitre II, les coefficients cepstraux et les paramètres du système  $H(z)$  sont reliés par la relation (II.19), soit :

$$\begin{cases} A^{(m)} = \sum_{i=1}^{L_1} a_i^m - \sum_{i=1}^{L_3} c_i^m = C_A^{(k)} - C_C^{(k)} \\ B^{(m)} = \sum_{i=1}^{L_2} b_i^m = C_B^{(k)} \end{cases}, \quad (\text{III.21})$$

et pour le système à phase équivalent  $H_{MA}(z)$ , on a :

$$\begin{cases} A^{(m)} = \sum_{i=1}^{L_1} a_i^m = C_A^{(k)} \\ B^{(m)} = \sum_{i=1}^{L_2} b_i^m + \sum_{i=1}^{L_3} c_i^m = C_B^{(k)} + C_C^{(k)} \end{cases}, \quad (\text{III.22})$$

Il est clair que, connaissant les coefficients cepstraux  $A^{(k)}$ ,  $B^{(k)}$ ,  $A^{(k)}$  et  $B^{(k)}$ , on peut estimer les coefficients cepstraux des composants du système  $H(z)$ ,  $C_A^{(k)}$ ,  $C_B^{(k)}$ ,  $C_C^{(k)}$ , par la relation tirée des équations (III.21) et (III.22), soit :

$$\begin{bmatrix} C_A^{(k)} \\ C_B^{(k)} \\ C_C^{(k)} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(k)} \\ B^{(k)} \\ A^{(k)} \\ B^{(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

La résolution du système d'équation (III.23) et l'utilisation de la relation de convolution (Annexe D) entre la réponse impulsionnelle de chaque partie du système,  $h_A(k)$ ,  $h_B(k)$  et  $h_C(k)$ , et les coefficients cepstraux  $C_A^{(k)}$ ,  $C_B^{(k)}$ ,  $C_C^{(k)}$ , respectivement, nous fait aboutir au résultat final qui est l'estimation des paramètres du modèle  $H(z)$  :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n C_A^{(k)} h_A(n-k) = -n h_A(n), \\ \sum_{k=1}^n C_B^{(k)} h_B(n-k) = -n h_B(n), \\ \sum_{k=1}^n C_C^{(k)} h_C(n-k) = -n h_C(n), \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

avec la condition de normalisation :

$$h_A(0) = h_B(0) = h_C(0) = 1.$$

# SIMULATION ET APPLICATION A LA SISMIQUE

## IV.1- Simulation d'une trace sismique

La trace sismique simulée suit une fonction de distribution qui est non-gaussienne dont le degré d'asymétrie par rapport à la loi normale (skewness)  $\beta = 3$  et de moyenne nulle, la longueur de la trace simulée est de 1024 échantillons. L'ordre cepstral dépend du type et de l'ordre du modèle. Enfin, des rapports signal sur bruit de 100dB, 20dB et 5dB sont considérés.

## IV.2- Génération du bruit additif

### IV.2.1- Bruit blanc

Le bruit généré est un bruit blanc gaussien, c'est à dire un bruit dont le spectre est constant dans la bande spectrale du système à étudier.

### IV.2.2- Filtrage anti-repliement

Le passage du bruit additif à travers un filtrage anti-repliement est nécessaire pour éviter le problème de recouvrement. Pour cela, la condition de Schannon doit être vérifiée.

## IV.3- Applications

Des comparaisons de performances numériques des deux méthodes de traitements dans un milieu non bruité, ont conduit à des résultats où l'erreur d'estimation tendait à être négligeable. Cependant, seule la présence du bruit pourra expliquer la dégradation des résultats que l'on observera dans les exemples suivants. Nous avons, d'autre part, testé le comportement de nos méthodes devant un résidu blanc.

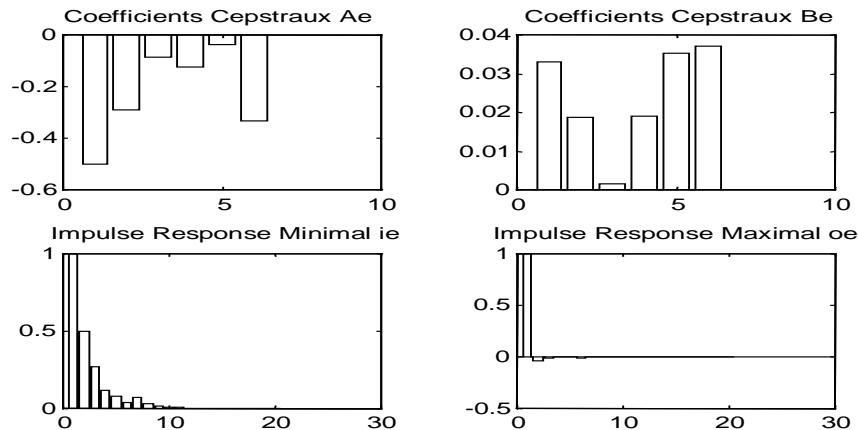
### IV.3.1- Modèle AR causal

$$y(i) = 0.5y(i-1) + e(i)$$

L'ordre cepstral est de  $N_{\text{ceps}} = 6$ .

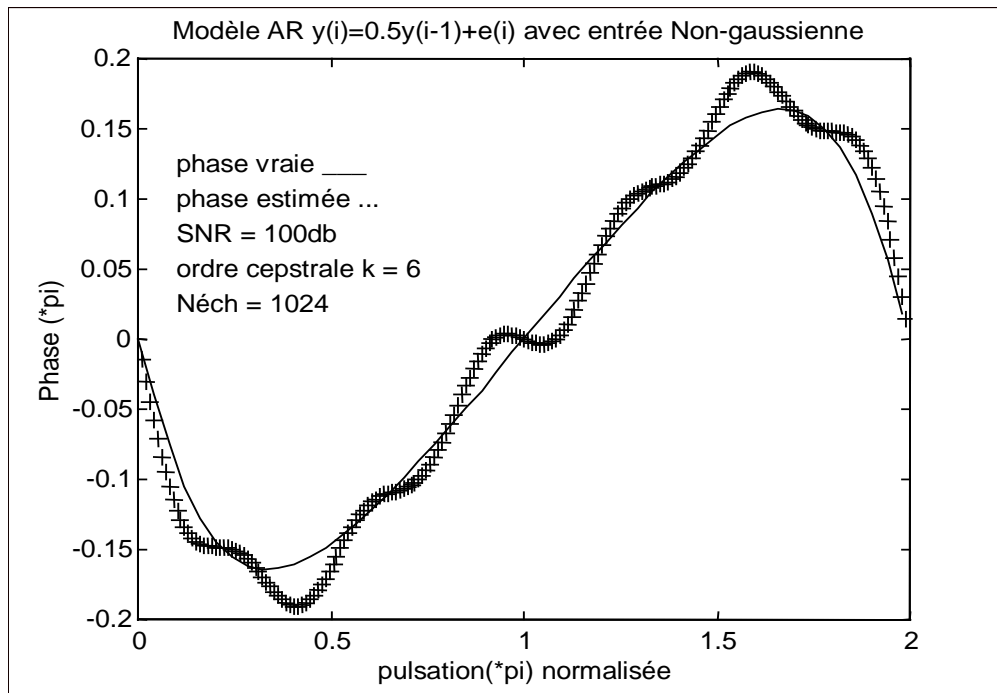
Les résultats sont reportés sur le tableau TabIV.1, sur lequel les estimations sont effectivement comparable.

Les figures suivantes correspondent à un rapport signal sur bruit de 100dB.

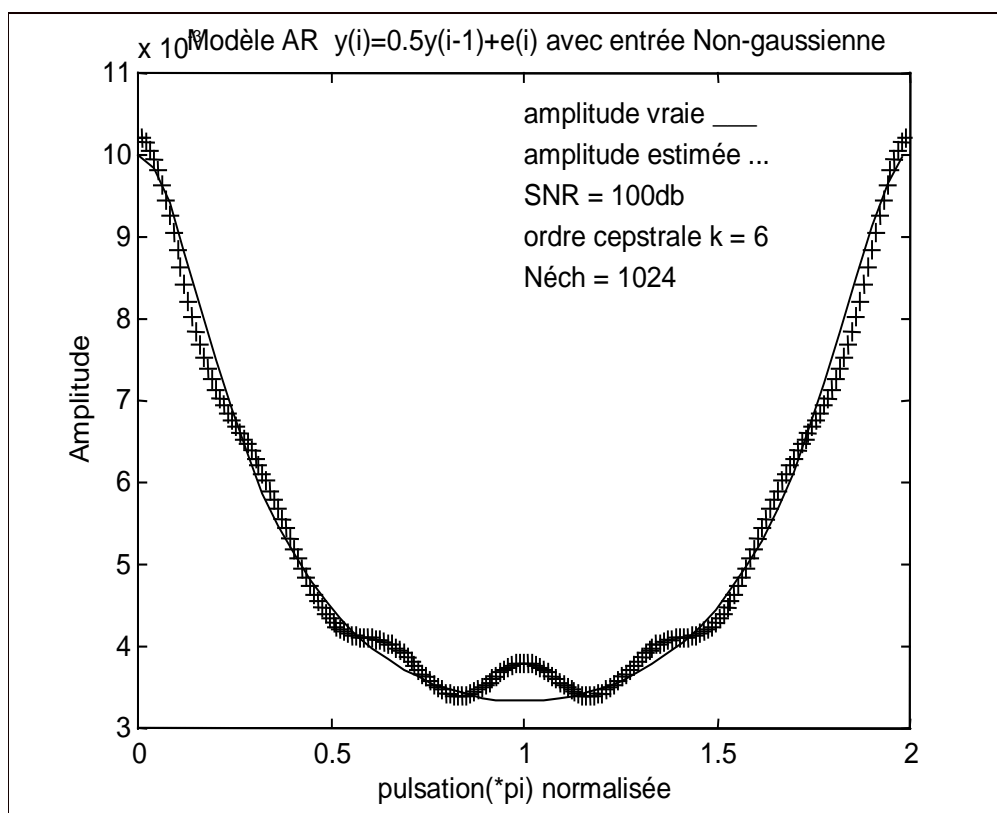


FigIV.1. Coefficients cepstraux et réponse impulsionnelle du système

Comme il a été mentionné au chapitre III, que la réponse impulsionnelle d'un système AR causal, identifiée par méthode cepstrale, est aussi causale. Cette propriété est vérifiée par la figure IV.1.



**FigIV.2.** Réponse en phase de la réponse impulsionnelle du système AR(causal).



**FigIV.3.** Réponse en amplitude de la réponse impulsionnelle du système AR(causal).

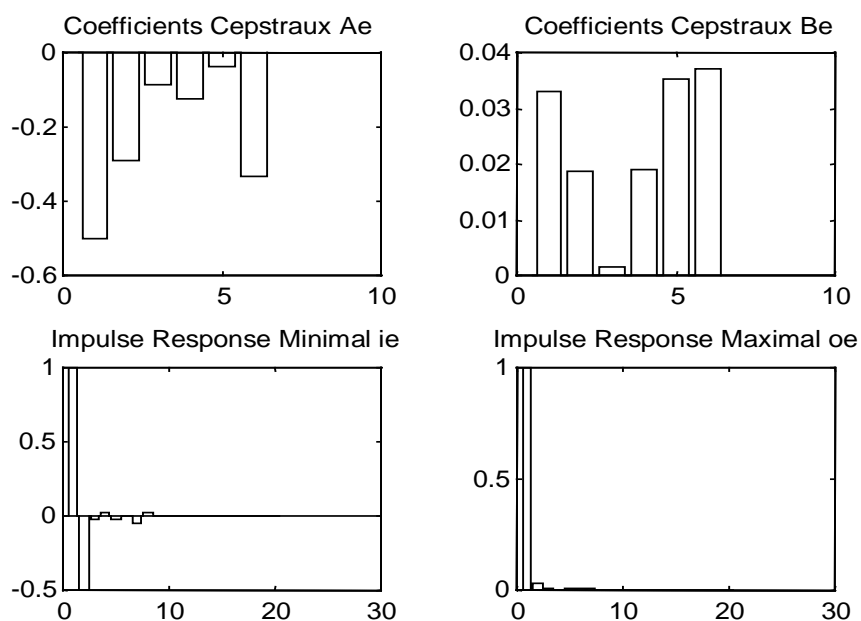
La figure IV.1 montre clairement une des propriétés du domaine cepstral appliqué à une classe de systèmes causaux. Cette propriété stipule la conservation de la causalité du système par le domaine cepstral.

Les figures IV.2 et IV.3, représentent la réponse en phase et la réponse en amplitude, respectivement. Le but d'une représentation sur une bande de fréquence de  $2\pi$  n'est utilisé que pour mentionner la propriété de périodicité des spectres de phase et d'amplitude.

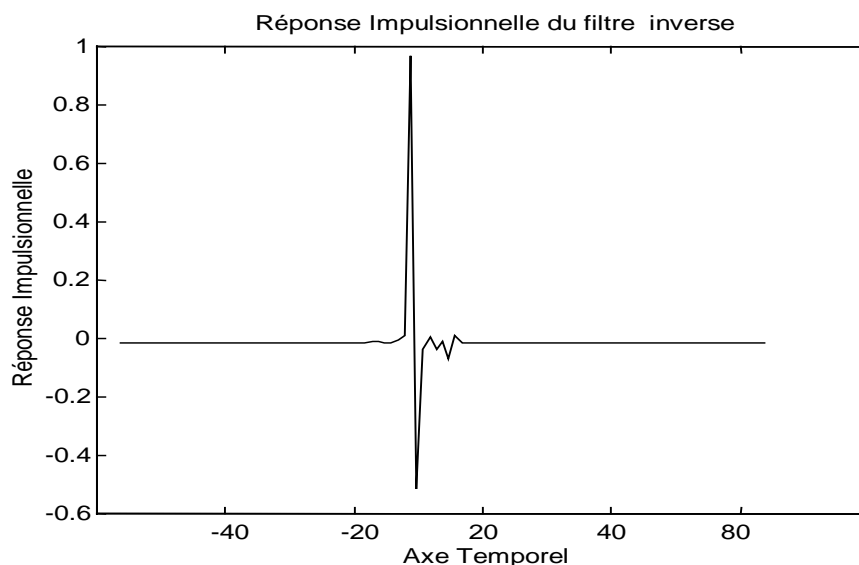
Il est facile d'interpréter ces graphes et ceci grâce à la simplicité du système. Une constante à la pulsation zéro avec une phase nulle représente un pôle réel.

A cette étape nous avons seulement identifié la réponse impulsionnelle (phase et amplitude) par la méthode cepstrale. Cette dernière, est une méthode non-paramétrique.

L'étape suivante correspond à l'identification du filtre inverse, à partir duquel les paramètres du modèle AR sont identifiés. Cette dernière est illustrée par les deux figures suivantes(figures IV.4 et IV.5).

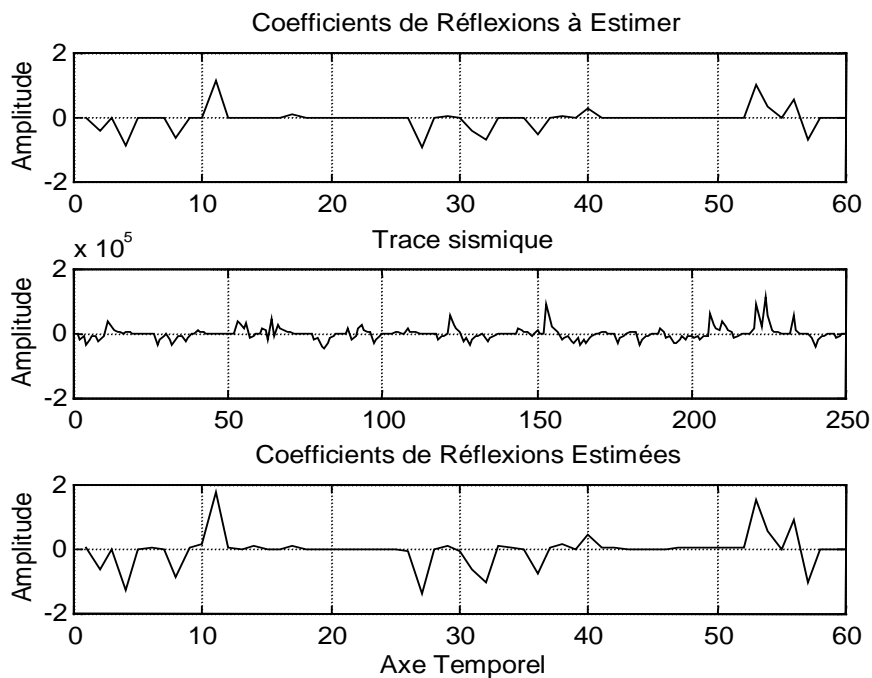


**FigIV.4.** Coefficients cepstraux et réponse impulsionnelle du filtre inverse du système.



**FigIV.5.** Réponse impulsionnelle du filtre inverse du système AR(causal).

Les figures IV.4 et IV.5 représentent la réponse impulsionnelle du filtre inverse. Il est montré qu'à partir d'un filtre inverse, on identifie facilement un système AR causal ou encore un système AR non causal. Le système traité est un système causal de pôle égal à 0.5, on voit clairement d'après la figure.IV.4 la partie de la réponse impulsionnelle minimale ou encore causal possède une impulsion de 0.5 d'amplitude et ailleurs nulle pour toute la partie non-causale. Remarque, la normalisation dans le traitement est indispensable, cette dernière est mentionnée dans le chapitreIII.



**FigIV.6.** Estimation des coefficients de réflexion par déconvolution.

La figureIV.6 illustre bien le résultat de la déconvolution, ceci en convoluant la séquence de données à traiter et la réponse impulsionnelle du filtre inverse.

Les figures IV.4 et IV.5 montrent qu'un filtre inverse d'un système causal est aussi causal. Les paramètres du système AR causal sont illustrés par le tableau (Tab.IV.1).

	Paramètres réels	S/N = 100dB	S/N = 20Db	S/N = 5dB
$a_0$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$a_1$	-0.5000	-0.5518	-0.5649	-0.4544
$a_2$	-	-0.0106	-0.0092	-0.0162
$a_3$	-	0.0911	0.0988	0.0285
$a_{-1}$	-	-0.0108	0.0049	0.0156
$a_{-2}$	-	-0.0177	0.0048	0.0412
$a_{-3}$	-	-0.0159	-0.0268	-0.0731

**Tab.IV.1.** Estimation des paramètres du modèle AR causal

### IV.3.2- Modèle AR(Anti-Causal)

Les paramètres utilisés sont les suivants :

$a_0 = 1$  ;  $a_1 = 0.3524$  ;  $a_2 = 0.1259$  ;  $a_{-1} = 0.5032$  ;  $a_{-2} = 0.2546$  ;  $a_{-3} = 0.1293$  ;  
 $\beta = 3$  ;  $N_{\text{éch}} = 1024$  ;  $N_{\text{ceps}} = 6$ .

On utilise la même procédure que pour un modèle AR(causal). Les paramètres estimés du modèle AR non causal sont fournis au tableau (Tab.IV.2).

	Paramètres réels	S/N = 100Db	S/N = 20dB	S/N = 5dB
$a_0$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$a_1$	0.3524	0.3254	0.3157	0.3439
$a_2$	0.1259	0.0963	0.0988	-0.0348
$a_3$	-	0.0854	0.0866	-0.1640
$a_{-1}$	0.5032	0.4843	0.5103	0.4879
$a_{-2}$	0.2546	0.3026	0.3312	0.3872
$a_{-3}$	0.1293	0.1445	0.1534	0.2364
$a_{-4}$	-	0.0784	0.0693	0.2053

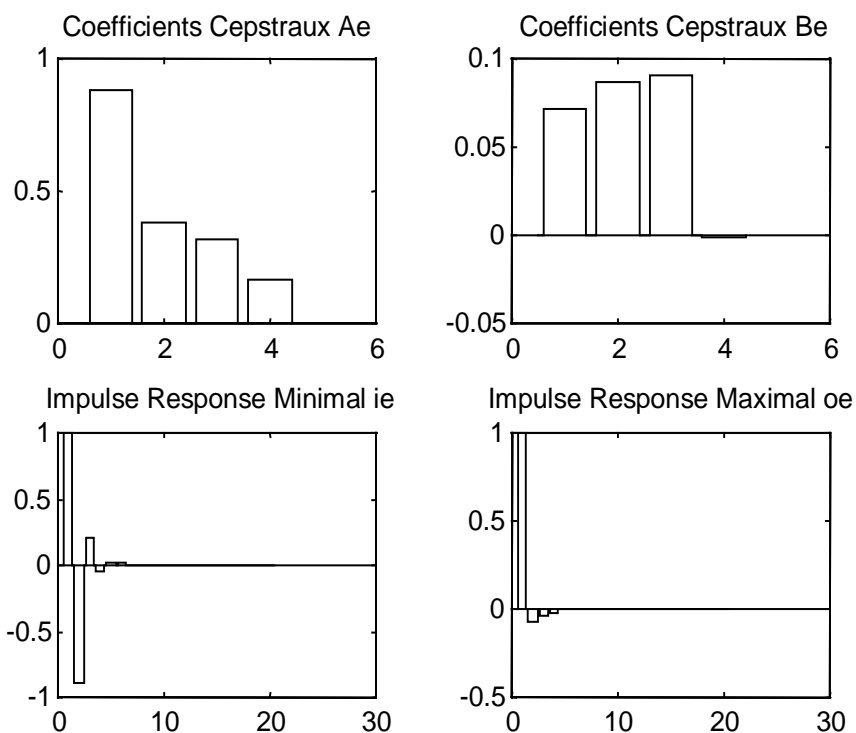
**Tab.IV.2.** Estimation des paramètres du modèle AR non causal

### IV.3.3- Modèle MA à Phase Minimale

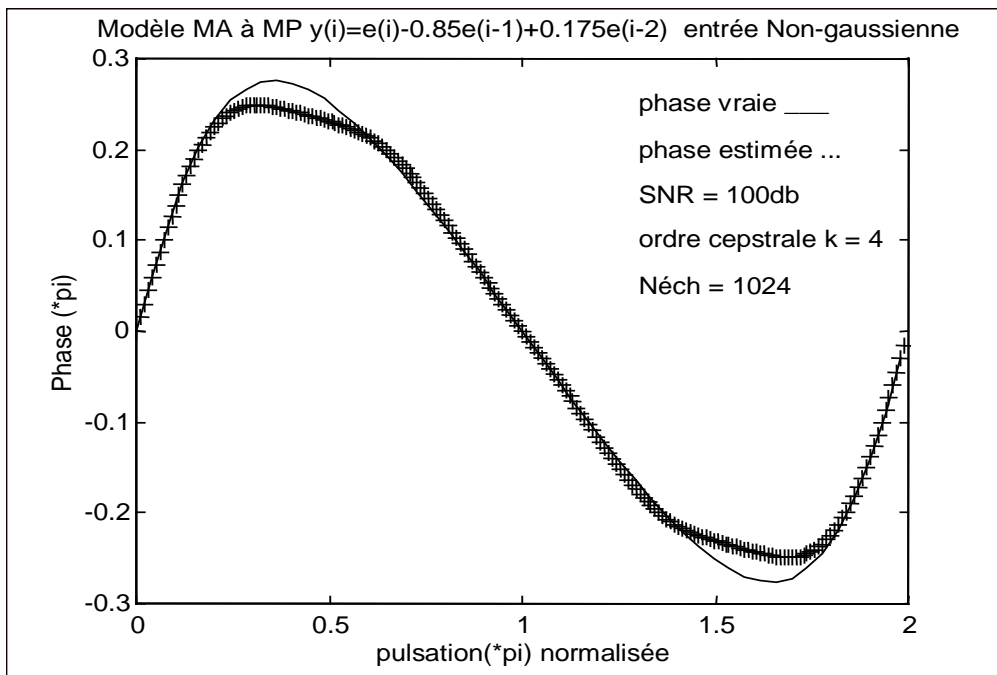
$$y(i) = e(i) - 0.85e(i-2) + 0.175e(i-3)$$

$\beta = 3$  ;  $N_{\text{éch}} = 1024$  ;  $N_{\text{ceps}} = 4$ .

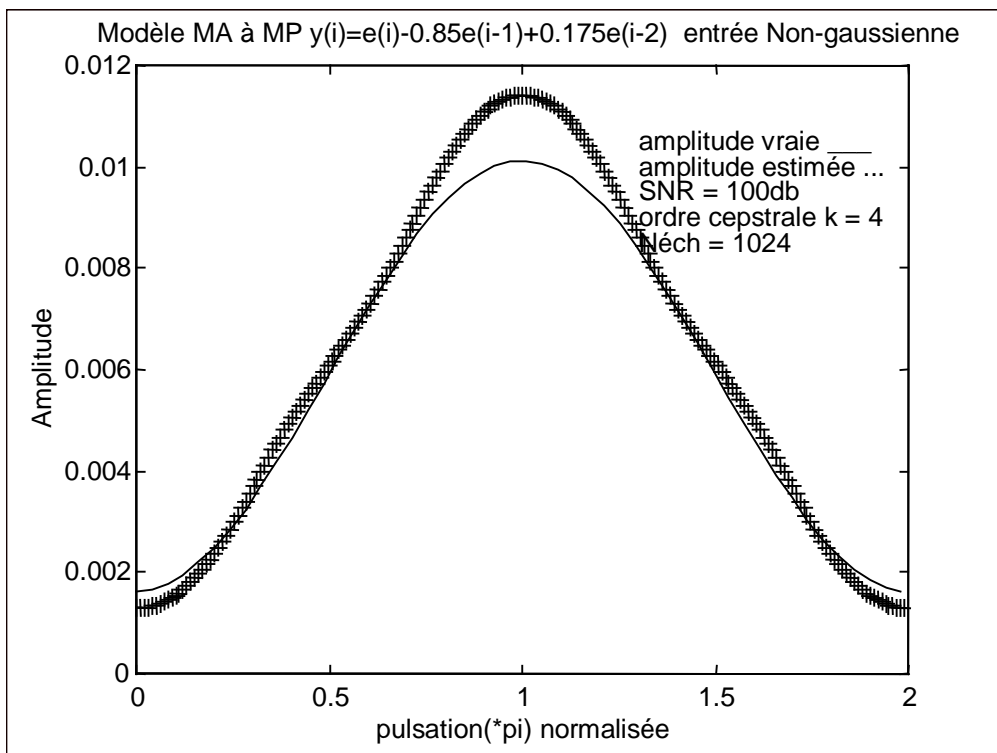
Rapport signal sur bruit est de 100dB.



**FigIV.7.** Coefficients cepstraux et réponse impulsionnelle du filtre inverse du système.

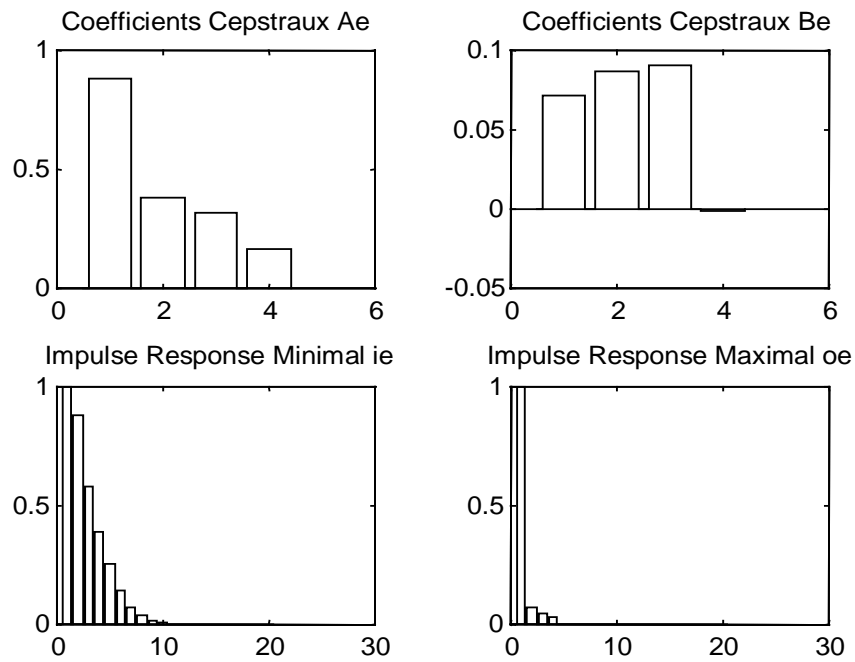


**FigIV.8.** Réponse en phase de la réponse impulsionnelle du système.

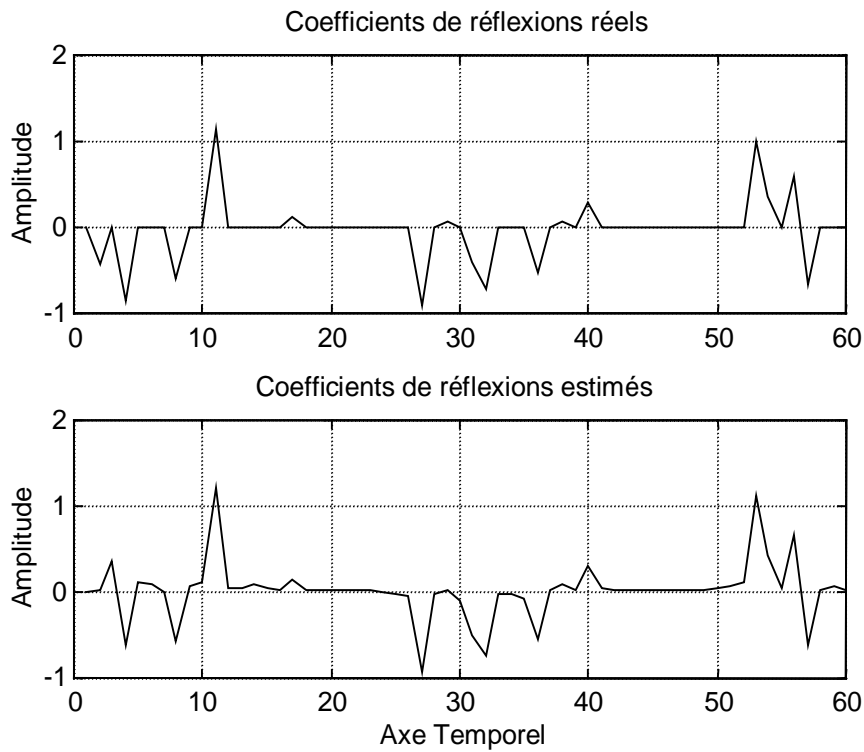


**FigIV.9.** Réponse en amplitude de la réponse impulsionnelle du système.

Les mêmes interprétations que celle de la figures IV.4 et IV.5, peuvent être données pour les figuresIV.8 et IV.9. On voit que l'estimé coïncide moyennement avec le modèle à estimer.



**FigIV.10.** Réponse impulsionnelle du filtre inverse.



**FigIV.11.** Estimation des coefficients de réflexions par déconvolution.

Le tableau (Tab.IV.3) donne les paramètres estimés par la méthode cepstrale pour des rapports signal sur bruit (SNR) de 100dB, 20dB et 5dB.

	Paramètres réels	S/N = 100dB	S/N = 20dB	S/N = 5dB
$b_0$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$b_1$	-0.8500	-0.9002	-0.9316	-1.0743
$b_2$	0.1750	0.2496	0.2443	0.2060
$b_3$	-	0.0756	-0.0623	0.0655
$b_{-1}$	-	0.0522	0.0296	0.0433
$b_{-2}$	-	0.0075	0.0048	-0.0206
$b_{-3}$	-	-	-	-

**Tab.IV.3.** Estimation des paramètres du modèle MA à phase minimale.

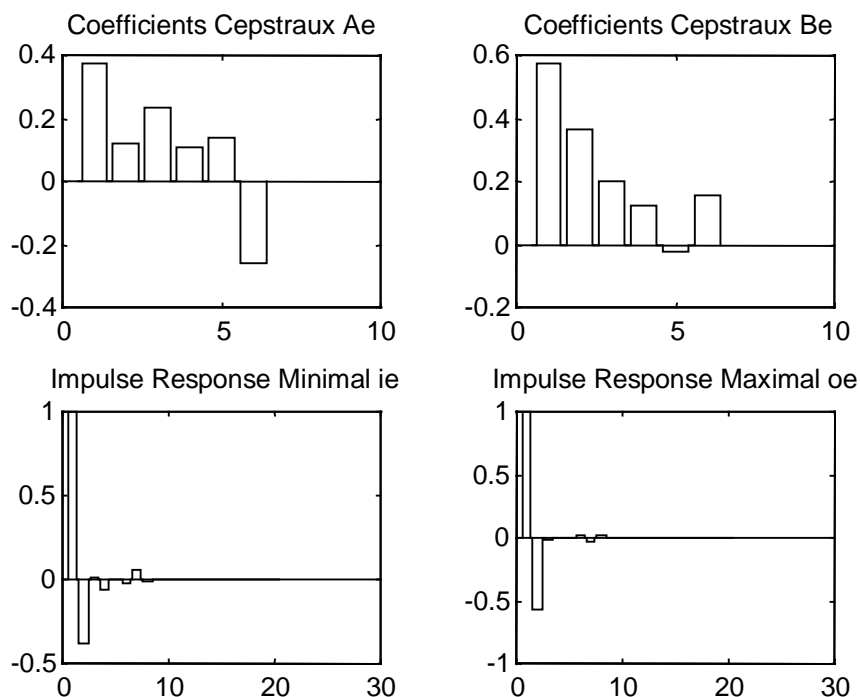
### IV.3.4- Modèle MA à Phase Non-Minimale

Les paramètres utilisées sont les suivants :

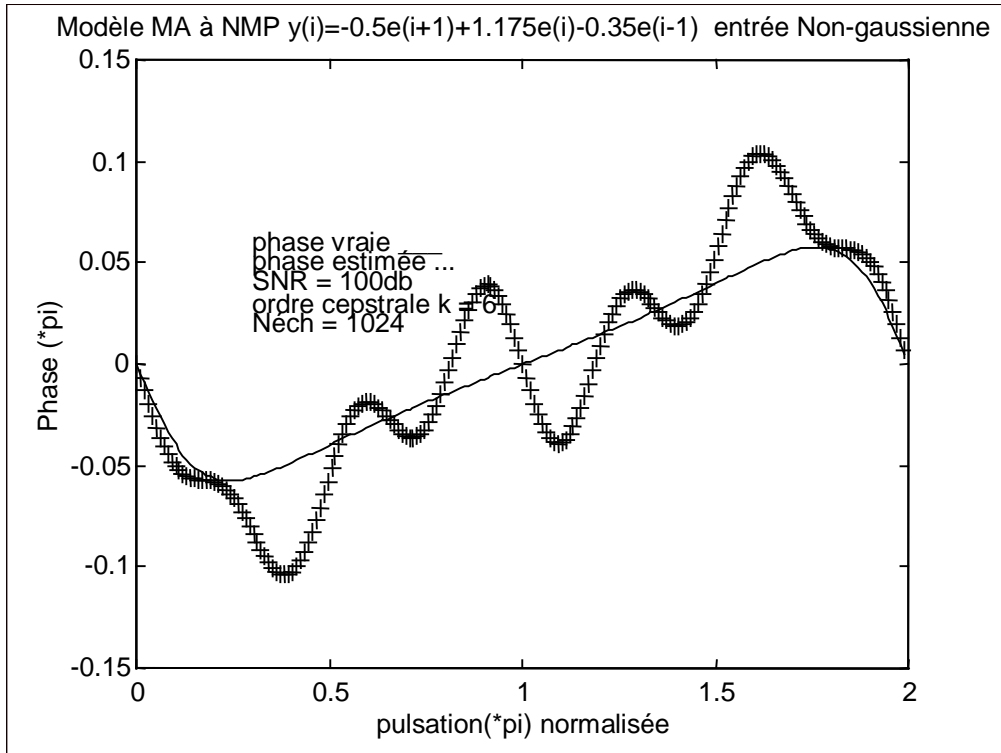
$$a_0 = 1 ;$$

$$b_0 = 1 ; b_{-1} = -0.35 ; b_{-2} = -0.5 ;$$

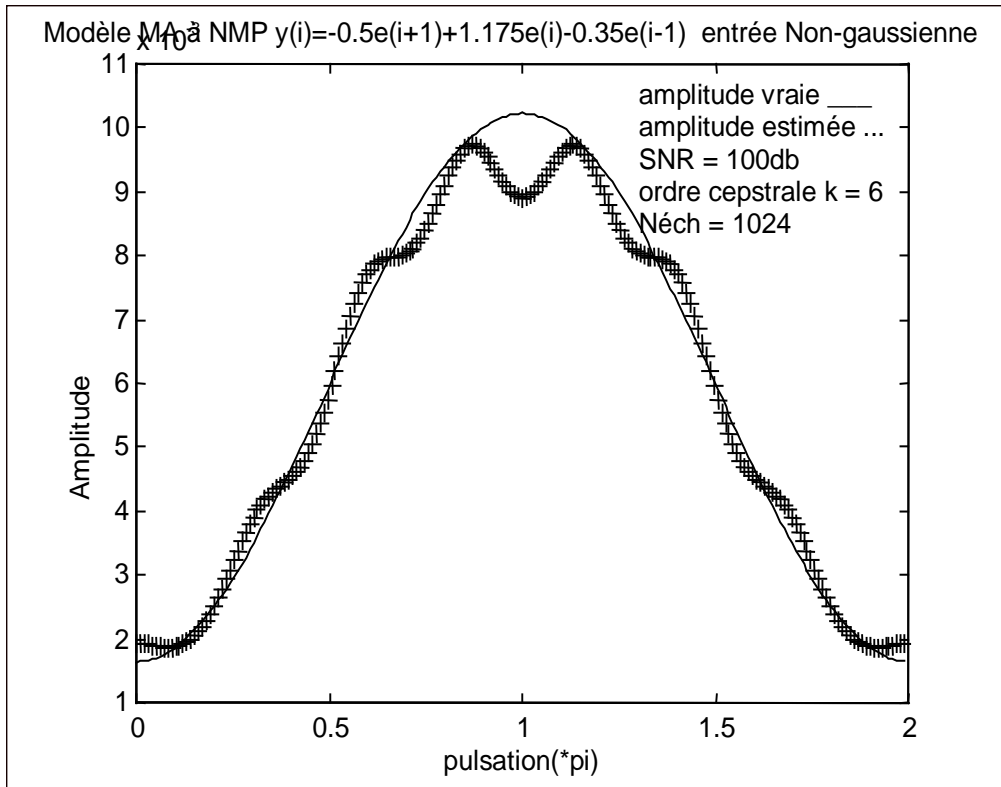
$$\beta = 3 ; N_{\text{éch}} = 1024 ; N_{\text{ceps}} = 6.$$



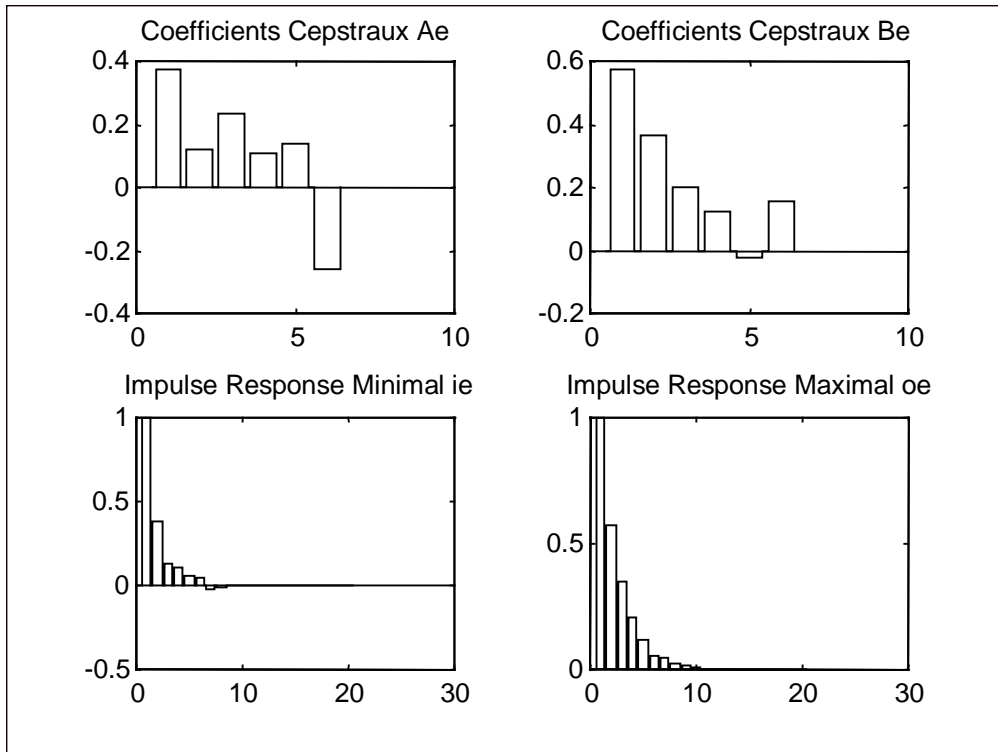
**FigIV.12.** Coefficients cepstraux et réponse impulsionnelle du filtre inverse du système.



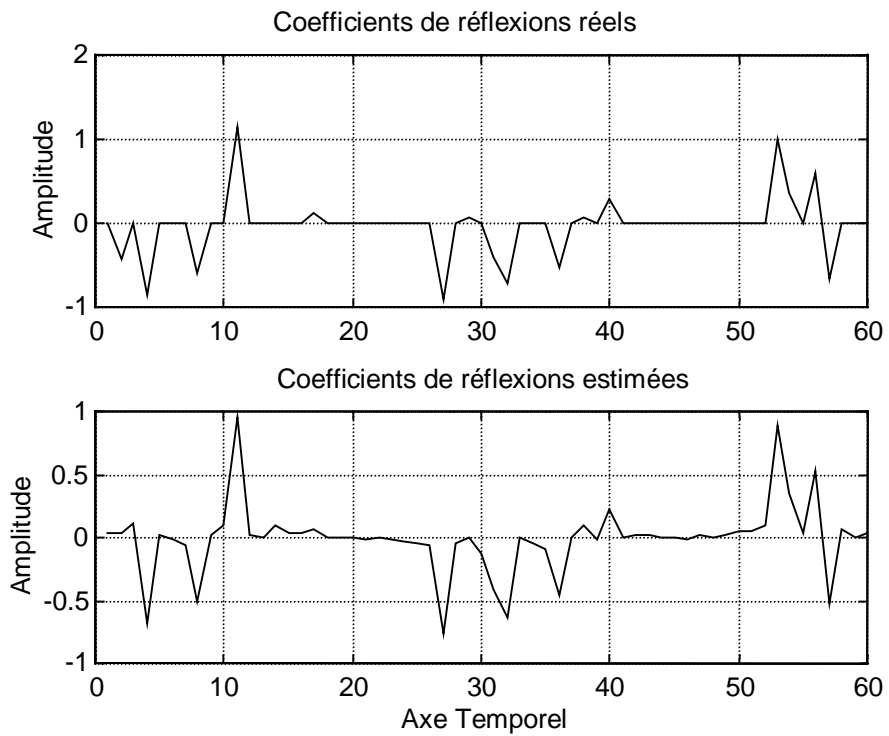
**FigIV.13.** Réponse en phase de la réponse impulsionnelle du système.



**FigIV.14.** Réponse en amplitude de la réponse impulsionnelle du système.



**FigIV.15.** Réponse impulsionnelle du filtre inverse du système.



**FigIV.16.** Estimation des coefficients de réflexion par Déconvolution.

Les figures IV.13 et IV.14, correspondent à la représentation de phase et d'amplitude, respectivement. Il apparaît des lobes ou des ondulations dans ces informations et ceci nous donne une idée sur l'existence du problème de surdimensionnement du modèle estimé. Ce problème est le résultat d'une part de la non richesse en information de la séquence de donnée à traiter qui est dû à la longueur de cette séquence d'une part, et à la présence d'un bruit additif qui contribue dans la formation de spectre de la séquence à traiter, d'une autre part. On donne le tableau d'estimation des paramètres du système.

	Paramètres Réels	S/N = 100dB	S/N = 20dB	S/N = 5dB
b(0)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
b(1)	-0.3500	-0.3254	-0.4017	-0.2398
b(2)	-	0.0096	0.0114	0.0125
b(3)	-	-0.0572	-0.0808	-0.0235
b(-1)	-0.5000	-0.4842	-0.4755	-0.4674
b(-2)	-	-0.0681	-0.0442	0.0193
b(-3)	-	0.0350	0.0515	-0.0117

**Tab.IV.4.** Estimation des paramètres du modèle MA(à Phase Non-Minimale).

D'après les quatre exemples donnés précédemment pour des modèles de types AR(causal ou anti-causal) et MA(à PM ou PNM) , l'identification paramétrique et la déconvolution se fait efficacement par la méthode cepstrale, vu la longueur de la séquence à traiter.

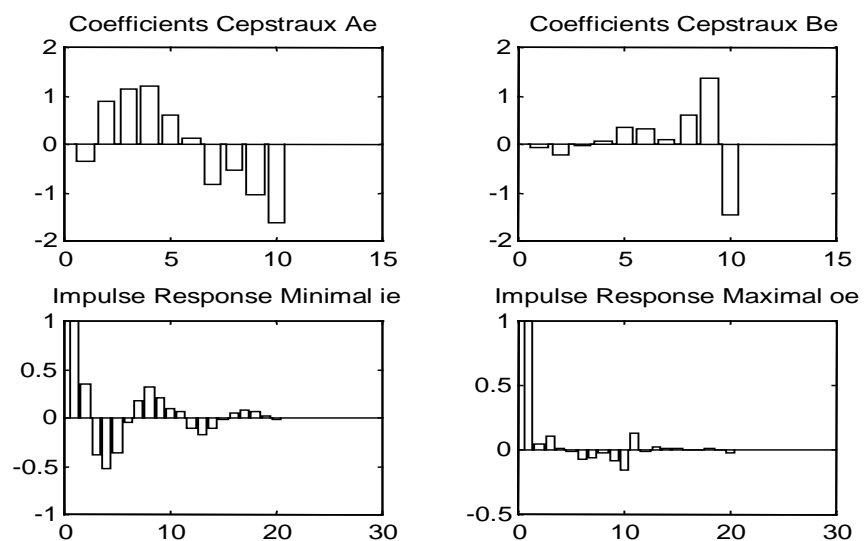
### IV.3.5- Modèle ARMA(à Phase Minimale)

$$H(z) = \frac{1 - 1.5z^{-1} + 0.685z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.7z^{-2} - 0.5z^{-3}}$$

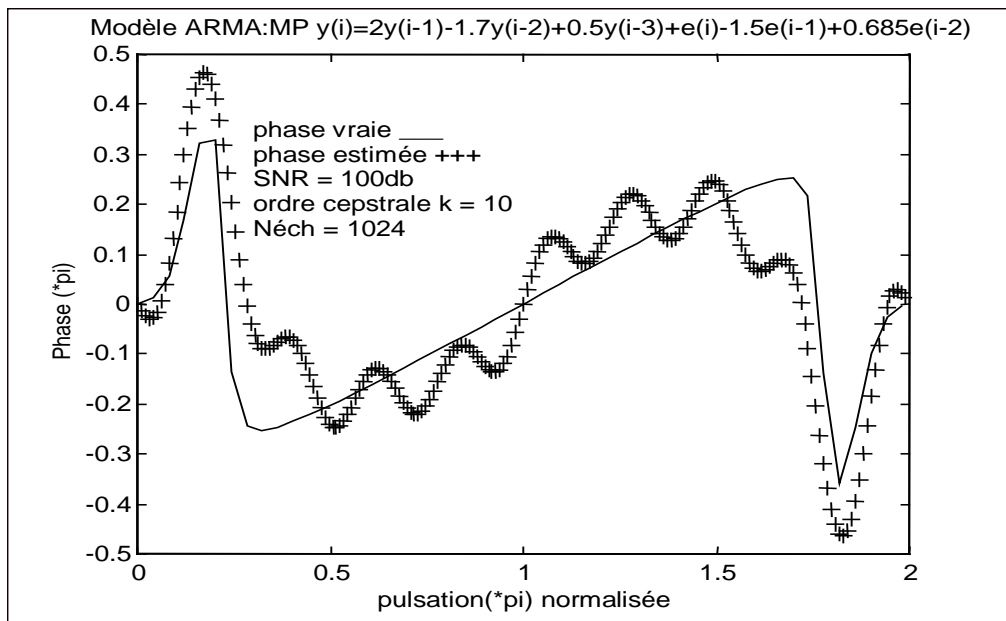
Avec pôles : 0.5590, 0.7205  $\pm$  j0.6127

Et zéros : 0.75  $\pm$  j0.35

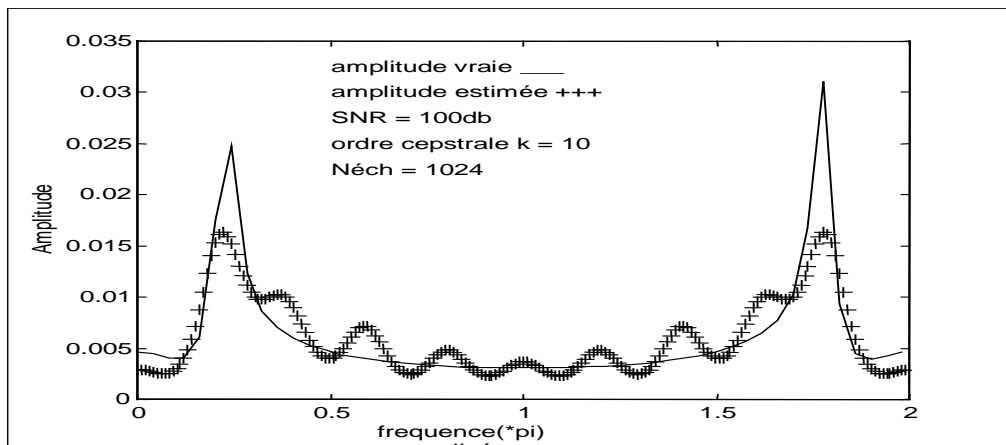
$N_{\text{éch}} = 1024$ ,  $N_{\text{cep}} = 10$ .



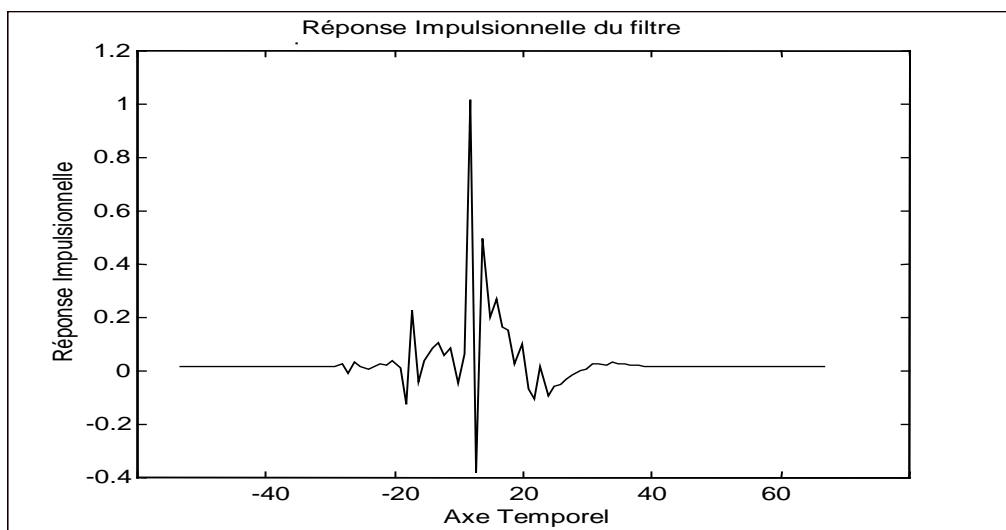
**FigIV.17.** Les coefficients cepstraux et la réponse impulsionnelle du filtre inverse du système.



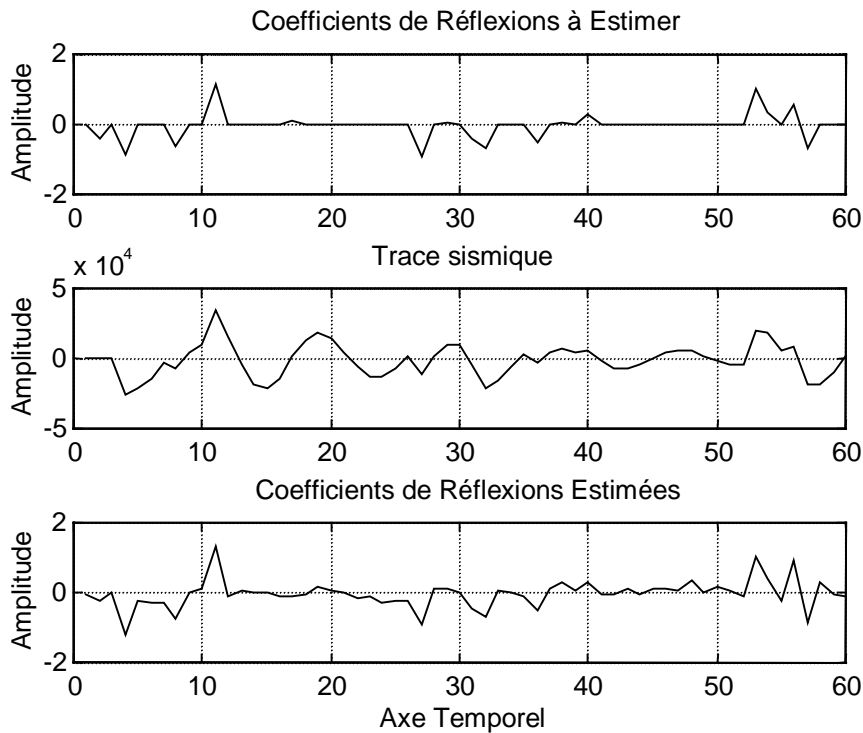
**FigIV.18.** La réponse en phase de la réponse impulsionnelle du système.



**FigIV.19.** La réponse en amplitude de la réponse impulsionnelle du système.



**FigIV.20.** La réponse impulsionnelle du filtre inverse du système.



**FigIV.21.** L'estimation des coefficients de réflexions par processus de Déconvolution.

Pour la figure IV.17, la réponse impulsionnelle maximale tend à être nulle par contre la réponse minimale ne l'est pas, ce qui nous conduit à dire qu'à cette étape, le système, auquel la séquence de donnée est générée, est un système à phase minimale.

D'après les figures IV.18 et IV.19, on voit qu'il y a une estimation rapprochée à l'estimé avec apparition du problème de surdimensionnement. Ce dernier est dû à la longueur de la séquence à traiter et à la présence du bruit additif.

Les singularités de $H(z)$	A 100dB	A 20dB	A 5dB
0.5590	0.5508	0.5276	0.572-0.003i
$0.7205 \pm 0.6127i$	$0.5906 \pm 0.5958i$	$0.6105 \pm 0.6003i$	$0.6481 \pm 0.62026i$
$0.75 \pm 0.35i$	-0.4347 -0.6307	-0.4195 -0.6310	-0.4128+0.0028i -0.6576+0.0019i

**Tab.IV.5.** Estimation des paramètres du modèle ARMA(à Phase Minimale) utilisant la méthode de la transformation invariante de phase(TIP).

Il est à noter que ses résultats sont obtenus par moyennement de plusieurs simulations de Monte-Carlo.

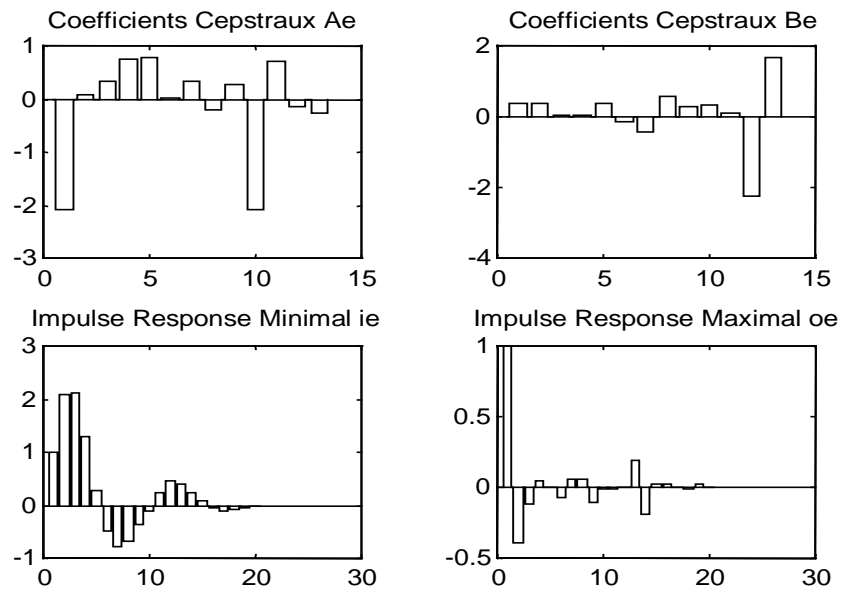
Il résultat donner dans le tableau Tab.IV.5 sont moyennement acceptable vue la complexité du modèle.

### IV.3.6- Modèle ARMA(à Phase Non-Minimale)

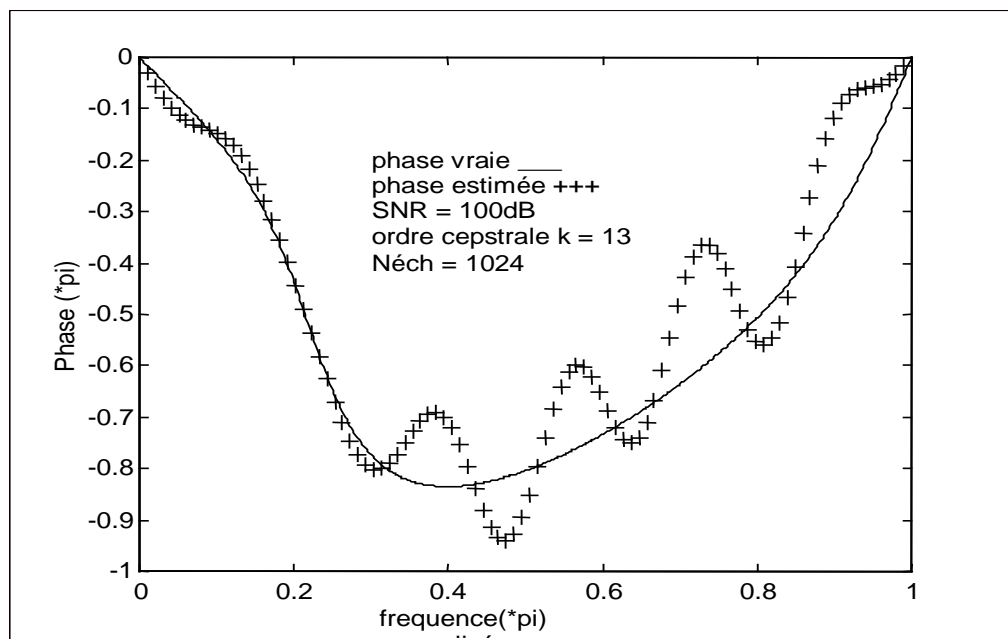
Soit la fonction de transfert du modèle ARMA(à PNM) suivante :

$$H(z) = \frac{(1 + 0.7z^{-1})(1 - 0.5z)}{1 - 1.435843z^{-1} + 0.88666z^{-2} - 0.127898z^{-3}}$$

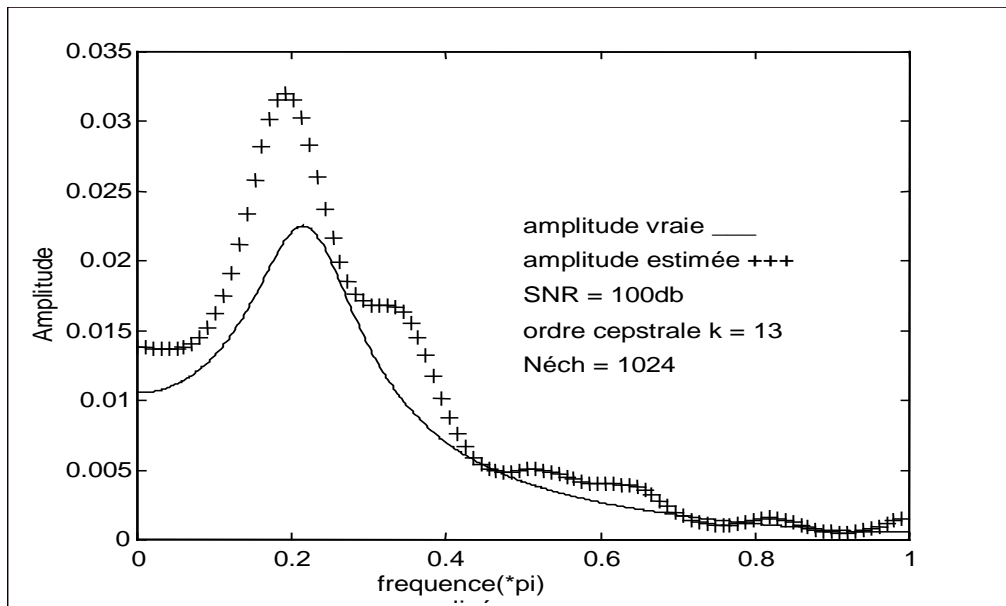
avec pôles : 0.2, 0.6179, 0.5976  
 et zéros : 2, -0.7



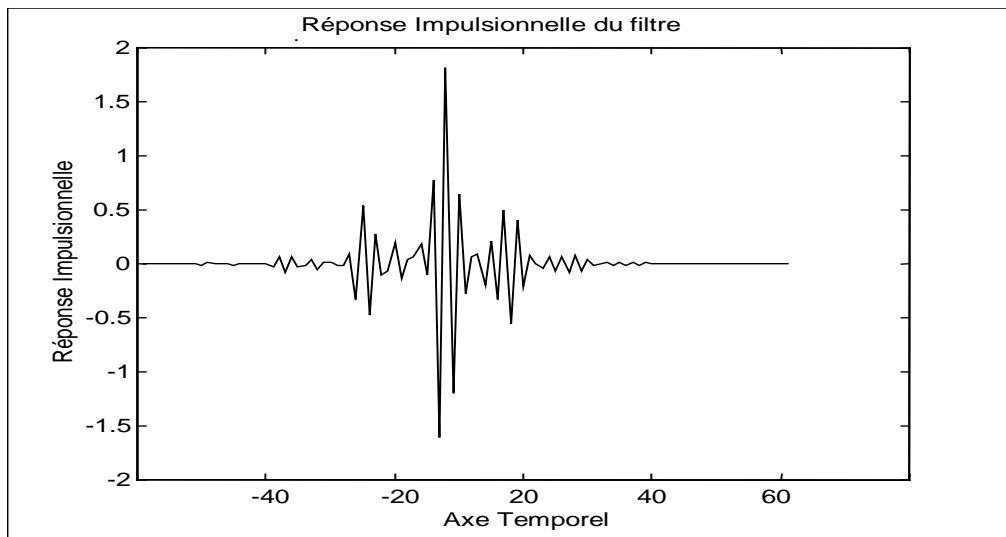
**FigIV.22.** Les coefficients cepstraux et la réponse impulsionnelle du filtre inverse du système.



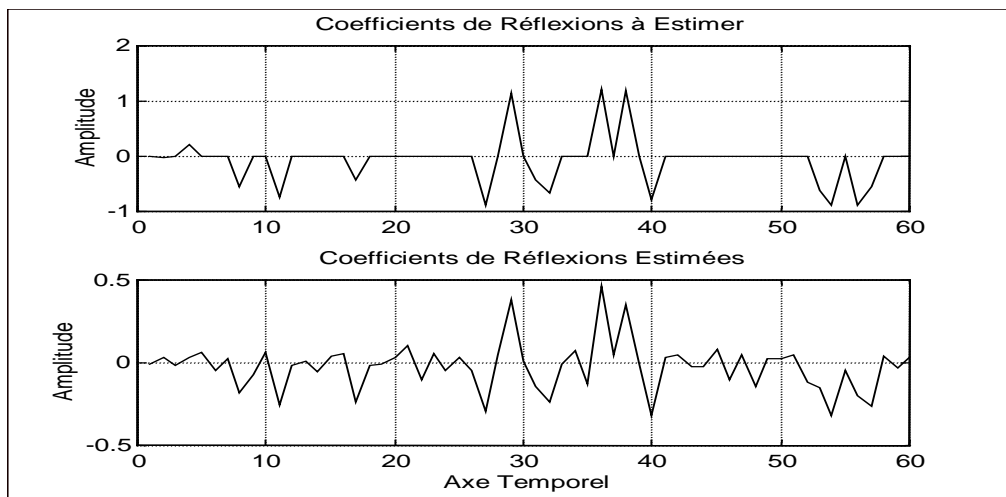
**FigIV.23.** La réponse en phase de la réponse impulsionnelle du système.



**FigIV.24.** La réponse en amplitude de la réponse impulsionnelle du système.



**FigIV.25.** La réponse impulsionnelle du filtre inverse du système.



**FigIV.26.** L'estimation des coefficients de réflexions par le processus de Déconvolution. Le tableau (Tab.IV.6) illustre les paramètres estimés par les deux méthodes d'identifications(III.5.4 et III.5.5).

	Paramètres Vraies	MAA	MPC
a(0)	1.0000	1.0000	1.0000
a(1)	-1.4358	-1.3877	-1.4070
a(2)	0.8867	0.7056	0.9075
a(3)	-0.1279	-0.0825	-0.1721
b(-2)	-	-	-
b(-1)	-0.5000	-0.4443	-0.4143
b(0)	0.6500	0.5870	0.6860
b(1)	0.7000	0.6332	0.6621

**Tab.IV.6.** Estimation des paramètres du modèle ARMA(à PNM) par deux méthodes d'identifications(Méthode Adaptative d'Amplitude et Méthode basée sur la Propriété Cepstral).

D'après le tableau d'identification paramétriques Tab.IV.6., on peut dire que la méthode MPC est plus robuste que celle de MAA.

### Conclusion

On a étudié deux méthodes d'identification paramétrique pour l'identification d'un modèle ARMA à phase non-minimale(ou encore à phase minimale) en utilisant l'information de phase, qui est obtenue par le cepstrum du cumulante d'ordre trois. La robustesse contre le bruit blanc gaussien additif des deux méthodes d'identification proposées est le fruit de l'utilisation des statistiques d'ordre trois.

Les résultats apportées par la domaine cepstral pour la déconvolution aveugle, sont intéressantes dans le sens où on n'a pas besoins de savoir le type et l'ordre du modèle à priori.

# CONCLUSION

L'objet de la prospection sismique est d'obtenir des informations à caractère structural ( position des interfaces ), et géologique ( nature des terrains ).

Pour y parvenir, la mise en œuvre sur le terrain doit être effectuée suivant des procédés judicieux qui permettent de renforcer les coefficients de réflexions, d'atténuer les bruits, et d'améliorer la précision des résultats. Ces techniques se répartissent, d'une part, sur le terrain, par une couverture multiple des dispositifs sismographiques allongés et étalés, et d'autre part, par la partie traitement d'informations ou encore partie algorithmique. Cette dernière couvre une multitude d'algorithmes résolvant le problème de filtrage et de déconvolution aveugle.

Dans cette thèse, notre travail a consisté à considérer deux approches d'estimation de l'ondelette, et un algorithme d'estimation des coefficients de réflexions en se basant sur les statistiques d'ordre supérieur et le domaine cepstral.

La méthode cepstrale appliquée à la déconvolution est une méthode de déconvolution aveugle adaptative, dans laquelle les coefficients sont indirectement estimés à travers le cepstre du bispectre de la séquence de données à traiter. Sa capacité en identification séparée des composants du système à phase minimale et phase maximale, fait que cette méthode devient intéressante dans la construction de la structure du déconvolveur sans connaissance , au préalable , du type du système à traiter.

Les deux algorithmes d'identification de l'ondelette, dont le premier est basé sur l'adaptation d'amplitude et le deuxième se basant sur la propriété cepstrale, sont liés entre eux par l'utilisation commune de l'algorithme de filtrage adaptatif ou encore algorithme adaptatif de phase. Ce dernier exploite l'information de phase du système, où le problème d'optimisation de systèmes non-linéaires apparaît. Ce dernier est résolu en utilisant l'algorithme de Marquard Levenberg. Il faut noter que lors de la simulation plusieurs problèmes tels que la rencontre des minima locaux qui ne vont pas permettre d'aboutir aux résultats escomptés ainsi que la lenteur d'exécution ont été mis en évidence. Par conséquent, l'identification des paramètres des systèmes dans la déconvolution aveugle des signaux sismiques est loin d'être un problème réglé.

Les techniques de déconvolution aveugle et d'identification paramétrique étudiées dans cette thèse ne sont pas appliquées seulement en réflexion sismique, mais peuvent être utilisées pour n'importe quel phénomène physique qui fait appel à l'identification.

En perspective, on propose l'étude des méthodes utilisant le cepstre complexe des cross-cumulants d'ordre quatre ou encore trispectre pour améliorer les résultats pour des SNR faibles.

# ANNEXE A

## Les Statistiques d'Ordre Deux

La représentation temporelle de  $x_n$  est donnée par l'intégrale de Fourier de la représentation fréquentielle  $X(w)$  sur le domaine  $-\pi \leq w \leq +\pi$ .

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(w) e^{iwn} dw \quad (\text{A.3})$$

où  $X(w)$  contient l'information sur le spectre d'amplitude et de phase de  $x_n$  et qui est donnée par

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{-iwn} = \sum_{n=0}^T x_n \cdot e^{-iwn} \quad (\text{A.4})$$

On définit l'énergie  $\Phi_{xx}(w)$  de  $x_n$  par

$$\Phi_{xx}(w) = \overline{X}(w) \cdot X(w) = |X(w)|^2 \geq 0, \quad -\pi \leq w \leq +\pi \quad (\text{A.5})$$

qui est égale à :

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(w) &= \sum_{n=0}^T x_n \cdot e^{-iwn} \cdot \sum_{m=0}^T x_m \cdot e^{-iwm} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n x_m e^{-iw(m-n)} \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{-iw\tau} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot x_{n+\tau} \quad , \\ &= \sum_{\tau=0}^T e^{-iw\tau} \cdot \sum_{n=0}^{T-\tau} x_n \cdot x_{n+\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.5.1})$$

avec  $\tau = m-n$ . On définit la fonction d'autocorrélation de  $x_n$  par

$$\phi_{xx}(\tau) = \sum_{n=0}^{T-\tau} x_n \cdot x_{n+\tau} \quad , \quad (\text{A.5.2})$$

On voit que

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(-\tau) &= \phi_{xx}(\tau) \\ \phi_{xx}(\tau) &= 0 \text{ pour } |\tau| > T \end{aligned} \quad (\text{A.5.3})$$

D'où l'équation (A.5.1) devient

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(w) &= \sum_{i=-T}^T \phi_{xx}(\tau) e^{-iw\tau} \\ &= \phi_{xx}(0) + 2 \sum_{\tau=1}^T \phi_{xx}(\tau) \cos(w\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.5.4})$$

On voit que le spectre d'énergie  $\Phi_{xx}(w)$ , n'est que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $\phi_{xx}(\tau)$ .

Si on applique la transformée de Fourier inverse à  $\Phi_{xx}(w)$ , on obtient  $\phi_{xx}(\tau)$ .

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_{xx}(w) e^{iwn} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{\tau=-T}^T \phi_{xx}(\tau) e^{-i\tau w} e^{iwn} dw$$

$$= \phi_{xx}(n)$$
(A.5.5)

car

$$\int_{-\tau}^{+\tau} e^{-i\tau w} e^{iwn} dw = \begin{cases} 0 & \tau \neq n, \\ 2\pi & \tau = n, \end{cases}$$
(A.5.6)

pour  $\tau$  et  $n$  entiers, l'énergie totale de  $x_n$  sera donnée par

$$\phi_{xx}(0) = \sum_{n=0}^T x_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_{xx}(w) dw$$
(A.5.7)

Il est clair, d'après ce qui vient d'être montré, que la fonction d'autocorrélation perd l'information de phase et ne garde que celle du module [Robinson :54]. Le problème d'être aveugle à la phase, nous amène à chercher d'autres moyens pour bien identifier un système à phase non-minimale. Ceci est possible par l'introduction des statistiques d'ordre supérieur (HOS), qui seront présentés en annexe B.

# ANNEXE B

## Introduction aux HOS

### I-Définitions

Soit un ensemble à n variables aléatoire  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , dont on définit leurs moments d'ordre  $r=k_1+k_2+\dots+k_n$  comme suit [Papoulis, 1984] [Mendel :91] [Mandry : ] :

$$Mom[x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}] = E\{x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}\} = (-j)^r \frac{\partial^r \Phi(w_1, w_2, \dots, w_n)}{\partial w_1^{k_1} \cdot \partial w_2^{k_2} \dots \partial w_n^{k_n}} \Big|_{w_1=w_2=\dots=w_n=0} \quad (B.1)$$

Où  $\Phi(w_1, w_2, \dots, w_n) = E\{\exp(j(w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_n \cdot x_n))\}$  est la fonction caractéristique ou génératrice des moments, et  $E\{\cdot\}$  est l'opérateur d'espérance. Soit l'exemple suivant, pour deux variables aléatoires  $\{x_1, x_2\}$ , leurs moments d'ordre deux  $Mom[x_1, x_2] = E\{x_1 \cdot x_2\}$ ,  $Mom[x_1^2] = E\{x_1^2\}$  et  $Mom[x_2^2] = E\{x_2^2\}$ .

Une autre forme de fonction caractéristique conjointe est définie comme étant le logarithme népérien [Papoulis, 1984] [Mendel :91] [Mandry : ] de  $\Phi(w_1, w_2, \dots, w_n)$  ;

$$\tilde{\Psi}(w_1, w_2, \dots, w_n) = \ln[\Phi(w_1, w_2, \dots, w_n)] \quad (B.2)$$

Les cumulants conjoints (appelés aussi semi-invariants) d'ordre r,  $Cum[x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}]$  du même ensemble de variables aléatoires, sont définis comme étant les coefficients du développement de Taylor de la seconde fonction caractéristique  $\tilde{\Psi}(\cdot)$  au voisinage de zéro (Shiryayev ; 1960 ; 1963 ; Brillinger, 1965 ; Rosenblatt 1983, 1985) [Mendel :91] [Mandry : ] :

$$Cum[x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}] = (-j)^r \frac{\partial^r \tilde{\Psi}(w_1, w_2, \dots, w_n)}{\partial w_1^{k_1} \partial w_2^{k_2} \dots \partial w_n^{k_n}} \Big|_{w_1=w_2=\dots=w_n=0} \quad (B.3)$$

On donne quelques définitions des moments :

$$\begin{aligned} m_1 &= Mom[x_1] = E\{x_1\} \\ m_2 &= Mom[x_1, x_1] = E\{x_1^2\} \\ m_3 &= Mom[x_1, x_1, x_1] = E\{x_1^3\} \\ m_4 &= Mom[x_1, x_1, x_1, x_1] = E\{x_1^4\} \end{aligned}$$

De même, on a les relations reliant les moments de la variable aléatoire  $\{x_1\}$  et ses cumulants :

$$\begin{aligned} c_1 &= Cum[x_1] = m_1 \\ c_2 &= Cum[x_1, x_1] = m_2 - m_1^2 \\ c_3 &= Cum[x_1, x_1, x_1] = m_3 - 3m_2 \cdot m_1 + 2m_1^3 \\ c_4 &= Cum[x_1, x_1, x_1, x_1] = m_4 - 4m_3 \cdot m_1 - 3m_2^2 + 12m_2 \cdot m_1^2 - 6m_1^4 \end{aligned} \quad (B.4)$$

ces relations peuvent être vérifiées par substitution du développement limité de

$$\Phi(w_1) = 1 + jw_1 m_1 - \frac{w_1^2}{2!} m_2 + \dots + \frac{(jw_1)^k}{k!} m_k + \dots$$

dans (B.1), (B.2), (B.3) et en considérant la dérivée au voisinage de zéro, si  $E\{x_1\} = m_1 = 0$ , il suit que  $c_2 = m_2$ ,  $c_3 = m_3$ , et  $c_4 = m_4 - 3m_2^2$ .

### Exemple .1

Soient trois fonctions de densité de probabilités(fdp); respectivement, de Laplace, Gaussienne, et uniforme. Leurs moments  $m_n$  d'ordre  $n = 1,2,3,4$  peuvent être générés par (Papoulis, 1984) :

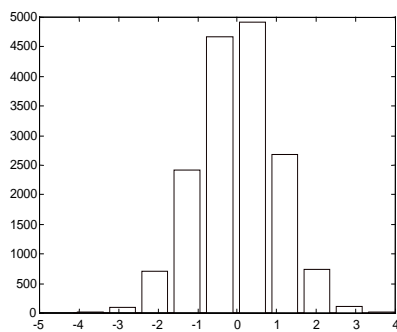
$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f(x) dx \tag{B.5}$$

Où  $f(x)$  est la fonction de densité de probabilité (f.d.p). A partir de (B.1), on peut calculer la fonction caractéristique  $\Phi(w)$  par la relation suivante :

$$\Phi(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(jwx) f(x) dx$$

Les cumulants  $c_n$ ,  $n = 1,2,3,4$  sont déterminés à partir des moments des équations (B.4).

La figure B.1 illustre les moments et cumulants pour les ordres de un jusqu'à quatre pour une gaussienne. On note que pour des fdp symétriques, tous leurs cumulants  $c_n$  pour  $n$  grand, sont nuls, ce qui fait que pour le cas Gaussien, tous les cumulants  $c_n$ , d'ordre supérieur à deux ( $n > 2$ ) sont nuls [Hatzinakos & Nikias :94].

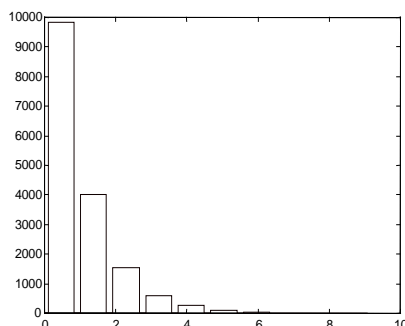


n	$m_n$	$c_n$
1	0	0
2	$\sigma^2$	$\sigma^2$
3	0	0
4	$3\sigma^4$	0

Figure B.1 Distribution symétrique : **la gaussienne**  $f(x) = 0.5 \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}}$

### Exemple .2

La figure B.2 illustre une fdp asymétrique ; a savoir la distribution en exponentielle, avec ses moments et cumulants d'ordre  $n = 1,2,3,4$ .



n	$m_n$	$c_n$
1	$1/\lambda$	$1/\lambda$
2	$2/\lambda^2$	$1/\lambda^2$
3	$6/\lambda^3$	$2/\lambda^3$
4	$24/\lambda^4$	$6/\lambda^4$

**Figure B.2 Distribution asymétrique a savoir : l'exponentielle :  $f(x) = \exp(-\lambda x).u(x)$**

## II-Relation entre les moments et les cumulants

La relation générale entre les moments des variables aléatoires  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et leurs cumulants d'ordre  $r = n$ , est donnée par [Leonov et Shiryaev, 1959 ; Brillinger, 1965 ; Rosenblatt, 1985] [Mendel :91]

$$Cum[x_1, x_2, \dots, x_n] = \sum (-1)^{p-1} (p-1)! \cdot E \left\{ \prod_{i \in S_1} x_i \right\} \cdot E \left\{ \prod_{i \in S_2} x_i \right\} \dots E \left\{ \prod_{i \in S_p} x_i \right\} \quad (B.6)$$

Où la sommation s'étend sur toute les partitions  $(s_1, s_2, \dots, s_p)$  pour  $p = 1, 2, \dots, n$ , de l'ensemble d'entiers  $(1, 2, \dots, n)$ . Par exemple, l'ensemble d'entiers  $(1, 2, 3)$  peuvent être subdivisées en

$$\begin{aligned} p=1 & \quad s_1 = \{1, 2, 3\} \\ p=2 & \quad s_1 = \{1\}, \quad s_2 = \{2, 3\} \\ & \quad s_1 = \{2\}, \quad s_2 = \{1, 3\} \\ & \quad s_1 = \{3\}, \quad s_2 = \{1, 2\} \\ p=3 & \quad s_1 = \{1\}, \quad s_2 = \{2\}, \quad s_3 = \{3\} \end{aligned} \quad (B.7)$$

alors l'équation (B.5) devient

$$\begin{aligned} Cum[x_1, x_2, x_3] &= E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\} - E\{x_1\} \cdot E\{x_2 \cdot x_3\} - E\{x_2\} \cdot E\{x_1 \cdot x_3\} \\ &\quad - E\{x_3\} \cdot E\{x_1 \cdot x_2\} + 2E\{x_1\} \cdot E\{x_2\} \cdot E\{x_3\} \end{aligned} \quad (B.8)$$

On voit que l'équation (B.8) est identique à  $C_3$  de l'équation (B.4) pour  $x_1 = x_2 = x_3$ .

Pour un ensemble de v.a  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , toutes les partitions possibles de l'ensemble d'entiers  $(1, 2, 3, 4)$  sont données par le tableau B.1. Par l'équation (B.5), on a le cumulants d'ordre quatre ( $n = 4$ ) qui est donné par l'équation (B.9) :

$$\begin{aligned} Cum[x_1, x_2, x_3, x_4] &= E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\} - E\{x_1 \cdot x_2\} \cdot E\{x_3 \cdot x_4\} \\ &\quad - E\{x_1 \cdot x_3\} \cdot E\{x_2 \cdot x_4\} - E\{x_1 \cdot x_4\} \cdot E\{x_2 \cdot x_3\} \\ &\quad - E\{x_1\} \cdot E\{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\} - E\{x_2\} \cdot E\{x_1 \cdot x_3 \cdot x_4\} \\ &\quad - E\{x_3\} \cdot E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_4\} - E\{x_4\} \cdot E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\} \\ &\quad + 2E\{x_1 \cdot x_2\} \cdot E\{x_3\} \cdot E\{x_4\} \\ &\quad + 2E\{x_1 \cdot x_3\} \cdot E\{x_2\} \cdot E\{x_4\} \\ &\quad + 2E\{x_1 \cdot x_4\} \cdot E\{x_2\} \cdot E\{x_3\} \\ &\quad + 2E\{x_2 \cdot x_4\} \cdot E\{x_1\} \cdot E\{x_3\} \\ &\quad + 2E\{x_3 \cdot x_4\} \cdot E\{x_1\} \cdot E\{x_2\} \\ &\quad + 2E\{x_2 \cdot x_3\} \cdot E\{x_1\} \cdot E\{x_4\} \\ &\quad - 6E\{x_1\} \cdot E\{x_2\} \cdot E\{x_3\} \cdot E\{x_4\}. \end{aligned} \quad (B.9)$$

Deux remarques importantes, qu'on peut tirer de l'équation (B.9), sont : premièrement, l'équation (B.9) devient identique au cumulants d'ordre quatre  $c_4$  de l'équation (B.4) si on

suppose que  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ . Deuxièmement, si les v.a sont à moyenne nulles ( $E\{x_i\} = 0, i = 1,2,3,4$ ), alors l'équation (B.9) devient

$$\begin{aligned} Cum[x_1, x_2, x_3, x_4] &= E\{x_1, x_2, x_3, x_4\} - E\{x_1, x_2\} \cdot E\{x_3, x_4\} \\ &\quad - E\{x_1, x_3\} \cdot E\{x_2, x_4\} - E\{x_1, x_4\} \cdot E\{x_2, x_3\}. \end{aligned} \quad (B.10)$$

La relation (B.5) implique que la détermination ou le calcul des cumulants d'ordre r exige la connaissance de tous les moments jusqu'à l'ordre r.

### III-Propriétés des Moments et des Cumulants

Les propriétés des moments et des cumulants peuvent être résumées comme suit (Shiryayev, 1960 ;1963 ;Sinai, 1963 ;Brillinger, 1965 ;Rosenblatt, 1983 ;1985 ;Brillinger et Rosenblatt, 1967 ;Rao et Gabr, 1984) :

**1-**  $Mom[a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n] = a_1 \dots a_n Mom[x_1, \dots, x_n]$  et

$Cum[a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n] = a_1 \dots a_n Cum[x_1, \dots, x_n]$  avec  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  sont des constantes. Ceci dérive directement des équations (B.1) et (B.5).

**2-** Les moments et les cumulants sont des fonctions symétriques dans leurs arguments.

$$Mom[x_1, x_2, x_3] = Mom[x_2, x_1, x_3] = Mom[x_3, x_2, x_1] = \dots ,$$

$$Cum[x_1, x_2, x_3] = Cum[x_2, x_1, x_3] = Cum[x_3, x_2, x_1] = \dots ,$$

**3-** Si les v.a  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  peuvent être subdivisées en deux, ou plus, groupes statistiquement indépendant, alors leurs cumulants d'ordre n sera nul ;  $Cum[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$  , alors qu'en

général on a  $Mom[x_1, x_2, \dots, x_n] \neq 0$ . Par exemple, si on a deux groupes indépendants  $\{x_1, x_2, \dots, x_\lambda\}$  et  $\{x_{\lambda+1}, \dots, x_n\}$ , alors leur fonction caractéristique conjoint est donnée par

$$\Phi(w_1, w_2, \dots, w_n) = \Phi_1(w_1, w_2, \dots, w_\lambda) \cdot \Phi_2(w_{\lambda+1}, \dots, w_n).$$

Dans le cas des cumulants leur fonction caractéristique est donnée par  $\tilde{\Psi}(w_1, w_2, \dots, w_n) = \tilde{\Psi}(w_1, w_2, \dots, w_\lambda) + \tilde{\Psi}(w_{\lambda+1}, \dots, w_n)$ . La preuve de cette propriété est obtenue en remplaçant  $\tilde{\Psi}(w_1, w_2, \dots, w_n)$  et  $\Phi(w_1, w_2, \dots, w_n)$  dans les équations (B.3) et (B.1), respectivement.

**4-** Si un ensemble de v.a  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  sont indépendants alors

$$Cum[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] = Cum[x_1, \dots, x_n] + Cum[y_1, \dots, y_n]$$

$$Mom[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] = E\{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \dots (x_n + y_n)\} \neq Mom[x_1, \dots, x_n] + Mom[y_1, \dots, y_n] \quad \text{pour les v.a}$$

$\{y_1, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , on a

$$Cum[x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n] = Cum[x_1, x_2, \dots, x_n] + Cum[y_1, x_2, \dots, x_n] \text{ et}$$

$$Mom[x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n] = Mom[x_1, x_2, \dots, x_n] + Mom[y_1, x_2, \dots, x_n]$$

**5-** Si un ensemble de v.a  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est conjointement gaussien, alors toutes les informations sur leurs fonctions de distributions sont contenues dans les moments d'ordre inférieur ou égal à deux ( $n \leq 2$ ).

## ANNEXE C

### Algorithme d'optimisation[Press :91]

#### I. Moindres carrés linéaires(Linear Least Squares)

##### I.1.Modèle

$$y = g(x, a) = \sum_{k=1}^m a_k \cdot g_k(x) \quad (C.1)$$

Avec  $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ , et  $g_k$  = fonction linéaire/nonlinéaire en  $x$ .

##### I.2.Fonction objectif

$$E = \sum_{i=1}^n f_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - g(x_i; a)]^2 \quad (C.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \forall i \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n [y_i - g(x_i; a)] g_k(x_i) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (C.3)$$

#### II. Modèle Nonlinéaire

##### II.1.Fonction objectif

$$E(a) = f(a) \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}, \quad (C.4)$$

##### II.2.Contrainte

$\tilde{a}$  est un minimum local

(i)  $\nabla E(a)|_{\tilde{a}} = 0$

(ii)  $H$  est semi-défini positif

$$\left. H_{ij} = \frac{\partial}{\partial a_i} \frac{\partial E}{\partial a_j} \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m) \right\} E(a) \text{ est différentiable et convexe.}$$

##### II.3.Algorithme

- 1  $a(0) \leftarrow a_0$
- 2  $a(k+1) \leftarrow a(k) + \lambda \cdot d(k)$   
doit satisfaire  $E(a(k+1)) < E(a(k))$
- 3  $a(k+1) \leftarrow a(k)$   
répéter 2-3 jusqu'à convergence

### III. Méthodes Nonlinéaires

#### III.1.Méthode du Gradient

$$d(k) = - \nabla E(a(k)) \quad (C.5)$$

#### III.2.Méthode de Newton

$$d(k) = - H^{-1} \nabla E(a(k)) \quad (C.6)$$

#### Quasi-Newton

$$\text{Fonction objectif} \quad E = \sum_{i=1}^n f_i^2(a), \quad f_i = y_i - g(x_i; a), \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} H &\approx 2J^T J \\ \nabla E &= 2J^T f \end{aligned} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial a_m} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad (C.8)$$

#### III.3.Méthode de Gauss-Newton

$$d(k) = -\left(J_k^T J_k\right)^{-1} J_k^T f(a(k)), \quad (C.9)$$

#### III.3.Méthode de Levenberg-Marquardt

$$d(k) = -\left(J_k^T J_k + \lambda I\right)^{-1} J_k^T f(a(k)), \quad (C.10)$$

#### IV.Algorithme de Levenberg-Marquardt

$$\text{Fonction objectif} \quad E = \sum_{i=1}^n f_i^2(a), \quad (C.11)$$

#### Algorithme

- 1  $\lambda \leftarrow 10^{-3}, a(0) = a_0$
- 2 Calculer  $E(a(k))$  ;
- 3 Calculer le Jaccobien  $J_k$  ;
- 4  $a(k+1) \leftarrow a(k) - \lambda \left( J_k^T J_k + \lambda I \right)^{-1} J_k^T f(a(k))$  ;
- 5 Calculer  $E(a(k+1))$  ;
- 6 Si  $E(a(k+1)) > E(a(k))$  alors  $\lambda \leftarrow 10 \times \lambda$  et aller vers 4 ;
- 7 Si  $E(a(k+1)) < 10^{-4}$  puis stop ;
- 8 Si  $E(a(k+1)) - E(a(k)) < 10^{-3}$  (4 fois consécutifs) alors stop ;
- 8  $\lambda \leftarrow 0.1 \times \lambda$  ;
- 9  $a(k) \leftarrow a(k+1)$  ; puis aller à 2 ;

## ANNEXE D

**I- Relation qui lie la réponse impulsionnelle au domaine cepstral (coefficients cepstraux) :**  
Partant de la définition du cepstre donnée par [Nikias & Raghuvver :87][Nikias & Mendel :90] :

$$C_x(z) = \ln[TZ(h(n))] = \ln[H(z)] \quad (D.1)$$

on utilise la dérivation partielle par rapport à z :

$$\frac{\partial C_h(z)}{\partial z} = \frac{1}{H(z)} \frac{\partial H(z)}{\partial z}, \quad (D.2)$$

multipliant les deux membres par z puis appliquant la transformée inverse en z monodimensionnelle :

$$TZ_1^{-1} \left[ z \frac{\partial C_h(z)}{\partial z} = z \frac{1}{H(z)} \frac{\partial H(z)}{\partial z} \right],$$

$$\Rightarrow TZ_1^{-1} \left[ H(z) \cdot z \frac{\partial C_h(z)}{\partial z} = z \frac{\partial H(z)}{\partial z} \right],$$

$$\Rightarrow h(n) \bullet (-n) \cdot c_h(n) = -n \cdot h(n)$$

Cette relation de convolution entre la réponse impulsionnelle et son cepstre complexe, qui est d'une importance capitale dans tout ce qui suit.

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \cdot c_h(k) \cdot h(n-k) = n \cdot h(n), \quad (D.3)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} k \cdot c_h(k) \cdot h(n-k) + 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot c_h(k) \cdot h(n-k) = n \cdot h(n)$$

sachant que le cepstre est relié à ses coefficients cepstraux par la relation suivante :

$$c_h = \begin{cases} \ln|A|, & n = 0 \\ -\frac{A^{(n)}}{n}, & n > 0, \\ \frac{B^{(-n)}}{n}, & n < 0 \end{cases} \quad (D.4)$$

$$\text{avec } \begin{cases} A^{(n)} = \sum_{i=1}^{L_1} a_i^n - \sum_{i=1}^{L_3} c_i^n \\ B^{(n)} = \sum_{i=1}^{L_2} b_i^n \end{cases} \quad (D.5)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} (k) \cdot \frac{B^{(-k)}}{k} \cdot h(n-k) + \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{-A^{(k)}}{k} \cdot h(n-k) = n \cdot h(n),$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} B^{(k)} \cdot h(n+k) - \sum_{k=1}^{+\infty} A^{(k)} \cdot h(n-k) = n \cdot h(n),$$

d'où la relation finale entre la réponse impulsionnelle et le domaine cepstral (coefficients cepstraux) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [A^{(k)} \cdot h(n-k) - B^{(k)} \cdot h(n+k)] = -n \cdot h(n), \quad (D.6)$$

Comme il a été mentionné que le cepstre converge vers zéros pour un k grand, de ceci en pratique il est clair qu'une troncature est imposée, d'où la sommation allant de k = 1 jusqu'à s, avec s est lié au rapport entre une constante (de 10<sup>e</sup>-4) sur le maximum, en valeur absolue, des pôles et des zéros. Le système précédant devient après troncature comme suit :

$$\sum_{k=1}^s [A^{(k)} \cdot h(n-k) - B^{(k)} \cdot h(n+k)] = -n \cdot h(n), \quad (D.7)$$

## II- Relation qui lie les HOS (moments d'ordre trois) au domaine cepstral :

Utilisons la définition du bicepstre, pour aboutir au système d'équations reliant les coefficients cepstraux A(k), B(k), et les moments d'ordre trois (HOS).

$$C_x(z_1, z_2) = \ln[B_x(z_1, z_2)], \quad (D.8)$$

où C<sub>x</sub> est le bicepstre, et B<sub>x</sub> est le bispectre de x(n).

On utilise les différentielles partielles par rapport à z<sub>1</sub> ou z<sub>2</sub> :

$$\frac{\partial C_x(z_1, z_2)}{\partial z_1} = \frac{1}{B_x(z_1, z_2)} \frac{\partial B_x(z_1, z_2)}{\partial z_1} \quad (D.9)$$

$$\Rightarrow B_x(z_1, z_2) \cdot \frac{\partial C_x(z_1, z_2)}{\partial z_1} = \frac{\partial B_x(z_1, z_2)}{\partial z_1}$$

on multiplie par z<sub>1</sub> les deux membres :

$$\Rightarrow B_x(z_1, z_2) \cdot z_1 \cdot \frac{\partial C_x(z_1, z_2)}{\partial z_1} = z_1 \cdot \frac{\partial B_x(z_1, z_2)}{\partial z_1} \quad (D.10)$$

on applique la transformée inverse de z des deux côtés :

$$TZ_2^{-1}[B_x(z_1, z_2)] = R_x(m, n), \quad (D.11)$$

$$TZ_2^{-1}\left[z_1 \cdot \frac{\partial C_x(z_1, z_2)}{\partial z_1}\right] = -m \cdot c_x(m, n),$$

$$TZ_2^{-1}\left[z_1 \cdot \frac{\partial B_x(z_1, z_2)}{\partial z_1}\right] = -m \cdot R_x(m, n),$$

$$\Rightarrow TZ_2^{-1}\left[B_x(z_1, z_2) \cdot z_1 \cdot \frac{\partial C_x(z_1, z_2)}{\partial z_1}\right] = TZ_2^{-1}\left[z_1 \cdot \frac{\partial B_x(z_1, z_2)}{\partial z_1}\right], \quad (D.12)$$

$$\Rightarrow R_x(m, n) \bullet [-m \cdot c_x(m, n)] = -m \cdot R_x(m, n), \quad (D.13)$$

Avec • est l'opérateur de la convolution.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-k) \cdot c_x(k, l) \cdot R_x(m-k, n-l) = -m \cdot R_x(m, n), \quad (D.14)$$

$$\text{d'où } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k \cdot c_x(k, l) \cdot R_x(m-k, n-l) = m \cdot R_x(m, n),$$

on décompose les deux sommations en une succession de sommations sur les bornes ]-∞, -1], 0, [1, +∞[ ainsi en remplace c<sub>x</sub>(m, n) par son expression en fonction des coefficients cepstraux A<sup>(k)</sup> et B<sup>(k)</sup>, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m < 0)(n < 0) \rightarrow c_x(m, n) = \frac{1}{n} A^{(-n)}, \\ (m < 0)(n = 0) \rightarrow c_x(m, n) = \frac{1}{m} B^{(-m)}, \\ (m < 0)(n > 0) \rightarrow c_x(m, n) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{D.16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m = 0)(n < 0) \rightarrow c_x(m, n) = \frac{1}{n} B^{(-n)}, \\ (m = 0)(n = 0) \rightarrow c_x(m, n) = \ln|\beta \cdot A|, \\ (m = 0)(n > 0) \rightarrow c_x(m, n) = -\frac{1}{n} A^{(n)}, \end{array} \right. \quad (\text{D.17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m > 0)(n < 0) \rightarrow c_x(m, n) = 0, \\ (m > 0)(n = 0) \rightarrow c_x(m, n) = -\frac{1}{m} A^{(m)}, \\ (m > 0)(n > 0) \rightarrow c_x(m, n) = -\frac{1}{n} B^{(n)}, \end{array} \right. \quad (\text{D.18})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k \cdot c_x(k, l) \cdot R_x(m-k, n-l) = m \cdot R_x(m, n), \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned} (1) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{l=-\infty}^{-1} k \cdot c_x(k, l) \cdot R_x(m-k, n-l) + \sum_{k=-\infty}^{-1} (l=0) k \cdot c_x(k, 0) \cdot R_x(m-k, n-0) \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{l=1}^{+\infty} k \cdot c_x(k, l) \cdot R_x(m-k, n-l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &= (k=0) \cdot \sum_{l=-\infty}^{-1} 0 \cdot c_x(0, l) \cdot R_x(m-0, n-l) + (k=0) \cdot (l=0) 0 \cdot c_x(0, 0) \cdot R_x(m-0, n-0) \\ &\quad + (k=0) \cdot \sum_{l=1}^{+\infty} 0 \cdot c_x(0, l) \cdot R_x(m-0, n-l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{-1} k \cdot c_x(k, l) \cdot R_x(m-k, n-l) + \sum_{k=1}^{+\infty} (l=0) k \cdot c_x(k, 0) \cdot R_x(m-k, n-0) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} k \cdot c_x(k, l) \cdot R_x(m-k, n-l), \end{aligned}$$

On remplace  $c_x(k, l)$  par les coefficients cepstrals  $A^{(k)}$  et  $B^{(k)}$ , et on aura :

$$(1) = \sum_{k=-\infty}^{-1} k \cdot \frac{1}{k} A^{(-k)} \cdot R_x(m-k, n-l) + \sum_{k=-\infty}^{-1} k \cdot \frac{1}{k} B^{(-k)} \cdot R_x(m-k, n) + 0,$$

$$\Rightarrow (1) = \sum_{k=-\infty}^{-1} A^{(-k)} \cdot R_x(m-k, n-l) + \sum_{k=-\infty}^{-1} B^{(-k)} \cdot R_x(m-k, n),$$

$$(2) = 0,$$

$$\begin{aligned}
(3) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{-1} k.c_x(k,l).R_x(m-k,n-l) + \sum_{k=1}^{+\infty} (l=0)k.c_x(k,0).R_x(m-k,n-0) \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} k.c_x(k,l).R_x(m-k,n-l), \\
\Rightarrow (3) &= 0 - \sum_{k=1}^{+\infty} k.\frac{1}{k}A^{(k)}.R_x(m-k,n) - \sum_{k=1}^{+\infty} k.\frac{1}{k}B^{(k)}.R_x(m-k,n-k),
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (3) = -\sum_{k=1}^{+\infty} A^{(k)}.R_x(m-k,n) - \sum_{k=1}^{+\infty} B^{(k)}.R_x(m-k,n-k),$$

d'où (1) + (2) + (3) nous aboutissons à la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{-1} A^{(-k)}.R_x(m-k,n-l) + \sum_{k=-\infty}^{-1} B^{(-k)}.R_x(m-k,n) \\
&- \sum_{k=1}^{+\infty} A^{(k)}.R_x(m-k,n) - \sum_{k=1}^{+\infty} B^{(k)}.R_x(m-k,n-k) = -m.R(m,n)
\end{aligned} \tag{D.20}$$

Il est claire que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{-1} A^{(-k)}.R_x(m-k,n-l) &= \sum_{k=1}^{+\infty} A^{(k)}.R_x(m+k,n-l) \\
\sum_{k=-\infty}^{-1} B^{(-k)}.R_x(m-k,n-l) &= \sum_{k=1}^{+\infty} B^{(k)}.R_x(m+k,n-l)
\end{aligned} \tag{D.21}$$

en remplaçant dans (D.20), on obtient :

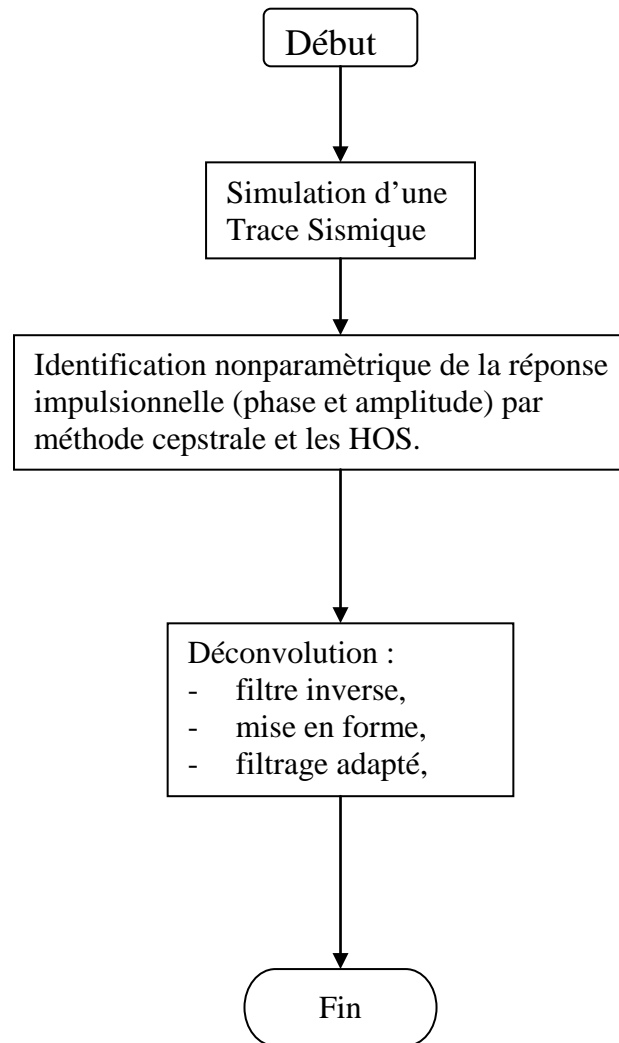
$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{+\infty} A^{(k)}.R_x(m+k,n-l) + \sum_{k=1}^{+\infty} B^{(k)}.R_x(m+k,n) \\
&- \sum_{k=1}^{+\infty} A^{(k)}.R_x(m-k,n) - \sum_{k=1}^{+\infty} B^{(k)}.R_x(m-k,n-k) = -m.R(m,n) \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} [A^{(k)}.(R_x(m-k,n) - R_x(m+k,n+k)) + B^{(k)}.(R_x(m-k,n-k) - R_x(m+k,n))] &= -m.R_x(m,n)
\end{aligned} \tag{D.22}$$

Après troncature, le système d'équations devient : (D.23)

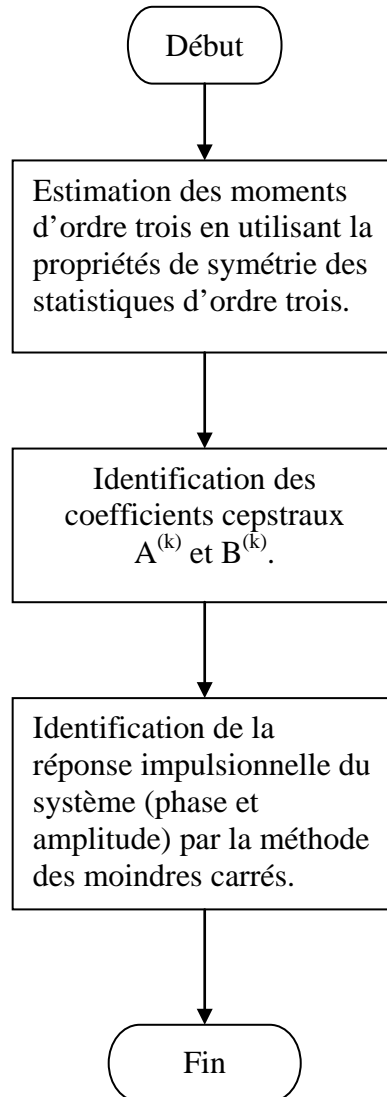
$$\sum_{k=1}^s [A^{(k)}.(R_x(m-k,n) - R_x(m+k,n+k)) + B^{(k)}.(R_x(m-k,n-k) - R_x(m+k,n))] = -m.R_x(m,n)$$

C'est un système surdéterminé qui peut être résolu par moindres carrés récurrents.

## ANNEXE E



Algorithme1. Déconvolution aveugle nonparamétrique.



Algorithme2. Identification nonparamétrique de la réponse impulsionnelle du système