N° d'ordre : 03/2004-E/MT

U.S.T.H.B
Service des Thèses
Bibliothèque Universitaire

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE (U.S.T.H.B- Alger)

FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat d'état
EN MATHEMATIQUES

Spécialité probabilités-statistiques

Présentée par :

Lakhdar MEZIANI

THEME

QUESTIONS DE REPRESENTATIONS INTEGRALES D'OPERATEURS

Soutenue le : 04 mai 2004, devant le jury :

M M	**D. TENIOU**	**Professeur**	**USTHB**	**Président**
	F. LEDRAPPIER	**Professeur**	**Université Paris 6 et CNRS**	**Rapporteur**
	K. BOUKHETALA	**Professeur**	**USTHB**	**Co- Rapporteur**
	D.AISSANI	**Professeur**	**Université de Bejaia**	**Examinateur**
	Y. ATIK	**Professeur**	**ENS- Kouba**	**Examinateur**
	R. BEBOUCHI	**Professeur**	**USTHB**	**Examinateur**
	M. DJEDOUR	**Professeur**	**USTHB**	**Examinateur**

CONTENTS

Résumé

Les questions abordées par M. Meziani dans ce travail sont relatives aux représentations intégrales d'opérateurs dans certains espaces fonctionnels. Le prototype des espaces considérés est représenté par l'espace $C(S, X)$ des fonctions continues de l'espace compact S à valeurs dans l'espace topologique X. Dans de nombreuses situations, X est soit un espace de Banach soit un espace vectoriel topologique localement convexe. L'importance de ces espaces tient, entre autre ,au fait qu'ils interviennent dans la modélisation de certains phénomènes stochastiques. Citons à titre d'exemples l'espace $C([0,1], \mathbb{R})$, qui est à la base de la construction du mouvement Brownien, ou encore l'espace $C\left([0,1], \Im'\right)$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$, qui permet d'étudier le comportement dynamique de certains systèmes infinis de particules.

L'objectif visé dans ce travail est l'étude des représentations d'opérateurs linéaires bornés sur ces espaces, sous forme d'intégrales par rapport à des mesures scalaires ou vectorielles.
Le travail présenté par M. Meziani dans cette thèse comprend quatre parties:

1. Aprés une introduction, où il précise le cadre général et les orientations des questions traitées, l'auteur donne un survol des représentations intégrales existantes qui interviennent directement dans la thèse.les théorème les plus importants y sont démontrés en détail.

2. Dans la deuxième partie M. Meziani présente un nouveau théorème de représentation intégrale pour une classe (notée H_{XX}) d'opérateurs bornés $T : C(S, X) \to X$, au sens de l'intégrale de Bochner par rapport à une mesure scalaire bornée sur les boréliens de S. Ce théorème est la conséquence d'un isomorphisme isométrique établi entre la class H_{XX} et le dual topologique $C(S, \mathbb{R})^*$ de l'espace $C(S, \mathbb{R})$. Lorsque $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la classe H_{XX} est l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés $T : C(S, X) \to X$ et le théorème se réduit au théorème de Riesz-Kakutani. Par contre si la dimension de X est > 2, la situation est différente. L'auteur montre, à l'aide d'un exemple, l'existence d'opérateurs bornés hors de la class H_{XX}, c'est à dire non représentables par une intégrale.

3. La troisième partie est une étude comparative entre la représentation intégrale précédente et les processus d'intégration évoqués dans le survol de la première partie. Cette comparaison est faite en raison de la complexité de ces processus.Elle est réalisée pour la classe H_{XX} et pour une classe d'opérateurs T factorisables sous la forme $T = \theta V$, où V est un opérateur borné réalisant un changement de variable de $C(S, X)$ dans l'espace $C(S, \mathbb{R})$ et θ un opérateur borné de $C(S, \mathbb{R})$ dans X dont la représentation intégrale est en général aisée. Pour les deux classes d'opérateurs, l'auteur détermine la structure des mesures qui interviennent dans les différents processus d'intégration.

4. L'auteur envisage dans cette partie une extension possible des résultats de la partie 2 au cas des espaces vectoriels topologiques. L'espace X est pris ici comme le dual $E^{'}$ d'un espace localement convexe E; l'espace $E^{'}$ étant supposé muni de la topologie $*-$faible $\sigma\left(E^{'},E\right)$. Le résultat principal obtenu ici est un théorème de représentation intégrale pour une d'opérateurs bornés $T:C\left(S,E^{'}\right)\to E^{'}$ au moyen d'une intégrale faible, mais toujours par rapport à une mesure scalaire. Ce résultat a été ensuite specialisé au cas où $E^{'}$ est l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$. L'auteur montre que les opérateurs représentables par des intégrales faibles préservent certaines opérations de la théorie des distributions comme la dérivation ou la transformation de Fourier.

Conclusion:

Le travail réalisé par M. Meziani apporte une information appréciable sur certaines transformations linéaires des espaces du type $C\left(S,X\right)$. Lorsque un tel espace représente l'ensemble des trajectoires d'un processus les résultats montrent comment les trajectoires du processus sont transformées par les opérateurs représentables par des intégrales. Il va sans dire que l'étude des implications sur les propriétés de ces processus reste à faire.
D'autre part, dans un cadre spécifiquement stochastique, il serait interessant d'appliquer les opérateurs étudiés dans cette thèse à des lois de processus c'est à dire à des mesures de probabilités sur les espaces $C\left(S,X\right)$. Une question importante serait de déterminer les propriétés de ces lois qui sont préservées par ces transformations.

Chapter 1
INTRODUCTION-ORIENTATION.

Traditionnellement un processus d'intégration abstrait met en jeu deux objets mathématiques, une fonction et une mesure. L'intégration vectorielle est basée essentiellement sur deux concepts. L'un des concepts, dû à Bochner et Pettis [6], [10], concerne l'intégrale d'une fonction vectorielle (à valeurs dans un Banach ou plus généralement dans un e.v.t), par rapport à une mesure scalaire. L'autre concept, dû à Bartle-Dunford-Schwartz [9], met en oeuvre une fonction scalaire et une mesure vectorielle. Il existe un autre concept, d'un type special, dû à Singer-Dinculuanu[7], où les deux objets, fonction et mesure sont tous deux à valeurs vectorielles avec la propriété pour la mesure d'être à valeurs dans un espace d'opérateurs.

Ces concepts ont non seulement conduit à diverses extensions de la Théorie de l'intégrale de Lebesgue, avec la validité de plusieurs Théorèmes de convergence classiques, mais également produit des Théorèmes de représentations intégrales qui généralisent le célèbre théorème de Riesz dans plusieurs directions.

L'objectif principal de ce travail est l'étude des représentations de certaines classes d'opérateurs sous forme d'intégrales abstraites par rapport à des mesures scalaires ou vectorielles. Dans cette introduction, nous allons préciser l'orientation de cette étude pour mieux situer le type de questions qui seront considérées et le cadre général dans lequel elles seront abordées.

Considèrons deux espaces de Banach X, Y, réels ou complexes, et un espace topologique S que nous supposerons compact. Nous désignerons par $\mathcal{B}_S$ la $\sigma-$algèbre des ensembles boreliens de S. Nous introduisons alors l'espace de Banach (norme uniforme) $C(S,X)$ de toutes les fonctions continues $f : S \rightarrow X$, définies sur S à valeurs dans X; nous noterons $C(S,X) = C(S)$ lorsque $X = \mathsf{R}$ ou C. L'espace $C(S,X)$ est le prototype d'espace fonctionnel qui intervient dans de nombreuses situations, par exemple en théorie de l'intégration ou dans l'étude des processus stochastiques.
Nous nous interesserons enfin aux opérateurs linéaires bornés $T : C(S,X) \longrightarrow Y$, définis sur $C(S,X)$ à valeurs dans Y, qui admettent une forme intégrale du type:

$$f \in C(S,X), \qquad Tf = \int_S f(s)\ d\mu(s) \tag{1}$$

où μ est une mesure scalaire ou vectorielle sur la $\sigma-$algèbre $\mathcal{B}_S$.

Parmi les représentations intégrales de la forme (1) on peut déjà citer celle donnée par le célèbre Théorème de F. Riesz, et dont nous énonçons ici pour mémoire une version générale due à Kakutani [11]. Nous désignerons par $r\sigma(\mathcal{B}_S)$ l'espace de Banach (norme de la variation totale) des mesures complexes régulières sur $\mathcal{B}_S$. Nous avons alors:

Théorème: (Riesz-Kakutani). Il existe un isomorphisme isométrique entre le dual topologique $C^*(S)$ de $C(S)$ et l'espace de Banach $r\sigma(\mathcal{B}_S)$. Cet isomorphisme met en correspondance la fonctionnelle $x^* \in C^*(S)$ avec l'unique mesure $\mu \in r\sigma(\mathcal{B}_S)$ au moyen de l'equation:

$$f \in C(S), \qquad x^* f = \int_S f(s)\ d\mu(s) \tag{2}$$

De plus on a $\|x^*\| = v(\mu)$ (variation totale de μ). Pour la démonstration de ce Théorème, on pourra consulter les références [9] ou [17].

Il faut souligner ici que la correspondance, exprimée par le Théorème, entre les fonctionnelles continues x^* sur $C(S)$ et les mesures μ sur S a conduit à un changement d'idées fondamental en théorie de l'intégration. C'est sans nul doute ce changement qui a été à l'origine du developpement significatif de cette théorie, notamment dans les espaces de dimension infinie du type $C(S,X)$, (voir à ce sujet, Bourbaki [3], note historique.).

Avec le developpement de l'intégration vectorielle, Bartle, Dunford, et Schwartz [2], [9] ont généralisé la forme intégrale (2) à des opérateurs bornés $T : C(S) \longrightarrow Y$ à valeurs dans l'espace de Banach Y. Ils ont notamment démontré qu'un tel opérateur admet la représentation intégrale forte:

$$f \in C(S), \qquad Tf = \int_S f(s)\ d\mu(s) \tag{3}$$

par rapport à une mesure vectorielle μ à valeurs dans Y, si et seulement si il est faiblement compact.

Dans cet ordre d'idées, motivés par d'autres généralisations possibles du Théorème de Riesz-Kakutani, nous avons considéré le problème de la représentation d'opérateurs bornés $T : C(S,X) \longrightarrow X$ sous la forme d'une intégrale de Bochner par rapport à une mesure scalaire $\mu \in r\sigma(\mathcal{B}_S)$.C'est là une question naturelle (non triviale) puisque l'intégrale de Bochner définit elle-même un opérateur borné de $C(S,X)$ dans X. Nous avons résolu cette question en identifiant complètement la classe des opérateurs représentables par l'intégrale de Bochner au moyen d'un isomorphisme isométrique avec le dual topologique $C^*(S)$. La forme intégrale de Bochner ci-dessous sera une conséquence directe de cet isomorphisme:

$$f \in C(S,X), \qquad Tf = \int_S f(s)\ d\mu(s) \tag{4}$$

où μ est une mesure scalaire unique sur $\mathcal{B}_S$ déterminée par l'opérateur T. Il est important d'observer que si $X = \mathsf{R}$ ou C, la représentation (4) se réduit exactement à (2) c'est à dire celle donnée par le Théorème de Riesz-Kakutani. Par ailleurs, si la dimension de X est plus grande que 1, nous montrons par la construction d'un exemple simple, l'existence d'opérateurs bornés de $C(S,X)$ dans X non représentables par l'intégrale de Bochner. Autrement dit, en dimension superieure à 1, le Théorème de Riesz-Kakutani n'est vérifié que pour une classe restreinte d'opérateurs bornés et non pour l'ensemble des opérateurs bornés comme dans le cas unidimensionnel. Il y a ici une certaine analogie avec la situation du Théorème de Bartle-Dunford-Schwartz cité plus haut où, la bonne classe d'opérateurs représentables se trouve être celle des opérateurs faiblement compacts.

Considèrons de nouveau la forme intégrale (1) pour un opérateur borné général $T : C(S,X) \longrightarrow Y$. Les travaux de Dinculeanu [7] et Singer [19] ont montré qu'il est possible de représenter T sous la forme d'une intégrale vectorielle du type:

$$f \in C(S,X), \quad Tf = \int_S f.dG \tag{5}$$

où G est une fonction d'ensembles sur $\mathcal{B}_S$, finiment additive, à valeurs dans l'espace de Banach, $\mathcal{L}(X,Y^{**})$, des opérateurs bornés de X dans le bidual Y^{**} de Y.
Il faut observer ici que la fonction d'ensembles G est seulement additive, bien que possèdant par ailleurs d'autres propriétés interessantes.Certains auteurs (Dobrakov [8], Batt-Berg [1], Brooks Lewis[5] .) ont pu caractériser certaines propriétés fortes de G à l'aide de conditions imposées à l'opérateur T de la forme (5). D'autre part il faut également souligner que la fonction G possède en général une forme complexe qui la rend peu exploitable. D'ailleurs dans le processus d'intégration (5), elle est déterminée indirectement par une famille de mesures $\left\{\mu_{y^*}\colon y^* \in Y^*\right\}$ à valeurs dans le dual X^* de X. D'où la nécessité d'analyser la structure de la fonction G, tout au moins pour certaines classes d'opérateurs.Dans ce contexte, l'une des classes pour laquelle nous avons procédé à cette analyse est celle des opérateurs représentables par l'intégrale de Bochner (4). Une comparaison entre les deux formes intégrales (4) et(5) nous a conduit à la formule remarquable suivante:

$$E \in \mathcal{B}_S, \quad G(E) = \mu(E).\gamma \tag{6}$$

où μ est la mesure scalaire qui intervient dans (4) et γ l'isomorphisme canonique de X dans X^{**}.
L'autre classe d'opérateurs considérés, où la structure de la fonction G semble être explicite, est la classe des opérateurs $T : C(S,X) \longrightarrow Y$ factorisables sous la forme:

$$f \in C(S,X), \qquad Tf = \theta.Uf \tag{7}$$

où θ est un opérateur borné de $C(S)$ dans Y et U est un opérateur borné définissant un changement de variable de $C(S,X)$ dans $C(S)$..Nous montrerons que ces opérateurs sont caractérisés par l'inclusion simple,$KerU \subset KerT$, entre les noyaux de U et de T. En s'appuyant sur la représentation de θ donnée par le Théorème de Bartle-Dunford-Schwartz, nous déterminons directement la structure de la fonction G associée à l'opérateur T par l'intégrale (5) . Essentiellement, les estimations obtenues pour la structure de G seront du type Radon-Nikodym par rapport à la mesure représentative de l'opérateur θ; les dérivées qui interviennent sont calculées trés simplement à l'aide de l'opérateur U. On montre que l'on obtient une amélioration sensible de ces estimations en imposant à l'opérateur T la propriété d'être faiblement compact ou nucléaire, en raison du transfert de ces propriétés à la composante θ. Enfin des calculs explicites ont été performés sur un exemple significatif dans le but d'illustrer les techniques d'estimation précédentes.

La dernière partie de notre travail est une tentative d'extension de la représentation intégrale (4) au cas des opérateurs bornés dans les espaces vectoriels topologiques. Lorsque X est le dual $E^{'}$ d'un e.v.t localement convexe E, nous avons pu identifier, par une extension directe des techniques utilisées dans la forme (4), une classe d'opérateurs bornés $T : C\left(S, E^{'}\right) \longrightarrow E^{'}$, qui admettent une forme intégrale de Pettis par rapport à une mesure scalaire $\mu \in r\sigma(\mathcal{B}_S)$. Cela signifie que pour les opérateurs de cette classe nous avons la formule suivante, où le symbole $\langle , \rangle$ exprime la dualité entre les espaces $E^{'}$ et E.

$$\forall f \in C\left(S, E^{'}\right),\ \forall \xi \in E, \qquad \langle Tf, \xi \rangle = \int_S \langle f(s), \xi \rangle \, d\mu(s) \tag{8}$$

Le plan de l'exposé est le suivant:
Le Chapitre 1 contient un survol des représentations intégrales utilisées dans le texte et généralement issues du Théorème de Riesz-Kakutani.
Le chapitre 2 est consacré à la construction d'une classe d'opérateurs représentables par l'intégrale de Bochner, et donnant une autre forme possible du Théorème de Riesz-Kakutani dans les espaces de Banach.
Le chapitre 3 est une étude de la structure des mesures représentatives pour certaines classes d'opérateurs, à partir de leurs représentations intégrales.
Le chapitre 4 est une tentative d'extension des représentations intégrales au cas des opérateurs dans les espaces vectoriels topologiques.

.

Chapter 2
SURVOL DE QUELQUES REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES.

Le prototype des representations intégrales est sans doute celle donnée par le célèbre Théorème de F. Riesz, et dont nous énonçons ici pour mémoire une version générale due à Kakutani [11]. Nous désignerons par $r\sigma(\mathcal{B}_S)$ l'espace de Banach (norme de la variation totale) des mesures complexes régulières sur $\mathcal{B}_S$. Nous avons alors:

1.1. Théorème: (Riesz-Kakutani). Il existe un isomorphisme isométrique entre le dual topologique $C^*(S)$ de $C(S)$ et l'espace de Banach $r\sigma(\mathcal{B}_S)$. Cet isomorphisme met en correspondance la fonctionnelle $x^* \in C^*(S)$ avec l'unique mesure $\mu \in r\sigma(\mathcal{B}_S)$ au moyen de l'equation:

$$f \in C(S), \quad x^* f = \int_S f(s)\ d\mu(s) \tag{1}$$

De plus on a $\|x^*\| = v\mu$ (variation totale de μ). Pour la démonstration de ce Théorème, on pourra consulter les références [9] ou [17].

Ce chapitre est destiné aux deux principales extentions de ce théorème qui seront utilisées dans ce travail. Il s'agit de la représentation de Bartle-Dunford-Schwartz pour les opérateurs bornés T: $C(S) \rightarrow Y$ et de la représentation de Dinculeanu-Singer pour les opérateurs bornés T: $C(S,X) \rightarrow Y$. Il existe deux formes intégrales pour les opérateurs bornés T de $C(S)$ dans l'espace de Banach Y. La forme générale, valable pour T borné, et la forme forte caractérisant les opérateurs T bornés et faiblement compacts.

Nous commencerons par quelques préliminaires sur les mesures vectorielles qui nous seront utiles dans la suite. Pour leurs justifications, nous renvoyons aux références [6] , [9].

1.2. Préliminaires sur les mesures vectorielles.

L'espace $(S, \mathcal{B}_S)$ défini dans l'introduction est l'espace de base que nous utiliserons dans toute la suite bien que (à part la notion de régularité) les notions introduites restent valables si on remplace $(S, \mathcal{B}_S)$ par un espace mesurable arbitraire. X et Y désignent toujours des espaces de Banach de référence sur le corps $\mathsf{K} = \mathsf{R}$ ou C, X^* et Y^*, leurs duaux topologiques respectifs.

Définition 1: *Soit $\mu : \mathcal{B}_S \rightarrow Y$,une fonction d'ensembles. On dit que :*
(a) μ est additive si $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, pour toute suite finie disjointe, $A_{1,\ldots,}A_n$,dans $\mathcal{B}_S$.

(b) μ est σ-additive si $\mu\left(\bigcup\limits_i A_i\right) = \sum\limits_i \mu(A_i)$, *pour toute suite disjointe,* (A_i),*dans* $\mathcal{B}_S$.
(c) μ est faiblement σ-additive si pour toute fonctionnelle $y^* \in Y^*$, la fonction d'ensembles scalaire $y^*\mu(\cdot)$ est σ-additive.
Dans tout ce qui suit, une mesure vectorielle sera toujours une fonction d'ensembles, définie sur $\mathcal{B}_S$ à valeurs dans un espace de Banach, qui soit additive, σ-additive ou faiblement σ-additive. Nous préciserons sa nature suivant les cas.
Nous désignerons par $\sigma(B_S, Y)$ l'ensemble des mesures vectorielles $\sigma-$additives sur $S, \mathcal{B}_S$. Lorsque Y est le corps K des scalaires nous noterons simplement $\sigma(B_S)$.

Les notions de variation et de semivariation d'une mesure vectorielle seront utiles dans l'étude des représentations intégrales.

Définition 2: *Soit $\mu : \mathcal{B}_S \to Y$ une mesure vectorielle,*
(a) La variation de μ est la fonction d'ensembles $v(\mu, .)$ de $\mathcal{B}_S$ dans $[0, +\infty]$ définie par:

$$E \in \mathcal{B}_S : \ v(\mu, E) = \underset{\pi}{Sup} \sum_{A \in \pi} \|\mu(A)\| \tag{2}$$

où le Sup est pris sur l'ensemble des partitions finies π de E par des éléments de $\mathcal{B}_S$. Si $v(\mu, S) < \infty$ on dit que μ est à variation bornée. On pose alors $v(\mu) = v(\mu, S)$ et on appelle $v(\mu)$ variation totale de μ.
(b) La semivariation de μ est la fonction d'ensembles $\|\mu\| : \mathcal{B}_S \to [0, +\infty]$ definie par la formule:

$$E \in \mathcal{B}_S : \ \ \|\mu\|(E) = Sup\{v(y^*\mu, E) : \ y^* \in Y^*, \ \ \|y^*\| \leq 1\} \tag{3}$$

notons que $y^*\mu$ est scalaire pour tout $y^* \in Y^*$.
Si $\|\mu\|(S) < \infty$ on dit que μ à semivariation bornée.

Une vérification immédiate montre alors que:

$$E \in \mathcal{B}_S : \ \ \|\mu\|(E) \leq v(\mu, E) \tag{4}$$

Proposition 3: (a) *L'espace $vb\sigma(\mathcal{B}_S, Y)$ des mesures σ-additives à variation bornée est un espace vectoriel et $v(\mu, S)$ définit une norme pour laquelle $vb\sigma(\mathcal{B}_S, Y)$ est un espace de Banach.*
(b) Si μ est une mesure vectorielle on a:

$$E \in \mathcal{B}_S : \ \ \|\mu\|(E) = Sup\left\|\sum_i \alpha_i \mu(E_i)\right\| \tag{5}$$

Le Sup étant pris sur les partitions finies $\{E_i\}$ de E dans $\mathcal{B}_S$ et les suites finies de scalaires $\{\alpha_i\}$ tels que $|\alpha_i| \leq 1$ $\forall i$. D'autre part on a:

$$E \in \mathcal{B}_S : \ Sup\{\|\mu(A)\| : E \supseteq A \in \mathcal{B}_S\} \leq \|\mu\|(E) \leq 4Sup\{\|\mu(A)\| : E \supseteq A \in \mathcal{B}_S\} \tag{6}$$

Démonstration: Voir référence [6] , p.4. ¥

Dans la suite (section 1.5 ci-dessous) nous aurons à considérer des mesures vectorielles à valeurs dans un espace d'opérateurs. Pour de telles mesures nous utiliserons une définition de la semivariation différente de (6), mais qui sera mieux adaptée pour l'intégration, (voir définition 12 ci-dessous).

Dans la suite nous aurons besoin du célébre Théorème d'Orlicz-Pettis. (Pour la démonstration voir ref.[9] , théorème IV.10.1).

Théorème 4: *Toute mesure vectorielle* $\mu : \mathcal{B}_S \to Y$ *faiblement* σ*-additive est fortement* σ*-additive.*

Notons le corollaire utile suivant:

Corollaire: *Toute mesure vectorielle* σ*-additive est bornée. De plus l'ensemble des mesures scalaires* $\{y^*\mu\colon\ y^* \in Y^*,\ \ \|y^*\| \leq 1\}$ *est sequentiellement faiblement compact.*

Le notion de régularité que nous utiliserons dans la suite nécessite la structure topologique de l'espace S.

Définition 5: *Soit* $\mu : \mathcal{B}_S \to Y$ *une mesure vectorielle.*
On dit que μ *est régulière si elle satisfait la propriété suivante pour chaque* $E \in \mathcal{B}_S$:

(1)*Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* $O \subset S$ *et un compact* $K \subset S$ *tels que* $K \subset E \subset O$ *et* $\|\mu(A)\| < \varepsilon$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}_S$, $A \subset O \backslash K$.

D'aprés la proposition 3 (b) (6) cette propriété est équivalente à la suivante:

(2)*Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* $O \subset S$ *et un compact* $K \subset S$ *tels que* $K \subset E \subset O$ *et* $\|\mu\|\,(O \backslash K) < \varepsilon$.

Si μ est scalaire alors la condition est aussi équivalente à:

(3)*Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* $O \subset S$ *et un compact* $K \subset S$ *tels que* $K \subset E \subset O$ *et* $v(\mu, O \backslash K) < \varepsilon$.

On note $rvb\sigma(\mathcal{B}_S, Y)$ le sous espace de $vb\sigma(\mathcal{B}_S, Y)$ formé des mesures réguliéres. alors on a [6]:

Proposition 6: $rvb\sigma(\mathcal{B}_S, Y)$ *est un espace de Banach pour la norme de la variation totale.*

1.3. Théorème de Bartle-Dunford-Schwartz, forme générale.

Nous désignerons par ρ l'isomorphisme isométrique, $\rho : C^*(S) \to r\sigma(\mathcal{B}_S)$, donné par le Théorème de Riesz-Kakutani (voir théorème1.1.).
Voici alors la forme générale du Théorème de Bartle-Dunford-Schwartz:

Théorème 7: *Soit* $T : C(S) \to Y$ *un opérateur linéaire borné de* $C(S)$ *dans l'espace de Banach* Y. *Alors il existe une unique fonction d'ensembles* $\mu : \mathcal{B}_S \to Y^{**}$ *(bidual de* Y*) possédant les propriétés suivantes:*
(a) $\mu(.)y^*$ *est une mesure scalaire régulière pour chaque* $y^* \in Y^*$

(b) La fonction $y^* \to \mu(.)y^*$ de Y^* dans $r\sigma(\mathcal{B}_S) = \rho(C^*(S))$ est continue pour les topologies $*$-faibles $\sigma(Y^*, Y)$ et $\sigma(r\sigma(\mathcal{B}_S), C(S))$.
(c) $y^*Tf = \int_S f(s)d\mu(s).y^*$, $\forall y^* \in Y^*$, $\forall f \in C(S)$
(d) $\|T\| = \|\mu\|(S)$. (semivariation de μ)
Reciproquement si μ est une fonction d'ensembles de $\mathcal{B}_S$ dans Y^{**} satifaisant (a), (b) alors l'équation (c) définit un opérateur linéaire borné $T : C(S) \to Y$ dont la norme est donnée par (d) et tel que:

$$\rho(T^*y^*)(.) = \mu(.)y^*$$

Démonstration: On désigne par $T^* : Y^* \to C^*(S)$ l'opérateur adjoint de T défini par $T^*y^* = y^* \circ T$. Pour chaque $E \in \mathcal{B}_S$, on définit la fonctionnelle $\rho(.)(E) : C^*(S) \to \mathsf{K} = \mathsf{R}$ ou C par $\rho(u^*)(E)$ pour $u^* \in C^*(S)$.
On a immédiatement $|\rho(u^*)(E)| \leq |\rho(u^*)|$ (variation totale de $\rho(u^*)$)
$= \|u^*\|$ (ρ est une isométrie);
cela montre que $\rho(.)(E) \in C^{**}(E)$ pour chaque $E \in \mathcal{B}_S$. Définissons à présent la fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{B}_S \to Y^{**}$ par: $\mu(E) = T^{**}\rho(.)(E)$ c'est à dire $\mu(E) = \rho \circ T^*(E)$, $E \in \mathcal{B}_S$. Montrons que μ vérifie les propriétés annoncées.
Si $y^* \in Y^*$ on a, $\mu(.)y^* = \rho T^*y^*(.)$ et de la définition de T^* et de ρ, il résulte que $\mu(.)y^* \in r\sigma(\mathcal{B}_S)$. Donc (a) est vérifiée. D'autre part on sait que l'adjoint $T^* : Y^* \to C^*(S)$ de T est continu pour les topologies $*$-faibles $\sigma(Y^*, Y)$ et $\sigma(C^*(S), C(S))$; comme ρ est un isomorphisme isométrique on déduit la propriété (b). Pour voir la validité de (c), on peut écrire d'aprés le Théorème de Riesz-Kakutani:

$$y^* \circ T(f) = T^*y^*(f) = \int_S f(s)d\rho T^*y^*(s) = \int_S f(s)d\mu(s)(y^*)$$

pour tout $y^* \in Y^*$ et tout $f \in C(S)$; d'où la propriété (c).
Venons en à la propriété (d). Par la proposition 4 (b), formule (6) on a $\|\mu\|(E) = Sup\left\|\sum_i \alpha_i\mu(E_i)\right\|$, où le Sup est pris sur les paritions finies $\{E_i\}$ de E dans $\mathcal{B}_S$ et les suites finies de scalaires $\{\alpha_i\}$ tels que $|\alpha_i| \leq 1$; si $E_1, E_2, ..., E_n$ est une partition finie de S dans $\mathcal{B}_S$ et $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ une suite de scalaires tels que $|\alpha_i| \leq 1$, $1 \leq i \leq n$ on a, en se rappelant que $\sum_1^n \alpha_i\mu(E_i) \in Y^{**}$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_1^n \alpha_i\mu(E_i)\right\| &= \underset{\|y^*\|\leq 1}{Sup} \left|\sum_1^n \alpha_i\mu(E_i)y^*\right| \\ &\leq \underset{\|y^*\|\leq 1}{Sup} \sum_1^n |\mu(E_i)y^*| \\ &\leq \underset{\|y^*\|\leq 1}{Sup}\ v(\mu(.)y^*, S) \text{ (d'aprés la formule 2)}\end{aligned}$$

Mais d'aprés la définition de μ on a: $v(\mu(.)y^*, S) = v(\rho T^*y^*(.), S) = \|T^*y^*\|$ et $\underset{\|y^*\|\leq 1}{Sup}\ v(\mu(.)y^*, S) = \underset{\|y^*\|\leq 1}{Sup}\ \|T^*y^*\| = \|T^*\| = \|T\|$. En d'autres termes on a: $\left\|\sum_1^n \alpha_i\mu(E_i)\right\| \leq \|T\|$ et par le caractère arbitraire de la partition $\{E_i\}$ et de la suite α_i on déduit de la formule (6): $\|\mu\| \leq \|T\|$.

Pour voir l'inégalité inverse, observons que $\|\mu\| \geq \|\sum_1^n \alpha_i \mu(E_i)\| = \underset{\|y*\| \leq 1}{Sup} |\sum_1^n \alpha_i \mu(E_i) y^*|$ inégalité valable pour toute les suites finies α_i de scalaires tels que $|\alpha_i| \leq 1$, $1 \leq i \leq n$.
En particulier on aura avec le choix, $\alpha_i = \dfrac{|\mu(E_i)y^*|}{\mu(E_i)y^*}$, $\|\mu\| \geq \underset{\|y^*\| \leq 1}{Sup} \sum_1^n |\mu(E_i)y^*|$
ce qui implique:

$$\begin{aligned}
\|\mu\| &\geq \underset{\{E_i\}}{Sup} \ \underset{\|y^*\| \leq 1}{Sup} \sum_1^n |\mu(E_i)y^*| \\
&= \underset{\|y^*\| \leq 1}{Sup} \ \underset{\{E_i\}}{Sup} \sum_1^n |\mu(E_i)y^*| \\
&= \underset{\|y^*\| \leq 1}{Sup} v(\mu(.)y^*, S) \\
&= \|T^*\| = \|T\|
\end{aligned}$$

cela achève la preuve de (d).

Reciproquement soit $\mu : \mathcal{B}_S \to Y^{**}$ une fonction d'ensembles satisfaisant (a) et (b). D'aprés le point (b) l'application $y^* \to \rho^{-1}\mu(.)y^*$ de Y^* dans $C^*(S)$ est continue pour les topologies $*$-faibles $\sigma(Y^*, Y)$ et $\sigma(C^*(S), C(S))$ comme pour f fixé dans $C(S)$ l'application $u^* \to u^* f$ de $C^*(S)$ dans R est $\sigma(C^*(S), C(S))$ continue, on en déduit que l'application $y^* \to \rho^{-1}(\mu(.)y^*)(f)$ est une forme linéaire $\sigma(Y^*, Y)$-continue. Par consequent il existe un unique vecteur y_f dans Y tel que l'on ait $y^*(y_f) = \rho^{-1}(\mu(.)y^*)(f)$ pour tout $y^* \in Y^*$.
Posons $u^* = \rho^{-1}(\mu(.)y^*) \in C^*(S)$; d'aprés le Théorème de Riesz-Kakutani on a:

$$y^*(y_f) = u^*(f) = \int_S f(s) d\rho(u^*)(s) = \int_S f(s) d\mu(s) y^*$$

La correspondance $T : f \to y_f$ de $C(S)$ dans Y est evidemment linéaire.
Montrons que T est borné. En effet:

$$\begin{aligned}
\|Tf\| = \|y_f\| &= \underset{\|y^*\| \leq 1}{Sup} |y^*(y_f)| \\
&= \underset{\|y^*\| \leq 1}{Sup} \left| \int_S f(s) d\mu(s) y^* \right| \\
&\leq \underset{\|y^*\| \leq 1}{Sup} v(\mu(.)y^*, S).\|f\|
\end{aligned}$$

D'autre part on peut écrire, $y^* Tf = \displaystyle\int_S f(s) d\mu(s) y^*$ et d'aprés la $1^{\text{ère}}$ partie du Théorème $\|T\| = \|\mu\|$.
Enfin observons que $y^* \circ Tf = T^* y^*(f) = \displaystyle\int_S f(s) d\rho(T^* y^*)(s) = \int_S f(s) d\mu(s) y^*$ où l'égalité est vérifiée $\forall f \in C(S)$. Comme les mesures $\mu(.)y^*$ et $\rho(T^* y^*)(.)$ sont régulières il résulte du Théorème de Riesz-Kakutani que l'on a:

$$\mu(.)y^* = \rho(T^* y^*)(.). \qquad ¥$$

1.4. Théorème de Bartle-Dunford-Schwartz: le cas des opérateurs faiblement compacts.

Définition 8: *Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire borné de E dans F; B désigne la boule unité fermée de E. On dit que T est faiblement compact si la fermeture faible de TB est compacte pour la topologie faible $\sigma(F, F^*)$ de F.*

Les deux Théorèmes suivants seront essentiels dans l'étude des représentations intégrales d'opérateurs sur $C(S)$. (Pour la démonstration, voir [9] chapitre VI). Dans la suite nous utiliserons le symbole γ pour désigner l'isométrie canonique d'un espace de Banach arbitraire Y dans son bidual Y^{**} :

$$y \in Y,\ y^* \in Y^*,\ \gamma(y)(y^*) = y^*(y).$$

Théorème 9: *Un opérateur $T : E \to F$ est faiblement compact si et seulement si $T^{**}E^{**}$ est contenu dans l'image $\gamma(F)$ de F, au moyen de l'isométrie canonique $\gamma : F \to F^{**}$.*

Théorème 10: *Un opérateur $T : E \to F$ est faiblement compact si et seulement si son adjoint $T^* : F^* \to E^*$ est faiblement compact.*

Le Théorème de représentation pour les opérateurs faiblement compacts $T : C(S) \to Y$ est particulièrement interessant puisque pour de tels opérateurs la fonction μ qui détermine la forme intégrale sera une mesure vectorielle σ-additive à valeurs dans Y.

Théorème 11: *Soit $T : C(S) \to Y$ un opérateur borné faiblement compact. Alors il existe une mesure vectorielle σ-additive unique sur $\mathcal{B}_S$ à valeurs dans Y, telle que:*

(a) $y^*\mu$ est dans $r\sigma(\mathcal{B}_S)$ pour tout $y^* \in Y^*$.

(b) $Tf = \int_S f(s)d\mu(s)$, $f \in C(S)$.

(c) $\|T\| = \|\mu\|$ (semivariation de μ).

(d) $\rho(T^*y^*) = y^*\mu$, $y^* \in Y^*$.

Reciproquement si μ est une mesure vectorielle sur $\mathcal{B}_S$ à valeurs dans l'espace de Banach Y, qui satisfait (a) alors l'opérateur T défini par (b) est faiblement compact de $C(S)$ dans Y dont la norme est donnée par (c) et dont l'adjoint est donné par (d).

Démonstration: Soit $\lambda : \mathcal{B}_S \to Y^{**}$ la fonction d'ensembles donnée par le Théorème 7 . Rappelons que $\lambda(E) = T^{**}\theta_E$ où θ_E est l'élément de $C^{**}(S)$ défini par $\theta_E(u^*) = \rho(u^*)(E)$, $u^* \in C^*(S)$. Comme T est faiblement compact on a $T^{**}\theta_E \in \gamma(Y)$ (Théorème 9). Définissons $\mu : \mathcal{B}_S \to Y$ par:

$$E \in \mathcal{B}_S : \mu(E) = \gamma^{-1}(\lambda(E)).$$

Montrons que μ est une mesure vectorielle σ-additive. Soit y^* arbitraire dans Y^*; on a par définition de μ et $\gamma : \gamma\mu(E)(y^*) = y^*\mu(E) = \lambda(E)y^*$. Mais d'aprés le point (a) du Théorème 7, $\lambda(.)y^* \in r\sigma(\mathcal{B}_S)$, par consequent $\mu(E)$ est faiblement σ-additive d'où le point (a). D'aprés le Théorème 4, μ est une mesure vectorielle σ-additive. D'autre part d'aprés la forme intégrale faible de T donnée par λ on a:

$$\begin{aligned} y^*Tf = \int_S f(s)d\lambda(s)y^* &= \int_S f(s)d(y^*\mu)(s) \\ &= y^* \int_S f(s)d\mu(s) \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte des propriétés de l'intégrale d'une fonction scalaire par rapport à une mesure vectorielle. Par conséquent on obtient

$$y^*Tf = y^* \int_S f(s)d\mu(s) \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Il résulte du Théorème de Hahn-Banach que $Tf = \displaystyle\int_S f(s)d\mu(s)$, cela prouve (b).
Le point (c) est exactement le point (d) du Théorème 7.
Pour montrer (d) remarquons que $\lambda(E)y^* = y^*\mu(E)$ et $\lambda(E)y^* = T^{**}\theta_E(y^*) = \theta_E \circ T^*(y^*) = \rho(T^*y^*)(E)$ d'où il résulte que $\rho(T^*y^*) = y^*\mu$, $\forall y^* \in Y^*$.
Venons-en à la reciproque. Soit $\mu : \mathcal{B}_S \to Y$ une mesure σ-additive telle que $y^*\mu$ soit une mesure scalaire régulière pour chaque $y^* \in Y^*$. Alors l'opérateur $T : C(S) \to Y$ défini par $Tf = \displaystyle\int_S f(s)d\mu(s)$ vérifie $\|Tf\| = \left\|\displaystyle\int_S f(s)d\mu(s)\right\| \leq \|f\| . \|\mu\|$, d'aprés les propriétés de l'intégrale vectorielle d'une fonction scalaire. Donc T est continu. D'autre part l'adjoint de T est donné par:

$$\begin{aligned} y^*Tf = y^* \int_S f(s)d\mu(s) &= \int_S f(s)dy^*\mu(s) \\ = T^*y^*(f) &= \int_S f(s)d\rho(T^*y^*)(s) \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de Théorème de Riesz-Kakutani; comme les deux mesures scalaires $y^*\mu$ et $\rho(T^*y^*)$ sont régulières on en déduit que $\rho(T^*y^*) = y^*\mu$.
Cela prouve (d). D'autre part, comme μ est une mesure vectorielle σ-additive, il résulte du corollaire du théorème 4 que l'ensemble des mesures scalaires $\{y^*\mu : \ y^* \in Y^*, \ \|y^*\| \leq 1\}$ est faiblement sequentiellement compact; il en est de même pour l'ensemble $\{T^*y^* : \ y^* \in Y^*, \ \|y^*\| \leq 1\}$ car ρ est une isométrie. Autrement dit T^* transforme la boule unité de Y^* en un ensemble faiblement sequentiellement compact.D'aprés le Théorème de Eberlein-Smulian ci-dessous ([9] théorème V.6.1), l'ensemble $\{T^*y^* : y^* \in Y^*, \|y^*\| \leq 1\}$ est faiblement relativement compact. Cela prouve que T^* est faiblement compact et d'aprés le théorème10 l'opérateur T est faiblement compact. ¥

Théorème: *(Eberlein-Smulian). Soit A une partie d'un espace de Banach B. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(a) *A est faiblement sequentiellement compact,i.e., toute suite de A possède une sous suite convergeant faiblement dans B.*
(b) *Toute suite infinie dans A posséde un point d'accumulation faible dans B.*
(c) *La fermeture faible de A est compacte pour la topologie faible $\sigma(B, B^*)$ de B.*

1.5. Représentation intégrale de Singer-Dinculeanu.

Nous considérons dans cette section des représentations intégrales d'un type special pour des opérateurs linéaires bornés $T : C(S, X) \to Y$. Il s'agit d'une forme intégrale par rapport à une fonction d'ensembles G définie sur $\mathcal{B}_S$, à valeurs dans un espace d'opérateurs et additive. Le procédé d'intégration utilisé dans ces représentations a été considérablement developpé dans la monographie de Dinculeanu[7] . Nous résumons ci-dessous les éléments essentiels qui nous seront utiles dans la suite. Soit E un espace de Banach et soit $\mathcal{L}(X, E)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de X dans E. Nous allons définir l'intégrale d'une fonction $f : S \to X$ par rapport à une mesure vectorielle additive $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, E)$ et le résultat de l'intégration sera un vecteur de E. Notons dés à présent que les mesures qui donneront la forme intégrale d'un opérateur borné $T : C(S, X) \to Y$ seront obtenues pour $E = Y^{**}$, bidual de Y. Commençons par une étude de quelques propriétés remarquables des fonctions d'ensembles à valeurs opérateurs.

La définition suivante de la semivariation est mieux adaptée pour l'intégration par rapport à une mesure $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, E)$, que la semivariation donnée par la formule (6).

Définition 12: *Soit $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, E)$ une fonction d'ensembles. On appelle semivariation de G la fonction $\widetilde{G}$: $\mathcal{B}_S \to [0, +\infty]$ définie par:*

$$A \in \mathcal{B}_S,\ \widetilde{G}(A) = Sup \left\| \sum_i G(A_i).x_i \right\| \tag{7}$$

où le Sup est pris sur l'ensemble des suites disjointes finies $\{A_i\}$ de $\mathcal{B}_S$ dans A et des suites finies $\{x_i\}$ dans X telles que $\|x_i\| \leq 1$, $\forall i$.

On dit que la fonction d'ensembles G est à semivariation finie si $\widetilde{G}(A) < \infty$, $\forall A \in \mathcal{B}_S$. Une comparaison avec la formule (2) et (6) donne directement:

$$A \in \mathcal{B}_S,\ \ \|G\|(A) \leq \widetilde{G}(A) \leq v(G, A) \tag{8}$$

Pour les fonctions G à valeurs dans le dual d'un espace de Banach on a la propriété suivante trés utile pour la suite:

Proposition 13: *Soit $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, \mathsf{R}) = X^*$ une fonction d'ensembles à valeurs dans X^*. Alors on a:*

$$\forall A \in \mathcal{B}_S:\ \ \widetilde{G}(A) = v(G, A) \tag{9}$$

Démonstration: D'aprés (9) il suffit de montrer que $v(G,A) \leq \widetilde{G}(A)$ pour $A \in \mathcal{B}_S$. Soit $\{A_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ une partition finie de A dans $\mathcal{B}_S$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$ il existe $x_i \in X$ tel que $\|x_i\| \leq 1$ et $\|G(A_i)\| \leq |G(A_i).x_i| + \dfrac{\varepsilon}{n}$.

D'où il résulte $\sum\limits_{i=1}^{n} \|G(A_i)\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i G(A_i).x_i + \varepsilon$

$$= \sum_{i=1}^{n} G(A_i).\alpha_i x_i + \varepsilon = \left|\sum_{i=1}^{n} G(A_i).\alpha_i x_i\right| + \varepsilon$$
$$\leq \widetilde{G}(A)$$

où $\alpha_i = 1$ si $G(A_i).x_i > 0$, $\alpha_i = -1$ si $G(A_i).x_i < 0$. On déduit $v(G,A) \leq \widetilde{G}(A) + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ et finalement $v(G,A) \leq \widetilde{G}(A)$. ¥

Définition 14: *Soit $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, Y^{**})$ une fonction d'ensembles à valeurs dans $\mathcal{L}(X, Y^{**})$, Y^{**} est le bidual de Y. Si $y^* \in Y^*$ on définit la fonction G_{y^*} : $\mathcal{B}_S \to X^*$ par :*

$$A \in \mathcal{B}_S,\ G_{y^*}(A)(x) = G(A)(x)(y^*) \qquad (10)$$

L'une des propriétés remarquables des fonctions G_{y^*} est qu'elles permettent d'estimer la semivariation de la fonction d'ensembles G :

Proposition 15: *Avec les données ci-dessus on a:*

$$\forall A \in \mathcal{B}_S,\ \widetilde{G}(A) = Sup\,\{v(G_{y^*}, A),\ \ \|y^*\| \leq 1\} \qquad (11)$$

Démonstration: Les fonctions G_{y^*}, $y^* \in Y^*$ étant à valeurs dans X^*, on a d'aprés la proposition 13, $\widetilde{G}_{y^*}(A) = v(G_{y^*}, A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}_S$ et tout $y^* \in Y^*$. D'autre part si $A \in \mathcal{B}_S$, alors pour toute partition finie $\{A_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ de A dans $\mathcal{B}_S$ et pour toute suite $\{x_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ dans X telle que $\|x_i\| \leq 1$, $\forall i \leq n$. On a:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} G(A_i).x_i\right\| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \left|(\sum_{i=1}^{n} G(A_i).x_i)(y^*)\right| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \left|(\sum_{i=1}^{n} G_{y^*} A_i.x_i)\right|$$
$$\leq \sup_{\|y^*\|\leq 1} \widetilde{G}_{y^*}(A) = \sup_{\|y^*\|\leq 1} v(G_{y^*}, A)$$

il en résulte que: $\widetilde{G}(A) \leq Sup\,\{v(G_{y^*}, A),\ \ \|y^*\| \leq 1\}$

D'autre part, si $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| \leq 1$, on a:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} G_{y^*}(A_i).x_i\right| = \left|(\sum_{i=1}^{n} G(A_i).x_i)(y^*)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} G(A_i).x_i\right\| \leq \widetilde{G}(A)$$

Par conséquent $\widetilde{G}_{y^*}(A) \leq \widetilde{G}(A)$; d'où il résulte que:

$$\sup_{\|y^*\|\leq 1} v(G_{y^*}, A) = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \widetilde{G}_{y^*}(A) \leq \widetilde{G}(A). \qquad ¥$$

Remarque 16: Soit $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, E)$ et pour tout $z^* \in E^*$, définissons la fonction $z^*G : \mathcal{B}_S \to X^*$par:

$$(z^*G)(A)(x) = z^*(G(A)(x)) \text{ pour } A \in \mathcal{B}_S \text{ et } x \in X.$$

En appliquant mot à mot la démonstration précédente on obtient:

$$\widetilde{G}(A) = \underset{\|z^*\|\leq 1}{Sup}\ v(z^*G, A)$$

Définition 17: *(a) Une fonction $f : S \to X$ est dite simple si elle est de la forme $f(.) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(.).x_i$, où les A_i sont deux à deux disjoints dans $\mathcal{B}_S$ et $x_i \in X$, $1 \leq i \leq n$; χ_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A. On note $\Im(S, X)$ l'ensemble des fonctions simples $f : S \to X$.*

(b) *Une fonction $f : S \to X$ est dite mesurable si elle est limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions simples. On note $M(S, X)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : S \to X$.*

Il est facile du vérifier que $M(S, X)$ est un espace vectoriel sur R et que $\Im(S, X)$ est un sous espace de $M(S, X)$. D'autre part toute fonction $f \in M(S, X)$ est bornée et nous munirons $M(S, X)$ de la norme uniforme $\|f\| = \underset{s\in S}{Sup}\,\|f(s)\|$. Dans ce cas il est clair que $\Im(S, X)$ est un sous espace dense dans $M(S, X)$. Si $X = \mathsf{R}$ ou C on note $\Im(S, X) = \Im(S)$ et $M(S, X) = M(S)$. Remarquons enfin que $M(S, X)$ est un sous espace fermé dans l'espace de Banach des fonctions bornées $f : S \to X$.

A présent soit $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, E)$ une fonction d'ensembles que nous supposerons additive et à semi variation finie. Soit $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}.x_i \in \Im(S, X)$ et soit $B \in \mathcal{B}_S$; on définit l'intégrale de f sur B par rapport à G par la formule

$$\int_B f\ dG = \sum_{i=1}^{n} G(A_i \cap B).x_i \tag{12}$$

On vérifie aisément que cette intégrale est définie sans ambiguité. De plus on a:

Proposition 18: *Avec les données ci-dessus on a:*

(a) Linéarité: Pour tous f, $g \in \Im(S, X)$, α, $\beta \in \mathsf{R}$, $B \in \mathcal{B}_S$

$$\int_B (\alpha f + \beta g)\ dG = \alpha \int_B f\ dG + \beta \int_B g\ dG$$

(b) Pour tous $B \in \mathcal{B}_S$, $\widetilde{G}(B) = Sup \left\| \int_B f\ dG \right\|$ où le Sup est pris sur l'ensemble des fonctions simples $f = \sum\limits_i \chi_{A_i}.x_i$ telle que $\|f\| \leq 1$.

(c) Pour tous $f \in \Im(S, X)$, $\left\| \int_B f\ dG \right\| \leq \|f\| .\widetilde{G}(B)$.

Démonstration: (a) résulte directement de la formule (12).

(b) résulte de la définition 12 de $\widetilde{G}$ et de ce que si $f = \sum\limits_i \chi_{A_i}.x_i$ alors $\|f\| \leq 1$ équivaut à $\|x_i\| \leq 1\ \forall i$.

(c) est immédiat puisque $\left\| \dfrac{f}{\|f\|} \right\| = 1$. ¥

L'inégalité (c) va nous permettre d'étendre l'intégrale aux fonctions mesurables.

Soit $f \in M(S,X)$; d'aprés la définition 17 (b), il existe une suite (f_n) dans $\Im(S,X)$ telle que $\|f_n - f\| \to 0$, $n \to \infty$. Pour tout $B \in \mathcal{B}_S$ on pose

$$\int_B f\ dG = \lim_n \int_B f_n\ dG \tag{13}$$

La justification de cette définition est la suivante:
D'aprés le point (c) pour tout m, $n \geq 1$ et tout $B \in \mathcal{B}_S$

$$\left\| \int_B f_n\ dG - \int_B f_m\ dG \right\| = \left\| \int_B (f_n - f_m)\ dG \right\| \leq \|f_n - f_m\| .\widetilde{G}(B).$$

Comme G est par hypothèse à sousvariation finie, il en résulte que $(\int_B f_n\ dG)$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E, d'où l'existence de la limite (13). Par ailleurs si (f_n), (g_n) sont deux suites dans $\Im(S,X)$ telles que $\|f_n - f\| \to 0$ et $\|g_n - f\| \to 0$, il est clair que $\|f_n - g_n\| \to 0$ et à partir de l'inégalité (c) on déduit $\lim_n \int_B f_n dG = \lim_n \int_B g_n\ dG$. Ainsi la définition (13) ne dépend pas de la suite f_n mais uniquement de f. D'autre part il est clair que l'intégrale définie en (13) est linéaire sur l'espace $M(S,X)$ et vérifie aussi l'inégalité $\left\| \int_B f\ dG \right\| \leq \|f\| .\widetilde{G}(B)$ pour tout $f \in M(S,X)$ et tout $B \in \mathcal{B}_S$.

Corollaire: *Avec les données précèdentes l'opérateur* $U_B : M(S,X) \to E$ *défini par* $U_B(f) = \int_B f\ dG$, $f \in M(S,X)$ *est borné et de norme* $\|U_B\| \leq \widetilde{G}(B)$.

Par un autre procédé d'extension, la formule (13) conduit à une classe de fonctions plus vaste que $M(S,X)$, à condition de renforcer les hypothèses sur la fonction d'ensembles G, en supposant que G est σ-additive et à variation bornée. Le procédé d'extension est décrit en détails dans le chapitre II de la monographie [7], et permet de réaliser l'espace $\mathcal{L}^1(G)$ des fonctions intégrables que l'on définit sommairement de la façon suivante: une fonction $f : S \to X$ est dite intégrable par rapport à G s'il existe une suite $(f_n) \subset \Im(S,X)$ telle que $\lim_n \left\| \int_B (f_n - f_m) dG \right\| = 0$ et $\lim_n f_n(s) = f(s)$ m-presque partout, pour $s \in S$, où m désigne la variation de G. Dans ce cas on démontre que la limite de $\int_B f_n\ dG$ est indépendante de la suite f_n de fonctions simples convergeant vers f. On pose alors la définition:

$$f \in \mathcal{L}^1(G), \quad \int_B f\ dG = \lim_n \int_B f_n\ dG \tag{14}$$

l'espace $\mathcal{L}^1(G)$ ainsi obtenu est un espace vectoriel et l'intégrale (14) est linéaire. De plus $M(S,X)$ est un sous espace de $\mathcal{L}^1(G)$ et les intégrales (13) et (14) coincident pour les fonctions $f \in M(S,X)$. Dans l'étude des représentations intégrales, nous aurons besoin d'intégrer les fonctions continues $f : S \to X$, i.e $f \in C(S,X)$. Nous devons donc montrer que $C(S,X)$ est contenu dans $M(S,X)$. Considérons la classe $\mathcal{K}$ des fonctions $f \in C(S,X)$ de la forme $f(s) = g(s).x$, où g est une fonction scalaire, continue sur S, i.e $g \in C(S)$ et x est fixé dans X. On a alors:

Proposition 19: *Le sous espace vectoriel engendré par $\mathcal{K}$ est dense dans $C(S, X)$.*

Démonstration: Soit $f \in C(S, X)$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $s \in S$, il existe un ouvert V de s tel que $\|f(t) - f(s)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \in V$. Par conséquent pour tous s', $s'' \in V$ on a $\|f(s') - f(s'')\| < \varepsilon$. Comme S est compact, il existe une famille $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$, de tels ouverts V, recouvrant S. Soit $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement (V_i), c'est-à-dire que chaque φ_i est une fonction continue de S dans l'intervalle $[0, 1]$, de support contenu dans V_i et telle que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \equiv 1$. Pour chaque i, choisissons s_i dans V_i et posons $f(s_i) = x_i$. On a alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i . x_i - f \right\| < \varepsilon$. En effet soit $s \in S$; si $s \in V_i$ alors $\|x_i - f(s)\| = \|f(s_i) - f(s)\| < \varepsilon$ et si $s \notin V_i$ alors $\varphi_i(s) = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_i \varphi_i(s).x_i - f(s) \right\| &= \left\| \sum_i \varphi_i(s).x_i - \sum_i \varphi_i(s) f(s) \right\| \\
&= \left\| \sum_i \varphi_i(s).f(s_i) - \sum_i \varphi_i(s) f(s) \right\| \\
&= \left\| \sum_i \varphi_i(s).(f(s_i) - f(s)) \right\| \\
&\leq \sum_i \varphi_i(s). \left\| (f(s_i) - f(s)) \right\| < \varepsilon \sum_i \varphi_i(s) \leq \varepsilon. \quad ¥
\end{aligned}$$

Proposition 20: *$C(S, X)$ est un sous espace de $M(S, X)$.*

Démonstration: Il suffit de montrer que $\mathcal{K} \subset M(S, X)$ et d'appliquer la proposition 19. Soit $f = g.x$ une fonction de $\mathcal{K}$. Comme g est continue sur S compact, elle est bornée; étant borelienne, g est par conséquent limite uniforme d'au moins une suite g_n de fonctions scalaires simples. La suite $f_n = g_n.x$ est dans $\Im(S, X)$ et il est clair qu'elle converge uniformément vers f. D'aprés la définition 17 (b), on déduit que f est dans $M(S, X)$. ¥

Le représentation intégrale d'un opérateur borné $T : C(S, X) \to Y$ sera basée sur la structure du dual topologique $C^*(S, X)$ de l'espace de Banach $C(S, X)$ qui est donnée par le Théorème suivant. (voir Singer [20], et Dinculeanu [7]). Rappelons que le symbole $rvb\sigma(\mathcal{B}_S, X^*)$ désigne l'espace de Banach des mesures vectorielles $m : \mathcal{B}_S \to X^*$ régulières et σ-additives, muni de la norme variation totale.

Théorème 21: *Il existe un isomorphisme isométrique du dual topologique $C^*(S, X)$ sur l'espace de Banach $rvb\sigma(\mathcal{B}_S, X^*)$. La correspondance entre la fonctionnelle $U^* \in C^*(S, X)$ et l'unique mesure vectorielle $m \in rvb\sigma(\mathcal{B}_S, X^*)$ est déterminée par:*
(i) $f \in C(S, X)$, $U^* f = \int_S f \, dm$.
(ii) $\|U^*\| = v(m, S)$ (variation de m)

Voici alors le Théorème de représentation intégrale de Singer-Dinculeanu. Ce résultat semble avoir été observé, sous une forme faible, pour la première fois par

C.Foias et I.Singer[22] . Il fait partie d'une longue serie de représentations établies par Dinculeanu dans sa monographie[7]. L'énoncé donné ci-dessous est adapté au contexte de notre travail.(Voir référence [6], p.182).

Théorème 22: *Tout opérateur linéaire borné* $T : C(S,X) \to Y$ *détermine une unique fonction d'ensembles* $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, Y^{**})$ *telle que:*
(i) G *est finiment additive et à sousvariaiton finie.*
(ii) G *est faiblement régulière (i.e* G_{y^*} *est régulière,* $\forall y^* \in Y^*$*).*
(iii) L'application $y^* \to G_{y^*}$ *est continue de* Y^* *dans l'espace* $rvb\sigma(\mathcal{B}_S, X^*)$ *pour les topologies* $*$*-faibles* $\sigma(Y^*, Y)$ *et* $\sigma(C^*(S,X), C(S,X))$.
(iv) $Tf = \int_S f \; dG, \forall f \in C(S,X)$, *au sens où* $\gamma Tf = \int_S f \; dG$,
$\gamma : Y \to Y^{**}$, *étant l'isométrie canonique.*
(v) $\|T\| = \widetilde{G}(S)$ *(semivariation de G).*
(vi) $T^* y^* = G_{y^*}$ *pour tout* $y^* \in Y^*$.

Inversement si G *est une fonction de* $\mathcal{B}_S$ *dans* $\mathcal{L}(X, Y^{**})$ *satisfaisant (i)-(iii), la formule (iv) détermine un opérateur linéaire borné* $T : C(S,X) \to Y$ *vérifiant (v) et (vi).*

Démonstration: Considérons l'opérateur T^* adjoint de T.
Pour chaque $y^* \in Y^*$, $T^* y^*$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $C(S,X)$, i.e $T^* y^* \in C^*(S,X)$. D'aprés le Théorème 21, il existe une mesure vectorielle $\mu_{y^*} \in rvb\sigma(\mathcal{B}_S, X^*)$, telle que:

$(*)$ $T^* y^*(f) = y^* \circ Tf = \int_S f \; d\mu_{y^*}, \forall f \in C(S,X)$

$(**)$ $\|T^* y^*\| = v(\mu_{y^*})$ (variation de μ_{y^*}).

A présent, fixons $A \in \mathcal{B}_S$ et $x \in X$ et définissons l'application $G(A).x : Y^* \to \mathsf{R}$ par la formule $(G(A).x)(y^*) = \mu_{y^*}(A).x$. Il est clair que $G(A).x$ est linéaire sur Y^* et on a:

$$\begin{aligned} |(G(A).x)(y^*)| &= |\mu_{y^*}(A).x| \le \|\mu_{y^*}(A)\| . \|x\| \\ &\le v(\mu_{y^*}). \|x\| \\ &= \|T^* y^*\| . \|x\| \text{ (d'aprés } (**)) \\ &\le \|T^*\| . \|y^*\| . \|x\| . \end{aligned}$$

comme $\|T^*\| = \|T\|$, on en déduit que:

$$|(G(A).x)(y^*)| \le \|T\| . \|y^*\| . \|x\| .$$

Par conséquent $G(A).x \in Y^{**}$ et $\|G(A).x\| \le \|T\| . \|x\|$. Ces observations nous permettent de définir, pour A fixé dans $\mathcal{B}_S$, l'application $G(A) : x \to G(A).x$ de X dans Y^{**}. $G(A)$ est pour chaque A linéaire et continue; de plus $\|G(A)\| \le \|T\|$.
Il est clair que l'application $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, Y^{**})$ donnée par $A \to G(A)$ est additive. L'analyse de G au moyen de la définition 14 et de la proposition 15, formule (11), donne:

$(G(A).x)(y^*) = G_{y^*}(A).x = \mu_{y^*}(A).x$, pour tous $A \in \mathcal{B}_S$, $x \in X$ et $y^* \in Y^*$.

D'autre part l'estimation de la semivariation donnée à la proposition 15 implique:

$\widetilde{G}(S) = Sup\,\{v(G_{y^*}, S), \;\; \|y^*\| \le 1\}$

$= Sup\,\{v(\mu_{y^*}, S),\ \ \|y^*\| \leq 1\}$
$= Sup\,\{\|T^*y^*\|\,,\ \ \|y^*\| \leq 1\}$ (d'aprés $(*)$)
$= \|T^*\| = \|T\|$

Récapitulons les résultats obtenus:
(i) est vérifiée par définition de G et par l'estimation qui vient d'être faite.
(ii) résulte de l'identité $G_{y^*} = \mu_{y^*}$.
(iii) est une conséquence de (vi) laquelle est vérifiée par construction puisque $T^*y^* = G_{y^*} = \mu_{y^*}$, et on sait que l'adjoint d'un opérateur est continu pour les topologies $*$-faibles des espaces en présence.
(v) résulte de l'estimation de $\widetilde{G}(S)$.

Il reste à montrer (iv). Il est important de souligner que l'intégrale $\int_S f\ dG$ est à valeurs dans Y^{**} puisque G est à valeurs dans $\mathcal{L}(X, Y^{**})$. Comme Tf est par hypothèse dans Y, il y a necessité d'expliquer la cohérence de l'égalité (iv). En vérité nous allons montrer que (iv) est valide au sens suivant:

$$\gamma Tf = \int_S f\ dG$$

où $\int_S f\ dG$ est l'intégrale vectorielle définie à l'aide de G (formule 13), et $\gamma : Y \to Y^{**}$ l'isométrie canoniqueRemarquons d'abord que pour tout $f \in C(S,X)$, $y^* \in Y^*$ on a:

$$y^*Tf = T^*y^*f = \int_S f\ d\mu_{y^*} = \int_S f\ dG_{y^*}$$

D'autre part définissons l'opérateur $U : M(S,X) \to Y^{**}$ au moyen de l'intégrale vectorielle à l'aide de G (voir formules (12) et (13))

$$f \in M(S,X),\ Uf = \int_S f\ dG \in Y^{**}$$

Il est alors facile de vérifier la propriété

$$\forall f \in M(S,X),\ \forall y^* \in Y^*,\ Uf(y^*) = \int_S f\ dG_{y^*}$$

en commençant par la vérifier pour f dans la classe $\Im(S,X)$ et en la généralisant aux fonctions $f \in M(S,X)$ au moyen d'un passage à la limite usuel.
Comme $C(S,X) \subset M(S,X)$ (proposition 20) on obtient:

$$\forall f \in C(S,X),\ y^*Tf = Uf(y^*)$$

comme $Tf \in Y$ on a $y^*Tf = \gamma Tf(y^*)$ par définition de γ. Ainsi on déduit la forme consolidée suivante de (iv):

$$\gamma Tf = Uf = \int_S f\ dG$$

cela achève la démonstration de la première partie du Théorème.

Venons-en à la réciproque. Soit G: $\mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, Y^{**})$ une fonction d'ensembles satisfaisant (i)-(iii). Par conséquent elle est générée par un vecteur Tf de Y au sens où $y^* \circ Tf = \int_S f \, dG_{y^*}$. Il est clair que l'application $f \to Tf$ est linéaire de $C(S, X)$ dans Y. D'autre part un raisonnement simple montre que T est continue pour les topologies faibles $\sigma(C(S, X), C^*(S, X))$ et $\sigma(Y, Y^*)$. Par conséquent T est borné. ([9] Théorème V.3.15). Ainsi, en faisant intervenir l'adjoint T^* de T, on obtient $T^* y^* = G_{y^*}$, d'où (vi). Enfin l'estimation (v) est établie par la même méthode utilisée dans la première partie de la démonstration. ¥

Chapter 3
THÉORÈME DE RIESZ ET INTÉGRALE DE BOCHNER.

Ce chapitre est consacré à l'étude des représentations intégrales d'opérateurs bornés $T : C(S,X) \to X$ par l'intégrale de Bochner. En d'autres termes, nous nous intéressons à des généralisations directes du Théorème de Riesz-Kakutani lorsque on remplace l'ensemble R ou C par un espace de Banach X arbitraire. Le résultat principal est l'identification d'une classe d'opérateurs bornés $T : C(S,X) \to X$ représentables sous la forme d'une intégrale de Bochner par rapport à une mesure scalaire régulière. La représentation intégrale sera une conséquence d'un isomorphisme isométrique entre la classe d'opérateurs identifiée et le dual topologique $C^*(S)$ de $C(S)$.
Si la dimension de l'espace X est superieure à 2, la construction d'un exemple simple montre l'existence d'opérateurs bornés T de $C(S,X)$ dans X n'admettant pas de forme intégrale de Bochner. Cela prouve que la situation est différente du Théorème de Riesz-Kakutani en dimension 1 où la représentaion intégrale est valide pour toutes les fonctionnelles bornés de $C(S)$.

2.1. Préliminaires sur l'intégrale de Bochner:

Soit μ une mesure scalaire (réelle ou complexe) sur l'espace mesurable $(S, \mathcal{B}_S)$. Dans cette section nous définissons l'intégrale par rapport à μ de fonction f de S dans l'espace de Banach X et nous en donnons les propriétés essentielles qui seront utilisées dans la suite. Pour plus de détails on pourra consulter les notes [13] ou la référence[10] .
Introduisons d'abord les fonctions de base ainsi que les notions de mesurabilité et d'integrabilité.

Définition 1: *(a) Une fonction $f : S \to X$ est dite élémentaire si elle s'écrit sous la forme*

$$f(.) = \sum_n x_n . \chi_{E_n}(.)$$

où (E_n) est une partition dénombrable de S par des éléments de $\mathcal{B}_S$ et (x_n) est une suite dans X.
(b) Une fonction $f : S \to X$ est dite μ-mesurable s'il existe une suite (f_n) de fonctions élémentaires telles que $\underset{n}{Lim} \|f_n(s) - f(s)\| = 0$ pour μ presque tout $s \in S$.

Définition 2: *(a) Une fonction élémentaire* $f : S \to X$, $f(.) = \sum_n x_n.\chi_{E_n}(.)$ *est dite intégrable si la norme* $\|f(.)\| = \sum_n \|x_n\| \chi_{E_n}(.)$ *est intégrable c'est à dire si* $\sum_n \|x_n\| .\mu(E_n) < \infty$. *On définit alors l'intégrale de* f *sur l'ensemble* $E \in \mathcal{B}_S$ *par*

$$\int_E f \; d\mu = \sum_n x_n \mu(E_n \cap E).$$

(b) Une fonction μ*-mesurable* $f : S \to X$ *est dite* μ*-intégrable s'il existe une suite* (f_n) *de fonctions élémentaires intégrables telle que:*

$$\begin{aligned} & f_n \to f \;\; \mu.p.p \\ et & \int_S \|f_n - f\| \, d\mu \to 0 \end{aligned}$$

On pose alors par définition:

$$\int_S f \; d\mu = \underset{n}{Lim} \int_S f_n d\mu$$

(intégrale de Bochner de f par rapport à μ) et pour chaque $E \in \mathcal{B}_S$

$$\int_E f \; d\mu = \underset{n}{Lim} \int_E f_n d\mu.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la définition de l'intégrale de Bochner d'une fonction μ-mesurable est bien justifiée et en particulier ne dépend pas de la suite (f_n) de fonctions élémentaires définissant l'intégrale.
La démonstration des deux propositions suivantes est immédiate à partir des définitions. La seconde découle de la première.

Proposition 3: *(a) l'ensemble* $\xi(S, X)$ *des fonctions élémentaires intégrables de* S *dans* X *est un espace vectoriel et on a*

$$\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \;\; et \;\; \textstyle\int_E \lambda f d\mu = \lambda \displaystyle\int_E f d\mu$$

pour tous f, $g \in \xi(S, X)$, *tout* $E \in \mathcal{B}_S$ *et tout* $\lambda \in \mathsf{K}$.
(b) $\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu$, $f \in \xi(S, X)$ $E \in \mathcal{B}_S$.
(c) Pour tout opérateur borné $T : X \to Y$ *de l'espace* X *dans l'espace de Banach* Y *(en particulier pour toute fonctionnelle bornée* $x^* \in X^*$*) et pour tout* $f \in \xi(S, X)$ *on a*

$$Tf \in \xi(S, Y) \;\; et \;\; T(\int_E f d\mu) = \int_E T f d\mu.$$

Proposition 4: *(a) l'ensemble $\mathcal{L}(S,X)$ des fonctions μ-mesurables et Bochner intégrables est un espace vectoriel et on a* $\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ *et* $\int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu$ *pour tous* $f,\, g \in \mathcal{L}(S,X)$, *tout* $E \in \mathcal{B}_S$ *et tout* $\lambda \in \mathsf{K}$.
(b) $\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\|\, d\mu,\ f \in \mathcal{L}(S,X),\ E \in \mathcal{B}_S.$
(c) Pour tout opérateur borné $T : X \to Y$ *de l'espace de Banach* X *dans l'espace de Banach* Y*,(en particulier pour toute fonctionnelle bornée* $x^* \in X^*$*) et pour tout* $f \in \mathcal{L}(S,X)$ *on a* $Tf \in \mathcal{L}(S,Y)$ *et* $T\int_E f d\mu = \int_E Tf d\mu,\ E \in \mathcal{B}_S$.

Considérons à présent sur $\mathcal{L}(S,X)$ la relation d'équivalence suivante:

$$f,\, g \in \mathcal{L}(S,X),\ f \sim g \Leftrightarrow f = g\ \mu \text{ presque partout}$$

et si $[f]$ est la classe de la fonction $f \in \mathcal{L}(S,X)$ on pose: $\|[f]\| = \int_S \|f\|\, d\mu$. On note $L_1(\mu,X)$ le quotient de $\mathcal{L}(S,X)$ par la relation $\sim$. On a alors:

Théorème 5: *Avec les données ci-dessus l'ensemble* $L_1(\mu,X)$ *muni des opérations habituelles est un espace vectoriel et* $\|[f]\|$ *est une norme pour laquelle* $L_1(\mu,X)$ *est complet.*

Démonstration: Classique.¥

La proposition suivante précise la position de l'espace $C(S,X)$ dans le processus d'intégration de Bochner.

Proposition 6: $C(S,X)$ *est un sous espace de* $\mathcal{L}(S,X)$

Démonstration: Soit $f \in C(S,X)$. Pour être conforme à la définition 1(b), nous devons montrer l'existence d'une suite (f_n) de fonctions élémentaires intégrables telle que $f_n \to f$ $\mu.p.p$ et $\int_S \|f_n - f\|\, d\mu \to 0$. D'aprés la proposition 19, Chapitre 1, il suffit de le montrer pour f de la forme $f(s) = g(s).x$ où $g \in C(S)$ et $x \in X$. Comme g est limite uniforme d'une suite g_n de fonctions simples sur S, il en résulte la même propriété pour f avec la suite de fonctions simples $f_n(s) = g_n(s).x$. D'autre part on a:

$$\int_S \|f_n - f\|\, d\mu = \|x\| \int_S \|g_n - g\|\, d\mu \to 0,\ n \to \infty$$

car g_n converge uniformément vers g et μ est bornée.¥

Dans l'étude de l'intégrale de Bochner sur l'espace $C(S,X)$, nous aurons besoin de la famille d'opérateurs définis par:

Définition.7: *Pour chaque* $x^* \in X^*$*, on définit l'opérateur borné* $U_{x^*} : C(S,X) \to C(S)$ *par* $U_{x^*}f = x^* \circ f$*, avec pour* $f \in C(S,X)$ et $s \in S$, $x^* \circ f\,(s) = x^*(f\,(s))$.

Il est facile de voir que U_{x^*} est borné et que $\|U_{x^*}\| = \|x^*\|$. De plus on a:

Lemme 8: *(a) Il existe $z^* \in X^*$ tel que pour tout $h \in C(S)$, il existe une solution $f \in C(S,X)$ de l'equation $U_{x^*}f = h$ telle que $\|f\| = \|h\|$.*
(b) Pour tout opérateur linéaire borné $V : C(S) \to \mathsf{R}$ on a:

$$\|V\| = Sup\{\|V \circ U_{x^*}\| : \ \ \|x^*\| \leq 1\}.$$

Démonstration: (a) Soit $\alpha \in X$ tel que $\|\alpha\| = 1$. D'aprés le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle $z^* \in X^*$ telle que:

$$z^*(\alpha) = \|\alpha\| = 1 \quad \text{and} \quad \|z^*\| = 1$$

On montre que U_{z^*} est surjectif. Soit $h \in C(S)$ et définissons f in $C(S,X)$ par: $s \in S, \quad f(s) = h(s) \cdot \alpha$, on a alors:

$$\begin{aligned} U_{z^*}f(s) &= (z^* \circ f)(s) \\ &= z^*(h(s) \cdot \alpha) \\ &= h(s)\, z^*(\alpha) \\ &= h(s) \end{aligned}$$

par conséquent:

$$U_{z^*}f = h$$

De la définition de f et par le choix of α, il est clair que $\|f\| = \|h\|$.
(b) Pour chaque $x^* \in X^*$, on a:

$$\begin{aligned} \|V \circ U_{x^*}\| &\leq \|V\| \cdot \|U_{x^*}\| \\ &= \|V\| \cdot \|x^*\| \\ &\leq \|V\| \quad \text{si} \quad \|x^*\| \leq 1 \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\sup\{\|V \circ U_{x^*}\| : \quad \|x^*\| \leq 1\} \leq \|V\| \qquad (*)$$

Pour montrer l'inégalité inverse, posons $\lambda = \sup\{\|V \circ U_{x^*}\| : \quad \|x^*\| \leq 1\}$ et soit $\varepsilon > 0$;il existe $h \in C(S)$, $\|h\| \leq 1$, tel que:

$$\|V\| - \varepsilon < |Vh| \qquad (**)$$

D'aprés (a) il existe $z^* \in X^*$ et $f \in C(S,X)$ tels que:

$$\|z^*\| = 1, \quad h = U_{z^*}f,\text{et} \quad \|f\| = \|h\|$$

Il faut noter ici que z^* ne depend pas de ε.Avec ces ingrédients il résulte que:

$$|Vh| = |V \circ U_{z^*}(f)| \leq \|V \circ U_{z^*}\|$$

car $\|f\| = \|h\| \leq 1$.

D'où il vient:

$$|Vh| \leq \lambda$$

et tenant compte de $(*)$ et $(**)$,

$$\|V\| - \varepsilon < \lambda \leq \|V\|$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\lambda = \|V\|$, cela prouve (b).¥

Théorème 9: *L'intégrale de Bochner définit un opérateur linéaire borné $I_\mu : C(S,X) \to X$, par la formule $I_\mu f = \int_S f d\mu$, $f \in C(S,X)$. De plus on a: $\|I_\mu\| = v(\mu)$ (variation de μ).*

Démonstration: Que I_μ soit linéaire borné résulte de la proposition $4(a),(b)$.Pour estimer la norme de I_μ nous allons utiliser le point (b) du lemme 8. Considérons la fonctionnelle $Vh = \int_S h d\mu$, $h \in C(S)$, définie par l'intégrale de Lebesgue. On a d'aprés la proposition 4(c), $x^* I_\mu f = \int_S x^* \circ f d\mu = V \circ U_{x^*}(f)$, pour tout $f \in C(S,X)$. Cela prouve que pour tout $x^* \in X^*$, $x^* I_\mu = V \circ U_{x^*}$.
D'aprés le lemme précédent, il en résulte que

$$\|V\| = Sup\left\{\|x^* I_\mu\| : \ \|x^*\| \leq 1\right\}.$$

Comme $\|x^* I_\mu\| = Sup\left\{|x^* I_\mu f| : \ \|f\| \leq 1\right\}$, on en déduit que:

$$\begin{aligned} \|V\| &= \underset{\|x^*\|\leq 1}{Sup} \ \underset{\|f\|\leq 1}{Sup} |x^* I_\mu f| \\ &= \underset{\|f\|\leq 1}{Sup} \ \underset{\|x^*\|\leq 1}{Sup} |x^* I_\mu f| \\ &= \underset{\|f\|\leq 1}{Sup} \|I_\mu f\| \\ &= \|I_\mu\| \qquad . \end{aligned}$$

Mais d'aprés le Théorème de Riesz-Kakutani on a $\|V\| = v(\mu)$. D'où l'estimation cherchée.¥

Exemple: *On suppose que $X = \mathsf{R}^n$, $n \geq 2$ et $f : S \to \mathsf{R}^n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_k)$ borelienne; alors, en utilisant les définitions 1 et 2, il n'est pas difficile de voir que $\int_S f d\mu = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ où $\alpha_k = \int_S f_k d\mu$ représente l'intégrale de Lebesgue de la fonction f_k.*

Le problème que nous considérons à présent est l'identification d'opérateurs bornés $T : C(S,X) \to X$ qui admettent la forme intégrale de Bochner par rapport à une mesure scalaire μ sur $(S, \mathcal{B}_S)$. Nous allons introduire une classe d'opérateurs qui répond à cette question en détails. En d'autres termes nous caractérisons complètement les opérateurs $T : C(S,X) \to X$ de la forme I_μ. L'étude montre en particulier que si la dimension de Xest ≥ 2, la situation est différente du cas Riesz-Kakutani unidimensionnel.

2.2. Représentation intégrale d'une classe d'opérateurs bornés de $C(S,X)$ dans X.

Nous désignons par H_{XX} l'ensemble des opérateurs bornés $T : C(S,X) \to X$, satisfaisant la condition suivante:

$$x^*, y^* \in X^*, f, g \in C(S,X) : x^* \circ f = y^* \circ g \Rightarrow x^*.Tf = y^*.Tg \qquad (C)$$

Il est alors immediat que:

Proposition 10: *H_{XX} est sous espace fermé de l'espace de Banach $\{T : \; C(S,X) \to X,\, T$ linéaire borné$\}$.*

Théorème 11: *Il existe un isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach H_{XX} et le dual topologique $C^*(S)$ de $C(S)$ pour chaque espace de Banach X non trivial. En d'autres termes il existe une application linéaire bijective φ : $H_{XX} \to C^*(S)$ telle que $\|\varphi(T)\| = \|T\|$, pour tout $T \in H_{XX}$.*

Démonstration: Pour prouver le Théorème nous allons d'abord construire φ.
Soit $T \in H$ et $h \in C(S)$.Pour un $z^* \in X^*$ et pour un f satisfaisant $U_{z^*}f = h$ (lemme 8), on pose:

$$Vh = z^*Tf \qquad (2)$$

V est défini sans ambiguité à cause de la condition (C). De plus V est linéaire borné, i.e $V \in C^*(S)$. On pose alors:

$$\varphi(T) = V \qquad (3)$$

il est clair que φ est linéaire; de plus on a:

$$\forall x^* \in X^* \;,\; V \circ U_{x^*} = x^* \circ T \qquad (4)$$

En effet soit $f \in C(S,X)$ et $x^* \in X^*$; comme U_{z^*} est surjecif il existe $g \in C(S,X)$ tel que $x^* \circ f = z^* \circ g$. Par conséquent:

$$\begin{aligned} V \circ U_{x^*}(f) = V(x^* \circ f) &= z^* \circ Tg \quad \text{(d'aprés (2))} \\ &= x^* \circ Tf \quad \text{(condition } (C)\text{)} \end{aligned}$$

comme f est arbitraire (4) est prouvée.
D'autre part on a d'aprés le lemme 8:

$$\begin{aligned} \|V\| &= Sup\,\{\|V \circ U_{x^*}\| : \|x^*\| \leq 1\} \\ &= Sup\,\{\|x^* \circ T\| : \|x^*\| \leq 1\} \\ &= \|T^*\| \\ &= \|T\| \end{aligned}$$

cela prouve que $\|V\| = \|\varphi(T)\| = \|T\|$, c'est-à-dire que φ est une isométrie.
Pour finir on construit $\theta : C^*(S) \to H$, inverse de φ. Si $V \in C^*(S)$, d'aprés Riesz-Kakutani il existe une mesure scalaire régulière sur $\mathcal{B}_S$ telle que $Vh = \int_S h(s)d\mu(s)$ $\forall h \in C(S)$ et telle que $\|V\| = v(\mu)$. Formons l'intégrale de Bochner $Tf = \int_S f d\mu$, $f \in C(S,X)$ par rapport à μ. D'aprés le théorème 9, T est un opérateur borné tel que $\|T\| = v(\mu) = \|V\|$. On pose alors:

$$\theta(V) = T \tag{5}$$

θ est linéaire et borné puisque:

$$\|\theta(V)\| = \|T\| = \|V\| = v(\mu).$$

De plus cela prouve que θ est une isométrie.
Montrons que $\theta \circ \varphi$ est l'opérateur identité de H_{XX}.
Soit $T \in H_{XX}$ alors $V = \varphi(T) \in C^*(S)$. Soit μ la mesure scalaire qui correspond à V. D'aprés (5) on a $\theta(V)f = \int_S f d\mu(s)$; d'autre part pour tout $x^* \in X^*$

$$\begin{aligned} x^*\theta(V)f = x^* \int_S f d\mu &= \int_S x^* \circ f d\mu \\ &= V(x^* \circ f) \\ &= x^* \circ Tf \quad \text{(d'aprés (4) car } V = \varphi(T)). \end{aligned}$$

D'aprés le Théorème de Hahn-Banach on déduit que $\theta(V)f = Tf$, $\forall f \in C(S,X)$. Par conséquent

$$\theta \circ \varphi(T) = T.$$

De même on montre que $\varphi \circ \theta$ est l'opérateur identique de $C^*(S)$ et cela achève la démonstration du Théorème. ¥

Comme conséquence de ce Théorème nous déduisons la représentation intégrale d'un opérateur de la classe H_{XX}.

Théorème 12: *Soit T un opérateur dans H_{XX}. Alors il existe une unique mesure scalaire μ sur $(S, \mathcal{B}_S)$ telle que:*
(i) $Tf = \int_S f(s)d\mu(s)$, $\forall f \in C(S,X)$ (intégrale au sens de Bochner).
(ii) $\|T\| = v(\mu)$ (variation totale de μ).

Démonstration: Posons $V = \varphi(T)$, où $T \in H_{XX}$ et φ est l'isomorphisme du théorème 11. D'aprés le théorème de Riesz-Kakutani, il existe une mesure scalaire unique μ sur $(S, \mathcal{B}_S)$ telle que:

$$Vh = \int_S h d\mu, \text{ pour tout } h \in C(S).$$

D'aprés la démonstration du Théorème 11, equation (4), on a $V \circ U_{x^*} = x^* \circ T$ pour tout $x^* \in X^*$. Mais $V.U_{x^*}f = \int_S x^* \circ f d\mu = x^* \int_S f d\mu$ (Proposition 4 (c)), d'où il résulte que:

$$x^* \circ Tf = x^* \int_S f d\mu, \, \forall x^* \in X^*, \, \forall f \in C(S, X).$$

Cela montre (i). Pour l'estimation de $\|T\|$, on a:

$$\begin{aligned} \|V\| = v(\mu) &= Sup\,\{\|V \circ U_{x^*}\| : \ \|x^*\| \leq 1\} \\ &= Sup\,\{\|x^* \circ T\| : \|x^*\| \leq 1\} \\ &= \|T^*\| = \|T\| \end{aligned}$$

où la $1^{\text{ère}}$ égalité résulte du Théorème de Riesz-Kakutani, la $2^{\text{ème}}$ du lemme 8 (b) et la $3^{\text{ème}}$ de la relation (4) ci-dessus. ¥

2.3. Remarques:

(a) Soit μ une mesure scalaire sur $(S, \mathcal{B}_S)$ et formons l'opérateur $I_\mu : C(S, X) \to X$ défini par $I_\mu f = \int_S f d\mu$. D'aprés les propriétés de l'intégrale de Bochner (Proposition $4(c)$) l'opérateur I_μ vérifie la condition (C). Autrement dit, d'aprés le Théorème 12 cette condition est nécéssaire et suffisante pour la représentation intégrale de Bochner.

(b) Une forme consolidée de la condition (C), [12] : Un opérateur borné $T : C(S, X) \to X$ satisfait la condition (C) si et seulement si $T(KerU_{x^*}) \subset Kerx^*$ pour chaque $x^* \in X^*$.

(c) Il est utile de rappeler ici que dans le cas où $X = \mathsf{R}$ ou C le Théorème 12 se reduit exactement au Théorème de Riesz-Kakutani en particulier valable pour tout opérateur borné $T : C(S) \to \mathsf{R}$. Cependant si dimension de $X \geq 2$, l'exemple qui suit montre l'existence d'opérateurs bornés $T : C(S, X) \to X$ qui n'admettent pas la forme d'une intégrale de Bochner. En d'autres termes, si dimension $X \geq 2$ seuls les opérateurs de la classe H_{XX} admettent une représentation intégrale et la situation est donc différente du cas classique $X = \mathsf{R}$ ou C.

2.4 Exemple: Soit $X = \mathsf{R}^n$, $n \geq 2$ et fixons un nombre $0 < \alpha < 1$ et un point s_0 de S. Définissons l'opérateur $T : C(S, \mathsf{R}^n) \to \mathsf{R}^n$ par:

$$g = (g_1, ..., g_n) \in C(S, \mathsf{R}^n), \; Tg = (\alpha g_1(s_0), g_2(s_0), ..., g_n(s_0))$$

il est clair que T est linéaire borné. On montre que T ne satisfait pas la condition (C) ou, ce qui est équivalent, sa forme consolidée de la remarque (a). Pour cela soit $z^* : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$, $z^*(y_1, ..., y_n) = y_1 + ... + y_n$ Donnons une fonction continue $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) : S \longrightarrow \mathsf{R}^n$
telle que:

$$h_1\,(s) + h_2\,(s) + \ldots + h_n\,(s) = 0 \quad \forall s \in S$$

$$h_1\,(s_0) \neq 0$$

Compte tenu de la forme de z^* on a clairement $z^* \circ h \equiv 0$. Mais alors $z^* \circ T\,(h) = \alpha h_1\,(s_0) + h_2\,(s_0) + \ldots + h_n\,(s_0)$; comme $0 < \alpha < 1$ et $h_1\,(s_0) \neq 0$ on en déduit que $z^* \circ T\,(h) \neq 0$, c'est à dire que T ne satisfait pas la condition (C).

Il est utile d'observer que tout opérateur T de la classe H_{XX} admet deux représentations intégrales. L'une par rapport à une mesure scalaire (Théorème 12) l'autre par rapport à une mesure vectorielle (Théorème 22 chapitre 1). Il serait intéréssant de comparer les deux mesures en présence. Nous le ferons au chapitre suivant dans l'étude de la structure des mesures représentatives.

Chapter 4
STRUCTURE DES MESURES REPRÉSENTATIVES.

Dans de nombreuses situations les mesures vectorielles qui donnent la forme intégrale d'un opérateur borné $T : C(S,X) \to Y$, peuvent refléter certaines propriétés importantes de l'opérateur lui-même. Le Théorème de Bartle-Dunford-Schwartz pour les opérateurs faiblement compacts est un exemple frappant de ce type de phénomène. Citons d'autre exemples plus généraux qui ont été établies par J.Batt et E.J.Berg dans [1], et par J.K.Brooks et P.W.Lewis dans [5].

Par conséquent il est utile de connaître la structure de ces mesures, chaque fois que la nature de l'opérateur T en question le permet. Ce chapitre est destiné à examiner la structure des mesures représentatives pour deux classes d'opérateurs bornés. La classe H_{XX} étudiée au chapitre 2 et dont nous connaissons pour chaque opérateur T deux représentations intégrales. La comparaison des deux formes intégrales permet de déterminer de façon précise la structure de la mesure vectorielle de T. La seconde classe est formée des opérateurs bornés $T : C(S,X) \to Y$, factorisables au moyen de la formule $T = \theta.U$ où U est un opérateur linéaire borné réalisant un changement de variable de $C(S,X)$ dans $C(S)$, et θ un opérateur borné de $C(S)$ dans Y. Cette formule, qui est vérifiée sous des conditions modérées, permet de ramener l'intégration de T à celle de l'opérateur θ, en général plus aisée.

3.1. Mesures représentatives des opérateurs de la classe H_{XX}.

Soit $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, Y^{**})$ une fonction d'ensembles finiment additive et considérons la famille des fonctions $\Lambda^x_{y^*}(.)$ $x \in X$, $y^* \in Y^*$ définies par:

$$E \in \mathcal{B}_S, \;\; \Lambda^x_{y^*}(E) = G_{y^*}(E)(x) \qquad (*)$$

où $G_{y^*} : \mathcal{B}_S \to X^*$ a été définie par la formule 10 au chapitre 1. En général G_{y^*} est seulement additive. On a cependant le résultat utile suivant:

Proposition 1: *Supposons que la fonction G_{y^*} soit bornée et régulière, alors:*
(i) G_{y^*} est σ-additive.
(ii) Les fonctions scalaires $\Lambda^x_{y^*}(.)$, $x \in X$ sont σ-additives et régulières.

Démonstration: Soit $E \in \mathcal{B}_S$ et $\varepsilon > 0$; d'aprés la définition 5(2), Chapitre 1, il existe un ouvert O et un compact K tels que $K \subset E \subset O$ et $\|G_{y^*}\|(O\backslash K) < \varepsilon$.

Comme G_{y^*} est à valeurs dans X^*, on déduit de la définition de la semivariation (formule (3), Chapitre 1):

$$\|G_{y^*}\|(O\backslash K) = Sup\{v(x^{**}G_{y^*}, O\backslash K) : \ x^{**} \in X^{**}, \ \|x^{**}\| \leq 1\} < \varepsilon.$$

Cela montre que la famille des fonctions d'ensembles scalaires $\{x^{**}G_{y^*} : \ x^{**} \in X^{**}, \ \|x^{**}\| \leq 1\}$ est uniformément régulière. Comme ces fonctions sont additives et bornées, on déduit du théorème III.5.13 de [9] que $x^{**}G_{y^*}$ est σ-additive pour chaque x^{**} tel que $\|x^{**}\| \leq 1$ et donc aussi pour tout $x^{**} \in X^{**}$. Par conséquent, G_{y^*} est σ-additive d'aprés le Théorème d'Orlicz-Pettis, (Théorème 4, Chapitre 1). Pour voir (ii) observons simplement que l'on peut écrire $(*)$ sous la forme $\Lambda^x_{y^*}(E) = \gamma(x)G_{y^*}(E)$ où $\gamma : X \to X^{**}$ est l'isomorphisme canonique de X dans X^{**}. D'aprés ce qui précéde on a $\Lambda^x_{y^*}$ régulière et σ-additive pour chaque $x \in X$. ¥

A présent soit $T : C(S,X) \to X$ un opérateur borné dans la classe H_{XX}. Un tel opérateur admet deux représentations intégrales:

(a) (Théorème 22, Chapitre 1): $Tf = \int_S f\ dG$, $f \in C(S,X)$ où $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, X^{**})$ est finiment additive.

(b) (Théorème 12, Chapitre 2): $Tf = \int_S f\ d\mu$, $f \in C(S,X)$ où $\mu : \mathcal{B}_S \to \mathsf{R}$ est σ-additve, régulière.

On a alors le Théorème suivant qui donne la structure de G à l'aide de la mesure μ.

Théorème 2: *Avec les données ci-dessus on a:*

$$G(.) = \mu(.).\gamma \tag{1}$$

où γ est l'isomorphisme canonique de X dans X^{**}.

La formule (1) signifie que $G(A)(x) = \mu(A).\gamma(x)$ pour tout $A \in \mathcal{B}_S$ et tout $x \in X$. Comme pour $y^* \in X^*$, on a $\gamma(x)(y^*) = y^*(x)$, il en résulte que la formule (1) est équivalente à:

$$\forall A \in \mathcal{B}_S, \ \forall x \in X, \ \forall y^* \in X^* : \ G_{y^*}(A)(x) = \mu(A).y^*(x) \tag{2}$$

Démonstration: Nous allons comparer les intégrales (a) et (b) ci-dessus pour $f \in C(S,X)$ de la forme $f(s) = g(s).x$ où $g \in C(S)$ et $x \in X$. Dans ce cas on a $Tf = \int_S g.x\ dG = \int_S g.x\ d\mu$; en appliquant $y^* \in X^*$ à Tf, il résulte de la forme (a) :

$$y^*Tf = T^*y^*(f) = \int_S f\ dG_{y^*} = \int_S g.x\ dG_{y^*}$$

où la 2ème égalité provient du point (vi) du Théorème 22, Chapitre 1. D'autre part, on a par les procédés standards de l'intégration, $\int_S g(s).x\ dG_{y^*} = \int_S g(s)\ d\Lambda^x_{y^*}$, où pour une fonction simple g cette équation se réduit à la formule $(*)$. A présent revenons à la forme intégrale de Bochner (b)de Tf et appliquons la fonctionnelle $y^* \in X^*$ on obtient, $y^*Tf = \int_S g(s).y^*(x)\ d\mu$. Il résulte alors des deux formes de y^*Tf que:

$\int_S g(s).d\Lambda^x_{y^*} = \int_S g(s).y^*(x)\, d\mu$, pour toute fonction continue $g : S \to \mathsf{R}$. Comme les mesures $\Lambda^x_{y^*}$ et $y^*(x).\mu$ sont toutes deux scalaires régulières on obtient:

$$y^*(x)\mu(A) = \Lambda^x_{y^*}(A) = G_{y^*}(A)(x)$$

qui est la formule (2) ci-dessus. D'où la validité de la relation (1) et termine la démonstration du Théorème. ¥

3.2. Opérateurs Produits.

Nous considérons dans cette section deux opérateurs linéaires bornés $T : C(S,X) \to Y$, $U : C(S,X) \to C(S)$ et nous nous interessons à la factorisation de T sous la forme produit $T = \theta.U$, où θ est un opérateur linéaire borné de $C(S)$ dans Y. Cette factorisation, lorsqu'elle est réalisée au moyen de de l'opérateur U, ramène l'étude de certaines propriétés de T à celles de l'opérateur θ pour lequel nous disposons en général de plus d'information. C'est le cas des propriétés en relation avec l'intégration vectorielle. Nous nous interesserons tout particulièrement à décrire les relations entre la mesure représentative de T et celle de θ. Comme nous le verrons, ces relations seront du type Radon-Nikodym, dont on calculera les dérivées à l'aide de l'opérateur U. Dans cette section, et dans les suivantes, nous ferons l'hypothèse (H) sur U:

(H) L'opérateur $U : C(S,X) \to C(S)$ est linéaire borné et surjectif.

La condition U surjectif servira à la construction de l'opérateur θ et à sa bornitude Commençons par noter la propriété utile suivante de l'opérateur U.

Proposition 3: *Il existe une constante $K > 0$, telle que pour toute fonction $h \in C(S)$, il existe une solution $f \in C(S,X)$ de $Uf = h$ satisfaisant $\|f\| \leq K.\|h\|$.*

Démonsration: Soit $B = \{z \in C(S,X) \colon \ \|z\| < 1\}$ la boule unité de $C(S,X)$. Comme U est surjectif, d'aprés le principe de l'application ouverte, il existe $\alpha > 0$ tel que $\{u \in C(S) : \ \|u\| < \alpha\} \subset UB$. Par conséquent pour $0 \neq h \in UC(S,X) = C(S)$, le vecteur $\frac{\alpha}{2}\frac{h}{\|h\|}$ est l'image par U d'un vecteur $g \in C(S,X)$, tel que $\|g\| < 1$. Donc si on pose $f = \frac{2\|h\|.g}{\alpha}$, on obtient: $Uf = \frac{2\|h\|}{\alpha}.Ug = \frac{2}{\alpha}\|h\|\frac{\alpha}{2}\frac{h}{\|h\|} = h$ et $\|f\| \leq \frac{2}{\alpha}\|h\|$, ce qui achève la démonstration avec $K = \frac{2}{\alpha}$. ¥

Le principe de factorisation de l'opérateur T est donné par:

Théorème 4: *Un opérateur borné $T : C(S,X) \to Y$ admet la factorisation $T = \theta.U$ où $\theta : C(S) \to Y$ est un opérateur borné si et seulement si la condition suivante est satisfaite:*

$$KerU \subset KerT \tag{3}$$

Démonstration: La condition nécessaire est claire. Pour voir qu'elle est suffisante nous allons procéder à la construction de l'opérateur θ. Soit $h \in C(S)$, il existe $f \in C(S,X)$ telle que $h = Uf$ $(*)$; posons alors $\theta h = Tf$. Cette formule définit θ sans ambiguité, puisque si $Uf_1 = Uf_2 = h$, où f_1, $f_2 \in C(S,X)$ alors $f_1 - f_2 \in KerU$ et $f_1 - f_2 \in KerT$ d'aprés (3), ainsi $Tf_1 = Tf_2$. Il est clair que θ est linéaire et que nous avons $Tf = \theta.Uf$ pour tout $f \in C(S,X)$. A présent nous devons montrer que θ est borné. D'aprés la proposition 3, il existe $K > 0$ tel que pour tout $h \in C(S)$, on peut choisir une solution f de l'équation $(*)$ de sorte que $\|f\| \leq K\|h\|$. Par conséquent il en résulte que $\|\theta h\| = \|Tf\| \leq \|T\| . \|f\| \leq \|T\| .K. \|h\|$ ce qui prouve que θ est borné. ¥

A présent on se propose de donner une estimation générale de la mesure représentative G d'un opérateur factorisable $T = \theta.U$. Cette estimation sera obtenue en montrant que pour chaque $y^* \in Y^*$, toutes les mesures $\left\{\Lambda^x_{y^*}(.),\ x \in X\right\}$ sont dominées, au sens de l'absolue continuité, par la mesure représentative $\mu(.)y^*$ de l'opérateur θ. Les dérivées de Radon-Nikodym $\dfrac{d\Lambda^x_{y^*}(.)}{d\mu(.)y^*}$ seront estimées à l'aide de l'opérateur U. Pour réaliser ce programme, nous imposerons à l'opérateur U la condition suivante:

$$(H_1)\ \forall g \in C(S), \forall h \in C(S,X): Ug.h = g.Uh.$$

En fait, dans tous les calculs qui vont suivre, nous exigerons seulement que (H_1) soit satisfaite pour toute fonction h constante de $C(S,X)$, et pour tout $g \in C(S)$.

Par ailleurs voici deux classes non triviales d'opérateurs satisfaisant (H_1):

Exemples 5: (a) Considérons la famille d'opérateurs U_{x^*}, $x^* \in X^*$,introduite au chapitre 2, définition 7, au moyen de: $U_{x^*} : C(S,X) \to C(S)$, $U_{x^*}(f) = x^* \circ f \in C(S)$ pour $f \in C(S,X)$. On a montré que U_{x^*} est surjectif (lemme 8, Chap. 2; Voir aussi exemple 12 ci-dessous). D'autre part il est clair que U_{x^*} vérifie (H_1) puisque $\forall g \in C(S), \forall h \in C(S,X)$, $\forall t \in S$, on a, $U_{x^*}(g \cdot h)(t) = x^*(g(t) \cdot h(t)) = g(t) \cdot x^*(h(t)) = g(t) \cdot U_{x^*}(h)(t)$. Par conséquent $U_{x^*}(g.h) = g.U_{x^*}h$.

(b) Soit $K : S \times S \to \mathsf{R}$ une fonction continue et soit μ une mesure à variation bornée sur $S, \mathcal{B}_S$. On définit l'opérateur $\phi : C(S) \to C(S)$, par:
$\phi(g)(s) = \int_S K(s,t)\, g(t)\, d\mu(t)$. La continuité de K et la bornitude de μ nous assurent que $\phi(g)$ est bien dans $C(S)$. A présent choisissons $X = C(S)$ et définissons $U : C(S,X) \to C(S)$, par:

$$h \in C(S,X),\ U(h)(r) = \phi(h_r)(r),\ r \in S$$

noter bien que h_r, valeur de la fonction h au point r, est dans $C(S)$ car $h \in C(S,X)$, et $X = C(S)$. Noter aussi, de la définition de ϕ, que l'on a:
$U(h)(r) = \int_S K(r,t)\, h_r(t)\, d\mu(t)$. A présent, en utilisant les propriétés imposées à K et à μ, il n'est pas difficile de montrer par des majorations appropriées que $r \to U(h)(r)$ est continue et que $U : C(S,X) \to C(S)$, est un opérateur linéaire borné tel que $\|U\| \leq M_K \cdot v(\mu)$, où $M_K = Sup\{|K(s,t)|, (s,t) \in S \times S\}$. Montrons que U vérifie H_1. Soient $g \in C(S)$, $h \in C(S,X)$, on a:

$$U\,(g\cdot h)\,(r) = \int_S K\,(r,t)\,g\,(r)\;h_r\,(t)\;d\mu\,(t) = g\,(r)\int_S K\,(r,t)\,h_r\,(t)\;d\mu\,(t)$$
$$= g\,(r)\,U\,(h)\,(r)\,.$$

Dans toute la suite nous supposerons que $U : C(S,X) \to C(S)$ est un opérateur borné satisfaisant les conditions H et H_1.

Théorème 6: *Soit T un opérateur factorisable sous la forme $T = \theta.U$; soit G sa mesure représentative et soit μ la mesure représentative de l'opérateur θ. Alors on a:*

$$G_{y^*}(E)(x) = \int_E U(c_x)(t)d\mu(t)y^* \tag{4}$$

pour tout $E \in \mathcal{B}_S$, tout $y^* \in Y^*$ et tout $x \in X$; $c_x \in C(S,X)$, étant la fonction constante $S \to X$ définie par $c_x(t) \equiv x$, x fixé dans X.
En d'autres termes toutes les mesures de la famille $\left\{\Lambda^x_{y^*}(.),\ x \in X\right\}$ sont dominées par la mesure $\mu(.)y^*$ et on a: $\dfrac{d\Lambda^x_{y^*}}{d\mu(.)y^*} = U(c_x)$.

Démonstration: Appliquons la forme intégrale de T donnée par le théorème 22, du chapitre 1 à une fonction $f \in C(S,X)$ de la forme $f(t) = g(t).c_x(t)$, où $g \in C(S)$ et x fixé dans X. On obtient $Tg.c_x = \displaystyle\int_S g.c_x dG$, et pour $y^* \in Y^*$, $y^*Tg.c_x = \displaystyle\int_S g.c_x dG_{y^*} = \int_S gd\Lambda^x_{y^*}$, où la première égalité résulte du théorème 22 (vi), Chapitre 1 et la seconde à partir de techniques standards de la théorie de l'intégration. Rappelons que pour $E \in \mathcal{B}_S$ et $x \in X$, on a $\displaystyle\int_S \chi_E.xdG_{y^*} = G_{y^*}(E)(x) = \Lambda^x_{y^*}(E) = \int_S \chi_E d\Lambda^x_{y^*}$. Comme on a $T = \theta.U$, on déduit: $Tg.c_x = \theta.Ug.c_x = \theta g.Uc_x$, où on invoque la condition H_1 ci-dessus pour l'identité $Ug.c_x = g.Uc_x$. D'aprés le théorème 11 (c) du Chapitre 1, on a pour chaque $y^* \in Y^*$

$$y^*\theta(g.Uc_x) = \int_S (g.Uc_x)(t)d\mu(t).y^*$$

En comparant cette intégrale avec celle estimée ci-dessus par $y^*Tg.c_x$, on obtient:

$$\int_S g.Uc_x d\mu(.)y^* = \int_S g.d\Lambda^x_{y^*},\ \text{pour tout } g \in C(S) \tag{$*$}$$

L'intégrale du membre de gauche s'écrit $\displaystyle\int_S g.dM^x_{y^*}$ où $M^x_{y^*}$ est la mesure définie sur S, $\mathcal{B}_S$ par: $M^x_{y^*}(E) = \displaystyle\int_E Uc_x d\mu(.)y^*$. Comme $\mu(.)y^*$ est une mesure régulière (théorème 7 (a), Chapitre 1) et la fonction $Uc_x \in C(S)$ est bornée, il en résulte que la mesure $M^x_{y^*}(.)$ est régulière. D'autre part la mesure $\Lambda^x_{y^*}$ est régulière d'aprés la proposition 1(ii). On déduit alors de l'égalité ($*$) ci-dessus que l'on a

$$\Lambda^x_{y^*}(E) = M^x_{y^*}(E) = \int_E Uc_x d\mu(.)y^*$$

qui est exactement la formule (4) de l'énoncé. ¥

A présent on désire améliorer l'estimation (4) en supprimant sa dépendance par rapport au vecteur $y^* \in Y^*$. Autrement dit on cherche à établir une formule globale donnant une estimation de la mesure $G : \mathcal{B}_S \to \mathcal{L}(X, Y^{**})$, par l'intermédiaire des mesures $G(E)x$, $E \in \mathcal{B}_S$, $x \in X$. On obtient une amélioration sensible en imposant à l'opérateur T la propriété d'être faiblement compact.

3.3. Opérateurs faiblement compacts.

Soit T: $E \to F$ un opérateur linéaire borné de l'espace de Banach E dans l'espace de Banach F, et soit B la boule unité fermée de E. L'opérateur T est dit faiblement compact si la fermeture faible de TB est compact pour la topologie faible $\sigma(F, F^*)$ de F. Si l'opérateur T se factorise selon $T = \theta.U$, alors on a la propriété utile suivante:

Proposition 7: *Supposons l'opérateur T: $C(S, X) \to Y$ factorisable selon $T = \theta.U$. Alors T est faiblement compact si et seulement si l'opérateur θ est faiblement compact.*

Démonstration: Supposons θ faiblement compact et soit B la boule unité fermée de $C(S, X)$. On a alors UB bornée et par conséquent $TB = \theta.UB$ possède une fermeture faiblement compact. Donc T est faiblement compact.
Inversement, supposons T faiblement compact. Pour montrer qu'il en est de même pour θ, il est suffisant de montrer, d'aprés le théorème d'Eberlein-Šmulian ([9] , V.6.1), que pour tout ensemble borné $A \subset C(S)$, l'ensemble θA est sequentiellement faiblement compact. Soit h_n une suite dans A et soit $f_n \in C(S, X)$ telles que $h_n = Uf_n$. D'aprés la proposition 3, il existe $K > 0$ tel que pour chaque n on puisse choisir f_n de sorte que $\|f_n\| \leq K \|h_n\|$. Cela prouve que f_n est uniformément bornée et comme T est faiblement compact, le théorème d'Eberlein-Šmulian, nous permet d'extraire de f_n une sous-suite (f_{n_i}) telle que Tf_{n_i} soit faiblement convergente. Mais $Tf_{n_i} = \theta h_{n_i}$, par conséquent la suite θh_n de θA contient une sous-suite θh_{n_i} faiblement convergente, prouvant ainsi que θA est sequentiellement faiblement compact.¥

Remarque: *Il est prouvé dans la reférence* [9]*, VI.4.5 que pour tout opérateur θ faiblement compact et pour tout opérateur borné U, l'opérateur $\theta.U$ est faiblement compact. La proposition précédente établit la réciproque: si $\theta.U$ est faiblement compact et si U est borné et surjectif alors θ est faiblement compact.*

La structure de la mesure représentative d'un opérateur faiblement compact, factorisable est donnée par le Théorème suivant, où $\gamma : Y \to Y^{**}$ désigne l'isomorphisme canonique de l'espace Y dans son bidual Y^{**}.

Théorème 8: *Soit $T : C(S, X) \to Y$ un opérateur borné factorisable selon $T = \theta.U$. Si T est faiblement compact alors il existe une unique mesure σ-additive $\mu : \mathcal{B}_S \to Y$, telle que la mesure représentative G de T admette l'estimation suivante:*

$$\forall E \in \mathcal{B}_S, \forall x \in X\colon\ G(E)(x) = \int_E U(c_x)(t) d\gamma\mu(t) \tag{5}$$

Démonstration: D'aprés la proposition 7 l'opérateur θ est faiblement compact. Par conséquent, d'aprés le théorème 11, Chapitre 1, la mesure représentative μ de θ est σ-additive à valeurs dans Y. On procède comme dans la démonstration du théorème 6, pour obtenir

$$y^*Tg.c_x = y^*\theta(g.Uc_x) = \int_S g.Uc_x \; dy^*\mu(t)$$

où la seconde égalité résulte du Théorème 11, Chapitre 1. Par ailleurs on a

$$y^*Tg.c_x = \int_S g.c_x \; dG_{y^*}.$$

On en déduit que

$$G(E)(x)(y^*) = \int_E Uc_x \; dy^*\mu$$

car g est arbitraire dans $C(S)$ (Voir démonstration du Théorème 6).
Posons $\alpha = \int_S Uc_x \; dy^*\mu$. On a d'aprés le théorème IV.10.8(f) dans [9], $\alpha = y^*(\int_S Uc_x \; d\mu)$ et comme l'intégrale $\int_S Uc_x \; d\mu$ est dans Y on obtient

$$\alpha = \gamma(\int_S Uc_x \; d\mu)(y^*) = G(E)(x)(y^*), \;\; \forall y^* \in Y^*$$

c'est-à-dire encore $\gamma(\int_S Uc_x \; d\mu) = G(E)(x)$. Mais d'aprés le théorème qui vient juste d'être cité on a

$$\gamma(\int_S Uc_x \; d\mu) = \int_S Uc_x \; d\gamma\mu.$$

D'où résulte la formule (5) annoncée. ¥

L'estimation (5) du théorème précédent peut être améliorée par une intégrale de Bochner par rapport à une mesure à variation bornée, si on impose à l'opérateur T la propriété d'être nucléaire. C'est l'objet de la section suivante:

3.4. Opérateurs nucléaires.

Soient E, F deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur linéaire borné T: $E \to F$ est nucléaire s'il existe une suite de fonctionnelles (x_n^*) dans E^* et une suite de vecteurs (y_n) dans F telles que $\sum_n \|x_n^*\| . \|y_n\| < \infty$ et

$$\forall x \in E, \, Tx = \sum_n x_n^*(x).y_n \tag{6}$$

Nous considérons ci-dessous un opérateur nucléaire T: $C(S,X) \to Y$, factorisable selon $T = \theta.U$, et dont nous allons déterminer la mesure représentative G sous forme d'une intégrale de Bochner. Commençons par l'analyse de la structure d'un tel opérateur en fonction de sa composante θ.

Théorème 9: *(a) Supposons que θ soit nucléaire. Alors il existe une suite $(\mu_n) \subset C(S,X)^*$ et une suite $(y_n) \subset Y$ telles que $\sum_n \|\mu_n\| . \|y_n\| < \infty$ et que $Tf = \sum_n \mu_n(f).y_n$, pour tout $f \in C(S,X)$, de sorte que l'opérateur est nucléaire.*
De plus on a:

$$Uf = 0 \Rightarrow \mu_n(f) = 0, \textit{pour tout } n \qquad (\mathcal{N}^*)$$

(b) Supposons l'opérateur $T = \theta.U$ nucléaire et admet la forme $Tf = \sum_n \mu_n(f).y_n$, où $f \in C(S,X)$, $(\mu_n) \subset C(S,X)^*$, $(y_n) \subset Y$ et $\sum_n \|\mu_n\| . \|y_n\| < \infty$.
Si la condition $(\mathcal{N}^*)$, ci-dessus, est satisfaite alors θ est nucléaire.

Démonstration: (a) Supposons θ nucléaire, sous la forme $\theta h = \sum_n \theta_n(h).y_n$ où $(\theta_n) \subset C(S)^*$, $(y_n) \subset Y$, $h \in C(S)$ et $\sum_n \|\theta_n\| . \|y_n\| < \infty$; si $f \in C(S,X)$ alors $Uf = h \in C(S)$ et $Tf{=}\theta h{=}\sum_n \theta_n Uf.y_n{=}\sum_n \mu_n(f).y_n$, où on définit la fonctionnelle bornée μ_n sur $C(S,X)$ par $\mu_n(f){=}\theta_n Uf$.Comme on a $\sum_n \|\theta_n\| \, \|y_n\| < \infty$ il s'ensuit que $\sum_n \|\mu_n\| . \|y_n\| < \infty$ et par conséquent T est nucléaire. D'aprés la forme de μ_n, la condition $(\mathcal{N}^*)$ est trivialement satisfaite.
(b) Incidemment, nous allons appliquer le principe de factorisation (théorème 4 section 3.2) à chaque fonctionnelle μ_n. Remarquons que U est surjectif puisque il réalise la factorisation de T. D'autre part la condition $(\mathcal{N}^*)$ signifie que:
$KerU \subset Ker\mu_n$, $\forall n$. Par conséquent, pour chaque n, il existe une fonctionnelle bornée θ_n: $C(S) \to \mathsf{R}$ telle que $\mu_n(f) = \theta_n Uf$, pour tout $f \in C(S,X)$. Soit $h \in C(S)$ et $f \in C(S,X)$, telles que $h = Uf$; alors $Tf = \theta h = \sum_n \mu_n(f).y_n$; mais $\mu_n(f) = \theta_n Uf = \theta_n h$, par conséquent $\theta h = \sum_n \theta_n(h).y_n$. Estimons la norme $\|\theta_n\|$; soit $h \in C(S)$, il existe $f \in C(S,X)$, telle que $\|f\| \leq K. \|h\|$ et $h = Uf$, où $K > 0$ est la constante donnée par la proposition 3. D'aprés ce qui précède on a

$$\mu_n(f) = \theta_n h \quad \text{et } \|\mu_n(f)\| = \|\theta_n h\| \leq \|\mu_n\| . \|f\| \leq \|\mu_n\| .K. \|h\|$$

d'où $\|\theta_n\| \leq \|\mu_n\| .K$ de là on déduit que

$$\sum_n \|\theta_n\| . \|y_n\| \leq \sum_n K \|\mu_n\| . \|y_n\| < \infty$$

et l'opérateur θ est nucléaire. ¥

Venons-en aux représentations intégrales. Pour ce qui est des opérateurs nucléaires θ: $C(S) \to Y$, elle est donnée par le théorème suivant (Voir référence [6], p.173):

Théorème 10: *(i) Tout opérateur nucléaire est compact et donc faiblement compact.*
(ii) Un opérateur borné θ: $C(S) \to Y$ est nucléaire si et seulement si, sa mesure représentative μ est à variation bornée et possède une dérivée g Bochner intégrable par rapport à sa variation $v(\mu, .)$, c'est-à-dire que l'on a

$$\text{pour tout } E \in \mathcal{B}_S,\ \mu(E) = \int_E g(s)v(\mu, ds).$$

A présent soit T: $C(S,X) \to Y$ un opérateur nucléaire de la forme $T = \theta.U$ et supposons que pour tout $f \in C(S,X)$, $Tf = \sum_n \mu_n(f).y_n$, où $(\mu_n) \subset C(S,X)^*$, $(y_n) \subset Y$ et $\sum_n \|\mu_n\| \, . \, \|y_n\| < \infty$. Avec ces ingrédients, nous aurons:

Théorème 11: *Supposons que la condition $(\mathcal{N}^*)$ du Théorème 9 est satisfaite, c'est-à-dire que l'on a*

$$KerU \subset \bigcap_n Ker\mu_n$$

Alors la mesure représentative G de T est une intégrale de Bochner par rapport à une mesure à variation bornée.

Démonstration: D'aprés le théorème 10 (i), T est faiblement compact et ainsi on a l'estimation (5), théorème 8:

$$\forall E \in \mathcal{B}_S,\ \forall x \in X,\ G(E)(x) = \int_E U(c_x)(t)d\gamma\mu(t);$$

où μ est la mesure représentative de l'opérateur θ. Comme la condition $(\mathcal{N}^*)$ est satisfaite, θ est nucléaire (théorème 9 (b)) et on a pour μ la forme $\mu(E) = \int_E g(s)v(\mu, ds)$ (théorème 10 (ii)) où g: $S \to Y$ est $v(\mu, ds)$-intégrable. En appliquons l'opérateur borné γ à cette intégrale on obtient $\gamma\mu(E) = \int_E \gamma g(s)v(\mu, ds)$. L'artifice habituel de la théorie de l'intégration montre que pour toute fonction u: $S \to \mathsf{R}$ scalaire, mesurable bornée on a:

$$\int_E u(s)d\gamma\mu(s) = \int_E u(s).\gamma g(s)\ v(\mu, ds).$$

Ainsi avec le choix $u(s) = U(c_x)(s)$, on obtient à partir de l'estimation (5):

$$E \in \mathcal{B}_S,\ x \in X \quad G(E)(x) = \int_E U(c_x)(s)\gamma g(s)v(\mu, ds) \tag{6}$$

qui est exactement la conclusion de théorème. ¥

Conjecture: *Si Y est un espace de Hilbert séparable, la condition $(\mathcal{N}^*)$ est automatiquement satisfaite. Ainsi le Théorème 9 admet dans ces conditions, l'énoncé suivant:*

T est nucléaire si et seulement si θ est nucléaire.

Exemple 12: Soit z^* une fonctionnelle dans le dual X^* de X définissons l'opérateur W_{z^*}: $C(S,X) \to C(S)$ par

$$(W_{z^*}f)(s) = z^*(f(s)),\ f \in C(S,X)\ (s \in S).$$

Une simple vérification montre et W_{z^*} est borné et que $\|W_{z^*}\| = \|z^*\|$. De plus on a:

$$W_{z^*}\text{est surjectif pour } z^* \neq 0$$

En effet, fixons $\alpha \in X$ tel que $z^*(\alpha) \neq 0$ et soit $h \in C(S)$; posons $f(s) = h(s).\dfrac{\alpha}{z^*(\alpha)}$, $s \in S$. Il est clair que $f \in C(S,X)$ et on a:

$$(W_{z^*}f)(s) = z^*(f(s)) = h(s)z^*(\frac{\alpha}{z^*(\alpha)}) = h(s)$$

d'où $W_{z^*}f = h$ et W_{z^*} est surjectif.

A présent soit T: $C(S,X) \to Y$ un opérateur borné; pour factoriser T à l'aide de W_{z^*} par un opérateur borné θ: $C(S) \to Y$, nous devons vérifier la condition $KerW_{z^*} \subset KerT$ du principe de factorisation (théorème 4, section 3.2). Pour voir la signification concrète de cette condition, regardons la situation simple suivante: Prenons $X = \mathsf{R}^n$ et choisissons $z^*(y_1, y_2, ..., y_n) = y_1 + y_2 + ... + y_n$. Dans ce cas la condition $KerW_{z^*} \subset KerT$ signifie:

$$f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in C(S, \mathsf{R}^n),\ f_1 + f_2 + ... + f_n \equiv 0 \Rightarrow Tf = 0$$

on a alors $Tf = \theta(f_1 + f_2 + ... + f_n)$, pour tout $f \in C(S, \mathsf{R}^n)$, autrement dit T est constant sur les hyperplans

$$H_u = \{f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in C(S, \mathsf{R}^n)\colon\ f_1 + f_2 + ... + f_n = u\},\ u \in C(S).$$

Revenons à la situation générale. Pour calculer la mesure représentative G de l'opérateur T, factorisable sous la forme $T = \theta.W_{z^*}$, tout ce que nous devons faire, c'est de calculer la fonction $W_{z^*}c_x$, conformément aux formules (4),(5),(6). Mais ce calcul est immédiat car c_x est la fonction constante $S \to X$ prenant la valeur x sur S:

$$(W_{z^*}c_x)(s) = z^*(c_x(s)) = z^*(x).$$

Ainsi dans ce contexte, les estimations (4),(5),(6) deviennent respectivement:

(a) $G_{y^*}(E) = (\mu(E).y^*).z^*$, $\forall E \in \mathcal{B}_S$, $\forall y^* \in Y^*$; *la mesure* $G_{y^*}(.)$ *à valeurs dans* X^* *est engendrée par l'unique fonctionnelle* z^*.

(b) Si T est faiblement compact alors

$$G(E) = ((\gamma\mu)(E))\,.z^* \quad \forall E \in \mathcal{B}_S$$

(c) Si T est nucléaire alors

$$G(E) = \left(\int_E \gamma g(s)v(\mu, ds)\right).z^*,\ \ \forall E \in \mathcal{B}_S$$

Chapter 5

REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'OPÉRATEURS DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, il existe plusieurs extensions du Théorème de représentation intégrale de Riesz, sur divers espaces fonctionnels. Le processus d'intégration qui intervient dans la représentation d'un opérateur est soit par rapport à une mesure vectorielle générale [2], soit du type Bochner par rapport à une mesure scalaire [12], soit enfin par rapport à une mesure à valeurs opérateurs [7]. Nous proposons dans ce chapitre la construction d'une famille d'opérateurs bornés $T : C(S, E') \to E'$ qui admettent une représentation intégrale du type intégrale de Pettis, E' étant le dual d'un espace vectoriel topologique localement convexe. La méthode utilisée consiste à introduire un opérateur intermédiaire agissant sur un espace de fonctions scalaires continues puis à lui appliquer le Théorème de Riesz-Kakutani.

Nous proposons dans cette partie une possibilité d'extension des résultats du chapitre 2 à des opérateurs bornés dans le cadre des espaces vectoriels topologiques. Cette extension sera obtenue en construisant une famille d'opérateurs bornés $T : C(S, E') \to E'$ admettant une représentation intégrale faible par rapport à une mesure scalaire, E' étant le dual d'un e.v.t localement convexe E.

4.1- Hypothèses-Notations.

Notation 1: *Soit E un espace localement convexe separé, E' son dual topologique. Nous noterons la dualité fonctionnelle entre E et E' par:*

$$f \in E', \, \xi \in E : \langle f, \xi \rangle$$

c'est-à-dire la valeur de la fonctionnelle f pour le vecteur ξ.

Définition 2: *Nous munirons E' de la topologie $*$-faible $\sigma(E', E)$ engendrée par la famille de seminormes:*

$$f \in E' : p(f; x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{1 \le j \le n}{Sup} |\langle f, x_j \rangle| \tag{1}$$

où $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est un système fini d'éléments de E.

Proposition 3: *Toute fonctionnelle linéaire continue de E', $\sigma(E', E)$ est de la forme:*

$$f \to \langle f, \xi \rangle \tag{2}$$

pour un ξ unique dans E. (Voir [21])

Définition 4: *L'espace $C(S,E')$ des fonctions continues $f : S \to E'$ sera muni de la topologie uniforme engendrée par la famille de seminormes:*

$$f \in C(S,E'), \widetilde{p}(f) = \underset{t\in S}{Sup}\, p(f(t)) \tag{3}$$

où p est donnée par (1).
L'espace $C(S)$ des fonctions continues $f : S \to R$ sera muni de la norme uniforme:

$$f \in C(S) : \|f\| = \underset{t\in S}{Sup} |f(t)|\,. \tag{4}$$

Proposition 5: *Soit τ_ξ $\xi \in E$, la famille d'opérateurs bornés $\tau_\xi : C(S,E') \to C(S)$, définis par*

$$f \in C(S,E') : \tau_\xi f = \langle f(\cdot), \xi\rangle\,. \tag{5}$$

Alors pour $\xi \neq 0$ τ_ξ, est surjectif.

Démonstration: Soit $\xi \neq 0$, il existe une seminorme p sur E telle que $p(\xi) \neq 0$ et, par le théorème de Hahn-Banach, un $\alpha^{'} \in E'$ avec $\alpha^{'}(\xi) = p(\xi)$ et $\alpha^{'}(\xi) = 1$.Pour $h \in C(S)$, définissons $f : S \to E'$ par $f(t) = h(t)\alpha'$; alors $f \in C(S,E')$ et on a $\langle f(\bullet), \xi\rangle = \langle h(\bullet)\alpha', \xi\rangle = h(\bullet)$

Définition 6: *Soit $T : C(S,E') \to E'$ un opérateur borné. On dit que T admet une forme intégrale faible s'il existe une mesure scalaire $\mu : \mathcal{B}_S \to \mathsf{R}$ ou C telle que:*

$$\forall\xi \in E,\ \forall f \in C(S,E') : \langle Tf, \xi\rangle = \int_S \langle f(t), \xi\rangle\, d\mu(t). \tag{6}$$

4.2- Représentation intégrale.

Théorème 7: *Soit $T : C(S,E') \to E'$ un opérateur linéaire borné. Alors T admet une forme intégrale faible au sens de la définition* 6 *si et seulement si la condition suivante est satisfaite:*

$$\xi, \eta \in E,\ f, g \in C(S,E') : \tau_\xi f = \tau_\eta g \Longrightarrow \langle Tf, \xi\rangle = \langle Tg, \eta\rangle\,. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Démostration: La condition necessaire est claire.
Pour voir qu'elle est suffisante nous allons construire un opérateur borné $V : C(S) \to \mathsf{R}$ tel que:

$$V \circ \tau_\xi(.) = \langle T(.), \xi\rangle \tag{7}$$

Soit $h \in C(S)$ et fixons $\xi \in E$, $\xi \neq 0$. Comme τ_ξ est surjectif (proposition 5), il existe $f \in C(S,E') : \tau_\xi f = h$. On pose alors:

$$Vh = \langle Tf, \xi\rangle \tag{8}$$

L'opérateur V est défini sans ambiguité puisque d'aprés la condition $(\mathcal{P})$ si $\tau_\xi f = \tau_\eta g$ alors $\langle Tf, \xi\rangle = \langle Tg, \eta\rangle$. Il est clair que V est linéaire et satisfait (7) par construction. Nous devons montrer que V est borné.
Soit h_n une suite dans $C(S)$ telle que $\|h_n\| \to 0$, $n \to \infty$. Pour $\xi \neq 0$ écrivons $h_n = \tau_\xi f_n$ où $f_n \in C(S, E')$. Alors $\|h_n\| = \widetilde{p}(f_n)$ où $\widetilde{p}$ est définie par (3). Comme T est borné, on en déduit que $Tf_n \to 0$ et par conséquent $|Vh_n| = |\langle Tf_n, \xi\rangle| \to 0$. Il en résulte que $V \in C^*(S)$.
D'aprés le théorème de Riesz-Kakutani, il existe une mesure scalaire bornée μ sur $S, \mathcal{B}_S$ telle que:

$$\forall h \in C(S) : Vh = \int_S h d\mu. \tag{9}$$

Appliquons (9) pour $h = \tau_\xi f$, $f \in C(S, E')$, on obtient $V(\tau_\xi f) = \int_S \langle f(t), \xi\rangle \, d\mu(t)$.
Comme les opérateurs V et T sont liés par (7), on déduit de l'équation ci-dessus que $\int_S \langle f(t), \xi\rangle \, d\mu(t) = \langle Tf, \xi\rangle$. ¥

4.3 Conséquences:

Dans le contexte du théorème 7, on définit la ξ-norme ($\xi \in E$) d'un opérateur borné T: $C(S, E') \to E'$ au moyen de la formule

$$\|T\|_\xi = Sup\left\{|\langle Tf, \xi\rangle| : \ f \in C(S, E'), \ \|\tau_\xi f\|_\infty \leq 1\right\} \tag{10}$$

Remarquons que pour $g \in E'$ et $\xi \in E$, alors $|\langle g, \xi\rangle|$ est la valeur de la seminorme $|\langle ., \xi\rangle|$ sur E', au vecteur g. Avec ces ingrédients, nous avons l'estimation suivante:

Théorème 8: *Sous les hypothèses du Théorème 7, on a:*

$$\forall \xi \in E, \quad \|T\|_\xi = v(\mu) \tag{11}$$

où $v(\mu)$ est la variation totale de la mesure scalaire μ attachée à l'opérateur T.

Démonstration: Considérons la fonctionnelle V qui apparait dans la démonsration du théorème 7. D'aprés la formule (9) on a $\|V\| = v(\mu)$ (théorème de Riesz-Kakutani). Ainsi, compte tenu de la formule (10) et de la formule (9), l'identité (11) sera une conséquence de:

$$\|V\| = Sup\left\{|\langle Tf, \xi\rangle| : \ f \in C(S, E'), \ \|\tau_\xi f\|_\infty \leq 1\right\} \tag{12}$$

Désignons par α le membre de droite de la formule (12). D'aprés (8) et le fait que

$$\|V\| = Sup\{|Vh| : \ h \in C(S), \ \|h\|_\infty \leq 1\}$$

il est clair que $\alpha \leq \|V\|$. D'autre part, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $h \in C(S)$ tel que $\|h\|_\infty \leq 1$ et $\|V\| - \varepsilon < Vh$. Comme τ_ξ, $\xi \neq 0$ est surjectif (proposition 5), il existe $f \in C(S, E')$ telle que $\tau_\xi f = h$ et $\|\tau_\xi f\|_\infty = \|h\|_\infty \leq 1$. On a aussi, $|V(\tau_\xi f)| = |Vh| \leq \alpha$, d'aprés (8) et la nature de α. Par conséquent, avec le choix de

h, on obtient $\|V\| - \varepsilon < |V(\tau_\xi f)| \leq \alpha$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\|V\| \leq \alpha$, d'où l'égalité $\|V\| = \alpha$ et la formule (12) est établie. ¥

Le Théorème qui suit caractérise la convergence faible d'une suite d'opérateurs satisfaisant la condition $(\mathcal{P})$ du théorème 7 en termes de la convergence faible de leurs mesures représentatives:

Théorème 9: *Soit T_n une suite d'opérateurs bornés satisfaisant la condition $(\mathcal{P})$ du théorème 7 et soit T un opérateur borné de $C(S,E')$ dans E'. Supposons que la suite T_n converge faiblement vers T. Alors l'opérateur T vérifie $(\mathcal{P})$. De plus si μ_n* et *μ désignent respectivement les mesures représentatives de T_n et T conformément au théorème 7, alors μ_n converge faiblement vers μ, au sens où pour tout $h \in C(S)$, $\underset{n}{Lim} \int\limits_S h\, d\mu_n = \int\limits_S h\, d\mu$. Inversement si T vérifie $(\mathcal{P})$* et si *μ_n converge faiblement vers μ, alors la suite T_n converge faiblement vers T.*

Démonstration: La convergence faible des T_n signifie que pour tout $f \in C(S,E')$ et tout $\xi \in E$ on a $\underset{n}{Lim} |\langle T_n f, \xi\rangle| = |\langle Tf, \xi\rangle|$ (Voir Proposition 3); de là il résulte que T vérifie $(\mathcal{P})$.D'aprés le Théorème 7 la limite précèdente implique $\underset{n}{Lim} \int_S \langle f(t), \xi\rangle\, d\mu_n(t) = \int_S \langle f(t), \xi\rangle\, d\mu(t)$. A présent si $h \in C(S)$ et si $\xi \in E$, il existe $f \in C(S,E')$ tel que $h(t) = \langle f(t), \xi\rangle$ $\forall t \in S$; de là on déduit que $\underset{n}{Lim} \int\limits_S h\, d\mu_n = \int\limits_S h\, d\mu$. Cela prouve la partie directe du théorème. La démonstration de la réciproque est immédiate en utilisant la forme ci-dessus de h et les représentations intégrales de T_n et T données par le théorème 7.¥

4.4- Exemples:

Exemple 10: Fixons s dans S et considérons l'opérateur borné $T : C(S,E') \to E'$ donné par $Tf = f(s)$, $f \in C(S,E')$. Il est facile de vérifier que T satisfait la condition $(\mathcal{P})$. Nous calculons la mesure μ attachée à T par le théorème 7. On a $\int_S \langle f(t), \xi\rangle\, d\mu(t) = \langle Tf, \xi\rangle = \langle f(s), \xi\rangle$. Comme $\langle f(s), \xi\rangle = \int_S \langle f(t), \xi\rangle\ \delta_s(dt)$, où δ_s est la mesure de Dirac en s, on déduit que:

$$(*) \quad \forall f \in C(S,E'), \forall \xi \in E : \int_S \langle f(t), \xi\rangle\, d\mu(t) = \int_S \langle f(t), \xi\rangle\ \delta_s(dt)$$

A présent si $h \in C(S)$ et $\xi \neq 0$ dans E, il existe $f \in C(S,E')$ tel que $\langle f(t), \xi\rangle = h(t)$. Une application de la formule $(*)$ donne:

$$\int_S h(t) d\mu(t) = \int_S h(t)\delta_s(dt)$$

pour tout $h \in C(S)$. Cela prouve que $\mu = \delta_s$.

Exemple 11: Considérons l'espace $C([0,1], \Im')$, où $\Im$ est l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur R et $\Im'$ l'espace des distributions tempérées. Comme précédemment nous munissons $\Im'$ de la topologie $*$-faible, $\sigma(\Im', \Im)$.

A présent soit $\Lambda : C([0,1], \Im') \to \Im'$, un opérateur borné satisfaisant la condition $(\mathcal{P})$. Alors on a:

$$\forall S \in C([0,1], \Im'), \forall \xi \in \Im : \langle \Lambda S, \xi \rangle = \int_{[0,1]} \langle S_t, \xi \rangle \, d\mu(t) \tag{13}$$

pour une unique mesure μ sur $[0,1]$.
Nous allons montrer qu'un tel opérateur Λ présèrve les opérations familières de la Théorie des distributions.
Mais d'abord nous définissons la dérivée et la transformée de Fourier d'un élément $S \in C([0,1], \Im')$ comme éléments de $C([0,1], \Im')$.
On définit $S' = \dfrac{dS}{dx}$ comme la fonction $t \to \dfrac{dS_t}{dx}$ où $\dfrac{dS_t}{dx}$ est la dérivée usuelle de la distribution S_t. Notons à présent que la fonction $t \to \dfrac{dS_t}{dx}$ est continue, d'aprés les critères de convergences dans $\Im'$. Cela permet de définir S' par la fonction $t \to \dfrac{dS_t}{dx}$ et ainsi on a $S' \in C([0,1], \Im')$.
Avec les ingrédients ci-dessus on a:

$$\frac{d\Lambda S}{dx} = \Lambda S' \tag{14}$$

Pour prouver (14), nous calculons simplement $\dfrac{d\Lambda S}{dx}$ pour $\xi \in \Im$:

$$\frac{d\Lambda S}{dx}(\xi) = -\Lambda S(\xi'), \text{ où } \xi' = \frac{d\xi}{dx}.$$

D'aprés (13):

$$\begin{aligned} -\Lambda S(\xi') &= -\int_{[0,1]} \left\langle S_t, \xi' \right\rangle d\mu(t) \\ &= \int_{[0,1]} \left\langle \frac{dS_t}{dx}, \xi \right\rangle d\mu(t) \\ &= \Lambda S'(\xi) \end{aligned}$$

Par conséquent $\dfrac{d\Lambda S}{dx}(\xi) = \Lambda S'(\xi)$ pour tout $\xi \in \Im$. Cela prouve (14).

Venons-en à la transformée de Fourier.
En utilisant un procédé analogue à celui de la dérivation, on définit la transformée de Fourier d'un élément $S \in C([0,1], \Im')$ par $\widehat{S} : t \to \widehat{S_t}$ où $\widehat{S_t}$ est la transformée de Fourier de la distribution tempérée S_t: $\widehat{S_t}(\xi) = S_t(\widehat{\xi})$, où $\xi \in \Im$ et $\widehat{\xi}$ la transformée de Fourier de ξ.
Comme $t \to \widehat{S_t}$ est continue de $[0,1]$ dans $\Im'$, cela définit $\widehat{S}$ comme un élément de $C([0,1], \Im')$. Calculons la transformée de Fourier de la distribution ΛS. On a:

$$\begin{aligned}\widehat{\Lambda S}(\xi) = \Lambda S(\widehat{\xi}) &= \int_{[0,1]} \left\langle S_t, \widehat{\xi} \right\rangle d\mu(t) \\ &= \int_{[0,1]} \left\langle \widehat{S}_t, \xi \right\rangle d\mu(t).\end{aligned}$$

Mais cette dernière intégrale représente $\Lambda\widehat{S}(\xi)$ par la formule (13) et la définition de$\widehat{S}$. Par conséquent on a prouvé la relation:

$$\widehat{\Lambda S} = \Lambda \widehat{S} \tag{15}$$

REFERENCES:

[1] J.Batt, E.J.Berg: *Linear Bounded transformations on the space of continuous functions*, J.Functional Analysis, 4,215-239 (1969).

[2] R.G.Bartle, N.Dunford and J.T.Schwartz: *Weak Compactness and Vector Measures*, Canad. J. Math 7, 289-305, (1955).

[3] N.Bourbaki: *Eléments de Mathématiques, Intégration* chapitre 1–4. Hermann.

[4] N.Bourbaki: *Topologie Générale, chapitre 10 Espaces Fonctionnels*,Hermann.

[5] J.K.Brooks, P.W.Lewis: *Linear Operators and Vector Measures*, Trans.Amer.Math.Soc. Vol 192 139–162 (1974).

[6] J.Diestel, Uhl, J.J: *Vector Measures*, Math.Surveys Number 15 AMS (1977).

[7] N.Dinculeanu: *Vector Measures*, Pergamon Press, (1967).

[8] I.Dobrakov: *On Representation of linear operators on* $C_0(T, X)$ Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 13-30 (1971).

[9] N.Dunford, J.T.Schwartz: *Linear operators*, Part 1: General Theory, Wiley classics library (1988).

[10] E.Hille, R.S.Phillips: *Functional Analysis and Semigroups*, AMS Colloquium (1957).

[11] S.Kakutani: *Concrete Representation of absract (M)-Spaces*, Ann. of Math. (2) 42, 994-1024 (1941).

[12] L.Meziani: *Integral Representation for a class of Vector Valued Operators*, Proc.Amer.Math.Soc. Vol 130, Number 7 2067-2077 (2002).

[13] L.Meziani: *Some Change of Variable Formulas in Integral Representation Theory,* Journal of Concrete and App. Mathematics, To appear, (2004).

[14] L.Meziani: *Weak Integral Attached to Bounded Operateurs in TVS,* Maghreb Mathematical Review, To appear, (2004).

[15] L.Meziani: *Integration Vectorielle, Notes de cours.* Postgraduation d'Analyse ENS, Alger (1988).

[16] F.Riesz: *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C.R.Acad. Sci. Paris, 144, 615-619 (1907).

[17] W.Rudin: *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill (1970).

[18] W.Rudin: *Functional Analysis*, Mc Graw Hill (1985).

[19] I.Singer: *Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues*, Rev. Math. Pures Appl. 4, 391-401 (1959).

[20] I.Singer: *Linear Functionals on the space of continuous mappings of a compact space into Banach space,* Rev. Math. Pures Appl.2, 301-315 (1957). (Russian)

[21] K.Yosida: *Functional Analysis*, Springer Verlag.

[22] C.Foias, I.Singer: *Some remarks on the representation of linear operators in spaces of vector-valued continuous functions.* Rec. Roum. Math. Pures et Appl. V (1960), 729-752.

[23] R.K.Goodrich: *A Riesz representation Theorem*, Proc. Amer. Math Soc. 24 (1970), 629-636.