

N° d'ordre : 04/2015-C/PH

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE PHYSIQUE**



**Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat 3ème cycle
en physique
Spécialité : Physique théorique**

Par

Kamel OURABAH

THÈME

**Contribution à la généralisation non-extensive du modèle de
Thomas-Fermi et applications aux plasmas quantiques**

Soutenu publiquement le 15/04/2015, devant le jury composé de :

Mme	F. CHAFA- MEKIDECHE	Professeure à	l'USTHB	Présidente
Mr	M. TRIBECHE	Professeur à	l'USTHB	Directeur de thèse
Mr	S. KESSAL	Professeur à	l'USTHB	Examineur
Mr	O. LAMROUS	Professeur à	l'UMM, T. OUZOU	Examineur
Mr	T. E. ABDELLATIF	Directeur de recherche	au CRAAG	Examineur
Mr	H. OUALLI	Professeur à	l'EMP, Bordj- El- Bahri	Examineur

Remerciements

Le présent travail a été réalisé au sein de l'équipe de physique des plasmas, du laboratoire de physique théorique de l'USTHB. A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincu que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de « l'apprenti chercheur ».

Ce fut très agréable de travailler avec monsieur Mouloud Tribeche qui m'a fait l'honneur de m'encadrer durant ce travail de thèse. J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension, ainsi qu'au temps et à l'attention qu'il m'a consacrés tout au long de ce travail doctoral. Richard Feynman décrivait son directeur de thèse, John Wheeler, en ces mots « *Il était de ces gens qui savaient lire dans les équations. Moi je calculais... lui, il voyait !* ». Je pourrais décrire monsieur Tribeche, en ces mêmes termes. Qu'il trouve en ces lignes mes vifs remerciements et mon profond respect.

Je tiens à remercier également madame MEKIDECHE-CHAFI, professeure à l'USTHB, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à monsieur KESSAL, professeur à l'USTHB, d'avoir accepté de prendre part au jury de la thèse en tant qu'examineur et pour l'ambiance de travail très agréable qu'il a su créer au sein de l'équipe d'enseignants du module de physique statistique.

Je sais infiniment gré à monsieur LAMROUS, professeur à l'UMM, T. OUZOU, de s'être rendu disponible en tant qu'examineur de cette thèse. De même, je remercie monsieur ABDELLATIF, directeur de recherche au CRAAG, d'avoir accepté la fonction d'examineur. Je suis également reconnaissant à monsieur OUALLI, professeur à l'EMP, Bordj-El-Bahri, de l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de cette recherche en s'engageant à être examineur.

Mes remerciements vont également à tous les membres du laboratoire de physique théorique, avec qui j'ai beaucoup interagi. Je remercie particulièrement mes amis et collègues

de l'équipe de physique des plasmas. Un grand merci à Omar, Khireddine et Mustapha. Merci à Zouhir, à Juba et à mme. Yekken, ainsi qu'aux autres membres de la famille que forme *-souvent-* le laboratoire de physique théorique.

J'exprime ma gratitude à monsieur Uğur Tirnakli de l'université d'Izmir, ainsi qu'à messieurs Peter Ván et Tamás Biró de l'institut Wigner, pour les conversations enrichissantes, qui ont beaucoup contribué à l'accomplissement de ce travail.

Je remercie infiniment Ramelya d'avoir été une source d'inspiration. Jamais elle ne m'a refusé son aide, son soutien ou ses encouragements.

Mes derniers remerciements, et pas les moindres, vont à ma mère. On dit qu'il est de ces services si grands que l'on ne peut les payer que par l'ingratitude. Qu'elle trouve toutefois dans ces lignes toute la reconnaissance que les mots peuvent exprimer. Cette thèse lui est dédiée.

Table des matières

1	Physique statistique : le formalisme et ses limites	5
1.1	Introduction	5
1.2	L'hypothèse ergodique	6
1.3	L'entropie	7
1.4	Les fonctions de distribution	10
1.5	Conclusion	12
2	Physique Statistique non-extensive	13
2.1	Introduction	13
2.2	Entropie de Tsallis	14
2.2.1	Concept et propriétés	14
2.2.2	Axiomes de l'entropie de Tsallis	15
2.3	Rôle des contraintes	16
2.4	Fonctions de distribution	17
2.5	Conclusion	18
I	Sur la théorie de Thomas-Fermi en statistique non-extensive	20
3	Modèle de Thomas-Fermi	22
3.1	Introduction	22
3.2	Modèle de Thomas-Fermi standard	23
3.2.1	Equation de Thomas-Fermi à zéro-température	23
3.2.2	Equation de Thomas-Fermi à température finie	25
3.3	Approche non-extensive du modèle de Thomas-Fermi	26
3.3.1	Distribution non-extensive de Fermi-Dirac	27
3.3.2	Equation de Thomas-Fermi non-extensive	29

3.4	Modèle de Thomas-Fermi non-extensif à n dimensions	31
3.4.1	Equation de Thomas-Fermi non-extensive à n dimensions	32
3.5	Conclusion	33
4	Modèle de Thomas-Fermi non-extensif: effet des autres corrections	35
4.1	Introduction	35
4.2	Modèle de Thomas-Fermi non-extensif : effet du champ magnétique	36
4.2.1	Equation de Thomas-Fermi non-extensive	36
4.2.2	Calcul de l'énergie	38
4.3	Modèle de Thomas-Fermi non-extensif relativiste	39
4.3.1	Equation de Thomas-Fermi	40
4.4	Conclusion	42
5	Ecrantage électrique dans le modèle de Thomas-Fermi	44
5.1	Introduction	44
5.2	Ecrantage électrique dans le modèle de Thomas-Fermi non-extensif	45
5.3	Ecrantage électrique en présence d'un champ magnétique intense	47
5.4	Ecrantage électrique relativiste	50
5.5	Conclusion	52
6	Approche non-extensive des fermions auto-gravitants	53
6.1	Introduction	53
6.2	Equation de Thomas-Fermi	54
6.3	Instabilité de Jeans	55
6.4	Conclusion	57
7	Approche non-extensive du modèle de Sommerfeld	59
7.1	Introduction	59
7.2	Chaleur spécifique	60
7.3	Susceptibilité magnétique	65
7.4	Conclusion	66

II Sur les structures solitaires dans les plasmas: statistique

non-extensive et corrélation	67
8 Onde acoustique ionique poussiéreuse en présence d'électrons non-extensifs	69
8.1 Introduction	69
8.2 Equations de base	69
8.3 Résultats numériques	73
9 Onde acoustique ionique quantique : effet de l'échange et de la corrélation	78
9.1 Introduction	78
9.2 Equations de base	79
9.3 Influence de l'échange et de la corrélation sur les solitons	81
9.4 Conclusion	85
 III Sur les statistiques alternatives: de l'entropie de Kaniadakis aux superstatistiques de Beck-Cohen	 87
10 Statistique de Kaniadakis	89
10.1 Introduction	89
10.2 Loi de Planck revisitée	90
10.3 Les coefficients d'Einstein revisités	93
10.4 Conclusion	97
11 Les superstatistiques de Beck-Cohen	99
11.1 Introduction	99
11.2 Le formalisme de Beck-Cohen	99
11.3 Statistique non-extensive sans entropie de Tsallis	101
11.4 Les distributions non-thermique et supra-thermique: une conséquence des fluctuations?	102
11.5 Conclusion	105
12 Conclusions et perspectives	107
13 Annexe A	111

Introduction

L'une des particularités remarquables de la physique statistique est sa capacité à décrire l'évolution de systèmes complexes, sans en connaître la dynamique à l'échelle microscopique. Bien que les bases de cette science, aient été proposées à une époque où la structure atomique ou la physique quantique étaient inconnues, elle fournit un certain nombre d'outils et de méthodes permettant de décrire des systèmes divers et variés tels que le *rayonnement du corps noir*, la *dynamique des gaz et des plasmas*, la *thermodynamique des trous noirs* ou la *dynamique primordiale de l'Univers*. Il est d'ailleurs assez surprenant que la physique statistique, telle que formulée il y a deux siècles, ait connu ce succès dans la description de tels systèmes. Comme l'écrivait Christian Beck [1] "*Le fait que la physique statistique, telle que formulée actuellement, fonctionne aussi bien relève tout simplement du miracle!*". Cela est dû, d'une part, à ce que la physique statistique ne découle pas de théories microscopiques modernes et, d'autre part, qu'elle soit basée sur des hypothèses dont la démonstration représente généralement un défi mathématique. Bien que le succès de la physique statistique soit remarquable, il n'en est pas pour autant sans limites. Ainsi, dans certaines circonstances, les principes de la physique statistique ne semblent pas être rigoureusement justifiés et cette dernière peine à décrire un certain nombre de phénomènes. De tels systèmes font généralement intervenir des interactions à longue-portée et exhibent un comportement faiblement chaotique. Une généralisation de la physique statistique standard a été proposée, il y a un quart de siècle, afin de palier à ces problèmes. Cette théorie est communément appelée "*statistique non-extensive*" [2]. Elle a généré un grand champ d'investigation, depuis plus d'une décennie, aspirant à une meilleure description de certains systèmes complexes, et à tester la théorie dans des situations pouvant être reproduites en laboratoire. Le présent travail s'inscrit dans ces mêmes lignes de pensée.

La statistique non-extensive repose sur une généralisation à un paramètre de l'entropie de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS). Ce paramètre réel, mesurant les interactions à longue-portée, rend possible une description de systèmes plus complexes et sa flexibilité permet

un meilleur accord avec les valeurs expérimentales. Ce paramètre se retrouve dans les fonctions de distribution qui, dans une certaine limite, se réduisent aux distributions prédites par la statistique standard. Ces distributions se trouvent être des lois en puissance, tel que l'indique un grand nombre d'expérimentations et d'observations. Parmi ces évidences expérimentales, nous pouvons citer la *distribution d'atomes froids dans des réseaux optiques dissipatifs* [3], les *fluctuations du champ magnétique dans le vent solaire* [4], les *distributions des vitesses dans des plasmas poussiéreux dissipatifs* [5], les *collisions à haute énergie au LHC/CERN* (les détecteurs CMS, ATLAS et ALICE) et à RHIC/Brookhaven (les détecteurs STAR et PHENIX) [6], [7]. La plus grande partie de ce travail repose sur l'une de ces fonctions de distribution généralisées, à savoir la distribution de *Fermi-Dirac non-extensive*. Celle-ci est une généralisation à un paramètre de la distribution de Fermi-Dirac, découlant de la statistique non-extensive. En l'associant aux électrons, elle permet de décrire leur comportement hors équilibre thermodynamique et de prendre en compte les interactions et corrélations auxquelles ils sont assujettis.

Les deux premiers chapitres de cette thèse seront consacrés aux idées de base de la physique statistique et à leur généralisation non-extensive. Ils ont l'ambition de ne pas s'adresser à des spécialistes et sont destinés à un large public. Nous y présenterons les principes et méthodes de la physique statistique standard, et ceux de la statistique non-extensive. Le troisième chapitre sera consacré à un modèle statistique particulier, qui sera la pièce maîtresse de la première partie de ce travail, à savoir le modèle de Thomas-Fermi (TF) [8], [9]. Nous y présenterons le formalisme et ses idées de base. Nous revisiterons ensuite ce modèle dans la statistique non-extensive [10]. Nous y discuterons brièvement l'apport de la statistique non-extensive à ce modèle et les modifications qu'elle y introduit. La dernière section du chapitre sera quant à elle consacrée à une reformulation du modèle de TF non-extensif à une dimension arbitraire n [11]. L'étude dans l'hyper-espace d'une théorie physique constitue souvent un moyen heuristique remarquable et révèle souvent une image riche de la théorie. Il sera question essentiellement d'étudier le comportement de la non-extensivité avec la dimension de l'espace. Nous y répondrons particulièrement à la question fondamentale : *les effets non-extensifs sont-ils de même nature que les effets thermiques ou relativistes, du point de vue de leur dépendance de la dimension de l'espace?*

Dans le quatrième chapitre, nous étendrons la validité du modèle de TF non-extensif à des situations fréquemment rencontrées dans les plasmas astrophysiques ou de laboratoire. Nous introduirons, dans la première section, l'effet d'un champ magnétique intense [12]; la présence de celui-ci pouvant affecter de manière considérable la densité électronique obtenue

par le formalisme de TF. Le modèle ainsi reformulé peut s'appliquer à un gaz d'électrons ou à un plasma confiné par un champ magnétique intense, comme c'est le cas dans les technologies de fusion thermonucléaire, telles que les *Tokamaks*. La seconde section du chapitre sera, quant à elle, réservée à l'introduction des effets relativistes [13]. Cette correction permet d'étendre la validité du modèle de TF non-extensif à des situations où les électrons atteignent des vitesses élevées, où les effets de la relativité restreinte ne sont plus négligeables.

Les résultats de ce chapitre se traduiront dans le cinquième chapitre où il sera question d'appliquer les précédents résultats à l'étude du phénomène d'écrantage électrique. Cette approche est appropriée dans le cas des plasmas quantiques. Nous y étudierons, particulièrement, l'effet de la statistique non-extensive sur la longueur de Fermi, longueur caractéristique de l'écrantage électrique dans les gaz et les plasmas quantiques [14]. Nous y étudierons également le comportement des différentes corrections vis-à-vis de la statistique non-extensive [12], [13].

Dans le sixième chapitre, nous construirons, par analogie, un modèle de TF décrivant un système de fermions auto-gravitants [15]. Ces derniers sont des particules neutres, de spin demi-entier, interagissant via l'interaction gravitationnelle. C'est le cas, par exemple, des neutrons dans une étoile à neutrons ou des neutrinos dans un modèle de matière noire. En se basant sur le modèle décrit au chapitre 3, nous appliquerons la distribution de Fermi-Dirac non-extensive aux particules auto-gravitantes. Nous y étudierons également l'effet de la statistique non-extensive sur l'instabilité de Jeans. Les résultats présentés dans ce chapitre n'ont pas la prétention d'être un accomplissement mais un commencement. Nous y présentons, en effet, une tentative d'introduire la statistique non-extensive, comme un outil potentiel dans la description de tels systèmes.

Dans le chapitre 7, nous nous inspirerons de l'approche non-extensive du modèle de TF pour construire une généralisation du modèle de Sommerfeld [16], [17]. En associant la distribution de Fermi-Dirac non-extensive aux électrons dans le métal, nous évaluerons la chaleur spécifique des différents éléments métalliques. Les valeurs obtenues seront comparées aux valeurs expérimentales.

La seconde partie de ce travail porte sur l'étude des structures solitaires dans les plasmas. Nous y étudierons l'effet de la statistique non-extensive d'une part et du potentiel d'*échange* et de *corrélation*, d'autre part. Ainsi, dans le huitième chapitre, nous étudierons l'effet de la distribution des vitesses non-extensive (*généralisation non-extensive de la distribution de Maxwell-Boltzmann*) sur les conditions d'existence et la nature des ondes acoustiques ioniques poussiéreuses dans un plasma poussiéreux [18]. Notons que les plasmas poussiéreux

constituent un terrain favori pour tester la statistique non-extensive. En effet, les premières vérifications expérimentales de la statistique non-extensive ont été réalisées dans le cas de plasmas poussiéreux [5]. Dans le chapitre 9, nous étudierons la propagation d'ondes solitaires dans un plasma quantique en y introduisant un effet supplémentaire: le *potentiel d'échange* et de *corrélation* [19], [20], [21]. Ce dernier a été négligé jusqu'à présent, dans tous les modèles décrivant la propagation d'ondes solitaires dans les plasmas quantiques [22]-[26]. Nous construirons dans ce chapitre un modèle, prenant en compte cet effet et nous montrerons qu'il peut affecter de manière drastique les propriétés des structures solitaires. Bien que ce travail ne soit pas en relation directe avec la statistique non-extensive, il rappelle toutefois que cette statistique permet une mesure des corrélations d'un système donné.

Enfin, la troisième partie de la thèse sera dédiée aux théories alternatives à la statistique non-extensive de Tsallis, ou du moins les plus prometteuses, à savoir la statistique de *Kaniadakis* [27] et le formalisme des *superstatistiques* de *Beck-Cohen* [28]. Le dixième chapitre sera consacré à la présentation de la statistique de Kaniadakis. Nous appliquerons ce formalisme à un phénomène d'une importance historique et pédagogique: le *rayonnement du corps noir* [29]. Nous y proposerons le formalisme de la statistique de Kaniadakis comme une alternative à la statistique non-extensive de Tsallis, dans le but de contourner certaines anomalies présentées par cette dernière. Le onzième et dernier chapitre sera consacré aux superstatistiques de Beck-Cohen. Ce formalisme apporte une interprétation élégante des distributions de la statistique non-extensive de Tsallis, en termes de fluctuations. Nous présenterons les idées de base du formalisme et nous montrerons qu'il peut fournir une assise théorique à deux fonctions de distribution empiriques de la physique des plasmas, à savoir les distributions *non-thermique* et *supra-thermique* [30].

L'annexe A fera office d'une modeste étude épistémologique. En effet, le lecteur pourra y trouver une sélection d'indices dans la littérature mettant en relief les limitations de la physique statistique standard et la nécessité d'une généralisation.

1

Physique statistique : le formalisme et ses limites

1.1 Introduction

Bon nombre de systèmes étudiés par les physiciens se composent d'un grand nombre d'éléments en interaction. Il en est ainsi des molécules dans un gaz, des particules élémentaires dans un collisionneur de particules, ou des étoiles et planètes formant une galaxie. Ces systèmes sont appelés *systèmes complexes* car leur étude présente une si grande complexité qu'il devient impossible de les étudier de façon exacte. D'abord, parce que leur évolution dépend d'un très grand nombre de variables auxquelles nous n'avons pas accès. Ensuite, quand bien même nous disposions d'un moyen de récolter ces données, ces dernières resteraient impossible à traiter mathématiquement par un ordinateur et encore moins par un être-humain. Comment pourrions-nous alors étudier de tels systèmes? Une réponse est apportée, à défaut, par la physique statistique.

La physique statistique est une combinaison des lois de la physique et d'un élément abstrait des mathématiques : la *théorie des probabilités*. Elle apporte une description probabiliste des systèmes physiques. Elle rend leur étude possible en abandonnant certaines informations superflues. Ce manque d'information est mesuré par un concept fondamental de la physique statistique, à savoir l'entropie. Cette dernière est, comme mentionné précédemment, au cœur de notre travail. Fort heureusement, ce manque d'information n'affecte que peu l'étude de ces systèmes, et les résultats apportés par la physique statistique restent satisfaisants pour la plupart d'entre eux. Ainsi, si nous voulions étudier un verre d'eau par exemple, il ne serait pas nécessaire de connaître la position, l'orientation et

la vitesse de chacune des molécules qui le constituent. La connaissance de certaines données mesurables, telles que la densité ou la température suffiraient à nous renseigner sur son état physique et son évolution. Il en est de même de la plupart des systèmes de l'Univers. Ainsi, un simple atome peut être du ressort de la physique statistique lorsque son numéro atomique est élevé. Les gaz, les plasmas, les amas de galaxie ou les trous noirs constituent autant de domaines d'application privilégiés de la physique statistique.

La physique statistique, dans sa formulation habituelle, est un outil incontestable et un moyen heuristique extraordinaire. Au vu des bases sur lesquelles cette théorie s'est construite et de son évolution historique, cela peut sembler surprenant. En effet, les bases de la physique statistique ont été énoncées à une époque où nous n'avions pas connaissance des atomes, des molécules et de leur constitution, et la nature quantique du monde microscopique était totalement inconnue. Les concepts sur lesquels s'est construite la théorie de la physique statistique n'ont cependant pas changé et restent aujourd'hui une base pour l'étude de systèmes totalement inconnus à l'époque, tels que l'étude thermodynamique des trous noirs ou l'intrication quantique. D'autre part, la physique statistique - comme toute théorie physique- repose sur certaines hypothèses. La démonstration de ces dernières reste fastidieuse et constitue en général un défi mathématique. Hormis dans le cas de modèles très simplistes, leur démonstration est totalement impossible. Pour des modèles plus élaborés, elle reste hors de portée. La validité de l'une de ces hypothèses, à savoir l'hypothèse ergodique, a même généré une branche des mathématiques modernes : la *théorie ergodique*.

Bien que la physique statistique, telle que présentée actuellement dans les livres de physique statistique, ait fonctionné d'une façon surprenante et ait montré une grande aptitude à la description et la prévision, certains systèmes semblent être en dehors de son domaine de validité. Pour certains systèmes, en effet, celle-ci donne des résultats peu précis, ou s'applique difficilement, voire pas du tout. Dans certains cas même, elle peut mener à des absurdités, comme par exemple une fonction de partition infinie. Il est donc naturel de suggérer que de tels systèmes ne satisfont pas une ou plusieurs hypothèses de la physique statistique. Une généralisation doit donc être introduite.

1.2 L'hypothèse ergodique

L'idée principale de la physique statistique est l'introduction de la théorie des probabilités dans l'étude des systèmes physiques. Le but principal d'une telle étude est la description de l'évolution du système au cours du temps. Cependant, l'introduction de la

notion de probabilité rend délicate la considération du temps comme paramètre d'étude. Cette difficulté est contournée en introduisant l'*hypothèse ergodique*. Cette hypothèse stipule que la valeur moyenne au cours du temps est identique à la valeur moyenne prise sur un ensemble. D'une manière imagée, cela reviendrait à dire qu'en lançant un dé un grand nombre n de fois et en notant les résultats, ou n dés identiques en même temps, la valeur moyenne serait la même. Il est clair que la différence est d'autant plus faible que le nombre n est grand. Cette hypothèse est en effet justifiée en physique statistique car cette dernière s'intéresse aux systèmes composés d'un très grand nombre d'éléments. Ainsi, pour mesurer expérimentalement la durée de vie du proton, il est exclu d'observer un seul proton pendant cette période car, on se doute bien que si elle existe, elle devrait être infime. Une alternative consiste à observer un nombre très élevé de protons pendant une durée raisonnable. Ainsi, on considère un ensemble de copies du système physique et on calcule les valeurs moyennes sur cet ensemble.

Bien que cette hypothèse semble justifiée pour la plupart des systèmes à l'étude, sa démonstration reste généralement hors de portée. En dehors de quelques modèles très simples, il est impossible de démontrer l'ergodicité d'un système. Ce problème a donné naissance à une branche des mathématiques, *la théorie ergodique* qui se fixe pour objectif de préciser la nature mathématique de l'hypothèse et donne des résultats sur ses conditions de validité. Lorsque nous avons affaire à un système physique en évolution (des particules dans un accélérateur ou un plasma au sein d'une étoile,...etc), nous utilisons implicitement l'hypothèse ergodique mais il nous est impossible de démontrer la validité de cette procédure. Ceci est l'une des failles de la physique statistique d'aujourd'hui, d'autant que dans un certain nombre de systèmes, l'utilisation de la physique statistique standard devient d'une grande complexité et parfois même mène à des absurdités. Dans certains cas, elle n'a plus aucun sens (par exemple, lorsque la fonction de partition diverge). Dans d'autres cas, bien que la physique statistique standard mène à des résultats, ceux-là sont en désaccord avec les observations et les données expérimentales. Et si le problème était justement l'ergodicité de ces systèmes?

1.3 L'entropie

Toute la physique statistique repose sur une fonction fondamentale, l'entropie. C'est en effet cette fonction qui est maximisée, sous des contraintes appropriées, pour obtenir des fonctions de distribution à l'équilibre. La plus grande partie des applications de la

physique statistique et de la théorie de la matière condensée consiste justement à appliquer ces différentes fonctions de distributions dans les différents systèmes (des électrons dans un solide, un plasma ou encore un trou noir). Il existe plusieurs définitions possibles de l'entropie, et ce qui constitue une «entropie physique pertinente» est souvent l'objet de discussions et de controverses. Durant les 130 ans qui ont suivi son introduction, le désaccord autour du nom «entropie» semble être la règle plutôt que l'exception. En général, on peut utiliser le nom «entropie» comme un synonyme de mesure du manque d'information sur le système. L'entropie est un concept très général et dépend uniquement de la distribution de probabilité des événements (et pas de quoi sont faits ces événements!). L'idée de base est la suivante: Considérons un ensemble W d'événements possibles. En physique, ces événements sont le plus souvent identifiés aux différents états microscopiques accessibles au système. Notons p_i la probabilité que l'événement i se produise. Les probabilités sont ainsi normalisées :

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad (1.1)$$

Avant l'expérience, nous ne savons pas encore quel événement se produira. Supposons cependant que l'un de ces événements, disons j , a finalement lieu. Nous avons clairement gagné de l'information, car avant que l'événement ne se produise, nous ne savions pas quel événement se produirait. Supposons que la probabilité p_j de l'événement observé soit proche de 1. Cela signifie que nous gagnons très peu d'information par l'observation de l'événement j , parce que cet événement était très probable de toutes les façons. D'autre part, si p_i est proche de zéro, nous gagnons beaucoup d'information par l'apparition de l'événement j , parce que son apparition était inattendue. Ainsi, le gain d'information en raison de la survenance d'un seul événement j peut être mesuré par une fonction $h(p_j)$, qui devrait être proche de zéro pour p_j proche de 1. La théorie construite par Boltzmann, Gibbs et Shannon, séparément, fixe $h(p_j) = \log(p_j)$ ⁽¹⁾. Afin de déterminer un manque d'information "moyen" pour une séquence d'événements observés, nous devons pondérer le manque d'information associé à un événement unique i par la probabilité p_i que cet événement se produise réellement, c'est-à-dire

⁽¹⁾La base du logarithme ne joue pas un rôle important. En effet, en physique statistique le logarithme est le plus souvent identifié au logarithme népérien. En théorie de l'information, la base 2 est privilégiée, et la quantité $\log(p_i)$ est souvent appelée *nombre de bits*.

$$S = - \sum_{i=1}^W p_i h(p_i) = - \sum_{i=1}^W p_i \log(p_i) \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) est appelée formule de Shannon [31], [32]. Elle joue un rôle crucial en physique statistique et toutes les applications de la physique statistique la font intervenir de façon implicite. Mais pourquoi le logarithme justement? Si la distribution de probabilité est en pic autour d'un événement presque certain j , nous gagnons très peu d'information à partir de l'expérience réalisée: l'événement j se produira la quasi-totalité du temps! Cependant, si tous les événements sont répartis uniformément, c'est-à-dire $p = 1/W$ pour tout i , nous obtenons une grande quantité d'informations en réalisant l'expérience. En ce sens, il est raisonnable de supposer que l'entropie -*et donc le manque d'information*- devrait atteindre sa valeur maximale pour la distribution uniforme. En outre, les événements ayant une probabilité nulle de se produire ($p_i = 0$) n'influencent pas notre gain de l'information dans l'expérience. De cette manière, nous arrivons aux principes de base que l'entropie doit satisfaire: les *axiomes de Khinshin* [33].

Axiome I

$$S = S(p_1, \dots, p_W) \quad (1.3)$$

C'est-à-dire que l'entropie correspondant à un ensemble d'événements ne dépend que des probabilités de ces événements.

Axiome II

$$S(p_1, \dots, p_W) \leq S(1/W, \dots, 1/W) \quad (1.4)$$

C'est-à-dire que l'entropie atteint son maximum lorsque les événements sont équiprobables.

Axiome III

$$S(p_1, \dots, p_W) = S(p_1, \dots, p_W, 0) \quad (1.5)$$

C'est-à-dire que des événements avec une probabilité nulle ne modifient pas l'entropie.

Axiome IV

$$S(\{p_{ij}^{I,II}\}) = S(\{p_i^I\}) + \sum_i p_i^I S(\{p^{II}(j|i)\}) \quad (1.6)$$

Cet axiome est un peu plus compliqué et mérite qu'on s'y attarde davantage. L'axiome traite de la composition de deux systèmes I et II (pas nécessairement indépendants). Les

probabilités du premier sous-système sont p_i^I . Ceux du second sous-système sont p_j^{II} . Le système composé des sous-systèmes I, II est décrit par les probabilités conjointes $p_{ij}^{I,II} = p_i^I p^{II}(j|i)$, où $p^{II}(j|i)$ est la probabilité conditionnelle de j dans le sous-système II à la condition que i s'est déjà produit dans le système I . Le sens de l'axiome ci-dessus est le suivant : il postule que la mesure de l'information devrait être indépendante de la façon dont elle est recueillie. On peut d'abord recueillir des informations contenues dans le sous-système II , en supposant un événement donné i dans le sous-système I , puis sommer le résultat sur tous les événements possibles dans le sous-système I . Dans le cas de sous-systèmes indépendants, l'axiome se réduit à l'additivité :

$$S(\{p_{ij}^{I,II}\}) = S(\{p_i^I\}) + S(p_j^{II}) \quad (1.7)$$

Il a été démontré [31], [32] que les quatre axiomes précédents mènent de façon unique à l'entropie BGS.

Les trois premiers axiomes semblent évidents, le dernier par contre est une propriété beaucoup moins évidente. Pourquoi l'information devrait être indépendante de la façon dont elle est recueillie? En effet, dans les systèmes complexes en général, l'ordre dans lequel l'information est recueillie peut être très pertinent. Dans de tels cas, l'axiome IV pourrait être remplacé par une propriété plus générale. Nous reviendrons sur ce point dans le prochain chapitre.

1.4 Les fonctions de distribution

Le second principe de la thermodynamique stipule qu'un système évolue de sorte que son entropie augmente. Une fois à l'équilibre thermodynamique, l'entropie est donc à son maximum. En l'absence de toute contrainte, ce maximum correspond à l'équiprobabilité ($p_i = 1/W, \forall i$) comme mentionné précédemment. Cependant, il existe généralement des contraintes sur le système et les distributions à l'équilibre correspondent à certaines contraintes, sur le nombre de particules et l'énergie du système. L'ensemble le plus étudié en physique est l'ensemble canonique. C'est un ensemble en contact avec un thermostat. Il échange ainsi de l'énergie avec le thermostat tout en maintenant son nombre de particules et son énergie moyenne fixe. Pour obtenir les fonctions de distributions correspondant à une telle situation, il faut chercher les probabilités p_i pour lesquelles l'entropie est maximale, mais en tenant compte des deux contraintes suivantes

$$\sum_{i=1}^W n_i = N \text{ et } \sum_{i=1}^W n_i E_i = N \langle E \rangle \quad (1.8)$$

Ces équations se traduisent par la conservation du nombre total de particules N et de l'énergie moyenne du système. En remarquant que les probabilités sont liées au nombre de particules dans l'état i par $p_i = n_i/N$, ces contraintes deviennent

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad \sum_{i=1}^W p_i E_i = \langle E \rangle \quad (1.9)$$

Une méthode utile permettant de retrouver l'extrémum d'une fonction sous certaines contraintes est celle des multiplicateurs de Lagrange. Maximiser l'entropie (1.2) sous les contraintes (1.9) se réduit à

$$\delta \left(S + \alpha \sum_{i=1}^W p_i + \beta \sum_{i=1}^W p_i E_i \right) = 0 \quad (1.10)$$

Les probabilités à l'équilibre sont alors données par

$$p_i^{MB} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_i) \quad (1.11)$$

où le facteur de normalisation Z est appelé *fonction de partition*. Il est donné par

$$Z = \sum_{i=1}^W \exp(-\beta E_i) \quad (1.12)$$

où le paramètre β est identifié à l'inverse de la température

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (1.13)$$

Une procédure similaire permet de retrouver les fonctions de distributions pour les particules quantiques, à savoir, Bose-Einstein

$$p_i^{BE} = \frac{1}{\exp(\beta[E - \mu]) - 1} \quad (1.14)$$

et Fermi-Dirac

$$p_i^{FD} = \frac{1}{\exp(\beta[E - \mu]) + 1} \quad (1.15)$$

1.5 Conclusion

Bien que le formalisme de la physique statistique ait montré un grand succès dans la description d'un grand nombre de phénomènes et de situations d'une grande diversité, ce succès reste à ce jour inexpliqué. Le fait que la physique statistique, telle que définie actuellement, ait réussi à décrire une telle variété de phénomènes relève, pour ainsi dire, du miracle. En effet, la physique statistique est basée sur des hypothèses incertaines. Bien que celles-ci semblent être justifiées dans la majorité des cas, leur démonstration reste généralement hors de portée et leur justification dans certains cas particuliers (*en présence d'interaction à longue portée, phénomènes non-markoviens, faible dépendance aux conditions initiales*), est controversée. D'autre part, la physique statistique ne repose pas sur des théories microscopiques modernes. Même ce qui est communément appelé *statistique quantique* ne fait intervenir que quelques principes de la mécanique quantique. Ainsi, il existe certains systèmes physiques dont les propriétés semblent ne pas être en adéquation avec les bases de la physique statistique. Le trou noir est l'un des exemples des plus édifiants: La formule de *Beckenstein-Hawking* [34] stipule que l'entropie du trou noir est proportionnelle à la surface de l'horizon de ses événements. Une telle grandeur est nécessairement *non-additive*, ce qui contredit le quatrième axiome de Khinchin. En effet, lors de la collision de deux trous noirs, l'entropie du trou noir résultant n'est pas égale à la somme des entropies des deux trous noirs entrés en collision. Dans d'autres cas, ce ne sont pas les bases de la physique statistique qui sont directement remises en question mais les fonctions de distribution qui en découlent. En effet, les fonctions de distribution standards permettent de décrire une très grande variété de phénomènes mais les observations ont clairement mis en évidence des fonctions de distributions faiblement déformées. Ces distributions ne peuvent découler de la physique statistique standard. Ceci montre l'incapacité de la physique statistique standard à traiter ce type de systèmes. Il existe pour ainsi dire plusieurs classes de systèmes auxquels correspondent les mêmes fonctions de distribution mais celles-ci ne découlent pas de la statistique standard. Ce caractère montre l'incapacité de la physique statistique de décrire ce type de systèmes: une généralisation de la physique statistique s'impose!

2

Physique Statistique non-extensive

2.1 Introduction

La plus grande partie des applications de la physique statistique et de la théorie de la matière condensée consiste à utiliser des fonctions de distribution à l'équilibre pour décrire différents systèmes. Ainsi, la distribution des vitesses des galaxies suit en général une distribution de Maxwell-Boltzmann, les électrons dans un solide obéissent à la distribution de Fermi-Dirac et les photons dans le rayonnement du corps noir obéissent à la distribution de Bose-Einstein. Il existe cependant un certain nombre de systèmes où des distributions ne découlant pas de la théorie de la physique statistique ont été observées. Ainsi, en astrophysique et dans les plasmas un certain nombre de distributions légèrement différentes des distributions habituelles ont été introduites de façon empirique. Celles-ci ne découlent pas d'une théorie physique et n'ont pas d'assise fondamentale. Comment expliquer leur apparition dans une si grande variété de phénomènes? Les fonctions de distribution habituelles découlent de la maximisation de l'entropie selon certaines contraintes. La réponse est donc soit ces contraintes ne sont pas exprimées convenablement pour certains types de systèmes ou soit la structure de l'entropie de ces systèmes nécessite une révision (ou encore, les deux à la fois!). Notons que l'entropie est un concept abstrait, purement mathématique. Celle-ci constitue la base de la théorie des probabilités et de la théorie de l'information. Pour pallier à certains problèmes, des mathématiciens ont introduit des formes différentes de l'entropie. Ainsi, le mathématicien Rényi a introduit une généralisation à un paramètre de l'entropie habituelle. Dans une limite particulière de ce paramètre, cette dernière se réduit à l'entropie usuelle de BGS. Ainsi, une entropie généralisée comme base pour la physique statistique pourrait certainement mener à des fonctions de distributions généralisées. Une forme appropriée de l'entropie pourrait mener à des distributions observées expérimentalement. Le

problème des contraintes est lui aussi au cœur du problème. Il mériterait qu'on y consacre quelques lignes. Les contraintes sont en fait, intimement liées à l'hypothèse ergodique. En effet, lorsque l'entropie est maximisée avec la contrainte que l'énergie moyenne reste constante (ensemble canonique), ceci concerne en fait la valeur moyenne dans le temps. En effet, l'énergie fluctue dans le temps mais en restant autour d'une valeur moyenne. Celle-ci s'écrit sous la forme

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^W p_i E_i = cste \quad (2.1)$$

Cette dernière représente la valeur moyenne sur l'ensemble. Elle n'est valide que si l'hypothèse ergodique est satisfaite. Les fonctions de distribution déformées observées dans certaines situations pourraient être en effet la conséquence du fait que cette dernière hypothèse ne soit pas satisfaite. Une théorie a alors émergé depuis un quart de siècle. Cette dernière repose sur une déformation de l'entropie et des contraintes imposées aux observables. Elle donne lieu à des fonctions de distribution déformées, en loi de puissances, qui sont parfois en bonne adéquation avec les observations expérimentales.

2.2 Entropie de Tsallis

2.2.1 Concept et propriétés

En 1988, Tsallis proposa une nouvelle forme de l'entropie basée sur une généralisation à un paramètre de l'entropie BGS [2]. Cette dernière se définit comme suit

Système discret

$$S_q^{(d)} = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad q \in R^+ \quad (2.2)$$

Système continu

$$S_q^{(c)} = \frac{1 - \int f(x)^q dx}{q - 1}, \quad q \in R^+ \quad (2.3)$$

où $\{p_i\}_{i=1}^W$ représente la distribution de probabilités et $f(x)$ une densité de probabilité. Le paramètre q , quant à lui, est appelé paramètre non-extensif. Dans la limite $q \rightarrow 1$, elle se réduit à l'entropie BGS.

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q^{(d)} = - \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow 1} S_q^{(c)} = - \int f(x) \ln f(x) dx \quad (2.4)$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à des systèmes quantiques et nous considérerons la forme discrète de l'entropie de Tsallis, que nous noterons simplement S_q . Il est possible de montrer que l'entropie de Tsallis a un certain nombre de propriétés intéressantes et qui font d'elle l'un des meilleurs candidats pour construire une théorie généralisée de la physique statistique. En effet, elle est définie positive, et jouit de la propriété de concavité. Cette dernière propriété est d'une grande importance car elle assure que l'entropie possède un maximum. Ce dernier correspond, en accord avec le second principe de la thermodynamique, à l'état d'équilibre thermodynamique. L'une des principales propriétés de l'entropie de Tsallis est sa non-additivité. En effet, l'entropie de Shanon est additive (*l'entropie d'un système composé de deux sous-systèmes est égale à la somme des entropies individuelles de ces derniers*). L'entropie de Tsallis est pseudo-additive. Cela veut dire que si nous considérons deux sous-systèmes A et B indépendants au sens des probabilités, i.e., $p(A, B) = p(A)p(B)$, l'entropie du système $(A + B)$ s'écrit en fonction des entropies individuelles des deux sous-systèmes indépendants sous la forme

$$S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q) S_q(A)S_q(B) \quad (2.5)$$

Dans le cas limite $q \rightarrow 1$, l'entropie se réduit à l'entropie BGS usuelle et son additivité est retrouvée comme l'indique l'équation (2.5).

2.2.2 Axiomes de l'entropie de Tsallis

Nous avons vu précédemment que l'entropie BGS est la seule fonction qui satisfait les quatre axiomes de Khinshin (1.3)-(1.6). Toute autre fonction violerait au moins l'un de ces axiomes. Nous avons vu que les trois premiers axiomes sont évidents et une entropie généralisée a tout intérêt à les respecter pour être une bonne candidate pour la physique statistique. En effet, l'entropie de Tsallis satisfait les trois premiers axiomes. Le dernier cependant est violé, mais peut être remplacé par une condition moins stricte qui se réduirait au quatrième axiome de Khinshin uniquement dans la limite $q \rightarrow 1$. Il s'énonce comme ceci

$$S(\{p_{ij}^{IH}\}) = S(\{p_i^I\}) + \sum_i p_i^I S(\{p^{II}(j|i)\}) + (1 - q)S(\{p_i^I\}) \sum_i p_i^I S(\{p^{II}(j|i)\}) \quad (2.6)$$

Ce dernier axiome est intimement lié à la propriété de pseudo-additivité énoncé auparavant (2.5). En effet, celle-ci est retrouvée dans le cas de systèmes indépendants. Il serait intéressant d'interpréter ce dernier axiome. L'axiome de Khinchin habituel traduit le fait

qu'une mesure de l'information ne dépend pas de la manière selon laquelle elle est collectée. Ainsi, dans le cas de deux sous-systèmes en interaction, faire la mesure d'une information concernant le système I puis d'une information du système II connaissant le résultat pour I , donnerait la même information globale que si la procédure avait été faite dans un autre ordre. L'axiome (2.6) énonce au contraire que l'ordre compte.

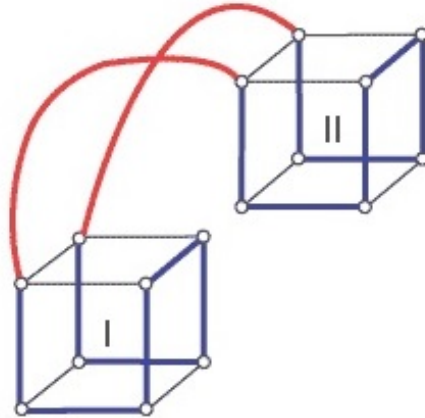


Figure 1 : Si l'entropie de Tsallis est utilisée comme mesure d'information, l'information contenue dans le système (I et II) est différente de la somme des informations contenues dans les deux systèmes pris individuellement. En d'autres termes, il y a toujours une interaction!

2.3 Rôle des contraintes

Comme mentionné précédemment, le problème des contraintes est lié à l'hypothèse ergodique. Cette dernière nous dit que la valeur moyenne dans le temps d'une observable O se réduit à la valeur moyenne de cette même observable prise sur un ensemble. Cette dernière est donnée dans le cas discret par [35]

$$\langle O \rangle = \sum_{i=1}^W p_i O_i \quad (2.7)$$

Dans les cas où l'hypothèse ergodique est satisfaite, la contrainte ainsi définie permet de décrire de façon correcte le système en question. Cependant, lorsque l'ergodicité du système est violée, ce n'est plus le cas et la valeur moyenne dans le temps ne coïncide plus avec la valeur moyenne sur l'ensemble. La statistique non-extensive propose de modifier les

contraintes et de les rendre dépendantes du paramètre non-extensif q . Ainsi, la contrainte est exprimée comme suit

$$\langle O \rangle_q = \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q O_i}{\sum_{i=1}^W p_i^q} \quad (2.8)$$

Dans la limite $q \rightarrow 1$, cette dernière se réduit à la contrainte usuelle (2.7). L'équation (2.8) peut être perçue de la façon suivante : lorsque le système est ergodique, la valeur moyenne d'une observable dans le temps et sur l'ensemble sont identiques et la contrainte appropriée correspond à la valeur $q = 1$. Si l'ergodicité est brisée, cette violation est mesurée par le paramètre q qui n'est plus égal à l'unité. Dans ce cas, la valeur moyenne qui exprimerait la contrainte serait donnée par (2.8), avec la valeur appropriée de q . Cette dernière équation et la définition de l'entropie de Tsallis (2.2) constituent à elles seules la base de la physique statistique non-extensive. En effet, en partant de ces deux généralisations à un paramètre, une nouvelle physique statistique et une nouvelle thermodynamique généralisées ont pu voir le jour.

2.4 Fonctions de distribution

La maximisation de l'entropie de Tsallis (2.2), en prenant en considération les contraintes (2.8), mène à une nouvelle classe de fonctions de distribution. Ces dernières se réduisent aux distributions usuelles dans le cas limite $q \rightarrow 1$. Une approche identique à celle présentée au chapitre précédent permet de les établir. Les contraintes s'écrivent alors

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q E_i}{\sum_{i=1}^W p_i^q} = \langle E \rangle_q = cste \quad (2.9)$$

L'introduction des multiplicateurs de Lagrange pour l'entropie de Tsallis permet d'écrire

$$\delta \left(S_q + \alpha \sum_{i=1}^W p_i + \beta \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q E_i}{\sum_{i=1}^W p_i^q} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Nous obtenons alors la fonction de distribution de Tsallis pour les particules classiques [35]:

$$p_i^{MB} = \frac{1 + (1 + (1 - q)\beta E_i)^{1/q-1}}{Z_q} \quad (2.11)$$

où le facteur de normalisation Z_q est la *fonction de partition généralisée*. Celle ci est donnée par

$$Z_q = \sum_{i=1}^W 1 + (1 + (1 - q)\beta E_i)^{1/q-1} \quad (2.12)$$

L'équation (2.11) est l'équivalent de la distribution de Maxwell-Boltzmann dans la statistique non-extensive de Tsallis. En effet, dans la limite $q \rightarrow 1$, elle se réduit à la distribution de Maxwell-Boltzmann habituelle. La même procédure, tenant compte de l'indiscernabilité des particules et leur nature (*bosons ou fermions*) permet d'obtenir une généralisation des distributions quantiques⁽¹⁾. Ainsi, la généralisation de la distribution de Bose-Einstein, décrivant la répartition de bosons sur les niveaux d'énergie est donnée par [35], [36]

$$p_q^{BE} = \frac{1}{(1 + \beta(1 - q)(E_i - \mu))^{q/(q-1)} - 1} \quad (2.13)$$

La distribution de Fermi-Dirac généralisée est quant à elle donnée par

$$p_q^{FD} = \frac{1}{(1 + \beta(1 - q)(E_i - \mu))^{q/(q-1)} + 1} \quad (2.14)$$

Cette dernière sera fréquemment utilisée au cours de ce travail. En effet, l'idée principale du présent de travail est d'étudier l'effet d'une telle distribution non-extensive des fermions (essentiellement des électrons) sur différentes propriétés physiques.

2.5 Conclusion

La statistique non-extensive constitue un outil très puissant pour l'étude des systèmes dits complexes. Elle constitue en effet une généralisation et non une alternative à la statistique BGS usuelle car elle la contient comme limite particulière. Elle constitue dans ce sens une superposition de deux statistiques. La statistique non-extensive repose sur entropie et des contraintes généralisées par un paramètre q . Cette généralisation permet de générer de nouvelles classes de fonctions de distribution qui se réduisent aux distributions habituelles dans la limite de la statistique BGS. Ces distributions sont, comme nous l'avons vu, des lois en puissance. Elles correspondent souvent aux fonctions de distribution observées expérimentalement dans une variété de phénomènes physiques, inexpliquées jusque-là. Nous citerons par exemple, la distribution d'atomes froids dans des réseaux optiques, la fluctuation du champ magnétique solaire, les fonctions de distribution des vitesses dans des

⁽¹⁾Le lecteur pourra trouver dans la littérature des formes qui diffèrent légèrement des distributions quantiques (2.13) et (2.14). En particulier, l'exposant peut être remplacé par $1/(q - 1)$ (voir Ref. [37] pour une étude comparative).

plasmas dissipatifs poussiéreux, ou encore les collisions dans les expériences au LHC/CERN (détecteurs CMS, ATLAS et ALICE) et RHIC/Brookhaven (détecteurs STAR et PHENIX) [6], [7]. Jusqu'à présent, toutes les vérifications expérimentales ont montré le succès de cette nouvelle statistique. Son secret réside en effet dans la flexibilité du paramètre q . Le revers de la médaille par contre, porte sur l'origine fondamentale de ce paramètre. Beaucoup de travaux fondamentaux sont fait et se font encore dans ce sens [38]. C'est souvent à travers des applications à des phénomènes et des généralisations de modèles que son origine semble émerger. Dans ce sens, ce modeste travail s'inscrit sur cette même lignée. Il est évident aujourd'hui que ce paramètre est lié à des interactions de longue-portée. Nous savons en effet, qu'en présence d'interactions de longue portée, l'ergodicité du système peut être perdue. Des simulations montrent aussi que la statistique de Tsallis peut être reliée à une géométrie particulière de l'espace des phases: *la géométrie fractale*.

Partie I

Sur la théorie de Thomas-Fermi en statistique non-extensive

*"Qu'est-ce qui insuffle le feu dans les équations
et leur fournit un univers à décrire ? "*

Stephen Hawking

3

Modèle de Thomas-Fermi

3.1 Introduction

La détermination de la structure électronique des atomes comporte traditionnellement deux étapes. Les propriétés de conservation du moment cinétique permettent une classification qualitative des niveaux d'énergie atomiques. Dans une deuxième étape, on cherche à évaluer le potentiel électrostatique $\phi(r)$ agissant sur les électrons. Connaissant le potentiel, on peut résoudre l'équation de Schrödinger. Cependant cette équation n'est soluble exactement que pour les atomes hydrogénoïdes (un seul électron). Pour les autres atomes, il faut utiliser des méthodes d'approximation. Il existe deux grandes familles de méthodes d'approximation :

Les méthodes du champ moyen :

Chaque électron se meut dans le champ moyen créé par le noyau et les autres électrons. La fonction d'onde de l'atome est écrite comme un *déterminant de Slater* des fonctions individuelles. L'énergie est minimisée par rapport aux fonctions d'ondes individuelles. Cette méthode donne de bons résultats mais les calculs sont fastidieux, particulièrement pour les atomes lourds.

Les méthodes de la fonctionnelle densité :

L'énergie du système est minimisée par rapport à la densité de charge. Les calculs sont moins fastidieux mais les détails des niveaux d'énergie et des fonctions d'onde ne peuvent être connus. On détermine plutôt des rayons moyens, des densités de charge, etc.

Le modèle de Thomas-Fermi (TF) est une méthode alternative, basée sur la physique statistique. Il représente aussi, quelque part, un compromis entre les deux méthodes que nous venons de citer. Nous présenterons dans la première section de ce chapitre le modèle de

TF, tel que formulé en 1927-1928 [8], [9]. Nous le généraliserons ensuite à la statistique non-extensive dans la section suivante. Enfin, la dernière section sera dédiée à sa reformulation dans l'hyper-espace, dans le cas d'une dimension quelconque n [11].

3.2 Modèle de Thomas-Fermi standard

À l'époque (1927-1928) où Thomas et Fermi, indépendamment, s'intéressaient à la structure électronique des atomes, il n'existait, comme moyen de calcul, que des machines mécaniques effectuant les quatre opérations. Pour pouvoir traiter des atomes complexes, ils ont eu l'idée d'adopter une méthode statistique, qui traite globalement le nuage électronique. Cette approche permet d'obtenir une forme approchée du potentiel et de la fonction d'onde et donc de l'énergie électronique. Bien qu'elle tende à être abandonnée en faveur de méthodes plus performantes rendues possibles grâce au développement des ordinateurs, elle constitue une bonne introduction à un formalisme actuellement très utilisé, la méthode de la *fonctionnelle de densité*. Elle constitue également un point de départ dans l'étude des systèmes quantiques à N corps. Elle permet également de traiter de façon satisfaisante un certain nombre de phénomènes, tel que l'*écranage électrique quantique*. Nous présenterons dans cette section le modèle de TF, tel que formulé dans les articles originaux.

3.2.1 Equation de Thomas-Fermi à zéro-température

Thomas et Fermi [8], [9] ont utilisé la statistique de Fermi-Dirac pour déterminer la distribution électronique et le champ électrique autour des noyaux lourds : ils considèrent le gaz d'électrons comme un gaz de Fermi complètement dégénéré. Ce modèle statistique donne une distribution électronique $n(\vec{r})$ qui est une fonction lisse, exempte des pics liés aux orbitales des électrons. Néanmoins, il conduit à des valeurs convenables de l'énergie d'ionisation des atomes, de leur rayon, de leur polarisation, etc. Plus tard et moyennant quelques modifications, ce modèle a été appliqué avec succès aux molécules, aux solides et aux noyaux. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la méthode de base, appliquée aux atomes. La majorité des électrons dans les atomes lourds sont dans des états à grands nombres quantiques. Dans ces circonstances, nous pouvons utiliser l'approximation de la statistique classique (*un état par volume h^3 de l'espace des phases*). Par conséquent, l'expression de la densité électronique est donnée par

$$n = \frac{p_F^3}{2\pi^2\hbar^3} \quad (3.1)$$

où p_F est l'impulsion de Fermi du système. Considérons une particule à la limite de la mer de Fermi. Son impulsion étant P_F , son énergie totale est donnée par

$$\varepsilon = \frac{p_F^2}{2m} - e\phi(\vec{r}) \quad (3.2)$$

où $(-e)$ est la charge de l'électron et $\phi(\vec{r})$ le potentiel électrostatique au point \vec{r} . Quand le système est dans un état stationnaire, l'énergie doit être la même partout car, autrement, les électrons auraient tendance à se déplacer vers les points où leur énergie est plus basse. Un choix approprié de l'énergie potentielle zéro permet d'avoir l'énergie totale nulle et donc

$$\frac{p_F^2}{2m} - e\phi(\vec{r}) = 0 \quad (3.3)$$

Le potentiel électrostatique $\phi(\vec{r})$ satisfait à l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) = 4\pi n(\vec{r}) \quad (3.4)$$

En utilisant les relations liant n , ϕ et P_F , nous avons

$$\Delta\phi(\vec{r}) = \frac{4e(2me)^{3/2}}{3\pi\hbar^3} [\phi(\vec{r})]^{3/2} \quad (3.5)$$

Si nous limitons notre étude aux systèmes à symétrie sphérique, nous obtenons l'équation de Thomas-Fermi suivante

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = \frac{4e(2me)^{3/2}}{3\pi\hbar^3} [\phi(r)]^{3/2} \quad (3.6)$$

En utilisant les nouvelles variables

$$x = 2\left(\frac{4}{3\pi}\right)^{3/2} Z^{1/3} \frac{me^2}{\hbar^2} r = \frac{Z^{1/3}}{0.8885a_b} r, \quad \Phi(x) = \frac{\phi(r)}{Ze/r} \quad (3.7)$$

où Z est le numéro atomique du noyau et $a_b = \hbar^2/me^2$ le rayon de la première orbite de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'équation (3.6), sous sa forme adimensionnelle, devient

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{\Phi^{3/2}}{\sqrt{x}} \quad (3.8)$$

C'est l'équation de Thomas-Fermi sous sa forme habituelle. Elle décrit le potentiel coulombien des électrons autour du noyau atomique. Elle permet de décrire un phénomène d'une grande importance dans les plasmas et gaz quantiques: l'*écranage électrique*.

3.2.2 Equation de Thomas-Fermi à température finie

Dans sa première version, le modèle de TF considérait un système d'électrons complètement dégénérés, à température nulle. La prise en compte d'une température finie permet d'affiner les résultats du modèle et cette correction est, dans bon nombre de cas, inévitable. Une formulation du modèle incluant les effets thermiques prend en considération la fonction de distribution de Fermi-Dirac. Ainsi, la densité du système d'électrons à la température T s'écrit [46]

$$n(r) = \frac{2}{\hbar^3} \int \frac{d^3p}{\exp \left[\beta \left(\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu \right) \right] + 1} \quad (3.9)$$

où μ représente le potentiel chimique. L'intégrale (3.9) n'a pas de solution analytique exacte mais peut être écrite en fonction des intégrales de Fermi

$$n(r) = \frac{4\pi}{h^3} (2mk_B T)^{3/2} I(\eta)_{1/2} \quad (3.10)$$

où

$$I(\eta)_n = \int_0^\infty \frac{y^n dy}{1 + \exp(\beta[y - \eta])} \quad (3.11)$$

Ces dernières peuvent être estimées numériquement à basse température⁽¹⁾

$$I(\Phi)_n^{(q)} \sim \frac{1}{4} \Phi^4 I_0^{(q)} + \frac{\pi^2}{2} \Phi^2 + \dots \quad (3.12)$$

Ce qui mène à l'équation de Thomas-Fermi avec effets thermiques suivante

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d\Phi}{dy} = \frac{2}{3} \Phi^{n/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\Phi^2} + \dots \right] \quad (3.13)$$

Notons que le terme correctif apporté par les effets thermiques est proportionnel au carré de la température, car Φ est inversement proportionnelle à celle-ci. Nous verrons dans le chapitre suivant que la statistique non-extensive permet d'introduire un second terme correctif, proportionnel à la température. Ce dernier sera donc dominant dans le cas de basses températures.

⁽¹⁾En effet, dans le cas de températures élevées, les effets quantiques ne jouent pas un rôle important et l'introduction du modèle de Thomas-Fermi devient obsolète.

Les résultats numériques tirés du modèle de TF sont généralement en mauvais accord avec l'expérience et divers auteurs ont cherché à améliorer ce modèle. Dirac a introduit un terme d'échange dans l'énergie électronique et l'étude numérique correspondante a été publiée par Feynman *et al* [39]. On peut déduire l'équation de Thomas-Fermi d'un principe variationnel : *on minimise l'énergie totale du nuage électronique sous la contrainte que le nombre d'électrons est constant*. Cette approche a la faveur des théoriciens qui ont examiné les propriétés du modèle de TF. Plus récemment, d'autres corrections ont été introduites dans la théorie de Thomas-Fermi. Sa généralisation à la statistique non-extensive de Tsallis [10] est sans doute la plus importante. Elle fera l'objet de ce travail que nous présenterons dans la section suivante.

3.3 Approche non-extensive du modèle de Thomas-Fermi

Le modèle de TF, dans sa formulation originelle donne une description non satisfaisante de la plupart des phénomènes liés à la physique atomique ou moléculaire. Il ne permet même pas d'expliquer les liaisons chimiques. Les résultats donnés par ce modèle sont en général en mauvais accord avec les données expérimentales. L'énergie de liaison des atomes, à titre d'exemple, est largement surévaluée par le modèle. Différentes corrections ont alors été proposées afin d'en affiner les résultats: corrections thermiques, introduction d'un champ magnétique, des effets relativistes, correction de l'échange de Dirac,...etc. Plus récemment, une généralisation de ce modèle à la statistique non-extensive a été proposée [10]. Cette approche repose sur la généralisation de la distribution de Fermi-Dirac qui, appliquée aux électrons autour du noyau atomique, permet la construction d'un modèle plus précis, grâce à la flexibilité du paramètre non-extensif q . La distribution de Fermi-Dirac n'intervenant que dans la formulation à température finie du modèle (voir section précédente), les effets non-extensifs sont en quelque sorte corrélés aux effets thermiques. En effet, il a été montré dans une variété d'études qu'à température nulle, le caractère non-extensif ne se manifeste pas. Cela peut se comprendre de la manière suivante : les effets non-extensifs sont des effets statistiques. Or, à $T = 0$ le système n'obéit plus à la physique statistique, son état et son évolution étant uniquement gouvernés par les lois de la mécanique quantique. Ainsi à température nulle, la distribution de Fermi-Dirac cède la place au principe de Pauli, qui reste inchangé. Dans cette section, nous présenterons une formulation du modèle de TF basée sur la statistique non-extensive. Nous allons voir que les corrections non-extensives

permettent non-seulement une plus grande précision dans les résultats mais également, de résoudre des défauts majeurs du modèle de TF standard.

3.3.1 Distribution non-extensive de Fermi-Dirac

La distribution de Fermi-Dirac ordinaire est la distribution à l'équilibre d'un système de fermions à la température T . Elle tient compte de l'indiscernabilité des particules et du principe de Pauli auquel les fermions sont assujettis. Elle peut être obtenue en maximisant l'entropie de Shannon avec les contraintes appropriées. Une généralisation de cette distribution peut être obtenue avec la même approche, à ceci près qu'elle est obtenue en maximisant l'entropie de Tsallis (2.2) et en considérant les contraintes (2.8) telles que définies par la théorie de la statistique non-extensive. Cette dernière est donnée par[10]

$$f^{(q)}(E) = \frac{1}{(1 + \beta(1 - q)(E - \mu))^{q/(q-1)} + 1} \quad (3.14)$$

avec la condition $1 + \beta(1 - q)(E - \mu) > 0$, au delà de laquelle la distribution (3.14) est définie nulle.

La figure 2 représente le tracé de la distribution de Fermi-Dirac généralisée (3.14) en fonction de l'énergie E pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q , avec une température $T = 300K$ et un potentiel chimique $\mu = 5eV$. La figure 3, quant à elle, représente sa variation pour différentes valeurs de la température T , pour $\mu = 5eV$ et $q = 1.1$.

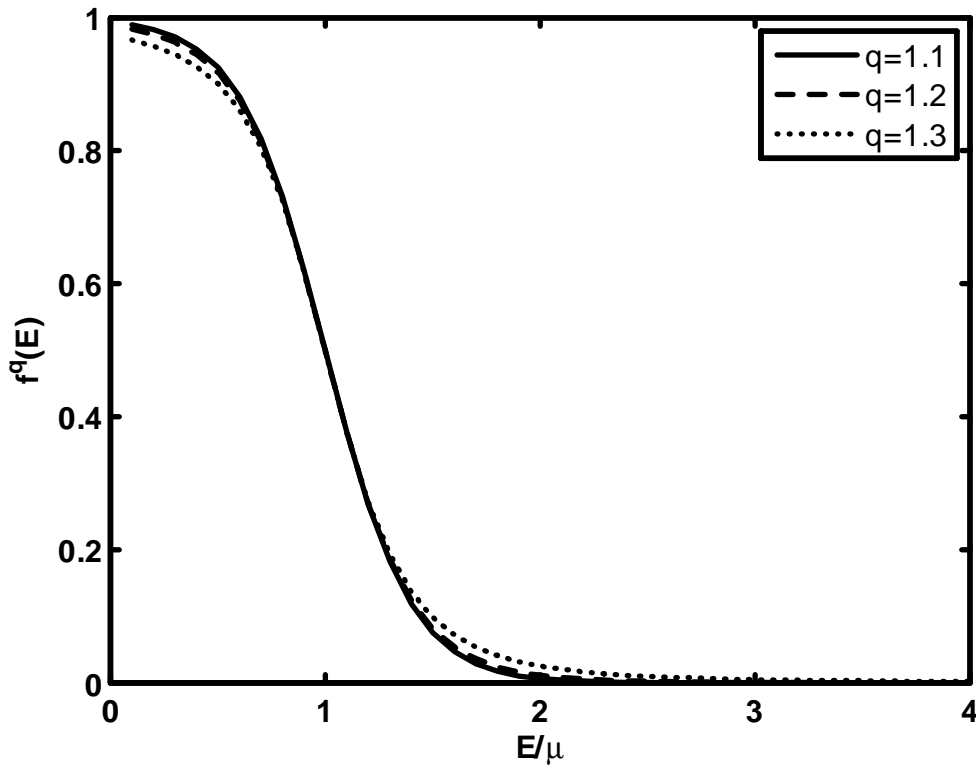


Figure 2: Distribution de Fermi-Dirac généralisée pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q .

On peut aisément constater que dans la limite d'une température nulle, la distribution (3.14) se réduit à la fonction de Heaviside caractérisant un gaz de fermions complètement dégénéré. D'un autre côté, à température constante, une augmentation du paramètre non-extensif q rend la distribution plus raide. Cet effet est le même, du moins en apparence, que celui produit par une baisse de la température (voir Figure 2). Ce résultat tend à être en faveur de l'interprétation de la non-extensivité comme une augmentation de la dégénérescence et donc des corrélations dans le système.

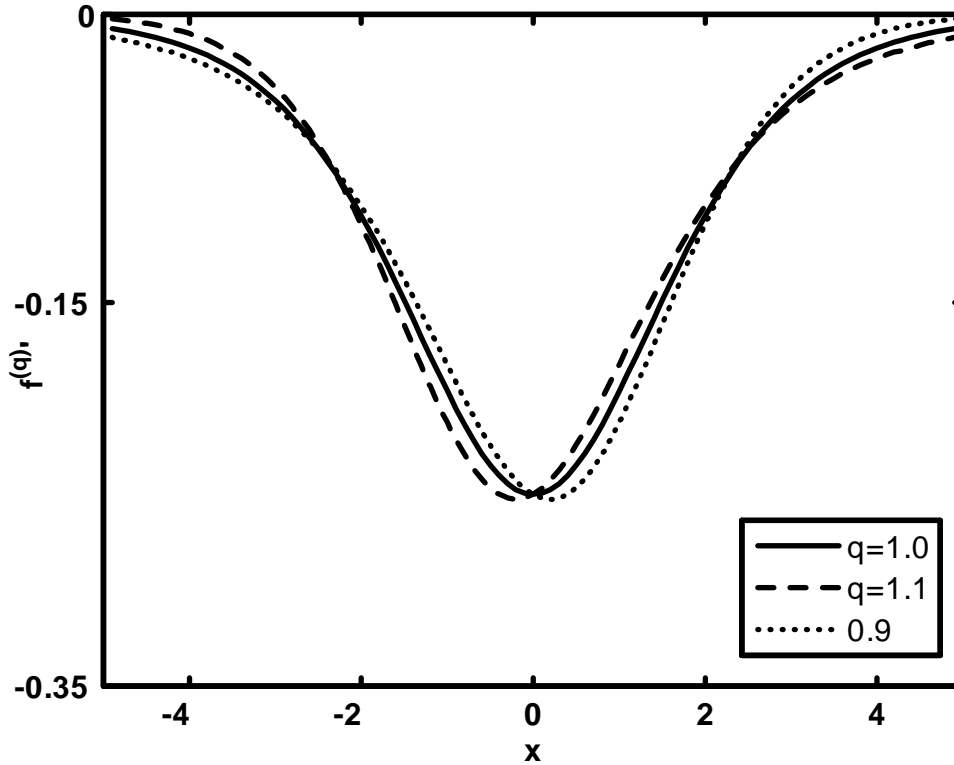


Figure 3 : Dérivée de la distribution de Fermi-Dirac généralisée par rapport à $x = E/\mu$, pour différentes valeurs du paramètre q .

3.3.2 Equation de Thomas-Fermi non-extensive

La distribution (3.14) appliquée aux électrons s'écrit [35], [10]

$$f^{(q)}(p, \phi) = \frac{1}{1 + \left[1 + \beta(q-1) \left(\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu \right) \right]^{q/(q-1)}} \quad (3.15)$$

où p est l'impulsion et ϕ le potentiel coulombien. La densité électronique s'écrit alors

$$n = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int \frac{p^2 dp}{1 + \left[1 + \beta(q-1) \left(\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu \right) \right]^{q/(q-1)}} \quad (3.16)$$

avec la condition $1 + \beta(q-1) \left(\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu \right) > 0$. En utilisant l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi en \quad (3.17)$$

et en considérant une symétrie sphérique, nous obtenons une formulation non-extensive de l'équation de Thomas-Fermi [10]

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = \frac{2}{\pi \hbar^3} e(2mkT)^{3/2} \Theta_{1/2}^{(q)}\left(\frac{e\phi - \mu}{T}\right) \quad (3.18)$$

où les intégrales $\Theta_p^{(q)}(\eta)$ sont une généralisation des intégrales de Fermi, définies par

$$\Theta_p^{(q)}(\eta) = \int_0^\infty \frac{y^p dy}{1 + [1 + (q-1)(y-\eta)]^{q/(q-1)}} H(1 + (q-1)(y-\eta)) \quad (3.19)$$

$H(x)$ représente la fonction de Heaviside. Elles n'ont pas une expression analytique exacte mais peuvent être estimées avec précision dans le cas de faibles températures

$$|\eta| = \left| \frac{\mu + e\phi}{T} \right| \gg 1 \quad (3.20)$$

En posant $z = y - \eta$, et en faisant un développement en séries de $[1 + (z/\eta)]^{(p+1)}$ en puissances de z/η , on a

$$\Theta_p^{(q)}(\eta) = \frac{1}{(p+1)} \eta^{(p+1)} I_0^{(q)} + \eta^p I_1^{(q)} + \frac{p}{2} \eta^{(p-1)} I_2^{(q)} + \dots \quad (3.21)$$

où

$$I_p^{(q)} = q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^p [1 + (q-1)z]^{1/q-1}}{\left\{ 1 + [1 + (q-1)z]^{1/q-1} \right\}^2} H(1 + (q-1)z) dz \quad (3.22)$$

Ces intégrales peuvent être calculées numériquement. En introduisant les variables adimensionnelles suivantes

$$\Phi = \frac{\phi + \mu/e}{Ze/r}, \quad r = ax, \quad a \equiv \left[\frac{9\pi^2}{128Z} \right]^{1/3} \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (3.23)$$

où Z est le numéro atomique, et

$$\tilde{v} \equiv \frac{3 I_1^{(q)}}{2 \beta} \frac{a}{e^2 Z}, \quad v \equiv \frac{3 I_2^{(q)}}{8 \beta^2} \frac{a^2}{e^4 Z^2} \quad (3.24)$$

l'équation (3.18) donne la généralisation non-extensive de l'équation de Thomas-Fermi adimensionnelle [10]

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{\Phi^{3/2}}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \tilde{v} \frac{x}{\Phi} + v \frac{x^2}{\Phi^2} \right\} \quad (3.25)$$

Contrairement à l'équation de Thomas-Fermi standard qui ne contient qu'un terme correctif dépendant de la température, cette dernière fait intervenir deux corrections. La première (exprimée par \tilde{v}) est la correction non-extensive car elle disparaît dans le cas limite $q \rightarrow 1$. En effet, l'intégrale qui lui correspond peut se développer comme suit au voisinage de $q = 1$

$$I_1^{(q)} = \frac{\pi^2}{6}(q-1) - \frac{2\pi}{3}(q-1)^2 + O((q-1)^3) \quad (3.26)$$

Le second terme correctif (v) représente des corrections thermiques mais dépend du paramètre non-extensif q . Nous pouvons montrer aisément que dans la limite $q \rightarrow 1$, il se réduit au terme correctif habituel car l'intégrale qui lui correspond se développe comme suit

$$I_2^{(q)} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{2\pi^2}{3}(q-1) - \frac{229\pi^2}{90}(q-1)^2 + O((q-1)^3) \quad (3.27)$$

Dans la limite $q \rightarrow 1$, l'équation (3.25) se réduit donc à l'équation de Thomas-Fermi habituelle. Il est intéressant de noter que le terme correctif non-extensif est proportionnel à T alors que la correction thermique est proportionnelle à T^2 . Cela signifie que dans le cas des basses températures, les effets non-extensifs sont dominants. Dans cette limite, la correction habituelle peut même être négligée et l'équation (3.25) devient

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{\Phi^{3/2}}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \tilde{v} \frac{x}{\Phi} \right\} \quad (3.28)$$

3.4 Modèle de Thomas-Fermi non-extensif à n dimensions

Dans cette section, nous allons reformuler le modèle de Thomas-Fermi dans sa généralisation non-extensive, dans le cas d'une dimension quelconque n . Notons que la procédure consistant à reformuler une théorie dans l'hyper-espace s'est avérée fructueuse à bien des égards [40]-[42]. Une telle approche avait été proposée, par exemple, par Kaluza [40], dans le cadre de la théorie de la relativité générale d'Einstein, afin d'en étudier les connections avec l'électromagnétisme. Le modèle de TF sans effets non-extensifs, aussi, a fait l'objet d'une telle étude [43]. Sa formulation dans l'hyper-espace a montré que les effets thermiques et relativistes étaient de nature fondamentalement différente, dans le sens que les premiers dépendent de la dimension de l'espace tandis que les seconds n'en dépendent pas. Le but principal de l'étude présentée dans ce chapitre portera sur l'analyse du comportement des corrections non-extensives vis-à-vis de la dimension de l'espace [11]. Principalement, nous tenterons de répondre à la question: **les effets non-extensifs sont-ils de même nature que les effets thermiques ou relativistes?**

3.4.1 Equation de Thomas-Fermi non-extensive à n dimensions

Comme nous l'avons déjà souligné dans les sections précédentes, l'équation de Thomas-Fermi liant le potentiel coulombien à la densité électronique est tout simplement l'équation de Poisson, dans laquelle la densité est calculée par la méthode Thomas-Fermi. Cette dernière s'écrit à n dimensions comme suit (la densité électronique sera notée $\rho(r)$, afin d'éviter toute confusion avec la dimension n)

$$\nabla_n^2 \phi(r) = 4\pi e \rho(r) \quad (3.29)$$

où ∇_n^2 est le Laplacien à n dimensions, donné par

$$\nabla_n^2 \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \times \Lambda(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \quad (3.30)$$

En considérant une symétrie sphérique, le terme angulaire dans (3.30) s'annule. En absence d'effets thermiques, la densité électronique peut s'exprimer à n dimensions en fonction de l'impulsion de Fermi P_F . Elle est donnée par

$$\rho(r) = 2 \frac{\Omega_n}{nh^n} P_F^n \quad (3.31)$$

où

$$\Omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \quad (3.32)$$

représente une surface dans l'hyperespace à n dimensions. Notons que dans le cas tridimensionnel, elle se réduit à 4π . Afin de prendre en considération les effets thermiques et non-extensifs, la densité électronique apparaissant dans l'équation (3.29) est obtenue en utilisant la distribution de Fermi-Dirac généralisée. La densité s'exprime alors comme suit

$$\rho_q(r) = 2 \frac{\Omega_n}{h^n} \int_0^\infty \frac{p^{n-1} dp}{1 + [1 + (q-1)\beta[\frac{p^2}{2m} - e(\phi - \phi_0)]]^{q/(q-1)}} \quad (3.33)$$

avec $1 + \beta(q-1)[\frac{p^2}{2m} - e(\phi - \phi_0)] > 0$. En posant $y = p^2/2mk_B T$, l'équation (3.33) devient

$$\rho_q(r) = \frac{\Omega_n}{h^n} (2mk_B T)^{n/2} \Theta(\eta)_n^{(q)} \quad (3.34)$$

où

$$\Theta(\eta)_n^{(q)} = \int_0^\infty \frac{y^n dy}{1 + [1 + (q-1)\beta[y - \eta]]^{q/(q-1)}} \times H[1 + (q-1)(y - \eta)] \quad (3.35)$$

En introduisant les changements de variables (3.23) et en utilisant (1.2), l'équation (1.1) devient

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 8\pi m e^2 \frac{\Omega_n}{h^n} (2mk_B T)^{(n-2)/2} \Theta_{(n-2)/2}^{(q)}(e\phi - \mu) \quad (3.36)$$

Pour Φ élevé (effets thermiques faibles), on obtient l'équation de Thomas-Fermi non-extensive à n dimensions suivante [11]

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{(n-1)}{x} \frac{d\Phi}{dx} = \frac{2}{n} \Phi^{n/2} \left[1 + \frac{n}{2} \tilde{v} \frac{I_1^{(q)}}{\Phi} + \frac{n(n-2)}{2} v \frac{I_2^{(q)}}{\Phi^2} + \dots \right] \quad (3.37)$$

où \tilde{v} et v sont donnés par (3.24). Dans le cas particulier $n = 3$, l'équation (3.37) se réduit à l'équation de Thomas-Fermi obtenue au chapitre précédent. Il apparait que le terme correctif lié à la non-extensivité ainsi que celui exprimant les effets thermiques sont indépendants de la dimension de l'espace (*ce résultat n'est pas évident. En effet, il arrive qu'un terme correctif dépende de la dimension du système. C'est le cas, par exemple, des corrections relativistes!*). En effet, il a été montré [43] que les effets relativistes dépendent de la dimension de l'espace. Par ailleurs, nous remarquons que dans le cas d'un système bidimensionnel ($n = 2$), les effets thermiques disparaissent tandis que les effets non-extensifs persistent. Il est donc possible de prendre en compte les effets non-extensifs, sans le terme correctif thermique habituel. Pour $n = 2$, l'équation (3.37) devient

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\Phi}{dy} = \Phi \left[1 + \frac{I_1^{(q)}}{\Phi} + \dots \right] \quad (3.38)$$

Une application possible de l'équation (3.38) serait l'étude de structures bidimensionnelles telles que le graphène [44], [45], où le modèle de Thomas-Fermi a montré son utilité. Dans [45] par exemple, les auteurs étudient le champ électrique dans le graphène en utilisant l'équation de Thomas-Fermi à 2- dimensions dans l'approximation de la température nulle. Une perspective proposée par les auteurs est l'introduction d'une température finie. Il apparait alors que les corrections non-extensives (dépendantes de la température) apporteraient, dans un certain sens, une autre façon de prendre en considération l'effet de la température dans un modèle simple.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, le modèle de TF, dans sa formulation standard, et nous l'avons revisité dans le cadre de la statistique non-extensive de Tsallis. La reformulation

du modèle de TF dans le cadre de la statistique non-extensive est basée sur la distribution de Fermi-Dirac déformée qui découle de l'entropie de Tsallis. Cette approche requiert la prise en compte de l'effet d'une température finie. En effet, à $T = 0$, les effets non-extensifs s'estompent et l'état du système est gouverné par les lois fondamentales de la mécanique quantique seules. Cette approche aboutit à une équation de TF généralisée, qui contient l'équation habituelle dans une limite particulière ($q \rightarrow 1$). Nous avons constaté que les effets non-extensifs déforment les corrections thermiques qui dépendent donc du paramètre q . Nous avons remarqué également qu'ils donnent lieu à l'apparition d'un second terme qui ne s'annule que dans le cas où $q = 1$: C'est la correction non-extensive à proprement parler. Ce dernier terme étant proportionnel à la température (contrairement au terme correctif habituel qui est proportionnel au carré de celle-ci), il devient dominant dans le cas des faibles températures. Ainsi, les effets non-extensifs peuvent devenir très significatifs dans des situations rencontrées en laboratoire comme dans le cas, par exemple, des gaz et des plasmas quantiques, comme nous allons le voir dans les chapitres suivants. Notons également que cette nouvelle formulation permet de corriger l'une des failles du modèle de TF pour l'atome: la surévaluation des énergies de liaison. En effet, Martinenko et Shivamoggi ont montré [10] que ces corrections permettaient de réduire ces énergies, se rapprochant ainsi des valeurs mesurées expérimentalement.

Nous avons également présenté une reformulation de l'équation de TF non-extensive dans une dimension arbitraire n . L'équation de TF obtenue dans le chapitre précédent est retrouvée dans le cas particulier $n = 3$. Nous avons montré que les corrections thermiques et non-extensives sont de même nature, dans la mesure où elles ne dépendent pas de la dimension de l'espace. Il apparaît que dans le cas bidimensionnel, les corrections thermiques disparaissent tandis que les effets non-extensifs persistent. Cette propriété permettrait de tenir compte de l'effet de la température dans l'équation de Thomas-Fermi pour les systèmes compacts tels que le graphène ou les plasmas bidimensionnels.

4

Modèle de Thomas-Fermi non-extensif: effet des autres corrections

4.1 Introduction

Comme il a été mentionné précédemment, le modèle de Thomas-Fermi constitue une première approximation pour l'étude des systèmes quantiques. Aussi, un certain nombre de corrections et d'approximations ont été introduites visant à étendre le domaine de validité de ce modèle pour en améliorer les prédictions. A ce titre, l'effet d'une température finie constitue déjà une première correction. Peu de temps après l'introduction du modèle, Val-larta et Rosen [47] ont proposé une formulation relativiste du modèle à température nulle. Cette formulation a été plus tard généralisée au cas d'une température non-nulle [48]. Une autre correction, introduite plus récemment, concerne l'effet d'un champ magnétique très intense [49]. La présence d'un tel champ peut changer de façon considérable la distribution électronique autour du noyau atomique et par voie de conséquence, le champ coulombien. Nous étudierons dans ce chapitre l'effet des deux corrections sus- citées, dans le cadre de la statistique non-extensive. Pour cela, nous reformulerons le modèle de TF non-extensif en présence d'un champ magnétique intense. La suite sera consacrée à l'introduction des effets relativistes.

4.2 Modèle de Thomas-Fermi non-extensif : effet du champ magnétique

Dans cette section, nous allons présenter une formulation du modèle de Thomas-Fermi dans sa généralisation non-extensive, en présence d'un champ magnétique externe très intense [12]. La présence d'un champ magnétique modifie considérablement la densité électronique. Sous l'effet du confinement magnétique, les électrons ont tendance à se restreindre à un volume cylindrique dont l'axe est parallèle au champ magnétique. De tels systèmes, en présence d'un champ magnétique intense, sont présents dans une variété d'environnements naturels ou de laboratoire. C'est le cas des jets émanant des radiogalaxies, de la surface des pulsars ou des étoiles à neutrons ou encore des plasmas de laboratoire confinés dans les systèmes de fusion tels les Tokamaks.

4.2.1 Equation de Thomas-Fermi non-extensive

Afin d'évaluer n , la densité d'électrons sur le niveau fondamental, nous comptons le nombre d'états à l'intérieur d'un petit volume supposé de forme cylindrique de rayon ρ , d'épaisseur $\Delta\rho$, et de hauteur Δz . Le nombre d'états transverses dans l'approximation adiabatique (le rayon cyclotronique ou rayon de Larmor de l'électron le plus externe est très faible en comparaison avec le rayon de Bohr de l'atome) est donné par [12]

$$\Delta N_{\perp} = \left(\frac{eB}{\hbar c} \right) \rho \Delta\rho \quad (4.1)$$

Notons que le nombre d'états transverses (4.1) dépend uniquement du champ magnétique B . De plus, il ne découle pas d'un calcul statistique. De ce fait, il n'est pas affecté par les effets non-extensifs. Au contraire, le nombre d'états longitudinaux à l'intérieur de Δz découle d'un calcul statistique. En utilisant la distribution fermionique généralisée, la densité des états longitudinaux est donnée par

$$\Delta N_{\parallel} = \frac{2\Delta z}{h} \int_0^{\infty} \frac{dp}{(1 + \{\beta(q-1)[\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu]\}^{\frac{q}{(q-1)}})} \quad (4.2)$$

avec la condition

$$1 + \beta(q-1)[\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu] > 0 \quad (4.3)$$

Le nombre d'électrons dans le petit cylindre considéré est alors donné par [12]

$$\Delta N = \Delta N_{\parallel} \Delta N_{\perp} \quad (4.4)$$

Par conséquent, la densité électronique s'écrit sous la forme

$$n = \frac{\Delta N}{2\pi\rho\Delta\rho\Delta z} \quad (4.5)$$

En utilisant les équations (4.5) et (4.2), nous obtenons

$$n = \frac{eB}{2\pi^2\hbar^2c} \int_0^\infty \frac{dp}{(1 + \{\beta(q-1)[\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu]\}^{\frac{q}{(q-1)}})} \quad (4.6)$$

Notons que dans la limite $q \rightarrow 1$, l'équation (4.6) se réduit à la densité électronique dans le modèle de TF standard en présence d'un fort champ magnétique. L'équation de Poisson donne alors

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r\phi)}{dr^2} = \frac{2e^2B}{\pi\hbar^2c} \int_0^\infty \frac{dp}{(1 + \{\beta(1-q)[\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu]\}^{\frac{q}{(q-1)}})} \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) peut être réécrite en fonction des intégrales de Fermi généralisées comme suit

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r\phi)}{dr^2} = \frac{e^2B}{\pi\hbar^2c} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \Theta_{-\frac{1}{2}}^{(q)}(\beta[e\phi - \mu]) \quad (4.8)$$

En posant $p = -1/2$ dans (3.21), nous obtenons

$$\Theta_{-\frac{1}{2}}^{(q)}(y) \approx 2\eta^{\frac{1}{2}} I_0^{(q)} + \eta^{-\frac{1}{2}} I_1^{(q)} - \frac{1}{4}\eta^{-\frac{3}{2}} I_2^{(q)} + \dots \quad (4.9)$$

A présent, l'équation (4.7) peut être simplifiée en utilisant (4.9) et en introduisant les variables sans dimension suivantes

$$r = \tilde{b}x ; \quad e\phi - \mu = \frac{Ze^2\Phi}{r} \quad (4.10)$$

où

$$\tilde{b} = \frac{2^{-3/5}\pi^{2/5}Z^{1/5}(B/\hat{B})^{-2/5}}{[I_0^{(q)}]^{2/5}} \times \frac{\hbar^{6/5}c^{4/5}}{m^{3/5}e^{2/5}}; \quad B = \frac{m^2c^3}{\hbar e} \quad (4.11)$$

L'équation (4.8) devient [12]

$$\frac{d^2(\Phi)}{dx^2} = \sqrt{x\Phi} \left[1 + \tilde{v} \frac{x}{\Phi} - v \frac{x^2}{\Phi^2}\right] \quad (4.12)$$

avec

$$\tilde{v} = \frac{1}{2\beta} \frac{I_1^{(q)} \tilde{b}}{I_0^{(q)} e^2 Z^{1/2}}; \quad v = \frac{1}{8\beta^2} \frac{I_2^{(q)} \tilde{b}^2}{I_0^{(q)} e^4 Z^{3/2}} \quad (4.13)$$

Il s'agit de l'équation de Thomas-Fermi non-extensive en présence d'un champ magnétique intense.

4.2.2 Calcul de l'énergie

Avant d'aller plus loin, il serait intéressant de vérifier le théorème du viriel. Pour ce faire, le raisonnement est le suivant: chaque électron autour du noyau a une énergie cinétique classique donnée par $p^2/2m$. Pour obtenir l'énergie cinétique de l'ensemble des électrons dans un atome de rayon a , il suffit de multiplier par la densité électronique et d'intégrer sur tout l'espace. L'énergie cinétique des électrons s'écrit alors comme suit

$$E_{kin} = \int_0^a 4\pi r^2 dr \frac{eB}{4m\pi^2 \hbar^2 c} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(1 + \{\beta(q-1)[\frac{p^2}{2m} - e\phi - \mu]\}^{\frac{q}{q-1}})} \quad (4.14)$$

L'équation (4.14) peut être réécrite sous la forme

$$E_{kin} = \frac{eB}{\pi \hbar^2 c} \frac{1}{\beta} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{1/2} \int_0^a r^2 dr \int_0^\infty \frac{y^{1/2} dy}{1 + \{1 + (q-1)(y-\eta)\}^{\frac{q}{q-1}}} H(1 + (q-1)(y-\eta)) \quad (4.15)$$

où

$$y = \frac{p^2}{2mkT} \quad (4.16)$$

L'énergie potentielle de l'atome est donnée quant à elle par [12]

$$E_{Pot} = \frac{4\pi e}{2} \int_0^a \phi(r) n(r) r^2 dr + \frac{1}{2} Z[\phi - (Ze/r)]_{r=\delta} \quad (4.17)$$

Le premier terme de l'équation (4.17) représente l'énergie potentielle des électrons tandis que le second terme représente l'énergie potentielle du noyau interagissant avec les électrons environnants. Dans le but de vérifier le théorème du viriel, intéressons-nous aux électrons en considérant uniquement le premier terme. En intégrant par rapport à r et ensuite par rapport à y , nous obtenons [12]

$$E_{kin} = \frac{\alpha^3 e B}{2m\pi \hbar^2 c} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{y^{1/2} dy}{1 + \{1 + (q-1)(y-\eta^*)\}^{\frac{q}{q-1}}} H(1 + (q-1)(y-\eta^*)) - 2\pi e \int_0^a r^3 \frac{\partial \phi}{\partial r} n(r) dr \quad (4.18)$$

où η^* est la valeur de η à la surface de l'atome. Il est facile de montrer que le premier terme de l'équation (4.18) est lié à la pression à la surface de l'atome. En effet, cette dernière est donnée par

$$P = \frac{eB}{2\pi^2\hbar^2c} \int_0^\infty \frac{1/3p(p/m)dp}{1 + \{1 + (q-1)(y - \eta^*)\}^{\frac{q}{q-1}}} \quad (4.19)$$

ou encore

$$P = \frac{eB}{12\pi^2\hbar^2mc} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{y^{1/2}dy}{1 + \{1 + (q-1)(y - \eta^*)\}^{\frac{q}{q-1}}} H(1 + (q-1)(y - \eta^*)) \quad (4.20)$$

Le premier terme de l'équation (4.18) est donné par $3P\nu/2$, où $\nu = 4/3\pi a^3$ est le volume de l'atome. L'équation de Poisson à symétrie sphérique impose la condition suivante [12]

$$n = \frac{V'' + \frac{2}{r}V'}{4\pi e} \quad (4.21)$$

En utilisant l'équation (4.21) et le premier terme de (4.17), nous obtenons

$$2\pi e \int_0^a r^3 \frac{\partial\phi}{\partial r} n(r) dr = \frac{E_{Pot}}{2} \quad (4.22)$$

L'utilisation des équations (4.18), (4.19) et (4.22) conduit à

$$2E_{kin} + E_{pot} = 3P\nu, \quad \forall q \geq 1 \quad (4.23)$$

Cette dernière traduit le théorème du viriel. Ce résultat montre que le théorème est toujours satisfait dans le cas non-extensif, en présence d'un champ magnétique, pour toute valeur de $q \geq 1$.

4.3 Modèle de Thomas-Fermi non-extensif relativiste

Dans cette section, nous allons présenter une nouvelle formulation du modèle de TF à température finie. Cette formulation prend en compte les effets relativistes et non-extensifs [13]. Elle étend ainsi le domaine de validité du modèle de TF au cas relativiste. Il est généralement admis que dans le cas des atomes lourds, les électrons les plus proches du noyau atomique atteignent des vitesses relativistes et le modèle en absence de corrections relativistes devient inadapté. C'est aussi le cas dans les gaz et plasmas relativistes rencontré dans une variété d'objets astrophysiques. Le but de cette formulation est donc, en premier lieu, d'obtenir une équation qui resterait valide dans le cas de systèmes relativistes et qui

inclurait les effets de la statistique non-extensive afin d'en augmenter la précision, grâce à la flexibilité du paramètre non-extensif q . D'autre part, il serait intéressant d'étudier comment deux effets (non-extensifs et relativistes) se combinent au sein de ce modèle et quel influence ils exercent les uns sur les autres.

4.3.1 Equation de Thomas-Fermi

En utilisant la définition de la densité et la distribution fermionique de la statistique non-extensive (3.14), la densité électronique s'exprime en fonction de l'impulsion comme suit

$$n(r) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(1 + \{\beta(1 - q)[\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 - e(\phi - \phi_0)]\}^{\frac{q}{q-1}})} \quad (4.24)$$

où nous avons utilisé la définition de l'énergie cinétique d'une particule relativiste $\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$. L'évaluation de ce type d'intégrales dans la statistique de BGS a été étudié par Chandrasekhar [50], ainsi que par Shivamoggi [53]. S'inspirant de ces auteurs, nous introduisons la transformation de Juttner [52]

$$\frac{p}{mc} = \sinh \theta \quad (4.25)$$

L'équation (4.24) devient alors

$$n(r) = \frac{(mc)^3}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \theta \cosh \theta d\theta}{(1 + \{\beta(1 - q)[mc^2 \cosh \theta - mc^2 - e(\phi - \phi_0)]\}^{\frac{q}{q-1}})} \quad (4.26)$$

En utilisant le changement de variable suivant [50]

$$u = \beta mc^2 \cosh \theta \quad (4.27)$$

nous obtenons à partir de (4.25)

$$n(r) = \frac{(mc)^3}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{\beta mc^2} \int_0^\infty \frac{dud\psi/du}{(1 + \{(1 - q)[u - mc^2 - e(\phi - \phi_0)]\}^{\frac{q}{q-1}})} \quad (4.28)$$

où

$$\frac{d\psi}{du} = \cosh(\theta) \sinh(\theta) = \frac{1}{2} \sinh(2\theta) \quad (4.29)$$

Selon la procédure préconisée dans [16], les intégrales dans (4.28) peuvent être développées dans la limite des faibles effets thermiques comme suit

$$\int_0^\infty \frac{dud\psi/du}{(1 + \{(1-q)[u - mc^2 - e(\phi - \phi_0)]\}^{1/(q-1)})} = \psi(u_0) + I_1^{(q)}\psi'(u_0) + \frac{1}{2}I_2^{(q)}\psi''(u_0) + \dots \quad (4.30)$$

où

$$u_0 = \beta [\mu + mc^2 + e\phi] \equiv \beta mc^2 \cosh(\theta_0) \quad (4.31)$$

et

$$I_n^{(q)} = q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^n [1 + (q-1)z]^{1/(q-1)} dz}{\{1 + [1 + (q-1)z]^{q/(q-1)}\}^2} \quad (4.32)$$

En introduisant la variable [13]

$$\delta = \sinh(\theta_0) = \left[\frac{(\mu + mc^2 + e\phi)^2}{m^2 c^4} \right]^{1/2} \quad (4.33)$$

nous obtenons à partir de (4.29)

$$\psi(u_0) = \frac{\beta mc^2}{3} \delta^3, \quad \psi'(u_0) = \delta \sqrt{\delta^2 + 1}, \quad \psi''(u_0) = \frac{1}{\beta mc^2} \frac{2\delta^2 + 1}{\delta} \quad (4.34)$$

En utilisant (4.34) et (4.30), l'expression de (4.28) devient [13]

$$n(r) = \frac{(mc)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \delta^3 \left[1 + 3 \frac{I_1^{(q)}}{\beta mc^2} \frac{[1 + \delta^2]^{1/2}}{\delta^2} + 3 \frac{I_2^{(q)}}{(\beta mc^2)^2} \frac{2\delta^2 + 1}{\delta^4} + \dots \right] \quad (4.35)$$

L'équation de Poisson conduit alors à

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = 4\pi en \simeq & \frac{(mc)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{(\mu + mc^2 + e\phi)^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{3/2} \times \left\{ 1 + 3 \frac{I_1^{(q)}}{\beta mc^2} \left[\frac{(\mu + mc^2 + e\phi)^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{-1} \right. \\ & \left. + 3 \frac{I_2^{(q)}}{(\beta mc^2)^2} \left[\frac{(\mu + mc^2 + e\phi)^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{-2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Introduisons maintenant le changement de variables suivant

$$\Phi = \frac{\phi + \mu/e}{Ze/r}, \quad r = ax, \quad a \equiv \left[\frac{9\pi^2}{128Z} \right]^{1/3} \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (4.37)$$

où Z est le numéro atomique et

$$\lambda \equiv \left[\frac{4Z^2}{3\pi} \right]^{2/3} \frac{e^4}{\hbar^2 c^2}, \quad \tilde{v} \equiv \frac{3 I_1^{(q)}}{2 \beta} \frac{a}{e^2 Z}, \quad v \equiv \frac{3 I_2^{(q)}}{8 \beta^2} \frac{a^2}{e^4 Z^2} \quad (4.38)$$

L'équation (4.36) devient alors [13]

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{\Phi^{3/2}}{\sqrt{x}} \left[1 + \lambda \frac{\Phi}{x} \right]^{3/2} \left\{ 1 + \tilde{v} \frac{x}{\Phi} \left[1 + \lambda \frac{\Phi}{x} \right]^{-1} + v \frac{x^2}{\Phi^2} \left[1 + \lambda \frac{\Phi}{x} \right]^{-2} \right\} \quad (4.39)$$

Cette dernière est une nouvelle formulation de l'équation de Thomas-Fermi. Elle inclut les effets thermiques, non-extensifs et relativistes. Notons que les corrections thermiques et non-extensives (v et \tilde{v} respectivement) dépendent du paramètre q . Cependant, les corrections relativistes (exprimés par le paramètre λ) en sont totalement indépendantes. Il serait intéressant de noter qu'en l'absence des effets relativistes ($\lambda = 0$), l'équation (4.39) se réduit à l'équation obtenue par Martinenko et Shivamoggi [10]. En l'absence des effets non-extensifs ($q \rightarrow 1$), elle se réduit à l'équation de Thomas-Fermi relativiste avec effets thermiques. Bien-sûr, elle contient aussi l'équation de Marshak-Bethe [46] avec uniquement les effets thermiques ainsi que l'équation de Vallarta-Rosen [47] incluant les effets relativistes uniquement. Comme rapporté précédemment, les corrections non-extensives dominent les corrections thermiques usuelles dans le cas des basses températures. Dans cette limite ($v \ll \tilde{v} \ll 1$), il est possible d'avoir une équation combinant le caractère non-extensif et relativiste des particules, en négligeant les effets thermiques. Cette dernière est donnée par

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{\Phi^{3/2}}{\sqrt{x}} \left[1 + \lambda \frac{\Phi}{x} \right]^{3/2} \left\{ 1 + \tilde{v} \frac{x}{\Phi} \left[1 + \lambda \frac{\Phi}{x} \right]^{-1} \right\} \quad (4.40)$$

4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, deux nouvelles formulations du modèle de Thomas-Fermi non-extensif. La première prend en considération l'effet d'un champ magnétique intense [12]. La seconde reste, quant à elle une formulation relativiste [13].

Dans la première section, nous avons présenté une formulation du modèle de Thomas-Fermi non-extensif en présence d'un champ magnétique. Une équation de Thomas-Fermi généralisée a été obtenue. Cette dernière peut trouver son utilité dans l'étude de systèmes en présence d'un champ magnétique intense. C'est souvent le cas dans les plasmas astrophysiques. Nous allons présenter au chapitre suivant une application de ce modèle dans la description du phénomène d'écrantage. L'énergie cinétique et potentielle de l'ensemble des

électrons autour du noyau, en présence d'un champ magnétique externe, ont également été calculées. Ces dernières dépendent du paramètre non-extensif q . Le théorème du viriel, les reliant, reste vérifié dans le cadre de ce modèle.

Dans la seconde section, nous avons présenté une formulation du modèle de Thomas-Fermi avec effets thermiques, incluant les corrections non-extensives et relativistes. Une nouvelle équation de Thomas-Fermi a été obtenue. Cette dernière contient, pour différentes limites, les équations de Marshak-Bethe [46], de Vallarta-Rosen [47], de Shivamoggi [51], et de Martinenko-Shivamoggi [10]. Nous avons trouvé que contrairement aux effets thermiques qui sont affectés par le caractère non-extensif des électrons, les effets relativistes en sont totalement indépendants. En effet, le paramètre λ apparaissant dans l'Eq. (4.39), représentant les effets relativistes ne dépend pas du paramètre non-extensif q . Dans le cas des faibles températures, le terme correctif habituel lié aux effets thermiques peut être négligé et nous obtenons alors une équation couplant les effets relativistes et non-extensifs des électrons (4.40). Les applications de ce modèle sont nombreuses. En effet, l'introduction des effets relativistes le rend valide dans le cas de vitesses élevées. C'est le cas des atomes lourds où les électrons les plus proches du noyau atteignent des vitesses relativistes. D'autre part, la présence des effets non-extensifs dans le modèle permet une plus grande précision, grâce au paramètre non-extensif q . Une application possible de ce modèle serait l'étude de l'écrantage électrique dans un gaz ou un plasma relativiste, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

5

Ecrantage électrique dans le modèle de Thomas-Fermi

5.1 Introduction

Nous avons vu qu'en dépit de l'approximation physique utilisée dans le modèle de Thomas-Fermi, ce dernier a trouvé des applications modernes dans de nombreux domaines grâce à sa capacité d'extraire analytiquement des données qualitatives. Il constitue notamment une base pour l'étude du phénomène d'écrantage électrique dans les cas quantiques, en supposant un gaz uniforme d'électrons de densité de charge $-n_0e$ sur un fond de charges positives de densité n_0e . Considérons maintenant une charge ponctuelle Q (souvent appelée charge test) supposée positive, placée au sein des électrons de conduction. Cette dernière engendre un excédent de charges négatives dans son voisinage immédiat. Ces charges excédentaires écranteront le potentiel coulombien ϕ créé par la charge et ce phénomène de "shielding" est bien décrit par l'équation de Poisson suivante [53]

$$\nabla^2\phi = 4\pi e(n - n_0) - 4\pi Q\delta(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier l'influence de la statistique non-extensive de Tsallis sur le phénomène d'écrantage électrique, dans le cadre du modèle de TF [14]. Pour ce faire, nous considérerons l'équation de Poisson dans laquelle les densités électroniques sont celles obtenues dans les chapitres précédents, tenant compte de l'effet de la non-extensivité. Nous considérerons, dans un premier temps, des électrons non-extensifs à température finie et nous étudierons l'influence du paramètre q sur la longueur de Fermi, qui caractérise ce phénomène. Nous introduirons par la suite l'effet d'un champ magnétique intense ainsi que

les effets relativistes, en utilisant les résultats obtenus dans les chapitres 6 et 7, respectivement. Les résultats seront comparés à ceux obtenus dans le cas du modèle de Thomas-Fermi, dans sa formulation habituelle.

5.2 Ecrantage électrique dans le modèle de Thomas-Fermi non-extensif

En utilisant la densité (3.16), obtenue au chapitre 4, l'équation (5.1) devient

$$\nabla^2 \phi = \frac{2e}{\pi \hbar^3} (2mT)^{3/2} \left[\Theta_{\frac{1}{2}}^{(q)} \left(\frac{\mu + e\phi}{T} \right) - \Theta_{\frac{1}{2}}^{(q)} \left(\frac{\mu}{T} \right) \right] \quad (5.2)$$

où la fonction $\Theta_p^{(q)}(\eta)$ est définie par

$$\Theta_p^{(q)}(\eta) = \int_0^\infty \frac{y^p dy}{1 + [1 + (q-1)(y-\eta)]^{q/(q-1)}} H(1 + (q-1)(y-\eta)) \quad (5.3)$$

En considérant un régime faiblement non-dégénéré

$$|\eta| = \left| \frac{\mu + e\phi}{T} \right| \gg 1 \quad (5.4)$$

et en supposant que la perturbation créée par la charge est assez faible pour n'engendrer qu'une réponse linéaire, la linéarisation en ϕ de (5.2) permet d'écrire

$$\nabla^2 \phi = \frac{3}{2} \left[\lambda_F^{(q)} \right]^{-2} \phi - 4\pi Q \delta(\mathbf{r}) \quad (5.5)$$

où

$$\left[\lambda_F^{(q)} \right]^{-2} = \frac{4e^2}{3\pi \hbar^3} \frac{(2mT)^{\frac{3}{2}}}{\mu} \left\{ \left(\frac{\mu}{T} \right)^{\frac{3}{2}} I_0^{(q)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^{\frac{1}{2}} I_1^{(q)} + \frac{1}{8} \left(\frac{\mu}{T} \right)^{-\frac{1}{2}} I_2^{(q)} + \dots \right\} \quad (5.6)$$

$\lambda_F^{(q)}$ est dite longueur de Fermi non-extensive. La solution de l'équation (5.5) est donnée par

$$\phi = \frac{Q}{r} e^{-\sqrt{\frac{3}{2}} r / \lambda_F^{(q)}} \quad (5.7)$$

Notons que dans le cas limite $q \rightarrow 1$, $\lambda_F^{(q)}$ se réduit à la longueur de Fermi standard λ_F obtenue grâce à la formulation habituelle du modèle de Thomas-Fermi. En effet

$$\lim_{q \rightarrow 1} \Theta_p^{(q)}(\eta) = \int_0^\infty \frac{y^p dy}{1 + e^{(y-\eta)}} \quad (5.8)$$

qui a pour développement asymptotique

$$\Theta_p^{(q \rightarrow 1)}(\eta) \approx \frac{2}{3} \eta^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\eta^2} + \dots \right) \quad (5.9)$$

pour η grand. La longueur de Fermi devient [53]

$$\left[\lambda_F^{(q \rightarrow 1)} \right]^{-2} = \frac{1}{\lambda_F^2} = \frac{4e^2}{3\pi\hbar^3} \frac{(2mT)^{3/2}}{\mu} \left\{ \left(\frac{\mu}{T} \right)^{3/2} - \frac{\pi^2}{32} \left(\frac{\mu}{T} \right)^{1/2} + \dots \right\} \quad (5.10)$$

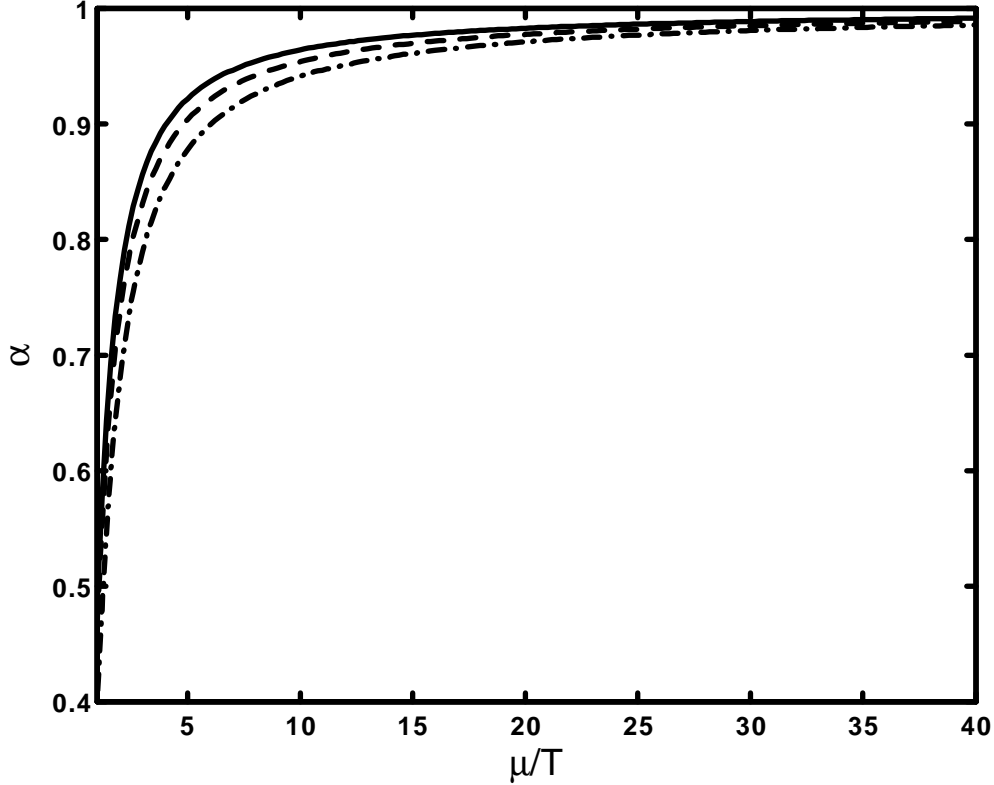


Figure 4 : Tracé de α en fonction de μ/T pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q .

Sur la figure 4 est représentée la variation du rapport

$$\alpha = \lambda_F^{(q)} / \lambda_F \simeq \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu}{T} \right)^{3/2} - \frac{\pi^2}{32} \left(\frac{\mu}{T} \right)^{1/2} + \dots}{\left(\frac{\mu}{T} \right)^{3/2} I_0^{(q)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^{1/2} I_1^{(q)} + \frac{1}{8} \left(\frac{\mu}{T} \right)^{-1/2} I_2^{(q)} + \dots}} \quad (5.11)$$

en fonction de μ/T , pour différentes valeurs du paramètre non-extensif des électrons q . On peut voir qu'une augmentation de μ/T conduit à une augmentation de $\alpha = \lambda_F^{(q)} / \lambda_F$. Cela signifie que les corrections non-extensives disparaissent dans la limite d'une température nulle ($\mu/T \gg 1$). De plus, la longueur de Fermi non-extensive $\lambda_F^{(q)}$ est plus petite que son

analogue standard λ_F . Cet écart entre les longueurs $\lambda_F^{(q)}$ et λ_F est plus perceptible à mesure que q augmente, i.e, quand le caractère non-extensif des électrons devient important.

5.3 Ecrantage électrique en présence d'un champ magnétique intense

En utilisant la densité électronique (4.6), obtenue au chapitre 6, l'équation (5.1) devient

$$\nabla^2 \phi = \frac{Be^2}{\pi c \hbar^2} (2mKT)^{\frac{1}{2}} \left[\Theta_{-\frac{1}{2}}^{(q)} \left(\frac{\mu + e\phi}{kT} \right) - \Theta_{-\frac{1}{2}}^{(q)} \left(\frac{\mu}{kT} \right) \right] - 4\pi Q \delta(r) \quad (5.12)$$

En linéarisant par rapport à ϕ , nous obtenons [14]

$$\nabla^2 \phi = \left[\lambda_F^{B,q} \right]^{-2} \phi - 4\pi Q \delta(r) \quad (5.13)$$

où

$$\left[\lambda_F^{B,q} \right]^{-2} = \frac{Be^3}{\pi c \hbar^2} (2mKT)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\mu} \left\{ \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} I_0^{(q)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{-\frac{1}{2}} I_1^{(q)} + \frac{3}{8} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{-\frac{3}{2}} I_2^{(q)} + \dots \right\} \quad (5.14)$$

$\lambda_F^{B,q}$ est la longueur de Fermi non-extensive en présence d'un champ magnétique intense. On notera que dans le cas limite $q \rightarrow 1$, $\lambda_F^{B,q}$ se réduit à l'expression de la longueur de Fermi en présence d'un champ magnétique intense. En effet,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \Theta_p^{(q)}(\eta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^p dy}{1 + e^{(y-\eta)}} \quad (5.15)$$

Pour $p = -1/2$, on a le développement asymptotique suivant

$$\Theta_{-\frac{1}{2}}^{(q \rightarrow 1)}(\eta) = 2\eta^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\pi^2}{24} \frac{1}{\eta^2} + \dots \right) \quad (5.16)$$

Pour les grandes valeurs de η , la longueur de Fermi $\lambda_F^{B,q}$ devient [14]

$$\left[\lambda_F^{B,q \rightarrow 1} \right]^{-2} = \frac{1}{[\lambda_F^B]^2} = \frac{Be^3}{\pi c \hbar^2} (2mKT)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\mu} \left\{ \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3\pi^2}{24} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{-\frac{3}{2}} \dots \right\} \quad (5.17)$$

qui correspond à la longueur de Fermi dans le modèle TF standard avec champ magnétique intense [53]. Sur la figure 5 est représentée la variation de

$$\alpha = \frac{\lambda_F^{B,q}}{\lambda_F^B} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3\pi^2}{24} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{-\frac{3}{2}} \dots}{\left(\frac{\mu}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} I_0^{(q)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{-\frac{1}{2}} I_1^{(q)} + \frac{3}{8} \left(\frac{\mu}{kT} \right)^{-\frac{3}{2}} I_2^{(q)} + \dots}} \quad (5.18)$$

en fonction de μ/T pour différentes valeurs de l'indice entropique q . La figure 5 montre que les corrections non-extensives disparaissent dans la limite des températures nulles, conformément au cas sans champ magnétique. L'écart entre les longueurs $\lambda_F^{B,q}$ et λ_F^B est de moins en moins perceptible à mesure que μ/T augmente, i.e., une température «nulle» pour les électrons peut contrebalancer l'effet de la non-extensivité. Mais contrairement au cas sans champ magnétique, la longueur de Fermi, $\lambda_F^{B,q}$ peut être supérieure ou inférieure à son équivalent standard. La différence est encore plus importante à mesure que le paramètre non-extensif q des électrons augmente.

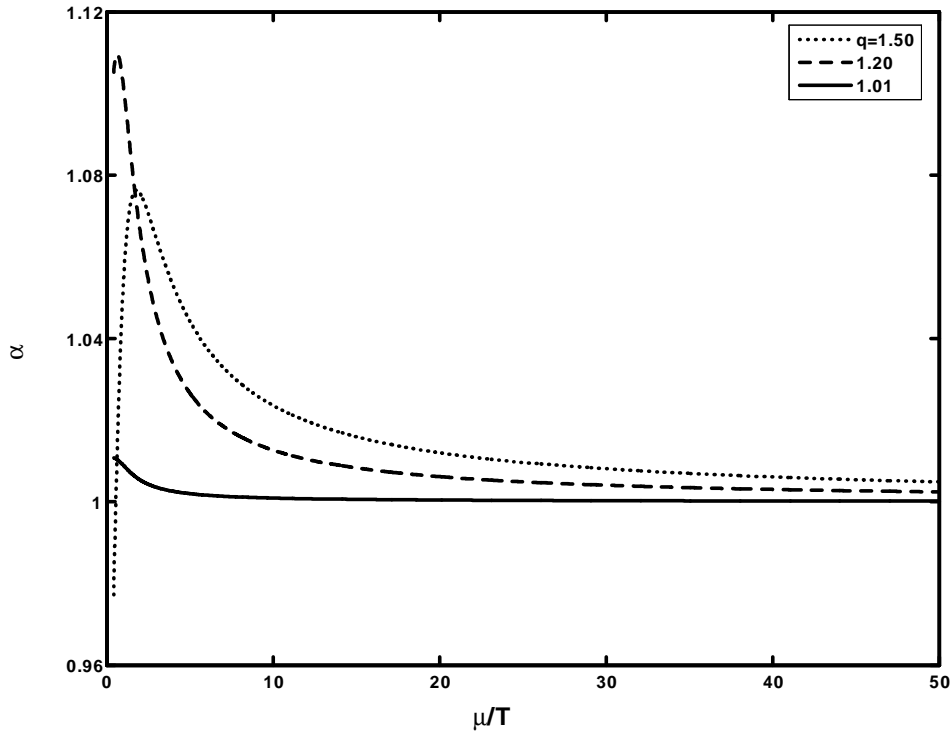


Figure 5 : Variation de α en fonction de μ/T pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q .

Dans la figure 6, on montre la variation de $\lambda_F^{B,q}$ en fonction du champ magnétique B pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q , où pour de raisons de simplicité, nous avons posé $\frac{(2me^6)^{1/2}}{\pi ch^2} = 1$. Les paramètres choisis sont $T = 300$ K et $\mu = 5$ eV. Comme on peut s'y attendre, la longueur de Fermi généralisée $\lambda_F^{B,q}$ diminue à mesure que l'intensité du champ magnétique B augmente. Les résultats obtenus pour une augmentation du paramètre non-extensif q , sont qualitativement les mêmes, mais avec un décalage vers les valeurs plus élevées ou plus basses.

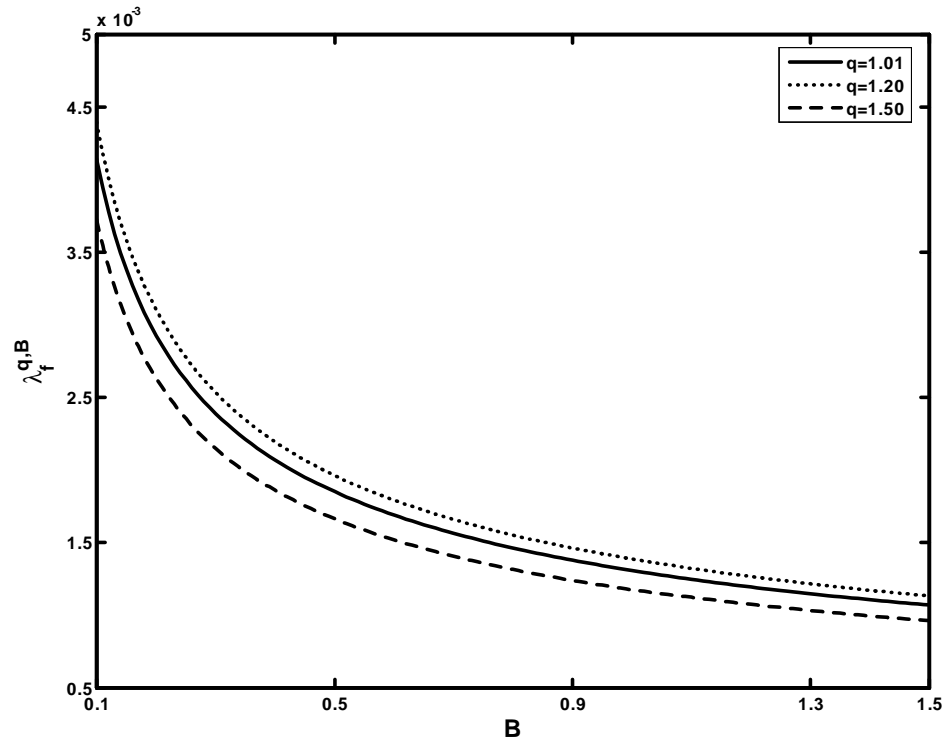


Figure 6 : Variation de la longueur d'écrantage en fonction du champ magnétique, pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q .

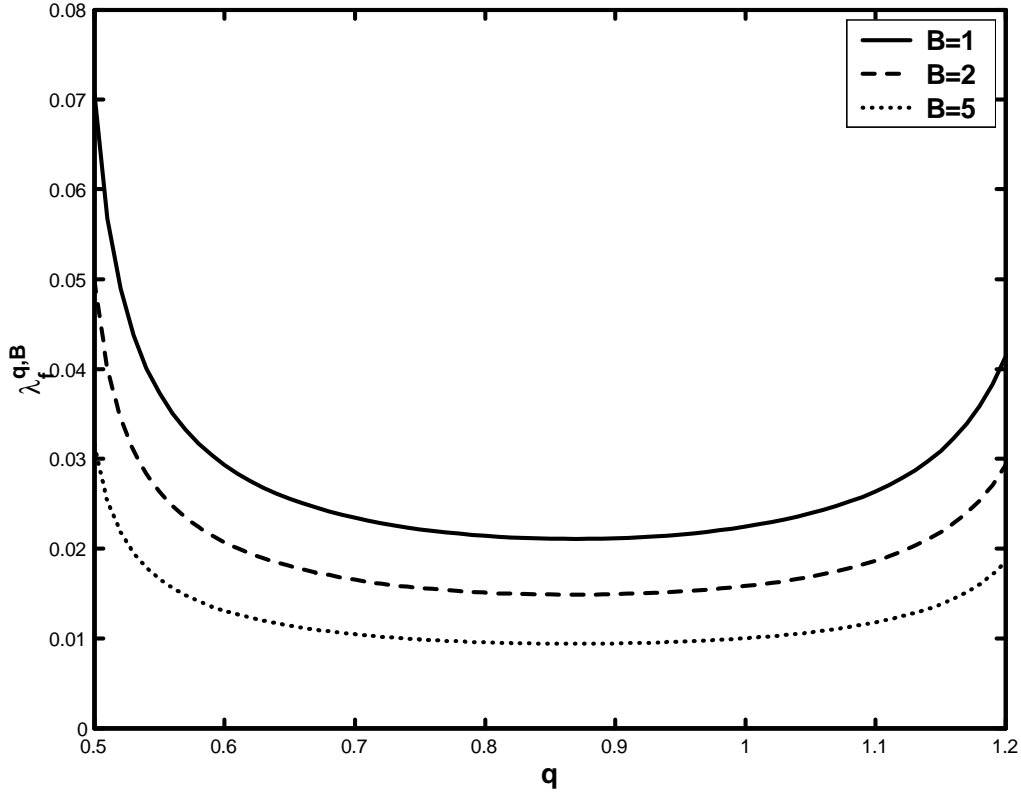


Figure 7 : Variation de la longueur d'écrantage en fonction du paramètre non-extensif q pour différentes valeurs du champ magnétique B .

Par la suite, en utilisant les équations (5.17) et (5.18), il est possible de mettre en évidence la variation de $\lambda_F^{B,q}$ en fonction du paramètre q . En fixant les valeurs de T et μ à des valeurs constantes $T = 300$ K et $\mu = 5$ eV et en posant $\frac{(2me^6)^{1/2}}{\pi\hbar^2} = 1$, l'effet de la non extensivité des électrons sur la longueur de Fermi $\lambda_F^{B,q}$ est étudié. La figure 7 montre la variation de la longueur de Fermi généralisée en fonction du paramètre q pour différentes valeurs du champ magnétique B . On peut voir que $\lambda_F^{B,q}$ augmente à mesure que les électrons évoluent loin de leur équilibre $q = 1$. Une augmentation de l'intensité du champ magnétique B exhibe qualitativement les mêmes résultats mais avec un décalage net de la longueur de Fermi généralisé $\lambda_F^{B,q}$ vers les valeurs les plus faibles.

5.4 Ecrantage électrique relativiste

En utilisant la densité (4.35), obtenue au chapitre 7, l'équation (5.1) devient

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \phi &= \frac{(mc)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \left[\left\{ \frac{(\mu + mc^2 + e\phi)^2}{m^2 c^4} - 1 \right\}^{3/2} \right. \\
 &\quad \times \left. \left\{ 1 + 3 \frac{I_1^{(q)}}{\beta mc^2} \left[\frac{(\mu + mc^2 + e\phi)^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{-1} + 3 \frac{I_2^{(q)}}{(\beta mc^2)^2} \left[\frac{(\mu + mc^2 + e\phi)^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{-2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{(\mu + mc^2)^2}{m^2 c^4} - 1 \right\}^{3/2} \times \left\{ 1 + 3 \frac{I_1^{(q)}}{\beta mc^2} \left[\frac{(\mu + mc^2)^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{-1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3 \frac{I_2^{(q)}}{(\beta mc^2)^2} \left[\frac{(\mu + mc^2)^2}{m^2 c^4} - 1 \right]^{-2} \right\} \right] - 4\pi Q \delta(r)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

En considérant un régime faiblement relativiste

$$\left| \frac{\mu + e\phi}{mc^2} \right| \ll 1 \tag{5.20}$$

et en supposant que la perturbation créée par la charge d'essai est assez faible pour n'obtenir qu'une réponse linéaire, l'équation (5.19) devient

$$\nabla^2 \phi = \frac{3}{2} \lambda_F^{-2} \phi - 4\pi Q \delta(r) \tag{5.21}$$

où [14]

$$\left[\lambda_F^{(q)} \right]^{-2} = \frac{4\pi n_0 (1 + \frac{\sigma}{2}) (1 + \tilde{v} - \frac{v}{3})}{\mu} \tag{5.22}$$

$$n_0 \equiv \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m\mu}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad \sigma \equiv \frac{\mu}{mc^2}, \quad \tilde{v} \equiv \frac{1}{2} I_1^{(q)} \left(\frac{T}{\mu} \right), \quad v \equiv \frac{3}{8} I_2^{(q)} \left(\frac{T}{\mu} \right)^2 \tag{5.23}$$

L'investigation de l'équation (5.22) révèle l'apparition d'un nouveau terme proportionnel à T , à savoir \tilde{v} , exprimant les corrections non-extensives. Le terme thermique habituel v , proportionnel à T^2 , est également affecté par le paramètre q . Contrairement à \tilde{v} et v , la non-extensivité n'a aucune influence sur les effets relativistes (exprimés par σ). On notera que dans la limite $q \rightarrow 1$, l'expression (5.22) se réduit à la longueur de Fermi obtenue par Shivamoggi et Mulser [53] dans le cas où les effets relativistes et thermiques sont combinés. Comme on pouvait s'y attendre, l'expression (5.22) indique que les effets relativistes

réduisent $\lambda_F^{(q)}$. Cela peut être attribué à la concentration des électrons relativistes au voisinage du noyau [54]. Les corrections thermiques, comme admis généralement, augmentent la longueur de Fermi [55]. Cependant, dans le cas non-extensif, ils sont modulés par le paramètre de non-extensivité q à travers l'intégrale $I_2^{(q)}$. Le terme v peut conduire à une réduction de la longueur de Fermi $\lambda_F^{(q)}$ et son effet est similaire à celui produit par une diminution de la température, comme il a été mentionné dans le chapitre 7. Cela nous amène à penser que la non-extensivité peut être perçue comme une augmentation du degré de dégénérescence et de la corrélation dans le système. Notez que l'on peut représenter la variation de $\lambda_F^{(q \rightarrow 1)}$ en fonction de μ/T pour montrer que la longueur de Fermi non-extensive $\lambda_F^{(q)}$ est plus petite que son équivalent standard $\lambda_F^{(q \rightarrow 1)}$. Cette différence est plus notable à mesure que le paramètre de non extensivité q augmente, i.e, le caractère non-extensif des électrons devient important. Bien-sûr, comme on peut s'y attendre, dans la limite des températures nulles ($\mu/T \rightarrow \infty$), les corrections non-extensives disparaissent.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude sur le processus d'écrantage électrique dans le cadre du modèle de TF non-extensif, en présence d'effets thermiques [14]. En utilisant la densité électronique obtenue au chapitre 4, nous avons évalué la longueur de Fermi effective dans le cadre de la statistique non-extensive de Tsallis. L'étude a montré que cette dernière était plus faible que son équivalent dans le modèle de TF standard. Nous avons également étudié ce phénomène en présence d'un champ magnétique intense, en utilisant les résultats du chapitre 6. Nous avons montré que le confinement magnétique affecte également la dépendance de la longueur de Fermi vis-à-vis de l'indice q . Mais contrairement au cas sans champ magnétique, la longueur $\lambda_F^{(q)}$ peut être supérieure ou inférieure à son homologue classique. La différence est encore plus accrue à mesure que le caractère non-extensif des électrons devient important. Nous avons enfin étudié le cas relativiste en utilisant les résultats du chapitre 7. Nous avons montré que la non-extensivité n'avait aucun effet sur les corrections relativistes. Ces derniers ont pour effet la réduction de la longueur de Fermi du modèle, une tendance qui peut être attribuée à la concentration d'électrons relativistes dans le voisinage du noyau.

6

Approche non-extensive des fermions auto-gravitants

6.1 Introduction

Le modèle de TF a été initialement proposé pour décrire le nuage électronique autour du noyau atomique. Il est intéressant de noter qu'un modèle similaire a été proposé pour décrire des fermions auto-gravitants [56]. Il s'agit de systèmes composés de fermions de charge neutre, qui interagissent via l'interaction gravitationnelle. De tels systèmes sont fréquemment rencontrés en astrophysique. Il peut s'agir de neutrons dans une étoile à neutrons ou encore de neutrinos dans un modèle de matière noire. Aussi, proposons-nous dans ce chapitre de généraliser cette approche à la statistique non-extensive de Tsallis [15]. D'un point de vue purement mathématique, cette approche n'introduit rien de supplémentaire à l'approche proposée dans le chapitre 4. Cependant, les effets non-extensifs pourraient être plus appréciables dans le cas d'interactions gravitationnelles, la raison étant simple: bien que les interactions coulombiennes et gravitationnelles sont toutes deux en $1/r^2$, les interactions coulombiennes ont une courte portée effective à cause du phénomène d'écrantage. Les interactions gravitationnelles quant à elles ne présentent pas une telle particularité et sont alors réellement à longue portée. Nous avons vu dans le chapitre 2 que les effets de la statistique non-extensive de Tsallis sont plus importants en présence d'interactions à longue-portée. Il est donc naturel de penser que les systèmes auto-gravitants constituent l'une des applications les plus intéressantes et l'un des milieux privilégiés pour tester cette théorie. Notons également que de tels systèmes présentent un certain nombre de particularités statistiques et thermodynamiques très surprenantes : une chaleur spécifique négative,

l'absence d'un maximum global de l'entropie... etc. Nous proposons dans un premier lieu de reprendre l'approche présentée dans le chapitre 4 dans le cas de fermions auto-gravitants. Une équation de type Thomas-Fermi sera obtenue. Nous étudierons également l'instabilité de Jeans dans le modèle proposé et nous montrerons l'impact que peut avoir la statistique non-extensive de Tsallis sur celle-ci.

6.2 Equation de Thomas-Fermi

La densité des fermions auto-gravitants s'écrit en fonction de la distribution fermionique généralisée, comme suit

$$n(r) = \frac{g_f}{h^3} \int f^{(q)}(E) d^3p \quad (6.1)$$

où g_f est la dégénérescence ($g_f = 2$ pour les fermions de Majorana et 4 pour les fermions de Dirac). Le potentiel gravitationnel $\phi(r)$ satisfait l'équation de Newton-Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G m^2 n(r) \quad (6.2)$$

La densité (6.1) s'écrit alors en fonction des intégrales de Fermi généralisées $\Theta(\eta)_n^{(q)}$ comme suit

$$n(r) = \frac{g_f}{4\pi^2 h^3} (2mT)^{3/2} \Theta_{1/2}^{(q)} \left(\frac{\mu - \phi(r)}{T} \right) \quad (6.3)$$

En introduisant les variables sans dimension suivantes

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{r}{mGM_\odot} (\mu - \phi) \\ x &= r/R_0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

où M_\odot est la masse solaire, et

$$R_0 = \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}m^4 g_f G^{3/2} M_\odot^{1/2}} \right)^{2/3} \quad (6.5)$$

l'équation (6.3) devient

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\frac{3}{2} \beta^{-3/2} \Theta_{1/2}^{(q)} \left(\beta \frac{\Phi}{x} \right) \quad (6.6)$$

où $\beta = T_0/T$ et $T_0 = mGM_\odot/R_0$. Dans la limite $q \rightarrow 1$, les intégrales $\Theta_{1/2}^{(q)}$ se réduisent aux intégrales de Fermi usuelles et l'équation (6.6) se réduit à l'équation de Thomas-Fermi décrivant un système de fermions auto-gravitants. Dans la limite d'une température nulle, elle se réduit à l'équation différentielle de Lane-Emden [50], quel que soit la valeur du paramètre non-extensif q . Notons que l'équation (6.6) présente une propriété intéressante: si $\Phi(x)$ est une solution de l'équation à la température T et avec un rayon R , alors $\tilde{\Phi}(x) = A^3\Phi(Ax)$ est aussi solution de l'équation mais à la température $\tilde{T} = A^4T$ et avec un rayon $\tilde{R} = R/A$. L'équation de Thomas-Fermi ordinaire pour les fermions auto-gravitants satisfait cette propriété [56] et il est intéressant de noter ici que la statistique non-extensive de Tsallis ne brise pas cette symétrie.

6.3 Instabilité de Jeans

Dans cette section, nous étudierons l'effet de la statistique non-extensive de Tsallis sur l'instabilité de Jeans. Une telle étude a été réalisée dans le cas d'un gaz classique (*obéissant à la statistique de Maxwell-Boltzmann généralisé*) mais l'effet de la non-extensivité sur un système de fermions n'a jamais été étudié. Pour cela, considérons l'équation de Boltzmann linéarisée [57]

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0 \quad (6.7)$$

En termes de la distribution f_1 , l'équation de Newton-Poisson s'écrit sous la forme

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \int f_1 d^3v \quad (6.8)$$

Nous considérons un état initial non-perturbé, uniforme et indépendant du temps ($\phi_0 = 0$), et nous recherchons des solutions de la forme

$$f_1(x, v, t) = f_a(v) \exp[i(kv - \omega t)] \quad (6.9)$$

$$\phi_1(x, t) = \phi_a(v) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (6.10)$$

Nous obtenons alors la relation de dispersion suivante

$$1 + \frac{4\pi Gm}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v}}{kv - \omega} d^3v = 0 \quad (6.11)$$

où f_0 est la distribution à l'équilibre du système de fermions auto-gravitants non-extensifs et est donnée par

$$f_0 = \frac{g_f m^3}{h^3} \frac{1}{1 + [1 + \frac{(q-1)}{T} [\frac{p^2}{2m} - \mu]]^{q/(q-1)}} \quad (6.12)$$

En supposant k le long de l'axe z , nous obtenons

$$k^2 = \frac{8\pi^2 G m^4 g_f}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_z dv_z}{v_z - \frac{\omega}{k}} \frac{1}{1 + [1 + (q-1) [\frac{mv_z^2}{2T} - \eta]]^{q/(q-1)}} \quad (6.13)$$

où $\eta = \mu/T$. Le nombre d'onde de Jeans est donné par [15]

$$\left[k_J^{(q)} \right]^2 = k^2 (\omega = 0) = \frac{8\sqrt{2}\pi^2 G m^4 g_f}{h^3 \sqrt{m}} \Theta_{-1/2}^{(q)}(\eta) \quad (6.14)$$

Il est évident à partir de (6.14) que le nombre d'onde de Jeans dépend sensiblement du paramètre non-extensif q . Dans la limite $q \rightarrow 1$, il se réduit exactement au nombre de Jeans d'un système de fermions auto-gravitants dans la statistique de BGS [56]. De la même manière, il est possible de définir la longueur d'onde de Jeans généralisée par $\lambda_J^{(q)} = 2\pi/k_J^{(q)}$. Pour des fluctuations de densité correspondant à $k < k_J^{(q)}$ ($\lambda > 2\pi/k_J^{(q)}$), le système est instable.

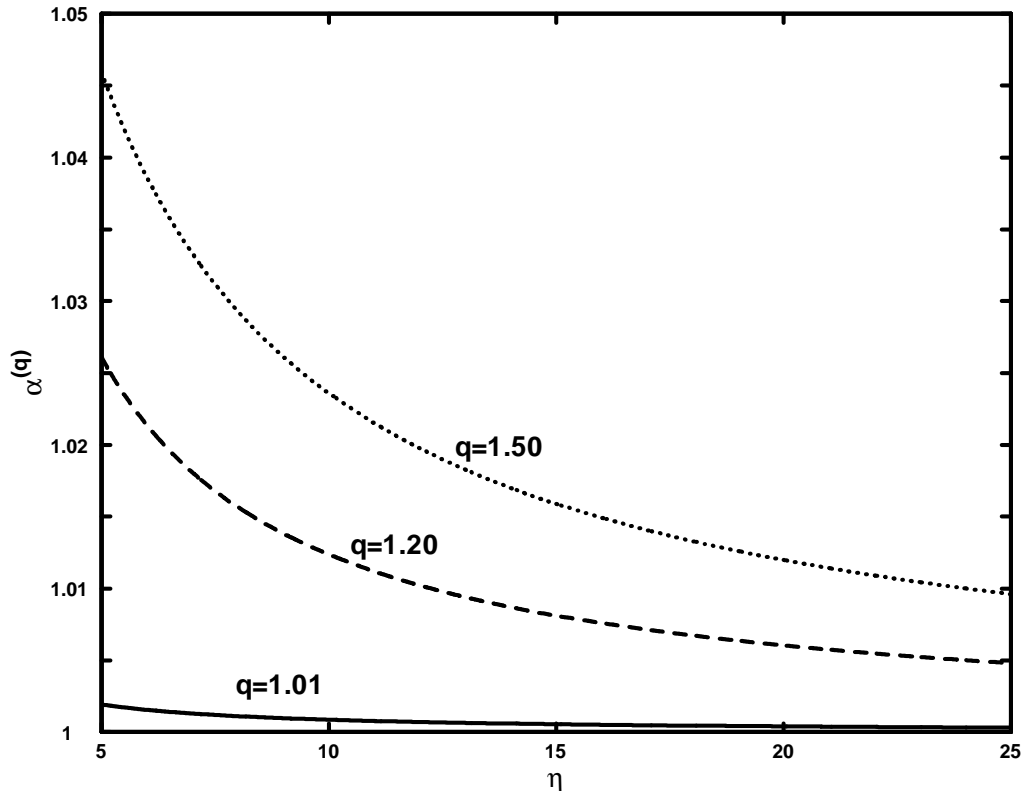


Figure 8 : Tracé du rapport $\alpha^{(q)}$ en fonction de η , pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q .

La Figure 8 montre la variation de $\alpha^{(q)} = k_J^{(q)}/k_J^{(1)}$ en fonction de η dans la limite des faibles effets thermiques. La figure montre que la statistique non-extensive de Tsallis rend le système instable à des échelles spatiales plus courtes que la longueur de Jeans habituelle. Ce résultat est en accord avec les travaux réalisés par Lima en 2002 [58] qui montrent un effet similaire dans le cas classique.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une approche similaire à celle de Thomas-Fermi dans le but de décrire les systèmes de fermions auto-gravitants, dans le cadre de la statistique non-extensive [15]. De tels systèmes sont fréquemment rencontrés en astrophysique. Il peut s'agir de neutrons dans une étoile à neutrons ou encore de neutrinos dans un modèle de matière noire. Une équation de type Thomas-Fermi généralisée a été obtenue. Elle contient comme limite extensive ($q \rightarrow 1$) l'équation différentielle de Lane-Emden [46]. Nous avons montré que la statistique non-extensive de Tsallis préservait une propriété intéressante de l'équation : Si $\Phi(x)$ est une solution de l'équation à la température T et avec un rayon R ,

alors $\tilde{\Phi}(x) = A^3\Phi(Ax)$ est aussi solution de l'équation mais à la température $\tilde{T} = A^4T$ et avec un rayon $\tilde{R} = R/A$. L'instabilité de Jeans pour un système, composé de fermions interagissant via l'interaction gravitationnelle, a également été étudiée dans le cadre de ce modèle. Il a été montré qu'une augmentation des effets non-extensifs menait à une augmentation du nombre d'onde de Jeans. Ce qui signifie que les effets non-extensifs tendent à rendre le système instable à des échelles de longueur plus courtes que celles prédites par la théorie BGS.

7

Approche non-extensive du modèle de Sommerfeld

7.1 Introduction

Le défaut principal du modèle de Drude [59], [60] est de traiter l'électron comme une particule classique. Un ensemble de telles particules n'est pas soumis au principe d'exclusion de Pauli. Autrement dit, à température nulle, elles peuvent toutes avoir une énergie nulle. Il en résulte, entre autres, que tous les électrons de conduction sont susceptibles d'accroître leur énergie, sous l'effet d'une augmentation de la température par exemple. La variation théorique de la résistivité en fonction de la température, établie sur cette base, peut donc s'avérer incorrecte ou à la limite incomplète. Les estimations de chaleur spécifique ne sont pas meilleures, alors que les processus d'émission thermoélectronique, photoélectrique ou de champ échappent totalement à un tel modèle. Ces difficultés disparaissent en grande partie avec le modèle de l'électron libre dans un puits de potentiel, imaginé par Sommerfeld [61]. Dans ce modèle, les électrons soumis au principe de Pauli, suivent la distribution en énergie de Fermi-Dirac, alors que dans le modèle de Drude ils suivaient la loi de Boltzmann. Il en découle deux résultats importants

- seule une fraction des électrons, voisine de 2%, est susceptible de voir son énergie varier sous l'effet d'une action extérieure (température, champ électromagnétique...etc).
- même au zéro absolu, l'énergie cinétique des électrons n'est pas nulle. Une part importante de ceux-ci possède des énergies de quelques eV, ce qui est appréciable. A titre de comparaison, l'énergie moyenne d'une particule classique, calculée à partir de la distribution de Boltzmann, vaut seulement 0.038eV, à 20C.

Malgré les améliorations qu'il apporte, le modèle de Sommerfeld ne donne pas une description satisfaisante des propriétés électroniques des solides. Aussi, nous proposons dans ce chapitre une tentative d'en améliorer la précision en faisant intervenir la statistique non-extensive de Tsallis [17]. Pour ce faire, nous généraliserons le modèle proposé par Sommerfeld en associant aux électrons du métal la distribution fermionique généralisée de la statistique non-extensive. En premier lieu, nous écrirons le potentiel chimique, l'énergie totale et la chaleur spécifique des électrons dans la généralisation non-extensive. Ensuite, nous nous intéresserons à l'effet de la statistique non-extensive sur la susceptibilité magnétique de Pauli. Une comparaison avec les résultats du modèle standard de Sommerfeld et avec les données expérimentales sera présentée.

7.2 Chaleur spécifique

Dans cette section, nous allons revisiter la capacité calorifique des électrons dans les métaux dans le cadre de la statistique non-extensive de Tsallis. L'énergie des électrons à la température T s'écrit en termes de la distribution fermionique généralisée sous la forme

$$u = \int_0^{+\infty} g(E) f^{(q)}(E) E dE \quad (7.1)$$

où

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

est la densité d'états pour un gaz de fermi tridimensionnel [62]. La conservation du nombre total d'électrons

$$n = \int_0^{+\infty} g(E) f^{(q)}(E) dE \quad (7.2)$$

permet d'obtenir l'expression du potentiel chimique. L'intégrale apparaissant dans (7.2) est de la forme générique $\int_0^{+\infty} h(E) f^{(q)}(E) dE$, où $h(E)$ est une fonction arbitraire de l'énergie. Ces intégrales n'ont pas de solution analytique exacte. Nous allons proposer ici un développement qui permet leur estimation dans la limite $T \ll T_F$, où T_F est la température de Fermi. Nous avons alors

$$\int_0^{+\infty} h(E) f^{(q)}(E) dE = \int_0^{\mu} h(E) dE + I_1^{(q)}(k_B T) h(\mu) + \frac{1}{2} I_2^{(q)}(k_B T)^2 \left. \frac{\partial h}{\partial E} \right|_{E=\mu} + \dots \quad (7.3)$$

où

$$I_n^{(q)} = q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^n [1 + (q-1)z]^{1/(q-1)} dz}{\left\{ 1 + [1 + (q-1)z]^{q/(q-1)} \right\}^2} \times H(1 + (q-1)z) \quad (7.4)$$

Dans la limite $q \rightarrow 1$, l'équation (7.3) se réduit au développement de Sommerfeld [61]. Celui-ci ne contient que les puissances paires de la température. Comme dans le cas de l'équation de Thomas-Fermi, l'équation (7.3) contient un terme correctif additionnel proportionnel à la température T . Ce dernier découle de la statistique de Tsallis et n'apparaît pas dans le modèle de Sommerfeld habituel. Le dernier terme, quant à lui, représente les effets thermiques, modulés par le caractère non-extensif des électrons, par l'intermédiaire de l'intégrale $I_2^{(q)}$. Notons que le développement (7.3) n'est valide que dans le cas des basses températures $T \ll T_F$. Cette condition est généralement satisfaite dans le cas des métaux. En effet, l'ordre de grandeur de la température de Fermi est de $T_F \sim 20 - 100 \times 10^3 K$ [62]. Ainsi, à la température ambiante, la condition $T \ll T_F$ est satisfaite. Le potentiel chimique μ dépend de la température et nous pouvons l'exprimer en invoquant la conservation du nombre d'électrons (en négligeant les effets de la dilatation)

$$n = \int_0^{+\infty} g(E) f^{(q)}(E) dE \quad (7.5)$$

En utilisant le développement (7.3) ainsi que la densité d'états du gaz de Fermi tridimensionnel, nous obtenons [17]

$$\mu = E_F \left\{ 1 - I_1^{(q)} \frac{k_B T}{E_F} - \frac{1}{4} I_2^{(q)} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right\} \quad (7.6)$$

En reconsidérant l'équation précédente avec $k_B T \ll E_F$, on peut réécrire (7.3) sous la forme plus simple suivante

$$\int_0^{+\infty} h(E) f^{(q)}(E) dE = \int_0^{E_F} h(E) dE + h(E_F) (\mu - E_F) + I_1^{(q)}(k_B T) h(E_F) + \frac{1}{2} I_2^{(q)}(k_B T)^2 \left. \frac{\partial h}{\partial E} \right|_{E=E_F} \quad (7.7)$$

La chaleur spécifique par unité de volume est définie par

$$C_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_n \quad (7.8)$$

où l'énergie totale u est donnée par (7.1). En utilisant le développement (7.3), nous obtenons

$$u(T) = u(0) + \frac{1}{2} (k_B T)^2 I_2^{(q)} g(E_F) \quad (7.9)$$

où $u(0)$ est l'énergie totale à $T = 0$. Celle-ci ne dépend pas du paramètre non-extensif q . La chaleur spécifique est alors donnée par

$$C_v = \frac{3}{2} I_2^{(q)} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right) k_B n \quad (7.10)$$

L'équation (7.9) révèle que la non-extensivité n'affecte pas la linéarité entre C_v et la température mais modifie le coefficient de proportionnalité. Dans la limite $q \rightarrow 1$, la relation (7.9) se réduit à la chaleur spécifique prédite par le modèle de Sommerfeld habituel. Notons que l'intégrale $I_2^{(q)}$ peut prendre des valeurs négatives pour certaines valeurs de q et qui doivent donc être exclues. Notons également que $\frac{3}{2} k_B n$ est la chaleur spécifique classique. Nous savons que les effets de la statistique quantique mène à des valeurs plus faibles. Nous pouvons considérer physiquement acceptables les valeurs du paramètre q satisfaisant la condition $I_2^{(q)} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right) < 1$. Heureusement, le terme additionnel due aux effets non-extensifs, n'apparaît pas dans les expressions (7.8) et (7.9). En effet, la linéarité entre C_v et T aurait été brisée, menant à une chaleur spécifique non-nulle à $T = 0$. L'intégrale $I_2^{(q)}$ peut être développée comme suit [10]

$$I_2^{(q)} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{2\pi^2}{3} (q-1) - \frac{229\pi^2}{90} (q-1)^2 + O((q-1)^3) \quad (7.11)$$

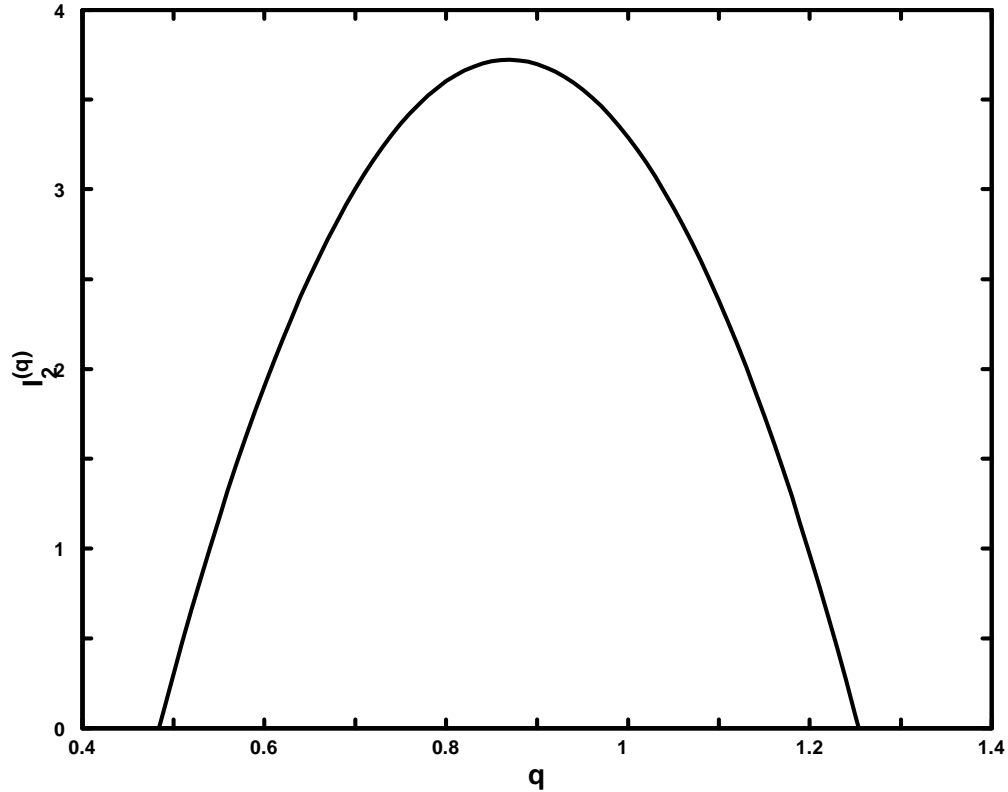


Figure 9 : Variation de l'intégrale $I_2^{(q)}$ en fonction du paramètre non-extensif q .

La figure 9 montre la variation de $I_2^{(q)}$ en fonction du paramètre non-extensif q . Afin de rendre possible une comparaison avec les données expérimentales, nous exprimons la chaleur spécifique en Joule par mole et par degré. Nous obtenons alors

$$C = I_2^{(q)} Z_v R \frac{k_B T}{n} g(E_F) = \gamma^{(q)} T \quad (7.12)$$

où Z_v et R représentent, respectivement, le nombre d'électrons de valence et la constante des gaz. Notons que $\gamma^{(q)}$ peut être exprimé en termes de Z et du rayon de Wigner-Seitz. La table 1 montre les valeurs de $\gamma^{(q)}$ (en $10^{-1} \text{mJ/mol K}^2$) correspondant aux différents éléments métalliques et pour différentes valeurs du paramètre $q = 0.8, 0.9, 1, 1.1$ et 1.2 . Les valeurs pour $q = 1.0$ correspondent à celles du modèle de Sommerfeld standard. La colonne $\gamma_{\text{exp.}}$ correspond aux valeurs expérimentales [63]. Le tableau montre que le paramètre non-extensif affecte de façon sensible les valeurs théoriques. Bien que ces dernières restent plus faibles que les valeurs expérimentales $\gamma_{\text{exp.}}$, les valeurs de $\gamma^{(0.9)}$ semblent être (de façon générale) en meilleur accord avec les données expérimentales. La différence entre $\gamma^{(q)}$ et $\gamma_{\text{exp.}}$ peut en partie être expliquée par le fait que les électrons ne sont pas libres mais liés au réseau. Cet effet, ignoré dans ce modèle, mène à une inertie effective plus grande que la masse des électrons et ainsi à une valeur expérimentale de γ plus élevée.

Elément	$\gamma^{(0.8)}$	$\gamma^{(0.9)}$	$\gamma^{(1.0)}$	$\gamma^{(1.1)}$	$\gamma^{(1.2)}$	$\gamma_{\text{exp.}}$
Li (Z=3)	0.470	0.482	0.429	0.311	0.126	1.002
Na (Z=11)	0.679	0.697	0.620	0.449	0.183	0.835
K (Z=19)	1.044	1.072	0.954	0.690	0.281	1.121
Rb (Z=37)	1.201	1.233	1.097	0.794	0.323	1.384
Cs (Z=55)	1.384	1.420	1.264	0.915	0.373	1.837
Cu (Z=29)	0.313	0.321	0.286	0.207	0.084	0.381
Ag (Z=47)	0.391	0.401	0.357	0.258	0.105	0.381
Au (Z=79)	0.391	0.401	0.357	0.258	0.105	0.381
Be (Z=4)	0.313	0.321	0.286	0.207	0.084	0.119
Mg (Z=12)	0.626	0.643	0.572	0.141	0.169	0.763
Ca (Z=20)	0.940	0.965	0.859	0.622	0.253	1.551
Sr (Z=38)	1.123	1.153	1.026	0.743	0.302	2.076
Ba (Z=56)	1.227	1.260	1.121	0.811	0.330	1.551
Nb (Z=41)	0.417	0.428	0.381	0.276	0.112	4.773
Fe (Z=26)	0.391	0.401	0.357	0.258	0.105	2.863
Mn (Z=25)	0.391	0.401	0.357	0.258	0.105	2.863
Zn (Z=30)	0.470	0.482	0.429	0.311	0.126	0.334
Cd (Z=48)	0.599	0.616	0.548	0.697	0.162	0.405
Hg (Z=80)	0.626	0.643	0.572	0.414	0.169	1.193
Al (Z=13)	0.575	0.590	0.525	0.380	0.155	0.715
Ga (Z=31)	0.626	0.643	0.572	0.414	0.169	0.357
In (Z=49)	0.758	0.778	0.692	0.501	0.204	1.026
Ti (Z=22)	0.809	0.830	0.740	0.535	0.218	0.835
Sn (Z=50)	0.783	0.803	0.715	0.517	0.211	1.050
Pb (Z=82)	0.940	0.965	0.859	0.622	0.253	1.670
Bi (Z=83)	1.123	1.153	1.026	0.742	0.302	0.047
Sb (Z=51)	1.018	0.45	0.930	0.673	0.274	0.358

Table 1: Valeurs de $\gamma^{(q)}$ correspondant aux éléments métalliques, pour différentes valeurs de l'indice entropique q . La colonne γ_{exp} correspond à des valeurs expérimentales et Z représente le nombre de charges.

7.3 Susceptibilité magnétique

Dans cette section, nous allons examiner l'effet de la non-extensivité sur la susceptibilité magnétique. En présence d'un champ magnétique B parallèle à l'axe z , apparaît une magnétisation M_z . Elle est donnée par

$$M_z = -\mu_B(n_+ - n_-) \quad (7.13)$$

où μ_B est le magnéton de Bohr et n_+ et n_- représentent, respectivement, les densités des électrons avec un spin "up" et "down". La densité des niveaux s'écrit alors

$$g_{\pm}(E) = \frac{1}{2}g(E \mp \mu_B B) \quad (7.14)$$

où

$$n_{\pm} = \int_0^{+\infty} g_{\pm}(E) f^{(q)}(E) dE \quad (7.15)$$

En remarquant que $\mu_B B \ll E_F$, la densité d'états (7.14) peut être développée comme suit

$$g_{\pm}(E) = \frac{1}{2}g(E) \mp \frac{1}{2}\mu_B B \frac{\partial g}{\partial E} \quad (7.16)$$

et les densités (7.15) sont alors données par

$$n_{\pm} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(E) f^{(q)}(E) dE \mp \frac{1}{2}\mu_B B \int_0^{+\infty} \frac{\partial g(E)}{\partial E} f^{(q)}(E) dE \quad (7.17)$$

En utilisant le développement (7.17), nous obtenons

$$M_z = \mu_B^2 B g(E_F) \quad (7.18)$$

La susceptibilité magnétique est alors donnée par

$$\chi = \frac{M_z}{H} \simeq \mu_0 \mu_B^2 g(E_F) \quad (7.19)$$

La relation (7.19) montre que χ n'est pas affecté par le caractère non-extensif des électrons. En effet, elle est identique à celle prédite par la statistique habituelle [61], c'est à dire lorsque les électrons sont décrits par la distribution de Fermi-Dirac standard.

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une reformulation du modèle de Sommerfeld [61], dans le contexte de la statistique non-extensive de Tsallis [17]. En supposant que les électrons de valence des métaux obéissent à la distribution de Fermi-Dirac généralisée, nous avons calculé l'énergie totale et la chaleur spécifique du système d'électrons. Nous avons alors montré que la statistique non-extensive ne brise pas la linéarité entre la chaleur spécifique et la température. Cependant, le coefficient de proportionnalité $\gamma^{(q)}$ dépend sensiblement du paramètre q . Cette dépendance nous a permis de calculer des coefficients effectifs dépendants du paramètre q . Nous avons alors comparé les valeurs de $\gamma^{(q)}$ prédites par le modèle généralisé que nous avons proposé aux valeurs expérimentales γ_{exp} dans le cas des éléments métalliques. Bien que les valeurs de $\gamma^{(q)}$ restent plus faibles que les valeurs expérimentales γ_{exp} , celles de $\gamma^{(0.9)}$ semblent être (de façon générale) en meilleur accord avec les données expérimentales. La susceptibilité magnétique a aussi été revisitée dans le cadre de la statistique non-extensive. Celle-ci n'est pas affectée par les effets non-extensifs et reste identique à celle prédite par le modèle de Sommerfeld standard.

Partie II

**Sur les structures solitaires dans les
plasmas: statistique non-extensive et
corrélation**

« Les miracles ne sont pas en contradiction avec les lois de la nature, mais avec ce que nous savons de ces lois. »

Saint Augustin

8

Onde acoustique ionique poussiéreuse en présence d'électrons non-extensifs

8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'influence du caractère non-extensif des électrons sur l'onde acoustique ionique poussiéreuse [64]-[78], [18]. Cette dernière est le mode acoustique ionique habituel modifié par la présence des grains de poussière immobiles dans le plasma. Pour ce faire, nous considérons un plasma composé d'ions fluides mobiles, de grains de poussière, chargés négativement, immobiles et d'électrons non-extensifs, de densités respectives n_i , n_d , et n_e . Nous supposons que tous les grains de poussière ont la même charge $q_d = -eZ_d$, où Z_d représente le nombre de charge.

8.2 Equations de base

La dynamique de l'onde acoustique ionique poussiéreuse est gouvernée par les équations adimensionnelles suivantes

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial (N_i V_i)}{\partial X} = 0 \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X} - \frac{\sigma}{N_i} \frac{\partial N_i}{\partial X} \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = (1 - \mu Z_d) N_e - N_i + \mu Z_d \quad (8.3)$$

où l'indice $j = e, i, d$ représente, respectivement, les électrons, les ions et les grains de poussière, $\sigma = T_i/T_e$ et $\mu = n_{d0}/n_{i0}$. L'indice "0" indique les valeurs à l'équilibre. Le potentiel électrostatique Φ , la vitesse fluide des ions V_i , et la densité ionique N_i sont normalisés à T_e/e , $C_i = (T_e/m_i)^{1/2}$ et n_{i0} , respectivement. Les variables temporelle T et spatiale X sont en unités de la période plasma $\omega_{pi}^{-1} = (m_i/4\pi n_{i0}e^2)^{1/2}$ et la longueur de Debye $\lambda_i = (T_e/4\pi n_{i0}e^2)^{1/2}$, respectivement. $q_{j=e,i} = \mp e$ représente la charge, m_j la masse, et T_j la températures. $\mu Z_d = 1 - n_{e0}/n_{i0}$ représente la fraction de charges négatives résidant sur la surface du grain de poussière. Les électrons non-extensifs sont décrits par la distribution suivante

$$f_e(v) = C_q \left\{ 1 + (q-1) \left[\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{e\phi}{T_e} \right] \right\}^{\frac{1}{q-1}} \quad (8.4)$$

La constante de normalisation s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} C_q &= n_{e0} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q})}{\Gamma(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{m_e(1-q)}{2\pi T_e}} \text{ pour } -1 < q < 1 \\ C_q &= n_{e0} \left(\frac{1+q}{2}\right) \frac{\Gamma(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \sqrt{\frac{m_e(q-1)}{2\pi T_e}} \text{ pour } q > 1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Notons que dans le cas $q < -1$, la distribution (8.4) n'est pas normalisable. Notons également que pour $q > 1$, la distribution non-extensive (8.4) exhibe une vitesse de coupure (cutoff) donnée par $v_{\max} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e} \left(\frac{e\phi}{T_e} + \frac{1}{q-1} \right)}$. En intégrant la distribution sur l'espace des vitesses, on obtient la densité électronique non-extensive, normalisée suivante

$$N_e = [1 + (q-1) \Phi]^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \quad (8.6)$$

Afin d'étudier de faibles perturbations, d'amplitude finie, de l'onde acoustique ionique poussiéreuse, nous utiliserons la technique des perturbations réductives [79]. Nous introduisons les variables suivantes $\xi = \varepsilon(X - \lambda T)$ et $\tau = \varepsilon^3 T$, où ε est un petit paramètre et λ la vitesse de phase de l'onde. Développons alors en séries de puissances les quantités N_i , V_i , et Φ comme suit

$$\begin{aligned} N_i &= 1 + \varepsilon N_i^{(1)} + \varepsilon^2 N_i^{(2)} + \varepsilon^3 N_i^{(3)} + \dots \\ V_i &= \varepsilon V_i^{(1)} + \varepsilon^2 V_i^{(2)} + \varepsilon^3 V_i^{(3)} + \dots \\ \Phi &= \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \varepsilon^3 \Phi^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (8.7)$$

En les substituant dans l'équation de Poisson (8.3) et en égalisant les termes d'ordre $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^2)$ et $O(\varepsilon^3)$, nous obtenons les relations

$$\begin{aligned}
 N_i^{(1)} &= (1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \Phi^{(1)} \\
 N_i^{(2)} &= (1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \Phi^{(2)} + \frac{1}{2} (1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \left(1 - \frac{(q-1)}{2} \right) (\Phi^{(1)})^2 \\
 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2} &= (1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \Phi^{(3)} + (1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \left(1 - \frac{(q-1)}{2} \right) \Phi^{(1)} \Phi^{(2)} \\
 &\quad + (1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \left(1 - \frac{(q-1)}{2} \right) \left(1 - \frac{3}{2} (q-1) \right) (\Phi^{(1)})^3 - N_i^{(3)} \quad (8.8)
 \end{aligned}$$

De façon similaire, en substituant les développements en séries de puissances dans (8.1) et (8.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 V_i^{(1)} &= \lambda N_i^{(1)} \\
 \Phi^{(1)} &= \lambda V_i^{(1)} - \sigma N_i^{(1)} \\
 V_i^{(2)} &= \lambda N_i^{(2)} - \lambda \left[(1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \right]^2 (\Phi^{(1)})^2 \\
 V_i^{(2)} &= \frac{1}{\lambda} \Phi^{(2)} + \frac{\sigma}{\lambda} N_i^{(2)} + \frac{\lambda}{2} \left[(1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \right]^2 (\Phi^{(1)})^2 \\
 \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \tau} &= \lambda \frac{\partial N_i^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{\partial V_i^{(3)}}{\partial \xi} - N_i^{(1)} \frac{\partial V_i^{(2)}}{\partial \xi} - V_i^{(2)} \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \xi} - N_i^{(2)} \frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \xi} - V_i^{(1)} \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \xi} \\
 &\quad - \frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \tau} - \lambda \frac{\partial V_i^{(3)}}{\partial \xi} + V_i^{(1)} \frac{\partial V_i^{(2)}}{\partial \xi} + V_i^{(2)} \frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \xi} + N_i^{(1)} V_i^{(1)} \frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \xi} - \lambda N_i^{(2)} \frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \xi} \\
 &\quad - \lambda N_i^{(1)} \frac{\partial V_i^{(2)}}{\partial \xi} + N_i^{(2)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi} + N_i^{(1)} \frac{\Phi^{(2)}}{\partial \xi} + \sigma \frac{\partial N_i^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial \xi} = 0 \quad (8.9)
 \end{aligned}$$

En utilisant (8.8) et (8.9), nous obtenons l'expression de la vitesse de phase

$$\lambda = \sqrt{\sigma + \frac{1}{(1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right)}} \quad (8.10)$$

Notons que dans le cas $q \rightarrow 1$, la relation (8.10) se réduit à la vitesse de phase linéaire bien connue dans le cas des électrons maxwelliens. La dépendance de la vitesse de phase (8.10) en fonction de σ et μZ_d peut être tracée pour différentes valeurs de q . L'expression (8.10) indique que la vitesse de phase λ augmente avec le rapport des températures $\sigma = T_i/T_e$. De façon similaire, une augmentation de μZ_d ($n_{e0} \rightarrow 0$) engendre une augmentation de λ . Ceci peut être attribué au fait que la déplétion des électrons favorise la propagation des ondes. Par ailleurs, une augmentation de q produit un décalage de la vitesse de phase λ vers les valeurs inférieures. En utilisant les équations (8.8), (8.9), et (8.10), nous obtenons

$$\left[\frac{3\lambda^2}{(\lambda^2 - \sigma)^2} - \left(1 - \frac{(q-1)}{2} \right) \right] \Phi^2 = \gamma (\Phi^{(1)})^2 \quad (8.11)$$

Comme $\Phi^{(1)} \neq 0$, il s'en suit que $|\gamma| \sim O(\varepsilon)$. En utilisant toutes les relations de premier et second ordre, et en négligeant le terme d'ordre supérieur $\gamma \partial_\xi (\Phi^{(1)} \Phi^{(2)})$, nous obtenons l'équation de Korteweg-de Vires généralisée suivante (avec $\Psi \equiv \Phi^{(1)}$)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + A \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + B \Psi^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + C \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (8.12)$$

où

$$A = \left[2\lambda^2 R^2 + R - \frac{2}{R} R_2 \right] / (\lambda R) \quad (8.13)$$

$$B = \left[2\lambda^2 R R_2 + 4\lambda R R_1 + \lambda^2 R^3 + R_2 - \frac{6}{R} R_2 \left(1 - \frac{3}{2} (q-1) \right) \right] / (2\lambda R) \quad (8.14)$$

$$C = (2\lambda R^2)^{-1} \quad (8.15)$$

$$R = (1 - \mu Z_d) \left(1 + \frac{(q-1)}{2} \right) \quad (8.16)$$

$$R_1 = \lambda R_2 - \lambda R^2 \quad (8.17)$$

$$R_2 = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{(q-1)}{2} \right) \quad (8.18)$$

En transformant les variables indépendantes (ξ, τ) en $\eta = \xi - U_0 \tau$, nous obtenons, dans le cas stationnaire, une équation différentielle ordinaire du second ordre en $\Psi = \Phi^{(1)}(\xi)$. Une première intégration donne

$$C \frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} + \frac{B}{3} \Psi^3 + \frac{A}{2} \Psi^2 - U_0 \Psi = 0 \quad (8.19)$$

où nous avons imposé les conditions aux limites $\Psi \rightarrow 0$ et $d^2 \Psi / d\eta^2 \rightarrow 0$ pour $\eta \rightarrow +\infty$. En multipliant les deux membres de (8.19) par $d\Psi/d\eta$ et en intégrant, nous obtenons la quadrature suivante

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{d\eta} \right)^2 + V(\Psi) = 0 \quad (8.20)$$

où le potentiel de Sagdeev est donné par [80]

$$V(\Psi) = -\frac{U_0}{2C} \Psi^2 + \frac{A}{6C} \Psi^3 + \frac{B}{12C} \Psi^4 \quad (8.21)$$

L'équation (8.21) peut être perçue comme l'énergie totale d'une particule de masse unité, de vitesse $d\Psi/d\eta$ et de position Ψ , oscillant dans potentiel $V(\Psi)$. Les solutions en double-couches de (8.21) existent si (i) $V(0) = V(\Psi_m) = 0$; (ii) $(dV/d\Psi)_{\Psi=0} = (dV/d\Psi)_{\Psi=\Psi_m} = 0$; et $(d^2V/d\Psi^2)_{\Psi=0, \Psi_m} < 0$, où 0 et Ψ_m sont deux extremums du pseudo-potentiel $V(\Psi)$. En appliquant ces conditions, nous obtenons $U_0 = -B\Psi_m^2/6$ et $\Psi_m = -A/B$. Le potentiel de Sagdeev $V(\Psi)$ peut alors être réécrit sous la forme

$$V(\Psi) = \frac{B}{12C} \Psi^2 (\Psi_m - \Psi)^2 \quad (8.22)$$

Dans ce cas, les solutions en double-couches de l'équation (8.21) sont données par

$$\Psi = \Phi^{(1)} = \frac{\Psi_m}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{2\eta}{\Delta}\right) \right] \quad (8.23)$$

où $\Delta = 4\sqrt{-6C/B}/|\Psi_m|$ représente la largeur de la double-couche, à condition que $B < 0$ (notons en effet que C est toujours positif). Il est évident qu'il existe des double-couches compressives (raréfactives) si $A/B < 0$ ($A/B > 0$).

8.3 Résultats numériques

Nous avons procédé à une investigation numérique en considérant un large domaine de paramètres et nous avons trouvé que A/B peut être aussi bien positif que négatif, en fonction du paramètre non-extensif q et de la fraction de charge des grains de poussière μZ_d . Le potentiel électrostatique exhibe des structures en double-couches aussi bien compressives que raréfactives, comme le montre la Figure 10. Celle-ci montre la variation de Ψ_m en fonction de la fraction de charge des grains de poussière μZ_d pour différentes valeurs de $q = 0.5, 0.6, \text{ et } 0.7$

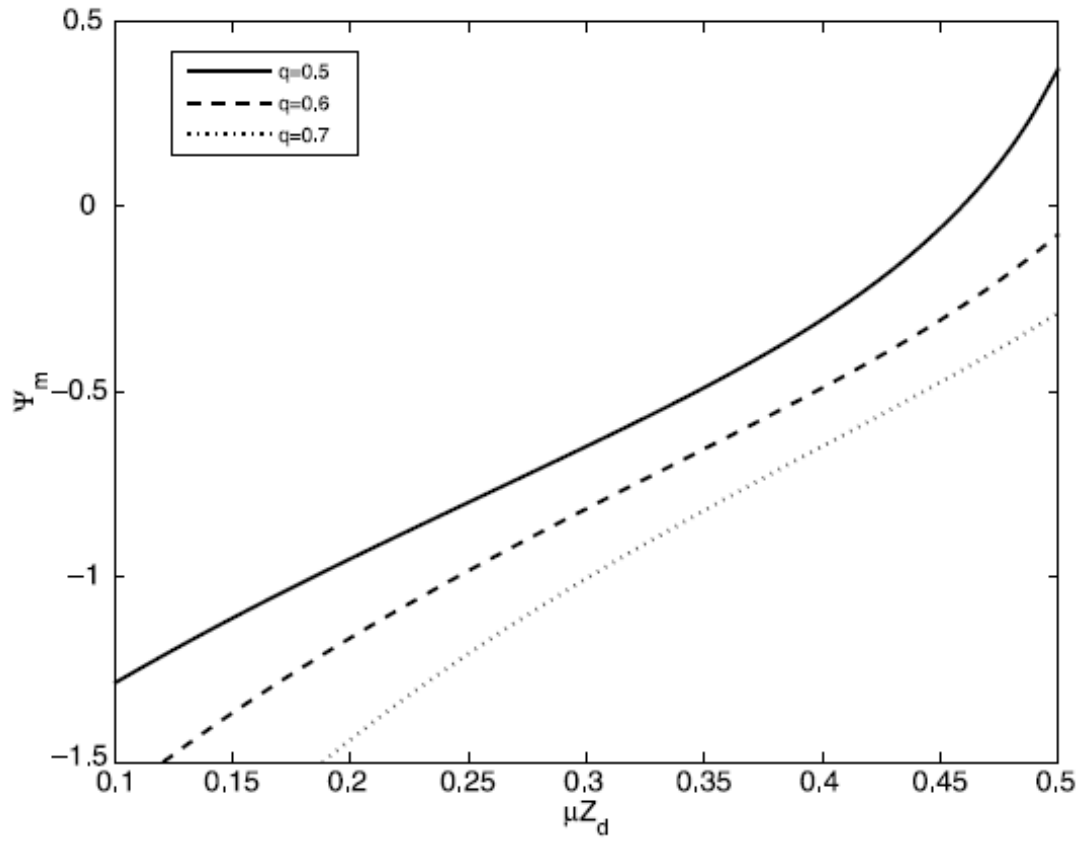


Figure 10 : Tracé de Ψ_m en fonction de μZ_d , pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q .

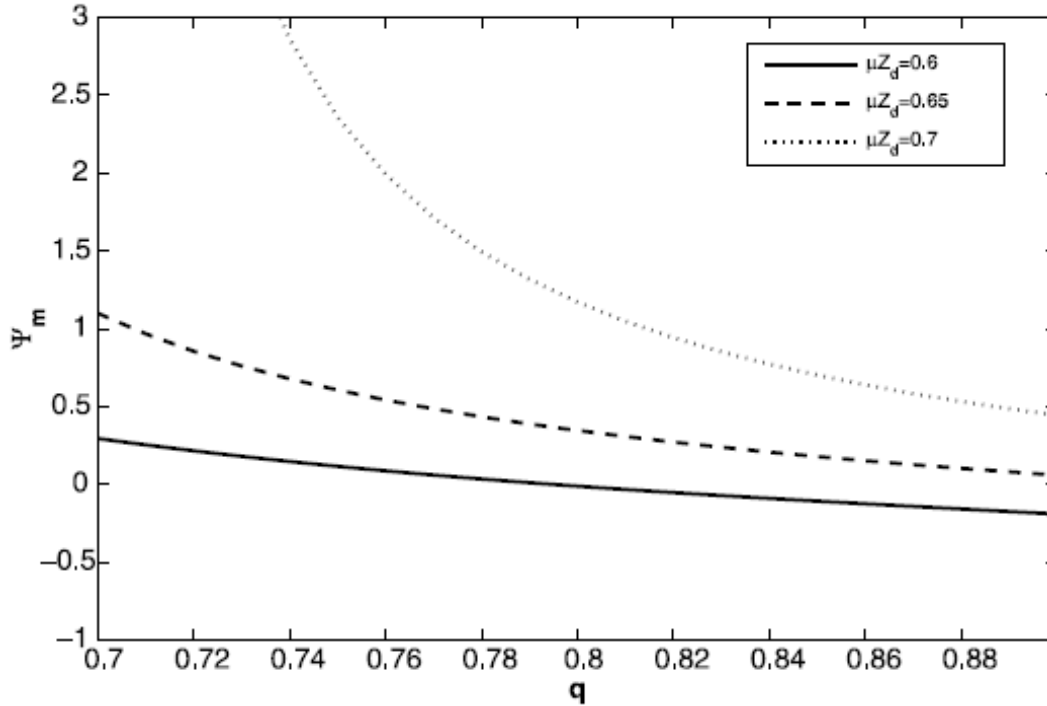


Figure 11 : Tracé de Ψ_m en fonction du paramètre non-extensif q , pour différentes valeurs de μZ_d .

La figure 11 montre que lorsque μZ_d augmente, l'amplitude Ψ_m augmente et devient positive au-delà d'une valeur critique ($A = 0$) donnée par

$$(\mu Z_d)_{\text{cr}} = 1 + \frac{3 - \sqrt{9 + 8\sigma(1 - (q - 1)/2)}}{4\sigma(1 + (q - 1)/2)} \quad (8.24)$$

La valeur critique $(\mu Z_d)_{\text{cr}}$ diminue lorsque q augmente, i.e, lorsque le caractère non-extensif des électrons dans le plasma devient important. La Figure 11 indique que Ψ_m diminue lorsque $q \rightarrow 1$ (*les électrons évoluent vers leur équilibre Maxwellien*) pour finalement devenir négative. La décroissance de Ψ_m est moins rapide à mesure que la fraction de la charge négative des grains augmente.

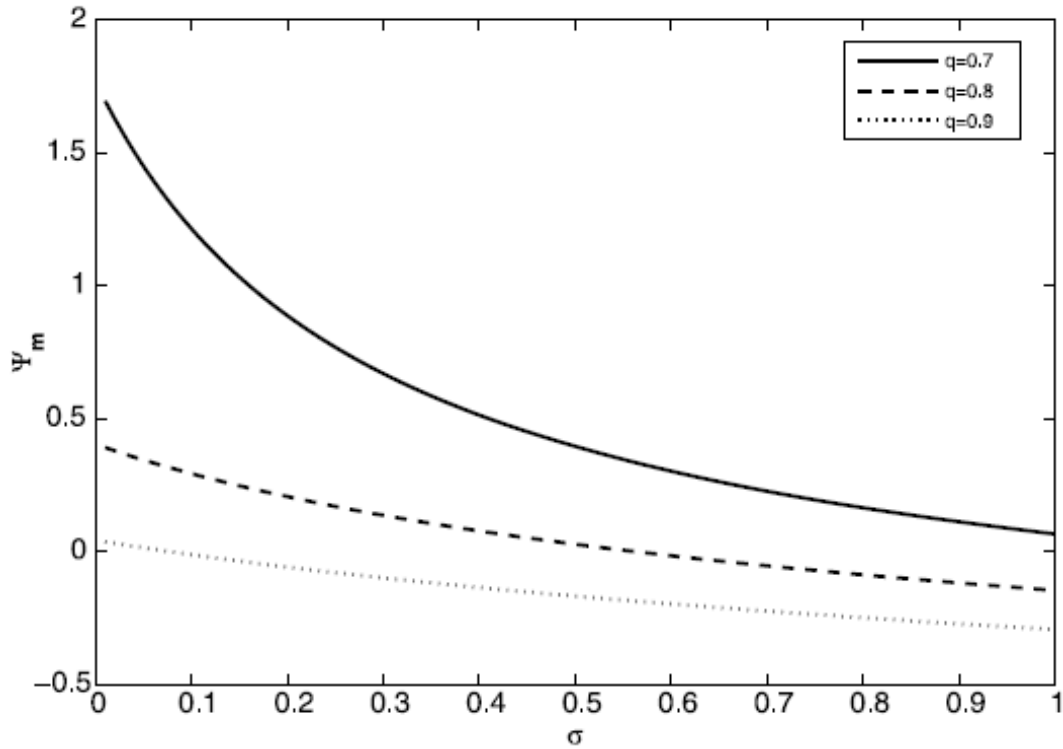


Figure 12 : Tracé de Ψ_m en fonction du rapport σ , pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q .

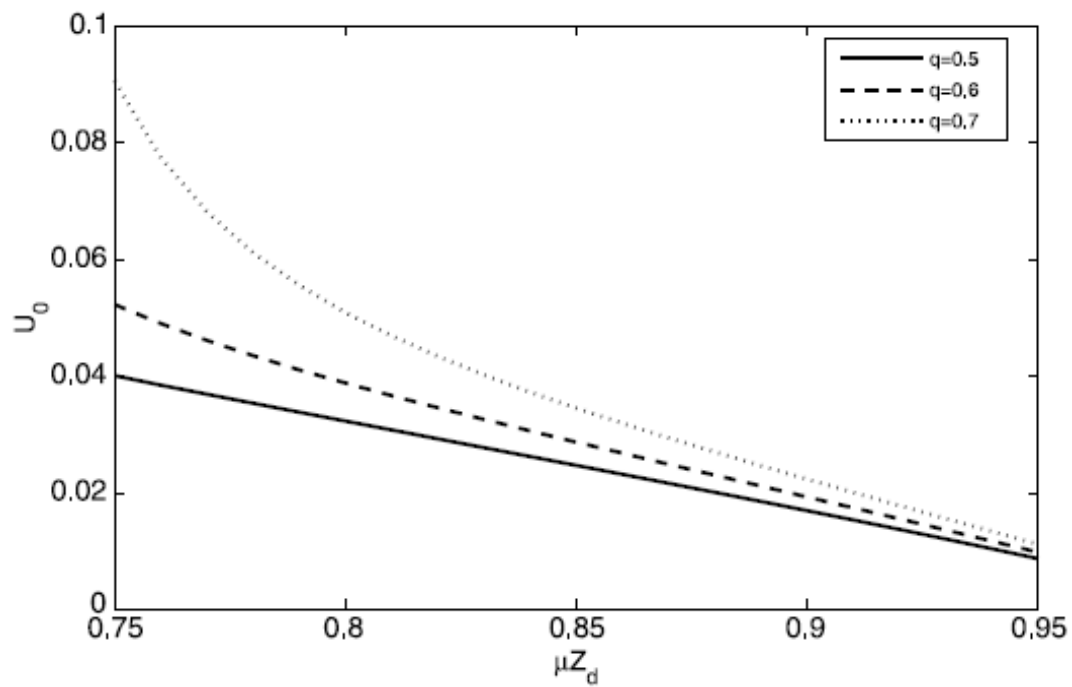


Figure 13 : Tracé de U_0 en fonction de μZ_d , pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q .

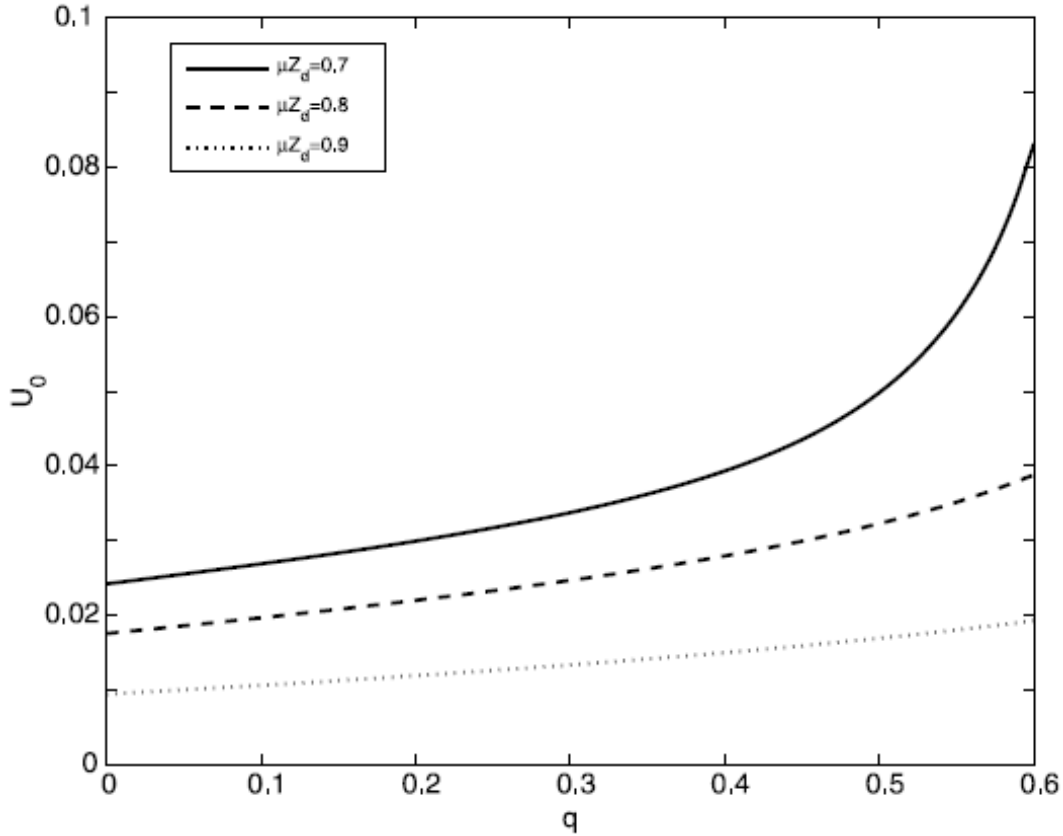


Figure 14 : Tracé de U_0 en fonction du paramètre non-extensif q , pour différentes valeurs de μZ_d .

La figure 12 montre la variation de Ψ_m en fonction de σ pour différentes valeurs de $q = 0.7, 0.8,$ et 0.9 . Lorsque σ augmente, l'amplitude Ψ_m diminue et devient négative au-delà d'une valeur critique de σ . Cette valeur critique est décalée vers des valeurs plus élevées lorsque q diminue (pour $q = 0.9 \rightarrow \sigma_{cr} \simeq 0.02$, et pour $q = 0.8 \rightarrow \sigma_{cr} \simeq 0.6$). Pour $q > 0.9$, Ψ_m est négative sur tout le domaine des valeurs admissibles de σ . Il en découle que la nature (*compressive* ou *raréactive*) des structures dépend sensiblement du paramètre non-extensif q , du rapport des températures σ , et de la fraction de la charge négative μZ_d . De plus, une variation de U_0 avec μZ_d pour différentes valeur de $q = 0.5, 0.6,$ et 0.7 est montrée dans la Figure 13. Nous pouvons constater que lorsque μZ_d augmente, U_0 diminue et tend vers zéro lorsque $\mu Z_d \rightarrow 1$. Une augmentation de q de 0.5 à 0.7 (voir Fig. 14) induit un décalage de U_0 vers des valeurs plus élevées. Il est évident à partir des résultats de la figure 14, que le processus de thermalisation ($q \rightarrow 1$) augmente U_0 . Cette augmentation est plus significative à mesure que μZ_d diminue.

9

Onde acoustique ionique quantique : effet de l'échange et de la corrélation

9.1 Introduction

Durant ces dernières décades, un intérêt particulier a été accordé à la dynamique des plasmas et des gaz où les effets quantiques ne peuvent être négligés. Il est bien connu que les plasmas quantiques existent aussi bien dans les environnements naturels que dans les dispositifs de laboratoire. Dans les milieux astrophysiques, les plasmas quantiques peuvent, à titre d'exemple, exister dans les objets compacts [81]. Dans les laboratoires, les plasmas quantiques peuvent exister dans les semi- conducteurs, les systèmes micro- mécaniques [82], les expériences de l'interaction laser intense- matière...etc [83]. Des applications pratiques sont apparues récemment à cause de la miniaturisation des composants électroniques. A de telles infimes échelles spatiales, la longueur d'onde de de Broglie des porteurs de charge devient comparable aux dimensions du système et l'effet tunnel ne peut donc être négligé. Eu égard à toutes ces applications, un intérêt considérable a été accordé à l'étude de la dynamique des plasmas quantiques (expansion d'un gaz d'électrons quantiques dans le vide [84], instabilités dans les plasmas quantiques [85],[86], onde acoustique ionique quantique [22]...etc). Haas *et al.* [22] ont été les premiers à étudier l'analogie ou contrepartie quantique des ondes acoustiques ioniques. Partant du modèle quantique hydrodynamique (QHDM), ils ont identifié un paramètre adimensionnel mesurant les effets de la diffraction quantique. Il a alors été démontré que les effets quantiques peuvent avoir une influence significative sur les propriétés des ondes solitaires [22], [23]. Pour compléter toutes ces études [81]- [95], on se propose [21] de re- examiner l'onde acoustique ionique quantique en introduisant l'effet

d'une autre contribution quantique: le phénomène d'échange et de corrélation introduit par Dirac [19], [20]. Typiquement, lorsque les effets quantiques sont importants, le phénomène d'échange et de corrélation ne peut être négligé. Les potentiels d'échange et de corrélation sont traités dans le cadre général de la théorie de la densité fonctionnelle (DFT) [101]. Dans les puits de potentiel, par exemple, il est bien connu que l'interaction entre les électrons peut être séparée en un terme de Hartree dû au potentiel électrostatique de la densité totale des électrons et un terme d'échange et de corrélation [94]. Dans ce chapitre, les potentiels d'échange et de corrélation V_{xc} que nous utilisons sont basés sur l'approximation adiabatique de la densité locale (adiabatic local-density approximation, ALDA) [94], une version spécifique de l'approximation de la densité locale (local-density approximation, LDA). Le potentiel d'échange et de corrélation V_{xc} peut être décrit comme fonction de la densité électronique [19],[20]. Hohenberg et Kohn [19] et Kohn et Sham [20] ont montré que la distribution de la densité d'un gaz d'électrons en interaction soumis à un champ externe, peut être obtenue par une équation de type de Schrödinger à un corps, contenant un potentiel d'échange et de corrélation, en plus du terme habituel de Hartree et du potentiel externe [94].

9.2 Equations de base

Considérons un plasma quantique à deux composantes, constitué d'ions et d'électrons. Les équations de base du modèle hydrodynamique quantique unidimensionnel gouvernant l'évolution des densités électroniques et ioniques $n_e(x, t)$ et $n_i(x, t)$ ainsi que les vitesses moyennes $u_e(x, t)$ et $u_i(x, t)$ des électrons et des ions, sont données par

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e u_e)}{\partial x} = 0 \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0 \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{e}{m_e} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{m_e n_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_e^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_e} / \partial x^2}{\sqrt{n_e}} \right) - \frac{\partial V_{eff}}{\partial x} \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_i^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_i} / \partial x^2}{\sqrt{n_i}} \right) \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon} (n_e - n_i) \quad (9.5)$$

Ici, ϵ est la permittivité effective du milieu, m_e et m_i représentent respectivement les masses des électrons et des ions, et e la charge élémentaire. Les équations (9.1) et (9.2) représentent

les équations de continuité pour les électrons et les ions, respectivement. Les équations (9.3) et (9.4) traduisent la conservation de la quantité de mouvement des électrons et des ions. L'équation (9.5) est l'équation de Poisson habituelle. Le dernier terme de l'équation (1.3) est la contribution du potentiel effectif V_{eff} . Il est donné par la somme du potentiel de Hartree habituel et le potentiel d'échange et de corrélation V_{xc} des électrons, donné par $V_{xc} = 0.985 (e^2/\epsilon) n_e^{3/2} \left[1 + 0.034/a_B^* n_e^{1/3} \ln \left(1 + 18.37 a_B^* n_e^{1/3} \right) \right]$ [19], [20]. Ce dernier est habituellement simplifié sous la forme $V_{xc} = -1.6 \frac{e^2}{\epsilon} n_e^{1/3} + 5.65 \frac{\hbar^2}{m} n_e^{2/3}$, puisque $18.37 a_B^* n_e^{1/3} \ll 1$ [19], [20]. La pression quantique (négligée pour les ions) est obtenue pour les électrons en considérant des électrons obéissant à l'équation d'état du gaz de Fermi unidimensionnel de température nulle

$$p_e = \frac{m_e v_{Fe}^2}{3n_0^2} n_e^3 \quad (9.6)$$

où n_0 est la densité à l'équilibre des électrons et des ions, et v_{Fe} la vitesse de Fermi, reliée à la température de Fermi par $m_e v_{Fe}^2/2 = k_B T_{Fe}$. En introduisant les variables sans dimension suivantes

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \omega_{pi} x / c_i, & \bar{t} &= \omega_{pi} t \\ \bar{n}_e &= n_e / n_0, & \bar{n}_i &= n_i / n_0 \\ \bar{u}_e &= u_e / C_s, & \bar{u}_i &= u_i / C_s, & \bar{\phi} &= e\phi / 2k_B T_{Fe} \\ \bar{n}_e &= n_e / n_0, & \bar{n}_i &= n_i / n_0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

où $\omega_{pe} = (\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon})^{1/2}$, $\omega_{pi} = (\frac{n_0 e^2}{m_i \epsilon})^{1/2}$ et $C_s = (\frac{2k_B T_{Fe}}{m_i})^{1/2}$, les équations (9.3) et (9.4) peuvent être réécrites sous la forme

$$\frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - n_e \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_e} / \partial x^2}{\sqrt{n_e}} \right) - \lambda \frac{\partial n_e^{2/3}}{\partial x} + \gamma \frac{\partial n_e^{1/3}}{\partial x} \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{m_e}{m_i} \frac{H^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_i} / \partial x^2}{\sqrt{n_i}} \right) \quad (9.9)$$

où [21]

$$H \equiv \frac{\hbar \omega_{pe}}{2k_B T_{Fe}}, \quad \lambda \equiv \frac{5.65 \hbar^2 n_0^{2/3}}{2k_B T_{Fe} m_e}, \quad \gamma \equiv 1.6 \frac{e^2 n_0^{1/3}}{2\epsilon k_B T_{Fe}} \quad (9.10)$$

Notons que les paramètres (9.10) sont sans dimension. H représente la diffraction quantique. Les paramètres λ et γ sont de nouveaux paramètres qui trouvent leur origine dans le potentiel d'échange et de corrélation. Pour $m_e/m_i \ll 1$, le membre de gauche de l'équation (9.8) s'annule et nous avons alors

$$\phi = -\frac{1}{2} + \frac{n_e^2}{2} - \frac{H^2}{2} \frac{1}{\sqrt{n_e}} \frac{\partial^2 \sqrt{n_e}}{\partial x^2} - \lambda + \lambda n_e^{2/3} + \gamma - \gamma n_e^{1/3} \quad (9.11)$$

Pour obtenir l'équation (9.11), nous avons intégré (9.8) en utilisant les conditions aux limites $n_e = 1$ et $\phi = 0$ à l'infini. En utilisant (9.8) et en négligeant m_e/m_i , les équations (9.2), (9.4) et (9.5) deviennent

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0 \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (9.13)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_e - n_i \quad (9.14)$$

Les équations (9.11)-(9.14) forment un modèle réduit décrivant l'onde acoustique ionique quantique, tenant compte du potentiel de Böhm ainsi que du potentiel d'échange et de corrélation. Notons que les effets d'échange et de corrélation n'apparaissent que dans (9.11). Lorsque ces derniers sont négligés ($\lambda, \gamma \rightarrow 0$), le modèle se réduit au système d'équations habituel obtenu par Haas *et al.* [22]. Notons qu'après la résolution de ces dernières équations, la vitesse fluide des électrons est obtenue à partir de l'équation de continuité des électrons (9.1).

9.3 Influence de l'échange et de la corrélation sur les solitons

Etudions à présent l'influence du potentiel d'échange et de corrélation des électrons sur l'existence des structures cohérentes (solitons). A l'instar du chapitre précédent, nous introduisons les nouvelles variables (dites variables étirées) [79]

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - U_0 t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t \quad (9.15)$$

où U_0 est la vitesse de phase linéaire. En utilisant la méthode des perturbations réductives [79], nous développons les variables indépendantes en séries de puissances

$$n_i = 1 + \varepsilon n_{i1} + \varepsilon^2 n_{i2} + \dots \quad (9.16)$$

$$u_i = \varepsilon u_{i1} + \varepsilon^2 u_{i2} + \dots \quad (9.17)$$

$$n_e = 1 + \varepsilon n_{e1} + \varepsilon^2 n_{e2} + \dots \quad (9.18)$$

Notons que le potentiel ϕ dépend uniquement de la densité électronique n_e . En utilisant (9.16), nous obtenons

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 = \varepsilon \left\{ n_{e1} - \frac{H^2}{4} \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \lambda n_{e1} - \frac{\gamma}{3} n_{e1} \right\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ n_{e1}^2 + 2n_{e2} + \frac{H^2}{2} \left[n_{e1} \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 n_{e2}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial n_{e1}}{\partial x} \right)^2 \right] + \lambda \left(-\frac{2}{9} n_{e1}^2 + \frac{4}{3} n_{e2} \right) + \gamma \left(\frac{2}{9} n_{e1}^2 - \frac{2}{3} n_{e2} \right) \right\} \quad (9.19)$$

En substituant les nouvelles variables (9.15) et les développements (9.16)-(9.18) dans (9.13)-(9.14), nous obtenons après identification et après élimination des termes de second ordre, l'équation suivante [21]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{U_0}{2} \left(U_0^2 - \frac{H^2}{4} \right) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2U_0} \left(2 + \frac{1}{U_0^2} \right) \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0 \quad (9.20)$$

où nous avons introduit le paramètre $\eta = 2\lambda - \gamma$ et adopté la notation $\Psi = \phi_1$. La vitesse de phase s'écrit en fonction de η sous la forme

$$U_0 = \sqrt{1 + \eta/3} \quad (9.21)$$

L'équation (9.20) est une équation de type Korteweg-de Vries (K- dV) déformée, affectée à la fois par le terme de diffraction quantique et par le potentiel d'échange et de corrélation des électrons. Ces derniers se reflètent dans la vitesse de phase ainsi que dans le terme de dispersion non-linéaire. Notons que lorsque les effets d'échange et de corrélation sont négligés ($\eta \rightarrow 0$), l'équation (9.20) se réduit à celle déjà obtenue par Haas *et al.* [22]. Nous nous intéressons maintenant aux solutions stationnaires de l'équation (9.20) en introduisant les variables $X = \xi - MT$ et $T = \tau$, où M est la vitesse de l'onde normalisée par rapport à C_s . La solution stationnaire est donnée analytiquement par

$$\Psi = \Psi_0 \operatorname{sech} h^2 \left(\frac{X}{\Delta} \right) \quad (9.22)$$

où

$$\Psi_0 = \frac{3M}{\left(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{2U_0^3} \right)}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{2U_0^3 - U_0 H^2/2}{M}} \quad (9.23)$$

Les expressions (9.23) exhibent d'une manière simple l'influence du paramètre η sur l'amplitude Ψ_0 et la largeur Δ du soliton acoustique ionique quantique. Les effets de l'échange et de la corrélation, traduits par le paramètre η , modifient aussi bien l'amplitude et la largeur du soliton alors que la diffraction quantique H affecte uniquement sa largeur. En considérant des valeurs type de densité électronique et de température de plasmas quantiques, nous pouvons connaître l'ordre de grandeur du paramètre η .

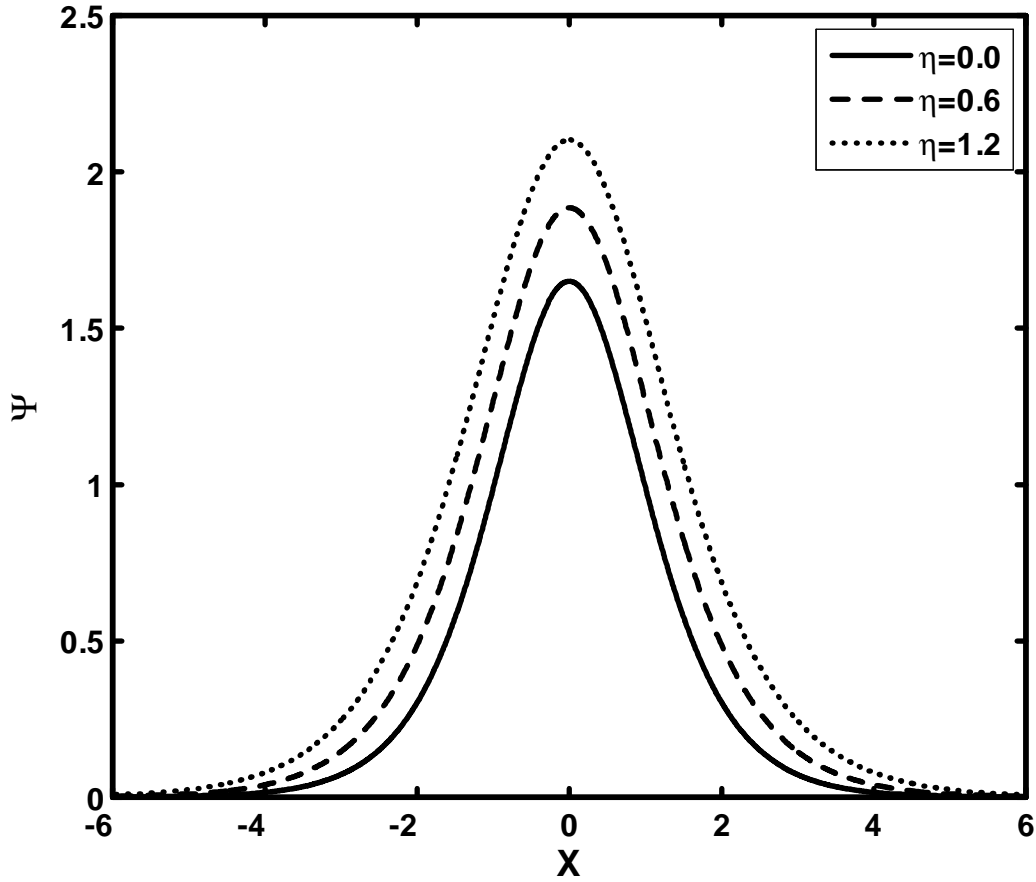


Figure 15 : Profil spatial de Ψ pour différentes valeurs du paramètre η .

La figure 15 montre le profil spatial du potentiel de l'onde acoustique ionique quantique solitaire Ψ pour différentes valeurs du paramètre η . L'amplitude et la largeur du soliton, Ψ_0 et Δ , augmentent à mesure que le paramètre η augmente. Analysons à présent, de façon succincte, l'effet de l'échange et de la corrélation sur les propriétés des ondes solitaires en régime arbitraire. Pour ce faire, supposons que toutes les quantités dépendent uniquement d'un paramètre

$$\xi = x - Mt \quad (9.24)$$

où M est une constante sans dimension. Nous obtenons à partir des équations (9.13) et (9.14)

$$J = n_i (u_i - M) \quad (9.25)$$

$$E = \frac{1}{2} (u_i - M)^2 + \phi \quad (9.26)$$

Après élimination de la vitesse, la densité ionique est donnée par

$$n_i = \frac{|J|}{\sqrt{2(E - \phi)}} \quad (9.27)$$

Notons que les expressions (9.25)-(9.27) ne sont pas affectées par la prise en compte ou non du potentiel d'échange et de corrélation. Ces expressions sont identiques à celles obtenues par Haas *et al.* [22]. Posons

$$n_e = A^2 \quad (9.28)$$

Nous obtenons alors à partir des équations (9.11), (9.14) et (9.27)

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = \frac{A}{H^2} (-1 + A^4 - 2\phi - 2\lambda + 2\lambda A^{4/3} + 2\gamma - 2\gamma A^{2/3}) \quad (9.29)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = A^2 - \frac{|J|}{\sqrt{2(E - \phi)}} \quad (9.30)$$

Notons que seule l'équation (9.29), reliée à la densité électronique, est affectée par le potentiel d'échange et de corrélation. Notons également que dans le cas $\lambda = \gamma = 0$, le système d'équations (9.29)-(9.30) se réduit aux expressions données par Haas *et al.* [22]. Multiplions les deux membres de l'Eq. (9.30) par $d\phi/d\xi$ et intégrons une fois. Nous obtenons la quadrature suivante

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + V(\phi) = 0 \quad (9.31)$$

où le pseudo-potentiel [80] est donné par

$$V(\phi) = - \int_0^\phi A^2 d\phi - J^2 \left(1 - \frac{2\phi}{J^2} \right)^{1/2} + J^2 \quad (9.32)$$

Afin d'étudier les conditions d'existence des ondes solitaires, considérons quelques aspects analytiques de (9.29). En multipliant les deux membres par $dA/d\xi$, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dn_e}{d\xi} \right)^2 + W(n_e) = 0 \quad (9.33)$$

où

$$W(n_e) = \frac{1}{H^2} \left\{ [2 + 2J^2 + 4\lambda n_e^{2/3}] - \frac{2}{3} n_e^{7/2} + \frac{2J^2}{\sqrt{n_e}} - \frac{12}{5} \lambda n_e^{13/6} - 4\gamma \sqrt{n_e} + 3\gamma n_e^{11/6} \right\} \quad (9.34)$$

Afin d'obtenir la forme explicite du pseudo-potentiel (9.34), nous avons supposé la neutralité de la charge électrique, justifiée par la nature "basses fréquences" des ondes acoustiques ioniques. L'équation (9.33) admet des solutions en ondes solitaires si

$$\left(\frac{d^2W}{dn_e^2}\right)_{n_e=1} < 0 \quad (9.35)$$

La nature de l'onde solitaire peut être déterminée en développant le pseudo-potentiel (9.34) au troisième ordre en n_e . Ce développement au voisinage de $n_e = 1$, nous donne la valeur de J pour laquelle la seconde dérivée change de signe

$$J^2 = -\frac{1}{2} - \lambda + \frac{35}{18} + \frac{91}{45}\lambda - \frac{\gamma}{3} - \frac{55}{54}\gamma \quad (9.36)$$

En ce point critique, la troisième dérivée est donnée par

$$\left(\frac{d^3W}{dn_e^3}\right)_{n_e=1} = \frac{1}{H^2} \left[-\frac{69}{4} - \frac{64}{9}\lambda + \frac{275}{54}\gamma \right] \quad (9.37)$$

Le signe de (9.37) détermine la nature (compressive ou raréactive) de l'onde solitaire. Pour les valeurs positives (négatives), nous aurons un puits de potentiel du côté $n_e \geq 1$ ($0 \leq n_e \leq 1$). Par conséquent, les effets d'échange et de corrélation des électrons peuvent affecter la nature de l'onde acoustique ionique quantique solitaire.

9.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé l'onde acoustique ionique quantique solitaire en considérant le potentiel d'échange et de corrélation entre les électrons [21]. En partant du modèle hydrodynamique quantique à une dimension dans lequel nous avons inclus le terme d'échange et de corrélation, nous avons obtenu un modèle dans lequel apparaissent deux nouveaux paramètres (en plus du paramètre de diffraction quantique habituel). Dans une première étape, nous avons étudié les solutions faiblement non linéaires et avons obtenu une équation de type Korteweg-de Vries déformée. Les effets d'échange et de corrélation se reflètent dans la vitesse de phase linéaire ainsi que dans le terme de dispersion. Nous avons montré que le terme d'échange et de corrélation influence l'amplitude et la largeur du soliton. Bien entendu, c'est là une correction et en tant que telle son effet est relativement petit. En régime arbitraire, nous avons montré que ce terme affecte la nature (compressive ou raréactive) des ondes solitaires. Ce travail peut être considéré comme une étape préliminaire dans l'introduction du terme d'échange et corrélation dans l'étude des structures non linéaires dans les plasmas quantiques. Il pourrait être étendu à d'autres types de structures (double-couches, ondes de choc,...etc) et à des échelles temporelles différentes

(onde acoustique poussiéreuse, onde acoustique ionique poussiéreuse, onde acoustiques électronique,...etc). Nous pouvons nous attendre à ce que la présence de ce terme se manifeste également par une modification des caractéristiques et de la nature de telles structures.

Partie III

Sur les statistiques alternatives: de
l'entropie de Kaniadakis aux
superstatistiques de Beck-Cohen

« La lumière est-elle faite d'ondes ou de particules? - C'est exactement cela! » répliqua le Chapelier fou. Quelque peu irritée, Alice demanda un peu plus fort: « En voilà une réponse! Je vais répéter ma question: la lumière est-elle particules ou ondes ? - Très juste ! » dit le Chapelier fou.

Lewis Carroll

10

Statistique de Kaniadakis

10.1 Introduction

Quoique la généralisation de la statistique BGS proposée par Tsallis semble être la plus prometteuse -du moins, jusqu'à maintenant-, plusieurs autres théories alternatives ont été, récemment, introduites. Ces dernières peuvent se montrer avantageuses pour l'étude de certaines situations très particulières et ne sont pas -pour le moment- construites sur des bases aussi solides que la statistique de Tsallis. En effet, les conditions de stabilité, l'accord avec les principes de la thermodynamique, ainsi que d'autres conditions nécessaires -ou du moins intéressantes à préserver- à une bonne approche théorique des systèmes physiques n'ont pas été démontrés pour la plupart de ces théories alternatives. Nous discuterons ici l'une d'entre elles qui a connu le plus de validation, sur ce plan, à savoir la *statistique de Kaniadakis* [27]. Cette dernière a été proposée en 2001, soit 13 ans après la statistique de Tsallis, dans le but de modéliser le comportement de certains systèmes relativistes, pour lesquels les distributions de Tsallis ne donnaient qu'une approximation, parfois incorrecte. Le formalisme est similaire à celui proposé par Tsallis dans ce sens qu'il repose également sur une généralisation de l'entropie BGS. La généralisation proposée par Kaniadakis s'écrit [27]

$$S_\kappa = \langle \ln_\kappa(p_i) \rangle \quad \text{où} \quad \ln_\kappa(x) = \frac{x^\kappa - x^{-\kappa}}{2\kappa} \quad (10.1)$$

dont la maximisation donne la généralisation de l'exponentielle suivante

$$\exp_\kappa(x) = \left(\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x \right)^{1/\kappa} \quad (10.2)$$

La généralisation se fait par l'intermédiaire du paramètre réel κ ($0 \leq \kappa \leq 1$)⁽¹⁾. Dans la limite $\kappa \rightarrow 0$, l'entropie BGS est retrouvée et l'équation (10.2) se réduit à l'exponentielle ordinaire. La procédure de maximisation de l'entropie dans le cas de l'ensemble canonique, décrite en détails dans les chapitres précédents, appliquée à l'entropie de Kaniadakis (10.1) mène à la généralisation de la distribution classique de Maxwell-Boltzmann:

$$f(E_i) = \frac{\exp_{\kappa}(-\beta E_i)}{Z_{\kappa}} \quad (10.3)$$

où $\exp_{\kappa}(x)$ est donnée par (10.2) et Z_{κ} est la généralisation de la fonction de partition, qui normalise la distribution (10.3). De la même manière, une généralisation des distributions quantiques donne le résultat suivant

$$f(E_i) = \frac{1}{\exp_{\kappa}(\beta(E_i - \mu)) \pm 1} \quad (10.4)$$

où μ représente le potentiel chimique. Le signe "+" correspond à la distribution de Fermi-Dirac et le signe "-" à la distribution de Bose-Einstein. Le formalisme de Kaniadakis, résumé par la relation maîtresse (10.1) et les distributions (10.3)-(10.4), a été appliqué avec succès dans l'étude de systèmes divers et variés, tels que les rayons cosmiques [102], les plasmas à quark-gluon [103], l'interaction d'atomes et de photons cosmique [104],...etc. Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier le comportement de la statistique de Kaniadakis, dans le cas d'un phénomène d'une importance historique: *le rayonnement du corps noir*.

10.2 Loi de Planck revisitée

La loi de Planck définit la distribution de luminance énergétique, monochromatique du rayonnement thermique du corps noir en fonction de la température thermodynamique. Elle peut être obtenue en associant la distribution de Bose-Einstein aux photons. Elle repose en effet à la fois sur l'électromagnétisme classique et la physique statistique. Elle est ainsi profondément ancrée dans le formalisme BGS. Nous nous proposons de revisiter cette distribution de luminance dans le cadre de la statistique généralisée de Kaniadakis [29]. Deux raisons principales ont motivé notre étude:

La première est d'ordre expérimental. En effet, bien que la distribution de Planck usuelle ait été observée expérimentalement avec une très grande précision, dans une variété

⁽¹⁾Certains auteurs n'excluent pas les valeurs négatives de κ bien que les grandeurs thermodynamiques dépendent généralement de la valeur absolue du paramètre $|\kappa|$.

de situations, de faibles déviations ont été observées dans le rayonnement du fond diffus cosmologique (observations faites par *FIRAS spectrographer in the Cosmic Background Explorer satellite*) [105]. Une explication possible est que cette déviation s'est produite au moment de la séparation matière/radiation, due à un environnement non-extensif [105]. C'est pourquoi, la loi de Planck a été généralisée dans le cadre de la statistique de Tsallis [105]-[118], et la question a été étudiée sous différents angles. Ces études considèrent différentes méthodes d'approximations et s'intéressent à différents aspects du rayonnement du corps noir. Dans la référence [116], par exemple, il a été montré que les quantités thermodynamiques (pression, température, entropie,...etc) dépendent du paramètre de Tsallis q . Par ailleurs, en considérant un modèle simple, Wang et Méhauté [111] ont montré que l'un des coefficients d'Einstein, d'absorption et d'émission, admettait une généralisation. Cependant, la généralisation de la loi de Planck suivant le formalisme de Tsallis présente un certain nombre de problèmes et de difficultés. Tenter de contourner ces difficultés a été la seconde raison ayant motivé notre étude.

La loi de Planck généralisée selon le formalisme de Tsallis présente une coupure (cut-off) pour $q < 1$. En d'autres termes, pour une valeur donnée de q , toute une gamme de températures possibles est proscrite [105]. Cet effet, bien que ne contredisant pas les premiers principes de la thermodynamique, est assez exotique et aucune explication n'a été donnée à ce comportement. D'autre part, il a été montré que les distributions de Bose-Einstein selon Tsallis ne satisfont pas la condition Kubo-Martin-Schwinger (KMS) de la statistique quantique [119]. Ceci peut être perçu comme une anomalie de la distribution de Bose-Einstein généralisée selon le formalisme de Tsallis. Cette violation est contournée dans le cas de la distribution de Kaniadakis. En effet, il a été montré que la distribution de Bose-Einstein dans le formalisme de Kaniadakis satisfait la condition KMS [119]. La distribution (10.4) associée à un gaz de photons s'écrit sous la forme

$$f(\nu) = \frac{1}{\exp_{\kappa}(\beta h\nu) - 1} \quad (10.5)$$

Le nombre de photons dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$, et l'énergie qui leur est associée s'écrivent, respectivement, sous la forme

$$dN_{\nu} = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{\exp_{\kappa}\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (10.6)$$

$$dE_{\nu} = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{h\nu^3 d\nu}{\exp_{\kappa}\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \frac{8\pi hcV}{\lambda^5} \frac{-d\lambda}{\exp_{\kappa}\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \quad (10.7)$$

où $\lambda = c/\nu$ représente la longueur d'onde du rayonnement. L'équation (10.7) est la généralisation de la loi de Planck dans le formalisme de Kaniadakis. Dans la limite $\kappa \rightarrow 0$, la loi de Planck standard est retrouvée. Elle diffère de la généralisation établie dans le formalisme de Tsallis [105]:

$$dE_\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{h\nu^3 d\nu}{\left(1 + (q-1) \frac{h\nu}{kT}\right)^{q/(q-1)} - 1} \quad (10.8)$$

Celle-ci exhibe un cut-off pour $q < 1$. Ce comportement est contournée par la distribution (10.7).

Il serait intéressant d'étudier le comportement asymptotique de cette dernière dans le cas des basses/hautes fréquences. Lorsque la fréquence est basse ($h\nu \ll kT$), le dénominateur dans l'Eq. (10.7) peut être développé au premier ordre, et nous retrouvons la loi de *Rayleigh-Jeans*

$$dE_\nu = \frac{8\pi V}{c^3} kT \nu^2 d\nu \quad (10.9)$$

Il serait intéressant de noter que dans le cas des faibles fréquences, la dépendance vis-à-vis de κ disparaît. En effet, l'effet de la déformation de Kaniadakis est appréciable pour des valeurs élevées de la variable en question (*les trois premiers termes du développement de Taylor de $\exp_\kappa(x)$ sont identiques au développement de l'exponentielle ordinaire*). Etant donné que la fonction $\exp_\kappa(x)$ croît de façon monotone avec x , elle se réduit dans le cas des hautes fréquences ($h\nu \gg kT$) à l'expression

$$dE_\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{h\nu^3}{\exp_\kappa\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} d\nu \quad (10.10)$$

qui peut être perçue comme une généralisation de la loi de *Wien*. Dans cette limite, l'effet apporté par la statistique de Kaniadakis est appréciable. On observe, en effet, une loi en puissance au lieu d'une loi en exponentielle inhérente à la statistique BGS. Notons qu'un comportement similaire est observé pour la distribution de Tsallis pour $q > 1$, avec la correspondance $\kappa \rightarrow (q-1)$. Bien-sûr, dans la limite $\kappa \rightarrow 0$, l'Eq. (10.10) se réduit à la loi de Wien habituelle

$$dE_\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) h\nu^3 d\nu \quad (10.11)$$

La densité d'énergie peut être obtenue à partir de l'équation (10.7). Elle est donnée par

$$\rho_{\kappa}(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp_{\kappa}\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (10.12)$$

Dans ce qui va suivre, nous nous proposons d'étudier la dépendance de la densité d'énergie vis-à-vis de la fréquence du rayonnement. La figure 16 montre cette dépendance pour différentes valeurs du paramètre κ , à une température $T = 500K$.

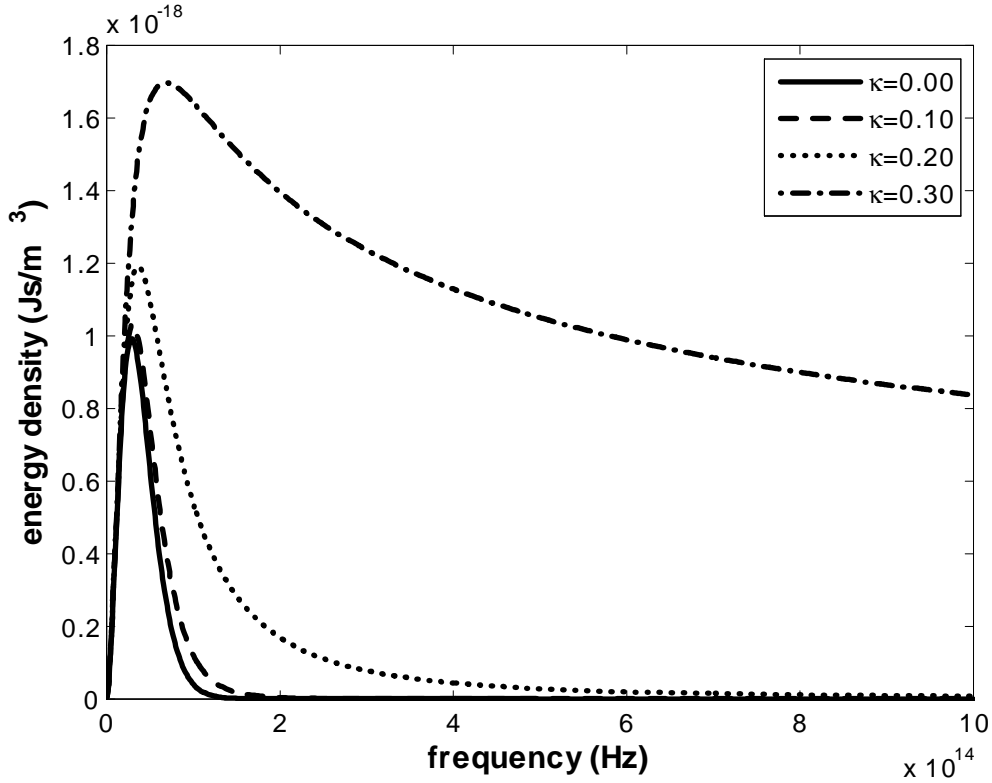


Figure 16 : Variation de la densité d'énergie en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs du paramètre de Kaniadakis κ .

Il apparaît qu'une augmentation du paramètre κ engendre une augmentation de l'énergie émise par le corps noir, particulièrement dans la gamme des hautes fréquences. Cet effet est très similaire à celui produit par la statistique de Tsallis pour $q > 1$. Cet effet est interprété dans le formalisme de Tsallis comme une conséquence des interactions à longue portée.

10.3 Les coefficients d'Einstein révisités

Considérons un modèle simple de N atomes dans une cavité. Ces atomes peuvent être dans deux états d'énergie non dégénérés E_1 et E_2 . Le nombre de photons dans la

cavité varie en fonction de l'absorption et de l'émission par les atomes, avec une fréquence ν correspondant à $E_2 - E_1 = h\nu$. Notons A_{21} la probabilité de transition spontanée de E_2 vers E_1 , $\rho_\kappa(\nu, T)B_{21}$ la probabilité d'émission stimulée de E_2 vers E_1 et $\rho_\kappa(\nu, T)B_{12}$ la probabilité d'absorption stimulée de E_1 vers E_2 . Notons N_1 et N_2 le nombre d'atomes dans les niveaux d'énergie E_1 et E_2 , respectivement. Le nombre d'atomes étant conservé, ces derniers sont obtenus dans l'ensemble canonique. La fraction des atomes dans chaque état est donnée dans la statistique de Kaniadakis par

$$p_1 = \frac{N_1}{N} = \frac{1}{Z} \exp_\kappa(-E_1/kT) \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{N_2}{N} = \frac{1}{Z} \exp_\kappa(-E_2/kT) \quad (10.13)$$

La conservation du nombre d'atomes impose la condition

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = N_2 A_{21} - N_1 \rho_\kappa(\nu, T) B_{12} + N_2 \rho_\kappa(\nu, T) B_{21} \quad (10.14)$$

A l'équilibre thermique ($\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$), nous obtenons à partir de (10.14) la densité suivante

$$\rho_\kappa(\nu, T) = \frac{A_{21}}{(N_1/N_2) B_{12} - B_{12}} \quad (10.15)$$

En substituant (10.13) dans (10.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho_\kappa(\nu, T) &= \frac{A_{21}}{\{\exp_\kappa(-E_1/kT) / \exp_\kappa(-E_2/kT)\} B_{12} - B_{12}} \\ &= \frac{A_{21}/B_{21}}{\{\exp_\kappa(-E_1/kT) / \exp_\kappa(-E_2/kT)\} B_{12}/B_{21} - 1} \end{aligned} \quad (10.16)$$

L'équation (10.16) doit être en accord avec la généralisation de la loi de Planck (10.12) obtenue précédemment. Nous obtenons ainsi les coefficients d'Einstein généralisés suivants

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (10.17)$$

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{\exp_\kappa(-E_2/kT)}{\exp_\kappa(-E_1/kT) \exp_\kappa(-h\nu/kT)} \quad (10.18)$$

Le premier rapport (10.17) est indépendant du paramètre κ et est identique à celui découlant de la statistique BGS [120]. Il a été montré que ce rapport était aussi invariant dans la statistique de Tsallis. Le second rapport quant à lui dépend du paramètre κ . Dans la limite $\kappa \rightarrow 0$, les coefficients d'émission et d'absorption stimulée sont identiques, et le second rapport tend vers 1. La dépendance vis-à-vis de la température exhibée par ce dernier

coefficient (10.18) mérite une discussion. En effet, les coefficients d'Einstein usuels sont des propriétés du système et de ce fait ne dépendent que de sa nature quantique. Une question s'impose: *pourquoi ce rapport dépend-t-il de la température alors qu'il est constant dans la statistique BGS?* Nous pensons que la clé est donnée par la question fondamentale suivante: *Dans quelles circonstances, la procédure utilisée est-elle justifiée?* Dans [120], nous pouvons lire une partie de la réponse : "*Les coefficients d'Einstein découlent de la considération d'une cavité à l'équilibre thermique, où l'énergie de la radiation est homogène et isotrope dans l'espace. Cette condition est généralement satisfaite pour toute énergie distribuée de manière isotrope. Cependant, les faisceaux lumineux utilisés dans les expériences ne présentent généralement pas une telle isotropie, comme par exemple un faisceau parallèle.*" ⁽¹⁾

Dans la référence [111], traitant de l'approche non-extensive de ces coefficients, les auteurs relient cette dépendance à un problème de symétrie. Ils écrivent : "*Cette étude pourrait apporter une possibilité d'étudier la relation entre cette nouvelle théorie (i.e., la statistique de Tsallis) et les systèmes physiques dans un espace-temps non-Euclidien (fractal ou multifractal)*" ⁽²⁾. En nous basant sur ces arguments, notre interprétation est la suivante : Si l'énergie de la radiation est homogène et isotrope dans l'espace, les coefficients d'absorption et d'émission stimulée sont les mêmes ($B_{12} = B_{21} = 1$). Si ce n'est pas le cas, la symétrie du problème peut produire une différence, favorisant ainsi un processus par rapport à l'autre. L'équation (2.9) nous indique qu'un tel effet dépend de la température de la cavité.

⁽¹⁾ Texte original en anglais : "*The Einstein coefficients are derived by consideration of a cavity in thermal equilibrium, where the radiative energy is homogeneous and isotropic in space. They hold generally for any spatially-isotropic distribution of radiative energy density. However, the external light beams used in experiments do not usually have this property, as in the example of a parallel light beam*"

⁽²⁾ Texte original en anglais: "*This study would give us an opportunity to [. . .] investigate the relation between this new theory (i.e., Tsallis q-statistics) and physical systems in the non-Euclidean space-time (e.g., fractal or multifractal spacetime).*"

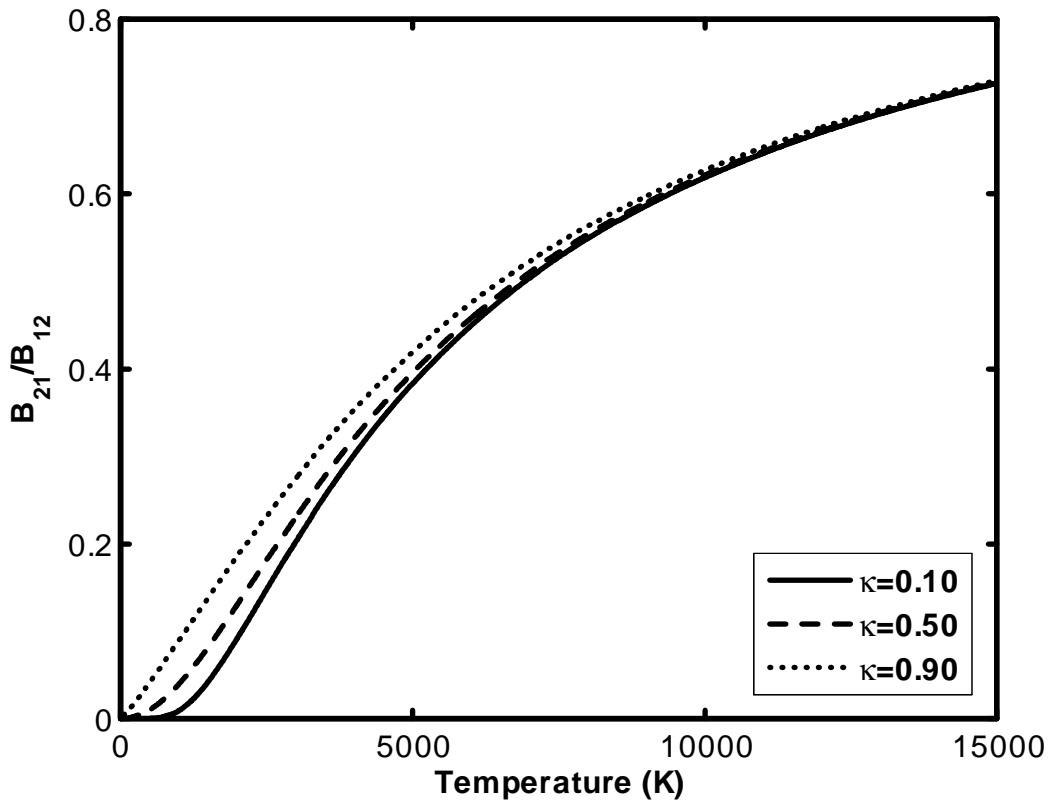


Figure 17 : Variation de B_{21}/B_{12} en fonction de la température, pour différentes valeurs de κ .

La figure **17** représente la variation du rapport (10.18) en fonction de la température, pour différentes valeurs de κ , à la fréquence $\nu = 10^{14}\text{Hz}$ et une énergie fixe E_1 . On peut constater qu'une augmentation de κ induit une augmentation du rapport B_{21}/B_{12} , c'est à dire, une augmentation (diminution) de la probabilité d'émission (absorption). L'effet de la statistique de Kaniadakis est plus significatif dans le cas des faibles températures et disparaît dans la limite $T \rightarrow \infty$ (les probabilités d'émission et d'absorption tendent à devenir égales). Notons que dans le cas limite d'une température nulle, $B_{21}/B_{12} = 0$ quel que soit la valeur de κ : la probabilité d'absorption est infiniment supérieure à la probabilité d'émission (effet trou noir).

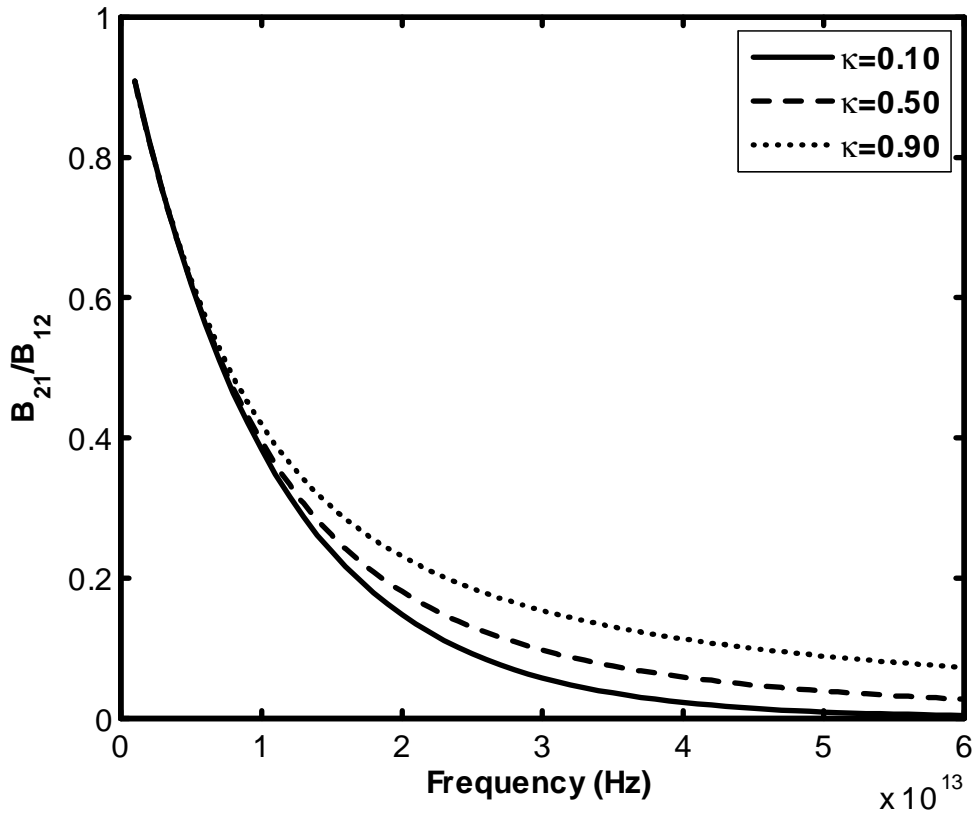


Figure 18 : Variation de B_{21}/B_{12} en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs de κ .

La figure **18** montre la variation du rapport B_{21}/B_{12} en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs de κ , une énergie donnée E_1 et une température $T = 1000K$. Il apparaît que dans la limite des très basses fréquences ($\nu \rightarrow 0$), le rapport $B_{21}/B_{12} \rightarrow 1$. Ce résultat est en accord avec les résultats obtenus dans le cadre de la statistique de Tsallis [111]. Le rapport diminue au fur et à mesure que la fréquence augmente. La décroissance du rapport B_{21}/B_{12} est d'autant plus rapide que le paramètre κ est grand.

10.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une théorie alternative à la statistique non-extensive de Tsallis, à savoir la statistique de Kaniadakis. La structure de la théorie est la même, à ceci près que le formalisme de Kaniadakis fait intervenir des fonctions de distribution non linéaires. La reformulation de la loi de Planck dans le contexte de la statistique de Kaniadakis nous a permis de contourner la coupure (cut-off) dont a fait montre la statistique de Tsallis [29]. De plus, la généralisation de la distribution de Bose-Einstein utilisée satisfait la condition

KMS [119], à l'inverse de la distribution découlant de l'entropie de Tsallis. Dans la seconde section, nous avons revisité les coefficients d'Einstein d'émission et d'absorption, dans le cadre du formalisme de Kaniadakis. Nous avons alors montré que l'un des coefficients d'Einstein admettait une généralisation dépendante de la température. Cette dépendance, inexistante dans le cas standard ($\kappa \rightarrow 0$), a été interprétée en termes de symétrie et de géométrie.

11

Les superstatistiques de Beck-Cohen

11.1 Introduction

Nous introduirons dans ce chapitre un formalisme qui, en plus de généraliser la statistique de Tsallis, lui confère une certaine interprétation. L'idée a été introduite par Beck et Cohen en 2003 [28]. Le formalisme repose sur le fait que l'équilibre thermodynamique peut ne pas être atteint par le système, mais atteint à des échelles plus petites ou, en d'autres termes, pour de petites cellules de l'ensemble du système. Ainsi, les distributions, dites parfois exotiques, découlant de l'entropie de Tsallis par exemple, y sont perçues comme la conséquence d'un type particulier de fluctuation de la température. Après avoir introduit le formalisme des superstatistiques de Beck et Cohen, nous allons montrer comment les distributions de Tsallis peuvent être retrouvées à partir de fluctuations particulières de la température [28]. Nous montrerons, par ailleurs, que ce même formalisme peut expliquer deux distributions empiriques fréquemment rencontrées dans la physique des plasmas, à savoir, les distributions non-thermique et supra-thermique [30].

11.2 Le formalisme de Beck-Cohen

Considérons un système hors équilibre composé de régions exhibant des fluctuations spatio-temporelles de l'inverse d'une quantité intensive. Dans ce qui suit, il s'agira de la température, mais le formalisme est valable dans le cas d'une autre quantité intensive telle que la pression, le potentiel chimique, ou encore le taux de dissipation de l'énergie dans un fluide turbulent. Considérons un état hors équilibre d'un système macroscopique, composé de plusieurs cellules, plus petites, exhibant –temporairement– un équilibre local.

La température dans chaque cellule est alors constante. Chaque cellule contient un nombre de particules assez grand et obéit ainsi aux lois de la physique statistique. Cependant, chaque cellule a sa propre température et donc en passant d'une cellule à une autre, la température va changer et fluctuer. Les différentes températures ou leur inverse β , sont donc distribuées sur les différentes cellules selon une distribution –a priori inconnue– que nous noterons $f(\beta)$. Nous supposons que les changements de température locale, c'est à dire, dans les différentes cellules se produisent à une échelle temporelle T assez grande. Ce temps est bien plus grand que le temps de relaxation au cours duquel la cellule atteint l'équilibre local. Il est clair qu'un tel modèle est une excellente approximation des cas de variation continue de la température, exhibant des corrélations spatiales de l'ordre de la dimension L des cellules et une corrélation temporelle T .

Ainsi, une particule brownienne se meut pendant un moment dans une cellule avec une température constante et passe à une autre cellule, et ainsi de suite. Sa vitesse obéit à [28]

$$\bar{v} = -\gamma v + \hat{\sigma} L(t) \quad (11.1)$$

où $L(t)$ est le bruit gaussien. La température de chaque cellule est reliée aux paramètres γ et $\hat{\sigma}$ par $\beta = \gamma/\hat{\sigma}^2$. Contrairement à une particule brownienne, le paramètre β n'est pas constant mais change à l'échelle temporelle T et spatiale L . Ces changements sont produits par la dynamique complexe de l'environnement de la particule brownienne. La densité de probabilités stationnaire du système hors équilibre en question est déterminée par une combinaison du facteur de Boltzmann et de la distribution des températures sur les différentes cellules. Elle est donnée par [28]

$$B(E) = \int_0^{+\infty} f(\beta) \exp(-\beta E) d\beta \quad (11.2)$$

où (11.2) représente une sorte de facteur de Boltzmann effectif pour le système hors équilibre ou, en d'autres termes, la superstatistique du système. Dans un certain sens, il constitue la superposition de deux statistiques, d'où le nom de superstatistiques. $B(E)$ peut s'écarter de manière notable du facteur de Boltzmann, auquel il se réduit dans le cas particulier d'une température constante, c'est à dire, $f(\beta) = \delta(\beta - \beta_0)$.

L'hypothèse centrale du formalisme de Beck-Cohen est que les distributions effectives sont physiquement acceptables pour une classe de dynamiques de systèmes complexes exhibant des fluctuations. Notons que les distributions effectives sont données par la transformée de Laplace de la densité de probabilités (voir Eq. (11.2)). A priori, $f(\beta)$ est une

fonction inconnue quelconque. Cependant, elle doit satisfaire certaines conditions et le nombre de ces fonctions possibles est donc limité. Ces conditions peuvent être résumées comme suit

1- $f(\beta)$ doit être une densité de probabilité normalisée. Elle peut être donnée par n'importe quelle densité décrivant un phénomène physique: distribution gaussienne, distribution normale, log-normale ou toute autre distribution non encore identifiée.

2- Les distributions effectives doivent être normalisables. En d'autres termes, la fonction $f(\beta)$ doit être choisie de sorte que l'intégrale (11.2) existe.

3- Les distributions effectives $B(E)$ doivent se réduire à la distribution de Boltzmann dans une certaine limite.

Ainsi, fixer la distribution des températures $f(\beta)$ revient en fait à fixer la distribution effective $B(E)$. Il a été montré que cette méthode permet d'obtenir des distributions en bon accord avec les observations expérimentales, telles que les distributions des variations des vitesses longitudinales dans un écoulement de Taylor-Couette ou des mesures dans le cas des turbulences lagrangiennes [121]. Nous allons montrer, dans la section suivante, qu'un choix judicieux de $f(\beta)$ peut générer la distribution de Tsallis classique [28], sans avoir recours à une généralisation de l'entropie.

11.3 Statistique non-extensive sans entropie de Tsallis

Nous allons montrer que la distribution Gamma des paramètres β permet de retrouver la distribution de Tsallis, qui est -à l'heure actuelle- la distribution exotique la plus fréquemment observée dans des systèmes complexes. La distribution Gamma s'écrit

$$f(\beta) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} e^{-\beta/b} \quad (11.3)$$

où c et b sont deux paramètres réels positifs. La quantité $2c$ est souvent interprétée comme le nombre effectif de degrés de liberté qui contribuent à la fluctuation de β . La valeur moyenne de β est donnée par $\int_0^{+\infty} \beta f(\beta) d\beta = bc$ et la variance par $\sigma^2 = b^2c$. La distribution Gamma apparaît naturellement si $n = 2c$ variables aléatoires gaussiennes X_k , avec une moyenne nulle, sont élevées au carré et sommées

$$\beta = \sum_{k=1}^n X_k^2 \quad (11.4)$$

Ainsi, les paramètres β sont distribués selon la distribution Gamma (11.3). La valeur moyenne de β est, bien-sûre, n fois la variance de la variable aléatoire X_k . Dans ce sens, la distribution Gamma apparaît de manière naturelle dans le cas d'un environnement avec fluctuations et un nombre fini de degrés de libertés. En utilisant la définition (11.3) et celle du facteur de Boltzmann effectif (11.2), nous obtenons

$$B(E) = \int_0^{+\infty} f(\beta) \exp(-\beta E) d\beta = (1 + \beta E)^{-c} \quad (11.5)$$

En définissant $c = 1/q - 1$ et $bc = \beta_0$, la distribution (11.5) se réduit à la distribution de Tsallis classique [28],[2]

$$B(E) = (1 + (q - 1)\beta E)^{1/(1-q)} \quad (11.6)$$

Ainsi, la distribution classique de Tsallis peut être perçue comme une conséquence des fluctuations de la température, de sorte que les paramètres β soient distribués selon la distribution Gamma. Notons cependant que ceci n'est valable que pour $q > 1$ car le paramètre $c = 1/q - 1$ doit être positif.

11.4 Les distributions non-thermique et supra-thermique: une conséquence des fluctuations?

Nous allons montrer qu'un choix judicieux de $f(\beta)$ permet également de retrouver deux fonctions de distribution très fréquemment rencontrées en physique des plasmas: les distributions non-thermique et supra-thermique. Ces dernières ont été observées dans des environnements astrophysiques, comme l'indique un grand nombre d'observations *in situ* [122],[123],[124],[125]. Des fonctions empiriques ont été introduites de manière *ad hoc* par des méthodes de "curve fitting", dans le but de modéliser de tels comportements. Ces distributions empiriques sont aujourd'hui fréquemment utilisées pour décrire différents en physique des plasmas [126],[127],[128],[129]. Cependant, leur utilisation a été souvent critiquée car il n'existe, à ce jour, aucune justification physique ou approche rigoureuse qui permette de les retrouver. Nous allons montrer que le formalisme des superstatistiques de Beck-Cohen peut fournir une possible interprétation et une assise théorique à ces distributions empiriques. La distribution supra-thermique peut être obtenue de la même manière

que la distribution classique de Tsallis. En effet, en posant $c = \kappa + 1$ dans l'équation (11.5), nous obtenons

$$B(E) = \left(1 + \frac{\beta_0 E}{\kappa + 1}\right)^{-\kappa-1} \quad (11.7)$$

La distribution (11.7) reproduit exactement la distribution supra-thermique, largement utilisée en physique des plasmas (voir la figure 19). Elle a été introduite, une première fois, de manière *ad hoc* par des méthodes de "curve fitting" pour modéliser les distributions observées dans le vent solaire par OGO 1 et OGO 2 [130]. Le paramètre κ modélise la déviation par rapport au comportement Maxwellien. Une quantité d'observations indiquent clairement que de telles distributions sont omniprésentes dans une variété de plasmas [*Earth's bow shock* [122], vent solaire (observations faites par IMP 6) [123]...etc]. Aujourd'hui, cette distribution est fréquemment utilisée en physique des plasmas. Son utilisation est toutefois contestée - à juste titre d'ailleurs- à cause de l'absence de fondements et d'assises théoriques (elle ne découle d'aucune entropie). Dans notre interprétation, cette distribution est une conséquence de fluctuations particulières de la température, et donc du paramètre β . Notons que les distributions de Tsallis et suprathermique sont générées par le même type de fluctuations de β (11.3).

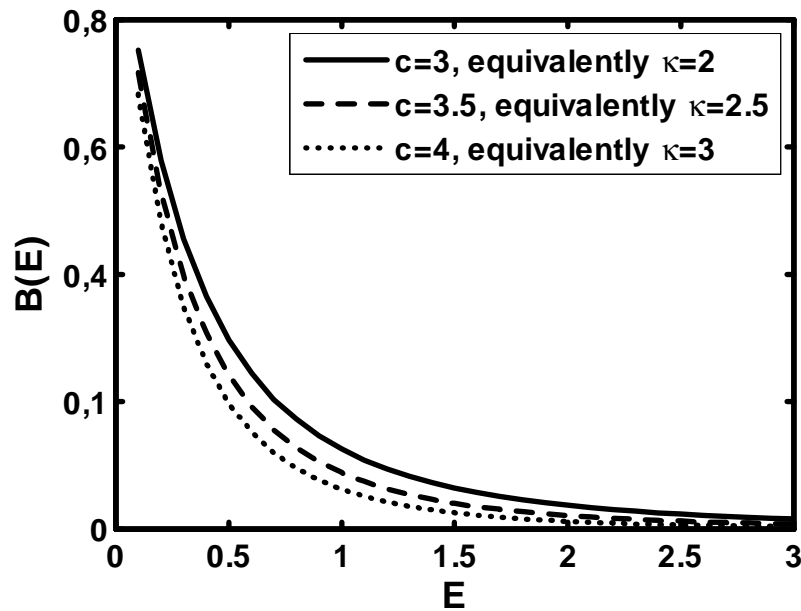


Figure 19 : Tracé de la distribution supra-thermique (11.7) pour différentes valeurs du paramètre κ (ou de façon équivalente c).

Ceci est en accord avec de récentes études [131],[132],[133], unifiant ces deux distributions, avec l'identification $\kappa + 1 = 1/q - 1$. Dans notre approche, c'est le paramètre c apparaissant dans la distribution Gamma qui permet une telle unification, c'est à dire, $c = \kappa + 1 = 1/q - 1$. Nous allons montrer que cette même fluctuation de la température peut, dans une certaine limite, générer la distribution non-thermique, dite aussi distribution de Cairns. En effet la distribution (11.5) peut s'écrire sous la forme

$$B(E) = (1 + bE)^{-c} = \exp \{-c \ln(1 + bE)\} \quad (11.8)$$

Dans le cas des faibles fluctuations, $bE \ll 1$, l'exponentielle peut être développée au premier ordre en bE

$$B(E) = \exp(-\beta_0 E) \left[1 + \frac{1}{2c} \beta_0^2 E^2 \right] \quad (11.9)$$

Posons $\alpha = 1/2c$. L'équation (11.9) s'écrit alors

$$B(E) = \exp(-\beta_0 E) [1 + \alpha \beta_0^2 E^2] \quad (11.10)$$

La distribution (11.10) est la distribution non-thermique (voir figure 20), introduite de façon empirique en physique des plasmas. Le paramètre α représente le paramètre non-thermique quantifiant l'écart par rapport au comportement Maxwellien.

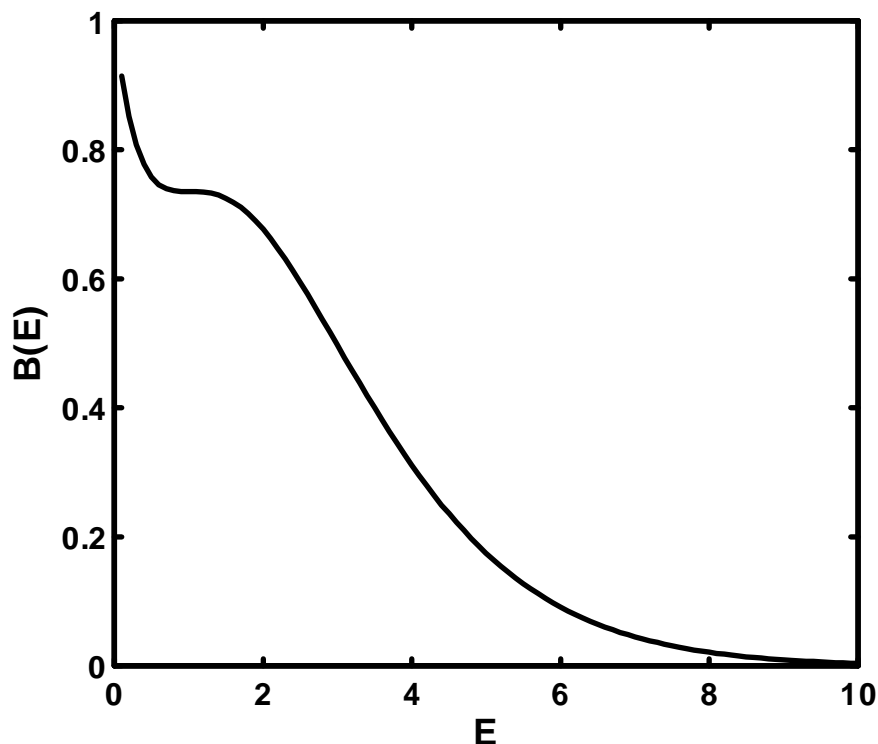


Figure 20 : Tracé de la distribution non-thermique pour $\alpha = 1$ (non-thermalité maximale).

11.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le formalisme des superstatistiques de Beck-Cohen. Ce formalisme consiste en une superposition de statistiques, due à la fluctuation d'un paramètre donné. En fixant le paramètre fluctuant comme étant la température inverse β , nous avons obtenu des distributions effectives correspondant aux distributions empiriques supra-thermique et non-thermique [30]. En effet, nous avons montré qu'une distribution Gamma des paramètres β mène à une distribution effective supra-thermique, où le paramètre κ introduit de façon empirique en physique des plasmas, est lié au paramètre c (caractérisant la fluctuation) par $c = \kappa + 1$. Nous avons montré également que cette même distribution se réduit à la distribution non-thermique dans la limite $bE \ll 1$. Cette limite représente la limite de faible variance (la variance étant proportionnelle à b). Par conséquent, notre approche laisse entrevoir la possibilité d'une unification des distributions classiques observées en physique des plasmas, dans la mesure où elles découlent toutes d'une fluctuation de type Gamma des paramètres β . La distribution supra-thermique (ou de manière équivalente,

la distribution de Tsallis) est obtenue dans le cas d'une variance quelconque. Lorsque la variation est petite, cette dernière tend vers la distribution non-thermique. Une diminution de la variance fait tendre la distribution effective vers une Maxwellienne, cette dernière étant atteinte dans le cas limite d'une variance nulle $\sigma \rightarrow 0$. Dans ce cas, $f(\beta)$ se réduit à un pic de Dirac et la distribution Maxwellienne est retrouvée.

12

Conclusions et perspectives

Le travail présenté dans cette thèse a porté sur trois grands axes: le premier, représentant la majeure partie de ce travail, concernait la généralisation non-extensive du modèle de Thomas-Fermi. Nous y avons étudié la structure mathématique de ce formalisme et l'influence de la statistique non-extensive sur les différentes corrections. Nous y avons également apporté des raffinements, afin d'élargir son domaine de validité à des situations rencontrées fréquemment dans les plasmas astrophysiques ou de laboratoire. Le second axe, portait sur l'étude des structures solitaires dans les plasmas. Nous y avons étudié l'influence de la distribution non-extensive des vitesses et du potentiel d'échange et de corrélation sur les conditions d'existence et la nature des ondes solitaires. Enfin, le dernier axe a été consacré aux théories alternatives à la statistique non-extensive de Tsallis, à savoir la statistique de Kaniadakis et le formalisme des superstatistiques de Beck-Cohen. Nous avons montré que ces deux théories alternatives pouvaient permettre de contourner un certain nombre de difficultés rencontrées dans le cadre de la statistique non-extensive de Tsallis.

Nous avons d'abord rappelé et discuté, dans les deux premiers chapitres, les principes et méthodes de la physique statistique standard et de la statistique non-extensive. Nous avons alors introduit, dans le troisième chapitre, le formalisme de Thomas-Fermi, dans sa formulation habituelle et nous l'avons revisité dans le cadre de la statistique non-extensive de Tsallis.

Nous avons également présenté une reformulation du modèle de Thomas-Fermi non-extensif à une dimension arbitraire n quelconque [11]. La reformulation du formalisme dans l'hyper-espace a montré une image plus riche de la théorie. Nos résultats ont montré que les effets non-extensifs étaient indépendants de la dimension de l'espace. Ils sont de même nature que les effets thermiques, auxquels ils sont liés. La correction apportée par la

statistique non-extensive s'est avérée être d'un intérêt particulier dans le cas d'un système bidimensionnel ($n = 2$). Nous avons montré, en effet, que la statistique de Tsallis permettait de tenir compte d'une température finie, chose impossible dans la statistique standard. Ceci apparaît comme une solution potentielle aux problèmes des températures finies dans les systèmes compacts. Ce résultat ouvre la porte sur un vaste champ d'applications. Le *graphène* et les *gaz bidimensionnels d'électrons* ou de *trous* en sont les meilleurs exemples.

Le quatrième chapitre a été consacré à l'introduction de nouveaux termes correctifs: *l'effet d'un champ magnétique intense* [12] et *les effets relativistes* [13]. Nous avons obtenu deux nouvelles formes de l'équation de Thomas-Fermi non-extensive. La première prend en considération la présence d'un champ magnétique intense. Celle-ci trouve son utilité dans le cas d'un champ magnétiques confinant, comme dans les *Tokamaks* ou encore les *étoiles à neutrons*. La seconde tient compte des effets relativistes, et reste valide dans le cas de vitesses électroniques très élevées.

Le cinquième chapitre a porté sur une application du modèle de Thomas-Fermi non-extensif à l'étude du phénomène d'écrantage électrique [14]. Le but était d'étudier l'influence de la non-extensivité sur la longueur de Fermi, longueur caractéristique de l'écrantage électrique dans les plasmas quantiques. Nos résultats ont montré que les effets non-extensifs avaient tendance à réduire la longueur de Fermi. Cet effet est similaire à celui produit par une diminution de la température. Ce résultat soutient, en effet, l'interprétation de la non-extensivité comme une augmentation des corrélations dans les systèmes et ainsi du degré de dégénérescence.

Dans le sixième chapitre, nous avons construit, par analogie, un modèle de Thomas-Fermi décrivant un système de fermions auto-gravitants [15]. En se basant sur le modèle décrit au troisième chapitre, nous avons appliqué la distribution de Fermi-Dirac non-extensive aux particules auto-gravitantes. Nous avons obtenu une équation de Thomas-Fermi généralisée. Nous avons alors montré que la non-extensivité préservait une relation de symétrie de l'équation de Thomas-Fermi. Nous y avons également étudié l'effet de la statistique non-extensive sur l'instabilité de Jeans. Nos résultats ont montré que la non-extensivité a tendance à rendre le système instable à des échelles de distance plus courtes. Ce résultat est en adéquation avec les résultats obtenus dans la littérature, dans le cas classique. Les perspectives apportées par ce travail sont nombreuses. En effet, une telle formulation n'a pas la prétention d'être un accomplissement, mais un commencement. La formulation non-extensive d'une équation de type Thomas-Fermi décrivant les systèmes auto-gravitants ouvre la voie sur une description non-extensive des systèmes de fermions auto-gravitants et

pourrait trouver une application dans le cas des étoiles à neutrons ou dans les modèles de matière noire.

Le septième chapitre a été consacré à l'étude de l'influence de la distribution de Fermi-Dirac généralisée aux électrons dans un métal [17]. Ce travail a été motivé par la possibilité de rapprocher les valeurs théoriques des valeurs expérimentales. Nous avons calculé les valeurs de la chaleur spécifique des différents éléments métalliques dans le cadre de la statistique de Tsallis. Ces dernières ont été comparées aux valeurs expérimentales. Nos résultats ont montré que la valeur $q = 0.9$ permettait un meilleur accord théorie-expérience.

La seconde partie de ce travail a porté sur l'étude des structures solitaires dans les plasmas et a fait l'objet des chapitres 8 et 9. Dans le huitième chapitre, nous avons étudié l'effet de la distribution des vitesses non-extensive (*généralisation non-extensive de la distribution de Maxwell-Boltzmann*) sur les conditions d'existence et la nature des ondes acoustiques ioniques poussiéreuses en double-couches [18]. Nous avons alors montré que le paramètre non-extensif q pouvait affecter, de manière considérable, les conditions d'existence et la nature de ces structures. Dans le neuvième chapitre, nous avons étudié la propagation d'ondes solitaires dans un plasma quantique en introduisant un effet supplémentaire: le *potentiel d'échange* et de *corrélation* [21]. Nous avons alors construit un modèle semi-quantique prenant en compte cet effet supplémentaire. Nous avons montré que celui-ci pouvait affecter les conditions d'existence et la nature des structures solitaires. Cette étude peut être étendue à l'étude d'autres structures et d'autres modes apparaissant dans les plasmas (voir à titre d'exemple [141] qui fait suite à nos travaux dans le calcul de l'énergie transmise par l'onde acoustique ionique).

La troisième et dernière partie de la thèse a été consacrée aux théories alternatives à la statistique de Tsallis. Le dixième chapitre a été dédié à la statistique de Kaniadakis. Nous y avons généralisé la loi de Planck [29]. Nos résultats ont montré que le paramètre κ produisait un effet similaire à celui inherent à la statistique de Tsallis pour $q > 1$. La statistique de Kaniadakis nous a permis de contourner la coupure (cut-off) exhibée par la statistique de Tsallis. Les coefficients d'Einstein d'absorption et d'émission ont été également étudiés dans le cadre de cette théorie. Nous avons montré que le second coefficient d'Einstein admettait une généralisation dans le formalisme de Kaniadakis. Cette généralisation a été interprétée en termes de symétrie et de géométrie. Une continuation naturelle de ce travail porterait sur l'étude de l'influence de la statistique de Kaniadakis sur les grandeurs thermodynamiques, dans le rayonnement du corps noir, telles que la *pression* ou l'*énergie libre*. Une comparaison

avec les données du fond diffus cosmologique serait également une démarche logique dans l'accomplissement de ce travail.

Le dernier chapitre a été consacré au formalisme des superstatistiques de Beck-Cohen. Nous avons alors montré qu'une distribution Gamma des paramètres β pouvait reproduire les distributions non-thermique et supra-thermique, généralement observées dans les plasmas de l'espace. Nous avons montré [30] que ces deux distributions pouvaient être générées par le même type de fluctuations. Ce travail nous a permis, outre le fait d'apporter une assise théorique potentielle à ces distributions empiriques, d'entrevoir une perspective d'unification entre ces deux distributions. En effet, la distribution supra-thermique est obtenue dans le cas d'une variance quelconque. Lorsque la variance est petite, cette dernière (la distribution) tend vers la distribution non-thermique. Une diminution de la variance fait tendre la distribution effective vers une distribution de Maxwell-Boltzmann. Une perspective apportée par ce travail concerne la distribution hybride proposée par Amour *et al.* [142], qui joint les effets non-extensifs aux effets non-thermiques. Une telle distribution pourrait être le fruit d'une fluctuation particulière de la température. Il serait d'ailleurs plus que souhaitable que nos modèles théoriques soient confrontés à des études expérimentales

Toute l'approche exposée dans cette thèse est une approche semi-classique. En d'autres termes, les effets quantiques ont été incorporés sur la base d'un modèle classique. Ainsi, la position ou l'impulsion d'une particule sont représentées par des variables et non par des opérateurs, comme c'est le cas en mécanique quantique. En effet, dans les cas auxquels nous nous intéressons, une approche semi-classique reste une bonne approximation. Cependant, une approche purement quantique est nécessaire pour décrire des phénomènes tels que l'intrication quantique. Une telle approche, basée sur l'entropie de Tsallis, est présente dans la littérature. Il n'existe cependant pas d'équivalent dans le cadre de la statistique de Kaniadakis. Une démarche naturelle serait donc de construire un tel formalisme ainsi que les outils mathématiques nécessaires à son utilisation dans des cas concrets. Nous avons montré par exemple [143] que l'entropie de Kaniadakis présente les propriétés nécessaires pour être un bon candidat à la généralisation de l'information quantique. Un prolongement de ce travail serait d'étudier l'effet produit par le formalisme de Kaniadakis sur des phénomènes purement quantiques tels que l'intrication quantique, la téléportation ou encore le clonage..

13

Annexe A

Dans cette annexe, nous allons présenter un certain nombre de critiques concernant la physique statistique standard, sélectionnées dans la littérature. Certaines sont historiquement connues, à l'instar de la célèbre critique émise par Einstein sur le principe de l'entropie. D'autres se rapportent à un phénomène ou à une situation particulière. Le lecteur pourra y voir les prémisses de la généralisation proposée par Tsallis. La grande majorité de ces critiques étant en langue anglaise, nous présenterons la traduction que nous en avons faite, suivie par la version originale, en langue anglaise.

L'une de critiques les plus connues, du fait de leur connotation historique, est celle émise par Einstein en 1910 [134] :

"Généralement, W est égal au nombre de façons (complexions) qu'un état, qui n'est pas complètement défini au sens d'une théorie moléculaire, peut être réalisé. Pour calculer W , nous avons besoin d'une théorie complète du système. Pour cette raison, il semble douteux que le principe de Boltzmann seul, c'est-à-dire, sans une théorie mécanique-moléculaire complète (Théorie élémentaire) ait un sens réel. L'équation $S = k \log W + \text{const}$ semble alors, sans une théorie élémentaire, dépourvu de tout sens d'un point de vu phénoménologique."

"Usually W is set equal to the number of ways (complexions) in which a state, which is incompletely defined in the sense of a molecular theory, can be realized. To compute W one needs a complete theory of the system. For that reason it appears to be doubtful whether Boltzmann's principle alone, i.e., without a complete molecular-mechanical theory (Elementary theory) has any real meaning. The equation $S = k \log W + \text{const}$ appears therefore, without an Elementary theory, devoid of any meaning from a phenomenological point of view."

Dans cette critique, Einstein explique que, sans une théorie microscopique élémentaire, basée sur les lois fondamentales, le principe de base de la physique statistique, à savoir

l'entropie, vole en éclat. Notons que c'est Einstein qui donna à ce principe l'appellation "principe de Boltzmann". Boltzmann lui-même n'aurait pas été en désaccord avec une telle critique. En effet, il passa vainement une grande partie de sa vie pour réaliser ce qui fut appelé après lui "le programme de Boltzmann" consistant à retrouver la physique statistique à partir de lois fondamentale (mécanique classique). Il écrivit en 1896 [135]:

"Lorsque la distance à laquelle deux molécules du gaz interagissent sensiblement l'une avec l'autre est extrêmement petite par rapport à la distance moyenne entre une molécule et sa proche voisine - ou, autrement dit, lorsque l'espace occupé par les molécules (ou leurs sphères d'action) est négligeable par rapport à l'espace rempli par le gaz - alors, la fraction de la trajectoire de chaque molécule durant laquelle elle est affectée par son interaction avec les autres molécules est extrêmement faible par rapport à la fraction qui est rectiligne [...] Le gaz est «idéal» dans tous ces cas. "

"When the distance at which two gas molecules interact with each other noticeably is vanishingly small relative to the average distance between a molecule and its nearest neighbor - or, as one can also say, when the space occupied by the molecules (or their spheres of action) is negligible compared to the space filled by the gas - then the fraction of the path of each molecule during which it is affected by its interaction with other molecules is vanishingly small compared to the fraction that is rectilinear [...] The gas is "ideal" in all these cases. "

Ce paragraphe fait référence au cas particulier d'un gaz parfait. Il montre néanmoins une condition d'applicabilité du formalisme que Boltzmann développait, à savoir la portée des interactions mises en œuvre, qui doit être courte. Dans le même esprit, Peter Landsberg écrivait en 1978 [136]:

"La présence de forces à longue-portée cause d'importants amendements à la thermodynamique, dont certains ne sont pas encore complètement étudiés"

"The presence of long-range forces causes important amendments to thermodynamics, some of which are not fully investigated as yet."

Ce même point est soulevé par W.C. Saslaw en 1985, dans le cas des systèmes gravitationnel [137]:

"Lorsque les interactions sont importantes, les paramètres thermodynamiques peuvent perdre leurs simples propriétés intensives et extensives pour les sous-régions d'un système donné. [...] Les systèmes gravitationnels ne saturent pas et n'ont donc pas d'état d'équilibre ultime."

"When interactions are important the thermodynamic parameters may lose their simple intensive and extensive properties for subregions of a given system. [...] Gravitational systems do not saturate and so do not have an ultimate equilibrium state."

Dans le même ordre d'idées, Nico van Kampen écrivait en 1981 [138]:

"Une collection de particules ponctuelles avec gravitation mutuelle est un exemple où ce critère n'est pas satisfait, et pour lequel donc aucune mécanique statistique n'existe."

"A collection of point particles with mutual gravitation is an example where this criterion is not satisfied, and for which therefore no statistical mechanics exists."

Une autre faille de la physique statistique standard touche à la fonction de partition qui joue un rôle important puisque les grandeurs thermodynamiques y sont toutes connectées. Gibbs écrivait à ce sujet [31]:

"En traitant la distribution canonique, nous supposons toujours que l'intégrale multiple dans l'équation (92) [la fonction de partition, comme nous l'appelons de nos jours] a une valeur finie, sinon le coefficient de probabilité s'annule, et la loi de distribution devient illusoire. Cette règle exclut certains cas, mais pas ceux là apparemment, et affectera la valeur de nos résultats [...]. Cela exclut, par exemple, les cas où le système ou des parties de celui-ci peuvent être distribués dans un espace illimité [...]. Ceci exclut également de nombreux cas dans lesquels l'énergie peut diminuer sans limite, comme lorsque le système contient des points matériels qui s'attirent les uns les autres comme l'inverse du carré de leurs distances. [...]. Aux fins d'une discussion générale, il suffit de faire attention à l'hypothèse implicitement impliquée dans la formule (92)."

"In treating of the canonical distribution, we shall always suppose the multiple integral in equation (92) [the partition function, as we call it nowadays] to have a finite value, as otherwise the coefficient of probability vanishes, and the law of distribution becomes illusory. This will exclude certain cases, but not such apparently, as will affect the value of our results [...]. It will exclude, for instance, cases in which the system or parts of it can be distributed in unlimited space [...]. It also excludes many cases in which the energy can decrease without limit, as when the system contains material points which attract one another inversely as the squares of their distances. [...]. For the purposes of a general discussion, it is sufficient to call attention to the assumption implicitly involved in the formula (92)."

Le précédent paragraphe présente une autre possible limitation de la statistique standard. En effet, la fonction de partition est donnée par une intégrale multiple, dans le cas continu. Si l'intégrale en question diverge, la notion même de probabilité de distribution devient obsolète et une thermodynamique devient illusoire. Gibbs rappelle que ceci peut se produire dans le

cas de particules s'attirant via une interaction inversement proportionnelle aux carrés des distances les séparant. Nous voici encore confrontés à l'interaction gravitationnelle!

Par ailleurs, au cours de l'élaboration de la physique statistique standard, des doutes étaient apparus quant à l'extensivité de l'entropie. Ainsi, Claude Elwood Shannon écrivait en 1948 [32]:

"Ce théorème [l'entropie de Shannon] et les hypothèses nécessaires à son établissement ne sont nullement nécessaires pour la théorie actuelle. Il est principalement donné pour accorder une certaine plausibilité à certaines définitions à venir. La véritable justification de ces définitions résidera, cependant, dans leurs implications."

"This theorem [the Shannon entropy] and the assumptions required for its proof are in no way necessary for the present theory. It is given chiefly to lend a certain plausibility to some of our later definitions. The real justification of these definitions, however, will reside in their implications."

Il y a donc lieu de noter qu'à travers ce paragraphe, Shannon laisse la porte ouverte à une autre forme d'entropie, qui perdrait sa propriété d'additivité. En 1961, Laszlo Tisza ajoutait [139]:

"La situation est différente pour le postulat d'additivité, dont la validité ne peut être déduite à partir de principes généraux. Nous devons exiger que l'énergie d'interaction entre les systèmes thermodynamiques soit négligeable. Cette hypothèse est étroitement liée au postulat d'homogénéité. Du point de vue moléculaire, l'additivité et l'homogénéité pourraient être de raisonnables approximations pour des systèmes contenant un grand nombre de particules, à condition que les forces intermoléculaires soient de courte portée."

"The situation is different for the additivity postulate, the validity of which cannot be inferred from general principles. We have to require that the interaction energy between thermodynamic systems be negligible. This assumption is closely related to the homogeneity postulate. From the molecular point of view, additivity and homogeneity can be expected to be reasonable approximations for systems containing many particles, provided that the intermolecular forces have a short range character."

Dans ce paragraphe, l'auteur note que la propriété d'additivité n'est valable que sous certaines conditions. Elle pourrait en effet, être violée en présence d'interactions de longue portée.

Nous finirons cette sélection avec la célèbre critique de Radu Balescu, en 1975 [140] :

"Il apparaît donc de la présente discussion que la propriété de mixage d'un système mécanique est beaucoup plus importante pour la compréhension de la mécanique statistique que

la simple ergodicité. [...] Une étude rigoureuse détaillée de la façon dont les concepts de mixing et le concept des grands nombres de degrés de liberté influencent les lois macroscopiques du mouvement fait toujours défaut."

"It therefore appears from the present discussion that the mixing property of a mechanical system is much more important for the understanding of statistical mechanics than the mere ergodicity. [...] A detailed rigorous study of the way in which the concepts of mixing and the concept of large numbers of degrees of freedom influence the macroscopic laws of motion is still lacking."

Après ce tour d'horizon des critiques de la physique statistique standard, depuis son introduction et parfois par ses fondateurs, le lecteur pourra y voir la nécessité d'une généralisation du formalisme standard de la physique statistique. En effet, plusieurs des paragraphes présentés indiquent que la propriété d'additivité est perdue dans le cas d'interactions de longue-portée. Le formalisme lui-même devient caduc sous certaines conditions. En effet, dans le cas continu, la fonction de partition peut diverger, ne laissant aucune possibilité à une description thermodynamique du système. Dans de tels cas, il a été montré que la fonction de partition de Tsallis, pour un paramètre q approprié, était finie, ouvrant ainsi la voie à une étude thermodynamique de tels systèmes.

Bibliographie

- [1] C. Beck, *Contemp. Phys.* **50**, 495 (2009).
- [2] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [3] P. Douglas, S. Bergamini et F. Renzoni, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 11 (2006).
- [4] L. F. Burlaga et A. F. Viñas, *Physica A* **356**, 375 (2005).
- [5] B. Liu et J. Goree, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 5 (2008).
- [6] V. Khachatryan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 022002 (2010).
- [7] R. M. Pickup, R. Cywinski, C. Pappas, B. Faragao et P. Fouquet, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 097202 (2009).
- [8] L.H. Thomas, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **33**, 542 (1927).
- [9] E. Fermi, *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **6**, 602 (1928).
- [10] E. Martinenko et B. K. Shivamoggi, *Phys. Rev. A* **69**, 52504 (2004).
- [11] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Physica A* 392, 4477 (2013).**
- [12] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Phys. Scr.* 88, 035303 (2013).**
- [13] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Physica A* 393, 470 (2014).**
- [14] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Astrophys. Space Sci.* 341, 587 (2012).**
- [15] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Ann. Phys.* 342, 78 (2014).**
- [16] A. Sommerfeld, *Z. Phys.* **47**, 542 (1928).
- [17] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Int. J. Mod. Phys. B* 27, 1350181 (2013).**

-
- [18] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Astrophys. Space Sci.* **348**, 511 (2013).**
- [19] P. Hohenberg et W. Kohn, *Phys. Rev.* **136**, B864 (1964).
- [20] W. Kohn et L. J. Sham, *Phys. Rev.* **140**, A1133 (1965).
- [21] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Phys. Rev. E* **88**, 045101 (2013).**
- [22] F. Haas, L. G. Garcia, J. Goedert et J. Manfredi, *Phys. Plasmas* **10**, 3858 (2003).
- [23] M. Tribeche, S. Ghebache, K. Aoutou et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **15**, 033702 (2008).
- [24] G. Manfredi, *Fields Inst. Commun.* **46**, 263 (2005).
- [25] G. Manfredi et P-A. Hervieux, *Appl. Phys. Lett.* **91**, 061108 (2007).
- [26] G. L. Gardner et C. Ringhofer, *Phys. Rev. E* **53**, 157 (1996).
- [27] G. Kaniadakis, *Physica A* **296**, 405 (2001).
- [28] C. Beck et E. G. D. Cohen, *Physica A* **322**, 267 (2003).
- [29] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Phys. Rev. E* **89**, 062130 (2014).**
- [30] **K. Ourabah et M. Tribeche, *Phys. Rev. E* **91**, 012133 (2015).**
- [31] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (C. Scribner's Sons, New York, 1902; Yale University Press, New Haven, 1948; OX Bow Press, Woodbridge, Connecticut, 1981).
- [32] C. E. Shannon, *Bell System Tech. J.* **27**, 379 (1948).
- [33] A. I. Khinchin, *Mathematical Foundations of Information Theory* (Dover, New York, 1957).
- [34] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [35] C. Tsallis, R. Mendes et A. R. Plastino, *Physica A* **261**, 534 (1998).
- [36] D. F. Torres et U. Tirnakli, *Physica A* **261**, 499 (1998).
- [37] Q. A. Wang, *Chaos, Solitons and Fractals* **14**, 765 (2002).

-
- [38] C. Tsallis, *Introduction to nonextensive statistical mechanics: Approaching a complex world* (Springer, Amsterdam, 2004).
- [39] R. P. Feynman, N. Metropolis et E. Teller, Phys. Rev. **75**, 1561 (1949).
- [40] I. Kaluza, Preuss. Akad. Wiss. Berlin Sitz. Ber, **966** (1921).
- [41] D. Finkelstein, Phys. Rev. Lett. **56**, 1532 (1986).
- [42] G. F. Kventsel et J. Katriel, Phys. Rev. A **24**, 2299 (1981).
- [43] B. K. Shivamoggi, Physica A **248**, 195 (1998).
- [44] V. M. Galitski, S. Adam et S. D. Sarma, Phys. Rev. B **76**, 245405 (2007).
- [45] L. Ying Tai, Z. Qi Ren et G. Chun Yuan, Commun. Theor. Phys. (Beijing China) **38**, 361 (2002).
- [46] R. E. Marshak et H. A. Bethe, Astrophys. J. **91**, 239 (1940).
- [47] M. S. Vallarta et N. Rosen, Phys. Rev. **41**, 708 (1932).
- [48] B. K. Shivamoggi, Phys. Rev. E **51**, 185 (1995).
- [49] B. K. Shivamoggi et P. P. J. M. Schram, Physica A **215**, 387 (1995).
- [50] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, Chicago, 1939).
- [51] B. K. Shivamoggi, Ann. Phys. **243**, 177 (1995).
- [52] F. Jüttner, Z. Phys. **47**, 542 (1928).
- [53] B. K. Shivamoggi et P. Mulser, Phys. Rev. A **54**, 4830 (1996).
- [54] J. Ferreira, R. Ruffini et L. Stella, Phys. Lett. B **91**, 314 (1980).
- [55] N. Krall et A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (McGraw-Hill, New York, 1973).
- [56] R. Ruffini, Proc. 1st Australian Summer School, ed. C. Edward (Springer, 1980).
- [57] G. Jian-gong, S. Filippi et R. Ruffini, Chin. Astron. Astrophys. **22**, 380 (1998).

-
- [58] J. A. S. Lima, R. Silva et J. Santos, *Astronom. Astrophys.* **396**, 309 (2002).
- [59] P. Drude, *Annalen der Physik* **306**, 3 (1900).
- [60] P. Drude, *Annalen der Physik* **308**, 11 (1900).
- [61] A. Sommerfeld et H. Bethe, *Elektronentheorie der Metalle* (Springer Verlag, Heidelberg, 1933).
- [62] N. W. Ashcroft et N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976).
- [63] P. K. Misra, *Physics of Condensed Matter* (Academic Press, 2012), p. 71.
- [64] C. K. Goertz, *Rev. Geophys.* **27**, 271 (1989).
- [65] D. A. Mendis et M. Rosenberg, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **32**, 419 (1994).
- [66] M. Horanyi, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 383 (1996).
- [67] P. K. Shukla et A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics* (Institute of Physics, Bristol, 2002).
- [68] F. Verheest, *Waves in Dusty Space Plasmas* (Kluwer, Dordrecht, 2000).
- [69] N. N. Rao, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [70] F. Melandso, *Phys. Plasmas* **3**, 3890 (1996).
- [71] M. Tribeche, R. Hamdi et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **7**, 4013 (2000).
- [72] M. Tribeche, H. Houili et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **9**, 419 (2002).
- [73] M. Tribeche, T. H. Zerguini et H. Houili, *Phys. Plasmas* **9**, 4879 (2002).
- [74] M. Tribeche et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **11**, 4115 (2004).
- [75] N. D'Angelo, dans *Frontiers in Dusty Plasmas*, édité par Y. Nakamura, T. Yokota et P. K. Shukla (Elsevier, Amsterdam, 2000).
- [76] R. L. Merlino, A. Barkan, C. Thompson et N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **5**, 1607 (1998); *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, 421 (1997).

-
- [77] Y. Nakamura, H. Bailung et P. K. Shukla, Phys. Rev. Lett. **83**, 1602 (1999); Y. Nakamura et H. Bailung, Rev. Sci. Instrum. **70**, 2345 (1999); Y. Nakamura et A. Sarmaa, Phys. Plasmas **8**, 3921 (2001).
- [78] X. Liang, J. Zheng, J. X. Ma, W. D. Liu, J. Xie, G. Zhuang et C. X. Yu, Phys. Plasmas **8**, 1459 (2001).
- [79] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic, New York, 1972).
- [80] R. Z. Sagdeev, dans *Reviews of plasma physics*, édité par M. A. Leontovich (consultant bureau, New York, 1966).
- [81] S. L. Shapiro et S. L. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (JohnWiley & Sons, New York, 1983).
- [82] P. A. Markowich *et al.*, *Semiconductor Equations* (Springer, Berlin, 1990).
- [83] P. K. Shukla et B. Eliasson, Phys. Rev. Lett. **99**, 096401 (2007).
- [84] S. Mola, G. Manfredi et M. R. Feix, J. Plasma. Phys. **50**, 145 (1993).
- [85] N. Suh, M. R. Feix et P. Bertrand, J. Comput. Phys. **50**, 145 (1991).
- [86] F. Haas, G. Manfredi et M. R. Feix, Phys. Rev. E **62**, 2763 (2000).
- [87] P. Zoller *et al.*, Eur. Phys. J. D **36**, 203 (2005).
- [88] G. Manfredi et M. R. Feix, Phys. Rev. E **53**, 6460 (1996).
- [89] F. Haas, G. Manfredi et J. Goedert, Phys. Rev. E **64**, 026413 (2001).
- [90] L. G. Garcia, F. Haas, L. P. L. de Olivera et J. Goedert, Phys. Plasmas **12**, 012302 (2005).
- [91] G. Manfredi et F. Haas, Phys. Rev. B **64**, 075316 (2001).
- [92] L. Brey, J. Dempsey, N. F. Johnson et B. I. Halperin, Phys. Rev. B. **42**, 1240 (1990).
- [93] N. Crouseilles, P-A. Hervieux et G. Manfredi, Phys. Rev. B **78**, 155412 (2008).
- [94] S-H. Mao et J-K. Xue, Phys. Scr. **84**, 055501 (2011).
- [95] I. Zeba, M. E. Yahia, P. K. Shukla, et W. M. Moslem, Phys. Lett. A. **376**, 2309 (2012).

-
- [96] W. Wang, J. Shao et Z. Li, Chem. Phys. Lett. **522**, 83 (2012).
- [97] J. Yan, K. W. Jacobsen et K. S. Thygesen, Phys. Rev. B **86**, 241404 (2012).
- [98] P. K. Shukla et B. Eliasson, Phys. Rev. Lett. **108**, 165007 (2012).
- [99] P. K. Shukla et S. Ali, Phys. Plasmas **12**, 114502 (2005).
- [100] S. A. Khan et A. Mushtaq, Phys. Plasmas **14**, 083703 (2007).
- [101] R. M. Dreizler et E. K. U. Gross, *Density Functional Theory: An Approach to the Quantum Many- Body Problem* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [102] G. Kaniadakis, Phys. Rev. E **66**, 056125 (2002).
- [103] A. M. Teweldeberhan, H. G. Miller et R. Tegen, Int. J. Mod. Phys. E **12**, 669 (2003).
- [104] A. Rossani et A. M. Scarfone, J. Phys. A **37**, 4955 (2004).
- [105] C. Tsallis, F. C. Sà Barreto et E. D. Loh, Phys. Rev. E **52**, 1447 (1995).
- [106] A. R. Plastino, P. Plastino et H. Vuchetic, Phys. Lett. A **207**, 42 (1995).
- [107] U. Tirnakli, F. Büyükkiliç et D. Demirhan, Physica A **240**, 657 (1997).
- [108] U. Tirnakli, F. Büyükkiliç et D. Demirhan, Phys. Lett. A **245**, 62 (1998).
- [109] E. K. Lenzi et R. S. Mendes, Phys. Lett. A **250**, 270 (1998).
- [110] Q. A. Wang, L. Nivanem et A. Le Méhauté, Physica A **260** (1998).
- [111] Q. A. Wang et A. Le Méhauté, Phys. Lett. A **242**, 301 (1998).
- [112] U. Tirnakli et D. F. Torres, Eur. Phys. J. B **14**, 691 (2000).
- [113] L. A. Anchordoqui et D. F. Torres, Phys. Lett. A **283**, 319 (2001).
- [114] S. Martinez, F. Pennini, A. Plastino et C. J. Tessone, Physica A **295**, 224 (2001).
- [115] S. Martinez, F. Pennini, A. Plastino et C. J. Tessone, Physica A **309**, 85 (2002).
- [116] F. Büyükkiliç, I. Sökmen et D. Demirhan, Chaos, Solitons & Fractals **13**, 749 (2002).
- [117] H. Chamati, A. T. Djankova et N. S. Tonchev, Physica A **360**, 297 (2006).

-
- [118] A. M. C. Souza et C. Tsallis, *Generalizing the Planck distribution*, dans: C. Beck, G. Benedek, A. Rapisarda, C. Tsallis (Eds.), Complexity, Metastability and Nonextensivity, Proc. 31st Workshop of the International School of Solid State Physics, 20–26 July 2004, Erice–Italy, World Scientific, Singapore, 2005. [cond-mat/0501389].
- [119] T. S. Biró, K. M. Shen et B. W. Zhang, arXiv:1412.2971v1 [cond-mat.stat-mech].
- [120] R. Loudon, *The quantum theory of light* (Clarendon Press, Oxford, 1983), p. 16.
- [121] C. Beck, E. G. D. Cohen et H. L. Swinney, Phys. Rev. E. **71**, 056133 (2005).
- [122] V. Formisano, G. Moreno et F. Palmiotto, J. Geophys. Res. **78**, 3714 (1973).
- [123] W. C. Feldman, J. R. Asbridge, S. J. Bame et M. D. Montgomery, J. Geophys. Res. **78**, 2017 (1973).
- [124] J. D. Scudder, E. C. Sittler et H. S. Bridge, J. Geophys. Res. **86**, 8157 (1981).
- [125] E. Marsch, K-H. Mühlhäuser, R. Schwenn, H. Rosenbauer, W. Pillip et F. M. Neubauer, J. Geophys. Res. **87**, 52 (1982).
- [126] H. Alinejad, M. Tribeche et M. A. Mohammadi, Phys. Lett. A **375**, 4183 (2011).
- [127] H. R. Pakzad, K. Javidan et M. Tribeche, Astrophys. Space Sci. **352**, 158 (2014).
- [128] M. Tribeche et M. Bacha, Phys. Plasmas **17**, 073701 (2010).
- [129] M. Tribeche et M. Bacha, Phys. Plasmas **20**, 103704 (2013).
- [130] V. M. Vasyliunas, J. Geophys. Res. **73**, 2839 (1968).
- [131] M. P. Leubner, Astrophys. Space Sci. **282**, 573 (2002).
- [132] M. P. Leubner, Phys. Plasmas **11**, 1308 (2004).
- [133] M. P. Leubner, Astrophys. J. **604**, 469 (2004).
- [134] A. Einstein, Annalen der Physik **33**, 1275 (1910).
Traduit dans: E.G.D. Cohen, Pramana **64**, 635 (2005).
- [135] L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie* (Leipzig, 1896).
Traduit dans: S. Brush, *Lectures on Gas Theory* (Univ. California Press, Berkeley, 1964), p. 217.

- [136] P. T. Landsberg, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (Oxford University Press, New York, 1978; Dover, New York, 1990).
- [137] W. C. Saslaw, *Gravitation Physics of Stellar and Galactic Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [138] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1981).
- [139] L. Tisza, *Generalized Thermodynamics*, (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1961), p. 123.
- [140] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, (John Wiley and Sons, New York, 1975).
- [141] K. Mebrouk et M. Tribeche, *Phys. Lett. A* **378**, 3523 (2014).
- [142] M. Tribeche, R. Amour et P. K. Shukla, *Phys. Rev. E* **85**, 037401 (2012).
- [143] **K. Ourabah, A. H. Bendimerad-Hamici et M. Tribeche, *Phys. Scr.* (article accepté, 2015).**