

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene



Faculté des Mathématiques Pures et Appliquées
Département de Probabilités et de Statistiques

Mémoire en vue de l'obtention du grade de Magister
en Mathématiques
Option : Probabilités & Statistiques

Thème :

**Etude d'un Modèle d'Equations Différentielles
Stochastiques Couplées - Application Actuarielle**

Présenté par :

M^r Abdelkader AMERAoui

Soutenu publiquement le 06/07/2008, devant le jury :

<i>Pr. Ameziane AÏDER</i>	<i>(Professeur USTHB)</i>	<i>Président de Jury</i>
<i>Pr. Kamel BOUKHETALA</i>	<i>(Professeur USTHB)</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>Pr. Rachid OUAFI</i>	<i>(M.C USTHB)</i>	<i>Examineur</i>
<i>Pr. Khaled KHALDI</i>	<i>(M.C U. BOUMERDES)</i>	<i>Examineur</i>
<i>Pr. Tayeb LARDJANE</i>	<i>(C.C USTHB)</i>	<i>Invité</i>

Session : 2007-2008

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Dieu de m'avoir donné le courage, la morale et la santé pour mener à bien ce travail.

*J'adresse mes vifs remerciements à mon promoteur Mr. **K. BOUKHETALA**. Je Lui témoigne mon sincère reconnaissance pour l'intérêt constant avec lequel il a suivi la progression de mon travail, pour son soutien, ses orientations et ses précieux conseils.*

Mes remerciements s'adressent également aux président et membres du jury pour m'avoir honoré en acceptant de juger mon travail.

Je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciements à tous les professeurs qui m'ont permis de connaître le monde des mathématiques et qui m'ont tiré profit de leur vaste connaissance.

Enfin, un grand merci à l'ensemble des personnes qui ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire, conseillé et soutenu tout au long de mon projet et à qui revient en réalité le fruit de ce travail

A. AMERAOU

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail aux
Personnes qui me sont les plus chères au monde, que
j'aime et que j'adore, à la mémoire de mon père
et à ma très chère maman, que dieu vous garde.*

*A mes très chère sœurs et frères.
À toute la famille **AMERAOUI**.*

*Sans oublier bien sur tous mes amis : Hafidh, Alla, Tayeb, Salim,
Rachid, Idir, Riad Mekki, Smail, Kamel
A toute la promotion PG Proba & Stat.
A tous qui m'aimes et j'aime.*



Abdelkader

Chapitre I :

Généralité sur les Processus Stochastiques

I-1 Généralité sur les processus :	1
I-1-1 Processus stochastique :	1
I-1-2 Processus stochastiques particuliers :	3
I-1-2-1 Processus stationnaire :	3
I-1-2-2 Processus à accroissement indépendant :	3
I-1-2-3 Processus à accroissement stationnaire :	3
I-1-2-4 Moments :	4
I-2 Processus de diffusion :	5
I-2-1 Historique :	5
I-2-2 Mouvement Brownien simple :	6
I-2-3 Mouvement Brownien standard :	6
I-2-4 Mouvement Brownien avec drift :	7
I-2-5 Processus d'Itô :	7
I-2-6 Mouvement Brownien géométrique :	8
I-3 Temps d'arrêt et martingale :	8
I-3-1 Martingale à temps discret :	8
I-3-2 Martingale à temps continu :	9
I-3-4 Exemples de martingales browniennes :	10
I-4 Le lemme d'Itô :	10

Chapitre II :

Généralité sur les Equations Différentielles Stochastiques

II-1 Equations Différentielles Stochastiques	14
II-1-1 Equations différentielles stochastiques de type Itô	14
II-1-1.1 Equations différentielles de type linéaire	14
II-1-2 Equations différentielles stochastiques réductibles	24
II-1-2.1 Résolution des équations différentielles stochastiques réductibles d'Itô	24
II-1-3 Résolution d'EDS réductibles de Stratonovich	28
II-1-4 Existence et Unicité des solutions des équations différentielles stochastiques :	30
II-1-4.1 Solutions fortes d'une équation différentielle stochastique	30
II-1-4.2 Solution forte et processus de diffusion	37
II-1-4.3 Solution faible et processus de diffusion	40
II-1-5 Théorème de comparaison	42
II-2 Changement de probabilité - Théorème de Girsanov	43
II-2-1 La formule de Cameron-Martin	43
II-2-2 Les deux théorèmes de Girsanov	45
II-2-3 Théorème de représentation prévisible	48

Chapitre III :

Simulation des Equations différentielles stochastiques

III-1 Introduction :	50
III-2 La simulation :	51
III-3 La simulation de Monte-Carlo :	51
III-3-1 Description de la méthode de Monte-Carlo :.....	51
III-3-2 Convergence et limites de la méthode :.....	52
a- La loi forte des grands nombres et la méthode de Monte-Carlo :.....	52
b- Théorème de la limite centrale et méthode de Monte-Carlo :.....	53
c- Un exemple concret :.....	53
III-4 Simulation des variables aléatoires :	54
III-4-1 Simulation d'une loi uniforme sur $[0,1]$:.....	55
III-4-2 Simulation d'autres variables aléatoires:	55
a- Simulation de variables gaussiennes :.....	55
b- Simulation de vecteurs gaussiens :	56
III-5 Simulation de processus stochastique :	57
III-5-1 Simulation du mouvement brownien :	57
III-5-2 Simulation des équations différentielles stochastiques :	58
a- Méthode de discrétisation :	58
b- Simulation des équations différentielles stochastiques :.....	59
III-5-3 Méthode Numériques de résolution des équations différentielles ordinaires....	60
1- Approximation d'Euler déterministe :.....	60
2- Méthodes d'approximation implicites :.....	61
3- Méthode d'approximation d'ordre très élevé :.....	62
4- Méthode d'approximation d'ordre très élevé :.....	62
5- Erreur d'arrondie :	63
III-5-4 Simulation stochastiques en temps discret :.....	64
1- Approximation d'Euler Stochastique :	64
2- Interpolation des approximations par dicrétisation du temps :.....	66

Chapitre IV : Dynamique des Actifs Financiers sous un modèle de taux d'intérêt stochastique

IV-1 Dynamique des taux d'intérêt en temps continu	67
IV-1-1 Notions sur le Processus d'Ornstien-Uhlenbeck :	68
IV-1-2 Modèle de Vasicek :	69
IV-1-3 Modèle de COX, INGERSOLL & ROSS (CIR) :	71
IV-1-4 Limite de ces deux modèle	74
IV-2 Modelisation Des Actifs Financier :	75
IV-2-1 Modélisation dans l'univers RISQUE-NEUTRE :	75
IV-2-2 Le Modèle de Black et Scholes dans l'univers RISQUE-NEUTRE :	76
IV-2-2-1 Le modèle de BLACK & SCHOLES avec modèle de taux d'intérêt de Vasicek :	77
IV-2-2-2 Le modèle de BLACK & SCHOLES avec modèle de taux d'intérêt de CIR :	79
IV-2-3 Analyse statistique des résultats de simulations :	81
IV-3 Transformation d'un système d'EDS en un modèle linéaire :	86
A. Application aux modèles stochastiques couplés sans sauts :	86
B. Application aux modèles stochastiques couplés avec sauts :	88
IV-4 Application Actuarielle :	93

Introduction :

Depuis la publication de leur article, les marchés financiers ont abondamment utilisé le modèle de Black & Scholes (1973) et Merton (1973). Cependant, les constats empiriques faits à partir des données de marchés montrent que contrairement à ce qui est prévu par ce modèle, la volatilité et le taux d'intérêt ne présentent pas un comportement constant. Par ailleurs, des études empiriques montrent que les lois de rendement présentent une asymétrie à gauche et des queues de distribution plus épaisses que celles d'une normale, comme attestent les travaux de Cont (2001) et Carr, Geman, Madan et Yor (2002).

De plus, plusieurs nouvelles contraintes entrent dans la conception et l'élaboration d'un modèle financier tel que l'aspect continu de la dynamique des prix, le flux important des données de marché ainsi que nombre important de facteurs extérieurs qui influent sur la dynamique des cours de marché. Cette complexité de marché rend le modèle de Black & Scholes moins performant dans de pareilles situations. Cet ensemble de constats nous oblige à chercher des modèles successeurs à celui de Black & Schole, qui reproduisent réellement la nature complexe des marchés financiers.

Nous consacrons la présente étude à présenter et analyser le comportement d'un modèle stochastique de prix d'actif financier couplé avec taux d'intérêt stochastique. Mais à part l'application de ce type de modélisation dans le domaine financier, plusieurs applications dans différents domaines sont à envisager notamment dans la climatologie (la modélisation de la température), en biologie (la modélisation de l'évolution d'une bactérie) ... etc. Le choix des différents modèles se fait à la base d'une dynamique de Black & Scholes couplée avec un modèle de taux d'intérêt stochastique. Plusieurs dynamiques de taux d'intérêt seront présentées en détail dans le troisième chapitre.

Dans un premier temps, nous commençons par présenter les principaux aspects et définitions des processus stochastiques, plus particulièrement le mouvement Brownien. Ce dernier constitue la base de la théorie classique des EDS (Equation Différentielle Stochastique) et comme sa trajectoire est non différentiable, alors il était indispensable de se tourner vers une nouvelle discipline mathématique qui est l'intégration stochastique. Ainsi, on présente dans le deuxième chapitre, des notions sur le calcul d'Itô et l'intérêt majeur qu'il apporte à la résolution des EDS. De plus on introduit un autre type d'EDS dite de Stratonovich. On rappelle à la fin de cette partie, un théorème très important en finance, c'est le « théorème de Girsanov » où théorème de changement de probabilité.

Le troisième chapitre sera consacré à la simulation des EDS, on commence d'abord par une présentation des notions élémentaires de la simulation et de la méthode « Monte Carlo », pour aborder ensuite la présentation des schémas de discrétisations stochastiques d'EDS qui

présentent un moyen très flexible pour la simulation à temps discret des EDS et par la suite reprendre un comportement semblable à celui d'un phénomène régi par l'EDS en question. Ce concept repose sur une série d'algorithmes qu'on développe en détail dans le quatrième chapitre qui sera dédié à l'analyse empirique par simulation de comportement des trajectoires régies par un couple d'EDS, et l'éventuelle application de ce genre de système en finance. Ce troisième chapitre visera essentiellement deux points importants pour mesurer l'applicabilité d'un tel modèle ainsi que le domaine de son application (même si en vue à mettre plus en évidence l'application en finance), le premier point est purement théorique et qui s'intéresse à la recherche des moyens mathématiques pour donner un sens à l'application de modèle considéré (construction du modèle d'EDS couplée, estimation des paramètres du modèle, changement de probabilité, ...). Le second point a pour but de juger le comportement de ce type de modèle ainsi que la possibilité de son application (étudier l'éventuelle concordance entre une situation réelle et la dynamique de ce genre de modèle). A la fin de ce chapitre, nous présentons une méthode très flexible développée par Suk KIM & Suojin WANG (2006) et qui a pour but de transformer une EDS en un modèle linéaire, et par la suite valider les résultats des algorithmes de simulations conçus.

Nous donnerons par la suite une série de résultats comparatifs entre des modèles diffusifs avec et sans sauts de processus, ainsi que des modèles avec différents types de modèles de taux d'intérêt à court terme. Et nous concluons ce travail par une application actuarielle qui illustre l'importance des EDSC en Finance.

CHAPITRE I :

Généralité sur les Processus Stochastiques

I-1-Généralité sur les processus :

I-1-1-Processus stochastique :

Définition 1 : Tribu

Soit Ω un ensemble et ξ un sous ensemble de l'ensemble $P(\Omega)$ des parties de Ω . On dit que ξ est une tribu si cet ensemble est stable par les opérations ensemblistes naturelles :

- Stabilité par $\cup$, $\cap$ et par passage au complémentaire : si A et B appartiennent à ξ , alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $\bar{A}$ appartiennent à ξ .
- Stabilité par réunion et intersection dénombrables : si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $A_i \in \xi$ alors $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ et $\bigcap_{i \geq 1} A_i$ sont dans ξ .
- $\emptyset, \Omega \in \xi$.

Remarque :

- $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ est la plus petite tribu. On l'appelle la tribu triviale. Elle représente l'absence totale d'information.
- $\xi = P(\Omega)$ est une tribu appelée tribu discrète qui représente l'information totale.
- Soit $\Omega = \mathcal{R}$, on appelle tribu borélienne la plus petite tribu contenant les intervalles de $\mathcal{R}$. On le note $B(\mathcal{R})$.

Définition 2: Espace mesurable

Soit E un espace quelconque, et soit ξ une tribu des parties de E . La structure (E, ξ) est dite espace mesurable

Définition 3: Application mesurable

Soit (E, ξ) et (F, ξ) deux espaces mesurables. Une application $X: (E, \xi) \rightarrow (F, \xi)$ est dite mesurable ou ξ -mesurable si :

$$\forall b \in \xi, X^{-1}(b) \in \xi \quad \text{où} \quad X^{-1}(b) = \{e \in E / X(e) \in b\}$$

Définition 4: Mesure

Une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une mesure positive de masse totale 1 définie sur $\mathcal{A}$. Cela signifie que :

- Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \in [0, 1]$ est défini.
- $P(\Omega) = 1$.
- Si pour tout entier $i \geq 1$, $A_i \in \mathcal{A}$ et la famille des A_i est disjointe, alors :

$$P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 0} P(A_i)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s'appelle espace de probabilité.

Remarque :

On dit qu'une propriété est vraie presque sûrement si cette propriété est vérifiée avec probabilité 1. On dit ainsi qu'une suite $(X_n, n \geq 1)$ converge presque sûrement si :

$$P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \text{ existe}\right) = 1$$

Définition 5: Processus stochastique

Tout processus décrivant l'évolution chronologique d'un phénomène aléatoire est dit processus stochastique ou processus aléatoire $X(t, \omega)$ ou X_t .

$X(t, \omega)$ est défini comme suit:

$$\begin{aligned} X : R^+ \times \Omega &\rightarrow R \\ (t, \omega) &\rightarrow X(t, \omega) \end{aligned} \tag{I.1.1}$$

Cette application est mesurable lorsque l'on munit $R^+ \times \Omega$ de la tribu $B(R^+) \times \mathcal{A}$.

$B(R^+)$ est l'espace des Boréliens.

Remarque :

$\forall t \in T, X(t) = X(t, \cdot)$ est une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$\forall \omega \in \Omega, X(\cdot, \omega)$ est une réalisation ou une trajectoire du processus stochastique.

Définition 6 : Filtration

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. La filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$, noté $(F_t, t \geq 0)$. La tribu F_t est une description mathématique de toute l'information dont on dispose à l'instant t . Cette information nous permet d'attribuer des probabilités cohérentes aux événements pouvant intervenir.

Définition 7: Processus adapté

Un processus $X(t)_{t \geq 0}$ est dit adapté à la filtration $(F_t, t \geq 0)$ si pour chaque $t, X(t)$ est F_t - mesurable.

Un processus adapté est celui pour lequel une description probabiliste est réalisable.

I-1-2-Processus stochastiques particuliers :

Soit, $X(t, \omega)$ un processus stochastique et $t_1, t_2, \dots, t_k$ ($k \in \mathbb{N}$) une succession de valeurs du temps.

I-1-2-1-Processus stationnaire :

On considère les instants $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_k + \tau$, $\forall \tau > 0$.

Le processus $X(t, \omega)$ est dit stationnaire lorsque les vecteurs aléatoires

$[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)]$ et $[X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_k + \tau)]$ ont la même distribution de probabilité. Cela signifie qu'à priori, quel que soit l'horizon considéré on met la même distribution de probabilité sur l'état du système (même moyenne et même variance).

I-1-2-2-Processus à accroissement indépendant :

Un processus $X(t, \omega)$ est à accroissement indépendant si $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ $k \in \mathbb{N}$, les variables $X(t_k) - X(t_{k-1}), \dots, X(t_2) - X(t_1), X(t_1) - X(0)$ sont indépendantes.

Cela s'interprète par le fait que les états décrits par ce type de processus évoluent dans un univers où les variations passées n'influencent pas les variations futures.

I-1-2-3-Processus à accroissement stationnaire :

Considérons à présent deux instants θ_1 et θ_2 , supposons $\theta_1 \leq \theta_2$ et notons F la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Le processus $X(t, \omega)$ est à accroissement stationnaire si la distribution associée à l'accroissement de la variable sur l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ ne dépend que de la durée écoulée $(\theta_2 - \theta_1)$. En terme d'équation on écrit :

$$F(\varepsilon, \theta_1, \theta_2) = P\{\omega \in \Omega / X(\theta_2, \omega) - X(\theta_1, \omega) < \varepsilon\} = F^*(\varepsilon, \theta_2 - \theta_1) \quad (\text{I.1.2})$$

Remarque :

Nous prenons comme exemple de processus stochastique à accroissement indépendant et stationnaire le processus Brownien qui est un outil mathématique important de la théorie des probabilités. Dans le paragraphe ci-après, nous donnons une concise présentation sur ce processus.

I.1.2.4 Moments**Moment d'ordre 1 : (moyenne)**

$$m_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_t p_{x_t}(x_t) dx_t$$

On notera que la moyenne d'un processus aléatoire, définie comme la valeur moyenne de chacune des variables aléatoires qui constituent le processus, est une fonction *déterministe* de variable réelle.

Moments d'ordre 2 : (auto-corrélation et covariance)

La *fonction d'auto-corrélation* est le moment non-centré d'ordre deux du p.s.:

$$R_x(t, u) = \mathbf{E}[x(t)x(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_t x_u p_{x_t, x_u}(x_t, x_u) dx_t dx_u$$

Propriétés

1. Une fonction d'auto-corrélation est *définie non-négative*, c'est à dire,

$$\forall \alpha_1 \dots \alpha_n, \forall t_1, \dots, t_n, \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j^* R(t_i, t_j) \geq 0$$

De la même façon, si $R(t, s)$ est une fonction définie non-négative, on peut toujours trouver un processus d'ordre deux (c.a.d, de valeur moments d'ordre deux finis), dont la fonction d'auto-corrélation est $R(t, s)$.

2. Une fonction d'auto-corrélation est symétrique (pour variables réelles) :

$$R(t, s) = R(s, t)$$

Ceci découle directement de la définition.

3. Inégalité de Schwarz

$$|R(t, s)| \leq \sqrt{R(t, t)R(s, s)}.$$

4. Fermeture

- Si $R(t, s)$ et $P(t, s)$ sont des fonctions d'auto-corrélation, alors
 - $R(t, s) + P(t, s)$ est aussi une fonction d'auto-corrélation
 - $R(t, s)P(t, s)$ est aussi une fonction d'auto-corrélation
 - Si $a, b > 0$, alors $aR(t, s) + bP(t, s)$ est encore une fonction d'auto-corrélation
 - Formes bilinéaires
- Pour toute fonction $f(t)$, $R(t, s) = f(t)f(s)$ est une fonction d'autocorrélation.

La *fonction de covariance* est le moment centré d'ordre deux:

$$\begin{aligned} K_x(t, u) &= \mathbf{E}[(x(t) - m_x(t))(x(u) - m_x(u))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_t - m_x(t))(x_u - m_x(u)) p_{x_t, x_u}(x_t, x_u) dx_t dx_u \end{aligned}$$

On définit encore le *coefficient de corrélation*, qui est une mesure normalisée de la corrélation statistique entre les variables correspondantes aux deux instants du temps, t et u :

$$C_x(t, u) = \frac{K_x(t, u)}{\sqrt{K_x(t, t)K_x(u, u)}}$$

Le module du coefficient de corrélation est toujours inférieur à 1.

I-2-Processus de diffusion :

I-2-1-Historique :

Origine du mouvement brownien

En 1827, le botaniste R. Brown a découvert au microscope le mouvement irrégulier de petites particules de pollen en suspension dans l'eau. Il a également observé que de petites particules minérales peuvent être soumises à des mouvements erratiques de ce type, comme si elles étaient des objets vivants, ce qui exclut d'attribuer à une "force vitale" ce mouvement incessant et désordonné. C'est A.Einstein qui, en 1905, a donné la première explication physique claire de ce phénomène. Des vérifications expérimentales directes ont été effectuées en 1908 par J. Perrin.

Les phénomènes de fluctuations tels que ceux mis en évidence dans le mouvement brownien sont universellement répandus. Par exemple, le mouvement thermique des électrons dans les conducteurs donne lieu à des fluctuations des courants électriques, fluctuations qui constituent le bruit thermique, étudié en 1928 par J.B. Johnson et H. Nyquist.

De manière générale, toutes les quantités observées expérimentalement ou variables macroscopiques, sont accompagnées de fluctuations dues au mouvement thermique des degrés de liberté microscopiques de la matière. Dans la plupart des cas, les fluctuations des variables macroscopiques sont extrêmement petites par rapport à leurs valeurs moyennes et peuvent être négligées. Cependant, puisqu'elles reflètent les mouvements à l'échelle microscopique dans le système considéré, leur analyse est importante pour l'étude de celui-ci.

En finance, les grandeurs comme le prix d'une action cotée en bourse fluctue de façon analogue au mouvement brownien, sous l'effet cumulé des achats et des ventes réalisées sur le marché par de nombreux opérateurs.

Passage à une description en temps continu

Le mouvement brownien a joué un grand rôle historique en mathématiques : c'est en effet pour représenter la position d'une particule brownienne qu'un processus stochastique a été construit, pour la première fois. Clairement, pour pouvoir associer à un phénomène physique un processus aléatoire, il est nécessaire de passer de la description en temps discret imposée par l'expérience à une description en temps continu. Supposons par exemple que l'on observe au microscope une particule brownienne pendant un intervalle de temps $0 \leq t \leq T$, et

que l'on enregistre en fonction du temps la projection de sa position sur un axe x . Répétant N fois les observations au cours du temps, on obtient N valeurs de la coordonnée de la particule, $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$.

La valeur $x(t)$ de la coordonnée de la particule brownienne au temps t est une réalisation d'une variable aléatoire et chacune des séries observées $x(t_j)$ est un échantillon d'un ensemble statistique. Si l'on pouvait effectuer une observation continue, on obtiendrait une fonction aléatoire du temps ou processus stochastique $X(t)$ avec t comme paramètre continu. En pratique, on effectue les observations à des temps discrets $t_1 < t_2 < \dots < t_N$, obtenant ainsi un ensemble de N nombres, $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$. La description mathématique par un processus en temps continu se fait en prenant N très grand et des intervalles entre les temps d'observation de plus en plus petits.

I-2-2-Mouvement Brownien simple :

Il est encore appelé « processus de Wiener ». C'est un processus de Markov en temps continu et à variable continue, ses accroissements aléatoires sont indépendants.

Soit la marche aléatoire symétrique $\{X_n, n \geq 0\}$ où $Z_n = X_n - X_{n-1}$ tel que :

$$P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = 1/2 = p$$

On considère l'accroissement $\{\Delta X_t, t \geq 0\}$ en temps continu qui diminue de $-\Delta x$ ou augmente de $+\Delta x$ après un certain intervalle de temps Δt , avec la probabilité $p = 1/2$.

L'accroissement $\{\Delta X_t, t \geq 0\}$ a deux propriétés :

- $\Delta X_t = c \sqrt{\Delta t}$.
- $c \rightarrow N(0, 1)$.

$$\text{à } t = n \cdot \Delta t \quad \Delta X_t = \sum_{k=1}^n Z_k \cdot \Delta x = X_n \cdot \Delta x$$

Où les accroissements indépendants $\{Z_k \cdot \Delta x\}$ prennent les valeurs $+\Delta x$ ou $-\Delta x$ avec $p = 1/2$. et puisque ΔX_t est une combinaison linéaire de X_n :

- $E(\Delta X_t) = 0$.
- $\text{Var}(\Delta X_t) = (\Delta x)^2 \text{Var}(X_n) = (\Delta x)^2 n = t (\Delta x)^2 / \Delta t$.

Si $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta X_t = c \sqrt{\Delta t}$ d'où $\text{Var}(\Delta X_t) \rightarrow t E(c^2)$.

Définition 1.1:

Soit le processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$. X_t est un processus de Wiener s'il vérifie les conditions suivantes :

- i. $X_t \sim N(0, c^2 t)$, $t \geq 0$ et $X(0) = 0$.
- ii. $\{X_t, t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants : $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp X_s$, $\forall t > s \geq 0$.
- iii. $(X_t - X_s) \sim N(0, c^2 (t-s))$.

I-2-3- Mouvement Brownien standard :

Soit le processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$. X_t est un mouvement Brownien standard s'il vérifie les conditions suivantes :

- i. $X_t \sim N(0, t)$, $t \geq 0$ et $X(0) = 0$.
- ii. $\{X_t, t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants : $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp X_s$, $\forall t > s \geq 0$.
- iii. $(X_t - X_s) \sim N(0, (t-s))$.

I-2-4- Mouvement Brownien avec drift :

Le mouvement Brownien avec drift est une généralisation du processus de Wiener. Une variable X suit un mouvement Brownien avec drift si son accroissement dx qui se produit pendant l'intervalle dt a pour équation :

$$dx = a dt + b dW$$

- a et b sont deux paramètres constants.
- dW et l'accroissement d'un mouvement Brownien standard.

Cette équation peut être décomposée en deux composantes $a \cdot dt$ et $b \cdot dW$

1) Le terme $a dt$:

Il ne contient aucune variable aléatoire, a est un paramètre appelé drift, c'est-à-dire dérive et qui indique un accroissement certain. Si l'on considère l'accroissement Δx qui se produit pendant le petit intervalle de temps Δt , on obtient la relation :

$$\Delta x = a \Delta t + b \Delta W$$

a est la dérive par unité de temps, Δt étant exprimé dans la même unité de temps.

2) Le terme $b dW$:

C 'est une variable aléatoire. Il représente une variation aléatoire qui s'ajoute à la variation certaine $a dt$ pour déterminer la variation de X .

Cette variation aléatoire est égale à b fois l'accroissement aléatoire brownien w .

On peut conclure que Δx suit une loi normale avec :

- espérance de $\Delta x = a \Delta t$
- variance de $\Delta x = b^2 \Delta t$

$$\Delta x \sim N(a \Delta t, b \sqrt{\Delta t})$$

I-2-5- Processus d'Itô :

Considérons une variable X qui suit un mouvement brownien avec drift. L'accroissement dx pendant le petit intervalle de temps dt est:

$$dx = a dt + b dW$$

On obtient une généralisation du mouvement Brownien avec drift en utilisant des paramètres a et b qui sont des fonctions spécifiées de X et de t .

On obtient:

$$dx_t = a(x, t) dt + b(x, t) dW_t$$

- $E(dx_t) = a(x, t) dt$ car $E(dW_t) = 0$
- $\text{Var}(dx_t) = E[(dx_t)^2] - [E(dx_t)]^2$

La variance de dx contient des termes en dt , $(dt)^2$ et $(dt)(dW)$ c'est-à-dire $(dt)^{3/2}$. Comme $dt \rightarrow 0$, le terme en dt d'un degré supérieur à 1 peut être négligé. Les termes en $(dt)^2$ et $(dt)^{3/2}$ peuvent donc être négligés en ne conservant que les termes en dt , on peut donc écrire:

$$\text{Var}(dx) = b^2(x,t)dt$$

- $a(x,t)$ est appelé drift instantané du processus d'Itô.
- $b^2(x,t)$ est appelé variance instantané du processus d'Itô.

Dans la famille des processus d'Itô, le plus connu est le mouvement Brownien géométrique que nous allons étudier.

I-2-6- Mouvement Brownien géométrique :

Dans ce processus d'Itô, les fonctions qui déterminent le drift instantané et la variance instantanée sont extrêmement simples:

$$\begin{aligned} a(x,t) &= \alpha x \\ b(x,t) &= \sigma x \end{aligned}$$

Où α et σ sont des constants.

L'équation du mouvement brownien géométrique s'écrit donc:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dW$$

I-3-Temps d'arrêt et martingale :

I-3-1-Martingale à temps discret :

Définition 1.2 :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace et $(F_n)_{n \geq 0}$ une filtration sur cet espace. Une suite $(M_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires réelles est une F_n -martingale si :

- $(M_n)_{n \geq 0}$ est F_n -adapté, et, pour tout $n \geq 0$, $E(|M_n|) < +\infty$.
- pour tout $n \geq 0$:

$$E(M_{n+1}/F_n) = E(M_n)$$

Remarque :

Si $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale alors :

$$E(M_{n+1}) = E(E(M_{n+1}/F_n)) = E(M_n)$$

L'espérance d'une martingale est donc constante au cours du temps.

I-3-2-Martingale à temps continu :**Définition 1.3 :**

Soit $(F_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur un espace (Ω, A, P) et $(M_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté à cette filtration. On dit que $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(F_t)_{t \geq 0}$, si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $E(|M_t|) < \infty$ et si pour tout $s \leq t$:

$$E(M_t / F_s) = E(M_s)$$

Remarque :

On déduit de cette définition que, si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale, alors :

$$E(M_t) = E(M_0)$$

I-3-3-Temps d'arrêt :**Définition 1.4 :**

On appelle temps d'arrêt par rapport à une filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que, pour tout $t \geq 0$:

$$\{\tau \leq t\} \in F_t$$

On associe à un temps d'arrêt τ une tribu que l'on note F_τ , définie par :

$$F_\tau = \{ B \in A, \text{ pour tout } t \geq 0, B \cap \{\tau \leq t\} \in F_t \}$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire τ .

Proposition 1:

- Si S est un temps d'arrêt, S est F_S -mesurable.
- Si S est un temps d'arrêt, fini presque sûrement, et $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté continu, alors X_S est F_S -mesurable.
- Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$ P p.s, alors $F_S \subset F_T$.
- Si S et T sont deux temps d'arrêt alors $S \wedge T = \inf(S, T)$ est un temps d'arrêt.
- Si S est un temps d'arrêt et t est un temps déterministe $S \wedge T$ est un temps d'arrêt.

Théorème 1.1 :

Si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(F_t)_{t \geq 0}$, et si T_1 et T_2 sont deux temps d'arrêt tels que $T_1 \leq T_2 \leq K$, K étant une constante réelle finie, alors M_{T_2} est intégrable et :

$$E(M_{T_2} / F_{T_1}) = M_{T_1} \quad P \text{ p.s}$$

Remarque :

Ce résultat entraîne que, si T est un temps d'arrêt borné, alors :

$$E(M_m) = E(M_0)$$

I-3-4-Exemples de martingales browniennes :**Proposition 2 :**

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard, alors si $F_t = \sigma(X_s, s \leq t)$:

- $(X_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à $(F_t, t \geq 0)$,
- $(X_t^2 - t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à $(F_t, t \geq 0)$,
- $(\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t), t \geq 0)$ est une martingale par rapport à $(F_t, t \geq 0)$,

Proposition 3 :

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un F_t -mouvement Brownien. Notons, si a est un nombre réel,

$T_a = \inf\{s \geq 0, X_s = a\}$, ou $+\infty$ si cet ensemble est vide.

Alors, T_a est un temps d'arrêt fini presque sûrement, dont la loi est caractérisée par sa transformée de Laplace :

$$E(e^{-\lambda T_a}) = e^{-\sqrt{2\lambda}|a|}$$

I-4 Le lemme d'Itô :**Énoncé :**

Soit X une variable suit un processus d'Itô:

$$dx = a(x, t) + b(x, t)dW$$

Les paramètres a et b sont des fonctions définies de la variable X et du temps :

- a est le taux de drift.
- b^2 est le taux de variance.
- W est un Brownien standard.

Soit $F(X, t)$ une fonction de X et de t , dérivable au moins deux fois par rapport à X et une fois par rapport à t .

$\partial F / \partial X$ désigne la dérivée première par rapport à X .

$\partial^2 F / \partial X^2$ désigne la dérivée seconde par rapport à X .

$\partial F / \partial t$ désigne la dérivée première par rapport à t .

Le lemme d'Itô établit que F suit un processus d'Itô. Pour cela il montre que :

$$df = [(\partial F / \partial t) + a(\partial F / \partial X) + 1/2 b^2(\partial^2 F / \partial X^2)]dt + b(\partial F / \partial X) dW$$

Il s'agit bien de l'équation d'un processus d'Itô tel que :

- Le taux de drift est $((\partial F)/(\partial t)) + a((\partial F)/(\partial X)) + 1/2 b^2((\partial^2 F)/(\partial X^2))$.
- Le taux de variance est $b^2 [(\partial F)/(\partial X)]^2$
- dW est le même Brownien que celui de la variable X .

Démonstration :

La démonstration du lemme d'Itô se réfère aux développements limités de Taylor. Si l'on considère la fonction $F(X,t)$ qui est une fonction des deux variables X et t , on peut écrire le développement limité suivant :

$$\Delta F = (\partial F/\partial t) \Delta t + (\partial F/\partial X) \Delta X + 1/2 (\partial^2 F/\partial X^2) \Delta X^2 + (\partial^2 F/\partial X \partial t) \Delta X \Delta t + 1/2 (\partial^2 F/\partial t^2) \Delta t^2 + \dots [1]$$

Lorsque ΔX tend vers 0, nous ne savons pas à priori, comment évolue ΔX^2 contenu dans le 3^{ème} terme de l'expression ci-dessus

$$\Delta X = a(X, t) \Delta t + b(X, t) \cdot \Delta W$$

$$\text{avec } \Delta W = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad \text{avec } \varepsilon \sim N(0,1)$$

Pour simplifier l'écriture, on écrit :

$$\Delta X = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta X^2 = a^2 \Delta t^2 + b^2 \varepsilon^2 \Delta t + 2ab \varepsilon \Delta t^{3/2}$$

$$\Delta X^2 = b^2 \varepsilon^2 \Delta t + a^2 \Delta t^2 + 2ab \varepsilon \Delta t^{3/2} \dots [2]$$

Quand Δt tend vers 0, on peut négliger les deux derniers termes du membre de droite de l'égalité ci-dessus : $a^2 \Delta t^2$ et $2ab \varepsilon \Delta t^{3/2}$ car ce sont des termes en Δt d'ordre supérieure à 1. En revanche, on ne peut pas négliger le premier terme $b^2 \varepsilon^2 \Delta t$.

Nous voyons immédiatement que dans l'égalité [1] nous ne pourrions pas négliger le 3^{ème} terme $1/2 (\partial^2 F/\partial X^2) \Delta X^2$ quand ΔX et Δt tendent vers 0.

Car, comme l'indique l'égalité [2], ΔX^2 a une composante en Δt .

Concentrons notre attention sur l'expression $b^2 \varepsilon^2 \Delta t$ qui est le noyau dur de ΔX^2 que nous devons conserver quand ΔX et Δt tendent vers 0.

Nous voulons étudier comment évolue $\varepsilon^2 \Delta t$ quand $\Delta t \rightarrow 0$

$$\varepsilon \sim N(0,1)$$

$$\text{Var } \varepsilon = E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

Comme $E(\varepsilon) = 0$, nous voyons donc que :

$$E(\varepsilon^2) = 1$$

$$E(\varepsilon^2 \Delta t) = \Delta t$$

Calculons la variance de $\varepsilon^2 \Delta t$:

$$\text{Var}(\varepsilon^2 \Delta t) = \Delta t^2 \text{var}(\varepsilon^2)$$

Cette variance est d'ordre 2 en Δt : elle tend vers 0 quand Δt tend vers 0.

Si nous considérons $\varepsilon^2 \Delta t$ nous voyons donc que quand Δt tend vers 0 :

- Son espérance = Δt
- Sa variance tend vers 0.

Nous pouvons donc conclure que, quand Δt tend vers 0, $\varepsilon^2 \Delta t$ tend vers Δt .

En conséquence, le premier terme de l'égalité [2], c'est-à-dire $b^2 \varepsilon^2 \Delta t$, devient un nombre certain égal à $b^2 \Delta t$ quand Δt tend vers 0.

Au total, en considérant l'équation [1] et en ne conservant que les trois premiers termes du membre de droite lorsque ΔX et Δt tendent vers 0.

On obtient :

$$dF = (\partial F / \partial t) dt + (\partial F / \partial X) dX + 1/2 b^2 (\partial^2 F / \partial X^2) dt \dots [3]$$

Nous savons que X suit un processus d'Itô et donc que :

$$dX = a(X, t) dt + b(X, t) dW \dots [4]$$

En reportant la valeur de dX donnée par l'égalité [4] dans l'égalité [3], nous obtenons :

$$dF = [\partial F / \partial t + a(X, t) (\partial F / \partial X) + 1/2 b^2(X, t) (\partial^2 F / \partial X^2)] dt + b(X, t) (\partial F / \partial X) dW \dots [5]$$

Ceci est bien l'équation d'un processus d'Itô.

Nous pouvons conclure que F suit un processus d'Itô.

Le taux de drift et le taux de variance de ce processus dépendent :

1. Des taux de drift et de variance du processus suivi par X , c'est à dire : $a(X, t)$ et $b(X, t)$.
2. Des dérivées partielles de la fonction $F(X, t)$, c'est à dire :
 - La dérivée première par rapport à t .
 - La dérivée première par rapport à X .
 - La dérivée seconde par rapport à X .

Le processus d'Itô suivi par F sera entièrement défini si nous connaissons :

- L'équation du processus d'Itô suivi par X : ce sera toujours pour nous un mouvement Brownien géométrique dont il sera nécessaire de connaître les deux paramètres.
- La fonction F de X et de t .

Application :

Voici une application immédiate du lemme d'Itô :

Soit une variable X qui suit un mouvement Brownien géométrique de paramètres α et σ constants :

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dW$$

Soit une fonction F de X qui est $F = \log X$

Nous nous proposons de calculer l'équation du processus d'Itô suivi par F .

Nous pouvons calculer immédiatement :

- La dérivée première de F par rapport à t : $\partial F / \partial t = 0$
- La dérivée première de F par rapport à X : $\partial F / \partial X = 1/X$
- La dérivée seconde de F par rapport à X : $\partial^2 F / \partial X^2 = -1/X^2$

En nous reportant à l'équation [5], nous avons :

$$a = \alpha X$$

$$b = \sigma X \text{ et } b^2 = \sigma^2 X^2$$

L'équation [5] donne alors :

$$dF = [0 + \alpha X(1/X) + 1/2(\sigma^2 X^2)(-1/X^2)].dt + \sigma X(1/X)dW$$

$$dF = [\alpha - (\sigma^2/2)].dt + \sigma dW$$

α et σ sont des constants. Nous pouvons donc dire que F , c'est-à-dire : le logarithme de X , suit un mouvement Brownien avec drift avec les conséquences que cela entraîne, comme nous l'avons vu précédemment.

Si la date présente $t=0$ et si T désigne une date future quelconque :

$$\log X_T - \log X_0 \sim N[(\alpha - (\sigma^2/2))T, \sigma \sqrt{T}]$$

$$\log X_T \sim N[\log X_0 + (\alpha - (\sigma^2/2))T, \sigma \sqrt{T}]$$

Cela permet :

- De calculer un intervalle de confiance pour $\log X_T$.
- De calculer un intervalle de confiance pour X_T .
- De dire que X_T suit une loi log normale donc de déterminer l'espérance et la variance de X_T .

CHAPITRE II :

Généralité sur les Equations Différentielles Stochastiques

II-1 Equations Différentielles Stochastiques

Introduction

Lorsque nous avons présenté les propriétés élémentaires du processus de Wiener; la construction intuitive que nous avons exposée était fondée sur les marches aléatoires particulières dont les accroissements prenaient deux valeurs seulement avec une espérance nulle et une variance proportionnelle à la durée séparant deux dates. Toutefois, les paramètres d'espérance et de variance par unité de temps sont constants dans le cas du mouvement brownien. Ceci constitue une restriction importante lorsque l'on cherche par exemple à modéliser la dynamique des taux d'intérêt dans laquelle il semble raisonnable, au vu des constatations empiriques, d'introduire une force de rappel induisant une espérance de variation négative quand les taux sont élevés et une espérance de variation positive quand ils sont faibles. De la même façon, pour ce qui concerne la variance par unité de temps, il est difficile de la supposer indépendante du niveau des taux. En particulier, lorsque les taux sont très faibles, on s'attend à observer une variance plus faible que quand ces taux sont très élevés. La définition d'un processus d'Itô suppose l'existence de fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ qui dépendent à la fois du niveau atteint par le processus considéré et de la date considérée. Il s'agit donc de bons candidats pour modéliser les dynamiques des variables financières comme les prix, les rentabilités, les taux d'intérêt et les taux de change. Il est toutefois important de noter que le mouvement brownien général est un cas particulier de processus d'Itô.

Dans cette section, nous présentons comment est construit l'intégrale stochastique et le lemme d'Itô, encore appelé théorème fondamental du calcul stochastique.

II-1-1 Equations différentielles stochastiques de type Itô

II-1-1.1 Equations différentielles de type linéaire

A. Résolution des EDS de type linéaire

La méthode de résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS) nécessite l'introduction de la solution correspondante à l'équation différentielle homogène. Nous considérons ici les équations de type scalaire ayant la forme générale

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t \quad (\text{II.1.1})$$

Où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des fonctions de temps, mesurables au sens de Lebesgue et bornées sur $[0, T]$.

On définit le processus X_t pour tout $t_0 \leq t < T$, où X_{t_0} est F_{t_0} mesurable, ainsi que le processus de Wiener W_t (W_t est F_t mesurable).

Lorsque $a_2(t) \equiv 0$ et $b_2(t) \equiv 0$, l'expression (II.1.1) se réduit à l'équation différentielle stochastique homogène et linéaire :

$$dX_t = a_1(t)X_t dt + b_1(t)X_t dW_t \quad (\text{II.1.2})$$

Quand $b_1(t) \equiv 0$, le bruit apparaît comme un terme additif et l'équation (II.1.1) devient :

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + b_2(t)dW_t \quad (\text{II.1.3})$$

Dans ce cas là l'EDS est dit linéaire dans un sens limité (Linear in the narrow sense) et l'équation homogène obtenue à partir de (II.1.3) est une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX_t}{dt} = a_1(t)X_t \quad (\text{II.1.4})$$

où la solution fondamentale est donnée par : $\phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right)$.

En appliquant la formule de Itô à la transformation $U(t, x) = \phi_{t,t_0}^{-1}x$ on obtient :

$$d(\phi_{t,t_0}^{-1}X_t) = \left[\frac{d\phi_{t,t_0}^{-1}}{dt}X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t))\phi_{t,t_0}^{-1} \right] dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}dW_t.$$

$$\text{Or } \frac{d\phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} = -\phi_{t,t_0}^{-1} \cdot a_1(t) \Rightarrow d\phi_{t,t_0}^{-1}X_t = (a_2(t) \cdot \phi_{t,t_0}^{-1})dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}dW_t$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme intégrale :

$$\phi_{t,t_0}^{-1}X_t = \phi_{t_0,t_0}^{-1}X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) \cdot \phi_{s,t_0}^{-1})ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1}dW_s$$

Sous la condition $\phi_{t_0,t_0} = 1$, la solution de (1.3) est

$$X_t = \phi_{t,t_0} \cdot \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) \cdot \phi_{s,t_0}^{-1})ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1}dW_s \right) \quad (\text{II.1.5})$$

$$\text{où } \phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right) \quad (\text{II.1.6})$$

Le processus X_t (II.2.5) est une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes car $\int_{t_0}^t f(s) dW_s$ est gaussienne pour toute fonction déterministe f ; en plus, X_{t_0} est supposé déterministe (constante) ou une variable gaussienne. Dès lors, X_t est un processus gaussien où la moyenne et le moment d'ordre deux satisfont les équations différentielles ordinaires. Toute fois, dans le cas général la solution de (II.1.1) n'est pas toujours gaussienne.

Proposition 1

La solution fondamentale de (II.1.2) est donné par :

$$\phi_{t,t_0} = \phi_{t_0,t_0} \cdot \exp \left[\int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s \right] \quad (\text{II.1.7})$$

où ϕ_{t_0,t_0} est généralement égale 1.

Preuve Proposition 1

La solution fondamentale (II.1.6) d'une équation linéaire au sens limité satisfait l'équation différentielle ordinaire $d \ln \phi_{t,t_0} = a_1(t) dt$. En utilisant cette définition, la formule d'Itô appliqué à la transformée de la solution fondamentale $\ln \phi_{t,t_0}$ de (II.1.2) sera:

$$\begin{aligned} d(\ln \phi_{t,t_0}) &= \left(a_1(t) \phi_{t,t_0} \phi_{t,t_0}^{-1} - \frac{1}{2} b_1^2(t) \phi_{t,t_0}^2 \phi_{t,t_0}^{-2} \right) dt + b_1(t) \phi_{t,t_0} \phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \\ &= \left(a_1(t) - \frac{1}{2} b_1^2(t) \right) dt + b_1(t) dW_t \\ \Rightarrow \ln \phi_{t,t_0} &= \int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s \end{aligned}$$

Lorsque $b_1(t) \equiv 0$, (II.1.7) se réduit à (II.1.6).

Proposition 2

Le processus $\phi_{t,t_0}^{-1} X_t$ qui est fonction de la solution X_t de l'équation générale (II.1.1) possède une forme explicite de l'intégrale stochastique de la forme :

$$\phi_{t,t_0}^{-1} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t [a_2(s) - b_1(s) \cdot b_2(s)] \cdot \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t [b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1}] dW_s$$

Similairement, on applique la formule d'Itô à ϕ_{t,t_0}^{-1} et on obtient :

$$d\phi_{t,t_0}^{-1} = \left(-a_1(t) + b_1^2(t) \right) \cdot \phi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t) \phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \quad (\text{II.1.8})$$

Ce qui implique que la solution de l'équation générale (II.1.1) est donné par :

$$X_t = \phi_{t,t_0} \cdot \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t [a_2(s) - b_1(s) \cdot b_2(s)] \cdot \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t [b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1}] dW_s \right] \quad (\text{II.1.9})$$

où ϕ_{t,t_0} est donné par l'expression (II.1.8).

Preuve

Les deux termes ϕ_{t,t_0}^{-1} et X_t possèdent des différentielles stochastiques incluant le même

processus de Wiener W_t , ce qui implique que la différentielle de leur produit :

$$U(X_t^1, X_t^2) = X_t^1 \cdot X_t^2 \text{ avec } X_t^1 = \phi_{t,t_0}^{-1} \text{ et } X_t^2 = X_t \text{ donne :}$$

$$\begin{aligned} d\phi_{t,t_0}^{-1} X_t &= \phi_{t,t_0}^{-1} \left([a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t \right) + X_t \left((-a_1(t) + b_1^2(t)) \cdot \phi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t) \phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \right) \\ &\quad - b_1(t) \cdot \phi_{t,t_0}^{-1} \cdot [b_1(t)X_t + b_2(t)]dt = [a_2(t) - b_1(t) \cdot b_2(t)] \cdot \phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t) \phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle de temps $[t_0, t]$ et en supposant que $\phi_{t_0,t_0} = 1$, on obtient :

$$\phi_{t,t_0}^{-1} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t [a_2(s) - b_1(s) \cdot b_2(s)] \cdot \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t [b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1}] dW_s.$$

Corollaire

Dans le cas d'une équation différentielle stochastique de type $dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$ on applique l'équation (II.1.9) avec $a_1(t) \equiv a$, $b_1(t) \equiv b$ et $a_2(t) \equiv b_2(t) \equiv 0$ et la solution

est donné dans ce cas par:
$$X_t = X_0 \cdot \exp \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b W_t \right]$$

Ce corollaire est important dans la partie simulation lorsqu'on compare cette solution exacte du processus de diffusion à celle approchée grâce aux méthodes numériques conçues pour la résolution des EDS.

A.1 Solutions générales de quelques EDS de type linéaire

Nous exposons dans cette partie la solution générale de diverses équations différentielles stochastiques linéaires que le bruit, présenté par le mouvement brownien, soit additif ou multiplicatif.

Nous rappelons que la solution générale d'une équation linéaire de la forme :

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t$$

est donné par l'expression

$$X_t = \phi_{t,t_0} \cdot \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t [a_2(s) - b_1(s) \cdot b_2(s)] \cdot \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t [b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1}] dW_s \right]$$

où la solution fondamentale est $\phi_{t,t_0} = \exp \left[\int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s \right]$

1- $a_1(t) \equiv -\alpha, b_2(t) \equiv \sigma, a_2(t) \equiv b_1(t) \equiv 0$.

$$X_t = e^{-\alpha t} \left(X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right) \quad (\text{II.1.10})$$

2- $a_1(t) \equiv a, a_2(t) \equiv b, b_1(t) \equiv 0, b_2(t) \equiv c$.

$$X_t = e^{at} \left(X_0 + \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + c \int_0^t e^{-as} dW_s \right) \quad (\text{II.1.11})$$

3- $a_1(t) \equiv a(t), a_2(t) \equiv b(t), b_1(t) \equiv c(t), b_2(t) \equiv 0$

$$X_t = \phi_{t,t_0} \cdot \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t \phi_{s,t_0}^{-1} b(s) ds + \int_{t_0}^t c(s) \phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right] \quad (\text{II.1.12})$$

où $\phi_{t,t_0} = \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right)$

4- $a_1(t) \equiv a, b_1(t) \equiv b, a_2(t) \equiv b_2(t) \equiv 0$

$$X_t = X_0 \exp \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b W_t \right] \quad (\text{II.1.13})$$

5- $a_1(t) \equiv a, a_2(t) \equiv c, b_1(t) \equiv b, b_2(t) \equiv d$

$$X_t = \phi_t \left[X_0 + (c - bd) \int_0^t \phi_s^{-1} ds + d \int_0^t \phi_s^{-1} dW_s \right] \quad (\text{II.1.14})$$

$$\text{où } \phi_t = \exp \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b W_t \right]$$

$$6- a_1(t) \equiv a(t), b_1(t) \equiv b(t), a_2(t) \equiv b_2(t) \equiv 0$$

$$X_t = X_0 \exp \left[\int_0^t \left(a(s) - \frac{1}{2} b^2(s) \right) ds + \int_0^t b(s) dW_s \right] \quad (\text{II.1.15})$$

Exemples d'applications d'une EDS linéaire

Processus de capitalisation

Nous présentons dans cet exemple un problème rencontré dans le domaine des finances.

Il s'agit de l'évolution d'un capital au cours du temps où son accroissement est supposé proportionnel au capital lui-même ainsi qu'au temps écoulé. Cela signifie que plus le capital est important ou a un emplacement plus long, plus il est rémunéré davantage.

Cette description peut être mise en équation comme suit :

$$\Delta C = r(t) \times \Delta C \times r(t) \dots\dots (*)$$

$C(t)$: Le capital à l'instant t

$r(t)$: Le taux de proportionnalité

$C(0)$: La valeur du capital à l'instant 0 (valeur actuelle)

ΔC : L'accroissement du capital entre t et $t + \Delta t$

La modélisation de cette évolution à court terme nous permet d'écrire

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta t} = r(t) \times C(t) = \frac{d}{dt} C(t) \Rightarrow \frac{dC}{C} = r(t) dt$$

La solution de cette équation différentielle est donné par: $C(t) = C(0) \cdot \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}$.

Généralement, si on n'a pas d'informations sur les fluctuations possibles dans le futur, alors le taux de proportionnalité est constant ($r(t) = i$) et la valeur du capital à l'instant

t sera : $C(t) = C(0) \cdot e^{it}$

où i traduit le taux d'accroissement du capital par unité de temps.

Considérons à présent la fonction flux d'intérêt cumulé $I(t) = i \cdot t$, l'équation d'évolution du capital sera donc $dC(t) = C(t) dI(t)$ (cas déterministe). Supposons que $I(t)$ subit des perturbations aléatoires ayant la forme d'un mouvement Brownien :

$$dI(t) = i \cdot dt + \sigma \cdot dW(t) .$$

Dés lors, l'évolution d'un capital régit suivant l'équation différentielle stochastique

$$dC(t) = C(t) \cdot i \cdot dt + C(t) \cdot \sigma \cdot dW(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

A noter que cette équation est utilisée dans la formule de Black et Scholes pour le calcul des options et dont la solution est donnée par l'expression (II.1.13), avec $a = i$ et $b = \sigma$.

La solution représente le processus de capitalisation qui est donné par :

$$C(t) = C(0) \cdot \exp\left\{\left(i - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot t + \sigma W_t\right\}$$

Equation de Langevin

Suite aux indications d'Einstein sur le mouvement brownien durant la première décennie de ce siècle, des tentatives ont été faites par Langevin et autres pour décrire le comportement dynamique d'une particule dans un fluide soumis à l'agitation thermique via les équations différentielles. Langevin a établi pour l'accélération de la particule

l'équation différentielle : $\frac{dX_t}{dt} = -aX_t + b\varepsilon_t$, a et $b > 0$.

Cette expression n'est autre que la somme de la force frictionné retardé qui dépend de la vitesse de la particule et de la force de la molécule exprimée par le bruit blanc ε_t ainsi que de l'intensité b qui est indépendante de la vitesse.

L'équation de Langevin décrite plus haut peut se mettre sous la forme stochastique

$$dX_t = -aX_t dt + b dW_t. \text{ Cette dernière est un cas particulier de (II.1.10) avec}$$

$$a_1(t) \equiv -a, b_2(t) \equiv b \text{ et } a_2(t) \equiv b_1(t) \equiv 0 \text{ et donc la solution générale}$$

représentant le processus d'Einstein Uhlenbeck est donnée par :

$$X_t = e^{-at} \cdot X_0 + b e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

En appliquant l'expression (II.1.8) avec $f(t) = e^{at}$, l'intégrale stochastique d'Itô sera de la forme :

$$\int_0^t e^{as} dW_s = e^{at} W_t - a \int_0^t e^{as} W_s ds$$

a et b sont des paramètres inconnus à estimer.

Il existe diverses méthodes d'estimation des fonctions ou des paramètres inconnus qui interviennent dans une EDS, comme les méthodes paramétriques et non paramétriques. Notons que les méthodes paramétriques sont plus précises par rapport à la méthode des moments car elles se basent sur la méthode du maximum de vraisemblance.

Le calcul du moment d'ordre un et deux du processus de diffusion X_t , que nous allons présenter dans la prochaine section, est un résultat utilisé pour l'estimation des paramètres inconnus.

Espérance et moment d'ordre deux d'un processus de diffusion

Dans certains cas on ne peut trouver la forme explicite du processus de diffusion X_t ou bien l'objectif de l'étude des EDS n'est pas de simuler la trajectoire du processus mais seulement sa loi, alors on est amené à chercher l'espérance et la variance du processus de diffusion au moyen des EDS.

Proposition 3

L'espérance et le moment d'ordre deux du processus X_t , ayant la forme différentielle stochastique (II.2.1) satisfont les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dm(t)}{dt} = a_1(t)m(t) + a_2(t) \quad \text{où} \quad m(t) = E(X_t) \quad (\text{II.1.16})$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = (2a_1(t) + b_1^2(t))P(t) + 2m(t)(a_2(t) + b_1(t).b_2(t)) + b_2^2(t) \quad (\text{II.1.17})$$

où $P(t) = E(X_t^2)$

Preuve

L'équation (II.1.16) est obtenue en introduisant l'espérance à la forme intégrale de (II.1.1) et en utilisant la propriété d'une intégrale stochastique (la moyenne d'une intégrale stochastique est nulle).

L'équation (II.1.17) résulte de l'application de la formule d'Itô afin d'obtenir une équation différentielle stochastique du processus X_t^2 .

$$\begin{aligned} d(X_t^2) &= \left[(a_1 X_t + a_2) + 2X_t + \frac{1}{2}(b_1 X_t + b_2)^2 \cdot 2 \right] dt + (b_1 X_t + b_2) \cdot 2X_t dW_t \\ &= (2a_1 X_t^2 + 2a_2 X_t + b_1^2 X_t^2 + 2b_1 b_2 X_t + b_2^2) dt + (2b_1 X_t^2 + 2b_2 X_t) dW_t \end{aligned}$$

En passant à l'intégrale, puis en introduisant l'espérance à l'expression ci-dessus, le dernier terme s'annule car l'espérance d'une intégrale stochastique est nulle. Comme

$$P'(t)dt = \frac{dP(t)}{dt}dt = \frac{dE(X_t^2)}{dt}dt = E(dX_t^2), \text{ alors}$$

$$E(dX_t^2) = [2a_1E(X_t^2) + 2a_2E(X_t) + b_1^2E(X_t^2) + 2b_1b_2E(X_t) + b_2^2]dt + 0$$

$$\Rightarrow P'(t) = (2a_1(t) + b_1^2(t))P(t) + 2(a_2(t) + b_1b_2)m(t) + b_2^2(t) \quad \text{où } m(t) = E(X_t)$$

Lorsque l'équation différentielle stochastique est linéaire au sens limité (II.2.3), l'équation (II.2.16) reste la même, par contre l'équation (II.2.17) devient

$$\frac{dp(t)}{dt} = 2a_1(t)P(t) + 2a_2(t)m(t) + b_2^2(t)$$

Exemple

Dans l'exemple pratique de Langevin, on peut estimer les paramètres a et b en calculant la moyenne et le moment d'ordre deux de X_t , donnés par :

$$m(t) = m(0)e^{-at} \quad \text{et} \quad P(t) = P(0)e^{-2at} + \frac{b^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Les deux expressions de $m(t)$ et $P(t)$ sont obtenues en résolvant les équations (II.1.16) et (II.1.17) dans ce cas particulier. En effet : $m'(t) = -am(t)$ et $P'(t) = -2aP(t) + b^2$ sont des équations différentielles ordinaires de premier ordre.

On rappelle que la solution générale d'une équation de la forme: $\frac{dx(t)}{dt} = \alpha \cdot x(t) + \beta(t)$ est

$$\text{donné par } x(t) = e^{\alpha t} \left(x_0 + \int_0^t e^{-\alpha s} \cdot \beta(s) ds \right) \text{ où } x_0 = x(0) \text{ et } \beta \text{ est une fonction continue}$$

en t .

Lorsque $\beta(t) \equiv \beta$ (Indépendante de t), la solution est $x(t) = x_0 e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{\alpha t})$

A.2 Equations différentielles stochastiques vectorielles

Beaucoup d'applications sont modélisées par un système dynamique d'EDS. Considérons le processus de Wiener de dimension m , $W = \{W_t, t \geq 0\}$ où les composantes

$W_t^1, W_t^1, \dots, W_t^m$ sont des processus de Wiener scalaires indépendants.

Soit le vecteur drift de dimension d , $a:[t_0, T] \times \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}^d$ et la matrice de diffusion de dimension $d \times m$, $b:[t_0, T] \times \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}^{d \times m}$.

La forme générale d'une EDS linéaire de dimension d est

$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sum_{l=1}^m (B^l(t)X_t + b^l(t))dW_t^l \quad (\text{II.1.18})$$

Pour tout $t \in [t_0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^d$, $A(t), B^1(t), B^2(t), \dots, B^m(t)$ sont des matrices de fonctions de dimension $d \times d$ et $a(t), b^1(t), b^2(t), \dots, b^m(t)$ sont des vecteurs de fonctions de dimension d . La solution de (II.2.18) a la forme :

$$X_t = \phi_{t, t_0} \cdot \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \phi_{s, t_0}^{-1} \left(a(s) - \sum_{l=1}^m B^l(s) \cdot b^l(s) \right) ds + \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^t \phi_{s, t_0}^{-1} b^l(s) dW_s^l \right) \quad (\text{II.2.19})$$

ϕ_{t, t_0} est la solution fondamentale de dimension $d \times d$ qui satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$d\phi_{t, t_0} = A(t)\phi_{t, t_0} dt + \sum_{l=1}^m B^l(t) \cdot \phi_{t, t_0} dW_t^l \quad (\text{II.1.20})$$

$\phi_{t_0, t_0} = I$, I est la matrice identité.

Malheureusement, on ne peut pas toujours trouver la solution explicite de l'équation (II.2.20). Cependant, si les matrices $A, B^1, B^2, \dots, B^m$ sont constantes (indépendantes de t) et commutatives, tel que $AB^l = B^l A$ et $B^l B^k = B^k B^l, \forall k, l = 1, 2, \dots, m$, on obtient alors l'expression explicite de la matrice de la solution fondamentale :

$$\phi_{t, t_0} = \exp \left\{ \left[A - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (B^l)^2 \right] \cdot (t - t_0) + \sum_{l=1}^m B^l (W_t^l - W_{t_0}^l) \right\} \quad (\text{II.1.21})$$

Remarque

Dans un cas particulier où l'équation différentielle stochastique est de la forme :

$$dX_t = aX_t dt + b^1 X_t dW_t^1 + b^2 X_t dW_t^2 \quad (\text{II.1.22})$$

alors la solution générale est donnée par :

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \left((b^1)^2 + (b^2)^2 \right) \right) \cdot t + b^1 W_t^1 + b^2 W_t^2 \right\} \quad (\text{II.1.23})$$

Il est possible de dériver les équations différentielles ordinaires vectorielles et matricielles pour obtenir le vecteur de dimension d , $m(t)=E(X_t)$ ainsi que la matrice des moments d'ordre deux, de dimension $d \times d$, $P(t)=E(X_t X_t^T)$. Comme $X_t X_t^T$ est une matrice symétrique, alors on a

$$\frac{dm}{dt} = A(t)m + a(t) \quad (\text{II.1.24})$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \frac{dP}{dt} = & A(t)P + PA(t)^T + \sum_{l=1}^m B^l(t) \cdot PB^l(t)^T + a(t)m(t)^T + m(t)a(t)^T + \dots \\ & + \sum_{l=1}^m \left(B^l(t) \cdot m(t)b^l(t)^T + b^l(t)m(t)^T B^l(t) + b^l(t)b^l(t)^T \right) \dots \dots (\text{II.1.25}) \end{aligned}$$

Avec les conditions initiales $m(t_0)=E(X_{t_0})$ et $P(t_0)=E(X_{t_0} X_{t_0}^T)$, respectivement.

Pour plus de détails sur la résolution des EDS linéaires et non linéaires.

II-1-2 Equations différentielles stochastiques réductibles

II-1-2-1 Résolution des équations différentielles stochastiques réductibles d'Itô

Certaines équations différentielles non linéaires de type

$$dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t \quad (\text{II.2.2.1})$$

peuvent s'écrire sous la forme linéaire

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t \quad (\text{II.2.2.2})$$

avec $X_t = U(t, Y_t)$. Si $\frac{dU}{dy}(t, y) \neq 0$, alors $y = V(t, x)$ est dit l'inverse local de

$x = U(t, y)$ (Théorème d'inversion des fonctions) où

$x = U(t, V(t, x))$ et $y = V(t, U(t, y))$.

Considérons le cas où $a_1(t) \equiv b_1(t) \equiv 0$, $a_2(t) \equiv \alpha(t)$, $b_2(t) \equiv \beta(t)$. La proposition ci après est une condition suffisante permettant la transformation de l'équation réductible (II.2.2.1) dans ce cas particulier.

Proposition 4

Soit la fonction $\gamma(t, y)$, définit par

$$\gamma(t, y) = \frac{1}{b(t, y)} \cdot \frac{db}{dt}(t, y) - b(t, y) \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} - \frac{1}{2} \frac{db}{dy}(t, y) \right) \quad (\text{II.2.2.3})$$

Si $\frac{d\gamma}{dy}(t, y) = 0$ alors l'équation différentielle stochastique non linéaire (II.2.2.1) peut

être transformée en équation différentielle stochastique explicitement intégrable de la forme :

$$dX_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t \quad (\text{II.2.2.4})$$

et cela en effectuant la transformation $x = U(t, y)$ avec :

$$U(t, y) = c \cdot \exp\left(\int_0^t \gamma(s, y)ds\right) \cdot \left(\int_0^y \frac{1}{b(t, z)} dz\right) \quad (\text{II.2.2.5})$$

où c est une constante arbitraire.

Preuve

La solution Y_t de (II.2.2.1) est de la forme $Y_t = V(t, X_t)$ où X_t est donnée en (II.2.2.2).

Il en résulte de la formule d'Itô que la différentielle de la transformée U est

$$dU(t, y) = \left[\frac{dU}{dt}(t, y) + a(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{d^2 U}{dy^2}(t, y) \right] dt + \left[b(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) \right] dW_t$$

Comme $U(t, Y_t) = X_t$, alors par identification à l'équation différentielle linéaire

(II.2.2.4), on arrive aux égalités suivantes:

$$\frac{dU}{dt}(t, y) + a(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{d^2 U}{dy^2}(t, y) = \alpha(t) \quad (\text{II.2.2.6})$$

$$b(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) = \beta(t) \quad (\text{II.2.2.7})$$

En dérivant par rapport à y , les deux égalités ci-dessus deviennent:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt dy}(t, y) &= -\frac{d}{dy} \left(a(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{d^2 U}{dy^2}(t, y) \right) \text{ et} \\ \frac{d}{dy} \left(b(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) \right) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

En plus, lorsqu'on dérive (II.2.2.7) par rapport à t , on obtient :

$$b(t, y) \frac{d^2 U}{dt dy}(t, y) + \frac{db}{dt}(t, y) \cdot \frac{dU}{dy}(t, y) = \beta'(t)$$

En supposant que $b(t, y) \neq 0$ et en remplaçant $\frac{d^2 U}{dt dy}(t, y)$ dans l'expression de $\beta'(t)$, à

savoir que $\frac{dU}{dy}(t, y) = \frac{1}{b(t, y)} \cdot \beta(t)$, on obtient l'expression ci-dessous:

$$\beta'(t) = \beta(t) \cdot b(t, y) \left[\left(\frac{1}{b^2(t, y)} \right) \cdot \frac{db}{dt}(t, y) - \frac{d}{dy} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 b}{dy^2}(t, y) \right] = \beta(t) \cdot \gamma(t, y)$$

Proposition 5

L'équation différentielle stochastique non linéaire homogène :

$$dY_t = a(Y_t)dt + b(Y_t)dW_t \quad (\text{II.2.2.8})$$

peut être transformé en équation linéaire ayant la forme

$$dX_t = (a_1 X_t + a_2)dt + (b_1 X_t + b_2)dW_t \quad (\text{II.2.2.9})$$

Ce changement de la forme de l'équation initiale (II.2.2.8) se fait en effectuant la transformation $X_t = U(Y_t)$, définit par

$$U(Y_t) = \begin{cases} C \exp \left(b_1 \int_{y_0}^{y_t} \frac{1}{b(z)} dz \right) & \text{Si } b_1 \neq 0 \\ b_2 \int_{y_0}^{y_t} \frac{1}{b(z)} dz + C & \text{Si } b_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2.2.10})$$

Preuve

Comme U est une fonction indépendante du temps, alors $\frac{dU(y)}{dt} = 0$ et dans ce cas les

deux égalités (II.2.2.6) et (II.2.2.7) auront les formes suivantes :

$$a(y) \frac{dU}{dy}(y) + \frac{1}{2} b^2(y) \frac{d^2 U}{dy^2}(y) = a_1 U(y) + a_2 \quad (\text{II.2.2.11})$$

$$b(y) \frac{dU}{dy}(y) = b_1 U(y) + b_2 \quad (\text{II.2.2.12})$$

En supposant que $b(y) \neq 0$ et $b_1 \neq 0$, il s'ensuit de (II.2.2.12) que

$$U(y) = C \exp \left(b_1 \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz \right) - \frac{b_2}{b_1} \quad (\text{II.2.2.13})$$

où C est une constante arbitraire.

Maintenant, posons $B(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz$, on a $\frac{dU}{dy}(y) = b_1 \frac{dB}{dy}(y) \cdot C \exp(b_1 B(y))$

$$\text{où } \frac{dB}{dy}(y) = \frac{d}{dy} \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz = \frac{1}{b(y)}$$

On a :

$$\frac{d^2 U}{dy^2}(y) = b_1 \frac{d^2 B}{dy^2}(y) \cdot C \exp(b_1 B(y)) + b_1^2 \left(\frac{dB(y)}{dy} \right)^2 \cdot C \exp(b_1 B(y)) \quad \text{où } \frac{d^2 B}{dy^2}(y) = -\frac{\frac{db}{dy}(y)}{b^2(y)}$$

$$\Rightarrow a(y) \frac{dU}{dy}(y) = b_1 \frac{a(y)}{b(y)} V(y) \quad \text{et} \quad b^2(y) \frac{d^2 U}{dy^2}(y) = -b_1 \left(\frac{db(y)}{dy} - b_1 \right) \cdot V(y)$$

$$\text{où } V(y) = C \exp(b_1 B(y))$$

L'expression (II.2.2.11) implique que $V(y) \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] = a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1}$

$$\text{Où } A(y) = \frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2} \frac{db(y)}{dy}$$

En dérivant à présent l'expression ci-dessus, on aura

$$\frac{d}{dy} \left(V(y) \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} V(y) \cdot \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] + b_1 \frac{d}{dy} A(y) \cdot V(y) = 0 \quad \text{où } \frac{d}{dy} V(y) = \frac{b_1}{b(y)} \cdot C \exp(b_1 B(y))$$

$$\Rightarrow \frac{b_1}{b(y)} \cdot \exp(b_1 B(y)) \cdot \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] + b_1 \frac{d}{dy} A(y) \cdot \exp(b_1 B(y)) = 0 \quad .$$

En multipliant cette dernière expression par $\frac{b(y)}{b_1} \cdot \exp(-b_1 B(y))$ et en dérivant encore

une fois on obtient le résultat suivant :

$$b_1 \frac{d}{dy} A(y) + \frac{d}{dy} \left(b(y) \frac{d}{dy} A(y) \right) = 0 \quad (\text{II.2.2.14})$$

Cette expression est vérifiée si $\frac{d}{dy} A(y) = 0$ ou $b_1 = -\frac{d}{dy} \left(b(y) \frac{d}{dy} A(y) \right) / \frac{d}{dy} A(y)$

Si $b_1 \neq 0$ la transformation adéquate U est donné par $U(y) = C \exp \left(b_1 \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz \right)$

Sinon $U(y) = b_2 \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz + C$

Exemple :

Soit l'EDS non linéaire : $dY_t = -\frac{1}{2} \exp(-2Y_t) dt + \exp(-Y_t) dW_t$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$Y_t = \ln(\exp(Y_0) + W_t) \text{ pour } t \in [0, T[$$

où $T = T(Y_0(\omega)) = \text{Min}\{t \geq 0 : W_t(\omega) = -\exp(Y_0(\omega))\}$ est le temps d'arrêt de la trajectoire.

Dans ce cas particulier $a(y) = -\frac{1}{2} \exp(-2y)$ et $b(y) = -\frac{1}{2} \exp(y)$

En effet, comme l'expression (II.2.2.14) est vérifiée pour toute valeur de b_1 car $A(y) = 0$, alors on peut choisir $b_1 = 0$ et $b_2 = 1$ et donc l'expression (II.2.2.12) implique :

$$b(y) \frac{dU}{dy}(y) = 1$$

En remplaçant l'expression de $U(y)$ dans (II.2.2.11), a_1 et a_2 seront nuls ($a_1 = a_2 = 0$).

Dés lors, l'EDS non linéaire plus haut se réduit en EDS linéaire :

$$dX_t = dW_t \text{ avec } X_t = U(Y_t) = \exp(Y_t)$$

Cette équation linéaire possède la solution $X_t = X_0 + W_t \Rightarrow \exp(Y_t) = \exp(Y_0) + W_t$

et donc la solution de l'EDS non linéaire sera: $Y_t = \ln(\exp(Y_0) + W_t)$ pour $t \in [0, T[$

II-1-3 Résolution d'EDS réductibles de Stratonovich

Nous présentons dans cette partie un ensemble d'EDS bien particuliers que nous pouvons résoudre non pas au moyen de l'intégrale d'Itô mais par celui de Stratonovich. Ce choix n'est pas arbitraire mais il est préférable dans certaines applications, plus particulièrement en physique, de mettre l'équation différentielle stochastique ordinaire (EDS d'Itô) sous la forme différentielle :

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) \circ dW_t. \quad (\text{II.2.3.1})$$

Cette équation est appelée EDS de Stratonovich qu'on peut écrire sous la forme intégrale

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) \circ dW_s \quad (\text{II.2.3.2})$$

$$\text{avec} \quad \int_{t_0}^t b(s, X_s) \circ dW_s = \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t b(s, X_s) \frac{db(s, X_s)}{dx} ds \quad (\text{II.2.3.3})$$

L'intégrale stochastique (II.2.3.3) est dite de Stratonovich. Cette intégrale satisfait les règles de transformation usuelles du calcul classique des intégrales où son intégrand est évalué au centre de chaque partition de l'intervalle $[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$, comme on va le voir dans la définition ci-après.

Définition

Pour une fonction continue $h: [t_0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, de classe C^1 , on définit l'intégrale de Stratonovich pour $t_0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{n+1}^{(n)} = T$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{(n)} = \max_{1 \leq j \leq n} |t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}| = 0$ par :

$$\int_{t_0}^t h(s, X_s) \circ dW_s = \lim_{\delta^{(n)} \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N h\left(t_j^{(n)}, \frac{1}{2}(X_{t_j^{(n)}} + X_{t_{j+1}^{(n)}})\right) \cdot \left(W_{t_j^{(n)}} + W_{t_{j+1}^{(n)}}\right) \quad (\text{II.2.3.4})$$

Si le processus de Wiener $W = \{W_t, t \geq 0\}$ est F_t -mesurable

La solution de l'équation différentielle stochastique de Stratonovich satisfait celle de Itô avec le même coefficient de diffusion $b(t, X_t)$, par contre le coefficient de changement (drift) $a(t, X_t)$ est modifié par $\underline{a}(t, X_t)$ tel que :

$$a(t, x) = \underline{a}(t, x) + \frac{1}{2} b(t, x) \cdot b(t, x) \quad (\text{II.2.3.5})$$

Par exemple l'EDS d'Itô : $dX_t = 2X_t dt + 2X_t dW_t$ est équivalente à l'EDS de Stratonovich :

$$dX_t = 2X_t \circ dW_t.$$

Ces deux équations possèdent la même solution donné par :

$$X_t = X_{t_0} \exp(2(W_t - W_{t_0}))$$

Dans un cas particulier où le bruit est additif, les deux équations différentielles stochastiques (Itô et Stratonovich) possèdent le même coefficient de changement ($\underline{a} \equiv a$).

Lorsque l'EDS est de dimension d , elle peut être interprétée mathématiquement comme un vecteur d'équations intégrales stochastiques d'Itô.

Pour une valeur initiale $X_{t_0} \in \mathcal{R}^d$, on a :

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j, \quad \forall t \in [t_0, T], a \text{ et } b \in \mathcal{H}^d \quad (\text{II.2.3.6})$$

L'EDS de stratonovich correspondante est donnée par :

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \underline{a}(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) \circ dW_s^j, \quad \forall t \in [t_0, T], a \text{ et } b \in \mathcal{H}^d \quad (\text{II.2.3.7})$$

Les processus qui satisfont les deux équations stochastiques (II.2.3.6) et (II.2.3.7) sont équivalents si le coefficient drift corrigé $\underline{a}(t, X_t)$ est de la forme :

$$\underline{a}(t, x) = a(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^m b^{j,k}(t, x) \cdot \frac{db^k}{dx_j}(t, x) \quad (\text{II.2.3.8})$$

Donc, on peut convertir l'équation stochastique d'Itô en équation stochastique de Stratonovich et vice versa. Pour une transformation suffisamment continue, $U: [0, T] \times \mathcal{H}^d \rightarrow \mathcal{H}^k$ de la solution de (II.2.3.7), le processus de dimension k , $Y_t = U(t, X_t)$ a une différentielle stochastique de stratonovich plus simple que celle d'Itô, donné par :

$$dY_t^p = \left(\frac{dU^p}{dt}(t, X_t) - \sum_{i=1}^d \underline{a}^i(t, X_t) \frac{dU^p}{dx_i}(t, X_t) \right) dt + \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d b^{i,l}(t, X_t) \frac{dU^p}{dx_i}(t, X_t) \circ dW_t^l \quad \forall p=1, 2, \dots, k$$

... .. (II.2.3.9)

Pour une EDS de Stratonovich de forme différentielle : $dX_t = \underline{a}(t, X_t) dt + b(t, X_t) \circ dW_t$,

l'expression (II.2.3.9) se réduit à : $dY_t = \frac{dU}{dt}(t, X_t) dt + \underline{a} \cdot \frac{dU}{dx}(t, X_t) \circ dX_t$

II-1-4 Existence et Unicité des solutions des équations différentielles stochastiques :

Nous étudions dans cette section l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques (EDS). Lorsque la solution de l'EDS ne change pas pour une autre valeur du processus de Wiener, alors on parle de solution forte. Dans le cas contraire, c'est-à-dire que si on trouve une solution correspondante à un processus de Wiener bien particulier, alors elle est dite solution faible. Certaines équations différentielles stochastiques admettent des solutions faibles et non fortes.

II-1-4-1 Solutions fortes d'une équation différentielle stochastique

Considérons l'EDS suivante : $dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t$ (II.2.4.1)

s'écrivant sous la forme d'une équation intégrale stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s \quad (\text{II.2.4.2})$$

La première intégrale est de Riemann ou de Lebesgue, quant à la deuxième, elle est d'Itô.

La solution $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ de (II.2.4.2) devrait assurer la signification de ces intégrales où plus précisément leurs existences. Cela est vérifié si pour tout a et b définis par $a(t, w) = b(t, w) = 0$ ($0 \leq t < t_0$), les fonctions $\sqrt{|a|}$ et b sont mesurables pour $t_0 \leq t \leq T$.

Pour un t_0 fixe, $t_0 \in [0, T]$, choisi arbitrairement et pour des coefficients a, b définis sur $[t_0, T] \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ auxquels on impose les hypothèses ci-dessous :

Hypothèse1 (condition de mesurabilité) :

$$a = a(t, x) \text{ et } b = b(t, x) \text{ sont } L^2 \text{ mesurables pour } (t, x) \in [t_0, T] \times \mathfrak{R}$$

Hypothèse2 (condition de Lipchitz) :

$$\exists K > 0 / |a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y| \text{ et } |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y| \text{ pour tout } t \in [t_0, T] \text{ et } x, y \in \mathfrak{R}$$

Hypothèse3 (Borne à accroissement linéaire) :

$$\exists K > 0 / |a(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \text{ et } |b(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \text{ pour tout } t \in [t_0, T] \text{ et } x, y \in \mathfrak{R}$$

Hypothèse4 (Condition sur la valeur initiale) :

$$X_{t_0} \text{ est } \mathcal{A}_{t_0} \text{ mesurable avec } E(|X_{t_0}|^2) < \infty$$

A signaler que l'hypothèse de mesurabilité et la condition de Lipchitz sont un moyen de prouver l'unicité et l'existence de la solution par la méthode des approximations successives. On a en effet le lemme suivant.

Lemme1

Si H_1 et H_2 sont vérifiés alors les solutions de (II.2.4.2) correspondant à la même valeur initiale et au même processus de Wiener possèdent une trajectoire unique.

Théorème 3.1

Sous les quatre hypothèses déjà décrites, l'équation (II.2.4.1) possède une solution forte à chemin unique, X_t sur $[t_0, T]$ avec $\text{Sup} E(|X_t|^2) < \infty$ pour $t_0 \leq t \leq T$.

Preuve

Le lemme précédent nous permet seulement d'établir l'existence d'une solution continue X_t sur $[t_0, T]$ sachant le processus de Wiener $W = \{W_t, t \geq 0\}$.

Pour cette démonstration nous utiliserons la méthode des approximations successives et pour cela nous définissons d'abord $X_t^{(0)} \equiv X_{t_0}$ et soit l'approximation :

$$X_t^{(n+1)} = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s^{(n)}) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s \quad \text{pour } n = 0, 1, 2 \quad (\text{II.2.4.3})$$

Si pour un n fixé $n \geq 0$, l'approximation $X_t^{(n)}$ est F_t -mesurable et continu sur $[t_0, T]$, alors il s'ensuit des trois premières hypothèses que les intégrales dans (II.2.4.3) sont bien définies et que le processus $X_t^{(n+1)}$ est F_t -mesurable et continu sur $[t_0, T]$.

De l'hypothèse 4 et de la définition de $X_t^{(0)}$ on a $\text{SupE}\left(|X_t^{(0)}|^2\right) < \infty$ pour $t_0 \leq t \leq T$.

En appliquant l'inégalité $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ et ensuite l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right) \quad \text{avec } f(x) = a(s, X_s^{(n)}) \text{ et } g(x) = 1,$$

on aura

$$\begin{aligned} \text{E}\left(|X_t^{(n+1)}|^2\right) &\leq 3\text{E}\left(|X_{t_0}|^2\right) + 3\text{E}\left(\left|\int_{t_0}^t a(s, X_s^{(n)}) ds\right|^2\right) + 3\text{E}\left(\left|\int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s\right|^2\right) \\ &\leq 3\text{E}\left(|X_{t_0}|^2\right) + 3(T - t_0) \cdot \text{E}\left(\int_{t_0}^t |a(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right) + 3\text{E}\left(\int_{t_0}^t |b(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right). \end{aligned}$$

De la propriété d'une intégrale stochastique

$$\text{E}\left(\int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s\right)^2 = \text{E}\left(\int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}))^2 ds\right) \quad \text{et de l'hypothèse 3 on obtient :}$$

$$\text{E}\left(|X_t^{(n+1)}|^2\right) \leq 3\text{E}\left(|X_{t_0}|^2\right) + 3(T - t_0) \cdot \text{E}\left(\int_{t_0}^t |a(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right) + 3\text{E}\left(\int_{t_0}^t |b(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3\mathbb{E}\left(\left|X_{t_0}\right|^2\right) + 3(T-t_0) \cdot K^2 \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^t \left(1 + \left|X_s^{(n)}\right|^2\right) ds\right) + 3K^2 \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^t \left(1 + \left|X_s^{(n)}\right|^2\right) ds\right) \\
&\leq 3\mathbb{E}\left(\left|X_{t_0}\right|^2\right) + 3(T-t_0+1) \cdot K^2 \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^t \left(1 + \left|X_s^{(n)}\right|^2\right) ds\right) \text{ pour tout } n=0,1,2,\dots
\end{aligned}$$

Par induction on aura : $\sup \mathbb{E}\left(\left|X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq C_0 < \infty$ pour $t_0 \leq t \leq T$ et $n=1,2,3,\dots$.

Nous montrons à présent, grâce à la proposition ci-après que :

$$\mathbb{E}\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq 3K^2(T-t_0+1) + \int_{t_0}^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right|^2\right) ds \quad (\text{II.2.4.4})$$

Proposition

Soient X_t et $\tilde{X}_t$ deux solutions de (II.2.4.2) sur $[t_0, T]$ où les trajectoires correspondantes sont continues presque sûrement. Soit le processus Z_t défini par

$$Z_t = X_t - \tilde{X}_t \Rightarrow Z_t = \int_{t_0}^t (a(s, X_s) - a(s, \tilde{X}_s)) ds + \int_{t_0}^t (b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)) dW_s$$

Comme $\sup \mathbb{E}\left(\left|X_t\right|^2\right) < \infty$ et $\sup \mathbb{E}\left(\left|\tilde{X}_t\right|^2\right) < \infty$ pour $t_0 \leq t \leq T$ alors les moments d'ordre deux existent pour chacun des deux intégrales et donc Z_t admet un moment d'ordre deux.

Suite de la démonstration : On procède de la même manière que précédemment mais cette fois-ci on utilise l'inégalité $(f+g)^2 \leq 2(f^2 + g^2)$ où dans l'expression de Z_t f représente la première intégrale et g la deuxième. Puis, en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz ainsi que la propriété d'une intégrale stochastique, on obtient:

$$\mathbb{E}\left(\left|Z_t\right|^2\right) \leq 2(T-t_0) \int_{t_0}^t \mathbb{E}\left(\left|a(s, X_s) - a(s, \tilde{X}_s)\right|^2\right) ds + 2 \int_{t_0}^t \mathbb{E}\left(\left|b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)\right|^2\right) ds$$

Or de la condition de Lipchitz (hypothèse 2), on a

$$\max\left\{\left|a(s, X_s) - a(s, \tilde{X}_s)\right|, \left|b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)\right|\right\} \leq K \left|X_s - \tilde{X}_s\right| \quad (\text{II.2.4.5})$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|Z_t|^2\right) &\leq 2(T-t_0) \int_{t_0}^t K^2 \mathbb{E}\left(|X - \tilde{X}_s|^2\right) ds + 2 \int_{t_0}^t K^2 \mathbb{E}\left(|X_s - \tilde{X}_s|^2\right) ds \\ &\leq 2(T-t_0+1) \cdot K^2 \int_{t_0}^t \mathbb{E}\left(|X - \tilde{X}_s|^2\right) ds \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(|Z_t|^2\right) \leq 2(T-t_0+1) \cdot K^2 \int_{t_0}^t \mathbb{E}\left(|Z_t|^2\right) ds \quad \text{pour tout } t \in [t_0, T]$$

En utilisant la formule de Cauchy $\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t f(s) ds dt_1 \dots dt_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} f(s) ds$ et en

répétant (II.2.4.4) en un nombre de (n-1) fois itérations, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2\right) \leq \frac{L^n}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} \mathbb{E}\left(|X_s^{(1)} - X_s^{(0)}|^2\right) ds \quad \text{pour tout } t \in [t_0, T]$$

(II.2.4.6)

Où $L = 2K^2(T-t_0+1)$ et $n=1, 2, 3, \dots$.

Lemme

De l'hypothèse 3 (Borne à accroissement linéaire), on a pour tout $t \in [t_0, T]$

$$\mathbb{E}\left(|X_s^{(1)} - X_s^{(0)}|^2\right) \leq L \int_{t_0}^t \left(1 + \mathbb{E}\left(|X_s^{(0)}|^2\right)\right) ds \leq C_1 \quad \text{où } C_1 = L(T-t_0) \left(1 + \mathbb{E}\left(|X_s^{(0)}|^2\right)\right)$$

Ce lemme implique que $\mathbb{E}\left(|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2\right) \leq \frac{L^n \cdot (t-t_0)^n C_1}{n!}$

pour tout $t \in [t_0, T]$ et $n = 0, 1, 2, \dots$.

$$\text{D'où } \sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left(|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2\right) \leq \frac{L^n \cdot (T-t_0)^n C_1}{n!} \quad \text{pour } n=0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.2.4.7})$$

Cette inégalité implique la convergence en moyenne quadratique des approximations successives uniformément sur $[t_0, T]$.

Pour montrer la convergence presque sûr de leurs trajectoires sur $[t_0, T]$, on définit le

processus $Z_n = \sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Or de (II.2.4.5) on a :

$$Z_n \leq \int_{t_0}^t \left| a(s, X_s^{(n)}) - a(s, X_s^{(n-1)}) \right| ds + \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^t \left(b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)}) \right) dW_s \right|$$

Par l'application de l'inégalité de Doob : $\left(\forall p > 1, \quad E \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_t|^p \right) \leq \left(\frac{p}{1-p} \right)^p \cdot E \left(|X_t|^p \right) \right)$,

l'inégalité de Cauchy Schwartz et la condition Lipchitzienne, on retrouve le résultat suivant :

$$\begin{aligned} E \left(|Z_n|^2 \right) &\leq 2(T-t_0) \cdot K^2 \int_{t_0}^t E \left(\left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 \right) ds + 8K^2 \int_{t_0}^t E \left(\left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 \right) ds \\ &\Rightarrow E \left(|Z_n|^2 \right) \leq 2(T-t_0+4) \cdot K^2 \int_{t_0}^t E \left(\left| X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \right|^2 \right) ds. \end{aligned}$$

En combinant avec (II.2.4.7), on conclut que

$$E \left(|Z_n|^2 \right) \leq \frac{C_2 \cdot L^{n-1} (T-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \quad \text{où } C_2 = 2C_1 K^2 (T-t_0+4) \cdot (T-t_0).$$

Pour la suite de cette démonstration on a besoin d'appliquer l'inégalité de Markov sur chacun des termes de l'inégalité précédente. Cette inégalité est définie par :

$$P \left(\{ \omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq a \} \right) \leq \frac{1}{a^p} E \left(|X(\omega)|^p \right) \quad \text{pour tout } a, p > 0 \quad \text{où } |X(\omega)|^p \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

Puis, en sommant sur n , on retrouve le résultat suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left(Z_n > \frac{1}{n^2} \right) \leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n-1)!} \cdot L^{n-1} (T-t_0)^{n-1}$$

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n-1)!} \cdot L^{n-1} (T-t_0)^{n-1}$ est une série convergente alors il est de même pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left(Z_n > \frac{1}{n^2} \right).$$

Or lorsqu'on a une séquence d'événements indépendants $B_1, B_2, \dots, B_n$ de même

probabilité strictement positive tel que : $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty$ alors

$$P \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_n \right) = 0 \quad (\text{Lemme de Borel-Cantelli})$$

On conclut donc que Z_n converge vers 0 presque sûrement et par conséquent les approximations successives $X_t^{(n)}$ convergent presque sûrement et uniformément sur

$[t_0, T]$ vers une limite $\tilde{X}_t$ définie par : $\tilde{X}_t = X_{t_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \{X_t^{n+1} - X_t^n\}$

En prenant la limite de (II.2.4.3) quand $n \rightarrow \infty$, on remarque que $\tilde{X}_t$ est une solution de (II.2.4.2). Le terme à gauche de (II.2.4.3) converge uniformément sur $[t_0, T]$ vers $\tilde{X}_t$.

En outre, en comparant celui de la droite et en appliquant la condition de Lipchitz, le terme dans (II.2.4.3) converge vers celui dans (II.2.4.2) comme le montre les étapes ci-dessous :

$$\begin{aligned} & - \left| \int_{t_0}^t a(s, X_s^{(n)}) ds - \int_{t_0}^t a(s, \tilde{X}_s) ds \right| \leq K \int_{t_0}^t |X_s - \tilde{X}_s| ds \xrightarrow{\text{ps}} 0 \\ & - \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, \tilde{X}_s))^2 dW_s \right| \leq K^2 \int_{t_0}^t |X_s - \tilde{X}_s|^2 ds \xrightarrow{\text{ps}} 0 \\ \Rightarrow & \int_{t_0}^t a(s, X_s^{(n)}) ds \xrightarrow{\text{ps}} \int_{t_0}^t a(s, \tilde{X}_s) ds \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s \xrightarrow{\text{ps}} \int_{t_0}^t b(s, \tilde{X}_s) dW_s \quad \forall t \in [t_0, T] \end{aligned}$$

Par conséquent le processus $\tilde{X}$ satisfait l'équation (II.2.4.2). On a donc prouvé l'existence et l'unicité de la solution forte d'une équation différentielle stochastique pour toute valeur initiale X_{t_0} avec $E(|X_{t_0}|^2) < \infty$.

Afin d'avoir des résultats plus forts que ceux établis par le théorème 3.1, on peut renforcer les hypothèses d'existence et d'unicité des solutions en supposant que les moments d'ordre k (k pair) de la valeur initiale sont finis.

Théorème 3.2

Supposons que les hypothèses H_1 - H_4 sont vérifiées et que $E(|X_{t_0}|^{2n}) < \infty$ pour $n \geq 1$,

Alors la solution X_t de l'équation (II.2.4.1) satisfait les deux expressions suivantes:

$$E(|X_t|^{2n}) \leq \left(1 + E(|X_{t_0}|^{2n}) \right) \exp\{c(t-t_0)\} \quad (\text{II.2.4.8})$$

$$E\left(|X_t - X_{t_0}|^{2n}\right) \leq D \cdot \left(1 + E\left(|X_{t_0}|^{2n}\right)\right) \cdot (t - t_0)^n \exp\{c(t - t_0)\} \text{ pour } t \in [t_0, T]$$

(II.2.4.9)

où $T < \infty$ avec $c = 2n(2n+1)k^2$ et $D = f(n, k, T - t_0)$ (D est une constante positive).

II-1-4-2 Solution forte et processus de diffusion

La propriété la plus importante des solutions des équations différentielles stochastiques est qu'elles soient généralement des processus de Markov et dans la majorité des cas des processus de diffusion. De ce fait, on peut appliquer des outils analytiques puissants, développés pour les processus de Markov et de diffusion sur les solutions des EDS.

Sous les quatre hypothèses déjà décrites dans la section précédente, la solution X de (II.2.4.1) est un processus de Markov sur l'intervalle $[t_0, T]$ où $X(t_0, x_0)$ est la solution pour une valeur initiale fixe $X_{t_0} = x_0$, ayant les probabilités de transitions

pour tout $t_0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathfrak{R}$

$$P(s, x; t, B) = P(X_t \in B / X_s = x) = P(X_t(s, x) \in B) \quad \text{où } B \text{ est un sous ensemble de } \mathfrak{R}$$

Les solutions X de l'EDS :

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t \quad (\text{II.2.4.10})$$

sont des processus de Markov homogènes où leurs probabilités de transitions

$P(s, x; t, B)$ dépendent seulement de la période écoulée $(t-s)$ ($s \leq t$). Dans ce cas on écrit : $P(s, x; t, B) = P(0, x; t-s, B) = P(x; t-s, B)$.

La solution de l'EDS (II.2.4.10) est un processus de Markov ayant une distribution stationnaire s'il existe une mesure de probabilité π tel que :

$$\pi(B) = \int_{\mathfrak{R}} P(x; t, B) \pi(dx) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathfrak{R} \quad (\text{II.2.4.11})$$

Pour assurer l'existence de la fonction de densité π , des conditions sont à imposer sur les coefficients a et b . Généralement, les solutions de l'EDS de la forme :

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (\text{II.2.4.12})$$

sont des processus de diffusion où les probabilités de transitions vérifient les trois limites :

$$\begin{aligned}
 - & \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\varepsilon} p(s,x;t,y) dy = 0 \\
 - & \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y-x) \cdot p(s,x;t,y) dy = a(s,x) \\
 - & \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y-x)^2 \cdot p(s,x;t,y) dy = b^2(s,x)
 \end{aligned}$$

Ceci peut être démontré en supposant que H_2 , H_3 et H_4 sont vérifiées et qu'en plus, les coefficients $a(t, X_t)$ et $b(t, X_t)$ sont continus.

Théorème 3.3

En supposant que a et b sont continus et que les hypothèses $H_2 - H_4$ sont vérifiées, alors la solution X_t de (II.2.4.12), pour une valeur initiale quelconque X_{t_0} (fixe), est un processus de diffusion sur $[t_0, T]$ avec un taux de changement instantané (Drift) $a(t, x)$ et un coefficient de diffusion $b(t, x)$.

Démonstration

On commence par démontrer la première limite $\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x;t,y) dy = 0$

On a $\forall \varepsilon > 0, \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x;t,dy) \leq \varepsilon^{-4} \int_{\mathbb{R}} |y-x|^4 P(s,x;t,dy)$ or de (II.2.4.9) et pour $n=2$, on a

$E(|X_t(s,x) - x|^4) \leq c|t-s|^2$ pour $t_0 \leq s \leq t \leq T$ où c est une constante qui dépend de t_0, T et x .

D'où $\int_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x;t,dy) \leq c\varepsilon^{-4}|t-s|^2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x;t,y) dy = 0$

Quant à la deuxième limite qui est équivalente à ce que

$\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} E(X_t(s,x) - x) = a(s,x)$, on introduit tout d'abord l'opérateur espérance dans

l'équation intégrale de (II.2.4.12) et soit $E(X_t(s,x) - x) = \int_s^t E(a(\mu, X_\mu(s,x))) d\mu$.

En faisant le changement de variable $v = \frac{\mu-s}{t-s}$, cette expression sera

$E(X_t(s, x) - x) = (t - s) \int_0^1 E(a(s + v(t - s), X_{s+v(t-s)}(s, x))) dv$, mais comme la trajectoire

de $X_t(s, x)$ est continu presque sûrement et a est une fonction continue, alors :

$$\lim_{t \rightarrow s} a(s + v(t - s), X_{s+v(t-s)}(s, x; w)) = a(s, w)$$

et il en résulte de l'hypothèse 3 : $|a(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2)$ que

$$|a(s + v(t - s), X_{s+v(t-s)}(s, x))|^2 \leq k^2(1 + |X_{s+v(t-s)}(s, x)|^2).$$

Du fait que le moment d'ordre 2 de la solution est fini, on a

$$E \int_0^1 |a(s + v(t - s), X_{s+v(t-s)}(s, x))|^2 dv < \infty.$$

Par inter changement entre les deux opérateurs, intégrale et limite, on aura

$$\lim_{t \rightarrow s} \int_0^1 E(a(s + v(t - s), X_{s+v(t-s)}(s, x))) dv = a(s, x)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} E(X_t(s, x) - x) = a(s, x).$$

Finalement, il reste à démontrer la dernière limite. Après application de la formule d'Itô

sur le processus $(X_t(s, x) - x)^2$, nous remarquons que lorsque $\varepsilon \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow s$

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} E(X_t(s, x) - x)^2 = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} \int_{\mathbb{R}} (y - x)^2 \cdot P(s, x; t, y) dy = b^2(s, x)$$

Cas particuliers

- Lorsque les coefficients $a(t, X_t)$ et $b(t, X_t)$ sont des constantes, on peut vérifier aisément que la solution de l'équation différentielle stochastique (3.12) est un processus de diffusion. En effet, dans ce cas particulier l'EDS sera $dX_t = a dt + b dW_t$ et sa solution générale est donnée par (1.9), soit $X_t = X_s + a(t - s) + b(W_t - W_s)$.

Comme $E(W_t - W_s) = 0$ et $E(W_t - W_s)^2 = t - s$ alors

$$E(X_t - X_s / X_s = x) = a(t - s) \quad \text{et} \quad E((X_t - X_s)^2 / X_s = x) = b^2(t - s) + a^2(t - s)^2.$$

Par conséquent, les probabilités de transition $P(s, x; t, \cdot)$ sont gaussiennes de

moyenne $x + a(t-s)$ et de variance $b^2(t-s)$. Si la valeur initiale X_{t_0} est gaussienne, alors la solution X_t est dite processus de Markov gaussien.

- b. On peut aussi montrer que la solution de l'équation différentielle stochastique de Langevin : $dX_t = -X_t dt + dW_t$, donné par

$$X_t = X_s \cdot e^{-(t-s)} + e^{-(t-s)} \int_s^t e^{-(\tau-s)} dW_\tau \text{ est un processus de diffusion pour une}$$

valeur initiale X_0 déterministe. On a

$$E(X_t - X_s / X_s = x) = (e^{-(t-s)} - 1)x + \frac{1}{t-s} E \left[e^{-(t-s)} \int_s^t e^{-(\tau-s)} dW_\tau \right] = (e^{-(t-s)} - 1)x + 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow s} E(X_t - X_s / X_s = x) = -x = a(s, x).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} E(|X_t - x|^2) &= (e^{-(t-s)} - 1)^2 x^2 + 2x(e^{-(t-s)} - 1) E \left[e^{-(t-s)} \int_s^t e^{-(\tau-s)} dW_\tau \right] + E \left[\left(e^{-(t-s)} \int_s^t e^{-(\tau-s)} dW_\tau \right)^2 \right] \\ &= (e^{-(t-s)} - 1)^2 x^2 + 0 + e^{-2(t-s)} E \left(\int_s^t e^{-2(\tau-s)} d\tau \right) \text{ car } \left(\int_{t_0}^t f(s) dW_s \right)^2 = \int_{t_0}^t f^2(s) ds \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} E(|X_t - x|^2) = 0 + 0 + 1 = b^2(s, x) \end{aligned}$$

II-1-4-3 Solution faible et processus de diffusion

A l'inverse du problème posé auparavant, on se pose à présent la question : est-ce qu'un processus de diffusion ayant des probabilités de transition qui vérifient les équations de Fokker Planck suivantes :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d}{dy} [a(t, y) \cdot p] - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dy^2} [b^2(t, y) \cdot p] = 0 \quad (s, x) \text{ fixé}$$

$$\frac{dp}{ds} + a(s, x) \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2} \cdot b^2(s, x) \frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \quad (t, y) \text{ fixé}$$

est un processus solution d'une équation différentielle stochastique ?

Cela revient à se demander sur l'existence d'une solution faible de l'EDS où l'on trouvera la réponse grâce au théorème qui suit.

Théorème 3.4

Soit Y un processus de diffusion sur $[0, T]$ avec un coefficient drift $a(t, y)$ et un coefficient de diffusion $b(t, y) > 0$. Si ces deux coefficients satisfont l'ensemble des conditions ci-dessous pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$:

1. $a(t, y)$ est une fonction continue tel que $|a(t, y)| \leq k(1 + |y|)$ où $k > 0$.
2. $b(t, y)$ est une fonction continue, $b^{-1}(t, y)$ est bornée et les dérivées partielles $\frac{db}{dt}$ et $\frac{db}{dy}$ sont continues et bornées.
3. Il existe une fonction $\Psi(y) > 1 + |y|$ tel que

- i. $\sup_{0 \leq t \leq T} E(\Psi(Y_t)) < \infty$.

- ii. $E[Y_t - Y_s | Y_s = y] + E[|Y_t - Y_s|^2 | Y_s = y] \leq (t - s)\Psi(y)$

- iii. $E[Y_t | Y_s = y] + E[|Y_t|^2 | Y_s = y] \leq \Psi(y)$

Alors Y_t est une solution de l'équation différentielle $dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)d\tilde{W}_t$

avec $\tilde{W}_t$ un processus de Wiener vérifiant $dZ_t = \bar{a}(t, Z_t)dt + 1d\tilde{W}_t$

où $Z_t = g(t, Y_t)$ est un processus de diffusion ayant les deux coefficients

$$\bar{a}(t, Z_t) \text{ et } b(t, Z_t) = 1.$$

L'expression de $\bar{a}(t, Z_t)$ est donnée par

$$\bar{a}(t, Z_t) = \left(\frac{dg}{dt} + a \frac{dg}{dy} + \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{d^2 g}{dy^2} \right) (t, g^{-1}(t, z)) \quad \text{où } g^{-1}(t, z) \text{ est la fonction inverse de}$$

$$z = g(t, y) = \int_0^y \frac{dx}{b^2(t, x)}$$

Il y'a lieu de signaler que les conditions établies dans le théorème 3.1 sont suffisantes mais non nécessaires pour qu'ils existent des solutions faibles.

Cas particulier

Soit l'EDS $dX_t = \text{Sgn}(X_t)dt + dW_t$ où $\text{Sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Cette équation

différentielle stochastique possède seulement des solutions faibles et pour une valeur initiale $X_0 = 0$, la solution forte n'existe pas. Cela est dû au fait que si X_t est une

solution faible pour un processus de Wiener W_t , alors $-X_t$ est également une solution faible mais pour le processus $-W_t$. D'où, les deux solutions possèdent la même loi de probabilité mais pas les mêmes trajectoires.

II-1-5 Théorème de comparaison

Ce théorème permet de comparer presque sûrement deux EDS unidimensionnelles, et s'avère souvent extrêmement utile en pratique. La preuve, qui utilise des arguments semblables à ceux de l'unicité trajectorielle.

Théorème :

Soit $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien réel, b_1, b_2 et σ trois fonctions globalement Lipschitziennes, $x_1 \geq x_2$ deux réels. On considère les deux EDS

$$X_t^i = x_i + \int_0^t b_i(X_s^i) ds + \int_0^t \sigma(X_s^i) dW_s$$

pour $i = 1, 2$. Supposons que $b_1(x) \geq b_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $X_t^1 \geq X_t^2$ p.s. pour tout $t \geq 0$.

II.2 Changement de probabilité - Théorème de Girsanov

Avec la formule d'Itô, le théorème de Girsanov est l'outil fondamental du calcul stochastique. Il décrit comment changer de façon absolument continue la loi de certains processus.

Plus précisément, on considère un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on perturbe la mesure $\mathbb{P}$ à l'aide d'une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale exponentielle. On obtient alors une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$, sous laquelle le processus X suit une autre loi, qu'il serait pu être délicat d'étudier directement. On étudie alors cette loi en revenant sous la mesure $\mathbb{P}$ avec la martingale exponentielle.

Les applications de cette méthode sont multiples, aussi bien en Finance que pour le mouvement brownien proprement dit.

II.2-1 La formule de Cameron-Martin

Avant de passer à cette formule qui est de type fonctionnel, donnons un exemple en dimension finie. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, construites sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour tout $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ on calcule

$$E \left[\exp \sum_{i=1}^n \mu_i X_i \right] = \prod_{i=1}^n E \left[\exp(\mu_i X_i) \right] = \prod_{i=1}^n \exp \left[\frac{\mu_i^2}{2} \right] = \exp \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right]$$

ce qui entraîne que

$$E \left[\exp \sum_{i=1}^n \left(\mu_i X_i - \frac{\mu_i^2}{2} \right) \right] = 1$$

Ainsi, on peut définir une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en posant

$$Z(\omega) = \exp \sum_{i=1}^n \left(\mu_i X_i(\omega) - \frac{\mu_i^2}{2} \right)$$

et $\mathbb{Q}(d\omega) = Z(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$, autrement dit

$$\mathbb{Q}[A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z \mathbf{1}_A] = \int_A Z(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

pour tout $A \in \mathcal{F}$. La mesure $\mathbb{Q}$ est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ puisque

$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1$ et que Z est strictement positive. De plus, comme p.s. $Z > 0$, les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes, au sens où $\mathbb{P}[A] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}[A] = 0$

pour tout $A \in \mathcal{F}$. La variable Z désigne la densité de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$.

On cherche maintenant à savoir quelle est la loi du n-uple $(X_1, \dots, X_n)$ sous cette

nouvelle probabilité $\mathbb{P}$. Pour cela on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n) &= e^{\sum_{i=1}^n (\mu_i x_i - \mu_i^2/2)} \mathbb{P}(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n) \\ &= (2\pi)^{-n/2} e^{\sum_{i=1}^n (\mu_i x_i - \mu_i^2/2)} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}} dx_1 \dots dx_n \\ &= (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2} dx_1 \dots dx_n\end{aligned}$$

et l'on en déduit que sous $\mathbb{Q}$, $(X_1, \dots, X_n) \rightarrow N(\mu, Id_n)$ où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

La formule de Cameron-Martin obéit au même principe de changement de probabilité, sauf que celui-ci a lieu sur l'espace des fonctions continues et donc en dimension infinie.

On se donne $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien sur (Ω, F, P) , et on note $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ sa filtration naturelle complétée. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on sait que le processus :

$$t \mapsto Z_t^m = \exp\left[mW_t - \frac{m^2 t}{2}\right]$$

est une $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale positive.

Remarquons déjà l'analogie entre cette martingale Z^m et la variable Z définie plus haut.

On fixe alors un horizon $T > 0$ et on construit une nouvelle mesure de probabilité

$\mathbb{Q}_T^m$ sur (Ω, F_T) en posant $\mathbb{Q}_T^m[A] = \mathbb{E}_P[Z_T^m \mathbf{1}_A]$. La mesure $\mathbb{Q}_T^m$ est bien une nouvelle probabilité sur (Ω, F_T) , puisque $\mathbb{E}_P[Z_T^m] = 1$ par propriété de martingale et que L est strict. De plus, elle est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t^W$ par stricte positivité de Z . Enfin, pour tout $t < T$ et tout $A \in F_t$:

$$\text{on a } \mathbb{Q}_T^m[A] = \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[Z_T^m | \mathcal{F}_t] \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_P[Z_t^m \mathbf{1}_A]$$

toujours par propriété de martingale. La formule de Cameron-Martin spécifie alors la loi de W sous $\mathbb{Q}_T^m$:

Théorème : [Formule de Cameron-Martin]

Sous la mesure $\mathbb{Q}_T^m$, le processus

$$\tilde{W} : t \mapsto W_t - mt \quad t \leq T$$

est un mouvement brownien.

Preuve : Remarquons d'abord que les tribus $\mathcal{F}_t^W$ et $\mathcal{F}_t^{\tilde{W}}$ sont égales pour tout $t \leq T$.

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère le processus

$$L_t^\lambda = \exp\left[\lambda \tilde{W}_t - \lambda^2 t/2\right]$$

Pour tout $s \leq t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t^{\tilde{W}}$, on remarque que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [L_t^\lambda \mathbf{1}_A] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [L_t^\lambda Z_t \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left[\lambda \tilde{W}_t - \lambda^2 t/2 + m W_t - m^2 t/2 \right] \mathbf{1}_A \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left[\lambda W_t - \lambda m t - \lambda^2 t/2 + m W_t - m^2 t/2 \right] \mathbf{1}_A \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left[(\lambda + m) W_t - (\lambda + m)^2 t/2 \right] \mathbf{1}_A \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left[(\lambda + m) W_s - (\lambda + m)^2 s/2 \right] \mathbf{1}_A \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [L_s^\lambda Z_s \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [L_s^\lambda \mathbf{1}_A]
\end{aligned}$$

Où dans la quatrième ligne on a utilisé la propriété de $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale sous P du processus

$$t \mapsto \exp \left[(\lambda + m) W_t - (\lambda + m)^2 t/2 \right]$$

puisque W est un Brownien sous P. On en déduit que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [L_t^\lambda \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [L_s^\lambda \mathbf{1}_A]$$

et ceci signifie que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [L_t^\lambda | \mathcal{F}_s^W] = L_s^\lambda$$

pour tout $s \leq t \leq T$, donc que L^λ est une $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Par le théorème de caractérisation de Paul Lévy, ceci signifie que $\tilde{W}$ est un mouvement brownien.

II.2-2 Les deux théorèmes de Girsanov

On se donne à nouveau $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et on note $\mathcal{F}_t^W, t \geq 0$ sa filtration naturelle complétée. Soit $\{\theta_t, t \geq 0\}$ un bon processus local vérifiant la condition de Novikov.

Par les résultats précédents, on sait que l'unique solution de l'EDS

$$Z_t^\theta = 1 + \int_0^t \theta_s Z_s^\theta dW_s$$

S'écrit

$$Z_t^\theta = \exp \left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right]$$

et que Z^θ est une $(\mathcal{F}_t^W)$ -martingale. Comme précédemment, on fixe un horizon $T > 0$ et on définit la mesure

$$\mathbb{Q}_T^\theta(d\omega) = Z_T(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$ qui est une probabilité équivalant à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T^W$. La loi de W sous $\mathbb{Q}_T^\theta$ est alors donnée par le théorème suivant, lequel peut être vu comme une généralisation de la formule de Cameron-Martin au cas $\theta \neq m$.

Théorème (1): [Théorème de Girsanov]

Sous la mesure $\mathbb{Q}_T^\theta$, le processus

$$\tilde{W} : t \mapsto W_t - \int_0^t \theta_s ds, \quad t \leq T$$

est un mouvement brownien.

Ce théorème s'avère extrêmement utile en pratique. La preuve se démontre de deux façons. L'une repose sur le :

Lemme :

Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ un processus. C'est une $\mathcal{F}_t^W$ martingale sous $\mathbb{Q}_\mathbb{P}$ si et seulement si le processus $t \mapsto Z_t^\theta M_t$ est une F_t -martingale sous $\mathbb{P}$.

Preuve :

Supposons que M soit une $\mathbb{Q}_T^\theta$ -martingale. Pour tout $s \leq t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t^W$
On a :

$$\mathbb{E}_\mathbb{P} [Z_t^\theta M_t 1_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^\theta} [M_t 1_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^\theta} [M_s 1_A] = \mathbb{E}_\mathbb{P} [Z_s^\theta M_s 1_A]$$

et l'on en déduit que $Z^\theta M$ est une $\mathbb{P}$ -martingale. La réciproque se démontre de la même façon. On peut aussi montrer que, pour tout λ , le processus $\exp(\lambda \tilde{W}_t - \lambda^2 t / 2), t \leq T$ est une $\mathbb{Q}_T^\theta$ -martingale.

Fin de la preuve du théorème : On démontre d'abord directement que $\tilde{W}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$, de sorte que par le lemme précédent, $\tilde{W}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T^\theta$. De plus, le crochet sous $\mathbb{P}$ de $\tilde{W}$ vu comme processus d'Itô est celui de sa partie martingale, donc $\langle \tilde{W} \rangle_t = t$. Mais on a vu que ce crochet était invariant par changement de probabilité équivalent, et l'on en déduit que sous $\mathbb{Q}_T^\theta$, $\tilde{W}$ est une martingale continue de crochet $\langle \tilde{W} \rangle_t = t$, autrement dit un mouvement brownien. La deuxième méthode repose sur le théorème de Girsanov abstrait, d'intérêt moins évident a priori, mais qui reste valable dans un cadre très général.

Théorème (2) : [Théorème de Girsanov abstrait] Soit $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité équivalentes sur un espace filtré $(\Omega, \{F_t, t \leq T\})$. On suppose que toutes les (F_t) -martingales sont continues. Alors sous $\mathbb{P}$ il existe L une (F_t) -martingale continue telle que pour tout $t \leq T$ et tout $A \in F_t$,

$$\mathbb{Q}[A] = \mathbb{E}_\mathbb{P} [\exp [L_t - \langle L \rangle_t / 2] 1_A]$$

De plus, si M une martingale locale continue sous $\mathbb{P}$, alors le processus

$$\tilde{M} : t \mapsto M_t - \langle M, L \rangle_t$$

est une martingale locale continue sous $\mathbb{Q}$.

Expliquons d'abord la première partie de ce théorème concernant l'existence de la martingale L . Elle repose sur le théorème de « Radon-Nikodym », qui assure l'existence d'un processus densité $\{D_t, t \geq 0\}$ de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$, au sens où pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{Q}[A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_t \mathbf{1}_A]$$

Comme $A \in \mathcal{F}_T$, on a aussi

$$\mathbb{Q}[A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_T \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_T | \mathcal{F}_t] \mathbf{1}_A]$$

de sorte, par identification, que

$$D_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_T | \mathcal{F}_t]$$

Pour tout $t \leq T$. On en déduit que D est une martingale continue sous $\mathbb{P}$. De plus elle est strictement positive, par équivalence entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$.

On peut alors (on peut effectivement définir une intégrale stochastique par rapport à une martingale continue) définir le processus

$$L_t = \log D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s}$$

et on applique la formule d'Itô à

$$\begin{aligned} R_t = \exp[L_t - \langle L \rangle_t / 2] &= D_0 + \int_0^t R_s dL_s - \frac{1}{2} \int_0^t R_s d\langle L \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t R_s d\langle L \rangle_s \\ &= D_0 + \int_0^t R_s dL_s. \end{aligned}$$

Mais par définition de L , on a aussi

$$D_t = D_0 + \int_0^t D_s dL_s,$$

de sorte que D et R sont solutions fortes de la même EDS. Par unicité, on en déduit que $R \equiv D$, d'où :

$$D_t = \exp[L_t - \langle L \rangle_t / 2].$$

Ceci entraîne finalement que pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{Q}[A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp[L_t - \langle L \rangle_t / 2] \mathbf{1}_A]$$

On voit enfin facilement comment le théorème (2) entraîne le théorème (1).

La martingale L du théorème (2) est ici

$$L_t = \int_0^t \theta_s dB_s$$

et on a donc

$$\langle B, L \rangle_t = \int_0^t \theta_s ds.$$

Comme B est une martingale locale continue sous $\mathbb{P}$, $\tilde{B}$ est une martingale locale continue sous $\mathbb{Q}_T^\theta$.

On démontre comme ci-dessus que son crochet est $\langle \tilde{B} \rangle_t = t$, et l'on en déduit que $\tilde{B}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_T^\theta$.

II.2-3 Théorème de représentation prévisible

Soit B un mouvement brownien et F sa filtration naturelle, soit $F_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. (il est important que (F_t) soit la filtration naturelle).

Représentation prévisible

Théorème :

Soit B un mouvement Brownien et (F_t) sa filtration naturelle.

Soit M une (F_t) -martingale telle que

$$\sup_{t \leq T} E[M_t^2] < \infty$$

Il existe un unique processus prévisible H vérifiant

$$E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < \infty$$

tel que $\forall t \in [0, T], M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$

Si M est une (F_t) -martingale locale, il existe un unique processus prévisible H tel que :

$$\forall t, M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$$

Preuve :

On montre tout d'abord que si F est une v.a. F_∞ mesurable, de carré intégrable, elle admet la représentation

$$F = E(F) + \int_0^\infty H_s dB_s$$

Pour cela, notant H l'ensemble de v.a. possédant la propriété de représentation,

on montre que H est fermé dans L^2 et contient les v.a. de la forme :

$$F = \delta(f * B)_\infty \text{ avec } f = \sum_i \lambda_i \cdot 1_{[t_{i-1}, t_i]}$$

qui sont totales dans L^2 . On en déduit le résultat pour des martingales bornées, puis le cas général par densité et localisation.

Remarque : Ce résultat est important en finance pour exhiber un portefeuille de couverture. On remarque que

$$d\langle M, B \rangle_t = H_t dt$$

Si M est une martingale de la forme $f(t, B_t)$, on trouve $H_t = f'_x(t, B_t)$ en appliquant la formule d'Itô. Ce théorème se généralise aux Browniens d -dimensionnels. Les conditions d'intégrabilité exigées sur H sont importantes. Dudley a montré que pour toute v.a. $\zeta \in F_T$ on peut trouver un processus prévisible H tel que :

$$\zeta = \int_0^T H_s dB_s$$

(le cas où ζ est déterministe n'est pas sans intérêt, surtout en finance, puisqu'il génère un arbitrage).

Corollaire : Toutes les (F_t) -martingales locales sont continues.

CHAPITRE III :

Simulation des Equations Différentielles Stochastiques

III-1 Introduction :

Nous allons décrire, dans ce chapitre, des méthodes permettant la simulation des modèles financiers. Ces méthodes sont souvent utiles, dans le contexte des mathématiques financières, car elles permettent de calculer le prix de n'importe quelle option pour peu que l'on sache l'exprimer sous forme de l'espérance d'une variable aléatoire que l'on sait simuler. Dans ce cas, la méthode de Monte-Carlo décrite plus loin permet alors d'écrire très rapidement un algorithme permettant l'évaluation de cette option.

Ces méthodes sont malheureusement peu efficaces et on ne les utilise que si l'on ne sait expliciter le prix de l'option sous forme analytique. De même, quand on se pose des questions complexes sur une stratégie de gestion de portefeuille, les réponses exactes sont souvent inaccessibles analytiquement. Les méthodes de simulation sont alors incontournables.

Dans les modèles de diffusion, la mise en œuvre des méthodes de Monte-Carlo nécessite le plus souvent la discrétisation d'une équation différentielle stochastique. Le schéma de discrétisation le plus utilisé dans la pratique est le schéma d'Euler, que nous allons étudier.

III-2 La simulation :

Définition :

La simulation est une méthode de mesure et d'étude consistant à remplacer un phénomène, un système étudié, par un modèle plus simple mais ayant un comportement semblable.

Les échantillons d'un modèle étudié n'étant pas toujours faciles à observer pour différentes contraintes, on a recourt à des échantillons artificiels qui doivent autant que possible reproduire les conditions du phénomène étudié.

Les exemples d'application sont très variés, citons par exemple :

- la simulation de file d'attente de réseaux ;
- la simulation de portefeuille d'actifs en finance ;
- la comparaison d'estimateurs en statistique ;
- la recherche d'états stationnaires en physique, en économie ;

Remarquons de plus que si l'on cherche une représentation fidèle des phénomènes observés, on est rapidement confronté à des difficultés dues aux calculs non explicites.

Les techniques de simulation vont nous permettre d'approcher numériquement ces calculs.

III-3 La simulation de Monte-Carlo :

III-3-1 Description de la méthode de Monte-Carlo :

Pour utiliser une méthode de Monte-Carlo on doit tout d'abord mettre sous forme d'une espérance la quantité que l'on cherche à calculer. Il nous reste donc à calculer une quantité de la forme $E(X)$ où X est une variable aléatoire. Pour pouvoir calculer $E(X)$ il convient de savoir *simuler* une variable aléatoire selon la loi de X . Mathématiquement, cela signifie que l'on suppose que l'on dispose de la réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i, i \geq 1)$ suivant toutes la loi de X .

Informatiquement, on ramène la simulation d'une loi arbitraire à celle d'une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Ce genre de suite aléatoire est souvent fourni dans les langages de programmation. Il ne reste plus alors qu'à approximer $E(X)$ par :

$$E(X) \approx \frac{1}{N} (X_1 + \dots + X_N)$$

On va donner un exemple d'application de la méthode de Monte-Carlo, au cas du calcul d'une intégrale, en détaillant les deux étapes citées : mise sous forme d'espérance et simulation de la variable aléatoire.

Imaginons que l'on cherche à calculer une intégrale de la forme :

$$I = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d.$$

On pose, $X = f(U_1, \dots, U_d)$, où les $U_1, \dots, U_d$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On a :

$$E(X) = E(f(U_1, \dots, U_d)) = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d,$$

Par définition de la loi du n -uplet, $(U_1, \dots, U_d)$. On vient de réaliser la première étape (mise sous forme d'espérance).

Pour la simulation, supposons que $(U_i, i \geq 1)$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (obtenue par des appels successifs à une fonction *random*) et posons $X_1 = f(U_1, \dots, U_d)$, $X_2 = f(U_{d+1}, \dots, U_{2d})$, etc. Alors la suite $(X_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X et une bonne approximation de I est donnée par :

$$\frac{1}{N}(X_1 + \dots + X_N).$$

Une remarque importante est la très grande facilité de programmation de la méthode. Il est à noter aussi que l'applicabilité de cette méthode ne dépend pas de la régularité de f , qui peut être simplement mesurable.

III-3-2 Convergence et limites de la méthode :

a-La loi forte des grands nombres et la méthode de Monte-Carlo :

Théorème :

Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la même loi qu'une variable aléatoire X . On suppose que $E(|X|) < +\infty$.

Alors, pour presque tout ω (cela signifie qu'il existe $N \subset \Omega$, avec $P(N) = 0$ et que si $\omega \notin N$) :

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega))$$

Ce théorème impose une limite théorique aux méthodes de Monte-Carlo : on ne peut l'utiliser que pour des variables aléatoires intégrables.

b-Théorème de la limite centrale et méthode de Monte-Carlo :

Pour avoir une idée de l'intérêt de la méthode il faut être en mesure d'évaluer l'erreur :

$$\varepsilon_n = E(X) \approx \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Le théorème de la limite centrale donne un asymptotique de l'erreur ε_n mais de nature aléatoire. Il dit que la loi de ε_n finit par ressembler à une loi gaussienne centrée.

Énoncé du théorème :

Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la même loi qu'une variable aléatoire X . On suppose que $E(X^2) < +\infty$. On note σ^2 la variance de X :

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = E((X - E(X))^2),$$

Alors :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varepsilon_n \text{ converge en loi vers } G,$$

G étant une variable aléatoire suivant une loi gaussienne centrée réduite.

Cela signifie que G est une variable aléatoire de loi $e^{-x^2/2} (dx/\sqrt{2\pi})$ et que si f est une fonction continue bornée, $E(f(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varepsilon_n))$ converge vers $E(f(G))$.

Remarque :

On peut déduire du théorème précédent que pour tout $c_1 < c_2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_1 \leq \varepsilon_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_2\right) = \int_{c_1}^{c_2} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dans les applications pratiques on 'oublie le passage à la limite' et on remplace ε_n par une gaussienne centrée de variance σ^2/n .

c-Un exemple concret :

Nous allons donner un exemple d'utilisation du théorème de la limite centrale, dans les applications à la finance on est amené à calculer des quantités du type :

$$C = E((e^{\beta G} - K)_+)$$

G étant une gaussienne centrée réduite et $x_+ = \max(0, x)$.

Ces quantités représentent le prix d'une option d'achat « call ». Evidemment, dans le cas précis cité on peut trouver une formule explicite (la célèbre formule de Black & Scholes) :

$$E((e^{\beta G} - K)_+) = e^{\beta^2/2} N\left(\beta - \frac{\log(K)}{\beta}\right) - KN\left(-\frac{\log(K)}{\beta}\right)$$

avec $N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$. Mais nous allons supposer que l'on cherche à calculer ces quantités par simulation.

Les valeurs pratiques utilisées pour β sont de l'ordre de l'unité. Dans l'expérimentation numérique nous avons posé $\beta = 1.0$ ainsi que $K = 1.0$. Voici le résultat de la simulation ainsi qu'une estimation de l'erreur pour divers nombres de tirages.

```
Valeur exacte : 6.720
N=100,   intervalle de confiance a 95% : [0.08, 11.39]
          Valeur estimée : 5.74
N=1000,  intervalle de confiance a 95% : [4.20, 10.01]
          Valeur estimée : 7.1
N=10000, intervalle de confiance a 95% : [6.13, 8.43]
          Valeur estimée : 7.28
N=100000, intervalle de confiance a 95% : [6.59, 7.69]
          Valeur estimée : 7.14
```

comparons maintenant les résultats à ceux que l'on obtient lorsque l'on cherche à évaluer une option de vente « put », c'est à dire :

$$P = E((K - e^{\beta G})_+).$$

la formule explicite donne :

$$KN\left(\frac{\log(K)}{\beta}\right) - e^{\beta^2/2} N\left(\frac{\log(K)}{\beta} - \beta\right).$$

On obtient alors les résultats suivants :

```
Valeur exacte : 0.238
N=100,   intervalle de confiance estimé à 95% : [0.165, 0.276]
          Valeur estimée : 0.220
N=1000,  intervalle de confiance estimé à 95% : [0.221, 0.258]
          Valeur estimée : 0.240
N=10000, intervalle de confiance estimé à 95% : [0.232, 0.244]
          Valeur estimée : 0.238
```

On constate que l'approximation est bien meilleure dans le cas du « put » que dans le cas du « call ». Ceci s'explique sans difficultés par un calcul (ou une estimation) de la variance. Le cas du calcul du « call » reprend pour l'essentiel les caractéristiques du cas précédent.

III-4 Simulation des variables aléatoires :

Pour implémenter la méthode de Monte-Carlo sur un ordinateur, on procède de la façon suivante. On suppose que l'on sait construire une suite de nombres $(U_n)_{n \geq 1}$ qui réalise une suite de variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0,1]$, indépendantes, et on cherche une fonction

$(u_1, \dots, u_p) \rightarrow F(u_1, \dots, u_p)$ telle que la loi de la variable aléatoire $F(U_1, \dots, U_p)$ soit la loi cherchée $u(dx)$.

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ où $X_n = F(U_{(n-1)p+1}, \dots, U_{np})$ est alors une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi voulu u .

La suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est réalisée concrètement par des appels successifs à un générateur de nombres pseudo-aléatoires.

La plupart des langages disponibles sur les ordinateurs modernes possèdent une fonction aléatoire, déjà programmée, dont la sortie est un nombre pseudo aléatoire compris entre 0 et 1, soit un entier aléatoire dans un intervalle fixé (cette fonction porte le nom de `rand()` en C ANSI, de `random` en Turbo Pascal)

III-4-1 Simulation d'une loi uniforme sur [0,1] :

Nous allons montrer comment l'on peut construire des générateurs de nombres aléatoires au cas où les générateurs de la machine ne donneraient pas entière satisfaction.

La méthode la plus simple et la plus couramment utilisée est la méthode des **congruences linéaires**.

On génère une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de nombres entiers compris entre 0 et $m-1$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = \text{valeur initiale} \in \{0, 1, \dots, m-1\} \\ x_{n+1} = ax_n + b \pmod{m} \end{cases}$$

a, b, m étant des entiers qu'il faut choisir soigneusement si l'on veut que les caractéristiques statistiques de la suite soient satisfaisantes. Sedgewick préconise le choix suivant :

$$\begin{cases} a = 31415821 \\ b = 1 \\ m = 10^8 \end{cases}$$

Cette méthode permet de simuler des entiers pseudos aléatoires entre 0 et $m-1$; pour obtenir un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 on divise l'entier aléatoire ainsi généré par m .

III-4-2 Simulation d'autres variables aléatoires:

Nous allons montrer comment l'on peut simuler, à partir d'une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$, des variables aléatoires suivant certaines lois usuelles :

a-Simulation de variables gaussiennes :

Une méthode classique pour simuler les variables aléatoires gaussiennes repose sur la constatation que, si (U_1, U_2) sont deux variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ indépendantes :

$$\begin{aligned} &\sqrt{-2\log(U_1)} \cos(2\pi U_2) \\ &\sqrt{-2\log(U_1)} \sin(2\pi U_2) \end{aligned}$$

suivent une loi gaussienne centrée et réduite.

Pour simuler des gaussiennes de moyenne m et de variance σ il suffit de poser

$$X = m + \sigma g$$

Où g est une gaussienne centrée réduite.

b-Simulation de vecteurs gaussiens :

Lorsque l'on construit des modèles où interviennent plusieurs actifs (par exemple lorsque l'on cherche à modéliser des paniers d'actifs), on est amené à considérer des processus gaussiens à valeurs dans $\mathcal{R}^n$.

Le problème de la simulation des vecteurs gaussiens est alors essentiel. Nous allons donner une méthode de simulation de ce type de variables aléatoires.

Nous supposons que l'on cherche à simuler un vecteur gaussien $(X_1, \dots, X_n)$ dont la loi est caractérisée par le vecteur des moyennes $m = (m_1, \dots, m_n) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$ et la matrice de covariance $\Gamma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ où $\sigma_{ij} = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$.

La matrice Γ est définie positive et nous supposons, de plus, qu'elle est inversible. On peut trouver une racine carrée de Γ , c'est à dire une matrice A , telle que $A \times A^t = \Gamma$.

Comme Γ est inversible, A l'est également, et on peut considérer le vecteur $Z = A^{-1}(X - m)$.

Il est facile de vérifier que ce vecteur est un vecteur gaussien, centré.

De plus sa matrice de covariance vaut :

$$\begin{aligned} E(Z_i Z_j) &= \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n} E(A_{ik}^{-1} (X_k - m_k) A_{jl}^{-1} (X_l - m_l)) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n} E(A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} \sigma_{kl}) \\ &= \left(A^{-1} \Gamma (A^t)^{-1} \right)_{ij} = \left(A^{-1} A A^t (A^t)^{-1} \right)_{ij} = Id \end{aligned}$$

Z est donc un vecteur gaussien centré de matrice de covariance identité. La loi du vecteur Z est celle de n gaussiennes centrées réduites indépendantes.

La loi du vecteur $X = m + AZ$, peut donc être simulé de la façon suivante :

- On calcule une racine carrée de la matrice Γ , A .
- On simule n gaussiennes centrées réduites indépendantes $G = (g_1, \dots, g_n)$.
- On calcule $m + AG$.

Remarque :

Pour calculer la racine carrée de Γ , on peut supposer A triangulaire supérieure, il y a alors une seule solution à l'équation $A \times A^t = \Gamma$.

En explicitant cette équation, on obtient facilement les coefficients de A .

Cette méthode de calcul de la racine carrée s'appelle la méthode de Cholevsky.

III-5 Simulation de processus stochastique :

Les méthodes décrites précédemment permettent de simuler une variable aléatoire, en particulier la valeur d'un processus stochastique à un instant donné. On a parfois besoin de savoir simuler toute la trajectoire d'un processus. Ce paragraphe propose quelques procédés élémentaires permettant de simuler des trajectoires de processus.

III-5-1 Simulation du mouvement brownien :

On peut citer deux méthodes permettant de simuler un mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$.

▪ Méthode 1 :

Cette méthode consiste à « renormaliser » une marche aléatoire.

Soit $(X_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées de loi :

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$$

$$\text{On a alors } E(X_i) = 0 \text{ et } E(X_i^2) = 1$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

On peut alors « approximer » le mouvement brownien par le processus $(X_t^n)_{t \geq 0}$ où :

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

Où $[x]$ désigne la partie entière de x .

▪ Méthode 2 :

On remarque que, si $(g_i)_{i \geq 0}$ est une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes, si $\Delta t > 0$ et si l'on pose :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} - S_n = g_n \end{cases}$$

alors la loi de $(\sqrt{\Delta t} S_0, \sqrt{\Delta t} S_1, \dots, \sqrt{\Delta t} S_n)$ est identique à celle de :

$$(W_0, W_{\Delta t}, W_{2\Delta t}, \dots, W_{n\Delta t}).$$

On peut approximer le mouvement brownien par $X_t^n = \sqrt{\Delta t} S_{[t/\Delta t]}$.

III-5-2 Simulation des équations différentielles stochastiques :

Nous avons vu dans ce qui a précédé que les modèles d'évaluation d'option sont conçus sur la base des EDS.

C'est pour cette raison que nous introduisons une méthode de simulation des EDS et ce, par discrétisation des processus. Une méthode dite d'Euler aléatoire. Discrétiser signifie convertir en temps discret une équation en temps continu.

a-Méthode de discrétisation :

De nombreuses études sur la simulation des équations différentielles stochastiques ont montrés que plus la taille du pas de discrétisation Δt était proche du zéro, plus les approximations à temps discret de ces équations convergeaient vers la solution du les solutions du processus. Ce qui a obligé les chercheurs à mener des études prudentes et systématiques sur les différentes méthodes, afin de choisir une approche suffisamment efficace.

Le pas de discrétisation se définit comme le laps de temps séparant deux simulations consécutives.

Pour simplifier, nous allons considérer une discrétisation équidistante du temps avec $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, sur l'intervalle $[0, T]$ et un pas de taille $\Delta t = T/n$, pour une équation différentielle de la forme :

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \dots (*)$$

Où $a(X_t), b(X_t)$ sont deux fonctions de X_t .

Notons qu'on peut utiliser une discrétisation du temps plus général, par exemple un pas qui n'est pas équidistant, sachant que le pas maximum Δt doit être spécifié.

L'heuristique la plus simple de l'approche basée sur la discrétisation du temps est la généralisation stochastique de l'approximation d'Euler, qui est souvent appelée

: « Approximation de Euler-Maruyama », elle a la forme suivante :

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i)\Delta_i + b(Y_i)\Delta W_i$$

Avec la valeur initiale : $Y_0 = x_0$

Où : $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ et $\Delta W_i = W_{i+1} - W_i$ pour $i = 0, \dots, n-1$

La variable aléatoire ΔW_i suit une distribution de loi $N(0, \Delta_i)$, loi normale de moyenne nulle et de variance Δ_i .

Grâce à la simulation, on peut simuler de tels nombres aléatoire indépendants à partir de variables indépendantes uniformément distribuée sur $[0,1]$, ces dernières sont générées par des nombres pseudo aléatoires sur ordinateur.

Comme dans l'analyse numérique déterministe, la notion d'ordre de convergence joue un rôle important dans la construction d'algorithmes stochastiques efficaces pour la résolution des EDS dans le cas stochastique, il existe plusieurs types de convergences. Le choix du critère de convergence dépend du caractère du problème à traiter.

b-Simulation des équations différentielles stochastiques :

Il existe de nombreuses méthodes, certaines très sophistiquées, pour simuler la solution d'une équation différentielle stochastique. Nous ne parlerons ici que de la méthode la plus élémentaire : la méthode **d'Eleur aléatoire**. Le principe en est le suivant :

Considérons une équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \end{cases}$$

On se fixe un pas de discrétisation en temps Δt . On peut alors construire un processus à temps discret $(S_n)_{n \geq 0}$ approximant la solution de l'équation différentielle stochastique aux instants $n\Delta t$, en posant :

$$\begin{cases} S_0 = x \\ S_{n+1} - S_n = \{b(S_n)\Delta t + \sigma(S_n)(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})\} \end{cases}$$

Si $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$, $(X_t^n)_{t \geq 0}$ approxime $(X_t)_{t \geq 0}$ au sens suivant :

Théorème :

Pour tout $T > 0$:
$$E \left(\sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t|^2 \right) \leq C_T \Delta t,$$

C_T étant une constante dépendant uniquement de T .

Ce théorème fait apparaître une propriété de convergence forte sur le maximum des écarts absolu, entre la trajectoire obtenue par la simulation et la valeur qui correspond à la trajectoire de la solution exacte.

La loi de la famille $(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})_{n \geq 0}$ est identique à celle d'une famille de gaussiennes indépendantes centrées et de variance Δt . Dans une simulation, on remplace $(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})$ par $g_n \sqrt{\Delta t}$, où $(g_n)_{n \geq 0}$ est une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes. La suite approximante $(S'_n)_{n \geq 0}$ est dans ce cas définie par :

$$\begin{cases} S'_0 = x \\ S'_{n+1} = S'_n + \Delta t b(S'_n) + \sigma(S'_n) g_n \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

Remarque:

On peut substituer à la suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes $(g_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(U_i)_{i \geq 0}$, telle que $P(U_i = 1) = P(U_i = -1) = 1/2$. Il faut, cependant, noter que, dans ce cas, on n'a pas le même type de convergence que dans le théorème précédent.

III.5.3 Méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires

Nous résumons dans la partie ci-après les principaux aspects des méthodes numériques adoptées pour résoudre les équations différentielles ordinaires.

III.5.3.1 Approximation d'Euler déterministe

Dans la pratique, de nombreux problèmes peuvent être modélisés comme suit :

$$\frac{dx}{dt}=a(t,x) \text{ avec } x(t_0)=x_0 \quad (\text{III.5.1})$$

Où la solution correspondante $x(t; t_0, x_0)$ ne peut avoir une forme explicite.

Ce qui nécessite le développement des méthodes d'approximation de la solution exacte en faisant des calculs numériques.

L'approche numérique la plus pratique et la plus utilisée est l'approximation par discrétisation du temps où l'équation différentielle à temps continue est remplacée par une équation à temps discret. Ceci se fait en générant des valeurs $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ qui sont des valeurs approchées de $x(t_1; t_0, x_0), x(t_2; t_0, x_0), \dots, x(t_n; t_0, x_0), \dots$. Ces approximations sont exactes si les incréments du temps $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$ pour $n=0, 1, 2, \dots$ sont suffisamment petites et convenablement choisies.

La méthode d'Euler est la plus simple parmi l'ensemble des méthodes d'approximation par discrétisation du temps. Elle consiste à calculer d'une manière récursive les approximations :

$$y_{n+1} = y_n + a(t_n, y_n) \Delta_n \quad (\text{III.5.2})$$

tel que $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ représente le temps discret avec un accroissement $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$ pour $n=0, 1, 2, \dots$ et $y_0 = x_0$. En choisissant la discrétisation du temps comme méthode numérique de résolution des équations différentielles ordinaires, on peut relever deux types d'erreurs. La première est donnée par :

$$l_{n+1} = x(t_{n+1}; t_n, y_n) - y_{n+1} \quad (\text{III.5.3})$$

et est appelée erreur de discrétisation locale de pas n . Quant à la deuxième, appelée erreur de discrétisation globale de pas n , elle a la forme :

$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, y_0) - y_{n+1} \quad (\text{III.5.4})$$

L'estimation de la taille des erreurs de discrétisation se fait au moyen de la formule de Taylor, appliquée à une fonction de classe C^2 , $x = x(t)$. Cette formule donnée par :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{d}{dt_n} x(t_n) \cdot \Delta_n + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\theta_n^2} x(\theta_n) \cdot \Delta_n^2 \quad \text{pour } t_n < \theta_n < t_{n+1}$$

nous permet d'avoir une nouvelle forme de l'erreur de discrétisation quelle que soit sa typologie.

On obtient ainsi les expressions suivantes :

$$\blacksquare \quad l_{n+1} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\theta_n^2} x(\theta_n) \cdot \Delta_n^2 \quad \text{pour } t_n < \theta_n < t_{n+1}$$

$$\text{Si } \left| \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right| < M \quad \forall t \in [t_0, T] \text{ alors } |l_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \cdot M \cdot \Delta_n^2 \quad \forall \Delta_n \text{ avec } t_0 < t_n < t_{n+1} < T$$

Si de plus la solution $x(t)$ appartient à un ensemble fermé et borné C et que les dérivées premières de la fonction $a(t, x)$ sont continues alors le maximum M prend la forme :

$$M = \max \left| \frac{da}{dt}(t, x) \right| + \max \left| \frac{da}{dx}(t, x) \cdot a(t, x) \right|.$$

$$\blacksquare \quad e_{n+1} = e_n + \{a(t_n, x(t_n)) - a(t_n, y_n)\} \cdot \Delta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\theta_n^2} x(\theta_n) \cdot \Delta^2 \quad \text{où } \Delta = \Delta_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Si $a(t, x)$ vérifie la condition de Lipchitz : $|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|$ et que le temps de discrétisation est équidistant : $t_n = t_0 + n\Delta$ avec $n=0, 1, 2, \dots$ alors

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \left(e^{K(T-t_0)} - 1 \right) \cdot \frac{M}{K} \Delta$$

III.5.3.2. Méthodes d'approximation implicites

On dit qu'une méthode converge avec un ordre γ si :

$$\exists k < \infty \text{ tel que } |e_{n+1}| \leq k\Delta^\gamma \quad \forall \Delta \in (0, \delta_0) \quad \text{pour } \delta_0 > 0.$$

Si pour chaque valeur initiale du problème traité correspond une taille minimale du pas $\Delta_{\min}$ alors l'erreur d'arrondie ne peut être négligé et la précision des approximations calculées au moyen de la méthode choisi tel que la méthode d'Euler, qui est d'ordre de convergence $\gamma=1$, ne pourra être améliorée. En conséquence, l'obtention d'une approximation meilleure nécessite l'utilisation d'une autre méthode avec une erreur de discrétisation d'ordre plus élevé comme la méthode de Trapèze « Trapezoïdal method » :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \{a(t_n, y_n) + a(t_{n+1}, y_{n+1})\} \cdot \Delta \quad (\text{III.5.5})$$

où Δ est la taille du pas équidistante. Dans cette dernière méthode, nous remarquons que y_{n+1} apparaît dans les deux cotés de l'égalité, d'où son appellation « schème implicite »

et généralement elle ne peut pas être résolue algébriquement. Pour tourner cette difficulté, on utilise la méthode de trapèze modifiée :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \{a(t_n, y_n) + a(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\} \cdot \Delta \quad \text{avec} \quad \bar{y}_{n+1} = y_n + a(t_n, y_n) \Delta \quad (\text{III.5.6})$$

Cette méthode est connue par la méthode d'Euler amélioré ou méthode de Heun et c'est un exemple simple de la méthode dite « predictor –corrector method » où le terme prédicteur $\bar{y}_{n+1}$ est inséré dans l'équation du correcteur pour avoir la prochaine itération y_{n+1} . Les deux méthodes de trapèze et de trapèze modifiée possèdent des erreurs de discrétisations locales d'ordre 3 en Δ .

Lorsqu'on utilise une information sur des intervalles de discrétisation passés alors la précision des approximations sera meilleure et donc on retrouve de nouvelles méthodes, appelées méthodes à pas multiples comme la méthode de Bashford Adams, de pas égal à 3, donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12} \{23a(t_n, y_n) - 16a(t_{n-1}, y_{n-1}) + a(t_{n-2}, y_{n-2})\} \cdot \Delta \quad (\text{III.5.7})$$

On peut obtenir une précision d'ordre supérieur à partir d'un schème de pas égal à 1.0 par l'utilisation d'une méthode d'extrapolation. Par exemple, une approximation d'ordre 2 peut être fournit par la formule extrapolée de Richardson :

$$Z_N(\Delta) = 2y_{2N}\left(\frac{1}{2}\Delta\right) - y_N(\Delta) \quad (\text{III.5.8})$$

où $y_N(\Delta)$ (respt. $y_{2N}(1/2\Delta)$) est la valeur du schème d'Euler (III.5.2) à N (respt. $2N$) pas équidistants $\Delta = T/N$ (respt. $1/2\Delta$) dans l'intervalle de temps $[0, T]$.

Notons qu'il est possible de généraliser à des extrapolations d'ordre supérieur.

III.5.3.3 Méthodes d'approximation d'ordre très élevé

Ces méthodes sont établies en tronquant le développement de Taylor avec un ordre élevé. Si l'ordre est égal à 1 alors on obtient la méthode d'Euler (III.5.2). La méthode de Taylor tronqué d'ordre 2 est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + a\Delta + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d}{dt} a + a \frac{d}{dx} a \right\} \Delta^2 \quad \text{où} \quad a = a(t_n, y_n) \quad (\text{III.5.9})$$

La même méthode mais avec un ordre 3, donne :

$$y_{n+1} = y_n + a\Delta + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d}{dt} a + a \frac{d}{dx} a \right\} \Delta^2 + \frac{1}{3!} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} a + 2a \frac{d^2}{dt dx} a + a^2 \frac{d^2}{dx^2} a + \left(\frac{d}{dt} a \right) \frac{d}{dx} a + a \left(\frac{d}{dx} a \right)^2 \right\} \cdot \Delta^3 \quad (\text{III.5.10})$$

Nous remarquons que plus l'ordre du développement est élevé plus la méthode devient encore plus compliquée à cause notamment des dérivées. Ces derniers ne vont plus apparaître si on utilise la méthode explicite classique de Runge Kutta d'ordre 4, donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \{k_n^{(1)} + 2k_n^{(2)} + 2k_n^{(3)} + k_n^{(4)}\} \Delta \quad (\text{III.5.11})$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } k_n^{(1)} &= a(t_n, y_n); \quad k_n^{(2)} = a\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta, y_n + \frac{1}{2}k_n^{(1)} \cdot \Delta\right); \\ k_n^{(3)} &= a\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta, y_n + \frac{1}{2}k_n^{(2)} \cdot \Delta\right); \quad k_n^{(4)} = a(t_{n+1}, y_n + k_n^{(3)} \cdot \Delta) \end{aligned}$$

Pour les méthodes à pas multiples souvent on n'a pas besoin d'évaluer pour chaque pas de temps la fonction a comme pour les méthodes à un pas. Or ceci peut entraîner un problème d'instabilité numérique comme pour la méthode « Midpoint method » qui est une méthode à deux pas donnée par :

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2a(t_n, y_n) \Delta \quad (\text{III.5.12})$$

Certains compilateurs arrondissent les résultats des opérations arithmétiques d'une manière aléatoire mais d'autres le font selon une règle d'arrondissement déterministe. Dans les deux cas, on ne peut éviter l'erreur dû au nombre de décimales significatives à garder, appelée erreur d'arrondie.

III.5.3.4. Erreur d'arrondie

L'erreur d'arrondie accumulée peut être estimée à travers une analyse statistique en supposant que les erreurs locales arrondies sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle : $I = [-5 \times 10^{-(s+1)}, +5 \times 10^{-(s+1)}]$ où s est le nombre de décimales significatives utilisées. Pour vérifier la concordance de cette distribution, on reprend les calculs avec $s=4$ et on le compare avec le résultat obtenu sous la précision habituelle de l'ordinateur.

Dans certains problèmes de type linéaire, après $N \approx 10^5$ calculs, l'erreur d'arrondie cumulée ayant la forme $R_N = \sum_{k=1}^N r_k$ peut causer une perte de précision de toutes les décimales. Cela signifie qu'on peut seulement assurer que R_N se trouve dans l'intervalle :

$$[-5N \times 10^{-(s+1)}; +5N \times 10^{-(s+1)}] \quad (\text{III.5.13})$$

La variable r_k est supposée distribuée uniformément sur l'intervalle I , de moyenne $E(r_k) = \mu = 0$ et de variance $Var(r_k) = \sigma^2 = \frac{1}{12} \cdot 10^{-2s}$. Si en plus les r_k sont indépendantes alors l'erreur d'arrondie accumulée R_N est de moyenne nulle et de variance $N\sigma^2$.

Si N est grand, les variables aléatoires (*v.a*) définies par $Z_N = \frac{R_N}{\sigma\sqrt{N}}$ sont approximativement des *v.a* gaussiennes centrés et réduites (théorème central limite). On conclut que R_N appartient à l'intervalle :

$$\left[-1,96 \times 10^{-5} \cdot \sqrt{N/12}, +1,96 \times 10^{-5} \cdot \sqrt{N/12}\right] \quad \text{quand } N \text{ est grand.} \quad (\text{III.5.14})$$

Nous observons que la longueur de l'intervalle en (III.5.13) décroît proportionnellement à N en comparaison avec $\sqrt{N}$ dans (I.5.14) ; ce qui implique que les intervalles pour les erreurs d'arrondies sont plus petits et plus réalistes dans le deuxième cas.

III.5.4 Simulation stochastique en temps discret

Tout ce qu'on a vu à présent dans cette partie n'est qu'une introduction à la méthode d'approximation par discrétisation des processus d'Itô et le schème d'Euler stochastique en fait partie. On considère un exemple simple de simulation où cette approximation est utilisée pour générer une trajectoire proche de la solution de l'équation différentielle stochastique.

III.5.4.1. Approximation d'Euler stochastique

Le traitement de la solution d'une équation différentielle stochastique par simulation est effectué en élaborant des algorithmes numériques en temps discret. La simulation des trajectoires par la discrétisation du temps est l'approche la plus efficace pour résoudre les EDS.

Néanmoins, ce n'est pas toutes les approximations par discrétisation du temps qui convergent vers la solution exacte quand la taille maximale du pas Δt temps vers zéro. Ce problème a été déjà rencontré, en particulier dans la méthode de Runge-Kutta qui est une méthode numérique déterministe pour l'approximation des équations différentielles ordinaires (EDO.).

Par conséquent les méthodes numériques doivent être examinées soigneusement pour déterminer laquelle des approximations nous permettra de résoudre avec fiabilité l'EDS considéré et dans quel sens la solution trouvée est proche de la solution exacte.

Il y'a lieu de signaler que les schèmes numériques sont basés sur la formule d'Itô-Taylor stochastique et que le plus simple parmi ces méthodes, on trouve l'approximation d'Euler.

Considérons le processus d'Itô $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ ayant la forme différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = a(t, X_t) \cdot dt + b(t, X_t) dW_t & \forall t \in [t_0, T] \\ X_{t_0} = X_0 \end{cases} \quad (\text{III.5.4.1})$$

L'approximation d'Euler consiste à discrétiser l'intervalle de temps $[t_0, T]$ en N pas $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$, en générant itérativement des valeurs approchées aux trajectoires qui sont des valeurs exactes du processus d'Itô. Cette méthode appliquée à l'équation différentielle (III.5.4.1) implique l'approximation d'Euler qui est un processus

stochastique à temps continu définit par :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n) \Delta_n + b(\tau_n, Y_n) \Delta W_n, n=0,1,2,\dots,N-1 \\ Y_0 = X_0 \end{cases} \quad (\text{III.5.4.2})$$

$Y_n = Y(\tau_n)$ est la valeur de l'approximation à l'instant de discrétisation τ_n .

$\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ est l'incrément du processus de Wiener d'ordre n .

$\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ est l'incrément du temps d'ordre n .

Si les pas sont équidistants $\Delta_n = \Delta = \frac{T-t_0}{N}$ alors : $\tau_n = t_0 + n\Delta$ et tel que pour N grand $\delta \in (0,1)$.

Pour obtenir la suite $\{Y_n\}_{n=0,1,\dots,N}$ aux instants $\{\tau_n, n=0,1,\dots,N\}$, on a besoin de générer les incréments aléatoires $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ pour $n=0,1,\dots,N-1$, du processus de Wiener $W = \{W_t, t \geq 0\}$.

Ces variables aléatoires sont gaussiennes de moyenne nulle et de variance : $\Delta_n : \Delta W_n \rightarrow N(0, \Delta_n)$.

Remarque

Dans certaines applications, le temps de discrétisation n'est pas équidistant comme on a supposé précédemment, mais une variable aléatoire où l'on doit spécifier la taille maximale du pas $\delta = \text{Max} \Delta_n$.

Soit le temps de discrétisation $(\tau)_\delta = \{\tau_n, n=0,1,\dots\}$, qui est une variable aléatoire vérifiant $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots \leq \infty$ avec $\sup_{n_t} (\tau_{n+1} - \tau_n) \leq \delta$ et $n_t < \infty$, ps $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

où τ_{n+1} est A_{τ_n} mesurable $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

L'ensemble $\{A_t, t \geq 0\}$ est la famille croissante des σ -algèbres, associé généralement au processus d'Itô ou de Wiener. Si $(\tau)_\delta \in [t_0, T]$ alors on choisit $\tau_0 = t_0$ et $\tau_n = T$.

Dans ce cas particulier, l'approximation correspondante est dite approximation par discrétisation du temps généralisé qu'on va considérer lorsqu'on étudiera l'ordre de convergence faible et forte dans les prochaines sections.

III.5.4.2. Interpolation des approximations par discrétisation du temps

Souvent on s'intéresse à ce que l'approximation par discrétisation du temps soit un processus stochastique défini sur tout l'intervalle $[t_0, T]$, bien que principalement on obtienne des valeurs en temps discret. L'algorithme récursif d'Euler nous permet de déterminer les valeurs du processus approché au temps discret seulement. Si on a besoin de ses valeurs à des instants intermédiaires, on utilise alors une méthode d'interpolation linéaire, donnée par :

$$Y(t) = Y_{n_t} + \frac{t - \tau_{n_t}}{\tau_{n_t+1} - \tau_{n_t}} \cdot (Y_{n_t+1} - Y_{n_t}) \quad \Big/ \quad Y_0 = X_0 \quad (\text{III.5.4.3})$$

où $Y(t) = Y_{n_t}, \forall t \in \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et linéaire avec $n_t = \max\{n=0,1,\dots,N : \tau_n \leq t\}$.

Généralement les trajectoires du processus d'Itô sont irrégulières du fait que le processus de Wiener n'est pas différentiable. Ce qui fait que la génération de ces trajectoires par ordinateur est impossible, sauf si l'on s'intéresse aux valeurs de l'approximation en temps discret en considérant seulement les instants de discrétisation.

CHAPITRE IV :

*Dynamiques des prix d'actifs sous un modèle de
taux d'intérêt stochastique*

IV-1 Dynamique des taux d'intérêt en temps continu

Introduction

Dans un modèle d'évaluation d'un actif financier S_t régi par un diffuse du type :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t \quad (\text{IV.1})$$

Et pour des raisons purement « économétriques », Les mouvements du taux d'intérêt de court terme r , dans un univers risque neutre sont en général décrits au moyen d'une équation de diffusion du type :

$$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)dW_t \quad (\text{IV.2})$$

où W_t est un mouvement brownien standard, $\mu(r_t)$ et $\sigma(r_t)$ désignent respectivement les fonctions de dérive et de volatilité. Toutes deux peuvent dépendre de r_t , mais sont supposées indépendantes de t . L'estimation économétrique de ce type d'équation de diffusion est rendue difficile par le fait que premièrement l'on ne dispose que d'observations discrètes et deuxièmement qu'il n'existe de discrétisations exactes que pour des spécifications très restrictives de $\mu(r_t)$ et $\sigma(r_t)$. Par exemple, Vasiček (1977) utilise un processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire, Dothan (1978) un brownien géométrique qui permet une volatilité non constante mais n'est pas stationnaire et Cox, Ingersoll et Ross (1985) un modèle stationnaire avec une volatilité qui est fonction de $\sqrt{r_t}$ (ces modèles seront détaillés plus tard dans ce chapitre). Ces trois modèles possèdent une discrétisation exacte qui permet d'écrire les densités marginales et de transition des observations discrètes. Mais toute généralisation nous fait sortir de ce cadre analytique et impose de passer par une approximation pour conduire l'inférence. L'approximation la plus simple consiste à linéariser l'équation de diffusion (1) au moyen du schéma d'Euler. On peut se contenter d'estimer le modèle discrétisé, mais alors les estimations seront biaisées. La discrétisation d'Euler permet également de simuler la trajectoire du modèle pour un pas plus faible que celui des observations et ouvre alors la voie à toute une classe de méthodes qui corrigent le biais de discrétisation.

Modèle de taux d'intérêt	Dynamique du modèle
- Vasiček	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \cdot dW_t$
- Cox, Ingersoll et Ross (CIR)	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \cdot \sqrt{r_t} dW_t$

- Dothan	$dr_t = a.r_t dt + \sigma.r_t dW_t$
- Black, Derman et Toy	$dr_t = \theta(t)dt + \sigma(t).r_t dW_t$
- Ho et Lee	$dr_t = \theta(t)dt + \sigma(t)dW_t$
- Hull et White : Vasicek étendu	$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t$
- Hull et White : CIR étendu	$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t).\sqrt{r_t}dW_t$

Dans la suite de ce chapitre on va considérer que les deux premiers modèles standards.

IV-1-1 Notions sur le Processus d'Ornstien-Uhlenbeck :

C'est le processus solution de l'équation suivante, dite équation de Langevin :

$$\begin{cases} X_t = X_0 - a \int_0^t X_s ds + \sigma dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Où $a, \sigma \in \mathbb{R}$, X_0 une variable aléatoire (où une constante en finance) et W_t est un mouvement brownien standard indépendant de X_0 . On écrit l'équation précédente sous la forme :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t$$

le théorème suivant montre que la solution de cette équation est explicite en terme d'une intégrale de Wiener.

Théorème 4.1:

L'équation de Langevin a pour solution :

$$X_t = e^{-at} (X_0 + \sigma \int_0^t e^{as} dW_s)$$

Proposition 1:

si on considère $X_0 \sim N(m, \sigma_0^2)$ indépendante de W_t , alors la solution de l'équation de Langevin est un processus gaussien de fonction d'espérance $E[X_t] = m.e^{-at}$, et de fonction de covariance

$$\text{cov}[X_s, X_t] = e^{-a(t+s)} \cdot (\sigma_0^2 + \frac{\sigma^2}{2a} (e^{2a(s \wedge t)} - 1)).$$

Preuve :

On sait que les deux processus $e^{-at} X_0$ et $\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$ sont gaussiens et indépendants. Donc X_t , qui est leur somme est aussi un processus gaussien. Comme l'intégrale de Wiener est d'espérance nulle, et on a : $E[X_t] = e^{-at} . E[X_0] = m.e^{-at}$.

Enfin, par indépendance de X_0 et W_t , et par isométrie de l'intégrale de Wiener on a :

$$\text{cov}[X_s, X_t] = \text{cov}[X_0 e^{-as}, X_0 e^{-at}] + \text{cov}[\sigma \cdot \int_0^s e^{a(u-s)} dW_u, \sigma \cdot \int_0^t e^{a(u-t)} dW_u]$$

$$\text{cov}[X_s, X_t] = e^{-a(t+s)} (\text{var}(X_0) + \sigma^2 \cdot \int_0^{s \wedge t} e^{2au} dW_u)$$

$$\text{cov}[X_s, X_t] = e^{-a(t+s)} \cdot (\sigma_0^2 + \frac{\sigma^2}{2a} (e^{2a(s \wedge t)} - 1))$$

Remarque : si X_0 est une constante (i.e : $\sigma_0^2 = 0$), on a :

$$\text{cov}[X_s, X_t] = \frac{\sigma^2}{2a} (e^{-a|t-s|} - e^{-a(t+s)})$$

$$\text{Et } \text{var}[X_t] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

IV-1-2 Modèle de Vasicek :

L'une des premières modélisations stochastiques des taux a été développée par Vasicek en 1977. Cette modélisation du taux instantané à court terme utilise le processus autorégressif (dit d'Ornstein-Uhlenbeck) et on ajoutant une constante b (pour avoir un effet de retour à la moyenne) définit comme suit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (\text{IV.3})$$

Où les paramètres a , b et σ (tous positifs) représentent respectivement le taux limite (valeur moyenne à long terme), la vitesse de convergence et la volatilité. Il convient aussi d'indiquer que le taux du marché λ est supposé constant et que W_t correspond à un processus de Wiener standard. L'étude empirique d'un tel modèle montre la convergence de ce processus vers b quand t tend vers l'infini.

Si on pose $X_t = r_t - b$, on voit que le processus X_t est solution de l'équation de Langevin, et l'on déduit que l'équation (3) admet une solution explicite donnée par :

$$r_t = (r_0 - b) \cdot e^{-at} + b + \sigma \cdot \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u$$

on a pratiquement des propriétés analogues avec celles du processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

si on considère $r_0 \sim N(m, \sigma_0^2)$ indépendante de W_t , alors la solution r_t de l'équation de

Langevin est un processus gaussien de fonction d'espérance $E[r_t] = m \cdot e^{-at} + b(1 - e^{-at})$, et de

fonction de covariance $\text{cov}[r_s, r_t] = \text{cov}[X_s, X_t] = e^{-a(t+s)} \cdot (\sigma_0^2 + \frac{\sigma^2}{2a} (e^{2a(s \wedge t)} - 1))$.

Discrétisation et Simulation du processus de Vasicek :

La simulation des taux d'intérêt pour les périodes futures passe par une discrétisation de la dynamique, il est nécessaire de spécifier une forme discrète de l'équation régissant l'évolution des taux d'intérêt. On propose un schéma simple d'Euler qui décrit la dynamique discrétisée du taux à court terme :

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon$$

Où ε est une réalisation d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale $N(0,1)$, et

Δt est le pas de discrétisation.

Algorithme de simulation :

$r(0) \leftarrow r_0$;

lire(a, b, dt, σ) ;

Pour i allant de 1 à n faire

$r(i) = r(i-1) + a(b - r(i-1)) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{dt} \cdot \text{random}(\text{'normal'}, 0, 1, 1)$;

Fin.

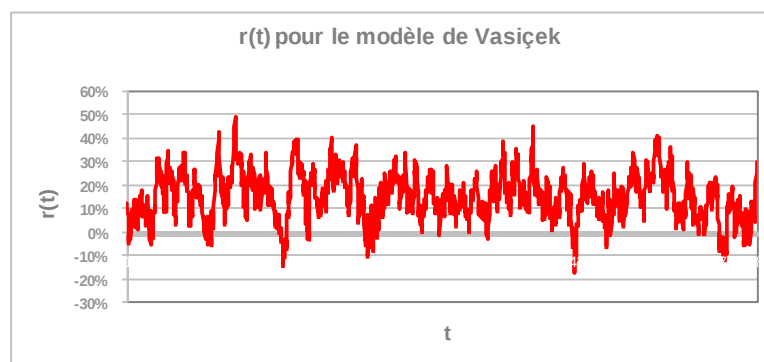


Fig IV.1 : trajectoire simulée du taux d'intérêt à court terme gouvernée par le modèle de Vasicek

Validation des simulations par le Bootstrap :

Le fait de connaître le comportement moyen du modèle de Vasicek, cela nous permet de contrôler statistiquement les sorties simulées via la méthode de « Bootstrap ». On va comparer le comportement moyen des échantillons boot-strapés avec le paramètre a (vers lequel converge en moyenne le processus de Vasicek). Voici quelques résultats sur un échantillon simulé par le schéma d'Euler défini précédemment :

	Nombre de Bootstrap				
	N=10	N=20	N=50	N=100	N=200
Valeur théorique de b	Valeur estimée de a via le Bootstrap				
$a=0.1$	0.2033	0.156	0.120	0.127	0.127
$a=0.5$	0.4601	0.4623	0.479	0.4801	0.51033
$a=0.9$	0.752	0.7312	0.7712	0.8214	0.8377

Le tableau ci-avant donne l'estimation de la valeur de a par la méthode de Bootstrap pour un échantillon simulé par le schéma d'Euler précédent et de taille $n=2000$. La précision de cet estimateur augmente en fonction de nombre de ré-échantillonnage N , et confirme le bon comportement de générateur de la dynamique de Vasicek.

Remarque :

Ce modèle dit de départ normal présente néanmoins des inconvénients : Les différents paramètres du processus de diffusion sont constants. Il n'est pas possible d'obtenir une courbe de taux en forme de cuvette. Les valeurs négatives du taux d'intérêt ne sont pas censurées. Pour éviter ce désagrément, il faut faire appel à une modélisation proposant une barrière réfléchissante à zéro ; c'est l'objet du processus de Cox, Ingersoll et Ross (CIR).

IV-1-3 Modèle de COX, INGERSOLL & ROSS (CIR) :

Ce modèle, établi en 1985, introduit un processus en racine carrée qui interdit à un taux initialement positif de prendre des valeurs négatives, tout en conservant la simplicité du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. En reprenant les notations de la partie précédente, le processus de taux s'écrit sous la forme :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

L'unique solution est un processus positif pour $a, b \geq 0$ (utiliser le second théorème d'existence). Il n'est pas possible d'obtenir une formule explicite. Soit Cependant, on peut calculer l'espérance de la v.a. r_t au moyen de l'égalité $E(r_t) = r_0 + a(b - \int_0^t E[r_s] ds)$, en admettant que l'intégrale stochastique est une martingale, ce qui est le cas. On calcule sans difficultés supplémentaires l'espérance conditionnelle, en utilisant le caractère Markovien.

Théorème : Soit r_t le processus vérifiant :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

L'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle sont données par :

$$E[r_t / \mathcal{F}_s] = r_s \cdot e^{-a(t-s)} + b \cdot (1 - e^{-a(t-s)})$$

$$\text{Var}[r_t / \mathcal{F}_s] = r_s \cdot \frac{\sigma^2 (e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)})}{a} + \frac{b \cdot \sigma^2 (1 - e^{-b(t-s)})^2}{2a}$$

Preuve :

Par définition, on a pour $s \leq t$:

$$r_t = r_s + a \int_s^t (b - r_u) du + \sigma \int_s^t \sqrt{r_u} dW_u$$

Et en appliquant la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} r_t^2 &= r_s^2 + 2a \int_s^t (b - r_u) r_u du - 2\sigma \int_s^t (r_u)^{\frac{3}{2}} dW_u + \sigma^2 \int_s^t r_u du \\ &= r_s^2 - 2a \int_s^t r_u^2 du - 2\sigma \int_s^t (r_u)^{\frac{3}{2}} dW_u + (2ab + \sigma^2) \int_s^t r_u du \end{aligned}$$

en admettant que les intégrales stochastiques qui intervient dans les égalités ci-dessus sont d'espérance nulle, on obtient, pour $s = 0$:

$$E[r_t] = r_0 + a(bt - \int_0^t E[r_u] du)$$

$$E[r_t^2] = r_0^2 + (2ab + \sigma^2) \int_0^t E[r_u] du - 2a \int_0^t E[r_u^2] du$$

Soit $\Phi(t) = E[r_t]$. En résolvant l'équation $\Phi(t) = r_0 + a(bt - \int_0^t \Phi(u) du)$ qui se transforme en l'équation différentielle $\Phi'(t) = a(b - \Phi(t))$ et $\Phi(0) = r_0$ on obtient :

$$E[r_t] = b + (r_0 - b)e^{-at}$$

De la même façon, on introduit $\Psi(t) = E[r_t^2]$ et on résolvant $\Psi'(t) = (2ab + \sigma^2)\Phi(t) - 2a\Psi(t)$, on calcule :

$$Var[r_t] = \frac{\sigma^2}{a}(1 - e^{-at})[r_0 e^{-at} + \frac{b}{2}(1 - e^{-at})]$$

L'espérance et la variance conditionnelle de r_t s'obtiennent en appliquant la propriété Markovienne :

$$\begin{aligned} E[r_t / \mathcal{F}_s] &= r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) \\ Var[r_t / \mathcal{F}_s] &= r_s \cdot \frac{\sigma^2(e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)})}{a} + \frac{b \cdot \sigma^2(1 - e^{-b(t-s)})^2}{2a} \end{aligned}$$

Discretisation et simulation du modèle de CIR :

L'approche numérique la plus efficace pour approcher la dynamique d'un modèle de type CIR est celle qui consiste à discrétiser l'intervalle de temps $[0, T]$ en N pas tel que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, et en générant itérativement des valeurs approchées aux trajectoires.

Si on considère un processus d'Itô ayant la forme différentielle suivant :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t \quad \forall t \in [0, T] \text{ et } r_{t_0} = r_0$$

Une approximation de l'équation précédente implique le schéma d'Euler stochastique qui est un processus stochastique défini par :

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma \sqrt{r_t} \sqrt{\Delta t} \varepsilon \text{ et } r_{t_0} = r_0$$

Où ε est une réalisation d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale $N(0,1)$, et Δt est le pas de discrétisation.

Algorithme de simulation :

```

r(0) ← r0 ;
lire(a, b, dt, σ) ;
Pour i allant de 1 à n faire
    r(i) = r(i-1) + a(b - r(i-1)).dt + σ.sqrt(dt.r(i-1)).random('normal', 0, 1, 1) ;
Fin.

```

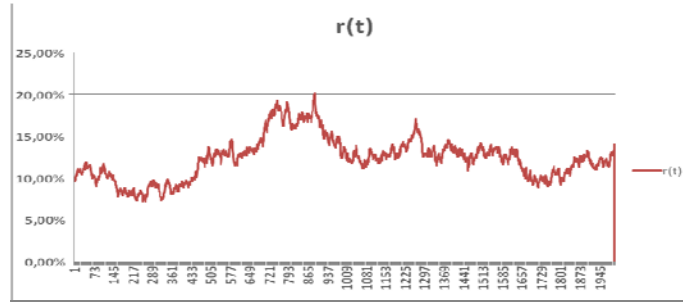


Fig IV.2 : trajectoire simulée du taux d'intérêt à court terme gouvernée par le modèle de CIR

Validation de schéma de simulation par la méthode des moments généralisés :

Nous utiliserons la procédure de simulation décrite précédemment pour générer N trajectoires de pas n . Ces trajectoires simulées devraient posséder les mêmes propriétés que les trajectoires issues du modèle CIR. Nous utiliserons ensuite la Méthode des Moments Généralisés (G.M.M) de Hansen [1982] pour estimer les paramètres du processus générateur des trajectoires de taux d'intérêt. La procédure G.M.M peut être utilisée lorsque le modèle économique CIR donne lieu à des conditions d'orthogonalité pour lesquelles l'espérance du produit de termes d'erreurs inobservables et variables observables doit être égale à zéro.

Ces conditions peuvent être exprimées par :

- Si le modèle explique les taux observés, l'espérance des résidus doit être nulle.
- Dans le modèle CIR, l'espérance du produit des résidus par le taux court doit également être nulle (condition d'orthogonalité).

M. COTTRELL, E. DE BODT et PH. GREGOIRE dans [4] on donnés les conditions d'orthogonalité de la méthode G.M.M pour un modèle de CIR.

Soit, le modèle de CIR équivalent suivant :

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

Et, si on considère la discrétisation précédente :

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{r_t} \varepsilon$$

Pour que l'espérance des résidus soit nulle et que les variations de taux d'intérêt aient la même variance que celle spécifiée dans le processus de CIR, on doit avoir :

$$E[(r_{t+dt} - r_t) - (a - br_t)dt] = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$E[((r_{t+dt} - r_t) - (a - br_t)dt)^2 - \sigma^2 r dt] = 0 \quad \dots\dots (2)$$

Ces résidus doivent être indépendants du niveau du taux à court terme et on peut ajouter les conditions d'orthogonalités suivantes :

$$E[((r_{t+dt} - r_t) - (a - br_t)dt).r_t] = 0 \quad \dots\dots (3)$$

$$E[((r_{t+dt} - r_t) - (a - br_t)dt)^2 - \sigma^2 r dt].r_t] = 0 \quad \dots\dots (4)$$

On remplaçons les espérances par les moyennes calculées sur les échantillons simulés, on peut estimer les valeurs de a , b et σ comme suite :

$$\text{L'équation (1)} \Rightarrow b.\bar{r}_t - a = \frac{\bar{D}_t}{dt} \Rightarrow a = b.\bar{r}_t + \frac{\bar{D}_t}{dt} \text{ avec } D_t = r_{t+dt} - r_t \quad \dots\dots (5)$$

$$\text{L'équation (3)} \Rightarrow \bar{c}_t - a.dt.\bar{r}_t + b.dt.\{\text{var}(r_t) + (\bar{r}_t)^2\} = 0 \text{ avec } c_t = D_t.r_t \quad \dots\dots (6)$$

De (5) et (6) on obtient :

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{1}{\text{Var}(r_t).dt} \cdot \{\bar{D}_t - \bar{c}_t\} \\ \hat{a} = \hat{b}.\bar{r}_t + \frac{\bar{D}_t}{dt} \end{cases}$$

σ sera estimé par l'équation (2) comme suite :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{r_t dt} \cdot \left\{ \text{Var}(D_t) + \bar{D}_t^2 - 2\hat{a}dt.\bar{D}_t + 2\hat{b}dt.\bar{c}_t + \hat{a}^2 dt^2 - 2dt^2 \hat{a}\hat{b}.\bar{r}_t + \hat{b}^2 dt^2 (\text{Var}(r_t) + \bar{r}_t^2) \right\}$$

Application :

L'application de la méthode G.M.M sur notre générateur de trajectoires de type CIR nous a donné les résultats résumés dans le tableau suivant :

Paramètres	Valeur théorique	Estimation G.M.M ¹	Erreur standard
a	0.0902	0.0954	0.8E-05
b	0.7037	0.7022	0.96E-06
σ^2	0.0144	0.01432	0.43E-0.5

Le tableau précédent reprend les valeurs moyennes des paramètres estimés sur chacune des 200 trajectoires simulées par le schéma d'Euler selon la procédure décrite précédemment. Le tableau montre que la dynamique des trajectoires simulées reproduit pratiquement les valeurs des paramètres théoriques du modèle CIR.

¹ Moyenne des paramètres estimés par G.M.M sur 200 trajectoires simulées de 2000 pas

IV-1-4 Limite de ces deux modèles

L'expérience économétrique à montrer que ces modèles présentent l'inconvénient de stabiliser la queue de la structure des taux ; le taux à long terme est réduit à une constante indépendante de la forme de la structure. Or, d'un point de vue purement économique, il n'est pas toujours approprié d'expliquer le marché des titres obligataires par une seule variable explicative, le taux sans risque instantané. Ces processus mono-factoriels, ne dépendant que d'une variable d'état, supposent une parfaite corrélation entre les taux $r(t, T)$, non satisfaite dans la pratique. Toutes ces limites ont poussé certains théoriciens à construire des modèles prenant en considération plusieurs facteurs (notamment par Schwartz, Brennan et Longstaff).

IV-2 Modélisation Des Actifs Financier :

IV-2-1 Modélisation dans l'univers Risque-Neutre :

Présentation

En supposant que les marchés soient complets, la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité risque neutre, notée $\mathbb{Q}$, telle que les processus de gains (X dans ce cas précis, cette variable aléatoire correspond au sous-jacent S) actualisés ont pour caractéristique d'être des martingales sous $\mathbb{Q}$:

$$\frac{X(t)}{\beta(t)} = E_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X(t)}{\beta(t)} / F_t \right) \text{ avec } \beta(t) = \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right)$$

Précisons que cette nouvelle probabilité, équivalente à $\mathbb{P}$, n'est pas unique si l'hypothèse des marchés complets n'est pas respectée.

Application

Soit r le taux d'actualisation supposé constant et $\bar{S}_t = S_t \cdot e^{-rt}$ le cours actualisé de l'action. L'application du lemme d'Itô permet de retrouver la dynamique de $\bar{S}_t$.

$$\frac{d\bar{S}_t}{\bar{S}_t} = (\mu - r) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

On applique ensuite le théorème de « Girsanov » qui nous permet de « passer » à l'univers risque neutre :

$$\begin{cases} d\hat{z}_t = dW_t - \frac{r - \mu}{\sigma} dt \\ \frac{d\bar{S}_t}{\bar{S}_t} = (\mu - r) \cdot dt + \sigma (d\hat{z}_t + \frac{r - \mu}{\sigma} \cdot dt) = \sigma \cdot d\hat{z}_t \end{cases}$$

En effet, on vérifie bien, que dans l'univers risque neutre, les prix actualisés sont des martingales.

La dernière étape consiste à intégrer $\frac{d\bar{S}_t}{\bar{S}_t} = \sigma \cdot d\hat{z}_t$. L'application du lemme d'Itô fournit :

$$\begin{aligned}\bar{S}_t &= \bar{S}_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t \sigma \cdot d\hat{z}_t - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 ds\right\} \Rightarrow S_t \cdot e^{-rt} = S_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t \sigma \cdot d\hat{z}_t - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 ds\right\} \\ &\Rightarrow S_t = S_0 \exp\left\{\sigma \cdot \hat{z}_t + \left(rt - \frac{1}{2} \sigma^2\right) \cdot t\right\}\end{aligned}$$

IV-2-2 Le Modèle de Black et Scholes dans l'univers RISQUE-NEUTRE :

Introduction :

Après le grand succès qui a rencontré le premier modèle stochastique élaborer par F. BLACK & M. SCHOLE [1973], beaucoup de critiques sont apparues récemment dans la littérature économique corrigeant quelques défauts d'incompatibilité du modèle avec la réalité de certains marchés financiers qui sont devenus assez complexe pour être supporter par le modèle de BLACK & SCHOLE. Cependant, plusieurs tentatives proposent aujourd'hui la généralisation du modèle de BLACK & SCHOLE avec une dynamique plus complexe qui se colle au mieux aux marchés actuels.

La dynamique proposée est une diffusion markovienne de type :

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$$

où $\mu(S_t, t)$ est un processus stochastique appelé Drift stochastique et $\sigma(S_t, t)$ un autre processus stochastique représentant la volatilité de processus S_t . ce processus peut répondre à plusieurs contraintes de la modélisation financière, mais la complexité de ce dernier le rend pratiquement inutilisable en pratique, car l'EDS qui régit l'évolution de la dynamique S_t n'admet pas toujours une solution analytique explicite.

Pour remédier à ce genre de problèmes, plusieurs alternatives on était proposés. Une première réponse visant à améliorer le modèle de BLACK & SCHOLE est celle qui décrit la dynamique d'un actif financier dans un univers Risque neutre, par l'EDS suivante :

$$dS_t = (r_t - q) \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \cdot dW_t$$

cette dynamique n'ai rien que le passage de l'univers historique de la formule de BLACK & SCHOLE à celui de risque neutre en utilisant la formule :

$$d\hat{W}_t = dW_t + \frac{\mu - r_t}{\sigma} dt$$

avec r_t : un processus stochastique représentant le taux d'intérêt à court terme à l'instant t .

et q : représente le taux continu de dividendes.

L'intérêt de cette partie est de coupler l'EDS définie précédemment avec celle d'un modèle de taux d'intérêt et de voir l'influence du choix de modèle relative à r_t sur la dynamique de prix d'actif financier S_t .

Nous proposons dans ce qui va suivre, deux principaux modèles pour décrire la dynamique de r_t : le modèle de Vasicek et celui de Cox, Ingersoll et Ross (CIR).

IV-2-2-1 Le modèle de BLACK & SCHOLES avec modèle de taux d'intérêt de Vasicek :

Cette première approche consiste à poser le processus r_t suivant le modèle de Vasicek précédemment présenté dans ce chapitre. Le modèle du prix d'un actif financier sera donné par l'équation différentielle stochastique couplée (S_t, r_t) définie par le système d'EDS :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q)dt + \sigma_s dW_{1,t} \\ dr_t = (a - b.r_t)dt + \sigma_r dW_{2,t} \end{cases}$$

avec : S_t représente le prix d'un actif financier à l'instant t .

r_t représente le taux d'intérêt à court terme à l'instant t .

$dW_{1,t}$ et $dW_{2,t}$ représentent deux mouvements browniens standards éventuellement corrélé entre eux tel que $dW_{1,t}.dW_{2,t} = \rho dt$, et $0 \leq \rho \leq 1$.

σ_s (resp. σ_r) représente la volatilité de processus S_t (resp. r_t).

a est le taux de retour à la moyenne.

b est la moyenne à long terme.

q est le taux continu de dividende.

Il y a une bonne raison a priori de considérer le taux d'intérêt comme une quantité aléatoire régie par un processus de type Ornstein-Uhlenbeck : des études empirique sur le cours du sous-jacent on montrer les faiblesses de modèle de BLACK & SCHOLES pour expliquer certaines phénomènes de marché. Cette modification profonde et puissante qui permet de décrire un marché bien plus complexe que le marché de BLACK & SCHOLES.

Le modèle tel qu'il est décrit précédemment, représente un inconvénient majeur car on peut pas donner une solution explicite de la dynamique de prix S_t . pour cela on fait recours aux méthodes de simulations et de discrétisations à temps continu habituellement utilisée pour pouvoir reproduire des trajectoires régies par une équation différentielle stochastique.

Discretisation du système :

Pour simuler le système précédent, on propose d'utiliser un schéma d'Euler pour reproduire la dynamique de notre système. Pour cela on se donne la subdivision suivante de l'intervalle

$$[0, T] : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T. \text{ Avec } \Delta t = \frac{T}{N} \text{ et } t_i = n \cdot \Delta t.$$

On peut discrétiser notre système en considérant le schéma d'Euler $(S_{t_n}, r_{t_n})_{0 \leq n \leq N}$ défini par :

$$\begin{cases} S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + (r_{t_i} - q) \cdot S_{t_i} \cdot \Delta t + \sigma_s \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{1,i} \\ r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + (a - b \cdot r_{t_i}) \cdot \Delta t + \sigma_r \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{2,i} \end{cases}$$

où : S_{t_i} représente le prix d'un actif financier à l'instant t_i .

r_{t_i} représente le taux d'intérêt à court terme à l'instant t_i .

$\varepsilon_{1,i}$ et $\varepsilon_{2,i}$ représentent deux variables aléatoires gaussiennes éventuellement corrélées entre elles tel que $\text{cov}(\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i}) = \rho$, et $0 \leq \rho \leq 1$.

On peut espérer améliorer le schéma d'Euler précédent et être plus précis en exploitant les propriétés suivantes :

- La dynamique de r_t ne dépend pas de S_t , donc on peut simuler d'abord r_t puis S_t sachant r_t .
- La dynamique de S_t est liée à celle de r_t via la corrélation de $dW_{1,t}, dW_{2,t}$.

Simulation du système :

On utilisant le schéma d'Euler précédent, on propose l'algorithme de simulation suivant :

function p=vassim(S0,r0,N,T)

lire(a,b,σ_s,σ_r,q,ρ) ;

dt=T/N;

r(1,1)=r0;

S(1,1)=S0;

for i=2:n

dw = mvnrnd([0 0],[1 ru;ru 1],1); // générer un couple de v.a N(0,Σ) avec $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

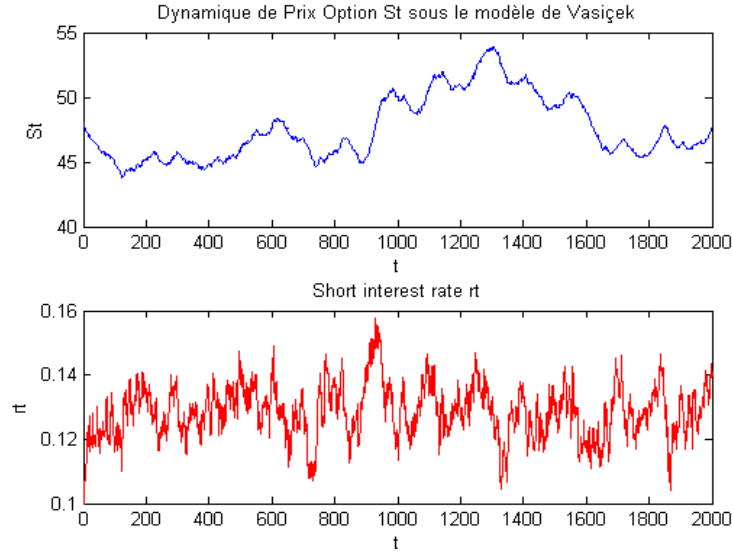
dw2(i,1)=sqrt(dt)*dw(1,1);

dw1(i,1)=sqrt(dt)*dw(1,2);

r(i,1)=r(i-1,1)+ (a-b*r(i-1,1))*dt+σ_r*dw2(i,1);

S(i,1)=S(i-1,1)+(r(i,1)-q)*S(i-1,1)*dt+σ_s*S(i-1,1)*dw1(i,1);

end;



IV-2-2-2 Le modèle de BLACK & SCHOLES avec modèle de taux d'intérêt de CIR :

Une autre alternative au modèle précédent est celle qui consiste à proposer un taux d'intérêt stochastique décrit par la dynamique de CIR. Cela implique le système d'équations différentielles stochastiques suivant (en gardant les mêmes notations de paragraphe précédent):

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q)dt + \sigma_s dW_{1,t} \\ dr_t = (a - b.r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{2,t} \end{cases}$$

Cette modélisation n'est (a priori) qu'une amélioration de la dynamique précédemment présentée. On va essayer de confirmer l'amélioration apportée par ce nouveau modèle plus tard dans ce chapitre.

Discrétisation du système :

On opte la même procédure précédemment utilisée pour la discrétisation de système (S_t, r_t) .

Soit : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Avec $\Delta t = \frac{T}{N}$ et $t_i = n.\Delta t$.

On considère le schéma d'Euler $(S_{t_n}, r_{t_n})_{0 \leq n \leq N}$ défini par :

$$\begin{cases} S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + (r_{t_i} - q).S_{t_i}.\Delta t + \sigma_s \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{1,i} \\ r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + (a - b.r_{t_i}).\Delta t + \sigma_r \sqrt{r_{t_i}} \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{2,i} \end{cases}$$

Où : S_{t_i} représente le prix d'un actif financier à l'instant t_i .

r_{t_i} représente le taux d'intérêt à court terme à l'instant t_i .

$\varepsilon_{1,i}$ et $\varepsilon_{2,i}$ représentent deux variables aléatoires gaussiennes éventuellement corrélées entre elles tel que $\text{cov}(\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i}) = \rho$, et $0 \leq \rho \leq 1$.

On propose la même procédure utiliser dans le paragraphe II.2.2.1 pour la simulation de système précédent.

Simulation du système :

On utilisant le schéma d'Euler précédent, on propose l'algorithme de simulation suivant :

function p=cirsim(S_0, r_0, N, T)

lire($a, b, \sigma_s, \sigma_r, q, \rho$) ;

$dt = T/N$;

$r(1,1) = r_0$;

$S(1,1) = S_0$;

for $i=2:n$

$dw = \text{mvnrnd}([0 \ 0], [1 \ r; r \ 1], 1)$; // générer un couple de v.a $N(0, \Sigma)$ avec $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

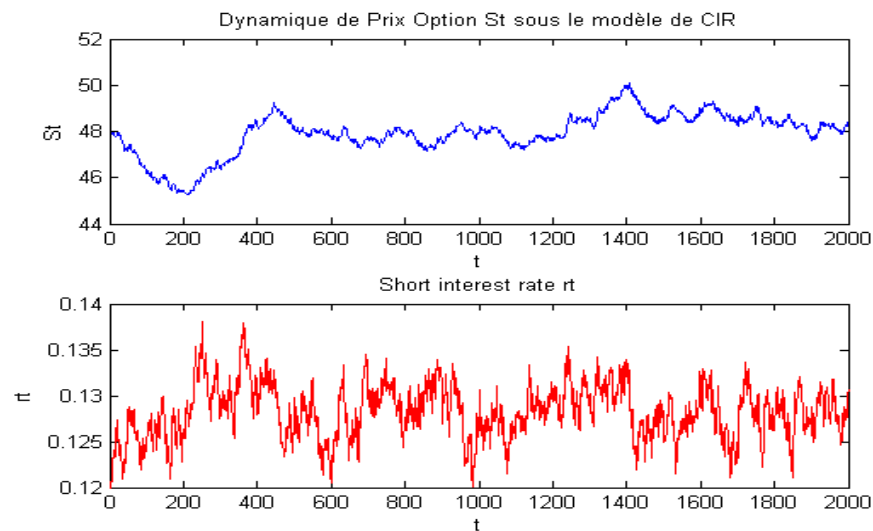
$dw2(i,1) = \text{sqrt}(dt) * dw(1,1)$;

$dw1(i,1) = \text{sqrt}(dt) * dw(1,2)$;

$r(i,1) = r(i-1,1) + (a - b * r(i-1,1)) * dt + \sigma_r * \text{sqrt}(r(i-1,1)) * dw2(i,1)$;

$S(i,1) = S(i-1,1) + (r(i,1) - q) * S(i-1,1) * dt + \sigma_s * S(i-1,1) * dw1(i,1)$;

end;



IV-2-3 Analyse statistique des résultats de simulations :

Le but de cet section est de voir l'influence de choix de modèle sur le risque d'investissement dans un univers risque-neutre. Cela peut nous donner une idée sur le comportement à l'échéance des deux systèmes précédemment élaboré.

On propose d'étudier la fonction $h(S_T) = Call(T) - Put(T) = (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K$

On lance N simulations de trajectoires pour chacune des deux dynamiques précédemment définies par les deux systèmes.

On estime à chaque fois l'option de payoff $h(S_T)$ par la moyenne empirique $e^{-r_T \cdot T} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(S_{t_n}^i)$.

Cette estimation va engendrer deux erreurs :

- Une erreur de nature statistique, d'ordre $1/\sqrt{N}$:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(S_{t_n}^i) - m \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0,1)$$

Où $m = E(h(S_T))$ et $\sigma^2 = \text{var}(h(S_T))$.

En réalité, on commet aussi une erreur sur σ^2 que l'on estime en même temps que m par :

$$\begin{cases} m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(S_{t_n}^i) \\ \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (h(S_{t_n}^i) - m)^2 \end{cases}$$

- Une erreur de discrétisation temporelle, d'ordre $\Delta t = T/n$ où n est le nombre de pas de temps :

$$e_d = |E[h(S_{t_n})] - E[h(S_T)]|$$

Application Numérique :

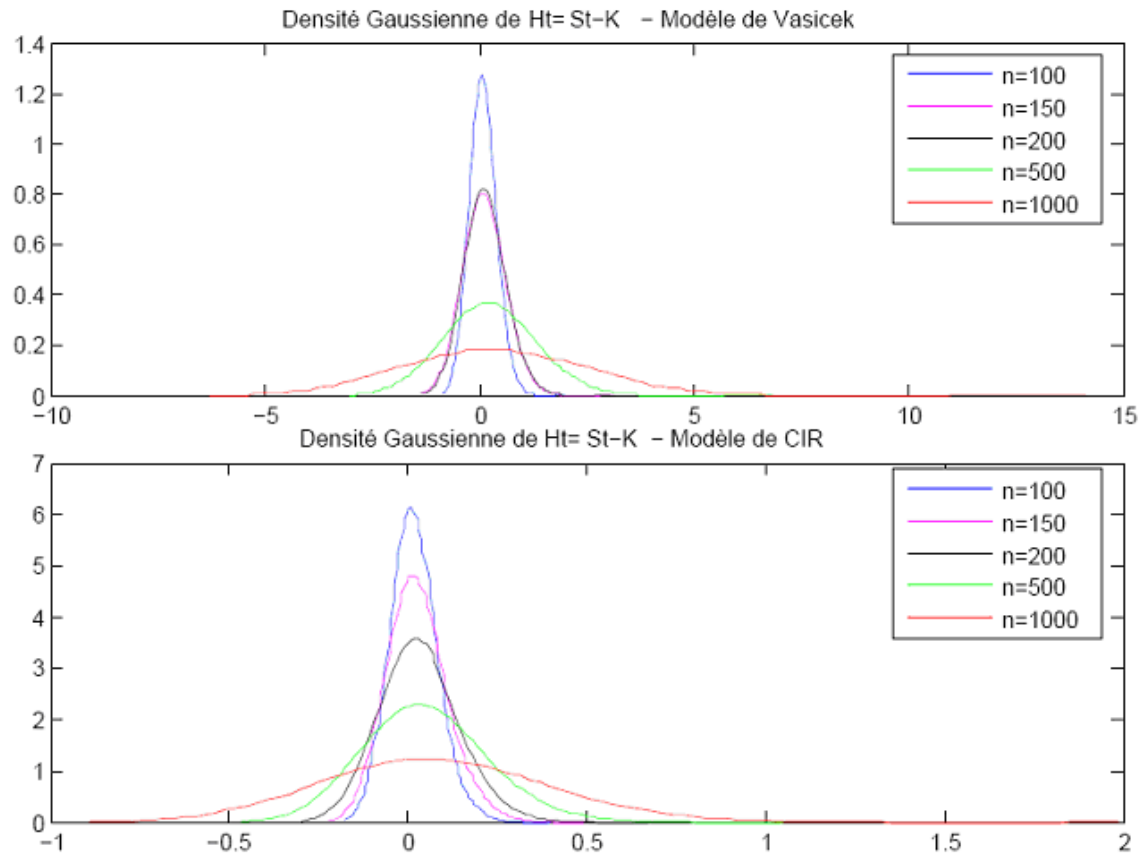
On présente dans ce qui va suivre quelques résultats relatifs au comportement de l'option de payoff : $h(S_T) = S_T - K$ pour le jeu de paramètres suivant :

$N=1000$, $S_0=1.23$, $K=1.2$, $r_0=0.09$.

$n=T/\Delta t$ (qui représente le nombre de pas avant d'atteindre l'horizon T).

$a=0.0902$; $\Delta t=0.08$; $b=0.7037$; $\sigma_r=0.12$; $\sigma_s=0.015$; $\rho=0.5$;

on estime à chaque fois la densité de $h(S_T)$ par la méthode de Kendel.

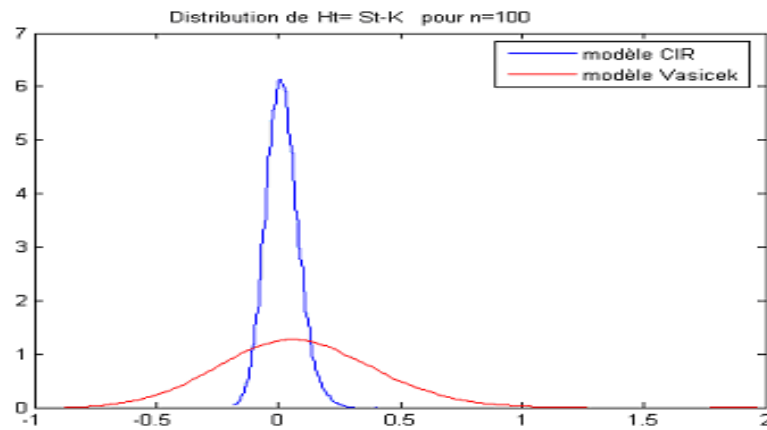


On remarque pour les deux modèles que plus la taille de l'échantillon simulé est grande plus on perd en précision, et cela pour les deux modèles proposés. Cela est peut-être causé par l'erreur de discrétisation des deux systèmes. Plusieurs simulations avec différents paramètres ont donné la même configuration pour les deux dynamiques.

Après avoir étudié le comportement de $h(S_T)$ pour les deux modèles séparément, on va maintenant s'intéresser au risque relatif au choix de structure de taux d'intérêt pour les deux dynamiques précédemment citées ainsi que la normalité des sorties simulées de $h(S_{t_n})$. Pour cela on compare les densités de $h(S_{t_n})$ deux à deux pour le même horizon $T = n \cdot \Delta t$.

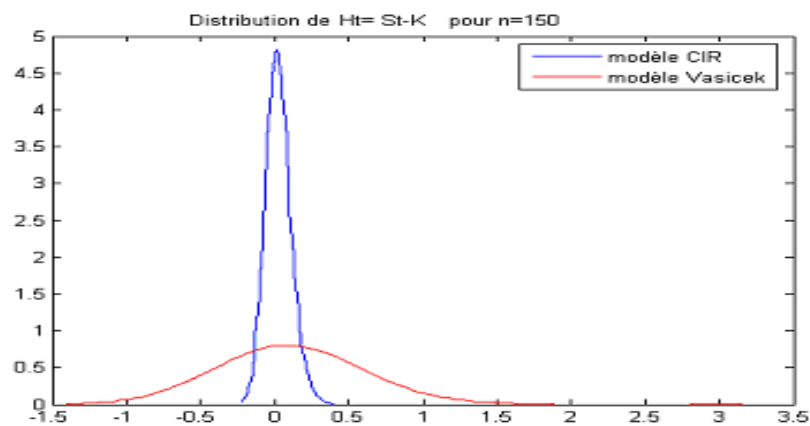
pour $n = 100$:

	Sous le modèle CIR	Sous le modèle de Vasicek
Kurtosis	2.7398	3.1652
skewness	-0.0107	-0.0664
Stat. J-Bera	2.9979 (0.6072) ²	2.7844 (0.4098)
Stat. Kolomgorov	0.4781 (0.2013)	0.4509 (0.3364)



pour $n = 150$:

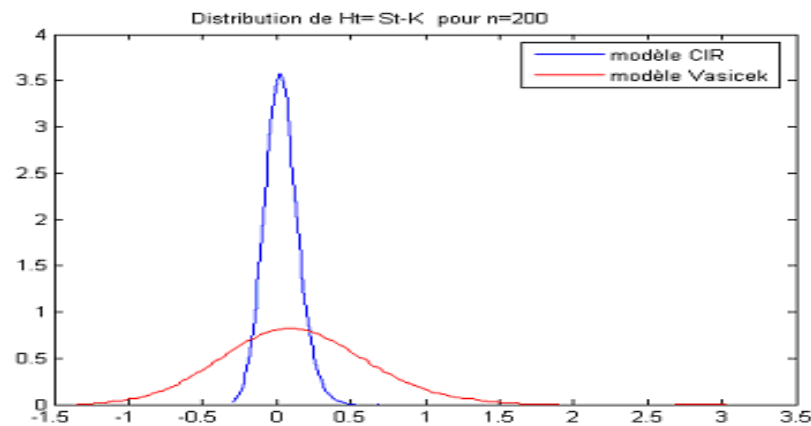
	Sous le modèle CIR	Sous le modèle de Vasicek
Kurtosis	2.6997	3.0319
skewness	0.0527	0.2913
Stat. J-Bera	3.4726 (0.3158)	18.5046 (0.102)
Stat Kolomgorov	0.4946 (0.7809)	0.4457 (0.4277)



² Valeur entre parenthèses représente la p-value relative aux tests statistiques.

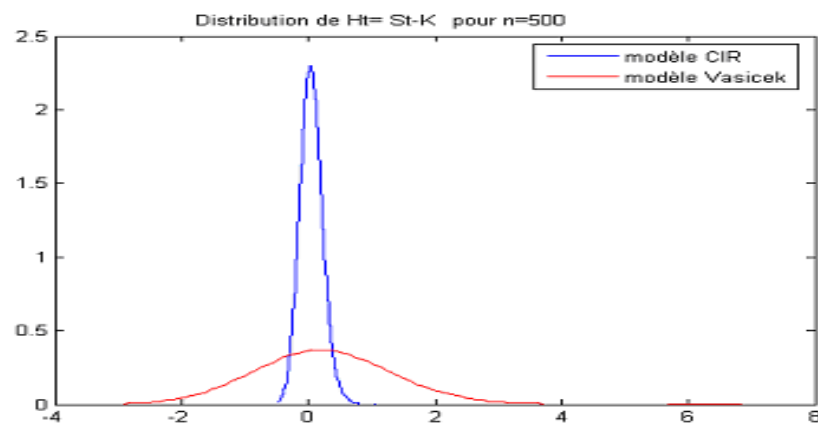
Pour $n = 200$:

	Sous le modèle CIR	Sous le modèle de Vasicek
Kurtosis	3.0345	3.1642
skewness	-0.0359	0.2061
Stat. J-Bera	4.1085 (0.1282)	7.1991 (0.1273)
Stat Kolomgorov	0.4649 (0.2307)	0.4372 (0.1843)



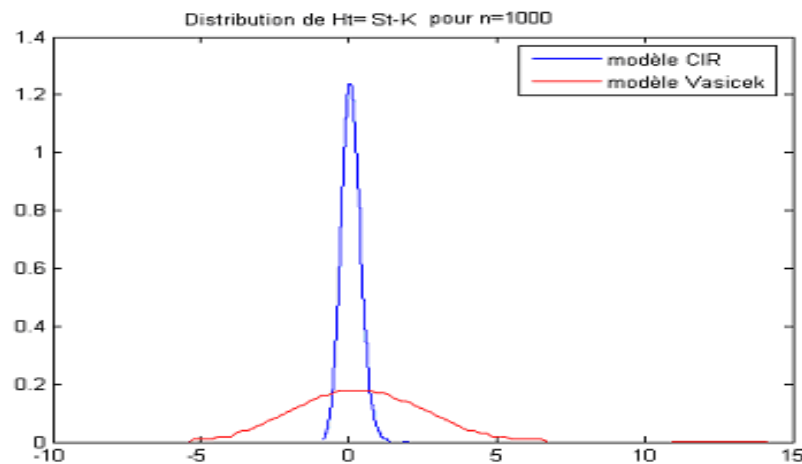
Pour $n = 500$:

	Sous le modèle CIR	Sous le modèle de Vasicek
Kurtosis	3.1316	3.2803
skewness	0.1302	0.2582
Stat. J-Bera	2.8430 (0.2413)	11.3075 (0.0535)
Stat Kolomgorov	0.4431 (0.5402)	0.4007 (0.2470)



Pour $n = 1000$:

	Sous le modèle CIR	Sous le modèle de Vasicek
Kurtosis	3.2161	3.6378
skewness	0.2133	0.5394
Stat. J-Bera	7.5662 (0.0528)	8.9028 (0.05733)
Stat Kolomgorov	0.4202 (0.3824)	0.3631 (0.0486)



Les représentations graphiques ci-dessus montrent l'adéquation du modèle d'actif couplé avec un taux d'intérêt suivant la dynamique de CIR. Ce dernier modèle s'avère moins risqué (plus sûr) en le comparant avec celui d'actif couplé avec une dynamique de taux d'intérêt suivant le modèle de Vasicek. Le choix d'une dynamique de prix sous le modèle de taux d'intérêt suivant le modèle de CIR nous assure un environnement de travail plus sûr et plus flexible car il propose une modélisation plus convenable pour des marchés d'actifs très complexe non seulement par leurs natures mais aussi par des facteurs extérieurs qui influent d'une manière ou d'une autre sur la dynamique des prix.

Le deuxième point qu'on peut relever sur cette étude empirique de la statistique $h(S_{t_n})$ est celle représenté sur les tableaux accompagnant chaque graphe. Nous présentant quelques indicateurs essentielle pour voir le comportement de notre statistique $h(S_{t_n})$ à travers plusieurs jeu de simulations à différent horizons (en occurrence : $n=100-150-200-500$ et 1000). Ces indicateurs sont : le coefficient d'aplatissement (Kurtosis), le coefficient d'asymétrie (Skewness), la statistique de Jaquet & Béra ainsi que celle de Kolmogorov-Smirnov pour tester la normalité. La 2^{ème} colonne de chaque tableau représente les valeurs de chaque indicateur précédemment cité pour une dynamique de prix d'actif sous le modèle de taux d'intérêt de CIR. La 3^{ème} colonne représente

les valeurs de chaque indicateur précédemment cité pour une dynamique de prix d'actif sous le modèle de taux d'intérêt de Vasicek.

L'analyse des tableaux nous confirme les suppositions apriori et le bon comportement de modèle de prix sous la dynamique de CIR par rapport à celui régie par la dynamique de Vasicek.

IV-3 Transformation d'un système d'EDS en un modèle linéaire :

A. Application aux modèles stochastiques couplés sans sauts :

Nous décrivons dans ce paragraphe un moyen qui permet de passer d'un modèle de dynamique de prix d'actif financier avec taux d'intérêt stochastique à un modèle de régression linéaire qu'on développe plus tard. Cette méthode qu'on développe est inspirée des travaux d'Andersen (2004) et M. Suk Kim, S. Wang (2006).

Pour expliquer l'idée de transformation de modèle d'origine à un modèle simple de régression, on introduit notre modèle de base :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q)dt + \sigma_s dW_{1,t} \\ dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{2,t} \end{cases}$$

Et si on considère le schéma de discrétisation d'Euler suivant :

$$\begin{cases} S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + (r_{t_i} - q).S_{t_i}.\Delta t + \sigma_s \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \mathcal{E}_{1,i} \\ r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + a(b - r_{t_i}).\Delta t + \sigma_r \cdot \sqrt{r_{t_i}} \sqrt{\Delta t} \cdot \mathcal{E}_{2,i} \end{cases}$$

Stanton (1997) a donné une approximation d'ordre 1 de la fonction drift $\mu(S_{t_n}) = (r_t - q).S_t$

$$\text{par : } \mu(S_{t_n}) = \frac{1}{\Delta t} \cdot E \left\{ (S_{t+\Delta t} - S_t) / S_t = s \right\} + O(\Delta t)$$

On se basant sur cette approximation d'ordre 1, on peut écrire le premier terme de l'EDS

décrivant la dynamique de S_t comme suite :

$$Y_{t_i} = Z_{t_i} + \beta.S_{t_i} + e_{t_i} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{Avec : } Y_{t_i} = \frac{S_{t_{i+1}} - S_{t_i}}{\Delta t}$$

$$Z_{t_i} = S_{t_{i+1}}.r_{t_i}$$

$$e_{t_i} = \frac{\sigma \mathcal{E}_{t_i}}{\sqrt{\Delta t}}$$

Et $\beta = -q$

Le modèle de régression ainsi présenté, peut être un moyen flexible et simple à manipuler. Le premier avantage qu'il propose est qu'il rend possible l'estimation de paramètre q (l'utilisation de la méthode des moindres carrés est envisageable pour l'estimation de ce paramètre). L'estimation de paramètre q par la méthode des moindres carrés revient à minimiser la quantité :

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} e_{t_i}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (Y_{t_i} - Z_{t_i} - \beta \cdot S_{t_i})^2$$

On a :

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} -2 \cdot S_{t_i} (Y_{t_i} - Z_{t_i} - \beta \cdot S_{t_i}) = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_{t_i} \cdot Y_{t_i} - \sum_{i=1}^{n-1} Z_{t_i} S_{t_i}}{\sum_{i=1}^{n-1} S_{t_i}^2}$$

Et par conséquence q sera estimé par $-\hat{\beta}$.

Pour mesurer la qualité de modèle de régression à reconnaître le paramètre q via des échantillons simulés par le schéma de $(S_{t_n}, r_{t_n})_{0 \leq n \leq N}$, on propose la procédure suivante :

1. On se donne une valeur de q .
2. **Pour** $i=1$ à M (le nombre de jeu de simulations)
 - On génère un échantillon de $(S_{t_n}, r_{t_n})_{0 \leq n \leq N}$ par le système de discrétisation
 - On considère la transformation en modèle linéaire : $Y = Z + \beta \cdot S + e$
 - On estime à base des deux échantillons simulés de (S_{t_n}, r_{t_n}) β par $\hat{\beta}$ et on pose

$$\hat{q}(i) = -\hat{\beta}.$$

Fin.

On calcul $E(\hat{q}(i) = -q)$ ainsi que $\text{Var}(\hat{q}(i) = -q)$ comme indicateurs de précision.

A.N.:

Nous avons appliqué cette méthode pour une dynamique de prix d'actif financier décrit par le système d'EDSC avec le jeu de paramètres suivant :

$$a=0.0902; \Delta t=0.08; b=0.7037; \sigma_s=0.12; \sigma_r=0.015; \rho=0.5; q=0.1270; M=300; S_0=48; r_0=0.12.$$

Le tableau suivant représente les valeurs estimées de paramètre q .

	N=200	N=500	N=1000	N=2000
Modèle de S_t avec CIR	0.1273 (0.005) ³	0.1273 (0.004)	0.1271 (0.0001)	0.1268 (0.0001)
Modèle de S_t avec Vasiček	0.129 (0.026)	0.1287 (0.045)	0.1289 (0.021)	0.12837 (0.02)

Le tableau précédent compare les performances des deux systèmes d'EDSC sous le modèle de taux d'intérêt de CIR et de Vasiček, avec la transformation en modèle de régression précédemment présentée. On note que le biais est négligeable dans tous les cas de tableau précédent.

Si le processus est complètement connu, le terme d'erreur est examiné directement. Dans l'analyse de données réelles, l'étude de terme résiduel est utile dû à l'ignorance de vrai processus. A cause de l'estimation consistante de Drift, et on peut par conséquence, étudier proprement le terme résiduel correspondant.

Test de hasard:

On utilise le « runs test » pour voir si les erreurs se comportent d'une façon aléatoire. A travers une étude par simulation, on voit que le « runs test » est une méthode valide pour tester l'aléa de terme d'erreur dans notre modèle de régression basé sur le système d'EDSC précédemment présenté.

Ce test introduit dans la littérature statistique par Siegel (1956) et généralisé par Bradley (1968). Ce test est une méthode pour contrôler l'aléa de processus. Cette méthode est conservative, mais elle est consistante et serve notre proposition de faite que nous travaillons avec des tailles d'échantillons très grandes. Mason (1989) a donné la règle de décision pour le « runs test » dans le cas des grandes tailles d'échantillons. L'hypothèse nulle que l'échantillon est aléatoire est rejetée si $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$ avec :

$$z = \frac{|runs - \xi| - 0.5}{k}$$

$$\xi = 1 + \frac{2 \cdot pm}{p + m}$$

$$k^2 = \frac{2pm(2pm - p - m)}{(p + m)^2 \cdot (p + m - 1)}$$

Avec *runs* est le nombre de blocs de même signe, *p* (resp. *m*) le nombre de terme positif (resp. négative) d'erreurs. $z_{\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile de la loi normale centrée réduite.

³ La valeur entre parenthèses représente la variance de l'estimateur

On étudier l'aléa de terme d'erreurs par la donnée de terme résiduel correspondant à la transformation en modèle de régression. Le terme résiduel est défini comme suite :

$$\hat{e}_i = Y_i - Z_i - \hat{\beta} \cdot S_i$$

Où $\hat{\beta}$ est l'estimateur des moindres carrées précédemment présenté.

B. Application aux modèles stochastiques couplés avec sauts :

Introduction :

Les modèles diffusifs avec sauts ont été introduits très vite dans la littérature financière pour tenir compte des premières limitations empiriques du modèle classique de Black & Scholes constatées sur les marchés financiers. Cependant, même dans le cas des options européennes, il est en général impossible d'avoir une formule fermée d'évaluation dès que le sous-jacent ne suit plus un mouvement brownien géométrique. Nous allons alors transposer dans ces modèles une méthode d'évaluation développée récemment dans le cadre de modèle où le sous-jacent X_t suit un processus de retour à la moyenne avec saut qui a été introduit par Kou (2002).

Considérons le modèle stochastique suivant :

$$\begin{cases} dX_t = (r_t - q).dt + \sigma.dW_{1,t} + H_t.dN_t \\ dr_t = m.(a - br_t).dt + \gamma.\sqrt{r_t}.dW_{2,t} \end{cases} \dots\dots (1)$$

Où : X_t représente Log-Prix, et r_t le taux d'intérêt à court terme de processus X_t .

$dW_{1,t}$ et $dW_{2,t}$ représentent deux mouvements browniens standards éventuellement corrélé entre eux tel que $dW_{1,t}.dW_{2,t} = \rho dt$, avec $0 \leq \rho \leq 1$.

σ_x (resp. σ_r) représente la volatilité de processus X_t (resp. r_t).

a est le taux de retour à la moyenne.

b est la moyenne à long terme.

q est le taux continu de dividende.

H_t représente l'amplitude des sauts à l'instant t .

dN_t représente l'accroissement de processus de comptage des sauts entre t et $t+\Delta t$.

Pour approximer les trajectoires continues de processus X_t , on utilise le schéma d'Euler général qui nous donne :

$$\begin{cases} X_{t_i+1} = X_{t_i} + (r_{t_i} - q).\Delta + \sigma.(W_{1,t_i+1} - W_{1,t_i}) + H_{t_i+1}^Y.(N_{t_i+1} - N_{t_i}) \\ r_{t_i+1} = r_{t_i} + m.(a - br_{t_i}).\Delta + \gamma.\sqrt{r_{t_i}}.\Delta W_{t_i} \end{cases} \dots\dots (2)$$

Avec Δ : le pas de discrétisation, $X_{t+1} = \text{Log}(S_{t+1}/S_t)$ et $J_{t+1} = (N_{t+1} - N_t)$ est décrit par une distribution Binomial $\beta(1, \lambda, \Delta)$. H_t représente l'amplitude des sauts supposés gaussiens.

Notons que le processus $dW_{1,t}$ et le processus $dW_{2,t}$ sont corrélés, de moyenne nul, de variance dt et de corrélation ρ .

Nous proposons dans ce qui va suivre un algorithme écrit sous MATLAB pour la simulation de système précédent.

```
function [x,r]=jsmsim(x0,r0,dt,T,mu,m,sgx,sgr,ru)
N=round(T/dt);
r1(1)=z0;
hx(1)=0;
lmd=0.008;
p=-0.5;
for i=1:N
    dn(i)=random('binomial',1,lmd*dt,1);
    h=random('exponential',mv,1);
    hx(i)=(mu+rj*h)+random('normal',0,sgy,1);
end;
for i=1:N
    dw = mvnrnd([0 0],[1 ru;ru 1],1);
    dw2(i)=dt*dw(1,1);
    dw1(i)=dt*dw(1,2);
    r(i+1)=r(i)+m*(a-b*r(i))*dt+sgr*dw2(i);
    x(i+1)=x(i)+(r(i+1)-q)*dt+sgx*dw1(i)+hx(i)*dn(i);
end;
```

Application Numérique :

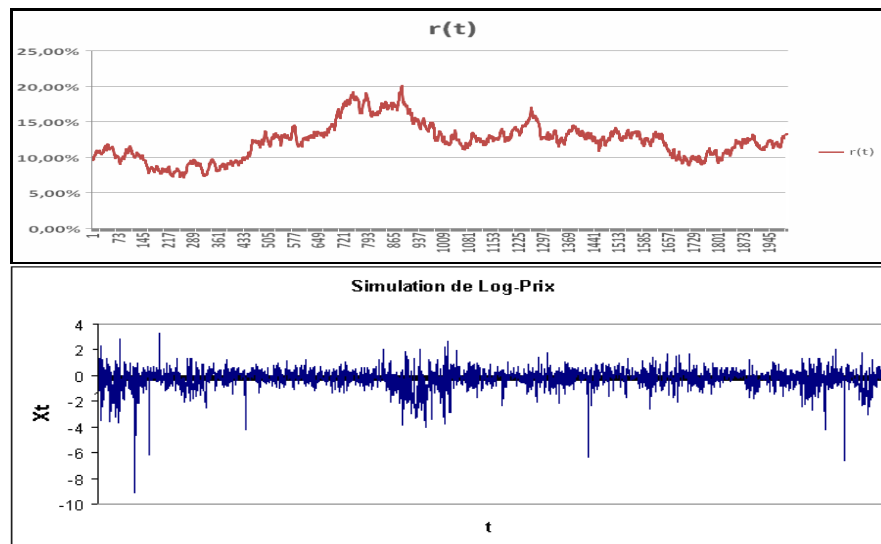


Fig. IV.3 : Trajectoire simulée du modèle couplé avec saut pour : $r_0=0.1$, $dt=1$, $T=2000$, $\gamma=0.05$, $\sigma=0.1$, $m=0.012$, $\rho=0.5$.

Les deux graphes précédents représentent une trajectoire simulée du système décrit par (1). Le premier graphe décrivant la dynamique de log-Prix X_t illustre la variabilité de ce processus, on note essentiellement l'apparition de quelques pics dans la série simulée (qu'on appelle en économie point de crash du marché), cela peut être vu comme un bon moyen pour la modélisation des marchés financiers avec des krachs répétitives ou dans le domaine de la sismologie.

On utilisant l'approximation de Stanton d'ordre 1 de la fonction drift $\mu(X_t) = (r_t - q)$:

$$\mu(X_t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot E\{(X_{t+\Delta t} - X_t) / X_t = x\} + O(\Delta t)$$

On se basant sur cette approximation d'ordre 1, on peut écrire le premier terme de l'EDS décrivant la dynamique de X_t comme suite :

$$Y_{t_i} = r_{t_i} + \beta + \varepsilon_{t_i} \text{ pour } i=1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{Avec : } Y_{t_i} = \frac{X_{t_i+\Delta t} - X_{t_i}}{\Delta t}$$

$$\varepsilon_{t_i} = \sigma \frac{(W_{t_i+\Delta t} - W_{t_i})}{\Delta t} + H_{t_i} \frac{(N_{t_i+\Delta t} - N_{t_i})}{\Delta t} \text{ Et } \beta = -q$$

L'estimateur des moindres carrés de β est donné par :

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} Y_{t_i} - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} r_{t_i} \Rightarrow \hat{\beta} = \bar{Y} - \bar{r}$$

Pour mesurer la qualité de modèle de régression à reconnaître le paramètre q via des échantillons simulés par le schéma de $(X_{t_n}, r_{t_n})_{0 \leq n \leq N}$, on propose la procédure suivante :

1. On se donne une valeur de q .
2. **Pour** $i=1$ à M (le nombre de jeu de simulations)
 - On génère un échantillon de $(X_{t_n}, r_{t_n})_{0 \leq n \leq N}$ par le système de discrétisation
 - On considère la transformation en modèle linéaire : $Y_{t_i} = r_{t_i} + \beta + \varepsilon_{t_i}$
 - On estime a base des deux échantillons simulés de (X_{t_n}, r_{t_n}) β par $\hat{\beta}$ et on pose $\hat{q}(i) = -\hat{\beta}$..

Fin.

On calcul $E(\hat{q}(i) = -q)$ ainsi que $\text{Var}(\hat{q}(i) = -q)$ comme indicateurs de précision.

A.N :

On reprend le même jeu de paramètres que celui de paragraphe précédent avec :

$$a=0.0902; \Delta t=0.08; b=0.7037; \sigma_x=0.12; \sigma_r=0.015; \rho=0.5; q=0.1270; M=300; X_0=4.2; r_0=0.12$$

Le tableau suivant représente les valeurs estimées de paramètre q pour les différents modèles.

	N=200	N=500	N=1000	N=2000
Modèle de X_t sans sauts ($r_t \rightarrow \text{CIR}$)	0.1273 (0.005) ⁴	0.1273 (0.004)	0.1271 (0.0001)	0.1268 (0.0001)
Modèle de X_t avec sauts ($r_t \rightarrow \text{CIR}$)	0.1278 (0.0092)	0.1275 (0.008)	0.1275 (0.0067)	0.1275 (0.0077)
Modèle de X_t sans sauts ($r_t \rightarrow \text{Vasiček}$)	0.129 (0.026)	0.1287 (0.045)	0.1289 (0.021)	0.12837 (0.02)
Modèle de X_t avec sauts ($r_t \rightarrow \text{Vasiček}$)	0.1327 (0.088)	0.1297 (0.056)	0.1294 (0.04035)	0.1292 (0.0333)

Le tableau précédent résume trois points essentiels :

- L'algorithme de simulation proposé semble reprendre à la dynamique de système (X_t, r_t) .
- La dynamique de processus X_t avec taux d'intérêt suivant le modèle de CIR s'avère plus appropriée que celle où le taux d'intérêt est de Vasiček. (résultat déjà observé dans le cas sans sauts de X_t).
- Même si le modèle de X_t sans sauts soit nettement plus adéquat que celui avec saut pour des séries de simulations, mais la dynamique avec sauts peut théoriquement être plus utile car il répond plus à des situations réelles que le modèle classique.

⁴ La valeur entre parenthèses représente la variance de l'estimateur

IV.4 Application Actuarielle :

Après avoir étudié le comportement d'un modèle de Black & Scholes couplé à un modèle de taux d'intérêt stochastique, nous allons essayer de mettre en évidence le travail effectué, en donnons une application concrète à ce genre de modélisation.

Pour cela, nous considérons un processus aléatoire $(S_t)_{t \geq 0}$ représentant le prix d'un actif financier dans un marché viable. Et on note par le processus $(r_t)_{t \geq 0}$ le taux d'intérêt à court terme. Nous tentons dans ce qui va suivre d'évaluer une option européenne particulière dite "Put d'Equité des Catastrophes" (Catastrophe Equity Put), notée CatEPut.

En générale, l'option CatEPut donne à son propriétaire le droit de vendre des actions convertibles à un prix fixe, comme celle d'une option de put régulière. Cependant ce droit n'est exerçable que lorsque la perte accumulée, excède une limite critique de couverture durant la durée de vie de cette option. Un contrat signé à un instant t_0 et qui mûre à l'instant T , à un *payoff* à l'échéance égale à :

$$\text{payoff} = I_{(L(T)-L(t_0) > L)} \cdot (K - S(T))_+ = \begin{cases} K - S(T), & \text{Si } S(T) < K \text{ et } L(T) - L(t_0) > L \\ 0, & \text{Si } S(T) \geq K \text{ ou } L(T) - L(t_0) \leq L \end{cases}$$

Où $L(T)$ représente un processus de cumule des pertes enregistrées pendant l'intervalle $[t_0, T]$.

L représente le seuil critique de perte.

A. Modèle de Base :

Nous nous plaçons dans un premier lieu dans l'univers historique du modèle de Black & Scholes. Ainsi nos variables d'intérêt seront données par les équations suivantes :

$$S_t = S_0 \cdot \exp(-\alpha(L(t) - k.t) + X_t)$$

$$X_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma_s^2).dt + \sigma_s^2 dW_t^s$$

r_t est un processus régit par le modèle de Vasicek, où par celui de CIR (I)

$$L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} l_i$$

$$dW_t^s \cdot dW_t^r = \rho \cdot dt$$

Les $(l_i)_{i \geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d représentant la taille de $i^{\text{ème}}$ perte enregistrée entre $[t_0, T]$ que nous supposons suivant une loi exponentielle de moyenne ℓ .

$\{N(t) : t \in [t_0, T]\}$ est un processus de poison homogène de taux d'arrivée λ .

De plus, soit $F \equiv \{F_t, t \geq 0\}$ la filtration naturelle générée par ces processus sus notés.

Cox et al. (2004) a montré que si un marché viable pour une telle option existe, alors la théorie de la dérivée standard de cours implique l'existence d'une mesure de probabilité notée Q , pas nécessairement unique, sous laquelle le processus de prix actualisé $\left\{ \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \cdot S_t, t > 0 \right\}$ de tout actif financier S_t est une martingale (Harrison & Pliska, 1981). La mesure Q est connue comme la mesure de probabilité en risque neutre (issue du changement de probabilité). Cependant, on suit Cox qui note d'après les suppositions de Merton (1976), que les sauts ne sont pas Diversifiable, et par conséquence pas affectés par le changement de mesure.

Le modèle (I) précédemment défini peut être alors réécrit dans l'univers risque neutre comme suite :

$$S_t = S_0 \cdot \exp(-\alpha(L(t) - k.t) + X_t)$$

$$X_t = (r_t - \frac{1}{2}\sigma_s^2).dt + \sigma_s^2 dW_t^S$$

r_t est un processus régit par le modèle de Vasiček, où par celui de CIR

$$L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} l_i$$

$$dW_t^S \cdot dW_t^r = \rho \cdot dt$$

B. Evaluation de prix d'option CatEPut :

Sous la mesure de risque neutre, la valeur de CatEPut peut être obtenue comme suite :

$$C(t, t_0) = E^Q[D(t, T) \cdot \mathbb{I}_{(L(T) > L(t_0) + L)} \cdot (K - S(T))_+ / F_t].$$

Où $C(t, t_0)$ représente la valeur de l'option à l'instant t , qui a été signée à l'instant $t_0 < t$ et qui mûre à

l'instant $T > t$. et $D(t, T) \equiv \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$.

Une factorisation est rendue possible par Jamshidian (1996) en passant a un autre univers de mesure dit univers Forward neutre (Forward-neutral mesure univers) qu'on note Q^T , ce qui donne :

$$C(t, t_0) = P(t, T) \cdot E^Q[\mathbb{I}_{(L(T) > L(t_0) + L)} \cdot (K - S(T))_+ / F_t].$$

Où $P(t, T)$ désigne la valeur de la bande de T-maturité de zéro coupon à l'instant t .

Dans le cas où le modèle de taux d'intérêt est de Vasicek, l'expression exacte de ce terme est donnée par la forme affine suivante :

$$P(t, T) = \exp\{A(t, T) - B(t, T).r_t\}$$

$$\text{Où } dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^r$$

$$B(t, T) = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)})$$

$$\text{Et } A(t, T) = \left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} \right) (B(t, T).(T-t)) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa} B^2(t, T).$$

De plus, elle satisfait l'EDS suivant :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt - \sigma_r B(t, T) dW_t^r$$

Dans le cas où le comportement de taux d'intérêt est régi par le modèle de CIR, l'expression de $P(t, T)$ est donnée par :

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot \exp(-B(t, T).r_t)$$

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_t^r$$

$$B(t, T) = \frac{2.(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + \lambda + \kappa)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$A(t, T) = \left[\frac{2\gamma.e^{(\gamma+\kappa+\lambda)\frac{T-t}{2}}}{(\lambda + \gamma + \kappa)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma_r^2}}$$

$$\lambda = \frac{\theta}{\sigma}$$

Même en connaissant l'expression exacte de $P(t, T)$, le calcul du prix de l'option CatEPut $C(t, t_0)$ s'avère difficile à calculer. A titre d'exemple, le prix de cette option dans le cas où le taux d'intérêt est régi par le modèle de Vasicek (toujours dans l'univers risque neutre) est donnée par :

$$C(t; t_0) = e^{-\lambda(T-t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} \int_{\hat{\mathcal{L}}} f_L^{(n)}(y) \{K P(t, T) \Phi(-d_-(y)) - S(t) e^{-\alpha(y-k(T-t))} \Phi(-d_+(y))\} dy,$$

Où $f_L^{(n)}(y)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ convolée de la densité de la loi exponentielle (loi des sauts l_i)

$$d_{\pm}(y) = \frac{\ln(S(t)/KP(t, T)) - \alpha(y - k(T - t)) \pm (1/2)\bar{\sigma}^2(t, T)}{\bar{\sigma}(t, T)},$$

$$\bar{\sigma}^2(t, T) = \sigma_S^2(T - t) + \frac{2\kappa \rho \sigma_S \sigma_r + \sigma_r^2}{\kappa^2}((T - t) - B(t, T)) - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa} B^2(t, T),$$

Et $\phi(x)$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Vue la difficulté d'exploiter cette expression, nous proposons d'utiliser la méthode de Monte Carlo pour l'estimation directe de terme $E^Q[\Pi_{(L(T) > L(t_0) + L)} \cdot (K - S(T))_+ / F_t]$.

C. Estimation de Payoff par la méthode de Monte Carlo :

Le principe de cette méthode se base essentiellement sur la loi des grands nombres et l'approximation de l'espérance par la moyenne empirique comme suite :

$$E(g(X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$$

Discrétisation et simulation du modèle :

L'approche numérique la plus efficace pour approcher la dynamique d'un tel modèle est celle qui consiste à discrétiser l'intervalle de temps $[0, T]$ en N pas tel que :

, et en générant itérativement des valeurs approchées aux trajectoires. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$

Si on considère le même système d'équation différentielle stochastique précédemment définit :

$$S_t = S_0 \cdot \exp(-\alpha(L(t) - k.t) + X_t)$$

$$X_t = (r_t - \frac{1}{2}\sigma_S^2).dt + \sigma_S^2 dW_t^S$$

r_t est un processus régit par le modèle de Vasicek, où par celui de CIR

$$L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} l_i$$

$$dW_t^S \cdot dW_t^r = \rho \cdot dt$$

Une approximation de système précédent implique le schéma d'Euler stochastique qui est un processus stochastique défini par :

$$S_{t_n} = S_{t_0} \cdot \exp(-\alpha(L(t_n) - k t_n) + X_{t_n})$$

$$X_{t_n} = (r_{t_n} - \frac{1}{2}\sigma_S^2)\Delta t + \sigma_S \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon$$

r_{t_n} est un processus régi par le modèle de Vasicek, où par celui de CIR

$$L(t_n) = \sum_{i=1}^{N(t_n)} l_i$$

Où ε est une réalisation d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale $N(0,1)$ et Δt est le pas de discrétisation.

Ce schéma sera utilisé pour calculer la valeur d'une réalisation de *payoff*. L'algorithme suivant illustre la procédure adopter afin d'estimer l'espérance $E^Q[\Pi_{(L(T)>L(t_0)+L)} \cdot (K - S(T))_+ / F_t]$.

NB : Comme $P(T, T) = 1$, on aura alors $C(T, t_0) = E^Q[\Pi_{(L(T)>L(t_0)+L)} \cdot (K - S(T))_+ / F_t]$.

Algorithme de simulation :

Lire (S_0 r_0 K dt T);

Répéter N fois :

```

r(1,1)=r0;
x(1)=0;
S(1,1)=S0;
for i=2:n+1
    dn=random('binomial',1,ld*dt,1);
    if dn(1,i-1) == 1
        h=h+random('exponential',1,1);
    end;
    dw = mvnrnd([0 0],[1 ru;ru 1],1);
    dw2(i,1)=sqrt(dt)*dw(1,1);
    dw1(i,1)=sqrt(dt)*dw(1,2);
    r(i,1)=r(i-1,1) + a*(b-r(i-1,1))*dt + (segr*sqrt(r(i-1,1))*dw2(i,1));
    x(i,1)=x(i-1,1) + ((r(i,1)-0.5*segs^2)*dt) + (segs*dw1(i,1));
    S(i,1)=S0*exp(-alfa*(h-k*i*dt)+x(i,1));
end;
if h>L
    put=max(0,K-S(n,1));
else put=0;
end;

```

Fin.

La sortie de cette procédure retourne N réalisations de *payoff*. Le terme d'espérance sera ensuite estimé par la moyenne des ces réalisation.

Application :

On se donne le jeu de données suivant, pour la simulation de système (I):

$S_0=48$, $K=50$, $r_0=2\%$, $dt=0.025$, $T=1$, $L=2$ $\kappa=0.3$, $\theta=0.05$, $\sigma_S=20\%$, $\sigma_r=15\%$, $\rho=-0.1$, $\lambda=0.5$, $\alpha=0.01$,

$\ell=6$, $k=1$.

Le tableau ci-dessous résume les résultats des simulations on utilise le schéma précédent pour simuler la dynamique de système (I).

	Nombre de Simulations N				
	N=500	N=1.000	N=2.000	N=5.000	N=10.000
<i>Payoff</i> avec T.I de Vasiček	3.8497	3.6820	3.8111	3.7741	3.8029
<i>Payoff</i> avec T.I de CIR	3.1426	3.8175	3.9225	3.9572	3.9181

Le *payoff* est une variable définie comme une indicatrice. Cela rend sa loi très difficile à identifier comme une forme classique de loi usuelle. Mais on peut toujours la considérée comme une mixture de deux loi : $f_p(x) = p.\delta_0(x) + (1-p).g(x)$,

où p représente la probabilité que le *payoff* est égal à 0.

$\delta_0(x)$ est la densité de Dirac de paramètre 0.

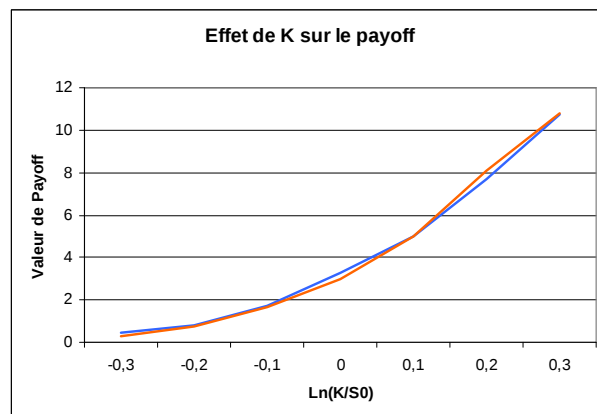
Et $g(x)$ est une densité à déterminer.

Effet de changement de K et S_0 sur le *payoff*:

On va essayer de voir l'effet propre de la variation de prix d'exercice K sur la sortie de *payoff*.

Pour cela on garde le même jeu de données utilisé précédemment avec N=2.500

$\ln \frac{K}{S_0}$	<i>Payoff</i> avec T.I Vasiček	<i>Payoff</i> avec T.I CIR
-0.3	0.4363	0.2803
-0.2	0.7972	0.7420
-0.1	1.7011	1.6450
0	3.2592	2.9579
0.1	5.0086	4.9980
0.2	7.7086	8.1044
0.3	10.720	10.8014



Une tendance exponentielle est visible dans le graphe ci-dessus pour les deux modèles. La variation de K par rapport à S_0 produit un effet d'augmentation qui varie exponentiellement avec l'augmentation de K. cela démontre une autre fois le bon comportement du schéma de simulation élaborer pour reproduire la dynamique des deux modèles.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale

Nous avons vu dans cette étude, différent aspect de modélisation parmi les modèles diffusifs les plus répondus en couplant deux dynamiques dépendantes par construction. Cela était fondu sur plusieurs travaux (généralement assez récents) qui mettaient en soupçon l'efficacité du modèle de BLACK & SCHOLES et son application dans des domaines où la dynamique des phénomènes est très complexe.

A la lumière de plusieurs travaux récents portant sur des modèles régis par des EDS couplées notamment en finance où l'explication à de pareils modèles est facile à justifier, nous proposons une série de modèles construits en essayant de coupler des modèles de dynamiques très connus par leurs efficacités d'utilisation en pratique tel que le modèle de Vasicek, modèle de CIR, modèle de Ornstein-Uhlenbeck,... etc.

Par une étude statistique, nous avons analysé et comparé les différentes dynamiques simulées par des schémas de simulation classiques. Cette partie d'analyse avait pour but de vérifier deux points, le premier était de voir le comportement des systèmes simulés. Le second s'intéressé à la validation des schémas numériques de simulation des EDSC.

Nous avons aussi introduit à la fin de cette étude des dynamiques diffusives ainsi qu'une méthode qui permettait de passer d'un système d'EDSC à un simple modèle linéaire.

Nous avons tenté de présenter un modèle d'équations stochastiques couplées qui permet de répondre aux exigences des dynamiques les plus complexes et qui présenter des intérêts très important dans différents domaines.

Cette étude nous à permet de tracer quelque lignes perspectives afin de développer ce type de modélisation très importante dans l'application quotidienne, tel que : la présentation d'un moyen d'estimation des paramètres du modèle couplé, l'étude statistique fonctionnelle des modèles diffusifs (approximation des bandes de l'intervalle de confiance de la fonction mode et moyenne). Ces améliorations qu'on espérer apporter présentent un intérêt majeur pour la robustesse de ces modèles théoriques et donne plus d'importance à leurs applications dans différents domaines.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie :

- [1] K. BOUKHATALA (1984) – Estimation des Paramètres de Dérive d'une Equation Différentielle Stochastique Linéaire Contrôlée, Thèse de Magistère.
- [2] K. BOUKHATALA (1994) – Identification and Simulation of a Communication System, Maghreb Math. Rev. (p. 55-79).
- [3] K. BOUKHATALA, K. BOUDALI (2006) – Un système d'information interactif pour les processus de diffusion, USTHB.
- [4] M. COTTRELL, E. DE BODT, PH. GREGOIRE (2001) – Simulation de l'évolution de la structure à terme des taux d'intérêt Test d'une approche non-paramétrique, Annales de l'Institut Poincaré.
- [5] Doss HALIM, Erik LENGART (1987) – L'existence et le comportement asymptotique des solutions différentielles stochastiques, Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et statistiques, p. 189-214.
- [6] R.J. ELLIOTT (2002) – Stochastic Calculus and Applications. Springer-Verlag NewYork.
- [7] A. FRIEDMAN (1975) – Stochastic differential equations and applications. Academic Press.
- [8] Desmond j. HIGHAM (2000) – An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations, SIAM J. Numerical Analysis (p 526-546).
- [9] Jacques JANSON, Malika SAID (1995) – Techniques d'Estimation pour le modèle de Black & Scholes, Press universitaire de France.
- [10] Peter E. KLOEDEN, Eckhard PLATTEN (1982) – Numerical solution of stochastic differential equations, Springer.
- [11] G. N. MILSTEIN (1992) – Numerical Integration of Stochastic Differential Equations, Kluwer Academic Publishers.

- [12] P. C. PHILIPS (1972) – The structural estimation of stochastic differential equation system, *Econometrica Journal* Vol 40 (p. 1021-1041).
- [13] Bernt OKSENDAL (1988) – Stochastic differential equations : an introduction with application, Springer.
- [14] D. RAGGI, S. BORDIGNON (2006) – Comparing stochastic volatility models through Monte Carlo simulations, *comp. Statistics. & Data Ana.* (p. 1678-1699).
- [15] Henry SCHURZ (1991) – Numerical solution of stochastic differential equations through. Computer experiments. Springer.
- [16] Zeev SCHUSS (1937) – Theory and application of stochastic differential equations, John Wiley & Sons (Published in USA on 1980).
- [17] M. Suk KIM, S. WANG (2006) – Applicability of stochastic volatility models, *comp. Statis. & Data Ana.* (p. 2210-2217).
- [18] Hisao Fujita YASHIMA (2003) – Equation stochastique de dynamique de population du type Proie-Prédateur avec diffusion dans un territoire, *Journal of Math.*
- [19] J. YU, Z. YANG, X. ZHANG (2006) – A class of nonlinear stochastic volatility models and its implications for pricing currency options, *Computing Statistics & Data Analysis* (p. 2218-2231).
- [20] S. JAIMUNGAL, T. WANG, (2006) – Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses, *Insurance : Mathematics & Economics* (p. 469-483).
- [21] M. KIJIMA, T. WONG, (2007) – Pricing of Ratchet equity-indexed annuities under stochastic interest rates, *Insurance : Mathematics & Economics* (p. 317-338).

ANNEXE APPLICATION

A Propos d'EDSC Simulator 1.0.0 :

EDSC Simulator 1.0.0 est une application développée sur MATLAB® 7.0, une interface graphique pour estimer le put empirique ainsi que le probabilité que sa valeur soit positive. Nous avons opté (pour des raisons d'applicabilité) pour les deux modèles couplés suivants :

Le modèle de BLACK & SCHOLES avec modèle de taux d'intérêt de CIR :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q)dt + \sigma_s dW_{1,t} \\ dr_t = (a - b.r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{2,t} \end{cases}$$

Le modèle de BLACK & SCHOLES avec modèle de taux d'intérêt de Vasicek :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q)dt + \sigma_s dW_{1,t} \\ dr_t = (a - b.r_t)dt + \sigma_r dW_{2,t} \end{cases}$$

Système Requit pour l'installation:

EDSC Simulator 1.0.0 est un produit développé sous MATLAB® 7.0, Il nécessite en premier lieu une version de MATLAB 5.0 et plus, pour des informations sur le système requit pour ce produit, veuillez visiter le site officiel The MathWorks Web site : www.mathworks.com.

1. Nécessités Générales :

- Lecteur CD-Rom (où un port USB) pour l'installation à partir d'un CD (où une clé USB).
- Adobe Acrobat Reader 3.0 et plus pour la lecture les documents en format PDF.

2. Plateforme Requise :

- O.S : Windows 2000 ou plus
- Espace Disque Disponible : Environ 2.0 Mo d'espace disque libre.
- Processeur : Pentium III et plus, AMD Athlan et plus avec au moin 256 Mo de RAM
- 16 Bit, 24 Bit ou 32 Bit OpenGL capable graphic adapter.

3. Installation de EDSC Simulator 1.0.0 :

Vous pouvez lancer l'installation de EDSC Simulator 1.0.0 en exécutant le fichier edscsim.exe un processus d'installation vous guiderez jusqu'à la fin de l'installation. Une fois cette phase terminer, vous pouvez à tous moments utiliser cette application en se rendant à la fenêtre de MATLAB. Le programme est exécuté en tapant la ligne de commande suivante dans le fenêtre de commande de MATLAB (Command Window) :

```
>> edscsim
```

La fenêtre d'EDSC Simulator 1.0.0 s'ouvre (Figure I)

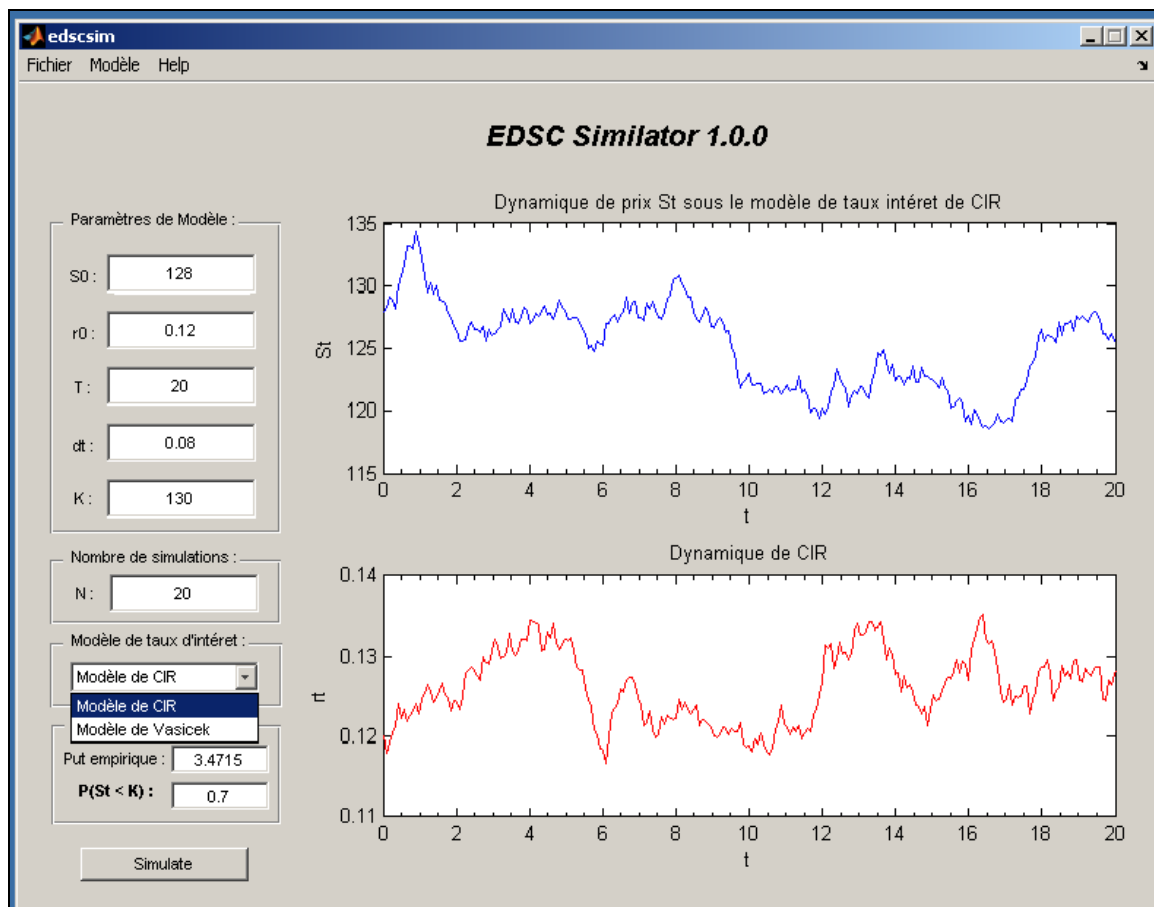


Figure I : Fenêtre Principale d'EDSC Simulator 1.0.0

Remarque :

Pour plus de détail sur les deux modèles proposés, des compléments sont incorporés dans l'application **EDSC Simulator 1.0.0**. Voir : Modèle →Modèle BS-CIR (resp. Modèle →Modèle BS-Vasicek). (Figure II)

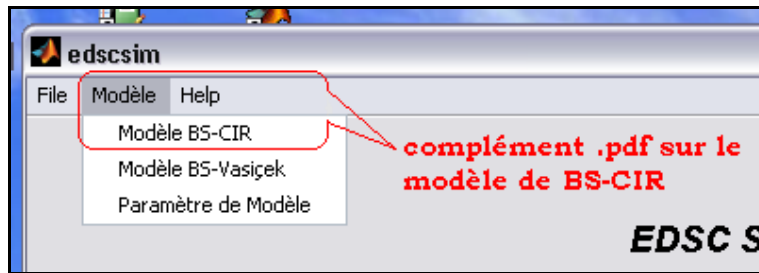


Figure II : Choix de Modèles

Paramètres du Modèle :

Paramètres par défaut :

Pour ne pas trop encombrer l'interface de l'application, EDSC Simulator 1.0.0 prend en charge quelques paramètres de modèle en les définissant par défaut, et propose un moyen pour les modifier (Figure III). Ces paramètres sont : $a, b, \sigma_s, \sigma_r, q, \rho$.

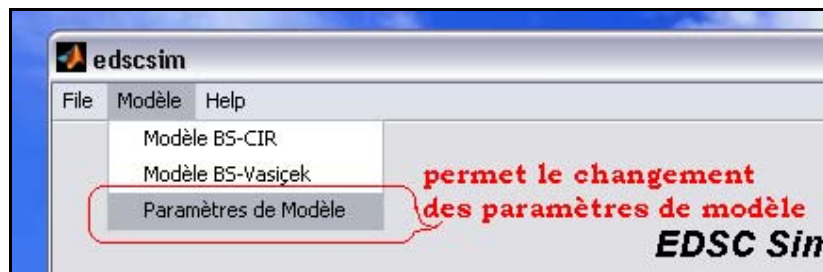


Figure III : Paramètres de Modèle

Paramètres d'Entrées :

L'application EDSC Simulator permet de saisir directement quelques paramètres que nous avons jugés très important pour pouvoir visualiser l'effet de leurs changements sur la dynamique du système. Ces paramètres sont S_0, r_0, T, dt et K (Figure IV).

The screenshot shows a dialog box titled 'Paramètre de Modèle :'. It contains five input fields, each preceded by a label: 'S0 :', 'r0 :', 'T :', 'dt :', and 'K :'. The input fields are empty text boxes.

Figure IV : Changement de Paramètres

Paramètres de sorties :

Les résultats de programmes EDSC Simulator sont représentés dans deux Parties :

La représentation Graphique : qui illustre la variation de taux d'intérêt r_t et le prix S_t par rapport au temps t . (Figure V)

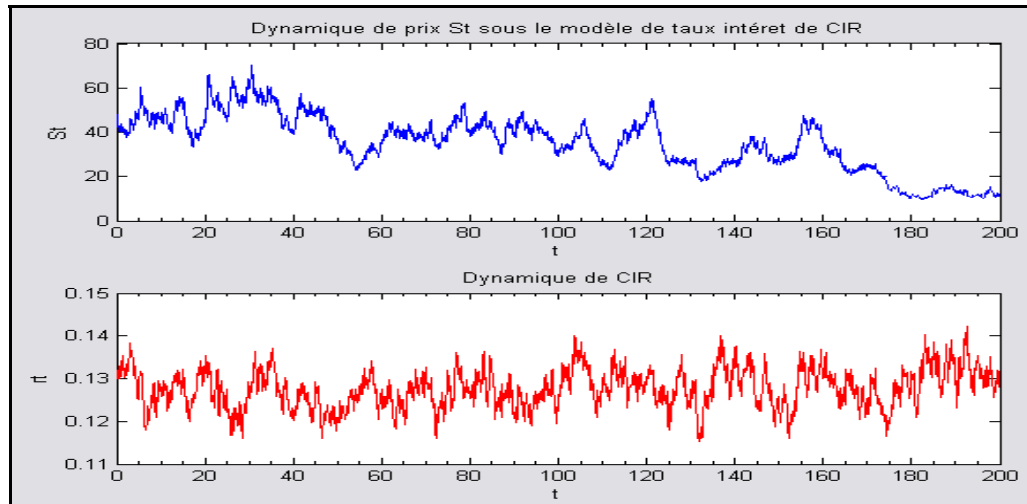


Figure V : Trajectoires simulées de S_t et r_t

La valeur Put empirique : deux champs sont dédiés à éditer la valeur empirique de Call (resp. Put) calculer à base de l'échantillon simulé de S_t . (Figure VI)

Put empirique :	3.4715
P($S_t < K$) :	0.7

Figure VI : Put et Call Empirique calculé à partir de l'échantillon simulé