

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

N° d'ordre : 05/2007-D/MT



## Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de

## DOCTORAT

En Mathématiques

Spécialité : Probabilités et Statistiques

Par :

TEWFIK KERNANE

Thème

# Stabilité de Modèles de Files d'Attente

Soutenue le 16/04/2007, devant le jury :

BOUKHETALA, K	Professeur	USTHB	Président
AÏSSANI, A	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
BENTARZI, M	Professeur	USTHB	Examineur
DJEDOUR, M	Professeur	USTHB	Examineur
FELLAG, H	Professeur	Univ. Tizi-Ouzou	Examineur

*Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux,  
le Très Miséricordieux*

THÈSE

***STABILITÉ DE MODÈLES DE  
FILES D'ATTENTE***

TEWFIK KERNANE

Avril 2007

# REMERCIEMENTS

*Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et la force pour terminer ce travail de thèse de Doctorat, et je le prie de me guider vers la voie juste, vers le Paradis éternel.*

*Je dédie ce travail à mes parents et à ma famille, dont le soutien moral fut inestimable.*

*Je tiens à remercier professeur Aïssani Amar pour avoir encadré ma thèse de Doctorat.*

*Je remercie professeur Boukhetala Kamal pour avoir accepté de présider le jury de thèse et pour avoir encouragé la soutenance de ma thèse.*

*Je tiens à remercier aussi professeur Bentarzi Mohamed, professeur Djedour Mohamed et professeur Fellag Hocine qui ont accepté le travail délicat d'examineur.*

*En outre, je voudrais remercier Messieurs Bentarzi Mohamed et Djedour Mohamed pour leurs remarques menant à une amélioration de la présentation de la thèse.*

## Résumé

On a étudié dans cette thèse la stabilité de différents systèmes de files d'attente avec rappels. On présente tout d'abord les méthodes les plus utilisées dans l'étude de la stabilité des modèles de files d'attente avec des exemples d'applications. Ensuite, on a effectué une présentation des résultats de stabilité les plus importants dans les systèmes de files d'attente avec rappels. On modélise le système avec rappels et politique versatile par une suite récursive stochastique et on applique la méthode des événements de rénovation pour obtenir une condition suffisante de stabilité sous la supposition que la suite des temps de services est stationnaire et ergodique et des temps d'inter-arrivées et de rappels i.i.d de distributions exponentielles. On utilise la même approche pour obtenir des conditions suffisantes de stabilité pour différents modèles de rappels. Le premier est un système avec deux types de clients appelés "persistant" et "impatient". Les temps de service de chaque type seront supposés stationnaires et ergodiques. Dans le deuxième système, le serveur est sujet à des pannes suivant un processus de Poisson et une suite des temps de réparation qu'on supposera aussi, avec les temps de service, stationnaire et ergodique. Dans le troisième système, en plus des clients réguliers, on considère des clients négatifs. L'arrivée d'un client de ce dernier type engendre immédiatement l'élimination d'un client régulier. Finalement, la stabilité d'un système avec rappels versatiles et arrivées en groupes, est considérée. Dans le chapitre 5, on étudie aussi la stabilité de modèles avec politique de contrôle des rappels et distribution générale pour les temps de rappels. On obtient aussi des résultats de stabilité pour différents modèles avec clients négatifs comme exemples illustratifs de la méthode des événements de rénovations.

# Contents

<b>1</b>	<b>NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET FILES D'ATTENTE AVEC RAPPELS</b>	<b>7</b>
1.1	Suites Stationnaires et Ergodiques . . . . .	7
1.1.1	Suites stationnaires . . . . .	7
1.1.2	Suites ergodiques . . . . .	8
1.2	Formule de Wald . . . . .	10
1.3	Files d'Attente à un Serveur . . . . .	11
1.3.1	File classique . . . . .	11
1.3.2	Notations de Kendall . . . . .	12
1.3.3	Processus d'Arrivées de Poisson . . . . .	13
1.3.4	Pannes du serveur . . . . .	14
1.3.5	File M/G/1 avec clients négatifs . . . . .	14
1.3.6	Files d'attente avec arrivées en groupes . . . . .	15
1.3.7	Files d'attente avec pertes . . . . .	15
1.4	Files d'Attente avec Rappels . . . . .	15
1.4.1	Politique linéaire classique . . . . .	16
1.4.2	Politique de rappels constante . . . . .	17
1.4.3	Politique de rappels versatile . . . . .	17
<b>2</b>	<b>MÉTHODES DE STABILITÉ STOCHASTIQUE</b>	<b>18</b>
2.1	Méthode des événements de rénovation . . . . .	18
2.1.1	Suites Récursives Stochastiques . . . . .	18
2.1.2	Évènements de rénovation . . . . .	19
2.1.3	Convergence couplée au sens fort pour les SRS . . . . .	23
2.1.4	Condition d'instabilité . . . . .	24
2.1.5	Application aux Systèmes avec Clients Négatifs . . . . .	25
2.2	Méthode des Fonctions de Lyapunov . . . . .	29
2.2.1	Chaînes de Markov à espace d'états discret . . . . .	29
2.2.2	Stabilité de la File $M/GI/1$ . . . . .	34
2.2.3	Application à un système avec rappels et pannes du serveur . . . . .	35
2.2.4	Chaînes de Markov à espace d'états continu . . . . .	37
2.3	Méthode des Limites Fluides . . . . .	41
2.3.1	Critère de Stabilité . . . . .	41
2.3.2	La file $GI/GI/1$ . . . . .	42
2.4	Règle de Saturation . . . . .	44
2.4.1	Système Monotone-Homogène-Séparable . . . . .	44
2.4.2	La file $G/G/1$ . . . . .	46

<b>3</b>	<b>STABILITÉ DANS LES MODÈLES D'ATTENTE AVEC RAPPELS</b>	<b>47</b>
3.1	Stabilité de modèles classiques . . . . .	47
3.1.1	Politique de rappels linéaire . . . . .	47
3.1.2	Politique constante . . . . .	49
3.1.3	Politique de rappels versatile . . . . .	50
3.2	Stabilité de Différents Modèles avec Rappels . . . . .	50
3.2.1	Deux types de clients . . . . .	50
3.2.2	Pannes du serveur . . . . .	51
3.2.3	Clients négatifs . . . . .	51
3.2.4	Arrivées en groupes . . . . .	51
3.3	Contre-exemple de Liang et Kulkarni . . . . .	51
3.3.1	Le Contre-exemple . . . . .	52
3.3.2	Modèle avec Arrivées et Rappels de Loi d'Erlang . . . . .	52
3.4	Service ou Arrivées Stationnaires ergodiques . . . . .	53
3.4.1	Suite des temps de services stationnaire ergodique . . . . .	53
3.4.2	Suite de temps d'inter-arrivées stationnaire ergodique . . . . .	54
<b>4</b>	<b>STABILITÉ DE MODÈLES AVEC POLITIQUE DE RAPPELS VERSATILE</b>	<b>56</b>
4.1	Politique de Rappels Versatile . . . . .	56
4.1.1	Stabilité du Système . . . . .	57
4.1.2	Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante . . . . .	60
4.2	Deux types de clients . . . . .	60
4.2.1	Stabilité du Système . . . . .	61
4.2.2	Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante . . . . .	63
4.3	Pannes du serveur . . . . .	63
4.3.1	Stabilité du Système . . . . .	63
4.3.2	Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante . . . . .	65
4.4	Clients négatifs . . . . .	65
4.4.1	Stabilité du Système . . . . .	66
4.4.2	Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante . . . . .	67
4.5	Arrivées en groupes . . . . .	67
4.5.1	Stabilité du Système . . . . .	68
4.5.2	Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante . . . . .	69
<b>5</b>	<b>STABILITÉ DE MODÈLES AVEC POLITIQUE DE CONTRÔLE ET DISTRIBUTION GÉNÉRALE POUR LES TEMPS DE RAPPELS</b>	<b>70</b>
5.1	Stabilité du modèle avec politique de contrôle des rappels . . . . .	70
5.2	Modèle avec Deux Types de Clients . . . . .	71
5.3	Modèle avec Pannes du Serveur . . . . .	73
5.4	Modèle avec Clients Négatifs . . . . .	74

5.4.1	Élimination par Groupes . . . . .	74
5.5	Modèle avec Arrivées en Groupes . . . . .	75
5.6	Cas Particuliers . . . . .	76
5.6.1	Temps de Rappels de Distribution Exponentielle . . . . .	76
5.6.2	Distribution Hyperexponential . . . . .	77
5.6.3	Distribution d'Erlang . . . . .	77

## INTRODUCTION

L'analyse de la stabilité est la première étude à faire pour un système de files d'attente. Les probabilités d'états et les caractéristiques de performances du système dépendent de sa stabilité. Si le système n'est pas stable (instable), il est considéré comme inefficace. Les approches les plus utilisées pour l'établissement des conditions de stabilité des systèmes de files d'attente sont : La méthode des fonctions de Lyapunov, l'approche des modèles fluides, l'approche des événements de rénovation et la règle de saturation. La méthode des fonctions de Lyapunov consiste en la recherche d'une fonction positive de la chaîne de Markov modélisant le système, prise en des instants bien choisis, comme les instants de départs ou d'arrivées, et qui décroît strictement en moyenne. Ce dernier critère d'ergodicité est appelé critère de Foster. Il existe aussi des critères similaires pour prouver la transience de la chaîne de Markov et ainsi l'instabilité du système (Fayolle et Iasnogorodski [30], Kumar et Meyn [48]). L'approche des modèles fluides est basée sur l'approximation du système stochastique par un modèle déterministe appelé modèle fluide. Dai [18] a montré un critère d'ergodicité très simple qui consiste à montrer l'ergodicité du modèle markovien si le modèle fluide se vide en temps fini. L'approche des événements de rénovation permet des hypothèses plus générales que le cadre Markovien. Les suites régissant la dynamique du système sont supposés être stationnaires et ergodiques, ce qui évite la fameuse hypothèse idéaliste d'indépendance. Cette technique a été formulée, dans le cadre stationnaire et ergodique, par Borovkov [11]. Elle trouve ses origines dans le travail d'Akhmarov et Leont'eva [1]. Ces méthodes ont été aussi développées dans [7, 32, 33].

Nous nous intéressons dans cette thèse à la stabilité de modèles de files d'attente avec rappels. Ces modèles sont caractérisés par le fait que le client arrivé qui trouve le serveur occupé doit rejoindre une file supplémentaire de clients appelée "orbite", et réessaye ultérieurement de rejoindre le serveur d'après une politique particulière de rappels. Si par contre le client arrivé trouve le serveur libre, il prend son service et quitte le système. Ces modèles sont d'un usage courant dans la modélisation des systèmes téléphoniques, où un appel trouvant la ligne occupée rappelle ultérieurement après un temps aléatoire. On connaît des applications dans les systèmes informatiques et de communications, et aussi dans la modélisation de l'atterrissage des avions dans une piste, où un avion ne trouvant pas la piste libre reste en "orbite" un temps aléatoire jusqu'à ce que la tour de contrôle lui donne le signal d'atterrissage. Il existe essentiellement trois politiques de rappels dans la littérature. La politique classique dite politique linéaire (linear policy), où chaque client en orbite tente de rejoindre le serveur indépendamment des autres clients en orbite, de ce fait le taux de rappels dépend linéairement du nombre de clients en orbite. La deuxième politique est appelée politique de contrôle des rappels (control policy) ou politique constante (constant retrial policy), introduite par Fayolle [29]. Dans cette politique, l'orbite effectue les rappels indépendamment du nombre de clients en orbite, et si le serveur est trouvé libre alors un client en orbite (le premier ou un client choisi aléatoirement) prend son service. Elle trouve ces applications dans le protocole informatique CSMA où les rappels sont effectués par le bus au lieu des paquets de messages stockés dans la mémoire. Enfin, la troisième politique est une combinaison des deux

précédentes et est appelée politique versatile (versatile retrial policy). Pour cette politique, l'orbite effectue un rappel de temps aléatoire, ensuite chaque client émet son propre "signal" pour joindre le serveur et prendre son service; cette dernière a été introduite par Artalejo et Gomez-Corral [4].

Pour une file M/G/1 avec politique de rappels linéaire classique sous des suppositions Markoviennes, i.e., arrivées suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , temps de rappels i.i.d de loi exponentielle de taux  $\theta$  et temps de service i.i.d de distribution générale de taux  $\mu$ , la condition nécessaire et suffisante de stabilité est  $\lambda < \mu$ . Intuitivement, on s'attend à ce que cette condition soit suffisante en général, mais Liang et Kulkarni [50] ont donné un contre exemple montrant que le système peut être instable bien que le taux d'arrivées soit inférieur au taux de service. Le problème de la dérivation des conditions de stabilité est devenue ainsi un problème ouvert, surtout si on ne considère pas la supposition d'indépendance ou d'exponentialité des distributions des variables qui régissent le système. Cela est dû essentiellement à la difficulté de décrire la dynamique du système par une chaîne de Markov. Des arguments similaires peuvent être aussi donnés dans le cas de rappels constants où la condition de stabilité dépend en général du taux de rappels (voir Fayolle [29]).

L'approche utilisée dans cette thèse pour obtenir des conditions de stabilité est basée sur la modélisation de la dynamique du système par une suite réursive stochastique, qui est de nature plus générale que les processus de Markov. En utilisant la technique des événements de rénovation on obtient la convergence couplée au sens fort (strong coupling convergence) vers un régime stationnaire et ergodique. Pour la politique de rappels linéaire, Altman et Borovkov [2] ont obtenu des conditions suffisantes pour la stabilité sous différentes suppositions générales sur les temps d'inter-arrivées et de services. En particulier, ils ont appliqué la méthode des événements de rénovation pour obtenir l'ergodicité sous la supposition que la suite des temps de services est stationnaire et ergodique (sans l'hypothèse d'indépendance) et des temps d'inter-arrivées et de rappels i.i.d de distributions exponentielles.

Dans le chapitre 1, on rappelle quelques notions sur les files d'attente en général et les files d'attente avec rappels en particulier. Dans le chapitre 2, On présente les principales approches de stabilité des systèmes de files d'attente avec des exemples pour chaque approche en se concentrant sur les systèmes à un serveur. Pour l'approche des événements de rénovation, on présente une application originale sur quelques modèles avec clients négatifs. Dans le chapitre 3, on passe en revue quelques résultats de stabilité obtenus dans les systèmes de files d'attente avec rappels pour les trois principales politiques de rappels (constante, linéaire et versatile). Dans le chapitre 4, on modélise le système avec rappels et politique versatile par une suite réursive stochastique et on applique la méthode des événements de rénovation pour obtenir une condition suffisante de stabilité sous la supposition que la suite des temps de services est stationnaire et ergodique et des temps d'inter-arrivées et de rappels i.i.d de distributions exponentielles. On utilise la même approche pour obtenir des conditions suffisantes de stabilité pour différents modèles de rappels. Le premier est un système avec deux types de clients appelés "persistant" et "impatient". Si un client impatient arrive et trouve le serveur occupé, alors il quitte le système. Par contre, si un client persistant arrive et trouve le serveur occupé, alors

il rejoint l'orbite et refait sa tentative ultérieurement selon une politique de rappels versatile. Les temps de service de chaque type seront supposés stationnaires et ergodiques. Ce système a été étudié, dans le cas d'une politique de rappels constante et des suppositions Markoviennes, par Martin et Artalejo [54]. Dans le deuxième système, le serveur est sujet à des pannes suivant un processus de Poisson et une suite des temps de réparation qu'on supposera aussi, avec les temps de service, stationnaire et ergodique. Dans le cadre Markovien, ce système a été étudié par Wang et *al* [58]. Dans le troisième système, en plus des clients réguliers, on considère des clients négatifs. L'arrivée d'un client de ce dernier type engendre immédiatement l'élimination d'un client régulier, s'il en existe. Le concept de client négatif a été introduit par Gelenbe [36]. Une synthèse des résultats et des situations pratiques de ces modèles peut être obtenu dans [3]. Gelenbe et *al* [37] ont obtenu des conditions de stabilité pour deux modèles de clients négatifs, le modèle avec élimination du client en service (RCS) et élimination du dernier client de la file (RCE). Artalejo et Gomez-Corral [5], [6] ont généralisé le concept de client négatif au cas où les clients régulier suivent une politique de rappels. Finalement, la stabilité d'un système avec rappels versatiles et arrivées en groupes, est considérée. Le premier modèle de ce type avec politique linéaire classique a été étudié par Falin [22], qui a établi la distribution jointe de l'état du serveur avec la taille de la file. Une étude plus détaillée a été faite ultérieurement par Falin [23]. Nous donnons dans ce travail des conditions de stabilité de tels modèles sous les hypothèses annoncées. Dans le chapitre 5, on étudie la stabilité et l'instabilité de modèles avec rappels et politique de contrôle des rappels sous la supposition que les temps de rappels suivent une distribution générale.

Une conclusion finale termine ce travail, donnant quelques suggestions pour des recherches futures dans ce cadre et des problèmes ouverts non encore abordées. On trouvera en annexe l'article dont est basée la thèse et qui a été publié dans la revue *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*.

## Chapitre 1

# 1 NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET FILES D'ATTENTE AVEC RAPPELS

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts et outils de base qui seront utilisés dans cette thèse. Nous présentons en premiers des notions comme les suites stationnaires et ergodiques, le processus de Poisson, et la formule de Wald. On passe ensuite en revue quelques concepts sur les modèles de files d'attente, les systèmes avec pannes du serveur, clients négatifs, avec pertes, les modèles avec rappels et leurs différentes politiques connues dans la littérature.

## 1.1 Suites Stationnaires et Ergodiques

### 1.1.1 Suites stationnaires

Soit  $\{\xi_n\}$  une suite aléatoire définie sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et prenant ces valeurs dans l'espace mesurable  $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}_{\mathbb{Y}})$ .

**Définition 1.2** Une suite  $\{\xi_n\}$  est dite strictement stationnaire si les distributions des variables aléatoires de dimension finie  $(\xi_{k+n_1}, \xi_{k+n_2}, \dots, \xi_{k+n_j})$  ne dépendent pas de  $k$  pour tout  $j$  et  $n_1, \dots, n_j$ .

- Une application  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  est dite *transformation bijective préservant la mesure* si elle est bijective, l'image par  $T$  et par son inverse  $T^{-1}$  d'un ensemble mesurable a la même probabilité (mesure) que son ensemble de départ, i.e.,  $\mathbb{P}(T(A)) = \mathbb{P}(A)$  et  $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$  pour tout ensemble  $A \in \mathcal{F}$ .

Une telle transformation induit une transformation (bijective) correspondante, qu'on note  $U$ , des variables aléatoires définie par

$$U\eta(\omega) = \eta(T^{-1}(\omega)),$$

pour toute variable aléatoire  $\eta$  mesurable par rapport à  $\mathcal{F}$ .

Pour toute variable aléatoire  $\eta$ ,  $U\eta$  possède la même distribution que celle de  $\eta$ , et en fait le processus stochastique  $\{\eta_n; -\infty < n < \infty\}$ , avec  $\eta_n = U^n\eta$ , est strictement stationnaire. Ainsi, toute transformation bijective préservant la mesure peut être utilisée pour engendrer des processus stochastiques strictement stationnaires.

Soit  $\{\xi_n; n \geq 0\}$  une suite (strictement) stationnaire. D'après le théorème de Kolmogorov d'extension des distributions compatibles, une suite de v.a stationnaire  $\{\xi_n; n \geq 0\}$  peut être étendue à la suite  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  stationnaire sur tout l'axe des temps.

Introduisons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma(\xi_k; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^\xi = \sigma(\xi_k; -\infty < k < \infty)$ .

Soit  $U$  l'opérateur de translation préservant la mesure (shift) des variables aléatoires  $\mathcal{F}^\xi$ -mesurables engendrées par  $\xi_n$ ,  $U\xi_n = \xi_{n+1}$ , et  $U^k$ ,  $k \geq 0$  la  $k^{\text{ème}}$  itération de  $U$ .

- Une suite  $\{\eta_n; -\infty < n < \infty\}$  est dite compatible avec l'opérateur (shift)  $U$  si pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta_n$  est  $\mathcal{F}^\xi$ -mesurable et  $U\eta_n = \eta_{n+1}$ .

On note par  $T$  l'opérateur de translation, correspondant à  $U$ , des événements dans la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}^\xi$  :

$$T\{\omega : \xi_j(\omega) \in B_j; j = 1, \dots, k\} = \{\omega : \xi_{j+1}(\omega) \in B_j; j = 1, \dots, k\},$$

et  $T^k$ ,  $k \geq 0$  est la  $k^{\text{ème}}$  itération de  $T$ .  $U^0$  et  $T^0$  sont les transformations identités, et  $U^{-k}$ ,  $T^{-k}$  sont les transformations inverses de  $U^k$  et  $T^k$  respectivement.

De ce qui précède, on peut énoncer la remarque importante suivante qui va être utile pour montrer la stationnarité des suites régissant la dynamique des systèmes étudiés dans les chapitres 4 et 5, et l'exemple illustratif (section 2.1.5) de la méthode des événements de rénovation et qui traite des modèles avec clients négatifs (voir section 1.4.4).

**Remarque 1.1.** La  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}^\xi$  peut être considérée comme la plus large  $\sigma$ -algèbre sur laquelle une suite arbitraire de variables aléatoires indépendantes  $\{\zeta_n\}$ , prenant leurs valeurs dans un espace mesurable  $(Z, \mathcal{B}_Z)$ , et qui ne dépendent pas de  $\{\xi_n\}$ , est  $\mathcal{F}^\xi$ -mesurable, puisque dans ce cas  $\mathcal{F}^\xi$  peut être considérée comme la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\{\xi_n\}$  et  $\{\zeta_n\}$  (on peut aussi la noter par  $\mathcal{F}^{\xi, \zeta}$ ). L'opérateur  $T$  va être définie par la relation:

$$\begin{aligned} T\{\omega : (\xi_{n+i}(\omega), \zeta_{n+i}(\omega)) \in B_i; i = 0, \dots, k\} \\ = \{\omega : (\xi_{n+i+1}(\omega), \zeta_{n+i+1}(\omega)) \in B_i; i = 0, \dots, k\}, \end{aligned}$$

pour tout ensemble  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_Y \times \mathcal{B}_Z$  (voir Borovkov [10] p.14). Soit  $U$  l'opérateur correspondant de translation préservant la mesure des variables aléatoires  $\mathcal{F}^{\xi, \zeta}$ -mesurables, alors pour tout  $\mathcal{F}^{\xi, \zeta}$ -mesurable variable aléatoire  $\eta$  la suite  $\{\eta_n = U^n \eta, -\infty < n < \infty\}$  est clairement stationnaire (voir Doob [20] p. 452), et par conséquent toute suite compatible avec l'opérateur shift  $U$  est stationnaire.

### 1.1.2 Suites ergodiques

- Un ensemble  $A$  mesurable est dit *invariant* par rapport à l'opérateur de translation shift  $T$  si  $A = TA$  presque sûrement.

Ainsi tout ensemble de probabilité 0 ou 1 est invariant. Les ensembles invariants forment une  $\sigma$ -algèbre.

- Une variable aléatoire  $\eta$  est dite invariante par rapport à un opérateur de transformation préservant la mesure  $U$  si  $U\eta = \eta$  avec probabilité 1.

Ainsi, toute variable aléatoire presque sûrement constante est invariante.

Si la variable aléatoire  $\eta$  est invariante, l'ensemble  $\{\omega : \eta(\omega) \in A\}$  est invariant pour tout Borélien  $A$ . Réciproquement, si l'ensemble  $\{\omega : \eta(\omega) \in A\}$  est invariant pour tout Borélien  $A$  alors  $\eta$  est une variable aléatoire invariante.

Si  $A$  est un ensemble mesurable et si  $\eta$  est une variable aléatoire qui vaut 1 sur  $A$  et zero ailleurs, alors  $A$  est invariant si et seulement si  $\eta$  est une variable aléatoire invariante.

- Un opérateur de transformation  $T$  préservant la mesure est dit *métriquement transitif* si les seuls ensembles invariants sont ceux de probabilité 0 ou 1, c'est à dire, si les seules variables aléatoires qui sont invariantes sont ceux qui sont constantes presque sûrement. Dans ce cas, on dira aussi que son opérateur de transformation correspondant  $U$ , des variables aléatoires, est aussi *métriquement transitif*.
- Soit  $U$  un opérateur de transformation préservant la mesure et soit  $\eta$  une variable aléatoire. Alors le processus  $\{\eta_n = U^n\eta; n \geq 0\}$  est métriquement transitif.
- Une suite  $\{\xi_n\}$  est dite *métriquement transitive* (metrically transitive) si les seuls ensembles invariants de  $\mathcal{F}^\xi$  sont ceux de probabilité 0 ou 1.
- Une suite  $\{\xi_n\}$  est *ergodique* si et seulement si pour toute variable aléatoire  $\mathcal{F}^\xi$ -mesurable  $\eta$ , avec  $\mathbb{E}\eta < \infty$ , nous avons *p.s*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U^i \eta = \mathbb{E}\eta. \quad (1.1)$$

Si la suite  $\{\xi_n\}$  est de plus stationnaire, la relation (1.1) peut être exprimée par la forme suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} U^i \eta = \mathbb{E}\eta. \quad (1.2)$$

Cette dernière relation est appelée *loi forte des grands nombres de Birkhoff*.

Le théorème suivant est une version du théorème ergodique fondamental adapté au cadre des processus stochastiques strictement stationnaires (voir Theorem 2.1 p 465 dans Doob [20]).

**Théorème 1.1** Soit  $\{\xi_n, n \geq 0\}$  un processus stochastique strictement stationnaire, avec  $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$ , et soit  $\mathcal{I}$  la  $\sigma$ -algèbre des ensembles invariants. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i = \mathbb{E}[\xi_0 | \mathcal{I}] \quad (1.3)$$

avec probabilité 1. En particulier, si le processus est métriquement transitif, la limite  $\mathbb{E}[\xi_0 | \mathcal{I}]$  est égale à  $\mathbb{E}[\xi_0]$ .

Ainsi, une suite strictement stationnaire  $\{\xi_n\}$  est ergodique si et seulement si elle est métriquement transitive.

On peut énoncer donc la remarque suivante qui sera utile pour montrer l'ergodicité des suites régissant la dynamique des systèmes dont on va étudier la stabilité.

**Remarque 1.2** Si  $\{\xi_n\}$  est stationnaire et ergodique alors toute suite  $\{\eta_n; -\infty < n < \infty\}$  compatible avec l'opérateur shift  $U$  est aussi ergodique, i.e., elle satisfait à la loi forte des grands nombres de Birkhoff (voir Doob [20], p.455-456).

## 1.2 Formule de Wald

La formule de Wald sera utile pour les systèmes avec arrivées ou services en groupes. Elle permettra de calculer, par exemple, la moyenne des arrivées pendant un temps de service dans le cas des arrivées en groupes de tailles suivant une variable aléatoire de moyenne finie. Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne finie. De plus, soit  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de moyenne finie. Si la variable aléatoire  $N$  est indépendante des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$ , alors

$$\mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^N X_k \right) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1). \quad (1.4)$$

La preuve de la formule (1.4) utilise la loi de l'espérance totale.

La formule (1.4) reste valable si la supposition que la variable aléatoire  $N$  est indépendante de la suite  $X_1, X_2, \dots$  est allégée. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites:

- (i)  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne finie,
- (ii)  $N$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  avec  $\mathbb{E}(N) < \infty$ ,
- (iii) l'évènement  $\{N = n\}$  est indépendant de  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$  pour tout  $n \geq 1$ .

Alors on a

$$\mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^N X_k \right) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1). \quad (1.5)$$

La supposition  $\mathbb{E}(N) < \infty$  est essentielle dans l'équation de Wald. Pour illustrer ce fait, on considère la marche aléatoire symétrique  $\{S_n, n \geq 0\}$  avec  $S_0 = 0$  et  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , où  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires indépendantes avec  $\mathbb{P}\{X_i = 1\} = \mathbb{P}\{X_i = -1\} = 1/2$  pour tout  $i$ . On définit la variable aléatoire  $N$  comme  $N = \min\{n \geq 1 \mid S_n = -1\}$ , i.e.,  $N$  est l'instant de la première visite de la marche aléatoire au point  $-1$ . Alors  $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_N) = -1$ . Notons que  $\mathbb{E}(X_i) = 0$ , et on a cependant que  $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_N)$  n'est pas égal à  $\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$ . La raison est que  $\mathbb{E}(N) = \infty$ .

## 1.3 Files d'Attente à un Serveur

### 1.3.1 File classique

Une file d'attente est constituée d'un ou plusieurs serveurs, un flux d'arrivées de clients de l'extérieur sollicitant un service, et d'une *salle d'attente*, de capacité finie ou infinie, dans laquelle attendent les clients ne recevant pas de service. Les clients sont servis selon un ordre défini par la *politique* ou *discipline de service*. Deux exemples classiques de discipline de service sont la discipline FIFO (first in first out) "premier arrivé premier servi" ou la discipline LIFO (last in first out) "dernier arrivé premier servi".

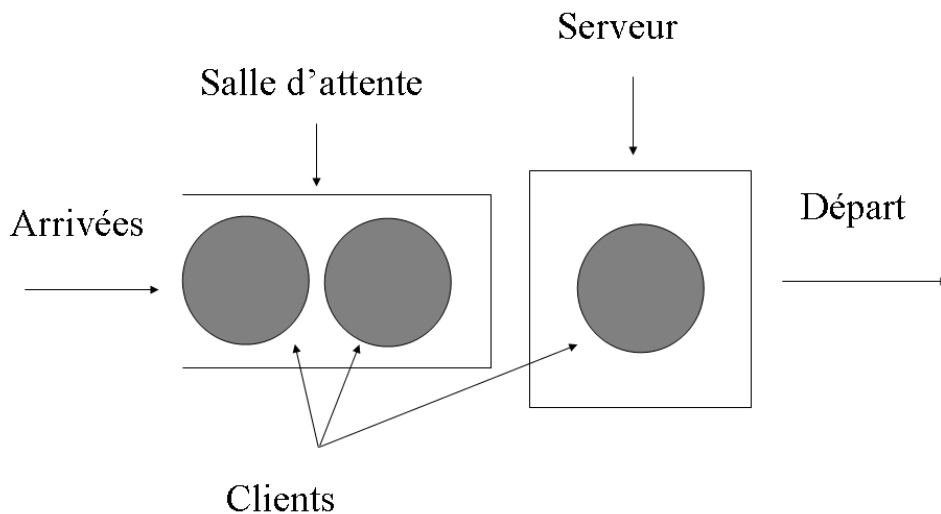


Figure 1.1. File d'attente simple à un serveur.

La recherche sur les files d'attente a débuté avec les travaux d'Erlang (1909) sur les systèmes téléphoniques. Dans ce cas, les appels téléphoniques représentent les clients, et les durées de communications sont les temps de service. Mais depuis, leurs

usages c'est étendu à d'autres situations pratiques. Dans une usine, les clients peuvent être des machines, immobilisées pendant le temps nécessaire à leur maintenance ou leur réparation. Dans un aéroport, les avions sont les clients, le temps de service est la durée nécessaire à un avion pour atterrir et dégager la piste d'atterrissage. On retrouve une situation pareil dans un port de commerce où les cargos qui attendent un quai libre pour décharger représentent des clients.

### 1.3.2 Notations de Kendall

Pour classifier les files d'attente, on a recours à une notation symbolique appelée notation de Kendall, qui prend la forme générale suivante:  $A/B/s$   $[/K]$   $[/S]$ , où

- $A$  est la distribution des temps d'inter-arrivées et  $B$  est la distribution des temps de service,
- $s$  est le nombre de serveurs en parallèle,
- $K$  est la taille de la salle d'attente, qui sera considérée infinie par défaut.
- $S$  représente la discipline de service, qui est FIFO par défaut.

$A$  et  $B$  appartiennent typiquement à l'ensemble  $\{M, D, P, G, GI\}$ , où  $M$  désigne la loi exponentielle,  $D$  la loi déterministe,  $P$  une loi périodique,  $G$  une loi générale, et  $GI$  désigne des variables générales mais i.i.d. La figure (1.2) représente un exemple d'une file  $M/D/2/3$ .

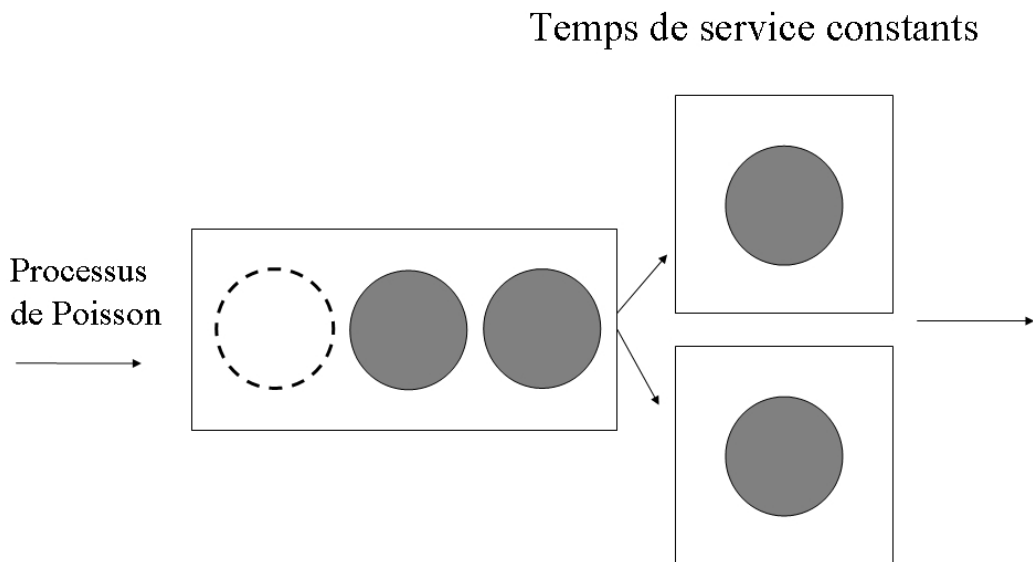


Figure 1.2. Exemple d'une file  $M/D/2/3$ .

### 1.3.3 Processus d'Arrivées de Poisson

Souvent dans les systèmes d'attente, on suppose que le processus des arrivées suit une loi de Poisson ou bien, de manière équivalente, comme on le verra dans cette section, les temps d'inter-arrivées suivent une distribution exponentielle.

Soit une suite de variables aléatoires positives  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , indépendantes et de distribution de probabilité commune. Il s'agira de considérer  $\tau_n$  comme le temps écoulé entre la  $(n - 1)^{\text{ième}}$  et la  $n^{\text{ième}}$  occurrences ou arrivée d'un certain évènement spécifique dans une situation probabiliste, comme, par exemple les appels dans un central téléphonique, les émissions de particules radioactives, les arrivées de clients devant un guichet, etc. Notons par

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \tau_k, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Alors  $S_n$  représente l'instant d'arrivée du  $n^{\text{ième}}$  client. Pour tout  $t \geq 0$ , on définit la variable aléatoire  $\mathcal{N}(t)$  par

$$\mathcal{N}(t) = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq t\}.$$

La variable aléatoire  $\mathcal{N}(t)$  représente le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Le processus de comptage  $\mathcal{N}_\lambda(t)$  est appelé *processus de Poisson* avec taux  $\lambda$  si les inter occurrences  $\tau_1, \tau_2, \dots$  ont une fonction de distribution exponentielle commune  $\mathbb{P}\{\tau_n \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ .

Pour tout  $t \geq 0$ , on définit la variable aléatoire  $\gamma_t$  par

$$\gamma_t \equiv \text{le temps qui sépare l'instant } t \text{ de la prochaine arrivée.} \quad (1.6)$$

Plus précisément,  $\gamma_t$  est donnée par

$$\gamma_t = S_{\mathcal{N}(t)} - t; \quad (1.7)$$

$\gamma_t$  est appelée le *temps résiduel d'arrivée* au temps  $t$ . La variable aléatoire  $\gamma_t$  possède la même distribution exponentielle de moyenne  $1/\lambda$  si le processus de comptage est de Poisson  $\mathcal{N}_\lambda$ . C'est à dire  $\mathbb{P}\{\gamma_t \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ , indépendamment de  $t$ .

**Mélange de deux types d'arrivées** Dans beaucoup de situations pratiques on a affaire à des mélanges d'arrivées indépendants de processus de Poisson. Supposons que  $\{\mathcal{N}_{\lambda_1}(t), t \geq 0\}$  et  $\{\mathcal{N}_{\lambda_2}(t), t \geq 0\}$  sont deux processus de Poisson indépendants de taux respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Soit  $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_{\lambda_1}(t) + \mathcal{N}_{\lambda_2}(t)$ ,  $t \geq 0$ . Alors le processus mélange  $\{\mathcal{N}(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de taux  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . En notant par  $Z_k$  le temps d'inter-arrivée entre la  $(k - 1)^{\text{ième}}$  et la  $k^{\text{ième}}$  arrivée dans le processus mélange et par  $I_k = i$  si la  $k^{\text{ième}}$  arrivée dans le processus mélange est de type  $i$ ,  $i = 1, 2$ , alors pour tout  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\mathbb{P}\{I_k = i \mid Z_k = t\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad i = 1, 2, \quad (1.8)$$

indépendamment de  $t$ .

### 1.3.4 Pannes du serveur

En pratique, les serveurs sont souvent sujets à des pannes et réparations ce qui induit ainsi à une augmentation de la congestion (accumulation) des clients dans la salle d'attente, et peut engendrer une instabilité du système si une condition de stabilité spécifique n'est pas établie et prise en considération dans la réalisation physique du système. Le modèle de pannes à un serveur classique, considéré comme exemple pour la suite, est un système M/G/1 avec pannes du serveur. Les arrivées des clients suivent un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , la suite des temps de service  $\sigma_n$  est i.i.d de fonction de distribution générale de moyenne  $\mathbb{E}\sigma_1$ , l'ordre de service est FIFO, les pannes du serveur surviennent selon un processus de Poisson de taux  $\alpha$ . Un temps de réparation  $r_i$  de distribution générale de moyenne  $\mathbb{E}r_1$  est requis après chaque panne. On suppose que le temps de service est cumulatif, c'est-à-dire, le service d'un client interrompu par une panne est complété après la réparation, et on suppose que le serveur fonctionne comme un nouveau serveur en bon état après réparation.

Les arrivées des clients, les temps de services, les temps de pannes et de réparation sont mutuellement indépendants.

Nous verrons plus tard que la condition de stabilité du système est:

$$\lambda\mathbb{E}\sigma_1(1 + \alpha\mathbb{E}r_1) < 1. \quad (1.9)$$

### 1.3.5 File M/G/1 avec clients négatifs

Le concept de client négatif dans les modèles d'attente a été introduit par Gelenbe [35, 36], et a été motivé par la modélisation des réseaux de neurones où les arrivées positives et négatives représentent respectivement, les signaux excitateurs et inhibiteurs. Puis leurs domaines d'applications se sont étendus aux réseaux informatiques où l'arrivée négative modélise l'effet d'un virus sur le système, éliminations des transactions dans les bases de données, les réseaux de télécommunications, les systèmes de productions,...etc.

Les arrivées négatives affectent le système de différentes manières:

- Élimination individuelle: l'arrivée négative élimine un client positif (ordinaire). Une arrivée négative dans un système vide est sans effet.
- Élimination par groupe: l'arrivée négative élimine un groupe de clients du système.
- Le désastre (catastrophe): l'arrivée négative élimine tous les clients présents dans le système.
- Élimination d'une quantité aléatoire d'activité: l'élimination dans ce cas n'est pas nécessairement un nombre entier de clients positifs mais une quantité aléatoire de temps d'activité du serveur.

### 1.3.6 Files d'attente avec arrivées en groupes

On suppose maintenant que dès l'occurrence de la  $k$ -ème arrivée du processus de Poisson de taux  $\lambda$ , un lot (groupe) de clients de taille aléatoire  $a_k$  de moyenne  $\bar{a}$  entre dans le système.

La condition de stabilité est donnée par la formule:

$$\lambda \bar{a} \mathbb{E}\sigma_1 < 1. \quad (1.10)$$

### 1.3.7 Files d'attente avec pertes

Un modèle avec pertes est un système sans salle d'attente, les clients sont alors soit servis immédiatement à l'arrivée d'un client si le serveur est libre, soit perdus si ce dernier est en activité. Ce type de files d'attente fut utilisé pour la première fois en téléphonie, où les appels sont soit acceptés, soit rejetés, pour évaluer la probabilité de perte d'un appel. La formule de la probabilité de perte d'un client dans un système d'attente  $M/M/s/0$  a été établie par Erlang en 1917 [21]. Mais en réalité les clients ne recevant pas de service ne sont pas totalement perdus mais rappellent généralement jusqu'à l'obtention de leur communication, d'où l'intérêt d'introduire de nouveaux modèles prenant en compte ce flux de répétition d'appels, ce fut les modèles avec rappels.

## 1.4 Files d'Attente avec Rappels

Une nouvelle classe de modèles d'attente, appelés modèles d'attente avec rappels, a été introduite pour l'analyse de systèmes téléphoniques où un appel qui reçoit un signal occupé refait généralement son appel jusqu'à ce qu'il obtienne un signal libre pour son appel. Deux flux d'appels sont alors constitués: flux d'appels initiaux et un flux de répétitions d'appels qui est constitué des appels manqués. Ce flux de répétitions d'appels va constituer donc une salle d'attente supplémentaire appelée "orbite". Avant l'introduction des modèles avec rappels, les systèmes avec pertes étaient les modèles standards de systèmes téléphoniques, mais ces derniers ne reflètent pas ce flux additionnel important pour l'analyse des systèmes téléphoniques. Les modèles avec rappels se sont trouvés ensuite très utiles pour la modélisation d'autres systèmes comme l'atterrissage des avions sur une piste d'aéroport, les systèmes informatiques, les systèmes de télécommunications,...etc.

Ces modèles avec rappels sont caractérisés par le fait qu'un client qui arrive et trouve le serveur et la salle d'attente occupée doit obligatoirement rejoindre un orbite constitué de clients "bloqués" et refait sa tentative d'avoir un service ultérieurement selon une politique de rappels spécifiée. Si le client qui arrive trouve le serveur libre il prend son service et quitte le système. Il existe dans la littérature des modèles avec rappels essentiellement trois politiques de rappels: La politique linéaire classique, la politique constante et la politique versatile.

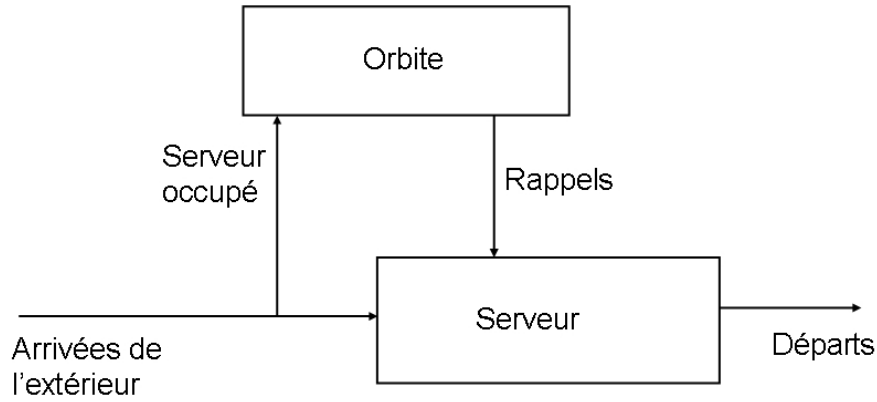


Figure 1.3. Schéma illustratif d'un système avec rappels.

#### 1.4.1 Politique linéaire classique

La politique de rappels linéaire classique est caractérisée par le fait que chaque client en orbite engendre sa propre tentative de joindre le serveur indépendamment des autres clients en orbite. Prenons comme exemple illustratif un modèle de type  $M/G/1$ .

**Modèle  $M/G/1$  avec politique de rappels linéaire** les clients arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Ces clients sont identifiés comme *clients primaires*. Si le serveur est libre à l'instant d'arrivée d'un client primaire, ce client obtient son service immédiatement et quitte le système après la fin de son service. D'autre part, si un client primaire arrive et trouve le serveur occupé il rejoint alors l'orbite. Chaque client en orbite engendre un processus de Poisson de taux  $\mu$  de tentatives de joindre le serveur jusqu'à ce qu'il trouve le serveur libre pour prendre son service et quitter le système. Les clients primaires et ceux provenant de l'orbite ont la même distribution du temps de service. On note par  $\sigma_n$  le  $n$ -ème temps de service et on suppose que la suite  $\{\sigma_n\}$  est i.i.d. avec  $0 < \mathbb{E}\sigma_n < \infty$ .

Sous des suppositions Markoviennes, nous verrons plus tard que la condition "naturelle" de stabilité de ce système est la même que le système  $M/G/1$  classique (sans rappels):

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1. \quad (1.11)$$

### 1.4.2 Politique de rappels constante

Cette politique a été introduite initialement par Fayolle [29] dans le cadre d'un modèle de type  $M/M/1$ , et est caractérisée par le fait que l'orbite engendre un seul processus de poisson de taux  $\theta$  et dès que ce processus trouve le serveur libre, un seul client en orbite (le premier en file où un autre choisi aléatoirement) reçoit son service et quitte le système. Ce qui veut dire que le taux de rappels ne dépend pas du nombre de clients en orbite.

La condition de stabilité de ce système de type  $M/M/1$  dépend du taux de rappels  $\theta$  et est donnée par:

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda + \theta}. \quad (1.12)$$

Il existe une variante de cette politique et qui est appelée politique de contrôle des rappels. Dans cette politique les clients en orbite se range en une file de capacité infinie selon un ordre "premier arrivé premier servis" FIFO et on permet seulement au client à la tête de cette file de tenter de rejoindre le serveur. Elle est aussi assimilée à une politique de rappels où c'est le serveur qui cherche les clients en orbite à la fin d'un service d'un client. Cette politique de contrôle des rappels a été étudié de manière intensive par Gomez-Corral [38] dans un cadre Markovien, i.e  $M/GI/1$  avec supposition d'indépendance des temps de service. Dans le chapitre 5 on étudie la stabilité de différents modèles avec politique de contrôle sous la supposition que les temps de service sont stationnaire et ergodique, c'est à dire sans la supposition d'indépendance.

### 1.4.3 Politique de rappels versatile

Cette politique est une combinaison des deux précédentes et a été introduite par Artalejo et Gomez-Corral [4]. L'orbite tente de trouver le serveur libre selon un processus de Poisson de taux  $\theta$  indépendamment des clients en orbite et chaque client en orbite effectue sa propre tentative selon un processus de Poisson de taux  $\mu$ .

Le système est stable si l'une des conditions suivantes est satisfaite:

$$i) \theta > 0, \mu = 0 \text{ et } \lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda + \theta}, \quad (1.13)$$

$$ii) \theta \geq 0, \mu > 0 \text{ et } \lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1. \quad (1.14)$$

## Chapitre 2

# 2 MÉTHODES DE STABILITÉ STOCHASTIQUE

Dans ce chapitre, nous allons présenter un résumé des méthodes les plus importantes utilisées pour décider de la stabilité des systèmes stochastiques, en particulier les systèmes de files d'attente. Aussi, on va se limiter aux systèmes à évènements discrets, exception faite des méthodes d'approximations fluides qui sont énoncées en temps continu, mais prouvées par une discrétisation du temps. La première approche qu'on va présenter est celle des évènements de rénovation, dont se base les résultats obtenus dans notre thèse et qui sont présentés dans les chapitres 4 et 5. Une application aux modèles avec clients négatifs de différents types est présentée. La seconde approche concerne la méthode des fonctions de Lyapunov, qui est généralement réservée pour les systèmes modélisés par les chaînes de Markov. Ensuite, on présente la méthode des limites fluides. Enfin, on présente la règle de saturation pour la stabilité des systèmes dits monotones-homogènes et séparables.

Il est à noter, comme pour les systèmes dynamiques déterministes, qu'il n'existe pas une notion générale de stabilité, cela dépend du système étudié et de l'approche utilisée.

### 2.1 Méthode des évènements de rénovation

Soient  $\{X(n), n \geq 0\}$  et  $\{\xi_n\}$  deux suites aléatoires définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et prenant leurs valeurs dans les espaces mesurables  $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$  et  $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}_{\mathbb{Y}})$  respectivement. On suppose de plus, qu'une fonction mesurable  $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$  est définie sur  $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{Y}})$ .

#### 2.1.1 Suites Récursives Stochastiques

**Définition 2.1** Une suite aléatoire  $\{X(n)\}$  est dite Suite Récursive Stochastique (SRS) régie par la suite de contrôle  $\{\xi_n\}$  si  $\{X(n)\}$  obéit à l'équation

$$X(n+1) = f(X(n), \xi_n), \quad \forall n \geq 0.$$

L'origine de l'étude des suites récursives stochastiques paraît être dans le travail de Lisek [51], où le cas  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$  et une fonction  $f$  monotone par rapport à son premier argument, ont été considérés. Les suites récursives stochastiques sont plus générales que les chaînes de Markov, puisque chaque chaîne de Markov peut être interprétée comme une SRS avec suite de contrôle  $\{\xi_n\}$  indépendante. On supposera par la suite que la valeur initiale  $X(0)$  est constante (ou bien aléatoire mais indépendante de toute la suite  $\{\xi_n\}$ ).

### 2.1.2 Évènements de rénovation

**Définition 2.3** Un évènement  $A \in \mathcal{F}_{n+m}^\xi$ ,  $m \geq 0$ , est un évènement de rénovation (renewal event) pour la SRS  $X(n)$  sur le segment  $[n, n+m]$ , s'il existe une fonction mesurable  $g : \mathbb{Y}^{m+1} \rightarrow \mathbb{X}$  telle que sur l'ensemble  $A$

$$X(n+m+1) = g(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}). \quad (2.1)$$

La suite  $\{A_n\}$ ,  $A_n \in \mathcal{F}_{n+m}^\xi$ , est une suite d'évènements de rénovation (renewing sequence of events) pour la SRS  $X(n)$  si il existe un entier  $n_0$  tel que (2.1) est vraie pour  $n \geq n_0$  avec la même fonction  $g$  pour tout  $n$ .

- On dit que la suite d'évènements  $\{A_n\}$  est *stationnaire* si  $A_k = T^k A_0$  pour tout  $k$ .

**Exemple 2.1** (Borovkov [12]) Considérons la suite aléatoire à valeurs réelles suivante:

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+, \quad X(0) = a > 0, \quad (2.2)$$

où  $x^+ = \max(0, x)$  et  $\{\xi_n\}$  est une suite stationnaire et ergodique.

Pour tout choix de  $n_0$ , les évènements

$$A_n = T^n A_0,$$

où l'évènement  $A_0$  se produit si la trajectoire de  $\{\xi\}$  reste inférieure à zéro sur  $[-n_0, -1]$  et ne dépasse pas la valeur  $-a$  durant l'évolution précédente,

$$A_0 = \bigcap_{k=0}^{n_0-1} \{\xi_{-1} + \dots + \xi_{-1-k} \leq 0\} \cap \bigcap_{l \geq 1} \{\xi_{-1} + \dots + \xi_{-n_0-l} \leq -a\}, \quad (2.3)$$

forment une suite stationnaire d'évènements de rénovation avec  $m = 0$  et  $g(y) \equiv y^+$ . En effet, pour  $n \geq n_0$ ,

$$X(n+1) = \xi_n^+ \quad p.s \quad \text{sur} \quad A_n.$$

Si on suppose de plus que  $\mathbb{E}\xi_1 < 0$  et la suite  $\{\xi_n\}$  est ergodique, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_{-1} + \dots + \xi_{-n}) = -\infty$  *p.s.* Alors il existe un nombre  $n_0 = n_0(a)$  tel que  $\mathbb{P}(A_n) > 0$  pour  $n \geq n_0$ .

Si, d'autre part les évènements  $B_n$ , le nombre  $m$ , et la fonction  $g : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$  sont définis par

$$m = n_0, \quad B_n = T^m A_n, \quad g(y_0, \dots, y_m) \equiv y_m^+, \quad (2.4)$$

alors les évènements  $B_n \in \mathcal{F}_{n+m}^\xi$  sont de rénovation pour  $\{X(n)\}$  sur le segment  $[n, n+m]$  pour tout  $n \geq 0$ , ainsi on peut supposer que  $n_0 = 0$ .

**Théorème 2.1** (Théorème 11.3 Borovkov [12]) *Soit  $\{\xi_n\}$  une suite stationnaire, et supposons que pour la SRS  $\{X(n)\}$  il existe une suite d'évènements de rénovation  $\{A_n\}$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \bigcup_{j=1}^n A_j T^{-s} A_{j+s} \right) = 1 \quad (2.5)$$

*uniformément en  $s \geq 1$ . Alors on peut définir sur le même espace de probabilité que  $\{X(n)\}$  une suite stationnaire  $\{X^n \equiv U^n X^0\}$  satisfaisant à l'équation  $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{X(k) = X^k, \forall k \geq n\} = 1. \quad (2.6)$$

*Inversement, si une suite  $\{\xi_n\}$  est ergodique et (2.6) est satisfaite, alors il existe une suite d'évènements de rénovation  $\{A_n\}$  qui satisfait (2.5).*

*Si la suite  $\{\xi_n\}$  est ergodique et les évènements  $A_n$  sont stationnaires, alors les relations  $P(A_0) > 0$  et  $\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = 1$  sont équivalentes et impliquent (2.6).*

Notons que, si on introduit la mesure  $\pi(B) = \mathbb{P}(X^0 \in B)$ , la convergence (2.6) implique la convergence en variation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in \mathcal{B}_X} |\mathbb{P}(X(n) \in B) - \pi(B)| = 0.$$

### Preuve du Théorème 2.1

(*Suffisance*) Montrons en premier qu'il suit de (2.5) qu'uniformément en  $s \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} \{X(n+k) \neq U^{-s} X(n+k+s)\} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Pour un certain  $s \geq 1$  fixé, on considère la suite  $X_s(j) = U^{-s} X(s+j)$  qui est définie pour  $j \geq -s$  et

$$X_s(-s) = X(0), \quad X_s(-s+1) = f(X_s(-s), \xi_{-s}) = f(X(0), \xi_{-s}), \quad \text{etc.}$$

Il est clair que l'évènement  $\{\exists j \in [0, n] : X(j) = X_s(j)\}$  implique l'évènement  $\{\forall k \geq 0 : X(n+k) = X_s(n+k)\}$ . Montrons maintenant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X(j) = X_s(j)\} \right) = 1.$$

Pour la simplicité de la preuve, posons  $m = 0$ . Pour que l'évènement  $\{X(j+1) = X_s(j+1)\}$  se réalise, il suffit que  $A_j$  et  $T^{-s} A_{j+s}$  se réalisent simultanément. En d'autres termes,

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=0}^{n-1} A_j T^{-s} A_{j+s} &\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X(j) = X_s(j)\} \\ &\subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \{X(n+k) = X_s(n+k)\}. \end{aligned}$$

Pour cette raison, (2.5) implique (2.7) et la convergence

$$\mathbb{P}(X_n(k) \neq X_{n+s}(k)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

qui est uniforme en  $k \geq 0$  et  $s \geq 0$ .

Introduisons la métrique  $\rho$  telle que  $\rho(x, y) = 1$  pour  $x \neq y$  et  $\rho(x, x) = 0$ . On a donc de ce qui précède que pour chaque  $\delta > 0$  il existe un entier  $N$  tel que pour  $n \geq N$

$$\mathbb{P}(\rho(X_n(k), X_{n+s}(k)) > \delta) = \mathbb{P}(\rho(X_n(k), X_{n+s}(k)) \neq 0) < \delta,$$

pour toutes valeurs de  $k \geq 0$  et  $s \geq 0$ . Puisque tout espace est complet par rapport à la métrique précédente, il suit qu'il existe (voir [14]) une variable aléatoire  $X^k$  telle que  $X_n(k) \xrightarrow{\mathbb{P}} X^k$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Les propriétés spécifiques de la métrique  $\rho$  impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n(k) \neq X^k) = 0. \quad (2.8)$$

La suite  $X^k$  est stationnaire. En effet, quand  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^{k+1} \neq UX^k) &= \mathbb{P}(X_n(k+1) \neq UX_n(k)) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(X_n(k+1) \neq UX_{n-1}(k+1)) + o(1) = o(1). \end{aligned}$$

Puisque la probabilité  $\mathbb{P}(X^{k+1} \neq UX^k)$  ne dépend pas de  $n$ , il suit que  $X^{k+1} = UX^k$  *p.s.*

De plus,  $X(n+k+1) = f(X(n+k), \xi_{n+k})$ . Ainsi

$$X_n(k+1) = U^{-n} f(X(n+k), \xi_{n+k}) = f(X_n(k), \xi_k). \quad (2.9)$$

La partie gauche et la partie droite de la dernière égalité convergent en probabilité, respectivement, vers  $X^{k+1}$  et  $f(X^k, \xi_k)$ , donc

$$X^{k+1} = f(X^k, \xi_k).$$

Pour montrer la convergence de (2.6) il suffit de remarquer que d'après (2.9), si les valeurs de  $X_n(k)$  et  $X^k$  coïncident une première fois, elles ne peuvent être différentes par la suite pour les valeurs supérieures de  $k$ . Ainsi, en plus de (2.8) la relation suivante est vraie quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 0} \{X_n(k) \neq X^k\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 0} \{X(k+n) \neq X^{k+n}\}\right) \rightarrow 0,$$

qui est équivalente à (2.6).

(Nécessité) Pour un  $m \geq 0$  donné, posons

$$\begin{aligned} B_n &= \{X(n+m+1) = X^{n+m+1}\} \in \mathcal{F}_{n+m}^\xi, \\ D_n &= \{U^n X(m+1) = X^{n+m+1}\} = T^n D_0 \in \mathcal{F}_{n+m}^\xi. \end{aligned}$$

Montrons que les évènements  $A_n = B_n D_n \in \mathcal{F}_{n+m}^\xi$  sont de rénovation et satisfont (2.5). Notons d'abord que les évènements  $D_n$  sont stationnaires. En plus, d'après (2.6)

$$\mathbb{P}(D_0) = \mathbb{P}(X(m+1) = X^{m+1}) \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Ainsi, il existe une valeur de  $m$  telle que  $\mathbb{P}(D_0) > 0$ . Fixons cette valeur de  $m$ . La suite  $\{\xi_n\}$  est ergodique. Pour cette raison, il suit de la dernière assertion du théorème (qui sera prouvée plus loin) que les relations  $\mathbb{P}(D_0) > 0$  et  $\mathbb{P}(\cup_{n=0}^\infty D_n) = 1$  sont équivalentes.

Le fait que  $A_n$  soit un évènement de rénovation résulte de l'égalité

$$X(n+m+1) = X^{n+m+1} = U^n X(m+1),$$

qui est vraie sur  $A_n$ , avec

$$U^n X(m+1) = f_m(X(0); \xi_n, \dots, \xi_{n+m}),$$

où  $f_1(x, y_0) = f(x, y_0)$  et  $f_m(x, y_0, \dots, y_m) = f(f_{m-1}(x, y_0, \dots, y_{m-1}), y_m)$ .

Si on pose  $g(y_0, \dots, y_m) = f_m(X(0); y_0, \dots, y_m)$ , les conditions imposées par la Définition 2.8 sur les évènements de rénovation seront satisfaites.

Montrons que (2.5) est réellement satisfaite. Puisque  $T^{-s}A_{j+s} = D_j T^{-s}B_{j+s}$ , il suit que

$$A_j T^{-s}A_{j+s} = D_j B_j T^{-s}B_{j+s},$$

où les évènements

$$C_j = B_j T^{-s}B_{j+s} = \{X(j+m+1) = X^{j+m+1} = U^{-s}X(j+m+s+1)\}$$

sont croissants,  $C_j \subseteq C_{j+1}$ . Pour cette raison, pour  $k = [n/2]$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j T^{-s}A_{j+s}\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=k}^n C_j D_j\right) \geq \mathbb{P}\left(C_k \bigcup_{j=k}^n D_j\right).$$

Il suit de la convergence de (2.6) que  $\mathbb{P}(B_k) \rightarrow 1$ , uniformément en  $s \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(T^{-s}B_{k+s}) = \mathbb{P}(B_{k+s}) \rightarrow 1,$$

et  $\mathbb{P}(C_k) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ . De plus,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=k}^n D_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{n-k} D_j\right) \rightarrow 1, \quad \mathbb{P}\left(C_k \bigcup_{j=1}^n D_j\right) \rightarrow 1,$$

et (2.5) est vérifiée.

On prouve maintenant la dernière assertion du Théorème 2.8. Si la suite  $\{A_n\}$  est stationnaire, alors  $A_j T^{-s}A_{j+s} = A_j$ , et il suffit de vérifier que l'ergodicité de  $\{\xi_n\}$  et l'inégalité  $\mathbb{P}(A_0) > 0$  impliquent la relation  $\mathbb{P}(B) = 1$  pour  $B = \cup_{j=0}^\infty A_j$ . En effet, puisque  $TB = \cup_{j=1}^\infty A_j \subset B$  et la transformation  $T$  preserve la mesure,  $\mathbb{P}(TB) = \mathbb{P}(B)$ , il y a égalité  $TB = B$  (à l'exception d'un ensemble de mesure nulle); en d'autres termes,  $B$  est invariant par rapport à  $T$ . Ainsi, d'après la métrique transitivité, ou bien  $\mathbb{P}(B) = 1$  ou  $\mathbb{P}(B) = 0$ . Puisque  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A_0) > 0$ , cela signifie que  $\mathbb{P}(B) = 1$ . Le théorème est prouvé.  $\blacksquare$

Les évènements de rénovation trouvés dans l'exemple 2.1, pour lesquels  $\mathbb{P}(A_0) > 0$ , satisfont les conditions du Théorème 2.1 de manière évidente.

### 2.1.3 Convergence couplée au sens fort pour les SRS

**Définition 2.4** La SRS  $\{X(n)\}$  est couplée (couple-converges) avec  $\{X^n\}$ , si elle satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{X(k) = X^k, \forall k \geq n\} = 1. \quad (2.10)$$

Introduisons la variable aléatoire

$$\nu_0 \equiv \min\{n \geq 0 : X(k) = X^k \forall k \geq n\},$$

la relation (2.10) devient équivalente à

$$\mathbb{P}(\nu_0 < \infty) = 1.$$

Posons

$$X_k(n) = U^{-k}X(n+k), \text{ pour } n \geq -k,$$

et

$$\nu_k = \min\{n \geq -k : X_k(n) = X^n\}.$$

Notons par  $\nu = \sup_{k \geq 0} \nu_k$  l'instant de couplage où toute les suites  $\{X_k(n), n \geq 0\}, k \geq 0$ , rencontrent la suite  $\{X^n\}$ .

**Définition 2.5** Une suite  $\{X(n)\}$  est couplée au sens fort (strong coupling convergent) avec la suite  $\{X^n \equiv U^n X^0\}$ , si

$$\nu < \infty \quad p.s.$$

La variable  $\nu$  est appelée l'instant de couplage fort. Notons que la convergence couplée au sens fort implique la convergence couplée, qui elle même implique la convergence en variation totale et ainsi la convergence en distribution. Le théorème suivant (Théorème 11.4 de Borovkov [12]) donne une condition nécessaire et suffisante de convergence couplée au sens fort d'une SRS vers un régime stationnaire et ergodique.

**Théorème 2.2** L'existence d'une suite d'évènements de rénovation stationnaire  $\{A_n\}$  avec  $\mathbb{P}(A_n) > 0$  est une condition nécessaire et suffisante de convergence couplée au sens fort de la SRS  $X(n)$  vers une suite stationnaire  $X^n$  obéissant à l'équation  $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$  où  $\xi_n$  est stationnaire et ergodique.

**Preuve (Suffisance)** On suppose, pour la simplicité de la preuve, que  $m = 0$ . Comme déjà mentionné dans la preuve du Théorème 2.1, pour  $j \leq n$

$$A_j T^{-s} A_{j+s} \subseteq \{X(j) = X_s(j) \equiv U^{-s}X(j+s)\} \subseteq \{X(n) = X_s(n)\}.$$

Pour les évènements stationnaires  $A_j$ , l'égalité  $A_j = A_j T^{-s} A_{j+s} = \bigcap_{s=0}^{\infty} A_j T^{-s} A_{j+s}$  est vérifiée pour tout  $s \geq 0$ . Par conséquent,

$$A_j \subseteq \{X(j) = X_1(j) = X_2(j) = \dots\} \subseteq \{X(n) = X_1(n) = X_2(n) = \dots\}$$

et ainsi

$$\bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq \{X(n) = X_1(n) = X_2(n) = \dots\}.$$

Il a été établi dans le Théorème 2.1 que la limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k(n) = X^n$  existe. Il suit de ce qui précède que

$$\mathbb{P}\left(X(n) = X_1(n) = X_2(n) = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k(n) = X^n\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \rightarrow 1.$$

Mais cela signifie exactement la convergence couplée au sens fort.

(*Nécessité*) Supposons que  $X(n+1) = f(X(n), \xi_n)$  est couplée au sens fort avec une suite stationnaire  $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$ . Choisissons un nombre  $m \geq 0$  pour que l'évènement  $A_0 \equiv \{\nu = m+1\} \in \mathcal{F}_m^\xi$  soit de probabilité positive. Comme auparavant, on introduit la fonction  $g : \mathbb{Y}^{m+1} \rightarrow \mathbb{X}$  par la formule

$$g(y_0, \dots, y_m) = f_{m+1}(X(0); y_0, \dots, y_m).$$

Dans cette notation, sur l'ensemble  $A_0$ , pour  $k \geq 0$ , on a

$$X_k(m+1) = X_0(m+1) \equiv g(\xi_0, \dots, \xi_m) \quad p.s.$$

Par conséquent, si l'évènement  $A_n \equiv T^n A_0$  se réalise, alors les égalités suivantes sont vraies pour chaque  $n \geq 0$  et  $k \geq 0$  :

$$X_k(m+1) = X_0(m+1) \equiv g(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}) \quad p.s.$$

En particulier, si  $k = n$

$$U^n X_n(m+1) = X(n+m+1) \equiv g(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}) \quad p.s.$$

sur  $A_n$ . Le théorème est prouvé. ■

#### 2.1.4 Condition d'instabilité

On va présenter maintenant un Lemme (voir Théorème 1.7 de Borovkov [10]) qui va nous permettre d'obtenir des conditions d'instabilité pour des SRS de la forme (2.2). Par condition d'instabilité, on entend celle qui nous assure la convergence de la SRS vers une distribution limite impropre, c'est-à-dire si on note par  $X^n$  la suite stationnaire limite, alors  $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X^n = \infty) = 1$ .

**Lemme 2.1** *Pour la SRS (2.2), si  $\mathbb{E}\xi_n > 0$  alors le processus  $\{X(n)\}$  converge en distribution vers une suite limite impropre.*

**Preuve** Voir la preuve du théorème 1.7 p14-16 de Borovkov [10].

**Remarque 2.3** *Il est à noter que la supposition  $\mathbb{E}\xi_n = 0$  et la dépendance faible entre les variables  $\xi_n$ , n'empêche pas la possibilité que le processus  $\{X(n)\}$  converge vers un régime stationnaire fini.*

### 2.1.5 Application aux Systèmes avec Clients Négatifs

Les résultats de cette section sur la stabilité de certains modèles avec clients négatifs ont été obtenus par Kernane [45].

#### Élimination du client en service

**Arrivées stationnaires et ergodiques pour les clients négatifs** Considérons une file à un serveur dans laquelle les arrivées des clients réguliers suivent un processus de Poisson de taux  $\lambda^+$ , et à chaque instant d'arrivée un groupe de clients de taille aléatoire  $a_i$ , avec  $a_i$  une suite i.i.d de moyenne  $\bar{a}$ , entre dans le système. On note par  $\tau_i^+$  les temps d'inter-arrivées des clients réguliers. La file est de capacité infinie et on suppose des disciplines de service conservatives telles que FIFO, LIFO ou accès aléatoire au service. On considère le cas où un client négatif élimine le client en service (RCS). Un client négatif n'a aucun effet sur un système vide. Les clients négatifs arrivent aux temps  $t_n; n = 0, 1, \dots$ , et on note par  $\tau_n^- = t_{n+1} - t_n$  leurs temps d'inter-arrivées. On suppose que  $\tau_n^-$  est une suite stationnaire (au sens strict) et ergodique (sans l'hypothèse d'indépendance). Le service des clients réguliers est effectué en groupes de tailles aléatoires  $b_j$ , avec  $b_j$  une suite i.i.d de moyenne  $\bar{b}$ , et le temps  $S_j$  requis pour les servir est de distribution exponentielle de taux  $\mu^+$ . L'arrivée négative élimine le groupe  $b_j$  qui est en service. Soit  $\mathcal{N}_{\lambda^+}(t)$  (respectivement  $\mathcal{N}_{\mu^+}(t)$ ) le processus de comptage de Poisson de paramètre  $\lambda^+$  (resp.  $\mu^+$ ) qui compte le nombre d'arrivées de clients réguliers (resp. services) durant l'intervalle de temps  $(0, t]$ . On suppose que les entrées des clients (régulier et négatifs), tailles des groupes d'arrivées ou de service et temps de service sont mutuellement indépendants. Soit  $X(t)$  le nombre de clients dans le système au temps  $t$ . On considère le processus induit  $X(n)$  juste après le temps  $t_n$  (i.e.,  $X(n) = X(t_n+)$ ). Le processus  $X(n)$  peut être représenté par une suite réursive stochastique (SRS) comme suit:

$$X(n+1) = \left( X(n) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(\tau_n^-)} a_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)} b_i - b_{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)+1} \right)^+, \quad (2.11)$$

où  $(x)^+ = \max(0, x)$ . On note par

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(\tau_n^-)} a_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)} b_i - b_{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)+1}. \quad (2.12)$$

Notons par  $V_0 = 0$  et  $V_n = \sum_{i=1}^n \xi_{-i}$ . La proposition suivante donne une condition de stabilité par la convergence couplée au sens fort vers un régime stationnaire et ergodique et une condition d'instabilité par convergence en distribution vers une limite impropre.

**Proposition 2.1** *Si  $(\lambda^+\bar{a} - \mu^+\bar{b}) \mathbb{E}\tau_1^- < \bar{b}$ , alors le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire et ergodique  $\tilde{X}(n)$  tel que  $\tilde{X}(0) = \sup_{n \geq 0} V_n$ .*

*Si  $(\lambda^+\bar{a} - \mu^+\bar{b}) \mathbb{E}\tau_1^- > \bar{b}$ , alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Preuve** Nous avons d'après la formule de Wald et la propriété de perte de mémoire du processus de Poisson

$$\mathbb{E}\xi_n = \lambda^+\bar{a}\mathbb{E}\tau_1^- - \mu^+\bar{b}\mathbb{E}\tau_1^- - \bar{b}. \quad (2.13)$$

Puisque  $\tau_n^-$  est stationnaire et ergodique alors  $\xi_n$  est aussi stationnaire et ergodique. Si la condition  $(\lambda^+\bar{a} - \mu^+\bar{b})\mathbb{E}\tau_1^- < \bar{b}$  est satisfaite alors  $\mathbb{E}\xi_n < 0$ . Ainsi de l'Exemple 2.1, il existe une suite d'évènements de rénovation de probabilités positives pour  $X(n)$ . En utilisant le Théorème 2.2, la SRS  $X(n)$  est convergente couplée au sens fort vers une unique suite stationnaire  $\tilde{X}(n) = U^n \tilde{X}(0)$ , où  $\tilde{X}(0)$  est mesurable par rapport à la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\tau_n^-$  et  $U$  est l'opérateur de translation des variables aléatoires engendrées par  $\tau_n^-$  (i.e.,  $\tau_{n+1}^- = U\tau_n^-$ ). Puisque  $\tau_n^-$  est ergodique alors  $\tilde{X}(n)$  est aussi ergodique du fait que c'est une suite translatée par l'opérateur  $U$  ( $U$ -shifted sequence). L'utilisation de la procédure de Loynes [52] (Pour plus de détails voir [41]) donne la convergence couplée de la SRS vers la suite  $\tilde{X}(n)$ . Puisque la convergence couplée au sens fort implique la convergence couplée alors on obtient le résultat.

Pour la condition d'instabilité, si on a la condition  $(\lambda^+\bar{a} - \mu^+\bar{b})\mathbb{E}\tau_1^- > \bar{b}$  alors  $\mathbb{E}\xi_n > 0$ . D'après le Lemme 2.1, la condition  $\mathbb{E}\xi_n > 0$  implique que la SRS converge en distribution vers une limite impropre. ■

**Remarque 2.4** *Dans le cas où les temps de service sont i.i.d (de distribution générale  $B$ ) et  $N(t)$  est un processus de comptage d'un processus de renouvellement de distribution d'inter-occurrence i.i.d.  $\sim B$ , alors on obtient un résultat plus général qui est la condition de stabilité  $\lambda^+\bar{a}\mathbb{E}\tau_1^- - \bar{b}\mathcal{N}(\tau_1^-) < \bar{b}$ .*

**Temps de services stationnaires et ergodiques** On suppose maintenant que les temps de services  $S_n$  forment une suite stationnaire et ergodique et les arrivées des clients négatifs suivent un processus de Poisson de taux  $\lambda^-$ . Puisque les temps de service  $S_n$  sont stationnaire alors ils ont la même distribution  $B(t)$  et avec une transformée de Laplace (LST)  $B^*(s) = \int_0^\infty B(t) \exp(-st) dt$ . Si elle possède une densité  $b(t)$  alors on note par  $\beta^*(s)$  sa transformée de Laplace correspondante. Définissons  $s_n$  comme l'instant de fin du  $(n-1)^{\text{ème}}$  temps de service. Les temps de service, les entrées des clients, les tailles des lots d'arrivées ou de services sont

mutuellement indépendants. On considère le processus  $X(n)$  induits juste après le temps  $s_n$  (i.e.,  $X(n) = X(s_n+)$ ). Le processus  $X(n)$  satisfait la relation suivante:

$$X(n+1) = \left( X(n) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(\min(S_n, \tau_n^-))} a_i - b_n \right)^+, \quad (2.14)$$

Dans ce cas  $\mathbb{E}\xi_n = \lambda^+ \bar{a} \mathbb{E}(\min(S_1, \tau_1^-)) - \bar{b}$ . Puisque  $\tau_1^-$  est de distribution exponentielle de taux  $\lambda^-$  alors on a

$$\mathbb{E}(\min(S_1, \tau_1^-)) = \int_0^\infty (1 - B(s)) \exp(-s\lambda^-) ds = \frac{(1 - \lambda^- B^*(\lambda^-))}{\lambda^-}, \quad (2.15)$$

ou bien en utilisant la densité  $\mathbb{E}(\min(S_1, \tau_1^-)) = (1 - \beta^*(\lambda^-))/\lambda^-$ .

On obtient la proposition suivante dont la preuve est similaire à celle de la Proposition 2.1.

**Proposition 2.2** *Si  $\lambda^+ \bar{a}(1 - \beta^*(\lambda^-)) < \lambda^- \bar{b}$ , alors le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire et ergodique  $\tilde{X}(n)$  tel que  $\tilde{X}(0) = \sup_{n \geq 0} V_n$ .*

*Si  $\lambda^+ \bar{a}(1 - \beta^*(\lambda^-)) > \lambda^- \bar{b}$ , alors  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Remarque 2.5** *En supposant une suite i.i.d pour les temps d'inter-arrivées des clients négatifs avec une distribution exponentielle de taux  $\lambda^- = (1/\mathbb{E}\tau_1^-)$  et des arrivées et des services un à un, c'est à dire  $\bar{a} = 1$  et  $\bar{b} = 1$ , on obtient dans la Proposition 2.1 le résultat de stabilité connu pour la file M/M/1 avec clients négatifs (voir [42]):*

$$(\lambda^+ - \lambda^-)(1/\mu^+) < 1. \quad (2.16)$$

*Dans la Proposition 2.2, si on suppose une suite i.i.d pour les temps de service avec distribution exponentielle de taux  $\mu^+ = (1/\mathbb{E}S_1)$ , on a  $\beta^*(\lambda^-) = \mu^+ / (\mu^+ + \lambda^-)$  et la condition 2.16 et aussi vérifiée pour ce cas.*

## Élimination du dernier client dans la file

**Arrivées stationnaire ergodique pour les clients négatifs** La suite des temps d'inter-arrivées des clients négatifs  $\{\tau_n^-\}$  est supposée stationnaire et ergodique et les clients réguliers sont éliminés à partir de la queue de la file, au instants d'arrivées  $t_n$ , en groupes de tailles aléatoires  $d_n$  avec  $\{d_n\}$  une suite i.i.d de moyenne  $\bar{d}$ . On suppose les flux d'arrivées, tailles des groupes et temps de service sont mutuellement indépendants. Soit  $X(n)$  le processus induit juste avant l'arrivée d'un client négatif. La représentation de  $X(n)$  comme une suite récursive stochastique (SRS) est donnée par:

$$X(n+1) = \left( X(n) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(\tau_n^-)} a_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\mu^+}(\tau_n^-)} b_i - d_n \right)^+. \quad (2.17)$$

On obtient le résultat suivant.

**Proposition 2.3** *Si  $(\lambda^+\bar{a} - \mu^+\bar{b})\mathbb{E}\tau_1^- < \bar{d}$ , alors le processus  $X(n)$  couple-converge au sens fort vers un unique régime stationnaire et ergodique  $\tilde{X}(n)$  tel que  $\tilde{X}(0) = \sup_{n \geq 0} V_n$ .*

*Si  $(\lambda^+\bar{a} - \mu^+\bar{b})\mathbb{E}\tau_1^- > \bar{d}$ , alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Suite des temps de service stationnaire ergodique** On suppose maintenant que les temps de service  $S_n$  sont stationnaire et ergodique et les inter-arrivées des clients négatifs sont i.i.d de distribution exponentielle de taux  $\lambda^-$ . Le processus  $X(n)$  est induit immédiatement après la fin du  $(n-1)^{\text{ème}}$  temps de service. Le processus  $X(n)$  satisfait la relation récursive suivante:

$$X(n+1) = \left( X(n) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^+}(S_n)} a_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^-}(S_n)} c_i - b_n \right)^+. \quad (2.18)$$

On obtient la proposition suivante.

**Proposition 2.4** *Si  $(\lambda^+\bar{a} - \lambda^-\bar{c})\mathbb{E}S_1 < \bar{b}$ , alors le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire et ergodique  $\tilde{X}(n)$  tel que  $\tilde{X}(0) = \sup_{n \geq 0} V_n$ .*

*Si  $(\lambda^+\bar{a} - \lambda^-\bar{c})\mathbb{E}S_1 > \bar{b}$ , alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Élimination d'une quantité de charge du serveur** Soit une file d'attente à un serveur avec des éliminations de charge de service. Les temps entre arrivées des clients réguliers  $\{\tau_n^+\}$  et les temps de service  $\{S_n\}$  sont des suites stationnaires et ergodiques de distributions générales. Soit  $t_n$  l'instant d'arrivée du  $n^{\text{ième}}$  groupe d'arrivée régulière de clients. Pendant  $\tau_n^+$ ,  $\mathcal{N}_{\lambda^-}(\tau_n^+)$  arrivées négatives se produisent enlevant les quantités de charge de travail  $c_i^n, i = 1, \dots, \mathcal{N}_{\lambda^-}(\tau_n^+)$  de moyenne  $\bar{c}$ . Nous supposons que les flux d'entrées des clients, la taille des groupes et les temps de service sont mutuellement indépendants. Notons par  $W(t)$  la charge du serveur au temps  $t$ . La relation récursive suivante est valable pour le processus  $W_n = W(t_n -)$ :

$$W_{n+1} = \left( W_n + S_n - \tau_n^+ - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^-}(\tau_n^+)} c_i^n \right)^+. \quad (2.19)$$

Notons par  $\xi_n = S_n - \tau_n^+ - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\lambda^-}(\tau_n^+)} c_i^n$ . On a  $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}S_1 - \mathbb{E}\tau_1^+ - \lambda^-\bar{c}\mathbb{E}\tau_1^+$ .

En utilisant la même approche que pour les propositions précédentes nous avons le résultat suivant.

**Proposition 2.5** *Si  $\mathbb{E}S_1 < (1 + \lambda^-\bar{c})\mathbb{E}\tau_1^+$ , alors le processus  $W_n$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire et ergodique  $\tilde{W}_n$  tel que  $\tilde{W}_0 = \sup_{n \geq 0} V_n$ .*

*Si  $\mathbb{E}S_1 > (1 + \lambda^-\bar{c})\mathbb{E}\tau_1^+$ , alors le processus  $W_n$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Remarque 2.6** Si on suppose une suite i.i.d. de temps de service de moyenne  $\beta$  et un processus de Poisson de taux  $\lambda^+ = 1/\mathbb{E}\tau_1^+$  alors on obtient le résultat de stabilité obtenu dans [13] par  $\lambda^+\beta < 1 + \lambda^-\bar{c}$ .

## 2.2 Méthode des Fonctions de Lyapunov

Les deux principaux résultats de cette section sont les théorèmes 2.5 pour l'ergodicité et 2.6 pour la transience. Ces critères de stabilité résultent de l'adaptation au cadre stochastique d'un résultat classique de stabilité des systèmes dynamiques dû à Lyapunov en 1892 [53].

### 2.2.1 Chaînes de Markov à espace d'états discret

Une chaîne de Markov est la généralisation la plus simple d'une suite de variables aléatoires indépendantes. La propriété principale d'une chaîne de Markov, dite propriété Markovienne, est que le comportement futur du processus ne dépend que de son état présent et non de son passé.

Soit  $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{S}$  des états, supposé fini ou infini dénombrable.

**Définition 2.6** Le processus stochastique  $\mathcal{X} = \{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  avec espace d'états  $\mathbb{S}$  est dit chaîne de Markov si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}\{X(n+1) = i_{n+1} \mid X(0) = i_0, \dots, X(n) = i_n\} = \mathbb{P}\{X(n+1) = i_{n+1} \mid X(n) = i_n\}$$

pour toutes valeurs possibles de  $i_0, \dots, i_{n+1} \in \mathbb{S}$ .

On dit qu'une chaîne de Markov  $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  est *homogène* si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall i, j \in \mathbb{S}, \quad \mathbb{P}\{X(n+1) = j \mid X(n) = i\} = p_{i,j},$$

indépendamment de  $n$ . Les probabilités  $p_{i,j}$  sont appelées *probabilités de transition en une étape* et satisfont à

$$p_{i,j} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{S}, \quad \text{et} \quad \sum_{j \in \mathbb{S}} p_{i,j} = 1, \quad \forall i \in \mathbb{S}.$$

La matrice stochastique  $P = (p_{i,j}), i, j \in \mathbb{S}$ , est alors appelée la *matrice de transition* de  $\mathcal{X}$ .

La probabilité de transition en  $n$  étapes est donnée par

$$\forall i, j \in \mathbb{S}, \quad p_{i,j}(n) = \mathbb{P}\{X(n) = j \mid X(0) = i\}.$$

Une application directe de la formule des probabilités totales montre que  $p_{i,j}(n)$  est le terme général de la matrice  $P^n$ . En particulier, pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ , les expressions

$$\forall i, j \in \mathbb{S}, \quad p_{i,j}(n+m) = \sum_{k \in \mathbb{S}} p_{i,k}(n) p_{k,j}(m),$$

connues sous le nom d'équations de Chapman-Kolmogorov. Elles peuvent être données simplement par le produit matriciel  $P^{n+m} = P^n \times P^m$ .

- On dit que les états  $i$  et  $j$  *communiquent* si

$$\exists n, m \in \mathbb{N}, \quad p_{i,j}(n) > 0 \quad \text{et} \quad p_{j,i}(m) > 0.$$

Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\mathbb{S}$ . L'espace d'états peut donc être décomposé en un nombre fini ou dénombrable de classes d'équivalence appelées les classes de communication de  $\mathcal{X}$ .

**Définition 2.7** Une chaîne de Markov ayant une unique classe de communication est dite *irréductible*.

- Un état  $i$  est *périodique*, s'il existe un entier  $d > 1$  tel que

$$p_{i,i}(n) > 0 \Rightarrow n \in d\mathbb{N}.$$

La *période* d'un état est le plus grand entier  $d$  pour lequel cette propriété est satisfaite. Lorsque  $d = 1$ , l'état est dit *apériodique*. Une chaîne de Markov irréductible est dite apériodique lorsque tous les états  $i \in \mathbb{S}$  sont apériodiques. On a les résultats classiques suivants.

- Tous les états d'une chaîne de Markov irréductible ont la même période.
- Une chaîne de Markov irréductible est apériodique s'il existe un état  $i \in \mathbb{S}$  tel que  $p_{i,i} > 0$ .

Pour tout  $i \in \mathbb{S}$ , on notera  $\mathbb{P}_i$  la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  conditionnellement à l'évènement  $\{X(0) = i\}$ , et par  $\tau_i$  le temps de retour à l'état  $i$ , à savoir

$$\tau_i = \min \{n \geq 1, X(n) = i\}.$$

L'état  $i$  est dit *récurrent* si, partant de  $i$ , la chaîne de Markov retourne en un temps *p.s.* fini à l'état  $i$ , ce qui s'écrit

$$\mathbb{P}_i(\tau_i < \infty) = 1.$$

Un état non récurrent est dit *transient*. Soit  $N_i$  le nombre de visites de l'état  $i$ , c'est-à-dire

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X(n)=i\}}.$$

L'espérance du nombre de visites de l'état  $i$ , partant de l'état  $i$ , est donnée par

$$\mathbb{E}_i(N_i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}(n).$$

Le résultat classique suivant, dont on peut trouver une preuve dans Shiryaev [71] par exemple, donne un critère alternatif des notions de récurrence et de transience.

**Lemme 2.2.** *Un état  $i \in \mathbb{S}$  est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}(n) = \infty,$$

*et transient si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,i}(n) < \infty.$$

- Si tous les états sont récurrents, la chaîne de Markov elle-même est dite récurrente.
- Si tous les états sont transients, la chaîne de Markov elle-même est dite transiente.

**Corollaire 2.1** *Une chaîne de Markov irréductible est soit récurrente soit transiente.*

**Preuve** D'après les équations de Chapman-Kolmogorov, on a pour tous  $i, j \in \mathbb{S}$ ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_{i,i}(n+k+m) \geq p_{i,j}(n)p_{j,j}(k)p_{j,i}(m),$$

où  $n, m$  sont des entiers fixés tels que  $p_{i,j}(n) > 0$  et  $p_{j,i}(m) > 0$ . Le résultat est alors une conséquence directe du Lemme 2.1. ■

Un état  $i$  est dit *positif* si, partant de l'état  $i$ , l'espérance du temps de retour à  $i$  est finie, à savoir

$$\mathbb{E}_i(\tau_i) < \infty.$$

Un état non positif est dit *nul*.

Le résultat classique suivant, dont on peut également trouver une preuve dans Shiryayev [71], donne une définition alternative des notions de positivité et de nullité.

**Lemme 2.3** *Un état  $i \in \mathbb{S}$  est positif si et seulement si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}(n) > 0,$$

*et nul si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}(n) = 0.$$

Une chaîne de Markov est dite positive si tous les états sont positifs, et nulle si tous les états sont nuls.

**Corollaire 2.2** *Une chaîne de Markov irréductible est soit positive soit nulle.*

La preuve du Corollaire 2.2 est une conséquence du Lemme 2.2.

Notons qu'une chaîne de Markov positive est nécessairement récurrente. Au vu des Corollaires 1.1 et 1.2, une chaîne de Markov irréductible est donc soit *positive*, soit *transiente*, soit *nulle récurrente*.

Pour tout  $A \subset \mathbb{S}$ , on note  $\tau_A$  le temps de retour à l'ensemble  $A$ , à savoir

$$\tau_A = \min \{n \geq 1, X(n) \in A\}.$$

On dira qu'un ensemble  $A \subset \mathbb{S}$  est positif si

$$\forall i \in A, \quad \mathbb{E}_i(\tau_A) < \infty.$$

Le résultat classique suivant donne un critère de positivité pour les chaînes de Markov irréductibles.

**Proposition 2.6** *Une chaîne de Markov irréductible est positive s'il existe un ensemble fini positif.*

**Méthode de la chaîne incluse** Il bien connu en théorie des files d'attente que le processus  $X(t)$  du nombre de clients dans la file  $M/GI/1$  n'a pas de propriété de Markov en général. Pour obtenir un processus Markovien on rajoute à ce processus la variable aléatoire du temps résiduel de service à l'instant  $t$ , ou bien le temps écoulé en service à l'instant  $t$ . La méthode de la chaîne incluse consiste à trouver une suite d'instants  $\{s_n\}$  pour lesquels la suite  $\{X(n) = X(s_n+)\}$  est une chaîne de Markov. Si les  $\{s_n\}$  sont les instants de départ des clients de la file d'attente, alors

$$X(n+1) = X(n) + \mathcal{N}_\lambda([s_n, s_{n+1}[) - 1, \quad n \geq 0 \quad \text{si } X(n) > 0,$$

$$X(n+1) = \mathcal{N}_\lambda([t_{n+1}, t_{n+1} + \sigma_n]), \quad n \geq 0 \quad \text{si } X(n) = 0,$$

avec  $\sigma_n$  le  $n^{\text{ème}}$  temps de service et  $\{t_n\}$  les instants d'arrivées.

La suite des départs est définie par

- $s_{n+1} = s_n + \sigma_{n+1}$ , si  $X(n) > 0$ ; un service sépare deux départs si la file est non vide,
- $s_{n+1} = t_{n+1} + \sigma_{n+1}$ , si  $X(n) = 0$ ; le  $n^{\text{ème}}$  client laisse la file vide en partant, le  $(n+1)^{\text{ème}}$  trouve donc la file vide à son arrivée et par conséquent est servi immédiatement.

La variable  $\sigma_n$  est indépendante de  $X(n)$  qui ne dépend du processus des arrivées que jusqu'à l'instant  $s_n$ . Le processus de comptage de Poisson  $\mathcal{N}_\lambda$  restreint à l'intervalle  $[s_n, s_{n+1}[$  est indépendant de la variable  $X(n)$ , par conséquent  $\{X(n)\}$  est une chaîne de Markov.

**Stabilité d'une chaîne de Markov** Soit  $\mu(n)$  la distribution de  $X(n)$ , à savoir  $\forall i \in \mathbb{S}, \quad \mu_i(n) = \mathbb{P}(X(n) = i)$ .

D'après la formule des probabilités totales, on obtient  $\mu(n+1) = \mu(n)P$ , si bien que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(n) = \mu(0)P^n.$$

En particulier, une mesure de probabilité  $\pi$  sur  $\mathbb{S}$  qui satisfait  $\pi = \pi P$  est appelée *distribution stationnaire* de la chaîne de Markov, puisque

$$\mu(0) = \pi \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(n) = \pi.$$

Lorsqu'une telle distribution stationnaire existe, la chaîne de Markov est dite *stable*. Sinon, la chaîne de Markov est dite *instable*.

Le résultat fondamental suivant permet de caractériser la stabilité des chaînes de Markov à espace d'états discrets. Une preuve de ce résultat se trouve dans Shiryaev [71].

**Théorème 2.3** *Soit  $\mathcal{X} = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  une chaîne de Markov irréductible.*

-  $\mathcal{X}$  est stable si et seulement si  $\mathcal{X}$  est positive, auquel cas la distribution stationnaire  $\pi$  est unique.

*Si de plus  $\mathcal{X}$  est apériodique, alors pour toute distribution initiale  $\mu(0)$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n) = \pi;$$

-  $\mathcal{X}$  est instable si et seulement si  $\mathcal{X}$  est nulle, auquel cas pour toute distribution initiale  $\mu(0)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n) = 0.$$

Une chaîne de Markov irréductible, apériodique et positive est dite ergodique. Cela est dû au Théorème 2.4 ci-dessous, dont une preuve simple se trouve dans Baccelli et Brémaud [7]. Pour toute mesure  $\mu$  de  $\mathbb{S}$ , et toute fonction  $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , soit

$$\mu(f) = \sum_{i \in \mathbb{S}} f(i) \mu_i.$$

**Théorème 2.4** (Théorème ergodique) *Soit  $\mathcal{X}$  une chaîne de Markov irréductible,*

*apériodique et positive, de distribution stationnaire  $\pi$ . Pour toute fonction  $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $|\pi(f)| < \infty$ , on a*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X(n)) \xrightarrow{p.s.} \pi(f).$$

**Critères de Foster** Le résultat suivant (voir Pakes [55]) donne une condition suffisante pour l'ergodicité d'une chaîne de Markov.

**Théorème 2.5** *Pour une chaîne de Markov  $\mathcal{X} = \{X(n)\}$  irréductible et apériodique d'espace d'états  $\mathbb{S}$ , une condition suffisante pour l'ergodicité est l'existence d'une fonction positive  $L$ , et  $\epsilon > 0$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{S}$*

$$\mathbb{E}[L(X(n+1)) - L(X(n)) \mid X(n) = x] < \infty,$$

*et*

$$\mathbb{E}[L(X(n+1)) - L(X(n)) \mid X(n) = x] \leq -\epsilon$$

*pour tout  $x \in \mathbb{S}$  sauf peut être en un nombre fini de points.*

Une généralisation naturelle du critère de Foster est donnée par le résultat suivant.

**Corollaire 2.3** (Critère de Foster généralisé) *Soit une chaîne de Markov  $\mathcal{X} = \{X(n)\}$  irréductible. Une condition suffisante pour que  $\mathcal{X}$  soit positive est qu'il existe un ensemble fini  $A$ , une fonction de Lyapunov  $L$ , et une fonction  $m$  sur  $\mathbb{S}$  à valeurs entières non-nulles, tels que*

$$\sup_{x \in A} \mathbb{E}[L(X(n+m(x))) - L(X(n)) \mid X(n) = x] < \infty,$$

et pour une certaine constante  $\epsilon > 0$ ,

$$\forall x \notin A, \quad \mathbb{E}[L(X(n+m(x))) - L(X(n)) \mid X(n) = x] \leq -\epsilon m(x).$$

**Critère pour la transience** Le critère suivant donne une condition pour la non ergodicité d'une chaîne de Markov à espace d'états  $\mathbb{Z}_+$  (voir Sennot et *al.* [57]).

**Théorème 2.6** *Une chaîne de Markov  $\mathcal{X} = \{X(n)\}$  irréductible et apériodique d'espace d'états  $\mathbb{Z}_+$  est non ergodique (transiente) si*

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = i] < \infty, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+,$$

et il existe une constante  $k > 0$  telle que

$$\sum_{j < i} (j - i)p_{i,j} \geq -k, \tag{2.20}$$

de plus, il existe  $N$  tel que

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = i] \geq 0 \quad \text{pour } i \geq N.$$

Le théorème suivant donne un critère simple pour la transience qui est une variante d'un résultat plus général dû à Lamperti [49].

**Théorème 2.7.** *S'il existe une fonction  $L : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $K, \gamma > 0$  tels que  $\sup\{L(x), x \in \mathbb{S}\} \geq K$  et*

$$\mathbf{a)} \quad \mathbb{E}_x[L(X(1)) - L(x)] \geq \gamma \text{ si } L(x) \geq K,$$

$$\mathbf{b)} \quad \sup_{x \in \mathbb{S}} \mathbb{E}_x[|L(X(1)) - L(X(n))|^2] < +\infty,$$

*la chaîne de Markov  $\{X(n)\}$  est transiente.*

### 2.2.2 Stabilité de la File $M/GI/1$

Nous avons vu précédemment que si  $X(n) = X(s_n+)$  désigne le nombre de clients dans la file à l'instant  $s_n$  du départ du  $n^{\text{ème}}$  client,  $\{X(n)\}$  est une chaîne de Markov irréductible vérifiant

$$X(n+1) = X(n) + \mathcal{N}_\lambda(\sigma_{n+1}) - 1,$$

si  $X(n) > 0$ , où  $\sigma_n$  est le temps de service du  $n^{\text{ème}}$  client et  $\mathcal{N}_\lambda$  le processus de Poisson de taux  $\lambda$  des arrivées. Sur l'ensemble  $\{X(0) > 0\}$ , on a donc

$$\mathbb{E}[X(1) - X(0) \mid X(0)] = \lambda \mathbb{E}\sigma - 1,$$

autrement dit, si  $\lambda \mathbb{E}\sigma < 1$ , la fonction identité est une fonction de Lyapunov et sous cette condition, d'après le Théorème 2.5, la chaîne  $\{X(n)\}$  est ergodique.

Réciproquement si  $\lambda \mathbb{E}\sigma > 1$ , il existe un  $K$  tel que  $\lambda \mathbb{E}(\min\{\sigma, K\}) > 1$ , si on remplace les services  $(\sigma_n)$  par les services bornés  $(\min\{\sigma_n, K\})$ , il est clair que la chaîne de Markov  $\tilde{X}(n)$  ainsi obtenue minorera la chaîne  $X(n)$ . De cette façon les sauts de  $\tilde{X}(n)$  ont un moment d'ordre 2 borné. Avec la même fonction de Lyapunov  $L(x) = x$  on en déduit que celle-ci est transiente d'après le Théorème 2.7. Par conséquent,  $\{X(n)\}$  est aussi transiente dans ce cas.

### 2.2.3 Application à un système avec rappels et pannes du serveur

Nous allons appliquer la méthode des fonctions de Lyapunov à un système avec rappels et pannes du serveur. Le système consiste en une file d'attente à un serveur et les clients arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . On considère une politique de contrôle des rappels qui est similaire à la politique constante mais un rappel ne peut commencer que si un service se termine et le serveur soit libre et les clients se range dans une file FIFO en orbite. Plus précisément, si un client arrive et trouve le serveur occupé il rejoint l'orbite selon un ordre FIFO. L'accès de l'orbite au serveur suit une politique de contrôle des rappels, c'est à dire, on permet seulement au client à la tête de la file d'attente de réessayer pour avoir un service. Nous supposons que les temps de rappels sont indépendants, identiquement distribués avec une fonction de distribution générale commune.  $R(\cdot)$ , densité  $r(\cdot)$  et transformée de Laplace  $r^*(s)$ . Les temps de service sont indépendants, identiquement distribués avec une distribution générale commune  $B(\cdot)$ , densité  $b(\cdot)$ , et transformée de Laplace  $\beta^*(s)$  et des premiers moments finis  $\beta_k = (-1)^k \beta^{*(k)}(0)$ ,  $k = 1, 2$ . Nous supposons que le serveur est sujet à des pannes suivants un processus de Poisson avec taux  $\alpha$ . Si le serveur tombe en panne, un temps de réparation commence immédiatement et nous supposons que le temps nécessaire pour le réparer est généralement distribué avec la fonction de distribution  $G(\cdot)$ , densité  $g(\cdot)$ , et transformée de Laplace  $g^*(s)$  et les deux premiers moments finis  $\gamma_k = (-1)^k g^{*(k)}(0)$ ,  $k = 1, 2$ . Nous supposons que les temps d'inter-arrivées, les temps de rappels, les temps de service, les temps de panne et les temps de réparation sont mutuellement indépendants.

Soit  $Y(t)$ ,  $t \geq 0$ , le nombre de clients en orbite au temps  $t$ . L'état du système est décrit par le processus stochastique  $\{(Y(t), C(t)); t \geq 0\}$ , où  $C(t)$  prend les valeurs  $\{0, 1, 2\}$  selon que le serveur est libre, en activité ou en réparation, respectivement. Il est bien connu que le processus stochastique  $\{(Y(t), C(t)); t \geq 0\}$  n'est pas Markovien. On introduit donc les variables aléatoires  $\chi_0(t)$ ,  $\chi_1(t)$  et  $\chi_2(t)$  définies comme suit. Si  $C(t) = 0$  et  $Y(t) > 0$ , alors  $\chi_0(t)$  représente le temps de rappel écoulé; si  $C(t) = 1$ , alors  $\chi_1(t)$  représente le temps de service écoulé du client en service au temps  $t$ ; et si  $C(t) = 2$ , alors  $\chi_2(t)$  représente le temps

écoulé de réparation du serveur au temps  $t$ . Ainsi le processus stochastique  $\{X(t); t \geq 0\} = \{(Y(t), C(t), \chi_0(t), \chi_1(t), \chi_2(t)); t \geq 0\}$  est Markovien avec espace d'états  $S = \mathbb{N} \times \{0, 1, 2\} \times \mathbb{R}_+^3$ . Soit  $\{t_n; n \in \mathbb{N}\}$  les instants de fin de service. On considère le processus  $X(n) = (Y(t_n+), C(t_n+))$  induit immédiatement après le temps  $t_n$ . La chaîne incluse  $\{X(n); n \in \mathbb{N}\}$  forme une chaîne de Markov irréductible et apériodique.

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système.

**Proposition 2.6** *Le processus  $X(n)$  est ergodique si et seulement si la condition suivante est satisfaite*

$$\lambda\beta_1(1 + \alpha\gamma_1) < r^*(\lambda). \quad (2.21)$$

**Preuve** Considérons tout d'abord le temps de service généralisé  $\tilde{\sigma}_n$  du  $n^{\text{ème}}$  client qui inclut, en plus de la période originale  $\sigma_n$  du client, les temps de réparation de service possibles dus aux pannes du serveur pendant la période de service du client. Il est évident que  $\tilde{\sigma}_n$  soit indépendant de  $n$ . Cao and Cheng [15] ont prouvé que les temps généralisés  $\{\tilde{\sigma}_n\}$  de service sont indépendants et identiquement distribués avec fonction de distribution

$$\tilde{B}(t) = P\{\tilde{\sigma}_n \leq t\} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t G^{(k)}(t-u) \exp(-\alpha u) \frac{(\alpha u)^k}{k!} dB(u),$$

et transformée de Laplace

$$\tilde{\beta}^*(s) = \beta^*(s + \alpha - \alpha g^*(s)),$$

par conséquent sa moyenne est donnée par

$$\mathbb{E}\tilde{\sigma}_n = -\tilde{\beta}^{*(1)}(0) = \beta_1(1 + \alpha\gamma_1).$$

Puisque  $C(t_n+) = 0$  nous avons seulement à prouver l'ergodicité de  $Y(n) = Y(t_n+)$ . Pour la suffisance, on utilise le critère de Foster (Théorème 2.5). Si nous choisissons  $L(k) = k$  nous obtenons

$$\mathbb{E}[L(Y(n+1)) | Y(n) = 0] = \lambda\mathbb{E}\tilde{\sigma}_n = \lambda\beta_1(1 + \alpha\gamma_1) < \infty,$$

et nous pouvons facilement vérifier que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L(Y(n+1)) - L(Y(n)) | Y(n) = x] &= \lambda\mathbb{E}\tilde{\sigma}_n - r^*(\lambda) \\ &= \lambda\beta_1(1 + \alpha\gamma_1) - r^*(\lambda). \end{aligned}$$

Si on pose  $\epsilon = r^*(\lambda) - \lambda\beta_1(1 + \alpha\gamma_1)$  alors la condition (2.21) est suffisante pour l'ergodicité.

Pour montrer que la condition (2.21) est nécessaire, on utilise le critère pour la transience (Théorème 2.6). En effet, si  $\lambda\beta_1(1 + \alpha\gamma_1) \geq r^*(\lambda)$  alors il existe un  $k_0$  tel que  $p_{ij} = 0$  pour  $j < i - k_0$  et  $i > 0$ , où  $P = (p_{ij})$  est la matrice de transition en une étape associée à  $\{Y(n); n \in \mathbb{N}\}$ , et les conditions du Théorème 2.6 sont donc satisfaites. ■

Puisque le flux d'arrivées est un processus de Poisson la stabilité du système vient du théorème de Burke (voir Cooper [17] p187)

### 2.2.4 Chaînes de Markov à espace d'états continu

Dans cette section, nous noterons  $\mathcal{X} = \{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$ , à valeurs dans un espace d'états continu  $\mathbb{S}$ , muni d'une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}_{\mathbb{S}}$ . Comme nous allons le voir, la plupart des propriétés des chaînes de Markov à espace d'états discret ont leurs analogues dans le cas continu, pourvu que la notion d'état individuel ou d'ensemble fini d'états individuels du cas discret soit remplacée par la notion de "*petit ensemble*" dans le cas continu.

**Définition 2.6** (Chaîne de Markov) *On dit que  $\mathcal{X}$  est une chaîne de Markov si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tout ensemble borélien  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}$ , et tous éléments  $x_0, \dots, x_{n-1}, x$  de  $\mathbb{S}$ ,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(n+1) \in A \mid X(n) = x, X(n-1) = x_{n-1}, \dots, X(0) = x_0) \\ = \mathbb{P}(X(n+1) \in A \mid X(n) = x). \end{aligned}$$

On dit qu'une chaîne de Markov  $\mathcal{X}$  est *homogène* si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{S}, \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}, \quad \mathbb{P}(X(n+1) \in A \mid X(n) = x) = P(x, A),$$

indépendamment de  $n$ . Comme dans le cas discret, nous ne considérerons que des chaînes de Markov homogènes par la suite.

Nous appellerons  $P = \{P(x, A), x \in \mathbb{S}, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}\}$  le *noyau de transition* de  $\mathcal{X}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit

$$P^{(n)}(x, A) = \mathbb{P}(X(n) \in A \mid X(0) = x).$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+m)}(x, A) = \int_{\mathbb{S}} P^{(n)}(x, dy) P^{(m)}(y, A).$$

La notion d'irréductibilité diffère sensiblement de celle du cas discret.

**Définition 2.7** ( $\varphi$ -Irreducibility) *On dit que  $\mathcal{X}$  est  $\varphi$ -irréductible s'il existe une mesure non triviale  $\varphi$  sur  $\mathbb{S}$ , telle que pour tous  $x \in \mathbb{S}, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}$ ,*

$$\varphi(A) > 0 \Rightarrow \exists n \geq 1, \quad P^{(n)}(x, A) > 0.$$

Lorsque  $\mathcal{X}$  est  $\varphi$ -irréductible, il existe une mesure maximale  $\varphi$  telle que  $\mathcal{X}$  est  $\varphi$ -irréductible. Par la suite, nous noterons  $\varphi$  une telle mesure d'irréductibilité maximale, et  $\mathcal{X}$  sera dite simplement irréductible.

L'ensemble

$$\mathcal{B}_{\mathbb{S}}^+ = \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}, \quad \varphi(A) > 0\}$$

est alors défini de manière unique, c'est-à-dire ne dépend pas de la mesure d'irréductibilité maximale.

Tout ensemble  $A$  appartenant à  $\mathcal{B}_{\mathbb{S}}$  est dit *accessible*. On dit qu'un ensemble  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}$  est *absorbant* si

$$\forall x \in A, \quad P(x, A) = 1.$$

On notera qu'un ensemble absorbant  $A$  est tel que  $\varphi(A^c) = 0$ .

**Définition 2.8** (Petits ensembles) *On dit qu'un ensemble  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}$  est  $n$ -petit s'il existe  $n \geq 1$ , une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{S}$ , et une constante  $\gamma > 0$ , tels que*

$$\forall x \in A, \quad P^{(n)}(x, \cdot) \geq \gamma \mu(\cdot).$$

Supposons que  $\mathcal{X}$  soit irréductible. Tout ensemble accessible contient alors un ensemble  $n$ -petit  $A$  tel que  $\mu(A) > 0$  (voir Meyn et Tweedie [57, Theorem 5.2.2]). On définit la période de la chaîne de Markov comme le plus grand entier  $d$  tel que

$$A \text{ est } n\text{-petit} \Rightarrow n \in d\mathbb{N}.$$

Lorsque  $d = 1$ ,  $\mathcal{X}$  est dite apériodique.

**Proposition 2.7** *Une chaîne de Markov irréductible est apériodique s'il existe un ensemble 1-petit  $A$  tel que  $\mu(A) > 0$ .*

Par la suite, un ensemble 1-petit sera simplement dit petit.

**Récurrence au sens de Harris** Pour tout  $x \in \mathbb{S}$ , on notera  $P_x$  la mesure de probabilité  $P$  conditionnellement à l'évènement  $\{X(0) = x\}$ . Pour tout ensemble  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}$ , soit  $\tau_A$  le temps de retour vers  $A$ , à savoir

$$\tau_A = \min \{n \geq 1, \quad X(n) \in A\}.$$

L'ensemble  $A$  est dit récurrent au sens de Harris si

$$\forall x \in \mathbb{S}, \quad P_x(\tau_A < \infty) = 1.$$

Une chaîne de Markov irréductible est dite *récurrente au sens de Harris* si tout ensemble accessible est récurrent au sens de Harris.

**Proposition 2.8** *Une chaîne de Markov irréductible est récurrente au sens de Harris s'il existe un petit ensemble récurrent au sens de Harris.*

Soit  $N_A$  le nombre de visites de l'ensemble  $A$ , c'est-à-dire

$$N_A = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X(n) \in A\}}.$$

L'espérance du nombre de visites de l'ensemble  $A$ , partant d'un état initial  $x$ , est donnée par

$$\mathbb{E}_x(N_A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(x, A).$$

Un ensemble  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}$  est récurrent si

$$\forall x \in A, \quad \mathbb{E}_x(N_A) = \infty.$$

On notera qu'un ensemble récurrent au sens de Harris est nécessairement récurrent. Une chaîne de Markov irréductible est dite *récurrente* si tout ensemble atteignable est récurrent, et *transiente* sinon.

**Remarque 2.7** *Une chaîne de Markov irréductible récurrente au sens de Harris est nécessairement récurrente. Une chaîne de Markov irréductible récurrente admet un ensemble absorbant sur lequel elle est récurrente au sens de Harris.*

Un ensemble  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}$  est dit *positif* si

$$\sup_{x \in A} \mathbb{E}_x(\tau_A) < \infty.$$

Une chaîne de Markov irréductible est dite *positive* s'il existe un ensemble absorbant  $F \subset \mathbb{S}$ , et une suite  $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$  de sous-ensembles de  $F$ , avec  $F = \cup_i A_i$ , tels que pour tout ensemble atteignable  $A$ ,

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x \in A_i} \mathbb{E}_x(\tau_A) < \infty.$$

On notera qu'une chaîne de Markov positive est nécessairement récurrente. Une chaîne de Markov non positive est dite *nulle*.

**Proposition 2.8** *Une chaîne de Markov irréductible est positive s'il existe un petit ensemble positif.*

**Notion de stabilité pour espace d'états continu** Soit  $\mu(n)$  la distribution de  $X(n)$ , à savoir

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}, \quad \mu^{(n)}(A) = \mathbb{P}(X(n) \in A).$$

D'après la formule des probabilités totales, on obtient

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}, \quad \mu^{(n+1)}(A) = \int_E \mu^{(n)}(dx) P(x, A).$$

En particulier, une mesure de probabilité  $\pi$  sur  $\mathbb{S}$  qui satisfait

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}}, \quad \pi(A) = \int_{\mathbb{S}} \pi(dx) P(x, A),$$

est appelée *distribution stationnaire* de la chaîne de Markov, puisque

$$\mu^{(0)} = \pi \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu^{(n)} = \pi.$$

Lorsqu'une telle distribution stationnaire existe, la chaîne de Markov est dite *stable*. Sinon, la chaîne de Markov est dite *instable*. On a le résultat fondamental suivant.

**Théorème 2.8** *Une chaîne de Markov irréductible est stable si et seulement si elle est positive, auquel cas la distribution stationnaire  $\pi$  est unique.*

Une chaîne de Markov irréductible, apériodique, récurrente au sens de Harris et positive est dite *ergodique*. Cela est dû au théorème 2.9 ci-dessous. Pour toute mesure  $\mu$  de  $\mathbb{S}$ , et toute fonction  $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , soit

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{S}} f(x)\mu(dx).$$

**Théorème 2.9** *Soit  $\mathcal{X}$  une chaîne de Markov irréductible, apériodique et récurrente*

*au sens de Harris. si  $\mathcal{X}$  est positive, de distribution stationnaire  $\pi$ , alors pour toute fonction  $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $|\pi(f)| < \infty$ , on a*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X(n)) \xrightarrow{p.s.} \pi(f).$$

**Critère de Foster pour espace d'états continu** Le résultat suivant donne une condition suffisante pour la récurrence au sens de Harris.

**Théorème 2.10** *Soit une chaîne de Markov  $\mathcal{X} = \{X(n)\}$  irréductible. Une condition suffisante pour que  $\mathcal{X}$  soit récurrente au sens de Harris et positive est qu'il existe un petit ensemble  $A$  et une fonction de Lyapunov  $L$  bornée sur  $A$ , tels que*

$$\sup_{x \in A} \mathbb{E}[L(X(n+1)) - L(X(n)) \mid X(n) = x] < \infty,$$

*et pour une certaine constante  $\epsilon > 0$ ,*

$$\forall x \notin A, \quad \mathbb{E}[L(X(n+1)) - L(X(n)) \mid X(n) = x] \leq -\epsilon.$$

**Critère pour l'instabilité** Le théorème suivant donne une condition pour qu'une chaîne de Markov à espace d'états continu soit nulle.

**Théorème 2.11** *Soit  $\mathcal{X}$  une chaîne de Markov irréductible. Une condition suffisante pour que  $\mathcal{X}$  soit nulle est qu'il existe un ensemble atteignable  $A$  et une fonction de Lyapunov  $L$  vérifiant*

$$\sup_{x \in \mathbb{S}} \mathbb{E}[L(X(n+1)) - L(X(n)) \mid X(n) = x] < \infty,$$

*tels que l'ensemble*

$$B = \left\{ y \in \mathbb{S}, \quad L(y) > \sup_{x \in A} L(x) \right\}$$

*soit atteignable, et*

$$\forall x \notin A, \quad \mathbb{E}[L(X(n+1)) - L(X(n)) \mid X(n) = x] \geq 0.$$

## 2.3 Méthode des Limites Fluides

L'origine de cette méthode est le papier de Rybko et Stolyar [56], généralisée ensuite par Dai [18]. La méthode est basée essentiellement sur une approximation déterministe du système en temps réel, lorsque la population de clients tend vers l'infini, en utilisant la loi des grands nombres.

Nous présenterons tout d'abord le critère de stabilité sur lequel se base la méthode, qui n'est autre qu'une formulation différente des méthode basées sur les fonctions de Lyapunov.

### 2.3.1 Critère de Stabilité

Le critère est formulé dans deux situations différentes, le cas où l'espace d'états est discret et le cas continu.

#### Espace d'états discret

**Théorème 2.12** *Soit  $\mathcal{X}$  une chaîne de Markov à espace d'états discret  $\mathbb{S}$ , sur lequel est définie une fonction de Lyapunov  $L$ . On suppose que pour tout  $k > 0$ , l'ensemble  $\{x \in \mathbb{S}, L(x) \leq k\}$  est fini. Une condition suffisante pour que la chaîne de Markov  $\mathcal{X}$  soit positive est qu'il existe une constante  $t > 0$ , telle que*

$$\forall k > 0, \quad \sup_{x:L(x) \leq k} \mathbb{E}_x L(X([tL(x)])) < \infty,$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x:L(x) > k} \frac{\mathbb{E}_x L(X([tL(x)]))}{L(x)} < 1.$$

#### Espace d'états continu

**Théorème 2.13** *Soit  $\mathcal{X}$  une chaîne de Markov à espace d'états continu  $\mathbb{S}$ , sur lequel est définie une fonction de Lyapunov  $L$ . On suppose que pour tout  $k > 0$ , l'ensemble  $\{x \in \mathbb{S}, L(x) \leq k\}$  est petit. Une condition suffisante pour que la chaîne de Markov  $\mathcal{X}$  soit positive est qu'il existe une constante  $t > 0$ , telle que*

$$\forall k > 0, \quad \sup_{x:L(x) \leq k} \mathbb{E}_x L(X([tL(x)])) < \infty,$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x:L(x) > k} \frac{\mathbb{E}_x L(X([tL(x)]))}{L(x)} < 1. \quad (2.22)$$

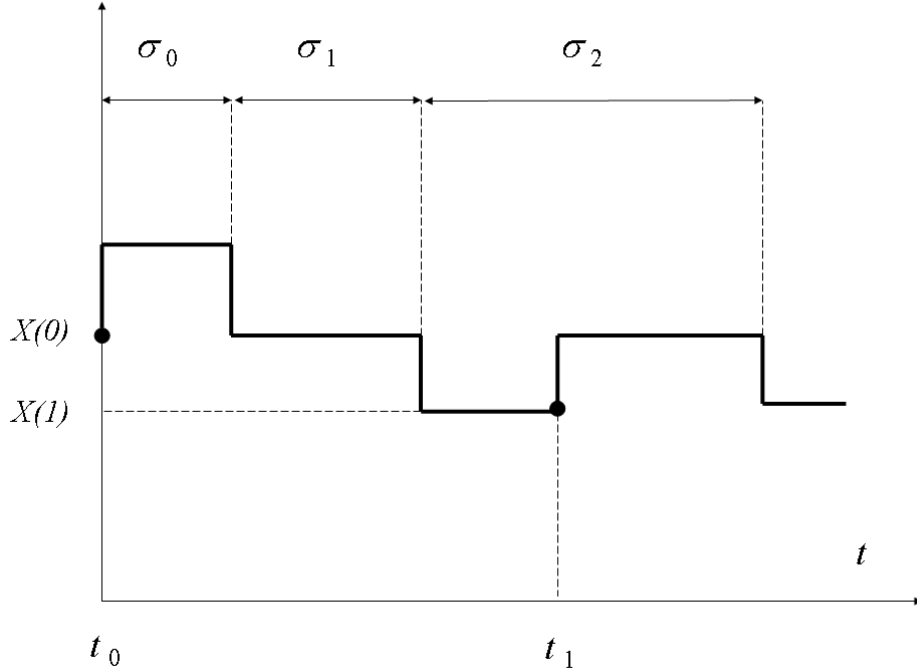
Le résultat suivant est plus simple et plus pratique

**Proposition 2.8** *Soit  $\mathcal{X}$  une chaîne de Markov à espace d'états continu  $\mathbb{S}$ , sur lequel est définie une fonction de Lyapunov  $L$ . Une condition suffisante pour que la propriété (2.22) soit satisfaite est que pour toute suite d'états initiaux  $\{x_k\}$  telle que  $L(x_k) \rightarrow \infty$  lorsque  $k$  tend vers l'infini, il existe une sous-suite  $\{x_{\phi(k)}\}$  telle que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_{x_{\phi(k)}} L(X([tL(x_{\phi(k)})]))}{L(x_{\phi(k)})} < 1.$$

### 2.3.2 La file $GI/GI/1$

Considérons l'évolution du nombre de clients dans une file  $GI/GI/1$  aux instants d'arrivée des clients. Plus précisément, notons  $X(n)$  le nombre de clients dans la file à l'instant  $(t_n-)$  juste avant l'arrivée du  $n$ -ème client, avec la convention  $t_0 = 0$ . Soit  $\sigma_0$  la variable aléatoire égale au temps résiduel de service à l'instant  $t = 0$  si  $X(0) \neq 0$ , au temps de service du client 0 sinon. Pour tout  $n \geq 1$ , nous noterons  $\sigma_n$  la durée du  $n$ -ème service entamé à tout instant  $t > 0$  (voir Figure 2.1)



Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $S(n)$  le nombre maximum de clients qui peuvent être servis avant l'arrivée du  $n$ -ème client, à savoir

$$S(n) = \max \left\{ m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{l=0}^{m-1} \sigma_l < t_n \right\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que pour une discipline de service FIFO,

$$n - S(n) \leq X(n) - X(0) \leq n - \min(S(n), X(0)). \quad (2.23)$$

De plus, on obtient par la loi des grands nombres,

$$\frac{S(n)}{n} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{\rho} = \frac{\mathbb{E}\tau_1}{\mathbb{E}\sigma_1}, \quad (2.24)$$

où  $\mathbb{E}\tau_1$  et  $\mathbb{E}\sigma_1$  désignent le temps moyen (fini) entre deux arrivées et le temps moyen (fini) de service. Nous poserons  $\mathbb{E}\tau_1 = 1$ , par convention.

**Temps de service exponentiels** Lorsque les temps de service suivent une loi exponentielle, la suite  $\mathcal{X} = \{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  définit une chaîne de Markov sur l'espace d'états  $\mathbb{S} = \mathbb{N}$ . Cela est dû au fait que la loi exponentielle est "sans mémoire". Ainsi le temps résiduel de service  $\sigma_0$  a la même distribution que  $\sigma_1$ . Soit  $P$  la matrice de transition de  $\mathcal{X}$ . Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{0,n}(n) > 0 \quad \text{et} \quad p_{n,0}(1) > 0,$$

la chaîne de Markov  $\mathcal{X}$  est irréductible et apériodique.

Désignons par  $x$  n'importe quel élément de  $\mathbb{S}$  et considérons la fonction de Lyapunov  $L(x) = x$ . Soit  $t$  une constante telle que  $0 < t \leq \rho$ . Par convergence dominée, on obtient d'après (2.24),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \min \left( \frac{S([tx])}{x}, 1 \right) \right] = \frac{t}{\rho},$$

et d'après l'identité de Wald,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \frac{S([tx])}{x} \right) = \frac{t}{\rho}.$$

Des inégalités (2.23), on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_x(X([tx]))}{x} = 1 + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)t.$$

Au vu du Théorème 2.12, on obtient le résultat bien connu que la chaîne de Markov  $\mathcal{X}$  est ergodique si  $\rho < 1$ .

En définissant

$$\bar{X}(t) = \max \left( 1 + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)t, 0 \right),$$

il n'est en fait pas difficile de voir que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\frac{X([tx])}{x} \xrightarrow{p.s.} \bar{X}(t) \quad \text{lorsque } x = X(0) \longrightarrow \infty.$$

La limite  $\bar{X}(t)$  est appelée *limite fluide* [18], et donne le comportement "asymptotique" du système lorsque le nombre de clients dans la file devient grand, il décroît de manière linéaire au taux  $1/\rho - 1$ .

**Temps de services généraux** Supposons maintenant que la distribution des temps de services est générale, ce qui veut dire qu'on est dans le cas d'un système  $GI/GI/1$ . Soit  $\gamma(n)$  le temps résiduel de service à l'instant  $(t_n-)$ . La suite  $\mathcal{X} = \{(X(n), \gamma(n)), n \in \mathbb{N}\}$  est une chaîne de Markov à espace d'états  $\mathbb{S} = \{(y, \delta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, y = 0 \implies \delta = 0\}$ . On choisit la fonction de Lyapunov  $L(x) = y\mathbb{E}\sigma_1 + \delta$  pour tout  $x = (y, \delta) \in \mathbb{S}$ .

En utilisant la Proposition 2.7, on peut montrer facilement que la chaîne de Markov  $\mathcal{X}$  est irréductible et apériodique en montrant que les ensembles

$\{x \in \mathbb{S}, L(x) \leq k\}$  sont petits pour tout  $k > 0$  (voir Proposition 2.11 dans Bonald [9]) pourvu que les temps d'inter-arrivées soient à support non borné.

Pour toute suite d'états initiaux  $\{x_k = (y_k, \delta_k)\}$  telle que  $L(x_k) \rightarrow \infty$  lorsque  $k$  tend vers l'infini, il existe une sous-suite  $\{x_{\phi(k)}\}$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_{\phi(k)} \mathbb{E}\sigma_1}{L(x_{\phi(k)})} = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\phi(k)}}{L(x_{\phi(k)})} = \beta,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes positives telles que  $\alpha + \beta = 1$ . On en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S([L(x_{\phi(k)})])}{L(x_{\phi(k)})} \xrightarrow{p.s.} (1 - \beta) \frac{1}{\mathbb{E}\sigma_1}.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \mathbb{E}_{\sigma_1} \min \left( \frac{S([L(x_{\phi(k)})])}{L(x_{\phi(k)})}, \frac{y_{\phi(k)}}{L(x_{\phi(k)})} \right) \right) = \alpha,$$

et par la formule de Wald,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \frac{S([L(x_{\phi(k)})])}{L(x_{\phi(k)})} \right) = \alpha.$$

Des inégalités (2.23), on déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_{x_{\phi(k)}} (\mathbb{E}_{\sigma_1} X([L(x_{\phi(k)})]))}{L(x_{\phi(k)})} = \rho \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_{x_{\phi(k)}} (\gamma([L(x_{\phi(k)})]))}{L(x_{\phi(k)})} = 0.$$

D'après le Théorème 2.12 et la Proposition 2.8, on déduit que la chaîne  $\mathcal{X}$  est ergodique si  $\rho < 1$ .

## 2.4 Règle de Saturation

Nous présentons dans cette section la *règle de saturation*, qui s'applique aux systèmes dits monotones-homogènes et séparables, qui a été introduite par Baccelli et Foss [8]. Cette règle peut se résumer ainsi: Le taux maximum d'arrivée des clients caractérisant la région de stabilité d'un système monotone-homogène et séparable, est égal au débit du système saturé.

### 2.4.1 Système Monotone-Homogène-Séparable

Considérons la SRS de la forme

$$X(n+1) = f(X(n), \xi_n, \tau_n),$$

où les  $\xi_n$  sont des marques, et  $\tau_n \geq 0$ . La suite  $\tau_n$  représente les temps d'inter-arrivées, et  $X(n)$  l'état du système juste avant l'arrivée du  $n^{\text{ème}}$  client. Considérons les instants d'arrivées  $\{t_n\}$  tels que  $t_{n+1} - t_n = \tau_n$ . On note par  $X(m, n)$  la solution

de la récursion à l'indice  $n$  sachant que le système est à un état initial spécifique, comme 0, en l'indice  $m \leq n$ . Finalement, on considère une fonction de la forme

$$X_{[m,n]} = f_{m+n+1}(X(m, n); t_m, \dots, t_n; \xi_m, \dots, \xi_n),$$

qui peut être vu comme le temps de la dernière activité dans le système. Par exemple, si on a une file à  $s$  serveurs,  $X_{[m,n]}$  représente le temps nécessaire pour le départ du dernier client quand la file est alimentée par seulement les clients d'indices de  $m$  à  $n$ . On définit la quantité

$$Z_{[m,n]} := X_{[m,n]} - t_n,$$

qui représente le temps entre l'arrivée du dernier client et le départ du dernier client. Pour  $c \in \mathbb{R}$ , soit  $\{t_n\} + c = \{t_n + c\}$  et pour  $c > 0$ , soit  $c\{t_n\} = \{ct_n\}$ . Définissons  $\{t_n\} \leq \{t'_n\}$  si  $t_n \leq t'_n$  pour tout  $n$ . On a besoin des quatres suppositions suivantes:

**(A1)**  $Z_{[m,n]} \geq 0$

**(A2)**  $\{t_n\} \leq \{t'_n\} \implies X_{[m,n]} \leq X'_{[m,n]}$ .

**(A3)**  $\{t'_n\} = \{t_n\} + c \implies X'_{[m,n]} = X_{[m,n]} + c$ .

**(A4)** Pour  $m \leq l < l + 1 \leq n$ ,  $X_{[m,l]} \leq t_{l+1} \implies X_{[m,n]} = X_{[l+1,n]}$ .

La première supposition est naturelle. Dans la seconde, (A2)  $X'_{[m,n]}$  sont les variables obtenues en remplaçant chaque  $t_n$  par  $t'_n$ ; cela veut dire qu'un retard dans l'instant d'arrivée résulte en un retard pour l'instant de la dernière activité. La troisième, est une supposition d'homogénéité dans le temps. Dans la dernière supposition on dit qu'on a séparabilité par rapport à l'indice  $l$ .

Des conséquences directes des suppositions précédentes sont données dans le lemme suivant:

**Lemme 2.4** (i) La quantité  $Z_{[m,n]}$  dépend de  $t_m, \dots, t_n$  à travers seulement les différences  $\tau_m, \dots, \tau_{n-1}$ .

(ii) Soit  $a \leq b$  deux entiers. Soit  $t'_n = t_n + Z_{[a,b]} \mathbb{I}\{n > b\}$ ,  $t''_n = t_n - Z_{[a,b]} \mathbb{I}\{n \leq b\}$ , et  $X'_{[m,n]}$ ,  $X''_{[m,n]}$  les périodes de dernières activités correspondantes. Alors les deux dernières quantités sont séparable par rapport à l'indice  $b$ .

(iii) Les variables  $X_{[m,n]}$ ,  $Z_{[m,n]}$  sont croissantes quand  $m$  décroît.

(iv) Pour  $a \leq b < b + 1 \leq c$ ,  $Z_{[a,c]} \leq Z_{[a,b]} + Z_{[b+1,c]}$ .

Soit  $U$  l'opérateur de translation des variables stationnaires et ergodiques dans l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Soit  $\xi_n = U^n \xi_0$  et  $\tau_n = U^n \tau_0$ , avec  $t_0 = 0$ , et supposons que  $\mathbb{E}\tau_0 = \lambda^{-1} < \infty$  et  $\mathbb{E}Z_{[0,0]} < \infty$ . Le problème de stabilité du système original peut être interprété par une notion de stabilité sur le processus  $Z_{[m,n]}$ . Notons que  $U^k Z_{[m,n]} = Z_{[m+k, n+k]}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Pour tout  $c \geq 0$ , on introduit les instants  $c\{t_n\} = \{ct_n\}$  et soient  $X_{[m,n]}(c)$ ,  $Z_{[m,n]}(c)$  les quantités correspondantes. La supposition d'ergodicité nous donne

$$\gamma(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} Z_{[-n, -1]}(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} Z_{[-n, -1]}(c),$$

avec  $\gamma(c)$  une constante positive finie. Le lemme précédent implique que  $\gamma(c) \geq \gamma(c')$  quand  $c > c'$ . De même,  $\lim n^{-1}X_{[1,n]}(c) = \gamma(c) + \lambda^{-1}c$ , et cette dernière quantité est croissante quand  $c$  croît. La supposition de monotonie nous donne que  $Z_{[-n,-1]}(c)$  est croissante quand  $n$  croît, et soit  $\tilde{Z}(c)$  sa limite. La supposition d'ergodicité implique que  $\mathbb{P}(\tilde{Z} < \infty) \in \{0, 1\}$ . On pose  $\tilde{Z} = \tilde{Z}(1)$ .

La règle de saturation est énoncée dans le théorème suivant:

**Théorème 2.14** *Si  $\lambda\gamma(0) < 1$  alors  $\mathbb{P}(\tilde{Z} < \infty) = 1$ .*

*Si  $\lambda\gamma(0) > 1$  alors  $\mathbb{P}(\tilde{Z} < \infty) = 0$ .*

Pour une preuve simple du Théorème 2.14 voir Foss et Konstantopoulos [34].

### 2.4.2 La file $G/G/1$

La quantité  $X_{[m,n]}$  représente, dans le cas de la file d'attente simple  $G/G/1$ , le temps de départ du  $n^{\text{ième}}$  client, si on a  $n + 1 - m$  clients avec temps d'arrivées  $t_k$  et temps de services  $\sigma_k$ ,  $m \leq k \leq n$ ;  $Z_{[m,n]}$  est le temps de séjours du  $n^{\text{ième}}$  client. La supposition d'ergodicité implique

$$\lim n^{-1}X_{[1,n]} = \gamma(0) = \mathbb{E}\sigma_1,$$

ainsi la condition  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$  entraîne que  $\mathbb{P}(\tilde{Z} < \infty) = 1$ .

## Chapitre 3

### 3 STABILITÉ DANS LES MODÈLES D'ATTENTE AVEC RAPPELS

Dans ce chapitre, nous présentons les conditions de stabilité des différents modèles d'attente avec rappels décrits au chapitre 1. Pour ces modèles, la méthode des fonctions de Lyapunov associée au critère de Foster est suffisante pour établir ces conditions. Nous mettons en évidence un contre-exemple dû à Liang et Kulkarni [50] montrant que la condition "naturelle" (1.11) n'est pas toujours vraie dès qu'on s'affranchit des hypothèses classiques, en particulier les hypothèses Markovienne et d'indépendance.

#### 3.1 Stabilité de modèles classiques

##### 3.1.1 Politique de rappels linéaire

**File M/M/1/1** Les arrivées de l'extérieur forment un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , les temps de services  $\{\sigma_n\}$  sont i.i.d de distribution exponentielle de moyenne  $\mathbb{E}\sigma_1$ , et les temps d'inter-rappels de chaque client en orbite sont une suite i.i.d de distribution exponentielle de paramètre  $\theta$ . Soit  $X(t)$  le nombre de clients en orbite au temps  $t$ , et  $C(t)$  le nombre de clients en service, i.e. pour un système à un serveur si  $C(t) = 0$  alors le serveur est libre au temps  $t$ , et si  $C(t) = 1$  le serveur est occupé. Dans le cas d'une file  $M/M/1/1$  le processus  $\{Y(t) = (X(t), C(t)), t \geq 0\}$  est une chaîne de Markov à temps continu et les résultats suivants sont connus dans la littérature:

- Si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$  alors la chaîne de Markov  $Y(t)$  est récurrente positive,
- Si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 = 1$  et  $\theta\mathbb{E}\sigma_1 \geq 1$  alors la chaîne de Markov  $Y(t)$  est récurrente nulle,
- Si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 = 1$  et  $\theta\mathbb{E}\sigma_1 < 1$  alors la chaîne de Markov  $Y(t)$  est transiente,
- Si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 > 1$  alors la chaîne de Markov  $Y(t)$  est transiente.

Voir Falin [27].

**File M/G/1/1** Considérons la file  $M/G/1$  avec rappels linéaires décrite dans le chapitre 1. Les temps de services  $\{\sigma_n\}$  sont i.i.d de distribution générale  $B(x)$  et de moyenne finie  $\mathbb{E}\sigma_1$ . Considérons le processus induit  $X(n) = X(s_n+)$  à l'instant  $s_n$  de fin du  $(n-1)^{\text{ème}}$  temps de service. Le processus  $\{X(n), n \geq 0\}$  représente donc une chaîne de Markov à temps discret vérifiant la récurrence

$$X(n+1) = X(n) - \mathbb{I}_n + \mathcal{N}_\lambda(\sigma_n), \quad (3.1)$$

si  $X(n) > 0$ , où  $\mathbb{I}_n$  est une fonction indicatrice telle que  $\mathbb{I}_n = 1$  si le client qui rejoint le service après l'instant  $n$  (i.e.  $s_n+$ ) vient de l'orbite et  $\mathbb{I}_n = 0$  s'il vient de l'extérieur.  $\mathcal{N}_\lambda(\sigma_n)$  est le nombre d'arrivées de l'extérieur durant le temps de service  $\sigma_n$ .

D'après la formule (1.8), on a

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 0 \mid X(n) = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + k\theta}, \quad (3.2)$$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 1 \mid X(n) = k\} = \frac{k\theta}{\lambda + k\theta}. \quad (3.3)$$

Pour utiliser le critère de Foster (voir Théorème 2.5) on doit choisir une fonction test de Lyapunov convenable. On peut choisir dans notre cas  $L(k) = k$  et calculer donc la dérive moyenne suivante en utilisant les formules (3.1) et (3.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] &= \mathbb{E}[-\mathbb{I}_n + \mathcal{N}_\lambda(\sigma_n) \mid X(n) = k] \\ &= -\mathbb{E}[\mathbb{I}_n \mid X(n) = k] + \mathbb{E}[\mathcal{N}_\lambda(\sigma_n) \mid X(n) = k] \\ &= -\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 1 \mid X(n) = k\} + \mathbb{E}[\mathcal{N}_\lambda(\sigma_n)] \\ &= -\frac{k\theta}{\lambda + k\theta} + \lambda\mathbb{E}\sigma_1, \end{aligned}$$

ainsi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] = -1 + \lambda\mathbb{E}\sigma_1.$$

Cette dernière limite est négative si et seulement si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ . En appliquant le critère de Foster on obtient que la condition  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$  est suffisante pour l'ergodicité de la chaîne de Markov induite  $\{X(n)\}$ .

Pour montrer que  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$  est nécessaire pour l'ergodicité on utilise le critère pour la transience (Théorème 2.6). Puisque pour le système considéré on a  $X(n+1) - X(n) \geq -1$ , donc l'inégalité (2.20) du Théorème 2.6 est vérifiée, et si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 \geq 1$  alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] &= -\frac{k\theta}{\lambda + k\theta} + \lambda\mathbb{E}\sigma_1 \\ &\geq -\frac{k\theta}{\lambda + k\theta} + 1 = \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} > 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat classique suivant (voir Falin et Templeton [25]):

*La chaîne de Markov  $\{X(n)\}$  est ergodique si et seulement si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ .*

Si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 > 1$  alors la chaîne de Markov  $\{X(n)\}$  est transiente, et ainsi la file  $M/G/1/1$  avec rappels de politique linéaire est instable. Il n'existe pas de résultats de stabilité pour le cas  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 = 1$ . Voir Deul [19], Falin [27], Greenberg [39], Greenberg et Wolff [40] et Wolff [59].

**M/G/1/1 avec clients impatient** Dans beaucoup de situations pratiques, les clients font des rappels un certain nombre (aléatoire) de fois et quitte l'orbite sans obtenir de service. Ce genre de clients est appelé "impatient". Soit  $\alpha_n$  la probabilité qu'un client retourne à l'orbite après sa  $n^{\text{ème}}$  tentative non réussie d'obtenir un service, et quitte le système sans être servi avec probabilité  $1 - \alpha_n$ . Dans le cas où  $\alpha_n = \alpha = 1$  pour tout  $n \geq 1$ , la condition de stabilité donnée par

$$\alpha_0 \lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1,$$

a été montré par Falin [26].

Dans le cas  $\alpha < 1$ , Le système est stable si le temps moyen de rappels est fini (voir Fayolle et Brun [31]).

**File M/M/s/s** Deul [19], Falin [27] [28] et Hanschke [?] ont montré que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < s.$$

Ils ont utilisé une chaîne de Markov incluse et le critère de Foster pour obtenir le résultat précédent.

### 3.1.2 Politique constante

Considérons maintenant le système M/G/1 avec politique de rappels constante défini dans le chapitre 1. Les arrivées de l'extérieur forment un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , les temps de services  $\{\sigma_n\}$  sont i.i.d de distribution générale et de moyenne finie  $\mathbb{E}\sigma_1$  et les temps de rappels de l'orbite sont de distribution exponentielle de paramètre  $\theta$ . Le processus  $\{X(n), n \geq 0\}$  vérifie la récurrence

$$X(n+1) = X(n) - \mathbb{I}_n + \mathcal{N}_\lambda(\sigma_n),$$

avec maintenant les relations suivantes pour  $\mathbb{I}_n$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 0 \mid X(n) = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + \theta},$$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 1 \mid X(n) = k\} = \frac{\theta}{\lambda + \theta},$$

ainsi

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] = -\frac{\theta}{\lambda + \theta} + \lambda \mathbb{E}\sigma_1,$$

En appliquant le critère de Foster, on obtient que la condition  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < (\theta/(\lambda + \theta))$  est suffisante pour l'ergodicité de la chaîne de Markov induite  $\{X(n)\}$ .

Pour montrer que  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1$  est nécessaire pour l'ergodicité, on utilise le critère pour la transience (Théorème 2.6). Donc, on peut énoncer le résultat suivant pour le système M/G/1 avec rappels et politique constante:

*La chaîne de Markov  $\{X(n)\}$  est ergodique si et seulement si  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda + \theta}$ .*

### 3.1.3 Politique de rappels versatile

La politique versatile est une combinaison des deux précédentes politiques que sont la politique linéaire et la politique constante. La probabilité d'avoir un rappel durant l'intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$ , sachant que  $j$  clients sont en orbite au temps  $t$ , est  $(\theta(1 - \delta_{0j}) + j\mu)\Delta t + o(\Delta t)$ . Le système considéré est toujours un M/G/1 avec cette dernière politique de rappels. La chaîne de Markov modélisant le système est toujours de la forme (3.1) avec pour  $k \geq 1$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 0 \mid X(n) = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + \theta + k\mu}, \quad (3.4)$$

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 1 \mid X(n) = k\} = \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu}. \quad (3.5)$$

Pour  $k = 0$  il est évident que  $\mathbb{P}\{\mathbb{I}_n = 0 \mid X(n) = 0\} = 1$ .

On a donc

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] = -\frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu} + \lambda\mathbb{E}\sigma_1,$$

et ainsi pour  $\mu > 0$  on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] = -1 + \lambda\mathbb{E}\sigma_1.$$

La conclusion est donc la même que pour la politique linéaire classique, i.e.

*La chaîne de Markov  $\{X(n)\}$  est ergodique si et seulement si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ .*

Pour  $\mu = 0$  on retrouve le cas de la politique constante.

## 3.2 Stabilité de Différents Modèles avec Rappels

### 3.2.1 Deux types de clients

Considérons maintenant une file d'attente avec rappels et deux types de clients, qu'on appelle "impatient" et "persistant". Ce modèle a été étudié par Martin et Artalejo [54] dans le cas d'une politique constante. Si un client impatient trouve le serveur occupé alors il quitte le système. Par contre, si un client persistant arrive et trouve le serveur occupé, alors il peut rejoindre l'orbite et refait sa tentative ultérieurement selon une politique de rappels. Nous supposons que les temps d'inter-arrivées  $\{\tau_n^1\}$  du type 1 (impatient) et  $\{\tau_n^2\}$  du type 2 (persistant) sont des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec des distributions exponentielles de paramètres  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  respectivement. Les temps de services  $\{\sigma_n^1\}$  (pour le type 1) et  $\{\sigma_n^2\}$  (pour le type 2) sont des suites i.i.d de moyennes  $\mathbb{E}\sigma^1$  et  $\mathbb{E}\sigma^2$  respectivement, indépendantes l'une de l'autre et de  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$ , temps de rappels, et  $0 < \mathbb{E}(\sigma^j) < \infty$ ,  $j = 1, 2$ . Les suites  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$ , temps de rappels sont indépendantes l'une de l'autre.

Dans le cas d'une politique de rappels constante, sous les suppositions Markoviennes, Martin et Artalejo [54] ont montré que la condition de stabilité du système est:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2(\theta\mathbb{E}\sigma^2 + \lambda_1\mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2\mathbb{E}\sigma^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < 1.$$

### 3.2.2 Pannes du serveur

Considérons un système de type  $M/G/1$  avec pannes du serveur décrit dans le chapitre 1, avec une politique linéaire classique. La dérive moyenne est donc dans ce cas

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] = -\frac{k\theta}{\lambda + k\theta} + \lambda\mathbb{E}\sigma_1(1 + \alpha\mathbb{E}r_1),$$

ainsi  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] = -1 + \lambda\mathbb{E}\sigma_1(1 + \alpha\mathbb{E}r_1)$ , et en utilisant le critère de Foster et le critère pour la transience la condition de stabilité a été obtenue par Wang et al [58] et qui est la même que le système  $M/G/1$  classique donnée par (1.9).

### 3.2.3 Clients négatifs

Nous allons illustrer le cas des arrivées négatives avec un modèle  $M/G/1$  et rappels de politique linéaire classique et suppositions Markoviennes. En plus donc des clients régulier, un flux de distribution de Poisson de taux  $\delta$  est considéré pour les arrivées des clients négatifs. Aussi, nous supposons des éliminations individuelles comme décrit dans le chapitre 1. Il est facile de voir que la dérive moyenne vérifie

$$\mathbb{E}[X(n+1) - X(n) \mid X(n) = k] = -\frac{k\theta}{\lambda + k\theta} + \lambda\mathbb{E}\sigma_1 - \delta\mathbb{E}\sigma_1,$$

et obtient la condition de stabilité  $(\lambda - \delta)\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ .

### 3.2.4 Arrivées en groupes

Le premier modèle de rappels avec arrivées en groupes a été étudié par Falin [22] dans le contexte d'une politique linéaire classique. Ce modèle est noté  $M^X/G/1$ , avec les hypothèses Markoviennes d'un système simple, on suppose de plus que les arrivées sont en groupes de tailles suivant une variable aléatoire générale de moyenne  $\bar{a}$ .

La condition de stabilité obtenue par Falin [22] est  $\lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ .

## 3.3 Contre-exemple de Liang et Kulkarni

Considérons le modèle  $M/G/1$  classique avec rappels et politique linéaire. Sous des suppositions Markoviennes, i.e., arrivées de Poisson de taux  $\lambda$ , temps de rappels i.i.d. de distribution exponentielle de taux  $\mu$  et temps de service  $\sigma_n$  i.i.d. de distribution générale de moyenne  $\mathbb{E}\sigma_1$ , On a vu (section 3.1.1) que la condition de stabilité du système est donnée par

$$\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1, \tag{3.6}$$

qui peut être considérée comme "naturelle" pour les systèmes d'attente.

On s'attend intuitivement à ce que la condition (3.6) soit vraie en général. Cependant, Liang et Kulkarni [50] ont donné le contre exemple suivant qui montre que la condition (3.6) n'est pas toujours valable pour la stabilité

### 3.3.1 Le Contre-exemple

Les temps d'inter-arrivées sont considérés i.i.d. à valeurs entières de moyenne  $(1/\lambda) = 2.5$ . Les temps de rappels de chaque client sont i.i.d. à valeurs entières. Les temps de service sont supposés suivre une loi uniforme sur l'intervalle  $[2.1, 2.8]$ , i.e.,  $U_{[2.1, 2.8]}$ , donc de moyenne  $\mathbb{E}\sigma_1 = 2.45$ . Donc la condition (3.6) est vérifiée ( $2.45/2.5 < 1$ ). Supposons que le système est initialement vide et on a une arrivée au temps  $t = 0$ . Alors le premier service se terminera avant le temps  $t = 3$ . Puisque les inter-arrivées et les temps de rappels prennent seulement des valeurs entières, le service suivant ne commencera pas avant le temps  $t = 3$ . En effet, tous les services commencent en des points entiers ainsi le  $k$ -ème service doit commencer au temps  $n \leq 3(k - 1)$ . Ainsi un seul client seulement est servi tout les trois unités de temps. Avec un temps moyen d'inter-arrivées égal à 2.5, il est clair que le système ne peut être stable.

Liang et Kulkarni [50] expliquent cette situation par la nature entière des temps d'inter-arrivées et de rappels, et le mécanisme de fonctionnement du système qui "forcent" en quelque sorte le serveur à être inactif. Les auteurs pensent que la condition (3.6) est suffisante dans la majorité des cas. Ils le démontrent pour une large classe de systèmes décrits dans le paragraphe suivant.

### 3.3.2 Modèle avec Arrivées et Rappels de Loi d'Erlang

Après avoir donner le contre exemple, Liang et Kulkarni [50] ont donné une condition suffisante de stabilité dans le cas où les temps d'inter-arrivées et les temps de rappels suivent des mélanges finis de distributions d'Erlang. Notons par  $A(t)$  et  $H(t)$  les fonctions de répartitions des temps d'inter-arrivées et de rappels respectivement. Les distributions  $A(t)$  et  $H(t)$  sont donc donnés par

$$A(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i E_i(\lambda, t), \quad (3.7)$$

$$H(t) = \sum_{i=1}^r \gamma_i E_i(\theta, t), \quad (3.8)$$

où  $E_i(\theta, t)$  ( $E_i(\lambda, t)$ ) est la fonction de répartition de la somme de  $i$  variables aléatoires indépendantes de loi exponentielles de paramètre  $\theta$  ( $\lambda$ ). La suite des temps de service  $\{\sigma_n\}$  est i.i.d. de distribution générale de moyenne  $\mathbb{E}\sigma_1$  finie.

Soit

$$\alpha = \sum_{i=1}^k i\alpha_i. \quad (3.9)$$

Donc le temps moyen d'inter-arrivée est donné par  $\alpha/\lambda$ .

En utilisant le critère de Foster (voir Théorème 2.5), Liang et Kulkarni [50] que la condition

$$\frac{\lambda \mathbb{E}\sigma_1}{\alpha} < 1, \quad (3.10)$$

est suffisante pour la stabilité du système avec rappels sous les suppositions précédentes.

La condition (3.10) est en fait équivalente à (3.6). Leur tentative pour généraliser cette conjecture n'a pas aboutit.

### 3.4 Service ou Arrivées Stationnaires ergodiques

La méthode des événements de rénovation, décrite au paragraphe 2.1, est une approche élégante et efficace permettant de prouver la stabilité de systèmes de files d'attente décrits par des SRS sous des hypothèses assez générales. Altman et Borovkov [2] ont ainsi pu montrer que la condition (3.6) est suffisante pour la stabilité pour diverses hypothèses relativement générales: inter-arrivées ou services stationnaire et ergodique, ce qui exclut la supposition d'indépendance généralement adoptée. La difficulté, comme c'est le cas en général pour cette approche par les suites récursives stochastiques est de construire l'espace d'états et les événements de rénovation. Nous décrivons ci-dessous certains résultats d'Altman et Borovkov [2].

#### 3.4.1 Suite des temps de services stationnaire ergodique

Altman et Borovkov [2] ont considéré une politique de rappels linéaire classique, avec la supposition que les temps de service  $\{\sigma_n\}$  forment une suite de variables aléatoires stationnaire et ergodique (sans l'hypothèse d'indépendance) et des temps d'inter-arrivées et d'inter-rappels i.i.d. chacune de distribution exponentielle, de paramètres  $\theta$  et  $\lambda$  respectivement. Ils ont modélisé la dynamique du processus nombre de clients dans l'orbite par une suite récursive stochastique  $\{X(n)\}$  aux instants de départs de service comme suit.

Soit  $u_n^1$  et  $u_n^2$  deux suites de v.a. i.i.d. de distributions uniformes sur  $[0, 1]$ , mutuellement indépendantes et indépendantes de la suite des temps de services  $\sigma_n$ , et soit  $\Pi : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$  l'inverse de la distribution de Poisson donnée par

$$\Pi(t, x) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n \frac{t^k \exp(-t)}{k!} \geq x \right\}.$$

Ainsi  $\Pi(t, u_n^1)$  est la distribution de Poisson de paramètre  $t$ . La SRS suivante a été construite dans [2] pour modéliser le système

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où

$$\xi_n = \Pi(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I} \left\{ u_n^2 \leq \frac{X(n)\theta}{\lambda + X(n)\theta} \right\}.$$

Il est clair que  $\xi_n$  dépend de  $X(n)$  à travers l'indicatrice. Aussi, la suite  $\xi_n$  ne peut être utilisée pour montrer la stationarité et l'ergodicité de  $X(n)$ . Une suite auxiliaire  $\{X^*(n)\}$  majorisant la SRS  $X(n)$  a été introduite en prenant

$$X^*(n+1) = \max [C, X^*(n) + \xi_n^*],$$

avec

$$\xi_n^* = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I} \left\{ u_n^2 \leq \frac{C\theta}{\lambda + C\theta} \right\},$$

où  $C$  est une constante positive convenablement choisie. Des événements de rénovation ont été ainsi construits pour la suite originale  $\{X(n)\}$  à partir de la suite majorante  $\{X^*(n)\}$ . En utilisant la méthode des événements de rénovation, plus précisément le Théorème 2.2 (voir chapitre 2), les auteurs ont montré que la SRS  $\{X(n)\}$  est convergente couplée au sens fort vers un régime stationnaire fini si la condition suivante est vérifiée

$$\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1.$$

Cette approche sera utilisée en détail dans le chapitre 4 pour des modèles de rappels particuliers, et une politique de rappels plus générale: la politique versatile.

### 3.4.2 Suite de temps d'inter-arrivées stationnaire ergodique

Considérons maintenant que les temps d'inter-arrivées  $\{\tau_n\}$  forment une suite stationnaire et ergodique, et que les temps de service  $\{\sigma_n\}$  et de rappels sont des suites i.i.d. de distributions exponentielles de paramètres  $\mu$  et  $\theta$  respectivement. La SRS a été construite aux instants juste avant les arrivées  $\{t_n\}$ , i.e.  $X(n) = X(t_n-)$ . Soit la v.a. définie par  $\sum_{0,n} := 0$ , et pour  $k > 0$ :

$$\sum_{k,n} := \sigma_1^n + \left( \frac{\alpha_1^n}{X(n)} + \sigma_2^n \right) + \left( \frac{\alpha_2^n}{X(n) - 1} + \sigma_3^n \right) + \dots + \left( \frac{\alpha_{k-1}^n}{X(n) - k + 2} + \sigma_k^n \right)$$

si  $X(n) \geq k - 1$ , avec  $\alpha_i^n$  et  $\sigma_i^n$  représentant les temps d'inter-rappels et de services respectivement.

$\sum_{k,n}$  peut être considérée comme le temps nécessaire pour servir  $k$  clients après le temps  $t_n$ .

Soit  $Z(n)$  le nombre de clients qui quittent le système durant l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1})$ . La représentation de la SRS  $X(n)$  est de la forme

$$X(n+1) = X(n) + 1 - Z(n).$$

Pour pouvoir construire des événements de rénovation, une suite majorante  $\bar{X}(n)$  a été introduite dans [2] comme suit: (i) les temps d'inter-rappels se font avec le taux  $C\theta$  si on a au moins  $C$  clients en orbite, les rappels sont stoppés si on a moins de  $C$  clients en orbite. La constante  $C$  est choisie telle que  $\mathbb{E}\sigma_1 + (1/C\theta) < \mathbb{E}\tau_1$ . On définit d'abord la suite suivante

$$\bar{Z}(n) = \min \left\{ k : \sigma_1^n + \sum_{l=2}^k \left( \frac{\alpha_l^n}{C} + \sigma_l^n \right) > \tau_n \right\}.$$

La suite est donnée maintenant par

$$\bar{X}(0) := X(0),$$

$$\bar{X}(n+1) := \max \{ \bar{X}(n) + 1 - \bar{Z}(n), C \}.$$

En construisant des évènements de rénovation pour  $X(n)$  à partir de ceux de la SRS  $\bar{X}(n)$ , les auteurs montrent de nouveau que la SRS  $\{X(n)\}$  est convergente couplée au sens fort vers un régime stationnaire fini si la condition suivante est vérifiée

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1.$$

# 4 STABILITÉ DE MODÈLES AVEC POLITIQUE DE RAPPELS VERSATILE

Dans ce chapitre nous présentons nos principaux résultats. En utilisant une approche similaire à celle d'Altman et Borovkov [2], on obtient une condition suffisante de stabilité d'un système avec politique de rappels versatile et temps de service stationnaire et ergodique. Nous étendons cette approche pour des modèles avec deux types de clients, pannes du serveur, clients négatifs et arrivées en groupes.

## 4.1 Politique de Rappels Versatile

Considérons un système à une file d'attente avec rappels et un serveur dans lequel les clients primaires entrent de l'extérieur aux temps  $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$ . Soit  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$  les temps successifs d'inter arrivées,  $i = 1, 2, \dots$ . Si le  $i^{\text{ème}}$  client arrivé trouve le serveur libre, il prend son service puis quitte le système. Autrement, si le serveur n'est pas libre, le client arrivé rejoint immédiatement l'orbite. La probabilité d'avoir un rappel durant l'intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$ , sachant que  $j$  clients sont en orbite au temps  $t$ , est  $(\theta(1 - \delta_{0j}) + j\mu)\Delta t + o(\Delta t)$ . Cela signifie qu'après un temps aléatoire de loi exponentielle de taux  $\theta$  (qu'on appelle temps de rappels de l'orbite), indépendant du processus d'arrivées, chaque client en orbite génère un flot Poissonien de tentative de rappels avec paramètre  $\mu$  et se comporte indépendamment des autres clients en orbite et du flux extérieur des arrivées. Ce modèle, introduit par Artalejo et Gomez-Corral [4], incorpore simultanément la politique de rappels classique et la politique constante. Si  $\mu = 0$ , on obtient la politique de rappels constante de paramètre  $\theta$ . Si le temps de rappels de l'orbite se termine avant une arrivée extérieure, alors un client de l'orbite (le premier de la file ou un autre choisi aléatoirement) occupe le serveur. Le  $n^{\text{ème}}$  temps de service est  $\sigma_n$ , et on suppose que  $0 < \mathbb{E}\sigma_n < \infty$ . On suppose durant toute cette section que la suite  $\{\sigma_n\}$  est stationnaire et ergodique, les suites des temps d'inter arrivées  $\{\tau_i\}$  sont i.i.d. exponentiellement distribués avec paramètre  $\lambda$ . Les temps d'inter arrivées, temps de rappels de l'orbite et temps de rappels de chaque client en orbite sont mutuellement indépendantes et indépendantes de  $\{\sigma_n\}$ . Soit  $X(t)$  le nombre de clients en orbite au temps  $t$ . On définit  $s_n$  comme étant l'instant de fin du  $(n-1)^{\text{ème}}$  service. On considère le processus induit  $X(n)$  juste après le temps  $s_n$ , (i.e.,  $X(n) = X(s_n^+)$ ). Après la fin du  $(n-1)^{\text{ème}}$  service, une compétition entre deux lois indépendantes (puisque le temps de rappels de l'orbite et les temps de rappels de chaque client en orbite sont indépendants du temps d'inter arrivée) exponentielles avec taux respectifs  $\lambda$  et  $\theta + X(n)\mu$  déterminent le client suivant qui va rejoindre le serveur. La probabilité qu'un temps de rappel expire avant le temps d'inter arrivée

est alors  $(\theta + X(n)\mu)/(\lambda + \theta + X(n)\mu)$ . Soit  $u_n^1$  et  $u_n^2$  deux suites de variables aléatoires i.i.d distribuées uniformément sur  $[0, 1]$ , mutuellement indépendantes et indépendantes de la suite  $\sigma_n$ .  $u^1 = \{u_n^1\}$  génère le processus des arrivées, et  $u^2 = \{u_n^2\}$  génère le type d'arrivée (extérieur ou de l'orbite) à la fin des périodes successives de services. Soit  $\prod : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{N}$  l'inverse de la distribution de Poisson

$$\prod(t, x) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} \geq x\}. \quad (4.1)$$

Ainsi  $\prod(t, u_n^1)$  est une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $t$ .

#### 4.1.1 Stabilité du Système

Le résultat suivant a été obtenu par Kernane et Aïssani [44].

**Théorème 4.1** *Soit un système  $M/G/1/1$  avec rappels et politique versatile de paramètres  $(\theta, \mu)$ , de flux d'arrivées Poissonien de taux  $\lambda$  et de suite des temps de service  $\{\sigma_n\}$  stationnaire et ergodique.*

Alors,

i) *Le processus  $X(n) = X(s_n+)$  induit aux instants de départs, satisfait la représentation sous forme de SRS*

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où  $x^+ = \max[0, x]$  et  $\xi_n$  est défini par

$$\xi_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I} \left\{ u_n^2 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu} \right\} \quad (4.2)$$

ii) *Le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si une des conditions suivantes est satisfaite:*

- 1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$  et  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda + \theta}$ ,
- 2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$  et  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < 1$ .

**Preuve** Pour la construction de la SRS  $X(n)$ , il faut noter seulement que la variable  $\prod(\lambda\sigma_n, u_n^1)$  compte le nombre d'arrivées pendant le temps de service  $\sigma_n$  et l'indicatrice  $\mathbb{I} \left\{ u_n^2 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu} \right\}$  vaut 1 si un client de l'orbite a obtenu le service après le temps  $s_n$ , et vaut 0 si c'est un client de l'extérieur qui l'obtient.

Pour la convergence couplée au sens fort du processus  $\{X(n)\}$ , considérons en premier le cas  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ , alors la suite (4.2) a la forme suivante

$$\xi_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I} \left\{ u_n^2 \leq \frac{\theta}{\lambda + \theta} \right\}.$$

Puisque la suite  $\{u_n^i\}$  est identiquement distribuée  $i = 1, 2$ , et donc stationnaire, elle peut être définie pour tout entier  $-\infty < n < \infty$ . Définissons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2; -\infty < k < \infty)$ . Soit  $U$  l'opérateur

de translation préservant la mesure des variables aléatoires  $\mathcal{F}^{\sigma,u}$ -mesurables générées par  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2; -\infty < n < \infty\}$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la variable aléatoire  $\xi_n$  est générée par  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2\}$ , alors d'après la Remarque 1.1  $\xi_{n+1} = U\xi_n$  et  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est stationnaire. De plus, puisque  $\{\sigma_n; -\infty < n < \infty\}$  est stationnaire et ergodique, et la suite  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est compatible avec l'opérateur de translation  $U$ , alors d'après la Remarque 1.2, la suite  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est ergodique. Nous avons

$$\mathbb{E}(\xi_n) = \lambda \mathbb{E}\sigma_1 - \frac{\theta}{\lambda + \theta}.$$

Donc si

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda + \theta}$$

est vérifiée alors  $\mathbb{E}(\xi_n) < 0$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $X(0) = a \geq 0$ . Pour tout choix de  $n_0$ , les événements  $A_n = T^n A_0$ , où  $A_0$  est donné par (2.3), c'est à dire

$$A_0 = \bigcap_{k=0}^{n_0-1} \{\xi_{-1} + \dots + \xi_{-1-k} \leq 0\} \cap \bigcap_{l \geq 1} \{\xi_{-1} + \dots + \xi_{-n_0-l} \leq -a\}, \quad (4.3)$$

forment une suite stationnaire d'évènements de rénovation avec  $m = 0$  et  $g(y) \equiv y^+$  (voir Exemple 2.1). En effet, pour  $n \geq n_0$ ,

$$X(n+1) = \xi_n^+ \text{ p.s. sur } A_n.$$

Puisque  $\mathbb{E}(\xi_n) < 0$  et la suite  $\{\xi_n\}$  est stationnaire et ergodique, alors d'après la loi forte des grands nombres de Birkhoff (1.2) pour les suites ergodiques, nous avons presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \xi_i = \mathbb{E}\xi_1 < 0,$$

ce qui donne *p.s.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_{-1} + \dots + \xi_{-n}) = -\infty.$$

Ainsi, il existe un nombre  $n_0 = n_0(a)$  tel que  $\mathbb{P}(A_n) > 0$  pour  $n \geq n_0$ . Si, d'autre part les événements  $B_n$ , le nombre  $m$ , et la fonction  $g : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$  sont définis comme

$$m = n_0, \quad B_n = T^m A_n, \quad g(y_0, \dots, y_m) \equiv y_m^+,$$

alors les événements  $B_n \in \mathcal{F}_{n+m}^\xi$  sont de rénovation pour  $\{X(n)\}$  sur le segment  $[n, n+m]$  pour tout  $n \geq 0$ . Donc, on peut supposer que  $n_0 = 0$ . La positivité des probabilités des  $B_n$  vient du fait que les  $A_n$  sont  $T$ -invariantes et cela est dû à la stationnarité de la suite  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$ , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(T^m A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_n) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le Théorème 2.2, la suite  $\{X(n)\}$  est couplée au sens fort avec une unique suite stationnaire  $\{X^n \equiv U^n X^0\}$ , où  $X^0$  est  $\mathcal{F}^{\sigma,u}$ -mesurable, obéissant

l'équation  $X^{n+1} = (X^n + \xi_n)^+$ . L'ergodicité vient de la Remarque 1.2 et du fait que  $X^n$  est compatible avec l'opérateur de translation (shift)  $U$ .

Considérons maintenant le cas  $\theta \geq 0$  et  $\mu > 0$ . Les événements de rénovation  $A_n$  seront construits maintenant en deux étapes. On va introduire au début une SRS majorante  $X(n)^*$  sur le même espace de probabilité, qui va nous permettre d'obtenir des événements stationnaires de rénovation simples  $A_n^*$ , de probabilité positive, et les événements  $A_n$  seront obtenus comme sous-ensembles de  $A_n^*$ . La SRS  $X(n)^*$  a la forme suivante:

$$X(0)^* = X(0), \quad X(n+1)^* = \max(C, X(n)^* + \xi_n^*),$$

où

$$\xi_n^* = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I} \left\{ u_n^2 \leq \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu} \right\}.$$

La suite  $\{\xi_n^*\}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}^{\sigma, u}$  et  $\xi_{n+1}^* = U\xi_n^*$ . De cela et des remarques 1.1 and 1.2 il suit que la suite  $\{\xi_n^*\}$  est stationnaire et ergodique. On choisit la constante  $C$  telle que  $\mathbb{E}\xi_n^* < 0$ , si la condition  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < 1$  est vérifiée, où

$$\mathbb{E}(\xi_n^*) = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 - \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}.$$

Donc, il existe des événements de rénovation  $A_n^* = T^n A_0^*$ ,  $n \geq n_0$ , où  $A_0^*$  est défini comme (4.3) avec la suite  $\{\xi_n^*\}$ , et  $\mathbb{P}(A_0^*) > 0$ , tel que  $X(n)^* = C$  sur l'ensemble  $A_n^*$  pour tout  $n \geq n_0$ . Définissons les ensembles

$$B_0 = \left\{ \prod (\lambda \sigma_{-k}, u_{-k}^1) = 0, \quad u_{-k}^2 \leq \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu}, \quad k = 1, \dots, C \right\},$$

$$B_n = T^n B_0.$$

Les ensembles  $A_n = A_{n-C}^* \cap B_n$  forment une suite stationnaire d'évènements de rénovation pour  $X(n)$ , puisque pour tout  $n \geq n_0 + C$ , nous avons sur  $A_n$ , les valeurs  $X(n-k) \leq k$ ,  $k = 0, 1, \dots, C$ , et en particulier,  $X(n) = 0$ . On doit montrer maintenant que les événements de rénovation  $A_n$  sont de probabilités strictements positives. Pour cela il suffit de montrer que  $\mathbb{P}(A_0) > 0$ , car les ensembles  $A_n$  sont stationnaires. On a  $\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(A_{-C}^*) \mathbb{P}(B_0 | A_{-C}^*)$ , et puisque  $\mathbb{P}(A_{-C}^*) = \mathbb{P}(T^n A_0^*) = \mathbb{P}(A_0^*) > 0$ , il nous reste à montrer que  $\mathbb{P}(B_0 | A_{-C}^*) > 0$ . En suivant la démarche utilisée dans [2] p.354, et en l'adaptant à la politique de rappels versatile, on a

$$\mathbb{E}(\sigma_{-C} + \dots + \sigma_{-1} | A_{-C}^*) \leq \frac{C\mathbb{E}\sigma_1}{\mathbb{P}(A_{-C}^*)} < \infty.$$

De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_0 | A_{-C}^*) &= \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda(\sigma_{-C} + \dots + \sigma_{-1})} | A_{-C}^* \right] \prod_{k=1}^C \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu} \\ &\geq e^{-\lambda\mathbb{E}(\sigma_{-C} + \dots + \sigma_{-1} | A_{-C}^*)} \prod_{k=1}^C \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a une suite stationnaire  $\{A_n\}$  d'évènements de rénovation de probabilités strictement positives pour la SRS  $X(n)$ . Puisque la SRS  $X(n)$  vérifie une récurrence stochastique de la forme  $X(n+1) = f(X(n), \sigma_n)$ , avec  $\{\sigma_n\}$  une suite stationnaire et ergodique, la convergence couplée au sens fort du processus  $X(n)$  vers un régime stationnaire  $\{X^n \equiv U^n X^0\}$ , où  $X^0$  est  $\mathcal{F}^{\sigma, u}$  mesurable, vérifiant  $X^{n+1} = f(X^n, \sigma_n)$  vient du Théorème 2.2. L'ergodicité vient du fait que  $X^n$  est compatible avec l'opérateur de translation (shift)  $U$ . ■

**Remarque 4.1** *Bien que les conditions du théorème 4.1 soient suffisantes pour la stabilité, on conjecture qu'elles sont nécessaires. Ceci est dû au fait que pour les SRS de la forme  $X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+$ , la condition  $\mathbb{E}\xi_n > 0$  entraîne que le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre, i.e.,  $X(n) \rightarrow \infty$  p.s., et cela peut être étendu sous des suppositions assez larges au cas  $\mathbb{E}\xi_n = 0$  (voir Lemme 2.1). Cela peut se confirmer par le fait qu'un système avec rappels est généralement plus congestionné qu'un modèle simple sans rappels. Plus précisément, considérons un processus auxiliaire  $X^S(n)$  coorespondant à une file simple sans rappels, i.e.*

$$X^S(0) = X(0), \quad X^S(n+1) = (X^S(n) + \xi_n^S)^+, \quad (4.4)$$

où

$$\xi_n^S = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - 1. \quad (4.5)$$

Il est clair que

$$X^S(n) \leq_{st} X(n)$$

où  $\leq_{st}$  veut dire stochastiquement inférieur et si  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 > 1$   $\mathbb{E}\xi_n^S > 0$  alors d'après le Lemme 2.1  $\lim_{n \rightarrow \infty} X^S(n) = +\infty$  p.s. ce qui conduit à  $\lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = +\infty$  p.s.

#### 4.1.2 Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante

On peut montrer une condition d'instabilité pour la politique constante puisque dans ce cas le taux de rappels ne dépend pas du nombre de clients en orbite.

**Proposition 4.1** *Soit un système  $M/G/1/1$  avec rappels et politique constante i.e.,  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ .*

*Si  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 > \theta/(\lambda + \theta)$ , alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une distribution limite impropre.*

**Preuve** Si la condition  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 > \theta/(\lambda + \theta)$ , est vérifiée cela entraîne que  $\mathbb{E}(\xi_n) > 0$ . D'après le Lemme 2.1, la SRS  $X(n)$  converge vers une limite impropre, i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = +\infty$  p.s. ■

## 4.2 Deux types de clients

Considérons maintenant une file d'attente avec rappels et deux types de clients, qu'on appelle "impatient" et "persistant". Si un client impatient trouve le serveur occupé alors il quitte le système. Par contre, si un client persistant arrive et trouve le serveur occupé, alors il peut joindre l'orbite et refait sa tentative ultérieurement

selon la politique de rappels versatile décrite précédemment. Nous supposons que les temps d'inter-arrivées  $\{\tau_n^1\}$  du type 1 (impatient) et  $\{\tau_n^2\}$  du type 2 (persistant) sont des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec des distributions exponentielles de paramètres  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  respectivement. Les temps de services  $\{\sigma_n^1\}$  (pour le type 1) et  $\{\sigma_n^2\}$  (pour le type 2) sont stationnaires et ergodiques, indépendantes l'une de l'autre et de  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$ , temps de rappels de l'orbite et temps de rappels de chaque client en orbite, et  $0 < \mathbb{E}(\sigma_n^j) < \infty$ ,  $j = 1, 2$ . Les suites  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$ , temps de rappels de l'orbite et temps de rappels de chaque client en orbite sont indépendantes l'une de l'autre. Soit  $X(t)$  le nombre de clients en orbite au temps  $t$ . On définit  $s_n$  comme étant l'instant où le  $(n-1)^{\text{ème}}$  temps de service se termine. On considère le processus induit  $X(n)$  immédiatement après le temps  $s_n$ , (i.e.,  $X(n) = X(s_n^+)$ ). Soient  $\{u_n^1\}$  et  $\{u_n^2\}$  définies comme dans la section précédente, et indépendantes des suites  $\{\sigma_n^1\}$  et  $\{\sigma_n^2\}$ , sauf que maintenant  $u^2 = \{u_n^2\}$  générera le type de requête de service: client impatient, client persistant de l'extérieur ou client persistant de l'orbite à la fin des temps successifs de services.

#### 4.2.1 Stabilité du Système

Nous avons obtenu dans [44] le résultat suivant.

**Théorème 4.2** *Soit un système  $(M_1, M_2)/G/1/1$  avec rappels et politique versatile de paramètres  $(\theta, \mu)$  et deux types de clients caractérisés par des taux d'arrivées Poissoniens  $\lambda_1, \lambda_2$ , et de suite des temps de service  $\{\sigma_n^1\}$  et  $\{\sigma_n^2\}$  stationnaires et ergodiques.*

Alors,

i) *Le processus  $X(n) = X(s_n^+)$  induit aux instants de départs, satisfait la représentation sous forme de SRS*

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où la suite  $\{\xi_n\}$  est de la forme

$$\begin{aligned} \xi_n = & \prod(\lambda_2 \sigma_n^1, u_n^1) \mathbb{I} \left\{ u_n^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu} \right\} \\ & + \prod(\lambda_2 \sigma_n^2, u_n^1) \mathbb{I} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu} < u_n^2 \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu} \right\} \\ & + \prod(\lambda_2 \sigma_n^2, u_n^1) \mathbb{I} \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu} < u_n^2 \leq 1 \right\} \\ & - \mathbb{I} \left\{ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu} < u_n^2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

ii) *Le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si l'une des conditions suivantes est satisfaite:*

- 1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$  et  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2(\theta \mathbb{E}\sigma^2 + \lambda_1 \mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < 1$ ,
- 2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$  et  $\lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2 < 1$ .

**Preuve** Le principe de la construction de la SRS  $X(n)$  est le même que pour le cas du système précédent. Considérons le premier cas  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ . Alors la suite

$\{\xi_n\}$  a la forme

$$\begin{aligned} \xi_n = & \prod(\lambda_2\sigma_n^1, u_n^1)\mathbb{I}\left\{u_n^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta}\right\} + \\ & \prod(\lambda_2\sigma_n^2, u_n^1)\mathbb{I}\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < u_n^2 \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta}\right\} + \\ & \prod(\lambda_2\sigma_n^2, u_n^1)\mathbb{I}\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < u_n^2 \leq 1\right\} - \mathbb{I}\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < u_n^2 \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Définissons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma,u} = \sigma(\sigma_k^1, \sigma_k^2, u_k^1, u_k^2; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma,u} = \sigma(\sigma_k^1, \sigma_k^2, u_k^1, u_k^2; -\infty < k < \infty)$ . Soit  $U$  l'opérateur de translation préservant la mesure des variables aléatoires  $\mathcal{F}^{\sigma,u}$ -mesurables engendrées par  $\{\sigma_n^1, \sigma_n^2, u_n^1, u_n^2; -\infty < n < \infty\}$ , et  $T$  l'opérateur correspondant des événements  $\mathcal{F}^{\sigma,u}$ -mesurables. Puisque  $\xi_n$  est engendrée par  $\{\sigma_n^1, \sigma_n^2, u_n^1, u_n^2\}$ , alors  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est compatible avec l'opérateur  $U$ . Ainsi, des deux remarques 1.1 et 1.2 la suite  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est stationnaire et ergodique.

Nous avons

$$\mathbb{E}(\xi_n) = \frac{\lambda_2(\theta\mathbb{E}\sigma^2 + \lambda_1\mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2\mathbb{E}\sigma^2) - \theta}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta},$$

Donc si

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2(\theta\mathbb{E}\sigma^2 + \lambda_1\mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2\mathbb{E}\sigma^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < 1,$$

alors  $\mathbb{E}(\xi_n) < 0$ . Comme pour le premier cas du Théorème 4.1, on construit des évènements de rénovation  $A_n = T^n A_0$ , où  $A_0$  est donné par (2.3). Le choix de l'entier  $n_0$  est déterminé par la loi forte des grand nombres de Birkhoff (1.2) pour les suites ergodiques. En appliquant le Théorème 2.2 on obtient le résultat désiré.

Pour le cas  $\theta \geq 0$  et  $\mu > 0$ , on construit une SRS majorante comme suit:

$$X(0)^* = X(0), \quad X(n+1)^* = \max(C, X(n)^* + \xi_n^*),$$

où

$$\begin{aligned} \xi_n^* = & \prod(\lambda_2\sigma_n^1, u_n^1)\mathbb{I}\left\{u_n^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu}\right\} \\ & + \prod(\lambda_2\sigma_n^2, u_n^1)\mathbb{I}\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} < u_n^2 \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu}\right\} \\ & + \prod(\lambda_2\sigma_n^2, u_n^1)\mathbb{I}\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} < u_n^2 \leq 1\right\} - \mathbb{I}\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} < u_n^2 \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}(\xi_n^*) = \frac{\lambda_2(\lambda_1\mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2\mathbb{E}\sigma^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} + \frac{\theta + C\mu}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} (\lambda_2\mathbb{E}\sigma^2 - 1).$$

La suite  $\{\xi_n^*\}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}^{\sigma,u}$  et  $\xi_{n+1}^* = U\xi_n^*$ . De cela et des remarques 1.1 et 1.2, il suit que la suite  $\{\xi_n^*\}$  est stationnaire et ergodique. On choisit la constante  $C$  telle que  $\mathbb{E}\xi_n^* < 0$  si la condition  $\lambda_2\mathbb{E}\sigma^2 < 1$  est vérifiée, et le reste de la preuve est similaire à la seconde partie de la preuve du Théorème 4.1. ■

### 4.2.2 Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante

**Proposition 4.2** *Soit un système  $(M_1, M_2)/G/1/1$  avec rappels et politique constante i.e.,  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ , et deux types de clients. Si*

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2(\theta\mathbb{E}\sigma^2 + \lambda_1\mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2\mathbb{E}\sigma^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} > 1, \quad (4.6)$$

alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.

**Preuve** Si la condition (4.6) est vérifiée, cela entraîne que  $\mathbb{E}(\xi_n) > 0$ . D'après le Lemme 2.1, la SRS  $X(n)$  converge vers une limite impropre, i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = +\infty$  p.s. ■

## 4.3 Pannes du serveur

Considérons un système à un serveur avec rappels et serveur sujet à des pannes aléatoires. Les clients arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On considère la politique versatile de rappels décrite précédemment. Supposons que le serveur tombe en pannes au instants  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , selon un processus de Poisson de taux  $\alpha$ , i.e., le serveur tombe en pannes après des temps exponentiels de moyenne  $1/\alpha$ . Si une panne survient au temps  $\beta_i$  le serveur prend immédiatement un temps de réparation  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Nous supposons qu'après un temps de réparation le serveur est dans le même état initial et le service d'un client est cumulatif.

Nous supposons que les temps de service  $\{\sigma_n\}$  et temps de réparation  $\{r_i\}$  sont stationnaires, ergodiques et indépendants l'un de l'autre. Les temps d'inter arrivées, temps de rappels de l'orbite, temps de rappels de chaque client en orbite et temps de panne sont indépendants l'un de l'autre et des suites  $\{\sigma_n\}$  et  $\{r_i\}$ . Notons par  $r^{(n)} = (r_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots)$  la suite des temps de réparation qui surviennent durant le temps de service  $\sigma_n$ .

Soit  $X(t)$  le nombre de clients en orbite au temps  $t$ . Définissons  $s_n$  comme étant l'instant où le  $(n-1)^{\text{ème}}$  temps de service se termine. On considère le processus  $X(n)$  induit immédiatement après le temps  $s_n$ , (i.e.,  $X(n) = X(s_n^+)$ ). Soient  $\{u_n^1\}$ ,  $\{u_n^2\}$ ,  $\{u_n^3\}$  et  $\{u_i^{(n)}\}$  des suites de variables aléatoires i.i.d de distributions uniformes sur  $[0, 1]$ , mutuellement indépendantes et indépendantes des suites  $\{\sigma_n\}$  et  $\{r_i\}$ .  $u^1 = \{u_n^1\}$  générera le processus des arrivées,  $u^2 = \{u_n^2\}$  générera l'occurrence des pannes et  $\{u_n^3\}$  générera le type d'arrivées (extérieur ou de l'orbite) à la fin des temps successifs de service et  $\{u_i^{(n)}\}$  générera le processus des arrivées durant le  $i^{\text{ème}}$  temps de réparation qui survient durant le  $n^{\text{ème}}$  temps de service. Notons par  $u^{(n)} = \{u_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots\}$ .

### 4.3.1 Stabilité du Système

Le résultat suivant a été obtenu dans [44].

**Théorème 4.3** Soit un système  $M/G/1/1$  avec rappels, pannes et réparations du serveur, et politique versatile de paramètres  $(\theta, \mu)$ , de flux d'arrivées Poissonien de taux  $\lambda$ , d'occurrence Poissonienne des pannes de taux  $\alpha$  et de suites des temps de service  $\{\sigma_n\}$  et de réparation  $\{r_i\}$  stationnaires et ergodiques.

Alors,

i) Le processus  $X(n) = X(s_n+)$  induit aux instants de départs, satisfait la représentation sous forme de SRS

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où  $\xi_n$  est défini par

$$\xi_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) + \sum_{i=1}^{\prod(\alpha\sigma_n, u_n^2)} \prod(\lambda r_i^{(n)}, u_i^{(n)}) - \mathbb{I} \left\{ u_n^3 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu} \right\} \quad (4.7)$$

ii) Le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si une des conditions suivantes est satisfaite:

- 1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$  et  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1(1 + \alpha\mathbb{E}r_1) < \frac{\theta}{\lambda + \theta}$ ,
- 2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$  et  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1(1 + \alpha\mathbb{E}r_1) < 1$ .

**Preuve** Pour la construction de la SRS, notons que  $\prod(\lambda\sigma_n, u_n^1)$  et  $\prod(\lambda r_i, u_i^{(n)})$  représentent le nombre d'arrivées durant le  $n^{\text{ème}}$  temps de service et le  $i^{\text{ème}}$  temps de réparation respectivement.  $\prod(\alpha\sigma_n, u_n^2)$  compte le nombre de pannes durant le  $n^{\text{ème}}$  service  $\sigma_n$ . Si  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$  alors la suite (4.7) a la forme suivante:

$$\xi_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) + \sum_{i=1}^{\prod(\alpha\sigma_n, u_n^2)} \prod(\lambda r_i, u_i^{(n)}) - \mathbb{I} \left\{ u_n^3 \leq \frac{\theta}{\lambda + \theta} \right\}.$$

Définissons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, r} = \sigma(\sigma_k, r^{(k)}, u^{(k)}, u_k^1, u_k^2, u_k^3; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, r} = \sigma(\sigma_k, r^{(k)}, u^{(k)}, u_k^1, u_k^2, u_k^3; -\infty < k < \infty)$ . Soit  $U$  l'opérateur de translation préservant la mesure des variables aléatoires  $\mathcal{F}^{\sigma, u, r}$ -mesurables engendrées par  $\{\sigma_n, r^{(n)}, u^{(n)}, u_n^1, u_n^2, u_n^3; -\infty < n < \infty\}$ , alors la suite  $\{\xi_n\}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}^{\sigma, u, r}$ , et d'après les remarques 1.1 et 1.2,  $\{\xi_n\}$  est stationnaire et ergodique. De la formule de Wald et la propriété d'absence de mémoire du processus de Poisson on obtient

$$\mathbb{E}\xi_n = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 + (\alpha\mathbb{E}\sigma_1)(\lambda\mathbb{E}r_1) - \frac{\theta}{\lambda + \theta}.$$

Donc si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1(1 + \alpha\mathbb{E}r_1) < \theta/(\lambda + \theta)$  alors  $\mathbb{E}\xi_n < 0$ , et le reste de la preuve de la première condition est similaire à celle du Théorème 4.1.

On étudie maintenant le cas  $\theta \geq 0$  et  $\mu > 0$ . Considérons la SRS majorante:

$$X^*(0) = X(0), \quad X^*(n+1) = \max(C, X^*(n) + \xi_n^*),$$

où  $C$  est un entier arbitraire et

$$\xi_n^* = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) + \sum_{i=1}^{\prod(\alpha\sigma_n, u_n^2)} \prod(\lambda r_i, u_i^{(n)}) - \mathbb{I} \left\{ u_n^3 \leq \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu} \right\}.$$

La suite  $\{\xi_n^*\}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}^{\sigma,u,r}$ . De cela et des remarques 1.1 et 1.2, il suit que la suite  $\{\xi_n^*\}$  est stationnaire et ergodique. Si la condition  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1(1 + \alpha\mathbb{E}r_1) < 1$  est vérifiée, on peut facilement trouver une constante  $C$  telle que  $\mathbb{E}\xi_n^* < 0$ , où maintenant

$$\mathbb{E}(\xi_n^*) = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 + (\alpha\mathbb{E}\sigma_1)(\lambda\mathbb{E}r_1) - \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}.$$

Le reste de la preuve de la seconde condition est similaire à celle du Théorème 4.1. ■

### 4.3.2 Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante

On peut affirmer aussi, en utilisant le Lemme 2.1, que dans le cas d'une politique constante on a le résultat suivant:

**Proposition 4.3** *Soit un système M/G/1/1 avec rappels, pannes et réparations du serveur, et politique constante i.e.,  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ . Si*

$$\lambda\mathbb{E}\sigma_1(1 + \alpha\mathbb{E}r_1) > \frac{\theta}{\lambda + \theta}$$

*alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

## 4.4 Clients négatifs

Considérons maintenant une file d'attente avec un seul serveur et deux types d'arrivées: arrivées régulières et arrivées négatives. Dans les systèmes avec rappels, si un client régulier arrive et trouve le serveur occupé, il rejoint l'orbite et refait sa tentative ultérieurement pour avoir un service après un temps aléatoire; autrement, s'il trouve le serveur libre, il reçoit son service et quitte le système. Si un client négatif arrive dans un system occupé, il élimine immédiatement un client régulier de l'orbite s'il y en a au moins un. Autrement, si le serveur est libre il n'a aucun effet sur le système. Le concept des clients négatifs a été présenté par Gelenbe [36], qui a établi la solution sous forme de produit pour un réseau de file d'attente comprenant des arrivées négatives aussi bien que les régulières. Un rappel des résultats et des situations pratiques peut être trouvé dans Artalejo [3]. Gelenbe, Glynn et Sigman [37] ont obtenu les conditions de stabilité pour deux modèles des arrivées négatives, l'élimination du client en service (RCS) et l'élimination du client à la queue de la file d'attente (RCT). Artalejo et Gomez-Corral [5, 6] ont étendu les files d'attente avec des arrivées négatives à la situation où les clients réguliers suivent une politique de rappels. On suppose que les clients réguliers arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . L'accès au serveur à partir de l'orbite se fait selon la politique de rappels versatile. Nous supposons que les temps de services  $\{\sigma_n\}$  des clients réguliers forment une suite stationnaire et ergodique. Les clients négatifs arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux  $\delta$ . Les suites des temps d'inter arrivées des clients réguliers, temps d'inter arrivées des clients négatifs, temps de rappels de l'orbite et temps de rappels de chaque client en orbite

sont indépendantes l'une de l'autre et indépendantes de la suite  $\{\sigma_n\}$ . Soient  $\{u_n^1\}$ ,  $\{u_n^2\}$  et trois suites de variables aléatoires i.i.d distribuées uniformément sur  $[0, 1]$ , mutuellement indépendantes et indépendantes de la suite  $\{\sigma_n\}$ .  $u^1 = \{u_n^1\}$  engendrera le processus d'arrivées des clients réguliers,  $u^2 = \{u_n^2\}$  engendrera le processus d'arrivées des clients négatifs, et  $u^3 = \{u_n^3\}$  engendrera le type d'arrivée qui rejoint le service (extérieur ou de l'orbite) à la fin des temps successifs de service.

#### 4.4.1 Stabilité du Système

**Théorème 4.4** *Soit un système  $M/G/1/1$  avec clients négatifs et rappels de politique versatile de paramètres  $(\theta, \mu)$ , de flux d'arrivées Poissoniens pour les clients réguliers et négatifs de taux  $\lambda$  et  $\delta$  respectivement et de suite des temps de service  $\{\sigma_n\}$  stationnaire et ergodique.*

Alors,

i) *Le processus  $X(n) = X(s_n+)$  induit aux instants de départs, satisfait la représentation sous forme de SRS*

$$X(n+1) = (X(n) + \zeta_n - \eta_n)^+,$$

où

$$\zeta_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I}\left\{u_n^3 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu}\right\}, \quad (4.8)$$

et

$$\eta_n = \prod(\delta\sigma_n, u_n^2).$$

ii) *Le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si une des conditions suivantes est satisfaite:*

- 1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$  et  $\frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \theta)}{\theta} \mathbb{E}\sigma_1 < 1$ ,
- 2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$  et  $(\lambda - \delta) \mathbb{E}\sigma_1 < 1$ .

**Preuve** Considérons le premier cas  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ . Alors la suite (4.8) a la forme suivante

$$\zeta_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I}\left\{u_n^3 \leq \frac{\theta}{\lambda + \theta}\right\}.$$

On définit les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, u_k^3; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, u_k^3; -\infty < k < \infty)$ . Soit  $U$  l'opérateur de translation préservant la mesure des variables aléatoires  $\mathcal{F}^{\sigma, u}$ -mesurables engendrées par  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2, u_n^3; -\infty < n < \infty\}$ . Puisque la suite  $\zeta_n$  est engendrée par  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^3\}$  et  $\eta_n$  est engendrée par  $\{\sigma_n, u_n^2\}$  alors d'après les remarques 1.1 et 1.2,  $\zeta_n$  et  $\eta_n$  sont des suites stationnaires et ergodiques.  $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) = \lambda \mathbb{E}\sigma_1 - (\theta/(\lambda + \theta)) - \delta \mathbb{E}\sigma_1$  et si

$$\frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \theta)}{\theta} \mathbb{E}\sigma_1 < 1,$$

alors nous avons  $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) < 0$ , et le reste de la preuve est similaire à la première partie du théorème 4.1.

Nous étudierons maintenant le cas  $\theta \geq 0$  et  $\mu > 0$ . Nous suivrons la même méthode

que pour les deuxièmes parties des théorèmes précédents en construisant une SRS majorante  $X^*(n)$  définie comme suit:

$$X^*(0) = X(0), \quad X^*(n+1) = \max(C, X^*(n) + \zeta_n^* - \eta_n),$$

où

$$\zeta_n^* = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) - \mathbb{I} \left\{ u_n^3 \leq \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu} \right\},$$

La suite  $\{\zeta_n^*\}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}^{\sigma, u}$ . De cela, et des remarques 1.1 et 1.2, il suit que la suite  $\{\zeta_n^*\}$  est stationnaire et ergodique. Si  $(\lambda - \delta) \mathbb{E}\sigma_1 < 1$ , on peut facilement trouver une constante  $C$  telle que  $\mathbb{E}(\zeta_n^* - \eta_n) = (\lambda - \delta) \mathbb{E}\sigma_1 - ((\theta + C\mu)/(\lambda + \theta + C\mu)) < 0$ . Le reste de la preuve est similaire à la seconde partie du Théorème 4.1. ■

#### 4.4.2 Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante

Une condition d'instabilité peut être obtenue dans le cas de la politique constante, et on a le résultat similaire à la Proposition 4.1.

**Proposition 4.4** *Soit un système  $M/G/1/1$  avec clients négatifs et rappels de politique constante i.e.,  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ . Si*

$$\frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \theta)}{\theta} \mathbb{E}\sigma_1 > 1,$$

*alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

### 4.5 Arrivées en groupes

Soit un système à un serveur et rappels de politique versatile. Nous considérerons maintenant qu'à chaque instant d'arrivée  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , un lot aléatoire de  $a_k$  clients entrent dans le système. Si le serveur est occupé à l'instant d'arrivée, alors tout le lot d'arrivées rejoint l'orbite, autrement si le serveur est libre, alors un des clients du lot d'arrivées prend un service et les autres rejoignent l'orbite. Le premier modèle de ce type a été introduit par Falin [22], qui a obtenu la distribution jointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite. Une analyse plus détaillée du modèle a été donnée plus tard par Falin [23]. Nous supposons que le flux d'arrivées des clients de l'extérieur est un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , la suite des lots d'arrivées  $\{a_k\}$  est indépendante et identiquement distribuée avec une distribution générale de moyenne  $\bar{a}$ , où  $0 < \bar{a} < \infty$ . Le  $n^{\text{ième}}$  temps de service d'un client est  $\sigma_n$ , où  $0 < \mathbb{E}\sigma_n < \infty$ , et nous supposons que la suite  $\{\sigma_n\}$  est stationnaire ergodique. On note par  $a^{(n)} = (a_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots)$  les tailles des lots d'arrivées durant le temps de service  $\sigma_n$ . On suppose que le flux des entrées des clients, les tailles des lots d'arrivées, les temps de rappels de l'orbite, les temps de rappels de chaque client en orbite et les temps de service sont mutuellement indépendantes.

### 4.5.1 Stabilité du Système

**Théorème 4.5** Soit un système  $M^X/G/1/1$  avec arrivées en groupes et rappels de politique versatile de paramètres  $(\theta, \mu)$ , de flux d'arrivées Poissoniens de taux  $\lambda$ , distribution générale de moyenne  $\bar{a}$  pour la taille d'un groupe d'arrivées et de suite des temps de service  $\{\sigma_n\}$  stationnaire et ergodique.

Alors,

i) Le processus  $X(n) = X(s_n+)$  induit aux instants de départs, satisfait la représentation sous forme de SRS

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où

$$\begin{aligned} \xi_n = & \sum_{k=1}^{\Pi(\lambda\sigma_n, u_n^1)} a_k^{(n)} + (a_1 - 1)\mathbb{I}\left\{u_n^2 \leq \frac{\lambda}{\lambda + \theta + X(n)\mu}\right\} \\ & - \mathbb{I}\left\{\frac{\lambda}{\lambda + \theta + X(n)\mu} < u_n^2 \leq 1\right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

et  $a_1$  est la taille du lot de la première arrivée qui obtient le service si l'arrivée se produit avant le rappel.

ii) Le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort (strong coupling convergent) avec un unique régime stationnaire ergodique si une des conditions suivantes est satisfaite:

- 1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\lambda(\bar{a} - 1) < \theta$  et  $\lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\lambda(1 - \bar{a}) + \theta}{\lambda + \theta}$
- 2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$  et  $\lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 < 1$ .

**Preuve** Considérons le premier cas  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ , alors la suite régissant la dynamique du système (4.9) aura la forme suivante:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\Pi(\lambda\sigma_n, u_n^1)} a_k^{(n)} + (a_1 - 1)\mathbb{I}\left\{u_n^2 \leq \frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right\} - \mathbb{I}\left\{\frac{\lambda}{\lambda + \theta} < u_n^2 \leq 1\right\},$$

Définissons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, a} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, a^{(k)}; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, a} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, a^{(k)}; -\infty < k < \infty)$  et on assume que  $a_1$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, a}$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, a}$ . Soit  $U$  l'opérateur de translation shift préservant la mesure des variables aléatoires  $\mathcal{F}^{\sigma, u, a}$ -mesurable engendrées par  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2, a^{(n)}; -\infty < n < \infty\}$ . La suite  $\{\xi_n\}$  est  $\mathcal{F}^{\sigma, u, a}$ -mesurable, alors d'après les remarques 1.1 et 1.2,  $\{\xi_n\}$  est stationnaire ergodique. On a

$$\mathbb{E}\xi_n = \lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 + (\bar{a} - 1)\frac{\lambda}{\lambda + \theta} - \frac{\theta}{\lambda + \theta} = \lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 + \bar{a}\frac{\lambda}{\lambda + \theta} - 1,$$

et si la condition  $\lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 < ((\lambda(1 - \bar{a}) + \theta)/(\lambda + \theta))$  est vérifiée alors  $\mathbb{E}\xi_n < 0$ . La condition  $\lambda(\bar{a} - 1) < \theta$  vient du fait que  $\lambda(1 - \bar{a}) + \theta$  doit être positif. Le reste de la preuve est le même que la première partie du Théorème 4.1.

Considérons maintenant le second cas  $\theta \geq 0$  et  $\mu > 0$ . La SRS majorisante est maintenant de la forme

$$X^*(0) = X(0), \quad X^*(n+1) = \max(C, X^*(n) + \xi_n^*),$$

et

$$\xi_n^* = \sum_{k=1}^{\Pi(\lambda\sigma_n, u_n^1)} a_k^{(n)} + (a_1 - 1)\mathbb{I} \left\{ u_n^2 \leq \frac{\lambda}{\lambda + \theta + C\mu} \right\} \\ - \mathbb{I} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + \theta + C\mu} < u_n^2 \leq 1 \right\}.$$

La suite  $\{\xi_n^*\}$  est mesurable par rapport à la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}^{\sigma, u, a}$ . De cela et des remarques 1.1 et 1.2, il suit que la suite  $\{\xi_n^*\}$  est stationnaire et ergodique. On a  $\mathbb{E}(\xi_n^*) = \lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 + (\bar{a}\lambda/(\lambda + \theta + C\mu)) - 1$ , donc si la condition  $\lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 < 1$  est vérifiée on peut choisir la constante  $C$  assez large pour avoir  $\mathbb{E}(\xi_n^*) < 0$ . Le reste de la preuve est similaire à la seconde partie du Théorème 4.1. ■

#### 4.5.2 Condition d'instabilité pour la politique de rappels constante

**Proposition 4.5.** *Soit un système  $M^X/G/1/1$  avec arrivées en groupes et rappels de politique constante, i.e.,  $\theta > 0$  et  $\mu = 0$ . Si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

i)  $\lambda(\bar{a} - 1) \geq \theta,$

ii)  $\lambda\bar{a}\mathbb{E}\sigma_1 > \frac{\lambda(1 - \bar{a}) + \theta}{\lambda + \theta}$

alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.

La preuve de la Proposition 4.5 est une conséquence directe du Lemme 2.1.

# 5 STABILITÉ DE MODÈLES AVEC POLITIQUE DE CONTRÔLE ET DISTRIBUTION GÉNÉRALE POUR LES TEMPS DE RAPPELS

Récemment, il y a eu un grand intérêt sur des files d'attente avec distribution générale de temps de rappels. Ceci a été inspiré par l'observation des phénomènes de rappels dans des systèmes informatiques et de télécommunications où les temps de rappels peuvent à peine adapter une distribution exponentielle. La première tentative de généraliser la distribution de temps de rappels a été faite par Kapyrin [43] pour une politique de rappels linéaire, mais sa méthode s'est avérée incorrecte (voir Falin [24]). Choi, parc et Pearce [16] ont considéré une file d'attente avec distribution générale de temps de rappels et seulement le client à la tête de la file d'attente en orbite tente d'atteindre le serveur. Gomez-Corral [38] a étudié intensivement une file d'attente avec des temps de service indépendants et des temps de rappels de distribution générale avec la politique de contrôle.

Nous présentons dans ce chapitre des résultats de stabilité concernant des modèles de rappels avec politique de contrôle et distribution générale pour les temps de rappels. Le résultat de stabilité concernant le modèle de base avec contrôle des rappels a été obtenu dans [46].

## 5.1 Stabilité du modèle avec politique de contrôle des rappels

Considérons une file d'attente à un serveur avec des arrivées de l'extérieur aux temps  $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$  suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . On note par  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$  les temps successifs d'inter-arrivées,  $i = 1, 2, \dots$ . Si le client arrivée trouve le serveur occupée il rejoint un orbite de capacité infinie. S'il le trouve libre, il prend son service et quitte le système. L'accès de l'orbite au serveur suit une politique de contrôle des rappels, c.-à-d., après la fin d'un temps de service, on permet seulement au client à la tête de la file d'attente de réessayer pour atteindre le service selon une distribution de probabilité générale  $R(\cdot)$ , de densité  $r(\cdot)$  et transformée de Laplace  $r^*(\theta)$ . Le  $n^{\text{ème}}$  temps de service est  $\sigma_n$ , et on suppose que  $0 < \mathbb{E}\sigma_n < \infty$ . Notons par  $\{\alpha_n\}$  la suite des temps d'inter-rappels. On suppose dans tout ce chapitre que la suite  $\{\sigma_n\}$  est stationnaire et ergodique. On suppose dans cette section que les temps d'inter-arrivées  $\{\tau_i\}$  sont i.i.d. de distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ , les suites  $\{\tau_i\}$  et  $\{\alpha_j\}$  sont indépendante l'une de l'autre et de la suite  $\{\sigma_n\}$ . Soit  $X(t)$  le nombre de clients en orbite au temps  $t$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on définit la variable aléatoire  $\gamma(t)$  comme le temps qui sépare l'instant  $t$  de la prochaine arrivée. Définissons  $s_n$  comme

l'instant de fin du  $(n-1)^{\text{ème}}$  temps de service. On considère le processus  $X(n)$  induit immédiatement après le temps  $s_n$ , (i.e.,  $X(n) = X(s_n^+)$ ) et  $\gamma(s_n^+) = \gamma_n$ . Soit  $\{u_n\}$  une suite i.i.d de variables aléatoires de distribution uniforme sur  $[0, 1]$ , indépendante de la suite  $\sigma_n$  et qui générera le processus des arrivées. Soit  $\prod$  l'inverse de la distribution de Poisson définie comme dans le chapitre précédant par la relation (4.1)

Le processus  $X(n)$  satisfait à la relation récursive

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+$$

avec  $\xi_n$  donnée par:

$$\xi_n = \prod((\lambda\sigma_n, u_n) - I(\alpha_n < \gamma_n))$$

**Théorème 5.1** *Supposons que  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda)$ . Alors le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique.*

*Si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 > r^*(\lambda)$ , alors le processus  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Preuve** Définissons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, \alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k, \alpha_k; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, \alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k, \alpha_k; -\infty < k < \infty)$ . Soit  $U$  l'opérateur de translation des variables aléatoires  $\mathfrak{S}^{\sigma, u, \alpha}$ -mesurables engendrées par  $\{\sigma_n, u_n, \alpha_n; -\infty < n < \infty\}$ . D'après la Remarque 1.1, puisque la variable aléatoire  $\xi_n$  est engendrée par  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2\}$ , alors  $\xi_{n+1} = U\xi_n$  et  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est stationnaire. De plus, puisque  $\{\sigma_n; -\infty < n < \infty\}$  est stationnaire et ergodique et la suite  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est compatible avec l'opérateur  $U$ , alors d'après la Remarque 1.2 la suite  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est ergodique. On a

$$\mathbb{E}(\xi_n) = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 - P(\alpha_n < \gamma_n).$$

Puisque les arrivées suivent un processus de Poisson alors le temps résiduel d'arrivée  $\gamma_n$  est de distribution exponentielle de taux  $\lambda$ , et ainsi  $P(\alpha_n < \gamma_n) = r^*(\lambda)$ . Alors, si

$$\lambda\mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda)$$

est vérifiée on aura  $\mathbb{E}(\xi_n) < 0$ . Il suit du Théorème 2.2 que le processus  $\{X(n)\}$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire  $\{X^n \equiv U^n X^0\}$ , où  $X^0$  est  $\mathfrak{S}^{\sigma, u}$  mesurable, obéissant l'équation  $X^{n+1} = (X^n + \xi_n)^+$ , et l'ergodicité vient de la Remarque 1.2 et le fait que  $X^n$  est compatible avec l'opérateur  $U$ . La condition d'instabilité vient du Lemme 2.1. ■

## 5.2 Modèle avec Deux Types de Clients

Soit le modèle avec la politique de contrôle décrit ci-dessus dans lequel les arrivées sont de deux types, "impatient" et "persistant". Si un client impatient arrive à un serveur occupé alors il quitte le système. D'autre part, si un client persistant trouve le serveur occupé, il joint l'orbite et attend pour être servi plus tard selon la politique de contrôle. Si les temps de rappels sont supposés exponentiellement

distribués, nous obtenons le modèle avec la politique de rappels constante, et deux types de clients, étudié par Martin et Artalejo [54]. Supposons que les temps entre arrivées  $\{\tau_n^1\}$  de type 1 (impatient) et  $\{\tau_n^2\}$  de type 2 (persistant) sont des suites i.i.d exponentiellement distribuées avec taux  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  respectivement. Les temps de services  $\{\sigma_n^1\}$  (de type 1) et  $\{\sigma_n^2\}$  (de type 2) sont stationnaire et ergodique, indépendantes de  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$  et des temps de rappels  $\{\alpha_i\}$ , et  $0 < \mathbb{E}(\sigma_n^j) < \infty$ ,  $j = 1, 2$ . Les suites  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$  et  $\{\alpha_i\}$  sont indépendantes l'une de l'autre. La suite  $\{u_n\}$  engendrera seulement le processus d'arrivée du type 2. La représentation du processus  $X(n)$  est donnée par:

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où la suite de contrôle  $\{\xi_n\}$  est de la forme suivante  
 $\xi_n = \prod(\lambda_2 \sigma_n^1, u_n) I(\gamma_n^1 < \min\{\gamma_n^2, \alpha_n\}) + \prod(\lambda_2 \sigma_n^2, u_n) I(\gamma_n^2 < \min\{\gamma_n^1, \alpha_n\})$   
 $+ \prod(\lambda_2 \sigma_n^2, u_n) I(\alpha_n < \min\{\gamma_n^1, \gamma_n^2\}) - I(\alpha_n < \min\{\gamma_n^1, \gamma_n^2\})$ .  
 où  $\gamma_n^1$  et  $\gamma_n^2$  sont les temps résiduels à partir de la fin du  $(n-1)^{\text{ème}}$  temps de service jusqu'à l'arrivée de type 1 et 2 respectivement.

**Proposition 5.1** *Supposons que*

$$\lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2 + \frac{\lambda_2 (1 - r^*(\lambda_1 + \lambda_2)) [\lambda_1 \mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2]}{(\lambda_1 + \lambda_2) r^*(\lambda_1 + \lambda_2)} < 1. \quad (5.1)$$

*Alors le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique.*

*Si*

$$\lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2 + \frac{\lambda_2 (1 - r^*(\lambda_1 + \lambda_2)) [\lambda_1 \mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2]}{(\lambda_1 + \lambda_2) r^*(\lambda_1 + \lambda_2)} > 1, \quad (5.2)$$

*alors  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Preuve** Définissons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, \tau, \alpha} = \sigma(\sigma_k^1, \sigma_k^2, \tau_k^1, u_k, \alpha_k; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k^1, \sigma_k^2, \tau_k^1, u_k, \alpha_k; -\infty < k < \infty)$ . Soit  $U$  l'opérateur de translation des variables aléatoires  $\mathcal{F}^{\sigma, u, \tau, \alpha}$ -mesurables engendrées par  $\{\sigma_n^1, \sigma_n^2, \tau_n^1, u_n, \alpha_n; -\infty < n < \infty\}$ . Puisque  $\xi_n$  est engendrée par  $\{\sigma_n^1, \sigma_n^2, u_n^1, u_n^2\}$ , alors  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est compatible avec le "shift"  $U$ . Ainsi, des remarques 1.1 et 1.2 la suite  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  est stationnaire et ergodique. Puisque  $\prod(\lambda_2 \sigma_n^i, u_n)$ , compte le nombre d'arrivées de type 2 durant le temps de service  $\sigma_n^i$ , pour  $i = 1, 2$ , qui est supposé indépendant de  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$  et  $\alpha_n$ , alors  $\prod(\lambda_2 \sigma_n^i, u_n)$  est indépendant de  $I(\gamma_n^1 < \min\{\gamma_n^2, \alpha_n\})$ ,  $I(\gamma_n^2 < \min\{\gamma_n^1, \alpha_n\})$  et  $I(\alpha_n < \min\{\gamma_n^1, \gamma_n^2\})$ , pour  $i = 1, 2$ . On a

$$\mathbb{E}(\xi_n) = \lambda_2 \mathbb{E}\sigma^1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - r^*(\lambda_1 + \lambda_2)) + \lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - r^*(\lambda_1 + \lambda_2))$$

$$+ \lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2 r^*(\lambda_1 + \lambda_2) - r^*(\lambda_1 + \lambda_2),$$

d'où si la condition (5.1) est vérifiée alors  $\mathbb{E}(\xi_n) < 0$ , et il suit du Théorème 2.2 que le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire et ergodique.

### 5.3 Modèle avec Pannes du Serveur

On reprend le modèle avec pannes du serveur étudié dans la section 4.3 avec cette fois la politique de contrôle des rappels décrite ci-dessus. Les clients primaires arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson avec le taux  $\lambda$ . Supposons que le serveur tombe en panne au instants  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , selon un processus de Poisson avec taux  $\beta$ . Si une panne se produit au temps  $t_i$  le serveur prend immédiatement un temps de réparation  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Nous supposons qu'après un temps de réparation le serveur soit aussi bon que nouveau et le service d'un client est cumulatif.

Nous supposons que les temps de service  $\{\sigma_n\}$  et les temps de réparation  $\{v_i\}$  sont stationnaires et ergodiques et indépendant l'un de l'autre. Les temps d'inter-arrivées, rappels et de panne sont indépendant l'un de l'autre et des suites  $\{\sigma_n\}$  et  $\{v_i\}$ . Soit  $v^{(n)} = (v_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots)$  la suite des temps de réparation qui se produisent pendant le temps  $\sigma_n$ . Soit le processus  $X(n)$  inclus juste après le temps de fin de service  $s_n$ , (i.e.,  $X(n) = X(s_n^+)$ ). Soient  $u_n^1$ ,  $u_n^2$ , et  $u_i^{(n)}$  des suites de variables aléatoires i.i.d distribuées uniformément sur  $[0, 1]$ , mutuellement indépendantes et indépendantes des suites  $\{\sigma_n\}$  et  $\{v_i\}$ .  $u^1 = \{u_n^1\}$  engendrera le processus d'arrivée,  $u^2 = \{u_n^2\}$  engendrera l'occurrence des pannes et  $u_i^{(n)}$  engendrera le processus d'arrivée durant le  $i^{\text{ème}}$  temps de réparation qui se produit durant le  $n^{\text{ème}}$  temps de service, notons par  $u^{(n)} = (u_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots)$ . On a la représentation suivante du processus  $X(n)$ :

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où

$$\xi_n = \prod(\lambda\sigma_n, u_n^1) + \sum_{i=1}^{\prod(\beta\sigma_n, u_n^2)} \prod(\lambda v_i^{(n)}, u_i^{(n)}) - I(\alpha_n < \gamma_n) \quad (5.3)$$

**Proposition 5.2** *Supposons que*

$$\lambda\mathbb{E}\sigma_1 (1 + \beta\mathbb{E}v_1) < r^*(\lambda). \quad (5.4)$$

*Alors le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique.*

*Si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 (1 + \beta\mathbb{E}v_1) > r^*(\lambda)$ , alors  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Preuve** Notons que  $\prod(\lambda\sigma_n, u_n^1)$  and  $\prod(\lambda r_i, u_i^{(n)})$  représentent le nombre d'arrivées durant le  $n^{\text{ème}}$  temps de service  $\sigma_n$  et le  $i^{\text{ème}}$  temps de réparation  $r_i$  respectivement.  $\prod(\alpha\sigma_n, u_n^2)$  compte le nombre de pannes durant pendant le traitement de la  $n^{\text{ème}}$  durée de service  $\sigma_n$ . Définissons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, v, \alpha} = \sigma(\sigma_k, v^{(k)}, u^{(k)}, u_k^1, u_k^2, \alpha_k; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, v, \alpha} = \sigma(\sigma_k, v^{(k)}, u^{(k)}, u_k^1, u_k^2, \alpha_k; -\infty < k < \infty)$ . Soit  $U$  l'opérateur de translation correspondant. Donc la suite  $\{\xi_n\}$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}^{\sigma, u, v, \alpha}$ , et d'après les remarques 1.1 et 1.2,  $\{\xi_n\}$  est stationnaire et ergodique. De la formule de Wald, on a

$$\mathbb{E}\xi_n = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 + (\beta\mathbb{E}\sigma_1)(\lambda\mathbb{E}v_1) - r^*(\lambda).$$

Ainsi si  $\lambda\mathbb{E}\sigma_1 (1 + \beta\mathbb{E}v_1) < r^*(\lambda)$  alors  $\mathbb{E}\xi_n < 0$ , et le reste de la preuve est semblable à celui du Théorème 5.1.

## 5.4 Modèle avec Clients Négatifs

Nous considérons maintenant la stabilité d'une file d'attente avec rappels et deux types d'arrivées, régulier et négatif. Nous supposons que les clients réguliers arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . L'accès de l'orbite au serveur suit la politique de contrôle. Nous supposons que les temps de service  $\{\sigma_n\}$  des clients réguliers forment une suite stationnaire et ergodique. Les clients négatifs arrivent selon un processus de Poisson avec taux  $\delta$ . Les temps d'inter-arrivées des clients réguliers, les temps entre arrivées des clients négatifs et les temps de rappels sont indépendants de l'un l'autre et de la suite  $\{\sigma_n\}$ .  $u^1 = \{u_n^1\}$  engendrera le processus des arrivées des clients réguliers, et  $u^2 = \{u_n^2\}$  engendrera le processus des arrivées des clients négatifs à la fin des périodes successives de service. Soit  $X(n)$  défini comme ci-dessus et il a maintenant la représentation suivante:

$$X(n+1) = (X(n) + \zeta_n - \eta_n)^+,$$

où

$$\zeta_n = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - I(\alpha_n < \gamma_n), \quad (5.5)$$

et

$$\eta_n = \prod (\delta \sigma_n, u_n^2).$$

**Proposition 5.3** *Le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si la condition suivante est vérifiée*

$$(\lambda - \delta) \mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda). \quad (5.6)$$

*Si  $(\lambda - \delta) \mathbb{E}\sigma_1 > r^*(\lambda)$ , alors  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Preuve** On considère les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, \alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, \alpha_k; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, \alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, \alpha_k; -\infty < k < \infty)$  et  $U$  l'opérateur correspondant. Puisque la suite  $\zeta_n$  est engendrée par  $\{\sigma_n, u_n^1, \alpha_n\}$  et  $\eta_n$  est engendrée par  $\{\sigma_n, u_n^2\}$  alors des remarques 1.1 et 1.2,  $\zeta_n$  et  $\eta_n$  sont stationnaires et ergodiques.  $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) = \lambda \mathbb{E}\sigma_1 - r^*(\lambda) - \delta \mathbb{E}\sigma_1$  et si la condition (5.6) est vraie alors on a  $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) < 0$ , et le reste de la preuve est semblable à celui du Théorème 5.1.

### 5.4.1 Élimination par Groupes

Nous pouvons permettre des éliminations en lots des clients aux occurrences des arrivées négatives, c'est à dire si une arrivée négative se produit au temps  $t_i$  alors un groupe de taille aléatoire  $b_i$  de clients est éliminé de l'orbite. Soit  $\bar{b}$  la moyenne des tailles de clients éliminées et  $b^{(n)} = (b_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots)$  les tailles de clients éliminées qui se produisent pendant  $\sigma_n$ . La SRS dans ce modèle aura la représentation suivante

$$X(n+1) = (X(n) + \zeta_n - \eta_n)^+,$$

où

$$\zeta_n = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - I(\alpha_n < \gamma_n), \quad (5.7)$$

et

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\Pi(\delta\sigma_n, u_n^2)} b_k^{(n)}.$$

**Proposition 5.4** *Le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si la condition suivante est vérifiée*

$$(\lambda - \delta\bar{b}) \mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda). \quad (5.8)$$

*Si  $(\lambda - \delta\bar{b}) \mathbb{E}\sigma_1 > r^*(\lambda)$ , alors  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Preuve** Semblable à la preuve de la proposition précédente, en considérant les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, b, \alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, b^{(k)}, \alpha_k; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, b, \alpha} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, b^{(k)}, \alpha_k; -\infty < k < \infty)$  et en notant que  $\mathbb{E}(\zeta_n - \eta_n) = \lambda\mathbb{E}\sigma_1 - r^*(\lambda) - \delta\bar{b}\mathbb{E}\sigma_1$ .

## 5.5 Modèle avec Arrivées en Groupes

Considérons une file d'attente à un serveur avec rappels et politique de contrôle. Maintenant considérons qu'à chaque instant d'arrivée  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , un groupe aléatoire de  $a_k$  clients entre dans le système. Si le serveur est occupé à l'instant d'arrivée, alors le groupe de clients joint l'orbite, tandis que si le serveur est libre, alors un des clients d'arrivée commence son service et les autres vont rejoindre l'orbite. Le premier modèle de ce type a été introduit par Falin [22], qui a obtenu la distribution jointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite. Une analyse plus détaillée du modèle a été donnée plus tard par Falin [23]. On suppose que le flux d'arrivées suit un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , la suite des tailles des lots d'arrivées  $\{a_k\}$  est indépendante et identiquement distribuée avec une distribution générale de moyenne  $\bar{a}$ , avec  $0 < \bar{a} < \infty$ . Le  $n^{\text{ème}}$  temps de service d'un client est  $\sigma_n$ , où  $0 < \mathbb{E}\sigma_n < \infty$ , et suppose que la suite  $\{\sigma_n\}$  est stationnaire et ergodique. On note par  $a^{(n)} = (a_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots)$  le vecteur des tailles des groupes d'arrivées qui se produisent pendant le temps  $\sigma_n$ . Nous supposons que le flux d'entrée des clients, la taille des groupes, les temps de rappels et les temps de service sont mutuellement indépendants.

$X(n)$  possède la représentation suivante comme SRS

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

où

$$\begin{aligned} \xi_n = & \sum_{k=1}^{\Pi(\lambda\sigma_n, u_n^1)} a_k^{(n)} + (a_1 - 1)I(\gamma_n < \alpha_n) \\ & - I(\alpha_n < \gamma_n), \end{aligned} \quad (5.9)$$

et  $a_1$  est la taille de la première arrivée qui gagne le serveur si l'arrivée se produit avant le rappel.

**Proposition 5.5** *Le processus  $X(n)$  est couplé au sens fort avec un unique régime stationnaire ergodique si les conditions suivantes sont satisfaites*

$$\bar{a}(1 - r^*(\lambda)) < 1 \text{ and } \lambda \bar{a} \mathbb{E}\sigma_1 < 1 - \bar{a}(1 - r^*(\lambda)). \quad (5.10)$$

*Si  $\bar{a}(1 - r^*(\lambda)) \geq 1$  or  $\lambda \bar{a} \mathbb{E}\sigma_1 > 1 - \bar{a}(1 - r^*(\lambda))$ , alors  $X(n)$  converge en distribution vers une limite impropre.*

**Preuve** Définissons les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, \alpha, a} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, \alpha_k, a^{(k)}; k \leq n)$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, \alpha, a} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, \alpha_k, a^{(k)}; -\infty < k < \infty)$  et nous supposons que  $a_1$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_n^{\sigma, u, \alpha, a}$  et  $\mathcal{F}^{\sigma, u, \alpha, a}$ . Soit  $U$  l'opérateur de translation préservant la mesure des variables aléatoires  $\mathcal{F}^{\sigma, u, \alpha, a}$ -mesurable engendrées par  $\{\sigma_n, u_n^1, \alpha_n, a^{(n)}; -\infty < n < \infty\}$ . La suite  $\{\xi_n\}$  est  $\mathcal{F}^{\sigma, u, \alpha, a}$ -mesurable, alors d'après les remarques 1.1 et 1.2,  $\{\xi_n\}$  est stationnaire et ergodique. Nous avons

$$\mathbb{E}\xi_n = \lambda \bar{a} \mathbb{E}\sigma_1 + (\bar{a} - 1)(1 - r^*(\lambda)) - r^*(\lambda) = \lambda \bar{a} \mathbb{E}\sigma_1 + \bar{a}(1 - r^*(\lambda)) - 1,$$

et si la condition  $\lambda \bar{a} \mathbb{E}\sigma_1 < 1 - \bar{a}(1 - r^*(\lambda))$  est vérifiée alors  $\mathbb{E}\xi_n < 0$ . La condition  $\bar{a}(1 - r^*(\lambda)) < 1$  vient du fait que la quantité  $1 - \bar{a}(1 - r^*(\lambda))$  doit être positive. Le reste de la preuve est identique à celui du théorème 5.1.

## 5.6 Cas Particuliers

### 5.6.1 Temps de Rappels de Distribution Exponentielle

Supposons que les temps de rappels sont de distribution exponentielle de moyenne  $1/\theta$ , alors  $r^*(\lambda) = \theta/(\lambda + \theta)$  et la condition de stabilité  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda)$  devient:

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda + \theta}.$$

Considérons maintenant le modèle avec deux types de clients, alors  $r^*(\lambda_1 + \lambda_2) = \theta/(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta)$ , et après quelques transformations la condition de stabilité (5.1) devient:

$$\lambda_2(\theta \mathbb{E}\sigma^2 + \lambda_1 \mathbb{E}\sigma^1 + \lambda_2 \mathbb{E}\sigma^2) < \theta.$$

Pour le modèle avec pannes du serveur, la condition (5.4) aura la forme suivante:

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 (1 + \beta \mathbb{E}v_1) < \frac{\theta}{\lambda + \theta}.$$

Le modèle avec clients négatifs aura comme condition suffisante de stabilité:

$$\frac{(\lambda + \theta)(\lambda - \delta)}{\theta} \mathbb{E}\sigma_1 < 1.$$

Pour le modèle avec arrivées en groupes, la condition (5.10) est donnée par

$$\lambda(\bar{a} - 1) < \theta \text{ and } \lambda \bar{a} \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\lambda(1 - \bar{a}) + \theta}{\lambda + \theta}.$$

Ses résultats sont les mêmes que ceux obtenus dans Kernane et Aïssani [44] dans le cas d'une politique constante.

### 5.6.2 Distribution Hyperexponential

Supposons maintenant que les temps de rappels suivent une distribution hyperexponentielle avec densité  $r(x) = p\theta \exp(-\theta x) + (1-p)\theta^2 \exp(-\theta^2 x)$ ,  $0 \leq p < 1$ . Alors  $r^*(\lambda) = \theta [\lambda(p + (1-p)\theta) + \theta^2] / (\lambda + \theta)(\lambda + \theta^2)$ , et la condition de stabilité  $\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < r^*(\lambda)$  est dans ce cas

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \frac{\theta [\lambda(p + (1-p)\theta) + \theta^2]}{(\lambda + \theta)(\lambda + \theta^2)}.$$

Pour le modèle avec deux types de clients, la transformée de Laplace de  $r(x)$  est donnée par

$$r^*(\lambda_1 + \lambda_2) = \theta [(\lambda_1 + \lambda_2)(p + (1-p)\theta) + \theta^2] / (\lambda_1 + \lambda_2 + \theta)(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta^2),$$

et en remplaçant  $r^*(\lambda_1 + \lambda_2)$  dans (5.1) on obtient la condition suffisante de stabilité.

### 5.6.3 Distribution d'Erlang

La distribution d'Erlang est très utile pour décrire les variables aléatoire en théorie des files d'attente. La densité d'une loi d'Erlang *Erlang*  $(n, \mu)$  est donnée par  $r(x) = \mu^n \exp(-\mu x) x^{n-1} / (n-1)!$ ,  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Sa transformée de Laplace est  $r^*(s) = \mu^n / (s + \mu)^n$ . Donc le modèle de base sera stable si

$$\lambda \mathbb{E}\sigma_1 < \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^n.$$

Pour le modèle avec deux types de clients, on doit remplacer par

$$r^*(\lambda_1 + \lambda_2) = \mu^n / (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)^n$$

dans (5.1) pour obtenir la condition suffisante de stabilité et dans (5.2) pour la condition d'instabilité.

## CONCLUSION

Nous avons présenté dans cette thèse les différentes méthodes les plus utilisées dans l'étude de la stabilité des modèles de files d'attente avec des exemples d'applications. Ensuite, on a effectué une présentation des résultats de stabilité les plus importants dans les systèmes de files d'attente avec rappels.

Nos résultats ont concerné les systèmes avec rappels. On a modélisé la dynamique des systèmes en considération par des suites récurrentes stochastiques. La méthode utilisée pour obtenir des conditions suffisantes de stabilité est l'approche des événements de rénovation qui permet des hypothèses générales, en particulier que la suite des temps de service est stationnaire et ergodique ce qui exclut l'hypothèse d'indépendance généralement supposée. On conjecture, pour le cas d'une politique linéaire qu'elles sont nécessaires, on laisse cette étude pour des recherches futures. La manière dont ont été construites les suites récurrentes stochastiques modélisant la dynamique des systèmes considérés laisse présager sa possible généralisation à d'autres systèmes, comme des systèmes à plus de deux types de clients, à service en groupes, à éliminations en groupes. Il serait aussi intéressant de considérer une suite des temps d'inter-arrivées stationnaire et ergodique ou des temps de rappels de distribution générale au lieu d'une distribution exponentielle généralement utilisée dans la littérature. Pour la politique de contrôle des rappels, on a obtenu des résultats de stabilité dans le cas où la distribution des temps de rappels est générale. Un des problèmes ouverts est de considérer une distribution non-exponentielle pour les temps de rappels dans le cas d'une politique linéaire dépendant du nombre de clients en orbite. De plus, il a été observé que la loi exponentielle n'est pas un bon modèle pour le temps de rappels dans les systèmes de communication. Le caractère récursif des SRS peut bien servir pour la simulation des systèmes considérés.

## References

- [1] Akhmarov, I. and Leont'eva, N.P., Conditions for convergence to limit processes and the strong law of large numbers for queueing systems, *Teor. Veroyatnost i ee Primenen* **21** (in Russian) pp. 559-570, MR 58 # 24597 (1976).
- [2] Altman, E. and Borovkov, A.A., On the stability of retrial queues, *Queueing Systems* **26** (1997), 343-363.
- [3] Artalejo, J.R., G-networks: A versatile approach for work removal in queueing networks, *European J. Oper. Res.* **126** (2000), 233-249.
- [4] Artalejo, J.R., and Gomez-Corral, A., Steady state solutions of a single server queue with linear repeated requests, *J. Appl. Probab.* **34** (1997), 223-233.
- [5] Artalejo, J.R., and Gomez-Corral, A., Generalized birth and death processes with applications to queues with repeated attempts and negative arrivals, *OR Spektrum.* **20** (1998), 223-233.
- [6] Artalejo, J.R., and Gomez-Corral, A., On a single server queue with negative arrivals and request repeated, *J. Appl. Probab.* **36** (1999), 907-918.
- [7] Asmussen, S. and Foss, S.G., Renovation, regeneration, and coupling in multiple-server queues in continuous time, *Frontiers in Pure and Appl. Probab.* **1**, pp. 1-6, H. Niemi et al. (Eds), (1993).
- [8] Baccelli, F. and Foss, S.G., On the saturation rule for the stability of queues, *J. Appl. Probab.* **32** (1995), 494-507.
- [9] Bonald, T, Stabilité des systèmes dynamiques à évènements discrets: Application au contrôle de flux dans les réseaux de télécommunication, Thèse Docteur en Sciences, Ecole Polytechnique, 1999.
- [10] Borovkov, A.A., *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [11] Borovkov, A.A., *Asymptotic Methods in Queueing Theory*, John Wiley & Sons, 1984.
- [12] Borovkov, A.A., *Ergodicity and Stability of Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, 1998.
- [13] R.J. Boucherie and O.J. Boxma. The workload in the M/G/1 queue with work removal. *Probab. Engineering and Informational Sci.*, volume 10, pages 261–277, 1995.
- [14] Bourbaki, N., *Eléments de mathématique. Livre III. Topologie générale*. Hermann, Paris, 1975.
- [15] Cao, J. and Cheng, K., Analysis of M/G/1 queueing system with repairable service station, *Acta Math. Appl. Sinica* **5**, 113-127, (1982).

- [16] Choi, B.D.; Park, K.K.; Pearce C.E.M. An M/M/1 retrial queue with control policy and general retrial times. *Queueing Systems*. 1993, 14, 275-292.
- [17] R.B. Cooper, *Introduction to queueing theory*, Edward Arnold, (1981).
- [18] Dai, J. G., On positive Harris recurrence of multiclass queueing networks: a unified approach via fluid limit models, *Ann. Appl. Proba.* **5** (1995), 49-77.
- [19] Deul, N., Stationary conditions for multiserver queueing systems with repeated calls, *Elektronische informationsverarbeitung und Kybernetik*, 10-12 (16) (1980), 607-613.
- [20] Doob, J.L., *Stochastic Processes*, Wiley, 1953.
- [21] Erlang, A.K., Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, *Post Office Electr. Engin. J.*, **10** (1917), 189-197. Reprinted in E. Brockmeyer, H.L. Halstrøm and A. Jensen, *The Life and Works of A.K. Erlang*, 2nd ed, Acta Polytechnica Scandinavica, Copenhagen.
- [22] Falin, G.I., Aggregate arrival of customers in one-line system with repeated calls, *Ukr. Math. J.* **28** (1976), 437-440.
- [23] Falin, G.I., Functioning under nonsteady conditions of a single-channel system with group arrival of requests and repeated calls, *Ukr. Math. J.* **33** (1981), 429-432.
- [24] Falin, G.I., Single-line repeated orders queueing systems, *Math. Operat.forsch. Statist. Ser. Optim.* **5** (1986), 649-667.
- [25] Falin, G.I. and Templeton, J.G.C., *Retrial queues*, Chapman and Hall, New York, 1997.
- [26] Falin, G.I., Estimations of error in approximation of countable Markov chains associated with models of repeated calls, *Vestnik Moscow Univ. Ser. 1, Math. Mech.*, **2**, 12-15.
- [27] Falin, G.I., On ergodicity of multichannel queueing systems with repeated calls, *Sov. J. Comput. Sys. Sci.*, **25** (1), (1986) 60-65.
- [28] Falin, G.I., On sufficient conditions for ergodicity of multichannel queueing systems with repeated calls, *Adv. Appl. Probab.*, **16**, (1984), 447-448.
- [29] Fayolle, G., A simple telephone exchange with delayed feedbacks, In: *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*, (ed. by O.J. Boxma, J.W. Cohen and H.C. Tijms), Elsevier Science Amsterdam (1986).
- [30] Fayolle, G. and Iasnogorodski, R., Criteria for the non-ergodicity of stochastic processes: application to the exponential Back-off protocol, *J. Appl. Probab.* **24** (1987), 347-354.

- [31] Fayolle, G. and Brun, M. A., On a system with impatience and repeated calls, In: *Queueing theory and its applications, CWI Monographs, 7, pages 283-303, Amsterdam-New York, 1988, North-Holland.*
- [32] Foss, S.G., The method of renovating events and its applications in queueing theory, *Semi Markov Models, Theory and Applications*, Proc. 1-st Symp on Semi-Markov Processes, Brussel 1984 (Plenum 86).
- [33] Foss, S.G. and Kalashnikov, V.V., Regeneration and renovation in queues, *Queueing Systems* **8**:3 (1991), 211-223.
- [34] Foss, S.G. and Konstantopoulos, T., An overview of some stochastic stability methods, *Journal of Operation Research Society Japan*, **47** (2004) No.4, 275-303.
- [35] Gelenbe, E., Random neural networks with negative and positive signals and product form solution, *Neural Computation* **1** (1989) 502-510.
- [36] Gelenbe, E., Queueing networks with negative and positive customers and product form solution, *J. Appl. Probab.* **28** (1991), 656-663.
- [37] Gelenbe, E., Glynn, P., and Sigman, K., Queues with negative arrivals, *J. Appl. Probab.* **28** (1991), 245-250.
- [38] Gomez-Corral, A. Stochastic analysis of a single server retrial queue with general retrial times, *Nav. Res. Logistics.* 1999, 46, 561-581.
- [39] Greenberg, B. S., M/G/1 queueing systems with returning customers, *J. Appl. Probab.*, **26** (1) (1989) 152-163.
- [40] Greenberg, B. S. and Wolff, R. W., An upper bound on the performance of queues with returning customers, *J. Appl. Probab.*, **24** (2) (1987) 466-475.
- [41] Györfi L. and Morvai. G., Queueing for ergodic arrivals and services. In *I. Berkes, (ed.) et al., Limit theorems in probability and statistics. Fourth Hungarian colloquium on limit theorems in proba. and Stat, Balatonlelle, Hungary, 1999. volume II. Budapest: Janos Bolyai Mathematical Society* pages 127–141, 2002.
- [42] P.G. Harrison and E. Pitel. Sojourn times in single-server queues with negative customers. *J. Appl. Prob.*, volume 30, pages 943–963, 1993.
- [43] Karyin, V.A. A study of the stationary characteristics of a queueing system with recurring demands. *Cybernetics.* 1977, 13, 584-590.
- [44] Kernane, T. and Aïssani, A., Stability of retrial queues with versatile retrial policy, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* **2006** (2006), Article ID 54359, 16 pages.
- [45] Kernane, T., On the stability of queues with negative arrivals, *Preprint.*

- [46] Kernane, T., Conditions for the stability and instability of queueing systems with general retrial times, *Preprint*.
- [47] Kifer, Y., *Ergodic Theory of Random Transformations*, Birkhäuser, Boston 1996.
- [48] Kumar, P.R., et Meyn, S.P., Duality and linear programs for stability and performance analysis of queueing networks and scheduling policies, *IEEE Trans. Aut. Cont.* **41**, No.1 (1996), 4-17.
- [49] Lamperti, J., Criteria for the recurrence or transience of stochastic process. I, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **1** (1960), 314-330.
- [50] Liang, H.M., and Kulkarni, V.G., Stability condition for a single-server retrial queue, *Adv. Appl. Probab.* **25**:3 (1993), 690-701.
- [51] Lisek, B., A method for solving a class of recursive stochastic equations, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.* 60, No.2, 151-161.
- [52] Loynes. R.M., The Stability of a Queue with non-independent interarrival and Service Times. Proc. Cambridge Philos. Soc., 58:497–520, 1962.
- [53] Lyapunov, A. M., Problème général de la stabilité du mouvement, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* **9** (1907), 203-475.
- [54] Martin, M., and Artalejo, J.R., Analysis of an M/G/1 queue with two types of impatient units, *Adv. Appl. Prob.* **27** (1995), 840-861.
- [55] Pakes, A. G., Some conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains, *Operations Research*, **31**, No. 4, (1983), 783-788.
- [56] Rybko, A. N. and Stolyar, A. L., Ergodicity of stochastic processes describing the operations of open queueing networks, *Problemy Peredachi Informatsii* **28** (1992), 3-36.
- [57] Sennot, L. I., Humblet, P. A. and Tweedie, R. L., Mean drift and the non-ergodicity of Markov chains, *Operations Research*, **17** (1969), 1058-1061.
- [58] Wang, J., Cao, J. and Li, Q., Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs, *Queueing Systems* **38**, 363-380, (2001).
- [59] Wolff, R. W., *Stochastic Modeling and the theory of Queues*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [60] Yang, T.; Posner, M. J. M.; Templeton J. G. C.; Li, H. An approximation method for the M/G/1 retrial queue with general retrial times, *Eur. J. Oper. Res.* **1994**, 76, 552-562.

## Annexe

### Stability of Retrial Queues with Versatile Retrial Policy

TEWFIK KERNANE and AMAR AÏSSANI

*Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Volume 2006, Article ID 54359, Pages 1-16.*

# STABILITY OF RETRIAL QUEUES WITH VERSATILE RETRIAL POLICY

TEWFIK KERNANE AND AMAR AÏSSANI

*Received 19 December 2004; Revised 22 November 2005; Accepted 22 November 2005*

We consider in this paper the stability of retrial queues with a versatile retrial policy. We obtain sufficient conditions for the stability by the strong coupling convergence to a stationary ergodic regime for various models of retrial queues including a model with two types of customers, a model with breakdowns of the server, a model with negative customers, and a model with batch arrivals. For all the models considered we assume that the service times are general stationary ergodic and interarrival and retrial times are i.i.d. sequences exponentially distributed. For the model with unreliable server we also assume that the repair times are stationary and ergodic and the occurrences of breakdowns follow a Poisson process.

Copyright © 2006 T. Kernane and A. Aïssani. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

## 1. Introduction

We investigate in this paper the problem of stability condition for some retrial queueing models. The first model is a retrial queue with a versatile retrial policy which incorporates simultaneously the classical linear retrial policy and the constant one and is described as follows. Consider a single server queue in which a primary arriving customer who finds the server busy moves to a group of blocked customers called “orbit” and repeatedly re-tries for service until he finds the server free, and consider the following retrial policy for the access to the server from the orbit. The probability of a repeated attempt from the orbit during the interval  $(t, t + \Delta t)$ , given that  $j$  customers were in orbit at time  $t$ , is  $(\theta(1 - \delta_{0j}) + j\mu)\Delta t + o(\Delta t)$ . This model was defined by Artalejo and Gomez-Corral [4]. If  $\mu = 0$ , we obtain the constant retrial policy with parameter  $\theta$  introduced by Fayolle [14]. If a primary arriving customer finds the server free, he receives service and leaves the system. The second model is a retrial queue with two types of arriving customers, known as “impatient” and “persistent.” If an impatient customer finds the server busy, then it leaves the system. On the other hand, if a persistent customer arrives and finds the server busy, then he may have access to the orbit and waits to be served later according to the

## 2 Stability of retrial queues with versatile retrial policy

versatile retrial policy described above. If  $\mu = 0$ , we obtain the model with constant retrial policy and two types of customers studied by Martin and Artalejo [21]. The third model is a single server retrial queue with the server subject to random breakdowns and repairs. In the fourth model we consider the stability of a retrial queue with positive and negative customers. When a negative arrival occurs in the system, it immediately removes one regular customer if present. The concept of negative customers was introduced by Gelenbe [17], who established the product form solution for a queueing network including negative arrivals as well as regular ones. A review of results and practical situations can be found in Artalejo [3]. Gelenbe et al. [18] derived the stability conditions for two models of negative arrivals, the removal of customer in service (RCS) and removal of customer at the tail of the queue (RCT). Artalejo and Gomez-Corral [5, 6] extended the queues with negative arrivals to that when regular customers follow a retrial policy. Finally, we consider the stability of a retrial queue with batch arrivals. The first such model with the classical linear retrial policy was introduced by Falin [12], who derived the joint distribution of the server state and queue length. A more detailed analysis of the model was given later by Falin [13].

Most of the efforts in the study of retrial queues have been directed to the computation of the steady-state solutions assuming that such stationary regime exists. For an  $M/G/1$  queue with linear retrial policy under Markovian assumptions, that is, Poisson arrivals with rate  $\lambda$ , i.i.d. exponential retrial times with rate  $\theta$ , and i.i.d. general service times with rate  $\mu$ , the necessary and sufficient condition for stability is  $\lambda < \mu$ . Intuitively, we would expect that this condition is indeed sufficient in general. But, Liang and Kulka-rni [20] gave a counterexample showing that the system can be unstable even though the arrival rate is less than the service rate. The problem of deriving stability condition becomes nontrivial also when perturbing independence and/or exponential assumptions upon parametric distributions, it is essentially due to the difficulty of describing the basic process in terms of a Markov chain in a simple way. Similar arguments can be provided in the case of the model with constant retrial policy in which case the stability condition depends in general on the retrial rate.

We consider in this paper the approach based on constructing a class of processes, the so-called stochastic recursive sequences, which are of a more general and complicated nature than Markov processes and using the techniques of renovation events to obtain strong coupling convergence to a stationary ergodic regime. These techniques were formulated, in the stationary ergodic context, by Borovkov [9]. The approach of renovating events already has its roots in the early work by Akhmarov and Leont'eva [1]. These methods have further been developed in [7, 15, 16]. For the classical linear retrial queue, Altman and Borovkov [2] obtained sufficient conditions for the stability under various general assumptions for interarrival and service times, in particular they applied the method of renovation events to obtain ergodicity under general stationary ergodic service times and independent and exponentially distributed interarrival and retrial times. In Section 2, we give some backgrounds for stochastic recursive sequence theory and review the main theorem that enables us to obtain a strong coupling convergence to a stationary regime by using renovation events for the retrial queues described above. In Section 3, we apply the method of stochastic recursive sequences to the retrial queue

with the versatile retrial policy and we derive a sufficient stability condition under general assumption of stationary and ergodic service times, exponentially distributed interarrival and retrial times. In Section 4, we derive a sufficient stability condition for the retrial queue with two types of customers under general stationary ergodic service times for both types, and exponentially distributed interarrival and retrial times. In Section 5, we use the same method for the retrial queue with breakdowns and repairs to derive a sufficient stability condition under the assumptions that the service and repair times are stationary and ergodic sequences and independent and exponentially distributed interarrival, breakdown, and retrial times. In Section 6, we obtain a sufficient stability condition for the retrial queue with negative customers by assuming that the service times of the regular customers are stationary and ergodic, interarrival times of regular and negative customers and retrial times are independent and exponentially distributed. In Section 7, we consider a retrial queue with the versatile retrial policy in which customers arrive in batches and we derive a sufficient condition for stability under the assumptions that the service times are stationary and ergodic, interarrival and retrial times are independent and exponentially distributed and the sizes of batches of arrivals are independent and generally distributed.

## 2. Stochastically recursive sequences

Let  $X = \{X(n), n \geq 0\}$  and  $\{\xi_n\}$  be random sequences defined on the same probability space  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  and taking values in measurable spaces  $(\mathbf{X}, B_{\mathbf{X}})$  and  $(\mathbf{Y}, B_{\mathbf{Y}})$ , respectively. Assume moreover, that a measurable function  $f : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$  is defined on  $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, B_{\mathbf{X}} \times B_{\mathbf{Y}})$ .

*Definition 2.1.* A random sequence  $\{X(n)\}$  is called a stochastically recursive sequence (SRS) controlled by the governing sequence  $\{\xi_n\}$  if  $\{X(n)\}$  obey the equation

$$X(n+1) = f(X(n), \xi_n), \quad \forall n \geq 0. \tag{2.1}$$

Stochastically recursive sequences (SRS) are more general objects than Markov chains, that is, each Markov chain can be represented as an SRS with independent  $\xi_n$  (see Kifer [19] or Borovkov [10]).

We assume in the sequel that the sequence  $\{\xi_n\}$  is stationary (in the strict sense), that is, the distributions of the finite-dimensional random variables  $(\xi_{k+n_1}, \xi_{k+n_2}, \dots, \xi_{k+n_j})$  do not depend on  $k$  for any  $j$  and  $n_1, \dots, n_j$ . By the Kolmogorov's theorem on the extension of compatible distributions, a stationary sequence  $\{\xi_n; n \geq 0\}$  may be extended to obtain the sequence  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  stationary on the entire time-axis. Let us introduce the  $\sigma$ -algebras  $\mathfrak{F}_n^\xi = \sigma(\xi_k; k \leq n)$  and  $\mathfrak{F}^\xi = \sigma(\xi_k; -\infty < k < \infty)$ .

*Definition 2.2.* An event  $A \in \mathfrak{F}_{n+m}^\xi, m \geq 0$ , is a renovation event for the SRS  $X(n)$  on the segment  $[n, n+m]$  if there exists a measurable function  $g : \mathbf{Y}^{m+1} \rightarrow \mathbf{X}$  such that on the set  $A$ ,

$$X(n+m+1) = g(\xi_n, \dots, \xi_{n+m}). \tag{2.2}$$

#### 4 Stability of retrial queues with versatile retrial policy

The sequence  $A_n, A_n \in \mathfrak{F}_{n+m}^\xi$ , is a *renovating sequence of events* for the SRS  $X(n)$  if there exists an integer  $n_0$  such that (2.2) holds true for  $n \geq n_0$  with a common function  $g$  for all  $n$ . Let  $U$  be the measure-preserving shift transformation of  $\mathfrak{F}^\xi$ -measurable random variables generated by  $\xi_n$ ,  $U\xi_n = \xi_{n+1}$ , and  $U^k, k \geq 0$ , denote the  $k$ th iteration of  $U$ . A sequence  $\{\eta_n; -\infty < n < \infty\}$  is said to be compatible with the shift  $U$  if for any  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta_n$  is  $\mathfrak{F}^\xi$ -measurable and  $U\eta_n = \eta_{n+1}$ . We denote by  $T$  the corresponding transformation of events in the  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}^\xi$ :

$$T\{\omega : \xi_j(\omega) \in B_j; j = 1, \dots, k\} = \{\omega : \xi_{j+1}(\omega) \in B_j; j = 1, \dots, k\}, \quad (2.3)$$

and  $T^k, k \geq 0$ , denote the  $k$ th iteration of  $T$ .  $U^0$  and  $T^0$  are identity transformations, and  $U^{-k}, T^{-k}$  are the inverse transformations for  $U^k$  and  $T^k$ , respectively.

*Remark 2.3.* The  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}^\xi$  may be considered as a possibly larger  $\sigma$ -algebra in which an arbitrary sequence of independent random variables  $\{\zeta_n\}$ , taking values in a measurable space  $(Z, B_Z)$ , and not depending on  $\{\xi_n\}$ , is  $\mathfrak{F}^\xi$ -measurable since in this case  $\mathfrak{F}^\xi$  can be viewed as the  $\sigma$ -algebra generated by  $\{\xi_n\}$  and  $\{\zeta_n\}$  (we can denote it by  $\mathfrak{F}^{\xi, \zeta}$ ). The shift  $T$  will also be defined by means of the relation

$$\begin{aligned} T\{\omega : (\xi_{n+i}(\omega), \zeta_{n+i}(\omega)) \in B_i; i = 0, \dots, k\} \\ = \{\omega : (\xi_{n+i+1}(\omega), \zeta_{n+i+1}(\omega)) \in B_i; i = 0, \dots, k\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

for any sets  $B_1, \dots, B_k \in B_Y \times B_Z$  (see Borovkov [8, page 14]). Let  $U$  be the corresponding measure-preserving shift transformation of  $\mathfrak{F}^{\xi, \zeta}$ -measurable random variables, then for any  $\mathfrak{F}^{\xi, \zeta}$ -measurable random variable  $\eta$  the sequence  $\{\eta_n = U^n \eta, -\infty < n < \infty\}$  is obviously stationary (see Doob [11, page 452]), and consequently any sequence compatible with the shift  $U$  is stationary.

A set  $A \in \mathfrak{F}^\xi$  is called *invariant* with respect to the shift  $T$  if  $A = TA$  almost surely.

A sequence  $\{\xi_n\}$  is called *metrically transitive* if the only invariant sets are those which have probability 0 or 1.

A sequence  $\{\xi_n\}$  is *ergodic* if and only if for an arbitrary  $\mathfrak{F}^\xi$ -measurable random variable  $\eta$ , with  $\mathbf{E}\eta < \infty$ , we have almost surely

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U^i \eta = \mathbf{E}\eta. \quad (2.5)$$

If the sequence  $\{\xi_n\}$  is stationary, the relation (2.5) can be expressed in the following form:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} U^i \eta = \mathbf{E}\eta. \quad (2.6)$$

The later is called the *Birkhoff strong law of large numbers*.

A stationary sequence  $\{\xi_n\}$  is *ergodic* if and only if it is *metrically transitive* (see Doob [11, Chapter 10]).

*Remark 2.4.* If  $\{\xi_n\}$  is stationary and ergodic, then any sequence  $\{\eta_n; -\infty < n < \infty\}$  compatible with the shift  $U$  is also ergodic, that is, it satisfies the Birkhoff strong law of large numbers (see Doob [11, pages 455-456]).

We call the sequence of events  $\{A_n\}$  *stationary* if  $A_k = T^k A_0$  for all  $k$ . Let  $X^0$  be a random variable with values in the space  $\mathbf{X}$  that is measurable with respect to the  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}^\xi$ . Let  $\{X^n = U^n X^0\}$  be the stationary sequence constructed using  $X^0$ .

*Definition 2.5.* An SRS  $\{X(n)\}$  coupling converges to  $\{X^n\}$  if it satisfies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X(k) = X^k, \forall k \geq n\} = 1. \tag{2.7}$$

If we introduce the random variable

$$\nu_0 \equiv \min \{n \geq 0 : X(k) = X^k, \forall k \geq n\}, \tag{2.8}$$

the relation (2.7) becomes equivalent to

$$P(\nu_0 < \infty) = 1. \tag{2.9}$$

Put

$$\begin{aligned} X_k(n) &= U^{-k} X(n+k), \quad \text{for } n \geq -k, \\ \nu_k &= \min \{n \geq -k : X_k(n) = X^n\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Denote by  $\nu = \sup_{k \geq 0} \nu_k$  the time when all the sequences  $\{X_k(n), n \geq 0\}, k \geq 0$ , have fused with the sequence  $\{X^n\}$ .

*Definition 2.6.* A sequence  $\{X(n)\}$  is strong coupling convergent to the sequence  $\{X^n \equiv U^n X^0\}$  if

$$\nu < \infty \quad \text{a.s.} \tag{2.11}$$

This  $\nu$  is called the *strong coupling time*. Note that strong coupling convergence is stronger than coupling convergence, which implies the convergence in total variation and then the convergence in distribution. The following theorem (of Borovkov [10, Theorem 11.4]) gives a necessary and sufficient condition of strong coupling convergence of an SRS to a stationary ergodic process.

**THEOREM 2.7.** *The existence of a stationary sequence of renovation events  $A_n$  with  $P(A_n) > 0$  is the necessary and sufficient condition of strong coupling convergence of the SRS  $X(n)$  to a stationary sequence  $X^n$  obeying the equation  $X^{n+1} = f(X^n, \xi_n)$  where  $\xi_n$  is stationary and ergodic.*

### 3. Stability of the retrial queue with versatile retrial policy

We consider a single server retrial queue at which primary customers arrive to the system at times  $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$ . Let  $\tau_i = t_{i+1} - t_i$  be the successive interarrival times,  $i = 1, 2, \dots$ . If the  $i$ th arriving customer finds the server free, he receives service and leaves the system. Otherwise, if the server is busy, the arriving customer moves immediately to an “orbit.” The probability of a repeated attempt from the orbit during the interval  $(t, t + \Delta t)$ , given that  $j$  customers were in orbit at time  $t$ , is  $(\theta(1 - \delta_{0j}) + j\mu)\Delta t + o(\Delta t)$ . That is, after an exponential random time with rate  $\theta$  (which we will call the *orbit retrial time*), independent of the arrival process, each customer in orbit generates a Poisson stream of repeated attempts with parameter  $\mu$  and behaves independently of other customers in orbit and of the external arrival process. This model, introduced by Artalejo and Gomez-Corral [4], incorporates simultaneously the classical linear retrial policy and the constant one. If  $\mu = 0$ , we obtain the constant retrial policy with parameter  $\theta$ ; if the orbit retrial time ends before an external arrival, then one customer from the orbit (the customer at the head of the queue or a randomly chosen one) occupies the server. The  $n$ th service duration is  $\sigma_n$ , and we assume that  $0 < \mathbf{E}\sigma_n < \infty$ . We assume throughout this section that the sequence  $\{\sigma_n\}$  is stationary and ergodic, the interarrival times  $\{\tau_i\}$  are i.i.d. exponentially distributed with parameter  $\lambda$ , the interarrival times, orbit retrial times, and retrial times of each customer in orbit are mutually independent and independent of the sequence  $\{\sigma_n\}$ . Let  $X(t)$  be the number of customers in orbit at time  $t$ . Define  $s_n$  to be the instant when the  $(n - 1)$ st service time ends. We consider the process  $X(n)$  embedded immediately after time  $s_n$ , (i.e.,  $X(n) = X(s_n^+)$ ). After the end of the  $(n - 1)$ st service, a competition between two independent (since the orbit retrial time and retrial times of each customer in orbit are independent of the interarrival time) exponential laws with rates  $\lambda$  and  $\theta + X(n)\mu$  determines the next customer that gains the server and the probability that a retrial time expires earlier than the interarrival time is  $(\theta + X(n)\mu)/(\lambda + \theta + X(n)\mu)$ . Let  $u_n^1$  and  $u_n^2$  be two i.i.d. sequences of random variables distributed uniformly on  $[0, 1]$ , mutually independent and independent of the sequence  $\sigma_n$ .  $u^1 = \{u_n^1\}$  will generate the arrival process, and  $u^2 = \{u_n^2\}$  will generate the type of arrival (external or from the orbit) at the end of the successive service periods. Let  $\overline{\Pi} : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$  denote the inverse of the Poisson distribution

$$\overline{\Pi}(t, x) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} \geq x \right\}, \quad (3.1)$$

so that  $\overline{\Pi}(t, u_n^1)$  is a Poisson random variable with parameter  $t$ . We have the following representation of the process  $X(n)$ :

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+, \quad (3.2)$$

where  $x^+ = \max[0, x]$  and

$$\xi_n = \overline{\Pi}(\lambda\sigma_n, u_n^1) - I\left(u_n^2 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu}\right) \quad (3.3)$$

is the governing sequence.

**THEOREM 3.1.** *The process  $X(n)$  is strong coupling convergent to a unique stationary ergodic regime if one of the following conditions is fulfilled:*

- (1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$ , and  $\lambda \mathbf{E}\sigma_1 < \theta/(\lambda + \theta)$ ;
- (2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$ , and  $\lambda \mathbf{E}\sigma_1 < 1$ .

*Proof.* Consider the case  $\theta > 0$  and  $\mu = 0$ , then the driving sequence (3.3) has the form

$$\xi_n = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - I\left(u_n^2 \leq \frac{\theta}{\lambda + \theta}\right). \quad (3.4)$$

Since the sequence  $\{u_n^i\}$  is identically distributed for  $i = 1, 2$ , and hence stationary, it can be defined for all integers  $-\infty < n < \infty$ . Define the  $\sigma$ -algebras  $\mathfrak{F}_n^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2; k \leq n)$  and  $\mathfrak{F}^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2; -\infty < k < \infty)$ . Let  $U$  be the measure-preserving shift transformation of  $\mathfrak{F}^{\sigma, u}$ -measurable random variables generated by  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2; -\infty < n < \infty\}$ . From Remark 2.3, since for any  $n \in \mathbb{Z}$ , the random variable  $\xi_n$  is generated by  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2\}$ , then  $\xi_{n+1} = U\xi_n$  and  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  is stationary. Moreover, since  $\{\sigma_n; -\infty < n < \infty\}$  is stationary and ergodic and the sequence  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  is compatible with the shift  $U$ , then by Remark 2.4 the sequence  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  is ergodic. We have

$$\mathbf{E}(\xi_n) = \lambda \mathbf{E}\sigma_1 - \frac{\theta}{\lambda + \theta}, \quad (3.5)$$

so that if

$$\lambda \mathbf{E}\sigma_1 < \frac{\theta}{\lambda + \theta} \quad (3.6)$$

holds, then  $\mathbf{E}(\xi_n) < 0$ . With no loss of generality, we assume that  $X(0) = a \geq 0$ . Whatever the choice of  $n_0$ , the events  $A_n = T^n A_0$ , where

$$A_0 = \bigcap_{k=0}^{n_0-1} \{\xi_{-1} + \dots + \xi_{-1-k} \leq 0\} \bigcap_{l \geq 1} \{\xi_{-1} + \dots + \xi_{-n_0-l} \leq -a\}, \quad (3.7)$$

make a stationary sequence of renovation events with  $m=0$  and  $g(y) \equiv y^+$  (see Borovkov [10, Example 11.1]). Indeed, for  $n \geq n_0$ ,

$$X(n+1) = \xi_n^+ \quad \text{a.s. on } A_n. \quad (3.8)$$

Since  $\mathbf{E}(\xi_n) < 0$  and the sequence  $\{\xi_n\}$  is stationary and ergodic, then by the Birkhoff strong law of large numbers for ergodic sequences, we have almost surely

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \xi_i = \mathbf{E}\xi_1 < 0, \quad (3.9)$$

and it follows that almost surely

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_{-1} + \dots + \xi_{-n}) = -\infty, \quad (3.10)$$

## 8 Stability of retrial queues with versatile retrial policy

hence there is a number  $n_0 = n_0(a)$  such that  $P(A_n) > 0$  for  $n \geq n_0$ . If, on the other hand, the events  $B_n$ , the number  $m$ , and the function  $g: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$  are defined as

$$m = n_0, \quad B_n = T^m A_n, \quad g(y_0, \dots, y_m) \equiv y_m^+, \quad (3.11)$$

then the events  $B_n \in \mathfrak{F}_{n+m}^\xi$  are renovating for  $\{X(n)\}$  on the segment  $[n, n+m]$  for all  $n \geq 0$ , so one can assume that  $n_0 = 0$ . Hence, using Theorem 2.7, the sequence  $\{X(n)\}$  is strong coupling convergent to a unique stationary sequence  $\{X^n \equiv U^n X^0\}$ , where  $X^0$  is  $\mathfrak{F}^{\sigma, \mu}$ -measurable, obeying the equation  $X^{n+1} = (X^n + \xi_n)^+$ , and the ergodicity follows from Remark 2.4 and the fact that  $X^n$  is compatible with the shift  $U$ .

Let us now consider the case  $\theta \geq 0$  and  $\mu > 0$ . The renovation events  $A_n$  will be constructed now in two steps. We will first introduce a majorizing SRS  $X(n)^*$  on the same probability space, which will enable us to obtain simple stationary renovating events  $A_n^*$  with positive probability, and  $A_n$  will be obtained as some subsets of  $A_n^*$ . The SRS  $X(n)^*$  has the following form:

$$X(0)^* = X(0), \quad X(n+1)^* = \max(C, X(n)^* + \xi_n^*), \quad (3.12)$$

where

$$\xi_n^* = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - I\left(u_n^2 \leq \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}\right). \quad (3.13)$$

The sequence  $\{\xi_n^*\}$  is measurable with respect to  $\mathfrak{F}^{\sigma, \mu}$  and  $\xi_{n+1}^* = U\xi_n^*$ . From this and Remarks 2.3 and 2.4 it follows that the sequence  $\{\xi_n^*\}$  is stationary and ergodic. We choose the constant  $C$  such that  $\mathbf{E}\xi_n^* < 0$  if the condition  $\lambda \mathbf{E}\sigma_1 < 1$  holds, where

$$\mathbf{E}(\xi_n^*) = \lambda \mathbf{E}\sigma_1 - \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}. \quad (3.14)$$

It follows that there exist renovation events  $A_n^* = T^n A_0^*$ ,  $n \geq n_0$ , where  $A_0^*$  is defined as (3.7) with the sequence  $\{\xi_n^*\}$ , such that  $X(n)^* = C$  on the set  $A_n^*$  for all  $n \geq n_0$ . Define the sets

$$B_0 = \left\{ \prod (\lambda \sigma_{-k}, u_{-k}^1) = 0, u_{-k}^2 \leq \frac{\theta + k\mu}{\lambda + \theta + k\mu}, k = 1, \dots, C \right\}, \quad B_n = T^n B_0. \quad (3.15)$$

The sets  $A_n = A_{n-C}^* \cap B_n$  form a stationary renovating sequence for  $X(n)$ , since for all  $n \geq n_0 + C$ , we have on  $A_n$ , the values  $X(n-k) \leq k$ ,  $k = 0, 1, \dots, C$ , and in particular,  $X(n) = 0$ . Moreover,  $P(A_0) = P(A_{-C}^*) P(B_0 | A_{-C}^*) > 0$  (see Altman and Borovkov [2, pages 353-354]). The strong coupling convergence of the process  $X(n)$  to a stationary ergodic regime follows from Theorem 2.7.  $\square$

*Remark 3.2.* Although the conditions of Theorem 3.1 are sufficient for stability, we can assert that they are necessary, since for SRS of the form  $X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+$ , the

condition  $E\xi_n > 0$  implies that the process  $X(n)$  converges in distribution to an improper limiting sequence, that is,  $X(n) \rightarrow \infty$  almost surely, and it can be extended under wide assumptions to the case  $E\xi_n = 0$  (see Borovkov [8, Theorem 1.7]).

#### 4. Stability of the retrial queue with two types of customers

Consider now a retrial queue with two types of arriving customers, known as “impatient” and “persistent.” If an impatient customer finds the server busy, then he leaves the system. On the other hand, if a persistent customer arrives and finds the server busy, then he may have access to the orbit and waits to be served later according to the versatile retrial policy described above. Assume that the interarrival times  $\{\tau_n^1\}$  of type 1 (impatient) and  $\{\tau_n^2\}$  of type 2 (persistent) are sequences of independent and identically distributed random variables with exponential distributions with parameters  $\lambda_1 > 0$  and  $\lambda_2 > 0$ , respectively. The service times  $\{\sigma_n^1\}$  (for type 1) and  $\{\sigma_n^2\}$  (for type 2) are stationary and ergodic, independent of each other and of  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$ , orbit retrial times and retrial times of each customer in orbit, and  $0 < \mathbf{E}(\sigma_n^j) < \infty$ ,  $j = 1, 2$ . The sequences  $\{\tau_n^1\}$ ,  $\{\tau_n^2\}$ , orbit retrial times and retrial times of each customer in orbit are independent of each other. Let  $X(t)$  be the number of customers in orbit at time  $t$ . Define  $s_n$  to be the instant when the  $(n - 1)$ st service time ends. We consider the process  $X(n)$  embedded immediately after time  $s_n$ , (i.e.,  $X(n) = X(s_n^+)$ ). Let  $u_n^1$  and  $u_n^2$  defined as in Section 3, and independent of the sequences  $\{\sigma_n^1\}$  and  $\{\sigma_n^2\}$ , except that  $u^2 = u_n^2$  will generate now the type of request of service: impatient customer, external persistent customer or persistent customer from the orbit at the end of the successive service periods. The representation of the process  $X(n)$  is

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+, \tag{4.1}$$

where the driving sequence  $\{\xi_n\}$  is now of the form

$$\begin{aligned} \xi_n = & \prod (\lambda_2 \sigma_n^1, u_n^1) I\left(u_n^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu}\right) \\ & + \prod (\lambda_2 \sigma_n^2, u_n^1) I\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu} < u_n^2 \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu}\right) \\ & + \prod (\lambda_2 \sigma_n^2, u_n^1) I\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu} < u_n^2 \leq 1\right) \\ & - I\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + X(n)\mu} < u_n^2 \leq 1\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

**THEOREM 4.1.** *The process  $X(n)$  is strong coupling convergent to a unique stationary ergodic regime if one of the following conditions is fulfilled:*

- (1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$ , and  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2(\theta \mathbf{E}\sigma^2 + \lambda_1 \mathbf{E}\sigma^1 + \lambda_2 \mathbf{E}\sigma^2))/(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta) < 1$ ;
- (2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$ , and  $\lambda_2 \mathbf{E}\sigma^2 < 1$ .

*Proof.* Consider the first case  $\theta > 0$  and  $\mu = 0$ . Then the sequence  $\{\xi_n\}$  has the form

$$\begin{aligned} \xi_n &= \prod (\lambda_2 \sigma_n^1, u_n^1) I\left(u_n^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta}\right) \\ &+ \prod (\lambda_2 \sigma_n^2, u_n^1) I\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < u_n^2 \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta}\right) \\ &+ \prod (\lambda_2 \sigma_n^2, u_n^1) I\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < u_n^2 \leq 1\right) - I\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < u_n^2 \leq 1\right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Define the  $\sigma$ -algebras  $\mathfrak{F}_n^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k^1, \sigma_k^2, u_k^1, u_k^2; k \leq n)$  and  $\mathfrak{F}^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k^1, \sigma_k^2, u_k^1, u_k^2; -\infty < k < \infty)$ . Let  $U$  be the measure-preserving shift transformation of  $\mathfrak{F}^{\sigma, u}$ -measurable random variables generated by  $\{\sigma_n^1, \sigma_n^2, u_n^1, u_n^2; -\infty < n < \infty\}$ . Since  $\xi_n$  is generated by  $\{\sigma_n^1, \sigma_n^2, u_n^1, u_n^2\}$ , then  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  is compatible with the shift  $U$ . Hence, from Remarks 2.3 and 2.4, the sequence  $\{\xi_n; -\infty < n < \infty\}$  is stationary and ergodic. We have

$$\mathbf{E}(\xi_n) = \frac{\lambda_2(\theta \mathbf{E}\sigma^2 + \lambda_1 \mathbf{E}\sigma^1 + \lambda_2 \mathbf{E}\sigma^2) - \theta}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta}, \quad (4.4)$$

so that if

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2(\theta \mathbf{E}\sigma^2 + \lambda_1 \mathbf{E}\sigma^1 + \lambda_2 \mathbf{E}\sigma^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta} < 1, \quad (4.5)$$

then  $\mathbf{E}(\xi_n) < 0$  and the rest of the proof is similar to the first case of Theorem 3.1. For the case  $\theta \geq 0$  and  $\mu > 0$ , we construct a majorizing SRS as follows:

$$X(0)^* = X(0), \quad X(n+1)^* = \max(C, X(n)^* + \xi_n^*), \quad (4.6)$$

where

$$\begin{aligned} \xi_n^* &= \prod (\lambda_2 \sigma_n^1, u_n^1) I\left(u_n^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu}\right) \\ &+ \prod (\lambda_2 \sigma_n^2, u_n^1) I\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} < u_n^2 \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu}\right) \\ &+ \prod (\lambda_2 \sigma_n^2, u_n^1) I\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} < u_n^2 \leq 1\right) - I\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} < u_n^2 \leq 1\right), \\ \mathbf{E}(\xi_n^*) &= \frac{\lambda_2(\lambda_1 \mathbf{E}\sigma^1 + \lambda_2 \mathbf{E}\sigma^2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} + \frac{\theta + C\mu}{\lambda_1 + \lambda_2 + \theta + C\mu} (\lambda_2 \mathbf{E}\sigma^2 - 1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

The sequence  $\{\xi_n^*\}$  is measurable with respect to  $\mathfrak{F}^{\sigma, u}$  and  $\xi_{n+1}^* = U\xi_n^*$ . From this and Remarks 2.3 and 2.4, it follows that the sequence  $\{\xi_n^*\}$  is stationary and ergodic. We choose the constant  $C$  such that  $\mathbf{E}\xi_n^* < 0$  if the condition  $\lambda_2 \mathbf{E}\sigma^2 < 1$  holds, and the rest of the proof is similar to the second part of that of Theorem 3.1.  $\square$

### 5. Stability of the retrial queue with breakdowns

Consider a single server retrial queue with the server subject to breakdowns. Primary customers arrive from the outside according to a Poisson process with rate  $\lambda$ . We consider the versatile retrial policy for the access from the orbit to the server as described in Section 3. Assume that the server fails at times  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , according to a Poisson process with rate  $\alpha$ , that is, the server fails after an exponential amount of time with mean  $1/\alpha$ . If a breakdown occurs at time  $\beta_i$ , the server takes immediately a repair time  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . We assume that after a repair time the server is as good as new and the service of a customer is cumulative.

We assume that the service times  $\{\sigma_n\}$  and repair times  $\{r_i\}$  are stationary and ergodic and independent of each other. The interarrival times, orbit retrial times, retrial times of each customer in orbit, and breakdown times are independent of each other and of the sequences  $\{\sigma_n\}$  and  $\{r_i\}$ . Denote by  $r^{(n)} = (r_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots)$  the sequence of repair times that occur during the service time  $\sigma_n$ . Let  $X(t)$  be the number of customers in orbit at time  $t$ . Define  $s_n$  to be the instant when the  $(n - 1)$ st service time ends. We consider the process  $X(n)$  embedded immediately after time  $s_n$ , (i.e.,  $X(n) = X(s_n^+)$ ). Let  $u_n^1, u_n^2, u_n^3$ , and  $u_i^{(n)}$  be i.i.d. sequences of random variables distributed uniformly on  $[0, 1]$ , mutually independent and independent of the sequences  $\{\sigma_n\}$  and  $\{r_i\}$ .  $u^1 = \{u_n^1\}$  will generate the arrival process,  $u^2 = \{u_n^2\}$  will generate the occurrence of breakdowns,  $u_n^3$  will generate the type of arrival (external or from the orbit) at the end of the successive service periods, and  $u_i^{(n)}$  will generate the arrival process during the  $i$ th repair time that occurs during the  $n$ th service time, denote by  $u^{(n)} = (u_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots)$ . We have the following representation of the process  $X(n)$ :

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+, \quad (5.1)$$

where

$$\xi_n = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) + \sum_{i=1}^{\prod(\alpha \sigma_n, u_n^2)} \prod (\lambda r_i^{(n)}, u_i^{(n)}) - I\left(u_n^3 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu}\right) \quad (5.2)$$

is the driving sequence.

**THEOREM 5.1.** *The process  $X(n)$  is strong coupling convergent to a unique stationary ergodic regime if one of the following conditions is fulfilled:*

- (1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$ , and  $\lambda \mathbf{E}\sigma_1(1 + \alpha \mathbf{E}r_1) < \theta/(\lambda + \theta)$ ;
- (2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$ , and  $\lambda \mathbf{E}\sigma_1(1 + \alpha \mathbf{E}r_1) < 1$ .

*Proof.* Note that  $\prod(\lambda \sigma_n, u_n^1)$  and  $\prod(\lambda r_i, u_i^{(n)})$  represent the number of arrivals during the  $n$ th service time  $\sigma_n$  and the  $i$ th repair time  $r_i$ , respectively.  $\prod(\alpha \sigma_n, u_n^2)$  counts the number of breakdowns during the processing of the  $n$ th service duration  $\sigma_n$ . If  $\theta > 0$  and  $\mu = 0$ , then the driving sequence (5.2) has the following form:

$$\xi_n = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) + \sum_{i=1}^{\prod(\alpha \sigma_n, u_n^2)} \prod (\lambda r_i, u_i^{(n)}) - I\left(u_n^3 \leq \frac{\theta}{\lambda + \theta}\right). \quad (5.3)$$

## 12 Stability of retrial queues with versatile retrial policy

Define the  $\sigma$ -algebras  $\mathfrak{F}_n^{\sigma, u, r} = \sigma(\sigma_k, r^{(k)}, u^{(k)}, u_k^1, u_k^2, u_k^3; k \leq n)$  and  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, r} = \sigma(\sigma_k, r^{(k)}, u^{(k)}, u_k^1, u_k^2, u_k^3; -\infty < k < \infty)$ . Let  $U$  be the measure-preserving shift transformation of  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, r}$ -measurable random variables generated by  $\{\sigma_n, r^{(n)}, u^{(n)}, u_n^1, u_n^2, u_n^3; -\infty < n < \infty\}$ , then the sequence  $\{\xi_n\}$  is measurable with respect to  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, r}$ , and by Remarks 2.3 and 2.4,  $\{\xi_n\}$  is stationary and ergodic. From the Wald's equation and the memoryless property of the Poisson process, we get

$$\mathbf{E}\xi_n = \lambda \mathbf{E}\sigma_1 + (\alpha \mathbf{E}\sigma_1)(\lambda \mathbf{E}r_1) - \frac{\theta}{\lambda + \theta}. \quad (5.4)$$

So if  $\lambda \mathbf{E}\sigma_1(1 + \alpha \mathbf{E}r_1) < \theta/(\lambda + \theta)$ , then  $\mathbf{E}\xi_n < 0$ , and the rest of the proof of the first condition is similar to that of Theorem 3.1.

We now study the case  $\theta \geq 0$  and  $\mu > 0$ . Consider the following majorizing SRS:

$$X^*(0) = X(0), \quad X^*(n+1) = \max(C, X^*(n) + \xi_n^*), \quad (5.5)$$

where  $C$  is an arbitrary integer and

$$\xi_n^* = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) + \sum_{i=1}^{\prod(\alpha \sigma_n, u_n^2)} \prod (\lambda r_i, u_i^{(n)}) - I\left(u_n^3 \leq \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}\right). \quad (5.6)$$

The sequence  $\{\xi_n^*\}$  is measurable with respect to  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, r}$ . From this and Remarks 2.3 and 2.4, it follows that the sequence  $\{\xi_n^*\}$  is stationary and ergodic. If the condition  $\lambda \mathbf{E}\sigma_1(1 + \alpha \mathbf{E}r_1) < 1$  holds, we can easily find a constant  $C$  such that  $\mathbf{E}\xi_n^* < 0$ , where now

$$\mathbf{E}(\xi_n^*) = \lambda \mathbf{E}\sigma_1 + (\alpha \mathbf{E}\sigma_1)(\lambda \mathbf{E}r_1) - \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}. \quad (5.7)$$

The rest of the proof of the second condition is similar to that of Theorem 3.1.  $\square$

## 6. Stability of the retrial queue with negative customers

We consider now the stability of a single server retrial queue with two types of arrivals, regular and negative. In retrial queues, a regular arriving customer who finds the server busy joins the orbit, and reapplies for service after a random amount of time; otherwise, if he finds the server idle, he receives service and leaves the system. When a negative arrival occurs in a busy system, it immediately removes one regular customer from the orbit if present. Otherwise, if the server is idle, it has no effect on the system. Regular customers arrive from the outside according to a Poisson process with rate  $\lambda$ . The access from the orbit to the server follows the versatile retrial policy. We assume that the service times  $\{\sigma_n\}$  of regular customers are general stationary ergodic. The negative customers arrive according to a Poisson process with rate  $\delta$ . The interarrival times of regular customers, interarrival times of negative customers, orbit retrial times and retrial times of each customer in orbit are independent of each other and of the sequence  $\{\sigma_n\}$ . Let  $u_n^1, u_n^2$ , and  $u_n^3$  be three i.i.d. sequences of random variables distributed uniformly on  $[0, 1]$ , mutually independent and independent of the sequences  $\{\sigma_n\}$ .  $u^1 = \{u_n^1\}$  will generate the arrival

process of the regular customers,  $u^2 = \{u_n^2\}$  will generate the arrival process of the negative customers, and  $u_n^3$  will generate the type of arrival that gains the server (external or from the orbit) at the end of the successive service periods. Let  $X(n)$  be defined as above and it has now the following representation:

$$X(n+1) = (X(n) + \zeta_n - \eta_n)^+, \quad (6.1)$$

where

$$\zeta_n = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - I\left(u_n^3 \leq \frac{\theta + X(n)\mu}{\lambda + \theta + X(n)\mu}\right), \quad (6.2)$$

$$\eta_n = \prod (\delta \sigma_n, u_n^2). \quad (6.3)$$

**THEOREM 6.1.** *The process  $X(n)$  is strong coupling convergent to a unique stationary and ergodic regime if one of the following conditions is fulfilled:*

- (1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$ , and  $((\lambda - \delta)(\lambda + \theta)/\theta)\mathbf{E}\sigma_1 < 1$ ;
- (2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$ , and  $(\lambda - \delta)\mathbf{E}\sigma_1 < 1$ .

*Proof.* Consider the first case  $\theta > 0$  and  $\mu = 0$ . Then the sequence (6.2) has the form

$$\zeta_n = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - I\left(u_n^3 \leq \frac{\theta}{\lambda + \theta}\right). \quad (6.4)$$

Define the  $\sigma$ -algebras  $\mathfrak{F}_n^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, u_k^3; k \leq n)$  and  $\mathfrak{F}^{\sigma, u} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, u_k^3; -\infty < k < \infty)$ . Let  $U$  be the measure-preserving shift transformation of  $\mathfrak{F}^{\sigma, u}$ -measurable random variables generated by  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2, u_n^3; -\infty < n < \infty\}$ . Since the sequence  $\zeta_n$  is generated by  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^3\}$  and  $\eta_n$  is generated by  $\{\sigma_n, u_n^2\}$ , then by Remarks 2.3 and 2.4,  $\zeta_n$  and  $\eta_n$  are stationary and ergodic.  $\mathbf{E}(\zeta_n - \eta_n) = \lambda \mathbf{E}\sigma_1 - \theta/(\lambda + \theta) - \delta \mathbf{E}\sigma_1$  and if

$$\frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \theta)}{\theta} \mathbf{E}\sigma_1 < 1, \quad (6.5)$$

then we have  $\mathbf{E}(\zeta_n - \eta_n) < 0$ , and the rest of the proof is similar to the first part of Theorem 3.1.

Let us study now the case  $\theta \geq 0$  and  $\mu > 0$ . We follow the same method of the second parts of the above theorems by constructing a majorizing SRS  $X^*(n)$  defined as follows:

$$X^*(0) = X(0), \quad X^*(n+1) = \max(C, X^*(n) + \zeta_n^* - \eta_n), \quad (6.6)$$

where

$$\zeta_n^* = \prod (\lambda \sigma_n, u_n^1) - I\left(u_n^3 \leq \frac{\theta + C\mu}{\lambda + \theta + C\mu}\right). \quad (6.7)$$

The sequence  $\{\zeta_n^*\}$  is measurable with respect to  $\mathfrak{F}^{\sigma, u}$ . From this and Remarks 2.3 and 2.4, it follows that the sequence  $\{\zeta_n^*\}$  is stationary and ergodic. If  $(\lambda - \delta)\mathbf{E}\sigma_1 < 1$ , we can easily find a constant  $C$  such that  $\mathbf{E}(\zeta_n^* - \eta_n) = (\lambda - \delta)\mathbf{E}\sigma_1 - (\theta + C\mu)/(\lambda + \theta + C\mu) < 0$ . The rest of the proof is similar to the second part of Theorem 3.1.  $\square$

### 7. Stability of the retrial queue with batch arrivals

Consider a single server retrial queue with the versatile retrial policy. Let us now consider that at every arrival epoch  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , a random batch of  $a_k$  customers enters the system. If the server is busy at the arrival epoch, then the whole batch of customers joins the orbit, whereas if the server is free, then one of the arriving customers starts his service and the others join the orbit. We assume that the input flow of customers occurs according to a Poisson process with rate  $\lambda$ , the sequence of batch sizes  $\{a_k\}$  is independent and identically distributed with general distribution and mean  $\bar{a}$ , where  $0 < \bar{a} < \infty$ . The  $n$ th service time of a customer is  $\sigma_n$ , where  $0 < \mathbf{E}\sigma_n < \infty$ , and we assume that the sequence  $\{\sigma_n\}$  is stationary and ergodic. We denote by  $a^{(n)} = (a_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots)$  the size of batches of the arrivals that occur during the service time  $\sigma_n$ . We assume that the input flow of customers, size of batches, orbit retrial times, retrial times of each customer in orbit and service times are mutually independent.

Let  $X(n)$  be defined as above and it has the following representation as an SRS:

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+, \quad (7.1)$$

where

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\Pi(\lambda\sigma_n, u_n^1)} a_k^{(n)} + (a_1 - 1)I\left(u_n^2 \leq \frac{\lambda}{\lambda + \theta + X(n)\mu}\right) - I\left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta + X(n)\mu} < u_n^2 \leq 1\right), \quad (7.2)$$

and  $a_1$  is the size batch of the first arrival that gains the server if the arrival occurs before a repeated attempt.

**THEOREM 7.1.** *The process  $X(n)$  is strong coupling convergent to a unique stationary and ergodic regime if one of the following conditions is fulfilled:*

- (1)  $\theta > 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\lambda(\bar{a} - 1) < \theta$ , and  $\lambda\bar{a}\mathbf{E}\sigma_1 < (\lambda(1 - \bar{a}) + \theta)/(\lambda + \theta)$ ;
- (2)  $\theta \geq 0$ ,  $\mu > 0$ , and  $\lambda\bar{a}\mathbf{E}\sigma_1 < 1$ .

*Proof.* Consider the first case  $\theta > 0$  and  $\mu = 0$ , so the driving sequence (7.2) will have the following form:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\Pi(\lambda\sigma_n, u_n^1)} a_k^{(n)} + (a_1 - 1)I\left(u_n^2 \leq \frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right) - I\left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} < u_n^2 \leq 1\right). \quad (7.3)$$

Define the  $\sigma$ -algebras  $\mathfrak{F}_n^{\sigma, u, a} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, a^{(k)}; k \leq n)$  and  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, a} = \sigma(\sigma_k, u_k^1, u_k^2, a^{(k)}; -\infty < k < \infty)$  and we assume that  $a_1$  is measurable with respect to  $\mathfrak{F}_n^{\sigma, u, a}$  and  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, a}$ . Let  $U$  be the measure-preserving shift transformation of  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, a}$ -measurable random variables generated by  $\{\sigma_n, u_n^1, u_n^2, a^{(n)}; -\infty < n < \infty\}$ . The sequence  $\{\xi_n\}$  is  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, a}$ -measurable, then by Remarks 2.3 and 2.4,  $\{\xi_n\}$  is stationary and ergodic. We have

$$\mathbf{E}\xi_n = \lambda\bar{a}\mathbf{E}\sigma_1 + (\bar{a} - 1)\frac{\lambda}{\lambda + \theta} - \frac{\theta}{\lambda + \theta} = \lambda\bar{a}\mathbf{E}\sigma_1 + \bar{a}\frac{\lambda}{\lambda + \theta} - 1, \quad (7.4)$$

and if the condition  $\lambda\bar{a}E\sigma_1 < (\lambda(1 - \bar{a}) + \theta)/(\lambda + \theta)$  holds, then  $E\xi_n < 0$ . The condition  $\lambda(\bar{a} - 1) < \theta$  follows from the fact that  $\lambda(1 - \bar{a}) + \theta$  must be positive. The rest of the proof is the same as the first part of Theorem 3.1.

Consider now the second part when  $\theta \geq 0$  and  $\mu > 0$ . The majorizing SRS has now the form

$$X^*(0) = X(0), \quad X^*(n+1) = \max(C, X^*(n) + \xi_n^*), \quad (7.5)$$

where

$$\xi_n^* = \sum_{k=1}^{\Pi(\lambda\sigma_n, u_n^1)} a_k^{(n)} + (a_1 - 1)I\left(u_n^2 \leq \frac{\lambda}{\lambda + \theta + C\mu}\right) - I\left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta + C\mu} < u_n^2 \leq 1\right). \quad (7.6)$$

The sequence  $\{\xi_n^*\}$  is measurable with respect to  $\mathfrak{F}^{\sigma, u, a}$ . From this and Remarks 2.3 and 2.4, it follows that the sequence  $\{\xi_n^*\}$  is stationary and ergodic. We have  $E(\xi_n^*) = \lambda\bar{a}E\sigma_1 + \bar{a}(\lambda/(\lambda + \theta + C\mu)) - 1$ , so if the condition  $\lambda\bar{a}E\sigma_1 < 1$  holds, we can choose the constant  $C$  as large as possible to have  $E(\xi_n^*) < 0$ . The rest of the proof is similar to the second part of Theorem 3.1.  $\square$

## Acknowledgments

The authors are grateful to the anonymous referee and associate editor for the helpful suggestions and remarks which improved the paper in its present form. The research of the authors has partly been supported by the CNEPRU project Grant no. B1602/02/2003.

## References

- [1] I. Akhmarov and N. P. Leont'eva, *Conditions for convergence to limit processes, and the strong law of large numbers for queueing systems*, Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya **21** (1976), no. 3, 559–570 (Russian).
- [2] E. Altman and A. A. Borovkov, *On the stability of retrial queues*, Queueing Systems **26** (1997), no. 3-4, 343–363.
- [3] J. R. Artalejo, *G-networks: a versatile approach for work removal in queueing networks*. *G-networks*, European Journal of Operational Research **126** (2000), no. 2, 233–249.
- [4] J. R. Artalejo and A. Gomez-Corral, *Steady state solution of a single-server queue with linear repeated requests*, Journal of Applied Probability **34** (1997), no. 1, 223–233.
- [5] ———, *Generalized birth and death processes with applications to queues with repeated attempts and negative arrivals*, OR Spektrum **20** (1998), no. 1, 5–14.
- [6] ———, *On a single server queue with negative arrivals and request repeated*, Journal of Applied Probability **36** (1999), no. 3, 907–918.
- [7] S. Asmussen and S. G. Foss, *Renovation, regeneration, and coupling in multiple-server queues in continuous time*, Frontiers in Pure and Appl. Probab (H. Niemi, et al., eds.), vol. 1, VSP, Utrecht, 1993, pp. 1–6.
- [8] A. A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Applications of Mathematics, no. 4, Springer, New York, 1976.
- [9] ———, *Asymptotic Methods in Queueing Theory*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester, 1984.
- [10] ———, *Ergodicity and Stability of Stochastic Processes*, Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Chichester, 1998.

- [11] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London, 1953.
- [12] G. I. Falin, *Aggregate arrival of customers in one-line system with repeated calls*, Ukrainian Mathematical Journal **28** (1976), no. 4, 437–440.
- [13] ———, *Functioning under nonsteady conditions of a single-channel system with group arrival of requests and repeated calls*, Ukrainian Mathematical Journal **33** (1981), no. 4, 429–432.
- [14] G. Fayolle, *A simple telephone exchange with delayed feedbacks*, Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation (O. J. Boxma, J. W. Cohen, and H. C. Tijms, eds.), Elsevier Science, Amsterdam, 1986, pp. 245–253.
- [15] S. G. Foss, *The method of renovating events and its applications in queueing theory*, Semi-Markov Models (Brussels, 1984), Plenum, New York, 1986, pp. 337–350.
- [16] S. G. Foss and V. V. Kalashnikov, *Regeneration and renovation in queues*, Queueing Systems **8** (1991), no. 3, 211–223.
- [17] E. Gelenbe, *Product-form queueing networks with negative and positive customers*, Journal of Applied Probability **28** (1991), no. 3, 656–663.
- [18] E. Gelenbe, P. Glynn, and K. Sigman, *Queues with negative arrivals*, Journal of Applied Probability **28** (1991), no. 1, 245–250.
- [19] Y. Kifer, *Ergodic Theory of Random Transformations*, Birkhäuser Boston, Massachusetts, 1996.
- [20] H. M. Liang and V. G. Kulkarni, *Stability condition for a single-server retrial queue*, Advances in Applied Probability **25** (1993), no. 3, 690–701.
- [21] M. Martin and J. R. Artalejo, *Analysis of an M/G/1 queue with two types of impatient units*, Advances in Applied Probability **27** (1995), no. 3, 840–861.

Tewfik Kernane: Department of Probability and Statistics, Faculty of Mathematics, University of Sciences and Technology Houary Boumediene, USTHB, BP 32 El-Alia, Algiers, Algeria  
*E-mail address:* tkernane@usthb.dz

Amar Aïssani: Faculty of Electronics and Computer Science, University of Sciences and Technology Houary Boumediene, USTHB, BP 32 El-Alia, 16111 Algiers, Algeria  
*E-mail address:* amraissani@yahoo.fr