

N° d'ordre :06 / 12018-C/ MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat
3^{ème} cycle (LMD)

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Mathématiques Discrètes,
Optimisation et Cryptologie.

Par : Bedrane AMARI

Thème

**ÉTUDE DE PROJECTIONS DANS LES
HYPERCUBES ET LES GRAPHES DE HAMMING**

Soutenue publiquement le 17/02/2018 devant le jury composé de :

KHELLADI A.,	Professeur, à l'USTHB	Président
BERRACHEDI A.,	Professeur, à l'USTHB	Directeur de Thèse
BLIDIA M.,	Professeur, à l'USDB	Examineur
CHELLALI M.,	Professeur, à l'USDB	Examineur
BEKKAI S.,	Maître de conférence/A, à l'USTHB	Examinatrice
SADI B.,	Maître de conférence/A, à UMMTO	Examineur

REMERCIEMENTS

*Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements au Professeur **Abdelhafid BERRACHEDI**, mon directeur de thèse, pour avoir su guider mes premiers pas dans le monde la recherche, pour l'espace agréable de travail qui m'a offert, pour la confiance qu'il m'a accordé et pour sa grande générosité et ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Je rend hommage à sa compétence et à sa gentillesse.*

*Je tiens également à remercier vivement le Professeur **Abdelkader KHELLADI** de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*J'adresse mes remerciements les plus sincères aux professeurs **Siham BEKKAI**, **Mostafa BLIDIA**, **Mustapha CHELLALI** et **Bachir SADI** pour avoir accepté d'examiner ce travail et de consacrer une partie de leur temps pour le lire.*

Finalement, je remercie toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse, sans oublier tous ceux qui m'ont encouragé le long de mon parcours universitaire.

Table des matières

Introduction Générale	3
1 GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DES GRAPHS	6
1.1 Définitions et notations	6
1.2 Distance et décompositions en niveaux d'un graphe	9
1.3 Homomorphismes, isomorphismes, homéomorphismes	10
1.4 Opérations classiques sur les graphes	12
1.4.1 Trois produits fondamentaux de graphes	12
1.4.2 Autres opérations	15
1.5 Fonction d'intervalle dans les graphes	16
1.6 Convexité	18
2 CLASSES DE GRAPHS GÉNÉRALISANT L'HYPERCUBE	19
2.1 Poset et treillis	21
2.2 Graphe de Hamming	26
2.3 Graphes médians et quasi-médians	28
2.4 Les graphes intervalle-réguliers	29
2.5 Graphes distance-réguliers	31
2.6 Graphes intervalle-monotones	32
2.7 Graphes sphériques	33
2.8 Graphes diamétraux et intervalle diamétraux	35
3 GRAPHS HILBERTIENS ET QUASI-HILBERTIENS	38
3.1 Graphes médians et graphes Hilbertiens	40
3.1.1 Médian algébrique	40
3.1.2 Résultats de base	41
3.1.3 Graphes Hilbertiens	46
3.2 Graphes quasi-médians et quasi-Hilbertiens	48
3.2.1 Quasi-médian algébrique	48
3.2.2 Résultats de base	49
3.2.3 Les graphes de Hamming comme graphes quasi-médians	51

3.2.4	Graphes quasi-Hilbertiens	52
3.3	Exemples d'applications des graphes quasi-médians	60
3.3.1	Problème d'allocation dynamique de ressource	60
3.3.2	Un problème de reconstruction d'ADN en phylogé- nétique	62
4	PRÉFIBRES ET PROJECTIONS	64
4.1	Préfibres et clique préfibres	64
4.2	Quelques propriétés de préfibres dans les graphes	66
	Conclusion et perspectives	70
	Références bibliographiques	71

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un mathématicien confronté à un problème de la vie réelle s'empresse de traduire celui-ci en un problème mathématique, qu'il peut alors tenter de résoudre. Dans sa boîte à outils mathématiques, les graphes peuvent s'avérer fort utiles.

Intuitivement, un graphe est un ensemble de points, dont certaines paires sont reliées. Plus formellement, un graphe est défini par deux ensembles : son ensemble de sommets et son ensemble d'arêtes, une arête étant une paire de sommets reliés. La théorie des graphes introduit ensuite de nombreuses classes de graphes, des familles de graphes qui vérifient certaines propriétés. Les graphes permettent de modéliser de nombreux problèmes dans différents domaines. La théorie des graphes a eu un développement bien étrange, comme l'a noté C. Berge dans l'avant propos de son livre « graphes » ; d'abord apparu dans le magasin des curiosités mathématiques (les ponts de Königsberg), puis devenue un outil pour l'étude des circuits électriques (Kirchoff), elle a été utilisée par la chimie, la psychologie et l'économie avant même d'avoir été constituée. Elle est devenue aujourd'hui une des branches les plus florissantes de l'algèbre moderne, celle à laquelle on fait appel dans la plupart des problèmes mathématiques de nature combinatoire. Elle n'a pu prendre sa forme actuelle que grâce aux efforts de certains spécialistes de la recherche opérationnelle et sous l'impulsion de préoccupations pratiques.

L'hypercube a suscité de nombreuses études engendrant une littérature très dense aussi bien en mathématiques discrètes qu'en informatique.

Du fait de sa structure, la motivation première de l'intérêt sans cesse croissant qui y est porté et son utilisation dans de nombreux domaines (architectures parallèles, transfert de l'information, réseaux d'interconnexion, théorie des codes,...). Il demeure encore le centre d'intérêt de plusieurs travaux récents focalisés sur la manière de caractériser les graphes comme étant des sous-graphes de l'hypercube (problèmes de plongements). Une réelle illustration est l'étude de plongements d'arbres. D'autre part, l'hypercube modélise des structures mathématiques très intéressantes (treillis booléen, espace métrique fini où les seuls ensembles convexes sont des intervalles, espace vectoriel fini sur le corps $\{0, 1\}$,...).

En se basant sur l'une de ses propriétés, il a été le point de départ de plusieurs définitions de classes de graphes qui le contiennent ; graphes de Hamming, graphes intervalle-réguliers, distance-réguliers, graphes médians, quasi-médians, graphes sphériques... .

Parmi les classes de graphes définies à partir de la propriété métrique des hypercubes : les graphes médians. Ce sont les graphes pour lesquels tout triplet de sommets admet un unique sommet dit "médián" liant dans les différentes géodésiques formées par ce triplet. L'étude d'unicité des projections sur les intervalles donna naissance à une nouvelle classe de graphes dite "Hilbertiens", introduite par A. Berrachedi, il a montré que cette classe est la même que celle des graphes médians.

La classe des graphes quasi-médians, qui contient les graphes de Hamming comme sous classe, généralise celle des graphes médians. De même que la notion de quasi-intervalle généralise la notion d'intervalle. L'objet principal de ce travail est d'étudier les projections sur les quasi-intervalles, définir une nouvelle classe de graphes dite "quasi-Hilbertiens" et de prouver que c'est la même classe que celle des graphes quasi-médians.

Cette thèse est développée en quatre chapitres :
Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les graphes, regrou-

pant les différentes définitions et notations nécessaires. Le second chapitre présente une revue de quelques classes généralisant l'hypercube. Le troisième chapitre introduit la classe des graphes quasi-Hilbertiens, on montre que cette classe n'est autre que celle des graphes quasi-médians. Comme conséquence, on a établi une nouvelle caractérisation des graphes de Hamming. Dans le quatrième et dernier chapitre, on s'est intéressé à l'étude d'une généralisation des graphes quasi-médians. Il s'agit des graphes où toute clique est une préfibre. Une conclusion générale ainsi que des perspectives terminent ce manuscrit.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DES GRAPHES

Introduction

Ce premier chapitre, est consacré au glossaire de base de la théorie des graphes. Nous adapterons la terminologie utilisée dans [12]. Pour les notions non explicitées dans ce texte, le lecteur pourrait se référer à [12, 43, 34].

1.1 Définitions et notations

Un graphe, noté G , est représenté par un couple d'ensemble fini $(V(G), E(G))$ où $E(G)$ est constitué de paires de $V(G)$.

Les éléments de $V(G)$ sont appelés *sommets* de G et ceux de $E(G)$ *arêtes*.

Lorsque les arêtes de $E(G)$ ne sont pas orientées, on parle d'un graphe non-orienté. S'il est sans arêtes multiples et sans boucles, on dit alors que G est un *graphe simple*.

Les graphes considérés sont simples, finis et non orientés.

Le nombre de sommets de G , $|V(G)|$ est appelé l'ordre du graphe G .

Le nombre d'arêtes de G , $|E(G)|$, est appelé la taille du graphe G .

Deux sommets x et y sont dit *voisins* ou *adjacents* si $\{x, y\}$ est une arête. Cette arête sera noté $e = xy$. Dans ce cas les sommets x et y constituent les *extrémités* de l'arête xy . De même, deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont au moins une extrémité en commun. On dira qu'un sommet est *incident* à une arête ou une arête est incidente à un sommet, s'il constitue une de ses extrémités. Un graphe est représenté dans le plan par une figure géométrique où les sommets sont représentés par des points (petits cercles) et une arête xy est représentée par une ligne joignant le point représentant le sommet x à celui représentant le sommet y .

Le *degré* d'un sommet x de $V(G)$, noté $d_G(x)$, est le nombre de voisins de x dans G . Un sommet x est dit *isolé*, s'il n'a aucun voisin, $d_G(x) = 0$. Il est dit *pendant* s'il a un seul voisin, $d_G(x) = 1$. Si tous les sommets de G ont le même degré d , on dira que G est *d-régulier* ou *régulier* de degré d .

Le *graphe complémentaire* \bar{G} de G possède $V(G)$ comme ensemble de sommets, deux sommets sont adjacents dans \bar{G} si et seulement si ils ne le sont pas dans G .

Un *sous graphe* de G est un graphe G' où l'ensemble de ses sommets V' est un sous-ensemble de V et celui de ses arêtes E' est un sous-ensemble de E tel que toute arête de E' joint deux sommets de V' . Si toutes les arêtes de G qui relient des sommets de V' sont dans E' , on dira que G' est induit par V' et il est noté $G_{V'}$. Dans le cas où $V' = V$, on dira que G' est un graphe partiel de G . Une *clique* de G est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents. Si V est une clique, alors G est le graphe complet K_n , où $n = |V(G)|$; K_3 est appelé triangle.

Une séquence de sommet distincts $C = x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow x_p$ dans G telle que toute paire de sommets consécutifs sont adjacents est appelée *chaîne* de x_0 à x_p (ou une (x_0, x_p) -*chaîne*) de longueur p . Si $p \geq 2$, alors les

sommets x_1, \dots, x_{p-1} sont les sommets internes de C . Un graphe est *connexe* si pour toute paire de sommet x et y , il existe une (x, y) -chaîne. Un graphe G non connexe consiste en une union disjointe de graphes connexes appelés composantes connexes de G . Un *déconnectant* dans un graphe connexe G est un ensemble d'arêtes F , $F \subseteq E$, tel que le graphe ayant V comme ensemble de sommets et $E \setminus F$ comme ensemble d'arêtes n'est pas connexe.

Dans tous ce qui suit, tous les graphes utilisés sont supposés connexes.

Un cycle de longueur p ou p -cycle dans G est une chaîne dont les extrémités sont confondues.

Une arête joignant deux sommets non consécutifs de C est appelée *corde*. Dans le cas où C est sans cordes alors C est un sous graphe induit de G . Il est noté C_p .

Un graphe est *biparti* s'il est sans cycle de longueur impaire. Dans un tel graphe G , l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous ensembles V_1 et V_2 tel que toute arête de G joint un sommet de V_1 à un sommet de V_2 . Si toutes les arêtes possibles entre V_1 et V_2 sont dans G , alors G est le graphe biparti complet $K_{p,q}$ où $p = |V_1|$ et $q = |V_2|$.

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

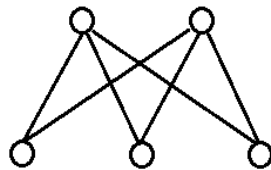
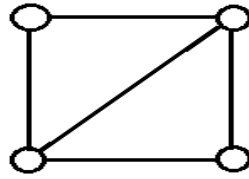


FIGURE 1.1 – Graphe biparti complet $K_{2,3}$.

Le graphe $K_{1,1,m}$ consiste en une arête uv avec m sommets adjacents à u et v . le graphe $K_{1,1,2}$ est aussi noté $K_4 - e$.

FIGURE 1.2 – Le graphe $K_{1,1,2}$ ou $K_4 - e$.

1.2 Distance et décompositions en niveaux d'un graphe

La distance $d(u, v) = d_G(u, v)$ entre les sommets u et v dans G est la longueur d'une plus courte (u, v) -chaîne. Une plus courte (u, v) -chaîne est aussi appelée une (u, v) -géodésique.

L'excentricité d'un sommet u , notée $e(u)$, est la longueur d'une plus grande plus courte chaîne issue de u , $e(u) = \max_{v \in V} d_G(u, v)$.

Le diamètre, noté $\text{diam}(G)$, est la plus grande excentricité dans G , $\text{diam}(G) = \max_{u \in V} e(u)$.

Le rayon, Noté $R(G)$, est la plus petite excentricité dans G , $R(G) = \min_{u \in V} e(u)$.

Un sommet u est un *centre* de G si $e(u) = R(G)$. Un sommet v est un *antipodique* du sommet u si $d(u, v) = e(u)$; il est dit *diamétral* si $d(u, v) = \text{diam}(G)$.

Un graphe G est antipodique (respectivement diamétral) si tout sommet admet un unique antipodique (respectivement diamétral).

Pour un sommet u , $N_i(u)$ est l'ensemble des sommets à distance i de u . L'ensemble des voisins de u est désigné par $N(u)$ ou par $N_1(u)$. Une *décomposition en niveaux* relative au sommet u est une partition des sommets en N_0, N_1, \dots, N_p où $p = e(u)$ et $N_i = N_i(u)$ $i = 1, \dots, p$.

La figure 1.3 nous montre une décomposition en niveaux du graphe de gauche;

Pour le sommet 1 : $N_0(1) = \{1\}, N_1(1) = \{0, 2, 3, 5\}, N_2(1) = \{4, 6, 7\}$.

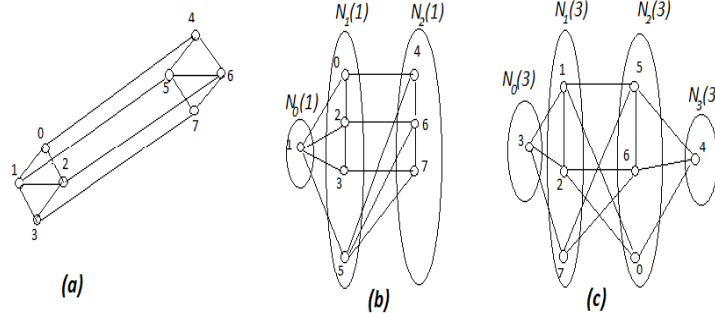


FIGURE 1.3 – Décomposition en niveaux du graphe (fig. (a)) relative au sommets 1 (fig. (b)) et au sommet 3 (fig. (c)).

Pour le sommet 2 : $N_0(2) = \{2\}$, $N_1(2) = \{1, 3, 7\}$, $N_2(2) = \{5, 6, 0\}$, $N_3(2) = \{4\}$.

L'application $d : V \times V$ dans N est une métrique. On travaillera aussi avec l'espace métrique fini (V, d) .

Plongement isométrique d'un graphe

Soient G et H deux graphes. Une application $f : V(H) \rightarrow V(G)$ est un *plongement isométrique* de H dans G si pour toute paire de sommets u, v de $V(H)$, $d_H(u, v) = d_G(f(u), f(v))$. Si une telle application existe, on dit que H admet un plongement isométrique dans G .

1.3 Homomorphismes, isomorphismes, homéomorphismes

Un graphe G peut symboliser la structure algébrique définie par l'ensemble V muni de la relation d'adjacence. Ainsi les notions algébriques classiques de morphisme restent identiques.

Définition 1.1.

Le graphe G est homomorphe à H s'il existe une application f de $V(G)$ dans $V(H)$ telle que :

$$(uv \in E(G)) \text{ alors } (f(u) = f(v) \text{ ou } f(u)f(v) \in E(H)).$$

Une autre définition consiste en :

Définition 1.2.

G est homomorphe à H s'il existe une application de $V(G)$ dans $V(H)$ telle que si W induit un sous graphe connexe de H , alors $f^{-1}(W)$ induit un sous graphe connexe de G .

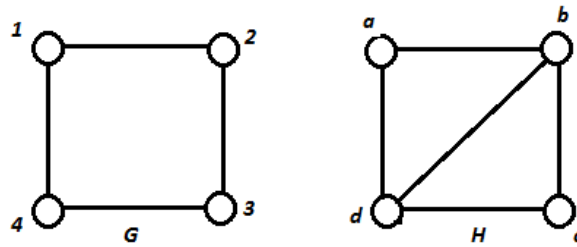


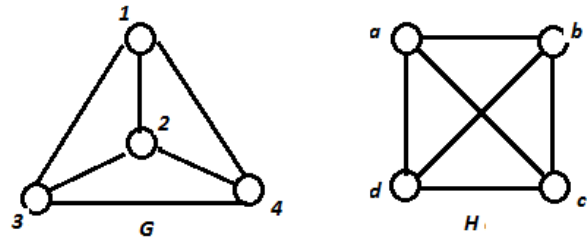
FIGURE 1.4 – G homomorphe à H .

Définition 1.3.

Un homéomorphisme de G dans H est un Homomorphisme f de G dans H tel que pour toute arête uv , $f^{-1}(\{u, v\})$ induit une chaîne dans G . On dira aussi que G est une subdivision de H .

L'application f de G dans H des graphes de la figure 1.4, où $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$, est un homomorphisme bijectif tandis que f^{-1} n'est pas un homomorphisme. On dira qu'une bijection f de G dans H est un *isomorphisme* si f et f^{-1} sont des homomorphismes. Usuellement, on ne fait pas de distinction entre des graphes isomorphes. Un automorphisme de G est un isomorphisme de G dans lui-même.

On dira que :

FIGURE 1.5 – G isomorphe à H .

- a) G est sommet-transitif si pour toute paire de sommet u et v , il existe un automorphisme f de G tel que $u = f(v)$.
- b) G est distance-transitif si pour tout u, v, x et y tels que $d(u, v) = d(x, y)$, il existe un automorphisme f de G tel que : $f(u) = x$ et $f(v) = y$.

Définition 1.4.

Un sous-graphe G d'un graphe H est un rétracte de H s'il existe un homomorphisme f de H dans G tel pour tout sommet x de G on a $f(x) = x$.

1.4 Opérations classiques sur les graphes

1.4.1 Trois produits fondamentaux de graphes

On peut distinguer trois produits fondamentaux de graphes : le produit Cartésien, le produit direct et le produit complet (strong). Dans chacun des cas, le produit de graphes G et H est un autre graphe dont l'ensemble des sommets est le produit Cartésien des ensembles $V(G) \times V(H)$. Entre autre, chacun des produits différent dans les règles d'adjacences.

Produit cartésien

Le produit cartésien de G et H est le graphe, noté $G \square H$, dont l'ensemble des sommets est $V(G) \times V(H)$. Deux sommets (g, h) et (g', h') sont

adjacent si et seulement si $g = g'$ et $hh' \in E(H)$, ou $gg' \in E(G)$ et $h = h'$.

Ainsi,

$$V(G \square H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ et } h \in V(H)\}$$

$$E(G \square H) = \{(g, h)(g', h') \mid g = g', hh' \in E(H), \text{ ou } gg' \in E(G), h = h'\}.$$

Et on a :

- $|V(G \square H)| = |V(G)| |V(H)|.$
- $|E(G \square H)| = |V(G)| |E(H)| + |E(G)| |V(H)|.$
- $d_{G \square H}(g, h) = d_G(g) + d_H(h).$
- $\text{diam}(G \square H) = \text{diam}(G) + \text{diam}(H).$

Les graphes G et H sont appelés les facteurs du produit $G \square H$. Comme exemple, la figure 1.6 montre le produit cartésien de P_4 et P_3 .

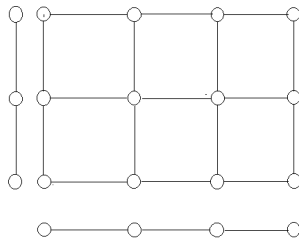


FIGURE 1.6 – Produit cartésien de P_4 et P_3 .

Le produit direct

Le produit direct des graphes G et H est le graphe, noté $G \times H$, dont l'ensemble des sommets est $V(G) \times V(H)$, et pour lequel les sommets (g, h) et (g', h') sont adjacents si et seulement si $gg' \in E(G)$ et $hh' \in E(H)$. Ainsi, $V(G \times H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ et } h \in V(H)\}$

$$E(G \times H) = \{(g, h)(g', h') \mid gg' \in E(G) \text{ et } hh' \in E(H)\}.$$

Et on a :

- $|V(G \times H)| = |V(G)| \times |V(H)|.$
- $|E(G \times H)| = 2|E(G)| \times |E(H)|.$
- $d_{G \times H}(g, g') = d_G(g) \times d_H(g').$

La figure 1.7 montre le produit direct de P_4 et P_3 . D'autres noms pour le produit direct sont apparus dans la littérature comme : produit tensoriel, produit de Kronecker, produit cardinal, produit croisé, produit direct faible, produit Cartésien, produit catégorique.

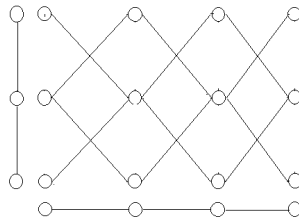


FIGURE 1.7 – produit direct de P_4 et P_3 .

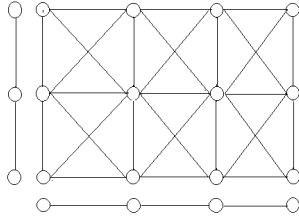
Le produit complet

Le produit complet des graphes G et H est le graphe, noté $G \boxtimes H$, et définie par :

$$V(G \boxtimes H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ et } h \in V(H)\}$$

$$E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H).$$

Ce produit est aussi nommé "strong direct product" ou "symétrique composition". Noter que $G \square H$ et $G \times H$ sont des sous-graphes de $G \boxtimes H$. La figure 1.8 montre le produit complet de P_4 et P_3

FIGURE 1.8 – Produit complet de P_4 et P_3 .

1.4.2 Autres opérations

Joint d'un graphe

Pour un graphe G , soit G^* le graphe obtenu à partir de G comme suit : $V(G^*) = V(G) \times \{1, 2, 3, 4\}$, (u, i) et (v, j) sont adjacents dans G^* si et seulement si une des trois conditions suivantes est satisfaite :

1. $uv \in E(G)$ et $i = j$ et sont impairs ;
2. $uv \in E(G)$ et $i \neq j$ et sont pairs ;
3. $u = v$ et les parités de i et j sont différentes.

Duplication d'un sommet

La duplication d'un sommet u du graphe G consiste à ajouter un sommet u' qu'on relie à tous les voisins de u .

Ajout d'une arête

Si u et v sont deux sommets non adjacents, l'ajout de l'arête uv consiste à considérer le graphe G' où $V(G') = V(G)$ et $E(G') = E(G) \cup \{uv\}$. Un surgraphe de G est un graphe obtenu à partir de G par ajout d'arêtes.

Identification de sommets

Soit A un sous-ensemble de sommets de G . L'identification des sommets de A consiste à remplacer tous les sommets de A par un sommet a qu'on relie à tous les voisins de A . Le graphe obtenu est noté $G \setminus A$.

1.5 Fonction d'intervalle dans les graphes

L'intervalle $I_G(u, v)$, noté aussi $I(u, v)$ s'il n'y a pas de confusion, est l'ensemble des sommets de G appartenant aux plus courtes (u, v) -chaînes :

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \{w \in V : w \text{ est sur une plus courte } (u, v)\text{-chaîne}\}. \\ &= \{w \in V \mid d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)\} \end{aligned}$$

Dans un arbre, l'intervalle $I(u, v)$ est l'ensemble des sommets de l'unique (u, v) -chaîne.

Pour $i = 0, 1, \dots, d(u, v)$; on définit $N_i(u, v) = N_i(u) \cap I(u, v)$; cet ensemble est appelé le $i^{\text{ème}}$ niveau de $I(u, v)$. De la définition de $I(u, v)$, il s'ensuit que :

$$N_i(u, v) = N_{d(u, v) - i}(v, u).$$

Par abus de langage, on désignera par intervalle aussi bien l'ensemble $I(u, v)$ que le sous graphe induit par $I(u, v)$.

Le lecteur pourra se référer à Mulder[43] pour une étude détaillée de la notion d'intervalle. Toutefois, nous citons les propositions de base suivantes :

Proposition 1.1 (Mulder[43]).

Soient u et v deux sommets d'un graphe G , alors :

- i) $u, v \in I(u, v)$;
- ii) $I(u, v) = I(v, u)$;

- iii) Si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \subseteq I(u, v)$;
- iv) Si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \cap I(w, v) = w$;
- v) Si $w \in I(u, v)$ et $z \in I(u, w)$, alors $w \in I(z, v)$.

Proposition 1.2 (Mulder[43]).

Pour tout triplet de sommets u, v et w d'un graphe G , il existe un sommet z dans $I(u, w) \cap I(w, v)$ tel que :

$$I(z, w) \cap I(z, v) = z.$$

Proposition 1.3 (Mulder[43]).

Soient u, v, w et z quatre sommets de G . z est l'unique sommet de $I(u, w) \cap I(w, v)$ tel que $I(z, w) \cap I(z, v) = z$ si et seulement si $I(u, w) \cap I(u, v) = I(u, z)$.

On schématisera l'intervalle $I(u, v)$ par le dessin de la figure 1.9.



FIGURE 1.9 – $I(u, v)$.

1.6 Convexité

Un ensemble C de sommets de G est convexe si :

$$\forall u, v \in C : I(u, v) \subseteq C.$$

Le plus petit convexe contenant un ensemble de sommets C est appelé *fermeture (enveloppe) convexe* de C , il est noté $\text{conv}(C)$.

Par abus de langage, un convexe C de G désigne aussi bien l'ensemble de sommets C que le sous graphe de G induit par C .

Une classe importante de graphes est celle des graphes dit intervalle-monotones. Ce sont les graphes où tout intervalle est convexe.

Proposition 1.4 (Mulder[43]).

Si G ne contient pas de sous graphe induit homomorphe ni à $K_{2,3}$ ni au graphe de la figure 1.10, alors G est intervalle-monotone.

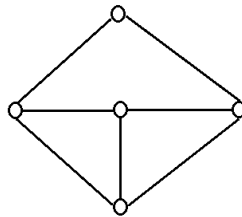


FIGURE 1.10 –

Proposition 1.5 (Mulder[43]).

Si G est sans sous graphe induit homéomorphe à $K_{2,3}$, alors G est intervalle-monotone.

Chapitre 2

CLASSES DE GRAPHES GÉNÉRALISANT L'HYPERCUBE

Introduction

L'hypercube représente l'une des structures les plus étudiée en mathématiques discrètes ceci est dû à son utilisation pratique dans plusieurs domaines (architecture parallèle, transfert de l'information, problèmes de codage, intérêt de structure, réseaux d'interconnexion, · · ·). Ce qui a suscité l'attention de beaucoup de chercheurs. En se basant sur l'une de ses propriétés, il a été le point de départ de plusieurs définitions de classes de graphes qui le contiennent. On peut attribuer à Alvarez [3] la première caractérisation de l'hypercube comme graphe de couverture d'un treillis distributif.

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques classes de graphes généralisant l'hypercube. Ces généralisations sont basées sur les métriques utilisées. L'hypercube est caractérisé comme sous espace métrique d'autres espaces métriques.

Définition 2.1.

L'hypercube de dimension d , noté Q_d , est le graphe dont les sommets re-

présentent les d -uplets de $\{0,1\}^d$. Deux sommets u et v sont adjacents si et seulement s'il diffèrent exactement en une composante.

Notons que $Q_0 = K_1$; $Q_1 = K_2$; de manière récurrente : $Q_{d+1} = Q_d \square K_2$ pour $d \geq 0$.

Ou encore $Q_{d+m} = Q_d \square Q_m$.

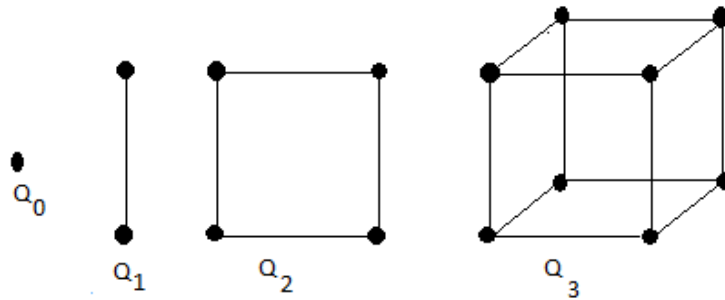


FIGURE 2.1 – L'hypercube de dimension 0, 1, 2 et 3.

Q_d est biparti, distance-transitif, d -régulier avec 2^d sommets et $d \cdot 2^{d-1}$ arêtes.

L'hypercube Q_d représente l'espace vectoriel fini $\{0,1\}^d$ sur le corps $\{0,1\}$, il est de dimension d . Soit e_1, e_2, \dots, e_d la base canonique de $\{0,1\}^d$, deux sommets u et v sont adjacents si et seulement s'il existe un vecteur e_i tel que $u + v = e_i$ (u et v diffèrent d'une composante).

Le poids de Hamming $ham(u)$ d'un sommet u de Q_d est le nombre de composantes non nulles de u . Cette représentation est appelée représentation vectorielle de l'hypercube.

Une autre représentation est la représentation ensembliste : soit S un ensemble à d éléments. Q_d possède l'ensemble des parties $P(S)$ comme ensemble de sommets, deux sommets A et B sont adjacents si et seulement si la différence symétrique possède un élément, $|A \Delta B| = 1$ où $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Le passage d'une représentation ensembliste à une représentation vectorielle se fait en étiquetant chaque partie A de S par un vecteur en 0-1 où la $i^{\text{ème}}$ composante est associée au $i^{\text{ème}}$ élément de S (1 si l'élément est dans A et 0 sinon). Un exemple pour $d = 3$ est donné dans la figure 2.2 où le graphe G est une représentation vectorielle de $\{0,1\}^3$ et le graphe H est une représentation ensembliste de $S = \{a, b, c\}$.

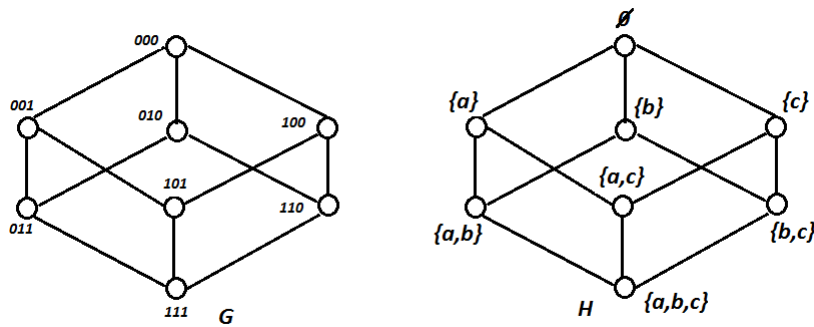


FIGURE 2.2 – Représentation vectorielle (G) et ensembliste (H) de Q_3 .

2.1 Poset et treillis

Un ensemble partiellement ordonné (*poset*) P est un couple formé d'un ensemble fini V et d'une relation d'ordre \leq sur V . On le note $P = (V, \leq)$.

Si $u \leq v$ et $u \neq v$ on note $u < v$.

On dit que v couvre u dans P si :
 $u < v$ et il n'existe pas un élément $w \in V$ tel que $u < w < v$.

Un poset gradué est un poset muni d'une fonction poids $h : V \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que :

H_1) Si $u < v$ alors $h(u) < h(v)$,

H_2) Si v couvre u alors $h(v) = h(u) + 1$.

L'entier $h(v)$ est le poids de v .

Le graphe de couverture d'un poset appelé encore Diagramme de Hasse, est le graphe G tel que l'ensemble des sommet $V(G)$ est égal à V et $uv \in E(G)$ si et seulement si v couvre u .

Le Diagramme de Hasse d'une relation d'ordre est obtenu en représentant une chaîne $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ par des points x_1, x_2, \dots, x_r et en joignant par un trait x_1 à x_2 , x_2 à x_3, \dots, x_{r-1} à x_r . Maintenant, représentons toutes les chaînes maximales (chaîne qui n'est contenue dans aucune autre chaîne) d'une relation d'ordre de cette manière. Puis, toutes les parties communes des chaînes maximales seront confondues en un même trait. La figure ainsi obtenue est appelée " diagramme de Hasse" de la relation d'ordre donnée.

Un *minorant* (resp. *majorant*) de u et v dans P est un élément x tel que $x \leq u$ et $x \leq v$ (resp. $x \geq u$ et $x \geq v$).

Un élément x est une borne inférieure (resp. supérieure) de u et v si x est le plus grand des minorants (resp. plus petit des majorants).

De l'antisymétrie de la relation d'ordre, si la borne inférieure existe alors elle est unique.

Une borne inférieure (resp. supérieure) *universelle* de P est un élément qu'on note $0 \in V$ avec $0 \leq u$ (resp. $1 \in V, u \leq 1$) $\forall u \in V$.

Proposition 2.1 (Mulder[43]).

Un graphe connexe G est biparti si et seulement si G est le diagramme de Hasse d'un poset fini gradué ayant une inférieure borne universelle.

Un treillis est un poset dans lequel deux éléments quelconques ont une borne inférieure et une borne supérieure.

Autrement dit : $\forall u, v \in V : \exists (u \wedge v) \in V$ et $\exists (u \vee v) \in V$.

Un treillis T est distributif si $\forall x, y, z \in T : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ou $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Un treillis modulaire est un treillis qui vérifie les conditions suivantes $\forall u, v \in V$:

- i) si u et v couvrent la borne inférieure $u \wedge v$ alors la borne supérieure $u \vee v$ couvre u et v .
- ii) si $u \vee v$ couvre u et v alors u et v couvrent $u \wedge v$.

Un treillis distributif est un treillis modulaire si son graphe de couverture est sans $K_4 - e$.

Considérons un treillis T où 0 et 1 représentent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure.

Soit $x \in T$, \bar{x} est un complément de x si $x \wedge \bar{x} = 0$ et $x \vee \bar{x} = 1$.

Un treillis T est dit *complémenté* quand tout élément de T possède au moins un complément.

Un treillis est *booléen* s'il est distributif et complémenté.

Un treillis booléen à 2^n éléments est un poset $P = (P(Z), \subseteq)$ où $Z = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et $|P(Z)| = 2^n$. Le diagramme de Hasse d'un treillis booléen de 2^n éléments correspond au graphe de l'hypercube de dimension n . Notons aussi qu'un treillis booléen est un treillis distributif.

Théorème 2.1 (Alvarez [3]).

Un graphe connexe G est le graphe de couverture d'un treillis modulaire si et seulement si G est biparti et satisfait les conditions suivantes :

- α) Il existe deux sommets v_1, v_2 tels que $d(v_1, v_2) = \text{diam}(G)$ et tels que pour $i = 1$ et $i = 2$ et pour tous sommets a, b, c tels que $d(v_i, a) = d(v_i, c) + 1$ (où ac et bc sont deux arêtes de G), il existe un unique sommet f adjacent à a et b tel que : $d(v_i, f) = d(v_i, c) + 2$ (Fig. 2.3).

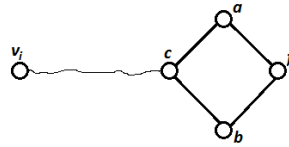


FIGURE 2.3 –

- β) Si H_1 est un sous graphe de G isomorphe au graphe de la figure 2.4(a), alors il existe H_2 sous graphe de G isomorphe au graphe de la figure 2.4(b) tel que H_1 est un sous graphe de H_2 .

Théorème 2.2 (Alvarez[3]).

Un graphe G est un diagramme de Hasse d'un treillis distributif si et seulement si G est biparti et ne contient pas $K_{2,3}$ comme sous graphe et satisfait les deux conditions α et β .

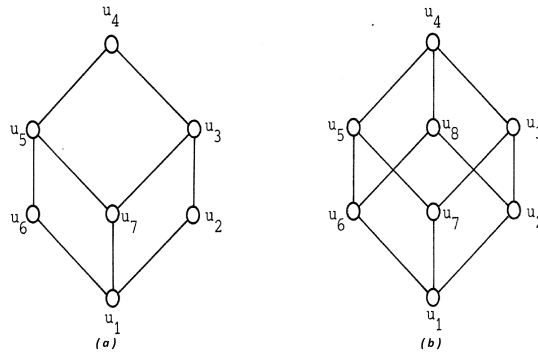


FIGURE 2.4 –

Mulder[43] a introduit la notion d'intervalle afin de simplifier les résultats obtenus par Alvarez et a obtenu les résultats suivants :

Théorème 2.3 (Mulder[43]).

Un graphe G est le diagramme de Hasse d'un treillis modulaire si et seulement si G est biparti et satisfait les deux conditions α et λ , où :

λ) : Si le graphe de la figure 2.4(a) est un sous graphe de G et u_1, u_2, u_3 et u_4 appartiennent aux quatre niveaux consécutifs de $I(u_1, u_4)$, alors le graphe (b) de la même figure est également un sous graphe de G .

Théorème 2.4 (Mulder[43]).

Un graphe G est le diagramme de Hasse d'un treillis distributif si et seulement si G est biparti et satisfait les conditions α et λ et ne contient pas $K_{2,3}$ comme sous graphe.

Théorème 2.5 (Mulder[43]).

Soit G un graphe avec $\text{diam}(G) = n$. Alors G est un hypercube Q_n si et seulement si G est diamétral, biparti, ne contient pas $K_{2,3}$ comme sous graphe et satisfait les conditions α et λ .

Duffus et Rival [29] ont caractérisé les graphes de couverture des treillis

distributifs comme sous graphes des hypercubes de la manière suivante :

Théorème 2.6 (Duffus et Rival [29]).

Un graphe G est un graphe de couverture d'un treillis distributif de longueur n si et seulement si G est un rétracte d'un hypercube de dimension n et $\text{diam}(G) = n$.

Mollard[37] a pu prolonger les résultats obtenus par Alvarez par une propriété supplémentaire, et a obtenus les caractérisations suivantes :

Théorème 2.7 (Mollard[37]).

Un graphe G est un hypercube si et seulement s'il satisfait une des conditions suivante :

- (i) *G est biparti, ne contient pas $K_{2,3}$ comme sous graphe, vérifie les deux conditions α et β et vérifie : $|V| = 2^{\text{diam}(G)}$.*
- (ii) *G est biparti, ne contient pas $K_{2,3}$, satisfait les condition α et β et vérifie : $\forall x \in V(G), \exists ! y \in V(G)$ tel que $d(x, y) = \text{diam}(G)$.*

2.2 Graphe de Hamming

Soient a_1, \dots, a_n des entiers positifs. Le *graphe de Hamming* H_{a_1, \dots, a_n} est le graphe dont l'ensemble des sommets est $\prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, a_i - 1\}$ et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs correspondant diffèrent en exactement une composante.

Le graphe de Hamming H_{a_1, \dots, a_n} est obtenu en faisant le produit cartésien des graphe complets $K_{a_1}, K_{a_2}, \dots, K_{a_n}$.

L'hypercube Q_n est le graphe de Hamming H_{a_1, \dots, a_n} où $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$.

Il est aussi facile de déduire qu'un graphe de Hamming est régulier de degrés $d = \sum_{i=1}^n a_i - 1$.

La figure 2.5 montre le graphe de Hamming $H_{4,2} = K_4 \square K_2$ et $H_{3,3} = K_3 \square K_3$.

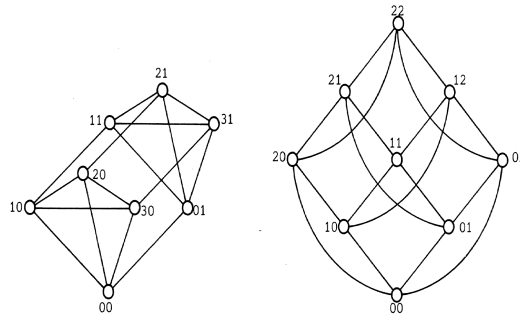


FIGURE 2.5 – Graphe de Hamming $H_{4,2}$ et $H_{3,3}$.

Les graphes de Hamming sont caractérisés pour la première fois par Mulder[43], comme une généralisation des hypercubes. En effet, l'hypercube de dimension d n'est autre que le produit cartésien de d copies des graphes complet K_2 , et donc l'hypercube est un cas particulier des graphes de Hamming. Dans un graphe de Hamming, tout intervalle $I(u, v)$ induit un hypercube de dimension $d(u, v)$.

Parmi les graphes de Hamming, seul les hypercubes sont bipartis ; cependant ils ne possèdent pas $K_4 - e$ comme sous graphe.

Une première caractérisation des graphes de Hamming est obtenue par Mulder.

Théorème 2.8 (Mulder[43]).

Un graphe G est un graphe de Hamming si et seulement si G est intervalle régulier, ne contient pas $K_4 - e$ comme sous graphe induit et vérifie la condition

suivante :

$$I(u, v) \cap I(v, w) = v \Rightarrow d(u, w) \geq \max\{d(u, v), d(v, w)\}$$

pour tout triplet de sommets u, v et w de G .

2.3 Graphes médians et quasi-médians

Notons que $I(u, v, w) = I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)$. Soit G un graphe. Un sommet x est un médian du triplet (u, v, w) si $x \in I(u, v, w)$. G est médian si tout triplet admet un unique médian.

Soient (u_1, u_2, u_3) un triplet de sommets d'un graphe G . On dit que le triplet (x_1, x_2, x_3) est un quasi-médian de (u_1, u_2, u_3) dans G , si il y a un entier non négatif m , appelé la taille du quasi-médian, tel que pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ on a :

1. $d(x_i, x_j) = m$,
2. $d(u_i, u_j) = d(u_i, x_i) + m + d(x_j, u_j)$,
3. m est minimal sous les deux précédentes conditions.

Tout médian x de (u, v, w) n'est autre que le quasi-médian (x, x, x) de taille zéro. Les graphes médians généralisent l'hypercube et les graphes quasi-médians les graphes de Hamming. Le chapitre suivant sera consacré à ces deux classes.

2.4 Les graphes intervalle-réguliers

Soit G un graphe, I une fonction intervalle et d une fonction distance. Alors G est intervalle-régulier si :

$$|I(u,v) \cap N(u)| = d(u,v) \text{ ou } |I(u,v) \cap N(v)| = d(u,v), \forall u, v \in V(G).$$

Cette classe de graphes a été étudié par Mulder[40, 43] et Foldes[31]. Noter que les graphes intervalle-réguliers ne sont pas nécessairement réguliers.(voir Figure 2.6)

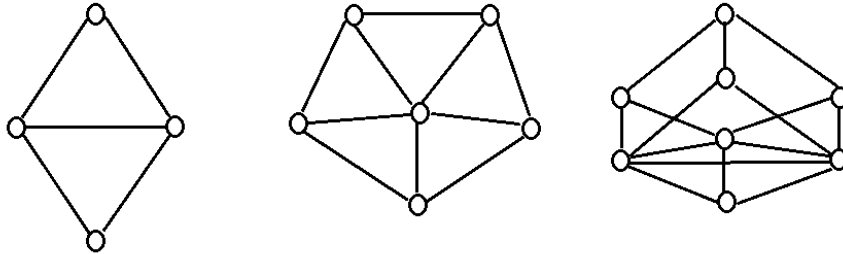


FIGURE 2.6 – Graphes intervalle-réguliers non réguliers.

Proposition 2.2 (Mulder[43]).

Si G et H sont deux graphes intervalle-réguliers alors $G \square H$ est intervalle-régulier.

Proposition 2.3 (Mulder[43]).

Pour un graphe G , les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) G est intervalle régulier ;*
- ii) pour toute paire de sommets u et v , $|N_i(u,v)| = C_i^{d(u,v)}, 0 \leq i \leq d(u,v)$;*
- iii) pour toute paire de sommets u et v , il existe exactement $d(u,v)!$ (u,v) -géodésique.*

Proposition 2.4 (Mulder[43]).

Soit G un graphe intervalle régulier. Alors

$$|N_1(u, v)| = d(u, v) = |N_{d(u, v)-1}(u, v)|$$

Pour toute paire de sommets u et v de G .

Théorème 2.9 (Mulder[40]).

Un graphe G est intervalle-régulier si et seulement si pour tout couple de sommet (u, v) de G , le sous graphe induit par l'ensemble des arêtes entre les niveaux de $I(u, v)$ est un hypercube de dimension $d(u, v)$.

Théorème 2.10 (Berrachedi[15]).

Pour toute paire de sommets u et v d'un graphe G intervalle-régulier et sans $K_4 - e$, l'intervalle $I(u, v)$ induit un hypercube de dimension $d(u, v)$.

Théorème 2.11 (Mulder[43]).

Un graphe G est un hypercube si et seulement si G est biparti intervalle-régulier.

Les graphes intervalle-réguliers qu'on connaît sont intervalle-monotones, H. M. Mulder [40] a proposé la conjecture suivante :

Un graphe intervalle-régulier est intervalle-monotone.

Cette conjecture est fautive, Berrachedi et Mollard [14] ont construit des graphes intervalle-réguliers à partir de laquelle on obtient une famille infinie de contre exemples.

2.5 Graphes distance-réguliers

Un graphe G est dit *distance-régulier*, s'il existe des entiers $b_i, c_i (i \geq 0)$ tels que pour toute paire de sommets u, v de G à distance $i = d(u, v)$, on ait exactement :

$$c_i = |N(v) \cap N_{i-1}(u)| \quad \text{et} \quad b_i = |N(v) \cap N_{i+1}(u)|.$$

Un graphe distance-régulier G est régulier de degré $d = b_0$ et sa connectivité est égale à son degré [22]. Son *vecteur d'intersection* est la séquence $\tau(G) = \{b_0, b_1, \dots, b_D; c_1, c_2, \dots, c_D\}$ et les *nombre d'intersection* de G sont définis par : $a_i = d - b_i - c_i$ pour $i = 0, \dots, D$ où D est le diamètre du graphe G .

Par exemple, l'hypercube de dimension 3 a un vecteur d'intersection égale à $\{3, 2, 1; 1, 2, 3\}$.

Les graphes de Hamming sont des graphes distance-réguliers.

Cette classe fait l'objet d'études intensives qui se sont intéressées de manière générale aux propriétés de ces graphes ou à la construction de nouveaux graphes qui soient distance-réguliers.

Le lecteur peut se référer à ([11, 50]) pour de récents résultats.

L'hypercube a été caractérisé en tant que graphe distance-régulier comme suit :

Théorème 2.12. ([22])

Soit G un graphe distance-régulier. Alors G a pour vecteur d'intersection

$$\tau(G) = \{d, d-1, d-2, \dots, 1; 1, 2, \dots, d-1, d\}$$

si et seulement si G est l'hypercube de dimension d .

2.6 Graphes intervalle-monotones

Un graphe est dit *intervalle monotone* si tous ses intervalles sont convexes. La notion de graphe distance monotone introduite par G. Buroch, I. Havel et J. M. Laborde [20] a permis à ces auteurs de donner une nouvelle caractérisation de l'hypercube.

Un graphe connexe est dit *distance monotone* si, pour tout intervalle $I(u, v)$ et tout sommet w hors de l'intervalle, il existe un sommet w' dans $I(u, v)$ tel que $d(w, w') \geq d(u, v)$.

Il est clair qu'un intervalle $I(u, v)$ est tel que, pour tous w, w' dans l'intervalle, $d(w, w') \leq d(u, v)$. Dans un graphe distance monotone cette propriété est donc caractéristique des sommets de l'intervalle.

Un graphe G est dit *intervalle distance-monotone* si chaque intervalle de G induit un graphe distance-monotone. Cette classe a été introduite par Aider et Aouchiche [1, 2]. Elle contient les cycles de longueur impaire, les graphes complets, l'hypercube, les graphes de Hamming...etc.

Proposition 2.5 (Mulder[43]).

Si G est sans sous-graphe homéomorphe à $K_{2,3}$, alors G est intervalle-monotone.

Théorème 2.13 (Buroch et al. [20]).

Soit G un graphe intervalle monotone et distance monotone de degré minimum $d \geq 3$, alors G est un hypercube.

Théorème 2.14 (Aider et al. [1]).

Soit G un graphe de degré minimum $d \geq 3$. Alors G est un hypercube si et seulement si G est biparti et intervalle distance-monotone.

2.7 Graphes sphériques

Un graphe G est dit *Sphérique* (resp. *hypersphérique*) si dans tout intervalle $I(u, v)$ et pour tout sommet w de cet intervalle, il existe un unique (resp. au moins un) sommet \bar{w} de $I(u, v)$ tel que $d(w, \bar{w}) = d(u, v)$. Le sommet \bar{w} est appelé *antipodal* de w dans $I(u, v)$.

On peut citer parmi les graphes qui sont hypersphériques, les graphes multipartis complets K_{m_1, m_2, \dots, m_k} , avec $k, m_1, m_2, \dots, m_k \geq 2$ et comme exemple de graphes sphériques les graphes complets, l'hypercube, les graphes de Hamming.

Soient u et v deux sommets d'un graphe hypersphérique G . Alors G vérifie([15, 16]) :

- i*) si $w \in N_1(v, u)$ alors $|N_1(u, v)| \geq |N_1(u, w)| + 1$;
- ii*) il existe au moins $d(u, v)$ sommets deux à deux non adjacents dans $N_1(u, v)$;
- iii*) $|N_1(u, v)| \geq d(u, v)$;
- iv*) si $|N_1(u, v)| = d(u, v)$ alors $|N_1(u, w)| = d(u, w)$ pour tout $w \in I(u, v)$;
- v*) si $|N_1(u, v)| = d(u, v)$ alors pour tout $w \in N_1(v, u)$, il existe un unique $\bar{w} \in I(u, v)$ tel que $d(w, \bar{w}) = d(u, v)$;
- vi*) le produit cartésien de graphes hypersphériques est un graphe hypersphérique.

Théorème 2.15 (Bezrukov et al. [18]).

Un graphe hypersphérique intervalle-régulier est intervalle-monotone.

Soient u et v deux sommets d'un graphe sphérique G . Alors G vérifie([16]) :

- i) G est régulier de degré d ;
- ii) $|N_k(u, v)| = |N_{d(u,v)-k}(u, v)|$, $0 \leq k \leq d(u, v)$;
- iii) si $|N_1(u, v)| = d(u, v)$ alors le sous-graphe de G induit par $I(u, v)$ est isomorphe à $Q_{d(u,v)}$;
- iv) le produit cartésien de graphes sphérique est un graphe sphérique.

Un graphe G possède la quadrangle propriété si pour tout intervalle $I(u, v)$, et pour toute paire de sommets non adjacents x et y de $N_1(u, v)$, x et y possèdent un voisin commun z dans $I(u, v)$ tel que $d(z, v) = d(u, v) - 2$.

Proposition 2.6 (Bouanane [19]).

Un graphe sphérique G sans triangle qui possède la quadrangle propriété est intervalle-régulier.

Proposition 2.7 (bezrukov et al.[18]).

Soit G un graphe sphérique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) G possède la quadrangle propriété ;
- ii) G est intervalle-régulier ;
- iii) G est intervalle-monotone.

Proposition 2.8 (Bezrukov [19]).

Soit G un graphe sphérique, alors pour toute paire de sommets u et v dans G et pour toute paire de sommets antipodaux w et \bar{w} dans $I(u, v)$, on a : $d_G(w, \bar{w}) = d_{I(u,v)}(w, \bar{w})$.

L'hypercube a été caractérisé en tant que graphe sphérique par Berra-chedi et al.[16] comme suit :

Théorème 2.16 (Berrachedi et al.[16]).

Un graphe G est un hypercube si et seulement si G est biparti sphérique.

2.8 Graphes diamétraux et intervalle diamétraux

Graphe diamétraux

Un graphe G est dit *diamétral* si tout sommet admet un unique sommet diamétral.

On peut remarquer qu'un graphe diamétral [15] :

- est d'ordre impair,
- n'est pas forcément biparti ou régulier,
- peut être biparti non régulier,
- peut être régulier non biparti.

Les graphes diamétraux ont été introduits par Mulder[42], et étudiés par Parthasarathy et Nandakumar ([47]), Janakiraman ([35]) en tant que graphe auto-centrés (self-center graphs).

Comme exemples de graphes diamétraux, on peut citer les cycle paire C_{2k} , l'hypercube Q_d ..., cette classe de graphes a été intensivement étudiée dans ([15, 43, 47]), où on peut trouver une multitude de résultats et de propriétés. Nous en citons ici quelques-uns :

Proposition 2.9 (Berrachedi [15]).

Le produit cartésien de deux graphes diamétraux est un graphe diamétral.

L'hypercube a été caractérisé par Mulder comme graphe diamétral comme suit :

Théorème 2.17 (Mulder [43]).

Soit G un graphe tel que $\text{diam}(G) = d$. Alors G est un hypercube de dimension d si et seulement si G est un graphe diamétral biparti, ne contient pas $K_{2,3}$ comme sous-graphe induit et vérifiant les conditions suivantes :

- i) G contient deux sommets diamétraux w et \bar{w} tels que si toute paire de sommets u et v de $N_i(w)$ ont un voisin commun dans $N_{i-1}(w)$, alors u et v ont un unique voisin commun dans $N_{i+1}(w)$, pour $i = 1, \dots, \text{diam}(G)$;
- ii) si le graphe de la figure 2.4(a) est un sous-graphe de G , alors il existe un sommet $u_8 \in G$ tel que le graphe de la figure 2.4(b) est un sous-graphe de G .

Une autre caractérisation a été donnée en tant que graphe diamétral médian :

Théorème 2.18 (Mulder [42]).

Un graphe G est un hypercube si et seulement si G est diamétral et médian.

Graphes intervalle-diamétraux

Un graphe G est dit *intervalle-diamétral* si tout intervalle induit un sous-graphe qui soit diamétral. Cette classe de graphes a été introduite par Berrachedi[15]. Comme exemple de graphes intervalle-diamétraux on peut citer les graphes sphérique, les graphes intervalle-réguliers tels que tout intervalle induit un hypercube... . Les graphes intervalle-diamétraux sont régulier, ne contiennent pas $K_{2,3}$ comme sous-graphe induit, pour toute paire de sommet u et v , on a $|I(u, v) \cap N(v)| \geq d(u, v)$ et si il est sans $K_4 - e$ alors $I(u, v)$ induit un hypercube de dimension $d(u, v)$.

Un graphe intervalle-diamétral G vérifie aussi les propriétés suivantes :

Proposition 2.10 (Bouanane[19]).

Soit G un graphe intervalle-diamétral. Soient u et v deux sommets de G . On a :

1. $|N_1(u, v)| \geq |N_1(u, w)| + k$, pour tout $w \in N_k(v, u)$ et $0 \leq k \leq d(u, v)$.
2. Il y a au moins $d(u, v)$ sommets non adjacents dans $N_1(u, v)$.
3. Si $|N_1(u, v)| = d(u, v)$ alors $|N_1(u, w)| = d(u, w)$ pour tout $w \in I(u, v)$.
4. $|N_k(u, v)| = |N_k(v, u)|$, pour tout $0 \leq k \leq d(u, v)$.

Théorème 2.19 (Berrachedi [15]).

Pour un graphe G sans $K_4 - e$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) G est intervalle-diamétral ;
- (ii) G est intervalle-régulier.

Une caractérisation de l'hypercube en tant que graphe intervalle-diamétral est :

Théorème 2.20 (Berrachedi [15]).

Un graphe G est un hypercube si et seulement si G est un graphe biparti intervalle-diamétral.

Chapitre 3

GRAPHES HILBERTIENS ET QUASI-HILBERTIENS

Introduction

Un médian d'un triplet de sommets u, v et w n'est autre qu'un sommet x appartenant simultanément à une plus courte (u, v) -chaîne, à une plus courte (v, w) -chaîne et une plus courte (w, u) -chaîne. Les graphes médians sont les graphes où tout triplet de sommets admet un unique médian, en utilisant le concept d'intervalles, un graphe est médian si pour tout triplet de sommets u, v et w on a :

$$|I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)| = 1.$$

Cette propriété est vérifiée par les hypercubes. Ainsi la classe des graphes médians constitue une généralisation des hypercubes. La notion de graphe médian a été introduite indépendamment par Avann[5] (qui a utilisé le terme "unique ternary distance graph") et Nebeský[45]. Ils ont étudié la relation entre les graphes médians et certaines structures algébriques, d'autres travaux dans ce sens peuvent être trouvés dans [7, 41, 43, 44, 10]...).

Mulder et Schrijver ont étudié une relation entre les graphes médians et les hypercubes possédant la propriété de Helly[41]. L'hypercube est ca-

ractérisé comme étant le seul graphe médian régulier (Mulder [43, 42]). Un graphe médian peut être plongé isométriquement dans un hypercube (résultats établi par Djokovic[27]). Bandelt[9] a montré que les graphes médians sont justement les rétractes des hypercubes. En utilisant les projections sur les intervalles, Berrachedi [13] a donné une caractérisation des graphes médians, ce sont les graphes pour lesquels il y a unicité de projection sur les intervalles. D'autres caractérisations des graphes médians existent dans la littérature ([5, 7, 13, 14, 15, 31, 34, 41, 43, 45]...).

Mulder [43] a introduit les graphes quasi-médians comme une généralisation naturelle des graphes médians, sa motivation a été de plonger les graphes de Hamming dans une nouvelle classe de la même manière qu'il a plongé l'hypercube dans les graphes médians. En fait, les graphes médians constituent justement les graphes quasi-médians bipartis. Les graphes de Hamming sont les graphes quasi-médians réguliers[43], Wilkeit[52] a prouvé que les graphes quasi-médians sont les rétractes des graphes de Hamming et un graphe quasi-médian peut être plongé isométriquement dans un graphe de Hamming. Une approche indépendante est faite par Chung et al.[26] qui ont défini un nouveau paramètre appelé "windex" (window index), ils ont prouvé que les rétractes des graphes de Hamming sont précisément les graphes à windex fini. Plusieurs autres caractérisations et généralisations des graphes quasi-médians existent dans la littérature ([10, 15, 23, 24, 30, 34, 43]...). Comme utilisation des graphes quasi-médians, Chung et al.[26] ont donné un algorithme polynomial pour la résolution du problème d'allocation dynamique de ressources lorsque le graphe associé est quasi-médian. La biologie moléculaire est un autre domaine où les graphes quasi-médians jouent un rôle essentiel, en effet, ils sont utilisés par les biologistes évolutionnaires dans l'analyse des séquences moléculaires, les relations phylogénétiques, les problèmes d'analyse d'image biologique..., voir [8, 33, 39] et références incluses pour plus de détails.

Les quasi-intervalles, introduit par Nebeský [44], peuvent être vus comme un intervalle élargi. Un quasi-intervalle $I^*(u, v)$ est l'ensemble de sommets

x tel que toute (u, x) -géodésique et (x, v) -géodésique n'ont que x comme sommet en commun. Trivialement un intervalle est un quasi-intervalle et dans les graphes médians les quasi-intervalles sont des intervalles. On va étudier, dans ce chapitre, les projections sur les quasi-intervalles, où on va prouver que les graphes quasi-médians sont les graphes pour lesquels il y a unicité de projections sur les quasi-intervalles. On donne, comme conséquence, une nouvelle caractérisation des graphes de Hamming.

3.1 Graphes médians et graphes Hilbertiens

3.1.1 Médian algébrique

M. Sholander[48] a introduit la structure algébrique de semi-treillis médian dit aussi médian algébrique, qui est défini comme suit :

Un médian algébrique (V, m) consiste en un ensemble fini V et une opération ternaire $m : V \times V \times V \rightarrow V$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$(m_1) : m(u, v, u) = u, \text{ pour } u, v \in V,$$

$$(m_2) : m(u, v, w) = m(w, v, u) = m(v, u, w), \text{ pour } u, v, w \in V,$$

$$(m_3) : m(m(u, v, w), w, x) = m(u, m(v, w, x), w), \text{ pour } u, v, w, x \in V.$$

Un semi-treillis (V, \leq) est un poset fini pour lequel toute paire d'élément u et v ont une unique borne inférieure, notée par $u \wedge v$. Puisque V est fini, le semi-treillis contient une borne inférieure universelle, notée 0 .

Pour u et v dans V on note $[u, v] = \{w \in V \mid u \leq w \leq v\}$, l'ensemble $[u, v]$ est un intervalle d'ordre dans le semi-treillis. Un semi-treillis est dit distributif si tout intervalle d'ordre $[0, u]$ est un treillis distributif.

Si deux éléments u et v d'un semi-treillis ont une borne supérieure, cette borne supérieure est unique et est notée $u \vee v$.

Théorème 3.1 (Mulder[43]).

Un graphe G est un graphe médian si et seulement si G est le digraphe d'un semi-treillis médian.

3.1.2 Résultats de base

Un sous-graphe H de G est dit isométrique si pour toute paire de sommets x et y de H on a : $d_H(x, y) = d_G(x, y)$. A noter qu'un sous graphe convexe de G est un sous-graphe isométrique.

Soit ab une arête du graphe G . On définit $G(a, b)$ comme suit :

$$G(a, b) = \{ \text{l'ensemble des sommets } x : d(x, a) < d(x, b) \}$$

$G(a, b)$ est l'ensemble des sommets plus "proches" de a que de b . $G(a, b)$ et $G(b, a)$ sont disjoints. De plus si G est biparti $G(a, b) \cup G(b, a) = V(G)$.

Djokovic[27] a donné une caractérisation des graphes médians en tant que sous-graphe isométrique d'un hypercube. Son résultat s'énonce comme suit :

Proposition 3.1 (Djokovic[27]).

Un graphe G est un sous-graphe isométrique d'un hypercube si et seulement si G est un graphe biparti et pour toute arête ab , l'ensemble $G(a, b)$ est convexe.

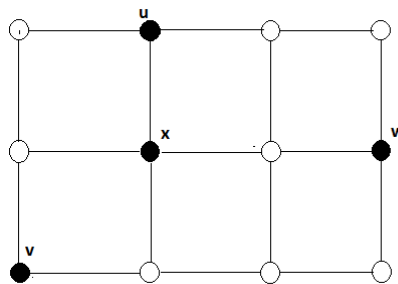


FIGURE 3.1 – Une grille comme graphe médian.

Définition 3.1.

Soient u, v et w trois sommets d'un graphe de G . Un sommet x de G est appelé médian de u, v et w si x est un sommet de $I(u, v, w)$.

Dans un graphe donné, $I(u, v, w)$ peut être d'une taille quelconque (figure 3.2).

Dans la figure 3.2 (a), on a : $|I(u, v, w)| = 3$.

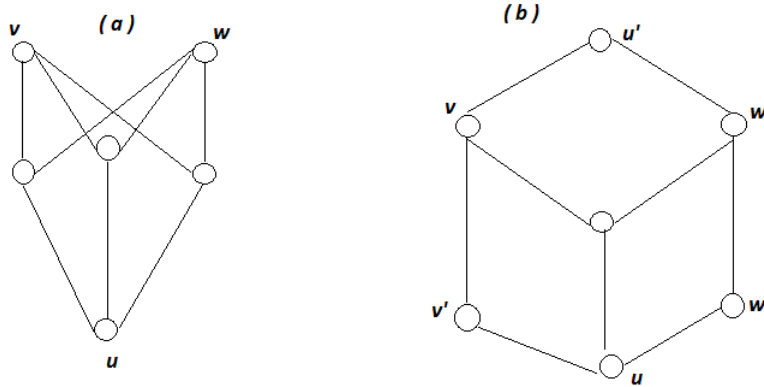


FIGURE 3.2 – Taille de $I(u, v, w)$.

Dans la figure 3.2 (b), on a : $|I(u, v, w)| = 1$ et $|I(u', v', w')| = 0$.

Proposition 3.2 (Mulder[43]).

Si pour tout triplet de sommets u, v et w d'un graphe G on a $|I(u, v, w)| \neq 0$, alors G est biparti.

Définition 3.2.

Un graphe G est médian si pour tout triplet de sommets u, v , et w de G on a :

$$|I(u, v, w)| = 1.$$

L'unique sommet x de $I(u, v, w)$ sera noté $x = \langle u, v, w \rangle$.

Une autre formulation équivalente de la définition d'un graphe médian est :

Pour tout triplet de sommets u, v et w de G , il existe un unique sommet $x = \langle u, v, w \rangle$ tel que :

$$d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)$$

$$d(v, x) + d(x, w) = d(v, w)$$

$$d(w, x) + d(x, u) = d(w, u)$$

En fait x est l'unique sommet qui minimise la somme $d(u, x) + d(v, x) + d(w, x)$.

Comme conséquence de la Proposition 3.2, un graphe médian est biparti.

Les arbres et les hypercubes sont des graphes médians. Dans l'hypercube Q_d avec sa représentation vectorielle, le médian $x = (x_1, \dots, x_d)$ des sommets $u = (u_1, \dots, u_d)$, $v = (v_1, \dots, v_d)$ et $w = (w_1, \dots, w_d)$ est déterminé comme suit :

$$x_i = u_i v_i + v_i w_i + w_i u_i \quad i = 1, \dots, d.$$

Les opérations sont effectuées dans le corps $\{0, 1\}$.

A noter qu'un sous-graphe convexe d'un graphe médian est médian.

Dans ce qui suit, on donne quelques caractérisations des graphes médians utilisant la notion d'intervalles. Les résultats énoncés sont dus à Mulder [43].

Définition 3.3.

Soit X un ensemble fini. Une application de $X \times X \longrightarrow P(X)$ est une structure d'intervalle sur X si :

- (i) $x, y \in I(u, v)$ si et seulement si $I(x, y) \subseteq I(u, v)$ pour $x, y, u, v \in X$.
- (ii) $I(u, v, w) \neq \emptyset$ pour tout triplet u, v et w de X .

Remarques 3.1.

1. Il s'ensuit de la définition 3.3 que $I(u, v) = I(v, u)$ pour toute paire u et v de X .
2. Soit I une structure d'intervalle sur X . Tout ensemble $I(u, v)$ est appelé intervalle dans X .
3. Un sous-ensemble Y de X est dit I -convexe si pour toute paire d'éléments u et v de Y , Y contient l'intervalle $I(u, v)$. Il s'ensuit de la propriété (i) et de la définition précédente que tout intervalle dans X est I -convexe.
4. Si (X, \leq) est un treillis, alors un exemple d'une structure d'intervalle sur X est définie par

$$I(u, v) = \{x \in X \mid u \wedge v \leq x \leq u \vee v\}.$$

5. Si l'application I de $X \times X \rightarrow P(X)$ vérifie la propriété (i) de la définition précédente et la propriété suivante $|I(u, v, w)| = 1$ on dira dans ce cas que I est une structure médiane d'intervalle sur X .

Une structure d'intervalle obtenue à partir d'un treillis est médiane si et seulement si le treillis est distributif. D'autres exemples de structures médianes d'intervalles sont obtenues à partir de graphes médians comme le montre les résultats suivants :

Proposition 3.3 (Mulder[43]).

Soit $G = (V, E)$ un graphe médian de fonction d'intervalle I . Alors I est une structure médiane d'intervalle.

Proposition 3.4 (Mulder[43]).

Soit I une structure médiane d'intervalle sur un ensemble fini V . Soit G le graphe où l'ensemble des sommets est V et où deux sommets u et v sont adjacents si $I(u, v) = \{u, v\}$. Alors G est un graphe médian.

On donne quelques caractérisations de graphes médians établies par Mulder[42, 43]

Proposition 3.5 (Mulder [42]).

Un graphe G est médian si et seulement si G est intervalle-monotone et pour tout triplet de sommet u, v et w on a :

Si $I(u, v) \cap I(v, w) = \{v\}$ alors $d(u, w) = d(u, v) + d(v, w)$.

H.M. Mulder a donné une opération (appelée expansion convexe) qui permet de conserver la propriété pour un graphe d'être un graphe médian.

Proposition 3.6 (Mulder[43]).

Un graphe G est médian si et seulement si on peut obtenir G à partir de K_1 par une séquence d'expansions convexes.

En utilisant la rétraction, un résultat similaire caractérisant les hypercubes est :

Proposition 3.7 (Bandelt[9]).

Les graphes médians sont les rétractes des hypercubes.

3.1.3 Graphes Hilbertiens

Définition 3.4.

Une projection (resp. anti-projection) d'un sommet w du graphe G sur un sous ensemble de sommets S est un sommet de S à distance minimum (resp. maximum) de w . Pour tout sous ensemble de sommets S et pour tout sommet w , on désigne par $P(w, S)$ (resp. $AP(w, S)$) l'ensemble des projections (resp. anti-projections) de w sur S .

On considérera les propriétés suivantes :

(P_1): Pour tout u, v et w : $|P(w, I(u, v))| = 1$.

(P_2): Pour tout u, v et w : $|AP(w, I(u, v))| = 1$.

(P_3): Pour tout convexe C et tout sommet w , on a : $|P(w, C)| = 1$.

(P_4): Pour tout convexe C et tout sommet w , on a : $|AP(w, C)| = 1$.

(P_5): Pour toute paire de sommets u et v à distance deux et pour tout sommet $z \in \text{Conv}\{u, v\}$ tel que $d(u, z) = 2$ on a : $z = v$.

Définition 3.5 (Graphe Hilbertien).

Un graphe G est dit Hilbertien si et seulement si $|P(w, I(u, v))| = 1, \forall u, v, w \in G$.

Berrachedi[13, 14] a obtenu les résultats suivants :

Proposition 3.8 (Berrachedi et al. [13, 14]).

Pour tout graphe G on a :

- i) Un graphe vérifiant l'une des propriétés (P_1), (P_2), (P_3) ou (P_4) est biparti.
- ii) Un graphe G vérifiant (P_1) ou (P_2) est sans $K_{2,3}$.

- iii) Un graphe sans 4-cycle qui vérifie (P_1) est un arbre.
- iv) Soit un graphe G vérifiant (P_1) . Si N_0, N_1, \dots, N_k est une décomposition en niveaux relative au sommet x , alors tout 4-cycle rencontre trois niveaux.

Caractérisations de l'hypercube

L'étude des anti-projections sur les intervalles a permis d'obtenir de nouvelles caractérisations de l'hypercube.

M. Mollard[37] a donné une caractérisation de l'hypercube en considérant les anti-projections sur les intervalles.

Proposition 3.9 (Mollard[37]).

Un graphe G est un hypercube si et seulement si G vérifie (P_2) .

Des résultats analogues sont donnés par Berrachedi[15] en considérant les projections sur les intervalles et les convexes.

Proposition 3.10 (Berrachedi[15]).

1. *Un graphe diamétral et vérifiant (P_1) est un hypercube.*
2. *Soit G un graphe sans $K_{2,3}$, alors G est un hypercube si et seulement si G vérifie (P_4) .*
3. *Un graphe G est un hypercube si et seulement si G vérifie (P_4) et (P_5) .*

Caractérisations des graphes médians

Proposition 3.11 (Mulder [43]).

Soit G un graphe sans triangles, si $|I(u, v, w)| = 1$ pour tout triplet de sommets u, v et w tels que $d(u, v) = 2$, alors G est un graphe médian.

Théorème 3.2 (Berrachedi[13]).

Un graphe G est médian si et seulement si G vérifie (P_1) .

Théorème 3.3 (Berrachedi[14]).

Soit G un graphe sans $K_{2,3}$. Alors G est médian si et seulement si G vérifie (P_3) .

3.2 Graphes quasi-médians et quasi-Hilbertiens

3.2.1 Quasi-médian algébrique

Une algèbre de Nebeský $A = (V, q)$ consiste en un ensemble fini V et une opération ternaire $q : V \times V \times V \rightarrow V$ satisfaisant les conditions suivantes, pour tout u, v, w et x dans V (on écrit uvw au lieu de $q(u, v, w)$) :

- (i) $uvu = u$,
- (ii) $uvw = wvu$,
- (iii) $uv(uvw) = uvw$,
- (iv) $u(uvw)w = uvw$,
- (v) $(uvw)wx = u(vwx)w$.

Si A est une algèbre de Nebeský, alors, pour tout u, v dans V : $[u, v] = \{w \in V \mid uvw = w\}$ et $[u, v]^* = \{x \in V \mid uwx = w\}$.

Proposition 3.12 (Mulder[43]).

Soit A une algèbre de Nebeský. Alors, pour tout u et v dans V , $[u, v]^ = \{x \in V \mid [u, x] \cap [x, v] = \{x\}\}$.*

Une algèbre quasi-médiane $A = (V, q)$ est une algèbre de Nebeský qui satisfait la condition suivante, pour tout u, v et w dans V :

Si $uvw = v$ et $[u, w] = \{u, w\}$, alors $[u, v] = \{u, v\}$.

Théorème 3.4 (Mulder[43]).

Soit G un graphe sous-jacent d'une algèbre quasi-médiane. Alors G est un graphe quasi-médian.

3.2.2 Résultats de base

Soient (u, v, w) un triplet de sommets de G . Un quasi-médian de (u, v, w) est l'unique triplet (x, y, z) tel que :

1. x et y appartiennent à une (u, v) -géodésique, y et z appartiennent à une (v, w) -géodésique et z et x appartiennent à une (w, u) -géodésique.
2. $d(x, y) = d(y, z) = d(z, x)$.
3. $d(x, y)$ est minimum sous les deux conditions précédentes.

La distance $d(x, y)$ est appelée la taille du quasi-médian.

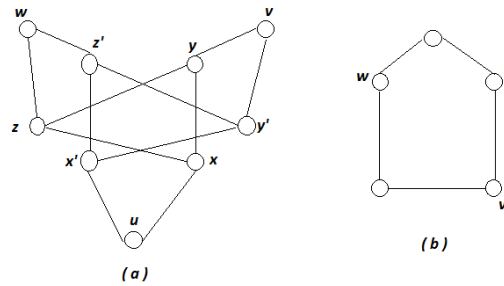
Le 1) peut être formulé comme suit :

$$d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) = d(u, v)$$

$$d(v, y) + d(y, z) + d(z, w) = d(v, w)$$

$$d(w, z) + d(z, x) + d(x, u) = d(w, u)$$

Dans un graphe donné, le nombre de quasi-médians d'un triplet donné peut être quelconque. Dans le graphe de la figure 3.3 (a), le triplet (u, v, w) admet deux quasi-médians (x, y, z) et (x', y', z') tandis que dans le graphe de la figure 3.3 (b), le triplet (u, v, w) n'admet pas de quasi-médian.

FIGURE 3.3 – Taille de $I(u, v, w)$.**Définition 3.6.**

Un graphe G est quasi-médian s'il satisfait les conditions suivantes :

1. Tout triplet de sommets de G possède un unique quasi-médian.
2. G n'admet pas $K_4 - e$ comme sous-graphe induit.
3. La fermeture convexe de tout C_6 induit est soit le 3-cube Q_3 , soit le graphe de Hamming $H_{3,3}$.

Remarques 3.2.

De la définition d'un quasi-médian, il en résulte que : G n'admet ni $K_{2,3}$ ni C_5 comme sous-graphe induit. On en déduit que la troisième condition de la définition peut être remplacée par :

3)' Si (u_1, u_2, \dots, u_6) est un C_6 induit avec $d(u_1, u_4) = 3$, alors il existe deux sommets de G u_7 et u_8 tel que $(u_1, u_2, \dots, u_7, u_8)$ induit un Q_3 dans G .

La notion de quasi-médian généralise celle de médian dans le sens où un médian de trois sommets n'est autre qu'un quasi-médian de taille zéro. Un médian x d'un triplet (u, v, w) constitue donc le quasi-médian (x, x, x) .

Proposition 3.13 (Mulder[43]).

Si G est un graphe quasi-médian alors il est intervalle-monotone et vérifie la condition suivante :

$$I(u, v) \cap I(v, w) = \{v\} \Rightarrow d(u, w) \geq \text{Max}\{d(u, v), d(v, w)\}$$

Pour tout triplet de sommets u, v et w de G .

Les graphes médians forment la classe des graphes quasi-médians bipartis. Il s'ensuit que beaucoup de résultats sur les graphes médians ont été généralisés aux graphes quasi-médians. Dans ce qui suit on en donne quelques exemples.

Proposition 3.14 (Mulder[43] et Wilkeit[51]).

Les graphes quasi-médians sont les sous-graphes isométriques des graphes de Hamming.

Proposition 3.15 (Wilkeit[52]).

Les graphes quasi-médians constituent les rétractes des graphes de Hamming.

Proposition 3.16 (Mulder[43]).

Un graphe G est quasi-médian si et seulement si G peut être obtenu à partir de K_1 par une expansion quasi-médiane.

Proposition 3.17 (Wilkeit[51]).

Un graphe G est quasi-médian si et seulement si dans G :

- i) Tout triplet de sommets admet un quasi-médian.*
- ii) Tout intervalle de G induit un graphe médian.*

3.2.3 Les graphes de Hamming comme graphes quasi-médians

Rappelons que le graphe de Hamming H_{a_1, \dots, a_n} (a_1, \dots, a_n sont des entiers positifs) est le graphe dont l'ensemble des sommets $\prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, a_i - 1\}$ et

où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs correspondants diffèrent en exactement une composante.

Soient $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ trois sommets du graphe de Hamming H_{a_1, \dots, a_n} . Le quasi-médian du triplet (u, v, w) est le triplet (x, y, z) où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ et il est déterminé comme suit :

Si $u_i \neq v_i \neq w_i \neq u_i$ alors $x_i \neq y_i \neq z_i \neq x_i$

Sinon $x_i = y_i = z_i = p_i$ où p_i est l'élément de $\{u_i, v_i, w_i\}$ qui apparaît au moins deux fois.

De plus, la taille du quasi-médian est le nombre de composantes où u, v et w diffèrent simultanément.

Proposition 3.18 (Mulder[43]).

Un graphe G est un graphe de Hamming si et seulement si G est intervalle-régulier, ne contient pas $K_4 - e$ comme sous-graphe induit et vérifie la condition suivante :

$$I(u, v) \cap I(v, w) = \{v\} \Rightarrow d(u, w) \geq \text{Max}\{d(u, v), d(v, w)\}$$

Pour tout triplet de sommets u, v et w de G .

Théorème 3.5 (Mulder[43]).

Un graphe G est un graphe de Hamming si et seulement si G est un graphe quasi-médian régulier.

3.2.4 Graphes quasi-Hilbertiens

Définition 3.7 (Quasi-intervalle).

Soient u et v deux sommets du graphe G . On appelle quasi-intervalle de u à v , et on note $I^*(u, v)$, l'ensemble :

$$I^*(u, v) = \{x \in G \text{ tels que } I(u, x) \cap I(x, v) = \{x\}\}$$

Les quasi-intervalles ont été introduits et étudiés par Nebeský[44] et Mollard[38].

On remarque que pour toute paire de sommets u et v de G , on a : $I(u, v) \subseteq I^*(u, v)$.

Définition 3.8 (Graphe quasi-Hilbertien).

On dira qu'un graphe G est quasi-Hilbertien si pour tout triplet de sommet u, v et w de G , la projection de w sur le quasi-intervalle $I^(u, v)$ est unique. Autrement dit : $|P(w, I^*(u, v))| = 1$.*

Proposition 3.19 (Badji et Berrachedi[6]).

Si G est un graphe médian alors G est quasi-Hilbertien.

La preuve vient du fait que dans un graphe médian tout quasi-intervalle est un intervalle et les graphes Hilbertien sont exactement des graphes médians. Autrement dit, dans un graphe médian G on a $I(u, v) = I^*(u, v)$ et donc $|P(w, I(u, v))| = |P(w, I^*(u, v))| = 1, \forall u, v, w \in G$.

Proposition 3.20 (Berrachedi[15]).

Pour toute paire de sommets u et v d'un graphe quasi-Hilbertien G , l'intervalle $I(u, v)$ induit un sous-graphe biparti.

Proposition 3.21 (Badji et Berrachedi[6]).

Pour toute paire de sommets u et v d'un graphe quasi-Hilbertien G , l'intervalle $I(u, v)$ induit un sous-graphe médian.

Proposition 3.22 (Badji et Berrachedi[6]).

Soit G un graphe sans triangles, si G est quasi-Hilbertien alors G est biparti.

Proposition 3.23 (Berrachedi[15]).

Soit G un graphe quasi-Hilbertien. Si (u_0, u_1, \dots, u_5) est un C_6 induit avec $d(u_0, u_3) = 3$, alors il existe deux sommets de G u_6 et u_7 tels que $\{u_0, u_1, \dots, u_6, u_7\}$ induit un Q_3 dans G .

Théorème 3.6 (Berrachedi[15]).

Soit G un graphe quasi-Hilbertien. Pour toute paire de sommets u et v de G et pour tout sommet w du quasi-intervalle $I^*(u, v)$ on a :

$$d(u, v) \geq \text{Max}\{d(u, w), d(v, w)\}.$$

Théorème 3.7 (Berrachedi[15]).

Un graphe quasi-Hilbertien est intervalle-monotone.

Un exemple de graphe intervalle-monotone qui n'est pas quasi-Hilbertien est le graphe $K_4 - e$.

Définition 3.9.

Un graphe G satisfait la triangle propriété si, pour tout triplet de sommets (u, v, w) tel que :

$$\begin{cases} d(u, v) = d(u, w) = k \\ d(v, w) = 1 \end{cases}$$

Alors il existe un voisin commun x de v et w avec $d(u, x) = k - 1$.

Définition 3.10.

Un graphe G satisfait la quadrangle propriété si pour tout quadruplet de sommets u, v, w et y tel que :

$$\begin{cases} d(u, w) = d(u, v) = d(u, y) - 1 = k \\ d(v, w) = 2 \end{cases}$$

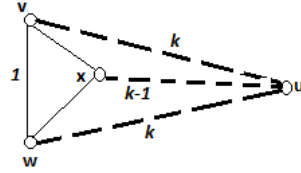


FIGURE 3.4 – La triangle propriété.

avec y voisin commun de v et w . Alors il existe un voisin commun x de v et w

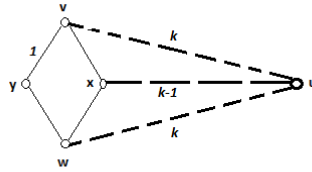


FIGURE 3.5 – La quadrangle propriété.

avec $d(u, x) = k - 1$.

Définition 3.11.

Un graphe G est dit faiblement modulaire s'il satisfait la triangle et la quadrangle propriété.

Théorème 3.8 (Chung and al. [26]).

Un graphe G est quasi-médian si et seulement si G est faiblement modulaire et ne contient ni $K_4 - e$ ni $K_{2,3}$ comme sous-graphe induit.

Nous allons utiliser ce Théorème (3.8) et la série des lemmes qui va suivre pour montrer notre résultat principal, qui est :

Théorème 3.9.

Un graphe G est quasi-Hilbertien si et seulement si G est quasi-médian.

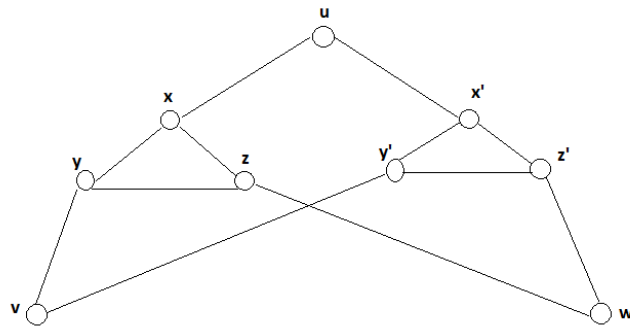
Lemme 3.1.

Un graphe quasi-médian est quasi-Hilbertien.

Démonstration.

Soient u, v, w trois sommets d'un graphe quasi-médian G .

Supposons que $P(u, I^*(v, w))$ contient au moins deux sommets x et x' .



Considérons le triplet (x, v, w) . D'après la proposition 1.2, il existe un unique sommet y dans $I(x, v) \cap I(v, w)$ avec $I(x, v) \cap I(v, w) = I(v, y)$. Aussi, avec le triplet (x, y, w) on obtient $I(x, w) \cap I(y, w) = I(w, z)$. De la même manière, on commençant par le triplet (x', v, w) , on trouve $I(x', v) \cap I(v, w) = I(v, y')$ et $I(x', w) \cap I(y', w) = I(w, z')$. Ainsi, (x, y, z) et (x', y', z') sont deux quasi-médians de (u, v, w) dans G , ce qui est une contradiction. \square

Lemme 3.2.

Un graphe quasi-Hilbertien est sans $K_{2,3}$.

Démonstration.

Soient u, v, w, x et y cinq sommets induisant un $K_{2,3}$ dans le graphe quasi-Hilbertien G . Soient v, w et u les sommets de degrés 2. Considérons le quasi-intervalle $I^*(v, w)$. Comme $I(v, u) \cap I(u, w) \supseteq \{u, x, y\}$, $u \notin I^*(v, w)$. Les sommets v, w, x et y sont dans $I^*(v, w)$. Puisque $d(u, x) = d(u, y) = 1$,

$P(u, I^*(v, w)) \supseteq \{x, y\}$. Ceci est une contradiction avec le fait que G est un graphe quasi-Hilbertien. \square

Lemme 3.3.

Un graphe quasi-Hilbertien est sans $K_4 - e$.

Démonstration.

Soient u, v, w et z quatre sommets induisant un $K_4 - e$ dans le graphe quasi-Hilbertien G . Soient u et w les sommets de degrés 2. Considérons le quasi-intervalle $I^*(v, w)$. Les sommets v, w et z sont dans $I^*(v, w)$, mais $u \notin I^*(v, w)$. Comme $d(u, v) = d(u, z) = 1$, $P(u, I^*(v, w)) \supseteq \{v, z\}$. Ceci est une contradiction avec le fait que G est un graphe quasi-Hilbertien. \square

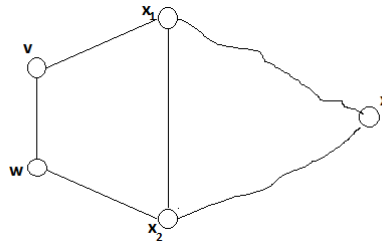
Lemme 3.4.

Dans un graphe quasi-Hilbertien G , $\forall vw \in E(G)$ et $\forall x \in I^(v, w) - \{v, w\}$, on a : $d(v, x) = d(w, x) = 1$.*

Démonstration.

Supposons le contraire. Soit vw une arête dans un graphe quasi-Hilbertien G et $x \in I^*(v, w) - \{v, w\}$. Considérons les deux cas possibles.

Cas 1 : $d(v, x) \neq d(w, x)$



Supposons sans perte de généralité que $d(v, x) < d(w, x)$, ainsi $d(v, x) + 1 \leq d(w, x)$, ce qui implique que $I(v, x) \subset I(w, x)$. Alors $I(v, x) \cap I(w, x) = I(v, x)$,

ceci est en contradiction avec $x \in I^*(v, w) - \{v, w\}$.

Cas 2 : $d(v, x) = d(w, x) > 1$

On suppose que $d(v, x)$ est minimal.

Soit x_1 un sommet dans $I(v, x) \cap N(v)$. Comme $I(x_1, v) \cap I(v, x) = \{v, x_1\}$, $v \notin I^*(x_1, x)$. $I(x, w) \cap I(w, x_1) \neq \{w\}$, autrement $P(v, I^*(x, x_1)) \supseteq \{w, x_1\}$. Nécessairement, il existe $x_2 \in I(x, w) \cap I(w, x_1) - \{w\}$ et $d(x_1, x_2) = 1$.

Si $v \in N(x_2)$ et $w \notin N(x_1)$, alors $K_4 - e$ sera un sous-graphe induit. Le même résultats arrive si $v \notin N(x_2)$ et $w \in N(x_1)$.

Si $v \in N(x_2)$ et $w \in N(x_1)$, alors $P(v, I^*(x, x_1)) \supseteq \{x_1, x_2\}$ et $P(w, I^*(x, x_1)) \supseteq \{x_1, x_2\}$.

Ainsi $d(v, x_2) = d(w, x_1) = 2$. De la minimalité de $d(v, x)$, on a $d(x, x_1) = d(x, x_2) = 1$, pour que $P(x_1, I^*(v, w)) \supseteq \{v, x\}$. Contradiction avec le fait que G est un graphe quasi-Hilbertien.

Par conséquent, on a $d(v, x) = d(w, x) = 1, \forall x \in I^*(v, w) - \{v, w\}$ avec $vw \in E(G)$. \square

Lemme 3.5.

Pour toute paire de sommets u et v adjacente d'un graphe quasi-Hilbertien G , le quasi-intervalle $I^(v, w)$ induit un sous graphe-complet.*

Démonstration.

Soit $I^*(v, w)$ un quasi-intervalle tel que $d(v, w) = 1$ et $x, y \in I^*(v, w)$ tel que $x \neq y$. Du Lemme 3.4, on a :

$$\begin{cases} d(v, x) = d(w, x) = d(v, w) = 1 \\ d(v, y) = d(w, y) = d(v, w) = 1 \end{cases}$$

Si $x = v$ ou $x = w$, alors $d(x, y) = 1$. Le même résultat arrive si $y = v$ ou $y = w$. Sinon, si $d(x, y) \neq 1$, alors les sommets v, w, x et y induisent un $K_4 - e$, ce qui est interdit. \square

Lemme 3.6.

Un graphe quasi-Hilbertien satisfait la triangle propriété.

Démonstration.

Considérons trois sommets u, v et w d'un graphe quasi-Hilbertien tels que $d(u, v) = d(u, w) = k$ et $d(w, v) = 1$. Si $k = 1$, on a la triangle propriété. Supposons que $k \geq 2$. Comme $I^*(w, v)$ induit un graphe complet, u n'est pas dans $I^*(w, v)$. Alors, il existe x dans $I(w, u) \cap I(u, v) - \{u\}$ tel que $x \in I^*(w, v)$. D'où, $d(x, v) = d(w, x) = 1$ et $d(u, x) = k - 1$. \square

Lemme 3.7.

Un graphe quasi-Hilbertien satisfait la quadrangle propriété.

Démonstration.

Soient u, v, w et z quatre sommets d'un graphe quasi-Hilbertien tels que $d(u, v) = d(u, z) = d(u, w) - 1 = k$, $d(z, v) = 2$, et $w \in I(v, z)$. Considérons le quasi-intervalle $I^*(u, z)$. Si $k = 1$, on a la quadrangle propriété. Supposons que $k \geq 2$. $I(u, v) \cap I(v, z) \neq \{v\}$, autrement $P(w, I^*(u, z)) \supseteq \{z, v\}$. Nécessairement, il existe $x \in I(z, v) \cap I(v, u) - \{v\}$, alors $d(z, x) = d(v, x) = 1$ et $d(u, x) = k - 1$. \square

Démonstration du Théorème 3.9.

Du Lemme 3.1, un graphe quasi-médian est quasi-Hilbertien. Comme un graphe quasi-Hilbertien est faiblement modulaire (Lemme 3.6 and 3.7), et ne contient pas $K_{2,3}$ ou $K_4 - e$ comme sous-graphe induit, c'est un graphe quasi-médian (Théorème 3.8). \square

Proposition 3.24 (Badji et Berrachedi[6]).

Si G est un graphe de Hamming, alors G est quasi-Hilbertien.

Les Théorèmes 3.9 et 3.5 donnent une nouvelle caractérisation des graphes de Hamming :

Théorème 3.10.

Un graphe G est un graphe de Hamming si et seulement si G est régulier et quasi-Hilbertien.

3.3 Exemples d'applications des graphes quasi-médians

Comme utilisation des graphes quasi-médians, Chung et all.[26] ont donné un algorithme polynomial pour la résolution du problème d'allocation dynamique de ressources lorsque le graphe associé est quasi-médian. La biologie moléculaire est un autre domaine où les graphes quasi-médians jouent un rôle essentiel. En effet, ils sont utilisés par les biologistes évolutionnaires dans l'analyse des séquences moléculaires, les relations phylogénétiques, les problèmes d'analyse d'image biologique..., voir [8, 33, 39] et références incluses pour plus de détails. On présente ici deux exemples d'utilisation des graphes quasi-médians.

3.3.1 Problème d'allocation dynamique de ressource

On a un graphe $G = (V, E)$ à n sommets $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ représentant un réseau. On dispose d'une ressource partagée r localisée sur un sommet x du graphe G . La ressource peut être déplacée du sommet x au sommet y induisant un coût $d(x, y)$, à un instant donné, la ressource est demandée par d utilisateurs (d sommets du graphe G). Le coût de traitement d'une demande est $d(x, y)$ si la demande est en y et la ressource en x . Le problème est de placer la ressource (à chaque étape) pour traiter toutes les demandes avec un coût total minimum.

Une illustration est donnée dans la figure 3.6, en (a) la ressource est placée en z et les demandes sont en x et t .

Le coût total de traitement, si la ressource n'est pas déplacée est la somme des coûts de traitement des demandes d_1 et d_2 : $d(x, z) + d(t, z) = 4$.

Si on déplace la ressource en y (figure 3.6(b)), le coût total de traitement est : $d(z, y) + d(x, y) + d(t, y) = 3$, où $d(z, y)$ est le coût de déplacement de la ressource r et $d(x, y), d(t, y)$ sont les coûts de traitement des demandes d_1 et d_2 .

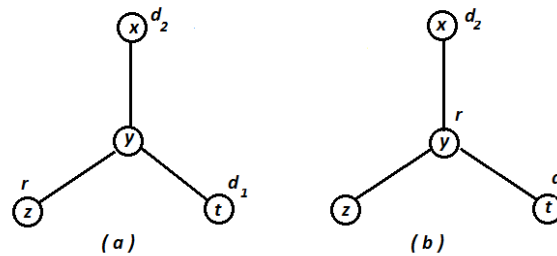


FIGURE 3.6 –

C'est ce problème qui est connu dans la littérature sous la dénomination du problème d'allocation dynamique de ressource. Un nouveau paramètre $WX(G)$ est défini (windex de G "window index").

La séquence des demandes d_1, d_2, \dots, d_n est exprimée aux sommets : s_1, s_2, \dots, s_n . La ressource r est placée initialement en r_0 . Le coût de traitement de d_i (si la ressource passe du sommet r_{i-1} au sommet r_i) est la somme des coût de traitement de la demande et de déplacement de la ressource : $d(s_i, r_i) + d(r_{i-1}, r_i)$. Les demandes sont traitées séquentiellement (dans l'ordre de leurs arrivées, comme elles sont numérotées). Le coût total de traitement des demandes dépend de la séquence r_1, r_2, \dots, r_n des positions de la ressource. Le problème consiste à trouver une séquence r_1, r_2, \dots, r_n qui minimise :

$$\sum_{i=1}^n (d(s_i, r_i) + d(r_{i-1}, r_i))$$

Ce problème est difficile dans le cas général. Dans le cas où G est quasi-médian, ce problème devient facile[26].

On dira qu'un algorithme travaille pour le DLP sur le graphe G avec visibilité k pour tout i si le choix de r_i dépend uniquement de r_0 et s_j avec $j < i + k$. Le plus petit k pour lequel il existe un algorithme de visibilité k pour le DLP sur G est appelé windex de G et est noté $WX(G)$. Si un tel k n'existe pas, on dira que $WX(G)$ est infini.

Le windex d'un graphe complet K_n est n , C_5 et $K_4 - e$ ont un windex infini, les arbres et les hypercubes ont un windex égal à 2.

Théorème 3.11 (Chung et al. [26]).

Un graphe G possède un windex fini si et seulement si G est un graphe quasi-médian.

3.3.2 Un problème de reconstruction d'ADN en phylogénétique

La phylogénie correspond à l'étude des liens entre espèces apparentées en utilisant l'information génétique qui est représentée par des séquences d'ADN. La reconstruction d'arbres évolutifs, objectif de la Phylogénie, a plusieurs intérêts : historiques (découvrir le passé et dater les étapes de l'évolution des êtres vivants), épidémiologiques (identifier la souche d'un virus pour étudier sa transmission), médicaux (déterminer le traitement à utiliser pour combattre un pathogène en se référant aux traitements connus pour des pathogènes proches dans l'arbre)... Une telle construction est basée à partir des séquences d'ADN dit taxons, où les branches représentent les liens entre les taxons, les sommets internes représentent les ancêtres et la racine représente l'ancêtre le plus ancien du point de vue de l'évolution. Pour un ensemble de taxons, plusieurs arbres peuvent être construits, l'arbre choisit est celui nécessitant le moins de mutations, c'est l'arbre le plus parcimonieux.

Le problème de reconstruction d'arbre le plus parcimonieux est difficile, vu le nombre important de comparaisons à faire entre les arbres construits. Bandelt et al. [8, 33, 39] (et références incluses) ont travaillé sur ce problème, d'abord modéliser par des graphes médians et ensuite étendue aux graphes quasi-médians, la taille des données de ce problème est réduite par cette modélisation. En effet, toutes les constructions les plus parcimonieuses d'un arbre quelconque reliant un sous ensemble des différents haplotypes (version variables d'un même gène qui est habituellement transmise ensemble) donnés est incluse dans le graphe quasi-médian associé[8]. Un tel graphe est construit à partir d'une table d'ADN condensée, cette table est obtenu en regroupant des taxons avec la même séquence d'ADN en un seul haplotype puis en éliminant toutes les positions constantes et fusionnant toutes ces positions en un seul caractère de l'ensemble des haplotypes. On obtient alors un tableau dont les lignes sont des caractères et les colonnes des haplotypes. Les valeurs du tableau sont issues d'un alphabet de nucléotides A, G, C, T . Des algorithmes pour la construction et la visualisation de ces graphes existent, le plus récent est celui de S. Herrmann et V. Moulton [33].

Chapitre 4

PRÉFIBRES ET PROJECTIONS

Introduction

La classe des graphes faiblement modulaire généralisent la classe des graphes quasi-médians. Les graphes pour lesquels toute clique est une préfibres sont aussi une autre généralisation des graphes quasi-médians. Dans ce chapitre, on va donner les principaux résultats sur les propriétés des préfibres dans les graphes et on s'est fixé comme perspectives d'étudier les graphes pour lesquels toute clique est une préfibres.

4.1 Préfibres et clique préfibres

La notion de préfibres, étudiée en particulier par Dress et Scharlau [28], Tardif [49] et Wilkeit [53], généralise la notion de préfibres du produit cartésien d'espace métrique.

Soit (χ, d) un espace métrique. Une préfibres (ou ensemble d'issue) de χ est un sous ensemble A de χ tel que, pour tout $x \in \chi$, il existe $y \in A$ avec $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $z \in A$. L'élément y est unique, et l'application $k : \chi \rightarrow A$ définie par $y = k(x)$ est la projection de x dans A .

On peut reformuler cette définition de la manière suivante :
 Soit x un sommet d'un graphe G , un sommet y d'un sous-ensemble de sommets S , $S \subset V(G)$, est dit issue (Gate) dans S du sommet x si y appartient à $I(x, w)$ pour tout sommet w dans S .

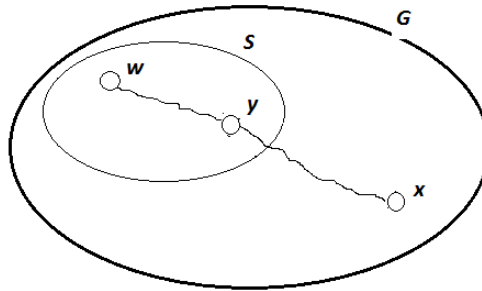


FIGURE 4.1 – issue de x dans S

Il est clair que x a au plus une issue dans S , ainsi y est le sommet le plus proche de x et c'est l'unique sommet dans S qui vérifie :

$$I(x, y) \cap S = \{y\}$$

On peut écrire également $P(x, S) = \{y\}$.

L'ensemble S est dit préfibre, si tout sommet de G admet une issue dans S . On dit que dans un graphe G toute clique est une préfibre, si tout sommets de G admet une issue dans toute clique de G .

Ainsi l'ensemble vide et l'ensemble des sommets $V(G)$ sont trivialement des préfibres et l'intersection de préfibres est également une préfibre.

Il est connu que si un ensemble S est une préfibre alors il est convexe et triangle-fermé (si deux sommets d'un triangle appartiennent à S le troisième aussi).

4.2 Quelques propriétés de préfibres dans les graphes

Les préfibres sont habituellement définies par une propriété métrique, mais Wilkeit a donné la caractérisation suivante de ces ensembles.

Proposition 4.1 (Wilkeit [53]).

Un ensemble de sommet A d'un graphe est une préfibre si et seulement si pour tout sommet $u \in A$ et $v \in A$, on a $I^(u, v) \subseteq A$.*

Tardif[49] a étudié ces ensembles appelés préfibre dans les espaces métriques et a montré que certaines propriétés algébriques du produit cartésien des graphes se généralisent aux espaces métriques.

Proposition 4.2 (Tardif [49]).

Si $\varphi : H \rightarrow G$ est une rétraction d'un graphe connexe et si W est une préfibre de H , alors $W \cap G$ est vide ou bien une préfibre de G .

Weilkeit a donné la caractérisation suivante :

Proposition 4.3 (Wilkeit [52]).

Dans un graphe quasi-médian toute clique est préfibre.

D'autres caractérisations concernant ces ensembles sont établies, à savoir :

Proposition 4.4 (Bandelt et al. [10]).

- *Soit S et T deux ensembles induisant deux sous-graphes d'un graphe G , si $S \cap T$ est une préfibre dans S et il existe des arêtes entre $S - T$ et $T - S$, alors T est une préfibre dans $S \cup T$.*

- Soit G un graphe faiblement modulaire, alors un ensemble de sommets dans G est une préfibre si et seulement si il est convexe et triangle-fermé.

Proposition 4.5 (Badji et Berrachedi[6]).

Si G est un graphe quasi-Hilbertien, alors $I^*(u, v)$ est triangle-fermé $\forall u, v \in V(G)$.

Proposition 4.6 (Badji et Berrachedi[6]).

Si G est un graphe quasi-médian alors $\forall u, v \in G, I^*(u, v)$ est une préfibre.

Théorème 4.1 (Badji et Berrachedi[6]).

Si G est un graphe quasi-médian alors G est quasi-intervalle-monotone.

Proposition 4.7 (Badji et Berrachedi[6]).

Si G est un graphe quasi-médian alors $\forall u, v \in V(G), I^*(u, v)$ convexe et triangle-fermé.

Soit ab une arête de G , on définit les ensembles $G(a, b)$ et U_{ab} comme suit :

$$G(a, b) = \{w \in V(G) \mid d(a, w) < d(b, w)\}$$

$$U_{ab} = \{u \in V(G) \mid u \text{ a un voisin dans } W_{ab}\}.$$

Théorème 4.2 (Bandelt et al. [10]).

Pour un graphe connexe G , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) *G est un graphe quasi-médian.*
- (ii) *G vérifie la triangle et la quadrangle propriété, et G ne contient pas K_{4-e} ou $K_{2,3}$ comme sous graphe induit.*
- (iii) *toute clique de G est une préfibre, et pour toute arête ab de G , L'ensemble U_{ab} est convexe.*

Proposition 4.8 (Hagauer and klavzar [32]).

- (i) *La rétraction d'un graphe clique-préfibres est un graphe clique-préfibre.*
- (ii) *Le produit cartésien deux graphes qui sont clique-préfibres est un graphe clique-préfibre.*
- (iv) *Si G est un graphe clique-préfibre sans $K_{2,3}$, alors G ne contient pas C_5 comme sous graphe induit.*

Proposition 4.9 (Berrachedi [15]).

Un graphe quasi-Hilbertien est sans C_5 induit.

Théorème 4.3 (Hagauer and klavzar [32]).

Dans un graphe G toute clique est une préfibre si et seulement si G ne contient pas $K_4 - e$ comme sous-graphe induit et G satisfait la triangle propriété.

Hagauer et klavzar [32] ont proposés les deux problèmes suivant :

Problème 1 : Un graphe clique-préfibre peut-il contenir un cycle isométrique impair de longueur au moins 5 ?

Problème 2 : Un graphe clique-préfibre peut-il contenir un C_5 induit ?

Bresar[21] a construit un exemple de graphe qui est clique-préfibre et qui contient un C_5 comme sous-graphe induit, le problème de cycle impair de longueur supérieur à 5 reste encore ouvert.

Théorème 4.4 (Bresar[21]).

Il existe des graphes dont toute clique est préfibre et contiennent un C_5 comme sous-graphe induit.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Après avoir rappelé les définitions et notations de base nécessaire à la lecture de cette thèse, nous avons aussi donner une revue de littérature de quelques classes de graphes généralisant l'hypercube, qui est l'objet principal de notre étude. Par la suite, en se basant sur les résultats généralisant les hypercubes aux graphes médians et d'une manière analogue des graphes de Hamming aux graphes quasi-médians, on a généralisé les graphes Hilbertiens aux graphes quasi-Hilbertiens. Comme conséquence, une nouvelle caractérisation des graphes de Hamming a été donnée. On termine par la classe de graphes où toute clique est une préfibre, qui est une classe qui contient les graphes quasi-Hilbertien, on donne quelques propriétés de cette classe ainsi que des problèmes qui pourraient nous intéressés dans l'avenir, comme :

- étudier la convexité des ensembles U_{ab} dans les graphes quasi-Hilbertiens,
- l'existence de cycles impairs ≥ 7 isométriques dans les graphes cliques préfibres,
- caractériser les graphes quasi-Hilbertiens dans la classe des graphes où toute clique est une préfibre,
- étudier les anti-projections sur les quasi-intervalles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Aider and M. Aouchiche, "*Distance monotonicity and a new characterization of hypercubes*," Discrete Math. 245 (2002) 55–62.
- [2] M. Aider and M. Aouchiche, "*Distance monotonicity and a new characterization of Hamming graphs*," Information Processing Letters 96 (2005) 207–213.
- [3] L. R. Alvarez, "*Undirected graphs as graphs of modular lattices*," Cand. J. Math. 17 (1965) 923–932.
- [4] B. Amari and A. Berrachedi, "*Generalized Hamming graphs : some new results*," A paraître dans Dissc. Math. Graph Theory.
- [5] S. P. Avann, "*Metric ternary distributive semi-lattices*," Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) 407–414.
- [6] N. Badji, A. Berrachedi "*Generalized median graphs*", Actes du Colloque sur l'opt. et les sys. d'infor. COSI'4, UMM Tizi-ouzou, Algérie, (2004) 216–225.
- [7] H. J. Bandelt and J. P. Barthelemy, "*Medians in median graphs*", Discrete App. Math. 8 (1984) 131–142.
- [8] H. J. Bandelt, A. Dür, "*Translating DNA data tables into quasi-median networks for parsimony analysis and error detection*", Mol. Phylogenet. Evol. 42 (2007) 256–271.
- [9] H. J. Bandelt, "*Retracts of hypercubes*", J. Graphs Theory 8 (1984) 501–510.
- [10] H.J. Bandelt, H.M. Mulder, E. Wilkeit, "*Quasi-median graphs and algebras*", J. Graph Theory 18 (1994) 131–142.

-
- [11] S. Bang, A. Dubickas, J. H. Koolen, and V. Moulton, " *There are only finitely many distance-regular graphs of fixed valency greater than two,*" *Advances in Mathematics* 269 (2015) 1–55.
- [12] C. Berge, " *Graphes*", Gauthier-villars, Paris 1983.
- [13] A. Berrachedi, " *A new characterization of median graphs*", *Discrete Math.* 128 (1994) 385–387.
- [14] A. Berrachedi, M. Mollard, " *Median graphs and hypercubes, some new characterizations*", *Discrete Math.* 208/209 (1999) 71–75.
- [15] A. Berrachedi, " *Quelques problèmes métriques de graphes de type hypercube*", Thèse Doctorat D'État, U.S.T.H.B, Alger 1997.
- [16] A. Berrachedi, I. Havel and H. M. Mulder, " *Spherical and clockwise spherical graphs,*" *Czechoslovak Mathematical Journal* 53 (2003) 295–309.
- [17] A. Berman and A. Kotzing, " *Cross cloning and antipodal graphs,*" *Discrete Math.* 69 (1998) 107–114.
- [18] S. Bezrukov and A. Sali, " *On superspherical graphs, In " Sets, graphs and numbers,*" 89–95, Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1991.
- [19] K. Bouanane, " *Étude de structure métriques de graphes généralisant l'hypercube,*" Thèse de Magistère, U.S.T.H.B, Alger 1999.
- [20] G. Burosch, I. Havel, J. M. Laborde, " *Distance monotone graphs and a new characterization of hypercubes*", *Dis. Math.*, 110 (1992) 9–16.
- [21] B. Bresar, " *Note On clique-gated graphs*", *Discrete Math.* 199 (1999) 201–205.
- [22] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, " *Distance-regular graphs,*" Berlin etc. Springer-Verlag, 1989.
- [23] M. Chastand, " *Théorème de Helly pour les graphe quasi-médians*", *Papier de recherche IAE de Lyon* 6 (1993).
- [24] M. Chastand et N. Polat, " *Invariant Hamming graphs in infinite quasi-median graphs*", *Combinatorica* 9 (1989) 111–131.
- [25] F.R.K. Chung, R.L. Graham, M.E. Saks, " *Dynamic search in graphs*", *Disc. Algo. and Comp.*, Academic Press (1987) 351–388.

-
- [26] F.R.K. Chung, R.L. Graham, M.E. Saks, "A dynamic location problem for graphs", *Combinatorica* 9 (1989) 111–131.
- [27] D. Z. Djokovic, "Distance-preserving subgraphs of hypercubes, J. Comb. Theory (serie B) 14 (1973) 263–267.
- [28] A. W. A. Dress and R. Scharlau, "Gated sets in metric spaces", *Aequationes Math.* 34 (1987) 112–120.
- [29] D. Duffus and I. Rival, "Graph orientable as distributive lattice", *Proc. Amer. Soc.* 88 (1983) 197–200.
- [30] Y. Egawa, "Characterization of the cartesian product of complete graphs by convex subgraphs", *Discrete Math.* 58 (1986) 307–309.
- [31] S. Foldes, "Characterization of hypercube", *Discrete Math.* 17 (1977) 155–159.
- [32] J. Hagauer, S. Klavzar, "Clique gated graphs", *Discrete math.* 161 (1996) 143–149.
- [33] S. Herrmann, V. Moulton, "Computing the blocks of a quasi-median graph", *Discrete App. Math.* 179 (2014) 129–138.
- [34] W. Imrich and S. Klavzar, "Product Graphs : Structure and Recognition", John Wiley & Sons, New York 2000.
- [35] T. Janakiraman, "On special classes of self-centred graphs," *Discrete Math.* 126 (1994) 411–414.
- [36] A. Kotzig, "On centrally symmetric graphs," *Czechoslovak Mathematical Journal* 18 (1968) 606–615.
- [37] M. Mollard, "Quelques problèmes combinatoires sur l'hypercube et les graphes de Hamming", Thèse Doctorat es-Science, Université Joseph Fourier, Grenoble 1989.
- [38] M. Mollard, "Two characterizations of generalized hypercube", *Discrete Math.* 93 (1991) 63–74.
- [39] L. Mukherjee, V. Singh, J. Peng, J. Xu, M. Zeitz, R. Berezney, "Generalized Median Graphs : Theory and Applications, IEEE 11th International Conference on Computer Vision, Rio de Janeiro, 2007, pp. 1-8.

-
- [40] H.M. Mulder, "Interval-regular graphs", *Discrete Math.* 41 (1982) 253–269.
- [41] H.M. Mulder and A. Schrijver, "Median graphs and Helly hypergraphs", *Discrete Math.* 25 (1979) 41–50.
- [42] H.M. Mulder, "*n*-cubes and median graphs", *J. Graph Theory* 4 (1980) 107–110.
- [43] H.M. Mulder, "The interval function of a graph", *Mathematical Center Tracts* 132, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1980.
- [44] L. Nebeský, "*Algebraic properties of Husimi trees*", *Casopis Pest. Math.* 107 (1982) 116–123.
- [45] L. Nebeský, "*Median graphs*", *Comment. Math. Univ. Carolinae* 11 (1970) 533–544.
- [46] J. Nieminen, M. Peltola and P. Ruotsalainen, "Two characterizations of hypercubes", *The Elec. J. of Combinatorics* 18 (2011) #P97.
- [47] K. Parthasarathy and R. Nandakumar, "*Unique eccentric point graphs*", *Discrete Math.* 46 (1983) 69–74.
- [48] M. Sholander, "*Median, lattice, and tree*", *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954) 808–812.
- [49] C. Tardif, "*Prefibers and the cartesian product of metric spaces*", *Discrete Math.* 109 (1992) 283–288.
- [50] E. R. Van Dam, J. H. Koolen and T. Hajime, "*Distance-regular graphs*", *The Electronic Journal of Combinatorics*, (DS22), 2016.
- [51] E. Wilkeit, "*Isometric embeddings in Hamming graphs*", *J. Comb. Theory (serie B)* 50 (1990) 179–197.
- [52] E. Wilkeit, "*The retracts of Hamming graphs*", *Discrete Math.* 102 (1992) 197–218.
- [53] E. Wilkeit, "*Isometrische Intergraphen von Hamming graphen*", Ph. D. Thesis, Universität Oldenburg 1986.

Résumé

Résumé

La projection (anti-projection) d'un sommet x d'un graphe G sur un sous ensemble de sommets S est un sommet de S à distance minimale (maximale) de x . L'étude des projections et des anti-projections ont donné naissance à de nouvelles caractérisations des hypercubes et des graphes médians. En particulier, A. Berrachedi a montré qu'un graphe est médian si et seulement si il y a unicité des projections sur tout intervalle. Une généralisation naturelle des graphes médians est la classe des graphes quasi-médians. On a établi qu'un graphe est quasi-médian si et seulement si il y a unicité des projections sur tout quasi-intervalle. Comme conséquence, une nouvelle caractérisation des graphes de Hamming a été donné.

Mots-clé : Graphes de Hamming, Graphes quasi-médians, Graphes médians généraliser, Graphes quasi-Hilbetrien, projection sur les quasi-intervalles.

Abstarct

The projection (anti-projection) of a vertex x of a graph G on a subset of vertices S is a vertex of S with a minimum (maximum) distance of x . The study of projections and anti-projections gave rise to new characterizations of hypercubes and median graphs. In particular, A. Berrachedi has shown that a graph is median if and only if there is uniqueness of the projections over any interval. A natural generalization of the median graphs is the class of quasi-median graphs. It has been established that a graph is quasi-median if and only if there is uniqueness of the projections over any quasi-interval. As a consequence, a new characterization of the Hamming graphs was given.

Keywords : Hamming graphs, Quasi-median graphs, Generalized median graphs, Quasi-Hilbetrien graphs, Projection over quasi-intervals.
