

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene
Faculté de mathématiques**



THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT 3^{ème} cycle

En: MATHÉMATIQUES

Spécialité: Équations aux Dérivées Partielles et Applications

Par: **Isma KADDOURI**

Sujet:

**Problèmes inverses pour des problèmes
d'évolution paraboliques à coefficients périodiques.**

Soutenue publiquement le 23 juin 2014

devant le jury composé de:

T. Ali Ziane	Professeur	à l'USTHB	Président
M. Cristofol	MC.HDR	à l'Université Aix-Marseille	Directeur de thèse
D.E. Teniou	Professeur	à l'USTHB	Directeur de thèse
L. Chorfi	Professeur	à l'Université de Annaba	Examineur
M. Choulli	Professeur	à l'Université de Lorraine	Examineur
E. Soccorsi	MC.HDR	à l'Université d'Aix-Marseille	Examineur

*A ma famille,
et plus particulièrement à mes parents,
et plus particulièrement encore à Tarik.*

Remerciements

Cette thèse de Doctorat a été réalisée dans le cadre d'une convention de cotutelle entre la Faculté des Sciences et Technologie Houari Boumediene d'Alger et l'université d'Aix-Marseille avec le soutien financier du projet Tassili. Les recherches qui font l'objet de ce mémoire ont été réalisées sur deux sites : en Algérie au sein du Laboratoire d'Analyse Numérique Equations aux Dérivées Partielles AMNEDP et en France dans le Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilité LATP.

Au terme de ces années de doctorat et au commencement d'une nouvelle étape de ma vie, j'éprouve une sincère gratitude envers tous ceux qui ont participé à ce travail et que je tiens ici à remercier.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères au Professeur Djamel Eddine Teniou pour avoir dirigé cette thèse et m'avoir permis de la réaliser dans les meilleures conditions. J'espère avoir été digne de la confiance qu'il m'avait accordée et que ce travail est finalement à la hauteur de ses espérances. Quoiqu'il en soit, j'ai beaucoup appris à ses côtés et je suis très honorée de l'avoir eu pour encadreur, il n'a eu de cesse de m'encourager et de me soutenir durant ces trois années.

Mes remerciements s'adressent ensuite à Monsieur Michel Cristofol qui m'a accueilli dans son laboratoire et qui a co-encadré cette thèse. Je le remercie de m'avoir encouragée et soutenue tout au long de la thèse avec patience et disponibilité.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Abdelhamid Ainouz qui m'a été d'un grand secours pour mes traductions en anglais. Il a toujours été disponible.

Monsieur Lionel Roques et Grégoire Nadin ont été très sympatiques avec moi et on toujours été à mon écoute pour la deuxième partie de ce mémoire. Qu'ils en soient également remerciés.

Je tiens également à remercier les membres de mon jury de thèse pour

l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour les remarques constructives qu'ils ont fait sur mon projet de thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Lahcene Chorfi et Monsieur Mourad Choulli pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Je tiens également à remercier Monsieur Tarik Ali Ziane et Monsieur Eric Soccorsi de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury de thèse.

Enfin, je souhaite remercier mes parents et mon frère pour leur soutien constant. Il m'est impossible de trouver des mots pour dire à quel point je suis fier d'eux, et à quel point je les aime. Pour conclure, je souhaite bien évidemment remercier mon extraordinaire mari Tarik qui m'a toujours épauler.

Table des matières

Remerciements	iii
1 Introduction	1
2 Rappels et compléments	13
2.1 Notations et rappels	13
2.2 Principes du maximum	14
2.3 Existence et unicité de la solution	15
2.4 Fonction poids	17
2.5 Fronts d'ondes	18
2.5.1 Fronts progressifs pour l'équation homogène	19
2.5.2 Fronts pulsatoires pour l'équation hétérogène	20
2.5.3 Vitesse asymptotique de propagation	21
3 Problème inverse parabolique périodique	23
3.1 Introduction	23
3.2 Résultats principaux	26
3.3 Existence, unicité et régularité	27
3.3.1 Preuve du Théorème 3.2.1	28
3.4 Inégalité de Carleman	34
3.5 Inégalité de stabilité	42
3.5.1 Preuve du Théorème 3.2.4 :	42
4 Problème inverse via les vitesses asymptotiques	49
4.1 Introduction	49
4.2 Hypothèses et résultats principaux	52
4.2.1 Hypothèses sur f	52
4.2.2 Etat stationnaire : existence et unicité	53

4.2.3	Conditions initiales et vitesse asymptotique de propagation	54
4.2.4	Résultat d'unicité	56
4.3	Preuve du Théorème principal	56
4.4	Preuve de la Proposition 4.2.2	59
4.4.1	Construction d'une sur-solution	60
4.4.2	Comparaison des conditions initiales	62
4.4.3	Construction d'une sous-solution	64
4.4.4	Existence de la vitesse asymptotique de propagation	65
4.5	Preuve du Lemme 4.3.3	67
	Perspectives	73
	Bibliographie	75

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire porte sur l'étude de deux problèmes inverses associés à des équations paraboliques. Le premier concerne l'identification d'un potentiel périodique via une inégalité de stabilité, le deuxième l'unicité de ce coefficient via un nouveau type d'observations.

Dans ce travail on s'intéresse aux problèmes inverses associés à des équations paraboliques issues entre autres de modèles écologiques [64, 66, 70]. On va préciser à travers deux exemples concrets la notion de problème inverse :

Exemple 1 : On considère trois sources d'eau qui alimentent une rivière. Si on connaît la composition minérale de chaque source et que l'on veut déterminer celle de la rivière formée par ces trois sources, on résout un problème direct. Si par contre on connaît la composition de l'eau de la rivière et on souhaite déterminer celle de chaque source ou de l'une d'entre elles, inaccessible directement (souterraine ou autre), on résout un problème inverse.

Exemple 2 : Un autre exemple concerne la reconstruction de la capacité calorifique d'un liquide. Si on connaît ce paramètre, on sait en combien de temps on arrivera à l'amener à ébullition. Inversement, si on mesure le temps pour qu'un liquide inconnu se mette à bouillir, peut-on retrouver sa capacité calorifique ou bien faut-il pour cela d'autres informations, surtout si ce liquide est issu d'un mélange.

Ainsi, les problèmes inverses auxquels on s'intéresse consistent à déterminer certaines causes d'un phénomène à partir d'observations expérimentales de ses effets.

Les problèmes cités plus haut sont modélisés par des équations de réaction-

diffusion. Elles peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\partial_t u(t, x) - D\Delta u(t, x) = f(u), t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

où la fonction $f(u)$ correspond au terme de réaction et le terme $D\Delta u$ correspond au terme de diffusion.

Ces modèles interviennent dans des domaines très variés. Parmi les champs d'application, on peut citer :

En physique : l'équation de réaction-diffusion est utilisée entre autres pour modéliser des phénomènes de combustion.

En biologie et en écologie : l'équation de réaction-diffusion apparaît par exemple en dynamique des populations. Les phénomènes de propagation étudiés peuvent être des situations d'invasions biologiques [53, 56, 58]. Ces modèles font intervenir à la fois les déplacements des individus qui sont représentés par le terme de diffusion $D\Delta u$ et la croissance de la population qui est représentée à travers le terme de réaction $f(u)$, correspondant aux événements de naissance et de mortalité. Ce type d'équations a été largement étudié voir par exemple [5, 6, 8]. Dans ces articles, les auteurs s'intéressent à l'unicité et à la régularité de la solution du problème étudié et établissent des propriétés liées au phénomène de propagation de la solution.

Dans un environnement homogène, un des modèles de réaction-diffusion le plus classique est celui de Kolmogorov, Petrovskii et Piskunov (noté KPP). Il correspond à l'équation homogène (1.1), avec certaines conditions sur le terme de réaction $f(u)$ que l'on détaillera plus loin. Elle est dite homogène car les coefficients de l'équation sont constants. En dynamique ou en génétique des populations, la quantité $u(t, x)$ représente la densité de la population à l'instant t et à la position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. L'ouvert Ω peut être borné ou égal à l'espace entier.

Une formulation classique du terme de réaction dans le modèle KPP est :

$$f(u) = u(r - \gamma u) \text{ avec } r > 0.$$

Le coefficient r correspond au taux de croissance de la population qui est très important. Sa connaissance permet de prédire l'extinction ou la persistance de la population modélisée ; il représente les interactions entre les individus et les caractéristiques de l'habitat ou du milieu. La diffusion des individus est décrite grâce au coefficient de diffusion D supposé dans la suite strictement positif.

Une extension naturelle de ce modèle à un environnement hétérogène est le modèle introduit par Shigesada, Kawasaki et Teramoto en 1986 [65] :

$$\partial_t u(t, x) - D\Delta u(t, x) = f(x, u), t > 0, x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Il est dit hétérogène car le terme de réaction $f(x, u)$ dépend de la variable d'espace.

Dans la première partie de ce mémoire, on s'intéresse à une famille de modèles dont le terme de réaction $f(x, u)$ est de la forme :

$$f(x, u) = u(r(x) - \gamma(x)u), (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Dans ce modèle, $r(x)$ correspond toujours au taux de croissance intrinsèque. Il peut être positif, négatif ou nul, suivant la favorabilité de l'environnement. Ainsi, suivant la position dans l'espace, l'environnement peut être plus ou moins favorable à la reproduction. Le coefficient $\gamma(x)$ toujours strictement positif représente la compétition intraspécifique. Le terme de réaction $f(x, u)$ dépend donc, d'une part de la densité $u(t, x)$ et d'autre part de l'environnement dans lequel évolue la population. Dans notre modèle, on considère un terme de diffusion homogène $D\Delta u$.

Certains phénomènes nécessitent de considérer des termes de réaction $f(x, u)$ périodiques en espace. Dans ce mémoire, on va étudier des modèles mathématiques qui tiennent compte de ce type de phénomènes.

Notre travail va porter sur un problème inverse qui consiste en la détermination d'un coefficient de l'équation de réaction-diffusion hétérogène (1.2). L'estimation précise d'un coefficient est d'une importance capitale car la méconnaissance ou une trop grande imprécision dans la valeur d'un coefficient empêche d'obtenir une solution précise du problème direct.

Les variations climatiques sont, entre autres, une des causes dans l'augmentation des invasions biologiques [28] et écologiques : invasion de lapins, insectes, renards,... Les écologistes et les modélisateurs sont souvent confrontés à des espèces envahissant un nouvel environnement. Dans de tels cas, la reproduction et les caractéristiques de dispersion de l'espèce dans son nouvel environnement ne sont, souvent, pas connues et doivent être estimées [67]. Le comportement du modèle de réaction-diffusion dépend de la valeur de ses coefficients [15] et en particulier, du terme $\partial_u f(x, 0)$.

Durant les 20 dernières années, les problèmes inverses se sont beaucoup développés grâce à leur fortes implications dans des domaines très variés. Par

exemple en médecine dans la reconstruction de l'intérieur du corps humain à partir de mesures de type électriques ou ultrason non invasives, en biologie, en écologie, dans l'industrie, dans la recherche pétrolière pour l'identification des perméabilités dans un réservoir, dans le traitement d'image pour la restauration d'images floues. Mais aussi les progrès des techniques mathématiques dans le domaine des problèmes inverses durant ces 20 dernières années ont permis de diversifier les approches et d'affiner les observations nécessaires à la reconstruction de coefficients inconnus.

Un problème d'équation aux dérivées partielles se pose en général sous la forme d'une relation

$$F(x, t, \mathcal{D}, u(t, x)) = 0, \quad (1.4)$$

où \mathcal{D} est un opérateur différentiel. On rajoute alors des données de type condition initiale et valeurs au bord du domaine. Ce problème est dit bien posé au sens de Hadamard, si :

- la solution du problème (1.4) existe ;
- la solution est unique ;
- la solution dépend continûment des données du problème.

Par contre, les problèmes inverses sont souvent mal posés : la solution peut ne pas exister à cause d'observations imprécises, elle peut ne pas être unique par manque d'observations, et peut ne pas être stable.

Il est souvent nécessaire d'ajouter des observations qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à espérer aboutir à une solution unique.

Dans le cas des équations aux dérivées partielles, posées dans un domaine borné, l'étude d'un problème inverse consiste à déterminer un ou plusieurs coefficients d'un opérateur différentiel, à partir par exemple de mesures partielles de la solution (appelées observations). Il existe plusieurs type d'observations, cela dépend du problème que l'on considère et du type de coefficients que l'on veut reconstruire. Ces observations doivent être utilisées d'une manière optimale et si possible, être réalistes physiquement car par exemple on ne peut pas toujours observer la solution sur tout le domaine d'étude Ω et en tout temps $T > 0$. Par exemple il existe des parties du domaine qui sont inaccessibles pour l'application physique. Pour résoudre un problème inverse on commence par s'intéresser à la question de l'unicité :

- On cherche d'abord à prouver l'unicité du coefficient à retrouver, à partir des observations requises.
- Puis on peut essayer d'établir une inégalité reliant ce coefficient aux observations, appelée inégalité de stabilité.

- Enfin on peut essayer de simuler numériquement l'efficacité de notre résultat théorique (unicité ou stabilité) à travers un algorithme. A noter que de nombreux problèmes inverses sont abordés, principalement dans le domaine de la physique, uniquement à travers des simulations numériques sans que ces algorithmes ne s'appuient sur des résultats d'unicité préalables.

De manière plus précise, on s'intéresse dans la première partie du mémoire au problème inverse de la reconstruction du coefficient $r(x)$ dans (1.3). Pour cela on établit une inégalité de stabilité pour ce coefficient à partir d'observations partielles de la solution notées $\text{Obs}(u)$ c'est-à-dire une inégalité de la forme :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \|r - \tilde{r}\| \leq C(\|\text{Obs}(u) - \text{Obs}(\tilde{u})\|), \quad (1.5)$$

dans des espaces fonctionnels adaptés. Le problème s'énonce ainsi : étant donné deux coefficients inconnus r, \tilde{r} , et les solutions associées u et \tilde{u} d'un problème (P) donné, est il possible d'estimer une norme $\|r - \tilde{r}\|$ par une norme convenable des observations des solutions correspondantes $\|\text{Obs}(u) - \text{Obs}(\tilde{u})\|$?

De ce résultat on déduit aisément l'unicité du coefficient i.e. que l'observation choisie détermine de manière unique le coefficient.

Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre un problème inverse. Les problèmes inverses sont très variés et donc ils sont modélisés mathématiquement de manières très différentes ce qui nécessite d'adapter les techniques.

Au cours des trois dernières décennies, il y a eu une recherche considérable sur l'établissement des résultats d'unicité et de stabilité pour les problèmes inverses. Une bonne introduction se trouve dans les livres de Lavrentiev [55], Isakov [46] ou Choulli [19]. En mathématiques appliquées, la méthode des estimations de Carleman est un outil très puissant qui permet d'obtenir ces résultats d'unicité et de stabilité, pour une large classe de problèmes inverses. Par contre, elle nécessite, en particulier dans le cas des problèmes inverses paraboliques, une observation de la solution sur tout le domaine, ce qui peut être considéré comme un handicap dans certaines situations. L'inégalité de Carleman a été établie en 1939 par le mathématicien suédois Carleman [16]. Dans ce travail, elle permettait de démontrer un résultat d'unicité pour une équation aux dérivées partielles elliptique en dimension 2. Cette méthode a été appliquée pour la première fois à un problème inverse par Bukhgeim et

Klibanov en 1981 [12]. Depuis, cette méthode est largement utilisée dans la théorie des problèmes inverses.

Il existe d'autres techniques pour résoudre un problème inverse. On peut citer par exemple, la méthode de Dirichlet-Neumann. Cette technique nécessite une infinité de mesures car elle implique la connaissance d'un opérateur. L'opérateur qui associe à la valeur de la solution sur le bord sa dérivée normale est appelé opérateur de Dirichlet-Neumann [46].

On peut citer aussi la méthode spectrale [49, 68] qui permet d'obtenir l'unicité grâce à différentes données spectrales du problème considéré, et la méthode de Fredholm, qui utilise des propriétés de compacité [62].

Par ailleurs, on peut trouver dans [19] une présentation des résultats d'unicité et de stabilité pour des problèmes paraboliques et elliptiques.

Les premiers résultats d'unicité dans la détermination de coefficients inconnus dans une équation parabolique sont essentiellement dûs aux travaux de Cannon et de ses collaborateurs en 1968 [13, 14]. Dans ces travaux, les estimations se font à partir de solutions régulières, ce qui permet l'utilisation d'outils comme le principe du maximum fort, ou le théorème des fonctions implicites. En revanche, ces estimations donnent des informations assez faibles sur la stabilité du problème inverse.

Pour les équations de réaction diffusion, l'obtention des inégalités de stabilité repose souvent sur des estimations de Carleman. L'idée d'utiliser ces estimations de Carleman pour résoudre les problèmes inverses a été introduite en 1981 par Bukhgeim et Klibanov et cette méthode est décrite dans [50]. Plusieurs articles utilisant cette méthode ont suivi, par exemple [51], ou encore [31] dans ce travail l'inégalité de Carleman elle est appliquée à une équation parabolique semi-linéaire.

En 1998 Imanuvilov et Yamamoto [45] utilisent une inégalité de Carleman globale pour l'opérateur de la chaleur, démontrée peu auparavant par Fursikov et Imanuvilov dans [37] pour le contrôle à zéro.

Les premiers travaux sur les problèmes inverses, ont consisté à étudier des équations paraboliques linéaires. On peut citer les articles [77] (détermination d'un potentiel), [71, 72] où les auteurs déterminent un terme source dans une équation parabolique dégénérée et enfin [76] pour une présentation générale des inégalités de Carleman appliquées aux problèmes inverses. Des résultats de stabilité lipschitzienne ont également été démontrés dans le cas de systèmes paraboliques linéaires et non linéaires dans la série de publications [3, 4, 20].

Dans un article récent [24], les auteurs ont développé, en une dimension, une nouvelle méthode basée sur le lemme de Hopf et qui utilise des observations très réalistes (observation ponctuelle en $x_0 \in \Omega$ pendant un temps $t_0 \in (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$).

Tous ces travaux concernent les domaines bornés et les méthodes sont difficilement applicables dans le cas où le domaine est l'espace tout entier. Cependant, il existe des situations où les échelles sont tellement grandes que l'on peut considérer que le domaine est infini.

Dans le cas de l'espace tout entier, la situation est plus compliquée car est rajoutée la difficulté d'évaluer le type d'observations : on ne peut observer de manière réaliste sur un domaine infini. La question que l'on se pose alors est : quel type d'observations doit-on choisir ?

A notre connaissance, dans le cas parabolique, il existe très peu de travaux traitant cette situation. Par exemple il y a l'article de Choi [17] dont le problème est au départ posé sur \mathbb{R}^n mais qui ensuite est ramené sur un domaine borné grâce aux hypothèses de périodicité sur les données. On peut citer [51] dans lequel l'auteur traite un problème inverse parabolique posé sur un domaine infini mais borné dans une direction et qui utilise une inégalité de Carleman. Avec l'hypothèse de périodicité on peut aussi citer les articles [17] et [47]. Mais les hypothèses et les données permettent en fait de ramener l'étude du problème posé dans \mathbb{R}^n à un domaine borné et donc les situations sont différentes du problème que l'on va exposer.

Les apports du mémoire

On termine cette introduction en expliquant la démarche que l'on a suivi dans ce mémoire et en donnant les résultats principaux que nous avons démontré.

Dans le premier travail, on s'est penché sur l'étude d'un problème inverse associé à une équation parabolique non linéaire, à données périodiques non régulières, posé dans \mathbb{R}^n . Ce problème présente deux difficultés : tout d'abord le domaine d'étude est non borné et ensuite la non régularité du coefficient à reconstruire entraîne un manque de régularité de la solution.

On s'intéresse à l'équation parabolique non linéaire suivante :

$$(P_r) \begin{cases} u_t(t, x) &= D\Delta u + r(x)u - \gamma(x)u^2, & 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^n, \\ & u \text{ L-périodique.} \end{cases}$$

On suppose $u_0(x)$, $r(x)$, et $\gamma(x)$ sont périodiques. On rappelle que f est une fonction L -périodique en x ($L > 0$) si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall s \in \mathbb{R}, f(x, s) = f(x + L, s). \quad (1.6)$$

A notre connaissance, il y a très peu d'études sur les problèmes inverses liés à des problèmes paraboliques non linéaires avec des coefficients non réguliers (e.g. [11]). En ce qui concerne les problèmes paraboliques linéaires à coefficients périodiques, à notre connaissance, il existe seulement un travail consacré à ce sujet c'est celui de Choi [17]. L'auteur s'intéresse à la reconstruction du potentiel dans une équation parabolique linéaire, il établit une inégalité de stabilité de la forme (1.5), sur le potentiel mais impose une condition forte sur l'ouvert d'observation de la solution, à savoir que celui ci doit contenir toute la frontière d'une cellule. L'auteur impose aussi une forte régularité sur les coefficients du système étudié.

Le problème parabolique non linéaire (P_r) que l'on étudie est posé sur \mathbb{R}^n . Les coefficients $r(x)$ et $\gamma(x)$ sont périodiques, ainsi que la condition initiale et donc la solution est périodique. Ceci nous permet de ramener le problème posé sur \mathbb{R}^n à l'étude d'un problème sur une cellule que l'on a appelé Ω et donc sur un domaine borné. Ce point là rend l'utilisation des inégalités de Carleman non classique car les coefficients sont périodiques.

Le résultat que nous avons établi est un résultat de stabilité pour le coefficient $r(x)$. On considère un ouvert d'observation $\omega \Subset \Omega$, quelconque non vide. Soit t_0 tel que $0 < t_0 < T$ et t_1 tel que $\theta = \frac{t_0 + t_1}{2}$. Notre principal résultat s'énonce ainsi : il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait l'inégalité de stabilité suivante :

$$\|r - \tilde{r}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|u - \tilde{u}\|_{H^1(t_0, t_1; L^2(\omega))} + \|(u - \tilde{u})(\theta, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}),$$

où u (resp. \tilde{u}) est la solution du problème (P_r) (resp. ($P_{\tilde{r}}$)).

Pour pouvoir démontrer cette inégalité de stabilité, nous avons établi une inégalité de Carleman pour des coefficients périodiques. En général, dans le cas non homogène pour pouvoir éliminer les termes de bord qui apparaissent lors des calculs pour établir l'inégalité de Carleman, on utilise deux fonctions poids avec des signes opposés comme dans le travail de Fursikov et Imanuvilov [44]. Dans [17] l'auteur a utilisé cette technique et il a aussi supposé que l'ouvert d'observation doit contenir tous les bords de la cellule Ω . Dans notre cas on a pu éviter cela par un choix adapté de la fonction poids. Par ailleurs,

pour obtenir cette inégalité de stabilité, on utilise un principe du maximum qui ne nécessite pas trop de régularité de la solution.

La démonstration de cette inégalité de Carleman nous amène à établir des estimations uniformes de la solution. Comme le coefficient $r(x)$ n'est pas assez régulier, la solution u du problème (P_r) ne sera pas de classe $\mathcal{C}^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$. Par conséquent, on ne peut pas utiliser le principe de comparaison classique et le principe du maximum est un des éléments clés dans la résolution du problème inverse. On a donc établi un principe de comparaison qui demande moins de régularité de la solution.

Dans le second travail, on s'est intéressé à la détermination de la partie linéaire du terme de réaction $f(x, u)$ dans l'équation de réaction-diffusion posée sur \mathbb{R} :

$$(P) \begin{cases} \partial_t u - D\partial_{xx}u = f(x, u), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où f est supposée périodique par rapport à x et vérifie les conditions KPP :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x, 0) = 0, \\ \exists M > 0, \text{ tel que pour } s \geq M, \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x, s) \leq 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, s \mapsto \frac{f(x, s)}{s} \text{ est décroissante pour } s > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

On établit un résultat d'unicité en utilisant un nouveau type d'observations. En général, les observations requises dans les problèmes inverses, correspondent à des mesures de la solution u du problème sur une partie du domaine. La nature du problème étudié, posé dans l'espace \mathbb{R} tout entier, nous a permis d'utiliser la notion de vitesse asymptotique de propagation. On a surdéterminé le problème inverse en utilisant une famille de conditions initiales $(u_{0,\lambda})_\lambda$ à décroissance exponentielle qui vérifient :

$$u_{0,\lambda} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}), u_{0,\lambda} \geq 0, \liminf_{x \rightarrow -\infty} u_{0,\lambda}(x) > 0,$$

et

$$u_{0,\lambda}(x) = e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq x_0,$$

où λ est un nombre strictement positif.

On a prouvé que les solutions u_λ du système (P) associé à la condition initiale $u_{0,\lambda}(x)$ se propagent avec des vitesses asymptotiques de propagation

notées w_λ et on a caractérisé ces vitesses. Notre principal résultat est que le terme $\partial_u f(x, 0)$, est déterminé de façon unique, à une symétrie près, par l'observation d'un continuum de vitesses asymptotiques de propagation $(w_\lambda)_\lambda$. La première difficulté a été de construire nos observations qui sont les vitesses asymptotiques de propagation avec condition initiale à décroissance exponentielle, car cette notion existe et est bien définie dans le cas de conditions initiales de type Heaviside et à support compact mais pas pour des conditions initiales à décroissance exponentielle.

On prouve que si $u_\lambda(t, x)$ est la solution du problème (P) avec la condition initiale $u_{0,\lambda}(x)$, alors, on peut associer à cette solution une vitesse asymptotique de propagation w_λ caractérisée de la manière suivante :

$$\begin{cases} w_\lambda = \frac{-k_\lambda}{\lambda} & \text{si } 0 < \lambda < \lambda^*, \\ w_\lambda = w^* & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k_λ est la valeur propre principale d'un certain opérateur elliptique que l'on va définir plus loin et $\lambda^* = \lambda^*(r)$ est l'unique réel positif qui vérifie $w^* = \frac{-k_{\lambda^*}}{\lambda^*}$.

Grâce aux observations que sont les vitesses asymptotiques de propagation, nous avons pu établir un résultat d'unicité pour le coefficient $\partial_u f(x, 0) = r(x)$. On suppose que les vitesses asymptotiques de propagation w_λ et \tilde{w}_λ associées respectivement à u_λ et \tilde{u}_λ coïncident en un continuum de valeurs de λ c'est-à-dire

$$w_\lambda = \tilde{w}_\lambda, \text{ pour } \lambda \in (0, \lambda_1),$$

avec $\lambda_1 > 0$, alors

$$\tilde{r}(x) = r(x) \text{ ou } \tilde{r}(x) = r(-x + \theta).$$

Ce mémoire se compose de quatre chapitres. Le chapitre 1 est une introduction générale sur les équations de réaction-diffusion et les problèmes inverses concernant les équations paraboliques. Le chapitre 2 contient des rappels et des compléments sur les outils utilisés par la suite. Le chapitre 3 qui constitue la première partie de notre travail traite du cas d'un problème parabolique non linéaire et périodique. Une inégalité de stabilité pour le potentiel non régulier $r(x)$ est établie via l'obtention d'une inégalité de Carleman, l'utilisation d'un principe du maximum pour des fonctions peu régulières et l'utilisation de la méthode de Bukhgeim et Klivanov. Le chapitre

4 concerne l'unicité du potentiel dans le cas où le problème est posé sur l'espace tout entier en utilisant une nouvelle démarche. Cette étude utilise la notion de vitesse asymptotique de propagation. Enfin, on énonce à la fin de ce mémoire des perspectives de travail.

Chapitre 2

Rappels et compléments

Dans ce chapitre nous donnons quelques définitions et outils qui vont nous servir dans les démonstrations des résultats principaux de ce mémoire.

2.1 Notations et rappels

On note $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$, avec $L_i > 0, \forall i, 1 \leq i \leq n$ et $n \geq 1$ entier. Nous mettrons l'indice \sharp sur un espace fonctionnel pour indiquer que ses éléments sont L -périodiques par rapport à la variable d'espace. Toutes les fonctions considérées ici sont à valeurs dans \mathbb{R} . Dans la première partie on travaillera dans le cadre des espaces de Sobolev. On aura donc à utiliser les espaces de Lebesgue :

$$L_{\sharp}^q(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^q(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } u(x + L) = u(x) \text{ p.p.}\}, q \in [1, +\infty].$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution ainsi que pour la stabilité, on aura besoin des espaces suivants :

$$H_{\sharp}^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^m(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } u(x + L) = u(x) \text{ p.p. } m \in \mathbb{N}\},$$

et

$$W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } D^{\alpha}u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq 2\}.$$

Pour $T > 0$, on note

$$H_{\sharp}^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(0, T; H_{\sharp}^2(\mathbb{R}^n)), u_t \in L^2(0, T; L_{\sharp}^2(\mathbb{R}^n))\}.$$

Soit α un réel, $0 < \alpha \leq 1$,

$$\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty\},$$

$$\mathcal{C}^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{C}((0, T) \times \mathbb{R}^n), D_x^\beta D_t^i u \in \mathcal{C}^0((0, T) \times \mathbb{R}^n),$$

$$0 \leq |\beta| + 2i \leq 2\}.$$

$$\mathcal{C}_{loc}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}((0, T) \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{C}^{1,2}([a, b] \times K), \forall [a, b] \times K \subset (0, T) \times \mathbb{R}^n,$$

et

$$\sup_{x,y \in K, x \neq y, t \in [a,b], |\beta|=2} \frac{|D_x^\beta u(t, x) - D_x^\beta u(t, y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

$$\text{et } \sup_{x \in K, t \neq s, t, s \in [a,b]} \frac{|\partial_t u(t, x) - \partial_t u(s, x)|}{|t - s|^{\frac{\alpha}{2}}} < \infty\}.$$

Dans la suite, Ω sera un ouvert borné. On note Γ sa frontière et

$$Q_T = (0, T) \times \Omega, \Sigma_T = (0, T) \times \Gamma.$$

2.2 Principes du maximum

Le principe du maximum est un outil mathématique qui est souvent utilisé aussi bien pour démontrer des résultats d'unicité des solutions d'équations aux dérivées partielles, que pour montrer la positivité de certaines solutions ou permettre de comparer des solutions.

On note

$$Lu = \partial_t u - \Delta u. \tag{2.1}$$

et on rappelle

Théorème 2.2.1 (Principe du maximum faible). [33] *On suppose que $u \in \mathcal{C}^{1,2}(Q_T) \cap \mathcal{C}(\overline{Q_T})$.*

- Si

$$Lu \leq 0 \text{ dans } Q_T,$$

alors

$$\max_{Q_T} u = \max_{\Sigma_T} u.$$

- Si

$$Lu \geq 0 \text{ dans } Q_T,$$

alors

$$\min_{\overline{Q}_T} u = \min_{\Sigma_T} u.$$

Théorème 2.2.2 (Principe du maximum fort). [33] On suppose que $u \in \mathcal{C}^{1,2}(Q_T) \cap \mathcal{C}(\overline{Q}_T)$. On suppose aussi que Q_T est connexe.

- Si

$$Lu \leq 0 \text{ dans } Q_T$$

et u atteint son maximum sur \overline{Q}_T au point $(t_0, x_0) \in Q_T$, alors u est constante sur Q_{t_0} .

- Si

$$Lu \geq 0 \text{ dans } Q_T$$

et u atteint son minimum sur \overline{Q}_T au point $(t_0, x_0) \in Q_T$, alors u est constante sur Q_{t_0} .

Après avoir énoncé les principes du maximum, on va introduire la définition des sur et sous-solutions.

Définition 2.2.3. On appelle sur-solution de (2.1), toute fonction u qui vérifie :

$$Lu \geq 0,$$

et on appelle sous-solution, toute fonction u qui vérifie :

$$Lu \leq 0.$$

2.3 Existence et unicité de la solution

On veut montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_r) posé dans \mathbb{R}^n

$$(P_r) \begin{cases} \partial_t u(t, x) = D\Delta u + r(x)u - \gamma(x)u^2, & 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{périodique sur } \mathbb{R}^n, \\ u \text{ périodique,} \end{cases}$$

avec r, γ et u_0 périodiques et de même période L .

Pour la preuve de l'existence, on va utiliser plusieurs résultats de Engländer et Pinsky [32] pour le problème parabolique suivant :

$$(P_1) \begin{cases} u_t & = D\Delta u + ru - \gamma u^2, & 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) & = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

qui traitent le cas d'un coefficient $r(x)$ appartenant à $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ et on l'adapte à notre problème où le coefficient est dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.3.1 (Engländer-Pinsky [32]). *Soit $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, $u_0(x) \geq 0$, $r(x), \gamma(x) \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Il existe des solutions $u_{min} \geq 0$, et u_{max} appartenant à $C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ du problème (P_1) avec la propriété que chaque solution u de (P_1) appartient à $C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ satisfait :*

$$u_{min} \leq u \leq u_{max}.$$

De plus si $r \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors

$$u_{min} = u_{max}$$

et donc la solution est unique.

Indications pour la démonstration.

- On commence par considérer le problème sur la boule

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\},$$

et on suppose que la condition initiale $u_0(x) \in C_0(B_R)$.

- Pour montrer qu'une solution existe sur B_R , on construit une solution u_R avec comme condition initiale $u_0(x) \in C_0^2(B_R)$ et comme conditions sur le bord de B_R , les conditions de Dirichlet homogènes. Par le principe du maximum on montre que u_R existe et est majorée.
- On vérifie que la famille u_R prolongée par zéro à \mathbb{R}^n est monotone croissante par rapport à R et majorée. Donc elle converge vers une fonction u^* .
- Si $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, on l'approche par des fonctions $(u_{0,j})_j \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ de manière monotone croissante, les solutions correspondantes u_j convergent vers une solution u_{min} .

- Les résultats de régularité classiques montrent que la solution est dans $\mathcal{C}^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$.
- Pour construire la solution maximale on fait un raisonnement semblable à celui fait pour la solution minimale. Ce raisonnement est également basé sur le principe de comparaison. On considère cette fois ci une suite de solution $(u_m)_m$ de l'équation :

$$u_{mt} = Lu_m + r(x)u_m - \gamma(x)u_m^p + \psi_m, p > 1,$$

où ψ_m est une fonctions positive ou nulle, à support compact et tendant vers zéro. La limite donnera une solution qui sera maximale.

- On montre par un principe du maximum que l'hypothèse $r \in L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^n)$ implique que $u_{min} = u_{max}$.

2.4 Fonction poids

Dans la construction de la fonction poids (voir preuve de la proposition 3.4.1), on a besoin d'utiliser un difféomorphisme de $[0, L]$ dans lui même. Dans cette partie, on va donner un exemple de construction de ce difféomorphisme.

Proposition 2.4.1. *Soit $0 < a < b < L$, $0 < \hat{x}_1 < \hat{x}_2 < L$. Il existe un difféomorphisme S de $[0, L]$ dans lui même, égal à l'identité au voisinage de 0 et de L et tel que $S(\hat{x}_1) = a$ et $S(\hat{x}_2) = b$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ tel que : $0 < \varepsilon < \min(\hat{x}_1, a)$ et $L - \varepsilon > \max(\hat{x}_2, b)$. On construit $S(x)$ de la manière suivante :

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) \text{ sur } (0, \varepsilon), \\ S_2(x) \text{ sur } (\varepsilon, \hat{x}_1), \\ S_3(x) \text{ sur } (\hat{x}_1, \hat{x}_2), \\ S_4(x) \text{ sur } (\hat{x}_2, L - \varepsilon), \\ S_5(x) \text{ sur } (L - \varepsilon, L). \end{cases} \quad (2.2)$$

On pose $S(x) = x$ si $x \in [0, \varepsilon] \cup [L - \varepsilon, L]$ ($S_1(x) = x, S_5(x) = x$). Par le théorème des traces [59], il existe une fonction $S_2(x) \in \mathcal{C}^\infty[\varepsilon, \hat{x}_1]$ tel que

$$S_2^{(k)}(\varepsilon) = S_1^{(k)}(\varepsilon), \forall k \geq 0,$$

$$S_2'(x) > 0 \text{ sur } [\varepsilon, \hat{x}_1],$$

et

$$S_2(\hat{x}_1) = a.$$

Le théorème des traces, nous donne également l'existence d'une fonction $S_3(x) \in \mathcal{C}^\infty[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$ tel que :

$$S_3^{(k)}(\hat{x}_1) = S_2^{(k)}(\hat{x}_1), \quad \forall k \geq 0,$$

$$S_3'(x) > 0 \text{ sur } [\hat{x}_1, \hat{x}_2],$$

et

$$S_3(\hat{x}_2) = b.$$

On construit de la même manière $S_4(x)$.

□

2.5 Fronts d'ondes

On considère l'équation parabolique suivante posée sur \mathbb{R} :

$$\partial_t u - D\partial_{xx}u = f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Le fait de travailler sur \mathbb{R} , nous autorise à utiliser la notion de fronts d'ondes, et auxquels on associe certaines fonctions que l'on va développer par la suite. Un phénomène de propagation associé à (2.3) désigne l'évolution dans le temps d'une solution u de l'équation (2.3) d'un état d'équilibre vers un autre, un état d'équilibre étant une solution stationnaire (indépendante du temps) associée au problème (2.3).

Les équations de réaction-diffusion posées dans \mathbb{R}^n sont très utilisées dans la modélisation de la dynamique des populations, en grande partie parce qu'elles possèdent des solutions de type front. On va définir cette notion dans le cas très simple où $f(u) = u(1 - u)$.

Définition 2.5.1. *Un front progressif connectant 0 à 1 est une solution de l'équation (2.3) de la forme*

$$u(t, x) = U(x - ct),$$

où $c > 0$ est la vitesse du front et U son profil, satisfaisant les conditions aux limites

$$U(-\infty) = 1 \text{ et } U(+\infty) = 0.$$

La recherche d'une telle solution revient à la résolution de l'équation elliptique suivante :

$$D\partial_{xx}U + c\partial_xU + f(U) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}.$$

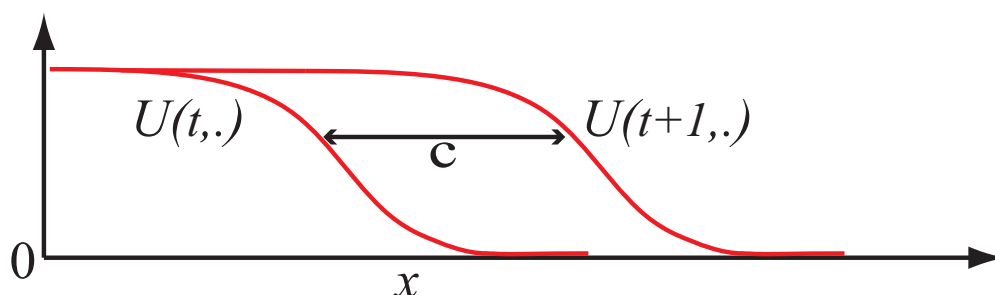


FIGURE 2.1 – Exemple d'un front d'onde avec période $L = 1$

Un front progressif (voir figure 2.1) désigne ainsi une solution dont le profil est constant, se déplaçant à une vitesse constante et positive c de la gauche vers la droite dans \mathbb{R} . Il décrit donc clairement une invasion de l'état 0 par l'état 1 dans tout le domaine.

2.5.1 Fronts progressifs pour l'équation homogène

L'équation suivante :

$$\partial_t u - D\partial_{xx}u = f(u),$$

est dite homogène car ses paramètres sont indépendants des variables d'espace. Dans [53], Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov ont étudié l'équation suivante :

$$\partial_t u - D\partial_{xx}u = u(1 - u).$$

Ils ont montré l'existence de fronts progressifs pour un continuum de vitesses admissibles de la forme $[c^*, +\infty)$ c'est-à-dire (voir [9]) qu'il existe $c^* > 0$ tel que les fronts avec une vitesse de propagation c existent si et seulement si

$c \geq c^*$ (c^* est la vitesse minimale pour l'existence des fronts). De plus, pour une vitesse c fixée, ce front est unique à une translation près.

La particularité de ce type d'équations est que le comportement de la solution est dicté par celui de l'équation linéarisée au voisinage de l'état d'équilibre 0 :

$$\partial_t u - D\partial_{xx}u = u.$$

En effet, sous l'hypothèse KPP (homogène) :

$$f(u) > 0 \text{ et } f(u) \geq f'(0)u, u \in (0, 1),$$

$$f'(0) > 0 > f'(1),$$

le taux de croissance est maximal au voisinage de 0, et c'est donc là que réside le phénomène de propagation.

On montre qu'il existe un continuum de vitesses admissibles de la forme $[c^*; +\infty)$, où la vitesse minimale est donnée par la formule $c^* = 2\sqrt{Df'(0)}$. Ce résultat apparaît rapidement en cherchant des solutions du problème linéarisé au voisinage de 0 de la forme :

$$u(t, x) = e^{-\lambda(x-ct)}.$$

2.5.2 Fronts pulsatoires pour l'équation hétérogène

Pour une équation hétérogène, c'est-à-dire lorsque les coefficients de l'équation dépendent de la variable d'espace, on considère l'équation suivante :

$$\partial_t u - D\partial_{xx}u = f(x, u), x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

où f est périodique en espace :

$$f(x + L, u) \equiv f(x, u).$$

Dans le cas de coefficients périodiques et f non homogène, la notion de front progressif est remplacée par celle de front pulsatoire :

Définition 2.5.2. *Un front pulsatoire est une solution u de l'équation (2.4) satisfaisant pour un réel $T > 0$,*

$$u(t, x - L) = u(t + T, x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, et les conditions aux limites

$$u(-\infty, \cdot) = p(\cdot) \text{ et } u(+\infty, \cdot) = 0,$$

p étant solution de l'équation stationnaire :

$$-D\partial_{xx}p = f(x, p), x \in \mathbb{R}.$$

Sous l'hypothèse KPP (4.2), on montre qu'il existe un continuum de vitesses admissibles de la forme $[c^*, +\infty)$. Formellement, il suffit de chercher des solutions particulières, de la forme

$$u(t, x) = e^{-\lambda(x-ct)}\psi_\lambda(x),$$

où $\lambda > 0$ et $\psi_\lambda(x)$ L -périodique. On obtient alors que la fonction $\psi_\lambda(x)$ doit être une fonction propre correspondant à la valeur propre principale k_λ de l'opérateur :

$$L_\lambda\psi_\lambda := -D\psi_\lambda'' + 2\lambda D\psi_\lambda' - \partial_u f(x, 0)\psi_\lambda,$$

avec

$$k_\lambda = D\lambda^2 - c\lambda,$$

et c^* vérifie :

$$c^* = \inf\{c > 0 \text{ tel que } \exists \lambda, D\lambda^2 - c\lambda = k_\lambda\}.$$

2.5.3 Vitesse asymptotique de propagation

Dans cette section on définit dans le cas où les coefficients sont périodiques en espace, la notion de vitesse asymptotique de propagation, que l'on a utilisée dans une partie de notre travail en tant qu'observation.

Pour les équations de réaction-diffusion, Fisher [35] et Kolmogorov, Petrovski et Piskunov [53] ont prouvé que quand $f(u) = u(1-u)$ et que la condition initiale $u_0(x)$ est de type Heaviside i.e. $u_0(x) = 1$ si $x < 0$ et 0 si $x > 0$, alors on définit la vitesse asymptotique de propagation de la solution $u(t, x)$ pour le problème de Cauchy (P) avec la condition initiale $u_0(x)$ comme le réel $w^* > 0$ tel que :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x + ct) = 0, \forall c \geq w^*, x \in \mathbb{R}, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t, x + ct) = 1, \forall 0 \leq c < w^*, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Dans le cas d'un milieu homogène. Aronson, Weinberger [2], Fife et McLeod [34] ont montré que si une solution u admet une vitesse asymptotique de propagation, celle-ci est unique et vérifie $w^* = c^*$, où c^* est la vitesse minimale des fronts.

Dans le cas où la fonction $f(x, u)$ est périodique et vérifie les hypothèses KPP, la vitesse asymptotique de propagation est donnée par la formule :

$$w^* = \min_{\lambda > 0} \frac{-k_\lambda}{\lambda}.$$

Dans notre cas $w^* = c^*$ et nous allons le prouver l'existence et donner une caractérisation de cette vitesse dans le chapitre 4.

Chapitre 3

Problème inverse pour une équation parabolique à coefficients périodiques non réguliers

3.1 Introduction

Ce chapitre porte sur l'étude d'un problème inverse pour une équation parabolique de type réaction-diffusion. Ces équations s'écrivent sous la forme suivante :

$$u_t - \Delta u = f(x, u), x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

et peuvent modéliser plusieurs phénomènes de propagation. Elle apparaissent par exemple en biologie [53, 56, 58], en génétique [35] en écologie [64, 66, 70]. Il existe une théorie mathématique bien développée pour ce type d'équations voir par exemple [2, 56] et les références qui sont citées dans ces papiers. L'exemple le plus répandu et le plus étudié pour ce genre d'équation est celui de Fisher et Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (KPP), où la fonction f (cas homogène) peut prendre la forme suivante :

$$f(u) = u(r - \gamma u).$$

En dynamique des populations, r représente le taux de croissance intrinsèque et γ est le coefficient de compétition intraspécifique. Pour travailler sur des

modèles plus réalistes, on considère une situation hétérogène soit :
 $f = f(x, u)$. Le modèle KPP correspondant est

$$f(x, u) = u(r(x) - \gamma(x)u),$$

r et γ sont des fonctions dépendantes de x .

Cette partie concerne l'étude d'un problème inverse pour une équation parabolique quand les coefficients r et γ sont variables et périodiques. Ce modèle peut décrire l'évolution de la concentration d'une population $u(t, x)$ répartie dans l'espace et soumise à deux processus : un processus de réaction locale, et un processus de diffusion qui implique une répartition de cette population dans l'espace.

Le modèle que l'on étudie est décrit par une équation aux dérivées partielles parabolique à coefficients et condition initiale périodiques de période $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$, $L_j > 0, 1 \leq j \leq n$. Pour simplifier l'étude, les biologistes modélisent les phénomènes à travers des systèmes périodiques.

Avec l'augmentation et le changement de la fréquence des invasions biologiques [28], on est souvent confronté à des espèces envahissant un nouvel espace. Dans ce cas, les caractéristiques d'évolution de l'espèce dans son nouvel environnement ne sont pas entièrement connues et doivent être estimées [67]. L'estimation précise des coefficients du modèle de réaction-diffusion est d'une très grande importance car le comportement des solutions de ces modèles dépend fortement de la valeur de ces coefficients. En outre, le coefficient $r(x)$ joue un rôle important dans la prédiction de l'invasion de l'espèce, et le choix d'une équation non-linéaire correspond à un modèle plus réaliste que le cas linéaire, au moins dans le cas de la dynamique des populations.

Nous considérons le système parabolique non linéaire périodique suivant :

$$(P_r) \begin{cases} u_t(t, x) &= D\Delta u + ru - \gamma u^2, & 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^n, \\ & u \text{ L-périodique.} \end{cases}$$

On rappelle qu'une fonction v est dite L-périodique si

$$v(x + L) = v(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

La fonction $u(t, x)$ est la densité de la population donnée à un temps t et à une position x , $D > 0$ est le coefficient de diffusion que l'on prendra égal à

1 par simplicité. On suppose que r, γ et u_0 sont L -périodiques. Dans notre problème (P_r) les données sont D, γ .

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS) [47]. Une version plus détaillée a été soumise pour publication dans la revue SeMA.

Le but de ce travail est de reconstruire le potentiel $r(x)$ à partir d'observations localisées de la solution $u(t, x)$ du problème (P_r) , en établissant une inégalité de Carleman pour un opérateur parabolique à coefficients périodiques défini sur \mathbb{R}^n .

L'approche choisie est celle qui utilise l'inégalité de Carleman. Cette technique, dans le cadre des problèmes inverses, a été initialement introduite dans [12] et améliorée dans le cadre parabolique par Imanuvilov et Yamamoto dans [45]. En ce qui concerne les problèmes paraboliques linéaires à coefficients périodiques, à notre connaissance, il existe seulement un travail consacré à ce sujet dans [17].

Par ailleurs, l'inégalité de Carleman classique utilise des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière. Dans notre situation, la périodicité ne nous permet pas d'utiliser la forme classique de l'inégalité de Carleman parabolique [76]. Dans [44], Fursikov et Imanuvilov traitent un problème associé à des conditions aux limites de type Robin mais utilisent deux fonctions poids. Dans [17], l'auteur utilise ce résultat, et impose une condition forte sur l'ouvert d'observation et une forte régularité sur les coefficients.

Dans ce travail, on prouve un résultat de stabilité sans aucune contrainte sur l'ouvert d'observation. On énonce un principe du maximum adapté à notre problème. Nos principaux résultats peuvent être résumés comme suit :

- Nous étudions, via une inégalité de stabilité, la reconstruction du potentiel $r(x)$ de notre système (P_r) .
- Nous prouvons que nous pouvons améliorer la condition imposée dans [17] (Proposition 3.1) qui suppose que l'ouvert d'observation doit contenir tous les bords de la cellule.
- Nous n'imposons au potentiel $r(x)$ de n'avoir qu'un minimum de régularité ($r(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$).

Remarque 3.1.1. Dans le problème (P_r) , on peut remplacer le terme non linéaire u^2 par u^p avec $p > 1$ (voir [32]) et on obtient les mêmes résultats.

3.2 Résultats principaux

Les principaux résultats de ce chapitre sont résumés dans les trois théorèmes suivants.

Tout d'abord, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème direct à coefficients dans $L^\infty_{\sharp}(\mathbb{R}^n)$.

On considère l'ouvert $\Omega := \prod_{j=1}^n (0, L_j) \subset \mathbb{R}^n$ avec $L_j > 0$ et $1 \leq j \leq n$

comme cellule de référence. On note par Γ la frontière de Ω , $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$, où $T > 0$.

Selon les circonstances, nous allons travailler d'une manière équivalente, soit sur \mathbb{R}^n soit sur la cellule de référence Ω .

Théorème 3.2.1 (Existence et unicité). *On suppose que $r \in L^\infty_{\sharp}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathcal{C}^\alpha_{\sharp}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \leq 1$, $u_0(x)$ continue, $u_0(x) \geq 0$ sur \mathbb{R}^n et L -périodique, $\gamma(x) > 0$ est une fonction L -périodique. Alors, le problème (P_r) admet une unique solution u dans $V = \mathcal{C}([0, T]; L^2_{\sharp}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0, T); H^1_{\sharp}(\mathbb{R}^n))$.*

De plus, $u \in L^\infty_{\sharp}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$, avec $0 \leq u \leq M$, où $M = M(\|u_0\|_\infty, \|r\|_\infty, \|\gamma\|_\infty)$.

Ensuite nous établissons une inégalité de Carleman avec un ouvert d'observation arbitraire. Cette inégalité est un point clé de la preuve de notre résultat principal de stabilité.

Théorème 3.2.2 (Inégalité de Carleman). *Soit $\omega \Subset \Omega$ un ouvert non vide. Alors, il existe $s_0 = s_0(\Omega, \omega, T) > 0$, $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega, \omega, T) > 0$, et une constante $C = C(\Omega, \omega, T) > 0$ telle que pour tout $s \geq s_0$ et $\lambda \geq \lambda_0$, la solution u du problème (P_r) avec données satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.2.1 vérifie les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\frac{1}{s\varphi} (|u_t|^2 + |\Delta u|^2) + s\lambda^2 \varphi |\nabla u|^2 + s^3 \lambda^4 \varphi^3 u^2 \right) e^{2s\alpha} dx dt \\ & \leq C \left(\int_Q f^2 e^{2s\alpha} dx dt + \int_{(0,T) \times \omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 u^2 e^{2s\alpha} dx dt \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $f = ru - \gamma u^2$ et où φ , α sont des fonctions poids que nous définirons dans les Sections 3 et 4,

$$\begin{aligned}
& \|K_1 u\|_{L^2(Q)}^2 + \|K_2 u\|_{L^2(Q)}^2 + \int_Q s^3 \lambda^4 \varphi^3 u^2 e^{2s\alpha} dx dt \\
& \leq C \left(\int_Q f^2 e^{2s\alpha} dx dt + \int_{(0,T) \times \omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 u^2 e^{2s\alpha} dx dt \right), \quad (3.2)
\end{aligned}$$

où K_1, K_2 sont des opérateurs d'ordre deux en espace et d'ordre un en temps et espace, définis dans les Sections 3 et 4.

Remarque 3.2.3. Les hypothèses faites sur les données impliquent que Δu et u_t sont dans $L^2((0, T); H_{\#}^1(\mathbb{R}^n))$ (voir Théorème 3.3.5).

Enfin, nous énonçons le résultat principal de stabilité.

Soit $r_0 > 0$, $M > 0$ fixés. On pose

$$\mathcal{I} = \{\gamma \in W_{\#}^{2,\infty}(\mathbb{R}^n), r_0 \leq \gamma, \|\gamma\|_{2,\infty} \leq M\},$$

$$\mathcal{M} = \{r \in L_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}^n), \|r\|_{\infty} \leq M\},$$

où $\|r\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |r(x)|$ et $\|\gamma\|_{2,\infty} = \sup_{|\alpha| \leq 2, x \in \Omega} |\partial^{\alpha} \gamma(x)|$.

Théorème 3.2.4 (Inégalité de stabilité). *Soit $\omega \Subset \Omega$ un ouvert non vide. Soit $u_0, \tilde{u}_0 \in \mathcal{I}$, $r, \tilde{r} \in \mathcal{M}$ et $\theta \in (0, T)$. Soit t_0 tel que $0 < t_0 < T$ et t_1 tel que $\theta = \frac{t_0 + t_1}{2}$. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega, \omega, t_0, t_1, r_0, M) > 0$ telle que*

$$\|r - \tilde{r}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|u - \tilde{u}\|_{H^1(t_0, t_1; L^2(\omega))} + \|(u - \tilde{u})(\theta, \cdot)\|_{H^2(\Omega)} \right),$$

où u (resp. \tilde{u}) est la solution du problème (P_r) (resp. $(P_{\tilde{r}})$).

3.3 Existence, unicité et régularité

Dans cette section, on démontre le Théorème 3.2.1 et on donne quelques résultats de régularité qui nous seront utiles pour établir l'inégalité de stabilité.

3.3.1 Preuve du Théorème 3.2.1

La démonstration de ce théorème se fera en trois étapes. Dans la première étape on considère un coefficient r régulier ; des propriétés de densité nous permettront dans une seconde étape d'établir le résultat d'existence de solution avec un coefficient non régulier. Dans la troisième étape on montrera l'unicité de la solution.

Première étape.

On suppose d'abord que $r(x) \in C_{\sharp}^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L_{\sharp}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ avec $0 < \alpha \leq 1$. Pour la preuve de l'existence, on va utiliser plusieurs résultats de Engländer et Pinsky [32] obtenus pour le problème parabolique suivant :

$$(P_1) \begin{cases} u_t & = D\Delta u + ru - \gamma u^2, & 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) & = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

que l'on rappelle ci-dessous :

Théorème 3.3.1. *Si r est de classe $C^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma > 0$ et si u_0 est continue, positive ou nulle et bornée, alors il existe une unique solution u du problème (P_1) telle que*

$$u \in C^{1,2}((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n).$$

De plus : $u \in C_{loc}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ et $0 \leq u \leq M$, où M dépend seulement de $\|r\|_{\infty}$, $\|u_0\|_{\infty}$ et $\|\gamma\|_{\infty}$.

On déduit en que

$$u \in C([0, \infty); L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^2((0, \infty); H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)).$$

Le résultat de Engländer et Pinsky ne traite pas le cas de solution périodique, le lemme suivant établit la périodicité pour notre solution.

Lemme 3.3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 3.3.1 et si u_0, r, γ sont L -périodiques, alors u est L -périodique.*

Preuve. On pose : $\tilde{u}(t, x) := u(t, x + L)$. En utilisant le fait que $r(x)$, $\gamma(x)$ et $u_0(x)$ sont L -périodiques, on a

$$u_t(t, x + L) = \Delta u(t, x + L) + r(x + L)u(t, x + L) - \gamma(x + L)u^2(t, x + L),$$

$$= \Delta u(t, x + L) + r(x)u(t, x + L) - \gamma(x)u^2(t, x + L),$$

et

$$u(0, x + L) = u_0(x + L) = u_0(x).$$

En utilisant l'unicité de la solution, on obtient $u(t, x) = \tilde{u}(t, x)$ c'est-à-dire

$$u(t, x + L) = u(t, x).$$

□

Le Lemme 3.3.2 implique que

$$u \in \mathcal{C}([0, \infty); L^2_{\#}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}((0, \infty); H^1_{\#}(\mathbb{R}^n)),$$

car Ω étant borné, on a

$$\int_{\Omega} |\partial_x^\alpha u|^2 < \infty, |\alpha| \leq 1, \forall u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

et donc $L^2_{\#}(\mathbb{R}^n) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $H^1_{\#}(\mathbb{R}^n) \subset H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Dans cette étape il reste à montrer que u est en fait dans $L^2((0, T); H^1_{\#}(\mathbb{R}^n))$.

On multiplie la première équation du problème (P_1) par u , et on intègre par parties sur $(\varepsilon, T) \times \Omega$, où ε est un nombre strictement positif, on obtient l'égalité d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\varepsilon}^T \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega} \gamma(x)u^3 ds dx = \\ \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega} r(x)u^2 ds dx + \frac{1}{2} \|u(\cdot, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Les fonctions u et r étant bornées, on a :

$$\int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega} r(x)u^2 ds dx \leq C \text{ et } \frac{1}{2} \|u(\cdot, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0 \text{ et } \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega} \gamma u^3 ds dx \geq 0,$$

il s'ensuit que

$$\int_{\varepsilon}^T \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C,$$

C étant une constante indépendante de ε , d'où $u \in L^2((0, T); H_{\sharp}^1(\mathbb{R}^n))$.

Deuxième étape.

On considère maintenant le cas où r est dans $L_{\sharp}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

On commence par énoncer un principe de comparaison :

Lemme 3.3.3. *Soient r_1, r_2 deux potentiels L -périodiques et qui sont dans $\mathcal{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, tels que $r_2 \leq r_1$ sur \mathbb{R}^n . Alors, les solutions respectives u_1 de (P_{r_1}) et u_2 de (P_{r_2}) avec la même condition initiale $u_0(x) \geq 0$ sont telles que $0 \leq u_2 \leq u_1$ sur $(0, T) \times \mathbb{R}^n$.*

Preuve. On pose $w = u_1 - u_2$, alors

$$\Delta w - w_t + (r_1 - \gamma(u_1 + u_2))w + (r_1 - r_2)u^2 = 0.$$

Grâce à nos hypothèses, on remarque que $(r_1 - r_2)u^2 \geq 0$. Ceci implique que

$$\Delta w - w_t + (r_1 - \gamma(u_1 + u_2))w \leq 0.$$

Grâce au fait que $r_1 - \gamma(u_1 + u_2)$ est bornée et $w(0, \cdot) = 0$, le principe du maximum faible (voir par exemple [33]) donne que $w \geq 0$.

□

Soit r_k une suite de potentiels réguliers, décroissante et qui converge p.p. vers r (voir par exemple [62] p :23). D'après le Lemme 3.3.3, les u_k , solutions des problèmes (P_{r_k}) (avec la même condition initiale u_0) sont positives ou nulles, L -périodiques, et forment une suite décroissante ; on déduit que cette suite u_k converge vers une fonction u , avec $u \in L^{\infty}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ (et $0 \leq u \leq u_k \leq u_1 \leq M$ sur $(0, T) \times \mathbb{R}^n$).

Par conséquent, la suite u_k est aussi convergente au sens des distributions et u satisfait la première équation du problème (P_r) .

On va maintenant montrer que cette limite u appartient à

$$\mathcal{C}([0, T]; L_{\sharp}^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0, T); H_{\sharp}^1(\mathbb{R}^n)).$$

Pour cela il suffit de montrer que u_k est une suite de Cauchy dans cet espace. En faisant la différence entre la première équation du problème (P_{r_l}) et la première équation du problème (P_{r_k}) , en multipliant cette différence par $(u_k - u_l)$ et en intégrant par parties sur $(0, t) \times \Omega$, on obtient

$$\frac{1}{2} \|u_k(t) - u_l(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds =$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Omega} \gamma((u_k)^2 - (u_l)^2)(u_k - u_l) ds dx + \int_0^t \int_{\Omega} r_k(u_k - u_l) ds dx \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} (r_k - r_l) u_l ds dx.
\end{aligned}$$

Comme la suite u_k converge en décroissant vers $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et qu'elle est formée de termes positifs ou nuls, elle converge aussi dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. La suite u_k est donc une suite de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\Omega} \gamma((u_k)^2 - (u_l)^2)(u_k - u_l) ds dx \leq \\
& \|\gamma\|_\infty (\|u_k\|_\infty + \|u_l\|_\infty) \|u_k - u_l\|_{L^1((0,T) \times \Omega)}, \\
& \leq 2\|\gamma\|_\infty M^2 \|u_k - u_l\|_{L^1((0,T) \times \Omega)},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque k et l tendent vers l'infini.

La suite r_k étant également uniformément bornée, on a

$$\int_0^t \int_{\Omega} r_k(u_k - u_l) ds dx \leq C \|u_k - u_l\|_{L^1((0,T) \times \Omega)},$$

et donc tend vers 0 lorsque k et l tendent vers l'infini.

Enfin, par construction, la suite r_k tend vers r dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, donc est une suite de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} (r_k - r_l) u_l ds dx \right| \leq C \|r_k - r_l\|_{L^1(\Omega)},$$

tend vers 0.

On déduit que u_k est une suite de Cauchy dans V , et ainsi elle converge dans cet espace.

Finalement, en utilisant la formulation faible de notre problème :

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} u_k v_t ds dx + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u_k \nabla v ds dx + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, u) ds dx \\
& \quad = \int_{\Omega} u(0, x) v(0, x) dx,
\end{aligned}$$

et la convergence de u_k vers u dans V , on déduit que $u(0, x) = u_0(x)$, avec comme conséquence que u est dans V , et la solution de (P_r) .

Remarque 3.3.4. De la preuve du Théorème (3.2.1) on déduit que :

$$0 \leq u \leq M(\|r\|_\infty, \|\gamma\|_\infty, \|u_0\|_\infty).$$

Troisième étape (Unicité).

On considère u_1, u_2 dans V solutions du problème (P_r) . On a

$$(u_2 - u_1)_t - \Delta(u_2 - u_1) - r(u_2 - u_1) + \gamma((u_2)^2 - (u_1)^2) = 0.$$

En multipliant cette équation par $(u_1 - u_2)$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_2 - u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(u_2 - u_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ & \int_{\Omega} r(u_2 - u_1)^2 dx - \int_{\Omega} \gamma((u_2)^2 - (u_1)^2)(u_2 - u_1) dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|(u_2 - u_1)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla(u_2 - u_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} (r - \gamma(u_1 + u_2))(u_2 - u_1)^2 dx ds \leq C \int_0^t \|u_2 - u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

avec $C = \|r(x) - \gamma(x)(u_1 + u_2)\|_\infty$.

En posant : $v(t) := \|(u_1 - u_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, on obtient

$$0 \leq v(t) \leq 2C \int_0^t v(s) ds.$$

Le Lemme de Gronwall, implique que : $v \equiv 0$, ce qui donne $u_1 \equiv u_2$. □

L'étude du problème inverse nous amène à établir des estimations uniformes de la solution. Comme $r(x)$ est seulement dans $L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^n)$, la solution u du problème (P_r) ne sera pas de classe $\mathcal{C}^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$. Par conséquent, on ne peut pas utiliser le principe du maximum classique. On va établir un principe du maximum pour ce problème qui exige moins de régularité de la solution.

Théorème 3.3.5. *On suppose que la condition initiale du système (P_r) est dans $H_{\#}^2(\mathbb{R}^n) \cap L_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors la solution u élément de V est telle que : $u_t \in V$.*

De plus, si $u_0(x) \in W_{\#}^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors $u_t \in L_{\#}^{\infty}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ et on a

$$\|u_t\|_{\infty} \leq C(\|u_0\|_{W^{2,\infty}}, \|r\|_{\infty}, \|\gamma\|_{\infty}). \quad (3.3)$$

Preuve. Les résultats classiques de la régularité de l'équation de la chaleur donnent (voir [33], Théorème 5 Section 1 Chapitre 7)

$$u \in H_{\#}^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n).$$

Remarque 3.3.6. *Le résultat énoncé dans [33], concerne un problème parabolique avec conditions de Dirichlet. Cependant, notre problème étant périodique, on travaille en fait sur le tore donc dans un domaine sans bord. On se ramène ainsi à la régularité intérieure du problème de Dirichlet.*

Alors, u_t vérifie également l'équation suivante :

$$(u_t)_t - \Delta u_t = (r - 2\gamma u)u_t = f_t,$$

avec second membre $f_t \in L^2((0, T); L_{\#}^2(\mathbb{R}^n))$, le coefficient de $r - 2\gamma u \in L_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et la condition initiale :

$$u_t(0, x) = \Delta u_0(x) - ru_0(x) + \gamma u_0^2(x),$$

appartient à $L_{\#}^2(\mathbb{R}^n)$.

Grâce au Théorème 5 chapitre 7 dans Evans ([33]), on obtient que

$$u_t \in L^2((0, T); H_{\#}^1(\mathbb{R}^n)) \text{ et } u_{tt} \in L^2((0, T); H_{\#}^{-1}(\mathbb{R}^n)). \quad (3.4)$$

On termine la preuve en utilisant le Théorème 1 Chapitre 18 de Lions-Magenes [29], qui donne que $u_t \in \mathcal{C}([0, T]; L_{\#}^2(\mathbb{R}^n))$, et donc $u_t \in V$.

Si $u_0(x) \in W_{\#}^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors $u_t(0, x) \in L_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et le Théorème 7.1 chapitre 3 dans [54] donne

$$u_t \in L^{\infty}((0, T) \times \mathbb{R}^n).$$

□

Proposition 3.3.1. *On suppose que $u_0(x) \geq r_0 > 0$, p.p. sur \mathbb{R}^n . Alors il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$u \geq r_0 e^{-KT} > 0, \text{ p.p. sur } (0, T) \times \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Soit $K > 0$ une constante donnée et soit $w := e^{Kt}u$. Comme u est bornée sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$, w l'est également et $w \geq 0$ p.p. Alors,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - ru + \gamma u^2 &= e^{-Kt}w_t - Ke^{-Kt}w - e^{-Kt}\Delta w - re^{-Kt}w + \gamma e^{-2Kt}w, \\ w_t - \Delta w &= (K + r - \gamma u)w, \\ w(0, x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

On sait que $u \in L^\infty(0, T; L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^n))$, et que r, γ sont dans $L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^n)$. Alors pour K assez grand, on a $K + r - \gamma u \geq 0$.

En utilisant la représentation du noyau de Green pour l'équation de la chaleur,

$$G(t, x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-|x|^2/(4t)),$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside, on a

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y)u_0(y)dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(t - s, x - y)(K + r(y) - \gamma(y)u(s, y))w(s, y)dyds \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y)u_0(y)dy \geq r_0 \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y)dy = r_0 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u \geq r_0 e^{-Kt} \geq r_0 e^{-KT} > 0.$$

□

3.4 Inégalité de Carleman

La preuve du Théorème 3.2.4 consiste à établir une inégalité de Carleman pour l'opérateur parabolique avec coefficients et condition initiale L-périodiques :

$$\mathcal{L}z = z_t - \Delta z = f(x, z) \quad \text{dans } Q, \quad \text{avec } f(x, z) = r(x)z - \gamma(x)z^2.$$

Le point clef de cette inégalité de Carleman est le choix d'une fonction poids spécifique qui est adaptée à notre problème. Ceci nous amène à simplifier

la preuve du Théorème 3.2.2 en comparaison avec celle de [17] (voir preuve du Lemme 3.2). De plus, contrairement à [17] on pourra choisir un ouvert d'observation ω arbitraire.

On va donner une preuve de l'inégalité (3.2). L'inégalité (3.1) se déduit directement de cette preuve. Pour pouvoir établir cette inégalité de Carleman, on construit une fonction poids ψ qui vérifie certaines conditions grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.4.1. *Soit $\omega \Subset \Omega$ un ouvert non vide. Alors il existe une fonction $\psi \in C_{\sharp}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, telle que $\psi > 0$, $\nabla\psi(x)|_{(\bar{\Omega}/\omega)} \neq 0$.*

Preuve. Comme indiqué dans l'introduction, la fonction ψ donnée dans [17] exige beaucoup de contraintes sur l'ouvert d'observation ω . Il est possible d'adapter la preuve de Fursikov et Imanuvilov (voir Lemme 1.2 Chapitre 1 [44]), cependant cette approche est assez technique et utilise les fonctions de Morse.

Dans ce mémoire, on donne une preuve plus simple, sans les contraintes introduites dans [17] et sans utiliser les fonctions de Morse. On va détailler en séparant en deux cas :

Cas $n = 1$.

On pose $\eta(x) = 2 + \sin \frac{2\pi x}{L}$. On remarque que $\eta'(x)$ s'annule en $\frac{L}{4}$ et $\frac{3L}{4}$. Soit $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \omega$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $0 < \hat{x}_1 < \hat{x}_2 < L$.

On considère $S : [0, L] \rightarrow [0, L]$ un difféomorphisme de classe C^{∞} tel que : $S(x) = x$ au voisinage de 0 et de L avec : $S(\hat{x}_1) = \frac{L}{4}$, $S(\hat{x}_2) = \frac{3L}{4}$. On pose $\psi(x) = \eta(S(x))$ sur $[0, L]$, et ψ L -périodique. On obtient $|\psi'(x)| > 0$ sur $\bar{\Omega} \setminus \omega$.

Cas $n > 1$.

Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide. Il existe

$$\prod_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset \omega, \quad a_k < b_k, \quad \forall k, 1 \leq k \leq n.$$

Soit $S_k : [0, L_k] \rightarrow [0, L_k]$ le difféomorphisme défini comme dans le cas $n = 1$, avec $S_k(\hat{x}_k^1) = \frac{L_k}{4}$ et $S_k(\hat{x}_k^2) = \frac{3L_k}{4}$, $a_k < \hat{x}_k^1 < \hat{x}_k^2 < b_k$, $1 \leq k \leq n$.

On pose

$$\psi(x) = \prod_{k=1}^n \eta_k(S_k(x_k)),$$

où $\eta_k(x_k) = 2 + \sin \frac{2\pi x_k}{L_k}$.

Alors,

$$|\nabla\psi| > 0 \text{ sur } \overline{\Omega} \setminus \omega.$$

□

Maintenant, on démontre le Théorème 3.2.2.

Preuve. Une grande partie de la démonstration est classique, cependant, pour des raisons de meilleure compréhension de la démarche, on va la détailler. On introduit les fonctions poids suivantes :

$$\varphi(t, x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \alpha(t, x) = \frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}}{t(T-t)}, \quad (3.5)$$

où $\lambda > 0$; on remarque que $\alpha < 0$.

On établit une inégalité de Carleman en considérant le fait que la fonction poids ψ est L-périodique. On pose $w = e^{s\alpha}z$ (z est la solution du problème (P_γ)) et soit ω_0 un ouvert tel que $\overline{\omega_0} \subset \omega$ et $|\nabla\psi| > 0$ sur $\overline{\Omega} \setminus \omega_0$.

On va d'abord établir une inégalité de Carleman pour w , avec l'ouvert ω_0 .

On a

$$K_1w + K_2w = f_s \text{ sur } Q,$$

avec

$$K_1w = -\Delta w - s^2\lambda^2\varphi^2|\nabla\psi|^2w - s\alpha_t w, \quad (3.6)$$

$$K_2w = w_t + 2s\lambda\varphi\nabla\psi \cdot \nabla w + 2s\lambda^2\varphi w|\nabla\psi|^2, \quad (3.7)$$

et

$$f_s = fe^{2s\alpha} - s\lambda\varphi w\Delta\psi + s\lambda^2\varphi w|\nabla\psi|^2. \quad (3.8)$$

Alors

$$\|f_s\|_{L^2(Q)}^2 = \|K_1w\|_{L^2(Q)}^2 + \|K_2w\|_{L^2(Q)}^2 + 2(K_1w, K_2w)_{L^2(Q)}. \quad (3.9)$$

On estime le terme $(K_1w, K_2w)_{L^2(Q)}$ que l'on écrit de la manière suivante :

$$(K_1w, K_2w)_{L^2(Q)} = A_1 + A_2 + A_3, \quad (3.10)$$

où

$$A_1 = - \int_Q \left(\Delta w + s^2 \lambda^2 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 w + s \alpha_t w \right) \left(w_t + 2s \lambda^2 \varphi w |\nabla \psi|^2 \right) dx dt,$$

$$A_2 = - \int_Q \left(s^2 \lambda^2 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 w + s \alpha_t w \right) \left(2s \lambda \varphi \nabla \psi \cdot \nabla w \right) dx dt,$$

$$A_3 = - \int_Q \left(\Delta w \right) \left(2s \lambda \varphi \nabla \psi \cdot \nabla w \right) dx dt.$$

On commence par étudier le terme A_1 .

$$A_1 = \int_Q \left\{ \nabla w \cdot \nabla w_t - \frac{s^2 \lambda^2 \varphi^2}{2} (w^2)_t |\nabla \psi|^2 - \frac{s}{2} \alpha_t (w^2)_t + 2s \lambda^2 \varphi |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 \right. \\ \left. + 2s \lambda^2 w \nabla w \cdot \nabla (\varphi |\nabla \psi|^2) - 2s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 |\nabla \psi|^4 - 2s^2 \lambda^2 \varphi \alpha_t w^2 |\nabla \psi|^2 \right\} dx dt. \quad (3.11)$$

Par intégration par parties par rapport à t on obtient

$$A_1 = \int_Q \left\{ \nabla w \cdot \nabla w_t - \frac{s^2 \lambda^2}{2} (\varphi^2 |\nabla \psi|^2)_t w^2 + \frac{s}{2} \alpha_{tt} w^2 + 2s \lambda^2 \varphi |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 \right. \\ \left. + 2s \lambda^2 w \nabla w \cdot \nabla (\varphi |\nabla \psi|^2) - 2s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 |\nabla \psi|^4 - 2s^2 \lambda^2 \varphi \alpha_t w^2 |\nabla \psi|^2 \right\} dx dt. \quad (3.12)$$

On remarque que le premier terme de (3.12) : $\int_Q \nabla w \cdot \nabla w_t dx dt$ s'annule. En effet, on a

$$\int_Q \nabla w \cdot \nabla w_t dx dt = \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla w|^2) dx dt = 0$$

Grâce à la L -périodicité de w , φ et ψ et le fait que $w(0, \cdot) = w(T, \cdot) = 0$, l'intégration par parties donne

$$A_1 = \int_Q \left\{ \frac{s^2 \lambda^2}{2} (\varphi^2 |\nabla \psi|^2)_t w^2 + \frac{s}{2} \alpha_{tt} w^2 + 2s \lambda^2 \varphi |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 \right.$$

$$+2s\lambda^2 w \nabla w \cdot \nabla(\varphi |\nabla \psi|^2) - 2s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 |\nabla \psi|^4 - 2s^2 \lambda^2 \varphi \alpha_t w^2 |\nabla \psi|^2 \} dxdt.$$

De la même manière, les intégrations par parties et les hypothèses de L-périodicité sur la fonction poids donnent

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_Q \left\{ 3s^3 \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 w^2 + s^3 \lambda^3 \varphi^3 w^2 \nabla \cdot (|\nabla \psi|^2 \nabla \psi) \right. \\ &\quad \left. + s^2 \lambda w^2 \nabla \cdot (\varphi \alpha_t (\nabla \psi)) \right\} dxdt. \\ A_3 &= \int_Q \left\{ 2s\lambda^2 \varphi \left((\nabla \psi \cdot \nabla w)^2 + 2s\lambda \varphi (\nabla w \cdot (\nabla \nabla \psi) \cdot \nabla w) \right) \right. \\ &\quad \left. - s\lambda^2 \varphi |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 - s\lambda \varphi |\nabla w|^2 \Delta \psi \right\} dxdt. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (K_1 w, K_2 w)_{L^2(Q)} &= \int_Q \left\{ s^3 \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 w^2 + s\lambda^2 \varphi |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2s\lambda^2 \varphi (\nabla \psi \cdot \nabla w)^2 \right\} dxdt + X_1, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où X_1 est égale :

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_Q \left\{ \frac{s^2 \lambda^2}{2} (\varphi^2 |\nabla \psi|^2)_t w^2 + \frac{s}{2} \alpha_{tt} w^2 - 2s^2 \lambda^2 \varphi \alpha_t w^2 |\nabla \psi|^2 \right. \\ &\quad \left. + s^3 \lambda^3 \varphi^3 w^2 \nabla \cdot (|\nabla \psi|^2 \nabla \psi) + s^2 \lambda w^2 \nabla \cdot (\varphi \alpha_t (\nabla \psi)) \right. \\ &\quad \left. + 2s\lambda \varphi (\nabla w \cdot (\nabla \nabla \psi) \cdot \nabla w) - s\lambda \varphi |\nabla w|^2 \Delta \psi \right\} dxdt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

On a :

$$|\varphi_t| \leq C\varphi^2, |\alpha_t| \leq C\varphi^2, |\alpha_{tt}| \leq C\varphi^3, \quad (3.15)$$

$$|(\varphi^2 |\nabla \psi|^2)_t| \leq C\lambda\varphi^3, |s\alpha_{tt}| \leq Cs\varphi^3, |\nabla \cdot (\varphi \alpha_t \nabla \psi)| \leq C\lambda\varphi^3, \quad (3.16)$$

$$|s\lambda^2 w \nabla w \cdot \nabla(\varphi |\nabla \psi|^2)| \leq C|s\lambda^3 \varphi w |\nabla w|| \leq 2C(s\lambda^5 \varphi w^2 + s\lambda \varphi |\nabla w|^2), \quad (3.17)$$

où C est une constante indépendante de $\lambda > 0$ et $s > 0$.

En utilisant les estimations (3.15), (3.16) et (3.17), on obtient que :

$$|X_1| \leq C \int_Q \left\{ (s^3 \lambda^3 \varphi^3 + s\lambda^5 \varphi) w^2 + s\lambda \varphi |\nabla w|^2 \right\} dxdt, \text{ pour } s \geq 1, \lambda \geq 1. \quad (3.18)$$

Maintenant on remplace (3.13) dans (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} \|f_s\|_{L^2(Q)}^2 &= \|K_1 w\|_{L^2(Q)}^2 + \|K_2 w\|_{L^2(Q)}^2 + 2 \int_Q \{s^3 \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 w^2 \\ &\quad + s \lambda^2 \varphi |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 + 2s \lambda^2 \varphi (\nabla \psi \cdot \nabla w)^2\} dxdt + 2X_1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En utilisant (3.8), on a :

$$\|f_s\|_{L^2(Q)}^2 \leq 3(\|f e^{s\alpha}\|_{L^2(Q)}^2 + \|s \lambda \varphi w \Delta \psi\|_{L^2(Q)}^2 + \|s \lambda^2 \varphi w |\nabla \psi|^2\|_{L^2(Q)}^2). \quad (3.20)$$

Les termes $\|s \lambda \varphi w \Delta \psi\|_{L^2(Q)}^2$, $\|s \lambda^2 \varphi w |\nabla \psi|^2\|_{L^2(Q)}^2$ et X_1 peuvent être absorbés pour s grand par

$$\int_Q s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dxdt \text{ et } \int_Q s \lambda^2 \varphi |\nabla w|^2 dxdt.$$

D'après la proposition 3.4.1 on sait que $|\nabla \psi| > 0$ sur le compact $\overline{\Omega \setminus \omega_0}$ et qu'elle est continue, il existe δ tel que $0 < \delta \leq |\nabla \psi|^2$, $x \in \overline{\Omega \setminus \omega_0}$ et

$$\begin{aligned} -C \int_{(0,T) \times \omega_0} s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dxdt + \delta^2 \int_{(0,T) \times (\Omega \setminus \omega_0)} s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dxdt \\ \leq \int_Q s^3 \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \psi|^4 w^2 dxdt, \end{aligned} \quad (3.21)$$

et

$$\begin{aligned} -C \int_{(0,T) \times \omega_0} s \lambda^2 \varphi |\nabla w|^2 dxdt + \delta \int_{(0,T) \times (\Omega \setminus \omega_0)} s \lambda^2 \varphi |\nabla w|^2 dxdt \\ \leq \int_Q s \lambda^2 \varphi |\nabla \psi|^2 |\nabla w|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (3.22)$$

On remarque que

$$2s \lambda^2 \varphi (\nabla \psi \cdot \nabla w)^2 \geq 0 \text{ dans } Q. \quad (3.23)$$

On obtient de (3.19), (3.20), (3.21), (3.22) et (3.23) que

$$\begin{aligned} \|K_1 w\|_{L^2(Q)}^2 + \|K_2 w\|_{L^2(Q)}^2 + 2 \int_Q \{s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 + s \lambda^2 \varphi |\nabla w|^2\} dxdt + 2X_1 \\ \leq C \left(\int_{(0,T) \times \omega_0} s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dxdt + \int_{(0,T) \times \omega_0} s \lambda^2 \varphi |\nabla w|^2 dxdt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|fe^{s\alpha}\|_{L^2(Q)}^2 + \|s\lambda\varphi w\Delta\psi\|_{L^2(Q)}^2 + \|s\lambda^2\varphi w|\nabla\psi|^2\|_{L^2(Q)}^2. \\
& \|K_1w\|_{L^2(Q)}^2 + \|K_2w\|_{L^2(Q)}^2 + \int_Q (s^3\lambda^4\varphi^3w^2 + s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2)dxdt \\
& \leq C\left(\int_{(0,T)\times\omega_0} (s^3\lambda^4\varphi^3w^2 + s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2)dxdt + \|fe^{s\alpha}\|_{L^2(Q)}^2\right). \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Il reste à estimer les termes w_t et Δw . On utilise les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta w &= -K_1w + s^2\lambda^2\varphi^2|\nabla\psi|^2w + s\alpha_t w, \\
w_t &= K_2w - 2s\lambda\varphi\nabla\psi.\nabla w - 2s\lambda^2\varphi w|\nabla\psi|^2.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \left\|\frac{1}{\sqrt{s\varphi}}\Delta w\right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\|\frac{1}{\sqrt{s\varphi}}w_t\right\|_{L^2(Q)}^2 \leq C(\|K_1w\|_{L^2(Q)}^2 + \|K_2w\|_{L^2(Q)}^2) \\
& + \int_Q \{(s^3\lambda^4\varphi^3 + s\varphi^3 + s\lambda^4\varphi)w^2 + s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2\}dxdt,
\end{aligned}$$

et de (3.24), on a

$$\begin{aligned}
& \int_Q \left(\frac{1}{s\varphi}|w_t|^2 + \frac{1}{s\varphi}|\Delta w|^2\right)dxdt \leq \\
& C\left(\int_Q f^2e^{2s\alpha}dxdt + \int_{(0,T)\times\omega_0} \{s^3\lambda^4\varphi^3w^2 + s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2\}dxdt\right).
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'inégalité de Carleman (3.1) avec z , on utilise le fait que $w = e^{s\alpha}z$ dans Q . Alors on a

$$|\nabla w| = |s\lambda\varphi|\nabla\psi|e^{s\alpha}z + e^{s\alpha}|\nabla z| \leq C(s\lambda\varphi|z| + |\nabla z|)e^{s\alpha}, \quad (3.25)$$

et

$$\begin{aligned}
|\Delta w| &= \left|se^{s\alpha}z (s\lambda^2\varphi^2|\nabla\psi|^2 + \lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2 + \lambda\varphi\Delta\psi) \right. \\
& \quad \left. + 2s\lambda\varphi|\nabla\psi|e^{s\alpha}|\nabla z| + e^{s\alpha}\Delta z\right| \\
& \leq C(s^2\lambda^2\varphi^2|z| + s\lambda^2\varphi|\nabla z| + |\Delta z|)e^{s\alpha}. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

On déduit de (3.25) et (3.26) que

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\frac{1}{s\varphi} (|z_t|^2 + |\Delta z|^2) + s\lambda^2\varphi|\nabla z|^2 + s^3\lambda^4\varphi^3z^2 \right) e^{2s\alpha} dx dt \\ & \leq C \left(\int_Q f^2 e^{2s\alpha} dx dt + \int_{(0,T)\times\omega_0} (s^3\lambda^4\varphi^3z^2 + s\lambda^2\varphi|\nabla z|^2) e^{2s\alpha} dx dt \right). \end{aligned}$$

Finalement, il nous reste à éliminer le terme

$$\int_{(0,T)\times\omega_0} s\lambda^2\varphi|\nabla z|^2 e^{2s\alpha} dx dt.$$

On se donne ρ tel que $\rho \in C_0^\infty(\omega)$, $\rho|_{\omega_0} \equiv 1$, $0 \leq \rho \leq 1$. En multipliant $z_t - \Delta z - f = 0$ par $s\varphi z \rho e^{2s\alpha}$ et en intégrant en x et t sur $(0, T) \times \omega$, et enfin en intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{(0,T)\times\omega_0} s\lambda^2\varphi|\nabla z|^2 e^{2s\alpha} dx dt \leq \int_{(0,T)\times\omega} s\lambda^2\varphi\rho|\nabla z|^2 e^{2s\alpha} dx dt \\ & = \int_{(0,T)\times\omega} e^{2s\alpha} \alpha_t s^2 \lambda^2 \varphi \rho z^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{(0,T)\times\omega} e^{2s\alpha} s \lambda^2 \varphi_t \rho z^2 dx dt \\ & - 2 \int_{(0,T)\times\omega} e^{2s\alpha} s^2 \lambda^3 \rho \varphi^2 z \nabla \psi \cdot \nabla z dx dt + \int_{(0,T)\times\omega} e^{2s\alpha} s \lambda^3 \rho \varphi^2 z \nabla \psi \cdot \nabla z dx dt \\ & - \int_{(0,T)\times\omega} e^{2s\alpha} \lambda^2 s \varphi z \nabla \rho \cdot \nabla z dx dt + \int_{(0,T)\times\omega} f^2 e^{2s\alpha} z \lambda^2 \varphi \rho dx dt. \end{aligned}$$

Grâce à la propriété (3.15) les termes :

$$\int_{(0,T)\times\omega} e^{2s\alpha} \alpha_t s^2 \lambda^2 \varphi \rho z^2 dx dt \text{ et } \int_{(0,T)\times\omega} e^{2s\alpha} s \lambda^2 \varphi_t \rho z^2 dx dt$$

sont majorés par $\int_{(0,T)\times\omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 z^2 e^{2s\alpha} dx dt$.

L'inégalité de Young suivante :

$$s^2 \lambda^3 \varphi^2 z |\nabla z| \leq \varepsilon s \lambda^2 \varphi |\nabla z|^2 + C(\varepsilon) s^3 \lambda^4 z^2 \varphi^3,$$

permet de majorer les termes : $\int_{(0,T) \times \omega} e^{2s\alpha} s^2 \lambda^3 \rho \varphi^2 z \nabla \psi \cdot \nabla z dx dt$,
 $\int_{(0,T) \times \omega} e^{2s\alpha} \lambda^2 s \varphi z \nabla \rho \cdot \nabla z dx dt$ et $\int_{(0,T) \times \omega} f^2 e^{2s\alpha} z \lambda^2 \varphi \rho dx dt$ par :

$$3\varepsilon C_1 \int_{(0,T) \times \omega} s \lambda^2 \varphi |\nabla z|^2 e^{2s\alpha} dx dt + C_2(\varepsilon) \int_{(0,T) \times \omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 z^2 e^{2s\alpha} dx dt$$

où C_1 est une constante qui majore $\nabla \psi$, ρ , $|\nabla \rho|$, C_2 est une constante.
 En choisissant ε suffisamment petit, on obtient :

$$\int_{(0,T) \times \omega_0} s \lambda^2 \varphi |\nabla z|^2 e^{2s\alpha} dx dt \leq C \left(\int_{(0,T) \times \omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 z^2 e^{2s\alpha} dx dt + \int_Q f^2 e^{2s\alpha} dx dt \right).$$

Alors, pour $s > 0$ assez grand, on a

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\frac{1}{s\varphi} (|z_t|^2 + |\Delta z|^2) + s \lambda^2 \varphi |\nabla z|^2 + s^3 \lambda^4 \varphi^3 z^2 \right) e^{2s\alpha} dx dt \\ & \leq C \left(\int_Q f^2 e^{2s\alpha} dx dt + \int_{(0,T) \times \omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 z^2 e^{2s\alpha} dx dt \right). \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du Théorème 3.2.2. □

3.5 Inégalité de stabilité

3.5.1 Preuve du Théorème 3.2.4 :

Soit t_0, t_1 , tels que $0 < t_0 < t_1 < T$ et posons $\theta = \frac{t_1 + t_0}{2}$. Pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$, avec $t' > t$, on note par $Q_t^{t'} := (t, t') \times \Omega$.

Remarque 3.5.1. L'inégalité de Carleman (3.1) reste vraie si on remplace dans les fonctions poids, $t(T-t)$ par $(t-t_0)(t_1-t)$, et que l'on intègre sur $Q_{t_0}^{t_1}$.

On rappelle que si $z(t, x) = e^{s\alpha} u(t, x)$, alors

$$K_1 z = -\Delta z - s^2 \lambda^2 \varphi^2 |\nabla \psi|^2 z - s \alpha_t z,$$

$$K_2 z = z_t + 2s\lambda\varphi\nabla\psi\cdot\nabla z + 2s\lambda^2\varphi z|\nabla\psi|^2.$$

Dans la suite, on pose $v(t, x) = u(t, x) - \tilde{u}(t, x)$, $q(x) = r(x) - \tilde{r}(x)$ et $a(x) = u(\theta, x) - \tilde{u}(\theta, x)$. On remarque que v satisfait le système :

$$\begin{cases} v_t &= \Delta v + \mu v + \tilde{u}q - \gamma v(u + \tilde{u}), x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ v(\theta, x) &= a(x), x \in \mathbb{R} \\ &v \text{ L-périodique.} \end{cases}$$

Soit $y(t, x) = v_t(t, x)$. Grâce au Théorème 3.3.5, y est un élément de V . La fonction y est solution du système suivant :

$$\begin{cases} y_t &= \Delta y + (\mu - \gamma(u + \tilde{u}))y + q\tilde{u}_t - \gamma v(u_t + \tilde{u}_t), \\ y(\theta, x) &= \Delta a + \mu a + \tilde{u}(\theta, x)q - \gamma a(u(\theta, x) + \tilde{u}(\theta, x)), \\ &y \text{ L-périodique.} \end{cases}$$

Posons

$$w(t, x) = e^{s\alpha}y(t, x) \text{ et } I := \int_{t_0}^{\theta} \int_{\Omega} K_2 w w dx dt.$$

Remarque 3.5.2. Grâce au fait que $w \in H^{1,2}((\varepsilon, T) \times \Omega)$ (voir [62] Lemme 1.1.1. Chap. 1), $K_2 w$ appartient à $L^2((\varepsilon, T) \times \Omega)$.

Lemme 3.5.3. Il existe λ_0, s_0 positifs et une constante C telle que pour tous $\lambda \geq \lambda_0$ et $s \geq s_0$, si u (resp. \tilde{u}) est la solution du problème (P_r) (resp. $(P_{\tilde{r}})$), on a :

$$\begin{aligned} |I| \leq C [s^{3/2}\lambda^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2 dx dt + s^{-3/2}\lambda^{-2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} q^2 \tilde{u}_t^2 dx dt \\ + s^{-3/2}\lambda^{-2} \int_{\Omega} e^{2s\alpha} |v(\theta, x)|^2 dx]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Preuve. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$|I| \leq s^{-3/2}\lambda^{-2} \left(\int_{t_0}^{\theta} \int_{\Omega} (K_2 w)^2 dx dt \right)^{1/2} \left(s^3 \lambda^4 \int_{t_0}^{\theta} \int_{\Omega} e^{2s\alpha} y^2 dx dt \right)^{1/2}. \quad (3.28)$$

La fonction φ étant continue, périodique et positive, il existe une constante $C_1 > 0$ positive telle que : $\varphi^3 \geq \frac{1}{C_1} > 0$. En utilisant l'inégalité de Young on obtient :

$$|I| \leq \frac{s^{-3/2}\lambda^{-2}}{2} \left(\|K_2 w\|_{L^2(Q_{t_0}^{t_1})} + s^3 \lambda^4 C_1 \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} \varphi^3 y^2 dx dt \right). \quad (3.29)$$

On utilise dorénavant la notation générique C pour toute constante positive qui va suivre.

En utilisant l'inégalité de Carleman (3.2), établie pour des fonctions périodiques, on remarque qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour λ, s assez grands, on a

$$\begin{aligned} \|K_2 w\|_{L^2(Q_{t_0}^{t_1})}^2 + s^3 \lambda^4 \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} \varphi^3 y^2 dx dt &\leq C \left[s^3 \lambda^4 \int_0^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha} \varphi^3 y^2 dx dt \right. \\ &\left. + \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} [(r - \gamma(u + \tilde{u}))^2 y^2 + q^2 \tilde{u}_t^2 + \gamma^2 v^2 (u_t + \tilde{u}_t)^2] dx dt \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Comme u, \tilde{u}, r et γ sont bornés, on a

$$\int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} (r - \gamma(u + \tilde{u}))^2 y^2 dx dt \leq C \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} \varphi^3 y^2 dx dt. \quad (3.31)$$

Pour majorer le terme $\int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} \gamma^2 v^2 (u_t + \tilde{u}_t)^2 dx dt$, on applique un principe du maximum adapté à des fonctions qui ne sont pas suffisamment régulières (voir Théorème 3.2.2) pour u_t et \tilde{u}_t , et l'identité suivante :

$$e^{s\alpha} v(t, x) = e^{s\alpha} (v(\theta, x) - \int_t^\theta v_t(\tau, x) d\tau).$$

Maintenant, on observe que $e^{2s\alpha(t,x)}$ est croissante sur (t, θ) et décroissante sur (t_0, θ) . Ceci implique que

$$\begin{aligned} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha(t,x)} v(t, x)^2 dx dt &\leq 2[(t_1 - t_0) \int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} v(\theta, x)^2 dx \\ &+ \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha(t,x)} v_t(t, x)^2 dx dt]. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le fait que r, γ, u_t et \tilde{u}_t sont bornées on obtient

$$\int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} \gamma^2 v^2 (u_t + \tilde{u}_t)^2 dx dt \leq C \left(\int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} v(\theta, x)^2 dx \right)$$

$$+ \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha(t,x)} v_t(t,x)^2 dx dt). \quad (3.32)$$

En utilisant (3.30), (3.31), (3.32) et le fait que $y = v_t$, on déduit :

$$\begin{aligned} |I| \leq C [s^{3/2} \lambda^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha} \varphi^3 y^2 dx dt + s^{-3/2} \lambda^{-2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} q^2 \tilde{u}_t^2 dx dt \\ + s^{-3/2} \lambda^{-2} \int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} v(\theta,x)^2 dx]. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.5.4. *Il existe λ_0, s_0 positifs, et une constante C telle que $\forall \lambda \geq \lambda_0, \forall s \geq s_0$ on a :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} (q\tilde{u}(\theta,x))^2 dx \leq C \left[s^{3/2} \lambda^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha} \varphi^3 y^2 dx dt \right. \\ \left. + s^{-3/2} \lambda^{-2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} q^2 \tilde{u}_t^2 dx dt + C \|v(\theta,x)\|_{H^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Preuve. On a

$$y(\theta,x) = v_t(\theta,x) = \Delta v(\theta,x) + r(x)v(\theta,x) + \tilde{u}(\theta,x)f(x) - \gamma(x)v(\theta,x)(u + \tilde{u}).$$

Comme r, γ, u et \tilde{u} sont bornés on a

$$e^{2s\alpha(\theta,x)} \tilde{u}^2 q^2 \leq C e^{2s\alpha(\theta,x)} [y(\theta,x)^2 + (\Delta v(\theta,x))^2 + (v(\theta,x))^2]. \quad (3.33)$$

Pour majorer le terme $\int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} y(\theta,x)^2 dx$, on procède comme suit : en utilisant une intégration par parties sur Ω , on a

$$I = \frac{1}{2} \int_{Q_{t_0}^{\theta}} (w^2)_t dx dt - s\lambda \int_{Q_{t_0}^{\theta}} \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) w^2 dx dt + 2s\lambda^2 \int_{Q_{t_0}^{\theta}} \varphi |\nabla \psi|^2 w^2 dx dt,$$

et en utilisant le fait que $w(t_0, x) = 0$ et $\nabla \varphi = \lambda \varphi \nabla \psi$, on a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w(\theta, \cdot)^2 = I - s\lambda^2 \int_{Q_{t_0}^{\theta}} \varphi |\nabla \psi|^2 w^2 dx dt + s\lambda \int_{Q_{t_0}^{\theta}} \varphi \Delta \psi w^2 dx dt.$$

Maintenant, pour $\lambda > 1$ et $w = e^{s\alpha}y$, on a

$$\int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)}y(\theta,x)^2 dx \leq 2|I| + Cs\lambda^2 \int_{Q_{t_0}^{\theta}} e^{2s\alpha}\varphi y^2 dx dt.$$

En utilisant le fait que $\varphi \leq \frac{(t_1 - t_0)^4}{16}\varphi^3$ et l'inégalité de Carleman (3.1) du Théorème 3.2.2, on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int_{Q_{t_0}^{\theta}} e^{2s\alpha}\varphi y^2 dx dt &\leq C \left[\lambda^2 s \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2 dx dt \right. \\ &\left. + s^{-2}\lambda^{-2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} [(r - \gamma(u + \tilde{u}))^2 y^2 + q^2 \tilde{u}_t^2 + \gamma^2 v^2 (u_t + \tilde{u}_t)^2] dx dt \right]. \end{aligned}$$

Comme dans la preuve du Lemme 3.5.3 (voir équation (3.31)), l'application $t \mapsto \alpha(t, x)$ atteint son maximum en $\frac{t_1 + t_0}{2} = \theta$, alors pour s assez grand,

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int_{Q_{t_0}^{\theta}} e^{2s\alpha}\varphi y^2 dx dt &\leq C \left[\lambda^2 s \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2 dx dt \right. \\ &\left. + s^{-2}\lambda^{-2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} [q^2 \tilde{u}_t^2 + \gamma^2 v^2 (u_t + \tilde{u}_t)^2] dx dt \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Les inégalités (3.27) et (3.34) donnent

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)}y(\theta,x)^2 dx &\leq C \left[s^{3/2}\lambda^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2 dx dt \right. \\ &\left. + s^{-3/2}\lambda^{-2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} q^2 \tilde{u}_t^2 dx dt + s^{-3/2}\lambda^{-2} \int_{\Omega} e^{2s\alpha} v(\theta,x)^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Finalement on remplace cette dernière inégalité dans (3.33) ce qui donne le lemme. \square

Fin de la preuve du Théorème 3.2.4. On utilise le principe du maximum pour u_t (voir Théorème 3.3.5), pour obtenir

$$s^{-3/2}\lambda^{-2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} q^2 \tilde{u}_t^2 dx dt \leq Cs^{-3/2}\lambda^{-2} \int_{Q_{t_0}^{t_1}} e^{2s\alpha} q^2 dx dt.$$

Maintenant, grâce au Lemme 3.5.4, on déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} q^2(x) (\tilde{u}(\theta, x)^2 - s^{-3/2} \lambda^{-2} C) dx \leq \\ & C \left[s^{3/2} \lambda^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha} \varphi^3 y^2 dx dt + \|v(\theta, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

En utilisant la Proposition 3.3.1, on remarque que $\tilde{u} \geq e^{-MT} r_0 > 0$.
Donc $\tilde{u}^2(\theta, x) \geq e^{-2MT} r_0^2 > 0$ et

$$\tilde{u}^2(\theta, x) - \frac{C}{s^{3/2} \lambda^2} > e^{-2Mt} r_0^2 - \frac{C}{s^{3/2} \lambda^2} \geq r_1 > 0,$$

pour $r_1 > 0$ et s assez grand.

Par conséquent (3.35) devient

$$\int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} q^2(x) dx \leq \frac{C}{r_1} \left(s^{3/2} \lambda^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega} e^{2s\alpha} \varphi^3 y^2 dx dt + \|v(\theta, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 \right). \quad (3.36)$$

En écrivant $v = u - \tilde{u}$ et $q = r - \tilde{r}$ dans (3.36), et en utilisant le fait que $e^{2s\alpha(\theta,x)} \geq C > 0$, et $0 \leq e^{2s\alpha} \leq C$, où s, λ sont fixés, on a

$$\|r - \tilde{r}\|_{L^2(\Omega)} \leq C (\|u - \tilde{u}\|_{H^1(t_0, t_1; L^2(\omega))} + \|(u - \tilde{u})(\theta, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}).$$

Ceci termine la preuve du Théorème 3.2.4. □

Chapitre 4

Détermination d'un coefficient via les vitesses asymptotiques de propagation

4.1 Introduction

Dans ce travail on établit un résultat d'unicité de la partie linéaire $\partial_u f(x, 0)$ du terme de réaction $f(x, u)$ dans le problème de réaction-diffusion suivant :

$$(P) \begin{cases} \partial_t u - D\partial_{xx}u = f(x, u), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Une des caractéristiques importantes de ce système est qu'il est posé sur \mathbb{R} tout entier et non sur un domaine borné et les hypothèses que l'on va imposer ne permettent pas de ramener son étude sur un domaine borné.

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans la revue *Inverse Problems* [22].

Cette équation peut être interprétée comme décrivant l'évolution spatio-temporelle de la concentration d'individus $u(t, x)$ dans un environnement hétérogène [5, 75].

D'après Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov, le comportement de la solution $u(t, x)$ du problème (P) dépend principalement du terme de réaction $f(x, u)$ que l'on va supposer de type KPP (voir définition ci-dessous) plus précisément, de sa linéarisée autour de l'état d'équilibre 0 (voir par exemple

[8, 15]).

En dynamique des populations, ce terme représente le taux de croissance intrinsèque de la population. La persistance ou l'extinction de la population ne dépendent que de $\partial_u f(x, 0)$ [5, 8, 9, 36, 40]. Dans la pratique, ce terme est souvent inconnu ou partiellement connu car les problèmes se posent souvent sur des phénomènes décrivant l'évolution d'une population dans des environnements nouveaux pour celle-ci.

Dans ce travail, on suppose $D > 0$ et que $x \mapsto f(x, u)$ est 1-périodique par rapport à x , ce qui signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, f(x, s) = f(x + 1, s). \quad (4.1)$$

La reconstruction des coefficients des équations paraboliques est un problème largement étudié, et plusieurs résultats ont été obtenus dans le cas des opérateurs paraboliques définis sur un ouvert borné (voir entre autres [18, 30, 31, 45, 57, 60]). Toutefois, dans le cas considéré ici, c'est à dire un problème posé dans \mathbb{R} , il existe très peu de travaux.

Dans le cas des domaines bornés, plusieurs types d'observations peuvent être utilisés pour la détermination d'un coefficient ; par exemple l'observation de la solution sur le bord du domaine ou bien sur un ouvert. Plusieurs techniques sont utilisées, en particulier de nombreux résultats sont basés sur une méthode impliquant des inégalités de Carleman, qui a été introduite dans l'article de Bukhgeim et Klivanov [12]. Cette méthode utilise, en plus de l'observation localisée de la solution $u(t, x)$ du problème considéré, une autre observation de la solution sur la totalité du domaine d'étude, à un temps fixé. On peut citer [45] dans le cas linéaire et [23, 25, 27, 69] dans le cas non linéaire. Plus récemment, des méthodes basées sur le principe du maximum et le Lemme de Hopf ont permis d'obtenir des résultats d'unicité en utilisant uniquement des observations ponctuelles mais dans le cas de la dimension 1 [21, 24, 26].

Le problème direct associé au système (P) a été largement étudié récemment (voir par exemple [5, 6, 7, 8, 10, 73, 74]). Le travail [7] est consacré aux phénomènes de propagation non linéaires périodiques, pour des équations de réaction-diffusion de type KPP. Dans [10], les auteurs établissent des propriétés de propagation pour des solutions d'équations de la forme

$$\partial_t u - a(x)\partial_{xx}u - q(x)\partial_x u = f(x, u).$$

Le point commun entre ces travaux concerne l'étude de la vitesse de propagation et le comportement asymptotique des solutions.

Dans notre problème, la condition initiale $u_0(x)$ n'est pas périodique, et donc la solution $u(t, x)$ est non périodique. Dans ce contexte, nous utilisons un nouveau type d'observations, qui sont basées sur les propriétés de propagation des solutions du problème de Cauchy (P).

Avant d'aller plus loin, nous rappelons les hypothèses classiques énoncées par Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov que doit vérifier la fonction f (voir la figure 4.1) et notées dorénavant KPP (voir [52]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, f(x, 0) = 0, \\ \exists M > 0, \text{ tel que pour } s \geq M, \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x, s) \leq 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, s \mapsto \frac{f(x, s)}{s} \text{ est décroissante pour } s > 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

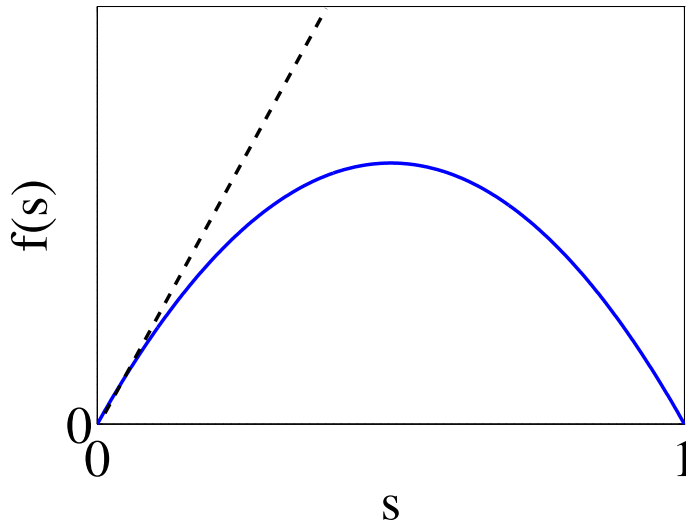


FIGURE 4.1 – Une fonction du type KPP : $f(s) = s(1 - s)$

Sous ces hypothèses, la 1-périodicité (4.1), et en supposant que l'état stationnaire 0 est instable (voir la proposition 4.2.1), il est connu que la solution du problème de Cauchy (P), avec une condition initiale à support compact ou de type Heaviside, se propage (vers la droite) avec une *vitesse asymptotique de propagation* finie w^* [36] que l'on peut définir de la manière suivante :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x + ct) = 0, \forall c \geq w^*, x \in \mathbb{R}, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t, x + ct) > 0, \forall 0 \leq c < w^*, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Cela signifie qu'un observateur se déplaçant vers la droite avec une vitesse c plus grande que w^* verra la solution tendre vers 0, alors que s'il se déplace à une vitesse inférieure à w^* , il verra la solution rester supérieure à une certaine constante positive. L'existence de cette vitesse asymptotique de propagation constante, ainsi que l'existence des solutions front d'ondes qui se propagent avec une vitesse constante $c \geq w^*$ [5, 9, 73], sont les principales caractéristiques qui ont contribué au développement du domaine de la réaction-diffusion en sciences appliquées, voir les travaux de [58, 64, 70] et ce, depuis le travail pionnier de Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov [52]. En particulier, chaque fois que les paramètres D , $\partial_u f(x, 0)$ et $u_0(x)$ en (P) sont bien ajustés pour des données expérimentales, la vitesse asymptotique de propagation w^* s'accorde avec les observations.

L'objectif principal de ce travail est donc de déterminer la partie linéaire

$$r(x) = \partial_u f(x, 0) \quad (4.4)$$

du terme de réaction $f(x, u)$, en utilisant les observations de la vitesse de propagation de la solution du problème de Cauchy (P) . Pour cela, au lieu de considérer des conditions initiales à support compact ou Heaviside, nous considérons une famille de conditions initiales $(u_{0,\lambda})_{\lambda \in I \subset (0, +\infty)}$, dépendants d'un paramètre λ afin de "surdéterminer" le problème étudié. On les choisit avec un comportement asymptotique de la forme exponentiellement décroissante en plus l'infini, et on utilise les vitesses asymptotiques de propagation associées w_λ comme observations. Mais il va être nécessaire de prouver leur existence pour de telles conditions initiales et il va falloir les caractériser correctement.

4.2 Hypothèses et résultats principaux

4.2.1 Hypothèses sur f

En plus des hypothèses de périodicité (4.1) et celles de type KPP (4.2) sur $f(x, u)$, on suppose que ce terme non linéaire est de classe $\mathcal{C}^{0,1}$ par rapport à x , localement uniformément en $u \in \mathbb{R}$, et de classe \mathcal{C}^1 par rapport à u . En

outre, on suppose que la partie linéaire du terme de réaction, $r(x) = \partial_u f(x, 0)$ est dans l'espace de fonctions \mathcal{M}_1 défini par :

$$\mathcal{M}_1 = \{\text{fonction 1-périodique } \rho \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \text{ affine sur } [0, \theta) \text{ et sur } [\theta, 1)\}, \quad (4.5)$$

où θ est un nombre fixé, $0 < \theta < 1$. En d'autres termes, $r(x)$ est une fonction affine par morceaux.

4.2.2 Etat stationnaire : existence et unicité

Sous nos hypothèses sur le terme de réaction $f(x, u)$ et pour des conditions initiales continues et bornées $u_0 \geq 0$, il est connu voir [8] que la solution du problème de Cauchy (P) converge quand $t \rightarrow +\infty$ vers une solution stationnaire positive, qui est la solution du problème :

$$-D \partial_{xx} p = f(x, p), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Plus précisément, dans [8] les auteurs ont donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un état stationnaire p positif identiquement non nul. Cette condition est basée sur la description de la stabilité autour de l'état d'équilibre zéro du système stationnaire linéaire, c'est à dire, sur le signe de la valeur propre principale de l'opérateur :

$$L_0 : \psi \mapsto -D \partial_{xx} \psi - r(x) \psi, \quad (4.7)$$

avec des hypothèses de périodicité sur ψ (4.1). Nous rappelons qu'il existe un unique $k_0 \in \mathbb{R}$ et une unique fonction $\psi_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} -D \partial_{xx} \psi_0 - r(x) \psi_0 = k_0 \psi_0, & x \in \mathbb{R}, \\ \psi_0 \text{ est 1-périodique,} \\ \psi_0(x) > 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \psi_0(0) = 1. \end{cases} \quad (4.8)$$

Ce résultat peut se trouver dans [1, 38, 43] et sa preuve est basée sur le Théorème de Krein-Rutman.

Les résultats de [8] montrent que, sous les hypothèses précédentes sur la fonction f , on a :

Proposition 4.2.1. 1) L'équation (4.6) admet une solution p positive et bornée si et seulement si $k_0 < 0$.

2) Si $k_0 < 0$, la solution bornée $p > 0$ de l'équation (4.6) est unique et est 1-périodique en x .

3) Soit $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ bornée et telle que $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$. Si $k_0 \geq 0$, alors la solution $u(t, x)$ de (P) converge vers 0 uniformément en x quand $t \rightarrow +\infty$. Si $k_0 < 0$, alors $u(t, x)$ converge vers la solution $p > 0$ de l'équation (4.6) uniformément localement en x , quand $t \rightarrow +\infty$.

Remarque 1. Le point 3) de la proposition ci-dessus montre que quel que soit l'état initial, la vitesse asymptotique de propagation de la solution $u(t, x)$ est égale à 0 si $k_0 \geq 0$. Dans ce travail, nous avons besoin d'observer des vitesses de propagation positives. En conséquence, nous devons supposer que $k_0 < 0$. Une condition suffisante sur $r(x)$ pour que $k_0 < 0$ est (voir Proposition 2.9 dans [8]) :

$$\int_0^1 r(x) dx \geq 0, \text{ avec } r \not\equiv 0. \quad (4.9)$$

4.2.3 Conditions initiales et vitesse asymptotique de propagation

Dans le cas de conditions initiales de type Heaviside ou à support compact, la vitesse asymptotique de propagation w^* existe, et ne dépend pas de cette condition initiale. Elle est finie et vérifie l'énoncé (4.3).

Nous allons considérer une famille de conditions initiales $(u_{0,\lambda})_\lambda$ bornées de type front satisfaisant pour $\alpha \in (0, 1)$, $x_0 > 0$ et tout $\lambda > 0$:

$$u_{0,\lambda} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}), \quad u_{0,\lambda} \geq 0, \quad \liminf_{x \rightarrow -\infty} u_{0,\lambda}(x) > 0, \quad (4.10)$$

et

$$u_{0,\lambda}(x) = e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq x_0. \quad (4.11)$$

On définit la vitesse asymptotique de propagation de la solution $u_\lambda(t, x)$ pour le problème de Cauchy (P) avec la condition initiale $u_0(x) = u_{0,\lambda}(x)$ comme un réel $w_\lambda > 0$ tel que :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} u_\lambda(t, x + ct) = 0, \quad \forall c \geq w_\lambda, x \in \mathbb{R}, \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} u_\lambda(t, x + ct) > 0, \quad \forall 0 \leq c < w_\lambda, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Selon la condition initiale, la vitesse asymptotique de propagation peut être finie ou pas [41, 63]. Dans le cas de conditions initiales de type Heaviside ou à support compact, nous avons déjà mentionné que la vitesse asymptotique de propagation w^* est finie et satisfait (4.3). On sait que cette vitesse asymptotique de propagation est caractérisée par la formule suivante (voir [36]) :

$$w^* = \min_{\mu > 0} \frac{-k_\mu}{\mu}, \quad (4.13)$$

où k_μ est la valeur propre principale de l'opérateur :

$$L_\mu : \psi \mapsto -D\psi'' + 2\mu D\psi' - \mu^2 D\psi - r(x)\psi. \quad (4.14)$$

où ψ vérifie la condition de périodicité (4.1), et $r(x) = \partial_u f(x, 0)$. L'existence et l'unicité de k_μ associée à une fonction propre strictement positive périodique est liée aux propriétés spectrales de l'opérateur elliptique L_μ [61]

Le résultat suivant caractérise la vitesse asymptotique de propagation dans le cas de conditions initiales vérifiant les hypothèses (4.10) et (4.11). Ce résultat est bien connu dans le cas de conditions initiales de type Heaviside ou à support compact. A notre connaissance, il n'est pas prouvé dans la littérature existante pour des conditions initiales à décroissance exponentielle. Dans cette proposition, nous montrons l'existence d'une vitesse asymptotique de propagation finie w_λ et nous donnons une formule pour w_λ , avec nos hypothèses sur les conditions initiales $(u_{0,\lambda})_\lambda$.

Proposition 4.2.2. *On suppose que f satisfait (4.1), (4.2), les hypothèses de régularité de la Section 4.2.1 et on suppose de plus que $k_0 < 0$ (voir Section 4.2.2). Soit $u_{0,\lambda}$ satisfaisant (4.10), (4.11) et $u_\lambda(t, x)$ la solution du problème (P) avec la condition initiale $u_{0,\lambda}(x)$. Alors, on peut associer à $u_\lambda(t, x)$ une vitesse asymptotique de propagation w_λ telle que*

$$\begin{cases} w_\lambda = \frac{-k_\lambda}{\lambda} & \text{si } 0 < \lambda < \lambda^*, \\ w_\lambda = w^* & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.15)$$

où k_λ est la valeur propre principale de l'opérateur défini par (4.14) et $\lambda^* = \lambda^*(r)$ est l'unique réel positif tel que $w^* = \frac{-k_{\lambda^*}}{\lambda^*}$.

Preuve. Voir la preuve de cette proposition dans la Section 4.4.

4.2.4 Résultat d'unicité

Nous pouvons maintenant énoncer notre principal résultat d'unicité.

Théorème 4.2.1. *Soit f (resp. \tilde{f}) vérifiant (4.1), (4.2), les hypothèses de régularité de la Section 4.2.1 et on suppose de plus que $k_0 < 0$ (resp. $\tilde{k}_0 < 0$) et $r(x) \in \mathcal{M}_1$ (resp. $\partial_u \tilde{f}(x, 0) = \tilde{r}(x) \in \mathcal{M}_1$). Soit $u_\lambda(t, x)$ (resp. $\tilde{u}_\lambda(t, x)$), la solution du problème de Cauchy (P) (resp. (\tilde{P})) associée à f et $u_{0,\lambda}(x)$ (resp. \tilde{f} et $u_{0,\lambda}(x)$). Si on suppose que les vitesses asymptotique de propagation w_λ et \tilde{w}_λ associées à u_λ (resp. \tilde{u}_λ) coïncident pour un continuum de valeurs de λ , c'est-à-dire*

$$\exists \lambda_1 > 0 \text{ tel que } \forall \lambda \in (0, \lambda_1), w_\lambda = \tilde{w}_\lambda,$$

alors

$$\tilde{r}(x) = r(x) \text{ ou } \tilde{r}(x) = r(-x + \theta).$$

En d'autres termes, ce résultat montre que la partie linéaire $r(x) = \partial_u f(x, 0)$ du terme de réaction $f(x, u)$ du problème (P) est uniquement déterminée (à une symétrie près) par la connaissance de la vitesse asymptotique de propagation w_λ , pour $\lambda \in (0, \lambda_1)$.

La preuve de ce théorème est basée sur les égalités des moments d'ordre un et deux des fonctions $r(x)$ et $\tilde{r}(x)$ (voir le Lemme 4.3.2 et le Lemme 4.3.3). L'égalité des moments d'ordre supérieur est plus compliquée à obtenir mais elle nous paraît être une piste permettant d'étendre le résultat du Théorème 4.2.1 à des familles de fonctions plus générales que celles définies par l'ensemble \mathcal{M}_1 .

4.3 Preuve du Théorème principal

Notre objectif est de reconstruire tout potentiel $r(x)$ élément de \mathcal{M}_1 , à partir d'observations de la vitesse asymptotique de propagation qui correspond à une observation physique et mesurable. Soit $w_\lambda(r)$ et $w_\lambda(\tilde{r})$ les vitesses asymptotiques de propagation associées à r et \tilde{r} respectivement.

En utilisant les hypothèses du Théorème 4.2.1, on a

$$w_\lambda(r) = w_\lambda(\tilde{r}) \text{ pour tout } \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Alors, d'après la Proposition 4.2.2,

$$k_\lambda(r) = k_\lambda(\tilde{r}) \text{ pour tout } \lambda \in (0, \min(\lambda_1, \lambda^*(r), \lambda^*(\tilde{r}))).$$

Lemme 4.3.1. *Pour tout $r \in \mathcal{M}_1$, la fonction $\lambda \mapsto k_\lambda(r)$ est analytique.*

Ce résultat découle de l'analyticité des coefficients dans (4.14) et de la simplicité de la valeur propre principale k_λ de L_λ (voir [48]). L'analyticité des fonctions $\lambda \mapsto k_\lambda(r)$ et $\lambda \mapsto k_\lambda(\tilde{r})$ (voir [61]) implique que

$$(H) : k_\lambda(r) = k_\lambda(\tilde{r}), \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

On veut prouver que la propriété (H) implique que :

$$\tilde{r}(x) = r(x) \text{ ou } \tilde{r}(x) = r(-x + \theta).$$

Pour cela, on considère $r(x), \tilde{r}(x)$ deux éléments de \mathcal{M}_1 c'est à dire

$$r(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \in [0, \theta), a, b \in \mathbb{R} \\ cx + d, & \text{si } x \in [\theta, 1), c, d \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.16)$$

et

$$\tilde{r}(x) = \begin{cases} \tilde{a}x + \tilde{b}, & \text{si } x \in [0, \theta), \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R} \\ \tilde{c}x + \tilde{d}, & \text{si } x \in [\theta, 1), \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.17)$$

En utilisant la continuité et l'hypothèse de périodicité vérifiée par $r(x)$, on obtient

$$r(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{pour } x \in [0, \theta), \\ -\left(\frac{a\theta}{1-\theta}\right)x + b + \frac{a\theta}{1-\theta}, & \text{si } x \in [\theta, 1). \end{cases} \quad (4.18)$$

On déduit du système (4.18) qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\tilde{r}(x) = Ar(x) + B, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

La preuve se fera en plusieurs parties. Dans une première étape on prouve le lemme :

Lemme 4.3.2. *Pour tout $r, \tilde{r} \in \mathcal{M}_1$ vérifiant la propriété (H), on a :*

$$\int_0^1 r(x) dx = \int_0^1 \tilde{r}(x) dx = \bar{r}.$$

Preuve. On considère le problème :

$$\begin{cases} -D\psi_\lambda'' + 2\lambda D\psi_\lambda' - (\lambda^2 D + r(x))\psi_\lambda = k_\lambda(r)\psi_\lambda & \text{dans } \mathbb{R}, \\ \psi_\lambda > 0, \\ \psi_\lambda \text{ 1-périodique}, \\ \psi_\lambda(0) = 1. \end{cases} \quad (4.20)$$

D'après le Théorème 2.1 dans [7], on a lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$

$$k_\lambda(r) + \lambda^2 D \rightarrow - \int_0^1 r(x) dx, \quad (4.21)$$

et

$$k_\lambda(\tilde{r}) + \lambda^2 D \rightarrow - \int_0^1 \tilde{r}(x) dx. \quad (4.22)$$

Alors, en utilisant la propriété (H), (4.21) et (4.22) on déduit le résultat du Lemme 4.3.2 (voir le Lemme 4.5.1 pour une autre preuve de ce résultat). \square

Lemme 4.3.3. *Pour tout $r, \tilde{r} \in \mathcal{M}_1$, vérifiant la propriété (H), on a :*

$$\int_0^1 (r(x) - \bar{r})^2 dx = \int_0^1 (\tilde{r}(x) - \bar{r})^2 dx.$$

Voir la preuve de ce Lemme dans la Section 4.5.

On va terminer la preuve du Théorème 4.2.1. En utilisant (4.19) on obtient

$$\int_0^1 \tilde{r}^2(x) dx = A^2 \int_0^1 r^2(x) dx + 2AB \int_0^1 r(x) dx + B^2,$$

et d'après le Lemme 4.3.2 et le Lemme 4.3.3 on a

$$(1 - A^2) \int_0^1 r^2(x) dx = B \left((1 + A) \int_0^1 r(x) dx \right).$$

Pour $A \neq -1$ on obtient

$$(1 - A) \int_0^1 r^2(x) dx = B \int_0^1 r(x) dx,$$

en utilisant le fait que $B = (1 - A) \int_0^1 r(x) dx$, pour $A \neq 1$, on conclut que

$$\int_0^1 r^2(x) dx = \left(\int_0^1 r(x) dx \right)^2. \quad (4.23)$$

D'après l'inégalité de Cauchy, l'égalité (4.23) n'est vraie que si et seulement si r est constant. Grâce à (4.19) on déduit que \tilde{r} est également constant, et d'après le Lemme 4.3.2 on obtient $r = \tilde{r}$. Par symétrie, on déduit que si \tilde{r} est constant, r est constant, et donc $\tilde{r} = r$.

Maintenant on considère le cas $A = 1$. On a alors

$$\int_0^1 \tilde{r}(x) dx = \int_0^1 r(x) dx + B.$$

En utilisant le fait que $\int_0^1 r(x) dx = \int_0^1 \tilde{r}(x) dx$, on déduit que $B = 0$, et donc

$$r(x) = \tilde{r}(x).$$

Finalement, si $A = -1$, $\tilde{r}(x) = -r(x) + B$, alors on peut écrire

$$\tilde{r}(x) = r(-x + \theta).$$

□

Remarque 4.3.4. Dans le cas homogène ($r = cste$) le résultat d'unicité (Théorème 4.2.1) est direct à l'aide d'une seule mesure car il est connu voir [2, 52] que $w^* = 2\sqrt{rD}$, donc si $w^* = \tilde{w}^*$, alors $r = \tilde{r}$.

4.4 Preuve de la Proposition 4.2.2

Rappelons que pour le problème de Cauchy (P) associé à des conditions initiales à support compact ou Heaviside, nous pouvons définir une vitesse asymptotique de propagation (voir la définition (4.3)) et que dans le cas de conditions initiales à décroissance exponentielle du type (4.10)-(4.11) nous avons à prouver l'existence et la caractérisation de cette vitesse. La preuve de ce résultat est basée sur la construction de sous et sur-solution appropriées du problème étudié.

Nous allons utiliser la notion de front d'onde pulsatoire pour l'équation :

$$\partial_t u = D\partial_{xx}u + g_l(x, u),$$

avec $g_l(x, u) = \frac{1}{l}f(x, lu)$ pour tout $l > 0$. Notons que,

$$\partial_u g_l(x, 0) = \partial_u f(x, 0).$$

En vue de construire des sous-solution et sur-solution du problème (P) , nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -D\partial_{xx}p_l = g_l(x, p_l), & x \in \mathbb{R}, \\ p_l \text{ est 1-périodique,} \\ p_l > 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

4.4.1 Construction d'une sur-solution

Soit $u_\lambda(t, x)$ la solution de (P) associée à la condition initiale $u_{0,\lambda}(x)$. On va construire une sur-solution de ce problème. Pour cela, on cherche l tel que la solution $p_l(x)$ de (4.24) satisfait :

$$\min_{\mathbb{R}} p_l > \sup_{\mathbb{R}} u_{0,\lambda}. \quad (4.25)$$

Soit $p(x) = p_1(x)$ l'unique solution positive de

$$-D\partial_{xx}p = f(x, p), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.26)$$

D'après la Proposition 4.2.1, $p(x)$ est strictement positive et périodique. Il existe alors $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que :

$$0 < \delta_1 < p(x) < \delta_2 \text{ sur } \mathbb{R}. \quad (4.27)$$

On rappelle que la fonction p_l satisfait :

$$-D\partial_{xx}p_l = \frac{1}{l}f(x, lp_l) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Soit $q(x) = lp_l(x)$, alors q vérifie l'équation suivante :

$$-D\partial_{xx}q = f(x, q).$$

Par l'unicité de la solution stationnaire (Proposition 4.2.1), on déduit que

$$q(x) = p(x),$$

et finalement

$$p_l(x) = \frac{p(x)}{l}.$$

De (4.27) on déduit :

$$\frac{\delta_1}{l} < p_l(x) < \frac{\delta_2}{l}. \quad (4.28)$$

Soit $l_1 < 1$ tel que $\frac{\delta_1}{l_1} > \sup_{\mathbb{R}} u_{0,\lambda}$. Ainsi on peut écrire

$$\min_{\mathbb{R}} p_{l_1} > \sup_{\mathbb{R}} u_{0,\lambda}. \quad (4.29)$$

Dans une première étape on considère $\lambda' \in (0, \lambda)$ tel que $\lambda' < \lambda^*$ et on pose

$$c' = \frac{-k\lambda'}{\lambda'} > c^* = \frac{-k\lambda^*}{\lambda^*}.$$

On considère $U_{c'}^{l_1}(t, x)$, un front d'onde pulsatoire solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t U_{c'}^{l_1} = D\partial_{xx} U_{c'}^{l_1} + g_{l_1}(x, U_{c'}^{l_1}), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \\ \forall z \in \mathbb{Z}, \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, U_{c'}^{l_1}(t + \frac{z}{c'}, x) = U_{c'}^{l_1}(t, x - z), \\ \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0 \leq U_{c'}^{l_1}(t, x) \leq p_{l_1}(x), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} |U_{c'}^{l_1}(t, x) - p_{l_1}(x)| = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} U_{c'}^{l_1}(t, x) = 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

où les limites précédentes sont vérifiées localement en t .

L'existence de cette solution $U_{c'}^{l_1}(t, x)$ découle de [9] et son unicité (à une translation près, voir figure 4.2) est prouvée dans [42].

D'après [39], on sait que le comportement asymptotique de $U_{c'}^{l_1}(t, x)$ est de la forme :

$$U_{c'}^{l_1}(t, x) \sim B e^{-\lambda_{c'}(x - c't)} \psi_{\lambda_{c'}}(x), \text{ quand } x \rightarrow +\infty, \text{ avec } B > 0, t \in \mathbb{R}, \quad (4.31)$$

où $\lambda_{c'}$ est telle que

$$\lambda_{c'} = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } k_\lambda + \lambda c' = 0\}, \quad (4.32)$$

$\psi_{\lambda_{c'}}(x)$ est la fonction propre de l'opérateur $L_{\lambda_{c'}}$ (voir (4.14)) associée à la valeur propre principale $k_{\lambda_{c'}}$.

En utilisant la convexité de l'application $\lambda \mapsto -k_{\lambda}$ (voir [8]) et la définition de λ^* (voir Proposition 4.2.2), l'équation $k_{\lambda} = -\lambda c'$ admet au moins deux racines, $\lambda^- \leq \lambda^* \leq \lambda^+$. En utilisant le fait que $\lambda' < \lambda^*$, on obtient que $\lambda' = \lambda^- = \lambda_{c'}$.

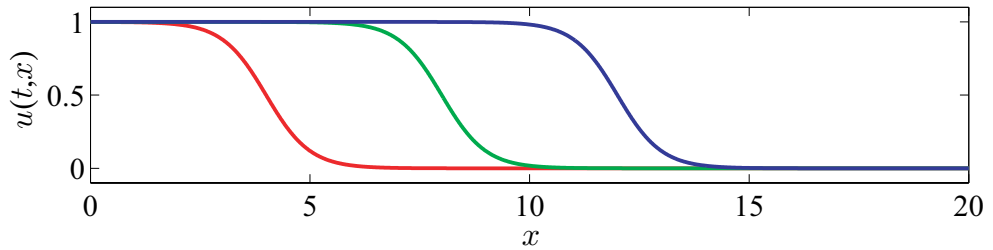


FIGURE 4.2 – Exemple de la propagation d'un front d'onde

De plus, en utilisant le fait que $l_1 < 1$ et que $\frac{f(x, s)}{s}$ est décroissante, on a

$$\frac{f(x, l_1 s)}{l_1 s} > \frac{f(x, s)}{s}.$$

D'où

$$g_{l_1} = \frac{1}{l_1} f(x, l_1 s) > f(x, s) \text{ pour tout } s \geq 0.$$

Finalement $U_{c'}^{l_1}(t, x)$ satisfait

$$\partial_t U_{c'}^{l_1} - D \partial_{xx} U_{c'}^{l_1} = g_{l_1}(x, U_{c'}^{l_1}) > f(x, U_{c'}^{l_1}), x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $U_{c'}^{l_1}(t, x)$ est une sur-solution du problème (P).

4.4.2 Comparaison des conditions initiales

Maintenant on veut prouver que

$$U_{c'}^{l_1}(0, x) \geq u_{0, \lambda}(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

De (4.31), on déduit

$$U_{c'}^{l_1}(0, x) \sim Be^{-\lambda'x}\psi_{\lambda'}(x), \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

En utilisant le fait que $\psi_{\lambda'}(x)$ est continue, 1-périodique, strictement positive sur $[0, 1]$ et $\lambda' < \lambda$, on obtient

$$Be^{-\lambda'x}\psi_{\lambda'}(x) > e^{-\lambda x}, \text{ pour } x \text{ assez grand.} \quad (4.34)$$

Alors, il existe $M > 0$ telle que pour tout $x > M$,

$$U_{c'}^{l_1}(0, x) \geq e^{-\lambda x} = u_{0,\lambda}(x). \quad (4.35)$$

De (4.29) et (4.30), on déduit qu'il existe $m < 0$ tel que

$$\min_{x \leq m} U_{c'}^{l_1}(0, x) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} u_{0,\lambda}(x). \quad (4.36)$$

Il reste à prouver que

$$\min_{x \in [m, M]} U_{c'}^{l_1}(0, x) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} u_{0,\lambda}(x).$$

Soit

$$\delta = \min_{x \in [m, M]} U_{c'}^{l_1}(0, x). \quad (4.37)$$

La fonction $U_{c'}^{l_1}(t, x)$ est la solution d'un problème parabolique à condition initiale positive évaluée pour un temps $t_0 < 0$. Alors d'après le principe du maximum fort, $U_{c'}^{l_1}(0, x) > 0$ et on en déduit que $\delta > 0$.

Soit $L \geq m$ assez grand tel que

$$e^{-\lambda x} < \delta, \text{ pour tout } x > L.$$

Alors $U_{c'}^{l_1}(0, x - L + m)$ vérifie (4.33). En effet :

- Si $x \leq L$, alors $x - L + m \leq m$. De (4.36), il s'ensuit que

$$U_{c'}^{l_1}(0, x - L + m) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} u_{0,\lambda}(x).$$

- Si $x \in (L, L + M - m)$, alors $m \leq x - L + m \leq M$ et, d'après (4.37),

$$U_{c'}^{l_1}(0, x - L + m) > \delta > e^{-\lambda x} = u_{0,\lambda}(x).$$

- Si $x \geq L + M - m$, alors $x - L + m \geq M$
et d'après (4.35),

$$U_{c'}^{l_1}(0, x - L + m) \geq e^{-\lambda(x-L+m)} \geq e^{-\lambda x} e^{+\lambda(L-m)} \geq e^{-\lambda x} = u_{0,\lambda}(x).$$

Alors, quitte à traduire $U_{c'}^{l_1}(0, x)$ vers la droite, on peut supposer que

$$U_{c'}^{l_1}(0, x) > u_{0,\lambda}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le fait que $U_{c'}^{l_1}(0, x) > u_{0,\lambda}(x)$ et $U_{c'}^{l_1}(t, x)$ est une sur-solution de (P), et le principe du maximum, on aboutit à :

$$\text{pour tout } \lambda' \in (0, \min(\lambda, \lambda^*)), U_{c'}^{l_1}(t, x) > u_{\lambda'}(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}. \quad (4.38)$$

4.4.3 Construction d'une sous-solution

Soit λ'' tel que $0 < \lambda < \lambda'' < \lambda^*$, et $c'' = \frac{-k_{\lambda''}}{\lambda''}$. D'après (4.28) on peut choisir $l_2 > 1$ tel que

$$\frac{\delta_2}{l_2} < \liminf_{x \rightarrow -\infty} u_{0,\lambda}(x).$$

On considère $U_{c''}^{l_2}(t, x)$ le front d'onde pulsatoire solution du problème (4.30) (avec l_2 à la place de l_1 et c'' à la place de c').

En utilisant les mêmes arguments que lors de la construction de la sur-solution, et le fait que

$$\max_{\mathbb{R}} p_{l_2} < \frac{\delta_2}{l_2} < \liminf_{x \rightarrow -\infty} u_{0,\lambda}(x),$$

on obtient que $U_{c''}^{l_2}(t, x)$ est une sous-solution du problème (P) satisfaisant

$$U_{c''}^{l_2}(0, x) < u_{0,\lambda}(x)$$

(quitte à traduire $U_{c''}^{l_2}(0, x)$ vers la gauche). Un principe de comparaison implique que

$$\text{pour tout } \lambda'' \in (\lambda, \lambda^*), U_{c''}^{l_2}(t, x) < u_{\lambda''}(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}. \quad (4.39)$$

On obtient alors de (4.38) et (4.39) une sous-solution et une sur-solution du problème (P), on peut écrire

$$U_{c''}^{l_2}(t, x) < u_{\lambda''}(t, x) < U_{c'}^{l_1}(t, x), \text{ pour tout } t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \lambda \in (\lambda', \lambda'').$$

4.4.4 Existence de la vitesse asymptotique de propagation

On complète maintenant la preuve de l'existence et de la caractérisation de la vitesse asymptotique de propagation associée au problème (P) avec des conditions initiales du type (4.10)-(4.11).

- *Premier cas* : si $\lambda < \lambda^*$, on prouve que $w_\lambda = \frac{-k_\lambda}{\lambda}$ vérifie (4.12).

1. Soit $c > w_\lambda = \frac{-k_\lambda}{\lambda}$, on veut prouver que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_\lambda(t, x + ct) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit $\lambda' \in (0, \lambda)$ tel que $\frac{-k_\lambda}{\lambda} < \frac{-k_{\lambda'}}{\lambda'} < c$; l'existence de λ' vient de la continuité de $s \mapsto \frac{k_s}{s}$.

On sait d'après (4.38) que $u_\lambda(t, x + ct) < U_{c'}^{l_1}(t, x + ct)$, avec

$$w_\lambda < c' = \frac{-k_{\lambda'}}{\lambda'} < c.$$

Grâce au fait que $c' < c$ on obtient d'après (4.30)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U_{c'}^{l_1}(t, x + ct) = 0.$$

On conclut que si $c > w_\lambda$ alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_\lambda(t, x + ct) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (4.40)$$

2. Soit $c < w_\lambda = \frac{-k_\lambda}{\lambda}$. On veut prouver que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u_\lambda(t, x + ct) > 0.$$

Soit $\lambda'' \in (\lambda, \lambda^*)$ tel que $c < \frac{-k_{\lambda''}}{\lambda''} < \frac{-k_\lambda}{\lambda}$.

On sait d'après (4.39), que $U_{c''}^{l_2}(t, x + ct) < u_\lambda(t, x + ct)$, avec

$$c < c'' = \frac{-k_{\lambda''}}{\lambda''} < w_\lambda.$$

En utilisant le fait que $c < c''$ on obtient d'après (4.30) que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} U_{c''}^{l_2}(t, x + ct) > 0.$$

On conclut que si $c < w_\lambda$ alors

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u_\lambda(t, x + ct) > 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (4.41)$$

En utilisant (4.40) et (4.41) on obtient que $w_\lambda = \frac{-k_\lambda}{\lambda}$ est la vitesse asymptotique de propagation de u_λ définie au sens de (4.12) quand $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

- *Deuxième cas* : si $\lambda \geq \lambda^*$, on prouve que $w_\lambda = w^*$.

1. Soit $c > w^*$, on considère $\lambda' \in (0, \lambda^*)$ tel que

$$w^* < \frac{-k_{\lambda'}}{\lambda'} = c' < c.$$

D'après (4.38), on sait que

$$0 < u_\lambda(t, x) < U_{c'}^{l_1}(t, x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

D'après (4.3) et en utilisant le fait que $0 < c' < c$, il s'ensuit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_\lambda(t, x + ct) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (4.42)$$

2. Soit $c < w^*$ et $V(t, x)$ la solution de (P) avec condition initiale à support compact telle que $0 \leq V(0, x) < u_{0, \lambda}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le principe de comparaison implique que

$$0 < V(t, x) < u_\lambda(t, x) \text{ pour tout } t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$u_\lambda(t, x + ct) > V(t, x + ct), \text{ pour tout } t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

D'après (4.3), on sait que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} V(t, x + ct) > 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u_\lambda(t, x + ct) > 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (4.43)$$

En utilisant (4.42) et (4.43) on obtient que w^* est la vitesse asymptotique de propagation de u_λ pour tout $\lambda \geq \lambda^*$.

□

4.5 Preuve du Lemme 4.3.3

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi_\lambda : D\psi_\lambda'' - 2\lambda D\psi_\lambda' + r(x)\psi_\lambda = -l_\lambda(r)\psi_\lambda & \text{dans } \mathbb{R}, \\ \psi_\lambda > 0, \\ \psi_\lambda \text{ 1-périodique}, \\ \psi_\lambda(0) = 1, \end{cases} \quad (4.44)$$

où $l_\lambda(r) = k_\lambda(r) + \lambda^2 D$. On définit les fonctions r_λ et h_λ par

$$l_\lambda(r) = -\bar{r} + \frac{r_\lambda}{\lambda^2},$$

et

$$\psi_\lambda(x) = 1 + \frac{f_1(x)}{\lambda} + \frac{h_\lambda(x)}{\lambda^2},$$

où

$$f_1(x) := \frac{1}{2D} \int_0^x (r(s) - \bar{r}) ds.$$

On déduit de (4.44) :

$$\begin{aligned} 0 &= (2Df_1' - r(x) - l_\lambda(r)) + \frac{1}{\lambda}(-Df_1'' + 2Dh_\lambda' - r(x)f_1 - l_\lambda(r)f_1) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2}(-Dh_\lambda'' - r(x)h_\lambda - l_\lambda(r)h_\lambda), \\ &= (-l_\lambda(r) - \bar{r}) + \frac{1}{\lambda}(-Df_1'' + 2Dh_\lambda' - r(x)f_1 + \bar{r}f_1) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2}(-Dh_\lambda'' - r(x)h_\lambda + \bar{r}h_\lambda) - \frac{1}{\lambda^3}r_\lambda f_1 - \frac{1}{\lambda^4}r_\lambda h_\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda}(-Df_1'' + 2Dh_\lambda' - r(x)f_1 + \bar{r}f_1) \\
&+ \frac{1}{\lambda^2}(-Dh_\lambda'' - r(x)h_\lambda + \bar{r}h_\lambda - r_\lambda) - \frac{1}{\lambda^3}r_\lambda f_1 - \frac{1}{\lambda^4}r_\lambda h_\lambda. \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Maintenant on prouve que $a_2 := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} r_\lambda$ et $f_2(x) := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} h_\lambda(x)$ sont bien définies en utilisant le lemme suivant :

Lemme 4.5.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|l_\lambda(r) + \bar{r}| \leq C/\lambda.$$

Preuve. On sait (voir [8] par exemple) que

$$\begin{aligned}
l_\lambda(r) &= \sup\{l \in \mathbb{R}, \exists \psi \in W_{\#}^{2,\infty}(\mathbb{R}), \psi > 0, -\mathcal{L}\psi_\lambda \geq l\psi \text{ p.p. dans } \mathbb{R}\}, \\
&= \inf\{l \in \mathbb{R}, \exists \psi \in W_{\#}^{2,\infty}(\mathbb{R}), \psi > 0, -\mathcal{L}\psi_\lambda \leq l\psi \text{ p.p. dans } \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

On considère $\psi_\lambda(x) = 1 + \frac{f_1(x)}{\lambda}$ comme fonction test. En choisissant λ assez grand tel que $1 + \frac{f_1(x)}{\lambda} > 0$ pour tout x , on obtient presque partout :

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}\psi_\lambda &= -\frac{Df_1''(x)}{\lambda} + \frac{2\lambda Df_1'(x)}{\lambda} - r(x) - \frac{r(x)f_1(x)}{\lambda}, \\
&= -\frac{r'(x)}{2\lambda} + r(x) - \bar{r} - r(x) - \frac{r(x)f_1(x)}{\lambda}, \\
&\geq -\frac{C_0}{\lambda} - \bar{r},
\end{aligned}$$

où C_0 est une constante qui dépend seulement de $\|r\|_\infty$ et $\|r'\|_\infty$. Soit C assez grand tel que

$$C + \frac{Cf_1(x)}{\lambda} + \bar{r}f_1(x) \geq C_0.$$

On déduit de cette inégalité que

$$\left(-\frac{C}{\lambda} - \bar{r}\right)\psi_\lambda \leq -\frac{C_0}{\lambda} - \bar{r} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

D'où $-\mathcal{L}\psi_\lambda \geq \left(-\frac{C}{\lambda} - \bar{r}\right)\psi_\lambda$ sur tout \mathbb{R} et il s'en suit de la définition de $l_\lambda(r)$ que

$$l_\lambda(r) \geq -\frac{C}{\lambda} - \bar{r}.$$

De la même manière, on peut prouver que si C est assez grand,

$$l_\lambda(r) \leq \frac{C}{\lambda} - \bar{r}.$$

□

On définit $\theta_\lambda \in W_{\#}^{2,\infty}(\mathbb{R})$ par

$$\psi_\lambda(x) = 1 + \frac{f_1(x)}{\lambda} + \frac{\theta_\lambda(x)}{\lambda}.$$

On réécrit $-\mathcal{L}\psi_\lambda = l_\lambda(r)\psi_\lambda$ avec ce changement de fonctions, on obtient :

$$-\mathcal{L}\theta_\lambda + \left(\bar{r} - \frac{r_\lambda}{\lambda^2}\right)\theta_\lambda = Df_1''(x) + \left(r(x) - \bar{r} + \frac{r_\lambda}{\lambda^2}\right)f_1(x) + \frac{r_\lambda}{\lambda} =: F_\lambda. \quad (4.46)$$

On déduit du Lemme 4.5.1 que $\left|\frac{r_\lambda}{\lambda}\right| \leq C$ pour tout λ . Alors, $F_\lambda \in L_{\#}^{\infty}(\mathbb{R})$ et il existe deux constantes $\tilde{\lambda} > 0, C_0 > 0$, telles que pour tout $\lambda \geq \tilde{\lambda}$,

$$\|F_\lambda\|_{\infty} \leq C_0.$$

En multipliant (4.46) par θ_λ'' et en intégrant, on obtient, pour tout $\lambda \geq \tilde{\lambda}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\theta_\lambda'')^2 dx &= - \int_0^1 \left(r(x) - \bar{r} + \frac{r_\lambda}{\lambda^2}\right) \theta_\lambda \theta_\lambda'' dx - \int_0^1 F_\lambda \theta_\lambda'' dx, \\ &= \int_0^1 r'(x) \theta_\lambda \theta_\lambda' dx + \int_0^1 \left(r(x) - \bar{r} + \frac{r_\lambda}{\lambda^2}\right) (\theta_\lambda')^2 dx - \int_0^1 F_\lambda \theta_\lambda'' dx, \\ &\leq C_1 (\|\theta_\lambda'\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\theta_\lambda''\|_{L^2(0,1)}), \end{aligned} \quad (4.47)$$

où C_1 est une constante qui dépend seulement de $\|r'\|_{\infty}, \|r\|_{\infty}$; on a utilisé les inégalités

$$\|\theta_\lambda\|_{L^2(0,1)} \leq \|\theta_\lambda\|_{\infty} \leq \|\theta_\lambda'\|_{L^1(0,1)} \leq \|\theta_\lambda'\|_{L^2(0,1)}, \quad (4.48)$$

car $\theta_\lambda(0) = 0$.

On suppose maintenant qu'il existe une suite $(\lambda_n)_n$ telle que $\lambda_n \geq \tilde{\lambda}$ et $\|\theta'_{\lambda_n}\|_{L^2(0,1)} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Soit $\zeta_n := \frac{\theta_{\lambda_n}}{\|\theta'_{\lambda_n}\|_{L^2(0,1)}}$, telle que $\|\zeta'_n\|_{L^2(0,1)} = 1$. En divisant (4.47) par $\|\theta'_{\lambda_n}\|_{L^2(0,1)}^2$, on obtient

$$\int_0^1 (\zeta_n'')^2 dx \leq C_1 \left(1 + \frac{\|\zeta_n''\|_{L^2(0,1)}}{\|\theta'_{\lambda_n}\|_{L^2(0,1)}} \right).$$

D'où, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\theta'_{\lambda_n}\|_{L^2(0,1)} = +\infty$, $(\|\zeta_n''\|_{L^2(0,1)})_n$ est bornée.

D'après (4.48), lorsque $\|\zeta'_n\|_{L^2(0,1)} = 1$ et $\|\zeta_n\|_{L^2(0,1)} \leq 1$ pour tout n , on peut extraire une sous suite, qu'on note encore $(\zeta_n)_n$, qui converge faiblement dans $H^2_{\#}(0,1)$ quand $n \rightarrow +\infty$. D'autre part, l'équation (4.46) donne

$$2\lambda_n \zeta'_n = \zeta_n'' + (r(x) - \bar{r} + \frac{r_{\lambda_n}}{\lambda_n^2}) \zeta_n + \frac{F_{\lambda_n}}{\|\theta'_{\lambda_n}\|_{L^2(0,1)}},$$

alors la suite $(\lambda_n \zeta'_n)_n$ est bornée dans $L^2(0,1)$. On arrive à une contradiction car $\|\zeta'_n\|_{L^2(0,1)} = 1$ pour tout n . On conclut que la famille $(\theta'_\lambda)_{\lambda \geq \tilde{\lambda}}$ est bornée dans $L^2(0,1)$.

On déduit de (4.47) et (4.48) que $(\theta_\lambda)_{\lambda \geq \tilde{\lambda}}$ et $(\theta''_\lambda)_{\lambda \geq \tilde{\lambda}}$ sont bornées dans $L^2(0,1)$, et ainsi (4.46) implique que $(\lambda \theta'_\lambda)_{\lambda \geq \tilde{\lambda}}$ est bornée dans $L^2(0,1)$. Le même raisonnement donne que $(\lambda \theta_\lambda)_{\lambda \geq \tilde{\lambda}}$ est bornée dans $H^2(0,1)$.

En remplaçant dans (4.46), θ_λ par $\frac{h_\lambda}{\lambda}$, on obtient

$$0 = -Df_1'' + 2Dh'_\lambda + (\bar{r} - r)f_1 - \frac{1}{\lambda}(Dh''_\lambda + (r - \bar{r})h_\lambda + r_\lambda) - \frac{r_\lambda f_1}{\lambda^2} - \frac{r_\lambda h_\lambda}{\lambda^3}. \quad (4.49)$$

En intégrant et en remarquant que

$$\int_0^1 (\bar{r} - r(x))f_1 dx = 2D \int_0^1 f_1 f_1' dx = D \int_0^1 (f_1^2)' dx = 0,$$

on obtient

$$0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (r(x) - \bar{r})h_\lambda dx + \frac{r_\lambda}{\lambda} + \frac{r_\lambda}{\lambda^2} \int_0^1 f_1 dx + \frac{r_\lambda}{\lambda^3} \int_0^1 h_\lambda dx,$$

d'où

$$r_\lambda = - \int_0^1 (r(x) - \bar{r}) h_\lambda(x) dx - \frac{r_\lambda}{\lambda} \int_0^1 f_1 dx - \frac{r_\lambda}{\lambda^2} \int_0^1 h_\lambda dx. \quad (4.50)$$

On a montré que r_λ et $\|h_\lambda\|_{H^2(0,1)}$ sont bornées uniformément par rapport à $\lambda \geq \tilde{\lambda}$; alors $\frac{r_\lambda}{\lambda} \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$. En passant à la limite dans (4.49), on déduit que $f_2 := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} h_\lambda$ est bien définie dans $H^1(0,1)$ et que

$$f_2' = \frac{1}{2} \left(f_1'' + \frac{(r(x) - \bar{r})}{D} f_1 \right).$$

Enfin, si $\lambda \rightarrow +\infty$ dans (4.50), on obtient

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} r_\lambda = - \int_0^1 (r(x) - \bar{r}) f_2 dx = a_2.$$

Maintenant, on peut dire que $a_2 := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} r_\lambda$ et $f_2(x) := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} h_\lambda(x)$ sont bien définies.

En passant à la limite dans (4.49) on a :

$$-Df_1'' + 2Df_2' - r(x)f_1 + \bar{r}f_1 = 0, \quad (4.51)$$

et

$$a_2 = \int_0^1 (\bar{r} - r(x)) f_2(x) dx.$$

On pose $M(x) := \int_0^x r(y) dy$. En intégrant par parties on obtient :

$$a_2 = - \int_0^1 (\bar{r}x - M(x)) f_2'(x) dx$$

(le terme de bord disparaît car $M(1) = \int_0^1 r(x) dx = \bar{r}$). On calcule f_2' en

utilisant (4.51) :

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2D} \int_0^1 (M(x) - \bar{r}x)(Df_1'' + (r(x) - \bar{r})f_1)dx, \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 (r(x) - \bar{r})f_1'(x)dx + \frac{1}{4D} \int_0^1 \frac{d}{dx}(M(x) - \bar{r}x)^2 f_1(x)dx, \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 (r(x) - \bar{r})f_1'(x)dx - \frac{1}{4D} \int_0^1 (M(x) - \bar{r}x)^2 f_1'(x)dx, \\
&= -\frac{1}{4D} \int_0^1 (r(x) - \bar{r})^2 dx - \frac{1}{24D^2} \int_0^1 \frac{d}{dx}(M(x) - \bar{r}x)^3 dx, \\
&= -\frac{1}{4D} \int_0^1 (r(x) - \bar{r})^2 dx.
\end{aligned}$$

On conclut par :

$$l_\lambda(r) = -\bar{r} - \frac{1}{4D\lambda^2} \int_0^1 (r(x) - \bar{r})^2 dx + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

d'où la preuve du Lemme 4.3.3 en utilisant le Lemme 4.3.2 et le fait que $l_\lambda(r) = l_\lambda(\tilde{r})$ pour tout $\lambda > 0$. \square

Perspectives

Dans ce mémoire on a établi des résultats de stabilité et d'unicité associés à des équations paraboliques à coefficients périodiques.

- Dans la première partie du mémoire, on a supposé que le coefficient de diffusion est constant. Il serait intéressant de regarder ce qui se passe si ce coefficient est variable et étudier diverses situations selon sa régularité.
- Dans la deuxième partie de ce mémoire nous avons pu établir un résultat d'unicité d'un coefficient pour une équation parabolique posée sur l'espace tout entier. Pour cela nous avons choisi un autre type d'observations que sont les vitesses asymptotiques de propagation. Il est naturel pour nous de continuer dans cette direction et d'essayer d'améliorer nos résultats.
 - Comme première perspective, on va essayer d'élargir l'ensemble admissible des coefficients à reconstruire en s'intéressant à des familles de type polynômes de degrés deux, ou bien élargir l'ensemble \mathcal{M}_1 en supposant que θ est inconnu.
 - Une autre perspective serait d'établir un résultat d'unicité pour la partie linéaire du terme de réaction en dimension supérieure, en considérant une vitesse asymptotique de propagation directionnelle.
- Les problèmes inverses associés à des systèmes d'équations sont des problèmes très délicats. On peut s'intéresser à un système couplé de deux équations de type équation parabolique (EDP) et équation différentielle ordinaire (EDO). Par exemple on peut considérer le système Fitzhugh Nagumo qui peut modéliser des processus d'administration de médicaments. Ce problème est plus compliqué que celui pour lequel on considère deux équations paraboliques à cause de l'absence du coefficient de diffusion dans une équation. On cherche à voir si on peut établir une inégalité de stabilité pour deux coefficients de couplage (un dans

chaque équation), à partir de l'observation d'une seule composante. Dans un deuxième temps on peut s'intéresser à ce système posé sur un domaine non borné mais en considérant des coefficients périodiques et essayer d'utiliser les idées développées dans ce mémoire.

Bibliographie

- [1] H Amann. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered banach space. *Siam Rev*, 18 :620–709, 1976.
- [2] D G Aronson and H G Weinberger. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation. *Partial Differential Equations and Related Topics Lectures Notes in Mathematics*. New York : Springer, 446 :5–49, 1975.
- [3] A Benabdallah, M Cristofol, P Gaitan, and L De Teresa. A new carleman inequality for parabolic systems with a single observation and applications. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris.*, 348(1-2), 2010.
- [4] A Benabdallah, M Cristofol, P Gaitan, and M Yamamoto. Inverse problem for a parabolic system with two components by measurements of one component. *Appl. Anal.*, 88(5) :683–709, 2009.
- [5] H Berestycki and F Hamel. Front propagation in periodic excitable media. *Comm Pure Appl Math.*, 55(8) :949–1032, 2002.
- [6] H Berestycki, F Hamel, and G Nadin. Asymptotic spreading in heterogeneous diffusive excitable media. *J Funct Anal.*, 255(9) :2146–2189, 2008.
- [7] H Berestycki, F Hamel, and N Nadirashvili. The principal eigenvalue of elliptic eigenvalue problems with large drift and applications to nonlinear propagation phenomena. *Comm in Mathematical Physics.*, 253 :451–480, 2005.
- [8] H Berestycki, F Hamel, and L Roques. Analysis of the periodically fragmented environment model : I- species persistence. *J. Math. Biol.*, 51 :75–113, 2005.
- [9] H Berestycki, F Hamel, and L Roques. Analysis of the periodically fragmented environment model : II - biological invasions and pulsating travelling fronts. *J. Math. Pures Appl.*, 84(8) :1101–1146, 2005.

- [10] H Berestycki and G Nadin. Spreading speeds for one-dimensional monostable reaction-diffusion equations. *J. Math. Phys.*, 53(11), 2012.
- [11] M Boulakia, C Grandmont, and A Osses. Some inverse stability results for the bistable reaction–diffusion equation using carleman inequalities. *Partial Differential Equations, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 347 :619–622, 2009.
- [12] A L Bukhgeim and M V Klibanov. Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems. *Soviet Mathematics-Doklady.*, 24 :244–247, 1981.
- [13] J R Cannon. Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5 :275–286, 1968.
- [14] J R Cannon and R E Ewing. Determination of a source term in a linear parabolic partial differential equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics.*, 27 :393–401, 1976.
- [15] R S Cantrell and C Cosner. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley, Chichester, UK, 2003.
- [16] T Carleman. Sur un problème d’unicité pour les systèmes d’équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 2B :1–9, 1939.
- [17] J Choi. Inverse problem for a parabolic equation with space-periodic boundary conditions by a carleman estimate. *Inverse. Ill-posed Problems.*, 11(2) :111–135, 2003.
- [18] M Chouli, E M Ouhabaz, and M Yamamoto. Stable determination of semilinear term in a parabolic equation. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 5 :447–462, 2006.
- [19] M Choulli. *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*. Springer-Verlag, 2009.
- [20] M Cristofol, P Gaitan, and H Ramoul. Inverse problems for a 2×2 reaction-diffusion system using a carleman estimate with one observation. *Inverse Problems.*, 22(5) :1561–1573, 2006.
- [21] M Cristofol, J Garnier, F Hamel, and L Roques. Uniqueness from pointwise observations in a multi-parameter inverse problem. *Comm. Pur. Appl. Anal.*, 11 :1–15, 2011.

- [22] M Cristofol, I Kaddouri, G Nadin, and L Roques. Coefficient determination via asymptotic spreading speeds. *Inverse Problems*, 30 :16, 2014.
- [23] M Cristofol and L Roques. Biological invasions : deriving the regions at risk from partial measurements. *MathBiosci.*, 215(2) :158–166, 2008.
- [24] M Cristofol and L Roques. On the determination of the nonlinearity from localized measurements in a reaction-diffusion equation. *Nonlinearity*, 23 :675–686, 2010.
- [25] M Cristofol and L Roques. An inverse problem involving two coefficients in a nonlinear reaction-diffusion equation. *C. R. Acad. Sci. Paris. I*, 350 :469–473, 2012.
- [26] M Cristofol and L Roques. The inverse problem of determining several coefficients in a nonlinear lotka-volterra system. *Inverse Problems*, 28 :075 007, 2012.
- [27] M Cristofol and L Roques. Stable estimation of two coefficients in a nonlinear fisher kpp equation. *Inverse Problems.*, 29 :095–107, 2013.
- [28] Daisie. *Handbook of alien species in Europe*. Springer, Dordrecht, 2009.
- [29] R Dautray and J L Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, volume 3.
- [30] P Du-Chateau and W Rundell. Unicity in an inverse problem for an unknown reaction term in a reaction-diffusion equation. *J. Differ. Equs.*, 59 :155–164, 1985.
- [31] H Egger, H W Engl, and M V Klibanov. Global uniqueness and hölder stability for recovering a non linear source term in a parabolic equation. *Inverse Problems.*, 21(11) :271–290, 2005.
- [32] J Engländer and R G Pinsky. Uniqueness/nonuniqueness for nonnegative solutions of second-order parabolic equations of the form $u_t = lu + vu - \gamma u^p$ in \mathbb{R}^n . *J. Differential Equation.*, 192 :396–428, 2003.
- [33] L C Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, 1997.
- [34] P C Fife and J McLeod. The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to traveling front solutions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 65 :335–361, 2012.

- [35] R A Fisher. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics.*, 7 :335–369, 1937.
- [36] M Freidlin and J Gärtner. On the propagation of concentration waves in periodic and random media. *Sov. math - Dokl.*, 20 :1282–1286, 1979.
- [37] A V Fursikov and O Imanuvilov. *Controllability of Evolution Equations*. National University, Seoul, 1996.
- [38] D Gilbarg and N S Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, interdisciplinary applied mathematics 3 edition, 1983.
- [39] F Hamel. Qualitative properties of monostable pulsating fronts : exponential decay and monotonicity. *J. Math. Pures Appl.*, 89(23) :355–399, 2008.
- [40] F Hamel, G Nadin, and L Roques. Viscosity solution method for the spreading speed formula in slowly varying media. *Indiana Univ. Math J.*, 60 :1229–1247, 2011.
- [41] F Hamel and L Roques. Fast propagation for kpp equations with slowly decaying initial conditions. *J. Differ. Equs.*, 249 :1726–1745, 2010.
- [42] F Hamel and L Roques. Uniqueness and stability properties of monostable pulsating fronts. *Journal of the European Mathematical Society.*, 13 :345–390, 2011.
- [43] P Hess. *Periodic parabolic boundary value problems and positivity*. Pitman, 1991.
- [44] O Imanuvilov and M Yamamoto. Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations. *Commun. Partial Diff. Eqns.*, 26 :1409–1425, 2001.
- [45] O Y Imanuvilov and M Yamamoto. Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the carleman estimate. *Inverse Problems.*, 14 :1229–1245, 1998.
- [46] V Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer, Berlin, 1998.
- [47] I Kaddouri and D E Teniou. Inverse problem for a parabolic equation with periodic and nonsmooth coefficients. *C. R. Acad. Sci. Paris.I.*, 351 :191–196, 2013.

- [48] T Kato. *Perturbation theory for linear operators*. New York : Springer, 1984.
- [49] A Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, volume 120. Springer-Verlag, New-York, applied mathematical sciences edition, 1996.
- [50] M V Klibanov. Inverse problems and carleman estimates. *Inverse Problems.*, 8(4) :pp 575–596, 1992.
- [51] M V Klibanov. Global uniqueness of a multidimensional inverse problem for a nonlinear parabolic equation by a carleman estimate. *Inverse Problems.*, 20 :1003–1032, 2004.
- [52] A N Kolmogorov, I G Petrovsky, and N S Piskunov. étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Bull. Univ. Etat Moscou, Ser. Int. A*, 1 :1–26, 1937.
- [53] A N Kolmogorov, I G Petrovsky, and N S Piskunov. Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Bull, Univ. Etat Moscou, Sér. Internationale.A.*, 1 :1–26, 1937.
- [54] O A Ladyzenskaja, V A Solonnikov, and N N Ural'ceva. *Linear and Quasi-linear Equations on Parabolic*. American mathematical society, Providence, Rhode Island, 1968.
- [55] M M Lavrent'ev, V G Romanov, and S P Shishat'skii. *Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1986.
- [56] G M Lieberman. *Second Order Parabolic Differential Operators*. World Scientific Publishing, Singapore, 1996.
- [57] A Lorenzi. An inverse problem for a semilinear parabolic equation. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 131 :145–166, 1982.
- [58] J D Murray. *Mathematical Biology*. Third Edition. Interdisciplinary Applied Mathematics 17 (New York : Springer), 2002.
- [59] J Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris, 1967.
- [60] M S Pilant and W Rundell. An inverse problem for a nonlinear parabolic equation. *Commun. Partial Differ. Eqns.*, 11 :1445–1457, 1986.

- [61] R G Pinsky. Second order elliptic operators with periodic coefficients : criticality theory, perturbations, and positive harmonic function. *Journal of functional analysis*, 129 :80–107, 1995.
- [62] A I Prilepko, D G Orlovsky, and I A Vasin. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*. Marcel Dekker Inc, New York, 1999.
- [63] L Roques, F Hamel, J Fayard, B Fady, and E K Klein. Recolonisation by diffusion can generate increasing rates of spread. *Theor. Popul. Biol.*, 77 :205–212, 2010.
- [64] N Shigesada and K Kawasaki. *Biological Invasions : Theory and Practice*. Oxford Series in Ecology and Evolution, 1997.
- [65] N Shigesada, K Kawasaki, and E Teramoto. Traveling periodic waves in heterogeneous environments. *Theor. Popul. Biol.*, 30 :143–160, 1986.
- [66] J G Skellam. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika.*, 38 :196–218, 1951.
- [67] S L Soubeyrand, L Roques, and J Rousselet. A statistical reaction–diffusion approach for analyzing expansion processes. *J. Theor. Biol*, 274 :43–51, 2011.
- [68] T Suzuki and R Muayama. A uniqueness theorem in an identification problem for coefficients of parabolic equations. *Proc. Jpn. Acad. Ser. A*, 56 :259–263, 1980.
- [69] T Tort and T Vancostenoble. Determination of the insolation function in the nonlinear sellers climate model. *Ann. I. H. Poincaré.*, 29 :683–713, 2012.
- [70] P Turchin. *Quantitative Analysis of Movement : Measuring and Modeling Population Re-distribution in Animals and Plants*, volume 13. Sinauer Associate, Sunderland, MA, jul 1998.
- [71] J Vancostenoble. Sharp carleman estimates for singular parabolic equations and application to lipschitz stability in inverse source problems. *C. R. Acad. Sci. Paris.*, 348(1) :801–805, 2010.
- [72] J Vancostenoble. Lipschitz stability in inverse source problems for singular parabolic equation. *Communications in Partial Differential Equation.*, 36(8) :1287–1317, 2011.
- [73] H F Weinberger. On spreading speeds and traveling waves for growth and migration in periodic habitat. *J. Math. Biol.*, 45 :511–548, 2002.

- [74] J Xin. Existence of planar flame fronts in convective-diffusive periodic media. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 121 :205–233, 1992.
- [75] J Xin. Front propagation in heterogeneous media. *SIAM Rev.*, 42 :161–230, 2002.
- [76] M Yamamoto. Carleman estimates for parabolic equations and applications. *Inverse problems*, 25, 2009.
- [77] M Yamamoto and J Zou. Simultaneous reconstruction of the initial temperature and heat radiative coefficient. *Inverse Problems.*, 17(4) :1181–1202, 2001.