Numéro d'ordre 06/2012-E/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour l'obtention du grade de
DOCTORAT D'ETAT
EN: MATHEMATIQUES

Par: **BELLAGH Abdelaziz**

Spécialité: **ALGEBRE ET THEORIE DES NOMBRES**

Sujet:

Récurrences à coefficients polynomiaux; Composition de fractions rationnelles

Soutenu publiquement le 16-07-2012 devant le jury composé de:

Mr Mohamed ZITOUNI	Professeur à l'USTHB	Président
Mr Benali BENZAGHOU	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
Mr Jean-Paul BEZIVIN	Professeur à Caen	Codirecteur de thèse
Mr Abdelbaki BOUTABAA	Maître de conférence HDR à Clermont-Ferrand	Examinateur
Mr Kamel BETINA	Professeur à l'USTHB	Examinateur
Mr Med Salem REZAOUI	Maître de conférence A à l'USTHB	Examinateur

Récurrences à coefficients polynomiaux ; Composition de fractions rationnelles .

Par.

Bellagh Abdelaziz.

Remerciements :

J'exprime ma gratitude à mon promoteur Benzaghou Benali pour toute l'aide qu'il m'a apporté dans mon travail.
Je remercie chaleureusement Jean Paul Bézivin, qui a été très généreux en me consacrant du temps et en me prodiguant ses nombreux conseils et suggestions sans lesquels ce travail n'aurait pas vu le jour.
Je remercie également Boutabaa Abdelbaki qui a lu mon travail et suggéré des améliorations.
Je remercie enfin Les professeurs Zitouni et Betina et Rézaoui qui ont bien voulu faire parti du Jury.

Résumé :

La première partie de notre travail est consacrée aux suites récurrentes linéaires.
On considère un sous-groupe G du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$, et $d \geq 1$. On note G_d l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivant $w_1 + \cdots + w_d$ avec $w_j \in G$ pour tout j. On considère u_n et v_n deux suites de nombres complexes vérifiant des relations de récurrence à coefficients polynômes en la variable n (suites holonomes), avec $v_n \neq 0$ pour n assez grand, et nous nous intéressons au problème suivant :

Soit $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, on suppose que pour un entier $d \geq 1$, a_n appartient à G_d où G est sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$. A-t-on que la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{C}$? Nous prouvons que dans quelques cas particuliers, la réponse est affirmative.
Cette partie a fait l'objet d'une publication (voir [**2**]).

La seconde partie de notre travail est consacré à l'itération d'un semi-groupe de fractions rationnelle à coefficients p-adiques. On y introduit (comme l'ont fait Hinkkanen Stankewitz et Boyd dans le cas complexe) les ensembles de Fatou et de Julia d'un semi-groupe de fractions rationnelle à coefficients p-adiques (qui généralisent les ensembles de Fatou et de Julia du cas classique d'une seule fractions rationnelle à coefficients p-adiques), et on montre qu'ils ont des propriétés analogues à celles des ensembles de Fatou et de Julia d'un semi-groupe de fractions rationnelle à coefficients complexes.
Cette partie a fait l'objet d'une publication (voir [**4**]).

PARTIE I

SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

Résumé de la première partie :

Dans la première partie de notre travail, on s'intéresse aux suites récurrentes linéaires.

Dans le premier chapitre on considère les suites qui sont récurrentes linéaires modulo p pour tout nombre premier p, et qui sont majorées (en module) par une progression géométrique de raison inférieur à e. On donne des conditions pour que ces suites soient récurrentes linéaires à coefficients constants.

Dans le second chapitre on montre que si une suite récurrente linéaire à coefficients polynômes ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est périodique. Puis on donne une majoration de la période.

Dans le troisième chapitre on s'intéresse au quotient de deux suites récurrentes linéaires à coefficients polynômes. On montre que si ce quotient ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors il est périodique à partir d'un certain rang. Puis on donne des conditions pour que le quotient d'une suite récurrente linéaire à coefficients polynômes par une suite algébrique soit une suite récurrente linéaire à coefficients polynômes.

Enfin dans le dernier chapitre, on considère un sous-groupe G du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$, et un entier $d \geq 1$. On note G_d l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivant sous la forme $w_1 + \cdots + w_d$ avec $w_j \in G$ pour tout j. On considère u_n et v_n deux suites de nombres complexes vérifiant des relations de récurrence à coefficients polynômes en la variable n (suites holonomes), avec $v_n \neq 0$ pour n assez grand, et nous nous intéressons au problème suivant :

Soit $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, on suppose que pour un entier $d \geq 1$, a_n appartient à G_d où G est sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$. A-t-on que la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{C}$? Nous prouvons que dans quelques cas particuliers, la réponse est affirmative.

CHAPITRE 1

SUITES RÉCURRENTES MODULO p

1.1. Introduction

Donnons d'abord quelques définitions, notations et rappels.

1) Soit A un anneau commutatif de caractéristique zéro, on note $S(A)$ l'ensemble des suites d'éléments de A, et on note $R(A)$ l'ensemble des suites d'éléments de A vérifiant pour tout entier n assez grand une relation de la forme : $\sum_{0}^{r} d_i a_{n+i} = 0$, où $r \in \mathbb{N}^*$, et $d_0, \ldots, d_r \in A$, et $d_r \neq 0$. Les éléments de $R(A)$ sont appelés suites récurrentes linéaires à coefficients constants dans A. L'entier r est dit ordre de la relation de récurrence vérifié par la suite a_n. Si A est un corps, on peut supposer que $d_r = 1$; le polynôme $P(X) = X^r - \sum_{0}^{r-1} d_i X^i$ est alors dit polynôme caractéristique de la suite a_n.

Définition 1.1.1. — Soit a_n une suite d'éléments d'un corps L commutatif de caractéristique zéro et n un entier naturel, on note $K_n(a)$ le déterminant de la matrice $M = (\xi_{i,j})$ de type $(n+1, n+1)$ où $\xi_{i,j} = a_{i+j-2}$ et $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$. $K_n(a)$ est dit déterminant de Kronecker d'ordre n de la suite a_n.

Le théorème suivant est dû à Kronecker [**1**].

Théorème 1.1.2. — *Soit a_n une suite d'éléments d'un corps commutatif L. La suite a_n est dans $R(L)$ si et seulement si $K_n(a)$ est nul à partir d'un certain rang.*

On a aussi le résultat classique suivant :

Théorème 1.1.3. — *Soit a_n une suite récurrente linéaire à coefficients dans un corps commutatif K de caractéristique zéro. On suppose que $P(X) = \prod_{i=1}^{s}(X-\theta_i)^{m_i}$ est la décomposition du polynôme caractéristique de la suite a_n dans une clôture algébrique de K. Alors il existe des polynômes $P_1, \dots, P_s$ vérifiant $d^o(P_i) \leq m_i - 1$ et $P_i(X) \in K[\theta_1, \dots, \theta_s][X]$ pour $i = 1, \dots, s$, et tels que $a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\theta_i^n$ (à partir d'un certain rang).*

Démonstration. — Voir par exemple [**3**]. □

2) Soit A un anneau commutatif de caractéristique zéro, on note $J(A)$ l'ensemble des suites d'éléments de A vérifiant pour tout entier n assez grand une relation de la forme : $\sum_{0}^{r} P_i(n)a_{n+i} = 0$, où $r \in \mathbb{N}^*$, et $P_0, \dots, P_r \in A[X]$, et sont non tous nuls.
Les éléments de $J(A)$ sont appelés suites récurrentes linéaires à coefficients polynômes dans $A[X]$. L'entier r est dit ordre de la relation de récurrence vérifié par la suite a_n. Si a est un élément de $J(A)$ vérifiant une relation de récurrence du type précédent avec $P_r = 1$, on dit que la suite a_n est récurrente linéaire unitaire à coefficients polynômes dans $A[X]$, et on note $J_u(A)$ l'ensemble de ces suites.

3) Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro, on note $Al(K)$ l'ensemble des suites algébriques sur K, c'est à dire des suites a_n d'éléments de K dont la série génératrice $f(X) = \sum a_n X^n$ vérifie une relation de la forme :

$$f^k(X) + P_{k-1}(X)f^{k-1}(X) + \cdots + P_1(X)f(X) + P_0(X) = 0.$$

où $P_i(X) \in K(X)$ pour $i = 1, \dots, k-1$.
Le résultat suivant est dû à Eisenstein [**10**] :

Théorème 1.1.4. — *Soient K un corps de nombres A son anneau d'entiers, et $a \in Al(K)$ alors il existe un entier naturel non nul d tel que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on ait : $d^{n+1}a_n \in A$.*

4) Soit p est un nombre premier, on note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des entiers p-adiques et v_p la valuation p-adique.
Si a_n est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$, qui appartiennent à $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ pour p premier assez grand, on dit que la suite a_n est récurrente linéaire modulo p, et qu'elle satisfait une relation de récurrence linéaire modulo p d'ordre r_p s'il existe des éléments $\alpha_{i,p} \in \mathbb{Z}$ pour $i = 0, \dots, r_p$ tels que $\alpha_{0,p}\alpha_{r_p,p}$ soit non multiple de p

et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand on ait la congruence :

$$\sum_{0}^{r_p} \alpha_{i,p} a_{n+i} \equiv 0[p]$$

Dans le cas particulier où a_n vérifie une relation de la forme :
$a(n + r_p) \equiv a(n)[p]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on dit que la suite a_n est périodique modulo p de période r_p.
Dans leurs articles I.Z.Rusza [**29**], R.R.Hall [**15**], et A.Perelli-U.Zannier [**24**] montrent indépendamment le résultat suivant :
Si $f(n)$ est une suite d'entiers satisfaisant pour tout entier naturel n, et pour tout nombre premier p assez grand la relation $f(n+p) \equiv f(n)[p]$, est telle que $f(n) = O((e-1)^{\alpha n})$ avec $0 < \alpha < 1$, alors il existe un polynôme P tel que $f(n) = P(n)$ à partir d'un certain rang. Dans un autre article [**25**] A.Perelli et U.Zannier montrent les résultats suivants :

Théorème 1.1.5. — *Soit f une suite d'entiers de la forme $f(n) = ba^n + O(n^B)$ où a, b, B sont des réels positifs, et $a > 1$. On suppose que pour tout premier $p > p_0$, f satisfait une relation de récurrence linéaire modulo p d'ordre $r_p = O(p^k)$ pour un certain naturel non nul k. Alors f est une suite récurrente linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{Z}$. De plus b est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et, pour $b \neq 0$, a est un entier algébrique et on a $f(n) = \sum_i b_i a_i^n + \sum_j P_j(n) s_j^n$, où les b_i et a_i sont les conjugués de b et a, et les P_j sont des polynômes de degrés inférieur à B et les s_j des racines de l'unité. On a aussi $|a_i| \leq 1$ pour $i \neq 1$.*

Théorème 1.1.6. — *Soit a_n une suite d'entiers qui satisfait pour tout nombre premier p et tout entier naturel n la congruence $a_{n+p} \equiv a_n[p]$, et l'inégalité $|a_n| \leq \delta^n$ où δ est un réel positif.*
1) Si on a $\delta < \exp(x_0) = 1,968628...$ où x_0 est la plus petite racine entre $1/2$ et 1 de l'équation : $4(\gamma+2)x^3 + 4(2\gamma+5)x^2 - (3\gamma-2)x - 9(\gamma+1) = 0$ (où $\gamma = x(1-\log(e^x-1))^{-1}$), alors alors il existe un polynôme P tel que $a_n = P(n)$ à partir d'un certain rang.
2) Si on a $\delta < e$, alors la suite a_n satisfait une relation de récurrente linéaire à coefficients polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$.

Dans ce chapitre, on se propose de donner des résultats analogues aux précédents. On considère une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$, qui appartiennent à $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ pour p premier assez grand, dont la valeur absolue est majorée par une progression géométrique de raison inférieure à $\exp(1/(2k))$ (où k est un entier naturel non nul), et qui satisfait une relation de récurrence linéaires modulo p pour tout p premier assez grand, d'ordre inférieur à kp, et on montre qu'elle est récurrente linéaire à coefficients constants. Puis on montre que les suites récurrentes linéaires unitaires à coefficients polynômes sont récurrentes linéaires

modulo p pour tout premier p. Dans le cas particulier où ces suites sont périodiques modulo p de période $p-1$, on montre qu'elles sont des combinaisons linéaires de puissances n-ièmes d'éléments algébriques sur $\mathbb{Q}$.

1.2. Énoncés des résultats

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1.2.1. — *Soit a_n une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$. On suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n X^n$ est non nul et que :*

1. *Il existe un entier naturel non nul d tel que $d^{n+1}a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout entier naturel n (ce qui implique qu'il existe un nombre premier p_0 tel que $p \geq p_0$ entraîne que $a_n \in \mathbb{Z}_p$ pour tout entier naturel n).*
2. *Il existe un entier naturel non nul k tel que pour tout premier p supérieur à p_0, la suite a_n satisfait une relation de récurrence linéaire modulo p d'ordre $r_p \leq kp$.*
3. *On a $d < R\exp[1/(2k)]$.*

Alors la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{Q}$.

Remarque 1.2.2. — 1. La condition 1 du théorème 1.2.1 est satisfaite pour les suites algébriques d'après le théorème 1.1.4 [**10**].

2. La condition 2 du théorème 1.2.1 n'est pas toujours satisfaite si a_n est algébrique ; par exemple la suite a_n dont la série génératrice $f(X) = \sum a_n X^n \in \mathbb{Q}[X]$ vérifie $f(X)^3 - f(X) + X = 0$ et $f(0) = 0$, est telle que $a_n = \binom{3k+1}{2k+1} - 3\binom{3k}{2k+1} \in \mathbb{Z}$; et si la suite a_n était récurrente linéaires modulo p on aurait $\overline{f} \pmod p$ qui serait dans $\mathbb{F}_p(X)$, et comme $\mathbb{F}_p[X]$ est un anneau factoriel de corps des fractions $\mathbb{F}_p(X)$, cela entraîne que $\overline{f} \pmod p$ serait dans $\mathbb{F}_p[X]$, ce qui est faux.
3. Les conditions 1 et 2 du théorème 1.2.1 sont nécessaires pour avoir $a \in R(\mathbb{Q})$ par contre la condition 3 n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple de la suite $a_n = 5^n$.
4. Si $T(X) \in \mathbb{Z}[X]$, la suite $a_n = T(n)$ satisfait les hypothèses du théorème 1.2.1.

Le théorème 1.2.1 nous permet de déduire les corollaires suivants :

Corollaire 1.2.3. — *Soit a_n une suite récurrente linéaire unitaire d'ordre k à coefficients polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$, on suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n X^n$ est non nul et que :*

1. *Il existe un entier naturel non nul d tel que $d^{n+1}a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout entier naturel n.*
2. *On a $d < R\exp[1/(2k)]$.*

Alors la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{Q}$.

Corollaire 1.2.4. — *Soit a_n une suite d'entiers qui vérifie une relation de récurrence linéaire unitaire à coefficients polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$. On suppose que pour tout entier naturel n et tout nombre premier p on a $a_{n+p-1} \equiv a_n[p]$ et $|a_n| \leq c\delta^n$ où δ est un réel positif inférieur à $\exp(1/2)$, et c un réel positif. Alors il existe un entier positif r et des nombres $b_1, \ldots, b_r$ et $\omega_1, \ldots, \omega_r$ qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, et tels que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$a_n = \sum_{i=1,..,r} b_i \omega_i^n$$

On va procéder comme suit, dans le prochain paragraphe on donne des résultats préliminaires qui seront utiles dans la suite, et dans le paragraphe suivant on fera la démonstration des résultats.

1.3. Résultats préliminaires

Montrons maintenant deux lemmes techniques qui nous serviront dans la suite.

Lemme 1.3.1. — *Soient a_n une suite de nombres complexes et c_1, β deux réels positifs tels que $|a_n| \leq \beta c_1^n$ pour tout entier naturel n. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$|K_n(a)| \leq (n+1)!\beta^{n+1}c_1^{n(n+1)}$$

Démonstration. — En effet on a :

$$K_n(a) = \det(\xi_{i,j}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \epsilon(\sigma) \prod_1^{n+1} (\xi_{i,\sigma(i)})$$

Par suite on a :

$$|K_n(a)| \leq \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} \beta c_1^{i+\sigma(i)-2} \leq (n+1)!\beta^{n+1}c_1^{\lambda_n}$$

(où $\lambda_n = \sum_{i=1}^{n+1} i + \sigma(i) - 2 = n(n+1)$). Et on en déduit le résultat. □

Lemme 1.3.2. — *Sous les conditions du théorème 1.2.1 on a pour tout n assez grand et tout $p \geq p_0$:*

$$\prod_{r_p \leq n} p^{n-r_p} \geq \exp\left[\frac{1}{2k} n^2 (1 + o(1))\right]$$

Démonstration. — En effet on a pour $p \geq p_0$

$$\prod_{r_p \leq n} p^{n-r_p} \geq \exp\left[n\left(\sum_{p_0 \leq p \leq (n/k)} \log p\right) - k\left(\sum_{p_0 \leq p \leq (n/k)} p \log p\right)\right]$$

Posons $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$, on sait (voir par exemple [**23**]) que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$$

Compte tenu de la formule sommatoire d'Abel (voir par exemple [**23**]), pour x et γ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et x tendant vers l'infini on a :

$$\sum_{p_0 < p \leq x} p^\gamma \log p = \left[[u^\gamma \theta(u)]_{p_0}^x - \int_{p_0}^x \theta(u) \gamma u^{\gamma-1} \mathrm{du}\right]$$

Comme $\int_{p_0}^x \theta(u) \gamma u^{\gamma-1} \mathrm{du} \sim \int_{p_0}^x \gamma u^\gamma \mathrm{du}$ (voir par exemple [**13**] page 93 proposition 10.2.i), on en déduit que $\sum_{p_0 \leq p \leq x} p^\gamma \log p \sim x^{\gamma+1}(\gamma+1)^{-1}$, et le lemme en résulte. □

Lemme 1.3.3. — *Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro, P un polynôme à coefficients dans K, m un entier naturel non nuls, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des éléments non tous nuls de K, tels que $\sum_{k=0}^m \alpha_k P(X-k) = 0$, alors le degré du polynôme P est strictement inférieur à m.*

Démonstration. — Supposons que le polynôme P est non constant de degré $d \geq 1$, alors les $P^{(j)}(X)$ (dérivée d'ordre j de P) pour $j = 0, \ldots, d$, forment une base de l'espace vectoriel $K_d[X]$ des polynômes de degrés plus petits que d à coefficients dans K. Et la formule de Taylor montre alors que pour k fixé dans $\mathbb{Z}$, les coordonnées de $Q(X) = \sum_{k=0}^m \alpha_k P(X-k)$ dans la base précédente sont $\frac{(-1)^j}{j!} \sum_{k=0}^m \alpha_k k^j$ où $j = 0, \ldots, d$.

Donc $Q = 0$ équivaut à dire que $\sum_{k=0}^m \alpha_k k^j = 0$ pour $j = 0, \ldots, d$. Par suite

si $d \geq m-1$, le système précédent restreint aux valeurs de j qui sont entre 0 et $m-1$ serait un système de Van der Monde homogène pour les inconnues α_k, qui seraient donc toutes nulles contrairement à l'hypothèse faite, et ceci démontre l'assertion. □

Remarque 1.3.4. — Si $m = 1$ on peut aussi montrer le lemme en remarquant qu'on a $\alpha_0\alpha_1 \neq 0$ (vu que $\alpha_1 \neq 0$ et que $d^oP \geq m = 1$), et donc pour toute racine γ de P, la relation $\alpha_0 P(X) + \alpha_1 P(X-1) = 0$ entraîne que $\gamma - 1$ est aussi une racine de P, et par suite $\gamma - n$ est une racine de P pour tout entier n, ce qui est absurde.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant est dû à Cassels [**11**] :

Théorème 1.3.5. — *Soit K un corps commutatif de type fini sur $\mathbb{Q}$, et C une partie non vide et finie d'éléments non nuls de K. Il existe un ensemble infini E de nombres premiers, pour lesquels il existe un plongement η de K dans $\mathbb{Q}_p$ tel que l'on ait : $|\eta(c)|_p = 1$, pour tout c de C.*

1.4. Démonstration des résultats :

1.4.1. Preuve du théorème 1.2.1. —

Démonstration. — Si le rayon de convergence R de la série $\sum a_n z^n$ est infini alors le rayon de convergence de la série $\sum d^{n+1} a_n z^n$ est aussi infini. Comme $d^{n+1}a_n$ est dans $\mathbb{Z}$ on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ est un polynôme et donc que la suite a_n est dans $R(\mathbb{C})$. On suppose donc désormais que R est fini.
On va d'abord considérer le cas où $d = 1$. Dans ce cas on a que $a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, et il en résulte que $|K_n(a)| \in \mathbb{N}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Soit p un nombre premier et $n \geq r_p$. Comme la suite a_n satisfait une relation de récurrence linéaire modulo p d'ordre r_p, les $n - r_p$ dernières colonnes sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ des r_p premières colonnes. Par suite, on peut par combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des r_p premières colonnes faire apparaître le facteur p sur chacunes des $n - r_p$ dernières colonnes. Si $K_n(a)$ est non nul, on a donc :

$$\prod_{r_p \leq n} p^{n-r_p} \leq |K_n(a)|$$

Comme on a par hypothèse que $R^{-1} < \exp(\frac{1}{2k})$, on choisit un réel c_1 tel que $R^{-1} < c_1 < \exp(\frac{1}{2k})$, et alors il existe un réel positif β tel que l'on ait :

$$|a_n| \leq \beta c_1^n$$

pour tout entier naturel n. Il en résulte que pour $p \geq p_0$ on a :

$$\exp\left(\frac{1}{2k}n^2(1+o(1))\right) \leq \prod_{r_p\leq n} p^{n-r_p} \leq |K_n(a)| \leq (n+1)!\beta^{n+1}c_1^{n(n+1)}$$

Cependant par notre choix de c_1, l'inégalité :
$\exp\left(\frac{1}{2k}n^2(1+o(1))\right) \leq (n+1)!\beta^{n+1}c_1^{n(n+1)}$ est fausse pour n assez grand. Donc on a $K_n(a)=0$ à partir d'un certain rang et le théorème de Kronecker 1.1.2 entraîne que la suite a_n est dans $R(\mathbb{Q})$.

Montrons alors que le cas général se ramène au cas $d=1$.

Soit a_n une suite vérifiant les hypothèses du théorème 1.2.1, posons $b_n = d^{n+1}a_n$ alors b_n est une suite d'entiers et pour $p \geq p_0$ elle satisfait une relation de récurrence linéaire modulo p de même ordre que la suite a_n, de plus le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$ est $\dfrac{R}{d}$.

(on peut aussi vérifier que l'on a : $K_n(b) = d^{(n+1)^2}K_n(a)$).

Comme par hypothèse on a :

$$1 < \left(\frac{R}{d}\right)\exp[1/(2k)]$$

En appliquant la première partie de la preuve à la suite b_n on trouve que : $b \in R(\mathbb{C})$ et donc on en déduit que $a \in R(\mathbb{C})$ et par suite le théorème 1.2.1. □

1.4.2. Preuve du corollaire 1.2.3. — Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.4.1. — *Soit a_n une suite de nombres rationnels, qui satisfait une relation de récurrence linéaire unitaire à coefficients polynômes appartenant à $\mathbb{Q}[X]$, d'ordre k. Soit p un nombre premier tel que les coefficients des polynômes apparaissant dans la relation de récurrence soient dans $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_p$, et tel que $a_n \in \mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_p$ pour tout entier naturel n. Alors a_n satisfait une relation de récurrence linéaire modulo p d'ordre $r_p \leq kp$.*

Démonstration. — Pour $n \in \mathbb{N}$ posons :

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -P_0(n) & -P_1(n) & \cdots & \cdots & -P_{k-1}(n) \end{pmatrix}$$

$W(n) = {}^t(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$ (c'est à dire la transposée de la matrice ligne), et pour p premier $B(n) = A(n+p-1)\cdots A(n+1)A(n)$, notons $Q_n(X)$

le polynôme caractéristique de la matrice $B(n)$ et pour $r = 0, \dots, p-1$, et m entier naturel posons $U_m = W(mp+r)$. On a alors $W(n+1) = A(n)W(n)$ et $W(n+p) = B(n)W(n)$.

Comme les polynômes P_i sont à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ on a $A(n+p) \equiv A(n)[p]$, $B(mp+r) \equiv B(r)[p]$, et $U_{m+1} \equiv B(r)U_m[p]$ pour tout n, p, r et m.

Et comme $Q_r(B(r))U_m \equiv 0[p]$, on en déduit que la suite a_{mp+r} est récurrente linéaire modulo p de polynôme caractéristique $Q_r(X)$.

Utilisons alors le résultat classique suivant : Soient C et D deux matrices à coefficients dans un corps commutatif infini K, alors les matrices CD et DC ont le même polynôme caractéristique.

Prenons $C = A(r)$ et $D = A(r+p-1)\cdots A(r+2)A(r+1)$, on a alors :

$B(r+1) = A(r+p)A(r+p-1)\cdots A(r+1) \equiv CD[p]$ et $B(r) = DC$.

Par suite on a $Q_{r+1} = Q_r$ modulo p. Notons Q le polynôme caractéristique commun des matrices $B(r)$ et Q^* le polynôme réciproque de Q (modulo p).

Le polynôme Q est de degré k et $f_r(X) = \sum a_{mp+r}X^n \equiv \dfrac{T_r(X)}{Q^*(X)}[p]$

(où T_r est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$), finalement on a :

$$f(X) = \sum a_n X^n = \sum_0^{p-1} X^r \sum_{m\geq 0} a_{mp+r}X^{mp} \equiv \sum_0^{p-1} \frac{X^r T_r(X^p)}{Q^*(X^p)} = \sum_0^{p-1} \frac{X^r T_r(X^p)}{Q^*(X^p)}$$

Comme la série $f(X)$ est une fraction rationnelle, il en résulte que la suite a_n est récurrente linéaire modulo p. D'autre part le degré de Q^* est au plus k puisque Q est de degré k. On en déduit donc que la suite a_n satisfait une relation de récurrence linéaire modulo p d'ordre $r_p \leq kp$. □

Le corollaire 1.2.3 est alors une conséquence du théorème 1.2.1 et du lemme 1.4.1.

Remarque 1.4.2. — 1) Si le polynôme P_0 n'a pas de racine modulo p dans $\mathbb{Z}$ (par exemple si $P_0 = 1$), alors le degré de Q^* est k, car on a alors que

$$Q(0) = \det B(r) = \prod_{i=p-1}^{0} \det A(r+i) = \prod_{i=p-1}^{0} P_0(r+i).$$

2) La condition unitaire du lemme 1.4.1 est nécessaire, car on a vu remarque 1.2.2 que la suite a_n dont la série génératrice $f(X) = \sum a_n X^n \in \mathbb{Q}[X]$ et vérifie : $f(X)^3 - f(X) + X = 0$ et $f(0) = 0$, n'est pas récurrente linéaires modulo p.

1.4.3. Preuve du corollaire 1.2.4. — Le corollaire est une conséquence du lemme suivant pour $m = 1$:

Lemme 1.4.3. — *Soit a un élément de $J_u(\mathbb{Z})$ vérifiant pour tout entier naturel n et tout nombre premier p assez grands une relation de la forme*

$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{n+k(p-1)} \equiv 0[p]$ *(où* $m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z}$*), et l'inégalité* $|a_n| \leq c\delta^n$ *(où* δ *est un nombre réel positif inférieur à* $\exp(1/(2m))$*, et* c *un nombre réel positif). Alors on a à partir d'un certain rang* $a_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\omega_i^n$ *(où* $r \in \mathbb{N}^*$*, et* $\omega_1, \ldots, \omega_r$ *algébriques sur* $\mathbb{Q}$ *(et distincts),* $P_1, \ldots, P_r$ *sont des polynômes de degrés strictement inférieur à* m *à coefficients dans le corps* $K = \mathbb{Q}[\omega_1, \ldots, \omega_r]$*).*

Démonstration. — En effet d'après le théorème 1.2.1 a_n est une suite récurrente linéaire à coefficients constants, et donc le théorème 1.1.3 entraîne que l'on a à partir d'un certain rang $a_n = \sum_{1}^{r} P_i(n)\omega_i^n$ où les ω_i sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ et $P_i \in K[X]$ où $K = \mathbb{Q}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r]$. Il suffit donc de voir que pour $i = 1, \ldots, r$, on a $d^o P_i \leq m$.

Pour $i = 1, \ldots, r$ posons $D_i(X) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_k P_i(X - k)$, et appliquons le théorème de Cassels en prenant pour C la partie de K dont les éléments sont les ω_i, les coefficients non nuls des polynômes P_i, les coefficients dominants des polynômes D_i non nuls (où $i = 1, \ldots, r$), ainsi que $\varphi = \prod_{i>j}(\omega_i - \omega_j)$. Alors quitte à enlever de E un ensemble fini de nombres premiers on peut supposer que pour tout $p \in E$ on a :

$p \geq \max\{\deg D_i \ / \ D_i \neq 0\}$, et $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{n+k(p-1)} \equiv 0[p]$ pour n assez grand.

Fixons p dans E, alors pour tout n assez grand, en identifiant K à une partie de $\mathbb{Q}_p$ grâce à l'homomorphisme η du théorème de Cassels on a $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{n+k(p-1)} \equiv \sum_{1}^{r} D_i(n)\omega_i^n \equiv 0[p]$, (puisque $|\omega_i| = 1$ entraîne que $\omega_i^{p-1} \equiv 1[p]$ pour $i = 1, \ldots, r$).

Par suite pour $n = m + lp$ où $m, l \in \mathbb{N}$ (avec m assez grand) on a :

$$\sum_{1}^{r} D_i(m)\omega_i^{m+l} \equiv 0[p]$$

Fixons m et prenons $l = 0, \ldots, r-1$. Cela donne dans $\mathbb{F}_p$ un système d'équations en $D_i(m)$, $i = 1, \ldots, r$ de déterminant $\Delta = \det\left(\omega_i^{m+l}\right)$, et le calcul donne :

$$\Delta = \left(\prod_i \omega_i^m\right)\left(\prod_{i>j}(\omega_i - \omega_j)\right)$$

Par suite on a $\Delta \not\equiv 0[p]$, car les ω_i et $\prod_{i>j}(\omega_i - \omega_j)$ sont des unités p-adiques de $\mathbb{Q}_p$. Par conséquent on a $D_i(m) \equiv 0[p]$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ (et $m \in \mathbb{N}$ assez grand), et donc on a $D_i(X) \equiv 0[p]$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ (polynôme ayant plus de racine que son degré). Et comme pour tout $i = 1, \ldots, r$ le coefficient dominant de $D_i(X)$ est une unité p-adique de $\mathbb{Q}_p$, on en déduit que l'on a $D_i(X) = 0$. Enfin compte tenu du lemme 1.3.3 on déduit que pour $i = 1, \ldots, r$ on a $d^o P_i \leq m$. □

CHAPITRE 2

PÉRIODICITÉ DES SUITES RÉCURRENTES

2.1. Introduction et énoncés des résultats

Dans leurs articles, Van der poorten et Shparlinsky [**35**], et Jean Paul.Bézivin [**9**], montrent que les suites de rationnels vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$, et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs sont périodiques, et ils donnent une majoration de la période de ces suites.
Dans ce chapitre, on considère une suite A_h d'éléments d'un corps de caractéristique zéro K. On suppose que la suite A_h ne prend un nombre fini de valeurs, et vérifie une relation de la forme :

$$S_n(h)\,A_{h+n} = S_{n-1}(h)A_{h+n-1} + \cdots + S_1(h)A_{h+1} + S_0(h)A_h \tag{1}$$

pour tout h dans $\mathbb{N}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $S_i(X) \in K[X]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, et les polynômes S_0, et S_n n'ont pas de racines dans $\mathbb{N}$. On montre alors le résultat suivant :

Théorème 2.1.1. — *Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro, A_h une suite d'éléments de K vérifiant une relation de la forme (1), et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs alors A_h est purement périodique, et sa période minimale τ vérifie $\tau \leq \exp\sqrt{6qn\log qn}$. (où q est un entier naturel ne dépendant que de $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, et des coefficients des polynôme S_j, avec $j = 0, \ldots, n$).*

2.2. Résultats préliminaires

Nous aurons besoin du théorème suivant de Berstel Mignotte [**5**] :

Théorème 2.2.1. — *Si P est un polynôme non nul de degré d, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ alors le plus petit commun multiple λ_P des périodes des racines de l'unité qui sont zéro de P, satisfait : $\lambda_P \leq \exp(\sqrt{6d\log d})$.*

Nous utiliserons aussi le théorème classique suivant d'analyse complexe :

Théorème 2.2.2. — *Soit $f(X) = \sum A_h X^h$ une série à coefficients dans $\mathbb{C}$, vérifiant une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes, si les A_h ne prennent qu'un nombre fini de valeurs alors : soit $f(X)$ est rationnelle, soit le cercle unité est une ligne de coupure.*

2.3. Preuve du théorème

On va utiliser des arguments analogues à ceux de [**35**] et de [**9**].
Soit L le sous corps de K engendré par A_0 , A_1 ,... , A_{n-1} et les coefficients des polynômes $S_j(X)$ pour $j = 0, 1, \ldots, n$, alors A_h est une suite à valeurs dans le corps L.

L est une extension de type fini de $\mathbb{Q}$, donc on a $L = \mathbb{Q}(t_1, t_2, \ldots, t_s)(\beta)$, où $t_1, t_2, \ldots, t_s$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et β est algébrique sur $\mathbb{Q}(t_1, t_2, \ldots, t_s)$.

Posons alors $q = [L : \mathbb{Q}(t_1, t_2, \ldots, t_s)]$. L étant une extension de type fini sur $\mathbb{Q}$, on peut la plonger dans le corps des nombres complexes.

Lemme 2.3.1. — *Sous les conditions du théorème, A_h est une suite récurrente linéaire à coefficients constants dans L.*

Démonstration. — Soit

$$\Omega = \{(A_h, A_{h+1}, \ldots, A_{h+n}) / \ h \in \mathbb{N}\}$$

Pour $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$, posons :

$$\begin{aligned} P_\omega(X) &= S_n(X)\omega_n - S_{n-1}(X)\omega_{n-1} - \cdots - S_0(X)\omega_0 \\ E_\omega &= \{h \in \mathbb{N} \ / \ (A_h, A_{h+1}, \ldots, A_{h+n}) = \omega\} \\ \Gamma &= \{\omega \in \Omega \ / \ card\ E_\omega = \infty\}. \end{aligned}$$

Alors $\omega \in \Gamma$ entraîne que $P_\omega = 0$.

Et comme $\bigcup_{\omega \in \Omega - \Gamma} E_\omega$ est fini, il existe $h_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour $h \in \mathbb{N}$ et $h \geq h_0$ on ait :

$$S_n(X)A_{h+n} - S_{n-1}(X)A_{h+n-1} - \cdots - S_0(X)A_h = 0.$$

En prenant $X = x_0 \in \mathbb{N}$ on en déduit le lemme 2.3.1. □

Remarque 2.3.2. — Le lemme 2.3.1 s'obtient aussi comme dans l'article de Van Der Poorten et Shparlinsky [**35**] à partir du théorème 2.2.2.

Lemme 2.3.3. — *Si A_h satisfait une relation de la forme (1) et s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $P_i \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour $i = 1, \cdots, r$ tels que $A_h = \sum_{i=1}^{r} P_i(h)\alpha_i^h$ à partir d'un certain rang, alors $A_h = \sum_{i=1}^{r} P_i(h)\alpha_i^h$ à partir de zéro.*

Démonstration. — À partir d'un certain rang h_0, on a $A_h = \sum_{i=1}^{r} P_i(h)\alpha_i^h$.

Posons $B_h = \sum_{i=1}^{r} P_i(h)\alpha_i^h$ pour tout h de $\mathbb{N}$.

Compte tenu de la relation (1) on déduit que :

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{r} \left[S_n(h)P_i(h+n)\alpha_i^n - \sum_{j=1}^{n} S_{n-j}(h)P_i(h+n-j)\alpha_i^{n-j} \right] \alpha_i^h = 0$$

pour tout $h \in \mathbb{N}$ tel que $h \geq h_0$. Et compte tenu de l'unicité d'écriture d'une suite récurrente linéaire à coefficients constants, la relation (2) entraîne que :

$$(3) \qquad S_n(X)P_i(X+n)\alpha_i^n - \sum_{j=1}^{n} S_{n-j}(X)P_i(X+n-j)\alpha_i^{n-j} = 0$$

pour $i = 1, \ldots, r$. Et donc la relation (2) est vraie pour tout h de $\mathbb{N}$. Par suite B_h vérifie (1) pour tout h de $\mathbb{N}$. Il en résulte que l'on a $B_h = A_h$ pour tout h de $\mathbb{N}$. □

Lemme 2.3.4. — *Sous les conditions du théorème, A_h est ultimement périodique.*

Démonstration. — Comme $A_h = \sum_{i=1}^{r} P_i(h)\alpha_i^h$ pour tout $h \in \mathbb{N}$, et que A_h ne prend qu'un nombre fini de valeurs on déduit que la suite A_h est périodique à partir d'un certain rang et que $d^oP_i = 0$ et que α_i est une racine de 1 pour $i = 1, \ldots, r$. □

Remarque 2.3.5. — La relation (3) implique qu'on a :

$$S_n(x_0)\alpha_i^n - S_{n-1}(x_0)\alpha_i^{n-1} \cdots - S_0(x_0) = 0$$
$$\text{pour } i = 1, \ldots, r.$$

Lemme 2.3.6. — *La période minimale τ de A_h est majorée par* $\exp(\sqrt{6qn \log qn})$.

Démonstration. — Soit $P(Y) = S_n(x_0)Y^n - S_{n-1}(x_0)Y^{n-1} - \cdots - S_0(x_O)$ Compte tenu de la remarque précédente on a $P(Y) \in L[Y]$, et $P(\alpha_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$.
Posons $H(Y) = \prod P^\sigma$ où σ parcourt l'ensemble E des plongements $\mathbb{Q}(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ linéaires de $\mathbb{Q}(t_1, t_2, ..., t_s)(\beta)$ dans une clôture algébrique.
Alors on a $H(Y) \in \mathbb{Q}(t_1, t_2, \ldots, t_s)[Y]$ et $d^oH = qn$.

De plus α_i est racine de H pour $i = 1, \ldots, r$.

Soient a_j et b_j des polynômes en $t_1, \ldots, t_s$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que : $H(Y) = \sum \frac{a_j}{b_j} Y^j$. Si $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$, alors α algébrique sur $\mathbb{Q}$ entraîne que $t_1, t_2, \ldots, t_s$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Dans la relation $H(\alpha) = 0$, on peut remplacer $t_1, t_2, \ldots, t_s$ par des indéterminées $X_1, X_2, ..., X_s$; ensuite on choisit $q_1, q_2, \ldots, q_s$ dans $\mathbb{Q}$ de sorte que : $a_j(q_1, q_2, \ldots, q_s) \neq 0$ et $b_j(q_1, q_2, \ldots, q_s) \neq 0$.

Si on prend $X_j = q_j$ pour $j = 1, \ldots, s$, on déduit alors que les α_i sont racines d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré qn.

Enfin le théorème 2.2.1 permet de déduire le lemme 2.3.6. □

Le théorème résulte alors des lemmes précédents.

CHAPITRE 3

QUOTIENT DE DEUX SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

3.1. Introduction et notations :

Dans ce chapitre, on montre que si le quotient de deux suites récurrentes linéaires à coefficients polynômes ne prend qu'un nombre fini de valeurs alors ce quotient est périodique à partir d'un certain rang, et que sous certaines conditions le quotient d'une suite récurrente linéaire à coefficients polynômes par une suite algébrique est une suite récurrente linéaire à coefficients polynômes.

Si g est une suite d'éléments d'un corps commutatif et de caractéristique zéro K on pose : $Z(g) = \{n \in \mathbb{N}/g(n) = 0\}$. Cet ensemble est dit ensemble des zéros de la suite g. Pour $a, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, on note $g_{a,q}$ la suite $g(a + nq)$.

$E \subset \mathbb{N}$, on note $d(E)$ la densité arithmétique de l'ensemble E, quand cette densité existe :

$$d(E) = \lim_{x \to +\infty} \frac{card(E \cap [0, x])}{x}$$

3.2. Énoncés des résultats

Soient u et v deux éléments de $J(K)$ tel que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0. On pose $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ pour $n \geq n_0$. Dans ce qui suit, nous allons examiner le problème suivant, exprimé de manière assez peu précise :
Problème : Donner des conditions pour que la suite $a = (a_n)$ appartienne à $J(K)$ ou $R(K)$.

Remarque 3.2.1. — On a pas toujours $a \in J(K)$ si $u, v \in J(K)$; comme le montre l'exemple des suites :

$u_n = 1$ et $v_n = n! + 1$ (Benzaghou-Bezivin [**4**]). Par contre on sait que si v_n est un emboîtement de suites hypergéométriques alors la suite a est dans $J(K)$ (Benzaghou-Bezivin [**4**]).

Le cas où $u, v \in R(K)$ a déjà été considéré par Pourchet [**27**] et Van der Poorten [**34**]. On remarque que si la suite a est dans $R(K)$ alors a_n est dans un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$, à partir d'un certain rang.

Le résultat suivant dû à Van der Poorten (Théorème du quotient de Hadamard), montre que la réciproque est vraie.

Théorème 3.2.2. — *Soient u_n et v_n deux suites récurrentes linéaires à coefficients constants dans un corps K de caractéristique zéro, on suppose que la suite v_n est non nul à partir d'un certain rang, et que la suite a_n est à valeurs dans un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$, alors la suite a_n est une suite récurrente linéaire à coefficients constants dans K.*

Nous allons démontrer le résultat suivant qui nous permettra de donner une réponse partielle au problème précédent.

Théorème 3.2.3. — *Soient s un entier non nul, $g_1, g_2, \ldots, g_s$ des éléments de $J(K)$,Ω un ensemble fini, Ψ une application de $\Omega \times J(K)^s$ dans $J(K)$, E un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est de densité arithmétique nulle. Si pour tout n dans E il existe ω dans Ω tel que l'on ait $\psi(\omega, g_1(n), g_2(n), \ldots, g_s(n)) = 0$, alors il existe une suite $U(n)$ à valeurs dans Ω périodique à partir d'un certain rang n_0 telle que pour tout entier naturel n plus grand que n_0 on ait :*

$$\Psi(U(n), g_1(n), g_2(n), \ldots, g_s(n)) = 0$$

On en déduit que :

Corollaire 3.2.4. — *Soient u_n et v_n deux suites récurrente linéaires à coefficients polynômes dans un corps K de caractéristique zéro tel que l'on ait $v_n \neq 0$ pour tout entier naturel n plus grand qu'un entier n_0. On note a_n la suite définie par $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ pour $n \geq n_0$. Si l'ensemble $\Phi = \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est fini, alors a_n est une suite périodique à partir d' un certain rang.*

Démonstration. — Il suffit de prendre $\Omega = \Phi$, $s = 2$, et $\Psi(\varphi, a, b) = a - \varphi b$ pour $\varphi \in \Phi$ puis on applique le théorème 3.2.3. □

Ceci est une réponse partielle à notre problème de départ. Cependant ce corollaire ne donne aucune indication sur la période q de la suite a_n.
Nous allons maintenant faire des hypothèses restrictives sur la suite v_n. Dans [**8**] J.P.Bézivin montre que :

Théorème 3.2.5. — *Soient K un corps quadratique imaginaire, u_n une suite récurrente linéaire à coefficients polynômes dans K, v_n une suite récurrente linéaire à coefficients constants dans K tel que :*

1. *Le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n X^n$ soit non nul.*
2. *$v_n = b_1\alpha_1^n + \sum_2^k P_i(n)\alpha_i^n$; où b_1 et les α_i sont dans K, et les polynômes $P_i(X)$ dans $K[x]$ pour $i = 2, \ldots, s$.*
3. *$|\alpha_1| > |\alpha_i|$ pour $i = 2, \ldots, s$.*
4. *$v_n \neq 0$,et $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ est un entier de K pour tout entier naturel n.*

Alors la suite a_n est dans $J(K)$.

Nous allons affaiblir la condition 2 du résultat précédent en autorisant la racine dominante à avoir une multiplicité quelconque, plus précisément on montre le résultat suivant :

Théorème 3.2.6. — *Soient K un corps quadratique imaginaire, u un élément de $J(K)$, v un élément de $Al(K)$ tel que :*

1. *La série entière $f(X) = \sum v_n X^n$ n'a qu'une seule singularité sur son cercle de convergence et que cette singularité est un pôle de multiplicité éventuellement plus grande que un.*
2. *La série entière $h(X) = \sum u_n X^n$ a un rayon de convergence non nul.*
3. *Pour $v_n \neq 0$, le quotient $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ est un entier de K.*

Alors la suite v_n est non nulle à partir d'un certain rang n_0, et la suite a_n est dans $J(K)$.

La suite de ce chapitre est organisé de la façon suivante, dans le prochain paragraphe nous donnons les résultats techniques qui nous seront nécessaires pour les démonstrations qui se trouvent dans le paragraphe suivant.

3.3. Résultats techniques

Le résultat suivant est bien connu :

Proposition 3.3.1. — *Soit a_n une suite algébrique de nombres complexes. Alors sa série génératrice $f(z)$ vérifie une équation différentielle :*

$$P_s(z)f^{(s)}(z) + \cdots + P_0(z)f(z) = 0$$

dont les coefficients P_k sont des polynômes et P_s non nul, et si on note S l'ensemble des zéros non nuls de ce polynôme et D un ouvert simplement

connexe contenant 0 et ne rencontrant pas S, $f(z)$ se prolonge en une fonction analytique dans D.

De même le résultat suivant est bien connu :

Proposition 3.3.2. — *L'ensemble $J(K)$ muni de l'addition usuelle et du produit de Hadamard est une K algèbre.*

Rappelons le théorème de Skolem-Lech-Mahler sur les zéros des suites récurrentes linéaire à coefficients constants.

Proposition 3.3.3. — *l'ensemble des zéros d'une suite récurrente linéaire à coefficients constants est la réunion d'un ensemble fini de progressions arithmétiques de mêmes raisons et d'un ensemble fini.*

Nous aurons besoin de la généralisation suivante du théorème de Skolem -Lech -Mahler dû à C.Methfessel cf [**21**] :

Théorème 3.3.4. — *Soient K un corps commutatif de caractéristique nulle, g une suite récurrente linéaire à coefficients polynômes appartenant à $K[X]$, alors l'ensemble $Z(g)$ des zéros de g est réunion d'un ensemble fini de progressions arithmétiques de mêmes raisons et d'un ensemble de densité arithmétique nulle.*

Nous aurons besoin aussi du résultat suivant dû à H.Tsuji [**33**] :

Théorème 3.3.5. — *Soit v un élément de $Al(K)$, on note R le rayon de convergence de la série entière $f(X) = \sum v_n X^n$ (qui est non nul), et on suppose qu'il est fini. Alors il existe $r \in \mathbb{Q} - (-\mathbb{N})^*$, $k \in (\mathbb{N})^*$, $b_i \in \mathbb{C}$, $\omega_i \in \mathbb{C}^*$ et ω_i de module 1, pour $i = 1, \ldots, k$, et tels que l'on ait :*

$$v_n = \left(\frac{n^r}{R^n}\right)\left[\sum_1^k b_i \omega_i^n + o(1)\right]$$

(où les $\dfrac{R}{\omega_i}$ sont les singularités de f sur son cercle de convergence). De plus il existe deux réels positifs β_1 et β_2 tel que :

$$\beta_1 \frac{n^r}{R^n} \leq \sum_1^k |v_{n+j}| \leq \beta_2 \frac{n^r}{R^n}$$

à partir d'un certain rang.

Remarque 3.3.6. — Dans le cas particulier qui va nous intéresser la série algébrique concerné n'aura qu'une seule singularité $\dfrac{R}{\omega}$ qui sera un pôle sur son

cercle de convergence. Dans ce cas on a $k = 1$, et il existe $r \in \mathbb{Q} - (-\mathbb{N})^*$, $b \in \mathbb{C}$, tel que l'on ait : $v_n = \left(\frac{n^r}{R^n}\right)[b\omega^n + o(1)]$

On utilisera aussi le lemme suivant :

Lemme 3.3.7. — *Soient a et b deux entiers naturels et A une partie de $\mathbb{N}$, on pose $B = \{n \in \mathbb{N}/a + bn \in A\}$, alors pour $b \neq 0$ on a :*

1. *$d(A) = 0$ implique que $d(B) = 0$.*
2. *Si A est égal à $\mathbb{N}$ à un ensemble fini près, il en est de même de B.*

Démonstration. — 1) Notons λ l'application définie de B dans A par : $\lambda(n) = a + bn$. Comme λ est injective, donc on a pour tout réel positif x que : $card(B \cap [0, x]) \leq card(A \cap [0, a + bx])$. Par suite en divisant par x les deux membres de l'inégalité précédente, et en passant à la limite quand x tend vers l'infini, on en déduit que $d(A) = 0$ entraîne que $d(B) = 0$.
2) En effet si $\mathbb{N} - A$ est fini alors il en est de même de $\mathbb{N} - B$. □

3.4. Démonstration des résultats

3.4.1. Preuve du théorème 3.2.3. —

Démonstration. — a) Pour ω dans Ω posons

$$C_\omega(n) = \Psi(\omega, g_1(n), g_2(n), \ldots, g_s(n))$$

D'après le théorème 3.3.4, pour tout ω dans Ω, il existe un entier naturel non nul q_ω,tel que pour $r = 0, 1, \ldots, q_\omega - 1$, on ait soit $C_\omega(r + nq_\omega) = 0$ pour n grand, soit $d(Z(C_\omega(r + nq_\omega))) = 0$.

b) Posons $q = p.p.c.m\{q_\omega, \ / \ \omega \in \Omega\}$. Alors pour tout ω dans Ω et $r = 0, 1, \ldots, q-1$. on a, soit $C_\omega(r+nq) = 0$ pour n grand, soit $d(Z(C_\omega(r+nq))) = 0$. En effet :

1. Si $C_\omega(r + nq_\omega) = 0$ pour n grand, en posant $q = q_\omega t_\omega$ on obtient :

   $C_\omega(r + nq) = C_\omega(r + (nt_\omega)q_\omega)$ et par suite on a $C_\omega(r + nq) = 0$ pour n grand.
2. Si $d(Z(C_\omega(r + nq_\omega))) = 0$ on a pour tout réel positif x : $card(Z(C_\omega(r + nq)) \cap [0, x]) \leq card(Z(C_\omega(r+nq_\omega)) \cap [0, xt_\omega])$ et donc $d(Z(C_\omega(r+nq))) = 0$.

c) Montrons que pour r fixé dans $\{0, \ldots, q-1\}$ on n'a pas la seconde possibilité pour tout ω. Supposons par l'absurde que l'on ait pour tout ω dans Ω l'égalité $d(Z(C_\omega(r + nq))) = 0$, et posons :

$T_\omega = \{n \in \mathbb{N}/C_\omega(r+nq) = 0\}$, $F = \{n \in \mathbb{N}/r+nq \in E^c\}$ où E^c désigne le complémentaire de l'ensemble E. Alors $d(E^c) = 0$ implique que $d(F) = 0$ d'après le lemme 3.3.7. Par suite pour $n \in \mathbb{N}$ on a soit $n \in F$ soit $n \in T_\omega$ où ω est dans Ω. Donc l'ensemble $\mathbb{N}$ serait de densité arithmétique nulle (vu qu'il est inclus dans une réunion finie d'ensembles de densités arithmétiques nulles) ce qui est absurde.
Il en résulte que pour tout $r = 0, 1, \ldots, q-1$ il existe ω_r dans Ω et n_r dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel n plus grand que n_r on ait :

$$\Psi(\omega_r, g_1(r+nq), g_2(r+nq), .., g_s(r+nq)) = 0$$

Et si on pose $m = Max\,\{n_r \;/\; 0 \leq r \leq q-1\}$ et $U(r+nq) = \omega_r$ pour tout entier naturel n plus grand que m, on déduit le résultat. □

3.4.2. Preuve du théorème 3.2.6 :—

Démonstration. — Comme f n'a qu'une seule singularité $\dfrac{1}{\alpha}$ sur son cercle de convergence, la remarque 3.3.6 implique que $v_n \neq 0$ pour n grand, et que si R est le rayon de convergence de f alors on a $R = \dfrac{1}{|\alpha|}$. Si $\dfrac{1}{\alpha}$ est un pôle d'ordre m de f, soit $\displaystyle\sum_1^m \frac{b_i}{(1-z\alpha)^i}$ la partie polaire de f relativement à $\dfrac{1}{\alpha}$, alors $g(z) = f(z) - \displaystyle\sum_1^m \frac{b_i}{(1-z\alpha)^i}$ est analytique dans un disque de centre 0 et de rayon strictement plus grand que R. Si on note $g(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n z^n$, on peut trouver deux nombres réels strictement positifs c et c_1 tels que $c_1 < |\alpha| = \frac{1}{R}$ et $|w_n| \leq cc_1^n$ pour tout entier naturel n.

Posons $t_n = v_n + w_n$, alors on a $t_n = T(n)\alpha^n$ où

$$T(X) = \sum_1^m b_i \prod_1^{i-1} \left(1 + \frac{X}{j}\right) \in \mathbb{Q}[X]$$

Par suite il existe un nombres réels positif γ tel que $|t_n| \geq \gamma\,|\alpha^n|$ pour n grand.

Posons $\varepsilon_n = \dfrac{w_n}{t_n}$; comme $c_1 < |\alpha|$, donc il existe deux nombres réels positifs δ, d tel que $d < 1$, et $|\varepsilon_n| \leq \delta d^n$.

Puisque le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum u_n X^n$ est non nul il existe deux nombres réels positifs λ, μ, tel que $|u_n| \leq \lambda\mu^n$ pour tout n.

Comme f n'a qu'une seule singularité sur son cercle de convergence la remarque 3.3.6 entraîne qu'il existe deux nombres réels positifs α_1 et β_1 tels que l'on ait $|v_n| \geq \beta_1\alpha_1^n$, à partir d'un certain rang. Donc il existe deux nombres

réels positifs α_2, et β_2, tels que l'on ait $|a_n| \leq \beta_2 \alpha_2^n$, à partir d'un certain rang. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, posons $W_N(n) = \dfrac{u_n}{t_n}\left(1 + \varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_n^N\right)$ et $R_N(n) = a_n \varepsilon_n^{N+1}$. Alors on a :

$a_n = \dfrac{u_n}{v_n} = W_N(n) + R_N(n)$. Et en prenant N assez grand on en déduit qu'il existe deux nombres réels positifs l, ρ tel que $\rho < 1$ et $|R_N(n)| \leq l\rho^n$. Comme $t, 1/t$ sont dans $J(K)$, il en est de même de ε, w, $\dfrac{u}{t}$ et W_N.(En effet les suites $\dfrac{1}{T(n)}$ et $\dfrac{1}{\alpha^n}$ sont dans $J(K)$, et $J(K)$ est stable par le produit de Hadamard (voir[**10**])).

Notons A l'anneau des entiers de K. Comme W_N est dans $J(K)$ donc il existe un entier q et des polynômes non tous nuls $S_0, \ldots, S_q$ à coefficients dans A tel que $\sum_0^q S_i(n) W_N(n+i) = 0$. Par suite on a :

$$\sum_0^q S_i(n) a_{n+i} = \sum_0^q S_i(n) R_N(n+i)$$

Le premier membre de cette égalité est dans l'anneau des entiers A du corps quadratique imaginaire K. Majorons le second membre L_n de cette égalité ; il existe une constante c_3 et un entier naturel m tel que l'on ait $|S_i(n)| \leq c_3(n+1)^m$ pour $i = 0, \ldots, q$ et tout élément n de $\mathbb{N}$. On en déduit que l'on a $|L_n| \leq c_3(q+1)(n+1)^m l\rho^{n+q}$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$. Comme $0 \leq \rho < 1$, on en déduit que la suite L_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On a donc $L_n = 0$ pour n assez grand, ce qui montre que a_n vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients polynômes dans $K[x]$ et termine la démonstration. □

CHAPITRE 4

QUOTIENTS DE SUITES HOLONOMES

4.1. Introduction et résultats.

Soit K un corps de caractéristique nulle, et w_n une suite d'éléments de K. On dit que $w = (w_n)$ est une suite récurrente linéaire à coefficients constants (ou suite récurrente linéaire pour simplifier) s'il existe un entier $s \geq 1$ et des éléments $a_k, k = 0, \cdots, s$ avec $a_s \neq 0$ tels que l'on ait pour tout n

$$a_s w_{n+s} + \cdots + a_k w_{n+k} + \cdots + a_0 w_n = 0$$

Il a été conjecturé par C.Pisot, et démontré par Y.Pourchet et A.J.Van der Poorten le résultat suivant (Théorème du Quotient de Hadamard, voir [**34**],[**27**] ou [**28**], et pour des améliorations au cas où on suppose que l'hypothèse sur a_n est vraie seulement pour une infinité de n, [**12**]) :

Théorème 4.1.1. — *Soit K un corps de caractéristique nulle, et u_n, v_n deux suites d'éléments de K, récurrentes linéaires à coefficients constants. On suppose que v_n est non nul pour tout n assez grand, et que les $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ appartiennent à un sous-anneau de K, qui est de type fini sur $\mathbb{Z}$. Alors la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants.*

On peut considérer des suites récurrentes plus générales. Soit $s \geq 1$, P_k, $0 \leq k \leq s$ des polynômes à coefficients dans K, avec P_s non nul. On dit que w_n est une suite holonome (d'éléments de K), si on a pour tout n assez grand :

$$P_s(n) w_{n+s} + \cdots + P_k(n) w_{n+k} + \cdots + P_0(n) w_n = 0$$

Il est évidemment naturel de se poser la question de généraliser à ces suites holomones le théorème du Quotient de Hadamard, c'est-à-dire de trouver des conditions assurant que le quotient de deux suites holonomes est encore une suite holonome.

La question la plus naturelle est d'imposer que le quotient des deux suites holonomes u_n et v_n est une suite a_n d'éléments d'un anneau A de type fini sur

$\mathbb{Z}$, et de se poser la question de savoir si sous cette hypothèse la suite a_n est holonome ; cependant nous n'avons pas trouvé de moyens d'attaque sur un tel problème.

Pour poursuivre, nous avons besoin de quelques notations.

Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif de K, et $d \geq 1$. On note G_d l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivant $w_1 + \cdots + w_d$ avec $w_j \in G$ pour tout j.

Le théorème 4 de [**6**] montre alors que si une suite holonome u_n est telle qu'il existe un sous-groupe G de type fini, et un entier d tel que $u_n \in G_d$ pour tout n, alors u_n est une suite récurrente linéaire. Ce résultat a des conséquences arithmétiques intéressantes, par exemple si u_n est une suite holonome d'éléments de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas récurrente linéaire, l'ensemble des nombres premiers p tel qu'il existe un indice n tel que p divise $u_n \neq 0$, est infini. On pourra voir l'article récent de F.Luca [**19**] pour des résultats quantitatifs sur ce type de problème dans le cas de suites holonomes d'ordre 2.

Nous allons dans ce chapitre, donner des réponses partielles positives à la question suivante, qui est une généralisation du résultat du théorème 4 de [**6**], celui-ci correspondant au cas où la suite v_n est égale à 1 pour tout n :

Question : *Soit K un corps de caractéristique nulle, et u_n, v_n deux suites holonomes d'éléments de K. On suppose que v_n est non nul pour tout n assez grand, et qu'il existe un sous-groupe G du groupe multiplicatif de K, de type fini, et un entier $d \geq 1$ tel que $a_n = \dfrac{u_n}{v_n} \in G_d$ pour tout n.*

La suite a_n est-elle une suite récurrente linéaire ?

Remarque 4.1.2. — Une suite holonome, dont les valeurs appartiennent à G_d pour un entier $d \geq 1$ et un groupe G de type fini est récurrente linéaire à coefficients constants par le théorème 4 de [**6**]. Donc dans le contexte de la question, les conditions "la suite a_n est holonome" et "la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants", dans la conclusion sur a_n, sont équivalents.

Dans toute la suite, le corps de base est le corps des nombres complexes, ce qui ne nuit pas à la généralité ; nous devrons à l'occasion nous placer dans un sous-corps K de $\mathbb{C}$ de type fini sur $\mathbb{Q}$.

Nous allons démontrer les résultats suivants :

Théorème 4.1.3. — *Soient P_0, P_1, P_2, P_3 des polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$, $d \geq 1$ et u_n, v_n deux solutions de la récurrence d'ordre 3 suivante :*

$$P_3(n)w_{n+3} + P_2(n)w_{n+2} + P_1(n)w_{n+1} + P_0(n)w_n = 0.$$

On suppose que v_n est non nul pour tout n assez grand, que $a_n = \dfrac{u_n}{v_n} \in G_d$ et enfin que pour tout $L \in \mathbb{C}$, l'ensemble des indices n tels que $a_n = L$ est fini. Alors la suite a_n est une suite récurrente linéaire.

Nous reviendrons à la fin de ce chapitre sur la condition $v_n \neq 0$ pour n assez grand, et aussi sur la condition que a_n ne prend qu'un nombre fini de fois toute valeur L fixée.

Nous avons aussi un résultat plus général, pour des suites holonomes d'ordre s quelconques, mais avec des conditions beaucoup plus restrictives.

Théorème 4.1.4. — *Soit $s \geq 2$, et P_k, $k = 0, \cdots, s$ des polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{C}$.*

On considère l'équation (E) d'ordre $s \geq 2$:

$$P_s(n)w_{n+s} + P_{s-1}(n)w_{n+s-1} + \cdots + P_0(n)w_n = 0$$

On fait l'hypothèse que (E) a s solutions linéairement indépendantes $u_j(n)$, $j = 1, \cdots, s-1$, et $v(n)$, avec $v(n) \neq 0$ pour n assez grand, et on pose $a_j(n) = \dfrac{u_j(n)}{v(n)}$. Nous ferons aussi la convention que $a_0(n)$ est la suite constante égale à 1.

On suppose que les $a_j(n)$, $j = 0, \cdots, s-1$, appartiennent tous à un G_d, pour un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$ et un entier $d \geq 1$ fixé. Alors les suites $a_j(n)$ sont des suites récurrentes linéaires.

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 4.1.5. — *Soit G un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$, $d \geq 1$ un entier, et u_n et v_n deux suites holonomes, vérifiant la même récurrence d'ordre 2. On suppose que v_n est non nul pour tout n, et on pose $\dfrac{u_n}{v_n} = a_n$. On suppose, de plus, que $a_n \in G_d$ pour tout n. Alors la suite a_n est une suite récurrente linéaire à coefficients constants.*

4.2. Remarques préliminaires

Dans cette partie nous faisons quelques remarques destinées à simplifier l'exposé.

4.2.1. Nous aurons presque toujours à considérer des suites pour n assez grand. Nous faisons donc cette convention pour tout ce qui suit, et nous ne rappellerons cette hypothèse que quand cela sera nécessaire.

4.2.2. Un cas particulier où la réponse à la question posée est affirmative est le suivant. Supposons que la suite v_n soit une suite holonome inversible, c'est-à-dire que son inverse est aussi holonome. C'est le cas si v_n vérifie une relation de récurrence de la forme $v_{n+t} = R(n)v_n$, où $t \geq 1$ et R est une fraction rationnelle non nulle ; les suites holonomes inversibles sont caractérisées par le fait qu'il existe un entier m tel que sur les progressions arithmétiques de raison m, on ait une telle récurrence d'ordre 1, cf [**31**], proposition 4.5, page 47.

Dans ce cas, une suite $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ est aussi holonome comme produit de deux suites holonomes, et sous l'hypothèse qu'il existe un entier d et un sous-groupe de type fini G du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$ tel que $a_n \in G_d$ pour tout n, le théorème 4 de [**6**] montre que la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants.

4.3. Rappels.

Nous aurons besoin des résultats suivants :

Théorème 4.3.1. — *Soit T un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$. Soit $s \geq 1$. Alors il existe seulement un nombre fini de points $x = (x_0, \cdots, x_s) \in \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ tels que les trois propriétés a), b), c) soient vérifiées :*

a) Pour tout i, $0 \leq i \leq s$, on a $x_i \in T$;

b) On a $x_0 + \cdots + x_s = 0$;

c) Pour toute partie E de $\{0, \cdots, s\}$ non vide et non égale à $\{0, \cdots, s\}$, on a $\displaystyle\sum_{i \in E} x_i \neq 0$.

Démonstration. — Voir [**14**], [**30**]. □

Nous aurons besoin aussi de ce qui suit :

Définition 4.3.2. — Soit I un ensemble d'indices, non vide et fini, de cardinal $s+1$, et $u(n) = (u_i(n), i \in I)$ une suite d'éléments de $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ et $u_i(n)$ non nul pour tout i et tout $n \in \mathbb{N}$. Soit J une partie non vide de I. On dit que la partie J est irréductible pour l'entier n, si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

a) On a $\displaystyle\sum_{i \in J} u_i(n) = 0$;

b) Pour toute partie A de J non vide et différente de J, on a $\sum_{i \in A} u_i(n) \neq 0$.

Lemme 4.3.3. — *Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$, et G un sous-groupe du groupe multiplicatif de K, que nous supposons de type fini. Soit $\widetilde{G} = \{z \in K ; \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n \in G\}$. Alors $\widetilde{G}$ est un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de K.*

Démonstration. — Voir [**17**]. □

Lemme 4.3.4. — *Soit I un ensemble d'indices, non vide et fini, de cardinal $s+1$, et $u(n) = (u_i(n), i \in I)$ une suite d'éléments de $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ vérifiant que $u_i(n)$ non nul pour tout i et tout $n \in \mathbb{N}$, et que $\sum u_i(n) = 0$ pour tout n.*

Soit F une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une partition $I_1, \cdots, I_t$ de I, et une partie infinie E de F, tels que pour tout $n \in E$, et tout j, $1 \leq j \leq t$, I_j soit irréductible pour n.

Démonstration. — Voir [**6**], lemme 1, page 63. □

Les deux lemmes qui suivent sont très proches de parties de la preuve du théorème 4 de [**6**], pages 64 et 65 ; nous redonnons les preuves pour être complet.

Lemme 4.3.5. — *Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$. Soit $I = \{(k,j)\}$ une partie non vide de cardinal $s+1$ de $\mathbb{N}^2$, et $u(q) = (u_{k,j}(q), (k,j) \in I)$ une suite d'éléments de $\mathbb{P}^s(K)$ vérifiant que $u_{k,j}(q)$ est non nul pour tout $(k,j) \in I$ et tout $q \in \mathbb{N}$. Soit G un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de K, $\widetilde{G}$ le sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de K donné par le lemme 4.3.3, on suppose que $u_{k,j}(q)$ appartient à G pour tout k, j, q. Soit λ un entier non nul n'appartenant pas à $\widetilde{G}$, et $q \to m_q$ une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout entier $q \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{(k,j)\in I} \lambda^{jm_q} u_{k,j}(q) = 0$.*

Soit F une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe un ensemble infini E inclus dans F, et une partition I_h de l'ensemble d'indice I tels que, pour tout $q \in E$, et pour tout h on a $\displaystyle\sum_{(k,j)\in I_h} u_{k,j}(q) = 0$. Par suite, pour toute famille finie y_j d'éléments de K, on a $\displaystyle\sum_{(k,j)\in I} y_j u_{k,j}(q) = 0$.

Démonstration. — On applique le lemme 4.3.4 pour trouver une partie infinie E de F, et une partition de l'ensemble d'indices ayant les propriétés indiquées dans ce lemme 4.3.4. Pour $q \in E$, on peut appliquer le théorème 4.3.1 à chaque somme $\displaystyle\sum_{(k,j)\in I_h} \lambda^{jm_q} u_{k,j}(q)$ et au sous-groupe T engendré par $\widetilde{G}$ et λ, qui est de type fini. Ceci implique que les éléments $(\lambda^{jm_q} u_{k,j}(q))$, pour (k,j) dans I_h et $q \in E$, ne prennent qu'un nombre fini de valeurs dans l'espace projectif. Soient (j,k) et (j',k') deux éléments de I_h, on peut alors trouver un élément fixé $w \in K^*$ tel que, pour une infinité d'indices q, on ait $\lambda^{jm_q} u_{k,j}(q) = w\lambda^{j'm_q} u_{k',j'}(q)$. Si on prend deux valeurs distinctes q_1 et q_2 de q, et si on fait le quotient, cela implique que $\lambda^{(j-j')(m_{q_1} - m_{q_2})} \in G$. Comme $q \to m_q$ est injective, si $j \neq j'$ on obtient que $\lambda \in \widetilde{G}$, ce qui est contraire aux hypothèses faites. Donc l'indice j est fixe pour chaque élément de la partition.

On obtient donc après division par λ^{jm_q} que $\sum_{(k,j)\in I_h} u_{k,j}(q) = 0$. On multiplie par y_j, et on resomme le tout, ce qui donne que $\sum_{(k,j)\in I} y_j u_{k,j}(q) = 0$ pour tout $q \in E$. □

Lemme 4.3.6. — *Soit K un sous-corps commutatif de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$. Soit T un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de K, d, t des entiers non nuls, et pour $1 \leq k \leq t$, des suites $b_{n,k}$ telles que $b_{n,k} \in T_d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient d'autre part $P_k(x)$ des polynômes à coefficients dans K. On suppose que, pour tout n, on a*

$$\sum_{k=1}^{t} P_k(n) b_{n,k} = 0$$

Alors, pour tout $y \in K$, et pour tout m fixé, il existe une suite strictement croissante d'entiers α_q, telle que, si $J_q = \{\alpha_q, \cdots, \alpha_q + m\}$, pour tout $n \in J = \cup_{q\geq 0} J_q$, on a

$$\sum_{k=1}^{t} P_k(y) b_{n,k} = 0$$

Démonstration. — On peut tout d'abord écrire $b_{n,k} = \sum_{l=1}^{d} g_{n,k,l}$ avec $g_{n,k,l} \in T$.

Soit $c \in \{0, ..., m\}$. On pose $P_k(c + x) = \sum_j m_{k,j}(c) x^j$, où les $m_{k,j}(c)$ dépendent de c mais varient dans un ensemble fini. Soit H le sous-groupe engendré par T et tous les $m_{k,j}(c)$ qui sont non nuls, et soit λ un entier naturel n'appartenant pas à $\widetilde{H}$.

Nous considérons maintenant l'ensemble F_0 d'entiers suivant : $F_0 = \{c + \lambda^h, c = 0, \cdots, m, h \in \mathbb{N}\}$. Nous voulons démontrer que pour tout $y \in K$ et pour tout $n \in F_0$ assez grand, on a :

$$\sum_{k=1}^{t} P_k(y) b_{n,k} = 0$$

Pour cela, nous raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe $y_0 \in K$, et une partie infinie F de F_0 où la somme considérée n'est pas nulle, et nous voulons trouver une contradiction.

Puisque F est infini, on peut supposer, quitte à se restreindre à une partie infinie de F, que la valeur c intervenant dans la définition des éléments de F est fixée. Pour $n = c + \lambda^q \in F$, la relation devient

$$\sum_{k,j} m_{k,j}(c)\lambda^{qj} b_{n,k} = 0$$

Comme $m_{k,j}\lambda^{qj} b_{n,k} = \sum m_{k,j}\lambda^{qj} g_{n,k,l}$, on est en présence d'une somme de termes de la forme $\lambda^{jq} u_{k,j,l}(q)$ (noter que n dépend de q). On peut supposer en remplaçant éventuellement F par une de ses parties infinies, que $u_{k,j,l}(q)$ appartient à $\widetilde{H}$; on a $\lambda \notin \widetilde{H}$, et $m_q = q$ est bien injectif.

On peut donc appliquer le lemme 4.3.5 ; on choisit un $x \in K$, et on prend les y_j égaux aux x^j d'où l'existence d'une partie infinie E de F telle que, pour tout $q \in E$, $n = c + \lambda^q$, on a

$$\sum_{k,j} m_{k,j}(c) x^j b_{n,k} = 0$$

soit encore

$$\sum_{k} P_k(c + x) b_{n,k} = 0$$

Enfin, on choisit x tel que $x + c = y_0$, ce qui donne la relation

$$\sum_{k} P_k(y_0) b_{n,k} = 0$$

pour tout $q \in E$ (avec $n = c + \lambda^q$). Mais ceci est absurde, puisque $E \subset F$, compte tenu de la définition de F.

On a donc obtenu que, pour tout tout $y \in K$ et tout $n \in F_0$ assez grand, on a

$$\sum_{k} P_k(y) b_{n,k} = 0$$

ce qui termine la démonstration. □

4.4. Résultats techniques.

Nous notons tout de suite que si l'on est en présence d'une suite holonome d'éléments de $\mathbb{C}$, il existe un sous-corps K de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$, qui va contenir toutes les valeurs de la suite, et les coefficients des polynômes intervenant dans la relation de récurrence. Ceci est valable bien sûr pour un nombre fini de telles suites, il existe un sous-corps K de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$ ayant cette propriété pour toutes les suites considérées. On peut donc appliquer les résultats de la section précédente.

Lemme 4.4.1. — *Soit T un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$, d, t des entiers non nuls, et pour $1 \leq k \leq t$, des suites $b_{n,k}$ telles*

que $b_{n,k} \in T_d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient d'autre part $P_k(x)$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que, pour tout n, on a

$$\sum_{k=1}^{t} P_k(n) b_{n,k} = 0$$

On suppose de plus que, pour tout k, il existe deux suites holonomes $u_{n,k}$ et $v_{n,k}$ telles que $v_{n,k}$ est non nul pour n assez grand, vérifiant $b_{n,k} = \dfrac{u_{n,k}}{v_{n,k}}$.

Alors il existe un entier N, tel que si $n \geq N$, le polynôme

$$\sum_{k=1}^{t} P_k(y) b_{n,k}$$

est le polynôme nul.

Démonstration. — Posons $w_{n,k} = u_{n,k} \prod_{h \neq k} v_{n,h}$. Les suites $w_{n,k}$ sont des suites holonomes comme produits de suites holonomes, et on a $\sum_{k=0}^{t} P_k(n) w_{n,k} = 0$ pour tout n par hypothèse. Soit $y \in \mathbb{C}$ fixé ; la suite $t_n = \sum_{k=0}^{t} P_k(y) w_{n,k}$ est une suite holonome également. Il existe donc un entier m, dépendant de la récurrence vérifiée par t_n, telle que si t_n est nulle pour $n = M, M+1, \cdots, M+m$, alors t_n est nulle pour tout $n \geq M$. On applique alors le lemme 4.3.6 avec cette valeur de m, on a donc $t_n = 0$ pour $n \in \{\alpha_q, \cdots, \alpha_q + m\}$; si l'on choisit q assez grand, on obtient par ce qui précède que t_n est nulle.

Soit maintenant E l'ensemble des indices n tel que le polynôme $T_n(y) = \sum_{k=1}^{t} P_k(y) b_{n,k}$ n'est pas le polynôme nul, et F l'ensemble des zéros dans $\mathbb{C}$ des polynômes T_n, $n \in E$. Alors F est au plus dénombrable ; prenons $y = y_0 \in \mathbb{C}$ qui n'est pas dans F, il existe un N tel que si $n \geq N$, on a $T_n(y_0) = 0$. Ceci implique par le choix de y_0 que le polynôme T_n est le polynôme nul pour $n \geq N$, ce qui termine la démonstration du lemme. □

Soit maintenant $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, $P_0, \cdots, P_m$ des polynômes, et a_n une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. On définit les matrices $A_m(n, y) = (\alpha_{i,j})$ d'ordre $2m$ suivantes :

La première ligne est :

$$[0, \cdots, 0, P_m(y), \cdots, P_0(y)]$$

La troisième ligne est obtenue en décalant d'un rang et en remplaçant y par $y+1$:

$$[0, \cdots, 0, P_m(y+1), \cdots, P_0(y+1), 0]$$

On obtient ainsi en poursuivant ce procédé les lignes d'indice impair, celle de rang $2m-1$ étant :

$$[P_m(y+m-1), \cdots, P_0(y+m-1), 0, \cdots, 0]$$

La seconde ligne est :

$$[0, \cdots, 0, P_m(y)a_{n+m}, \cdots, P_0(y)a_n]$$

La quatrième ligne est obtenue en décalant d'un rang et en remplaçant y par $y+1$, et n par $n+1$:

$$[0, \cdots, 0, P_m(y+1)a_{n+m+1}, \cdots, P_0(y+1)a_{n+1}, 0]$$

On obtient ainsi en poursuivant ce procédé les lignes d'indice pair, celle de rang $2m$ étant :

$$[P_m(y+m-1)a_{n+2m-1}, \cdots, P_0(y+m-1)a_{n+m-1}, 0, \cdots, 0]$$

La matrice $A_2(n,y)$ est donc :

$$A_2(n,y) = \begin{pmatrix} 0 & P_2(y) & P_1(y) & P_0(y) \\ 0 & P_2(y)a_{n+2} & P_1(y)a_{n+1} & P_0(y)a_n \\ P_2(y+1) & P_1(y+1) & P_0(y+1) & 0 \\ P_2(y+1)a_{n+3} & P_1(y+1)a_{n+2} & P_0(y+1)a_{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Nous noterons aussi $B_m(n,y)$ le déterminant de la matrice $A_m(n,y)$. On a alors le résultat suivant :

Lemme 4.4.2. — *Soient a_n et v_n deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$, et P_k des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, $k = 0, \cdots, m$, avec P_m et P_0 non nuls.*

a) On suppose que v_n est non nul pour tout n assez grand, et que les deux suites v_n et $a_n v_n$ vérifient la récurrence suivante :

$$P_m(n)w_{n+m} + \cdots + P_k(n)w_{n+k} + \cdots + P_0(n)w_n = 0$$

Alors on a $B_m(n,n) = 0$ pour tout n assez grand.

b) Si de plus il existe un entier d non nul, et un sous-groupe de type fini G du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$ tel que $a_n \in G_d$ pour tout n, alors il existe un entier N tel que si $n \geq N$, le polynôme $B_m(n,y)$ est nul.

Démonstration. — a) Par hypothèse on a :

$$P_m(n)v_{n+m} + \cdots + P_k(n)v_{n+k} + \cdots + P_0(n)v_n = 0$$

et

$$P_m(n)v_{n+m}a_{n+m} + \cdots + P_k(n)v_{n+k}a_{n+k} + \cdots + P_0(n)v_n a_n = 0$$

C'est un système de deux équations linéaires homogènes en les $m+1$ inconnues $(v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+m})$.

Dans chacune de ces équations, on change n en $n+1$. On obtient deux nouvelles équations :

$$P_m(n+1)v_{n+m+1} + \cdots + P_k(n+1)v_{n+k+1} + \cdots + P_0(n+1)v_{n+1} = 0$$

et

$$P_m(n+1)v_{n+m+1}a_{n+m+1} + \cdots + P_k(n+1)v_{n+k+1}a_{n+k+1} + \cdots + P_0(n+1)v_n a_{n+1} = 0$$

et on peut considérer que l'on est en présence de 4 équations linéaires, en les $m+2$ variables $v_n, \cdots, v_{n+m+1}$. On voit donc que le procédé augmente le nombre d'équations de deux, et le nombre de variables par 1.

Au bout de $t = m-1$ opérations de ce type, on voit que l'on obtient un système de $2m$ équations en les $2m$ inconnues $v_n, \cdots, v_{n+2m-1}$.

Il est facile de voir que la matrice du système est la matrice $A_m(n,n)$.

On a $v_n \neq 0$; par suite ce système homogène admet une solution non triviale, et donc le déterminant de la matrice $A_m(n,n)$ est nul, ce qui démontre l'assertion.

b) Le déterminant $B_m(n,n)$ va s'écrire sous la forme $\sum Q_h(n)b_{n,h}$, avec les Q_h polynômes en les polynômes $P_j(y+l)$, et les $b_{n,h}$ somme de monômes en les a_{n+k}. Par suite, on voit que les hypothèses du lemme 4.4.1 sont vérifiées. Il en résulte que $\sum Q_h(y)b_{n,h}$ est le polynôme nul, ce qui démontre l'assertion. □

Lemme 4.4.3. — *Soit $m \geq 2$ un entier, v_n et a_n deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. On suppose que v_n est non nulle pour tout n assez grand, et que les deux suites v_n et $u_n = a_n v_n$ vérifient la récurrence*

$$P_m(n)w_{n+m} + \cdots + P_k(n)w_{n+k} + \cdots + P_0(n)w_n = 0$$

où l'on suppose que les polynômes P_k sont tous non nuls.

Soit N un entier tel que pour tout $n \geq N$, on ait $P_k(n) \neq 0$ pour tout k. Soit M un entier, avec $M \geq N$, tel que les nombres a_{M+j}, $j = 0, \cdots, m$ soient tous égaux, sauf peut-être pour l'un d'entre eux. Alors la suite a_n est constante à partir de M.

Démonstration. — On montre d'abord que les a_{M+j} sont égaux pour $0 \leq j \leq m$. En effet, si on a $a_{M+j} = c$ pour tout $j \in \{0, \cdots, m\}$ sauf peut-être pour $j = k$, on écrit les relations de récurrence pour la suite v_n et la suite $a_n v_n$ en faisant $n = M$, on multiplie la première par c, et on soustrait à la seconde ;

il vient alors $P_k(M)v_{M+k}(c - a_{M+k}) = 0$, ce qui avec les hypothèses faites montre que $a_{M+k} = c$.

On peut ensuite appliquer le résultat obtenu pour $n = M + 1$, on a que les valeurs $a_{M+1}, \cdots, a_{M+1+m-1}$ sont toutes égales à a_M, donc par le raisonnement précédent on a aussi que a_{M+m+1} est égale à a_M, et une récurrence immédiate termine la démonstration. □

Remarque 4.4.4. — Le résultat ne s'étend pas au cas où l'un des polynômes P_k, $1 \leq k \leq m-1$, est nul.

En effet, la suite récurrente linéaire vérifiant la récurrence $3w_{n+3} - 7w_{n+2} + 4w_n = 0$ (Le polynôme P_1 est donc nul) et les valeurs initiales $w_0 = 0$, $w_1 = 40, w_2 = 0$ (il s'agit de la suite $w_n = 32 - 5.2^n - 27(-1)^n\frac{2^n}{3^n}$), vérifie aussi $w_3 = 0$, de sorte qu'il y a dans le quadruplet $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ trois valeurs égales, mais la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.

Nous aurons besoin aussi du lemme qui suit, qui est particulier au cas d'ordre 3 :

Lemme 4.4.5. — *Soit A un sous-anneau de type fini de $\mathbb{C}$. Soient $P_k(y)$, $k = 0, 1, 2, 3$ quatre polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{C}$. On considère la relation de récurrence (R) suivante :*

$$P_3(y+k)w_{k+3} + P_2(y+k)w_{k+2} + P_1(y+k)w_{k+1} + P_0(y+k)w_k = 0$$

Soient $u_n(y)$, $v_n(y)$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}(y)$ vérifiant la relation de récurrence (R). On suppose qu'il existe une infinité de valeurs de n telles que $v_n(y)$ est non nul. Soit enfin a_n une suite d'éléments de A telles que l'on ait pour tout n $u_n(y) = a_n v_n(y)$. On suppose de plus que, pour tout $L \in \mathbb{C}$, l'ensemble des n tels que $a_n = L$ est fini. Alors a_n est une suite récurrente linéaire.

Démonstration. — Les quatre suites $u_n(y+1)$, $u_{n+1}(y)$, $v_n(y+1)$, $v_{n+1}(y)$ vérifient la même récurrence, qui est :

$$P_3(y+n+1)w_{n+3} + P_2(y+n+1)w_{n+2} + P_1(y+n+1)w_{n+1} + P_0(y+n+1)w_n = 0$$

Elles sont donc liées sur $\mathbb{C}(y)$. Soient h_0, h_1, h_2, h_3 des éléments non tous nuls de $\mathbb{C}(y)$ (que l'on peut supposer être des polynômes) tels que

$$h_0(y)u_{n+1}(y) + h_1(y)u_n(y+1) + h_2(y)v_{n+1}(y) + h_3(y)v_n(y+1) = 0$$

pour tout n assez grand.

On a donc :

$$(h_0(y)a_{n+1} + h_2(y))v_{n+1}(y) + (h_3(y) + h_1(y)a_n)v_n(y+1) = 0$$

On montre d'abord que $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$ et $h_3(y) + h_1(y)a_n$ sont non nuls à partir d'un certain rang.

On regarde le premier terme $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$. Si h_0 est non nul, ce polynôme ne peut être nul que si h_2 est de même degré que h_0, et si a_{n+1} est l'opposé du quotient des coefficients des termes de plus haut degré dans h_0 et h_2. Par l'hypothèse faite sur a_n, ceci n'est pas vrai à partir d'un certain rang.

Si maintenant h_0 est nul, il faut montrer que h_2 ne peut être nul. Si c'était le cas, on aurait la relation $(h_3(y) + h_1(y)a_n)v_n(y+1) = 0$. Comme l'un des polynômes h_1 ou h_3 est non nul (puisque l'un des h_k est non nul), un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que $h_3(y) + h_1(y)a_n$ est non nul à partir d'un certain rang, donc $v_n(y+1)$ est nul à partir de ce rang, ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

On montre de même que $h_3(y) + h_1(y)a_n$ est non nul à partir d'un certain rang.

On a donc que $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$ et de $h_3(y) + h_1(y)a_n$ sont non nuls à partir d'un certain rang.(Remarquer que cela donne aussi, puisqu'il existe une infinité d'entiers n tels que $v_n(y)$ n'est pas nul, que $v_n(y)$ est non nul à partir d'un certain rang).

Pour une fraction rationnelle non nulle $F = A/B$ où A et B sont des polynômes, nous appelons degré de F la différence entre les degrés de A et B.

Montrons maintenant que le degré de $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$ et celui de $h_3(y) + h_1(y)a_n$ sont constants à partir d'un certain rang.

Pour le premier terme $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$, c'est clair si h_0 est nul, on a vu que h_2 ne pouvait être nul. Supposons maintenant que h_0 est non nul, alors le degré de $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$ est différent du maximum des degrés des deux polynômes h_0 et h_2 que s'ils ont même degré, et si a_{n+1} est l'opposé du quotient des coefficients des termes de plus haut degré de ces polynômes. Comme a_n ne prend une valeur fixée qu'un nombre fini de fois, ceci est impossible pour n assez grand. Ceci vaut aussi pour $h_3(y) + h_1(y)a_n$

Pour n assez grand, le degré de $v_{n+1}(y)$ est donc égal au degré de $v_n(y)$ plus une constante $\delta \in \mathbb{Z}$, et le degré de $v_n(y)$ est de la forme $\delta n + \tau$. La fraction rationnelle $y^{-\delta n-\tau}v_n(y)$, admet donc une limite si $y \to \infty$, que l'on note b_n, et qui est non nulle.

Soit d_k le degré de P_k, et d le maximum de $d_k + \delta k + \tau$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$. On peut écrire pour $k \in \{0,1,2,3\}$ que $P_k(y+n)v_{n+k}(y) = y^{\delta n+\tau+d_k+\delta k}(y^{-d_k}P_k(y+n))(y^{-\delta(n+k)-\tau}v_{n+k}(y))$, de sorte qu'en multipliant

par $y^{-d-\delta n}$ la relation de récurrence vérifiée par $v_n(y)$, on a

$$\sum_{k=0}^{3} y^{d_k+\delta k+\tau-d}(y^{-d_k}P_k(y+n))(y^{-\delta(n+k)-\tau}v_{n+k}(y)) = 0.$$

Le terme $(y^{-d_k}P_k(y+n)$ admet une limite non nulle indépendante de n (c'est le coefficient du terme de plus haut degré de P_k) si $y \to \infty$, et comme $d_k + \delta k + \tau - d \leq 0$ pour tout k, le terme $y^{d_k+\delta k+\tau-d}$ admet une limite qui est soit nulle, soit égale à 1 si $d = d_k + \delta k + \tau$, ce qui se produit au moins une fois. Donc $y^{d_k+\delta k+\tau-d}(y^{-d_k}P_k(y+n))$ admet une limite L_k indépendante de n pour $k \in \{0,1,2,3\}$, et l'un des L_k est non nul. D'autre part $y^{-\delta(n+k)-\tau}v_{n+k}(y)$ converge vers b_{n+k} non nul.

Il vient donc que

$$\sum_{k=0}^{3} L_k b_{n+k} = 0$$

et de même en utilisant $u_n(y)$:

$$\sum_{k=0}^{3} L_k a_{n+k} b_{n+k} = 0$$

Les deux suites b_m et $a_m b_m$ sont donc récurrentes linéaires, on a $b_m \neq 0$ pour tout m, leur quotient est $a_m \in A$, donc par le théorème du quotient de Hadamard, a_m est une suite récurrente linéaire. □

4.5. Preuve du théorème 1.1.3.

4.5.1. Mise en place.— On a vu que le déterminant $B_3(n,y)$ était nul (voir le lemme 4.4.2).

On pose :

$R_1 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+1})(a_{n+3} - a_n)$.
$R_2 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+3})(a_{n+1} - a_n)$
$R_3 = (a_{n+5} - a_{n+3})(a_{n+4} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n)$
$R_4 = (a_{n+5} - a_{n+3})(a_{n+4} - a_{n+2})(a_{n+1} - a_n)$
$R_5 = (a_{n+5} - a_{n+4})(a_{n+3} - a_n)(a_{n+2} - a_{n+1})$
$R_6 = (a_{n+5} - a_{n+4})(a_{n+3} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n)$
$R_7 = (a_{n+5} - a_{n+4})(a_{n+3} - a_{n+2})(a_{n+1} - a_n)$

On remarque aussi que si l'on pose

$$J(y) = \frac{P_2(y)P_0(y+1)}{P_1(y)P_1(y+1)} \quad \text{et} \quad K(y) = \frac{P_3(y)P_0(y+1)P_0(y+2)}{P_1(y)P_1(y+1)P_1(y+2)}$$

et si w_n est une solution de la récurrence de départ, la suite $t_n = w_n \prod_{k=N}^{n-1} \frac{P_1(k)}{P_0(k)}$ vérifie la récurrence :

$$K(n)t_{n+3} + J(n)t_{n+2} + t_{n+1} + t_n = 0$$

Il est clair qu'en faisant ce procédé à la fois sur u_n et v_n, ce qui ne change pas leur quotient, on peut simplement considérer les récurrences de cette forme, ce que nous allons faire à partir de ce qui suit.

On obtient en calculant le déterminant $B_3(n, y)$, la relation :

$$R_1K(y)K(y+1) - R_2(J(y+1)-1)K(y+1) - R_3J(y)K(y+1) - R_5J(y+2)(K(y)$$

$$-J(y)J(y+1)) + R_7(K(y+1) + J(y)J(y+1)J(y+2) - J(y+1)J(y+2)) = 0$$

Le fait que le déterminant $B_3(n, y)$ est nul veut dire que les colonnes de ce déterminant $B_3(n, y)$ sont liées (noter que le corps de base n'est plus $\mathbb{C}$, mais $\mathbb{C}(y)$ dans ce qui suit).

On fixe m, et on se donne une combinaison linéaire non triviale entre les colonnes du déterminant, avec des coefficients $c_{k,m}(y)$, $0 \leq k \leq 5$ qui sont donc des éléments de $\mathbb{C}(y)$, non tous nuls. On peut clairement supposer que ce sont des polynômes premiers entre eux. Le coefficient $c_{5,m}$ est affecté à la première colonne, etc.

On obtient deux séries d'égalités.

La première concerne les lignes $1, 3, 5$, où ne figurent pas les a_m. On trouve :

$$K(y)c_{3,m}(y) + J(y)c_{2,m}(y) + c_{1,m}(y) + c_{0,m}(y) = 0$$

$$K(y+1)c_{4,m}(y) + J(y+1)c_{3,m}(y) + c_{2,m}(y) + c_{1,m}(y) = 0$$

$$K(y+2)c_{5,m}(y) + J(y+2)c_{4,m}(y) + c_{3,m}(y) + c_{2,m}(y) = 0$$

Soit F la relation de récurrence

$$K(y+k)w_{k+3} + J(y+k)w_{k+2} + w_{k+1} + w_k = 0$$

Soit $v_{k,m}(y)$ la suite holonome d'éléments de $\mathbb{C}(y)$ vérifiant F telle que $v_{k,m}(y) = c_{k,m}(y)$ pour $k = 0, 1, 2$. Le fait que $K(X)$ est non nul, et les relations précédentes montrent que $v_{k,m}(y) = c_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5$.

On regarde maintenant les autres lignes :

$$K(y)c_{3,m}(y)a_{m+3} + J(y)c_{2,m}(y)a_{m+2} + c_{1,m}(y)a_{m+1} + c_{0,m}(y)a_m = 0$$

$$K(y+1)a_{m+4}c_{4,m}(y) + J(y+1)a_{m+3}c_{3,m}(y) + a_{m+2}c_{2,m}(y) + a_{m+1}c_{1,m}(y) = 0$$

$$K(y+2)a_{m+5}c_{5,m}(y) + J(y+2)a_{m+4}c_{4,m}(y) + a_{m+3}c_{3,m}(y) + a_{m+2}c_{2,m}(y) = 0$$

On fait de même, en introduisant la suite holonome $u_{k,m}(y)$ vérifiant F avec $u_{k,m}(y) = a_{m+k}c_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 2$, et les relations précédentes montrent que $u_{k,m}(y) = a_{m+k}c_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5$.

On a donc obtenu que $u_{k,m}(y) = a_{m+k}v_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5$.

On reprend maintenant la matrice $A_3(m, y)$ et on y supprime les lignes $1, 2$, et la colonne 6.

On trouve la matrice $M_m(y)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & K(y+1) & J(y+1) & 1 & 1 \\ 0 & a_{m+4}K(y+1) & a_{m+3}J(y+1) & a_{m+2} & a_{m+1} \\ K(y+2) & J(y+2) & 1 & 1 & 0 \\ a_{m+5}K(y+2) & a_{m+4}J(y+2) & a_{m+3} & a_{m+2} & 0 \end{pmatrix}$$

qui a donc 4 lignes et 5 colonnes. Le 5 -uplet

$$[v_{5,m}(y), v_{4,m}(y), v_{3,m}(y), v_{2,m}(y), v_{1,m}(y)]$$

est solution du système associé à la matrice $M_m(y)$.

On regarde maintenant $A_3(m+1, y+1)$, et cette fois-ci on y supprime la ligne 5 et la ligne 6, et la première colonne.

On vérifie que l'on retrouve la matrice $M_m(y)$. Le 5-uplet

$$[v_{4,m+1}(y+1), v_{3,m+1}(y+1), v_{2,m+1}(y+1), v_{1,m+1}(y+1), v_{0,m+1}(y+1)]$$

est solution du système associé. On a donc deux solutions du système associé à la matrice $M_m(y)$, et on peut remarquer que les deux solutions sont non triviales.

4.5.2. Le rang de la matrice $M_m(y)$.— Le rang de la matrice $M_m(y)$ est au moins deux, car le déterminant formé avec les lignes 1,3 et les colonnes 1,2 est non nul.

Si le rang est égal à 2 pour un entier m fixé, on voit en utilisant les déterminants d'ordre 3 formés avec les lignes $1, 2, 3$, et les colonnes $1, 2, k$ avec $k = 3, 4, 5$, qui sont donc nuls, que l'on a $a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+3} = a_{m+4}$ (on a supposé que les polynômes P_k étaient non nuls). On sait qu'alors la suite a_n est constante à partir de $m + 1$.

Il nous reste donc deux cas :

A) Il existe un entier N tel que si $m \geq N$, le rang de $M_m(y)$ est 4 ;

B) Il existe une infinité d'entiers m tels que le rang de $M_m(y)$ est 3.

4.5.3. Le cas de rang 4.— On suppose donc dans cette partie que le rang de $M_m(y)$ est 4 à partir d'un certain rang. Dans ce cas, les deux 5-uplets solution trouvés sont proportionnels. Il existe donc $\theta_m(y)$ non nul dans $\mathbb{C}(y)$ tel que $v_{k+1,m}(y) = \theta_m(y)v_{k,m+1}(y+1)$ pour $k = 0, \cdots, 4$.

La suite $k \to v_{k,m+1}(y+1)$ vérifie la récurrence G suivante :

$$K(y+1+k)w_{k+3} + J(y+1+k)w_{k+2} + w_{k+1} + w_k = 0$$

et il en est de même de la suite $k \to v_{k+1,m}(y)$. Par suite c'est le cas aussi de la suite $\tau_k = v_{k+1,m}(y) - \theta_m(y)v_{k,m+1}(y+1)$, qui est nulle pour $k = 0, \cdots, 4$. Donc elle est nulle pour tout k en utilisant la relation de récurrence G.

On a aussi que $\eta_k = u_{k+1,m}(y) - \theta_m(y)u_{k,m+1}(y+1)$ est nulle pour tout k par le même argument.

En particulier, on a $u_{6,m}(y) = \theta_m(y)u_{5,m+1}(y+1)$ et $v_{6,m}(y) = \theta_m(y)v_{5,m+1}(y+1)$. Mais $u_{5,m+1}(y+1) = a_{m+6}v_{5,m+1}(y+1)$, donc $u_{6,m}(y) = a_{m+6}v_{6,m}(y)$.

On a donc $u_{k,m}(y) = a_{m+k}v_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 6$.

Supposons montré que pour tout m, on a $u_{k,m}(y) = a_{m+k}v_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5+q$; on vient de le faire pour $q = 1$. On a $u_{k+1,m}(y) = \theta_m(y)u_{k,m+1}(y+1)$ et $v_{k+1,m}(y) = \theta_m(y)v_{k,m+1}(y+1)$ pour tout k. Comme $u_{k,m+1}(y+1) = a_{k+m+1}v_{k,m+1}(y+1)$ pour $0 \leq k \leq 5+q$, on a $u_{k+1,m}(y) = a_{k+1+m}v_{k+1,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq q+5$, et donc $u_{k,m}(y) = a_{k+m}v_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5+q+1$.

On a donc finalement que $u_{k,m}(y) = a_{m+k}v_{k,m}(y)$ pour tout $k \geq 0$.

On note aussi que l'on ne peut avoir $v_{k,m}(y)$ nul à partir d'un certain rang ; en effet, ceci impliquerait par la relation de récurrence que $v_{k,m}(y)$ soit nul pour tout k, ce qui n'est pas vrai.

On fixe maintenant m, on pose $u_n^*(y) = u_{n,m}(y)$, $v_n^*(y) = v_{k,m}(y)$, et $a_n^* = a_{n+m}$. L'hypothèse faite sur a_n assure que a_n^* appartient à un sous-anneau A de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Z}$, et les autres hypothèses du lemme 4.4.5 sont vérifiées, par suite a_n^* est une suite récurrente linéaire, et donc a_n également.

4.5.4. On suppose que le rang de $M_n(y)$ est 3 pour une infinité d'entiers.— Dans ce cas, on récupère pour un tel entier donné n et fixé tel que la matrice soit de rang 3, que tous les déterminants extraits d'ordre 4 sont nuls. On note tout de suite que l'on peut sans problèmes remplacer $y+1$ par y dans la matrice $M_n(y)$. Notons C_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ les colonnes de ce déterminant. Nous allons utiliser l'annulation de trois de ces déterminants extraits :

L'annulation du déterminant construit en éliminant la colonne C_3 donne après simplification :

Relation L1 :

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+2})K(y) - (a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+4})J(y+1) = 0$$

L'annulation du déterminant construit en éliminant la colonne C_2 donne après simplification :

Relation L2 :

$$(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+2})J(y) - (a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+3}) = 0$$

Enfin, l'annulation du déterminant construit en éliminant la colonne C_4 donne après simplification :

Relation L3 :

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+3})K(y) - (a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+4})J(y)J(y+1) = 0$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui n'utilise que le fait que le déterminant $B_3(n, y)$ est nul pour tout n assez grand :

Lemme 4.5.1. — *On se place sous les hypothèses du théorème 4.1.3, de sorte que le déterminant $B_3(n, y)$ est nul pour n assez grand. Alors :*

a) Si on a $J(y) = 1$, et s'il existe une infinité d'entiers m tels que $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$, alors a_n est récurrente linéaire ;

b) Si on a $J(y)J(y+1) = K(y)$, et s'il existe une infinité d'entiers m tels que $a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5}$, alors a_n est récurrente linéaire.

Démonstration. — a) On reprend la relation $B_3(n, y) = 0$ pour tout n assez grand, disons $n \geq N$, qui devient :

$$R_1(a, n)K(y)K(y+1) + (R_7(a, n) - R_3(a, n))K(y+1) - R_5(a, n)(K(y) - 1) = 0$$

On peut choisir l'entier m de telle sorte que les valeurs introduites à partir de m dans ce qui suit soient toutes plus grandes que N

Prenons tout d'abord $n = m + 2$. On a donc $a_{n+2} = a_{n+3}$. On trouve que $R_7 = 0$, et $R_3 = R_1$. La relation $B_3(n, y) = 0$ devient

$$(K(y) - 1)(R_1K(y+1) - R_5) = 0$$

Si R_1 ou R_5 est non nul, on en déduit que $K(y)$ est constant ; par suite, on est ramené au cas du théorème du quotient de Hadamard.

Si R_1 et R_5 sont nuls, on récupère les égalités

$$(a_{m+7} - a_{m+4})(a_{m+6} - a_{m+3})(a_{m+5} - a_{m+2}) = 0$$

et

$$(a_{m+7} - a_{m+6})(a_{m+5} - a_{m+2})(a_{m+4} - a_{m+3}) = 0$$

Si $a_{m+7} = a_{m+4}$, on utilise les indices $m + k$, $k = 4, 5, 6, 7$, où il y a trois valeurs égales pour a_n, et a_n est constante à partir de $m + 4$.

Si $a_{m+5} = a_{m+2}$, on utilise les indices $m + k$, $k = 2, 3, 4, 5$, où il y a trois valeurs égales pour a_n, et a_n est constante à partir de $m + 1$.

On a donc $a_{m+6} = a_{m+3}$. Il en résulte que $(a_{m+7} - a_{m+3})(a_{m+5} - a_{m+2})(a_{m+4} - a_{m+3}) = 0$

Si $a_{m+5} = a_{m+2}$, cas déjà vu, et a_n est constante à partir de $m+2$.

Si $a_{m+4} = a_{m+3}$, on a $a_{m+3} = a_{m+4} = a_{m+5} = a_{m+6}$, et a_n est constante à partir de $m+3$.

On a donc nécessairement que $a_{m+3} = a_{m+6} = a_{m+7}$.

Posons maintenant $m' = m+2$. On a donc $a_{m'+1} = a_{m'+4} = a_{m'+5}$, et toujours $J(y) = 1$. Le raisonnement fait ci-dessus conduit donc à $a_{m'+3} = a_{m'+6} = a_{m'+7}$, soit à $a_{m+5} = a_{m+8} = a_{m+9}$. Si on pose alors $m^* = m+4$, on a $a_{m^*+1} = a_{m^*+4} = a_{m^*+5}$, et par suite $a_{m^*+3} = a_{m^*+6} = a_{m^*+7}$, donc $a_{m+7} = a_{m+10} = a_{m+11}$. Par récurrence, on montre que $a_{4(k+1)+m} = a_{m+4k+1} = a_{m+1}$, $a_{4k+2+m} = a_{4k+3+m} = a_{m+3}$ pour tout k assez grand, contrairement aux hypothèses faites, ce qui termine la démonstration.

b) En tenant compte du fait que K et J sont non nuls, il vient la relation :

$$R_1 J(y)J(y+1) + (R_7 - R_3)J(y) - R_2(J(y+1) - 1) = 0$$

Posons $n = m-1$, de sorte que $a_{n+2} = a_{n+3}$. Dans ce cas, on a $R_1 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n)$, $R_2 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+2})(a_{n+1} - a_n)$, $R_3 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n) = R_1$, $R_7 = 0$. La relation devient $(R_1 J(y) - R_2)(J(y+1) - 1) = 0$, et si R_1 ou R_2 est non nul, cela implique que $J(y)$ est constant, donc aussi $K(y)$, et on a terminé.

Donc $R_1 = R_2 = 0$. On revient à la variable m :

$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+3} - a_m)(a_{m+1} - a_{m-1}) = 0$ et $(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+3} - a_{m+1})(a_m - a_{m-1}) = 0$.

Comme a_{m+4} n'est pas égal à a_{m+1}, on a $(a_{m+3} - a_m)(a_{m+1} - a_{m-1}) = 0$. Si $a_{m+3} \neq a_m$, on a $a_{m+1} = a_{m-1}$, et a_n est constante à partir de $m-1$ puisque $a_{m-1} = a_{m+1} = a_{m+2}$.

On a donc $a_{m+3} = a_m$. Il vient alors que $(a_m - a_{m+1})(a_m - a_{m-1}) = 0$. Si $a_m = a_{m+1}$, on a a_n constante à partir de m.

Par suite $a_{m-1} = a_m = a_{m+3}$.

Posons $m^* = m-2$, on a obtenu $a_{m^*+1} = a_{m^*+2} = a_{m^*+5}$. Comme a_n n'est pas constante, on trouve par le raisonnement précédent que $a_{m^*-1} = a_{m^*} = a_{m^*+3}$, soit encore que $a_{m-3} = a_{m-2} = a_{m+1}$, ou $a_{(m-4)+1} = a_{(m-4)+2} = a_{(m-4)+5} = a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5}$. On a alors par récurrence que, pour tout k tel que $m-4k$ soit assez grand, $a_{(m-4k)+1} = a_{(m-4k)+2} = a_{(m-4k)+5} = a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5} = \alpha_m$. Comme on a $a_{m-1} = a_m = a_{m+3}$, le même raisonnement donne que $a_{(m-4k)-1} = a_{(m-4k)} = a_{(m-4k)+3} = a_{m-1} = a_m = a_{m+3} = \beta_m$.

Soit A l'ensemble des entiers m, qui par hypothèse est infini. Pour $m \in A$, posons $m = 4q_m + h_m$, avec $h_m \in \{0,1,2,3\}$. Quitte à se restreindre à une partie infinie B de A, on peut supposer que h_m est une constante h. On obtient

donc pour $m \in B$ que $a_{4(q_m-k)+h+j}$ est égal à α_m si $j = 1, 2$, et β_m si $j = 0, 3$. En tenant compte de la contrainte que $m-4k$ doit être assez grand, et en posant $l = q_m - k$, il en résulte qu'il existe une constante c tel que si $c \leq l \leq q_m$, on a $a_{4l+h+j} = \alpha_m$ si $j = 1, 2$, et β_m si $j = 0, 3$. Donc α_m et β_m sont constants pour $m \in B$. Comme q_m tend vers l'infini si $m \in B$ tend vers l'infini, on en conclut que a_n est constante sur les progressions arithmétiques modulo 4, contrairement aux hypothèses faites, et cela termine la démonstration.

□

On va maintenant étudier successivement trois cas pour des entiers m, tel que le rang de $M_m(y)$ est trois (il y a par hypothèse une infinité de tels m), et donc les relations L_1, L_2, L_3 sont vérifiées pour m. L'outil principal sera le lemme 4.4.3.

4.5.4.1. Cas $K(y)$ et $J(y+1)$ liés, et $K(y)$ et $J(y)J(y+1)$ liés.— On voit immédiatement que ceci implique que $J(y)$ et $K(y)$ sont des constantes, et on est ramené au théorème du quotient de Hadamard.

4.5.4.2. Le cas où $K(y)$ et $J(y+1)$ ne sont pas liés.— Par la relation L1, il vient que $(a_{m+4}-a_{m+1})(a_{m+5}-a_{m+2}) = 0$ et $(a_{m+2}-a_{m+1}))(a_{m+5}-a_{m+4}) = 0$. On a donc en particulier que soit $a_{m+4} = a_{m+1}$ pour une infinité de valeurs de m, soit $a_{m+5} = a_{m+2}$ pour une infinité de valeurs de m.

Premier cas : On a $a_{m+4} = a_{m+1}$ pour une infinité de valeurs de m. Ceci implique que $(a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+1}) = 0$. Si on a $a_{m+2} = a_{m+1}$, on a pour les indices $m + k$, $k = 1, 2, 3, 4$, 3 valeurs égales, et a_n est constant à partir de $m + 1$ par le lemme 4.4.3, que nous allons utiliser un bon nombre de fois, ce qui est contraire aux hypothèses faites.

On a donc $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$.

La relation L2 devient

$$(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+2} - a_{m+1})(1 - J(y)) = 0$$

Si $a_{m+3} = a_{m+1}$, on a encore a_n constante à partir de $m + 1$ en utilisant les indices $m + k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Si $a_{m+2} = a_{m+1}$, c'est pareil.

On a donc $J(y) = 1$.

Nous avons obtenu que $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$, et $J(y) = 1$. On peut alors utiliser le lemme 4.5.1, a), ce qui termine la preuve.

Second cas : On suppose que $a_{m+5} = a_{m+2}$ pour une infinité de valeurs de m. On a alors que $(a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+2} - a_{m+4}) = 0$. Si $a_{m+4} = a_{m+2}$, on voit encore que a_n est constante à partir de $m + 2$.

On a donc $a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5}$.

La relation L3 donne que

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+3} - a_{m+1})(J(y)J(y+1) - K(y)) = 0$$

Si $a_{m+4} = a_{m+1}$ ou si $a_{m+3} = a_{m+1}$, on trouve encore que a_n est constante à partir de $m+1$; on suppose donc que $a_{m+4} \neq a_{m+1}$ et que $a_{m+3} \neq a_{m+1}$. On a alors $J(y)J(y+1) - K(y) = 0$, et $a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5}$. On peut alors utiliser le lemme 4.5.1, b), ce qui termine la démonstration.

4.5.4.3. Le cas où $K(y)$ et $J(y)J(y+1)$ sont linéairement indépendants.— Ceci donne grâce à la relation L3 les égalités suivantes :

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+3}) = 0$$

et

$$(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+4}) = 0$$

Premier cas : On a $a_{m+4} = a_{m+1}$ pour une infinité de valeurs de m. Il en résulte que $(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+1}) = 0$.

Si $a_{m+3} = a_{m+1}$, on a trois valeurs égales pour a_n parmi les indices $m+k$, $k = 1, 2, 3, 4$, et a_n est constante à partir de $m+1$.

Sinon, on a $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$.

La relation L2 donne que

$$(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+2} - a_{m+1})(1 - J(y)) = 0$$

Comme on peut supposer que $a_{m+1} \neq a_{m+3}$, on a si $J(y) \neq 1$, $a_{m+2} = a_{m+1}$ et encore a_n constante en utilisant les indices $m+k$, $k = 1, 2, 3, 4$

Donc on a $1 = J(y)$, $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$, et on peut utiliser le lemme 4.5.1, a), ce qui termine la démonstration.

Second cas : On a $a_{m+5} = a_{m+3}$ pour une infinité de valeurs de m. On a alors par la seconde relation que soit $a_{m+3} = a_{m+4}$, auquel cas $a_{m+3} = a_{m+4} = a_{m+5}$, et on a a_n constante à partir de $m+3$, ou alors $a_{m+1} = a_{m+3} = a_{m+5}$. La relation L1 donne $(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+1} - a_{m+2})K(y) - (a_{m+2} - a_{m+1})((a_{m+1} - a_{m+4})J(y+1) = 0$, et comme une des égalités $a_{m+4} = a_{m+1}$ ou $a_{m+2} = a_{m+1}$ permet encore de montrer a_n constante à partir d'un certain rang, on a $K(y) = J(y+1)$.

Nous revenons maintenant à la récurrence de départ, qui est donc

$$J(n+1)w_{n+3} + J(n)w_{n+2} + w_{n+1} + w_n = 0$$

Pour une solution quelcoque w_n de cette récurrence, posons $\delta_n = J(n)w_{n+2} + w_n$. On a alors $\delta_{n+1} + \delta_n = 0$. Il en résulte que l'on $\delta_n = (-1)^n \delta_0$. Posons alors $t'_n = w_{2n}$ et $t''_n = w_{2n+1}$. On a alors $J(2n)t'_{n+1} + t'_n = \delta_0$ et $J(2n+2)t'_{n+2} + t'_{n+1} = \delta_0$, d'où $J(2n+2)t'_{n+2} - (J(2n) - 1)t'_{n+1} - t'_n = 0$. Cette récurrence est donc vérifiée par les deux suites v_{2n} et $u_{2n} = a_{2n}v_{2n}$; donc la suite a_{2n} est récurrente linéaire par le théorème 4.1.3. On vérifie de même que la suite a_{2n+1} est récurrente linéaire, et il en résulte que la suite a_n est récurrente linéaire, ce qui démontre l'assertion.

4.6. Preuve du théorème 1.1.4

4.6.1. Quelques lemmes. — On note M la matrice dont les coefficients de la i-ème ligne sont les $P_{s+1-j}(n)a_i(n+s+1-j)$, où i varie entre 0 et $s-1$, et j entre 1 et $s+1$. C'est donc une matrice à s lignes et $s+1$ colonnes.

On note T la matrice obtenue en remplaçant les $P_j(n)$ par 1 dans la matrice M.

On fabrique la matrice N à $s+2$ lignes et colonnes en bordant la matrice M de la manière suivante : On rajoute une première colonne de termes nuls (qui sera la colonne d'indice 0), pour $0 \leq i \leq s-1$, et on rajoute les deux lignes d'indice $i = s$ et $i = s+1$ qui sont

$$[P_s(n+1), P_{s-1}(n+1), \cdots, P_0(n+1), 0]$$

et

$$[P_s(n+1)a_{s-1}(n+s+1), P_{s-1}(n+1)a_{s-1}(n+s), \cdots, P_0(n+1)a_{s-1}(n+1), 0]$$

Lemme 4.6.1. — *Soit n un entier assez grand, fixé. Soit m un entier appartenant à $\{1, \cdots, s\}$. Le déterminant de la matrice T_m obtenue à partir de T en y supprimant la colonne d'indice m est non nul.*

Démonstration. — On va raisonner par l'absurde, et supposer que ce déterminant est nul. Dans ce cas, il existe une combinaison linéaire non triviale des lignes de T_m qui est nulle. Il existe donc des $\mu_i \in \mathbb{C}$, non tous nuls (qui peuvent dépendre de n, mais n est fixé), tels que l'on ait

$$\sum_{i=0}^{s-1} \mu_i a_i(n+s+1-j) = 0$$

pour $j = 1, \cdots, s+1$, $j \neq m$. Posons $b(q) = \sum_{i=0}^{s-1} \mu_i a_i(q)$ et

$$u(q) = b(q)v(q) = (\sum_{i=0}^{s-1} \mu_i a_i(q))v(q) = \sum_{i=0}^{s-1} \mu_i u_i(q)$$

qui est une solution de l'équation aux différences (E) nulle pour tout $q = n+j$, $1 \leq j \leq s+1$, $j \neq m$. Par le lemme 4.4.3, la suite $u(q)$ est nulle à partir de n, ceci contredit l'indépendance linéaire des $u_i(q)$ et termine la démonstration. □

Lemme 4.6.2. — *Pour $1 \leq k \leq s$, on note*

$$Q_k(y) = P_{s-k}(y+1)(\prod_{1 \leq j \leq s+1, j \neq k} P_{s+1-j}(y))$$

Le déterminant de la matrice N est donné par la formule suivante :

$$P_s(n+1)\sum_{1\leq k\leq s}(-1)^k(a_{s-1}(n+s+1)-a_{s-1}(n+s+1-k))Q_k(n)\det(T_k)$$

où T_k est la matrice obtenue à partir de la matrice T en y supprimant la colonne d'indice k, $1\leq k\leq s$.

Démonstration. — On va développer par rapport aux deux dernières lignes. On développe par rapport à la dernière ligne, on choisit tout d'abord un indice j, $0\leq j\leq s+1$, et on voit que puisqu'il y a un zéro en dernière place, on peut se limiter aux j tels que $j\leq s$. Le déterminant de N prend la forme :

$$\sum_{0\leq j\leq s}(-1)^{s+1-j}P_{s-j}(n+1)a_{s-1}(n+s+1-j)\Gamma_j$$

où Γ_j est le déterminant de la matrice N privée de sa dernière ligne, et de sa colonne d'indice j.

On considère maintenant Γ_j, et on le développe par rapport à sa dernière ligne, en repérant toujours les colonnes par les indices $0,\cdots,s+1$, dont on a enlevé le terme j.

Supposons $j\neq 0$, ce qui veut dire que la première colonne de N n'a pas été supprimée pour obtenir Γ_j. Dans ce cas, le déterminant Γ_j est égal à $(-1)^sP_s(n+1)\det(M_j)$, où M_j est la matrice M privée de sa colonne d'indice j, $1\leq j\leq s$.

Supposons maintenant que $j=0$. On développe alors, le terme correspondant à l'indice k de colonne $(1\leq k\leq s)$ est $(-1)^{s+1-k}P_{s-k}(n+1)\det(M_k)$

Finalement, on trouve une première formule, qui est

$$P_s(n+1)\sum_{k=1}^{s}(-1)^kP_{s-k}(n+1)(a_{s-1}(n+s+1)-a_{s-1}(n+s+1-k))\det(M_k)$$

On voit tout de suite que

$$\det(M_k)=(\prod_{1\leq j\leq s+1,j\neq k}P_{s+1-j}(n))\det(T_k)$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

4.6.2. Preuve du théorème 4.1.4. — On commence par écrire que $v(n)$ et les $u_j(n)$, $1\leq j\leq s-1$ sont solutions de (E) en remplaçant les $u_j(n)$ en fonction des $a_j(n)$ et de $v(n)$; ceci étant fait, on change dans l'équation vérifiée par $v(n)$ l'indice n par $n+1$, et on fait de même pour l'équation vérifiée par $a_{s-1}(n)v(n)$. On obtient un système linéaire homogène d'équations, dont $(v_n,\cdots,v_{n+s+1})$ est une solution, qui par hypothèse n'est pas la solution nulle. La matrice du système est N, et donc son déterminant est nul.

Des lemmes 4.4.1 et 4.6.2, il résulte que l'on va avoir en raison de l'hypothèse que les $a_j(n)$ sont dans G_d pour un groupe de type fini G et un entier d convenables des égalités polynomiales :

$$\sum_{1\leq k\leq s}(-1)^k(a_{s-1}(n+s+1)-a_{s-1}(n+s+1-k))Q_k(y))\det(T_k)=0$$

Nous allons commencer par le cas où $s=2$.

Dans ce cas, on peut expliciter la relation, qui devient (en notant $a_n = a_1(n)$) :

$$P_2(y)P_0(y+1)(a_{n+3}-a_{n+1})(a_{n+2}-a_n)-P_1(y)P_1(y+1)(a_{n+3}-a_{n+2})(a_{n+1}-a_n)=0$$

Si les polynômes $P_2(y)P_0(y+1)$ et $P_1(y)P_1(y+1)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, leurs coefficients sont nuls pour tout n. Dans ce cas, on a les deux relations $(a_{n+3}-a_{n+1})(a_{n+2}-a_n)=0$ et $(a_{n+3}-a_{n+2})(a_{n+1}-a_n)=0$. La première montre que pour tout n, on a parmi les $s+1=3$ valeurs $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$, au moins deux qui sont égales, ou parmi les valeurs a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, au moins deux qui sont égales. On applique alors le lemme 4.4.3, qui montre que la suite a_n est constante à partir d'un certain rang, et ceci termine la preuve dans ce premier cas.

Si les polynômes sont dépendants, comme ils sont non nuls, il existe une constante λ telle que $P_1(y)P_1(y+1)=\lambda P_2(y)P_0(y+1)$. Nous allons dans ce cas étudier les solutions de la récurrence.

On note N un entier tel que si $n\geq N$, on ait $P_0(n)P_1(n)P_2(n)\neq 0$. Soit pour $n\geq N+1$, t_n la suite définie par $t_n=\prod_{k=N}^{n-1}\frac{P_0(k)}{P_1(k)}$. Soit w_n une solution quelconque de la récurrence, et $x_n=\frac{w_n}{t_n}$. On vérifie immédiatement que l'on a $\lambda^{-1}x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=0$, ce qui ramène l'énoncé à démontrer au théorème du quotient de Hadamard, et ceci termine la démonstration.

Dans la suite, on suppose que $s\geq 3$. La démonstration va se dérouler suivant le même schéma de preuve, mais avec quelques complications techniques.

Soient m,l deux indices fixés, distincts, appartenant à $\{1,\cdots,s\}$. On va appliquer ce qui précède en remplaçant a_{s-1} par une combinaison linéaire $d(n)=\lambda_1 a_1(n)+\cdots+\lambda_{s-1}a_{s-1}(n)$, en imposant que $d(n+s+1)=d(n+s+1-j)$ pour $1\leq j\leq s$ et $j\neq m,l$, et aussi que le coefficient λ_{s-1} ne soit pas nul (on va le prendre égal à 1), ce qui implique l'indépendance linéaire de $a_i(q)$, $0\leq i\leq s-2$ et de $d(q)$.

En écrivant que $d(n+s+1-j)-d(n+s+1)=0$ pour $1\leq j\leq s$ et $j\neq m,l$, on trouve le système (S) aux inconnues λ_i, $i=1,\cdots,s-2$

$$\sum_{i=1}^{s-2}\lambda_i(a_i(n+s+1-j)-a_i(n+s+1))=a_{s-1}(n+s+1)-a_{s-1}(n+s+1-j)$$

La matrice de ce système est la matrice $(a_i(n+s+1-j)-a_i(n+s+1))$, $1\leq i\leq s-2$, $j\neq m,l$. Il suffit donc de montrer que le déterminant de cette matrice est non nul pour prouver cette assertion.

Considérons la matrice $T_{m+1}(n+1)$ dont le déterminant est non nul par le lemme 4.6.1. On commence par modifier cette matrice en soustrayant la première colonne de cette matrice à toutes les autres, puis on considère la matrice extraite obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne. On trouve la matrice $(a_i(n+s+2-h)-a_i(n+1+s))$, avec $1\leq i\leq s-1$, et $2\leq h\leq s+1$, $h\neq m+1$. (En effet, pour obtenir $T_{m+1}(n+1)$, comme $m+1\geq 2$, on n'a pas enlevé la première colonne de $T(n+1)$).

On change l'indice h en le posant égal à $j+1$, où j varie entre 1 et s, et $j\neq m$. La matrice devient $(a_i(n+s+1-j)-a_i(n+1+s))$. avec $1\leq i\leq s-1$, $1\leq j\leq s$, et $j\neq m$.

On développe maintenant le déterminant de la matrice précédente suivant la colonne d'indice l. Comme ce déterminant est non nul, on en déduit qu'il existe un indice i_0 tel que le mineur égal au déterminant de la matrice $(a_i(n+s+1-j)-a_i(n+1+s))$. avec $1\leq i\leq s-1, i\neq i_0$, $1\leq j\leq s$, et $j\neq m,l$ est non nul. Quitte à renuméroter les a_i, on peut supposer que $i_0=s-1$; le système (S) précédent aux inconnues λ_i est alors un système de Cramer, ce qui prouve l'assertion.

On obtient que la somme des deux expressions suivantes est nulle :

$$(-1)^m(d(n+s+1)-d(n+s+1-m)Q_m(y)\det(T_m)$$

et

$$(-1)^l(d(n+s+1)-d(n+s+1-l)Q_l(y)\det(T_l)$$

Le lemme 4.6.1 donne que $\det(T_m)$ et $\det(T_l)$ sont non nuls tous les deux. Donc comme tous les polynômes P_k sont non nuls, si l'un des termes $d(n+s+1-m)-d(n+s+1)$ ou $d(n+s+1-l)-d(n+s+1)$ est nul, l'autre aussi ; par le lemme 4.4.3, la suite $d(q)$ serait constante, ce qui par l'indépendance linéaire des $a_i(q)$ contredirait le fait que λ_{s-1} est non nul.

On a obtenu une relation de dépendance non triviale entre Q_m et Q_l. En simplifiant cette relation, on voit qu'il existe $\delta_{m,l}$ non nul, tel que $P_{s-m}(y+1)P_{s+1-l}(y)=\delta_{m,l}P_{s-l}(y+1)P_{s+1-m}(y)$.

Pour $l = s$, on obtient que pour $k = 0, \dots s-1$ on a
$P_{k+1}(y) = \mu_k \varphi(y) P_k(y+1)$ où $\mu_k = \dfrac{1}{\delta_{s-k,s}}$, $\varphi(y) = \dfrac{P_1(y)}{P_0(y+1)}$.
On vérifie alors par récurrence sur $k = 1 \dots, s$ que

$$P_k(y) = P_0(y) \prod_{i=0}^{k-1} \left(\mu_i \frac{P_1(y+i)}{P_0(y+i)} \right)$$

Si on pose $\theta_k = \prod_{i=0}^{k-1} \mu_i$, et $\eta_n = \displaystyle\prod_{m=N_0}^{n-1} \frac{P_1(m)}{P_0(m)}$ pour n assez grand et N_0 convenable (qui est une suite holonome inversible), toute suite w_n vérifiant l'équation aux différences (E) de départ sera telle que la suite $t_n = \eta_n w_n$ va vérifier la relation de récurrence à coefficients constants (F) suivante :

$$\sum_{k=0}^{s} \theta_k t_{n+k} = 0$$

et on est alors ramené au théorème du Quotient de Hadamard, ce qui termine la preuve.

4.6.3. Preuve du corollaire 4.1.5. — Le premier cas est celui, trivial, où la suite a_n est constante à partir d'un certain rang, ce qui équivaut à dire que les suites u_n et v_n sont linéairement dépendantes. On suppose donc pour poursuivre que ce n'est pas le cas. On écrit la récurrence sous la forme :

$$P_2(n) w_{n+2} + P_1(n) w_{n+1} + P_0(n) w_n = 0$$

Comme il est clair que l'on peut supposer que les polynômes P_0 et P_2 ne sont pas nuls, il nous reste deux possibilités :

Premier cas : Le polynôme P_1 n'est pas nul. On peut alors appliquer le théorème 4.1.4, qui donne le résultat.

Deuxième cas : Le polynôme P_1 est nul. On voit alors facilement que les deux suites v_{2k} et v_{2k+1} vérifient des récurrences d'ordre 1, et par la remarque 4.2.2 l'assertion en résulte.

4.7. Quelques commentaires.

1) Nous avons dû faire dans nos énoncés l'hypothèse naturelle que la suite v_n était non nulle à partir d'une certain rang, mais aussi l'hypothèse que la suite a_n quotient des deux suites u_n et v_n ne prenait qu'un nombre fini de fois toute valeur L fixée.

En fait ces deux hypothèses sont liées. En effet, si L est une valeur fixée dans $\mathbb{C}$, dire que a_n prend une infinité de fois la valeur L est équivalent à dire que

la suite $w_n = u_n - Lv_n$, qui vérifie la récurrence commune à u_n et v_n, s'annulle une infinité de fois.

Dans le cas d'une suite récurrente linéaire w_n d'éléments de $\mathbb{C}$, l'étude de l'ensemble des indices n tels que $w_n = 0$ conduit au théorème de Skolem-Mahler-Lech, ([**32**], [**20**], [**18**]), qui affirme qu'il existe un entier $d \geq 1$, tel que, pour tout $r \in \{0, \cdots, d-1\}$, on a soit $w_{kd+r} = 0$ pour tout k assez grand, soit l'ensemble des indices k tels que $w_{kd+r} = 0$ est fini.

Dans le cas d'une suite holonome w_n, il a été démontré d'abord dans le cas où la série génératrice $\sum w_n x^n$ est algébrique ([**7**]), puis dans le cas général ([**21**]), qu'il existe un entier $d \geq 1$, tel que, pour tout $r \in \{0, \cdots, d-1\}$, on a soit $w_{kd+r} = 0$ pour tout k assez grand, soit l'ensemble des indices k tels que $w_{kd+r} = 0$ est de densité arithmétique nulle.

Le problème de savoir s'il existe une suite holonome w_n tel que l'ensemble formé par les indices n appartenant à une progression arithmétique tels que $w_n = 0$ est un ensemble infini de densité arithmétique nulle est à notre connaissance un problème ouvert (qui se ramène bien sûr à savoir s'il existe une suite holonome telle que les indices où elle s'annulle forme un ensemble infini de densité arithmétique nulle). A priori, on ne peut donc exclure que pour une valeur L, l'ensemble des indices n appartenant à une progression arithmétique tels que a_n soit égal à L soit un ensemble infini de densité arithmétique nulle.

Nous allons cependant exhiber une classe de récurrences, telles que pour toute solution w_n de cette récurrence ayant une infinité de termes non nuls, on a $w_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, ce qui par ce qui précède permet d'appliquer nos résultats.

Nous utiliserons un théorème dû à O.Perron. ([**26**], [**22**]). Considérons une relation de récurrence $\mathcal{R}$ de la forme

$$(a_s + \varepsilon_s(n))w_{n+s} + \cdots + (a_0 + \varepsilon_0(n))w_n = 0$$

où les a_k sont des constantes, avec $a_s a_0 \neq 0$, et les $\varepsilon_k(n)$ des suites de limite nulle. Si l'on suppose que le polynôme $P(X) = a_s X^s + \cdots + a_0$ a des racines α_j de modules tous distincts, alors $\mathcal{R}$ possède une base $e_j(n), j = 1, \cdots, s$ de solutions telles que $e_j(n) = \alpha_j^n(1 + \beta_j(n))^n$, avec $\beta_j(n)$ de limite nulle.

Il est clair que l'hypothèse faite sur les α_j implique que, pour toute solution non nulle w_n de la récurrence, on a w_n non nul à partir d'un certain rang.

On pourra consulter [**16**] pour des généralisations de ce résultat et des références bibliographiques.

A titre d'exemple, pour tout choix des polynômes Q_k de degrés au plus deux, la récurrence suivante satisfait à ces conditions :

$$(n^3 + Q_3(n))w_{n+3} - (6n^3 + Q_2(n))w_{n+2} + (11n^3 + Q_1(n))w_{n+1} - (6n^3 + Q_0(n))w_n = 0$$

2) On peut songer à donner des applications arithmétiques des résultats précédents. Nous n'avons pour le moment que des résultats assez faibles, nous en donnons simplement un exemple ; nous espérons pouvoir revenir sur cette question.

On considère les deux suites $u_n = n! + 2^n$ et $v_n = n! + 3^n$. Elles vérifient toutes les deux la récurrence

$$P_3(n)w_{n+3} + P_2(n)w_{n+2} + P_1(n)w_{n+1}P_0(n)w_n = 0$$

avec $P_3(n) = (n^2 - 2n + 3)$, $P_2(n) = -(n^3 + 6n^2 - 8n + 17)$, $P_1(n) = (5n^3 + 11n^2 - 2n + 28)$, et $P_0(n) = -(6n^3 + 6n^2 + 12n + 12)$. En fait les trois suites $n!, 2^n, 3^n$ constituent une base de solutions de cette récurrence, ce qui montre que, pour une solution quelconque w_n, s'il existe une infinité de n tel que $w_n \neq 0$, on a $w_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On peut donc par ce qui précède appliquer le théorème 4.1.3. Soit z_n le PGCD de u_n et v_n. On a alors le résultat suivant :

Soit l'ensemble des nombres premiers divisant un terme de la suite $\alpha_n = \dfrac{u_n}{z_n}$ *est infini, soit l'ensemble des nombres premiers divisant un terme de la suite* $\beta_n = \dfrac{v_n}{z_n}$ *est infini.*

En effet, dans le cas contraire, il existe un ensemble fini S de nombres premiers tels que les facteurs premiers de $\alpha_n\beta_n$ sont dans S pour tout n ; comme on a $\dfrac{n! + 2^n}{n! + 3^n} = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = a_n$, on peut appliquer le théorème 4.1.3. Mais on sait que pour une suite récurrente linéaire a_n vérifiant cette condition, il existe un entier $d \geq 1$, et des λ_r, μ_r rationnels tels que $a_{kd+r} = \lambda_r\mu_r^k$, pour tout k assez grand. On montre facilement que ce n'est pas le cas, et cette contradiction démontre l'assertion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y.Amice — *Les nombres p-adiques*; P.U.F. 1975

[2] A. Bellagh. J.P.Bézivin — Quotients de suites holonomes. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2011, Série 6 Volume XX Fascicule 1, p.135-166.

[3] B.Benzaghou — *Algèbre de Hadamard* Bulletin de la société mathématiques de france. n 098, 1970, p 209-252.

[4] B.Benzaghou, J.P.Bézivin — *Propriétés algébrique de suites différentiellement finies.* Bull.soc.math.France. 120, 1992, p.327-346.

[5] J.Berstel and M.Mignotte — *Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires.* Bull.soc math france 104 (1976), p.175-184 .

[6] J-P Bézivin — *Sur un théorème de G. Polya.* Journal für die reine angewdte Math, **364**, (1986), p.60-68.

[7] J.P Bézivin — *Une généralisation du théorème de Skolem-Lech-Mahler* Quart J Math; Oxford(2) 40 (1989), p.133-138.

[8] J.P Bézivin — *Quotient de fonctions entières et quotient de Hadamard* annales de l'institut de Fourier, Grenoble 39, 3 (1989), p.737-752.

[9] J.P Bézivin — *Sur les suites récurrentes à coefficients polynômes.* J.Number Theory 66, No.2, p.282-290 (1997).

[10] J.P Bézivin — *Problèmes arithmétique de la théorie des suites récurrentes linéaires.* Cours de troisième cycle université de Caen.

[11] J.W.S.Cassels — *Local fields.* London math soc Students text n 03 Cambridge university press 1986.

[12] P. Corvaja, U. Zannier — *Finitess of integral values for the ratio of two linear recurrence.* Invent. Math, **149** (2002), no. 2, p.431–451.

[13] J.Dieudonné — *Calcul infinitésimal.* Hermann.

[14] J.H.Evertse, — *On sums of S-units and linear recurrences.* Compositio Math, 53, **1984**, no 2, p.225-244.

[15] R.R.Hall — *On pseudo-polynomials* Mathematika 18 (1971), p.71-77.

[16] R.J Kooman, R.Tijdeman — *Convergence properties of linear recurrence sequences.* Nieuw Arch Wisk. 4, **1990** no 1, p.13-25.

[17] S. Lang — *Fundamentals of diophantine geometry.* New York, 1983.

[18] C.Lech — *A note on recurring series.* Ark Mat, 2, **1953**, p.417-421.

[19] F.Luca — *Prime divisors of binary holonomic sequences.* Adv in Appl Math. 40, **2008** no 2, p.168-169.

[20] K. Mahler — *Eine Arithmetische Eigenschaft der Taylor Koeffizienten rationaler Funktionen.* Proc Akad Wet Amsterdam, 38, **1935**, p.51-60.

[21] C.Methfessel — *On the zeros of recurrence sequences with non constant coefficients.* Archiv der Mathematik, 74, **2000**, p.201-206.

[22] N.Norlund — *Vorlesungen über Differenzenrechnung.* Springer Verlag, Berlin 1924.

[23] D.P.Parent — *Exercices de théorie des nombres.*

[24] A.Perelli,U.Zannier — *Su un teorema di polya* BOLL.U.M.I 18-A(1981), p.305-307.

[25] A.Perelli,U.Zannier — *On recurrent mod p sequence.* Journal fur die reine und angewandt Mathematic. 1984 Band 348.

[26] O.Perron — *Uber einen Satz des Herrn Poincaré.* J reine angew Math, 136, **1909**, p.17-37.

[27] Y. Pourchet — *Solution du problème arithmétique du quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles.* C. R. Acad. Sci. Paris. **288** (1979), no. 23, p.1055-1057.

[28] R. Rumely — *Notes on van der Poorten's proof of the Hadamard quotient theorem.* I, II. Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986-87, p.349-382, p.383-409, Progr. Math., 75, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1988.

[29] I.Z.Rusza — *On congruence preserving functions* (hungarian).Mat.Lapock.22 (1971). p.125-134

[30] H.P.Schlickewei, A.J.Van der Poorten — *Additive relations in fields.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A **51** (1991), no. 1, p.154-170.

[31] M.F. Singer, M. Van der Put — *Galois theory of difference equations.* Lecture Notes in Mathematics, 1666. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[32] T.Skolem — *Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen.* Comptes Rendus du 8-ième congrès des mathématiciens scandinaves, **1935**, p.163-188.

[33] H.Tsuji — *On a power series which has only algebraic singularities on its convergence circle.* japanese journal of math (1927) p.69-85.

[34] A.J. Van der Poorten — *Solution de la conjecture de Pisot sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles.* C. R. Acad. Sci. Paris. **306** (1988), no. 3, 97–102.

[35] A.J. Van der poorten and I.E.Shparlinsky — *On linear recurrence sequences with polynomial coefficients* Glasgow math j 38 (1996), p.147-155.

PARTIE II

SEMI-GROUPES DE FRACTIONS RATIONNELLES POUR LA COMPOSITION

Résumé de la seconde partie :

Les ensembles de Fatou et de Julia d'une fraction rationnelle à coefficients p-adiques ont été introduit il y a quelques années.
Ces ensembles sont étudiés dans [**15**], [**5**], [**6**], [**7**], [**8**], [**10**], [**11**], etc..., on y montre en particulier que de nombreuses propriétés des ensembles de Fatou et de Julia d'une fraction rationnelle à coefficients complexes, sont vraies dans le cas p-adique.

Dans notre travail on s'intéresse à l'itération d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients p-adiques (pour l'itération d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients complexes voir par exemple [**13**], [**21**], [**22**], et [**12**]).

Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions de base (distance sphérique, équicontinuité, points exceptionnels, etc...), et on prouve quelques résultats préliminaires utiles pour la suite.

Dans le second chapitre on donne la définition des ensembles de Julia $\mathcal{J}(G)$ et de Fatou $\mathcal{F}(G)$ d'un semi-groupe G de fractions rationnelles à coefficients p-adiques.
On montre que comme dans le cas d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients complexes, l'ensemble de Julia est stable arrière mais pas toujours stable avant par les éléments de G.
Ensuite on s'intéresse au cardinal de l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(G)$; en particulier on examine le cas où l'ensemble $\mathcal{J}(G)$ est fini et on donne des exemples que l'on ne rencontre ni dans le cas d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients complexes, ni dans celui d'une fraction rationnelle à coefficients p-adiques.
Puis on montre que $\mathcal{J}(G)$ peut être infini même si les générateurs de G ont chacun un ensemble de Julia vide.
D'autre part, on donne des conditions sous lesquelles on peut récupérer l'ensemble $\mathcal{J}(G)$ en fonction des $\mathcal{J}(g)$ pour g dans G.
Enfin on donne des conditions pour que $\mathcal{J}(G)$ soit parfait (ou non), d'intérieur vide (ou non).

CHAPITRE 5

GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre on introduit quelques notions de base, et on rappelle ou on prouve quelques résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.
Soit p un nombre premier fixé, on note $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique fixée du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, $|.|$ la valeure absolue p-adique de $\mathbb{C}_p$ prolongeant celle de $\mathbb{Q}_p$ telle que $|p| = 1/p$. On note $\mathbb{A}_p$ l'anneau de valuation de $\mathbb{C}_p$ et $\mathbb{M}_p$ son idéal maximal.
Pour $a \in \mathbb{C}_p$ et $r > 0$ on note $B^-(a,r)$ le disque ouvert (ou non circonférencié) de $\mathbb{C}_p$ (respectivement $B^+(a,r)$ le disque fermé (ou circonférencié) de $\mathbb{C}_p$ de centre a et de rayon r correspondant à cette valeur absolue. On pose $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ (ie on considère $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ comme la réunion de $\mathbb{C}_p$ et du point à l'infini).

Définition 5.0.1. — Un disque ouvert (respectivement fermé) de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ est soit un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{C}_p / |x-a| < r\}$ (respectivement $\{x \in \mathbb{C}_p / |x-a| \leq r\}$), soit la réunion du point à l' infini et d'un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{C}_p / |x-a| > r\}$ (respectivement la réunion du point à l' infini et d'un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{C}_p / |x-a| \geq r\}$), où $a \in \mathbb{C}_p, r \in \mathbb{R}^{+*}$.

5.1. Fonctions analytiques

Dans ce paragraphe on donne quelques propriétés des fonctions analytiques.

Définition 5.1.1. — Soient r un réel positif, a un élément de $\mathbb{C}_p$, et f une fonction définie dans $D = B^\epsilon(a,r)$ (avec $\epsilon = +$ ou $-$). On dit que f est analytique sur D si pour tout z dans D on a $f(z) = \sum_0^\infty c_n(z-a)^n$, et que le rayon de convergence de la série précédente soit au moins r.

Remarque 5.1.2. — Si R est une fraction rationnelle sans pôles dans un disque D, alors R est analytique dans D.

La proposition suivante nous servira dans les prochains chapitres.

Proposition 5.1.3. — *Soit $f(z)$ est une fonction analytique dans $U = B^\epsilon(a,r)$ (où $\epsilon = -$ pour le disque non circonférencié et $\epsilon = +$ pour le disque circonférencié), et $f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n(z-a)^n$ le développement de f dans U. Pour t dans $]0,r[$, on note $s(f,a,t) = \max_{n\geq 1} |\alpha_n| t^n$, on a alors les propriétés suivantes :*
1) $s(f,a,t)$ est une fonction de t qui est croissante et continue dans $]0,r[$.
2) Pour $\epsilon = +$, $s(f,a,r) = \max_{n\geq 1} |\alpha_n| r^n$ est fini, et si $N_r = \max\{k \in \mathbb{N}^* \ / |a_k| r^k = s(f,a,r)\}$, alors, N_r est le nombre de racines de $f(z) - f(a)$ dans $B^+(a,r)$.
3) Si R est une fraction rationnelle alors $s(R,a,r) = \max_{n\geq 1} |\alpha_n| r^n$ existe et il est fini. De plus on a $R(B^\epsilon(a,r)) = B^\epsilon(R(a), s(R,a,r))$

Démonstration. — Voir [**9**], ou [**1**], ou [**16**].

□

5.2. Quelques propriétés des fractions rationnelles

Dans cette partie on donne quelques propriétés des fractions rationnelles, en particulier on précise comment elles agissent sur les disques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.

Définition 5.2.1. — Soit $f(z)$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ telle que $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes premiers entres eux, le degré de f est par définition le maximum des degrés de P et Q.

Définition 5.2.2. — Une homographie non constante est une fraction rationnelle de degré 1, donc de la forme $\dfrac{az+b}{cz+d}$, avec $ad - bc \neq 0$.

Proposition 5.2.3. — *L'image d'un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ par une homographie est un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ de même nature.*

Démonstration. — Voir [**9**]. □

Proposition 5.2.4. — *L'image d'un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ par une fraction rationnelle est soit un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.*

Démonstration. — Voir [**6**] ou [**9**]. □

5.3. Points exceptionnels d'une fraction rationnelle

Soit R un élément de $\mathbb{C}_p(z) - \mathbb{C}_p$ et n un entier naturel, on note $R^{[n]}$ la n-ième itérée de R, et on convient que $R^{[0]}(z) = z$. Pour a dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ on note $O_R(a)$ l'ensemble des éléments b de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ tel qu'il existe deux entiers naturels m, n vérifiants $R^{[n]}(a) = R^{[m]}(b)$. L'ensemble $O_R(a)$ est dit grande orbite de a par R, et on vérifie que $O_R(a) = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} (R^{[m]})^{-1}(R^{[n]}(\{a\}))$, et que la relation $\sim$ définie dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ par $a \sim b$ si et seulement si $b \in O_R(a)$ est une relation d'équivalence. De même on note $O_R^-(a)$ l'ensemble des éléments b de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ tel qu'il existe un entier naturel m vérifiant $R^{[m]}(b) = a$. L'ensemble $O_R^-(a)$ est dit orbite arrière de a par R. On sait que $O_R(a)$ est fini si et seulement si $O_R^-(a)$ est fini cf [**2**] page 66. On définit aussi l'orbite avant de a, comme étant l'ensemble des éléments $R^{[n]}(a)$ où n est dans $\mathbb{N}$, et on la note O_R^+.

Définition 5.3.1. — On dit que a est un point exceptionnel de R si sa grande orbite est finie. On note E_R (ou $E(R)$) l'ensemble des points exceptionnels de R.

En particulier, on a $\bigcup_{a\in E_R} O_R(a) = E_R$.

La proposition suivante donne quelques propriétés des points exceptionnels.

Proposition 5.3.2. — *Soit R une fraction rationnelle de degré au moins deux, on a :*
1) $E_R = \{a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)/|O_R(a)| \leq 2\}$, et $|E_R| \leq 2$.
2) Si E_R contient deux éléments a et b, alors on a soit $O_R(a) = \{a\}$ et $O_R(b) = \{b\}$, soit $O_R(a) = O_R(b) = \{a, b\} = E_R$

Démonstration. — Voir [**9**] page 43. □

Remarque 5.3.3. — Ce résultat est l'analogue du théorème 4.1.2 page 65 de [**2**] dans le cas où $R \in \mathbb{C}(z)$, et $d^o R \geq 2$.

Corollaire 5.3.4. — *Si a est un point exceptionnel d'une fraction rationnelle R de degré au moins deux alors $O_R(a) = O_R^-(a)$.*

Démonstration. — Résulte des définitions. □

5.3.1. Points exceptionnels et conjugaison. —

Définition 5.3.5. — Soient R, S deux fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, on dit que R et S sont conjuguées s'il existe une homographie non constante φ telle que $S = \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$

On vérifie sans peine les propriétés suivantes :

Proposition 5.3.6. — *Soient $R, S \in \mathbb{C}_p(z) - \mathbb{C}_p$, et φ une homographie non constante telle que $S = \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$. Alors on a :*
1) $d^o(R) = d^o(S)$.
2) Pour tout élément a de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on a $O_S(a) = \varphi(O_R(\varphi^{-1}(a)))$, et $O_S^-(a) = \varphi(O_R^-(\varphi^{-1}(a)))$.
3) $E(S) = \varphi(E_R)$.
4) $fix(S) = \varphi(fix(R))$, où $fix(R)$ désigne l'ensemble des points fixes de la fraction rationnelle R.

Remarque 5.3.7. — 1) Si $\lambda \in \mathbb{C}_p^* - \{1\}$, et $\mu \in \mathbb{C}_p^*$, on a que $fix(\lambda z) = \{0, \infty\}$, et $fix(z + \mu) = \{\infty\}$ (point fixe double).
2) Si on note $\mathcal{H}_h$ l'ensemble des homographies qui sont conjuguées à une homothétie, on voit que les éléments de $\mathcal{H}_h - \{z\}$ ont tous deux points fixes distincts.

La proposition qui suit précise l'ensemble des points exceptionnels et l'ensemble des points fixes des translations et des homothéties.

Proposition 5.3.8. — *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_p^*$, on a :*
1) $O_{z+\mu}(\infty) = O_{z+\mu}^-(\infty) = \{\infty\}$, et $E(z + \mu) = fix(z + \mu) = \{\infty\}$.
2) $O_{\lambda z}(0) = O_{\lambda z}^-(0) = \{0\}$, et $O_{\lambda z}(\infty) = O_{\lambda z}^-(\infty) = \{\infty\}$.
3) Si $\lambda \neq 1$, alors $fix(\lambda z) = \{0, \infty\}$.
4) Si λ n'est pas racine de 1, alors $E(\lambda z) = \{0, \infty\}$.
5) S'il existe un entier naturel non nul k tel que $\lambda^k = 1$, alors pour tout a de $\mathbb{C}_p^*$, on a $O_{\lambda z}(a) = O_{\lambda z}^-(a) = \{a, \lambda a, \ldots, \lambda^{k-1}a\}$, et $E(\lambda z) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.

Démonstration. — Résulte des définitions. □

Exemple 5.3.9. — $E(\frac{z}{p}) = fix(\frac{z}{p}) = \{0, \infty\}$.

On déduit de la proposition précédente que les résultats déjà vu dans le cas d'une fraction rationnelle de degré au moins deux sont vrais en général.

Corollaire 5.3.10. — *Si a est un point exceptionnel d'une fraction rationnelle non constante R alors, $O_R(a) = O_R^-(a)$.*

Corollaire 5.3.11. — *Si R est une fraction rationnelle non constante qui n'est pas conjuguée à une homothétie de rapport une racine de l'unité, alors $|E_R| \leq 2$.*

Remarque 5.3.12. — Une fraction rationnelle non constante conjuguée à une homothétie de rapport une racine de l'unité, est une homographie dont l'une des itérée est l'identité, c'est un élément d'ordre fini du groupe des homographies non constantes à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ (muni de la composition).

On notera $\mathcal{H}_f$ l'ensemble de ces homographies.

5.4. Semi-groupes de fractions rationnelles

Notons $\mathfrak{F}$ L'ensemble des fractions rationnelles non constantes à coefficients dans $\mathbb{C}_p$.

Définition 5.4.1. — On appelle semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ une partie G de $\mathfrak{F}$, contenant le polynôme z, telle que si $S, R \in G$, la composée $R \circ S$ de R et S appartient encore à G.
Si G et H sont des semi-groupes de fractions rationnelles et que $H \subset G$, on dit que H est un sous semi-groupe de G.
Si un semi-groupe G de fractions rationnelles ne contient que des polynômes, on dit que G est un semi-groupe de polynômes.

Exemple 5.4.2. —
Les ensembles suivant sont des semi-groupes de fractions rationnelles :
1) $\mathfrak{F} = \mathbb{C}_p(z) - \mathbb{C}_p$ ensemble des fractions rationnelles non constantes.
2) $\mathfrak{P} = \mathbb{C}_p[z] - \mathbb{C}_p$ ensemble des polynômes non constants.
3) $\mathcal{M} = \{az^k \ / \ a \in \mathbb{C}_p^*, \ k \in \mathbb{N}^*\}$ ensemble des monômes non constants.
4) $\mathcal{S}$ ensemble des fractions de la forme az^k ou k est entier relatif non nul, et $a \in \mathbb{C}_p^*$.
5) $\mathcal{H}$ ensemble des homographies non constantes à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ (c'est même un groupe)

On a les propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 5.4.3. — *Soit I un ensemble non vide d'indices et pour $i \in I$, G_i un semi-groupe de fractions rationnelles. Alors $G = \bigcap_{i \in I} G_i$ est un semi-groupe de fractions rationnelles.*

Il résulte de cette propriété que si A est une partie non vide de l'ensemble $\mathfrak{F}$ des fractions rationnelles non constantes, on peut parler du semi-groupe engendré par la partie A comme étant l'intersection des éléments de la famille des semi-groupes contenant la partie A (qui contient toujours $\mathfrak{F}$).

Nous noterons $\langle A \rangle$ ce semi-groupe.

En particulier :

a) Si A est réduit à un élément R, on a $\langle R \rangle = \{R^{[n]}, n \in \mathbb{N}\}$.

b) Si A est un ensemble fini de fractions rationnelles, $A = \{R_1, \ldots, R_m\}$, $m \geq 1$, on notera $\langle R_1, \ldots, R_m \rangle$ le semi-groupe engendré par A.

Remarque 5.4.4. — Si G est un semi-groupe engendré par des homographies d'ordres finis alors G est un groupe. En effet si $G = \langle R_i / \ i \in I \rangle$, comme pour tout i dans I il existe n_i dans $\mathbb{N}$ tel que $R_i^{[n_i]}(z) = z$, donc R_i est inversible dans G, et par suite tout élément de G est inversible dans G.

Soit a un point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, notons $O_G^-(a)$ la réunion des ensembles $g^{-1}(\{a\})$ pour g parcourant G (on dit que $O_G^-(a)$ est l'orbite arrière de a par G). De même on note $O_G^+(a)$ l'ensemble des $g(a)$ pour g parcourant G, et on dit que $O_G^+(a)$ est l'orbite avant de a par G. Si $O_G^-(a)$ est fini, on dit que a est un point exceptionnel de G. Si on note $E(G)$ l'ensemble des points exceptionnels de G, on voit qu'on a $E(G) \subset E(g) = E(\langle g \rangle)$ pour tout élément g de G, par suite, on en déduit que :

Lemme 5.4.5. — *Si G contient une fraction rationnelle de degré au moins deux ou de degré un d'ordre infini, alors on a $|E(G)| \leq 2$.*

5.5. Stabilités avant, stabilité arrière

Nous rappelons ici les notions de partie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ stable avant ou stable arrière par une fraction rationnelle, puis nous donnons quelques unes de leurs propriétés.

Définition 5.5.1. — Soit g une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et A une partie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on dit que :

1) A est stable avant par g si $g(A) \subset A$.

2) A est stable arrière par g si $g^{-1}(A) \subset A$.

3) A est complètement stable par g si A est stable avant et stable arrière par g.

Remarque 5.5.2. —

1. Une réunion (respectivement intersection) d'une famille quelconque de parties stables arrière par g est une partie stable arrière par g. De même une réunion (respectivement intersection) d'une famille quelconque de parties stables avant par g est une partie stable avant par g.
2. Si A est complètement stable par g, alors A^c est aussi complètement stable par g, et on a dans ce cas $g(A) = g^{-1}(A) = A$, et $g(A^c) = g^{-1}(A^c) = A^c$.
3. A est complètement stable si et seulement si $g^{-1}(A) = A$.
4. Si A et A^c sont stables avant par g, alors A et A^c sont complètement stables par g.

Proposition 5.5.3. — *Soit g une fraction rationnelle non constante, et F une partie finie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) F stable arrière par g.
2) F est complètement stable par g.

Démonstration. — Supposons que F stable arrière par g, comme $g^{-1}(F) \subset F$ et que g est surjective, donc $F \subset g(F)$. Par suite on a $|F| \leq |g(F)| \leq |F|$, et donc on a $g(F) = F$, et $F \subset g^{-1}(F)$. □

Proposition 5.5.4. — *Soit g une fraction rationnelle non constante qui n'est pas une homographie d'ordre fini, et F une partie finie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ qui est stable arrière par g, alors F a au plus deux éléments.*

Démonstration. — Supposons alors que F est fini, alors pour tout a de F on a que $O_g^-(a) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (g^{[m]})^{-1}(\{a\}) \subset F$, et donc $O_g^-(a)$ est fini et le point a est exceptionnel pour g, par suite le corollaire 5.3.11 donne que $|F| \leq |E_g| \leq 2$. □

Nous aurons besoin du résultat classique suivant :

Lemme 5.5.5. — *Une homographie est parfaitement détérminé par la donnée des images de trois éléments distinct de $\mathbb{P}^($$\mathbb{C}_p$).*

Proposition 5.5.6. — *Soit G un semi-groupe infini ne contenant que des homographies. Si F est une partie finie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ stable arrière par les éléments de G, alors F a au plus deux éléments.*

Démonstration. — Supposons que $F = \{x_1, \dots, x_n\}$, où n est un entier naturel plus grand que 3, et que g est un élément de G, alors g est parfaitement déterminé par les images $g(x_1), g(x_2), g(x_3)$ qui sont dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ puisque F est complètement stable par les éléments de G d'après la proposition 5.5.3. Par suite G est fini car il a au plus $n(n-1)(n-2)$ éléments, et cela est absurde. □

Lemme 5.5.7. — *Soit G un semi-groupe fini non trivial (ie $G \neq \{z\}$) engendré par des homographies, alors il existe deux parties finies F_1 et F_2 de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ qui sont disjointes et complètement stables par les éléments de G.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des définitions. □

5.6. La distance sphérique

Définition 5.6.1. — Soient $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on pose :

$$\Delta((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) = \frac{|\alpha\delta - \gamma\beta|}{Max(|\alpha|,|\beta|)Max(|\delta|,|\gamma|)}$$

Δ est une distance ultramétrique sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ appelée distance sphérique.

Remarque 5.6.2. — 1) Cette distance est l'analogue de la distance sphérique définie dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par $\sigma(z,w) = \dfrac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z^2|}\sqrt{1+|w^2|}}$, et $\sigma(z,\infty) = \dfrac{2}{\sqrt{1+|z^2|}}$ pour z, w dans $\mathbb{C}$ (voir par exemple [**2**] page 28).
2) On sait alors que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$:
Si $|\alpha| > 1$, et $|\beta| > 1$, alors $\Delta(\alpha,\beta) = \left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right|$,
Et que si $|\alpha| \leq 1$, et $|\beta| \leq 1$, alors $\Delta(\alpha,\beta) = |\alpha - \beta|$ cf [**9**].
En fait, on vérifie que pour $x, y \in \mathbb{C}_p^*$, on a :

$$\Delta(x,y) = \min\left\{1,\ |x-y|,\ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|\right\} = \Delta\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

$$\Delta(0,x) = \min\{1, |x|\} = \Delta\left(\infty, \frac{1}{x}\right)$$

De plus, on sait que Δ munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ d'une structure d'espace métrique complet cf [**9**], et que sur les disques de $\mathbb{C}_p$ cette distance est uniformément équivalente à la distance usuelle de $\mathbb{C}_p$. D'autre part, si on note $B^-_\Delta(\alpha, r)$ la boule ouverte de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ de centre α et de rayon r (non nul) pour la distance Δ, et $B^-(\alpha, r)$ la boule correspondante de $\mathbb{C}_p$, on vérifie que :
1) Si $|\alpha| \leq 1$ et que $r \leq 1$ alors $B^-_\Delta(\alpha, r) = B^-(\alpha, r)$.
2) Si $r \leq 1$ alors $B^-_\Delta(\infty, r)$ est le complémentaire de $B^+(0, \frac{1}{r})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.
3) Si $r \leq \dfrac{1}{|\alpha|} < 1$, alors $B^-_\Delta(\alpha, r) = B^-(\alpha, r|\alpha|^2)$.
4) Si $r|\alpha| > 1$, et $r \leq 1$ alors $B^-_\Delta(\alpha, r) = B^-_\Delta(\infty, r)$.
On a des résultats analogues pour les disques fermés :
a) Si $|\alpha| \leq 1$ et que $r < 1$ alors $B^+_\Delta(\alpha, r) = B^+(\alpha, r)$.
b) Si $r < 1$ alors $B^+_\Delta(\infty, r)$ est le complémentaire de $B^-(0, \frac{1}{r})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.
c) Si $r < \dfrac{1}{|\alpha|} < 1$,alors $B^+_\Delta(\alpha, r) = B^+(\alpha, r|\alpha|^2)$.
d) Si $r|\alpha| \geq 1$, et $r < 1$ alors $B^+_\Delta(\alpha, r) = B^+_\Delta(\infty, r)$.
On en déduit que les disques ouverts (respectivement fermés) de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ forment une base pour la topologie de l'espace métrique $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (muni de la distance Δ), et que Δ induit sur $\mathbb{C}_p$ sa topologie usuelle.

Remarque 5.6.3. — On voit donc que les disques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ pour la distance Δ sont tous des disques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, mais que la réciproque est fausse.

Dans la suite, on utilisera les propriétés suivantes des fractions rationnelles :

Proposition 5.6.4. — *Soit φ une homographie, il existe deux constantes réelles positives c_1, c_2 telles que l'on ait pour tout α, β de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$:*

$$c_2\Delta(\alpha,\beta) \leq \Delta(\varphi(\alpha),\varphi(\beta)) \leq c_1\Delta(\alpha,\beta)$$

Démonstration. — cf [**9**] □

Proposition 5.6.5. — *Soit R une fraction rationnelle. Il existe une constante strictement positive C telle que pour tout α, β dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ on ait $\Delta(R(\alpha), R(\beta)) \leq C\Delta(\alpha,\beta)$. En particulier R est lipschitzienne sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.*

Démonstration. — Voir [**17**] ou [**9**]. □

Remarque 5.6.6. — On a un résultat analogue pour les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ (voir par exemple le théorème 2.3.1 page 32 de [**2**]).

Proposition 5.6.7. — *Toute fraction rationnelle R à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, est une application ouverte de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ dans lui même (où $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ est muni de la distance sphérique).*

Démonstration. — En effet si U est un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, alors U est la réunion d'une famille $(D_i)_{i\in I}$ de disques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et d'après la proposition 5.2.4, $R(D_i)$ est un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ pour tout i dans I, et par suite $R(U)$ est aussi un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (vu que c'est la réunion des $R(D_i)$ pour i dans I). □

5.7. Équicontinuité d'une famille de fractions

Définition 5.7.1. — Soit D un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ et $\mathcal{F}$ une famille de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, on dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue sur D si pour tout ϵ positif il existe η positif tel que pour tout $x, y \in D$ on ait $\Delta(x,y) < \eta$ entraîne que $\Delta(f(x), f(y)) < \epsilon$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Le théorème suivant (dû à Hsia) est un critère d'équicontinuité qui sera utilisé par la suite. C'est l'analogue p-adique du théorème de Montel dans $\mathbb{C}$ cf [**2**].

Critère de Hsia. — *Soient D un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et Y une partie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ dont le complémentaire contient au moins deux points et $\mathcal{F}$ une famille de fractions rationnelles telles que pour tout $f \in \mathcal{F}$ on ait $f(D) \subset Y$, alors $\mathcal{F}$ est équicontinue sur D.*

Démonstration. — Voir [**15**]. □

Remarque 5.7.2. — Intuitivement l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ dans un voisinage d'un point x signifie que si on remplace x par un élément x' assez proche, alors pour $f \in \mathcal{F}$ on a que $f(x')$ sera assez proche de $f(x)$; et la non équicontinuité de $\mathcal{F}$ dans les voisinages de x, signifie des petites variations de x peuvent entraîner de grands changements des images $f(x)$.

CHAPITRE 6

ENSEMBLES DE JULIA ET FATOU

Dans cette partie, nous allons donner une définition des ensembles de Julia et Fatou d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, en traduisant d'une manière naturelle la définition donnée dans le cas classique où le semi-groupe est engendré par une unique fraction rationnelle. Cette définition est analogue à celle donnée dans le cas complexe par [**13**],[**21**],[**12**].

Nous verrons cependant que comme dans le cas complexe cf [**13**]) les propriétés générales obtenues avec cette définition sont moins intéressantes que lorsque le semi-groupe est engendré par une seule fraction rationnelle.

Nous allons commencer par quelques définitions.

6.1. Ensemble de Julia : Définitions et propriétés immédiates

Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ muni de la composition. Nous donnons maintenant la définition des ensembles de Julia et de Fatou de G :

Définition 6.1.1. — L'ensemble de Fatou de G est l'ensemble des points z de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, tel qu'il existe un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, de centre z où la famille G de fractions rationnelles est équicontinue ; on note $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble de Fatou de G.
L'ensemble de Julia de G est le complémentaire de l'ensemble de Fatou dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ et se note $\mathcal{J}(G)$.

Remarque 6.1.2. — Il est clair par cette définition, que si G est un semi-groupe engendré par une fraction rationnelle g, les ensembles de Julia et de Fatou du semi-groupe engendré par g coïncident avec les ensembles de Julia et de Fatou de la fraction rationnelle g définis de façon classique. Pour retrouver

les notations antérieures, nous noterons $\mathcal{F}(g)$ ou $\mathcal{F}_g$ (respectivement $\mathcal{J}(g)$ ou $\mathcal{J}_g$) les ensembles de Fatou (respectivement de Julia) du semi-groupe $G = \langle g \rangle$.

Pour les fractions rationnelles de degrés un, on a :

Proposition 6.1.3. — *Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_p^*$ on a $\mathcal{J}(z+\mu) = \emptyset$, et :*

$$\mathcal{J}(\lambda z) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad |\lambda| = 1 \\ \{\infty\} & \text{si} \quad |\lambda| < 1 \\ \{0\} & \text{si} \quad |\lambda| > 1 \end{cases}$$

Démonstration. — Vérification immédiate. □

Remarque 6.1.4. — On sait que si g est une fraction rationnelle de degré au moins deux, les points exceptionnels de g sont dans l'ensemble de Fatou de g cf [**9**], mais ce n'est pas le cas pour les homographies, car pour $|\lambda| \neq 1$, les points exceptionnels de λz sont 0, et ∞, l'un est dans $\mathcal{J}(\lambda z)$ et l'autre dans $\mathcal{F}(\lambda z)$.

Nous allons donner quelques propriétés élémentaires des ensembles de Julia et Fatou d'un semi-groupe de fractions rationnelles G.

Proposition 6.1.5. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. Alors l'ensemble de Fatou du semi-groupe G est un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et l'ensemble de Julia de G est donc un fermé.*

Démonstration. — Ceci provient immédiatement de la définition. □

Proposition 6.1.6. — *Soient U un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ et Y une partie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ dont le complémentaire a au moins deux points. On suppose que l'on a $g(U) \subset Y$ pour tout g de G, alors $U \subset \mathcal{F}(G)$.*

Démonstration. — Résulte du critère de Hsia. □

Proposition 6.1.7. — *Soient G_1 et G_2 deux semi-groupes de fractions rationnelles. On suppose que $G_1 \subset G_2$, alors on a $\mathcal{F}(G_2) \subset \mathcal{F}(G_1)$ et $\mathcal{J}(G_1) \subset \mathcal{J}(G_2)$. En particulier, si G est un semi-groupe de fractions rationnelles, pour tout $g \in G$, on a $\mathcal{F}(G) \subset \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{J}(g) \subset \mathcal{J}(G)$.*

Démonstration. — Soit z dans l'ensemble de Fatou de G_2. Il existe donc un disque D de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ pour la distance sphérique, de centre z, où la famille de fractions rationnelles G_2 est équicontinue. Comme toute sous-famille d'une famille équicontinue l'est également, il en résulte que la famille G_1 est équicontinue sur D, et par suite z appartient à l'ensemble de Fatou de G_1, ce qui démontre la première inclusion. La deuxième inclusion s'obtient en passant au complémentaire. La dernière assertion est évidente. □

Proposition 6.1.8. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. On a alors :*

a) $\mathcal{F}(G)$ *est inclus dans l'intérieur de* $\bigcap_{g\in G} \mathcal{F}(g)$.

b) $\overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g)} \subset \mathcal{J}(G)$.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement des inclusions $\mathcal{F}(G) \subset \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{J}(g) \subset \mathcal{J}(G)$ pour tout $g \in G$, et du fait que $\mathcal{F}(G)$ est ouvert et que $\mathcal{J}(G)$ est fermé. □

Remarque 6.1.9. — Dans le cas complexe on a $\overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g)} = \mathcal{J}(G)$ cf page 365 de [**13**], mais on verra que ce n'est pas le cas en général dans le cas p-adique.

Nous savons que l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle R à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ peut être vide, par contre, le problème de savoir si l'ensemble de Fatou d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ peut être vide se pose ; nous allons y revenir.

6.1.1. Action des homographies. — Nous allons maintenant considérer la conjugaison des éléments d'un semi-groupe G par une homographie non triviale.

Notation Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles, et φ une homographie non constante. Nous notons G_φ l'ensemble $G_\varphi = \{\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} \ / \ g \in G\}$.

Proposition 6.1.10. — *G_φ est un semi-groupe de fractions rationnelles, et on a :*

$$\mathcal{F}(G_\varphi) = \varphi(\mathcal{F}(G)) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(G_\varphi) = \varphi(\mathcal{J}(G))$$

Démonstration. — Le fait que G_φ est un semi-groupe de fractions rationnelles est évident. Pour les autres assertions, il suffit de voir que $\mathcal{F}(G_\varphi) \subset \varphi(\mathcal{F}(G))$. D'après la proposition 5.6.5, il existe deux constantes strictement positives b_1, b_2 telles que l'on ait $\Delta(\varphi(x), \varphi(y)) \leq b_1 \Delta(x, y)$, et $\Delta(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \leq b_2 \Delta(x, y)$ pour tout x, y dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.
Soit $z \in \mathcal{F}(G_\varphi)$, il existe un disque D (de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$) de centre z tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout f dans G et pour tout x, y dans D, $\Delta(x, y) < \eta$ entraîne que $\Delta(f \circ \varphi^{-1}(x), f \circ \varphi^{-1}(y)) < b_2 \Delta(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(x), \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(y)) < \epsilon$.
Posons $\eta' = \dfrac{\eta}{b_1}$, on a alors pour u, v dans $D' = \varphi^{-1}(D)$, que $\Delta(u, v) < \eta'$ entraîne que $\Delta(f(u), f(v)) < \epsilon$. Donc la famille des fractions rationnelles de G est équicontinue sur D' et par suite z est dans $\varphi(\mathcal{F}(G))$.

□

6.1.2. Cas des fractions ayant de bonnes réductions. — D'après la proposition 6.1.7, si $\mathcal{J}(G)$ est vide, alors pour tout élément g de G, on a $\mathcal{J}(g) = \emptyset$ (mais on prouve dans la suite que la réciproque est fausse).
Ici on donne une condition sur les éléments de G pour que l'on ait $\mathcal{J}(G)$ vide.
Soit $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle de degré d à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ où $P(X), Q(X)$ sont des polynômes premiers entre eux.
On suppose que les coefficients de P et Q sont dans l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$, et que l'un de ces coefficients est de valeur absolue p-adique 1.
Alors on pose $P_1(X,Y) = Y^d P(\frac{X}{Y})$ et $Q_1(X,Y) = Y^d Q(\frac{X}{Y})$.
On dit que la fraction rationnelle f a une *bonne réduction* (voir [**5**]) si les polynômes P_1 and Q_1 n'ont d'autres racines communes dans $\overline{\mathbb{F}_p}^2$ autres que $(0,0)$. Si f n'a pas une bonne réduction on dit que f a une mauvaise réduction.
Remarquons que la notion de bonne réduction ne dépend pas du représentant $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ de $f(X)$.

Exemple 6.1.11. — Soit $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie non constante (on peut supposer que $a, b, c, d \in \mathbb{A}_p$). Alors φ a une bonne réduction si et seulement si le système

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

n'a pas d'autre solution que $(0,0)$ dans $\overline{\mathbb{F}_p}$. Cela équivaut à dire que :
$ad - bc \not\equiv 0[p]$. Et comme $\varphi^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$, donc φ a une bonne réduction si et seulement si φ^{-1} a une bonne réduction.

On sait que si un semi-groupe de fractions rationnelles a un seul générateur R et que R a une bonne réduction, alors pour tout x, y dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on a $\Delta(R(x), R(y)) \leq \Delta(x,y)$ (voir [**17**] page 105 ou [**9**]). En particulier l'ensemble de Julia de R est vide. On en déduit aisément que :

Proposition 6.1.12. — *Soit A sous ensemble non vide de $\mathbb{C}_p(z) - \mathbb{C}_p$ et G le semi-groupe engendré par A. Si l'on suppose que tous les éléments de A sont des fractions rationnelles ayant une bonne réduction, alors l'ensemble de Julia de G est vide.*

Démonstration. — On a vu que pour tout $g \in A$ et que pour tout $x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ on a $\Delta(g(x), g(y)) \leq \Delta(x,y)$. Comme tout élément de G s'écrit comme composition finie d'éléments de A, donc G est équicontinue sur tout disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et par suite l'ensemble de Julia de G est vide. □

Exemple 6.1.13. — Comme z^2 et $\frac{1}{z}$ ont de bonnes réductions, on a donc $\mathcal{J}(< z^2, \frac{1}{z} >) = \emptyset$.

Remarque 6.1.14. — 1) Si φ est une homographie non constante ayant une bonne réduction, comme φ^{-1} a aussi une bonne réduction, on en déduit que pour tout x, y dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ on a $\Delta(\varphi(x), \varphi(y)) = \Delta(x, y)$.
2) Par contre si $R \in \mathbb{C}(z)$ et que $d^o R \geq 2$, alors $\mathcal{J}(R)$ est infini (voir [**2**] théorème 4.2.1 page 67).

6.1.3. Points périodiques. — Dans la suite on aura besoin de la notion de point périodique répulsif (respectivement attractif).

Définition 6.1.15. — Soient f une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, et z_0 un point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. On dit que z_0 est un point périodique de f s'il existe un entier naturel non nul m tel que $f^{[m]}(z_0) = z_0$. Le plus petit entier naturel non nul n tel que $f^{[n]}(z_0) = z_0$ est dit période de z_0. Si $z_0 \in \mathbb{C}_p$ et que z_0 est de période n le nombre $(f^{[n]})'(z_0)$ est alors dit multiplicateur de z_0. Un point fixe de f est un point périodique (de f) qui est de période 1.

Définition 6.1.16. — Soient f une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, et z_0 un point de $\mathbb{C}_p$ qui est un point périodique de f de multiplicateur λ on dit que :
Le point z_0 est répulsif si $|\lambda| > 1$.
Le point z_0 est attractif si $|\lambda| < 1$
Le point z_0 est neutre si $|\lambda| = 1$.

On montre (cf [**9**]) que si f est une fraction rationnelle, la nature d'un point périodique (répulsif, attractif, ou neutre) est invariante par homographie, cela permet de définir la nature du point à l'infini quand c'est un point périodique. On montre également que si f une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ les points périodiques répulsifs de f sont ceux qui sont dans l' ensemble de Julia de f, et les points périodiques neutres ou attractifs sont ceux qui sont dans l'ensemble de Fatou de f (cf [**6**] ou [**9**]).

Exemple 6.1.17. — Soit G le semi-groupe engendré par les fractions rationnelles $g(z) = \frac{z^p - z}{p}$ et $f(z) = z^p - pz$, alors le point 0 est un point fixe attractif pour f et répulsif pour g. Donc ici on a $0 \in \mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(< g, f >)$.

Remarque 6.1.18. — Il résulte de ce qui précède, que si un semi-groupe G contient une fraction rationnelle g qui admet un point périodique répulsif, alors $\mathcal{J}(G)$ est non vide, puisque $\mathcal{J}(g) \subset \mathcal{J}(G)$.

6.1.4. Fractions ayant un point fixe non répulsif commun. — Dans ce paragraphe, on va montrer que si les générateurs d'un semi-groupe G de fractions rationnelles ont un points fixe non répulsif commun ω, alors sous certaines conditions ω est le centre d'un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ qui est contenu dans $\mathcal{F}(G)$ et dont on peut préciser le rayon.

6.1.5. Cas où le point appartient à $\mathbb{C}_p$. — Soit f une fonction non constante qui est analytique au voisinage d'un point ω de $\mathbb{C}_p$. On note $r(f,\omega)$ le rayon de convergence de f au voisinage de ω. On suppose que ω est un point fixe non répulsif de f, et que $f(z) = \omega + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z-\omega)^{i+1}$ est le développement de Taylor de f au voisinage de ω.
Si les a_i ne sont pas tous nuls pour i dans $\mathbb{N}^*$ (ie f n'est pas un polynôme de degré un), on pose : $\tau(f,\omega)^{-1} = \sup\left\{|a_n|^{\frac{1}{n}} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, et si f est polynôme de degré un, on pose : $\tau(f,\omega) = \infty$. Enfin, on pose $\tau(f) = \tau(f,0)$.

Lemme 6.1.19. — *Soit R une fraction rationelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ vérifiant les hypothèses précédentes, on a :*
1) Si R n'est pas un polynôme de degré un, alors $\tau(R,\omega) \in \mathbb{R}^{+*}$.
2) $\tau(R,\omega) \leq r(R,\omega)$.
3) $\tau(R,\omega) = \sup\{t > 0, \ / \ |a_n|t^n < 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*\}$.
4) $t \in]0,\tau(R,\omega)[$ entraîne que $R(B^+(\omega,t)) \subset B^+(\omega,t)$.
5) $R(B^-(\omega,\tau(R,\omega))) \subset B^-(\omega,\tau(R,\omega))$.
6) Si $\tau(R,\omega) < r(R,\omega)$, alors on a $R(B^+(\omega,\tau(R,\omega))) \subset B^+(\omega,\tau(R,\omega))$, et il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\tau(R,\omega) = (|a_k|^{\frac{1}{k}})^{-1}$.
7) $\tau(R,\omega) = \sup\{t > 0, \ / \ R(B^+(\omega,t)) \subset B^+(\omega,t)\}$.

Démonstration. — On utilise les mêmes arguments que dans [**18**] pages 38 et 39.
Remarquons d'abord que si R est un polynôme de degré 1, alors on a $\tau(R,\omega) = r(R,\omega) = \infty$, et les conditions (1) à (7) sont satisfaites.
Regardons le cas où R n'est pas un polynôme de degré 1 :
1) Comme $\tau(R,\omega) > 0$, donc $\tau(R,\omega) \neq \infty$, de plus si $\tau(R,\omega)^{-1} = \infty$ alors pour tout entier naturel m on a que $\sup_{k\geq m}|a_k|^{1/k} = \infty$, et par suite $\limsup|a_n|^{1/n} = \infty$ et on aurait $r(R,\omega) = 0$ contredisant l'hypothèse. Donc $\tau(R,\omega) \in \mathbb{R}^{+*}$.
2) Pour tout entier naturel n on a que $\sup_{k\geq n}|a_k|^{1/k} \leq \sup|a_n|^{1/n}$, et par suite on a $\limsup|a_n|^{1/n} \leq \sup|a_n|^{1/n}$. On en déduit que $r(R,\omega) \geq \tau(R,\omega)$.
3) Soit $\mathcal{E}_\omega$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs t vérifiant la condition $|a_n|t^n \leq 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Pour $t > 0$, on a $|a_n|t^n \leq 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\tau(R,\omega) \geq t$. On en déduit donc que $= \tau(R,\omega)$ est

bien la borne supérieure de $\mathcal{E}_\omega$.
4) $t < \tau(R,\omega)$ entraîne que $t \in \mathcal{E}_\omega$, c'est à dire que l'on a $|a_n|t^{n+1} \leq t$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Comme $\tau(R,\omega) \leq r(R,\omega)$, donc R est analytique dans $B^+(\omega,t)$, et par suite la proposition 5.1.3 entraîne que pour $s = \sup_{n\geq 0}|a_n|t^{n+1}$, on a $R(B^+(\omega,t)) = B^+(\omega,s) \subset B^+(\omega,t)$, vu que $|a_0| = |R'(\omega)| \leq 1$ (puisque ω est un point fixe non répulsif de R).
5) Comme $B^-(\omega,\tau(R,\omega))$ est l'union des ensembles $B^+(\omega,t)$ où $t < \tau(R,\omega)$, on en déduit que $R(B^-(\omega,\tau(R,\omega))) \subset B^-(\omega,\tau(R,\omega))$.
6) Supposons que $\tau(R,\omega) < r(R,\omega)$, on a vu dans (4) que pour $t < \tau(R,\omega)$, on a $|a_n|t^{n+1} \leq t$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, On en déduit que $|a_n|\tau(R,\omega)^{n+1} \leq \tau(R,\omega)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Comme $\tau(R,\omega) < r(R,\omega)$, donc R est analytique dans $B^+(\omega,\tau(R,\omega))$, et par suite la proposition 5.1.3 entraîne que pour $s = \sup_{n\geq 0}|a_n|\tau(R,\omega)^{n+1}$ on a $R(B^+(\omega,\tau(R,\omega))) = B^+(\omega,s) \subset B^+(\omega,\tau(R,\omega))$, vu que $|a_0| \leq 1$.
De plus on a $\sup_{n\geq 1}|a_n|^{1/n} > \limsup_{n\geq 1}|a_n|^{1/n}$ et $\limsup_{n\geq 1}|a_n|^{1/n} = \lim_{m\to\infty}\sup_{k\geq m}|a_k|^{1/k}$, et par suite il existe un entier naturel m_0 tel pour tout entier naturel $m \geq m_0$, on ait $\sup_{k\geq m}|a_k|^{1/k} < \sup_{n\geq 1}|a_n|^{1/n}$, et par suite on a $\sup_{n\geq 1}|a_n|^{1/n} = \max_{1\leq k\leq m_0}|a_k|^{1/k}$.
7) Si on note $\mathcal{E}'_\omega$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs t vérifiant la condition $R(B^+(\omega,t)) \subset B^+(\omega,t)$, on remarque que $\mathcal{E}'(\omega) \subset]0, r(R,\omega)]$ (vu que R est analytique sur $B^+(\omega,t)$ pour $t \in \mathcal{E}'(\omega)$). Montrons que $\tau(R,\omega) = \sup\mathcal{E}'_\omega$. Pour $t \in \mathcal{E}'_\omega$, la proposition 5.1.3 entraîne que pour $s = \max_{n\in\mathbb{N}}|a_n|t^{n+1}$ on a $B^+(\omega,s) = R(B^+(\omega,t)) \subset B^+(\omega,t)$, par suite on a $|a_n|t^{n+1} < t$ pour tout entier naturel non nul n, et (3) entraîne que $t < \tau(R,\omega)$, ie $\tau(R,\omega)$ est un majorant de $\mathcal{E}'_\omega$. D'autre part si $t < \tau(R,\omega)$, (3) entraîne que $s = \max_{n\in\mathbb{N}}|a_n|t^{n+1} < t$ et que $B^+(\omega,s) = R(B^+(\omega,t)) \subset B^+(\omega,t)$, et par suite $t \in \mathcal{E}'_\omega$. On en déduit donc que $\tau(R,\omega) = \sup\mathcal{E}'_\omega$. □

Proposition 6.1.20. — *Soient $(R_i)_{i\in I}$ une famille de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ ayant un point fixe non répulsif commun $\omega \in \mathbb{C}_p$. On pose $G = \langle R_i, /i \in I\rangle$ et $\tau = \inf\{\tau(R_i,\omega), /i \in I\}$. Si $\mathcal{J}(G) \neq \emptyset$ et $\tau \neq 0$, alors $B^-(\omega,\tau) \subset \mathcal{F}(G)$. Si de plus τ n'est pas le minimum des $\tau(R_i,\omega)$ alors $B^+(\omega,\tau) \subset \mathcal{F}(G)$*

Démonstration. — Pour $r < \tau$ on a pour tout i dans I, $R_i(B^+(\omega,r)) \subset B^+(\omega,r)$, et le critère de Hsia (théorème 5.7) nous permet de conclure. □

6.1.6. Cas du point à l'infini. — Soit f une fonction non constante qui est analytique au voisinage de l'infini (c'est à dire que la fonction $\tilde{f} = (f(\frac{1}{z}))^{-1}$ est analytique au voisinage de 0). On note $r(f,\infty)$ le rayon de convergence de $\tilde{f}$ au voisinage de 0. On suppose que ∞ est un point fixe non répulsif de f, et

que $\tilde{f}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i+1}$ est le développement de Taylor de $\tilde{f}$ au voisinage de 0.
Si les a_i ne sont pas tous nuls pour i dans $\mathbb{N}^*$ (ie $\tilde{f}$ n'est pas une homothétie), on pose : $\tau(f,\infty) = \tau(\tilde{f},0)^{-1} = \sup\left\{|a_n|^{\frac{1}{n}} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, et si $\tilde{f}$ est une homothétie, on pose : $\tau(f,\infty) = 0$.

Lemme 6.1.21. — *Soit R une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ vérifiant les hypothèses précédentes, on a :*
1) Si $\tilde{R}$ n'est pas une homothétie, alors $\tau(R,\infty) \in \mathbb{R}^{+*}$.
2) $\tau(R,\infty) \geq r(R,\infty)^{-1}$.
3) $\tau(R,\infty) = \inf\{t > 0, \ / \ |a_n| < t^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*\}$.
4) $t > \tau(R,\infty)$ entraîne que $R(B^-(0,t)^c) \subset B^-(0,t)^c$.
5) $R(B^+(0,\tau(R,\infty))^c) \subset B^+(0,\tau(R,\infty))^c$.
6) Si $\tau(R,\infty) > r(R,\infty)^{-1}$, alors on a $R(B^-(0,\tau(R,\infty))^c) \subset B^-(0,\tau(R,\infty))^c$, et il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\tau(R,\infty) = |a_k|^{\frac{1}{k}}$.
7) $\tau(R,\infty) = \inf\{t > 0, \ / \ R(B^-(0,t)^c) \subset B^-(0,t)^c\}$.

Démonstration. — Résulte de la définition de $\tilde{R}$ et du lemme 6.1.19. □

Proposition 6.1.22. — *Soient $(R_i)_{i\in I}$ une famille de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ ayant l'infini comme point fixe non répulsif commun. On pose $G = \langle R_i, / i \in I\rangle$ et $\tau = \sup\{\tau(R_i,\infty), / i \in I\}$. Si $\mathcal{J}(G) \neq \emptyset$ et $\tau \neq \infty$, alors $B^+(0,\tau)^c \subset \mathcal{F}(G)$. Si de plus τ n'est pas le maximum des $\tau(R_i,\infty)$ alors $B^-(0,\tau)^c \subset \mathcal{F}(G)$.*

Démonstration. — Pour $r > \tau$ on a pour tout i dans I, $R_i(B^-(0,r)^c) \subset B^-(0,r)^c$, et le critère de Hsia (théorème 5.7) nous permet de conclure. □

Remarque 6.1.23. — En particulier si G est engendré par un nombre fini de polynômes de degrés au moins deux, alors $\infty \in \mathcal{F}(G)$.

6.2. Stabilités de l'ensemble de Julia

Nous passons maintenant aux propriétés de stabilité. Nous aurons besoin du lemme suivant dans la suite :

Lemme 6.2.1. — *Soient D un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, R une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, $\alpha > 0$ donné. Soit $D^* = R(D)$. Il existe $\alpha^* > 0$ possédant la propriété suivante : Pour tout $u, v \in D^*$ tels que $\Delta(u,v) < \alpha^*$, il existe $x, y \in D$, tels que $R(x) = u$, $R(y) = v$ et $\Delta(x,y) < \alpha$.*

Démonstration. — Voir [**9**], page 41, démonstration de la proposition 3. □

Comme dans le cas complexe (cf page 360 de [**13**]), on a :

Proposition 6.2.2. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles. Pour tout g de G on a que l'ensemble $\mathcal{F}(G)$ est stable avant par g, et l'ensemble $\mathcal{J}(G)$ est stable arrière par g (c'est à dire que $g(\mathcal{F}(G)) \subset \mathcal{F}(G)$, et que $g^{-1}(\mathcal{J}(G)) \subset \mathcal{J}(G)$).*

Démonstration. — Soient $g \in G$ et $z \in \mathcal{F}(G)$, il existe un disque D de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ de centre z tel que la famille des fractions rationnelles de G soit équicontinue sur D.
Donc pour tout ϵ positif il existe un η positif tel que pour tout f dans G et tout $x, y \in D$, $\Delta(x,y) < \eta$ entraîne que $\Delta(f(x), f(y)) < \epsilon$.
D'après le lemme 6.2.1, on sait qu'il existe un réel positif η' ayant la propriété suivante : pour tout u, v dans $g(D)$ tels que $\Delta(u,v) < \eta'$ il existe $x, y \in D$ tels que $u = g(x), v = g(y)$ et $\Delta(x,y) < \eta$. Par suite pour tout f dans G et pour tout u, v dans $g(D)$ tels que $\Delta(u,v) < \eta'$, on a $\Delta(f(u), f(v)) = \Delta(f(g(x)), f(g(y))) < \epsilon$ (en effet, on a $f \circ g \in G$ vu que G est un semi-groupe).
Donc la famille des fractions rationnelles de G est équicontinue sur $g(D)$ et par suite $g(\mathcal{F}(G)) \subset \mathcal{F}(G)$. La seconde assertion résulte de la première, puisque les ensembles de Julia et de Fatou sont complémentaires. □

En particulier on a donc $\mathcal{J}(G) \subset g(\mathcal{J}(G))$ pour tout élément g de G.

Proposition 6.2.3. — *Soit F un fermé stable arrière par tout g de G (c'est à dire que $g^{-1}(F) \subset F$). Si F a au moins deux points alors $\mathcal{J}(G) \subset F$.*

Démonstration. — Posons $U = F^c$, alors $g^{-1}(F) \subset F$ donne que $U = F^c \subset g^{-1}(F)^c = g^{-1}(F^c) = g^{-1}(U)$, par suite on a $g(U) \subset U$ pour tout g de G, et comme le complémentaire de U a au moins deux éléments, la proposition 6.1.6 donne que $U \subset \mathcal{F}(G)$, et donc $\mathcal{J}(G) \subset F$. □

Remarque 6.2.4. — Si R est un élément d'un semi-groupe $G = \langle R_i \ / i \in I \rangle$ tel que $|\mathcal{J}(R)| \geq 2$ et $R_i^{-1}(\mathcal{J}(R)) \subset \mathcal{J}(R)$ pour tout i dans I, alors les propositions 6.2.3 et 6.1.7 entraînent que $\mathcal{J}(G) = \mathcal{J}(R)$. En particulier si f, g sont deux fractions rationnelles de degrés au moins deux ayant le même ensemble de Julia non vide, alors on a $\mathcal{J}(\langle f, g \rangle) = \mathcal{J}(f)$.

Remarque 6.2.5. — Si on note $\rho(G)$ l'ensemble des parties fermées F de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ ayant au moins deux points et qui sont stable arrière par tous les éléments g de G, alors on a $\mathcal{J}(G) \subset \bigcap_{F \in \rho(G)} F$, et si de plus $\mathcal{J}(G)$ a au moins deux éléments alors l'inclusion précédente est une égalité (car $\mathcal{J}(G)$ est fermé et stable arrière par tous les éléments g de G).

Dans la suite on aura besoin de quelques résultats techniques. Le lemme suivant est dit lemme de Hensel :

Proposition 6.2.6. — *Soit K un corps valué ultramétrique complet d'anneau de valuation $\mathbb{A}$, d'idéal maximal $\mathbb{M}$ et f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{A}$, a un élément de $\mathbb{A}$ tel que $|f(a)| < |f'(a)|^2$. Alors il existe une et une seule racine ξ de f dans $\mathbb{A}$ telle que $|\xi - a| \leq \frac{|f(a)|}{|f'(a)|} < |f'(a)|$.*

Démonstration. — Voir [**19**] page 80. □

Remarque 6.2.7. — En particulier la proposition s'applique si $f(a) \in \mathbb{M}$, et $f'(a) \notin \mathbb{M}$.

Corollaire 6.2.8. — *Soient q un nombre premier et K un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos de caractéristique zéro, d'anneau de valuation $\mathbb{A}$, d'idéal maximal $\mathbb{M}$, et dont le corps résiduel est de caractéristique différente de q. Alors pour tout entier naturel m et tout λ dans $\mathbb{A} - \mathbb{M}$, l'équation $z^{q^m} - \lambda = 0$ admet dans $\mathbb{A}$, q^m racines incongrues modulo $\mathbb{M}$.*

Démonstration. — Posons $T(z) = z^{q^m} - \lambda$, alors on voit que les racines de T sont dans $\mathbb{A} - \mathbb{M}$ et qu'elle ne sont pas racines de T' modulo $\mathbb{M}$. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente. □

Lemme 6.2.9. — *Soient r un entier naturel non nul et p un nombre premier, on suppose que r est premier à $p-1$ alors pour tout entier relatif l non multiple de p il existe un entier j compris entre 1 et $p-1$ tel que $j^r \equiv l[p]$*

Démonstration. — Comme $\mathbb{F}_p^*$ est un groupe cyclique, donc il existe un entier c tel que $\overline{c}$ soit un générateur de ce groupe. Comme r est premier à $p-1$, donc $\overline{c}^r$ est aussi un générateur du groupe $\mathbb{F}_p^*$, par suite il existe un entier s tel que $\overline{l} = (\overline{c^r})^s = (\overline{c^s})^r$. □

Dans le cas des ensembles de Julia d'un sous-groupe engendré par une fraction rationnelle R, on sait que les ensembles de Julia et de Fatou de R sont *complètement stables* par R, c'est-à-dire que l'on a $R^{-1}(\mathcal{F}(R)) = \mathcal{F}(R)$ et $R^{-1}(\mathcal{J}(R)) = \mathcal{J}(R)$.

L'exemple suivant montre qu'il n'en est rien dans le cas général d'un semi-groupe de fractions rationnelles, et qu' on n'a pas l'égalité $g^{-1}(\mathcal{J}(G)) = \mathcal{J}(G)$ pour tout g de G. On retrouve d'ailleurs la même difficulté dans le cas complexe (cf page 361 de [**13**]).

Exemple 6.2.10. — Soient p, q deux nombres premiers distincts tels que q soit premier à $p-1$, et G le semi-groupe engendré par les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$: $g_1(z) = \dfrac{z^p - z}{p}$, et $g_2(z) = z^q$.

1) La première remarque que l'on peut faire est que l'ensemble $Y = B^+(0,1)^c$ est tel que $g_1(Y) \subset Y$ et $g_2(Y) \subset Y$. Il en résulte immédiatement que, pour tout $g \in G$, on a $g(Y) \subset Y$. Si D est un disque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ contenu dans Y,

on a donc $g(D) \cap B^+(0,1) = \emptyset$, ce qui par le critère de Hsia implique que la famille des polynômes de G est équicontinue sur D, et par suite Y est inclus dans l'ensemble de Fatou de G.

Pour tout entier naturel k posons $A_k = \{x \in \mathbb{C}_p ; x = p^k(l + p\omega), \omega \in \mathbb{Z}_p, l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq p-1\}$; on a clairement que $\mathbb{Z}_p = (\cup_{k\geq 0} A_k) \cup \{0\}$. Pour m et k entiers naturels, on pose également $B_{k,m} = \{x \in \mathbb{C}_p ; x = u(l + p\theta), \theta \in \mathbb{Z}_p, l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq p-1, u^{q^m} = p^k\}$.

2) Montrons que l'image réciproque par $g_2^{[m]}$ de A_k est $B_{m,k}$. Il est clair que l'image de $B_{m,k}$ par $g_2^{[m]}$ est incluse dans A_k.

Soit maintenant un point x de $\mathbb{C}_p$ tel que $g_2^{[m]}(x) = p^k(l+p\omega)$, et $\omega \in \mathbb{Z}_p, l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq p-1$. Soit $P(y) = y^{q^m} - (l + p\omega)$, polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Comme q est premier à $p-1$ donc il existe un entier j compris entre 1 et $p-1$ tel que $j^{q^m} \equiv l[p]$. Donc on a $|P(j)| = |j^{q^m} - (l + p\omega)| \leq \frac{1}{p} < 1$ et $|P'(j)| = 1$. Le lemme de Hensel assure alors l'existence de $y_0 \in \mathbb{Z}_p$, tel que $|y_0 - j| \leq \dfrac{1}{p}$ et $P(y_0) = 0$. Posons $y_0 = j + p\theta$, il en résulte que $\theta \in \mathbb{Z}_p$, et $y_0^{q^m} = (j + p\theta)^{q^m} = l + p\omega$. Par suite $u = \dfrac{x}{y_0}$ verifie $u^{q^m} = p^k$, et on a alors $x = uy_0 = u(j + p\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{Z}_p$. On a donc $x \in B_{k,m}$, et on a bien $(g_2^{[m]})^{-1}(A_k) = B_{k,m}$.

3) On sait par la proposition 6.2.2 que $g_2^{-1}(\mathcal{J}(G)) \subset \mathcal{J}(G)$, donc si on pose $B = (\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{k,m}) \bigcup \{0\}$, alors $B_{k,0} = A_k$ donne que $\mathbb{Z}_p \subset B$, et comme on sait que l'ensemble de Julia de g_1 est $\mathbb{Z}_p$ donc on a
$A_k \subset \mathbb{Z}_p = \mathcal{J}_{g_1} \subset \mathcal{J}(G)$, par suite on obtient que $B_{k,m} \subset \mathcal{J}(G)$ et donc $\mathbb{Z}_p \subset B \subset \mathcal{J}(G) \subset Y^c = B^+(0,1)$.

4) Cependant, il existe des éléments dans B qui ne sont pas dans $\mathbb{Z}_p$, par exemple les éléments w de $\mathbb{C}_p$ tels que $g_2(w) = w^q = p$, qui sont de valeur absolue p-adique $\dfrac{1}{\sqrt[q]{p}} \notin p^{\mathbb{Z}}$, et donc $w \notin \mathbb{Z}_p$.

5) De plus pour un tel élément de $\mathcal{J}(G)$, il va exister un entier N tel que $v = g_1^{[N]}(w) \in Y$; en effet pour tout $x \in B^+(0,1) - \mathbb{Z}_p$, on a $g_1^{[n]}(x)$ tend vers l'infini si $n \to +\infty$ vu que $\mathbb{Z}_p$ est l'ensemble de Julia rempli de g_1 cf [**7**] page 23. et par suite $v \notin \mathcal{J}(G)$.

Donc l'ensemble de Julia de G n'est pas complètement stable par les éléments de G en général.

6) On pourrait se demander si B est égal à l'ensemble de Julia de G.

Nous allons continuer un peu l'étude de cet exemple en montrant que B est une partie fermée de $\mathcal{J}(G)$, qui est différente de $\mathcal{J}(G)$.

i) Montrons tout d'abord que B est fermé. Pour cela, soit x_r une suite d'éléments de B, qui converge vers $x \in \mathbb{C}_p$. Si $x = 0$, alors $x \in B$. Sinon pour tout r dans $\mathbb{N}$ on a $x_r = u_r(l_r + p\omega_r)$ avec la propriété qu'il existe deux entiers m_r et k_r vérifiant $u_r^{q^{m_r}} = p^{k_r}$ et $\omega_r \in \mathbb{Z}_p, l_r \in \{1, \ldots, p-1\}$. On peut alors (quitte à extraire une sous-suite) supposer que tous les x_r sont tous non nuls, et que l_r est une suite constante de valeur l. Et comme $\mathbb{Z}_p$ est compact, on peut aussi supposer que ω_r est une suite convergente vers $\omega \in \mathbb{Z}_p$. Il en résulte que la suite $u_r = \dfrac{x_r}{l + p\omega_r}$ est elle-même convergente ; on note u sa limite. Donc u est non nul, et il existe un indice r_0 tel que si $r \geq r_0$, on ait $|u_r| = |u|$. Il en résulte que si $|u| = p^{-a/b}$, avec $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$, et a, b premiers entre eux si a n'est pas nul, on a pour $r \geq r_0$ l'égalité $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k_r}{q^{m_r}}$. On peut donc écrire $b = q^c$ pour un entier naturel c. On a alors ${u_r}^{bq^{m_r}} = p^{bk_r} = p^{aq^{m_r}}$ Si on pose $t_r = \dfrac{u_r^b}{p^a}$, il en résulte que $t_r^{q^{m_r}} = 1$, et donc $|t_r| = 1$ pour $r \geq r_0$. D'autre part, on a $\dfrac{t_{r+1}}{t_r} = (\dfrac{u_{r+1}}{u_r})^b$ qui converge vers 1 si r tend vers $+\infty$.

Il en résulte qu'il existe un entier naturel $r_1 \geq r_0$, tel que pour $r \geq r_1$, on ait $|t_{r+1} - t_r| < 1$. Comme t_{r+1} et t_r sont solutions d'une équation de la forme $x^{q^d} - 1 = 0$, qui admet des racines dont les images sont distinctes dans le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$, ceci implique que t_r est constante pour $r \geq r_1$. Soit t cette constante, qui vérifie donc $t^{q^m} = 1$ pour $m = m_{r_1}$. On a donc pour $r \geq r_1$ que $tp^a = u_r^b$, de sorte qu'en passant à la limite on a $u^b = tp^a$, et donc $(u^b)^{q^m} = u^{q^{c+m}} = (tp^a)^{q^m} = p^{aq^m}$. Donc $x = u(l + p\omega) \in B$.

ii) Montrons maintenant que B n'est pas égal à l'ensemble de Julia de G. Pour cela, soit $w \in \mathbb{C}_p$, tel que $g_2(w) = w^q = p$. Alors $w \in B_{1,1} \subset B$. Considérons une racine v de l'équation $g_1(v) = w$, alors on sait par une proposition qui précède que $v \in \mathcal{J}(G)$. Cette équation a p solutions dans $\mathbb{A}_p$, et d'après le lemme de Hensel, une seule des solutions vérifie $|v-1| < 1$. Nous allons montrer que cette solution n'est pas dans B. Supposons le contraire, puisque v est de module 1, elle s'écrit $v = u(l + p\omega)$, avec u racine q^m-ième de 1, et $\omega \in \mathbb{Z}_p$, et $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq p-1$. On a $|v-1| < 1$, on en déduit que $|u-1| < 1$. Comme l'équation $x^{q^m} - 1 = 0$ a des racines dont les images dans le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$ sont distinctes, il en résulte que $u = 1$, et $v = l + p\omega \in \mathbb{Z}_p$. Mais alors $v^p - v = pw \in \mathbb{Z}_p$, ce qui est absurde car $|w| = p^{-1/q}$ implique que $pw \notin \mathbb{Z}_p$.

6.2.1. Semi-groupe engendré par une partie finie. — L'ensemble de Fatou d'un semi-groupe de fractions ayant un nombre fini de générateurs vérifie la propriété suivante plus faible que la stabilité arrière.

Proposition 6.2.11. — *Soit G le semi-groupe engendré par un nombre fini de fractions rationnelles $g_1, \ldots, g_n$ alors on a $\mathcal{F}(G) = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(\mathcal{F}(G))$, et* $\mathcal{J}(G) = \bigcup_{i=1}^{n} g_i^{-1}(\mathcal{J}(G))$

Démonstration. — La seconde égalité résulte de la première. Compte tenu de la proposition 6.2.2 page 83, pour montrer la première égalité, il suffit de voir que $\bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(\mathcal{F}(G)) \subset \mathcal{F}(G)$. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(\mathcal{F}(G))$ et pour $i = 1, \ldots, n$, soient D_i des disques de centres $g_i(x)$ où G est équicontinue. Pour ϵ positif il existe η_i positif tel que pour u, v dans D_i et $\Delta(u, v) < \eta_i$ on ait $\Delta(f(u), f(v)) < \epsilon$ pour tout f de G. Comme les fractions rationnelles sont continues sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, il existe un disque D de centre x contenu dans $\bigcap g_i^{-1}(D_i)$. D'autre part pour $i = 1, \ldots, n$, il existe $C_i > 0$ tel que pour α, β dans D on ait $\Delta(g_i(\alpha), g_i(\beta)) < C_i\Delta(\alpha, \beta)$. Par suite si on pose $a = Min\{\eta_i / i = 1 \ldots, n\}$, $b = Max\{C_i / i = 1 \ldots, n\}$, et qu'on note η le minimum de $\frac{a}{b}$, et de ϵ on a pour α, β dans D, $\Delta(\alpha, \beta) < \eta$ entraîne que $\Delta(f(g_i(\alpha)), f(g_i(\beta))) < \epsilon$, et comme $G = (\bigcup_{i=1}^{n}(G \circ g_i)) \bigcup \{z\}$, on en déduit que G est équicontinue sur D, et donc que x est dans $\mathcal{F}(G)$. □

Remarque 6.2.12. — 1) Dans le cas où G admet un seul générateur g on retrouve la stabilité arrière de $\mathcal{F}(g)$.
2) On a un résultat analogue dans le cas complexe cf [**14**].

6.3. Cas où $\mathcal{J}(G)$ est fini

Soit R une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, on sait que si R est de degré au mois deux, alors $\mathcal{J}(R)$ est vide ou infini (voir par exemple [**15**] page 694).
Dans ce paragraphe, on montre le théorème 6.3.1 qui est une généralisation du résultat précédent au cas de l'ensemble de Julia d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$.

Théorème 6.3.1. — *Soient $R_1, \ldots, R_n$ des fractions rationnelles de degrés au moins deux à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et $G = \langle R_1, \ldots, R_n \rangle$, alors $\mathcal{J}(G)$ est soit vide soit infini.*

Considérons d'abord, un semi-groupe G quelconque de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ (ie contenant éventuellement des fractions rationnelles de degrés un et pouvant avoir une infinité de générateurs). Nous commençons

par quelques résultats préliminaires.

Remarque 6.3.2. — Du fait que si $g \in G$ on a $\mathcal{J}(g) \subset \mathcal{J}(G)$, il résulte que si $\mathcal{J}(G)$ est fini alors les éléments de G sont soit des homographies soit des fractions rationnelles de degrés au moins deux ayant un ensemble de Julia vide.

Proposition 6.3.3. — *Si $\mathcal{J}(G)$ est fini, alors $\mathcal{J}(G)$ et $\mathcal{F}(G)$ sont complètement stables par les éléments de G.*

Démonstration. — Cela résulte pour $\mathcal{J}(G)$ de la proposition 5.5.3, et pour $\mathcal{F}(G)$ du fait que les ensembles $\mathcal{J}(G)$ et $\mathcal{F}(G)$ sont complémentaires . □

Proposition 6.3.4. — *Soit G un semi-groupe ne contenant que des homographies. Si $\mathcal{J}(G)$ est fini, alors il a au plus deux éléments.*

Démonstration. — Supposons que $\mathcal{J}(G)$ est fini, alors d'après la proposition 6.3.3, $\mathcal{J}(G)$ complètement stable par les éléments de G. On distingue alors deux cas :
1) Si G est infini la proposition 5.5.6 entraîne que $|\mathcal{J}(G)| \leq 2$.
2) Si G est fini la proposition 5.6.5 entraîne qu'il existe une constante strictement positive C telle que l'on ait $\Delta(g(x), g(y)) \leq C\Delta(x, y)$ pour tout g dans G et x, y dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. On en déduit que $\mathcal{J}(G) = \emptyset$. (Cela résulte aussi de la proposition 5.5.7). □

Proposition 6.3.5. — *Soit $\mathcal{J}(G)$ est infini soit $\mathcal{J}(G)$ a au plus deux éléments.*

Démonstration. — Si G est contenu dans le groupe des homographies, on utilise la proposition précédente, et si G contient une fraction rationnelle de degré au moins deux, on utilise la proposition 5.5.4. □

Remarque 6.3.6. — On peut avoir $\mathcal{J}(G)$ infini avec $\mathcal{J}(g)$ fini pour tout g de G. Par exemple si on prend $G = \langle f(z), g(z) \rangle$, où $f(z) = \dfrac{z}{p}$, $g(z) = \dfrac{z-1}{p} + 1$ alors les éléments de G sont de la forme $\dfrac{z}{p^\alpha} + \beta$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et $\beta \in \mathbb{Q}$ par suite si on pose $\varphi(z) = z - r$, on peut trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(z) = \dfrac{z}{p^\alpha}$, et donc $\mathcal{J}(g)$ a au plus un élément. D'autre part on a vu que $E(\dfrac{z}{p}) = \{0, \infty\}$, et comme $\mathcal{J}(f) = \{0\}$ et que g est le conjugué de f par $\varphi(z) = z - 1$, donc $\mathcal{J}(g) = \{-1\}$, et $\mathcal{J}(G)$ est infini vu que f est une fraction rationnelle non constante qui n'est pas une homothétie de rapport une racine de l'unité, et que $f^{-1}(-1) = -p$, et donc $\mathcal{J}(G)$ contient les trois points $0, -1, -p$, et par suite est infini par la proposition qui précède.

6.3.0.0.1. Les cas $\mathcal{J}(G)$ de cardinal $0, 1$ ou 2. — On se propose ici de donner les propriétés de G selon que $\mathcal{J}(G)$ soit de cardinal $0, 1$ ou 2.
On a vu que l'ensemble de Julia de G est vide, si G est un semi-groupe de fractions rationnelles engendré par une partie non vide A dont les éléments sont des fractions rationnelles ayant une bonne réduction, mais comme dans le cas d'un semi-groupe engendré par une seule fraction rationnelle ce n'est pas la seule possibilité. Par exemple si les conjugués des générateurs de G par une même homographie non constante ont tous une bonne réduction alors on a aussi que l'ensemble de Julia de G est vide.
Regardons le cas où $\mathcal{J}(G)$ a un seul élément.

Proposition 6.3.7. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles. On suppose que F est une partie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ stable arrière par tout élément g de G et que F est de cardinal un, alors G est conjugué à un sous-semi-groupe de $\mathfrak{P}$ (où $\mathfrak{P}$ désigne l'ensemble des polynômes non constants à coefficients dans le corps $\mathbb{C}_p$).*

Démonstration. — Si $F = \{a\}$ où $a \in \mathbb{C}_p$, alors quitte à conjuguer par l'homographie non constante $\varphi(z) = \dfrac{1}{z-a}$, on peut supposer que $F = \{\infty\}$. Donc si g est un élément de G, on a $\emptyset \neq g^{-1}(\{\infty\}) = g^{-1}(F) \subset F = \{\infty\}$. Par suite $g^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$, et g n'a pas de pôles dans $\mathbb{C}_p$, et donc g est un polynôme. □

Corollaire 6.3.8. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles tel que $\mathcal{J}(G)$ ait un seul élément, alors G est conjugué à un semi-groupe H de polynômes tel que $\mathcal{J}(H) = \{\infty\}$. Si de plus les éléments de $G - \{z\}$ sont tous de degrés au moins deux, alors G n'admet pas de système fini de générateurs.*

Démonstration. — La première partie résulte de la proposition précédente ; pour démontrer la seconde assertion, on peut supposer que G est un semi-groupe engendré par des polynômes $P_1, \ldots, P_n$ tous de degrés au moins deux, et que $\mathcal{J}(G) = \{\infty\}$. Comme l'infini est un point fixe non répulsif commun de $P_1, \ldots, P_n$, alors le lemme 6.1.21 implique qu'il existe un nombre réel positif $M = \max\{\tau(P_i, \infty) \,/\, i = 1, \ldots, n\}$ tel que $|x| \geq M$ entraîne que $|P_i(x)| \geq M$ pour $i = 1, \ldots, n$, et donc on a $\infty \in B^-(0, M)^c \subset \mathcal{F}(G)$. Et cela nous donne une contradiction. □

Remarque 6.3.9. — 1) Dans le prochain paragraphe on donnera des exemples où les hypothèses du corollaire précèdent sont satisfaites.
2) Si G contient des homographies, on peut avoir $|\mathcal{J}(G)| = 1$ et G engendré par un nombre fini de polynômes. En effet pour $f(z) = pz$, $g(z) = z^2$, $G = \langle f, g\rangle$ on a $\{\infty\} = \mathcal{J}(f) \subset \mathcal{J}(G)$, et d'autre part on montre dans le prochain paragraphe que l'ensemble de Julia d'un semi-groupe de monômes est contenu

dans $\{0,\infty\}$. Comme $f(B^+(0,1)) \cup g(B^+(0,1)) \subset B^+(0,1)$, le critère de Hsia donne que $0 \in \mathcal{F}(G)$, et par suite on a $\mathcal{J}(G) = \{\infty\}$.

Par contre dans le cas où $G - \{z\}$ ne contient que des éléments de degrés au moins deux, on ne sais pas si $|\mathcal{J}(G)| = 1$ entraîne que G est conjugué à un semi-groupe de monômes (question ouverte).

Regardons alors le cas où $\mathcal{J}(G)$ a exactement deux points.

Notons i l'homographie définie par $i(z) = \dfrac{1}{z}$, $\mathcal{S}$ le semi-groupe des monômes non constants en z et $\dfrac{1}{z}$.

Proposition 6.3.10. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles. On suppose que F est une partie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ stable arrière par tout élément g de G et que F est de cardinal deux, alors il existe une homographie non constante φ telle que G_φ soit un sous-semi-groupe de $\mathcal{S}$.*

Démonstration. — Supposons que $F = \{\alpha, \beta\}$, et considérons l'homographie non constante définie par :

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{z-\alpha}{z-\beta} & \text{si} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}_p \\ \dfrac{1}{z-\beta} & \text{si} \quad \alpha = \infty \end{cases}$$

On a alors $\varphi(F) = \{0,\infty\}$. Et donc pour tout g dans $G_\varphi = \varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$, on a $g^{-1}(\{0,\infty\}) \subset \{0,\infty\}$, et comme g est surjective, donc $g^{-1}(\{0,\infty\}) = \{0,\infty\} = g(\{0,\infty\})$. Deux cas se présentent :

1) Si $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$, alors on a $g^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$ et par suite g est un polynôme, et d'autre part on a $g^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, et donc $g(z) = \lambda z^n$ où $\lambda \in \mathbb{C}_p^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $g \in \mathcal{S}$

2) Si $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$, On pose $h(z) = i \circ g(z)$. Alors on a $h^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$ et $h^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, et on voit comme dans le premier cas que h est un monôme non constant, et donc que $g \in \mathcal{S}$. □

Corollaire 6.3.11. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles. On suppose que $\mathcal{J}(G)$ a deux éléments, alors il existe une homographie non constante φ telle que G_φ soit un sous-semi-groupe de $\mathcal{S}$.*

Remarque 6.3.12. — Dans le prochain paragraphe on donnera des exemples où les hypothèses du corollaire précèdent sont satisfaites. En fait on ne rencontre ce genre d'exemples ni dans le cas d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients complexes, ni dans le cas d'une fraction rationnelle à coefficients p-adiques.

Si $\mathcal{J}(G)$ a un seul élément, on peut péciser le lemme précédent comme suit :

Lemme 6.3.13. — *Soit G un semi-groupe engendré par des fractions rationnelles qui sont toutes de degrés au moins deux. Si $\mathcal{J}(G)$ a un seul élément, alors tout système de générateurs de G est infini.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent on peut supposer que G est un semi-groupe de polynômes. Si G est un semi-groupe engendré par des polynômes $P_1, \dots, P_n$ tous de degrés au moins deux et que $\mathcal{J}(G) = \{\infty\}$, comme l'infini est un point fixe non répulsif commun de $P_1, \dots, P_n$ la Remarque 6.1.23 implique que $\infty \in \mathcal{F}(G)$. Et cela nous donne une contradiction. □

Pour compléter l'étude du cas où $\mathcal{J}(G)$ est fini, on est amené à examiner l'ensemble de Julia de G, quand G est un sous semi-groupe du semi-groupe $\mathcal{S}$ des fractions rationnelles de la forme az^m où $a \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ et $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Lemme 6.3.14. — *Soit G un sous semi-groupe de $\mathcal{S}$, alors on a :*
$$\mathcal{J}(G) \subset \{0, \infty\}$$

Démonstration. — En effet, pour tout élément g de G on a $g(\mathbb{C}_p - \{0\}) \subset \mathbb{C}_p - \{0\}$. Comme $\mathbb{C}_p - \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ dont le complémentaire contient deux points, le corollaire 6.1.6 entraîne que $\mathbb{C}_p - \{0\} \subset \mathcal{F}(G)$ et $\mathcal{J}(G) \subset \{0, \infty\}$. □

Si G est un sous-semi-groupe de $\mathcal{S}$ ayant un nombre fini de générateurs, on ne peut pas avoir $|\mathcal{J}(G)| = 2$, comme le montre le lemme qui suit.

Lemme 6.3.15. — *Soit $G = \langle R_j \ / \ j \in J \rangle$ où $R_j(z) = (\lambda_j z)^{r_j}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ et $r_j \in \mathbb{Z} - \{0, -1, 1\}$ pour tout j dans J. On suppose que $\sup_{j \in J} |\lambda_j| \neq \infty$ et que $\inf_{j \in J} |\lambda_j| \neq 0$, alors on a $\mathcal{J}(G) = \emptyset$.*

Démonstration. — 1) Remarquons d'abord que tout élément R de $\mathcal{S}$ peut se mettre sous la forme $R(z) = (\alpha z)^n$ où $\alpha \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ et $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, et que si $T(z) = (\beta z)^m$ où $\beta \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ et $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, alors on a $R \circ T(z) = (\alpha(m)\beta z)^{nm}$, où $\alpha(m)$ désigne un élément de $\mathbb{C}_p - \{0\}$ tel que $\alpha(m)^m = \alpha$ (en particulier on a $|\alpha(m)| = |\alpha|^{1/m}$).
De plus, on vérifie facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N} - \{0\}$) que si pour $i = 1, \dots, n$ on a $T_i(z) = (\mu_i z)^{m_i}$ où $m_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mu_i \in \mathbb{C}_p - \{0\}$, alors on a $T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1(z) = (\lambda z)^m$, où $m = m_n m_{n-1} \cdots m_2 m_1$, et $\lambda = \mu_n(m_{n-1}m_{n-2} \cdots m_2 m_1)\mu_{n-1}(m_{n-2} \cdots m_2 m_1) \cdots \mu_2(m_1)\mu_1$. On en déduit que :

$$|\lambda| = |\mu_n|^{\frac{1}{m_{n-1}m_{n-2}\cdots m_2 m_1}} |\mu_{n-1}|^{\frac{1}{m_{n-2}\cdots m_2 m_1}} \cdots |\mu_2|^{\frac{1}{m_1}} |\mu_1| \tag{4}$$

2) Posons $\mathcal{E} = \{|\lambda_j|^\epsilon \ / \ j \in J, \ \epsilon = \pm 1\}$ et $\delta = \sup \mathcal{E}$, et montrons que pour $R(z) = (\lambda z)^m \in G$, on a $\delta^{-2} \leq |\lambda| \leq \delta^2$.
Remarquons d'abord que $\delta \in [1, +\infty[$ et que $\mathcal{E} \subset [\delta^{-1}, \delta]$.

Si R est un élément de G, alors R s'écrit sous la forme $R = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1$, où $T_i \in \{R_j \ / \ j \in J\}$, $\mu_i \in \{\lambda_j \ / \ j \in J\}$ et $m_i \in \{r_j \ / \ j \in J\}$, pour $i = 1 \dots, n$. Il est facile de voir que si $t \in [\delta^{-1}, \delta]$, et $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ alors on a $t^\alpha \in [\delta^{-|\alpha|}, \delta^{|\alpha|}]$. Par suite, compte tenu de l'égalité (4) on a :

$$|\lambda| \leq \delta^{\left|\frac{1}{m_{n-1}m_{n-2}\cdots m_2 m_1}\right|}\delta^{\left|\frac{1}{m_{n-2}\cdots m_2 m_1}\right|} \dots \delta^{\left|\frac{1}{m_1}\right|}\delta$$

Comme $\dfrac{1}{|m_1|} + \cdots + \dfrac{1}{|m_{n-2}\cdots m_2 m_1|} + \dfrac{1}{|m_{n-1}m_{n-2}\cdots m_2 m_1|} \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} < 1$, on en déduit que $\delta^{-2} \leq |\lambda| \leq \delta^2$.

3) Montrons alors que $0 \in \mathcal{F}(G)$. Pour cela on vérifie que la famille des fractions rationnelles de G est équicontinue dans le disque $B^-(0, \delta^{-2})$. Plus précisément, on va montrer que pour $\epsilon > 0$, l'inégalité $\Delta(y_1, y_2) \leq \epsilon/\delta^2$ entraîne que :
$\Delta(R(y_1), R(y_2)) \leq \epsilon$ pour tout élément R de G.

En effet si y est dans $B^-(0, \delta^{-2})$ et que $R(z) = (\lambda z)^m$ est un élément de G, on a $|\lambda y| \leq \delta^2 |y| < 1$. Envisageons alors deux cas :

i) Si $m > 1$, alors on a $|R(y)| < 1$. Donc $\Delta(R(y_1), R(y_2)) = |R(y_1) - R(y_2)| = |(\lambda y_1)^m - (\lambda y_2)^m| = |\lambda y_1 - \lambda y_2| | \displaystyle\sum_{k+l=n-1} (\lambda y_1)^k (\lambda y_2)^l| \leq |\lambda y_1 - \lambda y_2| \leq \delta^2 \Delta(y_1, y_2)| \leq \epsilon$.

ii) Si $m < -1$, alors pour $y \neq 0$, on a $|R(y)| > 1$. Donc pour $y_1 y_2 \neq 0$, on a $\Delta(R(y_1), R(y_2)) = \left|\dfrac{1}{R(y_1)} - \dfrac{1}{R(y_2)}\right| = |(\lambda y_1)^{m'} - (\lambda y_2)^{m'}|$, où $m' = -m$, et comme dans le cas précédent, on en déduit que $\Delta(R(y_1), R(y_2)) \leq \epsilon$.
Pour $y_1 \neq 0$, et $y_2 = 0$, on a $\Delta(R(y_1), R(y_2)) = \left|\dfrac{1}{R(y_1)}\right| = |(\lambda y_1)^{m'}| \leq |\lambda y_1| \leq \delta^2 \Delta(y_1, 0)| \leq \epsilon$.

4) D'autre part, on a $\infty \in \mathcal{F}(G)$. En effet si on pose $i(z) = 1/z$ et qu'on note H le conjugué de G par i, alors H vérifie les hypothèses du lemme, et la partie 3 de la preuve entraîne que $0 \in \mathcal{F}(H) = i(\mathcal{F}(G))$, et donc que $\infty = i(0) \in \mathcal{F}(G)$.

5) Enfin d'après le lemme 6.3.14, on a $\mathcal{J}(G) \subset \{0, \infty\}$, et compte tenu de ce qui précéde, on en déduit que $\mathcal{J}(G) = \emptyset$. □

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 6.3.1.

Preuve du théorème 6.3.1. — Si $\mathcal{J}(G)$ n'est ni vide ni infini, le lemme 6.3.5 implique que $|\mathcal{J}(G)| \leq 2$, et alors en utilisant les corollaires 6.3.8 et 6.3.11, et les lemmes, 6.3.13 et 6.3.15 on aboutit à une contradiction. □

Les deux corollaires suivants nous donnent des exemples de semi-groupes de fractions rationnelles dont les éléments sont de la forme az^m (où $a \in$

$\mathbb{C}_p - \{0\}, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$) et dont l'ensemble de Julia est de cardinal un ou deux.

Corollaire 6.3.16. — *Soit* $G = \langle P_i \ / \ i \in I \rangle$ *où* $P_i(z) = (\lambda_i z)^{m_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}_p - \{0\}$, $|\lambda_i| \geq 1$ *et* $m_i \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ *pour tout* i *dans* I. *Alors, on a* $\mathcal{J}(G) \subset \{0\}$. *De plus on a* $\mathcal{J}(G) = \{0\}$ *si et seulement si* $\sup_{i\in I} |\lambda_i| = \infty$.

Démonstration. — 1) Pour tout i dans I, on a $|\lambda_i| \geq 1$, et il en résulte que : $P_i(B^-(0,1)^c) \subset B^-(0,1)^c$.
Par suite le critère de Hsia entraîne que $B^-(0,1)^c \subset \mathcal{F}(G)$, et donc $\infty \in \mathcal{F}(G)$. Or d'après le lemme 6.3.14, $\mathcal{J}(G)$ est un sous ensemble de $\{0,\infty\}$. Il en résulte qu'on a bien $\mathcal{J}(G) \subset \{0\}$.

2) Montrons maintenant que si on a $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ pour tout i dans I et $\sup_{i\in I} |\lambda_i| = \infty$, alors $0 \in \mathcal{J}(G)$.
En effet si D est un disque centré en 0 et ϵ un réel positif, alors pour tout réel positif η, il existe un élément i de I tel que $\Delta(\lambda_i^{-1}, 0) = |\lambda_i^{-1}| < \eta$. Et comme on a $\Delta(P_i({\lambda_i}^{-1}), P_i(0)) = \Delta(1,0) = 1 > \epsilon$, cela prouve que la famille des fractions rationnelles de G n'est équicontinue dans aucun disque centré en 0, et donc qu'on a $0 \in \mathcal{J}(G)$.

3) Réciproquement, si on a $m_i \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ pour tout élément i de I, et que $0 \in \mathcal{J}(G)$, alors le corollaire 6.1.20 entraîne que $\inf_{i\in I} \tau(P_i) = 0$, où $\tau(P_i) = |\lambda_i|^{\frac{-m_i}{m_i-1}}$ (voir le paragraphe 6.1.4 pour la définition de $\tau(P_i)$).
Comme $|\lambda_i| \geq 1$ et que $\frac{m_i}{m_i-1} \leq 2$, on en déduit que $\tau(P_i) \geq |\lambda_i|^{-2}$, et par suite on a $0 = \inf_{i\in I} \tau(P_i) \geq (\sup_{i\in I} |\lambda_i|)^{-2}$, et cela entraîne que l'on a $\sup_{i\in I} |\lambda_i| = \infty$. □

Corollaire 6.3.17. — *Soit* $G = \langle Q_i \ / \ i \in I \rangle$ *où* $Q_i(z) = (\lambda_i z)^{-m_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ *et* $m_i \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ *pour tout* i *dans* I. *Alors, on a* $\mathcal{J}(G) = \{0,\infty\}$ *si et seulement si* $\sup_{i\in I} |\lambda_i| = \infty$ *ou* $\inf_{i\in I} |\lambda_i| = 0$.

Démonstration. — 1) On vérifie comme dans le corollaire précédent que si on a $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ pour tout i dans I et $\sup_{i\in I} |\lambda_i| = \infty$, alors $0 \in \mathcal{J}(G)$.
Comme $\infty \in Q^{-1}(\{0\}) \subset Q^{-1}(\mathcal{J}(G)) \subset \mathcal{J}(G)$, le lemme 6.3.14 entraîne que $\mathcal{J}(G) = \{0,\infty\}$.
On vérifie de manière analogue que $\inf_{i\in i} |\lambda_i| = 0$ entraîne que $\mathcal{J}(G) = \{0,\infty\}$.

2) Réciproquement si $\mathcal{J}(G) = \{0,\infty\}$, alors le lemme 6.3.15 entraîne que l'on a soit $\inf_{i\in I} |\lambda_i| = 0$, soit $\sup_{i\in I} |\lambda_i| = \infty$. □

Remarque 6.3.18. — Remarquons que tout élément de $\mathcal{S}$ de degré au moins deux a un ensemble de Julia vide, car en le conjuguant par une homographie

non constante de la forme δz on peut le ramener sous la forme z^α (qui a une bonne réduction). Par suite les corollaires 6.3.16 et 6.3.17 montrent que même si tous les éléments d'un semi-groupe G ont des ensembles de Julia vides, cela n'implique pas qu'il en est de même pour l'ensemble de Julia du semi-groupe G. En particulier, on a pas que $\mathcal{J}(G) = \overline{\cup_{g\in G}\mathcal{J}(g)}$ comme dans le cas complexe (voir [**13**] page 365). C'est une situation qu'on ne rencontre ni dans la théorie classique (ie de l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle à coefficients p-adiques), ni dans le cas de l'ensemble de Julia d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients complexes.

Remarque 6.3.19. — Dans le cas où le semi-groupe G contient des homographies (non constantes), on peut avoir $|\mathcal{J}(G)| = 1$ et G engendré par un nombre fini de polynômes. En effet pour $f(z) = pz$, $g(z) = z^2$, $G = \langle f, g\rangle$ on a $\{\infty\} = \mathcal{J}(f) \subset \mathcal{J}(G)$, et d'autre part le Lemme 6.3.14 entraîne que $\mathcal{J}(G) \subset \{0, \infty\}$. Comme $f(B^+(0,1)) \cup g(B^+(0,1)) \subset B^+(0,1)$, le Critère de Hsia entraîne que $0 \in \mathcal{F}(G)$. Par suite on a $\mathcal{J}(G) = \{\infty\}$.

On peut se demander si le seul cas où $|\mathcal{J}(G)| = 1$, c'est quand G ne contient que des fractions rationnelles de la forme az^m, où $a \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ et $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$? Il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 6.3.20. — Soit G un semi-groupe engendré par un ensemble $\mathcal{E}$ de polynômes, tels que tout élément $T(z)$ de $\mathcal{E}$ vérifie la condition suivante :
Toutes les racines de T ont la même valeur absolue p-adique $\rho(T) > 1$, et $|T(0)| = 1$. Supposons de plus que $\sup_{T\in\mathcal{E}} \rho(T) = \infty$, alors on vérifie facilement que $\mathcal{J}(G) = \{\infty\}$.

6.4. Ensemble de Julia du composé de deux fractions rationnelles

Dans ce qui suit on s'intéresse à la question suivante " si deux fractions rationnelles ont des ensembles de Julia vides leur composé a-t-il toujours un ensemble de Julia vide ? "
On sait que si les deux fractions rationnelles ont toutes les deux de bonnes réductions, alors la réponse est oui (cf [**9**] et [**5**]). On va dans ce qui suit donner deux cas où la réponse à la question précédente est non. En particulier, si les générateurs d'un semi-goupe G ont tous un ensemble de Julia vide, cela n'entraîne pas que $\mathcal{J}(G)$ soit vide (il peut même être infini comme on va le voir).

6.4.0.0.2. Cas des homographies. — Notons $\mathcal{H}_h$ l'ensemble des homographies qui sont conjugués à des homothéties de la forme λz où $\lambda \in \mathbb{C}_p^*$, $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des homographies qui sont conjugués à des homothéties de la forme λz où $|\lambda| \notin \{0, 1\}$, $\mathcal{H}_f$ l'ensemble des homographies qui sont conjugués à des homothéties de la forme λz où λ est racine de l'unité, et $\mathcal{H}_t$ l'ensemble des homographies

qui sont conjugués à des translations.
Dans ce qui suit, on va montrer que le composé de deux éléments de $(\mathcal{H}_h - \mathcal{H}_n) \cup \mathcal{H}_t$ peut être un élément de $\mathcal{H}_n$ (ie qu'on peut avoir $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(g) = \emptyset$, et $\mathcal{J}(f \circ g) \neq \emptyset$ compte tenu de la proposition 6.1.3). Pour cela on aura besoin de quelques résultats techniques (caractérisations de $\mathcal{H}_h$, $\mathcal{H}_n$, et $\mathcal{H}_f$).

Lemme 6.4.1. — *Soit* $k(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C}_p(z) - \mathbb{C}_p$ *avec* $c \neq 0$ *et* $ad - bc = 1$.
I) les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
1) k *est un élément de* $\mathcal{H}_h$.
2) Le polynôme $cz^2 + (d-a)z - b$ *a deux racines distinctes* (ρ_1 *et* ρ_2) *dans* $\mathbb{C}_p$.
3) Le polynôme $y^2 - (d+a)y + 1$ *a deux racines distinctes* (θ_1 *et* θ_2) *dans* $\mathbb{C}_p$.
4) $a + d \neq \pm 2$.
II) Si $k \in \mathcal{H}_h$, *et que* k *est conjugué à* λz *où* $\lambda \in \mathbb{C}_p^*$, *alors on a* $c\rho_i + d = \theta_i$ *et* $k'(\rho_i) = (c\rho_i + d)^{-2} \in \mathbb{C}_p^*$ *pour* $i = 1, 2$, *et* $\lambda \in \{\theta_1^2, \theta_2^2\}$.
III) 1) On a $k \in \mathcal{H}_n$ *si et seulement si* $a + d \neq \pm 2$ *et* $|a + d| > 1$.
2)On a $k \in \mathcal{H}_f$ *si et seulement si* $a + d \neq \pm 2$ *et* $a + d = \tau + \tau^{-1}$ *où* τ *est une racine de l'unité.*

Démonstration. — I) En effet dire que k est dans $\mathcal{H}_h$ équivaut à dire que k admet deux points fixes distinctes, d'ou l'équivalence des conditions (1) et (2). D'autre part le changement de variables $y = cz + d$ montre l'équivalence des conditions (2) et (3).
De plus le calcul du discriminant du polynôme $y^2 - (d+a)y + 1$ montre l'équivalence des conditions (3) et (4).
II) D'autre part on a $k'(z) = \dfrac{ad - bc}{(cz+d)^2}$, et $ad - bc = 1$, et ceci permet de déduire $k'(\rho_i)$. Et comme le multiplicateur d'un point fixe de k est invariant par homographie, donc pour $i = 1, 2$ le multiplicateur de ρ_i qui est $k'(\rho_i) = \theta_i^{-2} = \theta_j^2$ (où $\{i, j\} = \{1, 2\}$), est soit le multiplicateur de 0 pour λz c'est à dire λ, soit le multiplicateur de ∞ pour λz c'est à dire λ^{-1}. Donc on a $\{\lambda, \lambda^{-1}\} = \{\theta_1^2, \theta_2^2\}$.
III) 1) Si $k \in \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_h$ alors ce qui précède entraîne que $a + d \neq \pm 2$ et que les racines ρ_1, ρ_2 du polynôme $cz^2 + (d-a)z - b$ et les racines θ_1, θ_2 du polynôme $y^2 - (d+a)y + 1$ vérifient $k'(\rho_i) = \theta_i^{-2}$ pour $i = 1, 2$.
Comme $k \in \mathcal{H}_n$, donc k admet un point fixe répulsif et un point fixe attractif, et par suite on a $\max\{|\theta_1|^{-2}, |\theta_2|^{-2}\} = \max\{|k'(\rho_1)|, |k'(\rho_2)|\} > 1$, et $\min\{|\theta_1|^{-2}, |\theta_2|^{-2}\} < 1$. Donc on peut supposer que $|\theta_1| > 1$ et que $|\theta_2| < 1$, et par suite on a $|d + a| = |\theta_1 + \theta_2| = |\theta_1| > 1$.
Réciproquement si $|d + a| > 1$ et que $d + a \neq \pm 2$, alors ce qui précède entraîne que $k \in \mathcal{H}_h$ et que $\max(|\theta_1|, |\theta_2|) > 1$ (car si non on aurait $1 < |a + d| < |\theta_1 + \theta_2| \leq 1$ ce qui est absurde). Donc on peut supposer que $|\theta_1| > 1$, et par

suite on a $|k'(\rho_1)| = |\theta_1^{-1}|^2 < 1$, et $|k'(\rho_2)| = |\theta_2^{-1}|^2 > 1$, et donc $k \in \mathcal{H}_n$.
2) Si $k \in \mathcal{H}_f$ alors $k \in \mathcal{H}_h$ et donc ce qui précède entraîne que $a + d \neq \pm 2$. Comme il existe une homographie φ telle que $\varphi \circ k \circ \varphi^{-1}(z) = \lambda z$ où λ est une racine de l'unité, donc compte tenu ce qui précède on peut supposer que $\lambda = k'(\rho_2) = \theta_2^{-2}$. Par suite θ_2 est aussi une racine de l'unité, et si on pose $\tau = \theta_2$, on obtient $a + d = \tau + \tau^{-1}$.
Réciproquement si $a+d \neq \pm 2$ et $a+d = \tau+\tau^{-1}$ où τ est une racine de l'unité, alors ce qui précède entraîne que k est conjuguée à une homographie λz où $\lambda \in \mathbb{C}_p^*$, et la condition $a + d = \tau + \tau^{-1}$ entraîne que τ et τ^{-1} sont des racines distinctes du polynôme $y^2 - (a + d)y + 1$. Par suite on peut supposer que l'on a : $\lambda = k'(\rho_2) = \theta_2^{-2} = \theta_1^2 = \tau^2$, et donc λ est une racine de l'unité, et il en résulte que $k \in \mathcal{H}_f$. □

Si $\mu \in \mathbb{C}_p^*$, on pose $H_\mu(z) = \mu z$, et $T_\mu(z) = z + \mu$. Soient f, g deux éléments de $(\mathcal{H}_h - \mathcal{H}_n) \cup \mathcal{H}_t$, alors quitte à les conjuguer par une homographie non constante, on peut supposer que $f(z) \in \{H_{\lambda_1}(z), T_{\mu_1}(z)\}$ et $g(z) \in \{\varphi \circ H_{\lambda_2} \circ \varphi^{-1},\ \varphi \circ T_{\mu_2} \circ \varphi^{-1}\}$, où $\mu_i \in \mathbb{C}_p^*$, et $|\lambda_i| = 1$ pour $i \in \{1, 2\}$, et $\varphi(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}_p$ et $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Corollaire 6.4.2. — *Soient $\varphi(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ une homographie non constante à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_p^*$, et $p \neq 2$.*
1) Si $|\lambda| = |\mu| = 1$, et que $\gamma\delta(\lambda - 1) \neq 0$, alors on a $H_\mu \circ \varphi \circ H_\lambda \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{H}_n$, si et seulement si $|\alpha\delta(\mu\lambda + 1) - \beta\gamma(\mu + \lambda)| > |\alpha\delta - \beta\gamma|$.
2) Si $\lambda\gamma \neq 0$, alors on a $T_\mu \circ \varphi \circ T_\lambda \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{H}_n$, si et seulement si $|2(\alpha\delta - \beta\gamma) - \lambda\mu\gamma^2| > |\alpha\delta - \beta\gamma|$.
3) Si $|\mu| = 1$, et que $\lambda\gamma \neq 0$, alors on a $H_\mu \circ \varphi \circ T_\lambda \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{H}_n$, si et seulement si $|(\alpha\delta - \beta\gamma)(1 + \mu) + \lambda\alpha\gamma(1 - \mu)| > |\alpha\delta - \beta\gamma|$.

Démonstration. — 1) Posons $k(z) = H_\mu \circ \varphi \circ H_\lambda \circ \varphi^{-1}(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, alors on a, $a = \mu(\alpha\delta\lambda - \beta\gamma)$, $b = \mu\alpha\beta(1 - \lambda)$, et $c = \gamma\delta(\lambda - 1)$, $d = (\alpha\delta - \lambda\beta\gamma)$, et donc que $ad - bc = \mu\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$.
Notons ξ un élément de $\mathbb{C}_p^*$ tel que $\xi^2 = ad - bc$, et posons $a' = a\xi^{-1}$, $b' = b\xi^{-1}$, $c' = c\xi^{-1}$, $d' = d\xi^{-1}$.
Comme $a + d = \alpha\delta(\mu\lambda + 1) - \beta\gamma(\lambda + \mu)$, et que $p \neq 2$ le lemme précédent entraîne que $k \in \mathcal{H}_n$ si et seulement si $|a'+d'| > 1$, et comme $|\xi|^2 = |\alpha\delta - \beta\gamma|^2$, on en déduit l'inégalité précédente.
2) Posons $k(z) = T_\mu \circ \varphi \circ T_\lambda \circ \varphi^{-1}(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, alors on a $a = (\alpha\delta - \beta\gamma) - \lambda\gamma(\alpha + \mu\gamma)$, $b = \lambda\alpha(\alpha + \gamma\mu) + \mu(\alpha\delta - \beta\gamma)$, $c = -\lambda\gamma^2$, $d = (\alpha\delta - \beta\gamma) + \lambda\alpha\gamma$, et donc que $ad - bc = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$, et $a + d = 2(\alpha\delta - \beta\gamma) - \lambda\mu\gamma^2$, et on conclut

de la même manière que pour le (1).

3) Posons $k(z) = H_\mu \circ \varphi \circ T_\lambda \circ \varphi^{-1}(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, alors on a $a = \mu(\alpha\delta - \beta\gamma - \lambda\alpha\gamma)$, $b = \mu\lambda\alpha^2$, $c = -\lambda\gamma^2$, $d = (\alpha\delta - \beta\gamma) + \lambda\alpha\gamma$, et donc que $ad - bc = \mu(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$, et $a + d = (\alpha\delta - \beta\gamma)(1 + \mu) + \lambda\alpha\gamma(1 - \mu)$, et on conclut de la même manière que pour le (1).

□

Par suite si f et g sont deux homographies d'ensembles de julia vides et que $G = \langle f, g\rangle$, on peut avoir $\mathcal{J}(f \circ g)$ non vide et donc $\mathcal{J}(G)$ non vide. En fait même si $f, g \in \mathcal{H}_f$, on peut avoir que $f \circ g \in \mathcal{H}_n$ comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 6.4.3. — Si $g(z) = -z$, et $f(z) = \varphi(-\varphi^{-1}(z))$ où $\varphi(z) = \frac{z+1}{z+p+1}$, alors on a $f, g \in \mathcal{H}_f$, et le (1) du corollaire précédent entraîne que $f \circ g \in \mathcal{H}_n$.

6.4.0.0.3. Cas des polynômes. — On aura besoin du lemme suivant dont la vérification est immédiate.

Lemme 6.4.4. — *Si $P(x) = u_s x^s + \cdots + u_0$ est un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ tel que $\max(|u_s|, |u_{s-1}|, \ldots, |u_0|) = |u_s| = 1$, alors :*
1) P a une bonne réduction.
2) $|P(x)| > 1$ si seulement si $|x| > 1$.
3) Pour $|x| > 1$ on a $|P(x)| = |x|^s$.

Corollaire 6.4.5. — *Soient $f, g \in \mathbb{C}_p[z]$. On suppose que :*
1) $f(x) = a_d x^d + \cdots + a_0$, où $\max(|a_d|, |a_{d-1}|, \ldots, |a_0|) = |a_d| = |a_0| = 1$.
2) le degré d de f est 1 ou premier à p.
3) f' a toutes ses racines dans le disque $B^-(0, 1)$.
4) Le degré m du polynôme g est plus grand que 2 et premier à p.
5) $g(0) = 0$.
6) Il existe une constante non nulle c (dans $\mathbb{C}_p$) telle que $|c| < 1$, et que pour $h(x) = c^{-1}g(cx) = b_m x^m + \cdots + b_1 x$, on ait $\max(|b_m|, |b_{m-1}|, \ldots, |b_1|) = |b_m| = 1$.
Alors les ensembles $\mathcal{J}(f)$ et $\mathcal{J}(g)$ sont vides et tous les points fixes de gof dans $\mathbb{C}_p$ sont répulsifs de valeurs absolues p-adiques 1. Si de plus l'ensemble des points fixes de gof dans $\mathbb{C}_p$ n'est pas vide, alors $\mathcal{J}(gof)$ est infini.

Démonstration. — a) Remarquons d'abord que d'après les hypothèses du corollaire, le lemme précédent s'applique à f, h et à h'.

b) Montrons alors que tous les points fixes (dans $\mathbb{C}_p$) du polynôme gof sont de valeurs absolues p-adiques 1.

1) Si $g(f(x)) = x$, on a $h\left(\frac{f(x)}{c}\right) = \frac{x}{c}$, et on va voir que $|x| > |c|$.

En effet, si $\left|\frac{x}{c}\right| \leq 1$, les hypothèses sur h entraînent que $|f(x)| \leq |c| < 1$; mais $|x| \leq |c| < 1$ et $|f(0)| = 1$ entraînent que $|f(x)| = |f(0)| = 1$. On en déduit une contradiction.

2) Par suite les hypothèses sur h entraînent que $\left|\frac{f(x)}{c}\right| > 1$ et que $h\left(\frac{f(x)}{c}\right)$ est de de valeurs absolues $\left|\frac{f(x)}{c}\right|^m$. Il en résulte que l'on a $|f(x)|^m = |c|^{m-1}|x|$.
Si $|x| < 1$, on a de nouveau la contradiction $|f(0)| = |f(x)| < 1$.
Si $|x| > 1$, les hypothèses sur f entraînent que $|f(x)| = |x|^d$, et donc $|x|^{dm-1} = |c|^{m-1} < 1$, et de nouveau on a une contradiction.
Finalement, on a bien $|x| = 1$.

c) Remarquons alors que $|(g \circ f)'(x)| = |f'(x)| \left|h'\left(\frac{f(x)}{c}\right)\right|$ et que $|f'(x)| = |da_d x^{d-1}| = 1$ et $\left|\frac{f(x)}{c}\right|^m = \left|\frac{x}{c}\right|$. On a donc $\left|\frac{f(x)}{c}\right| > 1$ et les hypothèses sur h et m entraînent que $\left|h'\left(\frac{f(x)}{c}\right)\right| = \left|\frac{f(x)}{c}\right|^{m-1} > 1$.
Il en résulte que x est un point fixe répulsif de $g \circ f$ et que $\mathcal{J}(g \circ f)$ est infini (vu que $g \circ f$ est de degré au moins deux).

d) De plus, $\mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(f) = \emptyset$ puisque les polynômes $f(x)$ et $h(x)$ ont tous les deux une bonne réduction (compte tenu du lemme 6.4.4) et que g est conjugué à h. □

Remarque 6.4.6. — Comme $\mathcal{J}(g \circ f)$ est infini, on en déduit que pour $G = \langle f, g \rangle$, on a que $\mathcal{J}(G)$ est infini bien que les ensembles de Julia des générateurs soient vides.

6.5. Cas où $\mathcal{J}(G)$ s'exprime en fonction des $\mathcal{J}(g)$

On a vu que si G est un semi-groupe de fractions rationnelles, engendré par une partie non vide A dont les éléments sont des fractions rationnelles ayant bonne réduction, alors l'ensemble de Julia de G est vide. Il est clair dans ce cas, que les fractions rationnelles de l'ensemble A engendrant G ont toutes un ensemble de Julia vide. On a donc dans ce cas particulier, que les ensembles de Julia des éléments de la partie A déterminent l'ensemble de Julia de G tout entier. Dans le cas général, on peut se demander si étant donné une partie A engendrant le semi-groupe G, on peut récupérer par un procédé quelconque l'ensemble de Julia de G à partir des ensembles de Julia des éléments de la

partie A de G. On se propose ici de donner quelque cas où on peut récupérer l'ensemble de Julia d'un semi-groupe G à partir des ensembles de Julia de ses éléments. Dans le cas complexe, on a toujours $\mathcal{J}(G) = \overline{\bigcup_{g\in A} \mathcal{J}(g)}$ (cf [**13**] corollaire 3.1 page 365).
On va donner des conditions sous lesquelles on a $\mathcal{J}(G) = \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g)}$.
Pour cela on aura besoin de la remarque et des deux lemmes qui suivent.

Remarque 6.5.1. — 1. Si deux fractions rationnelles f, g admettent un point fixe répulsif commun a, alors a est aussi un point fixe répulsif de $g \circ f$.

2. Soit g une fraction rationnelle de degré au moins deux, on note $\mathcal{L}(g)$ l'ensemble des points périodiques répulsifs de g. On sait, cf [**10**] que pour tout entier naturel non nul n et toute homographie non constante φ, on a $\mathcal{L}(g^n) = \mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(\varphi g \varphi^{-1}) = \varphi(\mathcal{L}(g))$, et que si $\mathcal{L}(g)$ n'est pas vide alors $\mathcal{J}_g = \overline{\mathcal{L}(g)}$.

Lemme 6.5.2. — *Soit T une fraction rationnelle de degré au moins deux. On suppose que 0 est un point fixe répulsif de T, que $T(\infty) = \infty$, que c est une racine non nulle de T. Alors c est limite d'une suite de points de $\mathcal{L}(T)$ tous distincts de c.*

Démonstration. — Voir [**10**]. □

Lemme 6.5.3. — *Soit R une fraction rationnelle de degré au moins deux. On suppose que ∞ est un de point fixe de R et que 0 est un point fixe répulsif de R. Alors il existe deux points distincts b et b' de $\mathbb{C}_p^*$ tels que $R(b) = 0$ et $R(b') = b$.*

Démonstration. — En effet $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes premiers entre eux, et pour b dans $\mathbb{C}_p^*$, $R(b) = 0$ équivaut à $P(b) = 0$, mais $R(\infty) = \infty$ entraîne que $d^0P > d^0Q$ et que $d^0P = d^0R \geq 2$. Par suite si 0 n'est pas racine simple de P, alors il existe un polynôme T premier à Q, tel que $\dfrac{R(z)}{z} = \dfrac{zT(z)}{Q(z)}$, donc on a $R'(0) = 0$, ce qui contredit que 0 est un point fixe répulsif de R. Donc il existe une racine non nulle b de R. D'autre part l'équation $R(z) = b$ équivaut à $P(z) - bQ(z) = 0$, et comme on a vu que le degré de P est au moins deux et qu'il est plus grand que le degré de Q, donc il existe un élément b' de $\mathbb{C}_p^*$ tel que $R(b') = b$, de plus $b' \neq b$, et $b' \neq 0$ vu que $R(b') = b \neq 0$. □

En utilisant les mêmes arguments que dans [**10**] on va alors montrer la proposition suivante.

Proposition 6.5.4. — *Soit G un semi-groupe engendré par des fractions rationnelles de degrés au moins deux ayant deux points fixes communs dont l'un est répulsif commun. Alors pour tout élément R de G on a :*

$$\mathcal{J}(G) = \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{L}(R\circ g)} = \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(R\circ g)} = \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g)}.$$

Démonstration. — 1) Soient α, β les points fixes communs des générateurs de G, α étant le point répulsif. Quitte à conjuguer par l'homographie :

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{z-\alpha}{z-\beta} & \text{si} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}_p \\ z-\alpha & \text{si} \quad \beta = \infty \\ \dfrac{1}{z-\beta} & \text{si} \quad \alpha = \infty \end{cases}$$

on peut supposer que $\alpha = 0, \beta = \infty$. Comme on a vu que si f est une fraction rationnelle, on a pour toute partie A de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ que $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$, donc pour l'homographie φ on a $\varphi(\overline{A}) = \overline{\varphi(A)}$. Supposons que pour $H = G_\varphi$, $R \in G$ et $S = \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ l' on ait : $\mathcal{J}(H) = \overline{\bigcup_{h\in H} \mathcal{L}(S\circ h)} = \overline{\bigcup_{h\in H} \mathcal{J}(S\circ h)} = \overline{\bigcup_{h\in H} \mathcal{J}(h)}$
Alors on a $\mathcal{J}(H) = \mathcal{J}(G_\varphi) = \varphi(\mathcal{J}(G))$, et pour $h = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$, on a

$$\mathcal{J}(S\circ h) = \mathcal{J}(\varphi \circ R \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}) = \mathcal{J}(\varphi \circ R \circ g \circ \varphi^{-1}) = \varphi(\mathcal{J}(R\circ g))$$

On en déduit que $\overline{\bigcup_{h\in H} \mathcal{J}(S\circ h)} = \overline{\varphi(\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(R\circ g))} = \varphi(\overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(R\circ g)})$. En particulier pour $S = z$, on a $R = z$, et donc :
$\overline{\bigcup_{h\in H} \mathcal{J}(h)} = \overline{\varphi(\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g))} = \varphi(\overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g)})$. De même on a

$$\mathcal{L}(S\circ h) = \mathcal{L}(\varphi \circ R \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}) = \mathcal{L}(\varphi \circ R \circ g \circ \varphi^{-1}) = \varphi(\mathcal{L}(R\circ g))$$

On en déduit que $\overline{\bigcup_{h\in H} \mathcal{L}(S\circ h)} = \overline{\varphi(\bigcup_{g\in G} \mathcal{L}(R\circ g))} = \varphi(\overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{L}(R\circ g)})$. Il suffit alors de composer par φ^{-1} pour obtenir que le résultat est vrai pour G. Il reste donc à prouver le résultat dans le cas $\alpha = 0, \beta = \infty$.
2) Soient R une fraction rationnelle de degré au moins deux appartenant à G, et b, b' donnés par le lemme précédent, x un élément de $\mathcal{J}(G)$ et ϵ un réel positif, posons $\mathcal{U} = \bigcup_{g\in G} g(B^+(x,\epsilon))$ et montrons que $b \in \mathcal{U}$. En effet sinon on a aussi

$b' \notin \mathcal{U}$ (vu que $b' \in \mathcal{U}$ entraîne que $b = R(b') \in R(\mathcal{U}) = \bigcup_{g\in G} R(g(B^+(x,\epsilon))) \subset \mathcal{U}$), et par suite $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ stable par tout les éléments de G et son complémentaire contient les deux points b et b', et le critère de Hsia (théorème 5.7) entraîne que $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{F}(G)$, ce qui est absurde.
3) Comme $b \in \mathcal{U}$, donc il existe un élément g dans G et un élément c dans $B^+(x,\epsilon)$ tels que $g(c) = b$ de plus $c \neq 0$. Posons $T(z) = R \circ g(z)$, alors on a $T(c) = 0$ et $d^0T \geq 2$, et d'après le lemme 6.5.2 il existe une suite y_n d'éléments de $\mathcal{L}(T)$ distincts de c dont la limite est c. Par suite il existe deux entiers k, m tels que $y_k \neq y_m$ et $|y_k - c| < \epsilon$, $|y_m - c| < \epsilon$, et donc il existe un élément $y \in \mathcal{L}(T) \subset \bigcup_{g\in G} \mathcal{L}(R \circ g) \subset \bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(R \circ g)$ tel que $y \neq x$ et $|y - x| < \epsilon$ (vu que $|x - c| < \epsilon$). Finalement on a $x \in \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{L}(R \circ g)} \subset \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(R \circ g)}$, et donc $\mathcal{J}(G) \subset \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{L}(R \circ g)} \subset \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(R \circ g)} \subset \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g)}$. Comme $\overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g)} \subset \mathcal{J}(G)$, donc on a $\mathcal{J}(G) = \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{L}(R \circ g)} = \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(R \circ g)} = \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}(g)}$, pour tout élément R de $G - \{z\}$. Le cas $R = z$ en résulte, et cela termine la preuve. □

Exemple 6.5.5. — Pour tout entier naturel n posons $\varphi_n(z) = \frac{z}{p^n}$, $f_n(z) = \varphi_n \circ f \circ \varphi_n^{-1}(z)$ où $f(z) = \frac{z^p - z}{p}$. Soient $E \subset \mathbb{N}$ et $G = \langle f_n / n \in E \rangle$. Alors $f_n(z) = \frac{z}{p}[p^{n(p-1)}z^{p-1} - 1]$, et 0 est un point fixe répulsif commun des f_n, et ∞ est un point fixe commun des f_n, par suite la proposition précédente donne que $\mathcal{J}(G) = \overline{\bigcup_{g\in G} \mathcal{J}_g}$. Si on prend $E = \mathbb{N}$, alors on a $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \subsetneq \mathcal{J}(G)$ vu que $\mathcal{J}(f_n) = \frac{\mathbb{Z}_p}{p^n}$, et que $f^{-1}(\{\frac{1}{p}\}) \cap \mathbb{Q}_p = \emptyset$.

Un autre cas où l'on peut exprimer $\mathcal{J}(G)$ en fonction des $\mathcal{J}(g)$ pour g dans G est le suivant.

Proposition 6.5.6. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles, et Φ un ensemble d'homographies vérifiant les deux conditions suivantes :*
1) Pour tout élément φ de Φ, et pour tout x, y dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on a :

$$\Delta(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \Delta(x, y)$$

2) Pour tout f, g de G il existe un élément φ de Φ tel que $f \circ g = \varphi \circ g \circ f$.
Alors pour tout élément g de G de degré au moins deux et dont l'ensemble de Julia n'est pas vide, on a $\mathcal{J}(G) = \mathcal{J}_g$.

Démonstration. — Soit f un élément quelconque de G, montrons que $f(\mathcal{F}(g)) \subset \mathcal{F}(g)$. Compte tenu de la proposition 5.6.5 il existe une constante C dépendant de f telle que $\Delta(f(a), f(b)) \leq C\Delta(a, b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. D'autre part pour tout entier naturel n il existe un élément φ_n de Φ tel que $g^{[n]} \circ f = \varphi_n \circ f \circ g^{[n]}$. Enfin pour tout élément x de $\mathcal{F}(g)$ il existe un disque $B^+(x, r)$ inclus dans $\mathcal{F}(g)$ où la famille $g^{[n]}$ est équicontinue, et donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $x_1, x_2 \in B^+(x, r)$, et $\Delta(x_1, x_2) \leq \eta$ entraîne que $\Delta(g^{[n]}(x_1), g^{[n]}(x_2)) \leq \dfrac{\epsilon}{C}$. D'après le lemme 6.2.1 il existe $\eta' > 0$ tel que si $y_1, y_2 \in f(B^+(x, r))$ et vérifient $\Delta(y_1, y_2) \leq \eta'$, alors il existe deux éléments x_1, x_2 dans $B^+(x, r)$ tels que $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, et $\Delta(x_1, x_2) \leq \eta$. Par suite on a $\Delta(g^{[n]}(y_1), g^{[n]}(y_2)) = \Delta(g^{[n]} \circ f(x_1), g^{[n]} \circ f(x_2)) = \Delta(\varphi_n \circ f \circ g^{[n]}(x_1), \varphi_n \circ f \circ g^{[n]}(x_2)) \leq \Delta(f \circ g^{[n]}(x_1), f \circ g^{[n]}(x_2)) \leq C\Delta(g^{[n]}(x_1), g^{[n]}(x_2)) \leq \epsilon$. On en déduit que la famille $g^{[n]}$ est équicontinue dans un disque contenant $f(x)$ et contenu dans l'ouvert $f(B^+(x, r))$, et donc on a $f(x) \in \mathcal{F}(g)$. Par suite on a $f(\mathcal{F}(g)) \subset \mathcal{F}(g)$ pour tout élément f de G, et comme g est de degré au moins deux alors $\mathcal{J}(g)$ a au moins deux éléments, et la proposition 6.1.6 donne que $\mathcal{F}(g) \subset \mathcal{F}(G)$, donc $\mathcal{J}(G) \subset \mathcal{J}(g)$; l'inclusion réciproque étant toujours vraie, on en déduit le résultat. □

Corollaire 6.5.7. — *Soient $F(z) \in \mathbb{C}_p(z)$, $r \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\lambda \in \mathbb{C}_p$ tels que $\lambda^r = 1$. On pose $\psi(z) = \lambda z$, $f(z) = F(z^r)$ et $g(z) = \psi(f(z))$, $G = \langle f, g \rangle$. Si $|\mathcal{J}(f)| \geq 2$ alors on a $\mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(G)$.*

Démonstration. — Si on pose $\Phi = \{z, \psi, \psi^{-1}\}$, on a $\Delta(\varphi(x), \varphi(y)) = \Delta(x, y)$ pour tout φ dans Φ et x, y dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Remarquons alors que la condition $|\mathcal{J}(f)| \geq 2$ entraîne que f est de degré au moins deux, et que l'on a $f^{[n]} \circ \psi = f^{[n]}$, $g^{[n]} \circ \psi = g^{[n]}$, et $g^{[n]} = \psi \circ f^{[n]}$, pour tout entier naturel n. On en déduit que si h, k sont deux éléments de $G = \langle f, g \rangle$, il existe $\varphi \in \Phi$, tel que $h \circ k = \varphi \circ k \circ h$. Comme $g = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$, donc on a $\mathcal{J}(g) = \psi(\mathcal{J}(f))$, et la proposition précédente entraîne que $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(G) = \mathcal{J}(g)$. □

Exemple 6.5.8. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, p un nombre premier impair et $f_n(z) = p^{-n}(z^{p-1} - 1)$, alors on a $\mathcal{J}(-f_n) = -\mathcal{J}(f_n) = \mathcal{J}(f_n) \neq \emptyset$. En effet le lemme de Hensel montre f_n admet des points fixes de valeur absolue 1, et on vérifie que ce sont des points fixes répulsifs, par suite $\mathcal{J}(f_n)$ est non vide. D'autre part f_n est une fraction rationnelle paire de degré au moins deux, et donc si on applique le corollaire précédent avec $r = 2$, on en déduit le résultat.

6.6. Cas où H est d'indice fini dans G

Donnons un cas où on peut récupérer l'ensemble de Julia de G à partir de l'ensemble de Julia de l'un de ses sous-semi-groupes H.

Définition 6.6.1. — Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles et H un sous semi-groupe de G. S'il existe un ensemble fini $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ d'éléments de G tels que $G = g_1 H \cup g_2 H \cup \cdots \cup g_n H$, alors on dit que H est d'indice fini dans G.

Proposition 6.6.2. — *Si H est d'indice fini dans G. Alors $\mathcal{J}(G) = \mathcal{J}(H)$.*

Démonstration. — Il suffit de voir que $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{F}(G)$. Si x est dans $\mathcal{F}(H)$, alors il existe un disque D contenant x et inclus dans $\mathcal{F}(H)$. D'autre part pour $i = 1, 2, \dots, n$, il existe une constante c_i telle que l'on ait $\Delta(g_i(y), g_i(z)) \leq c_i \Delta(y, z)$ pour y, z dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Notons c le maximum des c_i. Comme H est équicontinue sur D, donc pour tout réel positif ϵ il existe un réel positif η tel que pour y, z dans D, $\Delta(y, z) \leq \eta$ entraîne que pour h dans H on ait $\Delta(h(y), h(z)) \leq \dfrac{\epsilon}{c}$. Par suite si g est dans G et que $g = g_i \circ h$ avec h dans H, et i entre 1 et n alors on a $\Delta(g(y), g(z)) \leq \epsilon$. Donc $D \subset \mathcal{F}(G)$, et par suite $x \in \mathcal{F}(G)$, donc $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{F}(G)$. □

Corollaire 6.6.3. — *Soit G le semi-groupe engendré par les fractions rationnelles $R_1, R_2, \dots, R_n$. Pour m entier naturel, on note $\mathcal{E}_m(R_1, R_2, \dots, R_n)$ l'ensemble des éléments de G qui sont composés de m éléments de l'ensemble $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ (en particulier $\mathcal{E}_0(R_1, R_2, \dots, R_n) = \{z\}$), et on pose $G_m = \langle \mathcal{E}_m(R_1, R_2, \dots, R_n) \rangle$. Si $\mathcal{J}(G) \neq \emptyset$ et $m \neq 0$, alors $\mathcal{F}(G_m) = \mathcal{F}(G)$.*

Démonstration. — En effet $G = \bigcup_t t G_m$ où t parcourt $\bigcup_{k=0}^{m} \mathcal{E}_k(R_1, R_2, \dots, R_n)$ (ensemble ayant au plus $\sum_{k=0}^{m} n^k$ éléments). Par suite G_m est d'indice fini dans G et le corollaire résulte de la proposition précédente. □

Exemple 6.6.4. — 1) Soit R une fraction rationnelle, et n un entier naturel non nul. Si on prend $G = \langle R \rangle$, $H = \langle R^{[n]} \rangle$ et $g_1 = z, g_2 = R, g_3 = R^{[2]}, \dots, g_n = R^{[n-1]}$, on retrouve le fait que $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^{[n]})$.
2) Soient f, g deux fractions rationnelles, alors le corollaire donne que $\mathcal{J}(< f, g >) = \mathcal{J}(< f^{[2]}, g^{[2]}, fg, gf >)$.

6.7. Deux propriétés topologiques de $\mathcal{J}(G)$

Dans ce paragraphe, on regarde sous quelles conditions l'ensemble de Julia d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ est parfait, et on donne des conditions suffisantes pour que l'ensemble de Julia d'un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ soit d'intérieur vide (dans

l'espace métrique $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$).
Montrons d'abord quelques résultats préliminaires.

Lemme 6.7.1. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, et F est un sous ensemble de $\mathcal{J}(G)$ contenant au moins deux points, alors on a $\mathcal{J}(G) = \overline{\bigcup_{g\in G} g^{-1}(F)}$.*

Démonstration. — Posons $\mathcal{B} = \overline{\bigcup_{g\in G} g^{-1}(F)}$. Comme $F \subset \mathcal{J}(G)$, on a pour tout g de G que $g^{-1}(F) \subset g^{-1}(\mathcal{J}(G)) \subset \mathcal{J}(G)$, et puisque $\mathcal{J}(G)$ est fermé on en déduit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{J}(G)$.
D'autre part, comme les fractions rationnelles sont des applications ouvertes (d'après la proposition 5.2.4), on a pour tout élément h de G :
$h^{-1}(\mathcal{B}) = h^{-1}(\overline{\bigcup_{g\in G} g^{-1}(F)}) \subset \overline{h^{-1}(\bigcup_{g\in G} g^{-1}(F))} \subset \overline{\bigcup_{g\in G} h^{-1}(g^{-1}(F))} \subset \mathcal{B}$.
Comme $\mathcal{B}$ a au moins deux éléments, et que $\mathcal{B}$ est fermé, le corollaire 6.2.3 entraîne que $\mathcal{J}(G) \subset \mathcal{B}$. □

Corollaire 6.7.2. — *Si a est un élément of $\mathcal{J}(G)$ dont l'orbite arrière $O_G^-(a)$ contient au mois deux points, alors on a $\mathcal{J}(G) = \overline{O_G^-(a)}$.*

Démonstration. — En effet, le lemme précédent appliqué avec $F = O_G^-(a)$, entraîne que $\mathcal{J}(G) = \overline{\bigcup_{g\in G} g^{-1}(O_G^-(a))} = \overline{O_G^-(a)}$. □

6.7.1. Cas où $\mathcal{J}(G)$ est parfait. — On a vu que si g est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ de degré un, alors $\mathcal{J}(g)$ est vide ou de cardinal 1. Pour une fraction rationnelle g (à coefficients dans $\mathbb{C}_p$) de degré au moins deux, on sait que si l'ensemble de Julia de g est non vide alors il est parfait (voir [**15**] page 694), en particulier $\mathcal{J}(g)$ n'est pas dénombrable s'il n'est pas vide.
Le lemme qui suit précise la structure de $\mathcal{J}(G)$ et de G dans le cas où $\mathcal{J}(G)$ n'est pas parfait.

Lemme 6.7.3. — *Soit $G = \langle R_1, \ldots, R_n\rangle$ où $R_1, \ldots, R_n \in \mathbb{C}_p(z) - \mathbb{C}_p$. On suppose que $\mathcal{J}(G)$ admet un point isolé a, alors on a deux cas :*
i) Soit tous les points de $\mathcal{J}(G)$ sont isolés et on a $\mathcal{J}(G) \subset O_G^+(a)$ et $\mathcal{J}(G)$ est au plus dénombrable.
ii) Soit il existe un unique point b de $\mathcal{J}(G)$ qui n'est pas isolé et on a $\mathcal{J}(G) \subset O_G^+(a) \cup \{b\}$.
Dans le second cas b est un point fixe répulsif d'une homographie de G, l'orbite arrière de b par G est $\{b\}$, G est conjugué à un semi-groupe de polynômes et

$\mathcal{J}(G)$ est dénombrable.
Dans les deux cas tout élément de G de degré au moins deux a un ensemble de Julia vide.

Démonstration. — 1) Comme a est isolé, il existe un disque B (de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$) contenant a tel que l'on ait $B \cap \mathcal{J}(G) = \{a\}$.
Posons $U = \bigcup_{g\in G} g(B)$, alors U est clairement stable avant par tous les éléments de G. Par suite on a $|U^c| \leq 1$ (car sinon le corollaire 6.1.6 donne que $U \subset \mathcal{F}(G)$, ce qui est absurde vu que $a \in \mathcal{J}(G)$.

D'autre part si $|U^c| = 1$, alors il existe un élément b de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ tel que $U^c = \{b\}$, et donc pour tout élément g de G on a $g^{-1}(\{b\}) = \{b\}$ (car $g(U) \subset U$). Il en résulte que pour tout élément g de G, l'orbite arrière de b par g est $\{b\}$, et b est un point exceptionnel de g et on a $g(b) = b$.

2) Posons $\mathcal{E} = \mathcal{J}(G)$ si $U^c = \emptyset$ et $\mathcal{E} = \mathcal{J}(G) - \{b\}$ si $U^c = \{b\}$, alors on a $\mathcal{E} \subset U = \left[\bigcup_{g\in G} g(B - \{a\})\right] \bigcup O_G^+(a)$. Comme $B - \{a\} \subset \mathcal{F}(G)$ et que $\mathcal{F}(G)$ est stable avant par les éléments de G, et que $\mathcal{E} \subset \mathcal{J}(G)$, on en déduit que $\mathcal{E} \subset O_G^+(a)$.

3) Montrons alors que tout point de $\mathcal{E}$ est isolé. En effet, si a' est un point de $\mathcal{E}$, alors il existe un élément g de G tel que $a' = g(a)$, par suite $B' = g(B)$ est un ouvert contenant a'. Si β est un élément de $B' \cap \mathcal{E}$, alors il existe $\alpha \in B$ tel que $g(\alpha) = \beta$. Comme $\mathcal{J}(G)$ est stable arrière par les éléments de G, on en déduit que $\alpha \in \mathcal{J}(G) \cap B = \{a\}$. Par suite $\beta = g(a) = a'$, et donc a' est isolé dans $\mathcal{E}$.

4) De plus comme G a un nombre fini de générateurs, l'inclusion $\mathcal{E} \subset O_G^+(a)$, entraîne que $\mathcal{J}(G)$ est au plus dénombrable.

D'autre part si R est un élément de G de degré au moins deux, alors on a $\mathcal{J}(R) = \emptyset$ (car on a $\mathcal{J}(R) \subset \mathcal{J}(G)$, et on sait que si l'ensemble de Julia de R est non vide, alors il est infini et n'a pas de points isolés (voir par exemple [**15**] page 694)).

5) Envisageons alors deux cas :

Cas 1 : les fractions rationnelles $R_1, \ldots, R_n \in \mathbb{C}_p(z)$, sont toutes de degrés au moins deux.
Si $|U^c| = 1$, alors b est un point exceptionnel de R_i pour $i = 1, \ldots, n$. Par suite, $b \in \mathcal{F}(R_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$ (cf [**9**] page 43). Il en résulte que b est un point fixe non répulsif commun de $R_1, \ldots, R_n$, et la proposition 6.1.20 entraîne que $b \in \mathcal{F}(G)$. Donc pour $|U^c| \leq 1$, on a $\mathcal{J}(G) = \mathcal{E} \subset O_G^+(a)$.

Cas 2 : pour $m \leq n$ les fractions rationnelles $R_1, \ldots, R_m$, sont toutes de degrés un.

Si $|U^c| = 0$ ou que $|U^c| = 1$ et que b est un point fixe non répulsif commun de $R_1, \ldots, R_m$, alors on voit comme dans le premier cas que $\mathcal{J}(G) = \mathcal{E} \subset O_G^+(a)$.

Par contre si $|U^c| = 1$ et que b est un point fixe répulsif de (par exemple) R_1, alors on a $\mathcal{J}(G) - \{b\} = \mathcal{E} \subset O_G^+(a)$. Donc on a $\mathcal{J}(G) \subset O_G^+(a) \cup \{b\}$, et le point b n'est pas isolé dans ce cas, car quitte à conjuguer G par une homographie non constante, on peut supposer que $b = 0$, et que $R_1(z) = \lambda z$ où $|\lambda| > 1$. Il en résulte que pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, on a $(R_1^{[n]})^{-1}(a) = \dfrac{a}{\lambda^n} \in \mathcal{J}(G)$ (vu que $\mathcal{J}(G)$ est stable arrière par les éléments de G). Et comme la suite $(R_1^{[n]})^{-1}(a)$ tend vers $b = 0$, on en déduit que b n'est pas isolé (vu que les éléments de la suite $(R_1^{[n]})^{-1}(a)$ sont distincts deux à deux) et en particulier que $\mathcal{J}(G)$ est dénombrable.

Enfin quitte à conjuguer G par une homographie non constante, on peut supposer que $b = \infty$, et dans ce cas l'orbite arrière de ∞ est $\{\infty\}$, et donc on a $R_i^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Il en résulte que les fractions rationnelles $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont des polynômes. □

Remarque 6.7.4. — Il résulte du lemme 6.7.3, que quand G admet un nombre fini de générateurs et que $\mathcal{J}(G)$ est infini, alors $\mathcal{J}(G)$ est dénombrable si et seulement si $\mathcal{J}(G)$ n'est pas parfait. Cependant on pas d'exemple d'un semi-groupe G dont l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(G)$ est infini dénombrable.

Une conséquence immédiate du lemme précédent est :

Corollaire 6.7.5. — *Soit $G = \langle R_1, \ldots, R_n \rangle$ où $R_1, \ldots, R_n \in \mathbb{C}_p(z) - \mathbb{C}_p$. On suppose que R_1 est de degré au moins deux et a un ensemble de Julia non vide, alors $\mathcal{J}(G)$ est parfait.*

Si G est engendré par des homographies, on peut avoir $\mathcal{J}(G)$ parfait comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 6.7.6. — Si on prend $f(z) = \frac{z}{p}$, $g(z) = z + 1$ et $G = \langle f, g \rangle$. Alors on a $0 \in \mathcal{J}(f) \subset \mathcal{J}(G)$ et $-n = g^{[-n]}(0) \in \mathcal{J}(G)$ pour tout entier naturel n. Et comme $\mathbb{Z}_p$ est stable arrière par f et par g, et que $\mathbb{Z}_p = \overline{-\mathbb{N}}$, le corollaire 6.2.3 et l'inclusion $\mathbb{Z}_p \subset \mathcal{J}(G)$, entraînent alors que l'on a $\mathcal{J}(G) = \mathbb{Z}_p$.

Dans le cas où G est engendré par un nombre fini de fractions rationnelles de degrés au moins deux à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le lemme précédent va nous permettre de déduire le théorème suivant qui est un résultat plus précis.

Théorème 6.7.7. — *Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et G le semi-groupe engendré par les fractions rationnelles $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de degrés au moins deux à coefficients dans K, alors $\mathcal{J}(G)$ vide ou parfait.*

Démonstration. — 1) Si $\mathcal{J}(G) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, alors $\mathcal{J}(G)$ est parfait.

Si $\mathcal{J}(G) \neq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, alors quitte à conjuguer G par une homographie non constante on peut supposer que $\infty \notin \mathcal{J}(G)$.
De plus, si $\mathcal{J}(G)$ n'est pas vide, alors il est infini d'après le théorème 6.3.1.

2) Montrons alors que si $\mathcal{J}(G)$ est infini et que a est un point isolé de $\mathcal{J}(G)$, alors a est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$.
En effet, d'après le lemme précédent on a $\mathcal{J}(G) \subset O_G^+(a)$. Par conséquent si α est un autre élément de $\mathcal{J}(G)$, alors on a $\alpha \in \mathcal{J}(G) \subset O_G^+(a)$. Donc il existe un élément g_1 de G tel que $\alpha = g_1(a)$. Et comme α est aussi un point isolé de $\mathcal{J}(G)$, donc on a $a \in \mathcal{J}(G) \subset O_G^+(\alpha)$. Par suite il existe un élément g_2 de G tel que $a = g_2(\alpha)$. Il en résulte que si on pose $g = g_2 \circ g_1$ et $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes premiers entres eux à coefficients dans K et $T(z) = zQ(z) - P(z)$, alors T est un polynôme non nul qui s'annule en a.

3) Montrons maintenant que si $\mathcal{J}(G)$ est infini et admet un point isolé a, alors on a une contradiction.
En effet, omme $\infty \in \mathcal{F}(G)$, donc il existe nombre réel strictement positif r tel que $\mathcal{J}(G) \subset B^+(a, r)$. D'autre part d'après le lemme précédent, tous les points de $\mathcal{J}(G)$ sont isolés et on a $\mathcal{J}(G) \subset O_G^+(a) \subset K(a)$. Par suite, le compact $B^+(a, r) \cap K(a)$ contient une suite convergente d'éléments de $\mathcal{J}(G)$, et donc $\mathcal{J}(G)$ a un point non isolé. Cela nous donne une contradiction. □

6.7.2. Cas où $\mathcal{J}(G)$ est d'intérieur vide. — On sait que si R est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, alors son ensemble de Julia est d'intérieur vide (voir [**15**] page 692).
Dans le cas d'un semi-groupe G de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ on va donner des conditions suffisantes pour que $\mathcal{J}(G)$ soit d'intérieur vide.
Nous aurons besoin de deux lemmes préliminaires.

Lemme 6.7.8. — *Soit G un semi-groupe de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. On suppose que :*
1) G contient un élément R de degré au moins deux, dont l'ensembles de Julia $\mathcal{J}(R)$ est non vide.
2) $\mathcal{J}(G)$ est contenu dans une partie fermée F (de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$) qui est complètement stable par les éléments de G et que $F \neq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.
Alors l'ensemble $\mathcal{J}(G)$ est d'intérieur vide.

Démonstration. — La preuve est analogue à celle du lemme 2 de [**21**].
Comme $\mathcal{J}(R)$ est non vide, le lemme 6.7.1 entraîne que $\mathcal{J}(G) =$

$\overline{\bigcup_{h\in G} h^{-1}(\mathcal{J}(R))}$.
Supposons par l'absurde que $\mathcal{J}(G)$ soit d'intérieur non vide, alors il existe un disque D (de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$) contenu dans $\mathcal{J}(G)$.
Par suite il existe un élément h de G tel que $D \cap h^{-1}(\mathcal{J}(R)) \neq \emptyset$.
On utilise alors la remarque suivante : Si f est une application d'un ensemble E dans lui même et B, C deux sous ensembles de E, alors $B \cap f(C) \neq \emptyset$ équivaut à $f^{-1}(B) \cap C \neq \emptyset$.
Dans notre cas on a donc $h(D) \cap \mathcal{J}(R) \neq \emptyset$.

Posons alors $V = h(D)$ et $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^{[n]}(V)$, et montrons que le complémentaire de W dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ a au plus un point.
En effet comme W est stable avant par R, si le complémentaire de W dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ a au moins deux points, alors le Critère de Hsia entraîne que W est contenu dans $\mathcal{F}(R)$, mais cela est impossible vu que W contient V qui lui contient un élément de $\mathcal{J}(R)$.
Par suite W est soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ privé d'un point. Donc $\overline{W} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et comme le fermé F contient W, on en déduit que $F = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, contrairement à l'hypothèse faite. □

Dans ce qui suit nous noterons $\overline{\mathbb{Q}_p}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}_p$.

Lemme 6.7.9. — *Soit K une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$, $(R_i)_{i\in I}$ une famille de fractions rationnelles à coefficients dans K et $G = \langle R_i \ / \ i \in I\rangle$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*
i) Les degrés des générateurs de G sont majorés par une constante.
ii) L'ensemble $\mathcal{J}(G) \cap \overline{\mathbb{Q}_p}$ est de cardinal au moins trois.
Alors, il existe une partie fermée F de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ qui contient $\mathcal{J}(G)$ et qui est complètement stable par les éléments de G, et il existe un entier naturel D tel que pour tout élément θ de $\mathbb{C}_p$ de valeur absolue $p^{-\frac{1}{\rho}}$ où $\rho \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et ρ premier à D, on ait $B^-(\theta, |\theta|) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - F$. En particulier les ensembles $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - F$ et $\mathcal{F}(G)$ sont non vides.

Démonstration. — 1) Montrons d'abord qu'il existe un élément a de $\mathcal{J}(G)$ qui est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ et dont l'orbite arrière par G contient au moins deux éléments. Pour cela considérons deux cas :
i) Si G contient une fraction rationnelle de degré au moins deux alors $\mathcal{J}(G) \cap \overline{\mathbb{Q}_p}$ contient un point non exceptionnel de R (donc de G), vu que R a au plus deux points exceptionnels (voir [**9**] page 43).
ii) Si G contient une homographie h distincte de z, alors h^{-1} a au plus deux points fixes. Donc, $\mathcal{J}(G) \cap \overline{\mathbb{Q}_p}$ contient un point a tel que $h^{-1}(a) \neq a$.
2) Comme il existe un élément a de $\mathcal{J}(G)$ qui est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ et dont

l'orbite arrière par G a au moins deux éléments, donc le corollaire 6.7.2 entraîne que $\mathcal{J}(G) = \overline{O_G^-(a)}$.
Notons M le sous-corps de $\mathbb{C}_p$ obtenu en adjoignant à K l'élément a, d le degré de M sur $\mathbb{Q}_p$, d_i le degré de R_i (pour i dans I), δ le maximum des degrés des fractions R_i pour i dans I, et $D = d(\delta!)$.
Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls dont les diviseurs premiers sont des diviseurs de D (en particulier $1 \in \mathcal{N}$). Notons L l'ensemble formé du point à l'infini et des éléments de $\mathbb{C}_p$ qui sont algébriques sur M et dont le degré sur M est dans $\mathcal{N}$, et posons $F = \overline{L}$ (adhérence de L dans l'espace métrique $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$).
Remarquons alors que $\mathcal{N}$ est stable par le produit et que tout entier non nul qui divise un élément de $\mathcal{N}$ est lui aussi dans $\mathcal{N}$.

3) Vérifions alors que L est complètement stable par les éléments de G, il en résultera que $O_G^-(a) \subset L$ et que F est complètement stable par les éléments de G.
Pour tout i dans I posons $R_i(z) = \frac{P_i(z)}{Q_i(z)}$ où $P_i(z), Q_i(z) \in M[z]$ et $P_i(z)$ premier à $Q_i(z)$.

Si $x \in L$ et $y = R_i(x)$ alors :
Pour $x \neq \infty$ on a dans le cas où x est un pôle de R_i que $y = \infty \in L$, et dans le cas où x n'est pas un pôle de R_i que $y = R_i(x) \in M(x)$, et donc le degré de $R_i(x)$ sur M divise celui de x sur M, et par suite $y \in L$.
Pour $x = \infty$ on a dans le cas où $degP_i < degQ_i$ que $y = 0 \in L$, et dans le cas où $degP_i > degQ_i$ que $y = \infty \in L$, et dans le cas où $degP_i = degQ_i$ que $y = R_i(x) \in M \subset L$. Finalement on a bien que $R_i(L) \subset L$.

D'autre part si $x \in L$ et $R_i(y) = x$, alors :
Pour $x \neq \infty$, on a que y est racine du polynôme $P_i(z) - xQ_i(z)$ qui est à coefficients dans $M(x)$, par suite le degré de y sur $M(x)$ est dans $\mathcal{N}$ (car il est inférieur à d_i), et comme le degré de x sur M est dans $\mathcal{N}$, on en déduit que le degré de y sur M est aussi dans $\mathcal{N}$, et donc $y \in L$.
Pour $x = \infty$, on a soit $y = \infty \in L$, soit y est un pôle de R_i et $y \in L$ (car dans ce cas le degré de y sur M est inférieur à d_i et donc ce degré est dans $\mathcal{N}$).
Finalement on a bien que $R_i^{-1}(L) \subset L$.
En particulier on a $O_G^-(a) \subset L$, et donc on a $\mathcal{J}(G) = \overline{O_G^-(a)} \subset \overline{L}$.

4) Montrons alors que si θ est un élément de $\mathbb{C}_p$ tel que $|\theta| = p^{-\frac{1}{\rho}}$, où $\rho \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et ρ premier à D, alors on a $B^-(\theta, |\theta|) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - F$.

Remarquons d'abord que $|\theta| \notin |\overline{L}|$, car sinon il existe une suite x_n d'éléments de $L - \{\infty\}$ tels que $\lim x_n = x \in \overline{L}$ et $|x| = |\theta|$. Mais alors à partir d'un certain rang on a $|x_n| = |x| = |\theta|$, et donc $|\theta| = p^{-\frac{m}{\lambda}}$, où $\lambda \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{Z}$ (vu que le

degré de x_n sur $\mathbb{Q}_p$ est dans $\mathcal{N}$). Par suite on a $\rho m = \lambda$, et donc ρ divise λ et $\rho \in \mathcal{N}$, ce qui contredit l'hypothèse.

D'autre part, si on note r_θ la distance de θ au fermé $\overline{L}$, alors on a $r_\theta \geq |\theta|$ (car sinon il existe un élément x dans $\overline{L}$ tel que $|x - \theta| < |\theta|$, et par suite on a $|x| = |\theta|$ et $|\theta| \in \overline{L}$ ce qui est absurde par ce qui précéde).
On en déduit que $B^-(\theta, |\theta|) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - F \subset \mathcal{F}(G)$ comme promis.

5) Par suite si on prend un nombre premier q plus grand que D, et θ une racine du polynôme $z^q - p$, on a $|\theta| = p^{-\frac{1}{q}}$, et ce qui précéde entraîne que : $\theta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - F \subset \mathcal{F}(G)$. □

Nous somme maintenant en mesure de donner la preuve du théorème suivant :

Théorème 6.7.10. — *Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et G un semi-groupe engendré par des fractions rationnelles $R_1, \ldots, R_n$ à coefficients dans K, alors $\mathcal{J}(G)$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. — Remarquons que si $\mathcal{J}(G) \cap \overline{\mathbb{Q}_p}$ est fini, alors $\mathcal{J}(G)$ est d'intérieur vide.

En effet, si $\mathcal{J}(G) \cap \overline{\mathbb{Q}_p} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ on pose $\mathcal{E} = \overline{\mathbb{Q}_p} - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Et comme on a $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}(G)$ et que l'adhérence de $\mathcal{E}$ est $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, il en résulte que $\mathcal{J}(G)$ est d'intérieur vide.

Dans le cas où $\mathcal{J}(G) \cap \overline{\mathbb{Q}_p}$ est infini, on remarque d'abord qu'on peut supposer que G contient un élément R de degré au moins deux, dont l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(R)$ est non vide (quitte à remplacer G par $\langle G \cup \{R_0\}\rangle$ où $R_0(z) = \dfrac{z^p - z}{p}$ (rappellons que $\mathcal{J}(R_0) = \mathbb{Z}_p$)).

Par suite, le lemme 6.7.9 entraîne que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - F$ est non vide et il suffit d'utiliser le lemme 6.7.8 pour conclure. □

6.8. Tableau comparatif avec le cas complexe

Nous allons dans ce paragraphe comparer les propriétés des ensembles de Julia des semi-groupes de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, avec les propriétés des ensembles de Julia des semi-groupes de fractions rationnelles à coefficients complexes.
On notera $\mathcal{J}_p(R)$ l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle R à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré au moins deux.
On notera $\mathcal{J}_p(G)$ l'ensemble de Julia, d'un semi-groupe $G = \langle R_1, \ldots, R_n\rangle$ où $R_1, \ldots, R_n$ sont des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, $n \neq 1$ et $degR_i \geq 2$ pour $i = 1, \ldots, n$.

On notera $\mathcal{J}_c(R)$ l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle R à coefficients complexes de degré au moins deux.
On notera $\mathcal{J}_c(G)$ l'ensemble de Julia, d'un semi-groupe $G = \langle R_1, \dots, R_n \rangle$ où $R_1, \dots, R_n$ sont des fractions rationnelles à coefficients complexes, $n \neq 1$ et $degR_i \geq 2$ pour $i = 1, \dots, n$.
Dans le tableau on notera T pour toujours, P pour possible, J pour jamais, et Q.O pour question ouverte (à la connaissance de l'auteur).

	Propriété	$\mathcal{J}_p(R)$	$\mathcal{J}_p(G)$	$\mathcal{J}_c(R)$	$\mathcal{J}_c(G)$
1	stable arrière	T	T	T	T
2	vide	P	P	J	J
3	fini+non vide	J	J	J	J
4	infini+dénombrable	J	Q.O	J	J
5	parfait	P	P	T	T
6	infini+non parfait	J	J	J	J
7	infini+intèrieur vide	P	P	P	P
8	infini+intèrieur non vide	J	Q.O	P	P

Commentaires

1) $\mathcal{J}_p(R)$ est complètement stable par R (voir par exemple [**6**] page 1). Par contre $\mathcal{J}_p(G)$ est stable arrière par les éléments de G d'après la proposition 6.2.2, mais peut ne pas être stable avant par les éléments de G, comme le montre l'exemple 6.2.10.
Dans le cas complexe, $\mathcal{J}_c(R)$ est complètement stable par R (d'après le théorème 3.2.4 de [**2**]).
D'autre part $\mathcal{J}_c(G)$ est stable arrière par les éléments de G d'après le lemme 2.1 de [**13**], par contre, $\mathcal{J}_c(G)$ n'est pas toujours stable avant par les éléments de G comme montre l'exemple 1 page 360 de [**13**] (pour $|a| > 1$, et $G = \langle z^2, a^{-1}z^2 \rangle$, on a $\mathcal{J}_c(G) = \{z \in \mathbb{C},\ / 1 < |z| \leq |a|\}$)

2) Si R a une bonne réduction alors $\mathcal{J}_p(R)$ est vide (voir [**17**] page 105).
Si G est un semi-groupe engendré par des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$) ayant de bonnes réductions, alors on a $\mathcal{J}_p(G) = \emptyset$ d'après le corollaire 6.1.12.
Dans le cas complexe, $\mathcal{J}_c(R)$ est infini d'après le théorème 4.2.1 de [**2**], donc $\mathcal{J}_c(G)$ est aussi infini.

3) $\mathcal{J}_p(R)$ est infini ou vide (cf [**15**] page 694 théorème 2.9), et $\mathcal{J}_p(G)$ est infini ou vide d'après le théorème 6.3.1.
Dans le cas complexe, $\mathcal{J}_c(R)$ et $\mathcal{J}_c(G)$ sont infinis d'après ce qui précède.

4) 5) et 6) On sait que si $\mathcal{J}_p(R)$ n'est pas vide, alors il est parfait, donc non dénombrable(voir [**15**] page 694).
Dans le cas complexe, on sait que $\mathcal{J}_c(R)$ est parfait (cf [**2**] théorème 4.2.4), donc non dénombrable.
$\mathcal{J}_p(G)$ est parfait ou vide d'après le théorème 6.7.7.
$\mathcal{J}_c(G)$ est parfait d'après le lemme 3.1 page 363 de [**13**], donc non dénombrable.

7) On sait que si l'ensemble $\mathcal{J}_p(R)$ n'est pas vide, alors $\mathcal{J}_p(R)$ est d'intérieur vide (voir, par exemple, [**15**] page 692 et [**9**] page 52).
D'après le théorème 6.7.10, si G est engendré par des fractions rationelles à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, alors $\mathcal{J}_p(G)$ est d'intérieur vide.
Dans le cas complexe, on montre dans [**2**] page 11 théorème 1.4.1 que si les polynômes T_k (où $k \in \mathbb{N}$), sont définis par les relations $T_0(z) = 1$, $T_1(z) = z$, et $T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}$, alors on a $\mathcal{J}_c(T_k) = \mathcal{J}_c(-T_k) = [-1, 1]$ pour $k \geq 2$, et on montre dans [**13**] page 361 exemple 2 que pour $G = \langle T_n,\ n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}\rangle$, alors on a $\mathcal{J}_c(G) = [-1, 1]$.

8) Dans le cas complexe, si $R(z) = (1 - 2z^{-1})^2$ on montre dans [**2**] page 171 que $\mathcal{J}_c(R) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Et $\mathcal{J}_c(G)$ peut être d'intérieur non vide comme dans [**13**] page 361 exemple 3 où on montre que si $G = \langle z^2, 2z^2 - 1\rangle$, alors $\mathcal{J}_c(G) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq 1\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Amice. — *Les nombres p-adiques.* Collection sup, presses universitaires de france (1975).

[2] A. Beardon. — *Iterations of rational functions.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] A. Beardon. — *Symmetries of Julia sets.* Bull.London.Math.Soc 22, p.576-582, 1990.

[4] A. Bellagh. — *Semigroup of rational p-adic functions for composition.* Taiwanese Journal of Math (Vol.14, No.4, p.1385-1409, August 2010).

[5] R. Benedetto. — *Reduction, dynamics, and Julia sets of rational functions.* Journal of Number theory 86, 2001, p.175-195.

[6] R. Benedetto. — *Hyperbolic maps in p-adic dynamics.* Ergodic Theory Dynam Systems 21 (2001), p.1-11.

[7] R. Benedetto. — *Components and periodic points in non-archimedean dynamics.* Proc of the London Math Soc, 84, (2002), p.231-256.

[8] R. Benedetto. — *Examples of wandering domains in p-adic polynomial dynamics.* C.R.Acad.Sci.Paris, Ser I 335 (2002), p.615-620

[9] J.P. Bézivin. — *Dynamique des fractions rationnelles.* Cours de DEA Caen 2003.

[10] J.P. Bézivin. — *Sur les points périodiques des applications rationnelles en dynamique ultramétrique.* Acta Arithmetica, C.1, (2001), p.63-74.

[11] J.P. Bézivin. — *Sur la compacité des ensembles de Julia des polynômes p-adiques.* Math Zeitchrift 246, 2004, p.273-289.

[12] D. Boyd, R. Stankewitz. — *Dynamic of rational semi-groups.* (Lecture notes based on mini-course given at Georg-August-Universitat Gottingen in June 22 July 2, 1998.)

[13] A. Hinkkanen, G.J. Martin. — *The dynamics of semi-groups of rational functions 1.* Proc.London.math.Soc, 3, p.358-384, 1996.

[14] H. Sumi. — *On dynamics of hyperbolic rational semi-groups.* Journal of Mathematics of Kyoto University.

[15] L. Hsia. — *Closure of periodic points over a non archimedean field.*J.London.Math.Soc.62 (2000), p.685-700.

[16] N. Koblitz — *P-adic Numbers P-adic analysis and zeta function.* 2nd ed, Spinger-verlag, 1984.

[17] P. Morton, J. Silverman — *Periodic points, multiplicities and dynamical units.* J.Reine angew Math.461 (1995), p.81-122.

[18] J. Rivera-Letelier. — *Dynamique des fractions rationnelles sur des corps locaux.* (Thèse de Doctorat Universite d'Orsay 2003).

[19] R. Alain. — *A Course in p-adic analysis.* Springer-verlag, 1986.

[20] N. Smart, C. Woodcock.— *p-adic chaos and random number generation.* Experiment.Math.7, (1998), p.333-342.

[21] R. Stankewitz. — *Completely invariant Julia sets of polynomial semigroups.* Proc.Amer.Math.Soc, (10) 127 (1999), p.2889-2898.

[22] R. Stankewitz. — *Completely invariant sets of normality for rational semi-groups.* Complex variables theory appl 40 (2000) no. 3, p 199-210.

TABLE DES MATIÈRES