

N<sup>o</sup> d'ordre : 17/2005 -M/MT

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES**



**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister  
en MATHÉMATIQUES**

**Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles**

**Par**

**MECHAI Idir**

**THÈME**

**STABILISATION FRONTIÈRE POUR LE SYSTÈME  
COMPLET DE VON KARMAN**

Soutenu publiquement, le 09/11/2005, devant le jury composé de :

|      |                    |                       |            |                     |
|------|--------------------|-----------------------|------------|---------------------|
| Mr.  | <b>K. LEMRABET</b> | Professeur            | U.S.T.H.B. | Président.          |
| Mr.  | <b>D. TENIOU</b>   | Professeur            | U.S.T.H.B. | Directeur de thèse. |
| Mr.  | <b>A. HEMINNA</b>  | Maître de Conférences | U.S.T.H.B. | Examineur.          |
| Mme. | <b>O. ZAIR</b>     | Maître de Conférences | U.S.T.H.B. | Examineur.          |

...وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا ﴿٨٠﴾

من سورة: طه

# *Remerciements*

*Je voudrais sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **D. Teniou** mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Sa disponibilité alliée à sa gentillesse naturelle et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. Je lui dois toute ma reconnaissance.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus vifs à Monsieur **K. Lemrabet**, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.*

*Mes remerciements tout aussi vifs vont à Monsieur **A. Heminna**, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. et Madame **O. Zair**, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. qui ont accepté de faire partie de mon jury.*

*Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin, à ma formation.*

# Stabilisation frontière pour le système complet de Von Karman

## Résumé

On considère le système d'élasticité dynamique non linéaire, décrit par les équations de Von Karman, l'une des équations fondamentales de la physique mathématique. Beaucoup de phénomènes physiques, reliés à la théorie des oscillations, sont décrits par le modèle d'élasticité dynamique : propagation d'ondes, oscillations et vibrations des membranes, plaques, coques, etc., sont présentées par le système d'élasticité non linéaire. En utilisant la méthode des multiplicateurs et des techniques d'analyse micro-locale, on étudie les problèmes d'existence, d'unicité et de régularité des solutions, ensuite, on s'intéresse à la théorie de la stabilisation frontière.

**Mots-clés :** Système complet de Von Karman, élasticité non linéaire, plaques, ondes, stabilisation frontière.

# Table des matières

|                                                                                                        |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Liste des principales notations</b>                                                                 | <b>vi</b> |
| <b>Introduction générale</b>                                                                           | <b>1</b>  |
| <b>Chapitre 1. Rappels de quelques résultats fondamentaux</b>                                          | <b>5</b>  |
| 1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle . . . . .                                                  | 5         |
| 1.1.1 Espaces de Sobolev . . . . .                                                                     | 6         |
| 1.1.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles . . . . .                                            | 10        |
| 1.1.3 Espaces intermédiaires . . . . .                                                                 | 12        |
| 1.2 Rappel sur quelques inégalités fondamentales . . . . .                                             | 13        |
| 1.2.1 Un résultat de décroissance uniforme . . . . .                                                   | 13        |
| 1.2.2 Lemme de Gronwall . . . . .                                                                      | 15        |
| 1.2.3 Inégalité de Jensen . . . . .                                                                    | 16        |
| 1.2.4 Inégalité de Korn . . . . .                                                                      | 17        |
| <b>Chapitre 2. Résultat d'existence et d'unicité pour le système complet de Von Karman</b>             | <b>19</b> |
| 2.1 Introduction et résultat principal . . . . .                                                       | 19        |
| 2.1.1 Position du problème . . . . .                                                                   | 19        |
| 2.1.2 Résultat principal . . . . .                                                                     | 25        |
| 2.2 Existence et unicité : preuve de la proposition 2.1. . . . .                                       | 27        |
| 2.2.1 Existence d'une solution régulière : preuve de la première partie de la proposition 2.1. . . . . | 27        |
| 2.2.2 Unicité des solutions régulières . . . . .                                                       | 37        |
| 2.2.3 L'unicité des solutions faibles : Preuve de la deuxième partie de la proposition 2.1. . . . .    | 40        |

|                                                                                                  |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Chapitre 3. Stabilisation frontière du système complet de Von Karman</b>                      | <b>47</b>  |
| 3.1 Introduction et résultat principal . . . . .                                                 | 48         |
| 3.2 Résultats préliminaires et régularité de trace des solutions du problème $(\mathcal{P})$ .   | 50         |
| 3.2.1 Egalité de dissipation . . . . .                                                           | 50         |
| 3.2.2 Régularité de trace des solutions du problème $(\mathcal{P})$ . . . . .                    | 56         |
| 3.3 Estimation de la stabilité frontière . . . . .                                               | 63         |
| 3.3.1 Formulation variationnelle et identités préliminaires . . . . .                            | 64         |
| 3.3.2 Première estimation . . . . .                                                              | 66         |
| 3.3.3 Absorption de traces sur la frontière et achèvement de la preuve du<br>lemme 3.10. . . . . | 75         |
| 3.4 Absorption de termes d'ordre inférieur . . . . .                                             | 77         |
| 3.5 Fin de la preuve du 3.1. . . . .                                                             | 86         |
| <b>Chapitre 4. Résultat complémentaire de régularité</b>                                         | <b>90</b>  |
| 4.1 Régularité améliorée sans conditions supplémentaires . . . . .                               | 90         |
| 4.2 Régularité améliorée avec conditions supplémentaires . . . . .                               | 96         |
| <b>Conclusion et perspectives</b>                                                                | <b>102</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                                                             | <b>103</b> |
| <b>Index</b>                                                                                     | <b>106</b> |

# Liste des principales notations

|                                   |                                                                                                       |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta$                          | Le Laplacien, page 20                                                                                 |
| $\Delta^2$                        | Le Bilaplacien, page 20                                                                               |
| $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$      | Espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\Omega$ , page 6                                    |
| $\mathcal{D}(\Omega)$             | Espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\Omega$ , page 6                    |
| $\mathcal{D}'(\Omega)$            | Espace des distributions sur $\Omega$ , page 6                                                        |
| $\mathcal{S}(\Omega)$             | Espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide ainsi que toutes les dérivées, page 9 |
| $\mathcal{S}'(\Omega)$            | Espace des distributions tempérées sur $\Omega$ , page 9                                              |
| $\epsilon(\cdot)$                 | Le tenseur linéaire de déformation, page 21                                                           |
| $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ | La frontière de la plaque, tel que $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ , page 20         |
| $\Gamma_0$                        | La partie non contrôlée, page 20                                                                      |
| $\Gamma_1$                        | La partie contrôlée, page 20                                                                          |
| $\lambda$ et $\eta$               | Les coefficients de Lamé, page 21                                                                     |
| $\mathcal{C}$                     | Le tenseur de rigidité, page 21                                                                       |
| $\mu$                             | Le coefficient de Poisson, page 20                                                                    |
| $\nabla$                          | Le gradient, page 20                                                                                  |
| $\nu$                             | La normale extérieure, page 20                                                                        |

|                                              |                                                                                 |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $\tau$                                       | La direction tangentielle, page 20                                              |
| $B_1$ et $B_2$                               | Les opérateurs frontières, page 22                                              |
| $b_1$ et $b_2$                               | Représentent un potentiel d’amortissement faible , page 25                      |
| $C$                                          | Constante générale, différente dans des situations diverses, page 27            |
| $D$                                          | Le module de rigidité à la flexion, page 20                                     |
| $D_i$                                        | Opérateur différentiel d’ordre $i$ , page 31                                    |
| $D_\tau$ ou $\frac{\partial}{\partial \tau}$ | La dérivée tangentielle, page 20                                                |
| $D_n$ ou $\frac{\partial}{\partial \nu}$     | La dérivée normale, page 20                                                     |
| $div$                                        | La divergence, page 20                                                          |
| $E$                                          | Le module de Young, page 20                                                     |
| $E(t)$                                       | L’énergie fonctionnelle associée au modèle de plaque, page 22                   |
| $E_k(t)$                                     | L’énergie cinétique, page 22                                                    |
| $E_p(t)$                                     | L’énergie potentielle, page 22                                                  |
| $F \hookrightarrow G$                        | L’ensemble $F$ est contenu dans $G$ avec injection continue et dense, page 8    |
| $H(w)$                                       | La matrice Hessienne, c-à-d, la matrice des deuxièmes dérivées de $w$ , page 81 |
| $N(u, w)$                                    | La résultante des contraintes, page 22                                          |
| $u = (u_1, u_2)$                             | Le déplacement dans le plan de la plaque, page 20                               |
| $w$                                          | Le déplacement vertical de la plaque, page 20                                   |

# Introduction générale

Ce mémoire porte sur un modèle d'élasticité non linéaire des corps minces bidimensionnels, qui est le système complet de Von Karman<sup>(1)</sup>.

On peut dater les débuts de l'élasticité à 1678, avec la célèbre loi de Hooke (c'est-à-dire, le tenseur de déformation est une fonction linéaire du tenseur de contraintes, en d'autres termes, la déformation est en raison des forces appliquées au corps (voir [20, p. 2])), c'est une loi qui régit les petites déformations.

Il faut, cependant, attendre le début du XXe siècle pour que l'élasticité des plaques se trouve mise en équations grâce aux travaux de Föppl (1907) et de Von Karman (1910).

L'intérêt des mécaniciens et des ingénieurs pour la théorie des plaques et des coques n'a cessé de croître. De nos jours, la modélisation des milieux continus par le calcul différentiel, mais aussi le développement de l'analyse numérique et des moyens informatiques nous permettent de mieux connaître le comportement des structures, voire même de comprendre des phénomènes nouveaux. L'élasticité se trouve aujourd'hui à la croisée de disciplines variées et intéresse aussi bien mathématiciens que physiciens ou mécaniciens.

La théorie des plaques planes est bidimensionnelle; c'est donc une théorie approchée, la plaque étant un corps tridimensionnel dont une dimension (l'épaisseur) est petite par rapport aux deux autres.

Ces caractéristiques géométriques autorisent des simplifications dans le modèle tridimensionnel.

---

<sup>(1)</sup>Theodore Von Karman est né le 11 mai 1881 à Budapest en Hongrie. Il fait ses études au "Royal Joseph University of Polytechnics and Economics" de Budapest. Il obtient son diplôme de génie mécanique en 1902, et sert ensuite comme assistant professeur d'hydraulique et comme consultant pour l'industrie. En 1908, il obtient sa thèse en mécanique appliquée, (flambement de poutre en coque mince) à Göttingen, sous la direction de Prandtl. Ainsi, ses réussites scientifiques se poursuivent jusqu'à sa mort, le 6 mai 1963 à Aix-la-Chapelle

Dans son état non déformé, la plaque plane<sup>(1)</sup> considérée comme milieu bidimensionnel occupe une région  $\Omega$  où

$$\Omega = \text{ouvert borné de } \mathbb{R}^2, \text{ de frontière } \Gamma \text{ régulière.}$$

Le plan  $\mathbb{R}^2$  est rapporté aux axes orthonormés  $Ox_1, Ox_2$ . L'axe  $Ox_3$  complète le trièdre orthonormé  $Ox_1x_2x_3$ .

En fait, la plaque est un corps tridimensionnel occupant un volume  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ x \mid x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; (x_1, x_2) \in \Omega \text{ et } -\frac{1}{2}p(x_1, x_2) < x_3 < \frac{1}{2}p(x_1, x_2) \right\},$$

où la fonction  $(x_1, x_2) \rightarrow p(x_1, x_2)$  désigne l'épaisseur de la plaque,  $p(x_1, x_2)$  étant "petit".

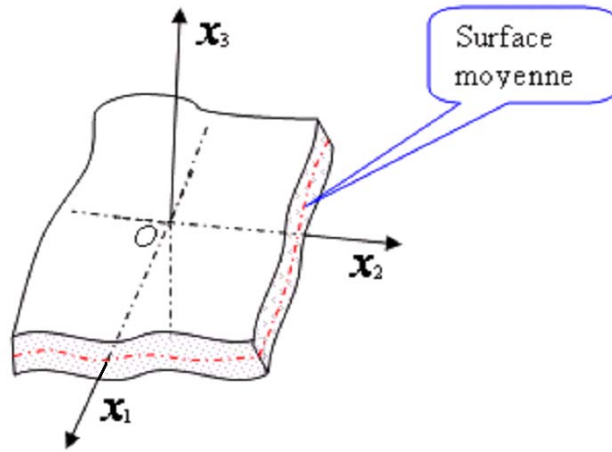


Figure 1.1 : Plaque mince occupant un volume  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $u(x_1, x_2, x_3) = \{u_i(x_1, x_2, x_3); i = 1, 2, 3\}$  le vecteur de déplacement de la plaque à l'instant  $t$ . Donc le modèle bidimensionnel consiste à considérer les déplacements  $u(x_1, x_2, 0)$  des points de  $\Omega$  occupé par la plaque plane (ou la surface moyenne).

On considère le système d'élasticité dynamique non linéaire, décrit par les équations de Von Karman, l'une des équations fondamentales de la physique mathématique. Son importance est dû au fait que beaucoup de phénomènes physiques, reliés à la théorie des oscillations, sont décrits par le modèle d'élasticité dynamique : propagation d'ondes, oscillations et vibrations des membranes, plaques, coques, etc., sont présentées par le système d'élasticité non linéaire. De point de vu mathématique, ce modèle est de type hyperbolique.

---

<sup>(1)</sup>Si la déformation est assez petite, le corps revient à son état initial non déformé quand les forces déformatrices s'évanouissent. On appelle élastiques les déformations de ce genre. Si les déformations sont importantes, elles ne disparaissent pas intégralement avec les forces, une déformation résiduelle subsiste, et l'état du corps diffère de l'état initial. On a alors des déformations plastiques.

Dans un premier chapitre, nous nous attachons à faire quelques rappels sur le cadre fonctionnel utilisé, et sur des inégalités utilisées dans la suite de ce travail.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude d'existence, d'unicité et de régularité des solutions. Le résultat d'existence de solutions régulières exposé dans la première partie de la proposition 2.1, est prouvé en utilisant la méthode de Galerkin non linéaire. L'unicité des solutions faibles (c'est-à-dire la deuxième partie de la proposition 2.1) a été prouvée en appliquant la méthode utilisée par Sedenko dans [34]. Nous notons aussi que l'unicité des solutions faibles pour les équations de Von Karman modifiées a été prouvée dans [10].

Dans le chapitre 3 on s'intéresse au problème de stabilisation frontière. La problématique de stabilisation consiste en la question simple suivante : Soit une dynamique gérée par une équation de la forme

$$v' = Av,$$

où " ' " désigne la dérivation en temps,  $v(t)$  un élément d'un espace de Hilbert  $H$  et  $A$  un opérateur de domaine  $D(A)$  dans  $H$ . On suppose que ce système est soumis à un terme d'amortissement, qui fait décroître l'énergie. Notre problème est de déterminer le comportement asymptotique de l'énergie : étudier sa limite (c'est-à-dire déterminer si elle est nulle ou pas). Divers aspects de ce problème ont été étudiés par de nombreux mathématiciens ces dernières années : sous diverses hypothèses sur le terme d'amortissement :

des propriétés de stabilité asymptotique forte, c'est-à-dire

$$E(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

des propriétés de stabilisation uniforme, c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq C(E(0)) f(t),$$

où  $C$  est une fonction constante par rapport à  $t$  et qui dépend de la norme des données initiales, et  $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue décroissante qui satisfait

$$f(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

(si  $f(t)$  est explicite, on parle alors de taux de décroissance explicite),

des propriétés de stabilité asymptotique faible, c'est-à-dire

$$(u(t), u'(t)) \rightharpoonup 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

dans un certain espace de Hilbert  $H$ .

Les résultats de stabilisation donnés par le théorème 3.1. sont du deuxième type, mais ne précisent pas le taux de décroissance de l'énergie : elle est donnée sous la forme

$$E(t) \leq S(t), \forall t > 0,$$

où,  $S(t)$  est la solution de l'équation différentielle

$$S_t(t) + q(S(t)) = 0,$$

$q$  étant une fonction dépendant de la fonction qui représente le feedback. En fait, on sait que [32] dans le cas de dissipation linéaire, de domaine étoilé, un feedback. (ou rétroaction) frontière représenté par une fonction linéaire de la vitesse avec des dérivées tangentielles des déplacements horizontaux, mène à un taux de décroissance exponentielle pour l'énergie du système. Le théorème 3.1. énonce un taux de décroissance uniforme pour l'énergie, valable pour le modèle sans les restrictions mentionnées ci-dessus. Particulièrement on montre que, la monotonie des feedbacks non linéaires (sans dérivées tangentielles des déplacements horizontaux) fournit des taux de décroissance uniforme pour l'énergie, en l'absence d'hypothèses géométriques imposées à la partie contrôlée de la frontière, en utilisant un résultat d'unicité de type Holmgren prouvé dans [16] pour le système dynamique de l'élasticité. Mais ce dernier exige que les solutions soient suffisamment régulières. Ce qui est l'objet du dernier chapitre.

Les résultats exposés dans ce mémoire ont été obtenus par **I. Lasiecka** [25]. Des résultats semblables ont été obtenus pour le modèle de thermo-élasticité relatif au système complet de Von Karman, par exemple, en premier lieu **A. Benabdallah et D. Teniou** [2] ont obtenu la stabilité exponentielle de l'énergie dans le cas unidimensionnel, et ensuite **I. Lasiecka** [26] et **Benabdallah et Lasiecka** [1], dans le cas bidimensionnel.

# Chapitre 1

## Rappels de quelques résultats fondamentaux

### Sommaire

---

|            |                                                               |           |
|------------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Quelques outils d'analyse fonctionnelle . . . . .</b>      | <b>5</b>  |
| 1.1.1      | Espaces de Sobolev . . . . .                                  | 6         |
| 1.1.2      | Espaces de fonctions à valeurs vectorielles . . . . .         | 10        |
| 1.1.3      | Espaces intermédiaires . . . . .                              | 12        |
| <b>1.2</b> | <b>Rappel sur quelques inégalités fondamentales . . . . .</b> | <b>13</b> |
| 1.2.1      | Un résultat de décroissance uniforme . . . . .                | 13        |
| 1.2.2      | Lemme de Gronwall . . . . .                                   | 15        |
| 1.2.3      | Inégalité de Jensen . . . . .                                 | 16        |
| 1.2.4      | Inégalité de Korn . . . . .                                   | 17        |

---

Ce chapitre est consacré au rappel de quelques résultats fondamentaux qui seront utilisés par la suite dans le développement de ce travail.

### 1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

Nous n'avons pas l'intention de présenter ici la théorie des espaces de Sobolev en toute généralité. Nous allons simplement introduire les notions de base, suffisantes pour la compréhension de notre problème, en renvoyant à la bibliographie pour les démonstrations de

ces notions de base (par exemple pour les théorèmes de trace).

Les notions introduites dans cette section seront utilisées dans tous les chapitres ultérieurs; nous rappellerons au moment opportun les résultats plus élaborés sur les espaces de Sobolev dont nous aurons besoin, (pour cette section voir [9, Chapitre 1]).

### 1.1.1 Espaces de Sobolev

Sur  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on introduit les espaces suivants<sup>(1)</sup> :

1.  $L^p(\Omega)$  = espace des (classes de) fonctions  $f$  mesurables telles que ( $p$  étant donné avec  $1 \leq p \leq \infty$ ) :

$$(1.1.1) \quad |f|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty; \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$(1.1.2) \quad |f|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty; \quad p = \infty,$$

muni de la norme (1.1.1) si  $p \neq \infty$  et (1.1.2) si  $p = \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach; si  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant à la norme (1.1.1) (où  $p = 2$ ) étant donné par

$$(1.1.3) \quad (f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx.$$

2.  $\mathcal{D}(\Omega)$  = espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact dans  $\Omega$ . Etant donné une suite  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$  on dira que  $\varphi_j \longrightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  si :

(i)  $\exists K$  (compact) fixé tel que  $K \subset\subset \Omega$ ,  $\text{supp} \varphi_j \subset K \forall j$ ;

(ii) on a,  $\forall \alpha$ ,  $D^\alpha \varphi_j \longrightarrow 0$  uniformément sur  $\Omega$  où l'on a posé :

$$(1.1.4) \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n.$$

3.  $\mathcal{D}'(\Omega)$  = espace des distributions sur  $\Omega$  = espace des formes  $\varphi \longrightarrow (f, \varphi)$  linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  (c'est-à-dire,  $(f, \varphi_\alpha) \longrightarrow 0$  si  $\varphi_\alpha \longrightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ ). On dira que  $f_j \longrightarrow f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si  $(f_j, \varphi) \longrightarrow (f, \varphi) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .
4. Si  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  on définit  $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  (et cela  $\forall \alpha$ ) par

$$(1.1.5) \quad (D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) \quad \text{avec} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

En outre l'application  $f \longrightarrow D^\alpha f$  de  $\mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  est continue.

---

<sup>(1)</sup>Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

**Espace de Sobolev**  $W^{m,p}(\Omega)$

On appelle "espace de Sobolev d'ordre  $m$  sur  $L^p(\Omega)$ " que l'on note  $W^{m,p}(\Omega)$  l'espace défini par

$$(1.1.6) \quad W^{m,p}(\Omega) = \{v \mid v \in L^p(\Omega), D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Muni de la norme

$$(1.1.7) \quad |v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}; \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$|v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{L^\infty(\Omega)};$$

$W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach.

Le cas " $p = 2$ " est fondamental. Pour simplifier l'écriture, on posera

$$(1.1.8) \quad W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

muni du produit scalaire

$$(1.1.9) \quad (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

c'est un espace de Hilbert.

**Premier théorème de traces**

On prendra garde que, sauf en dimension 1, une fonction  $v$  de  $H^1(\Omega)$  n'est pas nécessairement continue sur  $\Omega$ , ni a fortiori sur  $\overline{\Omega}$ ; on peut néanmoins – et c'est absolument essentiel pour les applications – définir les traces de  $v$  sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  <sup>(1)</sup>. Nous ferons l'hypothèse

$$(1.1.10) \quad \Omega \text{ est un ouvert borné dont la frontière } \Gamma \text{ est une variété de dimension } (n-1) \\ \text{une fois continûment différentiable, } \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma.$$

On montre alors (voir par exemple Lions-Magenes [31, Chapitre 1]) que,  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  désignant l'espace des fonctions une fois continûment différentiables dans  $\overline{\Omega}$ ,  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ .

Pour  $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  on posera

$$(1.1.11) \quad \gamma_0 v = v|_\Gamma = \text{"trace de } v \text{ sur } \Gamma" = \text{valeur de } v \text{ sur } \Gamma.$$

---

<sup>(1)</sup>Plus généralement sur une variété régulière de dimension  $n-1$  contenue dans  $\overline{\Omega}$ .

On note

$$L^2(\Gamma) = \{f \mid f \text{ mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure } d\Gamma\},$$

muni du produit scalaire

$$(f, g)_\Gamma = \int_\Gamma f g d\Gamma.$$

On montre alors (voir Lions-Magenes [31, Chapitre 1])

**Théorème 1.1.** *Sous l'hypothèse (1.1.10) on peut définir de façon unique la trace  $\gamma_0 v = v|_\Gamma$  pour  $v \in H^1(\Omega)$  de façon que  $\gamma_0 v$  coïncide avec la définition usuelle (1.1.11) si  $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ ;  $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$  et l'application  $v \longrightarrow \gamma_0 v$  est linéaire continue de  $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ .*

**Remarque 1.1.** *L'application  $v \longrightarrow D^\alpha v$  est linéaire continue de  $H^{|\alpha|+1}(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ ; on peut donc définir*

$$(1.1.12) \quad \{\gamma_0(D^\alpha v); |\alpha| \leq m-1\} \text{ si } v \in H^m(\Omega).$$

*En fait, puisque la connaissance de  $v$  sur  $\Gamma^{(1)}$  entraîne celle de ses dérivées tangentielles sur  $\Gamma$ , il est préférable de remplacer l'ensemble des dérivées apparaissant dans (1.1.12) par les dérivées normales d'ordre  $\leq m-1$*

$$\gamma v = \{v, \partial v / \partial n, \dots, \partial^{m-1} v / \partial n^{m-1}\} \in (L^2(\Gamma))^m \text{ si } v \in H^m(\Omega).$$

**Remarque 1.2.** *On pose*

$$H_0^1(\Omega) = \text{noyau de } \gamma_0 = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = 0\},$$

*plus généralement*

$$H_0^m(\Omega) = \text{noyau de } \gamma = \{v \mid v \in H^m(\Omega), \gamma v = 0\}.$$

*On a*

$$H_0^m(\Omega) \text{ est un sous-espace fermé de } H^m(\Omega).$$

*Donc  $H_0^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour la structure induite par celle de  $H^m(\Omega)$ .*

**Remarque 1.3.** *On montre [31] que  $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega)$ . Alors toute forme linéaire continue sur  $H_0^m(\Omega)$  s'identifie avec une distribution sur  $\Omega$ .*

*On désigne par  $H^{-m}(\Omega)$  l'espace dual de  $H_0^m(\Omega)$  dans cette identification, alors*

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) (= H^0(\Omega)) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega).$$

---

<sup>(1)</sup>  $\Gamma$  régulière voir l'hypothèse (1.1.10).

Afin de caractériser l'espace image de  $H^1(\Omega)$  par  $\gamma_0$ , on introduit quelques notions supplémentaires.

**Les espaces  $H^s(\Omega)$ ,  $s$  non nécessairement entier**

Dans le cas particulier où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on peut définir  $H^m(\mathbb{R}^n)$  par la transformation de Fourier. Si  $v$  est une fonction continue à support compact, sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}(v)$  est définie par

$$\hat{v}(\xi) = \mathcal{F}(v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x \cdot \xi) v(x) dx, \text{ où } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ et } x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i.$$

On peut définir  $H^m(\mathbb{R}^n)$  (voir [31, Théorème 1.2]) par (1.1.6) ou par

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \mid v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n) \right\},$$

où  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace dual de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , muni de la topologie forte de dual, avec  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  = espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à décroissance rapide ainsi que toutes les dérivées ( $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |x|^k |D^\alpha f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ ), muni des semi-normes

$$\left\{ f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^k |D^\alpha f(x)|), k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Alors il est naturel de poser la définition suivante :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \mid v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n) \right\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$|v|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{v} \right|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

norme qui est équivalente à celle correspondant à (1.1.9) lorsque  $s = m$ .

Lorsque  $H^0(\mathbb{R}^n)$  est identifié à son dual, on a

$$(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

**Remarque 1.4.** Les espaces  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ont la propriété de "localisation" suivante :

$$(1.1.13) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \varphi v \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad \forall v \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ et l'application } v \longrightarrow \varphi v \text{ est linéaire continue de } H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n).$$

Cette dernière propriété permet de définir  $H^s(\Gamma)$ ,  $\forall s$ .

On définit  $H^s(\Gamma)^{(1)}$  pour  $s \geq 0$ , on considère ensuite

$$H^\alpha(\Gamma) = (H^{-\alpha}(\Gamma))' \quad \text{si } \alpha < 0.$$

Pour une fonction  $v \in L^2(\Gamma)$  on définit, à l'aide d'une famille de cartes locales et d'une partition  $\{\theta_i\}$  de l'unité subordonnée :

$$v = \sum_i \theta_i v \quad (\text{somme finie}),$$

puis l'on définit les images de  $\theta_i v$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ ; on dira alors que  $v \in H^s(\Gamma)$  si toutes les images de  $\theta_i v$  sont dans  $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ ; si  $w_i$  est l'image de  $\theta_i v$ , on prend comme norme (*hilbertienne*) sur  $H^s(\Gamma)$  :

$$(1.1.14) \quad |v|_{H^s(\Gamma)} = \left( \sum_i |w_i|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{1/2}.$$

Grâce à (1.1.13) l'espace  $H^s(\Gamma)$  ainsi défini ne dépend pas de la famille de cartes locales et de la partition de l'unité choisies; la norme (1.1.14) en dépend mais seulement à une équivalence de norme près. L'espace  $H^s(\Gamma)$  est donc défini de manière intrinsèque ainsi que sa topologie mais non sa norme.

### **Deuxième théorème de traces**

**Théorème 1.2.** *Sous les hypothèses du théorème 1.1, l'application  $v \longrightarrow \gamma_0 v$  est linéaire continue et surjective de  $H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ .*

Pour la preuve voir par exemple Lions-Magenes [31].

### **1.1.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles**

Soit  $X$  un espace de Banach de norme notée  $|\cdot|_X$ ; on désigne par  $L^p(0, T; X)$  l'espace des (classes de) fonctions  $t \longrightarrow f(t)$  mesurables de  $]0, T[ \longrightarrow X$  (pour la mesure  $dt$ )

$$|f(t)|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T |f(t)|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad (p \neq \infty),$$

$$|f(t)|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \text{ess.} |f(t)|_X.$$

C'est un espace de Banach.

---

<sup>(1)</sup>  $\Gamma$  régulière voir l'hypothèse (1.1.10).

On désigne par  $\mathcal{D}'([0, T[; X)$  l'espace des distributions sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $X$ , défini par

$$\mathcal{D}'([0, T[; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}([0, T[); X),$$

où, de façon générale  $\mathcal{L}(Y; X)$  désigne l'espace des applications linéaires continues de  $Y \longrightarrow X$ , si  $Y = X$  on note  $\mathcal{L}(X)$ .

A une fonction  $f \in L^p(0, T; X)$  correspond une distribution  $\tilde{f}$  sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $X$ , définie par

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}([0, T[),$$

(ce qui définit bien une application  $\varphi \longrightarrow \tilde{f}(\varphi)$  linéaire continue de  $\mathcal{D}([0, T[) \longrightarrow X$ ). L'application  $f \longrightarrow \tilde{f}$  est une injection; on identifiera  $f$  et  $\tilde{f}$ . En outre si  $f \longrightarrow 0$  dans  $L^p(0, T; X)$  alors  $\tilde{f} \longrightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}'([0, T[; X)$ , c'est-à-dire  $\tilde{f}(\varphi) \longrightarrow 0$ . On a alors

$$L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'([0, T[; X).$$

Pour  $f \in \mathcal{D}'([0, T[; X)$ , on définit  $d^k f / dt^k = f^{(k)}$  par

$$f^{(k)}(\varphi) = (-1)^k f(\varphi^{(k)}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T[),$$

ce qui définit  $f^{(k)} \in \mathcal{D}'([0, T[; X)$ . En outre l'application  $f \longrightarrow f^{(k)}$  est linéaire continue de  $\mathcal{D}'([0, T[; X)$  dans lui-même.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach avec  $X \hookrightarrow Y$ . Soit  $v \in L^p(0, T; X)$ ; alors  $dv/dt \in \mathcal{D}'([0, T[; X)$  donc, en particulier (puisque  $\mathcal{D}'([0, T[; X) \subset \mathcal{D}'([0, T[; Y)$ ) :  $dv/dt \in \mathcal{D}'([0, T[; Y)$ .

Supposons alors que

$$dv/dt \in L^q(0, T; X) \quad (1 \leq q \leq \infty).$$

Alors la fonction  $v$  est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de  $[0, T] \longrightarrow Y$ .

En particulier, pour  $V, H$  deux espaces de Hilbert sur  $\mathbb{R}$ , de norme respectives  $|\cdot|_V, |\cdot|_H$ , le produit scalaire dans  $H$  étant noté  $(\cdot, \cdot)$ ; on suppose que

$$V \subset H, \quad V \text{ dense dans } H.$$

Identifiant  $H$  à son dual,  $H$  s'identifie alors à un sous-espace du dual  $V'$  de  $V$ , d'où  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ . Soit alors  $v$  avec

$$v \in L^2(0, T; V), \quad dv/dt \in L^2(0, T; V').$$

On montre alors (voir Lions-Magenes [31, Chapitre 1]) que, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la fonction  $t \longrightarrow v(t)$  est continue de  $[0, T] \longrightarrow H$ .

### 1.1.3 Espaces intermédiaires

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert que nous supposons séparables avec

$$(1.1.15) \quad X \subset Y, \text{ } X \text{ dense dans } Y \text{ avec injection continue.}$$

Soient  $(\cdot, \cdot)_X$  et  $(\cdot, \cdot)_Y$  les produits scalaires respectivement dans  $X$  et dans  $Y$ .

#### L'opérateur $\Lambda^{(1)}$

L'espace  $X$  peut être défini comme le domaine d'un opérateur  $\Lambda$  non borné dans  $Y$ , auto-adjoint, positif ( $\Lambda$  étant d'ailleurs non unique !),  $X$  ayant une norme équivalente à la norme du graphe

$$(1.1.16) \quad (\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2)^{1/2}, \quad u \in D(\Lambda) = X.$$

Désignons par  $D(S)$  l'ensemble des  $u$  tels que la forme anti-linéaire

$$(1.1.17) \quad v \longrightarrow (u, v)_X, \quad v \in X$$

soit continue pour la topologie induite par  $Y$ . Alors

$$(1.1.18) \quad (u, v)_X = (Su, v)_Y,$$

ce qui définit  $S$  comme opérateur non borné dans  $Y$ , de domaine  $D(S)$ .

On vérifie sans peine que :  $D(S)$  est dense dans  $Y$ .

$S$  est un opérateur auto-adjoint, i.e.  $S$  coïncide avec  $S^*$  = adjoint de  $S$  (ce qui signifie aussi que leurs domaines coïncident) et  $S$  est strictement positif; en effet

$$(Sv, v)_Y = \|v\|_X^2 \geq (\text{constante}) \|v\|_Y^2.$$

Utilisant la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints, on peut définir les puissances  $S^\theta$  de  $S$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

On utilisera en particulier

$$(1.1.19) \quad \Lambda = S^{1/2}.$$

---

<sup>(1)</sup>Voire [31].

L'opérateur  $\Lambda$  est auto-adjoint positif dans  $Y$ , de domaine  $X$ . On déduit de (1.1.18) et (1.1.19) que

$$(u, v)_X = (\Lambda u, \Lambda v)_Y \quad \forall u, v \in X.$$

**Remarque 1.5.** *L'opérateur  $S$  dépend du choix des produits scalaires sur  $X$  et  $Y$  ( sans changer, évidemment, les topologies de  $X$  et  $Y$ ) et donc l'opérateur  $\Lambda$  dépend aussi de ces produits scalaires; il n'est donc pas intrinsèquement lié aux espaces  $X$  et  $Y$ .*

On pose alors la définition suivante des espaces intermédiaires  $[X, Y]_\theta$  :

**Définition 1.1.** *Sous l'hypothèse (1.1.15) et  $\Lambda$  étant défini par (1.1.19) on pose*

$$[X, Y]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta}), \quad (\text{domaine de } \Lambda^{1-\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

avec

$$\begin{cases} \text{norme sur } [X, Y]_\theta = \text{norme du graphe de } \Lambda^{1-\theta} \text{ i.e.} \\ \left( \|u\|_Y^2 + \|\Lambda^{1-\theta} u\|_Y^2 \right)^{1/2}. \end{cases}$$

**Remarque 1.6.** *Si  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont deux opérateurs auto-adjoints positifs dans  $Y$  de domaine  $X$ , alors*

$$D(\Lambda_1^{1-\theta}) = D(\Lambda_2^{1-\theta}) \quad \text{avec normes équivalentes.}$$

**Remarque 1.7.** *On a :*

$$\begin{aligned} [X, Y]_0 &= X \\ [X, Y]_1 &= Y. \end{aligned}$$

## 1.2 Rappel sur quelques inégalités fondamentales

### 1.2.1 Un résultat de décroissance uniforme

Les résultats de nombreux auteurs, concernant l'estimation de décroissance de l'énergie, de certains problèmes dissipatifs non linéaires, sont basés sur le lemme suivant, utilisé par **I. Lasiecka et D. Tataru** [27] :

**Lemme 1.3.** *Soit  $p$  une fonction croissante positive définie sur  $[0, +\infty[$ , telle que  $p(0) = 0$ . Donc, on peut définir une fonction croissante  $q$ ;  $q(x) \equiv x - (I + p)^{-1}(x)$ . Considérons une suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels positifs, telle que :*

$$(1.2.1) \quad s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Alors

$$s_m \leq S(m),$$

où  $S(t)$  est la solution de l'équation différentielle

$$(1.2.2) \quad \frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0.$$

De plus, si  $p(x) > 0$  pour  $x > 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0.$$

**Remarque 1.8.** Puisque  $p$  est une fonction croissante positive, alors on peut écrire

$$q(x) \equiv x - (I + p)^{-1}(x) \equiv p(I + p)^{-1}(x) \geq 0 \text{ et } q(0) = 0 \text{ pour } x = 0^{(1)}.$$

donc,  $S(t)$  est décroissante. En effet,

$$\frac{d}{dt} S(t) = -q(S(t)) = -p(I + p)^{-1}(S(t)) \leq 0, \text{ c-à-d } S(t) \leq S(\tau) \text{ pour tout } t \geq \tau.$$

**Preuve.** Pour montrer le lemme 1.3. on utilise la démonstration par récurrence.

En supposant  $s_m \leq S(m)$  montrons que  $s_{m+1} \leq S(m+1)$ .

En effet, d'une part l'inégalité (1.2.1) est équivalente à

$$(I + p) s_{m+1} \leq s_m,$$

et puisque  $(I + p)^{-1}$  est croissante, alors

$$s_{m+1} \leq (I + p)^{-1} s_m, \text{ ainsi } s_{m+1} - s_m \leq -q(s_m),$$

donc

$$(1.2.3) \quad s_{m+1} \leq s_m - q(s_m)$$

d'autre part, l'intégration de l'équation (1.2.2) sur  $[m, m+1]$  donne

$$S(m+1) - S(m) + \int_m^{m+1} q(S(t)) dt = 0,$$

et donc,

$$\begin{aligned} S(m+1) &= S(m) - \int_m^{m+1} q(S(t)) dt \geq S(m) - q(S(m)), \\ \text{car } \int_m^{m+1} q(S(t)) dt &\leq \sup_{m \leq t \leq m+1} q(S(t)) = q(S(m)), \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup>  $q(0) = 0$  ? Il suffit que  $p(I + p)^{-1}(0) = 0$ . Soit  $(I + p)^{-1}(0) = y \implies y + p(y) = 0$ , donc  $y = -p(y) \leq 0$ , car  $p$  est une fonction positive et  $p(0) = 0$  donc  $p(y) = 0$ , et par suite,  $y = 0$ .

par (1.2.3) et la remarque 1.8. on obtient

$$\begin{aligned} S(m+1) &\geq S(m) - q(S(m)) = (I - q) S(m) = (I + p)^{-1} S(m) \\ &\geq (I + p)^{-1} s_m = s_m - q(s_m) \geq s_{m+1}. \end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence  $s_m \leq S(m)$  et la croissance de  $(I + p)^{-1}$ .

Et par suite, si  $p(x) > 0$  pour  $x > 0$ , posons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = l,$$

donc

$$0 \leq l \leq S(t) \quad \forall t \geq 0, \text{ car } S(0) = s_0 \geq 0 \text{ et } S(t) \text{ décroissante,}$$

ce qui implique

$$(1.2.4) \quad 0 \leq q(l) \leq q(S(t)) = -\frac{d}{dt} S(t) \quad \forall t \geq 0.$$

L'intégration de (1.2.4) sur  $[m, m+1]$  donne

$$0 \leq q(l) \leq S(m) - S(m+1) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence on montre que

$$0 \leq q(l)(m+1) \leq S(0) - S(m) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

d'où

$$q(l) \leq \frac{1}{(m+1)} S(0) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

donc pour  $m \rightarrow +\infty$ , on trouve

$$q(l) = 0 \implies l \leq 0,$$

par conséquent

$$l = 0.$$

Ceci achève la preuve du lemme 1.3. ■

## 1.2.2 Lemme de Gronwall

**Lemme 1.4.** Soient  $0 \leq t_0 \leq t_1$ ,  $\psi \in L^1(t_0, t_1)$ ,  $\psi \geq 0$  p.p. et  $\phi \in L^\infty(t_0, t_1)$ ,  $\phi \geq 0$  p.p., telles que

$$(1.2.5) \quad \phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s) \phi(s) ds,$$

avec  $K$  et  $L$  des constantes positives.

Alors

$$\phi(t) \leq K \exp \left( L \int_{t_0}^t \psi(s) ds \right), \text{ pour } t \in [t_0, t_1].$$

**Preuve.** L'inégalité (1.2.5) est équivalente à

$$(1.2.6) \quad \frac{\phi(t)}{K + L \int_{t_0}^t \psi(s) \phi(s) ds} \leq 1,$$

multiplions (1.2.6) par  $L\psi(t)$  et intégrons sur  $[t_0, t_1]$ , on trouve

$$\int_{t_0}^t \frac{L\psi(s)\phi(s)ds}{K + L \int_{t_0}^s \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau} ds \leq L \int_{t_0}^t \psi(s)ds,$$

alors,

$$\log \left( K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds \right) - \log K \leq L \int_{t_0}^t \psi(s)ds,$$

et finalement

$$K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds \leq K \exp \left( L \int_{t_0}^t \psi(s)ds \right),$$

en utilisant (1.2.5) dans le membre de gauche de cette inégalité on trouve le résultat. ■

### 1.2.3 Inégalité de Jensen

La plupart des inégalités usuelles de l'analyse trouvent leur origine dans la notion de convexité.

**Définition 1.2.** Une fonction  $\varphi$ , à valeurs réelles, définie sur un intervalle  $]a, b[$  où  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  est dite convexe si l'inégalité

$$(1.2.7) \quad \varphi((1-\omega)s + \omega t) \leq (1-\omega)\varphi(s) + \omega\varphi(t)$$

est vérifiée pour tous nombres  $s, t, \omega$  tels que  $a < t < b, a < s < b, 0 \leq \omega \leq 1$ .

La relation (1.2.7) est aussi équivalente à l'inégalité

$$(1.2.8) \quad \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}$$

pour tous  $a < s < t < \tau < b$ .

On a l'inégalité de Jensen suivante :

**Lemme 1.5.** Soit  $f \in L^1(\Sigma)$  (où  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  et  $\text{mes}(\Sigma) < \infty$ ), et telle que  $a < f(x) < b$  pour tout  $x \in \Sigma$  (les cas  $a = -\infty$  et  $b = +\infty$  ne sont pas exclus). Soit  $\varphi$  une fonction convexe sur  $]a, b[$ , alors

$$(1.2.9) \quad \varphi\left(\frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} f(x) dx\right) \leq \frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} \varphi \circ f(x) dx.$$

**Remarque 1.9.** Puisque,  $\varphi$  est concave si et seulement si  $(-\varphi)$  est convexe, alors on a l'inégalité de Jensen pour les fonctions concaves  $\varphi$

$$\frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} \varphi(f(x)) dx \leq \varphi\left(\frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} f(x) dx\right).$$

**Preuve.** On a

$$a \leq \frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} f(x) dx \leq b.$$

Posons  $t = \frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} f(x) dx$ . Si  $\beta$  est la borne supérieure de l'ensemble des quotients de gauche de (1.2.8), où  $a < s < t$ ,  $\beta$  est inférieur ou égal à tous les quotients de droite de (1.2.8), pour tout  $\tau \in ]t, b[$ . On en déduit que

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t); \quad (a < s < b).$$

En remplaçant  $s$  par  $f(x)$ , on trouve

$$(1.2.10) \quad \varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \beta(f(x) - t), \text{ pour tout } x \in \Sigma.$$

La fonction  $\varphi$  étant continue,  $\varphi \circ f$  est mesurable. En intégrant les deux membres de (1.2.10) par rapport à  $x$ , on obtient

$$\int_{\Sigma} \varphi(f(x)) dx \geq \text{mes}(\Sigma) \varphi(t) + \beta \int_{\Sigma} f(x) dx - \text{mes}(\Sigma) \beta t,$$

d'où le résultat (1.2.9). ■

## 1.2.4 Inégalité de Korn

On pose

$$V = \{u; u = \{u_i\}, u_i \in H^1(\Omega)\} = (H^1(\Omega))^3,$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = (u_i, v_i)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j}) dx.$$

**Lemme 1.6.** (Voir [9, Théorème 3.1 p. 110] et [7, Théorème 1. p. 1259]). Soit  $\Omega$  un ouvert borné de frontière régulière<sup>(1)</sup>. Il existe une constante  $c > 0$  (dépendant de  $\Omega$ ) telle que

$$(1.2.11) \quad \int_{\Omega} \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{ij}(u) dx + \int_{\Omega} u_i u_i dx \geq c |u|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

$$\text{avec } \epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Ce résultat n'est pas une banalité : en effet, le premier membre de (1.2.11) ne fait intervenir que certaines combinaisons de dérivées premières, à savoir  $u_{i,j} + u_{j,i}$  alors que le deuxième membre de (1.2.11) fait intervenir toutes les dérivées premières; évidemment l'inégalité "inverse" est évidente, de sorte que (1.2.11) équivaut à dire que

$$\left( \int_{\Omega} \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{ij}(u) dx + \int_{\Omega} u_i u_i dx \right)^{1/2} \text{ est une norme sur } V \text{ équivalente à } |u|_V.$$

---

<sup>(1)</sup>Plus généralement le résultat est valable si  $\Omega$  est un ouvert borné ou non dont la frontière  $\Gamma$  peut être décrite par un nombre fini de cartes "locales" qui soient des fonctions une fois continûment différentiables et bornées. C'est le cas pour un ouvert  $\Omega$  dont la frontière régulière est bornée ou "va régulièrement à l'infini".

## Chapitre 2

# Résultat d'existence et d'unicité pour le système complet de Von Karman

### Sommaire

---

|            |                                                                                                     |           |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction et résultat principal . . . . .</b>                                                 | <b>19</b> |
| 2.1.1      | Position du problème . . . . .                                                                      | 19        |
| 2.1.2      | Résultat principal . . . . .                                                                        | 25        |
| <b>2.2</b> | <b>Existence et unicité : preuve de la proposition 2.1. . . . .</b>                                 | <b>27</b> |
| 2.2.1      | Existence d'une solution régulière : preuve de la première partie<br>de la proposition 2.1. . . . . | 27        |
| 2.2.2      | Unicité des solutions régulières . . . . .                                                          | 37        |
| 2.2.3      | L'unicité des solutions faibles : Preuve de la deuxième<br>partie de la proposition 2.1. . . . .    | 40        |

---

## 2.1 Introduction et résultat principal

### 2.1.1 Position du problème

On considère le modèle de plaque dynamique non linéaire isotrope, relatif au système complet de Von Karman, présenté dans [18]. Avec ce modèle, on associe un amortissement non linéaire représenté par le moment et le cisaillement appliqué au bord de la plaque. Ici, les

variables  $w$  et  $u = (u_1, u_2)$  représentent, respectivement, le déplacement vertical et le déplacement dans le plan de la plaque mince, qui occupe un domaine bidimensionnel  $\Omega$  borné de frontière suffisamment régulière  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ . Supposons que  $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ .

Les équations gouvernant ces déplacements sont données par

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} u_{tt} + b_1 u_t - \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)]] &= 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty), \\ [I - \delta \Delta] w_{tt} + b_2 w_t + D \Delta^2 w - \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] &= 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty), \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet sur "la partie non contrôlée"  $\Gamma_0$ , qui sont données par

$$(2.1.2) \quad u = w = \nabla w = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, \infty).$$

Les conditions aux limites de dissipation sur "la partie contrôlée"  $\Gamma_1$  sont données par

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu &= -g(u_t), \\ D [\Delta w + (1 - \mu) B_1 w] &= -h_1(D_n w_t), \\ D [D_n \Delta w + (1 - \mu) B_2 w] - \delta D_n w_{tt} - [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu] \cdot \nabla w &= -D_\tau h_2(D_\tau w_t), \end{aligned}$$

avec (2.1.1) et (2.1.3) on associe les conditions initiales

$$(2.1.4) \quad u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, w(0) = w_0, w_t(0) = w_1 \text{ dans } \Omega.$$

On note par  $(\mathcal{P})$  le système suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} (2.1.1), \\ (2.1.2), \\ (2.1.3), \\ (2.1.4). \end{cases}$$

Le vecteur  $\nu$  représente la normale extérieure et  $\tau$  représente la direction tangentielle (dédit de  $\nu$  par rotation  $-\frac{\pi}{2}$ ).  $D_n$  (resp.  $D_\tau$ ) désigne la dérivée normale (resp. tangentielle). Le coefficient  $D$  est le module de rigidité à la flexion,  $\mu$  et  $E$  sont respectivement le coefficient de Poisson ( $0 < \mu < 1/2$ ) et le module de Young ( $E > 0$ )<sup>(1)</sup> de la plaque,  $\delta$  une constante positive proportionnelle à l'épaisseur de la plaque.

---

<sup>(1)</sup>Pour des raisons physiques on a les inégalités (voir [8, Chapitre 0] et [6, p. 17-18])  $0 < \mu < 1/2$  et  $E > 0$ , ce qui permet au tenseur  $\mathcal{C}$  de satisfaire la propriété de symétrie et la condition d'ellipticité.

Ainsi, le terme  $\delta\Delta w_{tt}$  représente le moment d'inertie.

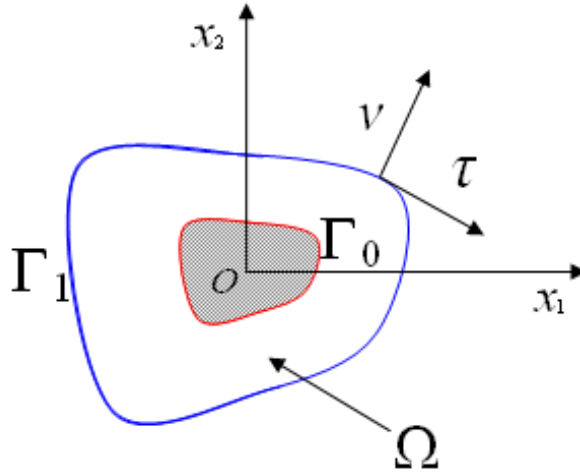


Figure 2.1

Le tenseur de rigidité d'ordre quatre  $\mathcal{C}$  est défini par

$$\mathcal{C}(\epsilon) \equiv \frac{E}{(1-2\mu)(1+\mu)} [\mu \text{trace } \epsilon I + (1-2\mu)\epsilon] = \lambda \text{trace } \epsilon I + 2\eta \epsilon,$$

où  $I$  l'identité dans l'ensemble des tenseurs symétrique d'ordre quatre,  $\epsilon(\cdot)$  est le tenseur linéarisé de déformation,  $\epsilon(u) = 1/2 (\nabla u + \nabla^T u)$  et  $\lambda, \eta$  les coefficients de Lamé pour la plaque, sont liés aux coefficient de Poisson et module de Young par les relations suivantes

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \text{ et } \eta = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

ou encore

$$E = \frac{\eta(3\lambda + 2\eta)}{\lambda + \eta} \text{ et } \mu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \eta)}.$$

Le tenseur  $\mathcal{C}$  vérifie la propriété de symétrie suivante :

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij} = \mathcal{C}_{jikl},$$

(tous les indices vont de 1 à 2), et satisfait la condition d'ellipticité suivante (avec un certain  $\beta > 0$ ) :

$$\mathcal{C}_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \geq \beta\epsilon_{ij}\epsilon_{ij},$$

pour tout tenseur symétrique  $\epsilon_{ij}$  (on utilise la convention de sommation des indices répétés).

La fonction  $f$  est donnée par

$$f(s) \equiv (1/2) s \otimes s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (s_1)^2 & s_1 s_2 \\ s_2 s_1 & (s_2)^2 \end{bmatrix}; \quad s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2,$$

et les opérateurs frontières sont donnés par

$$\begin{aligned} B_1 &\equiv 2\nu_1\nu_2 D_{xy}^2 - \nu_1^2 D_y^2 - \nu_2^2 D_x^2, \\ B_2 &\equiv D_\tau \left[ (\nu_1^2 - \nu_2^2) D_{xy}^2 + \nu_1\nu_2 (D_y^2 - D_x^2) \right] + \frac{1}{\mu-1} lI. \end{aligned}$$

La dissipation dans le système est représentée par une fonction vectorielle non linéaire  $g = (g_1, g_2)$ , et des fonctions scalaires  $h_i$  qui sont (c'est-à-dire les  $h_i$  et les  $g_i$ ) supposées continues, monotones croissantes, nulles à l'origine et d'une croissance linéaire à l'infini.

**Remarque 2.1.** *En particulier, ces propriétés satisfaites par  $g$  et  $h_i$  impliquent*

$$\begin{aligned} g(s) \cdot s &> 0 \text{ pour } s \in \mathbb{R}_*^2, \\ h_i(s) s &> 0 \text{ pour } s \in \mathbb{R}_*. \end{aligned}$$

On rappelle que l'énergie fonctionnelle associée au modèle de plaque (2.1.1) est donnée par

$$(2.1.5) \quad E(t) = E_k(t) + E_p(t),$$

avec l'énergie cinétique

$$(2.1.6) \quad E_k(t) = \int_{\Omega} |u_t|^2 + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 d\Omega,$$

et l'énergie potentielle

$$(2.1.7) \quad E_p(t) = a(w, w) + \int_{\Omega} \mathcal{C}[N(u, w)] \cdot N(u, w) d\Omega,$$

où la forme bilinéaire  $a(w, z)$  est définie par

$$\begin{aligned} a(w, z) &\equiv D \int_{\Omega} [w_{xx}z_{xx} + w_{yy}z_{yy} + \mu w_{xx}z_{yy} + \mu w_{yy}z_{xx} \\ &\quad + 2(1 - \mu) w_{xy}z_{xy}] d\Omega + Dl \int_{\Gamma_1} wz d\Gamma_1, \end{aligned}$$

et la résultante des contraintes  $N(u, w)$  est donnée par

$$N(u, w) = \epsilon(u) + f(\nabla w).$$

Il est bien connu que si  $\Gamma_0 \neq \emptyset$  ou  $l > 0$ ,  $E_p(t)$  est équivalente à la norme de  $H^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^2$ . En particulier, l'estimation suivante découle de l'inégalité de Korn et des injections de Sobolev :

$$\begin{aligned} |u|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left[ |N(u, w)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla w|_{L^2(\Omega)}^4 + l \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \right] \\ &\leq C \left[ |N(u, w)|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla w|_{H^2(\Omega)}^4 + l \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \right]. \end{aligned}$$

Avec ces notations, on écrit la formulation faible du problème  $(\mathcal{P})$ , pour  $(\phi, \psi) \in [H^1(\Omega)]^2 \times [H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)]$

$$(2.1.8) \quad \begin{aligned} & (u_{tt}, \phi)_\Omega + (b_1 u_t, \phi)_\Omega + (\mathcal{C}N(u, w), \epsilon(\phi))_\Omega + \langle g(u_t), \phi \rangle_{\Gamma_1} - \langle \mathcal{C}(\epsilon(u)) \nu, \phi \rangle_{\Gamma_0} = 0, \\ & (w_{tt}, \psi)_\Omega + \delta(\nabla w_{tt}, \nabla \psi)_\Omega + a(w, \psi) + (b_2 w_t, \psi)_\Omega + (\mathcal{C}N(u, w), \nabla \psi \otimes \nabla w)_\Omega \\ & \quad + \langle h_1(D_n w_t), D_n \psi \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_2(D_\tau w_t), D_\tau \psi \rangle_{\Gamma_1} - \langle D\Delta w, D_n \psi \rangle_{\Gamma_0} = 0. \end{aligned}$$

En effet,

(i) pour la première équation on a

$$(u_{tt}, \phi)_\Omega + (b_1 u_t, \phi)_\Omega + (\mathcal{C}N(u, w), \nabla \phi)_\Omega - \langle \mathcal{C}N(u, w) \nu, \phi \rangle_\Gamma = 0$$

les conditions aux limites satisfaites par  $u$  sur  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  donnent

$$(u_{tt}, \phi)_\Omega + (b_1 u_t, \phi)_\Omega + (\mathcal{C}N(u, w), \epsilon(\phi))_\Omega + \langle g(u_t), \phi \rangle_{\Gamma_1} - \langle \mathcal{C}(\epsilon(u)) \nu, \phi \rangle_{\Gamma_0} = 0$$

(ii) pour la deuxième équation on trouve, d'une part

$$\begin{aligned} ((I - \delta\Delta) w_{tt} + b_2 w_t - \operatorname{div}[\mathcal{C}N(u, w) \nabla w], \psi)_\Omega &= (w_{tt}, \psi)_\Omega + \delta(\nabla w_{tt}, \nabla \psi)_\Omega \\ &\quad - \delta \langle \nabla w_{tt} \nu, \psi \rangle_{\Gamma_0} - \delta \langle \nabla w_{tt} \nu, \psi \rangle_{\Gamma_1} + (b_2 w_t, \psi)_\Omega + (\mathcal{C}N(u, w), \nabla \psi \otimes \nabla w)_\Omega \\ &\quad - \langle \mathcal{C}N(u, w) \nabla w \nu, \psi \rangle_{\Gamma_0} - \langle \mathcal{C}N(u, w) \nabla w \nu, \psi \rangle_{\Gamma_1} \end{aligned}$$

les conditions aux limites sur  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  satisfaites par  $w$  donnent

$$(2.1.9) \quad \begin{aligned} ((I - \delta\Delta) w_{tt} + b_2 w_t - \operatorname{div}[\mathcal{C}N(u, w) \nabla w], \psi)_\Omega &= (w_{tt}, \psi)_\Omega + \delta(\nabla w_{tt}, \nabla \psi)_\Omega + \\ & (b_2 w_t, \psi)_\Omega + (\mathcal{C}N(u, w), \nabla \psi \otimes \nabla w)_\Omega - \delta \langle \nabla w_{tt} \nu, \psi \rangle_{\Gamma_1} - \langle \mathcal{C}N(u, w) \nu \cdot \nabla w, \psi \rangle_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$D(\Delta^2 w, \psi)_\Omega = D \int_\Gamma \psi D_n \Delta w d\Gamma - D \int_\Gamma \Delta w D_n \psi d\Gamma + D \int_\Omega \Delta w \Delta \psi d\Omega,$$

et comme

$$\begin{aligned} D \int_\Omega \Delta w \Delta \psi d\Omega &= a(w, \psi) + (1 - \mu) D \int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\} d\Omega \\ &\quad - D l \int_{\Gamma_1} w \psi d\Gamma_1 \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} D(\Delta^2 w, \psi)_\Omega &= a(w, \psi) + (1 - \mu) D \int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\} d\Omega \\ &\quad - D l \int_{\Gamma_1} w \psi d\Gamma_1 + D \int_\Gamma \psi D_n \Delta w d\Gamma - D \int_\Gamma \Delta w D_n \psi d\Gamma, \end{aligned}$$

donc

$$D(\Delta^2 w, \psi)_\Omega = a(w, \psi) + (1 - \mu) D \left( \int_\Gamma \{(\beta_2 w) \psi - (\beta_1 w) D_n \psi\} d\Gamma - \frac{1}{\mu - 1} l \int_\Gamma l w \psi d\Gamma \right) \\ - D l \int_{\Gamma_1} w \psi d\Gamma_1 + D \int_\Gamma \psi D_n \Delta w d\Gamma - D \int_\Gamma \Delta w D_n \psi d\Gamma,$$

où on a utilisé le fait que (voir par exemple [19, p. 12])

$$\int_\Gamma \left\{ \left( \beta_2 w - \frac{1}{\mu - 1} l w \right) \psi - (\beta_1 w) D_n \psi \right\} d\Gamma = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} d\Omega,$$

donc

(2.1.10)

$$D(\Delta^2 w, \psi)_\Omega = a(w, \psi) + D \int_\Gamma \{ (D_n \Delta w + (1 - \mu) \beta_2 w) \psi - (\Delta w + (1 - \mu) \beta_1 w) D_n \psi \} d\Gamma$$

de (2.1.9) et (2.1.10) on trouve

$$((I - \delta \Delta) w_{tt} + b_2 w_t - \operatorname{div} [\mathcal{C} N(u, w) \nabla w], \psi)_\Omega + D(\Delta^2 w, \psi)_\Omega = (w_{tt}, \psi)_\Omega \\ + \delta (\nabla w_{tt}, \nabla \psi)_\Omega + (b_2 w_t, \psi)_\Omega + a(w, \psi) + (\mathcal{C} N(u, w), \nabla \psi \otimes \nabla w)_\Omega - \delta \langle \nabla w_{tt} \nu, \psi \rangle_{\Gamma_1} \\ - \langle \mathcal{C} N(u, w) \nu, \nabla w, \psi \rangle_{\Gamma_1} + D \int_\Gamma \{ (D_n \Delta w + (1 - \mu) \beta_2 w) \psi - (\Delta w + (1 - \mu) \beta_1 w) D_n \psi \} d\Gamma$$

en utilisant les conditions aux limites satisfaites par  $w$  sur  $\Gamma_1$  on trouve :

$$(w_{tt}, \psi)_\Omega + \delta (\nabla w_{tt}, \nabla \psi)_\Omega + a(w, \psi) + (b_2 w_t, \psi)_\Omega + (\mathcal{C} N(u, w), \nabla \psi \otimes \nabla w)_\Omega \\ + \langle D [D_n \Delta w + (1 - \mu) \beta_2 w] - \delta \nabla w_{tt} \nu - \mathcal{C} N(u, w) \nu, \nabla w, \psi \rangle_{\Gamma_1} \\ - \langle D [\Delta w + (1 - \mu) \beta_1 w], D_n \psi \rangle_{\Gamma_1} - \langle D [\Delta w + (1 - \mu) \beta_1 w], D_n \psi \rangle_{\Gamma_0} = 0$$

donc

$$(w_{tt}, \psi)_\Omega + \delta (\nabla w_{tt}, \nabla \psi)_\Omega + a(w, \psi) + (b_2 w_t, \psi)_\Omega + (\mathcal{C} N(u, w), \nabla \psi \otimes \nabla w)_\Omega \\ - \langle D_\tau h_2 (D_\tau w_t), \psi \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_1 (D_n w_t), D_n \psi \rangle_{\Gamma_1} - \langle D \Delta w, D_n \psi \rangle_{\Gamma_0} = 0.$$

Par conséquent

$$(u_{tt}, \phi)_\Omega + (b_1 u_t, \phi)_\Omega + (\mathcal{C} N(u, w), \epsilon(\phi))_\Omega + \langle g(u_t), \phi \rangle_{\Gamma_1} - \langle \mathcal{C} \epsilon(u) \nu, \phi \rangle_{\Gamma_0} = 0 \\ (w_{tt}, \psi)_\Omega + \delta (\nabla w_{tt}, \nabla \psi)_\Omega + a(w, \psi) + (b_2 w_t, \psi)_\Omega + (\mathcal{C} N(u, w), \nabla \psi \otimes \nabla w)_\Omega \\ + \langle h_1 (D_n w_t), D_n \psi \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_2 (D_\tau w_t), D_\tau \psi \rangle_{\Gamma_1} - \langle D \Delta w, D_n \psi \rangle_{\Gamma_0} = 0.$$

D'où la formulation variationnelle (2.1.8) du problème  $(\mathcal{P})$ .

Ainsi, on présente l'hypothèse suivante qui sera supposée vraie partout dans ce travail.

**Hypothèse 1.**

(1) Soit  $x_0$  un point fixé dans  $\mathbb{R}^2$ . On définit le *champ vectoriel*  $h(x)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  par

$$h(x) \equiv x - x_0.$$

On suppose que

$$(2.1.11) \quad h(x) \cdot \nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0.$$

(2) Il existe des constantes positives  $0 < m \leq M$  telles que pour  $|s| \geq R$ , avec  $R$  constante suffisamment grande, on a

$$(2.1.12) \quad m|s|^2 \leq g(s) \cdot s \leq M|s|^2, \quad ms^2 \leq h_i(s)s \leq Ms^2; \quad i = 1, 2.$$

(3) "Les coefficients"  $b_1$  et  $b_2$  sont respectivement dans  $\mathcal{L}([L^2(\Omega)]^2)$  et  $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ , représentant un potentiel "d'amortissement faible" et sont supposés tels que

$$(b_1 u, u)_{[L^2(\Omega)]^2} \geq 0, \quad (b_2 w, w)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \text{ pour tout } u \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ et } w \in L^2(\Omega).$$

On rappelle aussi les notations suivantes pour les normes des espaces de Sobolev :

$$|u|_{s,\Omega} \equiv |u|_{H^s(\Omega)}, \quad |u|_{s,\Gamma} \equiv |u|_{H^s(\Gamma)},$$

et pour les produits scalaires

$$(u, v)_\Omega \equiv (u, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \langle u, v \rangle_\Gamma \equiv (u, v)_{L^2(\Gamma)}.$$

Par le même symbole on note aussi bien les normes que les produits scalaires des espaces  $L^2$  et  $H^s$ . Cela ne devrait pas créer de confusion, puisque la signification sera claire dans le contexte.

## 2.1.2 Résultat principal

On a le résultat suivant, d'existence, d'unicité et de régularité pour le modèle (2.1.1).

**Proposition 2.1.**

(1) **Solution régulière.** Nous supposons que  $h_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  pour  $i = 1, 2$  et  $g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)^{(1)}$  sont des fonctions monotones croissantes avec  $h'_i \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $g'_i \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Pour toute donnée initiale

$$(u_0, u_1) \in [H^2(\Omega)]^2 \times [H^1(\Omega)]^2, \quad (w_0, w_1) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega),$$

---

<sup>(1)</sup>  $g = (g_1, g_2)$ ,  $g$  croissante ssi  $g_1, g_2$  sont des fonctions croissantes.

satisfaisant les conditions de compatibilité sur la frontière  $\Gamma$ ,

$$(2.1.13) \quad \begin{aligned} u_0 &= w_0 = \nabla w_0 = w_1 = \nabla w_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \mathcal{C} [\epsilon (u_0) + f (\nabla w_0)] \nu &= -g (u_1) \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ D [\Delta w_0 + (1 - \mu) B_1 w_0] &= -h_1 (D_n w_1) \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \end{aligned}$$

Alors, il existe une solution régulière unique globale du problème  $(\mathcal{P})$  telle que

$$\begin{aligned} (u, w) &\in \mathcal{C} \left( 0, T; [H^2(\Omega)]^2 \times H^3(\Omega) \right), \\ (u_t, w_t) &\in \mathcal{C} \left( 0, T; [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega) \right), \end{aligned}$$

où  $T > 0$  est arbitraire.

**(2) Solution faible.** Dans le cas d'amortissement linéaire (c'est-à-dire  $g'(s) = g_{i,0}$  avec  $g_{i,0} > 0$ ,  $h'_i(s) = h_{i,0} > 0$ , et  $g_{i,0}$ ,  $h_{i,0}$  des constantes), il existe une solution faible unique globale associée au problème  $(\mathcal{P})$ . C'est-à-dire, pour toute donnée initiale

$$\begin{aligned} (u_0, u_1) &\in [H^1(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^2, \\ (w_0, w_1) &\in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega), \end{aligned}$$

satisfaisant les conditions aux limites sur la frontière  $\Gamma_0$

$$(2.1.14) \quad u_0 = w_0 = \nabla w_0 = w_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, \infty),$$

il existe une solution faible unique

$$\begin{aligned} (u, w) &\in C \left( 0, T; [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega) \right), \\ (u_t, w_t) &\in C \left( 0, T; [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega) \right), \end{aligned}$$

où  $T > 0$  est arbitraire.

**Remarque 2.2.** La première partie de la proposition 2.1. est prouvée en utilisant la méthode de Galerkin non linéaire. L'unicité de solutions régulières suit un argument de type d'énergie que l'on donne dans la **sous-section 2.2.2**. Pour le cas de dissipation linéaire, l'existence et l'unicité de solutions fortes ont été prouvées dans [33]. (Cependant, les techniques de [33] ne sont pas aisément applicables pour traiter des feedbacks frontières non linéaires).

Dans le cas d'amortissement linéaire l'existence de solution faible (c'est-à-dire  $(u, w) \in C \left( 0, T; [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega) \right); (u_t, w_t) \in C \left( 0, T; [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega) \right)$ ) suit d'un argument de type Galerkin. L'unicité des solutions faibles a été prouvée dans [34] pour le cas de conditions aux limites de Dirichlet avec  $\delta = 0$ . Dans la **sous-section 2.2.3** on utilise la méthode de Sedenko, pour prouver l'unicité de solution faible (c'est-à-dire la deuxième partie de la proposition 2.1). On note aussi que l'unicité de solutions faibles pour les équations de Von Karman modifiée, a été prouvée dans [10].

## 2.2 Existence et unicité : preuve de la proposition 2.1.

### 2.2.1 Existence d'une solution régulière : preuve de la première partie de la proposition 2.1.

On utilise la méthode de Galerkin non linéaire. Soit  $h$  un paramètre destiné à tendre vers zéro et soient  $\mathcal{U}_h$  (resp.  $\mathcal{W}_h$ ) un sous espace de  $H_{\Gamma_0}^2(\Omega)$  (resp.  $H_{\Gamma_0}^3(\Omega)$ ) de dimension finie, où l'indice  $\Gamma_0$  indique que les fonctions sont nulles sur le bord  $\Gamma_0$  (voir (2.1.2)). On note aussi

$$U_h \equiv \mathcal{U}_h \times \mathcal{U}_h, V_h \equiv \mathcal{U}_h \times \mathcal{W}_h.$$

La constante  $C$  est une constante générale, différente dans des situations diverses,  $C(E(0))$  dénote les quantités majorées qui dépendent de  $E(0)$ .

#### Etape 1. Approximation semi-discrète

On considère l'approximation semi-discrète du problème  $(\mathcal{P})$ .

Soient  $(u_{h,0}, w_{h,0}, u_{h,1}, w_{h,1}) \in V_h \times V_h$ , on cherche  $(u_h(t), w_h(t)) \in V_h$  tels que  $u_h(0) = u_{h,0}$ ,  $w_h(0) = w_{h,0}$ ,  $u_{h,t}(0) = u_{h,1}$ ,  $w_{h,t}(0) = w_{h,1}$ , et

$$(2.2.1) \quad (u_{h,tt}, \phi)_\Omega + (b_1 u_{h,t}, \phi)_\Omega + (CN(u_h, w_h), \epsilon(\phi))_\Omega + \langle g(u_{h,t}), \phi \rangle_{\Gamma_1} = 0,$$

$$(2.2.2) \quad \begin{aligned} & (w_{h,tt}, \psi)_\Omega + \delta (\nabla w_{h,tt}, \nabla \psi)_\Omega + a(w_h, \psi) + (b_2 w_{h,t}, \psi)_\Omega + (CN(u_h, w_h), \nabla \psi \otimes \nabla w_h)_\Omega \\ & + \langle h_1(D_n w_{h,t}), D_n \psi \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_2(D_\tau w_{h,t}), D_\tau \psi \rangle_{\Gamma_1} = 0, \end{aligned}$$

pour tout  $(\phi, \psi) \in V_h$ .

L'existence globale et l'unicité de solutions pour le problème semi-discret vient du fait que les termes non linéaires sont localement lipschitz dans  $V_h$  et du fait que l'on a l'inégalité de l'énergie (voir la remarque 3.4. dans le chapitre 3)

$$(2.2.3) \quad E_h(t) \leq E_h(0),$$

où

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} E_h(t) \equiv & \int_\Omega [|u_{h,t}|^2 + |w_{h,t}|^2 + \delta |\nabla w_{h,t}|^2] d\Omega + a(w_h(t), w_h(t)) \\ & + \int_\Omega [CN(u_h(t), w_h(t)) \cdot N(u_h(t), w_h(t))] d\Omega. \end{aligned}$$

De plus, la solution  $(u_h(t), w_h(t)) \in \mathcal{C}^\infty([0, T_0], V_h)$ , pour  $T_0 \geq 0$ .

### Etape 2. Stabilité de l'approximation semi-discrète

On montre que les approximations de Galerkin définies par (2.2.1)–(2.2.2) sont stables. En effet, dérivons (2.2.1)–(2.2.2) par rapport au temps et notons

$$\tilde{u} \equiv u_{h,t}, \tilde{w} \equiv w_{h,t}, N_t(u_h, w_h) \equiv \frac{d}{dt} N(u_h, w_h) = \epsilon(\tilde{u}) + \frac{d}{dt} f(\nabla w_h),$$

on obtient les équations suivantes satisfaites pour les nouvelles fonctions :

$$(2.2.5) \quad \left( \tilde{u}_{tt}, \phi \right)_\Omega + \left( b_1 \tilde{u}_t, \phi \right)_\Omega + (\mathcal{C} N_t(u_h, w_h), \epsilon(\phi))_\Omega + \left\langle g'(u_{h,t}) \tilde{u}_t, \phi \right\rangle_{\Gamma_1} = 0,$$

$$(2.2.6) \quad \begin{aligned} & \left( \tilde{w}_{tt}, \psi \right)_\Omega + \delta \left( \nabla \tilde{w}_{tt}, \nabla \psi \right)_\Omega + a \left( \tilde{w}, \psi \right) + \left( b_2 \tilde{w}_t, \psi \right)_\Omega + (\mathcal{C} N_t(u_h, w_h), \nabla \psi \otimes \nabla w_h)_\Omega \\ & + \left( \mathcal{C} N(u_h, w_h), \nabla \psi \otimes \nabla \tilde{w} \right)_\Omega + \left\langle h'_1(D_n w_{h,t}) D_n \tilde{w}_t, D_n \psi \right\rangle_{\Gamma_1} \\ & + \left\langle h'_2(D_\tau w_{h,t}) D_\tau \tilde{w}_t, D_\tau \psi \right\rangle_{\Gamma_1} = 0, \end{aligned}$$

pour tout  $(\phi, \psi) \in V_h$ .

Prenons  $\phi = \tilde{u}_t, \psi_t = \tilde{w}_t$  nous trouvons alors

$$(2.2.7) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left| \tilde{u}_t \right|_\Omega^2 + (\mathcal{C} N_t(u_h, w_h), N_t(u_h, w_h))_\Omega + \left| \tilde{w}_t \right|_\Omega^2 + \delta \left| \nabla \tilde{w}_t \right|_\Omega^2 + a(\tilde{w}, \tilde{w}) \right] + \left( b_2 \tilde{w}_t, \tilde{w}_t \right)_\Omega + \\ & \left( b_1 \tilde{u}_t, \tilde{u}_t \right)_\Omega + \left\langle g'(u_{h,t}) \tilde{u}_t, \tilde{u}_t \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle h'_1(D_n w_{h,t}) D_n \tilde{w}_t, D_n \tilde{w}_t \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle h'_2(D_\tau w_{h,t}) D_\tau \tilde{w}_t, D_\tau \tilde{w}_t \right\rangle_{\Gamma_1} \\ & = \left( \mathcal{C} N_t(u_h, w_h), \nabla \tilde{w} \otimes \nabla \tilde{w} \right)_\Omega - \left( \mathcal{C} N(u_h, w_h), \nabla \tilde{w}_t \otimes \nabla \tilde{w}_t \right)_\Omega. \end{aligned}$$

En effet, (2.2.5) donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \tilde{u}_t \right|_\Omega^2 + \left( \mathcal{C} N_t(u_h, w_h), \epsilon(\tilde{u}_t) \right)_\Omega + \left\langle g'(u_{h,t}) \tilde{u}_t, \tilde{u}_t \right\rangle_{\Gamma_1} = 0,$$

et (2.2.6) donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left| \tilde{w}_t \right|_\Omega^2 + \delta \left| \nabla \tilde{w}_t \right|_\Omega^2 + a(\tilde{w}, \tilde{w}) \right] + \left( b_2 \tilde{w}_t, \tilde{w}_t \right)_\Omega + \left( \mathcal{C} N_t(u_h, w_h), \nabla \tilde{w}_t \otimes \nabla w_h \right)_\Omega + \\ & \left( \mathcal{C} N(u_h, w_h), \nabla \tilde{w}_t \otimes \nabla \tilde{w} \right)_\Omega + \left\langle h'_1(D_n w_{h,t}) D_n \tilde{w}_t, D_n \tilde{w}_t \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle h'_2(D_\tau w_{h,t}) D_\tau \tilde{w}_t, D_\tau \tilde{w}_t \right\rangle_{\Gamma_1} = 0, \end{aligned}$$

à l'aide de

$$\left( \mathcal{C} N_t(u_h, w_h), \nabla \tilde{w}_t \otimes \nabla w_h \right)_\Omega = \left( \mathcal{C} N_t(u_h, w_h), \frac{d^2}{dt^2} f(\nabla w_h) \right)_\Omega - \left( \mathcal{C} N_t(u_h, w_h), \nabla \tilde{w}_t \otimes \nabla \tilde{w} \right)_\Omega^{(1)},$$

on en déduit (2.2.7).

---

<sup>(1)</sup>est vérifié car  $\nabla \bar{w}_h \otimes \nabla \bar{w}_t = (\nabla \bar{w}_t \otimes \nabla \bar{w}_h)^T$  et pour  $A, B$  deux tenseurs tel que  $A$  symétrique, on a  $A \cdot B^T = A \cdot B$  donc  $A \cdot (B + B^T) = 2A \cdot B$ ,  $(A \cdot B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ .

Notons

$$(2.2.8) \quad \begin{aligned} \tilde{E}(t) \equiv & \left| \tilde{u}_t(t) \right|_{\Omega}^2 + (\mathcal{C}N_t(u_h(t), w_h(t)), N_t(u_h(t), w_h(t)))_{\Omega} + \left| \tilde{w}_t(t) \right|_{\Omega}^2 + \delta \left| \nabla \tilde{w}_t(t) \right|_{\Omega}^2 \\ & + a \left( \tilde{w}(t), \tilde{w}(t) \right), \end{aligned}$$

on vérifie facilement que  $\tilde{E}(t)$  est majorée et minorée par l'expression  $C \left( \left| \tilde{u} \right|_{1,\Omega}, \left| \tilde{u}_t \right|_{0,\Omega}, \left| \tilde{w} \right|_{2,\Omega}, \left| \tilde{w}_t \right|_{1,\Omega} \right)$ . Ce fait sera utilisé fréquemment sans nouvelle mention.

Par suite on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), \frac{d}{ds} (\nabla \tilde{w} \otimes \nabla \tilde{w}_s) \right)_{\Omega} ds &= \int_0^t \left[ \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), \nabla \tilde{w}_s \otimes \nabla \tilde{w} \right)_{\Omega} \right. \\ &\quad \left. + \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), \nabla \tilde{w} \otimes \nabla \tilde{w}_s \right)_{\Omega} \right] ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^t \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), \nabla \tilde{w}_s \otimes \nabla \tilde{w} \right)_{\Omega} ds = \frac{1}{2} \int_0^t \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), \frac{d}{ds} (\nabla \tilde{w} \otimes \nabla \tilde{w}_s) \right)_{\Omega} ds^{(1)},$$

une intégration par parties donne

$$\int_0^t \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), \nabla \tilde{w}_s \otimes \nabla \tilde{w} \right)_{\Omega} ds = \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), f(\nabla \tilde{w}) \right)_{\Omega} \Big|_0^t - \int_0^t \left( \mathcal{C}N_s(u_h, w_h), f(\nabla \tilde{w}) \right)_{\Omega} ds.$$

On intègre l'expression (2.2.7) sur  $[0, t]$  en tenant compte de la monotonie des feedbacks frontières, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \tilde{E}(t) - \tilde{E}(0) \right] &+ \int_0^t \left[ \left( b_1 \tilde{u}_s, \tilde{u}_s \right)_{\Omega} + \left( b_2 \tilde{w}_s, \tilde{w}_s \right)_{\Omega} + \left\langle g'(u_{h,s}), \tilde{u}_s, \tilde{u}_s \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle h'_1(D_n w_{h,s}), D_n \tilde{w}_s, D_n \tilde{w}_s \right\rangle_{\Gamma_1} \right. \\ &\quad \left. + \left\langle h'_2(D_{\tau} w_{h,s}), D_{\tau} \tilde{w}_s, D_{\tau} \tilde{w}_s \right\rangle_{\Gamma_1} \right] ds = 3 \int_0^t \left( \mathcal{C}N_s(u_h, w_h), f(\nabla \tilde{w}) \right)_{\Omega} ds - \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), f(\nabla \tilde{w}) \right)_{\Omega} \Big|_0^t, \end{aligned}$$

donc,

$$\tilde{E}(t) - \tilde{E}(0) \leq 6 \int_0^t \left( \mathcal{C}N_s(u_h, w_h), f(\nabla \tilde{w}) \right)_{\Omega} ds - 2 \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), f(\nabla \tilde{w}) \right)_{\Omega} \Big|_0^t,$$

d'où l'inégalité

$$(2.2.9) \quad \tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0) + 6 \int_0^t \left( \mathcal{C}N_s(u_h, w_h), f(\nabla \tilde{w}_h) \right)_{\Omega} ds - 2 \left( \mathcal{C}N(u_h, w_h), f(\nabla \tilde{w}_h) \right)_{\Omega} \Big|_0^t.$$

Par les injections de Sobolev  $H^2(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)^{(2)}$  et l'inégalité  $|w|_{1,\Omega}^2 \leq C(\mathcal{C}N_t(u_h, w_h), N_t(u_h, w_h))_{\Omega}$  on obtient

$$(2.2.10) \quad \left| f(\nabla \tilde{w}) \right|_{0,\Omega} = \left| \nabla \tilde{w} \right|_{4,\Omega}^2 \leq C \left| \tilde{w} \right|_{2,\Omega} \left| \tilde{w} \right|_{1,\Omega} \leq C [E_h(0)]^{1/2} \left| \tilde{w} \right|_{2,\Omega},$$

<sup>(1)</sup>Voir la note précédente.

<sup>(2)</sup>De façon générale (voir [27, p. 516]),  $H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ ; pour  $n > 2$  et  $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ; pour  $1 \leq p < \infty$ ,  $n = 2$ .

où dans la dernière inégalité on a utilisé l'estimation a priori (2.2.3). Combinons (2.2.9), (2.2.10), en utilisant de nouveau (2.2.3) et l'inégalité  $\left| \tilde{w}(t) \right|_{2,\Omega}^2 \leq \tilde{E}(t)$  on trouve

$$\begin{aligned}
 (2.2.11) \quad \tilde{E}(t) &\leq \tilde{E}(0) + C[E_h(0)]^{1/2} \int_0^t |N_s(u_h, w_h)|_{0,\Omega} \left| \tilde{w} \right|_{2,\Omega} ds + \epsilon \left| \tilde{w}(0) \right|_{2,\Omega}^2 + \epsilon \left| \tilde{w}(t) \right|_{2,\Omega}^2 + \\
 &\quad C_\epsilon E_h(0) \left[ |N(u_h(0), w_h(0))|_{0,\Omega}^2 + |N(u_h(t), w_h(t))|_{0,\Omega}^2 \right] \\
 &\leq C_\epsilon \tilde{E}(0) + C[E_h(0)]^{1/2} \int_0^t |N_s(u_h, w_h)|_{0,\Omega} \left| \tilde{w} \right|_{2,\Omega} ds + \epsilon \left| \tilde{w}(t) \right|_{2,\Omega}^2 + C_\epsilon [E_h(0)]^2,
 \end{aligned}$$

donc

$$(1 - \epsilon) \tilde{E}(t) \leq C_\epsilon \left[ \tilde{E}(0) + [E_h(0)]^2 \right] + C[E_h(0)]^{1/2} \int_0^t \tilde{E}(s) ds,$$

en choisissant  $\epsilon$  assez petit, on aboutit à

$$\tilde{E}(t) \leq C \left[ \tilde{E}(0) + [E_h(0)]^2 \right] + C[E_h(0)]^{1/2} \int_0^t \tilde{E}(s) ds,$$

finalemt, l'inégalité de Gronwall donne

$$\tilde{E}(t) \leq C \left[ \tilde{E}(0) + [E_h(0)]^2 \right] \exp \left( C[E_h(0)]^{1/2} \int_0^T ds \right),$$

d'où

$$(2.2.12) \quad \tilde{E}(t) \leq C_T(E_h(0)) \left[ \tilde{E}(0) + [E_h(0)]^2 \right], \quad t \leq T,$$

où  $C_T$  ne dépend pas de  $h$ .

### Etape 3. Estimation des conditions initiales discrètes

Afin de donner une estimation indépendante de  $h$  sur le terme du membre de droite de (2.2.12), on a besoin d'estimer  $\tilde{E}(0)$  et  $E_h(0)$ .

D'abord on suppose que les espaces d'approximation vérifient les propriétés de stabilité suivantes :

(i) Pour tout  $u \in H_{\Gamma_0}^s(\Omega)$ , il existe  $\phi \in \mathcal{U}_h$ , tel que

$$|u - \phi|_{s,\Omega} \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0, \quad s \leq 2.$$

(ii) Pour tout  $w \in H_{\Gamma_0}^s(\Omega)$ , il existe  $\psi \in \mathcal{W}_h$ , tel que

$$|w - \psi|_{s,\Omega} \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0, \quad s \leq 3.$$

De plus il existe  $p > 0$  tel que les propriétés d'approximation inverse suivantes ont lieu.

(iii)

$$|\phi|_{0,\Gamma} \leq Ch^{-p} |\phi|_{0,\Omega}, \quad |\nabla \psi|_{0,\Gamma} \leq Ch^{-p} |\psi|_{1,\Omega} \quad \text{pour } (\phi, \psi) \in V_h,$$

(iv)

$$|D_1[u - \phi]|_{0,\Gamma} \leq Ch^p |u|_{2,\Omega}, \quad |D_l[w - \psi]|_{0,\Gamma} \leq Ch^p |w|_{l+1,\Omega}, \quad l = 1, 2,$$

où  $D_i$  dénote un opérateur différentiel d'ordre  $i$ .

On note par  $C_0$  une constante qui dépend de  $|w_0|_{2,\Omega}$ ,  $|w_1|_{1,\Omega}$ ,  $|u_0|_{1,\Omega}$ ,  $|u_1|_{0,\Omega}$  et par  $C_1$  une constante qui dépend des normes d'ordre supérieur des données initiales, c'est-à-dire  $|w_0|_{3,\Omega}$ ,  $|w_1|_{2,\Omega}$ ,  $|u_0|_{2,\Omega}$ ,  $|u_1|_{1,\Omega}$ .

Maintenant, on suppose que  $u_{h,0}$ ,  $u_{h,1}$ ,  $w_{h,0}$ ,  $w_{h,1}$ , sont des "bonnes" approximations des données initiales, c'est-à-dire les propriétés d'approximations inscrites ci-dessus sont satisfaites et en particulier

$$(2.2.13) \quad \begin{aligned} |u_0 - u_{h,0}|_{2,\Omega} &\longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0, \quad |u_1 - u_{h,1}|_{1,\Omega} \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0, \\ |w_0 - w_{h,0}|_{3,\Omega} &\longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0, \quad |w_1 - w_{h,1}|_{2,\Omega} \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Par (2.2.13) et la régularité des conditions initiales on obtient

$$\begin{aligned} E_h(0) &\equiv \int_{\Omega} [|u_{h,1}|^2 + |w_{h,1}|^2 + \delta |\nabla w_{h,1}|^2] d\Omega + a(w_h(0), w_h(0)) \\ &\quad + \int_{\Omega} [\mathcal{C}N(u_h(0), w_h(0)) \cdot N(u_h(0), w_h(0))] d\Omega \\ &\leq \int_{\Omega} [|u_{h,1}|^2 + |w_{h,1}|^2 + \delta |\nabla w_{h,1}|^2] d\Omega + |u_{h,0}|_{1,\Omega}^2 + |w_{h,0}|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq |u_{h,1} - u_1 + u_1|_{0,\Omega}^2 + |w_{h,1} - w_1 + w_1|_{0,\Omega}^2 + \delta |\nabla w_{h,1} - \nabla w_1 + \nabla w_1|_{0,\Omega}^2 \\ &\quad + |u_{h,0} - u_0 + u_0|_{1,\Omega}^2 + |w_{h,0} - w_0 + w_0|_{2,\Omega}^2 \\ &\leq |u_{h,1} - u_1|_{0,\Omega}^2 + |w_{h,1} - w_1|_{0,\Omega}^2 + \delta |\nabla w_{h,1} - \nabla w_1|_{0,\Omega}^2 + |u_{h,0} - u_0|_{1,\Omega}^2 + |w_{h,0} - w_0|_{2,\Omega}^2 + C_0, \end{aligned}$$

d'où

$$(2.2.14) \quad E_h(0) \leq C_0.$$

De plus, puisque  $\tilde{u}(0) = u_{h,1}$ ,  $\tilde{w}(0) = w_{h,1}$ , on a aussi

$$(2.2.15) \quad \left| \tilde{u}(0) \right|_{1,\Omega} \leq |u_1|_{1,\Omega} \leq C_1, \quad \left| \tilde{w}(0) \right|_{2,\Omega} \leq |w_1|_{2,\Omega} \leq C_1.$$

Afin d'estimer  $\left| \tilde{u}_t(0) \right|_{0,\Omega}$  on utilise les conditions de compatibilité (2.1.13). En effet, de (2.2.1) on a

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_t(0), \phi)_{0,\Omega} &= -(b_1 u_{h,1}, \phi)_{\Omega} - (\mathcal{C}N(u_{h,0}, w_{h,0}), \epsilon(\phi))_{\Omega} - \langle g(u_{h,0}), \phi \rangle_{\Gamma_1} \\ &= -(b_1 u_{h,1}, \phi)_{\Omega} + (\operatorname{div}[\mathcal{C}N(u_{h,0}, w_{h,0})], \phi)_{\Omega} - \langle \mathcal{C}N(u_{h,0}, w_{h,0}) \nu + g(u_{h,0}), \phi \rangle_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(2.2.16) \quad \begin{aligned} \left( \tilde{u}_t(0), \phi \right)_{0,\Omega} &\leq \left| (b_1 u_{h,1}, \phi)_{0,\Omega} + (\operatorname{div} [\mathcal{C}N(u_{h,0}, w_{h,0})], \phi)_{\Omega} \right. \\ &\quad \left. - \langle \mathcal{C}N(u_{h,0}, w_{h,0}) \nu + g(u_{h,1}), \phi \rangle_{\Gamma_1} \right| \quad \text{pour tout } \phi \in U_h, \end{aligned}$$

donc

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} \left( \tilde{u}_t(0), \phi \right)_{0,\Omega} &\leq C \left[ |u_{h,0}|_{2,\Omega} + |w_{h,0}|_{3,\Omega} + |u_{h,1}|_{0,\Omega} \right] |\phi|_{0,\Omega} \\ &\quad + C |N(u_{h,0}, w_{h,0}) \nu + g(u_{h,1}) - N(u_0, w_0) \nu - g(u_1)|_{0,\Gamma_1} |\phi|_{0,\Gamma_1}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations de compatibilité (2.1.13). Par la continuité lipschitzienne du feedback  $g$  et les propriétés d'approximation inverse données dans (iii) et (iv), on obtient

$$(2.2.18) \quad \begin{aligned} &|N(u_{h,0}, w_{h,0}) \nu + g(u_{h,1}) - N(u_0, w_0) \nu - g(u_1)|_{0,\Gamma_1} |\phi|_{0,\Gamma_1} \\ &\leq C \left[ |u_{h,0} - u_0|_{1,\Gamma_1} + C_1 |\nabla [w_{h,0} - w_0]|_{0,\Gamma_1} + |u_{h,1} - u_1|_{0,\Gamma_1} \right] h^{-p} |\phi|_{0,\Omega} \\ &\leq C \left[ |u_0|_{1,\Omega} + C_1 |w_0|_{2,\Omega} + |u_1|_{1,\Omega} \right] h^p h^{-p} |\phi|_{0,\Omega} \leq C [C_1 + C_1 C_0] |\phi|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

puisque  $\phi$  est arbitraire dans  $U_h$ , on obtient

$$(2.2.19) \quad \left| \tilde{u}_t(0) \right|_{0,\Omega} \leq C_1 + C_1 C_0,$$

d'où l'estimation désirée sur la donnée initiale  $\tilde{u}_t(0)$ .

De la même manière on montre que la deuxième variable  $\tilde{w}_t(0)$  est bornée, c'est-à-dire

$$(2.2.20) \quad \left| \tilde{w}_t(0) \right|_{1,\Omega} \leq C_1 + C_0 + C_1 C_0 + C_0^2 = C(C_0, C_1).$$

En effet, (2.2.2) donne

$$(2.2.21) \quad \begin{aligned} \left( \tilde{w}_t(0), \psi \right)_{\Omega} + \delta \left( \nabla \tilde{w}_t(0), \nabla \psi \right)_{\Omega} &= -a(w_h(0), \psi) - (b_2 w_{h,t}(0), \psi)_{\Omega} \\ &\quad - (\mathcal{C}[N(u_{h,0}, w_{h,0}) \nabla w_{h,0}], \nabla \psi)_{\Omega} - \left\langle h_1 \left( D_n \tilde{w}(0) \right), D_n \psi \right\rangle_{\Gamma_1} - \left\langle h_2 \left( D_{\tau} \tilde{w}(0) \right), D_{\tau} \psi \right\rangle_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

on utilise les conditions de compatibilité (2.1.13), on obtient

$$(2.2.22) \quad \begin{aligned} \left( \tilde{w}_t(0), \psi \right)_{\Omega} + \delta \left( \nabla \tilde{w}_t(0), \nabla \psi \right)_{\Omega} &= a_1(w_h(0), \psi) - (b_2 w_{h,t}(0), \psi)_{\Omega} \\ &\quad - (\mathcal{C}[N(u_{h,0}, w_{h,0}) \nabla w_{h,0}], \nabla \psi)_{\Omega} - \left\langle h_2 \left( D_{\tau} \tilde{w}(0) \right), D_{\tau} \psi \right\rangle_{\Gamma_1} + X, \end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

$$X \equiv \langle D[\Delta w_h(0) + (1 - \mu) \beta_1 w_h(0) - \Delta w_0 - (1 - \mu) \beta_1 w_0] - h_1(D_n w_{h,1}) + h_1(D_n w_1), D_n \psi \rangle_{\Gamma_1},$$

et

$$a_1(w_h(0), \psi) = -a(w_h(0), \psi) - \langle D[\Delta w_h(0) + (1 - \mu) \beta_1 w_h(0)], D_n \psi \rangle_{\Gamma_1}.$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} a_1(w_h(0), \psi) &= \int_{\Omega} \nabla(\Delta w_h(0)) \nabla \psi d\Omega - \int_{\Gamma} [w_{h,xx}(0) (\psi_x \nu_1 + \mu \psi_y \nu_2) \\ &\quad + w_{h,yy}(0) (\mu \psi_x \nu_1 + \psi_y \nu_2) + (1 - \mu) w_{h,xy}(0) (\psi_x \nu_2 + \psi_y \nu_1)] d\Gamma \\ &\quad - \langle [\Delta w_h(0) + (1 - \mu) \beta_1 w_h(0)], D_n \psi \rangle \leq C |w_h(0)|_{3,\Omega} |\psi|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

L'utilisation des propriétés d'approximation inscrites ci-dessus dans (iii) et (iv), de la même façon qu'auparavant, ainsi que la continuité lipschitzienne de  $h_1$ , montre que

$$(2.2.23) \quad |X| \leq Ch^p |w_0|_{3,\Omega} h^{-p} |\psi|_{1,\Omega} + Ch^p |w_1|_{2,\Omega} h^{-p} |\psi|_{1,\Omega} \leq C_1 |\psi|_{1,\Omega}.$$

Donc, d'après (2.2.15), (2.2.23) et le fait que  $h_2$  est bornée de  $H^{1/2}(\Gamma_1)$  dans lui même, on trouve

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_t(0), \psi)_{\Omega} + \delta (\nabla \tilde{w}_t(0), \nabla \psi)_{\Omega} &\leq C_1 |\psi|_{1,\Omega} + C \left[ |w_{h,0}|_{3,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} + \left| \tilde{w}(0) \right|_{0,\Omega} |\psi|_{0,\Omega} \right. \\ &\quad \left. + (|u_{h,0}|_{2,\Omega} + |w_{h,0}|_{2,\Omega}) |w_{h,0}|_{2,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} + \left| h_2 (D_{\tau} \tilde{w}(0)) \right|_{1/2,\Gamma_1} |D_{\tau} \psi|_{-1/2,\Gamma_1} \right] \\ &\leq C_1 |\psi|_{1,\Omega} + C \left[ |w_{h,0}|_{3,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} + \left| \tilde{w}(0) \right|_{0,\Omega} |\psi|_{0,\Omega} \right. \\ (2.2.24) \quad &\quad \left. + (|u_{h,0}|_{2,\Omega} + |w_{h,0}|_{2,\Omega}) |w_{h,0}|_{2,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} + \left| D_{\tau} \tilde{w}(0) \right|_{1/2,\Gamma_1} |D_{\tau} \psi|_{-1/2,\Gamma_1} \right] \\ &\leq C \left[ |w_{h,0}|_{3,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} + \left| \tilde{w}(0) \right|_{0,\Omega} |\psi|_{0,\Omega} + (|u_{h,0}|_{2,\Omega} + |w_{h,0}|_{2,\Omega}) |w_{h,0}|_{2,\Omega} |\psi|_{1,\Omega} \right. \\ &\quad \left. + \left| \tilde{w}(0) \right|_{2,\Omega} |\psi|_{1/2,\Gamma_1} \right] + C_1 |\psi|_{1,\Omega} \leq C [C_1 + C_0 + C_1 C_0 + C_0^2] |\psi|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat (2.2.20).

En combinant (2.2.15), (2.2.19), (2.2.20), on déduit

$$\tilde{E}(0) \leq C(C_0, C_1),$$

et par (2.2.12) on a

$$\tilde{E}(t) \leq C(C_0, C_1).$$

Par conséquent l'estimation a priori

$$(2.2.25) \quad |u_{h,t}(t)|_{1,\Omega} + |u_h(t)|_{1,\Omega} + |u_{h,tt}(t)|_{0,\Omega} + |w_{h,t}(t)|_{2,\Omega} + |w_h(t)|_{2,\Omega} + |w_{h,tt}(t)|_{1,\Omega} \leq C,$$

a lieu uniformément sur  $h$ , pour tout  $t < T$  où  $T$  est arbitraire.

#### Etape 4. Passage à la limite

On peut maintenant extraire une sous-suite encore notée avec le même symbole, telle que

$$\begin{aligned}
 (2.2.26) \quad & u_h(t) \longrightarrow u(t) \text{ faible étoile}^{(1)} \text{ dans } L^\infty\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right), \\
 & u_{h,t}(t) \longrightarrow u_t(t) \text{ faible étoile dans } L^\infty\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right), \\
 & u_{h,tt}(t) \longrightarrow u_{tt}(t) \text{ faible étoile dans } L^\infty\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2\right), \\
 & w_h(t) \longrightarrow w(t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \\
 & w_{h,t}(t) \longrightarrow w_t(t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \\
 & w_{h,tt}(t) \longrightarrow w_{tt}(t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)).
 \end{aligned}$$

Maintenant, on peut passer à la limite dans la forme semi-discrète (2.2.1) et (2.2.2). En effet, c'est possible à cause de la continuité faible des termes non linéaires et au fait que de (2.2.26) on a la convergence forte des traces sur la frontière

$$\begin{aligned}
 (2.2.27) \quad & u_{h,t}(t)|_\Gamma \longrightarrow u_t(t)|_\Gamma \text{ fort dans } L^\infty\left(0, T; [H^{1/2-\epsilon}(\Gamma)]^2\right), \\
 & \nabla w_{h,t}(t)|_\Gamma \longrightarrow \nabla w_t(t)|_\Gamma \text{ fort dans } L^\infty(0, T; H^{1/2-\epsilon}(\Gamma)).
 \end{aligned}$$

Ainsi, les conditions imposées aux feedbacks non linéaires impliquent la continuité de  $g$ ,  $h_i$  de  $L^\infty(0, T; H^\alpha(\Gamma_1))$  dans lui même pour  $\alpha \leq 1/2$ , ce qui permet de conclure

$$\begin{aligned}
 (2.2.28) \quad & g(u_{h,t}) \longrightarrow g(u_t), \quad h_1(D_n w_{h,t}) \longrightarrow h_1(D_n w_t), \\
 & h_2(D_\tau w_{h,t}) \longrightarrow h_2(D_\tau w_t) \text{ fort dans } L^2(\Sigma).
 \end{aligned}$$

Cependant, par le passage à la limite dans (2.2.1) et (2.2.2), on conclut que  $u$  et  $w$  satisfont la formulation faible du problème  $(\mathcal{P})$  et de plus, montre la régularité suivante

$$\begin{aligned}
 (2.2.29) \quad & u \in C\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right), \quad u_t \in C\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right), \quad u_{tt} \in L^\infty\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2\right), \\
 & w \in C(0, T; H^2(\Omega)), \quad w_t \in C(0, T; H^2(\Omega)), \quad w_{tt} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)).
 \end{aligned}$$

#### Etape 5. Preuve de la régularité améliorée

Afin d'obtenir une régularité améliorée sur les variables d'espace, on procède par la régularité elliptique. En effet, de (2.2.29) pour tout  $0 \leq t \leq T$  on a

$$\begin{aligned}
 (2.2.30) \quad & \operatorname{div}[\mathcal{CN}(u, w)] \in [L^2(\Omega)]^2, \quad u_t|_{\Gamma_1} \in [H^{1/2}(\Gamma_1)]^2, \\
 & f(\nabla w) \in H^{1-\epsilon}(\Omega), \quad f(\nabla w)|_{\Gamma_1} \in H^{1/2-\epsilon}(\Gamma_1),
 \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup>On dit que  $u_j(t) \longrightarrow u(t)$  faible étoile dans  $L^\infty(0, T; H)$  (avec  $H$  espace de Hilbert), si

$$\int_0^T (u_j(t), \varphi(t))_\Omega dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), \varphi(t))_\Omega dt \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; H).$$

par conséquent

$$(2.2.31) \quad \operatorname{div}[\mathcal{C}\epsilon(u)] \in [H^{-\epsilon}(\Omega)]^2, \quad \mathcal{C}\epsilon(u) \nu = -f(\nabla w) \nu - g(u_t) \in [H^{1/2-\epsilon}(\Gamma_1)]^2, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_0.$$

Par la théorie standard d'ellipticité, on conclut que

$$(2.2.32) \quad u(t) \in C\left(0, T; [H^{2-\epsilon}(\Omega)]^2\right).$$

Quant à la variable  $w$  on utilise la formulation standard des semi-groupes. En effet, en écrivant (voir [11], [3]) l'équation originale de  $w$  (voire (2.1.1)) telle que

$$(2.2.33) \quad \mathcal{A}w = -[I + \delta A_N] w_{tt} - b_2 w_t - \mathcal{A}G_1 h_1(D_n w_t) - \mathcal{A}G_2 D_\tau h_2(D_\tau w_t) + F(u, w),$$

où on a utilisé les opérateurs suivants :

$$(2.2.34) \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= D\Delta^2 w; \quad w \in D(\mathcal{A}), \\ D(\mathcal{A}) &= \{w \in H_{\Gamma_0}^4; [\Delta w + (1 - \mu)\beta_1 w] = 0, [D_n \Delta w + (1 - \mu)\beta_2 w] = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \end{aligned}$$

et les opérateurs de Green  $G_i : L^2(\Gamma_1) \longrightarrow L^2(\Omega)$  sont données par ( $i = 1, 2$ )

$$(2.2.35) \quad \begin{aligned} G_i w = v &\Leftrightarrow \Delta^2 G_i w = \Delta^2 v = 0 \text{ dans } \Omega, \\ D_n G_i w &= D_n v = 0 \text{ dans } \Gamma_0, \end{aligned}$$

$$(2.2.36) \quad \begin{aligned} [\Delta + (1 - \mu)\beta_1] G_1 w &= w \text{ sur } \Gamma_1, \quad [D_n \Delta + (1 - \mu)\beta_2] G_1 w = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ [\Delta + (1 - \mu)\beta_1] G_2 w &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad [D_n \Delta + (1 - \mu)\beta_2] G_2 w = w \text{ sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

et

$$(2.2.37) \quad A_N w = -\Delta w; \quad w \in D(A_N) = \{w \in H^2(\Omega); w = 0 \text{ sur } \Gamma_0, D_n w = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

$$(2.2.38) \quad F(u, w) = \operatorname{div}[\mathcal{C}[N(u, w)] \nabla w] + \mathcal{A}G_2 \mathcal{C}[N(u, w)] \nu \nabla w.$$

La régularité améliorée pour  $u$  (voir (2.2.32)) donne

$$(2.2.39) \quad \mathcal{C}[N(u, w)] \nabla w \in H^{1-\epsilon}(\Omega), \quad \mathcal{C}[N(u, w)] \nabla w|_{\Gamma_1} \in H^{1/2-\epsilon}(\Gamma_1).$$

Par la régularité elliptique (voir [4, p. 32]) on trouve

$$G_2^{(1)} : H^{1/2-4\epsilon}(\Gamma_1) \longrightarrow H^{4-4\epsilon}(\Omega) \subset D(\mathcal{A}^{7/8-\epsilon}).$$

---

<sup>(1)</sup>En fait,  $G_2 \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma_1) \longrightarrow H^{s+\frac{7}{2}}(\Omega))$ , et  $G_1 \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma_1) \longrightarrow H^{s+\frac{5}{2}}(\Omega))$  pour  $s \in \mathbb{R}$  voir [4, p. 32]

car

$$D(\mathcal{A}^{7/8-\epsilon}) = [D(\mathcal{A}), L^2(\Omega)]_{1-(\frac{7}{8}-\epsilon)} = \left\{ w \in H^{3+\frac{1}{2}-4\epsilon}(\Omega) : B_j w = 0, \text{ si } \epsilon < \frac{7}{12} \right\}^{(1)},$$

donc

$$\mathcal{A}G_2\mathcal{C}[N(u, w)] \nu \nabla w \in \left\{ w \in H^{-4(\frac{1}{8}+\epsilon)}(\Omega) : B_j w = 0, \text{ si } \epsilon < \frac{7}{12} \right\} = D(\mathcal{A}^{-\frac{1}{8}-\epsilon}) \subset D(\mathcal{A}^{\frac{1}{8}+\epsilon})'$$

alors,

$$(2.2.40) \quad F(u, w) \in H^{-\epsilon}(\Omega) + D(\mathcal{A}^{1/8+\epsilon})' \subset D(\mathcal{A}^{1/4})' \sim D(A_N^{1/2})'.$$

On écrit  $w = w_1 + w_2$ , où

$$(2.2.41) \quad \mathcal{A}w_1 = -[I + \delta A_N] w_{tt} - b_2 w_t + F(u, w),$$

$$(2.2.42) \quad \mathcal{A}w_2 = -\mathcal{A}G_1 h_1(D_n w_t) - \mathcal{A}G_2 D_\tau h_2(D_\tau w_t).$$

En utilisant (2.2.40), le fait que  $w_{tt} \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = D(A_N^{1/2})$  et que

$$A_N w_{tt} \in D(A_N^{1/2})' = D(\mathcal{A}^{1/4})',$$

on obtient que  $\mathcal{A}w_1 \in D(\mathcal{A}^{1/4})'$ .

Donc

$$(2.2.43) \quad w_1 \in D(\mathcal{A}^{3/4}) \subset H^3(\Omega).$$

D'autre part,  $w_2 = -G_1 h_1(D_n w_t) - G_2 D_\tau h_2(D_\tau w_t)$ . Par la régularité des opérateurs de Green  $G_i$  et que  $h_1(D_n w_t) \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ ,  $D_\tau h_2(D_\tau w_t) \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$  on a aussi

$$(2.2.44) \quad G_1 h_1(D_n w_t) + G_2 D_\tau h_2(D_\tau w_t) \in H^3(\Omega).$$

Donc

$$(2.2.45) \quad w_2(t) \in H^4(\Omega) \oplus H^3(\Omega) \subset H^3(\Omega).$$

De (2.2.43) et (2.2.45) on trouve l'affirmation désirée

$$w \in C(0, T; H^3(\Omega)).$$

Par suite (2.2.29) améliore la régularité dans (2.2.32) par  $\epsilon$ , pour obtenir  $u \in C(0, T; H^2(\Omega))$ .

Ceci achève la preuve de l'existence de solutions régulières. ■

---

<sup>(1)</sup>Plus généralement, si  $0 < \theta < 1$  et  $0 \leq j \leq m-1$ , avec  $(1-\theta)m \neq \text{entier} + \frac{1}{2}$ , alors  $D(A^{1-\theta}) = [D(A), L^2(\Omega)]_\theta = \left\{ f \in H^{(1-\theta)m}(\Omega) : \beta_j f|_\Gamma = 0, \text{ si } m_j < (1-\theta)m - \frac{1}{2} \right\}$ , où  $D(A) = H_{\beta_j}^m(\Omega)$  et les  $\beta_j$  sont des opérateurs normaux d'ordre  $m_j$  [31, p. 117].

## 2.2.2 Unicité des solutions régulières

Pour compléter la preuve de la première partie de la proposition 2.1, il nous reste à montrer l'unicité de la solution. La preuve de l'unicité est standard, basée sur le fait que les termes non linéaires sont localement lipschitzs. En fait, on peut même prouver un résultat d'unicité plus fort, annoncé par le lemme ci-dessous.

**Lemme 2.2.** *La solution est unique dans l'espace*

$$X_\epsilon \equiv C\left(0, T; [H^{1+\epsilon}(\Omega)]^2\right) \cap C^1\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2\right) \times C\left(0, T; H^{2+\epsilon}(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; H^1(\Omega)\right),$$

où  $\epsilon$  est un nombre positif arbitraire.

**Preuve.** Soient  $\tilde{u} \equiv u_1 - u_2$ ,  $\tilde{w} \equiv w_1 - w_2$  avec  $(u_1, w_1)$ ,  $(u_2, w_2)$  deux solutions dans l'espace  $X_\epsilon$ . Alors  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{w}$  satisfont la formulation variationnelle suivante :

$$(2.2.46) \quad (\tilde{u}_{tt}, \phi)_\Omega + (b_1 \tilde{u}_t, \phi)_\Omega + (\mathcal{C}[\epsilon(\tilde{u})], \epsilon(\phi))_\Omega + \langle g(u_{1,t}) - g(u_{2,t}), \phi \rangle_{\Gamma_1} = \\ - (\mathcal{C}[f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \epsilon(\phi))_\Omega,$$

$$(2.2.47) \quad (\tilde{w}_{tt}, \psi)_\Omega + \delta(\nabla \tilde{w}_{tt}, \nabla \psi)_\Omega + a(\tilde{w}, \psi) + (b_2 \tilde{w}_t, \psi)_\Omega \\ + \langle (h_1(D_n w_{1,t}) - h_1(D_n w_{2,t})), D_n \psi \rangle_{\Gamma_1} + \langle (h_2(D_\tau w_{1,t}) - h_2(D_\tau w_{2,t})), D_\tau \psi \rangle_{\Gamma_1} \\ = - (\mathcal{C}[\epsilon(u_1) + f(\nabla w_1)] \nabla w_1 - \mathcal{C}[\epsilon(u_2) + f(\nabla w_2)] \nabla w_2, \nabla \psi)_\Omega,$$

pour tout  $(\phi, \psi) \in [H^1(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)$  avec des conditions initiales nulles sur  $\Gamma_0$ . On peut montrer la régularité suivante :

$$(2.2.48) \quad |f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)|_{0,\Omega} \leq C |\tilde{w}|_{1,\Omega} \left[ |w_1|_{2+\epsilon,\Omega} + |w_2|_{2+\epsilon,\Omega} \right].$$

En effet,

$$|f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)|^2 = |[\nabla_x(w_1 - w_2)]^2 [\nabla_x(w_1 + w_2)]^2 + [\nabla_y(w_1 - w_2)]^2 [\nabla_y(w_1 + w_2)]^2 \\ + 2(\nabla_x w_1 \nabla_y w_1 - \nabla_x w_2 \nabla_y w_2)^2| \\ = | \{ [\nabla_x(w_1 - w_2)]^2 + [\nabla_y(w_1 - w_2)]^2 \} \{ [\nabla_x(w_1 + w_2)]^2 + [\nabla_y(w_1 + w_2)]^2 \} \\ - 2(\nabla_x w_1 \nabla_y w_2 - \nabla_x w_2 \nabla_y w_1)^2 | \\ \leq C | \{ [\nabla_x(w_1 - w_2)]^2 + [\nabla_y(w_1 - w_2)]^2 \} \{ [\nabla_x(w_1 + w_2)]^2 + [\nabla_y(w_1 + w_2)]^2 \} | \\ \leq C |\nabla \tilde{w}|^2 [|\nabla w_1|^2 + |\nabla w_2|^2],$$

où on a utilisé l'égalité

$$(\nabla_x w_1 - \nabla_x w_2)^2 (\nabla_y w_1 + \nabla_y w_2)^2 + (\nabla_x w_1 + \nabla_x w_2)^2 (\nabla_y w_1 - \nabla_y w_2)^2 \\ = 2(\nabla_x w_1 \nabla_y w_1 - \nabla_x w_2 \nabla_y w_2)^2 + 2(\nabla_x w_1 \nabla_y w_2 - \nabla_x w_2 \nabla_y w_1)^2.$$

De plus

$$(2.2.49) \quad \left| \frac{d}{dt} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)] \right|_{0,\Omega} \leq C |\tilde{w}_t|_{1,\Omega} \left[ |w_1|_{2+\epsilon,\Omega} + |w_2|_{2+\epsilon,\Omega} \right].$$

Une intégration par parties donne

$$(2.2.50) \quad \int_0^t (\mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \epsilon(\tilde{u}_s))_\Omega ds = (\mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \epsilon(\tilde{u}))_\Omega \Big|_0^t - \int_0^t \left( \frac{d}{ds} \mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \epsilon(\tilde{u}) \right)_\Omega ds,$$

et de (2.2.49) on a

$$(2.2.51) \quad \int_0^t \left( \frac{d}{ds} \mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \epsilon(\tilde{u}) \right)_\Omega ds \leq C \int_0^t |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 ds + C \int_0^t |\tilde{w}_t|_{1,\Omega}^2 \left[ |w_1|_{2+\epsilon,\Omega} + |w_2|_{2+\epsilon,\Omega} \right]^2 ds.$$

D'autre part

$$(2.2.52) \quad (\mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \epsilon(\tilde{u}))_\Omega \Big|_0^t \leq \epsilon_0 |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 + C_{\epsilon_0} |f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)|_{0,\Omega}^2.$$

Or

$$(2.2.53) \quad \begin{aligned} |f(\nabla w_1(t, x)) - f(\nabla w_2(t, x))| &\leq C |\nabla \tilde{w}(t, x)| |\nabla w_i(t, x)| \\ &= C \left| \int_0^t \nabla \tilde{w}_s(s, x) ds \right| |\nabla w_1(t, x) + \nabla w_2(t, x)| \\ &\leq C_T \left[ \int_0^t |\nabla \tilde{w}_s(s, x)|^2 ds \right]^{1/2} \left[ |w_1(t, x)|_{2+\epsilon,\Omega} + |w_2(t, x)|_{2+\epsilon,\Omega} \right], \end{aligned}$$

donc

$$(2.2.54) \quad |f(\nabla w_1(t)) - f(\nabla w_2(t))|_{0,\Omega}^2 \leq C_T \left( \int_0^t |\tilde{w}_s|_{1,\Omega}^2 ds \right) \left[ |w_1(t)|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + |w_2(t)|_{2+\epsilon,\Omega}^2 \right].$$

En combinant (2.2.52) et (2.2.54) on trouve

$$(2.2.55) \quad (\mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \epsilon(\tilde{u}))_\Omega \Big|_0^t \leq \epsilon_0 |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 + C_{\epsilon_0,T} \left( \int_0^t |\tilde{w}_s|_{1,\Omega}^2 ds \right) \left[ |w_1(t)|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + |w_2(t)|_{2+\epsilon,\Omega}^2 \right].$$

On pose  $\phi = \tilde{u}_s$  dans (2.2.46) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( |\tilde{u}_s|_{0,\Omega}^2 + |\mathcal{C}\epsilon(\tilde{u})|_{1,\Omega}^2 \right) \Big|_0^t + \int_0^t \int_\Omega b_1 \tilde{u}_s \tilde{u}_s d\Omega ds + \int_0^t \int_\Gamma (g(u_{1,s}) - g(u_{2,s})) \tilde{u}_s d\Gamma ds = \\ - \int_0^t \int_\Omega \mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)] \epsilon(\tilde{u}_s) d\Omega ds, \end{aligned}$$

et de (2.2.51), (2.2.55), en tenant compte de la monotonie de  $g$  on conclut

$$(2.2.56) \quad |\tilde{u}_t|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 \leq C_{\epsilon_0,T} \left( |w_1|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + |w_2|_{2+\epsilon,\Omega}^2 \right) \left( \int_0^t |\tilde{w}_s|_{1,\Omega}^2 ds \right) + \int_0^t |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 ds + \epsilon_0 |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2.$$

De la même façon

$$(2.2.57) \quad \begin{aligned} |[\epsilon(u_1) - \epsilon(u_2)] \nabla w_1|_{0,\Omega} &\leq C |\tilde{u}|_{1,\Omega} |w_1|_{2+\epsilon,\Omega}, \\ |\epsilon(u_2) [\nabla w_1 - \nabla w_2]|_{0,\Omega} &\leq C |\tilde{w}|_{2,\Omega} |u_2|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C |\tilde{w}|_{2,\Omega} |u_2|_{2+\epsilon,\Omega}, \end{aligned}$$

$$(2.2.58) \quad |f(\nabla w_1) \nabla w_1 - f(\nabla w_2) \nabla w_2|_{0,\Omega} \leq C |\tilde{w}|_{2,\Omega} \left[ |w_1|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + |w_2|_{2+\epsilon,\Omega}^2 \right].$$

On pose  $\psi = \tilde{w}_s$  dans (2.2.47) on trouve

$$(2.2.59) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( |\tilde{w}_s|_{0,\Omega}^2 + \delta |\nabla \tilde{w}_s|_{0,\Omega}^2 + a(\tilde{w}, \tilde{w}) \right) \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} b_2 \tilde{w}_s \tilde{w}_s d\Omega ds \\ &+ \int_0^t \int_{\Gamma} [(h_1(D_n w_{1,s}) - h_1(D_n w_{2,s})) D_n \tilde{w}_s + (h_2(D_\tau w_{1,s}) - h_2(D_\tau w_{2,s})) D_\tau \tilde{w}_s] d\Gamma ds = \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} \{ \mathcal{C} [\epsilon(u_1) - \epsilon(u_2)] \nabla w_1 + \mathcal{C} \epsilon(u_2) [\nabla w_1 - \nabla w_2] + [\mathcal{C} f(\nabla w_1)] \nabla w_1 - \mathcal{C} [f(\nabla w_2)] \nabla w_2 \} \nabla \tilde{w}_s d\Omega ds \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que

$$a(\tilde{w}, \tilde{w}_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\tilde{w}, \tilde{w}).$$

Par suite (2.2.57) et (2.2.58), et aussi de la monotonie des  $h_i$  on trouve l'estimation

$$\begin{aligned} |\tilde{w}_t|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2 &\leq C \int_0^t |\tilde{w}_s|_{1,\Omega} \left\{ |\tilde{u}|_{1,\Omega} |w_1|_{2+\epsilon,\Omega} + |\tilde{w}|_{2,\Omega} \left[ |w_1|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + |u_2|_{2+\epsilon,\Omega} + |w_2|_{2+\epsilon,\Omega}^2 \right] \right\} ds \\ &\leq C \int_0^t \left\{ |\tilde{w}_s|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 |w_1|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2 \left( |w_1|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + |u_2|_{2+\epsilon,\Omega} + |w_2|_{2+\epsilon,\Omega}^2 \right)^2 \right\} ds \\ &\leq C \int_0^t \left\{ [|\tilde{w}_s|_{2,\Omega}^2 + |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2] \varphi(|w_1|_{2+\epsilon,\Omega}, |u_2|_{2+\epsilon,\Omega}, |w_2|_{2+\epsilon,\Omega}) \right\} ds, \end{aligned}$$

donc

$$(2.2.60) \quad |\tilde{w}_t|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2 \leq C \int_0^t \left[ |\tilde{w}_s|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2 \right] \varphi(|w_1|_{2+\epsilon,\Omega}, |u_2|_{2+\epsilon,\Omega}, |w_2|_{2+\epsilon,\Omega}) ds.$$

Pour  $\epsilon_0$  suffisamment petit, les inégalités (2.2.56) et (2.2.60) donnent

$$\begin{aligned} |\tilde{w}_t|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2 + |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 &\leq C \left( |w_1|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + |w_2|_{2+\epsilon,\Omega}^2 + 1 \right) \int_0^t \left\{ [|\tilde{w}_s|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{u}|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2] \right. \\ &\quad \left. \varphi(|w_1|_{2+\epsilon,\Omega}, |u_2|_{2+\epsilon,\Omega}, |w_2|_{2+\epsilon,\Omega}) \right\} ds. \end{aligned}$$

L'utilisation du lemme de Gronwall amène à  $\tilde{u} \equiv 0$ ,  $\tilde{w} \equiv 0$ . D'où la conclusion finale du lemme 2.2. ■

### 2.2.3 L'unicité des solutions faibles : Preuve de la deuxième partie de la proposition 2.1.

On applique une méthode utilisée par Sedenko [34] où les équations de Marguerre-Vlasov ont été considérées avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet. Notons que la présence d'amortissement sur la frontière (comme dans notre cas), ajoute des difficultés techniques.

Tout d'abord, on introduit les opérateurs suivants : Soient  $A_0$  le générateur correspondant au système d'élasticité et  $G_0$  l'opérateur de Green correspondante, définis par :

$$\begin{aligned} A_0 u &\equiv -\operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u)]] \text{ avec } D(A_0) = \{u \in H_{\Gamma_0}^2(\Omega); \mathcal{C} [\epsilon(u)] \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \\ G_0 g &\equiv v \iff \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(v)]] = 0 \text{ dans } \Omega, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } [\mathcal{C} [\epsilon(v)]] \nu = g \text{ sur } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Soient  $\tilde{u} \equiv u_1 - u_2$ ,  $\tilde{w} \equiv w_1 - w_2$ , où  $(u_1, w_1)$ ,  $(u_2, w_2)$  deux solutions faibles. En utilisant les définitions des opérateurs  $A_0$ ,  $G_0$  donnés ci-dessus,  $M \equiv I + \delta A_N$  et  $A_N$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $G_i$  introduits dans la **sous-section 2.2.1**. On écrit  $(\mathcal{P})$  comme un système abstrait du second degré défini sur  $[D(A_0)]' \times [D(\mathcal{A})]'$  (voir [3], [11] et [22]) :

$$\begin{aligned} (2.2.61) \quad & \tilde{u}_{tt} + b_1 \tilde{u}_t + A_0 \tilde{u} + A_0 G_0 (G_0^* A_0 \tilde{u}_t) = f_1(\tilde{w}, w_i), \\ & M \tilde{w}_{tt} + b_2 \tilde{w}_t + \mathcal{A} \tilde{w} + \mathcal{A} G_1 (G_1^* \mathcal{A} \tilde{w}_t) + \mathcal{A} G_2 (D_\tau^2 G_2^* \mathcal{A} \tilde{w}_t) = f_2(\tilde{u}, \tilde{w}, u_i, w_i), \end{aligned}$$

où les termes  $f_i$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} (2.2.62) \quad & f_1(\tilde{w}, w_i) \equiv \operatorname{div} [\mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)]] - A_0 G_0 G_0^* A_0 \mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)] \nu \\ & f_2(\tilde{u}, \tilde{w}, u_i, w_i) \equiv \operatorname{div} [\mathcal{C} N(u_1, w_1) \nabla w_1 - \mathcal{C} N(u_2, w_2) \nabla w_2] \\ & + \mathcal{A} G_2 G_2^* \mathcal{A} [\mathcal{C} N(u_1, w_1) \nabla w_1 - \mathcal{C} N(u_2, w_2) \nabla w_2] \nu. \end{aligned}$$

et  $G_i^*$  l'adjoint de  $G_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) au sens suivant

$$(G_i u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, G_i^* v)_{L^2(\Gamma)}, \quad u \in L^2(\Gamma), \quad v \in L^2(\Omega).$$

Puisque l'amortissement est linéaire, il peut être supposé, sans perte de généralités, que  $g_{i,0} = h_{i,0} = 1$ ;  $i = 1, 2$ .

**Etape 1 : Formulation de semi-groupes et estimations de normes**

Notons

$$(2.2.63) \quad A_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_0 G_0 G_0^* A_0 - b_1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 : H_1 \longrightarrow H_1 \text{ avec } H_1 \equiv \left[ D \left( A_0^{1/2} \right) \right]^2 \times [L^2(\Omega)]^2, \\ D(A_1) = \left\{ (u_1, u_2) \in \left[ D \left( A_0^{1/2} \right) \right]^2 \times \left[ D \left( A_0^{1/2} \right) \right]^2 ; u_1 + G_0 G_0^* A_0 u_2 \in D(A_0) \right\},$$

et

$$(2.2.64) \quad A_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \mathcal{A} & -M^{-1} (\mathcal{A} G_1 G_1^* \mathcal{A} + \mathcal{A} G_2 D_\tau^2 G_2^* \mathcal{A} + b_2) \end{bmatrix},$$

$$A_2 : H_2 \longrightarrow H_2 \text{ avec } H_2 \equiv D \left( \mathcal{A}^{1/2} \right) \times D \left( A_N \right)^{1/2}, \\ D(A_2) = \left\{ (w_1, w_2) \in D \left( \mathcal{A}^{1/2} \right) \times D \left( A_N \right)^{1/2} ; \mathcal{A} (w_1 + G_1 G_1^* \mathcal{A} w_2 + G_2 D_\tau^2 G_2^* \mathcal{A} \tilde{w}_2) \right. \\ \left. \in \left[ D \left( A_N^{1/2} \right) \right]' \right\}. \quad (2.2.65)$$

on réécrit (2.2.61) comme suit

$$(2.2.66) \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{u}_t(t) \end{pmatrix}_t = A_1 \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{u}_t(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(\tilde{w}, w_i) \end{pmatrix},$$

$$(2.2.67) \quad \begin{pmatrix} \tilde{w}(t) \\ \tilde{w}_t(t) \end{pmatrix}_t = A_2 \begin{pmatrix} \tilde{w}(t) \\ \tilde{w}_t(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} f_2(\tilde{u}, \tilde{w}, u_i, w_i) \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans difficulté que l'opérateur  $A_1$ , (resp.  $A_2$ ) est un générateur infinitésimal de semi-groupe de contraction sur l'espace  $\left[ D \left( A_0^{1/2} \right) \right]^2 \times [L^2(\Omega)]^2$  (resp.  $D \left( \mathcal{A}^{1/2} \right) \times D \left( A_N \right)^{1/2}$ ). Par l'argument de semi-groupes, ces opérateurs engendrent des semi-groupes fortement continus sur les espaces duals  $[D(A_1^*)]'$  et  $[D(A_2^*)]'$ , respectivement (avec  $A_1^*$  (resp.  $A_2^*$ ) l'adjoint de  $A_1$  (resp.  $A_2$ )), où la dualité est considérée selon la topologie de  $H_1$  (resp.  $H_2$ ). Ce qui implique les estimations de normes suivantes

$$(2.2.68) \quad \begin{aligned} |(\tilde{u}, \tilde{u}_t)|_{[D(A_1^*)]'} &\leq C \int_0^t |(0, f_1)|_{[D(A_1^*)]'} ds, \\ |(\tilde{w}, \tilde{w}_t)|_{[D(A_2^*)]'} &\leq C \int_0^t |(0, M^{-1} f_2)|_{[D(A_2^*)]'} ds. \end{aligned}$$

D'autre part, le calcul direct de  $[A_1^*]^{-1}$  et  $[A_2^*]^{-1}$  donnent

$$(2.2.69) \quad \begin{aligned} |(u_1, u_2)|_{[D(A_1^*)]'}^2 &= |u_1|_{0,\Omega}^2 + \left| A_0^{-1/2} u_2 + A_0^{1/2} G_0 G_0^* A_0^* u_2 \right|_{0,\Omega}^2, \\ |(w_1, w_2)|_{[D(A_2^*)]'}^2 &= |M^{1/2} w_1|_{0,\Omega}^2 + \left| \mathcal{A}^{-1/2} M w_2 + \mathcal{A}^{1/2} [G_1 G_1^* \mathcal{A} w_1 + G_2 D_\tau^2 G_2^* \mathcal{A} w_1] \right|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

alors, en particulier

$$(2.2.70) \quad \begin{aligned} |\tilde{u}(t)|_{0,\Omega}^2 &\leq C \int_0^t |A_0^{1/2} f_1|_{0,\Omega}^2 ds, \\ |\tilde{w}(t)|_{1,\Omega}^2 &\leq C \int_0^t |\mathcal{A}^{1/2} f_2|_{0,\Omega}^2 ds. \end{aligned}$$

Les inégalités de (2.2.70) sont essentielles dans l'analyse qui suit.

### Etape 2 : Estimation de (2.2.70)

Soit  $\phi \in [L^2(\Omega)]^2$ . On calcule alors

$$(2.2.71) \quad \left( A_0^{-1/2} f_1, \phi \right)_{0,\Omega} = - \left( \mathcal{C} [f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \epsilon \left( A_0^{-1/2} \phi \right) \right)_{0,\Omega},$$

donc

$$(2.2.72) \quad \left| A_0^{-1/2} f_1 \right|_{0,\Omega} \leq C |f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)|_{0,\Omega}.$$

Afin d'estimer le dernier terme du membre de droite de l'inégalité précédente, on applique une méthode utilisée par Sedenko [34]. Des modifications sont nécessaires à cause de la structure des conditions aux limites comme la présence de dissipation frontière. Soit  $P_n$  la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par les  $n$  vecteurs propres associés aux  $n$  premières valeurs propres de  $\mathcal{A}$  et soit  $Q_n = I - P_n$ . (On pourrait aussi prendre une projection sur le sous-espace engendré par les vecteurs propres de l'opérateur biharmonique avec des conditions aux limites fixées, ce choix particulier n'est pas critique pour les arguments utilisés). On connaît l'estimation "logarithmique" suivante (voir [34], [5]), qui résulte des injections de Sobolev et de l'inégalité de Hölder :

$$(2.2.73) \quad |(P_n f) g|_{0,\Omega} \leq C \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} |f|_{0,\Omega} |g|_{1,\Omega},$$

où  $\lambda_n$  est une valeur propre de  $\mathcal{A}$  et la constante  $C$  est indépendante de  $n$ . Appliquons (2.2.73) en utilisant l'opérateur de projection appliqué à la fonction vectorielle (le sens de la projection est appliqué à chaque composante), on obtient

$$(2.2.74) \quad \begin{aligned} |f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)|_{0,\Omega} &\leq C |\nabla \tilde{w} \otimes \nabla(w_1 + w_2)|_{0,\Omega} \leq C |(P_n(\nabla \tilde{w})) \otimes \nabla(w_1 + w_2)|_{0,\Omega} \\ &\quad + |(Q_n(\nabla \tilde{w})) \otimes \nabla(w_1 + w_2)|_{0,\Omega} \leq C \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} |\tilde{w}|_{1,\Omega} \left[ |w_1|_{2,\Omega} + |w_2|_{2,\Omega} \right] \\ &\quad + C |Q_n(\nabla \tilde{w})|_{\epsilon,\Omega} \left[ |w_1|_{2,\Omega} + |w_2|_{2,\Omega} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$(2.2.75) \quad \begin{aligned} |Q_n(\nabla \tilde{w})|_{\epsilon,\Omega} &\leq C |\mathcal{A}^{1/4\epsilon} Q_n(\nabla \tilde{w})|_{0,\Omega} \leq C |\mathcal{A}^{1/4(\epsilon-\beta_0)} Q_n|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} |\nabla \tilde{w}|_{\beta_0,\Omega} \\ &\leq C \lambda_n^{1/4(\epsilon-\beta_0)} |\nabla \tilde{w}|_{\beta_0,\Omega} \leq C \lambda_n^{1/4(\epsilon-\beta_0)} |\tilde{w}|_{3/2,\Omega}, \end{aligned}$$

où  $\beta_0 < 1/2$ . En combinant ces deux dernières inégalités, alors l'inégalité (2.2.72) devient

$$\begin{aligned}
 (2.2.76) \quad & \left| A_0^{-1/2} f_1 \right|_{0,\Omega} \leq C \left| f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2) \right|_{0,\Omega} \\
 & \leq C \left[ \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} |\tilde{w}|_{1,\Omega} + \lambda_n^{-\beta} \right] \left[ |w_1|_{2,\Omega} + |w_2|_{2,\Omega} \right] \\
 & \leq C(E(0)) \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} |\tilde{w}|_{1,\Omega} + C(E(0)) \lambda_n^{-\beta},
 \end{aligned}$$

où  $\beta < 1/8$  et  $E(0)$  est l'énergie initiale des solutions faibles. L'estimation pour  $f_2$  est effectuée après.

Pour  $\psi \in L^2(\Omega)$  on a

$$(2.2.77) \quad (\mathcal{A}^{-1/2} f_2, \psi)_{0,\Omega} = (\mathcal{C}N(u_1, w_1) \nabla w_1 - \mathcal{C}N(u_2, w_2) \nabla w_2, \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi)_{0,\Omega}.$$

Estimation du membre de droite de (2.2.77). En utilisant l'estimation (2.2.73), on obtient

$$\begin{aligned}
 (2.2.78) \quad & (\epsilon(u_2) \nabla \tilde{w}, \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi)_{0,\Omega} \leq C |u_2|_{1,\Omega} |\nabla \tilde{w} \otimes \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi|_{0,\Omega} \\
 & \leq C |u_2|_{1,\Omega} \left[ \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} |\tilde{w}|_{1,\Omega} |\nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi|_{1,\Omega} + \lambda_n^{-\beta} \left[ |w_1|_{2,\Omega} + |w_2|_{2,\Omega} \right] |\nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi|_{1,\Omega} \right] \\
 & \leq C \left[ \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} |\tilde{w}|_{1,\Omega} + \lambda_n^{-\beta} \left[ |w_1|_{2,\Omega} + |w_2|_{2,\Omega} \right] \right] |u_2|_{1,\Omega} |\psi|_{0,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Par le théorème de la divergence on a

$$\begin{aligned}
 (2.2.79) \quad & (\epsilon(\tilde{u}) \nabla w_1, \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi)_{0,\Omega} = \left\langle \tilde{u}, \left( (1/2 \nabla w_1 \otimes \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi) + (1/2 \nabla w_1 \otimes \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi)^T \right) \nu \right\rangle_{0,\Gamma_1} \\
 & - \left( \tilde{u}, \operatorname{div} \left( (1/2 \nabla w_1 \otimes \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi) + (1/2 \nabla w_1 \otimes \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi)^T \right) \right)_{0,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Posons

$$K \equiv (1/2 \nabla w_1 \otimes \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi) + (1/2 \nabla w_1 \otimes \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi)^T,$$

donc (2.2.73) implique

$$\begin{aligned}
 (2.2.80) \quad & (\tilde{u}, \operatorname{div} K)_{0,\Omega} \leq \left| (P_n \tilde{u}, \operatorname{div} K)_{0,\Omega} + (Q_n \tilde{u}, \operatorname{div} K)_{0,\Omega} \right| \\
 & \leq C \left[ |\tilde{u}|_{0,\Omega} \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} |w_1|_{2,\Omega} |\nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi|_{1,\Omega} + |\tilde{u}|_{1,\Omega} \lambda_n^{-\beta} |w_1|_{2,\Omega} |\nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi|_{1,\Omega} \right] \\
 & \leq C \left[ |\tilde{u}|_{0,\Omega} \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} + |\tilde{u}|_{1,\Omega} \lambda_n^{-\beta} \right] |w_1|_{2,\Omega} |\psi|_{0,\Omega}.
 \end{aligned}$$

On a aussi par le théorème de trace

$$(2.2.81) \quad \langle \tilde{u}, K \nu \rangle_{\Gamma} \leq C |\tilde{u}|_{0,\Gamma_1} |K|_{1/2+\epsilon,\Omega} \leq C |\tilde{u}|_{0,\Gamma_1} |w_1|_{2,\Omega} |\psi|_{0,\Omega}.$$

Le terme critique au bord  $|\tilde{u}|_{0,\Gamma_1}$  sera estimé plus tard.

Finalement le terme  $(f(\nabla w_1) \nabla w_1 - f(\nabla w_2) \nabla w_2, \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi)_{0,\Omega}$  est estimé directement comme suit

$$(2.2.82) \quad (f(\nabla w_1) \nabla w_1 - f(\nabla w_2) \nabla w_2, \nabla \mathcal{A}^{-1/2} \psi)_{0,\Omega} \leq C |\tilde{w}|_{1,\Omega} \left[ |w_1|_{2,\Omega}^2 + |w_2|_{2,\Omega}^2 \right] |\psi|_{0,\Omega}.$$

En combinant (2.2.77)–(2.2.82) on trouve

$$(2.2.83) \quad \begin{aligned} (\mathcal{A}^{-1/2} f_2, \psi)_{0,\Omega} &\leq C \lg(1 + \lambda_n)^{1/2} \left[ |\tilde{u}|_{0,\Omega} + |\tilde{w}|_{1,\Omega} \right] \left[ |w_1|_{2,\Omega} + |w_2|_{2,\Omega} \right. \\ &\quad \left. + |u_1|_{1,\Omega} + |u_2|_{1,\Omega} + |w_1|_{2,\Omega}^2 + |w_2|_{2,\Omega}^2 \right] |\psi|_{0,\Omega} + C |\tilde{u}|_{0,\Gamma_1} |w_1|_{2,\Omega} |\psi|_{0,\Omega} \\ &\quad + C \lambda_n^{-\beta} \left[ |w_1|_{2,\Omega}^2 + |w_2|_{2,\Omega}^2 + |u_1|_{1,\Omega}^2 + |u_2|_{1,\Omega}^2 \right] |\psi|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Donc

$$(2.2.84) \quad \begin{aligned} \int_0^t |\mathcal{A}^{-1/2} f_2|_{0,\Omega}^2 ds &\leq C(E(0)) \lg(1 + \lambda_n) \int_0^t \left[ |\tilde{u}|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2 \right] ds \\ &\quad + C(E(0)) \int_0^t |\tilde{u}|_{0,\Gamma_1}^2 ds + C_T(E(0)) \lambda_n^{-2\beta}. \end{aligned}$$

### Etape 3 : Estimation du terme au bord $|\tilde{u}|_{0,\Gamma_1}$

La prochaine étape est de prouver l'estimation de trace suivante

$$(2.2.85) \quad \int_0^t |\tilde{u}|_{0,\Gamma_1}^2 ds \leq C_T(E(0)) \lg(1 + \lambda_n) \int_0^t |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2 ds + C_T(E(0)) \lambda_n^{-2\beta}.$$

Pour prouver (2.2.85), l'idée est d'utiliser les estimations d'énergie pour la nouvelle variable  $u^*$  définie par

$$u^*(t) \equiv \int_0^t \tilde{u} ds,$$

notons aussi

$$\tilde{f} \equiv \mathcal{C}[f(\nabla w_1) - f(\nabla w_2)], \quad f^*(t) \equiv \int_0^t \tilde{f} ds.$$

on voit que

$$u_t^* = \tilde{u} \text{ et } f_t^* = \tilde{f}.$$

Alors on obtient l'équation suivante satisfaite par la nouvelle variable  $u^*$  :

$$(2.2.86) \quad u_{tt}^* + A_0 u^* + b_1 u_t^* + A_0 G_0 G_0^* A_0 u_t^* = \operatorname{div} f^* - A_0 G_0 G_0^* A_0 f^* \nu.$$

On multiplie cette équation par  $u_t^*$  et on intègre par parties, on obtient

$$(2.2.87) \quad |u_t^*(t)|_{0,\Omega}^2 + |u^*(t)|_{1,\Omega}^2 + \int_0^t |u_t^*(s)|_{0,\Gamma_1}^2 ds \leq C_T \int_0^t (f^*(s), \epsilon(u_s^*(s)))_{0,\Omega} ds.$$

Ensuite on intègre par parties le dernier terme de l'inégalité ci-dessus, on trouve

$$(2.2.88) \quad \begin{aligned} |u_t^*(t)|_{0,\Omega}^2 + |u^*(t)|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t |u_s^*(s)|_{0,\Gamma_1}^2 ds &\leq C_T \left[ \int_0^t |f_s^*(s)|_{0,\Omega} |u^*(s)|_{1,\Omega} ds \right. \\ &\quad \left. + |f^*(t)|_{0,\Omega} |u^*(t)|_{1,\Omega} \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, en particulier

$$(2.2.89) \quad \int_0^t |\tilde{u}(s)|_{0,\Gamma_1}^2 ds = \int_0^t |u_t^*(s)|_{0,\Gamma_1}^2 ds \leq C_T \left[ \int_0^t |f_s^*(s)|_{0,\Omega}^2 ds + |f^*(s)|_{0,\Omega}^2 \right].$$

D'autre part,

$$(2.2.90) \quad \begin{aligned} \int_0^t |f_s^*(s)|_{0,\Omega}^2 ds &= \int_0^t |\tilde{f}(s)|_{0,\Omega}^2 ds \leq C \int_0^t |\nabla \tilde{w} \otimes [\nabla w_1 + \nabla w_2]|_{0,\Omega}^2 ds \\ &\leq C \int_0^t \left[ |P_n(\nabla \tilde{w}) \otimes \nabla w_i|_{0,\Omega}^2 + |Q_n(\nabla \tilde{w}) \otimes \nabla w_i|_{0,\Omega}^2 \right] ds \\ &\leq C \lg(1 + \lambda_n) \int_0^t |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2 |w_i|_{2,\Omega}^2 ds + C \lambda_n^{-2\beta} \int_0^t |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2 |w_i|_{2,\Omega}^2 ds. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned} |f^*(t)|_{0,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \left( \int_0^t |\tilde{f}|^2 ds \right)^2 d\Omega \leq T^2 \int_{\Omega} \left[ \left( \int_0^t |\tilde{f}|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_0^t |\tilde{f}|^2 ds \right)^{1/2} \right] d\Omega \\ &= T^2 \int_0^t |\tilde{f}|_{0,\Omega}^2 ds, \end{aligned}$$

donc l'inégalité (2.2.90) donne

$$(2.2.91) \quad \begin{aligned} |f^*(t)|_{0,\Omega}^2 &\leq C_T \int_0^t |\tilde{f}|_{0,\Omega}^2 ds \\ &\leq C_T \lg(1 + \lambda_n) \int_0^t |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2 |w_i|_{2,\Omega}^2 ds + C_T \lambda_n^{-2\beta} \int_0^t |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2 |w_i|_{2,\Omega}^2 ds. \end{aligned}$$

En suite, on a

$$(2.2.92) \quad \begin{aligned} \int_0^t |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2 |w_i|_{2,\Omega}^2 ds &\leq \sup_{[0,T]} (|w_1|_{2,\Omega}^2 + |w_2|_{2,\Omega}^2) \int_0^t |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2 ds \leq CE(0) \int_0^t |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2 ds, \\ \int_0^t |\tilde{w}|_{2,\Omega}^2 |w_i|_{2,\Omega}^2 ds &\leq T \left( \sup_{[0,T]} |w_1|_{2,\Omega}^2 + |w_2|_{2,\Omega}^2 \right)^2 \leq T (CE(0))^2. \end{aligned}$$

Finalement, les inégalités (2.2.89)–(2.2.92) amènent à la conclusion désirée dans (2.2.85).

#### Etape 4 : Fin de la preuve

On déduit à partir de (2.2.84) et (2.2.85) que

$$(2.2.93) \quad \int_0^t |\mathcal{A}^{-1/2} f_2|_{0,\Omega}^2 ds \leq C_T (E(0)) \lg(1 + \lambda_n) \int_0^t [|\tilde{u}|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2] ds + \lambda_n^{-2\beta} C_T (E(0)).$$

D'après (2.2.76) et (2.2.93) on constate que

$$(2.2.94) \quad \begin{aligned} \int_0^t [|\mathcal{A}^{-1/2} f_2|_{0,\Omega}^2 + |\mathcal{A}^{-1/2} f_1|_{0,\Omega}^2] ds &\leq C_T (E(0)) \lg(1 + \lambda_n) \int_0^t [|\tilde{u}|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2] ds \\ &\quad + \lambda_n^{-2\beta} C_T (E(0)), \end{aligned}$$

Alors, en utilisant (2.2.70) on trouve

$$|\tilde{u}(t)|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}(t)|_{1,\Omega}^2 \leq C_T(E(0)) \lg(1 + \lambda_n) \int_0^t \left[ |\tilde{u}|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}|_{1,\Omega}^2 \right] ds + \lambda_n^{-2\beta} C_T(E(0)),$$

et le lemme de Gronwall, donne

$$(2.2.95) \quad |\tilde{u}(t)|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}(t)|_{1,\Omega}^2 \leq C_T(E(0)) \lambda_n^{-2\beta} (1 + \lambda_n)^{C_T(E(0))t}.$$

En prenant  $t < T_0$  on obtient

$$|\tilde{u}(t)|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}(t)|_{1,\Omega}^2 \leq C_T(E(0)) \lambda_n^{-2\beta + C_T(E(0))T_0} \left( \frac{1}{\lambda_n} + 1 \right)^{C_T(E(0))T_0},$$

pour  $T_0$  suffisamment petit on a

$$\lambda_n^{-2\beta + C_T(E(0))T_0} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

d'où la conclusion de la deuxième partie de la proposition. ■

# Chapitre 3

## Stabilisation frontière du système complet de Von Karman

### Sommaire

---

|            |                                                                                                                          |           |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Introduction et résultat principal . . . . .</b>                                                                      | <b>48</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Résultats préliminaires et régularité de trace des solutions du<br/>problème <math>(\mathcal{P})</math> . . . . .</b> | <b>50</b> |
| 3.2.1      | Egalité de dissipation . . . . .                                                                                         | 50        |
| 3.2.2      | Régularité de trace des solutions du problème $(\mathcal{P})$ . . . . .                                                  | 56        |
| <b>3.3</b> | <b>Estimation de la stabilité frontière . . . . .</b>                                                                    | <b>63</b> |
| 3.3.1      | Formulation variationnelle et identités préliminaires . . . . .                                                          | 64        |
| 3.3.2      | Première estimation . . . . .                                                                                            | 66        |
| 3.3.3      | Absorption de traces sur la frontière et achèvement de la preuve<br>du lemme 3.11. . . . .                               | 75        |
| <b>3.4</b> | <b>Absorption de termes d'ordre inférieur . . . . .</b>                                                                  | <b>77</b> |
| <b>3.5</b> | <b>Fin de la preuve du théorème 3.1. . . . .</b>                                                                         | <b>86</b> |

---

Le but principal de ce chapitre est de montrer que les solutions du modèle de plaque de Von Karman (2.1.1) décroissent vers zéro avec un taux uniforme.

### 3.1 Introduction et résultat principal

Rappelons le problème  $(\mathcal{P})$

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + b_1 u_t - \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)]] = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty), \\ [I - \delta \Delta] w_{tt} + b_2 w_t + D \Delta^2 w - \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = w = \nabla w = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu = -g(u_t) \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ D [\Delta w + (1 - \mu) B_1 w] = -h_1(D_n w_t) \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ D [D_n \Delta w + (1 - \mu) B_2 w] - \delta D_n w_{tt} - [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w] \\ = -D_\tau h_2(D_\tau w_t) \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, w(0) = w_0, w_t(0) = w_1 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Pour formuler le résultat, on introduit les fonctions suivantes :

$$\mathcal{H}_0(s) = \mathcal{G}(s) + \mathcal{H}_1(s) + \mathcal{H}_2(s),$$

où les fonctions  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  sont concaves, strictement croissantes, nulles à l'origine et telles que les inégalités suivantes soient satisfaites pour  $|s| \leq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(s \cdot g(s)) &\geq |s|^2 + |g(s)|^2, \quad s \in \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{H}_1(sh_1(s)) &\geq s^2 + h_1^2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{H}_2(sh_2(s)) &\geq s^2 + h_2^2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

avec  $g$ ,  $h_i$  les fonctions définies dans la **sous-section 2.1.1**.

On a le résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *Soit  $(u, w)$  une solution forte du problème  $(\mathcal{P})$  et supposons, soit  $l > 0$  soit  $\Gamma_0 \neq \emptyset$ .*

**Partie I :** *En plus de l'hypothèse 1, supposons l'hypothèse 2 suivante :*

**Hypothèse 2.**  $b_1$  ou  $b_2$  injectif.

*Alors, il existe une constante  $T_0 > 0$  telle que l'estimation suivante a lieu*

$$(3.1.1) \quad E(t) \leq C(E(0)) S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right); t \geq T_0,$$

*où la fonction à variable réelle  $S(t)$  converge vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$  et est solution de l'équation différentielle ordinaire*

$$(3.1.2) \quad S_t(t) + q(S(t)) = 0, S(0) = E(0).$$

La non linéarité et la croissance de la fonction  $q(s)$  est déterminée entièrement à partir du comportement à l'origine des fonctions non linéaires  $g, h_i$ .  $q(s)$  est définie par :

$$(3.1.3) \quad q \equiv I - (I - P)^{-1},$$

$$(3.1.4) \quad P \equiv (kI + \mathcal{H})^{-1},$$

$$(3.1.5) \quad \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 (\cdot / \text{mes} \Sigma_1),$$

où  $k$  est une constante proportionnelle à  $\frac{1}{\text{mes} \Sigma_1} (m^{-1} + M)$  avec  $\Sigma_1 \equiv \Gamma_1 \times (0, T)$ .

**Partie II :** Si l'hypothèse 2 n'est pas vérifiée (en particulier  $b_1 = 0$  et  $b_2 = 0$ ), alors, la conclusion de la partie I reste vraie pour des données initiales régulières, c'est-à-dire

$$u_0 \in [H^{1+\epsilon}(\Omega)]^2, w_0 \in H^{2+\epsilon}(\Omega),$$

où  $\epsilon > 0$  est arbitraire et la constante  $C$  dans (3.1.1) peut dépendre de normes de ces données initiales, c'est-à-dire

$$C = C \left( |u_0|_{[H^{1+\epsilon}(\Omega)]^2}, |w_0|_{H^{2+\epsilon}(\Omega)}, E(0) \right).$$

**Remarque 3.1.** Si les fonctions non linéaires  $g, h_i$ , sont minorées par une fonction linéaire, on peut montrer que les taux de décroissance prévus par le théorème 3.1. sont exponentiels. Cela veut dire qu'il existe des constantes positives  $C, \omega$ , pouvant dépendre de  $E(0)$ , tel que

$$E(t) \leq Ce^{-\omega t}, \text{ pour } t > T_0.$$

Si, au lieu de cela, ces fonctions ont une croissance polynomiale à l'origine, les taux de décroissance sont algébriques (voir [27]).

**Remarque 3.2.** Les termes "d'amortissement faible" représentés par les coefficients  $b_1, b_2$  correspondant, typiquement, à une possibilité d'avoir le petit amortissement visqueux. A noter que cet amortissement seul (même s'il est entièrement actif, c'est-à-dire  $b_1$  et  $b_2$  sont uniformément positifs sur  $\Omega$ ) ne causera pas de décroissance uniforme sur l'énergie (il peut, au maximum, causer la stabilité forte des solutions). Pour cela, la présence d'une dissipation frontière, ou d'un amortissement visqueux beaucoup plus fort, est nécessaire. Du point de vue mathématique, la présence d'amortissement faible est avantageuse pour éliminer les termes d'ordre inférieur à partir d'inégalités appropriées (voir la **section 3.4**) qui est fait en utilisant le résultat d'unicité dû à Isakov [16]. En effet, l'application de ce résultat d'unicité exige une régularité suffisante sur les solutions des équations linéarisées. Cela, à son tour, peut être établi si l'un des  $b_i$  est injectif. Dans le cas général, cependant, on peut

montrer la régularité nécessaire pourvu que les données initiales soient régulières (voir la partie II de théorème 3.1). Á ce point, on ne connaît pas si cette condition de régularité est nécessaire pour que le résultat ait lieu.

**Remarque 3.3.** Les taux de décroissance garantis dans la partie II de théorème 3.1. peuvent être étendus pour toutes les solutions  $[H^{1+\epsilon}(\Omega)]^2 \times H^{2+\epsilon}(\Omega)$  avec  $\epsilon$  arbitrairement petit. En effet, cela peut être fait en appliquant l'argument de densité habituel [18] combiné avec le résultat d'unicité exposé dans le chapitre 2. De même, au vu du résultat d'unicité valable pour les solutions faibles dans le cas de dissipation linéaire, le résultat de la première partie de théorème 3.1. pourrait être étendu à de telles solutions faibles.

## 3.2 Résultats préliminaires et régularité de trace des solutions du problème $(\mathcal{P})$

Dans cette section on formule et on prouve plusieurs estimations préliminaires. Ces résultats, sont importants pour la preuve du théorème 3.1.

### 3.2.1 Egalité de dissipation

Le point de départ est l'égalité de dissipation, qui implique que l'énergie du système entier est non croissante. Ce fait seul ne démontre pas, bien sûr, que l'énergie décroît, mais c'est le pas préliminaire nécessaire de l'étude de stabilité.

**Lemme 3.2.** Soit  $(u, w)$  une solution faible du problème  $(\mathcal{P})$ . Alors, pour tout  $s \leq t$

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} E(t) + 2 \int_s^t \int_{\Gamma_1} [g(u_t) \cdot u_t + h_1(D_n w_t) D_n w_t + h_2(D_\tau w_t) D_\tau w_t] d\Gamma_1 dt \\ + 2 \int_s^t \int_{\Omega} [b_1 u_t \cdot u_t + b_2 w_t w_t] d\Omega dt = E(s). \end{aligned}$$

**Preuve du lemme 3.2.**

La preuve est standard et suit le type d'argument d'énergie classique, et est basée sur le lemme et la proposition suivantes :

**Lemme 3.3.** Soit  $(u, w)$  solution de  $(\mathcal{P})$ . Alors

$$\begin{aligned}
 (3.2.2) \quad & g(u_t) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
 & h_1(D_n w_t) \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_1)), \\
 & \mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w - D_\tau h_2(D_\tau w_t) \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_1)),
 \end{aligned}$$

**Preuve.** L'hypothèse 1 et la proposition 2.1. impliquent

$$\begin{aligned}
 & g(u_t) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
 & h_1(D_n w_t) \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_1)), \\
 & h_2(D_\tau w_t) \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_1)),
 \end{aligned}$$

donc

$$D_\tau h_2(D_\tau w_t) \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\Gamma)).$$

■

Soit  $(u, w)$  solution de  $(\mathcal{P})$ . En utilisant la régularité (3.2.2), les propositions 3.6. et 3.9. avec la densité des espaces de Sobolev, on peut définir ces suites de fonctions :

$$\begin{aligned}
 (3.2.3) \quad & F_{1,n} \in H^{1,1}(Q_T), \quad |F_{1,n} - \operatorname{div}[\mathcal{C}f(\nabla w)]|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Omega))} \longrightarrow 0, \\
 & F_{2,n} \in H^{1,1}(Q_T), \quad |F_{2,n} - \operatorname{div}[\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w]|_{L^2(0,T;(H^{3/2}(\Omega))')} \longrightarrow 0, \\
 & F_{3,n} \in H^{1,1}(\Sigma_1), \quad |F_{3,n} - g(u_t)|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \longrightarrow 0, \\
 & \gamma_n \in H^{1,1}(\Sigma_1), \quad |\gamma_n - u_t|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \longrightarrow 0, \\
 & F_{4,n} \in H^{1,1}(\Sigma_1), \quad |F_{4,n} - \mathcal{C}f(\nabla w) \nu|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \longrightarrow 0, \\
 & F_{5,n} \in H^{1,1}(\Sigma_1), \quad |F_{5,n} - h_1(D_n w_t)|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1))} \longrightarrow 0, \\
 & F_{6,n} \in H^{1,1}(\Sigma_1), \quad |F_{6,n} - [\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w - D_\tau h_2(D_\tau w_t)]|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1))} \longrightarrow 0, \\
 & \alpha_n \in H^{1,1}(\Sigma_1), \quad |\alpha_n - D_n w_t|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \longrightarrow 0, \\
 & \beta_n \in H^{1,1}(\Sigma_1), \quad |\beta_n - (w_t - D_\tau^2 w_t)|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \longrightarrow 0,
 \end{aligned}$$

où  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T)$ .

On considère le problème approcher  $(\mathcal{P}_n)$  suivant :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_n) \quad & u_{n,tt} + b_1 u_{n,t} - \operatorname{div}[\mathcal{C}\epsilon(u_n)] - F_{1,n} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
 & [I - \delta \Delta] w_{n,tt} + b_2 w_{n,t} + D \Delta^2 w_n - F_{2,n} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
 & u_n(0) = u_{n,0}, \quad u_{n,t}(0) = u_{n,1}, \quad w_n(0) = w_{n,0}, \quad w_{n,t}(0) = w_{n,1}, \\
 & u_n = w_n = \nabla w_n = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\
 & \mathcal{C}\epsilon(u_n) \nu + u_{n,t} = \gamma_n - F_{3,n} - F_{4,n}, \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\
 & D[\Delta w_n + (1 - \mu) B_1 w_n] + D_n w_{n,t} = -F_{5,n} + \alpha_n, \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\
 & D[D_n \Delta w_n + (1 - \mu) B_2 w_n] - \delta D_n w_{n,tt} - w_{n,t} + D_\tau^2 w_{n,t} = F_{6,n} + \beta_n, \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T),
 \end{aligned}$$

où

$$(3.2.4) \quad |u_0 - u_{n,0}|_{2,\Omega} \longrightarrow 0, |u_1 - u_{n,1}|_{1,\Omega} \longrightarrow 0, |w_0 - w_{n,0}|_{3,\Omega} \longrightarrow 0, |w_1 - w_{n,1}|_{2,\Omega} \longrightarrow 0,$$

et  $(u_{n,0}, u_{n,1}) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega)$ ,  $(w_{n,0}, w_{n,1}) \in H^4(\Omega) \times H^3(\Omega)$  et satisfont la condition de compatibilité sur le bord. Par la méthode des semi-groupes linéaires, on montre que le problème  $(\mathcal{P}_n)$  admet une solution classique  $(u_n, w_n) \in C(0, T; H^3(\Omega) \times H^4(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^2(\Omega) \times H^3(\Omega))$ . Cette proposition joue un rôle critique dans les développements.

**Proposition 3.4.** *Soit  $(u_n, w_n)$  (resp.  $(u, w)$ ) solution de  $(\mathcal{P}_n)$  (resp. de  $(\mathcal{P})$ ). Alors, pour  $n \longrightarrow \infty$ , la convergence suivante ait lieu :*

$$(u_n, w_n) \longrightarrow (u, w) \text{ dans } C\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)\right),$$

$$u_{n,t}|_{\Gamma_1} \longrightarrow u_t|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(\Sigma_1), \quad \nabla w_{n,t}|_{\Gamma_1} \longrightarrow \nabla w_t|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(\Sigma_1),$$

**Preuve.** Considérons les équations satisfaites par la différence  $(u_n - u_m, w_n - w_m)$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} + b_1 \tilde{u}_t - \operatorname{div} [\mathcal{C} \epsilon(u_n)] &= F_{1,n} - F_{1,m} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ [I - \delta \Delta] \tilde{w}_{tt} + b_2 \tilde{w}_t + D \Delta^2 \tilde{w} &= F_{2,n} - F_{2,m} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ \tilde{u}(0) &= u_{n,0} - u_{m,0}, \tilde{u}_t(0) = u_{n,1} - u_{m,1}, \tilde{w}(0) = w_{n,0} - w_{m,0}, \tilde{w}_t(0) = w_{n,1} - w_{m,1}, \\ \tilde{u} &= \tilde{w} = \nabla \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \mathcal{C} \epsilon(\tilde{u}) \cdot \nu + \tilde{u}_t &= -(-\gamma_n + F_{3,n} + F_{4,n} + \gamma_m - F_{3,m} - F_{4,m}), \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ D[\Delta(\tilde{w}) + (1 - \mu) B_1(\tilde{w})] + D_n \tilde{w}_t &= -(F_{5,n} - \alpha_n - F_{5,m} + \alpha_m), \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ D[D_n \Delta \tilde{w} + (1 - \mu) B_2 \tilde{w}] - \delta D_n \tilde{w}_{tt} - \tilde{w}_t + D_\tau^2 \tilde{w}_t &= (F_{6,n} + \beta_n - F_{6,m} - \beta_m), \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \end{aligned}$$

où  $\tilde{u} = u_n - u_m$  et  $\tilde{w} = w_n - w_m$ . Prenons le produit scalaire avec  $(u_{n,t} - u_{m,t}, w_{n,t} - w_{m,t})$  et intégrons le résultat sur  $(0, T)$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt} |\tilde{u}_t|^2 d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt} [\mathcal{C} \epsilon(\tilde{u}_n) \epsilon(\tilde{u}_n)] d\Omega dt + \int_0^T \int_\Omega b_1 \tilde{u}_t \cdot \tilde{u}_t d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_1} [\gamma_n - F_{3,n} - F_{4,n} - \gamma_m + F_{3,m} + F_{4,m}] \tilde{u}_t d\Gamma_1 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\tilde{u}_t|^2 d\Gamma_1 dt \\ & = \int_0^T \int_\Omega (F_{1,n} - F_{1,m}) \tilde{u}_t d\Omega dt, \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt} [|\tilde{w}_t|^2 + \delta |\nabla \tilde{w}_t|^2] d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} a(\tilde{w}, \tilde{w}) dt + \int_0^T \int_\Omega b_2 \tilde{w}_t \tilde{w}_t d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_1} [|\tilde{w}_t|^2 + |D_n \tilde{w}_t|^2 + |D_\tau \tilde{w}_t|^2] d\Gamma_1 dt = - \int_0^T \int_{\Gamma_1} [(F_{6,n} - F_{6,m}) - (\beta_n - \beta_m)] \tilde{w}_t d\Gamma_1 dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_1} [(F_{5,n} - F_{5,m}) - (\alpha_n - \alpha_m)] D_n \tilde{w}_t d\Gamma_1 dt + \int_0^T (F_{2,n} - F_{2,m}, \tilde{w}_t)_\Omega dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}E_{\tilde{u},\tilde{w}}(T) + \int_0^T \int_{\Omega} b_1 \tilde{u}_t \cdot \tilde{u}_t d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} b_2 \tilde{w}_t \tilde{w}_t d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} [|\tilde{u}_t|^2 \\ & + |\tilde{w}_t|^2 + |\nabla \tilde{w}_t|^2] d\Gamma_1 dt = \int_0^T \int_{\Omega} (F_{1,n} - F_{1,m}) \tilde{u}_t d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} (F_{2,n} - F_{2,m}) \tilde{w}_t d\Omega dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_1} (F_{6,n} - \beta_n - F_{6,m} + \beta_m) \tilde{w}_t d\Gamma_1 dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} (F_{5,n} - \alpha_n - F_{5,m} + \alpha_m) D_n \tilde{w}_t d\Gamma_1 dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_1} [-\gamma_n + F_{3,n} + F_{4,n} + \gamma_m - F_{3,m} - F_{4,m}] \tilde{u}_t d\Gamma_1 dt + \frac{1}{2}E_{\tilde{u},\tilde{w}}(0), \end{aligned}$$

d'où pour tout  $t \leq T$

$$\begin{aligned} & C_0 \left( |\tilde{u}(t)|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{u}_t(t)|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}(t)|_{2,\Omega}^2 + |\tilde{w}_t(t)|_{1,\Omega}^2 \right) + 2|\tilde{u}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + 2|\tilde{w}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + 2|\nabla \tilde{w}|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} |F_{1,n} - F_{1,m}|^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\tilde{u}_t|^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} |F_{2,n} - F_{2,m}|^2 d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} |\tilde{w}_t|^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |F_{6,n} - \beta_n - F_{6,m} + \beta_m|^2 d\Gamma_1 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\tilde{w}_t|^2 d\Gamma_1 dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |F_{5,n} - \alpha_n - F_{5,m} + \alpha_m|^2 d\Gamma_1 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |D_n \tilde{w}_t|^2 d\Gamma_1 dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_n - F_{3,n} - F_{4,n} - \gamma_m + F_{3,m} + F_{4,m}|^2 d\Gamma_1 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\tilde{u}_t|^2 d\Gamma_1 dt + E_{\tilde{u},\tilde{w}}(0), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & C_0 \left( |\tilde{u}(t)|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{u}_t(t)|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}(t)|_{2,\Omega}^2 + |\tilde{w}_t(t)|_{1,\Omega}^2 \right) + 2|\tilde{u}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + 2|\tilde{w}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + 2|\nabla \tilde{w}|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ & \leq |F_{1,n} - F_{1,m}|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Omega))}^2 + \int_0^T |\tilde{u}_t|_{0,\Omega}^2 dt + |F_{2,n} - F_{2,m}|_{L^2(0,T;(H^{3/2}(\Omega))')}^2 + \int_0^T |\tilde{w}_t|_{1,\Omega}^2 dt \\ & + |F_{6,n} - \beta_n - F_{6,m} + \beta_m|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 + |\tilde{w}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + |F_{5,n} - \alpha_n - F_{5,m} + \alpha_m|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 \\ & + |D_n \tilde{w}|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + |\gamma_n - F_{3,n} - F_{4,n} - \gamma_m + F_{3,m} + F_{4,m}|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 + |\tilde{u}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + E_{\tilde{u},\tilde{w}}(0), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & C_0 \left( |\tilde{u}(t)|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{u}_t(t)|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}(t)|_{2,\Omega}^2 + |\tilde{w}_t(t)|_{1,\Omega}^2 \right) + |\tilde{u}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + |\tilde{w}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + |\nabla \tilde{w}|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ & \leq |F_{1,n} - F_{1,m}|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Omega))}^2 + |F_{2,n} - F_{2,m}|_{L^2(0,T;(H^{3/2}(\Omega))')}^2 + \int_0^T |\tilde{u}_t|_{0,\Omega}^2 dt + \int_0^T |\tilde{w}_t|_{1,\Omega}^2 dt \\ & + |\gamma_n - F_{3,n} - F_{4,n} - \gamma_m + F_{3,m} + F_{4,m}|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 + E_{\tilde{u},\tilde{w}}(0) \\ & + |F_{5,n} - \alpha_n - F_{5,m} + \alpha_m|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 + |F_{6,n} - \beta_n - F_{6,m} + \beta_m|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2, \end{aligned}$$

le lemme de Gronwall donne

$$\begin{aligned} & |\tilde{u}(t)|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{u}_t(t)|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}(t)|_{2,\Omega}^2 + |\tilde{w}_t(t)|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{u}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + |\tilde{w}_t|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + |\nabla \tilde{w}|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ & \leq |F_{1,n} - F_{1,m}|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\Omega))}^2 + |F_{2,n} - F_{2,m}|_{L^2(0,T;(H^{3/2}(\Omega))')}^2 \\ & + |F_{6,n} - \beta_n - F_{6,m} + \beta_m|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 + |F_{5,n} - \alpha_n - F_{5,m} + \alpha_m|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 \\ & + |\gamma_n - F_{3,n} - F_{4,n} - \gamma_m + F_{3,m} + F_{4,m}|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}^2 + E_{\tilde{u},\tilde{w}}(0) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

où la limite ce montre par utilisation de (3.2.3) et (3.2.4). Donc

$$\begin{aligned} (u_n, w_n) &\longrightarrow (u^*, w^*) \text{ dans } C\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)\right), \\ u_{n,t} \big|_{\Gamma_1} &\longrightarrow u_t^* \big|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(\Sigma_1), \quad w_{n,t} \big|_{\Gamma_1} \longrightarrow w_t^* \big|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(\Sigma_1), \\ \nabla w_{n,t} \big|_{\Gamma_1} &\longrightarrow \nabla w_t^* \big|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(\Sigma_1), \end{aligned}$$

Ainsi, le passage à la limite dans  $(\mathcal{P}_n)$  donne

$$\begin{aligned} (3.2.5) \quad &u_{tt}^* + b_1 u_t^* - \operatorname{div} [\mathcal{C}(\epsilon(u^*) + f(\nabla w^*))] = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ &[I - \delta \Delta] w_{tt}^* + b_2 w_t^* + D \Delta^2 w^* - \operatorname{div} [\mathcal{C}(\epsilon(u) + f(\nabla w)) \nabla w] = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ &u^*(0) = u_0, \quad u_t^*(0) = u_1, \quad w^*(0) = w_0, \quad w_t^*(0) = w_1, \\ &u^* = w^* = \nabla w^* = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\ &\mathcal{C}\epsilon(u^*)\nu + u_t^* = u_t - \mathcal{C}f(\nabla w)\nu - g(u_t), \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ &D[\Delta w^* + (1 - \mu)B_1 w^*] + D_n w_t^* = -h_1(D_n w_t) + D_n w_t, \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ &D[D_n \Delta w^* + (1 - \mu)B_2 w^*] - \delta D_n w_{tt}^* - w_t^* + D_\tau^2 w_t^* = [\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)]\nu \cdot \nabla w] \\ &\quad - D_\tau h_2(D_\tau w_t) + w_t - D_\tau^2 w_t, \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \end{aligned}$$

Puisque  $w$  satisfait (3.2.5) et la solution de (3.2.5) est unique, donc  $w = w^*$  et

$$\begin{aligned} (u_n, w_n) &\longrightarrow (u, w) \text{ dans } C\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)\right) \\ u_{n,t} \big|_{\Gamma_1} &\longrightarrow u_t \big|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(\Sigma_1), \quad w_{n,t} \big|_{\Gamma_1} \longrightarrow w_t \big|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(\Sigma_1), \\ \nabla w_{n,t} \big|_{\Gamma_1} &\longrightarrow \nabla w_t \big|_{\Gamma_1} \text{ dans } L^2(\Sigma_1), \end{aligned}$$

d'où la proposition 3.4.. ■

Montrons l'égalité de dissipation pour la solution  $(u_n, w_n)$  du problème  $(\mathcal{P}_n)$ . En effet, en appliquant l'argument standard de l'énergie au problème  $(\mathcal{P}_n)$ , on obtient pour tout  $s \leq t$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt} |u_{n,t}|^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_\Omega [\mathcal{C}\epsilon(u_n) \nabla u_{n,t}] d\Omega dt \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt} (|w_{n,t}|^2 + \delta |\nabla w_{n,t}|^2) d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} a(w_n, w_n) dt + \\ &\quad + \int_s^t \int_\Omega b_1 u_t \cdot u_t d\Omega dt + \int_s^t \int_\Omega b_2 w_t w_t d\Omega dt + \int_s^t \int_{\Gamma_1} [|u_t|^2 + |w_t|^2 + |\nabla w_t|^2] d\Gamma_1 dt \\ &\quad = \int_s^t \int_\Omega F_{1,n} u_t d\Omega dt + \int_s^t \int_\Omega F_{2,n} w_t d\Omega dt - \int_s^t \int_{\Gamma_1} (F_{6,n} - \beta_n) w_t d\Gamma_1 dt \\ &\quad - \int_s^t \int_{\Gamma_1} (F_{5,n} - \alpha_n) D_n w_t d\Gamma_1 dt - \int_s^t \int_{\Gamma_1} [-\gamma_n + F_{3,n} + F_{4,n}] u_t d\Gamma_1 dt, \end{aligned}$$

Utilisons les convergences (3.2.3) et le résultat de la proposition 3.4. pour justifie le passage à la limite quand  $n \longrightarrow \infty$  et nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [|u_t|^2 + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2] d\Omega + a(w, w) \Big|_s^t + \int_0^T \int_{\Omega} [\mathcal{C}\epsilon(u) \nabla u_t] d\Omega dt \\
 & + \int_s^t \int_{\Omega} b_1 u_t \cdot u_t d\Omega dt + \int_s^t \int_{\Omega} b_2 w_t w_t d\Omega dt + \int_s^t \int_{\Gamma_1} [|u_t|^2 + |w_t|^2 + |\nabla w_t|^2] d\Gamma_1 dt \\
 & = \int_s^t \int_{\Omega} \operatorname{div} [\mathcal{C} f(\nabla w)] u_t d\Omega dt + \int_s^t \int_{\Omega} \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] w_t d\Omega dt \\
 & - \int_s^t \int_{\Gamma_1} [[\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w - D_{\tau} h_2(D_{\tau} w_t)] - (w_t - D_{\tau}^2 w_t)] w_t d\Gamma_1 dt \\
 & - \int_s^t \int_{\Gamma_1} (h_1(D_n w_t) - D_n w_t) D_n w_t d\Gamma_1 dt - \int_s^t \int_{\Gamma_1} [-u_t + g(u_t) + \mathcal{C} f(\nabla w) \nu] u_t d\Gamma_1 dt,
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} [|u_t|^2 + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2] d\Omega + a(w, w) + \int_{\Omega} \mathcal{C} N(u, w) \cdot N(u, w) d\Omega \right) \Big|_s^t \\
 & + \int_s^t \int_{\Omega} b_2 w_t w_t d\Omega dt + \int_s^t \int_{\Omega} b_1 u_t \cdot u_t d\Omega dt + \int_s^t \int_{\Gamma_1} [|u_t|^2 + |w_t|^2 + |\nabla w_t|^2] d\Gamma_1 dt \\
 & = \int_s^t \int_{\Gamma_1} [\mathcal{C} f(\nabla w) \nu] u_t d\Gamma_1 dt + \int_s^t \int_{\Gamma_1} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w] w_t d\Gamma_1 dt \\
 & - \int_s^t \int_{\Gamma_1} [[\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w]] w_t d\Gamma_1 dt - \int_s^t \int_{\Gamma_1} h_2(D_{\tau} w_t) D_{\tau} w_t d\Gamma_1 dt \\
 & + \int_s^t \int_{\Gamma_1} [|u_t|^2 + |w_t|^2 + |D_{\tau} w_t|^2 + |D_n w_t|^2] d\Gamma_1 dt - \int_s^t \int_{\Gamma_1} h_1(D_n w_t) D_n w_t d\Gamma_1 dt \\
 & - \int_s^t \int_{\Gamma_1} g(u_t) u_t d\Gamma_1 dt - \int_s^t \int_{\Gamma_1} [\mathcal{C} f(\nabla w) \nu] u_t d\Gamma_1 dt,
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} E(t) - \frac{1}{2} E(s) + \int_s^t \int_{\Omega} b_1 u_t \cdot u_t d\Omega dt + \int_s^t \int_{\Omega} b_2 w_t w_t d\Omega dt + \int_s^t \int_{\Gamma_1} g(u_t) u_t d\Gamma_1 dt \\
 & + \int_s^t \int_{\Gamma_1} h_2(D_{\tau} w_t) D_{\tau} w_t d\Gamma_1 dt + \int_s^t \int_{\Gamma_1} h_1(D_n w_t) D_n w_t d\Gamma_1 dt = 0.
 \end{aligned}$$

La preuve du lemme 3.2. est donc terminée. ■

**Remarque 3.4.** Sous l'hypothèse 1 et l'égalité de dissipation (3.2.1), on voit que l'énergie de la solution du problème  $(\mathcal{P})$  définie par (2.1.5) est une fonction soit constante soit décroissante, donc dans tous les cas on a cette inégalité

$$E(t) \leq E(0), \forall t \geq 0.$$

### 3.2.2 Régularité de trace des solutions du problème (P)

Cette sous-section fournit plusieurs résultats de régularité de trace, qui sont critiques pour la preuve des estimations de stabilité, sans supposer des conditions géométriques sur  $\Gamma_1$  et sans considérer les composantes tangentielles du déplacement horizontal, dans la structure des feedbacks stabilisants. Ces estimations sont basées sur les estimations de traces correspondantes valables pour :

- (i) le modèle dynamique d'élasticité linéaire et,
- (ii) le modèle de Kirchhoff linéaire,

obtenus par des techniques d'analyse micro-locale, respectivement, qu'a trouvé dans [12] et [29]. Ici l'idée principale est d'obtenir des estimations pour les dérivées tangentielles sur la frontière en terme de traces de vitesse et de termes d'ordre inférieur.

Pour formuler ces résultats, on présente certaines notations. Soit  $T > 0$  fixé, on note :  $Q \equiv [0, T] \times \Omega$ ,  $\Sigma_\alpha \equiv [\alpha, T - \alpha] \times \Gamma_1$  où  $\alpha \leq T/2$ ,  $\Sigma_1 \equiv [0, T] \times \Gamma_1$ ,  $\Sigma_0 \equiv [0, T] \times \Gamma_0$ ,  $\Sigma \equiv [0, T] \times \Gamma$ .

La constante  $C$  est une constante générale, différente dans des situations diverses,  $C(E(0))$  dénote les quantités majorées qui dépendent de  $E(0)$ .

**Lemme 3.5.** *Soit  $(u, w)$  une solution faible du problème (P). Alors, pour tout  $\epsilon < 1/4$ , il existe une constante  $C$  tel que la régularité de trace suivante ait lieu*

$$(3.2.6) \quad \int_{\Sigma_\alpha} |\nabla u|^2 d\Sigma_\alpha \leq C \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2] d\Sigma_1 + C(E(0)) \int_0^t [|w|_{2-\epsilon, \Omega}^2 + |u|_{1-\epsilon, \Omega}^2] dt.$$

**Remarque 3.5.** *Remarquons que la régularité de la trace de  $\nabla u$ , annoncée par le lemme 3.5. (voir aussi le lemme 3.8. ci-dessous), ne suit pas la régularité intérieure standard des solutions faibles par l'intermédiaire de la théorie des traces. Ceux-ci sont les résultats de régularités indépendants qui utilisent fortement des arguments micro-locaux appliqués aussi bien au : système dynamique d'élasticité qu'à la plaque dynamique de Kirchhoff.*

**Preuve.**

**Etape 1.** On commence par le résultat de régularité de trace suivant, valable (voir [12]) pour le modèle d'élasticité dynamique linéaire (voir aussi [28] où un résultat analogue a été prouvé pour l'équation des ondes).

Posons

$$(3.2.7) \quad F(x, y, t) \equiv \operatorname{div} [\mathcal{C}f(\nabla w(x, y, t))],$$

où  $w$  une solution faible correspondante au problème (P). Alors la solution  $u$  satisfait le système d'élasticité dynamique "linéaire"

$$(3.2.8) \quad u_{tt} + b_1 u_t - \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u)]] = F \text{ dans } Q.$$

Selon [12], pour tout  $\epsilon < 1/2$ , on a l'estimation

$$(3.2.9) \quad \int_{\Sigma_\alpha} |\nabla u \cdot \tau|^2 d\Sigma_\alpha \leq C \int_0^T \left[ |u_t|_{0,\Gamma_1}^2 + |\epsilon(u) \cdot \nu|_{0,\Gamma_1}^2 + |F|_{(H^{1/2}(\Omega))'}^2 + |u|_{1-\epsilon,\Omega}^2 \right] dt,$$

et l'utilisation des conditions aux limites satisfaites sur  $\Gamma_1$  donne

$$\int_0^T |\epsilon(u) \cdot \nu|_{0,\Gamma_1}^2 dt = \int_0^T |-\mathcal{C}^{-1}g(u_t) - f(\nabla w) \cdot \nu|_{0,\Gamma_1}^2 dt \leq C \int_0^T |g(u_t)|_{0,\Gamma_1}^2 + |f(\nabla w)|_{0,\Gamma_1}^2 dt,$$

et par suite on a

$$(3.2.10) \quad \int_{\Sigma_\alpha} |\nabla u \cdot \tau|^2 d\Sigma_\alpha \leq C \int_0^T \left[ |u_t|_{0,\Gamma_1}^2 + |g(u_t)|_{0,\Gamma_1}^2 + |f(\nabla w)|_{0,\Gamma_1}^2 + |F|_{(H^{1/2}(\Omega))'}^2 + |u|_{1-\epsilon,\Omega}^2 \right] dt.$$

**Remarque 3.6.** L'estimation dans l'inégalité (3.2.10), quand elle est appliqué au système dynamique homogène d'élasticité, affirme que les traces des dérivées tangentielles de  $u$  sont majorées par les traces de la vitesse modulo les termes d'ordre inférieur. Un résultat de nature semblable a été obtenu pour l'équation des ondes classique dans [28].

**Etape 2.** Estimation du quatrième terme du membre de droite de l'inégalité (3.2.10).

**Proposition 3.6.** Soit  $\epsilon < 1/2$ . Alors la fonction  $F$  définie dans (3.2.7) satisfait pour tout  $t \geq 0$

$$(3.2.11) \quad |F(t)|_{(H^{1/2}(\Omega))'} \leq C |w(t)|_{2,\Omega} |w(t)|_{2-\epsilon,\Omega}.$$

**Preuve.** Soit  $\phi \in H^{1/2}(\Omega)$ . Un calcul direct donne

$$(3.2.12) \quad \begin{aligned} (F, \phi)_{0,\Omega} &= (\operatorname{div} [\mathcal{C} f(\nabla w)], \phi)_{0,\Omega} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j} \mathcal{C}_{i,j} \partial_k (\partial_i w_i \partial_j w_j), \phi \right)_{0,\Omega} \\ &\leq C \left( \left[ \sum_{i,j} \partial_i w_i \partial_k \partial_j w_j \right], \phi \right)_{0,\Omega} \leq |w|_{2,\Omega} |(D_1 w) \phi|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

où  $D_1$  représente un opérateur différentiel du premier ordre.

Mais, par l'inégalité de Hölder

$$|(D_1 w) \phi|_{0,\Omega} \leq C |D_1 w|_{2p,\Omega} |\phi|_{2q,\Omega} \leq C |w|_{W_{2p}^1(\Omega)} |\phi|_{L^{2q}(\Omega)},$$

où  $1/p + 1/q = 1$ , et par les injections de Sobolev

$$(3.2.13) \quad H^{2-\epsilon}(\Omega) \subset W_4^1(\Omega), \quad H^{1/2}(\Omega) \subset L^4(\Omega), \quad \epsilon \leq 1/2,$$

en prenant  $p = q = 2$ , on obtient

$$(3.2.14) \quad |(D_1 w) \phi|_{0,\Omega} \leq C |w|_{2-\epsilon,\Omega} |\phi|_{1/2,\Omega}.$$

En remplaçant dans (3.2.12) on aura

$$(3.2.15) \quad (F, \phi)_{0,\Omega} \leq C |w|_{2,\Omega} |w|_{2-\epsilon,\Omega} |\phi|_{1/2,\Omega},$$

en raison de la dualité, on trouve la proposition 3.6. ■

**Etape 3.** On donne une autre estimation, pour la dérivée normale de vecteur  $u$ .

**Proposition 3.7.** *Pour tout  $\epsilon \leq 1/4$  on a*

$$(3.2.16) \quad \int_{\Sigma_\alpha} |\nabla u \cdot \nu|^2 d\Sigma_\alpha \leq C \int_{\Sigma_\alpha} [|g(u_t)|^2 + |\nabla u \cdot \tau|^2] d\Sigma_\alpha + C(E(0)) \int_\alpha^{T-\alpha} |w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 dt.$$

**Preuve.** En réécrivant les conditions aux limites sur la variable  $u$ , on trouve la relation

$$(3.2.17) \quad \epsilon(u) \cdot \nu = \tilde{g}$$

où on a introduit la variable

$$\tilde{g} \equiv -\mathcal{C}^{-1}g(u_t) - f(\nabla w) \cdot \nu,$$

$\tilde{g}$  satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} |\tilde{g}|_{L^2(\Sigma_\alpha)}^2 &\leq C \left( |g(u_t)|_{L^2(\Sigma_\alpha)}^2 + |f(\nabla w)|_{L^2(\Sigma_\alpha)}^2 \right) \\ &\leq C |g(u_t)|_{L^2(\Sigma_\alpha)}^2 + C \sup_{\substack{t \in [\alpha, T-\alpha] \\ \alpha \leq T/2}} |w|_{W_4^1(\Gamma_1)}^2 \int_\alpha^{T-\alpha} |w(t)|_{W_4^1(\Gamma_1)}^2 dt, \end{aligned}$$

d'où

$$(3.2.18) \quad |\tilde{g}|_{L^2(\Sigma_\alpha)}^2 \leq C |g(u_t)|_{L^2(\Sigma_\alpha)}^2 + C(E(0)) \int_\alpha^{T-\alpha} |w(t)|_{2-\epsilon,\Omega}^2 dt,$$

où on a utilisé l'estimation

$$\begin{aligned} |(\nabla w)^2|_{L^2(\Sigma_\alpha)}^2 &= \int_\alpha^{T-\alpha} |\nabla w(t)|_{L^4(\Gamma_1)}^4 dt \leq \int_\alpha^{T-\alpha} |\nabla w(t)|_{L^4(\Gamma)}^4 dt \\ (3.2.19) \quad &\leq E(0) \int_\alpha^{T-\alpha} |w(t)|_{2-\epsilon,\Omega}^2 dt, \end{aligned}$$

cette estimation a lieu à cause d'un théorème de trace, l'égalité de dissipation (3.2.1) et les injections de Sobolev suivantes :

$$(3.2.20) \quad H^{3/2-\epsilon}(\Gamma) \subset W_4^1(\Gamma), \quad \epsilon \leq 1/4$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} |(\nabla w)^2|_{L^2(\Sigma_\alpha)}^2 &= \int_\alpha^{T-\alpha} \left( \int_{\Gamma_1} |\nabla w^4| d\Gamma_1 \right)^{1/2} \left( \int_{\Gamma_1} |\nabla w|^4 d\Gamma_1 \right)^{1/2} dt \\ &\leq \sup_{\substack{t \in [\alpha, T-\alpha] \\ \alpha \leq T/2}} |w|_{W_4^1(\Gamma_1)}^2 \int_\alpha^{T-\alpha} |w(t)|_{W_4^1(\Gamma_1)}^2 dt \leq \sup_{t \in [0, T]} |w|_{W_4^1(\Gamma_1)}^2 \int_\alpha^{T-\alpha} |w(t)|_{W_4^1(\Gamma_1)}^2 dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |w|_{W_4^1(\Gamma_1)}^2 &\leq \sup_{t \in [0, T]} |w|_{H^{3/2-\epsilon}(\Gamma)}^2 \leq \sup_{t \in [0, T]} |w(t)|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} E(t) \leq E(0), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (3.2.19).

D'autre part, posons

$$\tilde{d} \equiv \nabla u \cdot \tau,$$

et écrivons

$$(3.2.21) \quad \epsilon(u) \cdot \nu = \tilde{g},$$

$$(3.2.22) \quad \nabla u \cdot \tau = \tilde{d}.$$

Soit alors le système algébrique linéaire suivant

$$A\tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{d} \end{bmatrix}^T,$$

où

$$A = \begin{bmatrix} \nu_1 & \frac{1}{2}(\nu_2) & \frac{1}{2}(\nu_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\nu_1) & \frac{1}{2}(\nu_1) & \nu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_2 & \nu_1 \end{bmatrix} \quad \text{et } \tilde{u} = (u_{1,x}, u_{1,y}, u_{2,x}, u_{2,y}).$$

Le déterminant de la matrice  $A$  est égal à

$$-1/2(\nu_1)^4 - (\nu_1)^2(\nu_2)^2 - 1/2(\nu_2)^4 = -1/2,$$

(c'est-à-dire que le système linéaire admet une unique solution).

Donc après la résolution du système ci-dessus (c'est-à-dire  $\tilde{u} = A^{-1} [\tilde{g}, \tilde{d}]^T$ ) et après intégration sur  $\Sigma_\alpha$  on trouve l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\alpha} |\tilde{u}|^2 d\Sigma_\alpha &= \int_{\Sigma_\alpha} [|u_{1,x}|^2 + |u_{2,x}|^2 + |u_{1,y}|^2 + |u_{2,y}|^2] d\Sigma_\alpha \\ &= \int_{\Sigma_\alpha} [|D_x u|^2 + |D_y u|^2] d\Sigma_\alpha = \int_{\Sigma_\alpha} \left| A^{-1} [\tilde{g}, \tilde{d}]^T \right|^2 d\Sigma_\alpha \leq C \int_{\Sigma_\alpha} \left| [\tilde{g}, \tilde{d}]^T \right|^2 d\Sigma_\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$(3.2.23) \quad \int_{\Sigma_\alpha} [|D_x u|^2 + |D_y u|^2] d\Sigma_\alpha \leq C \int_{\Sigma_\alpha} \left[ |\tilde{g}|^2 + |\tilde{d}|^2 \right] d\Sigma_\alpha,$$

par suite de (3.2.18) on a

$$\int_{\Sigma_\alpha} [|D_x u|^2 + |D_y u|^2] d\Sigma_\alpha \leq C \int_{\Sigma_\alpha} [|g(u_t)|^2 + |\nabla u \cdot \tau|^2] d\Sigma_\alpha + C E(0) \int_\alpha^{T-\alpha} |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega}^2 dt,$$

et

$$\int_{\Sigma_\alpha} |\nabla u \cdot \nu|^2 d\Sigma_\alpha = \int_{\Sigma_\alpha} [|D_x u \cdot \nu|^2 + |D_y u \cdot \nu|^2] d\Sigma_\alpha \leq \int_{\Sigma_\alpha} [|D_x u|^2 + |D_y u|^2] d\Sigma_\alpha,$$

ce qui donne le résultat de la proposition 3.7. ■

**Etape 4.** Le regroupement des inégalités (3.2.10), (3.2.16) et (3.2.11) donne

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\alpha} |\nabla u|^2 d\Sigma_\alpha &\leq C \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |f(\nabla w)|^2] d\Sigma_1 \\ (3.2.24) \quad &+ C(E(0)) \int_0^T \left[ |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega}^2 + |u(t)|_{1-\epsilon, \Omega}^2 \right] dt. \end{aligned}$$

et l'estimation du terme  $|f(\nabla w)|_{0, \Sigma_1}^2$  donnée par l'inégalité (3.2.19), amène au résultat du lemme 3.5. ■

L'autre résultat est donné par la régularité de trace prouvée pour le déplacement vertical  $w$ .

**Lemme 3.8.** Soit  $(u, w)$  une solution faible du système (2.1.1) avec les conditions aux limites (2.1.3). Alors,

$$\begin{aligned} (3.2.25) \quad \int_{\Sigma_\alpha} \left[ |D_n^2 w|^2 + |D_\tau^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 \right] d\Sigma_\alpha &\leq C \int_{\Sigma_1} [|\nabla w_t|^2 + \\ &|h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + C(E(0)) |u_t|^2] d\Sigma_1 + C(E(0)) \int_0^T |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega}^2 dt. \end{aligned}$$

**Preuve.**

**Etape 1.** On pose

$$\tilde{F} \equiv \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w],$$

alors  $w$  satisfait l'équation linéaire des plaques de Kirchhoff

$$(3.2.26) \quad [I - \delta \Delta] w_{tt} + b_2 w_t + D \Delta^2 w = \tilde{F} \text{ dans } Q.$$

L'estimation prouvée dans le Théorème 2.1 de [29] pour la régularité de trace est valable pour (3.2.26), c'est-à-dire

$$(3.2.27) \quad \begin{aligned} & \int_{\Sigma_\alpha} \left[ |D_n^2 w|^2 + |D_\tau^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 \right] d\Sigma_\alpha \leq C \int_{\Sigma_1} \left[ |\nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 \right. \\ & \left. + |h_2(D_\tau w_t)|^2 \right] d\Sigma_1 + \int_0^T \left[ |\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w|_{-1, \Gamma_1}^2 + \left| \tilde{F}(t) \right|_{(H^{3/2}(\Omega))'}^2 \right. \\ & \left. + C |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega}^2 \right] dt \leq C \int_{\Sigma_1} \left[ |\nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2 \right] d\Sigma_1 + \\ & C \int_0^T \left[ |g(u_t) \cdot \nabla w|_{-1, \Gamma_1}^2 + \left| \tilde{F}(t) \right|_{(H^{3/2}(\Omega))'}^2 + |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega}^2 \right] dt, \end{aligned}$$

où on a utilisé les conditions aux limites vérifiées par  $u$ .

**Etape 2.** Il s'agit de majorer le terme  $\tilde{F}$  dans (3.2.27), ce qui est donné par la proposition ci-dessous.

**Proposition 3.9.** *Pour tout  $\epsilon < 1/2$ , les estimations suivantes ont lieu*

$$(3.2.28) \quad \left| \tilde{F}(t) \right|_{(H^{3/2}(\Omega))'} \leq C \left[ |N(u(t), w(t))|_{0, \Omega} |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega} + |u_t(t)|_{0, \Gamma_1} |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega} \right],$$

et par suite,

$$(3.2.29) \quad \int_0^T \left| \tilde{F}(t) \right|_{(H^{3/2}(\Omega))'}^2 dt \leq C(E(0)) \int_0^T \left[ |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega}^2 + |u_t(t)|_{0, \Gamma_1}^2 \right] dt.$$

**Preuve.** Soit  $\phi \in H^{3/2}(\Omega)$ . En appliquant le théorème de la divergence en tenant compte des conditions aux limites, on obtient

$$(3.2.30) \quad \begin{aligned} \left( \tilde{F}, \phi \right)_{0, \Omega} &= -(\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w, \nabla \phi)_{0, \Omega} + (\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w, \phi)_{0, \Gamma_1} \\ &= (-\mathcal{C}N(u, w), \nabla \phi \otimes \nabla w)_{0, \Omega} + (-g(u_t) \nabla w, \phi)_{0, \Gamma_1}. \end{aligned}$$

Le premier terme de (3.2.30) est majoré comme suit

$$(3.2.31) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], \nabla \phi \otimes \nabla w)_{0, \Omega} \leq C |N(u, w)|_{0, \Omega} |\nabla \phi \otimes \nabla w|_{0, \Omega} \\ & \leq C |N(u, w)|_{0, \Omega} |\nabla w|_{L^4(\Omega)} |\nabla \phi|_{L^4(\Omega)} \leq C |N(u, w)|_{0, \Omega} |w|_{W_4^1(\Omega)} |\nabla \phi|_{1/2, \Omega} \\ & \leq C |N(u, w)|_{0, \Omega} |w|_{2-\epsilon, \Omega} |\phi|_{3/2, \Omega}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les injections de Sobolev (3.2.13).

Pour estimer le terme qui reste dans (3.2.30) on procède comme suit

$$(3.2.32) \quad \begin{aligned} (g(u_t) \nabla w, \phi)_{0, \Gamma_1} &\leq |g(u_t)|_{0, \Gamma_1} |(\nabla w) \phi|_{0, \Gamma_1} \\ &\leq C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{1, \Gamma_1} |\phi|_{0, \Gamma_1} \leq C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{3/2, \Omega} |\phi|_{3/2, \Omega}, \end{aligned}$$

en combinant (3.2.30)–(3.2.32) on trouve le résultat formulé dans la première partie de la proposition.

La deuxième inégalité se démontre simplement par intégration de la première en tenant compte de l'égalité de dissipation (3.2.1).

En effet,

$$\begin{aligned} (\tilde{F}, \phi)_{0, \Omega} &\leq C |N(u, w)|_{0, \Omega} |w|_{2-\epsilon, \Omega} |\phi|_{3/2, \Omega} + C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{3/2, \Omega} |\phi|_{3/2, \Omega} \\ &\leq C \left( |N(u, w)|_{0, \Omega} |w|_{2-\epsilon, \Omega} + |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{3/2, \Omega} \right) |\phi|_{3/2, \Omega}. \end{aligned}$$

En raison de la dualité on obtient

$$\left| \tilde{F} \right|_{(H^{3/2}(\Omega))'} \leq C \left( |N(u, w)|_{0, \Omega} |w|_{2-\epsilon, \Omega} + |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{3/2, \Omega} \right),$$

et l'intégration sur  $[0, T]$  donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \tilde{F} \right|_{(H^{3/2}(\Omega))'}^2 dt &\leq C \left( \sup_{[0, T]} |N(u, w)|_{0, \Omega}^2 \right) \int_0^T |w|_{2-\epsilon, \Omega}^2 dt + C \left( \sup_{[0, T]} |w|_{2, \Omega}^2 \right) \int_0^T |u_t|_{0, \Gamma_1}^2 dt \\ &\leq CE(0) \int_0^T \left[ |w|_{2-\epsilon, \Omega}^2 + |u_t|_{0, \Gamma_1}^2 \right] dt. \end{aligned}$$

■

### ***Etape 3.***

**Proposition 3.10.** *On a*

$$(3.2.33) \quad \int_0^T |g(u_t) \nabla w|_{-1, \Gamma_1}^2 dt \leq CE(0) |u_t|_{0, \Sigma_1}^2.$$

**Preuve.** *On calcule comme dans (3.2.32) et on obtient*

$$|g(u_t) \nabla w|_{-1, \Gamma_1} \leq C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{1, \Gamma_1} \leq C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{2-\epsilon, \Omega},$$

en intégrant l'inégalité ci-dessus par rapport au temps et en rappelant la propriété de dissipation (3.2.1), on obtient le résultat de la proposition.

En effet, pour  $\phi \in H^1(\Gamma_1)$  (3.2.32) donne

$$\begin{aligned} (g(u_t) \nabla w, \phi)_{0, \Gamma_1} &\leq C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{1, \Gamma_1} |\phi|_{0, \Gamma_1} \\ &\leq C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{1, \Gamma_1} |\phi|_{1, \Gamma_1}, \end{aligned}$$

et par suite

$$|g(u_t) \nabla w|_{-1, \Gamma_1} \leq C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{1, \Gamma_1} \leq C |u_t|_{0, \Gamma_1} |w|_{2-\epsilon, \Omega},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^T |g(u_t) \nabla w|_{-1, \Gamma_1}^2 dt &\leq C \left( \sup_{t \in [0, T]} |w|_{2-\epsilon, \Omega}^2 \right) \int_0^T |u_t|_{0, \Gamma_1}^2 dt \\ &\leq C(E(0)) \int_0^T |u_t|_{0, \Gamma_1}^2 dt. \end{aligned}$$

■

**Etape 4.** Achèvement de la preuve du lemme 3.8.

En combinant les résultats des deux propositions avec l'inégalité (3.2.27) on trouve la conclusion finale du lemme 3.8. ■

### 3.3 Estimation de la stabilité frontière

Le but principal de cette section est de prouver l'estimation du lemme 3.11.

**Lemme 3.11.** *Soit  $(u, w)$  une solution régulière du problème  $(\mathcal{P})$ . Supposons que la condition géométrique (2.1.11) est maintenue sur  $\Gamma_0$ . Alors, il existe  $T$  tel que pour tout  $\epsilon < 1/4$ , l'estimation suivante a lieu*

$$\begin{aligned} E(0) + E(T) + \int_0^T E(t) dt &\leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 \\ (3.3.1) \quad &+ |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 + C \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt + C_T(E(0)) \text{lot}(u, w), \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation "des termes d'ordre inférieur"

$$(3.3.2) \quad \text{lot}(u, w) = \int_0^T [|u(t)|_{1-\epsilon, \Omega}^2 + |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega}^2] dt.$$

L'estimation du lemme ci-dessus est critique à la preuve du résultat principal de la stabilité, elle suit le type "d'inégalité inverse". Le reste de cette section est consacré à la preuve du lemme 3.11, l'idée est d'appliquer la méthode des multiplicateurs (pour cette méthode voir [18]), qui amène à l'estimation de l'énergie par les termes de traces sur la frontière et les termes d'ordre inférieur. La suite, cruciale, est d'éliminer les termes "indésirables" des traces, en utilisant les résultats de régularité de trace présentés dans la **section 3.2**.

**Remarque 3.7.** *Le résultat du lemme 3.11. peut être prolongé pour toutes les solutions faibles. En effet, cela peut être achevé en appliquant un argument de "régularisation" comme*

dans [27]. Afin d'éviter les complications techniques supplémentaire et pour la clarté de l'exposé, nous ne ferons pas cela ici et pour plus de détails on référera à [27] et aussi [13], [14].

### 3.3.1 Formulation variationnelle et identités préliminaires

On commence par l'écriture de la formulation variationnelle du problème ( $\mathcal{P}$ ). Soient alors deux fonctions tests,  $\phi \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  et  $\psi \in H^2(\Omega)$ ;  $\psi|_{\Gamma_0} = 0$ . Le système de Von Karman admet la formulation variationnelle suivante :

$$(3.3.3) \quad (u_{tt}, \phi)_{\Omega} + (b_1 u_t, \phi)_{\Omega} + (\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], \epsilon(\phi))_{\Omega} + \langle g(u_t), \phi \rangle_{\Gamma_1} - \langle \mathcal{C}\epsilon(u) \nu, \phi \rangle_{\Gamma_0} = 0,$$

$$(3.3.4) \quad (w_{tt}, \psi)_{\Omega} + \delta(\nabla w_{tt}, \nabla \psi)_{\Omega} + a(w, \psi) + (b_2 w_t, \psi)_{\Omega} + (\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], \nabla \psi \otimes \nabla w)_{\Omega} \\ + \langle h_1(D_n w_t), D_n \psi \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_2(D_{\tau} w_t), D_{\tau} \psi \rangle_{\Gamma_1} - \langle \Delta w, D_n \psi \rangle_{\Gamma_0} = 0,$$

où on a utilisé les conditions aux limites satisfaites sur  $\Gamma$ .

On applique cette forme variationnelle avec divers choix de fonctions tests. Afin de faciliter la vérification des calculs, on prouve ci-dessous quelques identités tensorielles élémentaires. Dans ce qui suit, soit  $h = x - x_0$  un champ vectoriel radial (on utilise aussi la convention de sommation des indices répétés), alors

$$(3.3.5) \quad \epsilon(h \nabla u) = \epsilon(u) + M,$$

où le tenseur  $M$  est donné par

$$(3.3.6) \quad M \equiv \begin{bmatrix} D_{x_1, x_i}^2 u_1 h_i & 1/2 [D_{x_2, x_i}^2 u_1 h_i + D_{x_1, x_i}^2 u_2 h_i] \\ 1/2 [D_{x_2, x_i}^2 u_1 h_i + D_{x_1, x_i}^2 u_2 h_i] & D_{x_2, x_i}^2 u_2 h_i \end{bmatrix}.$$

En effet, puisque

$$\epsilon(h \nabla u) = 1/2 (\nabla(h \nabla u) + \nabla^T(h \nabla u)),$$

donc

$$\epsilon(h \nabla u) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 \partial_1 h_1 + \partial_2 u_1 \partial_1 h_2 & \partial_1 u_2 \partial_1 h_1 + \partial_2 u_2 \partial_1 h_2 \\ \partial_1 u_1 \partial_2 h_1 + \partial_2 u_1 \partial_2 h_2 & \partial_1 u_2 \partial_2 h_1 + \partial_2 u_2 \partial_2 h_2 \end{bmatrix} + M,$$

et

$$\partial_1 h_1 = \partial_2 h_2 = 1, \partial_2 h_1 = \partial_1 h_2 = 0,$$

d'où le résultat voulu.

Si  $A$  est un tenseur symétrique d'ordre quatre donné par ses coefficients  $a_{ij}$ ,

$$A \equiv \{a_{ij}\},$$

alors

$$(3.3.7) \quad A \cdot M = a_{kj} D_{x_k, x_i}^2 u_j h_i,$$

$$(3.3.8) \quad \nabla (\nabla w h) = \nabla w + [w_{x_1, x_i} h_i, w_{x_2, x_i} h_i],$$

et

$$(3.3.9) \quad \nabla (\nabla w h) \otimes \nabla w = \nabla w \otimes \nabla w + \nabla w \otimes [w_{x_1, x_i} h_i, w_{x_2, x_i} h_i],$$

$$(3.3.10) \quad A \cdot (\nabla (\nabla w h) \otimes \nabla w) = A \cdot \nabla w \otimes \nabla w + a_{kj} w_{x_j} w_{x_k, x_i} h_i.$$

Pour montrer les relations (3.3.7)–(3.3.10), il suffit de rappeler les définitions de "·" et "⊗" c'est-à-dire :

$$A \cdot B = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} \quad \text{et} \quad u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \otimes [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 \end{bmatrix}.$$

Soit  $B$  un autre tenseur symétrique tel que

$$a_{ji} = c_{jl} b_{li},$$

avec les coefficients constants et symétriques  $c_{ij}$ . Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [A \cdot B h] &= D_{x_k} (a_{ij} b_{ij} h_k) = c_{il} D_{x_k} (b_{lj} b_{ij}) h_k + a_{ij} b_{ij} \operatorname{div} (h) \\ &= 2A \cdot B + c_{il} b_{lj} D_{x_k} (b_{ij}) h_k + c_{il} b_{ij} D_{x_k} (b_{lj}) h_k \\ &= 2A \cdot B + a_{ij} D_{x_k} (b_{ij}) h_k + a_{lj} D_{x_k} (b_{lj}) h_k \\ &= 2A \cdot B + 2a_{ji} D_{x_k} (b_{ji}) h_k, \end{aligned}$$

d'où

$$(3.3.11) \quad \operatorname{div} [A \cdot B h] = 2A \cdot B + c_{il} D_{x_k} (b_{lj} b_{ij}) h_k = 2A \cdot B + 2a_{ji} D_{x_k} (b_{ji}) h_k.$$

Dans le cas particulier où  $A$  et  $B$  sont donnés par

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)], \\ B &= \epsilon(u) + f(\nabla w), \end{aligned}$$

la formule ci-dessus se lit

$$(3.3.12) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \cdot [\epsilon(u) + f(\nabla w)] h] &= 2\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \cdot [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \\ &\quad + 2a_{ij} \left[ D_{x_k, x_j}^2 u_i + w_{x_j} D_{x_j, x_k}^2 w \right] h_k. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Première estimation

Dans cette sous-section on prouve une estimation préliminaire où on montre que l'énergie du système est bornée par les traces sur la frontière modulo les termes d'ordre inférieur.

**Lemme 3.12.** *Soit  $(u, w)$  une solution régulière du problème  $(\mathcal{P})$ . Supposons que la condition géométrique (2.1.11) est maintenue sur  $\Gamma_0$ . Alors, il existe  $T$  suffisamment grand, tel que pour toute constante  $\epsilon < 1/4$ , l'estimation suivante a lieu*

$$(3.3.13) \quad \begin{aligned} E(T) + \int_0^T E(t) dt &\leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 \\ &\quad + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 + C \int_{\Sigma_1} [|\nabla u|^2 + |D_n^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 + |D_\tau^2 w|^2] d\Sigma_1 \\ &\quad + C \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt + C_T(E(0)) \text{lot}(u, w). \end{aligned}$$

**Preuve.**

**Etape 1.** On utilise  $\phi = \nabla u h$  comme fonction test dans la première égalité de la formulation variationnelle, en tenant compte de (3.3.5) et (3.3.7) avec

$$A \equiv \mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)],$$

on obtient

$$(3.3.14) \quad (\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], \epsilon(\nabla u h)) = (\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], \epsilon(u)) + (a_{ij}, D_{x_k, x_j}^2 u_i h_k),$$

et on intègre sur  $Q$ , on trouve

$$(3.3.15) \quad \begin{aligned} (u_t, h \nabla u)_\Omega|_0^T + \int_0^T (b_1 u_t, h \nabla u)_\Omega dt - 1/2 \int_\Sigma |u_t|^2 h \cdot \nu d\Sigma + \int_Q |u_t|^2 dQ \\ + \int_0^T [(\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], \epsilon(u))_\Omega + (a_{ij}, D_{x_k, x_j}^2 u_i h_k)_\Omega + \langle g(u_t), h \nabla u \rangle_{\Gamma_1} \\ - \langle \mathcal{C}[\epsilon(u)], \epsilon(u) \nu h \rangle_{\Gamma_0}] dt = 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $u$  est nul sur  $\Gamma_0$  et

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_{tt}, h \nabla u)_\Omega dt &= \int_Q \frac{d}{dt} (u_t h \nabla u) dQ - \int_Q u_t h \nabla u_t dQ = (u_t, h \nabla u)_\Omega|_0^T \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_Q \text{div}(|u_t|^2 h) dQ + \frac{1}{2} \int_Q |u_t|^2 [h_{1,x_1} + h_{2,x_2}] dQ, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^T (u_{tt}, h \nabla u)_\Omega dt = (u_t, h \nabla u)_\Omega|_0^T - \frac{1}{2} \int_\Sigma |u_t|^2 h \cdot \nu d\Sigma + \frac{1}{2} \int_Q |u_t|^2 dQ,$$

et aussi

$$(3.3.16) \quad \mathcal{C}\epsilon(u) \nu \nabla u h = \mathcal{C}\epsilon(u) \cdot \epsilon(u) \nu h \text{ sur } \Gamma_0.$$

En effet, pour montrer (3.3.16), il suffit de remarquer les identités suivantes satisfaites sur  $\Gamma_0$  (remarquons que  $D_\tau u = 0$ , car  $u = 0$  sur  $\Gamma_0$ )

$$\begin{aligned} \nabla u h &= (D_n u \nu + D_\tau u \tau) h = D_n u \nu h, \\ \text{trace}(\epsilon(u)) &= \text{div}(u) = D_n u \cdot \nu + D_\tau u \cdot \tau = D_n u \cdot \nu, \\ \epsilon(u) \nu &= [D_n u_1 \nu_1^2, D_n u_2 \nu_2^2] + (1/2) \nu^T (D_n u \nu^T), \\ \epsilon(u) \cdot \epsilon(u) &= (D_n u_i \nu_i)^2 + (1/2) (D_n u \nu^T)^2. \end{aligned}$$

D'où

$$(3.3.17) \quad \begin{aligned} \epsilon(u) \nu \nabla u h &= \{[D_n u_1 \nu_1^2, D_n u_2 \nu_2^2] + (1/2) \nu^T (D_n u \nu^T)\} D_n u \nu h \\ &= \left( (D_n u_i \nu_i)^2 + (1/2) (D_n u \nu^T)^2 \right) h \nu = \epsilon(u) \cdot \epsilon(u) h \nu. \end{aligned}$$

De la même façon on a

$$(3.3.18) \quad \text{trace}[\epsilon(u)] I \nu \nabla u h = (D_n u \nu)^2 \nu h = \text{trace}[\epsilon(u)] I \cdot \epsilon(u) \nu h.$$

L'identité (3.3.16) se montre maintenant de (3.3.17), (3.3.18) et de la définition du tenseur symétrique  $\mathcal{C}$ .

Pour obtenir les estimations de la deuxième variable on applique la formulation variationnelle avec la fonction test  $\psi \equiv \nabla w h$ .

En appliquant (3.3.10) avec  $A \equiv \mathcal{C}N(u, w)$ , on obtient

$$(3.3.19) \quad \begin{aligned} (\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], (\nabla(\nabla w h) \otimes \nabla w)) &= 2(\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], f(\nabla w)) \\ &\quad + (a_{ij} w_{x_j}, D_{x_i, x_k}^2 w h_k). \end{aligned}$$

On remplace (3.3.19) dans (3.3.4) et on intègre sur  $Q$ , on trouve

$$(3.3.20) \quad \begin{aligned} (w_t, h \nabla w)_\Omega|_0^T + \delta (\nabla w_t, \nabla(h \nabla w))_\Omega|_0^T + \int_0^T [ |w_t|_{0,\Omega}^2 + (b_2 w_t, h \nabla w)_\Omega + a(w, w) \\ + 2(\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)], f(\nabla w))_\Omega + (a_{ij} w_{x_j}, D_{x_i, x_k}^2 w h_k)_\Omega ] dt = \\ 1/2 \int_{\Sigma_1} [ |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 - D/2 [w_{xx} + w_{yy} + 2\mu w_{xx} w_{yy} + 2(1-\mu) w_{xy}] ] h \nu \\ + h_1 (D_n w_t) D_n (h \nabla w) + h_2 (D_\tau w_t) D_\tau (h \nabla w) ] d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_0} |\Delta w|^2 h \nu d\Sigma_0, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que :

(i) On applique le théorème de la divergence, en tenant compte des conditions aux limites satisfaites par  $w$  sur  $\Gamma_0$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^T (w_{tt}, \psi)_\Omega dt &= \int_Q w_{tt} h \nabla w dQ = \int_Q \left[ \frac{d}{dt} (w_t h \nabla w) - w_t h \nabla w_t \right] dQ \\ &= (w_t, h \nabla w)_\Omega \Big|_0^T - 1/2 \int_Q \operatorname{div} (|w_t|^2 h) dQ + \int_Q |w_t|^2 \operatorname{div} (h) dQ \\ &= (w_t, h \nabla w)_\Omega \Big|_0^T - 1/2 \int_{\Sigma_1} |w_t|^2 h \nu d\Sigma_1 + \int_Q |w_t|^2 dQ. \end{aligned}$$

(ii) De la même manière que précédemment, on trouve

$$\begin{aligned} \int_Q \nabla w_{tt} \nabla (h \nabla w) dQ &= \int_Q \left[ \frac{d}{dt} (\nabla w_t \nabla (h \nabla w)) - \nabla w_t \nabla (h \nabla w_t) \right] dQ \\ &= (\nabla w_t, \nabla (h \nabla w))_\Omega \Big|_0^T - \int_\Sigma |\nabla w_t|^2 h \nu d\Sigma + \int_Q [\Delta w_t \nabla w_t h] dQ \\ &= (\nabla w_t, \nabla (h \nabla w))_\Omega \Big|_0^T - \int_\Sigma |\nabla w_t|^2 h \nu dQ + \int_Q [1/2 \operatorname{div} (|\nabla w_t|^2 h) - |\nabla w_t|^2] dQ \\ &= (\nabla w_t, \nabla (h \nabla w))_\Omega \Big|_0^T - 1/2 \int_\Sigma |\nabla w_t|^2 h \nu d\Sigma - \int_Q |\nabla w_t|^2 dQ, \end{aligned}$$

donc

$$\int_Q \nabla w_{tt} \nabla (h \nabla w) dQ = (\nabla w_t, \nabla (h \nabla w))_\Omega \Big|_0^T - 1/2 \int_{\Sigma_1} |\nabla w_t|^2 h \nu d\Sigma_1 - \int_Q |\nabla w_t|^2 dQ.$$

(iii) On a aussi

$$\langle \Delta w, \nabla (h \nabla w) \nu \rangle_{\Gamma_0} = \langle \Delta w, \Delta w h \nu \rangle_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_0} \Delta w \nabla w \operatorname{div} (h) \nu d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_0} |\Delta w|^2 h \nu d\Gamma_0.$$

(iv) Les conditions aux limites satisfaites par  $w$  sur  $\Gamma_0$  donnent

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} |w_t|^2 h \nu d\Sigma_0 &= (w, w_t h \nu)_{\Gamma_0} \Big|_0^T - \int_{\Sigma_0} w w_{tt} h \nu d\Sigma_0 = 0, \\ \int_{\Sigma_0} |\nabla w_t|^2 h \nu d\Sigma_0 &= (\nabla w, \nabla w_t h \nu)_{\Gamma_0} \Big|_0^T - \int_{\Sigma_0} \nabla w \nabla w_{tt} h \nu d\Sigma_0 = 0. \end{aligned}$$

(v) Calculons maintenant  $a(w, h \nabla w)$  (noter que,  $\nabla w h = w_x h_1 + w_y h_2$ ).

1. L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_{xx} (h \nabla w)_{xx} d\Omega &= \int_\Omega w_{xx} (w_x h_1 + w_y h_2)_{xx} d\Omega = 2 \int_\Omega [(w_{xx})^2 + 1/4 \nabla (w_{xx})^2 h] d\Omega \\ &= 2 \int_\Omega [(w_{xx})^2 - 1/4 \nabla (w_{xx})^2 \operatorname{div} (h)] d\Omega + 1/2 \int_\Gamma (w_{xx})^2 h \nu d\Gamma \\ &= \int_\Omega (w_{xx})^2 d\Omega + 1/2 \int_\Gamma (w_{xx})^2 h \nu d\Gamma. \end{aligned}$$

2. De la même façon on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_{yy} (h \nabla w)_{yy} d\Omega &= 2 \int_{\Omega} [(w_{yy})^2 - 1/4 \nabla (w_{yy})^2 \operatorname{div} (h)] d\Omega + 1/2 \int_{\Gamma} (w_{yy})^2 h \nu d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (w_{yy})^2 d\Omega + 1/2 \int_{\Gamma} (w_{yy})^2 h \nu d\Gamma. \end{aligned}$$

3. Un simple calcul donne

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} [w_{xx} (h \nabla w)_{yy} + w_{yy} (h \nabla w)_{xx}] d\Omega &= 2\mu \int_{\Omega} w_{xx} w_{yy} d\Omega + \mu \int_{\Gamma} w_{xx} w_{yy} h \nu d\Gamma, \\ 2(1-\mu) \int_{\Omega} w_{xy} (h \nabla w)_{xy} d\Omega &= 2(1-\mu) \int_{\Omega} w_{xy} w_{xy} d\Omega + (1-\mu) \int_{\Gamma} w_{xy} w_{xy} h \nu d\Gamma, \end{aligned}$$

et

$$l \int_{\Gamma_1} w h \nabla w d\Gamma_1 = \frac{l}{2} \langle \nabla w^2, h \rangle_{\Gamma_1} = \frac{l}{2} \langle w^2, \operatorname{div} (h) \rangle_{\Gamma_1} = l \int_{\Gamma_1} w^2 d\Gamma_1,$$

donc

$$a(w, h \nabla w) = a(w, w) + \frac{D}{2} \int_{\Gamma} [(w_{xx})^2 + (w_{yy})^2 + 2w_{xx}w_{yy} + 2(1-\mu)(w_{xy})^2] h \nu d\Gamma.$$

d'où on aura l'inégalité (3.3.20).

L'addition de (3.3.15) et (3.3.20) donne

$$\begin{aligned} \int_0^T & \left[ |u_t|_{0,\Omega}^2 + |w_t|_{0,\Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), \epsilon(u))_{\Omega} + 2(\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_{\Omega} \right. \\ & \quad \left. + \left( a_{ij}, \left[ D_{x_k, x_j}^2 u_i + w_{x_j} D_{x_i, x_k}^2 w \right] h_k \right)_{\Omega} \right] dt = \\ & - \left[ (u_t, h \nabla u)_{\Omega} \Big|_0^T + (w_t, h \nabla w)_{\Omega} \Big|_0^T + \delta (\nabla w_t, \nabla (h \nabla w))_{\Omega} \Big|_0^T \right] + 1/2 \int_{\Sigma_1} \{ |u_t|^2 \\ & \quad + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 - D/2 [w_{xx} + w_{yy} + 2\mu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\mu)w_{xy}] h \nu \\ & \quad - 2g(u_t) h \nabla u + h_1 (D_n w_t) D_n (h \nabla w) + h_2 (D_{\tau} w_t) D_{\tau} (h \nabla w) \} d\Sigma_1 \\ & - \int_0^T [(b_1 u_t, h \nabla u)_{\Omega} + (b_2 w_t, h \nabla w)_{\Omega}] dt + \int_{\Sigma_0} [\mathcal{C}\epsilon(u) \cdot \epsilon(u) \nu h - |\Delta w|^2 h \nu] d\Sigma_0. \end{aligned}$$

on utilise (3.3.16) et (3.2.1) on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T & \left[ |u_t|_{0,\Omega}^2 + |w_t|_{0,\Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), N(u, w))_{\Omega} + (\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_{\Omega} \right. \\ & \quad \left. + \left( a_{ij}, \left[ D_{x_k, x_j}^2 u_i + w_{x_j} D_{x_i, x_k}^2 w \right] h_k \right)_{\Omega} \right] dt \leq C[E(0) + E(T)] \\ (3.3.21) \quad & + 1/2 \int_{\Sigma_1} \{ |u_t|^2 + g(u_t) h \nabla u + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 + h_1 (D_n w_t) D_n (h \nabla w) \\ & + h_2 (D_{\tau} w_t) D_{\tau} (h \nabla w) - D/2 [w_{xx} + w_{yy} + 2\mu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\mu)w_{xy}] h \nu \} d\Sigma_1 \\ & + \int_0^T [(b_1 u_t, h \nabla u)_{\Omega} + (b_2 w_t, h \nabla w)_{\Omega}] dt + \int_{\Sigma_0} [\mathcal{C}\epsilon(u) \nu h \nabla u + |\Delta w|^2 h \nu] d\Sigma_0. \end{aligned}$$

L'utilisation de la relation (3.3.12) dans (3.3.21) et l'application du théorème de la divergence ainsi que (3.3.16) donnent

$$\begin{aligned}
 (3.3.22) \quad & \int_0^T \left[ |u_t|_{0,\Omega}^2 + |w_t|_{0,\Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_\Omega \right] dt \leq C[E(0) + E(T)] \\
 & + 1/2 \int_{\Sigma_1} \{ |u_t|^2 + g(u_t) h \nabla u + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 + h_1 (D_n w_t) D_n (h \nabla w) \\
 & + h_2 (D_\tau w_t) D_\tau (h \nabla w) - D/2 [w_{xx} + w_{yy} + 2\mu w_{xx} w_{yy} + 2(1 - \mu) w_{xy}] h \nu \} d\Sigma_1 \\
 & + \int_{\Sigma_0} [1/2 \mathcal{C}\epsilon(u) \nu h \nabla u + |\Delta w|^2 h \nu] d\Sigma_0 - 1/2 \int_{\Sigma_1} \mathcal{C}N(u, w) \cdot N(u, w) h \nu d\Sigma_1 \\
 & + \int_0^T [(b_1 u_t, h \nabla u)_\Omega + (b_2 w_t, h \nabla w)_\Omega] dt.
 \end{aligned}$$

D'autre part (voir (3.2.19))

$$\begin{aligned}
 (3.3.23) \quad & \int_{\Sigma_1} |N(u, w)|^2 d\Sigma_1 \leq C \int_{\Sigma_1} [|\epsilon(u)|^2 + |f(\nabla w)|^2] d\Sigma_1 \\
 & \leq C \int_{\Sigma_1} |\nabla u|^2 d\Sigma_1 + C(E(0)) \int_0^T |w|_{2-\epsilon, \Omega} dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.3.24) \quad & (b_1 u_t, h \nabla u)_\Omega = \left( b_1^{1/2} u_t, b_1^{*1/2} (h \nabla u) \right)_\Omega \leq \left| b_1^{1/2} u_t \right|_{0,\Omega} \left| b_1^{*1/2} (h \nabla u) \right|_{0,\Omega} \\
 & \leq \epsilon_1 \left| b_1^{*1/2} (h \nabla u) \right|_{0,\Omega}^2 + C_{\epsilon_1} \left( b_1^{1/2} u_t, b_1^{1/2} u_t \right)_\Omega = \epsilon_1 \left| b_1^{*1/2} (h \nabla u) \right|_{0,\Omega}^2 + C_{\epsilon_1} (b_1 u_t, u_t)_\Omega \\
 & \leq \epsilon_0 |u|_{1,\Omega}^2 + C_{\epsilon_0} (b_1 u_t, u_t)_\Omega,
 \end{aligned}$$

$$(3.3.25) \quad (b_2 u_t, h \nabla u)_\Omega = \epsilon_1 \left| b_2^{*1/2} (h \nabla w) \right|_{0,\Omega}^2 + C_{\epsilon_1} (b_2 w_t, w_t)_\Omega \leq \epsilon_0 |w|_{1,\Omega}^2 + C_{\epsilon_0} (b_2 w_t, w_t)_\Omega.$$

En combinant avec (3.3.22) on obtient

$$\begin{aligned}
 (3.3.26) \quad & \int_0^T \left[ |u_t|_{0,\Omega}^2 + |w_t|_{0,\Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_\Omega \right] dt \leq C[E(0) + E(T)] \\
 & + 1/2 \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + g(u_t) h \nabla u + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 + h_1 (D_n w_t) D_n (h \nabla w) \\
 & + h_2 (D_\tau w_t) D_\tau (h \nabla w)] d\Sigma_1 - \frac{D}{2} \int_{\Sigma_1} [w_{xx} + w_{yy} + 2\mu w_{xx} w_{yy} + 2(1 - \mu) w_{xy}] h \nu d\Sigma_1 \\
 & + \int_{\Sigma_0} [1/2 \mathcal{C}\epsilon(u) \nu h \nabla u + |\Delta w|^2 h \nu] d\Sigma_0 + C \int_{\Sigma_1} |\nabla u|^2 d\Sigma_1 + C(E(0)) \int_0^T |w|_{2-\epsilon, \Omega} dt \\
 & + C_{\epsilon_0} \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt + \epsilon_0 \int_0^T [|u|_{1,\Omega}^2 + |w|_{1,\Omega}^2] dt.
 \end{aligned}$$

**Remarque 3.8.** Notons que dans le cas particulier où les conditions géométriques sont assurées aussi sur  $\Gamma_1$ , alors les trois dernières intégrales sur la frontière dans (3.3.26) peuvent être éliminées.

**Etape 2.** Appliquons la formulation variationnelle avec les fonctions tests  $\phi = u$ ,  $\psi = w$ .

Pour la première équation on trouve

$$\int_0^T (u_{tt}, u)_\Omega dt = \int_Q (u_t u)_t dQ - \int_Q |u_t|^2 dQ = (u_t, u)_\Omega|_0^T - \int_0^T |u_t|_{0,\Omega}^2 dt,$$

d'où on trouve

$$(3.3.27) \quad (u_t, u)_\Omega|_0^T + \int_0^T \left[ (\mathcal{C}N(u, w), \epsilon(u))_\Omega - |u_t|_{0,\Omega}^2 + (b_1 u_t, u)_\Omega + \langle g(u_t), u \rangle_{\Gamma_1} - \langle \mathcal{C}\epsilon(u) \nu, u \rangle_{\Gamma_0} \right] dt = 0.$$

Pour la deuxième équation on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T (w_{tt}, w)_\Omega dt &= \int_Q (w_t w)_t dQ - \int_0^T |w_t|_{0,\Omega}^2 dt = (w_t, w)_\Omega|_0^T - \int_0^T |w_t|_{0,\Omega}^2 dt, \\ \int_0^T (\nabla w_{tt}, \nabla w)_\Omega dt &= \int_Q (\nabla w_t \nabla w)_t dQ - \int_0^T |\nabla w_t|_{0,\Omega}^2 dt = (\nabla w_t, \nabla w)_\Omega|_0^T - \int_0^T |\nabla w_t|_{0,\Omega}^2 dt, \end{aligned}$$

et

$$\langle \Delta w, D_n w \rangle_{\Gamma_0} = \langle \Delta w, \nabla w \nu \rangle_{\Gamma_0} = 0,$$

d'où on trouve

$$(3.3.28) \quad (w_t, w)_\Omega|_0^T + \delta (\nabla w_t, \nabla w)_\Omega|_0^T + \int_0^T \left[ a(w, w) + (b_2 w_t, w)_\Omega + (\mathcal{C}N(u, w), \nabla w \otimes \nabla w)_\Omega - |w_t|_{0,\Omega}^2 - \delta |\nabla w_t|_{0,\Omega}^2 - \langle h_1(D_n w_t), D_n w \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_2(D_\tau w_t), D_\tau w \rangle_{\Gamma_1} \right] dt = 0.$$

Multiplions l'égalité (3.3.27) par la constante positive  $A$ , l'égalité (3.3.28) par la constante négative  $B$ , ajoutons le résultat à l'inégalité (3.3.26) en tenant compte du signe correcte des termes sur la frontière  $\Gamma_0$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T & \left[ |u_t|_{0,\Omega}^2 + |w_t|_{0,\Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_\Omega + A \{ (\mathcal{C}N(u, w), \epsilon(u))_\Omega - |u_t|_{0,\Omega}^2 \} + B \left\{ a(w, w) + 2(\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_\Omega - |w_t|_{0,\Omega}^2 - \delta |\nabla w_t|_{0,\Omega}^2 \right\} \right] dt \leq \\ & C[E(0) + E(T)] + C \int_{\Sigma_1} \left[ |u_t|^2 + g(u_t) h \nabla u + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 + h_1(D_n w_t) D_n(h \nabla w) + h_2(D_\tau w_t) D_\tau(h \nabla w) - \frac{D}{2} [w_{xx} + w_{yy} + 2\mu w_{xx} w_{yy} + 2(1 - \mu) w_{xy}] h \nu - |\nabla u|^2 \right] d\Sigma_1 \\ & + C \int_0^T \left[ \langle g(u_t), u \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_1(D_n w_t), D_n w \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_2(D_\tau w_t), D_\tau w \rangle_{\Gamma_1} + C_{\epsilon_0} ((b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega) + (b_1 u_t, u)_\Omega + (b_2 w_t, w)_\Omega + \epsilon_0 (|u|_{1,\Omega}^2 + |w|_{1,\Omega}^2) + C(E(0)) |w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 \right] dt. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Soient  $A = 1/2$ ,  $B = -1/4$ . La majoration des termes sur la frontière par le théorème de traces donne

$$\begin{aligned}
 (3.3.30) \quad & \int_0^T \left[ |u_t|_{0,\Omega}^2 + |w_t|_{0,\Omega}^2 + \delta |\nabla w_t|_{0,\Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), N(u, w))_\Omega \right] dt \leq \\
 & C[E(0) + E(T)] + C \int_{\Sigma_1} \left[ |u_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 \right. \\
 & \quad \left. + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + |\nabla u|^2 + |D_n^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 + |D_\tau^2 w|^2 \right] d\Sigma_1 + \\
 & \int_0^T \left[ C_{\epsilon_0} ((b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega) + \epsilon_0 (|u|_{1,\Omega}^2 + |w|_{1,\Omega}^2) \right] dt \\
 & \quad + C(E(0)) \int_0^T \left[ |w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 + |u|_{1-\epsilon,\Omega}^2 \right] dt,
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que, d'une part

$$\int_{\Sigma_1} |g(u_t) h \nabla u| d\Sigma_1 \leq 1/2 \int_{\Sigma_1} [|g(u_t)|^2 + |h \nabla u|^2] d\Sigma_1 \leq C \int_{\Sigma_1} [|g(u_t)|^2 + |\nabla u|^2] d\Sigma_1,$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma_1} [h_1(D_n w_t) D_n(h \nabla w) + h_2(D_\tau w_t) D_\tau(h \nabla w)] d\Sigma_1 & \leq C \int_{\Sigma_1} [|h_1(D_n w_t)|^2 \\
 & \quad + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + |\nabla w|^2 + |D_n^2 w|^2 + |D_\tau^2 w|^2] d\Sigma_1,
 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T [\langle g(u_t), u \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_1(D_n w_t), D_n w \rangle_{\Gamma_1} + \langle h_2(D_\tau w_t), D_\tau w \rangle_{\Gamma_1}] dt \leq \\
 & C \int_{\Sigma_1} [|g(u_t)|^2 + |u|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + |D_n w|^2 + |D_\tau w|^2] d\Sigma_1.
 \end{aligned}$$

Rappelons nous la définition de l'énergie avec la coercivité de  $E_P$  dans  $H^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^2$  et prenons  $\epsilon_0$  suffisamment petit dans (3.3.30) on trouve

$$\begin{aligned}
 (3.3.31) \quad & 1/2TE(T) + 1/2 \int_0^T E(t) dt \leq CE(T) + C \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |w_t|^2 + \delta |\nabla w_t|^2 \\
 & \quad + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + |\nabla u|^2 + |D_n^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 + |D_\tau^2 w|^2] d\Sigma_1 \\
 & \quad + C \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt + C(E(0)) \int_0^T [|w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 + |u|_{1-\epsilon,\Omega}^2] dt.
 \end{aligned}$$

En effet, l'intégration de l'énergie sur  $[0, T]$  donne

$$\begin{aligned}
 (3.3.32) \quad & \int_0^T [|u_t|_{0,\Omega}^2 + |w_t|_{0,\Omega}^2 + \delta |\nabla w_t|_{0,\Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), N(u, w))_\Omega] dt = \\
 & 1/2 \int_0^T E(t) dt + 1/2 \int_0^T E(t) dt \geq 1/2TE(T) + 1/2 \int_0^T E(t) dt,
 \end{aligned}$$

car

$$TE(T) = \int_0^T E(T) dt \leq \int_0^T E(t) dt,$$

et de l'égalité de dissipation (3.2.1) on trouve

$$\begin{aligned} E(0) &= E(T) + 2 \int_{\Sigma_1} [g(u_t)u_t + h_1(D_n w_t)D_n w_t + h_2(D_\tau w_t)D_\tau w_t] d\Sigma_1 \leq \\ E(T) &+ C \int_{\Sigma_1} [|g(u_t)|^2 + |u_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |D_n w_t|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + |D_\tau w_t|^2] d\Sigma_1 \leq \\ (3.3.33) \quad E(T) &+ C \int_{\Sigma_1} [|g(u_t)|^2 + |u_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + |\nabla w_t|^2] d\Sigma_1, \end{aligned}$$

ainsi que de la coercivité de  $E_P$

$$\begin{aligned} (3.3.34) \quad \epsilon_0 \int_0^T (|u|_{1,\Omega}^2 + |w|_{1,\Omega}^2) dt &\leq \epsilon_0 C \int_0^T (|u|_{1,\Omega}^2 + |w|_{2,\Omega}^2) dt \\ &\leq \epsilon_0 C \int_0^T E_P(t) dt \leq \epsilon_0 C \int_0^T E(t) dt, \end{aligned}$$

par suite de (3.3.30) et (3.3.32)–(3.3.34) on obtient

$$\begin{aligned} 1/2 E(T) + 1/2 (1 - 2\epsilon_0 C) \int_0^T E(t) dt &\leq C E(T) + C \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |w_t|^2 \\ + \delta |\nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + |\nabla u|^2 + |D_n^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 + |D_\tau^2 w|^2] d\Sigma_1 \\ + C \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt &+ C(E(0)) \int_0^T [|w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 + |u|_{1-\epsilon,\Omega}^2] dt, \end{aligned}$$

donc pour  $\epsilon_0$  petit<sup>(1)</sup>, on trouve

$$(1 - 2\epsilon_0 C) \left[ 1/2 E(T) + 1/2 \int_0^T E(t) dt \right] \leq 1/2 E(T) + 1/2 (1 - 2\epsilon_0 C) \int_0^T E(t) dt,$$

divisons par  $(1 - 2\epsilon_0 C)$ , on obtient (3.3.31).

Finalement, pour  $T$  suffisamment grand, on a

$$(3.3.35) \quad \left( \frac{T}{2} - C \right) E(T) + 1/2 \int_0^T E(t) dt \geq 1/2 E(T) + 1/2 \int_0^T E(t) dt,$$

il suffit de prendre  $T \geq 1 + 2C$ .

De plus par le lemme 3.8. (c'est-à-dire (3.2.25)) on a

$$\begin{aligned} (3.3.36) \quad \int_{\Sigma_1} [|D_n^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 + |D_\tau^2 w|^2] d\Sigma_1 &\leq C_T \int_{\Sigma_1} [|\nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 \\ + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + C(E(0)) |u_t|^2] d\Sigma_1 &+ C_T(E(0)) \int_0^T |w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 dt \leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 \\ + |\nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 &+ C_T(E(0)) \int_0^T |w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 dt, \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Il suffit de prendre  $\epsilon_0 < 1/2C$ .

et

$$(3.3.37) \quad \begin{aligned} C_T(E(0)) \int_0^T |w|_{2-\epsilon, \Omega}^2 dt + C(E(0)) \int_0^T \left[ |w|_{2-\epsilon, \Omega}^2 + |u|_{1-\epsilon, \Omega}^2 \right] dt \\ \leq C_T(E(0)) \text{lot}(u, w), \end{aligned}$$

par conséquent de (3.3.31) et (3.3.35) – (3.3.37) on obtient

$$\begin{aligned} E(T) + \int_0^T E(t) dt \leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_1} \left[ |u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 \right. \\ \left. + |h_2(D_\tau w_t)|^2 \right] d\Sigma_1 + C \int_{\Sigma_1} \left[ |\nabla u|^2 + |D_n^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 + |D_\tau^2 w|^2 \right] d\Sigma_1 \\ + C \int_0^T \left[ (b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega \right] dt + C_T(E(0)) \text{lot}(u, w). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du lemme 3.12. ■

**Remarque 3.9.** Notons que la preuve ci-dessus fournit un résultat d'unicité pour le problème aux limites défini sur un domaine étoilé. En effet, dans le cas particulier où les conditions géométriques sont satisfaites aussi sur  $\Gamma_1$ ,  $b_1 = b_2 = 0$  et telles que les traces des vitesses soient nulles sur la frontière pour  $t \in [0, T]$ , avec  $T$  suffisamment grand, l'argument ci-dessus donne

$$E(t) = 0.$$

En effet, dans ce cas, les inégalités (3.3.22), (3.3.27), (3.3.28) donnent

$$(3.3.38) \quad \int_0^T \left[ |u_t|_{0, \Omega}^2 + |w_t|_{0, \Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_\Omega \right] dt \leq C[E(0) + E(T)],$$

$$(3.3.39) \quad (u_t, u)_\Omega|_0^T + \int_0^T \left[ (\mathcal{C}N(u, w), \epsilon(u))_\Omega - |u_t|_{0, \Omega}^2 \right] dt = 0,$$

$$(3.3.40) \quad \begin{aligned} (w_t, w)_\Omega|_0^T + \delta (\nabla w_t, \nabla w)_\Omega|_0^T + \int_0^T \left[ a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), \nabla w \otimes \nabla w)_\Omega \right. \\ \left. - |w_t|_{0, \Omega}^2 - \delta |\nabla w_t|_{0, \Omega}^2 \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Multiplions l'égalité (3.3.39) par la constante positive  $A$  et l'égalité (3.3.40) par la constante négative  $B$ , ajoutons le résultat dans l'inégalité (3.3.38), on trouve

$$(3.3.41) \quad \begin{aligned} \int_0^T \left[ |u_t|_{0, \Omega}^2 + |w_t|_{0, \Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_\Omega + A \{ (\mathcal{C}N(u, w), \epsilon(u))_\Omega \right. \\ \left. - |u_t|_{0, \Omega}^2 \} + B \left\{ a(w, w) + 2(\mathcal{C}N(u, w), f(\nabla w))_\Omega - |w_t|_{0, \Omega}^2 - \delta |\nabla w_t|_{0, \Omega}^2 \right\} \right] dt \\ \leq C[E(0) + E(T)], \end{aligned}$$

en prenant les constantes  $A, B$  telles que  $A = 1/2$  et  $B = -1/4$ , on obtient

$$(3.3.42) \quad \begin{aligned} \int_0^T \left[ |u_t|_{0, \Omega}^2 + |w_t|_{0, \Omega}^2 + \delta |\nabla w_t|_{0, \Omega}^2 + a(w, w) + (\mathcal{C}N(u, w), N(u, w))_\Omega \right] dt \\ \leq C[E(0) + E(T)]. \end{aligned}$$

Puisque, dans notre cas,  $E(t) = E(T)$ , (3.3.42) donne

$$(3.3.43) \quad TE(T) = \int_0^T E(t) dt \leq CE(T),$$

et pour  $T$  suffisamment grand, on conclut que  $E(t) = 0$ .

Par conséquent  $u = w = 0$ , c'est-à-dire le résultat d'unicité pour le problème non linéaire qui est entre nos mains.

### 3.3.3 Absorption de traces sur la frontière et achèvement de la preuve du lemme 3.11.

Dans cette sous-section on achève la preuve du lemme 3.11.. Ceci sera fait à l'aide des résultats de régularités de traces formulés dans la section 3.2.

**Lemme 3.13.** *Sous les hypothèses du lemme 3.12. on a*

$$(3.3.44) \quad E(T) + \int_0^T E(t) dt \leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 + C \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt + C_T(E(0)) \text{lot}(u, w).$$

**Preuve.** À partir du résultat du lemme 3.12. appliqué sur l'intervalle  $[\alpha, T - \alpha]$ , on trouve

$$(3.3.45) \quad E(T - \alpha) + \int_\alpha^{T-\alpha} E(t) dt \leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_\alpha} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_\alpha + C \int_{\Sigma_\alpha} [|\nabla u|^2 + |D_n^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 + |D_\tau^2 w|^2] d\Sigma_\alpha + C \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt + C_T(E(0)) \text{lot}(u, w).$$

Ici, on a utilisé la propriété de dissipation du lemme 3.2, laquelle permet de majorer  $E(\alpha)$  par  $E(0)$ . D'autre part, à partir des résultats de régularités indiqués dans le lemme 3.5. et le lemme 3.8, on déduit l'estimation suivante :

$$(3.3.46) \quad \int_{\Sigma_\alpha} [|\nabla u|^2 + |D_n^2 w|^2 + |D_n D_\tau w|^2 + |D_\tau^2 w|^2] d\Sigma_\alpha \leq C \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |\nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 + C(E(0)) |u_t|^2 d\Sigma_1 + C(E(0)) \text{lot}(u, w).$$

Combinons (3.3.45), (3.3.46) et rappelons encore l'égalité de dissipation (3.2.1), on aboutit à l'inégalité

$$(3.3.47) \quad E(T - \alpha) + \int_\alpha^{T-\alpha} E(t) dt \leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 + C \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt + C_T(E(0)) \text{lot}(u, w).$$

Pour compléter la preuve du lemme, on a besoin d'estimer la contribution de l'énergie sur les sous intervalles  $[0, \alpha]$  et  $[T - \alpha, T]$ . Pour réaliser ceci, notons le membre de droite de (3.3.47) par  $\mathcal{F}$ . Grâce à la relation de dissipation (3.2.1), on a pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} E(t) + 2 \int_{T-\alpha}^t \int_{\Gamma_1} [g(u_t) u_t + h_1(D_n w_t) D_n w_t + h_2(D_\tau w_t) D_\tau w_t] d\Gamma_1 dt \\ + 2 \int_{T-\alpha}^t \int_{\Omega} [b_1 u_t u_t + b_2 w_t w_t] d\Omega dt = E(T - \alpha), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(T - \alpha) - 2 \int_{T-\alpha}^t \int_{\Gamma_1} [g(u_t) u_t + h_1(D_n w_t) D_n w_t + h_2(D_\tau w_t) D_\tau w_t] d\Gamma_1 dt \\ &\leq E(T - \alpha) + 2 \int_{\Sigma_1} [|g(u_t)|^2 + |u_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2 + |D_n w_t|^2 + |D_\tau w_t|^2] d\Sigma_1 \\ &\leq E(T - \alpha) + 2 \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 \\ &\leq E(T - \alpha) + \int_{\alpha}^{T-\alpha} E(t) dt + 2 \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1, \end{aligned}$$

de (3.3.47) on a pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(T - \alpha) + 2 \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 \\ &\quad + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 \leq C\mathcal{F}. \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

Et par (3.3.47)

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha E(t) dt + \int_{T-\alpha}^T E(t) dt &= \int_0^T E(t) dt - \int_\alpha^{T-\alpha} E(t) dt \leq \left[ E(T - \alpha) + \int_\alpha^{T-\alpha} E(t) dt \right] \\ &\quad + \left[ E(T) + \int_0^T E(t) dt \right], \end{aligned}$$

d'où

$$(3.3.49) \quad \int_0^\alpha E(t) dt + \int_{T-\alpha}^T E(t) dt \leq C\mathcal{F}.$$

Par suite, pour  $\alpha = T/2$  dans (3.3.49) et  $t = T$  dans (3.3.48) on aura

$$E(T) + \int_0^T E(t) dt \leq C\mathcal{F},$$

ce qui complète la preuve du lemme 3.13. ■

Le lemme 3.11. découle du lemme 3.13. et de l'égalité de dissipation du lemme 3.2.

En effet,

$$\begin{aligned} E(0) + E(T) + \int_0^T E(t) dt &= 2E(T) + \int_0^T E(t) dt + 2 \int_{\Sigma_1} [g(u_t) u_t + h_1(D_n w_t) D_n w_t \\ &\quad + h_2(D_\tau w_t) D_\tau w_t] d\Sigma_1 + 2 \int_Q [b_1 u_t u_t + b_2 w_t w_t] dQ \leq C\mathcal{F}. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du lemme 3.11. ■

### 3.4 Absorption de termes d'ordre inférieur

La prochaine étape doit éliminer les termes d'ordre inférieur du lemme 3.11. Ceci est fait en appliquant un argument approprié de compacité et d'unicité, où le rôle critique est joué par un résultat d'unicité dû à Isakov (voir [16, Remarque 1.2] et [15, p. 750]).

**Lemme 3.14.** *Soit  $(u, w)$  une solution du problème  $(\mathcal{P})$ . Alors, il existe  $T > 0$  suffisamment grand, tel que les parties suivantes ont lieu :*

*Partie I. Sous l'hypothèse 2 (dans le théorème 3.1), on a*

$$(3.4.1) \quad \begin{aligned} \text{lot}(u, w) \equiv \int_0^T \left[ |u(t)|_{1-\epsilon, \Omega}^2 + |w(t)|_{2-\epsilon, \Omega}^2 \right] dt &\leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla u_t|^2 + |g(u_t)|^2 \\ &+ |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 + C \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt. \end{aligned}$$

*Partie II. Si l'hypothèse ci-dessus n'est pas vérifiée, alors la constante  $C_T$  dans (3.4.1) dépend de*

$$E_\alpha(0) = E(0) + |u_0|_{1+\alpha, \Omega}^2 + |w_0|_{2+\alpha, \Omega}^2,$$

où  $\alpha$  peut être pris arbitrairement petit.

**Preuve.** On raisonne par l'absurde. Soit  $(u_n, w_n)$  une solution du problème  $(\mathcal{P})$ , telle que

$$(3.4.2) \quad \frac{\text{lot}(u_n, w_n)}{P(u_n, w_n)} \longrightarrow \infty \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty,$$

où

$$(3.4.3) \quad \begin{aligned} P(u, w) = \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 \\ + \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt. \end{aligned}$$

Le fait que l'énergie initiale soit bornée ( $E(0) \leq M$ ), implique que les suites  $u_n, w_n$  satisfont

$$E_n(t) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(c'est-à-dire  $E_n(t)$  est uniformément bornée), où  $E_n$  dénote  $E(u_n, w_n)$ , et comme

$$\begin{aligned} E_n(t) = E_k(u_n, w_n) + E_P(u_n, w_n) &= \int_{\Omega} [|u_{n,t}|^2 + |w_{n,t}|^2 + \delta |\nabla w_{n,t}|^2] d\Omega \\ &+ a(u_n, w_n) + \int_{\Omega} [\mathcal{C}N(u_n, w_n) \cdot N(u_n, w_n)] d\Omega, \end{aligned}$$

et de la coercivité de  $E_P$  dans  $H^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^2$  on déduit que  $u_n$  est bornée dans  $[H^1(\Omega)]^2$  c'est-à-dire

$$|u_n|_{[H^1(\Omega)]^2}^2 \leq C \quad \text{donc} \quad \sup_{[0,T]} |u_n|_{[H^1(\Omega)]^2}^2 \leq C_T,$$

d'où,

$$u_n \text{ bornée dans } L^\infty\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right).$$

De la même façon on trouve

$$\begin{aligned} u_{n,t} &\text{ bornée dans } L^\infty\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2\right), \\ w_n &\text{ bornée dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \\ w_{n,t} &\text{ bornée dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une sous-suite, notée encore par l'indice "n", telles que

$$\begin{aligned} (3.4.4) \quad u_n &\longrightarrow u \text{ dans } L^\infty\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right) \text{ faible étoile,} \\ u_{n,t} &\longrightarrow u_t \text{ dans } L^\infty\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2\right) \text{ faible étoile,} \\ w_n &\longrightarrow w \text{ dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \text{ faible étoile,} \\ w_{n,t} &\longrightarrow w_t \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{aligned}$$

Ainsi, la compacité des injections de Sobolev de  $H^1(\Omega) \subset H^{1-\epsilon}(\Omega)$  et  $H^2(\Omega) \subset H^{2-\epsilon}(\Omega)$ <sup>(1)</sup> pour  $\epsilon > 0$ , montre que

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \text{ dans } [H^{1-\epsilon}(\Omega)]^2 \text{ fort,} \\ w_n &\longrightarrow w \text{ dans } H^{2-\epsilon}(\Omega) \text{ fort,} \end{aligned}$$

donc,

$$(3.4.5) \quad \text{lot}(u_n, w_n) \longrightarrow \text{lot}(u, w).$$

On considère deux cas séparés.

**Cas 1.**

$$\text{lot}(u, w) \neq 0,$$

alors,

$$P(u_n, w_n) \longrightarrow 0,$$

---

<sup>(1)</sup>Voir [31, Théorème 16.1, p. 110].

donc

$$\begin{aligned}
 (3.4.6) \quad & u_{n,t} \longrightarrow 0 \text{ dans } [L^2(\Sigma)]^2, \\
 & \nabla w_{n,t} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma), \\
 & g(u_{n,t}) \longrightarrow 0 \text{ dans } [L^2(\Sigma)]^2, \\
 & h_1(D_n w_{n,t}) \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma), \\
 & h_2(D_\tau w_{n,t}) \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma), \\
 & b_1 u_{n,t} \longrightarrow 0 \text{ dans } [L^2(\Omega)]^2, \\
 & b_2 w_{n,t} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega),
 \end{aligned}$$

du passage à la limite ( $n \longrightarrow \infty$ ) dans les équations originales (dû à la continuité faible des termes non linéaires), on déduit que les fonctions limites  $u$ ,  $w$  satisfont les équations originales

$$\begin{aligned}
 (3.4.7) \quad & u_{tt} + b_1 u_t - \operatorname{div} [\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)]] = 0 \text{ dans } Q, \\
 & [I - \delta \Delta] w_{tt} + b_2 w_t + D \Delta^2 w - \operatorname{div} [\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] = 0 \text{ dans } Q,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.4.8) \quad & \mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\
 & D[\Delta w + (1 - \mu) B_1 w] = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\
 & D[D_n \Delta w + (1 - \mu) B_2 w] = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\
 & u = w = \nabla w = 0 \text{ sur } \Sigma_0,
 \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$(3.4.9) \quad u_t = 0, \nabla w_t = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

et

$$b_1 u_t = 0, b_2 w_t = 0 \text{ dans } Q.$$

Notons

$$\tilde{u} \equiv u_t, \tilde{w} \equiv w_t,$$

on obtient le système suivant satisfait par les nouvelles fonctions

$$\begin{aligned}
 (3.4.10) \quad & \tilde{u}_{tt} + b_1 \tilde{u}_t - \operatorname{div} [\mathcal{C}[\epsilon(\tilde{u})]] = L_1(\tilde{w}, w) \text{ dans } Q, \\
 & [I - \delta \Delta] \tilde{w}_{tt} + b_2 \tilde{w}_t + D \Delta^2 \tilde{w} = L_2(\tilde{u}, u, \tilde{w}, w) \text{ dans } Q,
 \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\tilde{u} = \nabla \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Sigma, \epsilon(\tilde{u}) \nu = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \Delta \tilde{w} = D_n \Delta \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Sigma_1,$$

où on a utilisé les notations

$$(3.4.11) \quad L_1(\tilde{w}, w) \equiv 1/2 \operatorname{div} [\mathcal{C} [\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w]] + 1/2 \operatorname{div} [\mathcal{C} [\nabla w \otimes \nabla \tilde{w}]],$$

$$(3.4.12) \quad \begin{aligned} L_2(\tilde{u}, u, \tilde{w}, w) \equiv & \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(\tilde{u})] \nabla w + \mathcal{C} [\epsilon(u)] \nabla \tilde{w} + 1/2 \mathcal{C} [\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w] \nabla w \\ & + 1/2 \mathcal{C} [\nabla w \otimes \nabla \tilde{w}] \nabla w + \mathcal{C} f(\nabla w) \nabla \tilde{w}]. \end{aligned}$$

**Remarque 3.10.** Pour avoir (3.4.10), il suffit de reprendre la définition de ' $\otimes$ ', de dériver le système (2.1.1) par rapport à  $t$  et de remarquer que

$$f_t(\nabla w) = 1/2 [\nabla w_t \otimes \nabla w + \nabla w \otimes \nabla w_t].$$

Le but est de montrer que

$$(3.4.13) \quad u \equiv 0, w \equiv 0 \text{ dans } Q.$$

Nous traitons séparément les cas considérés dans les parties I et II du lemme 3.14. Remarquons d'abord, que dans le cas où les conditions géométriques sur la partie contrôlée de la frontière  $\Gamma_1$  sont satisfaites (c'est-à-dire,  $\Omega$  est de forme "étoilé"), la conclusion de (3.4.13) suit immédiatement l'unicité des solutions des équations originales (3.4.7), (3.4.8), (3.4.9) (voir la remarque 3.9). Ainsi, sous l'hypothèse de la Partie I, il suffit de considérer les cas  $b_1$  ou  $b_2$  injectif.

Supposons d'abord que  $b_1$  injectif. Alors, on a  $u_t \equiv 0$  et par conséquent

$$(3.4.14) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} [\mathcal{C} N(u, w)] &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ N(u, w) \nu &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, u = w = \nabla w = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \end{aligned}$$

ce qui, à son tour, implique

$$(3.4.15) \quad \operatorname{div} \left[ \frac{d}{dt} \mathcal{C} [f(\nabla w)] \right] = (\operatorname{div} [\mathcal{C} N(u, w)])_t - \operatorname{div} [\mathcal{C} \epsilon(\tilde{u})] = 0 \text{ dans } Q.$$

Puisque, a priori  $f(\nabla w) \in C(0, T; H^{1-\epsilon}(\Omega))$ ,  $\operatorname{div} [f(\nabla w)] \in C(0, T; H^{-\epsilon}(\Omega))$  on obtient  $\operatorname{div} [\mathcal{C} \epsilon(u)] \in C(0, T; H^{-\epsilon}(\Omega))$  et par (3.4.14)  $\epsilon(u) \cdot \nu|_{\Gamma_1} \in C(0, T; H^{1/2-\epsilon}(\Gamma_1))$ . De la régularité elliptique on conclut la régularité améliorée pour la variable  $u$ , c'est-à-dire

$$(3.4.16) \quad u \in C(0, T; H^{2-\epsilon}(\Omega))$$

Retournons à l'équation satisfaite par  $w$  et notons par  $H(w)$  la matrice des deuxièmes dérivées de  $w$  (c'est-à-dire, la matrice Hessienne), en tenant compte de (3.4.14), on trouve

$$(3.4.17) \quad \begin{aligned} [I - \delta \Delta] w_{tt} + b_2 w_t + D \Delta^2 w &= \mathcal{C} N(u, w) \cdot H(w) \text{ dans } Q, \\ D [\Delta w + (1 - \mu) B_1 w] &= 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ D [D_n \Delta w + (1 - \mu) B_2 w] &= 0 \text{ sur } \Sigma_1, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité

$$\operatorname{div} [A (\nabla w)] = (\operatorname{div} A) \cdot (\nabla w) + A \cdot H (w),$$

$A$  est un tenseur d'ordre quatre,  $H (.)$  est donnée par

$$H (w) = \begin{pmatrix} D_x^2 w & D_{xy}^2 w \\ D_{xy}^2 w & D_y^2 w \end{pmatrix},$$

et les conditions sur la frontière  $\Gamma_0$  seront maintenues nulles. En dérivant (au sens des distributions) l'équation ci-dessus par rapport au temps (noter que  $\mathcal{C}\epsilon(\tilde{u}) = 0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} (3.4.18) \quad [I - \delta \Delta] \tilde{w}_{tt} + b_2 \tilde{w}_t + D \Delta^2 \tilde{w} &= \mathcal{C} N (u, w) \cdot H (\tilde{w}) + \mathcal{C} [1/2 (\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w) \\ &\quad + 1/2 (\nabla w \otimes \nabla \tilde{w})] \cdot H (w) \text{ dans } Q, \\ D [\Delta \tilde{w} + (1 - \mu) B_1 \tilde{w}] &= 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ D [D_n \Delta \tilde{w} + (1 - \mu) B_2 \tilde{w}] &= 0 \text{ sur } \Sigma_1, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites sur  $\Gamma_0$

$$w = \nabla w = 0 \text{ sur } \Sigma_0.$$

L'équation (3.4.18), est une équation linéaire dont la variable  $\tilde{w}$ , avec des coefficients dépendants de  $u$  et  $w$ .

Par conséquent, pourvu que les coefficients soient suffisamment réguliers et la solution elle-même soit régulière (ce qui est établi dans le chapitre 4, théorème 4.2), on est maintenant en mesure d'appliquer le résultat d'unicité dû à Isakov [16, Théorème 1.2], valable pour les plaques de Kirchhoff, qui donne

$$\tilde{w} = w_t = 0 \text{ dans } Q,$$

ainsi, on a

$$u_t = 0, w_t = 0 \text{ dans } Q.$$

Avec cette information, on retourne aux équations originales (3.4.7) qui s'écrivent maintenant

$$\begin{aligned} (3.4.19) \quad \operatorname{div} [\mathcal{C} N (u, w)] &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathcal{C} N (u, w) \nu &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, u = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ D \Delta^2 w - \operatorname{div} [\mathcal{C} [N (u, w)] \nabla w] &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ D [\Delta w + (1 - \mu) B_1 w] &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ D [D_n \Delta w + (1 - \mu) B_2 w] &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

et les conditions sur la frontière  $\Gamma_0$  seront maintenues nulles.

On multiplie la première équation par  $u$  et la deuxième par  $(1/2)w$  et on intègre sur  $\Omega$ , ensuite on additionne les résultats pour obtenir finalement

$$N(u, w) \equiv 0, \quad a(w, w) \equiv 0.$$

En effet, la première équation donne

$$\int_{\Omega} \mathcal{C}N(u, w) \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{C}N(u, w) \epsilon(u) d\Omega = 0,$$

et la deuxième équation donne

$$\frac{1}{2}a(w, w) + \int_{\Omega} \mathcal{C}N(u, w) f(\nabla w) d\Omega = 0,$$

donc

$$a(w, w) + 2 \int_{\Omega} \mathcal{C}N(u, w) \cdot N(u, w) d\Omega = 0$$

ce qui amène au résultat voulu.

Par conséquent,  $w \equiv 0$  et  $\epsilon(u) \equiv 0$ . Ceci combiné avec  $\epsilon(u)\nu = 0$  sur  $\Gamma_0$  et  $u = 0$  sur  $\Gamma_0$  conduit, par l'intermédiaire de l'inégalité de Korn, à  $u = 0$  dans  $Q$ . Ainsi on a prouvé l'affirmation (3.4.13) quand  $b_1$  injectif.

Examinons ensuite le cas où  $b_2$  injectif. Dans ce cas on aura  $w_t = \tilde{w} = 0$  dans  $Q$ . Donc,  $L_1(w, \tilde{w}) \equiv 0$  et la variable  $\tilde{u}$  satisfait

$$(3.4.20) \quad \tilde{u}_{tt} + b_1 \tilde{u}_t - \operatorname{div} [\mathcal{C}\epsilon(\tilde{u})] = 0 \text{ dans } Q,$$

$$(3.4.21) \quad \tilde{u} = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad \epsilon(\tilde{u})\nu = 0 \text{ sur } \Sigma_1.$$

Le résultat d'unicité de type Holmgren, valable pour le système d'élasticité (voir [15, Théorème 1.2.]), montre que  $\tilde{u} = 0$  dans  $Q$ , ce qui implique que  $u_t, w_t$  sont tous les deux identiquement nuls. Par conséquent, on obtient le même problème statique que dans (3.4.19) ce qui amène à la conclusion  $u \equiv 0$  et  $w \equiv 0$ . Ainsi, l'affirmation (3.4.13) a été prouvée conformément à l'hypothèse de la partie I du lemme 3.14.

Pour la deuxième partie, la situation est très compliquée et l'hypothèse 2 complémentaire est exigée. C'est dû au fait que, dans ce cas, la preuve est basée sur l'application à nouveau du résultat d'unicité dû à Isakov [16] dans un contexte entièrement dynamique du système de Von Karman. Cela, à son tour, exige une régularité supplémentaire sur la solution et sur les coefficients correspondants au système (3.4.10). La régularité exigée est donnée par le théorème 4.4. dans le chapitre 4, lequel est prouvé sous l'addition d'hypothèses suivantes

$$u \in H^{1+\alpha}(\Omega), \quad w \in H^{2+\alpha}(\Omega) \quad \text{pour } \alpha > 0.$$

Donc, le Théorème 1.3 dans [16], s'applique à l'équation linéarisée (3.4.10) et donne

$$\tilde{u} = \tilde{w} = 0,$$

par conséquent,  $u$  et  $w$  satisfont l'équation statique (3.4.19) et on a  $u = w = 0$ . Ainsi, on a établi que, sous les hypothèses de la partie I ou II dans le lemme 3.14. on a toujours

$$u = w = 0.$$

Mais c'est une contradiction avec l'hypothèse faite pour le premier cas.

On passe maintenant au deuxième cas.

**Cas 2.**

$$\text{lot}(u, w) = 0.$$

Dans ce cas, on n'a pas besoin de distinguer entre la partie I et la partie II. Définissons les nouvelles fonctions

$$(3.4.22) \quad \tilde{u}_n \equiv \frac{u_n}{c_n}, \quad \tilde{w}_n \equiv \frac{w_n}{c_n},$$

où

$$(3.4.23) \quad c_n^2 = \text{lot}(u_n, w_n) \longrightarrow 0.$$

Ainsi, on a

$$(3.4.24) \quad \text{lot}(\tilde{u}_n, \tilde{w}_n) = 1, \quad (1/c_n^2) P(u_n, w_n) \longrightarrow 0,$$

qui à son tour implique

$$(3.4.25) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_{n,t} &\longrightarrow 0 \text{ dans } [L^2(\Sigma)]^2, \\ \nabla \tilde{w}_{n,t} &\longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma), \\ (1/c_n) g(u_{n,t}) &\longrightarrow 0 \text{ dans } [L^2(\Sigma)]^2, \\ (1/c_n) h_1(D_n w_{n,t}) &\longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma), \\ (1/c_n) h_2(D_\tau w_{\tau,t}) &\longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma), \\ b_1 \tilde{u}_{n,t} &\longrightarrow 0 \text{ dans } [L^2(\Sigma)]^2, \\ b_2 \tilde{w}_{n,t} &\longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que, les nouvelles fonctions  $\tilde{u}_n, \tilde{w}_n$  satisfont le système

$$(3.4.26) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_{n,tt} + b_1 \tilde{u}_{n,t} - \text{div} \left[ \mathcal{C} \left[ \epsilon \left( \tilde{u}_n \right) + (1/c_n) f(\nabla w_n) \right] \right] &= 0 \text{ dans } Q, \\ [I - \delta \Delta] \tilde{w}_{n,tt} + b_2 \tilde{w}_{n,t} + D \Delta^2 \tilde{w}_n - \text{div} \left[ \mathcal{C} \left[ \epsilon \left( \tilde{u}_n \right) + (1/c_n) f(\nabla w_n) \right] \nabla w_n \right] &= 0 \text{ dans } Q, \end{aligned}$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet sur la partie non contrôlée du bord  $\Gamma_0$

$$\tilde{u}_n = \tilde{w}_n = \nabla \tilde{w}_n = 0 \text{ sur } \Sigma_0,$$

et des conditions de dissipation frontière sur la partie contrôlée  $\Gamma_1$

$$(3.4.27) \quad \begin{aligned} \mathcal{C} \left[ \epsilon \left( \tilde{u}_n \right) + (1/c_n) f(\nabla w_n) \right] \nu &= -(1/c_n) g(u_{n,t}) \text{ sur } \Sigma_1, \\ D \left[ \Delta \tilde{w}_n + (1-\mu) B_1 \tilde{w}_n \right] &= -(1/c_n) h_1(D_n w_{n,t}) \text{ sur } \Sigma_1, \\ D \left[ D_n \Delta \tilde{w}_n + (1-\mu) B_2 \tilde{w}_n \right] - \delta D_n \tilde{w}_{n,tt} - \mathcal{C} \left[ \epsilon \left( \tilde{u}_n \right) + (1/c_n) f(\nabla w_n) \right] \nu \cdot \nabla w_n \\ &= -(1/c_n) D_\tau h_2(D_\tau w_{n,t}) \text{ sur } \Sigma_1. \end{aligned}$$

On note

$$E_n = E(u_n, w_n),$$

de l'estimation de stabilité du lemme 3.11. et de (3.4.24) on trouve

$$(3.4.28) \quad \begin{aligned} (1/c_n)^2 \left[ E_n(0) + E_n(T) + \int_0^T E_n(t) dt \right] &\leq C_T(E_n(0)) [(1/c_n)^2 P(u_n, w_n) \\ &\quad + \text{lot}(\tilde{u}_n, \tilde{w}_n)] \leq M, \end{aligned}$$

où  $M$  est une constante telle que  $M = C_T(E(0))$ . Des calculs élémentaires montrent que (3.4.28) implique

$$(3.4.29) \quad \begin{aligned} \left| \tilde{u}_n(t) \right|_{1,\Omega} &\leq C, \\ \left| \tilde{u}_{n,t}(t) \right|_{0,\Omega} &\leq C, \\ \left| \tilde{w}_n(t) \right|_{2,\Omega} &\leq C, \\ \left| \tilde{w}_{n,t}(t) \right|_{1,\Omega} &\leq C. \end{aligned}$$

En effet, d'une part (3.4.28) donne

$$(1/c_n)^2 \int_0^T E_n(t) dt \leq M,$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned} (1/c_n)^2 \int_0^T E_n(t) dt &= \int_Q \left[ \left| \tilde{u}_{n,t}(t) \right|^2 + \left| \tilde{w}_{n,t}(t) \right|^2 + \delta \left| \tilde{w}_{n,t}(t) \right|^2 \right] dQ \\ &\quad + (1/c_n)^2 \left[ \int_0^T a(w_n, w_n) dt + \int_Q \mathcal{C} N(w_n, w_n) \cdot N(w_n, w_n) dQ \right] \\ &\geq \int_Q \left[ \left| \tilde{u}_{n,t}(t) \right|^2 + \left| \tilde{w}_{n,t}(t) \right|^2 + \delta \left| \tilde{w}_{n,t}(t) \right|^2 \right] dQ + \frac{C}{(c_n)^2} \int_0^T \left[ |u_n(t)|_{1,\Omega}^2 + |w_n(t)|_{2,\Omega}^2 \right] dt \\ &\geq \int_0^T \left[ \left| \tilde{u}_{n,t}(t) \right|_{0,\Omega}^2 + \min\{1, \delta\} \left| \tilde{w}_{n,t}(t) \right|_{1,\Omega}^2 + C \left[ \left| \tilde{u}_n(t) \right|_{1,\Omega}^2 + \left| \tilde{w}_n(t) \right|_{2,\Omega}^2 \right] \right] dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé dans (3.4.29).

Par conséquent, il existe une sous-suite, notée encore avec l'indice "n", telles que

$$(3.4.30) \quad \tilde{u}_n \longrightarrow \tilde{u} \text{ dans } L^\infty \left( 0, T; [H^1(\Omega)]^2 \right) \text{ faible étoile,}$$

$$(3.4.31) \quad \tilde{u}_{n,t} \longrightarrow \tilde{u}_t \text{ dans } L^\infty \left( 0, T; [L^2(\Omega)]^2 \right) \text{ faible étoile,}$$

$$(3.4.32) \quad \tilde{w}_n \longrightarrow \tilde{w} \text{ dans } L^\infty \left( 0, T; H^2(\Omega) \right) \text{ faible étoile,}$$

$$(3.4.33) \quad \tilde{w}_{n,t} \longrightarrow \tilde{w}_t \text{ dans } L^\infty \left( 0, T; H^1(\Omega) \right) \text{ faible étoile.}$$

Par la compacité des termes d'ordre inférieur "lot" (c'est-à-dire,  $H^1(\Omega) \subset H^{1-\epsilon}(\Omega)$ ,  $H^2(\Omega) \subset H^{2-\epsilon}(\Omega)$  avec injection compacte pour  $\epsilon > 0$ ), on a

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &\longrightarrow \tilde{u} \text{ dans } [H^{1-\epsilon}(\Omega)]^2 \text{ fort,} \\ \tilde{w}_n &\longrightarrow \tilde{w} \text{ dans } H^{2-\epsilon}(\Omega) \text{ fort,} \end{aligned}$$

donc de (3.4.24) (et d'après (3.4.22) et (3.4.23)) on obtient

$$(3.4.34) \quad \text{lot} \left( \tilde{u}_n, \tilde{w}_n \right) \longrightarrow \text{lot} \left( \tilde{u}, \tilde{w} \right) = 1.$$

Notons aussi que, dû au fait que les termes dans (3.4.29) sont bornés uniformément, on a

$$(3.4.35) \quad w_n = \tilde{w}_n c_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L^\infty \left( 0, T; H^2(\Omega) \right),$$

donc, le passage à la limite dans l'équation de  $\tilde{u}_n, \tilde{w}_n$  (dû à la continuité faible des termes non linéaires), l'utilisation de (3.4.33), (3.4.35), (3.4.25) et

$$(3.4.36) \quad |(1/c_n) f(\nabla w_n)|_{L^2(\Omega)} \leq C \left| \nabla \tilde{w}_n \right|_{L^4(\Omega)} |\nabla w_n|_{L^4(\Omega)} \longrightarrow 0$$

mènent au système découlé

$$(3.4.37) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_{tt} + b_1 \tilde{u}_t - \text{div} \left[ \mathcal{C} \left[ \epsilon \left( \tilde{u} \right) \right] \right] &= 0 \text{ dans } Q, \\ [I - \delta \Delta] \tilde{w}_{tt} + b_2 \tilde{w}_t + D \Delta^2 \tilde{w} &= 0 \text{ dans } Q, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet fixées sur la partie non contrôlée du bord  $\Gamma_0$

$$\tilde{u} = \tilde{w} = \nabla \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Sigma_0,$$

et les conditions aux limites homogènes sur la partie contrôlée du bord  $\Gamma_1$

$$(3.4.38) \quad \begin{aligned} \mathcal{C} \left[ \epsilon \left( \tilde{u} \right) \right] \nu &= 0 \text{ dans } \Sigma_1, \\ D \left[ \Delta \tilde{w} + (1 - \mu) \beta_1 \tilde{w} \right] &= 0 \text{ dans } \Sigma_1, \\ D \left[ D_n \Delta \tilde{w} + (1 - \mu) \beta_2 \tilde{w} \right] &= 0 \text{ dans } \Sigma_1, \end{aligned}$$

et les conditions aux limites déterminées sur  $\Gamma$

$$\tilde{\tilde{u}}_t = 0, \nabla \tilde{\tilde{w}}_t = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Notons

$$\tilde{u} = \tilde{\tilde{u}}_t, \tilde{w} = \tilde{\tilde{w}}_t,$$

donc  $\tilde{u}, \tilde{w}$  satisfont les mêmes équations (3.4.37) avec les conditions aux limites

$$(3.4.39) \quad \tilde{u} = \tilde{w} = \nabla \tilde{w} = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$(3.4.40) \quad D_n \tilde{u} = \Delta \tilde{w} = D_n \Delta \tilde{w} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1.$$

Le résultat d'unicité de type Holmgren valable pour ces équations linéaires (voir [16]) donne

$$\tilde{u} = \tilde{w} = 0.$$

remplaçons dans (3.4.19) on trouve

$$\tilde{\tilde{u}} = \tilde{\tilde{w}} = 0,$$

absurde avec (3.4.34). Ce qui accomplit la preuve du lemme 3.14. ■

## 3.5 Fin de la preuve du théorème 3.1.

En combinant les résultats des lemmes 3.11. et 3.14. on obtient le lemme 3.15.

**Lemme 3.15.** *Soit  $(u, w)$  une solution régulière du problème  $(\mathcal{P})$ . Alors, il existe une constante  $T_0 > 0$  telle que pour chaque  $T > T_0$ ,*

$$(3.5.1) \quad \begin{aligned} E(0) + E(T) + \int_0^T E(t) dt &\leq C_T (E(0)) \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 \\ &+ |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 + \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit on note

$$\begin{aligned} \Sigma_A &\equiv \{(t, x) \in \Sigma_1 : |u_t| \leq 1\}, \\ \Sigma_B &= \Sigma_1 \setminus \Sigma_A \equiv \{(t, x) \in \Sigma_1 : |u_t| > 1\}, \\ \Sigma_C &\equiv \{(t, x) \in \Sigma_1 : 1 \leq |u_t| \leq R\}, \\ \Sigma_D &= \Sigma_B \setminus \Sigma_C \equiv \{(t, x) \in \Sigma_1 : |u_t| > R\}. \end{aligned}$$

D'une part, par l'hypothèse 1. (2) on a

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_D} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2] d\Sigma_D &\leq (m^{-1} + M) \int_{\Sigma_D} u_t g(u_t) d\Sigma_D, \\ \int_{\Sigma_C} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2] d\Sigma_C &\leq (R^2 + |g(R)|^2) \text{mes}(\Sigma_1), \end{aligned}$$

et de la remarque 2.1. (voir la page 22), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_C} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2] d\Sigma_C &= \int_{\Sigma_C} u_t g(u_t) \left[ \frac{|u_t|^2}{u_t g(u_t)} + \frac{|g(u_t)|^2}{u_t g(u_t)} \right] d\Sigma_C \\ &\leq \sup_{u_t \in \Sigma_C} \left( \frac{|u_t|^2}{u_t g(u_t)} + \frac{|g(u_t)|^2}{u_t g(u_t)} \right) \int_{\Sigma_C} u_t g(u_t) d\Sigma_C \\ &\leq C \int_{\Sigma_C} u_t g(u_t) d\Sigma_C, \end{aligned}$$

et d'autre part, de la définition de la fonction  $\mathcal{G}$ , on obtient

$$\int_{\Sigma_A} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2] d\Sigma_A \leq \int_{\Sigma_A} \mathcal{G}(u_t g(u_t)) d\Sigma_A.$$

Par l'inégalité de Jensen, on trouve

$$\int_{\Sigma_A} \mathcal{G}(u_t g(u_t)) d\Sigma_A \leq \text{mes}(\Sigma_1) \mathcal{G}\left(\frac{1}{\text{mes}(\Sigma_1)} \int_{\Sigma_1} u_t g(u_t) d\Sigma_1\right),$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2] d\Sigma_1 &= \int_{\Sigma_A} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2] d\Sigma_A + \int_{\Sigma_B} [|u_t|^2 + |g(u_t)|^2] d\Sigma_B \\ (3.5.2) \quad &\leq \int_{\Sigma_A} \mathcal{G}(u_t g(u_t)) d\Sigma_A + C \int_{\Sigma_B} g(u_t) u_t d\Sigma_B \\ &\leq \int_{\Sigma_1} [\mathcal{G}(u_t g(u_t)) + C u_t g(u_t)] d\Sigma_1. \end{aligned}$$

Les mêmes arguments donnent

$$\begin{aligned} (3.5.3) \quad \int_{\Sigma_1} [|\nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 &\leq \int_{\Sigma_1} \{C[D_n w_t h_1(D_n w_t) \\ &+ (D_\tau w_t) h_2(D_\tau w_t)] + \mathcal{H}_1((D_n w_t) h_1(D_n w_t)) + \mathcal{H}_2((D_\tau w_t) h_2(D_\tau w_t))\} d\Sigma_1. \end{aligned}$$

En effet, introduisons ces notations (pour  $\alpha = n, \tau$ )

$$\begin{aligned} \Sigma_{A_\alpha} &\equiv \{(x, t) \in \Sigma_1 : |D_\alpha w_t| \leq 1\}, \\ \Sigma_{B_\alpha} &\equiv \Sigma_1 \setminus \Sigma_{A_\alpha} \equiv \{(x, t) \in \Sigma_1 : |D_\alpha w_t| > 1\}, \\ \Sigma_{C_\alpha} &\equiv \{(x, t) \in \Sigma_1 : 1 \leq |D_\alpha w_t| \leq R\}, \\ \Sigma_{D_\alpha} &\equiv \Sigma_{B_\alpha} \setminus \Sigma_{C_\alpha} \equiv \{(x, t) \in \Sigma_1 : |D_\alpha w_t| > R\}. \end{aligned}$$

Alors, on a ces trois inégalités (pour  $i = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{D_\alpha}} [|D_\alpha w_t|^2 + |h_i(D_\alpha w_t)|^2] d\Sigma_{D_\alpha} &\leq (m^{-1} + M) \int_{\Sigma_{D_\alpha}} D_\alpha w_t h_i(D_\alpha w_t) d\Sigma_{D_\alpha}, \\ \int_{\Sigma_{C_\alpha}} [|D_\alpha w_t|^2 + |h_i(D_\alpha w_t)|^2] d\Sigma_{C_\alpha} &\leq (R^2 + |h_i(R)|^2) \text{mes}(\Sigma_1), \\ \int_{\Sigma_{A_\alpha}} [|D_\alpha w_t|^2 + |h_i(D_\alpha w_t)|^2] d\Sigma_{A_\alpha} &\leq \int_{\Sigma_{A_\alpha}} \mathcal{H}_i(D_\alpha w_t h_i(D_\alpha w_t)) d\Sigma_{A_\alpha}, \end{aligned}$$

donc, par l'inégalité de Jensen on obtient

$$\int_{\Sigma_{A_\alpha}} \mathcal{H}_i(D_\alpha w_t h_i(D_\alpha w_t)) d\Sigma_{A_\alpha} \leq \text{mes}(\Sigma_1) \mathcal{H}_i\left(\frac{1}{\text{mes}(\Sigma_1)} \int_{\Sigma_1} (D_\alpha w_t h_i(D_\alpha w_t)) d\Sigma_1\right),$$

avec  $(\alpha, i) \in \{(n, 1), (\tau, 2)\}$ .

De plus

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{B_\alpha}} [| \nabla w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_{B_\alpha} &= \int_{\Sigma_{B_\alpha}} [|D_n w_t|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 \\ &+ |D_\tau w_t|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_{B_\alpha} \leq (m^{-1} + M) \int_{\Sigma_{D_\alpha}} [D_n w_t h_1(D_n w_t) + D_\tau w_t h_2(D_\tau w_t)] d\Sigma_{D_\alpha}, \end{aligned}$$

d'où, il découle (3.5.3).

Par suite

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} [|u_t|^2 + |\nabla w_t|^2 + |g(u_t)|^2 + |h_1(D_n w_t)|^2 + |h_2(D_\tau w_t)|^2] d\Sigma_1 &\leq C \int_{\Sigma_1} [u_t g(u_t) \\ &+ D_n w_t h_1(D_n w_t) + D_\tau w_t h_2(D_\tau w_t)] d\Sigma_1 + \text{mes}(\Sigma_1) \left\{ \mathcal{G}\left(\frac{1}{\text{mes}(\Sigma_1)} \int_{\Sigma_1} u_t g(u_t) d\Sigma_1\right) \right. \\ &\left. \mathcal{H}_1\left(\frac{1}{\text{mes}(\Sigma_1)} \int_{\Sigma_1} (D_n w_t h_1(D_n w_t)) d\Sigma_1\right) + \mathcal{H}_2\left(\frac{1}{\text{mes}(\Sigma_1)} \int_{\Sigma_1} (D_\tau w_t h_2(D_\tau w_t)) d\Sigma_1\right) \right\} \\ &\leq \text{mes}(\Sigma_1) \left\{ \frac{C\mathcal{F}}{\text{mes}(\Sigma_1)} + \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{F}}{\text{mes}(\Sigma_1)}\right) + \mathcal{H}_1\left(\frac{\mathcal{F}}{\text{mes}(\Sigma_1)}\right) + \mathcal{H}_2\left(\frac{\mathcal{F}}{\text{mes}(\Sigma_1)}\right) \right\} \\ (3.5.4) \qquad \qquad \qquad &\leq \text{mes}(\Sigma_1) [kI + \mathcal{H}](\mathcal{F}), \end{aligned}$$

avec  $k = \frac{C}{\text{mes}(\Sigma_1)}$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv \int_{\Sigma_1} [u_t g(u_t) + h_1(D_n w_t) D_n w_t + h_2(D_\tau w_t) D_\tau w_t] d\Sigma_1 \\ (3.5.5) \qquad \qquad \qquad &+ \int_0^T [(b_1 u_t, u_t)_\Omega + (b_2 w_t, w_t)_\Omega] dt, \end{aligned}$$

donc l'inégalité (3.5.1) devient

$$(3.5.6) \qquad E(0) + E(T) + \int_0^T E(t) dt \leq C_T(E(0)) [kI + \mathcal{H}](\mathcal{F}),$$

d'où

$$(3.5.7) \quad E(T)/C_T(E(0)) \leq [kI+\mathcal{H}](\mathcal{F}),$$

comme, la fonction  $kI+\mathcal{H}$  est monotone croissante, on peut écrire

$$[kI+\mathcal{H}]^{-1}(E(T)/C_T(E(0))) \leq \mathcal{F} = 1/2[E(0) - E(T)] \leq E(0) - E(T),$$

ce qui donne

$$(3.5.8) \quad P(E(T)) + E(T) \leq E(0),$$

où la fonction monotone  $P$  est définie dans la **section 3.1**. Ainsi, on a prouvé le lemme 3.16.

**Lemme 3.16.** *Soit  $(u, w)$  une solution du problème  $(\mathcal{P})$ . Alors, il existe une constante  $T > 0$  telle que*

$$(3.5.9) \quad P(E(T)) + E(T) \leq E(0),$$

où la fonction monotone  $P$  est définie dans la **section 3.1**.

La conclusion finale du théorème 3.1. découle de (3.5.9) et du lemme 1.3. En effet, le lemme 3.16. donne

$$P(E(mT + T)) + E(mT + T) \leq E(mT) \text{ pour } m \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le lemme 1.3. avec  $s_m = E(mT)$ , on trouve

$$E(mT) \leq S(m), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

prenons  $t = mT + \tau$  avec  $0 \leq \tau < 1$  (noter que  $E(t)$  est une fonction non croissante), on obtient alors

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) = S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right) \text{ pour } t \geq T,$$

d'où le résultat du théorème 3.1. ■

# Chapitre 4

## Résultat complémentaire de régularité

### Sommaire

---

|     |                                                                |    |
|-----|----------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Régularité améliorée sans conditions supplémentaires . . . . . | 90 |
| 4.2 | Régularité améliorée avec conditions supplémentaires . . . . . | 96 |

---

### 4.1 Régularité améliorée sans conditions supplémentaires

Rappelons que dans la preuve du lemme 3.14. dans la **section 3.4** on a utilisé un résultat d'unicité dû à Isakov lequel, cependant, exige l'addition de régularité sur la solution de (3.4.14), (3.4.18) et (3.4.10). L'objectif de cette section est d'établir la régularité demandée. En effet, on doit montrer que la solution de ce problème aux limites visualise un taux de régularité arbitraire. On commence l'analyse avec un simple cas d'un problème semi-dynamique qui consiste en un système d'équations données par (3.4.14) et (3.4.18) (voir la preuve de la partie I du lemme 3.14.). Ainsi, on considère le problème suivant :

$$(4.1.1) \quad [I - \delta \Delta] \tilde{w}_{tt} + b_2 \tilde{w}_t + D \Delta^2 \tilde{w} = L(u, w, \tilde{w}) \text{ dans } Q,$$

avec les conditions aux limites homogènes sur le bord  $\Gamma$

$$(4.1.2) \quad \nabla \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Gamma, \Delta \tilde{w} = D_n \Delta \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

où on a utilisé la notation

$$(4.1.3) \quad L(u, w, \tilde{w}) \equiv \mathcal{C}N(u, w) H(\tilde{w}) + 1/2\mathcal{C}(\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w) H(w) + 1/2\mathcal{C}(\nabla w \otimes \nabla \tilde{w}) H(w),$$

on sait a priori (voir (3.4.16)) que pour tout  $\epsilon > 0$

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} u &\in C\left(0, T; [H^{2-\epsilon}(\Omega)]^2\right), \quad w \in C(0, T; H^2(\Omega)), \\ \tilde{w} &\in C(0, T; H^1(\Omega)), \quad \tilde{w}_t \in C(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Le premier résultat est donné par le lemme 4.1.

**Lemme 4.1.** *Soit  $\tilde{w}$  solution de (4.1.1) avec la régularité ci-dessus et les conditions aux limites données dans (4.1.2). Alors,*

$$(4.1.5) \quad \tilde{w} \in C(0, T; H^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^1(\Omega)).$$

**Preuve.** L'idée est d'utiliser l'estimation de Carleman donnée dans [35] appliquée à l'équation (4.1.1). Cependant, pour faire cela, on a besoin de considérer une solution plus régulière que celle qui est donnée a priori. Ainsi, on prend une suite de données initiales

$$\tilde{w}_{n,0} \in H_0^2(\Omega), \quad \tilde{w}_{n,1} \in H_0^1(\Omega),$$

telle que

$$(4.1.6) \quad \tilde{w}_{n,0} \longrightarrow \tilde{w}(0) \text{ dans } H^1(\Omega), \quad \tilde{w}_{n,1} \longrightarrow \tilde{w}_t(0) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Le membre de droite  $L$  dans l'équation (4.1.1) satisfait à

$$(4.1.7) \quad |L(u, w, \tilde{w})|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C |\tilde{w}|_{2,\Omega} \left[ |u|_{2-\epsilon,\Omega} + |w|_{2,\Omega}^2 \right].$$

En effet, soit  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  alors, on a d'une part

$$(4.1.8) \quad \begin{aligned} |\mathcal{C}N(u, w) \phi|_{0,\Omega} &\leq C \left( |u|_{W^{1,4}(\Omega)} + |w|_{W^{1,4}(\Omega)}^2 \right) |\phi|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C \left( |u|_{2-\epsilon,\Omega} + |w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 \right) |\phi|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les injections de Sobolev

$$H^{2-\epsilon}(\Omega) \subset W_4^1(\Omega), \quad H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega), \quad \epsilon \leq 1/2,$$

et de l'injection de Sobolev

$$H^{1+\frac{3}{4}}(\Omega) \subset W^{1,8}(\Omega),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
 (4.1.9) \quad & |\mathcal{C}(\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w) \phi|_{0,\Omega} \leq C \left( |\tilde{w}|_{W^{1,8}(\Omega)} |w|_{W^{1,8}(\Omega)} \right) |\phi|_{L^4(\Omega)} \\
 & \leq C |\tilde{w}|_{W^{1,8}(\Omega)} |w|_{W^{1,8}(\Omega)} |\phi|_{1,\Omega} \leq C |\tilde{w}|_{1+\frac{3}{4},\Omega} |w|_{1+\frac{3}{4},\Omega} |\phi|_{1,\Omega} \\
 & \leq C |\tilde{w}|_{2,\Omega} |w|_{2,\Omega} |\phi|_{1,\Omega},
 \end{aligned}$$

en utilisant (4.1.8) et (4.1.9) on obtient

$$\begin{aligned}
 (L(u, w, \tilde{w}), \phi)_{0,\Omega} &= (CN(u, w) H(\tilde{w}), \phi)_{0,\Omega} + 1/2 (\mathcal{C}(\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w) H(w), \phi)_{0,\Omega} \\
 &\quad + 1/2 (\mathcal{C}(\nabla w \otimes \nabla \tilde{w}) H(w), \phi)_{0,\Omega} \leq |CN(u, w) \phi|_{0,\Omega} |H(\tilde{w})|_{0,\Omega} \\
 &\quad + 1/2 |\mathcal{C}(\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w) \phi|_{0,\Omega} |H(w)|_{0,\Omega} + 1/2 |\mathcal{C}(\nabla w \otimes \nabla \tilde{w}) \phi|_{0,\Omega} |H(w)|_{0,\Omega} \\
 &\leq C |\tilde{w}|_{2,\Omega} \left[ \left( |u|_{2-\epsilon,\Omega} + |w|_{2-\epsilon,\Omega}^2 \right) + |w|_{2,\Omega}^2 \right] |\phi|_{1,\Omega} \leq C |\tilde{w}|_{2,\Omega} \left[ |u|_{2-\epsilon,\Omega} + |w|_{2,\Omega}^2 \right] |\phi|_{1,\Omega},
 \end{aligned}$$

en raison de la dualité, on trouve (4.1.7).

Avec cette régularité de  $L$ , on conclut par un argument de perturbation dans la théorie des semi-groupes linéaires, que la solution correspondante aux données initiales régularisée notée par  $\tilde{w}_n(t)$ , satisfait

$$(4.1.10) \quad \tilde{w}_n \in H_0^2(\Omega), \tilde{w}_{n,t} \in H_0^1(\Omega),$$

$$(4.1.11) \quad \tilde{w}_n \longrightarrow \tilde{w}(t) \text{ dans } H^1(\Omega), \tilde{w}_{n,t} \longrightarrow \tilde{w}_t(t) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

puisque le terme  $L(u, w, \tilde{w}_n) \in C(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , on est donc dans la position d'appliquer l'estimation de Carleman (voir [35]) à l'équation (4.1.1) satisfaite par  $\tilde{w}_n$ . Pour cela, on a besoin d'introduire certaines notations. Soient  $\phi, \psi$  telles que

$$\phi(x) = |x - x_0|^2 - c(t - T/2)^2,$$

où la constante  $c$  est suffisamment petite (voir [35]), et  $\psi$  une fonction réelle non négative et non décroissante régulière, avec les propriétés suivantes

$$(4.1.12) \quad \psi(0) = 0, \psi(x) > 0 \text{ pour } x > 0,$$

$$(4.1.13) \quad \psi' \psi^k / \psi \text{ borné sur } \mathbb{R}^+ \text{ pour } k = 1, 2, 3.$$

On définit

$$z \equiv \psi(\phi).$$

On applique l'estimation du théorème 2 de [35] (avec  $p = -1$ ) on trouve

$$\begin{aligned}
 (4.1.14) \quad & \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi} \tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi} \tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \\
 & \leq C/\tau \int_0^T |ze^{\tau\phi} L(u, w, \tilde{w}_n)|_{-1,\Omega}^2 dt + M_\tau(u, w, \tilde{w}_n),
 \end{aligned}$$

où la constante  $\tau$  peut être arbitrairement grande, le terme  $M_\tau(u, w, \tilde{w}_n)$  est borné par la régularité a priori de  $u, w$  et de plus dépend linéairement de la norme d'ordre inférieur de  $\tilde{w}_n$ , c'est-à-dire

$$(4.1.15) \quad M_\tau(u, w, \tilde{w}_n) \leq M_{\tau,u,w} \int_0^T \left[ |\tilde{w}_n|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_{n,t}|_{0,\Omega}^2 \right] dt.$$

Le membre de droite dans (4.1.14) peut être majoré comme suit

$$(4.1.16) \quad \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \leq C/\tau \left[ |w|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2 + |u|_{L^\infty(0,T;H^{2-\epsilon}(\Omega))}^2 \right] \int_0^T |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{H^2(\Omega)}^2 dt + M_\tau(u, w, \tilde{w}_n),$$

en prenant  $\tau$  suffisamment grand et en tenant compte de la régularité a priori (4.1.4) on trouve

$$(4.1.17) \quad \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_{n,s}|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] ds \leq M_\tau(u, w, \tilde{w}_n).$$

En effet, de (4.1.16) on a

$$\int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + (1 - C/\tau) |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \leq M_\tau(u, w, \tilde{w}_n),$$

pour  $\tau$  suffisamment grand (il suffit que  $\tau > C$ )

$$(1 - C/\tau) \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \leq M_\tau(u, w, \tilde{w}_n),$$

d'où l'estimation (4.1.17).

Puisque  $\psi$  peut être choisi tel que

$$ze^{\tau\phi} \geq 1 \text{ dans } [t_0, t_1] \subset [0, T],$$

l'inégalité (4.1.17) donne

$$(4.1.18) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[ |\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \leq M_\tau(u, w, \tilde{w}_n).$$

Définissons

$$\tilde{E}_n(t) \equiv |\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2,$$

de (4.1.7) on a

$$(4.1.19) \quad \begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} |L(u, w, \tilde{w}_n)|_{-1,\Omega}^2 dt \leq C \left\{ \int_{t_0}^{t_1} |\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 dt \right\} \sup_{[0,T]} \left[ |u|_{2-\epsilon,\Omega}^2 + |w|_{2,\Omega}^2 \right] \\ & \leq C \left\{ \int_{t_0}^{t_1} |\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 dt \right\} \left[ |u|_{L^\infty(0,T;H^{2-\epsilon}(\Omega))}^2 + |w|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right] + M_\tau(u, w, \tilde{w}_n), \end{aligned}$$

en appliquant l'égalité standard de l'énergie à l'équation (4.1.1) et en tenant compte des inégalités (4.1.18) et (4.1.19) on obtient pour  $t_0 \leq s \leq t_1$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n(t_1) &\leq C\tilde{E}_n(s) + C \int_s^{t_1} |L(u, w, \tilde{w}_n)|_{-1, \Omega}^2 ds \leq C\tilde{E}_n(s) + C \int_s^{t_1} \tilde{E}_n(t) dt + CM_\tau(u, w, \tilde{w}_n) \\ (4.1.20) \qquad \qquad \qquad &\leq C\tilde{E}_n(s) + CM_\tau(u, w, \tilde{w}_n). \end{aligned}$$

L'intégration de l'inégalité par rapport à  $s$  sur  $[t_0, t_1]$  donne

$$(4.1.21) \qquad (t_1 - t_0) \tilde{E}_n(t_1) \leq C \int_{t_0}^{t_1} \tilde{E}_n(s) ds + CTM_\tau(u, w, \tilde{w}_n),$$

de (4.1.18) et (4.1.21) on déduit

$$(4.1.22) \qquad \tilde{E}_n(t_1) \leq CTM_\tau(u, w, \tilde{w}_n).$$

Puisque le problème est linéaire pour la variable  $\tilde{w}$  et le terme  $M_\tau(u, w, \tilde{w}_n)$  dépend de la norme inférieure estimée par  $\tilde{w}_n$  (voir (4.1.15)), on applique le même argument pour la suite  $\tilde{w}_n - \tilde{w}_m$ . Les inégalités (4.1.11) et (4.1.15) montrent que

$$(4.1.23) \qquad M_\tau(u, w, \tilde{w}_n - \tilde{w}_m) \longrightarrow 0.$$

Par le passage à la limite dans le membre de droite de (4.1.22) (le temps décrit par la différence entre deux solutions) et en tenant compte de (4.1.23), on conclut que  $(\tilde{w}_n(t_1), \tilde{w}_{n,t}(t_1))$  est une suite de Cauchy dans  $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  et elle converge vers  $(\tilde{w}(t_1), \tilde{w}_t(t_1))$ . L'argument standard des semi-groupes donne une régularité améliorée pour  $\tilde{w}$

$$(4.1.24) \qquad \tilde{w} \in C(0, T; H^2(\Omega)),$$

$$(4.1.25) \qquad \tilde{w}_t \in C(0, T; H^1(\Omega)).$$

D'où le résultat du lemme 4.1. ■

Pour appliquer le résultat d'unicité de Isakov dans le contexte de l'équation (3.4.18), on avait besoin de supposer une régularité suffisante sur les solutions ainsi sur les "coefficients" de l'équation, laquelle, dans notre cas revient à la régularité de  $u, w$ , puisque les fonctions  $\tilde{u}, \tilde{w}$  ne sont rien d'autre qu'une dérivation par rapport au temps de  $u$  et  $w$ . Par conséquent on obtient

$$(4.1.26) \qquad w_t \in C(0, T; H^2(\Omega)), w_{tt} \in C(0, T; H^1(\Omega)).$$

Afin d'obtenir la régularité complémentaire, on retourne aux équations originales satisfaites par  $u, w$  (c'est-à-dire (3.4.7) – (3.4.9) ainsi (3.4.14)), on trouve

$$\begin{aligned}
 (4.1.27) \quad & \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)]] = 0 \text{ dans } Q, \\
 & D\Delta^2 w = -[I - \delta\Delta] w_{tt} - b_2 w_t + \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] \text{ dans } Q, \\
 & u = w = \nabla w = 0 \text{ sur } \Sigma_0, \\
 & \mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\
 & D[\Delta w + (1 - \mu) B_1 w] = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\
 & D[D_n \Delta w + (1 - \mu) B_2 w] = 0 \text{ sur } \Sigma_1.
 \end{aligned}$$

Par un simple calcul et en accord avec le résultat du lemme 4.1. , on conclut que

$$\begin{aligned}
 (4.1.28) \quad & \operatorname{div} [\mathcal{C} [f(\nabla w)]] \in C(0, T; H^{-\epsilon}(\Omega)), \\
 (4.1.29) \quad & -[I - \delta\Delta] w_{tt} - b_2 w_t + \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] \in C(0, T; H^{-1-\epsilon}(\Omega)).
 \end{aligned}$$

En suite, de la régularité du problème biharmonique, on conclut de plus que

$$w \in C(0, T; H^{3-\epsilon}(\Omega)).$$

Par conséquent,

$$f(\nabla w) \in C(0, T; H^1(\Omega)),$$

Revenons à (4.1.27) on trouve

$$\begin{aligned}
 (4.1.30) \quad & \operatorname{div} [\mathcal{C} [f(\nabla w)]] \in C(0, T; L^2(\Omega)), \\
 (4.1.31) \quad & -[I - \delta\Delta] w_{tt} - b_2 w_t + \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] \in C(0, T; H^{-1}(\Omega)),
 \end{aligned}$$

de plus

$$f(\nabla w)|_{\Gamma_1} \in C(0, T; H^{1/2}(\Gamma_1)),$$

les conditions aux limites dans (4.1.27) donnent aussi

$$\mathcal{C} [\epsilon(u)]|_{\Gamma_1} \in C(0, T; H^{1/2}(\Gamma_1)).$$

On est maintenant dans la position d'appliquer l'estimation d'ellipticité au problème (4.1.27) pour obtenir aussi

$$(4.1.32) \quad u \in C\left(0, T; [H^2(\Omega)]^2\right), w \in C(0, T; H^3(\Omega)).$$

La dérivation par rapport au temps de l'équation (4.1.1) et l'utilisation des mêmes arguments mènent à la conclusion que

$$u, w, \tilde{u}, \tilde{w} \in \mathcal{C}^\infty(Q).$$

Ainsi on a obtenu le théorème 4.2.

**Théorème 4.2.** *Soit  $(u, w)$  une solution faible du système (3.4.7), (3.4.8) avec les conditions aux limites (3.4.9) et tel que  $u_t \equiv 0$  dans  $Q$ . Alors*

$$u, w \in \mathcal{C}^\infty(Q).$$

Ceci donne la régularité améliorée des coefficients et solutions de l'équation (3.4.18), laquelle à son tour, justifie l'application, dans la **section 3.4**, du Théorème 3 de Isakov dans [16]. Par le Théorème 3 dans [16], on déduit que la solution de (3.4.18) est identiquement nulle, ce qui prouve le Corollaire 4.1.

**Corollaire 4.1.** *Soit  $(u, w)$  une solution faible du système (3.4.7), (3.4.8) avec les conditions aux limites (3.4.9) et tel que  $u_t \equiv 0$  dans  $Q$ . Alors*

$$u, w \equiv 0 \text{ dans } Q.$$

## 4.2 Régularité améliorée avec conditions supplémentaires

On considère maintenant le cas le plus difficile, quand la propriété d'unicité de Isakov est employée dans le contexte de la preuve du lemme 3.14. sous la supposition de la Partie II. L'application du résultat de Isakov exige que les solutions et les coefficients du système dynamique complet (3.4.10) soient suffisamment régulières. Sous l'hypothèse de la Partie II, on a  $E_\alpha \leq M$ , qui amène aux solutions limites, avec une régularité progressivement améliorée (voir [24]). Cela doit dire, que dans l'équation (3.4.18) "les coefficients"  $u, w$  sont dans  $C\left(0, T; [H^{1+\alpha}(\Omega)]^2 \times H^{2+\alpha}(\Omega)\right)$ , où le paramètre  $\alpha$  peut être pris arbitrairement petit. Le but est de montrer que cette amélioration progressive des données initiales, implique que la solution du problème (3.4.10) avec des conditions aux limites nulles est  $\mathcal{C}^\infty(Q)$ . Ainsi, on est ramené à considérer le problème suivant : soit  $(u, w)$  une solution faible correspondante au système original avec une régularité complémentaire indiquée ci-dessous, c'est-à-dire on suppose

**Hypothèse 3.**

$$(4.2.1) \quad u \in C\left(0, T; [H^{1+\alpha}(\Omega)]^2\right), w \in C\left(0, T; H^{2+\alpha}(\Omega)\right).$$

On considère le système suivant (voir (3.4.10))

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_{tt} + b_1 \tilde{u}_t - \operatorname{div} [\mathcal{C}[\epsilon(\tilde{u})]] &= L_1(\tilde{w}, w) \text{ dans } Q, \\ [I - \delta \Delta] \tilde{w}_{tt} + b_2 \tilde{w}_t + D \Delta^2 \tilde{w} &= L_2(\tilde{u}, u, \tilde{w}, w) \text{ dans } Q, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites homogènes sur  $\Gamma$

$$\tilde{u} = \nabla \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Gamma, \Delta \tilde{w} = D_n \Delta \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

où on a utilisé les notations

$$(4.2.3) \quad L_1(\tilde{w}, w) \equiv 1/2 \operatorname{div} [\mathcal{C} [\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w]] + 1/2 \operatorname{div} [\mathcal{C} [\nabla w \otimes \nabla \tilde{w}]],$$

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} L_2(\tilde{u}, u, \tilde{w}, w) \equiv & \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon(\tilde{u})] \nabla w + \mathcal{C} [\epsilon(u)] \nabla \tilde{w} + 1/2 \mathcal{C} [\nabla \tilde{w} \otimes \nabla w] \nabla w \\ & + 1/2 \mathcal{C} [\nabla w \otimes \nabla \tilde{w}] \nabla w + \mathcal{C} f(\nabla w) \nabla \tilde{w}]. \end{aligned}$$

Le résultat est donné par le lemme 4.3.

**Lemme 4.3.** *Sous l'hypothèse 3, une solution  $(\tilde{u}, \tilde{w})$  du problème (4.2.2) avec les conditions aux limites nulles*

$$\nabla \tilde{u} = 0, \nabla \tilde{w} = 0, \Delta \tilde{w} = D_n \Delta \tilde{w} = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

*et telle que a priori  $(\tilde{u}, \tilde{w}) \in C(0, T; [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega))$ , satisfait*

$$(4.2.5) \quad (\tilde{u}, \tilde{w}) \in C(0, T; [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; [L^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)).$$

**Preuve.** Comme auparavant, l'idée est d'utiliser l'estimation de Carleman appliquée au problème "régularisé", c'est-à-dire, avec des conditions initiales régulières telle que (4.1.6) est vérifiée et de plus

$$(4.2.6) \quad \tilde{u}_{n,0} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \tilde{u}_{n,1} \in [L^2(\Omega)]^2,$$

$$(4.2.7) \quad \tilde{u}_{n,0} \longrightarrow \tilde{u}(0) \text{ dans } [L^2(\Omega)]^2, \tilde{u}_{n,1} \longrightarrow \tilde{u}_t(0) \text{ dans } [H^{-1}(\Omega)]^2.$$

Dans ce cas, la solution correspondante  $(\tilde{u}_n, \tilde{w}_n)$ , satisfait (4.1.10), (4.1.11) de plus

$$(4.2.8) \quad \tilde{u}_n(t) \in [H_0^1(\Omega)]^2, \tilde{u}_{n,t}(t) \in [L^2(\Omega)]^2,$$

$$(4.2.9) \quad \tilde{u}_n(t) \longrightarrow \tilde{u}(t) \text{ dans } [L^2(\Omega)]^2, \tilde{u}_{n,t}(t) \longrightarrow \tilde{u}_t(t) \text{ dans } [H^{-1}(\Omega)]^2.$$

Avec la régularité améliorée pour les solutions régularisées, en tenant compte de l'hypothèse 3, on vérifie facilement que

$$L_1(w, \tilde{w}_n) \in C(0, T; L^2(\Omega)), L_2(u, \tilde{u}_n, w, \tilde{w}_n) \in C(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

La régularité ci-dessus permet d'appliquer l'estimation de Carleman donnée dans [35]. En effet, le Théorème 2 de [35], appliqué séparément à la plaque de Kirchhoff (4.2.2) et aussi au

système d'élasticité, donnent les inégalités suivantes pour toute constante  $\tau$  suffisamment grande

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_{n,t}|_{0,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_n|_{1,\Omega}^2 \right] dt \\ & \leq C/\tau \int_0^T |ze^{\tau\phi}L_1(\tilde{w}_n, w)|_{0,\Omega}^2 ds + M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n), \end{aligned}$$

$$(4.2.11) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \\ & \leq C/\tau \int_0^T |ze^{\tau\phi}L_2(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n)|_{-1,\Omega}^2 dt + M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n), \end{aligned}$$

où le terme  $M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n)$  est borné par la régularité a priori des solutions  $(\tilde{u}, \tilde{w})$  et  $(u, w)$ . Plus précisément

$$(4.2.12) \quad M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n) \leq M_{\tau,u,w} \int_0^T \left[ |\tilde{u}_n|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{w}_n|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_{n,t}|_{0,\Omega}^2 \right] dt.$$

L'estimation des termes du membre de droite des inégalités (4.2.10) et (4.2.11) donne

$$(4.2.13) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_{n,t}|_{0,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_n|_{1,\Omega}^2 \right] dt \\ & \leq C/\tau \left\{ \int_0^T |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 dt \right\} |w|_{L^\infty(0,T;H^{2+\epsilon}(\Omega))}^2 + M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n), \end{aligned}$$

$$(4.2.14) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \leq C/\tau \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\epsilon(\tilde{u}_n) \nabla w|_{0,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\epsilon(u) \nabla \tilde{w}_n|_{0,\Omega}^2 \right. \\ & \quad \left. + |ze^{\tau\phi}(\nabla \tilde{w}_n \otimes \nabla w) \nabla w|_{0,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}(\nabla w \otimes \nabla w) \nabla \tilde{w}_n|_{0,\Omega}^2 \right] dt + M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n) \\ & \leq C/\tau \left\{ \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_n|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \right\} |w|_{L^\infty(0,T;H^{2+\epsilon}(\Omega))}^2 \\ & \quad + \left\{ \int_0^T |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 dt \right\} |u|_{L^\infty(0,T;H^{1+\epsilon}(\Omega))}^2 + M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n). \end{aligned}$$

En combinant (4.2.13) et (4.2.14) on obtient

$$(4.2.15) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_{n,t}|_{0,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_n|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \\ & \leq C_{u,w}/\tau \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_n|_{1,\Omega}^2 \right] dt + M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n). \end{aligned}$$

Prenons la constante  $\tau$  suffisamment grande on trouve

$$(4.2.16) \quad \int_0^T \left[ |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_{n,t}|_{0,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{u}_n|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |ze^{\tau\phi}\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \leq M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n).$$

Puisque  $\psi$  peut être choisit tel que

$$ze^{\tau\phi} \geq 1 \text{ dans } [t_0, t_1] \subset [0, T],$$

donc l'inégalité (4.2.16) donne

$$(4.2.17) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[ |\tilde{u}_{n,t}|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{u}_n|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_{n,t}|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \leq CM_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n).$$

Par suite, définissons

$$\tilde{E}_n(t) \equiv |\tilde{u}_{n,t}(t)|_{0,\Omega}^2 + |\tilde{u}_n(t)|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_{n,t}(t)|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_n(t)|_{2,\Omega}^2.$$

et notons que

$$(4.2.18) \quad \begin{aligned} & \int_s^{t_1} \left[ |L_1(w, \tilde{w}_n)|_{0,\Omega}^2 + |L_2(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n)|_{-1,\Omega}^2 \right] dt \\ & \leq C \int_s^{t_1} \left[ |\tilde{u}_n|_{1,\Omega}^2 + |\tilde{w}_n|_{2,\Omega}^2 \right] dt \left[ |w|_{L^\infty(0,T;H^{2+\epsilon}(\Omega))}^2 + |u|_{L^\infty(0,T;H^{1+\epsilon}(\Omega))}^2 \right] + M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n), \end{aligned}$$

alors, appliquons l'égalité de l'énergie à l'équation (4.2.2), en tenant compte de l'inégalité (4.2.18) on obtient pour tout  $t_0 \leq s \leq t_1$

$$(4.2.19) \quad \begin{aligned} \tilde{E}_n(t_1) & \leq C\tilde{E}_n(s) + C \int_s^{t_1} \left[ |L_1(w, \tilde{w}_n)|_{0,\Omega}^2 + |L_2(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n)|_{-1,\Omega}^2 \right] dt \\ & \leq C\tilde{E}_n(s) + CM_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n) + C_{u,w} \int_s^{t_1} \tilde{E}_n(t) dt \\ & \leq C\tilde{E}_n(s) + CM_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n) + C_{u,w} \int_{t_0}^{t_1} \tilde{E}_n(t) dt. \end{aligned}$$

L'intégration de l'inégalité par rapport à  $s$  sur  $[t_0, t_1]$  donne

$$(4.2.20) \quad (t_1 - t_0) \tilde{E}_n(t_1) \leq C \int_{t_0}^{t_1} \tilde{E}_n(s) ds + CT \left[ M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n) + \int_{t_0}^{t_1} \tilde{E}_n(t) dt \right].$$

Par (4.2.17), (4.2.20) on conclut que

$$(4.2.21) \quad \tilde{E}_n(t_1) \leq C_T M_\tau(u, w, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n).$$

On applique le même argument pour les suites  $\tilde{u}_n - \tilde{u}_m$ ,  $\tilde{w}_n - \tilde{w}_m$ , en tenant compte des inégalités (4.2.9), (4.1.11) et (4.2.12) on conclut que

$$M_\tau(u, w, \tilde{u}_n - \tilde{u}_m, \tilde{w}_n - \tilde{w}_m) \longrightarrow 0.$$

donc  $(\tilde{u}_n(t_1), \tilde{u}_{n,t}(t_1), \tilde{w}_n(t_1), \tilde{w}_{n,t}(t_1))$  est une suite de Cauchy dans  $[H^1(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , et elle converge vers  $(\tilde{u}(t_1), \tilde{u}_t(t_1), \tilde{w}(t_1), \tilde{w}_t(t_1))$ . L'argument des semi-groupes donne une régularité améliorée pour  $\tilde{u}, \tilde{w}$

$$(4.2.22) \quad \tilde{u} \in C\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right), \tilde{w} \in C\left(0, T; H^2(\Omega)\right),$$

$$(4.2.23) \quad \tilde{u}_t \in C\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2\right), \tilde{w}_t \in C\left(0, T; H^1(\Omega)\right).$$

D'où le résultat du lemme 4.3. ■

Pour appliquer le résultat d'unicité de Isakov dans le contexte de l'équation (3.4.10), on avait besoin de supposer une régularité suffisante sur les solutions ainsi que sur les "coefficients" de l'équation, laquelle, dans notre cas revient à la régularité de  $u, w$  puisque les fonctions  $\tilde{u}, \tilde{w}$  sont rien qu'une dérivation par rapport au temps de  $u$  et  $w$ . Par conséquent on obtient

$$(4.2.24) \quad u_t \in C\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right), w_t \in C\left(0, T; H^2(\Omega)\right),$$

$$(4.2.25) \quad u_{tt} \in C\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2\right), w_{tt} \in C\left(0, T; H^1(\Omega)\right).$$

Afin d'obtenir la régularité complémentaire, on retourne aux équations originales satisfaites par  $u, w$  (c'est-à-dire (3.4.7) – (3.4.9)), on trouve

$$(4.2.26) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} [\mathcal{C}[\epsilon(u)]] &= u_{tt} + b_1 u_t - \operatorname{div} [\mathcal{C}[f(\nabla w)]] \text{ dans } Q, \\ D\Delta^2 w &= -[I - \delta\Delta] w_{tt} - b_2 w_t + \operatorname{div} [\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] \text{ dans } Q, \\ u &= w = \nabla w = 0 \text{ sur } \Sigma_0, \\ \mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nu &= 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ D[\Delta w + (1 - \mu) B_1 w] &= 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ D[D_n \Delta w + (1 - \mu) B_2 w] &= 0 \text{ sur } \Sigma_1. \end{aligned}$$

Par un simple calcul et en accord avec le résultat du lemme 4.3. , on conclut que

$$(4.2.27) \quad u_{tt} + b_1 u_t - \operatorname{div} [\mathcal{C}[f(\nabla w)]] \in C\left(0, T; [H^{-\epsilon}(\Omega)]^2\right),$$

$$(4.2.28) \quad -[I - \delta\Delta] w_{tt} - b_2 w_t + \operatorname{div} [\mathcal{C}[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w] \in C\left(0, T; H^{-1-\epsilon}(\Omega)\right).$$

En suite, de la régularité du problème biharmonique, on conclut de plus que

$$w \in C\left(0, T; H^{3-\epsilon}(\Omega)\right).$$

Par conséquent,

$$f(\nabla w) \in C\left(0, T; H^1(\Omega)\right),$$

En revenant à (4.2.26) on trouve

$$(4.2.29) \quad u_{tt} + b_1 u_t - \operatorname{div} [\mathcal{C} [f (\nabla w)]] \in C (0, T; L^2 (\Omega)),$$

$$(4.2.30) \quad - [I - \delta \Delta] w_{tt} - b_2 w_t + \operatorname{div} [\mathcal{C} [\epsilon (u) + f (\nabla w)] \nabla w] \in C (0, T; H^{-1} (\Omega)),$$

de plus

$$f (\nabla w)|_{\Gamma_1} \in C (0, T; H^{1/2} (\Gamma_1)).$$

Les conditions aux limites dans (4.2.26) donnent aussi

$$\mathcal{C} [\epsilon (u)]|_{\Gamma_1} \in C (0, T; H^{1/2} (\Gamma_1)).$$

On est maintenant dans la position d'appliquer l'estimation d'ellipticité au problème (4.2.26), ce qui montre que

$$(4.2.31) \quad u \in C \left( 0, T; [H^2 (\Omega)]^2 \right), \quad w \in C (0, T; H^3 (\Omega)).$$

La dérivation par rapport au temps de l'équation (4.2.2) et l'utilisation du même raisonnement mène à la conclusion

$$u, w, \tilde{u}, \tilde{w} \in \mathcal{C}^\infty (Q).$$

Ainsi, on a obtenu le théorème 4.4.

**Théorème 4.4.** *Soit  $(u, w)$  une solution faible du système (3.4.7), (3.4.8) avec les conditions aux limites (3.4.9) et telle que*

$$|u(t)|_{1+\alpha, \Omega} + |w(t)|_{2+\alpha, \Omega} < \infty,$$

*où  $\alpha$  peut être pris arbitrairement petit. Alors*

$$u, w \in \mathcal{C}^\infty (Q).$$

Ceci donne la régularité améliorée des coefficients et solutions de l'équation (3.4.10). Laquelle à son tour, justifie l'application du Théorème 3 de [16] dans le contexte de la preuve de la partie II du lemme 3.14. Par le Théorème 3 de [16], on déduit que la solution de (3.4.10) est identiquement nulle, ce qui prouve le Corollaire 4.2.

**Corollaire 4.2.** *Sous les hypothèses du théorème 4.4. on a*

$$u, w \equiv 0 \text{ dans } Q.$$

# Conclusion et perspectives

Le problème abordé dans ce mémoire, est le système d'élasticité dynamique non linéaire, décrit par les équations de Von Karman. Dont nous avons abordé, dans un premier lieu, les questions d'existence, d'unicité et de régularité des solutions, et ensuite, nous nous sommes intéressé au problème de stabilisation frontière.

Les résultats principaux sont annoncés par la proposition 2.1 et le théorème 3.1, ceux qui ouvrent le champ à plusieurs questions, dont on mentionnera en particulier :

1. Peut on expliciter le taux de décroissance de l'énergie annoncé par le théorème 3.1 ?
2. Dans la deuxième partie de théorème 3.1 on a exigé une régularité supplémentaire sur les données initiales, cette condition de régularité est elle nécessaire pour que le résultat de stabilité ait lieu?
3. L'unicité des solutions faibles pour une dissipation frontière non linéaire reste toujours ouverte (voir **I. Lasiecka** [21, p. 69] et **H. Koch and I. Lasiecka** [17, p. 206]).

# Bibliographie

- [1] **A. Benabdallah and I. Lasiecka**, *Exponential decay rates for a full Von Karman system of dynamic thermoelasticity*, J. Differential Equations, 160 (2000), p. 51-93.
- [2] **A. Benabdallah and D. Teniou**, *Exponential Stability of a Von karman model with Thermal effects*, Electronic Diff. Eqs. 7 (1998), p. 1-13.
- [3] **M. bradly and I. Lasiecka**, *Local exponential stabilization for a nonlinear perturbed Von Karman plate*, Nonlinear Analysis, 18 (1992), p. 333-343.
- [4] **M. bradly and I. Lasiecka**, *Existence of the solutions to the Euler-Bernoulli plate model with semilinear boundary conditions*, Control and Cybernetics, vol. 19 (1990) No 3-4, p. 27-46.
- [5] **A. Boutet de Monvel and I. Chueshov**, *Uniqueness theorem for weak solutions of Von Karman evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., 221 (1998), p. 419-429.
- [6] **P. G. Ciarlet et P. Rabier**, *Les équations de Von Karman*, Springer-Verlag, 826, (1982).
- [7] **R. Dautray and J. -L. Lions**, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tome 1, Volumes 4, Chapitre 7, Masson, Paris, (1988).
- [8] **P. Destuynder**, *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire*, Masson, Paris, (1996).
- [9] **G. Duvaut et J. -L. Lions**, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [10] **A. Favini, M. A. Horn, I. Lasiecka and D. Tataru**, *Global existence, uniqueness and regularity of solutions to a Von Karman system with nonlinear boundary dissipation*, Differential and Integral Equations, 9 (1996), p. 267-294.

- 
- [11] **A. Favini and I. Lasiecka**, *Wellposedness and regularity of second order abstract equations arising in hyperbolic-like problems with nonlinear boundary conditions*, Osaka Journal of Mathematics, 32 (1995), p. 721-752.
  - [12] **M. A. Horn**, *Sharp trace regularity of the traces to solutions of dynamic elasticity*, Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control, 8 (1998), p. 217-219.
  - [13] **M. A. Horn and I. Lasiecka**, *Uniform decay of weak solutions to a Von Karman plate with nonlinear dissipation*, Differential and Integral Equations, 7 (1994), p. 885-908.
  - [14] **M. A. Horn and I. Lasiecka**, *Global stabilization of a dynamic Von Karman plate with nonlinear boundary feedback*, Applied Mathematics and Optimization, 31 (1995), p. 57-84.
  - [15] **V. Isakov**, *A nonhyperbolic Cauchy problem for  $\square_b \square_c$  and its applications to elasticity theory*, Communications on PDE's, XXXIX (1986), p. 747-767.
  - [16] **V. Isakov**, *On the uniqueness in a lateral Cauchy problem with multiple characteristics*, Journal of Differential Equations, 97 (1997), p. 134-147.
  - [17] **H. Koch and I. Lasiecka**, *Hadamard well-posedness of weak solutions in nonlinear dynamic elasticity-full Von Karman systems*, Nonlinear Differential Equations, 50 (2002), p. 197-216.
  - [18] **J. Lagnese**, *Boundary stabilization of thin plates*, SIAM, (1989).
  - [19] **J. Lagnese and J. -L. Lions**, *Modeling analysis and control of thin plates*, Masson, (1988).
  - [20] **L. Landau et E. Lifchitz**, *Théorie de l'élasticité*, Éditions Mir, Moscou, (1967).
  - [21] **I. Lasiecka**, *Mathematical Control Theory of Coupled PDE's*, August 2 (1999), (<http://www.math.unl.edu/Dept/Conferences/CBMS/notes.ps>).
  - [22] **I. Lasiecka**, *Existence and uniqueness of the solutions to second order abstract equations with nonlinear and nonmonotone boundary conditions*, Nonlinear Analysis, 23 (1994), p. 797-823.
  - [23] **I. Lasiecka**, *Finite dimensionality of attractors associated with Von Karman plate equations and boundary damping*, Journal Differential equations, 117 (1995), p. 37-389.

- 
- [24] **I. Lasiecka**, *Intermediate solutions to full Von Karman system of dynamic nonlinear elasticity*, Applicable Analysis, 68 (1998).
- [25] **I. Lasiecka**, *Uniform decay rates for full von Karman system of dynamic thermoelasticity with free boundary conditions and partial boundary dissipation*, Commun. PDE 24 (1999), p. 1801–1849.
- [26] **I. Lasiecka**, *Uniform stabilizability of a full von Karman system with nonlinear boundary feedback*, SIAM J. on Control, 36 no 4 (1998), p. 1376-1422.
- [27] **I. Lasiecka and D. Tataru**, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping*, J. Diff. Integral Eq., 6 (1993), p. 507-533.
- [28] **I. Lasiecka and R. Triggiani**, *Uniform boundary stabilization of the wave equation with Dirichlet and Neumann feedback control without geometric conditions*, Applied Mathematics and Optimization, 25 (1992), p. 189-224.
- [29] **I. Lasiecka and R. Triggiani**, *Sharp trace estimates of solutions to Kirchhoff and Euler-Bernoulli equations*, Applied Mathematics and Optimization, 28 (1993), p. 277-306.
- [30] **J. -L. Lions**, *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués*, Masson, Vol.1, Paris, (1988).
- [31] **J. -L. Lions et E. Magenes**, *Problèmes aux limites non homogènes et application*, Volume 1, Dunod, Paris, (1968).
- [32] **J. Puel and M. Tucsnak**, *Boundary stabilization for the Von Karman equations*, SIAM J. on Control, 33 (1996), p. 255-273.
- [33] **J. Puel and M. Tucsnak**, *Global existence for the full Von Karman system*, Applied Mathematics and Optimization, 34 (1996), p. 139-161.
- [34] **V. I. Sedenko**, *On uniqueness of the generalized solutions of initial boundary value problem for Marguerre-Vlasov nonlinear oscillations of the shallow shells*, Russian Izvestiya, North-Caucasus Region, Ser. Natural Sciences, 1-2 (1994).
- [35] **D. Tataru**, *A priori estimates of Carleman's type in domains with boundary*, J. Math. Pures et Appl., 73 (1994), p. 355-387.

# Index

*Les renvois sont faits aux numéros de pages*

- [A]
- Adjoint, 40, 41
- Amortissement, 3, 40, 49
  - faible, 25, 49
  - linéaire, 26
  - non linéaire, 19
  - visqueux, 49
- Approximation, 28, 30–33
  - Espaces –, 30
  - semi-discrète, 27, 28
- Asymptotique
  - Comportement – de l'énergie, 3
  - Stabilité – faible, 3
  - Stabilité – forte, 3
- [B]
- Borne
  - supérieure, 17
- [C]
- Carleman
  - Estimation de –, 91, 92, 97
- Cartes
  - locales, 10
  - Famille de – locales, 10
- Champ
  - vectoriel, 25
  - vectoriel radial, 64
- Cisaillement, 19
- Coefficient, 20, 25, 49, 65, 81, 82, 96, 101
  - s de Lamé, 21
  - de Poisson, 20, 21
- Coercivité, 72, 73, 78
- Compacité, 77, 85
  - des injections de Sobolev, 78
- Compact, 6, 9
  - Injection –, 85
- Conditions, 34, 81, 82
  - aux limites, 23, 24, 26, 42, 57, 58, 60, 61, 64, 68, 79, 81, 86, 91, 95–97, 101
  - aux limites de Dirichlet, 20, 26, 85
  - aux limites homogènes, 85, 90, 97
  - aux limites homogènes de Dirichlet, 40
  - d'ellipticité, 21
  - de compatibilité, 26, 31, 32, 52
  - de Dirichlet, 84
  - de dissipation, 20
  - de dissipation frontière, 84
  - de régularité, 50, 102
  - géométriques, 56, 63, 66, 70, 74, 80
  - initiales, 20, 31, 37, 97
  - initiales discrètes, 30
  - supplémentaires, 90, 96
- Continuité, 34
  - faible, 34, 79, 85
  - lipschitzienne, 32, 33
- Contraintes, 1
  - Résultante des –, 22
- Convergence, 52, 55
  - forte, 34
- Coques, 1, 2
- Croissance, 15
  - linéaire, 22
  - polynomiale, 49
- [D]
- Décroissance, 3, 4, 13, 49, 50, 102
  - exponentielle, 4
  - rapide, 9
  - uniforme, 4, 13, 49

- 
- Déformation, 1, 21
    - Petites  $\varepsilon$ , 1
  - Déplacement, 2, 20
    - vertical, 19, 60
    - s horizontaux, 4, 56
    - dans le plan de la plaque mince, 20
    - Vecteur de  $\varepsilon$ , 2
  - Dérivation, 94, 95, 100, 101
    - en temps, 3
  - Direction
    - tangentielle, 20
  - Dissipation, 20, 22, 50, 54, 55, 59, 62, 73, 75, 76
    - frontière, 42, 49, 50, 84
    - frontière non linéaire, 102
    - linéaire, 4, 26
    - Propriété de  $\varepsilon$ , 75
  - Distribution, 6, 8, 10, 11, 81
  - Divergence
    - Théorème de la  $\varepsilon$ , 43, 61, 68, 70
  - Domaine, 3
    - étoilé, 4, 74
    - bidimensionnel, 20
  - [E]
  - Egalité, 66
    - de dissipation, 50, 54, 55, 59, 62, 73, 75, 76
    - de l'énergie, 99
  - Élasticité, 1, 2, 4, 56, 102
    - des plaques, 1
    - non linéaire des corps minces bidimensionnels, 1
  - Système d' $\varepsilon$ – non linéaire, 2
  - Système d' $\varepsilon$ –, 40, 82, 98
  - Système d' $\varepsilon$ – linéaire, 57
  - Système d' $\varepsilon$ – non linéaire, 2
  - Système dynamique de l' $\varepsilon$ –, 4
  - Système dynamique homogène d' $\varepsilon$ –, 57
  - Ellipticité, 35
    - Condition  $\varepsilon$ –, 21
    - Estimation  $\varepsilon$ –, 95, 101
  - Énergie, 3, 4, 13, 26, 27, 44, 49, 50, 55, 66, 72, 76, 94, 99, 102
    - cinétique, 22
    - Estimation  $\varepsilon$ –, 63
    - fonctionnelle, 22
    - initiale, 43, 77
    - potentielle, 22
  - Ensemble
    - de mesure nulle, 11
    - des quotients, 17
    - tenseurs symétriques, 21
  - Épaisseur, 1
    - de la plaque, 2, 20
  - Équation, 1–3, 14, 20, 28, 35, 44, 49, 61, 71, 79–83, 85, 86, 90–92, 94–96, 99–101
    - des ondes, 56, 57
    - différentielle, 4, 14, 48
    - s de Malgouyres-Vlasov, 40
    - s de Von Karman, 2, 3, 102
    - s de Von Karman modifiées, 26
  - Espace, 6, 7, 9–11, 25, 27, 34, 37, 41, 42
    - des applications linéaires continues, 10
    - de Banach, 6, 7, 10, 11
    - de Hilbert, 3, 6–9, 11, 12, 17
    - de fonctions à valeurs vectorielles, 10
    - des (classes de) fonctions mesurables, 6, 10
    - des distributions, 6, 10
    - dual, 8, 9, 41
    - s d'approximation, 30
    - s de Sobolev, 5–7, 25, 51
    - Sous- fermé, 8
  - Existence, 3, 19, 25–27, 36
    - de solutions, 3
    - globale, 27
  - [F]
  - Faible, 3, 25, 26, 40, 43, 49, 50, 56, 57, 60, 63, 96, 101, 102
    - étoile, 34, 78, 85
  - Continuité  $\varepsilon$ –, 34, 79, 85
  - Formulation  $\varepsilon$ –, 23, 34
  - Feedback, 4, 32
    - s frontières, 4, 29
    - s frontières non linéaires, 26
    - s non linéaires, 4, 34
    - s stabilisants, 56
  - Fonction, 2–4, 6, 7, 9, 51
    - s à valeurs vectorielles, 10, 42
    - à variable réelle, 48
    - croissante, 13
    - croissante positive, 13, 14
    - convexe, 16, 17
    - vectorielle non linéaire, 22
    - s concaves, 17
    - s limites, 79
    - s non linéaires, 49
    - s scalaires, 22
    - s tests, 64, 66, 67, 71

- linéaire, 1, 4, 49
- s mesurables, 6, 10
- monotone, 89
- s monotones croissantes, 25
- non croissante, 89
- réelle non négative, 92
- Forme
  - bilinéaire, 22
  - s linéaires continues, 6, 8
  - semi-discrète, 34
  - variationnelle, 64
- Formulation
  - faible, 23, 34
  - de semi-groupes, 35, 41
  - variationnelle, 24, 37, 64, 66, 67, 71
- Formule, 65
  - de Green, 33
- Forte, 3, 26, 48
  - Convergence –, 34
  - Stabilité –, 49
  - Topologie, 9
- Fourier
  - transformée de –, 9
  - transformation de –, 9
- [G]
- Générateur, 40
  - infinitésimal de semi-groupe de contraction, 41
- Galerkin, 26
  - Approximations de –, 28
  - Méthode de – non linéaire, 3, 26, 27
- Green
  - Formule de –, 33
  - Opérateurs de –, 36
  - Opérateurs de –, 35, 40
- [H]
- Hyperbolique
  - Type –, 2
- Hypothèses, 3, 7, 8, 10, 24, 25, 48, 49, 51, 55, 75, 77, 80, 82, 83, 87, 96, 97, 101
  - de récurrence, 15
  - géométriques, 4
- [I]
- Identité, 21, 64, 67, 81
  - s tensorielles, 64
- Inégalité, 3, 14, 16, 29, 30, 39, 42–45, 48, 49, 55, 57, 59, 60, 62, 63, 69, 71, 74, 75, 88, 93, 94, 98, 99
  - de Cauchy-Schwarz, 45
  - de Gronwall, 30
  - de Hölder, 42, 57
  - de Jensen, 16, 17, 87, 88
  - de Korn, 17, 22, 82
  - de l'énergie, 27
  - s fondamentales, 13
  - inverse, 18, 63
- Initiales, 43, 77
  - Conditions –, 20, 31, 97
  - Conditions – discrètes, 30
  - Données –, 3, 25, 26, 31, 32, 37, 49, 50, 91, 92, 96, 102
- Injectif, 48, 49, 80, 82
- Injection, 11
  - compacte, 85
  - continue, 12
  - s de Sobolev, 22, 29, 42, 58, 59, 62, 78, 91
- [K]
- Korn
  - Inégalité –, 17, 22, 82
- [L]
- Lemme
  - de Gronwall, 15, 39, 46, 53
- Limites, 3, 34, 54, 55, 79, 85, 94, 96
  - Conditions aux –, 23, 24, 26, 42, 57, 58, 60, 61, 64, 68, 79, 81, 86, 91, 95–97, 101
  - Conditions aux – de Dirichlet, 20, 26, 84, 85
  - Conditions aux – de dissipation, 20
  - Conditions aux – homogènes, 85, 90, 97
  - Conditions aux – homogènes de Dirichlet, 40
  - Problème aux –, 74, 90
- Lipschitzienne
  - Continuité –, 32, 33
  - Localement –s, 27, 37
- Logarithmique
  - Estimation –, 42
- Loi, 1
  - de Hooke, 1
- [M]

- 
- Méthode, 3, 26, 40, 42, 63
    - de Galerkin non linéaire, 3, 26, 27
    - des multiplicateurs, 63
    - des semigroupes linéaires, 52
  - Matrice, 59, 80
    - Hessienne, 80
  - Milieu
    - bidimensionnel, 2
    - x continu, 1
  - Modèle, 2, 4, 19, 22, 25
    - bidimensionnel, 2
    - d'élasticité dynamique, 2
    - d'élasticité dynamique linéaire, 56
    - d'élasticité non linéaire, 1
    - de Kirchhoff linéaire, 56
    - de plaque de Von Karman, 47
    - de plaque dynamique non linéaire isotrope, 19
    - de thermo-élasticité, 4
    - linéaire d'élasticité dynamique, 56
    - tridimensionnel, 1
  - Module
    - de rigidité à la flexion, 20
    - de Young, 20, 21
  - Moment, 19
    - d'inertie, 21
  - [N]
  - Normale
    - Dérivées –s, 8, 20, 58
    - extérieure, 20
  - Norme, 3, 6, 7, 9–11, 18, 22, 25, 31, 41, 49, 93, 94
    - du graphe, 12, 13
    - hilbertienne, 10
    - Semi–s, 9
  - Noyau, 8
  - [O]
  - Opérateur, 3, 12, 13, 35, 40, 41
    - auto-adjoint, 12, 13
    - biharmonique, 42
    - de projection, 42
    - différentiel, 31, 57
    - s frontières, 22
    - non borné, 12
    - s de Green, 35, 36, 40
  - Oscillations, 2
  - Ouvert, 6
    - borné, 2, 7, 18
  - [P]
  - Partie
    - contrôlée, 4, 20, 80, 84, 85
  - Intégration par –, 29, 38, 44, 68
    - non contrôlée, 20, 84, 85
  - Partition
    - de l'unité, 10
    - de l'unité subordonnée, 10
  - Plaque, 1, 2, 19–22
    - de Von Karman, 47
    - dynamique de Kirchhoff, 56
    - mince, 20
    - plane, 2
    - s de Kirchhoff, 61, 81, 97
  - Théorie des –s, 1
  - Théorie des –s planes, 1
  - Problème, 3, 5, 19, 26, 27, 34, 48, 50, 52, 54–57, 63, 64, 66, 77, 82, 86, 89, 90, 94–97, 101, 102
    - approché, 51
    - aux limites, 74, 90
    - biharmonique, 95, 100
    - s dissipatifs non linéaires, 13
    - non linéaire, 75
    - régularisé, 97
    - semi-discret, 27
    - semi-dynamique, 90
  - Produit
    - scalaire, 6–8, 11–13, 17, 25, 52
  - Projection, 42
    - orthogonale, 42
  - Propagation
    - d'ondes, 2
  - Propriétés, 3, 9, 22, 92, 96
    - d'approximation inverse, 30–33
    - de dissipation, 62
    - de symétrie, 21
    - localisation, 9
    - stabilité, 30
  - [R]
  - Régularité, 25, 34–37, 49–51, 56, 75, 80, 82, 90–92, 96, 100–102
    - des conditions initiales, 31

- de trace, 50, 56, 60, 61, 63, 75
- elliptique, 34, 35, 80
- intérieure, 56
- du problème biharmonique, 95, 100
- des solutions, 3, 102
- Relation
  - s de compatibilité, 32
  - dissipation, 76
- Rigidité
  - Module de – à la flexion, 20
  - Tenseur de –, 21
- [S]
- Semi-groupe, 35, 41, 94, 99
  - fortement continus, 41
- Générateur infinitésimal de –, 41
  - s linéaires, 52, 92
- Solutions, 3, 4, 14, 27, 37, 47–52, 54, 55, 57, 60, 77, 80–82, 89–92, 94, 96–98, 100–102
  - faibles, 3, 26, 40, 43, 50, 56, 57, 60, 63, 96, 101, 102
  - fortes, 26, 48
  - limites, 96
  - régulières, 3, 25–27, 36, 37, 63, 66, 86
- Stabilisation, 3, 4
  - frontière, 3, 47, 102
  - uniforme, 3
- Stabilité, 28, 30, 50, 56, 63, 84, 102
  - asymptotique faible, 3
  - asymptotique forte, 3
  - exponentielle, 4
  - forte, 49
  - frontière, 63
- Suite, 6, 51, 77, 94, 99
  - de Cauchy, 94, 99
  - de données initiales, 91
  - de nombres réels positifs, 13
- Sous–, 34, 78, 85
- Surface
  - moyenne, 2
- Surjective, 10
- Système, 2–4, 20, 22, 40, 50, 56, 57, 60, 64, 66, 79, 80, 82, 83, 85, 90, 96, 98, 101, 102
  - abstrait du second degré, 40
  - algébrique linéaire, 59
  - complet de Von Karman, 1, 4, 19, 47
- [T]
- Tangentielle, 20
  - Composantes –s, 56
  - Dérivées –s, 4, 8, 56, 57
  - Direction –, 20
- Taux, 49, 50, 90
  - de décroissance de l'énergie, 4, 102
  - de décroissance explicite, 3
  - de décroissance exponentielle, 4
  - de décroissance uniforme, 4
  - uniforme, 47
- Tenseur, 21, 64, 65, 67, 81
  - linéarisé de déformation, 21
  - symétrique, 21
  - de contraintes, 1
  - de déformation, 1
  - de rigidité, 21
  - s symétriques, 21
- Termes, 27, 40, 44
  - d'ordre inférieur, 49, 56, 57, 63, 66, 77, 79, 85
  - de traces, 63
  - de traces de vitesse, 56
  - non linéaires, 34, 37, 49, 85
- Théorème, 4, 10, 49
  - de la divergence, 43, 61, 68, 70
  - de trace, 6, 7, 10, 43, 59, 72
- Topologie, 10, 41
  - forte, 9
- Transformation
  - de Fourier, 9
- [U]
- Unicité, 3, 19, 25, 27, 37, 49, 50, 74, 75, 77, 80, 82, 90, 94, 96, 100, 102
  - de solutions fortes, 26
  - de solutions régulières, 26, 37
  - de type Holmgren, 4, 82, 86
  - des solutions faibles, 3, 26, 40, 102
- [V]
- Valeurs
  - propres, 42
- Vecteur, 20
  - de déplacement, 2
  - s propres, 42, 58
- Vibrations
  - des membranes, 2

## Résumé

On considère le système d'élasticité dynamique non linéaire, décrit par les équations de Von Karman, l'une des équations fondamentales de la physique mathématique. Beaucoup de phénomènes physiques reliés à la théorie des oscillations, sont décrits par le modèle d'élasticité dynamique : propagation d'ondes, oscillations et vibrations des membranes, plaques, coques, etc., sont présentées par le système d'élasticité non linéaire. En utilisant la méthode des multiplicateurs et des techniques d'analyse micro-locale, on étudie les problèmes d'existence, d'unicité et de régularité des solutions, ensuite, on s'intéresse à la théorie de la stabilisation frontière.

**Mots-clés :** Système complet de Von Karman, élasticité non linéaire, plaques, ondes, stabilisation frontière.

---

## Abstract

We consider dynamic systems of nonlinear elasticity, described by Von Karman equations, one of the fundamental equations in mathematical physics. Many physical phenomena related to oscillation theory are described by dynamic elastic models: propagation of waves, oscillations and vibrations of membranes, plates, shells, etc. are governed by nonlinear elastic systems. By used multipliers method and microlocal analysis techniques, we study the problems of existence, uniqueness and regularity of solutions, next, we see the boundary stabilization theory.

**Key Words:** Full Von Karman system, nonlinear elasticity, plates, waves, boundary stabilization.

---

## ملخص

نعتبر الجملة غير الخطية للتحريك المرن، المترجمة من طرف معادلات "Von Karman"، إحدى المعادلات الأساسية في الفيزياء الرياضية. كثيرا من الظواهر الفيزيائية المتعلقة بنظرية الاهتزازات، تترجم من طرف نموذج التحريك المرن: انتشار الأمواج، اهتزاز الصفائح المعدنية، الخ...، كلها تترجم عن طريق الجملة غير الخطية المرنة. باستعمال طريقة المضارب و تقنيات التحليل المحلي الجزئي، ندرس مسائل وجود، وحدانية، و نظامية الحل، ثم ننظر نظرية استقرار الحافة.

الكلمات المفاتيح: الجملة التامة لـ "Von Karman"، المرونة غير الخطية، الصفائح، الأمواج، استقرار الحافة.