

N° d'ordre : 20/2011-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle (Génie Mathématiques)

Par : TIGANE Meriem

THÈME

Combinatoire des Nombres de Stirling
et de Bell généralisés

Soutenu publiquement, le 04/01/2011, devant le jury composé de :

- | | | | |
|---------------------|-------------------------|---------------|----------------------|
| M. Benali BENZAGHOU | Professeur | à l'U.S.T.H.B | Président |
| M. Hacène BELBACHIR | Maître de Conférences A | à l'U.S.T.H.B | Directeur de mémoire |
| M. Sadek BOUROUBI | Professeur | à l'U.S.T.H.B | Examinateur |
| M. Miloud MIHOUBI | Maître de Conférences A | à l'U.S.T.H.B | Examinateur |

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

** La mémoire de ma grand-mère
que la miséricorde et la grâce de Dieu lui soient attribuées;*

** Mes parents;*

** Mon frère;*

** Ma famille;*

Meriem Tigane

Remerciements

Je voudrais remercier profondément Monsieur **H. Belbachir**, mon directeur de mémoire et maître de conférences à l'USTHB, de m'avoir proposé ce sujet. Je le remercie vivement pour son aide précieuse, ses conseils et sa patience.

Je remercie ensuite les personnes qui me font l'honneur de faire parti du jury :

Monsieur **B. Benzaghoul**, professeur à l'université de l'USTHB d'avoir accepté de présider le jury.

Messieurs **S. Bouroubi**, professeur à l'USTHB et **M. Mihoubi** d'avoir accepté d'être les examinateurs de ce travail.

Enfin, je remercie ma famille, mes amis et tous ceux qui m'ont aidé dans ce travail.

Table des matières

Table des matières	1
Introduction générale	4
1 Préliminaires	7
1.1 Notations	7
1.2 Inégalité de Hölder	8
1.3 Relation d'équivalence	8
1.4 Dénombrement	9
1.5 Loi de Poisson	11
1.6 Transformée binomiale	11
1.7 Matrice de Hankel	11
1.8 Fonctions génératrices	12
1.9 Log-concavité, unimodalité et log-convexité	13
1.10 Fonction Gamma	14
1.11 Série hypergéométrique	15
1.11.1 Quelques exemples	16
1.12 Suites de Fibonacci et de Lucas	16
1.13 Nombres harmoniques et généralisations	17
1.14 Nombres et polynômes de Bernoulli	18
1.15 Nombres et polynômes d'Euler	20
1.16 Nombres de Cauchy	21
1.17 Nombres eulériens	22
1.18 Postulat de Bertrand	23

2	Nombres de Stirling et nombres et polynômes de Bell	24
2.1	Nombres de Stirling	24
2.1.1	Orthogonalité	27
2.1.2	Expressions polynomiales et relation avec les coefficients binomiaux	27
2.1.3	Nombres de Stirling et somme de puissances	29
2.1.4	Nombres de Stirling d'ordre supérieur	30
2.1.5	Fonctions génératrices	31
2.1.6	Log-concavité et unimodalité	32
2.1.7	Relations avec les nombres eulériens	32
2.1.8	Relation avec les nombres harmoniques	33
2.1.9	Relation avec les suites de Fibonacci et Lucas	33
2.1.10	Relation avec les nombres de Bernoulli	33
2.1.11	Relation avec les nombres de Cauchy	35
2.2	Nombres de Stirling associés	35
2.2.1	Fonctions génératrices	37
2.2.2	Identités	38
2.2.3	Relation avec les nombres harmoniques	38
2.2.4	Relations avec les nombres de Bernoulli	38
2.2.5	Relation avec les nombres de Cauchy	39
2.3	Nombres et polynômes de Bell et nombres de Bell d'ordre supérieur	39
2.3.1	Nombres de Bell et polynômes de Bell	39
2.3.2	Nombres de Bell d'ordre supérieur	41
2.3.3	Fonctions génératrices	42
2.3.4	Log-convexité	42
2.3.5	Identités	42
2.3.6	Déterminant de Hankel	43
2.4	Nombres et polynômes de Bell ordonnés	43
2.4.1	Exemple et table	44
2.4.2	Fonctions génératrices	45
2.4.3	Identités	45
2.4.4	Nombres eulériens d'ordre supérieur	46
3	Nombres r-Stirling et nombres r-Bell	48
3.1	Nombres r-Stirling	48
3.1.1	Fonctions génératrices	54
3.1.2	Orthogonalité	54
3.1.3	Identités	55

	4
3.1.4	Log-concavité et unimodalité 57
3.2	Nombres de Stirling r-associés 59
3.2.1	Fonctions génératrices 61
3.2.2	Relations avec les nombres de Bernoulli 61
3.3	Nombres et polynômes r-Bell 62
3.3.1	Fonctions génératrices 64
3.3.2	Les identités 64
3.3.3	Déterminant de Hankel 65
3.4	Nombres et polynômes r-Bell ordonnés 65
3.4.1	Fonctions génératrices 66
3.4.2	Identités 66
4	Transformée binomiale et nombres r-Stirling 67
5	Sur la log-convexité des polynômes r-Bell 70
5.1	Inégalités 70
5.2	Polynômes r-Bell et log-convexité 71
6	Matrices r-Stirling 76
6.1	Nombres r-Stirling d'ordre supérieur 76
6.2	Nombres r-Bell d'ordre supérieur 78
6.2.1	Nombres r-Bell ordonnés d'ordre supérieur 80
	Conclusion générale 84
	Bibliographie 85

Introduction Générale

Les nombres de Stirling occupent une grande place dans plusieurs domaines et notamment en analyse combinatoire. Ils ont été introduits par J. Stirling (voir [59]) et furent nommés ainsi, en son honneur, par Nielsen. Ils sont divisés en deux catégories : les nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Stirling de seconde espèce. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ces nombres. L'ouvrage de L. Comtet consacre un chapitre à ces nombres et fournit une bibliographie riche.

Les nombres de Stirling sont liés à plusieurs autres nombres combinatoires. En particulier, les nombres de Stirling de première espèce sont liés aux nombres harmoniques. Les nombres de Stirling de seconde espèce sont liés aux nombres de Bell, introduits par E. T. Bell.

On retrouve dans la littérature plusieurs généralisations de ces nombres. Parmi ces généralisations, on retrouve les nombres r -Stirling, pour les deux espèces. Ces nombres sont équivalents aux nombres découverts par Carlitz à partir d'un autre type de généralisation : "weighted Stirling numbers". Il apparaît aussi qu'ils sont équivalents aux nombres de Stirling non-centraux étudiés par Koutras.

Nous nous sommes aussi intéressés aux nombres r -Bell qui ont un lien étroit avec les nombres r -Stirling de seconde espèce et qui généralisent la notion de nombre de Bell.

Durant notre travail, on a étudié, entre autres, les travaux de I. Mezö [48], K. N. Boyadzhiev [13] et S. Bouroubi [12]. Une tentative d'extension de leurs résultats sera envisagée tout au long de ce mémoire.

Notre travail est réparti en six chapitres, avec une introduction et une conclusion.

Un premier chapitre où on donne les différentes notations et définitions de base qui seront utilisées dans le reste du document.

Un second chapitre qui est réparti en quatre sections : La première est consacrée aux

nombres de Stirling et aux différentes propriétés les concernant. Dans la seconde section, on définit les nombres de Stirling associés et on donne leurs principales propriétés, les troisième et quatrième sections sont dédiées aux nombres de Bell et nombres de Bell ordonnés et leurs propriétés.

Le troisième chapitre est réparti en quatre sections, on y définit les nombres r -Stirling et les nombres de Stirling r -associés, les nombres r -Bell et les nombres r -Bell ordonnés. On cite les principales identités. Au quatrième chapitre, on se propose de donner des extensions de résultats obtenus par K. Boyadzhiev grâce à la transformée binomiale.

Dans le cinquième chapitre, on essaye de généraliser les résultats obtenus par S. Bouroubi pour les polynômes r -Bell.

Enfin, dans le dernier chapitre, on propose une généralisation des nombres de Stirling d'ordre supérieur et les nombres de Bell d'ordre supérieur qui sont abordés dans l'article de I. Mezö.

On donne dans ce qui suit certaines notations et définitions dont on aura besoin dans les chapitres suivants. Elles sont principalement puisées dans les ouvrages de Comtet [23], Charalambides [20] et Graham, Knuth et Patashnik [37].

1.1 Notations

On note par $\delta_{n,m}$ le *symbole de Kronecker* défini par :

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$$

On désigne par $n!$ et $n!!$ les produits suivants :

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1) \times \dots \times 1 \\ n!! &= n \times (n-2) \times (n-4) \times \dots \end{aligned}$$

On note par γ la *constante d'Euler* dont la valeur approximative est donnée par :

$$\gamma \approx 0.57721566490153286060651209008240243 \dots$$

On retrouve cette constante dans l'intégrale suivante :

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx.$$

1.2 Inégalité de Hölder

Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a pour toutes fonctions mesurables f et g :

$$|E(fg)| \leq E(|f|^p)^{\frac{1}{p}} E(|g|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy.

1.3 Relation d'équivalence

Soient X et Y deux ensembles.

Produit Cartésien : On appelle produit cartésien de deux ensembles X et Y , noté $X \times Y$, l'ensemble de toutes les paires ordonnées possibles dont le premier élément est dans X et le deuxième est dans Y :

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

Relation binaire : Une relation binaire R d'un ensemble X vers un ensemble Y est définie par une partie G de $X \times Y$.

Si $(x, y) \in G$ on dit que x est en relation avec y et on note xRy . On dit que y est une image de x

Dans le cas particulier où $X = Y$, on dit que R est une relation binaire définie sur X ou dans X .

Relation d'équivalence : Une relation d'équivalence \mathcal{R} dans un ensemble X est une relation binaire :

réflexive si tout élément de X est associée à lui-même : $\forall x \in X, x\mathcal{R}x$

symétrique si tout élément de X est l'image de son image : $\forall (x, y) \in X^2, (x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)$

transitive si toute image d'une image d'un élément de X est image directe de cet élément : $\forall (x, y, z) \in X^3, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.

Classe d'équivalence : On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in X$, noté $\mathcal{R}(x)$, l'ensemble des images de x par la relation d'équivalence \mathcal{R} :

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in X | x\mathcal{R}y\}.$$

Propriété 1.1. Les classes d'équivalences vérifient les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}(x)$ est un sous-ensemble de X .

2. $\mathcal{R}(x)$ n'est jamais vide, car elle contient au moins x . Inversement, tout élément de X appartient à au moins une classe d'équivalence : la sienne.
3. $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$ ssi $y \in \mathcal{R}(x)$. Inversement, si $y \notin \mathcal{R}(x)$ alors $\mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(y) = \emptyset$.

Remarque 1.1. On déduit de ce qui précède que l'ensemble des classes d'équivalence de X forme une partition de X . Inversement, toute partition de X définit une relation d'équivalence.

1.4 Dénombrement

Soit N un ensemble fini, $|N| = n$.

Définition 1.1. Une *m-combinaison* de m objets de $N = \{1, 2, \dots, n\}$ est une partie M à m éléments.

Le nombre de *m-combinaisons*, noté $\binom{n}{m}$, vaut :

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

avec $\binom{n}{m} = 0$, pour $m < 0$ ou $m > n$.

Définition 1.2. Un *m-arrangement* d'une partie M à m éléments de N est une partie dont les éléments sont numérotés.

Le nombre de *m-arrangements* de N , noté $(n)_m$, vaut :

$$(n)_m = n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Définition 1.3. On appelle *permutation* de N , noté P , tout arrangement de l'ensemble N dans un ordre donné. Une permutation est identifiée par une fonction bijective de N dans lui-même.

Le nombre de permutations est égal à $n!$, car une permutation n'est autre qu'un *n-arrangement* de N .

Définition 1.4. 1. On appelle *orbite* de $p \in N$ d'une permutation P , le sous-ensemble de N contenant les éléments $p, P(p), P^2(p), \dots, P^{k-1}(p)$ où k est le plus petit entier ≥ 1 satisfaisant $P^k(p) = p$, appelé *longueur* de l'orbite. Si $k = 1$, on dit que p est un point fixe.

2. On dit que (p_1, p_2, \dots, p_m) , $p_i \in N$, $1 \leq i \leq m$, constitue un *cycle* de longueur m dans une permutation P si : $P(p_1) = p_2, P(p_2) = p_3, \dots, P(p_{m-1}) = p_m, P(p_m) = p_1$.

3. On dit que i représente une *montée* (resp. une *descente*) d'une permutation $P = (p_1 p_2 \cdots p_n)$ si $p_i < p_{i+1}$ (resp. $p_i > p_{i+1}$), $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

4. Une permutation P possède une r -*montée* (p_i, p_{i+1}) si $p_i < p_{i+1}$ avec $p_i, p_{i+1} \notin \{1, \dots, r\}$.

Définition 1.5. Soient $k_1, k_2, \dots, k_m, m \geq 1$ des entiers relatifs, on définit le *coefficient multinomial*, noté $\binom{k_1+k_2+\dots+k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m}$, par :

$$\binom{k_1+k_2+\dots+k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \begin{cases} \frac{(k_1+k_2+\dots+k_m)!}{k_1!k_2!\dots k_m!} & \text{si } k_i \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

Définition 1.6. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, la *factorielle décroissante* d'ordre n , notée $x^{\underline{n}}$ (ou $(x)_n$), est définie par la relation suivante :

$$\begin{cases} x^{\underline{0}} = 1, \\ x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1), & n \geq 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Propriétés

Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $n, m \in \mathbb{Z}$, alors :

(a)

$$x^{\underline{n+m}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}, \quad (1.3)$$

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+m)^{\underline{m}}} \quad x \neq -1, -2, \dots, -r. \quad (1.4)$$

(b) **Formule de Vandermonde**

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}. \quad (1.5)$$

(c)

$$(x+n-1)^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}}. \quad (1.6)$$

Définition 1.7. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, la *factorielle croissante* d'ordre n , notée $x^{\overline{n}}$, est définie par la relation suivante :

$$\begin{cases} x^{\overline{0}} = 1, \\ x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1), & n \geq 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

On a :

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}.$$

Définition 1.8. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, le *coefficient binomial*, noté $\binom{x}{n}$, est défini par la relation suivante :

$$\binom{x}{n} = \frac{x^{\underline{n}}}{n!}. \quad (1.8)$$

1.5 Loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit une *loi de Poisson* de paramètre θ ($\theta > 0$), notée $P(\theta)$, si sa fonction de probabilité est :

$$P(X = x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

L'espérance mathématique de la loi de Poisson est par définition :

$$E(X) = \theta.$$

La variance de X est égale à :

$$\text{Var}(X) = \theta.$$

1.6 Transformée binomiale

Définition 1.9. La *transformée binomiale* d'une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite $(b_n)_{n \geq 0}$ telle que pour tout entier positif k , on a :

$$b_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j \quad \text{avec inversion} \quad a_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j.$$

1.7 Matrice de Hankel

La *matrice de Hankel* H de la suite entière, $(a_n)_{n \geq 0}$, est la matrice infinie définie par :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $h_{i,j} = a_{i+j-1}$. La matrice de Hankel H_n d'ordre n de $(a_n)_n$ est la $n \times n$ sous-matrice supérieure de H . Le *déterminant de Hankel* d'ordre n de $(a_n)_n$ est le déterminant de la matrice de Hankel d'ordre n correspondante, $h_n := \det(H_n)$.

Ci-dessous le Théorème d'invariance de Layman ;

Théorème 1.1 (J. W. Layman, 2001 [43]). *Soient (a_i) une suite d'entiers et (b_i) sa transformée binomiale. Alors (a_i) et (b_i) possèdent le même déterminant de Hankel.*

Preuve. Soit H^* la matrice définie par $H^* = RHC$ où les éléments des matrices R , H et C sont définis par :

$$r_{i,j} = \begin{cases} 0, & i < j \\ \binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \end{cases}; \quad h_{k,m} = a_{k+m-1}; \quad c_{i,j} = \begin{cases} 0, & i > j \\ \binom{j-1}{i-1}, & i \leq j, \end{cases}$$

ainsi, les éléments de H^* s'écrivent comme suit :

$$h_{i,j}^* = \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^j \binom{i-1}{k-1} \binom{j-1}{m-1} a_{k+m-1},$$

qui, par un changement de variable, donne :

$$h_{i,j}^* = \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{m=0}^{j-1} \binom{i-1}{k} \binom{j-1}{m} a_{k+m-1},$$

par la formule de convolution de Vandermonde et un changement de variables adéquat, on obtient :

$$h_{i,j}^* = \sum_{s=0}^{i+j-1} \binom{i+j-2}{s-1} a_s,$$

qui est, par la définition de la transformée binomiale, b_{i+j-1} . Ce qui montre que H^* est la matrice de Hankel de la suite (b_i) . Ainsi, les termes des déterminants de Hankel des suites (a_i) et (b_i) sont $\det(H_n)$ et $\det(R_n H_n C_n)$ respectivement, où R_n , H_n et C_n sont les sous-matrices diagonales supérieures d'ordre n de H , R et C respectivement. Or R_n et C_n sont toutes les deux triangulaires n'ayant que des 1 sur leur diagonale principale, ainsi $\det(R_n) = \det(C_n) = 1$ et par conséquent $\det(H_n) = \det(H_n^*)$, d'où le résultat. \square

1.8 Fonctions génératrices

Définition 1.10. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle *fonction génératrice ordinaire* de la suite $(a_n)_n$, la fonction :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On appelle *fonction génératrice exponentielle* de la suite $(a_n)_n$, la fonction :

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Remarque 1.2. L'existence de telles fonctions nécessite la convergence absolue de la série de terme général a_n et $\frac{a_n}{n!}$ respectivement. Cependant, elles sont toujours définies au moins au point $x = 0$.

Définition 1.11. On appelle *fonction génératrice factorielle* de la suite $(a_n)_n$, la fonction :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Définition 1.12. Soit $(a_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle *fonction génératrice double ordinaire* de la suite $(a_{n,m})_{n,m}$, la fonction :

$$A(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} x^m z^n.$$

On appelle *fonction génératrice double exponentielle* de la suite $(a_{n,m})_{n,m}$, la fonction :

$$E(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \frac{x^m z^n}{m! n!}.$$

Remarque 1.3. Dans le cas où la suite $(a_{n,m})_{n,m}$ est triangulaire (ie : $a_{n,m} = 0$ pour $n < m$), il est plus commode d'utiliser la fonction génératrice mixte suivante :

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{n,m} x^m \frac{z^n}{n!}.$$

1.9 Log-concavité, unimodalité et log-convexité

Définition 1.13. Une suite $(a_m)_m$ de nombres réels est dite *log-concave* si

$$a_m^2 \geq a_{m-1} a_{m+1}, \quad (m \geq 1). \quad (1.9)$$

La suite $(a_m)_{m \geq 0}$ est dite *strictement log-concave* (SLC en abrégé) si l'inégalité (1.9) est stricte.

Définition 1.14. Une suite $(a_m)_{m \geq 0}$ de nombres réels strictement positifs est dite *unimodale* si

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_l \geq a_{l+1} \geq a_{l+2} \geq \dots$$

L'entier l est appelé *mode* de la suite $(a_m)_{m \geq 0}$.

Proposition 1.1. Soit $(a_m)_{m \geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs èlog-concave, alors cette suite est unimodale.

Preuve. Par l'absurde. Supposons que $(a_m)_{m \geq 0}$ n'est pas unimodale alors, il existe trois termes consécutifs tels que $a_{m-1} > a_m < a_{m+1}$ ce qui contredit l'hypothèse de log-concavité. \square

Définition 1.15. Une suite $(a_m)_{m \geq 0}$ de nombres réels est dite *log-convexe* si

$$a_{m-1}a_{m+1} \geq a_m^2.$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Newton [45]). Soit $(a_m)_{m=0}^n$ une suite de nombres réels positifs, avec $n \geq 2$. Si son polynôme générateur $G(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m$ ne possède que des racines réelles (négatives), alors :

$$a_m^2 \geq a_{m+1}a_{m-1} \frac{m}{m-1} \frac{n-m+1}{n-m} \quad 2 \leq m \leq n-1.$$

Remarque 1.4. L'inégalité de Newton implique la log-concavité stricte.

Théorème 1.3 (Darroch [26], Benoumhani [10]). Soit $(a_m)_{m=0}^n$ une suite de nombres réels positifs, avec $n \geq 2$. Si son polynôme générateur $G(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m$ ne possède que des racines réelles distinctes satisfaisant $G(1) > 0$, alors pour tout mode, K_n , on a :

$$|K_n - \mu| < 1,$$

où

$$\mu = \frac{G'(1)}{G(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j + 1},$$

où $-r_j$ est une racine de $G(x)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Théorème 1.4 (P. Erdős [32]). Soit $u_0 < u_1 < \dots$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs telle que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{u_i} = \infty \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{u_i^2} < \infty.$$

Soient $\Xi_{n,m} = \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_m < n} u_{i_0} u_{i_1} \dots u_{i_m}$ les polynômes symétriques associés à la suite $(u_n)_n$ et soit K_n la plus grande valeur de m pour laquelle $\Xi_{n,m}$ atteint son maximum.

Alors :

$$K_n = n - \left[\sum_{i=0}^n \frac{1}{u_i} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{u_i^2} \left(1 + \frac{1}{u_i}\right)^{-1} + o(1) \right].$$

1.10 Fonction Gamma

Définition 1.16. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on définit la *fonction Gamma*, notée Γ , par :

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Cette fonction peut être prolongée analytiquement en une fonction holomorphe sur l'ensemble des nombres complexes, exceptés pour $z \in \mathbb{Z}^-$. C'est ce prolongement qu'on appelle généralement "fonction Gamma".

Propriétés

En intégrant par partie, on montre que :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.10)$$

En particulier, on a, pour $z = 1$, $\Gamma(1) = 1$, par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n + 1) = n!.$$

La fonction Gamma est donc un prolongement de la factorielle à l'ensemble des nombres complexes (excepté les entiers négatifs ou nuls).

1.11 Série hypergéométrique

Soient $a_i, b_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ des réels, non entiers négatifs ou nuls, $m, n \in \mathbb{N}$. La *série hypergéométrique* associée est la fonction définie par :

$${}_mF_n \left(\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_m \\ b_1 & \cdots & b_n \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{\bar{k}} a_2^{\bar{k}} \cdots a_m^{\bar{k}} x^k}{b_1^{\bar{k}} b_2^{\bar{k}} \cdots b_n^{\bar{k}} k!}.$$

Les éléments $a_i, b_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ sont les paramètres et x est l'argument de la fonction.

Ces séries sont une généralisation de la série hypergéométrique gaussienne :

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\bar{k}} b^{\bar{k}} x^k}{c^{\bar{k}} k!}.$$

Gauss, en 1812, a étudié ses propriétés. On peut l'écrire en utilisant la fonction Gamma :

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)} \frac{x^k}{k!}$$

elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$x(x-1)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - (ab)y(x) = 0.$$

1.11.1 Quelques exemples

Si on prend $m = n = 0$ (aucun paramètre), on obtient :

$${}_0F_0(|x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Pour $m = n = 1$ et $a_1 = b_1 = 1$, on a :

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| x\right) = e^x.$$

Ceci est valide car la fonction n'est pas modifiée si on ajoute deux paramètres identiques en haut et en bas.

Si on prend $m = 2, n = 1, a_1 = a_2 = b_1 = 1$, on obtient :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = {}_1F_0.$$

Si on prend $m = 2, n = 1, a_1 = a, a_2 = b_1 = 1$ on obtient ce qui suit :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a & 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^k}{k!} = \frac{1}{(1-x)^a}.$$

Même conditions excepté que $a_1 = -a$ et $-x$ comme argument, on a :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -a & 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| -x\right) = (1+x)^a.$$

Un cas particulier de la série hypergéométrique est :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 \end{matrix} \middle| -x\right) \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!k!}{(k+1)!} \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \end{aligned}$$

1.12 Suites de Fibonacci et de Lucas

Définition 1.17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les *suites de Fibonacci*, $\{F_n\}$, et de *Lucas*, $\{L_n\}$ par les récurrences linéaires d'ordre 2 suivantes :

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

et

$$\begin{cases} L_0 = 2, L_1 = 1, \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Proposition 1.2. *Les suites de Lucas et Fibonacci vérifient :*

$$L_{n+1} = F_{n+2} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.13)$$

Certains auteurs considèrent que c'est cette identité qui lie la suite de Lucas à celle de Fibonacci et qui est, en fait, sa "suite compagnon".

Preuve. *Par induction : $n=0$, on a $L_1 = 1$ et $F_2 + F_0 = 1$. supposons que (1.13) est vrai pour tout $p \leq n$ et prouvons pour $n + 1$.*

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_{n-1} + L_n \\ &= F_n + F_{n-2} + F_{n-1} + F_{n+1} \\ &= F_n + F_{n+2}. \end{aligned}$$

1.13 Nombres harmoniques et généralisations

Le *nombre harmonique*, noté H_n , est défini par :

$$H_0 = 0, \quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Voici les premières valeurs des nombres harmoniques :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{3781}{2520}$

TABLE 1.1 – Nombres harmoniques

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres harmoniques est donnée par (consulter [34]) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

et la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres harmoniques, obtenue par Gosper en 1996, est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{x^n}{n!} = e^x x {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \middle| -x \right).$$

Quelques identités relatives aux nombres harmoniques (voir [9])

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n,$$

$$(2) \quad \text{Pour } 0 \leq m < n, \quad \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1} \left(H_n - \frac{1}{m+1} \right),$$

$$(3) \quad \text{Pour } 0 \leq m \leq n, \quad \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \binom{n}{m} (H_n - H_m).$$

Nombres hyperharmoniques

Une des généralisations des nombres harmoniques est celle donnée par Conway et Guy [24].

Le *nombre hyperharmonique*, noté $H_{n,r}$, est défini par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} H_{n,r} = 0, & \text{pour } r < 0 \text{ ou } n \leq 0, \\ H_{n,0} = \frac{1}{n}, & \text{pour } n \geq 1, r = 0 \\ H_{n,r} = \sum_{k=1}^n H_{k,r-1}. \end{cases}$$

Il est à noter que ces nombres ne sont jamais entiers pour une grande classe des valeurs de n et r (voir Mezö [47], Aït Amrane et Belbachir [4]), le problème reste encore ouvert dans sa globalité.

1.14 Nombres et polynômes de Bernoulli

Définition 1.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le *nombre de Bernoulli*, noté β_n , est défini par :

$$\begin{cases} \beta_0 = 1, \\ \beta_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \beta_k, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Remarque 1.5. Tous les nombres de Bernoulli sont rationnels.

Les nombres de Bernoulli vérifient les identités suivantes :

1. Pour tout entier $n > 0$ et tous entiers $p, r \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+r)^p = \frac{1}{p+1} [\beta_{p+1}(n+r) - \beta_{p+1}(r)]. \quad (1.14)$$

2. Formule de Faulhaber

$$p \sum_{k=1}^n k^{p-1} = n^p + \frac{p}{2} n^{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1} \beta_i \binom{p}{i} n^{p-i}$$

On liste dans le tableau suivant les premières valeurs de β_n (consulter Sloane A00367 et A002445) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_n	1	-1/2	1/6	0	-1/30	0	1/42	0	-1/30	0	5/66

TABLE 1.2 – Nombres de Bernoulli.

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Bernoulli est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Définition 1.19. Pour $n \in \mathbb{N}$, le *polynôme de Bernoulli* $\beta_n(x)$ est défini par :

$$\beta_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k x^{n-k},$$

ainsi $\beta_n(0) = \beta_n$.

On donne dans le tableau suivant les premières valeurs de $\beta_n(x)$ pour $n \leq 5$:

n	$\beta_n(x)$
0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x}{6}$

TABLE 1.3 – Polynômes de Bernoulli.

La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes de Bernoulli est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}.$$

Nombres de Bernoulli généralisés

On définit les *nombres de Bernoulli généralisés* pour tout nombre complexe r par leur fonction génératrice exponentielle comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(r)} \frac{x^n}{n!} = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^r, \quad (r \geq 1).$$

Il est évident que $\beta_n^{(1)} = \beta_n$.

Voici les premières valeurs de ces nombres :

n	$\beta_n^{(r)}$
0	1
1	$\frac{-r}{2}$
2	$\frac{r(3r-1)}{12}$
3	$\frac{-r^2(r-1)}{8}$
4	$\frac{1}{384}r^4 - \frac{1}{192}r^3 + \frac{1}{1152}r^2 + \frac{1}{2880}r$

1.15 Nombres et polynômes d'Euler

Définition 1.20. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'Euler, noté E_n , est défini par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} E_0 = 1, \\ E_n = - \sum_{\substack{k=0 \\ 2|(n-k)}}^{n-1} \binom{n}{k} E_k. \end{cases}$$

Remarque 1.6. Tous les nombres d'Euler sont entiers.

Voici les premières valeurs de E_n (voir Sloane A122045) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_n	1	0	-1	0	5	0	-61	0	1385	0	-50521

TABLE 1.4 – Nombres d'Euler.

La fonction génératrice exponentielle des nombres d'Euler est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}.$$

Définition 1.21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme d'Euler $E_n(x)$ est défini par :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k},$$

avec $E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$.

On donne dans ce qui suit les valeurs de $E_n(x)$ pour $n \leq 5$:

0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x$
3	$x^2 - x$
4	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}$
5	$x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x$
6	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{2}$

TABLE 1.5 – Polynômes d'Euler

La fonction génératrice exponentielle des polynômes d'Euler est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{2e^{zx}}{e^{2z} + 1}.$$

1.16 Nombres de Cauchy

Définition 1.22. Le nombre de Cauchy de première espèce, noté a_n , est défini par la relation suivante :

$$a_n = \int_0^1 x^n dx.$$

Remarque 1.7. Ces nombres sont aussi appelés nombres de Bernoulli de seconde espèce (voir [28]).

Ces nombres vérifient la relation suivante :

$$a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n^k}{k+1} a_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a_0 = 1.$$

Définition 1.23. Le nombre de Cauchy de seconde espèce, noté b_n , est défini par la relation suivante :

$$b_n = \int_0^n x^{\bar{n}} dx.$$

Ces nombres vérifient la relation suivante :

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k+1} b_{n-k}.$$

On donne dans la table suivante quelques valeurs des nombres de Cauchy de première et seconde espèce :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-19}{30}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{-863}{84}$	$\frac{1375}{24}$	$\frac{-33953}{90}$	$\frac{57281}{20}$	$\frac{-3250433}{132}$
b_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{251}{30}$	$\frac{475}{12}$	$\frac{19087}{84}$	$\frac{36799}{24}$	$\frac{1070017}{90}$	$\frac{2082753}{20}$	$\frac{134211265}{132}$

TABLE 1.6 – Nombres de Cauchy de première et seconde espèce.

On peut consulter Sloane A006232 et A075178 pour les valeurs de la suite (a_n) A002657 pour la suite (b_n) .

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Cauchy de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Cauchy de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

1.17 Nombres eulériens

Définition 1.24. Le nombre eulérien, noté $\langle n \rangle_m$, compte le nombre de permutations à n éléments possédant exactement m montées.

En développant x^n en somme de coefficients binomiaux, on obtient la relation suivante :

$$x^n = \sum_{m=0}^n \langle n \rangle_m \binom{x+m}{n}.$$

Le coefficient $\langle n \rangle_m$ est appelé *nombre eulérien*.

Voici la table des premières valeurs des nombres eulériens en utilisant la récurrence (1.15) (consulter Sloane A008292) :

n \ m	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

TABLE 1.7 – Nombres eulériens.

Les nombres eulériens satisfont la relation de symétrie suivante :

$$\langle n \rangle_m = \langle n - m - 1 \rangle_n,$$

cette relation est obtenue en remplaçant x par $-x$ et en utilisant :

$$(-1)^n \binom{-x+m}{n} = \binom{x+n-m-1}{n}.$$

La fonction génératrice mixte de la suite des nombres eulériens est donnée par :

$$\sum_{n,m} \langle n \rangle_m \frac{x^n}{n!} z^m = \frac{1-z}{1-z.e^{x(1-z)}}, \quad |z| < 1 \text{ et } x \text{ quelconque.}$$

Une formule explicite des nombres eulériens est donnée par :

$$\langle n \rangle_m = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{n+1}{j} (m-j+1)^n.$$

Les nombres eulériens satisfont la récurrence suivante :

$$\begin{cases} \langle n \rangle_m = 0, & m \geq n, \\ \langle n \rangle_m = (m+1)\langle n-1 \rangle_m + (n-m)\langle n-1 \rangle_{m-1}, \end{cases} \quad (1.15)$$

avec $\langle n \rangle_0 = \langle n \rangle_{n-1} = 1$.

En effet, en développant $x^n = x^{n-1}x$, on obtient :

$$\sum_{m=0}^n \langle n \rangle_m \binom{x+m}{n} = \sum_{m=0}^{n-1} \langle n-1 \rangle_m \binom{x+m}{n-1} x,$$

et puisque :

$$\binom{x+m}{n-1} x = (n-m-1) \binom{x+m+1}{n} + (m+1) \binom{x+m}{n},$$

on obtient :

$$\sum_{m=0}^n \langle n \rangle_m \binom{x+m}{n} = \sum_{m=0}^{n-1} (n-m-1) \langle n-1 \rangle_m \binom{x+m+1}{n} + \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \langle n-1 \rangle_m \binom{x+m}{n},$$

après un changement de variables adéquat, on obtient le résultat en identifiant les coefficients binomiaux.

1.18 Postulat de Bertrand

Ce postulat s'énonce comme suit :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un entier premier p tel que $n < p < 2n$.

Ce postulat fût conjecturé par Bertrand en 1845 qui le vérifia pour $2 \leq n \leq 3 \times 10^6$ et fût entièrement démontré en 1850 par Chebyshev.

Nombres de Stirling et nombres et polynômes de Bell

Dans ce chapitre, on présente les nombres de Stirling des deux espèces, les nombres de Bell ainsi que les nombres de Stirling associés. On cite leurs principales propriétés.

Les identités et propriétés de ces nombres ont été principalement puisées de L. Comtet [23], de Patashnik, Graham et Knuth [37], Charalambides [20] et Crstici, Sandor et Mitrinovic [25].

2.1 Nombres de Stirling

Historique

Les nombres de Stirling furent nommés par N. Nielsen (1906) en l'honneur de J. Stirling, qui les introduisit dans son ouvrage "Differentialis methodus" (1730) sans utiliser de notation. Les relations de récurrences et certaines propriétés théoriques des nombres de Stirling de première espèce furent dérivées par L. Lagrange. Ensuite, P. S. Laplace et A. Cayley fournirent plusieurs approximations pour les nombres de Stirling de première espèce. J. A. Grunert, A. Cauchy, O. Schlömilch et d'autres étudièrent plus profondément les nombres de Stirling des deux espèces. Une présentation approfondie des nombres de Stirling et leurs plus importantes propriétés fournies par Ch. Jordan (1933) et qu'on retrouve dans son ouvrage sur les différences finies (1939), raviva l'intérêt pour les nombres de Stirling. Depuis, un grand nombre de publications apparurent sur ces nombres, entre autres, l'ouvrage de L. Comtet (1974) qui consacre tout un chapitre à ces nombres et fournit une bibliographie riche¹.

1. L'historique a été travaillé en s'inspirant du livre de Charalambides [20]

On adopte dans ce qui suit les notations utilisées par Graham, Knuth et Patashnik [37] pour désigner les nombres de Stirling des deux espèces.

Définitions

Définition 2.1. Le nombre de Stirling de première espèce, noté $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right]$, compte le nombre de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ ayant exactement m cycles ($0 \leq m \leq n$). Le nombre de Stirling de première espèce signé est donné par : $s(n, m) := (-1)^{n-m} \left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right]$.

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \delta_{0n}, \\ \left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ m \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ m-1 \end{smallmatrix} \right], \end{cases} \quad n > 1. \quad (2.1)$$

La preuve de la récurrence (2.1) se fait de la façon suivante : on prend l'élément n . Soit n forme un cycle réduit à lui-même et par conséquent, on a $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ m-1 \end{smallmatrix} \right]$ façons d'avoir des permutations à $(m-1)$ cycles d'un ensemble à $(n-1)$ éléments. soit il est contenu dans un cycle non réduit à un seul élément et par conséquent, on a $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ m \end{smallmatrix} \right]$ manières d'obtenir des permutations à m cycles d'un ensemble à $(n-1)$ éléments et $(n-1)$ possibilités d'ajouter n dans chacune de ces permutations. Le nombre total de ces permutations donne le nombre de permutations en m cycles d'un ensemble à n éléments.

Définition 2.2. Le nombre de Stirling de seconde espèce, noté $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$, compte le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en m sous-ensembles non vides ($0 \leq m \leq n$).

En d'autres termes, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$ est le nombre de relations d'équivalence avec m classes sur un ensemble à n éléments. Ou encore, le nombre de distributions de n boules discernables dans m urnes indiscernables telle qu'aucune n'est vide.

Les nombres de Stirling de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = \delta_{0,n}, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} = m \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ m \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ m-1 \end{smallmatrix} \right\}, \end{cases} \quad n > 1. \quad (2.2)$$

On obtient une preuve combinatoire de la relation (2.2) en tenant compte de l'élément n : si cet élément forme un singleton, alors on a $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ m-1 \end{smallmatrix} \right\}$ façons de partitionner les $(n-1)$ éléments restants. Si, d'autre part, l'élément n ne forme pas un singleton en lui-même, on a $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ m \end{smallmatrix} \right\}$ possibilités de partitionner les $(n-1)$ éléments en m sous-ensembles, on a m possibilités de placer n dans chacune des partitions possibles. Puisque le membre gauche compte le nombre de toutes les partitions de $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$, le résultat est prouvé.

Exemple

L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ possède 7 partitions en deux sous-ensembles non vides, $\{1,2,3\}\{4\}$, $\{1,2,4\}\{3\}$, $\{1,3,4\}\{2\}$, $\{2,3,4\}\{1\}$ et aussi $\{1,2\}\{3,4\}$, $\{1,3\}\{2,4\}$ et $\{1,4\}\{2,3\}$. Par conséquent $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$.

On donne le tableau des premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce (Sloane A132393) et de seconde espèce (Sloane A048993) :

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	2	3	1							
4	0	6	11	6	1						
5	0	24	50	35	10	1					
6	0	120	274	225	85	15	1				
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	780	45	1

TABLE 2.1 – Nombres de Stirling de première espèce.

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	0	1										
2	0	1	1									
3	0	1	3	1								
4	0	1	7	6	1							
5	0	1	15	25	10	1						
6	0	1	31	90	65	15	1					
7	0	1	63	301	350	140	21	1				
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1			
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1		
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	
11	0	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880	1155	55	1

TABLE 2.2 – Nombres de Stirling de seconde espèce.

Voici quelques valeurs spéciales de ces nombres qu'on peut déduire des tables des

nombres de Stirling :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \quad (2.3)$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!, \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}. \quad (2.6)$$

Formules explicites

Les nombres de Stirling peuvent être calculés à partir des formules explicites suivantes (consulter Flajolet et Sedgewick [35]) :

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \sum_{0 \leq j \leq h \leq n-m} (-1)^{j+h} \binom{h}{j} \binom{n-1+h}{n-m+h} \binom{2n-m}{n-m-h} \frac{(h-j)^{n-m+h}}{h!},$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n,$$

la deuxième formule peut être écrite de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} j^n. \quad (2.7)$$

2.1.1 Orthogonalité

Les nombres de Stirling des deux espèces vérifient les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\sum_{k=m}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} = \sum_{k=m}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} = \delta_{n,m},$$

qui sont équivalentes aux relations inverses :

$$a_n = \sum_k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} a_k. \quad (2.8)$$

2.1.2 Expressions polynomiales et relation avec les coefficients binomiaux

Les nombres $\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]$ et $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ vérifient la formule de Schlömilch suivante :

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^{n-m+j} \binom{2n-m}{n-m-j} \binom{n-1+j}{m-1} \left\{ \begin{matrix} n-m+j \\ j \end{matrix} \right\}.$$

Ils vérifient aussi la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m}. \quad (2.9)$$

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient la relation suivante :

$$x^n = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m. \quad (2.10)$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence : On a

$$\begin{aligned} x^0 &= 1, \\ x^1 &= x, \end{aligned}$$

On suppose que la relation est vraie pour n et prouvons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\sum_{m=0}^{n+1} (-1)^{n+1-m} \begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} x^m = \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^{n+1-m} \left(n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} \right) x^m,$$

par un changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^{n+1-m} \begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} &= \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1-m} n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m + \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^{m+1} \\ &= (x-n) \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m \\ &= (x-n)x^n = x^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Les identités relatives aux nombres de Stirling de seconde espèce sont données par :

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} = \sum_k^n \binom{n}{k} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\binom{m}{p} \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{k=m-p}^{n-p} \binom{n}{k} \begin{Bmatrix} n-k \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m-p \end{Bmatrix}. \quad (2.12)$$

Grâce à l'orthogonalité des nombres de Stirling et des formules d'inversion, L. C. Hsu (2009, [41]) obtint les identités suivantes qui lient les deux types de nombres de Stirling

aux coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
 \sum_k \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} (-1)^k &= \binom{n}{m} (-1)^m, \\
 \sum_k \begin{bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k &= \binom{n}{m} (-1)^n, \\
 \sum_{j,k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \binom{n}{j} (-1)^k &= (-1)^n, \\
 \sum_{j,k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} \binom{n}{j} (-1)^k &= (-1)^n, \\
 \sum_{j,k} \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} j+1 \\ m \end{bmatrix} (-1)^j &= (-1)^n \delta_{m,n+1}, \\
 \sum_{j,k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{j} \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^j &= (-1)^n \delta_{m,n+1}.
 \end{aligned}$$

En appliquant la transformée binomiale dans la formule (2.7), on obtient :

$$m^n = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} j! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}, \quad (2.13)$$

qui est un cas particulier de (2.23) pour m entier naturel.

2.1.3 Nombres de Stirling et somme de puissances

Ce § est relatif aux travaux de K. N. Boyadzhiev (2009, [13]).

Proposition 2.1. *Pour tout p entier, on a :*

$$\sum_{m=0}^p m^n x^m = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} x^j \sum_{r=0}^{p-j} \binom{r+j}{j} x^r. \quad (2.14)$$

Proposition 2.2. *Pour tout p entier, on a :*

$$\sum_{m=0}^p \binom{p}{m} m^n x^m = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} j! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} x^j (1+x)^{p-j}. \quad (2.15)$$

Proposition 2.3. *Pour tout p entier, on a :*

$$\sum_{m=0}^p \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix} m^n = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} p+1 \\ j+1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Pour $x = 1$, l'identité (2.14) devient :

$$\sum_{m=0}^p m^n = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} j! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}, \quad (2.17)$$

en comparant cette identité avec l'identité (1.14) on obtient :

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} j! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} = p^n + \frac{1}{n+1} [\beta_{n+1}(p) - \beta_{n+1}(0)]. \quad (2.18)$$

2.1.4 Nombres de Stirling d'ordre supérieur

Soient les matrices \mathcal{S} et S , définies par :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} & \cdots & \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} \end{pmatrix}$$

et

$$S = \begin{pmatrix} (-1)^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (-1)^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & (-1)^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ (-1)^n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} & (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} & \cdots & (-1)^1 \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} & (-1)^0 \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Ces matrices vérifient :

$$\mathcal{S} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

donc les deux matrices sont inverses l'une de l'autre. Soit S la matrice triangulaire inférieure infinie donnée par :

$$S = \begin{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} & \cdots & 0 & \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

et S^{-1} l'inverse de S dont les éléments sont notés $S_{n,m}^{-1}$. La puissance p -ième de ces matrice sera notée S^p et son inverse S^{-p} alors que les termes de la matrice seront notés $S_{n,m}^p$ et $S_{n,m}^{-p}$ respectivement.

Les nombres $S_{n,m}^p$ sont appelés nombres de Stirling d'ordre supérieur et ont été introduits par E. T. Bell [7].

2.1.5 Fonctions génératrices

La suite des nombres de Stirling de première espèce n'admet pas de fonction génératrice ordinaire (voir [48]).

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n=m}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^m (\ln(1-x))^m}{m!}. \quad (2.19)$$

on en déduit la fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce signés :

$$\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!} (\ln(1+x))^m, \quad (2.20)$$

La fonction génératrice mixte est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} z^m = (1-x)^{-z}. \quad (2.21)$$

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} x^n = \frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)},$$

et la fonction génératrice exponentielle est donnée par :

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!} (e^x - 1). \quad (2.22)$$

La fonction génératrice factorielle de la suite des nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} x^m = x^n. \quad (2.23)$$

Pour obtenir la fonction génératrice exponentielle de la suite $(S_{n,m}^p)$, on introduit les fonctions

$$\sigma(x) = e^x - 1 \quad \sigma^p(x) = \sigma(\sigma^{p-1}(x)),$$

et

$$\sigma^{-1}(x) = \ln(1+x) \quad \sigma^{-p}(x) = \sigma^{-1}(\sigma^{-(p-1)}(x)),$$

$p > 1$, et $\sigma^0(x) = x$. On a alors :

Proposition 2.4 (I. Mezö, 2008 [49]). *La fonction génératrice exponentielle de la m -ième colonne de S^p , ($p \in \mathbb{Z}$) est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n,m}^p \frac{x^n}{n!} = \frac{(\sigma^p(x))^m}{m!}. \quad (2.24)$$

La preuve de cette proposition se fait par induction sur p .

2.1.6 Log-concavité et unimodalité

Théorème 2.1 (Hammersley [38], Erdős [32]). *La suite des nombres de Stirling de première espèce $(\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right])_{0 \leq m \leq n}$ est log-concave (donc unimodale).*

De plus, l'inégalité de Newton implique la stricte log-concavité de $(\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right])_{0 \leq m \leq n}$. Erdős a prouvé que le mode est un pic.

Le mode, $K_n^{(1)}$, est donné par les bornes suivantes :

$$\left[\ln n - \frac{1}{2} \right] < K_n^{(1)} < [\ln n]. \quad (2.25)$$

Théorème 2.2 (Canfield & Pomerance [16], Dobson [29], Lieb [45], Mullin [53]). *La suite des nombres de Stirling de seconde espèce $(\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\})_{0 \leq m \leq n}$ est log-concave (donc unimodale).*

Le mode, $K_n^{(2)}$, est donné par les bornes suivantes (voir Wegner [61]) :

$$K_n^{(2)} < \frac{n}{\ln n - \ln \ln n}, \quad (n \geq 3), \quad (2.26)$$

$$\frac{n}{\ln n} < K_n^{(2)}, \quad (n \geq 18). \quad (2.27)$$

Pour $n = 2$, on est en présence d'un plateau. Wegner conjectura que, pour $n \geq 3$, le mode $K_n^{(2)}$ demeure un pic. Cette conjecture est montrée par Canfield et Pomerance pour $3 < n < 10^6$.

2.1.7 Relations avec les nombres eulériens

Les nombres de Stirling de seconde espèce sont liés aux nombres eulériens par les relations suivantes :

$$m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_{k=n-m}^n \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle \binom{k}{n-m},$$

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \binom{n-k}{m} (-1)^{n-k-m} k!.$$

2.1.8 Relation avec les nombres harmoniques

Les nombres de Stirling de première espèce sont liés aux nombres harmoniques par la relation suivante :

$$H_n = \frac{\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]}{n!}.$$

Sachant que :

$$\sum_{k=1}^n k \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right],$$

on déduit que le nombre harmonique H_n est la moyenne de cycles d'une permutation à n éléments (voir Benjamin et Quinn [9]).

Grâce à la formule (2.7) et la transformée binomiale, K. N. Boyadzhiev (2009, [13]) déduit les identités suivantes :

Proposition 2.5. *Pour tout p entier, on a :*

$$\sum_{m=0}^p H_m m^n = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right\} \binom{p+1}{j+1} \left(H_{p+1} - \frac{1}{j+1} \right), \quad (2.28)$$

$$\sum_{m=0}^p \frac{m^n}{p-m+1} = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right\} \binom{p+1}{j} (H_{p+1} - H_j). \quad (2.29)$$

2.1.9 Relation avec les suites de Fibonacci et Lucas

G. Liu (2008, [46]) obtint la relation suivante :

$$\sum_{\substack{v_1, \dots, v_k \in \mathbb{N} \\ v_1 + \dots + v_k = n}} \frac{L_{v_1} L_{v_2} \cdots L_{v_k}}{v_1 v_2 \cdots v_k} = \frac{k!}{n!} \sum_{j=k}^n (n-j)! \binom{n}{j} \binom{j}{n-j} \left[\begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} \right],$$

qui est obtenue grâce à la fonction génératrice de la suite des nombres de Fibonacci.

En ajoutant 1 à chacun des v_i et en faisant le changement de variables $i = j - k$, $n = n - k$, on obtient ce qui suit :

$$\sum_{v_1 + v_2 + \dots + v_k = n} \prod_{i=1}^k \frac{L_{v_i+1}}{v_i+1} = \sum_{i=0}^n \binom{i+k}{n-i} \left[\begin{smallmatrix} i+k \\ k \end{smallmatrix} \right] \frac{k!}{(i+k)!}.$$

2.1.10 Relation avec les nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli β_n et les nombres de Stirling des deux espèces vérifient :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right\} \frac{j!}{j+1} = \beta_n, \quad \sum_{j=0}^n (-1)^j \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] \beta_j = \frac{n!}{n+1}.$$

En dérivant m -fois la fonction génératrice exponentielle relative à la suite des nombres de Bernoulli, on obtient ce qui suit (voir Agoh et Dilcher, [2]) :

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{x}{e^x - 1} = (-1)^m \sum_{j=1}^{m+1} (j-1)! \frac{\left\{ \begin{matrix} m+1 \\ j \end{matrix} \right\} x - m \left\{ \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \right\}}{(e^x - 1)^j}.$$

L'identité suivante, qui relie les nombres de Stirling de seconde espèce et les nombres de Bernoulli, a été obtenue par T. Agoh et K. Dilcher (2007, [1]) en étudiant la somme de produits de ces derniers :

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)!(m-1)!}{(k+m-1)!} \left\{ \begin{matrix} k+m \\ d+1 \end{matrix} \right\} &= \sum_{i=0}^{d-1} \frac{\left\{ \begin{matrix} k \\ i+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ d-i \end{matrix} \right\}}{d^{\binom{d-1}{i}}} \\ + \sum_{j=d+1}^{k+m-1} \left((-1)^m \binom{k-1}{j-1} + (-1)^k \binom{m-1}{j-1} \right) &\frac{\beta_{k+m-j}}{k+m-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ d+1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

pour tous $k, m \geq 1$ et $d \geq 0$. L'identité devient triviale pour $d \geq k+m$.

Soient $k_1 = k-1, k_2 = m-1$ et $r = d+1$, grâce à un léger décalage dans l'ordre de sommation, l'identité (2.30) devient :

$$\frac{k_1!k_2!(r-1)!}{(k_1+k_2+1)!} \left\{ \begin{matrix} k_1+k_2+2 \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^{r-1} (i-1)!(r-i-1)! \left\{ \begin{matrix} k_1+1 \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k_2+1 \\ r-i \end{matrix} \right\}. \quad (2.31)$$

pour $t \geq \max\{k_1, k_2\} + 2$, puisque la dernière somme du membre droit de (2.30) s'annule. La convolution dans (2.31) se fait par rapport au second paramètre des nombres de Stirling, alors que dans (2.12) elle est faite par rapport au premier paramètre. T. Agoh et K. Dilcher obtinrent l'identité suivante qui généralise l'identité (2.31) :

Théorème 2.3 (Agoh and Dilcher, 2008 [2]). *Soient $r \geq 2$ et $k_1, \dots, k_r \geq 0$ des entiers, et soit $s_r = k_1 + \dots + k_r$. Alors pour tous entiers $m \geq \max_{1 \leq j \leq r} \{s_r - k_j\} + r$ on a :*

$$\frac{k_1! \cdots k_r! (m-1)!}{(s_r + r - 1)!} \left\{ \begin{matrix} s_r + r \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = m \\ i_1, \dots, i_r \geq 1}} \left(\prod_{j=1}^r \left((i_j - 1)! \left\{ \begin{matrix} k_j + 1 \\ i_j \end{matrix} \right\} \right) \right).$$

La preuve se fait par induction sur m .

En ajoutant 1 à chaque $i_j, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ et en faisant les changements de variables $k = s_r, s = m - r$ et en utilisant les coefficients multinomiaux, on obtient ce qui suit :

$$\binom{s+r}{r-1} \left\{ \begin{matrix} k+r \\ s+r \end{matrix} \right\} = \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_r} \binom{k+r-1}{k} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_r=s} \frac{\prod_{j=1}^r \left\{ \begin{matrix} k_j+1 \\ i_j+1 \end{matrix} \right\}}{\binom{s}{i_1, i_2, \dots, i_r}}.$$

2.1.11 Relation avec les nombres de Cauchy

Les nombres de Stirling des deux espèces sont liés aux nombres de Cauchy de première espèce par les identités suivantes :

$$\sum_{j=0}^n a_j \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{n+1}, \quad \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}}{j+1} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] = a_n.$$

Les nombres de Stirling de première espèce sont liés aux nombres de Cauchy de seconde espèce par :

$$b_n = \sum_{j=0}^n \frac{\left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]}{j+1},$$

grâce aux relations inverses (2.8), on obtient l'identité suivante :

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} b_j.$$

2.2 Nombres de Stirling associés

Les nombres de Stirling associés furent introduits par J. Riordan [55] et sont les coefficients du développement des nombres de Stirling $\left[\begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right]$ et $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right\}$ en coefficients binomiaux.

Définition 2.3. Le nombre de Stirling associé de première espèce $s_2(n, m)$ donne le nombre d'arrangements de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ avec m orbites. Le nombre de Stirling associé signé est donné par : $s_2^*(n, m) := (-1)^{n-m} s_2(n, m)$.

Ce nombre donne aussi le nombre de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ avec m cycles de longueur ≥ 2 .

Les nombres de Stirling associés de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$s_2(n, m) = (n-1)(s_2(n-1, m) + s_2(n-2, m-1)), \quad 1 \leq m \leq \frac{n}{2}, \quad (2.32)$$

avec $s_2(0, 0) = 1$, $s_2(n, 0) = 0$ ($n \geq 1$), $s_2(n, 1) = (n-1)!$ ($n > 1$), $s_2(n, k) = 0$ ($n < 2m$ ou $m < 0$).

La preuve de la récurrence (2.32) se fait de la manière suivante : On prend l'élément n . Soit n est dans un cycle contenant uniquement deux éléments, et par conséquent, on a $s_2(n-2, m-1)$ façons d'avoir des permutations de $(n-2)$ éléments en $(m-1)$ cycles et $(n-1)$ possibilités de choisir le deuxième élément du cycle contenant n . Soit il est contenu dans un cycle de taille plus grande que 2, on a ainsi $s_2(n-1, m)$ façons d'obtenir une

permutations de $(n - 1)$ éléments en m cycles et $(n - 1)$ possibilités d'ajouter l'élément n dans chacune de ces permutations. Le nombre total de ces possibilités est égal au nombre de permutations en m cycles de taille supérieur ou égal à 2 d'un ensemble à n éléments.

Définition 2.4. Le nombre de Stirling associé de seconde espèce $S_2(n, m)$ donne le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ avec m sous-ensembles de taille ≥ 2 .

Ce nombre compte aussi le nombre de façons de distribuer n boules dans m urnes de telle sorte que l'on ait 2 boules au moins par urne.

Les nombres de Stirling associés de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$S_2(n, m) = mS_2(n - 1, m) + (n - 1)S_2(n - 2, m - 1), \quad (2.33)$$

avec $S_2(0, 0) = 1$, $S_2(n, 0) = 0$ ($n \geq 1$), $S_2(n, 1) = 1$ ($n > 1$) $S_2(n, k) = 0$ ($n < 2m$ ou $m < 0$).

On obtient une preuve combinatoire de (2.33) en tenant compte de l'éléments n : Si cet élément est dans un sous-ensemble à deux éléments uniquement, on a $(n - 1)$ possibilités d'obtenir un tel sous-ensemble et $S_2(n - 2, m - 1)$ façons d'obtenir une partition avec les $(n - 2)$ éléments restants en $(m - 1)$ sous-ensembles. Si n appartient à un sous-ensemble de taille supérieure à 2, alors on a $S_2(n - 1, m)$ façons d'obtenir des partitions avec les $(n - 1)$ éléments en m sous-ensembles, l'ajout de n à chacune de ces partitions se fait en m façons. La somme de toutes ces partitions donne le membre gauche de (2.33).

Voici les tables des premières valeurs des nombres de Stirling associés de première espèce (Sloane A008306) et de seconde espèce (Sloane A008299) :

n \ m	1	2	3	4	5
2	1				
3	2				
4	6	3			
5	24	20			
6	120	130	15		
7	720	924	210		
8	5040	7308	2380	105	
9	40320	64224	2380	2520	
10	362880	623376	303660	44100	945

TABLE 2.3 – Nombres de Stirling associés de première espèce.

n \ m	1	2	3	4	5	6
2	1					
3	1					
4	1	3				
5	1	10				
6	1	25	15			
7	1	56	105			
8	1	119	490	105		
9	1	246	1918	1260		
10	1	501	6825	9450	945	
11	1	1012	22935	56980	17325	
12	1	2035	74316	302995	190575	10395

TABLE 2.4 – Nombres de Stirling associés de seconde espèce.

Voici quelques valeurs particulières de ces nombres :

$$\begin{aligned}
 s_2(2m, m) &= (2m - 1)!!, \\
 s_2(2m + 1, m) &= \frac{2}{3}m(2m + 1)!!, \\
 s_2(2m + 2, m) &= \frac{(4m + 5)(2m + 2)!}{18(m - 1)!2^m}.
 \end{aligned}$$

2.2.1 Fonctions génératrices

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling associés de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n=2m}^{\infty} s_2(n, m) \frac{x^n}{n!} = \frac{[-\ln(1 - x) - x]^m}{m!}.$$

on en déduit la fonction génératrice exponentielle suivante :

$$\sum_{n=2m}^{\infty} (-1)^{n-m} s_2(n, m) \frac{x^n}{n!} = \frac{[\ln(1 + x) - x]^m}{m!},$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling associés de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n=2m}^{\infty} S_2(n, m) \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - x - 1)^m}{m!}.$$

2.2.2 Identités

Les nombres de Stirling associés vérifient les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right] &= \sum_{j=0}^m s_2(2m-j, m-j) \binom{n}{2m-j}, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right\} &= \sum_{j=0}^m S_2(2m-j, m-j) \binom{n}{2m-j}, \end{aligned}$$

ou de façon équivalente :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n+m \\ n \end{matrix} \right] &= \sum_{j=0}^m s_2(m+j, j) \binom{n+m}{m+j}, \\ \left\{ \begin{matrix} n+m \\ n \end{matrix} \right\} &= \sum_{j=0}^m S_2(m+j, j) \binom{n+m}{m+j}. \end{aligned}$$

Ces nombres vérifient les convolutions de type Vandermonde suivantes :

$$\begin{aligned} s_2(n, m) &= \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} (-1)^j \left[\begin{matrix} n-j \\ m-j \end{matrix} \right], \\ S_2(n, m) &= \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} (-1)^j \left\{ \begin{matrix} n-j \\ m-j \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

2.2.3 Relation avec les nombres harmoniques

Zhao obtint l'identité suivante :

Théorème 2.4 (Zhao, 2008 [63]). *Pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$ on a :*

$$\sum_{j=0}^n \frac{s_2(n-j+k, k)}{(j+2) \cdot (n-j+k)!} H_{j+1} = \frac{(-1)^k}{2} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (j+1)(j+2)}{(k-j)!(n+j+2)!} \left[\begin{matrix} n+j+2 \\ j+2 \end{matrix} \right]. \quad (2.34)$$

2.2.4 Relations avec les nombres de Bernoulli

A partir des fonctions génératrices exponentielles de $S_2(n, m)$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$, β_n et β_n^r , Zhao (2008, [63]) obtint les identités suivantes :

Théorème 2.5. *Pour $n \geq 1$ et $m \geq 1$, $S_2(n, m)$, β_n et $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ vérifient les identités sui-*

vantes :

$$\sum_{j=0}^n S_2(n-j+m, m) \binom{n+m}{j} \beta_j = (n+m) \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{m-j}}{j} \binom{n+m-1}{m-j} \left\{ \begin{matrix} n+j-1 \\ j-1 \end{matrix} \right\} \quad (2.35)$$

$$+ (-1)^m \binom{n+m}{m} \beta_n, \quad (2.36)$$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+m-1}{j} S_2(n-j+m, m) \beta_j = (n+m-1) S_2(n+m-2, m-1), \quad m \geq 2. \quad (2.37)$$

Théorème 2.6. *Pour $n \geq 1$ et $r \geq 1$, les nombres de Stirling associés de seconde espèce $S_2(n, k)$ et les nombres de Bernoulli généralisés $\beta_n^{(r)}$ vérifient l'identité suivante :*

$$\sum_{j=0}^n S_2(n-j+r, r) \binom{n+r}{j} \beta_j^{(r)} = \binom{n+r}{r} \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \beta_n^{(r-j)}. \quad (2.38)$$

2.2.5 Relation avec les nombres de Cauchy

Grâce aux fonctions génératrices exponentielles des nombres de Cauchy de première espèce a_n et $s_2(n, m)$, Zhao obtint le résultat suivant :

Théorème 2.7 (Zhao, 2008 [63]). *Pour $n \geq 1$ et $m \geq 1$, $s_2(n, m)$ et a_n vérifient ce qui suit :*

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j s_2(n-j+m, m) \binom{n+m}{j} a_j = (n+m) \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{n+1}}{j} \binom{n+m-1}{m-j} \left[\begin{matrix} n+j-1 \\ j-1 \end{matrix} \right] \quad (2.39)$$

$$+ (-1)^m \binom{n+m}{m} a_n. \quad (2.40)$$

2.3 Nombres et polynômes de Bell et nombres de Bell d'ordre supérieur

Les nombres de Bell ont été attribués à E. T. Bell à la suite de la théorie qu'il a développée sur son article de 1934. Riordan fut le premier à utiliser la notation $B(n)$ en son honneur.

2.3.1 Nombres de Bell et polynômes de Bell

Définition 2.5. Le nombre de Bell, noté B_n , compte le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Puisque $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$, pour $0 \leq m \leq n$, compte le nombre de partitions de

$\{1, 2, \dots, n\}$ à m sous-ensembles disjoints, on obtient immédiatement la relation suivante :

$$B_n = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}. \quad (2.41)$$

Exemples et Tables

L'exemple suivant illustre la signification des nombres de Bell.

Par définition, on a :

$$B_4 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}.$$

$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ compte le nombre de partitions de 4 éléments en 1 sous-ensembles :

$\{1, 2, 3, 4\}$,

$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ compte le nombre de partitions de 4 éléments en 2 sous-ensemble :

$\{1\}\{2, 3, 4\}; \{2\}\{1, 3, 4\}; \{3\}\{1, 2, 4\}; \{4\}\{1, 2, 3\}; \{1, 2\}\{3, 4\}; \{1, 3\}\{2, 4\}; \{1, 4\}\{2, 3\}$,

$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}$ sont les partitions en 3 :

$\{1\}\{2\}\{3, 4\}; \{1\}\{3\}\{2, 4\}; \{1\}\{4\}\{2, 3\}; \{2\}\{3\}\{1, 4\}; \{2\}\{4\}\{1, 3\}; \{3\}\{4\}\{1, 2\}$,

et enfin, $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ sont les partitions en 4 : $\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$,

ainsi, $B_4 = 1 + 6 + 7 + 1 = 15$.

La suite des nombres de Bell peut être construite à partir d'un triangle comme suit : La première ligne ne contient que le nombre 1. Chaque ligne commence par le dernier nombre de la ligne précédente et continue en sommant le nombre qui est à gauche avec celui qui est au dessus. Les nombres de Bell sont donnés par la colonne de gauche.

1									
1	2								
2	3	5							
5	7	10	15						
15	20	27	37	52					
52	67	87	114	151	203				
203	255	322	409	523	674	877			
877	1080	1335	1657	2066	2589	3263	4140		
4140	5017	6097	7432	9089	11155	13744	17007	21147	

TABLE 2.5 – Nombres de Bell.

On peut consulter Sloane A00110 pour la première colonne de la table (2.5). Pour la diagonale $(1, 3, 10, 34, 151, \dots)$ consulter A005493 et la suite $(2, 7, 27, 114, \dots)$ consulter A011965.

Le polynôme de Bell est défini par :

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} x^m.$$

Les nombres et polynômes de Bell vérifient, respectivement, les relations de récurrence suivantes :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k,$$

$$B_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x).$$

2.3.2 Nombres de Bell d'ordre supérieur

On cite la définition de E. T. Bell pour les entiers exponentiels itérés pour définir ces nombres.

Définition 2.6 (E. T. Bell, 1938 [7]). Les polynômes de Bell d'ordre supérieur (ou polynômes exponentiels itérés) peuvent être définis par leurs fonctions génératrices exponentielles. Soit

$$E^p(z) := \exp \sigma^p(z),$$

où $p \geq 0$ et σ est tel que défini au §2.1.2. Alors, on définit ces polynômes par :

$$B_n^p(x) := n! [z^n] (E^p(z))^x. \tag{2.42}$$

et les nombres de Bell d'ordre supérieur par :

$$B_n^p := B_n^p(1).$$

On remarque que $B_n^0(x) = x^n$.

Voici la table des nombres B_n^p pour $1 \leq n \leq 7$ et $1 \leq p \leq 5$:

n \ p	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6
3	5	12	22	35	51
4	15	60	154	315	561
5	52	358	1304	3455	7556
6	203	2471	12915	44590	120196
7	877	19302	14615	660665	2201856

On a $B_n^1 = B_n$. Pour $p = 2$ (resp. $p = 3$, $p = 4$, $p = 5$), consulter A000258 (resp. A000307, A000357, A000405).

2.3.3 Fonctions génératrices

La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes de Bell est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{x(e^z-1)}.$$

2.3.4 Log-convexité

Théorème 2.8. *La suite (B_n) est log-convexe alors que $(\frac{B_n}{n!})$ est log-concave.*

La log-convexité de la suite (B_n) fût obtenue par K. Engel et S. Bouroubi (1994, [31]) et la log-concavité de $(\frac{B_n}{n!})$ fût prouvée par Canfield (1995, [15]).

La conclusion de ce théorème équivaut aux inégalités suivantes (voir Asai, Kubo et Kuo [5]) :

$$1 \leq \frac{B_n B_{n+2}}{B_{n+1}^2} \leq \frac{n+2}{n+1} \quad \forall n \geq 0. \quad (2.43)$$

2.3.5 Identités

Spivey (2008, [58]) prouva l'identité suivante :

$$B_{n+m} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \right\} \binom{n}{k} B_k j^{n-k}. \quad (2.44)$$

Gould et Quaintance (2008, [36]) donnèrent l'identité suivante :

$$\sum_{m=0}^p B_{n+m} (-1)^{p-m} \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k B_{n-k}.$$

Les polynômes de Bell vérifient la formule de Dobinski suivante :

$$B_n(x) = \frac{1}{e^x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n x^k}{k!},$$

et par conséquent, en termes de nombres de Bell :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Mező (2008, [49]), obtint les résultats suivants relatifs aux nombres de Bell d'ordre supérieur.

Proposition 2.6. Pour $p \geq 0$, on a :

$$\begin{pmatrix} B_0^p(x) \\ B_1^p(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = S^p \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

et pour $p \geq 1$, on a :

$$S_{n,m}^p = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} B_n^{p-1}(k).$$

La formule de Dobinski généralisée relative aux nombres de Bell d'ordre supérieur est donnée par :

Proposition 2.7. Pour $p \geq 1$, on a :

$$B_n^p(x) = \frac{1}{e^x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k B_n^{p-1}(k)}{k!}.$$

2.3.6 Déterminant de Hankel

Le déterminant de Hankel de la suite de nombres de Bell est $(1!, 1!2!, 1!2!3!, \dots)$, qui donne pour tout n [44] :

$$\begin{vmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n & B_{n+1} & B_{n+2} & \cdots & B_{2n} \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^n i!.$$

2.4 Nombres et polynômes de Bell ordonnés

Une partition ordonnée d'un ensemble est une partition où l'ordre des sous-ensembles est important.

Définition 2.7. Le nombre de Bell ordonné, noté \mathcal{B}_n , compte le nombre de partitions ordonnées de $\{1, 2, \dots, n\}$. Il est donné par l'identité suivante :

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (2.45)$$

C'est aussi le nombre de façons de placer n boules indiscernables dans une ou plusieurs urnes indiscernables.

2.4.1 Exemple et table

On donne un exemple pour illustrer la signification des nombres de Bell ordonnés. Pour $n = 4$, on a :

1 partition de 1 sous-ensemble, ce qui donne un ordre total.

7 partitions en deux sous ensembles : 4 partitions de 3+1 et 3 partitions de 2+2. Ce qui donne $7 \times 2 = 14$.

6 partitions en 3 sous ensembles 2+1+1, soit $6 \times 3 \times 2 = 36$.

1 partition en 4 sous ensembles 1+1+1+1, soit $24 = 1 \times 4 \times 3 \times 2$.

ainsi $\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^4 k! \left\{ \begin{matrix} 4 \\ k \end{matrix} \right\} = 75$.

On donne dans la table suivante les premières valeurs des nombres de Bell ordonnés :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\mathcal{B}_n	1	1	3	13	75	541	4683	47293	545835	7087261	102247563

TABLE 2.6 – Nombres de Bell ordonnés.

Le polynôme de Bell ordonné, $\mathcal{B}_n(x)$, est défini par :

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k.$$

Les nombres de Bell ordonnés vérifient la relation de récurrence suivante (voir Dil et Kurt, [27]) :

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \mathcal{B}_k.$$

On donne dans la table suivante les premières valeurs des polynômes de Bell ordonnés :

$\mathcal{B}_0(x) = 1$
$\mathcal{B}_1(x) = x$
$\mathcal{B}_2(x) = x + 2x^2$
$\mathcal{B}_3(x) = x + 6x^2 + 6x^3$
$\mathcal{B}_4(x) = x + 14x^2 + 36x^3 + 24x^4$

TABLE 2.7 – Polynômes de Bell ordonnés.

Nombres de Bell ordonnés d'ordre supérieur

Soit $p \geq 1$ et soit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_0^p(x) \\ \mathcal{B}_1^p(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = S^p \begin{pmatrix} 0!x^0 \\ 1!x^1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bell ordonnés d'ordre supérieur, et $\mathcal{B}_n^p(1) = \mathcal{B}_n^p$ nombre de Bell ordonné d'ordre supérieur. Ils ont été introduits par I. Mezö [49], qui donna leurs principales propriétés.

On a : $\mathcal{B}_n^1 = \mathcal{B}_n$.

Voici une table donnant les premières valeurs des nombres de Bell ordonnés d'ordre supérieur pour $1 \leq n \leq 7$ et $1 \leq p \leq 5$.

n \ p	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7
3	13	23	36	52	71
4	75	175	342	594	949
5	541	1662	4048	8444	15775
6	4683	18937	57437	143783	313920
7	47293	251729	950512	2854261	7279765

TABLE 2.8 – Nombres de Bell ordonnés d'ordre supérieur.

2.4.2 Fonctions génératrices

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Bell ordonnés est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1 - x(e^z - 1)}.$$

ce résultat est cité dans [49]. L'auteur de cet article obtint la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Bell ordonnés d'ordre supérieur qu'on donne dans la proposition suivante :

Proposition 2.8. *On a pour $p \geq 1$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^p(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1 - x\sigma^p(z)}.$$

où σ est la fonction définie au §2.1.2.

2.4.3 Identités

On retrouve dans [51] les identités suivantes : Une formule explicite des nombres de Bell ordonnés est donnée par :

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}.$$

Les nombres de Bell ordonnés sont liés aux nombres eulériens par l'identité suivante :

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^n \left\langle n \right\rangle_k 2^k.$$

Proposition 2.9. *Les nombres de Bell ordonnés d'ordre supérieur peuvent être écrits en fonction des nombres de Bell d'ordre supérieur comme suit :*

$$\mathcal{B}_n^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_n^p(k)}{2^{k+1}}.$$

2.4.4 Nombres eulériens d'ordre supérieur

Soit

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{B}_0(x)}{x^0} \\ \frac{\mathcal{B}_1(x)}{x^1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \left(\frac{x+1}{x}\right)^0 \\ \left(\frac{x+1}{x}\right)^1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Le (n, m) -ième terme de \mathcal{A} , $A_{n,m}$, est le nombre eulérien $\left\langle n \right\rangle_m$.

Mező introduisit ce qui suit :

Définition 2.8. Soit $\mathcal{A}^{(p)}$ l'unique matrice ($p \geq 1$), pour laquelle

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{B}_0^p(x)}{x^0} \\ \frac{\mathcal{B}_1^p(x)}{x^1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{(p)} \begin{pmatrix} \left(\frac{x+1}{x}\right)^0 \\ \left(\frac{x+1}{x}\right)^1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

De plus, on introduit les polynômes suivants :

$$\begin{pmatrix} A_0^p(x) \\ A_1^p(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{(p)} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Les résultats suivants ont été obtenus par Mező (2008, [49]).

Proposition 2.10. *Voici quelques identités reliant les nombres eulériens d'ordre supérieur aux nombres de Stirling d'ordre supérieur et les nombres de Bell ordonnés d'ordre supérieur :*

$$\begin{aligned} A_{n,m}^p &= \sum_{k=0}^n k! S_{n,k}^p \binom{n-k}{m} (-1)^{n-k-m}, & m! S_{n,m}^p &= \sum_{k=0}^n A_{n,k}^p \binom{k}{n-m}, \\ \mathcal{B}_n^p(x) &= x^n A_n^p \left(\frac{x+1}{x} \right), & \mathcal{B}_n^p(x) &= \sum_{k=0}^n A_{n,k}^p (x+1)^k x^{n-k}. \end{aligned}$$

Corollaire 2.1. *La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes A_n^p est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^p(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1} \sigma^p((x-1)z)} = \frac{x-1}{x - E^{p-1}((x-1)z)},$$

où σ^p et E^{p-1} sont définis au §2.1.2.

Nombres r -Stirling et nombres r -Bell

On étudie dans ce chapitre les nombres r -Stirling, nombres de Stirling r -associés et les nombres r -Bell et nombres r -Bell ordonnés, généralisations des nombres définis dans le chapitre précédent.

On peut retrouver dans [14] et [18, 19], les identités et propriétés donnés ci-dessous pour les nombres r -Stirling. Les propriétés des nombres de Stirling r -associés sont cités dans [40].

3.1 Nombres r -Stirling

Les nombres r -Stirling de seconde espèce apparurent chez N. Nielsen [54] comme étant la différence des puissances en un point arbitraire. J. Riordan [55] les utilisa comme constantes liant les puissances des moments autour d'un point arbitraire et les moments factoriels. Ces nombres furent étudiés par L. Carlitz [18, 19] sous le nom de "weighted Stirling numbers" et M. Koutras [42] sous le nom de "non-central Stirling numbers". A. Z. Broder [14] les étudia et leur donna le nom " r -Stirling numbers"¹.

Définition 3.1. Le nombre r -Stirling de première espèce, noté $\left[\begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right]_r$, compte le nombre de permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+r\}$ ayant exactement $m+r$ cycles telles que les r premiers éléments soient dans des cycles distincts, $0 \leq r, 0 \leq m \leq n$.

1. Cette note historique a été travaillé en s'inspirant du livre de Charalambides [20]

Les nombres r -Stirling de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left[\begin{matrix} n+r \\ r \end{matrix} \right]_r = \delta_{n,0}, \\ \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r = (n+r-1) \left[\begin{matrix} n+r-1 \\ m+r \end{matrix} \right]_r + \left[\begin{matrix} n+r-1 \\ m+r-1 \end{matrix} \right]_r, \end{cases} \quad n > 1. \quad (3.1)$$

La preuve de la récurrence (3.1) se fait de la façon suivante : on prend l'élément $n+r$. Soit $n+r$ forme un cycle réduit à lui-même et par conséquent, on a $\left[\begin{matrix} n+r-1 \\ m+r-1 \end{matrix} \right]_r$ façons d'avoir des permutations à $(m+r-1)$ cycles d'un ensemble à $(n+r-1)$ éléments telles que les r premiers éléments soient dans des cycles disjoints, soit il est contenu dans un cycle non réduit à un seul élément et par conséquent, on a $\left[\begin{matrix} n+r-1 \\ m+r \end{matrix} \right]_r$ manières d'obtenir des permutations à $m+r$ cycles d'un ensemble à $(n+r-1)$ éléments tels que les r premiers éléments soient dans des cycles disjoints et $(n+r-1)$ possibilités d'ajouter $n+r$ dans chacune de ces permutations. Le nombre total de ces permutations donne le nombre de permutations en $m+r$ cycles d'un ensemble à $n+r$ éléments sous la même condition.

Pour $r = 0$ ou 1 , on retrouve les nombres de Stirling de première espèce classiques.

Ils vérifient aussi la relation de récurrence suivante :

$$\left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r = \frac{1}{r-1} \left(\left[\begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right]_{r-1} - \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right]_r \right), \quad r > 1, 0 < m \leq n. \quad (3.2)$$

La relation (3.2) peut être réécrite comme suit :

$$(r-1) \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r = \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right]_{r-1} - \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right]_r, \quad (3.3)$$

le membre de droite de (3.3) compte le nombre de permutations ayant $(m+r-1)$ cycles telles que les $(r-1)$ premiers éléments soient dans des cycles disjoints au r . Ceci est égal à $(r-1) \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]$ puisque de telles permutations peuvent être obtenues de $(r-1)$ façons à partir des permutations ayant $(m+r)$ cycles telles que les r premiers éléments sont dans des cycles disjoints en ajoutant le cycle contenant r à un cycle ayant un élément plus petit que r .

Définition 3.2. Le nombre r -Stirling de seconde espèce, noté $\left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r$, compte le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+r\}$ en $m+r$ sous-ensembles non vides telles que les r premiers éléments sont dans des sous-ensembles distincts.

Les nombres r -Stirling de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ r \end{matrix} \right\}_r = \delta_{n,0}, \\ \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r = (m+r) \left\{ \begin{matrix} n+r-1 \\ m+r \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n+r-1 \\ m+r-1 \end{matrix} \right\}_r, \end{cases} \quad n > 1. \quad (3.4)$$

La preuve de la récurrence (3.4) se fait de la façon suivante : on prend l'élément $n+r$. Soit $n+r$ forme un singleton et par conséquent, on a $\left\{ \begin{smallmatrix} n+r-1 \\ m+r-1 \end{smallmatrix} \right\}_r$ façons d'avoir de partitionner les $(n+r-1)$ éléments restants en $(m+r-1)$ sous-ensembles telles que les r premiers éléments soient dans des sous-ensembles disjoints. soit il est contenu dans un sous-ensemble non réduit à un seul élément et par conséquent, on a $\left\{ \begin{smallmatrix} n+r-1 \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r$ manières de partitionner les $(n+r-1)$ éléments en $m+r$ sous-ensembles telles que les r premiers éléments soient dans des sous-ensembles disjoints et $(m+r)$ possibilités d'ajouter $n+r$ dans chacune de ces partitions. Le nombre total de ces partitions donne le nombre de partitions d'un ensemble à $n+r$ éléments en $m+r$ sous-ensembles sous la même condition.

Remarque 3.1. Pour $r = 0$ ou 1 , on retrouve les nombres de Stirling de seconde espèce classiques.

Ils vérifient aussi la relation de récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r = \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ \begin{smallmatrix} n+r-1 \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_{r-1}. \quad (3.5)$$

(3.5) peut être réécrite de la manière suivante :

$$(r-1) \left\{ \begin{smallmatrix} n+r-1 \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_{r-1} = \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_{r-1} - \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r, \quad (3.6)$$

le membre de droite de (3.6) compte le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+r\}$ en $(m+r)$ sous-ensembles non vides telles que les $(r-1)$ premiers éléments sauf r sont dans des sous-ensembles disjoints. Ce nombre est égal à $(r-1) \left\{ \begin{smallmatrix} n+r-1 \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_{r-1}$ car de telles partitions sont obtenues de $(r-1)$ façons à partir des partitions de $\{1, 2, \dots, n+r-1\}$ en $m+r$ sous-ensembles telles que les $(r-1)$ premiers éléments soient dans des sous-ensembles disjoints en ajoutant r à l'un des sous-ensembles contenant l'un des $(r-1)$ éléments.

On donne les premières valeurs des nombres r -Stirling de première espèce et de seconde espèce, obtenues grâce aux relations de récurrence (3.1), (3.4).

Consulter Sloane A143491 (resp. A143492) pour la table (3.2) (resp. (3.3)).

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	2	3	1					
3	6	11	6	1				
4	24	50	35	10	1			
5	120	274	225	85	15	1		
6	720	1764	1624	735	175	21	1	
7	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

TABLE 3.1 – Nombres 1-Stirling de première espèce.

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	2	1						
2	6	5	1					
3	24	26	9	1				
4	120	154	71	14	1			
5	720	1044	580	155	20	1		
6	5040	8028	5104	1665	295	27	1	
7	40320	69264	48860	18424	4025	511	35	1

TABLE 3.2 – Nombres 2-Stirling de première espèce.

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	3	1						
2	12	7	1					
3	60	47	12	1				
4	360	342	119	18	1			
5	2520	2754	1175	245	25	1		
6	20160	24552	12154	3135	445	33	1	
7	181440	241128	133938	40369	7140	742	42	1

TABLE 3.3 – Nombres 3-Stirling de première espèce.

Pour la table (3.6) (resp. (3.9)), consulter Sloane A143494 (A143495)

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	3	1					
3	1	7	6	1				
4	1	15	25	10	1			
5	1	31	90	65	15	1		
6	1	63	301	350	140	21	1	
7	1	127	966	1701	1050	266	28	1

TABLE 3.4 – Nombres 1-Stirling de seconde espèce.

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	2	1						
2	4	5	1					
3	8	19	9	1				
4	16	65	55	14	1			
5	32	211	285	125	20	1		
6	64	665	1351	910	245	27	1	
7	128	2059	6069	5901	2380	434	35	1

TABLE 3.5 – Nombres 2-Stirling de seconde espèce.

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	3	1						
2	9	7	1					
3	27	37	12	1				
4	81	175	97	18	1			
5	243	781	660	205	25	1		
6	729	3367	4081	1890	380	33	1	
7	2181	14197	23772	15421	4550	644	42	1

TABLE 3.6 – Nombres 3-Stirling de seconde espèce.

Voici quelques valeurs particulières de $\left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r$ et $\left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r$:

$$\left[\begin{matrix} n+r \\ r \end{matrix} \right]_r = r^{\bar{n}}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ r \end{matrix} \right\}_r = r^n.$$

On remarque que

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ n+r-1 \end{matrix} \right\}_r = \left[\begin{matrix} n+r \\ n+r-1 \end{matrix} \right]_r = \binom{n+r}{2} - \binom{r}{2}.$$

En effet, le nombre de partitions d'un ensemble à $n+r$ éléments en $n+r-1$ sous-ensembles telles que les r premiers éléments ne sont pas dans le même sous-ensemble équivaut au nombre de façons de choisir 2 éléments parmi $n+r$ à qui on soustrait le nombre de façons de choisir 2 éléments parmi r .

On donne dans la table (3.7) les valeurs de $\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_r$ ($r < m \leq n$), en faisant varier m et r et en laissant n fixe, en utilisant la relation de récurrence (3.2) et en prenant $n = 10$:

m \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	511	256	0	0	0	0	0	0	0
3	9330	6305	2181	0	0	0	0	0	0
4	34105	26335	14197	4096	0	0	0	0	0
5	42525	35574	23772	11529	3125	0	0	0	0
6	22827	20181	15421	9751	4751	1296	0	0	0
7	5880	5418	4550	3410	2190	997	343	0	0
8	750	714	644	545	425	295	169	64	0
9	45	44	42	39	35	30	24	17	8
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TABLE 3.7 – Nombres r-Stirling de première espèce.

On calcule dans le tableau (3.8) quelques valeurs de $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_r$ ($r \leq m \leq n$), en gardant m fixe et en faisant varier n et r , en utilisant la récurrences (3.5). On prend $m = 6$:

n \ r	1	2	3	4	5	6
6	1	1	1	1	1	1
7	21	20	18	15	11	6
8	322	245	205	151	91	36
9	2646	2380	1890	1219	615	160
10	22827	20181	15533	10031	5155	2080
11	179487	156657	116298	69699	29575	3800
12	1323652	156660	830845	481951	203155	55280

TABLE 3.8 – Nombres r-Stirling de seconde espèce.

3.1.1 Fonctions génératrices

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres r -Stirling de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^m (\ln(1-x))^m}{m! (1-x)^r}.$$

on en déduit la fonction génératrice exponentielle suivante :

$$\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n-m} \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1 (\ln(1+x))^m}{m! (1+x)^r}, \quad (3.7)$$

La fonction génératrice mixte de la suite des nombres r -Stirling de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n,m} \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r \frac{x^n}{n!} z^m = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{r+z}. \quad (3.8)$$

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres r -Stirling de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r x^n = \frac{x^m}{(1-rx)(1-(r+1)x) \cdots (1-(m+r)x)},$$

et la fonction génératrice exponentielle est donnée par :

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!} e^{rx} (e^x - 1)^m. \quad (3.9)$$

3.1.2 Orthogonalité

La relation d'orthogonalité entre les nombres de Stirling est aussi vérifiée pour les nombres r -Stirling :

$$\sum_{k=m}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} k+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r (-1)^k = \sum_{k=m}^n \left[\begin{matrix} k+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r (-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n}.$$

et est ainsi équivalente aux relations inverses :

$$a_n = \sum_k \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r (-1)^{n-k} b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r a_k. \quad (3.10)$$

3.1.3 Identités

Les nombres r -Stirling de première espèce (resp. de seconde espèce) sont liés aux nombres de Stirling de première espèce (resp. de seconde espèce) par la relation suivante (voir Charalambides, [20]) :

$$\left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=m}^n \binom{j}{m} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r r^{j-m}, \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r = \sum_{j=m}^n \binom{j}{m} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r r^{j-m}. \quad (3.12)$$

Les nombres r -Stirling de première espèce satisfont :

$$\left[\begin{matrix} n+r \\ n+r-m \end{matrix} \right]_r = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n} (i_1+r)(i_2+r) \cdots (i_m+r), \quad (3.13)$$

ou de façon équivalente :

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right]_r = \sum_{r \leq i_1 < \dots < i_m < n} i_1 \cdots i_m.$$

Les nombres r -Stirling de seconde espèce vérifient :

$$\left\{ \begin{matrix} n+r+m \\ n+r \end{matrix} \right\}_r = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n} (i_1+r)(i_2+r) \cdots (i_m+r), \quad (3.14)$$

ou de façon équivalente :

$$\left\{ \begin{matrix} n+m \\ m \end{matrix} \right\}_r = \sum_{r \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n} i_1 \cdots i_m.$$

Les nombres r -Stirling de première espèce vérifient la relation suivante :

$$(x+r)^{\bar{n}} = \sum_{m=0}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r x^m, \quad (3.15)$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence : On a

$$\begin{aligned} (x+r)^{\bar{0}} &= 1, \\ (x+r)^{\bar{1}} &= x+r, \end{aligned}$$

On suppose que la relation est vraie pour n et prouvons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\sum_{m=0}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+r+1 \\ m+r \end{matrix} \right]_r x^m = \sum_{m=0}^{n+1} \left((n+r) \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r + \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right]_r \right) x^m,$$

par un changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n+1} \left[\begin{matrix} n+r+1 \\ m+r \end{matrix} \right]_r x^m &= \sum_{m=0}^n (n+r) \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r x^m + \sum_{m=0}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r x^{m+1} \\ &= (x+n+r) \sum_{m=0}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r x^m \\ &= (x+n+r)(x+r)^n = (x+r)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

de façon équivalente à la relation (3.15) on a :

$$(x-r)^n = \sum_{m=0}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r (-1)^{n-m} x^m. \quad (3.16)$$

Les nombres r -Stirling de seconde espèce vérifient l'identité suivante :

$$(x+r)^n = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r x^m, \quad n \geq 0, \quad (3.17)$$

ou de façon équivalente :

$$(x-r)^n = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r (-1)^{n-m} x^m. \quad (3.18)$$

Les nombres r -Stirling de première espèce vérifient l'identité suivante :

$$\left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r = \sum_k \binom{n}{k} \left[\begin{matrix} n-k+p \\ m+p \end{matrix} \right]_p (r-p)^{\bar{k}}, \quad 0 \leq p \leq r. \quad (3.19)$$

Les nombres r -Stirling de seconde espèce vérifient l'identité suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} n-k+p \\ m+p \end{matrix} \right\}_p (r-p)^k, \quad 0 \leq p \leq r. \quad (3.20)$$

Les relations (3.19)-(3.20) nous permettent de calculer les nombres r -Stirling grâce aux nombres r -Stirling précédents.

Pour le cas $p = 0$, on retrouve les relations (3.11) et (3.12) respectivement.

Les nombres r -Stirling de seconde espèce vérifient l'identité suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} (j+r)^n. \quad (3.21)$$

On retrouve à partir de (3.16) et (2.23) la relation suivante :

$$\sum_{m=0}^n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m (-1)^{n-m} \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \right\} x^i y^j = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \left[\begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r (xy)^m = (xy-r)^n,$$

et plus généralement :

$$\sum_{m=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_s=0}^m (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r \prod_{j=1}^s \left(\begin{Bmatrix} m \\ i_j \end{Bmatrix} x^{i_j} \right) = (x_{i_1} \cdots x_{i_s} - r)^n. \quad (3.22)$$

La relation suivante lie les nombres hyperharmoniques aux nombres r -Stirling de première espèce et a été montré par Benjamin, Gaebler et Gaebler [8] :

$$H_{n,r} = \frac{\begin{bmatrix} n+r \\ r+1 \end{bmatrix}_r}{n!}, \quad (3.23)$$

Théorème 3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{k=m}^n (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k+r \\ m+r \end{bmatrix}_r = r^{n-m} \binom{n}{m}. \quad (3.24)$$

Preuve. *Sachant que :*

$$\begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r = \sum_{k=m}^n r^{k-m} \binom{k}{m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

et en appliquant la relation d'inversion (2.8) en prenant $a_n = (-1)^n \begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r$ et $b_k = (-1)^k r^{k-m} \binom{k}{m}$ on obtient le résultat. \square

Théorème 3.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k+r \\ m+r \end{Bmatrix}_r = r^{n-m} \binom{n}{m} \quad (3.26)$$

Preuve. *Sachant que*

$$\begin{Bmatrix} n+r \\ m+r \end{Bmatrix}_r = \sum_{k=m}^n r^{k-m} \binom{k}{m} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

et en appliquant la relation d'inversion (2.8) en prenant $b_n = (-1)^n \begin{Bmatrix} n+r \\ m+r \end{Bmatrix}_r$ et $a_k = r^{k-m} \binom{k}{m}$ on obtient le résultat. \square

3.1.4 Log-concavité et unimodalité

On donne dans ce qui suit les résultats concernant la log-concavité et l'unimodalité des suites de nombres r -Stirling, donnés par I. Mezö (2007, [50]).

Théorème 3.3. *La suite $\left(\begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r \right)_{0 \leq m \leq n}$ est strictement log-concave (donc unimodale).*

Preuve. *Soit :*

$$G_{n,r}(x) = \sum_{m=0}^n \begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r x^m,$$

en développant la fonction génératrice mixte (3.8) et en identifiant les termes, on obtient :

$$G_{n,r}(x) = n! \binom{r+x+n-1}{n} = (x+r)(x+r+1) \cdots (x+r+n-1),$$

par conséquent, les racines de $G_{n,r}(x)$ sont réelles négatives. On obtient le résultat en appliquant le théorème de Newton (1.2). \square

Théorème 3.4. Le mode, $K_{n,r}^{(1)}$, de la suite $\left(\left[\begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right]_r \right)_{0 \leq m \leq n}$ est donné par l'approximation suivante :

$$K_{n,r}^{(1)} = r + \left[\ln \left(\frac{n-1}{r-1} \right) - \frac{1}{r} + o(1) \right]. \quad (3.28)$$

Preuve. On déduit de (3.13) que :

$$\left[\begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right]_r = \Xi_{n,n-m},$$

où Ξ est défini au §1.9. On applique le **Théorème d'Erdős-Stone** (1.4) avec $u_i = r+i$. \square

Théorème 3.5. La suite $\left(\left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r \right)_{0 \leq m \leq n}$ est strictement log-concave (donc unimodale).

Preuve. Soit :

$$G_{n,r}(x) = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r x^m. \quad (3.29)$$

En utilisant la relation de récurrence (3.4) dans (3.29) on obtient :

$$G_{n,r}(x) = \frac{1}{x^{r-1}} \frac{\partial}{\partial x} (x^r G_{n-1,r}(x)) + x G_{n-1,r}(x),$$

on obtient ainsi la récurrence :

$$G_{n,r}(x) = x \left(\frac{\partial}{\partial x} G_{n-1,r}(x) + G_{n-1,r}(x) \right) + r G_{n-1,r}(x),$$

cette équation implique l'identité suivante :

$$e^x x^r G_{n,r}(x) = x \frac{\partial}{\partial x} (e^x x^r G_{n-1,r}(x)).$$

On remarque de (3.29) que $G_{n-1,r}(x) > 0$, si $x \geq 0$. On prouve par induction que les racines de $G_{n,r}(x)$ sont réelles et négatives et on applique le **Théorème de Newton** (1.2). \square

Lemme 3.1 (voir Crstici, Sandor et Mitrinovic, [25]). Pour tout $0 < m \leq n$, $\left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\frac{(m+r)^n}{m!} - \frac{(m-1+r)^n}{(m-1)!} < \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r < \frac{(m+r)^n}{m!}.$$

Théorème 3.6. Soit $K_{n,r}^{(2)}$ le mode de la suite $\left(\left\{\begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix}\right\}_r\right)_{0 \leq m \leq n}$. Alors

$$K_{n,r}^{(2)} < \frac{n-r}{\ln(n-r) - \ln \ln(n-r)}, \quad (n \geq r+3),$$

$$\frac{n-r}{\ln(n-r)} < K_{n,r}^{(2)}, \quad \left(n \geq r + \max \left\{ 18, \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{1}{r}\right)} \right\}\right).$$

Ce résultat généralise celui de Wegner (2.27).

Corollaire 3.1. Le *Théorème de Darroch-Benoumhani* (1.3 implique :

$$\left| K_{n+r,r}^{(1)} - \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \cdots + \frac{1}{r+n} \right) \right| < 1.$$

Corollaire 3.2. On a :

$$\left| K_{n+r,r}^{(2)} - \left(\frac{\sum_{m=0}^{n+1} \left\{ \begin{smallmatrix} n+r+1 \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r}{n} - (r+1) \right) \right| < 1.$$

3.2 Nombres de Stirling r-associés

Les nombres de Stirling r -associés sont une généralisation des nombres de Stirling associés. On les retrouve pour la première fois dans les articles de F. T. Howard [39] et de J. C. Ahuja et E. A. Enneking [3].

Définition 3.3. Le nombre de Stirling r -associé de première espèce, $s_r(n, m)$ est égal au nombre de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ à m cycles telles que chaque cycle contient au moins r éléments.

Les nombres de Stirling r -associés de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$s_r(n+1, m) = ns_r(n, m) + \binom{n}{r-1} (r-1)! s_r(n-r+1, m-1), \quad (3.30)$$

avec $s_r(0, 0) = 1$, $s_r(n, 0) = 0$ ($n \geq 1$), $s_r(n, 1) = (n-1)!$ ($n \geq r$), $s_r(n, k) = 0$ ($n < rk$ ou $m < 0$).

La preuve de la récurrence (3.30) se fait de la manière suivante : On prend l'élément $n+1$. Soit $n+1$ est dans un cycle contenant exactement r éléments, et par conséquent, on a $s_r(n-r+1, m-1)$ façons d'avoir des permutations de $(n-r+1)$ éléments en $m-1$ cycles et $\binom{n}{r-1}$ possibilités de choisir les $(r-1)$ éléments restants du cycle contenant n , on a $(r-1)!$ façons de placer ces éléments dans chacun de ces cycles. Soit il est contenu dans

un cycle de taille plus grande que r , on a ainsi $s_r(n, m)$ façons d'obtenir une permutations de n éléments en m cycles et n possibilités d'ajouter l'élément $n + 1$ dans chacune de ces permutations. Le nombre total de ces possibilités est égal au nombre de permutations en m cycles de taille supérieur ou égal à r d'un ensemble à $n + 1$ éléments.

Définition 3.4. Le nombre de Stirling r -associé de seconde espèce, $S_r(n, m)$ est égal au nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en m sous-ensembles, chacun de cardinal au moins r .

Les nombres de Stirling r -associés de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$S_r(n + 1, m) = mS_r(n, m) + \binom{n}{r-1} S_r(n - r + 1, m - 1), \tag{3.31}$$

avec $S_r(0, 0) = 1$, $S_r(n, 0) = 0$ ($n \geq 1$), $S_r(n, 1) = 1$ ($n \geq r$), $S_r(n, k) = 0$ ($n < rk$ ou $m < 0$).

On obtient une preuve combinatoire de (3.31) en tenant compte de l'éléments $n + 1$: Si cet élément est dans un sous-ensemble de cardinal r , on a $S_r(n - r + 1, m - 1)$ façons de partitionner les $(n - r + 1)$ éléments restants en $m - 1$ sous-ensembles de cardinal au moins r , on a $\binom{n}{r-1}$ façons de choisir les $(r - 1)$ éléments du sous-ensemble contenant $n + 1$. Si $n + 1$ appartient à un sous-ensemble de cardinal plus grand que r , alors on a $S_r(n, m)$ façons de partitionner les n éléments restants en m sous-ensembles, l'ajout de n à chacune de ces partitions se fait de m façons. La somme de toutes ces partitions donne le membre gauche de (3.31).

On donne dans ce qui suit les premières valeurs de nombres de Stirling 3-associés de première et seconde espèce :

n \ m	1	2	3	4
3	2			
4	6			
5	24			
6	120	40		
7	720	420		
8	5040	3948		
9	40320	38304	2240	
10	362880	396576	50400	
11	3628800	4419360	859320	
12	39916800	53048160	13665960	246400
13	479001600	684478080	216339552	9609600
14	6227020800	9464307840	3501834336	258978720

TABLE 3.9 – Nombres de Stirling 3-associés de première espèce.

n \ m	m			
	1	2	3	4
3	1			
4	1			
5	1			
6	1	10		
7	1	35		
8	1	91		
9	1	210	280	
10	1	456	2100	
11	1	957	10395	
12	1	1969	42735	15400
13	1	4004	158301	461032
14	1	8086	549549	1611610

TABLE 3.10 – Nombres de Stirling 3-associés de seconde espèce.

Pour la table (3.9) (resp. (3.10)), consulter Sloane A05211 (resp. A059022).

3.2.1 Fonctions génératrices

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling r -associés de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n=rm}^{\infty} s_r(n, m) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!} \left(-\ln(1-x) - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{x^i}{i} \right)^m,$$

on en déduit la fonction génératrice exponentielle suivante :

$$\sum_{n=rm}^{\infty} (-1)^{n-m} s_r(n, m) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!} \left(\ln(1+x) + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i \frac{x^i}{i} \right)^m.$$

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling r -associés de seconde espèce est donnée par la relation suivante :

$$\sum_{n=rm}^{\infty} S_r(n, m) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!} \left(e^x - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{x^i}{i!} \right)^m$$

3.2.2 Relations avec les nombres de Bernoulli

Zhao (2008, [63]) obtint, grâce aux fonctions génératrices, l'identité suivante qui lie les nombres de Bernoulli et les nombres Stirling 3-associés, l'identité suivante :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+m}{j+m} S_3(j+m, m) \beta_{n-j} = (n+m)! \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{m-j}}{j \cdot (m-j)!} \sum_{j_1=0}^{m-j} \binom{m-j}{j_1} \frac{\left\{ \begin{smallmatrix} n-j_1+j-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right\}}{2^{j_1} \cdot (n-j_1+j-1)!} \\ + \frac{(-1)^m (n+m)!}{m!} \sum_{j=0}^m \frac{\beta_{n-j}}{2^j \cdot (n-j)!} \binom{m}{j}.$$

Nombres r -eulériens

Définition 3.5. Le nombre r -eulérien, noté $\langle n \rangle_m^r$, compte le nombre de permutations à n éléments ayant m r -montées.

Les nombres r -eulériens vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\langle n \rangle_m^r = (m+1) \langle n-1 \rangle_m^r + (n-m+r) \langle n-1 \rangle_{m-1}^r$$

Remarque 3.2. Les triangles des nombres r -eulériens ne sont pas symétriques.

Les nombres r -eulériens vérifient la relation suivante :

$$\sum_{m=0}^n \langle n \rangle_m^r \binom{x+m}{n+r} = x^n x^r$$

3.3 Nombres et polynômes r -Bell

Dans ce qui suit, on peut retrouver les identités citées sur [52]

Définition 3.6. Le nombre r -Bell, noté $B_{n,r}$ est le nombre de partitions d'un ensemble à $n+r$ éléments telles que, dans chaque partition, les r premiers éléments sont dans des sous-ensembles disjoints. Ils sont donc donnés par :

$$B_{n,r} = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r. \quad (3.32)$$

Le polynôme r -Bell est donné par :

$$B_{n,r}(x) = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ m+r \end{smallmatrix} \right\}_r x^m. \quad (3.33)$$

On a : $B_{n,r}(1) = B_{n,r}$.

Les polynômes r -Bell sont obtenus récursivement grâce à la relation suivante :

$$B_{n,r}(x) = B_{n+1,r-1}(x) - (r-1)B_{n,r-1}(x).$$

Ils vérifient aussi l'identité suivante (voir Carlitz, [18]) :

$$B_{n,r+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{k,r}. \tag{3.34}$$

On cite les identités de Carlitz :

$$B_{n+m,r} = \sum_{j=0}^m \left\{ \begin{matrix} m+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r B_{n,r+j}, \quad B_{n,r+m} = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \left[\begin{matrix} m+r \\ j+r \end{matrix} \right]_r B_{n+j,r}.$$

On a aussi ces deux récurrences qui font intervenir la dérivée des polynômes r -Bell :

$$B_{n,r}(x) = x \left(\frac{\partial}{\partial x} B_{n-1,r}(x) + B_{n-1,r}(x) \right) + r B_{n-1,r}(x), \tag{3.35}$$

$$e^x x^r B_{n,r}(x) = x \frac{\partial}{\partial x} (e^x x^r B_{n-1,r}(x)). \tag{3.36}$$

Exemples et tables

On pose $n = 4$ et $r = 2$, on a alors, par définition :

$$B_{2,2} = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}_2 + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}_2 + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}_2.$$

$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}_2$ compte les partitions de 4 éléments en 2 sous ensembles telles que les 2 premiers éléments sont dans des sous-ensembles disjoints :

$\{1,3,4\}\{2\} ; \{1\}\{2,3,4\} ; \{1,3\}\{2,4\} ; \{1,4\}\{2,3\},$

$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}_2$ les partitions en 3 sous-ensembles :

$\{1\}\{2\}\{3,4\} ; \{1,3\}\{2\}\{4\} ; \{1,4\}\{2\}\{3\} ; \{1\}\{2,3\}\{4\} ; \{1\}\{2,4\}\{3\},$

et enfin $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}_2$ sont les partitions en 4 sous-ensembles : $\{1\}\{2\}\{3\}\{4\},$

ainsi

$$B_{2,2} = 4 + 5 + 1 = 10.$$

Dans les tables suivantes, on donne les premières valeurs des nombres r -Bell grâce à la relation (3.34) et des polynômes r -Bell :

$r \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147
1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975
2	1	3	10	37	151	674	3263	17007	94828	562595
3	1	4	17	77	372	1915	10481	60814	372939	2409837
4	1	5	26	141	799	4736	29371	190497	1291020	9131275
5	1	6	37	235	1540	10427	73013	529032	3967195	30785747
6	1	7	50	365	2727	20878	163967	1322035	10949772	93197715
7	1	8	65	537	4516	38699	338233	3017562	27499083	256118905
8	1	9	82	757	7087	67340	649931	6376149	63625324	646147067
9	1	10	101	1031	10644	111211	1176701	12616132	137144475	1512354975

TABLE 3.11 – Nombres r -Bell.

Pour $r = 3$ (resp. $r = 4$), consulter Sloane A005494 (resp. A045379).

n	$B_{n,r}(x)$
0	1
1	$x + r$
2	$x^2 + (2r + 1)x + r^2$
3	$x^3 + (3r + 3)x^2 + (3r^2 + 3r + 1)x + r^3$
4	$x^4 + (4r + 6)x^3 + (6r^2 + 12r + 7)x^2 + (4r^3 + 6r^2 + 4r + 1)x + r^4$

TABLE 3.12 – Polynômes r -Bell.

3.3.1 Fonctions génératrices

La fonction génératrice ordinaire de la suite des polynômes r -Bell est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x)z^n = \frac{-1}{rz-1} \frac{1}{e^x} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} rz-1 \\ \frac{rz+z-1}{z} \end{matrix} \middle| x \right).$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r -Bell est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x) \frac{z^n}{n!} = e^{x(e^z-1)+rz}.$$

Remarque 3.3. La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r -Bell n'est autre que la fonction génératrice mixte de la suite des nombres r -Stirling de seconde espèce.

3.3.2 Les identités

On peut exprimer les polynômes r -Bell à l'aide des polynômes de Bell par :

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n r^k \binom{n}{k} B_{n-k}(x). \tag{3.37}$$

Les polynômes r -Bell satisfont l'identité de Dobinski généralisée :

$$B_{n,r}(x) = \frac{1}{e^x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!} x^k. \tag{3.38}$$

Par conséquent, les nombres r -Bell sont générés par :

$$B_{n,r} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!}. \tag{3.39}$$

A partir de la relation obtenue par Belbachir et Mihoubi (2009, [6]) :

$$\exp(y) B_{s+r}(x) = \sum_{j=0}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ j \end{matrix} \right\} x^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+j)^s}{i!} x^i \right), \tag{3.40}$$

on déduit la relation

Théorème 3.7.

$$B_{s+r}(x) = \sum_{j=0}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ j \end{matrix} \right\} x^j B_{s,j}(x), \tag{3.41}$$

3.3.3 Déterminant de Hankel

I. Mezö [52] obtint le résultat suivant :

Corollaire 3.3. *Le déterminant de Hankel des nombres r -Bell est donnée par :*

$$\begin{vmatrix} B_{0,r} & B_{1,r} & B_{2,r} & \cdots & B_{n,r} \\ B_{1,r} & B_{2,r} & B_{3,r} & \cdots & B_{n+1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,r} & B_{n+1,r} & B_{n+2,r} & \cdots & B_{2n,r} \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^n i!.$$

Preuve. Sachant (3.37) et grâce au **Théorème 1.1** de Layman, on déduit que les nombres de Bell et les nombres de r -Bell possèdent le même déterminant de Hankel.

3.4 Nombres et polynômes r -Bell ordonnés

Définition 3.7. Le nombre r -Bell ordonné, noté $\mathcal{B}_{n,r}$ donne le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble à $n + r$ éléments telles que les r premiers éléments soient dans des sous-ensembles disjoints. Il est donné par :

$$\mathcal{B}_{n,r} = \sum_{m=0}^n (m+r)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r. \tag{3.42}$$

Le polynôme r -Bell ordonné est défini par la relation suivante :

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = \sum_{m=0}^n (m+r)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r x^m. \tag{3.43}$$

Voici les premières valeurs des polynômes r -Bell ordonnés :

$n \setminus r$	1	2
0	1	2
1	$1 + 2x$	$2 + 6x$
2	$1 + 6x + 6x^2$	$8 + 30x + 24x^2$
3	$1 + 14x + 36x^2 + 24x^3$	$16 + 114x + 216x^2 + 120x^3$
4	$1 + 30x + 150x^2 + 240x^3 + 120x^4$	$32 + 390x + 1320x^2 + 1680x^3 + 720x^4$

TABLE 3.13 – Polynômes r -Bell ordonnés.

3	4
6	24
$6 + 24x$	$96 + 120x$
$54 + 168x + 120x^2$	$384 + 1080x + 720x^2$
$162 + 888x + 1440x^2 + 720x^3$	$1536 + 7320x + 10800x^2 + 5040x^3$
$486 + 4200x + 11640x^2 + 12960x^3 + 5040x^4$	$6144 + 44280x + 108720x^2 + 110880x^3 + 40320x^4$

Pour $x = 1$, on obtient les valeurs des nombres r -Bell ordonnés suivantes :

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	6	24	120	720	5040	40320
1	3	8	30	216	1320	9360	75600	685440
2	13	62	342	2184	15960	131760	1214640	12378240
3	75	466	3210	24696	211560	2005200	20880720	237283200
4	541	4142	34326	310344	3063000	32911920	383448240	4822715520

TABLE 3.14 – Nombres r -Bell ordonnés.

3.4.1 Fonctions génératrices

Théorème 3.8. *La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r -Bell ordonnés est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n,r}(x) \frac{z^n}{n!} = e^{rz} \frac{r!}{[1 - x(e^z - 1)]^{r+1}}.$$

Preuve. *En utilisant l'identité (3.43) et grâce à la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres r -Stirling de seconde espèce, on obtient :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n,r}(x) \frac{z^n}{n!} = e^{rz} r! \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{m} [x(e^z - 1)]^m,$$

et sachant que $\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{m} x^m$, on obtient le résultat. □

3.4.2 Identités

Les identités cités ci-dessous sont donnés dans [51].

La formule explicite des nombres r -Bell ordonnés est donnée par :

$$\mathcal{B}_{n,r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n (k+r)!}{2^{k+r+1} k!}.$$

Les nombres r -Bell ordonnés sont liés aux nombres r -eulériens par l'identité suivante :

$$\mathcal{B}_{n,r} = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle_r 2^k.$$

Transformée binomiale et nombres r -Stirling

Dans ce qui suit, on se propose de donner des extensions de résultats obtenus par Boyadzhiev (2009, [13]) en reprenant la même méthode pour les nombres r -Stirling présentés au §2.

L'identité (3.21) montre que les suites $m! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r$ et $(m+r)^n$ sont liées par la transformée binomiale inverse. La formule d'inversion entraîne :

$$(m+r)^n = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r, \quad (4.1)$$

pour tout entier m , qui est un cas particulier de (3.17) pour x entier.

Lemme 4.1. *Soit $(c_m)_m$ une suite. Alors pour tout entier p positif, on a :*

$$\sum_{m=0}^p (m+r)^n c_m = \sum_{0 \leq j \leq m \leq p} j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \binom{m}{j} c_m. \quad (4.2)$$

La relation (4.2) nous permet d'obtenir plusieurs identités.

Les deux identités suivantes relient les nombres r -Stirling de seconde espèce aux coefficients binomiaux.

Théorème 4.1.

$$\sum_{m=0}^p (m+r)^n x^m = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r x^j \sum_{t=0}^{p-j} \binom{t+j}{j} x^t. \quad (4.3)$$

Preuve. *On prend $c_m = x^m$, en appliquant (4.2), on obtient :*

$$\sum_{m=0}^p (m+r)^n x^m = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \sum_{m=j}^p \binom{m}{j} x^m,$$

avec

$$\sum_{m=j}^p \binom{m}{j} x^m = x^j \sum_{t=0}^{p-j} \binom{t+j}{j} x^t,$$

d'où le résultat. □

Remarque 4.1. Pour $r = 0$, on retrouve l'identité (2.14).

Pour $x = 1$, on a :

$$\sum_{m=0}^p (m+r)^n = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \binom{p+1}{j+1}, \quad (4.4)$$

et en comparant avec l'identité (1.14), obtient la relation suivante :

$$\sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \binom{p+1}{j+1} = (p+r)^n + \frac{1}{n+1} [\beta_{n+1}(r+p) - \beta_{n+1}(r)]. \quad (4.5)$$

Théorème 4.2.

$$\sum_{m=0}^p \binom{p}{m} (m+r)^n x^m = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r x^j (1+x)^{p-j}. \quad (4.6)$$

Preuve. On pose $c_m = \binom{p}{m} x^m$ et on applique (4.2), on a : alors :

$$\sum_{m=0}^p \binom{p}{m} (m+r)^n x^m = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \sum_{m=j}^p \binom{m}{j} \binom{p}{m} x^m,$$

avec

$$\sum_{m=j}^p \binom{m}{j} \binom{p}{m} x^m = \binom{p}{j} x^j (1+x)^{p-j},$$

le résultat est ainsi obtenu. □

Remarque 4.2. Pour $r = 0$, on retrouve l'identité (2.15).

Pour $x = 1$, on a la l'identité suivante :

$$\sum_{m=0}^p \binom{p}{m} (m+r)^n = \sum_{j=0}^p p^j 2^{p-j} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r, \quad (4.7)$$

et pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\sum_{m=0}^p \binom{p}{m} (m+r)^n (-1)^m 2^{p-m} = \sum_{j=0}^p (-1)^j p^m \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r. \quad (4.8)$$

L'identité suivante relie les nombres r -Stirling de seconde espèce aux nombres de Stirling de première espèce.

Théorème 4.3.

$$\sum_{m=0}^p \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix} (m+r)^n = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \begin{bmatrix} p+1 \\ j+1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Preuve. Le résultat est obtenu en appliquant (4.2) pour $c_m = \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix}$ et la relation (2.9). \square

Remarque 4.3. Pour $r = 0$, on retrouve l'identité (2.16).

Les deux identités suivantes relient les nombres r -Stirling de seconde espèce aux nombres harmoniques.

Théorème 4.4.

$$\sum_{m=0}^p H_m (m+r)^n = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \binom{p+1}{j+1} \left(H_{p+1} - \frac{1}{j+1} \right), \quad (4.10)$$

$$\sum_{m=0}^p \frac{(m+r)^n}{p-m+1} = \sum_{j=0}^p j! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \binom{p+1}{j} (H_{p+1} - H_j). \quad (4.11)$$

Preuve. Le résultat est obtenu grâce à (4.2) en prenant respectivement $c_m = H_m$ et $c_m = \frac{1}{p-m+1}$ et en utilisant les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{m=j}^p \binom{m}{j} H_m &= \binom{p+1}{j+1} \left(H_{p+1} - \frac{1}{j+1} \right), \\ \sum_{m=j}^p \binom{m}{j} \frac{1}{p-m+1} &= \binom{p+1}{j} (H_{p+1} - H_j). \end{aligned}$$

\square

Remarque 4.4. Pour $r = 0$, on retrouve les identités (2.28) et (2.29).

L'identité suivante relie les nombres r -Stirling des deux espèces aux nombres de Stirling de première espèce.

Théorème 4.5.

$$\sum_{m=0}^p (m+r)^n \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix}_r r^m = \sum_{j=0}^p j! r^j \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \begin{bmatrix} p+r \\ j+r \end{bmatrix}_r. \quad (4.12)$$

Preuve. En prenant $c_m = r^m \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix}_r$ et en appliquant (3.11), on obtient le résultat. \square

Sur la log-convexité des polynômes r -Bell

Dans ce chapitre, on se propose de donner des extensions de résultats obtenus par S. Bouroubi dans [12] en suivant la même démarche, dans le cas r -Bell.

A partir de la formule (3.39), on définit ce qui suit :

$$\tilde{B}_r(x) = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+r)^x}{i!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

La série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+r)^x}{i!}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, $\tilde{B}_r(n) = B_{n,r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.1 Inégalités

Théorème 5.1. *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\tilde{B}_r(x_1 + x_2) \leq \tilde{B}_r^{\frac{1}{p}}(px_1) \tilde{B}_r^{\frac{1}{q}}(qx_2). \quad (5.2)$$

Preuve. *Soit Z_r la variable aléatoire définie par la fonction de distribution suivante :*

$$P(Z_r = i) = \frac{1}{e} \frac{1}{(i-r)!}, \quad i \in \{r, r+1, \dots\},$$

alors :

$$E(Z_r^x) = \tilde{B}_r(x), \quad (5.3)$$

d'après l'inégalité de Hölder :

$$E(Z_r^{x_1+x_2}) \leq E^{\frac{1}{p}}(Z_r^{px_1}) E^{\frac{1}{q}}(Z_r^{qx_2}), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

le résultat s'ensuit immédiatement grâce à (5.3). □

Remarque 5.1. $B_{n,r}$ est le moment d'ordre n de la variable aléatoire Z_r .

En prenant $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $p = q = 2$, on a :

Corollaire 5.1. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$$B_{n+m,r}^2 \leq B_{2n,r} B_{2m,r}. \quad (5.5)$$

En prenant $x_1 = \frac{n}{2}, x_2 = \frac{n+2}{2}, p = q = 2$, on obtient :

Corollaire 5.2. La suite $\left(\frac{B_{n+1,r}}{B_{n,r}}\right)$ est croissante et de façon équivalente, $(B_{n,r})$ est log-convexe.

Théorème 5.2. Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$2\tilde{B}_r(x_1 + x_2) \leq \tilde{B}_r(2x_1) + \tilde{B}_r(2x_2). \quad (5.6)$$

Preuve. Il suffit de développer $E(Z_r^{x_1} - Z_r^{x_2})^2$. \square

Remarque 5.2. Ce théorème fût prouvé par Bouroubi pour $r = 0$.

Corollaire 5.3. La suite $(B_{n,r})_n$ est convexe, c'est-à-dire :

$$2B_{n,r} \leq B_{n-1,r} + B_{n+1,r}. \quad (5.7)$$

5.2 Polynômes r-Bell et log-convexité

Soit $\tau_{n,r}$ (resp. $\sigma_{n,r}^2$) la moyenne (resp. la variance) de la variable $X_{n,r}$ qui compte le nombre de sous-ensembles dans une partition de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+r\}$ en $(m+r)$ sous-ensembles, $m \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, tel que les r premiers éléments soient dans des sous-ensembles distincts. Ainsi :

$$\tau_{n,r} = \frac{1}{B_{n,r}} \sum_{m=0}^n (m+r) \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r, \quad (5.8)$$

et

$$\sigma_{n,r}^2 = \frac{1}{B_{n,r}} \sum_{m=0}^n (m+r)^2 \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r - \left(\frac{1}{B_{n,r}} \sum_{m=0}^n (m+r) \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r \right)^2, \quad (5.9)$$

Proposition 5.1. Pour tout $n \geq 1$:

$$\tau_{n,r} = \frac{B_{n+1,r}}{B_{n,r}} - 1, \quad (5.10)$$

$$\sigma_{n,r}^2 = \frac{B_{n+2,r}}{B_{n,r}} - \left(\frac{B_{n+1,r}}{B_{n,r}} \right)^2 - 1. \quad (5.11)$$

Preuve. Grâce à (3.4), on obtient :

$$(m+r) \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r = \left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ m+r \end{matrix} \right\}_r - \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right\}_r, \quad (5.12)$$

en remplaçant (5.12) dans (5.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_{n,r} &= \frac{1}{B_{n,r}} \sum_{m=0}^n \left[\left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ m+r \end{matrix} \right\}_r - \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right\}_r \right] \\ &= \frac{1}{B_{n,r}} \left[\sum_{m=0}^{n+1} \left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ m+r \end{matrix} \right\}_r - \left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ n+r+1 \end{matrix} \right\}_r - \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right\}_r \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

(5.10) est ainsi obtenu. En procédant d'une façon analogue avec (5.9), on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^n (m+1)^2 \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r \\ &= \sum_{m=0}^n (m+1) \left[\left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ m+r \end{matrix} \right\}_r - \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right\}_r \right] \\ &= \sum_{m=0}^n \left[\left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ m+r \end{matrix} \right\}_r - 2 \left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ m+r-1 \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r-2 \end{matrix} \right\}_r - \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right\}_r \right] \\ &= \beta_{n+2,r} - \left\{ \begin{matrix} n+r+2 \\ m+r+1 \end{matrix} \right\}_r - 2\beta_{n+1,r} + 2 \left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ m+r \end{matrix} \right\}_r - \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r-1 \end{matrix} \right\}_r - 1 \\ &= \beta_{n+2,r} - 2\beta_{n+1,r} \end{aligned}$$

le résultat est ainsi obtenu. □

Le polynôme $B_{n,r}(x)$, défini en (3.33), possède n racines négatives distinctes¹. Soient $-\alpha_{n,r}^{(1)}, \dots, -\alpha_{n,r}^{(n)}$ les n racines et soit $I_{n,r} = \{-\alpha_{n,r}^{(1)}, \dots, -\alpha_{n,r}^{(n)}\}$, alors :

$$B_{n,r}(x) = \prod_{i=1}^n (x + \alpha_{n,r}^{(i)}). \quad (5.14)$$

On suppose que $x \notin I_{n,r}$. Soit :

$$\tau_{n,r}(x) = \frac{B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - x, \quad (5.15)$$

et

$$\sigma_{n,r}^2(x) = \frac{B_{n+2,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - \left(\frac{B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} \right)^2 - x. \quad (5.16)$$

1. Pour la preuve, voir p.55

Théorème 5.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

(i)

$$\tau_{n,r}(x) = r + \sum_{i=1}^n \frac{x}{x + \alpha_{n,r}^{(i)}} = n + r - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{n,r}^{(i)}}{x + \alpha_{n,r}^{(i)}}, \quad (5.17)$$

(ii)

$$\sigma_{n,r}^2(x) = x \frac{d}{dx} (\tau_{n,r}(x)). \quad (5.18)$$

Sans restreindre à la généralité, on supposera $x > 0$.

Preuve. (i) *En remplaçant dans (5.15), $B_{n+1,r}(x)$ par sa valeur dans (3.35), on obtient le résultat.*

(ii)

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} (\tau_{n,r}(x)) &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - x \right) \\ &= x \left(\frac{\frac{d}{dx} B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - \frac{B_{n+1,r}(x) \frac{d}{dx} B_{n,r}(x)}{(B_{n,r}(x))^2} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{B_{n+2,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - \frac{x B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - r \frac{B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} \right) \\ &\quad - \frac{B_{n+1,r}(x)}{(B_{n,r}(x))^2} [(B_{n+1,r}(x) - x B_{n,r}(x) - r B_{n,r}(x))] - x \\ &= \frac{B_{n+2,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - x \frac{B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - \frac{r B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - \\ &\quad \left(\frac{B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} \right)^2 + x \frac{B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} + \frac{r B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - x \\ &= \frac{B_{n+2,r}(x)}{B_{n,r}(x)} - \left(\frac{B_{n+1,r}(x)}{B_{n,r}(x)} \right)^2 - x. \end{aligned} \quad (5.19)$$

□

Remarque 5.3. Pour $r = 0$, On retrouve ce qui suit (voir [12]) :

$$\tau_n(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x}{x + \alpha_n^i}$$

en effet, puisqu'il existe une racine nulle, supposons que $\alpha_{n,0}^n = 0$, alors

$$\begin{aligned} \tau_{n,0}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{x}{x + \alpha_{n,0}^i} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x}{x + \alpha_{n,0}^i} = n + 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{n,0}^i}{x + \alpha_{n,0}^i}. \end{aligned}$$

$$\sigma_n^2(x) = x \frac{d}{dx}(\tau_n(x)). \quad (5.20)$$

Corollaire 5.4. *On a :*

1.

$$r < \tau_{n,r}(x) < r + n, \quad \text{pour tout } x > 0. \quad (5.21)$$

2.

$$0 < \sigma_{n,r}^2(x) < \frac{n}{4}, \quad \text{pour tout } x > 0. \quad (5.22)$$

3. *La suite $(B_{n,r}(x))_n$ est log-convexe pour $x > 0$ et log-concave pour $x < 0$.*

4. *Pour tout $n \geq 1$, les polynômes $B_{n+1,r}(x)$ et $B_{n,r}(x)$ sont co-premiers.*

5.

$$\sigma_{n+1,r}^2(x) + \sigma_{n-1,r}^2(x) - 2\sigma_{n,r}^2(x) = x d(\tau_{n+1,r}(x) + \tau_{n-1,r}(x) - 2\tau_{n,r}(x)). \quad (5.23)$$

Preuve. (1) *L'inégalité découle du fait que pour tout i , $\alpha_{n,r}^{(i)}$ est positif et de (5.17).*

(2) *En utilisant (5.17) et (5.18), on obtient :*

$$\sigma_{n,r}^2(x) = x \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{n,r}^{(i)}}{(x + \alpha_{n,r}^{(i)})^2}. \quad (5.24)$$

(3) *Ce résultat est une conséquence immédiate de (5.24). En effet, si $x > 0$ (resp. $x < 0$) alors $\sigma_{n,r}^2(x) > 0$ (resp. $\sigma_{n,r}^2(x) < 0$) et en utilisant (5.16) on a :*

$$B_{n+2,r}(x)B_{n,r}(x) - (B_{n+1,r}(x))^2 - x(B_{n,r}(x))^2 > 0, \quad (5.25)$$

$$(\text{resp. } B_{n+2,r}(x)B_{n,r}(x) - (B_{n+1,r}(x))^2 - x(B_{n,r}(x))^2 < 0), \quad (5.26)$$

d'où

$$B_{n+2,r}(x)B_{n,r}(x) > (B_{n+1,r}(x))^2. \quad (5.27)$$

$$(\text{resp. } B_{n+2,r}(x)B_{n,r}(x) < (B_{n+1,r}(x))^2.) \quad (5.28)$$

(4) *Le développement de $\frac{\partial}{\partial x} B_{n,r}(x)$ dans (3.35) donne :*

$$B_{n+1,r}(x) = x \left[\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x + \alpha_{n,r}^{(i)}) + B_{n,r}(x) \right] + r B_{n,r}(x), \quad (5.29)$$

en remplaçant x par $-\alpha_{n,r}^{(j)}$ dans (5.29), on obtient :

$$B_{n+1,r}(-\alpha_{n,r}^{(j)}) = (-\alpha_{n,r}^{(j)}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (-\alpha_{n,r}^{(j)} + \alpha_{n,r}^{(i)}), \quad (5.30)$$

d'où (4) est prouvée.

(5) *Il suffit d'utiliser (5.18).* □

Remarque 5.4. Pour $r = 0$, On retrouve les identités suivantes (voir [12]) :

1.

$$1 < \tau_n(x) < n + 1,$$

pour $x > 0$.

2.

$$0 < \sigma_{n,r}^2(x) < \frac{n-1}{4},$$

pour $x > 0$

3. La suite $(B_n(x))_n$ est log-convexe pour $x > 0$ et log-concave pour $x < 0$.

4. Pour tout $n \geq 1$, les polynômes $\frac{B_{n+1}(x)}{x}$ et $\frac{B_n(x)}{x}$ sont co-premiers.

5.

$$\sigma_{n+1}^2(x) + \sigma_{n-1}^2(x) - 2\sigma_n^2(x) = xd(\tau_{n+1}(x) + \tau_{n-1}(x) - 2\tau_n(x)). \quad (5.31)$$

Les identités (1) à (3) diffèrent légèrement du fait que $B_n(x)$ admet une racine nulle.

Corollaire 5.5. On a :

$$(r+1)B_{n,r} < B_{n+1,r} < (r+n+1)B_{n,r}. \quad (5.32)$$

Preuve. Le résultat est obtenu en prenant $x = 1$ dans (5.21). □

Remarque 5.5. Pour $r = 0$, on retrouve la relation (voir [12]) :

$$2B_n < B_{n+1} < (n+2)B_n$$

Pour $r = 0$, K. Engel [31] conjectura que la suite $(\tau_n)_n$ est concave. Cette conjecture a été partiellement prouvée par Canfield en 1995 [15]. Le problème de la concavité pour $(\tau_{n,r})_n$ persiste pour r fixé. On propose la conjecture suivante :

Conjecture Pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq n_0$ la suite $(\tau_{n,r})_n$ est concave.

On se propose dans ce chapitre de généraliser le concept de nombre de Stirling d'ordre supérieur ainsi que des nombres et polynômes de Bell d'ordre supérieur.

6.1 Nombres r-Stirling d'ordre supérieur

Soit la matrice, $\mathcal{S}(r)$, définie par :

$$\mathcal{S}(r) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \{r\} \\ r \end{matrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix} \{r+1\} \\ r \end{matrix} & \begin{matrix} \{r+1\} \\ r+1 \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \begin{matrix} \{n+r\} \\ r \end{matrix} & \begin{matrix} \{n+r\} \\ r+1 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} \{n+r\} \\ n-1+r \end{matrix} & \begin{matrix} \{n+r\} \\ n+r \end{matrix} \end{pmatrix}$$

et puisque les nombres r -Stirling de première et seconde espèce vérifient la relation d'orthogonalité, on a :

$$S(r) = \mathcal{S}^{-1}(r) = \begin{pmatrix} (-1)^0 \begin{matrix} [r] \\ r \end{matrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (-1)^1 \begin{matrix} [r+1] \\ r \end{matrix} & (-1)^0 \begin{matrix} [r+1] \\ r+1 \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ (-1)^n \begin{matrix} [n+r] \\ r \end{matrix} & (-1)^{n-1} \begin{matrix} [n+r] \\ r+1 \end{matrix} & \cdots & (-1)^1 \begin{matrix} [n+r] \\ n-1+r \end{matrix} & (-1)^0 \begin{matrix} [n+r] \\ n+r \end{matrix} \end{pmatrix}$$

soit l'identité matricielle :

$$S(r) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-r)^0 \\ (x-r)^1 \\ \vdots \\ (x-r)^n \end{pmatrix}$$

et par la relation d'orthogonalité, on a :

$$\mathcal{S}(r) \begin{pmatrix} (x-r)^0 \\ (x-r)^1 \\ \vdots \\ (x-r)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Soient la matrice triangulaire inférieure :

$$S(r) = \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ r \end{Bmatrix}_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \begin{Bmatrix} r+1 \\ r \end{Bmatrix}_r & \begin{Bmatrix} r+1 \\ r+1 \end{Bmatrix}_r & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \begin{Bmatrix} r+2 \\ r \end{Bmatrix}_r & \begin{Bmatrix} r+2 \\ r+1 \end{Bmatrix}_r & \begin{Bmatrix} r+2 \\ r+2 \end{Bmatrix}_r & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{Bmatrix} n+r \\ r \end{Bmatrix}_r & \begin{Bmatrix} n+r \\ r+1 \end{Bmatrix}_r & \cdots & \begin{Bmatrix} n+r \\ n+r-1 \end{Bmatrix}_r & \begin{Bmatrix} n+r \\ n+r \end{Bmatrix}_r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

et $S^{-1}(r)$ son inverse.

La matrice de degré p et son inverse sont notées par : $S^p(r)$ et $S^{-p}(r)$.

On appelle $S_{n,m}^p(r)$ nombres r -Stirling d'ordre p de seconde espèce et $S_{n,m}^{-p}(r)$ nombres r -Stirling d'ordre p de première espèce.

Soient σ la fonction définie au §2.1.4.

Proposition 6.1. *La fonction génératrice exponentielle de la m -ième colonne de $S^p(r)$ ($p \geq 1$) est donnée par :*

$$\sum_{n=m}^{\infty} S_{n,m}^p(r) \frac{x^n}{n!} = \frac{[\sigma^p(x)]^m}{m!} \prod_{t=0}^{p-1} \exp(r\sigma^t(x)). \quad (6.1)$$

Preuve. *La preuve se fait par induction. Pour $p = 1$, on retrouve (3.9).*

Supposons que (6.1) est vraie pour tout $k < p$ et montrons qu'elle est vraie pour p . On a grâce à la définition de $S^p(r)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} S_{n,m}^p(r) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=m}^n S_{n,k}^{p-1}(r) S_{k,m}(r) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} S_{k,m}(r) \left(\sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k}^{p-1}(r) \frac{x^n}{n!} \right), \end{aligned}$$

et par l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=m}^{\infty} S_{n,m}^p(r) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{k=m}^{\infty} S_{k,m}(r) \frac{[\sigma^{p-1}(x)]^k}{k!} \prod_{t=0}^{p-2} \exp(r\sigma^t(x)) \\
 &= \frac{[\exp(\sigma^{p-1}(x)) - 1]^m}{m!} \prod_{t=0}^{p-2} \exp(r\sigma^t(x)) \exp(r\sigma^{p-1}) \quad \text{par (3.9)} \\
 &= \frac{[\sigma^p(x)]^m}{m!} \prod_{t=0}^{p-1} \exp(r\sigma^t(x)).
 \end{aligned}$$

□

Proposition 6.2. La fonction génératrice de la m -ième colonne de $S^{-p}(r)$ ($p \geq 1$) est donnée par :

$$\sum_{n=m}^{\infty} S^{-p}_{n,m}(r) = \frac{(\sigma^{-p}(x))^m}{m!} \left(\prod_{t=0}^{p-1} \frac{1}{(1 + \sigma^{-t}(x))^r} \right). \quad (6.2)$$

Preuve. La preuve se fait par induction. Pour $p = 1$, on retrouve (3.7).

Supposons que (6.2) est vraie pour tout $k < p$ et prouvons qu'elle est vraie pour p .

On a, grâce à la définition de $S^{-p}(r)$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=m}^{\infty} S_{n,m}^{-p}(r) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=m}^n S_{n,k}^{-(p-1)}(r) S_{k,m}(r) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{k=m}^{\infty} S_{k,m}(r) \left(\sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k}^{-(p-1)}(r) \frac{x^n}{n!} \right),
 \end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=m}^{\infty} S_{n,m}^{-p}(r) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{k=m}^{\infty} S_{k,m}(r) \frac{[\sigma^{-(p-1)}(x)]^k}{k!} \left(\prod_{t=0}^{p-2} \frac{1}{(1 + \sigma^{-t}(x))^r} \right) \\
 &= \frac{[\ln(\sigma^{-(p-1)}(x)) + 1]^m}{m!} \left(\prod_{t=0}^{p-2} \frac{1}{(1 + \sigma^{-t}(x))^r} \right) \frac{1}{(1 + \sigma^{-(p-1)})^r} \quad \text{par (3.7)} \\
 &= \frac{[\sigma^{-p}(x)]^m \left(\prod_{t=0}^{p-1} \frac{1}{(1 + \sigma^{-t}(x))^r} \right)}{m!}.
 \end{aligned}$$

□

6.2 Nombres r-Bell d'ordre supérieur

Définition 6.1. Pour $p \geq 0$, on définit le polynôme r -Bell d'ordre p , noté $B_{n,r}^p(x)$, par :

$$B_{n,r}^p(x) = \sum_{m=0}^n S_{n,m}^p(r) x^m,$$

ou en utilisant les matrices par :

$$\begin{pmatrix} B_{0,r}^p(x) \\ B_{1,r}^p(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = S^p(r) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

et le nombre r -Bell d'ordre p est $B_{n,r}^p = B_{n,r}^p(1)$.

Remarque 6.1. Pour $p = 1$, on retrouve les nombres et polynômes r -Bell.

Voici quelques valeurs de nombres 2-Bell d'ordre p :

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	10	37	151	674	3263	17007
2	1	5	29	192	1430	11834	107695	1068440
3	1	7	58	556	6054	73786	994851	14696537
4	1	9	97	1218	17499	282405	5059340	99595465

TABLE 6.1 – Nombres r -Bell d'ordre p

Théorème 6.1. La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r -Bell d'ordre p est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}^p(x) \frac{z^n}{n!} = \exp(x\sigma^p(z)) \prod_{t=0}^{p-1} \exp(r\sigma^t(x)),$$

où $\sigma^p(z)$ est la fonction définie au §2.1.4.

Preuve. On a, par définition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}^p(x) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n S_{n,m}^p(r) x^m \frac{z^n}{n!},$$

et en inversant l'ordre de sommation, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}^p(x) \frac{z^n}{n!} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} S_{n,m}^p(r) x^m \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[x\sigma^p(z)]^m}{m!} \prod_{t=0}^{p-1} \exp(r\sigma^t(z)). \quad \text{par (6.1)} \end{aligned}$$

□

6.2.1 Nombres r -Bell ordonnés d'ordre supérieur

Définition 6.2. Pour tout $p, n \geq 0$, on définit les polynômes r -Bell ordonnés d'ordre p par :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{0,r}^p(x) \\ \mathcal{B}_{1,r}^p(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = S^p(r) \begin{pmatrix} r!x^0 \\ (1+r)!x^1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

et pour $x = 1$, on a les nombres r -Bell ordonnés d'ordre p .

Remarque 6.2. Pour $p = 1$, on retrouve les nombres et polynômes r -Bell ordonnés.

Théorème 6.2. La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r -Bell ordonnés d'ordre p est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n,r}^p(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{r!}{[1 - x\sigma^p(z)]^{r+1}} \prod_{t=0}^{p-1} e^{r\sigma^t(z)},$$

où $\sigma(z)$ et $\sigma^p(z)$ sont comme définis au §2.1.4.

Preuve. On a, par définition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n,r}^p(x) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (m+r)! S_{n,m}^p(r) x^m \frac{z^n}{n!},$$

en changeant l'ordre de sommation, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n,r}^p(x) \frac{z^n}{n!} &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)! x^m \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,m}^p(r) \frac{z^n}{n!}, \\ &= r! \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{m} [x\sigma^p(z)]^m \prod_{t=0}^{p-1} \exp(r\sigma^t(z)) \quad \text{par (6.1)} \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, on donne les procédures qui nous ont permis de calculer la plupart des tables de valeurs de ce mémoire.

Les deux procédures suivantes nous permettent de calculer les nombres de Stirling associés.

Nombres de Stirling associés de première espèce

```
assostirling1 := proc(n :: integer, m :: integer) :: integer;
local i, sum;
description "calcul des nombres de stirling associés de première espèce";
sum := abs(stirling1(n, m));
for i from 1 to m do sum := sum + (-1)i * binomial(n, i) * abs(stirling1(n - i, m - i)) end do;
sum
end proc
```

Nombres de Stirling associés de seconde espèce

```
assostirling2 := proc(n :: integer, m :: integer) :: integer;
local i, sum;
description "calcul des nombres de stirling associés de première espèce";
sum := stirling2(n, m);
for i from 1 to m do sum := sum + (-1)i * binomial(n, i) * stirling2(n - i, m - i) end do;
sum
end proc
```

Les procédures suivantes nous permettent de calculer les nombres r-Stirling.

Nombres r-Stirling de première espèce

```

rstirling1 := proc(n :: integer, m :: integer, r :: integer) :: integer;
local i, sum;
description "calcul des nombres r-stirling de première espèce";
sum := abs(stirling1(n, m));
for i from m + 1 to n do sum := sum + binomial(i, m) * r(i-m) * abs(stirling1(n, i)) end do;
sum
end proc

```

Nombres r-Stirling de seconde espèce

```

rstirling2 := proc(n :: integer, m :: integer, r :: integer) :: integer;
local i, sum;
description "calcul des nombres r-stirling de seconde espèce";
sum := (-1)m * rn;
for i from 1 to m do sum := sum + (-1)(m-i) * binomial(m, i) * (i + r)n end do;
sum := sum/factorial(m)
end proc

```

Les procédures suivantes nous permettent de calculer les nombres et polynômes r-Bell.

Nombres r-Bell

```

rbell := proc(n :: integer, r :: integer) :: integer;
local i, sum;
description "calcul des nombres r-Bell";
sum := rstirling2(n, 0, r);
for i from 1 to n do sum := sum + rstirling2(n, i, r) end do;
sum
end proc

```

Polynômes r-Bell

```

rbellx := proc(n :: integer, r :: integer, x);
  local i, sum;
  description "calcul des polynômes r-Bell";
  sum := rstirling2(n, 0, r);
  for i from 1 to n do sum := sum + rstirling2(n, i, r) * xi end do;
  sum
end proc

```

Les procédures suivantes nous permettent de calculer les nombres et polynômes r-Bell ordonnés.

Nombres r-Bell ordonnés

```

rbello := proc(n :: integer, r :: integer) :: integer;
  local i, sum;
  description "calcul des nombres r-Bell ordonnés";
  sum := factorial(r) * rstirling2(n, 0, r);
  for i from 1 to n do sum := sum + factorial(i + r) * rstirling2(n, i, r) end do;
  sum
end proc

```

Polynômes r-Bell ordonnés

```

rbellox := proc(n :: integer, r :: integer, x);
  local i, sum;
  description "calcul des polynômes r-Bell ordonnés";
  sum := factorial(r) * rstirling2(n, 0, r);
  for i from 1 to n do sum := sum + factorial(i + r) * rstirling2(n, i, r).xi end do;
  sum
end proc

```

La procédure suivante nous a permis de vérifier la conjecture généralisant celle d'Engel pour $0 \leq r \leq 100$.

```

conc := (n, r) →  $\frac{\text{rbell}(n+1, r)}{\text{rbell}(n, r)} - 1$ 
for j from 0 to r do for i from 2 to n do if
  conc(i-1, j) - 2 * conc(i, j) + conc(i+1, j) < 0 then print(j, i) end if end do end do

```

Le tableau suivant donne les résultats des 50 premières valeurs de r exécutées.

r	n_0	r	n_0	r	n_0
0	2	18	103	36	256
1	2	19	110	37	265
2	4	20	118	38	274
3	7	21	126	39	284
4	11	22	134	40	293
5	16	23	143	41	302
6	21	24	151	42	312
7	27	25	159	43	321
8	33	26	168	44	331
9	39	27	176	45	340
10	45	28	185	46	350
11	52	29	193	47	360
12	59	30	202	48	369
13	66	31	211	49	379
14	73	32	220	50	389
15	80	33	229	51	399
16	87	34	238	52	408
17	95	35	247	53	418

où n_0 représente la première valeur de n à partir duquel la suite est concave.

Conclusion générales

Le sujet de notre travail a été consacré aux nombres r -Stirling qui sont une généralisation des nombres de Stirling. Ces nombres ont une place importante dans le domaine de l'analyse combinatoire. Un autre type de nombres combinatoires que nous avons étudiés sont les nombres r -Bell et les nombres r -Bell ordonnés et qui sont étroitement liés aux nombres r -Stirling.

Ce mémoire a été divisé en plusieurs chapitres.

On a introduit dans le premier chapitre les notions de base nécessaires. On a parlé, entre autres, des nombres harmoniques et les nombres hyperharmoniques où on a abordé la conjecture posée par I. Mezö [47] et on aimerait prouver la véracité de cette conjecture.

Le second chapitre a été consacré à la définition des nombres de Stirling, les nombres de Bell et les nombres de Bell ordonnés où leurs différentes propriétés ont été citées.

Les trois derniers chapitres sont consacrés aux travaux que nous avons menés.

On a pu ainsi obtenir des extensions de résultats obtenus par K. Boyadzhiev [13] pour les nombre r -Stirling en utilisant la transformée binomiale. Aussi, on a obtenu des résultats concernant les nombres r -Bell, généralisant de ce fait les résultats de S. Bouroubi [12]. Enfin, on a introduit et défini les nombres r -Stirling d'ordre supérieur et les nombres r -Bell d'ordre supérieur. On envisage d'approfondir notre étude de ces nombres.

Tout au long de notre travail, on a vu que l'étude des nombres de Stirling et de leurs généralisations est vaste et on aimerait poursuivre notre étude sur ce sujet et pouvoir développer certaines idées.

- [1] T. Agoh and K. Dilcher. Convolution identities and lacunary recurrences for Bernoulli numbers. *J. Number Theory*, 124 :105–122, 2007. 2.1.10
- [2] T. Agoh and K. Dilcher. Generalized convolution identities for Stirling numbers of the second kind. *Integers : Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 8, 2008. #A25. 2.1.10, 2.3
- [3] J. C. Ahuja and E. A. Enneking. Generalized Bell numbers. *Fib. Quart.*, 14 :67–73, 1976. 3.2
- [4] R. Ait Amrane and H. Belbachir. Non-integerness of class of hyperharmonic numbers. 1-4, 2009. 1.13
- [5] N. Asai, I. Kubo, and H. H. Kuo. Bell numbers, log-concavity and log-convexity. *Actaz. Appl. Math.*, 63 :79–87, 2000. 2.3.4
- [6] H. Belbachir and M. Mihoubi. A generalized recurrence for Bell polynomials : An alternate approach to Spivey and Gould-Quaintance formulas. *European Journal of Combinatorics*, 30 :1254–1256, 2009. 3.3.2
- [7] E. T. Bell. The iterated exponential integers. *Ann. Math.*, 39(3) :539–557, 1938. 2.1.4, 2.6
- [8] A. T. Benjamin, David Gaebler, and Robert Gaebler. A combinatorial approach to hyperharmonic numbers. *INTEGERS : Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 3, 2003. 3.1.3
- [9] A. T. Benjamin and J. J. Quinn. *Proofs That Really Count, The Art of Combinatorial Proof*. Dolciani Mathematical Expositions, 2003. 1.13, 2.1.8
- [10] M. Benoumhani. A sequence of binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers. *J. Integer Seq.*, 6(03.2.1), 2003. 1.3

- [11] M. Bóna. *A Walk Through Combinatorics*. World Scientific Publishing Company, 2 edition, 2006.
- [12] S. Bouroubi. Bell numbers and Engel's conjecture. *Rostock. Math. Kolloq*, 62 :61–70, 2007. (document), 5, 5.3, 5.4, 5.5, 6.2.1
- [13] K. N. Boyadzhiev. Power sum identities with generalized Stirling numbers. *Fibonacci Quart.*, 46/47(4) :326–331, 2008/2009. (document), 2.1.3, 2.1.8, 4, 6.2.1
- [14] A. Z. Broder. The r-Stirling numbers. *Discrete Mathematics*, 49 :241–259, 1984. 3, 3.1
- [15] E. R. Canfield. Engel's inequality for Bell numbers. *Journal of Combinatorial Theory*, 72 :184–187, 1995. 2.3.4, 5.2
- [16] E. R. Canfield and C. Pomerance. On the problem of uniqueness for the maximum Stirling number(s) of the second kind. *Integers*, 2, 2002. 2.2
- [17] L. Carlitz. Stirling pairs. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 59 :19–44, 1978.
- [18] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the first and second kind-I. *Fibonacci Quart.*, 18 :147–162, 1980. 3, 3.1, 3.3
- [19] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the first and second kind-II. *Fibonacci Quart.*, 18 :242–257, 1980. 3, 3.1
- [20] C. A. Charalambides. *Enumerative Combinatorics (Discrete Mathematics And its Applications)*. Chapman and Hall/CRC, 1 edition, 2002. 1, 2, 1, 1, 3.1.3
- [21] C. A. Charalambides. *Combinatorial methods in discrete distributions*. A John Wiley & sons, INC., publication, 2005.
- [22] G. S. Cheon and M. E. A. El-Mikkawy. Generalized harmonic number identities and a related matrix representation. *J. Korean Math. Soc.*, 2 :487–498, 2007.
- [23] L. Comtet. *Advanced Combinatorics*. Presses Universitaires de France, 1970. 1, 2
- [24] J. H. Conway and R. K. Guy. *The book of numbers*. Copernicus, 1996. 1.13
- [25] B. Crstici, J. Sandor, and D. S. Mitrinovic. *Handbook of Number Theory*. Kluwer Academic Publisher, 2004. 2, 3.1
- [26] J. N. Darroch. On the distribution of the number of successor in independent trials. *Ann. Math. Stat.*, 35 :1317–1321, 1964. 1.3
- [27] A. Dil and V. Kurt. Polynomials related to harmonic numbers and evaluation of harmonic number series I. arXiv :0912.1834v2, 2010. 2.4.1
- [28] S. Y. Ding, S. H. Qi, and H. M. Liu. Some recurrence relations for Cauchy numbers of the first kind. *Journal of Integer Sequences*, 13 :1–7, 2010. 1.7

- [29] A. J. Dobson. A note on Stirling numbers of the second kind. *J. Combinatorial Theory*, 5 :212–214, 1968. 2.2
- [30] D. Dumont. Matrices d’Euler-Seidel. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, (B05c), 1981.
- [31] K. Engel. On the average rank of an element in a filter of the partition lattice. *J. Combin. Theory Ser. A*, 64 :67–78, 1994. 2.3.4, 5.2
- [32] P. Erdős. On a conjecture of Hammersley. *J. London Math. Soc.*, 28 :232–236, 1953. 1.4, 2.1
- [33] L. Euler. De transformatione serierum. *Opera Omnia, series prima*, X, 1913. Teubner.
- [34] C. J. Feng and F. Z. Zhao. Some results for generalized harmonic numbers. *INTEGERS*, 9 :605–619, 2009. 1.13
- [35] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009. 2.1
- [36] H. W. Gould and J. Quaintance. Implications of Spivey’s Bell number formula. *Journal of Integer Sequences*, 11(08.3.7), 2008. 2.3.5
- [37] G.L. Graham, D.U. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science*. Addison Wesley Professional, New York, 1994. 1, 2, 2.1
- [38] J. M. Hammersley. The sums of products of the natural numbers. *Proc. London Math. Soc.*, 3(1) :435–452, 1951. 2.1
- [39] F. T. Howard. Numbers generated by the reciprocal of $e^x - x - 1$. *Mathematics of computation*, 31(138) :581–598, 1977. 3.2
- [40] F. T. Howard. Associated Stirling numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 1980. 3
- [41] L. C. Hsu. Some identities involving three kinds of counting numbers. arXiv.org :0911.0279, 2009. 2.1.2
- [42] M. Koutras. Non-central numbers and some applications. *Discrete mathematics*, 42 :73–89, 1982. 3.1
- [43] J. W. Layman. The Hankel transform and some of its properties. *Journal of Integer Sequences*, 4(0.1.1.5), 2001. 1.1
- [44] A. Lenard. In *Fractal Music, Hypercards, and More Mathematical Recreations from Scientific American Magazine*. W. H. Freeman, 1992. 2.3.6
- [45] E. H. Lieb. Concavity properties and a generating function for Stirling numbers. *J. Combinatorial Theory*, 5 :203–206, 1968. 1.2, 2.2

- [46] G. Liu. An identity involving the Lucas numbers and Stirling numbers. *The Fibonacci quartely*, 46/47(2), 2008/2009. 2.1.9
- [47] I. Mezö. About the non-integer property of hyperharmonic numbers. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Math.*, 50 :13–20, 2007. 1.13, 6.2.1
- [48] I. Mezö. New properties of r-Stirling series. *Acta Math. Hungar.*, 119(4) :341–358, 2008. (document), 2.1.5
- [49] I. Mezö. On powers of Stirling matrices, 2008. 2.4, 2.3.5, 2.4.1, 2.4.2, 2.4.4
- [50] I. Mezö. On the maximum of r-Stirling numbers. *Adv. in Applied Mathematics*, 41(3) :293–306, 2008. 3.1.4
- [51] I. Mezö. r-Stirling numbers, Whitney numbers and their common generalization. In *The 61st Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Portugal, 2008. 2.4.3, 3.4.2
- [52] I. Mezö. The r-Bell numbers. *Journal of Integer Sequences*, 14, 2011. 3.3, 3.3.3
- [53] R. Mullin. On Rota’s problem concerning partitions. *Aequationes Math.*, 2 :98–104, 1969. 2.2
- [54] N. Nielsen. *Hambuch der Theorie der Gammafunktion*. Leipzig(Reprinted by Chelsea, New York, 1966.), 1906. 3.1
- [55] J. Riordan. *An Introduction to combinatorial analysis*. John Wiley and sons, 1958. 2.2, 3.1
- [56] J. Riordan. Inverse relations and combinatorial identities. *Amer. Math. Monthly*, 71 :485–498, 1964.
- [57] L. Seidel. Über eine einfache Entstehung weise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen. *Sitzungsberichte der Münch. Akad. Math. Phys. Classe*, pages 157–187, 1877.
- [58] M. Z. Spivey. A generalized recurrence for Bell numbers. *J. Integer Sequences*, 11(08.2.5), 2008. 2.3.5
- [59] J. Stirling. *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolazione serierum infinitarum*. Londini, 1730. (document)
- [60] Z. W. Sun. Introduction to Bernoulli and Euler polynomials. In *A lecture given in Taiwan on June 6, 2002*.
- [61] H. Wegner. Stirling numbers of the second kind and Benferroni’s inequalities. *Elem.Math.*, 60 :124–129, 2005. 2.1.6
- [62] H. S. Wilf. *Generatingfunctionology*. Academic Press, 1990.
- [63] F. Z. Zhao. Some properties of associated Stirling numbers. *Journal of Integer Sequences*, 11, 2008. 2.4, 2.2.4, 2.7, 3.2.2