

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediene (USTHB)
Faculté des Sciences de la Terre, de la Géographie et de l'Aménagement du Territoire
(FSTGAT)



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : SCIENCES DE LA TERRE

Spécialité : GEOPHYSIQUE

Par : **BOUGCHICHE Said Sofiane**

THEME

**APPORT DES TECHNIQUES DE L'INVERSION CONJOINTE EN
PROSPECTION ELECTRIQUE (DC) ET
MAGNETOTELLURIQUE (MT) POUR L'INVESTIGATION DE
SUB-SURFACE**

Soutenu publiquement le 29 / 09 / 2012, devant le jury composé de :

M. A. BOUDELLA

M. M.A BOUNIF

M. M. DJEDDI

M. A. BOUZID

Professeur à l'USTHB

Professeur à l'USTHB

Professeur à l'USTHB

Maitre de recherche B au CRAAG

Président

Directeur de mémoire

Examineur

Invité

REMERCIEMENTS

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mon directeur de mémoire Mr Bounif M.A, professeur à l'USTHB, pour la proposition et l'encadrement de ce sujet. Ainsi que pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordée dans l'élaboration de cette étude, sans oublier ses orientations et ses critiques constructives. Qu'il trouve ici tout mon respect.

Je tiens à remercier le Professeur Mr Boudella A. (USTHB) qui m'a honoré en acceptant de présider le jury et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

J'adresse aussi mes remerciements au Professeur Djeddi M. (USTHB) d'avoir accepté de juger ce mémoire. C'est un honneur pour moi de vous compter parmi les membres du jury.

Je tiens à remercier particulièrement Bouzid A., ma ître de recherche au CRAAG, qui m'a beaucoup aidé par ses conseils et par les connaissances qu'il m'a transmises. Je lui exprime toute ma reconnaissance d'avoir accepté de faire parti du jury.

Aussi, j'ai eu la chance d'être entouré par mes amis et collègues du CRAAG qui ont été d'un précieux soutien et je leur témoigne ici toute ma gratitude. Je tiens à remercier particulièrement Abdeslam Abtout, Hamza Bouabdallah, Amina Bougrine, Lamine Hamai, Boualem Bouyahiaoui, Hicham Boubekri et Waheb Bacha qui m'ont beaucoup apporté.

Pour finir, je tiens à remercier du fond du cœur mes parents pour leur immense soutien et encouragement tout au long de ma vie.

SOMMAIRE

INTRODUCTION :	8
Chapitre 1 : Problème directe en méthodes de prospection audio-magnétotellurique (AMT) et électrique (Schlumberger), formulation du problème inverse non-linéaire :	11
1.1. Aperçu des méthodes de prospection audio-magnétotellurique et électrique (Schlumberger):.....	11
1.1.1. Méthode de prospection audio-magnétotellurique :	11
1.1.2. Méthode de prospection électrique (Schlumberger) :	14
1.2. Réponse d'une terre stratifiée en AMT et Schlumberger (problème directe):	16
1.2.1. Réponse d'une terre stratifiée en audio-magnétotellurique (AMT) :	16
1.2.2. Réponse d'une terre stratifiée en électrique (Schlumberger) :	18
1.3. Formulation du problème inverse non-linéaire :	20
1.3.1. Problème bien posé et mal posé :	22
1.3.2. Régularisation de Tikhonov :	23
1.3.3. Méthode de minimisation de Gauss-Newton :	24
Chapitre 2 : Implémentation du programme d'inversion conjointe 1D des données AMT et Schlumberger :	26
1.1. Définition des paramètres et des données pour l'inversion conjointe AMT & DC :	26
1.2. Equation à résoudre pour le problème inverse non-linéaire :	27
1.2.1. La décomposition en valeurs singulières (SVD) :	27
1.2.2. La décomposition en valeurs singulières généralisée (GSVD) :	28
1.3. Calcul de la matrice de sensibilité (jacobienne) :	30
1.4. La matrice de contrainte :	32
1.5. Détermination automatique du paramètre de régularisation :	32
1.6. Détermination du modèle initial:	34
1.7. Détermination du pas de descente optimal « <i>Line search</i> » :	35
1.8. Teste de validité du code de calcul directe :	36
1.9. Choix de la solution :	38
1.9.1. Définition et détermination du degré de résolution (DR):	39
1.9.2. Détermination de la solution la mieux résolue:	40
1.10. Condition d'arrêt du processus itératif :	44
1.11. Programme d'inversion et son exécution :	44
Chapitre 3 : Application de l'algorithme d'inversion sur des données synthétiques et réelles :	47
3.1. Application sur des données synthétiques :	47
3.1.1. Apport de l'inversion conjointe dans la résolution des ambiguïtés liées aux données AMT et Schlumberger :	49
3.1.2. Effet du bruit sur les solutions :	57
3.2. Application sur des données réelles :	62
CONCLUSION :	66
BIBLIOGRAPHIE :	67

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1 : DENSITE DU SPECTRE DE PUISSANCE TYPIQUE POUR LES VARIATIONS DES CHAMPS MAGNETIQUES ET ELECTRIQUES DE LA TERRE (CHAMP MAGNETOTELLURIQUE) D'APRES ZHDANOV (2009).	12
FIGURE 1.2 : CROQUIS D'UNE MESURE ELECTRIQUE A L' AIDE D'UN QUADRIPOLE	15
FIGURE 1.3 : MODELE 1D DE TERRAIN DE N COUCHES STRATIFIEES HORIZONTALEMENT	16
FIGURE 2.1 : CROQUIS MONTRANT LA PROCEDURE UTILISEE POUR ETABLIR UN MODELE INITIAL.	34
FIGURE 2.2 : MODELE A QUATRE COUCHES AVEC DES EPAISSEURS DE 100, 200 ET 200 M ET DE RESISTIVITES DE 100, 1000, 1 ET UN DEMI-ESPACE INFINI DE 100 OHM-M.	36
FIGURE 2.3 : REPONSE DU MODELE A QUATRE COUCHES DE LA FIGURE 2.2 POUR LA METHODE AMT. REPRESENTATION DES RESISTIVITES APPARENTES ET PHASES POUR UN INTERVALLE DE FREQUENCE ALLANT DE 1 A 10000 Hz AVEC 10 SORTIS PAR DECADE; A GAUCHE LES RESULTATS OBTENUS PAR NOTRE CODE DE CALCUL ET A DROITE CEUX CALCULES PAR LE LOGICIEL JOINTEM	37
FIGURE 2.4 : REPONSE DU MODELE A QUATRE COUCHES DE LA FIGURE 2.2 POUR LA METHODE SCHLUMBERGER. REPRESENTATION RESISTIVITES APPARENTES AVEC 7 SORTIS PAR DECADE ET UN $AB/2$ MAXIMAL DE 700 M, A GAUCHE LES RESULTATS OBTENUS PAR NOTRE CODE DE CALCUL ET A DROITE CEUX CALCULES PAR LE LOGICIEL JOINTEM	37
FIGURE 2.5 : REPRESENTATION DE 49 SOLUTIONS OBTENUES A PARTIR DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES DU MODELE DE LA FIGURE 2.2 ET PERTURBEES AVEC UN BRUIT GAUSSIEN DE 1%.	38
FIGURE 2.6 : REPRESENTATION DE L'ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE (RMS) FINALES (LORSQUE LE PROCESSUS CONVERGE) EN FONCTION DU NOMBRE DE COUCHES DE CHAQUE SOLUTION	41
FIGURE 2.7 : REPRESENTATION DE L'INFORMATION TOTALE OBTENUE ITO AVEC L'INFORMATION TOTALE PERDUE ITP EN FONCTION DU NOMBRE DE COUCHES DE CHAQUE SOLUTION	41
FIGURE 2.8 : REPRESENTATION DU DEGRE DE RESOLUTION DR EN FONCTION DU NOMBRE DE COUCHES DE CHAQUE SOLUTION	42
FIGURE 2.9 : REPRESENTATION DE LA SOLUTION LA MIEUX RESOLUE SELON NOTRE CRITERE DE SELECTION (EN ROUGE) AINSI QUE LES 48 AUTRES SOLUTIONS OBTENUES A PARTIR DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES DU MODELE DE LA FIGURE 2.2 ET PERTURBEES AVEC UN BRUIT GAUSSIEN DE 1%.	43
FIGURE 2.10 : RESULTAT DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENERES DU MODELE A QUATRE COUCHES DE LA FIGURE 2.2 (A) AJUSTEMENT DE LA REPONSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DE LA AMT (B) AJUSTEMENT DE LA REPONSE DE LA SOLUTION AUX PHASES (C) AJUSTEMENT DE LA REPONSE DE LA SOLUTION AUX	

RESISTIVITES APPARENTES SCHLUMBERGER (D) COINCIDENCE DE LA SOLUTION LA MIEUX RESOLUE SELON NOTRE CRITERE DE SELECTION AVEC LE MODELE RECHERCHE.....	43
FIGURE 3.1 : MODELE A TROIS COUCHES AVEC DES EPAISSEURS DE 300 M ET 300 M ET DE RESISTIVITES DE 100 OHM-M, 1000 OHM-M ET UN DEMI-ESPACE INFINI DE 100 OHM-M.....	48
FIGURE 3.2 : MODELE A QUATRE COUCHES AVEC DES EPAISSEURS DE 40, 80 ET 160 M ET DE RESISTIVITES DE 100, 30, 10 ET UN DEMI-ESPACE INFINI DE 1 OHM-M.	48
FIGURE 3.3 : MODELE DE CINQ COUCHES AVEC DES EPAISSEURS DE 40, 80, 160 ET 320 M ET DE RESISTIVITES DE 100, 30, 10, 100 ET UN DEMI-ESPACE INFINI DE 1 OHM-M.....	48
FIGURE 3.4 : DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES A PARTIR DU MODELE A TROIS COUCHES (A) RESISTIVITES APPARENTES DE L'AMT (B) PHASES (C) RESISTIVITES APPARENTES DC.....	49
FIGURE 3.5 : DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES A PARTIR DU MODELE A QUATRE COUCHES DE LA FIGURE 3.2 (A) RESISTIVITES APPARENTES DE L'AMT (B) PHASES (C) RESISTIVITES APPARENTES DC.	50
FIGURE 3.6 : DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES A PARTIR DU MODELE A CINQ COUCHES (A) RESISTIVITE APPARENTES DE L'AMT (B) PHASES (C) RESISTIVITES APPARENTES DC	50
FIGURE 3.7 : RESULTATS DE L'INVERSION CONJOINTE ET SEPEREE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES DU MODELE A TROIS COUCHES. AJUSTEMENT DE LA SOLUTION AVEC LE MODELE RECHERCHE (MODELE DU QUEL LES DONEES SYNTHETIQUES ONT ETE GENEREES) (A) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION DES DONNEES SCLUMBERGER (B) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION DES DONNEES AMT (C) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SCLUMBERGER & AMT.....	52
FIGURE 3.8 : RESULTATS DE L'INVERSION CONJOINTE ET SEPEREE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES DU MODELE A QUATRE COUCHES (VOIR FIGURE 3.5). AJUSTEMENT DE LA SOLUTION AVEC LE MODELE RECHERCHE (MODELE DU QUEL LES DONEES SYNTHETIQUES ONT ETE GENEREES) (A) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION DES DONNEES SCLUMBERGER (B) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION DES DONNEES AMT (C) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SCLUMBERGER & AMT.....	54
FIGURE 3.9 : RESULTATS DE L'INVERSION CONJOINTE ET SEPEREE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES DU MODELE A CINQ COUCHES (VOIR FIGURE 3.6). AJUSTEMENT DE LA SOLUTION AVEC LE MODELE RECHERCHE (MODELE DU QUEL LES DONEES SYNTHETIQUES ONT ETE GENEREES) (A) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION DES DONNEES SCLUMBERGER (B) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION DES DONNEES AMT (C) SOLUTION OBTENUE DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SCLUMBERGER & AMT.....	56
FIGURE 3.10 : RESULTATS DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES DU MODELE A TROIS COUCHES DE LA FIGURE 3.1 POUR DIFFERENTS NIVEAUX DE BRUIT DE 5%, 10% ET 20% RESPECTIVEMENT DE HAUT EN BAS. (A) AJUSTEMENT DE LA REPONSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DE L'AMT (B) AJUSTEMENT DE LA REPONSE DE LA SOLUTION AUX PHASES (C) AJUSTEMENT DE LA REPONSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DC (D) AJUSTEMENT DE LA SOLUTION AVEC LE MODELE RECHERCHE (MODELE DU QUEL LES DONEES SYNTHETIQUES ONT ETE GENEREES).....	59

FIGURE 3.11 : RESULTATS DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES DU MODELE A QUATRE COUCHES DE LA FIGURE 3.2 POUR DIFFERENTS NIVEAUX DE BRUIT DE 5%, 10% ET 20% RESPECTIVEMENT DE HAUT EN BAS. (A) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DE L'AMT (B) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX PHASES (C) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DC (D) AJUSTEMENT DE LA SOLUTION AU MODELE RECHERCHE (MODELE DU QUEL LES DONEES SYNTHETIQUES ONT ETE GENEREES).....	60
FIGURE 3.12 : RESULTATS DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES SYNTHETIQUES GENEREES DU MODELE A CINQ COUCHES DE LA FIGURE 3.3 POUR DIFFERENTS NIVEAUX DE BRUIT DE 5%, 10% ET 20% RESPECTIVEMENT DE HAUT EN BAS. (A) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DE L'AMT (B) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX PHASES (C) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DC (D) AJUSTEMENT DE LA SOLUTION AU MODELE RECHERCHE (MODELE DU QUEL LES DONEES SYNTHETIQUES ONT ETE GENEREES).	61
FIGURE 3.13 : DISPOSITIF DE MESURE MTU 5 A SYSTEM 2000 DE PHOENIX	62
FIGURE 3.14 : RESISTIVIMETRE SYSCALR2 ET SON CONVERTISSEUR	63
FIGURE 3.15: RESULTAT DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES REELLES (A) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DE LA MT (B) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX PHASES (C) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DC (D) SOLUTION	64
FIGURE 3.16: RESULTAT DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES REELLES (A) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DE LA MT (B) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX PHASES (C) AJUSTEMENT DE LA REPOSE DE LA SOLUTION AUX RESISTIVITES APPARENTES DC (D) SOLUTION	64

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 2.1 : FORMAT DU FICHIER D'ENTRE POUR LES MESURES AMT.....	45
TABLEAU 2.2 : FORMAT DU FICHIER D'ENTRE POUR LES MESURES SCHLUMBERGER.	46
TABLEAU 3.1 : RESULTATS QUANTITATIFS OBTENUS DE L'INVERSION SEPARÉE ET CONJOINTE DES DONNEES AMT ET SCHLUMBERGER GENEREES DU MODELE A TROIS COUCHES	51
TABLEAU 3.2 : RESULTATS QUANTITATIFS OBTENUS DE L'INVERSION SEPARÉE ET CONJOINTE DES DONNEES AMT ET SCHLUMBERGER GENEREES DU MODELE A QUATRE COUCHES	53
TABLEAU 3.3 : RESULTATS QUANTITATIFS OBTENUS DE L'INVERSION SEPARÉE ET CONJOINTE DES DONNEES AMT ET SCHLUMBERGER GENEREES DU MODELE A CINQ COUCHES	55
TABLEAU 3.4 : RESULTATS QUANTITATIFS OBTENUS DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES AMT ET SCHLUMBERGER GENEREES DU MODELE A TROIS COUCHES ET PERTURBEES AVEC DIFFERENTS NIVEAUX DE BRUIT DE 5%, 10% ET 20%.....	58
TABLEAU 3.5 : RESULTATS QUANTITATIFS OBTENUS DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES AMT ET SCHLUMBERGER GENEREES DU MODELE A QUATRE COUCHES ET PERTURBEES AVEC DIFFERENTS NIVEAUX DE BRUIT DE 5%, 10% ET 20%.	58
TABLEAU 3.6 : RESULTATS QUANTITATIFS OBTENUS DE L'INVERSION CONJOINTE DES DONNEES AMT ET SCHLUMBERGER GENEREES DU MODELE A CINQ COUCHES ET PERTURBEES AVEC DIFFERENTS NIVEAUX DE BRUIT DE 5%, 10% ET 20%.....	58
TABLEAU 3.7: RESULTATS QUANTITATIFS OBTENUS DE L'INVERSION CONJOINTE DES MESURES DE SONDAGE (SEV01, SMT01) ET (SEV02, SMT02).	64

INTRODUCTION :

Le problème inverse en électromagnétisme (EM) ou en électrique (DC) est connu comme étant un problème non-linéaire. Il est aussi dit : « mal-posé » car il ne satisfait pas aux trois conditions d'Hadamard (1902), à savoir l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. Ce genre de problème nécessite une linéarisation et une régularisation par des techniques appropriées pour pouvoir les résoudre.

Cependant, la non-unicité de la solution qui est décrite par Parker (1980) pour les méthodes de prospection EM, reste un problème plus sérieux et complexe à résoudre. En présence de plusieurs solutions, il faut un moyen pour choisir entre elles, et cela ne peut se faire avec les techniques d'inversions actuelles que si l'on dispose d'informations supplémentaires (informations a priori). En effet, pour donner l'illusion d'unicité à la solution, les géophysiciens imposent des contraintes au modèle qu'ils cherchent en tenant compte d'informations a priori (géologiques, géophysiques, de forages ou autres), cette approche ne peut être automatique car elle nécessite les compétences d'un expert pour interpréter ces informations et les introduire dans le processus d'inversion.

Dans l'interprétation unidimensionnelle (1D) des données DC et/ou EM, la cause principale de la non-unicité de la solution réside dans la méconnaissance du nombre de couches du terrain recherché. D'autre part, cette indétermination peut aussi se manifester sous deux principes qui sont bien connus dans les méthodes de prospection DC et EM et qui ont pour noms équivalence et suppression. Le premier principe fait référence à une couche dont la résistivité est soit inférieure soit supérieure à celle des deux terrains encaissants, cette couche intermédiaire se manifestera respectivement par sa résistance transverse et sa conductance longitudinale, et tant que ces paramètres restent constants, le diagramme de sondage DC ou EM reste inchangé. Le second principe, est relatif à un terrain dont la résistivité est intermédiaire à celle des deux couches adjacentes et un tel terrain ne modifie pas le diagramme de sondage DC ou EM.

L'approche habituelle pour palier à ces indéterminations comme on vient de le citer ci-dessus, est l'utilisation d'informations a priori dans le processus d'inversion. Toutefois, il est connu que l'inversion conjointe de différents jeux de données permet de réduire l'ambiguïté inhérente aux méthodes utilisées. Ce concept n'est pas récent dans le problème unidimensionnel (1D) des méthodes de prospection EM et DC et plusieurs auteurs ont publié

dans ce sens (Vozoff et Jupp, 1975; Roy et Elliot, 1980; Raiche et al, 1985 ; Gustafson et MaEuen, 1987; Rigotto et Crossley, 1987; Seara et Granda, 1987; Rigotto et Crossley, 1987; Sandberg, 1993; Meju, 1996; Albouy et al, 2001; Farquharson et al,2003) et ils ont montré que l'inversion simultanée de différents jeux de mesures permet une meilleure résolution. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'inversion conjointe des données de sondage DC (dispositif Schlumberger) et audio-magnétotellurique (AMT). L'avantage de combiner ces deux méthodes a été décrit en premier par Vozoff et Jupp (1975), suivie de Gustafson et McEuen, (1987) où ils ont montré leurs complémentarités ainsi que leurs efficacités à résoudre l'indétermination liée à l'équivalence lorsqu'une interprétation conjointe est appliquée.

Bien que la résolution du problème d'équivalence par inversion conjointe des mesures AMT et DC est démontrée, les techniques d'inversion non-linéaires 1D actuelles sont incapables d'obtenir une solution unique et fiable (précise) ou résoudre le problème de suppression sans information a priori sur le nombre de couches, qui doit être introduite dans le processus d'inversion pour caractériser le modèle initial. Néanmoins, quelques algorithmes qui ne dépendent pas d'informations a priori sur le nombre de couches ont été développés (Fischer & al, 1981; Constable & al, 1987; Smith & Booker, 1988; Pedersen & Gharibi, 2000). Ces derniers utilisent une résolution automatique du problème inverse non-linéaire et ils ont été testés sur des données de sondages magnétotelluriques (MT) et/ou électriques. L'algorithme le plus connu et le plus utilisé est vraisemblablement celui de Constable et al (1987) (inversion OCCAM) car l'inversion y est automatique et recherche un modèle lisse « *smooth-layer model* » dont la réponse s'ajuste le mieux possible aux données. Cette approche ne nécessite pas la détermination du nombre de couches car le modèle de départ est un espace homogène subdivisé en une multitude de couches minces, et dont les épaisseurs restent fixes durant le processus d'inversion. Cependant, en sub-surface dans des cas tel qu'un environnement sédimentaire les modèles lisses ne reflètent pas la vraie structure de la terre où souvent on a une superposition des couches avec des résistivités bien distinctes et où on est amené à mettre en évidence des couches avec des variations de résistivités brusques ou bien lorsqu'on a un effet de suppression. D'autre part, les modèles lisses ont une forme étalée qui a tendance à surestimer les épaisseurs ainsi que les résistivités (Pedersen et Gharibi, 2000). Dans ces cas là, une interprétation avec des modèles non lisses est plus appropriée. Seulement, la solution obtenue par cette approche comme déjà indiqué, ci-dessus, dépend fortement du modèle initial qui doit être proche de la solution, une condition difficilement

atteinte sans informations a priori. Un algorithme a été développé dans ce sens là par Pedersen et Gharibi (2000) où le modèle initial est trouvé directement des mesures. L'inversion commence par un demi-espace de résistivité égale à la moyenne des résistivités apparentes, le meilleur ajustement « fit » de ce demi-espace est utilisé pour définir un nouveau modèle initial avec deux couches puis le meilleur ajustement de ce dernier est utilisé pour définir un autre modèle initial avec trois couches ainsi de suite jusqu'à ce qu'aucune amélioration n'est obtenue. L'inconvénient de ce procédé est sa sensibilité au bruit, il a été testé sur des données radio-magnétotelluriques et seules des mesures avec un niveau de bruit inférieur ou égale à 2% peuvent donner des résultats satisfaisants.

Afin d'inverser, conjointement, les données AMT et Schlumberger, un nouvel algorithme d'inversion automatique 1D a été développé dans ce travail. Ce dernier dépend, uniquement, des mesures et n'est contraint par aucune information a priori. Pour cela, une nouvelle approche pour remédier à la non-unicité de la solution est présentée. Celle-ci consiste à faire varier le nombre de couches du modèle initial afin de générer plusieurs solutions. De là, le rapport entre le degré de résolution des paramètres DR et l'erreur quadratique moyenne RMS est utilisée comme critère pour choisir entre elles et déterminer le modèle physique le mieux résolu.

Dans ce qui suit, le caractère mal-posé du problème inverse est contrôlé en utilisant la méthode de régularisation de Tikhonov (Tikhonov et Arsenin 1977) avec un choix automatique et spatial du paramètre de régularisation. La solution qui minimise la fonction objective est faite par la méthode d'optimisation de Gauss-Newton.

Pour finir plusieurs tests de validité de cette approche ont été réalisés sur des données synthétiques et réelles, et ce afin de montrer l'efficacité de cette dernière dans la résolution des problèmes d'équivalence et de suppression. Aussi, l'influence du bruit sur les solutions obtenues a été étudiée.

Chapitre 1 : Problème directe en méthodes de prospection audio-magnétotellurique (AMT) et électrique (Schlumberger), formulation du problème inverse non-linéaire :

L'inversion conjointe des données de sondage électrique DC (dispositif Schlumberger) et audio-magnétotellurique AMT est bien connue. Plusieurs travaux ont montré l'avantage de combiner ces mesures là dans le problème unidimensionnel (1D) (Vozoff et Jupp, 1975; Gustafson et McEuen, 1987).

Ce chapitre présente les différents calculs liés au problème directe 1D pour les méthodes de prospection AMT et Schlumberger, ainsi que la formulation du problème inverse non-linéaire. Dans un premier temps, un bref aperçu de ces deux méthodes de prospection est donné, ainsi que les différentes équations pour le calcul direct. Puis, après une définition du problème inverse non-linéaire, l'aspect mal-posé des problèmes inverses en géophysique et leurs régularisations par la méthode de Tikhonov (Tikhonov et Arsenin 1977) sont exposés. Et pour finir, le lecteur est présenté à la méthodologie d'optimisation de Gauss-Newton.

1.1. Aperçu des méthodes de prospection audio-magnétotellurique et électrique (Schlumberger):

1.1.1. Méthode de prospection audio-magnétotellurique :

Développée par le russe Tikhonov (1950) et le français Cagniard (1953) au début des années 1950, la magnétotellurique (MT) est une méthode géophysique qui permet de déduire les propriétés électriques du sous-sol sur la base du couplage des champs électrique et magnétique naturels mesurés à la surface du sol (tenseur d'impédance).

Ainsi en MT, on mesure des signaux électromagnétiques (EM), dont la bande de fréquence s'étend en général de 10^{-4} à 10^4 Hz. A ces fréquences, l'origine des ondes EM est à l'extérieur de la terre dans et au-dessus de l'atmosphère.

Sources de champs magnétotelluriques :

Les signaux électromagnétiques naturels proviennent d'une grande variété de sources (Terre interne, enveloppes externes) et peuvent découler de différents processus. Il en résulte

un spectre très large, couvrant les périodes allant du dixième de milliseconde à plusieurs années. On s'intéresse en magnétotellurique aux fréquences variant de 10^{-4} Hz à 10^4 Hz.

La figure 1.1 montre la densité du spectre de puissance typique des variations magnétiques et électriques dans cette gamme de fréquences (Zhdanov, 2009). La fréquence de 1 Hz, pour laquelle on a une amplitude minimale, est importante dans le sens qu'elle différencie deux types de sources : L'une supérieure à 1 Hz dont les orages électriques dans l'atmosphère inférieure constitue la cause dominante des signaux audiomagnétotelluriques et l'autre inférieure à 1 Hz due essentiellement aux ondes MagnétoHydroDynamiques (MHD) dans la magnétosphère.

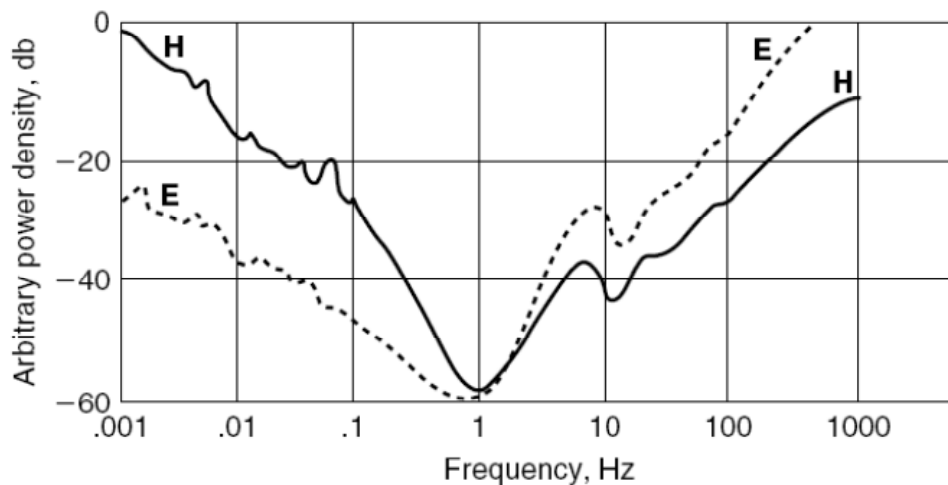


Figure 1.1 : Densité du spectre de puissance typique pour les variations des champs magnétiques et électriques de la terre (champ magnétotellurique) d'après Zhdanov (2009).

Cette subdivision aux alentours de 1Hz n'est pas la même partout sur Terre, spécialement aux hautes latitudes et loin des centres orageux.

Sources de champ au dessus de 1Hz (sources audio-magnétotellurique):

L'activité orageuse qui est concentrée dans la région tropicale produit des éclairs (décharges électriques), ceci forme la source principale de champ électromagnétique dans la gamme de fréquence allant de 1 Hz à 10^4 Hz. L'estimation de la manifestation des orages autour du monde varie entre 100 et 1000 orages par seconde. Ce qui nous procure une source d'énergie uniforme et continue vu qu'il y a toujours un orage en progression quelque part sur Terre.

Sources de champ au dessous de 1Hz :

Les basses fréquences sont essentiellement générées par des sources situées dans la magnétosphère et l'ionosphère. A ces basses fréquences, le champ électromagnétique naturel est constitué par les micro-pulsations géomagnétiques liées au développement des ondes magnétohydrodynamiques dans la magnétosphère. Cette partie transitoire du champ magnétique terrestre trouve son origine dans les interactions complexes entre le champ magnétique terrestre permanent et le flux de plasma provenant du soleil.

Mesures AMT :

Les grandeurs qu'on mesure sur le terrain sont les composantes des champs électriques (E_x, E_y) et magnétique (H_x, H_y, H_z) . Celles ci nous permettent de calculer les impédances apparentes $Z_{xy}^a = \frac{E_x}{H_y}$ et $Z_{yx}^a = \frac{E_y}{H_x}$ (Cagniard, 1953). Ces impédances sont généralement fonctions des propriétés électriques du milieu, de l'orientation des axes des récepteurs (x,y) et de la direction d'incidence des ondes électromagnétiques.

En supposant que le champ électromagnétique incident est une onde plane, polarisée elliptiquement dans le plan x-y et qui se propage verticalement, on arrive à avoir la relation entre les composantes horizontales du champ électrique et du champ magnétique ainsi que la relation entre la composante verticale et les composantes horizontales du champ magnétique dans le domaine de Fourier (Vozoff, 1972; 1986) :

$$E_x = Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y, \quad (1.1)$$

$$E_y = Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y, \quad (1.2)$$

$$H_z = T_xH_x + T_yH_y, \quad (1.3)$$

où Z_{ij} est le tenseur d'impédance caractérisant le transfert électromagnétique entre composantes horizontales $(i, j = x \text{ ou } y)$. Et T_j est le vecteur d'induction ou tilt caractérisant le transfert magnétique entre les composantes horizontales $(j = x \text{ ou } y)$ et verticale z.

Tenseur d'impédance :

On considère ici l'écriture tensorielle des deux premières équations (1.1 et 1.2)

$$E_i = Z_{ij} H_j, \quad (1.4)$$

Z_{ij} , tenseur d'impédance (à coefficients complexe). Pour le cas d'un milieu tabulaire (1D) l'expression de ce dernier est symétrique et on a :

$$\begin{aligned} Z_{xx}(\omega) = Z_{yy}(\omega) = 0, \\ Z_{xy}(\omega) = -Z_{yx}(\omega). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Résistivité apparente et phase :

Sur la base du couplage entre les champs électriques et magnétiques, les notions de résistivité apparente ρ et de phase φ sont définies de la sorte :

$$\rho_{xy} = \frac{Z_{xy} \cdot Z_{xy}^*}{\omega\mu} = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_x}{H_y} \right|^2, \quad \rho_{yx} = \frac{Z_{yx} \cdot Z_{yx}^*}{\omega\mu} = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_y}{H_x} \right|^2, \quad (1.6)$$

$$\varphi_{xy} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(Z_{xy})}{\text{Re}(Z_{xy})}\right), \quad \varphi_{yx} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(Z_{yx})}{\text{Re}(Z_{yx})}\right), \quad (1.7)$$

où $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ est la permittivité du vide et ω est la pulsation.

1.1.2. Méthode de prospection électrique (Schlumberger) :

La mesure de différence de potentiel entre deux points à la surface du sol permet de déduire les propriétés électriques du sous-sol. Cette mesure est réalisée à l'aide d'un quadripôle formé de deux électrodes A et B destinées à l'injection d'un courant I ainsi que deux électrodes M et N (figure 1.2) aux bornes des quelles on mesure la différence de potentiel ΔV et dont le principe a été établi par Wenner (1915) et Schlumberger (1920).

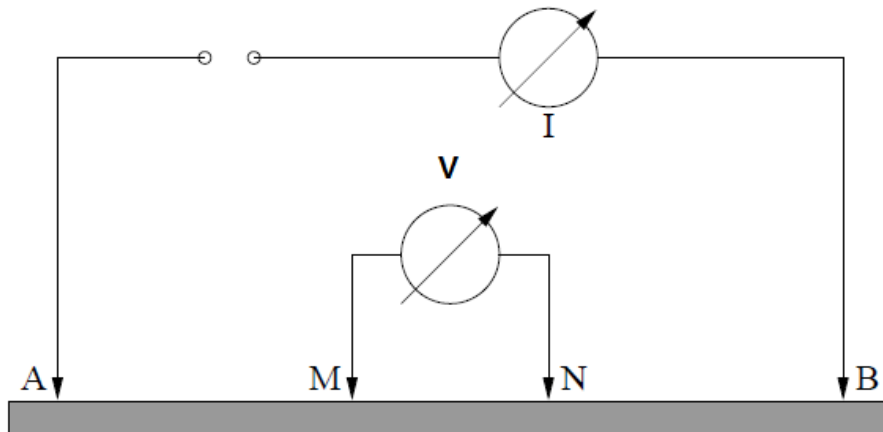


Figure 1.2 : Croquis d'une mesure électrique à l'aide d'un quadripôle

De cette dernière, on peut déterminer la résistivité apparente à partir de la relation suivante :

$$\rho_a = K \frac{\Delta V}{I}, \quad (1.8)$$

où K est le coefficient géométrique dépendant des distances séparant les électrodes :

$$K = 2\pi \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right), \quad (1.9)$$

En notant a la moitié de la distance \overline{AB} et b la moitié de \overline{MN} , ce coefficient est donné pour le dispositif de Schlumberger par :

$$K = \pi \left(\frac{a^2 - b^2}{2b} \right). \quad (1.10)$$

Dans un sondage électrique on cherche les variations verticales de la résistivité du sous-sol. Pour cela, une succession de mesures est effectuée en un point donné en augmentant les dimensions du dispositif pour explorer à cet endroit là une tranche de terrain de plus en plus épaisse.

1.2. Réponse d'une terre stratifiée en AMT et Schlumberger (problème directe):

Dans tout ce qui suit, on considère un terrain stratifié constitué de n couches homogènes et isotropes. Chacune des couches est caractérisée par sa résistivité électrique ρ_i et son épaisseur h_i (figure 1.3).

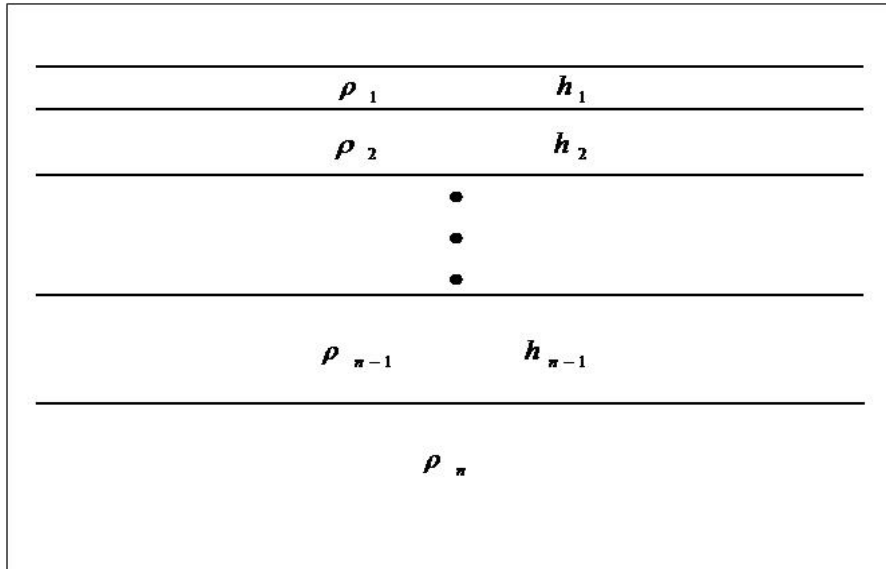


Figure 1.3 : Modèle 1D de terrain de n couches stratifiées horizontalement

1.2.1. Réponse d'une terre stratifiée en audio-magnétotellurique (AMT) :

Equations de maxwell :

La magnétotellurique est basée sur l'utilisation simultanée des composantes d'un champ électrique et un champ magnétique, mathématiquement, ces composantes sont obtenues à partir des équations de maxwell :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 \vec{J} &= \sigma \cdot \vec{E} \\
 \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H} \\
 \vec{D} &= \varepsilon \cdot \vec{E}
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

E: est le champ électrique, B: est l'induction magnétique, D: est le déplacement électrique, H: est l'intensité du champ magnétique, J: est la densité de courant électrique, σ : est la

conductivité (inverse de la résistivité ρ ; $\sigma = \frac{1}{\rho}$), μ : est la perméabilité magnétique et ε : est la permittivité électrique.

En considérant que

- la perméabilité magnétique et la permittivité électrique des roches sont constantes et égales à celle du vide $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = \frac{1}{(36\pi \cdot 10^9)}$ [F/m] et $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m_e]
- Et qu'il n'y a pas d'accumulation de charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$,

on obtient les équations de Maxwell simplifiées qui régissent les phénomènes électromagnétiques utilisés en AMT suivantes:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \sigma \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \cdot \vec{E}), \\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) &= 0, \\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) &= 0,\end{aligned}\tag{1.12}$$

Equations de Helmholtz :

Dans les premières équations de Maxwell, les champs \vec{E} et \vec{H} sont couplés. En les découplant et en considérant que les champs sont harmoniques et que les courants de propagation sont négligeables par rapport aux courants de diffusion, on obtient alors les équations de propagation d'une onde électromagnétique dans un sous-sol homogène elles sont dites équations de Helmholtz (Kaufman, 1981) :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} &= j\mu\sigma\omega \vec{E}, \\ \Delta \vec{H} &= j\mu\sigma\omega \vec{H}.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Solution :

Si on suppose que l'onde électromagnétique, polarisée dans le plan (x,y) $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{H} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$, se propage le long de l'axe z la solution de l'équation est:

$$\begin{aligned} E_x^n &= (A_n e^{jkz} + B_n e^{-jkz}) e^{j\omega t}, \\ H_y^n &= \frac{K}{j\omega\mu_0} (A_n e^{jkz} - B_n e^{-jkz}) e^{j\omega t}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Où $k = (j\omega\mu_0\sigma)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+j}{\delta}$, k est le nombre d'onde et $\delta = \left(\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$ est la profondeur de peau c'est un paramètre important pour l'estimation de la pénétration des ondes électromagnétiques.

L'intégration des équations de Helmholtz dans chacune des couches en tenant compte des conditions aux frontières permet d'établir l'expression de l'impédance Z_n ($Z_n = \frac{E_x}{H_y}$) qui serait mesurée à la surface du sol :

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{\omega\mu_0}{K_1} \tanh\left(-jK_1 h_1 + \tanh^{-1} \frac{K_1}{\omega\mu_0} Z_{n-1}\right), \\ Z_{n-1} &= \frac{\omega\mu_0}{K_2} \tanh\left(-jK_2 h_2 + \tanh^{-1} \frac{K_2}{\omega\mu_0} Z_{n-2}\right), \\ Z_{n-2} &= \frac{\omega\mu_0}{K_3} \tanh\left(-jK_3 h_3 + \tanh^{-1} \frac{K_3}{\omega\mu_0} Z_{n-3}\right), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Z_1 &= \frac{\omega\mu_0}{K_n}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

ρ_{aMT} et ϕ sont alors déduits comme suit:

$$\rho_{aMT} = \frac{1}{\omega\mu_0} |Z_n|, \quad (1.16)$$

$$\phi = \arg(Z_n). \quad (1.17)$$

1.2.2. Réponse d'une terre stratifiée en électrique (Schlumberger) :

Équation de Laplace :

Le potentiel électrique, dans les conditions d'un courant continu satisfait à l'équation de Laplace (Stéfanenco et al.1930).

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (1.18)$$

la symétrie étant cylindrique dans le cas d'un modèle constitué d'une succession de couches horizontales homogènes et isotropes l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1.19)$$

Solution :

La résolution de cette équation pour le dispositif de Schlumberger est donné par :

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \int_0^\infty \theta(\lambda, k, h) J_0(\lambda r) d\lambda \right], \quad (1.20)$$

$$\rho_{as} = \rho_1 \left[1 + 2r^2 \int_0^\infty \theta(\lambda, k, h) J_1(\lambda r) d\lambda \right], \quad (1.21)$$

où I est le courant injecté dans la terre, 2r est l'espacement entre les deux électrodes A et B, V est le potentiel au point $r = \frac{AB}{2}$, ρ_{as} est la résistivité apparente, ρ_1 est la résistivité de la première couche, J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel respectivement d'ordre 0 et 1, fonction $\theta(\lambda, k, h)$ noyau de Stéfanesco, λ variable arbitraire, k coefficient de réflexion des résistivités, h épaisseur des couches de terrain.

Slichter a introduit une autre fonction noyau (Koefoed, 1979) définie par :

$$\Theta(\lambda, k, h) = [1 + 2\theta(\lambda, k, h)], \quad (1.22)$$

La fonction noyau de Slichter Θ_i à la i^{eme} couche est lié à Θ_{i+1} par la relation de récurrence de Pekris et sunde suivante :

$$\Theta_i = \frac{[\Theta_{i+1} + P_i \tanh(\lambda h_i)]}{[\rho_i + \Theta_{i+1} \tanh(\lambda h_i)]} \quad (1.23)$$

où $P_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}$, $\Theta_n = 1$ et les ρ_i, h_i sont respectivement la résistivité et l'épaisseur de la i^{eme} couche. La résistivité transforme $T(\lambda, k, h)$ (Koefoed, 1979) est donnée par :

$$T(\lambda, k, h) = \rho_i K(\lambda, k, h), \quad (1.24)$$

ou encor par

$$T_i = \frac{[T_{i+1} + \rho_i \tanh(\lambda h_i)]}{[1 + T_{i+1} \tanh(\lambda h_i) / \rho_i]} \quad (1.25)$$

ainsi on peut exprimer la résistivité transforme en fonction de la résistivité apparente par une inversion de Hankel. (Ghosh, 1971b) donne l'expression de $T(\lambda, k, h)$ pour un dispositif de schlumberger.

$$T(\lambda, k, h) = \int \frac{\rho_{as}}{r} J_1(\lambda r) dr, \quad (1.26)$$

C'est une relation de convolution entre une fonction d'entrée ρ_{as} et une fonction de sortie $T(\lambda, k, h)$. Cette convolution dans le domaine spatial a permis l'utilisation des méthodes fréquentielles dans le calcul de résistivité apparente Ghosh (1971a, 1971b) de la manière suivante :

$$\rho_{as}(x_0) = \sum_{j=\beta}^{\alpha} f_j T_{x_0-j}, \quad x_0 = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.27)$$

La résistivité transforme $T(\lambda, k, h)$ (Das et Ghosh, 1974) est donnée par :

$$T_i = \frac{[T_{i+1} + \rho_i \tanh(\lambda h_i)]}{[1 + T_{i+1} \tanh(\lambda h_i) / \rho_i]} \quad (1.28)$$

$T_n = \rho_n,$

pour le dispositif de Schlumberger $\alpha = 5$ et $\beta = -3$, où x_0 est l'abscisse de sortie de la résistivité apparente et les f_j sont les coefficients du filtre linéaire présenté par Ghosh (1971b).

1.3. Formulation du problème inverse non-linéaire :

La littérature présentant les principes fondamentaux de l'inversion en géophysique est vaste et sont présentés dans plusieurs livres et articles de références (Tikhonov et Arsénine, 1977; Menke, 1984 ; Tarantola, 1987; Meju, 1994 ; Zhdanov, 2001; Rodi et Mackie, 2001). D'un point de vu « physique », on qualifiera volontiers de problème inverse toute situation ou l'on souhaite atteindre une grandeur physique m inaccessible à la mesure en exploitant une autre grandeur d observable.

Dans ce qui suit on assume un jeu de N mesures et de M paramètres ce qui nous permet de les représenter respectivement comme les éléments d'un vecteur d de longueur N et les éléments d'un vecteur m , de longueur M .

Données :
$$d = [d_1, d_2, d_3, \dots, d_N]^T$$

Paramètres du modèle :
$$m = [m_1, m_2, m_3, \dots, m_M]^T$$

Ici T signifie transposé du vecteur.

La base du problème inverse est que les paramètres et les données sont d'une certaine façon reliés, cette relation est un modèle mathématique qui donne explicitement d à partir de m (problème directe). Cette dernière peut-être exprimée par :

$$d = f(m), \tag{1.29}$$

Dans les problèmes inverses non-linéaires la relation entre les observations et les paramètres du modèle est complexe, contrairement aux problèmes linéaires où il existe une relation entre le modèle m et f , qui peut être décrite par une multiplication d'une matrice par un vecteur :

$$f(m) = f \cdot m, \tag{1.30}$$

où f est une matrice de dimension $N \times M$.

Les exemples pour des relations linéaires dans la géophysique sont les méthodes gravimétriques et magnétiques et pour des relations non linéaire on trouve les méthodes électriques ainsi que toutes les méthodes électromagnétiques. L'objectif de l'inversion est de trouver un modèle m , dont la réponse $f(m)$ s'adapte le mieux au vecteur des données d . Pour réaliser ceci, dans le problème non-linéaire, un processus itératif est appliqué pour mettre à jour le modèle jusqu'à ce que l'ajustement entre les données calculées et les données réelles s'effectue. Ainsi on commence par un modèle de départ m^0 et dans chaque pas itératif k un nouveau modèle est calculé en ajoutant un accroissement Δm^k au modèle m^{k-1} .

$$m^k = m^{k-1} + \Delta m^k. \tag{1.31}$$

En faisant une approximation de Taylor de premier ordre à la réponse du modèle on obtient :

$$f(m^{k-1} + \Delta m^k) = f(m^{k-1}) + \frac{\partial f(m^{k-1})}{\partial m} \Delta m^k + \dots \approx f(m^{k-1}) + J \Delta m^k, \quad (1.32)$$

où les dérivées partielles de la réponse du modèle par rapport aux paramètres du modèle est appelée matrice Jacobienne ou matrice de sensibilité $J \in \mathbb{R}^{N \times M}$ dont les éléments sont définie par :

$$J_{ij}(m^{k-1}) = \frac{\partial f_i(m^{k-1})}{\partial m_j}, \quad (1.33)$$

En posant la réponse du nouveau modèle $f(m + \Delta m)$ égale aux données d nous obtenons l'équation suivante :

$$J \Delta m = d - f(m), \quad (1.34)$$

Qui doit être résolue dans un certain sens pour réduire au minimum le vecteur des résidus $d - f(m)$. Nous assumons que le bruit affectant nos données est un bruit Gaussien, ce qui est souvent le cas en géophysique, ainsi la solution de se système n'est qu'autre que la solution que l'on obtient en minimisant la distance euclidienne L_2 formée de la somme des carrés des résidus. Où D est une pondération du vecteur des résidus, cette dernière est utilisée lorsque les erreurs (ε) sur les données sont connues :

$$\begin{aligned} \Phi_d &= \sum \left| \frac{d_i - f_i(m)}{\varepsilon_i} \right|^2 = \|D(d - f(m))\|_2^2 \\ D &= \text{diag}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \Phi_d &= [D(d - f(m))]^T [D(d - f(m))] \end{aligned} \quad (1.35)$$

1.3.1. Problème bien posé et mal posé :

Selon Hadamard (1902) la définition d'un problème bien posé est un problème dont :

- La solution existe,
- elle est stable,
- et elle est unique,

et tout problème qui ne satisfait pas à une ou deux de ces conditions voir les trois en même temps est dit : « mal-posé », ce qui est souvent le cas des problèmes inverses en géophysique. En effet, le terrain duquel sont obtenues les données est réel ce qui fait que l'existence de la solution est un concept évident d'un point de vue physique, mais ça l'est moins mathématiquement parlant car les données dont on dispose sont bruitées, et rien ne garantit que le modèle établi puisse expliquer nos mesures. D'autre part, en géophysique la solution obtenue par inversion est généralement non-unique car des modèles différents conduisent à la même réponse. Et pour finir, les problèmes inverses en géophysique sont instables. Une petite erreur sur les données due au bruit peut engendrer une erreur importante sur la solution générée par inversion.

Pendant longtemps ce genre de problèmes ont été considérés sans signification physique ou mathématique. Ceci a changé avec la théorie de régularisation développée par Tikhonov (1963) pour la résolution des problèmes mal-posés.

1.3.2. Régularisation de Tikhonov :

La méthode de régularisation de Tikhonov consiste à ajouter à la fonction Φ_d un opérateur de régularisation Φ_m qui contrôle la douceur de la solution (Tikhonov et Arsenin 1977) et qui peut être exprimé de deux façons différentes selon Menke (1989), la première et une régularisation globale dont la contrainte est appliquée sur le modèle lui-même :

$$\Phi_m = \lambda \|L \cdot (m - m^0)\|_2^2, \quad (1.36)$$

la deuxième expression est une régularisation locale dont la contrainte est appliquée sur l'accroissement du modèle :

$$\Phi_m = \lambda \|L \cdot \Delta m\|_2^2, \quad (1.37)$$

où λ : est le paramètre de régularisation qui contrôle le compromis entre ces deux critères et L : est une matrice qui exprime les contraintes imposées sur $(m - m^0)$ ou Δm .

Il est clair que la régularisation globale est faite pour que la solution obtenue ne s'éloigne pas trop du modèle initial m^0 , cette approche est souvent utilisée car un choix minutieux du modèle initial à partir d'informations a priori (géologiques ou autres) va guider la solution vers un modèle réaliste et lui donner ainsi l'illusion d'unicité. Ce procédé ne peut

être automatique car il nécessite un géophysicien expert pour interpréter ces informations à priori et les introduire dans la construction du modèle initial.

Le but de notre travail est de développer un algorithme d'inversion qui ne dépend que des mesures et d'aucune autre information, ceci consiste comme on le verra plus bas à générer plusieurs solutions et sélectionner le modèle physique le plus réaliste. Dans ce cas, la régularisation local semble la plus appropriée. De là, notre fonction objective à minimiser devient :

$$\Phi(m) = \Phi_d + \Phi_m = \|D(d - f(m))\|_2^2 + \lambda \|L \cdot \Delta m\|_2^2, \quad (1.38)$$

où sous la forme algébrique :

$$\Phi(m) = (d - f(m))^T D^T D (d - f(m)) + \lambda (\Delta m^T L^T L \Delta m). \quad (1.39)$$

1.3.3. Méthode de minimisation de Gauss-Newton :

La méthode de gausse newton est une méthode itérative qui calcul un nouveau modèle à chaque itération en ajoutant un accroissement Δm^k au modèle m^{k-1}

Pour un modèle initial m^0 donné

$$m^k = m^{k-1} + \Delta m^k. \quad (1.40)$$

Afin de mieux décrire la méthode de Gauss-Newton, on introduit les notations suivantes du gradient et de la Hessienne de la matrice objective $\Phi(m)$:

$$g(m) = \nabla_m \Phi(m), \quad (1.41)$$

$$H(m) = \nabla_m \nabla_m^T \Phi(m), \quad (1.42)$$

où ∇_m est un vecteur des dérivées partielles qui se lit $\nabla_m = \left(\frac{\partial}{\partial m_1}, \frac{\partial}{\partial m_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial m_M} \right)^T$, ainsi $g(m)$ et $H(m)$ sont respectivement un vecteur de dimension M et une matrice carrée de dimension $M \times M$

$$g(m) = -2J^T D^T D(d - f(m)) + 2 \lambda L^T L \Delta m, \quad (1.43)$$

$$H(m) = 2J^T D^T D J + 2(\nabla^T J^T) D^T D(d - f(m)) + 2 \lambda L^T L, \quad (1.44)$$

Pour obtenir la méthode de Gauss-Newton, nous commençons par un développement de Taylor du deuxième ordre de la fonction objective Φ

$$\Phi(m^{k-1} + \Delta m) \approx \Phi(m^{k-1}) + (g(m^{k-1}))^T \Delta m + \frac{1}{2} \Delta m^T (H(m^{k-1}))^T \Delta m + \dots, \quad (1.45)$$

cette approximation de Taylor du second ordre est minimisée en posant son gradient égal à zéro, on obtient alors :

$$(H(m^{k-1})) \Delta m^k = -g(m^{k-1}), \quad (1.46)$$

Pour les problèmes qui ne sont pas hautement non linéaires $\nabla^T J^T \approx 0$, et le second terme de l'équation (1.44) est ignoré :

$$H(m) = 2J^T D^T D J + 2 \lambda L^T L, \quad (1.47)$$

La méthode qui utilise cette approximation de la Hessienne est dite méthode de Gauss-Newton et on obtient alors le system à résoudre à chaque itération :

$$(J^T D^T D J + \lambda L^T L) \Delta m^k = J^T D^T D (d - f(m^{k-1})) \quad (1.48)$$

Pour les problèmes hautement non-linéaires la recherche du pas optimal τ « *line search* » à chaque itération est nécessaire pour contrôler les variations de l'accroissement du modèle Δm et assurer une convergence globale

$$m^k = m^{k-1} + \tau \Delta m^k, \quad (1.49)$$

l'optimum de ce pas se situe entre 0 et 1. Plus le problème est linéaire, plus τ se rapproche de 1.

Chapitre 2 : Implémentation du programme d'inversion conjointe 1D des données AMT et Schlumberger :

Dans le but d'inverser conjointement les données AMT et Schlumberger un algorithme d'inversion automatique 1D à été développé et écrit en langage MATLAB. Dans ce chapitre, l'algorithme d'inversion non-linéaire tel qu'il est formulé dans la section (1.3) est implémenté pour les mesures AMT et Schlumberger. A chaque itération, le système linéaire (1.48) doit être résolu. Dans ce qui suit, on a exposé la façon dont cela est fait grâce à des outils mathématiques puissants tels que la décomposition en valeur singulière (SVD) et sa généralisation (GSVD). A la quête d'un algorithme d'inversion robuste plusieurs paramètres (modèle initial, paramètre de régularisation, pas de descente, ... etc) doivent être déterminés d'une façon optimal, les procédures utilisées pour atteindre cet objectif sont exposées ci-dessous. N'utilisant pas d'informations a priori plusieurs solutions peuvent être obtenues en gardant un système surdéterminé et il faut choisir une d'elles et la procédure développée à cet effet est exposée dans ce chapitre.

1.1. Définition des paramètres et des données pour l'inversion conjointe AMT & DC :

Les résistivités et les épaisseurs sont des paramètres physiques qui sont positifs par définition. Souvent dans le processus d'inversion les paramètres du modèle sont transformés en leurs valeurs logarithmiques pour éviter des valeurs négatives durant l'inversion (voir (C.Constable & all, 1987; Tarantola, 2001)). Ainsi, le vecteur des paramètres du modèle m est une distribution des logarithmes décimaux des résistivités ($\log \rho_j$) et des logarithmes décimaux des épaisseurs ($\log h_j$) de la forme suivante :

$$m = [\log \rho_1, \log \rho_2, \dots, \log \rho_n, \log h_1, \log h_2, \dots, \log h_{n-1}]^T, \quad (2.1)$$

où n est le nombre de couches et m est un vecteur de dimension $M = 2n - 1$.

D'autre part, le vecteur d est constitué de deux jeux de données d_1 et d_2 correspondants respectivement aux mesures AMT et Schlumberger. Le vecteur d_1 de dimension $2N_1$ est une distribution des logarithmes décimaux de résistivités apparentes ($\log \rho_{aMTi}$) et de phase (ϕ_i) et d_2 est un vecteur de longueur N_2 , composé des logarithmes décimaux des résistivités apparentes ($\log \rho_{asi}$). La forme générale de ces données est alors :

$$\begin{aligned}
d_1 &= [\log \rho_{aMT1}, \log \rho_{aMT2}, \dots, \log \rho_{aMTN_1}, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_1}]^T, \\
d_2 &= [\log \rho_{as1}, \log \rho_{as2}, \dots, \log \rho_{asN_2}]^T, \\
d &= [d_1, d_2],
\end{aligned} \tag{2.2}$$

On obtient alors un vecteur de données d de dimension $N = 2N_1 + N_2$.

1.2. Equation à résoudre pour le problème inverse non-linéaire :

A chaque itération k , le system (1.48) doit être résolu :

$$\Delta m^k = (J^T D^T D J + \lambda L^T L)^{-1} J^T D^T D (d - f(m^{k-1})), \tag{2.3}$$

En posant $\hat{J} = D J$ et en remplaçant $(d - f(m^{k-1}))$ par e^k on obtient le system à résoudre suivant :

$$\Delta m^k = (\hat{J}^T \hat{J} + \lambda L^T L)^{-1} \hat{J}^T D e^k, \tag{2.4}$$

Ce system à résoudre peut être assimilé a un problème de moindre carré de la forme $(A^T A + \lambda L^T L)x = A^T b$. La décomposition en valeurs singulières (SVD) et sa généralisée (GSVD) sont des outils mathématiques très bien connus pour leurs puissance à résoudre ce genre de problème (Menke,1989 ; Golub and van Loan,1996).

1.2.1. La décomposition en valeurs singulières (SVD) :

On assume dans ce qui suit que $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$ est une matrice de rang r et que $N \geq M$. La décomposition en valeurs singulières (SVD) de A est une décomposition de la forme:

$$A = U \Lambda V^T = \sum_{i=1}^M U_i s_i V_i^t \tag{2.5}$$

Où $U \in \mathbb{R}^{N \times M}$ et $V \in \mathbb{R}^{M \times M}$ sont deux matrices telles que $U^T U = V^T V = I_M$, les vecteurs colonnes U_i et V_i constituant ces matrices là sont dit vecteurs singuliers droit et gauche respectivement. $\Lambda \in \mathbb{R}^{M \times M}$ est une matrice diagonale des valeurs singulières $\Lambda = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_M)$, avec $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_M \geq 0$.

Dans le cas où $r < \min(N, M)$, la matrice A est singulière et cela se traduit sur la matrice des valeurs singulières Λ par :

$$\begin{aligned} s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0 \\ \text{et} \\ s_{r+1} = s_{r+2} = \dots = s_M = 0 \end{aligned}$$

Delà, par le rang r les espaces nuls U_0 et V_0 des vecteurs singuliers peuvent être séparés $U = (U_r \ U_0)$ et $V = (V_r \ V_0)$ où U_r et V_r sont les r premières colonnes de U et V . L'espace nul n'a aucune contribution dans A ($A = U\Lambda V^T = U_r \Lambda_r V_r^T$) et pour $\Lambda_r = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_r)$ cette matrice est inversible et son inverse naturelle est l'inverse généralisée A^\dagger donnée par :

$$A^\dagger = V_r \Lambda_r^{-1} U_r^T, \quad (2.6)$$

et qui satisfait aux quatre conditions de Moore et Penrose (Jupp & Vozoff, 1975) suivantes :

$$\begin{aligned} A A^\dagger A &= A, \\ A^\dagger A A^\dagger &= A^\dagger, \\ (A^\dagger A)^T &= A^\dagger A, \\ (A A^\dagger)^T &= A A^\dagger, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ainsi, la solution du system $Ax = b$ pour une matrice A rectangulaire est donnée par :

$$x = A^\dagger b = \sum_{i=1}^N \frac{U_i b_i}{\sigma_i} V_i. \quad (2.8)$$

1.2.2. La décomposition en valeurs singulières généralisée (GSVD) :

Il est clair dans l'équation (2.8) que les paramètres correspondants aux valeurs singulières faibles sont considérés comme étant mal définis puisque leur contribution aux données synthétiques est faible et par conséquent ils ne peuvent être bien contraints lors de l'inversion.

Avec cette analyse à l'esprit, nous pouvons voir que l'objectif d'une régularisation $(A^T A + \lambda L^T L)x = A^T b$ est d'amortir la contribution à la solution des petites valeurs singulières.

On assume dans ce qui suit que la matrice $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$ et que la matrice $L \in \mathbb{R}^{P \times M}$, $N \geq M \geq P$. Alors dans ce cas, la GSVD est la décomposition de la matrice pair (A, L) de la forme suivante (van Loan, 1976, Hansen, 1992) :

$$A = Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & I_{M-p} \end{pmatrix} X^T, L = W(M, 0) X^T, \quad (2.9)$$

Où les vecteurs colonnes Q_i et W_i des matrices $Q \in \mathbb{R}^{N \times M}$ et $W \in \mathbb{R}^{P \times P}$ respectivement sont orthonormés. $X \in \mathbb{R}^{M \times M}$ est une matrice non singulière, et $\Sigma \in \mathbb{R}^{P \times P}$ et $M \in \mathbb{R}^{P \times P}$ sont des matrices diagonales telles que :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p), & 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_p \leq 1 \\ M &= \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p), & 1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p > 0 \\ & & \sigma_i^2 + \mu_i^2 = 1 \quad i = 1, 2, \dots, P. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Delà les valeurs singulières généralisées de (A, L) sont définies comme suit :

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i} \quad i = 1, 2, \dots, P \quad (2.11)$$

Ainsi la GSVD de la matrice pair (A, L) est la généralisation de la SVD de A dans le sens où les valeurs singulières généralisées de (A, L) sont la racine carrée des valeurs propres de la matrice pair $(A^T A, L^T L)$. Par conséquent, la solution du problème $(A^T A + \lambda L^T L)x = A^T b$ est donnée par (Hansen, 1992) :

$$x = A^\dagger b = \sum_{i=1}^p t_i \frac{Q_i b_i}{\sigma_i} X_i + \sum_{i=p+1}^M (Q_i b_i) X_i \quad , L \neq I_M \quad (2.12)$$

$$x = A^\dagger b = \sum_{i=1}^M t_i \frac{Q_i b_i}{\sigma_i} W_i \quad , L = I_M \quad (2.13)$$

Où les t_i sont dit facteur d'amortissement, pour la régularisation de Tikhonov :

$$t_i = \frac{\gamma_i}{(\gamma_i + \lambda)} \quad , L \neq I_M \quad (2.14)$$

$$t_i = \frac{\sigma_i}{(\sigma_i + \lambda)} \quad , L = I_M \quad (2.15)$$

Dans le cas où $L = I_M$ les matrices Q et W de la GSVD sont identiques à U et V de la SVD, et les valeurs singulières généralisées de (A, L) sont identiques aux valeurs singulières de A et on alors

$$x = \sum_{i=1}^M t_i \frac{U_i b_i}{\sigma_i} V_i. \quad (2.16)$$

Il est à noter que dans ce cas précis où $L = I_M$ cette méthode est dite méthode de Marquardt-Levenberg (Marquardt, 1963).

D'autre part lorsque la matrice de contrainte L est carrée $M = P$ comme ça l'est dans notre cas (voir section 2.4), le second terme de l'équation (2.12) disparaît et on obtient alors :

$$x = A^\dagger b = \sum_{i=1}^M t_i \frac{Q_i b_i}{\sigma_i} X_i, \quad (2.17)$$

l'inverse généralisée A^\dagger de A est donnée dans ce cas par :

$$A^\dagger = X \text{diag} \left(\frac{t_i}{\sigma_i} \right) Q^T, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.18)$$

Afin de résoudre le system (1.48) il sufi de remplacer A par \hat{f} , b par De^k et x par Δm^k .

1.3. Calcul de la matrice de sensibilité (jacobienne) :

La matrice jacobienne est appelée aussi la matrice de sensibilité car l'élément $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial m_j}$ représente une mesure de la variation de la réponse du modèle f_i par rapport à la variation du paramètre m_j , ce qui permet d'estimer la contribution du paramètre m_j à la réponse du modèle f_i . Afin de résoudre le système linéaire (1.48) il faut construire à chaque itération k cette matrice de sensibilité, cela consiste à calculer les éléments suivants :

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial m_j} \quad \begin{matrix} i=1, N' \\ j=1, M \end{matrix} \quad (2.19)$$

Dans notre cas la réponse du modèle f est un vecteur de même dimension que celui des mesures d et dont les éléments sont calculés des équations (1.16), (1.17) et (1.27). La forme générale de ce dernier est :

$$f(\hat{m}) = [\log \rho_1^{\text{aMT}}(\hat{m}), \dots, \log \rho_{N_1}^{\text{aMT}}(\hat{m}), \phi_1(\hat{m}), \dots, \phi_{N_1}(\hat{m}), \log \rho_1^{\text{as}}(\hat{m}), \dots, \log \rho_{N_2}^{\text{as}}(\hat{m})]^T, \quad (2.20)$$

où $\hat{m} = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}]^T$, et $m = \log(\hat{m})$.

Le calcul des éléments de la matrice de sensibilité diffère selon que f_i correspond aux logarithmes des résistivités apparentes ou aux phases, ainsi on peut considérer la jacobienne comme étant une matrice constituée de trois sous matrices J^1 , J^2 et J^3 correspondent respectivement aux dérivées partielles $\frac{\partial \log \rho_i^{\text{aMT}}(\hat{m})}{\partial \log \hat{m}_j}$, $\frac{\partial \phi_i(\hat{m})}{\partial \log \hat{m}_j}$ et $\frac{\partial \log \rho_i^{\text{as}}(\hat{m})}{\partial \log \hat{m}_j}$,

$$J = \begin{bmatrix} J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$J_{ij}^1 = \frac{\partial \log \rho_i^{\text{aMT}}(\hat{m})}{\partial \log \hat{m}_j} = \left(\frac{\hat{m}_j}{\rho_i^{\text{aMT}}} \right) \left(\frac{\partial \rho_i^{\text{aMT}}(\hat{m})}{\partial \hat{m}_j} \right)_{\substack{i=1, N_1 \\ j=1, M}}, \quad (2.22)$$

$$J_{ij}^2 = \frac{\partial \phi_i(\hat{m})}{\partial \log \hat{m}_j} = \hat{m}_j \left(\frac{\partial \phi_i(\hat{m})}{\partial \hat{m}_j} \right)_{\substack{i=1+N_1 \\ j=1, M}}, \quad (2.23)$$

$$J_{ij}^3 = \frac{\partial \log \rho_i^{\text{as}}(\hat{m})}{\partial \log \hat{m}_j} = \left(\frac{\hat{m}_j}{\rho_i^{\text{as}}} \right) \left(\frac{\partial \rho_i^{\text{as}}(\hat{m})}{\partial \hat{m}_j} \right)_{\substack{i=1, N_2 \\ j=1, M}}. \quad (2.24)$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial \rho_i^{\text{aMT}}}{\partial \hat{m}_j}$, $\frac{\partial \phi_i}{\partial \hat{m}_j}$, $\frac{\partial \rho_i^{\text{as}}}{\partial \hat{m}_j}$ sont calculées par différence finie, une approche souvent utilisée (WU, 1968 ; Constable et al, 1987) où un accroissement $\tilde{\delta}$ suffisamment petit donne de très bonnes précisions

$$\frac{\partial \rho_i^{\text{aMT}}(\hat{m})}{\partial \hat{m}_j} \cong \frac{\Delta \rho_i^{\text{aMT}}(\hat{m})}{\tilde{\delta}} = \frac{\rho_i^{\text{aMT}}(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, m_j^{k-1} + \tilde{\delta}, \dots, \hat{m}_M) - \rho_i^{\text{aMT}}(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_j, \dots, \hat{m}_M)}{\tilde{\delta}}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \phi_i(\hat{m})}{\partial \hat{m}_j} \cong \frac{\Delta \phi_i(\hat{m})}{\tilde{\delta}} = \frac{\phi_i(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, m_j^{k-1} + \tilde{\delta}, \dots, \hat{m}_M) - \phi_i(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_j, \dots, \hat{m}_M)}{\tilde{\delta}}, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \rho_i^{\text{as}}(\hat{m})}{\partial \hat{m}_j} \cong \frac{\Delta \rho_i^{\text{as}}(\hat{m})}{\tilde{\delta}} = \frac{\rho_i^{\text{as}}(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, m_j^{k-1} + \tilde{\delta}, \dots, \hat{m}_M) - \rho_i^{\text{as}}(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_j, \dots, \hat{m}_M)}{\tilde{\delta}}. \quad (2.27)$$

1.4. La matrice de contrainte :

Dans la régularisation de Tikhonov telle qu'elle est décrite dans le chapitre précédent la matrice de régularisation $L \in \mathbb{R}^{M \times M}$ qui exprime la contrainte imposée sur l'accroissement Δm doit être déterminée. Pour notre cas la régularisation de Tikhonov est appliquée avec une matrice carrée des dérivées premières de $M \times M$ (Constable et al, 1987)

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Détermination automatique du paramètre de régularisation :

Tel que c'est défini dans le chapitre précédent, la régularisation de Tikhonov requiert la définition d'un paramètre de régularisation λ dit aussi « multiplicateur de Lagrange », qui équilibre l'opérateur Φ_m et l'erreur sur les données Φ_d . Un certain nombre de procédés automatiques pour trouver ce multiplicateur de Lagrange existent, tel que la méthode « L-curve » et la validation croisée généralisée (GCV) qui ont été testés sur des problèmes inverses non-linéaires rencontrés en géophysique. Haber et Oldenburg (2000) ont proposé l'utilisation de la technique GCV pour l'inversion 1D de données magnétotelluriques. D'autre part, Li et Oldenburg (1999) ont utilisé la technique L-curve dans l'inversion 3D des données DC. Les détails de ces deux méthodes sont donnés par Vogel (2002) et Farquharson et Oldenburg (2004). Cependant il a été souligné par Vogel (1996), que la méthode L-curve est rapide mais pas toujours efficace. D'autre part la (GCV) est mieux établie, mais coûteuse en temps.

Les deux méthodes présentées ci-dessus recherchent un paramètre de régularisation optimal et unique. Une autre méthode basée sur une détermination spatiale du multiplicateur de Lagrange (où pour chaque paramètre m_i correspond un paramètre de régularisation λ_i) a été développée par Yi (2003), et dont le principe consiste à estimer la résolution du i ème paramètre et de déterminer le multiplicateur de Lagrange λ_i qui lui correspond à partir d'une fonction dite de diffusion. Cette méthode est nommée ACB pour « *Active constraint balancing* » et elle a été testée pour l'inversion 2D des mesures magnétotelluriques (Lee et al,

2009). Néanmoins, ce procédé n'est pas automatique car il nécessite l'introduction de deux valeurs a priori (λ_{min} , λ_{max}) durant le processus d'inversion.

Dans ce qui suit, on va présenter une nouvelle procédure pour la détermination du paramètre de régularisation. Cette dernière doit satisfaire aux deux conditions suivantes :

- Qu'elle soit automatique,
- et que le processus itératif converge sans perdre de l'information.

Pour le développement de cette approche on a considéré le fait que le multiplicateur de Lagrange λ dépend du niveau d'erreurs des données δ (Jupp et Vozoff, 1975), aussi, tel qu'on a pu le voir dans la section (2.2.2) l'objectif d'une régularisation est d'amortir la contribution à la solution des petites valeurs singulières. Ceci nous a mené à chercher un paramètre de régularisation proportionnelle au niveau d'erreurs δ ainsi qu'aux valeurs singulières.

Les valeurs singulières sont données par :

$$diag\Lambda = [s_1, s_2, \dots, s_M], \text{ avec } s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_M > 0,$$

et l'erreur δ peut être approximée par l'erreur quadratique moyenne RMS (Jupp & Vozoff, 1975)

$$\delta \cong \text{RMS} = \left(\frac{(d - f(\hat{m}))^T D^T D (d - f(\hat{m}))}{N} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.28)$$

Comme il a été indiqué ci-dessus le choix du paramètre de régularisation doit se faire selon un compromis, il doit être suffisamment important pour que le processus d'inversion converge mais pas trop pour qu'il n'y est pas de perte d'information. Sachant que les paramètres correspondants aux valeurs singulières faibles sont considérés comme étant mal définis et ceux correspondants aux valeurs singulières importantes sont bien définis (Jupp et Vozoff, 1975), la détermination spatiale du multiplicateur de Lagrange selon l'importance des valeurs singulières semble l'approche la plus adaptée pour réaliser ce compromis, ainsi, les paramètres de régularisation λ_i les plus faibles doivent correspondre aux valeurs singulières les plus fortes et le contraire est vrai. Delà, en considérant que le paramètre de régularisation est proportionnel au niveau d'erreurs δ ce dernier est donné comme suit :

$$\lambda = \Gamma \cdot \delta, \quad (2.29)$$

où $\Gamma = \left[\left(1 - \frac{s_1}{s_1}\right), \left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right), \dots, \left(1 - \frac{s_M}{s_1}\right) \right]$, avec $\Gamma_1 = 0 \leq \Gamma_2 \leq \dots \leq \Gamma_M < 1$ est le vecteur des valeurs singulières relatives dont les éléments représentent le degré d'importance inversement proportionnel à celui des valeurs singulières. Il est à souligner que cette procédure ne dépend que des données et qu'elle est entièrement automatique.

1.6. Détermination du modèle initial:

L'inversion des données AMT et Schlumberger représente un problème inverse non linéaire. Les solutions sont trouvées en améliorant un modèle initial par un processus itératif qui minimise les résidus entre les données et la réponse du modèle. Ainsi, la première étape dans l'implémentation de notre algorithme d'inversion conjointe est la détermination des $2n - 1$ paramètres constituant notre modèle initial ou n est le nombre de couche.

Partant d'un espace homogène défini par la profondeur d'investigation maximale (P) et de résistivité ($\rho_{moyen} = \frac{\sum \rho_{aMT} + \sum \rho_{as}}{N}$) qui équivaut à la moyenne des résistivités apparentes, ce dernier est subdivisé selon le nombre de couches afin d'obtenir des épaisseurs équivalentes, tel que c'est illustré dans la figure 2.1.

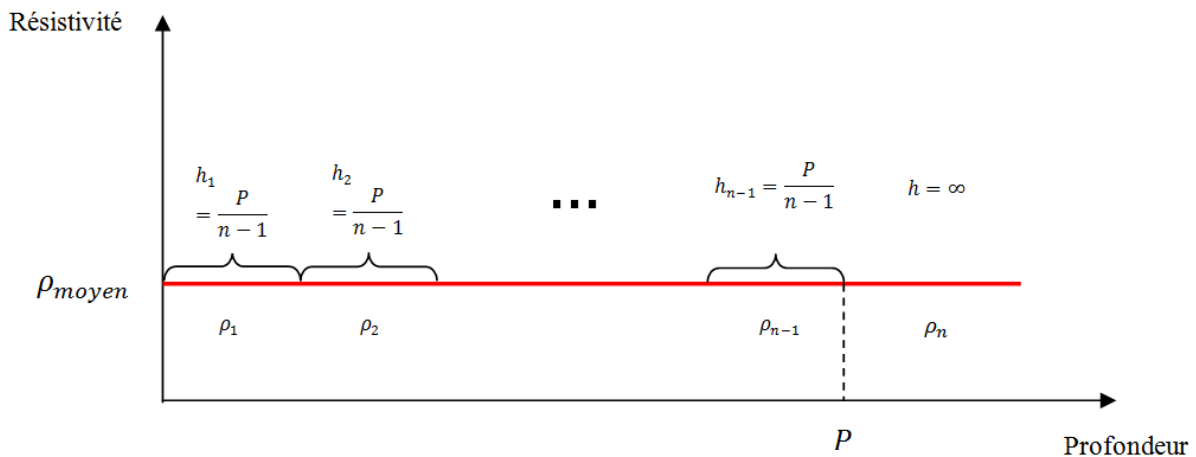


Figure 2.1 : Croquis montrant la procédure utilisée pour établir un modèle initial.

Souvent la profondeur d'investigation de la prospection AMT est plus importante que celle obtenue par les méthodes DC. Pour les méthodes EM cette dernière peut être approximée par la profondeur de peau δ décrite dans la section (1.2.1)

$$P \cong \delta = \left(\frac{2\rho_{moyen}}{2\pi f_{min}\mu_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.30)$$

D'autre part, Meju (2005) a établi une relation empirique entre l'échelle spatiale des données DC et l'échelle fréquentielle des données AMT

$$f = \left(\frac{\rho_{as}}{2\pi\mu_0 L^2} \right), \quad (2.31)$$

où L est la mi-longueur du dispositif Schlumberger.

Ceci nous permet de généraliser l'équation (2.30) dans l'approximation de la profondeur pour les données DC. On a alors le modèle initial de la forme :

$$m^0 = [\log \rho_1, \log \rho_2, \dots, \log \rho_n, \log h_1, \log h_2, \dots, \log h_{n-1}]^T, \text{ avec } \rho_1 = \rho_1 = \dots = \rho_n = \rho_{moyen} \text{ et } h_1 = h_1 = \dots = h_n = \frac{P}{n-1},$$

1.7. Détermination du pas de descente optimal « *Line search* » :

Plus le problème est non-linéaire plus la recherche d'un pas optimal τ « *line search* » est nécessaire pour la convergence du processus d'inversion. L'optimum de ce pas se situe entre 0 et 1. Ainsi, plus le problème est linéaire, plus τ se rapproche de 1.

Afin de déterminer ce dernier, les réponses du modèle sont calculées pour une série de pas $\tau_l, l = 1, 2, \dots, 200$ ainsi que les fonctions objectives qui leurs correspondent

$$\Phi_1(m^{k-1} + \tau_l \Delta m), \quad (2.32)$$

de là, le τ_{opt} coïncidant avec la valeur minimale des Φ_1 calculée est considéré comme étant la valeur optimale du pas de descente et on a alors à la k ème itération :

$$m^k = m^{k-1} + \tau_{opt} \Delta m^k. \quad (2.33)$$

1.8. Teste de validité du code de calcul directe :

Comme nous l'avons vu ci-dessus, le principe fondamental de l'inversion non-linéaire est de calculer à chaque itération k un modèle m^k dont la réponse (calcul directe) $f(m^k)$ s'ajuste le mieux possible au vecteur des données d .

La réponse d'un terrain stratifié horizontalement pour les méthodes de prospections AMT et Schlumberger décrite dans la section (1.2) a été implémentée. Afin de valider ce code de calcul directe, nous avons comparé les résultats obtenus par ce dernier avec d'autres résultats calculés par un logiciel d'interprétation et de modélisation 1D le JOINTEM (Markku Pirttijärvi, 2009).

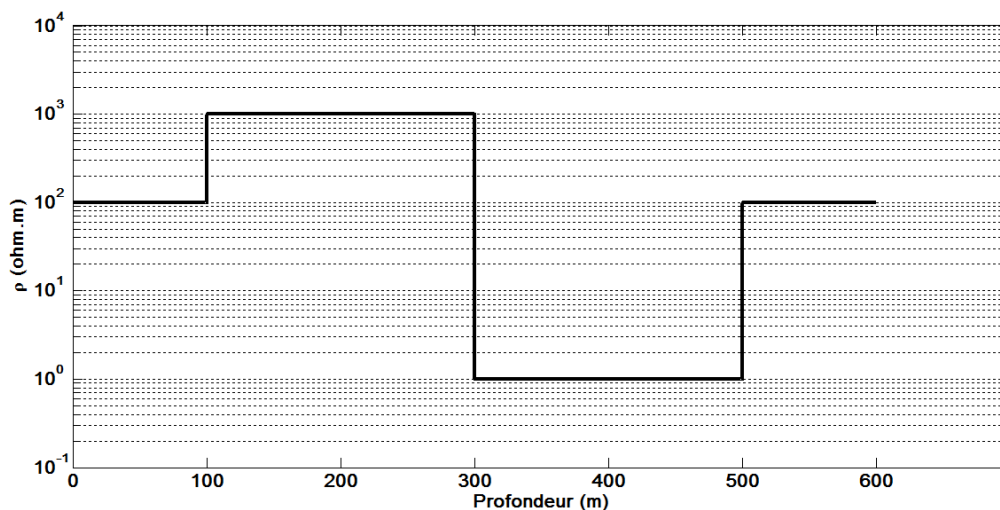


Figure 2.2 : Modèle à quatre couches avec des épaisseurs de 100, 200 et 200 m et de résistivités de 100, 1000, 1 et un demi-espace infini de 100 ohm-m.

Pour ce faire, des données synthétiques ont été générées à partir du modèle à quatre couches illustré dans la figure 2.2. La réponse de ce modèle dans le cas de la prospection AMT sont les résistivités apparentes et les phases (ρ_{aMT}, ϕ) calculées pour un intervalle de fréquence allant de 1 à 10000 Hz avec 10 points par décade. D'autre part, les données calculées pour la méthode de prospection électrique (dispositif Schlumberger) sont des résistivités apparentes (ρ_{aS}) avec 7 sortis par décade et un $AB/2$ maximal de 700 m à été utilisé. Les résultats obtenus pour les méthodes AMT et Schlumberger sont représentés respectivement dans les figures 2.3 et 2.4.

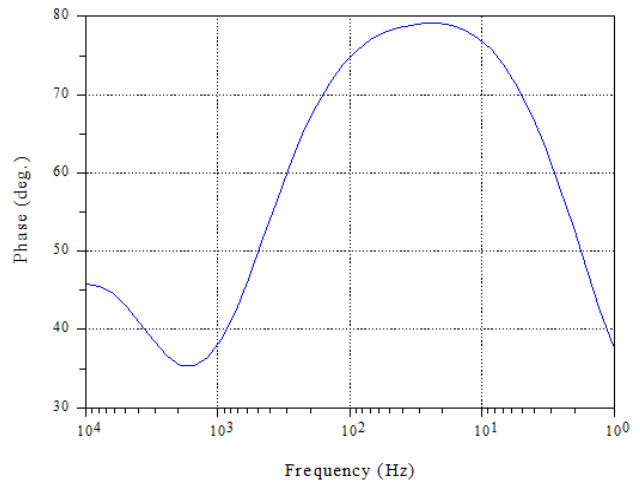
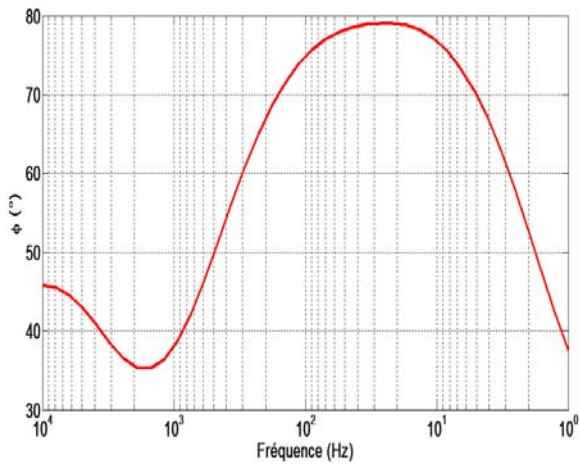
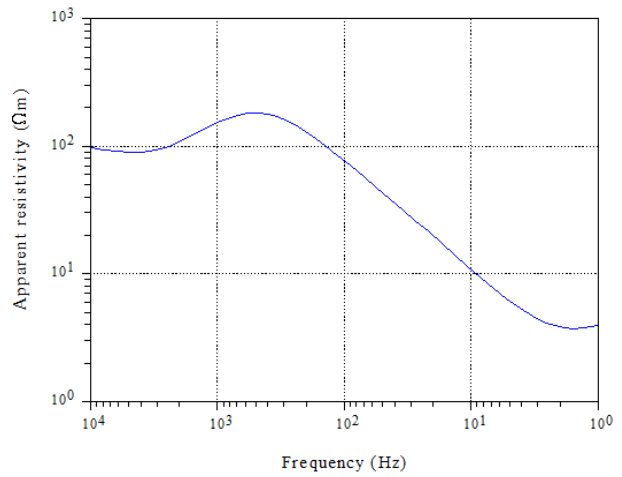
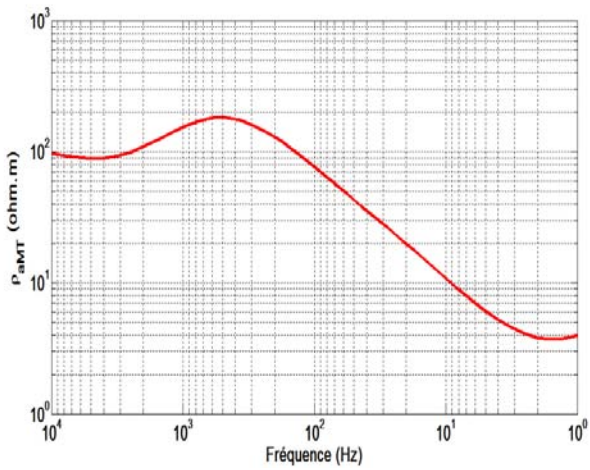


Figure 2.3 : Réponse du modèle à quatre couches de la figure 2.2 pour la méthode AMT. Représentation des résistivités apparentes et phases pour un intervalle de fréquence allant de 1 à 10000 Hz avec 10 sorties par décade; à gauche les résultats obtenus par notre code de calcul et à droite ceux calculés par le logiciel JOINTTEM

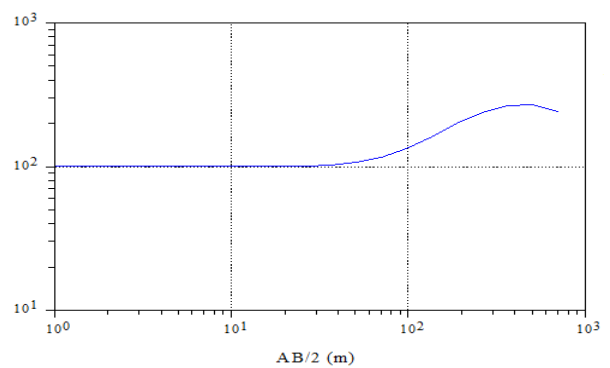
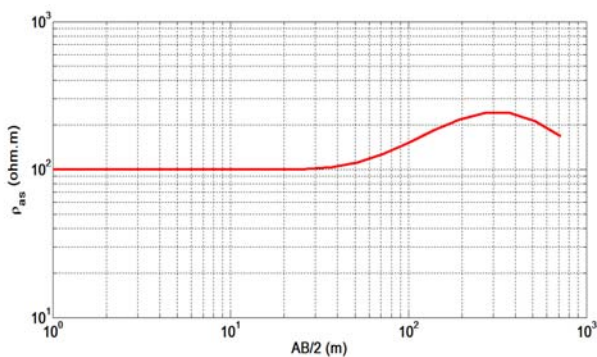


Figure 2.4 : Réponse du modèle à quatre couches de la figure 2.2 pour la méthode Schlumberger. Représentation des résistivités apparentes avec 7 sorties par décade et un AB/2 maximal de 700 m, à gauche les résultats obtenus par notre code de calcul et à droite ceux calculés par le logiciel JOINTTEM

La similitude entre nos résultats et ceux obtenus par le logiciel JOINTEM est parfaite, comme on le voit sur les figures ci-dessus ce qui confirme l'exactitude des résultats de notre code de calcul.

1.9. Choix de la solution :

La détermination du modèle initial dépend du nombre de couches. Ainsi en faisant varier ce dernier, plusieurs solutions peuvent être obtenues en gardant un système surdéterminé et la question qui se pose à ce stade de notre travail est comment choisir celle qui interprète le mieux notre terrain?

Dans ce qui suit, je vais démontrer que la réponse à cette question est réalisable grâce au rapport du degré de résolution (DR) défini ci-dessous (section 2.9.1) par l'erreur quadratique moyen (RMS). Pour ce, je reprend ici les données synthétiques représentées dans les figures 2.3 et 2.4 et qui ont été générées à partir du modèle à quatre couches de la figure 2.2, et pour se rapprocher d'un cas pratique je perturbe ces données avec un bruit gaussien de niveau faible de 1%. L'inversion conjointe de ces données en gardant un système surdéterminé donne 49 solutions qui sont toutes représentées dans la figure 2.5. On remarque que ces dernières sont dispersées.

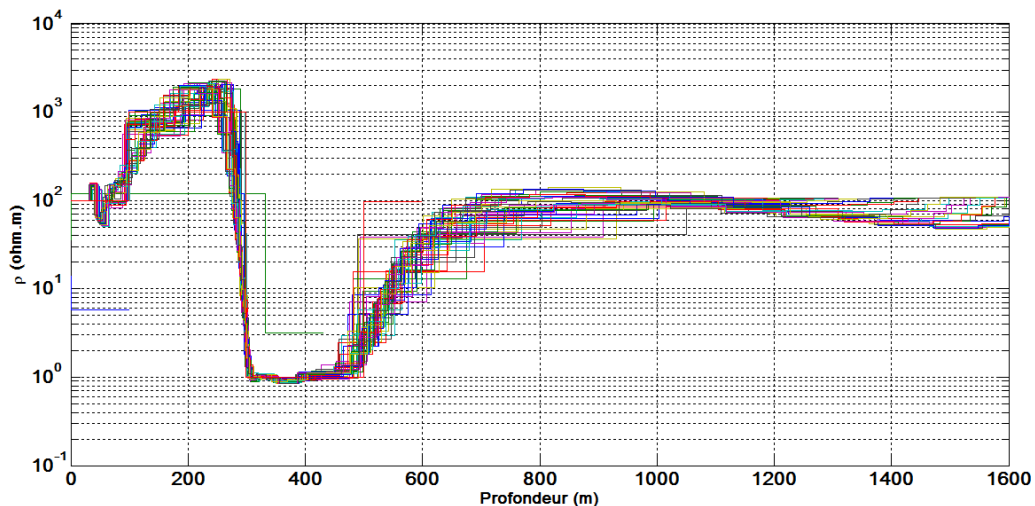


Figure 2.5 : Représentation de 49 solutions obtenues à partir de l'inversion conjointe des données synthétiques générées du modèle de la figure 2.2 et perturbées avec un bruit gaussien de 1%.

1.9.1. Définition et détermination du degré de résolution (DR):

L'analyse de la résolution est utilisée habituellement à posteriori afin d'évaluer le degré de résolution des paramètres trouvés. Pour la théorie de l'inversion linéaire, cette analyse est donnée en détail par Menke (1989) et Meju (1994b). D'autre part, pour l'inversion non-linéaire cette dernière est décrite dans Friedel (2003)

Dans l'inversion non-linéaire le vecteur des données est considéré comme la réponse du modèle vrai m^{vrai} , et qui est contaminé par du bruit e

$$d = f(m^{\text{vrai}}) + e. \quad (2.34)$$

En assumant qu'à la $k^{\text{ième}}$ itération le modèle m^k est proche du modèle vrai m^{vrai} , le développement de Taylor de f au voisinage de m^k donne (Friedel, 2003)

$$d = f(m^{\text{vrai}}) + e = f(m^k) + J(m^{\text{vrai}} - m^k) + e. \quad (2.35)$$

À la $k^{\text{ième}} + 1$ itération on obtient notre solution, qui est dans notre cas le modèle estimé m^{est}

$$m^{\text{est}} = m^{k+1} = m^k + (J^T D^T D J + \lambda L^T L)^{-1} J^T D^T D (d - f(m^k)). \quad (2.36)$$

Pour $\hat{J}^\dagger = (J^T D^T D J + \lambda L^T L)^{-1} J^T D^T$ l'inverse généralisée de \hat{J} et en remplaçant $(d - f(m^k))$ par e^k on obtient

$$\begin{aligned} m^{\text{est}} &= m^k + \hat{J}^\dagger \hat{J} (m^{\text{vrai}} - m^k) + \hat{J}^\dagger D e^k, \\ m^{\text{est}} &= \hat{J}^\dagger \hat{J} m^{\text{vrai}} + (I - \hat{J}^\dagger \hat{J}) m^k + \hat{J}^\dagger D e^k, \\ m^{\text{est}} &= R^M m^{\text{vrai}} + (I - R^M) m^k + \hat{J}^\dagger D e^k. \end{aligned} \quad (2.37)$$

La matrice $R^M = \hat{J}^\dagger \hat{J}$ est appelée matrice de résolution, les éléments R_{ii}^M de la diagonale de R^M indiquent le degré de résolution du paramètre m_i . Idéalement, R^M serait la matrice identité, ce qui correspond à la résolution parfaite. En contraste à la matrice R^M on a la matrice $R^P = I - R^M$ qui indique les endroits où on perd de la résolution ($R_{ii}^M \ll 1$).

La trace de la matrice de résolution R^M nous donne l'information totale obtenue (ITO) et qui équivaut au nombre de paramètres M dans le cas d'une résolution parfaite

$$ITO = \sum_{i=1}^M R_{ii}^M. \quad (2.38)$$

D'autre part, les éléments de la matrice R^P contiennent l'information mal définie, sa trace constitue ainsi l'information totale perdue (ITP) par le processus d'inversion

$$ITP = \sum_{i=1}^M R_{ii}^P = M - ITO. \quad (2.39)$$

En reliant l'ITO au nombre de paramètres M on définit le degré de résolution

$$DR = \frac{ITO}{M} \times 100 \quad (2.40)$$

qui varie entre 0 et 1, la résolution est parfaite pour $DR = 1$.

Concernant le calcul de la matrice de résolution R^M cela est fait en utilisant la GSVD

$$\begin{aligned} R^M &= \hat{J}^\dagger \hat{J}, \\ R^M &= X \operatorname{diag} \left(\frac{t_i}{\sigma_i} \right) Q^T Q \operatorname{diag}(\sigma_i) X^T, \\ R^M &= X \operatorname{diag}(t_i) X^T, \quad i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.41)$$

1.9.2. Détermination de la solution la mieux résolue:

Pour ce qui suit, Il est intéressant de noter que Parker (1980) a exposé l'aspect de la non-unicité des problèmes inverses en EM, aussi, Parker et Whaler (1981) ont montré que les modèles qui minimisent l'erreur entre les données observées et calculées ne sont pas représentatifs d'une solution physique ou géologique raisonnable. De la figure 2.6 représentant les RMS finales (lorsque le processus converge) de toutes les solutions, on remarque que mis à part la première et la deuxième solution les autres solutions convergent vers un minimum global aux alentours de 1 et chacune d'elles peut représenter notre solution.

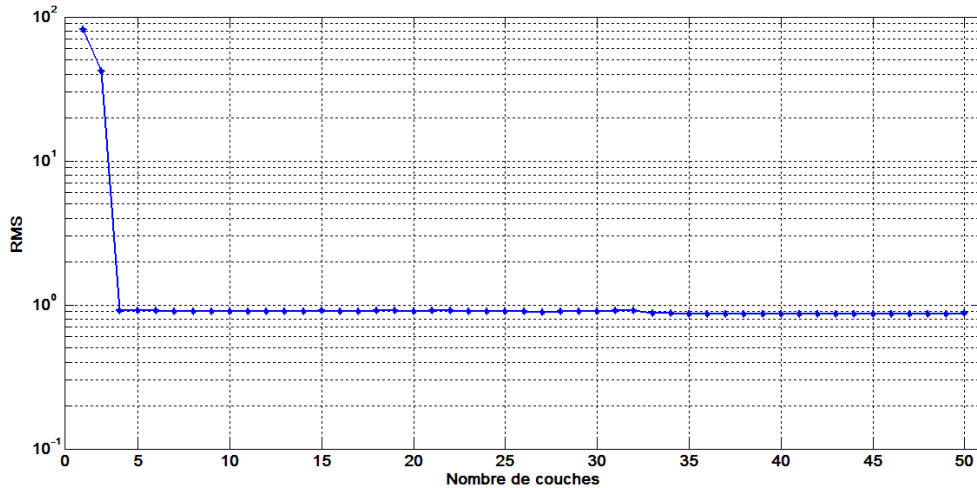


Figure 2.6 : Représentation de l'erreur quadratique moyenne (RMS) finales (lorsque le processus converge) en fonction du nombre de couches de chaque solution.

La représentation de l'information totale obtenue (ITO) avec l'information totale perdue (ITP) en fonction du nombre de couches de chaque solution (voir figure 2.7) montre qu'en augmentant le nombre de terrains l'ITO augmente pour atteindre une valeur constante, contrairement à l'ITP qui lui augmente proportionnellement au nombre de couches des solutions. Ceci signifie, qu'à un certain moment l'interprétation de notre terrain avec un grand nombre de terrains ne sert à rien car on n'améliore pas l'information obtenue par le processus d'inversion, ce point est bien marqué dans la figure 2.7 et il correspond à l'intersection des deux courbes.

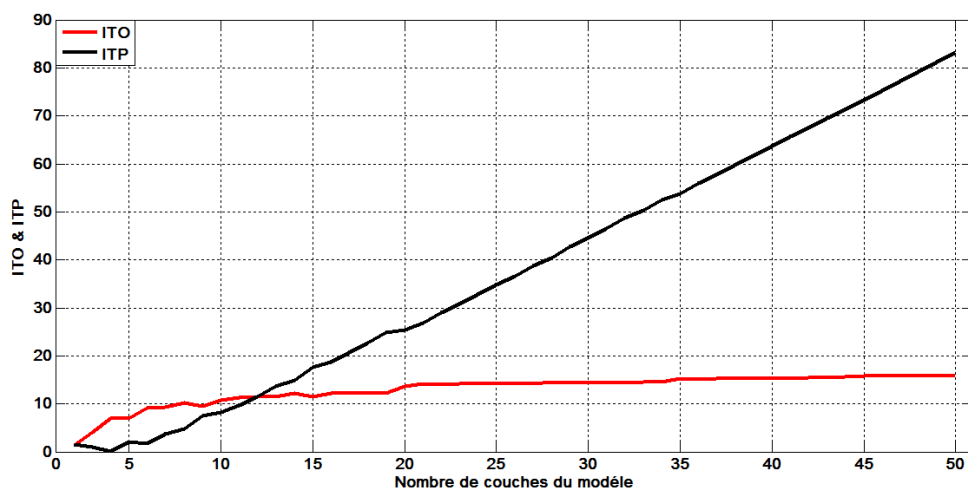


Figure 2.7 : Représentation de l'information totale obtenue (ITO) avec l'information totale perdue (ITP) en fonction du nombre de couches de chaque solution

Ainsi, le fait que l'ITO converge vers une valeur constante en augmentant le nombre de couches, l'idée dans cette étude est qu'une solution unique peut être déterminée grâce au degré de résolution DR qui est inversement proportionnel au nombre de terrains. On obtient alors la solution la mieux résolue et qui coïncide avec le degré de résolution DR le plus élevé. Dans l'exemple présenté dans cette section, ce dernier correspond à la solution à quatre couches comme c'est illustré dans la figure 2.8.

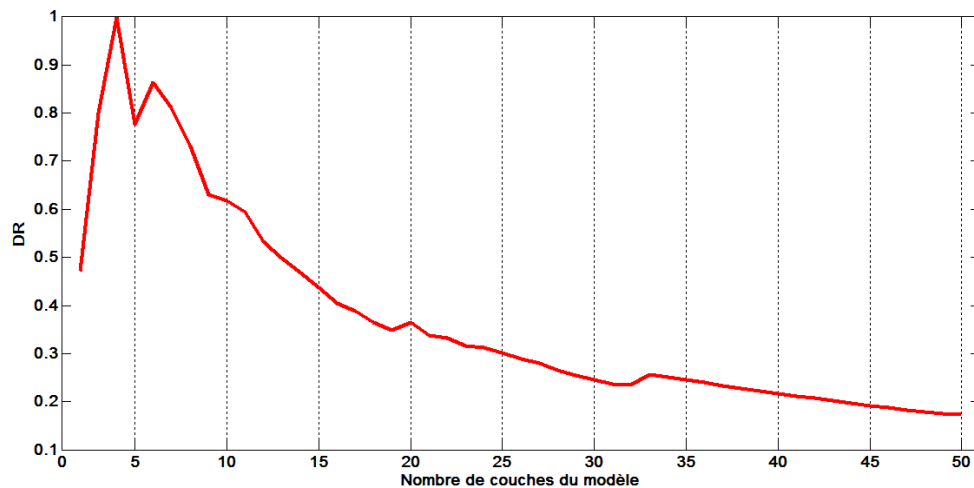


Figure 2.8 : Représentation du degré de résolution DR en fonction du nombre de couches de chaque solution

Cependant, l'expérience a montré que les solutions qui convergent vers des minimas locaux peuvent avoir des degrés de résolution plus élevés que la solution recherchée. Donc, en ayant à l'esprit que la solution la mieux résolue est celle possédant le DR le plus élevé et le RMS le plus faible, cette dernière est en évidence, celle avec un rapport DR/RMS le plus élevé. Pour notre exemple la solution obtenue est représenté en rouge dans la figure 2.9.

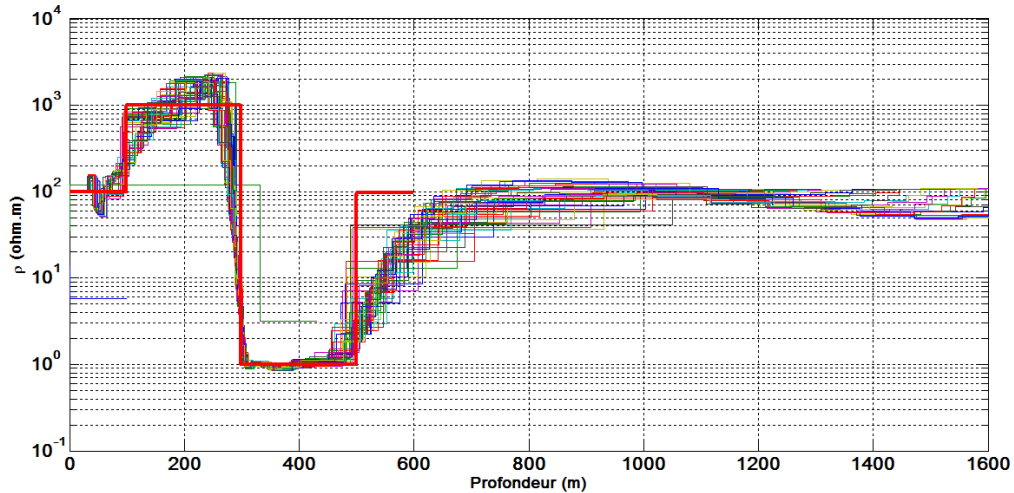


Figure 2.9 : Représentation de la solution la mieux résolue selon notre critere de selection (en rouge) ainsi que les 48 autres solutions obtenues à partir de l'inversion conjointe des données synthétiques générées du modèle de la figure 2.2 et perturbées avec un bruit gaussien de 1%.

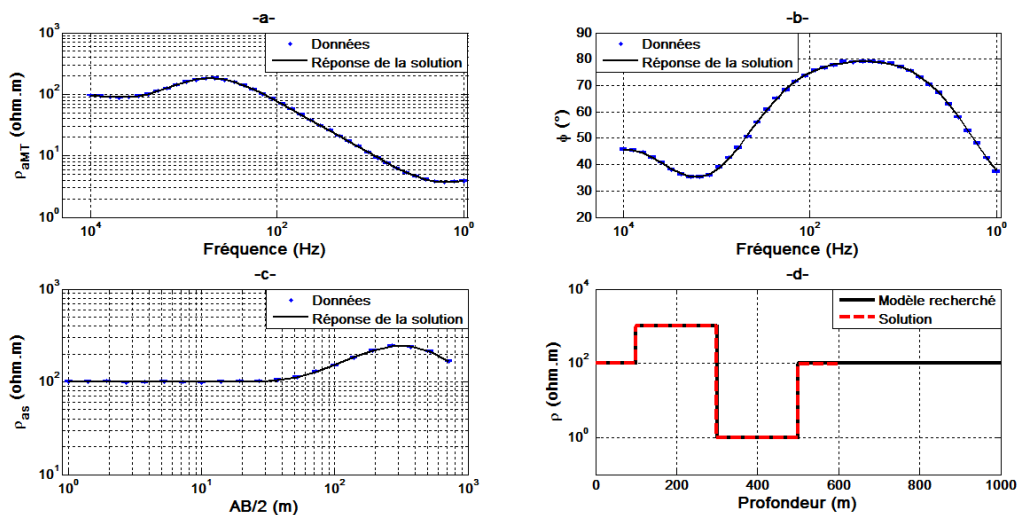


Figure 2.10 : Résultat de l'inversion conjointe des données synthétiques générés du modèle a quatre couches de la figure 2.2 (a) ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes de la AMT (b) ajustement de la réponse de la solution aux phases (c) ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes Schlumberger (d) coincidence de la solution la mieux résolue selon notre critere de selection avec le modèle recherché

On remarque de la figure 2.10 le parfait ajustement de la solution obtenue par notre approche avec le modèle recherché (modèle duquel nos données synthétiques ont été générées), cela montre que grace au critère de selection développé ici on arrive à avoir une solution unique et réaliste. Cette observation est appuyée par les tests de validités réalisés sur des données réelles et synthétiques dans le chapitre suivant.

1.10. Condition d'arrêt du processus itératif :

L'algorithme développé dans cette étude consiste à faire varier le nombre de couches du modèle initial afin de générer plusieurs solutions avec le processus d'inversion tel qu'il est formulé ci-dessus. Ainsi, notre algorithme comporte deux procédures itératives imbriquées dont des conditions d'arrêt doivent être définies.

Le processus itératif d'inversion s'arrête lorsque l'ajustement entre la réponse du modèle et les mesures de deux itérations consécutives est minimale $\left(\frac{\text{RMS}(m^k) - \text{RMS}(m^{k-1})}{\text{RMS}(m^k)} < 1\% \right)$, ou lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint.

Concernant l'arrêt de notre algorithme cela se fait lorsque l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- Il n'y a pas une amélioration de l'information totale obtenue ($ITO < ITP$),
- le nombre maximal de couches (n_{max}) définissant un système surdéterminé est atteint $\left(n_{max} = \text{entier inférieur de } \left(\frac{N-2}{2} \right) \right)$.

1.11. Programme d'inversion et son exécution :

L'algorithme développé dans cette étude se résume comme suit :

Algorithme
<p>DEBUT,</p> <p>d, D, n_{max}, max_k, $n = 2$,</p> <p>Tant que ($n < n_{max}$) faire,</p> <p>Nombre de paramètres : $M = 2n - 1$,</p> <p>Détermination du modèle initial : m^0,</p> <p>Détermination de la matrice de contrainte : L,</p> <p>Calcul de la réponse du modèle : $f(m^0)$,</p> <p>Calcul de l'erreur $\text{RMS}(m^0)$,</p> <p>Pour : $k = 1: max_k$,</p> <p>Calcul de la matrice Jacobienne : J,</p> <p>Détermination du paramètre de régularisation : λ,</p> <p>Résolution du système linéaire : $\Delta m^k = (\hat{J}^T \hat{J} + \lambda L^T L)^{-1} \hat{J}^T D e^k$,</p>

```

Recherche  $\tau = \tau_{opt}$  optimal minimisant  $\Phi(m^{k-1} + \tau\Delta m^k)$ ,
Calcul du nouveau modèle :  $m^k = m^{k-1} + \tau_{opt}\Delta m^k$ ,
Calcul de la réponse du modèle :  $f(m^k)$ ,
Calcul de l'erreur  $RMS(m^k)$ ,
  Si  $\left(\frac{RMS(m^k)-RMS(m^{k-1})}{RMS(m^k)} < 1\% \text{ ou } k = \max k\right)$  alors
    Enregistré la solution :  $m^k$ ,
    Calcul de la matrice de résolution :  $R^M$ ,
    Calcul de l'information totale obtenu et perdu : ITO, ITP,
    Calcul du degré de résolution : DR,
    Sortir de la boucle,
  Fin de si,
Fin de pour,

Si  $(ITO < ITP)$  alors
  Sortir de la boucle,
Fin de si,
 $n = n + 1$ ,
Fin de tant que,
Détermination de la solution qui correspond au rapport DR/RMS le plus élevé,
FIN,

```

Ce dernier est écrit en langage MATLAB et nécessite pour son exécution deux fichiers d'entrée respectivement pour les deux méthodes AMT et Schlumberger. Ces fichiers contiennent les mesures et les erreurs sur les données (ϵ) (voir tableaux 2.1 et 2.2) et sont en format ASCII. Pour une machine standard de 3 Go de RAM et un CPU double cœur de 2Ghz, on arrive à calculer les solutions en 25 secondes en moyen. Les résultats obtenus sont sauvegardés en format binaire fichier (.MAT) que MATLAB génère.

f (Hz)	ρ_{aMT} (Ω m)	ϕ ($^\circ$)	$\epsilon_{\rho_{aMT}}$ (Ω m)	ϵ_{ϕ} ($^\circ$)
4400	54.6049	58.5932	0.0672	0.0338
3600	50.7199	57.1961	0.0967	0.0525
3000	47.8659	56.0826	0.1199	0.0689
2600	42.0660	56.6056	0.1381	0.0903
2200	39.7611	55.8829	0.0980	0.0678
1800	32.6297	54.4703	0.1194	0.1006
1500	26.4035	47.7000	0.4240	0.4416

Tableau 2.1 : Format du fichier d'entré pour les mesures AMT.

$AB/2(m)$	$\rho_{as}(\Omega m)$	$\varepsilon_{\rho_{as}}(\Omega m)$
1	165.8	1.8
1.5	135	2.3
2	135	1.0
2.5	112	1.5
3	117.8	1.2
4	116	0.9
5	100	1

Tableau 2.2 : Format du fichier d'entré pour les mesures Schlumberger.

Chapitre 3 : Application de l'algorithme d'inversion sur des données synthétiques et réelles :

L'algorithme développé dans ce travail est basé sur l'inversion simultanée des données DC et AMT avec une recherche de la solution physique la mieux résolue sans informations a priori tel que c'est décrit dans le chapitre précédent. Afin de valider cette approche, notre algorithme d'inversion doit être testé sur des données synthétiques et réelles.

Dans ce chapitre, nous allons montrer dans un premier temps l'efficacité de l'algorithme d'inversion développé dans cette étude à résoudre les problèmes d'équivalence et de suppression. Puis, voir la stabilité des solutions obtenues face au bruit. Et pour finir, un teste de validité sur des données réelles est fait.

3.1. Application sur des données synthétiques :

On considère que toutes les données synthétiques présentées ci-dessous sont en conformité avec les méthodes d'acquisitions actuelles. on assume alors que les données AMT (résistivités apparentes et phases) sont générées pour des fréquences allant de 1 à 10000 Hz avec 10 sorties par décade et 7 sorties par décade pour les données Schlumberger avec un $AB/2$ maximal de 700 m. Dans la pratique les données géophysiques contiennent du bruit, leur distribution peut-être une fonction compliquée, mais par simplicité on considère généralement qu'elles possèdent une distribution gaussienne. Ainsi pour perturber nos données, on leurs ajoute un certain pourcentage d'elles même multiplié par une variable aléatoire qui suit une loi gaussienne de moyenne 0 et de variance proportionnelle aux données. En ce qui concerne les données AMT, un niveau de bruit de 1% sur les résistivités apparentes correspond à une perturbation de $0,27^\circ$ sur les phases.

Pour le choix des modèles cela est fait de telle façon que les indéterminations liées à ces deux méthodes de prospection (DC et AMT) tel que le principe d'équivalence et de suppression soient représentées. A cet effet, nous avons choisi trois modèles pour générer nos données synthétiques. Le premier modèle (voir figure 3.1) est un trois couches avec un terrain intermédiaire résistant de 1000 ohm-m pris entre deux conducteurs de 100 ohm-m, les épaisseurs respectives de ces terrains sont de 300, 300 m et un demi-espace infini. Le second modèle (voir figure 3.2) est un quatre couches dont la résistivité diminue de 100 à 1 ohm-m

avec des épaisseurs de 40, 80 et 160 m et des résistivités de 100, 30 et 10 ohm-m et un demi-espace infini de 1 ohm-m. Le dernier modèle est un cinq couches (voir figure 3.3) identique à celui présenté dans la figure 3.2 pour les caractéristiques des trois premiers terrains et du demi-espace infini avec un ajout d'une quatrième couche d'épaisseur de 320 (m) et de résistivité de 100 ohm-m.

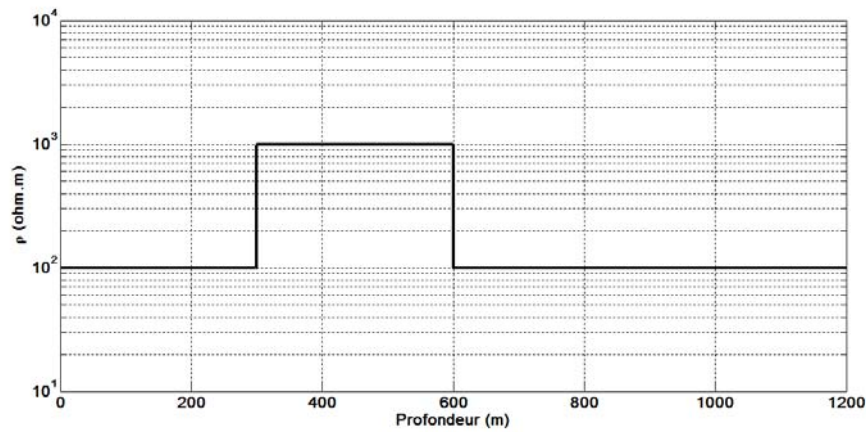


Figure 3.1 : Modèle à trois couches avec des épaisseurs de 300 m et 300 m et de résistivités de 100 ohm-m, 1000 ohm-m et un demi-espace infini de 100 ohm-m.

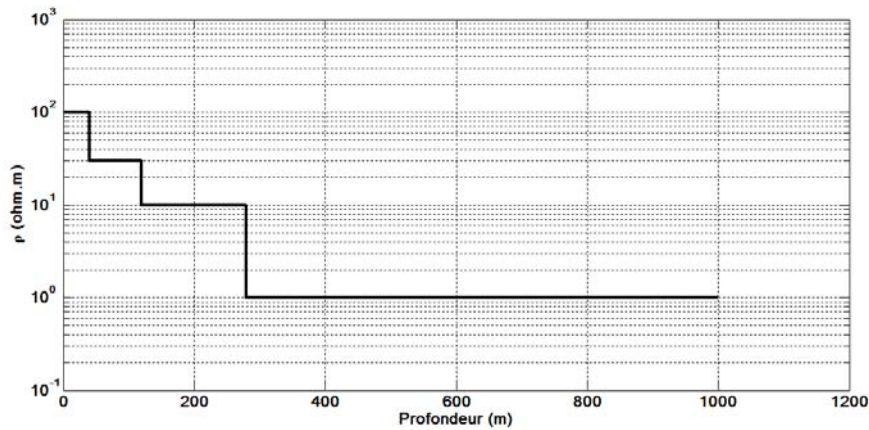


Figure 3.2 : Modèle à quatre couches avec des épaisseurs de 40, 80 et 160 m et de résistivités de 100, 30, 10 et un demi-espace infini de 1 ohm-m.

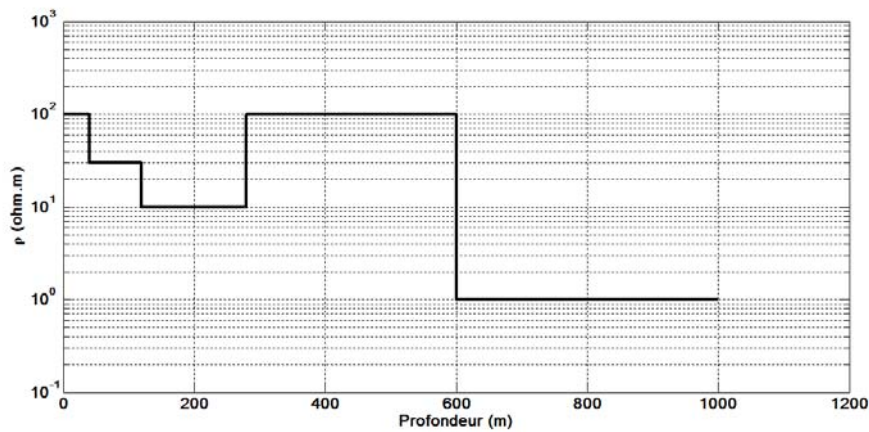


Figure 3.3 : Modèle de cinq couches avec des épaisseurs de 40, 80, 160 et 320 m et de résistivités de 100, 30, 10, 100 et un demi-espace infini de 1 ohm-m.

3.1.1. Apport de l'inversion conjointe dans la résolution des ambiguïtés liées aux données AMT et Schlumberger :

Afin de montrer l'apport de l'algorithme d'inversion développé dans ce travail dans la résolution des ambiguïtés liées aux méthodes AMT et DC, nous avons généré des données synthétiques à partir des modèles présentés ci-dessus avec un niveau de bruit faible de 2%, ces dernières sont représentées dans les figures 3.4, 3.5 et 3.6 qui correspondent respectivement aux modèles de 3, 4 et 5 couches.

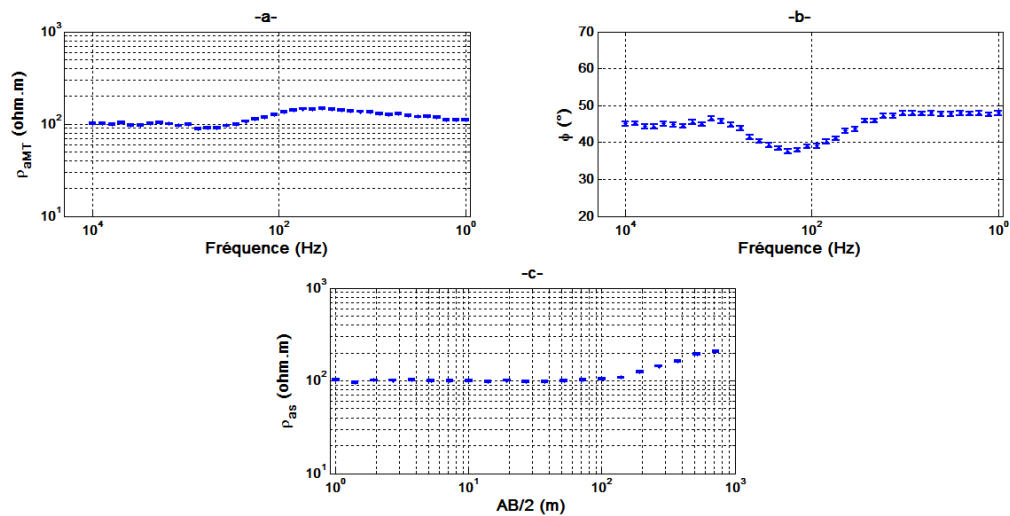


Figure 3.4 : Données synthétiques générées à partir du modèle à trois couches de la figure 3.1 (a) Résistivités apparentes de l'AMT (b) Phases (c) Résistivités apparentes DC.

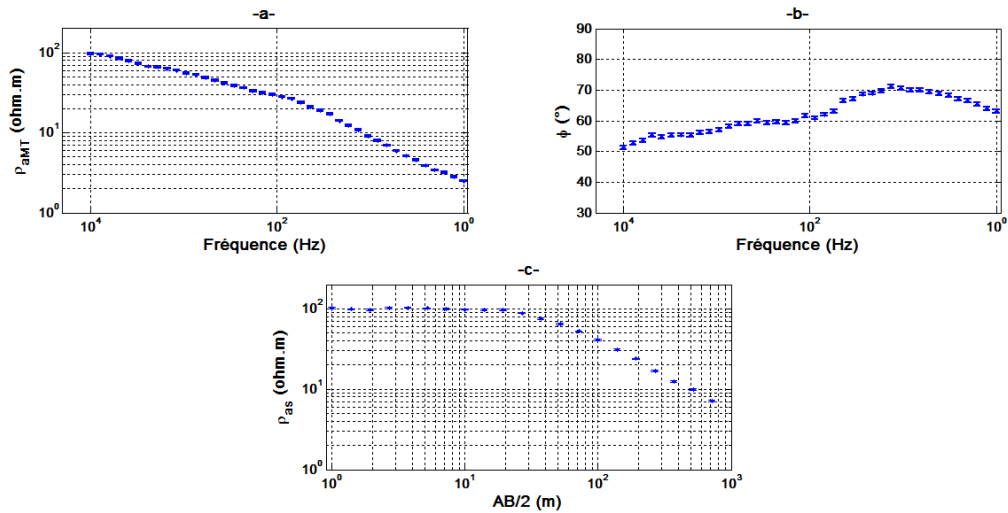


Figure 3.5 : Données synthétiques générées à partir du modèle à quatre couches de la figure 3.2 (a) Résistivités apparentes de l'AMT (b) Phases (c) Résistivités apparentes DC.

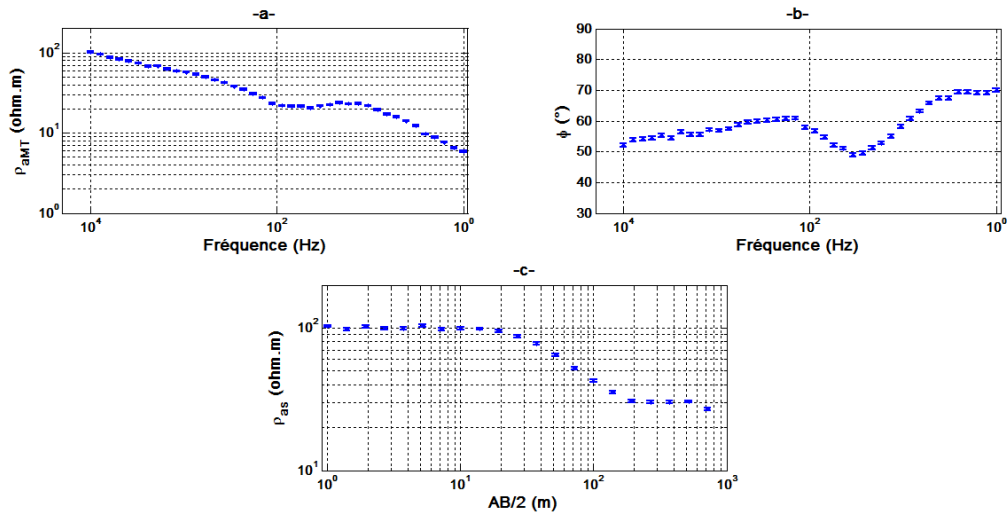


Figure 3.6 : Données synthétiques générées à partir du modèle à cinq couches de la figure 3.3 (a) Résistivité apparentes de l'AMT (b) Phases (c) Résistivités apparentes DC

Les données présentées ci-dessus sont inversées séparément et conjointement avec le code développé dans ce travail. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 3.7, 3.8 et 3.9.

L'apport de l'inversion conjointe des données AMT et DC dans la résolution du problème d'équivalence est bien connu (Vozoff et Jupp, 1975 ; Gustafson and McEuen, 1987). Cependant, dans ce travail une nouvelle approche d'inversion a été développée et doit être testée sur ce genre de problème pour démontrer son efficacité à les résoudre. Le modèle à trois couches choisi ici pour représenter le problème d'équivalence, a une couche intermédiaire résistante afin de rendre le problème plus complexe car la méthode de

prospection AMT a une faible sensibilité aux couches résistantes et la réponse d'une telle couche en DC dépend essentiellement de sa résistance transverse (produit résistivité-épaisseur).

Pour l'inversion des données Schlumberger seule, on arrive à bien déterminer que les caractéristiques de la première couche, d'autre part, pour l'inversion des données AMT, seule la résistivité de la deuxième couche est mal défini. Ainsi, l'inversion séparée des données AMT et DC n'arrive pas à contraindre la couche intermédiaire de 1000 ohm-m contrairement à l'inversion conjointe où on retrouve le modèle à trois couches duquel sont générées nos données (voir figure 3.7).

Les résultats quantitatifs sont résumés dans le tableau 3.1, ces derniers montrent que notre terrain à trois couches est interprété par un quatre couches pour l'inversion des données DC et AMT et que l'inversion conjointe donne comme solution un cinq couches.

modèles	$\rho_1(\Omega m)$	$\rho_2(\Omega m)$	$\rho_3(\Omega m)$	$\rho_4(\Omega m)$	$\rho_5(\Omega m)$	$h_1(m)$	$h_2(m)$	$h_3(m)$	$h_4(m)$
Modèle recherché	100	1000	100	-	-	300	300	-	-
Solution DC	99.2	101	1930	66	-	14	297	159	-
Solution AMT	100.1	624	99.2	109.9	-	294	331	2642	-
Solution AMT&DC	100.1	99.9	1019	99.4	94.3	0.6	297	306	3286

Tableau 3.1 : Résultats quantitatifs obtenus de l'inversion séparée et conjointe des données AMT et Schlumberger générées du modèle à trois couches (voir figure 3.4).

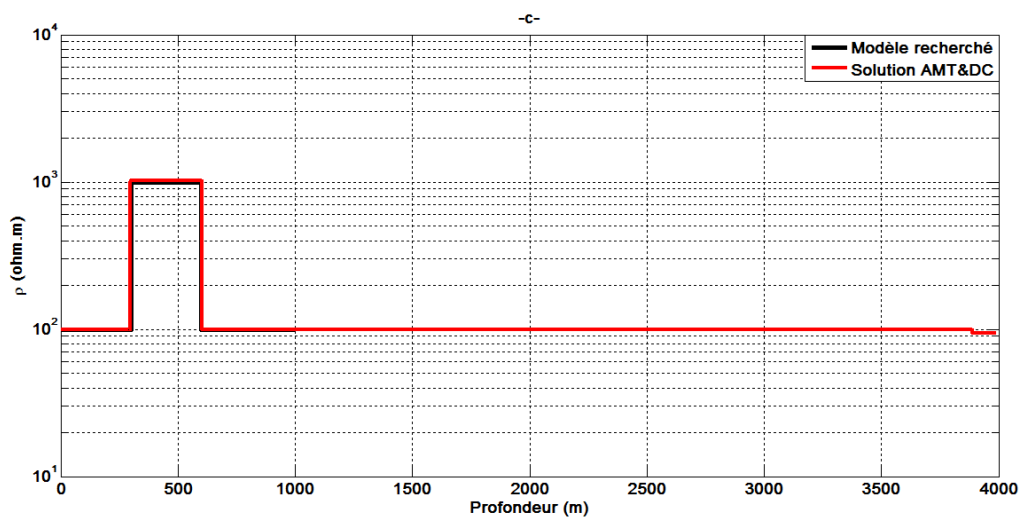
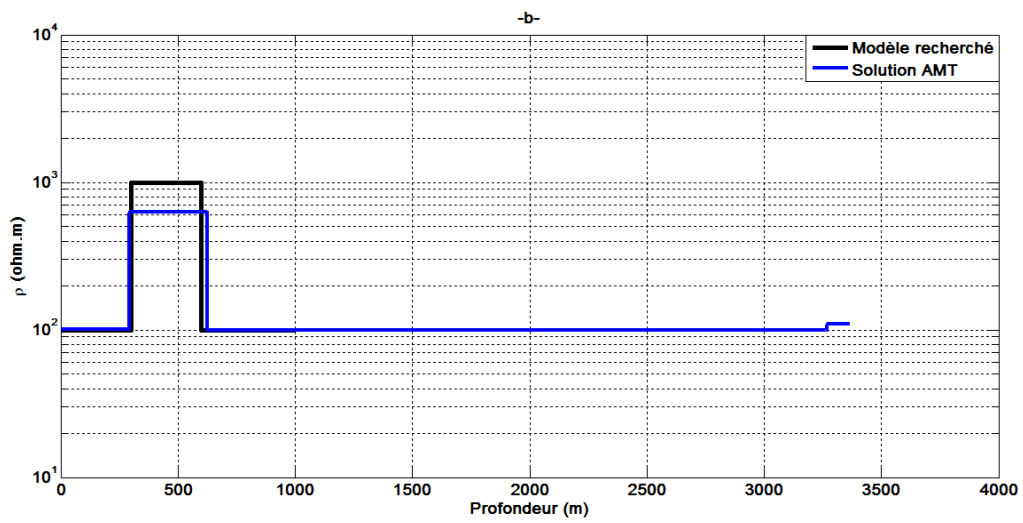
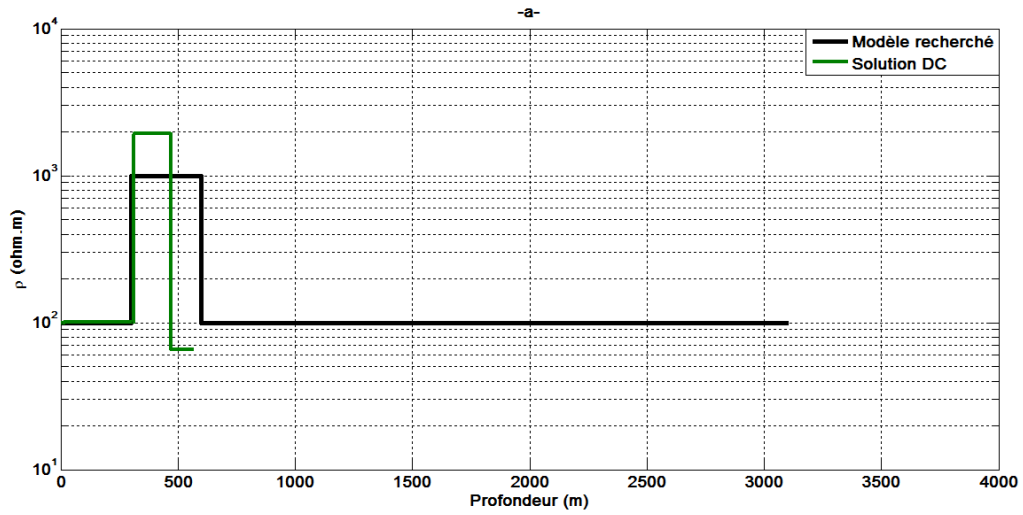


Figure 3.7 : Résultats de l'inversion conjointe et séparée des données synthétiques générées du modèle à trois couches (voir figure 3.4). Ajustement de la solution avec le modèle recherché (modèle du quel les données synthétiques ont été générées) (a) Solution obtenue de l'inversion des données Schlumberger (b) Solution obtenue de l'inversion des données AMT (c) Solution obtenue de l'inversion conjointe des données Schlumberger & AMT.

Le modèle à quatre terrains de la figure 3.2 a été choisi dans le but d'illustrer l'effet de suppression. Les couches intermédiaires de ce modèle ne modifient pas le diagramme de sondage DC ou AMT (voir figure 3.5), et on ne peut donc en déduire leur existence dans ce dernier. Les techniques d'inversion actuelles sont incapables de résoudre cette indétermination sans informations a priori sur le nombre de couches.

Les résultats obtenus de l'inversion des données générées de ce modèle sont regroupés dans le tableau 3.2 ainsi que la figure 3.8. Première observation est que notre terrain à quatre couches est interprété par un trois couches pour les données DC, un cinq couches pour les données AMT et un six couches pour l'inversion conjointe. On observe aussi dans la figure 3.8 le parfait ajustement des solutions obtenues avec le modèle recherché pour l'inversion conjointe ainsi que pour l'inversion des données AMT. d'autre part, la solution DC ne détermine correctement que les paramètres de la première couche.

modèles	$\rho_1(\Omega m)$	$\rho_2(\Omega m)$	$\rho_3(\Omega m)$	$\rho_4(\Omega m)$	$\rho_5(\Omega m)$	$\rho_6(\Omega m)$	$h_1(m)$	$h_2(m)$	$h_3(m)$	$h_4(m)$	$h_5(m)$
Modèle recherché	100	30	10	1	-	-	40	80	160	-	-
Solution DC	99.8	25.6	1.2	-	-	-	40	144	-	-	-
Solution AMT	100.4	30.9	10	1	0.9	-	40	79	160	264	-
Solution AMT&DC	100	99.7	30.2	10.2	1	1	0.7	40	79	161	235

Tableau 3.2 : Résultats quantitatifs obtenus de l'inversion séparée et conjointe des données AMT et Schlumberger générées du modèle à quatre couches (voir figure 3.5).

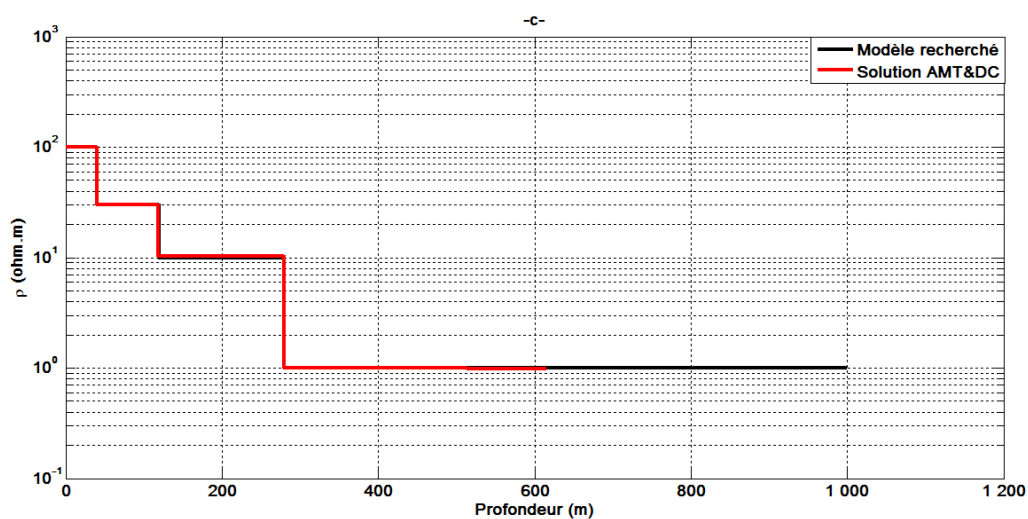
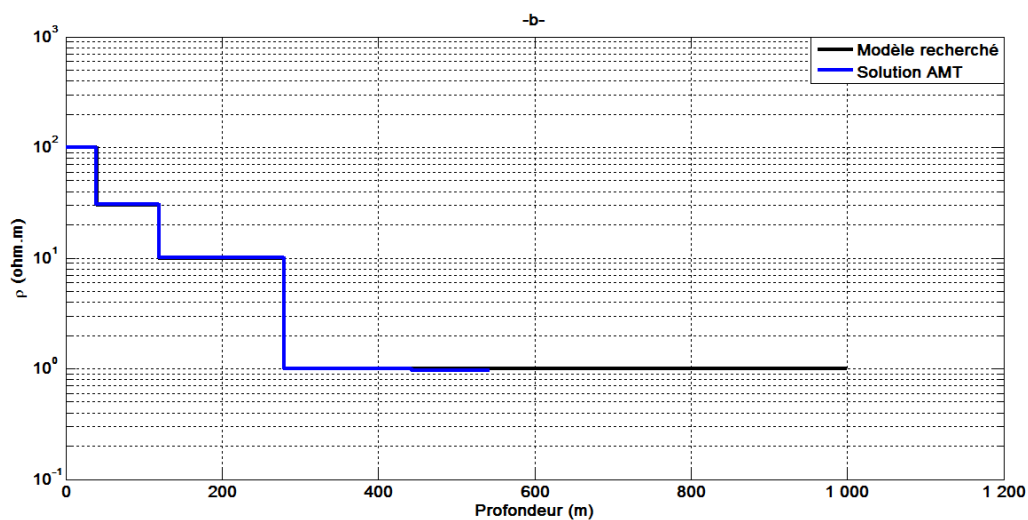
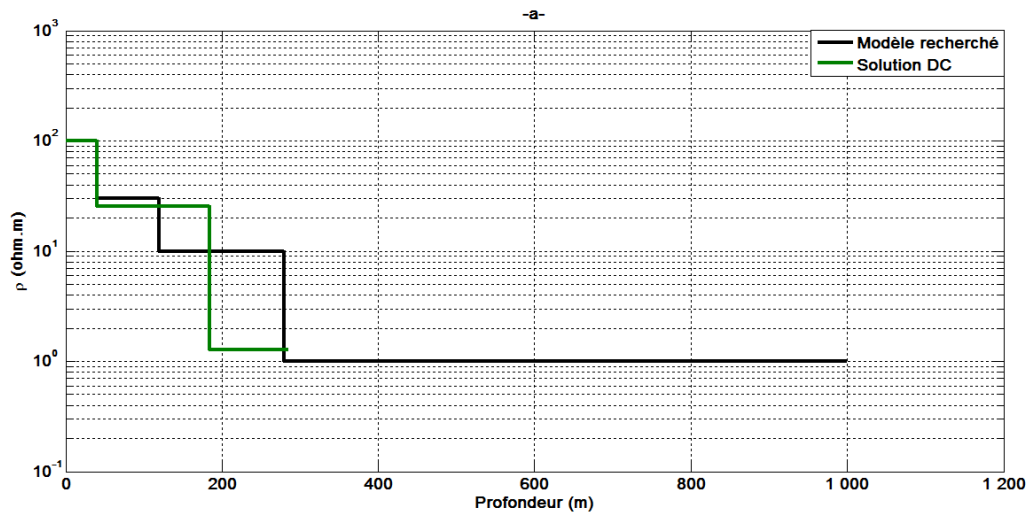


Figure 3.8 : Résultats de l'inversion conjointe et séparée des données synthétiques générées du modèle à quatre couches (voir figure 3.5). Ajustement de la solution avec le modèle recherché (modèle du quel les données synthétiques ont été générées) (a) Solution obtenue de l'inversion des données Slumberger (b) Solution obtenue de l'inversion des données AMT (c) Solution obtenue de l'inversion conjointe des données Slumberger & AMT.

Le dernier modèle (voir figure 3.3) duquel on a calculé les données synthétiques (voir figure 3.6) représente une combinaison des deux premiers terrains (3 et 4 couches), on a alors un cinq couches qui illustre les deux effets de suppression et d'équivalence en même temps.

Les résultats de l'inversion de ces données synthétiques sont résumés dans le tableau 3.3. Ce dernier montre une surdétermination du nombre de couches pour les trois solutions DC, AMT et AMT&DC. D'autre part, les solutions qui sont représentées dans la figure 3.9 montrent que dans ce cas la aussi l'inversion conjointe donne une solution semblable au modèle recherché et que les résultats de l'inversion des données AMT n'arrivent pas à contraindre les paramètres de la 4 couches. Concernant l'inversion des données DC la solution obtenue ne représente pas le modèle duquel les données ont été calculées.

modèles	$\rho_1(\Omega m)$	$\rho_2(\Omega m)$	$\rho_3(\Omega m)$	$\rho_4(\Omega m)$	$\rho_5(\Omega m)$	$\rho_6(\Omega m)$	$\rho_7(\Omega m)$	$h_1(m)$	$h_2(m)$	$h_3(m)$	$h_4(m)$	$h_5(m)$	$h_6(m)$
Modèle recherché	100	30	10	100	1	-	-	40	80	160	320	-	-
Solution DC	98	99	21	6	144	0.7	-	0.1	46	127	78	223	-
Solution AMT	100.4	31.2	9.5	63	1	1	-	39	80	142	342	221	-
Solution AMT&DC	101	100.2	30.2	9.9	106.3	1	0.9	0.5	39	80	158	318	279

Tableau 3.3 : Résultats quantitatifs obtenus de l'inversion séparée et conjointe des données AMT et Schlumberger générées du modèle à cinq couches (voir figure 3.6).

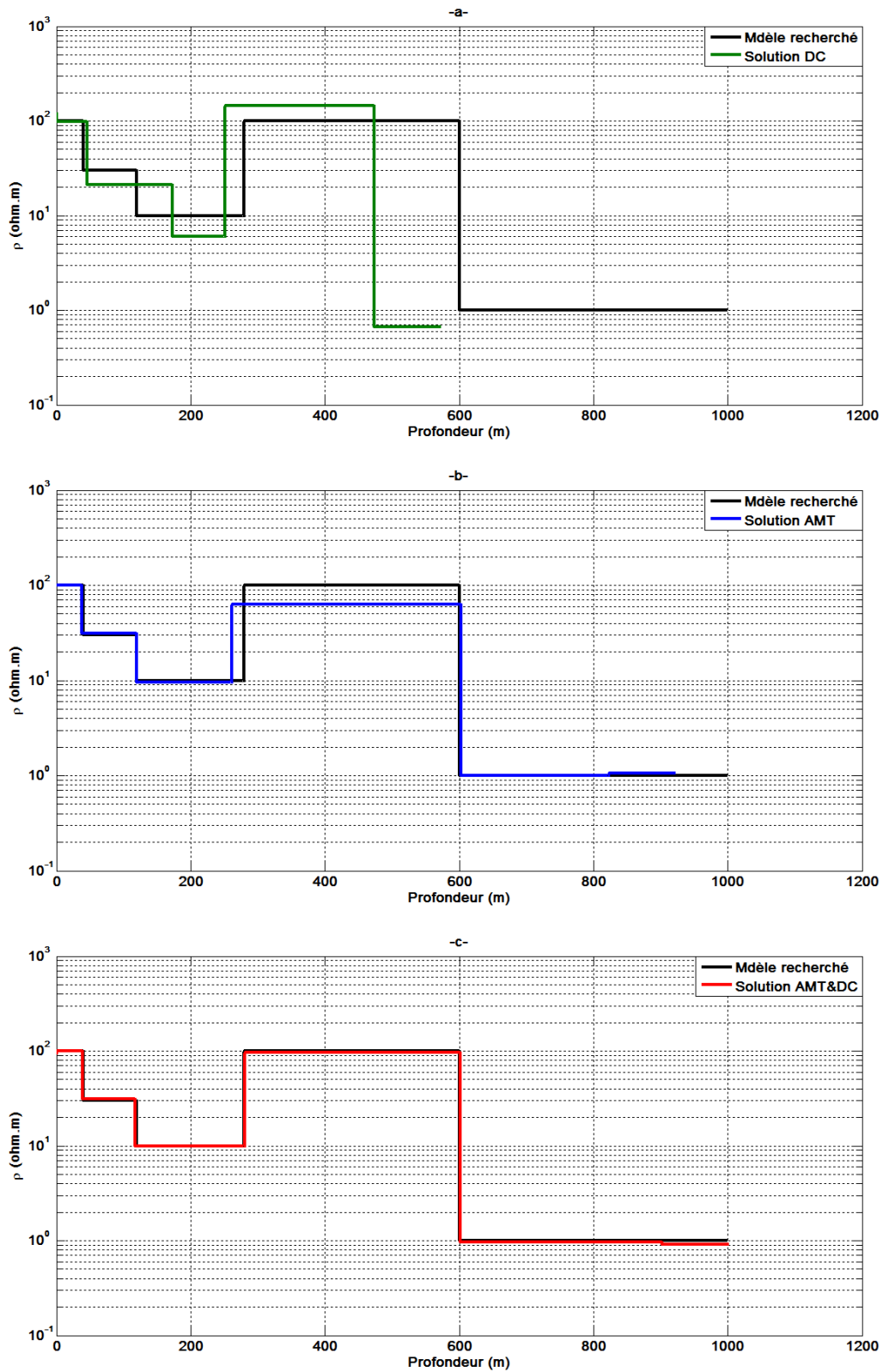


Figure 3.9 : Résultats de l'inversion conjointe et séparée des données synthétiques générées du modèle à cinq couches (voir figure 3.6). Ajustement de la solution avec le modèle recherché (modèle du quel les données synthétiques ont été générées) (a) Solution obtenue de l'inversion des données Schlumberger (b) Solution obtenue de l'inversion des données AMT (c) Solution obtenue de l'inversion conjointe des données Schlumberger & AMT.

Les observations obtenues de cette étude révèlent que lorsque l'algorithme d'inversion développé dans ce travail est appliqué sur un seul jeu de données DC ou AMT le problème d'équivalence est mal résolu. D'autre part, grâce à notre nouvelle approche le problème de suppression est surmonté par l'inversion des observations AMT ce qui n'est pas le cas pour l'inversion des données DC. Nous en déduisons aussi, que l'application de notre algorithme d'inversion aux mesures DC et AMT conjointement, résout parfaitement les problèmes d'équivalence et de suppression et donne des solutions très satisfaisantes pour un niveau de bruit de 2%.

L'autre observation à souligner est que notre processus d'inversion donne une surestimation du nombre de couches, cela est due au fait que notre algorithme ne dépend pas de la recherche précise du nombre de terrains mais du degré de résolution des paramètres et dans ce cas la une couche peut être interprétée comme étant deux couches ayant des caractéristiques semblables.

3.1.2. Effet du bruit sur les solutions :

L'efficacité de notre algorithme d'inversion conjointe à obtenir des résultats fiables pour un niveau de bruit faible de 2% a été démontrée dans la section précédente. Dans ce qui suit, l'objectif est de voir l'influence du bruit sur les solutions obtenues. A cet effet, on a repris les modèles des figures 3.1, 3.2 et 3.3 et calculé les données AMT et Schlumberger leurs correspondant avec différents niveaux de bruit (de moyen à très fort) de 5%, 10% et 20%. Ces données là sont inversées simultanément pour chaque niveau de bruit avec l'algorithme développé dans cette étude et les résultats obtenus sont présentés dans les figures 3.10, 3.11 et 3.12, ainsi que les tableaux 3.4, 3.5 et 3.6.

On remarque de ces résultats là que pour des perturbations moyennes de 5%, les effets d'équivalence et de suppression sont la aussi, très bien résolus avec des solutions qui coïncident parfaitement avec le modèle recherché. D'autre par, les solutions obtenues pour un niveau de bruit fort de 10%, on observe que la suppression est résolue de manière satisfaisante contrairement au problème d'équivalence où on remarque une petite perte d'information des paramètres de la couche intermédiaire résistante. Cependant les solutions obtenues restent fiables et parfaitement exploitables. Concernant le très fort niveau de bruit de 20%, l'inversion des données lui correspondant donnent des solutions peu fiables avec une perte d'informations considérable (voire les tableaux 3.4, 3.5 et 3.6). Néanmoins, malgré ce fait là

l'allure générale de nos solutions se rapproche des modèles recherchés.

Cette étude révèle la robustesse de notre algorithme d'inversion face au bruit où on arrive à avoir des solutions très fiables pour de forts niveaux de bruit.

modèles	$\rho_1(\Omega m)$	$\rho_2(\Omega m)$	$\rho_3(\Omega m)$	$\rho_4(\Omega m)$	$\rho_5(\Omega m)$	$h_1(m)$	$h_2(m)$	$h_3(m)$	$h_4(m)$
Modèle recherché	100	1000	100	-	-	300	300	-	-
Solution pour un niveau de bruit de 5%	99.4	99.2	928	102	100.1	0.9	294	302	2819
Solution pour un niveau de bruit de 10%	100.4	836	98	93	-	292	301	2958	-
Solution pour un niveau de bruit de 20%	101.6	639	96	87.8	-	279	298	3617	-

Tableau 3.4 : Résultats quantitatifs obtenus de l'inversion conjointe des données AMT et Schlumberger générées du modèle à trois couches de la figure 3.1 et perturbées avec différents niveaux de bruit de 5%, 10% et 20%.

modèles	$\rho_1(\Omega m)$	$\rho_2(\Omega m)$	$\rho_3(\Omega m)$	$\rho_4(\Omega m)$	$\rho_5(\Omega m)$	$\rho_6(\Omega m)$	$h_1(m)$	$h_2(m)$	$h_3(m)$	$h_4(m)$	$h_5(m)$
Modèle recherché	100	30	10	1	-	-	40	80	160	-	-
Solution pour un niveau de bruit de 5%	102	98.5	30	10.3	1	1.1	0.8	39	79	160	260
Solution pour un niveau de bruit de 10%	100	94	26.3	10	1	1.2	0.9	47	66	173	335
Solution pour un niveau de bruit de 20%	103	106	39	16.6	1.4	0.8	0.7	31	62	174	258

Tableau 3.5 : Résultats quantitatifs obtenus de l'inversion conjointe des données AMT et Schlumberger générées du modèle à quatre couches de la figure 3.2 et perturbées avec différents niveaux de bruit de 5%, 10% et 20%.

modèles	$\rho_1(\Omega m)$	$\rho_2(\Omega m)$	$\rho_3(\Omega m)$	$\rho_4(\Omega m)$	$\rho_5(\Omega m)$	$\rho_6(\Omega m)$	$\rho_7(\Omega m)$	$h_1(m)$	$h_2(m)$	$h_3(m)$	$h_4(m)$	$h_5(m)$	$h_6(m)$
Modèle recherché	100	30	10	100	1	-	-	40	80	160	320	-	-
Solution pour un niveau de bruit de 5%	100	101	28.5	9.7	99.2	1.1	1	0.6	42	77	151	325	336
Solution pour un niveau de bruit de 10%	99.1	100.5	36	9.1	120.8	1	1	0.6	33	85	155	308	279
Solution pour un niveau de bruit de 20%	103	105	36	10.4	105	0.85	1	0.5	35	80	202	273	291

Tableau 3.6 : Résultats quantitatifs obtenus de l'inversion conjointe des données AMT et Schlumberger générées du modèle à cinq couches de la figure 3.3 et perturbées avec différents niveaux de bruit de 5%, 10% et 20%.

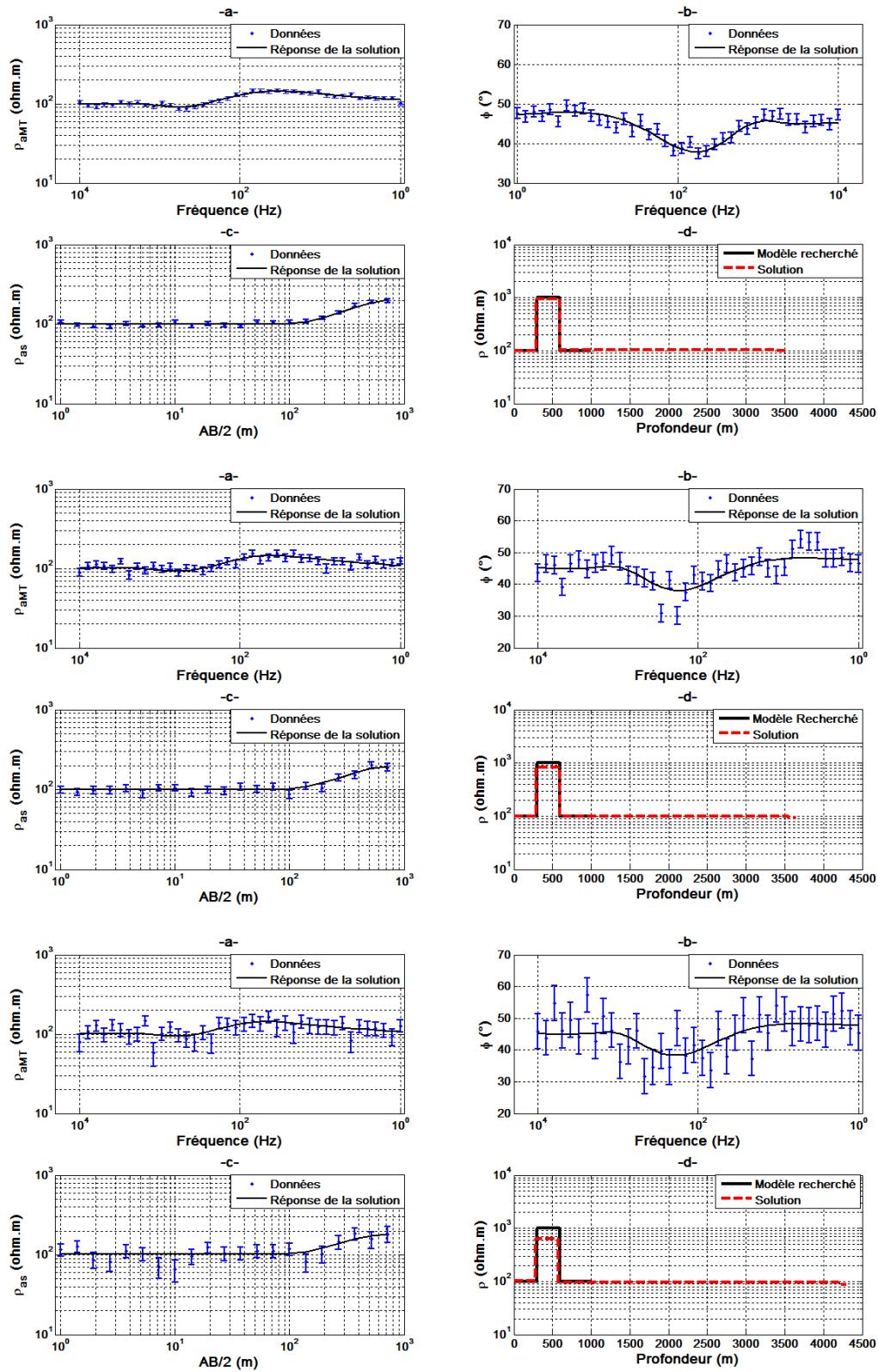


Figure 3.10 : Résultats de l'inversion conjointe des données synthétiques générées du modèle à trois couches de la figure 3.1 pour différents niveaux de bruit de 5%, 10% et 20% respectivement de haut en bas. (a) Ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes de l'AMT (b) Ajustement de la réponse de la solution aux phases (c) Ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes DC (d) Ajustement de la solution avec le modèle recherché (modèle du quel les données synthétiques ont été générées).

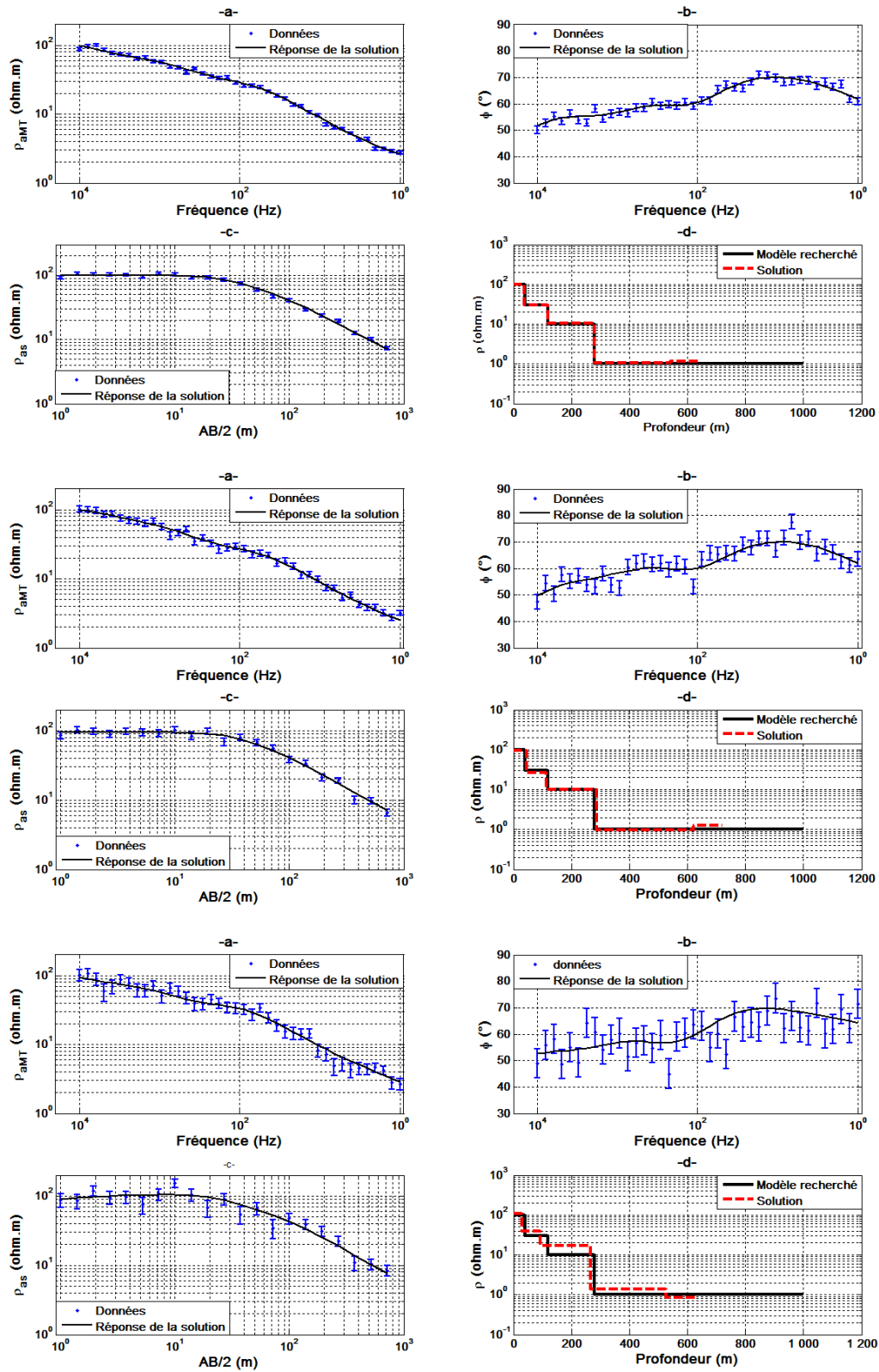


Figure 3.11 : Résultats de l'inversion conjointe des données synthétiques générées du modèle à quatre couches de la figure 3.2 pour différents niveaux de bruit de 5%, 10% et 20% respectivement de haut en bas. (a) Ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes de l'AMT (b) Ajustement de la réponse de la solution aux phases (c) Ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes DC (d) Ajustement de la solution au modèle recherché (modèle du quel les données synthétiques ont été générées).

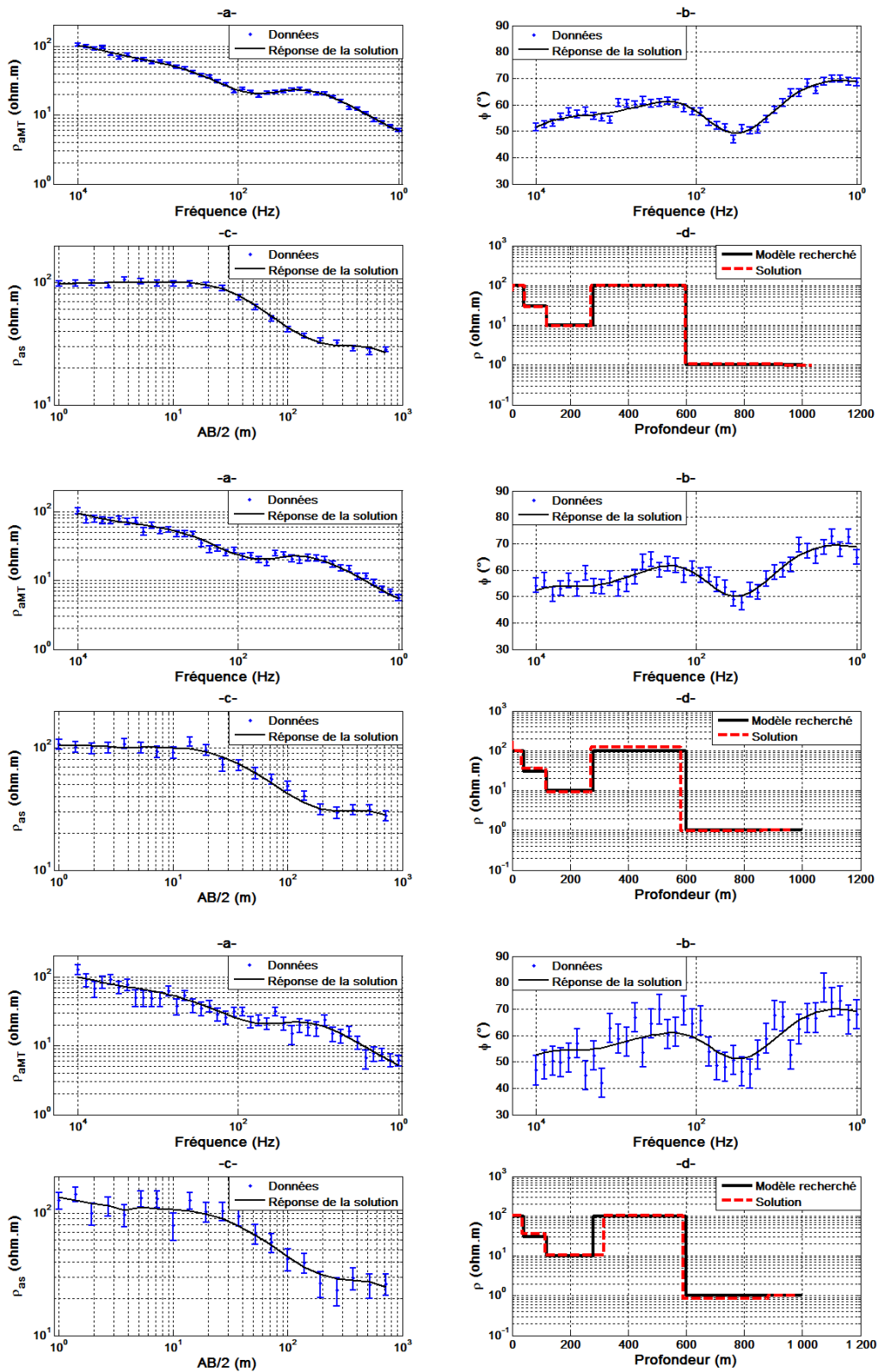


Figure 3.12 : Résultats de l'inversion conjointe des données synthétiques générées du modèle à cinq couches de la figure 3.3 pour différents niveaux de bruit de 5%, 10% et 20% respectivement de haut en bas. (a) Ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes de l'AMT (b) Ajustement de la réponse de la solution aux phases (c) Ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes DC (d) Ajustement de la solution au modèle recherché (modèle du quel les données synthétiques ont été générées).

3.2. Application sur des données réelles :

Afin de valider notre algorithme d'inversion pour des données réelles, on a utilisé deux sondages Schlumberger (SEV01, SEV02) et deux sondages AMT (SMT01, SMT02) que nous avons acquis lors d'une campagne de terrain organisée par le CRAAG (Centre de Recherche en Astronomie, Astrophysique et Géophysique) et qui a eu lieu au niveau de la commune de M'Rara (Daïra de Djamaa, Wilaya d'El Oued, Algérie). Les deux jeux de mesures (SEV01, SMT01) et (SEV02, SMT02) ont été effectués dans deux points différents nommés respectivement Sondage 1 et Sondage 2 et espacés approximativement de 1000 m. Concernant les données électriques elles sont obtenues sans estimation de leurs erreurs.

Le dispositif de mesure AMT employé (MTU 5 A system 2000 de Phoenix) permet la mesure des courants telluriques selon deux directions orthogonales, nord-sud et est-ouest, à l'aide de deux paires d'électrodes; et des variations du champ magnétique grâce à trois bobines qui sont orientées selon les directions nord-sud, est-ouest et verticale (voir figure 3.13). Les séries temporelles obtenues ont été traitées à l'aide d'un code de calcul fourni par le constructeur permettant d'extraire les fonctions de transfert magnétiques (tipper) et magnétotelluriques (tenseur d'impédance) pour les bandes de fréquences allant de 10 000 Hz à 1 Hz.

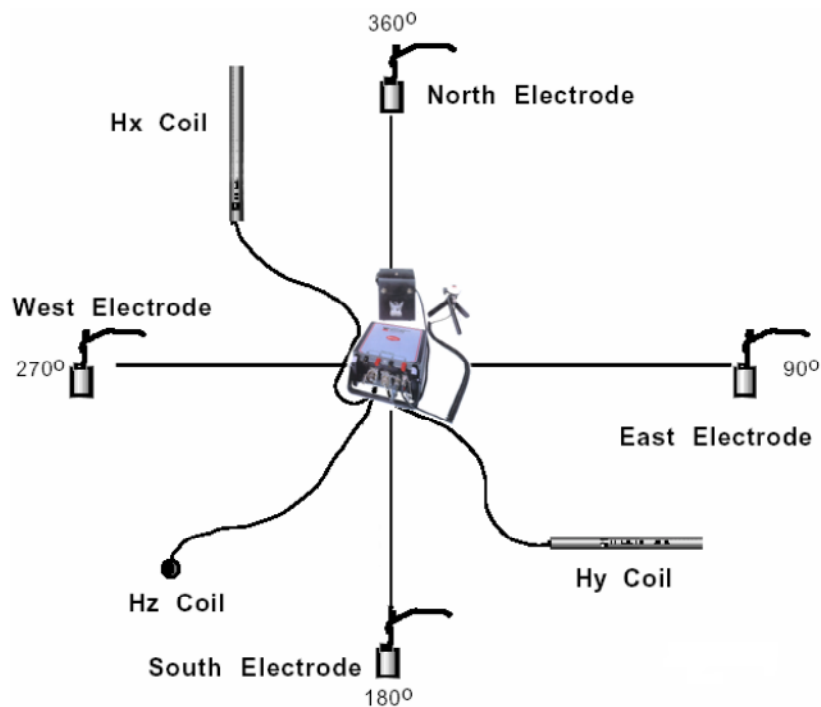


Figure 3.13 : Dispositif de mesure MTU 5 A system 2000 de Phoenix

Pour avoir une interprétation 1D du tenseur d'impédance, il est d'usage d'employer le déterminant Z_{det} du tenseur d'impédance Z qu'on assimile à l'impédance de Cagniard.

$$Z_{\text{det}} = \text{Det}(Z) = (Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}Z_{yx})^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1)$$

On peut calculer dans ce cas une résistivité apparente et une phase

$$\begin{aligned} \rho_{aMT} &= 0.2T|Z_{\text{det}}|^2, \\ \phi &= \arg(Z_{\text{det}}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

En ce qui concerne les mesures DC Schlumberger, le matériel utilisé est un résistivimètre compact (SYSCAL R2 d'Iris Instruments –France) avec convertisseur DC/DC de 250W et de tension maximale de 800V (voir figure 3.14).



Figure 3.14 : Résistivimètre SyscalR2 et son Convertisseur

La méthode consiste à injecter un courant I dans le sol, à l'aide de deux électrodes A et B dites d'injection, et de mesurer la différence de potentiel ΔV par l'intermédiaire de deux électrodes M et N dites de réception et calculer les résistivités apparentes pour le dispositif de Schlumberger tel qu'il est décrit dans la section (1.1.2)

Les données ainsi que les résultats obtenus de l'inversion conjointe de ces mesures de sondage (SEV01, SMT01) et (SEV02, SMT02) sont présentés respectivement dans les figures 3.15 et 3.16 ainsi que le tableau 3.7.

modèles	$\rho_1(\Omega m)$	$\rho_2(\Omega m)$	$\rho_3(\Omega m)$	$\rho_4(\Omega m)$	$\rho_5(\Omega m)$	$\rho_6(\Omega m)$	$h_1(m)$	$h_2(m)$	$h_3(m)$	$h_4(m)$	$h_5(m)$
Solution de l'inversion des données de sondage (SEV01, SMT01)	139.6	46.2	15	162	10.2	11.5	8	30	262	144	166
Solution de l'inversion des données de sondage (SEV02, SMT02)	15	195.6	17.2	155	13	11.5	5	20	368	105	565

Tableau 3.7: Résultats quantitatifs obtenus de l'inversion conjointe des mesures de sondage (SEV01, SMT01) et (SEV02, SMT02).

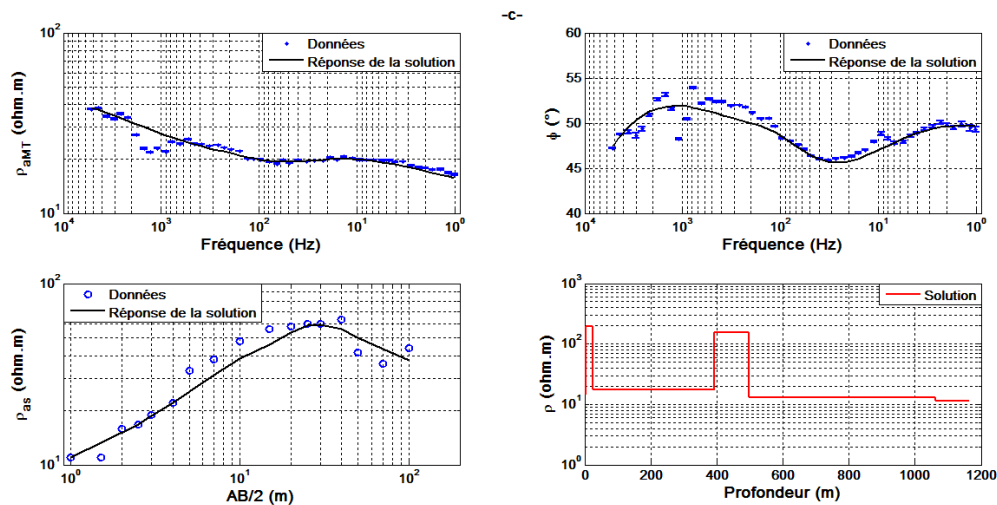


Figure 3.15: Résultat de l'inversion conjointe des données réelles (a) ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes de la MT (b) ajustement de la réponse de la solution aux phases (c) ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes DC (d) Solution

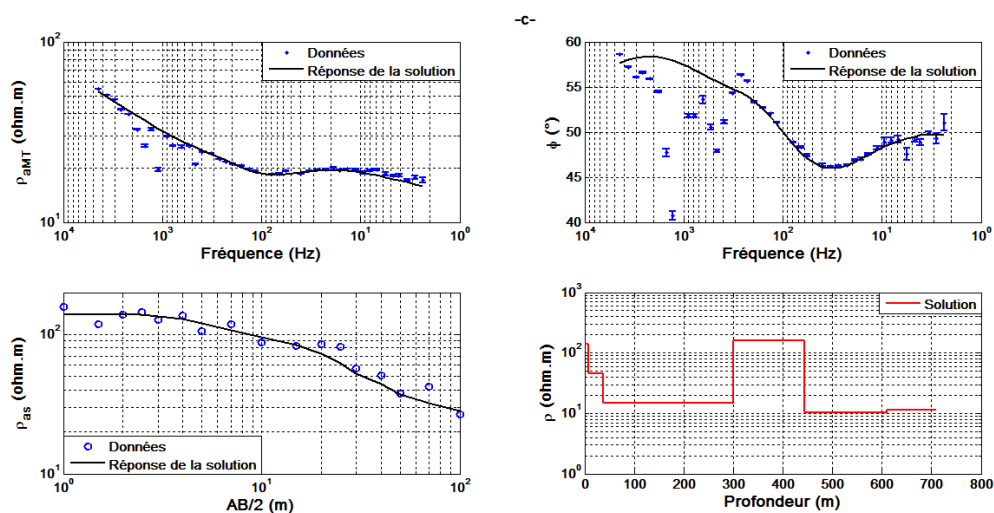


Figure 3.16: Résultat de l'inversion conjointe des données réelles (a) ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes de la MT (b) ajustement de la réponse de la solution aux phases (c) ajustement de la réponse de la solution aux résistivités apparentes DC (d) Solution

Les deux solutions représentent un modèle à six couches (voir le tableau 3.7), et mis à part les deux terrains supérieurs le reste des couches ont relativement les mêmes caractéristiques. En effet contrairement au sondage 1 où on a obtenu un premier terrain résistant suivi d'un conducteur, le sondage 2 montre un ordre inverse de ces couches. En profondeur, une formation épaisse de faible résistivité (voir h_3 et ρ_3 du tableau 3.7) est définie pour les deux solutions, elle surmonte un terrain résistant et épais (voir h_4 et ρ_5 du tableau 3.7). Au-delà de cette couche on retrouve pour les deux solutions des résistivités $\rho_5(\Omega m)$ et $\rho_6(\Omega m)$ qui sont semblables définissant donc un seul terrain et qui représente dans ce cas là un demi-espace infini de faible résistivité.

CONCLUSION :

Les techniques d'inversions actuelles exigent l'utilisation d'informations a priori afin de contraindre le modèle recherché et d'avoir ainsi une solution unique et précise. Par ce travail il a été possible de développer un algorithme d'inversion 1D automatique et applicable aux mesures audio-magnétotelluriques et Schlumberger simultanément. Pour remédier à la non-unicité de la solution, une nouvelle approche qui dépend uniquement des mesures (sans aucune information a priori) a été présentée. Celle-ci consiste à faire varier le nombre de couches du modèle initial afin de générer plusieurs solutions. Ainsi, le modèle le mieux résolu correspondant au rapport DR/RMS le plus élevé est prit comme solution.

Dans cette étude la régularisation de Tikhonov avec la dérivée première a été appliquée. Cette méthode requiert la définition d'un paramètre de régularisation. A cet effet, une nouvelle procédure avec une détermination automatique et spéciale de ce paramètre a été développée. Cette dernière recherche un multiplicateur de Lagrange proportionnel au niveau d'erreurs δ sur les données ainsi qu'aux valeurs singulières.

Afin de minimiser la fonction objective obtenue, la méthode d'optimisation de Gauss-Newton a été mise en place dans ce travail. A chaque itération un système linéaire est résolu grâce à un outil mathématique puissant qui est la décomposition en valeurs singulières généralisées (GSVD).

Pour finir, plusieurs testes de validités de cette approche on été réalisés sur des données synthétiques et réelles. L'ensemble des résultats obtenus montrent l'efficacité de l'algorithme développé dans cette étude dans la résolution des problèmes complexes tels que l'équivalence et la suppression. Aussi, la haute précision des solutions obtenues pour des niveaux de bruit fort, sont preuve de stabilité et de robustesse de cet algorithme.

BIBLIOGRAPHIE :

Albouy, Y., Andrieux, P., Rakotondrasoana, G., Ritz, M., Descloitres, M., Join, J.-L. et Rasolomanana, E. (2001). Mapping coastal aquifers by joint inversion of DC and TDEM soundings - Three case histories. *Ground Water*, 39, 87-97.

Cagnard, L. (1953). Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting, *Geophys.*, 18, p 605.

Constable, S. C., Parker, R. L., and Constable, C. G. (1987). Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52, 289-300.

Das, U. C. and D. P. Ghosh. (1974). The determination of filter coefficients for the computation of standard curves for dipole resistivity sounding over layered earth by linear digital filtering. *Geophys. Prosp.* v. 2, no. 4, pp. 765-780.

Farquharson, C.G., Oldenburg, D.W. & Routh, P.S. (2003). Simultaneous 1D inversion of loop-loop electromagnetic data for magnetic susceptibility and electrical conductivity, *Geophysics*, 68, 1857-1869.

Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W. (2004). A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems. *Geophys. J. Int.*, 156, 411-425.

Fischer, G., Schnegg, P. A., Peguiron, M., and LeQuang, B.V., (1981), An analytic one-dimensional magnetotelluric inversion scheme: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 67, 257-278.

Friedel, S. (2003). Resolution, stability and efficiency of resistivity tomography estimated from a generalized inverse approach. *Geophys. J. Int.*, 153, 305-316.

Ghosh, D.P. (1971a). The application of linear filter theory to the direct interpretation of geophysical resistivity measurements. *Geophys. Prospect.*, 19: 192-217.

Ghosh, D.P. (1971b). Inverse filter coefficients for computation of apparent resistivity standard curves for a horizontal stratified earth. *Geophys. Prospect.*, 19: 769-775

Golub, G. H. and van Loan, C. F. (1996). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press.

Gustafson, E.P., McEuen, R.B. (1987). Minimizing interpretation ambiguities through joint inversion of T surface electrical data. *Ground Water Monit. Rev.* 7, 101-113.

Haber, E. & Oldenburg, D.W. (2000). A GCV based method for nonlinear ill-posed problems, *Comput. Geosci.*, 4, 41-63.

Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 49-52.

Hansen, P. C. (1992). Regularization Tools - A Matlab Packager for Analysis and Solution of discrete ill-posed problems. Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Lyngby, <http://www.imm.dtu.dk/~pch>, 3.0 edition.

Jupp, D.L.B. & Vozoff K. (1975). Stable Iterative Methods for the Inversion of Geophysical Data, *Geophysical Journal of the Royal astronomical Society*, 42,957-976.

Kaufman, A.A. (1981). The magnetotelluric sounding method, Elsevier scientific publishing company, Amsterdam-Oxford-New York.

Koefoed, O. (1979). Geosounding principles, 1 (resistivity sounding measurements).Elsevier, Amsterdam, 276.

Lee, S.K., Kim, H.J., Song, Y., Lee, K. (2009). MT2DInvMatlab—A program in MATLAB andFORTRAN for two-dimensional magnetotelluric inversion.*Computers and Geosciences* 35, 1722–1734.

Li, Y. and Oldenburg, D. W. (1999). 3-d inversion of dc resistivity data using an l-curve criterion. In 69th Annual Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, pages 251–254.

Markku, P. (2009). <http://www.cc.oulu.fi/~mpi/Softat/Jointem.html> Menke, W. (1984). *Geophysical Data Analysis, Discret inverse theory*, Academic Press.

Marquardt, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *J. Soc. Ind. App. Math.*, 11, 431–441.

Meju, M. A. (1994a). Biased estimation: A simple framework for inversion and uncertainty analysis. *Geophys. J. Int.*, 119, 521–528.

Meju, M. A. (1994b). *Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem Theory and Practice*. Society of Exploration Geophysicists.

Meju, M.A. (1996). Joint inversion of TEM and distorted MT soundings: Some effective practical considerations. *Geophysics*,61 (1), 56-65.

Meju, M.A. (2005). Simple relative space-time scaling of electrical and electromagnetic depth sounding arrays: Implications for electrical static shift identification and joint DC-TEM data inversion. *Geophysical Prospecting*, 53, 463-479.

Menke, W. (1984). *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*. Academic press.

Menke, W. (1989). *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, volume 45 of *International Geophysics Series*. Academic Press Inc

Parker, R. L. (1980).The inverse problem of electromagnetic induction: existence and construction of solutions based on incomplete data: *J. Geophys. Res.*, 85,4421-4428.

Parker,R. L., and Whaler,K. A. (1981). Numerical methods of establishing solutions to the inverse problem of electromagnetic induction: *J. Geophys. Res.*, 86, 9574–9584.

Pedersen, L. B and Gharibi, M. (2000). Automatic 1-D inversion of magnetotelluric data: Finding the simplest possible model that fits the data. *GEOPHYSICS*, VOL. 65, NO. 3 (MAY-JUNE 2000); P. 773–782, 10 FIGS.

Raiche, A.P., Jupp. D.L.B., Rutter, H.: Vozoff, K. (1985). The joint use of coincident loop transient electromagnetic and Schlumberger sounding to resolve layered structures. *Geophysics* 50, 1618-1627.

Rigotti, A., Crossley, D.J. (1987). Reduction of ambiguity in geoelectric models using multiple data sets. *Rev.Bras. Geofis.* 5, 29-41.

Rodi, W. and Mackie, R. L. (2001). Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2-d magnetotelluric inversion. *Geophysics*, 66(1), 174–187.

Roy. K.K., Elliot, H.M. (1980). Resistivity and IP survey for delineating saline water and fresh water zones. *Geoexploration*. 18. 145-162.

Sandberg, S.K. (1993). Example of resolution improvement in geoelectrical soundings applied to groundwater investigations. *Geophys. Prospect.* 41, 207-221.

Schlumberger, C. (1920). Essais de prospection électrique du sous-sol. *C.R.Acad.SC.*,170,519

Seara, J.L., Granda, A. (1987). Interpretation of IP time domain/resistivity soundings for delineating sea-water intrusions in some coastal areas of the northeast of Spain. *Geoexploration* 24, 153-167.

Smith, J. T., and Booker, J. R. (1988). Magnetotelluric inversion for minimum structure: *Geophysics*, 53, 1565–1576.

Stefanescu, S., Schlumberger, C., Schlumberger, M. (1930). sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain à couches horizontales, homogènes et isotropes. *journal de physique et du radium*,7, 132–140.

Tarantola, A. (1987). *Inverse problem theory*. New-York : Elsevier.

Tarantola, A. (2001). Logarithmic parameters. <http://web.ccr.jussieu.fr/tarantola/Files/Professional/PapersPDF/Music.pdf>.

Tikhonov, A.V. (1950). Determination of the electrical characteristics of the deep strata of the earth's crust, *Dokl. Akad. Nauk*, v.73, p. 295.

Tikhonov, A. N. (1963). The regularization of ill-posed problems. *Dokl. Akad. Nauk.*, SSR 153, 49–52.

Tikhonov, A. N., et Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*, John Wiley, Hoboken, N. J.

van Loan, C. F. (1976). Generalizing the singular value decomposition. *SIAM J. Num. Anal.*, 13, 76–83.

- Vogel, C. R. (1996). Non-convergence of the l-curve regularization parameter selection method. *Inverse Problems*, 12, 535–547.
- Vogel, C. R. (2002). *Computational Methods for Inverse Problems. Frontiers in applied mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Vozoff, K. et Jupp, D. L. B. (1975). Joint inversion of geophysical data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 42, 977–991.
- Vozoff, K. (1972). The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins, Reprinted from geophysics, 37,98-141.
- Vozoff, K. (1986). The magnetotelluric methods, *Geophys. Reprint Ser.N°5, Soc.Expl.geophys.*
- Weener, F. (1915). Methode of mesuring earth resistivity, U.S.Bur. Standards, Sci. Paper 258,469-478.
- WU, F.T. (1968). The inverse problem of Magnetotelluric sounding, Reprinted from geophysics, 33,972-979.
- Yi, M.-J., Kim, J.-H., and Chung, S.-H. (2003). Enhancing the resolving power of least-squares inversion with active constraint balancing. *Geophysics*, 68(3), 931–941.
- Zhdanov, M. S. (2001). *Geophysical inverse theory and regularization problems. Methods in Geochemistry and Geophysics*, 36, Elsevier.
- Zhdanov, M.S. (2009). *Geophysical Electromagnetic Theory and Methods*, 43, Elsevier, 868 pages, ISBN-10: 0-444-52963-2.