

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTE DES MATHEMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en MATHEMATIQUE

Spécialité : Analyse : Modélisation Mathématique et Numérique

Par

KHEDIMI FATMA ZOIRA

Sujet

*LA STABILISATION DE QUELQUES PROBLEMES
D'EVOLUTION*

Soutenu publiquement, le 15/06/2011 devant le jury composé de :

- | | | | |
|--------------------------------------|------------------------------|----------------|-----------------------|
| M ^r . <i>R. BEBBOUCHI</i> | <i>Professeur</i> | à l'U.S.T.H.B. | Président. |
| M ^r . <i>A. KHEMMOUDJ</i> | <i>Maître de Conférences</i> | à l'U.S.T.H.B. | Directeur de mémoire. |
| M ^r . <i>A. KESSAB</i> | <i>Maître de Conférences</i> | à l'U.S.T.H.B. | Examineur. |
| M ^r . <i>M. MEDJDEN</i> | <i>Professeur</i> | à l'U.S.T.H.B. | Examineur. |
| M ^r . <i>A. TOUZALINE</i> | <i>Maître de Conférences</i> | à l'U.S.T.H.B. | Examineur. |

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Je dédie cette thèse à

Mon très cher parent.

Mes chères sœurs Hacera, Meriem, Salma et Palmine.

Mes chères amies Fatma, Habiba, Nora et Zahra.

Mon cousin et cousine et à tous mes proches.

Mon enseignant tout au long de mes études.

Fatma Zohra

Remerciements

Je tiens, avant tout, à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Ammar Khemmoudj Maître de conférence à l'U.S.T.H.B, qui a assumé la direction de cette thèse. Je voudrais surtout le remercier pour ses précieux conseils et ses encouragements continuels qui ne cessaient de me remonter le moral pendant les moments difficiles.

Je voudrais présenter mes sentiments très sincères à Monsieur R. Bebouchi Professeur à l'U.S.T.H.B pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de mon mémoire. Je souhaite également remercier Monsieur M. Medjden Professeur à l'U.S.T.H.B, Monsieur A. Kessab Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B et Monsieur A. Touzaline Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B.

J'adresse aussi mes vifs remerciements à ma mère et mon père pour le soutien affectif et matériel qu'ils m'ont apporté tout au long de mon existence. Enfin, je ne saurais terminer cette liste sans adresser un remerciement particulier à mes meilleurs amis, Fatma, Habiba, Fofa et Hadda, pour leurs qualités humaines.

RÉSUMÉ

Ce travail est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité, la régularité et la stabilisation des solutions d'un système viscoélastique dissipatif.

Pour le problème d'existence, d'unicité et de régularité on a utilisé la méthode de Galerkin.

Pour la stabilisation, on a obtenu des taux de décroissance uniforme de l'énergie en considérant un feedback non linéaire g agissant sur le bord du domaine Ω et des termes mémoires à l'intérieur du domaine Ω et sur sa frontière. Les estimations obtenus dépendent à la fois du comportement du terme d'amortissement g au voisinage de zéro et du développement de la fonction de relaxation h à l'infini. Les démonstrations sont basées sur la technique des multiplicateurs, la construction d'une fonction poids Φ (qui dépend du comportement de g au voisinage de zéro), et sur une inégalité intégrale non linéaire.

Mots-clés : équation d'onde, viscoélastique, feedback frontière, terme mémoire, la stabilisation, méthode du multiplicateur.

NOTATION

N	un entier naturel.
\mathbb{R}^N	espace euclidien réel N-dimensionnel.
\mathbb{N}	l'ensemble des entiers naturels.
Ω	un ouvert borné de \mathbb{R}^N .
$\Gamma = \partial\Omega$	frontière de Ω .
ν	le vecteur unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω .
x	$= (x_1, x_2, \dots, x_N)$ point générique de \mathbb{R}^N .
∇u	$= (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$ gradient de u .
Δu	$= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, le Laplacien.
$\operatorname{div}(u)$	$= \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}$, la divergence de u .
$\partial_\nu u$	$= \frac{\partial u}{\partial \nu}$, la dérivée normale de u .
E'	dual topologique de l'espace de Banach E .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	le crochet de dualité.
(\cdot, \cdot)	le produit scalaire.
$\ \cdot \ _E$	la norme dans l'espace E .

p	un réel tel que $1 < p < N$.
p'	l'exposant conjugué de Hölder de p , <i>i.e.</i> $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
$\ \cdot \ _p$	la norme dans l'espace $L^p(\Omega)$.
p.p.	presque partout.
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions.
$L^p(\Omega)$	$= \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} u ^p dx < \infty \right\}; 1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{ u \text{ mesurable sur } \Omega / \exists C > 0, u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$.
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / u \in L^p(\Omega), \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \}$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	adhérence de C_c^∞ dans $W^{1,p}(\Omega)$. $= \{ u \in W^{1,p}(\Omega) / u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$.
$W^{-1,p'}(\Omega)$	le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour $p \geq 1$.
$W^{1/p',p}(\partial\Omega)$	espace des traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$.
$W^{-1/p',p'}(\partial\Omega)$	le dual de $W^{1/p',p}(\partial\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$	$= W_0^{1,2}(\Omega)$.
$H^{-1}(\Omega)$	$= W^{-1,2}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$.
\rightarrow	symbole de convergence forte.
\rightharpoonup	symbole de convergence faible.
\hookrightarrow	symbole d'injection.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	5
Notation	6
Table des matières	8
1 <i>Introduction</i>	11
1.1 Historique	11
1.2 La notion de stabilisation	12
1.2.1 Stabilisation de l'équation des ondes	13
1.3 But du travail	15
2 <i>Rappels généraux</i>	20
2.1 Rappels sur les espaces fonctionnels	21
2.1.1 Espaces de Hilbert	21
2.1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	22
2.1.3 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	23
2.1.4 Trace d'une fonction	24
2.2 Quelques critères de convergence	25
2.2.1 Convergence forte	25

2.2.2	Convergence faible	25
2.2.3	Convergence faible*	26
2.3	Injections et inégalités	26
2.3.1	Injections compactes	26
2.3.2	Théorème d'Aubin-Lions	26
2.3.3	Théorème d'injection de Sobolev	27
2.3.4	Inégalités de Sobolev, Hölder, Poincaré et Young	27
2.3.5	Lemme de Gronwall	28
2.3.6	Formules de Green	29
2.4	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	29
2.4.1	Approximation de Galerkin	31
3	<i>Existence, unicité et régularité des solutions d'un système viscoélastique dissipatif</i>	32
3.1	Introduction	33
3.1.1	Théorème principal	35
3.2	Existence de la solution forte	36
3.2.1	La formulation variationnelle	36
3.2.2	Estimation à priori	39
3.2.3	Analyse du terme non linéaire	43
3.2.4	Unicité de la solution forte	46
3.3	Existence des solutions faibles	47
3.3.1	Caractérisation des conditions aux limites	49
4	<i>Le taux de décroissance d'un système viscoélastique dissipatif</i>	53
4.1	Introduction	53
4.2	Théorème principal	58
4.2.1	Estimation du taux de décroissance quand g_0 est linéaire et $1/h \leq \Phi'$	67
4.2.2	Estimation du taux de décroissance quand g est polynômiale au voisinage de zéro	69

4.2.3	Estimation du taux de décroissance quand la nonlinearité est plus forte que le noyau	70
4.3	Construction de la fonction poids dans le cas général	72
4.3.1	Cas où $\lim(-h'/h)=0$ quand $t \rightarrow \infty$	75
	Conclusion	78
	Bibliographie	79

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Historique

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'équation des ondes viscoélastique dissipative non linéaire stabilisée par un feedback g et des termes mémoires, de nasyon h l'un agissant à l'intérieur de Ω et l'autre sur sa frontière $\partial\Omega$. Le feedback g dépend de la vitesse et agit sur le bord $\partial\Omega$. Des conditions géométriques sont aussi imposées sur l'ouvert Ω .

Notre but est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème ainsi que la stabilisation du système.

Le travail comporte deux parties :

Dans la première partie, nous donnons un résultat théorique d'existence, d'unicité et de régularité de la solution ; Ce résultat a été obtenu en utilisant la méthode de Galerkin.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés à la stabilisation de la solution du problème en question. Dans cette partie, on prouve que l'énergie du système décroît vers zéro avec une estimation explicite du taux de décroissance qui dépend à la fois du comportement du feedback g au voisinage de zéro et du comportement du noyau h au voisinage de l'infini.

L'étude de la stabilisation du système est basée sur l'utilisation de la méthode du multiplicateur pour prouver des estimations de l'énergie. La démonstration est basée sur la construction d'une

fonction poids Φ (qui dépend du comportement de g au voisinage de zéro), et sur une inégalité intégrale non linéaire.

Les propriétés visco-élastiques sont un mélange des propriétés élastiques et visqueuses, si la déformation d'un matériau suit la force (la contrainte) appliquée, alors le matériau est élastique ; si c'est la dérivée de la déformation par rapport au temps (taux de déformation) qui suit la force (la contrainte), alors le matériau est visqueux. La non-linéarité peut venir du comportement du l'amortisseur, par exemple toute combinaison comportant un élément non linéaire aura un comportement non linéaire. les équations viscoélastique interviennent dans de nombreuses modélisations de phénomènes physiques et mécaniques des milieux continus. Dans cette thèse, on s'intéresse à la contrôlabilité et à la stabilisation de ces équations.

1.2 La notion de stabilisation

De façon générale, lorsqu'une dynamique évoluant dans le temps est régie par une équation de la forme :

$$\frac{du}{dt} = Au$$

où $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow H$ est une fonction de la variable t (représentant le temps) à valeurs dans un espace de Hilbert H et A un opérateur de domaine $D(A)$ dans H et quand on note $E(u, t)$ l'énergie associée, la problématique de la stabilisation consiste à trouver des fonctions F qui feront tendre l'énergie $E(u, t)$ des solutions de l'équation :

$$\frac{du}{dt} = Au + F(u)$$

vers zéro quand le temps tend vers l'infini. On dira dans ce cas que la fonction F assure une stabilisation du système. En introduisant la fonction F on exerce un contrôle qui assure une décroissance vers zéro de l'énergie. La fonction F est alors appelé un **contrôle** puisqu'il permet de contrôler l'issue de l'énergie dans le temps. On distinguera différentes stabilisations : stabilisation interne ou frontière, stabilisation forte ou exponentielle, etc...

1.2.1 Stabilisation de l'équation des ondes

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est de classe \mathcal{C}^2 . Soit ν la normale unitaire à Γ extérieure à Ω et ∂_ν l'opérateur de dérivation dans la direction normale. On considère pour (u^0, u^1) appartenant à des espaces convenables, le problème de l'équation des ondes donné par :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \begin{pmatrix} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

1.2.1.1 Stabilisation interne

La stabilisation interne consiste à trouver un contrôle $F : V \times W \longrightarrow K$ (où V, W et K sont des espaces fonctionnels) tels que l'énergie associée à la solution du problème :

$$\begin{cases} u''(t) - \Delta u(t) + F(u, u')(t) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \begin{pmatrix} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

décroisse vers 0 quand t tend vers l'infini. Le contrôle $w = F(u, u')$ est alors dit **interne**.

Remarque : Le contrôle $F(u, u')$ qui dépend de la fonction d'état s'appelle **feedback** ou encore **amortisseur**.

1.2.1.2 Stabilisation frontière

Soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de la frontière $\partial\Omega = \Gamma$. On considère pour (u^0, u^1) appartenant à un espace fonctionnel convenable, le problème de l'équation des ondes suivant

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \begin{pmatrix} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

La stabilisation frontière du problème (1.1) consiste à se donner un opérateur appelé **contrôle frontière**

$$G : V_{\partial\Omega} \times W_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C})$$

(où $V_{\partial\Omega}$ et $W_{\partial\Omega}$ sont des espaces fonctionnels) tels que l'énergie associée à la solution du problème :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu u = G(u, u') & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1 \\ \begin{pmatrix} u(0, x) \\ u'(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

décroisse vers zéro quand t tend vers l'infini.

1.2.1.3 Stabilisation faible

La stabilisation est dite faible (asymptotiquement), si $(u(t), u'(t))$ converge faiblement vers $(0, 0)$ dans un certain espace de Hilbert

1.2.1.4 Stabilisation forte

La stabilisation est dite forte si pour toute condition initiale (u^0, u^1) l'énergie $E(t, u)$ associée au système décroît vers zéro au cours du temps, c'est à dire

$$E(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

1.2.1.5 Stabilisation exponentielle

La stabilisation est dite exponentielle lorsqu'il existe deux constantes positives C et ω telles que l'énergie $E(u, t)$ du système vérifie l'inégalité :

$$E(u, t) \leq C.e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0$$

1.2.1.6 Stabilisation uniforme

La stabilisation est dite uniforme, si sous des conditions appropriées, imposées aux termes nonlinéaires, l'énergie du système décroît vers zéro avec un taux uniforme. C'est à dire, s'il existe une fonction scalaire $S(t)$, qui dépend de l'énergie initiale $E(0)$, telle que

$$S(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty,$$

et

$$E(t) \leq S(t), \quad \forall t \geq T_0.$$

Remarques :

- Si la fonction S est explicite, on parle alors du taux de décroissance de l'énergie .
- On remarquera que la stabilité exponentielle entraîne nécessairement la stabilité forte mais la réciproque est fausse.

1.3 But du travail

Notre travail est consacré à la stabilisation de l'équation des ondes viscoélastique dissipative, avec des termes mémoires et un feedback sur une partie de la frontière sans imposer que g est une fonction croissante et avec moins d'hypothèses sur la fonction de relaxation h .

Les documents de base de notre travail sont les références ([6],[9])

Notre problème est défini par :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \int_0^t h(t - \tau) \Delta u(\tau) \, d\tau = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) \, d\tau + g(u') = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u^0(x); \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

$u = u(x, t)$ est la solution de problème (\mathcal{P}) , $t \in \mathbb{R}_+$ une variable de temps et $x \in \mathbb{R}^n$ est une variable d'espace, $(')$ désigne la dérivation en temps de la solution u .

et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ de classe C^2 ,

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

pour éviter des problèmes de régularité des solutions là où les conditions au bord changent, nous supposons que

$$\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset.$$

On désigne par ν le vecteur unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω .

On suppose que les conditions géométriques suivantes sont vérifiées :

il existe un $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, tels que :

$$\forall x \in \Gamma_0, (x - x^0) \cdot \nu(x) \geq \delta > 0,$$

$$\forall x \in \Gamma_1, (x - x^0) \cdot \nu(x) \leq 0.$$

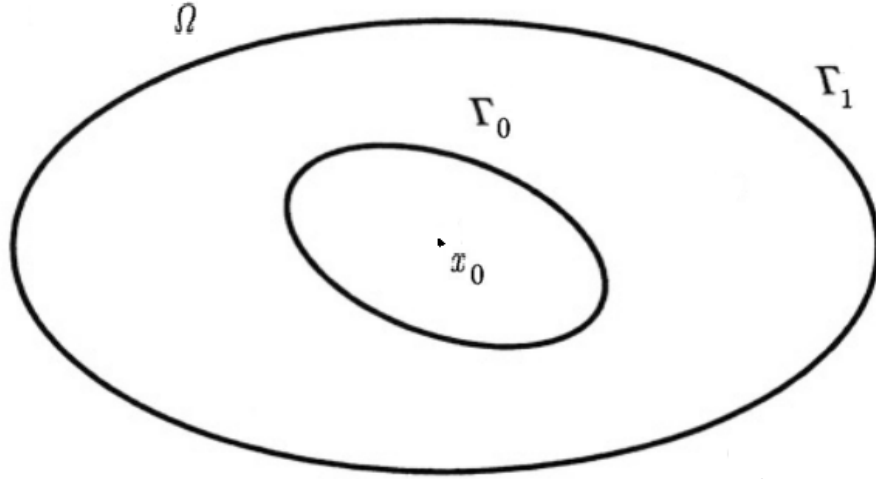


FIGURE 1.1 – La géométrie de Ω

Maintenant, citons quelques exemples de stabilisation du problème dissipatif.

Le cas $h = 0$,

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + g(u') = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u^0(x); \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

La stabilisation du système sans terme mémoire a été étudiée par plusieurs auteurs. Citons les travaux de : Nakao [39], Haraux [19], Chen et Wong[10], Conrad et al. [11], Zuazua [43], Komornik [23], Lasiecka et Tataru [28] ont étudié le problème sous des conditions très générales sur la géométrie du domaine et le terme feedback.

par exemple pour que g vérifie :

$$C_1(|s|^p) \leq g(|s|) \leq C_2(|s|^{1/p}) \quad \forall |s| \leq 1. \quad (1.2)$$

$$C_3|s| \leq g(|s|) \leq C_4|s| \quad \forall |s| \geq 1. \quad (1.3)$$

Où $C_i \in \mathbb{R}^+$ pour $i = 1 \cdots 4$. et $p \geq 1$.

l'énergie associée à ce problème est

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'(x, t)^2 + |\nabla u(x, t)|^2 dx.$$

On a la décroissance polynômiale :

$$E(t) \leq C t^{2/p-1} \quad \text{pour } p > 1, \quad \text{et } \forall t \geq 0. \quad (1.4)$$

et la décroissance exponentielle :

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt} \quad \text{pour } p = 1, \quad \text{et } \forall t \geq 0. \quad (1.5)$$

Le cas $g = 0$,

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \int_0^t h(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) d\tau = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u^0(x); \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

La stabilisation du système sans feedback a été étudié par des nombreux auteurs. on renvoie le lecteur au travail de Sobrinho et Muñoz [4] qui ont considéré l'équation viscoélastique sous des conditions de contact de Signorini.

On peut aussi citer d'autres travaux qui concernent les effets vicoélatiques comme Dafermos [12],[13], Muñoz Rivera et Jian [33], Lagnese [25], Renardu, Hrusa et Nohel [40], Aassila et al.[2], Cavalcanti et al.[7]; où les auteurs ont étudié l'existence des solutions fortes et faibles du problème (\mathcal{P}) sous l'hypothèse classique

$$\int_0^\infty h(t) dt < 1.$$

Ensuite, il ont étudié la décroissance uniforme de l'énergie associée à ce problème

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'(x, t)^2 + |\nabla u(x, t)|^2 dx$$

Dans notre travail, sous des hypothèses plus faibles, on démontre que l'énergie tend uniformément vers zéro quand le temps t tend vers l'infini, sans imposer une hypothèse spécifique sur le

comportement de g au voisinage de zéro (comme dans Martinez [31, 32]), et de plus sous des conditions très faibles sur le noyau h .

L'estimation du taux de décroissance dépend à la fois du comportement de g au voisinage de zéro et de la fonction de relaxation h à l'infini.

On peut prendre comme noyau h l'une des fonctions

$$\begin{aligned} h(t) &= h(0)e^{-(1+t)^p}, \\ h(t) &= \frac{h(0)}{(1+t)^q}, \\ h(t) &= \frac{h(0)}{(1+t)\ln(e+t)^q} \end{aligned}$$

avec $p > 0$, et $q > 1$.

Comme on peut choisir le terme de feedback g sous la forme suivante :

$$g(r) = e^{-1/r^p} \quad \text{ou} \quad g(r) = e^{-e^{1/r^p}},$$

au voisinage de zéro.

Dans un premier lieu, on démontre que si le noyau décroît exponentiellement vers zéro à l'infini, alors le taux de décroissance est donné par le terme feedback. Mais quand la fonction noyau ne décroît pas exponentiellement vers zéro à l'infini, nos estimations dépendent de son comportement à l'infini : Par exemple dans le cas ou g est linéaire $g(r) = r$ et $-h'/h$ décroît vers zéro à l'infini, alors on montre que l'énergie vérifie

$$E(t) \leq C(E(0)) h(t)^\omega \quad \text{pour} \quad \omega > 0.$$

Si on prend

$$h(t) = \frac{h(0)}{(1+t)^q}$$

avec $q > 1$, alors l'énergie décroît au moins polynômiallement vers zéro.

Si

$$h(t) = e^{-t^p}, \quad \text{avec} \quad 0 < p \leq 1,$$

alors

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\omega t^p}$$

où $\omega > 0$.

Le plan de notre travail est le suivant :

le premier chapitre est consacré à l'introduction de quelques notations et des résultats préliminaires

Le second chapitre est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du système viscoélastique non linéaire en trouvant des estimations a priori par la méthode de Galarkin.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du taux de décroissance de l'énergie du système viscoélastique non linéaire en utilisant la méthode des multiplicateur, introduite par Komornik [24] à cause de la singularité de la solution aux bord, en imposant des hypothèses supplémentaires sur le feedback et le noyau h .

CHAPITRE 2

RAPPELS GÉNÉRAUX

Sommaire

2.1	Rappels sur les espaces fonctionnels	21
2.1.1	Espaces de Hilbert	21
2.1.2	Espaces de Lebegue $L^p(\Omega)$	22
2.1.3	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	23
2.1.4	Trace d'une fonction	24
2.2	Quelques critères de convergence	25
2.2.1	Convergence forte	25
2.2.2	Convergence faible	25
2.2.2.1	Convergence faible et convergence presque partout	25
2.2.3	Convergence faible*	26
2.3	Injections et inégalités	26
2.3.1	Injections compactes	26
2.3.2	Théorème d'Aubin-Lions	26
2.3.3	Théorème d'injection de Sobolev	27
2.3.4	Inégalités de Sobolev, Hölder, Poincaré et Young	27
2.3.5	Lemme de Gronwall	28
2.3.6	Formules de Green	29

2.4	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	29
2.4.1	Approximation de Galerkin	31

Introduction

On n'a pas l'intention de présenter ici la théorie d'analyse fonctionnelle en toute généralité. On va tout simplement introduire les notions de base, suffisantes pour la compréhension de notre problème, en renvoyant à la bibliographie pour les démonstrations de ces notions de base et pour une présentation plus complète on pourra les ouvrages de Adams [1], Brizis [5].

2.1 Rappels sur les espaces fonctionnels

Dans tout la suite, Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ .

2.1.1 Espaces de Hilbert

Définition 2.1 Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive, ie

$$(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in H \quad \text{et} \quad (u, u) > 0 \quad \text{si} \quad u \neq 0.$$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2} (v, v)^{1/2}.$$

Définition 2.2 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme

$$\|u\|_H = (u, u)^{1/2}.$$

Remarque 2.1 Soit \mathcal{V}, \mathcal{H} deux espaces de Hilbert sur \mathbb{R} de norme respectives $|\cdot|_{\mathcal{V}}, |\cdot|_{\mathcal{H}}$ tels que :

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} \text{ dense dans } \mathcal{H}.$$

En identifiant \mathcal{H} à son dual, on obtient : $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}' \subset \mathcal{V}'$.

où les injections canoniques sont continues et denses.

2.1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 2.3 On désigne par L^1 l'ensemble des fonctions intégrables sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , dans lequel on identifie deux fonctions qui se coïncident p.p (c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle).

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} f(x) \, dx < \infty \right\}.$$

on définit

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| \, dx.$$

Définition 2.4 Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

On note

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Définition 2.5 On notera par $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable, et } \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$.

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \inf \{C \mid |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}, \quad p = \infty.$$

Théorème. 2.1 L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème. 2.2 L^p muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

De plus L^2 muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Hilbert.

Définition 2.6 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace L^p_{loc} par l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \in L^p(\Omega')$, pour tout Ω' où $\Omega' \subset \Omega$ et dont la fermeture est compacte dans Ω .

Proposition 2.1 Soit (u_n) une suite bornée dans $L^q(\Omega)$, on suppose que (u_n) converge vers u dans $L^p_{loc}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q$, alors on a

$$u_n \in L^q(\Omega) \quad \text{et} \quad u_n \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega).$$

Remarque 2.2 Si Ω est un ouvert borné, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

2.1.3 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

On appelle support d'une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ le plus petit fermé K en dehors duquel la fonction φ est nulle presque partout, on note $K = \text{supp}\varphi$. Une fonction φ est dite à support compact dans Ω si son support est un compact contenu dans Ω .

- On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω .
- On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} .

On définit l'opérateur de dérivation

$$\mathbf{D}^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Définition 2.7 On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega), \quad \mathbf{D}^\alpha v \in L^p(\Omega) \mid |\alpha| \leq m\}.$$

muni de la norme

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |\mathbf{D}^\alpha v|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}; \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

$$|v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} |\mathbf{D}^\alpha v|_{L^\infty(\Omega)} \quad p = \infty.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Pour $p = 2$; on note

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Définition 2.8 H^m est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\mathbf{D}^\alpha u, \mathbf{D}^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

et la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_{m,\Omega} = (u, u)_{m,\Omega}^{1/2}.$$

pour $m = 1$

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{1,\Omega} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u', v')_{L^2(\Omega)}.$$

la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)}$$

Définition 2.9 Soit $1 \leq p \leq \infty$, $W_\Gamma^{m,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

2.1.4 Trace d'une fonction

Lorsque v est une fonction de $L^2(\Omega)$, on ne peut pas considérer la restriction de la fonction à un ensemble de mesure nulle car les fonctions de L^2 sont justement définies à un ensemble de mesure nulle près. Nous allons montrer dans cette partie qu'il n'est pas nécessaire que la fonction ait un représentant continu pour que l'on puisse considérer sa restriction à Γ . C'est ce que nous appellerons la trace de la fonction sur le bord du domaine.

Définition 2.10 Soit v une fonction de $H^m(\Omega)$ pour $m = 1$ ou 2 v n'est pas nécessairement continue sur Ω (sauf en dimension 1) ni sur $\bar{\Omega}$.

On définit les traces de v sur la frontière Γ par l'application linéaire continue, appelée trace

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ v &\longmapsto v|_{\Gamma} \end{aligned}$$

Cette application est surjective.

donc $H_0^1(\Omega)$ est le noyau de γ_0 C'est-à-dire

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v = 0\}.$$

Définition 2.11 H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1 .

Définition 2.12 On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

On définit aussi l'application trace

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ v &\longmapsto \nabla v \cdot \nu \end{aligned}$$

Cette application est linéaire, continue et surjective.

Théorème. 2.3 H_0^2 est le noyau de γ_1

$$H_0^2 = \{v \in H^2(\Omega); \gamma_0 v = 0, \gamma_1 v = 0\}.$$

Définition 2.13 On désigne par $H^{-2}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^2(\Omega)$.

2.2 Quelques critères de convergence

On regroupe ici les résultats qui nous permettront de manipuler les différentes notions de convergence des suites dans les espaces $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq \infty$, et $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

2.2.1 Convergence forte

Définition 2.14 Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que u_n converge (fortement) vers u dans L^p si $u_n \in L^q$ et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

et on note $u_n \rightarrow u$.

2.2.2 Convergence faible

Définition 2.15 On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$ converge faiblement dans L^p vers une fonction u si $u \in L^p(\Omega)$, telle que

$$\forall v \in L^q(\Omega), \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n v \, dx = \int_{\Omega} u v \, dx,$$

et on note $u_n \rightharpoonup u$. avec $L^q(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $L^p(\Omega)$.

2.2.2.1 Convergence faible et convergence presque partout

Le lemme suivant nous donne un lien entre la convergence presque partout et la convergence faible dans les espaces $L^p(\Omega)$, pour $1 < p < \infty$.

Lemme. 2.1

Soient $1 < p < \infty$ et $(u_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ convergeant presque partout dans Ω vers u . Alors, $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$.

2.2.3 Convergence faible*

Définition 2.16 On dit que u_n converge faible* vers u dans L^∞ , et on note $u_n \rightharpoonup^* u$ si $u_n \in L^1$ et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n(x) - u(x)) \Phi(x) \, dx = 0 \quad \forall \Phi \in L^1(\Omega).$$

Remarque 2.3

1. La limite (forte ou faible) d'une suite de fonction est toujours unique.
2. Dans le cas $p = 1$, le symbole $*$ est posé pour montrer que la définition de convergence faible dans L^1 n'est pas entièrement la même que dans les espaces L^p , pour $1 \leq p < \infty$.
En effet, le dual de L^∞ est strictement plus grand que L^1 .
3. La convergence forte dans L^p , implique la convergence faible dans L^p , pour $1 \leq p \leq \infty$

2.3 Injections et inégalités**2.3.1 Injections compactes**

Théorème. 2.4 (de compacité de Rellich-Kondrachov) Soit Ω un domaine régulier borné, L'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. En conséquence, toutes les suites faiblement convergentes dans $H^1(\Omega)$ convergent fortement dans $L^2(\Omega)$.

2.3.2 Théorème d'Aubin-Lions

Théorème. 2.5 Soient B_0, B et B_1 trois espaces de Banach avec $B_0 \subset B \subset B_1$, on suppose que $B_0 \hookrightarrow B$ est compact, et $B \hookrightarrow B_1$ est continue, soit $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$,

On suppose que B_i est réflexif, $i = 0, 1$.

On définit

$$\mathcal{W} = \{u \in L^p(0, T; B_0) \mid u' \in L^q(0, T; B_1)\}$$

($\mathcal{W} \subset L^p(0, T; B)$)

alors \mathcal{W} est un espace de Banach réflexif pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^q},$$

et l'injection $\mathcal{W} \hookrightarrow L^p(0, T; B)$ est compact.

Nous définirons l'espace $L^p(0, T; X)$ dans la section (2.4), page (29).

2.3.3 Théorème d'injection de Sobolev

Théorème. 2.6 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

2.3.4 Inégalités de Sobolev, Hölder, Poincaré et Young

Théorème. 2.7 (Inégalité de Sobolev)

Soient $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N dont la frontière est bornée et $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^}(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, avec injection continue.*

Théorème. 2.8 (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq p' \leq \infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*

Remarque 2.4 Inégalité de Hölder généralisée

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder :

soient f_1, f_2, \dots, f_k des fonctions réelles telles que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}.$$

Théorème. 2.9 (Inégalités de Poincaré)

Il existe une constante C (dépendant de Ω) telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1_{\Gamma}(\Omega).$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^2_{\Gamma}(\Omega).$$

Théorème. 2.10 (Inégalité de Young)

Pour tout réel positif a et b et pour tout ϵ strictement positif on a :

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |b|^2,$$

2.3.5 Lemme de Gronwall

Nous rapelons ici le lemme classique de Gronwall qui on a utilisé pour établir des inégalité.

Lemme. 2.2 Soient u, v deux fonctions intégrables positives sur $[0, \infty)$, et M une constante positive telles que

$$u(t) \leq M + \int_0^t v(s)u(s) \, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Alors on a

$$u(t) \leq M \exp \int_0^t v(s) \, ds. \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.5 le lemme (2.2) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par u la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer u sous la forme

$$u(t) \leq M + \int_0^t v(s)u(s) \, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

avec un certaine fonction $v \geq 0$. L'application de lemme (2.2) donne immédiatement la nullité de u .

2.3.6 Formules de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des edp. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Pour tout $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et $v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\Gamma - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx.$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ (dérivée normale de u).

Par concéquant on a

$$\int_{\Omega} u \nabla v - v \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \, d\Gamma.$$

2.4 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Les espaces de fonctions à valeurs vectorielles sont adaptés à l'étude de problèmes d'évolution où les fonctions définies sur un interval de temps et à valeur dans un espace de Banach réel.

Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs vectorielle.

Soit $1 < T < \infty$, et $(X, \|\cdot\|_X)$ désigne un espace de Banach .

On définit les espaces suivants :

$$\mathcal{C}([0, T]; X) = \{u \in [0, T] \rightarrow X \text{ continue}\},$$

et

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u \in (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable; } \int_0^T \|u(t)\| dt < \infty \right\} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

et

$$L^\infty(0, T; X) = \{u \in (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable; } \exists C > 0 \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p}\}.$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{C > 0; \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p}\}.$$

Remarque 2.6 Pour tout $1 \leq p < \infty$; $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach et $\mathcal{C}([0, T]; X)$ est dense dans $L^p(0, T; X)$.

Si $1 < p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0, T; X)$ est réflexif.

On désigne par $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$ l'espace des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans X , défini par

$$\mathcal{D}'(]0, T[; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[; X)),$$

où, de façon générale $\mathcal{L}(Y; X)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $Y \rightarrow X$, si $Y = X$ on note $\mathcal{L}(X)$.

A une fonction $f \in L^p(0, T; X)$ correspond une distribution \tilde{f} sur $]0, T[$ à valeurs dans X , définie par

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt \quad \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

(ce qui définit bien une application $\varphi \rightarrow \tilde{f}(\varphi)$ linéaire continue de $\mathcal{D}(]0, T[) \rightarrow X$). L'application $f \rightarrow \tilde{f}$ est une injection; on identifiera f et \tilde{f} . En outre si $f \rightarrow 0$ dans $L^p(0, T; X)$ alors $\tilde{f} \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$, c'est-à-dire $\tilde{f}(\varphi) \rightarrow 0$. On a alors

$$L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(]0, T[; X).$$

Pour $f \in \mathcal{D}'(]0, T[; X)$, on définit $d^k f / dt^k = f^{(k)}$ par

$$f^{(k)}(\varphi) = (-1)^k f(\varphi^{(k)}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

ce qui définit $f^{(k)} \in \mathcal{D}'(]0, T[; X)$. En outre l'application $f \rightarrow f^{(k)}$ est linéaire continue de $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$ dans lui-même.

Soient X et Y deux espaces de Banach avec $X \subset Y$, et $v \in L^p(0, T; X)$; alors $dv/dt \in \mathcal{D}'(]0, T[; X)$ donc, en particulier (puisque $\mathcal{D}'(]0, T[; X) \subset \mathcal{D}'(]0, T[; Y)$), $\frac{dv}{dt} \in \mathcal{D}'(]0, T[; Y)$.

Supposons alors que

$$\frac{dv}{dt} \in L^q(0, T; X) \quad (1 \leq q \leq \infty).$$

Alors la fonction v est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0, T] \rightarrow Y$. alors

$$v \in L^2(0, T; V) \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; V').$$

On montre alors que, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la fonction $t \rightarrow v(t)$ est continue de $[0, T] \rightarrow H$.

2.4.1 Approximation de Galerkin

Dans ce travail on utilise la méthode de Galerkin,

Définition 2.17 Soit V un espace de Hilbert et $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finies vérifiant :

(i) $\forall m, V_m \subset V$.

(ii) $V_m \rightarrow V$ quand $m \leftarrow \infty$ au sens suivant :

Il existe \mathcal{V} un sous espace dense de V tel que pour tout $v \in \mathcal{V}$ on peut trouver une suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

Pour tout $m, v_m \in V_m$ et $v_m \rightarrow v$ dans V quand $m \rightarrow \infty$.

L'espace V_m s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre m ($m \neq \dim V_m$)

Schéma de la méthode

Soit (\mathcal{P}) le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution, on suppose que la solution de (\mathcal{P}) est unique.

Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin, il convient de définir le problème

approché (\mathcal{P}_m) dans l'espace V_m ayant une unique solution u_m .

Le schéma possède 5 étapes :

Etape1 : On définit la solution u_m du problème (\mathcal{P}_m) .

Etape2 : On établit des estimations sur u_m dites estimations a priori.

Etape3 : En utilisant les résultats de compacité faible de la boule unité dans un espace de Hilbert, en pouvant extraire une sous suite (u_{mk}) $k \in \mathbb{N}$ de (u_m) qui converge vers une limite notée u .

Etape4 : On montre que u est solution du problème (\mathcal{P}) donc la solution cherchée d'après l'unicité.

Etape5 : On montre que (u_{mk}) converge fortement vers u dans un espace de Hilbert donné.

CHAPITRE 3

EXISTENCE, UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME VISCOÉLASTIQUE DISSIPATIF

Sommaire

3.1	Introduction	33
3.1.1	Théorème principal	35
3.2	Existence de la solution forte	36
3.2.1	La formulation variationnelle	36
3.2.2	Estimation à priori	39
3.2.3	Analyse du terme non linéaire	43
3.2.4	Unicité de la solution forte	46
3.3	Existence des solutions faibles	47
3.3.1	Caractérisation des conditions aux limites	49

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution d'un problème viscoélastique avec des termes mémoire et un feedback sur une partie de la frontière. D'abord, nous montrons que le problème admet une solution faible unique en utilisant la méthode de Galerkin, en suite, on donne des résultats sur la continuité par rapport aux données et sur la régularité de cette solution faible.

On rappelle que le problème (\mathcal{P}) est défini par :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \int_0^t h(t-\tau)\Delta u(\tau) d\tau = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) d\tau + g(u') = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u^0(x); \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

où Ω un ouvert borné étoilé, de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ avec une frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe \mathcal{C}^2 . Ici Γ_0 et Γ_1 sont fermés, disjoints tels que

$$\begin{aligned} \Gamma_0 \cup \Gamma_1 &= \partial\Omega \\ \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 &= \emptyset. \end{aligned}$$

et ν représente le vecteur unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω .

Hypothèses géométriques sur le domaine Ω

On suppose que les conditions géométriques suivantes sont vérifiées :

il existe un $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, tels que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \Gamma_0, \quad x - x^0 \cdot \nu(x) &\geq \delta > 0, \\ \forall x \in \Gamma_1, \quad x - x^0 \cdot \nu(x) &\leq 0. \end{aligned}$$

On considère l'espace de Hilbert suivante :

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in H^1(\Omega); \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}.$$

muni des produits scalaires suivants

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx, \quad (u, v)_{\Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} u(x)v(x) \, d\Gamma.$$

et muni des normes suivantes

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u(x)^2 \, dx, \quad \|u\|_{\Gamma_0}^2 = \int_{\Gamma_0} u(x)^2 \, d\Gamma.$$

l'énergie associée au problème (\mathcal{P}) est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx$$

Maintenant on énonce les hypothèses sur le noyan h et le feedback g

(H.1) Hypothèses sur le noyan h :

On suppose que $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante et de classe \mathcal{C}^2 qui satisfait :

$$\int_0^{\infty} h(t) \, dt < 1, \tag{3.1}$$

$$1 - \int_0^{\infty} h(s) \, ds = \ell > 0, \tag{3.2}$$

et

$$h'(t) < 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3}$$

On suppose qu'il existe trois constants ξ_1, ξ_2 et ξ_3 telle que

$$-\xi_1 h(t) \leq h'(t) \leq -\xi_2 h(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \tag{3.4}$$

$$0 \leq h''(t) \leq \xi_3 h(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0. \tag{3.5}$$

(H.2) Hypothèses sur le feedback g :

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non décroissante et de classe \mathcal{C}^1 , telle que

$$g(s) s > 0, \quad \text{pour tout } s \neq 0. \tag{3.6}$$

On suppose qu'il existe quatre constants $C_i > 0 ; i = 1, 2, 3, 4$ telles que :

$$C_1(|s|) \leq g(|s|)^p \leq C_2(|s|)^{1/p} \quad \forall |s| \leq 1. \tag{3.7}$$

$$C_3|s| \leq g(|s|) \leq C_4|s| \quad \forall |s| \geq 1. \tag{3.8}$$

Où $p \geq 1$.

(H.3) Hypothèses sur la donnée initiale

Pour tout donnée initiale $\{u^0, u^1\} \in (\mathcal{V} \cap H^2(\Omega))^2$ vérifient la condition de compatibilité :

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + g(u^1) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (3.9)$$

Ce chapitre comporte deux sections :

Dans la première section, on étudie l'existence et l'unicité des solutions forte du problème (\mathcal{P}) .

Dans la deuxième section, on étudie l'existence et l'unicité et la régularité de la solution faible.

3.1.1 Théorème principal

On a le théorème suivante, d'existence et d'unicité et de régularité des solutions de problème (\mathcal{P}) .

Théorème. 3.1 *Supposons que les hypothèses (H.1), (H.2) et (H.3) sont satisfais,*

(1) Solution forte. *pour tout donnée initiale $\{u^0, u^1\} \in (\mathcal{V} \cap H^2(\Omega))^2$ Alors le problème (\mathcal{P}) possède une unique solution (**forte**),*

$$u : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $u \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{V})$, $u' \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{V})$ et $u'' \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$.

(2) Solution faible. *on suppose que $\{u^0, u^1\} \in V \times L^2(\Omega)$ alors le problème (\mathcal{P}) possède une unique solution (**faible**),*

$$u : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

tel que

$$u \in \mathcal{C}^0([0, \infty); \mathcal{V}) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

3.2 Existence de la solution forte

Dans ce paragraphe, on démontre l'existence et unicité des solutions fortes pour le problème (\mathcal{P}) .

Premièrement, on considère les solutions fortes, et ensuite, utilisant des arguments de densité, on prolonge le même résultat pour les solutions faibles.

3.2.1 La formulation variationnelle

La formulation variationnelle de problème (\mathcal{P}) est obtenue par une intégration par partie on multiplie formellement la première équation de (\mathcal{P}) par w et on intègre sur Ω . On obtient alors,

$$\int_{\Omega} u'' \cdot w \, dx - \int_{\Omega} \Delta u \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \int_0^t h(t - \tau) \Delta u(\tau) \cdot w \, d\tau \, dx = 0.$$

L'application de la formule de Green donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u'' \cdot w \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} w \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Gamma} \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} w \, d\tau \, d\Gamma \\ - \int_{\Omega} \int_0^t h(t - \tau) \nabla u(\tau) \cdot \nabla u' \, d\tau \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En multipliant la troisième équation de (\mathcal{P}) par w et en intégrant formellement sur Γ , on obtient

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} w \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} w \, d\tau \, d\Gamma + \int_{\Gamma} g(u') w \, d\Gamma = 0.$$

Comme $u = 0$ sur Γ_1 , alors l'équation précédente devient

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u' \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} u' \, d\tau \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} g(u') u' \, d\Gamma.$$

D'où la formulation variationnelle de problème (\mathcal{P}) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(t) \in V \text{ telle que :} \\ (u''(t), w) + (\nabla u(t), \nabla w) - \int_0^t h(t - \tau) (\nabla u(\tau), \nabla w) \, d\tau + (g(u'(t)), w)_{\Gamma_0} = 0 \quad \forall w \in V. \end{array} \right.$$

Transformation du problème (\mathcal{P}) en un problème avec conditions initiales homogènes

Les solutions fortes du problème (\mathcal{P}) avec condition aux limites $(g(y'(t)), w)_{\Gamma_0}$ ne peut pas être obtenue par la méthode des bases spéciales ; donc, une base formée par les fonctions propres ne peut pas être utilisée pour le (\mathcal{P}).

Ceci, conduit à dériver par rapport à t , la formulation variationnelle précédente.

En estimant $u''(0)$, on rencontre de sérieuses difficultés. Alors, pour éviter ces difficultés, on transforme le problème (\mathcal{P}), en un problème équivalent avec une condition initiale égale à zéro.

Pour cela, on effectue le changement de fonction suivant :

$$v(x, t) = u(x, t) - \Phi(x, t) \quad (3.11)$$

$$\Phi(x, t) = u^0(x) + tu^1(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$u'' = v'', \quad \Delta u = \Delta v + \Delta \Phi, \quad u' = v' + \Phi_t = v' + u^1(x).$$

$$\int_0^t h(t - \tau) \Delta u(\tau) \, d\tau = \int_0^t h(t - \tau) \Delta v(\tau) \, d\tau + \int_0^t h(t - \tau) \Delta \Phi(\tau) \, d\tau.$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \implies v = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \nu} \, d\tau = \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial v(\tau)}{\partial \nu} \, d\tau + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \nu} \, d\tau.$$

Donc le problème équivalent à (\mathcal{P}) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v'' - \Delta v + \int_0^t h(t - \tau) \Delta v(\tau) \, d\tau = \mathcal{F} & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\tau) \, d\tau + g(v' + \Phi') = \mathcal{G} & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ v(0) = v'(0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}')$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \Delta \Phi - \int_0^t h(t - \tau) \Delta \Phi(\tau) \, d\tau \\ \mathcal{G} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\tau) \, d\tau \end{aligned}$$

Notons que si v est solution de (\mathcal{P}') dans $[0; T]$; alors $u = v + \Phi$ est solution de (\mathcal{P}) sur le même intervalle.

A partir des estimations qui seront démontrées ci-dessous, il est facile de montrer l'inégalité suivante :

$$|\Delta v(t)|^2 + |\nabla v'(t)|^2 \leq C(T), \quad t \in [0, T].$$

où $T > 0$ est arbitraire.

A partir de (3.11), l'inégalité précédente est vérifiée pour la solution u . Ensuite, en utilisant les méthodes standards, on prolonge u à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Il suffit, donc de montrer que le problème (\mathcal{P}') a une solution locale, qui sera donnée en utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin**.

On établit, sur cette solution approchée, des estimations a priori.

Soit $w_1.w_2 \dots w_m$ une suite de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall w_i \in V \cap H^2(\Omega) \\ \forall m; w_1.w_2 \dots w_m \text{ sont linéairements indépendants} \\ \text{L'ensemble des combinaisons linéaires fines des } w_i \text{ sont denses dans } V \cap H^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Soit $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une base dans $V \cap H^2(\Omega)$ orthonormale dans $L^2(\Omega)$

Soit V_m l'espace engendré par $w_1.w_2 \dots w_m$ et soit

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_j(t) w_j$$

une solution approchée du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_m''(t), w) + (\nabla v_m(t), \nabla w) - \int_0^t h(t-\tau)(\nabla v_m(\tau), \nabla w) \, d\tau + (g(v_m'(t) + \varphi'(t)), w)_{\Gamma_0} \\ = (\mathcal{F}(t), w) + (\mathcal{G}(t), w)_{\Gamma_0}, \quad \forall w \in V_m \\ v_m(0) = v_m'(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Par les méthodes standards des équations différentielles, on peut prouver l'existence de la solution du problème (\mathcal{P}') sur $[0; t_m]$, ensuite cette solution peut être prolonger à l'intervalle fermé $[0; T]$, en utilisant la première estimation ci-dessous (cf. [7] et [34]).

3.2.2 Estimation à priori

Première estimation (estimation de v et v')

On pose $w = \gamma_j'(t) w_j$ dans (3.12) et puis on fait la somme sur j avec $v_m(0) = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} |v_m'(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_m(t)|^2 \right\} + (g(v_m'(t) + \Phi'(t)), v_m'(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} \\ = & (\mathcal{F}(t), v_m'(t)) + \frac{d}{dt} (\mathcal{G}(t), v_m(t))_{\Gamma_0} \\ & - h(0) |\nabla v_m(t)|^2 - (\mathcal{G}'(t), v_m(t))_{\Gamma_0} + (g(v_m'(t) + \Phi'(t)), \Phi'(t))_{\Gamma_0} \\ + & \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-\tau)(\nabla v_m(\tau), \nabla v_m(t)) \, d\tau \right) - \int_0^t h'(t-\tau)(\nabla v_m(\tau), \nabla v_m(t)) \, d\tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

d'après les hypothèses (H.1), (H.2) et (3.13), et en appliquant l'inégalité de Young et d'après on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} |v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_m(t)|^2 \right\} + C_3 \int_{|v'_m + \Phi'|} |v'_m + \Phi'| \, d\Gamma \\
\leq & k_1(\eta) + (\mathcal{F}(t), v'_m(t)) + \frac{d}{dt} (\mathcal{G}(t), v_m(t))_{\Gamma_0} \\
& - h(0) |\nabla v_m(t)|^2 - (\mathcal{G}'(t), v_m(t))_{\Gamma_0} + \eta \int_{|v'_m + \Phi'|} |v'_m + \Phi'| \, d\Gamma \\
& + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-\tau) (\nabla v_m(\tau), \nabla v_m(t)) \, d\tau \right) - |\nabla v_m(t)| \int_0^t h'(t-\tau) |\nabla v_m(\tau)| \, d\tau
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $k_1(\eta)$ est une constante positive qui dépend de u^1 et η .

Considerons l'inégalité de Cauchy-Schwarz en tenant compte de l'hypothèse (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
& |\nabla v_m(t)| \int_0^t h'(t-\tau) |\nabla v_m(\tau)| \, d\tau \\
\leq & \frac{\zeta_1^2}{2} |\nabla v_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(t-\tau) |\nabla v_m(\tau)| \, d\tau \right)^2 \\
\leq & \frac{\zeta_1^2}{2} |\nabla v_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-\tau) |\nabla v_m(\tau)|^2 \, d\tau.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

D'autre part, soit $C_0 > 0$ une constante telle que

$$|v|_{\Gamma_0} \leq C_0 |\nabla v| \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{3.16}$$

Ensuite, en combinant (3.14), (3.15) et (3.16) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} |v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_m(t)|^2 \right\} + (C_3 - \eta) \int_{|v'_m + \Phi'| > 1} |v'_m + \Phi'|^2 \, d\Gamma \\
\leq & k_1(\eta) + \frac{1}{2} |\mathcal{F}(t)|^2 + \frac{1}{2} |v'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt} (\mathcal{G}(t), v_m(t))_{\Gamma_0} + \frac{C_0^2}{2} |\mathcal{G}'(t)|_{\Gamma_0}^2 \\
& + \left(\frac{1 + \zeta_1^2}{2} - h(0) \right) |\nabla v_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-\tau) |\nabla v_m(t)|^2 \, d\tau \\
& + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-\tau) (\nabla v_m(\tau), \nabla v_m(t)) \, d\tau \right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

En intégrant (3.17) sur l'intervalle $]0, t[$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse $v_m(0) = v'_m(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_m(t)|^2 + (C_3 - \eta) \int_0^t \int_{|v'_m + \Phi'| > 1} |v'_m + \Phi'|^2 \, d\Gamma \, ds \\
\leq & k_2(\eta, T) + \frac{1}{2}\|\mathcal{F}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{C_0^2}{2}\|\mathcal{G}'\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} + (\mathcal{G}(t), v_m(t))_{\Gamma_0} \\
& + \int_0^t \frac{1}{2}|v'_m(s)|^2 + \left(\frac{1 + \zeta_1^2}{2} - h(0)\right) |\nabla v_m(s)|^2 \, ds \\
& + \frac{1}{2}\|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t |\nabla v_m(\tau)|^2 \, d\tau + \eta|\nabla v_m(t)|^2 \\
& + \frac{1}{4\eta}\|h\|_{L^1(0,\infty)}\|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t |\nabla v_m(\tau)|^2 \, d\tau.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

mais d'après (3.16), on a :

$$(\mathcal{G}(t), v_m(t))_{\Gamma_0} \leq \frac{C_0^2}{4\eta} |\mathcal{G}(t)|_{\Gamma_0}^2 + \eta |\nabla v_m(t)|^2. \tag{3.19}$$

En combinant (3.18) et (3.19), en choisissant $\eta > 0$ assez petite, et en appliquant le lemme de Gronwall, on obtient la première estimation :

$$|v'_m(t)|^2 + |\nabla v_m(t)|^2 + \int_0^t \int_{|v'_m + \Phi'| > 1} |v'_m + \Phi'|^2 \, d\Gamma \, ds \leq L_1. \tag{3.20}$$

où L_1 une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$. D'après (3.20) et considérant les hypothèses (H.1) et (H.2), on déduit aussi que

$$\int_0^t |g(v'_m(s) + \Phi'(s))|_{\Gamma_0}^2 \, ds \leq L_2. \tag{3.21}$$

où L_2 une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$.

A l'aide des estimations (3.20) et (3.21) on a

$$v' \in L^\infty(0, T; V), \tag{3.22}$$

$$v \in L^\infty(0, T; V). \tag{3.23}$$

Seconde estimation (estimation de v'')

Premièrement, on estime le terme $v''_m(0)$ dans la norme de $L^2(\Omega)$. Considerons $w = v''_m(0)$ dans (3.12) et notons $v_m(0) = v'_m(0) = 0$, on trouve que :

$$|v''_m(0)|^2 + (g(u^1), v''_m(0))_{\Gamma_0} = (\Delta u^0, v''_m(0)) + \left(-\frac{\partial u^0}{\partial \nu}, v''_m(0)\right)_{\Gamma_0}. \tag{3.24}$$

l'identité précédente et l'hypothèse (H.3) donnent

$$|v_m''(0)|^2 \leq L_3. \quad (3.25)$$

où L_3 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$.

Maintenant, en dérivant (3.12), et en multipliant le resultat par $\gamma_j''(t)$ et en sommant sur j on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} |v_m''(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_m'(t)|^2 \right\} - h(0) (\nabla v_m(t), \nabla v_m''(t)) \\ & - \int_0^t h'(t-\tau) (\nabla v_m(t), \nabla v_m''(t)) d\tau + (g'(v_m'(t) + \Phi'(t)) v_m''(t), v_m''(t))_{\Gamma_0} \\ & = (\mathcal{F}'(t), v_m''(t)) + \frac{d}{dt} (\mathcal{G}'(t), v_m'(t))_{\Gamma_0} - (\mathcal{G}''(t), v_m'(t))_{\Gamma_0}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A partir de (3.26), en integrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} |v_m''(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_m'(t)|^2 \right\} + h(0) |\nabla v_m'(t)|^2 + \int_{\Gamma_0} g'(v_m' + \Phi')(v_m'')^2 d\Gamma \\ & = (\mathcal{F}'(t), v_m''(t)) + \frac{d}{dt} (\mathcal{G}'(t), v_m'(t))_{\Gamma_0} - (\mathcal{G}''(t), v_m'(t))_{\Gamma_0} \\ & + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h'(t-\tau) (\nabla v_m(\tau), \nabla v_m'(t)) d\tau \right) - h'(0) (\nabla v_m(\tau), \nabla v_m'(t)) \\ & - \int_0^t h''(t-\tau) (\nabla v_m(\tau), \nabla v_m'(t)) d\tau + h(0) (\nabla v_m(\tau), \nabla v_m'(t)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young, sous l'hypothèse (3.16) on déduit :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} |v_m''(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v_m'(t)|^2 \right\} + (h(0) - 3\eta) |\nabla v_m'(t)|^2 + \int_{\Gamma_0} g'(v_m' + \Phi')(v_m'')^2 d\Gamma \\ & \leq \frac{1}{2} |\mathcal{F}'(t)|^2 + \frac{1}{2} |v_m''(t)|^2 + \frac{C_0^2}{4\eta} |\mathcal{G}''(t)|_{\Gamma_0}^2 + \frac{h'(0)^2}{4\eta} |\nabla v_m(t)|^2 \\ & + \frac{d}{dt} (\mathcal{G}'(t), v_m'(t))_{\Gamma_0} + \frac{\zeta_3^2}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-\tau) |\nabla v_m(\tau)|^2 d\tau \\ & + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h'(t-\tau) (\nabla v_m(\tau), \nabla v_m'(t)) d\tau \right) + h(0) \frac{d}{dt} (\nabla v_m(\tau), \nabla v_m'(t)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Intégrons (3.28) sur l'intervalle $[0, t]$, notons que $v_m(0) = v'_m(0) = 0$ et considérant l'hypothèse (3.25) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}|v''_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v'_m(t)|^2 + (h(0) - 3\eta) \int_0^t |\nabla v'_m(s)|^2 ds \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma_0} g'(v'_m + \Phi')(v''_m)^2 d\Gamma ds \\
\leq & \frac{L_3}{2} + \frac{1}{2} \|\mathcal{F}'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{C_0^2}{4\eta} \|\mathcal{G}''\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} + \frac{1}{2} \int_0^t |v''_m(s)|^2 ds \\
& + \frac{h'(0)^2}{4\eta} \int_0^t |\nabla v_m(s)|^2 ds + \frac{\zeta_3^2}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t |\nabla v_m(\tau)|^2 d\tau + (\mathcal{G}'(t), v'_m(t))_{\Gamma_0} \\
& + \int_0^t h'(t-\tau)(\nabla v_m(\tau), \nabla v'_m(t)) d\tau + \frac{h(0)^2}{4\eta} |\nabla v_m(t)|^2 + \eta |\nabla v_m(t)|^2.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\int_0^t h'(t-\tau)(\nabla v_m(\tau), \nabla v'_m(t)) d\tau & \leq \frac{\zeta_1^2}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} |v''_m(t)|^2 \\
& + \frac{1}{2} |\nabla v'_m(t)|^2 \tau + \eta |\nabla v_m(t)|^2
\end{aligned} \tag{3.30}$$

et

$$(\mathcal{G}'(t), v'_m(t))_{\Gamma_0} \leq \frac{C_0^2}{4\eta} |\mathcal{G}'(t)|_{\Gamma_0}^2 + \eta |v'_m(t)|^2. \tag{3.31}$$

D'après (3.30) et (3.31) et en choisissant $\eta > 0$ suffisamment petit, considérons la première estimation et en appliquant le lemme de Gronwall on obtient la seconde estimation

$$|v''_m(t)|^2 + |\nabla v'_m(t)|^2 + \int_0^t |\nabla v'_m(s)|^2 ds + \int_0^t \int_{\Gamma_0} g'(v'_m + \Phi')(v''_m)^2 d\Gamma ds \leq L_4. \tag{3.32}$$

où L_4 une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$

finalement on déduit que

$$v'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{3.33}$$

Passage à la limite

d'après (3.22), (3.23) et (3.33) on déduit que l'on peut extraire sous suite noté aussi v_m telle que

$$v_m \rightharpoonup^* v \text{ dans } L^\infty(0, T; V), \tag{3.34}$$

$$v'_m \rightharpoonup^* v' \text{ dans } L^\infty(0, T; V), \tag{3.35}$$

$$v''_m \rightharpoonup^* v'' \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{3.36}$$

d'où l'existence d'une solution forte pour T suffisamment grand.

3.2.3 Analyse du terme non linéaire

Proposition 3.1 *D'après (3.34), (3.35) et (3.36) et sous les hypothèses (H.2) on déduit qu'il existe $\chi \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$ telle que*

$$g(v'_m + \Phi') \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement sur } L^2(0, T; L^2(\Gamma_0)). \quad (3.37)$$

Démonstration

Retournant vers (3.12), et utilisant des argument standard, on peut montrer à partir des estimations précédentes que

$$v'' - \Delta \left(v - \int_0^t h(t - \tau)v(\tau) \, d\tau \right) = \mathcal{F} \quad \text{sur } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)). \quad (3.38)$$

Maintenant, puisque $v'', \mathcal{F} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, on a

$$\Delta \left(v - \int_0^t h(t - \tau)v(\tau) \, d\tau \right) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Alors d'après la première équation du problème (\mathcal{P}') on a

$$v'' - \Delta \left(v - \int_0^t h(t - \tau)v(\tau) \, d\tau \right) = \mathcal{F} \quad \text{sur } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.39)$$

En appliquant la formule de Green, et en utilisant (3.39), on déduit que

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(v - \int_0^t h(t - \tau)v(\tau) \, d\tau \right) + \chi = \mathcal{G} \quad \text{sur } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_0)).$$

et puisque $\chi, \mathcal{G} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$ on déduit

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(v - \int_0^t h(t - \tau)v(\tau) \, d\tau \right) + \chi = \mathcal{G} \quad \text{sur } L^2(0, T; L^2(\Gamma_0)). \quad (3.40)$$

Notre but est de démontrer que $\chi = g(v' + \Phi')$.

Premièrement, on définit

$$z_m(t) = v_m(t) - \int_0^t h(t - \tau)v_m(\tau) \, d\tau \in V_m. \quad (3.41)$$

Maintenant considérant en particulier $w = z_m(t)$ dans (3.12) et integrant sur $(0, T)$ on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^T (v''_m(t), z_m(t)) \, dt + \int_0^T |\nabla z_m(t)|^2 \, dt + \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), z_m(t))_{\Gamma_0} \, dt \\ &= \int_0^T (\mathcal{F}(t), z_m(t)) \, dt + \int_0^T (\mathcal{G}(t), z_m(t))_{\Gamma_0} \, dt \end{aligned} \quad (3.42)$$

A partir de la première et de la deuxième estimations, et utilisant le théorème d'Aubin-Lions, il existe une sous suite de v_m qui sera noté encore v_m telle que

$$v_m \rightarrow v \text{ fortement sur } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.43)$$

$$v'_m \rightarrow v' \text{ fortement sur } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.44)$$

comme l'injection $H^{1/2}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$ est compact et notons que :

$$|v_m(t)|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq C|\nabla v_m(t)|, \quad \text{et} \quad |v'_m(t)|_{\Gamma_0} \leq C|\nabla v'_m(t)|.$$

d'après la première et la deuxième estimations et l'utilisation de nouveau du théorème d'Aubin-Lions,

$$v_m \rightarrow v \text{ fortement sur } L^2(0, T; L^2(\Gamma_0)). \quad (3.45)$$

$$v''_m \rightharpoonup v'' \text{ faiblement sur } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.46)$$

Ensuite, d'après les convergences (3.37), (3.43), (3.45) et (3.46) on peut passer à la limite dans (3.42) on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T |\nabla z_m(t)|^2 dt &= - \int_0^T (v'', z(t)) dt - \int_0^T (\chi(t), z(t))_{\Gamma_0} dt \\ &\quad + \int_0^T (\mathcal{F}(t), z(t)) dt + \int_0^T (\mathcal{G}(t), z(t))_{\Gamma_0} dt. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Combinons (3.39), (3.40) et (3.47) et on appliquant la formule de Green généralisée, on déduit que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T |\nabla z_m(t)|^2 dt = \int_0^T |\nabla z(t)|^2 dt.$$

On note aussi d'après la seconde estimation, on conclut que

$$\nabla z_m \rightarrow \nabla z \text{ fortement sur } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.48)$$

on considère $w = v'_m(t)$ dans (3.12) et on intègre sur $(0, T)$ on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_0^T (v''_m(t), v'(t)) dt + \int_0^T (\nabla z_m(t), \nabla v'_m(t)) dt + \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), v'_m(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt \\ &= \int_0^T (\mathcal{F}(t), v'_m(t)) dt + \int_0^T (\mathcal{G}(t), v'_m(t))_{\Gamma_0} dt + \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \end{aligned} \quad (3.49)$$

On a d'après la seconde estimation

$$\nabla v'_m \rightharpoonup \nabla v' \text{ faiblement sur } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.50)$$

d'après les convergences (3.37),(3.45) ,(3.47) et (3.50) on peut passer à la limite dans (3.37) et on obtienir

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), v'_m(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt &= - \int_0^T (v''(t), v'(t)) dt - \int_0^T (\nabla z(t), \nabla v'(t)) dt \\ &+ \int_0^T (\mathcal{F}(t), v'(t)) dt + \int_0^T (\mathcal{G}(t), v'(t))_{\Gamma_0} dt \\ &+ \int_0^T (\chi(t), \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \end{aligned} \quad (3.51)$$

d'après (3.39),(3.43) et (3.51) et en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), v'_m(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt = \int_0^T (\chi(t), v'(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \quad (3.52)$$

D'autre part puisque g est une fonction monotone non décroissante, on obtient

$$\int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t) - g(\Psi), (v'_m(t) + \Phi'(t)) - \Psi)_{\Gamma_0} dt \geq 0$$

pour tout $\Psi \in L^2(\Gamma_0)$. La dernière inégalité donne

$$\begin{aligned} &\int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), \Psi)_{\Gamma_0} dt + \int_0^T (g(\Psi), v'_m(t) + \Phi'(t) - \Psi)_{\Gamma_0} dt \\ &\leq \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), v'_m(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \end{aligned} \quad (3.53)$$

D'après (3.53), on deduit

$$\begin{aligned} &\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), \Psi)_{\Gamma_0} dt \\ &+ \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (g(\Psi), v'_m(t) + \Phi'(t) - \Psi)_{\Gamma_0} dt \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (g(v'_m(t) + \Phi'(t)), v'_m(t) + \Phi'(t))_{\Gamma_0} dt. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Considerons les convergences (3.37), (3.52) et comme

$$v'_m + \Phi' \rightharpoonup v' + \Phi' \text{ faiblement sur } L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$$

on déduit que

$$\int_0^T (\chi(t) - g(\Psi), v'(t) + \Phi'(t) - \Psi)_{\Gamma_0} dt \geq 0.$$

Considèrons $\Psi = (v' + \Phi') + \lambda \xi$ où $\xi \in L^2(\Gamma_0)$ et $\lambda > 0$ on peut écrire

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v'(t) + \Phi'(t)) + \lambda \xi), (-\lambda \xi))_{\Gamma_0} dt \geq 0.$$

et donc

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v'(t) + \Phi'(t)) + \lambda\zeta), \xi)_{\Gamma_0} dt \geq 0.$$

pour tout $\xi \in L^2(\Gamma_0)$, comme l'opérateur g donné par

$$\begin{aligned} g : L^2(\Gamma_0) &\rightarrow (L^2(\Gamma_0))' = L^2(\Gamma_0) \\ v &\rightarrow g(v) \end{aligned}$$

est hémicontinue on a

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v'(t) + \Phi'(t)), \xi)_{\Gamma_0} dt \leq 0.$$

pour tout $\xi \in L^2(\Gamma_0)$.

Donc

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v'(t) + \Phi'(t)), \xi)_{\Gamma_0} dt = 0 \quad \forall \xi \in L^2(\Gamma_0)$$

qui implique que

$$\chi(t) = g(v'(t) + \Phi'(t)).$$

■

3.2.4 Unicité de la solution forte

soit v_1, v_2 deux solutions régulières du problème (\mathcal{P}') .

Alors $z = v_1 - v_2$ vérifie

$$\begin{aligned} (z''(t), w) + (\nabla z(t), \nabla w) &- \int_0^t h(t - \tau)(\nabla z(\tau), \nabla w) d\tau \\ &+ (g(v_1') - g(v_2'), w)_{\Gamma_0} = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

pour tout $w \in V$

posons $w = z'(t)$ dans (3.55) et observons que g est une fonction monotone, il s'ensuit que on

a :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[|z'(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla z(t)|^2 \right] - \int_0^t h(t - \tau)(\nabla z(\tau), \nabla z'(t)) d\tau \leq 0.$$

puisque

$$\begin{aligned} \int_0^t h(t - \tau)(\nabla z(\tau), \nabla z'(t)) d\tau &= -h(0)|\nabla z(t)|^2 - \int_0^t h'(t - \tau)(\nabla z(\tau), \nabla z(t)) d\tau \\ &\quad - \frac{d}{dt} \int_0^t h(t - \tau)(\nabla z(\tau), \nabla z(t)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Alors, sous les hypothèses (H1) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} |z'(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla z(t)|^2 &\leq \frac{\xi_1^2}{2} |\nabla z(t)|^2 + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-\tau) |\nabla z(\tau)|^2 d\tau \\ &\quad \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\tau) (\nabla z(\tau), \nabla z(t)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Intégrons la dernière inégalité sur $(0, t)$, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |z'(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla z(t)|^2 &\leq \frac{\xi_1^2}{2} \int_0^t |\nabla z(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)}^2 \int_0^t |\nabla z(\tau)|^2 d\tau \\ &\quad \int_0^t h(t-\tau) (\nabla z(\tau), \nabla z(t)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Maintenant, pour tout $\eta > 0$, on a

$$\int_0^t h(t-\tau) (\nabla z(\tau), \nabla z(t)) d\tau \leq \eta |\nabla z(t)|^2 + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t |\nabla z(\tau)|^2 d\tau, \quad (3.59)$$

d'après (3.58) et appliquant le lemme de Gronwall, on conclut que

$$|z'(t)| = |\nabla z(t)| = 0$$

Ceci qui achève la démonstration. ■

Remarque 3.1 Notons que, en fait, la solution forte u du problème (\mathcal{P}') appartient à $L^\infty(0,\infty; V \cap H^{3/2}(\Omega))$.

3.3 Existence des solutions faibles

Supposons que $\{u^0, u^1\} \in V \times L^2(\Omega)$.

Puisque

$$D(-\Delta) = \left\{ u \in V \cap H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}$$

est dense dans V et $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$ alors il existe deux suites

$(u_n^0)_{n \geq 0} \subset D(-\Delta)$ et $(u_n^1)_{n \geq 0} \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ telle que :

$$u_n^0 \rightarrow u^0 \text{ fortement dans } V \quad (3.60)$$

$$u_n^1 \rightarrow u^1 \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \quad (3.61)$$

De plus, d'après les hypothèses (H.2) et (H.3), on a

$$\frac{\partial u_n^0}{\partial \nu} + g(u_n^1) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une solution régulière du problème (\mathcal{P}) vérifiant

$$\begin{cases} u_n'' - \Delta u_n + \int_0^t h(t-\tau) \Delta u_n(\tau) \, d\tau = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u_n = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial u_n}{\partial \nu}(\tau) \, d\tau + g(u_t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ u_n(0) = u_n^0; u_n'(0) = u_n^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (\mathcal{P}'')$$

Considérant les arguments utilisés dans la première estimation, on obtient

$$|u_n'(t)|^2 + |\nabla u_n(t)|^2 + \int_0^t |u_n'(s)|_{\Gamma_0}^2 \, ds \leq L,$$

et

$$\int_0^t |g(u_n'(s))|_{\Gamma_0}^2 \, ds \leq L,$$

où L constante positive indépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$.

Posons $z_{m,n} = u_m - u_n$ $m, n \in \mathbb{N}$ ou u_m, u_n sont deux solutions régulières de (\mathcal{P}'')

correspondantes à $u_n^0(x), u_n^1(x), u_m^0(x)$ et $u_m^1(x)$, suivant les mêmes étapes que celles utilisées dans l'unicité des solutions fortes de (\mathcal{P}') et tenant compte de (3.60) et (3.61) on déduit qu'il existe

$$u : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } \mathcal{C}^0([0, T]; V) \quad (3.62)$$

$$u_n' \rightarrow u' \text{ fortement dans } \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (3.63)$$

D'après (3.62) et (3.63), on a aussi

$$u_n' \rightarrow u' \text{ faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Gamma_0)) \quad (3.64)$$

$$g(u_n') \rightarrow \chi \text{ faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Gamma_0)) \quad (3.65)$$

D'après les convergences précédentes, on peut passer à la limite en utilisant des arguments standards afin d'obtenir

$$u'' - \Delta u + \int_0^t h(t - \tau) \Delta u(\tau) \, d\tau = 0 \quad \text{dans } L^2(0, \infty; V') \quad (3.66)$$

3.3.1 Caractérisation des conditions aux limites

Considerons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta p = u' & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = \int_0^t \chi(s) \, ds & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (3.67)$$

où u est la solution faible de (\mathcal{P}) , vérifiant (3.66). Tenons compte de la régularité de la frontière Γ de Ω , on a

$$p \in L^2(0, \infty; \mathcal{H}) \quad (3.68)$$

où

$$\mathcal{H} = \{u \in V; \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

Maintenant on va montrer que

$$u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau = -p' \quad \text{dans } H_{loc}^{-1}(0, \infty; V), \quad (3.69)$$

où $H_{loc}^{-1}(0, \infty; V)$ est le dual topologique de $H_{0,loc}^1(0, \infty; V)$,

En effet d'après (3.66), on obtient

$$-\Delta \left[u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau \right] = -u'' \quad \text{dans } L_{loc}^2(0, \infty; V'),$$

et d'après (3.69) on a

$$-\Delta \left[u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau \right] = \Delta p' \quad \text{dans } \mathcal{D}'_{loc}(0, \infty; V),$$

Soit θ une fonction de test de $\mathcal{D}(0, \infty)$

$$\left\langle -\Delta \left[u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau \right], \theta \right\rangle = \langle -\Delta p, \theta' \rangle \quad \text{dans } V', \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, \infty).$$

on intègre sur $(0, T)$ on obtient

$$\int_0^T -\Delta \left(u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau \right) (t) \theta(t) \, dt = \int_0^T -\Delta p(t) \theta'(t) \, dt \quad \text{dans } V'$$

par conséquent

$$\int_0^T \left(u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau \right) (t) \theta(t) \, dt = \int_0^T p(t) \theta'(t) \, dt \quad \text{dans } V$$

d'où

$$u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau = -p' \quad \text{dans } H_{loc}^{-1}(0, \infty; V),$$

On considère les opérateurs duaux trace suivants

$$\hat{\gamma}_0 : H_{loc}^{-1}(0, \infty; V) \rightarrow H_{loc}^{-1}(0, \infty; L^2(\Gamma_0))$$

$$\hat{\gamma}_1 : H_{loc}^{-1}(0, \infty; \mathcal{H}) \rightarrow H_{loc}^{-1}(0, \infty; V)$$

dont la construction et les propriétés peuvent être trouvées dans Milla Miranda [34]. D'après (3.69), on obtient

$$(\hat{\gamma}_1 / \Sigma_0) \left(u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau \right) = -(\hat{\gamma}_1 / \Sigma_0)(p') = -(\bar{\gamma}_1(p))', \quad (3.70)$$

où

$$\bar{\gamma}_1 : L_{loc}^2(0, \infty; \mathcal{H}) \longrightarrow L_{loc}^2(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma_0))$$

est l'opérateur trace donnée par

$$(\bar{\gamma}_1 u)(t) = \gamma_1(u(t))$$

et

$$\gamma_1 : \mathcal{H} \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_0)$$

est l'opérateur classique de dérivée normale.

Donc, d'après (3.67) et (3.70) on peut conclure que

$$(\hat{\gamma}_1 / \Sigma_0) \left(u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau \right) = \left(\int_0^t \chi(s) \, ds \right)' = -\chi(t). \quad (3.71)$$

Alors d'après (3.71) la condition aux limites a un sens, et de plus on a

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(u - \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) \, d\tau \right) + \chi = 0 \quad \text{sur } H_{loc}^{-1}(0, \infty; L^2(\Gamma_0)).$$

Puisque $\chi \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_0))$, on a la caractérisation au bord que valable p,p sur Σ_0 .

Notre but est de montrer que $\chi = g(u')$. En effet, multiplication la première equation de (\mathcal{P}'') par u'_n et integranons sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_n(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u_n(t)|^2 + (g(u'_n(t)), u'_n(t))_{\Gamma_0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-\tau) (\nabla u_n(\tau), \nabla u_n(t)) d\tau \right) - h(0) |\nabla u_n(t)|^2 \\ & \quad - \int_0^t h'(t-\tau) (\nabla u_n(\tau), \nabla u_n(t)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Integrons la dernière égalité sur $]0, t[$. On obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |u'_n(t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u_n(t)|^2 + \int_0^t (g(u'_n(s)), u'_n(s))_{\Gamma_0} ds \\ &= \frac{1}{2} |u_n^1|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u_n^0|^2 + \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u_n(\tau), \nabla u_n(t)) d\tau \\ & \quad - h(0) \int_0^t |\nabla u_n(s)|^2 ds - \int_0^t \int_0^s h'(s-\tau) (\nabla u_n(\tau), \nabla u_n(s)) d\tau ds. \end{aligned} \quad (3.73)$$

d'après (3.73) et tenant compte les convergences (3.60), (3.61), (3.62) et (3.63), on déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (g(u'_n(s)), u'_n(s))_{\Gamma_0} ds &= -\frac{1}{2} |u'(t)|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u(t)|^2 \frac{1}{2} |u^1|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} |\nabla u^0|^2 + \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(\tau), \nabla u(t)) d\tau \\ & \quad - \int_0^t \int_0^s h'(s-\tau) (\nabla u(\tau), \nabla u(s)) d\tau ds. \\ & \quad - h(0) \int_0^t |\nabla u(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.74)$$

D'autre part, supposons que ω est une solution faible du problème linéaire suivant

$$\begin{cases} \omega'' - \Delta \omega + \int_0^t h(t-\tau) \Delta \omega(\tau) d\tau = 0 & \text{dans } L^2(0, \infty; V') \\ \omega = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \omega}{\partial \nu} - \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial \omega}{\partial \nu}(\tau) d\tau + \chi & \text{dans } L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_0)) \\ \omega(0) = u^0; \quad \omega'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

alors considérons les mêmes arguments que ceux utilisés pour démontrer (3.74), on conclut que

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\chi(s), \omega'(s))_{\Gamma_0} ds &= -\frac{1}{2} |\omega'(t)|^2 - \frac{1}{2} |\nabla \omega(t)|^2 \frac{1}{2} |u^1|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u^0|^2 \\
&+ \int_0^t h(t-\tau) (\nabla \omega(\tau), \nabla \omega(t)) d\tau \\
&- \int_0^t \int_0^s h'(s-\tau) (\nabla \omega(\tau), \nabla \omega(s)) d\tau ds \\
&- h(0) \int_0^t |\nabla \omega(s)|^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Puisque u est une solution faible du problème (\mathcal{S}) , alors d'après (3.74) et (3.75) il s'ensuit que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t (g(u'_n(s)), u'_n(s))_{\Gamma_0} ds = \int_0^t (\chi(s), u'(s))_{\Gamma_0} ds.$$

La convergence précédente combinée avec (3.64), joue un rôle essentiel pour montrer que $\chi = g(u')$ en utilisant les mêmes arguments considérés avant.

Maintenant, l'unicité des solutions faibles est obtenue en utilisant la procédure de régularisation de Lions-Visik.

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(u'_n) = \chi$$

Ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE 4

LE TAUX DE DÉCROISSANCE D'UN SYSTÈME VISCOÉLASTIQUE DISSIPATIF

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du taux de décroissance des solutions d'un système viscoélastiques dissipatifs avec un terme mémoire et un feedback nonlinéaire sur une partie de la frontière.

On rappelle que le problème (\mathcal{P}) est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + \int_0^t h(t - \tau) \Delta u(\tau) \, d\tau = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) \, d\tau + g(u') = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u^0(x); \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (\mathcal{P})$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ de classe C^2 . On considère une partition de la frontière Γ en deux parties $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ telle que

$$\begin{aligned}\Gamma_0 \cup \Gamma_1 &= \partial\Omega, \\ \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 &= \emptyset.\end{aligned}$$

On désigne par ν le champ unitaire normal sortant sur la frontière Γ .

(A.0) Hypothèses géométrique

On suppose que les conditions géométriques suivantes sont vérifiées :

il existe un $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, tels que :

$$\begin{aligned}\exists x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \exists \delta > 0 \text{ tels que :} \\ \forall x \in \Gamma_0 \quad (x - x^0) \cdot \nu(x) \geq \delta > 0 \\ \forall x \in \Gamma_1 \quad (x - x^0) \cdot \nu(x) \leq 0.\end{aligned}$$

On considère l'espace de Hilbert

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

muni des produits scalaires suivants

$$\begin{aligned}(u, v)_\Omega &= \int_\Omega u(x)v(x) \, dx, \\ (u, v)_{\Gamma_0} &= \int_{\Gamma_0} u(x)v(x) \, d\Gamma,\end{aligned}$$

et des normes suivantes

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \int_\Omega u(x)^2 \, dx, \\ \|u\|_{\Gamma_0}^2 &= \int_{\Gamma_0} u(x)^2 \, d\Gamma.\end{aligned}$$

Maintenant, on énonce les hypothèses générales

(A.1) Hypothèses sur le noyau h

On suppose que $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante et de classe C^1 qui satisfait :

$$\int_0^\infty h(t) \, dt < 1, \quad (4.1)$$

$$1 - \int_0^\infty h(s) \, ds = \ell > 0. \quad (4.2)$$

De plus on suppose que

$$h'(t) < 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3)$$

On suppose aussi qu'il existe ξ_1, ξ_2 et ξ_3 tels que

$$-\xi_1 h(t) \leq h'(t) \leq -\xi_2 h(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (4.4)$$

$$0 \leq h''(t) \leq \xi_3 h(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (4.5)$$

(A.2) Hypothèses sur le feedback non linéaire g

soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non décroissante, de classe \mathcal{C}^1 , telle que :

$$g(s) s > 0 \quad \text{pour tout } s \neq 0. \quad (4.6)$$

on suppose que il existe une fonction $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , strictement croissante et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$g_0(|s|) \leq g(|s|) \leq g_0^{-1}(|s|), \quad \forall |s| \leq 1, \quad (4.7)$$

$$c|s| \leq g(|s|) \leq \frac{1}{c}|s|, \quad \forall |s| \geq 1. \quad (4.8)$$

L'existence globale des solutions fortes et faibles à été étudié dans le chapitre précédent.

si les données initiales $(u^0, u^1) \in (V \cap H^2(\Omega))^2$, et sont vérifient la condition de compatibilité suivante :

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + g(u^1) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (4.9)$$

Alors le problème (\mathcal{P}) possède unique solution **forte** $u : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(u, u', u'') \in L^\infty(0, \infty; V \times V \times L^2(\Omega)).$$

Si $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$. Alors le problème possède unique solution **faible** $u : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$u \in C^0([0, \infty); V) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Définition 4.1 *L'énergie associée au problème (\mathcal{P}) est donnée par*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u'(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2) \, dx \quad (4.10)$$

Proposition 4.1 *L'énergie associée au problème (P) vérifie l'identité :*

$$\frac{dE}{dt} = -(g(u'), u')_{\Gamma_0} + \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau), \nabla u) d\tau. \quad (4.11)$$

Démonstration 1 *on multiplie la première équation de (P) par u' et on intègre formellement sur Ω*

$$\int_{\Omega} u'' \cdot u' dx - \int_{\Omega} \Delta u \cdot u' dx + \int_{\Omega} \int_0^t h(t-\tau) \Delta u(\tau) \cdot u' d\tau dx = 0$$

on applique la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u'' \cdot u' dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u' dx + \int_{\Gamma} \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\tau d\Gamma \\ - \int_{\Omega} \int_0^t h(t-\tau) \nabla u(\tau) \cdot \nabla u' d\tau dx = 0 \end{aligned}$$

on multiplie la troisième équation de (P) par u' et on intègre formellement sur Γ on obtient

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\tau d\Gamma + \int_{\Gamma} g(u') u' d\Gamma = 0$$

et par conséquence

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\tau d\Gamma = - \int_{\Gamma} g(u') u' d\Gamma$$

par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u'' \cdot u' dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'^2 dx \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u' dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

donc on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} (u'^2 + |\nabla u|^2) dx \right] + \int_{\Gamma} g(u') u' d\Gamma - \int_{\Omega} \int_0^t h(t-\tau) \nabla u(\tau) \cdot \nabla u' d\tau dx = 0$$

finalemt d'apres la définition de $E(t)$ on trouve :

$$\frac{dE}{dt} = -(g(u'), u')_{\Gamma_0} + \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau), \nabla u)_{\Omega} d\tau.$$

On rappelle un lemme donnée dans P.Martinez [31, 32] qui joue un rôle très important dans la suite de ce chapitre

Lemme. 4.1 soient $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction non-croissante et $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(t) \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Si il existe $\alpha \geq 0$ et $\omega > 0$ telle que

$$\int_S^\infty E(t)^{1+\alpha} \Phi'(t) dt \leq \frac{1}{\omega} E(0)^\alpha E(S), \quad \forall S \geq 0.$$

Alors on a

$$\text{si } \alpha = 0, \quad E(t) \leq E(0) \exp^{1-\omega\Phi(t)}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\text{si } \alpha > 0, \quad E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+\alpha}{1+\omega\alpha\Phi(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration 1 On introduit la fonction $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, défini par

$$f(\tau) = E(\Phi^{-1}(\tau)),$$

alors f est une fonction non-croissante et satisfait :

$$\forall 0 \leq S \leq T < \infty$$

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(S)}^{\Phi(T)} f(\tau)^{1+\alpha} d\tau &= \int_{\Phi(S)}^{\Phi(T)} E(\Phi^{-1}(\tau))^{1+\alpha} d\tau = \int_S^T E(t)^{1+\alpha} \Phi'(t) dt \\ &\leq \frac{1}{\omega} E(0)^\alpha E(S) = \frac{1}{\omega} f(0)^\alpha f(\Phi(S)) \end{aligned}$$

on note $s = \Phi(S)$

et on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(T) = \infty$$

f satisfiée

$$\forall s \geq 0, \quad \int_s^\infty f(\tau)^{1+\alpha} d\tau \leq \frac{1}{\omega} f(s).$$

Alors si on applique le lemme de Gronnwall on obtient :

Si $\alpha = 0$

$$f(s) \leq f(0) e^{1-\omega s}, \quad \forall s \geq 0.$$

Si $\alpha > 0$

$$f(s) \leq f(0) \left(\frac{1 + \alpha}{1 + \omega \alpha \Phi(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall s \geq 0,$$

d'où le resultat en posant $E(t) = f(\Phi(t))$.

Ce que achève la démonstration du lemme ■

Remarque 4.1 *Le lemme précédent sera utiliser pour démontrer le théorème suivante :*

4.2 Théorème principal

Théorème. 4.1 *Supposons que les deux hypothèses (A.1) et (A.2) sont satisfaites, et que $h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petites.*

Supposons qu'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, concave, non décroissante, telle que :

$$\Phi(t) \rightarrow \infty \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Alors

(i) *Si g_0 est linéaire, l'énergie $E(t)$ associée au problème (\mathcal{P}) vérifie l'estimation :*

$$E(t) \leq CE(0)e^{1-\Phi(t)}. \quad (4.12)$$

(ii) *Si g_0 est polynômiale au voisinage de 0, alors E vérifie l'estimation :*

$$E(t) \leq \frac{CE(0)}{\Phi(t)^{2/p-1}}. \quad (4.13)$$

Avant de démontrer le résultat principal de la stabilisation, on commence par quelques notations

Soit m la fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n défini par $m(x) = x - x^0$.

Rappelons qu'il existe un $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, tels que :

$$\forall x \in \Gamma_0, \quad m(x) \cdot \nu(x) \geq \delta > 0,$$

$$\forall x \in \Gamma_1, \quad m(x) \cdot \nu(x) \leq 0.$$

Etant donné $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. et des fonctions assez petites

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$f = (f_1, \dots, f_N) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

on définit la fonction

$$f_0 \diamond f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

par :

$$\begin{aligned} (f_0 \diamond f)(t) &= \int_0^t f_0(t-s) \|f(t, \cdot) - f(s, \cdot)\|_{\Omega}^2 ds \\ &= \int_0^t f_0(s, t) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (f_i(t, x) - f_i(s, x))^2 dx ds. \end{aligned}$$

On montre ensuite, par un simple calcul, que l'on a

$$\begin{aligned} \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(\tau) \cdot \nabla u'(\tau))_{\Omega} d\tau &= \frac{1}{2} (h' \diamond \nabla u)(t) - \frac{1}{2} (h \diamond \nabla u)'(t) \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \int_0^t h(s) ds \right\} - \frac{1}{2} h(t) \|\nabla u\|^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Remarque 4.2 D'après (4.11) le signe de l'énergie $E(t)$ associée au problème (\mathcal{P}) n'est pas connu. Pour cela on définit l'énergie modifiée $\mathcal{E}(t)$ associée au problème (\mathcal{P}) .

Définition 4.2 L'énergie modifiée est donnée par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|u'\|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} (h \diamond \nabla u)(t). \quad (4.15)$$

Proposition 4.2 la dérivée de $\mathcal{E}(t)$ par rapport au temps t est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = -(g(u_t), u_t)_{\Gamma_0} + \frac{1}{2} (h' \diamond \nabla u)(t) - \frac{1}{2} h(t) \|\nabla u\|^2. \quad (4.16)$$

On observe, d'après les hypothèses (4.3), (4.6) et (4.14) que

$$\mathcal{E}(t) \geq 0,$$

et

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) \leq 0.$$

Lemme. 4.2 Sous les hypothèses (4.2) et (4.15) on a :

$$0 \leq E(t) \leq l^{-1} \mathcal{E}(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (4.17)$$

Remarque 4.3 D'après (4.17), la décroissance uniforme de $\mathcal{E}(t)$ implique la décroissance uniforme de $E(t)$.

Une identité fondamentale

Lemme. 4.3 Soit u la solution du problème (\mathcal{P}) , alors on a l'identité fondamentale suivante :

$$\begin{aligned}
\int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \left(\int_{\Omega} u'(t)^2 + |\nabla u(t)|^2 \right) dx dt &= - [\Phi'(t) \mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t))]_S^T \\
&+ \int_S^T \Phi''(t) \mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t))_{\Omega} dt \\
&+ \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}'(t)(u'(t), Mz(t))_{\Omega} dt \\
&+ 2 \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(t), \nabla u(\tau))_{\Omega} d\tau dt \\
&- \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t-s) (\nabla u(\tau), \nabla u(s))_{\Omega} ds d\tau dt \\
&- h(0) \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t)(u'(t), Mu(t))_{\Omega} dt \\
&- \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h'(t-\tau) (u'(t), Mu(\tau))_{\Omega} d\tau dt \\
&+ \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma} \left(m \cdot \nu u'(t)^2 + \partial_{\nu} z Mz(t) - m \cdot \nu |\nabla z(t)|^2 \right) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Démonstration 2 On utilise la technique des multiplicateurs [23]; on multiplie la première équation de (\mathcal{P}) par :

$$Mz := 2m \cdot \nabla z + (n-1)z. \quad (4.18)$$

où

$$z(t) = u(t) - \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau. \quad (4.19)$$

et par une fonction concave $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, de classe \mathcal{C}^2 , non décroissante, telle que $\Phi(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$.

En intégrant, ensuite, sur $[S, T]$ on trouve :

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) (u''(t) - \Delta z(t), Mz(t))_{\Omega} dt = 0. \\
\int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Omega} u''(t) Mz(t) dx dt &- \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Omega} \Delta z(t) Mz(t) dx dt = 0. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

En intégrant par partie le membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Omega} u''(t) Mz(t) dx dt &= - [\Phi'(t) \mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t))]_S^T + \int_S^T \Phi''(t) \mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t)) dt \\
&+ \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}'(t)(u'(t), Mz(t))_{\Omega} dt + \int_S^T \Phi(t) \mathcal{E}'(t)(u'(t), Mz'(t))_{\Omega} dt. \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Observant que

$$\begin{aligned} |\nabla z(t)|^2 &= |\nabla u(t)|^2 - 2 \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega \, d\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t-s) (\nabla u(\tau), \nabla u(s))_\Omega \, ds \, d\tau. \end{aligned} \quad (4.22)$$

d'après l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \left(\int_\Omega u'(t)^2 + |\nabla u(t)|^2 \right) \, dx \, dt &= \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \left(\int_\Omega u'(t)^2 + |\nabla z(t)|^2 \right) \, dx \, dt \\ &+ 2 \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(t), \nabla u(\tau)) \, d\tau \, dt \quad (4.23) \\ &- \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t-s) (\nabla u(\tau), \nabla u(s)) \, ds \, d\tau \, dt \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (u'(t), Mz'(t))_\Omega + (\Delta z(t), Mz(t))_\Omega &= -n|u'(t)|^2 + \int_{\Gamma_0} m.\nu |u'|^2 \, d\Gamma - 2h(0)(u'(t), m.\nabla u(t))_\Omega \\ &- 2 \int_0^t h'(t-\tau) (u'(t), m.\nabla u(\tau))_\Omega \, d\tau + (n-1)|u'(t)|^2 \\ &- h(0)(n-1)(u'(t), u(t))_\Omega \\ &- (n-1) \int_0^t h'(t-\tau) (u'(t), u(\tau))_\Omega \, d\tau \\ &+ (n-2)|\nabla z(t)|^2 - \int_{\Gamma_0} m.\nu |\nabla z|^2 \, d\Gamma \\ &+ 2 \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu} m.\nabla z \, d\Gamma - (n-1)|\nabla z(t)|^2 \\ &+ (n-1) \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu} z \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.24)$$

d'où

$$\begin{aligned} |u'(t)|^2 + |\nabla z(t)|^2 &= (u'(t), Mz'(t))_\Omega + (\Delta z(t), Mz(t))_\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_0} m.\nu |u'|^2 \, d\Gamma - h(0)(u'(t), m.Mu(t))_\Omega \\ &- \int_0^t h'(t-\tau) (u'(t), m.Mu(\tau))_\Omega \, d\tau \\ &+ \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu} Mz \, d\Gamma + \int_\Gamma m.\nu |\nabla z|^2 \, d\Gamma. \end{aligned}$$

En multipliant l'équation précédente par \mathcal{E} et Φ , puis en intégrant sur l'intervalle $[S, T]$, on obtient l'identité suivante

$$\begin{aligned}
\int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \left(\int_\Omega u'(t)^2 + |\nabla u(t)|^2 \right) dx dt &= - [\Phi'(t) \mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t))_\Omega]_S^T \\
&+ \int_S^T \Phi''(t) \mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t))_\Omega dt \\
&+ \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}'(t)(u'(t), Mz(t))_\Omega dt \\
&+ 2 \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt \\
&- \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t-s) (\nabla u(\tau), \nabla u(s))_\Omega ds d\tau dt \\
&- h(0) \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t)(u'(t), Mu(t))_\Omega dt \\
&- \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h'(t-\tau) (u'(t), Mu(\tau))_\Omega d\tau dt \\
&+ \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_\Gamma \left(m \cdot \nu u'(t)^2 + \partial_\nu z Mz(t) - m \cdot \nu |\nabla z(t)|^2 \right) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Ceci qu achève la démonstration du lemme (4.3)

4.2.0.1 Etude des termes du bord :

Sur Γ_1 , on a $u = 0$,

donc $z = 0$ et $\nabla z = (\partial_\nu) \nu$.

On déduit que

$$m \cdot \nu u'(t)^2 + \partial_\nu z Mz(t) - m \cdot \nu \nabla z(t)^2 = m \cdot \nu (\partial_\nu z(t))^2 \leq 0. \quad (4.25)$$

Ensuite, on voit que

Lemme. 4.4

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} m \cdot \nu u'(t)^2 + \partial_\nu z Mz(t) - m \cdot \nu \nabla z(t)^2 \\
&\leq C \epsilon \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} u'(t)^2 + g(u'(t))^2 + \epsilon \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} z(t)^2. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Démonstration 3 d'après la définition de z et la troisième équation de (\mathcal{P}) , on a sur Γ_0 l'égalité suivante

$$\partial_\nu z = \frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) = -g(u')$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} m \cdot \nu u'(t)^2 + \partial_\nu z M z(t) - m \cdot \nu \nabla z(t)^2 \\
&= \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} m \cdot \nu u'(t)^2 - g(u'(t))(2m \cdot \nabla z(t) + (n-1)z(t)) - (m \cdot \nu) \nabla z(t)^2 \\
&\leq C \epsilon \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} u'(t)^2 + g(u'(t))^2 + \epsilon \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} z(t)^2.
\end{aligned}$$

Lemme. 4.5

$$\begin{aligned}
2 \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t)^2 dt &\leq - \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(s) ds \nabla u(t) dt + \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) (h \diamond \nabla u)(t) dt \\
&\quad - [\Phi'(t) \mathcal{E}(t) (u'(t), Mz(t))_\Omega]_S^T + \int_S^T \Phi''(t) \mathcal{E}(t) (u'(t), Mz(t))_\Omega dt \\
&\quad + \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) (u'(t), Mz(t))_\Omega dt \\
&\quad + 2 \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt \\
&\quad - \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(t) \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t-s) (\nabla u(\tau), \nabla u(s))_\Omega ds d\tau dt \\
&\quad - h(0) \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) (u'(t), Mu(t))_\Omega dt \\
&\quad - \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(t) \int_0^t h'(t-\tau) (u'(t), Mu(\tau))_\Omega d\tau dt \\
&\quad + C \epsilon \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} u'(t)^2 + g(u'(t))^2 + \epsilon \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} z(t)^2. \\
&= : I_1 + I_2 + \dots + I_{11}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Démonstration 4 la démonstration de ce lemme découle du lemme (4.3) et du lemme (4.4)

le but principal de ce paragraphe est d'établir des inégalités intégrales qui permettent d'obtenir la décroissance uniforme de l'énergie du problème (\mathcal{P}).

Dans la suite, nous allons analyser les termes du membre de droite de (4.27). Les termes le plus importants seront I_2 et I_{10} .

Premièrement on étudie les termes

$$I_1, I_3, \dots, I_9 \text{ et } I_{11}$$

Ici et dans la suite, C représentera différentes constantes positives qui doivent être différentes à des différents endroits.

Estimation de I_3

$$I_3 = - [\Phi'(t)\mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t))_\Omega]_S^T,$$

On observe initialement de (4.19) que

$$(u'(t), Mz(t))_\Omega = (u'(t), Mu(t))_\Omega - \int_0^t h'(t-\tau)(u'(t), Mu(\tau))_\Omega d\tau. \quad (4.28)$$

Lemme. 4.6 Soit u la solution de (\mathcal{P}) on a

$$\left| \int_\Omega u'(t)Mu(t) dx \right| \leq CE(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.29)$$

preuve

on a

$$\|Mu(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|2m.\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\begin{aligned} \|Mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|2m.\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|2m.\nabla u(t) + (n-1)u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|2m.\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_\Omega (|2m.\nabla u(t) + (n-1)u(t)|^2 - |2m.\nabla u(t)|^2) dx \\ &= \int_\Omega ((n-1)^2u^2(t) + 4(n-1)u(t)m.\nabla u(t)) dx \\ &= \int_\Omega ((n-1)^2u^2(t) + 2(n-1)u(t)m.\nabla(u^2(t))) dx \\ &= 2(n-1)\int_\Gamma (m.\nu)u^2(t)d\Gamma + \int_\Omega (n-1)^2u^2(t) - 2(n-1)(div m)u^2(t)dx \\ &= 2(n-1)\int_\Gamma (m.\nu)u^2(t)d\Gamma + (1-n^2)\int_\Omega u^2(t)dx \\ &= (1-n^2)\int_\Omega u^2(t)dx \leq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u'(t)Mu(t) dx \right| &\leq \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \|Mu(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \|2m.\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon} \|2m.\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq CE(t). \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Poincaré, il facile de voir que

$$\int_\Omega |Mu(t)|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \leq 2CE(t) \leq 2C\ell^{-1}\mathcal{E}(t).$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé le fait que $\|h\|_{L^1(0,\infty)} < 1$.

Donc

$$\begin{aligned}
-\int_0^t h(t-\tau)(u'(t), Mu(\tau))_\Omega d\tau &\leq C \int_0^t h(t-\tau)(u'(t)_\Omega^2 + \nabla u(\tau)_\Omega^2) d\tau \\
&\leq Cu'(t)_\Omega^2 \int_0^t h(s) ds \\
&\quad + 2C \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau) + \nabla u(t))_\Omega^2 + \nabla u(t)_\Omega^2 d\tau \\
&\leq 2C\ell^{-1}h_{L^1(0,\infty)}\mathcal{E} + 2C(h \diamond \nabla u)(t) + 2Ch_{L^1(0,\infty)}\nabla u(t)_\Omega^2 \\
&\leq C'\ell^{-1}\mathcal{E}(t). \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Combinons (4.28) et (4.30). On obtient

$$(u'(t), Mz(t))_\Omega \leq C\mathcal{E}(t). \tag{4.31}$$

et par conséquent

$$I_3 \leq C\Phi'(S)\mathcal{E}(S)^2.$$

Estimation de I_4

$$I_4 = \int_S^T \Phi''(t)\mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t))_\Omega dt,$$

Utilisant la concavité de Φ , on obtient à partir de (4.31), l'inégalité

$$I_4 \leq C\Phi'(S)\mathcal{E}(S)^2.$$

Estimation de I_5

$$I_5 = \int_S^T \Phi'(t)\mathcal{E}(t)(u'(t), Mz(t))_\Omega dt,$$

D'après (3.14), on obtient

$$I_5 \leq C\Phi'(S)\mathcal{E}(S)^2.$$

Estimation de $I_1 + I_6$

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_S^T \Phi'(t)\mathcal{E}(t) \left(\int_0^t h(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|^2 dt \\
I_6 &= 2 \int_S^T \Phi'(t)\mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt,
\end{aligned}$$

Considérant l'inégalité $ab \leq \mathcal{E}a^2 + \frac{1}{4\mathcal{E}}b^2$ et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit à partir de (3.14) et de (3.6) que pour tout $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
I_6 &= 2 \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(t), \nabla u(\tau))_\Omega d\tau dt \\
&= 2 \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau) \|\nabla u(t)\|^2 d\tau dt \\
&\quad + 2 \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau) (\nabla u(t), \nabla u(\tau) - \nabla u(t))_\Omega d\tau dt \\
&\leq 2 \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau) \|\nabla u(t)\|^2 d\tau dt \\
&\quad + \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t h(t-\tau) \left(\frac{1}{\alpha} \|\nabla u(t)\|^2 + \alpha \|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)\|^2 \right) d\tau dt \\
&\leq \left(2 + \frac{1}{\alpha} \right) \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \left(\int_0^t h(\tau) d\tau \right) \|\nabla u(t)\|^2 dt + 2\alpha \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t)^2 dt.
\end{aligned}$$

donc

$$I_1 + I_6 \leq \left(2\ell^{-1} \left(2 + \frac{1}{\alpha} \right) \|h\|_{L^1(0,\infty)} + 2\alpha \right) \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(t)^2 dt$$

Estimation de I_7

$$I_7 = - \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t-s) (\nabla u(\tau), \nabla u(s))_\Omega ds d\tau dt,$$

Il est clair de voir que

$$I_7 \leq 0.$$

Estimation de I_8

$$I_8 = -h(0) \int_S^T \Phi'(t) \mathcal{E}(t) (u'(t), Mu(t))_\Omega dt,$$

On a

$$I_8 \leq Ch(0) \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(t) E dt \leq C\ell^{-1}h(0) \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(t)^2 dt.$$

Estimation de I_9

Utilisant l'inégalité du Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}
I_9 &= - \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(t) \int_0^t h'(t-\tau) (u'(t), Mu(\tau) - Mu(t) + Mu(t))_\Omega d\tau dt \\
&= - \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(u'(t), Mu(\tau))_\Omega \int_0^t h'(t-\tau) d\tau dt \\
&\quad - \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_0^t h'(t-\tau) (u'(t), Mu(\tau) - Mu(t))_\Omega d\tau dt \\
&\leq C'\ell^{-1}h(0) \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(t)^2 dt + 2C \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(-\mathcal{E}') dt.
\end{aligned}$$

donc

$$I_9 \leq C\ell^{-1}h(0) \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt + C\Phi'(S)\mathcal{E}(S)^2 dt.$$

Estimation de I_{11}

$$I_{11} = \epsilon \int_S^T \Phi'(t)\mathcal{E}(t) \left(\int_{\Gamma_0} z(t)^2 d\Gamma \right) dt.$$

En utilisant la continuité de l'application trace de l'espace V dans l'espace $L^2(\Gamma_0)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq 2\epsilon \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_{\Gamma_0} u(t)^2 \left(\int_0^t h'(t-\tau)u(\tau) d\tau \right)^2 dt \\ &\leq C\epsilon\ell^{-1}h(0) \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt + 2\epsilon \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_{\Gamma_0} \left(\int_0^t h(t-\tau) d\tau \right) \left(\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)^2 d\tau \right) \\ &\leq C\epsilon\ell^{-1} \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt + C\epsilon\|h\|_{L^1} \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau) - \nabla u(t) + \nabla u(t))_{\Omega}^2 d\tau dt \\ &\leq C\epsilon\ell^{-1} \int_S^T \Phi' \mathcal{E}(t)^2 dt + C\epsilon\|h\|_{L^1} \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_0^t h(t-\tau)(\nabla u(\tau) - \nabla u(t))_{\Omega}^2 + \nabla u(t)_{\Omega}^2 d\tau dt \\ &\leq (C\epsilon\ell^{-1} + C\epsilon\|h\|_{L^1} + C\epsilon\ell^{-1}\|h\|_{L^1}^2) \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt. \end{aligned}$$

donc

$$I_{11} \leq C\epsilon(\ell^{-1} + \|h\|_{L^1}) \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt.$$

Maintenant on revient à l'étude des termes les plus importants : I_2 et I_{10} .

4.2.1 Estimation du taux de décroissance quand g_0 est linéaire et

$$1/h \leq \Phi'$$

Estimation de I_{10}

$$I_{10} = C\epsilon \int_S^T \Phi'(t)\mathcal{E}(t) \int_{\Gamma_0} u'(t)^2 + g(u'(t))^2$$

Quand g_0 est linéaire, il est clair de voir que l'on a

$$I_{10} \leq C_{\mathcal{E}} \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_{\Gamma_0} u'g(u') \leq C_{\mathcal{E}}C \int_S^T \mathcal{E}(\mathcal{E}') \leq C_{\mathcal{E}}C\mathcal{E}(S)^2.$$

Il reste à étudier I_2 :

Estimation de I_2

$$I_2 = \int_S^T \Phi'(t)\mathcal{E}(t)(h \diamond \nabla u)(t) dt$$

Supposons qu'il existe une fonction Φ concave et non décroissante telle que $\Phi' \leq -h'/h$ et $\Phi(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$. Alors

$$\Phi'(t)h(t-s) \leq \Phi'(t-s)h(t-s) \leq -h'(t-s).$$

donc

$$I_2 \leq \int_S^T \mathcal{E} \int_0^t h'(t-s) \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2 ds dt \leq -2 \int_S^T \mathcal{E}' \mathcal{E} dt \leq \mathcal{E}(S)^2.$$

Utilisant le lemme et toutes les estimations de I_1, \dots, I_{11} , on obtient

$$2 \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt \leq C \mathcal{E}(S)^2 + \left[2\ell^{-1} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \|h\|_{L^1(0,\infty)} + 2\alpha + 2\ell^{-1}h(0) + \epsilon C \ell^{-1} \right] \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt.$$

Donc si α , ϵ , $h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petits, on obtient

$$\int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt \leq C \mathcal{E}(S)^2.$$

qui implique que l'énergie décroît au moins comme

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) e^{1-\Phi(t)/2C}.$$

Où Φ vérifie $\Phi' \leq -h'/h$ et Φ' bornée.

Donc, si $-h'/h$ est bornée inférieurement par une constante positive m , alors la fonction

$$\Phi(t) = mt$$

vérifie toutes les conditions nécessaires et l'on obtient que l'énergie décroît exponentiellement vers zéro.

Exemple

Si on considère le noyau h défini par

$$h(t) = h(0)e^{-mt}$$

ou si le noyau h vérifie

$$h'/h \longrightarrow \infty, \quad \text{si } t \longrightarrow \infty$$

par exemple

$$h(t) = h(0)e^{-(1+t)^p}$$

avec $0 < p < 1$.

Alors choisissant $\Phi(t) = \ln(h(0)/h(t))$, on obtient qu'il existe deux constantes $C, \omega > 0$ telles que

$$\mathcal{E}(t) \leq C\mathcal{E}(0)h(t)^\omega$$

Exemple

Si
$$h(t) = h(0)/(1+t)^q$$

avec $q > 1$, alors l'énergie décroît au moins polynômialement vers zéro.

Si
$$h(t) = e^{-t^p}$$

avec, $0 < p < 1$, alors

$$E(t) \leq C\mathcal{E}(0)e^{-\omega t^p}$$

4.2.2 Estimation du taux de décroissance quand g est polynômiale au voisinage de zéro

Supposons que $g_0(s) = s^p$ avec $p > 1$.

Dans ce cas particulier, il est intéressant d'estimer I_{10} en utilisant la méthode développée par Komornik [23] et qui est aussi utilisée dans [9].

Il est nécessaire d'utiliser le multiplicateur

$$\Phi' \mathcal{E}^{(p-1)/2} Mz(t)$$

au lieu de

$$\Phi' \mathcal{E} Mz(t).$$

Si les constantes $h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petites, et s'il existe une fonction concave Φ non décroissante telle que

$$\Phi' \leq -h'/h$$

et

$$\Phi(t) \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow \infty.$$

des calculs similaires conduisent à :

$$\begin{aligned} \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^{1+(p-1)/2} dt &\leq C\mathcal{E}(S)^{1+(p-1)/2} + C \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^{(p-1)/2} \int_{\Gamma_0} u'^2 + g(u')^2 \\ &\leq C\mathcal{E}(S)^{1+(p-1)/2} + C_\epsilon \mathcal{E}(S) + \epsilon \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^{1+2(p-1)/2} dt. \end{aligned}$$

En choisissant donc ϵ assez petit, on obtient

$$\int_S^T \Phi' \mathcal{E}^{1+(p-1)/2} dt \leq C\mathcal{E}(S).$$

d'où

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{C\mathcal{E}(0)}{\Phi(t)^{2/(p-1)}}.$$

Alors nous sommes revient dans le cas précédent : il reste à étudier les contraintes sur Φ .

- Si $-h'/h$ est bornée inférieurement, alors $\Phi(t) = mt$ est un bon choix et l'énergie décroît au moins polynômialement vers zéro.
- Si $-h'/h$ décroît vers zéro, alors $\Phi(t) := \ln(h(0)/h(t))$ est un bon choix et l'énergie décroît comme

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{C\mathcal{E}(0)}{(-\ln h(t))^{2/(p-1)}}.$$

Exemples :

- Si on considère le noyau h défini par

$$h(t) = e^{-mt}$$

on trouve que l'énergie décroît comme $t^{-2/(p-1)}$ (comme il est démontré dans [8]).

- Si

$$h(t) = h(0)/(1+t)^q$$

avec, $q > 1$, alors l'énergie décroît d'une manière logarithmique vers zéro

$$\mathcal{E}(t) \leq C \ln(t)^{-2/(p-1)}.$$

4.2.3 Estimation du taux de décroissance quand la nonlinearité est plus forte que le noyau

Théorème. 4.2 Soit Φ_0 une fonction concave telle que son inverse est définie par

$$\Phi_0^{-1}(t) = 1 + \int_0^t \frac{1}{G_0(\frac{1}{\tau})}, \quad t \geq 1 \tag{4.32}$$

avec G_0 est une fonction non décroissante au voisinage de $(0, 1)$ et

$$G_0(u) = g_0(u)/u$$

Donc Φ_0^{-1} est croissante et convexe, Φ_0 est croissante et concave, et

$$\Phi_0' \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow \infty.$$

Supposons que $\Phi_0' \leq -\xi h'/h$, avec ξ une constante positive. Alors on obtient avec $\Phi := \Phi_0$ que l'énergie décroît sous la forme

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{C\mathcal{E}(0)}{\Phi_0(t)^2}$$

$$I_2 \leq \xi \mathcal{E}(S)^2.$$

Il reste à étudier I_{10} : On procède comme dans [31] pour l'équation des ondes : On estime I_{10} en utilisant la décomposition spéciale du domaine Γ_0

$$\Gamma_0 = \Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2} \cup \Gamma_{0,3}$$

où

$$\Gamma_{0,1} = \{x \in \Gamma_0, |u'(x, t)| \leq G_0^{-1}(\Phi_0'(t))\},$$

$$\Gamma_{0,2} = \{x \in \Gamma_0, G_0^{-1}(\Phi_0'(t)) \leq |u'(x, t)| \leq G_0^{-1}(\Phi_0'(1))\},$$

$$\Gamma_{0,3} = \{x \in \Gamma_0, |u'(x, t)| \geq G_0^{-1}(\Phi_0'(1))\}.$$

Ensuite, on estime facilement $\Phi_0'(t)u'(x, t)^2$ sur chaque $\Gamma_{0,i}$:

$$\text{si } x \in \Gamma_{0,1}, \text{ alors } \Phi_0'(t)u'(x, t)^2 \leq \Phi_0'(t)G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2,$$

$$\text{si } x \in \Gamma_{0,2}, \text{ alors } \Phi_0'(t)u'(x, t)^2 \leq u'(x, t)g_0(u'(x, t)) \leq u'(x, t)g(u'(x, t)),$$

$$\text{si } x \in \Gamma_{0,3}, \text{ alors } \Phi_0'(t)u'(x, t)^2 \leq C u'(x, t)g_0(u'(x, t)) \leq C u'(x, t)g(u'(x, t)).$$

Donc, en utilisant les propriétés de Φ_0' donnée par (4.32), on obtient

$$\int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_{\Gamma_0} u'(x, t)^2 dx dt \leq C\mathcal{E}(S)^2 + C\mathcal{E}(S) \int_S^\infty \Phi' G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2 dt. \quad (4.33)$$

Des estimations similaires (avec une partition différente de Γ_0 voir [23] donnent la même estimation

$$\int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_{\Gamma_0} g(u'(x, t))^2 dx dt \leq C\mathcal{E}(S)^2 + C\mathcal{E}(S) \int_S^\infty \Phi' G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2 dt. \quad (4.34)$$

Mais, on voit à partir de la définition spéciale de Φ_0 , que

$$\int_S^\infty \Phi' G_0^{-1}(\Phi_0'(t))^2 dt = \int_{\Phi_0(S)}^\infty G^{-1}(\Phi_0'(\Phi_0^{-1}(\tau)))^2 d\tau = \int_{\Phi_0(S)}^\infty \frac{1}{\tau^2} d\tau = \frac{1}{\Phi_0(S)}. \quad (4.35)$$

finallement, on trouve l'inégalité

$$I_{10} \leq C_0 \mathcal{E}(S)^2 + C_0 \frac{\mathcal{E}(S)}{\Phi_0(S)}. \quad (4.36)$$

Donc on obtient, à partir de (4.36) et des estimations de I_1, \dots, I_{11} , que

$$\int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt \leq C \mathcal{E}(S)^2 + C \frac{\mathcal{E}(S)}{\Phi_0(S)},$$

si $\alpha, \mathcal{E}, h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0,\infty)}$ sont assez petits. Donc utilisant une inégalité de Granwall généralisée (voir [31],[32]), on obtient que l'énergie décroît au moins comme

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{C \mathcal{E}(0)}{\Phi_0(t)^2} \leq C \mathcal{E}(0) g_0 \left(\frac{1}{t}\right)^2.$$

Ce résultat est intéressant quant g_0 est faible que tout polynôme au voisinage de zéro.

4.3 Construction de la fonction poids dans le cas général

On commence par énoncer les deux lemmes suivants :

Lemme. 4.7 Soient f_1, f_2 , deux fonctions continues telles que

$$f_1(t) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } t \longrightarrow \infty$$

et

$$\int_0^\infty f_1 = +\infty,$$

f_2 est non décroissante au voisinage de 0 et $f_2(0) = 0$.

Alors il existe toujours une fonction f_3 telle que

$$f_3 \leq f_1, \quad \int_0^\infty f_3 = +\infty, \quad \int_0^\infty f_3(t) f_2(f_3(t)) dt < +\infty. \quad (4.37)$$

De plus si f_1 non croissante, alors on peut choisir f_3 non croissante.

Le lemme précédent découle dans le lemme suivant :

Lemme. 4.8 étant donnée $u_n \geq 0$ telle que $\sum u_n = \infty$, et $\mathcal{E}_n \geq 0$ telle que

$$\mathcal{E}_n \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty,$$

alors il existe une suite non croissante $(\theta_n)_n$ telle que

$$\theta_n \leq 1, \sum \theta_n u_n = \infty$$

avec

$$\sum \theta_n u_n \mathcal{E}_n < \infty.$$

Démonstration 5

preuve de lemme (4.8) : En effet, premièrement notons que si $\sum u_n \mathcal{E}_n < \infty$, alors choisissant θ_n pour tout n est suffisant. En général, puisque $\mathcal{E}_n \rightarrow 0$, alors il existe une suite d'entiers $(n_p)_p$ telle que $n_p \leq n_{p+1}$ et $\mathcal{E}_n \leq 2^{-p}$ si $n \geq n_p$.

On définit, par récurrence, une suite d'entiers $(m_p)_p$ telle que $n_p \leq m_p < m_{p+1}$ et

$$\sum_{n=m_p+1}^{m_{p+1}} u_n \geq \sum_{n=m_{p-1}+1}^{m_p} u_n \geq 1.$$

On peut définir une telle suite car $\sum u_n = \infty$.

On définit maintenant

$$\theta_{m_p+1} = \dots = \theta_{m_{p+1}} = \sum_{n=m_p+1}^{m_{p+1}} u_n^{-1}.$$

Alors, il est facile de prouver que cette suite vérifie les propriétés précédentes. Premièrement elle est non croissante ; ensuite

$$\sum_{n=m_p+1}^{m_{p+1}} \theta_n u_n = 1$$

Donc $\sum \theta_n u_n = \infty$, finalement on a

$$\sum_{n=m_p+1}^{m_{p+1}} \theta_n u_n \mathcal{E}_n \leq \frac{1}{2^p} \sum_{n=m_p+1}^{m_{p+1}} \theta_n u_n = \frac{1}{2^p},$$

donc $\sum \theta_n u_n \mathcal{E}_n < \infty$.

Démonstration 6 preuve du lemme(4.7) :

La démonstration du lemme1 découle de la même construction : En effet, on suppose que l'on est capable de construire une fonction continue non croissante

$$\theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad 0 \leq \theta(t) \leq 1, \\ \int_0^\infty \theta(t) f_1(t) dt = \infty, \\ \int_0^\infty \theta(t) f_1(t) f_2(f_1(t)) dt < \infty. \end{aligned}$$

Alors, la fonction $f_3(t) = \theta(t)f_1(t)$ sera continue, non croissante, et vérifiera (4.37), puisque pour tout t assez grand, la monotonie de f_2 implique que

$$f_3(t)f_2(f_3(t)) \leq f_3f_2(f_1(t)).$$

La construction d'une telle fonction θ découle à partir de la construction faite pour démontrer le lemme (4.8) : Premièrement, pour tout $p \geq 1$, il existe une suite $(u_p)_p$ telle que

$$0 \leq u_p < u_{p+1}, \quad u_p \longrightarrow \infty \quad \text{quand } p \longrightarrow \infty$$

et

$$\forall t \geq u_p, \quad f_2(f_1(t)) \leq \frac{1}{2^p}.$$

Ensuite, il existe une autre suite $(x_p)_p$ telle que $u_p < x_p < x_{p+1}$, et

$$\int_{x_p}^{x_{p+1}} f_1(t) dt \geq \int_{x_{p-1}}^{x_p} f_1(t) dt \geq 1.$$

Ensuite, on considère une fonction $\tilde{\theta}$ constante par morceaux :

$$\forall t \in (x_p, x_{p+1}), \quad \tilde{\theta}(t) = \frac{1}{\int_{x_p}^{x_{p+1}} f_1(t) dt}.$$

Il est clair que $\tilde{\theta}$ est non croissante, $\tilde{\theta} < 1$, et

$$\forall p, \quad \int_{x_p}^{x_{p+1}} \tilde{\theta}(t) f_1(t) dt = 1, \quad \int_0^\infty \tilde{\theta}(t) f_1(t) dt = \infty;$$

De plus

$$\forall p, \quad \int_{x_p}^{x_{p+1}} \tilde{\theta}(t) f_1(t) f_2(f_1(t)) dt \leq \frac{1}{2^p}, \quad \int_0^\infty \tilde{\theta}(t) f_1(t) f_2(f_1(t)) dt < \infty$$

Finalement, il n'est pas difficile de définir une fonction continue θ , affine par morceaux telle que

$$\forall t \geq 0, \quad \theta(t) \leq \tilde{\theta}(t), \quad \text{et } \forall p, \quad \int_{x_p}^{x_{p+1}} \tilde{\theta}(t) f_1(t) dt \geq \frac{1}{2};$$

et cette fonction vérifie les propriétés requises.

Remarque 4.4 Nous avons toujours considéré les cas où $-h'/h$ est bornée inférieurement où si $-h'/h \geq m\Phi'_0$.

4.3.1 Cas où $\lim(-h'/h)=0$ quand $t \longrightarrow \infty$

Maintenant, nous allons nous focaliser sur le cas où $-h'/h$ décroît vers zéro à l'infini.

Alors, on peut appliquer le lemme (4.7) pour conclure : Posons $f_1 = -h'/h$.

Alors

$$\int_0^X f_1 = \ln \frac{h(0)}{h(X)} \longrightarrow +\infty \quad \text{qd } X \longrightarrow +\infty.$$

De plus si $-h'/h$ est non croissante, alors f_1 est non croissante. Ensuite choisir $f_2 := G_0^{-1}(\cdot)^2$; f_2 est non croissante dans un voisinage de 0. Utilisant le lemme 1, il existe $\Phi' := f_3$ qui est non croissante et qui vérifie (4.37). Nous sommes maintenant capable d'estimer les deux derniers termes

Estimation de I_2

Φ' est non croissante, on déduit à partir de (4.37) que

$$\Phi'(t)h(t-s) \leq \Phi'(t-s)h(t-s) \leq -h'(t-s).$$

D'où

$$I_2 \leq \int_S^T \mathcal{E} \int_0^t h'(t-s) \|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|_{\Omega}^2 ds dt \leq -2 \int_S^T \mathcal{E}' \mathcal{E} dt \leq \mathcal{E}(S)^2.$$

Estimation de I_{10}

on estime I_{10} en utilisant la décomposition spéciale du domaine

$$\Gamma_0 = \Gamma_{0,1} \cup \Gamma_{0,2} \cup \Gamma_{0,3}$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,1} &= \{x \in \Gamma_0, |u'(x, t)| \leq G_0^{-1}(\Phi'_0(t))\}, \\ \Gamma_{0,2} &= \{x \in \Gamma_0, G_0^{-1}(\Phi'_0(t)) \leq |u'(x, t)| \leq G_0^{-1}(\Phi'_0(1))\}, \\ \Gamma_{0,3} &= \{x \in \Gamma_0, |u'(x, t)| \geq G_0^{-1}(\Phi'_0(1))\}. \end{aligned}$$

Ensuite on estime facilement $\Phi'_0(t)u'(x, t)^2$ sur chaque $\Gamma_{0,i}$

a- Si $x \in \Gamma_{0,1}$, alors $\Phi'_0(t)u'(x, t)^2 \leq \Phi'_0(t)G_0^{-1}(\Phi'_0(t))$,

b- Si $x \in \Gamma_{0,2}$, alors $\Phi'_0(t)u'(x, t)^2 \leq u'(x, t)g_0(u'(x, t)) \leq u'(x, t)g(u'(x, t))$,

c- Si $x \in \Gamma_{0,3}$, alors $\Phi'_0(t)u'(x, t)^2 \leq C u'(x, t)g_0(u'(x, t)) \leq C u'(x, t)g(u'(x, t))$.

Donc, utilisant les propriétés de Φ' données par (4.32), on obtient

$$\begin{aligned} \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_{\Gamma_0} u'(x, t)^2 dx dt &\leq C\mathcal{E}(S)^2 + C\mathcal{E}(S) \int_S^\infty \Phi'_0 G_0^{-1}(\Phi'_0(t))^2 dt \\ &\leq C\mathcal{E}(S)^2 + C\mathcal{E}(S). \end{aligned}$$

Des estimations similaires (avec des partitions différentes de Γ_0) donnent la même estimation

$$\begin{aligned} \int_S^T \Phi' \mathcal{E} \int_{\Gamma_0} g(u'(x, t))^2 dx dt &\leq C\mathcal{E}(S)^2 + C\mathcal{E}(S) \int_S^\infty \Phi'_0 G_0^{-1}(\Phi'_0(t))^2 dt \\ &\leq C\mathcal{E}(S)^2 + C\mathcal{E}(S) \end{aligned}$$

D'où

$$I_{10} \leq C_0 \mathcal{E}(S)^2 + C_0 \mathcal{E}(S).$$

Maintenant on peut conclure l'étude : On obtient à partir de (4.27) et des estimations de I_1, \dots, I_{11} que

$$\begin{aligned} 2 \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt &\leq C\mathcal{E}(S)^2 + C\Phi'(S)\mathcal{E}(S)^2 \\ &\quad + (2\ell^{-1}1 + \frac{1}{\alpha}) \|h\|_{L^1(0, \infty)} + 2\alpha + C\ell^{-1}h(0) + \mathcal{E}C\ell^{-1} \int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt \\ &\quad + C_\epsilon C\mathcal{E}(S)^2 + C_\epsilon C\mathcal{E}(S). \end{aligned}$$

Donc si α , \mathcal{E} , $h(0)$ et $\|h\|_{L^1(0, \infty)}$ sont assez petits, on obtien

$$\int_S^T \Phi' \mathcal{E}^2 dt \leq C\mathcal{E}(S)^2 + C\mathcal{E}(S) \leq C'\mathcal{E}(S).$$

Alors une inégalité de type Gronwall (voir Komornik [23]) montre que l'énergie décroît au moins comme

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{C\mathcal{E}(0)}{\Phi_0(t)}.$$

CONCLUSION

Le taux de décroissance de l'énergie associée à un système viscoélastique dissipative stabilisée par un feedback non linéaire $g(u')$ agissant sur la frontière, et des termes mémoires interne et frontière, dépend du comportement de g au voisinage de zéro et du noyau h à l'infini.

La question qui se pose est la suivante : *Peut-on construire une fonction spéciale Φ explicitement, de telle sorte que si le noyau décroît exponentiellement vers zéro à l'infini, alors le taux de décroissance est donné par le terme feedback ?*. Mais quand le noyau ne décroît pas exponentiellement vers zéro à l'infini, la décroissance dépend de son comportement à l'infini : comme dans le cas où g est linéaire $g(r) = r$ et $-h'/h$ décroît vers zéro à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **A. Adams**. Sobolev Spaces. Academic press New York San Francisco London(1975).
- [2] **M. Aassila, M.M. Cavalcanti, J.A. Soriano**, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, SIAM J. Control Optim. (2000) 1581-1602.
- [3] **M. Aassila**, A note on the boundary stabilization of a compacity coupled system of wave equations, Applied Mathematics Letters 12 (1999) 19-24.
- [4] **J.Barbosa Sobrinho, J.E. Muñoz Rivera**, Existence and uniform rates of decay for contact problems in viscoelasticity, Appl. Anal. 67 (1997) 3-4
- [5] **H. Brizes**. Analyse fonctionnelle Théorie et applications. Masson, (1983).
- [6] **M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and J. A. Soriano**, Existence and boundary stabilization of a nonlinear hyperbolic equation with time-dependent coefficients, EJDE, 8 (1998), 1-21.
- [7] **M. M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti T.F. Ma, J.A. Soriano**, Global existence and asymptotic stability for viscoelastic problems, Differential Integral Equations 15 (6) (2002) 731-748.
- [8] **M. M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, P. Martinez** ,General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems. Nonlinear Anal 68 (2008) 177-193

- [9] **M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.S. Prates Filho, J.A. Soriano**, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping, *Differential Integral Equations* 14 (1) (2001) 85-116.
- [10] **G. Chen, H. Wong**, Asymptotic behaviour of solutions of the one dimensional wave equation with a nonlinear boundary stabilizer, *SIAM J. Control Optim.* 27 (1989) 758-775.
- [11] **F. Conrad, J. Leblond, J.P. Marmorat**, Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, in : Proc. of the Fifth IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, Perpignan , June 1989, pp. 101-116.
- [12] **C.M. Dafermos**, An abstract volterra equation with application to linear viscoelasticity, *J. Differential Equations* 7 (1970) 554-589.
- [13] **C.M. Dafermos**, Asymptotic stability in viscoelasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 37 (1970) 297-308.
- [14] **R. Dautray. J. L. LIONS**. Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 8. Masson Paris(1988)
- [15] **M. Fabrizio, S. Polidoro**, Asymptotic decay for some differential systems with fading memory, *Appl. Anal.* 81 (6) (2002) 1245-1264.
- [16] **A. Favini, M. A. Horn, I. Lasiecka, and D. Tataru**, Global existence and regularity of solutions to a Von Kármán system with nonlinear boundary dissipation, *Differential and Integral Equations*, 9 (1996), 267-269.
- [17] **S. Jiam and J. E. Muñoz Rivera**, A global existence theorem for the Dirichlet problem in nonlinear n-dimensional viscoelasticity, *Differential and Integral Equations*, 9 (1996), 791-810.
- [18] **Hamadache Salima**, Stabilité Exponentielle de l'équation des ondes avec Condition Au Bord de Type Ventcel thèse, U.S.T.H.B, Alger .2006
- [19] **A. Haraux**, Comportement à l'infini pour une équation des ondes non linéaire dissipative, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. A* 287 (1978) 507-509.
- [20] **A. Heminna**, Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel, *C.R.Acad. Sci. Paris*, 328, série I (1999). 1171-1174

- [21] **A. Heminna**, Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux limites modélisant des jonctions de multi structures, thèse, U.S.T.H.B, Alger .2000
- [22] **A. Khemmoudj**, Stabilisation de quelques Problèmes aux limites non linéaires. Thèse, USTHB, Alger 2007
- [23] **V. Komornik**. Exact Controllability and Stabilization : The Multiplier Method, John Wiley and Sons, Masson, Paris, (1994).
- [24] **V. Komornik and E. Zuazua**, A direct method for boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pures et Appl., 69 (1990), 33-54.
- [25] **J.E. Lagnese**, Asymptotic Energy Estimates for Kirchhoff Plates Subject to Weak Viscoelastic Damping, in : International Series of Numerical Mathematics, vol. 91, Birkhäuser, Verlag, Basel, 1989.
- [26] **J. E. Lagnese and G. Leugering**, Uniform stabilization of nonlinear beam by nonlinear boundary feedback, J. Diff. Equations, 91 (1991), 355-388.
- [27] **I. Lasiecka**, Stabilization of hyperbolic and parabolic systems with nonlinearly perturbed boundary conditions, J. Diff. Eqs., 75 (1988), 53-87.
- [28] **I. Lasiecka, D. Tataru**, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, Differential Integral Equations 6 (3) (1993) 507-533.
- [29] **I. Lasiecka and J. Ong**, Global solvability and uniform decays of solutions to quasilinear equation with nonlinear boundary dissipation.
- [30] **J. L. Lions**, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, 1969.
- [31] **P. Martinez**, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 4 (1999) 419-444.
- [32] **P. Martinez**, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping, Rev. Mat. Complut. 12 (1) (1999) 251-283.
- [33] **P. Martinez**, Decay of solutions of the wave equation with a local highly degenerate dissipation, Asymptot. Anal. 19 (1) (1999) 1-17.
- [34] **M. Milla Miranda**, Traço para o dual dos Espaços de Sobolev, Bol. Soc. Paran. Mat. 2^a série , Vol. 11, N.2 (1990), 131-157.

- [35] **J.E. Muñoz Rivera, E.C. Lapa, R. Barreto**, Decay rates for viscoelastic plates with memory, *J.Elasticity* 44 (1996) 61-87.
- [36] **J.E. Muñoz Rivera, L.H. Fatori**, Smoothing effect and propagation of singularities for viscoelastic plates, *J. Math. Anal. Appl.* 206 (1997) 397-427.
- [37] **J.E. Muñoz Rivera, R.K. Barreto**, Uniform rates of decay in anisotropic thermo-viscoelasticity, *Acta Appl. Math.* 50 (1998) 207-224.
- [38] **J.E. Muñoz Rivera, S. Jiang**, The thermoelastic and viscoelastic contact of two rods, *J. Math. Anal. Appl.* 217 (1998) 423-458.
- [39] **M. Nakao**, Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with a nonlinear dissipative term, *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977) 336-343.
- [40] **M. Renardy, W.J. Hrusa, J.A. Nohel**, *Mathematical Problems in Viscoelasticity*, in : Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., vol. 35, Longman Sci. Tech., 1987.
- [41] **B. Rao**, Stabilization of Kirchhoff plate equation in star-shaped domain by nonlinear boundary feedback, *Nonlinear Analysis TMA*, 20 (1993), 605-626.
- [42] **J. Vancostenoble, P. Martinez**, Optimality of energy estimates for the wave equation with nonlinear boundary velocity feedbacks, *SIAM J. Control Optim.* 39 (3) (2000) 776-797.
- [43] **E. Zuazua**, Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, *SIAM J. Control Optimization* 28 (1990) 466-478.