

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



**THÈSE**

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat 3<sup>ème</sup> cycle (LMD)

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Analyse : Systèmes Dynamiques**

Par : **BERKANI Amirouche**

**Sujet**

**Contrôle d'une poutre viscoélastique fixée à une base  
en mouvement de translation**

*Soutenue publiquement, le 16/05/2017, devant le jury composé de :*

<b>M. MOULAY M. S.</b>	Professeur, à l'U.S.T.H.B.	Président
<b>M. TATAR N-E.</b>	Professeur, à l'K.F.U.P.M., Arabie Saoudite	Directeur
<b>M. KHEMMOUDJ A.</b>	Professeur, à l' U.S.T.H.B.	Co-directeur
<b>M. TOUZALINE A.</b>	Professeur, à l'U.S.T.H.B.	Examineur
<b>M. MAZOUZI S.</b>	Professeur, à l' Univ. Badji Mokhtar, Annaba	Examineur
<b>M. DJEBABLA A.</b>	Maitre de Conférences/A, à l'Univ. Badji Mokhtar, Annaba	Examineur

*Je dédie cette thèse à la mémoire de mon père,  
qui nous a quittés le **29 Mars 2002**,  
qui me manque énormément,  
qui ne m'a jamais quitté  
dans les moments les  
plus difficiles  
jusqu'à sa  
mort.*

---

## Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement **Dr. TATAR Nasser-Eddine** Professeur à King Fahd University of Petroleum and Minerals, Arabie Saoudite pour son aide, sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif. Pendant ces années, il m'a témoigné sa confiance. Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela, je ne l'en remercierai jamais assez.

Je remercie mon Co-directeur **Dr. KHEMMOUDJ Ammar** Professeur à l'U.S.T.H.B. pour ses orientations, sa disponibilité, ses encouragements, ses conseils pendant cette formation et ainsi pendant la préparation de ce projet de recherche.

Je remercie **Dr. MOULAY Mohamed Said** Professeur à l'U.S.T.H.B. pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de cette thèse.

Merci à **Dr. TOUZALINE Arezki**, **Dr. MAZOUZI Said** et **Dr. DJEBABLA Abdelhak**, respectivement Professeur à l'U.S.T.H.B., Professeur et Maître de Conférences à l'Université de Badji Mokhtar de Annaba, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes enseignants qui, tout au long de mes études, ont aiguillonné mon goût pour les mathématiques.

Qu'il me soit enfin permis d'exprimer toute ma gratitude à ma grande-mère **Dahbia**, qui a toujours été un soutien à mes côtés. Elle m'a, sans cesse, encouragé et soutenu dans mon travail. C'est grâce à elle que j'ai pu entreprendre mes études dont cette thèse est l'aboutissement.

Je tiens à remercier ma famille : en particulier ma mère, ma soeur **Hafidha** et mes frères :

---

**Aziz** et **Hakim**, pour leur amour et leur soutien sans faille. Je les remercie de m'avoir supporté et encouragé pendant les moments de doute. Je n'aurai jamais pu terminer cette thèse sans eux.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse est vivement remerciée.

---

## Résumé

L'objet principal de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la stabilisation d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli. Une extrémité de la poutre est fixée à une base en mouvement de translation, et une masse dynamique est attachée à l'extrémité libre de la poutre. Le système, en général, produit pendant son fonctionnement des vibrations indésirables. Ces vibrations sont dues à différents facteurs tels que la non-uniformité de la matière, les grandes vitesses, les perturbations de l'environnement, etc.

Afin d'atténuer ces vibrations, nous profitons de trois types d'amortissement produisant : une dissipation structurelle, dissipation de type Kelvin-Voigt et une dissipation viscoélastique dans la poutre. Nous montrons que l'énergie du système décroît exponentiellement vers zéro, quand le temps tend vers l'infini, pour une classe de noyaux assez large. Nous considérons aussi le cas de noyaux (appelés fonctions de relaxations en théorie de la viscoélasticité) perturbés. Les résultats obtenus s'appliquent aussi pour d'autres classes de fonctions de relaxations. Nous avons préféré de pas s'étaler sur cet axe pour de ne pas distraire l'attention du lecteur de notre objectif principal.

Notre travail consiste à proposer un contrôle agissant sur la base en mouvement de translation auquel la poutre est attachée et permet au système d'atteindre son équilibre le plus "rapidement" possible. Il s'agit donc de stabiliser une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation. Les résultats obtenus améliorent ceux déjà publiés sur ce sujet. Notre méthode est basée principalement sur la technique des multiplicateurs connue aussi sous le nom de "Méthode de l'énergie" et plusieurs estimations appropriées.

**Mots-clés :** *Existence et unicité de la solution ; contrôle des vibrations ; décroissance exponentielle ; poutre de type Euler-Bernoulli translationnelle ; terme mémoire ; fonction de relaxation ; viscoélasticité.*

---

## Abstract

The main purpose of this thesis is to study the existence and uniqueness of the solution and the stabilization of a viscoelastic Euler-Bernoulli beam. One end of the beam is fixed to a base in a translational motion and a tip mass is fixed at its free end. The structure is subject to undesirable vibrations. These vibrations are due to various factors such as non uniformity of the material, high speeds and the disturbances of the environment, etc.

To attenuate these vibrations, we profit from three types of damping, namely a structural damping, a Kelvin-Voigt damping and a viscoelastic damping. We prove that the energy of the system decays exponentially to zero as time goes to infinity, for a large class of kernels. We consider also a perturbation of this class. This class is not the largest one possible. Our arguments work for more general classes. We chose only two classes to avoid distracting the attention of the reader from our main objectives and goals.

Our present work consists in proposing a control force acting on the base in a translational motion to which the beam is attached, and allowing the structure to reach its equilibrium as "fast" as possible. Therefore, we stabilize a viscoelastic Euler-Bernoulli beam fixed to a base in a translational motion. The obtained results improve those published previously in the same subject. Our method is based on the multiplier technique which is also known under the name "Energy Method" and several appropriate estimations.

**Keywords :** *Existence and uniqueness of the solution ; vibration control ; exponential decay ; translational Euler-Bernoulli beam ; memory term ; relaxation function ; viscoelasticity.*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
0.1 Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli . . . . .	3
0.1.1 Cas d'une poutre fixée à son extrémité . . . . .	3
0.1.2 Cas d'une poutre fixée à une base en mouvement de translation . . . . .	10
0.2 But du travail . . . . .	17
0.3 Organisation de la thèse . . . . .	21
<b>1 Rappels généraux et définitions sur les matériaux viscoélastiques et rappels de notions d'analyse fonctionnelle</b>	<b>23</b>
1.1 Rappels sur les matériaux viscoélastiques . . . . .	23
1.1.1 Introduction . . . . .	24
1.1.2 Définition de la viscoelasticité . . . . .	24

## Table des matières

---

1.1.3	Loi de Hooke . . . . .	24
1.1.4	Viscoélasticité linéaire (Voir [12, 15]) . . . . .	25
1.1.5	Principe de superposition de Boltzmann . . . . .	26
1.1.6	Modèles élémentaires pour la viscoélasticité linéaire . . . . .	28
1.2	Rappels d'analyse fonctionnelle . . . . .	30
1.2.1	Topologie faible et topologie faible* . . . . .	31
1.2.2	Les espaces $C^k(\Omega)$ . . . . .	33
1.2.3	Espace réflexif . . . . .	33
1.2.4	Espace séparable . . . . .	33
1.2.5	Espaces $L^p(\Omega) : 1 \leq p < \infty$ . . . . .	34
1.2.6	Espaces de Sobolev . . . . .	35
1.2.7	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	36
1.2.8	Inégalités . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Étude de l'existence et l'unicité de la solution d'une poutre viscoélastique fixée à une base en mouvement de translation</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	40
2.2	Préliminaires . . . . .	41
2.3	Existence et unicité . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Stabilisation d'une poutre viscoélastique fixée à une base en mouvement de translation</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Résultats préliminaires . . . . .	56
3.3	Comportement asymptotique . . . . .	62
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>78</b>
	<b>Annexes</b>	<b>81</b>

## Table des matières

---

<b>A Poutre d'Euler-Bernoulli</b>	<b>81</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>83</b>

# Table des figures

1	Un robot cartésien. . . . .	2
2	Poutre d'Euler-Bernoulli fixée à une extrémité . . . . .	3
3	Poutre d'Euler-Bernoulli fixée à une extrémité avec une masse attachée. . . . .	6
4	Poutre d'Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation. . . . .	10
5	Schéma d'une poutre avec matériaux piézoélectriques . . . . .	13
6	Poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation. . . . .	17
1.1	Courbe caractéristique de fluage. . . . .	26
1.2	Courbe caractéristique de relaxation de contrainte. . . . .	27
1.3	Modèles élémentaires pour la viscoélasticité linéaire . . . . .	28
1.4	Modèle de Kelvin-Voigt . . . . .	29
1.5	Modèle de Maxwell. . . . .	30
3.1	Poutre de Timoshenko fixée à une base en mouvement de translation. . . . .	79
A.1	Modèle d'une poutre . . . . .	81

# Introduction générale

**L**e phénomène des vibrations apparait pratiquement dans toutes les structures mécaniques. Plusieurs types de vibrations sont indésirables car elles ont une influence néfaste considérable sur le fonctionnement et la durée de vie de ces structures. Elles peuvent engendrer des fractures, cassures, mal fonctionnement, usure ou même la destruction des structures. De plus, elles peuvent constituer un danger certain pour l'utilisateur. Les excitations dynamiques causant ces vibrations, sont nombreuses. Elles proviennent, soit de l'environnement extérieur (sol, atmosphère, eau, contacts ou chocs avec d'autres structures), soit de dispositifs internes mobiles (machines intégrées à la structure...). Dans la plupart des systèmes mécatroniques d'aujourd'hui, un nombre d'appareils tel que les roues à réaction et à inertie, les systèmes rotatifs et autres moteurs électriques sont essentiels pour le fonctionnement et la performance du système. Toutefois, ces appareils sont des sources de vibrations nuisibles qui peuvent influencer significativement la performance, l'efficacité et l'exactitude de leurs missions d'où l'importance du contrôle de ces vibrations.

La suppression ou même la réduction de ces vibrations est un problème majeur dans les domaines de l'ingénierie, notamment lorsque la robotique est la discipline principale. Plusieurs techniques sont utilisées pour limiter ou modifier les caractéristiques des réponses aux vibrations de ces systèmes, voir par exemple [86] et [100].

Au cours de ces dernières années, la demande sur l'optimisation des coûts et de l'énergie, la demande d'une plus grande vitesse de fonctionnement et la demande de perfor-

## Introduction générale

---

mance ont motivé l'utilisation des robots manipulateurs légers dans l'industrie. La haute flexibilité et les poids réduits de ces robots ont conduit toutefois à un problème de contrôle sur la trajectoire de l'extrémité. La difficulté se pose au niveau du bras du robot qui nécessite un contrôle technique avancé pour suivre simultanément la trajectoire désirée et supprimer les vibrations résiduelles au niveau du bras.

Précisons que plusieurs robots industriels, particulièrement ceux qui sont largement utilisés dans la chaîne de montage dans l'industrie d'automatismes, sont de type cartésien comme le montre la figure suivante :

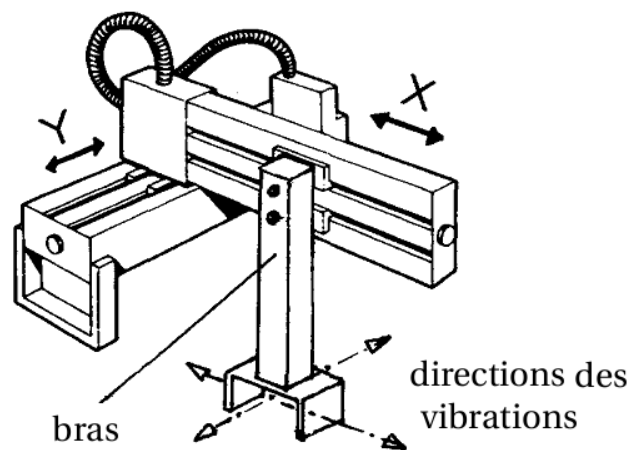


FIGURE 1 – Un robot cartésien.

D'un point de vue mathématique, un robot cartésien peut être modélisé par une poutre de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation (pour plus de détails on revoie le lecteur à la référence [33]). Ce projet de recherche se veut une proposition de solution au problème des vibrations indésirables dans un robot cartésien. Donc, nous nous proposons précisément de répondre aux questions suivantes :

***Est-il possible de contrôler un robot cartésien avec des matériaux viscoélastiques ?***

***Dans quelles conditions peut-on réaliser une stabilité en un temps raisonnable de ce robot ?***

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

---

### 0.1 Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

Le problème de contrôle d'une poutre de type Euler-Bernoulli a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs qui sont parvenus à élaborer et à développer plusieurs méthodes de contrôle (voir par exemple : [26, 43, 44, 51, 52]). On peut trouver plusieurs articles dans la littérature concernant le comportement asymptotique et la stabilité d'une poutre de type Euler-Bernoulli.

#### 0.1.1 Cas d'une poutre fixée à son extrémité

La question de la stabilité ainsi que la stabilisation frontière d'une poutre de type Euler-Bernoulli fixée à une extrémité a été étudiée par plusieurs auteurs. On cite notamment les travaux de : Ghen [42], Ghen *et al.* [14], Krall [55] et Morgül [70]. Dans [70], Morgül a examiné les vibrations d'une poutre fixée à une extrémité comme le montre la figure suivante :

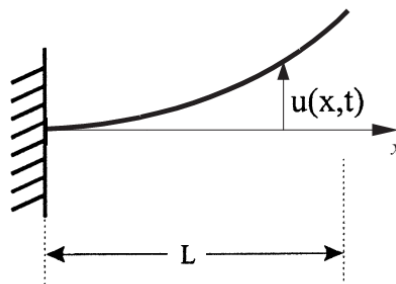


FIGURE 2 – Poutre d'Euler-Bernoulli fixée à une extrémité

où  $L$  est la longueur de la poutre et  $u(x, t)$  est le déplacement transversal de la poutre à la position  $x$  et à l'instant  $t$ . Le problème est décrit comme suit :

$$\rho u_{tt} + EI u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (1)$$

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

---

avec les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ EIu_{xxx}(L, t) = f_1(t), \quad t \geq 0, \\ -EIu_{xx}(L, t) = f_2(t), \quad t \geq 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

où  $\rho$ ,  $E$  et  $I$  désignent, respectivement, la masse par unité de longueur, le module d'élasticité et le moment de la section transversale de la poutre. Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont des forces de contrôle appliquées à l'extrémité libre de la poutre. L'auteur a montré d'abord un résultat d'existence de la solution en utilisant la théorie des semi-groupes, ensuite, sous l'action de deux forces de contrôle suivantes :

$$f_1(t) = d_1 u_t(L, t), \quad f_2(t) = d_2 u_{xt}(L, t), \quad t \geq 0,$$

où  $d_i$ ,  $i = 1, 2$  sont des constantes positives, il a démontré la stabilité exponentielle du système (1)–(2) c'est-à-dire : il existe deux constantes positives  $M$  et  $\lambda$  telles que

$$E(t) \leq M e^{-\lambda t} E(0), \quad t \geq 0$$

où  $E(t)$  représente l'énergie classique du système (1)–(2). Plus tard, dans [50] les auteurs ont considéré l'équation (1) dans le cas où l'extrémité libre de la poutre est contrôlée par une seule force du contrôle  $f(t)$  avec une perturbation harmonique et une amplitude incertaine  $\tilde{\theta}$ . Leur système s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u_{xxx}(L, t) = f(t) - \tilde{\theta} \sin t, \quad t \geq 0, \\ u_{out}(t) = k u_t(L, t), \quad t \geq 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

où  $u_{out}(t)$  représente le signal mesuré du système à l'instant  $t$  et  $k$  est une constante positive. Il ont mentionné que dans le cas où  $f(t) = u_{out}(t) = u_t(L, t)$  et  $\theta = 0$  le système (3) est exponentiellement stable. Toutefois, lorsque le système est soumis à une perturbation telle que :

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

---

$$\begin{cases} f(t) = h(t)u_t(1, t) + \theta(t) \sin t, & t \geq 0, \\ h_t(t) = r u_t^2(1, t), & h(0) = h_0 > 0, \quad t \geq 0, \quad r > 0, \\ \theta_t(t) = u_t(1, t) \sin t, & \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (4)$$

les auteurs, après avoir prouvé l'existence et l'unicité de la solution, ont démontré la stabilité asymptotique du système (3) c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0; \\ \sup_{t \geq 0} h(t) < \infty; \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \tilde{\theta}. \end{cases}$$

Dans [49], Guo a généralisé ces résultats pour le cas d'une poutre fixée à une extrémité et l'autre extrémité est libre ou contrôlé par une force, il a considéré une poutre non uniforme de type Euler-Bernoulli. Précisément, il a étudié le problème suivant :

$$\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) = 0, \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

avec les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{cases} u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial}{\partial x} (EI(x) u_{xx})(1, t) = k u_t(1, t), & t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (6)$$

où  $\rho(x)$  et  $EI(x)$  représentent, la densité de la masse et la rigidité de flexion à la position  $x$  de la poutre, et  $k$  est une constante positive. Si  $\rho(x) = EI(x) = 1$ , alors dans ce cas là on obtient le système (3), Lorsque  $\rho(x)$  et  $EI(x)$  ne sont pas constantes, l'auteur a démontré la stabilité exponentielle du système (5)–(6) en présence d'une dissipation frontière visqueuse  $u_t(1, t)$ .

En 2007 dans [48], B. Z. Guo et W. Guo ont étudié la stabilité exponentielle d'une poutre de type Kirchhoff avec une force de contrôle  $f(t)$  appliquée à l'extrémité libre de la poutre. Ils ont considéré le problème suivant :

$$u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) - F \left( \int_0^L u_x^2(x, t) dx \right) u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (7)$$

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

avec

$$\begin{cases} u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u_{xxx}(L, t) - F \left( \int_0^L u_x^2(x, t) dx \right) u_x(L, t) = f(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < L, \\ u_{out}(t) = u_t(L, t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (8)$$

où  $F$  est une fonction non négative d'une variable réelle et  $u_{out}(t)$  représente le signal mesuré du système à l'instant  $t$ . Si  $F = 0$ , alors le problème (7)–(8) équivaut au problème (3). Lorsque  $F \neq 0$ , les auteurs ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution par la méthode de Faedo-Galerkin et ils ont montré la stabilité exponentielle du système sous l'action du contrôle suivant :

$$\begin{cases} f(t) = k(t)u_t(L, t), & t \geq 0, \\ k_t(t) = r u_t^2(L, t), \quad k(0) = k_0 > 0, & t \geq 0, \quad r > 0. \end{cases}$$

D'autre part, le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli fixée à une extrémité et avec une masse attachée à l'extrémité libre de la poutre a été étudiée par de nombreux auteurs. On peut citer les articles de : Conrad et Morgül [16], Canbolat *et al.* [17], de Querioz *et al.* [25], Li *et al.* [68]. Particulièrement, il est intéressant de prêter attention à la publication de Andrews *et al.* [1] où les auteurs ont traité la poutre d'Euler-Bernoulli fixée à une extrémité tandis que l'autre extrémité est attachée à une masse  $m$  (voir la Figure 3 ci-dessous) avec une dissipa-

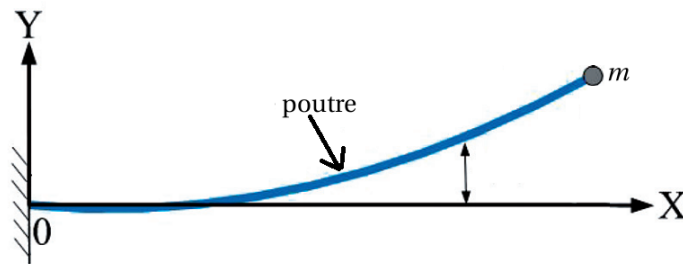


FIGURE 3 – Poutre d'Euler-Bernoulli fixée à une extrémité avec une masse attachée.

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

---

tion de type Kelvin-Voigt pour la poutre, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho u_{tt} + EIu_{xxxx} + \lambda u_{txxxx} = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad T > 0, \quad (9)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0, t) = u_x(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ EIu_{xxx}(L, t) + \lambda u_{xxx t}(L, t) - mu_{tt}(L, t) - md u_{ttx}(L, t) - \gamma u_t(L, t) = f_L(t), & t \geq 0, \\ md u_{tt}(x, t) + (J + md^2) u_{ttx}(x, L) + EIu_{xx}(x, L) + \lambda u_{xxt}(x, L) + d\gamma u_{tx}(x, L) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

et les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_0'(x), \quad x \in (0, L),$$

où  $\lambda$  est le coefficient de viscosité,  $d$  est la distance entre l'extrémité de la poutre et le centre de la masse  $m$  avec un moment d'inertie  $J$ ,  $\gamma$  est le coefficient d'amortissement visqueux et  $f_L$  est la force du contrôle appliquée à la masse  $m$ . Les auteurs, après avoir prouvé l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, ont montré la stabilité exponentielle du système en présence de la dissipation de type Kelvin-Voigt et une dissipation frontière visqueuse avec :

$$f_L(t) = 0.$$

### Cas d'une poutre viscoélastique :

La stabilisation d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli a été étudiée par plusieurs chercheurs. Nous citons ici quelques uns, dans [80] Park et Kim ont considéré la poutre de type Euler-Bernoulli avec une dissipation viscoélastique : une extrémité de la poutre est fixée tandis que l'autre extrémité est soumise à une force du contrôle non linéaire  $f$ . Ils ont considéré l'équation suivante :

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \int_0^t k(t-s) u_{xxxx}(s) ds + g(u_t) = 0, \quad (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

---

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = u_{xxx}(0, t) = 0, & \forall t > 0, \\ u_{xxx}(L, t) - \int_0^t k(t-s) u_{xxx}(L, s) ds = f(u(L, t)), & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (12)$$

où  $g(u_t)$  est une dissipation. Le terme intégral dans la deuxième équation de (11) représente le terme de mémoire ou le terme de l'amortissement viscoélastique. Il est dérivé de la relation entre la contrainte et l'historique de la déformation selon le principe de Boltzmann (pour plus de détails voir Chapitre 1). Pour le cas  $k = f = 0$  et  $g(u_t) = a(x)u_t$  le système (11)–(12) a été étudié par Kim dans [57] ou l'auteur, a démontré la stabilité du système en présence de la dissipation visqueuse. Pour  $k \neq 0$ ,  $g(u_t) \neq a(x)u_t$  et  $f \neq 0$ , les auteurs ont montré un résultat d'existence d'une solution en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. De même, un résultat sur le taux de décroissance uniforme a été prouvé sous l'action de la dissipation viscoélastique, une dissipation de la forme  $g(u_t)$  et une force de contrôle  $f$  en utilisant la technique des multiplicateurs avec certaines hypothèses sur le noyau  $k$  et les fonctions  $g$  et  $f$ . Plus précisément,  $g$  et  $f$  sont des fonctions continûment différentiables et vérifient :

$$(f(s), s) - f(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$g(0) = 0, \quad (g(r) - g(s), r - s) \geq \rho|r - s|^2 \quad \forall s, r \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

pour une constante positive  $\rho$  et le noyau  $k$  vérifiant :

$$\begin{cases} -c_0 k(t) \leq k_t(t) \leq -c_1 k(t), & \forall t \geq t_0, \\ |k_t(t)| \leq c_2 k(t), & \forall t \in [0, t_0], \\ 0 \leq k_{tt} \leq c_3 k(t), & \forall t \in [0, t_0], \end{cases} \quad (15)$$

pour certaines constantes  $c_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, 3$ .

Plus tard, Park *et al.* dans [81] ont étudié l'équation (11) avec les conditions suivantes :

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ u_{xxx}(L, t) - \int_0^t k(t-s) u_{xxx}(L, s) ds = f(t), \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) \quad 0 \leq x \leq L. \\ u_{out}(t) = u_t(L, t), \end{array} \right. \quad (16)$$

où  $f(t)$  est un contrôle frontière agissant sur l'extrémité libre de la poutre et  $u_{out}(t)$  représente le signal mesuré du système à l'instant  $t$ . En supposant que la fonction  $g$  et le noyau  $k$  vérifient les hypothèses (14)–(15), les auteurs ont prouvé l'existence ainsi que la stabilité exponentielle de la solution avec le contrôle frontière  $f(t)$  suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = h(t)u_t(L, t), \\ h_t(t) = r u_t^2(L, t), \quad h(0) = h_0 > 0, \quad r > 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

Un résultat similaire a été obtenu dans [56] par Kang *et al.* lorsque l'extrémité libre de la poutre est contrôlée par une force  $f(t)$  avec une perturbation harmonique et une amplitude  $\theta$  avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = h(t)u_t(L, t) + \theta(t) \sin t, \quad t \geq 0, \\ h_t(t) = r u_t^2(L, t), \quad h(0) = h_0 > 0, \quad t \geq 0, \quad r > 0, \\ \theta_t(t) = u_t(L, t) \sin t, \quad \theta(0) = \theta_0. \end{array} \right. \quad (18)$$

Enfin, dans [63] Lazzari et Nibbi ont étudié le problème suivant :

$$u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \quad (19)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u_{xxx}(1, t) = \Gamma(t), \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

où  $\Gamma(t)$  est une force de contrôle de type viscoélastique appliquée à l'extrémité libre de la poutre définie par :

$$\Gamma(t) = \gamma_0 u_t(1, t) + \int_0^\infty \lambda(s) u_t(1, t-s) ds$$

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

où  $\gamma_0 \in \mathbb{R}^+$  et  $\lambda$  est un noyau non négatif qui vérifie  $\lambda'(s) < 0$ ,  $\lambda''(s) > 0$  et  $s \in \mathbb{R}^+$ . Sous l'action d'un contrôle frontière  $\Gamma$ , les auteurs ont obtenu un résultat de stabilité pour le système (19)–(20).

### 0.1.2 Cas d'une poutre fixée à une base en mouvement de translation

L'une des premières études consacrée à la suppression des vibrations d'une poutre de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement (voir la figure 4 ci-dessous) est le travail de Zhu *et al.* [102]

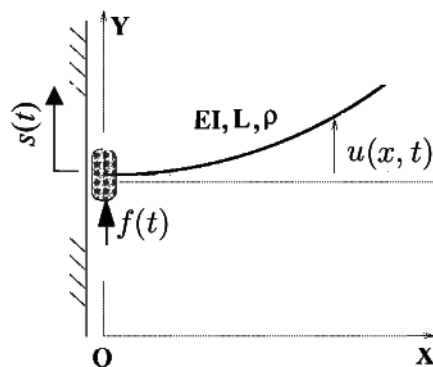


FIGURE 4 – Poutre d'Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation.

Dans la figure 4,  $u(x, t)$  est le déplacement transversal de la poutre à la position  $x$  et à l'instant  $t$  et  $S(t)$  est le déplacement de la base. Les constantes  $\rho$ ,  $EI$  et  $L$  désignent respectivement la masse par unité de longueur, la rigidité en flexion et la longueur de la poutre,  $E$  et  $I$  sont respectivement, le coefficient d'élasticité et le moment d'inertie pour la poutre. La constante  $m$  est la masse de la base en mouvement de translation et  $f(t)$  est une force du contrôle agissant sur la base. En utilisant le principe de Hamilton (pour plus de détails sur le principe de Hamilton, on renvoie le lecteur à [76]) suivant :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta E_k(t) - \delta E_p(t) + f(t) \delta S(t) \right) dt = 0, \quad (21)$$

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

où  $\delta$  est un opérateur variationnel,  $t_0$  est le temps initial,  $t_1$  est le temps final et  $t_0 < t < t_1$ . Ici  $E_k$  et  $E_p$  représentent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle entre  $x = 0$  et  $x = L$  à l'instant  $t$  respectivement, avec :

$$E_k(t) = \frac{m}{2} S_t^2(t) + \frac{\rho}{2} \int_0^L u_t^2(x, t) dx \quad \text{et} \quad E_p(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L u_{xx}^2(x, t) dx. \quad (22)$$

En substituant (22) dans (21), et par des intégrations par parties, les auteurs ont obtenu les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} mS_{tt}(t) - EIu_{xxx}(0, t) = f(t), & t \geq 0, \\ \rho(S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) - EIu_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (23)$$

avec les conditions aux limites

$$u(0, t) = S(t), \quad u_x(0, t) = u_{xx}(L, t) = u_{xxx}(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

La première équation de (23), est l'équation de la base et la deuxième, est l'équation des vibrations transversales de la poutre. Les conditions (24) montrent que la poutre est fixée à la base en  $x = 0$  et l'autre extrémité est libre en  $x = L$ .

Les auteurs utilisent une stratégie de contrôle dont l'effet est de réguler le mouvement de la base. Ils démontrent que le système (23)–(24) peut être stabilisé sans déterminer un taux explicite de décroissance. Ensuite, le système (23)–(24) a été étudié par Ge *et al.* dans [45], mais avec une masse  $m_E$  attachée à l'extrémité libre de la poutre pour contrôler les vibrations indésirables dans le système, il sont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} mS_{tt}(t) - EIu_{xxx}(0, t) = f(t), & t \geq 0, \\ \rho(S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) - EIu_{xxxx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (25)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0, t) = S(t), \quad u_x(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u_{xxx}(L, t) = m_E(S_{tt}(t) + u_{tt}(L, t)), & t \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

---

En utilisant la méthode directe de Lyapunov et sous l'action d'une force du contrôle :

$$f(t) = -k_p [S(t) - S_d] - k_v S_t(t) - k g(t) - \text{sgn}(S_t) \int_0^t |S_\tau(\tau)| g(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

où  $k_p$ ,  $k_v$ , et  $k$  sont des constantes positives,  $S_d$  est la position où la base est régulée,  $g$  est un feedback de vibration et :

$$\text{sgn}(S_t) = \begin{cases} -1, & S_t < 0, \\ 0, & S_t = 0, \\ 1, & S_t > 0, \end{cases}$$

les auteurs ont démontré que le système (25)–(26) peut être stabilisé mais sans déterminer un taux explicite de décroissance. Enfin, des simulations numériques ont été établies pour vérifier les résultats théoriques. L'étude présentée dans [102] ainsi que dans [45] ont permis de conclure qu'on ne peut pas éliminer les vibrations indésirables dans la poutre sans avoir recours à des dissipations internes où externes dans la poutre. Pour faire face à ce problème, dans [46] Ge *et al.* ont considéré une poutre avec des matériaux piézoélectriques<sup>1</sup> attachés sur toute la surface extérieure de la poutre pour supprimer les vibrations indésirables comme le montre la figure suivante :

---

1. Les matériaux piézoélectriques permettent de mieux contribuer à l'optimisation des structures dont on veut contrôler, soit la forme, soit les modes de vibrations. Ces matériaux constituent par exemple le coeur des dispositifs d'imagerie ultra-sonore. Ils existent sous différents types parmi lesquels trois sont distingués : les cristaux (dont le plus connu est le quartz), les polymères et les céramiques. Ces dernières possèdent un fort coefficient de couplage et une relative facilité de production qui leur offrent un avantage certain au niveau industriel. L'une des plus utilisées dans l'industrie des transducteurs piézoélectriques est le Titanate Zirconate de Plomb (PZT).

Les matériaux piézoélectriques possèdent la propriété de se polariser électriquement sous l'action d'une force mécanique (effet direct) et, réciproquement, de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique (effet inverse). Ces caractéristiques particulières font de ces matériaux un bon choix pour la réalisation d'actionneurs, de capteurs, de moteurs, de transducteurs ou de transformateurs.

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

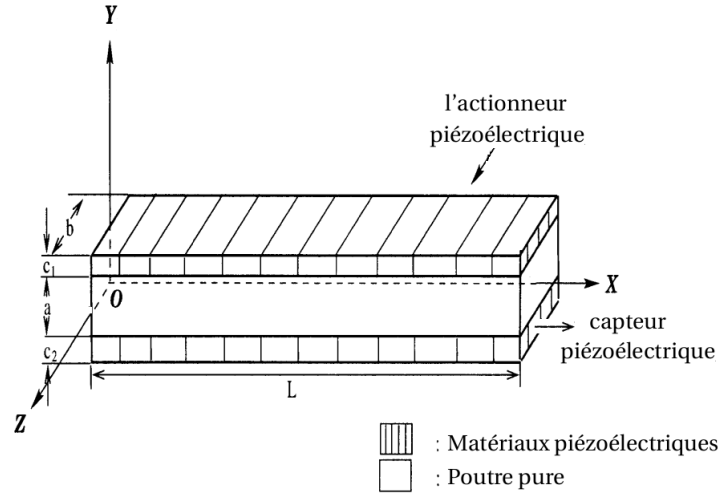


FIGURE 5 – Schéma d'une poutre avec matériaux piézoélectriques

où  $a$  et  $L$  désignent, respectivement, l'épaisseur et la longueur de la poutre,  $b$  est la largeur des matériaux piézoélectriques. Les constantes  $c_1$  et  $c_2$  désignent, respectivement, l'épaisseur de l'actionneur et du capteur piézoélectriques. En utilisant toujours le principe de Hamilton :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta E_c(t) - \delta E_p(t) + \delta W(t) \right) dt = 0, \quad (27)$$

où  $\delta W$  est le travail virtuel effectué par les forces extérieures avec :

$$\delta W(t) = f(t)\delta S(t) + \int_0^L b v(x, t) \delta D_{ay}(x, t) dx, \quad (28)$$

$$E_c(t) = \frac{m}{2} S_t^2(t) + \frac{\rho}{2} \int_0^L \left( S_t(t) + u_t(x, t) \right)^2 dx + \frac{mE}{2} \left( S_t(t) + u_t(L, t) \right)^2 \quad (29)$$

et

$$E_p(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L u_{xx}^2(x, t) dx + \frac{\beta_{aL}}{2} \int_0^L D_{ay}^2(x, t) dx + \frac{\beta_{sL}}{2} \int_0^L D_{sy}^2(x, t) dx \quad (30)$$

$$+ h_{aL} \int_0^L D_{ay}(x, t) u_{xx}(x, t) dx + h_{sL} \int_0^L D_{sy}(x, t) u_{xx}(x, t) dx.$$

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

Ici  $v(x, t)$  est le voltage appliqué à l'actionneur piézoélectrique,  $D_{ay}(x, t)$  et  $D_{sy}(x, t)$  sont les composantes du déplacement électrique de l'actionneur piézoélectrique et du capteur piézoélectrique.  $\beta_{aL}$  et  $\beta_{sL}$  sont des constantes positives caractérisant les propriétés physiques de l'actionneur et du capteur piézoélectriques, respectivement. Les constantes  $h_{aL}$  et  $h_{sL}$  sont des paramètres de couplage par unité de longueur de l'actionneur et du capteur piézoélectriques, respectivement. Les paramètres  $L, EI, E, I, \rho, m$  et  $m_E$  sont déjà définis dans le système (23)–(24). En substituant (28), (29) et (30) dans (27), et par des intégrations par parties, les auteurs ont obtenu les équations du mouvement suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + \rho L)S_{tt}(t) + \rho L \int_0^L (S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) dx + m_E(S_{tt}(t) + u_{tt}(L, t)) = f(t), \quad t \geq 0, \\ \rho(S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) + EIu_{xxxx}(x, t) - h_{aL} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{ay}(x, t) - h_{sL} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{sy}(x, t) = 0, \\ \beta_{aL} D_{ay}(x, t) + h_{sL} u_{xx}(x, t) = bv(x, t), \\ \beta_{sL} D_{sy}(x, t) + h_{sL} u_{xx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (31)$$

avec les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \\ EIu_{xxx}(L, t) + h_{aL} \frac{\partial}{\partial x} D_{aL}(L, t) + h_{sL} \frac{\partial}{\partial x} D_{sL}(L, t) = m_E(u_{tt}(L, t) + \ddot{S}(t)), \\ EIu_{xx}(x, t) + h_{aL} D_{ay}(L, t) + h_{sL} D_{sy}(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty). \end{array} \right. \quad (32)$$

La première équation de (31) représente l'équation de la base en mouvement de translation. La deuxième, est l'équation des vibrations transversales de la poutre. La troisième désigne le couplage statique entre l'actionneur piézoélectrique et la poutre. La dernière désigne le couplage statique entre le capteur piézoélectrique et la poutre. Les conditions (32) indiquent que l'extrémité de la poutre est fixée à une base en  $x = 0$ , et une masse  $m_E$  est attachée à l'extrémité libre de la poutre en  $x = L$ .

En utilisant la méthode directe de Lyapunov avec le contrôle suivant :

$$f(t) = -k_{pr} m(S(t) - S_d(t)) - k_{de} m \frac{\partial}{\partial t} (S(t) - S_d(t)) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_d(t), \quad t \geq 0,$$

et le voltage :

$$v(x, t) = \frac{\beta_{aL}}{bh_{aL}} \left[ -c_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} S(t) x^2 + \rho k_{pw} \int_0^x \int_0^\sigma u(x, t) d\sigma dx \right]$$

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

$$+ \rho K_{dw} \int_0^x \int_0^\sigma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} d\sigma dx \Big], \quad x \in (0, L),$$

où  $k_{pe}$ ,  $k_{de}$ ,  $k_{pw}$  et  $k_{dw}$  sont des constantes positives et  $S_d(t)$  est le déplacement souhaité pour la base en mouvement de translation. Les auteurs ont montré que le voltage appliqué à l'actionneur piézoélectrique permet la suppression des vibrations dans la poutre ainsi que le système (31)–(32) peut être stabilisé mais toujours sans déterminer un taux explicite de décroissance.

Plus tard, dans [30], Dadfarnia *et al.* ont traité le même système dans [46] en ajoutant deux dissipations internes dans la poutre pour stabiliser le système. Particulièrement, il ont considéré une dissipation visqueuse et une dissipation structurelle (le lecteur pourra consulter la référence [11] pour plus de détails sur les deux dissipations) mais les matériaux piézoélectriques sont attachés sur une petite partie de la surface extérieure de la poutre, et par le principe de Hamilton, ils ont obtenu le système d'équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} mS_{tt}(t) + \int_0^L \rho (S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) dx + m_E (S_{tt}(t) + u_{tt}(L, t)) = f(t), \quad t \geq 0, \\ \rho (S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) + EIu_{xxxx}(x, t) + Bu_t(x, t) + Cu_{xt}(x, t) \\ \quad = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (M_{p_0} \nu(t) G(x)) + Bu_t(0, t), \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times [0, \infty), \end{array} \right. \quad (33)$$

avec les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ EIu_{xxx}(L, t) = m_E (u_{tt}(L, t) + S_{tt}(t)), \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (34)$$

où  $M_{p_0}$ ,  $B$ ,  $C$  et  $\nu(t)$  désignent, respectivement, une constante, le coefficient de l'amortissement visqueux, le coefficient de l'amortissement structurel, le voltage appliqué à l'actionneur piézoélectrique et

$$G(x) = H(x - l_1) - H(x - l_2)$$

où  $l_1$  et  $l_2$  représente la position de départ et la position finale de l'actionneur piézoélectrique attaché sur la poutre et  $H$  est la fonction de Heaviside. En utilisant la méthode directe de Lyapunov, ils ont prouvé que la solution décroît exponentiellement vers l'état d'équilibre

## 0.1. Bref aperçu historique des études réalisées sur une poutre d'Euler-Bernoulli

a condition que :

$$f(t) = -\left(m\beta_0 - BL - C\right)S_t(t) - K_r\left(u_t(0, t) + \beta_0(S(t) - S_d)\right) - K_p(S(t) - S_d), \quad t \geq 0$$

et

$$v(t) = \frac{K_v}{M_{P0}} \left[ \beta_0(u_x(l_2, t) - u_x(l_1, t)) + u_{xt}(l_2, t) - u_{xt}(l_1, t) \right], \quad t \geq 0$$

où  $K_r$ ,  $K_p$  et  $K_v$  sont des constantes positives. Enfin, ce résultat a été amélioré en 2004 par Dadfarnia *et al.* [31], où les auteurs ont remplacé la dissipation externe (les matériaux piézoélectrique) par une dissipation interne notamment une dissipation de type Kelvin-Voigt (voir [11] pour plus de détails sur l'aspect physique) pour la poutre avec une masse  $m_E$  dynamique attachée à l'extrémité de la poutre. Leur système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} mS_{tt}(t) + \rho \int_0^L (S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) dx + m_E(S_{tt}(t) + u_{tt}(L, t)) = f(t), & t \geq 0, \\ \rho(S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) + EIu_{xxxx}(x, t) + Bu_t(x, t) + Cu_{xt}(x, t) \\ + Du_{xxxxt}(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in (0, L) \times [0, \infty), \end{cases} \quad (35)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0, t) = u_x(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ Du_{xxxxt}(L, t) + EIu_{xxx}(L, t) = m_E(u_{tt}(L, t) + S_{tt}(t)), & t \geq 0, \\ Du_{xxxt}(L, t) + EIu_{xx}(L, t) = -Ju_{xtt}(L, t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

où  $D$  est le coefficient de l'amortissement Kelvin-Voigt et  $J$  est le moment d'inertie de la masse  $m_E$ . Les auteurs ont démontré qu'il est impossible de stabiliser le système (35)–(36) exponentiellement sans avoir recours aux trois dissipations internes (visqueuse, structurelle et Kelvin-Voigt) avec un contrôle frontière :

$$f(t) = (BL + C - m\beta_0)S_t(t) - K_r(S_t(t) + \beta_0S_t(t)) - K_pS(t), \quad t \geq 0$$

où  $\beta_0$ ,  $K_r$ ,  $K_p$  sont des constantes positives. Des résultats numériques ont été présentés pour prouver l'efficacité du contrôle force ainsi que des différentes types de dissipations dans la poutre.

## 0.2. But du travail

---

A notre connaissance, la stabilisation d'une poutre de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation par une dissipation viscoélastique n'a pas été abordée. Notre travail consiste à stabiliser ce type de structure en considérant des matériaux viscoélastiques. Il est bien connu que les matériaux viscoélastiques produisent une dissipation beaucoup plus faible que la dissipation frictionnelle ou du type Kelvin-Voigt. Du point de vue mathématique, c'est le terme mémoire suivant qui est responsable de cette dissipation

$$\int_0^t g(t-s) u_{xxxx}(s) ds.$$

Ce terme mémoire tient compte de toute la préhistoire du matériel à travers un noyau appelé fonction de relaxation en théorie de viscoélasticité.

## 0.2 But du travail

Notre objectif est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la stabilisation exponentielle d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli. Cette étude portera précisément sur le cas d'une poutre dont l'une des extrémités est fixée à une base en mouvement de translation tandis que l'autre extrémité est attachée à une masse dynamique comme le montre la figure suivante :

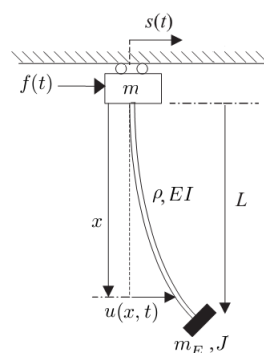


FIGURE 6 – Poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation.

## 0.2. But du travail

---

Si nous considérons deux types d'amortissement pour la poutre produisent une dissipation structurelle et une dissipation Kelvin-Voigt et en utilisant le principe de Hamilton généralisé (voir [76])

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [E_k(t) - E_p(t) + W(t)] dt = 0 \quad (37)$$

où  $\delta$  est un opérateur variationnel,  $t_0$  est le temps initial,  $t_1$  est le temps final et  $t_0 < t < t_1$ ,  $E_k$  et  $E_p$  représentent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle entre  $x = 0$  et  $x = L$  à l'instant  $t$  respectivement, avec :

$$2E_k(t) = m\dot{S}^2(t) + \rho \int_0^L [\dot{S}(t) + u_t(x, t)]^2 dx + m_E [\dot{S}(t) + u_t(L, t)]^2 + Ju_{xt}^2(L, t), \quad (38)$$

et

$$E_p(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L [u_{xx}(x, t)]^2 dx, \quad (39)$$

où les fonctions  $S$  et  $u$  désignent, respectivement, le déplacement de la base en mouvement de translation, le déplacement transversal de la poutre par rapport à la base. Les coefficients  $\rho$ ,  $E$  et  $I$  sont des constantes positives caractérisant les propriétés élastiques des matériaux. Physiquement,  $\rho$  est la densité linéaire,  $E$  est le coefficient d'élasticité et  $I$  est le moment d'inertie. Les constantes  $L$ ,  $m$  et  $m_E$  représentent la longueur de la poutre, la masse de la base en mouvement de translation et la masse avec moment d'inertie  $J$  attachée à l'extrémité libre de la poutre, respectivement.

Le travail total virtuel effectué par les forces extérieures est donné par

$$\begin{aligned} \delta W(t) &= \delta W_f + \delta W_C + \delta W_D \\ &= f(t)\delta S(t) - C \int_0^L u_{xt}(x, t)\delta u(x, t)dx - D \int_0^L u_{xxxxt}(x, t)\delta u(x, t)dx \\ &\quad + Du_{xxx}(L, t)\delta u(L, t) - Du_{xxt}(L, t)\delta u_x(L, t), \end{aligned} \quad (40)$$

où  $W_f$  est le travail effectué par la force extérieure  $f(t)$  agissant sur la base,  $W_C$  est le travail effectué par l'amortissement structurel et  $W_D$  est le travail effectué par l'amortissement Kelvin-Voigt. Les constantes  $C$  et  $D$  sont des coefficients d'amortissement structurel

## 0.2. But du travail

et d'amortissement Kelvin-Voigt de la poutre, respectivement. En appliquant l'opérateur variationnel, les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta S(t_0) = \delta S(t_1) = 0, \\ \delta u(x, t_0) = \delta u(x, t_1) = 0, \quad x \in [0, L], \\ \delta u_x(L, t_0) = \delta u_x(L, t_1) = 0, \\ \delta u_x(0, t) = 0, \\ \delta u(0, t) = 0, \end{array} \right.$$

et par des intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ m\ddot{S}(t) + \rho \int_0^L [\ddot{S}(t) + u_{tt}(x, t)] dx + m_E[\ddot{S}(t) + u_{tt}(L, t)] - f(t) \right\} \delta S(t) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left\{ \rho[\ddot{S}(t) + u_{tt}(x, t)] + EIu_{xxxx}(x, t) + Cu_{xt}(x, t) + Du_{xxxxt}(x, t) \right\} \delta u(x, t) dx dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ EIu_{xxx}(x, t) \delta u(x, t) \Big|_0^L + [Du_{xxx}(x, L) - m_E(u_{tt}(L, t) + \ddot{S}(t))] \delta u(L, t) \right\} dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ EIu_{xx}(x, t) \delta u_x(x, t) \Big|_0^L + (Du_{xxt}(x, L) + Ju_{xtt}(L, t)) \delta u_x(L, t) \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Alors, le système est modélisé par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{S}(t) + \rho \int_0^L [\ddot{S}(t) + u_{tt}(x, t)] dx + m_E[\ddot{S}(t) + u_{tt}(L, t)] = f(t), \quad t \geq 0, \\ \rho[\ddot{S}(t) + u_{tt}(x, t)] + EIu_{xxxx}(x, t) + Cu_{xt}(x, t) + Du_{xxxxt}(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times [0, \infty), \end{array} \right. \quad (41)$$

avec les conditions aux limites et les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \\ Du_{xxx}(L, t) + EIu_{xxx}(L, t) = m_E[u_{tt}(L, t) + \ddot{S}(t)], \\ Du_{xxt}(L, t) + EIu_{xx}(L, t) = -Ju_{xtt}(L, t), \quad \forall t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad S(0) = S^0, \quad \dot{S}(0) = S^1, \quad x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (42)$$

## 0.2. But du travail

Dans le cas, la poutre est fabriquée par des matériaux viscoélastiques, alors en utilisant la relation entre les contraintes et les déformations suivante :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - E \int_0^t g(t-s)\varepsilon(s)ds$$

où  $\sigma(t)$  c'est la contrainte,  $\varepsilon(t)$  c'est la déformation,  $E$  et le module de Young et la fonction  $g(t)$  c'est une fonction de relaxation, les équations du système dans ce cas là s'écrivent comme suit (voir [8, 9]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} mS_{tt}(t) + \int_0^L \rho(S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t))dx + m_E(S_{tt}(t) + u_{tt}(L, t)) = f(t), \quad t \geq 0, \\ \rho(S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) + EIu_{xxxx}(x, t) - EI \int_0^t g(t-s)u_{xxxx}(s)ds \\ + Cu_{xt}(x, t) + Du_{xxxxt}(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times [0, \infty), \end{array} \right. \quad (43)$$

avec des conditions aux bords

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \\ Du_{xxx}(L, t) + EIu_{xxx}(L, t) - EI \int_0^t g(t-s)u_{xxx}(L, s)ds = m_E(u_{tt}(L, t) + S_{tt}(t)), \\ Du_{xx}(L, t) + EIu_{xx}(L, t) - EI \int_0^t g(t-s)u_{xx}(L, s)ds = -Ju_{xt}(L, t), \quad \forall t \in [0, \infty), \end{array} \right. \quad (44)$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad S(0) = S_0, \quad S_t(0) = S_1, \quad x \in (0, L)$$

Le terme intégral dans la deuxième équation de (43) exprime le fait que les contraintes dépendent à tout moment, non seulement de la valeur instantanée, mais de toute l'histoire passée des contraintes que le matériau a subi.

Dans notre travail, nous supposons que le noyau  $g$  vérifie les mêmes hypothèses que celles dans [88] c'est à dire :

$$0 < g'(t) + \mu g(t) \leq \xi(t), \quad \text{p.p. } t \geq 0$$

### 0.3. Organisation de la thèse

---

pour une constante positive  $\mu$  et une fonction non négative  $\xi(t)$ . Une question naturelle se pose dans le contexte du problème viscoélastique avec des conditions de bords dynamiques : *est-il possible de stabiliser le système en considérant les trois types d'amortissements (Kelvin-Voigt, structurel et viscoélastique) et sous quelles conditions?*. L'objectif de ce travail est de répondre à cette question. On montre que ces trois types d'amortissements sont assez forts pour assurer la stabilisation de tout le système sous l'action d'un contrôle  $f(t)$  agissant sur la base en mouvement de translation. C'est un problème délicat car nous considérons une dissipation plus faible que les dissipation utilisées jusque là en plus du fait que les conditions aux bords sont dynamiques au lieu de conditions statiques. Les conditions aux bords dynamiques donnent lieu à de nouveaux termes dans l'expression de l'énergie dont les dérivées ne sont pas faciles à contrôler.

### 0.3 Organisation de la thèse

Le reste de cette thèse est organisé comme suit :

**Chapitre 1 :** Dans ce chapitre nous présentons des rappels sur les propriétés des matériaux viscoélastiques et leur rôle dans l'atténuation des vibrations dans les systèmes mécaniques ainsi que des rappels d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans notre travail. En particulier, nous donnons quelques résultats fondamentaux concernant les espaces fonctionnels et les théorèmes d'existence pour certains problèmes d'évolution.

**Chapitre 2 :** Dans ce chapitre, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation avec des conditions aux bords dynamiques en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

**Chapitre 3 :** Dans cette partie, nous présentons notre première contribution concernant la stabilisation d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication parue dans la revue **Mathematical Methods in the Applied Sciences** intitulée :

### 0.3. Organisation de la thèse

---

**Control of a viscoelastic translational Euler-Bernoulli beam**, 40(1) :237–254.

DOI : 10.1002/mma.3985, 2016.

**Conclusion et perspectives :** Ce chapitre a pour but d' évaluer les résultats obtenus et de présenter quelques perspectives pour améliorer les résultats obtenus et d'introduire d'autres problèmes ouverts dans lesquels s'inscrit notre travail.

# Rappels généraux et définitions sur les matériaux viscoélastiques et rappels de notions d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de cette thèse, il est partagé en deux sections. La première section comporte un bref rappel sur les matériaux viscoélastiques. La deuxième section est consacrée à la présentation de quelques notions de base essentielles de la théorie d'analyse fonctionnelle.

## **1.1 Rappels sur les matériaux viscoélastiques**

Cette section présente les notions de base liées à la viscoélasticité linéaire. Après l'introduction des principes physiques qui induisent ce type de comportement dissipatif du matériau, nous présentons l'approche par des modèles simples qui peuvent décrire le comportement de ces matériaux.

## 1.1. Rappels sur les matériaux viscoélastiques

---

### 1.1.1 Introduction

Les matériaux viscoélastiques ont des applications dans tous les domaines de l'ingénierie et des systèmes mécaniques, de l'électroménager au spatial en passant par l'automobile, l'aéronautique ou le génie civil.

Les propriétés amortissantes optimales de ce type de matériau sont très largement utilisées dans les applications industrielles pour répondre à des problématiques de réduction et de contrôle du bruit et des vibrations, voir par exemple [78] et [84].

Ces matériaux ont la possibilité d'absorber les vibrations et de forcer ces systèmes à atteindre leur équilibre vers le repos dans un temps raisonnable. Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons aux phénomènes viscoélastiques qui régissent le comportement dynamique du matériau et donc le comportement vibratoire des structures. De nombreux résultats ont été établis dans ce domaine, on cite notamment les travaux de : Djebabla et Tatar [53, 33, 34], Dafermos [36], Tatar [92–96], Kelleche *et al.* [59], Ammar-Khodja *et al.* [5] et Messaoudi et Mustafa [74].

### 1.1.2 Définition de la viscoelasticité

Un matériau viscoélastique se caractérise par le fait qu'il possède à la fois un comportement visqueux et élastique. L'élasticité se traduit par la conservation et restitution de l'énergie après déformation. La viscosité se traduit par la dissipation de l'énergie. Les polymères représentent un bon exemple de matériaux qui ont un comportement viscoélastique.

### 1.1.3 Loi de Hooke

Pour une pièce de matériau ayant une surface de section transversale  $A$ , et une longueur initiale  $l_0$ , soumise à une force  $F$  (de traction/compression), la réponse correspondante est donnée par le déplacement  $\Delta l$ . Le modèle de déformation le plus simple est la traction (étirement) ou la compression. Pour les petites déformations, la variation de la longueur  $\Delta l$  est

## 1.1. Rappels sur les matériaux viscoélastiques

---

proportionnelle à la force  $F$

$$F = k \times \Delta l$$

où  $k$  est la raideur de la pièce. Le rapport de la force  $F$  par l'aire  $S$  de la section droite de la pièce s'appelle "contrainte". La contrainte est donc une grandeur homogène qui s'exprime par

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Le rapport de l'allongement  $\Delta l$  par la longueur initiale  $l_0$  s'appelle "déformation" ou allongement relatif

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

On distingue les cas suivants

**Matériau élastique :** toute l'énergie stockée au cours du chargement de la force  $F$  est retournée une fois la force enlevée. Dans ce cas la loi de Hooke s'exprime alors sous la forme

$$\sigma = E \times \varepsilon$$

où  $E$  est le module de Young ou module d'élasticité, qui est une caractéristique du matériau ; c'est l'équivalent en mécanique des milieux continus de la raideur d'un ressort.

**Matériau visqueux :** ce type de matériau ne renvoie aucune partie de l'énergie stockée au cours du chargement. Toute l'énergie est perdue sous forme d' "amortissement pur" une fois la charge enlevée. Dans ce cas, la contrainte est proportionnelle à la vitesse de la déformation, et le rapport de la contrainte par la vitesse de déformation est connue comme "viscosité".

### 1.1.4 Viscoélasticité linéaire (voir [12, 15])

La viscoélasticité linéaire se caractérise par le comportement élastique et dissipatif d'un matériau pour les petites déformations. En mécanique des structures, c'est le niveau macroscopique qui est retenu. Cependant, quelques éléments d'une approche à une échelle

## 1.1. Rappels sur les matériaux viscoélastiques

---

inférieure (ici moléculaire) permettent de comprendre le phénomène physique de dissipation dans ces matériaux, ce qui permet de déterminer ou d'expliquer l'influence de certains facteurs à prendre en compte.

D'un point de vue moléculaire, quand un effort est appliqué sur un matériau viscoélastique, par exemple pour un polymère, deux mécanismes atomiques interviennent. Les liaisons atomiques changent de longueur et d'angle. Les atomes sont alors déplacés à de nouvelles positions, avec une augmentation de l'énergie interne de façon extrêmement rapide.

L'une des caractéristiques des matériaux viscoélastiques c'est que leurs propriétés sont influencées par de nombreux paramètres. Ils peuvent inclure : la fréquence, la température, la vitesse de déformation dynamique, précharge statique, les effets du temps comme le fluage et la relaxation, le vieillissement, etc.

### 1.1.5 Principe de superposition de Boltzmann

Le fluage et la relaxation de contraintes sont deux méthodes couramment utilisées pour déterminer l'évolution du module de relaxation en traction ou en cisaillement d'un polymère dans le domaine temporel.

Pour un essai de fluage, une sollicitation uniaxiale en contrainte est imposée à l'instant  $t_0$  à une éprouvette de polymère initialement non chargée, puis maintenue constante. On remarque sur la figure 1.1 que la réponse uniaxiale correspondante est constituée d'une partie instantanée ( $\epsilon(t_0) \neq 0$ ) et d'une partie différée (augmentation de la déformation).

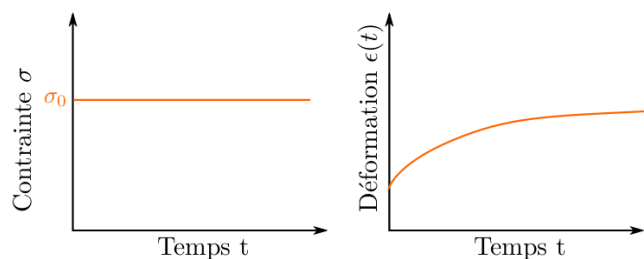


FIGURE 1.1 – Courbe caractéristique de fluage.

## 1.1. Rappels sur les matériaux viscoélastiques

La déformation  $\varepsilon(t)$  en fonction du temps rapportée à la contrainte imposée  $\sigma_0$  (supposée constante) permet de définir la complaisance de fluage :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}.$$

Réciproquement, un essai de relaxation de contrainte consiste à imposer une déformation uniaxiale maintenue constante à l'éprouvette de polymère initialement non déformée, et à mesurer la contrainte résultante.

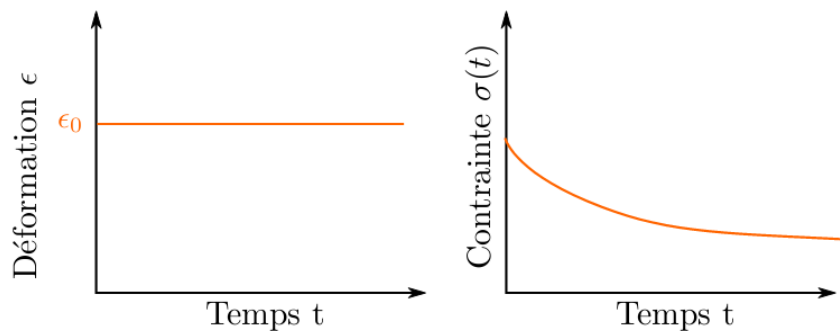


FIGURE 1.2 – Courbe caractéristique de relaxation de contrainte.

De la même manière que pour un essai de fluage, la réponse est constituée d'une partie instantanée ( $\sigma(t_0) \neq 0$ ) et d'une partie différée (diminution de la contrainte). Le rapport entre la contrainte mesurée  $\sigma(t)$  et la déformation appliquée à l'éprouvette  $\varepsilon_0$  donne accès au module de relaxation :

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}.$$

La complaisance de fluage et le module de relaxation sont reliés par la relation suivante :

$$\int_0^t J(t-\tau)E(\tau)d\tau = t.$$

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, le module de relaxation et la complaisance de fluage mesurés sont indépendants de l'amplitude du chargement. De plus, le principe de superposition de Boltzmann s'applique : la superposition des sollicitations implique la superposition analogue des réponses. Ainsi, la réponse d'un matériau viscoélastique dépend

## 1.1. Rappels sur les matériaux viscoélastiques

---

de l'histoire de chargement. Cet effet de mémoire est transcrit dans la loi de comportement :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

où  $\sigma(t)$  et  $\varepsilon(t)$  correspondent aux évolutions temporelles de la contrainte et de la déformation. En supposant que la déformation est nulle avant l'application du chargement à  $t = 0$ , la loi de comportement devient :

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.1)$$

La fonction  $E(t)$  représente une propriété mécanique du matériau qu'on appelle la "fonction de relaxation". La formule (1.1) s'appelle le principe de Boltzmann.

### 1.1.6 Modèles élémentaires pour la viscoélasticité linéaire

Les modèles rhéologiques utilisés en viscoélasticité linéaire sont constitués à partir des deux modèles élémentaires (voir [54]) représentés sur les figures suivantes :



a) Élément élastique linéaire : ressort    b) Élément visqueux linéaire : amortisseur

FIGURE 1.3 – Modèles élémentaires pour la viscoélasticité linéaire

Les modèles rhéologiques sont des éléments qui permettent de représenter les comportements mécaniques de base. Deux comportements nous intéressent :

1. l'élasticité avec un ressort (figure 1.3 (a)) dont la raideur  $k$  correspond au coefficient de proportionnalité entre la contrainte et la déformation uniaxiales :  $\sigma = k\varepsilon$

## 1.1. Rappels sur les matériaux viscoélastiques

2. la viscosité avec un amortisseur (figure 1.3 (b)) dont le paramètre  $\eta$  correspond au coefficient de proportionnalité entre la contrainte et le taux de déformation uniaxiale :  $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$ .

La plupart des modèles viscoélastiques sont construits à partir de ces modèles élémentaires, en assemblant des ressorts et des amortisseurs en série ou en parallèle. Les modèles rhéologiques les plus simples sont :

### Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt, aussi appelé modèle d'amortisseur visqueux, consiste à assembler en parallèle un ressort et un amortisseur (voir [54]) comme le montre la figure suivante :

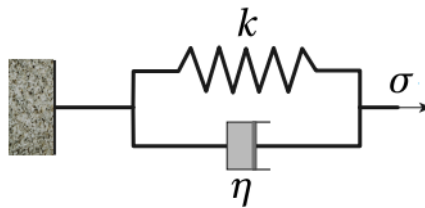


FIGURE 1.4 – Modèle de Kelvin-Voigt

On note  $\sigma_1$  et  $\varepsilon_1$  la contrainte et la déformation dans le ressort, et  $\sigma_2$ ,  $\varepsilon_2$  la contrainte et la déformation dans l'amortisseur. En écrivant le loi de comportement de chaque élément, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_1 = k\varepsilon_1, \\ \sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

Lorsque deux éléments sont assemblés en parallèle, ils sont soumis à la même déformation  $\varepsilon$  et la contrainte totale  $\sigma$  est égale à la somme des contraintes induites dans chaque élément, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

La loi de comportement associée au modèle de Kelvin-Voigt est obtenue en combinant les équations (1.2) et (1.3) :

$$\sigma = k\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}.$$

### Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est composé d'un ressort et d'un amortisseur en série (voir [54]) comme le montre la figure suivante :

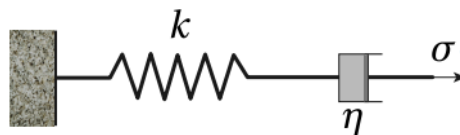


FIGURE 1.5 – Modèle de Maxwell.

Lorsque deux éléments sont en série, la déformation totale est donnée par la somme de chacune des déformations, et la même contrainte  $\sigma$  s'applique aux deux éléments, d'où :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

La combinaison des équations (1.2) et (1.4) conduit à la loi de comportement suivante pour le modèle de Maxwell :

$$k\sigma + \eta\dot{\sigma} = \eta k\dot{\varepsilon}.$$

## 1.2 Rappels d'analyse fonctionnelle

Cette section vise à présenter quelques notions essentielles d'analyse fonctionnelle ainsi que certains résultats concernant les espaces  $L^p$ , les espaces de Sobolev et des théorèmes d'existence pour des problèmes d'évolution qui seront utilisées par la suite.

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

### 1.2.1 Topologie faible et topologie faible\*

#### Topologie faible

Soit  $X$  un espace de Banach muni de la norme  $\| \cdot \|_X$  et soit  $X^*$  son espace dual (l'espace des formes linéaires continues sur  $X$ ).

**Notation 1.2.1** *Le crochet de dualité est la forme bilinéaire définie par*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, x) \longrightarrow \langle f, x \rangle = f(x).$$

**Définition 1.2.1** *La topologie faible sur  $X$  notée  $\sigma(X, X^*)$  est la topologie la moins fine sur  $X$  rendant continues toutes les formes linéaires sur  $X^*$ .*

*Un système fondamental de voisinage de la topologie  $\sigma(X, X^*)$  en un point  $x_0 \in X$  est donnée par*

$$V_{\varepsilon, I}^{x_0} = \left\{ x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \right\}$$

*où  $|\cdot|$  désigne la valeur absolue,  $\varepsilon$  et  $I$  fini,  $f_i \in X^*$ .*

**Définition 1.2.2** *On dit qu'une suite  $(x_n)_n$  de  $X$  converge faiblement vers  $x \in X$  si pour tout  $f \in X^*$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

*On note cette convergence par  $x_n \rightharpoonup x$ .*

*On parle de convergence forte quand on a convergence en norme*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0,$$

*et on note  $x_n \rightarrow x$ .*

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

**Proposition 1.2.1** (Voir [7]) Soit  $(x_n)_n$  une suite de  $X$ . On a les propriétés suivantes

1. Si  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x_n \rightharpoonup x$ .
2. Si  $x_n \rightharpoonup x$ , alors  $\|x_n\|_X$  est bornée et  $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_X$ .
3. Si  $x_n \rightharpoonup x$ , dans  $X$ , et si  $f_n \rightarrow f$  dans  $X^*$  alors  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 1.2.1** (Voir [7]) Dans un espace vectoriel normé, toute suite faiblement convergente est bornée.

### Topologie faible\*

Soit  $E$  un espace de Banach

**Définition 1.2.3** La topologie faible\* sur  $E^*$ , notée  $\sigma(E^*, E)$  est la topologie la moins fine sur  $E^*$  rendant continues toutes les applications pour tout  $x \in E$ . Un système fondamental de voisinage de la topologie  $\sigma(E^*, E)$  en un point  $f_0 \in E^*$  est donné par

$$V_{\varepsilon, I}^{f_0} = \{f \in E^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\}$$

où  $|\cdot|$  désigne la valeur absolue,  $\varepsilon > 0$ ,  $I$  fini,  $x_i \in E$ .

On note "une suite  $(f_n)_n$  qui converge vers  $f$  pour la topologie  $\sigma(E^*, E)$ " par  $f_n \xrightarrow{*} f$ .

**Proposition 1.2.2** Soit  $(f_n)_n$  une suite dans ou de  $E^*$ . On a les propriétés suivantes :

1. Si  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E^*, E)$  est équivalente à  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\forall x \in E$ .
2. Si  $f_n \rightarrow f$  alors  $f_n \rightharpoonup f$  pour  $\sigma(E^*, E^{**})$ ,  
si  $f_n \rightharpoonup f$  pour  $\sigma(E^*, E^{**})$  alors  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E^*, E)$ .
3. Si  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E^*, E)$  alors  $\|f_n\|$  est bornée dans  $E^*$  et  $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$ .
4. Si  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E^*, E)$  et  $x_n \rightarrow x$  dans  $E$  alors  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration.** Voir [7]. ■

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

### 1.2.2 Les espaces $C^k(\Omega)$

Soient  $m$  un entier positif et  $\Omega$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  défini par

$$\Omega = ]0, L[, \quad L > 0$$

On notera par :

$C(\Omega)$  l'espace des fonctions continues de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,

$(C(\Omega))^m$  l'espace des fonctions continues de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ ,

$C_b(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ , on le munit de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Pour  $k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , on définit alors :

$C^k(\Omega)$  l'espace des fonctions  $u$  qui sont  $k$  fois dérivables et dont la dérivée d'ordre  $k$  est continue sur  $\Omega$ ,

$C_c^k(\Omega)$  est l'espace des fonctions de  $C^k(\Omega)$  dont le support est compact et inclus dans  $\Omega$ ,

$C_0^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

### 1.2.3 Espace réflexif

**Définition 1.2.4** Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $J$  l'injection canonique de  $E$  dans  $E^{**}$  (bidual de  $E$ ). On dit que  $E$  est réflexif si  $J(E) = E^{**}$ .

Lorsque  $E$  est réflexif, on identifie implicitement  $E$  et  $E^{**}$  (à l'aide de l'isomorphisme  $J$ ).

### 1.2.4 Espace séparable

**Définition 1.2.5** On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble  $D \subset E$  dénombrable et dense.

**Théorème 1.2.2** Soit  $E$  un espace de Banach réflexif et soit  $(x_n)_n$  une suite bornée dans  $E$ . Alors il existe une sous-suite extraite  $(x_{n_k})$  qui converge pour la topologie  $\sigma(E, E^*)$ .

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

**Démonstration.** Voir [7]. ■

### 1.2.5 Espaces $L^p(\Omega)$ : $1 \leq p < \infty$

On désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace des classes des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

L'espace vectoriel  $L^1(\Omega)$  devient un espace complet muni de la norme :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(x)| dx.$$

Si  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on définit l'espace des classes de fonctions  $L^p(\Omega)$  par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On munit cet espace vectoriel de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

qui le rend complet.

Si  $p = \infty$ , on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \exists C > 0, \text{ telle que } u \text{ est mesurable et } |u(x)| < C \right\}.$$

Cet espace vectoriel est complet pour la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ M > 0, |u(x)| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

**Remarque 1.2.2** L'espace  $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx, \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert et l'espace  $L^\infty(\Omega)$  est un espace de Banach.

**Proposition 1.2.3** 1)  $L^p(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

2)  $L^p(\Omega)$  est séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

**Démonstration.** Voir [7]. ■

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

### 1.2.6 Espaces de Sobolev

**Définition 1.2.6** (*Dérivée faible*) On dit que  $u$  est dérivable au sens faible dans  $L^2(\Omega)$ , s'il existe une fonction  $w \in L^2(\Omega)$ , telle que  $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$  on ait

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = - \int_{\Omega} v(x) w(x) dx. \quad (1.5)$$

Cela revient à dire que  $\frac{du(x)}{dx} = w(x)$  au sens des distributions.

#### Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . On définit l'espace vectoriel  $W^{1,p}(\Omega)$  par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \text{ tel que : } \frac{du(x)}{dx} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{du(x)}{dx} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach. On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

#### Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Pour  $m \geq 2$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit  $W^{m,p}(\Omega)$  par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{ tel que } \frac{d^k u}{dx^k} \in L^p(\Omega), k \leq m \right\}$$

où  $k \in \mathbb{N}$  et  $\frac{d^k u}{dx^k}$  est la dérivée faible d'ordre  $k$  de  $u$  au sens de la définition (1.2.6). C'est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left\| \frac{d^k u}{dx^k} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

**Remarque 1.2.3** Les espaces  $H^m(\Omega)$ , sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left( \frac{d^k u}{dx^k}, \frac{d^k v}{dx^k} \right)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^m(\Omega).$$

### 1.2.7 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

**Définition 1.2.7** Soient  $1 \leq p < \infty$  et  $X$  un espace de Banach, si  $p$  est fini on définit  $L^p(0, T; X)$

par :

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable, telle que } \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty \right\}$$

où  $[0, T]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si  $p$  est infini, alors on définit

$$L^\infty(0, T; X) = \left\{ u : ]0, T[ \rightarrow X \text{ mesurable, telle que } \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|u\|_X < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

**Théorème 1.2.3** Les espaces  $L^p(0, T; X)$  munis des normes précédentes sont des espaces de Banach pour  $p \in [0, \infty]$ .

**Démonstration.** Voir [83]. ■

On peut, comme dans le cas d'une fonction réelle définir la dérivée au sens classique ou au sens généralisé d'une fonction à valeurs vectorielles.

**Définition 1.2.8**  $C([0, T], X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ continue i.e. } \|u(t) - u(t_0)\| \text{ tend vers zéro quand } t \text{ tend vers } t_0 \right\}$ . Si pour tout  $t_0 \in [0, T]$ , la limite suivante existe dans  $X$

$$u'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ u(t_0 + h) - u(t_0) \right]$$

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

alors on dira que  $u$  est dérivable au sens classique et si de plus, la fonction  $t \mapsto u'(t)$  est continue on dira alors que  $u$  appartient à  $C^1([0, T], X)$ . De façon générale, pour  $k \geq 1$  entier, on peut définir :

$$C^k([0, T], X) = \left\{ u \in C^{k-1}([0, T], X) \text{ tel que } u^{(k)} \in C([0, T], X) \right\}.$$

### 1.2.8 Inégalités

**Lemme 1.2.1** (Inégalité de Hölder) (Voir [4]) Soit  $1 < p \leq \infty$ ; on désigne par  $q$  l'exposant conjugué de  $p$  définie par

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^q(\Omega)$ , alors  $uv \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.6)$$

**Corollaire 1.2.4** Si  $p = q = 2$  on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.7)$$

**Lemme 1.2.2** (Inégalité de Young) Soient  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $a, b \geq 0$ . Alors pour tout  $\eta > 0$ ,

$$ab \leq \eta a^p + C_{\eta} b^q$$

où

$$C_{\eta} = \frac{1}{q(\eta p)^{\frac{p}{q}}}.$$

**Démonstration.** Voir [38]. ■

**Remarque 1.2.5** pour  $p = q = 2$ , l'inégalité précédente s'écrit sous la forme

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}. \quad (1.8)$$

## 1.2. Rappels d'analyse fonctionnelle

---

**Lemme 1.2.3** (*Inégalité de Poincaré*) Soit  $\phi(x, t) \in \mathbb{R}$  une fonction définie pour tout  $x \in [0, L]$  et  $t \in [0, \infty)$  vérifiant la condition

$$\phi(0, t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty); \quad (1.9)$$

alors les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\int_0^L \phi^2(\sigma, t) d\sigma \leq L^2 \int_0^L \phi_{\sigma}^2(\sigma, t) d\sigma, \quad \phi^2(x, t) \leq L \int_0^L \phi_{\sigma}^2(\sigma, t) d\sigma, \quad \forall x \in [0, L], \forall t \in [0, \infty).$$

Si de plus de (1.9) la fonction  $\phi(x, t)$  vérifie la condition

$$\phi_x(0, t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty);$$

alors les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\int_0^L \phi_{\sigma}^2(\sigma, t) d\sigma \leq L^2 \int_0^L \phi_{\sigma\sigma}^2(\sigma, t) d\sigma, \quad \phi^2(x, t) \leq L^3 \int_0^L \phi_{\sigma\sigma}^2(\sigma, t) d\sigma$$

et

$$\phi_x^2(x, t) \leq L \int_0^L \phi_{\sigma\sigma}^2(\sigma, t) d\sigma, \quad \forall x \in [0, L], \forall t \in [0, \infty).$$

**Démonstration.** Voir [25]. ■

# Chapitre 2

## Étude de l'existence et l'unicité de la solution d'une poutre viscoélastique fixée à une base en mouvement de translation

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation, le plan de la démonstration est le suivant :

- (i) on construit des solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin ;
- (ii) on établit, pour ces solutions approchées, des estimations a priori ;
- (iii) on passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité.

## 2.1. Introduction

---

## 2.1 Introduction

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} mS_{tt}(t) + \int_0^L \rho(S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) dx + m_E(S_{tt}(t) + u_{tt}(L, t)) = f(t), \quad t \geq 0, \\ \rho(S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) + EIu_{xxxx}(x, t) - EI \int_0^t g(t-s)u_{xxx}(s) ds \\ + Cu_{xt}(x, t) + Du_{xxxxt}(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times [0, \infty), \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \\ Du_{xxxxt}(L, t) + EIu_{xxx}(L, t) - EI \int_0^t g(t-s)u_{xxx}(L, s) ds = m_E(u_{tt}(L, t) + S_{tt}(t)), \\ Du_{xxt}(L, t) + EIu_{xx}(L, t) - EI \int_0^t g(t-s)u_{xx}(L, s) ds = -Ju_{xtt}(L, t), \quad \forall t \in [0, \infty), \end{array} \right. \quad (2.2)$$

et les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad S(0) = S_0, \quad \dot{S}(0) = S_1, \quad x \in (0, L) \quad (2.3)$$

où

$S(t)$  est le déplacement de base en mouvement de translation,

$u(x, t)$  est le déplacement transversal de la poutre par rapport à la base,

$f(t)$  est la force extérieure agissant sur la base,

$\rho$  est la densité linéaire de la poutre,

$L$  est la longueur de la poutre,

$E$  est le module de Young,

$I$  est le moment d'inertie en flexion de la poutre,

$m$  est la masse de la base en mouvement de translation,

$m_E$  est une masse attachée à l'extrémité libre de la poutre,

## 2.2. Préliminaires

---

$J$  est le moment d'inertie de la masse  $m_E$ ,

$C$  est le coefficient d'amortissement structural de la poutre et

$D$  est le coefficient d'amortissement Kelvin-Voigt de la poutre.

Le terme intégral dans la deuxième équation de (2.1) représente le terme de mémoire ou le terme de l'amortissement viscoélastique. Il est dérivé de la relation entre la contrainte et l'historique de la déformation selon le principe de Boltzmann. Pour plus de détails voir [39, 13, 15].

Afin d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)–(2.3) nous supposons que le noyau  $g : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie les hypothèses suivantes :

(G1)  $g$  est une fonction de  $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  qui satisfait :

$$g(t) > 0, \quad \kappa = \int_0^{+\infty} g(s) ds < 1;$$

(G2) Il existe une constante positive  $\mu$  telle que :

$$g'(t) \leq -\mu g(t) \quad \forall t \geq 0.$$

**Remarque 2.1.1** Notons qu'il y a une large classe de fonctions vérifiant l'hypothèses (G1) et (G2), par exemple

$$g(t) = e^{-\alpha t}, \quad t > 0$$

où  $\alpha$  est une constante positive.

## 2.2 Préliminaires

Pour simplifier l'étude de l'existence, l'unicité de la solution ainsi que l'analyse de la stabilité du système (2.1)–(2.3) dans les chapitres suivants, on définit

$$\omega(x, t) = S(t) + u(x, t), \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

## 2.2. Préliminaires

Par conséquent, nous avons pour tout  $x$  dans  $(0, L)$  et  $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(0, t) = S(t), \quad \omega_t(0, t) = S_t(t), \quad \omega_{tt}(0, t) = S_{tt}(t), \\ \omega_t(x, t) = S_t(t) + u_t(x, t), \quad \omega_{tt}(x, t) = S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t), \\ \omega_x(x, t) = u_x(x, t), \quad \omega_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t), \\ \omega_{xxx}(x, t) = u_{xxx}(x, t), \quad \omega_{xxxx}(x, t) = u_{xxxx}(x, t), \end{array} \right. \quad (2.5)$$

et

$$\omega(x, 0) = S_0 + u_0(x) = \omega_0(x), \quad \omega_t(x, 0) = S_1 + u_1(x) = \omega_1(x). \quad (2.6)$$

En utilisant les intégrations par parties et (2.4)–(2.6), le système (2.1)–(2.3), équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} m\omega_{tt}(0, t) + EI\omega_{xxx}(0, t) + D\omega_{xxx t}(0, t) - EI \int_0^t g(t-s)\omega_{xxx}(0, s) ds \\ -C\omega_t(L, t) + C\omega_t(0, t) = f(t), \quad t \geq 0 \\ \rho\omega_{tt(x,t)} + EI\omega_{xxxx}(x, t) - EI \int_0^t g(t-s)\omega_{xxxx}(s) ds + C\omega_{xt}(x, t) \\ + D\omega_{xxx t}(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times [0, \infty), \end{array} \right. \quad (2.7)$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x(0, t) = 0, \\ D\omega_{xxx t}(L, t) + EI\omega_{xxx}(L, t) - EI \int_0^t g(t-s)\omega_{xxx}(L, s) ds = m_E\omega_{tt}(L, t), \\ D\omega_{xxt}(L, t) + EI\omega_{xx}(L, t) - EI \int_0^t g(t-s)\omega_{xx}(L, s) ds = -J\omega_{xtt}(L, t), \quad \forall t \in [0, \infty). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

et les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \omega_t(x, 0) = \omega_1(x), \quad x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Afin de stabiliser le problème (2.7)–(2.9), nous proposons le contrôle force  $f(t)$  agissant sur la base en mouvement de translation comme suit :

$$f(t) = -K\omega_t(0, t) - \omega(0, t), \quad t \geq 0 \quad (2.10)$$

où  $K$  est une constante positive qui sera déterminée par la suite.

### 2.3. Existence et unicité

---

## 2.3 Existence et unicité

Soit  $L^2(0, L)$  l'espace de Hilbert usuel muni du produit scalaire

$$(h, v) = \int_0^L h(x)v(x)dx,$$

et de la norme  $\|\cdot\|_2$ . On pose

$$\mathcal{V} = \left\{ y : y \in H^2(0, L), y_x(0) = 0 \right\}.$$

Commençons par donner la définition d'une solution faible du système (2.7)–(2.9).

**Définition 2.3.1** *La fonction  $\omega$  est dite solution faible du système (2.7)–(2.9) si*

$$\omega \in C([0, T], \mathcal{V}) \cap C^1([0, T], L^2(0, L))$$

et vérifie :

$$\begin{aligned} & \rho(\omega_{tt}, v) + EI(\omega_{xx}, v_{xx}) - EI \int_0^t g(t-s)(\omega_{xx}(s), v_{xx}) ds + D(\omega_{xxt}, v_{xx}) \\ & + C(\omega_{xt}, v) + m\omega_{tt}(0, t)v(0) + m_E\omega_{tt}(L, t)v(L) + J\omega_{xtt}(L, t)v_x(L) \\ & + v(0) \left[ (C + K)\omega_t(0, t) + \omega(0, t) - C\omega_t(L, t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec les conditions initiales

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \omega_t(x, 0) = \omega_1(x) \quad (2.12)$$

pour tout  $v \in \mathcal{V}$ .

Notre résultat est le théorème d'existence et d'unicité suivant :

**Théorème 2.3.1** *Supposons que  $(\omega_0, \omega_1) \in \mathcal{V} \cap H^4(0, L) \times \mathcal{V}$ . Alors, sous les hypothèses (G1), (G2) et sous l'action de contrôle force  $f(t)$  définie dans (2.10), il existe une solution unique du problème (2.7)–(2.9) telle que*

$$\omega \in L^\infty([0, T], \mathcal{V} \cap H^4(0, L)), \omega_t \in L^\infty([0, T], \mathcal{V}), \omega_{tt} \in L^2([0, T], L^2(0, L)).$$

### 2.3. Existence et unicité

---

De plus, nous avons

$$\omega \in C([0, T], \mathcal{V}), \quad \omega_t \in C([0, T], L^2(0, L)),$$

pour tout  $T > 0$ .

**Démonstration.** L'idée principale de la démonstration repose sur la méthode de Faedo-Galerkin. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Faedo-Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

Soit  $\{v^j\}_{j=1}^{\infty}$  un système orthonormal dans  $L^2(0, L)$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note par

$$V_n = \text{span}\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$$

l'espace engendré par  $\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ . Les projections des conditions initiales dans un sous-espace de dimension finie  $V_n$  sont

$$\omega_0^n(x) = \sum_{j=1}^n a^j v^j(x) \quad \text{et} \quad \omega_1^n(x) = \sum_{j=1}^n b^j v^j(x)$$

tel que

$$\omega_0^n \rightarrow \omega_0 \text{ dans } \mathcal{V} \cap H^4(0, L), \quad \omega_1^n \rightarrow \omega_1 \text{ dans } \mathcal{V}. \quad (2.13)$$

On cherche une fonction  $\omega^n(x, t)$  de la forme

$$\omega^n(x, t) = \sum_{j=1}^n \chi_j(t) v^j(x), \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0 \quad (2.14)$$

une solution approchée dans  $V_n$  du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\omega_{tt}^n, v^j) + EI(\omega_{xx}^n, v_{xx}^j) - EI \int_0^t g(t-s)(\omega_{xx}^n(s), v_{xx}^j) ds + D(\omega_{xxt}^n, v_{xx}^j) \\ + C(\omega_{xt}^m, v^j) + m\omega_{tt}^n(0, t) v^j(0) + m_E \omega_{tt}^n(L, t) v^j(L) + J\omega_{xxt}^n(L, t) v_x^j(L) \\ + v^j(0) \left[ (C + K)\omega_t^n(0, t) + \omega^n(0, t) - C\omega_t^n(L, t) \right] = 0, \quad \forall v^j \in V_n, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \omega^n(x, 0) = \omega_0^n(x), \quad \omega_t^n(x, 0) = \omega_1^n(x). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Ces équations (2.15) conduisent à un système d'équations différentielles ordinaires avec  $n$  fonctions  $\chi_j$  inconnues ou  $j = 1, 2, \dots, n$ . D'après le théorème d'existence standard des Équations Différentielles Ordinaires (EDO) (voir par exemple [20–22]) on peut prouver l'existence

### 2.3. Existence et unicité

d'une solution locale

$$\chi_j : [0, t_n) \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n,$$

qui vérifie (2.15) pour presque partout  $t \in (0, t_n)$ ,  $0 < t_n < T$ . On obtient donc une solution locale  $\omega^n$  dans un intervalle  $[0, t_n)$ ,  $t_n \in (0, T]$ . Maintenant on montre que  $t_n = T$ . Les estimations a priori ci-dessous permettent de prolonger la solution à l'intervalle  $[0, T)$ , pour tout  $T > 0$  donné.

#### Première estimation a priori

On multiplie l'équation (2.15) par  $\chi_j'(t)$  et on prend la somme sur l'indice  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \rho(\omega_{tt}^n, \omega_t^n) + EI(\omega_{xx}^n, \omega_{xxt}^n) - EI \int_0^t g(t-s)(\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds \\ & + m\omega_{tt}^n(0, t)\omega_t^n(0, t) + m_E\omega_{tt}^n(L, t)\omega_t^n(L, t) + J\omega_{xtt}^n(L, t)\omega_{xt}^n(L, t) \\ & = -D\|\omega_{xxt}^n\|_2^2 - \frac{C}{2}[\omega_t^n(L, t)]^2 - \left(\frac{C}{2} + K\right)[\omega_t^n(0, t)]^2 + C\omega_t^n(L, t)\omega_t^n(0, t) \\ & - \omega_t^n(0, t)\omega^n(0, t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Soit

$$\mathcal{X}^n(t) = \mathcal{E}^n(t) + \frac{1}{2}[\omega^n(0, t)]^2 + D \int_0^t \|\omega_{xx}^n(s)\|_2^2 ds + K \int_0^t |\omega_t^n(0, s)|^2 ds$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n(t) = & \frac{1}{2} \left\{ m[\omega_t^n(0, t)]^2 + \rho\|\omega_t^n\|_2^2 + EI \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\omega_{xx}^n\|_2^2 \right. \\ & \left. + EI \int_0^L (g \square \omega_{xx}^n) dx + m_E[\omega_t^n(L, t)]^2 + J[\omega_{xt}^n(L, t)]^2 \right\}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

et

$$\int_0^L (g \square \omega_{xx}^n) dx = \int_0^L \int_0^t g(t-s)(\omega_{xx}^n(t) - \omega_{xx}^n(s))^2 ds dx, \quad t \geq 0.$$

En dérivant la relation  $\mathcal{X}^n(t)$  par rapport au temps  $t$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{X}^n(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{E}^n(t) + D\|\omega_{xx}^n(t)\|_2^2 + K[\omega_t^n(0, t)]^2 + \omega_t^n(0, t)\omega^n(0, t). \quad (2.18)$$

### 2.3. Existence et unicité

L'équation (2.16) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}^n(t) &= \frac{EI}{2} \int_0^L (g' \square \omega_{xx}^n) dx - \frac{EI}{2} g(t) \|\omega_{xx}^n\|_2^2 - D \|\omega_{xxt}^n\|_2^2 - \frac{C}{2} \left[ \omega_t^n(L, t) \right]^2 \\ &\quad - \left( \frac{C}{2} + K \right) \left[ \omega_t^n(0, t) \right]^2 + C \omega_t^n(L, t) \omega_t^n(0, t) - \omega_t^n(0, t) \omega^n(0, t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

En utilisant le fait que pour  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R}_+^2$  :  $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$  pour obtenir

$$C \omega_t^n(L, t) \omega_t^n(0, t) \leq \frac{C}{2} \left[ \omega_t^n(L, t) \right]^2 + \frac{C}{2} \left[ \omega_t^n(0, t) \right]^2. \quad (2.20)$$

D'après (2.18), (2.19) et (2.20), on trouve

$$\frac{d}{dt} \mathcal{X}^n(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L (g' \square \omega_{xx}^n) dx - \frac{EI}{2} g(t) \|\omega_{xx}^n\|_2^2,$$

pour tout  $t \in [0, t_n)$ . Cela signifie que, en utilisant la condition **(G2)**

$$\frac{d}{dt} \mathcal{X}^n(t) \leq 0. \quad (2.21)$$

Une intégration de (2.21) sur  $(0, t)$ ,  $t \in (0, t_n)$ , en tenant compte du fait que  $(\omega_0^n)$  et  $(\omega_1^n)$  sont bornées dans  $\mathcal{V}$  et  $L^2(0, L)$ , respectivement, permet de conclure que

$$\mathcal{X}^n(t) \leq \mathcal{X}^n(0) \leq M \quad (2.22)$$

où  $M$  est une constante positive indépendante de  $t$  et  $n$ .

### Deuxième estimation a priori

On multiplie l'équation (2.15) par  $\chi_j''(t)$  on somme sur l'indice de  $j = 1$  à  $j = n$ , on trouve

$$\begin{aligned} &\rho(\omega_{tt}^n, \omega_{tt}^n) + EI(\omega_{xx}^n, \omega_{xxtt}^n) - EI \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxtt}^n) ds + D(\omega_{xxt}^n, \omega_{xxtt}^n) \\ &\quad + C(\omega_{xt}^n, \omega_{tt}^n) + m \left[ \omega_{tt}^n(0, t) \right]^2 + m_E \left[ \omega_{tt}^n(L, t) \right]^2 + J \left[ \omega_{xxt}^n(L, t) \right]^2 \\ &= -\omega_{tt}^n(0, t) \left[ (C + K) \omega_t^n(0, t) + \omega^n(0, t) - C \omega_t^n(L, t) \right], \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.3. Existence et unicité

Il est clair que :

$$EI(\omega_{xx}^n, \omega_{xxt}^n) = EI \frac{d}{dt} (\omega_{xx}^n, \omega_{xxt}^n) - EI(\omega_{xxt}^n, \omega_{xxt}^n), \quad t \in [0, T] \quad (2.24)$$

et

$$\begin{aligned} & EI \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds \\ &= EI \frac{d}{dt} \left( \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds \right) - g(0) EI(\omega_{xx}^n(t), \omega_{xxt}^n(t)) \\ & \quad - EI \int_0^t g'(t-s) (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En utilisant l'inégalité de Young, le dernier terme de (2.23) est estimé par :

$$C\omega_{tt}^n(L, t)\omega_{tt}^n(0, t) \leq \frac{C}{2} [\omega_{tt}^n(0, t)]^2 + \frac{C}{2} [\omega_{tt}^n(L, t)]^2, \quad t \in [0, T]. \quad (2.26)$$

En tenant compte des dernières relations (2.24)-(2.26) dans (2.23) et en intégrant sur  $(0, t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^t \|\omega_{tt}^n(s)\|_2^2 ds + EI(\omega_{xx}^n, \omega_{xxt}^n) - EI \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds + \frac{D}{2} \|\omega_{xxt}^n\|_2^2 \\ & + C \int_0^t (\omega_{xt}^n(s), \omega_{tt}^n(s)) ds + m \int_0^t [\omega_{tt}^n(0, s)]^2 ds + m_E \int_0^t [\omega_{tt}^n(L, s)]^2 ds + J \int_0^t [\omega_{xxt}^n(L, s)]^2 ds \\ & \leq - \int_0^t \omega_{tt}^n(0, s) \left[ (C+K)\omega_{tt}^n(0, s) + \omega_{tt}^n(0, s) - C\omega_{tt}^n(L, s) \right] ds + EI(\omega_{xx}^n(0), \omega_{xxt}^n(0)) \\ & + \frac{D}{2} \|\omega_{xxt}^n(0)\|_2^2 + EI \int_0^t \|\omega_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds - g(0) EI \int_0^t (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds \\ & - EI \int_0^t \int_0^z g'(z-s) (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(z)) ds dz, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

On estime maintenant les termes de (2.27). En vertu de l'estimation (2.22), le deuxième terme dans le membre de droite de l'inégalité (2.27) est évalué comme suit :

$$(\omega_{xx}^n, \omega_{xxt}^n) \leq \eta \|\omega_{xxt}^n\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|\omega_{xx}^n\|_2^2 \leq \eta \|\omega_{xxt}^n\|_2^2 + C_1(T, \eta), \quad t \in [0, T] \quad (2.28)$$

### 2.3. Existence et unicité

où  $C_1(T, \eta)$  est une constante positive. Pour le troisième, il est facile de voir que

$$\int_0^t g(t-s)(\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds \leq \eta \|\omega_{xxt}^n\|_2^2 + \frac{k}{4\eta} \int_0^t g(t-s) \|\omega_{xx}^n(s)\|_2^2 ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.29)$$

D'après (2.22), la relation (2.29) est estimée par

$$\int_0^t g(t-s)(\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds \leq \eta \int_0^t \|\omega_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds + C_2(T, \eta), \quad t \in [0, T] \quad (2.30)$$

où  $C_2(T, \eta)$  est une constante positive. Pour le cinquième terme dans le membre de gauche de l'inégalité (2.27), on a

$$-\int_0^t (\omega_{xt}^n(s), \omega_{tt}^n(s)) ds \leq \eta \int_0^t \|\omega_{tt}^n(s)\|_2^2 ds + \frac{L^2}{4\eta} \int_0^t \|\omega_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds.$$

En utilisant (2.22), on obtient

$$\int_0^t (\omega_{xt}^n(s), \omega_{tt}^n(s)) ds \leq \eta \int_0^t \|\omega_{tt}^n(s)\|_2^2 ds + C_3(\eta, T) \quad (2.31)$$

où  $C_3(T, \eta)$  est une constante positive. Pour les termes dans le membre de droite de l'inégalité (2.27), on a

$$\begin{aligned} & -\int_0^t \omega_{tt}^n(0, s) \left[ (C+K)\omega_t^n(0, s) + \omega^n(0, s) - C\omega_t^n(L, s) \right] ds \\ & \leq \eta C \int_0^t \left( \omega_{tt}^n(0, s) \right)^2 ds + \frac{3C}{4\eta} \int_0^t \left[ (C+K)^2 \left( \omega_t^n(0, s) \right)^2 + \left( \omega^n(0, s) \right)^2 + C^2 \left( \omega_t^n(L, s) \right)^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (2.32)$$

En utilisant (2.22) de nouveau, on trouve

$$-\int_0^t \omega_{tt}^n(0, s) \left[ (C+K)\omega_t^n(0, s) + \omega^n(0, s) - C\omega_t^n(L, s) \right] ds \leq \eta C \int_0^t \left( \omega_{tt}^n(0, s) \right)^2 ds + C_4(\eta, T), \quad (2.33)$$

pour tout  $t \in [0, T]$  où  $C_4(T, \eta)$  est une constante positive. La convergence dans (2.13) permet d'écrire

$$(\omega_{xx}^n(0), \omega_{xxt}^n(0)) \leq \eta \|\omega_{xxt}^n(0)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|\omega_{xx}^n(0)\|_2^2 \leq C_5(\eta), \quad t \in [0, T] \quad (2.34)$$

### 2.3. Existence et unicité

où  $C_5(\eta)$  est une constante positive. Et en utilisant l'estimation (2.22), nous trouvons

$$-\int_0^t (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(s)) ds \leq \eta \int_0^t \|\omega_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t \|\omega_{xx}^n(s)\|_2^2 ds \leq C_6(T, \eta), \quad t \in [0, T] \quad (2.35)$$

où  $C_6(T, \eta)$  est une constante positive.

Le terme intégral dans le membre de gauche de l'inégalité (2.27), est estimé par

$$\begin{aligned} & -\int_0^t \int_0^z g'(z-s) (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(z)) ds dz \\ & \leq \eta \int_0^t \|\omega_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t \left( \int_0^z |g'(z-s)| ds \right) \int_0^z |g'(z-s)| \|\omega_{xx}^n(s)\|_2^2 ds dz, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Et comme

$$\int_0^z |g'(z-s)| ds = -\int_0^z g'(s) ds = g(0) - g(z), \quad (2.37)$$

le dernier terme de (2.36) est estimé comme suit

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left( \int_0^z |g'(z-s)| ds \right) \int_0^z |g'(z-s)| \|\omega_{xx}^n(s)\|_2^2 ds dz \\ & \leq g(0) \int_0^t \int_0^z |g'(z-s)| \|\omega_{xx}^n(s)\|_2^2 ds dz \\ & \leq T g^2(0) \sup_{0 \leq s \leq T} \|\omega_{xx}^n(s)\|_2^2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

En utilisant l'estimation (2.22) et la relation (2.34), on obtient

$$-\int_0^t \int_0^z g'(z-s) (\omega_{xx}^n(s), \omega_{xxt}^n(z)) ds dz \leq C_7(T, \eta), \quad t \in [0, T], \quad (2.39)$$

pour une certaine constante positive  $C_7(T, \eta)$ .

Des relations (2.27)-(2.35) et (2.39), en tenant compte de l'estimation (2.22) et en choisissant  $\eta$  assez petite, nous déduisons

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^t \|\omega_{tt}^n(s)\|_2^2 ds + M_1 \|\omega_{xxt}^n\|_2^2 + m \int_0^t \left[ \omega_{tt}^n(0, s) \right]^2 ds + m_E \int_0^t \left[ \omega_{tt}^n(L, s) \right]^2 ds \\ & + J \int_0^t \left[ \omega_{xtt}^n(L, s) \right]^2 ds + \left[ \omega_t^n(0, t) \right]^2 \leq M_2, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.40)$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont des constante positives.

### 2.3. Existence et unicité

---

#### Passage à la limite

Les estimations (2.22) et (2.40) impliquent que

$$(\omega_{xx}^n) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty((0, T), L^2(0, L)), \quad (2.41)$$

$$(\omega_t^n) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty((0, T), L^2(0, L)), \quad (2.42)$$

$$(\omega_{xxt}^n) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty((0, T), L^2(0, L)), \quad (2.43)$$

$$(\omega_{tt}^n) \text{ est uniformément bornée dans } L^2((0, T), L^2(0, L)), \quad (2.44)$$

$$(\omega_t^n(0, t)) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T), \quad (2.45)$$

$$(\omega_t^n(L, t)) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T), \quad (2.46)$$

$$(\omega_{xt}^n(L, t)) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T), \quad (2.47)$$

$$(\omega^n(0, t)) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T), \quad (2.48)$$

$$(\omega_{tt}^n(0, t)) \text{ est uniformément bornée dans } L^2(0, T), \quad (2.49)$$

$$(\omega_{tt}^n(L, t)) \text{ est uniformément bornée dans } L^2(0, T), \quad (2.50)$$

$$(\omega_{xtt}^n(L, t)) \text{ est uniformément bornée dans } L^2(0, T). \quad (2.51)$$

On a

$$\|\omega^n\|_2^2 \leq 2L[\omega^n(0, t)]^2 + 2L^4\|\omega_{xx}^n\|_2^2. \quad (2.52)$$

Maintenant, d'après (2.41), (2.48) et (2.52), nous déduisons que

$$(\omega^n) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty((0, T), \mathcal{V}) \quad (2.53)$$

et aussi d'après (2.42) et (2.43), on déduit

$$(\omega_t^n) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty((0, T), L^2(0, L)) \cap L^2((0, T), \mathcal{V}). \quad (2.54)$$

Par conséquent, les assertions (2.41)-(2.54) impliquent qu'il existe une sous-suite  $(\omega^\nu)$  de  $(\omega^n)$  vérifiant :

### 2.3. Existence et unicité

---

$$\omega^v \rightharpoonup \omega \text{ faible étoile dans } L^\infty((0, T), \mathcal{V}) \text{ et faible dans } L^2((0, T), \mathcal{V}), \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \omega_t^v \rightharpoonup \omega_t \text{ faible étoile dans } L^\infty((0, T); L^2(0, L)) \cap L^2((0, T), \mathcal{V}) \\ \text{et faible dans } L^2((0, T), \mathcal{V}), \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\omega_{tt}^v \rightharpoonup \omega_{tt} \text{ faible dans } L^2((0, T), L^2), \quad (2.57)$$

$$\omega_t^v(0, t) \rightharpoonup \omega_t(0, t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T), \quad (2.58)$$

$$\omega_t^v(L, t) \rightharpoonup \omega_t(L, t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T), \quad (2.59)$$

$$\omega_{xt}^v(L, t) \rightharpoonup \omega_{xt}(L, t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T), \quad (2.60)$$

$$\omega^v(0, t) \rightharpoonup \omega(0, t) \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T), \quad (2.61)$$

$$\omega_{tt}^v(0, t) \rightharpoonup \omega_{tt}(0, t) \text{ faible dans } L^\infty(0, T), \quad (2.62)$$

$$\omega_{tt}^v(L, t) \rightharpoonup \omega_{tt}(L, t) \text{ faible dans } L^2(0, T), \quad (2.63)$$

$$\omega_{xtt}^v(L, t) \rightharpoonup \omega_{xtt}(L, t) \text{ faible dans } L^2(0, T), \quad (2.64)$$

$$\omega_t^v(0, t) \rightharpoonup \omega_t(0, t) \text{ faible dans } L^2(0, T). \quad (2.65)$$

D'après le théorème de Aubin-Lions (voir [62]), pour tout  $T > 0$ ,

$$\omega^v \rightarrow \omega \text{ fortement dans } C([0, T], \mathcal{V}), \quad (2.66)$$

$$\omega_t^v \rightarrow \omega_t \text{ fortement dans } C([0, T], L^2(0, L)). \quad (2.67)$$

Ces résultats suffisent pour passer à la limite dans (2.15), pour obtenir :

$$\begin{aligned} \rho(\omega_{tt}, v) + EI(\omega_{xx}, v_{xx}) - EI \int_0^t g(t-s)(\omega_{xx}(s), v_{xx}) ds + D(\omega_{xxt}, v_{xx}) \\ + C(\omega_{xt}, v) + m\omega_{tt}(0, t)v(0) + m_E\omega_{tt}(L, t)v(L) + J\omega_{xtt}(L, t)v_x(L) \\ + v(0) \left[ (C + K)\omega_t(0, t) + \omega(0, t) - C\omega_t(L, t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

pour tout  $v \in \mathcal{V}$ .

### 2.3. Existence et unicité

---

#### Vérification des conditions aux limites

En utilisant (2.15), (2.66) et l'inégalité

$$\|\omega(x, t) - \omega_0(x)\|_{\mathcal{V}} \leq \|\omega - \omega^n\|_{\mathcal{V}} + \|\omega^n - \omega^n(0)\|_{\mathcal{V}} + \|\omega^n(0) - \omega_0\|_{\mathcal{V}} \quad (2.69)$$

on obtient la première condition initiale immédiatement. D'une manière analogue, nous montrons la deuxième condition initiale.

#### Unicité de la solution

Soient  $\omega^{(1)}$  et  $\omega^{(2)}$  deux solutions du problème (2.7)–(2.9) telles que :

$$\omega^{(i)} \in L^\infty\left((0, T), \mathcal{V} \cap H^4(0, L)\right), \omega_t^{(i)} \in L^\infty\left((0, T), \mathcal{V}\right), \omega_{tt}^{(i)} \in L^2\left([0, T], L^2(0, L)\right), i = 1, 2.$$

Alors  $y = \omega^{(1)} - \omega^{(2)}$  vérifie :

$$\begin{aligned} & \rho(y_{tt}, v) + EI(y_{xx}, v_{xx}) - EI \int_0^t g(t-s)(y_{xx}(s), v_{xx}) ds + D(y_{xxt}, v_{xx}) \\ & + C(y_{xt}, v) + m y_{tt}(0, t) v(0) + m_E y_{tt}(L, t) v(L) + J y_{xtt}(L, t) v_x(L) \\ & + v(0) \left[ (C + K) y_t(0, t) + y(0, t) - C y_t(L, t) \right] = 0, v \in L^2\left((0, T), \mathcal{V}\right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

avec

$$y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0. \quad (2.71)$$

En remplaçant  $y_t$  par  $v$  dans (2.70), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ m y_t^2(0, t) + \rho \|y_t\|_2^2 + EI \|y_{xx}\|_2^2 + m_E y_t^2(L, t) + J y_{xt}^2(L, t) \right] \\ & - EI \int_0^t g(t-s)(y_{xx}(s), y_{xxt}) ds = -D \|y_{xxt}\|_2^2 - \frac{C}{2} y_t^2(L, t) \\ & - \left( \frac{C}{2} + K \right) y_t^2(0, t) + C y_t(L, t) y_t(0, t) - y_t(0, t) y(0, t). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Remarquons que

$$- \int_0^t g(t-s)(y_{xx}(s), y_{xxt}) ds$$

### 2.3. Existence et unicité

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t g(t-s)(y_{xxt}(s), y_{xx}(t) - y_{xx}(s)) ds - \int_0^t g(s) ds (y_{xxt}(t), y_{xx}(t)) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \frac{d}{dt} (y_{xx}(t) - y_{xx}(s)) ds - \frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds \frac{d}{dt} \|y_{xx}\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \square y_{xx})(t) - \frac{1}{2} (g' \square y_{xx})(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t g(s) ds \|y_{xx}\|_2^2 + \frac{1}{2} g(t) \|y_{xx}\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

On pose

$$X(t) = Z(t) + \frac{1}{2} y^2(0, t)$$

où

$$\begin{aligned}
2Z(t) &= m y_t^2(0, t) + \rho \|y_t\|_2^2 + EI \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|y_{xx}\|_2^2 + EI \int_0^L (g \square y_{xx}) dx \\
&\quad + m_E y_t^2(L, t) + J y_{xt}^2(L, t) + y^2(0, t).
\end{aligned}$$

La différentiation de  $X$  par rapport au temps  $t$ , nous donne

$$\frac{d}{dt} X(t) = \frac{d}{dt} Z(t) + y_t(0, t) y(0, t).$$

D'après (2.72), (2.73) la dérivée totale de  $Y(t)$  vérifie

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} X(t) &= \frac{d}{dt} Z(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L (g' \square y_{xx}) dx - \frac{EI}{2} g(t) \|y_{xx}\|_2^2 - D \|y_{xxt}\|_2^2 \\
&\quad - \frac{C}{2} y_t^2(L, t) - \left( \frac{C}{2} + K \right) y_t^2(0, t) + C y_t(L, t) y_t(0, t)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a

$$C y_t(L, t) y_t(0, t) \leq \frac{C}{2} y_t^2(L, t) + \frac{C}{2} y_t^2(0, t)$$

d'où

$$\frac{d}{dt} Z(t) \leq \frac{EI}{2} \int_0^L (g' \square y_{xx}) dx - \frac{EI}{2} g(t) \|y_{xx}\|_2^2 - D \|y_{xxt}\|_2^2 - K y_t^2(0, t).$$

D'après l'hypothèse **(G2)**, on déduit que

$$\frac{d}{dt} Z(t) \leq 0, \quad t \in [0, T].$$

### 2.3. Existence et unicité

---

Ce qui implique que

$$Z(t) = 0, t \in [0, T)$$

et  $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$ . Ceci achève la démonstration du théorème. ■

# Stabilisation d'une poutre viscoélastique fixée à une base en mouvement de translation

## 3.1 Introduction

Dans ce travail nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique de la solution d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation. En appliquant une force de contrôle agissant sur la base en mouvement de translation, nous montrerons que l'énergie du système (2.7)–(2.9) décroît exponentiellement vers zéro, quand le temps tend vers l'infini pour une large classe de noyaux. Plus précisément, nous perturbons la fonction de relaxation  $g$  d'une manière que la condition standard  $g'(t) \leq -\mu g(t)$  ne soit pas vérifiée pour certaine constante positive  $\mu$ . Nous aimerions étudier le cas où le noyau vérifie la condition

$$g'(t) \leq -\mu g(t) + \xi(t), \quad t \geq 0$$

### 3.2. Résultats préliminaires

---

pour une certaine fonction  $\xi(t)$ . Nous pouvons supposer que  $\xi$  est une fonction positive et nous traitons le cas

$$0 < g'(t) + \mu g(t) \leq \xi(t), \quad t \geq 0.$$

Le cas où la fonction  $\xi(t)$  est dominée par  $g(t)$  n'est pas intéressant. En effet, si

$$\xi(t) \leq \delta g(t), \quad t \geq 0,$$

pour une certaine constante positive  $\delta < \mu$ , alors

$$g'(t) \leq -\mu g(t) + \xi(t) \leq -(\mu - \delta)g(t), \quad t \geq 0$$

c'est à dire nous obtenons l'hypothèse standard dans la littérature.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : Dans la deuxième section, tout d'abord, nous introduisons quelques notations, lemmes, définitions..., nécessaires pour la preuve de notre résultat. Ensuite, nous présentons les différentes fonctionnelles qui sont utilisées pour modifier l'énergie classique afin d'obtenir un résultat d'équivalence. Dans la dernière section, nous formulons les hypothèses sur la fonction de relaxation et nous présentons notre résultat de stabilisation avec la preuve basée sur la technique des multiplicateurs.

### 3.2 Résultats préliminaires

On définit l'énergie classique associée au système (2.7)-(2.9) par :

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t), \quad t \geq 0$$

où  $E_k(t)$  est l'énergie cinétique définie par

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \left\{ m\omega_t^2(0, t) + \rho \|\omega_t\|_2^2 + m_E \omega_t^2(L, t) + J\omega_{xt}^2(L, t) \right\}, \quad t \geq 0$$

et  $E_p(t)$  représente l'énergie potentielle donnée par

$$E_p(t) = \frac{EI}{2} \|\omega_{xx}\|_2^2,$$

### 3.2. Résultats préliminaires

---

et  $\|\cdot\|_2$  est la norme dans  $L^2(0, L)$ .

Par différentiation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E'(t) = & EI \int_0^L \omega_{xxt}(t) \int_0^t g(t-s) \omega_{xx}(s) ds dx - D \|\omega_{xxt}\|_2^2 - \frac{C}{2} \omega_t^2(L, t) \\ & - \frac{C}{2} \omega_t^2(0, t) + C \omega_t(L, t) \omega_t(0, t) + f(t) \omega_t(0, t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

On peut facilement voir que

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^L \omega_{xxt}(t) \int_0^t g(t-s) \omega_{xx}(s) ds dx \\ = & \int_0^L (g' \square \omega_{xx}) dx - g(t) \|\omega_{xx}\|_2^2 - \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\omega_{xx}\|_2^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où

$$(g \square v)(t) = \int_0^t g(t-s) (v(x, t) - v(x, s))^2 ds, \quad t \geq 0.$$

Nous définissons l'énergie "modifiée" par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \frac{1}{2} \left\{ m \omega_t^2(0, t) + \rho \|\omega_t\|_2^2 + EI \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\omega_{xx}\|_2^2 \right. \\ & \left. + EI \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + m_E \omega_t^2(L, t) + J \omega_{xt}^2(L, t) \right\}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour préserver l'hyperbolicité du système (2.7)–(2.9), on pose

$$k = \int_0^{+\infty} g(s) ds < 1.$$

D'après (3.1) et (3.2) on obtient,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(t) = & \frac{EI}{2} \int_0^L (g' \square \omega_{xx}) dx - \frac{EI}{2} g(t) \|\omega_{xx}\|_2^2 - D \|\omega_{xxt}\|_2^2 - \frac{C}{2} \omega_t^2(L, t) \\ & - \frac{C}{2} \omega_t^2(0, t) + C \omega_t(L, t) \omega_t(0, t) + f(t) \omega_t(0, t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.2. Résultats préliminaires

---

**Remarque 3.2.1** *Il est clair que la dérivée de l'énergie modifiée est de signe non défini. On construit une fonctionnelle de Lyapunov  $\mathcal{L}$  qui doit vérifier une inégalité de la forme :*

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_0 \mathcal{L}(t), \quad t \geq 0$$

où  $C_0$  est une constante positive. Cette inégalité donne le taux de décroissance exponentielle de  $\mathcal{L}$ . Pour passer à  $E(t)$  nous aurons besoin d'une relation d'équivalence entre  $E(t)$  et  $\mathcal{L}(t)$ .

Soit  $\diamond$  l'opérateur défini par

$$(g \diamond v)(t) := \int_0^t g(t-s) \left( v(0, t) - v(0, s) \right)^2 ds, \quad t \geq 0.$$

Nous considérons la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{E}(t) + \sum_{i=1}^5 \lambda_i \psi_i(t), \quad t \geq 0$$

pour certaines constantes positives  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  qui seront déterminées par la suite sachant que  $\lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_4 = 2EI$ ,  $\lambda_5 = 2$  où

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \rho \int_0^L \omega \omega_t dx + C \int_0^L \omega \omega_x dx + m \omega_t(0, t) \omega(0, t) \\ &\quad + m_E \omega_t(L, t) \omega(L, t) + J \omega_{xt}(L, t) \omega_x(L, t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= -\rho \int_0^L \omega_t(t) \int_0^t g(t-s) \left( \omega(t) - \omega(s) \right) ds dx - m \omega_t(0, t) \int_0^t g(t-s) \left( \omega(0, t) - \omega(0, s) \right) ds \\ &\quad - m_E \omega_t(L, t) \int_0^t g(t-s) \left( \omega(L, t) - \omega(L, s) \right) ds - J \omega_{xt}(L, t) \int_0^t g(t-s) \left( \omega_x(L, t) - \omega_x(L, s) \right) ds, \end{aligned}$$

$$\psi_3(t) = \frac{1}{2} (g \diamond v) + \frac{1}{2} \omega^2(0, t), \quad t \geq 0,$$

$$\psi_4(t) = \int_0^t \varphi_\alpha(t-s) \|\omega_{xx}(s)\|_2^2 ds, \quad t \geq 0,$$

$$\psi_5(t) = \int_0^t \varphi_\alpha(t-s) \omega^2(0, s) ds, \quad t \geq 0,$$

### 3.2. Résultats préliminaires

---

avec

$$\varphi_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} \xi(s) e^{\alpha s} ds, \quad t \geq 0,$$

et  $\alpha$  est une constante positive.

Le premier résultat donne une équivalence entre  $\mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t) + \psi_5(t)$  et  $\mathcal{L}(t)$ .

**Proposition 3.2.1** *Il existe deux constantes positives  $\delta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  telles que :*

$$\delta_1 \left[ \mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t) + \psi_5(t) \right] \leq \mathcal{L}(t) \leq \delta_2 \left[ \mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t) + \psi_5(t) \right] \quad (3.4)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

**Démonstration.** Nous commençons par montrer le côté de droite dans l'inégalité (3.4). Pour la fonctionnelle  $\psi_1(t)$ , il est clair que :

$$\begin{aligned} \psi_1(t) \leq & \frac{\rho}{2} \|\omega_t\|_2^2 + \frac{\rho + C}{2} \|\omega\|_2^2 + \frac{C}{2} \|\omega_x\|_2^2 + \frac{m}{2} \omega_t^2(0, t) + \frac{m}{2} \omega^2(0, t) \\ & + \frac{m_E}{2} \omega_t^2(L, t) + \frac{m_E}{2} \omega^2(L, t) + \frac{J}{2} \omega_{xt}^2(L, t) + \frac{J}{2} \omega_x^2(L, t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

D'après (2.4), on a  $\omega(x, t) = S(t) + u(x, t) = \omega(0, t) + u(x, t)$ . En utilisant le Lemme 1.2.1 on obtient :

$$\begin{aligned} \omega^2(L, t) & \leq 2\omega^2(0, t) + 2u^2(L, t) \\ & \leq 2\omega^2(0, t) + 2L^3 \|u_{xx}\|_2^2, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\omega\|_2^2 & \leq 2L\omega^2(0, t) + 2\|u\|_2^2 \\ & \leq 2L\omega^2(0, t) + 2L^4 \|u_{xx}\|_2^2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Cette astuce est nécessaire en raison de l'absence de l'inégalité de Poincaré.

Comme  $\omega_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t)$ , d'après le Lemme 1.2.1, nous avons

$$\begin{aligned} \psi_1(t) \leq & \frac{\rho}{2} \|\omega_t\|_2^2 + \left[ (\rho + C)L + \frac{m}{2} + m_E \right] \omega^2(0, t) + \frac{m}{2} \omega_t^2(0, t) + \frac{J}{2} \omega_{xt}^2(L, t) \\ & + \frac{m_E}{2} \omega_t^2(L, t) + \left[ (\rho + C)L^4 + m_E L^3 + \frac{L}{2} (J + CL) \right] \|\omega_{xx}\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

### 3.2. Résultats préliminaires

Maintenant, pour la fonctionnelle  $\psi_2(t)$ , on a

$$\begin{aligned}
\psi_2(t) &\leq \frac{\rho}{2} \|\omega_t\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^L \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s))^2 ds dx \\
&\quad + \frac{m}{2} \omega_t^2(0, t) + \frac{m}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s))^2 ds \\
&\quad + \frac{m_E}{2} \omega_t^2(L, t) + \frac{m_E}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s))^2 ds \\
&\quad + \frac{J}{2} \omega_{xt}^2(L, t) + \frac{J}{2} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s))^2 ds, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ici nous avons utilisé le fait que :

$$\begin{aligned}
&\left( \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds \right)^2 \\
&= \left( \int_0^t \sqrt{g(t-s)} \sqrt{g(t-s)} (\omega(t) - \omega(s)) ds \right)^2 \\
&\leq \left( \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s))^2 ds, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
(\omega(x, t) - \omega(x, s))^2 &= \left[ (\omega(0, t) - \omega(0, s)) + (u(x, t) - u(x, s)) \right]^2 \\
&\leq 2(\omega(0, t) - \omega(0, s))^2 + 2(u(x, t) - u(x, s))^2
\end{aligned} \tag{a1}$$

et en utilisant le Lemme 1.2.1 de nouveau, on obtient

$$\int_0^L \int_0^t g(t-s) (\omega(x, t) - \omega(x, s))^2 ds dx \leq 2L(g \diamond \omega) + 2L^4 \int_0^L (g \square u_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \tag{3.7}$$

De même, d'après le Lemme 1.2.1, la relation

$$\begin{aligned}
(\omega(L, t) - \omega(L, s))^2 &= \left[ (\omega(0, t) - \omega(0, s)) + (u(L, t) - u(L, s)) \right]^2 \\
&\leq 2(\omega(0, t) - \omega(0, s))^2 + 2(u(L, t) - u(L, s))^2
\end{aligned} \tag{a2}$$

### 3.2. Résultats préliminaires

implique que

$$\int_0^t g(t-s) \left( \omega(L, t) - \omega(L, s) \right)^2 ds \leq 2(g \diamond \omega) + 2L^3 \int_0^L (g \square u_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \quad (3.8)$$

Notons qu'à partir du Lemme 1.2.1, nous avons

$$\int_0^t g(t-s) \left( \omega_x(L, t) - \omega_x(L, s) \right)^2 ds \leq L \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \quad (3.9)$$

D'autre part, le fait que  $\omega_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t)$ , et en tenant compte de (3.7), (3.8) et (3.9) dans (3.6), nous aboutissons à

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &\leq \frac{\rho}{2} \|\omega_t\|_2^2 + \frac{m}{2} \omega_t^2(0, t) + \left( \rho L^4 + m_E L^3 + \frac{JL}{2} \right) \kappa \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx \\ &\quad + \left( \rho L + \frac{m}{2} + m_E \right) \kappa (g \diamond \omega) + \frac{m_E}{2} \omega_t^2(L, t) + \frac{J}{2} \omega_{xt}^2(L, t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En utilisant la définition (3.2) de  $\mathcal{E}(t)$ , (3.5) et (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &\leq \left( 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \right) \frac{\rho}{2} \|\omega_t\|_2^2 + \left( \frac{1}{2} + \lambda_1 \left[ (\rho + C)L + \frac{m}{2} + m_E \right] \right) \omega^2(0, t) \\ &\quad + \left( \frac{EI}{2} \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) + \lambda_1 \left[ (\rho + C)L^4 + m_E L^3 + \frac{JL}{2} + \frac{CL^2}{2} \right] \right) \|\omega_{xx}\|_2^2 \\ &\quad + \left( \frac{EI}{2} + \lambda_2 \left[ \rho L^4 + m_E L^3 + \frac{JL}{2} \right] \kappa \right) \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + \left( 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \right) \frac{J}{2} \omega_{xt}^2(L, t) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} + \lambda_2 \left( \rho L + \frac{m}{2} + m_E \right) \kappa \right) (g \diamond \omega) + \left( 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \right) \frac{m_E}{2} \omega_t^2(L, t) \\ &\quad + \left( 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \right) \frac{m}{2} \omega_t(0, t) + 2EI\psi_4(t) + 2\psi_5(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

D'autre part, en tenant compte de (3.2), (3.5) et (3.10) et le fait que  $1 - \int_0^t g(s) \geq 1 - \kappa$ , nous aboutissons à

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}(t) &\geq \left( 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \right) \rho \|\omega_t\|_2^2 + \left( 1 - \lambda_1 \left[ 2(\rho + C)L + m + 2m_E \right] \right) \omega^2(0, t) \\ &\quad + \left( EI(1 - \kappa) - \lambda_1 \left[ 2(\rho + C)L^4 + 2m_E L^3 + JL + CL^2 \right] \right) \|\omega_{xx}\|_2^2 \end{aligned}$$

### 3.3. Comportement asymptotique

---

$$\begin{aligned}
& + \left( EI - \lambda_2 [2\rho L^4 + 2m_E L^3 + JL] \kappa \right) \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + 4EI\psi_4(t) + 4\psi_5(t) \\
& + \left( 1 - \lambda_2 [2\rho L + m + 2m_E] \kappa \right) (g \diamond \omega) + \left( 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \right) m_E \omega_t^2(L, t) \\
& + \left( 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \right) m \omega_t(0, t) + \left( 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \right) J \omega_{xt}^2(L, t), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\delta_1 \left[ \mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t) + \psi_5(t) \right] \leq \mathcal{L}(t) \leq \delta_2 \left[ \mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t) + \psi_5(t) \right]$$

pour certaines constantes positives  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , sachant que

$$\lambda_1 < \min \left[ 1, \frac{1}{2(\rho + C)L + m + 2m_E}, \frac{EI(1 - \kappa)}{2(\rho + C)L^4 + 2m_E L^3 + JL + CL^2} \right]$$

et

$$\lambda_2 < \min \left[ 1 - \lambda_1, \frac{EI}{(2\rho L^4 + 2m_E L^3 + JL)\kappa}, \frac{1}{(2\rho L + m + 2m_E)\kappa} \right]$$

et cela achève la démonstration. ■

Dans la suite, nous notons par  $\bar{\xi}$  et  $\bar{\xi}_\alpha$  les expressions suivantes :

$$\bar{\xi} = \int_0^\infty \xi(s) ds$$

et

$$\bar{\xi}_\alpha = \int_0^\infty e^{\alpha z} \xi(z) dz.$$

### 3.3 Comportement asymptotique

Notre objectif dans cette partie est de montrer que l'énergie associée au système (2.7)–(2.9) décroît de manière exponentielle vers zéro quant  $t \rightarrow +\infty$ , sous l'action d'une seule force de contrôle  $f(t)$  agissant sur l'équation de la base. Nous supposons que le noyau  $g : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie les hypothèses suivantes :

**(H1)**  $g$  est une fonction de  $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  qui satisfait l'hypothèse suivante :

$$0 < \kappa = \int_0^{+\infty} g(s) ds < 1;$$

### 3.3. Comportement asymptotique

---

(H2)  $0 < g'(t) + \mu g(t) \leq \xi(t)$  pour presque tout  $t > 0$  où  $\mu$  est une constante positive et  $\xi(t)$  est une fonction non-négative.

Soit  $t_* > 0$  un nombre réel tel que  $g_* = \int_0^{t_*} g(s) ds > 0$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'établir et de démontrer notre résultat principal de stabilisation.

**Théorème 3.3.1** *Sous les hypothèses (H1), (H2), le contrôle (2.10) et la condition*

$$\int_0^{\infty} e^{\beta s} \xi(s) ds < \infty,$$

où  $\beta$  est une constante positive, alors l'énergie classique  $E(t)$  associée au problème (2.7)–(2.9) décroît exponentiellement vers zéro, c'est-à-dire, qu'il existe deux constantes positives  $A$  et  $\nu$  telles que

$$E(t) \leq Ae^{-\nu t}, t \geq 0,$$

à condition que  $\int_0^{\infty} e^{\beta s} \xi(s) ds$  soit assez petite.

Nous donnons d'abord quelques lemmes qui seront un support à la démonstration de ce théorème.

**Lemme 3.3.1** *La dérivée de la fonctionnelle  $\psi_1(t)$  vérifie, le long de la solution (2.7)–(2.9) :*

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) \leq & \left[ \rho + \frac{2C^2L^2}{EI(1-\kappa)} \right] \|\omega_t\|_2^2 - \frac{EI}{4}(1-\kappa) \|\omega_{xx}\|_2^2 + \frac{EI\kappa}{2(1-\kappa)} \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx \\ & - \frac{1}{2} \omega^2(0, t) + \left[ m + (K + C)^2 \right] \omega_t^2(0, t) + \left( m_E + C^2 \right) \omega_t^2(L, t) \\ & + \left[ JL + \frac{2D^2}{EI(1-\kappa)} \right] \|\omega_{xxt}\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

### 3.3. Comportement asymptotique

**Démonstration.** La différentiation de la fonctionnelle  $\psi_1(t)$  par rapport au temps  $t$  donne

$$\begin{aligned}\psi'_1(t) &= \rho \|\omega_t\|_2^2 + \rho \int_0^L \omega \omega_{tt} dx + C \int_0^L \omega_t \omega_x dx + C \int_0^L \omega \omega_{xt} dx \\ &\quad + m \omega_{tt}(0, t) \omega(0, t) + m_E \omega_{tt}(L, t) \omega(L, t) + J \omega_{xtt}(L, t) \omega_x(L, t) \\ &\quad + m \omega_t^2(0, t) + m_E \omega_t^2(L, t) + J \omega_{xt}^2(L, t), \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

En utilisant (2.7)–(2.9) ainsi que l'expression du contrôle  $f(t)$  défini dans (2.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}\psi'_1(t) &= I_1 + I_2 + I_3 + \rho \|\omega_t\|_2^2 + C \int_0^L \omega_t \omega_x dx + m_E \omega_{tt}(L, t) \omega(L, t) + J \omega_{xtt}(L, t) \omega_x(L, t) \\ &\quad - (C + K) \omega_t(0, t) \omega(0, t) + C \omega_t(L, t) \omega(0, t) + m_E \omega_t^2(L, t) + J \omega_{xt}^2(L, t) - \omega^2(0, t) \\ &\quad + m \omega_t^2(0, t) - \left( D \omega_{xxx}(0, t) + EI \omega_{xxx}(0, t) - EI \int_0^t g(t-s) \omega_{xxx}(0, s) ds \right) \omega(0, t),\end{aligned}\tag{3.12}$$

pour tout  $t \geq 0$  où

$$I_1 = -EI \int_0^L \omega(t) \omega_{xxxx}(t) dx, \quad I_2 = EI \int_0^L \omega(t) \int_0^t g(t-s) \omega_{xxx}(s) ds dx$$

et

$$I_3 = -D \int_0^L \omega(t) \omega_{xxx}(t) dx.$$

On intègre deux fois par parties, pour avoir

$$I_1 = -EI \omega_{xxx}(L, t) \omega(L, t) + EI \omega_{xxx}(0, t) \omega(0, t) + EI \omega_{xx}(L, t) \omega_x(L, t) - EI \|\omega_{xx}\|_2^2, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= EI \omega(L, t) \int_0^t g(t-s) \omega_{xxx}(L, s) ds - EI \omega(0, t) \int_0^t g(t-s) \omega_{xxx}(0, s) ds \\ &\quad - EI \omega_x(L, t) \int_0^t g(t-s) \omega_{xx}(L, s) ds + EI \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) \omega_{xx}(s) ds dx\end{aligned}\tag{3.14}$$

et

$$\begin{aligned}I_3 &= -D \omega_{xxx}(L, t) \omega(L, t) + D \omega_{xxx}(0, t) \omega(0, t) + D \omega_{xt}(L, t) \omega_x(L, t) \\ &\quad - D \int_0^L \omega_{xx}(t) \omega_{xt}(t) dx,\end{aligned}\tag{3.15}$$

### 3.3. Comportement asymptotique

pour tout  $t \geq 0$ . L'injection de (3.13)–(3.15) dans (3.12), en tenant compte des conditions aux bords (2.8), on arrive à

$$\begin{aligned} \psi'_1(t) = & \rho \|\omega_t\|_2^2 - EI \|\omega_{xx}\|_2^2 + EI \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) \omega_{xx}(s) ds dx + C \int_0^L \omega_t(t) \omega_x(t) dx \\ & - D \int_0^L \omega_{xx}(t) \omega_{xxt}(t) dx + C \omega_t(L, t) \omega(0, t) - (K + C) \omega_t(0, t) \omega(0, t) \\ & - \omega^2(0, t) + J \omega_{xt}^2(L, t) + m \omega_t^2(0, t) + m_E \omega_t^2(L, t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

or,

$$\begin{aligned} \psi'_1(t) = & EI \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(s) - \omega_{xx}(t)) ds dx + C \int_0^L \omega_t(t) \omega_x(t) dx \\ & - D \int_0^L \omega_{xx}(t) \omega_{xxt}(t) dx + C \omega_t(L, t) \omega(0, t) - (K + C) \omega_t(0, t) \omega(0, t) + \rho \|\omega_t\|_2^2 \\ & - EI \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\omega_{xx}\|_2^2 - \omega^2(0, t) + m \omega_t^2(0, t) + m_E \omega_t^2(L, t) + J \omega_{xt}^2(L, t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

pour tout  $t \geq 0$ . Maintenant, on estime les termes de membre de droite de la relation (3.17).

Nous commençons par le premier terme, pour  $\eta_1 > 0$  on a

$$EI \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(s) - \omega_{xx}(t)) ds dx \leq \eta_1 EI \|\omega_{xx}\|_2^2 + \frac{EI\kappa}{4\eta_1} \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad t \geq 0.$$

En utilisant le Lemme 1.2.1, il est facile de voir que

$$C \int_0^L \omega_t(t) \omega_x(t) dx \leq \frac{C}{4\eta_2} \|\omega_t\|_2^2 + C\eta_2 L^2 \|\omega_{xx}\|_2^2, \quad \eta_2 > 0, \quad t \geq 0.$$

En ce qui concerne le troisième, le quatrième et le cinquième terme, nous adoptons les estimations suivantes :

$$D \int_0^L \omega_{xx}(t) \omega_{xxt}(t) dx \leq \eta_3 D \|\omega_{xx}\|_2^2 + \frac{D}{4\eta_3} \|\omega_{xxt}\|_2^2,$$

$$C \omega_t(L, t) \omega(0, t) \leq \frac{C}{4\eta_4} \omega_t^2(L, t) + C\eta_4 \omega^2(0, t)$$

### 3.3. Comportement asymptotique

et

$$(K + C)\omega_t(0, t)\omega(0, t) \leq \frac{1}{4\eta_5}\omega_t^2(0, t) + \eta_5(K + C)^2\omega^2(0, t)$$

pour tout  $t \geq 0$  et certaines constantes  $\eta_3, \eta_4, \eta_5 > 0$ .

Finalement, nous choisissons  $\eta_1 = \frac{1-\kappa}{2}$ ,  $\eta_2 = \frac{EI(1-\kappa)}{8CL^2}$ ,  $\eta_3 = \frac{EI(1-\kappa)}{8D}$ ,  $\eta_4 = \frac{1}{4C}$ ,  $\eta_5 = \frac{1}{4(K+C)^2}$ . En tenant compte de ces estimations dans (3.17) et en utilisant le Lemme 1.2.1, nous trouvons (3.11). ■

**Lemme 3.3.2** *La dérivée de la fonctionnelle  $\psi_2(t)$ , le long de la solution (2.7)-(2.9) vérifie*

$$\begin{aligned} \psi_2'(t) &\leq \frac{D}{2}\|\omega_{xxt}\|_2^2 - \frac{g_*\rho}{4}\|\omega_t\|_2^2 - \frac{Jg_*}{2}\omega_{xt}^2(L, t) + U_1\|\omega_{xx}\|_2^2 + U_2\omega^2(0, t) \\ &\quad + U_3 \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + U_4(g \diamond \omega) + U_5 \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) (\xi \diamond \omega) \\ &\quad + U_6 \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) \int_0^L (\xi \square \omega_{xx}) dx + U_7\omega_t^2(L, t) + U_8\omega_t^2(0, t), \end{aligned} \quad (3.18)$$

pour tout  $t \geq t_* > 0$  où  $U_i, i = 1, \dots, 8$  sont des constantes positives telles que :

$$\begin{aligned} U_1 &:= \frac{EI^2(1-\kappa)^2 g_*\rho}{64[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2L^2]}, \quad U_2 := \frac{g_*\rho EI(1-\kappa)}{64[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2L^2]}, \\ U_3 &:= \left\{ \frac{16[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2L^2]}{\rho g_*(1-\kappa)^2} + EI + \frac{D}{2} + \frac{L}{g_*\rho} \left( C^2L + 2\rho^2\mu^2L^3 + \rho J\mu^2 \right) + (C + m_E\mu)L^3 \right\} \kappa \\ U_4 &:= \left\{ \frac{2\rho\mu^2L}{g_*} + m_E\mu + \frac{3C}{2} + \frac{(K + m\mu)^2}{2} + \frac{16[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2L^2]}{g_*\rho EI(1-\kappa)} \right\} \kappa, \\ U_5 &:= \frac{2\rho L}{g_*} + \frac{m}{2} + m_E, \quad U_6 := \frac{L}{g_*} (2\rho L^3 + J) + L^3 m_E, \quad U_7 := C + \frac{m_E}{2} (\mu + 1 - 2g_*) \end{aligned} \quad (3.19)$$

et

$$U_8 := \frac{1}{2}(1 + m) - mg_*.$$

**Démonstration.** Une différentiation de  $\psi_2(t)$  donne

$$\begin{aligned} \psi_2'(t) &= - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \left( \rho \|\omega_t\|_2^2 + m\omega_t^2(0, t) + m_E\omega_t^2(L, t) + J\omega_{xt}^2(L, t) \right) \\ &\quad - \rho \int_0^L \omega_{tt}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx - \rho \int_0^L \omega_t(t) \int_0^t g'(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.3. Comportement asymptotique

$$\begin{aligned}
& -m\omega_{tt}(0, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds - m\omega_t(0, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
& -m_E\omega_{tt}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds - m_E\omega_t(L, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds \\
& -J\omega_{xtt}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds - J\omega_{xt}(L, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds,
\end{aligned}$$

pour tout  $t \geq 0$ .

En utilisant les équations de (2.7) dans (3.20), nous trouvons

$$\begin{aligned}
\psi'_2(t) = & A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \left( -C\omega_t(L, t) + C\omega_t(0, t) - f(t) \right) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
& + \left( EI\omega_{xxx}(0, t) + D\omega_{xxx}(0, t) - EI \int_0^t g(t-s) \omega_{xxx}(0, s) ds \right) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
& - \rho \int_0^L \omega_t(t) \int_0^t g'(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx - m\omega_t(0, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
& - m_E\omega_{tt}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds - m_E\omega_t(L, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds \\
& - J\omega_{xtt}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds - J\omega_{xt}(L, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds \\
& - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \left( \rho \|\omega_t\|_2^2 + m\omega_t^2(0, t) + m_E\omega_t^2(L, t) + J\omega_{xt}^2(L, t) \right), \quad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

où

$$\begin{aligned}
A_1 &= EI \int_0^L \omega_{xxxx}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx, \\
A_2 &= -EI \int_0^L \left( \int_0^t g(t-s) \omega_{xxx}(s) ds \right) \left( \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds \right) dx, \\
A_3 &= C \int_0^L \omega_{xt}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx
\end{aligned}$$

### 3.3. Comportement asymptotique

---

et

$$A_4 = D \int_0^L \omega_{xxxxt}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx.$$

Une intégration par parties dans  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , nous donne

$$\begin{aligned} A_1 = & EI \omega_{xxx}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds - EI \omega_{xxx}(0, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\ & - EI \omega_{xx}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds + EI \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & -EI \left( \int_0^t g(t-s) \omega_{xxx}(L, s) ds \right) \left( \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds \right) \\ & + EI \left( \int_0^t g(t-s) \omega_{xxx}(0, s) ds \right) \left( \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \right) \\ & + EI \left( \int_0^t g(t-s) \omega_{xx}(L, s) ds \right) \left( \int_0^t g(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds \right) \\ & - EI \int_0^L \left( \int_0^t g(t-s) \omega_{xx}(s) ds \right) \left( \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds \right) dx, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} A_3 = & C \omega_t(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds - C \omega_t(0, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\ & - C \int_0^L \omega_t(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(t) - \omega_x(s)) ds dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

et

$$\begin{aligned} A_4 = & D \omega_{xxx}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds - D \omega_{xxx}(0, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\ & - D \omega_{xx}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds + D \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx. \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.3. Comportement asymptotique

En substituant les relations (3.22)–(3.25) dans (3.21) et en tenant compte des conditions aux bords (2.8), on déduit que

$$\begin{aligned}
\psi'_2(t) = & EI \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx - \rho \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\omega_t\|_2^2 \\
& - EI \int_0^L \int_0^t g(t-s) \omega_{xx}(s) ds \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx \\
& + D \int_0^L \omega_{xxt}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx - J \left( \int_0^t g(s) ds \right) \omega_{xt}^2(L, t) \\
& - C \int_0^L \omega_t(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(t) - \omega_x(s)) ds dx - m \left( \int_0^t g(s) ds \right) \omega_t^2(0, t) \\
& + C \omega_t(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds - m_E \left( \int_0^t g(s) ds \right) \omega_t^2(L, t) \\
& - C \omega_t(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds - f(t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
& - \rho \int_0^L \omega_t \int_0^t g'(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx - m \omega_t(0, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
& - m_E \omega_t(L, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds - J \omega_{xt}(L, t) \int_0^t g'(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds,
\end{aligned}$$

pour tout  $t \geq 0$ . D'après l'expression du contrôle  $f(t)$  défini dans (2.10), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\psi'_2(t) = & EI \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx \\
& + EI \int_0^L \left[ \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds \right]^2 dx - \rho \left( \int_0^t g(s) ds \right) \|\omega_t\|_2^2 \\
& + D \int_0^L \omega_{xxt}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx - J \left( \int_0^t g(s) ds \right) \omega_{xt}^2(L, t) \\
& - C \int_0^L \omega_t(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(t) - \omega_x(s)) ds dx + \rho \mu \int_0^L \omega_t \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx
\end{aligned}$$

### 3.3. Comportement asymptotique

$$\begin{aligned}
& + J\mu\omega_{xt}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds - m \left( \int_0^t g(s) ds \right) \omega_t^2(0, t) \\
& + (C + m_E\mu) \omega_t(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds - m_E \left( \int_0^t g(s) ds \right) \omega_t^2(L, t) \\
& - C\omega_t(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds + (K + m\mu) \omega_t(0, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
& + \omega(0, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds - \rho \int_0^L \omega_t \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx \\
& - m\omega_t(0, t) \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
& - m_E \omega_t(L, t) \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds \\
& - J\omega_{xt}(L, t) \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Maintenant, on estime les termes de membre de droite de l'expression (3.26). Nous commençons par le premier terme

$$\begin{aligned}
& \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^L \omega_{xx}(t) \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx \\
& \leq \eta_6 \|\omega_{xx}\|_2^2 + \frac{\kappa}{4\eta_6} \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad \eta_6 > 0, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Le deuxième terme est estimé par

$$\int_0^L \left[ \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds \right]^2 dx \leq \kappa \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \tag{3.28}$$

Pour le quatrième terme, il est facile de voir que

$$\int_0^L \omega_{xxt} \int_0^t g(t-s) (\omega_{xx}(t) - \omega_{xx}(s)) ds dx \leq \frac{1}{2} \|\omega_{xxt}\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \tag{3.29}$$

### 3.3. Comportement asymptotique

En utilisant le Lemme 1.2.1 pour le sixième terme, on peut écrire

$$\int_0^L \omega_t \int_0^t g(t-s) (\omega_x(t) - \omega_x(s)) ds dx \leq \eta_7 \|\omega_t\|_2^2 + \frac{\kappa L^2}{4\eta_7} \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad \eta_7 > 0, \quad t \geq 0. \quad (3.30)$$

D'après la relation (a1) (la relation entre (3.6) et (3.7)), le Lemme 1.2.1 et comme  $\omega_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t)$ , le septième terme est estimé par

$$\int_0^L \omega_t \int_0^t g(t-s) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx \leq \eta_8 \|\omega_t\|_2^2 + \frac{L\kappa}{2\eta_8} (g \diamond \omega) + \frac{L^4 \kappa}{2\eta_8} \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad \eta_8 > 0, \quad (3.31)$$

pour tout  $t \geq 0$ . En vertu de Lemme 1.2.1 le huitième terme est estimé comme suit

$$\omega_{xt}(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds \leq \eta_9 \omega_{xt}^2(L, t) + \frac{\kappa L}{4\eta_9} \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad \eta_9 > 0, \quad t \geq 0. \quad (3.32)$$

Le fait que  $\omega_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t)$  et de la relation (a2) (la relation entre (3.7) et (3.8)) et d'après le Lemme 1.2.1, on trouve que

$$\omega_t(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds \leq \frac{1}{2} \omega_t^2(L, t) + \kappa (g \diamond \omega) + \kappa L^3 \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \quad (3.33)$$

Le douzième, le treizième et le quatorzième terme dans de membre droite de (3.25) sont estimés par :

$$\omega_t(L, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \leq \frac{1}{2} \omega_t^2(L, t) + \frac{\kappa}{2} (g \diamond \omega), \quad (3.34)$$

$$(K + m\mu) \omega_t(0, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \leq \frac{1}{2} \omega_t^2(0, t) + \frac{(K + m\mu)^2}{2} \kappa (g \diamond \omega), \quad (3.35)$$

$$\omega(0, t) \int_0^t g(t-s) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \leq \eta_{10} \omega^2(0, t) + \frac{\kappa}{4\eta_{10}} (g \diamond \omega), \quad \eta_{10} > 0, \quad t \geq 0. \quad (3.36)$$

Maintenant, nous choisissons

$$\eta_6 = \frac{EI(1-\kappa)^2 g_* \rho}{64[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2 L^2]}, \quad \eta_8 = \frac{g_*}{4\mu}, \quad \eta_9 = \frac{g_*}{4\mu}, \quad \eta_7 = \frac{g_* \rho}{4C}, \quad \eta_{10} = \frac{g_* \rho EI(1-\kappa)}{64[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2 L^2]}$$

### 3.3. Comportement asymptotique

et en vertu de ces estimations (3.27)–(3.36) dans (3.26), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\psi'_2(t) &\leq \frac{D}{2} \|\omega_{xxt}\|_2^2 + \frac{EI^2(1-\kappa)^2 g_* \rho}{64[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2 L^2]} \|\omega_{xx}\|_2^2 + \frac{g_* \rho EI(1-\kappa)}{64[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2 L^2]} \omega^2(0, t) \\
&- \frac{\rho g_*}{2} \|\omega_t\|_2^2 - \frac{3Jg_*}{4} \omega_{xt}^2(L, t) + \left[ C + \frac{m_E}{2} (\mu - 2g_*) \right] \omega_t^2(L, t) + \left( \frac{1}{2} - mg_* \right) \omega_t^2(0, t) \\
&+ \left\{ \frac{16[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2 L^2]}{\rho g_* (1-\kappa)^2} + EI + \frac{D}{2} + \frac{L}{g_* \rho} (C^2 L + 2\rho^2 \mu^2 L^3 + \rho J \mu^2) \right. \\
&+ (C + m_E \mu) L^3 \left. \right\} \kappa \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + \left\{ \frac{2\rho \mu^2 L}{g_*} + m_E \mu + \frac{3C}{2} + \frac{(K + m\mu)^2}{2} \right. \\
&+ \left. \frac{16[\rho EI(1-\kappa) + 2C^2 L^2]}{g_* \rho EI(1-\kappa)} \right\} \kappa (g \diamond \omega) - \rho \int_0^L \omega_t \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx \\
&- m \omega_t(0, t) \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \\
&- m_E \omega_t(L, t) \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds \\
&- J \omega_{xt}(L, t) \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)) ds, \quad t \geq t_* > 0.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Comme  $\omega_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t)$ , en utilisant **(H2)**, (a1), (a2), Lemme 1.2.1 et le Lemme 1.2.2 avec  $\eta_{11} = \eta_{12} = \frac{g_*}{4}$ , les quatre derniers termes dans le membre de droite de l'expression de (3.37) sont estimés comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \omega_t \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(t) - \omega(s)) ds dx \\
&\leq \frac{g_*}{4} \|\omega_t\|_2^2 + \frac{2L}{g_*} \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) (\xi \diamond \omega) + \frac{2L^4}{g_*} \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) \int_0^L (\xi \square \omega_{xx}) dx,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\omega_t(0, t) \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(0, t) - \omega(0, s)) ds \leq \frac{1}{2} \omega_t^2(0, t) + \frac{1}{2} \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) (\xi \diamond \omega), \tag{3.39}$$

$$\omega_t(L, t) \int_0^t (g'(t-s) + \mu g(t-s)) (\omega(L, t) - \omega(L, s)) ds$$

### 3.3. Comportement asymptotique

$$\leq \frac{1}{2}\omega_t^2(L, t) + \left(\int_0^t \xi(s) ds\right)(\xi \diamond \omega) + L^3 \left(\int_0^t \xi(s) ds\right) \int_0^L (\xi \square \omega_{xx}) dx \quad (3.40)$$

et

$$\begin{aligned} & \omega_{xt}(L, t) \int_0^t \left(g'(t-s) + \mu g(t-s)\right) \left(\omega_x(L, t) - \omega_x(L, s)\right) ds \\ & \leq \frac{g^*}{4} \omega_{xt}^2(L, t) + \frac{L}{g^*} \left(\int_0^t \xi(s) ds\right) \int_0^L (\xi \square \omega_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Enfin, l'assertion (3.18) découle des relations (3.38)–(3.41). ■

**Lemme 3.3.3** Pour  $\psi_3(t)$  on a

$$\psi_3'(t) \leq \frac{1}{2}(g' \diamond \omega) + \left(\frac{\kappa}{\mu} + \frac{1}{4\eta_{14}}\right) \omega_t^2(0, t) + \eta_{14} \omega^2(0, t) + \frac{\mu}{4}(g \diamond \omega), \quad t \geq 0 \quad (3.42)$$

pour certaine constante  $\eta_{14} > 0$ .

**Démonstration.** La dérivée de  $\psi_3(t)$  par rapport au temps  $t$  est donnée par

$$\psi_3'(t) = \frac{1}{2}(g' \diamond \omega) + \omega_t(0, t) \int_0^t g(t-s) \left(\omega(0, t) - \omega(0, s)\right) ds + \omega_t(0, t) \omega(0, t), \quad t \geq 0.$$

Il suffit d'observer que

$$\omega_t(0, t) \int_0^t g(t-s) \left(\omega(0, t) - \omega(0, s)\right) ds \leq \frac{1}{4\eta_{13}} \omega_t^2(0, t) + \eta_{13} \kappa (g \diamond \omega), \quad \eta_{13} > 0$$

et

$$\omega_t(0, t) \omega(0, t) \leq \frac{1}{4\eta_{14}} \omega_t^2(0, t) + \eta_{14} \omega^2(0, t), \quad \eta_{14} > 0, \quad t \geq 0,$$

avec  $\eta_{13} = \frac{\mu}{4\kappa}$ , pour obtenir (3.42). ■

**Lemme 3.3.4** Pour les fonctionnelles  $\psi_4(t)$  et  $\psi_5(t)$ , on a

$$\psi_4'(t) \leq -\alpha \psi_4(t) - \int_0^t \xi(t-s) \|\omega_{xx}(s)\|_2^2 ds + \bar{\xi}_\alpha \|\omega_{xx}\|_2^2, \quad t \geq 0 \quad (3.43)$$

et

$$\psi_5'(t) \leq -\alpha \psi_5(t) - \int_0^t \xi(t-s) \omega^2(0, s) ds + \bar{\xi}_\alpha \omega^2(0, t), \quad t \geq 0. \quad (3.44)$$

### 3.3. Comportement asymptotique

**Démonstration.** Un calcul direct, donne (3.43) et (3.44). ■

**Preuve du Théorème 3.3.1** Une utilisation des Lemme 3.3.1, Lemme 3.3.2 et Lemme 3.3.3 et l'injection de (2.10) dans (3.3) dans la dérivée de la fonctionnelle  $\mathcal{L}(t)$ , nous donne pour tout  $t \geq t_* > 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & \frac{EI}{2} \int_0^L (g' \square \omega_{xx}) dx + \frac{1}{2} (g' \diamond \omega) + \left\{ \lambda_1 \left[ \frac{\rho EI(1-\kappa) + 2C^2 L^2}{EI(1-\kappa)} \right] - \frac{g_* \rho}{4} \lambda_2 \right\} \|\omega_t\|_2^2 \\
& + \left( \lambda_2 U_1 - \lambda_1 \frac{EI}{4} (1-\kappa) \right) \|\omega_{xx}\|_2^2 + \left\{ \lambda_1 \left[ m + (K+C)^2 \right] - \frac{C}{2} \right\} \omega_t^2(0, t) \\
& + \left( \lambda_2 U_8 + \frac{\kappa}{\mu} + \frac{1}{4\eta_{14}} + \frac{C}{4\eta_{15}} + \frac{1}{4\eta_{16}} - K \right) \omega_t^2(0, t) + U_9 \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + 2\psi'_5(t) \\
& + \left\{ \lambda_1 \left[ m_E + C^2 \right] + \lambda_2 U_7 - C \left( \frac{1}{2} - \eta_{15} \right) \right\} \omega_t^2(L, t) + \lambda_2 U_6 \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) \int_0^L (\xi \square \omega_{xx}) dx \quad (3.45) \\
& - \lambda_2 \frac{Jg_*}{2} \omega_{xt}^2(L, t) + \left\{ \lambda_1 \left[ JL + \frac{2D^2}{EI(1-\kappa)} \right] + \lambda_2 \frac{D}{2} - D \right\} \|\omega_{xxt}\|_2^2 + 2EI\psi'_4(t) \\
& + \left( \lambda_2 U_2 + \eta_{14} + \eta_{16} - \frac{\lambda_1}{2} \right) \omega^2(0, t) + \lambda_2 U_4 (g \diamond \omega) + \frac{\mu}{4} (g \diamond \omega) \\
& + \lambda_2 U_5 \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) (\xi \diamond \omega),
\end{aligned}$$

où on a utilisé les estimations suivantes :

$$C\omega_t(L, t)\omega_t(0, t) \leq C\eta_{15}\omega_t^2(L, t) + \frac{C}{4\eta_{15}}\omega_t^2(0, t), \quad \eta_{15} > 0,$$

$$\omega_t(0, t)\omega(0, t) \leq \frac{1}{4\eta_{16}}\omega_t^2(0, t) + \eta_{16}\omega^2(0, t), \quad \eta_{16} > 0,$$

avec

$$U_9 := \lambda_2 U_3 + \lambda_1 \frac{EI\kappa}{2(1-\kappa)}.$$

En tenant compte de la condition **(H2)**, nous arrivons aux estimations

$$\frac{EI}{2} \int_0^L (g' \square \omega_{xx}) dx + U_9 \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + \lambda_2 U_6 \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) \int_0^L (\xi \square \omega_{xx}) dx$$

### 3.3. Comportement asymptotique

$$\begin{aligned}
&\leq \left(U_9 - \frac{EI\mu}{2}\right) \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + \frac{1}{2} \left(2\lambda_2 U_6 \bar{\xi} + EI\right) \int_0^L (\xi \square \omega_{xx}) dx \quad (3.46) \\
&\leq \left(U_9 - \frac{EI\mu}{2}\right) \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx + 2 \left(\lambda_2 U_6 \bar{\xi} + \frac{EI}{2}\right) \int_0^t \xi(t-s) \|\omega_{xx}(s)\|_2^2 ds \\
&\quad + 2\bar{\xi} \left(\lambda_2 U_6 \bar{\xi} + \frac{EI}{2}\right) \|\omega_{xx}\|_2^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} (g' \diamond \omega) + \lambda_2 U_4 (g \diamond \omega) + \frac{\mu}{4} (g \diamond \omega) + \lambda_2 U_5 \left( \int_0^t \xi(s) ds \right) (\xi \diamond \omega) \\
&\leq \left(\lambda_2 U_4 - \frac{\mu}{4}\right) (g \diamond \omega) + \frac{1}{2} \left(2\lambda_2 U_5 \bar{\xi} + 1\right) (\xi \diamond \omega) \quad (3.47) \\
&\leq \left(\lambda_2 U_4 - \frac{\mu}{4}\right) (g \diamond \omega) + 2\bar{\xi} \left(\lambda_2 U_5 \bar{\xi} + \frac{1}{2}\right) \omega^2(0, t) + 2 \left(\lambda_2 U_5 \bar{\xi} + \frac{1}{2}\right) \int_0^t \xi(t-s) \omega^2(0, s) ds.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le Lemme 3.3.4 et en substituant (3.46) et (3.47) dans (3.45), on obtient pour tout  $t \geq t_* > 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) &\leq \left\{ \lambda_1 \left[ \frac{\rho EI(1-\kappa) + 2C^2 L^2}{EI(1-\kappa)} \right] - \frac{g_* \rho}{4} \lambda_2 \right\} \|\omega_t\|_2^2 - \lambda_2 \frac{Jg_*}{2} \omega_{xt}^2(L, t) \\
&\quad + \left[ \bar{\xi} \left(2\lambda_2 U_6 \bar{\xi} + EI\right) + 2EI\bar{\xi}_\alpha + \lambda_2 U_1 - \lambda_1 \frac{EI}{4} (1-\kappa) \right] \|\omega_{xx}\|_2^2 \\
&\quad + \left\{ \lambda_1 \left[ JL + \frac{2D^2}{EI(1-\kappa)} \right] + \lambda_2 \frac{D}{2} - D \right\} \|\omega_{xxt}\|_2^2 - 2\alpha EI \psi_4(t) \\
&\quad + \left( \lambda_2 U_8 + \frac{\kappa}{\mu} + \frac{1}{4\eta_{14}} + \frac{C}{4\eta_{15}} + \frac{1}{4\eta_{16}} - K \right) \omega_t^2(0, t) + \left( \lambda_2 U_4 - \frac{\mu}{4} \right) (g \diamond \omega) \\
&\quad + \left[ \lambda_1 (m_E + C^2) + \lambda_2 U_7 - C \left( \frac{1}{2} - \eta_{15} \right) \right] \omega_t^2(L, t) - 2\alpha \psi_5(t) \quad (3.48) \\
&\quad + \left\{ \lambda_1 \left[ m + (K + C)^2 \right] - \frac{C}{2} \right\} \omega_t^2(0, t) + \left( U_9 - \frac{\mu EI}{2} \right) \int_0^L (g \square \omega_{xx}) dx \\
&\quad + \left[ \bar{\xi} \left(2\lambda_2 U_5 \bar{\xi} + 1\right) + 2\bar{\xi}_\alpha + \eta_{14} + \eta_{16} + \lambda_2 U_2 - \frac{\lambda_1}{2} \right] \omega^2(0, t) \\
&\quad + \left( 2\lambda_2 U_6 \bar{\xi} - EI \right) \int_0^t \xi(t-s) \|\omega_{xx}(s)\|_2^2 ds + \left( 2\lambda_2 U_5 \bar{\xi} - 1 \right) \int_0^t \xi(t-s) \omega^2(0, s) ds.
\end{aligned}$$

### 3.3. Comportement asymptotique

Maintenant, nous commençons la sélection des différents paramètres de telle sorte que tous les coefficients dans le membre de droite de (3.48) soient négatifs. Premièrement, nous choisissons

$$\lambda_1 = \left[ \frac{EI(1-\kappa)}{EI\rho(1-\kappa) + 2C^2L^2} \right] \frac{g_*\rho}{8} \lambda_2, \quad \eta_{15} = \frac{1}{4}, \quad \text{et } \eta_{14} = \eta_{16} = \frac{\lambda_1}{8}.$$

Ensuite, on sélectionne  $\lambda_2$  suffisamment petite de telle sorte que

$$\begin{aligned} U_9 - \frac{EI\mu}{2} &< 0, \\ \lambda_2 U_4 - \frac{\mu}{4} &< 0, \\ \lambda_2 \left\{ \frac{EI(1-\kappa)g_*\rho}{8[EI\rho(1-\kappa) + 2C^2L^2]} \right\} \left( m_E + C^2 \right) + \lambda_2 U_7 - \frac{C}{4} &< 0, \\ \lambda_2 \left\{ \frac{EI(1-\kappa)g_*\rho}{8[EI\rho(1-\kappa) + 2C^2L^2]} \right\} \left[ JL + \frac{2D^2}{EI(1-\kappa)} \right] + \lambda_2 \frac{D}{2} - D &< 0, \\ \lambda_2 \left\{ \frac{EI(1-\kappa)g_*\rho}{8[EI\rho(1-\kappa) + 2C^2L^2]} \right\} \left[ m + (K_p + C)^2 \right] - \frac{C}{2} &< 0, \\ 2\lambda_2 U_6 \bar{\xi} - EI &< 0 \end{aligned}$$

et

$$2\lambda_2 U_5 \bar{\xi} - 1 < 0.$$

Une fois que  $\lambda_2$  est fixée, si  $\bar{\xi}_\alpha$  et  $\bar{\xi}$  sont suffisamment petits, il est clair que

$$\bar{\xi} \left( 2\lambda_2 U_6 \bar{\xi} + EI \right) + 2EI \bar{\xi}_\alpha - \left[ \frac{EI^2(1-\kappa)^2}{EI\rho(1-\kappa) + 2C^2L^2} \right] \frac{g_*\rho}{64} \lambda_2 < 0$$

et

$$\bar{\xi} \left( 2\lambda_2 U_5 \bar{\xi} + 1 \right) + 2\bar{\xi}_\alpha - \left[ \frac{EI(1-\kappa)}{\rho EI(1-\kappa) + 2C^2L^2} \right] \frac{g_*\rho}{64} \lambda_2 < 0.$$

Enfin, on choisit  $K$  suffisamment large de manière que

$$\lambda_2 U_8 + \frac{\kappa}{\mu} + C + \frac{2}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1} - K < 0.$$

Par conséquent, nous aboutissons à l'estimation suivante :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_0 \left[ \mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t) + \psi_5(t) \right], \quad t \geq t_* > 0,$$

### 3.3. Comportement asymptotique

---

où  $C_0$  est une constante positive. D'après le membre de droite de la relation (3.4) dans la Proposition 3.2.1, on obtient :

$$\mathcal{L}'(t) \leq \frac{-C_0}{\delta_2} \mathcal{L}(t), \quad t \geq t_* > 0.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}(t) \leq C_1 e^{-\nu t}, \quad t \geq t_* > 0,$$

où  $C_1$  et  $\nu$  sont des constantes positives. L'autre inégalité dans la Proposition 3.2.1, donne

$$\mathcal{E}(t) \leq A e^{-\nu t}, \quad t \geq t_* > 0.$$

où  $A$  est une constante positive. On peut prouver facilement une estimation similaire dans l'intervalle  $[0, t_*]$ .

Enfin, comme l'énergie classique et l'énergie modifiée sont équivalent c'est-à-dire il existe  $\chi_1$  et  $\chi_2$  deux constantes positives telle que

$$\chi_1 \mathcal{E}(t) \leq E(t) \leq \chi_2 \mathcal{E}(t), \quad t \geq 0$$

on obtient finalement :

$$E(t) \leq A e^{-\nu t}, \quad t \geq 0.$$

Ceci achève la démonstration. ■

## Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons abordé le problème des vibrations transversales apparaissant lors du fonctionnement d'une poutre fixée à une base en mouvement de translation. Notre but était d'apporter un nouveau mécanisme capable d'atténuer ces vibrations et d'améliorer les résultats publiés auparavant. Notre contribution dans ce projet a porté sur le contrôle d'une poutre fixée à une base en mouvement de translation en s'appuyant sur trois types amortissements.

Nous soulignons que dans notre étude nous avons supposé les deux hypothèses suivantes :

- 1)- *les déformations de la section droite dues au cisaillement sont négligées,*
- 2)- *l'effet d'inertie de rotation est négligé.*

Les résultats obtenus dans notre recherche peuvent s'étendre au cas où on ne suppose pas ces hypothèses. Le modèle devient la poutre de Timoshenko (voir [87]) comme le montre la figure ci-dessous. Les équations du mouvement dans ce cas là s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} mS_{tt}(t) + \rho_1 \int_0^L (S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) dx + m_E (S_{tt}(t) + u_{tt}(L, t)) = \tau(t), \quad t \geq 0, \\ \rho_1 (S_{tt}(t) + u_{tt}(x, t)) - k(u_x(x, t) + \phi(x, t))_x = 0, \\ \rho_2 \phi_{tt}(x, t) - b\phi_{xx}(x, t) + \int_0^t g(t-s)\phi_{xx}(s) ds + k(u_x(x, t) + \phi(x, t)) = 0, \end{array} \right. \quad (3.49)$$

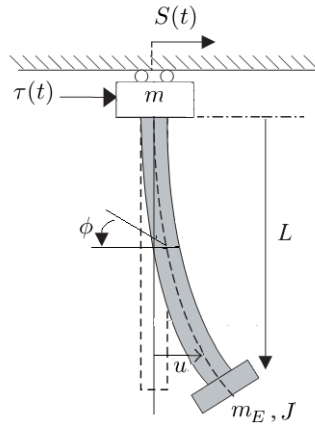
pour tout  $x \in [0, L]$  avec les conditions aux bords

## Conclusion et perspectives

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = \phi(0, t) = 0, \\ -k(u_x(L, t) + \phi(L, t)) = m_E(u_{tt}(L, t) + S_{tt}(t)), \\ b\phi_x(L, t) - \int_0^t g(t-s)\phi_x(L, s)ds = -J\phi_{tt}(L, t), \quad \forall t \in [0, \infty) \end{array} \right. \quad (3.50)$$

et les conditions initiales

$$S(0) = S_0, S_t(0) = S_1, u(x, 0) = u_0, \phi(x, 0) = \phi_0, u_t(x, 0) = u_1, \phi_t(x, 0) = \phi_1, x \in [0, L], \quad (3.51)$$



**FIGURE 3.1** – Poutre de Timoshenko fixée à une base en mouvement de translation.

Dans le système (3.49)–(3.52), les fonctions  $S$ ,  $u$ ,  $\phi$ ,  $\tau$  et  $g$  désignent, respectivement, le déplacement de la base en mouvement, le déplacement transversal à la position  $x$  et à l’instant  $t$  de la poutre par rapport à la base, l’angle de rotation d’un filament, la force extérieure agissant sur la base et la fonction de relaxation. Les coefficients  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $b$  et  $k$  sont des constantes positives caractérisant les propriétés élastiques des matériaux. Physiquement,  $\rho_1$  est la densité linéaire de la masse,  $\rho_2$  est le moment d’inertie de la masse,  $b$  est le coefficient de rigidité et  $k$  est le module d’élasticité de cisaillement. Les constantes  $L$ ,  $m$  et  $m_E$  représentent la longueur de la poutre, la masse de la base en mouvement de translation et la masse avec moment d’inertie  $J$  attachée à l’extrémité libre de la poutre, respectivement.

## Conclusion et perspectives

Aussi, ces résultats peuvent se généraliser si nous tenons de l'effet du déplacement longitudinal. Dans ce cas nous obtenons la poutre de Mindlin Timoshenko (voir [6]) et le système s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} mS_{tt}(t) + \int_0^L \rho h (S_{tt}(t) + u_{tt}) dx + m_E (S_{tt}(t) + u_{tt}(L, t)) = \tau(t), \quad \forall t \in [0, \infty), \\ \frac{\rho h^3}{12} \phi_{tt} - \phi_{xx} + \int_0^t g(t-s) \phi_{xx}(s) ds + k(\phi + u_x) = 0, \\ \rho h (S_{tt}(t) + u_{tt}) - k(\phi + u_x)_x - \left[ u_x \left( \eta_x + \frac{1}{2} u_x^2 \right) \right]_x + \frac{1}{k} u_{xxxx} + u_t = 0, \\ \rho h \eta_{tt} - \left( \eta_x + \frac{1}{2} u_x^2 \right)_x + \eta_t = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times [0, \infty), \end{array} \right. \quad (3.52)$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = \phi(0, t) = 0, \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, \\ \frac{1}{k} u_{xxx}(L, t) = m_E (u_{tt}(L, t) + S_{tt}(t)), \\ \phi_x(L, t) - \int_0^t g(t-s) \phi_x(L, s) ds = -J \phi_{tt}(L, t), \\ \eta(0, t) = \eta(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \end{array} \right. \quad (3.53)$$

et les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = S_0, \quad S_t(0) = S_1 \\ [\phi(0, \cdot), u(0, \cdot), \eta(0, \cdot)] = [\phi_0, u_0, \eta_0], \\ [\phi_t(0, \cdot), u_t(0, \cdot), \eta_t(0, \cdot)] = [\phi_1, u_1, \eta_1], \quad x \in [0, L] \end{array} \right. \quad (3.54)$$

où  $S$ ,  $u$ ,  $\phi$ ,  $\tau$ ,  $g$ ,  $m$ ,  $m_E$ ,  $L$  et  $k$  sont définis comme dans le système (3.49)–(3.50) et  $\eta$  est le déplacement longitudinal de la poutre,  $h$  est l'épaisseur de la poutre et  $\rho$  est la densité.

## Poutre d'Euler-Bernoulli

Une poutre est un solide engendré par une surface plane  $S$ , constante ou non, dont le centre de gravité  $G$  décrit le segment  $G_0G_E$ , le plan qui contient  $S$  restant normal à  $G_0G_E$ . De plus, les dimensions de  $S$  sont faibles (sans être négligeables) par rapport à  $G_0G_E$  (voir la figure ci-dessous) telles que :

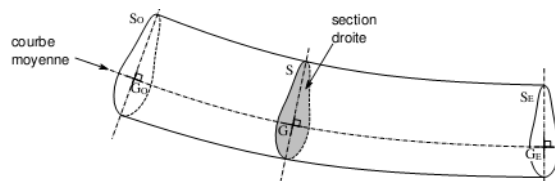


FIGURE A.1 – Modèle d'une poutre

L'ensemble des centres de gravité des sections droites est une courbe continue et différentiable, appelée "moyenne" ; son rayon de courbure est grand par rapport à sa longueur.

Les sections droites sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles "varient de manière continue et lente".

La racine carrée de la surface des sections droites est petite par rapport à la longueur de la courbe moyenne.

Le matériau est homogène et isotrope.

---

### **Modèle d'une poutre de type Bernoulli**

Pour une poutre de type Bernoulli nous adopterons les hypothèses suivantes :

Au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne, cette hypothèse permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion.

Les sections droites restent planes selon Navier-Bernoulli.

# Bibliographie

- [1] K.T. Andrews and M. Shillor, *Vibrations of a beam with a damping tip body*. Math. Comput. Model., **35** :1033–1042, 2002.
- [2] M. Aassila, M.M. Cavalcanti and J. A. Soriano, *Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain*. SIAM J. Control Optim. **38**(5) :1581–1602, 2000.
- [3] M. Aassila, M.M. Cavalcanti and V.N. Domingos Cavalcanti, *Existence and uniform decay of the wave equation with nonlinear boundary damping and boundary memory source term*. Calc. Var. Partial. Differ. Equ., **15**(2) :155-180, 2002.
- [4] R. A. Adams and J. F. Fourier, *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003.
- [5] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J.E. Muñoz Rivera and R. Racke, *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*. J. Diff. Equ., **194** :82-115, 2003.
- [6] F.D. Araruna , P. Braze Silva and E. Zuazua, *Asymptotic limits and stabilization for the 1D nonlinear Mindlin-Timoshenko system*. J. Sys Sci Complex, **23** ;1–17, 2010.
- [7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, 1987.
- [8] A. Berkani, N.-e. Tatar and A. Khemmoudj, *Control of a viscoelastic translational Euler-Bernoulli beam*. Math. Methods Appl. Sci., **40**(1) :237–254, 2016.
- [9] A. Berkani, N.-e. Tatar and A. Kelleche, *Vibration control of a viscoelastic translational Euler-Bernoulli beam*. J. Dyn. Control Syst., DOI :10.1007/s10883-017-9364-9, 2017.

## Bibliographie

---

- [10] R. Barreto, E.C. Lapa and J.E. Munoz Rivera, *Decay rates for viscoelastic plates with memory*. J. Elasticity, **44**(1) :61–87, 1996.
- [11] H. T. Banks and D. J. Inman, *On damping mechanisms in beam*. NASA Contractor Report 181904, ICASE Report No. 89–64, 1989.
- [12] D. R. Bland, *The Theory of Linear Viscoelastic*. Pergamon Press : Oxford, 1960.
- [13] R.M. Christensen, *Theory of viscoelasticity : An introduction*. Academic Press, New York/London 1982.
- [14] G. Chen, M.C. Delfour, A.M. Gall and G. Payre, *Modelling, stabilization and control of serially connected beams*. SIAM J. Contr. Optimiz., **25**(3) :526–546, 1987.
- [15] B.D. Coleman and W. Noll, *Foundations of linear viscoelasticity*. Rev. Modern Phys., **33**(2) :239-249, 1961.
- [16] F. Conrad and Ö. Morgül, *On the stabilization of a flexible beam with a tip mass*. SIAM J. Control Optim., **36**(6) :1962–1986, 1998.
- [17] H. Canbolat, D. Dawson, C. Rahn and P. Vedagarbha, *Boundary control of a cantilevered flexible beam with point-mass dynamics at the free end*. Mechatronics, **8** :163–186, 1998.
- [18] W. Clarence de Silva, *Vibration damping, control, and design*. CRC Press Taylor and Francis Group, Boca Raton London New York, 2007.
- [19] M.M. Cavalcanti, *Existence and uniform decay for the Euler-Bernoulli viscoelastic equation with nonlocal boundary dissipation*. Discrete Contin. Dyn. Syst., **8**(3) :675–695, 2002.
- [20] M.M. Cavalcanti , V.N. Domingos Cavalcanti and J. Ferreira, *Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping*. Math. Meth. Appl. Sci., **24** :1043–1053, 2001.
- [21] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.S. Prates Filho and J.A. Soriano, *Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping*. Diff. Integral Equ., **14** : 85–116, 2001.

## Bibliographie

---

- [22] M.M. Cavalcanti and H.P. Oquendo, *Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation*. SIAM J. Control Optim., **42**(4) :1310–1324, 2003.
- [23] S. Chen, K. Liu and Z. Liu, *Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin-Voigt damping*. J. Appl. Math., **59** :651–668, 1998.
- [24] G. Chen and D.L. Russell. *A mathematical model for linear elastic systems with structure damping*. Quart. Appl. Math., **39** :433–454, 1982.
- [25] M.S. de Querioz, D.M. Dawson, S.P. Nagarkatti and F. Zhang, *Lyapunov-based control of mechanical system*. Birkhäuser, Boston 2000.
- [26] M.S. de Querioz, D.M. Dawson, M. Agrawal and F. Zhang, *Adaptive nonlinear boundary control of a flexible link robot arm*. IEEE Trans. Robot. Autom., **15** :779–787, 1999.
- [27] M.S. de Querioz, D. M. Dawson, M. Agrawal and F. Zhang, *Adaptive Nonlinear Boundary Control of a Flexible Link Robot Arm*. IEEE Trans. Rob. Autom., **15**(4) :779–787, 1999.
- [28] M. Dadfarnia, N. Jalili, B. Xian and D.M. Dawson, *Lyapunov-based piezoelectric control of flexible cartesian robot manipulators*. Proceedings of the American Control Conference Denver, Colorado June 4-6., **6** :5227–5232, 2003.
- [29] M. Dadfarnia, N. Jalili, Z. Liu and D.M. Dawson, *An observer-based piezoelectric control of flexible cartesian robot arms : theory and experiment*. Control Eng. Pract., **12** :1041–1053, 2004.
- [30] M. Dadfarnia, N. Jalili, B. Xian and D.M. Dawson, *A Lyapunov-based piezoelectric controller for flexible cartesian robot manipulators*. J. Dyn. Syst. Meas. Control., **126**(2) :347–358, 2004.
- [31] M. Dadfarnia, N. Jalili, B. Xian and D.M. Dawson, *Lyapunov based vibration control of translational Euler–Bernoulli beams using the stabilizing effect of beam damping mechanisms*. J. Vib. Control., **10** :933–961, 2004.
- [32] K. David Young, *Variable structure control for robotics and aerospace applications*. Elsevier Science Publishers, B.V. 1993.

## Bibliographie

---

- [33] A. Djebabla and N.-e. Tatar, *Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermal effect with an oscillating kernel*. Math. Comp. Model. Dyn., **54**(1) :301-314, 2010.
- [34] A. Djebabla and N.-e. Tatar, *Stabilization of the Timoshenko beam by thermal effect*. Med. J. M., **7**(3) :373–385, 2010.
- [35] A. Djebabla and N.-e. Tatar, *Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermo-viscoelastic damping*. J. Dyn. Control Syst., **16** :189–210, 2010.
- [36] C.M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity*. Arch. Ration. Mech. Anal., **37** :97–308, 1970.
- [37] C.M. Dafermos, *On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity*. J. Diff Equ., **7** :554–569, 1970.
- [38] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [39] M. Fabrizio and A. Morro, *Mathematical problems in linear viscoelasticity*. SIAM Stud. Appl. Math. Philadelphia 1992.
- [40] D. Feng, D. Shi and W. Zhang, *Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation*. Science in China (Series A), **41** :481–490, 1998.
- [41] B.Z. Guo and Q. Song, *Tracking control of a flexible beam by nonlinear boundary feedback*. J. Appl. Math. Stochastic Anal. **8** (1) :47–58, 1995.
- [42] G. Ghen, *Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain*. J. Math. Pures. Appl., **58** :249–273, 1979.
- [43] S.S. Ge, T.H. Lee and G. Zhu, *Energy-based robust controller design for multi-link flexible robots*. Mechatronics. 1996 ;**6** :779–798.
- [44] S.S. Ge, T.H. Lee and G. Zhu, *A nonlinear feedback controller for a single-link flexible manipulator based on a finite element model*. J. Robot. Syst., **14** :165–178, 1997.
- [45] S.S. Ge, T.H. Lee and G. Zhu, *Asymptotically stable end-point regulation of a flexible SCARA/Cartesian robot*. IEEE/ASME Trans. Mechatronics, **3**(2) :138–144, 1998.

## Bibliographie

---

- [46] S.S. Ge, T.H. Lee and J.Q. Gong, *A robust distributed controller of a single-link SCARA/Cartesian smart materials robot*. Mechatronics, **9** :65–93, 1999.
- [47] F. Guo and F. Huang, *Boundary feedback stabilization of the undamped Euler–Bernoulli beam with both ends free*. SIAM J. Control Optim., **43**(1) :341–356, 2004.
- [48] B.Z. Guo and W. Guo, *Adaptive stabilization for a Kirchhoff-type nonlinear beam under boundary output feedback control*. Nonlinear Anal., **66** :427–441, 2007.
- [49] B.Z. Guo *Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients*. J. Control Optim., **40**, 1905–1923, 2002.
- [50] B.Z. Guo and W. Guo, *Stabilization and parameter estimation for an Euler-Bernoulli beam equation with uncertain harmonic disturbance under boundary output feedback control*. Nonl. Anal. **61** ;671–693.2005
- [51] N Jalili and N. Olgac, *Time-Optimal/Sliding Mode Control Implementation for Robust Tracking of Uncertain Flexible Structures*. Mechatronics, **8**(2) ;121–142, 1998.
- [52] N. Jalili, *An Infinite Dimensional Distributed Base Controller for Regulation of Flexible Robot Arms*. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control., **123**(4) :712–719, 2001.
- [53] N. Jalili, M. Dadfarnia, F. Hong and S.S. Ge, *Adaptive non model-based piezoelectric control of flexible beams with translational base*. Proceedings of the American Control Conference Anchorage, AK May 8-1, **5** :3802–3807, 2002.
- [54] S. Jean, *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Édition de l'école Polytechnique, Paris, 2001.
- [55] A.M. Krall, *Asymptotic Stability of the Euler-Bernoulli beam with boundary control*. J. Math. Anal. Appl., **137** :288-295, 1989.
- [56] Y.H. Kang, J.Y. Park and J.A. Kim, *A memory type boundary stabilization for an Euler-Bernoulli beam under boundary output feedback control*. J. Korean Math. Soc., **49**(5) :947–964, 2012.
- [57] J.U. Kim, *Exponential decay of the energy of a one-dimensional nonhomogeneous medium*. J. Control Optim., **29** :368–380, 1991.

## Bibliographie

---

- [58] J.U. Kim and Y. Renardy, *Boundary control of the Timoshenko beam*. SIAM J. Control Optim., **25** :1417–1429, 1987.
- [59] A. Kelleche, N.-e. Tatar and A. Khemmoudj, *Uniform stabilization of an axially moving Kirchoff string by a boundary control of memory type*, J. Dyn. Control Sys. Doi : 10.1007/s10883-016-9310-2, 2016.
- [60] Lakes and S. Roderic, *Viscoelastic materials*. Cambridge University Press. 2009.
- [61] J. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol.1 et 2. Paris 1968.
- [62] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. second Edition, Dunod, Paris 2002.
- [63] B. Lazzari and R. Nibbi, *On the exponential decay of the Euler-Bernoulli beam with boundary energy dissipation*. J. Math. Anal. Appl., **389** :1078–1085, 2012.
- [64] I. Lasiecka, S.A. Messaoudi and M.I. Mustafa, *Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory*. J. Math. Phys., **54**, 031504, 2013.
- [65] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press : Cambridge, 2002.
- [66] Z.H. Luo, N. Kitamura and B.Z. Guo, *Shear force feedback control of flexible robot arms*. IEEE Trans. Robot. Autom., **11** :760–765, 1995.
- [67] Z.H. Luo and B.Z. Guo, *Shear force feedback control of a single-link flexible robot with a revolute joint*. IEEE Trans. Autom. Control., **42** :53–65, 1997.
- [68] S. Li , Y. Wang and Z. Liang, *Stabilization of vibrating beam with a tip mass controlled by combined feedback forces*. J. Math. Anal. Appl., **256** :13–38, 2001.
- [69] Ö. Morgül, *Dynamic boundary control of a Euler-Bernoulli beam*. IEEE Trans. Autom. Control., **37**(5) :639–642, 1992.
- [70] Ö. Morgül, *Dynamic boundary control of the Timochenko beam*. Automatica, **28** :1255–1260, 1992.

## Bibliographie

---

- [71] S. A. Messaoudi, *General decay of solutions of a viscoelastic equation*. J. Math. Anal. Appl., **341** :1457–1467, 2008.
- [72] S. A. Messaoudi and N.-e. Tatar, *Exponential decay for a quasilinear viscoelastic equation*. Math. Nachr., **282** :1443–1450, 2009.
- [73] S. A. Messaoudi and M.I. Mustafa, *A stability result in a memory-type Timoshenko system*. Dynam. Systems Appl., **18** :457–468, 2009.
- [74] S.A. Messaoudi and M.I. Mustafa, *A general stability result in a memory-type Timoshenko system*. Comm. Pure. Appl. Anal. **12** :957–972,2013.
- [75] J.E. Munoz Rivera and F.P. Quispe Gomez, *Existence and decay in non linear viscoelasticity*. Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric., **6-B** :1–37, 2003.
- [76] D.B. Mciver, *Hamilton's principle for systems of changing mass*. J. Eng. Math. **7**(3) :249–261, 1973.
- [77] P.J. Nathan and S.N. Singh, *Variable structure control of a robotic arm with flexible links*. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, **2** :882-887, 1989.
- [78] B. Nakra, *Vibration control in machines and structures using viscoelastic damping*. J. S. V. **211**(3) :449–465, 1998.
- [79] J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*. Birkhäuser Basel 1993.
- [80] J.Y. Park and J.A. Kim, *Existence and uniform decay for Euler-Bernoulli beam equation with memory term*. Math. Meth. Appl. Sci., **27** :1629–1640, 2004.
- [81] J.Y. Park, Y.H. Kang, J.A. Kim, *Existence and exponential stability for a Euler-Bernoulli beam equation with memory and boundary output feedback control term*. Acta Appl. Math., **104** :287–301, 2008.
- [82] V. Pata, *Exponential stability in linear viscoelasticity*. Quart. Appl. Math., **LXIV** :499–513, 2006.
- [83] J. É Rakotoson and J.M. Rakotoson, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*. Presses Universitaire de France, 1999.

## Bibliographie

---

- [84] M. Rao, *Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes*. J. S. V. **262** :457–474, 2003.
- [85] D.H. Shi, S.H. Hou and D.X. Feng, *Feedback stabilization of a Timoshenko beam with an end mass*. Int. J. Control, **69** :285–300, 1998.
- [86] S.B. Skaar and D. Tucker, *Point Control of a one-link flexible manipulator*. J. Appl. Mech., **53** :23–27, 1986.
- [87] S. Timoshenko, *Vibration problems in engineering*, Van Norstrand, New York, 1955.
- [88] N.-e. Tatar, *On a perturbed kernel in viscoelasticity*. Appl. Math. Lett., **24** :766–770, 2011.
- [89] N.-e. Tatar, *Viscoelastic Timoshenko beams with occasionally constant relaxation functions*, Appl. Math. Optim. **66** :123–145, 2012.
- [90] N.-e. Tatar, *Stabilization of a viscoelastic Timoshenko beam*, Appl. Anal. Int J., **92** :27–43, 2013.
- [91] N.-e. Tatar, *Exponential decay for a viscoelastically damped Timoshenko beam*, Acta Math. Sci., **33** :505–524, 2013.
- [92] N.-e. Tatar, *Arbitrary decays in viscoelasticity*. J. Math. Physics., **52** :013502, 2011.
- [93] N.-e. Tatar, *A new class of kernels leading to an arbitrary decay in viscoelasticity*. Mediter. J. Math., **10** :213–226, 2013.
- [94] N.-e. Tatar, *Polynomial stability without polynomial decay of the relaxation function*. Math. Meth. Appl. Sci., **31**(15) :1874–86. 2008.
- [95] N.-e. Tatar, *How far can relaxation functions be increasing in viscoelastic problems*. Appl Math Lett., **22**(3) :336–40, 2009.
- [96] N.-e. Tatar, *Oscillating kernels and arbitrary decays in viscoelasticity*. Math. Nachr., **285** :1130–1143, 2012.
- [97] G.Q. Xu, D.X. Feng and S.P. Yung, *Riesz basis property of generalized eigenvector system of a Timoshenko beam*. IMA J. Math. Control Infor., **21** :65–83, 2004.

## Bibliographie

---

- [98] G.Q. Xu, *Boundary feedback exponential stabilization of a Timoshenko beam with both ends free*. Int. J. Control, ;78 :286–297, 2005.
- [99] Q.-X. Yan, S.H. Hou and S.H. Feng, *Asymptotic behaviour of Timoshenko beam with dissipative boundary feedback*. J. Math. Anal., **269** :556–577, 2002.
- [100] J. Yuh, *Application of discrete time model reference adaptive Control to a flexible single link robot*. J. Rob. Syst., **4** :621–630, 1987.
- [101] Q. Yan, S. Hou and L. Zhang, *Stabilization of Euler-Bernoulli beam with a nonlinear locally distributed feedback control*. J. Syst. Sci. Complex., **24** :1100–1109, 2011.
- [102] G. Zhu, S.S. Ge and T.H. Lee, *Variable structure regulation of a flexible arm with a translational base*. Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control San Diego, California USA, **2** :1361–1366, 1997.