

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
(ALGER)
FACULTE DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR

en : **MATHÉMATIQUES**

Spécialité : **RECHERCHE OPÉRATIONNELLE**

Par : **BEKKAI Siham**

Thème :

COUVERTURES PAR CYCLES

ET

FACTEURS DE GRAPHS

Soutenue publiquement le 10 mai 2010, devant le jury composé de :

M. AIT HADDADENE Hacene	Professeur à l'USTHB	Président
M ^{me} KOUIDER Mekkia	Maître de Conférences Habilitée à l'Université Paris-Sud, Centre d'Orsay (France)	Directrice de Thèse
M. AIDER Meziane	Professeur à l'USTHB	Examineur
M ^{me} BOUCHEMAKH Isma	Professeur à l'USTHB	Examinatrice
M. CHELLALI Mustapha	Maître de Conférences Classe/ A à l'USD Blida	Examineur
M ^{me} FAVARON Odile	Maître de Conférences Habilitée à l'Université Paris-Sud, Centre d'Orsay (France)	Examinatrice

A ma famille

Remerciements

Mes vifs remerciements s'adressent tout d'abord à Mekkia KOUIDER, ma directrice de thèse, qui m'a initiée aux problèmes de cycles et de facteurs, un domaine passionnant de la théorie des graphes. Sa disponibilité et sa rigueur m'ont été précieuses au cours de ces années de thèse.

Je remercie également et bien vivement Hacene AIT HADDADENE pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury de thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Meziane AIDER et Isma BOUCHEMAKH pour leurs conseils et leurs encouragements durant ces années de thèse. Je les remercie aussi pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de l'examiner.

J'adresse mes sincères remerciements à Odile FAVARON pour sa lecture attentive qui a permis d'améliorer la clarté de ce manuscrit. Ses commentaires judicieux m'ont été très profitables. Je la remercie d'office aussi pour sa disponibilité bien avant que je ne commence cette thèse.

Je remercie vivement Mustapha CHELLALI, pour l'attention particulière qu'il a porté à mon travail, notamment en acceptant de faire partie de mon jury de thèse.

Je souhaite aussi remercier, pour leur soutien, mes amies de la faculté de mathématiques : Djamila, Kahina, Meriem,... ou d'ailleurs : Ikram, Rosa, Hinda,...et tous ceux que j'oublie.

Je joins également à ces remerciements les membres de l'équipe GrafComb du LRI (Université Paris-Sud XI) qui m'ont accueillie durant une année. Je pense particulièrement à David FORGE avec lequel travailler fut constructif.

Je ne pourrais terminer sans remercier de tout coeur ceux qui ont, sans doute, le plus de mérite : mes parents, mes grands-parents, mes soeurs : Isma, Wiem, Cheyma, Imane et mon frère Adel, mais aussi mes tantes et oncles. Je leur exprime à tous ma reconnaissance pour leur soutien sans faille.

Table des matières

Introduction Générale	9
1 Préliminaires	13
1.1 Définitions de base	13
1.2 Connectivité	16
1.3 Toughness	17
1.4 Quelques familles de graphes	18
1.5 Quelques opérations sur les graphes	19
1.6 Facteurs	20
1.7 Complexité algorithmique	20
I Couvertures par Cycles et Pseudo 2-Facteurs	23
2 Couverture des sommets par des cycles	25
2.1 Introduction	25
2.2 Placements et couvertures	26
2.2.1 Placement de k cycles dans un graphe	26
2.2.2 Existence d'une couverture des sommets de G par des cycles disjoints	29
2.2.3 Existence de cycles disjoints de longueurs fixées	32
2.2.4 Existence de cycles contenant des éléments particuliers d'un graphe	33
2.2.5 Couverture des sommets d'un graphe par des cycles	35
2.2.6 Couvrir les sommets d'un graphe par de petits cycles	36
2.3 Couverture des sommets par des cycles de longueur bornée	37
3 Pseudo 2-facteurs	45
3.1 Introduction	45

3.2	Une brève revue sur les facteurs	45
3.2.1	Existence de facteurs réguliers	47
3.2.2	Existence de (g, f) -facteurs	50
3.2.3	Existence de facteurs de parité fixée	53
3.2.4	Existence de $\{G_1, \dots, G_k\}$ -facteurs	55
3.3	Pseudo 2-Facteurs	57
3.3.1	Une revue sur les pseudo 2-facteurs	57
3.3.2	Degré Minimum, Stabilité et Pseudo 2-Facteurs	60
 II Distance Moyenne et Maille		73
4	Distance moyenne et maille	75
4.1	Introduction	75
4.2	Un état de l'art sur la distance moyenne	76
4.2.1	Distance moyenne, ordre, taille, degré minimum et diamètre	76
4.2.2	Distance moyenne, nombre de stabilité, nombre chromatique et nombre de domination	78
4.2.3	Distance moyenne et connexité	80
4.2.4	Effet de la suppression d'un élément sur la distance moyenne	81
4.2.5	Distance moyenne et matrices représentatives d'un graphe	81
4.2.6	Distance moyenne et arbres couvrants dans un graphe	82
4.2.7	Existence d'un graphe de distance moyenne donnée	83
4.2.8	Distance moyenne dans les graphes pondérés	83
4.2.9	Distance moyenne dans les graphes orientés	83
4.3	Distance moyenne et maille	85
4.3.1	Borne supérieure de la distance moyenne en fonction de la maille	87
4.3.2	Borne inférieure de la distance moyenne en fonction de la maille	90
 III Conclusion et Perspectives		97
	Bibliographie	101

Table des figures

1.1	Exemples de sous-graphes de G	14
1.2	Exemple d'ensemble d'articulation et de déconnectant	16
1.3	De gauche à droite : un graphe G avec ses points d'articulation et sa décomposition en blocs	17
1.4	Les graphes complets K_3 , K_4 et K_5	18
1.5	Le graphe $K_{2,3}$ et l'étoile $K_{1,n-1}$	19
1.6	G et son graphe représentatif des arêtes	19
1.7	$K_3 \cup P_3$ et $K_3 + P_3$	20
2.1	Les graphes Z_4 , $B(4, 1)$ et $N(3, 1, 1)$	30
3.1	Hierarchie de quelques graphes partiels	52
3.2	Le plus petit soleil qui n'est pas K_1 ni K_2	56
3.3	Un pseudo 2-facteur dans le graphe $H + 4K_2$, où $H = \{u, v\}$	61
3.4	Un pseudo 2-facteur dans un graphe avec des sommets pendants	61
4.1	Des 2-chaînes P dans l'arbre T_i ($i = 1, 2$)	92

Introduction Générale

Il est difficile d'enfermer la théorie des graphes dans un seul catalogue restreint, tant la variété des disciplines auxquelles elle touche est grande. Cependant, elle est depuis plusieurs décennies une discipline florissante, souvent considérée comme une branche des mathématiques discrètes. Sa croissance est due dans une large mesure à son rôle essentiel dans les sciences appliquées. L'informatique et l'optimisation combinatoire, en particulier, ont tiré profit et contribué au développement de la théorie des graphes. Néanmoins, les liens entre la théorie des graphes et d'autres branches des mathématiques sont de plus en plus forts et des méthodes de la théorie des graphes sont de plus en plus employées dans d'autres domaines des mathématiques. Les relations entre la théorie des graphes et la géométrie (geometric graph theory, metric graph theory), les probabilités (random graph theory) ou encore l'algèbre (spectral graph theory) ne sont plus à exposer.

D'autre part, dans le monde dans lequel nous vivons et où la communication est de première importance, les graphes sont devenus un outil indispensable pour la modélisation, la conception et l'analyse des réseaux. Pour qu'un réseau garantisse une transmission rapide, facile et fiable, il faut que sa conception obéisse à certaines règles. C'est là, entre autres, que la *distance moyenne* intervient. Son étude permet de mieux comprendre le fonctionnement des réseaux et de mieux prévoir leur comportement en cas de défaillance (par exemple lorsqu'un lien est rompu).

Un des domaines les plus étudiés en théorie des graphes, traite de questions concernant les *cycles* (le problème hamiltonien en est un exemple). Un autre problème central de recherche en théorie des graphes est celui de l'existence de *facteurs*. Les résultats concernant ce problème sont souvent influencés par des résultats ou des questions sur les cycles. L'étude de l'un peut d'ailleurs donner des idées pour l'étude de l'autre et les deux sont connus pour être des problèmes difficiles en théorie des graphes.

* * *

Cette thèse est centrée sur trois concepts fondamentaux de la théorie des graphes : les cycles, les facteurs et la distance moyenne. Elle est organisée en trois parties et quatre chapitres.

Dans le Chapitre 1, des rappels sur quelques notions avancées en théorie des graphes sont donnés.

Au début des Chapitres 2 à 4, nous citerons les résultats qui nous ont semblé les plus marquants, notamment parmi les plus récents concernant respectivement :

- Les couvertures par cycles ;
- Les facteurs puis les pseudo 2-facteurs et
- La distance moyenne.

Les Chapitres 2 et 3 étudient deux notions étroitement liées : les couvertures par cycles et les pseudo 2-facteurs respectivement.

Ces deux notions sont des généralisations des 2-facteurs, concept très étudié en théorie des graphes, notamment à cause de son lien avec le problème hamiltonien. En effet, un cycle hamiltonien n'est autre qu'un 2-facteur connexe.

Une couverture des sommets d'un graphe par des cycles est une famille de cycles élémentaires telle que tout sommet du graphe appartient à au moins un cycle de cette famille. Clairement si les cycles de cette famille sont deux à deux sommet-disjoints, alors cette couverture n'est autre qu'un 2-facteur.

D'autre part, un pseudo 2-facteur est une famille de cycles élémentaires, sommets ou arêtes tels que tout sommet du graphe appartient à exactement une composante de cette famille. Un pseudo 2-facteur ne contenant que des cycles est un 2-facteur.

Nous commencerons le Chapitre 2 par faire le point sur les résultats de la littérature ayant trait au problème d'existence de cycles dans un graphe (en particulier le problème de couverture par cycles). Nous présenterons ensuite notre travail, dédié aux couvertures par des cycles de longueur bornée. Nous avons étudié :

“Le nombre minimum, $c_k(G)$, de cycles de longueur au plus k nécessaires pour couvrir tous les sommets d'un graphe G ”, où k est un entier fixé au préalable. Nous avons borné ce nombre par une fonction de l'ordre de G et de sa stabilité. Ce travail est publié dans [16].

Le Chapitre 3 est consacré aux pseudo 2-facteurs. Comme souligné plus haut, cette notion est une généralisation des 2-facteurs. D'ailleurs le point de départ des travaux exposés dans ce chapitre a été un résultat sur les facteurs. C'est pour cela que nous avons choisi de commencer le Chapitre 3 par une brève revue de la littérature sur les facteurs. Cette revue n'a pas la prétention d'être exhaustive dans un domaine où les surveys ne

manquent pas.

Nous présenterons ensuite un état de l'art sur les pseudo 2-facteurs, appelés parfois dans la littérature : partition en cycles, arêtes et sommets. Dans nos travaux, nous avons étudié :

“Le nombre de composantes qui sont des arêtes ou des sommets dans un pseudo 2-facteur d'un graphe G ”. Nous avons proposé une borne au nombre de ces composantes en fonction du degré minimum et de la stabilité du graphe G . Ce travail est publié dans [17] et la borne obtenue est la meilleure possible.

Le dernier chapitre qui commence, à l'instar des autres chapitres, par un tour d'horizon sur la distance moyenne dans un graphe, étudie la relation entre la distance moyenne et la maille d'un graphe (longueur d'un plus petit cycle). Curieusement, aucun résultat dans la littérature n'avait étudié la relation entre ces deux paramètres. Nos travaux ont été inspirés par deux conjectures proposant des bornes au produit et au rapport de la distance moyenne par la maille d'un graphe. Les résultats exposés dans le Chapitre 4 proposent des bornes atteintes meilleures que celles conjecturées ; lesdits résultats sont en révision dans [18].

Nous terminerons ce manuscrit par une conclusion et perspectives de ces travaux.

Chapitre 1

Préliminaires

A la fin de ce document est placée une liste des notations communes aux deux premières parties de cette thèse. Ces notations et les notions associées sont standards et peuvent presque toutes être retrouvées dans [24] ou [19]. Nous rappelons ces notions dans ce chapitre et nous présentons la plupart des classes de graphes dont nous parlerons. Nous nous attarderons sur des notions avancées, comme la k -connectivité ou la toughness. Nous ferons aussi un bref rappel sur la théorie de la complexité. Les définitions des notions plus complexes de couvertures par cycles, pseudo 2-facteurs et distance moyenne, propres aux chapitres 2, 3 et 4 respectivement et indispensables à la compréhension des travaux y présentés, seront données dans lesdits chapitres. Seule la notion de facteur, commune aux deux chapitres de la partie I de cette thèse, est rappelée à la fin de ce chapitre. Certains concepts n'apparaissant qu'occasionnellement seront définis au moment où ils interviendront.

1.1 Définitions de base

Grphe Un *graphe* G est défini par un ensemble de *sommets*, noté $V(G)$, et un ensemble d'*arêtes*, noté $E(G)$, ou simplement V et E si le contexte est clair. Le nombre de sommets de G , appelé l'*ordre* du graphe G , est souvent noté $|G|$ et le nombre de ses arêtes est appelé la *taille* de G . Une arête joignant deux sommets $x, y \in V$ est notée (x, y) (ou encore xy). x et y sont les *extrémités* de l'arête (x, y) .

Nous ne considérons dans toute la suite que des graphes finis (i.e d'ordre fini), non orientés et simples (i.e sans boucle et sans arête multiple).

Un graphe *trivial* est un graphe avec un seul sommet, tous les autres graphes sont dits

nontriviaux.

Le *complémentaire* d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe \overline{G} dont l'ensemble des sommets est V et dans lequel deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si ils ne le sont pas dans G .

Deux graphes G_1 et G_2 sont dits *sommet-disjoints* si $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Dans ce manuscrit, sauf mention contraire, disjoint voudra dire sommet-disjoint.

Voisinage Deux sommets adjacents x et y sont dits *voisins*. Le *voisinage* d'un sommet x de G , noté $N_G(x)$ est l'ensemble des voisins de x dans G .

Degré Le *degré* d'un sommets x dans G , noté $d_G(x)$, est le nombre de voisins de x ($d_G(x) = |N_G(x)|$). Un sommet de degré 1 est appelé *sommet pendant* ou encore *feuille* lorsque le graphe est un arbre. Un *sommet isolé* est un sommet de degré 0. Le *degré minimum* d'un graphe G , noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets. Le *degré maximum* d'un graphe G , noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets.

Un graphe est dit *régulier* lorsque tous ses sommets sont de même degré. Plus précisément, il est dit k -régulier si $d_G(x) = k$ pour tout $x \in V$.

Sous-graphe/Graphe partiel Un graphe H est un *sous-graphe partiel* (ou plus simplement un *sous-graphe*) de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ et toutes les arêtes de $E(H)$ ont leurs extrémités dans $V(H)$.

Si toutes les arêtes de $E(G)$ ayant leurs deux extrémités dans $V(H)$ sont également dans $E(H)$, alors le graphe H est le sous-graphe de G *induit* par $V(H)$.

Si un sous-graphe H est tel que $V(H) = V(G)$, alors H est dit *graphe partiel* de G . Des exemples de sous-graphes d'un graphe G sont illustrés par la Figure 1.1.

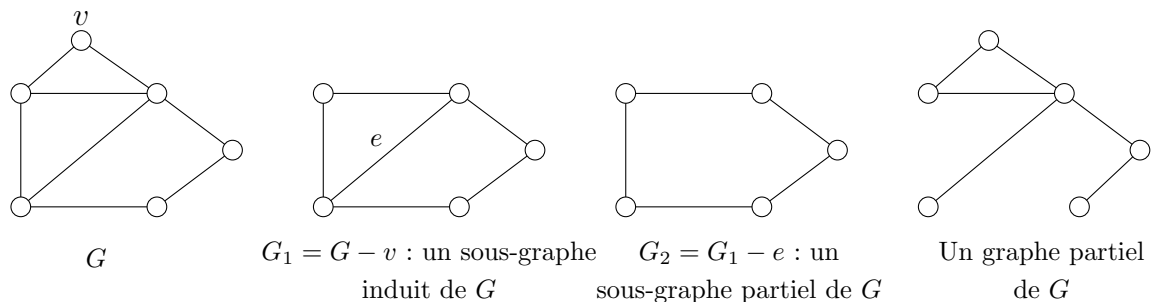


FIGURE 1.1 – Exemples de sous-graphes de G

Si S est un sous-ensemble de $V(G)$, le graphe obtenu après la suppression de S est noté $G - S$. De même, si F est un sous-ensemble de $E(G)$, le graphe obtenu après

suppression des arêtes de F est noté $G - F$ (notons dans ce cas que la suppression des arêtes de F n'implique pas la suppression de leurs extrémités).

Pour alléger les notations, lorsque H est un sous-graphe de G , nous noterons $G - H$ le sous-graphe induit par $V(G) - V(H)$.

Chaînes/Cycles Soit $P = x_0x_1 \dots x_k$ une chaîne, alors les sommets x_0 et x_k sont les *extrémités* de P et x_1, \dots, x_{k-1} sont ses *sommets internes*. La chaîne élémentaire d'ordre n est notée P_n et le cycle élémentaire d'ordre n est noté C_n . Le cycle C_3 est appelé *triangle*, C_4 est appelé *quadrilatéral*, C_5 est un *pentagone*,...etc. La *longueur* d'une chaîne P (respectivement d'un cycle C) notée $l(P)$ (respectivement $l(C)$) est le nombre de ses arêtes. Suivant la parité de $l(C)$ un cycle C est dit pair ou impair. Un graphe G est dit *hamiltonien* s'il possède un cycle hamiltonien (un cycle qui passe par tous les sommets de G une et une seule fois).

Dans ce manuscrit, le terme chaîne (respectivement cycle) sous-entendra chaîne élémentaire (respectivement cycle élémentaire).

Graphes connexes/ Composantes connexes Un graphe est dit *connexe* si toute paire de sommets distincts est reliée par une chaîne. Si le graphe n'est pas connexe alors une *composante connexe* est un sous-graphe connexe maximal (par rapport au nombre de sommets) de G . Nous noterons $\omega(G)$ le nombre de composantes connexes du graphe G .

Distance La *distance* entre deux sommets x et y de G est la longueur d'une plus courte chaîne reliant x et y . Elle est notée $d_G(x, y)$. S'il n'existe pas de chaîne entre x et y , c'est-à-dire que x et y sont dans deux composantes connexes différentes alors la distance entre eux est infinie. Le *diamètre* d'un graphe G , noté $D(G)$ (ou simplement D), est la plus grande distance entre deux sommets quelconques (en d'autres termes, c'est la valeur maximum de $d_G(x, y)$ parmi toutes les paires de sommets (x, y) de V).

Couplage Un *couplage* dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un couplage M est dit *parfait*, si tout sommet de G est incident à une arête de M .

Stabilité Un *stable* ou un *ensemble indépendant* d'un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. La *stabilité* (ou *le nombre de stabilité*) du graphe G , notée $\alpha(G)$, est le cardinal d'un plus grand stable dans G .

Pour un entier positif k , $k \leq \alpha(G)$, $\sigma_k(G)$ est utilisé pour noter le minimum parmi les sommes des degrés de k sommets indépendants dans G ,

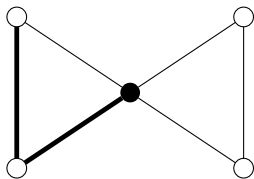
$\sigma_k(G) = \min\{\sum_{x \in S} d_G(x) \mid S \text{ est un stable et } |S| = k\}$.

Si $k > \alpha$ alors $\sigma_k(G)$ est infini.

1.2 Connectivité

Il y a des graphes connexes pour lesquels la suppression d'un sommet suffit pour les déconnecter, pour d'autres il faut en enlever plusieurs. Ceci montre que les graphes connexes le sont à des degrés différents, c'est la sommet-connectivité (ou l'arête-connectivité) qui mesure à quel point un graphe est connexe.

Ensemble d'articulation/ Déconnectant Un sous-ensemble de sommets S de G est un *ensemble d'articulation* de G si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes de G (c'est-à-dire $G - S$ contient plus de composantes connexes que G). Si un ensemble d'articulation est réduit à un seul sommet s alors s est dit *point d'articulation*. Par analogie, un sous-ensemble F de $E(G)$ est un *déconnectant* si $G - F$ contient plus de composantes connexes que G . Si un déconnectant ne contient qu'une seule arête alors cette dernière est appelée *isthme*.



Un point d'articulation (sommets pleins)
et un déconnectant (arêtes en gras)

FIGURE 1.2 – Exemple d'ensemble d'articulation et de déconnectant

Graphes k -connexes Un graphe est *k -connexe* si le nombre minimum de sommets dont l'élimination rend G non connexe ou le réduit à un sommet unique est au moins k . La sommet-connectivité ou simplement *connectivité* d'un graphe G , notée $\kappa(G)$, est la valeur maximum de k telle que G est k -connexe (en d'autres termes, c'est le nombre minimum de sommets dont la suppression déconnecte G ou le réduit à un sommet unique). Par convention, un graphe trivial est 0-connexe et 1-connexe mais n'est pas k -connexe pour $k \geq 2$.

Bloc Un graphe connexe sans point d'articulation est appelé *bloc*. Tout bloc avec au moins 3 sommets est 2-connexe. Un bloc d'un graphe G est un sous-graphe induit de G qui est un bloc et qui est maximal pour cette propriété. Tout graphe est l'union de ses blocs. Deux blocs quelconque d'un graphe ont au plus un sommet en commun.

On appelle bloc *extremal* un bloc qui contient au plus un point d'articulation.

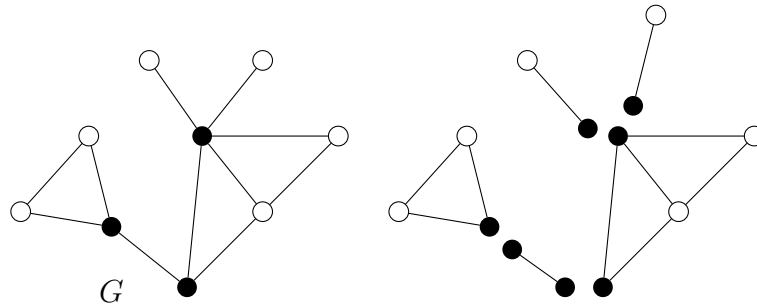


FIGURE 1.3 – De gauche à droite : un graphe G avec ses points d'articulation et sa décomposition en blocs

Par analogie à la connectivité, il y a l'arête-connectivité. Un graphe est k -arête-connecte si le nombre minimum d'arêtes dont la suppression déconnecte G ou le réduit à un seul sommet est au moins k . L'arête-connectivité est notée $\lambda(G)$ et est égale à la valeur maximum de k telle que G est k -arête-connecte. Il est facile de voir que si un graphe est k -connecte alors il est k -arête-connecte.

1.3 Toughness

La connectivité (et l'arête-connectivité) ne sont pas les seuls paramètres à évaluer la "force" d'un graphe. Il y a aussi d'autres paramètres (peut-être moins connus) qui la mesurent d'un point de vue différent. Dans ce manuscrit, nous parlerons parfois de *toughness*, notamment dans les revues que nous présenterons. Ce concept a été introduit par Chvátal ([43]), il y a plus de 30 ans. Un graphe G est dit t -tough si $|S| \geq t\omega(G-S)$ pour tout ensemble d'articulation S de G (où $\omega(G-S)$ représente le nombre de composantes connexes de $G-S$). La *toughness* d'un graphe G , notée $\tau(G)$ est la valeur maximum de t pour laquelle G est t -tough (en prenant $\tau(K_n) = +\infty$). Bien que la condition pour qu'un graphe soit tough ait une forme simple, elle n'est pas toujours facile à appliquer. Le problème qui consiste à reconnaître un graphe t -tough est NP-dur¹ pour n'importe quel rationnel t fixé ([11, 12]) et le reste dans un bon nombre de classes de graphes. Il y a encore beaucoup de choses à dire sur la toughness et particulièrement sur sa relation avec l'existence de cycles. Nous invitons le lecteur intéressé à consulter le survey [13] pour une revue complète.

1. Voir section 1.7

1.4 Quelques familles de graphes

Nous décrivons dans cette partie différentes classes de graphes que nous aurons l'occasion de rencontrer dans la suite de ce document.

Grphe Complet Un graphe d'ordre n , $n - 1$ -régulier est appelé *graphe complet* ou *clique*. Il contient toutes les arêtes possibles et est noté K_n .

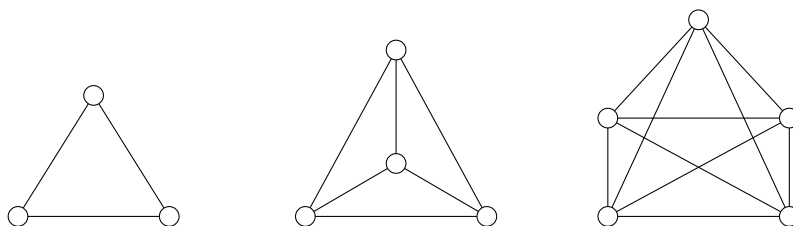


FIGURE 1.4 – Les graphes complets K_3 , K_4 et K_5

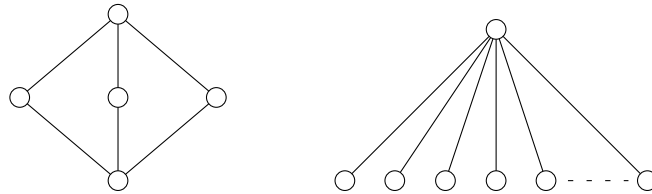
Arbre Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Les arbres ont plusieurs caractérisations, par exemple un graphe d'ordre n est un arbre si et seulement si il est connexe et a $n - 1$ arêtes. Les sommets pendants dans un arbre sont appelés *feuilles*. Tout arbre (nontrivial) possède au moins 2 feuilles. Une *forêt* est un graphe non connexe dans lequel chaque composante connexe est un arbre. A cause du fait qu'ils soient sans cycles, arbres et forêts sont appelés “graphes acycliques”.

Grphe biparti Un graphe est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles V_1 et V_2 de telle façon que toute arête de G ait une extrémité dans V_1 et une extrémité dans V_2 . On écrit alors $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Les sous-graphes induits par V_1 et V_2 sont des stables. Si $|V_1| = |V_2|$, alors le graphes biparti G est dit *équilibré*.

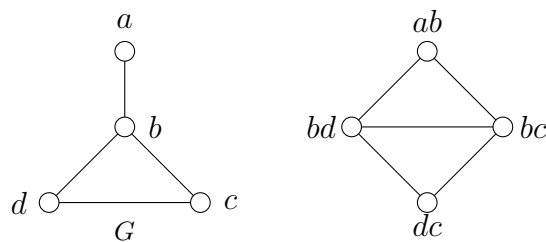
Un graphe *biparti complet* est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet $(V_1 \cup V_2, E)$ est noté $K_{p,q}$.

Un graphe biparti complet dont une partition contient un seul sommet est appelé *étoile*. L'étoile est aussi un arbre d'ordre n à $n - 1$ feuilles. Elle est souvent étudiée comme sous-graphe induit, en particulier l'étoile $K_{1,3}$ appelée *griffe*.

Graphes représentatifs des arêtes d'un graphe Le graphe représentatif des arêtes d'un graphe G est le graphe dont les sommets représentent les arêtes de G et dans lequel deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes qu'ils représentent

FIGURE 1.5 – Le graphe $K_{2,3}$ et l'étoile $K_{1,n-1}$

ont une extrémité commune dans G . Il est noté $L(G)$. La Figure 1.6, représente un graphe et son graphe représentatif des arêtes (qui n'est autre que le diamant).

FIGURE 1.6 – G et son graphe représentatif des arêtes

Graphes définis par des configurations exclues Soit F un graphe. Un graphe G est dit *sans F* si et seulement si G ne possède pas de sous-graphe induit isomorphe à F .

Une classe de graphes très étudiée, définie par une configuration exclue, est la classe des *graphes sans griffe*. Un survey y a été consacré [91].

1.5 Quelques opérations sur les graphes

Les opérations sur les graphes nous permettent d'obtenir de nouveaux graphes à partir d'anciens. Ces opérations sont parfois divisées en deux classes : les opérations unaires (comme l'ajout ou la suppression d'une arête ou d'un sommet) et les opérations binaires (comme la somme cartésienne, le joint). Nous définissons ci-après les opérations binaires qui interviendront dans ce document.

L'union de deux graphes L'union de deux graphes G_1 et G_2 , notée $G_1 \cup G_2$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G_1) \cup V(G_2)$ et dont l'ensemble des arêtes est $E(G_1) \cup E(G_2)$. Si les graphes G_1 et G_2 sont disjoints alors cette union sera dite *union disjointe* des graphes G_1 et G_2 .

Pour un entier positif p , le graphe pG est l'union disjointe de p copies du graphe G .

Le joint de deux graphes Le joint est une opération qui a été introduite par Zykov dans [226]. Le joint de deux graphes disjoints G_1 et G_2 , noté $G_1 + G_2$, est le graphe obtenu en prenant leur union et en reliant chaque sommet de G_1 à chaque sommet de G_2 . La figure ci dessous montre l'union et le joint des graphes K_3 et P_3 .

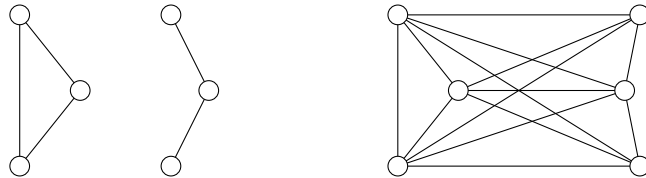


FIGURE 1.7 – $K_3 \cup P_3$ et $K_3 + P_3$

1.6 Facteurs

Un *facteur* d'un graphe G est un graphe partiel de G . Soient f et g deux fonctions sur $V(G)$ à valeurs entières telles que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in V(G)$. Un (g, f) -facteur de G est un facteur F tel que $g(x) \leq d_F(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in V(G)$. Soient a et b deux entiers positifs. Si $g(x) = a$ et $f(x) = b$ pour tout $x \in V(G)$ alors F est un $[a, b]$ -facteur. Si de plus $f(x) = g(x) = k$ pour tout $x \in V(G)$ (où k est un entier positif) alors F est un k -facteur (abréviation de $[k, k]$ -facteur). Un k -facteur est donc un graphe partiel k -régulier, ce qui explique que les k -facteurs sont parfois appelés facteurs réguliers. Dans l'étude de l'existence de $[a, b]$ -facteurs dans un graphe, il est supposé que $a > 0$ parce que si $a = 0$ alors tout graphe possède un $[a, b]$ -facteur qui ne contient aucune arête. Si $a = b = 1$ alors le $[a, b]$ -facteur est exactement un couplage parfait.

1.7 Complexité algorithmique

Dans ce document, et plus précisément dans les revues que nous proposerons au début de chaque chapitre, nous parlerons de complexité pour signaler la difficulté d'un problème. Nous allons donc voir brièvement comment les problèmes sont classés suivant leur niveau de difficulté. Nous n'entrerons pas dans les détails et de ce fait, le lecteur est invité à consulter [107] pour une étude plus complète de la théorie de la complexité.

La complexité d'un algorithme, qui est le nombre d'opérations requises pour son exécution, permet de mesurer ses performances. Le temps d'exécution d'un algorithme

est proportionnel au nombre de ses opérations. Ce nombre dépend de la taille et de la nature du problème. Dans le cas des graphes, la complexité est une fonction du nombre de bits requis pour coder la matrice d'adjacence dudit graphe, donc une fonction de n (l'ordre) et m (la taille du graphe).

Si la complexité est bornée supérieurement par un polynôme en la taille de l'entrée, alors l'algorithme est dit polynomial.

Dans la théorie de la complexité, la classification des problèmes se limite aux problèmes de décision c'est-à-dire ceux qui reviennent à répondre à une question par "oui" ou par "non". La question du problème se formalise comme suit : "la donnée d'entrée possède-t-elle la propriété suivante?". Toutefois, nous pouvons parler de complexité pour un problème d'optimisation puisque ce dernier se ramène facilement à un problème de décision. Rappelons juste qu'un algorithme déterministe est un algorithme modélisable par une machine de Turing et qu'un algorithme non déterministe est un algorithme qui peut mener tout un arbre de calculs en parallèle. A l'heure actuelle, on ne sait programmer que des algorithmes déterministes et on ne peut que simuler des algorithmes non déterministes.

Les problèmes de décision se classifient comme suit :

La Classe \mathcal{P} Cette classe est en quelque sorte celle des problèmes facilement résolubles (même pour des entrées de grande taille). Un problème de décision est dans \mathcal{P} s'il peut être décidé sur une machine déterministe en temps polynomial par rapport à la taille des données. C'est un problème de complexité $O(n^k)$ pour un certain k . Le problème de la connexité d'un graphe est un exemple d'un problème polynomial (il est en $O(n^2)$). Par ailleurs, il y a plusieurs problèmes de base pour lesquels aucun algorithme polynomial n'a été trouvé et il se pourrait même qu'un tel algorithme n'existe pas. Déterminer quels problèmes sont résolubles en temps polynomial et lesquels ne le sont pas est une question fondamentale. Dans ce contexte, la classe \mathcal{NP} joue un rôle important.

La classe \mathcal{NP} La classe \mathcal{NP} des problèmes non déterministes polynomiaux réunit les problèmes de décisions qui peuvent être décidés sur une machine non déterministe en temps polynomial. Un problème de décision appartient à la classe \mathcal{NP} si, étant donnée une instance du problème dont la réponse est "oui", il y a un certificat validant ce fait qui peut être vérifié en temps polynomial.

Le problème qui consiste à décider si un graphe possède un cycle hamiltonien est un problème NP. Il en est de même pour le problème de décision pour une chaîne hamiltonienne.

nienne.

Les problèmes *NP-complets* sont les plus difficiles de la classe \mathcal{NP} . Cette notion intuitive se définit plus formellement à l'aide de la notion de *réduction polynomiale*. Une réduction polynomiale d'un problème P_1 à un problème P_2 est une paire d'algorithmes polynomiaux dont l'un transforme chaque instance I_1 de P_1 en une instance I_2 de P_2 , et l'autre transforme une solution pour l'instance I_2 en une solution pour l'instance I_1 . L'intérêt de la réduction polynomiale est que s'il existe un algorithme polynomial pour la résolution de P_2 alors cet algorithme peut être converti en un algorithme polynomial pour résoudre P_1 .

La classe \mathcal{NPC} Un problème NP-complet est un problème de \mathcal{NP} en lequel se réduit polynomialement tout autre problème de \mathcal{NP} . La classe des problèmes \mathcal{NP} -complets est généralement notée \mathcal{NPC} .

Le problème d'existence d'un cycle hamiltonien est un problème NP-complet. Si un algorithme polynomial pour ce problème (ou pour tout autre problème NP-complet) est trouvé alors il pourra être adapté pour résoudre n'importe quel problème dans \mathcal{NP} en temps polynomial.

Un problème d'optimisation est NP-difficile (ou NP-dur) lorsque le problème de reconnaissance qui lui est associé est NP-complet. Le problème du voyageur de commerce (TSP) est un problème NP-dur (tout algorithme qui résout le TSP résoudra aussi le problème du cycle hamiltonien). Le problème de la clique maximum est aussi un problème NP-dur (il s'en suit que le problème du stable maximum est aussi NP-dur puisqu'il est polynomialement équivalent au problème de la clique maximum. Ceci vient du fait qu'un sous-ensemble S de sommets est un stable dans G si et seulement si S induit une clique dans \overline{G}).

Première partie

Couvertures par Cycles et Pseudo 2-Facteurs

Chapitre 2

Couverture des sommets d'un graphe par des cycles de longueurs bornées

2.1 Introduction

Les problèmes de cycles sont des problèmes classiques très étudiés en théorie des graphes. Il y a dans la littérature un grand nombre de travaux donnant des conditions en termes de : taille, ordre, degrés, somme des degrés, stabilité (pour ne citer que ceux-là) qui sont suffisantes pour l'existence de cycles satisfaisant certaines propriétés, par exemple être disjoints, contenir des éléments fixés du graphe ou être de longueurs bornées voire fixées.

Une *couverture* des sommets d'un graphe G par des cycles est une famille de cycles de G telle que tout sommet de G appartient à au moins un cycle de cette famille. Dans toute la suite, le terme "couverture" sous-entendra couverture des sommets. Les problèmes ayant trait aux couvertures par cycles consistent généralement à déterminer le nombre "minimum" de cycles dans une couverture de G . Ensuite selon les conditions que nous posons sur la famille de cycles, les problèmes qui en découlent se diversifient. Une notion proche de celle de couverture est celle de "placement de cycles". Le problème de placement de cycles est celui de l'existence de k cycles disjoints de G . Donc, un placement de k cycles dans un graphe G ne couvre pas forcément tous les sommets de ce dernier. La taille d'un placement de cycles est le nombre de sommets de G couverts par ces cycles. Un placement de taille n , où n est l'ordre de G , est appelé placement parfait, ce n'est autre qu'un 2-facteur de G .

Dans [159], Lesniak a rassemblé une variété de résultats concernant l'existence de

cycles disjoints dans un graphe donné. Ce survey offre un bon aperçu des travaux réalisés dans ce domaine jusqu'en 1995. Une décennie plus tard, Fujita a présenté des résultats plus récents sur les cycles disjoints dans [102].

Etant donné un graphe G , le problème suivant : “Est-ce que G contient au moins k cycles disjoints ?” est NP-complet ([107]). Par contre, pour k fixé, déterminer si G contient k cycles disjoints (ou arête-disjoints) peut être résolu en $O(n)$ ([23]). Par ailleurs, le problème qui consiste à trouver un plus grand ensemble de cycles disjoints (ou arête-disjoints) dans G est NP-dur ([67, 125]). Celui qui consiste à trouver une couverture par un minimum de cycles disjoints est NP-dur ([107]).

Nous tentons dans ce chapitre de compléter les surveys cités précédemment en proposant un état de l'art sur les problèmes de placements de cycles et de couvertures par cycles dans un graphe. Nous exposerons ensuite nos résultats concernant les couvertures des sommets d'un graphe par des cycles de longueurs bornées.

2.2 Placement de cycles et couverture par cycles - Un état de l'art

Ce qui suit est une revue de la littérature concernant les problèmes de placement de cycles et de couverture par cycles. Cette revue est organisée en plusieurs paragraphes selon les conditions posées sur les cycles. Nous n'aborderons pas le problème hamiltonien : existence d'un cycle couvrant tous les sommets du graphe, auquel plusieurs surveys ont été consacrés (voir par exemple [111, 144]).

2.2.1 Placement de k cycles dans un graphe

Probablement l'un des premiers résultats parus concernant le placement de cycles dans un graphe est celui de Corrádi et Hajnal. Dans [45], ils ont prouvé le résultat suivant qui avait été conjecturé par Erdős quelques années plus tôt.

Théorème 2.1 (Corradi et Hajnal [45]) *Tout graphe d'ordre $n \geq 3k$ et de degré minimum $\delta \geq 2k$ contient k cycles disjoints.*

Plusieurs auteurs ont ensuite amélioré ce résultat de différentes manières. Enomoto et Wang ont indépendamment montré, dans [81] et [216] respectivement, ce qui est devenu un résultat de base. Il s'agit d'une généralisation du Théorème 2.1 qu'ils ont obtenu en relâchant la condition sur les degrés posée par Erdős.

Théorème 2.2 (Enomoto [81] et Wang [216]) *Soit G graphe d'ordre au moins $3k$ ($k \geq 2$) dans lequel $d(u) + d(v) \geq 4k - 1$ pour toute paire de sommets non-adjacents u et v . Alors G contient k cycles disjoints.*

Le graphe biparti complet $K_{2k-1,m}$ avec $m \geq 2k - 1$, a $\sigma_2(G) = 4k - 2$ et est sans k cycles disjoints. Cet exemple montre que la borne donnée pour $\sigma_2(G)$ dans le Théorème 2.2 est la meilleure possible.

Dans [104], Fujita et al. ont obtenu une généralisation du Théorème 2.1 en utilisant la somme des degrés de trois sommets indépendants (plus communément notée $\sigma_3(G)$).

Théorème 2.3 (Fujita et al. [104]) *Soit k un entier tel que $k \geq 2$. Soit G un graphe d'ordre au moins $3k + 2$ et tel que $\sigma_3(G) \geq 6k - 2$. Alors G possède k cycles disjoints.*

Récemment, dans [20], Bialostocki et al. ont posé une conjecture qui, si elle est vraie, est aussi une généralisation du Théorème 2.1. Ils se sont intéressés à l'existence de cycles avec cordes. Ils ont conjecturé que

“*Etant donnés des entiers positifs s, r et un graphe G d'ordre $n \geq 3r + 4s$ et de degré minimum $\delta \geq 2r + 3s$. Alors G contient $r + s$ cycles disjoints dont s avec cordes*”. Ils ont montré cette conjecture pour $r = 0, s = 2$ et pour $s = 1$. Dans [97], Finkel l'a montré pour $r = 0$.

Dans [39], Chiba et al. ont voulu savoir ce que deviendrait le Théorème 2.1 si une contrainte sur la parité des cycles est rajoutée. Ils ont montré ce qui suit :

Théorème 2.4 (Chiba et al. [39]) *Pour tout entier k , il existe une constante c_k vérifiant ce qui suit :*

Soit G un graphe d'ordre au moins c_k et de degré minimum au moins $2k$. Alors soit

- (i) *G contient k cycles disjoints pairs, ou*
- (ii) *$(2k - 1)K_1 + pK_2 \subseteq G \subseteq K_{2k-1} + pK_2$ ($p \geq k \geq 2$), ou $k = 1$ et tout bloc dans G est soit un K_2 soit un cycle impair, en particulier tout bloc extremal dans G est un cycle impair.*

Dans les théorèmes précédents la conclusion est “ G possède un placement de k cycles” mais rien n'est dit sur la taille de ce placement. C'est dans [74], que Egawa et al. ont considéré le problème de couvrir autant de sommets que possible par k cycles disjoints. Ils ont résolu une conjecture posée par Wang dans [213] en montrant ce qui suit :

Théorème 2.5 (Egawa et al. [74]) *Soient d , k , et n trois entiers tels que $k \geq 3$, $d \geq 4k - 1$ et $n \geq 3k$. Soit G un graphe d'ordre n , dans lequel toute paire de sommets non-adjacents x et y vérifie $d(x) + d(y) \geq d$. Alors au moins $\min\{d, n\}$ sommets de G peuvent être couverts par k cycles disjoints.*

En fait, le Théorème 2.5 est aussi vrai pour $k = 2$. C'est ce qu'ont montré Egawa et al. dans [75]. Dans [76], Egawa et al. ont regardé les graphes sans k cycles disjoints. Pour des entiers donnés $k \geq 1$, $\alpha \geq 1$, ils se sont intéressés à l'ordre maximum (qu'ils ont noté $f(k, \alpha)$) d'un graphe de stabilité au plus α , qui ne possède pas k cycles disjoints. Ils ont montré qu'il existe

- Une constante c_α ne dépendant que de α telle que $f(k, \alpha) \leq 3k + c_\alpha$;
- Une constante t_k ne dépendant que de k telle que $f(k, \alpha) \leq 2\alpha + t_k$;

Ils ont aussi montré que pour k et α donnés, il n'existe aucune constante c telle que $f(k, \alpha) \leq c(k + \alpha)$ et ils ont proposé un certain nombre de questions ouvertes.

En se restreignant à des classes de graphes, les chercheurs ont tenté d'améliorer les résultats existants. Les graphes bipartis ont particulièrement été étudiés. Wang a montré dans [211] ce qui suit

Théorème 2.6 (Wang [211]) *Un graphe biparti $G = (V_1 \cup V_2, E)$ avec $|V_1| = |V_2| = n > 2k$ (où k est un entier positif) et de degré minimum au moins $k + 1$ contient k cycles disjoints.*

Dans le même papier Wang a aussi montré que si $|V_1| = |V_2| = 2k$ alors G contient $k - 1$ cycles disjoints de longueur 4 et une chaîne d'ordre 4 indépendante des cycles. Dans [212], il a étendu le théorème précédent et a montré l'existence de k longs cycles disjoints (de longueur supérieure à 4).

Théorème 2.7 (Wang [212]) *Soient $s \geq 3$ et $k \geq 1$ deux entiers positifs. Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti avec $|V_1| = |V_2| = n \geq sk$, de degré minimum $\delta \geq (s - 1)k + 1$. Alors G contient k cycles disjoints de longueur au moins $2s$.*

Wang s'est par ailleurs intéressé à la longueur totale maximale des cycles disjoints dans un graphe biparti équilibré. Cette longueur représente le nombre de sommets couverts par lesdits cycles. Dans [214], il a montré ce qui suit :

Théorème 2.8 (Wang [214]) *Soient k, n et s trois entiers positifs avec $s \geq k \geq 2$ et $n \geq 2k + 1$. Soit G un graphe biparti avec $|V_1| = |V_2| = n$. Si le degré minimum de G est au moins $s + 1$, alors G contient k cycles disjoints couvrant au moins $\min(2n, 4s)$ sommets de G .*

2.2.2 Existence d'une couverture des sommets de G par des cycles disjoints

Dans [27], Brandt et al. ont concilié indépendance des cycles et couverture de tous les sommets. Ils ont donné un résultat qui garantit l'existence d'un nombre précis de cycles disjoints qui couvrent tous les sommets du graphe : un 2-facteur. En fait, ce qu'il ont prouvé, c'est que la condition d'Ore ([183]) sur le degré minimum garantissant l'hamiltonicité d'un graphe, est suffisante pour l'existence d'un 2-facteur avec k composantes.

Théorème 2.9 (Brandt et al. [27]) *Soient k et n deux entiers tels que $n \geq 4k - 1$. Soit G un graphe d'ordre n pour lequel $\sigma_2(G) \geq n$. Alors G contient k cycles disjoints $H_i, 1 \leq i \leq k$ tels que $V(H_1) \cup \dots \cup V(H_k) = V(G)$.*

Une tendance plutôt récente dans ce domaine est de supposer que G est hamiltonien et de trouver des conditions pour l'existence d'un 2-facteur avec un certain nombre de cycles. Le but est de voir s'il est possible d'obtenir, pour les graphes hamiltoniens, des conditions plus faibles pour l'existence d'un 2-facteur avec k composantes. Dans [93], Faudree et al. se sont intéressés aux 2-facteurs avec deux composantes. Leur résultat est le suivant :

Théorème 2.10 (Faudree et al. [93]) *Soit G un graphe hamiltonien d'ordre $n \geq 6$ et de degré minimum $\delta \geq \frac{5}{12}n + 2$. Alors G possède un 2-facteur avec 2 composantes.*

Dans le même article, Faudree et al. avaient conjecturé qu'il était aussi possible d'aller plus bas que la borne de Dirac ([63]) pour $k > 2$. Dans [192], Sarkozy a résolu asymptotiquement cette conjecture et a montré que :

Théorème 2.11 (Sarkozy [192]) *Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $k \geq 2$, il existe un entier n_0 (qui dépend de k) tel que tout graphe hamiltonien G d'ordre $n \geq n_0$ et de degré minimum $\delta \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)n$ a un 2-facteur avec k composantes, dont $k - 2$ sont des C_4 .*

Une autre approche est de donner une condition suffisante pour l'existence d'un 2-facteur en termes de sous-graphes connexes exclus. Cette approche a déjà servi pour l'hamiltonicité (voir [14, 92]). Dans [90], Faudree et al. l'ont adaptée aux 2-facteurs dans un graphe 2-connexe. Ils ont montré que le seul sous-graphe connexe dont l'exclusion assure l'existence d'un 2-facteur dans un graphe 2-connexe est la chaîne P_3 , sinon il faut et il suffit d'exclure des paires de graphes connexes, comme l'énonce le résultat suivant.

Théorème 2.12 (Faudree et al. [90]) *Soient X et Y deux graphes connexes différents de P_3 . Soit G un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 10$. Alors G étant sans $\{X, Y\}$ implique que G possède un 2-facteur si et seulement si $X = K_{1,3}$ et Y est un sous-graphe de $P_7, Z_4, B(4, 1)$ ou $N(3, 1, 1)$ ou bien $X = K_{1,4}$ et $Y = P_4$.*

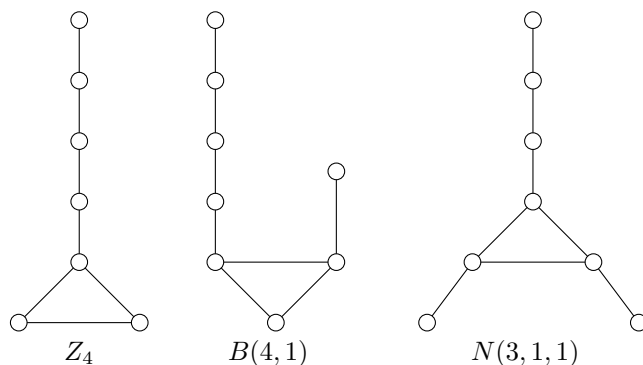


FIGURE 2.1 – Les graphes Z_4 , $B(4, 1)$ et $N(3, 1, 1)$.

L'étude de l'existence de 2-facteurs, et du nombre de cycles les composant, dans des classes de graphes a beaucoup été abordée dans la littérature. Un intérêt particulier a été porté aux graphes sans griffe. Dans [40], Chodum et Paulraj ont montré qu'une très faible condition sur le degré minimum permet de garantir l'existence d'une couverture par des cycles disjoints dans un graphe sans griffe.

Théorème 2.13 (Chodum et Paulraj [40]) *Tout graphe connexe sans griffe de degré minimum $\delta \geq 4$ a un 2-facteur.*

En réalité, ils ont montré un résultat plus général qui stipule que tout graphe connexe sans griffe de degré minimum $\delta \geq 2k$ avec k un entier non nul et kn pair possède un k -facteur. Une question légitime qu'a inspiré le Théorème 2.13 est de connaître le nombre de ces cycles disjoints (qui par définition d'un 2-facteur couvrent tous les sommets de G). Cette question a été étudiée par Faudree et al. dans [89]. Les auteurs ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.14 (Faudree et al. [89]) *Si G est un graphe sans griffe de degré minimum $\delta \geq 4$, alors G a un 2-facteur avec au plus $\frac{6n}{\delta + 2} - 1$ composantes.*

De plus, Faudree et al. ont montré qu'un tel 2-facteur peut être construit en un temps polynomial (en $O(n^3)$). En supposant de plus que G est sans clique maximale de deux sommets, Yoshimoto a obtenu, dans [225], une borne ne dépendant que de n . Il a montré ce qui suit :

Théorème 2.15 (Yoshimoto [225]) *Si un graphe sans griffe G d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 4$ n'a pas de clique maximale de deux sommets alors G a un 2-facteur avec au plus $\frac{n-1}{4}$ cycles.*

Il a montré aussi que cette borne est la meilleure possible. Le même auteur en collaboration avec Broersma et Paulusma a montré, dans [34], que la borne du Théorème 2.14 peu être améliorée pour les graphes non hamiltoniens de degré minimum au moins 5.

Théorème 2.16 (Broersma et al. [34]) *Un graphe sans griffe non hamiltonien d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 5$ a un 2-facteur avec au plus $\frac{n-3}{\delta-1}$ cycles.*

Cette borne est aussi la meilleure dans le sens où dans le dénominateur $\delta - 1$ ne peut pas être remplacé par δ . D'autres résultats sur le nombre de cycles dans un 2-facteur d'un graphe sans griffe peuvent être consultés dans [35, 101, 110].

Dans [130], Jackson et Yoshimoto se sont intéressés aux graphes représentatifs des arêtes (qui sont des graphes sans griffe), et plus particulièrement au graphe représentatif des arêtes d'un graphe sans isthme. Ils ont proposé une borne au nombre de cycles dans un 2-facteur d'un tel graphe. Leur résultat est le suivant :

Théorème 2.17 (Jackson et Yoshimoto [130]) *Soit G un graphe sans isthme d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 3$. Alors son graphe représentatif des arêtes possède un 2-facteur avec au plus $\max\{1, \frac{3n-4}{10}\}$ composantes.*

Abreu et al. ont défini pour un graphe G , la propriété suivante : la parité du nombre de cycles dans les 2-facteurs de G est la même pour tous les 2-facteurs de G . Dans [2], ils se sont intéressés aux graphes bipartis réguliers et ont montré qu'aucun graphe biparti d -régulier pour $d \geq 4$ n'a cette propriété. Par ailleurs, il ont obtenu des résultats partiels pour la caractérisation des graphes bipartis cubiques (i.e 3-réguliers) ayant la propriété citée ci-dessus.

2.2.3 Existence de cycles disjoints de longueurs fixées

Le problème de placement de cycles dans un graphe G devient plus difficile si les cycles doivent être de même longueur. Dans [116], Haggkvist a conjecturé que :

“Il existe deux cycles disjoints de même longueur dans un graphe G d’ordre assez grand et de degré minimum au moins 4”.

Puis dans [197], Thomassen a posé la conjecture plus générale suivante :

“Un graphe d’ordre assez grand et de degré minimum $\geq 2k$ contient k cycles disjoints de même longueur”.

Cette dernière conjecture a été prouvée pour $k > 2$ par Egawa dans [70].

Théorème 2.18 (Egawa [70]) *Si G est un graphe d’ordre au moins $17k + o(k)$ ($k \geq 3$) et de degré minimum $\delta \geq 2k$ alors G contient k cycles disjoints de même longueur.*

Dans [208], Verstraete a prouvé la conjecture de Haggkvist (c’est-à-dire le cas $k = 2$) et a donné une preuve plus courte à la conjecture de Thomassen.

Un cas plus général a été traité par El-Zahar dans [78]. El-Zahar a étudié l’existence de deux cycles disjoints de longueurs fixées couvrant les sommets de G . Il a montré le théorème suivant :

Théorème 2.19 (El-Zahar [78]) *Si G est un graphe d’ordre n tel que $n = n_1 + n_2$ avec n_1, n_2 entiers tels que $n_1 \geq 3$ et $n_2 \geq 3$ et si le degré minimum de G est au moins $\lceil \frac{n_1}{2} \rceil + \lceil \frac{n_2}{2} \rceil$ alors G contient deux cycles disjoints de longueurs n_1 et n_2 respectivement.*

Dans le même papier, El-Zahar a aussi posé la conjecture suivante.

Conjecture 2.1 (El-Zahar [78]) *Soit G un graphe d’ordre n et de degré minimum δ . Si $n = n_1 + \dots + n_k$ ($n_i \geq 3$ pour $1 \leq i \leq k$) et $\delta \geq \lceil \frac{n_1}{2} \rceil + \dots + \lceil \frac{n_k}{2} \rceil$, alors G contient k cycles disjoints de longueurs n_1, \dots, n_k respectivement.*

El-Zahar a prouvé que si cette conjecture se révélait vraie alors le résultat serait le meilleur possible. Notons que le cas $k = 1$ est le théorème de Dirac [63] ; le cas où $n_i = 3$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k$, a été prouvé par Corradi et Hajnal dans [45] et le cas où n_1 est quelconque et $n_i = 3$ pour $i = 2, \dots, k$ a été résolu par Wang [210]. Nous trouvons dans la littérature des résultats ayant trait à des cas particuliers de cette conjecture, notamment le cas des graphes bipartis ([209], [133]).

2.2.4 Existence de cycles contenant des éléments particuliers d'un graphe

Un autre problème est d'étudier l'existence de cycles avec non pas avec une contrainte sur leurs longueurs mais avec comme contrainte que les cycles passent par des éléments particuliers du graphe. Ces éléments peuvent être des sommets particuliers, arêtes (ou même chaînes) particulières ou une combinaison des deux (des forêts linéaires). Gould a récemment écrit un survey ([112]) sur ce problème. Nous citons ci-après quelques résultats le concernant.

Examinons le cas des arêtes particulières : Wang a posé dans [215] une conjecture relative à la couverture des sommets d'un graphe par des cycles qui passent par des arêtes données. Il a montré cette conjecture dans le cas $k = 2$ dans le même article. Cette conjecture a ensuite été prouvée pour tout $k \geq 3$ par Egawa et al. dans [73]. La condition posée sur les degrés est la meilleure possible. Deux arêtes e_1 et e_2 sont dites indépendantes si $V(e_1) \cap V(e_2) = \emptyset$.

Théorème 2.20 (Egawa et al. [73]) *Soit k un entier tel que $k \geq 2$. Si G est un graphe d'ordre $n \geq 4k - 1$ satisfaisant $\sigma_2(G) \geq n + 2k - 2$, alors pour tout ensemble de k arêtes indépendantes e_1, \dots, e_k de $E(G)$, il existe k cycles disjoints C_1, \dots, C_k dans G tels que $e_i \in E(C_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $V(C_1) \cup \dots \cup V(C_k) = V(G)$*

Dans [129], Ishigami et Wang ont donné une preuve alternative au Théorème 2.20 qui donne une conclusion plus forte. Dans le sens où ils ont montré de plus que le nombre de cycles C_i de longueur $l(C_i) > 4$ est au plus 1, sauf pour une famille de graphes qu'ils ont exhibée.

Dans [66], Dong a donné une version du théorème précédent avec des cycles chacun passant par un sommets fixé. Il a montré ce qui suit :

Théorème 2.21 (Dong [66]) *Soit $k \geq 1$ un entier et soit G un graphe d'ordre $n \geq 3k$ satisfaisant $\sigma_2(G) \geq n + k - 1$. Soient v_1, \dots, v_k des sommets indépendants deux à deux dans G , et supposons que G a k triangles disjoints C_1, \dots, C_k tels que $v_i \in V(C_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Alors G possède k cycles disjoints C'_1, \dots, C'_k tels que :*

1. $v_i \in V(C'_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$,
2. $V(C'_1) \cup \dots \cup V(C'_k) = V(G)$ et
3. au moins $k - 1$ cycles parmi les k sont des triangles.

Comme dans le cas biparti, il ne peut pas y avoir de triangle alors, Matsumura (dans [174]) a donné des conditions sur les degrés pour qu'étant donné un graphe biparti équilibré G et un ensemble de k arêtes indépendantes e_1, \dots, e_k , nous puissions placer (dans G) k cycles disjoints C_1, \dots, C_k chacun de longueur 4 et tel que $e_i \in C_i$ pour $i = 1, \dots, k$. Ce résultat ne garantit pas, que les cycles couvrent tous les sommets du graphe. Mais dans [165], Yan et Liu ont donné une condition pour l'existence dans un graphe biparti équilibré d'un 2-facteur passant par des arêtes données. Ils ont montré ce qui suit :

Théorème 2.22 (Yan et Liu [165]) *Soit $k \geq 1$ un entier et soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti avec $|V_1| = |V_2| = n$ et $n \geq 2k + 2$. Si pour toute paire de sommets non-adjacents $x \in V_1$ et $y \in V_2$, on a $d(x) + d(y) \geq \lceil \frac{4n + 2k - 1}{3} \rceil$. Alors pour tout ensemble de k arêtes indépendantes e_1, \dots, e_k de G , G possède un 2-facteur avec $k+1$ cycles C_1, \dots, C_{k+1} tels que $e_i \in E(C_i)$ et $|V(C_i)| = 4$ pour tout $1 \leq i \leq k$.*

Récemment, Gerlach et Harant [109], ont étudié l'existence dans un graphe G , d'un cycle passant par une forêt linéaire, non nécessairement couvrante. Une forêt linéaire est une forêt de degré maximum au plus 2.

Un problème proche du problème de couverture est celui de la *cyclabilité*, qui est en quelque sorte une couverture locale. Pour un sous-ensemble X donné de sommets, le problème consiste à étudier l'existence d'un ou de plusieurs cycles couvrant X . L'hypothèse de l'indépendance des cycles est parfois imposée. Plusieurs chercheurs ont étudié ce problème. Kouider a montré dans [155] que si H est un sous-graphe d'un graphe k -connexe G (avec $k \geq 2$), alors les sommets de H peuvent être couverts par un seul cycle de G , ou bien il existe un cycle C de G , dont la suppression diminue la stabilité de H d'au plus k . Dans un autre article ([153]), Kouider a montré avec Lonc, qu'un sous-ensemble de sommets X d'un graphe G vérifiant $\sigma_k(X) \geq n$ ou $\alpha(X) < k$ (où $k \geq 2$), peut être couvert par $k - 1$ cycles, arêtes ou sommets. Si de plus G est 2-arête-connexe alors ils ont obtenu ce qui suit :

Théorème 2.23 (Kouider et Lonc [153]) *Soit G un graphe 2-arête-connexe d'ordre n . Soit X un sous-ensemble de sommets de G et soit k un entier tel que $k \geq 2$. Si $\sigma_k(X) \geq n$ ou $\alpha(X) < k$ alors X est couvrable par $k - 1$ cycles de G .*

Dans [160], H. Li et J. Li se sont intéressés au problème particulier de couvrir X par des triangles disjoints. Il ont montré le résultat qui suit :

Théorème 2.24 (H.Li et J.Li [160]) *Soient k et n deux entiers positifs et soit G un graphe d'ordre $n \geq 3k$ et de degré minimum δ . Soit X un ensemble de k sommets quelconques, si $\delta \geq \frac{n+k}{2}$, alors G contient k triangles disjoints couvrant tous les sommets de X .*

Soit X un sous-ensemble de sommets d'un graphe G . La connectivité locale et la toughness locale de X dans G sont définies comme suit : $\kappa(X)$ est la cardinalité d'un plus petit ensemble $S \subseteq V(G)$ qui divise X (i.e $G - S$ contient au moins deux composantes connexes, chacune contenant au moins un sommet de X). Si G_X (le sous-graphe de G induit par X) est complet alors $\kappa(X)$ est infini. Par ailleurs, X est dit t -tough ($t > 0$) dans G si pour tout sous-ensemble $S \subseteq V(G)$ divisant X , le nombre de composantes connexes de $G - S$, contenant un sommet de X , est au plus $\frac{|S|}{t}$. Dans [108], Gerlach et al. ont utilisé la connectivité et la toughness locales pour montrer ce qui suit :

Théorème 2.25 (Gerlach et al. [108]) *Soit G un graphe et soit X un sous-ensemble de sommets de G tel que $|X| = \kappa(X) + 2 \geq 6$ et X est t -tough ($t > 1$). Alors il existe dans G un cycle qui contient tous les sommets de X .*

2.2.5 Couverture des sommets d'un graphe par des cycles

Dans beaucoup des travaux cités précédemment, l'indépendance des cycles était privilégiée par rapport au fait que ces cycles couvrent tous les sommets du graphe. La condition d'indépendance doit être parfois relâchée si nous voulons avoir une couverture des sommets et que le graphe considéré est sans 2-facteur. Alors quel est dans ce cas la cardinalité minimum d'une couverture de G ?

Dans [153], Kouider et Lonc ont prouvé ce qui suit pour les graphes 2-arête-connexes.

Théorème 2.26 (Kouider et Lonc [153]) *Soit G un graphe 2-arête-connexe d'ordre n et soit s un entier tel que $s \geq 2$. Si tout stable $S \subset V(G)$ de G de cardinalité s vérifie $\sum_{x \in S} d_G(x) \geq n$, alors les sommets de G peuvent être couverts par au plus $s - 1$ cycles.*

Dans [155], en utilisant la stabilité et la connectivité, Kouider a montré ce qui suit :

Théorème 2.27 (Kouider [155]) *Les sommets d'un graphe κ -connexe ($\kappa \geq 2$) peuvent être couverts par au plus $\lceil \frac{\alpha}{\kappa} \rceil$ cycles.*

Ce fin résultat résout une conjecture d’Amar et al. ([6]) et généralise le théorème de Chvatal et Erdos ([44]) sur les cycles hamiltoniens.

La section suivante est un cas particulier de la section qui la précède mais nous avons préféré la mettre à part car elle concerne la question sur laquelle nous avons travaillé.

2.2.6 Couvrir les sommets d’un graphe par de petits cycles

Supposons que nous imposions aux cycles d’être non pas de longueurs fixées mais de longueurs appartenant à un certain ensemble d’entiers. Cette condition sur les longueurs est très utile dans la pratique. En fait, les 2-facteurs sont un outil important pour la conception d’algorithmes d’approximation pour différentes variantes du problème du voyageur de commerce (TSP) ou du problème de routage de véhicules (VRP). Les 2-facteurs de poids minimum peuvent être calculés efficacement et sont donc exploitables dans les algorithmes d’approximation ([168]). De tels algorithmes deviennent plus performants si les cycles sont de longueurs appartenant à un ensemble \mathbb{L} , où $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}$. Il y a même des algorithmes qui doublent de performances lorsque les cycles pris sont de longueurs paires [22]. Le problème qui consiste à déterminer un 2-facteur dont les cycles sont de longueurs $\in \mathbb{L}$ est un problème NP-dur pour quasiment tous les ensembles \mathbb{L} ([122, 167]). Lorsque l’ensemble \mathbb{L} est égal à $\{3, \dots, k\}$ (où k est un entier préalablement fixé) alors il est question de cycles de longueurs bornées. Dans la pratique, les cycles de longueurs bornées interviennent spécialement dans les problèmes de routage de véhicules.

Dans [26], Brändstadt et Voss ont proposé une borne inférieure, en fonction de l’ordre de G et de son degré maximum, du nombre de “petits cycles” disjoints dans un graphe de degré minimum au moins 3. Ils ont de plus donné un algorithme en $O(n(m+n))$ qui construit ces petits cycles, où m est la taille du graphe.

Théorème 2.28 (Brändstadt [26]) *Un graphe d’ordre n , de degré minimum $\delta \geq 3$ et degré maximum Δ contient au moins $\frac{n}{4(\Delta-1)\log 2n}$ cycles disjoints de longueur au plus $4(\Delta-1)\log 2n$.*

Un cas plus général est de relâcher la condition de l’indépendance des cycles. Pour un entier k fixé au préalable, soit $c_k(G)$ le nombre minimum de cycles de longueur au plus k nécessaires pour couvrir tous les sommets du graphe G . Il est alors question de borner $c_k(G)$ (supérieurement).

Dans, [100], Forge et Kouider ont borné $c_k(G)$ en fonction de δ , le degré minimum de G et de n , l’ordre de G . Ils ont montré que :

Théorème 2.29 (Forge et Kouider [100]) Soient p et k deux entiers tels que $2 \leq p \leq \frac{k}{8}$. Soit G un graphe d'ordre $n \geq \frac{2k}{3}(p-1)^2 + (p-1)$ et de degré minimum $\delta \geq \frac{n}{p} + \frac{2k}{3}$.

Alors $c_k(G) \leq \frac{3n}{k} + \frac{\log \frac{k}{3}}{-\log(1 - \frac{1}{2(p-1)^2})} + (1 - \frac{3}{k})(p-2) + 1$.

Pour construire une telle couverture, Forge et Kouider ont utilisé des cycles N -alternés, où N est un sous-ensemble de sommets de G . Un cycle C est dit N -alterné s'il ne contient pas deux sommets consécutifs appartenant à $V-N$. Dans un premier temps, ils ont montré l'existence d'un cycle N -alterné (peut être de longueur $> k$) dans le graphe considéré. Puis ils ont cassé ce cycle jusqu'à obtenir un cycle de longueur au plus k qu'ils prennent dans la couverture.

Inspirés par ce travail, nous avons borné, dans [16], $c_k(G)$ en fonction de α , la stabilité du graphe G et de son ordre n . Nos résultats sont exposés dans la section suivante.

2.3 Nombre de stabilité et couverture des sommets d'un graphe par des cycles de longueur au plus k

Soit k un entier fixé, $k \geq 3$ et soit G un graphe d'ordre $n \geq k$. Nous voulons couvrir tous les sommets de G par des cycles qui de plus sont de longueurs au plus égales à k . L'idée naturelle est la suivante :

A chaque fois que nous avons un cycle C dans G , nous testons sa longueur $l(C)$ si $l(C) \leq k$ alors nous prenons C dans la couverture sinon, nous réduisons sa longueur. Mais pour cela il faudrait que nous puissions garantir l'existence d'au moins une corde. A cette fin, nous supposons que $k \geq 2\alpha + 1$ de façon que tout cycle de longueur $> k$ admette au moins une corde.

Seulement, nous voulons un peu plus, c'est-à-dire non seulement obtenir un cycle moins long mais aussi que ce cycle ne soit pas de longueur trop petite pour qu'il ramasse le plus de sommets possible puisque notre but est d'utiliser un minimum de cycles dans une couverture de G .

Nous remarquons tout d'abord ce qui suit :

Proposition 2.1 Soit G un graphe d'ordre n et de stabilité α et soit k un entier tel que $k \geq 2\alpha + 1$. Si G possède un cycle de longueur supérieure à k alors G possède un cycle de longueur au moins $\frac{k+1}{2}$ et au plus k .

Preuve. Soit C un cycle de longueur $l(C) \geq k + 1$. Comme $k + 1 \geq 2(\alpha + 1)$ alors il existe sur C au moins $\alpha + 1$ sommets indépendants (sur C) et par conséquent au moins deux parmi ces sommets, disons x et y , sont adjacents. Comme $2 \leq d_C(x, y) \leq \frac{l(C)}{2}$, alors la corde (x, y) divise le cycle C en deux cycles plus petits C_1 et C_2 . Le plus grand des deux, disons C_1 , vérifie $\frac{l(C)}{2} \leq l(C_1) \leq l(C) - 1$. Si $l(C_1) \leq k$ alors nous avons terminé sinon, nous reprenons la même construction jusqu'à l'obtention d'un cycle C_i tel que $\frac{k+1}{2} \leq l(C_i) \leq k$.

□

Si k est encore plus grand que ce qui est supposé dans la proposition précédente alors nous pouvons espérer l'existence d'un cycle dont la longueur est bornée inférieurement par une fraction plus grande que $\frac{k+1}{2}$. En fait, il ne s'agit pas juste d'espérer mais nous le montrons. Si $k \geq 4\alpha + 3$, alors nous obtenons ce qui suit :

Proposition 2.2 *Soit G un graphe d'ordre n et de stabilité α et soit k un entier tel que $k \geq 4\alpha + 3$. Si G possède un cycle de longueur au moins $\frac{2k}{3}$, alors il possède un cycle de longueur au moins $\frac{2k}{3}$ et au plus k .*

Plus généralement, pour un entier $c \geq 2$ et pour k , tel que $k \geq 2c(\alpha + 1) - 1$, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 2.3 *Soit G un graphe d'ordre n et de stabilité α . Soient c et k deux entiers tels que $c \geq 2$ et $k \geq 2c(\alpha + 1) - 1$. Si G possède un cycle de longueur au moins $(1 - \frac{2}{3c})k$, alors G possède un cycle de longueur au moins $(1 - \frac{2}{3c})k$ et au plus k .*

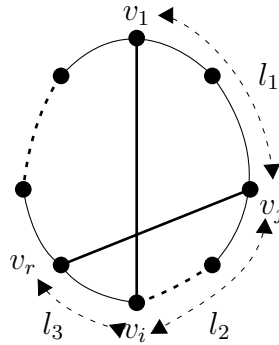
Preuve. Soit C un cycle de G de longueur $l(C) \geq (1 - \frac{2}{3c})k$.

- Si $l(C) \leq k$ alors C est le cycle voulu.
- Sinon, alors nous allons construire un cycle de longueur au moins $(1 - \frac{2}{3c})k$ et strictement inférieure à $l(C)$.

Soit O une orientation du cycle C , et soit $d_O(x, y)$ la distance sur le cycle entre les sommets x et y suivant l'orientation O . Parmi tous les sous-ensembles possibles $\{v_1, \dots, v_{\alpha+1}\}$ à $(\alpha + 1)$ sommets distincts de C tels que $d_O(v_i, v_{i+1}) = 2$ pour $1 \leq i \leq \alpha$, choisissons celui qui contient deux sommets adjacents (dans G) v_1 et v_i tels que $d_O(v_1, v_i)$ est minimum.

- Si $d_O(v_1, v_i) \leq \frac{2l(C)}{3c}$ alors le plus long des cycles générés par la corde (v_1, v_i) est celui désiré.
- Si $d_O(v_1, v_i) > \frac{2l(C)}{3c}$ alors, considérons l'ensemble $S = \{v_2, \dots, v_{\alpha+1}, v_{\alpha+2}\}$, où $d_O(v_{\alpha+1}, v_{\alpha+2}) = 2$. Soient v_j et v_r deux sommets de S , voisins dans G .

Nous avons $j < i$. En effet, si nous supposons le contraire alors, d'une part $d_O(v_j, v_r) \geq d_O(v_1, v_i) > \frac{2l(C)}{3c}$ et donc $d_O(v_1, v_{\alpha+2}) \geq d_O(v_1, v_i) + d_O(v_j, v_r) \geq \frac{4l(C)}{3c}$ et d'autre part $d_O(v_1, v_{\alpha+2}) \leq \frac{l(C)}{c}$ (puisque $l \geq 2c(\alpha+1)$). Nous obtenons, $\frac{4l(C)}{3c} \leq \frac{l(C)}{c}$ ce qui est absurde. Par conséquent, les segments $[v_1, v_i]$ et $[v_j, v_r]$ du cycle C s'intersectent en au moins deux sommets.



Posons $l_1 = d_O(v_1, v_j)$, $l_2 = d_O(v_j, v_i)$ et $l_3 = d_O(v_i, v_r)$. Nous avons : $l_1 + l_2 + l_3 \leq \frac{l(C)}{c}$ et $l_1 + 2l_2 + l_3 \geq \frac{4l(C)}{3c}$. Donc $l_2 \geq \frac{l(C)}{3c}$ et il en résulte que le cycle $C' = (v_1, v_i) \cup \overleftarrow{[v_i, v_j]} \cup (v_j, v_r) \cup \overrightarrow{[v_r, v_1]}$ est de longueur $l(C')$, telle que $l(C') \geq (1 - \frac{2}{3c})l(C)$.

Nous remarquons que $V(C') \subset V(C)$ (strictement), puisque $v_1^+ \notin V(C')$ (où v_1^+ est le successeur de v_1 sur le cycle C suivant l'orientation O) donc $l(C') < l(C)$. En réitérant la construction, nous obtenons finalement un cycle de longueur entre $(1 - \frac{2}{3c})l(C)$ et k comme désiré. □

Les deux propositions 2.1 et 2.3, peuvent fusionner en une seule. Il suffit de supposer que $c \geq 1$ et $k \geq 2c(\alpha+1) - 1$ et la conclusion devient : “ G possède un cycle de longueur au moins $\max((1 - \frac{2}{3c})k, \frac{k+1}{2})$ et au plus k ”.

Toutes les propositions précédentes sont bien intéressantes mais elles ne sont pas très utiles si nous ne pouvons pas garantir dès le départ l'existence d'un cycle dans le graphe considéré. Posá a montré dans [188], un résultat qui garantit l'existence dans un graphe

d'ordre assez grand, d'un cycle assez long. Ce résultat peut aussi être retrouvé [25]. Nous en reprenons la preuve ici pour faciliter la lecture de ce document.

Proposition 2.4 (Posa [188]) *Soit G un graphe de stabilité α , alors G possède un cycle, une arête ou un sommet dont la suppression réduit la stabilité d'au moins 1. Par conséquent G peut être couvert par au plus α cycles, arêtes ou sommets disjoints.*

Preuve. La proposition est évidente pour les graphes sans arêtes. Supposons donc que G contient au moins une arête. La preuve se fait par récurrence sur α . Si $\alpha = 1$ alors G est une clique et est donc couvrable par un seul cycle. Supposons que $\alpha \geq 2$. Soit P une plus longue chaîne dans G et soit x une des extrémités de P . Tous les voisins de x appartiennent à P sinon on pourrait rallonger P ce qui contredirait son choix.

Soit x' le voisin le plus éloigné de x sur P . Considérons l'élément H formé par le segment $[x, x']$ de la chaîne P et de l'arête (x, x') . Notons que H est soit un cycle soit une arête si x est un sommet pendant de G . Dans tous les cas, H contient x et tous ses voisins, donc le graphe $G - H$ est de stabilité $\alpha(G - H) \leq \alpha - 1$. Par l'hypothèse de récurrence, $G - H$ peut être couvert par au plus $\alpha - 1$ cycles, arêtes ou sommets disjoints et en rajoutant H nous obtenons une couverture de G par au plus α cycles, arêtes ou sommets disjoints. \square

Nous déduisons de la Proposition 2.4 que si G est d'ordre $n \geq 3\alpha$, alors G possède un cycle de longueur au moins $\frac{n}{\alpha}$. Un tel cycle serait notre point de départ pour commencer la construction décrite dans Proposition 2.3. En supposant de plus que G est 2-connecte d'un ordre assez grand alors nous réussissons à couvrir G par au plus un nombre de l'ordre de $\frac{n}{(1 - \frac{2}{3c})k}$ cycles de longueur au plus k . C'est ce que nous montrons dans le théorème suivant :

Théorème 2.30 *Soit G un graphe 2-connecte d'ordre n et de stabilité $\alpha > 1$. Soient c et k deux entiers tels que $c \geq 2$ et $k \geq 2c(\alpha + 1) - 1$. Si $n \geq \alpha(1 - \frac{2}{3c})k$, alors*

$$c_k(G) \leq \frac{n}{(1 - \frac{2}{3c})k} + \alpha \log \frac{(1 - \frac{2}{3c})k}{3} + \alpha.$$

Preuve. Soit N l'ensemble des sommets de G non encore couverts. La preuve de ce théorème est divisée en trois étapes suivant la cardinalité de N . Tant que $|N| \geq \alpha(1 - \frac{2}{3c})k$ il existe un cycle de longueur au moins $(1 - \frac{2}{3c})k$ et au plus k . Quand la cardinalité de

2.3. COUVERTURE DES SOMMETS PAR DES CYCLES DE LONGUEUR BORNÉE 41

N devient inférieure à $\alpha(1 - \frac{2}{3c})k$ nous passons à l'étape 2 puis à l'étape 3 quand $|N|$ devient strictement inférieure à 3α .

Etape 1. Tant que $|N| \geq \alpha(1 - \frac{2}{3c})k$, alors par Proposition 2.4, on a un cycle de longueur au moins $\frac{|N|}{\alpha} \geq (1 - \frac{2}{3c})k$. Si la longueur de ce cycle est supérieure strictement à k alors on la réduit en utilisant Proposition 2.3, et nous obtenons dans tous les cas un cycle qui couvre au moins $(1 - \frac{2}{3c})k$ sommets de N .

A la fin de cette étape, au plus $\frac{n}{(1 - \frac{2}{3c})k} - \alpha$ cycles seront utilisés.

A présent, nous avons $|N| < (1 - \frac{2}{3c})k\alpha$ et nous passons à l'étape suivante.

Etape 2. Tant que $|N| \geq 3\alpha$, alors par Proposition 2.4, il existe un cycle dans le graphe induit par N de longueur au moins $\frac{|N|}{\alpha}$. Par Proposition 2.3, nous savons réduire sa longueur si cette dernière dépasse k . Nous obtenons alors un cycle de longueur au moins $\frac{|N|}{\alpha}$ et au plus k . Le nombre de cycles utilisés dans cette étape est donné par le nombre i d'itérations faites jusqu'à ce que $|N|$ devienne $< 3\alpha$. Après la première iteration, il reste au plus $|N| - \frac{|N|}{\alpha} = |N|(1 - \frac{1}{\alpha})$ sommets dans N . Après i itérations, il y reste au plus $|N|(1 - \frac{1}{\alpha})^i$ sommets. Nous nous arrêtons lorsque $|N|(1 - \frac{1}{\alpha})^i$ devient plus petit que 3α . Comme $|N| < (1 - \frac{2}{3c})k\alpha$, il suffit de s'arrêter pour i satisfaisant $(1 - \frac{2}{3c})k\alpha(1 - \frac{1}{\alpha})^i \leq 3\alpha$.

Il s'en suit que le nombre d'itérations est au plus $\frac{\log \frac{3}{(1 - \frac{2}{3c})k}}{\log(1 - \frac{1}{\alpha})} \leq \alpha \log \frac{(1 - \frac{2}{3c})k}{3}$, puisque

$$\log(1 - \frac{1}{\alpha}) < -\frac{1}{\alpha}.$$

A la fin de l'étape 2, nous avons $|N| < 3\alpha$.

Etape 3. Tant que $|N|$ est plus grand que α , alors on peut couvrir les sommets de N deux par deux (Proposition 2.4) et comme G est 2-connecte, alors toute arête est dans un cycle. Si la longueur de ce cycle est supérieure à k alors nous savons la réduire (Proposition 2.3). Ainsi, nous obtenons au plus α cycles supplémentaires dans la couverture.

Quand $|N|$ devient au plus égal à α nous couvrons les sommets un à un et pour les raisons mentionnées ci-dessus, nous obtenons au plus α cycles supplémentaires dans la couverture. Finalement, nous avons construit une couverture G par au plus : $\frac{n}{(1 - \frac{2}{3c})k} +$

$$\alpha \log \frac{(1 - \frac{2}{3c})k}{3} + \alpha \text{ cycles de longueur au plus } k. \quad \square$$

Remarque 2.1 1. Pour que la fonction $\log(1 - \frac{1}{\alpha})$ soit définie, nous avons mis de côté le cas $\alpha = 1$. Si ce cas venait à se présenter, alors le graphe 2-connexe G serait une clique et donc il peut être couvert par au plus $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ cycles de longueur au plus k .

2. Plus généralement, en prenant juste un entier positif non nul c , la borne du Théorème 2.30 reste valable ; il suffit juste de remplacer $(1 - \frac{2}{3c})k$ par $\gamma = \max((1 - \frac{2}{3c})k, \frac{k+1}{2})$ dans ce théorème. Il est à noter que plus c est grand et plus γ et k sont proches.

Le Théorème 2.30 peut être généralisé de la manière suivante :

Théorème 2.31 Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n et de stabilité $\alpha > 1$. Soient c et k deux entiers tels que $c \geq 1$, $k \geq 2c(\alpha + 1) - 1$ et $\gamma = \max((1 - \frac{2}{3c})k, \frac{k+1}{2})$.

Si $n > \alpha\gamma$ alors $c_k(G) \leq \frac{n}{\gamma} + \alpha(1 + \log \frac{\gamma}{3})$,

Si $3\alpha < n \leq \alpha\gamma$ alors $c_k(G) \leq \alpha(2 + \log \frac{\gamma}{3})$

et si $n \leq 3\alpha$ alors $c_k(G) \leq 2\alpha$.

Preuve. La preuve du premier cas est la même que celle du Théorème 2.30.

Les preuves des deux autres cas sont assez similaires en commençant à l'Étape 2 et à l'Étape 3 respectivement dans la preuve du Théorème 2.30. \square

Considérons le graphe $G = K_n - e$, le graphe complet K_n auquel nous enlevons une arête e . Ce graphe est 2-connexe et de stabilité $\alpha > 1$. Nous avons $c_k(K_n - e) = c_k(K_n) = \lceil \frac{n}{k} \rceil$. Lorsque n et c sont assez grands, La borne $\frac{n}{(1 - \frac{2}{3c})k} + \alpha \log(\frac{(1 - \frac{2}{3c})k}{3})$ donnée par le Théorème 2.30 se rapproche de $\lceil \frac{n}{k} \rceil$.

Nous déduisons du Théorème 2.31, pour des valeurs remarquables de c , les corollaires suivants :

Corollaire 2.1 Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n et de stabilité $\alpha > 1$. Soit k un entier tel que $k \geq 2\alpha + 1$.

Si $n > \alpha(\frac{k+1}{2})$ alors $c_k(G) \leq \frac{2n}{k+1} + \alpha(1 + \log \frac{k+1}{6})$,

Si $3\alpha < n \leq \alpha(\frac{k+1}{2})$ alors $c_k(G) \leq \alpha(2 + \log \frac{k+1}{6})$

et si $n \leq 3\alpha$ alors $c_k(G) \leq 2\alpha$.

Preuve du Corollaire 2.1.

Il suffit de prendre $c = 1$ dans Théorème 2.31.

2.3. COUVERTURE DES SOMMETS PAR DES CYCLES DE LONGUEUR BORNÉE 43

Corollaire 2.2 *Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n et de stabilité α et k un entier tel que $\frac{(k+1)}{2(\alpha+1)} \geq 2$. Alors*

$$c_k(G) \leq \frac{n}{k - \frac{4}{3}(\alpha+1)} + \alpha(\log \frac{k}{3} + 1) \text{ si } n > \alpha(k - \frac{4}{3}(\alpha+1)),$$

$$c_k(G) \leq \alpha(2 + \log \frac{k}{3}) \text{ si } 3\alpha \leq n \leq \alpha(k - \frac{4}{3}(\alpha+1))$$

et $c_k(G) \leq 2\alpha$ si $n \leq 3\alpha$.

Preuve du Corollaire 2.2.

Dans le cas où $n > \alpha(k - \frac{4}{3}(\alpha+1))$, comme $c \geq 2$ alors $\gamma = (1 - \frac{2}{3c})k$ et comme $c \geq \frac{(k+1)}{2(\alpha+1)}$ alors $\gamma \geq (1 - \frac{4(\alpha+1)}{3(k+1)})k \geq k - \frac{4}{3}(\alpha+1)$. Par ailleurs, $(1 - \frac{2}{3c})k \leq \frac{k}{3}$.

Il en découle la première inégalité dans le Corollaire 2.2.

Remarque 2.2 *Dans ce qui précède, nous avons montré que lorsque $k \geq 2c(\alpha+1) - 1$, si nous avons un cycle de longueur au moins $k+1$ alors nous pouvons construire un cycle de longueur au plus k et au moins $(1 - \frac{2}{3c})k$.*

Nous pouvons aussi montrer une légère amélioration de la borne inférieure comme suit :

“Soient c' et k deux entiers tels que $c' \geq 3$ et $k \geq c'(\alpha+1) - 1$. Si G contient un cycle de longueur au moins $(1 - \frac{4}{3c'})k$ alors il contient un cycle de longueur entre $(1 - \frac{4}{3c'})k$ et k ”.

La preuve se fait en utilisant les mêmes techniques que celles utilisées dans Proposition 2.3. En fait, l'amélioration n'est apportée que dans le cas où c' est impair (lorsque $c' = 2c$, nous obtenons exactement Proposition 2.3).

Chapitre 3

Pseudo 2-facteurs

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré, comme son titre l'indique, à l'étude des pseudo 2-facteurs. Notre travail a été inspiré par un article de Niessen ([180]) sur les facteurs réguliers. C'est pour cela d'une part, que nous avons choisi de commencer ce chapitre par un tour d'horizon des résultats existant sur les facteurs, en tant que cas particuliers des pseudo-facteurs. D'autre part, devant l'importance sans cesse croissante de ce domaine, nous ne pouvions passer sans nous arrêter un temps sur ce concept fondamental en théorie des graphes. La section suivante est une brève revue de la littérature sur les facteurs. Cette revue n'a pas la prétention d'être exhaustive dans un domaine où les surveys ne manquent pas. Akiyama et Kano ont écrit un premier survey sur les facteurs [3] puis un livre plus de vingt ans après [4]. Plummer a rassemblé les résultats parus entre 1985 et 2003 dans [187]. Kouider et Vestergaard [150] ont donné une revue des travaux sur les facteurs connexes. Les résultats cités dans le chapitre 2 concernant l'existence de cycles disjoints couvrant tous les sommets de G , i.e. un 2-facteur, ne seront pas répétés dans cette revue. Avant d'aborder l'étude des pseudo 2-facteurs, nous commencerons aussi par présenter une revue sur cette notion. Dans la dernière section de ce chapitre, nous exposerons nos travaux sur les pseudo 2-facteurs.

3.2 Une brève revue sur les facteurs

L'un des premiers résultats en théorie des graphes est celui de Petersen sur les facteurs qui remonte au 19^{ème} siècle ([185]). Petersen avait montré que *“Tout graphe 2-connexe 3-*

régulier a un 1-facteur”. Sont venus ensuite les théorèmes de Hall et König qui ont donné des résultats de base sur l’existence de 1-facteurs dans les graphes bipartis [118, 147]. Quelques années plus tard ont été publiés les théorèmes de Tutte qui ont marqué un tournant dans ce domaine. Ces chercheurs ont en quelque sorte posé les jalons d’une discipline qui, depuis, n’a pas arrêté de gagner de l’importance en théorie des graphes.

C’est en 1947, que Tutte a publié ([204]) son fameux théorème sur les 1-facteurs : “*Un graphe a un 1-facteur si et seulement si pour n’importe quel sous-ensemble S de sommets, $G - S$ possède au plus $|S|$ composantes d’ordre impair*”. De ce dernier, dérivent deux théorèmes fondamentaux qui sont une base à moult travaux sur les facteurs ([207]). Ces deux théorèmes sont des conditions nécessaires et suffisantes pour l’existence de facteurs dans un graphe (f -facteurs et (g, f) -facteurs respectivement), Le premier est le théorème de Tutte qu’il a établi en 1952 [203] et duquel il a donné une preuve plus simple en 1954 en utilisant les 1-facteurs [204].

Théorème 3.1 (Tutte [203]) (The f -factor Theorem) *Soit G un graphe et $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$. Alors G possède un f -facteur si et seulement si pour toute paire de sous-ensembles disjoints S et T de $V(G)$,*

$$\delta(S, T) = \sum_{x \in S} f(x) + \sum_{x \in T} (d_G(x) - f(x)) - e_G(S, T) - q(S, T) \geq 0$$

où $q(S, T)$ est le nombre de composantes connexes C de $G - (S \cup T)$ telles que $\sum_{x \in C} f(x) + e_G(C, T) \equiv 1 \pmod{2}$ et $e_G(C, T)$ est le nombre d’arêtes entre C et T .

Les composantes connexes C de $G - (S \cup T)$ vérifiant $\sum_{x \in C} f(x) + e_G(C, T) \equiv 1 \pmod{2}$ sont appelées *f -composantes impaires* de $G - (S \cup T)$ (f -odd components of $G - (S \cup T)$).

Si $\delta(S, T) < 0$ alors la paire (S, T) est appelé “ f -barrière” ou “ f -paire de Tutte”. Le Théorème 3.1 affirme donc qu’un graphe G a ou bien un f -facteur ou bien une paire de Tutte mais pas les deux en même temps.

Le deuxième théorème connu sous le nom de “the (g, f) -factor theorem” donne aussi une condition nécessaire et suffisante cette fois pour qu’un graphe admette un (g, f) -facteur. Ce résultat a été obtenu par Lovász en 1970 [166]. La preuve originale est longue et difficile mais en 1981, Tutte a proposé dans [207] une preuve courte et élégante. Le théorème est le suivant :

Théorème 3.2 (Lovasz [166]) (The (g, f) -factor Theorem) *Soit G un graphe et $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ deux fonctions telles que $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in V(G)$. Alors G*

a un (g, f) -facteur si et seulement si pour toute paire de sous-ensembles disjoints S et T de $V(G)$

$$\gamma(S, T) = \sum_{x \in S} f(x) + \sum_{x \in T} (d_G(x) - g(x)) - e_G(S, T) - q^*(S, T) \geq 0$$

où $q^*(S, T)$ est le nombre de composantes C de $G - (S \cup T)$ telles que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in V(G)$ et $\sum_{x \in V(C)} f(x) + e_G(C, T) \equiv 1 \pmod{2}$

Les deux théorèmes 3.1 et 3.2 bien que difficiles à appliquer, ont permis de prouver beaucoup de conditions suffisantes simples pour l'existence de facteurs. En effet, la contraposée de l'implication réciproque dans ces deux théorèmes apparaît dans un grand nombre de preuves. Le schéma est le suivant : nous voulons montrer que G possède un f -facteur (respectivement un (g, f) -facteur). Nous supposons le contraire. En utilisant le Théorème 3.1 (respectivement le Théorème 3.2), nous déduisons qu'il existe deux sous-ensembles de $V(G)$ disjoints S et T tels que $\delta(S, T) = \sum_{x \in S} f(x) + \sum_{x \in T} (d_G(x) - f(x)) - e_G(S, T) - q(S, T) \leq -1$ (respectivement $\gamma(S, T) = \sum_{x \in S} f(x) + \sum_{x \in T} (d_G(x) - g(x)) - e_G(S, T) - q^*(S, T) \leq -1$). Ensuite, il faut faire un choix judicieux de la paire de Tutte (S, T) . Sous certaines conditions une paire de Tutte peut être transformée en une autre en transférant un sommet entre deux ensembles parmi $\{S, T, G - (S \cup T)\}$: c'est le principe de transfert décrit par Tutte dans [205, 206]. Pour les paires de Tutte, deux choix sont fréquemment utilisés et sont une conséquence du principe de transfert (ces choix ont été faits en premier par Katerinis [141], Katerinis et Woodall [142] et par Enomoto et al. [79], respectivement). Une paire de Tutte (S, T) est minimale si $\delta(S, T') \geq 0$ pour tout sous-ensemble propre T' de T . Souvent, la paire de Tutte choisie est minimale mais d'autres conditions sont parfois exigées comme la minimalité de $|T| - |S|$.

3.2.1 Existence de facteurs réguliers

Le schéma de preuve décrit ci-haut est utilisé dans plusieurs des résultats que nous citons ci-après. A commencer par le résultat de Lida et Nishimura ([164]) qui montrent que la condition d'Ore sur les degrés garantit l'existence de facteurs réguliers même si $k \neq 2$.

Théorème 3.3 (Lida et Nishimura [164]) *Soit k un entier positif et soit G un graphe d'ordre n avec $n \geq 4k - 5$, kn pair, et de degré minimum $\delta \geq k$. Alors G a un k -facteur*

si la somme des degrés pour toute paire de sommets non-adjacents est au moins égale à n .

Le Théorème 3.3 améliore aussi la condition sur le degré minimum donnée par Katerinis [141] et Egawa et Enomoto[71]. Le Théorème 3.3 a été étendu par Nishimura dans [182], de la façon suivante :

Théorème 3.4 (Nishimura [182]) *Soit k un entier tel que $k \geq 3$ et soit G un graphe connexe d'ordre n avec $n \geq 4k - 3$, kn pair, et de degré minimum $\delta \geq k$. Supposons que $\max\{d_G(x), d_G(y)\} \geq \frac{n}{2}$ pour toute paire de sommets non-adjacents x, y de $V(G)$. Alors G a un k -facteur.*

Nishimura a conjecturé dans [182] qu'on pouvait aussi généraliser le Théorème 3.4, en se restreignant aux sommets à distance 2 (condition de type Fan [88]). Cette conjecture a été prouvée par Niessen [181] dans le théorème suivant :

Théorème 3.5 (Niessen [181]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k$ où k est un entier positif, kn pair et $n \geq 8k^2 + 12k + 6$. Si toute paire de sommets à distance 2 dans G vérifie $\max\{d_G(u), d_G(v)\} \geq \frac{n}{2}$ alors G a un k -facteur.*

Dans [180], Niessen a donné une condition suffisante pour l'existence de facteurs réguliers dans un graphe G , en utilisant le degré minimum et la satbilité de G . Tout d'abord pour les 2-facteurs, il a montré le théorème suivant :

Théorème 3.6 (Niessen [180]) *Soit G un graphe tel que $\delta > \alpha$, alors G a un 2-facteur.*

Ensuite pour les k -facteurs ($k \geq 3$), Niessen a distingué deux cas suivant la parité de k . Dans le cas k impair, plus de conditions ont dû être posées. Une condition évidente sur la parité de l'ordre de G puisqu'il ne peut exister de k -facteur dans un graphe d'ordre impair si k est impair et une autre condition moins évidente.

Théorème 3.7 (Niessen [180]) – *Soit k un entier pair tel que $k \geq 4$ et soit G un graphe d'ordre au moins $k + 1$. Si $\delta > \frac{k+2}{4}\alpha + \frac{5k-3}{8} - \frac{2}{k}$ alors G admet un k -facteur.*

– *Soit $k \geq 3$ et l deux entiers impairs avec $1 \leq l \leq k$ et soit G un graphe d'ordre n pair et $n \geq k + 1$ tel que G possède un l -facteur. Si $\delta > \frac{(k+1)^2}{4k}\alpha + \frac{5k-4}{8} - \frac{2}{k}$, alors G possède un k -facteur.*

Les conditions sur les degré pour l'existence de facteurs, combien même très étudiées ne sont pas les seules. Des conditions suffisantes faisant intervenir la toughness ont été établies pour l'existence de facteurs réguliers. Enomoto et al. ont montré dans [79] une conjecture qui avait été posée des années auparavant par Chvatal dans [43] et qui dit que la toughness est suffisante pour l'existence de facteurs réguliers.

Théorème 3.8 (Enomoto et al. [79]) *Soit G un graphe k -tough d'ordre $n \geq k+1$ avec kn pair. Alors G possède un k -facteur.*

De plus dans le même papier, Enomoto et al. ont montré qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, des graphes $(k - \varepsilon)$ -tough d'ordre n avec nk pair et sans k -facteur. Ce théorème a été généralisé pour les $[a, b]$ -facteurs par Katerinis dans [143].

Johann a étudié la structure des graphes possédant un et un seul k -facteur. Elle a donné, dans [131] des bornes au nombre $m(n, k)$ maximal d'arêtes dans un graphe d'ordre n avec un unique k -facteur. Elle a aussi déterminé les graphes extremaux ayant cette propriété.

Certains auteurs se sont intéressés à l'étude de l'existence de facteurs contenant des éléments précis du graphe. En particulier : l'existence de facteurs réguliers contenant un cycle hamiltonien donné dans un graphe hamiltonien. C'est ce qu'a fait Matsuda dans [175]. Il a donné une condition de type Ore pour l'existence d'un k -facteur passant par un cycle hamiltonien. Gao et al. ont montré dans [106], que pour un graphe hamiltonien d'ordre assez grand, une condition sur les degrés légèrement plus faible que celle du théorème de Matsuda ([175]) pouvait garantir l'existence d'un k -facteur contenant un cycle hamiltonien donné si les arêtes de ce dernier ne sont pas un déconnectant. Leur résultat est le suivant :

Théorème 3.9 (Gao et al. [106]) *Soit $k \geq 2$ un entier et soit G un graphe d'ordre $n > 12(k-2)^2 + 2(5-\alpha)(k-2) - \alpha$. Supposons que kn est pair, $\delta \geq k$ et $\max(d_G(x), d_G(y)) \geq \frac{n+\alpha}{2}$ pour toute paire de sommets non adjacents x et y , avec $\alpha = 3$ si k est impair et $\alpha = 4$ si k est pair. Alors G contient un k -facteur contenant un cycle hamiltonien C si $G - E(C)$ est connexe.*

Tout naturellement, l'étude de l'existence de facteurs dans des classes particulières de graphes dans le but d'améliorer les résultats existants pour des graphes quelconques a été abordée. Egawa et Ota, se sont intéressés dans [69] aux graphes sans étoile et ont donné une condition sur le degré minimum pour l'existence de facteurs réguliers.

Théorème 3.10 (Egawa et Ota [69]) Soit r ($r \geq 3$) et k deux entiers positifs. Si k est impair alors supposons que $k \geq r - 1$. Soit G un graphe connexe sans $K_{1,r}$ d'ordre n , avec kn pair et tel que $\delta \geq \frac{r^2}{4(r-1)}k + \frac{3r-6}{2} + \frac{r-1}{4k}$. Alors G possède un k -facteur.

Les auteurs ont montré que la condition $k \geq r - 1$ ne peut être enlevée si k est impair. Ils ont construit, pour des entiers positifs k et r tels que $r \geq 4$ et $k < r - 1$, des exemples de graphes sans $K_{1,r}$, d'ordre pair de degré minimum au moins p (pour tout entier positif p) et sans k -facteur.

3.2.2 Existence de (g, f) -facteurs

Les $[a, b]$ -facteurs étant une généralisation des k -facteurs alors naturellement, plusieurs résultats sur les facteurs réguliers ont été généralisés aux $[a, b]$ -facteurs. Li et Cai [163] ont généralisé le Théorème 3.4 comme suit :

Théorème 3.11 (Li et Cai [163]) Soit G un graphe d'ordre n et soient a et b deux entiers tels que $1 \leq a < b$. Alors G possède un $[a, b]$ -facteur si $\delta \geq a$, $n \geq 2a + b + \frac{a(a-1)}{b}$ et $\max\{d_G(x), d_G(y)\} \geq \frac{an}{a+b}$ pour toute paire de sommets non-adjacents x et y .

Dans [169], Matsuda a généralisé le Théorème 3.11 en utilisant les voisinages. Il a montré ce qui suit :

Théorème 3.12 (Matsuda [169]) Soient a et b deux entiers tels que $1 \leq a < b$ et soit G un graphe d'ordre $n \geq \frac{2(a+b)(a+b-1)}{b}$ et de degré minimum $\delta \geq a$. Si $|N_G(x) \cup N_G(y)| \geq \frac{an}{a+b}$ pour toute paire de sommets non-adjacents x et y , alors G possède un $[a, b]$ -facteur.

Dans [173], Matsuda a donné une condition de type Fan pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur.

Théorème 3.13 (Matsuda [173]) Soient a et b deux entiers tels que $1 \leq a < b$. Soit G un graphe d'ordre $n \geq \frac{(a-1)(a+1)(a+b)(a+b-1)}{a(b-1)} - \frac{(a+b)(ab+b-1)}{ab(b-1)}$. Supposons que $\delta \geq a$ et $\max\{d_G(x), d_G(y)\} \geq \frac{an}{a+b}$ pour toute paire de sommets x et y avec $d_G(x, y) = 2$. Alors G a un $[a, b]$ -facteur.

Dans [72], Egawa et Kano ont donné une condition suffisante pour l'existence d'un (g, f) -facteur :

Théorème 3.14 (Egawa et Kano [72]) *Soit G un graphe et $g, f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ deux fonctions telles que $g(v) \leq d_G(v)$, $0 \leq f(v)$ et $g(v) < f(v)$ pour tout $v \in V(G)$. Si $\frac{g(x)}{d_G(x)} \leq \frac{f(y)}{d_G(y)}$ pour toute paire de voisins x et y alors G a un (g, f) -facteur*

Matsuda a considéré les graphes hamiltoniens et a étudié l'existence d'un facteur contenant un cycle hamiltonien donné. En fait, dans son papier [170], Matsuda a d'abord donné, une condition sur les degrés pour l'existence dans un graphe hamiltonien, d'un $[a, b]$ -facteur arête-disjoint d'un cycle hamiltonien donné. Il en a ensuite déduit ce qui suit :

Théorème 3.15 (Matsuda [170]) *Soient a et b deux entiers tels que $2 \leq a < b$ et soit G un graphe hamiltonien d'ordre $n \geq \frac{(a+b-4)(2a+b-6)}{(b-2)}$. Supposons que $\delta(G) \geq a$ et $\max\{d_G(x), d_G(y)\} \geq \frac{(a-2)n}{a+b-4} + 2$ pour toute paire de sommets non adjacents x et y . Alors G a un $[a, b]$ -facteur contenant un cycle hamiltonien donné.*

Existence de $[a, b]$ -facteurs connexes

Les facteurs dont l'existence est garantie par les théorèmes précédents ne sont pas forcément connexes. Le problème qui consiste à déterminer si un graphe possède un (g, f) -facteur connexe est NP-complet [107]. Il est bien connu que ce problème reste NP-complet même pour $g \equiv f \equiv 2$: un 2-facteur connexe étant un cycle hamiltonien.

Hamiltonicité et existence de facteurs sont des problèmes proches. Le schéma ci-après résume la relation entre hamiltonicité, facteur et facteur 2-arête-connexe (la relation inclusion est de haut en bas).

Aucune condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un (g, f) -facteur connexe n'est connue, mais des efforts ne cessent d'être déployés pour trouver des conditions suffisantes. Beaucoup des conditions suffisantes obtenues sont des conditions faisant intervenir les degrés. Le survey [150] est justement dédié aux facteurs connexes, nous ne citons ici que quelques résultats à titre d'exemple.

Dans [149], Kouider et Mahéo ont donné une condition suffisante sur le degré minimum pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur connexe dans un graphe.

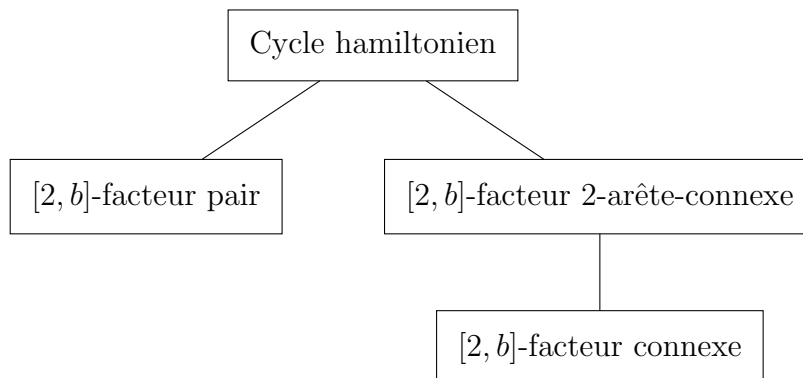


FIGURE 3.1 – Hiérarchie de quelques graphes partiels

Théorème 3.16 (Kouider et Mahéo [149]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum δ . Soient a et b deux entiers tels que $2a \leq b$. Supposons que $n \geq \frac{(a+b)(a+b-1)}{b}$ et $\delta \geq \frac{n}{1 + \lfloor \frac{b}{a} \rfloor}$. Alors G a un $[a, b]$ -facteur connexe.*

La condition sur δ ne peut être améliorée si a divise b . Dans [154], Kouider et Lonc ont établi une condition suffisante sur le nombre de stabilité pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur connexe dans un graphe κ -connexe. La condition sur le degré est faible puisque nous avons $\delta > \kappa$ en général.

Théorème 3.17 (Kouider et Lonc [154]) *Soit G un graphe κ -connexe, $a \geq 2$, $b \geq a + 3$ et $(a, b) \neq (2, 5), (2, 7), (3, 6), (4, 7)$. Si $\delta \geq \frac{10(a+1)\kappa}{9(a-1)} + a$ et $\alpha \leq \frac{4\kappa b}{(a+1)^2}$ si a est impair et $\alpha \leq \frac{4\kappa b}{a(a+2)}$ si a est pair alors G possède un $[a, b]$ -facteur connexe.*

Dans [136], Kano a annoncé une condition de type Ore pour l'existence d'un $[2, b]$ -facteur connexe : “Soit $b \geq 3$ un entier. Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq b + 3$ satisfaisant $\sigma_2(G) \geq \frac{4n}{2+b}$, alors G a un $[2, b]$ -facteur connexe.” Cependant, la preuve de ce résultat n'a jamais été publiée.

Dans [148], Kouider et Mahéo ont obtenu un résultat sur l'existence d'un facteur 2-arête-connexe dans un graphe 2-arête-connexe. Leur résultat est une extension naturelle du théorème d'Ore sur l'existence d'un cycle hamiltonien qui est un 2-facteur 2-arête-connexe.

Théorème 3.18 (Kouider et Mahéo [148]) *Soit $b \geq 2$ un entier. Si G est un graphe 2-arête-connexe d'ordre $n \geq b + 3$ avec $\sigma_2(G) \geq \frac{4n}{2+b}$, alors G a un $[2, 2\lceil \frac{b}{2} \rceil]$ -facteur 2-arête-connexe.*

Dans [171], Matsuda a obtenu une généralisation du Théorème 3.18 pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur 2-arête-connexe.

Théorème 3.19 (Matsuda [171]) *Soient a et t deux entiers tels que $a \geq 2$ et $t \geq 2$. Supposons que G est un graphe 2-arête-connexe d'ordre $n \geq 2(t+1)((a-2)t+a) + t - 1$ et de degré minimum $\delta \geq a$. Alors G possède un $[a, at]$ -facteur 2-arête-connexe si $\sigma_2(G) \geq \frac{2n}{1+t}$.*

Dans la classe des graphes sans griffe, Li et al. ont montré dans [161] qu'une condition sur l'arête connexité uniquement suffisait pour garantir l'existence d'un facteur connexe. Plus précisément, ils ont montré que tout graphe 4-arête-connexe sans griffe contient un $[2, 4]$ -facteur connexe.

3.2.3 Existence de facteurs de parité fixée

Une variante de facteurs est celle où une condition sur la parité des degrés est posée. Il est question de facteurs pairs ou de facteurs impairs selon que les degrés des sommets dans le facteur sont supposés pairs ou impairs. Dans [199], Topp et Vestergaard ont discuté plusieurs conditions pour l'existence de $(1, f)$ -facteurs impairs (voir aussi [137]). Un sous-graphe H de G est dit $(1, f)$ -sous-graphe impair si $d_H(x) \in \{1, 3, \dots, f(x)\}$ pour tout $x \in V(H)$, si $V(H) = V(G)$ alors H est un $(1, f)$ -facteur. Dans [138], Kano et Katona ont montré que les $(1, f)$ -sous-graphes impairs ont des propriétés similaires à celles des couplages et dans [139] ils ont étudié la structure de tels sous-graphes et ont proposé des algorithmes polynomiaux pour trouver un $(1, f)$ -sous-graphe impair.

Les résultats ne manquent pas concernant les facteurs pairs. Dans [151], Kouider et Vestergaard ont montré ce qui suit :

Théorème 3.20 (Kouider et Vestergaard [151]) *Soit $b \geq 2$ un entier pair. Si G est un graphe 2-arête-connexe avec $\delta \geq \max\{\frac{2n}{2+b}, 3\}$ alors G a un $[2, b]$ -facteur pair.*

Dans [172], Matsuda a amélioré le Théorème 3.20 en donnant des conditions de type Ore pour l'existence d'un $[2, b]$ -facteur pair, des conditions différentes suivant l'ordre de G . Matsuda a aussi montré que les bornes inférieures qu'il a données sur $\sigma_2(G)$ sont les meilleures possibles et que l'hypothèse de la 2-arête connexité de G est indispensable.

Théorème 3.21 (Matsuda [172]) – Soit $b \geq 2$ un entier pair et soit G un graphe 2-arête-connexe d'ordre $n \geq 3 + b$. Si $\sigma_2(G) \geq \frac{4n}{2+b}$, alors G a un $[2, b]$ -facteur pair.

– Soit $b \geq 2$ un entier pair et soit G un graphe 2-arête-connexe d'ordre $n \leq 2 + b$. Si $\sigma_2(G) \geq 5$, alors G a un $[2, b]$ -facteur pair.

Dans [151], Kouider et Vestergaard avaient conjecturé que la condition $\sigma_2(G) \geq \max\{\frac{4n}{2+b}, 6\}$ sur les degrés serait suffisante pour l'existence d'un $[2, b]$ -facteur pair. Matsuda déduit du Théorème 3.21, que la condition est $\sigma_2(G) \geq \max\{\frac{4n}{2+b}, 5\}$.

Dans [152], Kouider et Vestergaard ont obtenu des conditions suffisantes pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur pair. Ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 3.22 (Kouider et Vestergaard [152]) Soit $a \geq 4$ un entier et soit G un graphe d'ordre $n \geq \frac{(a+b)^2}{b}$.

– Si G est 2-arête-connexe avec $\delta \geq \frac{an}{a+b} + \frac{a}{2}$ alors G a un $[a, b]$ -facteur pair.

– Si G est k -arête-connexe avec $k \geq a + \min\{\sqrt{a}, \frac{b}{a}\}$ et $\delta \geq \frac{an}{2+b}$ alors G a un $[a, b]$ -facteur pair.

Dans le même papier Kouider et Vestergaard ont obtenu une caractérisation des graphes complets bipartis qui ont un $[2, b]$ -facteur pair. Dans [146], Khodar et Xu ont posé une condition légèrement plus faible sur l'arête connectivité (par rapport à celle du Théorème 3.22), mais en contre-partie, ils ont dû poser une condition légèrement plus forte sur le degré minimum pour l'existence d'un $[a, b]$ -facteur pair. Ils ont par ailleurs caractérisé les graphes bipartis complets qui ont un $[a, b]$ -facteur impair et ceux qui ont un $[a, b]$ -facteur pair. Le résultat principal de leur papier est le suivant :

Théorème 3.23 (Khodar et Xu [146]) Soient $a, b \geq 2$ deux entiers pairs et soit G un graphe a -arête-connexe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq \max\{a + 1, \frac{an}{a+b} + a - 2\}$. Alors G possède un $[a, b]$ -facteur pair.

Xiong et al. ont étudié la structure des facteurs pairs dans les graphes sans $K_{1,3}$. Dans [119], ils ont donné une borne (atteinte) aux nombre de composantes dans un facteur pair dans un graphe sans $K_{1,3}$.

Théorème 3.24 (Xiong et al. [119]) Tout graphe sans $K_{1,3}$ d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 3$ possède un facteur pair avec au plus $\max\{1, \lfloor \frac{2n-2}{7} \rfloor\}$ composantes.

3.2.4 Existence de $\{G_1, \dots, G_k\}$ -facteurs

Les facteurs peuvent être définis de façon à ce que chaque composante soit décrite par une propriété autre que sur les degrés. Soit $\{G_1, \dots, G_k\}$ un ensemble de k graphes. Le graphe G possède un $\{G_1, \dots, G_k\}$ -facteur si G a un facteur dont chaque composante est isomorphe à un des graphes G_i , pour $1 \leq i \leq k$. Ces composantes peuvent être des graphes quelconques ou des graphes plus ou moins connus comme l'étoile $K_{1,r}$ ou la chaîne P_r . Les facteurs-chaînes (path-factors) sont les facteurs dont chaque composante est isomorphe à une chaîne. Les facteurs complets (complete-factors) sont les facteurs dont chaque composante est un graphe complet.

Dans [132], Johansson a donné une condition suffisante pour l'existence d'un facteur-chaîne; sa condition est similaire à celle proposée dans la conjecture d'El-Zahar (Conjecture 2.1) citée dans le Chapitre 2. Johansson a montré ce qui suit :

Théorème 3.25 (Johansson [132]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et supposons $n = n_1 + \dots + n_k$ où les n_i sont des entiers tels que $n_i \geq 2$. Si G est de degré minimum $\delta \geq \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor$ alors G a un facteur qui consiste en k chaînes d'ordres n_1, \dots, n_k .*

Dans [83], Enomoto et Ota ont considéré un problème similaire où non seulement les longueurs mais aussi une extrémité de chaque chaîne est spécifiée. Ils ont posé la conjecture suivante qu'ils ont montré dans les cas où presque tous les a_i sont au plus égaux à 5 (au moins $k - 2$ des a_i) et les cas où k est au plus égal à 3.

Conjecture 3.1 (Enomoto et Ota [83]) *Soit G un graphe d'ordre n et a_1, \dots, a_k des entiers positifs tels que $n = a_1 + \dots + a_k$. Si $\sigma_2(G) \geq n + k - 1$, alors pour tout ensemble de k sommets distincts v_1, \dots, v_k dans G , il existe k chaînes disjointes P_1, \dots, P_k telles que $|V(P_i)| = a_i$ et v_i est une extrémité de P_i pour $1 \leq i \leq k$.*

Dans [140], Kaneko a donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un facteur-chaîne dont chaque composante est une chaîne de longueur au moins 2. Un tel facteur est noté $P_{\geq 3}$ -facteur. Kaneko a défini $c_S(G)$ comme étant le nombre de composantes soleils du graphe G . Soit R un graphe facteur-critique d'ordre au moins 3, i.e pour tout sommet $x \in V(R)$, $R - x$ possède un 1-facteur (couplage parfait). Posons $V(R) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ajoutons de nouveaux sommets $\{v_1, \dots, v_n\}$ à R et pour chaque i , une arête reliant x_i à v_i . Le graphe obtenu est appelé *soleil*. Les graphes soleils sont K_1 , K_2 ou les graphes obtenus comme décrit précédemment. La figure suivante représente le plus petit soleil qui n'est ni K_1 ni K_2 . Le résultat principal de Kaneko est le suivant :

Théorème 3.26 (Kaneko [140]) *Un graphe G a un $P_{\geq 3}$ -facteur si et seulement si $c_S(G-S) \leq 2|S|$ pour tout sous-ensemble S de $V(G)$.*

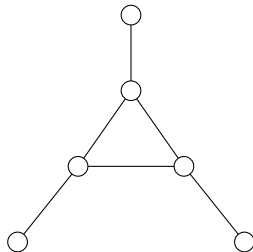


FIGURE 3.2 – Le plus petit soleil qui n'est pas K_1 ni K_2

Soit G un graphe et H un graphe d'ordre $|V(H)|$ diviseur de $n = |V(G)|$. Il est dit que G possède un H -facteur si G contient p copies disjointes de H (où $p = \frac{n}{|V(H)|}$). Beaucoup d'études se sont portées sur la recherche de conditions sur les degrés pour l'existence d'un H -facteur dans un graphe G . Le cas où $H = P_k$ est résolu par le Théorème 3.25. Pour $H = C_k$ ($k \geq 4$), un cas spécial de la conjecture d'El-Zahar prédit que $\delta(G) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil \frac{n}{k}$ suffit pour l'existence d'un C_k -facteur. C'est ce qu'a prouvé Abassi ([1]) pour n assez grand. Pour $H = K_k$ ($k \geq 2$), Hajnal et Szemerédi ([117]) ont montré que si $\delta(G) \geq \frac{k-1}{k}n$ alors G a un K_k -facteur (pour $k = 3$ voir [45]).

Recemment, Egawa et al. ont étudié l'existence de $K_{1,3}$ -facteurs dans un graphe. Ils ont montré dans [77], ce qui suit :

Théorème 3.27 (Egawa et al. [77]) *Soit k un entier positif. Soit G un graphe d'ordre $4k$ et de degré minimum $\delta \geq 2k$. Alors G possède k copies disjointes de $K_{1,3}$, à moins que G soit isomorphe à $K_{2k,2k}$ avec k impair.*

Nous trouvons dans la littérature des résultats qui suppose qu'un graphe possède un facteur complet pour monter l'existence d'un f -facteur ou d'un (g, f) -facteur (voir [82] et [162] respectivement). Nous trouvons aussi des résultats pour l'existence de facteur-chaînes dans des classes particulière de graphe, notamment les graphes sans $K_{1,3}$. Dans [7], Ando et al. ont montré :

Théorème 3.28 (Ando et al. [7]) *Soit G un graphe sans $K_{1,3}$ de degré minimum $\delta \geq d$. Alors G possède un $P_{\geq d+1}$ -facteur.*

Dans le même article, Ando et al. ont conjecturé que dans le cas 2-connexe, il existe un facteur-chaîne dans lequel chaque chaîne est de longueur au moins $3d + 2$. Dans [37], Cada a montré cette conjecture pour les graphes 2-connexe représentatifs des arêtes d'un graphe.

3.3 Pseudo 2-Facteurs

Un *pseudo* $[a, b]$ -facteur (avec a, b entiers tels que $2 \leq a \leq b$) est un graphe partiel F de G dans lequel toute composante connexe C d'ordre au moins 3 est un $[a, b]$ -graphe, c'est-à-dire $a \leq d_F(x) \leq b$ pour tout x dans C . Les pseudo $[a, b]$ -facteurs sont une généralisation des $[a, b]$ -facteurs. En particulier pour $a = b = 2$, un pseudo 2-facteur ([17]) peut être vu comme un facteur dont chaque composante est isomorphe à K_1 , K_2 ou à un cycle C_p ($p \geq 3$). Il est clair qu'un pseudo 2-facteur qui ne contient que des cycles est un 2-facteur.

Ce que nous avons appelé "pseudo 2-facteur" est parfois appelé "partition en cycles et cycles dégénérés" (dans [84]) ou simplement "partition en cycles, arêtes et sommets". Pour uniformiser la terminologie nous garderons le terme "pseudo 2-facteur".

Nous proposons dans ce qui suit un état de l'art des résultats existants dans la littérature, résultats qui garantissent l'existence d'un pseudo 2-facteur dans le graphe G tout entier ou dans un sous-graphe de G .

3.3.1 Une revue sur les pseudo 2-facteurs

L'idée d'utiliser des composantes autres que des cycles pour couvrir les sommets d'un graphe n'est pas nouvelle. Des composantes qui sont des sommets ou des arêtes ont déjà été considérées. Par exemple dans le résultat d'Enomoto et al. ([80]) dans lequel ils ont donné une condition sur les degrés pour l'existence dans un graphe 2-connexe G de cycles, arêtes ou sommets couvrant $V(G)$.

Théorème 3.29 (Enomoto et al. [80]) *Les sommets d'un graphe 2-connexe d'ordre n avec $\sigma_3(G) \geq n - 1$ peuvent être couverts par 2 cycles, arêtes ou sommets.*

Dans [191], Saito a étendu le théorème précédent en caractérisant les graphes d'ordre n avec $\sigma_3(G) \geq n - 1$ dont les sommets ne peuvent pas être couverts par 2 cycles, arêtes ou sommets.

Dans les pseudo 2-facteurs nous considérons de plus que les composantes sont disjointes. Dans cette revue, nous commençons par citer des résultats concernant l'existence d'un pseudo 2-facteur dans un sous-graphe de G (peut-être G tout entier).

Dans [8], Andreae a étudié l'existence dans un graphe donné de $k - s$ cycles disjoints et s arêtes (où k et s sont des entiers fixés). Il a déterminé les graphes extrémaux (au sens du nombre d'arêtes) d'ordre n ne contenant pas k sous-graphes indépendants consistant en l'union disjointe de $k - s$ cycles et s arêtes (pour toutes les valeurs de n, k, s , avec

$0 \leq s \leq k$, $k \geq 2$ et $n \geq 3k - s$). Dans [135], Justesen avait fait le même travail pour $s = 0, k \geq 2$ et $n > \frac{13k - 4}{4}$.

Brandt ([28]) a montré qu'une condition sur le degré minimum suffisait pour garantir qu'un graphe contienne toute forêt avec un nombre d'arêtes s fixé. Cette forêt, si elle est sans sommets isolés, peut donc être couverte par au plus s arêtes ou sommets. Son résultat est le suivant :

Théorème 3.30 (Brandt [28]) *Soit G un graphe d'ordre n et degré minimum $\delta \geq s$. Alors G contient toute forêt avec s arêtes et d'ordre au plus n .*

Schuster a donné dans [193] une généralisation commune du théorème de Corradi et Hajnal (Théorème 2.1) sur l'existence de k cycles disjoints dans un graphe (cas $s = 0$) et du résultat de Brandt cité ci-dessus (cas $k = 0$). Il a connecté les deux concepts dans le résultat suivant :

Théorème 3.31 (Shuster [193]) *Soit F une forêt avec s arêtes et sans sommets isolés et soit G un graphe d'ordre $n \geq 3k + |V(F)|$ et de degré minimum $\delta \geq 2k + s$, où k et s sont des entiers positifs. Alors G contient l'union disjointe de la forêt F et k cycles disjoints.*

Notons que ce résultat implique, en prenant $|V(F)| = n - 3k$, l'existence dans G d'un pseudo 2-facteur avec au moins k cycles (en couvrant la forêt par des arêtes ou des sommets).

Zhang et Wang ont considéré dans le cas biparti, un problème similaire à celui qu'a considéré Schuster. Dans [217], ils ont montré ce qui suit :

Théorème 3.32 (Zhang et Wang [217]) *Soient s et k deux entiers positifs tels que $s \geq 2$. Soit $F = (U_1 \cup U_2, W)$ une forêt avec $|U_1| = |U_2| = s$. Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti avec $|V_1| = |V_2| = n$. Supposons que G est de degré minimum $\delta \geq k + s$.*

- (1) *Si $n > 2k + s$, alors G contient l'union disjointe de la forêt F et de k cycles disjoints.*
- (2) *Si $n = 2k + s$, alors G contient l'union disjointe de la forêt F , $k - 1$ cycles disjoints et une chaîne d'ordre 4.*

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'existence dans un graphe d'un pseudo 2-facteur avec k composantes (k entier fixé). Dans [84], Enomoto et Li ont montré le théorème suivant qui a ensuite été généralisé par plusieurs chercheurs :

Théorème 3.33 (Enomoto et Li [84]) *Soit G un graphe d'ordre n et soit k un entier quelconque tel que $1 \leq k \leq n$. Si $\sigma_2(G) \geq n - k + 1$ alors G a un pseudo 2-facteur avec k composantes sauf si $G = C_5$ et $k = 2$.*

Récemment, Fujita ([105]) a amélioré la condition “ $\sigma_2(G) \geq n - k + 1$ ” posée dans le Théorème 3.33, en la remplaçant par la condition de Fan, sauf dans le cas $k = 1$ et le cas $k = 3$ et $G = K_1 \cup C_5$.

Certains chercheurs ont regardé de plus près les composantes d'un pseudo 2-facteurs dans un graphe. Dans [127], Hu et Li ont montré que si le graphe est supposé posséder un pseudo 2-facteur avec k composantes alors sous une condition plus faible sur la somme des degrés que celle du Théorème 3.33, il existe un pseudo 2-facteur, avec le même nombre de composantes, contenant au plus une arête et sous une condition plus faible sur le degré minimum, il existe un pseudo 2-facteur avec k composantes composé uniquement de cycles et de sommets. Plus exactement, ils ont établi qu'un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq \frac{n + 2k}{3}$ qui possède un pseudo 2-facteur avec k composantes, en possède un avec le même nombre de composantes et sans arêtes. Ce dernier résultat plus le Théorème 3.33 donnent le théorème suivant :

Théorème 3.34 (Hu et Li [127]) *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 7k - 3$ et de degré minimum $\delta \geq \frac{n - k + 1}{2}$ alors G possède un pseudo 2-facteur avec k composantes où chaque composante est un cycle ou un sommet.*

En effet, $\delta \geq \frac{n - k + 1}{2}$ implique que $\sigma_2(G) \geq n - k + 1$ ce qui entraîne l'existence d'un pseudo 2-facteur avec k composantes (par Théorème 3.33, notons que l'exception est écartée vu que $n \geq 7k - 3$). Par ailleurs, $\frac{n - k + 1}{2} \geq \frac{n + 2k}{3}$ lorsque $n \geq 7k - 3$, il s'en suit l'existence dans G d'un pseudo 2-facteurs sans arêtes avec k composantes aussi.

Plus tard, dans [128], Hu et Li ont montré le théorème suivant qui améliore les deux Théorèmes 3.33 et 3.34 lorsque $n \geq \max(k + 12, 10k - 9)$.

Théorème 3.35 (Hu et Li [128]) *Soit G un graphe d'ordre $n \geq \max(k + 12, 10k - 9)$. Si $\sigma_2(G) \geq n - k + 1$ alors G possède un pseudo 2-facteur avec k composantes tel que chaque composante est un cycle ou un sommet.*

Dans le même contexte, Fujita a montré dans [103], ce qui garantit l'existence d'un pseudo 2-facteur contenant forcément des cycles (au moins $k - r$) :

Théorème 3.36 (Fujita [103]) *Soient k, n, r trois entiers tels que $2 \leq r \leq k - 2$ et $n \geq 7k$. Soit G un graphe d'ordre n , avec $\sigma_2(G) \geq n - r$. Alors G possède un pseudo 2-facteur avec k composantes H_1, \dots, H_k , telles que H_i est un cycle ou un sommet pour $1 \leq i \leq r$ et H_i est un cycle pour $r + 1 \leq i \leq k$.*

Pour $r = 1$, Kawarabayashi (dans [145]) a amélioré la condition sur n (en prenant $n \geq 4k$ ou lieu de $n \geq 7k$).

Dans notre travail, nous nous sommes intéressées à l'étude des pseudo 2-facteurs et plus particulièrement au nombre de composantes qui sont des arêtes ou des sommets dans un pseudo 2-facteur d'un graphe G . Nous exposons nos résultats dans la section suivante.

3.3.2 Degré Minimum, Stabilité et Pseudo 2-Facteurs

Notre point de départ a été le Théorème 3.6 (paru dans [180]) dans lequel Niessen a montré que tout graphe de degré minimum δ et de stabilité α avec $\delta > \alpha$ possède un 2-facteur. Sa preuve dépend d'un cas particulier du théorème du k -facteur de Tutte. Dans le même article ([180]), Niessen s'est penché sur le cas $\alpha = \delta$ et a caractérisé les graphes sans 2-facteur de degré minimum égal à la stabilité. Il a montré que ce sont les graphes $H + \delta K_2$, où H est un graphe d'ordre $\delta - 1$. Nous vérifions facilement que les sommets d'un tel graphe peuvent être couverts par des cycles disjoints et une arête ou un sommet, et nous ne pouvons pas faire mieux.

Suite aux travaux de Niessen, nous avons voulu savoir ce qui se passait pour les graphes avec $\delta < \alpha$. Nous avons donc utilisé les pseudo 2-facteurs, pour pouvoir couvrir les sommets de tels graphes par des cycles, arêtes ou sommets disjoints lorsqu'il n'est pas possible de les couvrir par des cycles disjoints uniquement. Notre motivation était de :

“Borner le nombre de composantes qui sont des arêtes ou des sommets dans un pseudo 2-facteur d'un graphe avec $\alpha > \delta$ ”

Nous avons donc étudié la relation entre le degré minimum, la stabilité et le nombre d'arêtes ou de sommets dans un pseudo 2-facteur d'un graphe G . Notre résultat principal est le théorème suivant qui répond à la question posée et qui inclut aussi le cas $\alpha = \delta$.

Théorème 3.37 *Soit G un graphe sans sommet isolé, de degré minimum δ et de stabilité $\alpha \geq \delta$. Alors il existe un pseudo 2-facteur de G avec au plus $\alpha - \delta + 1$ composantes qui sont des arêtes ou des sommets.*

La borne donnée dans ce théorème est la meilleure possible. Il y a des familles infinies de graphes qui atteignent cette borne. En effet, les graphes $G = H + pK_2$ où $p \geq |H| + 1$ (quel que soit le graphe H) sont de degré minimum $\delta = |H| + 1 \geq 2$, de stabilité $\alpha = p$ et possèdent un pseudo 2-facteur avec exactement $\alpha - \delta + 1$ arêtes et sans sommets isolés. Il est facile de vérifier qu'il n'existe pas de pseudo 2-facteur avec moins d'arêtes ou de sommets pour de tels graphes. La figure ci dessous montre (en gras) un exemple d'un pseudo 2-facteur dans un petit graphe $G = H + 4K_2$ où $H = \{u, v\}$.

Il y a aussi des graphe de degré minimum $\delta = 1$ qui atteignent la borne donnée par le Théorème 3.37. Par exemple le graphe G obtenu en prenant un graphe H d'ordre n et un ensemble S de n sommets indépendants puis en attachant exactement un sommets de H à un sommet du stable S . Le graphe G obtenu est de stabilité $\alpha = n$ et ne possède pas de pseudo 2-facteur avec moins de n arêtes ou sommets. La figure ci dessous montre (en gras) un pseudo 2-facteur avec $\alpha = 5$ sommets dans un graphe de degré minimum $\delta = 1$.

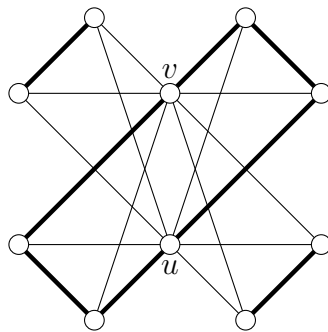


FIGURE 3.3 – Un pseudo 2-facteur dans le graphe $H + 4K_2$, où $H = \{u, v\}$

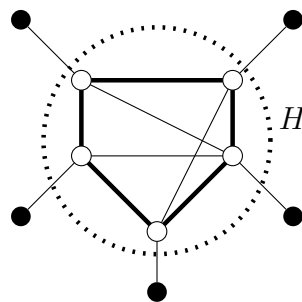


FIGURE 3.4 – Un pseudo 2-facteur dans un graphe avec des sommets pendants

Passons à présent à la preuve du Théorème 3.37.

3.3.2.1 Preuve du Théorème 3.37

Nous commençons par le cas le plus simple i.e lorsque $\delta = 1$. Dans ce cas le Théorème 3.37 est une conséquence de la Proposition 2.4 citée dans Chapitre 2. Nous rappelons cette proposition ci-dessous et invitons le lecteur à retrouver sa preuve dans le Chapitre 2.

Proposition 3.1 (Posa [188]) *Soit G un graphe de stabilité α , alors G peut être couvert par au plus α cycles, arêtes ou sommets disjoints.*

De cette proposition, il découle simplement que tout graphe de stabilité α possède un pseudo 2-facteur avec au plus α arêtes ou sommets. Ce qui est exactement, lorsque $\delta = 1$, la borne que nous proposons.

A partir de maintenant, supposons que G est tel que $\alpha \geq \delta \geq 2$. Soit \mathcal{F} une famille de cycles disjoints C_1, \dots, C_r de G . Soit F une plus petite composante connexe de $G - \bigcup_{i=1}^r C_i$, posons $W = G - (F \cup (\bigcup_{i=1}^r C_i))$ et choisissons une famille \mathcal{F} de cycles telle que :

- (a) $\alpha(G - \bigcup_{i=1}^r C_i)$ est aussi petit que possible ;
- (b) sujet à (a), r aussi petit que possible ;
- (c) sujet à (a) et (b), la composante F aussi petite que possible.

Tout d'abord, nous remarquons ce qui suit

(i) Une famille de cycles telle que définie ci-haut *existe*.

En effet comme $\delta \geq 2$, alors il existe au moins un cycle C dans le graphe G tel que $\alpha(G - C) < \alpha$. Ce cycle C peut être obtenu de la façon suivante :

Soit P une plus longue chaîne dans G et soit x l'une de ses extrémités. Par la maximalité de P , tous les voisins de x appartiennent à P . Soit x' le voisin le plus éloigné de x sur P et soit $[x, x']$ le segment de la chaîne P compris entre x et x' (x et x' inclus). Le cycle $C = [x, x'](x', x)$ contient x et tous ses voisins donc $\alpha(G - C) < \alpha$.

(ii) *Chaque composante connexe de $W \cup F$ est de degré minimum au plus 1.*

En effet, si une composante A de $W \cup F$ était de degré minimum $\delta_A \geq 2$ alors en utilisant la construction avec une plus longue chaîne décrite dans (i), nous obtenons un cycle C dans A qui vérifie $\alpha(A - C) < \alpha(A)$ donc $\alpha(G - \bigcup_{i=1}^r C_i) > \alpha(G - (\bigcup_{i=1}^r C_i \cup C))$, ce qui contredit (a) dans la définition de la famille \mathcal{F} .

(iii) Sous les conditions (a) et (b), chaque cycle C_i de la famille \mathcal{F} vérifie :

$$\alpha(W \cup F \cup C_i) > \alpha(W \cup F), \text{ pour } i = 1, \dots, r.$$

En effet, si pour un certain $k(1 \leq k \leq r)$ nous avons $\alpha(W \cup F \cup C_k) = \alpha(W \cup F)$, alors la famille \mathcal{F}' de cycles $\{C_i\}_{i \neq k}$, vérifie la condition (a) mais contient moins de cycles que \mathcal{F} , contredisant la condition (b) et donc le choix de la famille \mathcal{F} .

La dernière remarque, assure que l'ajout d'un cycle de la famille \mathcal{F} à $W \cup F$ augmente la stabilité de ce dernier d'au moins 1. Mais cette stabilité augmente-t-elle de plus si nous ajoutons plusieurs cycles de \mathcal{F} à $W \cup F$? La réponse est oui. Plus précisément, nous allons montrer que lorsque tous les cycles de la famille \mathcal{F} sont ajoutés à $W \cup F$ alors la stabilité de ce dernier augmente d'au moins $\delta - 1$. Nous prouvons le théorème suivant qui implique le Théorème 3.37.

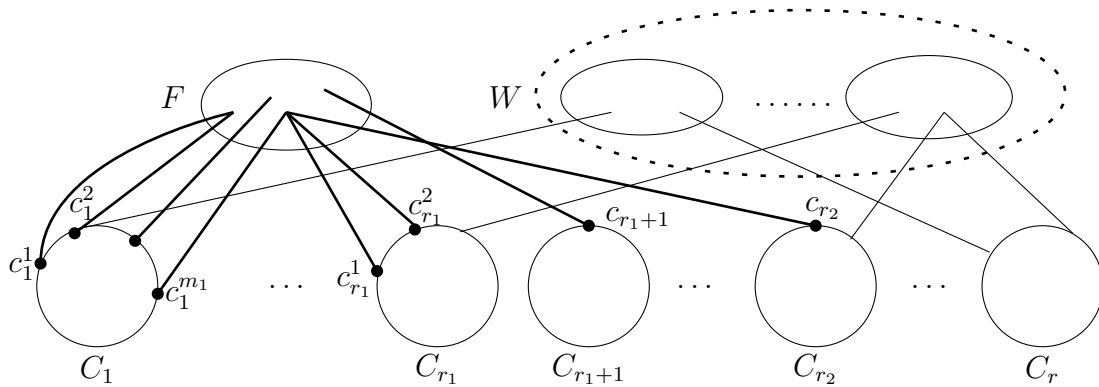
Théorème 3.38 *Soit G un graphe de degré minimum $\delta \geq 2$ et de stabilité $\alpha \geq \delta$. Alors, il existe un pseudo 2-facteur de G tel que si C_1, \dots, C_r sont les cycles de ce pseudo 2-factor alors*

$$\alpha(G - \bigcup_{i=1}^r C_i) \leq \alpha - (\delta - 1)$$

Nous décomposons la preuve du Théorème 3.38 en plusieurs lemmes, que nous plaçons à l'intérieur de la preuve de ce théorème, que voici :

Preuve. Nous avons d'abord besoin d'introduire des notations supplémentaires. Notons C_1, \dots, C_{r_1} les cycles de \mathcal{F} sur lesquels F envoie au moins deux voisins, par $C_{r_1+1}, \dots, C_{r_2}$ ceux sur lesquels F possède exactement un voisin et enfin par C_{r_2+1}, \dots, C_r ceux sur lesquels F n'a aucun voisin.

Soit c_i le voisin de F sur un cycle C_i , pour $r_1 + 1 \leq i \leq r_2$. En se fixant une orientation sur les cycles C_i , pour $i, 1 \leq i \leq r_1$, soient (dans cet ordre) $c_i^1, \dots, c_i^{m_i}$ les voisins de F , suivant ladite orientation, sur C_i .



Lemme 3.1 Soient k et l deux entiers tels que $1 \leq k \leq l \leq r_2$. Soit C' un cycle qui contient tous les voisins de F sur $C_l \cup C_k$, au moins un sommet de F , et tel que $V(C') \subset V((C_l \cup C_k) \cup F \cup W)$. Posons $W' = G - (\bigcup_{i \neq l, i \neq k} C_i \cup F \cup C')$. Alors $\alpha(W') > \alpha(W)$.

Preuve du Lemme 3.1.

Posons $F_0 = F - C'$ et soit \mathcal{F}' la famille de cycles $\{C_{i, i \neq l, i \neq k}, C'\}$.

1. Si $k \neq l$, alors \mathcal{F}' contient moins de cycles que \mathcal{F} et donc ne doit pas vérifier la condition (a) (à cause du choix de \mathcal{F}), d'où :

$$\alpha(G - (\bigcup_{i \neq l, i \neq k} C_i \cup C')) > \alpha(G - \bigcup_{i=1}^r C_i) = \alpha(W) + \alpha(F).$$

D'autre part, $\alpha(G - (\bigcup_{i \neq l, i \neq k} C_i \cup C')) = \alpha(W') + \alpha(F_0)$, puisque F n'a aucun voisin dans $(C_k \cup C_l) - C'$. Il s'en suit que $\alpha(W') > \alpha(W)$ (car $\alpha(F) \geq \alpha(F_0)$).

2. Si $k = l$, alors \mathcal{F}' et \mathcal{F} contiennent le même nombre de cycles. Deux cas peuvent se présenter.

- (a) Si $F_0 = \emptyset$, alors par la condition (a) sur la famille \mathcal{F} , nous avons

$$\alpha(W') = \alpha(G - (\bigcup_{i \neq l, i \neq k} C_i \cup C')) \geq \alpha(G - \bigcup_{i=1}^r C_i) = \alpha(W) + \alpha(F) \text{ donc } \alpha(W') \geq \alpha(W) + 1.$$

- (b) Si $F_0 \neq \emptyset$, alors la composante F_0 est plus petite que F . La famille de cycles \mathcal{F}' vérifie (b) et par conséquent ne doit pas vérifier (a), sinon on aura une contradiction avec le choix de \mathcal{F} , d'où :

$$\alpha(W') + \alpha(F_0) = \alpha(G - (\bigcup_{i \neq l, i \neq k} C_i \cup C')) > \alpha(G - \bigcup_{i=1}^r C_i) = \alpha(W) + \alpha(F). \text{ Comme } \alpha(F_0) \leq \alpha(F) \text{ alors } \alpha(W') > \alpha(W). \square$$

Soit V un intervalle (ou segment) sur un cycle C_k , pour $1 \leq k \leq r_2$. Nous dirons que l'intervalle V a la propriété Θ si et seulement si $\alpha(W \cup F \cup V) = \alpha(W \cup F)$. Deux intervalles disjoints V et V' sont dits *chaîne-indépendants* s'il n'y a aucune chaîne intérieurement disjointe de $\bigcup_{i=1}^r C_i \cup F$ reliant un sommet de V à un sommet de V' ; et t intervalles $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(t)}$ disjoints ($t \geq 3$) sont dits chaîne-indépendants s'ils sont deux à deux chaîne-indépendants. Le lemme suivant sera intensément utilisé :

Lemme 3.2 Soient $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(t)}$ ($t \geq 2$) t intervalles disjoints, ne contenant pas de voisins de F et possédant chacun la propriété Θ . Si $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(t)}$ sont chaîne-indépendants, alors $V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup \dots \cup V^{(t)}$ a la propriété Θ .

Preuve du Lemme 3.2.

Soit $H^{(i)}$ l'union des composantes connexes de W qui ont un voisin dans $V^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, t$. Comme les $V^{(i)}$ ($i = 1, \dots, t$) sont chaîne-indépendants, alors les $H^{(i)}$ sont deux

à deux disjoints. Donc $\{W - (\cup_{i=1}^t H^{(i)}), H^{(1)} \cup V^{(1)}, \dots, H^{(t)} \cup V^{(t)}\}$ forme une partition de $W \cup V^{(1)} \dots \cup V^{(t)}$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \alpha(W \cup V^{(1)} \dots \cup V^{(t)}) &= \alpha(W - (\cup_{i=1}^t H^{(i)})) + \sum_{i=1}^t \alpha(H^{(i)} \cup V^{(i)}) \\ &= \alpha(W - (\cup_{i=1}^t H^{(i)})) + \sum_{i=1}^t \alpha(H^{(i)}) \text{ (les } V^{(i)} \text{ vérifient } \Theta) \\ &= \alpha(W) \end{aligned}$$

Comme F et W sont indépendants et que par hypothèses les intervalles $V^{(1)}, \dots, V^{(t)}$ ne contiennent pas de voisins de F , alors nous obtenons :

$$\alpha(F \cup W \cup V^{(1)} \cup \dots \cup V^{(t)}) = \alpha(F \cup W) \text{ donc } V^{(1)} \cup \dots \cup V^{(t)} \text{ a la propriété } \Theta. \square$$

Nous savons déjà que l'ajout d'un cycle C_i de \mathcal{F} à $W \cup F$ augmente la stabilité de $W \cup F$ d'au moins 1. Nous montrons à présent que cette augmentation peut être plus significative si F possède plus d'un voisin sur le cycle C_i , en d'autres termes si $1 \leq i \leq r_1$. Pour voir ceci, il suffit de considérer les segments du cycle C_i ($1 \leq i \leq r_1$) compris entre deux voisins consécutifs de F . Ces segments sont du type $]c_i^j, c_i^{j+1}[_{C_i}$ où j est pris modulo m_i ($1 \leq j \leq m_i$). Nous montrons que ces segments n'ont pas la propriété Θ .

Notons par $P_{jj'}^i$ une chaîne à sommets internes dans F reliant les sommets c_i^j et $c_i^{j'}$ appartenant à un même cycle C_i ($1 \leq i \leq r_1$), ou simplement par $P_{jj'}$ si les sommets reliés appartiennent à différents cycles ($1 \leq i \leq r_1$).

Lemme 3.3 *Pour tout i, j , $1 \leq i \leq r_1$, et $1 \leq j \leq m_i$ où j est pris modulo m_i , nous avons :*

1. $]c_i^j, c_i^{j+1}[_{C_i} \neq \emptyset$.
2. $\alpha(W \cup]c_i^j, c_i^{j+1}[_{C_i}) > \alpha(W)$.

Preuve du Lemme 3.3

1. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un segment $]c_i^j, c_i^{j+1}[_{C_i}$ sur un certain cycle C_i est vide. Alors, en remplaçant le cycle C_i dans la famille \mathcal{F} par le cycle $C' = c_i^j P_{j, j+1}^i [c_i^{j+1}, c_i^j]_{C_i}$, nous obtenons par le Lemme 3.1 $\alpha(W) > \alpha(W)$ ce qui est absurde.
2. En prenant $C' = c_i^j P_{j, j+1}^i [c_i^{j+1}, c_i^j]_{C_i}$, dans Lemme 3.1, nous obtenons $\alpha(W') = \alpha(W \cup]c_i^j, c_i^{j+1}[_{C_i}) > \alpha(W)$. \square

Soit u_i^j le premier sommet dans $]c_i^j, c_i^{j+1}[_{C_i}$ (suivant l'orientation choisie) tel que $\alpha(W \cup]c_i^j, u_i^j]_{C_i}) > \alpha(W)$ ($1 \leq i \leq r_1$, $1 \leq j \leq m_i$, j pris modulo m_i). Appelons un tel intervalle un intervalle de type a. Nous avons

Lemme 3.4 *Les intervalles de type a sont deux à deux chaîne-indépendants.*

Preuve du Lemme 3.4. Soient $]c_l^j, u_l^j]_{C_l}$ et $]c_k^{j'}, u_k^{j'}]_{C_k}$ deux segments de type **a**, où $1 \leq k \leq l \leq r_1$, $1 \leq j \leq m_l$ et $1 \leq j' \leq m_k$ (j et j' sont pris modulo m_l et m_k respectivement).

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une chaîne intérieurement disjointe de $\cup_{i=1}^r C_i \cup F$ reliant un sommet $v \in]c_l^j, u_l^j]_{C_l}$ à un sommet $v' \in]c_k^{j'}, u_k^{j'}]_{C_k}$ et choisissons v et v' de telle sorte que la somme des longueurs des intervalles $]c_l^j, v]_{C_l}$ et $]c_k^{j'}, v']_{C_k}$ soit minimum. Deux cas doivent être considérés :

Cas $k = l$ 1. Si v et v' sont adjacents, alors en prenant $C' = \overleftarrow{c_l^j P_{jj'}^l}]c_l^{j'}, v]_{C_l} [v', c_l^j]_{C_l}$ dans Lemme 3.1, nous obtenons : $\alpha(W \cup]c_l^j, v]_{C_l} \cup]c_l^{j'}, v']_{C_l}) > \alpha(W)$. (★)

Les segments $]c_l^j, v]_{C_l}$ et $]c_l^{j'}, v']_{C_l}$ sont disjoints et ne contiennent aucun voisin de F

D'autre part, par le choix de v et de v' , les segments $]c_l^j, v]_{C_l}$ et $]c_l^{j'}, v']_{C_l}$ sont chaîne-indépendants, comme de plus ils ont tous deux la propriété Θ (à cause du choix de u_l^j et $u_k^{j'}$) alors par Lemme 3.2, nous avons

$\alpha(W \cup]c_l^j, v]_{C_l} \cup]c_l^{j'}, v']_{C_l}) = \alpha(W)$, ce qui contredit (★).

2. Si v et v' sont reliés par une chaîne $Q_{jj'}^l$ à sommets internes dans W . Alors, en prenant $C' = \overleftarrow{c_l^j P_{jj'}^l}]c_l^{j'}, v]_{C_l} Q_{jj'}^l [v', c_l^j]_{C_l}$, dans Lemme 3.1, et en posant $W_0 = W - Q_{jj'}^l$, nous obtenons :

$\alpha(W \cup]c_l^j, v]_{C_l} \cup]c_l^{j'}, v']_{C_l}) \geq \alpha(W_0 \cup]c_l^j, v]_{C_l} \cup]c_l^{j'}, v']_{C_l}) > \alpha(W)$. (★★)

Les segments $]c_l^j, v]_{C_l}$ et $]c_l^{j'}, v']_{C_l}$ sont disjoints et ne contiennent aucun voisin de F .

D'un autre côté, les segments $]c_l^j, v]_{C_l}$ et $]c_l^{j'}, v']_{C_l}$ sont chaîne-indépendants, et vérifient tous deux la propriété Θ , nous avons donc par Lemme 3.2

$\alpha(W \cup]c_l^j, v]_{C_l} \cup]c_l^{j'}, v']_{C_l}) = \alpha(W)$, ce qui contredit l'inégalité (★★).

Cas $k \neq l$ 1. Si v est adjacent à v' . Alors en prenant $C' = \overleftarrow{c_l^j P_{jj'}^l}]c_k^{j'}, v']_{C_k} (v', v) [v, c_l^j]_{C_l}$ dans Lemme 3.1, nous obtenons $\alpha(W \cup]c_l^j, v]_{C_l} \cup]c_k^{j'}, v']_{C_k}) > \alpha(W)$. (★★★)

Les segments $]c_l^j, v]_{C_l}$ et $]c_k^{j'}, v']_{C_k}$ sont disjoints et ne contiennent aucun voisin de F .

De plus, comme les intervalles $]c_l^j, v]_{C_l}$ et $]c_k^{j'}, v']_{C_k}$ sont chaîne-indépendants et qu'ils ont tous deux propriété Θ , alors en utilisant Lemme 3.2 nous obtenons

$\alpha(W \cup]c_l^j, v]_{C_l} \cup]c_k^{j'}, v']_{C_k}) = \alpha(W)$ et donc une contradiction avec (★★★).

2. Si v et v' sont reliés par une chaîne $Q_{jj'}$ à sommets internes dans W . Alors, en prenant $C' = \overleftarrow{c_l^j P_{jj'} c_k^{j'}, v'}]_{C_k} Q_{jj'} [v, c_l^j]_{C_l}$, dans Lemme 3.1, et en posant $W_0 = W - Q_{jj'}$, nous obtenons :

$$\alpha(W \cup]c_l^j, v[_{C_l} \cup]c_k^{j'}, v'[_{C_k}) \geq \alpha(W_0 \cup]c_l^j, v[_{C_l} \cup]c_k^{j'}, v'[_{C_k}) > \alpha(W). \quad (\star \star \star)$$

Les segments $]c_l^j, v[_{C_l}$ et $]c_l^{j'}, v'[_{C_l}$ sont disjoints et ne contiennent aucun voisin de F .

D'autre part, $]c_l^j, v[_{C_l}$ et $]c_k^{j'}, v'[_{C_k}$ sont chaîne-indépendants (par le choix de v et v') et ont tous deux la propriété Θ (par le choix de u_l^j et $u_k^{j'}$) donc Lemme 3.2 donne : $\alpha(W) = \alpha(W \cup]c_l^j, v[_{C_l} \cup]c_k^{j'}, v'[_{C_k})$ ce qui cotredit $(\star \star \star)$. \square

La composante connexe F est indépendante de tout segment $]c_l^j, u_l^j]_{C_l}$ ($1 \leq l \leq r_1$, $1 \leq j \leq m_l$) puisqu'elle n'a pas de voisins sur les segments $]c_l^j, c_l^{j+1}]_{C_l}$ pour $1 \leq l \leq r_1$ et $1 \leq j \leq m_l$. Donc par le Lemme 3.3, nous avons qu'aucun segment $]c_l^j, u_l^j]_{C_l}$ ($1 \leq l \leq r_1$, $1 \leq j \leq m_l$) ne vérifie la propriété Θ et par Lemme 3.4, les segments $]c_l^j, u_l^j]_{C_l}$ ($1 \leq l \leq r_1$, $1 \leq j \leq m_l$) sont deux à deux chaîne-indépendants. Il s'en suit que l'ajout de ces segments à $W \cup F$ augmente $\alpha(W \cup F)$ d'au moins autant que le nombre de segments ajoutés.

Maintenant, regardons les cycles C_k sur lesquels F envoie un seul voisin, c'est-à-dire ceux tels que $r_1 + 1 \leq k \leq r_2$. Nous savons que $\alpha(W \cup F)$ augmente d'au moins 1 quand un cycle C_k est adjoint à $W \cup F$, mais nous allons montrer que la stabilité $\alpha(W \cup F)$ augmentera de plus si plusieurs cycles sont rajoutés. Nous devons considérer deux cas selon que $C_k - \{c_k\}$ possède ou non la propriété Θ .

1. Si $C_k - \{c_k\}$ n'a pas la propriété Θ , alors nous utilisons des segments $]c_k, u_k]_{C_k}$ que nous appelons segments de type **b**. Où u_k est le premier sommet de $C_k - \{c_k\}$ tel que $\alpha(W \cup]c_k, u_k]_{C_k}) > \alpha(W)$.
2. Si $C_k - \{c_k\}$ a la propriété Θ :
 - (a) Si $\{c_k\}$ a la propriété Θ , alors nous utilisons des intervalles $[c_k, u_k]_{C_k}$, que nous appelons intervalles de type **c**. Où u_k est le premier sommet de $C_k - \{c_k\}$ tel que $\alpha(W \cup F \cup [c_k, u_k]_{C_k}) > \alpha(W \cup F)$.
 - (b) Si $\{c_k\}$ n'a pas la propriété Θ , alors nous considérons les intervalles $\{c_k\} = [c_k, c_k]_{C_k}$, que nous appelons intervalles de type **d**.

Lemme 3.5 *Tout segment de type **b** est chaîne-indépendant de tout autre segment de type **b** ou de type **a**.*

Preuve du Lemme 3.5. La preuve est similaire à celle du Lemme 3.4. \square

Lemme 3.6 (i). *Un intervalle de type c est chaîne-indépendant de tout intervalle de type c, de type b ou de type a.*

(ii). *Un intervalle de type d est chaîne-indépendant de tout intervalle de type d, de type c, de type b ou de type a.*

Preuve du Lemme 3.6.

Preuve du Lemme 3.6.(i)

Soit $[c_k, u_k]_{C_k}$ un segment de type c.

(A) Montrons que $[c_k, u_k]_{C_k}$ est chaîne-indépendant de tout segment $[c_l, u_l]_{C_l}$ de type c.

Supposons par l'absurde qu'il existe Q une arête ou une chaîne à sommets internes dans W reliant un sommet $v \in [c_k, u_k]_{C_k}$ à un sommet $v' \in [c_l, u_l]_{C_l}$. Choisissons v et v' de sorte à minimiser la somme des distances $d_{C_k}(c_k, v) + d_{C_l}(c_l, v')$.

(1) Si $v \neq c_k$ et $v' \neq c_l$ alors nous raisonnons comme dans Lemme 3.4 (cas $k \neq l$).

(2) Si $v = c_k$ ou $v' = c_l$

(i) Si $v = c_k$ et $v' \neq c_l$ (ou symétriquement $v \neq c_k$ et $v' = c_l$). En prenant le cycle $C' = vQ[v', c_l]_{C_l}Pv$ (où P est une chaîne à sommets internes dans F reliant c_k et c_l) dans Lemme 3.1, nous obtenons

$\alpha(W \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup]c_l, v'[_{C_l}) \geq \alpha(W_0 \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup]c_l, v'[_{C_l}) > \alpha(W)$. (★) où
 $W_0 = W - Q$ (bien entendu $W_0 = W$ si Q est une arête).

D'autre part, les segments $[c_k^+, c_k^-]_{C_k}$ et $]c_l, v'[_{C_l}$ sont disjoints, possèdent la propriétés Θ (par hypothèses) et ne contiennent pas de voisins de F . Il reste à montrer qu'ils sont chaîne-indépendants pour pouvoir utiliser Lemme 3.2.

Supposons le contraire et soient $x \in [c_k^+, c_k^-]_{C_k}$ et $x' \in]c_l, v'[_{C_l}$ deux sommets reliés par Q' une arête ou une chaîne à sommets internes dans W . Choisissons x et x' de telle sorte que $d_{C_k}(c_k, x) + d_{C_l}(c_l, x')$ soit minimum.

En prenant $C' = [x, c_k]_{C_k} P \overleftarrow{[c_l, x']_{C_l}} Q' x$ dans Lemme 3.1, nous obtenons :

$\alpha(W \cup]c_k, x[_{C_k} \cup]c_l, x'[_{C_l}) \geq \alpha(W'_0 \cup]c_k, x[_{C_k} \cup]c_l, x'[_{C_l}) > \alpha(W)$; où $W'_0 = W - Q'$.

De plus, comme les segments $]c_k, x[_{C_k}$ et $]c_l, x'[_{C_l}$ sont disjoints, chaîne-indépendants (par le choix de x et x'), ne contiennent pas de voisins de F et ont la propriété Θ (par hypothèses), alors en vertu du Lemme 3.2 nous avons

$\alpha(W \cup]c_k, x[_{C_k} \cup]c_l, x'[_{C_l}) = \alpha(W)$, ce qui contredit l'inégalité obtenue 5 lignes plus haut.

Nous concluons que $[c_k^+, c_k^-]_{C_k}$ et $]c_l, v'[_{C_l}$ sont chaîne-indépendants et il s'en suit, par Lemme 3.2, que

$$\alpha(W \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup]c_l, v'[_{C_l}) = \alpha(W) \text{ ce qui contredit } (\star).$$

(ii) Si $v = c_k$ et $v' = c_l$. En prenant $C' = vPv'Qv$ (où P est une chaîne à sommets internes dans F reliant c_k et c_l) dans Lemme 3.1, nous obtenons

$$\alpha(W \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup [c_l^+, c_l^-]_{C_l}) \geq \alpha(W_0 \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup [c_l^+, c_l^-]_{C_l}) > \alpha(W). \quad (\star\star) \text{ où } W_0 = W - Q.$$

Par ailleurs, les segments $[c_k^+, c_k^-]_{C_k}$ et $[c_l^+, c_l^-]_{C_l}$ sont disjoints, ne contiennent pas de voisins de F et ont la propriété Θ . Montrons qu'ils sont chaîne-indépendants.

Supposons le contraire et soient $x \in [c_k^+, c_k^-]_{C_k}$ et $x' \in [c_l^+, c_l^-]_{C_l}$ deux sommets reliés par une chaîne Q' intérieurement disjointe de $F \cup \bigcup_{i=1}^r C_i$ et choisis tels que la somme $d_{C_k}(c_k, x) + d_{C_l}(c_l, x')$ soit minimum.

En prenant $C' = xQ'[x', c_l]_{C_l}P[\overleftarrow{c_k}, x]_{C_k}$ dans Lemme 3.1, nous obtenons :

$$\alpha(W \cup]c_k, x[_{C_k} \cup]c_l, x'[_{C_l}) \geq \alpha(W'_0 \cup]c_k, x[_{C_k} \cup]c_l, x'[_{C_l}) > \alpha(W), \text{ où } W'_0 = W - Q'$$

Les segments $]c_k, x[_{C_k}$ et $]c_l, x'[_{C_l}$ sont chaîne-indépendants (par le choix de x et de x'), disjoints, sans voisins de F et ont par hypothèse la propriété Θ . Par Lemme 3.2, nous obtenons

$$\alpha(W \cup]c_k, x[_{C_k} \cup]c_l, x'[_{C_l}) = \alpha(W). \text{ ce qui contredit l'inégalité établie 5 lignes plus haut.}$$

Nous déduisons donc que $[c_k^+, c_k^-]_{C_k}$ et $[c_l^+, c_l^-]_{C_l}$ sont chaîne-indépendants, ce qui entraîne (par Lemme 3.2) que :

$$\alpha(W \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup [c_l^+, c_l^-]_{C_l}) = \alpha(W) \text{ contredisant } (\star\star).$$

(B) Montrons que $[c_k, u_k]_{C_k}$ est chaîne-indépendant de tout segment $]c_l, u_l]_{C_l}$ de type b.

Supposons le contraire, i.e qu'il existe Q une arête ou une chaîne à sommets internes dans W reliant un sommet $v \in [c_k, u_k]_{C_k}$ à un sommet $v' \in]c_l, u_l]_{C_l}$. Choisissons v et v' de sorte à minimiser la somme des distances $d_{C_k}(c_k, v) + d_{C_l}(c_l, v')$.

(1) Si $v \neq c_k$ alors nous raisonnons comme dans (A.1).

(2) Si $v = c_k$, alors nous raisonnons comme dans (A.2.i)

(C) Montrons que $[c_k, u_k]_{C_k}$ est chaîne-indépendant de tout segment $]c_l^j, u_l^j]_{C_l}$ de type a.

Nous utilisons le même raisonnement que dans (B)

Preuve du Lemme 3.6.(ii)

Soit $\{c_k\}$ un segment de type d.

(A') Montrons que $\{c_k\}$ est chaîne-indépendant de tout segment $\{c_l\}$ de type d.

Supposons qu'il existe une chaîne Q intérieurement disjointe de $F \cup \bigcup_{i=1}^r C_i$ reliant c_k à c_l .

En prenant $C' = c_k Q c_l P c_k$ dans Lemme 3.1, nous obtenons :

$$\alpha(W \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup [c_l^+, c_l^-]_{C_l}) \geq \alpha(W_0 \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup [c_l^+, c_l^-]_{C_l}) > \alpha(W); \text{ où } W_0 = W - Q.$$

Les segments $[c_k^+, c_k^-]_{C_k}$ et $[c_l^+, c_l^-]_{C_l}$ sont disjoints, ne contiennent pas de voisins de F , ont la propriété Θ (par hypothèses). Il nous reste à montrer qu'ils sont chaîne-indépendants pour appliquer Lemme 3.2. Ce que nous prouvons de façon analogue à (A.2.ii). Nous concluons donc par Lemme 3.2 que :

$\alpha(W \cup [c_k^+, c_k^-]_{C_k} \cup [c_l^+, c_l^-]_{C_l}) = \alpha(W)$ Contradiction avec l'inégalité obtenue 5 lignes plus haut.

(B') Montrons que $\{c_k\}$ est chaîne-indépendant de tout segment $[c_l, u_l]_{C_l}$ de type c. Nous raisonnons là encore comme dans (A.2)

(C') Montrons que $\{c_k\}$ est chaîne-indépendant de tout segment $]c_l, u_l]_{C_l}$ de type b. Nous raisonnons comme dans (A.2.i)

(D') Montrons que $\{c_k\}$ est chaîne-indépendant de tout segment $]c_l^j, u_l^j]_{C_l}$ de type a. Nous raisonnons comme dans (A.2.i) .

□

Dans le Lemme 3.6, pour $r_1 + 1 \leq k \leq r_2$, $[c_k, u_k]_{C_k}$ et $\{c_k\}$ contiennent tous deux un voisin de F . Pour des raisons techniques, qui s'expliqueront plus tard, nous n'allons pas considérer tous les cycles C_k ($r_1 + 1 \leq k \leq r_2$) sur lesquels F a exactement un voisin mais seulement ceux sur lesquels un sommet fixé $z_0 \in F$ a un voisin. Nous choisissons z_0 tel que $d_F(z_0) = \delta_F$. Nous renumérotions ces cycles de $r_1 + 1$ à r_3 ($r_3 \leq r_2$) et nous remarquons que

Observation 1 : Soit k un entier tel que $r_1 + 1 \leq k \leq r_3$ et tel que $C_k - \{c_k\}$ a la propriété Θ . Alors, z_0 est le seul voisin de c_k dans F .

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que $|N_F(c_k)| \geq 2$. Soit $x \in F - \{z_0\}$ un autre voisin de c_k dans F et soit P une chaîne à sommets internes dans F reliant x et z_0 . Alors, en prenant $C' = c_k x P z_0 c_k$ dans Lemme 3.1 nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse $\alpha(W \cup C_k - \{c_k\}) = \alpha(W)$. □

Observation 2 : Si z_0 appartient à tout stable maximum S de F , alors pour k , $r_1 + 1 \leq k \leq r_3$ il n'existe aucun segment I_i de type c ou d.

Preuve. Supposons que z_0 est contenu dans tout stable maximum S de F et qu'il existe un segment I_i de type c ou d. Il est clair qu'à cause de la minimalité de I_i , c_k est contenu dans un stable maximum de $W \cup F \cup I_i$.

1. Si $I_i = [c_k, u_k]_{C_k}$ pour un certain k , $r_1 + 1 \leq k \leq r_3$.

Soit $S_{max}(W \cup F \cup I_i)$ un stable maximum de $W \cup F \cup I_i$. $S_{max}(W \cup F \cup I_i)$ contient soit c_k soit z_0 mais pas les deux. Donc $|S_{max}(W \cup F \cup I_i)| = |S_{max}(W \cup F - \{z_0\} \cup I_i)| = |S_{max}(W \cup F \cup I_i - \{c_k\})|$, il s'en suit que $\alpha(W \cup F \cup I_i - \{c_k\}) = \alpha(W \cup F \cup I_i) > \alpha(W \cup F)$ ce qui est une contradiction parce que $I_i - \{c_k\} \subset C_k - \{c_k\}$ et par hypothèses un intervalle $I_i = [c_k, u_k]_{C_k}$ est choisi lorsque $C_k - \{c_k\}$ vérifie la propriété Θ .

2. Si $I_i = \{c_k\}$ pour un certain k , $r_1 + 1 \leq k \leq r_3$. Ici encore, soit c_k soit z_0 , mais pas les deux, appartient à un stable maximum de $W \cup F \cup I_i$, donc $\alpha(W \cup F) = \alpha(W \cup F \cup I_i)$ ce qui donne une contradiction avec $\alpha(W \cup F \cup I_i) > \alpha(W \cup F)$. \square

Pour résumer, nous avons montré que sur chaque cycle C_k , pour $1 \leq k \leq r_3$, il y a un segment I_i de type **b**, **c** ou **d** ou m_k segments I_i de type **a**, qui augmentent la stabilité de $W \cup F$ lorsqu'ils lui sont rajoutés. Nous avons aussi montré que ces segments sont deux à deux chaîne-indépendants. Pour compléter la preuve du Théorème 3.38, nous regardons les deux cas suivants :

1. Si z_0 est contenu dans tout stable maximum S de F , alors par l'Observation 2, nous n'avons que des segments I_i de type **a** ou **b**. Notons que ces segments sont indépendants de F et sont deux à deux chaîne-indépendants (par Lemmes 3.4 et 3.5). Posons $m = \sum_{k=1}^{r_1} m_k$ et soit H^i l'union des composantes connexes de W qui contiennent un voisin de I_i . Nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(G) \geq \alpha(W \cup F \cup \bigcup_{k=1}^{r_3} C_k) \geq \alpha(W \cup F \cup \bigcup_{i=1}^{m+r_3-r_1} I_i) = \alpha(W - \bigcup_{i=1}^{m+r_3-r_1} H^i) + \\ &\sum_{i=1}^{m+r_3-r_1} \alpha(H^i \cup I_i) + \alpha(F) \geq \alpha(W - \bigcup_{i=1}^{m+r_3-r_1} H^i) + \sum_{i=1}^{m+r_3-r_1} \alpha(H^i) + \alpha(F) + \\ &m + r_3 - r_1 = \alpha(W \cup F) + m + r_3 - r_1. \end{aligned}$$

2. S'il existe un stable maximum S de F tel que $z_0 \notin S$, alors posons $F' = F - \{z_0\}$. Nous avons $\alpha(F) = \alpha(F')$. Notons que par l'Observation 1, tout segment I_i est indépendant de F' . De plus, par les Lemmes 3.4, 3.5 et 3.6, tous les segments I_i sont deux à deux chaîne-indépendants. En remplaçant F par F' dans la preuve du cas précédent, nous obtenons :

$$\alpha(G) = \alpha \geq \alpha(W \cup F' \cup \bigcup_{i=1}^{r_3} C_i) \geq \alpha(W \cup F') + r_3 - r_1 + m = \alpha(W \cup F) + r_3 - r_1 + m$$

Finalement, à cause du choix de z_0 ($d_F(z_0) = \delta_F \leq 1$), nous avons $r_3 - r_1 + m \geq d(z_0) - 1 \geq \delta - 1$ et il s'en suit que :

$$\alpha \geq \alpha(W \cup F \cup \bigcup_{i=1}^{r_2} C_i) \geq \alpha(W \cup F) + \delta - 1$$

Donc $\alpha(G - \bigcup_{i=1}^r C_i) = \alpha(W \cup F) \leq \alpha - \delta + 1$ et ceci complète la preuve du Théorème 3.38.

□

Preuve du Théorème 3.37. D'après la Proposition 3.1, $G - \bigcup_{i=1}^r C_i$ peut être couvert par au plus $\alpha(G - \bigcup_{i=1}^r C_i)$ composantes disjointes qui sont des cycles, arêtes ou sommets. Notons \mathcal{E} l'ensemble de ces composantes. Par le Théorème 3.38, le nombre de ces composantes est au plus $\alpha - \delta + 1$. Donc, $\mathcal{F} \cup \mathcal{E}$ est un pseudo 2-facteur de G avec au plus $\alpha - \delta + 1$ composantes qui sont des arêtes ou des sommets, ceci achève la preuve du Théorème 3.37. ■

En combinant le Théorème 3.37 avec le théorème de Niessen ([181]), nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 *Soit G un graphe de stabilité α et de degré minimum δ . Alors, G possède un pseudo 2-facteur avec au plus $\max(0, \alpha - \delta + 1)$ composantes qui sont des arête ou des sommets.*

De plus le Théorème 3.37 donne une borne inférieure pour le nombre de sommets qui sont couverts par des cycles disjoints dans un graphe (en particulier sans 2-facteur) de degré minimum δ et de stabilité α avec $\delta \leq \alpha$. Cette borne est atteinte pour les graphes de type $H + pK_2$ avec $p \geq |H| + 1$ définis au début de cette section.

Corollaire 3.2 *Soit G un graphe de stabilité α et de degré minimum $\delta \leq \alpha$. Alors au moins $\max(2\delta - 2, n + 2\delta - 2(\alpha + 1))$ sommets de G sont couverts par des cycles disjoints.*

Preuve du Corollaire 3.2. Il suffit de considérer un pseudo 2-facteur avec une famille de cycles vérifiant les conditions (a), (b) et (c). Les cycles de cette famille contenant plusieurs voisins de F ou un seul voisins de F donnent la première borne. En effet, si un cycle ne contient qu'un seul voisin de F , alors il est de longueur au moins 3. Si un cycle contient plusieurs voisins de F , alors ces derniers sont deux à deux à distance au moins 2 sur le cycle (à cause du choix de la famille, nous l'avons déjà montré). Comme F envoie au moins $\delta - 1$ voisins sur les cycles de la famille choisie, alors nous obtenons au moins $2(\delta - 1)$ sommets couverts par cette famille de cycles.

D'autre part, comme un tel pseudo 2-facteur contient au plus $\alpha - \delta + 1$ arêtes ou sommets, alors les cycles de ce pseudo 2-facteur couvrent au moins $n - 2(\alpha - \delta + 1)$ sommets. Ceci établit la deuxième borne et achève la preuve du Corollaire 3.2. □

Deuxième partie

Distance Moyenne et Maille

Chapitre 4

Distance moyenne et maille

4.1 Introduction

La distance moyenne est une notion qui a été introduite (sous ce nom) par Doyle et Graver dans [68]. La *distance moyenne* dans un graphe connexe est donnée par la moyenne arithmétique des distances entre toutes les paires de sommets de G . Elle est notée $\bar{\ell}$ (ou parfois μ). Nous avons $\bar{\ell} = \frac{\sigma(G)}{n(n-1)}$, où $\sigma(G) = \sum_{x,y \in V} d(x,y)$ ($\bar{\ell} = \infty$ si le graphe est non connexe). Différents auteurs ont étudié la distance moyenne ou des notions qui lui sont voisines comme : la distance totale [179] (ou la transmission [186]), le coût total d'un routage [223] ou encore l'indice de Wiener [220] du nom du physico-chimiste Harold Wiener qui a présenté un travail pionnier dans ce domaine. D'ailleurs, un numéro spécial de *Discrete Applied Mathematics*¹ a marqué le 50^{ème} anniversaire de la parution du papier [220] et a été entièrement consacré à cet indice.

La transmission (ou la distance totale) $\sigma(G)$ d'un graphe G est la somme des distances entre toutes les paires ordonnées de sommets de G et l'indice de Wiener $W(G)$ est la somme des distances entre toutes les paires non ordonnées de sommets de G . Ces deux paramètres ne diffèrent de la distance moyenne que d'un facteur $n(n-1)$ dans le cas de la transmission et $\frac{n(n-1)}{2}$ dans le cas de l'indice de Wiener.

La distance moyenne est non seulement un invariant intéressant en soi en théorie des graphes, mais elle joue aussi un rôle non négligeable dans d'autres disciplines. Par exemple, en chimie dans l'étude des structures moléculaires, la caractérisation de la ramification et du volume moléculaire ([113, 189]), en informatique dans l'étude des interconnexions et réseaux internet ([42]). Mais aussi en télécommunication, pour l'analyse des réseaux

1. *Discrete Applied Mathematics* 80 (1997) 118 pages.

([184]). Par exemple, il se trouve que le retard dans la transmission d'un message entre deux noeuds quelconques est proportionnel au nombre de liens (arêtes) que le message doit parcourir. C'est pourquoi, la distance moyenne est un indicateur de performance dans les réseaux de télécommunications. Les bons réseaux sont souvent caractérisés par de petites distances moyennes et les réseaux les moins vulnérables ([95]) sont ceux qui de plus restent de distance moyenne petite après la rupture d'un lien (la suppression d'une arête).

Un survey sur la distance moyenne est proposé dans [186]. Il rassemble les résultats parus jusqu'aux années 80. Nous tentons de le compléter en proposant dans ce qui suit, de même que dans les chapitres précédents, une revue sur la distance moyenne. Nous exposerons ensuite nos travaux.

4.2 Un état de l'art sur la distance moyenne

Plusieurs bornes ont été obtenues pour la distance moyenne en fonction d'autres paramètres de graphes, nous essayons dans ce qui suit d'en donner un aperçu. Nous organisons la présentation des résultats en paragraphes suivant les invariants intervenant :

4.2.1 Distance moyenne, ordre, taille, degré minimum et diamètre

L'un des premiers résultats proposant une borne pour la distance moyenne dans un graphe en fonction de son ordre, est celui de Doyle et Graver. Dans [68], ils ont observé que :

Théorème 4.1 (Doyle et Graver [68]) *Le maximum de la distance moyenne de tous les graphes connexes à n sommets est $\frac{n+1}{3}$, il s'agit de la distance moyenne de la chaîne P_n .*

Dans [221], Winkler a montré que si nous ne considérons que les graphes 2-connexes, la borne supérieure pour la distance moyenne s'améliore et devient $\frac{n^2}{4n-4}$. C'est ce qu'avait prédit Plesnik dans [186]. Dans [195], Stanton et al. ont donné une liste de graphes de distance moyenne minimale.

L'une des premières bornes sur la distance moyenne utilise le diamètre ([186]).

Théorème 4.2 (Plesnik [186]) *Soit G un graphe d'ordre n et de diamètre D . Alors $\sigma(G) \geq \frac{1}{3}D(D+1)(D+2) + \frac{1}{2}(n-D-1)(2n+D^2+1)$ si D est impair et*

$$\sigma(G) \geq \frac{1}{3}D(D+1)(D+2) + \frac{1}{2}(n-D-1)(2n+D^2) \text{ si } D \text{ est pair.}$$

Dans [157], Kouider et Winkler ont utilisé le degré minimum pour borner la distance moyenne. Ils ont montré ce qui suit.

Théorème 4.3 (Kouider et Winkler [157]) *Si G est un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum δ , alors la distance moyenne est au plus $2 + \frac{n}{\delta+1}$.*

Ce résultat est asymptotiquement un peu plus fort qu'une conjecture de Graffiti² (qui proposait $\frac{n}{\delta}$ comme borne supérieure à la distance moyenne). Récemment, la borne du Théorème 4.3 et celle de la conjecture de Graffiti ont été améliorées par Beezer et al. dans [15]. Les auteurs ont fait intervenir la taille et ont montré que :

Théorème 4.4 (Beezer et al. [15]) *Un graphe d'ordre n , de taille m et de degré minimum δ est de distance moyenne au plus $\frac{\lfloor \frac{(n+1)n(n-1)-2m}{\delta+1} \rfloor}{n(n-1)}$.*

Comme corollaire du Théorème 4.4, ils ont obtenu que $\bar{\ell} \leq \frac{n+1}{\delta+1} - \frac{2m}{(\delta+1)n(n-1)}$. La borne donnée dans le Théorème 4.4 est atteinte pour les graphes complets.

Signalons que Dankelmann a donné dans [56] une borne légèrement meilleure que celle de Beezer et al.

Théorème 4.5 (Dankelmann [56]) *Soit G un graphe d'ordre n , de taille m et de degré minimum $\delta \geq 2$. Pour n et m grands et δ constant, nous avons :*

$$\bar{\ell} \leq \frac{(n - \sqrt{2m - \delta n})^2 (n + 2\sqrt{2m - \delta n})}{(\delta + 1)n^2} + O(1).$$

Dans [120], Hansen et al. ont utilisé l'ordre maximum d'une forêt induite de G pour borner la distance moyenne de G . Ils ont noté cet ordre $F(G)$ et ont montré que la distance moyenne d'un graphe connexe G est au plus $\frac{F(G)}{2}$. Ils ont aussi, en s'inspirant de la preuve de Dankelmann ([50]), caractérisé les graphes maximisant la distance moyenne parmi les graphes d'ordre et de $F(G)$ fixés.

2. Graffiti est un programme informatique qui propose des conjectures. Nous en parlerons un peu plus dans la section 4.3.

4.2.2 Distance moyenne, nombre de stabilité, nombre chromatique et nombre de domination

Le nombre de stabilité α a été utilisé pour borner la distance moyenne dès les années 80. Chung a montré dans [41] le résultat suivant :

Théorème 4.6 (Chung [41]) $\alpha \geq \bar{\ell}$ pour tout graphe connexe. L'égalité est atteinte pour les graphes complets.

Dans [50], Dankelmann a obtenu une borne inférieure pour la distance moyenne en utilisant la stabilité.

Théorème 4.7 (Dankelmann [50]) Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et de stabilité α . Alors $\bar{\ell} \geq 1 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{n(n - 1)}$. L'égalité n'est atteinte que pour les graphes $K_{n-\alpha} + \alpha K_1$.

Soient $k \geq 0$ et $s \geq 2$ deux entiers. Un sous-ensemble de sommets $X \subset V$ d'ordre s est dit k -indépendant (ou k -stable) si tout sommet de X est à distance au moins $k + 1$ de tout autre sommet dans X . Le nombre de k -stabilité de G , noté $I_k(G)$ est la cardinalité d'un plus grand ensemble k -indépendant. Dans [98], Firby et Haviland ont généralisé le Théorème 4.7, en utilisant la k -stabilité (ou k -indépendance). Leur résultat s'énonce comme suit :

Théorème 4.8 (Firby et Haviland [98]) Soit G un graphe d'ordre n contenant un ensemble k -indépendant d'ordre s et soit $\varepsilon = k \pmod{2}$.

$$\text{Si } \varepsilon = 0 \text{ alors } \bar{\ell} \geq 1 + \frac{k(3ns(k+2) - s(k-2)(k+2) - 12n)}{12n(n-1)}.$$

$$\text{Si } \varepsilon = 1 \text{ alors } \bar{\ell} \geq 1 + \frac{s(k+1)(3n(k-1) + 3s(k+1) - k(k+5))}{12n(n-1)}.$$

Lorsque n est grand, les bornes données sont de l'ordre de $1 + \frac{k}{12n}(3s(k+2) - 12)$, lorsque k est pair et $1 + \frac{s(k+1)}{12n}(3k-3)$ lorsque k est impair.

Lorsque nous prenons $k = n - 2$ et considérons le graphe P_n . Quelle que soit la parité de n , nous avons $I_{n-2} = 2$. Si nous remplaçons dans les bornes du Théorème 4.8 (pour k pair ou pour k impair), nous obtenons $\bar{\ell} \geq \frac{n+1}{3}$, comme nous savons déjà que $\bar{\ell} \leq \frac{n+1}{3}$, alors nous déduisons que $\bar{\ell} = \frac{n+1}{3}$ qui est exactement la distance moyenne de P_n . Pour

un k donné, Firby et Haviland ont décrit dans leur article des graphes pour lesquels leurs bornes sont atteintes.

Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer tous les sommets de G de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. La distance moyenne minimum et maximum d'un graphe d'ordre et de nombre chromatique donnés ont été déterminées par Tomescu et Melter dans [200]. Ils ont déterminé parmi les graphes connexes k -chromatiques d'ordre n , ceux qui sont de transmission maximale et ceux qui sont de transmission minimale.

Théorème 4.9 (Tomescu et Melter [200]) *Dans la classe des graphes k -chromatiques connexes G d'ordre n , la transmission $\sigma(G)$ vérifie :*

1. $\sigma(G)$ est minimale si et seulement si $G \in T(n, k)$;
2. $\sigma(G)$ est maximale pour les graphes $H_{n,k}$ seulement.

La classe des graphes $T(n, k)$ appelés graphes de Turan a été définie dans [202] et le graphe $H_{n,k}$ ($n \geq k \geq 2$) est le graphe qui consiste en une clique K_k d'ordre k dont un sommet est relié par une arête à l'une des extrémités d'une chaîne P_{n-k} . Une quinzaine d'années plus tard, Tomescu a amélioré ce résultat pour les graphes 2-connexes dans [201].

Dans [51], Dankelmann a étudié la relation entre la distance moyenne et le nombre de domination. Le *nombre de domination* $\gamma(G)$ d'un graphe G , est le cardinal minimum d'un sous-ensemble D de $V(G)$, tel que tout sommet de G qui n'est pas dans D est adjacent à au moins un sommet de D . Dankelmann a borné (supérieurement) la distance moyenne d'un graphe G , en fonction de son ordre et de son nombre de domination. Il a montré ce qui suit :

Théorème 4.10 (Dankelmann [51]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et avec un nombre de domination $\gamma \leq \frac{n}{3}$. Alors*

$$\bar{\ell} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{3} - \frac{(n-3\gamma)(n-3\gamma+2)(2n+3\gamma-7)}{6n(n-1)} & \text{si } n-\gamma \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{3} - \frac{(n-3\gamma)(n-3\gamma+2)(2n+3\gamma-7) - 9(\gamma-1)}{6n(n-1)} & \text{si } n-\gamma \text{ est impair} \end{cases}$$

Théorème 4.11 (Dankelmann [51]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de nombre de domination γ , tel que $\gamma \geq \frac{n}{3}$. Alors*

$$\bar{\ell} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{3} - \frac{(3\gamma-n)(3\gamma-n-2)(5n-6\gamma-4)}{3n(n-1)} & \text{si } n-\gamma \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{3} - \frac{(3\gamma-n-1)((3\gamma-n-3)(5n-6\gamma-2)+6(2n-3\gamma-1))}{3n(n-1)} & \text{si } n-\gamma \text{ est impair} \end{cases}$$

Dankelmann a, de plus, caractérisé les graphes d'ordre et de nombre de domination donnés qui atteignent la borne. Il est facile de voir que si $\gamma = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, alors la borne donnée dans les théorèmes précédents est atteinte pour P_n qui est l'unique graphe de distance moyenne maximum parmi tous les graphes connexes d'ordre n . Comme conséquence du Théorème 4.10, nous obtenons après calculs, $\bar{\ell} \leq \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}$. Lorsque $\gamma > \frac{n}{3}$, la borne évidente $\bar{\ell} < \gamma + \frac{1}{3}$ est plus significative.

Récemment Tian et Xu dans [198] ont généralisé ce qui précède en utilisant le *nombre de k -domination* (pour $k = 1$, c'est le nombre de domination). Un ensemble D de sommets de G est k -dominant si tout sommet de $V(G) - D$ est à distance au plus k d'un sommet de D . Le cardinal minimum d'un k -dominant parmi tous les ensembles k -dominants de G représente le nombre de k -domination de G et est noté $\gamma_k(G)$. Tian et Xu ont borné la distance moyenne, comme fonction de l'ordre de G , de k et de $\gamma_k(G)$.

Dans [62], Delavina et al. ont étudié la relation entre la distance moyenne et le *nombre de domination totale* d'un graphe. Un ensemble D de sommets est un ensemble dominant total d'un graphe G sans sommets isolés si tout sommet de G est adjacent à un sommet dans D . Le nombre de domination totale de G , noté $\gamma_t(G)$ est la cardinalité minimum d'un dominant total. Il est facile de voir qu'un dominant total est nécessairement un dominant, d'où $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$. Delavina et al. ont donné l'inégalité suivante et ont montré qu'elle est asymptotiquement la meilleure possible.

Théorème 4.12 (Delavina et al. [62]) *Soit G un graphe connexe alors $\bar{\ell} < \gamma_t(G) + \frac{1}{2}$.*

4.2.3 Distance moyenne et connexité

Dans [10], Balakrishnan et al. ont considéré les graphes connexes avec plusieurs points d'articulation et ont proposé une expression de la distance moyenne en utilisant les distances moyennes des blocs de G .

Dans [58] et [59], Dankelmann et al. ont étudié la relation entre la distance moyenne

et l'arête-connexité. Ils ont montré dans l'ordre les deux théorèmes suivants qui résolvent des question posées dans [186] :

Théorème 4.13 (Dankelmann et al. [59]) *Un graphe G 3-arête-connexé d'ordre n est de distance moyenne $\bar{\ell} \leq \frac{n}{6} + 24$.*

Théorème 4.14 (Dankelmann et al. [58]) *Soit G un graphe λ -arête-connexé d'ordre n alors G est de distance moyenne $\bar{\ell} \leq \frac{2n}{15} + 9$ si $\lambda = 5, 6$; $\bar{\ell} \leq \frac{n}{9} + 10$ si $\lambda = 7$ et $\bar{\ell} \leq \frac{n}{\lambda+1} + 5$ si $\lambda \geq 8$*

Dans [114], Gutman et Zhang ont montré que les graphes $K_k + (K_1 \cup K_{n-k-1})$ d'ordre n et de connexité (respectivement arête-connexité) k sont ceux qui ont une distance moyenne minimum. Dans [64], Djelloul et Kouider ont montré que pour les multigraphes λ -arête-connexes ($\lambda \geq 2$) la distance moyenne est bornée supérieurement par $\frac{2m}{3\lambda}$. Un multigraphe est un graphe dans lequel les arêtes multiples et les boucles sont autorisées.

4.2.4 Effet de la suppression d'un élément sur la distance moyenne

Dans l'article [221], Winkler a posé la conjecture des quatre-tiers ("four-thirds conjecture"). Kouider s'y est intéressée dans [156]. Elle a montré que :

Théorème 4.15 (Kouider [156]) *Tout graphe 4-connexé contient un sommet dont la suppression augmente la distance moyenne par moins d'un facteur de $\frac{4}{3}$.*

Elle a aussi montré que ceci reste vrai pour les graphes 2-connexes d'ordre au moins 150 et de degré minimum au moins 3. Bienstock et Gyori [21], ont montré que la version arête (la suppression d'une arête au lieu d'un sommet) de la conjecture de Winkler est vraie si le graphe considéré est sans sommet pendant.

4.2.5 Distance moyenne et matrices représentatives d'un graphe

D'autres approches en utilisant les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe ou de la matrice Laplacienne ont été utilisées pour borner la distance moyenne.

La matrice laplacienne d'un graphe G (appelée aussi Laplacien de G , ou encore matrice de Kirchhoff) est la différence $L = D - A$ où $D = \text{diag}(d_G(u), u \in V)$ et A est la matrice d'adjacence de G . Une version normalisée du laplacien est souvent utilisée mais

nous n'entrerons pas dans les détails ici, nous invitons le lecteur à consulter les références [46, 47] consacrées à la théorie spectrale des graphes.

Les valeurs propres du laplacien d'un graphe ont certaines propriétés intéressantes, comme le fait que l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est égal au nombre de composantes connexes du graphe (voir par exemple [178]). Dans ce chapitre, tous les graphes sont connexes (pour la finitude de la distance moyenne) donc leur laplacien n'a qu'une seule valeur propre nulle.

Mohar, dans [177], a utilisé la seconde plus petite valeur propre Laplacienne et le degré maximum pour borner supérieurement la distance moyenne. Récemment, dans [194], Sivasubramanian a proposé une borne à la distance moyenne en fonction de toutes les valeurs propres non nulles du laplacien. La borne établie n'est atteinte que pour les arbres.

Théorème 4.16 (Sivasubramanian [194]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et soient $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de son laplacien. Alors $\bar{\ell} \geq \frac{2}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{1}{\lambda_i}$.*

4.2.6 Distance moyenne et arbres couvrants dans un graphe

Un arbre partiel ou encore couvrant d'un graphe G est un graphe partiel de G qui est un arbre. Johnson et al. ont montré dans [134], que le problème qui consiste à trouver dans un graphe G , un arbre couvrant de distance moyenne minimum parmi tous les arbres couvrants de G est un problème NP-dur, d'où l'intérêt de borner cette distance moyenne. Dans [52], Dankelmann et Entringer ont considéré le problème qui consiste à trouver une borne supérieure à la plus petite distance moyenne d'un arbre couvrant dans un graphe de degré minimum donné. Le résultat de Dankelmann et Entringer est le suivant :

Théorème 4.17 (Dankelmann et Entringer [52]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum δ . Alors G possède un arbre couvrant T de distance moyenne $\bar{\ell}(T) \leq \frac{n}{\delta+1} + 5$.*

De plus, ils ont amélioré la borne obtenue dans le Théorème 4.17, pour les graphes sans triangle, les graphes sans C_4 et les graphes de maille donnée.

Dans [99], Fischermann et al. ont déterminé parmi les arbres d'ordre n et de degré maximum au plus Δ donnés, ceux qui minimisent la distance moyenne. Dans [218] (voir aussi [219]), Wang a caractérisé parmi les arbres d'ordre et de séquence de degrés donnés, ceux qui sont d'indice de Wiener maximum et ceux d'indice de Wiener minimum.

4.2.7 Existence d'un graphe de distance moyenne donnée

Plesnik, avait posé dans [186], la question suivante : “Etant donné un nombre rationnel $t \geq 1$, existe-t-il un graphe de distance moyenne $\bar{\ell} = t$ ”. Dans [123], Hendry y a répondu par l’affirmative. Puis dans [121], Hao a étudié l’existence d’un graphe de distance moyenne et de connexité données. Il a montré que :

Théorème 4.18 (Hao [121]) *Pour tout rationnel $t > 1$ et tout entier positif k , il existe une infinité de graphes de connexité k et de distance moyenne t .*

Dans [222], Winkler a caractérisé les quantités égales à la distance moyenne d’un arbre. Il a donné dans chaque cas le nombre d’arbres non isomorphes ayant comme distance moyenne, la valeur donnée.

4.2.8 Distance moyenne dans les graphes pondérés

Une fonction poids est une fonction de E dans \mathbb{R}^+ qui associe à toute arête e de E un poids $f(e) \in \mathbb{R}^+$. Dans la littérature, nombreux sont les papiers qui traitent de la distance moyenne dans les graphes non pondérés. Un graphe non pondéré peut être vu comme un graphe dans lequel à toutes les arêtes est associé un poids égal à 1. Mais dans la pratique, supposer que toutes les arêtes sont de même poids n’est pas réaliste, c’est ce qu’a motivé l’introduction de poids.

Dans [33], Broere et al. ont étudié la distance moyenne dans les graphes pondérés. Pour un graphe G , ils ont noté $\mu(G; f)$ la distance moyenne du graphe G avec une fonction poids f . Comme $\mu(G; f)$ peut être arbitrairement grande (ou petite) si aucune condition n’est posée sur f , alors Broere et al. ont restreint leur étude aux graphes avec des fonctions poids normalisées (i.e celles qui vérifient $\sum_{e \in E} f(e) = m$) et ont donné des bornes pour $\mu_{\min}(G) = \min_f \mu(G; f)$ et $\mu_{\max}(G) = \max_f \mu(G; f)$.

Dans [64], Djelloul et Kouider, ont montré qu’étant donné un graphe connexe G , une collection C de m poids positifs et un nombre réel k , décider s’il existe une fonction $f : E \rightarrow C$ telle que $\mu(G; f) \geq k$ est un problème NP-complet.

4.2.9 Distance moyenne dans les graphes orientés

La distance moyenne est aussi étudiée dans les digraphes (graphes orientés). Il est à noter que les digraphes considérés sont supposés fortement connexes pour que la distance

moyenne soit finie. Ng et Teh [176], ont donné une borne inférieure à la distance moyenne dans un digraphe.

Théorème 4.19 (Ng et Teh [176]) *Tout digraphe fortement connexe d'ordre n et de taille m est de distance moyenne au moins $2 - \frac{m}{n(n-1)}$.*

En partant d'un graphe non orienté G , nous pouvons obtenir un digraphe. Une orientation d'un graphe G est un assignement de directions aux arêtes de G . Une orientation de G est dite *orientation forte* si le digraphe obtenu est fortement connexe. Un graphe admet une orientation forte si et seulement si G est 2-arête-connexe ([190]). Pour un graphe 2-arête-connexe, $\bar{\ell}_{min}$ est le minimum des distances moyennes pris sur l'ensemble de toutes les orientations fortes de G . Une orientation forte de G pour laquelle la distance moyenne atteint $\bar{\ell}_{min}$ est dite *orientation optimale* de G . Il n'existe malheureusement pas de fonction f telle que tout graphe 2-arête-connexe G de distance moyenne $\bar{\ell}$ admette une orientation de distance moyenne au plus $f(\bar{\ell})$. Plesnik [186] a montré que le problème qui consiste à trouver une orientation optimale d'un graphe 2-arête-connexe donné est NP-dur, d'où l'intérêt de borner $\bar{\ell}_{min}$. C'est ce qu'ont fait Dankelmann et al. dans [53]. Ils ont borné inférieurement $\bar{\ell}_{min}$ en fonction de l'ordre, la taille, la maille et $\bar{\ell}$ la distance moyenne de G . Ils ont aussi montré qu'il n'y a pas de borne supérieure pour $\bar{\ell}_{min}$ en fonction de $\bar{\ell}$. Cependant, en supposant que toute arête de G est dans un 3-cycle, ils ont obtenu que $\bar{\ell}_{min} \leq \frac{7}{4}\bar{\ell}$.

Dankelmann et Volkmann se sont intéressés aux distances moyennes dans les tournois. Un tournoi est une orientation des arêtes d'un graphe complet. Plesnik s'y était déjà intéressé dans [186], et avait montré que la distance moyenne de tout tournoi fortement connexe d'ordre $n \geq 3$, vérifie $\bar{\ell} \leq \frac{n+4}{6} + \frac{1}{n}$. Dans [54], Dankelmann et Volkmann ont donné une borne à la distance moyenne dans un tournoi fortement connexe de connexité k .

Théorème 4.20 (Dankelmann et Volkmann [54]) *Soit $k \geq 1$ et soit T un tournoi k -connexe d'ordre n alors $\bar{\ell}(T) < \frac{n}{6k} + \frac{19}{6} + \frac{k}{n}$.*

Dans [57], Dankelmann et Volkmann ont établi une borne pour la distance moyenne dans les tournois bipartis (i.e orientations de graphes complets bipartis) fortement connexes. Ils ont aussi montré dans [57] que la borne du Théorème 4.20 reste, à une contante près, valable pour les tournois bipartis k -connexes pour lesquels ils ont obtenu $2 \leq \bar{\ell}(T) < \frac{n}{6k} + \frac{25}{6} + \frac{k}{n}$.

Avant de fermer cette section, citons juste quelques résultats inclassables dans les sections précédentes. Comme par exemple, celui dans [224], Yeh et Gutman ont déterminé (entre autres) la distance moyenne du produit et du joint de deux graphes donnés G_1 et G_2 . Dans [61], Dankelmann a donné des inégalités de type Nordhaus-Gaddum pour la distance moyenne. Un résultat de type Nordhaus-Gaddum est une borne supérieure ou inférieure, généralement atteinte, pour la somme ou le produit d'un paramètre d'un graphe et de son complémentaire.

Dans [36, 48, 60, 124, 126, 186], des bornes pour la distance moyenne dans certaines classes de graphes (bipartis, planaires, sans triangle, auto-complémentaires, distance-héréditaire, graphes représentatifs des arêtes d'un graphe) sont données. Dans [55], Dankelmann et al. ont donné des bornes supérieures à la distance moyenne dans les graphes sans $K_{3,3}$. Plus exactement pour les graphes sans $K_{3,3}$ presque δ -réguliers. Les graphes presque δ -réguliers sont les graphes dont le degré maximum Δ n'est pas très grand comparé au degré minimum δ .

D'autres résultats concernant les distances moyennes dans les graphes peuvent être consultés dans [5, 42, 65, 85, 86, 115, 186, 196].

Enfin, les aspects algorithmiques de la distance moyenne sont traités dans [49] et [68].

4.3 Distance moyenne et maille

Le travail présenté dans ce chapitre est inspiré par deux conjectures d'AutoGraphiX (AGX en abrégé). AGX est un programme développé par Caporossi et Hansen ([38]) dont la tâche consiste à générer automatiquement des conjectures. Il a été créé il y a une dizaine d'années mais l'utilisation de l'ordinateur dans la génération de conjectures mathématiques remonte à plus loin. Larson cite dans son article [158] des logiciels qui datent des années cinquantes. Nous citons à titre d'exemple deux systèmes qui ont particulièrement intéressé les chercheurs en théorie des graphes :

- *Graffiti* conçu par Fajtlowicz au milieu des années 80 ([87]). Graffiti est un programme qui cherche heuristiquement des relations entre certains invariants de graphes. Le rôle de ce programme est de décider quelles relations doivent être acceptées comme conjectures, en testant ces relations sur une base de données d'exemples. Ces conjectures ont suscité beaucoup d'intérêt parmi les chercheurs. Beaucoup de théorèmes ont en découlé, comme par exemple le résultat de Favaron et al. ([96]) qui ont prouvé que le rayon d'un graphe n'est jamais plus grand que sa stabilité, ou celui de Chung ([41]) qui a

montré que la distance moyenne dans un graphe est au plus aussi grande que sa stabilité (voir Théorème 4.6). Dans [29], Brewster et al. ont donné une liste de contre-exemples à plus d'une quarantaine de conjectures proposées par Graffiti. La liste de ces conjectures est régulièrement mise à jour dans [87].

- *Ingrid* développé aussi dans les années 80 par Brigham et al. [30] (voir aussi [32]). Ce système a été utilisé pour générer des modèles, donc proposer des conjectures. L'accent est mis sur les paramètres de graphes. Ingrid bornait automatiquement des invariants de graphes à partir de valeurs d'invariants donnés sauvegardées dans une base de données. Un résumé des résultats obtenus par Ingrid peut être consulté dans [31].

Le programme AGX utilise une approche différente. Cette approche est essentiellement basée sur une métaheuristique de recherche à voisinage variable. Elle a pour but de déterminer des classes de graphes extrémaux pour certains invariants pour ensuite déduire des conjectures en étudiant les graphes de ces classes.

Un grand avantage qu'offrent de tels systèmes est que même lorsque les conjectures proposées sont fausses, elle dévoilent des relations entre des paramètres parfois jamais suspectés auparavant d'être liés par une quelconque relation.

Les deux conjectures d'AGX auxquelles nous nous sommes intéressées font intervenir la distance moyenne et la maille d'un graphe et sont parues dans [9]. La *maille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur minimale d'un cycle dans ce graphe. La maille est infinie si le graphe considéré est sans cycle. Curieusement, aucun résultat dans la littérature n'avait fait intervenir uniquement ces deux paramètres pour borner la distance moyenne. Nous montrons la première conjecture sous une forme plus forte. La deuxième a déjà été réfutée dans le cas $\delta = 1$ ([94]). Pour $\delta \geq 2$, nous la montrons sous une forme améliorée. Bien entendu, dans tout ce qui suit, G est supposé posséder au moins un cycle (autrement la maille serait infinie et les résultats perdent tout sens).

Voici les énoncés des deux conjectures sur lesquelles nous nous sommes penchées.

Conjecture 4.1 ([9]) *Soit G un graphe connexe de maille g et de distance moyenne $\bar{\ell}$, alors :*

$$\bar{\ell}g \leq \begin{cases} \frac{n^3}{4(n-1)} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n^2+n}{4} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Cette borne est atteinte pour les cycles.

Conjecture 4.2 ([9]) *Soit G un graphe connexe de maille g et de distance moyenne $\bar{\ell}$, alors :*

$$\frac{\bar{\ell}}{g} \geq \begin{cases} \frac{n}{4(n-1)} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{4n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Cette borne est atteinte pour les cycles.

A vrai dire, les conjectures telles que citées dans [9], proposaient aussi une borne inférieure au produit $\bar{\ell}g$ et une borne supérieure au rapport $\frac{\bar{\ell}}{g}$. La première borne est évidente. Puisque $\bar{\ell} \geq 1$ et $g \geq 3$, alors $\bar{\ell}g \geq 3$. La deuxième borne, moins triviale est prouvée dans [9]. Il y est montré que $\frac{\bar{\ell}}{g} \leq \frac{n^3 - 7n + 12}{9n(n-1)}$.

Remarquons d'abord que la conjecture 4.1 est vraie pour les graphes 2-connexes d'ordre $n \geq g$. En effet, ceci est une conséquence d'un résultat de Winkler. Dans [221], Winkler a montré que la distance moyenne est au plus $\frac{n^2}{4(n-1)}$ pour tout graphe 2-connexe G .

Dans les deux sections suivantes, nous montrons dans l'ordre, une amélioration de la Conjecture 4.1, puis une amélioration de la Conjecture 4.2 lorsque $\delta \geq 2$.

4.3.1 Borne supérieure de la distance moyenne en fonction de la maille

Nous obtenons le résultat suivant, plus général que Conjecture 4.1 :

Théorème 4.21 *Soit G un graphe connexe de maille g et de distance moyenne $\bar{\ell}$. Alors :*

$$\bar{\ell} \leq \begin{cases} \frac{n+1}{3} - \frac{g(g^2-4)}{12n(n-1)} & \text{si } g \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{3} - \frac{g(g^2-1)}{12n(n-1)} & \text{si } g \text{ est impair} \end{cases}$$

Cette borne est atteinte pour les cycles.

Pour montrer le Théorème 4.21, nous allons utiliser la transmission. Souvent dans la littérature la transmission est utilisée au lieu de la distance moyenne pour éviter les fractions trop compliquées. Il nous suffit donc de montrer la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Soit G un graphe connexe de maille g , alors :*

$$\sigma(G) \leq \begin{cases} \frac{n(n^2-1)}{3} - \frac{g(g^2-4)}{12} & \text{si } g \text{ est pair} \\ \frac{n(n^2-1)}{3} - \frac{g(g^2-1)}{12} & \text{si } g \text{ est impair} \end{cases}$$

Preuve de la Proposition 4.1.

Si $n = g$ alors G est un cycle et donc $\sigma(C_n) = \frac{g^3}{4}$, lorsque g est pair et $\sigma(C_n) = \frac{g(g^2-1)}{4}$, lorsque g est impair. La proposition 4.1, est donc vraie dans ce cas.

Maintenant, supposons que G est d'ordre $n \geq g + 1$. Nous allons enlever des arêtes de G jusqu'à obtenir un graphe connexe d'ordre n , de maille g et de taille minimum. Le graphe G' ainsi obtenu contient exactement un cycle et ce cycle est de longueur g . Le graphe G' n'est autre que la réunion d'un arbre T et d'une arête e qui appartient au cycle de longueur g . Comme $n \geq g + 1$, alors $\delta(G') = 1$. De plus, par construction $\sigma(G) \leq \sigma(G')$, donc il suffit de montrer Proposition 4.11 pour $\sigma(G')$.

Soit C_g le cycle de G' et soient a et b les extrémités de l'arête $e \in C_g$. Pour $x, y \in V$, posons $\delta(x, y) = d_T(x, y) - d_{T \cup e}(x, y)$. Notons que $\delta(x, y) \geq 0$. Nous avons

$$\sigma(T) - \sigma(T \cup e) = \sum_{x, y \in V} \delta(x, y) \geq \sum_{x, y \in C_g} \delta(x, y) \quad (4.1)$$

$$\sum_{x, y \in C_g} \delta(x, y) = \sigma(C_g - e) - \sigma(C_g) \quad (4.2)$$

De plus d'après le Théorème 4.1 cité dans la section précédente, nous avons

$$\sigma(T) \leq \sigma(P_n) = \frac{n(n^2-1)}{3} \quad (4.3)$$

Par (4.1), (4.2), (4.3) et en posant $P_g = C_g - e$ nous obtenons

$$\sigma(G') = \sigma(T \cup e) \leq \sigma(P_n) - (\sigma(C_g - e) - \sigma(C_g)) = \frac{n(n^2-1)}{3} - (\sigma(P_g) - \sigma(C_g)).$$

Il est connu et facile à retrouver que

$$\sigma(P_g) - \sigma(C_g) = \begin{cases} \frac{g(g^2-4)}{12} & \text{si } g \text{ est pair} \\ \frac{g(g^2-1)}{12} & \text{si } g \text{ est impair} \end{cases}$$

Nous obtenons finalement que :

$$\sigma(G) \leq \sigma(G') = \sigma(T \cup e) \leq \begin{cases} \frac{n(n^2-1)}{3} - \frac{g(g^2-4)}{12} & \text{si } g \text{ est pair} \\ \frac{n(n^2-1)}{3} - \frac{g(g^2-1)}{12} & \text{si } g \text{ est impair} \end{cases}$$

Ce qui établit la Proposition 4.1. ■

Le Théorème 4.21 est une conséquence directe de la Proposition 4.1 (il suffit de diviser par $n(n-1)$). Les bornes du Théorème 4.21 sont atteintes par les cycles. Ces bornes sont de plus meilleures que celles proposées dans Conjecture 4.21.

Nous pouvons facilement le vérifier :

Posons $\mu_i = \frac{n+1}{3} - \frac{g(g^2-1)}{12n(n-1)}$, $\mu_p = \frac{n+1}{3} - \frac{g(g^2-4)}{12n(n-1)}$ dans Théorème 4.21 et $H_p = \frac{n^3}{4(n-1)g}$, $H_i = \frac{n^2+n}{4g}$ dans Conjecture 4.21 (nous indexons p pour pair et i pour impair). Un rapide coup d'oeil permet de voir que $\mu_i \leq \mu_p$. Par ailleurs, nous avons $\frac{\mu_p}{H_p} \leq \frac{4g}{3n} - \frac{g^4}{3n^4}$. Il est clair que $\frac{\mu_p}{H_p} = 1$ si $n = g$, et si $n \neq g$, alors nous vérifions que $\frac{\mu_p}{H_p} < 1$, et que de plus $\frac{\mu_p}{H_p}$ tend vers 0 lorsque $\frac{n}{g}$ est très grand (tend vers ∞).

Comparons maintenant μ_p avec H_i . Notons que $n > g$ parce que g est pair et n est impair. Notre but est de montrer que $\frac{\mu_p}{H_i} \leq 1$.

Nous avons $\frac{\mu_p}{H_i} = \frac{4g}{3n} \left(1 - \frac{g^3}{4n(n^2-1)} + \frac{4g}{4n(n^2-1)}\right)$ et nous voulons vérifier si

$$\frac{4g}{3n} \left(1 - \frac{g^3}{4n(n^2-1)} + \frac{4g}{4n(n^2-1)}\right) \leq 1. \quad (\star)$$

Nous distinguons alors deux cas :

Si $n \geq \frac{4}{3}g$, comme $\frac{4g}{3n} \left(1 - \frac{g^3}{4n(n^2-1)} + \frac{4g}{4n(n^2-1)}\right) \leq \frac{4g}{3n} \left(1 - \frac{g^3}{4n^3} + \frac{4g}{3n^3}\right)$ alors

pour vérifier (\star) , il suffit de vérifier que $\frac{4g}{3n} \left(1 - \frac{g^3}{4n^3} + \frac{4g}{3n^3}\right) \leq 1$ ce qui est équivalent à $4g(3n^3 + 4g) \leq 3(3n^4 + g^4)$.

Cette dernière inégalité est vraie puisque $3g^4 \geq 16g^2$ (car $g \geq 3$) et $9n^4 \geq 12gn^3$ (car $n \geq \frac{3}{4}g$).

Si $g+1 \leq n < \frac{4}{3}g$, alors (\star) est équivalente à

$$4g^2 - g^4 \leq 3n^4 - 4gn^3 - 3n^2 + 4gn \quad (\star\star)$$

Posons $x = \frac{n}{g}$ avec $1 + \frac{1}{g} \leq x < \frac{3}{4}$. Alors $(\star\star)$ devient équivalente à $x(3x-4)(g^2x^2-1) + g^2 - 4 \geq 0$.

Donc montrer que $\frac{\mu_p}{H_i} \leq 1$ revient à montrer que la fonction $f(x) = x(3x-4)(g^2x^2-1) + g^2 - 4$, est positive.

Etudions le signe de f : Nous avons $f'(x) = 12g^2x^2(x-1) - 6x + 4$. En dérivant f' , nous obtenons $f''(x) = 12g^2x(3x-2) - 6$. La fonction f'' est un polynôme du second degré qui est positif lorsque $1 + \frac{1}{g} \leq x$. Alors f' croit et comme $f'(1 + \frac{1}{g}) = 12g + 22 + \frac{6}{g} > 0$

alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x, 1 + \frac{1}{g} \leq x$. Il s'en suit que f croit. De plus, $f(1 + \frac{1}{g}) = (1 + \frac{1}{g})(-1 + \frac{3}{g})(g^2 + 2g) + g^2 - 4$, donc $f(1 + \frac{1}{g}) = 3 + \frac{6}{g}$ et donc l'inégalité $(\star\star)$ est vérifiée et par conséquent l'inégalité (\star) l'est aussi.

4.3.2 Borne inférieure de la distance moyenne en fonction de la maille

En réponse à la Conjecture 4.2, dans le cas $\delta \geq 2$ (puisque nous le disions au début, la conjecture 4.2 est fausse lorsque $\delta = 1$), nous montrons un résultat plus fort, le suivant :

Théorème 4.22 *Soit G un graphe connexe de degré minimum $\delta \geq 2$, de maille g et de distance moyenne $\bar{\ell}$. Alors $\bar{\ell} \geq \frac{ng}{4(n-1)}$ sauf si G est un cycle de longueur impaire auquel cas $\bar{\ell} = \frac{(g+1)}{4}$. La borne $\frac{ng}{4(n-1)}$ est atteinte par les cycles de longueur paire.*

Pour les raisons citées dans la section précédente, nous allons montrer le Théorème 4.22 pour la transmission :

Proposition 4.2 *Soit G un graphe connexe de degré minimum $\delta \geq 2$ et de maille g . Alors pour tout sommet $x \in V$, nous avons : $\sigma(x) \geq \frac{gn}{4}$ sauf si G est un cycle de longueur impaire, auquel cas $\sigma(x) = \frac{(g^2-1)}{4}$. La borne $\frac{gn}{4}$ est atteinte pour les cycles de longueur paire.*

Tout d'abord, nous établissons quelques propriétés simples mais qui nous seront bien utiles dans la suite. Soit x_0 un sommet de G et soit T l'arbre des distances associé à x_0 . Il s'agit de l'arbre (de racine x_0) des plus courtes chaînes de x_0 vers les autres sommets du graphe, qui décompose le graphe G en niveaux (ou en couches) par rapport au sommet x_0 . Le niveau N_i représente l'ensemble des sommets de G à distance exactement i de x_0 . Si N_0, \dots, N_p sont les niveaux obtenus alors $N_0 = \{x_0\}$ et $p = e(x_0)$ (l'excentricité du sommet x_0 , rappelons que $e(x) = \max_{y \in V(G)} d(x, y)$). Une *branche* d'un arbre de racine x_0 est une chaîne reliant la racine x_0 à une feuille.

Lemme 4.1 *Soit G un graphe connexe de degré minimum $\delta \geq 2$ et de maille g . Soit x_0 un sommet de G et soit T l'arbre des distances associé à x_0 dans G . Alors toute feuille de T est à distance :*

- au moins $\frac{g-1}{2}$ de x_0 , si g est impair.
- au moins $\frac{g}{2} - 1$ de x_0 , si g est pair, de plus dans ce cas au moins une feuille de T est à distance au moins $\frac{g}{2}$ de x_0 .

Preuve du Lemme 4.1.

Nous remarquons d'abord que si un sommet y appartient au niveau N_i , avec $i \geq 1$ alors $N_G(y) \subseteq N_{i-1} \cup N_i \cup N_{i+1}$. En effet, si z est un voisin de y dans G et si nous posons $d(x_0, z) = k$ alors nous avons $|d(x_0, z) - d(x_0, y)| \leq 1$ donc $k \in \{i-1, i, i+1\}$.

Pour montrer Lemme 4.1, nous considérons deux cas selon la parité de g .

Cas 1 : Si g est pair.

Soit y une feuille de T qui appartient au niveau N_i . Supposons que $i \leq \frac{g}{2} - 2$. Comme $d_G(y) \geq \delta \geq 2$ alors il existe un voisin z de y dans $G - E(T)$ et nous avons forcément $z \in N_t$ avec $t \in \{i-1, i, i+1\}$. Donc l'arête (y, z) est contenue dans un cycle de longueur au plus $g-2$ ce qui contredit que la maille est égale à g .

D'autre part, si toutes les feuilles de T sont dans $N_{\frac{g}{2}-1}$, alors leur voisins dans $G - E(T)$ seraient à distance au plus $\frac{g}{2} - 1$ de x_0 et par conséquent il existerait un cycle de longueur au plus $g-1$ ce qui est absurde parce que G est de maille g .

Cas 2 : Si g est impair.

Soit y une feuille de l'arbre T qui appartient au niveau N_i . Supposons que $i \leq \frac{g-1}{2} - 1$. Comme $\delta \geq 2$, alors il existe un sommet z voisin de y dans $G - E(T)$. Nous savons que z appartient à N_{i-1} , N_i ou N_{i+1} . Alors l'arête (y, z) est contenue dans un cycle de longueur au plus $g-1$ ce qui est absurde puisque G est de maille g .

Finalement, toute feuille de T est à distance au moins $\frac{g-1}{2}$ de x_0 si g est impair, à distance au moins $\frac{g}{2} - 1$ de x_0 si g est pair et dans ce cas au moins une feuille est à distance au moins $\frac{g}{2}$ de x_0 . Ceci achève la preuve du Lemme 4.1. \square

Nous allons introduire quelques nouvelles définitions qui vont nous aider à établir le résultat désiré. Nous disons d'un arbre T des distances qu'il a une *configuration minimale* si et seulement si

- Lorsque g est impair, toutes les feuilles appartiennent à $N_{\frac{g-1}{2}}$.
- Lorsque g est pair, exactement une feuille appartient à $N_{\frac{g}{2}}$ et toutes les autres feuilles appartiennent à $N_{\frac{g}{2}-1}$.

Dans un arbre T de racine x_0 , nous appelons *2-chaîne*, une chaîne $P = u_1 u_2 \dots u_k$ telle que $(u_j, u_{j+1}) \in E(T)$ pour tout j , $1 \leq j \leq k-1$, u_1 est une feuille de T et u_k est le sommet le plus éloigné de u_1 tel que $d_T(u_j) = 2$, pour tout j , $2 \leq j \leq k$ et tel que x_0 n'est pas sommet interne de P . En d'autres termes, P passe par des sommets de degré 2 dans T et P s'arrête lorsqu'elle rencontre soit un sommet dont le voisin est de degré ≥ 3 dans T soit x_0 . Remarquons que la suppression d'une 2-chaîne ne déconnecte pas l'arbre T .

Nous énonçons et prouvons un dernier lemme avant de démontrer la Proposition 4.2 :

Lemme 4.2 *Soit T un arbre d'ordre $n \geq g$ et racine x_0 , avec $d_T(x_0) \geq 2$.*

1. *Supposons que g est pair, que les feuilles de T sont à distance au moins $\frac{g}{2} - 1$ de x_0 et qu'au moins une feuille est à distance au moins $\frac{g}{2}$ de x_0 . Alors $\sigma_T(x_0) \geq \frac{gn}{4}$.*
2. *Supposons que g est impair, que $n \geq g + 1$ et que toute feuille de T est à distance au moins $\frac{(g-1)}{2}$ de x_0 . Alors $\sigma_T(x_0) \geq \frac{ng}{4}$.*

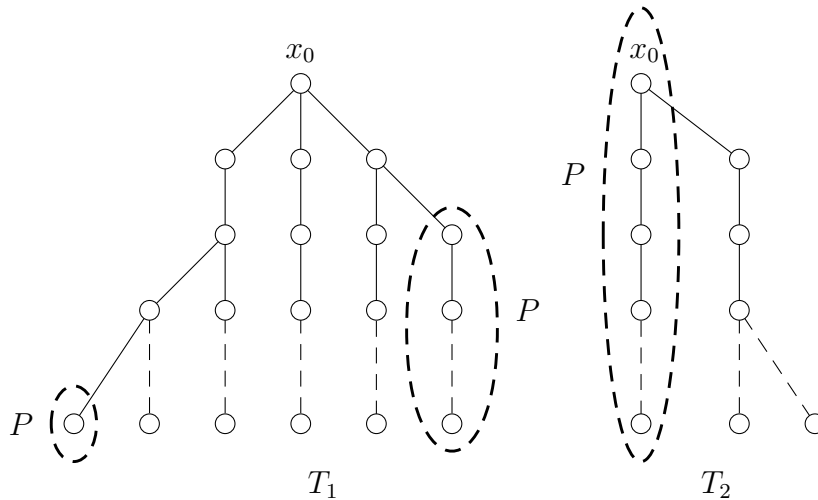


FIGURE 4.1 – Des 2-chaînes P dans l'arbre T_i ($i = 1, 2$)

Preuve du Lemme 4.2. Nous séparons les cas g pair et g impair et nous procédons, dans chaque cas, par récurrence sur n , l'ordre de l'arbre T .

Cas 1 : g est pair.

Si $n = g$ alors par hypothèses, l'arbre T a deux branches, il a une feuille à distance $\frac{g}{2} - 1$ de x_0 et l'autre à distance $\frac{g}{2}$ de x_0 . Dans ce cas $\sigma_T(x_0) = 2 \sum_{i=1}^{g/2-1} i + \frac{g}{2} = \frac{g^2}{4}$.

Maintenant, supposons que Lemme 4.2 est vrai pour tous les arbres d'ordre entre g et $n - 1$ et montrons qu'il est encore vrai pour un arbre d'ordre n . Nous distinguons deux cas selon la configuration de T .

(a) Si T n'a pas une configuration minimale alors il existe dans T soit une feuille u à distance au moins $\frac{g}{2} + 1$ de x_0 ou une deuxième feuille u à distance au moins $\frac{g}{2} \geq 2$ de x_0 . Dans les deux cas, les feuilles de l'arbre $T' = T - \{u\}$, qui est d'ordre $n - 1$, sont à distance au moins $\frac{g}{2} - 1$ de x_0 et au moins une feuille est à distance au moins $\frac{g}{2}$. De plus, comme seul le sommet u a été supprimé et comme u n'est pas voisin de x_0 alors $d_{T'}(x_0) = d_T(x_0) \geq 2$. Par l'hypothèse de récurrence, nous obtenons $\sigma_{T'}(x_0) \geq \frac{g(n-1)}{4}$. Donc $\sigma_T(x_0) = \sigma_{T'}(x_0) + d(x_0, u) \geq \frac{g(n-1)}{4} + \frac{g}{2}$ d'où $\sigma_T(x_0) \geq \frac{gn}{4}$.

(b) Si T a une configuration minimale, alors comme $n > g$ l'arbre T a au moins 3 branches. Choisissons une 2-chaîne $P = u_1 u_2 \dots u_k$ de T avec u_1 dans $N_{\frac{g}{2}-1}$ et telle que la longueur $l(P)$ de P est minimum parmi toute les 2-chaînes de T avec une feuille dans $N_{\frac{g}{2}-1}$. Soit T' l'arbre obtenu à partir de T en enlevant la chaîne P . Posons $|V(P)| = k$, alors $|V(T')| = n - k \geq n - (\frac{g}{2} - 1)$. Notons que comme T a au moins 3 branches et par le choix de P , nous avons $d_{T'}(x_0) \geq 2$. En effet, soit $d_T(x_0) \geq 3$ et la suppression de P entraîne $d_{T'}(x_0) \geq 2$; soit $d_T(x_0) = 2$, dans ce cas $l(P) < \frac{g}{2} - 2$ et la suppression de P ne change pas le degré de x_0 donc $d_{T'}(x_0) = 2$. Dans T' , toutes les feuilles sont à distance $\frac{g}{2} - 1$ de x_0 et une seule feuille est à distance $\frac{g}{2}$. Donc par récurrence, nous obtenons $\sigma_{T'}(x_0) \geq \frac{g(n-k)}{4}$. D'autre part, $\sum_{y \in V(P)} d(x_0, y) = ((\frac{g}{2} - 1) - (k - 1) + \dots + (\frac{g}{2} - 1)) = \frac{k}{2}(g - k - 1)$. Donc $\sigma_T(x_0) \geq \sigma_{T'}(x_0) + \sum_{y \in V(P)} d(x_0, y) \geq \frac{gn}{4} + \frac{k}{2}(\frac{g}{2} - k - 1) \geq \frac{gn}{4}$ parce que $k \leq \frac{g}{2} - 1$.

Cas 2 : g est impair.

Si $n = g + 1$ alors par hypothèses, l'arbre T a ou bien 2 branches, une avec une feuille dans $N_{\frac{g-1}{2}}$ et l'autre avec une feuille dans $N_{\frac{g+1}{2}}$ ou bien T possède 3 branches chacune avec une feuille dans $N_{\frac{g-1}{2}}$. Dans tous les cas, nous avons $\sigma_T(x_0) \geq 2 \sum_{i=1}^{(g-1)/2} i + \frac{(g-1)}{2} = \frac{(g-1)(g+3)}{4}$ et $\frac{(g-1)(g+3)}{4} \geq \frac{(g+1)g}{4}$ parce que $g \geq 3$. Alors Lemme 4.22 est vrai pour la plus petite valeur de n si g est impair. Supposons maintenant qu'il est vrai pour tous les arbres d'ordre entre $g + 1$ et $n - 1$ et montrons

qu'il le reste pour un arbre T d'ordre n . Nous distinguons deux cas selon que la configuration de T est minimale ou pas.

(a) Si T n'a pas une configuration minimale, alors il existe au moins une feuille u à distance au moins $\frac{(g+1)}{2} \geq 2$ de x_0 . Soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant le sommet u . Comme, seul u a été supprimé et comme $d_T(x_0, u) \geq 2$ alors $d_{T'}(x_0) = d_T(x_0) \geq 2$. D'autre part, toutes les feuilles de T' sont à distance au moins $\frac{(g-1)}{2}$ de x_0 . Par les hypothèses de récurrence sur T' , nous avons $\sigma_{T'}(x_0) \geq \frac{(n-1)}{4}g$ et il s'en suit que $\sigma_T(x_0) \geq \frac{(n-1)}{4}g + \frac{g+1}{2} \geq \frac{n}{4}g + \frac{g}{4} \geq \frac{n}{4}g$ et c'est ce que nous voulions.

(b) Si T a une configuration minimale, alors T a au moins 3 branches. Choisissons une 2-chaîne $P = u_1 \dots u_k$ de T de longueur minimum parmi toutes les 2-chaînes de T . Posons $|V(P)| = k$ et $T' = T - P$. Comme T a au moins 3 branches et par le choix de P , nous avons ou bien $d_T(x_0) \geq 3$ (et donc $x_0 \notin V(P)$), ou bien $d_T(x_0) = 2$ et $l(P) < \frac{(g-1)}{2} - 1$. Dans tous les cas, la suppression de P donne $d_{T'}(x_0) \geq 2$. Les feuilles de T' sont à distance $\frac{(g-1)}{2}$ de x_0 . Alors par les hypothèses de récurrence, nous avons $\sigma_{T'}(x_0) \geq \frac{(n-k)}{4}g$. De plus, $\sum_{y \in V(P)} d(x_0, y) = ((\frac{(g-1)}{2} - (k-1)) + \dots + \frac{(g-1)}{2}) = \frac{kg}{2} - \frac{k^2}{2}$. Donc $\sigma_T(x_0) \geq \frac{(n-k)}{4}g + \frac{k}{2}g - \frac{k^2}{2} = \frac{g}{4}n + \frac{k}{4}(g-2k)$. Comme $k \leq \frac{(g-1)}{2}$, alors le terme de droite dans la dernière inégalité est au moins $\frac{ng}{4}$, et nous obtenons ce que nous désirions.

□

Nous arrivons à présent à la preuve de la Proposition 4.2.

Preuve de Proposition 4.2. Tout d'abord, remarquons que si G est un cycle de longueur impaire alors $\sigma(x_0) = \frac{(g^2-1)}{4}$. Dans les autres cas, Proposition 4.2 est une conséquence directe de Lemme 4.2. En effet, nous pouvons associer à un graphe G d'ordre n et de maille g , un arbre des distances T de racine x_0 ($x_0 \in V(G)$). Comme $\delta \geq 2$, alors $d_T(x_0) \geq 2$. Par Lemme 4.1, toute feuille dans T est à distance au moins $\frac{g-1}{2}$ de x_0 si g est impair. Encore par Lemme 4.1, si g est pair, alors toutes les feuilles sont à distance au moins $\frac{g}{2} - 1$ de x_0 et au moins une feuille est à distance au moins $\frac{g}{2}$ de x_0 . L'arbre T vérifie les hypothèses de Lemma 4.2. Remarquons que comme T est un arbre des distances de

racine x_0 alors $\sigma_T(x_0) = \sigma_G(x_0)$. La Proposition 4.2 s'en suit. ■

Le Théorème 4.22 est obtenu comme corollaire de la Proposition 4.2.

Troisième partie

Conclusion et Perspectives

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à trois notions importantes en théorie des graphes :

- Les couvertures par cycles ;
- Une généralisation des 2-facteurs : les pseudo 2-facteurs et
- La distance moyenne.

Au début de chaque chapitre, nous avons fait un tour d'horizon des résultats existants, notamment parmi les plus récents dans chaque domaine.

Dans la première partie de cette thèse nous avons étudié les couvertures par cycles de longueur bornée et les pseudo 2-facteurs. Les couvertures par cycles aussi bien que les pseudo 2-facteurs, peuvent être vus comme une généralisation de la notion de 2-facteur.

Notre résultat principal concernant les couvertures par cycles de longueur bornée est l'obtention d'une borne supérieure pour le nombre, $c_k(G)$, de cycles de longueur au plus k nécessaires pour couvrir tous les sommets d'un graphe 2-connexe donné G . Cette borne est une fonction de n , l'ordre du graphe et de sa stabilité α .

Il serait intéressant, de tenter d'améliorer la borne obtenue en envisageant la résolution du même problème dans des classes particulières de graphes, ou en utilisant des paramètres de graphes autres que la stabilité ou le degré minimum.

Pour les pseudo 2-facteurs, nous avons établi un résultat proposant une borne, en fonction de la stabilité et du degré minimum, pour le nombre de composantes d'ordre au plus 2 dans un pseudo 2-facteur d'un graphe donné. De plus, nous avons décrit une famille infinie de graphes atteignant cette borne.

Il serait intéressant de tenter de borner le nombre de composantes d'ordre au plus 2 en fonction d'autres paramètres du graphe, comme la domination par exemple.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons résolu deux conjectures ayant trait à la distance moyenne dans un graphe. Ces deux conjectures proposaient des bornes (supérieure et inférieure) pour la distance moyenne dans un graphe d'ordre n en fonction de sa maille. Nous avons amélioré les bornes proposées et obtenu donc des résultats qui

lient distance moyenne et maille.

Il peut être envisagé de faire intervenir d'autres paramètres de graphes (en plus de l'ordre et de la maille) pour borner la distance moyenne.

Plusieurs conjectures d'AGX sont encore ouvertes et en résoudre quelques unes serait aussi intéressant.

Bibliographie

- [1] S. Abassi. *The solution of the El-Zahar problem*. PhD thesis, Rutgers University (1998).
- [2] M. Abreu, A. A ; Diwan, B ; Jackson, D. Labbate et J. Sheehan. *Pseudo 2-factor isomorphic regular bipartite graphs*. Journal of Combinatorial Theory B. 98 (2008) 432-442.
- [3] J. Akiyama et M. Kano. *Factors and factorizations of graphs- A survey*. Journal of Graph Theory 9 (1985) 1-42.
- [4] J. Akiyama et M. Kano. *Factors and factorizations of graphs*. Book (Kyoto CGGT 2007).
- [5] M.H. Alsuwaiyel. *On the average distance of the hypercube tree*. ePrints of KFUPM (2008) et International Journal of computer mathematics (2008).
- [6] D. Amar, I. Fournier, A. Germa et R. Haggkvist. *Covering vertices of a simple graph with given connectivity and stability number*. Ann. Discrete Mathematics 20 (1984) 43-45.
- [7] K. Ando, Y. Egawa, A. Kaneko, K. Kawarabayashi et H. Matsuda. *Path factors in claw-free graphs*. Discrete Mathematics 243 (2002) 195-200.
- [8] T. Andreae. *On independent cycles and edges in graphs*. Discrete Mathematics 149 (1996) 291-297.
- [9] M. Aouchiche. *Comparaison automatisée d'invariants en théorie des graphes*. Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique de Montréal (2006).
- [10] R. Balakrishnan, N. Sridharan et K. Viswanathan Iyer. *Wiener index for graphs with more than one cut-vertex*. Applied Mathematics Letters 21 (2008) 922-927.
- [11] D. Bauer, S. L. Hakimi et E. Schmeichel. *Recognizing tough graphs is NP-hard*. Discrete Applied Mathematics 28 (1990) 191-195.

- [12] D. Bauer, A. Morgana et E. Schmeichel. *On the complexity of recognizing tough graphs*. Discrete Mathematics 124 (1994) 13-17.
- [13] D. Bauer, H. Broersma et E. Schmeichel. *Toughness in graphs-A survey*-. Graphs and Combinatorics 22 (2006) 1-35.
- [14] P. Bedrossian. *Forbidden subgraph and minimum degree conditions for hamiltonicity*. Ph.D. Thesis, Memphis State University (1991).
- [15] R. A. Beezer, J. E. Riegsecker et B. A. Smith. *Using minimum degree to bound average distance*. Discrete Mathematics 226 (2001) 365-371.
- [16] S. Bekkai, D. Forge et M. Kouider. *Covering the vertices of a graph with bounded cycles*. Discrete Mathematics 309 (2009) 1963-1966.
- [17] S. Bekkai et M. Kouider. *On pseudo 2-factors*. Discrete Applied Mathematics 157 (2009) 774-779.
- [18] S. Bekkai et M. Kouider. *On mean distance and girth*. En révision dans Discrete Applied Mathematics.
- [19] C. Berge. *Graphes et Hypergraphes*. Dunod, Paris (1970).
- [20] A. Bialostocki, D. Finkel et A. Gyarfás. *Disjoint chorded cycles in graphs*. Discrete Mathematics 308 (2008) 5886-5890.
- [21] D. Bienstock et E. Gyori. *Average distance in graphs with removed elements*. Journal of Graph Theory 12 (1988) 375-390.
- [22] M. Blaser, B. Manthey et J. Sgall. *An improved approximation algorithm for the asymmetric TSP with strengthened triangle inequality*. Journal of Discrete Algorithms 4 (2006) 623-632.
- [23] H. L. Bodlaender. *On disjoint cycles*. Int. J. Found. Compt. Sci. 5 (1994) 59-68.
- [24] J. A. Bondy et U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer (2008).
- [25] J. A. Bondy. *Basic graph theory : Paths and circuits*, in Handbook of Combinatorics, North-Holland, Amsterdam (1993).
- [26] A. Brandstadt et H-J Voss. *Short disjoint cycles in graphs with degree constraints*. Discrete Applied Mathematics 64 (1996) 197-205.
- [27] S. Brandt, G. Chen, R. Faudree, R.J. Gould et L. Lesniak. *Degree conditions for 2-factors*. Journal of Graph Theory 24 (1997) 165-173.
- [28] S. Brandt. *Subtrees and subforests of graphs*. Journal of Combinatorial Theory B 61 (1994) 63-70.

- [29] T. L. Brewster, M. J. Dinneen et V. Faber. *A computational attack on the conjectures of Graffiti : New counterexamples and proofs*. Discrete Mathematics 147 (1995) 35-55.
- [30] R. C. Brigham et R. D. Dutton. *Ingrid : A software tool for extremal graph theory research*. Congressus Numerantium 39 (1983) 337-352.
- [31] R. C. Brigham et R. D. Dutton. *A compilation of relations between graph invariants*. Networks 15 (1985) 73-107.
- [32] R. C. Brigham, R. D. Dutton et F. Gomez. *Ingrid : A graph invariant manipulator*. J. Symbolic Computation 7 (1989) 163-177.
- [33] I. Broere, M. J. Dorfling et P. Dankelmann. *The average distance in weighted graphs*. Proceedings of the 8th quadrennial conference on graphs, combinatorics algorithms and its applications (Western Michigan University, Kalamazoo) Vol. 1 (1998) 123-132.
- [34] H. Broersma, D. Paulusma et K. Yoshimoto. *On components of 2-factors in claw-free graphs*. Electronic Notes in Discrete Mathematics 29 (2007) 289-293.
- [35] H. Broersma, D. Paulusma et K. Yoshimoto. *Sharp upper bounds for the minimum number of components of 2-factors in claw-free graphs*. Graphs and Combinatorics 25 (2009) 427-460.
- [36] F. Buckley et L. Superville. *Mean distance in line graphs*. Congressus Numerantium 32 (1981) 153-162.
- [37] R. Cada. *Path factors and line graphs*. Electronic Notes in Discrete Mathematics 28 (2007) 433-436.
- [38] G. Caporossi et P. Hansen. *Variable neighborhood search for extremal graphs. 1. The AutoGraphiX system*. Discrete Mathematics 212 (2000) 29-44.
- [39] S. Chiba, S. Fujita, K. Kawarabayashi et T. Sakuma. *Disjoint even cycles packing*. Electronic Notes in Discrete Mathematics 34 (2009) 113-119.
- [40] S.A. Choudum et M.S. Paulraj. *Regular factors in $K_{1,3}$ -free graphs*. Journal of Graph Theory 15 (1991) 259-265.
- [41] F. R. K. Chung. *The average distance and the independence number*. Journal of Graph Theory 12 (1988) 229-235.
- [42] F. Chung et L. Lu. *the average distance in random graphs with given expected degree*. Proc. Nat. Acad. of sciences 99 (2002) 15879-15882.

- [43] V. Chvátal. *Tough graphs and hamiltonian circuits*. Discrete Mathematics 5 (1973) 215-228.
- [44] V. Chvátal et P. Erdos. *A note on hamiltonian Circuits*. Discrete Mathematics 2 (1972) 111-113.
- [45] K. Corradi et A. Hajnal. *On the maximal number of independent circuits in a graph*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 14 (1963) 423-439.
- [46] D. Cvetkovic, M. Doob, I. Gutman et A. Torgasev. *Recent results in the theory of graph spectra*. North Holland, Amsterdam (1988).
- [47] D. Cvetkovic, M. Doob et H. Sachs. *Spectra of graphs-Theory and applications*. Academic Press, New York (1980). Third Edition, Johann Ambrosius Barth Verlag (1995).
- [48] E. Dahlhaus, P. Dankelmann, W. Goddard et H. C. Swart. *MAD trees and distance-hereditary graphs*. Discrete Applied Mathematics 131 (2003) 151-167.
- [49] P. Dankelmann. *Computing the average distance of an interval graph*. Inform. Process. Lett. 43 (1993) 311-314.
- [50] P. Dankelmann. *Average distance and independence number*. Discrete Applied Mathematics 51 (1994) 75-83.
- [51] P. Dankelmann. *Average distance and domination number*. Discrete Applied Mathematics 80 (1997) 21-35.
- [52] P. Dankelmann et R. Entringer. *Average distance, minimum degree and spanning trees*. Journal of Graph Theory 33 (2000) 1-13.
- [53] P. Dankelmann, O. R. Oellermann et J-L. Wu. *Minimum average distance of strong orientations of graphs*. Discrete Applied Mathematics 143 (2004) 204-12.
- [54] P. Dankelmann et L. Volkmann. *Average distance in k-connected tournaments*. Ars Combinatoria 77 (2005) 289-294.
- [55] P. Dankelmann, G. Dlamini et H. C. Swart. *Upper bounds on distance measures in $K_{3,3}$ -free graphs*. Utilitas Mathematica 67 (2005) 205-222.
- [56] P. Dankelmann. *Average distance, minimum degree and size*. Utilitas Mathematica 69 (2006) 233-243.
- [57] P. Dankelmann et L. Volkmann. *Average distance in bipartite tournaments*. Ars Combinatoria 83 (2007) 295-306.

- [58] P. Dankelmann, S. Mukwembi et H. C. Swart. *Average distance and edge-connectivity I*. SIAM Journal of Discrete Mathematics 22 (2008) 92-101.
- [59] P. Dankelmann, S. Mukwembi et H. C. Swart. *Average distance and edge-connectivity II*. SIAM Journal of Discrete Mathematics 21 (2008) 1036-1052.
- [60] P. Dankelmann, I. Gutman, S. Mukwenbi et H. C. Swart. *The edge-Wiener index of a graph*. Discrete Mathematics 309 (2009) 3452-3457.
- [61] P. Dankelmann. *Nordhaus-Gaddum-type inequalities for the average distance*. A paraitre dans J. Comb. Math. Comb. Comput.
- [62] E. Delavina, R. Pepper et B. Waller. *A note on dominating sets and average distance*. Discrete Mathematics 309 (2009) 2615-2619.
- [63] G.A. Dirac. *Some theorems on abstract graphs*. Proc. London Math. Soc. 2 (1952) 69-81.
- [64] S. Djelloul et M. Kouider. *On weighted mean distance*. Australasian Journal of Combinatorics 23 (2001) 181-195.
- [65] A. A. Dobrynin, R. Entringer et I. Gutmann. *Wiener index of trees : theory and applications*. Acta Appl. Math 66 (2001) 211-249.
- [66] J. Dong. *k disjoint cycles containing specified independent vertices*. Discrete Mathematics 308 (2008) 5269-5273.
- [67] D. Dor et M. Tarsi. *Graph decomposition is NPC-A complete proof of Holyer's conjecture*. Proc. of 20th ACM STOC, ACM Press (1992) 252-263.
- [68] J. K. Doyle et J. E. Graver. *Mean distance in a graph*. Discrete Mathematics 17 (1977) 147-154.
- [69] Y. Egawa et K. Ota. *Regular factors in $K_{1,n}$ -free graphs*. Journal of Graph Theory 15 (1991) 337-344.
- [70] Y. Egawa. *Vertex-disjoint cycles of the same length* Journal of combinatorial Theory B 66 (1996) 168-200.
- [71] Y. Egawa et H. Enomoto. *Sufficient conditions for the existence of k-factors*. Recent Studies in Graph Theory (V.R. Kulli, ed.) Vishwa International Publications, India (1989) 96-105.
- [72] Y. Egawa, M. Kano. *Sufficient conditions for graphs to have (g, f)-factors* Discrete Mathematics 151 (1996) 87-90.

- [73] Y. Egawa, R.J. Faudree, E. Gyori, Y. Ishigami, R. Schelp et H. Wang. *Vertex-disjoint cycles containing specified edges*. Graphs and Combinatorics 16 (2000) 81-92.
- [74] Y. Egawa, M. Hagita, K. Kawarabayashi et H. Wang. *Covering vertices of a graph by k disjoint cycles*. Discrete Mathematics 270 (2003) 115-125.
- [75] Y. Egawa, S. Fujita, K. Kawarabayashi et H. Wang. *Existence of two disjoint long cycles in graphs*. Discrete Mathematics 305 (2005) 154-169.
- [76] Y. Egawa, H. Enomoto, S. Jendrol, K. Ota et I. Schiermeyer. *Independence number and vertex disjoint cycles*. Discrete Mathematics 307 (2007) 1493-1498.
- [77] Y. Egawa, S. Fujita et K. Ota. *$K_{1,3}$ -factors in graphs*. Discrete Mathematics 308 (2008) 5965-5973.
- [78] M.H. El-Zahar. *On circuits in graphs*. Discrete Mathematics 50 (1984) 227-230.
- [79] H. Enomoto, B. Jackson, P. Katerinis et A. Saito. *Toughness and the existence of k -factors*. Journal of Graph Theory 9 (1985) 87-95.
- [80] H. Enomoto, A. Kaneko, M. Kouider et Z. Tuza. *Degree sums and covering cycles*. Journal of Graph Theory 20 (1995) 419-422.
- [81] H. Enomoto. *On the existence of disjoint cycles in a graph*. Combinatorica 18 (1998) 487-492.
- [82] H. Enomoto et T. Tokuda. *Complete-factors and f -factors*. Discrete Mathematics 220 (2000) 239-242.
- [83] H. Enomoto et K. Ota. *Partitions of a graph into paths with prescribed endvertices and lengths*. Journal of Graph Theory 34 (2000) 163-169.
- [84] . H. Enomoto et H. Li. *Partition of a graph into cycles and degenerated cycles*. Discrete Mathematics 276 (2004) 177-181.
- [85] R. C. Entringer. *Distances in graphs : Trees*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 24 (1997) 65-84.
- [86] P. Erdos, J. Pach et J. H. Spencer. *On the mean distance between points of a graph*. Proceedings of the 250th anniversary conference on graph theory (1988) 121-124.
- [87] S. Fajtlowicz. *Written on the Wall*. Department of Mathematics, University of Houston. <http://math.uh.edu/siemion>
- [88] G. H. Fan. *New sufficient conditions for cycles in graphs*. Journal of Combinatorial Theory B 37 (1984) 222-227.

- [89] R.J. Faudree, O. Favaron, E. Flandrin, H. Li et Z. Liu. *On 2-factors in claw-free graphs*. Discrete Mathematics 206 (1999) 131-137.
- [90] J.R. Faudree, R.J. Faudree et Z. Ryjáček. *Forbidden subgraphs that imply 2-factors*. Discrete Mathematics 308 (2008) 1571-1582.
- [91] R.J. Faudree, E. Flandrin et Z. Ryjáček. *Claw-free graphs-A survey*. Discrete Mathematics 164 (1997) 87-147.
- [92] R.J. Faudree et R.J. Gould. *Characterizing forbidden pairs for Hamiltonian properties*. Discrete Mathematics 173 (1997) 45-60.
- [93] R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, L. Lesniak et A. Saito. *A note on 2-factors with two components*. Discrete Mathematics 300 (2005) 218-224.
- [94] O. Favaron. Communication personnelle.
- [95] O. Favaron, M. Kouider et M. Mahéo. *Edge-vulnerability and mean distance*. Networks 19 (1989) 493-504.
- [96] O. Favaron, M. Mahéo et J-F Saclé. *On the residue of a graph*. Journal of Graph Theory 15 (1991) 39-64.
- [97] D. Finkel. *On the number of independent chorded cycles in a graph*. Discrete Mathematics 308 (2008) 5265-5268.
- [98] P. Firby et J. Haviland. *Independence and average distance in graphs*. Discrete Applied Mathematics 75 (1997) 27-37.
- [99] M. Fischermann, A. Hoffmann, D. Rautenbach, L. Szekely et L. Volkmann. *Wiener index versus maximum degree in trees*. Discrete Applied Mathematics 122 (2002) 127-137.
- [100] D. Forge et M. Kouider. *Coverings of the vertices of a graph by small cycles*. Graphs and Combinatorics 23, no 2, (2007) 135-143.
- [101] D. Froncek, Z. Ryjáček et Z. Skupien. *On traceability and 2-factors in claw-free graphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory 24 (2004) 55-71.
- [102] S. Fujita. *Recent results on disjoint cycles in graphs*. Electronic Notes in Discrete Mathematics 22 (2005) 409-412.
- [103] S. Fujita. *Partition of a graph into cycles and isolated vertices*. Australasian Journal of Combinatorics 32 (2005) 79-89.
- [104] S. Fujita, H. Matsumura, M. Tsugaki et T. Yamashita. *Degree sum conditions and vertex-disjoint cycles in a graph*. Australasian Journal of Combinatorics 35 (2006) 237-252.

- [105] S. Fujita. *Degree conditions for the partition of a graph into cycles, edges and isolated vertices*. Discrete Mathematics 309 (2009) 3534-3540.
- [106] Y. Gao, G. Li et X. Li. *Degree condition for the existence of a k -factor containing a given hamiltonian cycle*. Discrete Mathematics 309 (2009) 2373-2381.
- [107] M.R. Garey et D.S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*. W. H. Freeman & Company, Publishers, San Francisco (1979).
- [108] T. Gerlach, F. Goring, J. Harant et M. Tkac. *On cycles through specified vertices*. Discrete Mathematics 306 (2006) 831-835.
- [109] T. Gerlach et J. Harant. *On a cycle through a specified linear forest of a graph* Discrete Mathematics 307 (2007) 892-895.
- [110] R. J. Gould et M. S. Jacobson. *Two-factors with few cycles in claw-free graphs*. Discrete Mathematics 231 (2001) 191-197.
- [111] R. J. Gould. *Advances on the hamiltonian problem-A survey*. Graphs and Combinatorics 19 (2003) 7-52.
- [112] R. J. Gould. *A look at cycles containing specified elements of a graph*. Discrete Mathematics 309 (2009) 6299-6311.
- [113] I. Gutman et O. E. Polansky. *Mathematical concepts in organic chemistry*. Springer, Berlin (1986).
- [114] I. Gutman et S. Zhang. *Graph connectivity and Wiener index*. Bulletin T. CXXXIII de l'académie serbe des sciences et des arts , Sciences mathématiques 31 (2006).
- [115] E. Gyori. *On Winkler's four-thirds conjecture on mean distance in graphs*. Congres. Numerant. 61 (1988) 259-262.
- [116] R. Haggkvist. *Equicardinal disjoint cycles in sparse graphs* in Cycles in graphs (B. C. Burnaby 1982). North Holland. Math. Stud. 115, North Holland, Amsterdam and New York (1985) 269-273.
- [117] A. Hajnal et E. Szemerédi. *Proof of a conjecture of P. Erdos*. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 4 (1970) 601-623.
- [118] P. Hall. *On representatives of subsets*. J. London Math. Soc. 10 (1935) 26-30.
- [119] L. Han, M. Lu et L. Xiong. *The structure of even factors in claw-free graphs*. Discrete Mathematics 309 (2009) 2417-2423.
- [120] P. Hansen, A. Hertz, R. Kilani, O. Marcotte et D. Schindl. *Average distance and maximum induced forest*. Journal of Graph Theory 60 (2009) 31-54.

- [121] T. Hao. *Existence of graphs with prescribed mean distance and local connectivity*. Ars Combinatoria 29 (1990) 73-86.
- [122] P. Hell D. G. Kirkpatrick, J. Kratochvil et I. Kriz. *On restricted two-factors*. SIAM Journal on Discrete Mathematics 1 (1988) 472-484.
- [123] G. R. T. Hendry. *Existence of graphs with prescribed mean distance*. Journal of Graph Theory 10 (1986) 173-175.
- [124] G. R. T. Hendry. *On mean distance in certain classes of graphs*. Networks 19 (1989) 451 - 457.
- [125] I. Holyer. *The NP-completeness of some edge partition problems*. SIAM Journal of computing 10 (1981) 713-717.
- [126] G. Hooghiemstra et P. Van Mieghem. *On the mean distance in scale free graphs*. Methodol. Comput. Appl. Probab. 7 (2005) 285-306.
- [127] Z. Hu et H. Li. *Partition of a graph into cycles and vertices*. Discrete Mathematics 307 (2007) 1436-1440.
- [128] Z. Hu et H. Li. *Weak cycle partition involving degree sum conditions*. Discrete Mathematics 309 (2009) 647-654.
- [129] Y. Ishigami et H. Wang. *An extension of a theorem on cycles containing specified independent edges*. Discrete Mathematics 245 (2002) 127-137.
- [130] B. Jackson et K. Yoshimoto. *Even subgraphs of bridgclass graphs and 2-factors of line graphs*. Discrete Mathematics 307 (2007) 2775-2785.
- [131] P. Johann. *On the structure of graphs with a unique k -factor*. Journal of Graph Theory 35 (2000) 227-243.
- [132] R. Johansson. *An El-Zahar type condition ensuring path-factors*. Journal of Graph Theory 28 (1998) 39-42.
- [133] R. Johansson. *On the bipartite case of El-Zahar conjecture*. Discrete Mathematics 219 (2000) 123-134.
- [134] D. S. Johnson, J. K. Lenstra et A. H. G. Rinnooy-kan. *The complexity of the network design problem*. Networks 8 (1978) 279-285.
- [135] P. Justesen. *On independent circuits in finite graphs and a conjecture of Erdos and Posa*. Annals of Discrete Mathematics 41 (1989) 299-305.
- [136] M. Kano. *An Ore type sufficient condition for a graph to have a connected $[2, k]$ -factor*. Manuscrit.

- [137] M. Kano et H. Matsuda. *Some results on $(1, f)$ -odd factors*. Graph Theory Algorithms and Applications (1996).
- [138] M. Kano et G. Y. Katona. *Odd subgraphs and matchings*. Discrete Mathematics 250 (2002) 265-272.
- [139] M. Kano et G. Y. Katona. *Structure algorithms and algorithms on $(1, f)$ -odd subgraph*. Discrete Mathematics 307 (2007) 1404-1417.
- [140] A. Kaneko. *A necessary and sufficient condition for the existence of a path factor every component of which is a path of length at least two*. Journal of Combinatorial Theory B 88 (2003) 195-218.
- [141] P. Katerinis. *Minimum degree of a graph and the existence of k -factors*. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 94 (1985) 123-127.
- [142] P. Katerinis et D.R. Woodall. *Binding numbers and the existence of k -factors*. Quart. J. Math. Oxford 38 (1987) 221-228.
- [143] P. Katerinis. *Toughness of graphs and the existence of factors*. Discrete Mathematics 80 (1990) 81-92.
- [144] K. Kawarabayashi. *A survey on hamiltonian cycles*. The proceedings of the workshop on graph theory and related topics (1999) et Interdisciplinary Information Sciences 7 (2001) 25-39.
- [145] K. Kawarabayashi. *Degree sum conditions and graphs which are not covered by k cycles*. A paraitre dans Discrete Mathematics.
- [146] A. Khodkar et R. Xu. *More on even $[a, b]$ -factors in graphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory 27 (2007) 193-204.
- [147] D. Konig. *Graphen und matrizen*. Mat. Fiz. Lapok. 38 (1931) 116-119.
- [148] M. Kouider et M. Mahéo. *2-edge connected $[2, k]$ -factors in graphs*. J. Combin. Math. Combin. Compt. 35 (2000) 89-95.
- [149] M. Kouider et M. Mahéo. *Connected $[a, b]$ -factors in graphs*. Combinatorica 22 (2002) 71-82.
- [150] M. Kouider et P.D. Vestergaard. *Connected factors in graphs- a survey*. Graphs and Combinatorics 21 (2005) 1-26.
- [151] M. Kouider et P.D. Vestergaard. *On even $[2, b]$ -factors in graphs*. Australasian Journal of Combinatorics 27 (2003) 139-147.

- [152] M. Kouider et P.D. Vestergaard. *Even $[a, b]$ -factors in graphs*. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 24 (2004) 431-441.
- [153] M. Kouider et Z. Lonc. *Covering cycles and k -term degree sums*. *Combinatorica* 16 (1996) 407-412.
- [154] M. Kouider et Z. Lonc. *Stability number and $[a, b]$ -factors in graphs*. *Journal of Graph Theory* 46 (2004) 254-264.
- [155] M. Kouider *Cycles in Graphs with Prescribed Stability Number and Connectivity*. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 60(1994) 315-318.
- [156] M. Kouider. *Mean distance and the four-thirds conjecture* dans : Problèmes de cycles, chaînes et de décomposition de graphes. Thèse d'Etat. Université Paris Sud (1991) 132-150.
- [157] M. Kouider et P. Winkler. *Mean distance and minimum degree*. *Journal of Graph Theory* 25 (1997) 95-99.
- [158] C. E. Larson. *A survey of research in automated mathematical conjecture-making*. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 69 : "Graphs and Discovery" (2005).
- [159] L. Lesniak. *Independent cycles in graphs*. *J. Comb. Math. Comb. Comput.* 17 (1995) 55-63.
- [160] H. Li et J. Li. *Independent triangles covering given vertices of a graph*. *Theoretical Computer Science* 263 (2001) 333-344.
- [161] M. Li, L. Xiong et H. J. Broersma. *Connected even factors in claw-free graphs*. *Discrete Mathematics* 308 (2008) 2282-2284.
- [162] J. Li et Y. Ma. *Complete-factors and (g, f) -factors*. *Discrete Mathematics* 265 (2003) 385-391.
- [163] Y. Li et M-C. Cai. *A degree condition for a graph to have $[a, b]$ -factors*. *Journal of Graph Theory* 27 (1998) 1-6.
- [164] T. Lida et T. Nishimura. *An Ore-type condition for the existence of k -factors in graphs*. *Graphs and Combinatorics* 7 (1991) 353-361.
- [165] J. Yan et G. Liu. *On 2-factors with cycles containing specified edges in a bipartite graph*. *Discrete Mathematics* 309 (2009) 1112-1117.
- [166] L. Lovász. *The factorization of graphs II*. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 23 (1972) 223-246.

- [167] B. Manthey. *On approximating restricted cycle covers*. SIAM Journal on Computing 38 (2008) 181-206.
- [168] B. Manthey. *Minimum-weight cycle covers and their approximability*. Discrete Applied Mathematics 157 (2009) 1470-1480.
- [169] H. Matsuda. *A neighborhood condition for graphs to have $[a, b]$ -factors*. Discrete Mathematics 224 (2000) 289-292.
- [170] H. Matsuda. *Degree conditions for Hamiltonian graphs to have $[a, b]$ -factors containing a given Hamiltonian cycle*. Discrete Mathematics 280 (2004) 241-250.
- [171] H. Matsuda. *On 2-edge-connected $[a, b]$ -factors of graphs with Ore-type condition*. Discrete Mathematics 296 (2005) 225-234.
- [172] H. Matsuda. *Ore-type conditions for the existence of even $[2, b]$ -factors in graphs*. Discrete Mathematics 304 (2005) 51-61.
- [173] H. Matsuda. *Fan-type results for the existence of $[a, b]$ -factors*. Discrete Mathematics 306 (2006) 688-693.
- [174] H. Matsumura. *Vertex disjoint 4-cycles containing specified edges in bipartite graphs*. Discrete Mathematics 297 (2005) 78-90.
- [175] H. Matsuda. *Regular factors containing a given hamiltonian cycle*. Lecture Notes in Computer Science. Combinatorial Geometry and Graph Theory 3330 (2005) 123-132.
- [176] C. P. Ng et H. H. Teh. *On finite graphs of diameter 2*. Nanta. Math. 1 (1966/67) 72-75.
- [177] B. Mohar. *Eigenvalues, diameter and mean distance in graphs*. Graphs and Combinatorics 7 (1991) 53-64.
- [178] B. Mohar. *Some applications of laplace eigenvalues of graphs*. dans Graphs symmetry : Algebraic methods and applications. Eds Hahn et Sabidussi, NATO ASI (1997)225-275.
- [179] . W. Moon. *On the total distance between nodes in trees*. Systems Sci. Math. Sci. 9 (1996) 1-21.
- [180] T. Niessen. *Minimum degree, independence number and regular factors*. Graphs and Combinatorics 11 (1995) 367-378.
- [181] T. Niessen. *A Fan-type condition for regular factors*. Ars Combinatorica 46 (1997) 277-285.

- [182] T. Nishimura. *A degree condition for the existence of k -factors*. Journal of Graph Theory 16 (1992) 141-151.
- [183] O. Ore. *A note on Hamilton circuits*. Amer. Math. Monthly 67 (1960) 55.
- [184] M. Paoli. *Comparison of mean distance in superposed networks*. Discrete Applied Mathematics 8 (1984) 1-21.
- [185] J. Petersen. *Die theorie der regularen graph*. Acta Math. 15 (1891) 193-220.
- [186] J. Plesnik. *On the sum of all distances in a graph or digraph*. Journal of Graph Theory 8 (1984) 1-21.
- [187] M.D. Plummer. *Graph factors and factorization : 1985-2003 : A survey*. Discrete Mathematics 307 (2007) 791-821.
- [188] L. Posá. *On the circuits of finite graphs*. MTA Mat. Kut. Int. Kozl. 8 (1964) 355-361.
- [189] M. Randic. *Characterization of atoms, molecules and classes of molecules based on path enumerations*. Proc. Bremen Konferenz zur chemie, Match 7 (1979) 5-64.
- [190] H. E. Robbins. *A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control*. Am. Math. Monthly 46 (1939) 281-283.
- [191] A. Saito. *Degree sums and graphs that are not covered by two cycles*. Journal of Graph Theory 32 (1999) 51-61.
- [192] G. N. Sarkozy. *On 2-factors with k components*. Discrete Mathematics 308 (2008) 1962-1972.
- [193] G. Schuster. *A minimum degree result for disjoint cycles and forests in graphs*. Combinatorica 18 (1998) 425-436.
- [194] S. Sivasubramanian. *Average distance and eigenvalues*. Discrete Mathematics 309 (2009) 3458-3462.
- [195] R. G. Stanton, W. L. Kocay et E. A. Ruet d'Auteuil. *Some minimal average distance graphs*. Congr. Numer. 114 (1996) 45-64.
- [196] Z. Tao, X. Junming et L. Jun. *On diameter and average distance of graphs*. OR Transactions 8 (2004).
- [197] C. Thomassen. *Girth in Graphs*. Journal of Combinatorial Theory B 35 (1983) 129-141.
- [198] F. Tian et J-M. Xu. *Average distances and distance domination numbers*. Discrete Applied Mathematics 157 (2009) 1113-1127.

- [199] J. Topp et P.D. Vestergaard. *Odd factors of a graph*. Graphs and Combinatorics 9 (1993) 371-381.
- [200] I. Tomescu et R. A. Melter. *On distances in chromatic graphs*. Quart. J. Math. Oxford 40 (1989) 475-480.
- [201] I. Tomescu. *On the sum of all distances in chromatic blocks*. Journal of Graph Theory 18 (1994) 83-102.
- [202] P. Turan. *On an extremal problem in graph theory*. Matematiko Fizicki Lapok. 48 (1941) 436-452.
- [203] W.T. Tutte. *The factors of graphs*. Can. J. Math. 4 (1952) 314-328.
- [204] W.T. Tutte. *A short proof of the factor theorem for finite graphs*. Can. J. Math. 6 (1954) 347-352.
- [205] W.T. Tutte. *Spanning subgraphs with specified valencies*. Discrete Mathematics 9 (1974) 97-108.
- [206] W.T. Tutte. *The subgraph problem*. Annals of Discrete Mathematics 3 (1978) 289-295.
- [207] W.T. Tutte. *Graph factors*. Combinatorica 1 (1981) 79-97.
- [208] J. Verstraete. *Vertex-disjoint cycles of the same length*. Journal of Combinatorial Theory B 88 (2003) 45-52.
- [209] H. Wang. *Partition of a bipartite graph into cycles*. Discrete Mathematics 117 (1993) 287-291.
- [210] H. Wang. *Covering a graph with cycles*. Journal of Graph Theory 20 (1995) 202-211.
- [211] H. Wang. *On the maximum number of independent cycles in a bipartite graph*. Journal of Combinatorial Theory B 67 (1996) 152-164.
- [212] H. Wang. *Large vertex disjoint cycles in a bipartite graph*. Graphs and Combinatorics. 16 (2000) 359-366.
- [213] H. Wang. *On the maximal number of vertices covered by disjoint cycles*. Australasian Journal of Combinatorics 21 (2000) 179-186.
- [214] H. Wang. *Maximal total length of k disjoint cycles in bipartite graphs*. Combinatorica. 25 (2005) 367-377.
- [215] H. Wang. *Covering a graph with cycles passing through given edges*. Journal of Graph Theory 26 (1997) 105-109.

- [216] H. Wang. *On the maximum number of independent cycles in a graph*. Discrete Mathematics 205 (1999) 183-190.
- [217] H. Wang et D. Zhang. *A minimum degree result for disjoint cycles and forests in bipartite graphs*. Australasian Journal of Combinatorics 29 (2004) 35-47.
- [218] H. Wang. *The extremal values of the Wiener index of a tree with given degree sequence*. Discrete Applied Mathematics 156 (2008) 2647-2654.
- [219] H. Wang. *Corrigendum : The extremal values of the Wiener index of a tree with given degree sequence*. A paraître dans Discrete Applied Mathematics.
- [220] H. Wiener. *structural determination of paraffin boiling points*. J. Am. Chem. Soc. 69 (1947) 1-24.
- [221] P. Winkler. *Mean distance and the four-third conjecture*. Congressus Numerantium 54 (1986) 53-62.
- [222] P. Winkler. *Mean distance in a tree*. Discrete Applied Mathematics 27 (1990) 179-185.
- [223] B. Y. Wu, K. M. Chao et C. Y. Tang. *light graphs with small routing cost*. Networks 39 (2002) 130-138.
- [224] Y. Yeh et I. Gutman. *On the sum of all distances in composite graphs*. Discrete Mathematics 135 (1994) 359-365.
- [225] K. Yoshimoto. *On the number of components in 2-factors of claw-free graphs*. Discrete Mathematics 307 (2007) 2808-2819.
- [226] A. A. Zykov. *On some properties on linear complexes*. Maths Sbornik 24 (1949) 163-188.

Liste des notations

G est un graphe.

$\lambda(G)$	arête-connectivité
P_n	chaîne élémentaire d'ordre n
C_n	cycle élémentaire d'ordre n
$\kappa(G)$	connexité de G
$\Delta(G)$	degré maximum de G
$\delta(G)$	degré minimum de G
$d_G(v)$	degré de v dans G
$D(G)$	diamètre de G
$\bar{l}(G)$	distance moyenne de G
$E(G)$	ensemble des arêtes de G
$V(G)$	ensemble des sommets de G
$N_G(v)$	ensemble des voisins de v dans G
\bar{G}	graphe complémentaire de G
K_n	graphe complet d'ordre n
$K_{n,m}$	graphe complet biparti d'ordre $n + m$
$L(G)$	graphe représentatif des arêtes de G
$G + H$	joint des graphes G et H
$l(C)$	longueur du cycle C
$g(G)$	maille de G
$\omega(G)$	nombre de composantes connexes de G
$\chi(G)$	nombre chromatique de G
$\gamma(G)$	nombre de domination de G
$\gamma_k(G)$	nombre de k -domination de G
$\gamma_t(G)$	nombre de domination totale de G
$\alpha(G)$	nombre de stabilité de G
$I_k(G)$	nombre de k -stabilité de G

- n ordre du graphe G
 $G - H$ sous-graphe induit par $V(G) - V(H)$
 $H \subset G$ H sous-graphe propre de G
 $H \subseteq G$ H sous-graphe de G
 m taille de du graphe G
 $\tau(G)$ toughness de G
 $\sigma(G)$ transmission de G

Index

A	
arbre	18
arbre des distances	90
branche.....	90
C	
connexe	15
k -arête-connexe.....	17
k -connexe.....	16
bloc	16
bloc extremal.....	17
composante connexe.....	15
connectivité	16
couplage.....	15
couverture par cycles	25
D	
degré	14
degré maximum.....	14
degré minimum.....	14
diamètre.....	15
disjoint	14
distance	15
distance moyenne.....	75
distance totale.....	75
indice de Wiener.....	75
transmission.....	75
F	
facteur	20
(g, f)-facteur	
[a, b]-facteur	
k-facteur.....	
facteur complet	
facteur impair	
facteur pair	
facteur-chaîne.....	
forêt linéaire.....	
G	
graphe.....	13
graphe biparti	18
graphe biparti équilibré.....	18
graphe complémentaire	14
graphe défini par configurations exclues	19
graphe hamiltonien	15
graphe partiel.....	14
graphe représentatif des arêtes d'un graphe	18
sous-graphe.....	14
sous-graphe induit	14
I	
isthme.....	16
J	
joint de deux graphes.....	20
L	
laplacien.....	81

M

maille 86

N

nombre chromatique 79

 graphe k -chromatique 79

nombre de domination 79

 nombre de k -domination 80

 nombre de domination totale 80

O

orientation d'un graphe 84

 orientation forte 84

 orientation optimale 84

P

placement de cycles 25

 placement parfait 25

problème NP-complet 22

problème NP-dur 22

pseudo $[a, b]$ -facteur 57

 pseudo 2-facteur 57

S

stable 15

k -stable 78

 nombre de stabilité 15

T

toughness 17

tournoi 84

 tournoi biparti 84

V

voisin 14

Couvertures par Cycles et Facteurs de Graphes

Résumé :

Cette thèse est centrée autour de trois notions importantes en théorie des graphes : les couvertures par cycles, les pseudo-facteurs et la distance moyenne, desquels nous proposons un tour d'horizon au début de chaque chapitre.

Nous nous sommes d'abord intéressés aux couvertures des sommets d'un graphe par de petits cycles, et plus précisément au nombre minimum de cycles de longueur au plus k nécessaires pour couvrir tous les sommets d'un graphe. Nous avons borné ce nombre en fonction de l'ordre du graphe et de sa stabilité.

Nous avons ensuite étudié une généralisation des 2-facteurs que nous avons appelé les pseudo 2-facteurs. Un pseudo 2-facteur est une couverture des sommets d'un graphe par des cycles, arêtes ou sommets tous disjoints. Dans un graphe donné G , nous avons borné le nombre de composantes qui sont des sommets ou des arêtes dans un pseudo 2-facteur par une fonction du degré minimum et de la stabilité de G . La borne que nous avons obtenue est la meilleure possible.

Enfin et dans un tout autre registre, nous avons étudié dans un graphe G , la relation entre sa distance moyenne, paramètre qui trouve de nombreuses applications, sa maille et son ordre. Nous avons déterminé une borne supérieure et une borne inférieure, toutes deux atteintes, pour la distance moyenne dans un graphe en fonction de sa maille et son ordre.

Mots-clés : Cycles ; Facteurs ; Couvertures par cycles ; Pseudo 2-facteurs ; Distance moyenne ; Maille.
