N° d'ordre : 20/2002-M/MT

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENE - ALGER

FACULTE DES SCIENCES MATHEMATIQUES PURES ET APLLIQUEES

THESE :

Présentée pour l'obtention du Grade de :

Magister en mathématiques

Spécialité : *Analyse: Equations aux Dérivées Partielles*

Par : HADJADJ Lila

THEME :

Etude d'un système de Réaction-Diffusion de type parabolique non linéaire à diffusion lente et à réaction dépendant du gradient

Soutenue publiquement le : 06/11/2002 . Devant le jury composé dé:

D. TENIOU	Professeur(USTHB)	Président
M.S. MOULAY	Professeur(USTHB)	Directeur de thès
K. LEMRABET	Professeur(USTHB)	Examinateur
O. HE MINA	Maître de conférence(USTHB)	Examinateur
T.ALI ZIANE	Chargé de cours (USTHB)	Examinateur

Table des Matières

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Introduction

L'objet fondamental de ce travail est constitué par l'étude d'un système de réaction-diffusion dégénéré dont les termes de réaction dépendent effictivement du gradient des solutions, ce qui engendre une double difficulté: la dégénéréscence et la dépendance en le gradient.

Les systèmes que nous allons étudier sont de la forme:

$$(P)\begin{cases} \partial_t(u_1) - \Delta(u_1^{\sigma_1+1}) = f_1(u_1, u_2, \nabla u_1) & \text{dans }]0,\infty[\times\Omega \\ \partial_t(u_2) - \Delta(u_2^{\sigma_2+1}) = f_2(u_1, u_2, \nabla u_2) & \text{dans }]0,\infty[\times\Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur }]0,\infty[\times\partial\Omega \\ u_1(0,.) = u_{10} \quad ; \; u_2(0,.) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

ce système a déja fait l'objet d'une étude par N. Boudiba, M.S.Moulay, M.Pierre

[8] dans le cas semi-linéaire non dégénéré, où ils ont montré. en utilisant la. téchnique L^1 introduite par M.Pierre [23], l'existence globale de solutions positives pourvu que la dépendence en le gradient est sous-quadratique, la positivité des solutions est préservée au cours du temps, et la masse totale est controlée au cours du temps,c'est à dire si $f_1 + f_2$ est nulle, ou raisonablement majorée.

En utilisant la même téchnique Laamri a établi dans [18] l'existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion dégénérés, mais les seconds membres ne dépendent pas du gradient.

Malheuresement la téchnique L^1 n'est pas apllicable ici, puisque les résultats de compacité et de continuité qu'on a ne suffisent pas pour utiliser cette dernière, c'est pour cette raison qu'on va utiliser ici une téchnique tout à fait différente, c'est la méthode de compacité, qui a pour programme le suivant, qu'on peut résumer en trois étapes principales:

•D'une manière classique, on approche (P) par une suite de problèmes quasi-linéaires non dégénérés (P_ε) $(0 < \varepsilon < 1)$, tel que chacun d'eux possède une solution suffisament régulière sur un certain intervalle rnaximal.

•On établit quelques estimations sur les solutions réguliéres obtenues.

•Il est naturel de penser qu'en faisant tendre ε vers zéro on obtient, une solution faible pour le problème (P), à cette intention on utilise les résultats classiques de convergence et la compacité de l'injection canonique de H^1dans L^2.

Il faut noter que les conditions sur Ie bord influent sur l'existence ou la non existence des solutions, des difficultés apparaissent. si elles sont remplacées par les conditions de Dirichlet non homogènes ou par celles de Neuman.

Notre thèse est organisée de la manière suivante:

Apres une introduction permettant de situer le problème, de décrire les démarches suivies pour aboutir aux systèmes de réaction-diffusion, et de rappeler quelques résultats connus, dans le chapitre deux sont éxposées les differentes propositions qui sont utilisées dans ce travail, certaines d'entre elles sont bien connues et données sans démonstration pour d'autres on donnera des démonstrations

Le chapitre trois est consacré aux équations dites quasi-linéaires non-dégénérés à partie principale divergentielle, nous établirons l'existence locale de solutions assez régulières si les seconds membres et les données initiales sont suffisament réguliers, pour celà nous utiliserons le principe de Leray-Schauder qui nous facilete la tâche, et rend le problème de l'étude de l'existence au problème de la recherche des points fixes d'une transformation particulière possédant de bonnes propriétés. Ensuite, nous montrerons que si les données initiales sont positives, et si les seconds membres sont quasi-positifs, alors les solutions seront classiques positives (leures composantes seront positives), pour s'assurer au passage à la limite que la quasi-positivité des seconds membre, et la positivité des données initiales permettent, de construire des solutions faibles positives.

Dans le chapitre quatre qui constituera l'éssentiel de ce travail, on établit par l'induction qu'on peut ramener le problème de la régularité L^∞des solutions faibles de (P) à celui de la régularité L^p, pour un certain $p > 1$, même si les données initiales sont moins régulières (ne sont pas nécessairement dans L^∞).

Le chapitre cinque étudiera l'existence globale de solutions faibles, dans un sens bien précis, pour un système modèle en prennant des données initiales assez faibles. Il est important de singaler que la recherche de solutions faibles est en général plus naturelle pour des considérations biologiques (physiques,...), que la recherche de solutions au sens classique. Ce chapitre est construit. pour prouver que les solutions faibles $u_i(t, .)$, $i = 1, 2$, sont bornées pour tout $t > 0$, malgré que les données initiales sont seulement dans $L^{\sigma_i+2}(\Omega)$.

On montrera dans le chapitre six qui ~~se~~ considère comme une généralisation de beaucoup de problèmes étudiés dans [8, 14, 15, 18, 21], que si les seconds membres sont raisonablement majorés le problème (P) admet une solution faible globale, on établira aussi l'unicité de la solution obtenue (un tel problème était ouvert, même dans le cas semi linéaire (pour plus de détail voir[8]).

Le chapitre sept est consacré à l'étude de la régularité des solutions obtenues dans le chapitre précédent mais les résultats de régularité qu'on peut attendre dépendent. de la dimension spatiale N, on montrera que la solution est dans $H^{1,2}$ dans le cas où N = 1, et si N > 1 on énoncera un résultat de régularité plus restrictif.

En dehors des méthodes directes pour l'étude du comportement asymptotique des solutions la méthode des attracteurs fut crée, il est vrai que cette méthode ne donne que l'existence d'un ensemble compact vers lequel les solutions convergent,, mais ceci nous permet de cerner les solutions. Donc l'étude de l'existence d'un attracteur est un outil puissant pour étudier le comportement, asymptotique des solutions, dans le chapitre huit on étudiera le comportement asymptotique des solutions pour celà on établira les conditions sous lesquelles on aura l'existence d'un attracteur global.

Un exposé abrégé est donné dans le chapitre neuf concernant, l'étude des cas limites, on établira, sous certaines conditions, l'existence globale de solutions faibles, de plus on établira, dans un cas particulier, que les solutions obtenues tendent vers zéro.

1.2 Origine des systèmes de réaction diffusion

Les systèmes de réaction diffusion s'écrivent, en général, sous la forme:

$$\partial_t u_i - div(\varphi_i(u)\nabla u_i) = f_i(t,x,u,\nabla u) \qquad i = 1,d.$$

où : $u = (u_1, u_2, \ldots\ldots u_d)$ est. l'inconnue

Les f_i représentent l'effet de la réaction (et. du milieu extérieur) sur la diffusion, et on rencontre les systèmes de réaction-diffusion dans de nombreux domaines (en dynamique des populations, biologie, chimie, biochimie,. .), et vu l'importance de ces derniers, on peut se demander, comment on aboutit, à des systèmes de réaction diffusion?

Dans cette partie nous allons répondre à cette question.

On considère un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^N$ (en général, N=2,3 ;Ω est une surface géographique, une cellule, . .) , dans lequel des réactions se réalisent (réactions chimiques, diffusion d'une maladie infectieuse ou une remure,...).

Soient, :

$\boldsymbol{V}$: un volume élémentaire de Ω (infiniment petit) ,

∂V : la frontière de $\boldsymbol{V}$

$\overrightarrow{\nu(x)}$: la normale extérieure en x.

Alors la vitesse (le moyen) de production de la $i^{ième}$ espèce dans le volume V est égale à la quantité produite par la. réaction otée de son flux à travers la frontière ∂V, nous tronsposons ça dans le langage des équations, on a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u_i(t,x)dx = \int_{\mathbf{V}} g_i(t,x,u_1,\ldots.u_d) \quad \int_{\partial V} j_i d\sigma$$

où : g_i représente le taux de production de la $i^{ième}$ éspèce.

Comme $\boldsymbol{V}$ est arbitraire , on obtient la loi de balance suivante:

$$\partial_t u_i + div j_i = g_i \tag{2.1}$$

Le vecteur flux $\overrightarrow{j_r}$ se détermine selon le phénomène considéré, et il s'écrit, en général sous la forme:

$$\overrightarrow{j_r} = -\sum_{r=1,d} a_{ir}(.,u)\nabla u_r + \overrightarrow{\alpha_{ir}}(.,u)u_r \tag{2.2}$$

Le premier terme dans (2.2) représente le terme de diffusion, et. le deuxième représente le terme du transfèrt, si il n'y a pas du transfèrt de la matière alors $\overrightarrow{j_r}$ s'écrit. tout, simplement :

$$\overrightarrow{j_r} = -\sum_{r=1,d} a_{ir}(.,u)\nabla u_r$$

De plus s'il existe i_0, r_0 , tels que : $i_0 \neq j_0$ et $a_{i_0 r_0} \neq 0$, c'est à dire si la matrice de diffusion n'est pas diagonale, alors la diffusion de la $i_0^{i\grave{e}me}$ espèce affecte sur la production de la $r_0^{i\grave{e}me}$ espèce.Et dans le cas général, celui de (2.2) , le terme $\overrightarrow{\alpha_{ir}}(.,u)u_r$ détermine le transfèrt dans la direction du champ de vecteur $\overrightarrow{\alpha_{ir}}(.,u)$, proportianelle à la concentration de la $r^{i\grave{e}me}$ espèce, cet vecteur de transfèrt est souvent le gradient du potentiel extérieure.

Soit pour simplifier : $a_{ii}(x,u) = \phi_i(u_i)$, et. $a_{ir}(x,u) = 0$ pour tout $i \neq r$.

Dans les premiers travaeux sur (2.1) , on suppose $u_i(t,x) > 0$, pour tout $(t,x) \in [0, \infty[\times \Omega$,et en particulier $u_{i0} > 0$ mais en réalité u_{i0} peut s'annuler (par exemple, dans le cas des populations, si la densité de la population initiale, n'est pas concentrée sur tout Ω, (c'est tout a fait naturel)), et ça nous conduit à etudier des problèmes de réaction-diffusion dégénérés, c'est, à dire l'équation (2.1) change de type, selon qu'elle est considérée sur $[u_i = 0]$ ou sur $[u_i \neq 0]$, d'où l'idée de l'étude des problèmes dégénérés, et. il y a deux types de dégénéréscence:

1. fixée , qui est indépendente de la solution

2. implicite , qui est, dépendente de la solution

On peut distiguer également. dans le cas dégénéré deux types de diffusion:

a) s'il existe un $\hat{u}$ tel que : $a_{ir}(x,\hat{u}) = +\infty$, dans ce cas, on dit. que la diffusion est rapide.

b) s'il existe un $\hat{u}$ tel que : $a_{ir}(x,\hat{u}) = 0$, dans ce cas, on dit. que la. diffusion est lente.

Afin de déterminer complètement u sur $[0,\infty[\times \Omega$, on précise (on choisit) le comportement de u au bord, et les données initiales.

Les conditions aux bords seront choisies selon la nature du problème étudié, et on peut distiguer deux catégories de conditions:

- Conditions aux bords homogènes :

1. Conditions de Neuman : prennent la forme :

$(\overrightarrow{j_r}(u_i), \overrightarrow{\nu(x)}) = 0$ sur $(0,\infty) \times \partial\Omega$, (où (,) désigne le produit scalaire euclidien).

c'est, à dire $\overrightarrow{j_r}$ est orthogonal à la normale exterieure, on peut. dire mieux: il n'y a pas d'immigration des individus sur la frontière $\partial\Omega$.

2. Conditions de Dirichlet :

$u_i = a$ sur (0. cc) x $\partial\Omega$, c'est à dire la frontièr $\partial\Omega$ est. hostile inospitalicr.

3. Conditions de Fourier :

$\alpha(\overrightarrow{j_r}(u_i), \overrightarrow{\nu(x)}) + \beta u_i = 0$ sur $(0,\infty) \times \partial\Omega$, c'est à dire le flux à la frontière est proportionnel à u_i.

et on peut rencontrer des conditions mixtes et des conditions non-linéaires

*Conditions aux bords non homogènes :

On remplace le zéro dans les cas précédents par une fonction donnée g_i (t, x, $u(t, x)$),

$(t, x) \in$ (0; CO) x $\partial\Omega$.

1.3 Systèmes modèles

1. On considère la réaction inversible suivante:

$$U + V \leftrightarrows W$$

La modélisation mathématiques de ces réactions conduit au système suivant:

$$\begin{cases} \partial_t u = d_1 \Delta u + w - uv & \text{dans } (0, \infty) \text{ x } \Omega \\ \partial_t v = d_2 \Delta v + w - uv & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega \\ \partial_t w = d_3 \Delta w - w + uv & \text{dans } (0, \infty) \text{ x } \Omega \\ B(u, \text{II}, w) = 0 & \text{sur } (0, \infty) \text{ x } \partial\Omega \\ (u(0, .), v(0, .), w(0, .)) = (u_0, v_0, w_0) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où : u, v, w désignent réspectivement les concentrations en U, V, W, et d_1, d_2, d_3 sont des constantes strictement positives, et représentent les vitesses de réaction.

3. Le système :

$$\begin{cases} S_t - ns- = -I(\gamma S - 6) & \text{dans } (0, \infty) \text{ x } \Omega \\ I_t - \text{AP} = I(\gamma S - 6) & \text{dans } (0, \text{ CO}) \times \Omega \\ \dfrac{as}{au} = \dfrac{\partial I}{au} = 0 & \text{sur } (0, \infty) \text{ x } \partial\Omega \\ (S(0,.), I(0,.)) = (S_0, I_0) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

modélise la propagation d'une maladie infectieuse, (voir [3]) où:

S : représente la densité des individus susceptibles.

I : représente la densité des individus infectés.

4. L'étude théorique d'une ségrégation raciale entre deux populations (Pr, P_2), conduit à l'étude du système suivant:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + div\left[-\nabla(f_1(u)u_1) - \gamma_1 u_1 \nabla\varphi\right] = u_1 g_1(u) & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega \\ \partial_t u_2 + div\left[-\nabla(f_2(u)u_2) - \gamma_2 u_2 \nabla\varphi\right] = u_2 g_2(u) & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega \\ \begin{cases} (-\nabla(f_i(u)u_i - \gamma_i u_i \nabla\varphi), \nu) = 0 \\ \text{ou :} \qquad\qquad i = 1;2 \\ u_i = 0 \end{cases} & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega \\ (u_1(0,.), u_2(0,.)) = (u_{10}, u_{20}) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où :

u_i représente la densité de P_i

φ représente par exemple l'effet, des autres pays sur la ségrégation.

1.4 Rappel de résultats connus

Le problème suivant :

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u^{\sigma+1} = u^\beta & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } (0, \infty) \times \partial\Omega \\ u(0, .) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}
$$

modélise, entre autres, la filtration d'un gaz non stationnaire dans un milieu poreux (u représente la densité du gaz), ainsi que la diffusion d'une population hiologique (u représente alors la densité de population).

Galaktionov dans [14] a étudié le problème (4.1) et a. montré que l'existence des solutions ou la non existence dépend éssentiellement des paramètres β et σ, de la dimension N et de la donnée initiale u_0. Il a étudié également, en collaboration avec Kurdymov et Samarskii,dans [15] ,l'existence ou l'explosion des solutions du système suivant:

$$
(4.2) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u^{\sigma_1+1} = v^p & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega \\ v_t - \Delta v^{\sigma_2+1} = u^q & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } (0, \infty) \times \partial\Omega \\ u(0, .) = u_0; v(0, .) = v_0 & \text{sur } \Omega \end{cases}
$$

où : $\sigma_1, \sigma_2 > 0, 1 \leq p, 1 \leq q, u_0 \in L^{\sigma_1+2}(\Omega), v_0 \in L^{\sigma_2+2}(\Omega), u_0, v_0 \geq 0.$

Dans ce système u et v représentent les températures de deux corps dans un mélange combustible.

Galaktionov prouve l'existence de solutions sous les hypothèses :

$p < \sigma_2 + 1$, et $q < \sigma_1 + 1$

Il montre que dans les cas limites : $p = \sigma_2 + 1$, ou $q = \sigma_1 + 1$ l'existence dépend de la structure spatiale de Ω.

Madallena par la suite, dans [21], a généralisé l'étude précédente au système plus général:

$$(4.3) \qquad \begin{cases} \partial_t (u_i) - \Delta u_i^{\sigma_i+1} = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_d) & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } (0, \infty) \times \partial\Omega \\ u_i(0, .) = u_{i0}. & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

$i = 1, d$.

où :

♦ $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $f_i(u_1, u_2, \ldots, r_{i-1}, 0, r_{i+1}, \ldots, r_d) \geqslant 0$ pour tout $r_j \geqslant 0, j \neq i$,

♦ $u_{i0} \in L^\infty(\Omega)$, $u_{i0} \geqslant 0$, $i = 1, d$.

Le système (4.3) modélise, en particulier, la propagation d'une maladie infectieuse dans une population.

Ensuite Laamri , dans [18] , a regroupé ces deux derniers travaux, il a. établi, en utilisant la téchnique L^1, l'existence globale des solutions du système:

$$(4.4)\quad \begin{cases} \partial_t\,(u_i) - \Delta u_i^{\sigma_i+1} = \sum\limits_{1\le j\le d} c_{ij} u_j^{\alpha_{ij}} + c_i & \text{sur } (0,\infty)\times\Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } (0, CO)\ x\ \partial\Omega \\ u_i(0,.) = u_{i0}. & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

$i = 1, d$, $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1$, $c_i, c_{ij} \geqslant 0; i, j = 1, d$, $u_{i0} \in L^{\sigma_i+2}(\Omega); u_{i0} \geqslant 0, i = 1, d$.

Boudiba, Moulay, Pierre , en 1996 dans [8], ont étudié le système suivant:

$$(4.5)\quad \begin{cases} \partial_t\,(u_1) - \Delta u_1 = f_1(t, x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) & \text{sur } (0,\infty)\times\Omega \\ \partial_t\,(u_2) - \Delta u_2 = f_2(t, x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) & \text{sur } (0,\infty)\times\Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } (0,\infty)\ x\ \partial\Omega \\ u_1(0,.) = u_{10}, u_2(0,.) = u_{20}. & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

En supposant :

1. Il existe une constante positive L_1 telle que :

$$f_1(t, x, 21.1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) + f_2(t, x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \le L_1(u_1 + u_2 + 1)$$

pour tout $u_1, u_2 \geqslant 0$, et pour presque tout x et tout t.

2. Il existe une constante positive L_2 telle que:

$$f_1(t, x, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \le L_1(u_1 + u_2 + 1)$$

pour tout $u_1, u_2 \geqslant 0$, et pour presque tout x et tout t.

3. $\sum_{i=1}^{2} |f_i(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2)| \leq c(u_1, u_2)(|\nabla u_1|^m + |\nabla u_2|^m + 1)$:

où : $1 \leq m < 2$, et $c : [0, \infty)^2 \longrightarrow [0, \infty)$, est, une fonction croissante.

4. $u_{10}, u_{20} \in L^1(\Omega)$, $u_{10}, u_{20} \geq 0$.

5. $f_1(t, x, 0, u_2, 0, q), f_2(t, x, u_1, 0, p, 0) \geq 0$ pour tout $u_1, u_2 \geq 0$.

Chapitre 2

Préliminaires et rappels de résultats connus

Dans ce paragraphe on rappelera quelques résultats utiles sur lesquels s'appuie notre travail.

2.1 Espaces particuliers

Rappelons les définitions de quelques espaces, que nous les utiliserons dans la suite:

2.1.1 Espaces Holderiens

On se donne Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, T un réel positif, et $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N) \in \mathbb{N}^N$.

Définition1.1.1: On *désigneru par* $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$, *ou* $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$; $\alpha > 0$. *l'espace* des fonctions *continues*, ainsi *que leures dérivées* $\partial_t^r \partial_x^s$, *telles que* $2r + |s| < \alpha$, *de plus* $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ *est fini, où* $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$ *est défini par :*

$$|u|_{Q_T}^{(\alpha)} = \langle u \rangle_{Q_T}^{(\alpha)} + \sum_{0 \le j \le [\alpha]} \langle u \rangle_{Q_T}^{j}.$$

avec:

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{0} = |u|_{Q_T}^{0} = \max_{Q_T} |u|, \; et \; : \langle u \rangle_{Q_T}^{j} = \sum_{2r+|s|=j} |\partial_t^r \partial_x^s u|_{Q_T}^{0}$$

De plus :

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(\alpha)} = \langle u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{\alpha}{2})}$$

où :

$$\langle u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sum_{2r+|s|=[\alpha]} \langle \partial_t^r \partial_x^s u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha-[\alpha])}, \; et : \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{\alpha}{2})} = \sum_{0<\alpha-(2r+|s|)<2} \langle \partial_t^r \partial_x^s u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{\alpha-2r-s}{2})}$$

Avec :

$$\langle u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x',t)\in Q_T} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x-x'|^{\alpha}} \; ; \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{\alpha}{2})} = \sup_{(x,t),(x,t')\in Q_T} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}}$$

pour *tout* a ,$0 < \alpha < 1$.

On munit $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ *de la norme :* $|u|_{Q_T}^{(\alpha)}$.

Remarque 1.1.2 : $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ *est un espace de Banach, pour tout* $\alpha > 0$.

2.1.2 Espaces de Sobolev anisotropes

Définition 1.2.1 : On désigne par $H^{1,2}(Q_T)$, (espace *de Sobolev anisotrope),* l'espace de *fonctions* f *définies* sur Q_T telles *que :*

$$f \ , f_{x_i} \ , f_{x_i x_i} \ , f_t \in L^2(Q_T) \qquad , i = 1, N$$

2.1.3 Espaces $W_q^{1,2}(Q_T)$,$q \geq 1$

Définition 1.3.1 : Une *fonction* u *est dite de classe* $W_q^{1,2}(Q_T)$ *si et seulement si:*

$u \in L^q(]0,T[\, , W^{2,q}(\Omega))$ et. $u_t \in L^q(]0,T]\, , L^{"}(R))$.

Lemme 1.3.2 : Si $u \in W_q^{1,2}(Q_T)$ *avec* $q \geq N + 2$, *alors* $\partial_t^r \partial_x^s u \in H^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T)$ *pour tout a satisfait la relation:* $0 \leq \alpha < 2 - 2r - |s| - \frac{N+2}{q}$

2.2 Continuité absolue

Définition 2.1 : *La variation* totale *d'une* fonction, f *sur* I , *est définie par la* relation:

$$v(f,\ I) = \sup \sum_{1<i<k} |f(a_i) - f(b_i)|$$

la *borne* supérieure se prend *sur tous les ensembles finis des points* $a_i,\ b_i \in I$ avec :

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b_k$$

Remarque 2.2 : Si $v(f, I)$ *est borné* alors f *est dite* à variation, *bornée*

Définition 2 3: On *désigne par* $Bv(I)$ *, l 'espace des fonctions scalaires sur* I k-variations *bornées.*

Définition 2 4: Une *fonction* $f \in Bv(I)$ *est absolument continue, si et seulement si,*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que :* $\sum_{1 \leq i \leq k} |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon.$

pour toute famille *finie de sous intervalles bornés* disjoint $[a_i, b_i[$ $i = 1, 2$ *vérifiant:*

$\sum_{1 \leq i \leq k} |a_i - b_i| < \delta.$

2.3 Opérateurs dissipatifs dans $L^1(\Omega)$

On se donne X un espace de Banach .

Définition 3.1 : Un opérateur *A de X est dit dissipatif si pour tout* $x, x' \in X$, et $\lambda > 0$, on a:

$$\|x - x'\| \leq \|x - x' - \lambda (Ax - Ax')\|$$

Dans le cas où : X = $L^1(\Omega)$, on aura la caractérisation suivante:

Proposition *3.2 : Soit A* un *opérateur de* $L^1(\Omega)$*, A est dissipatif si et seulement si:*

pour tout $(u, \hat{u}) \in X^2$*, il existe* une fonction $w \in$ *L"(R), telle que:*

$w(x) = sign(u(x) - \hat{u}(x))$, pour presque *tout* $x \in X$*, et:*

$$\int_\Omega w(x)(A(u)(x) - A(\hat{u})(x))dx \leq 0.$$

où :

$$sign x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour la démonstration de cette proposition voir [7]

2.4 Quelques inégalités:

On se dorme Ω un ouvert, borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière régulière $\partial\Omega$.

Lemme 4 1: *(inégalité* de Jensen):

Soit f une fonction à valeurs réelles, *mesurable sur Ω, et* A *c* Ω, *si $f \geq \alpha$ et si ϕ est* une *fonction. convexe pour $x \geq \alpha$, alors:*

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_\Omega f dx\right) \leq \frac{1}{\mu(A)}\int_\Omega \phi(f)dx.$$

Pour la démonstration , on renvoie à [16] .

On rappelle aussi le lemme suivant, dont il nous sera utile dans la suite.

Lemme 4 2: *Soient p* $\in [1, 2)$, r $\in [p, 2\frac{N+1}{N})$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il *existe* *des constantes* positives C(E) , q *dépendant* de p et de r *telles que:*

$$\int_\Omega |u|^r \leq \varepsilon \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, dx + \|u\|^2_{L^p(\Omega)} \right) + c(\varepsilon) \|u\|^q_{L^p(\Omega)} \ .$$

pour tout $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

où :

$$q = \frac{2r(1-\tau)}{2-7-T}, \text{ avec} : \tau = \frac{2^*(r-p)}{r(2^*-p)}, \text{ et } : 2^* = 2\frac{N}{N-2}$$

Pour la. démonstration nous aurons besoin des lemmes suivants (pour les démonstrations, consulter [9]).

Voici un théorème sur les normes équivalentes:

Lemme 4 3: *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes* $\|x\|_1$ *et* $\|x\|_2$, *on* suppose *que E muni* de chacune des *normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$, *est un* espace de *Banach.*

On suppose de *plus qu'il existe* une *constante positive* c,*telle que:*

$\|x\|_2 \leq c \|x\|_1 , \forall x \in E.$

Alors il existe une constante *positive* c', *telle que:*

$\|x\|_1 \leq c' \|x\|_2 , \forall x \in E.$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme précédent:

Lemme 4 4: Les normes $\|.\|$ **,** $|.|$ **sont** équivalentes dans $W^{1,2}(\Omega)$, *où:*

$$\|u\| = \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$|u| = \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a aussi le:

Lemme 4 5: *(Inégalité d 'interpolation de Gagliardo-Nirenberg).*

Soient r et p deux **réels** *positifs tels que:* $1 \leq p \leq r \leq \infty$.

Alors pour tout $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, *on* a :

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\tau} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{\tau}.$$

avec : $\tau = \dfrac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2}}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2} > 0$.

Démonstration du lemme 4.2 :

En vertu du lemme précédent, , on a :

$$\int_\Omega |u|^r \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{r(1-\tau)} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{r\tau}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient:

$$\int_\Omega |u|^r \leq \mathrm{C(E)} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{2r\frac{1-\tau}{2-\tau r}} + \varepsilon \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

or , le lemme 4.4 implique :

$$\int_\Omega |u|^r \leq c(\varepsilon) \|u\|_{L^p(\Omega)}^{2r\frac{1-\tau}{2-\tau r}} + \varepsilon(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^p(\Omega)}^2)$$

D'où le lemme 4.2.

On a aussi le lemme suivant :

Lemme 4.6 : *(Sobolev , Gagliardo , Nirenberg)*

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on. a :

Si $1 \leq p < N$, alors: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, où: $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

Si p = N, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, \infty[$

Si p > N, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Avec injections continues

2.5 Résultats de convergence

On a les lemmes suivants :

Lemme 5.1 : *Soit* $u \in L^p(\Omega)$, $u \geqslant 0$, $1 \leq p < \infty$.

Alors il existe u_ε dans $C_c^\infty(\Omega)$, $u_\varepsilon \geqslant \mathbf{0}$, *telle que :*

u_ε *converge vers u dans* $L^p(\Omega)$.

Lemme 5.2 : *Soit u* $\in L^\infty(\Omega)$, *u* $\geqslant$ *0* , $1 \leq p < \infty$.

Alors il *existe* u_ε dans $C_c^\infty(\Omega)$, $u_\varepsilon \geqslant 0$, *telle que :*

i. $\exists M$ > *0, tel que :* $u_\varepsilon \leq M$, pour *tout* $\varepsilon \in]0, 1[$

ii. u_ε *converge vers u dans L?'(R).*

Lemme 5.3 : Soit $u^m \in L^\infty(\Omega)$ **n** $H^1(\Omega)$ **,** $u \geqslant \mathbf{0}$ **,** $1 \leq m$.

Alors il existe u_ε *dans* $C_c^\infty(\Omega)$, $u_\varepsilon \geqslant 0$, *telle que :*

i. $\exists M$ > 0,*tel que :* $u_\varepsilon \leq M$, pour *tout* $\varepsilon \in]0, 1[$

$ii. \nabla u_\varepsilon^m$ converge vers ∇u^m dans $(L^2(\Omega))^N$.

De plus on a les résultats suivants qui caractérisent la convergence dans $L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, (pour les démonstrations, on renvoie à [16] et [10]).

Lemme 5.4 : *Soit $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$, $(1 < p < \infty)$, qui converge en mesure vers f, et telle que $\|f_\varepsilon\|_{L^p} < M$, (où: M est une constante positive), alors $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ convergeant vers f faiblement dans $L^p(\Omega)$.*

Lemme 5.5 : *Si E est un espace de Banach, et $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ une suite de fonctions de E, qui converge faiblement vers f alors il existe une suite de combinaison convexe, $\sum\limits_{1\leq i\leq n} a_i f_{\varepsilon_i}$, (où $\sum\limits_{1\leq i\leq n} a_i = 1$), converge vers f fortement dans E.*

Lemme 5.6 : *Soit $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$, $(1 < p < \infty)$, telle que $\|f_\varepsilon\|_{L^p} < M$, $\forall \varepsilon \in]0,1[$, (où: M est une constante positive), alors il y a une équivalence entre la convergence de $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ vers un élément f dans $L^p(\Omega)$, et celle de $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ vers f en mesure.*

On obtient aussi immédiatement la:

Remarque 5.7 : *Le lemme précédent implique que si $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ est dominée, alors la convergence de $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ vers f dans $L^{p_0}(\Omega)$, entraine la convergence de $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ vers f dans $L^{p_1}(\Omega)$, pour tout $1 < p_0 < p_1 < \infty$.*

2.6 Attracteur global

On désigne par B(E) l'ensemble des parties bornées de E.

On considère S_t, pour tout $t \geqslant 0$, un semi-groupe sur E.

On utilisera souvent , pour démontrer les théorèmes de ce paragraphe les notions suivantes:

$\gamma_t^+(x) = \{S_\tau(x); \tau \in [t, \infty[\}$.

$\gamma_t^+(A) = \bigcup_{x\in A} \gamma_t^+(x)$.

On rappelle les définitions suivantes (pour plus de détails consulter [24]):

Définition 6.1 : On appelle ensemble w-limite *(pour* la *transformation* Ψ) *du point p, et* on *note* $\omega^+(p)$, l'ensemble des *points q, tels qu'il existe une suite* (t_n) tendant vers *l 'infini, et vérifiant:*

$q = \lim_{n\to\infty} \Psi(t_n, p)$.

$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \left[\gamma_t^+(B)\right]_E$; où $[B]_E$ désigne la fermeture de B dans E.

Définition 6.2 : *L'ensemble K c E est dit* ensemble *attractif pour le semi-*groupe S_t si:

Pour *tout B* $\in$ *B(E), on a :*

$dist_E(S_t(B), K) \longrightarrow 0$ quand *t tend vers l'infini.*

où :

$dist_E(C, D) = \sup_{X\in C} \inf_{y\in D} \|X - Y\|_E$, *pour tout C,D c E.*

cette définition peut être remplacée par:

Définition *6.3: L'ensemble K c E est dit ensemble attractif pour le semi-*groupe S_t si:

Pour tout $\varepsilon > 0$, *pour tout B* $\in$ *B(E), il existe un réel positif* $t_1 = t(\varepsilon, B)$ *tel que:*

$S_t(B)$ *c O,(K) pour tout* $t \geq t_1$, *où O,(K) est le* ε *voisinage de K.*

On définit aussi un ensemble absorbant:

Définition *6.4 :L'ensemble,* $B_0 \in E$ *est dit ensemble absorbant pour le semi-groupe* S_t *si:*

Pour **tout** $B \in$ **B(E), il existe** un **réel positif** T **= T(B) tel** *que:*

Pour tout $t \geqslant T$, *on* a :

$S_t B \subset B_0$.

On a la relation suivante entre les deux définitions précédentes:

Remarque 6.5 : Un *ensemble absobant* peut se *voir comme un ensemble* attractif.

On introduit maintenant, la notion d'un attracteur global.

Définition 6.6 *:L'ensemble* $A \subset E$ *s'appelle attracteur maximal (global) pour le semi-groupe* S_t *s'il satisfait les conditions:*

1. *A est un ensemble* compact dans *E.*

2. A *est* un ensemble **attractif** *pour l'opérateur* S_t.

3. *A est strictement invariant :*

$$S_t A = A \qquad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

Nous allons énoncer un théorème fondamental qui nous indique dans quelles conditions le semi-groupe S_t possède un attracteur global:

Théorème *6.7 :Si pour tout* $t \geqslant 0$, S_t *est continu, et s'il admet un ensemble attractif* compact *A, alors* S_t *possède un attracteur global* $K \subset A$.

Preuve :

A compact donc il admet un voisinage compact A_0, de plus il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que: $O_{\varepsilon_0}(A) \subset A_0$.

Il est facile de vérifier que A_0 est un ensemble absorbant, compact

Nous allons montrer que $\omega(A_0)$ est un attracteur global.

1 . $\omega(A_0)$ est un compact, non vide:

De la relation $\omega(A_0) = \bigcap_{t\geq 0} [\gamma_t^+(A_0)]_X$, on voit que:

$$\omega(A_0) = \bigcap_{t\geq T(A_0)} [\gamma_t^+(A_0)]_X \subset A_0$$

$\omega(A_0)$ est alors l'intersection d'une suite décroissante de fermés, de plus $\omega(A_0)$ est inclu dans un ensemble compact, de tout ceci il résulte que $\omega(A_0)$ est un compact, non vide.

2 $\omega(A_0)$ est, un ensemble attractant:

Soient $\varepsilon > 0$, $B \in B(E)$

(6.1) il existe alors $T > 0$ tel que $\gamma_t^+(A_0) \subset O_\varepsilon(\omega(A_0))$ pour tout $t \geq T$.

De plus comme A_0 est un ensemble absorbant, on a :

(6.2) il existe alors $T' > 0$ tel que $S_t(B) \subset A_0$ pour tout $t \geq T'$.

En combinant (6.1) et (6.2) on trouve:

$S_T(S_t(B)) \subset O_\varepsilon(\omega(A_0))$ pour tout $t \geq T'$.

Autrement dit:

$S_t(B) \subset O_\varepsilon(\omega(A_0))$ pour tout $t \geq T + T'$

ce qui implique que $\omega(A_0)$ est un ensemble attractant.

3 . $\omega(A_0)$ est invariant:

i) $S_t(\omega(A_0)) \subset \omega(A_0)$:

Soit y $\in \omega(A_0)$, alors y $=\lim\limits_{k\to\infty} S_{t_k}(x_k)$ pour un certain $x_k \in A_0$ et $t_k \nearrow +\infty$, par conséquent:

$S_t($ y$) =$ $S_t(\lim\limits_{k\to\infty} S_{t_k}(x_k))$, mais comme S_t est continu on obtient:

$S_t($ Y $)$ $=\lim\limits_{k\to\infty} S_{t+t_k} x_k$), ce qui prouve que $S_t($ y$) \in \omega(A_0)$

ii) $\omega(A_0) \subset S_t(\omega(A_0))$:

Soit, $x \in \omega(A_0)$, alors il s'écrit sous la forme:

x $= \lim\limits_{k\to\infty} S_{t_k}(x_k)$,pour un certain $x_k \in A_0$ et $t_k \nearrow +\infty$, et on peut supposer que:

$1 + T + t < t_1 < t_2 < . < t_k < . .$

Posons $y_k = S_{t_k - t}(x_k)$ **, il** résulte:

$y_k \in \gamma^+_{T+1}(A_0) \subset A_0$, en utilisant le fait que A_0 est. compact on déduit, qu'il existe une sous suite notée (y_{k_j}) telle que:

$\lim\limits_{j\to\infty} y_{k_j} =$ y $\in \omega(A_0)$.

On dèduit finalement. que:

$x = \lim\limits_{j\to\infty} S_{t_{k_j}}(x_{k_j}) = \lim\limits_{j\to\infty} S_t(y_{k_j}) = S_t(y)$.

Par conséquent:

$x \in$ St $(\omega(A_0))$.

L'assertion de l'invariance est alors démontrée.

D'où le lemme.

On déduit finalement de la démonstration pécédente le résultat suivant:

Remarque 6.8 :Si on remplace la condition de **l'existence** *d'un ensemble attractif* **compact** A, **par** *celle de l'existence d'un ensemble absorbant compact* B_0, *on obtient* **le** *même* **résultat** *du* théorème, de *plus* $A = \omega -$ limite$S_t(B_0)$.

2.7 Existence globale

Pour établir l'existence globale de solution ($T_{\max} = \infty$), on établit, en général, que les solutions approchées sont globales, pour cela on établit l'existence locale sur un certain intervalle maximal $[0, T_{\max})$, ensuite on prouve que $\|u_{i\varepsilon}(t,.)\| \leq C(t)$, pour tout t fini, où la fonction C ne s'explose pas (c'est, à dire il n'existe pas un nombre positif fini t_0 tel que: $\lim_{t\to t_0} C(t) = +\infty$), enfin on conclut en utilisant, la propriété suivante:

si $T_{\max}$ est fini , alors : $\lim_{t\to T_{\max}} \|u_{i\varepsilon}(t,.)\| = +\infty$

Chapitre 3

Problèmes non-dégénérés

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de prouver un résultat très utile dans l'étude des systèmes paraboliques non-linéaires dégénérés , nous montrerons l'existence locale de solutions régulières pour les problèmes approchés (réguliers).

On résoud le problème avec des données initiales et des seconds membres suffisament. réguliers, la téchnique utilisée est l'application du principe de Leray-Schauder qui consiste à ramener l'étude de l'existence locale de solutions d'un système parabolique régulier, à la. recherche des points fixes d'une certaine transformation possédant de bonnes propriétés.

Nous prouvons enfin que la quasi-positivité des seconds membres, et la positivité des données initiales permettent de construire des solutions positives

3.2 Position du problème

On considère, dans un domaine ouvert, borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière les systèmes de la forme:

$$(2.1)\quad \begin{cases} \partial_t u_1 - div(\phi_1(u_1)\nabla u_1) = f_1(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ \partial_t u_2 - div(\phi_2(u_2)\nabla u_2) = f_2(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega \\ u_1(.,0) = u_{10}\ ;\ u_2(.,0) = u_{20} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Dans toute la suite , on suppose que :

$u = (u_1, u_2)$; $P = (p, q) \in (\mathbb{R}^N)^2$; w $= (w_1, w_2)$; 71 $= (v_1, v_2)$ et $u_0 = (u_{10}, u_{20})$.

On suppose de plus que pour $i = 1, 2$ on a:

(2.2) $u_{i0} \in H_0^{2+\gamma}$ où : y > 0 .

(2.3) ϕ_i est une fonction de classe C^1 , telle que :

$$0 < \nu(|\xi|) \leq \phi_i(\xi) \leq \mu(|\xi|)$$

(2.4) f_i est localement lipschitzienne par rapport à u et ***P.***

(2.5) $|f_i(u, P)| \leq \varphi(|u|, |P|)(1 + |P|)^2$, et $\lim_{|P| \to +\infty} \varphi(|u|, |P|) = 0$.

(2.6) $u_i\, |f_i(u, 0)| \geq -c_1 |u|^2 - c_2$, où c_1 et c_2 sont des constantes positives .

3.3 Existence de solutions classiques

Pour l'étude de la résolubilité du problème (2.1) , on utilise le théorème suivant:

Théorème 3.1 *:(principe de Leray-Schauder)*

Soient *H un espace de Banach , et* $\overline{\Re}$ *l'adhérence d'un ensemble ouvert borné* $\Re \subset H$, soit $\aleph = H \times [0, 1]$ *et soit* ψ une transformation-définie de $\aleph$ dans H. *L'équation :* $u = \psi(u, \tau)$ *admet* au moins une *solution, dans* $\overline{\Re}$ *pour tous les* $\tau \in [0, 1]$, si les condition *suivantes sont remplies :*

1. *La* transformation ψ *est définie , et complètement* continue *sur* $\overline{\Re}$.

2. *La* transformation ψ *est uniformément continue* sur $\overline{\Re}$.

3. *La* frontière du domaine $\Re$ ne *contient pas de solutions* de *l'équation* $u = \psi(u, \tau)$ *pour tout* $\tau \in [0, 1]$ *(les solutions n'atteignent pas la frontière)*

4. *Pour* $\tau = 0$ *, l'équation* $u = \psi(u, \tau)$ *admet une* solution, *unique, et la transformation* $I - \psi(., 0)$ *est inversible* au, voisinage *de cette dernière dans* $\Re$, *et le cardinal,' de l'ensemble de ces solutions est différent de zéro.*

Pour la démonstration de ce théorème consulter [20] (page 293) .

Dans le théorème 3.1, la troisième condition s'avère être la plus difficile. Pour la vérifier, on démontre,en général, que la norme de u_τ (la solution de l'équation: $u = \psi(u, \tau)$) dans H reste bornée par une constante finie M, quand τ varie entre 0 et 1, il suffit alors de prendre $\Re = B(0, M + \varepsilon)$,où ε est un nombre positif arbitraire, pour conclure .

Théorème 3.2 : *Sous les hypothèses (2.2)-(2.6), si de plus u_0 vérifie la condition de compatibilité*

suivante:

$$-div(\phi_i(u_{i0})\nabla u_{i0}) - f_i(0, \nabla u_{i0}) = 0$$

le problème (2.1) possède au moins une solution, classique locale u sur un certain, intervalle maximal $[0, T_{\max})$.

Nous adoptons la preuve de [19] faite dqns le cas scalaire au cas des systèmes.Pour ramener ce théorème au précédent on introduit les opérateurs $\mathcal{L}_\tau$ pour tout $\tau \in [0, 1]$, L et L_τ définis par :

$$\mathcal{L}_\tau(w, v) = \begin{pmatrix} \partial_t v_1 - div((\tau\phi_1(w_1) \quad (1-\tau))\nabla v_1) - \tau f_1(w, \nabla w) - (1-\tau)\Delta u_{10} \\ \partial_t v_2 - div((\tau\phi_2(w_2) \quad (1-\tau))\nabla v_2) - \tau f_2(w, \nabla w) - (1-\tau)\Delta u_{20} \end{pmatrix};$$

$$L(u) = \begin{pmatrix} \partial_t u_1 - div(\phi_1(u_1)\nabla u_1 - f_1(u, \nabla u) \\ \partial_t u_2 - div(\phi_2(u_2)\nabla u_2 - f_2(u, \nabla u) \end{pmatrix}$$

et : $L_\tau(u) = \mathcal{L}_\tau(u, u)$

Remarquons que $L_1(u) = L(u)$.

On considère la famille de problèmes linéaires suivants :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}_\tau(w,v) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ v = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega \\ v(0,.) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec T $\leq T_{\max}$ (où $T_{\max}$ est le temps d'existence maximal).

On introduit l'espace de Banach B_δ :

$$B_\delta = \left\{ \begin{array}{l} w/w \text{ est continue ainsi que ses dérivées partielles}/x_i \text{ telle que :} \\ |w|^\delta_{Q_T} + |\nabla w|^\delta_{Q_T} \text{ est fini .} \end{array} \right\}$$

On munit B_δ de la norme :

$$\|w\|_{B_\delta} = |w|^\delta_{Q_T} + |\nabla w|^\delta_{Q_T}$$

On définit également la transformation ψ de B^2_δ x [0, 1] dans B^2_δ par :

$$\psi(w,\tau) = v.$$

où v est la solution de (3.1) , ψ est bien définie d'après ([19], théorème 5.2 page 320).

Cette transformation est non-linéaire , et ses points fixes pour τ = 1 sont des solutions de (2.1).

Démonstration du théorème 3.2:

Soit u_τ une solution classique de:

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} L_\tau(u) = 0 & \text{sur } (0,T) \times \Omega \\ u = o & sur\ (0,T)\ x\ \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 & sur\,\Omega \end{cases}
$$

En vertu de([19] , théo 5.2 page 587) , et des hypothèses (2.2)-(2.6),il existe une constante positive A4 (indépendante de τ),telle que :

$$\max_{Q_T} |u_{1\tau}| \, ; \max_{Q_T} |u_{2\tau}| \leq M.$$

De même grâce à ([19] ,théo 6.1,et lèmme 6.2 (page 592),il existe deux constantes strictement positives ,α et M_1 (indépendantes de τ), telles que:

$$\max_{Q_T} |\nabla u_\tau| \, , |u_\tau|^{(\alpha)} \leq M_1.$$

En utilisant ([19], théo 5.2 page 587), on voit qu'il existe une constante positive M_2 (indépendante de τ), telle que:

$$\max_{Q_T} |\partial_t u_\tau| \, , |\nabla u_\tau|^{(\alpha)} \leq M_2.$$

Finalement le théorème 5.2 [19] (page 320),nous permet de conclure que:

$u_\tau \in \left(H^{2+\alpha\gamma,1+\frac{\alpha\gamma}{2}}(\overline{Q_T})\right)^2$ (puisque les coefficients de (3.2) sont des éléments de $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$ et. $u_0 \in \left(H^{\gamma}(\overline{\Omega})\right)^2$.

Les estimations précédentes prouvent qu'il existe une constante positive M_3 (indépendante de τ), telle que:

$$|u_\tau|_{B^2_\delta} = |u_\tau|^{(\alpha)} + |\nabla u_\tau|^{(\alpha)} = |u_{1\tau}|^{(\alpha)} + |\nabla u_{1\tau}|^{(\alpha)} + |u_{2\tau}|^{(\alpha)} + |\nabla u_{2\tau}|^{(\alpha)} \leq M_3.$$

En résumé : toute solution classique u_τ de (3.2) est dans B^2_δ,c'est à dire u_τ est un point fixe de ψ,de plus $u_\tau \in \left(H^{2+\alpha\gamma,1+\frac{\alpha\gamma}{2}}(\overline{Q_T})\right)^2$

Et réciproquement, : chaque point fixe u_τ de ψ, est une solution classique de (3.2),en effet :

Soit $u_\tau \in B^2_\delta$ un point fixe de ψ, en utilisant (2.4) on voit. facilement que les coefficients de (3.1) sont des éléments de $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$,et $u_0 \in \left(H^{2+\gamma}(\overline{\Omega})\right)^2$,ceci implique d'après([19] ,théo 5.2 page 320), donnera $u_\tau \in \left(H^{2+\alpha\gamma,1+\frac{\alpha\gamma}{2}}(\overline{Q_T})\right)^2$.

Donc on est en mesure de vérifier le troisième point du théorème 3.1:

En prenant :

$$\Re = \left\{ w \in B^2_\delta \text{ telle que: } \max_{\overline{Q_T}} |w| < M + \varepsilon \text{ ; } \max_{\overline{Q_T}} |\nabla w| < M_2 + \varepsilon \text{ et } |w|_{B^2_\delta} < M_3 + \varepsilon \right\}$$

il vient alors,d'après les estimations précédentes :

$\max_{\overline{Q_T}} |w| <$ A4 ;$\max_{\overline{Q_T}} |\nabla w| < M_2$; $|w|_{B^2_\delta} < M_3$.

Autrement dit :les solutions n'atteignent pas la frontière de $\Re$,d'où: $\psi(\Re, [0, 1]) \subset \overset{\circ}{\Re}$.

ce qui prouve que la troisième condition du théorème 3.1 est, satisfaite.

Passons maintenant pour vérifier la première condition"la continuité complète", pour cela il suffit de montrer que la transformation ψ est continue sur $\overline{\Re}$,et que l'ensemble des valeurs de ψ est relativement compact,.

•La continuité par rapport à w : il suffit de montrer la continuité uniforme par rapport à w.

Soient $w', w'' \in \Re$,et v', v'' les solutions correspondantes ,c'est à dire:$v' = \psi(w', \tau)$; $v'' = \psi(w'', \tau)$.

En posant : $v_1 = v_1' - v_1''$; $v_2 = v_2' - v_2''$,on aura :

$$(3.3) \begin{cases} \partial_t v_1 + (1-\tau)\Delta v_1 - \tau div(\phi_1(w_1')\nabla v_1) = & \tau div\left[\phi_1(w_1') - \phi_1(w_1'')\right]\nabla v_1' - \\ & \tau\left[f_1(w', \nabla w') - f_1(w', \nabla w'')\right] \\ v_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Supposons que $|w' - w''|_{B_\delta^2}$ est petit,et nous montrons que $|v' - v''|_{B_\delta^2}$ l'est aussi,pour cela nous énonçons le lemme suivant :

Lemme 3.3:

Soient m un *entier* non *négatif* ,*α et β deux réels tels que : $0 < \alpha < \beta < 1$.*

Supposons *que Ω soit un domaine borné convexe de $\mathbb{R}^N$.*

Alors les injections suivantes sont *continues et compactes :*

$H^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow H^{m+\beta}(\Omega) \hookrightarrow H^{m+\alpha}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega)$.

Pour la preuve,voir [12]

Dans (3.3) la norme du terme de droite dans $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ est, suffisament petite,puisque les f_i sont localement lipschitziennes,et le coefficient, de Δv_1 appartient. à $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$,alors grâce à [19] (théorème 5.2 page 320) la norme de v_1 dans $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$ est suffisamment petite, et gâce au lemme 3.3 la norme de v_1 dans B_α l'est aussi, et on montre de la même façon que, la norme de v_2 dans B_α est petite.

Par conséquent, $\|v\|_{B^2_\alpha}$ est assez petite, ce qui prouve la continuité uniforrne par rapport à w.

Il reste à vérifier que $\psi(\Re, [0, 1])$ est relativement compact:

D'aprés les injections du lemme 3.3 ,pour montrer que $\psi(\Re, [0, 1])$ est relativement compact dans B^2_α, il suffit de montrer que : $\psi(\Re, [0,1])$ est borné dans B^2_1, nous le faisons:

Soient w $\in \Re, \tau \in [0,1]$ et $v = \psi(w, \tau)$, d'après la première partie de cette démonstration, $v \in H^{2+\alpha\gamma,1+\frac{\alpha\gamma}{2}}(\overline{Q_T})$,ce qui implique que : $v \in H^1/t$ et $\nabla v \in H^1/x$, ceci permet, en vertu de ([19] lemme 3.1 page 78), de déduire que $\nabla v \in H^{1,\frac{1}{2}}(\overline{Q_T})$, c'est à dire: $|\nabla v|^{(1)} < const$, et par conséquent v est borné dans B^2_1, d'où la continuité complète.

Nous allons vérifier le deuxième point du théorème 3.1 (la continuité uniforme $/\tau)$:

Soient $\tau' ; \tau'' \in [0, 1]$, tels que $|\tau' - \tau''|$ est assez petit, ,$w \in B^2_\alpha$, et $v';v''$ les solutions correspondantes:

$v' = \psi(w, \tau')$; $v'' = \psi(w,$ r")

En posant : PI $= v' - v''$,on obtient :

$$
(3.4) \quad \begin{cases} \partial_t v_1 - (\tau'' div(\phi_1(w_1')\nabla v_1)) = (\tau' - \tau'')div(\phi_1(w_1')\nabla v_1') + (\tau' - \tau'') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (f(w, \nabla w) - \Delta u_{10}) \\ v_1/\partial\Omega = v_1/\Omega = 0 \end{cases}
$$

Dans (3.4) le second membre est suffisamment petit, donc on déduit d'après ([19] ,théo 5.2 page 320), que la norme de v_1 dans $H^{2+\alpha\gamma,1+\frac{\alpha\gamma}{2}}(\overline{Q_T})$ est suffisament petite, en tenant également compte du lemme 3.3 on établit que la norme de v_1 dans B_α est assez petite.

d'où la deuxième condition du théorème 3.1.

Vérifions maintenant la quatrième condition ($\psi(0, .)$ admet un point fixe):

On sait que l'image de $\Re$ par $\psi(0, .)$ est la solution de:

$$
\begin{cases} \partial_t v_1 - \Delta v_1 - \Delta u_{10} = 0 & \text{dans } (0,T) \text{ x } \Omega \\ \partial_t v_2 - \Delta v_2 - \Delta u_{20} = 0 & \text{dans } (0,T) \text{ x } \Omega \\ v_1 = v_1 = 0 & \text{sur } (0,T) \text{ x } \partial\Omega \\ v_1(t, .) = u_{10};\, v_2(t, .) = u_{20} & \text{dans } \Omega \end{cases}
$$

Ce dernier admet une seule solution $v = u_0$, ce qui prouve que $\psi(0, \Re) = u_0$, c'est à dire la transformation $\psi(0, .)$ admet un seul point. fixe, et la tronsformation $I - \psi(0, .)$ est inversible.

Résumé : *Les quatre conditions du* théorème 3.1 *sont vérifies, ainsi* $\forall \tau \in [0, 1]$, la transformation, ψ *admet* au *moins un point fixe*, et en *particulier* pour $\tau = 1$, *qui* se considère *dans ce cas comme solution classique de (2.1).*

Remarques 3.4:

i) Le théorème 3.1 ramène l'ètude de la résolubilité des problèmes aux limites à l 'obtention, d'estimations à piori des solutions dans la norme $H^{1+\alpha}$.

ii)Dans Le cas où $\phi_i(r) = (|r| + \varepsilon)^{\sigma_i}$;$\varepsilon, \sigma_i > 0$, on *peut montrer* en *utilisant la* même *téchnique et* en *appliquant le lemme3.3 page80, le théorème9.1 page 341 et le théorème 5.2 page 320 de* [18]*que le problème (2.1) admet une solution, appartient à* $\left(W_q^{1,2}(Q_{T\max})\right)^2$ *pour tout* $q \geq 1$, *sur un certain intervalle maximal* $[0, T\max)$

Nous ne citerons pas ici la démonstration de ii) de la remarque 3.4, car elle est entièrement analogue à celle du théorème 3.2.

3.4 positivité de solutions

Les système de réaction-diffusion interviennent dans de nombreux domaines, les réactions chimiques, la propagation d'une maladie, de la. transmission d'un caractère lors d'un couplage,...etc où les solutions représentent: les concentrations, les densités des populations,....,qui sont généralement des quantités positives, on s'interesse donc aux solutions positives.

Nous allons montrer que si les conditions des paragraphes précédents sont remplies, et si de plus:

(4.1) $\quad f_1(0, u_2, 0, q); f_2(u_1, 0, p, 0) \geqslant 0$ pour tout $u_1; u_2 \geq 0$, (4.2) u_{10} et u_{20} **sont positives .**

Alors la solution obtenue est, positive (ses composantes sont positives).

Proposition 4.1: Sous *les hypothèses du théorème* **3** *2, si de plus (4.1) et (4.2) sont remplies, le système suivant admet une solution* **classique** *positive:*

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - div(\phi_1(u_1)\nabla u_1) = f_1(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) & \text{dans } (0,T)\times\Omega \\ \partial_t u_2 - div(\phi_2(u_2)\nabla u_2) = f_2(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) & \text{dans } (0,T)\times\Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega \\ u_1(.,0) = u_{10} \ , \ u_2(.,0) = u_{20} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Pour montrer cette proposition on aura besoin du lemme suivant:

Lemme 4.2: *Soit u solution classique de :*

$$(4.3) \qquad \begin{cases} \partial_t u - div(\phi_1(u)\nabla u) = F(u, \nabla u) & sur\ (0,T) \times \Omega \\ u = 0 & \textbf{sur (0, T) x } \partial\Omega \\ u(.,0) = u_0 & sur\ \Omega \end{cases}$$

où : $u_0 \geqslant 0$ *; et* $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que:* $F(r,0) \geqslant 0$ *pour tout* $r < 0$.

Alors u est positive

Démonstration :On considère le problème :

$$(4.4) \qquad u_t - div(\phi_1(u)\nabla u) = F(u, \nabla u)$$

D'après les résultats du para-aphe précédent, (4.4) admet. une solution classique u sur $[0, T_{\max})$

Posons $v(t, x) = e^{-t}u(t, x)$.

Pour montrer que u est positive, il suffit de montrer que v est positive, nous le faisons par l'absurde:

Supposons que v peut atteindre une valeur négative, c'est à dire il existe un point (x_0, t_0) tel que:

$v(x_0, t_0) = \min_{\overline{Q_T}} v(x, t) < 0$.

En posant. $V(t) = v(t, x_0)$,il vient :

$V(t_0) = \min_{[0,T]} v(x_0, t) < 0$, donc il y a deux possibilités:

1. ou bien $t_0 = T$, dans ce cas $V'(t_0) \leq 0$.

2. ou bien $t_0 < T$,($t_0 \neq 0$ puisque $V(0) \geq 0$) , dans ce cas $V'(t_0) = 0$

Mais dans les deux cas on a : $V'(t_0) \leq 0$.

De même en posant $\hat{u}(x) = v(t_0, x)$, on aura:

$\min_{\overline{\Omega}} \hat{u}(x) = \hat{u}(x_0) = v(t_0, x_0)$, ce qui prouve que:

$\nabla\hat{u}(x_0) = \nabla v(t_0, x_0) = 0$.

Résumons ces résultats dans l'égalité (4.4) on obtient:

$$v_t(t_0, x_0) = -v(t_0, 20) + e^{-t}F(u(t_0, x_0), 0) > 0.$$

d'où la contradiction, donc notre supposition est fausse

Démonstration de la propositin 4.1: Posons :

$$g_i(u_1,u_2,p,q) = \begin{cases} f_i(u_1,u_2,p,q) & \text{si } u_1,u_2 \geqslant 0 \\ f_i(u_1,0,p,q) & \text{si } u_1 \geqslant 0, u_2 < 0 \\ f_i(0,u_2,p,q) & \text{si } u_1 < 0,\ u_2 \geq 0 \\ f_i(0,0,p,q) & \text{si } u_1, u_2 < 0 \end{cases}$$

Il est clair d'aprés le paragraphe précédent que le problème suivant admet une solution classique:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - div(\phi_1(u_1)\nabla u_1) = g_1(u_1,u_2,\nabla u_1,\nabla u_2) & \text{dans } (0,T)\times\Omega \\ \partial_t u_2 - div(\phi_2(u_2)\nabla u_2) = g_2(u_1,u_2,\nabla u_1,\nabla u_2) & \text{dans } (0,T)\times\Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega \\ u_1(.,0) = u_{10}\ ,\ u_2(.,0) = u_{20} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

De plus si on pose : $F_1(r,p) = g_1(r,u_2,p,\nabla u_2)$, on trouve:

$F_1(r,0) \leq 0$,pour tout $r < 0$.

Ensuite on applique le lemme 4.2 pour déduire que u_1 est. positive, et une démarche analogue nous montre la positivité de u_2.

ce qu'il fallait démonrer.

Remarque 4.3 : *On peut* montrer *également que* si les *données* initiales *sont positives et les* seconds *membres sont quasi positifs alors les solutions de (2. 1) dans le cas où $\phi_i(r) = (|r| + \varepsilon)^{\sigma_i}$ sont classiques et positives.*

Chapitre 4

Régularité L^∞

4.1 Introduction

L'objet principal de ce chapitre est l'étude de la régularité L^∞, pour des système de réaction-diffusion dégénérés qui sont de la forme:

$$
(1.1)\quad \begin{cases} \partial_t(u_1) - \Delta(|u_1|^{\sigma_1} u_1) = g_1(u_1,u_2) + \overrightarrow{b_1}\nabla(|u_1|^{m_1-1} u_1) & \text{dans }]0,\infty[\times \Omega \\ \partial_t(u_2) - \Delta(|u_2|^{\sigma_2} u_2) = g_2(u_1,u_2) + \overrightarrow{b_2}\nabla(|u_2|^{m_2-1} u_2) & \text{dans }]0,\infty[\times \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur }]0,\infty[\times \partial\Omega \\ u_1(0,.) = u_{10},\ u_2(0,.) = u_{20} & \text{dans } \Omega \end{cases}
$$

Plus exactement, on établira les conditions sous lesquelles le problème de la régularité L^∞ se ramène à celui de la régularité L^p pour un certain $p \geq 1$. Dans ce but on utilisera une méthode inductive.

Les résultats qui seront obtenus ici englobent une large classe de système de réaction-diffusion dégénérés, nous prendrons comme pierre de touche le problème de Dirichlet homogène mais les résultats de ce chapitre se généralisent, à des objets plus larges.

En réalité les résultats qui viennent d'être formulés furent obtenus par Alikakos dans [1] avec des hypothèses plus fortes.Plus précésiment, il étudie le problème suivant:

$$\begin{cases} \partial_t(u) - \Delta(|u|^\sigma u) = \beta(t,x)u & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial\eta}u\right) u \leq 0 & \text{sur }]0,\infty[\text{ x } \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 \;, u_0 \in L^\infty & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Il démontre dans ce cadre le théorème 2.1 de ce chapitre en supposant, que:

$|\beta(t,x)| \leq$ C pour tout (t, $x) \in]0,\infty[$ x Ω.

Des résultats voisins des ceux de Alikakos ont également été établis par L.Dung [11], en étudiant le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_i - d(t)\Delta(u_i\,|u|^{\sigma_i}) = f_i(t,x,u,\nabla u_i) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}(u_i\,|u|^{\sigma_i})\, u_i \leq 0 & \text{sur }]0,\infty[\times \partial\Omega \\ u(0,.) = u_{i0} \;, u_{i0} \in L^\infty(\Omega) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec:

- $i = 1, r.$
- $0 < \sigma_i < 1$

♦ $|f_i(t,x,u,\xi)| \leq k_1 \sum\limits_{1\leq i\leq r} u_i^{\alpha_i} + k_2 \|\xi\|^{\delta_i} + k_3$, où :

♦ $k_i \geq 0$; $i = 1,3$; $\alpha_i \in \left[0, \sigma_i + 1 + \frac{\sigma_i+2}{N}\right[$; $\delta_i \in \left[0, 2 - \frac{2N(1-\sigma_i)}{2N+\sigma_i+2}\right[$.

♦ d_i est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ de plus il existe deux constantes positives d et. D telles que:

$d \leq d_i \leq D \qquad \forall t \geq 0$.

Remarquel. 1:

Le Dung [11] n'a *établi ni l'éxistence des solutions de problème (1.1) ni* les *estimations dans* L^{σ_i+1} *de ces solutions mais il a supposé cela vrai.*

Dans ce chapitre nous verrons qu'il est possible d'affaiblir la condition faite sur σ_i dans [1 1] mais il faut renforcer l'assertion sur δ_i. Nous reprendrons le plan général de [11], mais en modifiant les hypothèses, et nous obtiendrons des résultats qui généralisent un peu ceux de [11], puisque les résultats qui seront obtenus ici se rapporteront aux systèmes:

1 .

$$\begin{cases} \partial_t u_i - \Delta(u_i |u_i|^{\sigma_i}) = f_i(t,x,u,\nabla u_i) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}(u_i |u|^{\sigma_i})\, u_i \leq 0 & \text{sur}]0,\infty[\text{ x } \partial\Omega \\ u(0,.) = u_{i0} \,, u_{i0} \in L^\infty(\Omega) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec:

♦ $i = 1,r$.

♦ $\sigma_i > 0$,

♦ $|f_i(t,x,u,\xi)| \leq k_1 \sum_{1\leq i\leq r} u_i^{\alpha_i} + k_2 \|\xi\|^{\delta_i} + k_3$, où :

♦ $k_i \geq 0$; $i = 1,3$; $\alpha_i \in \left[0, \sigma_i + 1 + \frac{\sigma_i+2}{N}\right[$; $\delta_i \in \left[0, \dfrac{\sigma_i+1}{\sigma_i}\right[$.

2 .

$$\begin{cases} \partial_t(u_i) - \Delta(|u_i|^{\sigma_i} u_i) = g_i(u) + \overrightarrow{b_i}\nabla(|u_i|^{m_i-1} u_i) & \text{dans }]0,\infty[\times\Omega \\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\eta}(u_i\,|u|^{\sigma_i})\,u_i \leq 0 \\ \qquad\qquad ou \\ \sum_{j=1}^{N} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(|u_i|^{\sigma_i} u_i) + b_{ij}\,|u_i|^{m_i-1} u_i\right]\eta_j \leq 0 \end{cases} & \text{sur }]0,\infty[\text{ x } \partial\Omega \\ u_1(0,.) = u_{10},\ u_2(0,\cdot) = u_{20} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec :

♦ $i = 1, r.$

♦ $\sigma_i > 0$

♦ $|g_i(t,x,u)| \leq k_1 \sum_{1\leq i\leq r} u_i^{\alpha_i} + k_2$, et $\left\|\overrightarrow{b_i}\right\| = \left\|\overrightarrow{b_i}(x,t)\right\| \leq k_1$ où :

♦ $k_i \geq 0$; $i = 1,2$; $\alpha_i \in \left[0, \sigma_i + 1 + \frac{\sigma_i+2}{N}\right[$,

♦ $\overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{b_i}(x,t) \in \mathbb{R}^N$

Les améliorations ainsi indiquées ne sont pas difficiles à obtenir par méthode exposée ici.

4.2 Position du problème

On considère le problème :

$$
(2.1) \begin{cases}
\partial_t(u_1) \quad \Delta(|u_1|^{\sigma_1} u_1) = g_1(u_1, u_2) + \overrightarrow{b_1} \nabla(|u_1|^{m_1 - 1} u_1) & \text{dans } Q_T \\
\partial_t(u_2) \quad \Delta(|u_2|^{\sigma_2} u_2) = g_2(u_1, u_2) + \overrightarrow{b_2} \nabla(|u_2|^{m_2 - 1} u_2) & \text{dans } Q_T \\
u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\
u_1(0, .) = u_{10}, u_2(0, .) = u_{20} & \text{dans } \Omega
\end{cases}
$$

où : T, σ_i, m_i $i = 1; 2$ sont des réels strictement positifs, $\overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{b_i}(x,t) \in \mathbb{R}^N$.

On suppose de plus :

(2.2) $1 \leq m_i \leq \sigma_i + 1, \quad i = 1; 2.$

Et nous imposons aux fonctions g_i et aux vecteurs $\overrightarrow{b_i}$ les conditions suivantes :

(2.3) $g_i(0,0) = 0; \quad i = 1; 2.$

(2.4) les g_i sont des fonctions localement lipschitziennes :

$$\sum_{1 \leq i \leq 2} |g_i(u_1, u_2) - g_i(\hat{u}_1, \hat{u}_2)| \leq K(r)(|u_1 - \hat{u}_1| + |u_2 - \hat{u}_2|)$$

pour tout $|u_1|, |\hat{u}_1|, |u_2|, |\hat{u}_2| \leq r$

(2.5) Il existe des constantes $L_i \geq 0$ et $\alpha_{ij} \leq \sigma_j + 1, i, j = 1; 2.$ telles que :

pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$|g_i(u_1,u_2)| \leq L_i(|u_1|^{\alpha_{i1}} + |u_2|^{\alpha_{i2}} + 1) \qquad i = 1,2$$

(2.6) Il existe une constante c ≥ 0 telle que :

$$\left\| \overrightarrow{b_i}(x,t) \right\| \leq c \quad i = 1,2 \ \text{ p.p sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega$$

(2.7) les $\overrightarrow{b_i}$ sont localement lipschitziens.

(2.8) $u_{i0} \in L^p(\Omega)$,$p \geq \sigma_i + 1$ $\quad i = 1,2.$

Il est clair que les équations du système (2.1) dégénérent en des équations du premier ordre sur [u = 0], c'est pourquoi ce dernier n'admet pas 'en général une solution classique , d'où la nécessité d'introduire la notion de solution faible

On adopte la définition suivante :

Définition 2.1:

Le *couple* (u_1, u_2) *est* solution *faible de* **(1.1)** *,si pour tout* $T > 0$ *,on a:*

1-$|u_i|^{\sigma_i}\, u_i \in L^2(Q_T)$, $i = 1,2$.

2-u_i *= 0 sur (0, T)* x $\partial\Omega$ *au sens de traces*

3-$\nabla(|u_i|^{\sigma_i}\, u_i)$ *existe au sens de distributions ,et* $\nabla(|u_i|^{\sigma_i}\, u_i) \in (L^2(Q_T))^N$.

4- Pour toutes fonctions $\varphi_i \in C^1(Q_T)$ *telles que* φ_i *= 0 sur (0, T) x* $\partial\Omega$, $i = 1,2$

on a:

$$\int_{Q_T} \nabla(|u_i|^{\sigma_i} u_i)\nabla\varphi_i dtdx - \int_{Q_T} \varphi_{i\ t} u_i dtdx + \int_\Omega u_i(x,T)\varphi_i(x,T)dx = \int_\Omega u_{i0}(x)\varphi_i(0,x)dx$$

$$+ \int_{Q_T} g_i(u_1,u_2)\varphi_i - \left[\overrightarrow{b_i}\nabla\varphi_i |u_i|^{m_i-1} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\overrightarrow{b_i}(x,t)\varphi_i |u_i|^{m_i-1} u_i)\right] dxdt$$

Nous allons en déduire dans ce chapitre le résultat, fonda.mental suivant,:

Théorème *2.2: On se place dans les hypothèses (2.2)-(2.8), on a les résultats suivants:*

Supposons *qu'il existe* une fonction *continue positive C_1 indépendante de u_0 définie sur $(0,T_{\max})$ telle que:*

(2.9) $\quad \|u_i(t,.)\|_{L^{\sigma_i+1}(\Omega)} \le C_1(\xi),$ *pour tout* $t \in [\xi, T_{\max})$.

alors il existe une une fonction, continue positive C_∞ telle que :

(2.10) $\quad \|u_i(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_\infty(\xi)$ *pour tout* $t \in [\xi, T_{\max})$.

De plus si $u_0 \in (L^\infty(\Omega))^2$ et s'il existe un nombre positif fini $K_1(u_0)$ tel que:

(2.11) $\quad \|u_i(t,.)\|_{L^{\sigma_i+1}(\Omega)} \le K_1(u_0)$ *pour tout* $t \in [0, T_{\max})$

alors *il existe un nombre positif fini* $K_\infty(u_0)$ *pour tout tel que :*

(2.12) $\qquad \|u_i(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_\infty(u_0)$ *pour tout* $t \in [0, T_{\max})$.

4.3 Problèmes approchés

Pour l'approximation on définit:

- (R_ε) une suite de réels positifs telle que : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} R_\varepsilon = +\infty$
- $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty$, ψ_ε une fonction de troncature , $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$, et :

$$\psi_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r| \leq R_\varepsilon . \\ 0 & \text{si } |r| \geq R_\varepsilon + 1 \end{cases}$$

- $g_{i\varepsilon}(r_1, r_2) = g_i(r_1, r_2)\psi_\varepsilon(|r_1| + |r_2|)$
- $\phi_{i\varepsilon}(r) = (|r| + \varepsilon)^{\sigma_i}$
- $\{u_{0\varepsilon}\} = \{u_{10\varepsilon}, u_{20\varepsilon}\} \in (D\ (\Omega))^2$ tel que:

$(u_{i0\varepsilon})_\varepsilon$ tend vers u_{i0} dans $L^p(\Omega)$ quand ε tend vers zéro si $p \neq \infty$ (ceci est. possible d'après le lemme 2.5.1).

$(u_{i0\varepsilon})_\varepsilon$ est une suite uniformément bornée telle que $(u_{i0\varepsilon})_\varepsilon$ tend vers u_{i0} dans $L^{\sigma_i+2}(\Omega)$ quand ε tend vers zéro si $p = \infty$ (ceci est possible d'aprés le lemme 2.5.2).

- $f_{i\varepsilon}(u_1, u_2, \nabla u_i) = g_{i\varepsilon}(u_1, u_2) + \overrightarrow{b_i}\, \nabla(|u_i|^{m_i - 1} u_i)$

On considère alors la famille de problémes suivants ($0 < \varepsilon < 1$) :

$$
(3.1)\quad \begin{cases} \partial_t(u_{1\varepsilon}) - (\sigma_1+1)div(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})\nabla u_{1\varepsilon}) = f_{1\varepsilon}(u_1,u_2,\nabla u_1) & \text{dans } Q_T \\ \partial_t(u_{2\varepsilon}) - (\sigma_2+1)div(\phi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{2\varepsilon})\nabla(u_{2\varepsilon}) = f_{2\varepsilon}(u_1,u_2,\nabla u_2) & \text{dans } Q_T \\ u_{1\varepsilon} = u_{2\varepsilon} = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega \\ u_{1\varepsilon}(0,.) = u_{10\varepsilon} \quad , u_{2\varepsilon}(0,.) = u_{20\varepsilon} & \text{dans } \Omega \end{cases}
$$

Proposition 3.1: *Le système* (3.1) admet pour tout ε $(0<\varepsilon<1)$ un,e solution $(u_{1\varepsilon},\ u_{2\varepsilon}\ )$ *appartient à* $\left(W_q^{1,2}(Q_T)\right)^2$ pour tout $q\geq 1$ sur *un* certain *intervalle maximal* $[0,T_{\max,\varepsilon})$, *de pl*us si les données initiales *sont positives et les seconds membre sònt* quasi-positifs alors $(u_{1\varepsilon},\ u_{2\varepsilon}\ )$ *est classique et ses composantes* sont *positives.*

La démonstration de cette proposition est une conséquence immédiate du chapitre précédent.

Pour montrer le théorème (2.2) il suffit de montrer la

Proposition 3.2:*Sous les hypothèses (2.2)-(2.8), on,* a *les résultats suivants:*

Supposons *qu'il existe une fonction continue positive* $C_1(\xi)$ *qui ne dépend ni* de ε ni de u_0 définie sur (0, $T_{\max,\varepsilon}$) *telle que:*

$$
(3.2)\qquad \|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^{\sigma_i+1}(\Omega)} \leq C_1(\xi),\ \textit{pour tout}\ t\in[\xi,T_{\max,\varepsilon}).
$$

alors *il existe une fonction' continue positive* C_∞ *ne dépend ni de* ε *ni de* u_{i0} *telle* *que :*

(3.3) $\qquad \|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\infty(\xi)$ *pour tout* $t \in [\xi, T_{\max,\varepsilon})$.

De plus s'il existe un nombre positif fini $K_1(u_0)$ qui *ne* dépend pas de ε *tel que:*

(3.4) $\qquad \|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^{\sigma_i+1}(\Omega)} \leq K_1(u_0)$ pour *tout* $t \in [0,\ T_{\max,\varepsilon})$

alors il *existe un* nombre positif fini $K_\infty(u_0)$ *qui ne dépend pas de* ε *tel que:*

(3.5) $\qquad \|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_\infty(u_0)$ *pour tout* $t \in [0, T_{\max,\varepsilon})$.

La démonstration du théorème se fait en trois parties.

1 .Nous montrons que $\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^{\sigma_i+2}(\Omega)}$ est fini.

2. *Nous* estimons $\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^p(\Omega)}$ pour tout p fini, mais ces éstimations ne peuvent suffir pour estimer $\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)}$.

3. Nous passons à la limite sur p.

4.4 Estimations $\mathbf{L}^{\sigma_i+2}$

Proposition 4.1:

En *supposant* (3.2) , il *existe* une fonction *positive* C_2 *indépendante de* ε *et de*

u_{i0} *telle que:*

(4.1) $\quad \|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^{\sigma_i+2}(\Omega)} \leq C_2(\xi)$, *pour tout* $t \in [\xi, T_{\max,\varepsilon})$.

Si de plus (3.4) *est* satisfaite *et* $u_{i0} \in L^{\sigma_i+2}(\Omega)$ alors il *existe une* constante *positive* $K_2(u_0)$ ne dépend pas de ε *telle que :*

(4.2) , $\quad \|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^{\sigma_i+2}(\Omega)} \leq K_2(u_0)$ *pour tout* $t \in [0, T_{\max,\varepsilon})$

Preuve :

Pour simplifier l'écriture , on supprimera l'indice ε.

En multipliant la première équation du système (3.1) par $|u_1|^{\sigma_1} u_1$,et en intégrant le résultat sur Ω on obtient:

(4.3)
$$\frac{1}{\sigma_1+2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |u_1|^{\sigma_1+2} + \int_\Omega \|\nabla(|u_1|^{\sigma_1} u_1)\|^2 dx \leq \int_\Omega \overrightarrow{b_1}\nabla(|u_1|^{m_1-1} u_1)|u_1|^{\sigma_1} u_1$$

$$L_1\left[\int_\Omega |u_1|^{\sigma_1+\alpha_{11}+1} dx + \int_\Omega |u_1|^{\sigma_1+1} |u_2^{\alpha_{12}}|^{\alpha_{12}} dx + \int_\Omega |u_1|^{\sigma_1} u_1 dx\right]$$

En posant : $v_i = |u_i|^{\sigma_i} u_i$;$\gamma_i = \frac{1}{\sigma_i+1}$;$\beta_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sigma_j+1}$;$M_i = \frac{m_i}{\sigma_i+1}$, (4.3) devient:

$$(4.4) \qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_1+1}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v_1|^{\gamma_1+1} + \int_\Omega \|\nabla v_1\|^2 \leq L_1 \int_\Omega \left[|v_1|^{\beta_{11}+1} + |v_2|^{\beta_{12}}|v_1| + |v_1|\right] + \int_\Omega \overrightarrow{b_1}\,|v_1|^{M_1-1}\,v_1\nabla(v_1)$$

En ce qui concerne le dernier terme de (4.4) , en utilisant l'inégalité de Cauchy -Schwartz, on obtient:

$$(4.5) \qquad \int_\Omega \overrightarrow{b_1}\,|v_1|^{M_1-1}\,v_1\nabla(v_1)dx \leq C\left(\int_\Omega \|\nabla v_1\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega v_1^{2M_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant l' inégalité de Young , (4.5) se remplace par:

$$(4.6) \qquad \int_\Omega \overrightarrow{b_1}\,|v_1|^{M_1-1}\,v_1\nabla(v_1)dx \leq \eta\int_\Omega \|\nabla v_1\|^2 + C(\eta)\int_\Omega v_1^{2M_1}$$

En utilisant l'inégalité de Young encore une fois ,on estime les termes restants dans le terme de droite de l'inégalité (4.4):

$$(4.7) \qquad \int_\Omega |v_1|\,|v_2|^{\beta_{12}} \leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega v_1^2 + \int_\Omega |v_2|^{2\beta_{12}}\right]$$

et grâce au lemme 2.4.2 , on peut controler $\int_\Omega v_i^2$ et $\int_\Omega |v_i|^{2\beta_{ij}}$, $i, j = 1, 2$

$$(4.8) \qquad \int_\Omega v_i^2 \leq \eta\left(\int_\Omega \|\nabla v_i\|^2 + \left(\int_\Omega |v_i|\right)^2\right) + C(\eta)\left(\int_\Omega |vi|\right)^q.$$

et les intégrales $\int_\Omega |v_i|^{2\beta_{ij}}$, $\int_\Omega |v_i|^{\beta_{ii}+1}$ et $\int_\Omega |v_i|$ s'estiment. de la même façon.

En reportant les estimations (4.6),(4.7)et(4.8) dans (4.4) on obtient:

$$(4.9) \qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_1+1}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v_1|^{\gamma_1+1} + \int_\Omega \|\nabla v_1\|^2 \leq 4\eta\int_\Omega \|\nabla v_1\|^2 + \eta\int_\Omega \|\nabla v_2\|^2 + C(\eta)\sum_{1\leq i\leq 2}\left(\int_\Omega |v_i|\right)^q + C_1$$

et l'inégalité :

$$(4.10) \qquad \frac{\gamma_2}{\gamma_2+1}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v_2|^{\gamma_2+1} + \int_\Omega \|\nabla v_2\|^2 \leq 4\eta\int_\Omega \|\nabla v_2\|^2 + \eta\int_\Omega \|\nabla v_1\|^2 + C(\eta)\sum_{1\leq i\leq 2}\left(\int_\Omega |v_i|\right)^{q} + C_2$$

se montre de la même façon.

D'où en sommant (4.9) et (4.10) on obtient :

$$(4.11) \qquad \sum_{1<i<2}\frac{\gamma_i}{\gamma_i+1}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v_i|^{\gamma_i+1}\,dx + (1-5\eta)\sum_{1\leq i\leq 2}\int_\Omega \|\nabla v_i\|^2\,dz \leq C(\eta)\sum_{1\leq i\leq 2}\left(\int_\Omega |v_i|\,dx\right)^q + C_3$$

En choisisant η ,dans (4. 11), de façon que $5\eta < 1$, on aura :

$$(4.12) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2}|v_i|^{\gamma_i+1}\,dx + C_5\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2}\|\nabla v_i\|^2\,dx \leq C(\eta)\sum_{1\leq i\leq 2}\left(\int_\Omega |v_i|\,dx\right)^q + C_6$$

En supposant que (3.2) est vérifiée, (4.12) prend la forme:

$$(4.13) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \sum_{1\le i\le 2} |v_i|^{\gamma_i+1}\,dx + C_5 \int_\Omega \sum_{1\le i\le 2} \|\nabla v_i\|^2 \le C_6(\xi) \text{ pour tout } t \ge \xi > 0$$

En appliquant les inégalités de Holder et de Young, on obtient :

$$\int_\Omega |v_i|^{\gamma_i+1}\,dx \le C_7\left(\int_\Omega |v_i|^2\,dx\right)^{\frac{\gamma_i+1}{2}} \le C_7\left(\int_\Omega |v_i|^2\,dx+1\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \text{ où : } \gamma = \max_{1\le i\le 2}\gamma_i.$$

Ce qui, en vertu de (4.8) implique:

$$\left(\int_\Omega |v_i|^{\gamma_i+1}\,dx\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \le C_8\int_\Omega \|\nabla v_i\|^2\,dx + C_9(\xi) \quad \text{pour tout } t \ge \xi > 0$$

Ceci , avec la convexité de $f(z) = |z|^{\frac{2}{\gamma+1}}$, nous permet d'écrire :

$$(4.14) \qquad \begin{aligned}\left(\int_\Omega \sum_{1\le i\le 2} |v_i|^{\gamma_i+1}\,dx\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} &\le C_{10}\sum_{1\le i\le 2}\left(\int_\Omega |v_i|^{\gamma_i+1}\,dx\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}\\ &\le C_{11}\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \|\nabla v_i\|^2\,dx + C_{12}.\end{aligned}$$

En utilisant (4.14) , (4.13) s'écrit sous la forme :

$$(4.15) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \sum_{1<i<2} |v_i|^{\gamma_i+1}\,dx + C_{13}\left(\int_\Omega \sum_{1\le i\le 2} |v_i|^{\gamma_i+1}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \le C_{14}(\xi)$$

pour tout $t \ge \xi > 0$

et si de plus (3.4) est réalisée , on aura :

$$(4.16)\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\sum_{1\leq i\leq 2}|v_i|^{\gamma_i+1}\,dx+C_{13}\left(\sum_{1\leq i\leq 2}\int_{\Omega}|v_i|^{\gamma_i+1}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}_{1\leq i\leq 2}\leq C_{15}(u_0)\text{ pour tout } t\geq 0$$

Pour utiliser plainement ces inégalités , nous aurons besoin de la caractérisation suivante :

Lemme 4.2 :

Soit y une fonction *positive* absolument continue , *et* **vérifie** *:*

$$\frac{\partial}{\partial t}y+\theta y^{\nu}\leq \mathbf{6}\qquad \text{avec : } \nu>1, \theta>0,\ \delta\geq \mathbf{0}$$

Alors pour tout t > **0 on** *a :*

$$y(t)\leq\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\nu}}+(\theta(\nu-1)\,t)^{\frac{-1}{\nu-1}}$$

Si de plus $\lim_{t\to 0^+} y(t)=y(0)$ *est fini alors*

$$y(t)\ \leq\ \max\left\{\ y(0),\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right\}\qquad \textit{pourtout } t\geq 0$$

Grâce au lemme 4.2 ci-dessus nous allons savoir réintèrpréter les inégalités (4.15) et (4.16).

Pour cela on pose:

$$y(t) = \int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} |v_i|^{\gamma_i+1}\, dx = \int_\Omega \sum_{1<i<2} |u_i|^{\sigma_i+2}\, dx$$

nous avons ainsi démontré que:

si (3.2) est vérifiée,, on a $y(t) \leq C_2(\xi)$ pour tout $t \geq \xi > 0$

et

si (3.2) est vérifiée, on a $y(t) \leq K_2(u_0)$ pour tout $t \geq 0$

ce qu'il fallait démontrer.

4.5 Estimations L^p

Dans ce paragraphe nous allons montrer que (u_1, u_2) est bornée dans L^p pour tout $p > 1$.

Proposition 5.1 :

soit $p \geq \sigma_i + 1$, si on suppose *que* (3.2) *est* satisfaite alors : *il existe une constante C_p positive* indépendante de u_0 et de ε *telle que:*

(5.1) $\quad \|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\xi)$, *pour tout* $t \in [\xi, T_{\max,\varepsilon})$.

Si de *plus* (3.4) *est vérifiée et* $u_{i0} \in L^p(\Omega)$,*alors il existe une constante positive*

$K_p(u_0)$ *indépendante de* ε *telle que:*

$$\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^p(\Omega)} \leq K_p(u_0) \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max,\varepsilon}). \tag{5.2}$$

Preuve :

Soit 7-k $\geq$ 1.

On multiplie la première équation de (3.1) par $|u_{1\varepsilon}|^{r_k(\sigma_1+1)-1}\, u_{1\varepsilon}$ et on intègre le résultat sur Ω,on obtient:

$$\frac{1}{r_k(\sigma_1+1)+1}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |u_1|^{r_k(\sigma_1+1)+1} + \frac{4r_k}{(1+r_k)^2}\int_\Omega \left\|\nabla\left(|u_1|^{\frac{(\sigma_1+1)(r_k+1)}{2}-1} u_1\right)\right\|^2 \tag{5.3}$$

$$\leq L_1\left[\int_\Omega |u_1|^{r_k(\sigma_1+1)+\alpha_{11}}\, dx + \int_\Omega |u_1|^{r_k(\sigma_1+1)}\, |u_2|^{\alpha_{12}}\, dx + \int_\Omega |u_1|^{r_k(\sigma_1+1)}\, dx\right]$$

$$+\int_\Omega \overrightarrow{b_1}\nabla(|u_1|^{r_k(\sigma_1+1)-1}\, u_1)\, |u_1|^{m_1-1}\, u_1 dx$$

On remplace v_i par sa valeur dans (5.3),on aura :

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_1+r_k}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v_1|^{\gamma_1+r_k} + \frac{4r_k}{(1+r_k)^2}\int_\Omega \left\|\nabla\left(|v_1|^{\frac{r_k-1}{2}}\, v_1\right)\right\|^2 dx \tag{5.4}$$

$$\leq L_1\left[\int_\Omega |v_1|^{r_k+\beta_{11}}\, dx + \int_\Omega |v_1|^{r_k}\, |v_2|^{\beta_{12}}\, dx + \int_\Omega |v_1|^{r_k}\, dx\right]$$

$$+\int_\Omega \overrightarrow{b_1}\, |v_1|^{M_1-1}\, v_1 \nabla(|v_1|^{r_k-1}\, v_1) dx$$

En utilisant l'inégalité de Young on obtient:

$$(5.5) \qquad \int_\Omega |v_1|^{r_k} |v_2|^{\beta_{12}} dx \leq \eta \int_\Omega |v_1|^{r_k+\beta_{12}} dx + c(\eta) \int_\Omega |v_2|^{r_k+\beta_{12}} dx$$

et:

$$(5.6) \qquad \int_\Omega |v_1|^{r_k} dx \leq \eta \int_\Omega |v_1|^{r_k+\beta_{12}} dx + c(\eta)$$

En posant : $w_i = |v_1|^{\frac{r_k-1}{2}} v_1$, on obtient:

$$|v_i|^{r_k+\beta_{ij}} = |w_i|^{\frac{2(r_k+\beta_{ij})}{1+r_k}} \qquad et : \frac{2(r_k+\beta_{ij})}{1+r_k} \leq 2\frac{(N+1)}{N}$$

Soit λ un réel positif tel que :$1 < \lambda < 1 + \min\limits_{1<i<2} \gamma_i$

On construit trois suites :(r_k) , (p_{ik}) , (ν_{ik}) $i = 1, 2$ et $k \in \mathbb{N}$ définies par :

$$r_k = \lambda^k \quad , p_{ik} = \frac{2(r_{k-1} + \gamma_i)}{1+r_k} \quad , \nu_{ik} = \frac{1+r_k}{\gamma_i + r_k}$$

Il est clair donc que : $1 \leq p_{ik} < 2$.

En posant $\beta = \max\limits_{i,j=1,2} \{\beta_{ij}\}$ et en appliquant le lemme2.4.2 , on obtient :

$$(5.7) \qquad \int_\Omega |v_i|^{\beta+r_k} \leq \eta \left(\int_\Omega \|\nabla w_i\|^2 + \|w_i\|^2_{L^{p_{ik}}(\Omega)} \right) + C_1(\eta) \|w_i\|^{q_k}_{L^{p_{ik}}(\Omega)}$$

En ce qui concerne l' intégrale de $\overrightarrow{b_1}\,|v_1|^{M_1-1}v_1\nabla(|v_1|^{r_k-1}v_1)$ on écrit :

$$(5.8)\qquad \int_\Omega \overrightarrow{b_1}\,|v_1|^{M_1-1}v_1\nabla(|v_1|^{r_k-1}v_1) = \frac{2r_k}{r_k+1}M_1\int_\Omega \left|\overrightarrow{b_1}\,|v_1|^{M_1+\frac{r_k-1}{2}}\nabla(w_1)\right|$$

En appliqiant l'inégalité de Young dans (5.8), on obtient :

$$(5.9)\qquad \int_\Omega \overrightarrow{b_1}\,|v_1|^{M_1-1}v_1\nabla(|v_1|^{r_k-1}v_1) \le \eta\int_\Omega \|\nabla w_1\|^2 + C_3(\eta)\int_\Omega |v_1|^{2M_1+r_k-1}$$

Mais : $\frac{2M_1+r_k-1}{r_k+1} \le \frac{N+1}{N}$, c'est pour cette raison que l' intégrale de $|v_1|^{2M_1+r_k-1}$ s'estime de la même manière que précédemment , autrement dit,:

$$(5.10)\qquad \int_\Omega |v_1|^{2M_1+r_k-1} \le \eta\left(\int_\Omega \|\nabla w_1\|^2 + \|w_1\|^2_{L^{p_{1k}}(\Omega)}\right) + C_4(\eta)\,\|w_i\|^{q_k}_{L^{p_{1k}}(\Omega)}$$

Remarquons que : $|u_i|^{1+(\sigma_i+1)r_{k-1}} = |v_i|^{\gamma_i+r_{k-1}} = |w_i|^{p_{ik}}$, alors si on suppose que $\|v_i\|_{L^{\gamma_i+r_{k-1}}(\Omega)}$ est uniformément bornée sur $[\xi, T_{\max,\varepsilon})$, c'est à dire s'il existe une fonction positive C_k telle que :

$$(5.11)\qquad \|v_i\|_{L^{\gamma_i+r_{k-1}}(\Omega)} \le C_k(\xi) \qquad \text{pour tout } t \ge \xi > 0$$

On a, en combinant (5.4)-(5.7),(5.9) et (5.10):

$$(5.12)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \sum_{1\le i\le 2} |w_1|^{\frac{2}{p_{1k}}}\,dx + (1-5\eta)\int_\Omega \|\nabla w_1\|^2 \le \eta\int_\Omega \|\nabla w_2\|^2 + C(\eta) + C_k(\xi)$$

De manière similaire, on a en multipliant la deuxième équation de (3.1) par $|u_{2\varepsilon}|^{r_k(\sigma_2+1)-1}u_{2\varepsilon}$ et en intègrant le résultat sur Ω,pour tout $\eta > 0$:

$$(5.13) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} |w_2|^{\frac{2}{\nu_{2k}}}\, dx+(1-4\eta)\int_\Omega \|\nabla w_2\|^2 \leq \eta\int_\Omega \|\nabla w_1\|^2+C(\eta)+C_k(\xi)$$

En sommant (5.12) et (5.13), et en choisissant, $\eta < \frac{1}{6}$, on obtient:

$$(5.14) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} |w_i|^{\frac{2}{\nu_{ik}}}\, dx+C_{11}\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} \|\nabla w_i\|^2 \leq C_6(\xi)$$

On pose :$\nu_k = \min\limits_{i=1.2}(\nu_{ik})$

En combinant l' inégalité de Holder et le lemme 2.4.2 , il vient :

$$\int_\Omega |w_i|^{\frac{2}{\nu_{ik}}}\, dx \leq C_7\left(\int_\Omega w_i^2\right)^{\frac{1}{\nu_{ik}}} \leq C_8\left(\int_\Omega \|\nabla w_i\|^2 + C_9(\xi)\right)^{\frac{1}{\nu_{ik}}}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Young implique:

$$\left(\int_\Omega |w_i|^{\frac{2}{\nu_{ik}}}\, dx\right)^{\nu_k} \leq C_{10}\left(\int_\Omega |w_i|^{\frac{2}{\nu_{ik}}}\, dx\right)^{\nu_{ik}} + C_{11} \leq C_{12}\int_\Omega \|\nabla w_i\|^2 + C_{13}(\xi)$$

Par suite (5.14) devient :

$$\frac{d}{dt}y_k(t) + C_{11}y_k(t)^{\nu_k} \leq C_{14}(\xi)$$

où : $y_k(t) = \int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} |w_i|^{\frac{2}{\nu_{ik}}}\, dx = \int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} |v_i|^{\gamma_i+r_k}$, Par conséquent , d'aprés le lemme 4.2 : $y_k(t) \leq C_p(\xi)$ pour tout t $\geq \xi >$ 0; avec $p = \gamma_i + r_k$

Alors si la propriété est vraie pourun certain $k - 1$, elle l'est pour k.

et comme la propiété est vraie pour $k = 1$ (d'aprés la. proposition 4.1), on peut donc procéder par récurrence pour conclure.

On démontre de la même façon que (3.4) implique (5.2).

4.6 Estimations L^∞

Comme C_{14} dépend de $\left(\|v_i\|_{L^{\gamma_i+r_{k-1}}(\Omega)} \right)^{q_k}$ on ne peut pas faire tendre p vers ∞, et pour avoir des estimations dans L^∞ , il faut procéder autrement, , on trouvera une relation de récurrence entre les normes dans $L^{\gamma_i+r_k}(\Omega)$ .Démontrons d'abord un lemme dont nous aurons besoin.

Lemme 6.1 :

Pour tout $\lambda \geq 1$,il existe des constantes *positives : d_0, d_1, d_2, τ et τ' telles que τ et τ' ne dépendent pas de λ telles que :*

Si on suppose que (3.2) est vérifiée, **on a:**

$$(6.1) \quad \frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} |v_i|^{\gamma_i+\lambda} dx + d_0 \int_\Omega \left\| \nabla v_i^{\frac{\lambda-1}{2}} v_i \right\|^2 \leq d_1(\xi)\lambda^\tau \int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} |v_i|^{\gamma_i+\lambda} dx + d_2 \lambda^\tau .$$

pour tout $t \geq \xi$.

de Young:

$$(6.5)\qquad \frac{\gamma_i+\lambda}{\gamma_i}\int_\Omega\left(\sum_{1\le j\le 2}|v_j|^{\beta_{ij}}\,|v_i|^\lambda+|v_i|^\lambda\right)dx\ \le d_4\lambda^{\tau_1}\int_\Omega\sum_{1\le j\le 2}|v_j|^{\beta+\lambda}+d_5\lambda^{\tau_2}$$

où $\tau_1,\,\tau_1\ge 0.$

Le dernier terme du second membre de (6.4) se majore comme dans le paragraph précédent, autrement dit:

$$(6.6)\qquad \frac{\gamma_i+\lambda}{\gamma_i}\int_\Omega\left|\overrightarrow{b_i}\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda-1}{2}}v_i)\right||u_i|^{m_i-1}u_i\,|u_i|^{\frac{\lambda-1}{2}(\sigma_i+1)}\le\eta\int_\Omega\left\|\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda-1}{2}}v_i)\right\|^2$$

$$+C_1(\eta)\lambda^2\int_\Omega|v_i|^{2M_i+\lambda-1}$$

En reportant (6.5) et (6.6) dans (6.4), on trouve :

$$(6.7)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega|v_i|^{\gamma_i+\lambda}dx+d_3\int_\Omega\left\|\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda-1}{2}}v_i)\right\|^2\le d_4\lambda^{\tau_3}\int_\Omega\sum_{1\le j\le 2}|v_j|^{\lambda+\theta}dx+d_5\lambda^{\tau_4}$$

où $\theta=\max\limits_{i=1,2}\{\beta,2M_i-1\}$

De plus l'inégalité de Young implique que:

$$(6.8)\qquad \int_\Omega|v_j|^{\lambda+\theta}dx\le\int_\Omega|v_j|^{\lambda+\alpha}dx+C_3(\Omega)\qquad \text{où : }\alpha\ge 1$$

Remarquons que:

$$|v_j|^{\lambda+\alpha} = |v_j|^{\frac{h(1+\lambda)(\alpha-\gamma_j)}{h(\alpha-\gamma_j)+e}} |v_j|^{\frac{(\alpha-\gamma_j)(h(\alpha-1)+e)}{h(\alpha-\gamma_j)+e}} |v_j|^{\frac{e(\gamma_j+\lambda)}{h(\alpha-\gamma_j)+e}}$$

où: e est un nombre positif arbitraire et h est un nombre positif qui sera déterminé dans la suite:

En utilisant l'inégalité de Holder on obtient :

$$(6.9) \qquad \int_\Omega |v_j|^{\alpha+\lambda}\,dx \leq \left(\int_\Omega |v_j|^{\frac{h(1+\lambda)}{h-2}}\,dx\right)^{P_j} \left(\int_\Omega |v_j|^{p^*}\,dx\right)^{R} \left(\int_\Omega |v_j|^{\lambda+\gamma}\,dx\right)^{Q_j}$$

avec:

$$P_j = \frac{(h-2)(\alpha-\gamma_j)}{h(\alpha-\gamma_j)+e}, Q_i = \frac{e}{h(\alpha-\gamma_j)+e}, R_j = \frac{2(\alpha-\gamma_j)}{h(\alpha-\gamma_j)+e}, p_j^* = \frac{1}{2}(h(\alpha-1)+e).$$

Comme p_j^* et R_j sont indépendants de λ,on déduit,:

$$(6.10) \qquad \int_\Omega |v_j|^{\alpha+\lambda}\,dx \leq C\left(\int_\Omega |v_j|^{\frac{h(1+\lambda)}{h-2}}\,dx\right)^{P_j} \left(\int_\Omega |v_j|^{\lambda+\gamma}\,dx\right)^{Q_j}$$

On va distinguer les trois cas suivants :

- $N > 2$:dans ce cas il suffit de prendre $h = N$, ensuite on utilise le lemme 2.4.6 $(W^{1,2} \hookrightarrow L^{\frac{2h}{h-2}})$ pour déduire que :

$$\int_\Omega |v_j|^{\frac{h(1+\lambda)}{h-2}}\,dx = \int_\Omega \left||v_j|^{\frac{(\lambda-1)}{2}} v_j\right|^{\frac{2h}{h-2}} dx \leq C(\Omega)\left[\int \left\|\nabla(|v_j|^{\frac{(\lambda-1)}{2}} v_j)\right\|^2 + \int_\Omega |v_j|^{1+\lambda}\,dx\right]^{\frac{h}{h-2}}$$

$\bullet N = 2$: pour ne pas mélanger les difficultés , si on prend par exemple $h = 4$, alors en utilisant le lemme 2.4.6 ($W^{1,2} \hookrightarrow L^q$ pour tout $q \geq 2$), on trouve:

$$\int_\Omega |v_j|^{\frac{h(1+\lambda)}{h-2}} dx = \int_\Omega \left||v_j|^{\frac{(\lambda-1)}{2}} v_j\right|^{\frac{2h}{h-2}} dx \leq C(\Omega) \left[\int_\Omega \left\|\nabla(|v_j|^{\frac{(\lambda-1)}{2}} v_j)\right\|^2 + \int_\Omega |v_j|^{1+\lambda} dx\right]^{\frac{h}{h-2}}$$

$\bullet N = 1$:dans ce cas $W^{1,2} \hookrightarrow L^\infty \hookrightarrow L^q$ pour tout $q \geq 1$ (d'après le lemme 2.4.6) donc il suffit de choisir $h > 2$ et en procédant comme dans les deux cas précédents on déduit :

$$\int_\Omega |v_j|^{\frac{h(1+\lambda)}{h-2}} dx \leq C(\Omega) \left[\int_\Omega \left\|\nabla(|v_j|^{\frac{(\lambda-1)}{2}} v_j)\right\|^2 + \int_\Omega |v_j|^{1+\lambda} dx\right]^{\frac{h}{h-2}}$$

En résumé :quelque soit la dimension de l'éspace $\mathbb{R}^N$ on a :

$$(6.11) \qquad \int_\Omega |v_i|^{\frac{h(1+\lambda)}{h-2}} dx \leq C(\Omega) \left[\int \left\|\nabla(|v_i|^{\frac{(\lambda-1)}{2}} v_i)\right\|^2 + \int_\Omega |v_i|^{1+\lambda} dx\right]^{\frac{h}{h-2}}$$

En reportant (6.11) dans (6.10) et en utilisant le fait, que : $\frac{h}{h-2}P_j + Q_j = 1$, l'inégalité de Young nous donne :

$$(6.12) \quad d_4\lambda \int_\Omega |v_i|^{\alpha+\lambda} dx \leq \eta \left[\int \left\|\nabla(|v_i|^{\frac{(\lambda-1)}{2}} v_i)\right\|^2 + \int_\Omega |v_i|^{1+\lambda} dx\right] + C(\eta)\lambda^{\tau_2} \int_\Omega v_i^{\gamma_i+\lambda} dx$$

et en particulier:

$$(6.13) \qquad \int_\Omega |v_i|^{1+\lambda} dx \leq \eta \int \left\|\nabla(|v_i|^{\frac{(\lambda-1)}{2}} v_i)\right\|^2 + C(\eta)\lambda^{\tau_2} \int_\Omega |v_j|^{\gamma_i+\lambda} dx$$

En combinant (6.7) , (6.8) , (6.12) et (6.13) on obtient:

- Si (3.2) est réalisée, on a:

$$(6.14)\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v_i|^{\gamma_i+\lambda}\,dx+d_0\int_\Omega \left\|\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda-1}{2}}\,v_i)\right\|^2 \leq d_1(\xi)\lambda^{\tau_3}\int_\Omega \sum_{1\leq j\leq 2}|v_j|^{\gamma_j+\lambda}\,dx+d_2(\xi)\lambda^{\tau_4}.$$

pour tout $t \geq \xi > 0$

- Si (3.2) est réalisée, on a:

$$(6.14)\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v_i|^{\gamma_i+\lambda}\,dx+d_0\int_\Omega \left\|\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda-1}{2}}\,v_i)\right\|^2 \leq d_1(u_0)\lambda^{\tau_5}\int_\Omega \sum_{1\leq j\leq 2}|v_j|^{\gamma_j+\lambda}\,dx+d_2(u_0)\lambda^{\tau_6}.$$

pour tout $t \geq 0$.

Ce qu'il fallait, démontrer.

Après la préparation précédente, nous sommes en mesure d'énoncer le lemme suivant qui nous permettra d'estimer $\|u_{i\varepsilon}(t,\,.)\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Lemme 6.2 :

Soient λ_k **= 2" ,** $k \in \mathbb{N}$, t et μ des constantes *positives telles que : t* $- \frac{\mu}{\lambda_k} > 0$, alors il *existe* des constantes *positives* $\varkappa$ *et* $C_0(\mu)$ *telles* que : $y_k(t) \leq U_k(t,\mu)$,

où :

$$y_k(t) = \int_\Omega \sum_{1<i<k} |u_i|^{(\sigma_i+1)(\lambda_k+\gamma_i)}\,dx \qquad k \geq 1.$$

$$U_k(t,\mu) = C_0(\mu)\lambda_k^{\varkappa}(\sup_{s\geq t-\frac{\mu}{\lambda_k}} y_{k-1}(s)+1)^{s_k}$$

où :

$$s_k = \frac{\delta + \lambda_{k+1}}{\delta + \lambda_k}$$

avec : $\delta = \min_{1<i<2} \{h - \gamma_i(h-2)) > 0$

Preuve :

On construit des suites $(Q_{ik})_k$;$(P_{ik})_k$, $\left(\overline{P_{ik}}\right)_k$et $(s_{ik})_k, i = 1,2$ définies par :

$$Q_{ik} = \frac{h(\lambda_k + 1) - (h-2)(\gamma_i + \lambda_k)}{h(\lambda_k + 1) - (h-2)(\gamma_i + \lambda_{k-1})}, \; P_{ik} = 1 - Q_{ik}, \; \overline{P_{ik}} = \frac{h}{h-2} P_{ik}$$
$$s_{ik} = \frac{Q_{ik}}{1 - \overline{P_{ik}}} = \frac{h-(h-2)\gamma_i + \lambda_{k+1}}{h-(h-2)\gamma_i + \lambda_k} > 1$$

Alors l'inégalité de Holder implique :

$$\int_\Omega |v_i|^{\lambda_k+\gamma_i} \leq \left(\int_\Omega |v_i|^{\frac{h(1+\lambda_k)}{h-2}} dx\right)^{P_{ik}} \left(\int_\Omega |v_i|^{\lambda_{k-1}+\gamma_i}\right)^{Q_{ik}} \tag{6.15}$$

En utilisant l'injection de Sobolev (lemme2.4.6) et l'estimation (6.14), (6.15) se remplace par:

$$\int_\Omega |v_i|^{\lambda_k+\gamma_i} \leq C\left(\int_\Omega \left\|\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda_k-1}{2}} v_i\right\|^2 dx + \int_\Omega |v_i|^{\lambda_k+\gamma_i}\right)^{\overline{P_{ik}}} \left(\int_\Omega |v_i|^{\lambda_{k-1}+\gamma_i}\right)^{Q_{ik}} \tag{6.16}$$

De plus en vertu de l'inégalité de Young appliquée à (6.16); nous avons: pour tout

c, k, τ il existe deux constantes positives c' et τ' telles que:

$$(6.17) \qquad c\lambda^{\tau}\int_{\Omega}|v_i|^{\lambda_k+\gamma_i} \leq \frac{d_0}{2}\int_{\Omega}\left\|\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda_k-1}{2}}v_i\right\|^2 dx + c'\lambda^{\tau''}\left(\int_{\Omega}|v_i|^{\lambda_{k-1}+\gamma_i}\right)^{s_{ik}}$$

On définit une fonction ζ sur $[0, \infty)$, telle que :$0 \leq \zeta \leq 1$,

$$\zeta(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq t - \frac{\mu}{\lambda_k} \\ 1 & \text{si } s \geq t \end{cases}$$

et :

$$\left|\frac{d}{ds}\zeta(s)\right| \leq \frac{\lambda_k}{\mu}\zeta(s)$$

En posant : $\overline{y_k}(s) = \zeta(s)y_k(s)$, il vient :

$$(6.18) \qquad \frac{d}{dt}\overline{y_k}(s) \leq \zeta(s)\frac{d}{dt}y_k(s) + \zeta(s)\frac{\lambda_k}{\mu}y_k(s)$$

En regroupant (6.14) et (6.18), on trouve:

$$(6.19) \qquad \frac{d}{ds}\overline{y_k}(s) \leq \zeta(s)\frac{\lambda_k}{\mu}\int_{\Omega}\sum_{1\leq i\leq 2}|v_i|^{\lambda_k+\gamma_i} +$$

$$\zeta(s)\left[-d_0\int_{\Omega}\sum_{1\leq i\leq 2}\left\|\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda_k-1}{2}}v_i\right\|^2 dx + d_1(\xi)\lambda^{\tau}\int_{\Omega}|v_i|^{\lambda_k+\gamma_i} + d_2(\xi)\lambda^{\tau'}\right]$$

et grâce à **(6.17)** on a:

$$(6.20) \qquad d_1(\xi)\lambda_k^{\tau}\int_{\Omega}\sum_{1\le i\le 2}|v_i|^{\lambda_k+\gamma_i}+\frac{\lambda_k}{\mu}\int_{\Omega}\sum_{1\le i\le 2}|v_i|^{\lambda_k+\gamma_i}\le$$

$$\frac{d_0}{2}\int_{\Omega}\sum_{1\le i\le 2}\left\|\nabla(|v_i|^{\frac{\lambda_k-1}{2}}v_i\right\|^2dx+c'\lambda^{\tau''}\sum_{1\le i\le 2}\left(\int_{\Omega}|v_i|^{\lambda_{k-1}+\gamma_i}dx\right)^{s_{ik}}$$

En combinant (6.19) et (6.20), on obtient:

$$(6.21) \quad \frac{d}{ds}\overline{y_k}(s)+\frac{d_0}{2}\overline{y_k}(s)\le (y_{k-1}(s)+1)^{\max_{i=1,2}s_{ik}}C_{20}\lambda_k^{\sigma}=(y_{k-1}(s)+1)^{s_k}C_{20}\lambda_k^{\sigma}$$

En intégrant l'inégalité (6.21) en s sur $\left[t-\frac{\mu}{\lambda_k},t\right]$, et en utilisant le fait que:

$\overline{y_k}(t-\frac{\mu}{\lambda_k})=0$, on déduit que :

$$(6.22) \qquad y_k(t)+1\le U_k(t,\mu)$$

Preuve de proposition 3.2:

Soient ξ et ξ' deux réels positifs tels que : $\xi'>\xi>0$

Posons $\mu=\frac{\xi'-\xi}{2}$; $t_0=\frac{\xi'+\xi}{2}>\xi$; $t_k=t_{k-1}-\frac{\mu}{\lambda_k}>t_0-\mu=\frac{\xi'+\xi}{2}>\xi$

1 Supposons que (2.9) est réalisée:

L'inégalité (6.22) donne :

$$(6.23) \qquad 1+\sup_{t\ge t_{k-1}}y_k(t)\le C_0\lambda_k^{\varkappa}\left(1+\sup_{t\ge t_k}y_{k-1}(t)\right)^{s_k}$$

En posant :

$$K_\xi = \max_{i=1,2} \sup_{t\geq\xi} \left(\int_\Omega |v_i|^{\gamma_i+1}\, dx + 1 \right).$$

On a : $t_k \geq$ pour tout $k \geq 0$

(6.23) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sup_{t\geq t_{k-1}} y_k(t) \leq C_0 \lambda_k^{\varkappa} (C_0 \lambda_{k-1}^{\varkappa})^{s_k} \ldots\ldots (C_0 \lambda_1^{\varkappa})^{s_k s_{k-1} \ldots .s_0} K_\xi^c$$

où : $c_k = s_k s_{k-1} \ldots\ldots s_1 = \frac{\delta+\lambda_{k+1}}{\delta+\lambda_1}$.

(6.21) s'écrit' aussi sous la forme :

$$\sup_{t\geq t_{k-1}} y_k(t) \leq C_0^{A_k} 2^{\varkappa B_k} K_\xi^{c_k} \tag{6.24}$$

avec :

$$A_k = 1 + s_k + s_k s_{k-1} + \ldots\ldots + s_k s_{k-1} \ldots s_1.$$

$$Bk = k + (k-1)s_k + (k-2) s_k s_{k-1} + + s_k s_{k-1} \ldots s_1.$$

Pour achever la démonstration il suffit de montrer que A_k et, B_k sont, dominées par $c2^k$, nous le faisons :

$$A_k = 1 + \tfrac{\delta+\lambda_{k+1}}{\delta+\lambda_k} + \tfrac{\delta+\lambda_{k+1}}{\delta+\lambda_{k-1}} + + \tfrac{\delta+\lambda_{k+1}}{\delta+\lambda_1}$$
$$\leq (\delta + \lambda_{k+1}) \sum_{0\leq i\leq k+1} \tfrac{1}{\delta+\lambda_i} \leq c2^k$$

et :

$$B_k = k + (k-1)\frac{\delta+\lambda_{k+1}}{\delta+\lambda_k} + (k-2)\frac{\delta+\lambda_{k+1}}{\delta+\lambda_{k-1}} + + \frac{\delta+\lambda_{k+1}}{\delta+\lambda_1}$$

$$\leq (\delta + \lambda_{k+1}) \sum_{i \in IN} \frac{i}{\delta+\lambda_i} \leq c2^k$$

En vertu de l'estimation (6.22), il vient:

$$\sup_{t \geq t_0} y_k(t) \leq \sup_{t \geq t_{k-1}} y_k(t) \leq CC_0^{2^k} 2^{c2^k} K_\xi^{\frac{\delta+\lambda_{k+1}}{\delta+\lambda 1}}$$

Ce qui implique que:

$$\sup_{t \geq t_0} (y_k(t))^{\frac{1}{\gamma_i + 2^k}} \leq CK_\xi^{\frac{1}{\delta+1}}$$

Alors si on fait tendre k vers l'infini , on obtient:

$$\sup_{t \geq \xi'} \|v_i(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lim_{k \to \infty} \sup_{t \geq t_0} (y_k(t))^{\frac{1}{\gamma_i + \lambda_k}} \leq CK_\xi^{\frac{1}{\delta+1}} \leq const(\xi).$$

Donc :

$$\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\xi) \qquad pourtout\ t \geq \xi' > 0.$$

En faisant tendre ξ' vers ξ', on obtient le résultat voulu.

2 . Supposons que (2.11) est réalisée,:

On utilise dans ce cas le lemme suivant:

Lemme 6.3:

Soit w une fonction non négative définie sur $(0, \infty)$ x Ω, *vérifiant* 1 *'inégalité differentielle:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\omega|^{\lambda_k+1} \leq -\varepsilon_k \int_\Omega |\omega|^{\lambda_k+1} + (a_k+\varepsilon_k)c_k\left[\sup_{t\geq 0}\int_\Omega |\omega|^{\lambda_{k-1}+1}\right]^{p_k} \quad k = 1, 2, \ldots..$$

où : a_k, ε_k, c_k sont respectivement *d'ordre* $\frac{1}{2^k}$, $2^{\alpha k}$, 2^k *quand* k *tend vers l'infini,* α *est une constante positive, et* $(\lambda_{k-1} + 1)p_k \leq \lambda_k + 1$

alors il existe une constante *positive a telle que:*

$$\sup_{t\geq 0} \|\omega(t, .)\|_{L^\infty} \leq a2^{2(\alpha+2)}K$$

où : $K \geq \max\left\{1, \sup_{t\geq 0} \|\omega(t,.)\|_{L^{\sigma+1}}, \|\omega(0,.)\|_{L^\infty}\right\}$

Pour la démonstration de ce lemme consulter [1].

En combinant (6.14) et (6.17) on obtient:

$$(6.25)\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |v_i|^{\lambda_k+\gamma} \leq (-2c\lambda_k^\tau + d_1(u_0))\int_\Omega |v_i|^{\lambda_k+\gamma} + c\lambda_k\left[\sup_{t\geq 0}\int_\Omega |v_i|^{\lambda_{k-1}+\gamma}\right]^{S_{ik}}$$

$k = 1, 2, \ldots..$

Le résultat désiré est une conséquence immédiate de (6.23) et du lemme précédent, puisque $S_{ik}\,(\lambda_{k-1} + 1) \leq \lambda_k + 1$ (car $h > 2$)

Chapitre 5

Etude d'un cas modèle

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on se propose d'établir l'existence globale de solutions faibles pour des systèmes de réaction-diffusion qui sont de la forme:

$$\begin{cases} \partial_t(u_1) - \Delta(u_1^{\sigma_1+1}) = c_{11}u_1^{\alpha_{11}} + c_{12}u_2^{\alpha_{12}} + \overrightarrow{b_1}\nabla(u_1^{m_1}) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\ \partial_t(u_2) - \Delta(u_2^{\sigma_2+1}) = c_{21}u_1^{\alpha_{21}} + c_{22}u_2^{\alpha_{22}} + \overrightarrow{b_2}\nabla(u_2^{m_2}) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur }]0,\infty[\text{ x } \partial\Omega \\ u_1(0,.) = u_{10}\,;\, u_2(0,.) = u_{20} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Nous n'allons pas très loin pour le moment, on s'intéresse aux fonction précises, et au chapitre suivant les résultats qui seront obtenus ici se généralisent à des objet plus généraux.

Nous étudions le système avec des données initiales seulement, dans $L^{\sigma_i+2}(\Omega)$.

Le but de ,ce chapitre est de comprendre l'approche, et. la méthodes suivie pour l'étude de ces systèmes consiste en une approximation de ceux-ci par une suite de problèmes approchés réguliers étudiés dans le cadre du chapitre 3, et, qui admettent des solutions classiques locales.

Ensuite, on exploite la compacité de l'injection canonique de H^1dans L^2, qui affirmera la conpacité de la suite de solutions approchées, et on utilise les résultat classiques de convergence pour passer à la limite.

5.2 Position du problème

On considère le problème :

$$(2.1)\quad \begin{cases} \partial_t(u_1) - \Delta(u_1^{\sigma_1+1}) = c_{11}u_1^{\alpha_{11}} + c_{12}u_2^{\alpha_{12}} + \overrightarrow{b_1}\nabla(u_1^{m_1}) & \text{dans } Q_T \\ \partial_t(u_2) - \Delta(u_2^{\sigma_2+11}) = c_{21}u_1^{\alpha_{21}} + c_{22}u_2^{\alpha_{22}} + \overrightarrow{b_2}\nabla(u_2^{m_2}) & \text{dans } Q_T \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega \\ u_1(0,.) = u_{10} \quad ; u_2(0,.) = u_{20} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où:$T, \sigma_i, m_i, \alpha_{ij}$ i, j = 1; 2 sont des réels strictement positifs , $\overrightarrow{b_i} \in IR$"

On suppose de plus :

(2.2) $1 \leq m_i \leq \sigma_i + 1$, $i = 1,2$

(2.3) $c_{ij} \geq 0$, $i,j = 1,2$.

(2.4) $u_{i0} \in L^{\sigma_i+2}(\Omega)$, $u_{i0} \geq 0$, i $= 1,2$

Le résultat pricipal est le suivant :

Théorème2.1:

pour tout couple positif $(u_{10}, u_{20}) \in L^{\sigma_1+2}(\Omega)$ x $L^{\sigma_2+2}(\Omega)$ le *problème* (1.1) possède une *solution faible* globale *positive* (u_1, u_2) , *telle que pour tout* $T > 0$, *on* a:

$u_i \quad \in L^{\infty}(0, T; L^{\sigma_i+2}(\Omega))$, $i = 1,2$.

5.3 Problèmes approchés et estimations à priori

On considére la famille de problémes suivants $(0 < \varepsilon < 1)$.

$$(3.1)\begin{cases} \partial_t(u_{1\varepsilon}) - (\sigma_1 + 1)div(\varphi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})\nabla u_{1\varepsilon}) = f_{1\varepsilon}(u_1, u_2, \nabla u_1) & \text{dans } Q_T \\ \partial_t(u_{2\varepsilon}) - (\sigma_2 + 1)div(\varphi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{2\varepsilon})\nabla u_{2\varepsilon}) = f_{2\varepsilon}(u_1, u_2, \nabla u_2) & \text{dans } Q_T \\ u_{1\varepsilon} = u_{2\varepsilon} = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ u_{1\varepsilon}(0, .) = u_{10\varepsilon} \quad , u_{2\varepsilon}(0, .) = u_{20\varepsilon} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $\varphi_{i\varepsilon} : \mathbb{R} \to (\frac{\varepsilon}{2}, +\infty)$ est une fonction régulière telle que :

$$\varphi_{i\varepsilon}(r) = r + \varepsilon \quad \text{si} \quad r \geq 0, \ i = 1,2.$$

$$f_{i\varepsilon}(u_1, u_2, \nabla u_i) = g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) + \overrightarrow{b_i}\nabla(u_{i\varepsilon}^{m_1})$$

On a la:

Proposition 3.1:

Le système (3.1) *admet* pour tout ε $(0 < \varepsilon < 1)$ *une* solution *classique positive* (ses composantes *sont positives)* $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ sur *un, certain intervalle maximal* $[0, T_{\max,\varepsilon})$

Démonstration:

Vue la structure de $f_{i\varepsilon}$ et $u_{i0\varepsilon}$ les hypothèses (2.2)-(2.6) du troisième chapitre sont remplies, en utilisant alors les résultats de ce dernier,on peut. affirmer l'existence d'une solution classique $(u_{1\varepsilon},\ u_{2\varepsilon})$ du problème (3.1) sur un certain intervalle maximal $[0, T_{\max,\varepsilon})$.

De plus la quasi positivité de $f_{i\varepsilon}$, et la positivité de $u_{i0\varepsilon}$ impliquent, d'après la proposition 3.4.1, la préservation de la positivité de la solution u_ε.

Par conséquent $(u_{1\varepsilon},\ u_{2\varepsilon})$ se considère aussi comme une solution classique de:

$$(3.2)\quad \begin{cases} \partial_t(u_{1\varepsilon}) - (\sigma_1+1)div((u_{1\varepsilon}+\varepsilon)^{\sigma_1}\nabla u_{1\varepsilon}) = f_{1\varepsilon}(u_1, u_2, \nabla u_1) & \text{sur } Q_T \\ \partial_t(u_{1\varepsilon}) - (\sigma_2+1)div((u_{2\varepsilon}+\varepsilon)^{\sigma_2}\nabla (u_{2\varepsilon})) = f_{2\varepsilon}(u_1, u_2, \nabla u_2) & \text{sur } Q_T \\ u_{1\varepsilon} = u_{2\varepsilon} = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega \\ u_{1\varepsilon}(0,.) = u_{10\varepsilon} \qquad , u_{2\varepsilon}(0,.) = u_{20\varepsilon} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Maintenant on établit quelques estimations sur les solutions classiques obtenues, qui nous aident à montrer que $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ admet une sous-suite converge vers une solution faible du problème initial.

Théorème 3.2 :

La solution $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ de (3.1) est globale , de plus pour tout $T > 0$ il existe une constante-positive C indépendante de ε telle que :

$$\|u_{i\varepsilon}(T)\|_{L^{\sigma_i+2}}^{\sigma_i+2} \leq C(T) \qquad i = 1, 2. \tag{3.3}$$

et :

$$(3.4) \qquad \int_0^T \left\|\nabla\left(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,s)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C \qquad i=1,2.$$

Démonstration:

En multipliant la première équation de (3.1) par $u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}$,et en intègrant le résultat sur Ω on obtient :

$$(3.5) \quad \frac{1}{\sigma_1+1}\int_\Omega u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+2}(t,x)dx+\int_{Q_T}\left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}(t,x))\right\|^2 dx \leq \int_{Q_T}\overrightarrow{b_1}\nabla(u_{1\varepsilon}^{m_1})u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}(t,x)dx$$

$$+L\int_{Q_T}(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+\alpha_{11}+1}+u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}u_{2\varepsilon}^{\alpha_{12}}+u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})dx+\frac{1}{\sigma_1+1}\int_\Omega u_{10\varepsilon}^{\sigma_1+2}(x)dx.$$

où: $L=\max_{i,j=1,2} c_{ij}$

Pour evaluer le deuxième terme dans le second membre de (3.5), on utilise l'inégalité de Young , et le fait que $\alpha_{ij} < \sigma_j+1$,on a : $\forall\eta>0$:

$$(3.6) \; L_1\int_{Q_T}\left(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+\alpha_{11}+1}+u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}u_{2\varepsilon}^{\alpha_{12}}+u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}\right)dx \leq 3\eta\lambda\int_{Q_T}(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})^2+\eta\lambda\int_{Q_T}(u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1})^2$$

$$+c(\lambda,\eta,\sigma_i,\alpha_{ij},m_1)$$

où : λ est la première valeur propre associée -A avec conditions de Dirichlet homogènes aux bords.

En appliquant l'inégalité de Poincaré dans (3.6), 'nous obtenons:

$$(3.7)\qquad L_1 \int_{Q_T} \left(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+\alpha_{11}+1} + u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1} u_{2\varepsilon}^{\alpha_{12}} + u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}\right) dx \leq 3\eta \int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 +$$

$$\eta \int_{Q_T} \left\|(\nabla u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1})\right\|^2 + c_1(\lambda, \eta, \sigma_i, \alpha_{ij}, m_1)$$

De plus la première intégrale du second membre de (3.5) se reécrit sous la forme :

$$\int_{Q_T} \overrightarrow{b_1} \nabla(u_{1\varepsilon}^{m_1}) u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1} = \int_{Q_T} \overrightarrow{b_1} \nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}) u_{1\varepsilon}^{m_1} = \int_{Q_T} \sum_{1\leq j\leq n} b_{1j} \partial_{x_j}(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}) u_{1\varepsilon}^{m_1}.$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Bunjakovski-Schwartz, (3.8) devient:

$$(3.8)\qquad \int_{Q_T} \sum_{1\leq j\leq n} b_{1j} u_{1\varepsilon}^{m_1} \partial_{x_j}(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}) \leq \|\overrightarrow{b_1}\| \left[\int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{Q_T} u_{1\varepsilon}^{2m_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous mettons (3.8) sous une autre forme

$$(3.9)\qquad \int_{\Omega} \overrightarrow{b_1} \nabla(u_{1\varepsilon}^{m_1}) u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1} dx \leq \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 dx + c_2(\eta) \int_{\Omega} u_1^{2m_1} dx.$$

En tenant compte de la relation : $m_1 \leq \sigma_1 + 1$, et en utilisant l'inégalité de Young, (3.9) s'écrit:

$$(3.10)\qquad \int_{\Omega} \overrightarrow{b_1} \nabla(u_{1\varepsilon}^{m_1}) u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1} dx \leq \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\| dx + \frac{\eta\lambda}{2} \int_{\Omega} u_{1\varepsilon}^{2(\sigma_1+1)} dx + c_3(\eta, \Omega)$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Poincaré dans la dernière intégrale ci-dessus, on obtient :

$$(3.11) \quad \int_{QT} \overrightarrow{b_1}\nabla(u_{1\varepsilon}^{m_1})u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1} \leq \eta \int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 + c_4(\eta,\lambda,m_1,\overrightarrow{b_1},\Omega)$$

Il vient alors en reportant (3.7) et(3.11) dans (3.5) :

$$(3.12) \quad \frac{1}{\sigma_1+2}\int_\Omega u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+2}(T,x)dx + \int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 dx \leq 4\eta \int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 dx$$

$$+\int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1})\right\|^2 dx + c_5(\eta,\Omega)$$

On reprend maintenant la démarche pécédente pour la. deuxième équation de (3.1), en multipliant cette dernière par $u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1}$,et en integrant le résultat sur Ω,on obtient :

$$(3.13) \quad \frac{1}{\sigma_2+2}\int_\Omega u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+2}(T,x)dx + \int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1})\right\|^2 \leq 4\eta \int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1})\right\|^2$$

$$+ \eta \int_{Q_T} \left\|\nabla(u_1^{\sigma_1+1})\right\|^2 + c_6$$

D'où en sommant les inégalités'(3.12) et (3.13),on obtient.:

$$(3.14) \quad \int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+2}(t,x)dx + C_7(1-5\eta)\int_{Q_T} \sum_{1\leq i\leq 2} \left\|\nabla(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1})\right\|^2 \leq C_8$$

on acheve la démonstration en choisissant $\eta < \frac{1}{5}$.

5.4 Passage à la limite

D'après l'estimation (3.4) , la suite $\left(\nabla(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1})\right)_{0<\varepsilon<1}$, $i=1,2$, est bornée dans $\left(L^2(Q_T)\right)^N$, donc grâce à la compacité de l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous suite notée encore $\left(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}\right)_{0<\varepsilon<1}$ qui converge vers un élément w_{i1} fortement dans $L^2(Q_T)$, et presque par tout, quand ε tend vers zéro.

Comme la fonction $\theta(v)=v^{\frac{1}{\sigma_i+1}}$ est continue alors $(u_{i\varepsilon})_{0<\varepsilon<1}$ converge vers $w_{i1}^{\frac{1}{\sigma_i+1}}$ presque par tout dans Q_T quand ε tend vers zéro .

En posant $u_i=w_{i1}^{\frac{1}{\sigma_i+1}}$, il vient alors :

$\left(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}\right)_{0<\varepsilon<1}$ converge vers $u_i^{\sigma_i+1}$ fortement dans $L^2(Q_T)$ et dans $D'(Q_T)$, et par suite: $\left(\nabla(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1})\right)_{0<\varepsilon<1}$ converge vers $\left(\nabla(u_i^{\sigma_i+1})\right)$ dans $\left(D'(Q_T)\right)^N$.

En utilisant le lemme 2.5.6 , nous obtenons:

$u_{i\varepsilon}\longrightarrow u_i$ en mesure. ,

et comme $\alpha_{ij}<\sigma_j+1$, alors les suites $(u_{i\varepsilon}^{m_i})_{0<\varepsilon<1}$ et $\left(u_{i\varepsilon}^{\alpha_{ij}}\right)_{0<\varepsilon<1}$ sont bornée dans $L^2(Q_T)$, donc en vertu du lemme 2.4.4 , il existe des sous-suites qui convergent, respectivement vers $u_i^{m_i}$ et $u_i^{\alpha_{ij}}$ faiblement dans $L^2(Q_T)$.

D'autre part l'estimaton (3.4) implique que: $\left(\nabla(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1})\right)_{0<\varepsilon<1}$ admet une sous-suite qu'on note aussi $\left(\nabla(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1})\right)_{0<\varepsilon<1}$ converge vers w_{i2} faiblement dans $\left(L^2(Q_T)\right)^N$ et dans $\left(D'(Q_T)\right)^N$, et l'unicité de la limite dans $\left(D'(Q_T)\right)^N$ nous affirme que $w_{i2}=\nabla(u_i^{\sigma_i+1})$.

Par ailleurs d'apès l'estimaton (3.3) $(u_{i\varepsilon}(s,.))_{0<\varepsilon<1}$ est bornée dans $L^{\sigma_i+2}(\Omega)$ pour presque tout $s\in\,]0,T[$, donc elle admet une sous- suite converge faiblement.

vers $\vartheta_i(s)$ dans $L^{\sigma_i+2}(\Omega)$, et grâce au lemme 2.5.4 on a: $\vartheta_i(s)=u_i(s)$ presque par tout.

En résumé : à une suite extraite près on a:

quand ε tend vers zéro :

$\left(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}\right)_{0<\varepsilon<1} \longrightarrow u_i^{\sigma_i+1}$ fortement dans $L^2\ (Q_T)$.

$\left(u_{i\varepsilon}^{\alpha_{ij}}\right)_{0<\varepsilon<1} \longrightarrow u_i^{\alpha_i}$ faiblement dans $L^2\ (Q_T)$

$(u_{i\varepsilon}^{m_i})_{0<\varepsilon<1} \longrightarrow u_i^{m_i}$ faiblement dans $L^2(\ Q_T)$.

$(u_{i\varepsilon}(s,.))_{0<\varepsilon<1} \longrightarrow u_i^{m_i}$ faiblement dans $L^{\sigma_i+2}(Q_T)$ pour presque tout $s\in]0,T[$.

$\left(\nabla(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1})\right)_{0<\varepsilon<1} \longrightarrow \nabla(u_i^{\sigma_i+1})$ faiblement dans $L^2(Q_T)$.

$g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon},\, u_{2\varepsilon}) \longrightarrow g_i(u_1,\, u_2)$ dans $L^2(Q_T)$ faiblement

Nous montrons que le couple (u_1,u_2) est solution faible de (1.1) , pour cela il suffit de montrer que ce dernier vérifie l'identité intégrale de la. définition 4.2.1, pour arriver à cette fin, on multiplie l'équation:

$$\partial_t(u_{i\varepsilon}) - (\sigma_i+1)div(\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}) = g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon}) + \overrightarrow{b_i}\nabla(u_{i\varepsilon}^{m_i})$$

par une fonction φ_i vérifiant les hypothèses de la définition 2.1 , on intégre sur Q_T on obtient après une utilisation de la formule de Green :

$$(\sigma_i+1)\int_{QT}\nabla\varphi_i\,(\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon})\,dtdx = \int_{QT}\partial_t\varphi_i u_{i\varepsilon}(t,x)dtdx + \int_{\Omega} u_{i\varepsilon}(x,T)\varphi_i(T,x)dx$$

$$-\int_{QT}\overrightarrow{b_i}\nabla\varphi_i\,|u_i|^{m_i-1}\,u_i)dxdt + \int_{\Omega} u_{i0\varepsilon}(x)\varphi_i(0,x)dx + \int_{Q_T}\varphi_i g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon})dtdx$$

Par consequent en passant à la limite sur ε dans la formule intégrale précédente, on déduit que (u_1, u_2) est bien solution faible de (1.1).

et voici un théorème dont la démonstration se donnera dans le chapitre suivant.,

Théorème 3.3 :

Pour tout $t \geq \xi > 0$, on a $u_i(t,.) \in L^\infty(R)$ $i = 1, 2$, de *plus il existe une fonction positive* F_1 *telle que:*

$$\|u_i(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq F_1(\xi) \quad \textit{pour tout } t \geq \xi > 0 \ , i = 1, 2$$

Remarque 3.4 :

Les résultats obtenus dans ce chapitre restent valables si on remplace les conditions faites sur les $g_i, i = 1, 2$ par:

(2.2) $g_i(0, 0) = 0$, $g_1(0, r_2), g_2(r_1, 0) \geq 0$ pour tout $r_1, r_2 \geq 0$.

(2.3) les g_i sont des fonctions localement lipschitziennes .

(2.4) Il existe des constantes $c_{ij} \geq 0$ telles que :pour tout $u_1, u_2 \geq 0$ on a :

$$g_i(u_1, u_2) \leq c_{i1} u_1^{\alpha_{i1}} + c_{i2} u_2^{\alpha_{i1}} + c_{i0}$$

avec $\alpha_{ij} \leq 1$ $i, j = 1, 2.$

Dans ce cas on prend $g_{i\varepsilon} = g_i$ $i = 1, 2.$

Chapitre 6

Existence et unicité de solutions faibles dans le cas général

6.1 Introduction

Nous avons déja rencontré des systèmes de réaction-diffusion dont les seconds membres dépendent du gradient dans le chapitre précédent,pour aller plus loin nous allons les étudiedans un cas plus général, et pour aller vers des solutions plus fortes que celles du chapitre précédent , on peut, s'intéresser à des données initiales dans $L^\infty(\Omega)$, et on obtiendra alors des résultats qui généralisent, d'une certaine façon ceux du chapitre précédent.

Dans ce chapitre nous allons d'abord montrer l'existence globale d'une solution faible pour des systèmes de réaction-diffusion qui sont, de la forme :

$$
(1.1)\begin{cases}
\partial_t(u_1) - \Delta(|u_1|^{\sigma_1} u_1) = g_1(u_1,u_2) + \overrightarrow{b_1}\nabla(|u_1|^{m_1-1} u_1) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\
\partial_t(u_2) - \Delta(|u_2|^{\sigma_2} u_2) = g_2(u_1,u_2) + \overrightarrow{b_2}\nabla(|u_2|^{m_2-1} u_2) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\
u_1 = u_2 = 0 & \text{sur }]0,\infty[\text{ x } \partial\Omega \\
u_1(0,.) = u_{10},\ u_2(0,.) = u_{20} & \text{dans } \Omega
\end{cases}
$$

par une approche analogue à celle du chapitre précédent , et, on s'appuie essentiellement sur les résultats du chapitre 4. Finalement on établit l'unicité de la solution faible de (1.1) et on déduit ensuite l'unicité dans le cas modèl.

6.2 Position du problème

On considère le problème :

$$
(2.1)\begin{cases}
\partial_t(u_1) - \Delta(|u_1|^{\sigma_1} u_1) = g_1(u_1,u_2) + \overrightarrow{b_1}\nabla(|u_1|^{m_1-1} u_1) & \text{dans }]0,T[\text{ x } \Omega \\
\partial_t(u_2) - \Delta(|u_2|^{\sigma_2} u_2) = g_2(u_1,u_2) + \overrightarrow{b_2}\nabla(|u_2|^{m_2-1} u_2) & \text{dans }]0,T[\text{ x } \Omega \\
u_1 = u_2 = 0 & \text{sur }]0,T[\text{ x } \partial\Omega \\
u_1(0,.) = u_{10},\ u_2(0,.) = u_{20} & \text{dans}\Omega
\end{cases}
$$

où:T, σ_i, m_i $i = 1; 2$ sont des réels strictement positifs

On suppose de plus :

(2.2) $1 \leq m_i \leq \sigma_i + 1,\ i = 1,2.$

(2.3) $g_i(0,0) = 0,\ i = 1,2.$

(2.4) les g_i sont des fonctions localement Lipschitziennes, $i = 1,2$.

(2.5) Il existe des constantes $L_i \geq 0$ et $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1$, $i, j = 1,2$ telles que pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ on a:

$$|g_i(u_1, u_2)| \leq L_i(|u_1|^{\alpha_{i1}} + |u_2|^{\alpha_{i2}} + 1) \qquad i = 1,2$$

(2.6) $\overrightarrow{b_i}$ est borné etlocalement Lipschitzien / x, $i = 1, 2$.

(2.7) $u_{i0} \in L^{\infty}(R)$ $i = 1,2$.

Le but de ce chapitre est d'établir le théorème pricipal suivant :

Théorème 2.1 :

Le problème (2.1) possède une solution faible globale unique (u_1, u_2), de plus il existe une constante positive C telle que:

$|u_i(x, t)| \leq C$ *pour tout* $t \geq 0$ *et pour presque tout* $x \in \Omega$.

6.3 Problèmes approchés et estimations à piori

On considère le problème:

$$(3.1) \begin{cases} \partial_t(u_{1\varepsilon}) - (\sigma_1 + 1)div(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})\nabla u_{1\varepsilon}) = f_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, \nabla u_{1\varepsilon}) & \text{dans } Q_T \\ \partial_t(u_{2\varepsilon}) - (\sigma_2 + 1)div(\phi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{2\varepsilon})\nabla u_{2\varepsilon}) = f_{2\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, \nabla u_{2\varepsilon}) & \text{dans } Q_T \\ u_{1\varepsilon} = u_{2\varepsilon} = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega \\ u_{1\varepsilon}(0,.) = u_{10\varepsilon} \quad , u_{2\varepsilon}(0,.) = u_{20\varepsilon} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où : $\phi_{i\varepsilon}$, $g_{i\varepsilon}$, $u_{i0\varepsilon}$ sont comme dans le troisième chapitre.

Nous énonçons un théorème dont la démonstration est basée sur des téchniques d'estimation très semblables à celles développées au chapitre précédent.

Théorème 3.1 :

La solution $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ de (3.1) *est globale, de plus il existe une constante positive* C_1 *qui* ne dépend que de $\|u_0\|_{L^\infty}$, *et* une fonction *positive* F_1 *indépendante de* u_0, *telles qué:*

$$\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^\infty} \leq C_1(\|u_0\|_{L^\infty}) \qquad \text{pour tout} \quad t \geq 0, i = 1,2$$

$$\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^\infty} \leq F_1(\xi) \qquad \text{pour tout } t \geq \xi > 0, \ i = 1,2$$

Démonstration:

On montre d'abord qu'il existe une constante positive C_2 et une fonction positive F_2 telles que:

$\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^{\sigma_i+2}(\Omega)} \leq C_2(u_0)$ pour tout $t \geq 0$, et :

$\|u_{i\varepsilon}(t,.)\|_{L^{\sigma_i+2}(\Omega)} < F_2(\xi)$ pour tout $t \geq \xi > 0$

En multipliant la première équation de (3.1) par $|u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon}$,et en intègrant le résultat sur Ω,on obtient:

$$(3.2) \qquad \frac{1}{\sigma_1+1}\int_\Omega \partial_t \left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1+2}(t,x)dx+\int_\Omega \left\|\nabla(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon}(t,x))\right\|^2 dx \leq$$

$$L_1\int_\Omega (\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1+\alpha_{11}+1}+\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1+1}\left|u_{2\varepsilon}\right|^{\alpha_{12}}+\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1+1})dx$$

$$+\int_\Omega \overrightarrow{b_1}\nabla(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{m_1-1}u_{1\varepsilon})\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1}u_{1\varepsilon}(t,x)dx$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, et le fait, que $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1$,on a:$\forall\eta > 0$:

$$(3.3) \qquad L_1\int_\Omega (\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1+\alpha_{11}+1}+\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1+1}\left|u_{2\varepsilon}\right|^{\alpha_{12}}+\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1+1})dx \leq 3\eta\int_\Omega \left\|\nabla(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1}u_{1\varepsilon})\right\|^2$$

$$+\eta\int_\Omega \left\|(\nabla\left|u_{2\varepsilon}\right|^{\sigma_2}u_{2\varepsilon})\right\|^2 + c(\lambda,\eta,\sigma_i,\alpha_{ij},m_1)$$

Par ailleurs la première intégrale de (3.2) peut être éstimée de la manière suivante:

$$\int_\Omega \overrightarrow{b_1}\nabla(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{m_1-1}u_{1\varepsilon})\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1}u_{1\varepsilon}(t,x)dx = \frac{m_1}{\sigma_1+1}\int_\Omega \overrightarrow{b_1}\nabla(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1}u_{1\varepsilon})\left|u_{1\varepsilon}\right|^{m_1-1}u_{1\varepsilon}$$

$$=\int_\Omega \sum_{1\leq j\leq N} b_{1j}(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon})\partial_{x_j}(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1}u_{1\varepsilon})\left|u_{1\varepsilon}\right|^{m_1-1}u_{1\varepsilon}.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Bunjakovski-Schwartz,on a:

$$\int_\Omega \sum_{1\leq j\leq N} b_{1j}u_{1\varepsilon}^{m_1}\partial_{x_j}(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1}u_{1\varepsilon}) \leq \left[\int_\Omega \left\|\nabla(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1}u_{1\varepsilon})\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega \left|u_{1\varepsilon}\right|^{2m_1}\right]^{\frac{1}{2}}\left\|\overrightarrow{b_1}\right\|$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwsxtz implique que:

$$\int_\Omega \overrightarrow{b_1} \nabla(|u_{1\varepsilon}|^{m_1-1} u_{1\varepsilon}) |u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon}(t,x)dx \leq \frac{\eta}{2} \int_\Omega \|\nabla(|u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon})\|^2 dx$$

$$+ c_1(\eta) \int_\Omega |u_{1\varepsilon}|^{2m_1} dx.$$

D'autre part comme $m_1 < \sigma_1 + 1$, on déduit de la dernière inégalité que:

$$\frac{m_1}{\sigma_1+1} \int_\Omega \overrightarrow{b_1} \nabla(|u_{1\varepsilon}|^{m_1-1} u_{1\varepsilon}) |u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon} dx \leq \frac{\eta}{2} \int_\Omega \|\nabla(|u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon})\| dx +$$

$$\frac{\eta}{2} \int_\Omega |u_{1\varepsilon}| \qquad c_2(\eta, \Omega$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Poincaré dans la. dernière intégrale ci-dessus on obtient:

$$(3.4) \qquad \int_\Omega \overrightarrow{b_1} \nabla(|u_{1\varepsilon}|^{m_1-1} u_{1\varepsilon}) |u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon} dx \leq \eta \int_\Omega \|\nabla(|u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon})\|^2 + c_3(\eta, \Omega)$$

Il vient alors en regroupant (3.2), (3.3) et (3.4) :

$$(3.5) \qquad \frac{1}{\sigma_1+2} \int_\Omega \partial_t |u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1+2} dx + \int_\Omega \||u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon})\|^2 dx \leq 4\eta \int_\Omega \|\nabla(|u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1} u_{1\varepsilon})\|^2 dx$$

$$+\eta \int_\Omega \|\nabla(|u_{2\varepsilon}|^{\sigma_2} u_{2\varepsilon})\|^2 dx + c_4(\eta, \Omega)$$

On reprend maintenant la démarche pécédente pour la deuxième équation de (3.1), on multiplie cette dernière par $|u_{2\varepsilon}|^{\sigma_2}\, u_{2\varepsilon}$, on obtient :

$$(3.6)\qquad \frac{1}{\sigma_2+2}\int_\Omega \partial_t\, |u_{2\varepsilon}|^{\sigma_2+2}(t,x)dx+\int_\Omega \|\nabla(|u_{2\varepsilon}|^{\sigma_2}\, u_{2\varepsilon})\|^2 \leq 4\eta\int_\Omega \|\nabla(|u_{2\varepsilon}|^{\sigma_2}\, u_{2\varepsilon})\|^2$$

$$+\eta\int_\Omega \|\nabla(|u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1}\, u_{1\varepsilon})\|^2 + c_5(\eta,\sigma_2,\alpha_{2j},m_2,\lambda;L_2).$$

D'où en sommant les inégalités différentielles (3.5) et (3.6),on obtient:

$$(3.7)\quad \int_\Omega \partial_t \sum_{1\leq i\leq 2} |u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i+2}\, dx+C_6(1-5\eta)\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} \left\|\nabla(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma i}\, u_{i\varepsilon})\right\|^2 \leq C_7(\Omega,\eta)$$

En choisissant $\eta < \frac{1}{5}$, on obtient grâce à l'inégalité de Poincaré:

$$(3.8)\qquad \frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{1<i<2} |u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i+2}(t,x)dx+C_8\int_\Omega \sum_{1<i<2} |u_{i\varepsilon}|^{2(\sigma_i+1)} \leq C_9$$

et grâce à l'inégalité de Jensen, on a :

$$\sum_{1\leq i\leq 2}\int_\Omega |u_{i\varepsilon}|^{2(\sigma_i+1)} \geq C_{10}\sum_{1\leq I\leq 2}\left(\int_\Omega |u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i+2}\right)^{2\frac{(\sigma_i+1)}{\sigma_i+2}} \geq C_{11}\sum_{1\leq I\leq 2}\left(\int_\Omega |u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i+2}\right)^{2\nu} - C_{10}.$$

où :$\nu > 1$ dépend de σ_i , $i = 1,2$.

On en déduit, :

$$(3.9)\qquad \sum_{1\leq i\leq 2}\int_\Omega |u_{i\varepsilon}|^{2(\sigma_i+1)} \geq C_{12}\left(\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} |u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i+2}\right)^{\nu}$$

On obtient alors en combinant (3.8) et (3.9) :

$$\frac{\partial}{\partial t}y(t) + C_{13}y(t)^{\nu} \le C_{14}$$

où :

$$y = \sum_{1\le i\le 2} \int_{\Omega} |u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i+2}.$$

En appliquant le lemme 4.4.2 on déduit que:

$y(t) \le C_2(\|u_0\|_{L^\infty})$ pour tout $t \ge 0$.

$y(t) \le C_2(\xi)$ pour tout $t \ge \xi > 0$.

On conclut alors grâce au théorème 4.2.2.

Lemme 3.2:

Pour tout T positif , il existe une constante positive C(T) indépendante de ε telle que:

$$\int_{\Omega} |u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i+2}\, dx + \int_{Q_T} \left\| \nabla(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma i} u_{i\varepsilon}) \right\|^2 dxdt \le C(T)\ , \quad i = 1,2\ . \tag{3.10}$$

Preuve :

Il suffit d'intégrer l'inégalité différentielle (3.7) sur $[0, T]$, puis de choisir $\eta < \frac{1}{5}$

6.4 Preuve du théorème 2.1

On raisonne comme dans le chapitre 4 on déduit qu'il existe d'après l'estimation(3.10) un couple de fonctions (u_1, u_2) tel que a une suite extraite près on a:

(4.1) $$\nabla(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma i}\ u_{i\varepsilon}) \longrightarrow \nabla(|u_i|^{\sigma i}\ u_i) \text{ dans } (L^2(Q_T))^N \text{ faiblement.}$$

et grâce à la compacité de l'injection canonique de H_0^1 dans L^2, on a.:

(4.2) $$|u_{i\varepsilon}|^{\sigma i} u_{i\varepsilon} \longrightarrow |u_i|^{\sigma i} u_i \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ fortement .}$$

(4.3) $$|u_{i\varepsilon}|^{mi-1}\ u_{i\varepsilon} \longrightarrow |u_i|^{mi-1}\ u_i \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ fortement.}$$

De plus grâce au théorème 3.1 de ce chapitre on a :

La suite$\left(\|u_{i\varepsilon}(t,\ .)\|_{L^p(\Omega)}\right)_{0<\varepsilon<1}$ est uniformément bornée par raport à $t > 0$,pour tout $p \geq \sigma_i+1$. On peut donc extraire une sous suite notée encore $(u_{i\varepsilon}(t,.))_{0<\varepsilon<1}$telle que:

$u_{i\varepsilon}(t,.) \longrightarrow u_i(t,.)$ faiblement dans $L^p(Q_T)$, et presque par tout, dans Ω.

En vertu du théorème 2.4.5 , il existe une sous suite $(\omega_{i\varepsilon}(t,.))_{0<\varepsilon<1}$ de combinaisons convexes d'éléments $u_{i\varepsilon}(t,.)$ telle que:

$\omega_{i\varepsilon}(t,.) \longrightarrow u_i(t,.)$ fortement dans $L^p(\Omega)$.

et comme $(u_{i\varepsilon}(t,.))_{0<\varepsilon<1}$ est uniformément bornée , alors $(\omega(t,.))_{0<\varepsilon<1}$ l'est, aussi.

par consequent $u_i \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^\infty(\Omega)) \qquad i = 1,2.$

De plus

$$\begin{aligned}\|g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) - g(u_1,u_2)\|_{L^2} \ &\leq\ \|g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) - g_i(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})\|_{L^2} \\ &\quad + \|g_i(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) - g_i(u_1, u_2)\|_{L^2}\end{aligned}$$

et puisque g_i est localement Lipschitienne, et $\|u_{i\varepsilon}(t,.); u_i(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c$

$i = 1,2$ on a:

$$\|g_i(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) - g_i(u_1, u_2)\|_{L^2} \leq K \sum_{j=1}^{2} \|u_{j\varepsilon} - u_j\|_{L^2} \qquad i = 1, 2.$$

et par consruction:

$\|g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) - g_i(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})\|_{L^2} \longrightarrow 0$ quand ε tend vers zéro.

on utilise le fait que:

$u_{i\varepsilon}(t,.) \longrightarrow u_i(t,.)$ fortement dans $L^2(Q_T)$

on déduit que:

(4 . $g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, \quad u_{2\varepsilon}) \longrightarrow g_i(u_1, u_2)$ fortement dans $L^2(Q_T)$.

En autre, on a selon (4.3), $\forall \varphi_i \in H^1(Q_T)$:

$$\int_{Q_T} b_{ij} |u_{i\varepsilon}|^{m_i - 1} u_{i\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i \longrightarrow \int_{Q_T} b_{ij} |u_i|^{m_i - 1} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i i = 1, 2; \; j = 1, N \tag{4.5}$$

et

$$\int_{Q_T} div\left(\overrightarrow{b_i}\right) |u_{i\varepsilon}|^{m_i - 1} u_{i\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i \longrightarrow \int_{Q_T} div\left(\overrightarrow{b_i}\right) |u_i|^{m_i - 1} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i \; i = 1; 2; \tag{4.6}$$

Par conséquent , en multipliant la $i^{ième}$ équation de (3.1) par φ_i, et en utilisant la formule de Green, on obtient,:

$$(4.7) \int_{Q_T} \nabla\varphi_i(\phi(u_{i\varepsilon})^{\sigma_i} \nabla u_{i\varepsilon})dtdx - \int_{Q_T} \partial_t\varphi_i u_{i\varepsilon}(t,x)dtdx + \int_\Omega u_{i\varepsilon}(x,T)\varphi_i(T,x)dx =$$

$$\int_\Omega u_{i0\varepsilon}(x)\varphi_i(0,x)dx + \int_{Q_T} \left[\varphi_i g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) - \left(\overrightarrow{b_i}\nabla\varphi_i \left|u_{i\varepsilon}\right|^{m_i-1} u_{i\varepsilon} + div\left(\overrightarrow{b_i}\right)\varphi_i \left|u_{i\varepsilon}\right|^{m_i-1} u_{i\varepsilon}\right)\right] dtdx$$

Finalement: grâce à (4.1)-(4.5) on peut passer à la limite sur ε dans la formule intégrale (4.6) pour déduire que $(u_1,\ u_2)$ est une solution faible du problème (1.1).

6.5 Unicité de la solution faible

Nous allons montrer, en utilisant une idée de Aronson [6], l'unicité de la solution faible du problème (2.1) dans $L^\infty(Q_T)$, et les résultats de ce paragraphe sont, valables dans le cas modèle étudié dans le cadre du chapitre précédent.

Théorème 5.1:

On se place dans *les hypothèses (2.2)-(2.7), le problème (2.1)* possède *une* soluion *faible* unique *dans* $L^\infty(Q_T)$, *pour tout* $T > 0$.

Preuve:

Nous allons montrer le théorème par l'absurde.

Supposons que (2.1) admet deux solutions faibles distinctes $u = (u_1\ ,\ u_2)$,

$\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ telles que:

$u, \hat{u} \in (L^\infty(Q_T))^2$ pour tout $T > 0$.

Alors il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$\left[\int_{Q_T} |u_i - \hat{u}_i|^2 \, dxdt\right]^{\frac{1}{2}} > M \quad i = 1,2$$

Il est clair que la différence $u_i - \hat{u}_i$ satisfait l'identité integral suivante:

$$(5.1) \quad \int_{Q_T} (u_i-\hat{u}_i)\varphi_i(x,T)dx+(\sigma_i+1)\int_{Q_T} \nabla \left[u_i^{\sigma_i}u_i - |\hat{u}_i|^{\sigma_i}\, \hat{u}_i\right] \nabla\varphi_i dxdt =$$

$$\int_{Q_T} (u_i - \hat{u}_i)\varphi_{it}(x,t)dxdt + \int_{Q_T} (g_i(u_1,u_2) - g_i(\hat{u}_1,\hat{u}_2))\,\varphi_i(x,t)dxdt$$

$$+\int_{Q_T} \overrightarrow{b_i}\nabla\varphi_i \left[|u_i|^{m_i-1}\, u_i - |\hat{u}_i|^{m_i-1}\, \hat{u}_i\right] dxdt$$

$\varphi_i \in H^1(Q_T)$, 'pi = 0 sur (0, T) x an $\quad i = 1,2$.

Nous allons suivre l'idée de Aronson [6], pour montrer l'unicité. Pour cela on introduit les fonctions Ψ_i i = $1,2$ telles que:

$$\Psi_i = \begin{cases} \dfrac{|u_i|^{\sigma_i}\, u_i - |\hat{u}_i|^{\sigma_i}\, \hat{u}_i}{u_i - \hat{u}_i} & \text{si } u_i \neq \hat{u}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit que $\Psi_i \in L^\infty(Q_T)$.

On construit une suite de fonctions $\{\Psi_{i\varepsilon}\}$, telle que:

i) $\Psi_{i\varepsilon} \in L^\infty(Q_T)$.

ii) $\varepsilon \leq \Psi_{i\varepsilon} \leq \|\Psi_i\|_{L^\infty(Q_T)} + \varepsilon$.

iii) $\left\|\dfrac{\Psi_{i\varepsilon} - \Psi_i}{\sqrt{\Psi_{i\varepsilon}}}\right\|_{L^2(Q_T)}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0

On considère le problème adjoint (non-dégénéré) suivant:

$$(5.2) \qquad \begin{cases} \partial_t \varphi_{i\varepsilon} + \Psi_{i\varepsilon}\Delta\varphi_{i\varepsilon} = 0 & \text{dans } Q_T \\ \varphi_{i\varepsilon} = 0 & \text{sur } (0,T) \text{ x } \partial\Omega \\ \varphi_{i\varepsilon} = \varkappa_i & \text{dans } \Omega \text{ x } (t = T) \end{cases}$$

Pour toute fonction régulière $\varkappa_i$, avec $0 \leq \varkappa_i \leq 1$, le problème (5.2) possède une seule solution $\varphi_{i\varepsilon} \in C^\infty(Q_T)$ (voir [6]).

De plus on a le:

Lemme 5.2:

Il *existe* une constante *positive* C , *qui* dépend *seulement de* $\varkappa_i$ *telle que:*

i) $0 \leq \varphi_{i\varepsilon} \leq 1,$

ii) $\displaystyle\int_{QT} \Psi_{i\varepsilon} \left(\Delta\varphi_{i\varepsilon}\right)^2 \leq C,$

iii) $\displaystyle\sup_{0\leq t\leq T} \int_\Omega \left\|\nabla\varphi_{i\varepsilon}\right\|^2 \leq C.$

Pour la preuve consulter [6] .

En remplaçant, dans (5.1) , φ_i par $\varphi_{i\varepsilon}$ et $\varkappa_i$ par $sign_\varepsilon(u_i - \hat{u}_i)^+$, où sgn_ε est une approximation régulière de la fonction signe, on obtient:

$$(5.3) \qquad \int_\Omega sign_\varepsilon(u_i - \hat{u}_i)^+(x,T)dx + \int_{QT} \Delta\varphi_{i\varepsilon}\left(\Psi_{i\varepsilon} - \Psi_i\right)(u_i - \hat{u}_i)dxdt =$$

$$\int_{Q_T} \left(g_i(u_1,u_2) - g_i(\hat{u}_1,\hat{u}_2)\right)\varphi_{i\varepsilon}(x,t) + \int_{Q_T} \overrightarrow{b_i}\,\nabla\varphi_{i\varepsilon}\left[|u_i|^{m_i-1}u_i - |\hat{u}_i|^{m_i-1}\hat{u}_i\right]$$

Concernant la deuxième integrale du premier membre, on utilise l'inégalité de Holder, on obtient:

$$\int_{Q_T} \Delta\varphi_{i\varepsilon}\left(\Psi_{i\varepsilon}-\Psi_i\right)(u_i-\hat{u}_i)dxdt \leq C_1\left[\int_{Q_T}\left(\Delta\varphi_{i\varepsilon}\sqrt{\Psi_{i\varepsilon}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{Q_T}\left(\frac{(\Psi_{i\varepsilon}-\Psi_i)}{\sqrt{\Psi_{i\varepsilon}}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Par conséquent:

$\int_{Q_T}\Delta\varphi_{i\varepsilon}(\Psi_{i\varepsilon}-\Psi_i)(u_i-\hat{u}_i)dxdt$ tend vers zéro quand ε tend vers zéro.

De plus l'inégalité de Holder nous donne:

$$\int_{Q_T}\overrightarrow{b_i}\nabla\varphi_i\left[|u_i|^{m_i-1}u_i-|\hat{u}_i|^{m_i-1}\hat{u}_i\right] \leq C_2\left[\int_{Q_T}\overrightarrow{b_i}\,\|\nabla\varphi_{i\varepsilon}\|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{Q_T}\left(|u_i|^{m_i-1}u_i-|\hat{u}_i|^{m_i-1}\hat{u}_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

En vertu du lemme 5.2, on a:

$$\int_{Q_T}\overrightarrow{b_i}\nabla\varphi_i\left[|u_i|^{m_i-1}u_i-|\hat{u}_i|^{m_i-1}\hat{u}_i\right] \leq C_3T\left[\int_{Q_T}\left(|u_i|^{m_i-1}u_i-|\hat{u}_i|^{m_i-1}\hat{u}_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant la propriété de Lipschitz locale de g_i et de $f(z)=|z|^{m_i-1}z \quad i=1,2$, et en passant la limite sur ε, on obtient:

$$(5.4)\quad \int_{\Omega}(u_i-\hat{u}_i)^+(x,T)dx \leq C_4\int_{Q_T}\sum_{j=1,2}|u_j-\hat{u}_j|\,dtdx+C_5\left(\int_{Q_T}|u_i-\hat{u}_i|^2\,dtdx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Mais:

$$(5.5)\qquad \left(\int_{Q_T}|u_i-\hat{u}_i|^2\,dtdx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\int_{Q_T}|u_i-\hat{u}_i|^2\,dtdx}{M} \leq C_6\int_{Q_T}|u_i-\hat{u}_i|\,dtdx$$

En combinant les estimations (5.4) et (5.5), on trouve:

$$(5.6) \qquad \int_\Omega (u_i - \hat{u}_i)^+(x,\, T)dx \leq (C_7 + C_8T) \int_{Q_T} \sum_{j=1,2} |u_j - \hat{u}_j| \, dtdx$$

En sommant les inégalités (5.6) pour $i = 1, 2$, on obtient:

$$(5.7) \qquad \int_\Omega \sum_{j=1,2} (u_j - \hat{u}_j)^+(x, T)dx \leq (C_7 + C_8T) \int_{Q_T} \sum_{j=1,2} |u_j - \hat{u}_j| \, dtdx$$

D'une manière analogue on établit que si on prend $\varkappa_i = sign_\varepsilon(u_i - \hat{u}_i)^-$, on trouve:

$$(5.8) \qquad \int_\Omega \sum_{j=1,2} (u_j - \hat{u}_j)^-(x, T)dx \leq (C_7 + C_8T) \int_{Q_T} \sum_{j=1,2} |u_j - \hat{u}_j| \, dtdx$$

En additionnant (5.7) et (5.8), on trouve:

$$(5.7) \qquad \int_\Omega \sum_{j=1,2} |u_j - \hat{u}_j| \, (x,\, T)dx \leq (C_7 + C_8T) \int_{Q_T} \sum_{j=1,2} |u_j - \hat{u}_j| \, dtdx$$

Une application directe du lemme de Gronwall acheve la preuve.

Chapitre 7

Régularité $H^{1,2}$ de solutions

7.1 Introduction

Ce chapitre est essentiellement consacré à l'étude de la régularité $H^{1,2}$ des solutions obtenues dans le chapitre précédent, plus précisément on établira les conditions sous lesquelles les solutions appartiendront à $H^{1,2}$, mais les résultats de régularité qu'on peut attendre dépendent de la dimension spatiale N, on montrera que la. solution sera dans $H^{1,2}$ dans le cas unidimensionel, mais ces résultats ne se généralisent, malhreusement pas au cas de dimension supérieure, cependant, on énoncera dans ce cas un résultat de régularité plus restrictif.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant:

Théorème 1.1: *Sous les hypothèses (6.2.2)-(6.2.7), la solution faible* (u_1,u_2) *de (6.2.1) vérifie pour tout* $T > 0$ *les résultats de régularité suivants:*

1 . ***Si*** $4m_i > \sigma_i + 1$ alors: pour ***tout*** $\gamma_i \geq \frac{2m_i+\sigma_i}{2}$, $i = 1,2$, *il existe une* constante *positive C(T) telle que :*

$$\left\| \nabla \left(|u_i|^{\gamma_i - 1} u_i \right) \right\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C(T) \qquad i = 1,2 \tag{1.1}$$

2 . *Si on suppose de plus que:* $|u_{i0}|^{\sigma_i} u_{i0} \in H^1_0(\Omega)$,*alors il existe une constante C'(T) telle que:*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(|u_i|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_i \right) \right\|_{L^2(Q_T)} + \left\| \nabla \left(|u_i|^{\sigma_i} u_i \right) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C'(T) . \tag{1.2}$$

3 . *Si* $N = 1$ *et si* u *est positive,, on a:* $u_i^\alpha \in H^{1,2}(Q_T)$ $, i = 1, 2,$ *pour tout* α satisfait *la relation:*

$2\alpha > 3(\sigma_i + 1) \qquad i = 1,2$.

7.2 Cas de la dimension supérieure

Lemme 2.1:

soit $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ *la solution. de (6.3.1), sous les hypothèses* (6.2.2) – (6.2.7), **si on** *suppose que* $4m_i > \sigma_i + 2$ *, on a :*

Pour *tout* $\gamma_i \geq \frac{2m_i + \sigma_i}{2}$, $i = 1,2$, *il existe* une *constante positive C indépendante de* ε *telle que :*

$$\left\| \nabla \left(|u_{i\varepsilon}|^{\gamma_i - 1} u_{i\varepsilon} \right) \right\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C(T) \qquad i = 1,2 \tag{2.1}$$

Preuve :

En multipliant la première équation de (6.3.1) par $|u_{1\varepsilon}|^{2m_1-2}\,u_{1\varepsilon}$, et en intégrant le résultat sur Q_T , on obtient :

$$(2.1)\frac{1}{2m_1}\int_{Q_T}\frac{\partial}{\partial t}|u_{1\varepsilon}|^{2m_1}\,dtdx+\frac{4(2m_1-1)(\sigma_1+1)}{(\sigma_1+2m_1)^2}\int_{Q_T}\left\|\nabla\left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{2m_1+\sigma_1-2}{2}}u_{1\varepsilon}\right)\right\|^2 dtdx$$

$$\leq L_1\int_{QT}|u_{1\varepsilon}|^{2m_1+\alpha_{11}-1}+L_1\int_{QT}|u_{1\varepsilon}|^{2m_1-1}|u_{2\varepsilon}|^{\alpha_{12}}\,dtdx+L_1\int_{QT}|u_{1\varepsilon}|^{2m_1-1}\,dtdx$$

$$\int_C+\ _{Q_T}\ |u_{1\varepsilon}|^{2m_1-2}\,u_{1\varepsilon}\,\overrightarrow{b_1}\,\nabla(|u_1|^{m_1-1}\,u_1)\,,$$

On appelle respectivement J_1,J_2,J_3 et J_4 les intégrales qui composent le membre de droite de (2.2) , et on les étudie séparément

Grâce à l'inégalité de Young , et au fait que $\alpha_{11}<\sigma_1+1$ nous aurons pour J_1:

$$J_1\leq\eta\lambda\int_{Q\,T}|u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1+2m_1}\,dtdx\ +C_1(T,L_1,\alpha_{11},\sigma_1,\eta,|\Omega|)$$

En vertu de l'inegalité de Poincaré, on obtient:

$$(2.3)\qquad J_1\leq\eta\int_{Q_T}\left\|\nabla\left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{\sigma_1+2m_1-2}{2}}u_{1\varepsilon}\right)\right\|^2 dtdx+C_1$$

Pour estimer J_2 on utilise l'inégalité de Young , il vient alors :

$$(2.4) \qquad J_2 \leq \eta\lambda \int_{QT} |u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1+2m_1} \; dtdx + C(\eta) \int_{QT} |u_{2\varepsilon}|^{\alpha_{12}\frac{\sigma_1+2m_1}{\sigma_1+1}} \; dtdx$$

On a les deux cas suivants :

•Ou bien : $\alpha_{12}\frac{\sigma_1+2m_1}{\sigma_1+1} < \sigma_2 + 2m_2$ dans ce cas en appliquant l'inégalité de Young

on a :

$$(2.5) \qquad J_2 \leq \eta\lambda \int_{Q_T} |u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1+2m_1} \; dtdx + \eta\lambda \int_{QT} |u_{2\varepsilon}|^{\sigma_2+2m_2} \; dtdx + C_2$$

et l'inégalité de Poincaré implique :

$$J_2 \leq \eta \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{\sigma_1+2m_1-2}{2}} u_{1\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx + \eta \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{2\varepsilon}|^{\frac{\sigma_2+2m_2}{2}} u_{2\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx + C_3$$

•Ou bien : $\alpha_{12}\frac{\sigma_1+2m_1}{\sigma_1+1} > \sigma_2 + 2m_2$, alors en utilisant l'inégalité de Young, on a:

$$\int_{QT} |u_{2\varepsilon}|^{\alpha_{12}\frac{\sigma_1+2m_1}{\sigma_1+1}} \; dtdz \leq C_4 \int_{QT} |u_{2\varepsilon}|^{\beta} \, dtdx$$

où :$\beta < \sigma_2 + 2m_2$ (puisque $u_{2\varepsilon}$ est uniformément bornée)

On procéde comme dans le premier cas pour avoir finalement :

$$(2.6) \quad J_2 \leq \eta \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{\sigma_1+2m_1-2}{2}} u_{1\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx + \eta \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{2\varepsilon}|^{\frac{\sigma_2+2m_2-2}{2}} u_{2\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx + C_5$$

On estime maintenant J_3 de la même façon que J_1, et on obtient:

$$(2.7)\qquad J_3 \leq \eta \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{\sigma_1+2m_1-2}{2}} u_{1\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx + C_6(T, L_1, \sigma_1, \eta, |\Omega|)$$

Pour J_4, on a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(2.8)\qquad J_4 \leq \eta \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{\sigma_1+2m_1-2}{2}} u_{1\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx + \int_{Q_T} |u_{1\varepsilon}|^{4m_1-\sigma_1-2} dtdx$$

En tenant compte de l'hypothèse : $4m_1 > \sigma_1 + 2$, (2.8) prend la forme:

$$(2.9)\qquad J_4 \leq \eta \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{\sigma_1+2m_1-2}{2}} u_{1\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx + C_7(T)$$

En reportant les estimations (2.3), (2.6), , (2.7) et (2.9) dans (2.2) , on obtient :

$$(2.10)\quad \frac{1}{2m_1} \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} |u_{1\varepsilon}|^{2m_1} dtdx + \left(\frac{4(2m_1-1)(\sigma_1+1)}{(\sigma_1+2m_1)^2} - 4\eta \right) \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{\sigma_1+2m_1-2}{2}} u_{1\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx$$

$$\leq \eta \int_{Q_T} \left\| \nabla \left(|u_{2\varepsilon}|^{\frac{\sigma_2+2m_2-2}{2}} u_{2\varepsilon} \right) \right\|^2 dtdx + C_8(T)$$

Par ailleurs, en multipliant la deuxième équition de (6.3.1) par $|u_{2\varepsilon}|^{2m_2-2} u_{2\varepsilon}$; en intégrant le résultat sur Q_T et en procédant de la. même manière; on obtient une estimation similaire à la précédente c'est à dire:

$$(2.11)\qquad \frac{1}{2m_2}\int_{Q_T}\frac{\partial}{\partial t}|u_{2\varepsilon}|^{2m_2}\,dtdx+\left(\frac{4(2m_2-1)(\sigma_2+1)}{(\sigma_2+2m_2)^2}-4\eta\right)\int_{Q_T}\left\|\nabla\left(|u_{2\varepsilon}|^{\frac{\sigma_2+2m_2-2}{2}}u_{2\varepsilon}\right)\right\|^2 dtdx$$

$$\leq \eta\int_{Q_T}\left\|\nabla\left(|u_{1\varepsilon}|^{\frac{\sigma_1+2m_1-2}{2}}u_{1\varepsilon}\right)\right\|^2 dtdx + C_8(T)$$

En faisant la somme des inégalités (2.10) et (2.11), on obtient:

$$(2.12)\qquad \sum_{1\leq i\leq 2}\left(\frac{4(2m_i-1)(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2m_i)^2}-5\eta\right)\int_{Q_T}\left\|\nabla\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i+2m_i-2}{2}}u_{i\varepsilon}\right)\right\|^2 dtdx\leq C_9(T)$$

On acheve la démonstration en prenant , dans (2.12):

$$5\eta<\min_{1\leq i\leq 2}\left\{\frac{4(2m_i-1)(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2m_i)^2}\right\}$$

Par ailleurs, on a:

$$\left\|\nabla\left(|u_i|^{\frac{\sigma_i+2m_i-2}{2}}u_i\right)\right\|^2_{L^2(Q_T)}\leq\liminf_{\varepsilon}\left\|\nabla\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i+2m_i-2}{2}}u_{i\varepsilon}\right)\right\|^2_{L^2(Q_T)}\leq C$$

d'où (1.1).

Lemme 2.2:

Sous les hypothèses du lemme précédent, si on suppose de *plus* que : $|u_{i0}|^{\sigma_i+1}u_{i0}\in H_0^1(\Omega)$, alors pour tout $T>0$, il *existe* une constante *positive* C' *(indépendante de* ε*) telle que :*

$$(2.13)\qquad \left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}}u_{i\varepsilon}\right)\right\|_{L^2(Q_T)}+\left\|\nabla\left(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i}u_{i\varepsilon}\right)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leq C'(T);\ i=1,2.$$

Preuve :

Soit T un nombre positif et $t \in]0, T]$.

En multipliant la i^{ieme} équation du système (6.3.1) par $\partial_s(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i} u_{i\varepsilon})$, et en intégrant le résultat sur $[0, t] \times \Omega = Q_t$, on obtient :

$$(2.14)\quad 4\frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)^2}\int_{Q_t}\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_{i\varepsilon}\right)\right|^2 dsdx+\frac{1}{2}\int_{Q_t}\frac{\partial}{\partial s}\left\|\nabla\left(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i} u_{i\varepsilon}\right)\right\|^2 dsdx =$$

$$\int_{Q_t}\frac{\partial}{\partial s}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i} u_{i\varepsilon}\right) g_i(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})dsdx+\int_{Q_t}\overrightarrow{b_i}\,\partial_s\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_{i\varepsilon}\right)\nabla\left(|u_{i\varepsilon}|^{m_i-1} u_{i\varepsilon}\right) dsdx.$$

Notons par I_1 , I_2 le premier et le second terme du second membre de (2.14) , on a tout d'abord:

$$I_1 = 2\frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)}\int_{Q_t}\frac{\partial}{\partial s}(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_{i\varepsilon})\,|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}}\, g_i(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})\ .$$

d'où en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$I_1 \le 4\frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)^2}\eta\int_{Q_t}\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_{i\varepsilon}\right)\right|^2 + c(\eta)\int_{Q_t}|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i}\, g_i^2(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})\ .$$

et grâce aux hypothèses faites sur g_i et au fait que $u_{i\varepsilon}$ est, uniformément, bornée, on aura :

$$(2.15)\qquad I_1 \le 4\frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)^2}\eta\int_{Q_t}\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(u_{i\varepsilon}^{1+\frac{\sigma_i}{2}}\right)\right|^2 + C_{10}(\eta, \alpha_{ij}, L_i, |\Omega|)$$

D'autre part , pour I_2 on a :

$$I_2 = 2\frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)} m_i \int_{Q_t} \frac{\partial}{\partial s}(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_{i\varepsilon}) |u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}+m_i-1} \overrightarrow{b_i} \nabla(u_{i\varepsilon})$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz , on obtient :

$$I_2 \leq 4\eta \frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)^2} \int_{Q_t} \left| \frac{\partial}{\partial s}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_{i\varepsilon}\right)\right|^2 dsdx +$$

$$\frac{(\sigma_i+1)^2}{\sigma_i} m_i^2 c(\eta) \left\|\overrightarrow{b_i}\right\| \int_{Q_t} \left|\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}+m_i-1} \nabla u_{i\varepsilon}\right)\right|^2 dsdx$$

et grâce à (2.1) , on trouve:

$$I_2 \leq 4\eta \frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)^2} \int_{Q_t} \left| \frac{\partial}{\partial s}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_{i\varepsilon}\right)\right|^2 dsdx + C(T) \tag{2.16}$$

Finalement ,on aura en remplaçant les estimations faites sur I_1 et I_2 dans (2.14):

$$4(1-2\eta)\frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)^2} \int_{Q_t} \left| \frac{\partial}{\partial s}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}} u_{i\varepsilon}\right)\right|^2 dsdx + \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i} u_{i\varepsilon})\|^2 dx \leq \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla(|u_{i0\varepsilon}|^{\sigma_i} u_{i0\varepsilon})\|^2 + C_{11}T$$

En sommant les inégalités ainsi obtenues pour $i = 1, 2$, il vient alors :

$$\sum_{1\le i\le 2} 4(1-2\eta)\frac{(\sigma_i+1)}{(\sigma_i+2)^2}\int_{Q_t}\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}}u_{i\varepsilon}\right)\right|^2 dsdx+\frac{1}{2}\sum_{1\le i\le 2}\int_\Omega \|\nabla(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i}u_{i\varepsilon})\|^2 dx$$

$$\le C_{12}T + C_{13}$$

On conclut en choisissant. $\eta < \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, on a:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(|u_i|^{\frac{\sigma_i}{2}}u_i\right)\right\|_{L^2(Q_T)} \le \liminf_\varepsilon \left\|\frac{\partial}{\partial s}\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}}u_{i\varepsilon}\right)\right\|^2_{L^2(Q_T)} \le C$$

et:

$$\|\nabla(|u_i|^{\sigma_i}u_i)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le \liminf_\varepsilon \|\nabla(|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i}u_{i\varepsilon})\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C$$

d'où (1.2).

7.3 Cas unidimensionel

Nous avons jusqu'à présent, dans les lemmes précédents, estimé $\left(|u_{i\varepsilon}|^{\frac{\sigma_i}{2}}u_{i\varepsilon}\right)_t$ et V ($|u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i}u_{i\varepsilon})$ dans le cas N est quelconque. Nous allons considérer le cas particulier $N=1$.

Lemme 3.1 :

Sous les conditions des lemmes précédents, si on suppose que u est à composantes positives il existe une constante positive C telle que :pour tout réel positif α satisfait *la relation:*

$2\alpha > 3(\sigma_i + 1) \qquad i = 1, 2$ *on a :*

$$(3.1) \qquad \left\| u_{i\varepsilon}^{\alpha-2} \left[(u_{i\varepsilon})_x \right]^2 \right\|_{L^2(Q_T)} \leq C(\alpha, \sigma_i, m_i)$$

Preuve :

Notons par $v = u_{1\varepsilon} + \varepsilon$

On multiplie l'équation :

$$(v^\alpha)_{xx} = \alpha v^{\alpha-1} v_{xx} + \alpha(\alpha-1) v^{\alpha-2} (v_x)^2$$

par $v^{\alpha-2}(v_x)^2$, et on intégre le résultat sur Q_T , on aura

$$(3.2) \int_{Q_T} (v^\alpha)_{xx} v^{\alpha-2} (v_x)^2 dt dx = \alpha \int_{Q_T} v^{2\alpha-3} v_{xx} (v_x)^2 dt dx + \alpha(\alpha-1) \int_{Q_T} v^{2\alpha-4} (v_x)^4 dt dx$$

Soient :

$$I_1 = \int_{Q_T} (v^\alpha)_{xx} v^{\alpha-2} (v_x)^2 dt dx.$$

$$I_2 = \alpha \int_{Q_T} v^{2\alpha-3} v_{xx} (v_x)^2 dt dx.$$

$$I_3 = \int_{Q_T} v^{2\alpha-4} (v_x)^4 dt dx.$$

On intégre par partie en x l'expression I_1 , on obtient :

$$I_1 = -(\alpha - 2)\int_{Q_T} (v^\alpha)_x v^{(\alpha-3)}(v_x)^3 dtdx - \int_{Q_T} (v^\alpha)_x v^{(\alpha-2)} \left[(v_x)^2\right]_x dtdx +$$

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (v^\alpha)_x v^{(\alpha-2)}(v_x)^2 dtd\sigma$$

Par conséquent:

$$I_1 = -\alpha(\alpha-2)\int_{Q_T} v^{2\alpha-4}(v_x)^4 dtdx - \frac{2}{3}\alpha \int_{Q_T} v^{2\alpha-3}\left[(v_x)^3\right]_x dt + \tag{3.3}$$

$$\alpha \int_0^T \int_{\partial\Omega} v^{2\alpha-3}(v_x)^3 dtd\sigma$$

En intégrant par partie en x la deuxième intégrale du second membre de (3.3): il vient :

$$I_1 = -\alpha(\alpha - 2)\int_{Q_T} v^{2\alpha-4}(v_x)^4 dtdx + \frac{2}{3}\alpha(2\alpha - 3)\int_{Q_T} v^{2\alpha-4}(v_x)^4 dtdx$$

$$-\frac{2}{3}\alpha \int_0^T \int_{\partial\Omega} v^{2\alpha-3}(v_x)^3 dt + \alpha \int_0^T \int_{\partial\Omega} v^{2\alpha-3}(v_x)^3 dtd\sigma$$

Donc I_1 s'écrit sous la forme- :

$$I_1 = \frac{\alpha^2}{3}\int_{Q_T} v^{2\alpha-4}(v_x)^4 dtdx + \frac{\alpha}{3}\int_0^T \int_{\partial\Omega} v^{2\alpha-3}(v_x)^3 dtd\sigma \tag{3.4}$$

Le dernier terme de l'inègalité (3.4) est négatif puisque les $u_{i\varepsilon}$ sont positives à l'interieure de Ω, et nulles sur $\partial\Omega$, par consequent :

$$I_1 \leq \frac{\alpha^2}{3}\int_{Q_T} v^{2\alpha-4}(v_x)^4 dtdx \tag{3.5}$$

On remplace $(v)_{xx}$ par

$$\frac{1}{\sigma_1+1}v^{-\sigma_1}v_t - \sigma_1 v^{-1}(v_x)^2 - v^{-\sigma_1}g_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon}) - \frac{m_1}{\sigma_1+1}b_1 v^{-\sigma_1}u_{1\varepsilon}^{m_1-1}v_x$$

dans I_2 on obtient :

$$I_2 = \frac{\alpha}{\sigma_1+1}\int_{Q_T} v^{2\alpha-\sigma_1-3}(v_x)^2 v_t dtdx - \alpha\sigma_1\int_{Q_T} v^{2\alpha-4}(v_x)^4 - \tag{3.6}$$

$$\alpha\frac{m_1}{\sigma_1+}\int_{Q_T} v^{2\alpha+m_1-(\sigma_1+4)}(v_x)^3 dtdx - \alpha\int_{Q_T} v^{2\alpha-\sigma_1-3}(v_x)^2 g_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon})dtdx - \alpha\sigma_1\int_{Q_T} v^{2\alpha-4}(v_x)^4$$

En regroupant (3.2), (3.5) et (3.6) , on obtient :

$$\frac{\alpha}{3}(2\alpha-3\sigma_1-3)I_3 \leq -\frac{\alpha}{\sigma_1+1}\int_{Q_T} v^{2\alpha-\sigma_1-3}v_t(v_x)^2 dtdx + \alpha\int_{Q_T} v^{2\alpha-3-\sigma_1}(v_x)^2 g_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon})$$

$$+m_1\frac{\alpha}{\sigma_1+1}\int_{Q_T} v^{2\alpha-(\sigma_1+3)}u_{1\varepsilon}^{m_1-1}(v_x)^3 dtdx$$

Par suite :

$$(3.7)\qquad \frac{\alpha}{3}(2\alpha-3\sigma_1-3)I_3 \le m_1\frac{\alpha}{\sigma_1+1}\int_{Q_T} v^{\alpha-2}(v_x)^2 v^{\alpha-\sigma_1-1}u_{1\varepsilon}^{m_1-1}v_x dtdx$$

$$+\alpha\int_{Q_T} v^{\alpha-2}(v_x)^2 v^{\alpha-\sigma_1-1}g_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon})-\frac{\alpha}{\sigma_1+1}\int_{Q_T} v^{\alpha-2}(v_x)^2 v^{\alpha-1-\sigma_1}v_t dtdx$$

et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz ,(3.7) devient, :

$$\frac{\alpha}{3}(2\alpha-3\sigma_1-3)I_3 \le \sqrt{I_3}\frac{\alpha}{\sigma_1+1}\left(\int_{Q_T} v^{2\alpha-2\sigma_1-2}(v_t)^2\, dtdx\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\sqrt{I_3}\left(\int_{Q_T} v^{2\alpha+2m_1-2\sigma_1-4}(v_x)^2 dtdx\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{I_3}\left(\int_{Q_T} v^{2\alpha-2\sigma_1-2}g_{1\varepsilon}^2(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon})\right)^{\frac{1}{2}}$$

En vertu des estimations (2.1) et (2.13) , et grâce aux fait que $g_{i\varepsilon}$ et v sont uniformement bornés, on obtient:,

$$\sqrt{I_3}\le C(m_1,\sigma_1,\alpha)$$

Le lemme est démontré.

Avant de conclure ce chapitre, nous démontrerons encore le:

Lemme 3.2:

Sous les hypothèses du lemme ***précédent*** $u_{i\varepsilon}^{\alpha}\in H^{1,2}(Q_T)$, i = 1, 2, ***pour*** *tout* α ***satisfait la relation du lemme*** 3.1.

Preuve :

Il suffit de montrer que $(u_{i\varepsilon}^{\alpha})_{xx}$ est borné dans $L^2(Q_T)$ pour tout. i = 1,2 .

On a :

$$(v^{\alpha})_{xx} = \frac{\alpha}{\sigma_1 + 1} v^{\alpha - \sigma_1 - 1} \left(v^{\sigma_1 + 1}\right)_{xx} + \alpha(\alpha - \sigma_1 - 1) v^{\alpha - 2} (v_x)^2$$

Autrement dit, :

$$(v^{\alpha})_{xx} = \frac{\alpha}{\sigma_1 + 1} v^{\alpha - \sigma_1 - 1} v_t - \frac{\alpha}{\sigma_1 + 1} v^{\alpha - \sigma_1 - 1} b_1 \left(v^{m_1}\right)_x +$$

$$\alpha(\alpha - \sigma_1 - 1) v^{\alpha - 2} (v_x)^2 - \frac{\alpha}{\sigma_1 + 1} v^{\alpha - \sigma_1 - 1} g_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$$

On utilise les estimation (2.1),(2.13) et (3.1) pour obtenir le résultat .

Remarque 3.3 :

Comme $H^{1,2}$ *s'injecte dans* $C^{\frac{1}{4}-\delta,\frac{1}{2}-\delta}$ *pour tout* $\delta \in [0, \frac{1}{4}]$ *, on déduit que* u_i *est* *Holderienne* sur $[\tau, T] \times \Omega$ $\quad \tau > 0,\ i = 1, 2.$

Chapitre 8

Existence d'un attracteur global

8.1 Introduction

Quand on étudie une équation d'évolution non linéaire

$$\partial_t u = Au\ , \qquad u(0,.) = u_0(.),$$

$$u = u(t,x);\ \ u = (u_1, u_2, \ldots . u_n); \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Il est important d'étudier le comportement de ses solutions quand t tend vers $+\infty$, et comme il arrive on se trouve dans des situations où les méthodes classiques (voir le chapitre suivant) ne nous permettent pas de trouver le point exact vers lequel les solutions convergent quand t tend vers $+\infty$, dans ces situations et pour ne pas laisser le problème ouvert on peut utiliser un autre moyen (les attracteurs) pour avoir des informations sur les solutions comment elles se comportent, au voisinage de $+\infty$, c'est vrai que ce moyen ne nous donne pas la limite exacte mais on peut. la cerner dans un ensemble compact. Donc les attracteurs est un util puissant pour étudier le comportement asymptotique des solutions.

Dans ce chapitre nous montrerons qu'il existe un attracteur global si $m_i \geq \frac{\sigma_i}{2} + 1$ on peut dire mieux : si les données initiales sont bornées dans un espace de Banach Y , alors les solutions correspondentes se rentrent dans un ensemble compact à partir d'un certain temps fini.

On considère le problème (6.2.1) et on suppose que les hypothèses (6.2.2) - (6.2.7) sont satisfaites, alors d'aprés le sixième chapitre, le problème (6.2.1) admet une solution faible globale (u_1, u_2), de plus:

(1.1) $$|u_{i\varepsilon}(t, x)| \leq c(u_0) \text{ pourtout } 5 \in \Omega, t \geq 0.$$

(1.2) $$|u_{i\varepsilon}(t, x)| \leq c(\xi) \text{ pourtout } x \in \Omega, t \geq \xi.$$

où $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in W_q^{1,2}(Q_T)$, pour tout $T > 0; q \geq 1$, est la solution de (5.3.1).

8.2 Résultats de continuité

On définit l'operateur T(t), pour tout $t \geq 0$,par:

$$\begin{aligned} T(t) \ : \ (L^\infty(\Omega))^2 &\longrightarrow (L^\infty(\Omega))^2 \\ u_0 &\longmapsto u \end{aligned}$$

où u est la solution faible de (6.2.1).

$T(t)$ est bien défini d'aprés le lemme 6.5.1.

De plus on a le :

Lemme 2.1 :

L'opérateur $T(t)$ est continu de $\left(L^\infty(\Omega), \|.\|_1\right)^2$ dans lui même , de plus l'inégalité suivante est satisfaite *:*

$$\|T(t)u_0 - T(t)\hat{u}_0\|_{L^1(\Omega)} \leq c(t)\, \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1(\Omega)}$$

Soient $u_0, \hat{u}_0 \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^2$ et $u, \hat{u} \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^2$ les solutions (de (2.1)) correspondantes.

Preuve :

Soient u_{i0} , $\hat{u}_{i0} \in$ L”(R) et (u_{0n}) , $(\hat{u}_{0n})$ des suites de $D(\Omega)$ convergeant vers u_0 et $\hat{u}_0$ respectivement dans L^1 (Ω).

Soient (u_n) et $(\hat{u}_n)$ 1es suites de solutions de (6.3.1) corréspondentes à $\varepsilon = \frac{1}{n}$, alors on a l'égalité suivante :

$$(2.1) \qquad (u_{in}-\hat{u}_{in})_t-(\sigma_i+1)div\left[\left(|u_{in}|+\frac{1}{n}\right)^{\sigma_i}\nabla u_{in}-\left(|\hat{u}_{in}|+\frac{1}{n}\right)^{\sigma_i}\nabla\hat{u}_{in}\right]=$$

$$g_{in}(u_{1n},u_{2n})-g_{in}(\hat{u}_{1n},\hat{u}_{2n})+\overrightarrow{b_i}\left[\nabla\left(|u_{in}|^{m_i-1}u_{in}\right)\quad\nabla\left(|\hat{u}_{in}|^{m_i-1}\hat{u}_{in}\right)\right]$$

On multiplie (2.1) par $sign(u_{in} - \hat{u}_{in})$, et on intègre le résultat sur Q_t , on aura :

$$\int_0^t \int_\Omega sng(u_{in} - \hat{u}_{in}) \left[div \left(|u_{in}| + \frac{1}{n} \right)^{\sigma_i} \nabla u_{in} - (|\hat{u}_{in}| + \varepsilon)^{\sigma_i} \nabla \hat{u}_{in} \right] \leq 0$$

Nous regroupons les résultats précédents , il vient :

$$(2.3)\ \|u_{in}(t) - \hat{u}_{in}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_{i0n} - \hat{u}_{i0n}\|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t \|g_{in}(u_{1n}, u_{2n}) - g_{in}(\hat{u}_{1n}(s), \hat{u}_{2n}(s))\|_{L^1(\Omega)}\, ds.$$

$$\int_0^t \|u_{in} - \hat{u}_{in}(s)\|_{L^1(\Omega)}\, ds.$$

Comme les g_i sont localement Lipschitziennes, et u_{in} et $\hat{u}_{in}$ sont, uniformement bornées , (2.3) devient :

$$(2.4)\quad \|u_{in}(t) - \hat{u}_{in}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_{i0n} - \hat{u}_{i0n}\|_{L^1(\Omega)} + K \int_0^t \sum_{1 \leq k 2} \|u_{kn}(s) - \hat{u}_{kn}(s)\|_{L^1(\Omega)}\, \text{ds i} = 1, 2.$$

En sommant les inégalités précédentes sur i, et en utilisant le lemme de Gronwall, (2.4) se reécrit sous la forme:

$$\sum_{1 \leq i \leq 2} \|u_{in}(t) - \hat{u}_{in}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq C(t) \sum_{1 \leq i \leq 2} \|u_{i0n} - \hat{u}_{i0n}\|_{L^1(\Omega)}.$$

A ce niveau , nous faisons tendre n vers l'infini , et vu la convergence de u_{in} , $\hat{u}_{in}$ vers u_i ; $\hat{u}_i$ respectivement dans $\left(L^2(\Omega)\right)^2$, on obtient :

$$\sum_{1\leq i\leq 2} \|u_i(t) - \hat{u}_i(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq C(t) \sum_{1\leq i\leq 2} \|u_{i0} - \hat{u}_{i0}\|_{L^1(\Omega)} .$$

D'où le lemme .

Le résultat du lemme précédent se généralise de la manière suivante.

Lemme 2.2 :

L'opérateur T(t)- est continu de $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)^2$ dans lui même *, pour tout* $p \geq 1$

Preuve :

Soit $(u_{i0k})_k$une suite dans $L^p(\Omega)$ qui tend vers u_{i0} dans $L^p(\Omega)$ $i = 1,2,$ alors d'aprés la démonstration du lemrne précédent u_{ik} tend vers u_i dans $L^1(\Omega)$, et comme les u_{ik} sont uniformément bornées , le théorème de convergence dominée (la remarque 2.5.7) nous donnera le résultat

On définit également l'opérateur S(t), pour tout $t \geq 0$, par:

$$\begin{array}{cccc} S(t) & : & (L^\infty(\Omega))^2 & \longrightarrow & (L^\infty(\Omega))^2 \\ & & u_0 & \longmapsto & \left(|u_1|^{\sigma_1} u_1, |u_2|^{\sigma_2} u_2\right) \end{array}$$

Lemme 2.3 :

L'opérateur S(t) est continu de $\left(L^\infty(\Omega), \|.\|_2\right)^2$ *dans lui même.*

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.2.

8.3 Existence d'un ensemble absorbant

Il s'agit de montrer que le semi-groupe S(t) possède un ensemble absorbant compact,., pour celà on aura besoin du:

Lemme 3.1:

Soient ξ et r deux réels strictement positifs Alors il existe des constantes positives $c(\xi,r)$ et $c(r,u_0)$ tellesque :

$$(3.1) \qquad \int_t^{t+r}\int_\Omega (\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon})^2 dxdt \leq \begin{cases} c(\xi,r) & \text{pour tout } t \geq \xi \\ c(r,u_0) & \text{pour tout } t \geq 0 \end{cases} \qquad i=1,2$$

Preuve:

En multipliant la première équation de (5.3.1) par $\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}u_{1\varepsilon}$, et en intègrant le résultat sur Ω on obtient:

$$(3.2) \qquad \frac{1}{\sigma_1+1}\int_\Omega \partial_t \left|u_{1\varepsilon}\right|^{\sigma_1+2}(t,x)dx + \int_\Omega \left\|\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}\nabla(u_{1\varepsilon}(t,x))\right\|^2 dx \leq$$

$$L_1\int_\Omega (\left|u_{1\varepsilon}\right|^{\alpha_{11}+1}\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) + \phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})\left|u_{1\varepsilon}\right|\left|u_{2\varepsilon}\right|^{\alpha_{12}} + \phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})\left|u_{1\varepsilon}\right|)dx$$

$$+\int_\Omega \overrightarrow{b_1}\nabla(\left|u_{1\varepsilon}\right|^{m_1-1}u_{1\varepsilon})\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})u_{1\varepsilon}(t,x)dx$$

Concernant le premier terme du second membre de (3.2), on a. en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, et le fait que $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1$; $\forall\eta > 0$:

(3.3) $$L_1 \int_\Omega (|u_{1\varepsilon}|^{\alpha_{11}+1}\, \phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) + \phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})\, |u_{1\varepsilon}|\, |u_{2\varepsilon}|^{\alpha_{12}} + \phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})\, |u_{1\varepsilon}|) dx \leq$$

$$3\eta \int_\Omega \|\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) \nabla(u_{1\varepsilon}(t,x)\|^2\, dx + \eta \int_\Omega \|\phi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{2\varepsilon}) \nabla(u_{2\varepsilon}(t,x)\|^2\, dx + C$$

La dernière intégrale de (3.2) peut être éstimée de la manière suivante:

(3.4) $$\int_\Omega \overrightarrow{b_1} \nabla(|u_{1\varepsilon}|^{m_1-1}\, u_{1\varepsilon}) \phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) u_{1\varepsilon}(t,x) dx =$$

$$\frac{m_1}{\sigma_1+1} \int_\Omega \overrightarrow{b_1} \nabla(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) u_{1\varepsilon})\, |u_{1\varepsilon}|^{m_1-1}\, u_{1\varepsilon} =$$

$$\int_\Omega \sum_{1 \leq j \leq N} b_{1j}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \partial_{x_j}(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) u_{1\varepsilon})\, |u_{1\varepsilon}|^{m_1-1}\, u_{1\varepsilon}.$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Bunjakovski-Schwartz et de Young, on a. d'après (3.4):

(3.5) $$\int_\Omega \overrightarrow{b_1} \nabla(|u_{1\varepsilon}|^{m_1-1}\, u_{1\varepsilon}) \phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) u_{1\varepsilon}(t,x) dx \leq$$

$$\frac{\eta}{2} \int_\Omega \|\nabla(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) u_{1\varepsilon})\|^2\, dx + \frac{\eta\lambda}{2} \int_\Omega (\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) u_{1\varepsilon})^2\, dx + C$$

En utilisant de nouveau l'inégalité de Poincaré dans (3.5), on obtient,:

(3.6) $$\int_\Omega \overrightarrow{b_1} \nabla(|u_{1\varepsilon}|^{m_1-1}\, u_{1\varepsilon}) \phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) u_{1\varepsilon}(t,x) dx \leq \eta \int_\Omega \|\nabla(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon}) u_{1\varepsilon})\|^2\, dx + C$$

Il vient alors en regroupant (3.2), (3.3) et(3.6) :

$$(3.7)\qquad \frac{1}{\sigma_1+2}\int_\Omega \partial_t |u_{1\varepsilon}|^{\sigma_1+2}\,dx+\int_\Omega \left\|\nabla(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})u_{1\varepsilon})\right\|^2 dx \leq$$

$$4\eta\int_\Omega \left\|\nabla(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})u_{1\varepsilon})\right\|^2 dx+\eta\int_\Omega \left\|\nabla(\phi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{2\varepsilon})u_{2\varepsilon})\right\|^2 dx + C$$

De manière similaire, on a en multipliant la deuxième équation de (5.3.1) par $\phi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{2\varepsilon})u_{2\varepsilon}$:

$$(3.8)\qquad \frac{1}{\sigma_2+2}\int_\Omega \partial_t |u_{2\varepsilon}|^{\sigma_2+2}\,dx+\int_\Omega \left\|\nabla(\phi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{2\varepsilon})u_{2\varepsilon})\right\|^2 dx \leq$$

$$\eta\int_\Omega \left\|\nabla(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})u_{1\varepsilon})\right\|^2 dx+4\eta\int_\Omega \left\|\nabla(\phi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{2\varepsilon})u_{2\varepsilon})\right\|^2 dx + C$$

D'où en sommant les inégalités (3.7) et (3.8),on obtient:

$$(3.9)\qquad \int_\Omega \partial_t \sum_{1\leq i\leq 2} |u_{i\varepsilon}|^{\sigma_i+2}\,dx+C_6(1-5\eta)\int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} \left\|\nabla((\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})u_{i\varepsilon})\right\|^2 \leq C$$

En intègrant l'inégalité (3.9) sur $[t, t+r]$, et en choisissant $\eta < \frac{1}{5}$, on obtient le résultat désiré.

Remarque *3.2: Sous les hypothèses du lemme précédent, si on suppose que* $m_i \geq \frac{\sigma_i}{4}+\frac{1}{2}$, $i=1,2$, *on obtient:*

$$\int_t^{t+r}\int_\Omega (|u_i|^{\gamma i}\, \nabla u_i)^2 dxdt \leq \begin{cases} c(\xi, r) & \text{pour tout, } t \geq \xi \\ c(r, u_0) & \text{pour tout } t \geq 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

pour tout $\gamma i \geq \frac{2m_i+\sigma_i}{2}$

Proposition *3.3: Sous les conditions du lemme précédent , si on suppose de plus que :* $m_i \geq \frac{\sigma_i}{4} + \frac{1}{2}$, alors :

il existe une constante *positive C telle que :*

$$(3.11) \qquad \left\|\nabla \left(|u_i|^{\sigma_i} u_i\right)(t, .)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C(r, \xi) \qquad i = 1, 2$$

pour tout t $\geq \xi + r$ *, où* ξ *et* r *sont deux réels strictement positifs*

Preuve :

En multipliant la i^{ième} équation de (6.3.1) par $\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}$, et en intègrant le résultat obtenu sur Ω , on trouve :

$$(3.12) \qquad \int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon}) \left|\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right|^2 + (\sigma_i+1)\int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}\nabla\left(\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right) =$$

$$\int_\Omega g_{i\varepsilon}(u_\varepsilon)\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon} + \int_\Omega \overrightarrow{b_i}\nabla\left(|u_1|^{m_1-1}u_1\right)\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}dx$$

Mais on a:

$$(3.13) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}\right) = \nabla\left(\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right.$$

Les estimations (3.12) et (3.13) impliquent que:

$$(3.14)\quad \int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left|\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right|^2 dx+\frac{1}{2}(\sigma_i+1)\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{2\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left\|\nabla u_{i\varepsilon}\right\|^2 dx =$$

$$\int_\Omega g_{i\varepsilon}(u_\varepsilon)\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}dx+\int_\Omega \overrightarrow{b_i}\nabla\left(\left|u_1\right|^{m_1-1}u_1\right)\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}dx$$

Pour estimer la première intégrale du second membre de (3.14), on applique l'inégalité de Cauchy -Schwartz on obtient alors:

$$(3.15)\quad \int_\Omega g_{i\varepsilon}(u_\varepsilon)\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\leq\frac{1}{4}\int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left|\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right|^2 dx+\int_\Omega g_{i\varepsilon}^2(u_\varepsilon)\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})dx$$

En vertu de (1.2) et des hypothèses faites sur g_i, (3.15)devient:

$$(3.16)\quad \int_\Omega g_{i\varepsilon}(u_\varepsilon)\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\leq\frac{1}{4}\int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left|\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right|^2 dx+C(\xi,\Omega)\text{ pour tout } t\geq\xi>0\,.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient:

$$(3.17)\quad \int_\Omega \overrightarrow{b_i}\,\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}dx\leq\frac{1}{4}\int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left|\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right|^2 dx+\int_\Omega\left\|\phi_{i\varepsilon}^{\frac{2\sigma_i+2m_i-2}{2}}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}\right\|^2 dx$$

$$+C(\xi,\Omega).$$

pour tout $t\geq\xi>0$.

On reporte les estimations (3.16) et (3.17) dans (3.14) il résulte :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left|\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right|^2 dx + C\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{2\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left\|\nabla u_{i\varepsilon}\right\|^2 dx \leq \int_\Omega \left\|\phi_{i\varepsilon}^{\frac{2\sigma_i+2m_i-2}{2}}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}\right\|^2 dx + C(\xi,\Omega). \tag{3.18}$$

pour tout $t \geq \xi > 0$.

En intégrant l'inégalité (3.18) en t sur $[s,t]$, avec : $t-r \leq s \leq t$ où : $r>0$ et $t > r+\xi$, il découle :

$$\frac{1}{2}\int_s^t \int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left|\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right|^2 dx + C\int_\Omega \left\|\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}(t,x)\right\|^2 dx \leq \int_s^t \int_\Omega \left\|\phi_{i\varepsilon}^{\frac{2\sigma_i+2m_i-2}{2}}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}\right\|^2 dx + C\int_\Omega \left\|\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}(s,x)\right\|^2 dx + (t-s)C(\xi,\Omega). \tag{3.19}$$

En utilisant la remarque 3.2 , il resulte de (3.19) que:

$$\frac{1}{2}\int_s^t \int_\Omega \phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\left|\frac{\partial}{\partial t}u_{i\varepsilon}\right|^2 dx + C\int_\Omega \left\|\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}(t,x)\right\|^2 dx \leq rC(\xi,\Omega) + C(r,\xi,\Omega) + \int_\Omega \left\|\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}(s,x)\right\|^2 dx \tag{3.20}$$

En intégrant (3.20) en s entre t-r et t , et en utilisant l'estimation (3.1), on obtient

$$\int_\Omega \left\|\left|u_{i\varepsilon}\right|^{\sigma_i}\nabla u_{i\varepsilon}(t,x)\right\|^2 dx \leq \int_\Omega \left\|\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}(t,x)\right\|^2 dx \leq C(\xi,r,\Omega) \tag{3.21}$$

Par conséquent:

$$\int_{\Omega} \||u_i|^{\sigma_i} \nabla u_i(t,x)\|^2 \, dx \leq C(\xi, r, \Omega)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

8.4 Existence d'un attracteur global

Après la préparation précédente on est en mesure d'énoncer le résultat. principal de ce chapitre:

Théorème 4.1 :

Soit $X = \left(L(\Omega), \ \|\|_{L^2(\Omega)}\right)^2$, **le serrai-groupe S(t)** possède *un attracteur global A tel que:*

$$A \subset H^1 \cap L^\infty(\Omega)..$$

Preuve :

Il s'agit de montrer que S(t) possède un attractem global, c'est à dire il s'agit de montrer qu'il existe un ensemble attractant compact invariant. A cette intention on utilise le théorème 2.6.7 , autrement dit, il suffit de vérifier que S(t) est continu de $(L^\infty(\Omega), \|.\|_2)^2$ dans lui même (ce qui est vrai d'après le lemme 2.3) et que S(t) admet un ensemble attractant compact. C'est ce dernier point que nous allons montrer ci-après:

D'après la proposition 3.3, la norme de $|u_i|^{\sigma_i} u_i(t,.)$ dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est, majorée par une constante R indépendante de la donnée initiale u_0 pour tout $t > 0$, pour mieux dire:

$$|u_i|^{\sigma_i}\ u_i(t,.) \in B_{H^1 \cap L^\infty}(0, \mathrm{R}) \text{ pour tout } t > 0$$

En vertu de la compacité de l'injection canonique de H_0^1 dans L^2 , on déduit. facilement qu'il existe un ensemble compact dans $(L^\infty(\Omega), \|.\|_2)$ noté par K tel que:

$$|u_i|^{\sigma_i}\ u_i(t,.) \in K = B_{L^2 \cap L^\infty}(0, \mathrm{R}) \text{ pour tout } t > 0$$

De plus K se considère comme un ensemble absorbant pour le semi groupe S(t).

Ce qu'il fallait démontrer

Chapitre 9

Existence et comportement asymptotique dans les cas limites

9.1 Introduction

Nous verrons dans ce chapitre que les résultats des chapitres précédents peuvent également être étendus aux cas limites, cependant, une telle extensionexigera des hypothèses suplémentaires sur les coefficients de $|u_i|^{\alpha_{ij}}$ et les vecteurs $\overrightarrow{b_i}$ $i, j = 1, 2$.

Donc les résultats de ce chapitre sont des généralisations naturelles des résultats exposés aux chapitres précédents.

9.2 Position du problème

On considère le problème:

$$
(2.1)\begin{cases}
\partial_t(u_1) - \Delta(|u_1|^{\sigma_1} u_1) = g_1(u_1,u_2) + \overrightarrow{b_1}\nabla(|u_1|^{m_1-1} u_1) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\
\partial_t(u_2) - \Delta(|u_2|^{\sigma_2} u_2) = g_2(u_1, u_2) + \overrightarrow{b_2}\nabla(|u_2|^{m_2-1} u_2) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\
u_1 = u_2 = 0 & \text{sur }]0,\infty[\text{ x } \partial\Omega \\
u_1(0,.) = u_{10},\ u_2(0,.) = u_{20} & \text{dans } \Omega
\end{cases}
$$

où:

(2.2) $g_i(0,0) = 0$, $i = 1, 2$, et $g_1(0,r_2), g_2(r_1,0) \geq 0$ pour tout $r_1, r_2 \geq 0$

(2.3) les g_i sont des fonctions localement lipschitziennes $i = 1, 2$.

(2.4) Il existedes constantes $c_{ij} \geq 0$ telles que :pour tout. $u_1, u_2 \geq 0$ on a :

$$
g_i(u_1, u_2) \leq c_{i0} + c_{i1}u_1^{\alpha_{i1}} + c_{i2}u_2^{\alpha_{i1}} \qquad i = 1, 2
$$

(2.5) $u_{i0} \in L^\infty(\Omega)$, $u_{i0} \geq 0$; $i = 1, 2$.

De plus on suppose que l'une des conditions suivantes est réalisée:

(2.6)

1. si $\alpha_{ij} < \sigma_j + 1$ et $m_i = \sigma_i + 1$, $j, i = 1,2$ on suppose que:

$\left\|\overrightarrow{b_i}\right\| < 2\frac{\lambda}{\lambda+1}$.

2. il existe $j_0 \in \{1,2\}$ / $\alpha_{ij_0} = \sigma_{j_0} + 1$ et $m_i < \sigma_i + 1$; $i = 1,2$ on suppose que:

$c_{ij_0} < \lambda$

3 $\alpha_{ij} = \sigma_j + 1$, et $m_i < \sigma_i + 1$; $j, i = 1,2$: on suppose que:

$2 \max\limits_{\substack{i=0,2 \\ j=1,2}} c_{ij} < \lambda$

4 . $\alpha_{ij} = \sigma_j + 1$, et $m_i = \sigma_i + 1$; $j, i = 1, 2$: on suppose que:

$4 \max\limits_{\substack{i=0,2 \\ j=1,2}} c_{ij} + \left\|\overrightarrow{b_i}\right\|(\lambda + 1) < 2x$

Il s'agit de montrer le:

Théorème 2.1

Sous les hypothèses *(2.2)-(2.6)* , le *problème (2.1) possède* une *solution faible globale, positive bornée et* unique (u_1, u_2) possédant les résultats de *régularité* du chapitre 7, et *le semi-groupe* $S(t)$ admet un attracteur global A si $4m_i > \sigma_i + 2$, $i = 1,2$.

De plus dans le quatrième *cas de (2.6)* si $c_{i0} = 0$ $i = 1, 2$, (u_1, u_2) *tend vers* $(0,0)$ quand t tend vers l'infini.

9.3 Existence globale de solutions faibles

Pour éviter les banalités , on étudie seulement le qutrième cas de (2.6) et on suppose que $c_{i0} = 0$, et à l'avenir nous ne occuperons que de ce dernier.

On approche le problème (2.1) par une suite de problèmes réguliers comme dans le chapitre quatre tels que chacun d'eux possède une solution classique positive globale $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$.On a en fait le :

Lemme 1 :

Pour tout $T > 0$, *il existe une constante positive* M *indépendente de* ε *et de* T, *telle que :*

$$\text{(3.1)} \qquad \|u_{i\varepsilon}(T)\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\|\nabla(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1})\right\|^2_{L^2(Q_T)}, \left\|u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}\right\|^2_{L^2(Q_T)} \leq M \quad i = 1,2$$

Preuve :

Soit l'équation :

$$\partial_t(u_{1\varepsilon}) - (\sigma_1 + 1)div(\phi_{1\varepsilon}^{\sigma_1}(u_{1\varepsilon})\nabla u_{1\varepsilon}) = g_{1\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) + \overrightarrow{b_1}\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})$$

on la multiplie par $u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1}$, on l'intégre sur Q_T, et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve :

$$\text{(3.2)} \int_\Omega u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+2}dx - \int_\Omega u_{10\varepsilon}^{\sigma_1+2}dx + \int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 dtdx \leq \frac{\left\|\overrightarrow{b_1}\right\|}{2}\int_{Q_T} \left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 dtdx +$$

$$\frac{c_{12}}{2}\int_\Omega u_{2\varepsilon}^{2(\sigma_2+1)}dtdx + \left(c_{11} + \frac{c_{12}}{2} + \frac{b_1}{2}\right)\int_{Q_T} u_{1\varepsilon}^{2(\sigma_1+1)}dtdx$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré ,l'inégalité (3.2) prend la forme simple:

$$(3.3)\quad \int_\Omega u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+2}(T)dx+(1-\frac{d_{12}}{2\lambda})\int_{Q_T}\left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 dtdx \leq \frac{c_{12}}{2}\int_\Omega u_{2\varepsilon}^{2(\sigma_2+1)}dtdx$$

$$+\int_\Omega u_{10\varepsilon}^{\sigma_1+2}dx$$

où :

$$d_{12} = 2c_{11} + c_{12} + \left\|\vec{b}_1\right\|(\lambda + 1).$$

et on obtient une 'inégalité analogue si on multiplie l'équation:

$$\partial_t(u_{2\varepsilon}) - (\sigma_2+1)div(\phi_{2\varepsilon}^{\sigma_2}(u_{1\varepsilon})\nabla u_{2\varepsilon}) = g_{2\varepsilon}(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon}) + \overrightarrow{b_2}\nabla(u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1})$$

par : $u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1}$, autrement dit:

$$(3.4)\quad \int_\Omega u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+2}(T)dx+(1-\frac{d_{21}}{2\lambda})\int_{Q_T}\left\|\nabla(u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1})\right\|^2 dtdx \leq \frac{c_{21}}{2}\int_\Omega u_{1\varepsilon}^{2(\sigma_1+1)}dtdx$$

$$+\int_\Omega u_{20\varepsilon}^{\sigma_2+2}dx$$

En faisant la somme des inégalités (3.3) et (3.4) on obtient:

$$(3.5)\quad \int_\Omega \sum_{1\leq i\leq 2} u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+2}(T)dx+(1-\frac{d'_{12}}{2\lambda})\int_{Q_T}\left\|\nabla(u_{1\varepsilon}^{\sigma_1+1})\right\|^2 dtdx+(1-\frac{d'_{21}}{2\lambda})\int_{Q_T}\left\|\nabla(u_{2\varepsilon}^{\sigma_2+1})\right\|^2 dtdx \leq$$

$$\int_\Omega u_{10\varepsilon}^{\sigma_1+2}dx+\int_\Omega u_{20\varepsilon}^{\sigma_2+2}dx$$

où :

$$d'_{21} = 2c_{22} + c_{21} + \left\|\vec{b_2}\right\|(\lambda + 1) + c_{12}$$

et

$$d'_{12} = 2c_{11} + c_{12} + \left\|\vec{b_1}\right\|(\lambda + 1) + c_{21}.$$

En utilisant la proposition 4.3.2 et le fait que : $\max(d'_{12}, d'_{21}) < 2X$, nous obtenons les estimations désirées.

Grâce au lemme 2.1 , on obtient habituellement une solutions faible globale unique (u_1, u_2) (nous ne répetrons pas ici les raisonnement, des chapitres précédents).

De plus (u_1, u_2) possède les résultats de régularités du chapitre 7, (tout se passe essentiellement de la même manière qu'au chapitre 7), finalement le semi-groupe $S(t)$ possède un attracteur global A si $4m_i > \sigma_i + 2$, $i = 1, 2$

9.4 Comportement asymptotique

On va étudier le compotement asymptotique des solutions dans le quatrième cas de (2.6), plus précisement on va montrer que la solution faible de (2.1) tend vers zéro.

Lemme 4.1 :

Sous les hypothèses (2.2)-(2.5) et (2.6.4), si on suppose de plus que $c_{i0} = 0$ $i = 1, 2$ *,il existe un réel positif c telle que pour tout* $t > 0$ *on a l'inégalité suivante :*

$$(4.1) \quad \left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(t)\right\|_{2,\Omega} \leq \frac{2}{t}c + \int_{Q_{\frac{t}{2},t}} f_{i\varepsilon}^2(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, \nabla u_{i\varepsilon})dsdx \; i = 1, 2$$

Preuve :

Soit $\tau \in \left[\frac{t}{2}, t\right]$

On multiplie l'équation:

$$\partial_t(u_{i\varepsilon}) - (\sigma_i + 1)div(\phi_{i\varepsilon}^{\sigma_i}(u_{i\varepsilon})\nabla u_{i\varepsilon}) = g_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) + \overrightarrow{b_i}\nabla(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1})$$

par $\left(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}\right)_t$, et on intègre le résultat sur Ω x $[\tau$, t] , on obtient :

$$(4.2) \quad I = \left(\frac{2}{\sigma_i+2}\right)^2 \int_{Q_{\tau,t}} (\partial_t(u_{i\varepsilon}^{\frac{\sigma_i+1}{2}}))^2 dsdx + \left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leq \left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,\tau)\right\|_{2,\Omega}^2 +$$

$$\int_{Q_{\tau,t}} \partial_t(u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}) f_{i\varepsilon}(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, \nabla u_{i\varepsilon}) dsdx$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz , il découle :

$$(4.3) \qquad I \leq \left(\frac{2}{\sigma_i+2}\right)^2 \int_{Q_{\tau,t}} (\partial_t(u_{i\varepsilon}^{\frac{\sigma_i+1}{2}}))^2 dsdx + \left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,\tau)\right\|_{2,\Omega}$$

$$+C_1 \int_{Q_{\tau,t}} u_{i\varepsilon}^{\sigma_i} f_{i\varepsilon}^2(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, \nabla u_{i\varepsilon}) dsdx$$

En combinant les estimations (4.2) et (4.3) , il résulte:

$$(4.4) \quad \left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leq \left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,\tau)\right\|_{2,\Omega}^2 + C_1 \int_{Q_{\frac{t}{2},t}} u_{i\varepsilon}^{\sigma_i} f_{i\varepsilon}^2(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, \nabla u_{i\varepsilon}) dsdx$$

On intégre l'inégalité (4.4) en τ sur $\left[\frac{t}{2},\, t\right]$, on aura:

$$(4.5)\quad \frac{t}{2}\left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_{Q_{\frac{t}{2},t}} \left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,\tau)\right\|_{2,\Omega}^2 + C_2\frac{t}{2}\int_{Q_{\frac{t}{2},t}} f_{i\varepsilon}^2(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, \nabla u_{i\varepsilon})dsdx$$

De ceci et des estimations (3.1) , résulte le résultat cherché.

On définit l'ensemble w-limite par :

$$\omega^+(u_{10}, u_{20}) = \omega^+(u_0) = \left\{ \begin{array}{c} u \in \left(H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^2 \text{ tel que } : \exists\, t_n \to +\infty \text{ et} \\ (u_{1\varepsilon},\, u_{2\varepsilon})(t_n, .) \to u \text{ dans } (L^2(\Omega))^2 \end{array} \right\}$$

Montionnons une conséquence du lemme 4.1.

Lemme 4.2 :

L'ensemble $\omega^+(u_{10}, u_{20})$ *se réduit à zéro*

Preuve :

D'après l'estimation (4.1) on a:

$\left\|\nabla u_{i\varepsilon}^{\sigma_i+1}(.,t)\right\|_{2,\Omega}^2$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini. On acheve la preuve' en utilisant l'inégalité de Poincaré.

Par conséquent l'attracteur A se réduit au couple $(0,0)$

Conclusion et problèmes ouverts

Dans ce travail on a étudié un système de réaction-diffusion parabolique non-linéaire dégénéré, en utilisant la téchnique 'de compacité. On a établi l'existence globale en temps d'une solution faible unique, dans un sens bien précis, en supposant que la masse totale est controlée au cours du temps. On démontré que les solutions faibles sont uniformément bornées, pour tout, $t > 0$, même si les données initiales ne sont pas nécéssairement bornées.

On a établi aussi quelques résultats de régularité $H^{1,2}$. Enfin dans la. dernière partie de ce travail on s'est intéressé à l'étude du comportement asymptotique des solutions.

Il faut signaler que des arguments identiques à ceux de ce travail permettent de déduire que les résultats éxposés ici (sauf $7.3) sont encore vrais dans le cas suivant:

$$\begin{cases}
\partial_t(u_i) - \Delta(|u_i|^{\sigma_i}\, u_i) = g_i(u) + \overrightarrow{b_i}\,\nabla(|u_i|^{m_i-1}\, u_i) & \text{dans }]0,\infty[\text{ x } \Omega \\
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial\eta}\,(u_i\,|u|^{\sigma_i})\, u_i \leq 0 \\
ou \\
\sum\limits_{j=1}^{N} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(|u_i|^{\sigma_i}\, u_i) + b_{ij}\,|u_i|^{m_i-1}\, u_i\right]\eta_j \leq 0
\end{cases} & \text{sur }]0,\infty[\text{ x } \Gamma_{i1} \\
u_{i0} = 0 & \text{sur }]0,\infty[\text{ x } \Gamma_{i0} \\
u_1(0,.) = u_{10},\ u_2(0,.) = u_{20} & \text{dans } \Omega
\end{cases}$$

où: $\Gamma_{i0} \cup \Gamma_{i1} = \partial\Omega$ et $\Gamma_{i0} \neq \emptyset$.

avec:

♦ $i = 1, r.$

♦ $\sigma_i > 0$

♦ $|g_i(t,x,u)| \leq k_1 \sum\limits_{1\leq j\leq r} u_j^{\alpha_{ij}} + k_2$,

♦ $\overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{b_i}(x,t) \in \mathbb{R}^N$ et $\left\|\overrightarrow{b_i}\right\| = \left\|\overrightarrow{b_i}(x,t)\right\| \leq k_1$ où:

♦ $k_i \geq 0$; $i = 1, 2$; $\alpha_{ij} \in [0, \sigma_j + 1[$,

Le dernier prolongement est justifié par [5] (pour montrer l'existence pour les problèmes approchés (réguliers)), et par le théorème suivant:

Théorème :

Soit $u \in W^{1,2}(\Omega)$, tel que $u = 0$ sur $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ avec: $\Gamma_0 \neq \emptyset$, alors il *existe une constante positive C telle que:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Les problèmes suivants nous semblent particulièrement intéréssants et ouverts:

- L'étude des systèmes de réaction-diffusion lorsque, la dépendence en le gradient est non affine.

- Les systèmes fortement couplés suivants :

1. Les seconds membre sont de la forme :

$$f_i(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2)$$

2. Les termes de diffusion sont plus généraux:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta(\varphi(u_1)) = f_1(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \\ \partial_t u_2 - \Delta(\phi(u_2)) = f_2(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - div(a(u_1)\nabla u_2) = f_1(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \\ \partial_t u_2 - div(a(u_2)\nabla u_1) = f_2(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta(\varphi(u_1)) = f_1(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \\ \partial_t u_2 - \Delta(\phi(u_2)) - \Delta(\psi(u_1)) = f_2(u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2) \end{cases}$$

Bibliographie

[1] N.D.Alikakos, L^p bound of solution of reaction-diffusion equation, comm.Partial Differential equation 4 (1976) pp.827-868.

[2] N.D.Alikakos, R.Rostamian, Large Time Behavior of Neumann Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation, Indiana University Mathematics Journal, Vol 30 (5) 1981, pp 749-785.

[3] T.Aliziane, M.S.Moulay, Global Existence and Asymptotic Behavior for S.I.S Degenerate Evolution System, MMR, Vol 9 , $N^0$1&2, pp 9-22, 2000.

[4] T.Aliziane, M.Langlais, Global Existence and Asymptotic Behavior for a System of Degenerate Evolution Equation, Preprint.

[5] H.Amann, Nonhomogenous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems, Function Spaces , Differential Operators and Nonlinear Analysis, H.J. Schmeisser, H. Triebel, editors1993,pp Y-126.

[6] Aronson D.C,Crandall M.G,Peletier L.A, Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem, Non-linear analysis,6, (1982) pp 1001-1022.

[7] P.Bénilan, Opérateurs accrétifs et semi-groupes dans les espaces L^p,$(1 \leq p \leq \infty)$, Functional Analysis and Numerical Analysis. Tokyo 1978, pp 15-53

[8] N.Boudiba, M.S.Moulay, M.Pierre, Global Existence for Gradient-Dependent Systems with Balance Law, International Conference on Differential Equations, June, 1995.

[9] H.Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson; 1983.

[10] N.Dunford, J.Schwartz, Linear Operators, Part 1, Interscience Publishers, N.Y, 1963.

[11] L.Dung, Global Attractors for a Class of Degenerate Nonlinear Parabolic System, J.Int. and Differential equations.

[12] J.P.Ezin, Espace de Holder et estimée de Schauder pour des opérateurs elliptiques, Afrika mathematika Vol II,n°.2 (1980), pp 71-92.

[13] W.E.Fitzgibon, J.J.Morgan, R.S.Sanders, S.J.Waggoner,Estimates for Spatio-Temporally Dependent Reaction- Diffusion Systems, pp 130-146.

[14] V.A.Galaktionov, Boundary Value Problem for the Nonlinear Parabolic Equation, Diff.Uravn, 17, n°5 (1981) ,pp 836-842.

[15] V.A.Galaktionov, ,S.P.Kurdymov, A.A. Samarskii, a Parabolic System of Quasi-linear Equation, Diff.Uravn, 19, n°12 (1983): pp 2123-2140

[16] J.Genet, Mesure et intégration, Librairie Vuibert 1976.

[17] E.Laamri, Etude de l'existence de solutions globales d'un système de réaction-diffusion parabolic fortement non-linéaire, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Vol XII,n°3, 1991, pp 373-390.

[18] O.Ladyzenskaya, Attractors for Semigroups and Evolution Equations, Accademia nazional dei Lincei.

[19] O.Ladyzenskaya, N.N.Ural'ceva, Equations aux dérivées partielles de type elliptique. Dunod, Paris 1968.

[20] O.Ladyzenskaya,V.A.Solonnikov, N.N.Ural'ceva, Linear and Quasi_linear Equations of Parabolic Type, Trans.Monograph, 23, American math society, Providence (1968).

[21] L.Maddalena, Exist#ence of Global Solution for Reaction-Diffusion Systems with Density Dependent, Non-linear analysis, 8, n° 11 (1984) pp 13831394.

[22] M.S.Moulay, Contribution à l'étude de la régularité des solutions de problèmes non-linéaires dégénérés, thèse d'état,, Alger (1988).

[23] M.Pierre, An L^1 Method to Prove Global Existence in Some Reaction-Diffusion Systems,in (Contribution to Nonlinear Partial differential equations), J.I..Diaz et P.Lions, ed., Pitman Res.Notes in Math. series, 1987 pp 220-231.

[24] M.I.Vishik, Asymptotic Behavior of Solutions of Evolutionary Equations, International centre for theoretical physics, 1995.