

N° d'ordre : 06/

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène



Faculté Génie Civil

THESE DE MAGISTER

Pour obtenir le grade de

MAGISTER

en Génie Civil

Spécialité : **GEOTECHNIQUE**

Présentée par

Farid BAKHTI

Ingénieur d'Etat en Génie Civil diplômé de l'E.N.P.

THEME

**FORMULATION ET IMPLEMENTATION
DES ELEMENTS INFINIS EN
DYNAMIQUE DES SOLS**

Soutenue le
devant le J

K.
Professeur
A. CHELCHE
A. NOUR
F. KAOUA
H. AFRA
O.

Chargé de cours

USTHB

Examineur

ΔΕΔΙΧΑΧΕΣ

Je dédié ce modeste travail à :

- *Mes très chers parents qui m'ont tout donné.*
- *Mon frère Bino.*
- *Mes sœurs.*
- *Tout mes proches et amis (es)...*

PEMEPXIMENTΣ

Je remercie mon directeur de thèse Professeur A. Chelghoum au DGC, US1 mes côtés pendant les moments les plus délicats et pénibles afin de me faciliter la tâche modeste travail.

Je tiens à remercier le professeur K. BADDARI qui m'a fait l'honneur de présider . BOURAHLA, Mr. A. NOUR, Mr. F. KAOUA, Mr. H. AFRA et Mr. O. KHALED p voulu examiner ce travail et participer au jury.

Je tiens à remercier Mr A. Nour qui m'a beaucoup aidé, aux chercheurs N.Slimani Ouksili, M. Badaoui, M. Hadid, N. Mezouar, , Z.Tchikou et à toute l'équipe active leurs soutient moral et encouragements.

Enfin, je rends hommages à toutes les personnes qui ont participé, de près ou formation.

SOMMAIRE

Chapitre 1 : INTRODUCTION GENERALE

1.1. Introduction.

1.2. Présentation de la thèse.

Chapitre 2 : NOTION DE DYNAMIQUE DES SOLS

- 2.1. Introduction.
- 2.2. Formulation du problème.
 - 2.2.1. Equation du mouvement.
 - 2.2.2. Théorie de propagation d'onde.
 - 2.2.2.1. Propagation d'onde dans un milieu infini.
 - a) Equation du mouvement.
 - b) Solution découplée.
 - 2.2.2.2. Propagation d'onde proche d'une surface libre.
 - 2.2.2.3. Conversion d'ondes.
 - 2.2.3. Résolution des équations de mouvement.
 - 2.2.3.1. Analyse dans le domaine fréquentiel.
 - 2.2.3.2. Analyse dans le domaine temporel.
- 2.3. Etat d'art en matière de modélisation du sol, domaine semi – infini.
 - 2.3.1. Frontière élémentaire.
 - 2.3.2. Frontière locale.
 - 2.3.3. Frontière consistante.
 - 2.3.4. Méthode des équations intégrales aux frontières
 - 2.3.5. Eléments infinis.

Chapitre 3 : FORMULATION DES ELEMENTS INFINIS EN DYNAMIQUE

- 3.1. Introduction.
- 3.2. Etude bibliographique.
- 3.3. Formulation des éléments infinis.
 - 3.3.1. Approche inverse.
 - 3.3.1.1. élément infini de type 1

- 3.3.1.2. élément infini de type 2
- 3.3.2. Approche directe.
 - 3.3.2.1. élément infini de type 3
 - 3.3.2.2. élément infini de type 4
- 3.4. Calcul des matrices élémentaires de l'élément infini.
 - 3.4.1. La matrice rigidité élémentaire.
 - 3.4.2. La matrice masse élémentaire.
- 3.5. Formulation des éléments infinis en dynamique.

Chapitre 4 : IMPLEMENTATION DES ELEMENTS INFINIS

- 4.1. Introduction.
- 4.2. Implémentation numérique.
- 4.3. Applications de validation.
 - 4.3.1. Application 1 : conditions d'axisymétrie.
 - 4.3.1.1. Exemple 1 : éléments infinis de type 1 et 2, sans amortissement visqueux à l'interface des éléments finis-éléments infinis
51
 - 4.3.1.2. Exemple 2 : éléments infinis de type 3 et 4, sans amortissement visqueux à l'interface des éléments finis-éléments infinis
54
 - 4.3.1.3. Exemple 3 : éléments infinis de type 1 et 3, avec amortissement visqueux à l'interface des éléments finis-éléments infinis
56
 - 4.3.1.4. Exemple 4 : éléments infinis de type 1 et 3, avec amortissement visqueux à l'interface des éléments finis-éléments infinis et influence de la rigidité statique des éléments infinis.
 - 4.3.2. Application 2 : conditions de déformation plane.
 - 4.3.2.1. Exemple 1 : éléments infinis de type 1 et 3, sans amortissement

visqueux à l'interface éléments finis-éléments infinis.

4.3.2.2. Exemple 2 : éléments infinis de type 1 et 3, avec amortissement

visqueux à l'interface éléments finis-éléments infinis.

68

Chapitre 5 : CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

5.1. Conclusions.

5.2. Recommandations.

Annexe A

Annexe B

Bibliographie

Commentaire [GAS1]:

SYMBOLES ET NOTATIONS

U	Vecteur déplacement généralisé total.
\dot{U}	Vecteur vitesse généralisé total.
\ddot{U}	Vecteur accélération généralisé total.
$[M^*]$	Matrice de masse globale du système.
$[K]$	Matrice de rigidité globale du système.
$[C]$	Matrice d'amortissement.
F	Vecteur force d'excitation extérieure généralisée.
$\overset{\Rightarrow}{T}$	Tenseur de contrainte.
$\overset{\Rightarrow}{E}$	Tenseur de déformation.
σ_{ij}	Composantes du tenseur de contrainte.
ε_{ij}	Composantes du tenseur de déformation.
θ	Dilatation cubique.
ρ	Densité.
λ, μ	Constantes de Lamé.
E	Module de Young.
ν	Coefficient de Poisson.
grad	Gradient.
div	Divergence.
Δ	Opérateur Laplacien.
\overline{rot}	Pseudo-rotationnel.
δ_{ij}	Symbole de Kronecker.
ε_{ijk}	Pseudo-tenseur d'orientation.

V_p	Vitesse des ondes de compression.
V_s	Vitesse des ondes de cisaillement.
V_R	Vitesse des ondes de Rayleigh.
V_m	Vitesse moyenne de l'onde.
a, b	Constantes addimensionnelles de la frontière visqueuse.
TF	Transformé de Fourier.
$[K^d]$	Matrice d'impédance dynamique.
t	Temps.
Δt	Pas de temps.
Δt_{cr}	Pas de temps critique.
ξ, η	Coordonnées locales.
$[M]$	Fonction d'interpolation géométrique (déplacement).
$[N]$	Fonction de forme standard.
$[h]$	Fonction d'interpolation déplacement (géométrique).
$[q]$	Déplacement nodaux.
L	Longueur déterminant le taux de décroissance.
n	Puissance de décroissance.
ξ_0	Origine du pôle.
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire.
$[B]$	Matrice de déformation.
$[D]$	Matrice d'élasticité.
$[J]$	Matrice Jacobienne.
$[M_c]$	Matrice masse cohérente.
$[P]$	Matrice de passage du repère curviligne au repère global.
u_n, u_t	Déplacement généralisés suivant les directions normales et tangentielles.
$[D^*]$	Matrice facteur dans la matrice amortissement.
m_i	Composantes de la matrice masse diagonale.

c_i	Composantes de la matrice amortissement diagonale.
K_{ij}	Composantes de la matrice rigidité.
\ddot{u}_i^t	Accélération à l'instant t.
\dot{u}_i^t	Vitesse à l'instant t.
u_i^t	Déplacement à l'instant t.
$u_i^{t-\Delta t}$	Déplacement à l'instant t- Δt .
$u_i^{t+\Delta t}$	Déplacement à l'instant t+ Δt .
p_i^t	Force d'excitation à l'instant t.
a_1, a_2, a_3, a_4	Coefficients de l'algorithme de différence fini centrale.
m_i^*	Masse effective.
p_i^*	Force effective.
$u_i^0, \dot{u}_i^0, \ddot{u}_i^0$	Conditions initiales sur les déplacements, les vitesses et les accélérations.

LISTE DES FIGURES

	pages
Figure (2-1) Schématisation globale d'un système sol-structure en dynamique.	3
Figure (2-2) Onde de volume.	9
Figure (2-3) Onde de Rayleigh.	10
Figure (2-4) Onde de Love.	11
Figure (2-5) Conversion de l'onde P incidente sur une interface.	13
Figure (2-6) Conversion de l'onde SV incidente sur une interface.	13
Figure (2-7) Conversion de l'onde SH incidente sur une interface.	14
Figure (2-8) Incorporation d'une frontière visqueuse.	19
Figure (2-9) Implémentation des éléments infinis au champ lointain.	21
Figure (3-1) Représentation d'un F.E.S.C.	27
Figure (3-2) Représentation d'un élément infini unidimensionnel formulé par l'approche inverse	28
Figure (3-3) Représentation radiale d'un élément infini unidimensionnel formulé Par l'approche inverse.	29
Figure (3-4) Construction d'un élément infini bidimensionnel formulé par l'approche inverse.	30
Figure (3-5) Représentation globale et locale d'un élément infini formulé par l'approche directe.	33
Figure (3-6) Construction d'un élément infini bidimensionnel formulé par l'approche directe.	34
Figure (3-7) Etude paramétrique de la fonction de forme de type exponentielle	36
Figure (3-8) Etude paramétrique de la fonction de forme de type puissance	37
Figure (3-9) Etude comparative entre deux fonctions de décroissances de type exponentiel et puissance.	38
Figure (3-10) Incorporation d'amortissement visqueux à l'interface FE-IE	42

Figure (4-1)	Organigramme d'implémentation des éléments infinis avec une frontière visqueuse.	48
Figure (4-2)	Schéma de référence, discrétisation du domaine semi-infini du domaine fini avec un maillage large 20x20 FE et une frontière fixe.	49
Figure (4-3)	Schéma de référence, déplacement vertical au point contrôle A sous une sollicitation soudaine.	50
Figure (4-4)	Schéma comparatif entre le modèle réduit avec des éléments infinis et le modèle réduit.	51
Figure (4-5)	Etude paramétrique de la réponse en A sous une sollicitation soudaine avec des éléments infinis formulés par l'approche inverse en fonction de la position du pôle.	52
Figure (4-6)	Réponse au point B sous une sollicitation soudaine avec implémentation d'éléments infinis IE_1.	53
Figure (4-7)	Réponse au point A sous une sollicitation soudaine obtenue avec des éléments infinis formulés par l'approche directe et différentes positions de pôle.	54
Figure (4-8)	Etude comparative de la réponse au point A sous une sollicitation soudaine avec des éléments infinis différents pour dif=3 et 10.	55
Figure (4-9)	Réponse au point A sous une sollicitation soudaine par une implémentation de IE_1 et IE_3.	55
Figure (4-10)	Incorporation des amortisseurs visqueux à l'interface FE-IE	56
Figure (4-11)	Influence de la frontière visqueuse sur la réponse au point A sous une sollicitation soudaine pour plusieurs dif	57
Figure (4-12)	Réponse au point A sous une sollicitation soudaine en fonction de la frontière visqueuse et la rigidité statique avec IE_1	58
Figure (4-13)	Réponse au point A sous une sollicitation soudaine en fonction de la frontière visqueuse et la rigidité statique avec IE_3	59
Figure (4-14)	Schéma de référence, maillage large M9x20	60
Figure (4-15)	Implémentation latérale des éléments infinis à des différentes positions 9, 12, 15m sous une sollicitation concentrée harmonique	61

Figure (4-16)	Déplacement au point A sous une sollicitation concentrée harmonique pour M9x9, M9x12, M9x15	62
Figure (4-17)	Vitesse au point A sous une sollicitation concentrée harmonique pour M9x9, M9x12, M9x15	63
Figure (4-18)	Accélération au point A sous une sollicitation concentrée harmonique pour M9x9, M9x12, M9x15	64
Figure (4-19)	Déplacement au point B sous une sollicitation concentrée harmonique pour M9x9, M9x12, M9x15	65
Figure (4-20)	Vitesse au point A sous une sollicitation concentrée harmonique pour M9x9, M9x12, M9x15	66
Figure (4-21)	Accélération au point A sous une sollicitation concentrée harmonique pour M9x9, M9x12, M9x15	67
Figure (4-22)	L'influence de la frontière visqueuse sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec $dif=10^5$ pour M9x9.	68
Figure (4-23)	L'influence de la frontière visqueuse sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec $dif=1$ pour M9x9.	69
Figure (4-24)	L'influence de l'extraction de la rigidité statique sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec $dif=10^5$ pour M9x9.	69
Figure (4-25)	L'influence de l'extraction de la rigidité statique sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec $dif=1$ pour M9x9.	70
Figure (4-26)	L'influence de l'extraction de la rigidité statique sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec $dif=0.25$ pour M9x9.	70

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (A-1)	Table des abscisses et leurs poids d'intégration numérique de Gauss-Laguerre	75
---------------	---	----

Chapitre 1

INTRODUCTION GENERALE

1.1. Introduction

La plupart des problèmes d'engineering tel que l'interaction dynamique sol-structure, fluide-structure, la consolidation, l'écoulement visqueux, et la radiation des ondes électromagnétiques, présentent un milieu infini, dont il s'avère très difficile de trouver des solutions analytiques en tout point du milieu sujet à l'étude.

Seul le recours au méthode numérique tel que la méthode des éléments finis [5,17,20,26,59,60], permet d'évaluer le comportement réel du système.

Le principe de la méthode des éléments finis est la discrétisation du domaine semi-infini, remplaçant la partie qui tend vers l'infini par une frontière artificielle [2,15,27,28,45,47,48].

Cette dernière devra être absorbante, dans le cas contraire les réflexions d'ondes ainsi occasionnées par ce type de modélisation ne pourront pas être radiées, ce qui mène à des résultats erronés.

L'approche développée dans le présent travail de recherche consiste à discrétiser le champ proche par des éléments finis et le champ lointain par des éléments infinis [12,23,25,58,62].

L'utilisation des éléments infinis permet de modéliser le comportement du champ lointain.

Par conséquent la dimension du champ proche est réduite et le système est caractérisé par une diminution importante des degrés de liberté conduisant à une économie considérable de temps machine et d'espace mémoire.

En dynamique le modèle nécessite une incorporation d'une frontière absorbante de type Lysmer-Kuhlemeyer au niveau de l'interface éléments finis-éléments infinis afin de simuler au mieux la radiation d'onde à l'infini (d'ou l'appellation adéquate « élément infini absorbeur ») [25].

Le modèle est validé avec des tests bidimensionnels et comparé aux résultats déjà publiés [47,48].

1.2. Présentation de la thèse

La thèse est divisée en cinq chapitres présentés comme suit :

Le premier chapitre présente une introduction générale exposant la problématique et définissant les objectifs de cette recherche.

Le deuxième chapitre énonce les bases théoriques liées à la dynamique des sols telles que : la propagation d'onde, la simulation d'un milieu semi-infini et la méthode d'analyse du domaine non borné.

On expose dans le troisième chapitre la formulation des éléments infinis en dynamique censés représenter physiquement la partie infinie manquante.

Le quatrième chapitre présente l'élaboration des procédures de calcul, ainsi que leur codification permettant la détermination de la réponse en chaque point de la zone d'analyse, avec un éventail d'applications qui touchent à des problèmes variés.

Une étude paramétrique utilisant quatre type d'éléments infinis est présentée.

Le cinquième chapitre représente une synthèse générale, les conclusions auxquelles nous avons abouti lors de ce travail de recherche ainsi que les recommandations pour des travaux futurs.

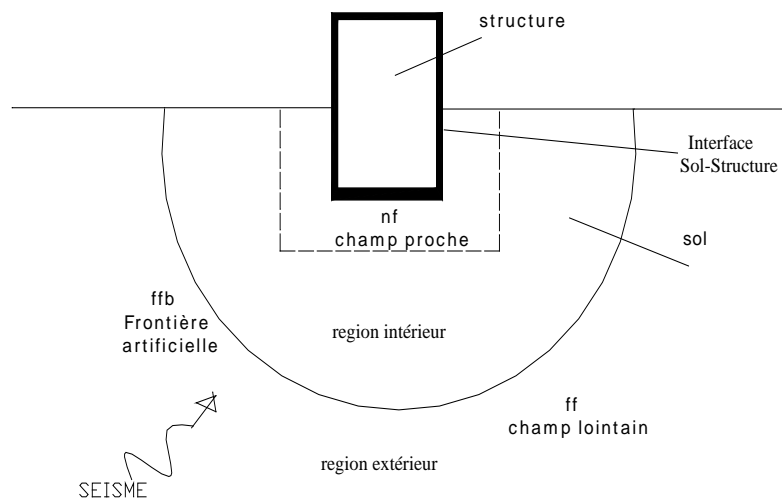
Chapitre 2

NOTION DE DYNAMIQUE DES SOLS

2.1. Introduction

L'évaluation de la réponse d'un profil sol à une sollicitation dynamique (séisme, explosion, ...) représentée sur la figure (2-1) constitue l'un des problèmes fondamentaux du génie parasismique.

La détermination de la réponse du sol à une excitation dynamique pose des problèmes spécifiques liés à la fois à la nature du mouvement incident et à la nature du milieu dans lequel il se propage.



**fig (2-1) : Schématisation globale
d'un système Sol-Structure en dynamique**

2.2. Formulation du problème

Le comportement du sol sous un chargement dynamique varie avec le temps et sa détermination présente un intérêt primordial d'où la notion de l'histoire dans le temps.

Mathématiquement le problème à résoudre est celui de la propagation d'onde dans un milieu continu, il devient rapidement complexe avec l'introduction de l'hétérogénéité du sol ou de son comportement non-linéaire.

La mise en œuvre de solutions numériques nécessite la résolution des étapes suivantes :

- Choix de la nature et de la direction de propagation de l'onde incidente.
- Choix de la modélisation du milieu.
 - Discrétisation du milieu.
 - Choix de la loi de comportement du sol (viscoélastique linéaire équivalente, non-linéaire).
- Détermination des conditions aux limites.
- Choix d'une méthode d'intégration : intégration dans le domaine fréquence ou intégration pas à pas dans le temps.

2.1.1. Equation du mouvement

Soit le système illustré dans la figure(2-1), qui met en évidence les facteurs entrant en considération dans l'analyse.

Le système sol-structure est soumis à des sollicitations extérieures, tel que une charge dynamique ou un séisme.

Concernant le domaine d'analyse on introduit deux concepts relative au sol, tel que le champ proche (nf) considéré comme une zone irrégulière où le comportement est non-linéaire, et le champ lointain (ff) une zone régulière où le comportement du sol est linéaire, pour l'analyse du domaine on est ramené en premier lieu de passer du domaine non borné à un domaine borné, d'où la nécessité de le tronquer par en une frontière au champ lointain (ffb).

Le problème à résoudre, est donc celui défini par l'équation de mouvement suivante :

$$[M^*]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U = F(t) \quad (2-1)$$

avec :

[K] : matrice de rigidité du système basée sur l'assemblage de tous les éléments finis et autres éléments spéciaux du domaine à discrétiser.

[M*] : matrice masse du système (dans notre cas on utilise une matrice diagonale).

[C] : matrice d'amortissement visqueux incorporée selon la simulation du problème.

U, \dot{U}, \ddot{U} : vecteur déplacement, vitesse, accélération.

F(t) : vecteur force d'excitation extérieure généralisée.

2.2.2. Théorie de propagation d'onde

Les sollicitations dynamiques soudaines et de courte durée induisent une radiation d'ondes à partir de la source d'excitation tout au long du profil de sol, d'où la notion de propagation d'ondes qui prend naissance, entraînant une réponse du sol.

La compréhension du phénomène physique en question exige l'utilisation des outils telles que la théorie de l'élasticité, la physique vibratoire et le traitement du signal [1,42].

2.2.2.1. Propagation d'onde dans un milieu infini

Mathématiquement le problème à résoudre est celui de la propagation d'ondes dans un milieu continu, sol homogène, isotrope et présentant un comportement qui est supposé élastique.

a) Equation de mouvement

La loi de Hooke [50] exprime une relation de proportionnalité entre contraintes et déformations (Elasticité Linéaire) formulée par :

$$\vec{T} = \lambda E_1 \vec{I} + 2\mu \vec{E} \quad (2-2)$$

avec \vec{T} : tenseur de contrainte

\vec{E} : tenseur de déformation

\vec{I} : tenseur identité

E_I : premier invariant de \vec{E} :

De l'équation (2-2) on a aussi sous forme indicée :

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2-3)$$

avec $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = E_I$ dilatation volumétrique (dilatation cubique).

λ, μ sont les coefficients de Lamé tel que :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2-4)$$

δ_{ij} : symbole de Krônecker

E : module de Young

ν : coefficient de Poisson

Les équations géométriques sont simplifiées par l'expression :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-5)$$

En générale le mouvement est gouverné par l'équation :

$$\text{div} \vec{T} + \rho \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad (2-6)$$

avec ρ : masse volumique du milieu

\vec{T} : tenseur de contrainte

\vec{f} : force volumique (dans notre cas c'est la force gravitationnelle)

$\vec{\gamma}$: vecteur accélération

L'équation (2-6) équivaut aussi sous forme d'indice à :

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \gamma_i \quad (2-7)$$

Remarque

En négligeant les forces de volume, l'équation (2-7) devient :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2-8)$$

La réponse du sol sous charge dynamique est régit autrement par l'équation aux dérivées partielles [1] :

$$(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} - \rho \ddot{\vec{u}} = \vec{0} \quad (2-9)$$

Dans un milieu infini il existe deux ondes seulement (ondes de volume) :

- **L'onde P** : onde longitudinale (onde de dilatation ou primaire), est caractérisée par la dilatation cubique θ , où le mouvement est irrotationnel.
- **L'onde S** : onde transversale (onde de cisaillement, secondaire), est caractérisée par la distorsion $\vec{\Omega}$, tel que

$$2\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{u} = \underline{\text{grad}} \vec{u} - \text{grad} \vec{u} \quad (2-10)$$

et simplifiée par :

$$2\Omega_i = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} = (u_{k,j} - u_{j,k})_i \quad (2-11)$$

où le mouvement est rotationnel désigné par :

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} = 0 \quad (2-12)$$

b) Solution découplée de l'équation de mouvement

La résolution de l'équation (2-9) est difficile dans la mesure où les trois déplacements sont couplés dans une même équation.

Une meilleure approche consiste à appliquer le concept de décomposition vectorielle d'Helmholtz au champ inconnu \vec{u} , en faisant intervenir la dilatation cubique θ et la distorsion $\vec{\Omega}$, nous ramène à l'existence des ondes de volume.

Le champ de déplacement peut être interprété alors comme étant la somme d'un champ irrotationnel et d'un champ rotationnel.

Onde de dilatation

Le premier terme nous conduit au résultat suivant :

$$\Delta \theta - \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (2-13)$$

avec V_p la célérité de propagation de l'onde primaire tel que :

$$V_p^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad (2-14)$$

La résolution de l'équation (2-13) [1,42] conduit à :

$$\theta = A \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{V_p} \right) \right] \quad (2-15)$$

avec \vec{n} normale au front d'onde, $\|\vec{n}\| = 1$

Onde de distorsion

Le deuxième terme nous conduit à l'équation vectorielle suivante :

$$\Delta \vec{\Omega} - \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (2-16)$$

avec V_s , la célérité de propagation de l'onde secondaire tel que :

$$V_s^2 = \frac{\mu}{\rho} = \frac{G}{\rho} \quad (2-17)$$

la résolution de l'équation (2-16) [1,42] conduit à :

$$\vec{\Omega} = \vec{B} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{V_s} \right) \right] \quad (2-18)$$

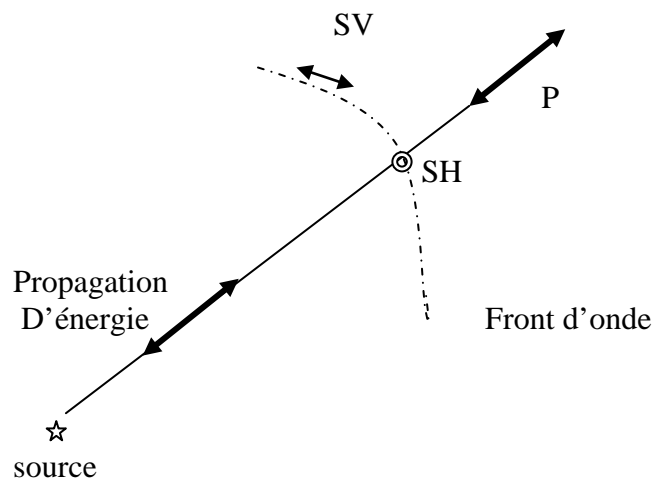


figure (2-2) : Onde de volume

L'onde secondaire est partagée en deux composantes :

- Onde secondaire horizontale (SH) entraînant le mouvement des particules dans le plan horizontal.
- Onde secondaire verticale (SV) entraînant le mouvement des particules dans le plan vertical.

Remarque

Lors du passage de l'onde S, l'onde est dite polarisée.

2.2.2.2. Propagation d'onde proche d'une surface libre

Le milieu semi-infini est caractérisé par des conditions aux limites : surface libre ($z=0$), et apparition à ce niveau d'ondes de surface.

Onde de Rayleigh

Rayleigh a montré que le long de la surface libre limitant un demi-espace homogène isotrope et élastique, des ondes peuvent être transmises [1].

Les particules du milieu subissent un mouvement elliptique et rétrogradé par rapport à la direction de propagation comme on le constate sur la figure (2-3).

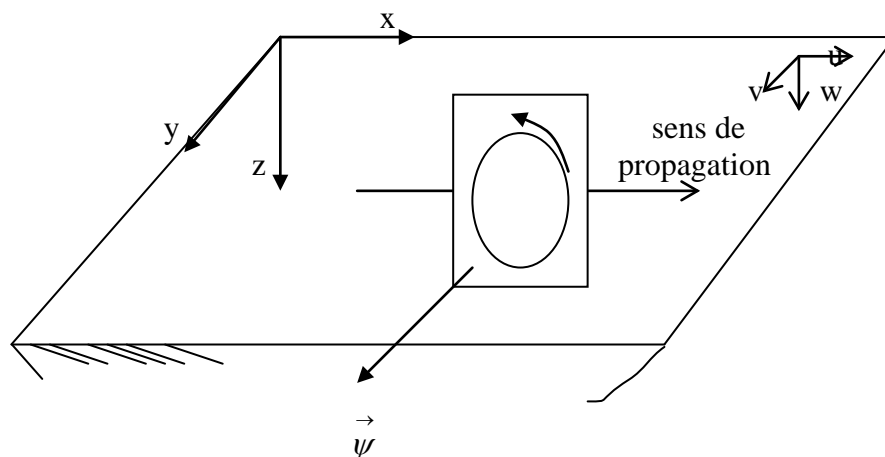


figure (2-3) : Onde de Rayleigh

Les conditions aux limites à la surface libre ($z=0$)

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2-19)$$

d'où on obtient :

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \sigma_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2-20)$$

à partir des résultats (2-20) on peut déduire l'existence d'une onde dans le plan (xz) onde de Rayleigh avec une célérité V_R qui sera déterminée par l'équation :

$$\left(\frac{V_R^2}{\beta^2}\right)^3 - 8\left(\frac{V_R^2}{\beta}\right)^2 + \left(24 - 16\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{V_R^2}{\beta^2} - 16\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = 0 \quad (2-21)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = V_P \\ \beta = V_S \end{cases}$$

la résolution de l'équation (2-21) nous donne :

$$V_R \approx \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} V_S \quad (2-22)$$

Remarque

- ✓ On a également montré que de tels types d'ondes prennent naissance même si la limite n'est pas libre ou le milieu n'est pas homogène.

Onde de Stoneley : onde se propage le long de l'interface séparant deux milieux épais.

- ✓ Les célérités V_P, V_S, V_R ne dépendent que des caractéristiques du sol seulement λ, μ, ρ

Onde de Love

L'onde de Love est une onde superficielle transversale (onde de cisaillement) onde SH secondaire comme on le constate sur figure(2-4).

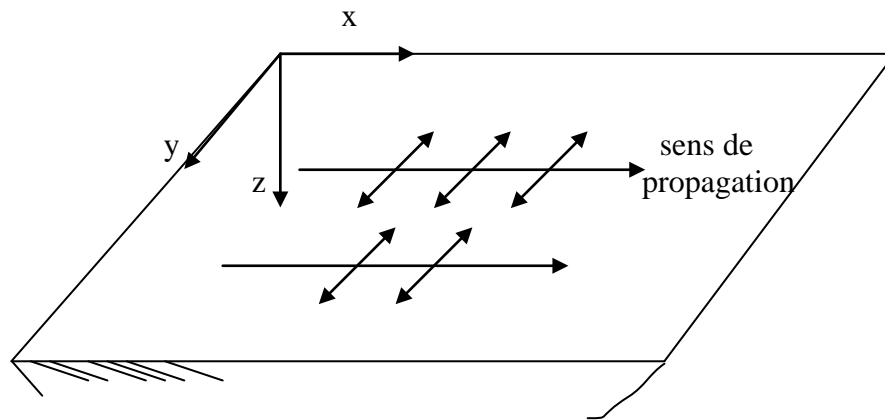


figure (2-4) : Onde de Love

L'onde peut être à la surface libre, et à l'interface des deux couches

Remarque

- ✓ Les ondes de Love à l'interface de deux couches ne peuvent exister que si la vitesse de propagation des ondes de cisaillement est plus petite dans la couche supérieure que la couche inférieure.
- ✓ La vitesse des ondes de Love est fonction de G, ν, ρ, ω

2.2.2.3. Conversion d'ondes

Quand une onde incidente heurte une surface de discontinuité des caractéristiques mécaniques séparant deux milieux, il se produit deux phénomènes la réflexion et la réfraction semblable à l'optique.

➤ Réponse l'onde P à l'interface des deux milieux :

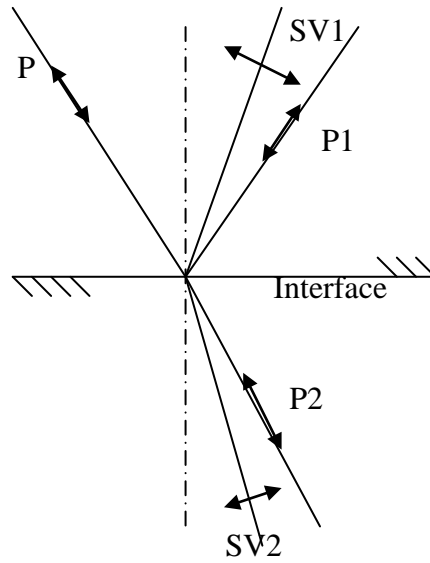


figure (2-5) : Conversion de l'onde P incidente sur une interface

L'onde incidente P à l'interface produit les ondes réfléchies SV1, P1 et les ondes réfractées SV2, P2.

➤ Réponse l'onde SV à l'interface des deux milieux :

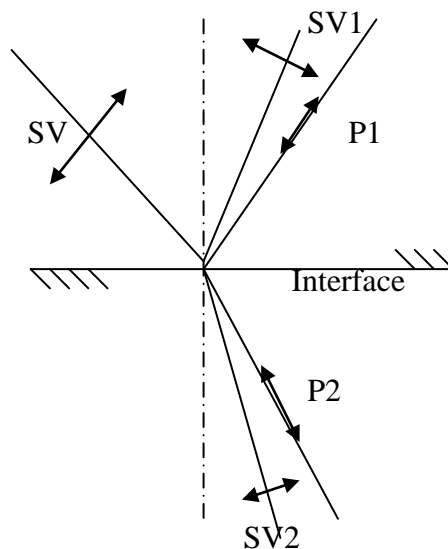


figure (2-6) : Conversion de l'onde SV incidente sur une interface

L'onde incidente SV à l'interface produit les ondes réfléchies SV1, P1 et les ondes réfractées SV2, P2.

➤ Réponse l'onde SH à l'interface des deux milieux :

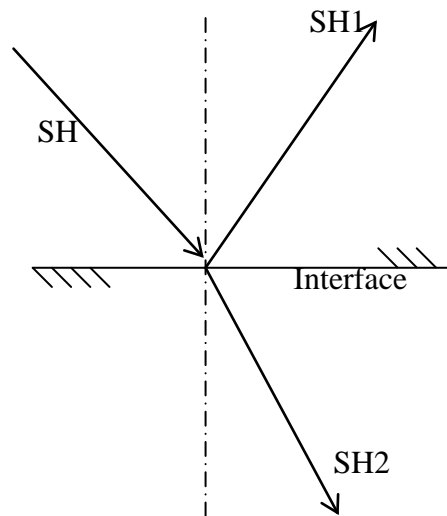


figure (2-7) : Conversion de l'onde SH incidente sur une interface

Pour ce dernier cas l'onde incidente SH ne produit pas à l'interface des ondes P.

2.2.3. Résolution d'équation de mouvement

La résolution de l'équation du mouvement (2-1) est complexe principalement lorsqu'il s'agit d'un domaine semi-infini, on cite quelques remarques :

- La variation des caractéristiques du sol avec la profondeur, par exemple le module d'élasticité tel que $E=E_0.z^n$
avec E_0 : module de Young à la surface.
 z : profondeur.
 n : paramètre.
- Un sol hétérogène ou stratifié.
- Mécanique des sols (sol élastique, sol élasto-plastique,...).
- Dynamique des sols (comportement hystérésis).
- Interaction dynamique sol-structure.
- Modélisation du champ lointain évitant les perturbations de la zone d'étude dues à la réflexion.

- Le procédé complexe du mouvement engendré par la propagation d'onde.

La résolution de l'équation de mouvement (2-1) est traitée par deux philosophies différentes, chacune d'elles a ses avantages et ses inconvénients liée aux conditions d'applications.

2.2.3.1. Analyse dans le domaine fréquentiel

Cette méthode est basée sur la résolution de l'équation de mouvement (2-1) dans le domaine des fréquences, mais elle est limitée aux problèmes linéaires puisqu'elle est basée sur l'application du principe de superposition.

On utilise la transformation de Fourier qui permet le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel, exprimée par :

$$TF(F(t)) = \int_0^{+\infty} F(t) \cdot \exp(-\omega t) dt = \hat{F}(\omega) \quad (2-23)$$

L'application de la transformée de Fourier (2-23) sur l'équation (2-1) donne une forme simple :

$$[\mathbf{K}^d] \cdot \hat{U} = \hat{F} \quad (2-24)$$

avec $\mathbf{TF}(\mathbf{U}) = \hat{U}$ et $\mathbf{TF}(\mathbf{F}) = \hat{F}$

$[\mathbf{K}^d]$ est la matrice d'impédance dynamique, on la trouve également dans la littérature encore sous cette forme $[\mathbf{S}]$

$$[\mathbf{K}^d] = [\mathbf{K}] - \omega^2 \cdot [\mathbf{M}] + i\omega \cdot [\mathbf{C}] \quad (2-25)$$

La matrice d'impédance dynamique à la fréquence nulle correspond à la matrice de rigidité statique $[\mathbf{K}^d(\omega = 0)] = [\mathbf{K}]$.

Pour la résolution de l'équation (2-24) on utilise soit la méthode des différences finies, soit la méthode des éléments finis, il convient de respecter certaines restrictions pour fournir une précision acceptable.

D'importants facteurs doivent être considérés, à savoir la dimension et la forme des éléments, la modélisation de l'amortissement interne ou un mécanisme pour la dissipation de l'énergie, et des conditions aux limites appropriées dans un domaine fini.

2.2.3.2. Analyse dans le domaine temporel

Cette méthode est applicable également pour un comportement non linéaire dû à la loi de comportement d'un des matériaux (sol le plus souvent) ou aux interfaces sol-structure (décollement ou glissement d'ouvrages sur leur fondation).

1) méthode implicite :

L'équation différentielle est exprimée à l'instant t_{i+1} ($t + \Delta t$), et la solution est obtenue en résolvant un système d'équation algébrique (méthode de Hilbert, Taylor, θ -Wilson,...) avec une stabilité inconditionnelle [4].

2) méthode explicite :

La solution obtenue à l'instant t_{i+1} ($t + \Delta t$) par rapport au système d'équation de mouvement à l'instant t_i (t).

Il existe un pas de temps critique au delà de ce dernier la solution est amplifiée artificiellement, en conséquence la stabilité est conditionnelle.

Le pas de temps est choisi tel que :

$$\Delta t < \Delta t_{cr} \quad (2-26)$$

On opte dans toute notre étude, pour la méthode des différences finies centrales pour l'intégration numérique pas à pas de l'équation (2-1) voir l'annexe B.

On peut contrôler la stabilité de convergence vers la solution en respectant la condition (2-26), et le pas de temps critique est déterminé par [17] :

$$\Delta t_{cr} = \frac{T_{\min}}{\pi} \quad (2-27)$$

La période minimale est

$$T_{\min} = \frac{Le}{V_m} \quad (2-28)$$

$Le = \min(lx, ly)$, où lx et ly sont les dimensions de l'élément fini.

La célérité moyenne est :

$$V_m = \frac{V_p + V_s}{2} \quad (2-29)$$

Le pas de temps est choisi selon [17] :

$$\Delta t = \alpha \frac{T_{\min}}{\pi} \quad (2-30)$$

on prend $\alpha=0.25$

2.3. Etat d'art en matière de modélisation du sol domaine semi-infini

La plupart des problèmes de géotechnique sont cernés par un milieu semi-infini et le but est de le modéliser en un domaine borné.

En premier lieu le milieu est tronqué par une frontière artificielle avec des conditions aux limites appropriées.

Dans le cas statique le champ lointain est tronqué par de multiples frontières (fixe, rotule, ...) traduisant un déplacement nul ou une contrainte nulle localisée à une distance lointaine afin d'avoir des résultats significatifs.

Par contre en dynamique d'autres phénomènes surgissent tel que la propagation d'onde.

Luco et al [33] ont comparé la solution basée sur la méthode des éléments finis avec un amortissement matériel parasite à la solution analytique des problèmes de propagation d'ondes, en conséquence l'incorporation de cet amortissement dans le modèle d'éléments finis ne simule pas correctement la radiation de l'énergie dans le milieu infini, en réalité l'amortissement matériel conduit à une atténuation de l'amplitude de l'onde cependant l'implémentation n'est pas claire.

Dans la seconde modélisation, le domaine semi-infini est ainsi tronqué par une frontière artificielle de transmission, jouant le rôle de l'effet radiatif des ondes en dehors du modèle borné.

De nombreux travaux ont pris naissance afin de cerner le problème de radiation à la ffb.

2.3.1. Frontière élémentaire

C'est la plus simple des frontières, on introduisant des conditions aux limites à la ffb, en lui prescrivant soit un déplacement nul, soit une contrainte nulle.

1 - Conditions aux limites de type Dirichlet (D) :

$$u_i = 0 \quad (2-31)$$

2- Conditions aux limites de type Neuman (N) :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (2-32)$$

3- Conditions aux limites de type Robin (D,N) (combinaison de 1 et 2)

C'est une frontière parfaitement réfléchissante (violation du critère radiation d'onde).

2.3.2. Frontière locale

En premier lieu, Lysmer et Kuhlmeyer ont introduit le concept de la frontière absorbante pour les ondes élastique [35].

Pour éviter la réflexion des ondes, on introduit la notion de dissipation d'énergie, et l'artifice qui absorbe l'énergie incidente est un amortisseur visqueux.

Le principe est de connecter à la ffb du modèle un amortissement visqueux voir figure (2-8), dont les caractéristiques sont en fonction des propriétés mécanique du sol au voisinage.

La frontière visqueuse est facile à implémenter dans le code de calcul numérique et reste valable pour le domaine temporel et fréquentiel.

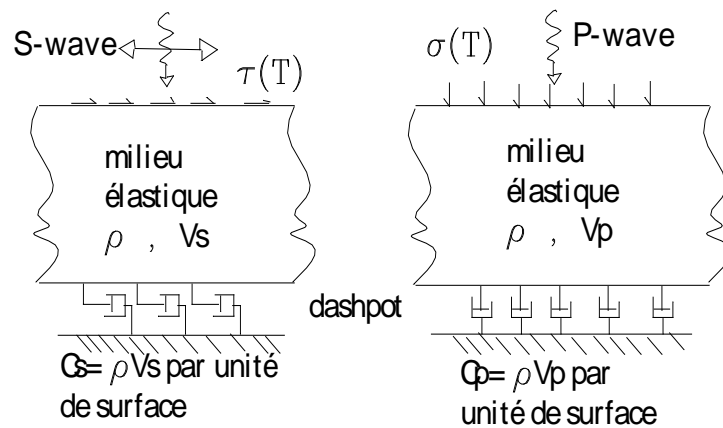


figure (2-8) : Incorporation d'une frontière visqueuse

Les contraintes qui se développent à la ffb sont :

$$\begin{cases} \sigma = a\rho V_p \dot{u} \\ \tau = b\rho V_s \dot{v} \end{cases} \tag{2-33}$$

White et al. [56] ont travaillé sur la variation des coefficients a et b, afin de maximiser l'efficacité de la ffb quel que soit le coefficient de poisson ν , ils ont montré que si $a=b=1$ avec $\nu = 0,25$ l'énergie d'absorption par unité de surface de l'onde P est de 98.5% et de l'onde S est de 95%.

La frontière visqueuse possède des absorbeurs parfaits pour les ondes normales et planes, sauf qu'elle présente une déficience pour une incidence inclinée (l'absorption n'est pas totale).

Elle est insatisfaisante dans le cas des ondes de Rayleigh, qui présentent une dépendance vis à vis de la fréquence.

Cependant il existe d'autres absorbeurs pour le cas des ondes de Rayleigh.

Plusieurs frontières ont été développées [28] en tenant compte des différents facteurs (absorption d'onde, non-réflexion, transmission) par de nombreux auteurs :

White et al., Akiyoshi , Ang. And Newmark, Lindman, Engquist et Majda (pour les ondes scalaires).

Clayton et Engquist (frontière para-axiale pour les ondes élastique), Smith, modifier par Cundall et al., Kunar et al.

La plus récente Liao, Liao and Wong, dont le mouvement à la ffb est déterminé en extrapolant le mouvement du point voisin de cette frontière précédent dans le temps[27].

2.3.3. Frontière consistante

Ces frontières ont été initialement développées par Lysmer-Waas et Waas, pour les ondes planes, elles ont été étendues au cas de problème à symétrie de révolution par Kausel, Kausel et al.[42].

C'est une frontière non locale en espace et en temps, elle absorbe parfaitement tous les types d'ondes et quel que soit l'angle d'incidence.

Ces frontières peuvent être interprétées comme résultat de la condensation de tous les degrés de liberté située au-delà des frontières du modèle.

L'analyse se fait dans le domaine des fréquences, et l'inconvénient pour ce genre d'analyse est limité pour le problème linéaire.

2.3.4. Méthode des équations intégrales aux frontières

La modélisation du sol peut se faire par la méthode des équations intégrales aux frontières appliquée aux problèmes de l'élastodynamique.

La formulation intégrale transforme les équations de l'élastodynamique en relations intégrales entre vecteurs déplacements et vecteurs contraintes sur la frontière du domaine considéré.

La méthode offre les avantages suivant :

- ❖ Seul le contour est discrétisé, en conséquence le nombre d'inconnus est réduit se trouvant sur la frontière et non à l'intérieur du domaine
- ❖ Les conditions de radiation des ondes à l'infini sont incluses dans la formulation de manière inséparable et n'exigent donc pas l'introduction d'équations supplémentaires à cet effet.

La méthode peut s'appliquer dans le cas d'un sol non homogène et devienne très intéressante en tridimensionnel.

2.3.2.5. Eléments infinis

Au lieu de prescrire des conditions à la ffb, on implémente à cette dernière des éléments infinis, obtenant un couplage FE-IE pour un comportement dynamique quelconque.

Le but de la présente thèse comme on le constate sur la figure (2-9), est de modéliser le champ lointain par des éléments infinis, ce qui permet de réduire la dimension du champ proche.

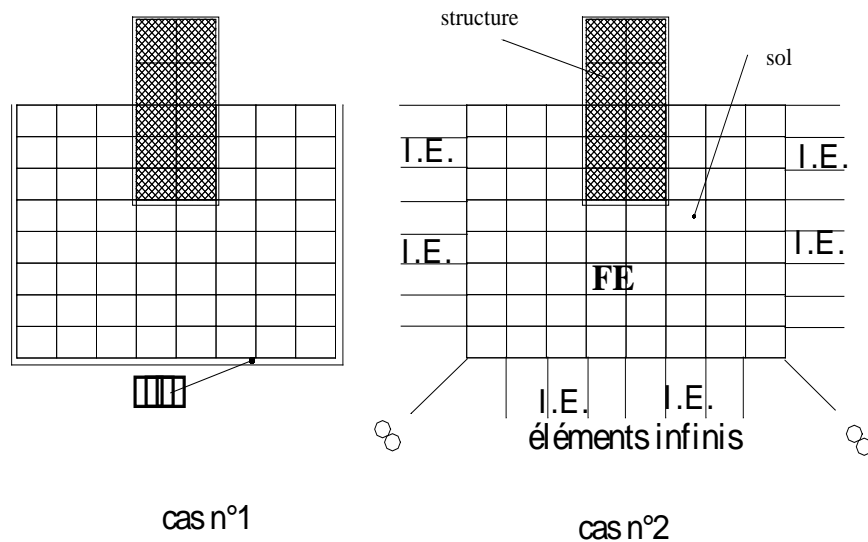


figure (2-9) : Implémentation des éléments infinis au champ lointain

De nombreux travaux ont été élaborés sur ce thème, aussi bien dans le domaine fréquentiel que temporel, ils ont débuté en statique puis ont fait une expansion en dynamique.

Le seul problème est de définir les fonctions d'interpolation géométrique de l'élément infini ; ainsi que les conditions appropriées à l'interface FE-IE.

La technique est de ne pas contourner la méthode des éléments finis (discrétisation du milieu continue semi-infini), en appliquant le principe du résidu pondéré ou le principe variationnel.

Les éléments infinis doivent satisfaire aux mêmes conditions que les éléments finis (conforme) en plus de la prise en considération du phénomène de radiation des ondes à l'infini (non-réflexion des ondes à l'interface FE-IE).

Chapitre 3

FORMULATION DES ELEMENTS INFINIS EN DYNAMIQUE

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, on expose le développement d'un modèle mathématique qui assume la représentation d'un domaine semi-infini en dynamique sans passer uniquement par le biais d'une frontière artificielle.

Pour l'analyse par éléments finis, on représente le champ lointain par des éléments infinis pour obtenir en fin de compte à une analyse similaire à celle d'un domaine fini.

Le résultat dépendra du choix des fonctions d'interpolation de l'élément infini et de la solution apporté au problème de radiation à la localité de l'interface FE-IE.

3.2. Etude bibliographique

La formulation des éléments infinis est basée essentiellement sur l'extension du domaine des éléments finis, d'ou la nécessité du choix des fonctions de forme et les moyens d'intégration numérique sur un domaine infini.

Les premiers éléments infinis apparus ont été produit par Ungless et Anderson sont nommés « élément fini-infini », la formulation de cet élément est basée sur l'utilisation d'une variation de la forme $(\frac{1}{1+r})$ dans la direction radiale [3].

Le premier travail publié sur les éléments infinis était celui de Zienkiewicz et Bettess [61], dans cette formulation, le domaine des éléments est étendu jusqu'à l'infini, les fonctions de forme standard sont donc multipliées par des fonctions décroissantes (decay function) [62].

La formulation de ces éléments a suivi deux principaux axes de développement, primo la transformation de l'élément d'un domaine borné à un domaine infini, secondo l'utilisation des fonctions de forme ordinaire.

Bettess [9] a utilisé les éléments infinis pour des applications liées aux problèmes de mécanique des fluides où la transformation de l'élément infini est différente, ainsi en utilisant n'importe quel élément fini comme base, les fonctions de forme sont ensuite multipliées par des fonctions de décroissances appropriées aux problèmes traités et qui sont de type exponentiel ou puissance [11,12].

Bettess et Zienkiewicz [10] ont utilisé les éléments infinis pour les problèmes de diffraction et réfraction des surfaces d'ondes, dont la fonction de forme a été corrigé par le terme $e^{\frac{-\xi}{L}} e^{ik\xi}$ avec L : Le taux de décroissance.

et k : Le nombre d'onde.

L'intégration numérique dans le sens ξ , consiste à utiliser la quadrature de Gauss-Laguerre.

Medina [38,39] a pris des éléments infinis dans le domaine fréquentiel, appliqués aux problèmes d'axisymétrie. Il s'intéressait à l'absorption de nombreuses ondes P, S et R.

Il introduit une fonction de forme de type $e^{-(\gamma+ikd)\xi}$.

avec γ : est une constante positive qui tend vers zéro.

k : nombre d'onde, $k=\omega/V$.

d : coordonné du nœud de l'élément.

Kumar [30] a utilisé les éléments infinis pour l'analyse de la chaussée flexible.

Beer et Meek [8] pour des raisons d'intégration numérique Gauss-Legendre, ont utilisé une transformation incluant un terme $\frac{1}{1-\xi}$, et qui transforme le domaine ξ fini en un domaine x infini.

Beer est l'un des pionniers pour leur application en géotechnique et les problèmes de mine.

Zienkiewicz et al. [62] ont proposé des éléments infinis faciles à incorporer au code numérique.

Lynn et Haddid [34] utilise une interpolation de type Lagrange, mais avec un terme $1/r$.

Curnier [18] utilise des éléments infinis en statique, en introduisant deux approches, approche directe et inverse (obtention d'un élément infini à partir d'un élément fini isoparamétrique).

Marques et Owen [36,37] utilisation des éléments infinis en statique pour un matériel non linéaire (élasto-viscoplastique).

Kumar [29] a utilisé des éléments infinis à 5 nœuds formulés par la méthode inverse avec un terme $(\frac{1}{1-\xi})$.

La fonction de forme est obtenue en modifiant la fonction de forme usuelle par une fonction de décroissance de type $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{\sqrt{r}}$, et les a utilisé pour un milieu non-homogène et anisotrope [32].

Rajapaske et al. [45] ont utilisé les éléments infinis elastostatique pour les domaines semi-infinis multicouches.

Haggblad et al. [25] ont utilisé les éléments infinis pour la modélisation non-linéaire de l'interaction sol structure avec formulation dans le domaine temporel.

Donida et al. [21] les ont utilisés pour les problèmes de géomécanique, et pour un solide élastique semi-infini en dynamique.

Zhang et al. [57] ont utilisé les éléments infinis pour un modèle numérique du domaine semi-infini.

Godbole et al. [23] ont analysé l'interaction sol structure non - linéaire par le couplage de FE-IE de type $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{\sqrt{r}}$ pour une fondation rigide et flexible.

Viladkar et al. [53] ont proposé de nouveaux éléments infinis tridimensionnels par l'approche inverse ; et une étude du comportement de l'élément infini pour un milieu élasto-plastique [52].

Zhang et al. [58] utilisent un modèle couplé éléments finis – éléments infinis – éléments de frontière – éléments infinis de frontière (FE-IE-BE-IBE) pour une analyse non linéaire de l'interaction sol structure, dont il simule la radiation latérale des ondes SV et P.

Pour la formulation de fonction de forme, on fait apparaître un terme d'onde $\frac{1+\xi}{2}\lambda + (m-1)\lambda$ avec $m=1,2,3,\dots$

et la fonction de forme est de type $N \propto \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-ikr}$

avec λ longueur d'onde et k nombre d'onde.

3.3. Formulation des éléments infinis

La difficulté qui réside dans la formulation paramétrique, est l'intégration numérique et les conditions d'applications [9,11,62].

La clé du succès pour définir la fonction de forme de l'élément infini en dynamique est :

- Satisfaire les conditions de compatibilité et de complétude [38].
- Fonction de forme conduise à des valeurs finis à l'infini (finitude).
- Problèmes de radiation.

Remarque

- Violation du critère (finitude) conduisant à une intégrale non fini.
- Violation de radiation, une partie d'énergie n'est pas radiée à l'interface FE-IE ce qui donne des résultats erronés (dispersions).

La technique de formulation dérive de la méthode des éléments finis, la discrétisation du milieu continue non borné, est assuré par le biais du théorème des résidus pondérés ou le principe variationnel.

On va commencer par introduire des éléments infinis en statique [18], puis s'étendre au cas de la dynamique [10,12,22,23,25].

La formulation de ces nouveaux types d'éléments, conduit à deux axes de développement principaux :

- Une approche inverse.
- Une approche directe.

Remarque

Quel que soit le développement de l'élément infini, il n'est pas isoparamétrique.

3.3.1. Approche inverse

Pour des raisons de commodités lors de l'incorporation des éléments infinis, dans le cadre de programmation d'éléments finis, on choisira pour l'intégration numérique (quadrature de Gauss-Legendre) de passer de l'intervalle $[-1, +\infty[$ à l'intervalle $[-1, +1]$, on introduit ainsi la notion de (Finite Element by Singular Contraction) F.E.S.C.

Les coordonnées naturelles sont à l'intérieur de l'élément usuel, il est impératif de garder la fonction de forme standard pour la variable déplacement, mais ressortir des fonctions de forme de croissances (Ascent-shape function) avec une singularité sur la frontière.

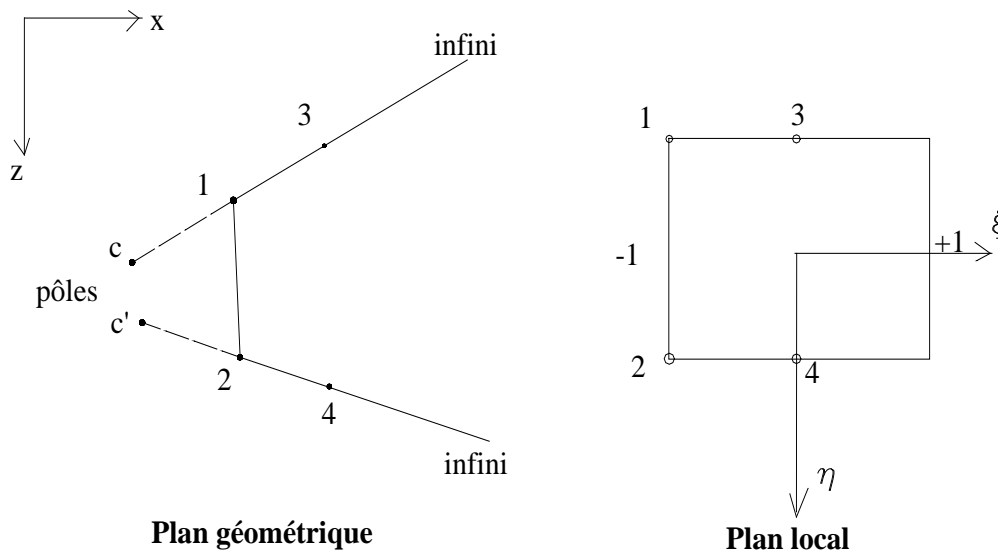


figure (3-1) : Représentation d'un FESC

La formulation a été établie par Zienkiewicz et al. et arrangé par Beer et Meek.

3.3.1.1. Élément infini de type 1

Cas unidimensionnel

On a un point singulier $\xi=+1$ ($x \rightarrow +\infty$), la transformation qui lie le domaine infini x à un domaine fini ξ est représenté sur la figure(3-2).

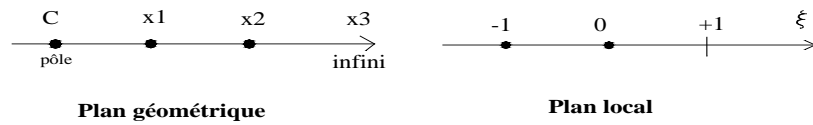


figure (3-2) : Représentation d'un élément infini unidimensionnel formulé par l'approche inverse

avec les conditions aux limites appropriées l'interpolation des coordonnées géométrique en fonction des coordonnées des nœuds est :

$$x = M_1 x_1 + M_2 x_2 = \frac{-2\xi}{1-\xi} x_1 + \frac{1+\xi}{1-\xi} x_2 \quad (3-1)$$

On a bien $M_1 + M_2 = 1$

inversement on obtient $\xi = 1 - \frac{2(x_2 - x_1)}{x - 2x_1 + x_2}$

Avec $x_2 = 2x_1$ par rapport au pôle C , et par conséquent :

$$\xi = 1 - \frac{2x_1}{x} \quad (3-2)$$

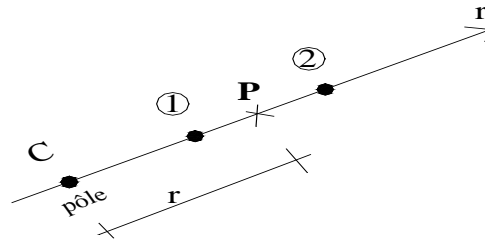


figure (3-3) : représentation radiale d'un élément infini unidimensionnel par l'approche inverse

r : la distance radiale est mesurée à partir du pôle C.

Pour le champ de déplacement on a :

$$U = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots = c_0 + c_1/r + c_2/r^2 + \dots \quad (3-3)$$

Remarque

La convergence augmente avec cet élément infini lorsque le degré de développement polynomial augmente.

Cas bidimensionnel

Le choix du type d'élément infini est relatif à l'élément fini utilisé dans le domaine d'analyse [25], par exemple si on prend un élément fini Q8, on utilise un élément infini à 5 nœuds.

S'il s'agit d'un élément fini Q4 il lui correspondra un élément infini à 4 nœuds, c'est le cas de figure pour lequel on a opté dans la présente thèse, et ceci pour des raisons de comportement linéaire du champ lointain.

Pour le développement de l'élément infini on utilise deux fonctions croissantes de type $\frac{1}{r}$

ou $\frac{1}{\sqrt{r}}$ [23,25].

On se réfère à la figure (3-1) l'interpolation des coordonnées géométrique :

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^4 M_i x_i \\
 z &= \sum_{i=1}^4 M_i z_i
 \end{aligned}
 \tag{3-4}$$

avec la fonction d'interpolation géométrique

$$M_i(\xi, \eta) = f(\xi) \cdot N_i(\xi, \eta)
 \tag{3-5}$$

$N_i(\xi, \eta)$ fonction de forme standard

$f(\xi)$ (Ascent-function) en ξ de type $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{\sqrt{r}}, \dots$

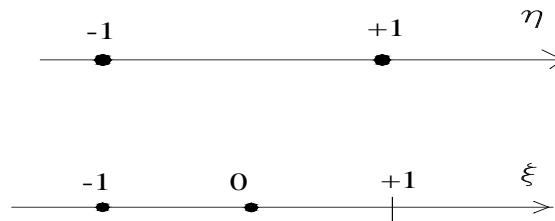


figure (3-4) : Construction d'un élément infini bidimensionnel formulé par l'approche inverse

Suivant le sens η la fonction d'interpolation est $[\frac{1-\eta}{2} \quad \frac{1+\eta}{2}]$, par contre suivant le sens ξ la

fonction d'interpolation est $[\frac{-2\xi}{1-\xi} \quad \frac{1+\xi}{1-\xi}]$, en se référant à la figure(3-4) on obtient alors :

$$[N] = [-\xi(1-\eta) \quad -\xi(1+\eta) \quad \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2} \quad \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2}]
 \tag{3-6}$$

et la fonction croissante est choisi tel que :

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi} \quad (3-7)$$

L'expression finale est donc :

$$[M] = \left[\begin{array}{cccc} \frac{-\xi(1-\eta)}{1-\xi} & \frac{-\xi(1+\eta)}{1-\xi} & \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(1-\xi)} & \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2(1-\xi)} \end{array} \right] \quad (3-8)$$

On remarque bien

$$M_i(\xi_i, \eta_i) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^4 M_i = 1 \quad (3-9)$$

(ξ_i, η_i) coordonnées des nœuds de l'élément infini

l'interpolation des coordonnées géométriques suivant l'axe x est :

$$x = \sum_{i=1}^4 M_i x_i = \frac{(1-\eta)x_1 + (1+\eta)x_2}{1-\xi} \quad (3-10)$$

avec $x_3 = 2x_1$ et $x_4 = 2x_2$ par rapport aux pôles C et C' et inversement on a :

$$\xi = 1 - \frac{(1-\eta)x_1 + (1+\eta)x_2}{x} \quad (3-11)$$

Pour l'interpolation du champ de déplacement on a :

$$[u] = [h] \cdot [q] \quad (3-12)$$

[u] champs de déplacement

[q] déplacements nodaux

[h] fonction d'interpolation de déplacement est de la forme : (linéaire en η , et quadratique en ξ)

$$[h] = (\alpha_0 + \alpha_1 \eta)(\beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2) \quad (3-13)$$

Les conditions aux limites à $\xi = +1$ on a $u=0$ (déplacement nul)

à la fin on aura :

$$[h] = \left[\frac{(1-\eta)\xi(\xi-1)}{4} \quad \frac{(1+\eta)\xi(\xi-1)}{4} \quad \frac{(1-\eta)(1-\xi^2)}{2} \quad \frac{(1+\eta)(1-\xi^2)}{2} \right] \quad (3-14)$$

Nota : L'élément infini de type 1 est désigné par : IE_1

3.3.1.2. Élément infini de type 2

Par le même procédé que l'élément infini de type 1 sauf que la fonction $f(\xi)$ (Ascent-function) diffère, la fonction d'interpolation du champ déplacement [h] est la même que l'élément infini de type 1.

En résumé la fonction d'interpolation des coordonnées géométrique [23] est :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2}{3}(1-\eta)\left[1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right] \\ M_2 &= \frac{2}{3}(1+\eta)\left[1 - \frac{1}{(1-\xi)^2}\right] \\ M_3 &= \frac{1}{6}(1-\eta)\left[\frac{4}{(1-\xi)^2} - 1\right] \\ M_4 &= \frac{1}{6}(1+\eta)\left[\frac{4}{(1-\xi)^2} - 1\right] \end{aligned} \quad (3-15)$$

Nota : L'élément infini de type 2 est désigné par : IE_2

3.3.2. Approche directe

L'approche consiste à garder l'élément infini pris dans le repère local sans aucune transformation par rapport au repère global, voir figure(3-5).

Ainsi il n'existera alors plus de singularité comme c'était le cas dans l'approche inverse.

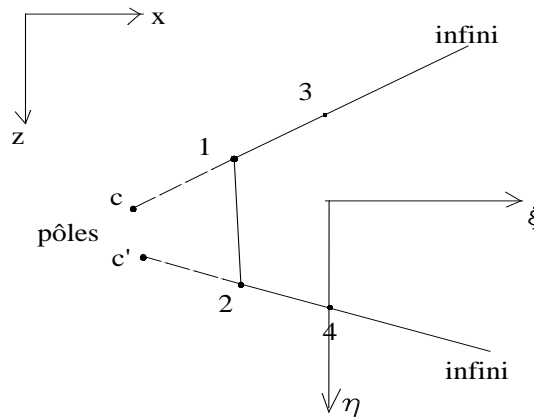


figure (3-5) : Représentation globale et locale d'un élément infini formulé par l'approche directe

On garde les fonctions de forme géométrique inchangées, à l'inverse des fonctions de forme déplacement qu'elles seront multipliées par une fonction de décroissance (descent-shape function) asymptotique à zéro.

On utilise un élément fini comme base, caractérisé par des fonctions de forme $N_i(\xi, \eta)$ et multipliées par des fonctions $f_i(\xi)$ de décroissances de type exponentiel ou puissance, traduit par $f_i(\xi \rightarrow +\infty) = 0$

La fonction de forme de l'élément infini, M_i pour le champ de déplacement est pareille à la formule (3-5).

on a :

$$\begin{cases} \int M_i(\xi_i, \eta_i) = 1 \\ f_i(\xi_i) = 1 \\ N_i(\xi_i, \eta_i) = 1 \end{cases} \quad (3-16)$$

avec (ξ_i, η_i) coordonnées des nœuds de l'élément infini

3.3.2.1. Élément infini de type 3

On a choisi selon [9] une fonction de décroissance exprimée par la formule :

$$f_i(\xi) = e^{-\frac{\xi_i - \xi}{L}} \tag{3-17}$$

avec L : Longueur déterminant le taux de décroissance et dépendant du problème physique à étudier, et qui sera déterminé à partir de la solution analytique du champ lointain.

La plupart des auteurs préfèrent varier L, ou bien le déterminer par une étude paramétrique.

La fonction d'interpolation du champ déplacement est :

$$\mathbf{M}_i(\xi, \eta) = \mathbf{N}_i(\xi, \eta) \cdot e^{-\frac{\xi_i - \xi}{L}} \tag{3-18}$$

$N_i(\xi, \eta)$ fonction d'interpolation géométrique.

Construction de la fonction de forme $N_i(\xi, \eta)$.

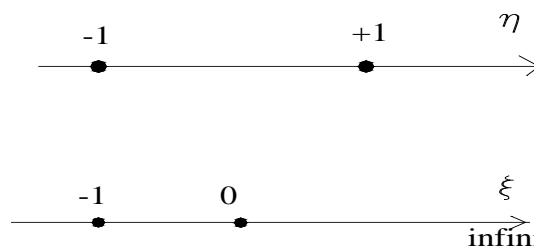


figure (3-6) : construction d'un élément infini bidimensionnel formulé par l'approche directe

D'après la figure (3-7) : suivant le sens η on a la fonction d'interpolation $[\frac{1-\eta}{2} \quad \frac{1+\eta}{2}]$, et

suivant le sens ξ on a la fonction d'interpolation $[-\xi \quad 1+\xi]$

On obtient :

$$[\mathbf{N}] = [-\xi \frac{1-\eta}{2} \quad -\xi \frac{1+\eta}{2} \quad (1+\xi) \frac{1-\eta}{2} \quad (1+\xi) \frac{1+\eta}{2}] \tag{3-19}$$

On remarque que $\sum_{i=1}^4 N_i = 1$

La déduction de la fonction d'interpolation de déplacement M_i est facile à construire.

$$[M] = \left[-\xi \frac{1-\eta}{2} e^{\frac{-1-\xi}{L}} \quad -\xi \frac{1+\eta}{2} e^{\frac{-1-\xi}{L}} \quad (1+\xi) \frac{1-\eta}{2} e^{\frac{-\xi}{L}} \quad (1+\xi) \frac{1+\eta}{2} e^{\frac{-\xi}{L}} \right] \quad (3-20)$$

Le choix de L pour une bonne représentation dépend du critère ci-dessous :

$$\left[\begin{array}{l} \xi \in [-1,0] \Rightarrow \sum_{i=1}^4 M_i \cong 1 \\ \xi \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{i=1}^4 M_i = 0 \end{array} \right. \quad (3-21)$$

contrairement à l'approche inverse

$$\forall \xi, \xi \in [-1,+1] \Rightarrow \sum_{i=1}^4 M_i = 1$$

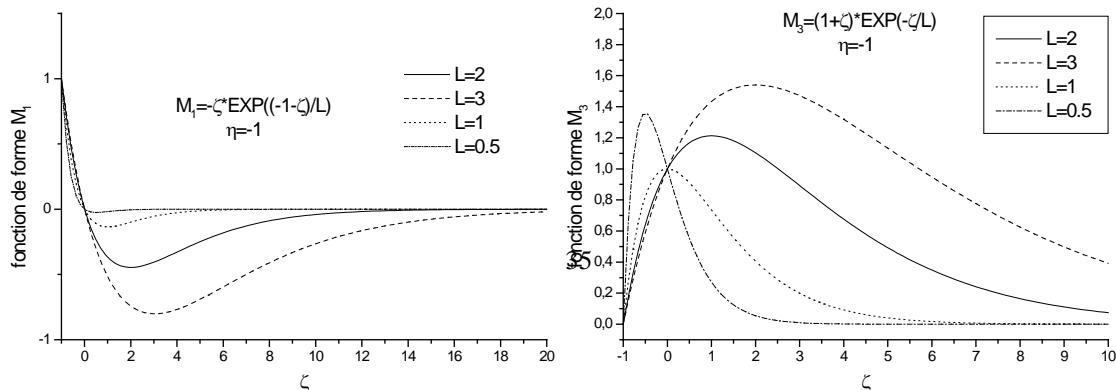
En général la somme des fonctions d'interpolation est :

$$\sum_{i=1}^4 M_i = -\xi e^{\frac{-1-\xi}{L}} + (1+\xi) e^{\frac{-\xi}{L}} \quad (3-22)$$

Sur les figures ci-dessous (3-6a) et (3-6b) représentent des études paramétriques de M_1 et M_3 en fonction de L, pour $\eta = -1$.

La fonction de forme M_i dépend des paramètres de décroissance, elle peut diverger si les valeurs de L ne sont pas importantes ou négatives.

D'après la figure (3-6d) on peut utiliser L=2 ou 3 en respectant le critère (3-21), et conduise à des résultats acceptables, pour notre cas on a pris L=2.



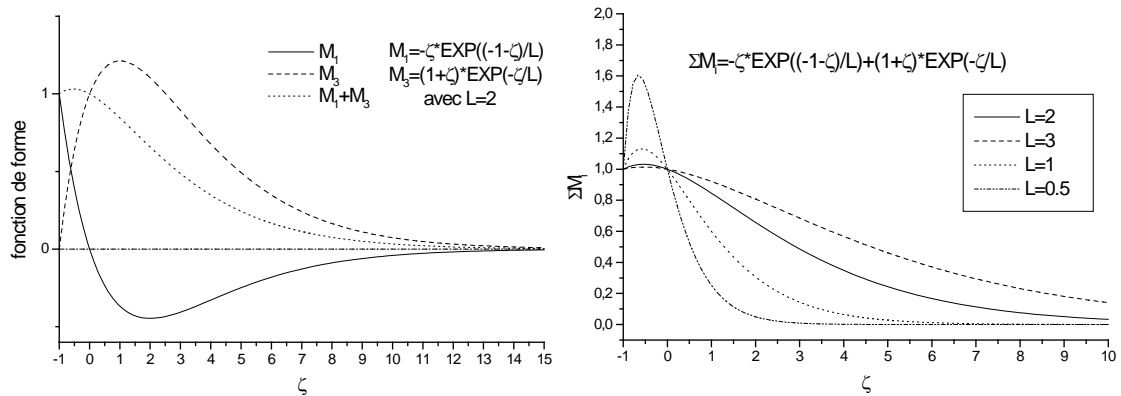
(a) (b)
(c) (d)

figure (3-7) : Etude paramétrique de la fonction de forme de type exponentielle
a) Fonction de forme M_1 , b) Fonction de forme M_3 , c) Fonctions de forme M_1 , M_3 et $M_1 + M_3$

d) Etude paramétrique $\sum_{i=1}^4 M_i$ en fonction de L

Nota : L'élément infini de type 3 est désigné par : IE_3

3.3.2.2. Elément infini de type 4



On procède de la même manière que l'élément infini de type 3 sauf que la fonction de décroissance est de type [18] :

$$f_i(\xi) = \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \tag{3-23}$$

ξ_0 : origine du pôle, hors de l'élément .

n : puissance de décroissance.

On constate de l'équation (2-23) que $f_i(\xi_i)=1$

On peut ainsi écrire la fonction d'interpolation du champ déplacement :

$$\mathbf{M}_i(\xi, \eta) = \mathbf{N}_i(\xi, \eta) \cdot \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \tag{3-24}$$

Pour le choix de n et ξ_0 ils seront déterminés par une étude paramétrique en respectant le critère

cité ci-dessus (3-21), comme on le constate dans la figure(3-8)

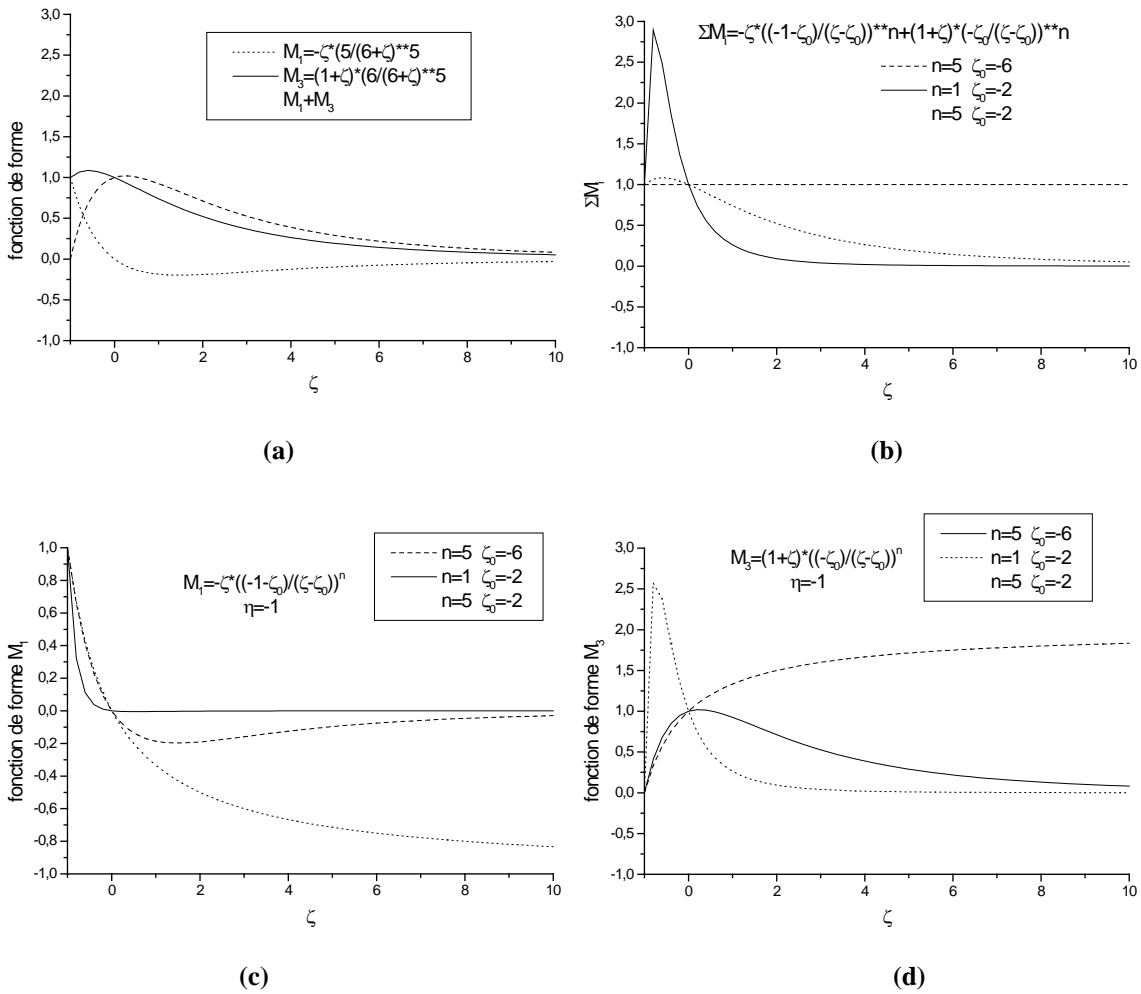


figure (3-8) : Etude paramétrique de la fonction de forme de type puissance

- a) Fonctions de forme M_1 , M_3 et $M_1 + M_3$, b) Etude paramétrique $\sum_{i=1}^4 M_i$ en fonction de L
 c) Fonction de forme M_1 , d) Fonction de forme M_3

L'expression générale de la somme des fonctions d'interpolation du champ déplacement est :

$$\sum_{i=1}^4 M_i = -\xi \left(\frac{-1 - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n + (1 + \xi) \left(\frac{-\xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \tag{3-25}$$

Dans la figure (3-8 b), l'étude nous a permis de déduire que pour qu'il n'y ait pas de discontinuité, la position des pôles C et C' doit être loin de l'élément infini, et n doit être supérieur à l'ordre du polynôme N_i , le choix est ramené à : $\xi_0 = -6$ et $n=5$.

La fonction d'interpolation de champs déplacement [M] est :

$$[M] = \begin{bmatrix} -\xi \frac{1-\eta}{2} \left(\frac{5}{\xi+6}\right)^5 & -\xi \frac{1+\eta}{2} \left(\frac{5}{\xi+6}\right)^5 & (1+\xi) \frac{1-\eta}{2} \left(\frac{6}{\xi+6}\right)^5 & (1+\xi) \frac{1+\eta}{2} \left(\frac{6}{\xi+6}\right)^5 \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

Pour l'intégration numérique on utilise la quadrature de Gauss-Laguerre [43] qui rend la tâche difficile dans le code numérique.

Nota : L'élément infini de type 4 est désigné par : IE_4

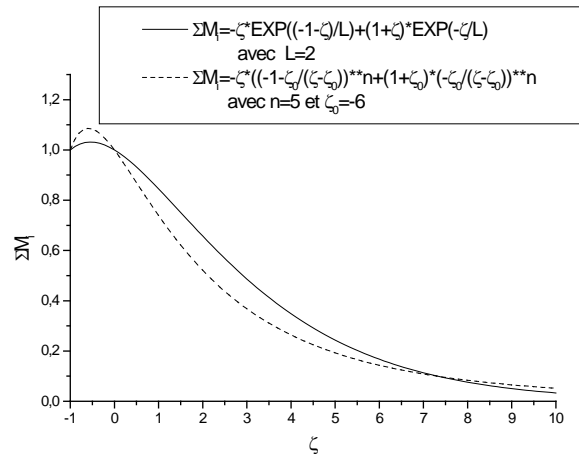


figure (3-9) : Etude Comparative entre deux fonctions de décroissances de type exponentiel et puissance

Remarque

- Les différents éléments qui ont été proposés dans cette approche satisfont les conditions de compatibilité et de complétude (conforme).
- Selon la figure(3-9) on peut distinguer que la fonction de décroissance de type exponentiel avec L=2 est conseillée d'utiliser par rapport à la fonction de type puissance avec $\xi_0 = -6$ et n=5 en se référant par rapport au critère(3-21).

3.4. Calcul des matrices élémentaires de l'élément infini

3.4.1. La matrice rigidité élémentaire

La rigidité élémentaire $[K^e]$ de l'élément infini est déterminée par cette formule :

$$[K^e] = \int_v [B]^T [D][B] dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D][B] \det[J] d\xi d\eta \quad (3-27)$$

avec $t=1$ dans le cas de déformation plane, et $t=2\pi r$ dans le cas d'axisymétrie.

$[B]$: matrice de déformation.

$[D]$: matrice d'élasticité.

Pour le calcul numérique de $[K^e]$ on utilise la quadrature de Gauss-Legendre

Approche directe

La rigidité élémentaire $[K^e]$ de l'élément infini devient :

$$[K^e] = \int_v [B]^T [D][B] dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+\infty} [B]^T [D][B] \det[J] d\eta d\xi \quad (3-28)$$

On procède de la même manière que pour l'approche inverse, sauf que l'intégration est dans un intervalle semi-infini.

Le procédé d'évaluation de cette terme passe par l'intégration numérique par la quadrature de Gauss-Laguerre [43] et développée suivant notre besoin en se référant à l'annexe A.

3.4.2. La matrice masse élémentaire

Approche inverse

En se référant par rapport à l'article de Hinton et al. [24], l'évaluation de la masse qui revient à chaque nœud de l'élément infini, introduit la notion de la matrice masse cohérente $[M_c]$.

$$[\mathbf{M}_c] = \int_V [\mathbf{h}]^T \rho[h] dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{h}]^T \rho[h] \det[J] t d\xi d\eta \quad (3-29)$$

où $[\mathbf{h}]$ est la fonction d'interpolation du champ déplacement.

La masse totale de l'élément infini

$$M_{tot} = \int_V \rho dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho \det[J] t d\xi d\eta \quad (3-30)$$

Sachant que $\mathbf{t} = \frac{\text{trace}[\mathbf{M}_c]}{2}$: traduisant la masse totale extraire de la matrice masse consistante $[\mathbf{M}_c]$.

La distribution de la masse de l'élément infini sur ces nœuds m_i est obtenue par :

$$m_i = \frac{M_{ii}}{t} \cdot M_{tot} \quad (3-31)$$

Pour l'intégration numérique on utilise la quadrature de Gauss-Legendre.

Approche directe

C'est la même technique que l'approche inverse de développement de la masse élémentaire de l'élément infini, sauf que le domaine d'intégration est dans l'intervalle semi-infini.

La matrice masse cohérente $[\mathbf{M}_c]$:

$$[\mathbf{M}_c] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+\infty} [\mathbf{h}]^T \rho \cdot [h] \cdot \det[J] \cdot t \cdot d\eta \cdot d\xi \quad (3-32)$$

La masse totale de l'élément infini :

$$\mathbf{M}_{\text{tot}} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+\infty} \rho \det[J] t d\eta d\xi \quad (3-33)$$

m_i : la masse qui revient à chaque nœud de l'élément infini, est obtenue par : $m_i = \frac{M_{ii}}{t} M_{\text{tot}}$

Pour l'intégration numérique on utilise la quadrature de Gauss-Laguerre (voir l'annexe A).

3.5. Formulation d'un élément infini en dynamique

En se référant à l'auteur Haggblad et al. [15,25,56], il apparaît que les fonctions de forme de l'élément infini s'avèrent des mauvais absorbeurs, entraînant un phénomène de dispersion (violation du critère radiatif) et sera approfondi dans le chapitre suivant.

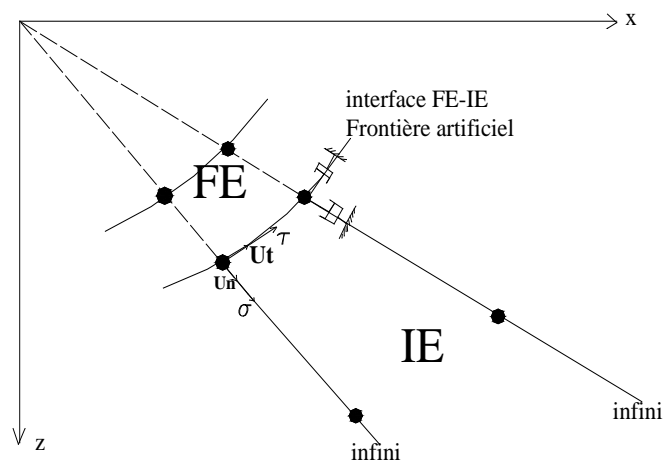


figure (3-10) : Incorporation d'amortissement visqueux à l'interface FE-IE

La notion de ffb disparaît et cède sa place à l'interface FE-IE, à cette localité on introduit une frontière absorbante de type Lysmer-Kuhlmeier [35,56], une frontière locale en temps et en espace figure(3-10).

A chaque nœud de l'interface FE-IE, lui correspond une contrainte normale et une contrainte de cisaillement qui sont exprimées par :

$$\begin{aligned}\sigma &= -a\rho V_p \dot{u}_n \\ \tau &= -b\rho V_s \dot{u}_t\end{aligned}\quad (3-34)$$

La matrice $[D^*]$ est tel que :

$$[D^*] = \rho \begin{bmatrix} aV_p & 0 \\ 0 & bV_s \end{bmatrix}\quad (3-35)$$

avec V_p et V_s sont les célérités des ondes P et S respectivement.

Pour maximiser le taux d'absorption des ondes P et S de la frontière absorbante visqueuse, on prend $a=b=1$ en se référant à la section (2.3.2.).

La matrice d'amortissement consistante s'exprime par :

$$[C] = \int_S [P]^t [h]^t [D^*] [h] [P] ds\quad (3-36)$$

avec $[P]$ est la matrice de passage du repère curviligne au repère globale pour un nœud de la frontière, $[P]$ s'exprime par :

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\quad (3-37)$$

avec les coefficients P_{ij} qui sont calculés par :

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= \frac{J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2}} & P_{21} &= \frac{J_{22}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2}} \\
 P_{12} &= \frac{J_{11}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2}} & P_{22} &= \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2}}
 \end{aligned} \tag{3-38}$$

La matrice jacobienne [J] s'exprime par :

$$[J] = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\xi, \eta)} \tag{3-39}$$

[h] : est la fonction de forme du champ déplacement

$$ds = \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2} d\xi \tag{3-40}$$

On travaille avec une matrice d'amortissement concentrée, sa détermination est inspirée de la technique de Hinton et al. [24] (pour la masse), et modifiée par Chelghoum et Nour [15].

La célérité moyenne est déterminée selon l'équation (2-29).

Les coefficients de la matrice d'amortissement concentrée sont déterminés par :

$$C_i = \frac{C_{ii}}{\frac{\sum_{k=1}^8 C_{kk}}{2}} f_{vs} \quad i=1,2,3,4 \tag{3-42}$$

sachant que :

$$f_{vs} = \int_{-1}^{+1} \rho \cdot V_m \cdot |J| \cdot d\xi \tag{3-43}$$

L'évaluation de la matrice d'amortissement concentrée est faite par une intégration numérique de Gauss-Legendre, puisqu'elle est en relation avec les éléments finis qui lient l'interface FE-IE, traduisant les conditions aux limites de ce dernier.

Chapitre 4

IMPLEMENTATION DES ELEMENTS INFINIS

4.1. Introduction

On a proposé au chapitre précédent quatre éléments infinis non isoparamétriques, formulés selon deux approches différentes, implémentés dans un programme d'éléments finis. Le but étant de traduire le couplage FE-IE et l'incorporation d'amortisseurs visqueux à l'interface FE-IE pour simuler la radiation d'énergie véhiculée par la propagation d'onde.

4.2. Implémentation numérique

On a élaboré cinq programmes informatiques concernant le couplage FE-IE-Frontière visqueuse, développés en utilisant le langage fortran 90.

En général ces programmes traitent le cas d'axisymétrie ou de déformation plane, leur rôle est d'implémenter les quatre éléments infinis en ajoutant une frontière visqueuse de type Lysmer-Kuhlemeyer à l'interface FE-IE.

Les programmes cités ci-dessus, utilisent le même algorithme d'intégration pas à pas dans le temps explicite des différences finies centrales [4], on a choisi cet algorithme parce qu'il est facile à écrire dans le code de calcul, présente une haute précision avec une stabilité conditionnelle à respecter (2-26) et rend le contrôle de la convergence aisé vers la solution recherchée.

Pour les célérités des ondes P et S on prend $V_p = 1.732$, $V_s = 1$, et la dimension minimale de l'élément fini est $L_e = 1m$.

Selon la formule (2-27), on a $\Delta t_{cr} = 0.233$ sec

On prend pour notre analyse selon (2-30) le pas de temps $\Delta t = 0.05$ sec.

Le domaine est discrétisé par éléments finis à 4 nœuds isoparamétriques et des éléments infinis à 4 nœuds non isoparamétriques.

La masse et la rigidité élémentaire pour les éléments finis et infinis (IE_1 et IE_2) sont évalués en utilisant une intégration numérique 2x2 points de Gauss, mais pour les éléments infinis (IE_3 et IE_4) sont évalués en utilisant 2 points de Gauss–Legendre suivant η et 3 points de Gauss–Laguerre suivant ξ voir annexe A.

Les différents programmes établis sont censés calculer les réponses à un point quelconque dans le domaine d’analyse.

L’organigramme nécessaire pour visualiser la structure générale du programme est présenté sur la figure (4-1)

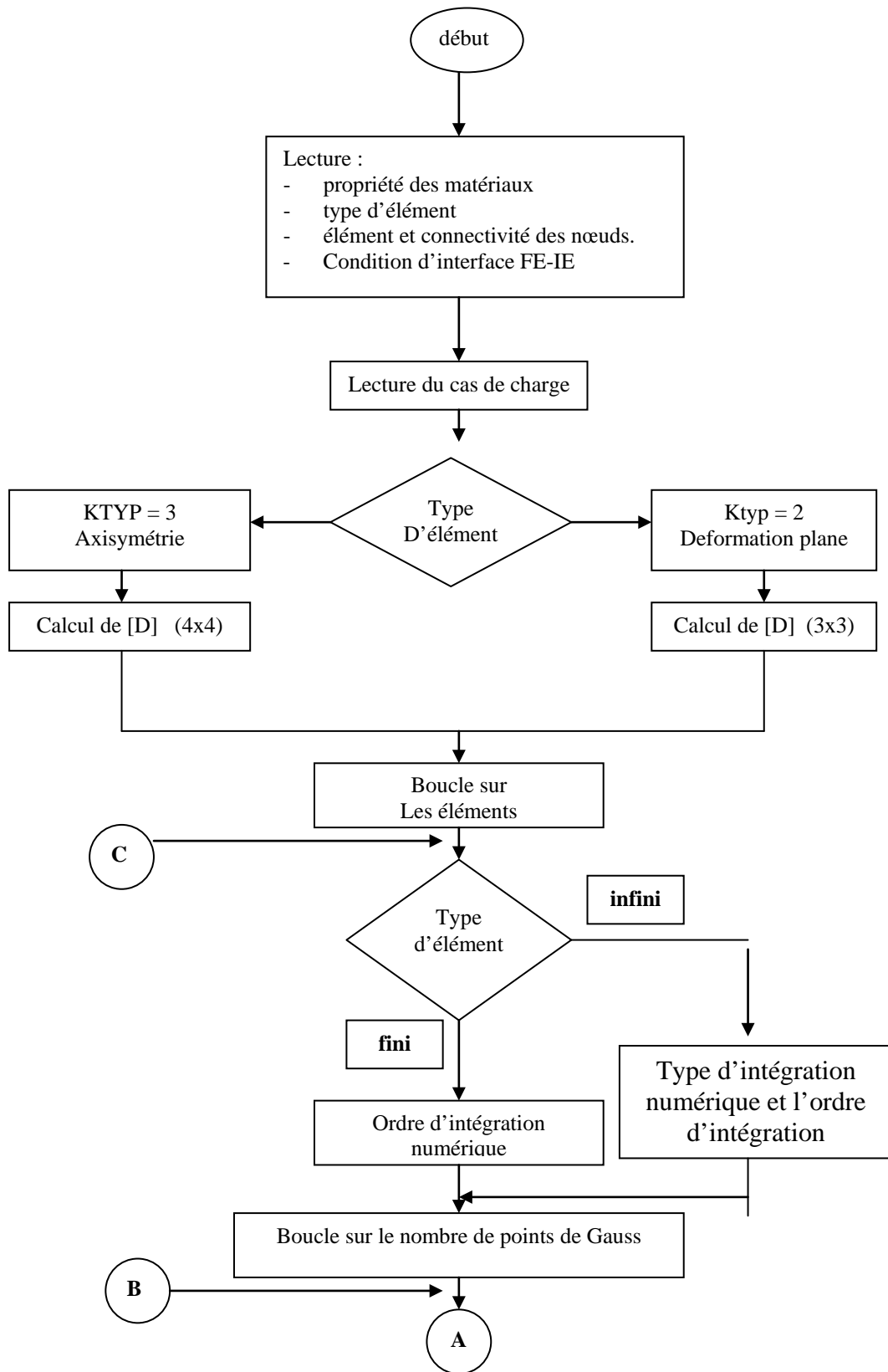


figure (4-1) : Organigramme d'implémentation des éléments infinis avec une frontière visqueuse

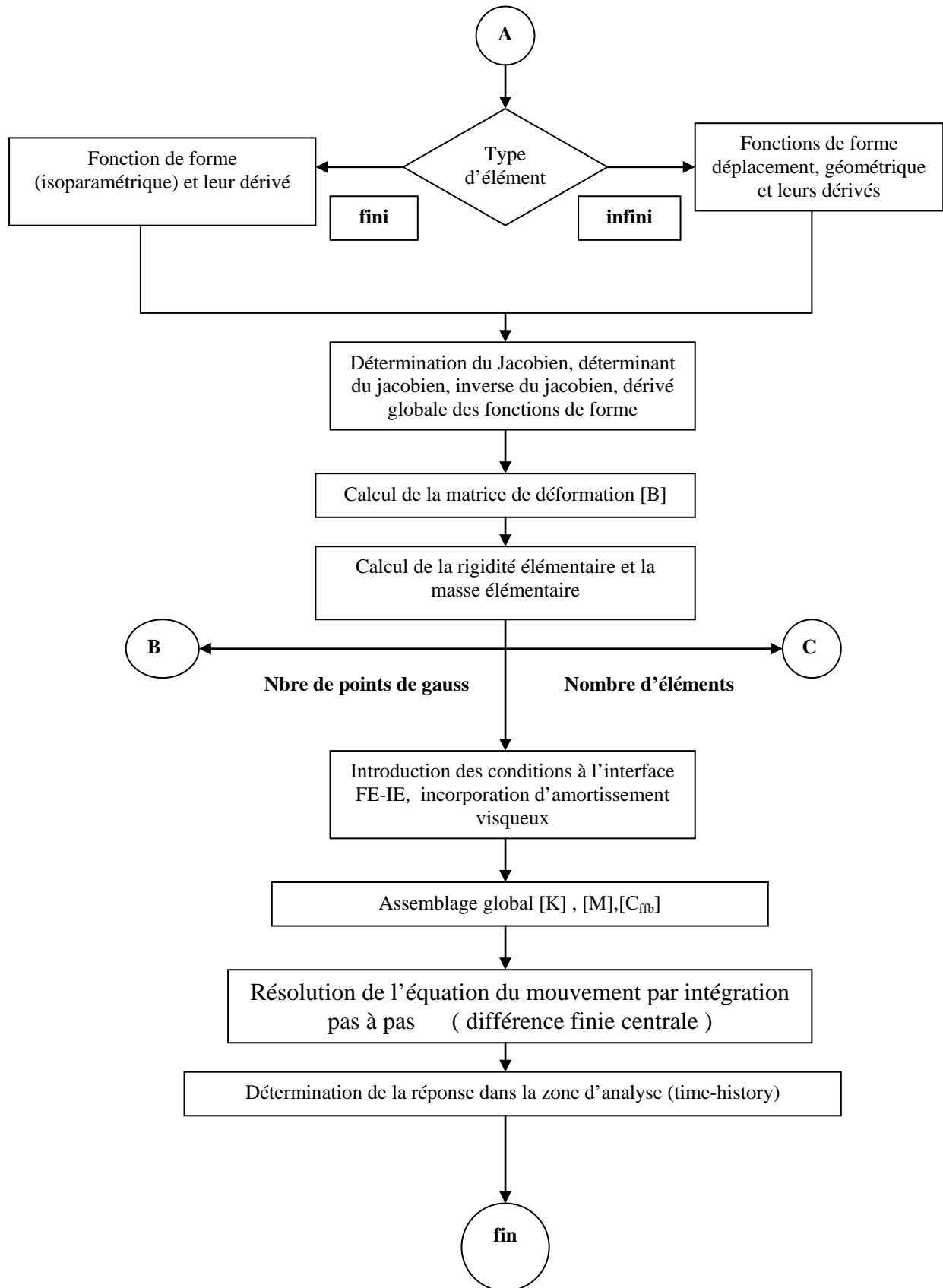
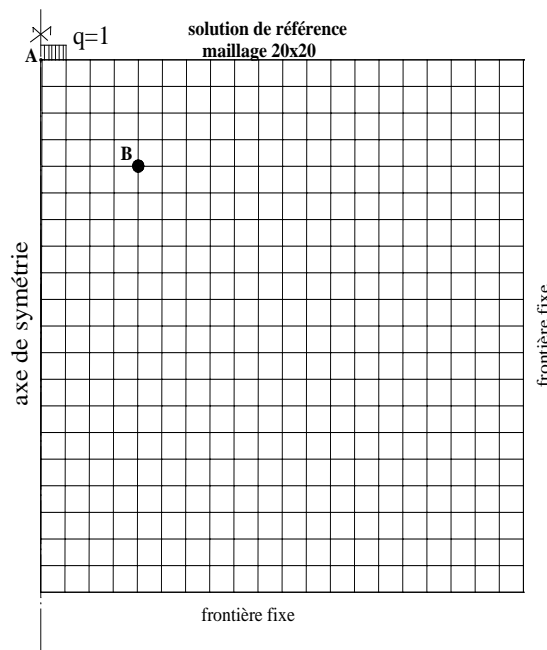


figure (4-1) : (suite)

4.3. Applications de validation

4.3.1. Application 1

On détermine la réponse d'un profil de sol à un chargement vertical uniforme soudain au niveau de la surface libre circulaire de rayon unité et d'intensité $q = 1$ (Hammer-test), avec une base flexible prise dans les conditions d'axisymétrie.



**figure (4-2) : Schéma de référence discrétisation du domaine semi-infini
Par un domaine fini avec un maillage large 20x20 éléments finis et une frontière fixe**

La figure (4-2) sera notre référence pour vérifier nos résultats, la durée d'analyse à prendre doit être inférieure au temps de parcours de l'onde pour qu'elle puisse revenir à la zone d'analyse afin d'éviter les réflexions parasites.

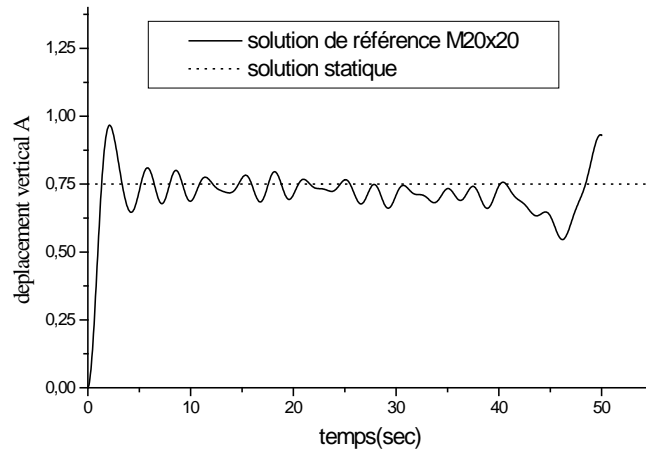
On utilise la notion des points de contrôle A et B, comme on le voit sur la figure (4-2), le point A est sous le chargement uniforme et sur l'axe de symétrie.

On détermine les réponses aux points A et B pour notre modèle, en les comparant avec la solution de référence et avec d'autres travaux de simulation du champ lointain [47,48].

Les caractéristiques du sol [48] sont :

$$E=2.5, \quad \nu=0.25, \quad \rho=1., \quad V_p=1.732, \quad V_s=1.$$

On considérant une frontière fixe avec un maillage large de 20x20



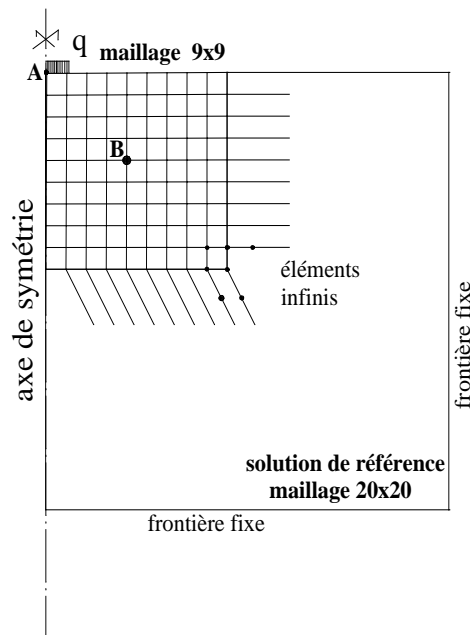
**figure (4-3) : Schéma de référence déplacement vertical au point contrôle A
Sous une sollicitation soudaine**

La réponse au point A présentée sur la figure(4-3) est donc notre référence, à condition de la prendre dans un intervalle de temps de 35 sec environ, car à partir de cette limite il y'a apparition du phénomène de dispersion.

On constate que la solution de référence oscille autour de la solution statique δ .

La valeur du déplacement vertical δ au point A [48] est :

$$\delta = \frac{2qr(1-\nu^2)}{E} = \mathbf{0.75} \quad (4-1)$$



**figure (4-4) : Schéma comparatif entre le modèle réduit
avec des éléments infinis et le modèle de référence**

On note sur la figure (4-4) une réduction considérable du domaine d'analyse comprenant 81 éléments finis et 18 éléments infinis (99 éléments) par rapport à un maillage de référence avec 400 éléments finis.

L'étude comparative entre la solution du nouveau modèle avec la solution de référence, fait ressortir notre plan de travail.

1) Exemple 1

Les éléments infinis conçus par l'approche inverse voir section (3.3.1) de type $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{\sqrt{r}}$ sont utilisés pour une première étude, leur incorporation est simple, les fonctions de forme changent mais il n'y a aucune condition à l'interface FE-IE.

Les réponses au point de contrôle A et B voir figures (4-5) et (4-6) seront fonction en premier lieu du type d'élément infini utilisé, et en second lieu de la position du pôle dont la distance est symbolisée par dif.

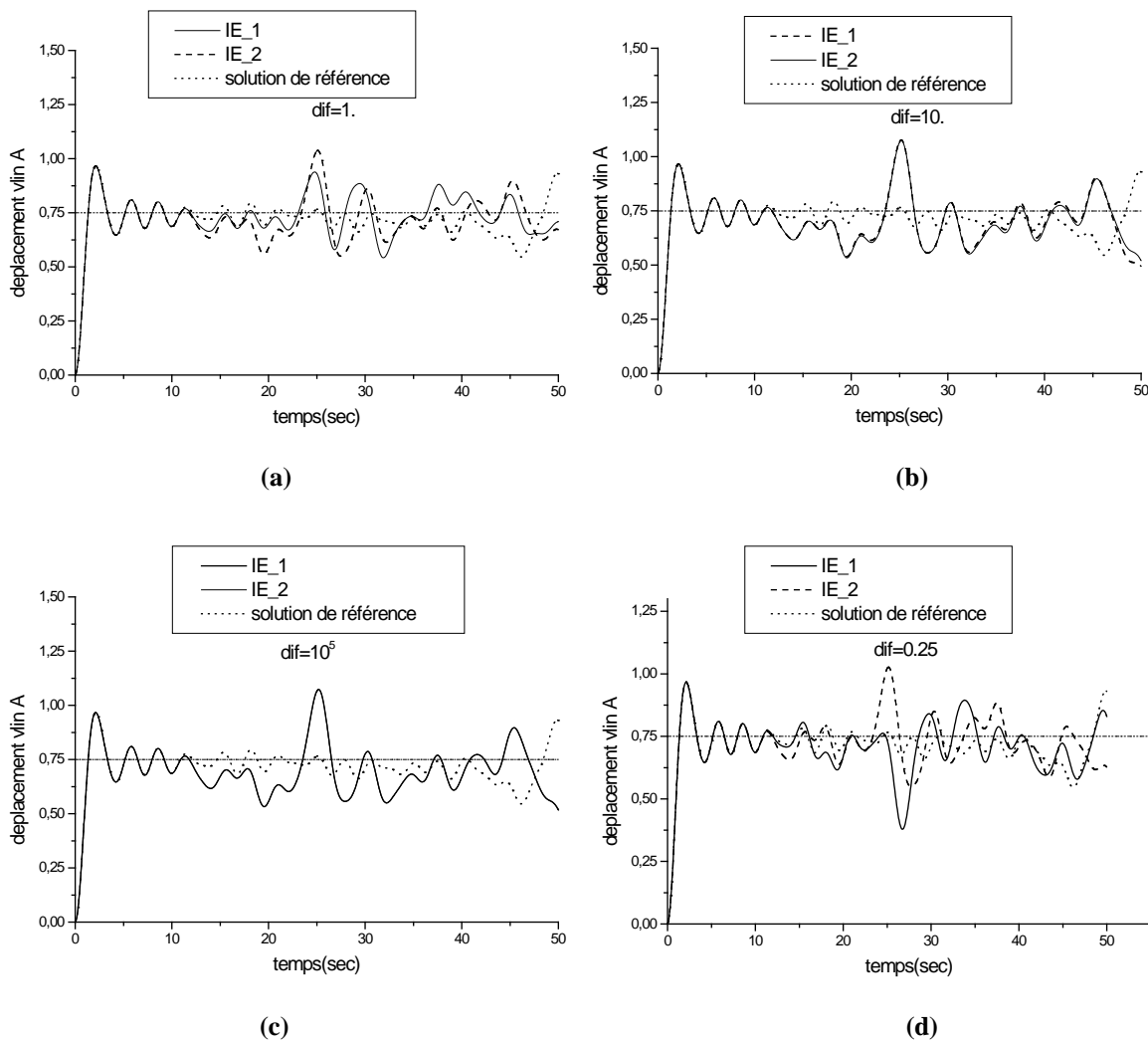


figure (4-5) : Etude paramétrique de la réponse en A sous une sollicitation soudaine avec des éléments infinis formulés par l'approche inverse en fonction de la position du pôle (a) dif=1. , (b) dif=10. , (c) dif=10⁵ , (d) dif=0.25

Remarque

Pour des valeurs réduites de dif, on note que l'implémentation des éléments infinis de type IE_1 conduit à de meilleurs résultats que les éléments infinis de type IE_2 comme le montre la figure (4-5d).

Quoique après un laps de temps très réduit des phénomènes de dispersion apparaissent.

Mais pour des valeurs importantes de dif comme on le constate sur les figures (4-5b) et (4-5c), la réponse au point A ne dépend pas de type d'élément infini.

Pour la réponse au point B, on choisit les éléments infinis de type IE_1 pour $dif=0.25$ voir figure(4-6), le déplacement vertical montre l'apparition de dispersion après 15 sec environ d'ou la simulation reste insuffisante, cela est valable pour la vitesse et l'accélération

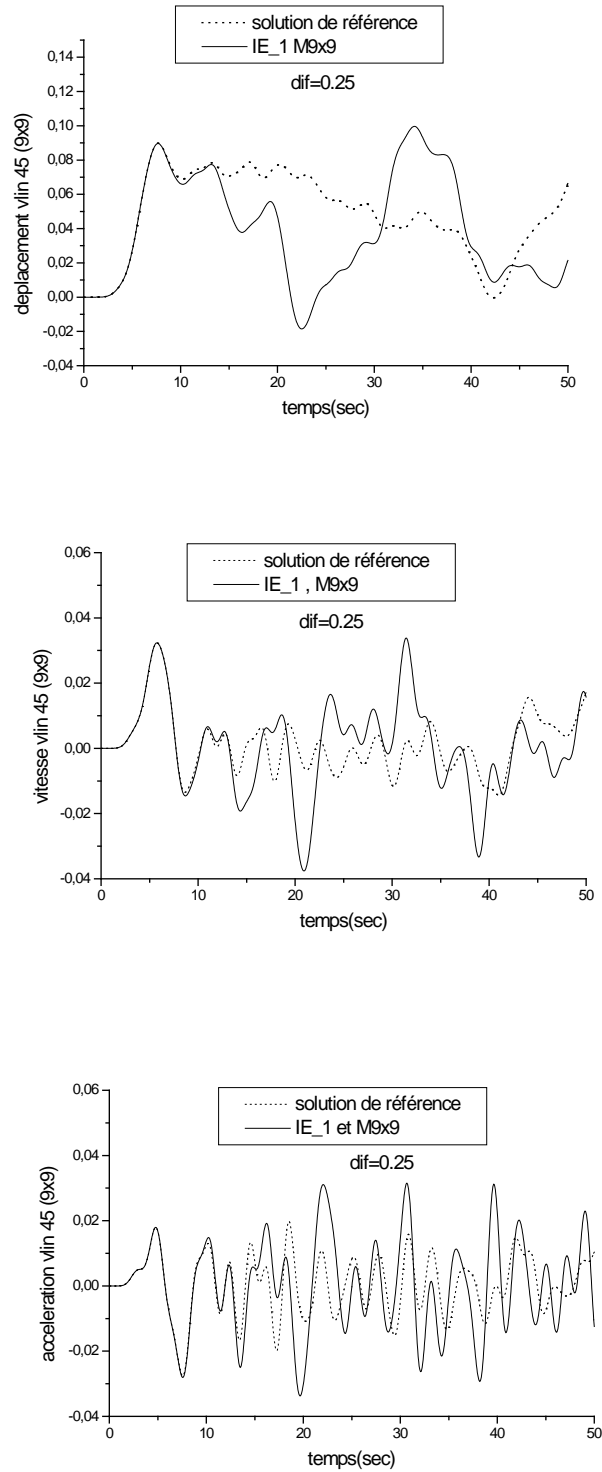


figure (4-6) Réponses au point B sous une sollicitation soudaine

2) Exemple 2

Les éléments infinis conçus par l'approche directe voir section(3.3.2) de type exponentiel et puissance sont utilisés pour cet exemple.

L'évaluation de leurs masses et rigidités élémentaires se fait par l'intégration numérique de Gauss-Laguerre, c'est une autre subroutine à intégrer comme un module dans le programme.

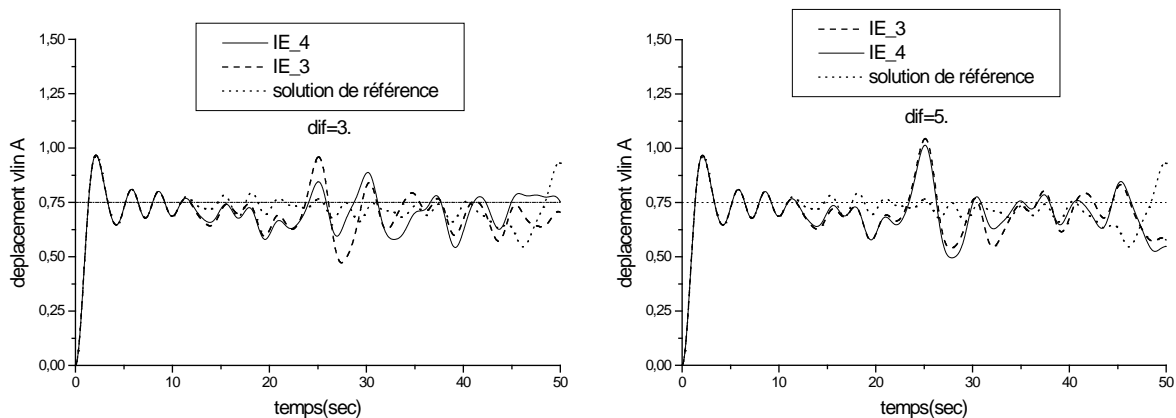


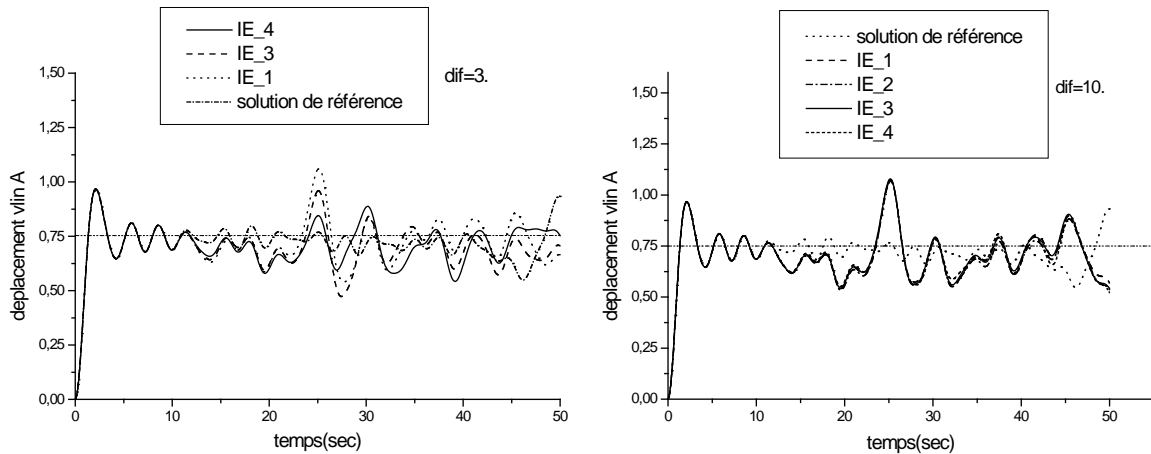
figure (4-7) : Réponse au point A sous sollicitation soudaine obtenue avec des éléments infinis formuler par l'approche directe et différente position de pôle pour dif=3. et dif=5.

On évalue maintenant les réponses au point A, en fonction de l'élément infini utilisé et la valeur de dif voir figure (4-7).

D'après la formulation des éléments infinis de type IE_3 et IE_4 voir section (3.3.2), on constate que l'élément infini de type IE_3 conduit à de meilleurs résultats.

Sur la figure (4-7), on voit bien encore que l'implémentation de l'élément infini de type IE_3 approche la solution de référence mais on a toujours le phénomène de dispersion qui apparaît.

La figure (4-8) traduit le bilan total de l'utilisation de tous les éléments infinis.



figure(4-8) : Etude comparative de la réponse au point A sous une sollicitation soudaine avec des éléments infinis différents pour dif=3. et dif=10.

Pour des valeurs réduites de dif, on remarque que l'implémentation des éléments infinis de type IE_1 et IE_3 conduit à une bonne approximation mais sur un intervalle de temps réduit, présence des réflexions parasites.

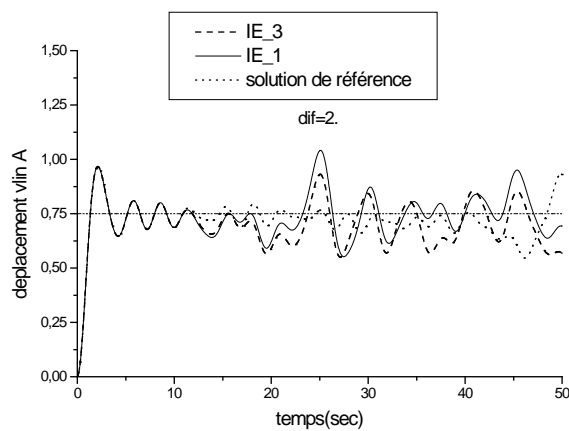


figure (4-9) : Réponse au point A sous une sollicitation soudaine par une implémentation de IE_1 et IE_3

La figure (4-9) montre que l'implémentation des éléments infinis de type IE_3 (type exponentiel) conduit à une bonne représentation vis à vis de la solution de référence.

Les deux variétés d'études ont conduit à une approximation plus ou moins acceptable mais elle est restreinte à un intervalle de temps réduit vue l'apparition des réflexions parasites.

3) Exemple 3

Selon les exemples 1 et 2 les éléments infinis sont des absorbeurs imparfaits [25] , on incorpore des amortisseurs visqueux à l'interface FE-IE voir figure (4-10) dont la matrice d'amortissement diagonale est calculée selon la formule (3-42).

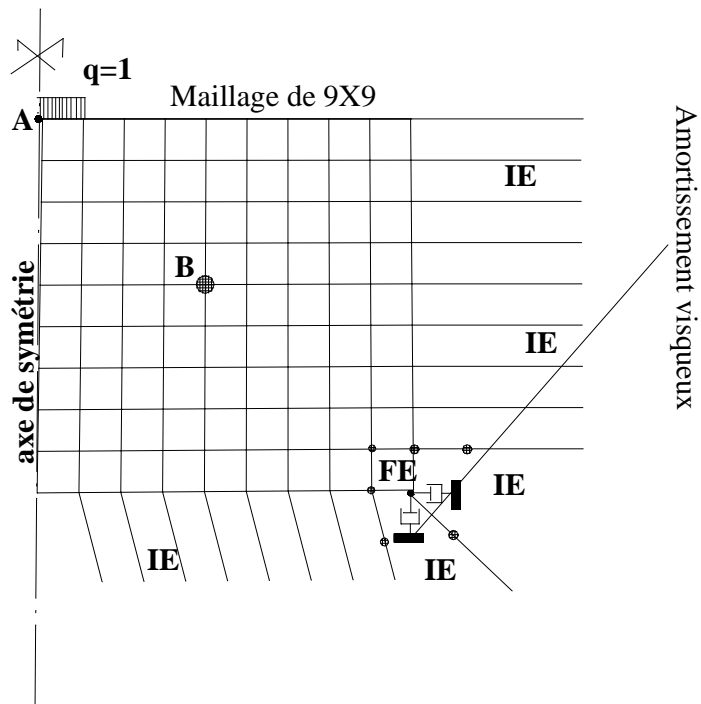
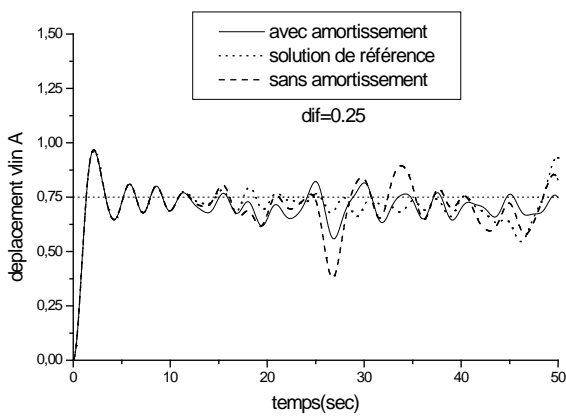
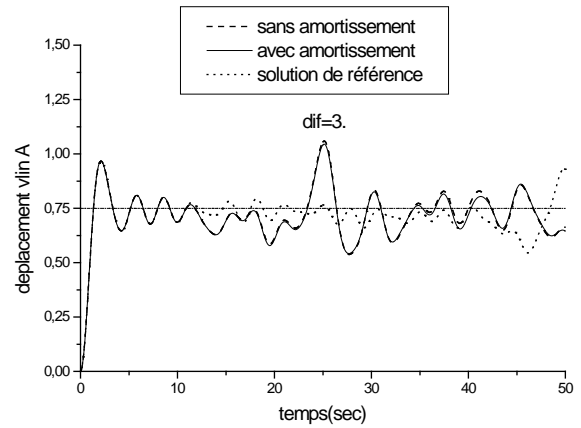


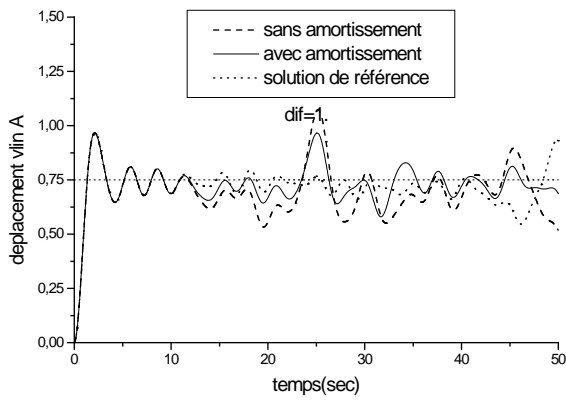
figure (4-10) : Incorporation des amortisseurs visqueux à l'interface FE-IE



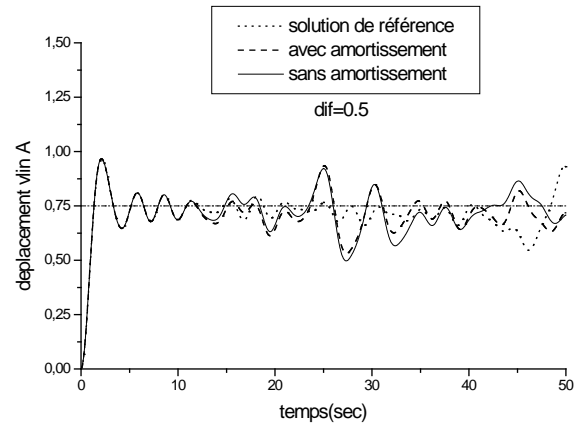
(a)



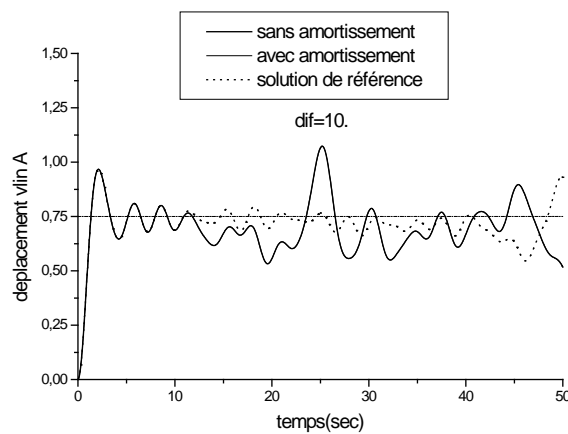
(b)



(c)



(d)



(e)

figure (4-11) : Influence de la frontière visqueuse sur la réponse au point A sous une sollicitation soudaine

a) dif=0.25 , b) dif=3 , c) dif=1 , d) dif=0.50 , e) dif=10

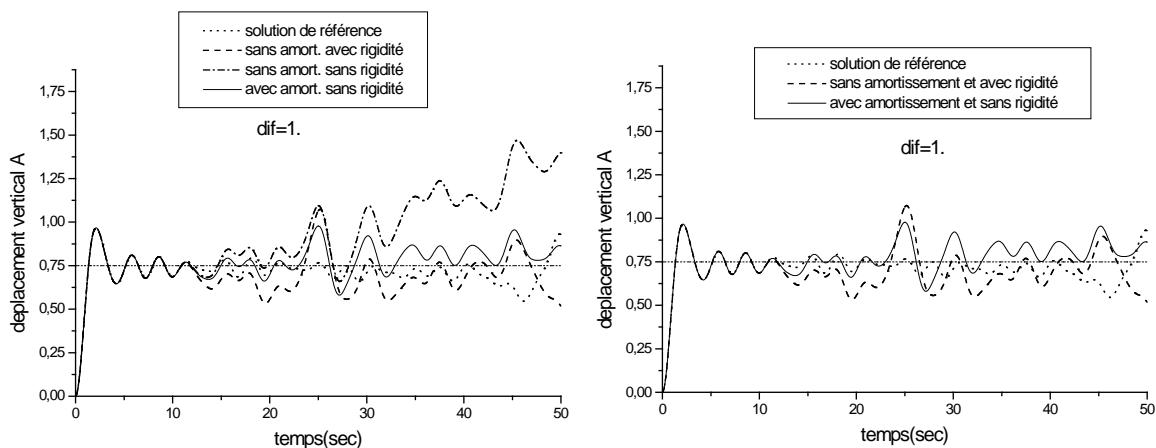
Dans cet exemple, la technique est la même que celle de l'exemple 1 et 2 sauf que cette fois il y a une incorporation d'amortissement visqueux à l'interface FE-IE, c'est à dire influence de la frontière visqueuse sur la réponse au point A pour différentes valeurs de dif, voir figures (4-11). Pour des valeurs réduites de dif, l'incorporation de la frontière visqueuse comme présenté sur les figures (4-11a), (4-11c) et (4-11d) s'avère indispensable, contrairement pour des valeurs importantes de dif où l'incorporation de la frontière visqueuse n'a aucun effet sur la solution voir les figures (4-11b) et (4-11e) par cause de l'interface FE-IE qui se comporte comme une frontière fixe.

4) Exemple 4

Le couplage éléments finis – éléments infinis – frontière visqueuse n'a pas abouti à d'excellents résultats.

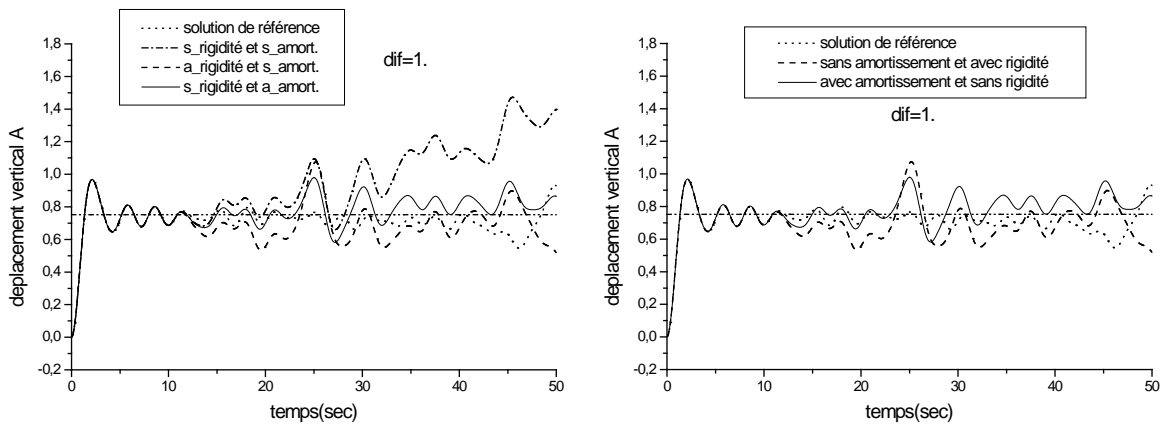
Dans cette étude on va compléter le modèle précédent, en faisant sortir le paramètre « La rigidité statique » de l'élément infini [25] ainsi que son influence sur la solution.

Pour les éléments infinis formulés par la méthode inverse de type $1/r$ avec extraction de la rigidité statique, on obtient d'excellents résultats comme on le note sur la figure(4-12).



figure(4-12) : Réponse au point A sous une sollicitation soudaine en fonction de la frontière visqueuse et la rigidité statique avec des éléments infinis IE_1

Pour les éléments infinis formulés par la méthode directe de type exponentiel on constate les mêmes remarques voir figure (4-13).



figure(4-13) : Réponse au point A sous une sollicitation soudaine en fonction de la frontière visqueuse et la rigidité statique avec des éléments infinis IE_3

Conclusion

On constate donc que la formule : le couplage FE - IE - Frontière visqueuse et sans rigidité statique des éléments infinis conduit à des résultats satisfaisants mais à condition de prendre une distance réduite de la position du pôle.

4.3.2. Application 2

On étudie, dans ce qui suit, la réponse d'un profil de sol soumis à une force concentrée harmonique verticale dans l'axe z voir figure (4-14) d'intensité $f(t) = \cos(t)$ dans les conditions de déformations planes, le but étant de faire apparaître la radiation latérale.

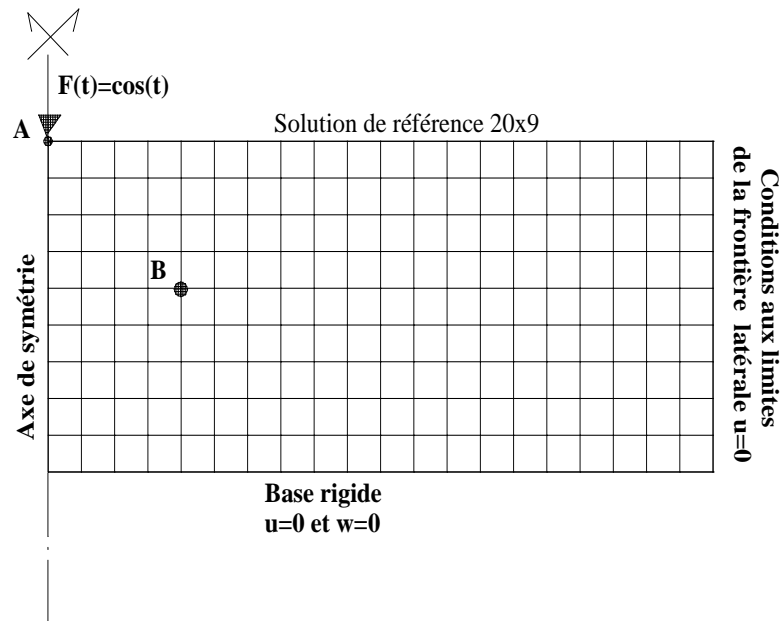


figure (4-14) : Schéma de référence maillage large M9x20

La figure(4-14) sera notre référence M20x9 pour la vérification de nos résultats (base rigide à 9m en profondeur et déplacement suivant x fixe à 20m latéralement), A et B sont les points de contrôle dont on détermine les réponses.

Les caractéristiques du sol seront les mêmes que celles de l'application 1.

Cette fois, on implémente les éléments infinis latéralement en gardant la frontière fixe en profondeur (base rigide), et on varie la position du niveau à laquelle on implémente les éléments infinis voir figure (4-15).

On détermine les réponses en A et B sous une sollicitation harmonique avec différents éléments infinis (d'après les résultats de l'application 1 on choisit les éléments infinis de type IE_1 ou IE_3), et pour plusieurs positions d'implémentation des éléments infinis à 9m, 12m et 15m.

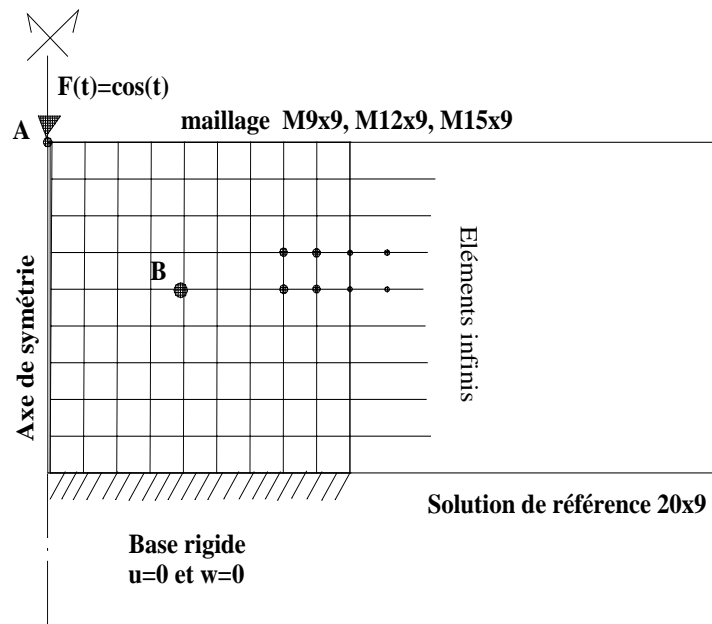


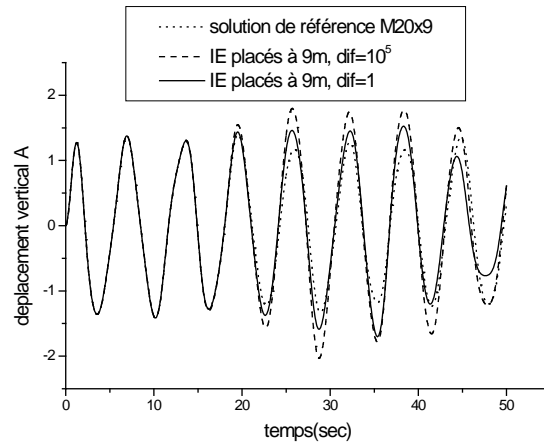
figure (4-15) : Implémentation latérale des éléments infinis à des différentes positions 9, 12 et 15m sous une sollicitation concentrée harmonique

1) Exemple 1

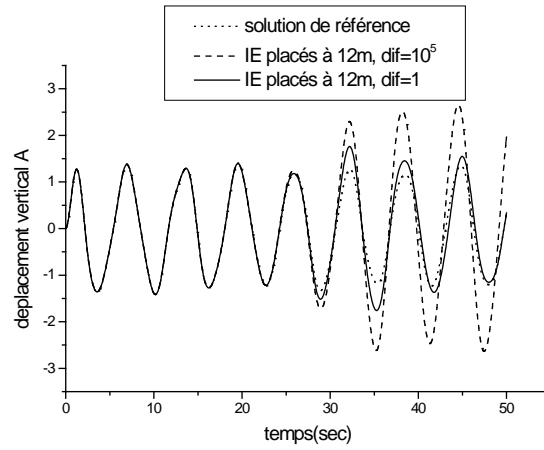
On implémente parmi les quatre éléments infinis, les modèles IE_1 ou IE_3 à plusieurs distance, sans introduire une frontière visqueuse.

On détermine les réponses aux points A et B comme il est montré sur les figures (4-16) à (4-21).

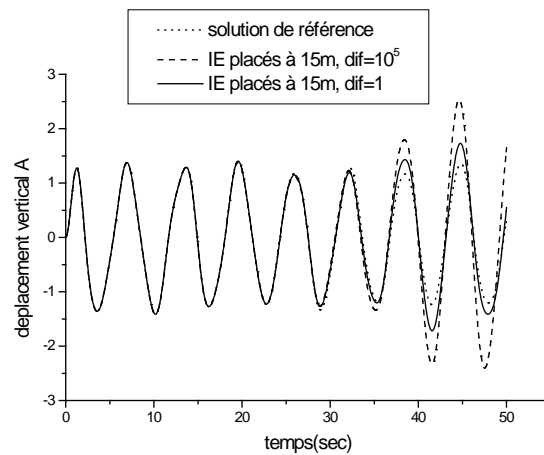
Réponse au point A :



(a)

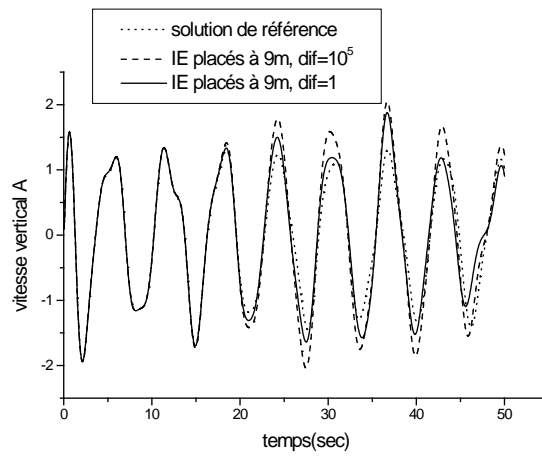


(b)

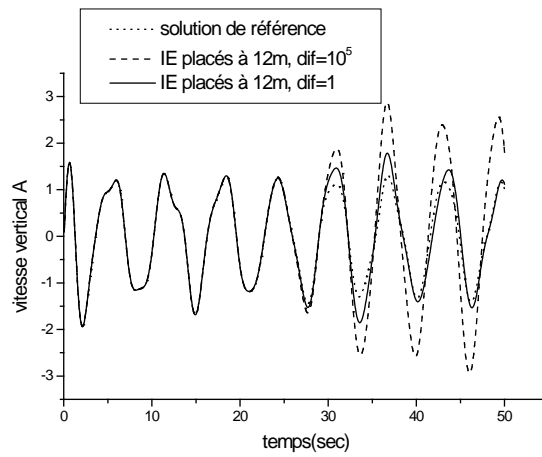


(c)

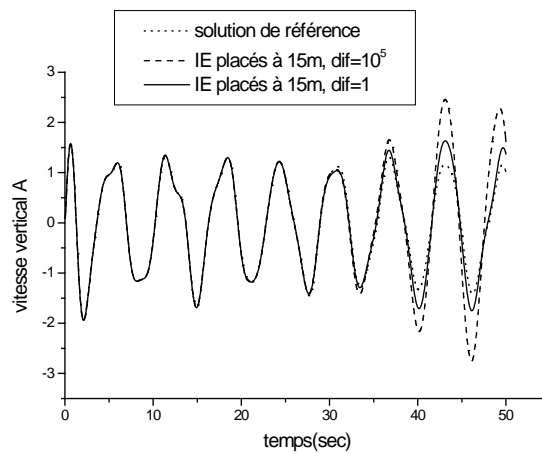
figure (4-16) : déplacement au point A sous une sollicitation concentrée harmonique
a) M9x9 b) M12x9 c) M15x9



(a)

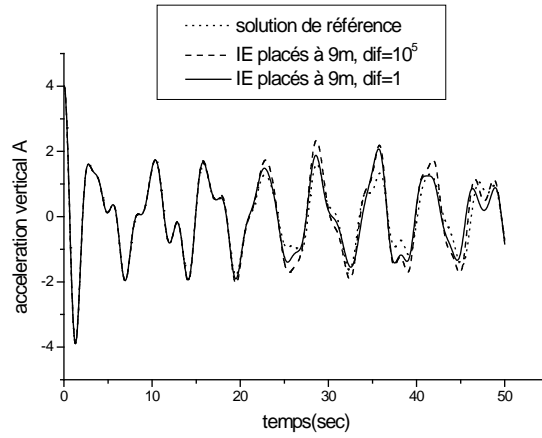


(b)

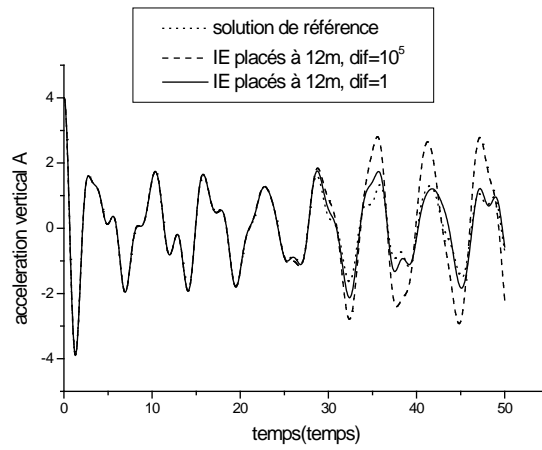


(c)

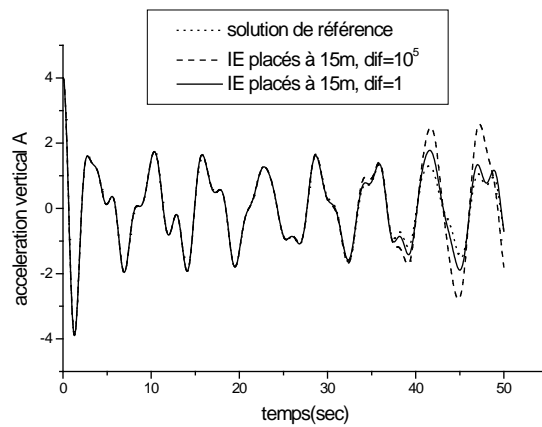
figure (4-17) : vitesse en A sous une sollicitation concentrée harmonique
 a) M9x9 b) M12x9 c) M15x9



(a)



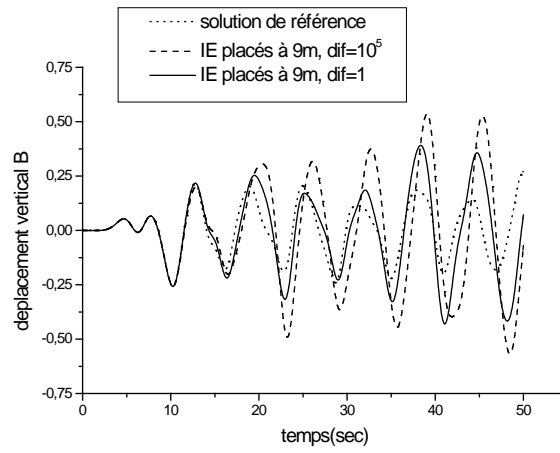
(b)



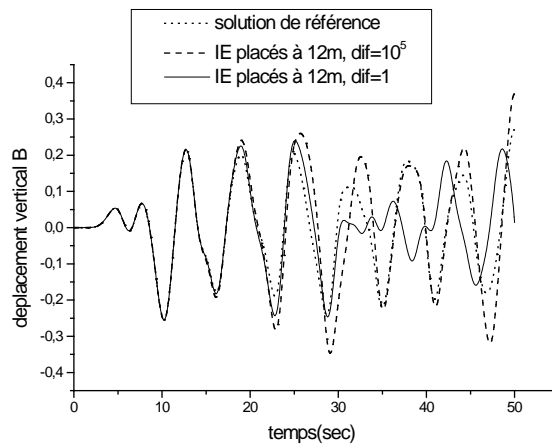
(c)

figure (4-18) : accélération en A sous une sollicitation concentrée harmonique
 a) M9x9 b) M12x9 c) M15x9

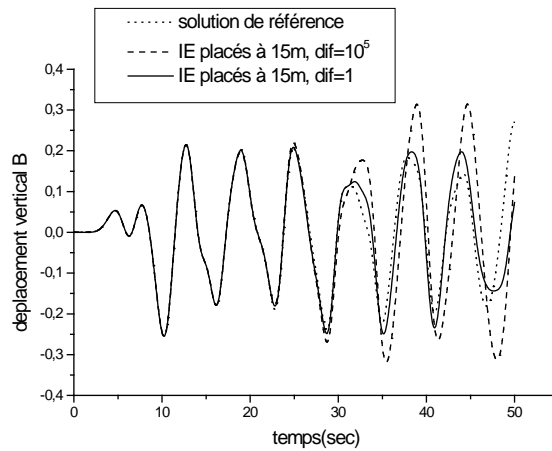
Réponse au point B



(a)

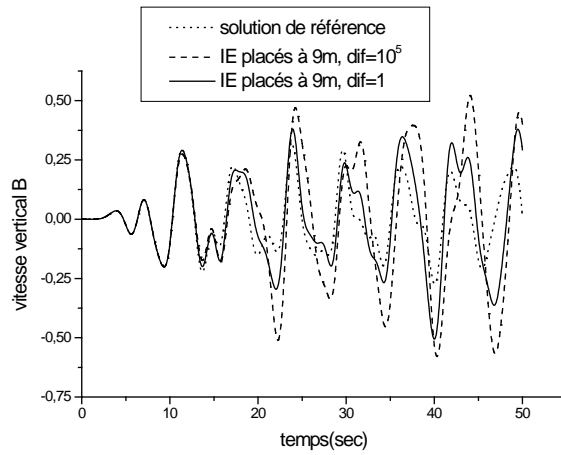


(b)

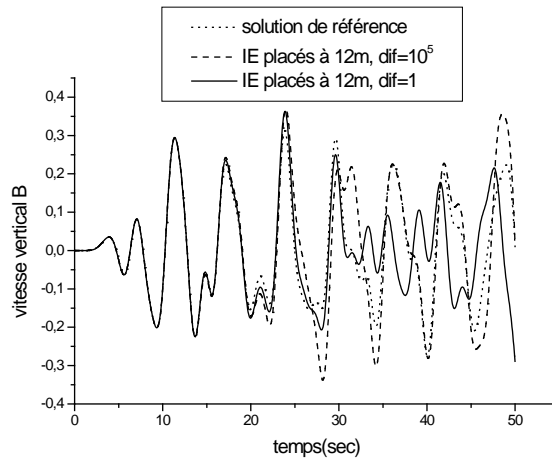


(c)

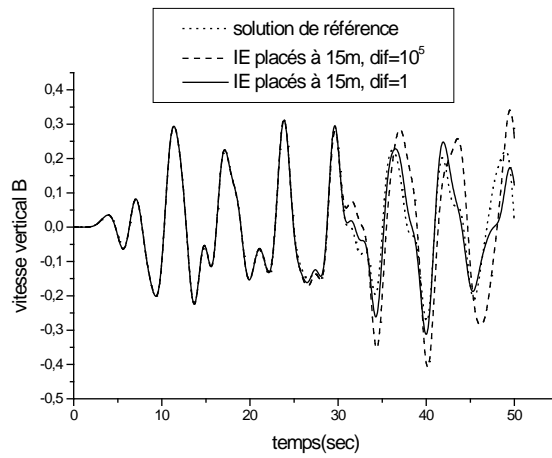
figure (4-19) : déplacement en B sous une sollicitation concentrée harmonique
 a) M9x9 b) M12x9 c) M15x9



(a)

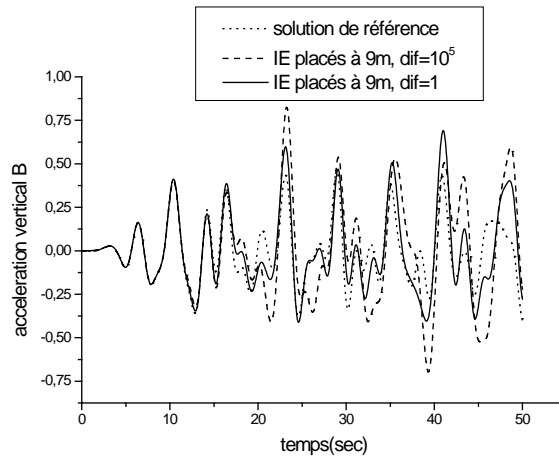


(b)

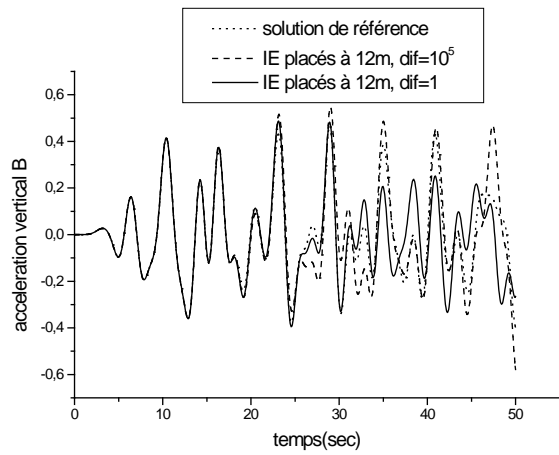


(c)

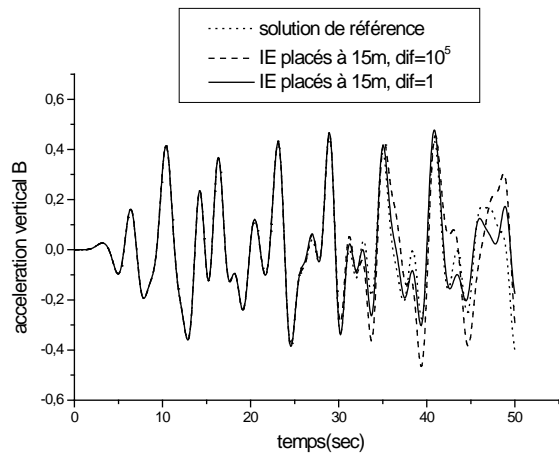
figure (4-20) : Vitesse en B sous une sollicitation concentrée harmonique
a) M9x9 b) M12x9 c) M15x9



(a)



(b)



(c)

figure (4-21) Accélération en B sous une sollicitation concentrée harmonique
 a) M9x9 b) M12x9 c) M15x9

On remarque que l'implémentation latérale des éléments infinis de type IE_1 ou IE_3 donne des résultats acceptables mais restreints à un intervalle de temps réduit, surtout pour un pôle proche de l'élément infini comme on le constate sur les figures (4-16) à (4-21).

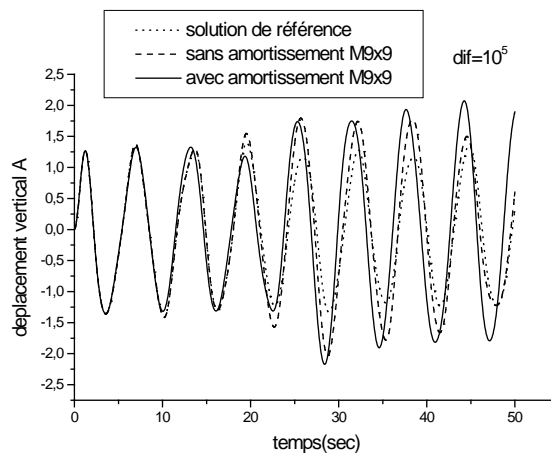
Le phénomène de dispersion surgit encore, donc le modèle reste incomplet pour l'application N°2 .

La variation de la position d'incorporation latérale des éléments infinis (9m, 12m, 15m), entraîne un retard sur l'effet de dispersion comme on le note sur les figures (4-16) à (4-21).

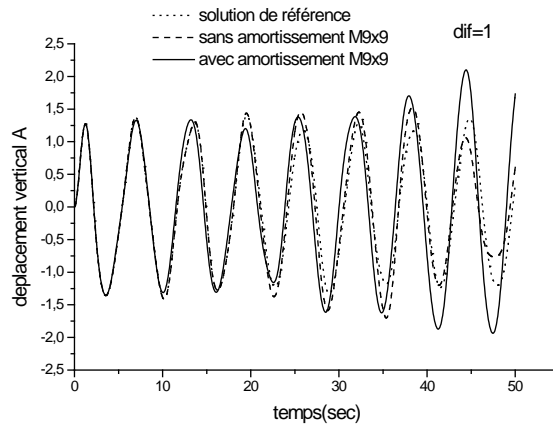
2) Exemple 2

L'exemple 1 est corrigé par une incorporation d'une frontière visqueuse latérale de type Lysmer-Kuhlemeyer à l'interface FE-IE.

On garde un maillage 9x9 avec une base rigide de profondeur 9m, et une implémentation latérale des éléments infinis à 9m.



**figure (4-22) : L'influence de la frontière visqueuse sur la réponse au point A
et sous une sollicitation concentrée harmonique avec dif= 10⁵ pour M9x9**



figure(4-23) : L'influence de la frontière visqueuse sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec $dif=1$ pour M9x9

On remarque sur la figure (4-22), pour une valeur importante de dif, que l'incorporation d'une frontière visqueuse n'a aucun effet sur les résultats, traduisant par la géométrie importante de l'élément infini en conséquence l'interface FE-IE se comporte comme une frontière fixe.

La réponse au point A voir figure (4-23) pour $dif=1$, montre une différence apparente en considérant un amortissement visqueux.

L'incorporation de cet amortissement ne conduit pas à des résultats acceptables à cause de l'apparition des dispersions.

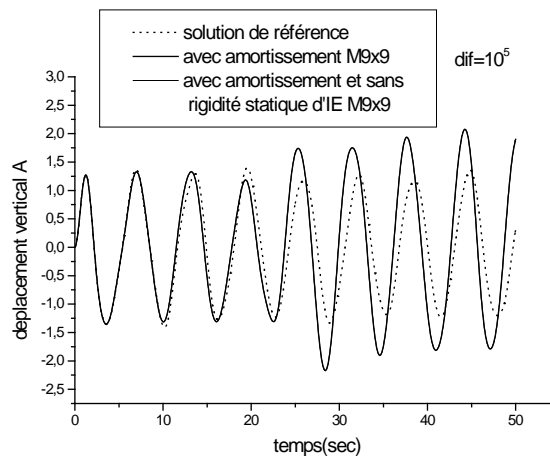


figure (4-24) : L'influence de l'extraction de la rigidité des éléments infinis sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec $dif= 10^5$ pour M9x9

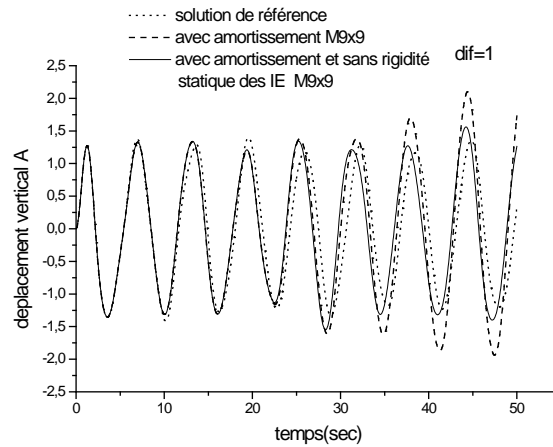


figure (4-25) : L'influence de l'extraction de la rigidité des éléments infinis sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec dif= 1 pour M9x9

On constate sur la figure (4-25) que la réponse au point A est améliorée par l'artifice «extraction de la rigidité statique » pour dif=1.

Par contre pour dif=10⁵ l'extraction de la rigidité statique n'influe pas sur la réponse voir figure(4-24)

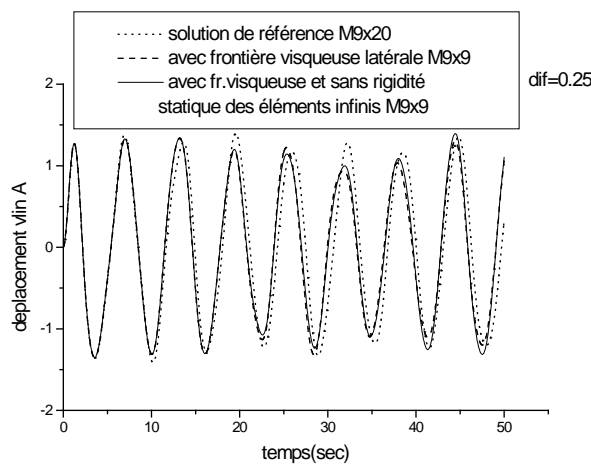


figure (4-26) : L'influence d'extraction de la rigidité statique des éléments infinis sur la réponse au point A et sous une sollicitation concentrée harmonique avec dif=0.25 et pour M9x9

Pour dif=0.25<1, voir figure (4-26), la formule s'avère intéressante et le résultat est proche de la solution de référence du fait de l'incorporation d'une frontière visqueuse et l'extraction de la rigidité statique des éléments infinis.

Chapitre 5

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

5.1. Conclusions

Dans le cadre de notre recherche intitulée : «**Formulation et implémentation des éléments infinis en dynamique des sols**», quatre éléments infinis ont été formulés par deux approches différentes l'approche inverse et l'approche directe.

Les éléments infinis ont été utilisés afin de remplacer la partie extérieure du domaine troqué, et réduire le nombre d'éléments finis dans le champ proche.

L'implémentation des éléments infinis au champ lointain par l'approche inverse est relativement simple, par contre l'approche directe reste difficile dans sa partie code de calcul numérique, vu que leurs formulations requièrent la manipulation des intégrales sur un intervalle semi-infini.

Le couplage éléments finis-éléments infinis, a permis d'avoir un temps machine réduit pour la résolution de l'équation de mouvement dans le domaine temporel.

Concernant la première validation les réponses évaluées en différents points sous une sollicitation soudaine dans l'exemple 1 et 2 donnent des résultats non acceptables dus essentiellement à l'apparition des réflexions parasites après un court laps de temps, entraînant l'effet de dispersion, le critère de radiation se trouve ainsi violé.

On constate que les quatre types d'éléments infinis formulés n'absorbent pas totalement l'énergie véhiculée par les ondes émises qui devraient être transmises en dehors du modèle fini.

Il est à noter aussi que lorsque la distance du pôle est importante, l'interface éléments finis-éléments infinis sera considérée comme une frontière fixe.

En conséquence il est recommandé de prévoir une distance du pôle assez réduite.

Il est conseillé d'utiliser des éléments infinis basés sur l'approche directe de type exponentiel, qui nous ont mené à des résultats appréciables.

L'exemple 3 montre que la solution s'améliore considérablement lorsque le pôle est très proche de l'élément infini, pour cela on peut aussi conclure que l'incorporation d'une frontière visqueuse qui tient compte de l'absorption des ondes P et S de type Lysmer-Kuhlemeyer demeure indispensable.

L'exemple 4 démontre clairement la bonne amélioration des résultats, à condition de négliger la rigidité statique des éléments infinis, car cette dernière provient de la géométrie de l'élément infini.

La deuxième validation traite le phénomène de la radiation latérale des ondes tout en ayant une base rigide, les réponses seront évaluées en différents points sous une charge concentrée harmonique ; dans l'exemple 1 l'implémentation des éléments infinis est latérale, on obtient des résultats non acceptables dus à l'effet de dispersion après un court laps de temps.

L'exemple 2 l'implémentation du modèle éléments finis-éléments infinis-frontière visqueuse avec des éléments infinis sans rigidité statique, a fait encore sa preuve lors de la de simulation et donne d'excellents résultat.

Dans cette étude, on peut conclure que l'implémentation des ces éléments infinis absorbeurs ont des propriétés d'absorption acceptable.

5.2. Recommandations

Les principales recommandations pour des travaux futurs peuvent être résumées comme suit :

- 1- Jumeler les éléments infinis avec d'autres frontières de transmission tels que la frontière de Smith.
- 2- L'extension du modèle présenté aux problèmes :
 - tridimensionnels.
 - d'interaction dynamique sol-structure.
- 3- Etendre le traitement linéaire au traitement non linéaire du sol en champ proche, en utilisant un modèle élastoplastique qui reflète mieux son comportement réel.
- 4- Mettre en évidence des éléments finis et infinis compressibles, où la consolidation est prise en compte.

- 5- Utilisation des éléments d'interface sol-structure pour la modélisation du système.
- 6- Introduire la charge sismique dans le modèle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Achenbach, J.D., « *Wave propagation in elastic solids* », Elsevier science publishers (1973).
- [2] Al-Hounaidi, M.O., « *Analysis of wave propagation in unbounded media* », Comp. and Struct. Vol33, N°4 ,pp 1037-1045 (1989).
- [3] Anderson, D.L., and Ungless, R.C., « *Infinite finite elements* », Int. Symp. innovative Num. Anal. Appl. Eng. Sci. France (1977).
- [4] Barbat, A.M., Carnet, J.M., « *Structural response computation in earthquake engineering* », Pineridge Press (1989).
- [5] Bathe, K.J., and Wilson, E.L., « *Numerical methods in finite element analysis* », Prentice-Hall Inc., Englewood cliffs, N.J. (1976).
- [6] Bathe, K.J., « *Finite element procedures in engineering analysis* », Prentice-Hall, Englewood cliffs, N.J. (1982).
- [7] Bayo, E., wilson, E.L., « *Numerical techniques for the evaluation of soil-structure interaction effects in time domaine* », Report N° UCB/EERC-83/04 February 1983.
- [8] Beer, G., and Meek, J.L., « *Infinite domain elements* », Int. Jour. Num. Meth. Eng. 17(1), pp 43-52 (1981).
- [9] Bettess, P., « *Infinite elements* », Int. Jour. Num. Meth. Eng. 11, pp 53-64 (1977).
- [10] Bettess, P., and Zienkiewicz, O.C., « *Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements* », Int. Jour. Num. Meth. Eng. 11, pp 1271-1290 (1977).
- [11] Bettess, P., « *More infinite elements* », Int. Jour. Num. Meth. Eng. 15, pp 1613-1626 (1980).
- [12] Bettess, P., Bettess, J.A., « *Infinite element for dynamic problems* », Eng. Comp. 8, pp 99-124 (1991).
- [13] Brebbia, C.A., and Dominguez, J., « *Boundary elements an introductory course* », Mc Graw Hill (1989).
- [14] Bull, J.W., « *Soil-structure interaction numerical analysis and modelling* », E & FN SPON edition (1994).

- [15] Chelghoum, A., and Nour, A., « *Implémentation numérique des frontières de transmission visqueuses standard et modifiée pour la simulation du champ lointaine* », Premier Colloque National de Génie parasismique Vol1, pp 238-249 (1996).
- [16] Clough, R.W., Penzien, J., « *Dynamic of structures* », Mc Graw Hill (1975).
- [17] Cook, R.D., « *Concepts and application of finite element analysis* », John Willy & Sons (1981).
- [18] Curnier, A., « *A static infinite element* », Int. J. Num. Meth. Eng. 19, pp 1479-1488 (1983).
- [19] Davidovici, V., « *Génie parasismique* », Presse de l'ENPC Paris (1985).
- [20] Dhatt, G., Touzot, G., « *Une présentation de la méthode des éléments finis* », Maloine S.A. editeur (1984).
- [21] Donida, G., Bruschi, R., and Bernetti, R., « *Infinite elements in problems of geomechanics* », Comp. and Struct. Vol 29, N°1, pp 63-67 (1988).
- [22] Donida, G., and Bernetti, R., « *Finite element approximation of dynamic problems for semi-infinite solids in elasticity* », Comp. and Struct. Vol 41, N°4, pp 835-842 (1991).
- [23] Godbole, P.N., Vildakar, M .N., and Noorzaei, J., « *Nonlinear soil-structure interaction analysis using coupled finite-infinite elements* », Comp. and Struct. Vol 36, N°6, pp 1089-1096 (1990).
- [24] Hinton, E., Rock, J., Zienkiewicz, O.C., « *A note on mass lumping and related process in infinite element method* », Jour. Eart. Eng. Struc. Dyn. 4, pp 245-249 (1976).
- [25] Haggblad, B., and Nordgren, G., « *Modelling non linear soil-structure interaction using interface elements, elastic-plastic soil elements and absorbing infinite elements* », Comp. And Struct. Vol 26 N°1/2, pp 307-324 (1987).
- [26] Imbert, J.F., « *Analyse des structures par éléments finis* », Cepadues-Edition 2^{ème} édition.
- [27] Kausel, E. « *local transmitting boundaries* », Jour. Eng. Mech. ,vol 114, N°6, pp 1011-1027 (1988).
- [28] Kellezi, L., « *Local transmitting boundaries for transient elastic analysis* », Soil Dyn. Eart. Eng. 19, pp 533-547 (2000).
- [29] Kumar, P., « *Static infinite element formulation* », Int. Jour. Num. Meth. Eng. 111, pp 2355-2372 (1985).
- [30] Kumar, P., « *Analysis of flexible pavements using finite and infinite elements* », Austr. Road Red. , 16, pp 18-24 (1986).

- [31] Kumar, P., « *Numerical modelling criterion for the analysis of underground openings using infinite elements* », *Appl. Math. modelling*, 10, pp 357-366 (1986).
- [32] Kumar, P., « *Nonhomogeneous and cross-anisotropic infinite elements* », *Comp. and Struct.* Vol 28, N°3, pp 327-333 (1988).
- [33] Luco, J.E., Hadjian, A.H., Bos, H.D., « *The dynamic modeling of the half-plane by finite elements* », *Nucl. Eng. Desig.* , Vol 31, pp 184-194 (1974).
- [34] Lynn, P.P., and Hadid, H.A., « *Infinite elements with 1/r type decay* », *Int. Jour. Num. Meth. Eng.* 17(3), pp 347-355 (1981).
- [35] Lysmer, J., Kuhlemeyer, R.L., « *Finite dynamic model for infinite media* », *Jour. Eng. Mech.*, pp 859-877, (1969).
- [36] Marques, J.M.M.C, and Owen, D.R .L., « *Infinite elements in quasi-static materially non linear problems* », *Comp. and Struct.* Vol 18, pp 739-751 (1984).
- [37] Marques, J.M.M.C, and Owen D.R .L., « *Implicit-explicit time integration in quasistatic elasto-viscoplasticity using finite and infinite elements* », *Comp.Meth. Appl. Mech. Eng.* 42, pp 167-182 (1984).
- [38] Medina, F., « *modelling of soil-structure interaction by finite and infinite elements* », Report N° UCB/EERC-80/43 december (1980).
- [39] Medina, F., « *An axisymmetric infinite element* », *Int. Jour. Num. Meth. Eng.* 17, pp 1177-1185 (1981).
- [40] Medina, F. and Penzien, J., « *Infinite elements for elastodynamics*», *Eart. Eng. Struc. Dyn.* Vol 10, pp 699-709 (1982).
- [41] Nour, A., « *Simulation numérique du champ lointain dans l'interaction dynamique sol-structure par les frontières de transmission* », Thèse de Magister, USTHB, Alger (1997).
- [42] Pecker, A., « *Dynamique des sols* », Presse de l'ENPC Paris (1984).
- [43] Pissanetzky, S., « *An infinite element an a formula for numerical quadrature over an infinite interval* », *Int. Jour. Num. Meth. Eng.* 19, pp 913-927 (1983).
- [44] Prat, M., « *La modélisation des ouvrages* », AFPC emploi des éléments finis en Génie Civil livre 1^{ère} Edition, Hermès, Paris (1995).
- [45] Rajapakse, R.K.N.D., and Karasudhi Pisidhi, « *Elastostatic infinite elements for layared half spaces* », *Jour. Eng. Mech.* , Vol 111, N°9, pp 1144-1157 (1985).
- [46] Richard, F.E., Woods, R.D., and Hall, J.R., « *Vibration of soils and foundations* », Prentice Hall (1970).

- [47] Simons, H.A., and Randolph, M.F., « *short communication comparison of transmitting boundaries in dynamic : finite element analysis using explicit time integration* », Int. Jour. Num. and An. Met. In Geom. Vol 10, pp 329-342 (1986).
- [48] Shridar, D.S., and Chandrasekaran, V.S., « *Use of transmitting boundary for loads having non-vanishing time average* », Comp. and Struc. Vol 54, N°3, pp 547-550 (1995).
- [49] Smith, I.M., and Griffiths, D.V., « *Programming the finite element method* », John Wiley, Chichester (1992).
- [50] Timoshenko, S., Goodier, J.N., « *Theory of elasticity* », Mc Graw Hill (1951).
- [51] Udwadia, F.E., and Kumar, R., « *Iterative methods for non classically damped dynamic systems* », Eart. Eng. Struc. Dyn. , Vol 23, pp 137-152 (1994).
- [52] Vildakar, M .N., Noorzaei, J., and Godbole, P.N., « *Behaviour of infinite elements in an elasto-plastic domain* », Comp. and Struct. Vol 51, N°4, pp 337-342 (1994).
- [53] Vildakar, M .N., Godbole, P.N., and Noorzaei, J., « *Some new three dimensional infinite elements* », Comp. and Struct. Vol 34, N°3, pp 455-467 (1990).
- [54] White, W., Valliapan, S., and Lee, I.K., « *Unified boundary for finite dynamic models* », Jour. Eng. Mech. Div. ASCE 103, pp 949-964 (1977).
- [55] Wolf, J.P., « *Dynamic soil-structure interaction* », Prentice Hall (1985).
- [56] Wolf, J.P., « *Soil-structure interaction analysis in time domain* », Prentice Hall (1988).
- [57] Zhang , C. and Wong, G., « *Numerical model of the infinite domain and infinite elements* », Proc. 1st National Conf. on Combination Method of Analytical and Numerical Solutions, Hunan University press, pp 6-44 (1990).
- [58] Zhang, C., Chen, X, and Wang, G., « *A coupling model of FE-BE-IE-IBE for non-linear layered soil-structure interactions* », Eart. Eng. Struc. Dyn. 28, pp 421-441 (1999).
- [59] Zienkiewicz, O.C. , Taylor, R.L., « *The finite element method* », Mc Graw Hill 1989, vol 1, *basic formulation and linear problems*.
- [60] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., « *The finite element method* », Mc Graw Hill 1989, vol 2, *solid and fluid mechanics, dynamics and non linearity*.
- [61] Zienkiewicz, O.C., and Bettess, P., « *Infinite elements in the study of fluid structure interaction problems* », Proc. 2nd Int. symp. on comp. Methods Appl. Sci. Versailles (1975).

- [62] Zienkiewicz, O.C., Bettess, P., Chian, T.C., and Emson, C., « Numeical methods for unbounded field problems and new infinite element formulation », *Comp. Fluid Dyn.*, Hermosa, Albuquerque pp 115-148 (1981).

ANNEXE A - INTEGRATION NUMERIQUE

La plupart des calculs numériques pour la détermination de la rigidité ou de la masse élémentaire pour les éléments infinis formulés par l'approche directe, on trouve une forme générale :

$$\mathbf{I} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+\infty} f(\eta, \xi) d\eta d\xi \quad (\text{A-1})$$

Première technique

Le calcul numérique d'intégrale semi-infini, dans le cas des fonctions de décroissance de type puissance, se présente souvent sous la forme :

$$\mathbf{I}_1 = \int_{-1}^{+\infty} f(x) dx \quad (\text{A-2})$$

La technique est de transformer le domaine d'intégration semi-infini en domaine fini et l'application de l'intégration numérique Gauss-Legendre ; le changement de variable qui convient est :

$$s = \frac{x}{2+x}, \text{ ou bien } x = \frac{2s}{1-s} \quad (\text{A-3})$$

On a bien une forme ordinaire

$$\mathbf{I}_1 = \int_{-1}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1-s}\right) \frac{2}{(1-s)^2} ds \quad (\text{A-4})$$

Donc on a :

$$\mathbf{I}_1 = \sum_{i=1}^n p_i f(u_i) \quad (\text{A-5})$$

Avec

$$p_i = \frac{2.w_i}{(1-\xi_i)^2} \quad \text{et} \quad u_i = \frac{2.\xi_i}{1-\xi_i} \quad (\text{A-6})$$

(ξ_i, w_i) sont les abscisses et les poids des points de Gauss pour une intégration numérique de Gauss-Legendre, n est le nombre de point de Gauss.

Deuxième technique

La formule standard d'intégration numérique de Gauss-Laguerre, utilisant les polynômes de Laguerre, permet d'évaluer les intégrales de type :

$$\mathbf{I} = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} dx = \sum_{i=1}^n p_i f(a_i) \quad (\text{A-7})$$

a_i et p_i sont les abscisses et les poids des points d'intégration numérique de Gauss-Laguerre, qui sont tabulés ci-dessous.

L'intégration numérique ne donne de bons résultats que si la fonction $f(x)$ est un polynôme, et un nombre approprié des points d'intégration est utilisé. Il est clair que cette formule d'intégration convient parfaitement à la décroissance de type exponentielle.

- ❖ Pour les fonctions de décroissance de type exponentielle, elles se présentent sous cette forme générale, voir section (3.3.2):

$$\mathbf{I}_2 = \int_{-1}^{+\infty} f(\xi).e^{\frac{-\xi}{L}} d\xi \quad (\text{A-8})$$

L'intégration numérique de Gauss-Laguerre peut être adoptée pour évaluer ce genre d'intégrale, en procédant à un changement de variable convenable.

$$s = \frac{1}{L}(\xi + 1) \quad , \quad \text{ou bien} \quad \xi = L.s - 1 \quad (\text{A-9})$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_0^{+\infty} f(Ls-1).e^{-s}.e^{\frac{1}{L}}.Lds = \int_0^{+\infty} g(s).e^{-s} ds = \sum_{i=1}^n p'_i.f(a'_i) \quad (\text{A-10})$$

Où les nouvelles valeurs des abscisses et leurs poids deviennent :

$$a'_i = L.a_i - 1 \quad \text{et} \quad p'_i = L.e^{\frac{1}{L}} p_i \quad (\text{A-11})$$

❖ On peut également utiliser l'intégration numérique de Gauss-Legendre pour des fonction de décroissance de type puissance, en faisant l'artifice suivant.

$$\mathbf{I}_3 = \int_{-1}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} [f(s-1)e^s] e^{-s} ds = \int_0^{+\infty} h(s)e^{-s} ds \quad (\text{A-12})$$

En conséquence on est ramené à l'utilisation de la quadrature de Gauss-Laguerre pour l'intégration numérique, en utilisant la formule (A-7)

I	a_i (Abscisse)	p_i (Poid)
Ordre n=1		
1	0.1000000000000000E+01	0.1000000000000000E+01
Ordre n=2		
1	0.5857864376269049E+00	0.8535533905932737E+00
2	0.3414213562373095E+01	0.1464466094067262E+00
Ordre n=3		
1	0.4157745567834790E+00	0.7110930099291730E+00
2	0.2294280360279041E+01	0.2785177335692408E+00
3	0.6289945082937479E+01	0.1038925650158613E-01
Ordre n=4		
1	0.3225476896193923E+00	0.6031541043416336E+00
2	0.1745761101158346E+01	0.3574186924377996E+00
3	0.4236620296921127E+01	0.3888790851500538E-01
4	0.9395070912301133E+01	0.5392947055613274E-03

Tableau (A-1) : Table des abscisses et leurs poids d'intégration numérique de Gauss-Laguerre

ANNEXE B - INTEGRATION PAS A PAS ALGORITHME DE DIFFERENCE FINI CENTRALE

L'équation de mouvement (2-1) peut s'écrire d'une autre manière sous forme indicielle et temporelle.

$$m_i \ddot{u}_i + c_i \dot{u}_i + k_{ij} u_j = p_i^t \quad (\text{B-1})$$

La solution est obtenue à l'instant t_{i+1} ($t + \Delta t$) par rapport à un système d'équation de mouvement à l'instant t_i (t), avec le pas de temps Δt .

On pose $a_1 = \frac{1}{\Delta t^2}$, $a_2 = \frac{1}{2\Delta t}$, $a_3 = 2.a_1$ et $a_4 = \frac{1}{a_3}$

L'accélération s'exprime sous forme de différence fini :

$$\ddot{u}_i = a_1 (u_i^{t+\Delta t} - 2.u_i^t + u_i^{t-\Delta t}) \quad (\text{B-2})$$

et la vitesse s'exprime sous forme de différence fini centrale :

$$\dot{u}_i = a_2 (u_i^{t+\Delta t} - u_i^{t-\Delta t}) \quad (\text{B-3})$$

Après substitution de (B-2) et (B-3) dans l'équation (B-1) on obtient :

$$(a_1 m_i + a_2 c_i) u_i^{t+\Delta t} = p_i^t - k_{ij} u_j^t + a_3 m_i u_i^t - (a_1 m_i - a_2 c_i) u_i^{t-\Delta t} \quad (\text{B-4})$$

En introduisant la notion de la masse effective et la force effective m_i^* et p_i^* respectivement.

L'équation (B-4) se simplifiée et devienne :

$$m_i^* u_i^{t+\Delta t} = p_i^* \quad (\text{B-5})$$

La solution de l'équation (B-5) est :

$$u_i^{t+\Delta t} = \frac{p_i^*}{m_i^*} \quad (\text{B-6})$$

Nota :

- L'algorithme est stable conditionnellement que si le critère (2-26) est vérifié.
- Connaissant les conditions initiales u_i^0 , \dot{u}_i^0 et \ddot{u}_i^0 on peut déduire le déplacement antécédent par la formule :

$$u_i^{-\Delta t} = u_i^0 - \Delta t \cdot \dot{u}_i^0 + a_4 \cdot \ddot{u}_i^0 \quad (\text{B-7})$$