N° d'ordre: 18/20/2 - M/GP

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
U.S.T.H.B.

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En: Génie des Procédés

Spécialité : Génie des Procédés Industriels

Mémoire de Magister

Par : Fetta DANANE

THEME

Convection mixte lors de l'écoulement d'un fluide de Bingham au sein de conduites de sections droites rectangulaires.

Soutenu le 02/07/2012, devant la commission d'examen

Mme F. BENTAHAR	Professeur	Présidente
Mr Y.K. BENKAHLA	Maître de Conférences A	Directeur de thèse
Mme H. KAHALERRAS	Professeur	Examinatrice
Mr A. LACHEMET	Maître de Conférences A	Examinateur

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au niveau du Laboratoire de *Rhéologie et Simulation Numérique des écoulements*.

Je tiens, en premier lieu, à témoigner ma sincère reconnaissance à Monsieur **Y.K. Benkahla**, Maître de Conférences A à l'USTHB et responsable de l'équipe de recherche *Rhéologie et Simulation Numérique des écoulements*, d'avoir encadré ce mémoire avec rigueur, disponibilité et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens pour mener à bien ce travail. Mais aussi je tiens à le saluer, car il m'a inculqué une partie de ses qualités scientifiques grâce à ses nombreux conseils et avis sur les travaux que j'ai pu mener. De plus, il a su faire partager son expérience et sa rigueur scientifique au cours de discussions afin de m'éclairer lors de mes moments de doutes; j'ai pu bénéficier de ses connaissances et de son expérience et apprécier ses qualités et ses valeurs humaines, je voudrais lui adresser un grand merci.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement Madame **F. BENTAHAR,** Professeur à l'USTHB, de m'avoir honoré en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements à Madame **H**. **KAHALERRAS,** Professeur à l'USTHB**,** qui a accepté de juger ce travail.

Mes sincères remerciements vont aussi à Monsieur **A LACHEMET,** Maître de conférences à l'USTHB; qui a accepté de juger ce travail.

J'exprime ma gratitude à M. A.Boutra, pour sa disponibilité et pour toute l'aide qu'il m'a apporté dès mes premiers pas dans le laboratoire et qui n'a cessé de me prodiguer des conseils pertinents. Sa compréhension, son soutien m'ont souvent été bien précieux et ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Ma reconnaissance va également à Mlle N.Labsi, Maître Assistante A à l'USTHB pour sa présence permanente, ses encouragements ainsi que son aide significative au cours de mon passage au sein du laboratoire

Mes remercîments vont aussi à M. M.Mellal, Mme H.ABCHICHE et Mme N.SAHRAOUI pour leur sympathie et leurs conseils avisés, qui m'ont beaucoup apporté lors de mon séjour au sein de l'équipe.

Je remercie en particulier, Mlle Ahlem Boudiaf qui a su trouver les mots pour m'encourager, mais encore les membres du laboratoire de *Rhéologie et Simulation Numérique des écoulements,* pour leur aide et encouragement ainsi que l'ambiance conviviale qu'ils ont créé.

Enfin, je souhaite exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

SOMMAIRE

Introduction générale 1

Chapitre I : Recherche bibliographique

Introduction 3
I.1 Rappel sur la convection thermique 3
I.2 Généralités sur la rhéologie 4
I.2.1 Définition de la viscosité 4
I.2.1.1 Viscosité apparente 4
I.2.1.2 Viscosité cinématique 4
I.2.1.3 Viscosité relative 4
I.2.2 Classification des fluides 5
I.2.2.1 Fluides newtoniens 5
I.2.2.2 Fluides non newtoniens ou complexes 5
a) Fluides à viscosité indépendante du temps 5
b) Fluides à viscosité dépendant du temps 6
I.2.3 Modèles rhéologiques 7
I.2.3.1 Fluide sans contrainte seuil 7
I.2.3.2 Fluides à contrainte seuil 8
I.3 Synthèse bibliographique 8
Conclusion 12

Chapitre II : Modélisation mathématique

Introduction 13
II.1 Hypothèses de l'étude 13
II.2 Loi constitutive dimensionnelles 14
II.3 Configurations géométriques 16
II.4 Présentation des deux modèles physiques 16
II.4.1 Première configuration géométrique : Canal plan 17
II.4.1.1 Mise en équations du problème de la première configuration 18
II.4.1.2 Conditions aux limites 20
II.4.2 Seconde configuration géométrique : Conduite à section droite Rectangulaire 21
II.4.2.1 Mise en équations du problème de la seconde configuration 21
II.4.2.2 Conditions aux limites 22
II.5 Ecriture adimensionnelle des Equations générales 23
II.5.1 Première configuration géométrie 24
II.5.2 Deuxième géométrique 25
II.6 Présentation du système d'équations sous forme conservative 26
Conclusion 27

Chapitre III : Modélisation Numérique

Introduction 29
III.1 Principe de la méthode des volumes finis 29
III.2 Discrétisation des équations générales de transport 31
III.3 Schémas d'interpolation 33
III.4 Traitement du terme source 34
III.5 Application aux équations générales de transport 34
III.5.1 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X 34
III.5.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y 35
III.5.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Z 37
III.5.4 Discrétisation de l'équation de l'énergie 38
III.6 Résolution du système d'équations discrétisées 39
III.7 Méthode de résolution 41
III.8 Critère de convergence 41
Conclusion 42

Chapitre IV : Résultats et interprétation

Introduction 43
IV.1 Première géométrie : canal plan ou plaques parallèles infinies 43
IV.1.1 Validation du code de calcul 44
IV.1.2 Etude hydrodynamique et thermique 45
IV.1.2.1 Effet du nombre de Bingham 45
IV.1.2.2 Effet du nombre de Reynolds 47
IV.1.2.3 Effet du nombre de Prandtl 52
IV.1.2.4 Effet du nombre de Grashof 54
IV.1.2.5 Effet de l'inclinaison du canal 56
IV.1.2.6 Effet de la dissipation visqueuse 62
IV.2 Deuxième géométrie : conduite de section droite rectangulaire 65
IV.2.1 Validation du code de calcul 65
IV.2.2 Etude hydrodynamique et thermique 67
IV.2.2.1 Effet du rapport de forme 67
IV.2.2.2 Effet du nombre de Grashof 68
IV.2.2.3 Effet de la dissipation visqueuse 81
a) En mode de convection forcée 81
b) En mode de convection mixte 83
Conclusion 84

Conclusion générale 86

Références bibliographiques 88

Annexes

Annexe 1
Annexe 2
Annexe 3
Annexe 4
Annexe 5
Annexe 6
Annexe 7

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1 : Modèles rhéologiques en loi de puissance. 8

Tableau II.1 : Identification des différents termes de l'équation de transport. 26

Table III.1 : Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numériques. 33

Tableau IV.1 : Comparaison entre les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt de la présente étude avec celle de [31] pour différentes valeurs du nombre de Bingham 44

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Rhéogramme : (1) fluide newtonien, (2) fluide de Bingham,(3) fluide rhéofluidifiant et (4) fluide rhéoépaississant. 6

Figure II.1 : Rhéogramme du fluide de Bingham pour différentes valeurs de l'indice m de croissance exponentielle. 15

Figure II.2 : Schéma représentatif la première configuration géométrique et correspondant aux deux plans parallèles de largeur infinie. 17

Figure II.3 : Seconde configuration géométrique : Conduite à section droite rectangulaire. 21

Figure III.1 : Volume de contrôle tridimensionnel. 30

Figure III.2 : Volume de contrôle bidimensionnel. 30

Figure IV.1 : Comparaison de l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt de la présente étude avec celle de [34]. Pr = 10. 44

Figure IV.2 : Développement des profils de vitesse longitudinale en différentessections droites du canal et pour différents nombres de Bingham. Re = 100. 45

Figure IV.3 : Développement longitudinale des profils de température réduite en différentes sections droites du canal et pour différents nombres de Bingham. Re = 100. 46

Figure IV.4 : Influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse longitudinale en différentes sections droites du canal. 48

Figure IV.5 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale de la vitesse centrale.Pr = 1 ; Bn = 0. 48

Figure IV.6 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale de la vitesse centrale. Pr = 10 ; Bn = 2. 48

Figure IV.7 : Influence du nombre de Reynolds sur le développement longitudinal du coefficient de frottement de Fanning. Pr = 1 ; Bn = 0. 49

Figure IV.8 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinal du coefficient de frottement de Fanning. Pr = 10 ; Bn = 2. 49

Figure IV.9 : Influence du nombre de Reynolds sur les profils de température réduite pour différentes positons longitudinales. 50

Figure IV.10 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinal de la température réduite. Pr= 1; Bn = 0. 51

Figure IV.11 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale de la température réduite. Pr= 10 ; Bn = 2. 51

Figure IV.12 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt.Pr= 1 ; Bn = 0. 51

Figure IV.13 : Influence du nombre de Reynold sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt. Pr= 10 ; Bn = 2. 51

Figure IV.14 : Influence du nombre de Prandtl sur le développement longitudinal du coefficient de frottement de Fanning. Re = 100. 52

Figure IV.15 : Influence du nombre de Prandtl sur les profils de température Pour deux positions longitudinales. Re= 100. 53

Figure IV.16 : Influence du nombre de Prandtl sur l'évolution longitudinal de la température moyenne adimensionnelle. Re= 100. 53

Figure IV.17 : Influence du nombre de Prandtl sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt. Re = 100. 54

Figure IV.18 : Influence du nombre de Grashof sur l'évolution longitudinaledu coefficient de frottement apparent. Pr = 1 : Re = 100 ; Bn = 0. 55

Figure IV.19 : Influence du nombre de Grashof sur l'évolutionlongitudinale du nombre de Nusselt. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0. 56

Figure IV.20 : Influence de l'inclinaison du canal sur les profils devitesse longitudinale en différentes positions. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0. 57

Figure IV.21 : Influence de l'inclinaison du canal sur l'évolution longitudinaledu coefficient de frottement à la paroi supérieure. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0. 58

Figure IV.22 : Influence de l'inclinaison du canal sur l'évolution longitudinaledu coefficient de frottement à la paroi inférieure. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0. 59

Figure IV.23 : Influence de l'inclinaison du canal sur les profilsde température réduite. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0. 60

Figure IV.24 : Influence de l'angle d'inclinaison sur l'évolution longitudinale de la température moyenne réduite. Pr= 1 ; Re = 100 ; Gr = 10^5 ; Br = 0. 61

Figure IV.25 : Influence de l'inclinaison du canal sur l'évolution longitudinaledu nombre de Nusselt à la paroi supérieure. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0. 62

Figure IV.26 : Influence de l'inclinaison du canal sur l'évolution longitudinaledu nombre de Nusselt à la paroi inférieure. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0. 62

Figure IV.27 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre Brinkman. Re = 100 ; Bn = 10 ; Pr = 10. 63

Figure IV.28 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Brinkman. Re = 100 ; Bn = 10 ; Pr = 10. 63

Figure IV.29 : Evolution longitudinal du nombre de Nusselt total pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.γ = 1 ; Bn = 0. 65

Figure IV.30 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement total pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.γ = 1 ; Bn = 0. 66

Figure IV.31 : Comparaison entre les évolutions du nombre de Nusselt en fonction de (1/Gz) obtenues par la présente étude et celle de [28]. γ = 0,5 ; Bn = 1. 66

Figure IV.32 : Comparaison entre les évolutions du nombre de Nusselt en fonction de (1/Gz) obtenues par la présente étude et celle de [28]. γ = 1 ; Bn = 1. 67

Figure IV.33 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement apparent moyenpour différents rapports de forme. Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 67

Figure IV.34 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt moyen pour différents rapports de forme. Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 68

Figure IV.35 : Evolution longitudinale des profils de vitesse en différentes positions transversales.γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 70

Figure IV.36 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement relevé sur les parois supérieure et inférieure de la conduite.γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 71

Figure IV.36.1 : Schématisation des courants secondaires sur une section droite (plan YOZ) et pour le cas d'un chauffage. γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; X = 5 ; Gr = 5 10^4. 72

Figure IV.36.2 : Schématisation des courants secondaires sur une section droite (plan YOZ) et pour le cas d'un refroidissement. γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; X = 5 ;Gr = - 5 10^4. 73

Figure IV.37 : Evolution longitudinal du coefficient de frottement relevé à la paroi gauche et droite de la conduite, γ = 1; Re = 100; Pr = 1; Bn = 0. 73

Figure IV.38 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement apparent total.γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 74

Figure IV.39 : Profils de température adimensionnelleen X = 1 et X = 10.γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; Z = 0,5. 75

Figure IV.40.1 : Structure des isothermes le long de la direction longitudinale en convection forcée pure. Gr = 0 ; γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 76

Figure IV.40.2 : Structure des isothermes le long de la direction longitudinale en convection forcée mixte. Gr = 2 10^4 ; γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 77

Figure IV.40.3 : Structure des isothermes le long de la direction longitudinale en convection forcée mixte. Gr = -2 10^4 ; γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 77

Figure IV.41 : Evolution longitudinale de la température moyenne. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 78

Figure IV.42 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt relevé sur les parois supérieure etinférieure de la conduite,$\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 79

Figure IV.43 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt relevé sur lesparois gauche et droite de la conduite. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 80

Figure IV.44 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt total.de la conduite$\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0. 80

Figure IV.45: Evolution longitudinale de la température moyenne réduite pour différents nombres de Brinkman. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; Gr = 0. 81

Figure IV.46: Evolution longitudinale du nombre de Nusselt total pourdifférents nombres de Brinkman. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; Gr = 0. 82

Figure IV.47 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement périphérique pourdifférents nombres de Brinkman. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; $Gr = -10^5$. 83

Figure IV.48 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt périphérique pour différents nombres de Brinkman. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; $Gr = -10^5$. 84

NOMENCLATURE

a	hauteur de la conduite	m
b	largeur de la conduite	m
C_p	capacité calorifique du fluide à pression constante	J kg^{-1} K^{-1}
D_H	diamètre hydraulique de la conduite	m
e_{ij}	tenseur des taux de déformations	
FRe_x	coefficient de frottement apparent local	
FRe_{xt}	coefficient de frottement apparent total	
g	accélération de la pesanteur	m s^{-2}
k	conductivité thermique	W m^{-1} k^{-1}
L	la longueur de la conduite	m
m	paramètre de croissance exponentielle	s
m^*	paramètre de croissance exponentielle adimensionné	
n	indice d'écoulement du fluide	
Nu_x	nombre de Nusselt local	
Nu_{xt}	nombre de Nusselt local total	
p*	pression motricedimensionnelle du fluide	Pa
P*	pression motrice adimensionnelle du fluide	
t	temps	s
T	température	K
T_w	température du fluide à la paroi	K
T_m	température moyenne du fluide	K
T_0	température du fluide à l'entrée	K
ΔT	gradient de température T_w-T_0	K
u	composante dimensionnelle de la vitesse longitudinale	ms^{-1}
U	composante adimensionnelle de la vitesse longitudinale	
U_0	vitesse du fluide à l'entrée de la conduite	ms^{-1}
v	composante dimensionnelle de la vitesse	m s^{-1}
V	composante adimensionnelle de la vitesse transversale selon y	
w	composante dimensionnelle de la vitesse transversale selon z	m s^{-1}
W	composante adimensionnelle de la vitesse transversale selon Z	m s^{-1}
x	coordonnée longitudinale	m
X	coordonnée longitudinaleadimensionnelle	
y	coordonnée transversale	m
Y	coordonnée transversale adimensionnelle	
z	coordonnée transversale	m
Z	coordonnée transversale adimensionnelle	

Les nombres adimensionnels :

$$Bn = \frac{\tau_0 D_H}{\mu_p U_0}$$ Nombre de Bingham

$Br = \frac{\mu_p \, U_0^2}{k(T_0 - T_w)}$	Nombre de Brinkman
$F = \frac{2 \, \tau_w}{\rho \, U_0^2}$	Coefficient de frottement de Fanning
$Gr = \frac{g \, \beta \, \rho_0^2 (T_w - T_0) \, D_H{}^3}{\mu_p^2}$	Nombre de Grashof,
$Gz = \frac{x}{D_H \, Re \, Pr}$	Nombre de Graetz
$Nu_x = -\frac{1}{\Phi_m} \frac{\partial \phi}{\partial Y}\Big\|_{Paroi}$	Nombre de Nusseltlocal
$Pr = \frac{\mu_p \, C_p}{k}$	Nombre de Prandtl
$Re = \frac{\rho U_0 D_H}{\mu_p}$	Nombre de Reynolds

Symboles grecs

α	angle d'inclinaison du canal	
β	coefficient de dilatation thermique	K^{-1}
Φ	température adimensionnelle du fluide, $= \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}$	
Φ_m	température moyenne adimensionnelle du fluide, $= \frac{T_m - T_w}{T_0 - T_w}$	
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement	s^{-1}
$\dot{\gamma}^*$	taux de cisaillement adimensionnel	
η	viscosité dynamique du fluide	$kg \, m^{-1} s^{-1}$
η_{app}	viscosité apparente adimensionnelle du fluide	
μ_p	viscosité plastique du fluide	$kg \, m^{-1} \, s^{-1}$
μ_{app}	viscosité apparente dimensionnelle du fluide	$kg \, m^{-1} \, s^{-1}$
ρ	masse volumique du fluide	$kg \, m^{-3}$
τ	contrainte de cisaillement	Pa
τ_0	contrainte seuil	Pa
τ_{ij}	contraintes visqueuses	
τ_p	contrainte de cisaillement à la paroi	Pa

Indices

0	entrée
w	paroi
m	moyenne

Résumé :

Le présent travail consiste en l'étude numérique de l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide de Bingham subissant un transfert thermique en mode de convection mixte dans deux configurations géométriques différentes, à savoir : deux plans parallèles et conduite à section droite rectangulaire. Dans les deux cas, une température pariétale constante et uniforme est considérée.

Les équations de notre problème sont discrétisées par le biais de la méthode des volumes finis. La validation du code de calcul a été vérifiée après comparaison de nos résultats avec ceux issus de la littérature pour les deux géométries considérées. L'analyse de l'influence des différents paramètres sur la structure de l'écoulement ainsi que sur l'intensité de l'échange thermique ont constitué les principaux objectifs de notre étude.

Les résultats des simulations numériques, nous ont permis de proférer plusieurs constatations sur l'effet subi par la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement.

Abstract:

The present work consists on the numerical mixed convection and heat transfer of non-Newtonian fluid described by the Bingham model in two different geometries, to know: two parallel plates and rectangular canal. In both cases, a constant and uniform temperature in all plates is considered.

The finite volume method and the SIMPLER algorithm are used to solve the conservation equations of mass, momentum, and energy witch satisfy the boundary conditions chosen. This code has been validated, after comparing our results with those of literature.

The results show that heat transfer is greatly affected on the hydrodynamic and a thermal characteristic of the flow was investigated.

Introduction générale

Les fluides sont des substances aux propriétés spécifiques, qui leur valent d'être largement utilisés dans l'industrie. On les retrouve dans des secteurs aussi variés que l'industrie alimentaire, cosmétique, bâtiment et récupération assistée du pétrole, etc.

L'étude des écoulements de ces fluides présentent, par ailleurs, un grand intérêt de par l'extrême richesse des phénomènes qui interviennent dans leur écoulement. En effet, les fluides simples, dits fluides newtoniens et les fluides complexes, dits fluides non newtoniens, peuvent être affectés par l'écoulement et leur structure interne peut être modifiée. La science qui étudie ces écoulements et qui caractérise les divers phénomènes qui se produisent représente le couplage de la mécanique des fluides avec la rhéologie. Cette science présente un grand privilège pour la compréhension et la résolution des multiples problèmes industriels.

Le transfert thermique par convection lors des écoulements à travers des conduites a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs depuis des décennies, en raison de son importance primordiale dans le développement des procédés technologiques qui constituent des étapes de production fréquemment rencontrées dans diverses industries. Dans le but de bien mener la production industrielle, la modélisation numérique offre une optimisation préalable des phénomènes pris en considération.

Dans la présente étude, nous choisissons de tirer parti des avantages offerts par la modélisation numérique afin de réaliser une étude hydrodynamique et thermique de l'écoulement laminaire en mode de convection mixte d'un fluide de Bingham, dans deux géométries différentes, à savoir : deux plans parallèles infinis et conduite à section droite rectangulaire. Néanmoins, la négligence de certains effets rend les résultats obtenus relativement loin de la réalité. C'est pour cette raison que la présente étude a mis en avant l'influence de plusieurs paramètres, tel que la prise en compte de la fonction de dissipation visqueuse.

La compréhension et la résolution du problème physique considéré nécessite, au préalable, la connaissance des notions fondamentales de la mécanique de fluides, des différents modes de transfert thermique et certaines notions sur les écoulements et sur la rhéologie. Ces généralités feront l'objet du premier chapitre qui portera également sur une synthèse bibliographique regroupant les différents travaux entrepris par les chercheurs dans ce domaine.

Le second chapitre sera consacré à la présentation mathématique des problèmes physiques considérés. Ce dernier comprendra, en effet, les équations de conservation qui régissent ce type d'écoulement, à savoir : l'équation de continuité, les équations de l'impulsion, l'équation de l'énergie en tenant compte de la dissipation visqueuse et enfin, la loi constitutive du modèle de Bingham modifié par l'équation rhéologique proposée par Papanastasiou. L'introduction des variables réduites dans ces équations fait ressortir des groupements adimensionnels qui sont les nombres de Reynolds, de Prandtl, de Grashof et de Bingham.

La modélisation numérique des équations de conservation sera abordée dans le troisième chapitre. La méthode des volumes finis sera utilisée pour résoudre les équations de conservation exprimées en variables primitives, c'est-à-dire, en formulation vitesse-pression température. Le traitement du couplage de ces variables sera réalisé à travers l'utilisation de l'algorithme SIMPLER. Sur ces bases, un code de calcul sera développé en langage Fortran, avec une configuration bidimensionnelle et tridimensionnelle permettant la résolution des équations de transport d'une manière générale en coordonnées cartésiennes.

Dans le quatrième et dernier chapitre, les différents résultats issus des simulations numériques relatifs à l'écoulement laminaire en développement simultané pour les deux configurations considérées, seront exposés. Ces résultats porteront sur l'effet de certains paramètres, à savoir : les nombres de Reynolds, de Prandtl, de Bingham et de Grashof ainsi que le rapport de forme pour la conduite rectangulaire et l'inclinaison des deux plans parallèles, sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement en modes de convection forcée et mixte. L'influence de la prise en compte de la fonction de dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie, sera analysée.

En conclusion à ce mémoire, nous présenterons brièvement les principaux résultats obtenus afin de dégager les perspectives de développement de ce travail à moyen terme et les extensions à donner à cette recherche.

Les principaux résultats issus de la présente étude seront regroupés dans une conclusion générale.

Chapitre I :
Recherche bibliographique

Introduction

Le mode d'écoulement des différents fluides et leurs comportements dans les conduites qui les transportent, sont liés à certains phénomènes physiques qui interviennent souvent dans l'industrie ainsi que dans divers domaines. Il est donc important de bien connaître les caractéristiques de ces fluides pour anticiper leurs comportements lors de leur écoulement.

A cet effet, le présent chapitre sera consacré à la présentation de généralités sur la rhéologie des fluides non newtoniens en général et du fluide de Bingham en particulier. Un rappel sur le transfert thermique en mode de convection sera également présenté. Une synthèse bibliographique sera, par la suite, exposée. Elle regroupe les principaux travaux qui ont été entrepris dans le domaine de la rhéologie et des écoulements et qui nous ont servis de base pour l'élaboration du travail que nous vous présentons.

I.1 Rappel sur la convection thermique

La convection est un mode de transfert thermique qui se produit entre un milieu fluide et une surface solide ; c'est un transport d'énergie dû à des mouvements macroscopiques et à un processus de diffusion thermique [1,2].

On distingue deux formes de convection : la convection forcée et la convection naturelle. La convection dite mixte est un mode de transfert thermique pour lequel les deux formes de convection coexistent. La Différence entre la convection naturelle et la convection forcée est à la fois d'ordre thermodynamique et d'ordre mathématique. Sur le plan thermodynamique, le transfert de l'énergie du fluide d'une région à une autre est dû, pour le cas de la convection naturelle, à un écoulement créé par un phénomène dit ***de poussée d'Archimède*** qui prend naissance du fait de la présence simultanée de l'accélération gravitationnelle et d'inhomogénéités spatiales des températures dans le fluide. Pour le cas de la convection forcée, l'écoulement est provoqué par une force due à une puissance mécanique externe [3].

Nombreuses sont les recherches théoriques et analytiques entreprises depuis le début du $XX^{ème}$ siècle pour la résolution des équations gouvernant dans le cas de la convection mixte. Ces dernières restent très compliquées du fait de la non linéarité des termes d'inertie (bilan de la quantité de mouvement) en particulier lorsqu'il faut tenir compte des effets de la gravité et de l'inclinaison. En outre, les équations de la quantité de mouvement deviennent fortement couplées avec l'équation de l'énergie par le biais des termes représentant les forces gravitationnelles. Par conséquent, la résolution de ces équations doit s'effectuer simultanément, contrairement à la convection forcée pure où elle se fait séparément.

I.2 Généralités sur la rhéologie

En 1929, Eugène Cook Bingham s'est inspiré de l'expression ***Pantarhei***, qui veut dire tout s'écoule, de Héraclite, apparue 500 ans avant J.C. pour introduire ***la rhéologie*** (des mots grecques rheo : couler et logia : théorie) [1].

La rhéologie est, donc, une science qui décrit les écoulements et les déformations des matériaux sous l'action de contraintes. Devant l'impuissance de la théorie de l'élasticité et de la mécanique des fluides (théories élaborées au 19ème siècle) à décrire et à expliquer les propriétés des matériaux aux comportements mal définis et intermédiaires entre celui du solide élastique parfait (où les contraintes sont proportionnelles aux déformations) et celui du fluide newtonien (où les contraintes sont proportionnelles aux vitesses de déformation), il est apparu nécessaire d'élaborer cette nouvelle discipline. Les études expérimentales s'attachent à mesurer les propriétés de l'écoulement des matériaux tandis que les approches théoriques cherchent les équations constitutives reliant le tenseur des contraintes visqueuses aux taux de déformation [4].

I.2.1 Définition de la viscosité

La viscosité est un des principaux paramètres physiques mesurés lors de l'étude de l'écoulement des fluides. Elle est d'une importance majeure en rhéologie. Sa connaissance suffit parfois à caractériser de façon précise le comportement rhéologique des matériaux. On définit différents coefficients de viscosité :

I.2.1.1 Viscosité apparente

Par analogie avec les fluides newtoniens, on introduit la notion de la viscosité apparente (fluide non newtoniens non élastique) comme étant le rapport entre la contrainte visqueuse et la vitesse de déformation correspondante. Elle est donnée en N s/m^2 ou Pa s :

$$\mu_{app} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = f\left(\dot{\gamma}, T, p\right) \tag{I.1}$$

I.2.1.2 Viscosité cinématique

Elle est définie par la relation suivante :

$$\nu = \frac{\mu_{app}}{\rho} \tag{I.2}$$

I.2.1.3 Viscosité relative

Dans l'étude des solutions ou des suspensions, on utilise souvent la viscosité relative pour déterminer les influences respectives du soluté et du solvant dans le comportement rhéologique. La viscosité relative est donnée par l'expression :

$$\mu_r = \frac{\mu_{app}}{\mu_s} \tag{I.3}$$

où μ_s représente la viscosité du solvant.

I.2.2 Classification des fluides

De façon générale, la rhéologie consiste à relier la contrainte de cisaillement τ au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Les relations proposées sont les suivantes [5] :

I.2.2.1 Fluides newtoniens

La contrainte de cisaillement est reliée au taux de cisaillement par la viscosité dynamique μ. Cette dernière est indépendante de la contrainte appliquée. D'où, la linéarité de cette relation, appelée ***loi de Newton***, qui s'exprime sous forme tensorielle comme suit :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \tag{I.4}$$

Les fluides qui vérifient cette relation de proportionnalité sont dit *fluides newtoniens*. Il faut noter que les grandeurs précédemment citées peuvent varier fortement avec la température du fluide [6].

I.2.2.2 Fluides non newtoniens ou complexes

Malgré le fait que les fluides newtoniens sont très répandus et plus utilisés, il existe une autre catégorie de fluides qui ne vérifie pas la loi de Newton qu'on nomme : les ***fluides non newtoniens***. Pour ces fluides, une relation non linéaire relie la contrainte de cisaillement au taux de cisaillement. De plus, la viscosité apparente dépend du taux de cisaillement et éventuellement du temps [7].

Il existe deux classes de fluides non newtonien selon la dépendance de la viscosité apparente vis à vis du temps [7] :

a) Fluides à viscosité indépendante du temps

Cette classe de fluide se décompose en trois familles selon l'évolution de la contrainte de cisaillement et de la viscosité apparente avec le taux de cisaillement. On utilise l'expression générale suivante pour décrire la non linéarité de cette évolution :

$$\tau = \mu_{app} \dot{\gamma} \tag{I.5}$$

- **Fluides pseudoplastiques ou rhéofluidifiants**

La viscosité des fluides pseudoplastiques diminue quand la contrainte de cisaillement croît. Les fluides reviennent à leur viscosité initiale (réversibilité) si l'effet du cisaillement s'arrête ou diminue. Parmi les fluides pseudoplastiques, citons à titre d'exemples : les solutions et les suspensions aqueuses concentrées (solutions d'alginate de sodium, de certains polymères, jus de fruits concentrés, etc.), les pétroles, le latex de caoutchouc, la pâte à papier, les colles, le savon, certaines peintures, les purées (de bananes, de pommes de terre), la mayonnaise et le sang humain [7].

- **Fluides dilatants ou rhéoépaississants**

La viscosité des fluides rhéoépaississants augmente avec l'augmentation de la contrainte de cisaillement. Ce comportement est moins fréquent, nous l'observons souvent pour des solutions très concentrées, telles que les solutions aqueuses d'amidon ou de sable et du quartz dans l'eau [7].

- **Fluides viscoplastiques ou rhéoplastiques**

Les fluides viscoplastiques, ou à seuil, sont des fluides qui ne s'écoulent que si la contrainte de cisaillement dépasse la contrainte seuil, sinon le taux de cisaillement sera nul et par conséquent, il n'y aura pas d'écoulement. La contrainte seuil est la force minimale qui doit être communiquée au fluide pour qu'il puisse amorcer son écoulement. En-dessous de cette contrainte, le fluide se comporte tel un solide [7].

Les exemples les plus répandus dans cette catégorie de fluides sont : les pâtes de fruits et de chocolat, les peintures à l'huile, les graisses, les pommades, le dentifrice, la pâte à papier, les boues de forage, le ciment frais, etc [7].

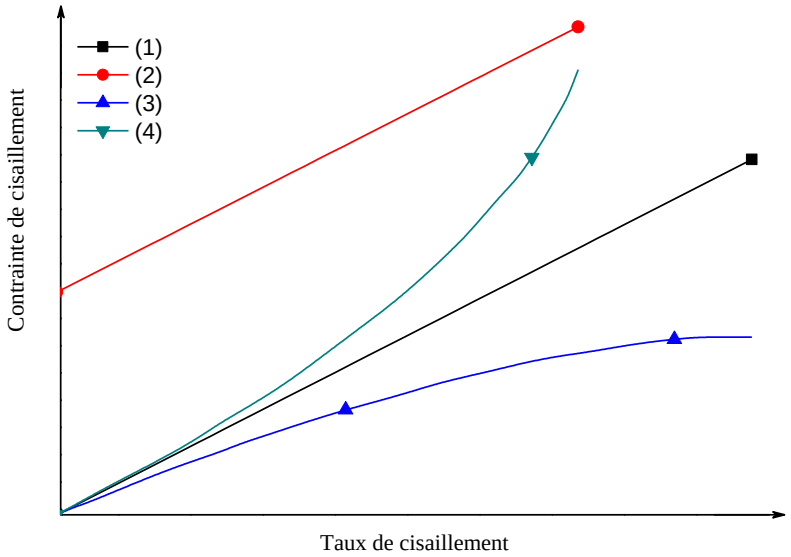


Figure I.1 : Rhéogramme : (1) fluide newtonien, (2) fluide de Bingham, (3) fluide rhéofluidifiant et (4) fluide rhéoépaississant [5].

b) Fluides à viscosité dépendant du temps

- **Fluides thixotropes**

Les fluides thixotropes ont, pour un gradient de vitesse constant, une viscosité qui diminue avec la durée de cisaillement. Ils admettent un seuil de contrainte mais ce seuil augmente avec le temps quand le fluide est au repos et s'abaisse après agitation [7].

La thixotropie est un phénomène rhéologique de grande importance industrielle car il peut être soit néfaste, soit recherché. C'est le cas des encres d'imprimerie, des mélanges eau-

alcool, des sels de penta-oxyde de vanadium, des gels, de la mayonnaise, du blanc d'œuf frais, etc. Ces fluides sont en règle générale pseudoplastiques [7].

- **Fluides rhéopexes**

Extrêmement complexe, le phénomène de rhéopexie n'a été que très peu étudié. Il n'apparaît que pour un faible cisaillement. Il est susceptible de favoriser la restructuration du produit. Pour ces fluides, la viscosité apparente augmente avec le temps, contrairement à la thixotropie [7].

La rhéopexie est rencontrée dans les émulsions d'eau dans de l'huile ou la cristallisation du plâtre à faible cisaillement [8].

Pour les fluides thixotropes et rhéopexes, les phénomènes observés sont réversibles. Il faut noter tout de même que cette classification est schématique et qu'il existe des fluides de nature complexe qui présentent simultanément un comportement pseudoplastique, viscoplastique et thixotropique [7].

I.2.3 Modèles rhéologiques

Plusieurs modèles rhéologiques ont été proposés par les chercheurs dans le but de décrire le comportement des fluides non newtoniens.

I.2.3.1 Fluide sans contrainte seuil

Cette catégorie regroupe les fluides pseudoplastiques et rhéoépaississants. L'expression la plus utilisée et la plus générale est la loi de puissance proposé par Ostwald-De Waele et donnée par :

$$\tau = K\dot{\gamma}^{n} \tag{I.6}$$

Tels que :

K : représente la consistance du fluide,
n : est l'indice d'écoulement ou de comportement du fluide.

Comme la figure I.5 le montre, les fluides obéissant à la loi de puissance regroupent les fluides dits ***pseudoplastique*** lorsque $n < 1$, les fluides dilatants lorsque $n > 1$ et les fluides newtoniens lorsque $n = 1$ [5].

La viscosité apparente pour les fluides obéissant au modèle d'Ostwald-De Waele est donnée par la relation suivante :

$$\eta = K\left|\dot{\gamma}\right|^{n-1} \tag{I.7}$$

Ce modèle n'étant pas valide pour des valeurs extrêmes du taux de cisaillement, les chercheurs ont proposé d'autres modèles. Nous vous présentons ci-dessous, sur le tableau I.1 [5], quelques-uns :

Tableau I.1 : Modèles rhéologiques en loi de puissance [5].

Auteurs	Modèles rhéologiques
Sisko	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} + K \dot{\gamma}^n$
Cross	$\tau = \left[\mu_\infty + \frac{(\mu_0 - \mu_\infty)}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^n} \right] \dot{\gamma}$
Ellis	$\eta = \frac{\mu_0}{1 + \left(\tau_{yx} / \tau_{1/2}\right)^{\alpha - 1}}$

I.2.3.2 Fluides à contrainte seuil

Les fluides à contraintes seuil ou viscoplastiques répondent à un des modèles rhéologiques suivants [9,8] :

Modèle de **Bingham** : $\tau = \tau_0 + \mu_0 \dot{\gamma}$ (I.8)

Modèle de **Herchel-Bulkley** : $\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n$ (I.9)

Modèle de **Casson généralisé** : $\tau = \left[{\tau_0}^{1/n} + (\mu_0 \dot{\gamma})^{1/n} \right]^n$ (I.10)

Modèle de **Casson** : $\tau^{1/2} = {\tau_0}^{1/2} + (\mu_0 \dot{\gamma})^{1/2}$ (I.11)

I.3 Synthèse bibliographique

La mécanique des fluides n'a cessé d'évoluer au cours du temps et ce, compte tenu de son importance dans les applications industrielles.

La présente synthèse bibliographique regroupe quelques études entreprises par les chercheurs sur l'écoulement des fluides newtoniens et viscoplastiques dans diverses géométries.

Avant de procéder à l'étude de l'écoulement des fluides, il est nécessaire de connaitre leur comportement rhéologique. A cet effet, plusieurs études expérimentales ont été effectuées sur différents fluides rencontrés dans diverses industries. Dans le domaine de l'agroalimentaire, beaucoup de travaux ont été entrepris pour la détermination du comportement rhéologique des aliments. La rhéologie de la mayonnaise a été étudiée par **Ma et al. [10]**. Ils ont déterminé les propriétés rhéologiques de cette dernière en considérant plusieurs concentrations en huile. Les résultats obtenus ont permis de la classer comme étant un fluide obéissant au modèle rhéologique de Herschel-Bulkley.

Canet et al. [11] ont réalisé une étude expérimentale sur la rhéologie de la purée de pomme de terre naturelle et commerciale. Leurs résultats expérimentaux indiquent que le comportement de la purée de pomme de terre est compatible avec le modèle viscoplastique et

dépend fortement de la concentration. En effet, tenant compte des valeurs choisies de la concentration, ils ont trouvé que la purée de pomme de terre obéit beaucoup plus au modèle de Herschel-Bulkley qu'à celui de Bingham ou de Casson.

Par ailleurs, **Vandresen et al. [12]** ont effectué une étude rhéologique sur le jus de carottes. Ils ont conclu que le comportement rhéologique du jus de carottes non traitées est décrit, d'une manière satisfaisante, par le modèle newtonien. Les essais effectués sur le jus pasteurisé ont montré, quant à eux, un comportement viscoplastique, décrit par les modèles de Bingham et de Herschel-Bulkley, qui dépend des valeurs de la viscosité apparente liées à la température.

Dans le domaine pharmaceutique, **Peixinho et al. [13]** ont effectué une étude sur le transfert thermique lors de l'écoulement du Carbopol à 0,2% dans des canaux chauffants. Les mesures rhéologiques ont montré que le modèle de Herschel-Bulkley est le plus approprié pour décrire le comportement rhéologique de ce fluide non newtonien. Ils ont trouvé, en outre, que la consistance du fluide diminue avec la température.

La littérature regroupe plusieurs travaux réalisé sur l'écoulement des fluides à contrainte seuil. En effet, **Bird et al. [14]** ont considéré l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à contrainte seuil. Ils ont trouvé que cet écoulement est caractérisé par la présence d'une zone d'isovitesse au centre de la conduite. Le fluide dans cette zone a le même comportement que celui d'un solide indéformable. La dimension de cette zone ne dépend que du nombre de Bingham ou celui de Herchel-Bulkley (si le fluide considéré obéit au modèle de Bingham ou celui de Herschel-Bulkley, respectivement). Les auteurs ont proposé des expressions pour décrire le profil de vitesse dans le cas des écoulements unidirectionnels dans des géométries simples (conduite cylindrique, canal plan, conduite annulaire, etc.).

Pour le cas de l'écoulement dans les conduites annulaires, **Nazrul et al. [15]** ont étudié numériquement l'écoulement laminaire accompagné d'un transfert thermique en mode de convection mixte dans la région d'entrée d'un espace annulaire concentrique. Deux types de conditions aux limites ont été adoptés pour les parois intérieure et extérieure des cylindres à savoir : flux de chaleur pariétal et température pariétale uniformes. Les équations générales ont été résolues numériquement par le biais de la méthode des volumes finis. Ils ont montré que près de l'entrée de la conduite annulaire et jusqu'à une position donnée, les différentes courbes se confondent et ont la même allure que celle obtenue pour le cas d'un écoulement en mode de convection forcée ce qui signifie que les effets de la convection naturelle (courants secondaires) dans cette région sont négligeables. Plus en aval, les courbes tendent vers des valeurs asymptotiques différentes selon la valeur du nombre de Rayleigh, contrairement au cas de l'écoulement en mode de convection mixte dans une conduite cylindrique maintenue à température pariétale uniforme où apparait une troisième zone correspondant à la prédominance, une nouvelle fois, de la convection forcée dans la zone d'établissement et par conséquent, une tendance vers la même valeur asymptotique.

Vradis et al. [16] ont résolu numériquement, par le biais de la méthode des différences finies, le problème du développement simultané des champs hydrodynamique et thermique dans la région d'entrée d'une conduite cylindrique à section droite circulaire. Ils ont considéré l'écoulement laminaire du fluide de Bingham, pour lequel les propriétés physiques et rhéologiques sont supposées être constantes. L'effet important des nombres de Bingham et de Brinkman sur les caractéristiques hydrodynamiques et thermiques de l'écoulement a été

démontré. Ils ont trouvé également que négliger la dissipation visqueuse dans les calculs conduit à sous-évaluer le nombre de Nusselt et par conséquent, le transfert thermique.
T. Min et al. [17] ont simulé numériquement le transfert thermique d'un fluide de Bingham en écoulement laminaire dans une conduite cylindrique maintenue à température constante et ce, en considérant le développement simultané hydrodynamique et thermique avec prise en compte de la dissipation visqueuse. Afin d'aboutir aux résultats voulus, le modèle représentant la viscosité dans toute les régions de l'écoulement, proposé par Papanastasiou [référence], a été utilisé. Pour résoudre le système d'équations de conservation, les auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis. Ils ont trouvé, d'une part, qu'une courte longueur d'entrée est la conséquence d'une contrainte seuil élevée et d'autre part, que la prise en compte de la fonction de dissipation avait un effet considérable sur le transfert thermique.

D'autres recherches ont été entreprises en considérant l'écoulement de fluides dans des conduites autres que cylindriques. Il s'agit de l'écoulement entre deux plans parallèles et dans les conduites à section droite rectangulaire. **Barletta [18]** a réalisé une étude sur la convection mixte lors de l'écoulement d'un fluide newtonien dans un canal vertical, en tenant compte de l'effet de la dissipation visqueuse. Les deux parois verticales ont été considérées pour deux cas de conditions aux limites, à savoir : des parois chauffées à la même température et des parois différentiellement chauffées. Les champs de vitesse, de température adimensionnels et le nombre de Nusselt ont été évalués dans les deux cas. Les résultats montrent que l'effet de la dissipation visqueuse est important, en particulier, dans le cas de l'écoulement ascendant.

Barletta et Zankini [19] ont étudié analytiquement le mode de convection mixte laminaire avec prise en compte de la dissipation visqueuse, dans un canal incliné dont les parois sont maintenues respectivement aux températures T_1 et T_2. Deux cas ont été analysés : l'effet de la variation des forces de poussée a des valeurs fixes du nombre de Brinkman et l'effet du nombre de Brinkman pour des valeurs fixes du nombre de Grashof. Leurs résultats montrent que la dissipation visqueuse améliore les effets des forces de poussée.

L'écoulement laminaire, en mode de convection mixte, d'un fluide newtonien dont la viscosité dynamique varie en fonction de la température a été abordé par **Barletta et al. [20]**. Le fluide s'écoule entre deux plans parallèles inclinés et maintenus à des températures constantes. Une solution analytique a été proposée pour toutes les viscosités thermodépendantes des différents fluides. Un modèle décrivant cette thermodépendance a été présentée et appliqué pour certains fluides. Leurs résultats montrent que la thermodépendance peut générer quelques effets sur la distribution des vitesses adimensionnelle et sur le coefficient de frottement même dans le cas de la convection forcée.

Le développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien en mode de convection mixte entre deux plans verticaux maintenus à différents flux de chaleur et de masse a été abordé par **Salah El-Din. [21]**. Une étude paramétrique a été jointe pour analyser l'influence du rapport de poussée thermosolutale sur les résultats. Les auteurs ont trouvé que les profils de température et de concentration sont moins sensibles aux variations du rapport de poussée thermosolutale que les profils de vitesse. Ces derniers se distordent fortement par la force de flottabilité de masse, pour les valeurs positives du rapport de poussée thermosolutale qui provoquent une augmentation des nombres de Nusselt et de Sherwood contrairement aux valeurs négatives de ce rapport.

Yan [22] a proposé une approche numérique du transfert thermique et massique de l'air en mode de convection mixte dans une conduite rectangulaire horizontale, maintenue à température et concentration pariétales constantes et uniformes. Ils ont trouvé que l'effet de la convection naturelle ne devient négligeable que lorsque $Ra < 5\ 10^2$ et que les distributions du nombre de Nusselt et du nombre de Sherwood sont caractérisées par une décroissance près de l'entrée et atteignent un maximum lorsque les effets des courants secondaires sont élevés. Dans la région établie, le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood tendent asymptotiquement vers une valeur correspondant à la solution de Graetz. Leurs résultats montrent aussi que le meilleur transfert de chaleur et de masse est obtenu pour le plus petit rapport de forme et que les courants secondaires créent une distorsion dans la distribution des vitesses, de la température et de la concentration. Cette étude a été déjà réalisée en 1995 par **Yan [23]** en introduisant l'inclinaison de la conduite. L'auteur a montré que l'inclinaison de la conduite améliore d'avantage le transfert thermique et massique.

Le transfert thermique et massique en mode de convection mixte dans une conduite rectangulaire verticale maintenue à température pariétale constante a été étudiés par **Lee et al. [24]**. Les effets de la température de la paroi mouillée, du nombre de Reynolds, de l'humidité relative de l'air humide dans l'air ambiant et du rapport de forme de la conduite sur le transfert thermique et sur le transfert de masse, ont été examinés en détail. Les auteurs ont montré que le transfert thermique le long de la paroi poreuse mouillée est dominé par le transport de chaleur latente et qu'une augmentation du taux d'humidité conduit à une diminution du nombre de Sherwood à la même température pariétale. De plus, ils ont trouvé que les forces de flottabilité engendrent une amélioration du transfert de chaleur et de masse et que le nombre de Nusselt total augmente avec l'augmentation du rapport de forme de la conduite. Ils ont déduit également que les effets de l'évaporation du film le long de la paroi verticale sur le nombre de Nusselt thermique sont significatifs étant donné que les valeurs du nombre de Nusselt thermique sont beaucoup plus élevées que celles obtenues dans le cas où il n'y a pas évaporation du film.

Le transfert thermique en mode de convection forcée lors de l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley dans une conduite à section droite carrée a été étudié numériquement par **Sayed-Ahmed [25]**, en prenant en tenant compte les effets de la dissipation visqueuse. Ils ont considéré deux conditions aux limites : température et flux de chaleur constant sur toutes les parois. Il a constaté que l'augmentation de l'indice d'écoulement du fluide fait croitre la vitesse centrale et réduit le nombre de Nusselt local pour le cas des deux conditions aux limites considérées. Il a observé aussi que l'augmentation du nombre Brinkman augmente les valeurs du nombre de Nusselt local pour le cas d'une température pariétale constante contrairement cas du flux pariétal constant. Ses résultats montrent aussi que l'effet de la dissipation visqueuse est plus important pour le cas des fluides non newtoniens. **Sayed-Ahmed [26]** a repris son étude en 2006, mais en considérant l'écoulement d'un fluide d'Ostwald-De Waele dans une conduite à section droite rectangulaire avec différents rapports de forme.

Jang et al. [27] en considérant une conduite inclinée à section droite carrée, munie d'un film liquide en évaporation. à la paroi inférieure. Les effets de l'angle d'inclinaison, de la température du film ainsi que du taux d'humidité sur le transfert thermique et massique ont été analysés. Les résultats obtenus montrent que le coefficient de frottement, le nombre de Nusselt ainsi que le nombre de Sherwood sont considérablement affectés par l'angle d'inclinaison de la conduite, en particulier pour l'angle le plus faible et que le taux de transfert

thermique peut être amélioré dix fois plus que sans le transfert de masse, en particulier pour un système avec une température plus basse.

Chiu et al. [28] ont étudié l'écoulement laminaire d'un gaz en mode de convection mixte dans une conduite rectangulaire horizontale, en prenant en considération l'effet des radiations. L'étude s'est basée sur l'influence du nombre de Rayleigh, du rapport de forme ainsi que du paramètre de la conduction des radiations, sur le nombre de Nusselt, le coefficient de frottement et sur la température moyenne. Leurs résultats révèlent que la prise en compte des radiations et de la convection mixte induit une amélioration très remarquable du transfert thermique, traduite par des valeurs de nombre de Nusselt élevées.

Dans la même année **Hooman et Haji-Sheikh [29]** ont étudié le transfert thermique en mode de convection forcée avec prise en compte de la dissipation visqueuse, dans une conduite rectangulaire à parois poreuses maintenues à flux thermique constant. Leur étude s'est basée sur l'influence de la dissipation visqueuse sur l'évolution du nombre de Nusselt, ils ont constaté que le nombre de Nusselt décroit avec l'augmentation du nombre de Brinkman même dans la région établie de l'écoulement.

La même étude que celle de **Chiu et al. [28]** a été reprise en 2008 par **Chiu et al. [30]** en introduisant cette fois-ci l'inclinaison de la conduite avec les effets des radiations. Ils ont trouvé que l'introduction de l'inclinaison influe, à la fois, le coefficient de frottement local ainsi que le nombre de Nusselt.

Par ailleurs une étude numérique tridimensionnelle dans une conduite rectangulaire dont la paroi inferieure est remplie d'eau a été effectuée par **Talukdar et al. [31]**. Les performances du transfert thermique et de masse entre l'air qui s'écoule dans la conduite et l'eau de la paroi inferieure ont été analysées. Les principaux résultats obtenus montrent que des valeurs négatives des nombres de Nusselt et Sherwood sont obtenues ont appliquons des flux de chaleur positifs ou négatifs sur la surface de l'eau, ils ont remarqué aussi que la prise en compte des forces de flottabilité n'été pas nécessaire.

Conclusion

La diversité des études et des recherches entreprises par le passé, ont contribué à l'amélioration et à la rénovation des procédés industriels qui touchent à tous les domaines. L'application de nos simulations dans le domaine industriel en général, permet d'avoir de meilleures connaissances préalable des procédés pour améliorer leurs efficacités.

Le chapitre qui suit portera sur la présentation du problème physique considéré et sur sa mise en équations ainsi que les conditions aux limites associées.

Chapitre II :
Modélisation mathématique

Introduction

La deuxième partie de ce manuscrit est indispensable étant donné qu'elle est consacrée à la mise en équations du problème physique étudié, et ce, en considérant les modes de convection forcée et mixte et de voir leur influence sur la structure de l'écoulement et sur le champ thermique.

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont préalablement écrites pour deux configurations puis mises sous forme adimensionnelle et enfin, numériquement modélisés et ce, en procédant à leur discrétisation par une méthode numérique choisie, celle des volumes finis en l'occurrence.

Les deux configurations géométriques étudiées, qui sont en fait des cas particuliers de la conduite rectiligne de section droite rectangulaire, consistent en l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible, sous l'effet de conditions aux limites stationnaires, entre deux plans parallèles (première configuration) et au sein d'une conduite à section droite carrée (seconde configuration). Les parois des deux géométries sont portées à une même température T_w, différente de celle du fluide à son entrée que l'on notera T_0. Pour la description mathématique de l'écoulement et du transfert thermique, nous adopterons les coordonnées cartésiennes (O,x,y,z) pour l'écriture des équations.

II.1 Hypothèses de l'étude

Avant d'écrire les équations qui régissent l'écoulement et le transfert thermique dans nos deux installations, retenons certaines hypothèses, valables pour les deux configurations (sauf l'hypothèse 5, qui concerne exclusivement la première configuration), dont certaines diminueront un tant soit peu le degré de complexité du problème (hypothèses 2, 3 et 4). D'autres en revanche, nous serviront à nous placer dans le cas de l'écoulement d'un fluide de Bingham en mode de convection mixte (hypothèse 1).

1. Le fluide en écoulement est un liquide de Bingham, dont la loi de comportement rhéologique est donnée dans le prochain paragraphe. Sa masse volumique est partout constante et estimée à la température d'entrée T_0 (soit ρ_0), sauf dans l'expression des forces de poussée d'Archimède, où l'on adoptera l'hypothèse de Boussinesq. Cette hypothèse stipule que la masse volumique dans le terme de poussée varie linéairement, mais seulement en fonction de la température et non pas en fonction de la pression statique (variation négligeable).

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \beta \Delta T\right) \qquad \text{(II.1)}$$

Où :

ρ_0 : représente la masse volumique de notre fluide, déterminée à une température de référence T_0, caractéristique du problème étudié.

β : est le coefficient de dilatation thermique et est donné par l'expression ci-dessous.

$$\beta = \frac{-1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \qquad \text{(II.2)}$$

2. Toutes les autres propriétés physiques du fluide sont supposées être constantes et uniformes.

3. Les champs de vitesse et de température sont indépendants du temps. En d'autres termes, l'écoulement et le transfert thermique sont stationnaires.

4. Le mode de transfert thermique par rayonnement est négligé.

5. Pour la première configuration (écoulement dans l'entrefer de deux plans parallèles), la largeur b des plansétant très grande vis-à-vis leur longueur L, on considérera l'écoulement comme bidimensionnel et plan, soit, respectivement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_i}{\partial z} = 0 & \text{(II.3.1)} \\ w = 0 & \text{(II.3.2)} \end{cases}$$

Avant d'entamer l'écriture des équations générales (tenant compte des hypothèses précédentes) pour les deux configurations étudiées, qui seront détaillées dans ce qui suit, présentons, dans le paragraphe suivant, la loi de comportement d'un fluide de Bingham (ou fluide Binghamien).

II.2 Loi constitutive dimensionnelles

Ce sont des forces de frottement qui s'opposent à l'écoulement. Elles sont provoquées par l'écoulement lui-même, et leur intensité dépend donc, de la structure locale de l'écoulement, c'est-à-dire du champ de vitesse. La loi qui exprime la relation entre les contraintes visqueuses τ_{ij} et le champ de vitesse locale, est spécifique à chaque fluide ; on la désigne sous le nom de ***loi de comportement rhéologique*** du fluide. Celle du fluide de Bingham a été proposée en premier lieu par Bingham [7]. Cette relation stipule que siles contraintes visqueuses appliquées sont supérieures à la contrainte seuil, le fluide amorce son écoulement. En revanche, si elles n'atteignent pas cette valeur, le fluide se comporte comme un solide rigide. Cette expression est donnée par [7] :

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \tau_0 + 2\mu_p e_{ij} & \tau_{ij} \geq \tau_0 \\ e_{ij} = 0 & \tau_{ij} < \tau_0 \end{cases} \qquad \text{(II.4.1)}$$

Où μ_p et τ_0 représentent respectivement, la viscosité plastique et la contrainte seuil du fluide de Bingham. e_{ij} représente le tenseur des gradients de vitesse symétrisé que l'on appelle tenseur des taux de déformations. Dans la littérature, les lois de comportement rhéologiques sont données en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. A cet effet, posons :

$$\dot{\gamma} = 2\left|e_{ij}\right| \qquad \text{et} \qquad \tau = \left|\tau_{ij}\right| \tag{II.4.2}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} & \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \tag{II.4.3}$$

L'introduction de la loi constitutive (II.4.3) dans les équations se fait par l'intermédiaire de la viscosité apparente, qui est fonction du taux de cisaillement. En effet, par analogie avec le modèle newtonien, on pose :

$$\tau_{ij} = 2\mu_{app} e_{ij} \tag{II.5.1}$$

Cette viscosité apparente μ_{app}est alors donnée par la relation [18] suivante :

$$\mu_{app} = \begin{cases} (\tau_0/\dot{\gamma}) + \mu_p & \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau < \tau_0 \end{cases} \tag{II.5.2}$$

Cette relation présente néanmoins un inconvénient. En effet, il faut d'abord décrire les zones cisaillées et non cisaillées du fluide pour savoir où l'appliquer. Pour remédier à ce problème, les chercheurs proposent deux modèles ; il s'agit du ***modèlebi-viscosity*** et celui de ***Papanastasiou***.Pour le cas de cette étude, nous avons adopté la relation proposée par Papanastasiou pour tenir compte des régions cisaillées et non cisaillées.

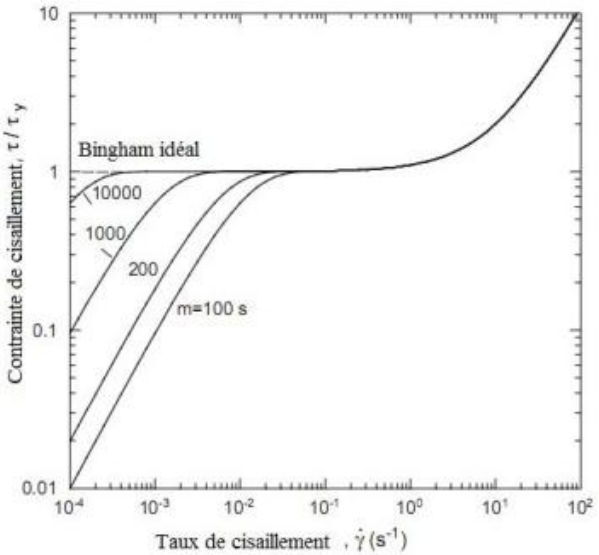


Figure II.1 : Rhéogramme du fluide de Bingham pour différentes valeurs de l'indice m de croissance exponentielle [7].

Elle est donnée par :

$$\mu_{app} = \mu_p + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}\left[1 - \exp\left(-m\,\dot{\gamma}\right)\right] \tag{II.6}$$

m étant l'indice de croissance exponentielle dont la valeur dépend de τ_0 et μ_p.

Les chercheurs [7,11] proposent d'utiliser des valeurs assez élevées de l'indice de croissance exponentielle et ce, dans le but d'éviter les instabilités et de se rapprocher le plus du modèle de Bingham idéal (figure II.1).

Enfin, avant de clore ce paragraphe, il est intéressant de noter qu'à partir de la loi de comportement rhéologique du fluide binghamien, on peut retrouver la loi de comportement du fluide newtonien. En effet, il suffit de considérer la contrainte seuil τ_0 identiquement nulle dans les équations **II.5.2** et **II.6**, la viscosité plastique μ_p s'identifie alors avec la viscosité dynamique μ du fluide.

II.3 Configurations géométriques

Dans l'industrie, plusieurs appareils sont indispensables pour réaliser les échanges thermiques. Il s'agit entre autres des échangeursde chaleur, des réacteurs, des compresseurs, etc. Ils sont classés selon plusieurs critères, à savoir, le type d'écoulement, la géométrie, etc. Leurs performances sont étroitement liées à leurs formes géométriques et à la nature des fluides qui les traversent.

La conduite à section droite rectangulaire est l'une des géométries, utilisées dans ce type d'installations. L'analyse des phénomènes de transport qui s'y déroulent est compliquée à cause des effets liés à la géométrie. La conduite à section droite carrée (orthogonale à l'écoulement incident) et le canal à parois parallèles infinis sont les deux cas limites de la conduite à section droite rectangulaire, obtenus respectivement pour un rapport de forme (c'est en fait, le rapport entre la largeur b de la conduite par sa hauteur a) correspondant à $\gamma = 1$ et $\gamma = 0$. *Ce sont là précisément, les deux configurations géométriques auxquelles on s'est intéressé lors de cette étude*.

Dans les deux cas, les conduites sont rectilignes, de sectiondroite uniforme, traversées par un fluide incompressible non-newtonien de Bingham. Le cas particulier du fluide newtonien sera également étudié. Les parois des deux conduites seront supposées être portées à une température constante et uniforme, identique sur toutes les surfaces mais différente de celle avec laquelle le fluide pénètre dans l'installation.

II.4 Présentation desdeux modèles physiques

Les deux configurations géométriques considérées lors de cette étude, et dont les parois sont portées à la même température pariétale T_w, sont traversées par l'écoulement laminaire en régime stationnaire de fluides, dont les lois rhéologiques de comportement correspondent respectivement à celles de Bingham et de Newton. En outre, ces deux fluides,de température T_0 à l'entrée ($x = 0$) différente de celle des parois, seront considérés comme incompressibles et de propriétés physiques constantes et uniformes. Les deux géométries étudiées consistent d'une part, en l'écoulement dans l'entrefer de *deux plans rectilignes et parallèles* de très grande largeur pour la *première configuration*.D'autre part, pour ce qui est de la *seconde configuration*,l'écoulement a lieu au sein d'une *conduite rectiligne de section droite rectangulaire* (mais de facteur de forme $\gamma = 1$, afin correspondre à la conduite de section droite carrée).

En conséquence, pour chacune des deux configurations choisies, on s'emploiera à décrire les lois qui gouvernent les écoulements et les transferts thermiques et à prédire leurs caractéristiques, en écrivant les équations générales. Pour la description mathématique de l'écoulement, nous adopterons les coordonnées cartésiennes (O,x,y,z) pour l'écriture de l'**Equation de Continuité**, des projections (deux pour la première configuration et trois pour la seconde) des **Equations de l'Impulsion** (ou les équations de la quantité de mouvement) et celle de l'**Energie**. Nous aboutissons alors, quelle que soit la configuration géométrique, à un système d'équations aux dérivée partielles fermé, formé de l'Equation de Continuité, des deux (pour la configuration 1) ou trois (pour la configuration 2) projections des Equations de l'Impulsion et de l'Equation de l'Energie soit quatre (configuration 1) ou cinq équations (configuration 2) et comportant quatre (configuration 1) ou cinq (configuration 2) inconnues, les deux (configuration 1) ou trois (configuration 2) composantes de la vitesse, la pression motrice du fluide et la température.La détermination physique du problème nécessite en outre la connaissance des conditions aux limites pour chaque configuration.

II.4.1 Première configuration géométrique : Canal plan

On notera α l'angle d'inclinaison du canal sur l'horizontale, x l'abscisse longitudinale comptée le long du plan inférieur, y la première coordonnée transversale orthogonale à Ox dans le plan contenant Oz et z la seconde coordonnée transversale orthogonale à Ox dans le plan contenant Oy.D'autre part, la largeur b des deux plans(le long de l'axe Oz) étant très grande, on considérera l'écoulement comme bidimensionnel plan (dans le plan xOy).

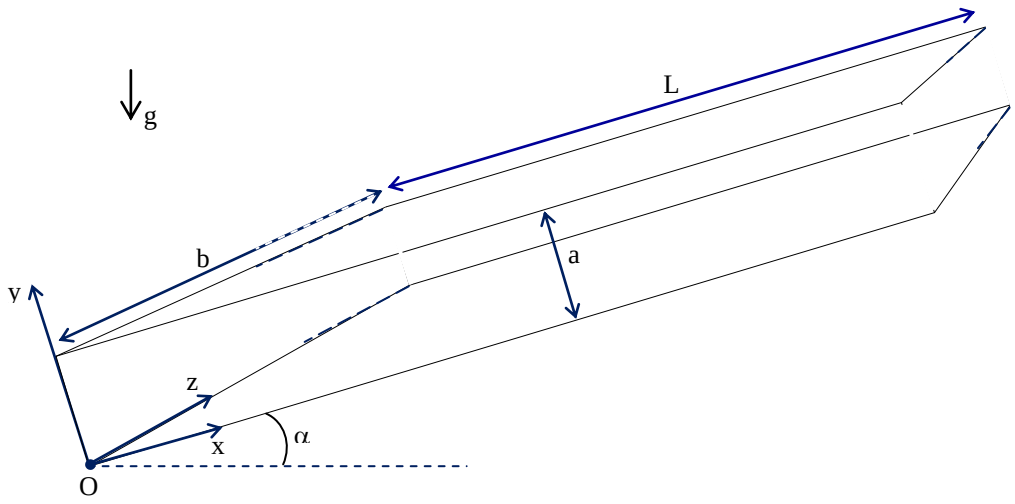


Figure II.2 : Schéma représentatif de la première configuration géométrique et correspondant aux deux plans parallèles de largeur infinie.

Dans la première configuration (voir figure II.2), le fluide incompressible pénètre dans le canal avec une vitesse longitudinale et une température uniformes que l'on notera respectivement U_0 et T_0. Ce canal consiste en fait en deux plans rectilignes de longueur L portés à la même température T_w sur toute leur étendue. En outre, Ils sont placés parallèlement l'un de l'autre, de manière à être séparés d'une hauteur a constante. Très loin en aval, les régimes hydrodynamique et thermique sont supposés être établis.

II.4.1.1Mise en équations du problème de la première configuration

Considérons à cet effet l'écoulement stationnaire, suivant la direction longitudinale et en régime laminaire d'un fluide de Bingham dans le canal schématisé à travers la figure II.2, et écrivons les équations de Continuité, de l'Impulsion et celle de l'Energie dans le cas général, puis, dans le cas d'un écoulement bidirectionnel et bidimensionnel.

- **Equation de continuité**

La masse est un invariant en mécanique classique, et plus généralement dans toute la physique non relativiste. La matière peut cependant se mouvoir, voire même se transformer sous l'effet de phénomènes physiques ou chimiques ; la masse totale de la matière mise en œuvre ne s'en trouvera pas modifiée pour autant. C'est un principe fondamental de la physique. On arrive alors à l'équation de Continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j) = 0 \qquad \text{(II.7)}$$

qui, dans le cas de la première configuration, se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{(II.8)}$$

où, u et v désignent respectivement les projections du vecteur vitesse locale du fluide V_i suivant les directions longitudinale (Ox) et première transversale (Oy).

- **Equations de l'Impulsion**

Pour un système matériel, le Théorème de la Quantité de mouvement se déduit des deuxième et troisième principes de Newton. Il s'énonce ainsi : le taux de variation dans le temps de la quantité de mouvement totale d'un système est égal à la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le système. On arrive alors aux Equations de la Quantité de mouvement qu'on appelle : les Equations de l'Impulsion.

$$\rho_0 \frac{dV_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \text{(II.9)}$$

où, g_i désigne le vecteur accélération de la pesanteur suivant la direction Ox_i et p la pression statique du fluide.

Le second membre regroupe les forces s'exerçant sur une particule de fluide : les forces de pesanteur, de pression statique et les forces de frottement visqueux. Cette équation se porte sur des forces par unité de volume. Les forces de surface apparaissent par conséquent sous la forme de leurs dérivées spatiales : le gradient de pression statique et la divergence des tenseurs des contraintes. Pour un fluide incompressible, on peut regrouper le gradient de pression statique avec la force de pesanteur (par unité de volume) :

$$\rho_0 \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \text{(II.10)}$$

p* désigne la pression motrice du fluide, définie par la somme de la pression statique p du fluide (qui est la seule vraie pression au sens thermodynamique du terme) et l'énergie potentielle de position dans le champ de pesanteur (par unité de volume). En choisissant y* comme ***coordonnée verticale ascendante***, c'est à dire l'altitude, on a :

$$p^* = p + \rho_0 g y^* \qquad \text{(II.11)}$$

où g désigne la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur. Or, dans notre cas, la coordonnée y n'est pas verticale mais présente une certaine inclinaison α par rapport à la verticale **Choudhury** et **Patankar [32]**. Par conséquent, (II.11) s'écrit comme :

$$p^* = p + \rho_0 g \cos\alpha \qquad \text{(II.12)}$$

En effet, la projectiondu vecteur accélération suivant la direction longitudinale et première transversale donne :

$$\begin{cases} g_x = -\rho g \sin\alpha \\ g_y = -\rho g \cos\alpha \end{cases} \qquad \text{(II.15)}$$

les projections de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent comme :

- *Suivant Ox :*

$$\rho_0 \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \rho_0 g \beta \Delta T \sin\alpha \qquad \text{(II.16)}$$

- *Suivant Oy :*

$$\rho_0 \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \rho_0 g \beta \Delta T \cos\alpha \qquad \text{(II.17)}$$

- **Equation de l'énergie**

Cette équation exprime la conservation de l'énergie totale du système et s'écrit dans le cas général comme :

$$\rho_0 C_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \qquad \text{(II.18)}$$

Ce qui dans le cas de cette première configuration donne :

(II.19)

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\eta\dot{\gamma}^2$$

tel que :

$$\eta\dot{\gamma}^2=\tau_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\varphi\mu_{app} \qquad \text{(II.20)}$$

Où α désigne dans l'équation (II.19), la diffusivité thermique du fluide, qui est en fait le quotient de la conductivité thermique du fluide par le produit de la masse volumique par la chaleur spécifique du fluide à pression constante.
φ désigne la fonction de dissipation ou dissipation visqueuse qui représente l'énergie mécanique par unité de temps et de volume dégradée à cause du cisaillement, causé par le frottement des couches fluides entre-elles et contre la paroi, augmentant irrémédiablement la température interne du fluide au fil de l'écoulement.

$$\dot{\gamma}=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \qquad \text{(II.21)}$$

II.4.1.2 Conditions aux limites

Quand on intègre les équations aux dérivées partielles de notre système d'équations, pour préciser les solutions, on a besoin d'introduire les ***conditions aux limites***, dont le nombre requis dépend du nombre d'équations et de l'ordre de dérivation des variables dans ces équations.Ces conditions aux limites sont des valeurs que la géométrie et les contraintes particulières de l'écoulement imposent sur les frontières de celui-ci, aux variables eulériennes du problème.

Les variables eulériennes sont, sauf dans des cas très particulières, des fonctions continues (et dérivables) des coordonnées et du temps. De cette condition de continuité peuvent être déduites la plupart des conditions aux limites génériques. Ainsi pour la vitesse au contact d'une paroi, la vitesse du fluide doit tendre vers la vitesse de la paroi. C'est la ***condition d'adhérence***.

Ainsi, à ***l'entrée du canal*** les profils de vitesse longitudinale et de température sont uniformes. Soit :pour $x = 0$ et $0 \leqslant y \leqslant a$, on a : $u(0,y) = U_0$; $v(0,y) = 0$ et $T(0,y) = T_0$.

Aux deux parois : $0 < x \leqslant L$, $y = 0$ et $y = a$, on a en vertu respectivement de la condition de non glissement et de non pénétration : $u(x,0) = u(x,a) = 0$ et $v(x,0) = v(x,a) = 0$. Pour la température, on a $T(x,0) = T(x,a) = T_w$.

Très loin en aval de l'entrée, les profils de vitesse longitudinale et de température sont supposés être pleinement développés. En d'autres termes, les régimes sont établis d'après l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial x}=0 \qquad \text{(II.22)}$$

II.4.2 Seconde configuration géométrique : Conduite à section droite rectangulaire

Dans cette seconde configuration (Figure II.3), lefluide s'écoule dans la direction longitudinale d'une conduite de longueur L, de section droite rectangulaire et orthogonale à l'écoulement incident, dont a et b représentent, respectivement, sa hauteur et sa largeur finie (contrairement au cas précédent). Toutes les parois sont portées (quatre parois : deux horizontales et deux verticales)à la même températureT_w, constante et uniforme.

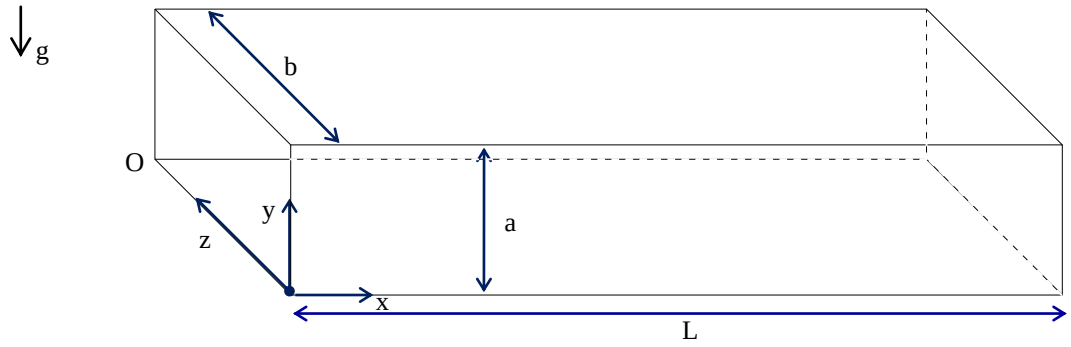


Figure II.3 : Seconde configuration géométrique :
Conduite à section droite rectangulaire.

Ainsi, notre fluide incompressible pénètre dans la conduite avec une vitesse longitudinale et une température uniformes : U_0 et T_0 respectivement, tandis que très loin en aval de l'entrée, les régimes hydrodynamique et thermique sont pleinement développés. Comme précédemment, nous adopterons les même système de coordonnées que celui de la première configuration géométrique (O,x,y,z).

II.4.2.1 Mise en équations du problème de la seconde configuration

Soit l'écoulement stationnaire, en régime laminaire d'un fluide de Binghamdans une conduite de section droite rectangulaire (Figure II.3). Ecrivons alors les équations de Continuité, de l'Impulsion et celle de l'Energie.

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad \text{(II.23)}$$

où, u, v et v désignent respectivement les projections du vecteur vitesse locale du fluidesuivant les directions longitudinale (Ox) et première (Oy) et seconde transversale (Oz).

- **Equations de l'Impulsion**

Projetons au préalable le vecteur accélération de la pesanteur :

(II.24)

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -\rho\, g \cos\alpha \\ g_z = 0 \end{cases}$$

- *Suivant Ox :*

$$\rho_0\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p^*}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]-\rho_0\, g\,\beta\,\Delta T \qquad \text{(II.25)}$$

- *Suivant Oy :*

$$\rho_0\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p^*}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\eta\frac{\partial v}{\partial y}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]-\rho_0\, g\,\beta\,\Delta T \qquad \text{(II.26)}$$

- *Suivant Oz :*

$$\rho_0\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p^*}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}\left(2\eta\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad \text{(II.27)}$$

- **Equation de l'énergie**

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\eta\dot{\gamma}^2 \qquad \text{(II.28)}$$

Avec :

$$\dot{\gamma}=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \qquad \text{(II.29)}$$

II.4.2.2 Conditions aux limites

Ainsi, à ***l'entrée de la conduite*** les profils de vitesse longitudinale et de température sont uniformes.

Pour $x = 0$; $0 \leqslant y \leqslant a$ et $0 \leqslant z \leqslant h$
on a : $u(0,y,z) = U_0$; $v(0,y,z) = w(0,y,z) = 0$
et : $T(0,y,z) = T_0$.

Auxparois, en vertu de la condition d'adhérence, on a :

Pour : $0 < x \leqslant L$; $y = 0$ et $y = a$; $z = 0$ et $z = b$

On a : $u(x,0,z) = u(x,a,z) = 0$ et $u(x,y,0) = u(x,y,b) = 0$.

$v(x,0,z) = v(x,a,z) = 0$ et $v(x,y,0) = v(x,y,b) = 0$.

$w(x,0,z) = w(x,a,z) = 0$ et $w(x,y,0) = w(x,y,b) = 0$.

et : $T(x,0,z) = T(x,a,z) = T(x,y,0) = T(x,y,b) = T_w$.

Enfin, à ***la sortie de la conduite*** (ou du moins très loin en aval de l'entrée), les régimes hydrodynamique et thermique sont supposés être complètement établis d'après l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \text{(II.30)}$$

II.5 Ecriture adimensionnelle des Equations générales

Afin de simplifier l'étude et de généraliser les résultats qui vont en découler, il est nécessaire d'écrire les équations précédentes sous une forme adimensionnelle, et ce, en introduisant les variables réduites suivantes :

$$X = \frac{x}{D_H} \qquad Y = \frac{y}{D_H} \qquad Z = \frac{z}{D_H} \qquad U = \frac{u}{U_0} \qquad V = \frac{v}{U_0}$$

$$W = \frac{w}{U_0} \qquad P^* = \frac{p}{\rho U_0^2} \qquad \Phi = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}$$

Où D_H représente le diamètre hydraulique défini comme suit :

$$D_H = 2\frac{a\,b}{(a+b)} = 2\frac{a}{1+(a/b)} \qquad \text{(II.31)}$$

Il en ressort alors, les nombres adimensionnels suivants :

Nombre de Reynolds : $$Re = \frac{\rho_0 U_0 D_H}{\mu_p} \qquad \text{(II.32)}$$

Nombre de Prandtl : $$Pr = \frac{C_p \mu_p}{k} \qquad \text{(II.33)}$$

Nombre de Brinkman : $$Br = \frac{\mu_p U_0^2}{k(T_0 - T_w)} \qquad \text{(II.34)}$$

Nombre de Grashof : $$Gr = \frac{g \beta \rho_0^2 (T_w - T_0) D_H{}^3}{\mu_p^2} \qquad \text{(II.35)}$$

- **Loi constitutive adimensionnelle**

La viscosité apparente (II.6) peut également s'exprimer sous forme réduite :

$$\eta_{app} = 1 + \frac{Bn}{\dot{\gamma}^*}\left[1 - \exp\left(-m^* \ \dot{\gamma}^*\right)\right] \tag{II.36}$$

oùBn est le nombre de Bingham, qui représente le rapport entre la contrainte seuil et les forces visqueuses:

$$Bn = \frac{\tau_0 \, D_H}{\mu_p \, U_0} \tag{II.37}$$

Ecrivons à présent les Equations générales de la première et seconde configuration en fonction des variables réduites définies plus haut.

II.5.1 Première configuration géométrique

Dans ce cas, le diamètre hydraulique D_H se réduit approximativement à deux fois la hauteur : $D_H \simeq 2\,a$ (étant donné que $a/b << 1$).

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{II.38}$$

- **Equations de l'Impulsion suivant respectivement X et Y**

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial X}\right)\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi\sin\alpha \tag{II.39}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P^*}{\partial Y} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial Y}\right)\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial Y}\right)\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi\cos\alpha \tag{II.40}$$

- **Equation de conservation de l'Energie**

$$U\frac{\partial \Phi}{\partial X} + V\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{1}{Re\,Pr}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2}\right) + \eta_{app}\frac{Br}{Pr\,Re}\dot{\gamma}^2 \tag{II.41}$$

- **Conditions aux limites**

A ***l'entrée du canal :***

$X = 0$ et $0 \leqslant Y \leqslant 1/2$: (II.42)

$U(0,Y) = 1$; $V(0,Y) = 0$; $\Phi(0,Y) = 1$. (II.43)

Aux deux parois :

$0 < X \leqslant (L/D_H)$ et $Y = 0$ et $Y = 1/2$: (II.44)

$U(X,0) = U(X,1/2) = 0$; $V(X,0) = V(X,1/2) = 0$; $\Phi(X,0) = \Phi(X,1/2) = 0.$ (II.45)

A ***la sortie du canal :***

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \qquad \text{(II.46)}$$

II.5.2 Deuxième géométrique

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \qquad \text{(II.47)}$$

- **Equations de l'Impulsion suivant respectivement X, Y et Z**

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} + W\frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial Z}\right)\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial W}{\partial X}\right)\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi \qquad \text{(II.48)}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} + W\frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial P^*}{\partial Y} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial Z}\right)\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\eta_{app}\frac{\partial W}{\partial Y}\right)\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi \qquad \text{(II.49)}$$

$$U\frac{\partial W}{\partial X} + V\frac{\partial W}{\partial Y} + W\frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P^*}{\partial Z} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial W}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial W}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\eta_{app}\frac{\partial W}{\partial Z}\right)\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\eta_{app}\frac{\partial U}{\partial Z}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\eta_{app}\frac{\partial V}{\partial Z}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\eta_{app}\frac{\partial W}{\partial Z}\right)\right] \qquad \text{(II.50)}$$

- **Equation de conservation de l'Energie**

$$U\frac{\partial \Phi}{\partial X} + V\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + W\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{1}{Re\,Pr}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2}\right) + \eta_{app}\frac{Br}{Pr\,Re}\dot{\gamma}^2 \qquad \text{(II.51)}$$

- **Conditions aux limites**

A ***l'entrée du canal :***

$X = 0$; $0 \leqslant Y \leqslant (a/D_H)$ et $0 \leqslant Z \leqslant (b/D_H)$ (II.52)

$U(0,Y,Z) = 1$; $V(0,Y,Z) = W(0,Y,Z) = 0$ (II.53)

$\Phi(0,Y,Z) = 1.$ (II.54)

Auxparois :

$0 < X \leqslant L$; $Y = 0$ et $Y = (a/D_H)$; $Z = 0$ et $Z = (b/D_H)$ (II.55)

$U(X,0,Z) = U(X,a/D_H,Z) = 0$; $U(X,Y,0) = U(X,Y,b/D_H) = 0$. (II.56)

$V(X,0,Z) = V(X,a/D_H,Z) = 0$; $V(X,Y,0) = V(X,Y,b/D_H) = 0$. (II.57)

$W(X,0,Z) = W(X,a/D_H,Z) = 0$; $W(X,Y,0) = W(X,Y,b/D_H) = 0$. (II.58)

$\Phi(X,0,Z) = \Phi(X,a/D_H,Z) = \Phi(X,Y,0) = \Phi(X,Y,b/D_H) = 0$. (II.59)

A ***la sortie du canal :***

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \qquad \text{(II.60)}$$

II.6 Présentation du système d'équations sous forme conservative

Pour pouvoir intégrer les équations de conservation sur un élément de volume, il faut mettre ces équations sous forme conservatives :

$$\frac{\partial}{\partial X}(U\phi) + \frac{\partial}{\partial Y}(V\phi) + \frac{\partial}{\partial W}(W\phi) = \Gamma_\phi \left(\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial \phi}{\partial X}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right] + \frac{\partial}{\partial Z}\left[\frac{\partial \phi}{\partial Z}\right] \right) + S_\phi \qquad \text{(II.61)}$$

Où :

- ϕ est la variable dépendante ;
- Γ_ϕ est le coefficient de diffusion ;
- S_ϕ est le terme source.

Dans le tableau suivant nous donnons la définition de ϕ, Γ_ϕ, S_ϕ pour les équations qui gouvernent notre problème général :

Tableau II.1: Identification des différents termes de l'équation de transport.

Equations		ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
de Continuité (II.29)		1	0	0
de l'Impulsion	Suivant X (II.34)	U	$\frac{1}{Re}$	S_U
	Suivant Y (II.36)	V	$\frac{1}{Re}$	S_V
	Suivant Z (II.36)	W	$\frac{1}{Re}$	S_W
de l'Energie (II.37)		Φ	$\frac{1}{Re\,Pr}$	S_ϕ

Les expressions des termes sources sont données par les équations suivantes :

a. Première configuration géométrie

$$S_U = -\frac{\partial p^*}{\partial X} + \frac{1}{Re}\left[\eta_{app}\frac{\partial^2 U}{\partial X} + \eta_{app}\frac{\partial^2 V}{\partial Y\,\partial X} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial Y}\frac{\partial V}{\partial X}\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi \sin\alpha$$

$$S_V = -\frac{\partial p^*}{\partial Y} + \frac{1}{Re}\left[\eta_{app}\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \eta_{app}\frac{\partial^2 V}{\partial Y} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial Y}\frac{\partial V}{\partial Y}\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi \cos\alpha$$

$$S_\phi = \eta_{app}\frac{Br}{Pr\,Re}\dot{\gamma}^2$$

b. Deuxième géométrique

$$S_U = -\frac{\partial p^*}{\partial X} + \frac{1}{Re}\left[\eta_{app}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \eta_{app}\frac{\partial^2 V}{\partial Y\,\partial X} + \eta_{app}\frac{\partial^2 W}{\partial Z \partial X} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial Y}\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial Z}\frac{\partial W}{\partial X}\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi$$

$$S_V = -\frac{\partial p^*}{\partial Y} + \frac{1}{Re}\left[\eta_{app}\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \eta_{app}\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \eta_{app}\frac{\partial^2 W}{\partial Z \partial Y} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial Y}\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial Z}\frac{\partial W}{\partial Y}\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi$$

$$S_W = -\frac{\partial p^*}{\partial Z} + \frac{1}{Re}\left[\eta_{app}\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z} + \eta_{app}\frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} + \eta_{app}\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial Y}\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial \eta_{app}}{\partial Z}\frac{\partial W}{\partial Z}\right] - \frac{Gr}{Re^2}\Phi$$

$$S_\phi = \eta_{app}\frac{Br}{Pr\,Re}\dot{\gamma}^2$$

Après avoir bien défini les équations mathématiques ainsi que les conditions aux limites gouvernant notre problème physique, l'étape suivante consiste à la résolution de ces équations. Le chapitre suivant sera consacré à la méthode numérique utilisé dans notre étude.

Conclusion

Le système d'équations établi ainsi que les conditions aux limites associées constituent la formulation mathématique complète de notre problème physique et cela, en tenant compte des hypothèses citées précédemment. C'est un système fortement couplé (en particulier lors de la prise en compte des phénomènes de convection naturelle et/ou de la dissipation

visqueuse) qui a pour inconnues la pression motrice P*, les trois composantes du champ de vitesse U, V, W (deux dans le cas de la première configuration : U et V) et la température ϕ. Etant donné l'impossibilité la difficulté de trouver une solution analytique à un tel système, les équations de conservation seront résolues par l'intermédiaire d'une méthode numérique, qui permet la transformation des équations aux dérivées partielles en équations algébriques, plus simple à résoudre. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre III :
Modélisation Numérique

Introduction

Depuis des années, le développement de machines calculateurs (ordinateurs) a encouragé les scientifiques à résoudre des problèmes de plus en plus complexes pour lesquels les solutions analytiques ne peuvent être trouvées. Ces types de problèmes sont généralement modélisés par des équations aux dérivées partielles non-linéaires. Pour aboutir à une solution numérique, ces problèmes doivent être discrétisés en transformant les équations de conservation en un système d'équations algébriques linéaires et ce, par le biais de méthodes de discrétisation.

Il existe de nombreuses méthodes numériques qui permettent de transformer les équations différentielles en équations algébriques : méthodes des différences finies, d'éléments finis, des volumes finis, etc.

A titre de comparaison, la méthode des volumes finis est la plus efficace car elle garantit la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans chaque volume de contrôle et par conséquent, dans tout le domaine de calcul. Aussi, elle permet un traitement plus facile des milieux hétérogènes et facilite la linéarisation des termes sources. **Pour ces avantages**, cette méthode numérique a été choisie pour la résolution du système d'équations gouvernant notre problème physique, établies dans le chapitre précédent en cordonnées cartésiennes bidimensionnelles (2D) pour la première géométrie et tridimensionnelles (3D) pour la seconde géométrie.

III.1 Principe de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser en intégrant, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations de base écrites sous forme d'équations différentielles aux dérivées partielles. Elle fournit ainsi, de manière naturelle, des approximations discrètes conservatives bien adaptées aux équations de la mécanique des fluides et du transfert thermique et ce, en subdivisant le domaine de calcul en certain nombre de volumes de contrôle. Chaque volume est associé à cinq nœuds (w, e, n, s et p) pour la configuration bidimensionnelle et à sept nœuds (w, e, n, s, b, t et p) pour la configuration tridimensionnelle. Les inconnues du problème (pression, température et vitesses) sont obtenues par l'intégration des équations de conservation à travers ces volumes de contrôle, pour chaque nœud (figure III-1).

Etant donné que le présent travail porte sur deux configurations (canal plan et conduite à section droite rectangulaire), nous procéderons à la discrétisation du système d'équations tridimensionnelles, représentant le cas de l'écoulement dans une conduite à section droite

rectangulaire. Le cas de l'écoulement dans un canal plan sera décrit par le même système d'équations discrétisées, après élimination de la direction transversale (OZ) **[33]**.

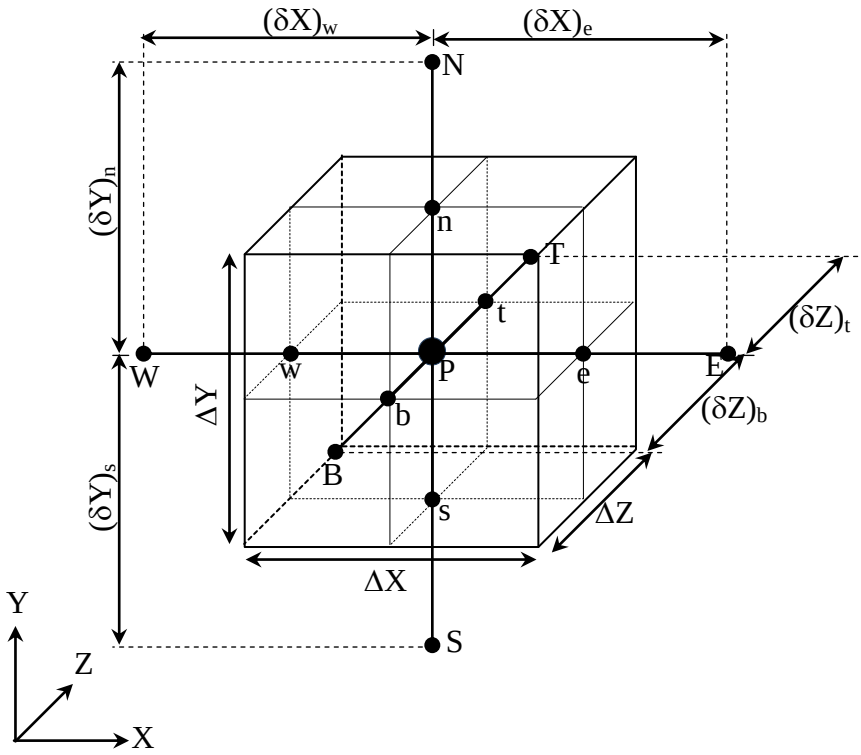


Figure III.1 : Volume de contrôle tridimensionnel.

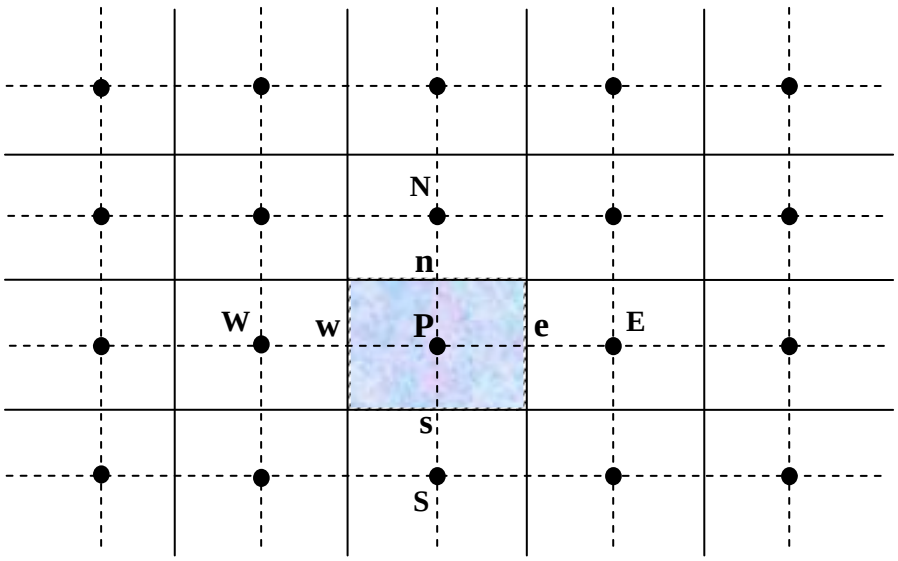


Figure III.2 : Volume de contrôle bidimensionnel.

III.2 Discrétisation des équations générales de transport

L'équation générale de transport, pour une variable ϕ, qui découle de l'écriture des équations générales de conservation écrites sous la forme adimensionnelle, est donnée par la relation suivante **[32]** :

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\left(U_j\,\phi\right)=\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial X_j}\right)+S_\phi \qquad \text{(III.1)}$$

En intégrant l'équation (III.1), écrite en projection cartésienne suivant X, Y et Z, sur le volume de contrôle typique représenté sur la figure III.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_b^t\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial X}(U\phi)\,dX\,dY\,dZ+\int_b^t\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial Y}(V\phi)\,dX\,dY\,dZ+\int_b^t\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial Z}(W\phi)\,dX\,dY\,dZ=\\
&\int_b^t\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)dX\,dY\,dZ+\int_b^t\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)dX\,dY\,dZ+\int_b^t\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial Z}\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial Z}\right)dX\,dY\,dZ \qquad \text{(III.2)}\\
&+\int_b^t\int_s^n\int_w^e S_\phi\,dX\,dY\,dZ
\end{aligned}$$

Le terme convectif suivant X, Y et Z est donné par les expressions respectives suivantes :

$$\int_b^t\int_s^s\int_w^e \frac{\partial}{\partial X}\left(U\phi\right)\,dX\,dY\,dZ=\int_b^t\int_s^n\left[U\phi\right]_w^e\,dY dZ=\left[\left(U\phi\right)_e-\left(U\phi\right)_w\right]\Delta Y\,\Delta Z \qquad \text{(III.3)}$$

$$\int_b^t\int_w^e\int_s^n \frac{\partial}{\partial Y}\left(V\phi\right)dY\,dX\,dZ=\int_b^t\int_w^e\left[V\phi\right]_s^n\,dX\,dZ=\left[\left(V\phi\right)_n-\left(V\phi\right)_s\right]\Delta X\,\Delta Z \qquad \text{(III.4)}$$

$$\int_s^n\int_w^e\int_b^t \frac{\partial}{\partial Z}\left(W\phi\right)dZ\,dX\,dY=\int_s^n\int_w^e\left[W\phi\right]_s^n\,dX\,dY=\left[\left(W\phi\right)_t-\left(W\phi\right)_b\right]\Delta X\,\Delta Y \qquad \text{(III.5)}$$

Le terme diffusif suivant X, Y et Z est donné par les relations respectives suivantes :

$$\int_b^t\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial X}\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)dX\,dY\,dZ=\int_b^t\int_s^n\left[\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial X}\right]_w^e\,dY\,dZ=\left[\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_e-\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_w\right]\Delta Y\,\Delta Z \qquad \text{(III.6)}$$

$$\int_b^t\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)dX\,dY\,dZ=\int_b^t\int_w^e\left[\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial X}\right]_s^n\,dX\,dZ=\left[\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)_n-\left(\Gamma\,\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)_s\right]\Delta X\,\Delta Z \qquad \text{(III.7)}$$

$$\int_b^t \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z}\right) dX\, dY\, dZ = \int_s^n \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z}\right]_b^t dX\, dY = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z}\right)_t - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z}\right)_b\right] \Delta X \Delta Y \qquad \text{(III.8)}$$

Le terme source est exprimé comme suit :

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^t S_\phi \, dX\, dY\, dZ = \overline{S_\phi}\, \Delta X\, \Delta Y\, dZ \qquad \text{(III.9)}$$

L'introduction des équations (III.3) à (III.9) dans l'équation (III.2) donne l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} &\left[(U\phi)_e - (U\phi)_w\right]\Delta Y\, \Delta Z + \left[(V\phi)_n - (V\phi)_s\right]\Delta X\, \Delta Z + \left[(W\phi)_t - (W\phi)_b\right]\Delta X\, \Delta Y = \\ &\left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X}\right)_w\right]\Delta Y\, \Delta Z + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)_s\right]\Delta X\, \Delta Z \\ &+ \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z}\right)_t - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z}\right)_b\right]\Delta X\, \Delta Z + \overline{S_\phi}\, \Delta X\, \Delta Y\, \Delta Z \end{aligned} \qquad \text{(III.10)}$$

La présentation de la forme générale de l'équation algébrique (III.10) est comme suit :

$$A_P\, \phi_P = A_E\, \phi_E + A_W\, \phi_W + A_N\, \phi_N + A_S\, \phi_S + A_T\, \phi_T + A_B \phi_B + b \qquad \text{(III.11)}$$

Avec :

$$A_E = D_e A\left(|P_e|\right) + [[-F_e, 0]]$$
$$A_W = D_w A\left(|P_w|\right) + [[F_w, 0]]$$
$$A_N = D_n A\left(|P_n|\right) + [[-F_n, 0]]$$
$$A_S = D_s A\left(|P_s|\right) + [[F_s, 0]]$$
$$A_T = D_t A\left(|P_t|\right) + [[-F_t, 0]]$$
$$A_B = D_b A\left(|P_b|\right) + [[F_b, 0]]$$
$$b = S_\phi\, \Delta X\, \Delta Y\, \Delta Z$$

$$F_e = (\rho U)_e\, \Delta Y\, \Delta Z \qquad D_e = \frac{\Gamma_e\, \Delta Y\, \Delta Z}{(\delta X)_e} \qquad P_e = \frac{F_e}{D_e}$$

$$F_w = (\rho U)_w\, \Delta Y\, \Delta Z \qquad D_w = \frac{\Gamma_w\, \Delta Y\, \Delta Z}{(\delta X)_w} \qquad P_w = \frac{F_w}{D_w}$$

$$F_n = (\rho V)_n\, \Delta Z\, \Delta X \qquad D_n = \frac{\Gamma_n\, \Delta Z\, \Delta X}{(\delta Y)_n} \qquad P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$F_s = (\rho V)_s\, \Delta Z\, \Delta X \qquad D_s = \frac{\Gamma_s\, \Delta Z\, \Delta X}{(\delta Y)_s} \qquad P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

$$F_t = (\rho W)_s\, \Delta X\, \Delta Y \qquad D_t = \frac{\Gamma_t\, \Delta X\, \Delta Y}{(\delta Y)_t} \qquad P_t = \frac{F_t}{D_t}$$

$$F_b = (\rho W)_b \Delta X \Delta Y \qquad D_b = \frac{\Gamma_b \Delta X \Delta Y}{(\delta Y)_b} \qquad P_b = \frac{F_b}{D_b}$$

A_I (I = E, W, N, S, T et B) sont les coefficients correspondant, respectivement, aux nœuds Est, West, North, South, Top et Bottom.

b est le terme source, supposé être constant dans le volume de contrôle.

F_i (i = e, w, n, s, t et b) sont les termes convectifs au niveau des faces Est, West, North, South, Top et Bottom, respectivement.

D_i (i = e, w, n, s, t et b) représentent les termes diffusifs au niveau des faces Est, West, North, South, Top et Bottom, respectivement.

P_i (i = e, w, n, s, t et b) désignent le rapport du flux convectif (F_i) au flux diffusif (D_i) au niveau des différentes faces du volume de contrôle.

Le coefficient correspondant au nœud principal, A_P, s'écrit alors sous la forme suivante :

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + (F_e - F_w) + (F_n - F_s) + (F_t - F_b) \qquad \text{(III.12)}$$

III.3 Schémas d'interpolation

Les schémas d'interpolation servent à évaluer la valeur de la variable dépendante ϕ aux interfaces du volume de contrôle. Ils sont choisis d'après les problèmes traités, la concordance des résultats qu'ils donnent avec les résultats physiques et aussi la stabilité numérique.

Le tableau III.1 regroupe les expressions de la fonction du rapport P, $A(|P|)$ pour différents schémas numériques.

Table III.1 : Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numériques.

Schémas	**Formule de la fonction** $A(\|P\|)$
Différences centrées	$1\text{-}0{,}5\|P\|$
Upwind	1
Hybrid	$\text{Max}\,[0,(1\text{-}0{,}5\|P\|)]$
Power Law	$\text{Max}\,[0,(1\text{-}0{,}1\|P\|)^5]$
Exponentiel	$\|P\| / [\exp(\|P\|)\text{-}1]$

Le schéma Power Law (Patankar, 1980 [32]) est le plus recommandé dans la littérature car il exige moins de temps de calcul et permet de fournir une meilleure stabilité de la solution numérique et des résultats proches de la solution exacte. Ce schéma est adopté dans la présente étude.

III.4 Traitement du terme source

Le terme source S est, généralement, une fonction non linéaire de la variable ϕ. Afin d'améliorer la convergence, il est exprimé par une fonction linéaire de ϕ au nœud considéré. La méthode de la tangente proposée par Patankar [32] est recommandée pour la linéarisation de S sous la forme suivante :

$$\bar{S} = S_C + S_P \, \phi_P \tag{III.13}$$

Les expressions de S_c et S_p peuvent être, elles-mêmes, fonction de ϕ. Il est souhaitable, lors de la linéarisation, que S_p soit négatif pour être en conformité avec les règles de base de la méthode des volumes finis (Patankar, 1980).

Cette linéarisation consiste à écrire $\bar{S}$ en fonction de S^* et de ϕ^*, qui indiquent les valeurs de S et de ϕ à l'itération précédente :

$$\bar{S} = S^* + \left[\frac{dS}{d\phi}\right]^* (\phi_P - \phi_P^*) \tag{III.14}$$

Le coefficient A_P intervenant dans l'équation (III.12) s'écrit alors comme suit :

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B - S_P \, \Delta X \, \Delta Y \, \Delta Z \tag{III.15}$$

III.5 Application aux équations générales de transport

III.5.1 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant X sur un volume de contrôle décalé vers la droite (figure III.1) donne l'équation algébrique suivante **[33]** :

$$\begin{aligned} A_P(i,j,k)\,U(i,j,k) = {} & A_E(i,j,k)\,U(i+1,j,k) + A_W(i,j,k)\,U(i-1,j,k) \\ & + A_N(i,j,k)\,U(i,j+1,k) + A_S(i,j,k)\,U(i,j-1,k) \\ & + A_T(i,j,k)\,U(i,j,k-1) + A_B(i,j,k)\,U(i,j,k+1) + b(i,j,k) \end{aligned} \tag{III.16}$$

Avec :

$$A_E(i,j,k) = D_e A(|P_e|) + [[-F_e, 0]]$$
$$A_W(i,j,k) = D_w A(|P_w|) + [[F_w, 0]]$$
$$A_N(i,j,k) = D_n A(|P_n|) + [[-F_n, 0]]$$
$$A_S(i,j,k) = D_s A(|P_s|) + [[F_s, 0]]$$
$$A_T(i,j,k) = D_t A(|P_t|) + [[-F_t, 0]]$$
$$A_B(i,j,k) = D_b A(|P_b|) + [[F_b, 0]]$$
$$b(i,j,k) = [P(i,j,k) - P(i-1,j,k)]\,\Delta Y(j)\,\Delta Z(k)$$

$$A_P(i,j,k) = A_E(i,j,k) + A_W(i,j,k) + A_N(i,j,k) + A_S(i,j,k) + A_T(i,j,k) + A_B(i,j,k) \tag{III.17}$$

Les termes de convection et de diffusion sont donnés par les expressions suivantes :

$$F_e = \frac{1}{2}\left[U(i+1,j,k) + U(i,j,k)\right]\Delta Y(j)\,\Delta Z(k)$$

$$F_w = \frac{1}{2}\left[U(i-1,j,k) + U(i,j,k)\right]\Delta Y(j)\,\Delta Z(k)$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[V(i,j,k) + V(i,j+1,k)\right]\Delta X(i)\,\Delta Z(k)$$

$$F_s = \frac{1}{2}\left[V(i,j,k) + V(i,j-1,k)\right]\Delta X(i)\,\Delta Z(k)$$

$$F_t = \frac{1}{2}\left[W(i,j,k) + W(i,j,k+1)\right]\Delta X(i)\,\Delta Y(j)$$

$$F_b = \frac{1}{2}\left[W(i,j,k) + W(i,j,k-1)\right]\Delta X(i)\,\Delta Y(j)$$

$$D_e = \frac{1}{Re}\left[\frac{\eta(i+1,j,k)\,\Delta Y(j)\,\Delta Z(k)}{\Delta X(i+1)}\right] \qquad D_w = \frac{1}{Re}\left[\frac{\eta(i,j,k)\,\Delta Y(j)\,\Delta Z(k)}{\Delta X(i)}\right]$$

$$D_n = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta X(i+1)}{\dfrac{\Delta Y(j)}{\eta(i+1,j,k)} + \dfrac{\Delta Y(j+1)}{\eta(i+1,j+1,k)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta X(i)}{\dfrac{\Delta Y(j)}{\eta(i,j,k)} + \dfrac{\Delta Y(j+1)}{\eta(i,j+1,k)}}\right]$$

$$D_s = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta X(i+1)}{\dfrac{\Delta Y(j-1)}{\eta(i+1,j-1,k)} + \dfrac{\Delta Y(j)}{\eta(i+1,j,k)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta X(i)}{\dfrac{\Delta Y(j-1)}{\eta(i,j-1,k)} + \dfrac{\Delta Y(j)}{\eta(i,j,k)}}\right]$$

$$D_t = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta X(i+1)}{\dfrac{\Delta Z(k)}{\eta(i+1,j,k)} + \dfrac{\Delta Z(k+1)}{\eta(i+1,j,k+1)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta X(i)}{\dfrac{\Delta Z(k)}{\eta(i,j,k)} + \dfrac{\Delta Z(k+1)}{\eta(i,j,k+1)}}\right]$$

$$D_b = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta X(i+1)}{\dfrac{\Delta Z(k-1)}{\eta(i+1,j,k-1)} + \dfrac{\Delta Z(k)}{\eta(i+1,j,k)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta X(i)}{\dfrac{\Delta Z(k-1)}{\eta(i,j,k-1)} + \dfrac{\Delta Z(k)}{\eta(i,j,k)}}\right]$$

III.5.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant Y sur un volume de contrôle décalé vers le haut (figure III.1) donne l'équation algébrique suivante :

(III.18)

$$A_P(i,j,k)\,V(i,j,k) = A_E(i,j,k)\,V(i+1,j,k) + A_W(i,j,k)\,V(i-1,j,k) + A_N(i,j,k)\,V(i,j+1,k) + A_S(i,j,k)\,V(i,j-1,k) + A_T(i,j,k)\,V(i,j,k-1) + A_B(i,j,k)\,V(i,j,k+1) + b(i,j,k)$$

Tels que :

$$A_E(i,j,k) = D_e A(|P_e|) + [[-F_e, 0]]$$
$$A_W(i,j,k) = D_w A(|P_w|) + [[F_w, 0]]$$
$$A_N(i,j,k) = D_n A(|P_n|) + [[-F_n, 0]]$$
$$A_S(i,j,k) = D_s A(|P_s|) + [[F_s, 0]]$$
$$A_T(i,j,k) = D_t A(|P_t|) + [[-F_t, 0]]$$
$$A_B(i,j,k) = D_b A(|P_b|) + [[F_b, 0]]$$
$$b(i,j,k) = [P(i,j,k) - P(i,j-1,k)]\Delta X(i)\Delta Z(k)$$

$$A_P(i,j,k) = A_E(i,j,k) + A_W(i,j,k) + A_N(i,j,k) + A_S(i,j,k) + A_T(i,j,k) + A_B(i,j,k) \quad \text{(III.19)}$$

Les termes de convection et de diffusion sont donnés par les relations suivantes :

$$F_e = \frac{1}{2}[U(i+1,j,k) + U(i,j,k)]\Delta Y(j)\Delta Z(k)$$
$$F_w = \frac{1}{2}[U(i-1,j,k) + U(i,j,k)]\Delta Y(j)\Delta Z(k)$$
$$F_n = \frac{1}{2}[V(i,j,k) + V(i,j+1,k)]\Delta X(i)\Delta Z(k)$$
$$F_s = \frac{1}{2}[V(i,j,k) + V(i,j-1,k)]\Delta X(i)\Delta Z(k)$$
$$F_t = \frac{1}{2}[W(i,j,k) + W(i,j,k+1)]\Delta X(i)\Delta Y(j)$$
$$F_b = \frac{1}{2}[W(i,j,k) + W(i,j,k-1)]\Delta X(i)\Delta Y(j)$$

$$D_e = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Y(j+1)}{\frac{\Delta X(i)}{\eta(i,j+1,k)} + \frac{\Delta X(i+1)}{\eta(i+1,j+1,k)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Y(j)}{\frac{\Delta X(i)}{\eta(i,j,k)} + \frac{\Delta X(i+1)}{\eta(i+1,j,k)}}\right]$$

$$D_w = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Y(j+1)}{\frac{\Delta X(i-1)}{\eta(i-1,j+1,k)} + \frac{\Delta X(i)}{\eta(i,j+1,k)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Y(j)}{\frac{\Delta X(i-1)}{\eta(i-1,j,k)} + \frac{\Delta X(i)}{\eta(i,j,k)}}\right]$$

$$D_n = \frac{1}{Re}\left[\frac{\eta(i,j+1,k)\Delta X(i)\Delta Z(k)}{\Delta Y(j+1)}\right] \qquad D_s = \frac{1}{Re}\left[\frac{\eta(i,j,k)\Delta X(i)\Delta Z(k)}{\Delta Y(j)}\right]$$

$$D_t = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Y(j+1)}{\frac{\Delta Z(k)}{\eta(i,j+1,k)}+\frac{\Delta Z(k+1)}{\eta(i+1,j+1,k+1)}}\right]+\frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Y(j)}{\frac{\Delta Z(k)}{\eta(i,j,k)}+\frac{\Delta Z(k+1)}{\eta(i,j,k+1)}}\right]$$

$$D_b = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Y(j+1)}{\frac{\Delta Z(k-1)}{\eta\,(i,j+1,k-1)}+\frac{\Delta Z(k)}{\eta\,(i,j+1,k)}}\right]+\frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Y(j)}{\frac{\Delta Z(k-1)}{\eta(i,j,k-1)}+\frac{\Delta Z(k)}{\eta(i,j,k)}}\right]$$

III.5.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Z

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant Z sur un volume de contrôle décalé vers le haut (figure III.1) donne l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} A_P(i,j,k)\,W(i,j,k) = {} & A_E(i,j,k)\,W(i+1,j,k)+A_W(i,j,k)\,W(i-1,j,k) \\ & +A_N(i,j,k)\,W(i,j+1,k)+A_S(i,j,k)\,W(i,j-1,k) \\ & +A_T(i,j,k)\,W(i,j,k-1)+A_B(i,j,k)\,W(i,j,k+1)+b(i,j,k) \end{aligned} \qquad \text{(III.20)}$$

Avec

$$A_E(i,j,k) = D_e A(|P_e|)+[[-F_e,0]]$$
$$A_W(i,j,k) = D_w A(|P_w|)+[[F_w,0]]$$
$$A_N(i,j,k) = D_n A(|P_n|)+[[-F_n,0]]$$
$$A_S(i,j,k) = D_s A(|P_s|)+[[F_s,0]]$$
$$A_T(i,j,k) = D_t A(|P_t|)+[[-F_t,0]]$$
$$A_B(i,j,k) = D_b A(|P_b|)+[[F_b,0]]$$
$$b(i,j,k) = [P(i,j,k)-P(i,j,k-1)]\Delta X(j)\Delta Y(j)$$

$$A_P(i,j,k) = A_E(i,j,k)+A_W(i,j,k)+A_N(i,j,k)+A_S(i,j,k)+A_T(i,j,k)+A_B(i,j,k) \qquad \text{(III.21)}$$

Les termes de convection et de diffusion sont donnés par les relations suivantes :

$$F_e = \frac{1}{2}[U(i+1,j,k)+U(i,j,k)]\Delta Y(j)\Delta Z(k)$$
$$F_w = \frac{1}{2}[U(i-1,j,k)+U(i,j,k)]\Delta Y(j)\Delta Z(k)$$
$$F_n = \frac{1}{2}[V(i,j,k)+V(i,j+1,k)]\Delta X(i)\Delta Z(k)$$
$$F_s = \frac{1}{2}[V(i,j,k)+V(i,j-1,k)]\Delta X(i)\Delta Z(k)$$
$$F_t = \frac{1}{2}[W(i,j,k)+W(i,j,k+1)]\Delta X(i)\Delta Y(j)$$

$$F_b = \frac{1}{2}\left[W(i,j,k) + W(i,j,k-1)\right]\Delta X(i)\,\Delta Y(j)$$

$$D_t = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Z(k+1)}{\frac{\Delta X(i)}{\eta(i,j,k+1)} + \frac{\Delta X(i+1)}{\eta(i+1,j,k+1)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Z(k)}{\frac{\Delta X(i)}{\eta(i,j,k)} + \frac{\Delta X(i+1)}{\eta(i,j,k)}}\right]$$

$$D_w = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Z(k+1)}{\frac{\Delta X(i-1)}{\eta(i-1,j,k+1)} + \frac{\Delta X(i)}{\eta(i,j,k)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Z(k)}{\frac{\Delta X(i-1)}{\eta(i-1,j,k)} + \frac{\Delta X(i)}{\eta(i,j,k)}}\right]$$

$$D_t = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Z(k+1)}{\frac{\Delta Y(j)}{\eta(i,j,k+1)} + \frac{\Delta Y(j+1)}{\eta(i,j+1,k+1)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Z(k)}{\frac{\Delta Y(j)}{\eta(i,j,k)} + \frac{\Delta Y(j+1)}{\eta(i,j+1,k)}}\right]$$

$$D_b = \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Z(k+1)}{\frac{\Delta Y(j-1)}{\eta(i,j-1,k+1)} + \frac{\Delta Y(j)}{\eta(i,j,k+1)}}\right] + \frac{1}{Re}\left[\frac{\Delta Z(k)}{\frac{\Delta Y(j-1)}{\eta(i,j-1,k)} + \frac{\Delta Y(j)}{\eta(i,j,k)}}\right]$$

$$D_n = \frac{1}{Re}\left[\frac{\eta(i,j,k+1)\,\Delta X(i)\,\Delta y(j)}{\Delta Z(k+1)}\right] \qquad D_w = \frac{1}{Re}\left[\frac{\eta(i,j,k)\,\Delta X(i)\,\Delta Y(j)}{\Delta Z(k)}\right]$$

III.5.4 Discrétisation de l'équation de l'énergie

La discrétisations de l'équation de l'énergie sur un volume de contrôle typique (figure III.1) donne l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} A_P(i,j,k)\,\phi(i,j,k) = {} & A_E(i,j,k)\,\phi(i+1,j,k) + A_W(i,j,k)\,\phi(i-1,j,k) \\ & + A_N(i,j,k)\,\phi(i,j+1,k) + A_S(i,j,k)\,\phi(i,j-1,k) \\ & + A_T(i,j,k)\,\phi(i,j,k+1) + A_B(i,j,k)\,\phi(i,j,k-1) + b(i,j,k) \end{aligned} \qquad \text{(III.22)}$$

Avec

$$A_E(i,j,k) = D_e A\left(|P_e|\right) + [[-F_e, 0]]$$
$$A_W(i,j,k) = D_w A\left(|P_w|\right) + [[F_w, 0]]$$
$$A_N(i,j,k) = D_n A\left(|P_n|\right) + [[-F_n, 0]]$$
$$A_S(i,j,k) = D_s A\left(|P_s|\right) + [[F_s, 0]]$$
$$A_T(i,j,k) = D_t A\left(|P_t|\right) + [[-F_t, 0]]$$
$$A_B(i,j,k) = D_b A\left(|P_b|\right) + [[F_b, 0]]$$
$$b(i,j,) = \left[P(i,j,k) - P(i,j,k-1)\right]\Delta X(i)\,\Delta Y(j)\,\Delta Z(k)$$

$$A_P(i,j,k) = A_E(i,j,k) + A_W(i,j,k) + A_N(i,j,k) + A_S(i,j,k) + A_T(i,j,k) + A_B(i,j,k) \quad \text{(III.23)}$$

Les termes de convection et de diffusion sont donnés par les relations suivantes :

$$F_e = \frac{1}{2}\left[U(i+1,j,k) + U(i,j,k)\right]\Delta Y(j)\,\Delta Z(k)$$

$$F_w = \frac{1}{2}\left[U(i-1,j,k) + U(i,j,k)\right]\Delta Y(j)\,\Delta Z(k)$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[V(i,j,k) + V(i,j+1,k)\right]\Delta X(i)\,\Delta Z(k)$$

$$F_s = \frac{1}{2}\left[V(i,j,k) + V(i,j-1,k)\right]\Delta X(i)\,\Delta Z(k)$$

$$F_t = \frac{1}{2}\left[W(i,j,k) + W(i,j,k+1)\right]\Delta X(i)\,\Delta Y(j)$$

$$F_b = \frac{1}{2}\left[W(i,j,k) + W(i,j,k-1)\right]\Delta X(i)\,\Delta Y(j)$$

$$D_e = \frac{1}{Pe}\left[\frac{2\,\Delta Y(j)}{\frac{\Delta X(i)}{K^*(i,j,k)} + \frac{\Delta X(i+1)}{K^*(i+1,j,k)}}\right] \qquad D_w = \frac{1}{Pe}\left[\frac{2\,\Delta Y(j)}{\frac{\Delta X(i-1)}{K^*(i-1,j,k)} + \frac{\Delta X(i)}{K^*(i,j,k)}}\right]$$

$$D_n = \frac{1}{Pe}\left[\frac{2\,\Delta X(i)}{\frac{\Delta Y(j)}{K^*(i,j,k)} + \frac{\Delta Y(j+1)}{K^*(i,j+1,k)}}\right] \qquad D_s = \frac{1}{Pe}\left[\frac{2\,\Delta X(i)}{\frac{\Delta Y(j-1)}{K^*(i,j-1,k)} + \frac{\Delta Y(j)}{K^*(i,j,k)}}\right]$$

$$D_t = \frac{1}{Pe}\left[\frac{2\,\Delta Z(k)}{\frac{\Delta Z(k)}{K^*(i,j,k)} + \frac{\Delta Z(k+1)}{K^*(i,j,k+1)}}\right] \qquad D_b = \frac{1}{Pe}\left[\frac{2\,\Delta Z(k)}{\frac{\Delta Z(k-1)}{K^*(i,j,k-1)} + \frac{\Delta Z(k)}{K^*(i,j,k)}}\right]$$

Pe étant le nombre adimensionnel de Peclet.

III.6 Résolution du système d'équations discrétisées

L'algorithme SIMPLER (Semi-Implicite Method for Pressure Linked Equations Revised), développé par Patankar [32], est utilisé pour résoudre les équations algébriques (III.16), (III.18) et (III.20), régissant l'écoulement et le transfert thermique au sein de nos configurations. Les étapes de cet algorithme peuvent être résumées en les points suivants :

1. Proposer un champ de vitesse estimé.
2. Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement suivant X, Y et Z et utiliser les équations suivantes pour la détermination des pseudos vitesses :

(III.24)

$$\hat{U} = \frac{\left[\sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}(i,j,k)U_{nb}(i,j,k) + b^{u}(i,j,k)\right]}{A_{p}(i,j,k)}$$

$$\hat{V} = \frac{\left[\sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}(i,j,k)V_{nb}(i,j,k) + b^{v}(i,j,k)\right]}{A_{p}(i,j,k)} \qquad \text{(III.25)}$$

$$\hat{W} = \frac{\left[\sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}(i,j,k)W_{nb}(i,j,k) + b^{w}(i,j,k)\right]}{A_{p}(i,j,k)} \qquad \text{(III.26)}$$

$b^{u}(i, j, k)$, $b^{v}(i, j, k)$ et $b^{w}(i, j, k)$ contiennent les termes sources des équations discrétisées de quantité de mouvement suivant X, Y et Z, respectivement, à l'exception du terme de pression.

3. Calculer les coefficients pour l'équation de pression pour obtenir l'équation de pression discrétisée suivante, qui doit être résolue par la suite :

$$\begin{aligned} A_{P}(i,j,k)P(i,j,k) = {} & A_{E}(i,j,k)P(i+1,j,k) + A_{W}(i,j,k)P(i-1,j,k) \\ & + A_{N}(i,j,k)P(i,j+1,k) + A_{S}(i,j,k)P(i,j-1,k) \\ & + A_{T}(i,j,k)P(i,j,k+1) + A_{B}(i,j,k)P(i,j,k-1) + b(i,j,k) \end{aligned} \qquad \text{(III.27)}$$

4. Considérer le champ de pression obtenu comme une estimation P^{*} et résoudre les équations de quantités de mouvement discrétisées suivantes, pour obtenir U^{*}, V^{*} et W^{*} :

$$\begin{aligned} A_{P}(i,j,k)U^{*}(i,j,k) = {} & A_{E}(i,j,k)U^{*}(i+1,j,k) + A_{W}(i,j,k)U^{*}(i-1,j,k) \\ & + A_{N}(i,j,k)U^{*}(i,j+1,k) + A_{S}(i,j,k)U^{*}(i,j-1,k) + A_{T}(i,j,k)U^{*}(i,j,k+1) \\ & + A_{B}(i,j,k)U^{*}(i,j,k-1)\left[P^{*}(i,j,k) - P^{*}(i+1,j,k)\right]\Delta Y(j)\Delta Z(k) + b(i,j,k) \end{aligned} \qquad \text{(III.28)}$$

$$\begin{aligned} A_{P}(i,j,k)V^{*}(i,j,k) = {} & A_{E}(i,j,k)V^{*}(i+1,j,k) + A_{W}(i,j,k)V^{*}(i-1,j,k) \\ & + A_{N}(i,j,k)V^{*}(i,j+1,k) + A_{S}(i,j,k)V^{*}(i,j-1,k) + A_{T}(i,j,k)V^{*}(i,j,k+1) \\ & + A_{B}(i,j,k)V^{*}(i,j,k-1)\left[P^{*}(i,j,k) - P^{*}(i,j+1,k)\right]\Delta X(i)\Delta Z(k) + b(i,j,k) \end{aligned} \qquad \text{(III.29)}$$

$$\begin{aligned} A_{P}(i,j,k)W^{*}(i,j,k) = {} & A_{E}(i,j,k)W^{*}(i+1,j,k) + A_{W}(i,j,k)W^{*}(i-1,j,k) \\ & + A_{N}(i,j,k)W^{*}(i,j+1,k) + A_{S}(i,j,k)W^{*}(i,j-1,k) + A_{T}(i,j,k)W^{*}(i,j,k+1) \\ & + A_{B}(i,j,k)W^{*}(i,j,k-1)\left[P^{*}(i,j,k) - P^{*}(i,j,k)\right]\Delta X(i)\Delta Y(j) + b(i,j,k) \end{aligned} \qquad \text{(III.30)}$$

5. Calculer le terme source de l'équation de correction de pression et résoudre l'équation suivante pour obtenir P' :

(III.31)

$$A_P(i,j,k)\,P'(i,j,k) = A_E(i,j,k)\,P'(i+1,j,k) + A_W(i,j,k)\,P'(i-1,j,k) + A_N(i,j,k)\,P'(i,j+1,k) + A_S(i,j,k)\,P'(i,j-1,k) + A_T(i,j,k)\,P'(i,j,k-1) + A_B(i,j,k)\,P'(i,j,k+1) + b(i,j,k)$$

6. En se basant sur l'étape précédente, corriger le champ de vitesse en utilisant les équations de correction de vitesse suivantes :

$$U(i,j,k) = U^*(i,j,k) + P_u(i,j,k)\left[P'(i,j,k) - P'(i+1,j,k)\right] \quad \text{(III.32)}$$

$$V(i,j,k) = V^*(i,j,k) + P_v(i,j,k)\left[P'(i,j,k) - P'(i,j+1,k)\right] \quad \text{(III.33)}$$

$$W(i,j,k) = W^*(i,j,k) + P_W(i,j,k)\left[P'(i,j,k) - P'(i,j,k+1)\right] \quad \text{(III.34)}$$

7. Résoudre l'équation algébrique discrétisée de l'énergie pour obtenir le champ de température Φ.

8. Considérer le champ de vitesses obtenu comme une nouvelle estimation des vitesses et retourner à l'étape (2) jusqu'à obtention de la convergence.

III.7 Méthode de résolution

Les coefficients qui apparaissent dans les équations algébriques obtenues dépendent des variables elles-mêmes. Ce qui rend ces équations non linéaires. Leur résolution nécessite, par conséquent, l'utilisation d'une méthode numérique itérative. Cette dernière consiste à déterminer les valeurs de la variable dépendante ϕ sur chaque ligne du domaine d'étude, indépendamment des autres lignes. Le système se transforme, ainsi, d'un système d'équations multidimensionnel en un système unidimensionnel et ce, en ajoutant au terme source de la dimension choisie, les termes des autres dimensions. Le système d'équations obtenu est représenté par une matrice tridiagonale et peut être donc résolu par l'algorithme de Thomas.

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit :

$$A_P\phi_P = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + A_T\phi_T + A_B\phi_B + \overline{S_\phi} \quad \text{(III.35)}$$

Le système d'équation obtenu peut se mettre sous la forme :

$$[A][\phi] = \left[\overline{S_\phi}\right] \quad \text{(III.36)}$$

[A] étant une matrice de (NI-2) x (NJ-2) x (Nk-2) éléments.
[ϕ] étant le vecteur des inconnues ϕ (i, j, k).

III.8 Critère de convergence

Un processus itératif atteint la convergence, c'est-à-dire que la solution approche au mieux la solution stable des systèmes d'équations en un nombre optimal d'itérations, lorsque

les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif dans les valeurs des variables dépendantes ϕ. Cette convergence est exprimée, en général, par un test d'arrêt du processus itératif appelé ***critère de convergence***.

Le critère utilisé dans la présente étude porte sur les résidus de quantité de mouvement, de la masse et de la température. Ces résidus sont définis par la relation suivante :

$$R_\phi = \sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}\phi_{nb} + S_\phi - A_p\phi_P \qquad \text{(III.37)}$$

R_ϕ tend vers zéro lorsque l'équation discrétisée est satisfaite.

Ce critère de convergence peut se traduire par l'inégalité suivante :

$$\sum_{\Pi} \left| R_\phi \right| \leq \varepsilon_\phi \qquad \text{(III.38)}$$

Avec :

Π : domaine de calcul

ε_ϕ : valeur infiniment petite caractérisant l'erreur sur la solution obtenue. Dans cette étude, elle est fixée à 10^{-4}.

Afin de contrôler la convergence d'un processus itératif, nous utilisons la technique de relaxation car une divergence peut avoir lieu lors de la résolution du système d'équations couplées à caractère non-linéaire. Pour éviter cette divergence, le processus de convergence est ralenti entre deux itérations au moyen de la sous-relaxation. Elle consiste à introduire dans l'équation (III.11), un facteur de sous-relaxation, α_ϕ, compris entre 0 et 1 :

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha_\phi \left[\frac{\sum a_{nb}\, \phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^* \right] \qquad \text{(III.39)}$$

ϕ_P et ϕ_P^* représentent, respectivement, la valeur actuelle de la variable ϕ et celle correspondant à l'itération précédente.

La valeur optimale du coefficient α_ϕ dépend de plusieurs facteurs, tels que la nature du problème, le nombre de nœuds, l'espacement de la grille et la méthode itérative utilisée [33].

Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons présenté la procédure numérique choisie afin de résoudre les équations générales de transport écrites en coordonnées cartésiennes tridimensionnelles et ce, dans le but de simuler l'écoulement et le transfert thermique au sein de la configuration géométrique choisie. Pour cela, nous avons opté pour la méthode des volumes finis avec un schéma en loi de puissance (*Power law*). L'algorithme SIMPLER est adopté pour traiter le couplage pression-vitesse et la méthode ligne par ligne est exploitée pour résoudre les équations discrétisées.

La validation du code de calcul ainsi que les différents résultats obtenus pour le cas de l'écoulement au sein d'un canal plan et d'une conduite à section droite rectangulaire seront présentés dans le prochain chapitre.

Chapitre IV :
Résultats et interprétation

Introduction

Toute résolution numérique est principalement basée sur la précision des résultats qui dépendent à leur tour du maillage utilisé. Une solution numérique convergera vers la solution réelle lorsque, d'une part, l'augmentation du maillage n'influe plus sur les résultats et que d'autre part, l'erreur relative entre les deux solutions tende vers zéro.

Ainsi, une validation préalable du code de calcul, par comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature, sera systématiquement entreprise pour les deux configurations étudiées. Par la suite, l'étude hydrodynamique et thermique de l'écoulement en mode de convection forcée et mixte sera abordée pour les fluides newtonien et de Bingham, en présence et en l'absence de la fonction de dissipation.

C'est ainsi que dans ce chapitre, seront présentés, les différents résultats issus de la résolution numérique des équations de transfert gouvernant l'écoulement du fluide considéré, parcourant les deux types de conduites choisies : l'entrefer de deux plans parallèles et la conduite à section droite rectangulaire. Pour la description mathématique de l'écoulement, nous adopterons les coordonnées cartésiennes pour l'écriture de l'équation de continuité, des trois projections de l'équation de l'impulsion et celle de l'énergie.

La première partie de notre étude, correspondant à la première configuration d'écoulement, consiste en un écoulement entre deux plans parallèles. Si ces derniers sont de largeur infinie (ou tout au moins très grande par rapport à leur longueur), l'écoulement dans l'entrefer est bidimensionnel et plan. La seconde partie des résultats, relative à la seconde configuration, ayant lieu dans une conduite de section droite rectangulaire, consiste en une étude tridimensionnelle et tridirectionnelle.

Soulignons enfin pour terminer que ce chapitre nous a pris un temps considérable pour son achèvement, étant donné le temps nécessaire à chaque exécution en particulier, lors du passage de la première configuration à la seconde, qui a nécessité plus de précision et par conséquent, plus de nœuds dans les deux directions transversales.

IV.1 Première géométrie : canal plan ou plaques parallèles infinies

Dans cette première partie des résultats, nous nous intéresserons à l'influence de différents paramètres sur l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide incompressible de Bingham, avec le cas particulier du fluide newtonien (correspondant à un nombre de Bingham égal à zéro : Bn = 0), entre deux plans parallèles maintenus à une température pariétale constante et uniforme.

IV.1.1 Validation du code de calcul

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail et simulés avec notre code de calcul, une validation des simulations numériques a été faite en comparant nos résultats avec ceux de **O. Jambal et al. [34]**, pour l'écoulement stationnaire en régime laminaire, d'un fluide newtonien incompressible en mode de convection forcée, et également avec ceux de **T. Lin et al. [35]** pour le cas du fluide de Bingham.

Dans les deux cas, l'écoulement a eu lieu entre deux plans parallèles maintenus à température pariétale uniforme. Les propriétés physiques et rhéologiques du fluide sont supposées indépendantes de la température. Les résultats dévoilent que l'écart entre la présente étude et les travaux de [34] et de [35], ne dépasse pas 2% dans tous les cas, ce qui permet de valider notre code de calcul pour le cas de l'écoulement bidimensionnel et plan.

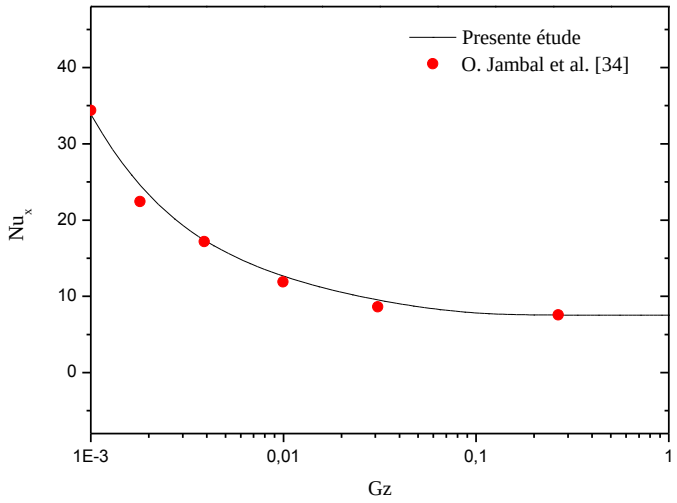


Figure IV.1 : Comparaison de l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt de la présente étude avec celle de [34]. Pr = 10.

Tableau IV.1 : Comparaison entre les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt de la présente étude avec celle de [35] pour différentes valeurs du nombre de Bingham.

Bn	Nu		Ecart relatif (%)
	Présente étude	Lin et Shah [35]	
0	7,550	7,541	0,12
0,25	7,658	7,619	0,51
1,25	7,781	7,884	1,31
2,50	8,271	8,115	1,92
5,00	8,392	8,401	0,11

IV.1.2 Etude hydrodynamique et thermique

L'étude des différents paramètres influençant le transfert thermique lors de l'écoulement entre deux plans parallèles, en régime stationnaire, d'un fluide incompressible et obéissant au modèle rhéologique de Bingham est examinée dans cette première partie. Les deux plans de longueur L (le long de la direction longitudinale Ox) ont une largeur a (le long de l'axe Oz) très grande par rapport à L. En conséquence, l'écoulement pourra être considéré comme bidimensionnel et plan (dans le plan xOy). En outre, ces deux plans sont supposés maintenus à température pariétale T_w constante et uniforme, différente de celle que possède le fluide à l'entrée du canal T_0. Le cas particulier du fluide newtonien (Bn = 0) a été systématiquement présenté aux côtés du cas du fluide binghamien.

IV.1.2.1 Effet du nombre de Bingham

Sur la **Figure IV.2**, nous représentons le développement des profils de vitesse longitudinale en différentes sections droites du canal, pour diverses valeurs du nombre de Bingham (Bn = 0, 2, 5 et 10 respectivement).

A priori nous remarquons que ces profils se déforment depuis l'entrée et tendent progressivement vers une valeur asymptotique à partir d'une section droite correspondant à X = 5, qui correspond en fait à l'établissement du régime hydrodynamique et ce, pour les différents nombres de Bingham étudiés.

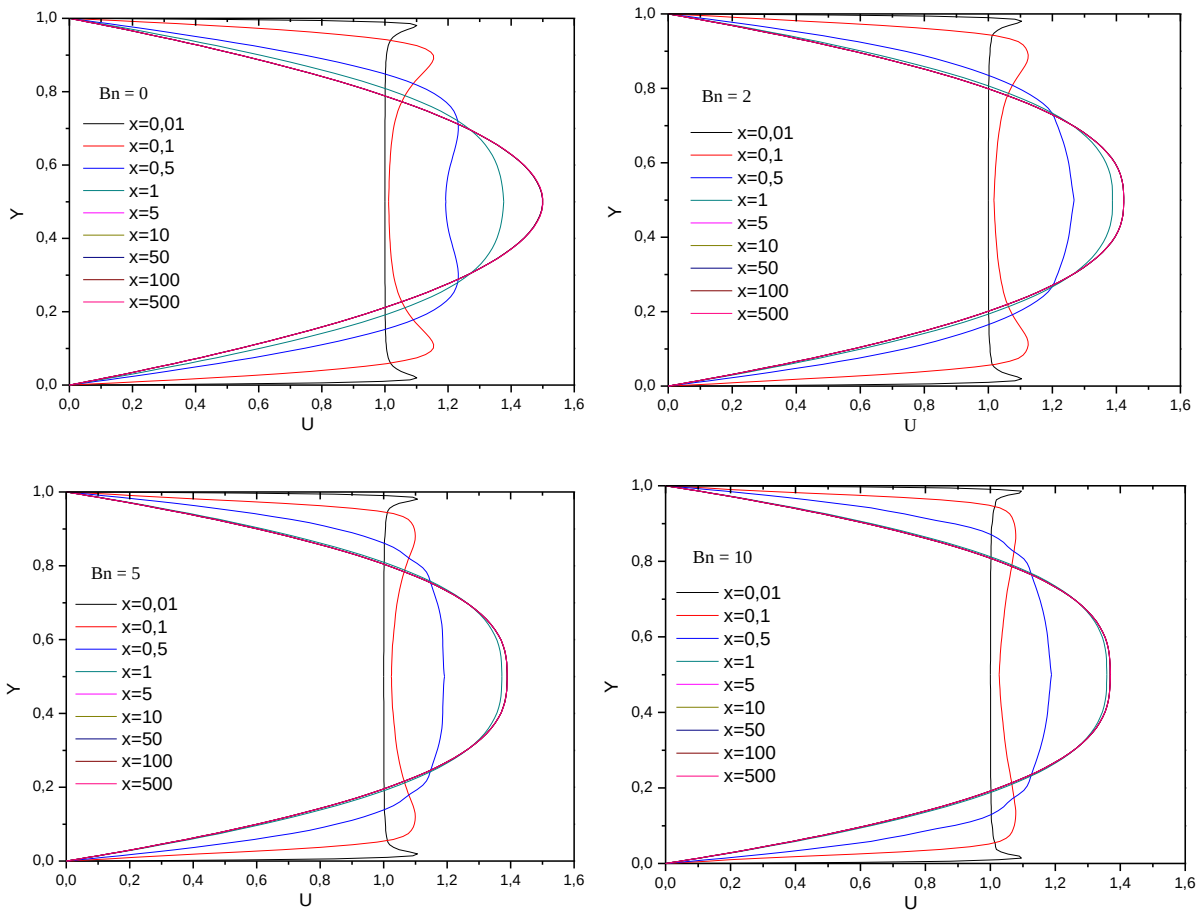


Figure IV.2 : Développement des profils de vitesse longitudinale en différentes sections droites du canal et pour différents nombres de Bingham. Re = 100.

Il est à noter aussi que près de l'entrée du canal, les profils de vitesse passent par un maximum près des parois et un minimum au centre du canal. Cette distorsion des profils de vitesse, nécessaire afin que se conserve le débit volumique, disparaît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée du canal. Ce même comportement a également été reporté par Min et al. [17] pour le cas de l'écoulement d'un fluide de Bingham au sein d'une conduite cylindrique à section droite circulaire.

Par ailleurs, l'augmentation du nombre de Bingham donne lieu à une zone bouchon autour du centre du canal (Y = 0,5), traduite par des vitesses qui y restent uniformes. De même, en régime établi, l'étendue de ce bouchon augmente avec l'augmentation de nombre de Bingham.

Le développement longitudinal des profils de température adimensionnelle en différentes sections du canal (c'est-à-dire pour différents plans XOY), pour les nombres de Bingham (Bn = 0, 2, 5 et 10) respectivement, est représenté à travers la **Figure IV.3**. Il y apparait que pour les différents nombres de Bingham choisis, le développement des profils de température est relativement identique. Autrement dit, le fluide se réchauffe progressivement au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans le canal, depuis l'entrée ($T = T_0$, soit : $\Phi = 1$) jusqu'à atteindre presque la température des parois ($T = T_w$, soit : $\Phi = 0$).

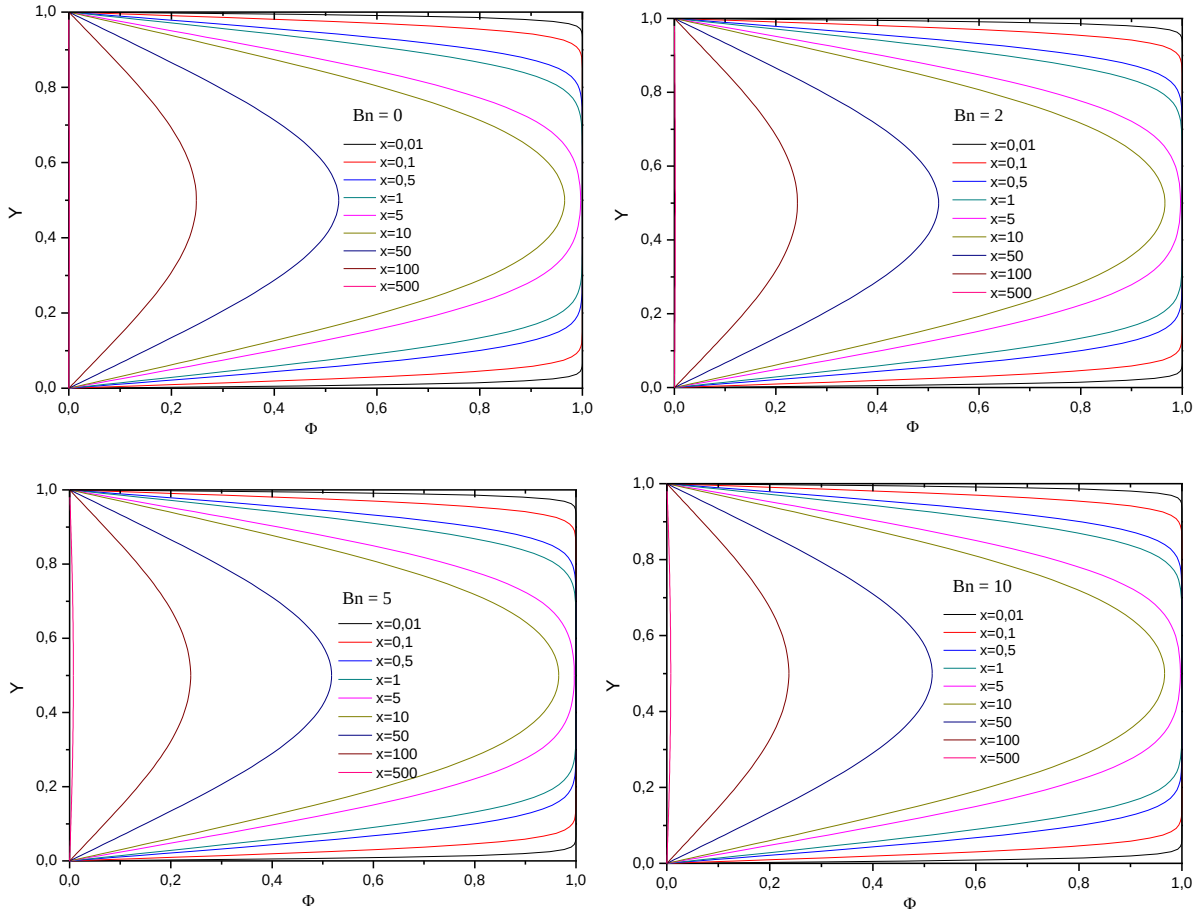


Figure IV.3 : Développement longitudinale des profils de température réduite en différentes sections droites du canal et pour différents nombres de Bingham. Re = 100.

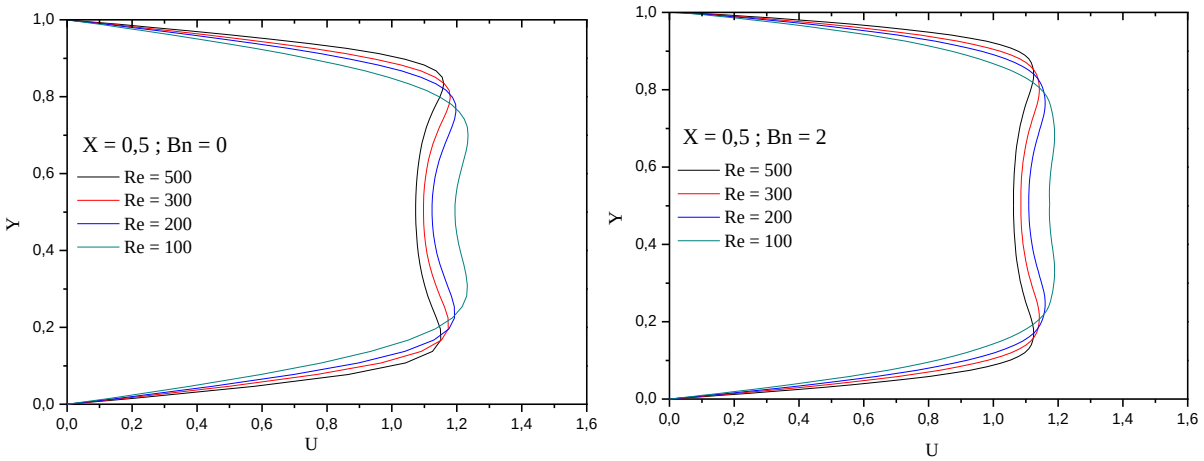
L'effet du nombre de Bingham sur le développement longitudinal des profils de vitesse et de température se répercute sur l'évolution axiale du coefficient de frottement de Fanning et du nombre de Nusselt, respectivement. Cette partie a fait l'objet d'une communication internationale dans le cadre du **20ème Congrès Français de Mécanique (CFM 2011)** qui a eu lieu en septembre 2011 à Besançon en France (**Annexe I**). Les résultats obtenus pour les différentes valeurs du nombre de Bingham considérées (Bn = 0, 1, 2, 5 et 10) montrent que le transfert thermique, à travers le nombre de Nusselt, est faiblement affecté par les variations du nombre de Bingham contrairement au comportement hydrodynamique où l'on constate que l'augmentation du nombre de Bingham engendre l'augmentation du coefficient de frottement de Fanning. De même, l'augmentation du nombre de Bingham tend à augmenter l'étendue de la région caractérisée par le bouchon et animée d'une vitesse uniforme, qui décroit d'autant plus que le nombre de Bingham augmente.

IV.1.2.2 Effet du nombre de Reynolds

Les profils de vitesse longitudinale, aux positions X = 0,5 ; 1 et 10, sont représentés respectivement sur la **figure IV.4** pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, pour les cas du fluide newtonien (Bn = 0 et Pr = 1) et celui de Bingham (Bn = 2 et Pr = 10).

Nous constatons que l'influence de l'augmentation du nombre de Reynolds provoque un accroissement de la vitesse aux zones près des parois, contrairement auxzones centrales, pour lesquelles la vitesse décroit,ce qui provoque le ralentissement du fluide en écoulement. Mentionnons également que l'influence du nombre de Reynolds est significative à l'entrée de la conduite d'après les positions X = 0,5 et X = 1 contrairement à la position X = 10 où le nombre de Reynolds n'a plus d'influence.

Ces constatations restent valables pour le cas des deux fluides. Cependant, de faibles valeurs de vitesse ont été obtenues pour le fluide de Bingham (Bn = 2) en comparaison avec celui du fluide newtonien.



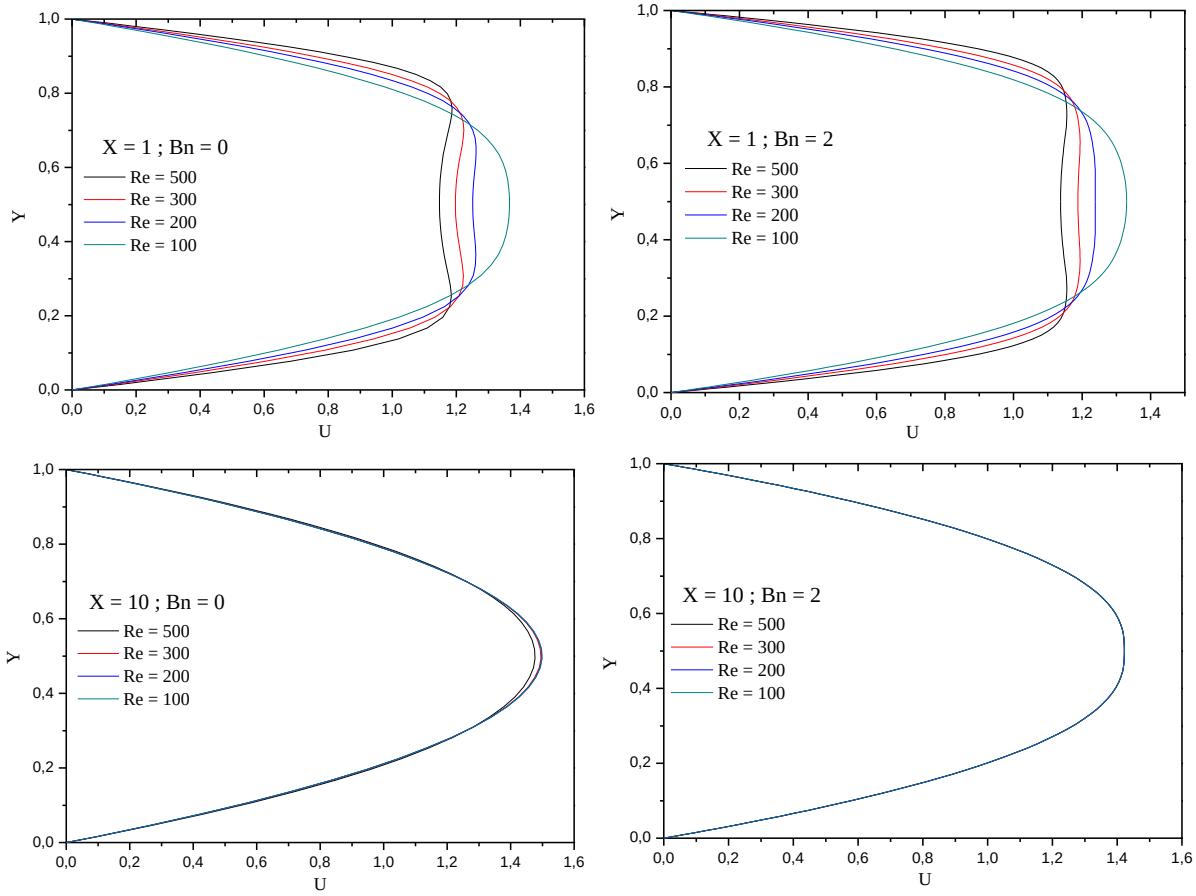


Figure IV.4 : Influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse longitudinale en différentes sections droites du canal.

A travers les **figures IV.5** et **IV.6,** nous présentons l'effet du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale de la vitesse centrale du fluide (en d'autres termes, la vitesse longitudinale relevée au centre du canal : Y = 0,5). Nous remarquons que les courbes suivent la même allure : une croissance progressive de la vitesse centrale quand X augmente localisée à partir de X = 0,1, jusqu'à atteindre une valeur constante de la vitesse au-delà de X = 30, caractérisant l'établissement hydrodynamique.

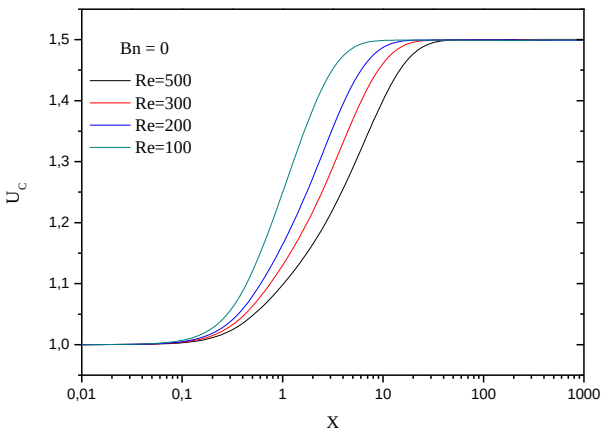


Figure IV.5 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale de la vitesse centrale. Pr = 1 ; Bn = 0.

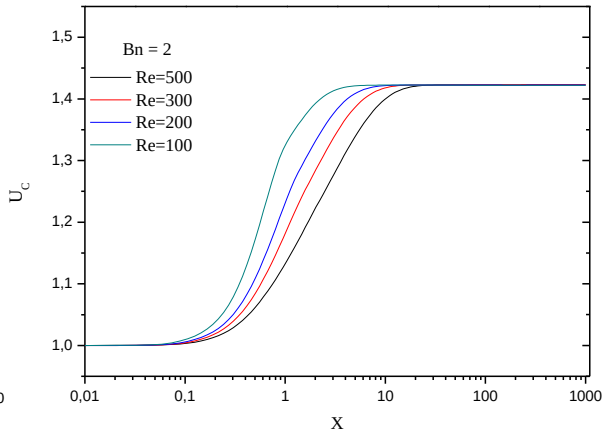


Figure IV.6 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale de la vitesse centrale. Pr = 10 ; Bn = 2.

Notons également que cet effet, localisé principalement à la zone centrale de la conduite, est caractérisé par une diminution de cette vitesse centrale d'une part et l'augmentation de la longueur d'établissement hydrodynamique d'autre part avec l'accroissement du nombre de Reynolds. Par ailleurs, nous remarquons que la valeur de la vitesse centrale du fluide de Bingham (U_c = 1.43) dans la zone d'établissement hydrodynamique est inférieure à celle obtenue pour le fluide newtonien (U_c = 1.50).

L'évolution longitudinale du coefficient de frottement apparent (ou coefficient de frottement de Fanning) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds est illustrée pour les cas des fluides newtonien (Bn = 0) et binghamien (Bn = 2) à travers les **figures IV.7** et **IV.8** respectivement.

Nous constatons que cette influence se restreint à la zone d'entrée, provoquant ainsi une augmentation du coefficient de frottement apparent au fur et à mesure de l'accroissement du nombre de Reynolds. En revanche, qu'au-delà d'une certaine distance de l'entrée du canal, les courbes se confondent et tendent vers une valeur asymptotique unique caractérisant l'établissement du régime hydrodynamique pour le cas des deux fluides.

D'autre part, il est intéressant de noter qu'une comparaison entre ces deux fluides montre que le coefficient de frottement apparent est plus important pour le cas du fluide de Bingham (en comparaison avec le cas newtonien). En effet, dans la zone d'établissement du régime hydrodynamique, ce coefficient passe de 31 à seulement 24.

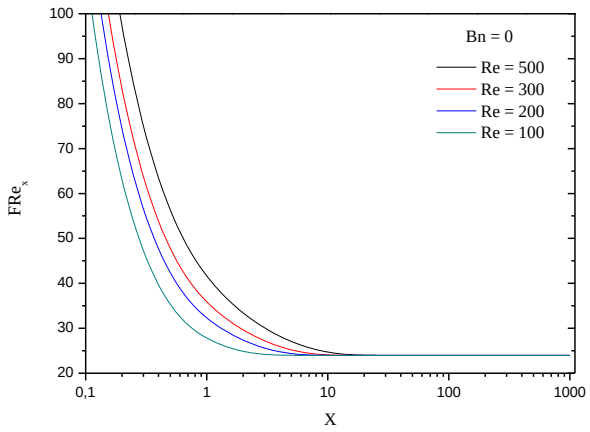


Figure IV.7 : Influence du nombre de Reynolds sur le développement longitudinal du coefficient de frottement de Fanning. Pr = 1 ; Bn = 0.

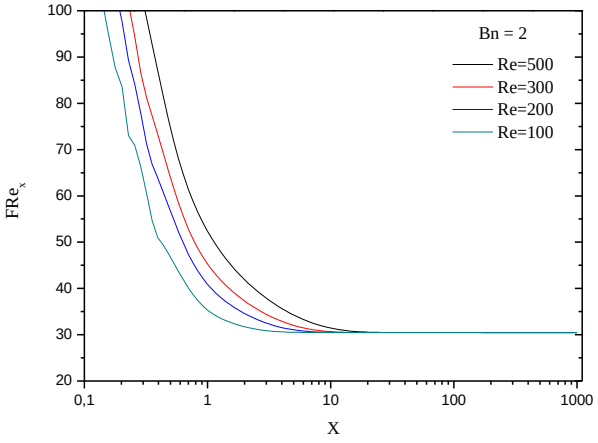


Figure IV.8 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinal du coefficient de frottement de Fanning. Pr = 10 ; Bn = 2.

Les profils de température relevée aux positions X = 0,1 ; 1 et 10 en fonction du nombre de Reynolds sont illustrés à travers la **figure IV.9** pour Bn = 0 ; Pr = 1et Bn = 2 ; Pr = 10.

Nous remarquons que l'augmentation du nombre de Reynolds provoque un accroissement de la température adimensionnelle qui présente une symétrie par rapport au plan XOZ positionné en Z = 0. Cette augmentation n'est pas très ressentie aux positions X = 0,1 et X = 0,5 contrairement aux positions X = 1 et X = 10. Ce comportement observé

pour les deux fluides avec une augmentation plus prononcée des températurespour le fluide newtonien.

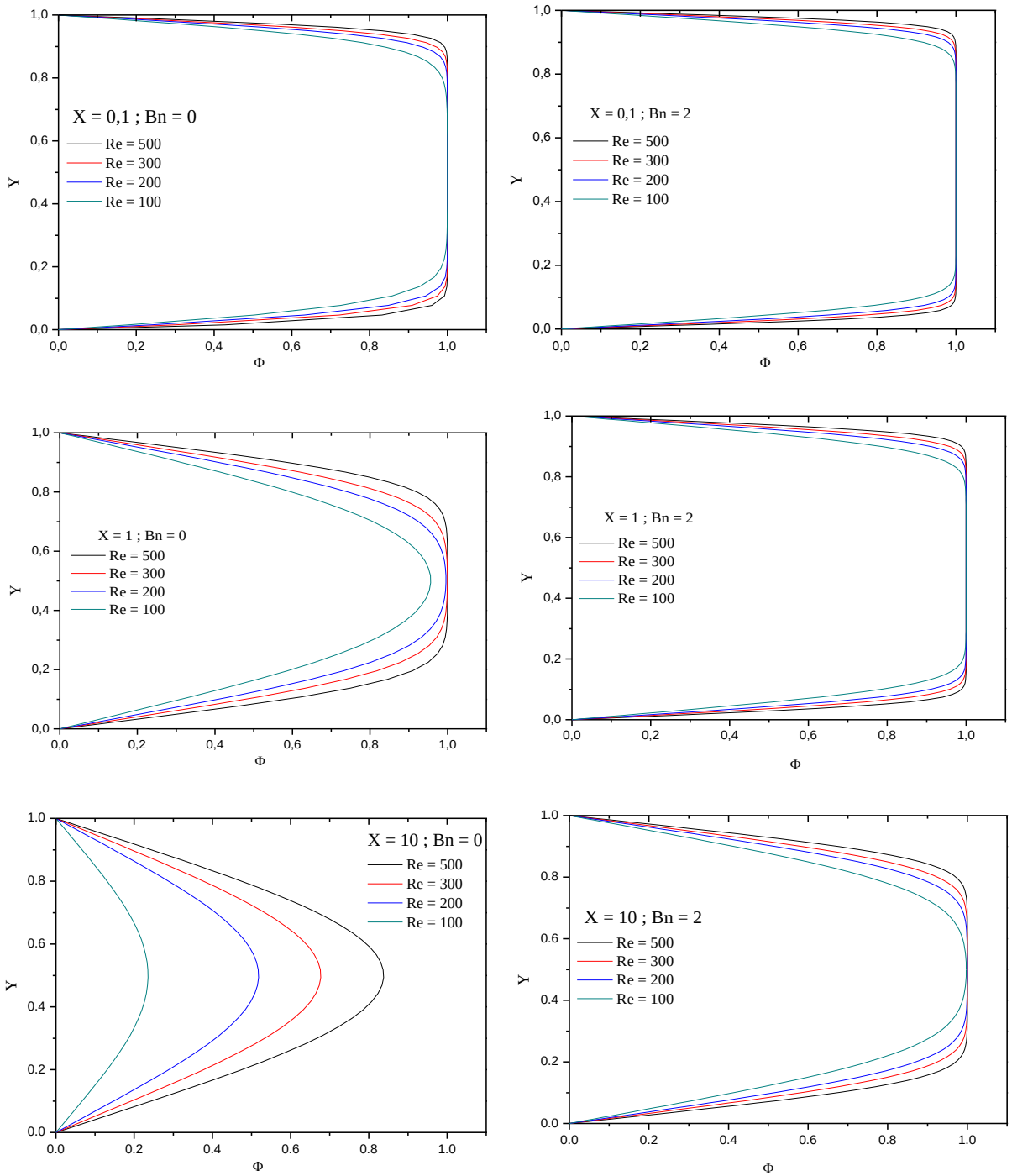


Figure IV.9 : Influence du nombre de Reynolds sur les profils de température réduite pour différentes positons longitudinales.

L'effet du nombre de Reynolds sur la température moyenne du fluide est illustré à travers les **figures VI.10** et **VI.11.**

En effet, l'augmentation du nombre de Reynolds décroît la température moyenne réduite du fluide (ce qui induit a l'augmentation de la température dimensionnelle du fluide)

dans la zone centrale, suite à l'augmentation du débit qui permet un meilleur transfert thermique, faisant diminuer l'écart de température entre le fluide et la paroi.

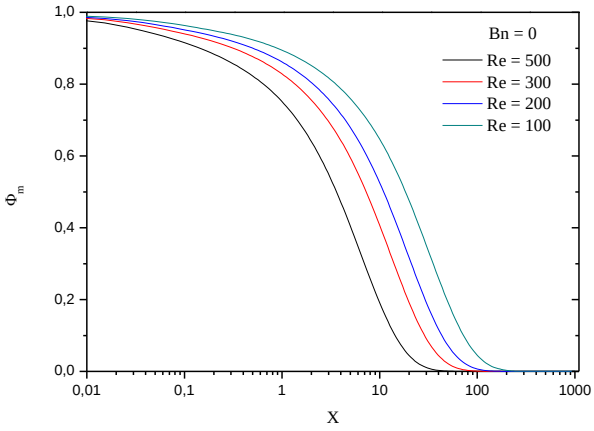


Figure IV.10 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinal de la température réduite. Pr= 1; Bn = 0.

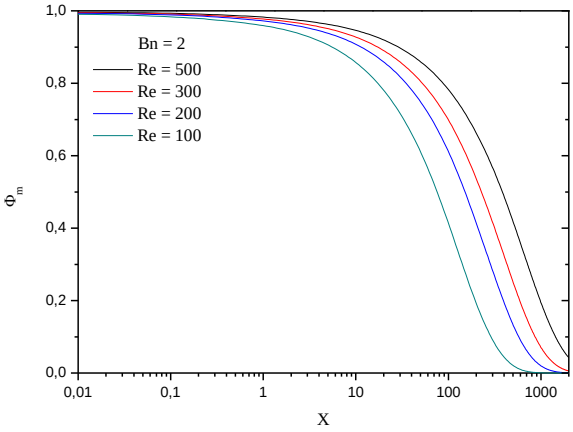


Figure IV.11 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale de la température réduite. Pr= 10 ; Bn = 2.

L'évolution longitudinale du nombre de Nusselt local est représentée sur les **figures IV.12** et **IV.13** et ce, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.

Les courbes présentent la même allure pour les deux fluides newtonien et binghamien : une forte diminution des valeurs du nombre de Nusselt, localisée au niveau de la zone d'entrée pour le cas du fluide newtonien ($X \leqslant 10$ pour $Bn = 0$) et même au-delà pour le fluide de Bingham ($X \leqslant 200$ pour $Bn = 2$). En aval de cette zone, on observe une évolution asymptotique du nombre de Nusselt local, traduisant ainsi l'établissement du régime thermique. Remarquons également que l'accroissement du nombre de Reynolds provoque une intensification des échanges thermiques. En revanche, la valeur du nombre de Nusselt asymptotique reste insensible aux variations du nombre de Reynolds. Une légère élévation de la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est observée pour le cas du fluide de Bingham ($\mathbf{Nu}_\infty = 7.7$) par rapport au fluide newtonien ($\mathbf{Nu}_\infty = 7.5$).

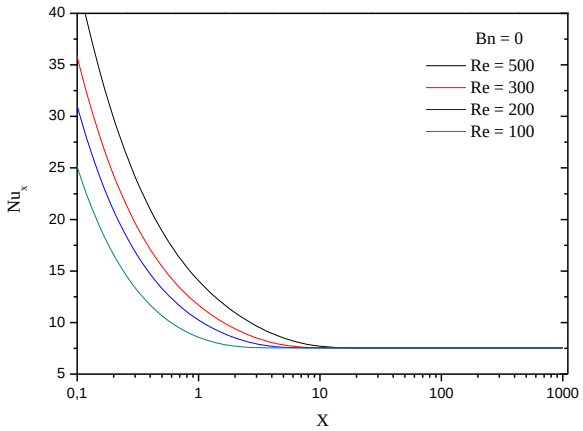


Figure IV.12 : Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt. Pr= 1 ; Bn = 0.

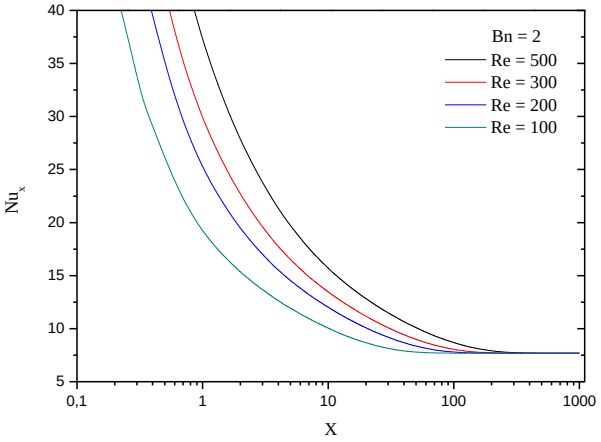


Figure IV.13 : Influence du nombre de Reynold sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt. Pr= 10 ; Bn = 2.

IV.1.2.3 Effet du nombre de Prandtl

La **figure VI.14** représente l'effet du nombre de Prandtl sur le coefficient de frottement apparent pour les deux fluides. Il y apparait clairement que le nombre de Prandtl n'a aucun effet sur le comportement hydrodynamique étant donné que le nombre de Prandtl ne dépend que des propriétés physiques du fluide (et par conséquent de la température). En effet, étant donné que le nombre de Prandtl n'apparaisse que dans l'équation de l'énergie et que les propriétés physiques sont constantes et uniformes et qu'en enfin, le mode de convection est forcée, les équations de transfert sont découplées.

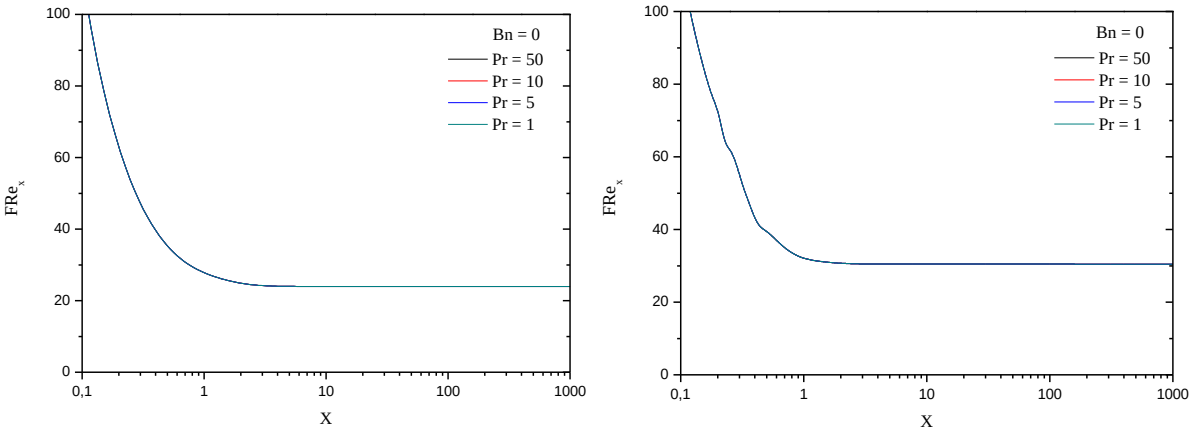
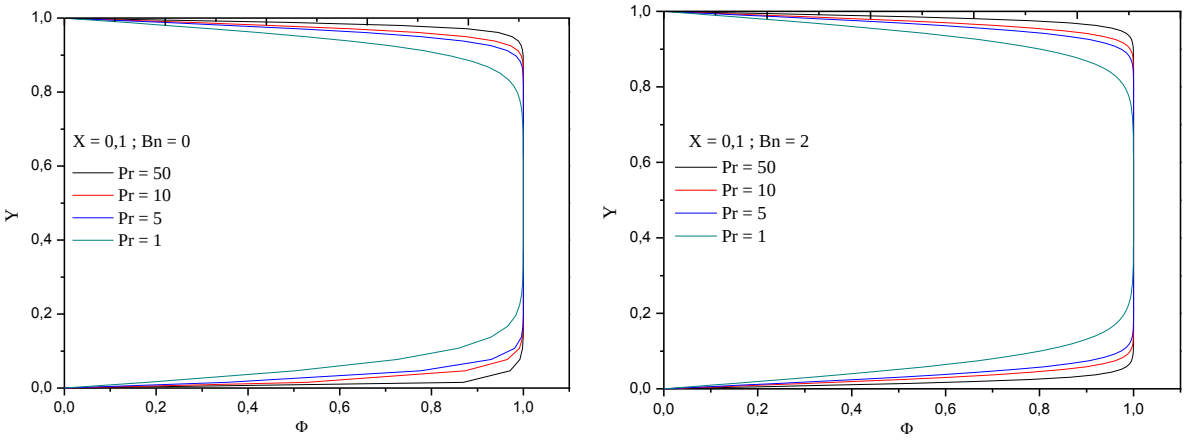


Figure IV.14 : Influence du nombre de Prandtl sur le développement longitudinal du coefficient de frottement de Fanning. Re = 100.

Nous remarquons que contrairement à l'hydrodynamique, le comportement thermique du fluide est influencé par la variation du nombre de Prandtl.

En effet, sur la **figure IV.15**, l'influence du nombre de Prandtl sur l'évolution longitudinale des profils de température, relevés aux positions X = 0,1 et X =10 pour différents nombres de Prandtl, montrent que l'élévation du nombre de Prandtl fait augmenter la température adimensionnelle, principalement près des parois et à l'entrée du canal (X = 0.1). En revanche, en s'éloignant de l'entrée (X = 10), l'influence du nombre de Prandtl se fait ressentir sur toute la section droite du canal, et ce, pour les deux fluides.



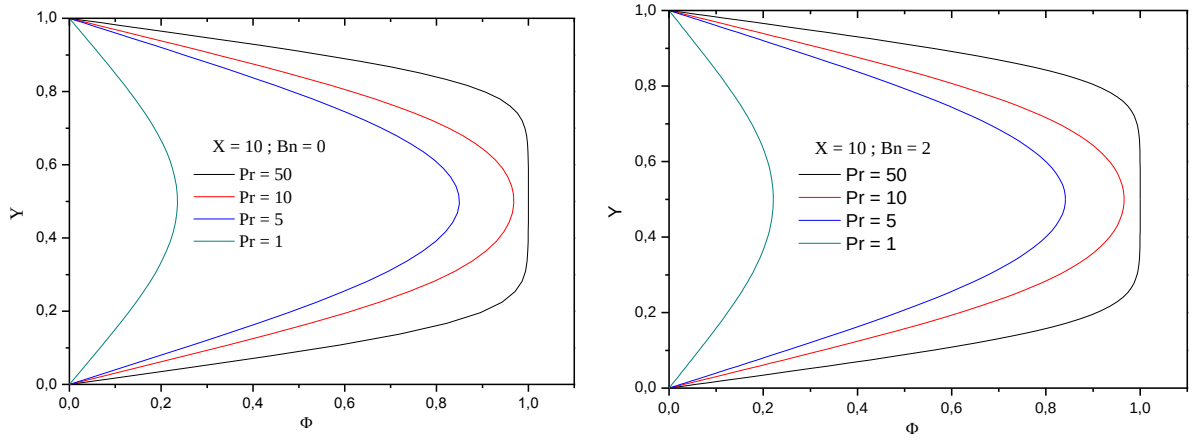


Figure IV.15 : Influence du nombre de Prandtl sur les profils de température Pour deux positions longitudinales. Re= 100.

La **figure IV.16** montre l'évolution longitudinale de la température moyenne réduite du fluide en fonction du nombre de Prandtl pour les fluides newtonien (Bn = 0) et binghamien (Bn = 2). On remarque que l'augmentation du nombre de Prandtl provoque d'une part, l'accroissement de la température moyenne réduite du fluide. D'autre part, les échanges thermiques sont d'autant plus importants ce qui conduit à une réduction de l'écart de température entre le fluide et la paroi et ce pour les deux fluides étudiés.

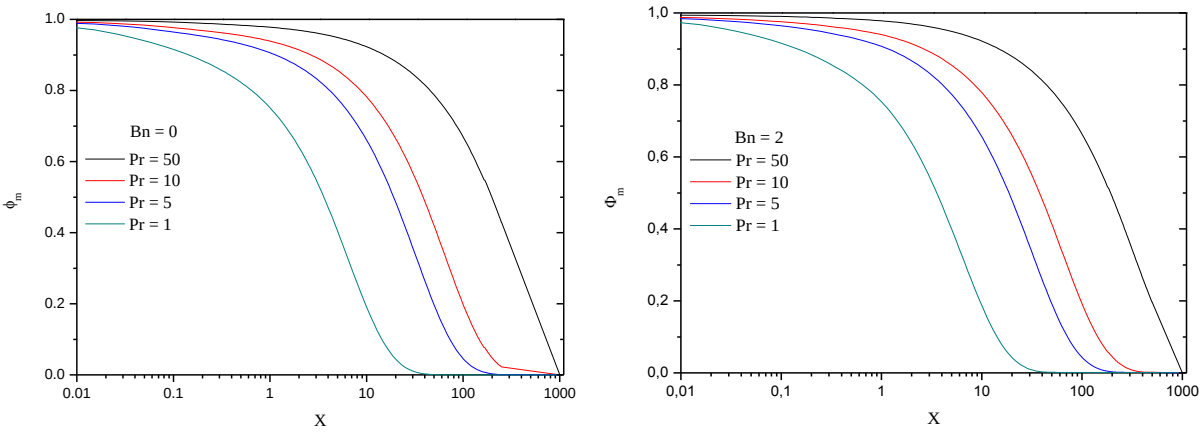


Figure IV.16 : Influence du nombre de Prandtl sur l'évolution longitudinal de la température moyenne adimensionnelle. Re= 100.

L'influence du nombre de Prandtl sur l'évolution longitudinal du nombre de Nusselt se localise principalement au niveau de la zone d'entrée ($X \leqslant 100$) ce qui est illustré sur la **figure VI.17**.

Notons également que l'augmentation du nombre de Prandtl augmente l'épaisseur de la couche limite thermique (ou la longueur d'entrée thermique au-delà de laquelle, le régime thermique devient établi).

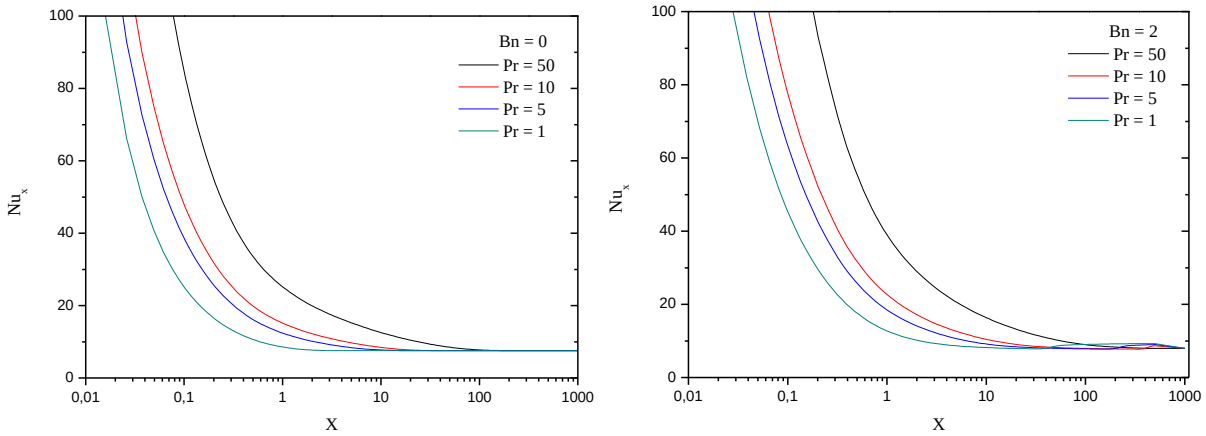


Figure IV.17 : Influence du nombre de Prandtl sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt. Re = 100.

IV.1.2.4 Effet du nombre de Grashof

Dans ce paragraphe, nous allons présenter pour le cas du fluide newtonien, l'effet du nombre de Grashof sur le coefficient de frottement apparent et le nombre de Nusselt. Pour ce qui est du cas du fluide de Bingham, les résultats ont été communiqués et apparaissent dans les actes d'un congrès. Il est à noter cependant, que les deux fluides ont globalement un comportement similaire.

Fluide de Bingham

La partie résumant l'effet du nombre de Grashof sur le comportement hydrodynamique et thermique de l'écoulement du fluide de Bingham a fait l'objet d'une communication internationale dans le cadre du **Congrès Français de Thermique** (***SFT 2011)***, énergie solaire et thermique, qui a eu lieu en mai 2011 à Perpignan en France.

Les résultats obtenus, pour les différents modes de convection, montrent que le transfert thermique est très affecté par les variations du nombre de Richardson. En effet, nous remarquons une déformation des courbes relatives au nombre de Nusselt au niveau de la zone comprise entre l'entrée et la zone relative à l'écoulement établi et ce, lorsque le nombre de Richardson augmente pour les cas de chauffage et de refroidissement. L'analyse des champs thermique et dynamique montre une distorsion des profils de température et de vitesse donnant lieu à une distribution spatiale différente de celle correspondant à l'écoulement en mode de convection forcée. La nature de cette distorsion dépend fortement du nombre de Richardson et donc, de l'importance de la convection naturelle (Ri = 10) par rapport à la convection forcée. Il a été noté également que l'augmentation de l'intensité de la convection naturelle améliore le transfert thermique (**Annexe II**).

Fluide newtonien

La prise en compte des effets de la convection naturelle sur le comportement hydrodynamique et thermique se fait par l'introduction du nombre de Grashof. Ce dernier traduit le rapport entre les forces dues à la poussée d'Archimède et celles dues au frottement visqueux.

Dans ce qui suit, le canal sera supposé être placé horizontalement et les deux faces inférieure et supérieure seront soumises à la même température, supérieure à celle que possède le fluide à l'entrée du canal.

La **figure IV.18** représente l'effet du nombre de Grashof sur le coefficient de frottement apparent sur, les parois inférieure et supérieure du canal respectivement. On y distingue trois zones : une zone d'entrée, une zone d'établissement des régimes (loin en aval de l'entrée) et enfin, une zone centrale ou intermédiaire, au sein de laquelle, on observe une forte distorsion des courbes, en particulier, à partir de $|Gr = 10^5|$. La convection naturelle coexiste alors avec la convection forcée : c'est la convection mixte. En effet, l'augmentation du nombre de Grashof se traduit par l'intensification des courants ascensionnels (chauds) et descensionnels (froids) du fluide suivant la direction transversale. Il s'en suit alors, en vertu de ces courants secondaires, un déplacement de la chaleur au sein du fluide et par conséquent, une augmentation des échanges thermiques en général et du coefficient de frottement en particulier. Dans les zones d'entrée et d'établissement du régime hydrodynamique, l'allure des courbes restent insensible aux variations du nombre de Grashof. La convection forcée gouverne alors le mode de transfert.

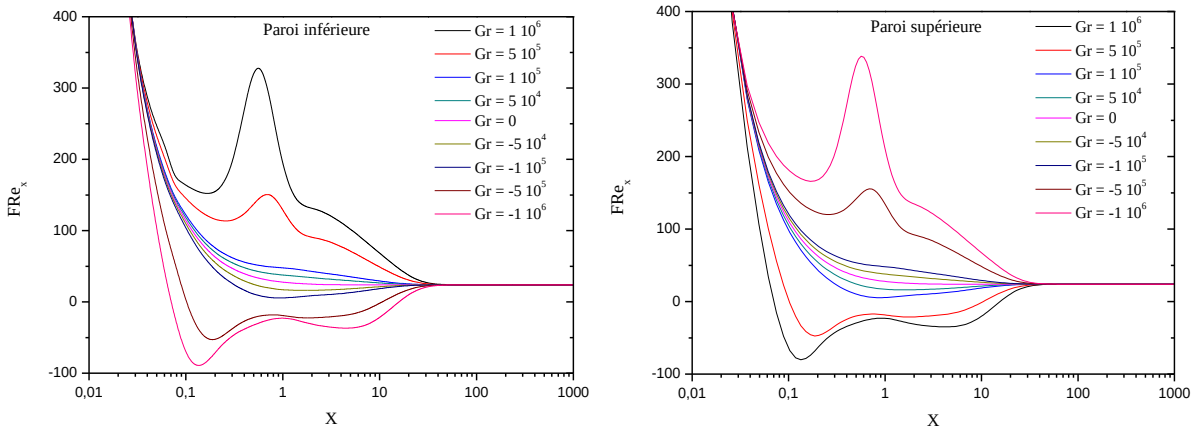


Figure IV.18 : Influence du nombre de Grashof sur l'évolution longitudinale du coefficient de frottement apparent. Pr = 1 : Re = 100 ; Bn = 0.

Remarquons également que l'accroissement des valeurs positives du nombre de Grashof (un nombre de Grashof positif correspond au cas de chauffage) engendre une diminution du coefficient de frottement apparent dans la zone centrale sur ***la paroi supérieure***, contrairement au cas de refroidissement (nombre de Grashof négatif) où l'on assiste à un accroissement considérable de ses valeurs. Le phénomène inverse se reproduit sur la ***paroi inférieure*** du canal.

Les figures ci-dessous représentent l'effet du nombre de Grashof sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt, relevé respectivement sur les parois inférieure et supérieure du canal. Comme précédemment, nous remarquons que seules les courbes de la région centrale sont affectées par les grandes valeurs (absolues) du nombre de Grashof (à partir de $|Gr = 10^5|$), tandis que celles des régions d'entrée et d'établissement du régime thermique y sont insensibles.

En effet, lorsque l'intensité des courants secondaires est telle que l'on soit dans le cas de la convection mixte, les courbes relatives aux parois inférieure et supérieure se distordent et se

placent au-dessus ou en dessous de la courbe correspondant au cas de la convection forcée pure ($Gr/Re^2 \simeq 0$), selon qu'on soit en mode de chauffage ($Gr > 0$) ou de refroidissement ($Gr < 0$) respectivement.

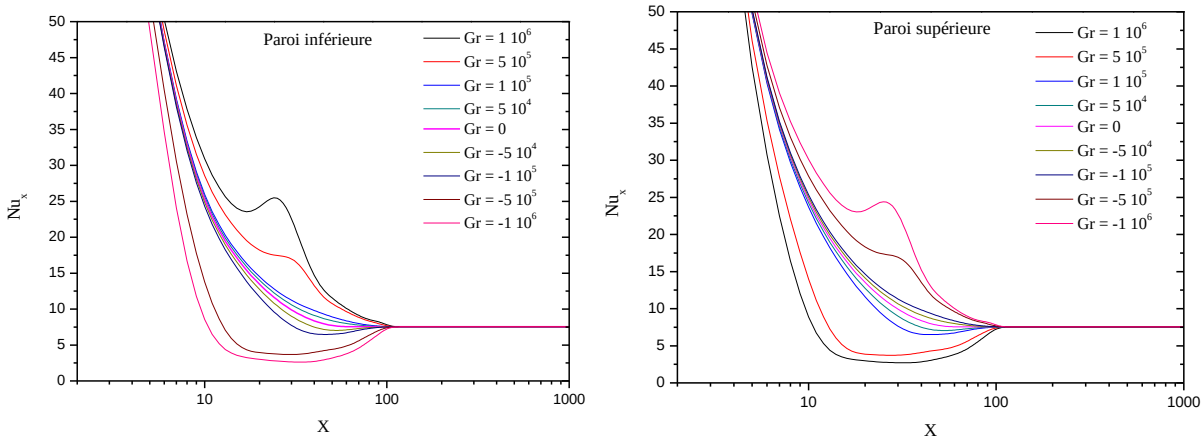


Figure IV.19 : Influence du nombre de Grashof sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0.

IV.1.2.5 Effet de l'inclinaison du canal

Fluide de Bingham

L'effet de l'inclinaison du canal par rapport à l'horizontale, sur la structure de l'écoulement du fluide de Bingham en mode de convection mixte a fait l'objet d'une communication internationale dans le cadre de la **15ème Journées Internationales de Thermique** (**JITH2011**) qui s'est tenue à Tlemcen en Algérie, en septembre 2011 (**Annexe III**).

Les résultats, présentés dans l'article, concernent l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement apparent évalués sur la paroi supérieure. Ces résultats montrent que l'inclinaison des deux plans révèle l'existence d'angles optimaux dans la zone intermédiaire du canal qui offrent les meilleures performances en termes d'échange thermique. Ces angles correspondent à 90° et 0° pour le cas de chauffage et de refroidissement, respectivement. De même, les plus grandes valeurs du coefficient de frottement apparent sont obtenues pour des angles égaux à 90° et 0° pour le cas de chauffage et refroidissement, respectivement.

Fluide newtonien

Dans ce paragraphe, nous présentons l'effet de d'inclinaison par rapport à l'horizontale, des deux plans parallèles sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement, en mode de convection mixte : $Gr = 10^5$ et $Gr = 2\ 10^4$.

De prime abord, nous remarquons que l'effet de l'inclinaison du canal est beaucoup plus ressentie pour un nombre de Grashof élevé $Gr = 10^5$ en comparaison avec le cas $Gr = 2\ 10^4$, étant donné l'intensité grandissante des courants secondaires, au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de Grashof.

La **figure IV.20** illustre l'effet de l'inclinaison du canal sur les profils de vitesse en différentes positions longitudinales (X = 1 ; 10 et 20), pour Gr = 2 10^4 et Gr = 10^5 respectivement.

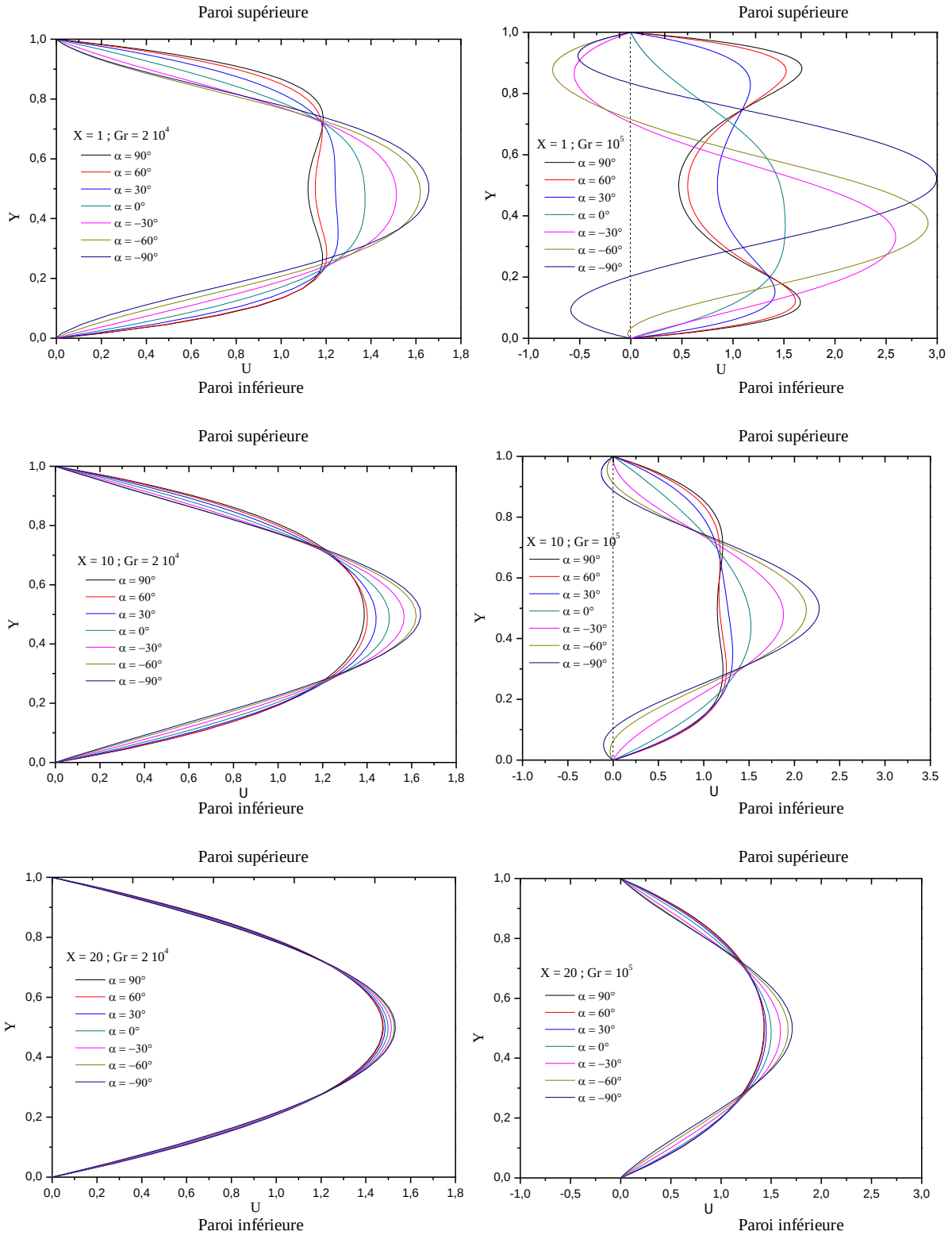


Figure IV.20 : Influence de l'inclinaison du canal sur les profils de vitesse longitudinale en différentes positions. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0.

Lorsque les effets de convection naturelle sont négligeables ($Gr = 2\ 10^4$), une quasi-symétrie des profils de vitesse est observée pour les trois positions longitudinales étudiées. En revanche, lorsque ces effets sont notablement importants (ce qui correspond à la plus grande valeur du nombre de Grashof : $Gr = 10^5$), une grande perturbation de l'écoulement est observée, *en particulier non loin de l'entrée de la conduite* $X = 1$. On relève même, pour les inclinaisons négatives par rapport à l'horizontale (α = -90°, -60 et -30°), des valeurs négatives de la vitesse au voisinage des deux parois, et de la paroi supérieure en particulier, ce qui explique les valeurs négatives du coefficient de frottement apparent (cas $Gr = 10^5$ de la **Figure IV.21**).

Concrètement, un angle négatif correspond à un écoulement descendant (suivant la direction longitudinale), mais, à cause de la faible densité du fluide au voisinage des parois chaudes (en comparaison avec celle de l'écoulement principal, correspondant presque à la température d'entrée du fluide), le fluide s'élève dans un mouvement ascendant, contraire à celui de l'écoulement principal. Notons en outre que c'est au voisinage de la paroi supérieure que ces courants (ascendants) sont les plus importants (pour le cas $X = 1$). En effet, au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans le canal (à partir de l'entrée), le fluide chaud, plus léger, s'élève et se concentre dans la partie supérieure du canal, et s'élève le long de la paroi supérieure chaude dans un mouvement ascensionnel, contraire à celui de l'écoulement principal, occupant la région centrale du canal.

Notons enfin qu'au voisinage du centre du canal ($Y = 0,5$), la vitesse est maximale pour α = -90° (écoulement descendant, conduite verticale) et est minimale pour α = 90° (écoulement ascendant, conduite verticale). En effet, pour le cas α = 90°, les couches de fluide pariétales s'élèvent d'autant que le nombre de Grashof augmente, dans le même sens que celui de l'écoulement forcé principal. Ce soulèvement pariétal de fluide résulte des forces de poussée d'Archimède qui, poussent vers le haut le fluide chaud. Cet effet s'estompe et disparait complètement au fur à mesure que l'on s'enfonce dans le canal : $X = 10$ et $X = 20$ respectivement.

La figure suivante illustrent l'effet de l'inclinaison des deux plans parallèles sur le coefficient de frottement apparent sur la paroi supérieure pour $Gr = 2\ 10^4$ et $Gr = 10^5$ respectivement.

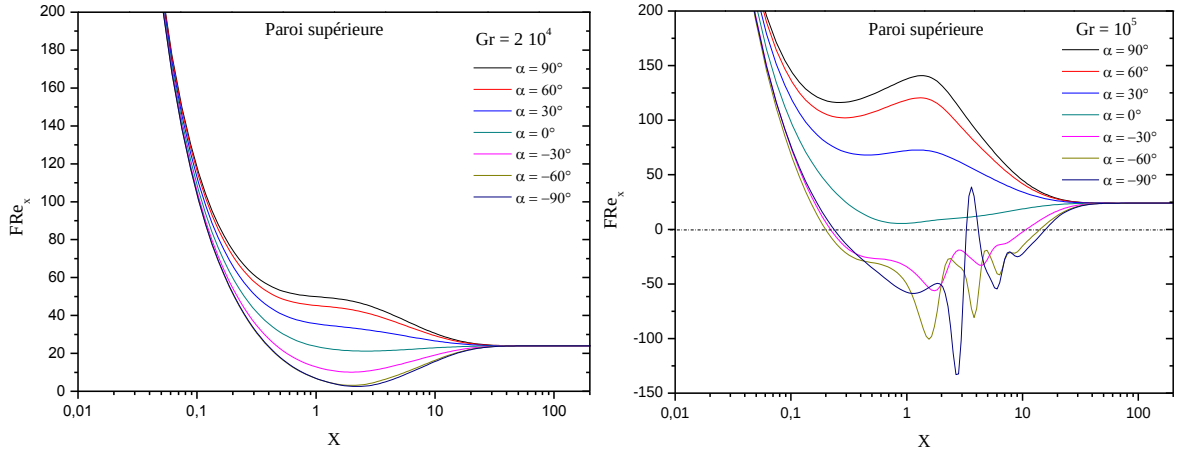


Figure IV.21 : Influence de l'inclinaison du canal sur l'évolution longitudinale du coefficient de frottement à la paroi supérieure. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0.

Nous constatons que pour le cas des angles positifs, un maximum est atteint lorsque le canal est placé de manière verticale c'est-à-dire pour une inclinaison par rapport à l'horizontale égale à 90° (écoulement ascendant), tandis qu'un minimum est observé pour α = -90° (écoulement descendant) pour les deux nombres de Grashof considérés.

Pour le cas de $Gr = 10^5$, les courbes correspondant aux inclinaisons α = -30 ; -60°; et α= -90 (en particulier), oscillent fortement et présentent même des valeurs négatives du coefficient de frottement apparent.

L'effet de l'inclinaison du canal sur le coefficient de frottement apparent, correspondant à la paroi inférieure et pour les cas : $Gr = 2\ 10^4$ et $Gr = 10^5$, est représenté sur la **figure IV.22**.

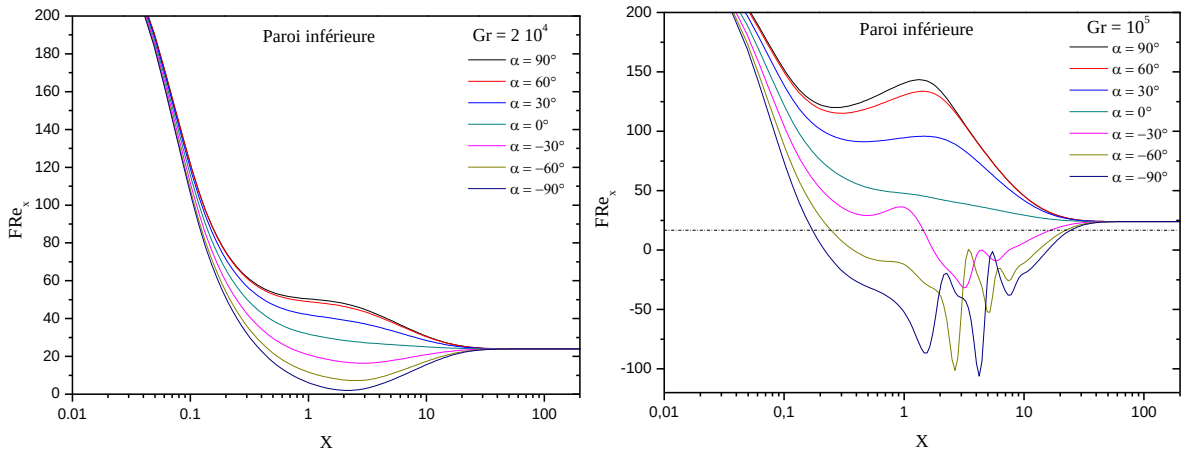


Figure IV.22 : Influence de l'inclinaison du canal sur l'évolution longitudinale du coefficient de frottement à la paroi inférieure. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0.

Nous obtenons un comportement similaire à celui observé pour la paroi supérieure (**figure IV.21**), avec des fluctuations beaucoup moins importantes lorsque $Gr = 10^5$ qui se répercutent tout de même sur les courbes, par des valeurs négatives du coefficient de Fanning, pour les angles négatifs (-30°, -60° et -90°).

L'effet de l'angle de l'inclinaison des deux plans sur les profils de température adimensionnelle est illustré à travers la **figureIV.23** en différentes positions longitudinales et ce, pour $Gr = 2\ 10^4$ et $Gr = 10^5$ respectivement. Quelque soit la section droite du canal, lorsque les effets de convection naturelle sont négligeables : en d'autres termes, pour $Gr = 2\ 10^4$ (figures à gauche), l'effet de l'inclinaison du canal est présent, mais n'est pas très important et les courbes gardent leur symétrie, caractéristique des écoulements en mode de convection forcée pure.

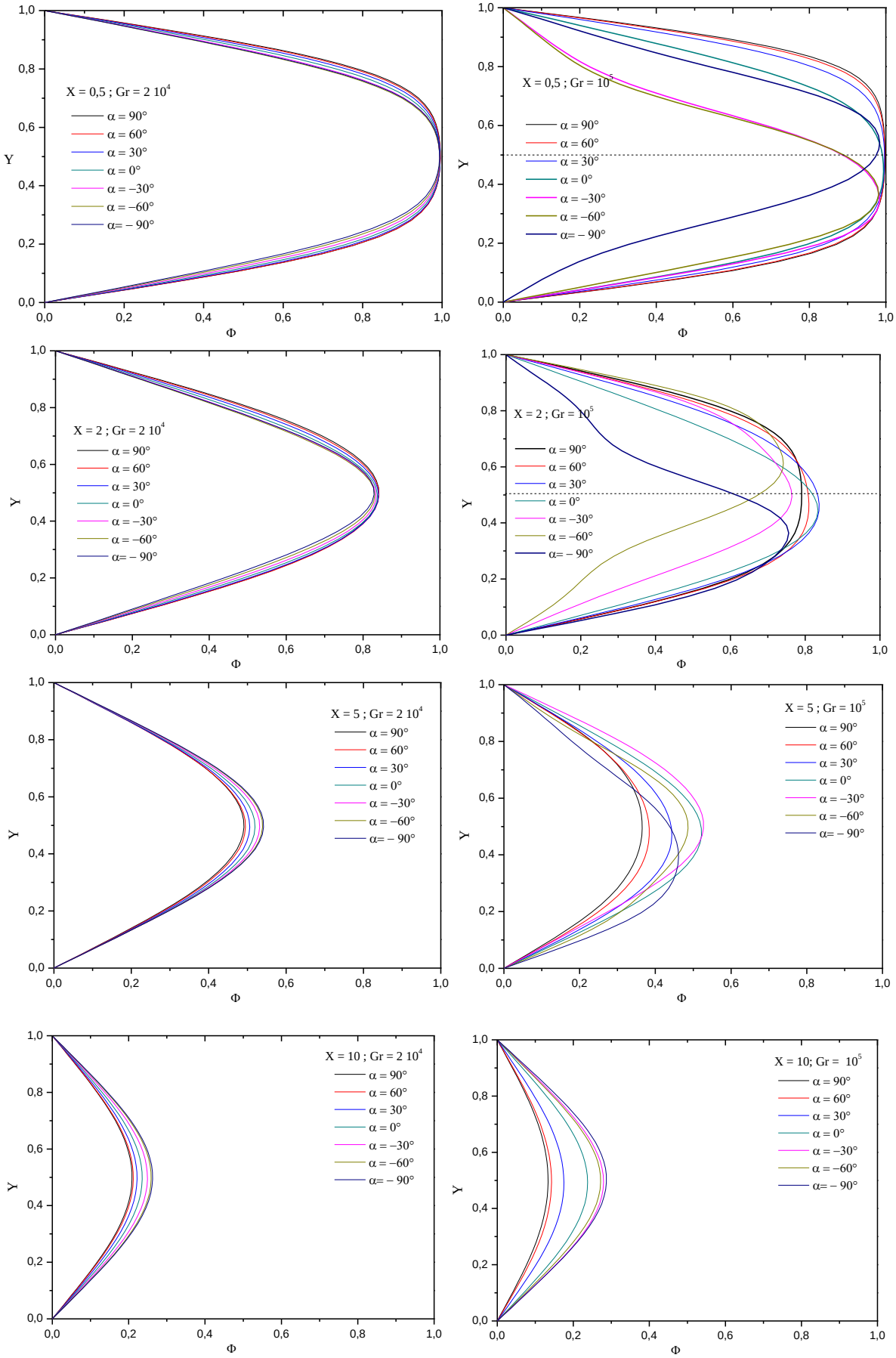


Figure IV.23 : Influence de l'inclinaison du canal sur les profils de température réduite. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0.

Par ailleurs l'on remarque, qu'au fur et à mesure que l'on pénètre dans le canal, le fluide se réchauffe, et le noyau central, toujours à sa température d'entrée $\Phi = 1$ en $X = 0,5$, atteint approximativement $\Phi = 0,3$ en $X = 10$.

Dans le cas où les effets de la convection naturelle sont prédominants $Gr = 10^5$ (figures à droite), comme précédemment, ce sont les couches fluides pariétales qui commencent par se réchauffer par l'intermédiaire de la paroi (alors qu'en $X = 0,5$, le noyau central reste toujours à sa température d'entrée) puis, la chaleur se propage jusqu'à atteindre celle de la paroi et réchauffer les couches les plus éloignées (celles se trouvant sur l'axe du canal : $Y = 0,5$). En outre, la symétrie de révolution, caractéristiques des écoulements de convection forcée, disparait dès l'entrée $X = 0,5$ pour le cas des écoulements descendants ($\alpha = -30°$, $\alpha = -60°$ et $\alpha = -90°$) puis, pour toutes les inclinaisons à l'exception de $\alpha = 90°$. L'écoulement ne reconstitue sa symétrie de révolution qu'en $X = 10$, où l'écart de température entre la paroi et les couches fluides pariétales diminue fortement.

La température moyenne adimensionnelle du fluide en fonction de l'angle d'inclinaison est représentée sur la **figureIV.24** pour $Gr = 2\ 10^4$et $Gr = 10^5$ respectivement**,** avec un minimum obtenu pour l'angle$\alpha = 90°$ est un maximum obtenu pour $\alpha = -90°$.

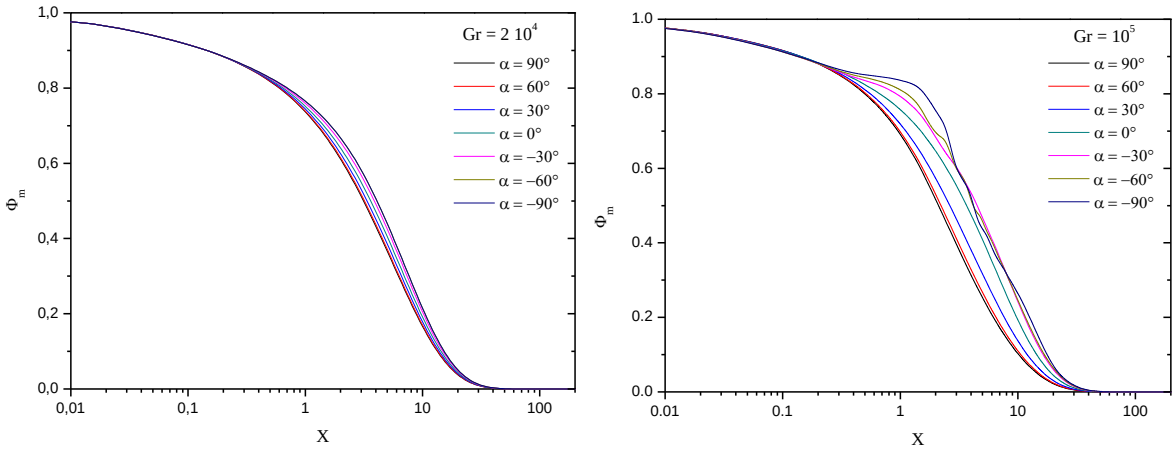


Figure IV.24 : Influence de l'angle d'inclinaison sur l'évolution longitudinale de la température moyenne réduite. Pr= 1 ; Re = 100 ; $Gr = 10^5$; Br = 0.

Sur les **figures IV.25 et IV.26**, nous présentons l'effet de l'inclinaison des deux plans par rapport à l'horizontale sur le nombre de Nusselt local. Ce dernier correspond à la paroi supérieure (**figure IV.25**) et inférieure (**figure IV.26**), et est évalué pour $Gr = 2\ 10^4$ et $Gr = 10^5$ respectivement.

Dans un premier temps et quelque soit la paroi (supérieure ou inférieure), les perturbations, voire même les oscillations pour les angles : $\alpha = -90°$, -60 et -30°, du nombre de Nusselt se localisent, comme précédemment, dans la zone intermédiaire du canal. Elles sont très importantes dans le cas de la convection mixte : $Gr = 10^5$, notamment pour les angles négatifs, correspondant à l'écoulement descendant. Notons enfin que les fluctuations et l'augmentation des valeurs du nombre de Nusselt dans la région intermédiaire sont relativement plus importantes au niveau de la paroi supérieure.

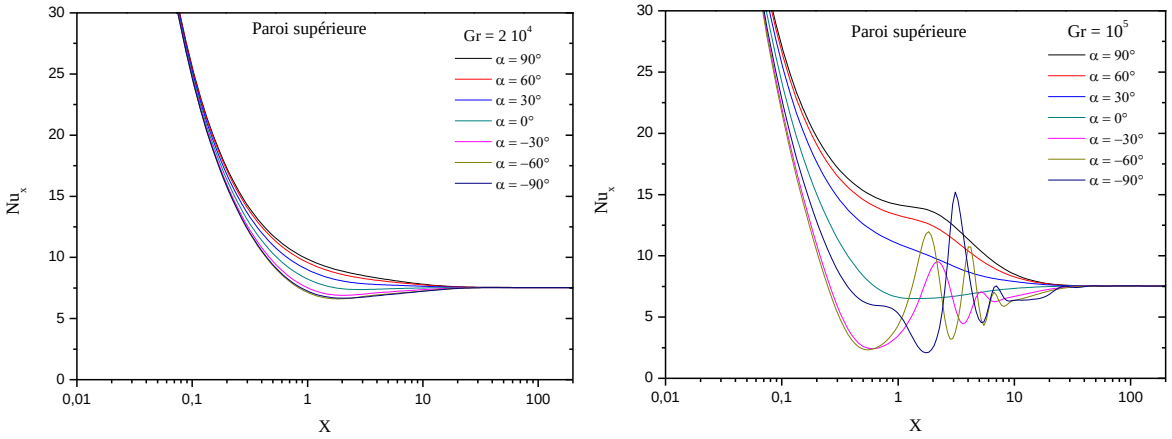


Figure IV.25 : Influence de l'inclinaison du canal sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt à la paroi supérieure. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0.

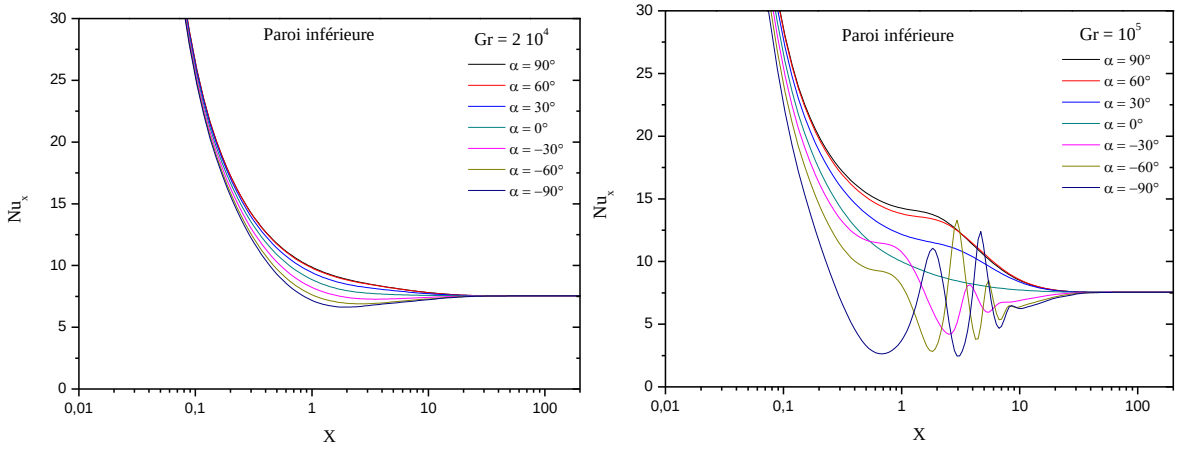


Figure IV.26 : Influence de l'inclinaison du canal sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt à la paroi inférieure. Pr = 1 ; Re = 100 ; Bn = 0.

IV.1.2.6 Effet de la dissipation visqueuse

Dans cette dernière partie, nous allons tenir compte de la fonction de dissipation en rajoutant dans l'équation de l'énergie, le terme correspondant (à travers le nombre de Brinkman). Dans la mesure où, dans l'ordre de résolution des équations on commence par celles de la dynamique suivies par celle de l'énergie, et comme de plus, toutes les propriétés physiques du fluides ne dépendent pas de la température (pas de convection naturelle ni de variabilité de la viscosité en fonction de la température), le champ de vitesse (et par voie de conséquence le coefficient de Fanning) ne s'en trouve pas affecté :les équations de transfert sont découplées. Ainsi, dans ce qui suit, nous ne présenterons que l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt et de la température moyenne réduite. De même, comme pour le cas du fluide newtonien étudié le nombre de Prandtl choisi (Pr = 10) est voisin de celui de l'eau (Pr = 7), nous n'étudierons pas l'influence de cette fonction sur le comportement du fluide newtonien.

La **figure IV.27** montre l'évolution longitudinale de la température moyenne réduite, lorsque la dissipation visqueuse est prise en compte et ce, pour différentes valeurs du nombre de Brinkman. Les courbes obtenues présentent la même tendance.

A l'entrée du canal, l'influence de la prise en compte de la dissipation visqueuse n'est pas ressentie et la température moyenne adimensionnelle ne dépasse pas l'unité. En revanche, en s'éloignant de l'entrée, on assiste à une production interne de chaleur à cause du frottement visqueux et pariétal. En conséquence, la température du fluide augmente et dépasse même l'unité pour $Br \geqslant 2$. Pour les valeurs négatives du nombre de Brinkman, la température moyenne dimensionnelle augmente (alors que la température adimensionnelle diminue) au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans le canal jusqu'à atteindre la température de la paroi.

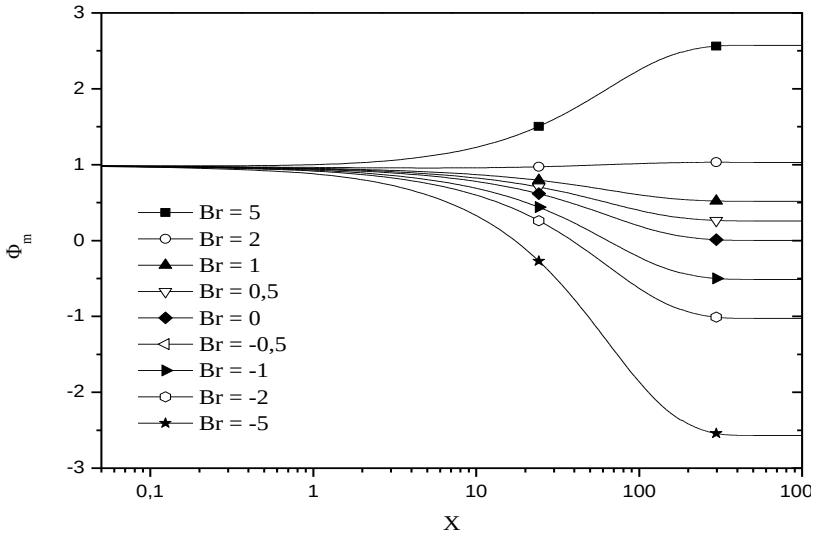


Figure IV.27 : Evolution longitudinale de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre Brinkman. Re = 100 ; Bn = 10 ; Pr = 10.

La **figure IV.28** représente l'effet de la dissipation visqueuse sur le développement longitudinal du Nusselt et ce, pour différents nombres de Brinkman. On y voit que le nombre de Nusselt augmente lorsque le nombre de Brinkman augmente (en valeur absolue). Nous remarquons également que quelque soit la valeur du nombre de Brinkman, loin en aval de l'entrée du canal $X > 200$, toutes les courbes de Nusselt tendent vers une même valeur asymptotique, différente de celle correspondant au cas $Br = 0$.

Il est intéressant de noter que des valeurs négatives du nombre de Nusselt, sont obtenues pour les nombre de Brinkman négatives. Elles traduisent une inversion dans le sens de transfert thermique étant donné que le fluide a désormais une température supérieure à celle de la paroi (refroidissement du fluide). Il est à noter aussi dans ce cas que lorsque la température du fluide devient égale à celle de la paroi, une discontinuité dans les courbes du nombre de Nusselt est observée.

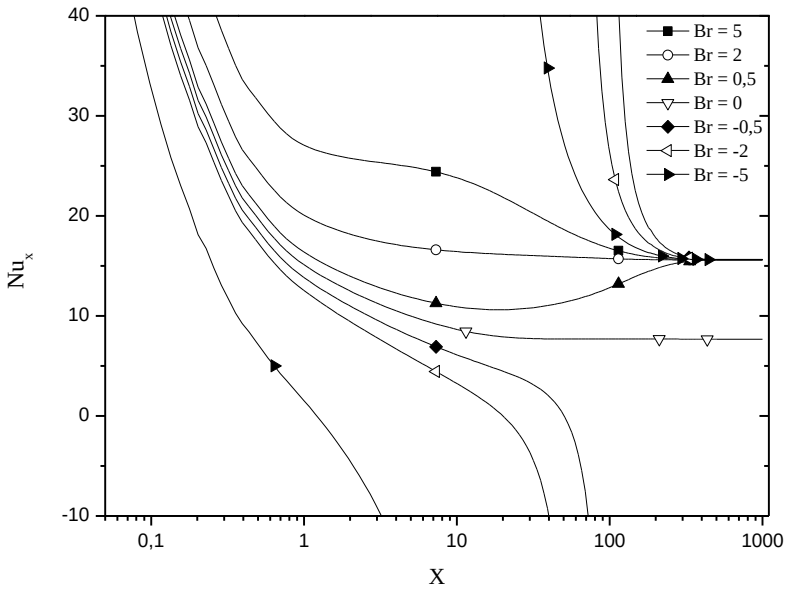


Figure IV.28 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Brinkman. Re = 100 ; Bn = 10 ; Pr = 10.

L'introduction de la fonction de dissipation visqueuse dans le cas de l'écoulement, avec transfert thermique en mode de convection forcée, entre deux plans parallèles horizontaux maintenus a température constante montre que le transfert thermique est très affecté par les variations du nombre de Brinkman. L'analyse des champs thermique à travers le développement longitudinal des profils de température a dévoilé que la température adimensionnelle augmente d'autant plus que le nombre de Brinkman augmente. Plus de détails est donné dans l'article qui a fait l'objet d'une communication internationale dans le cadre du **6th International Conference on Thermal Engineering**: Theory and Applications qui a eu lieu fin mai 2012 à Istanbul en Turquie (**Annexe VI**).

IV.2 Deuxième géométrie : conduite de section droite rectangulaire

Dans cette seconde partie des résultats, l'écoulement dans une seconde géométrie a été entrepris. Il s'agit de l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite rectiligne et horizontale, de section droite rectangulaire. Les quatre parois (deux verticales et deux horizontales) seront supposées portées à une température constante et uniforme. x désignera la direction longitudinale tandis que les deux directions transversales seront notées y et z respectivement. Le cas particulier de la conduite rectiligne de section droite carrée sera également étudié. Pour cela, un facteur de forme, que l'on notera γ, est introduit pour rendre compte des différentes sections droites (rectangulaires et carrée). Il représente le rapport entre la largeur b (suivant la direction transversale Oz) et la hauteur a (suivant la seconde direction transversale Oy). Quand $\gamma = 1$, il s'agira d'une conduite à section droite carrée. Quand $\gamma < 1$, les surfaces verticales sont plus grandes que les surfaces horizontales et inversement lorsque $\gamma > 1$. Enfin, il est à signaler que l'origine O du repère est placée en $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.

IV.2.1 Validation du code de calcul

Dans la première géométrienotre code de calcula été validé dans cas de l'écoulement bidimensionnel plan dans un canal de largeur infinie. Dans ce qui suit, il s'agira dans un premier temps, comme pour la première géométrie, de valider notre second code de calcul pour un écoulement tridirectionnel et tridimensionnel. En fait, pour l'étude de l'écoulement dans une conduite de section droite rectangulaire, une modification du précédent code de calcul est impérative afin de l'adapter à cette nouvelle géométrie.

En premier lieu, une comparaison de nos résultats avec ceux de **Han-Chieh Chiu et al [30]** est entreprise. Leur étude concerne l'écoulement d'un fluide newtonien dans une conduite à section droite carrée ($\gamma = 1$) en mode de convection forcée et mixte. Ils y présentent l'évolution longitudinale (suivant la direction Ox, à travers le nombre de Graetz) du nombre de Nusselt local et du coefficient de frottement apparent local, moyennés sur chaque section droite de la conduite (la moyenne des ces coefficients suivant les deux directions transversales : Oy et Oz).

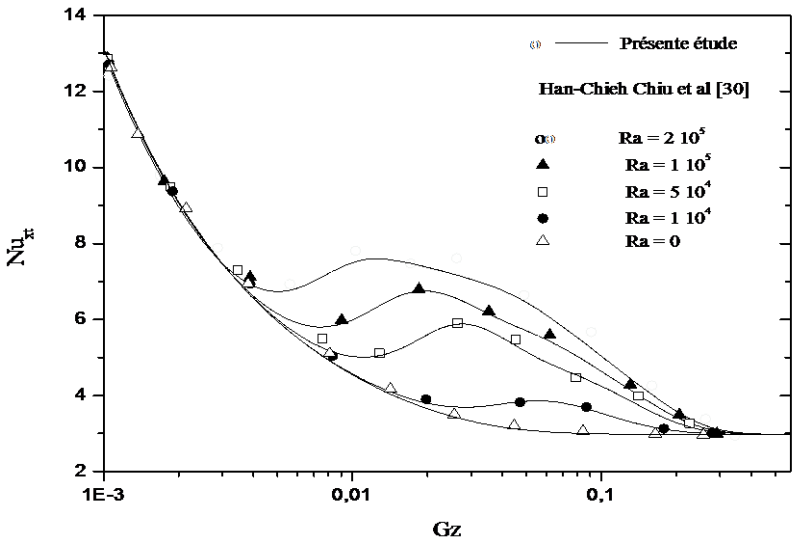


Figure IV.29 : Evolution longitudinal du nombre de Nusselt total pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.$\gamma = 1$; Bn = 0.

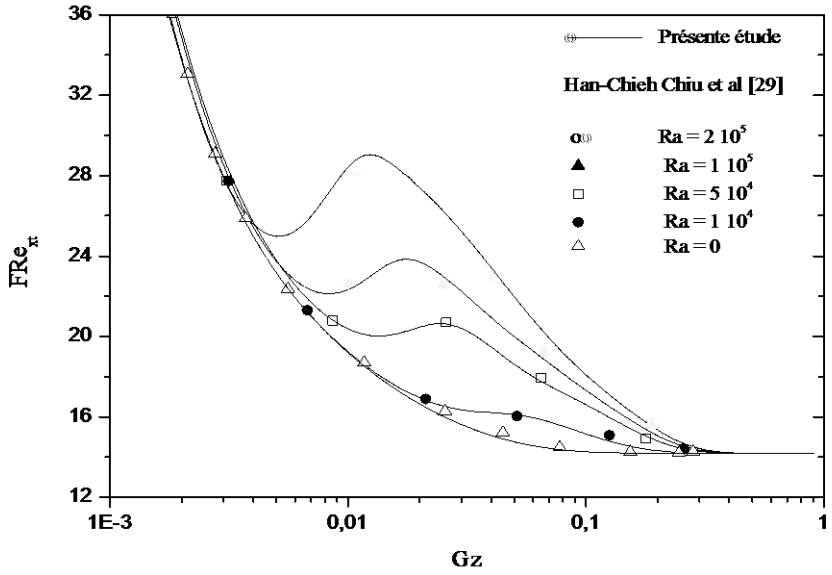


Figure IV.30 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement total pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.$\gamma = 1$; Bn = 0.

Cette première comparaison a été suivie d'une autre, qui a concerné les travaux de **M.E. Sayed-Ahmed [36]**, pour le cas d'un fluide de Bingham s'écoulant dans une conduite de section droite carrée ($\gamma = 1$) puis rectangulaire ($\gamma = 0{,}5$). Il y apparait que dans tous les cas entrepris, l'écart relatif ne dépasse pas 2%, ce qui valide les résultats issus de notre code de calcul pour la suite de l'étude.

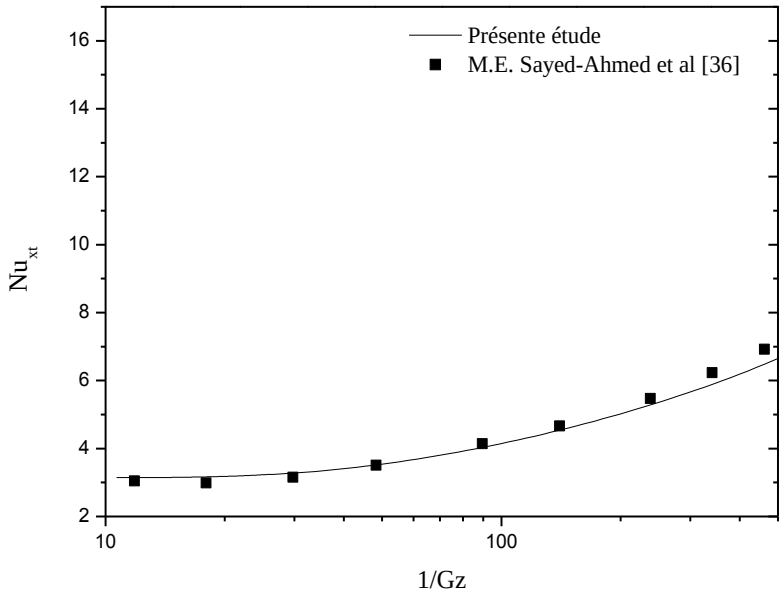


Figure IV.31 : Comparaison entre les évolutions du nombre de Nusselt en fonction de (1/Gz) obtenues par la présente étude et celle de [36]. $\gamma = 0{,}5$; Bn = 1.

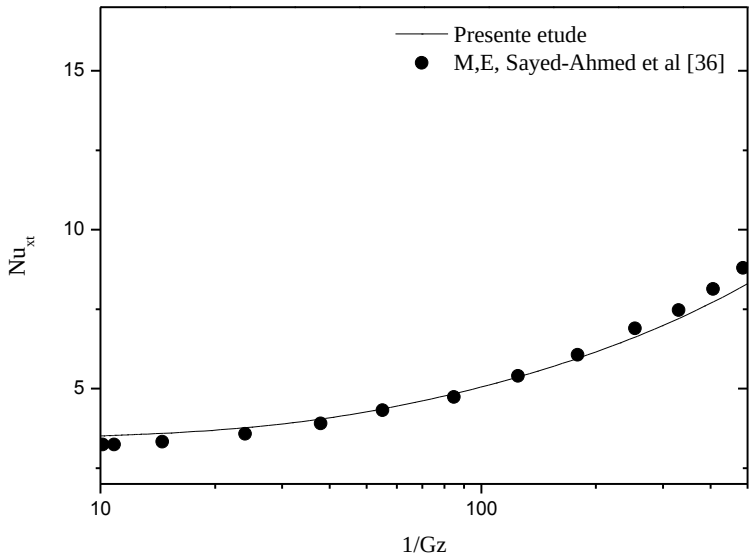


Figure IV.32 : Comparaison entre les évolutions du nombre de Nusselt en fonction de (1/Gz) obtenues par la présente étude et celle de [36]. γ = 1 ; Bn = 1.

IV.2.2 Etude hydrodynamique et thermique

Préalablement, nous avons débuté cette seconde partie par l'étude de l'effet du rapport de forme de la conduite sur l'évolution longitudinale du coefficient de frottement apparent et sur le nombre de Nusselt local. Par la suite, nous avons réalisé une étude paramétrique pour le cas d'écoulement au sein d'une conduite carrée (γ = 1), d'un fluide newtonien, et ce, en mode de convection mixte, avec prise en compte de la fonction de dissipation. Enfin, le cas du fluide de Bingham est introduit en dernière partie des résultats.

IV.2.2.1 Effet du rapport de forme

La **Figure IV.33** illustre l'effet du rapport de forme de la conduite sur le coefficient de frottement apparent total.Ce coefficient a été moyenné sur les deux surfaces horizontales ainsi que sur les deux surfaces verticales. Il y apparait que c'est la conduite de section droite rectangulaire qui offre les meilleures performances thermiques en comparaison avec la conduite de section droite carrée.

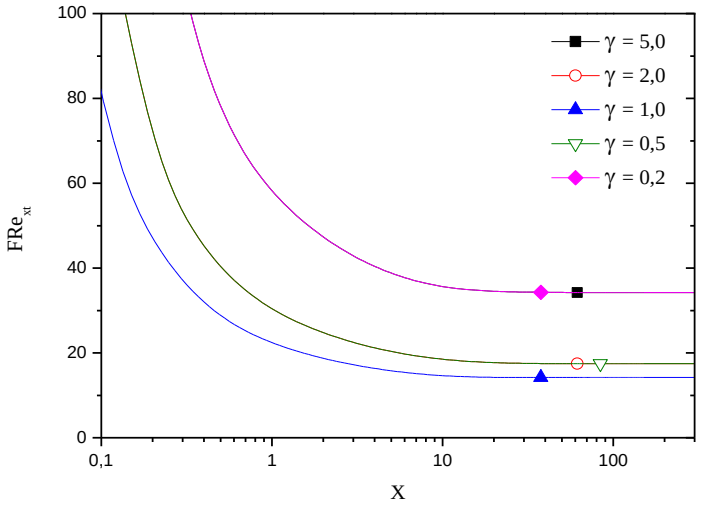


Figure IV.33 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement apparent moyen pour différents rapports de forme. Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

En effet, nous remarquons, que pour un rapport de forme supérieur ou égal à un ($\gamma \geqslant 1$), l'augmentation du rapport de forme entraine l'augmentationdu coefficient de frottement apparent. Il est à noter que quelque soit la disposition de la conduite de section droite rectangulaire : sur sa grande base (S = L b) ou sa petite base (S = L a), les résultats sont similaires (les cas $\gamma = 5$ avec $\gamma = 0{,}2$ et $\gamma = 2$ avec $\gamma = 0{,}5$).

Sur la **Figure IV.34** nous représentons l'effet du rapport de forme de la conduite sur le nombre de Nusselt total. Ce dernier correspond à la moyenne du nombre de Nusselt sur chaque plan transversal y0z. En d'autres termes, pour chaque position longitudinale, le nombre de Nusselt est moyenné sur les quatre surfaces.Comme précédemment, les allures des courbes correspondant à $\gamma = 5$ et $\gamma = 2$ se confondent avec celles relatives à $\gamma = 0{,}2$ et $\gamma = 0{,}5$. De même, une augmentation de ce rapport de forme ($\gamma \geqslant 1$) entraine l'augmentation du nombre de Nusselt.

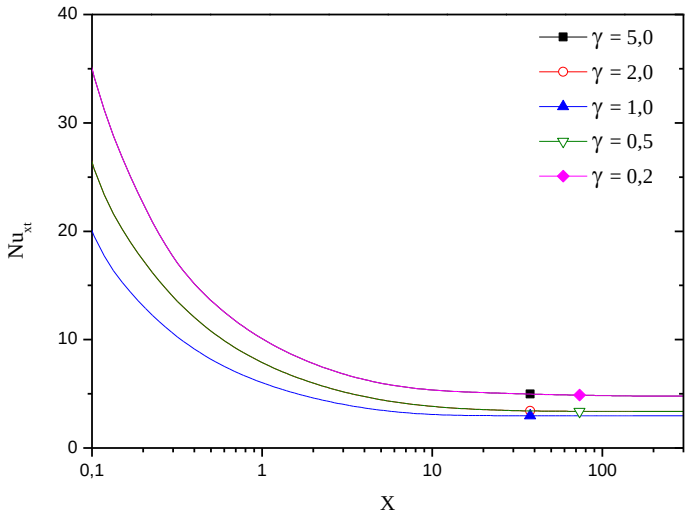


Figure IV.34 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt moyen pour différents rapports de forme. Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

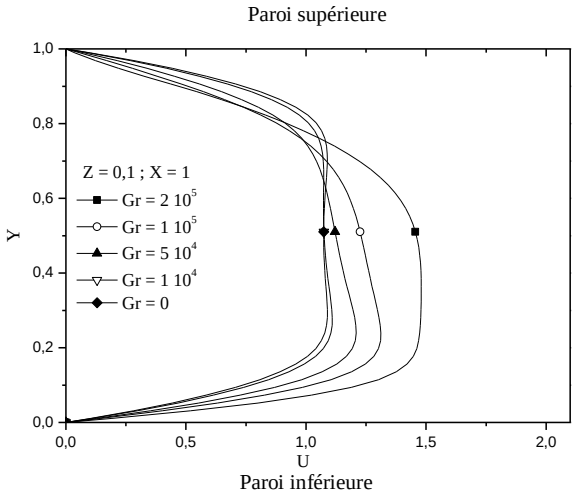
IV.2.2.2 Effet du nombre de Grashof

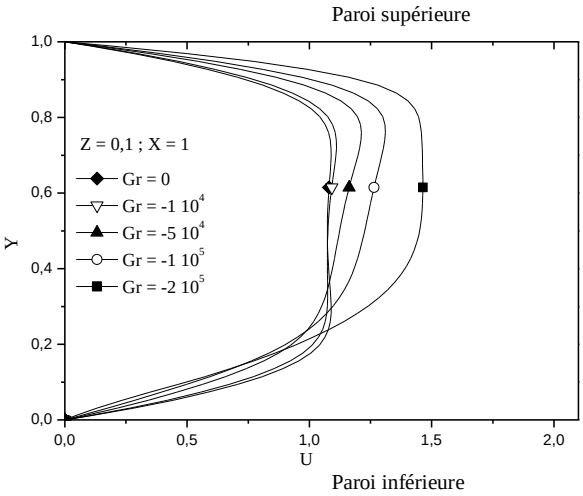
La **figure IV.35**, illustre l'effet de la variation du nombre de Grashof sur les profils de vitesse, en différentes positions longitudinales (X = 1, 10 et 150) et pour deux positions transversales (Z = 0,1 et 0,5), pour les cas de chauffage et de refroidissement respectivement.

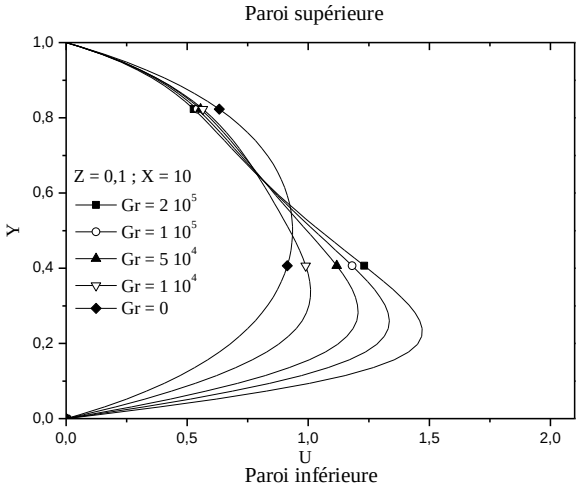
Il est important de noter qu'aux faibles nombres de Grashof, les courbes conservent leur symétrie de révolution, mais qu'aux grandes valeurs du nombre de Grashof ($|Gr| > 10^4$), elle est totalement détruite, et les profils de vitesse se déportent vers le bas dans le cas du chauffage et vers le haut, dans le cas du refroidissement pariétal à cause des courants de convection naturelle.

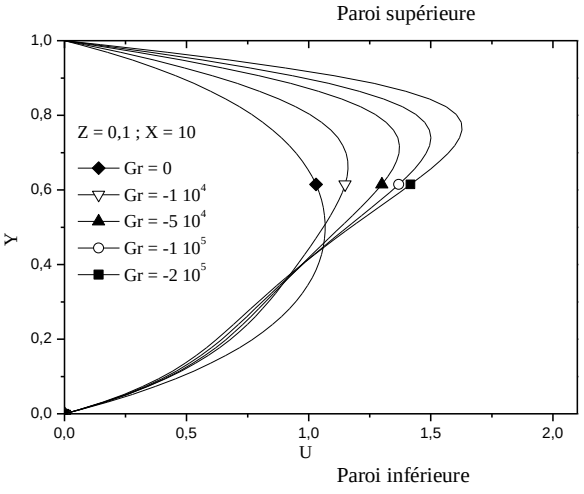
On y remarque qu'en régime établi (X = 150), toutes les courbes se superposent et présentent un parfaite symétrie de révolution, en revanche, tant que l'écoulement n'a pas atteint son plein développement (X < 150), les profils de vitesse subissent une forte distorsion, avec un déplacement des maximums des vitesses vers le bas dans le cas de chauffage et vers le haut dans celui de refroidissement. Cette augmentation des vitesses maximales est due à l'accroissement du nombre de Grashof.

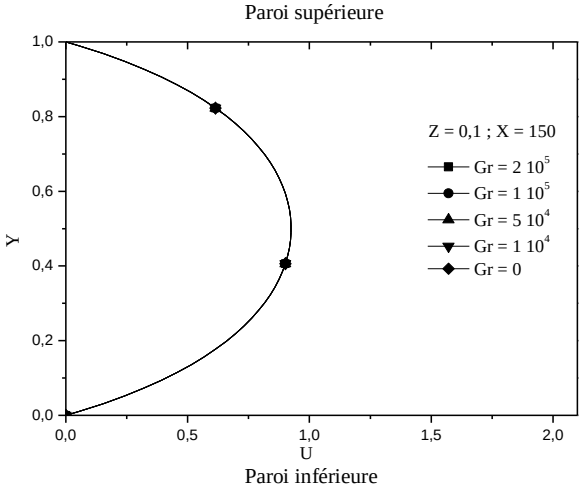
Chauffage **Refroidissement**

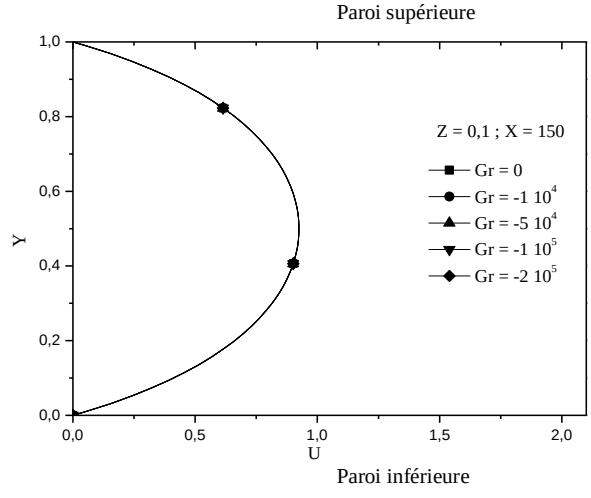












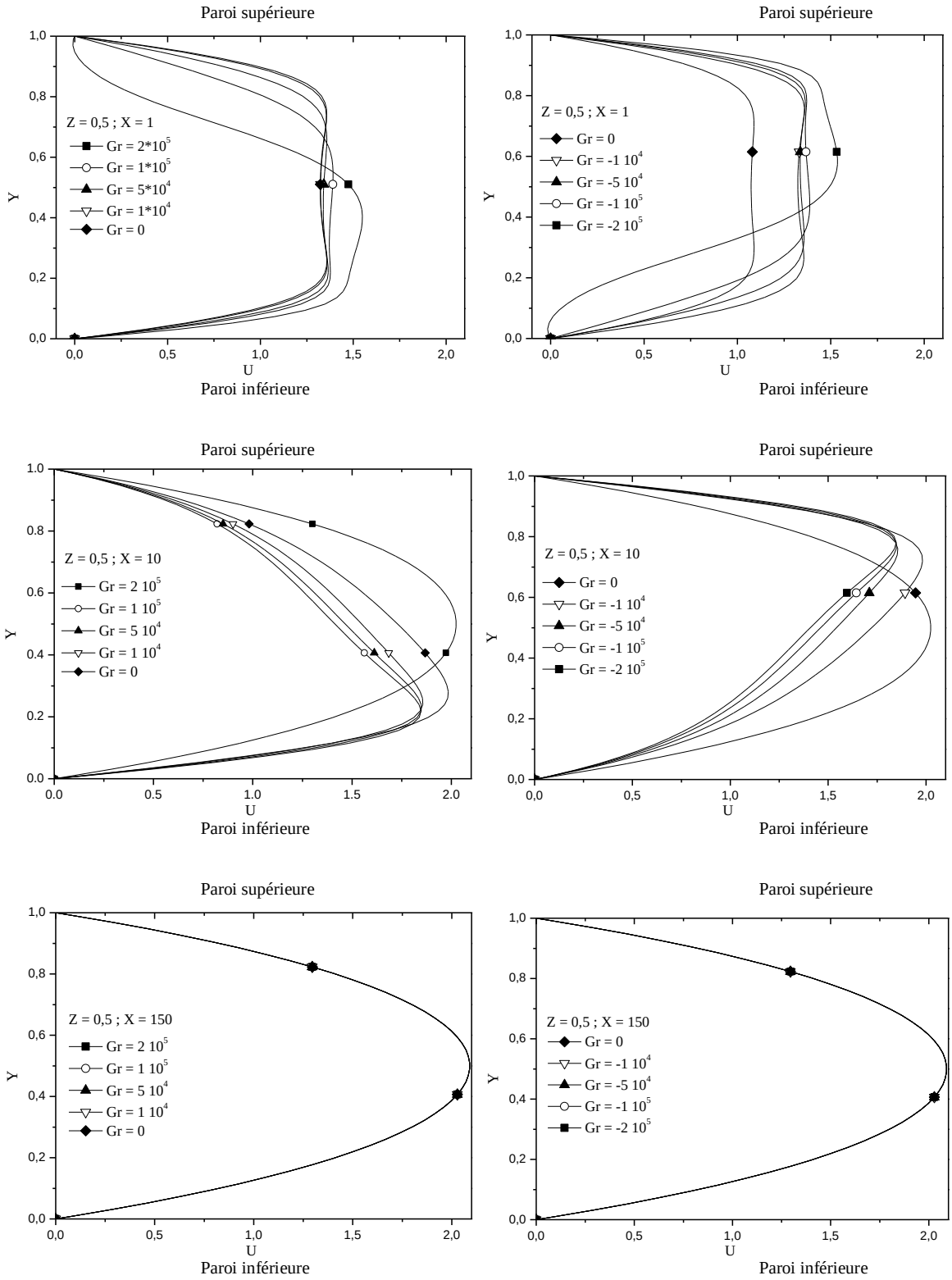


Figure IV.35 : Evolution longitudinale des profils de vitesse en différentes positions Transversales. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

La figure ci-dessous représente l'effet du nombre de Grashof sur le coefficient de frottement apparentmoyen relevé sur les parois supérieure et inférieure de la conduite de section droite carrée (γ = 1), pour les cas de chauffage (nombres de Grashof positifs) et de refroidissement (nombres de Grashof négatifs) respectivement.

Nous constatons que la variation du nombre de Grashof ne révèle aucune influence sur l'évolution du coefficient de frottement apparent dans les zones d'entrée et loin en aval, c'est-à-dire là où le régime est établi. En effet, c'est la convection forcée qui gouverne alors le mode de transfert thermique. En revanche, dans la zone intermédiaire, nous remarquons une grande variation du coefficient de frottement apparent selon que l'on se trouve dans le cas de chauffage ou de refroidissement à cause des courants de convection naturelle. En effet, dans cette zone il y a coexistence des convections naturelle et forcée, en d'autre terme, la convection mixte gouverne l'écoulement.

Les résultats montrent qu'en ***mode de chauffage***, le coefficient de frottement apparent (ou coefficient de Fanning) est plus important sur la paroi inférieure en comparaison avec la paroi supérieure. Par ailleurs, en augmentant le nombre de Grashof, le coefficient de Fanning augmente sur la paroi inférieure et diminue sur la paroi supérieure.

En ***mode de refroidissement***, c'est-à-dire lorsque la température du fluide est supérieure à celle de la paroi, on retrouve la situation inverse. En effet, le coefficient de frottement sur la paroi supérieure est supérieur à celui relevé sur la paroi inférieure. De même, en faisant diminuer le nombre de Grashof, le coefficient de Fanning augmente sur la paroi supérieure et diminue sur la paroi inférieure. En outre, si l'on compare les modes de chauffage et de refroidissement, on remarque qu'on obtient la même allure des courbes. En effet, les résultats obtenus pour le cas de ***chauffage*** (Gr > 0) pour les *paroissupérieure* et *inférieure* correspondent respectivement à ceux des *paroisinférieure* et *supérieure* dans le cas d'un ***refroidissement*** pariétal (Gr < 0).

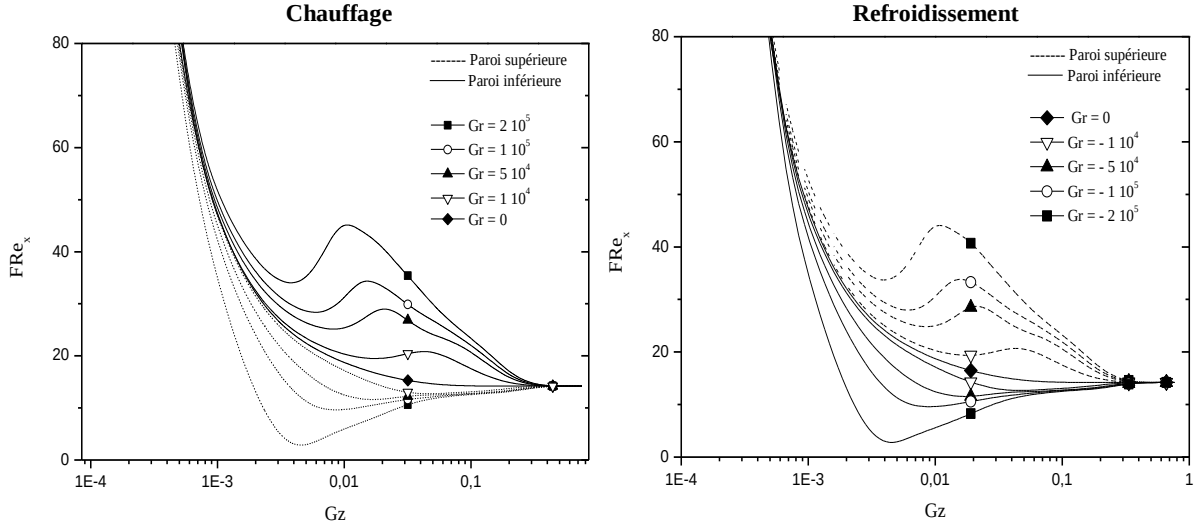


Figure IV.36 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement relevé sur les parois supérieure et inférieure de la conduite.γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

Ce comportement peut être expliqué (voir **figure IV 36.1**), dans le cas du ***chauffage pariétal***, par le développement des courants secondaires suivant les deux directions transversales qui transportent des quantités de fluide chaud depuis les régions affleurant la paroi inférieure, depuis Z = 0,5, vers les régions en contact avec la paroi supérieure. En effet,

ces courants prennent naissance au niveau de la paroi inférieure. Les couches fluides en contact avec cette dernière voient leur température augmentent à cause du chauffage pariétal imposé (et deviennent par conséquent plus légères).

Pour s'élever, ces dernières doivent au préalable longer toute l'étendue de la paroi inférieure, suivant la deuxième direction transversale OZ.

Une fois arrivé au voisinage des parois droite (Z = 0) et gauche (Z = 1), le fluide les longe et s'élève vers le haut suivant la première direction transversale OY et les deux flux de fluide chaud se concentre en haut de la conduite, au voisinage de la paroi chaude supérieure, en son centre, là où les courants secondaires s'estompent (faible écart de température entre le fluide et la paroi). Le fluide chaud s'étant amassé en haut de la conduite, redescend pour remplacer le fluide l'ayant quitté, perturbant (voire diminuant) ainsi l'écoulement principal, s'effectuant suivant la direction longitudinale OX, au niveau de la paroi supérieure. Le maximum des vitesses s'en trouve alors déporté vers la paroi inférieure, engendrant ainsi de forts gradients de vitesse au voisinage de celle-ci, contrairement au cas de la paroi supérieure, concernée plutôt par de plus faibles gradients de vitesse.

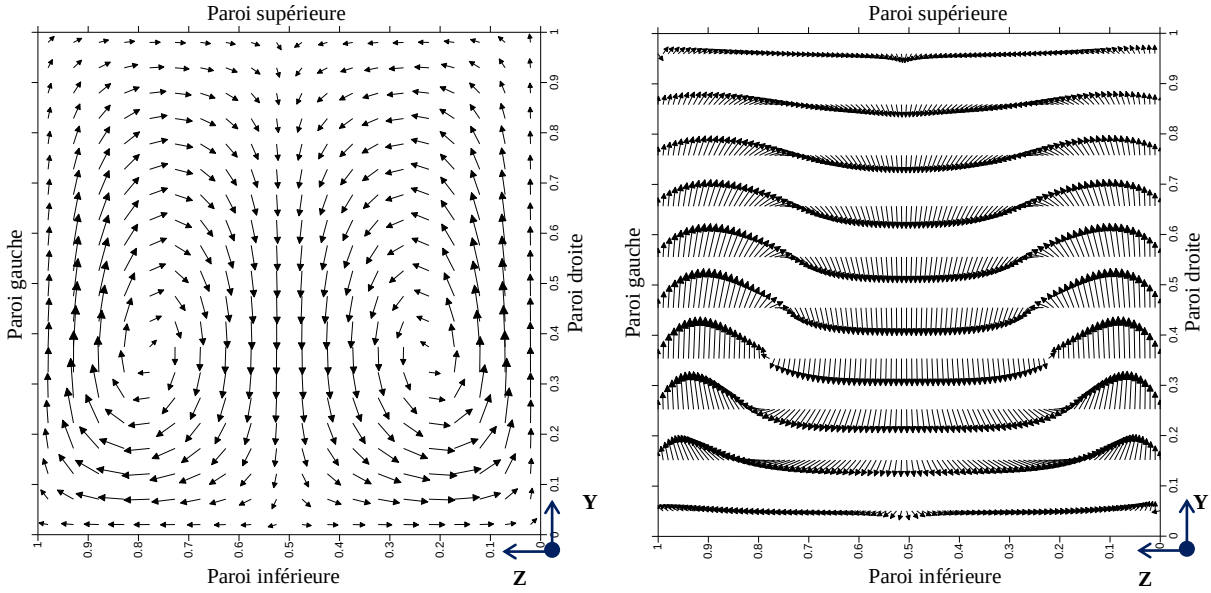


Figure IV.36.1 : Schématisation des courants secondaires sur une section droite (plan YOZ) et pour le cas d'un chauffage. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; X = 5 ; Gr = $5\ 10^4$.

Pour le cas du ***refroidissement pariétal***, c'est l'inverse qui se produit (**Figure IV.36.2**). Cette figure ainsi que la précédente (**Figure IV.36.1**) trace l'évolution du module des composantes transversales de vitesse $(V^2 + W^2)^{1/2}$ dans une section droite de l'écoulement : X = 5. On y remarque que les courants secondaires naissent en haut de la conduite au voisinage de la paroi supérieure, en son centre (Y = 1, Z = 0,5), pour se rencontrer au voisinage de la paroi inférieure : Y = 0 et Z = 0,5 (là où s'amasse le fluide froid plus lourd) pour ensuite remonter avec force, déplaçant ainsi le maximum des vitesses vers les régions supérieures de la conduite. Il en résulte alors un gradient pariétal de vitesse supérieur à celui qui règne au niveau de la paroi supérieure.

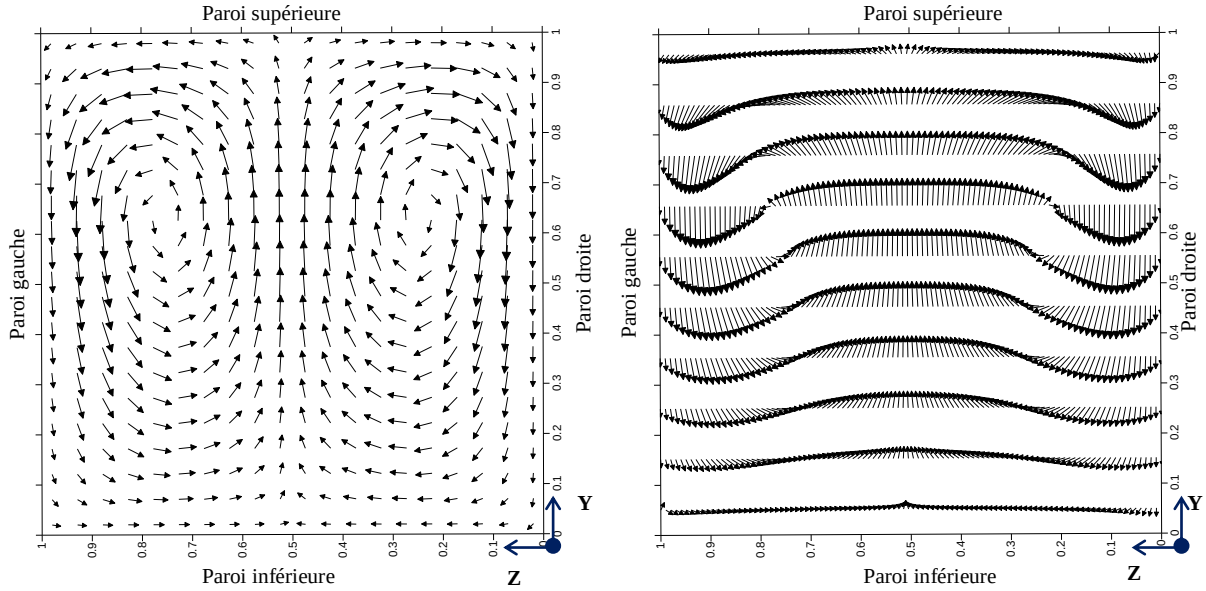


Figure IV.36.2 : Schématisation des courants secondaires sur une section droite (plan YOZ) et pour le cas d'un refroidissement. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; X = 5 ;Gr = - 5 10^4.

Il est intéressant de présenter le coefficient de frottement apparent, relevé sur les parois gauche et droite de la conduite, à travers la **figure IV.37**, où l'augmentation engendrée par les variations du nombre de Grashof est moins prononcée que celle obtenue sur les parois supérieure et inférieure de la conduite.

Nous observons les mêmesrégions que celles définies pour le cas de la **figure IV.36** : celles de l'entrée et du régime établi et celle de la région intermédiaire, avec une augmentation ou une diminution du coefficient de frottement apparent lorsque l'on augmente le nombre de Grashof selon que l'on soit en mode de chauffage ou de refroidissement respectivement.

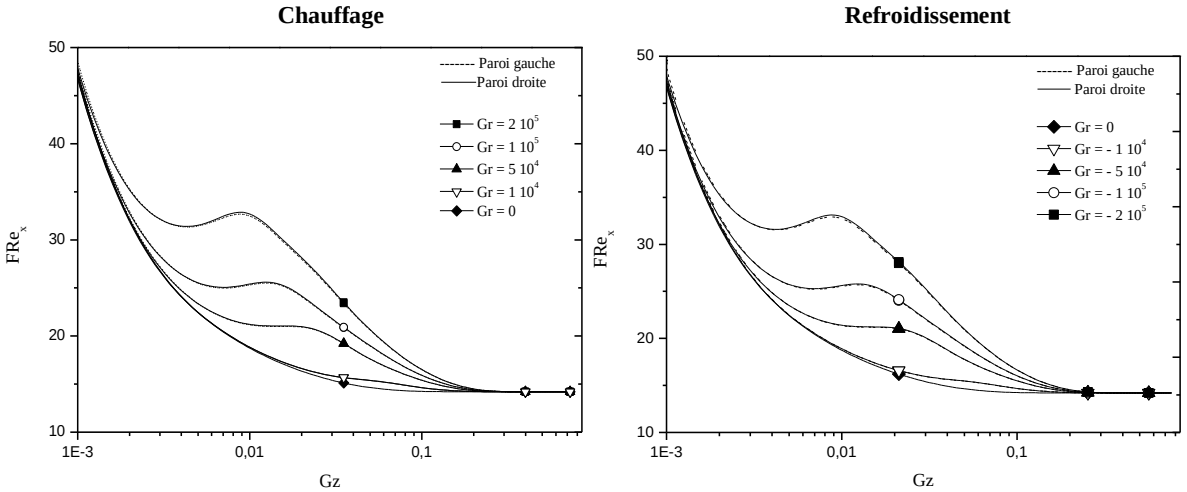


Figure IV.37 : Evolution longitudinal du coefficient de frottement relevé à la paroi gauche et droite de la conduite, $\gamma = 1$; Re = 100; Pr = 1; Bn = 0.

De même, il est intéressant de noter la superposition des courbes relatives à la paroi gauche et droite de la conduite. Ce résultat était prévisible étant donné la symétrie par rapport au plan XOY (placé en Z = 0,5 à partir de l'extrémité) des courants de convection :

Ecoulement longeant les parois inférieure ou supérieure dans les cas de chauffage ou de refroidissement respectivement ;

ou

Mouvements ascensionnels ou descensionnel (respectivement dans les cas de chauffage de refroidissement) des courants de convection naturelle le long des parois droite et gauche de la conduite.

Pour finir, la **figure IV.38** représente l'effet du nombre de Grashofpour les cas de chauffage (Gr > 0) et de refroidissement (Gr < 0) sur le coefficient de frottement apparent total (calculé sur toute la périphérie). Ce dernier consiste à moyenner le coefficient de frottement apparent sur les quatre faces de la conduite : les deux faces horizontales (supérieure et inférieure de la **figure IV.36**) et les deux faces verticales (droite et gauche de la **figure IV.37**), selon que l'on soit en mode de chauffage ou en mode de refroidissement. A noter cependant que quelque soit le conditionnement thermique imposé, on retrouve les mêmes résultats. En effet, les courbes obtenues pour ces deux modes se superposent. En conséquence, le nombre de Grashof (valeur absolue du nombre de Grashof) désignera au grès, selon envisagé, les cas de chauffage et/ou de refroidissement pariétal.

On y retrouve toujours les trois régions définies préalablement (celles de l'entrée et du régime établi et celle de la région intermédiaire) avec, au sein de cette région intermédiaire, une augmentation du coefficient de frottement apparent lorsque l'on augmente le nombre de Grashof et que l'on soit en mode de chauffage.

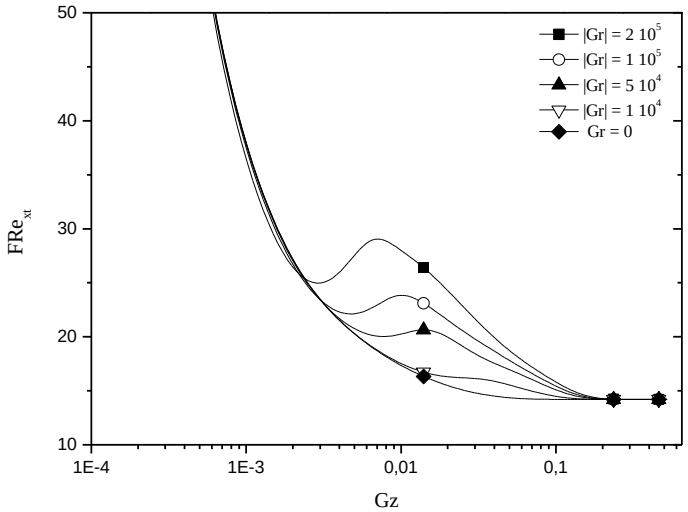


Figure IV.38 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement apparent total.
$\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

La **Figure IV.39** illustre l'effet du nombre de Grashof sur les profils de température réduite, relevée sur le plan XOY correspondant à Z = 0.5 aux positions longitudinales X = 1 et X = 10, pour le cas de chauffage et de refroidissement pariétal respectivement. A l'exception du cas Gr = 0, on note une dissymétrie des courbes, très prononcée pour les

grandes valeurs du nombre de Grashof (en valeur absolue) et en particulier, loin de l'entrée : X = 10 dans notre cas.

En X = 1, le noyau central est encore à la température d'entrée et ne subit aucun transfert thermique. En outre, en augmentant les valeurs (absolues) du nombre de Grashof, les courbes se déportent vers le bas dans le cas d'un réchauffement pariétal et vers le haut dans le cas d'un refroidissement.

En X = 10, les couches pariétales comme le noyau central ont subi un transfert thermique. En mode de chauffage, la température maximale a presque doublé (voire plus pour les cas $Gr \neq 0$) pour les différents cas envisagés et tend vers celle de la paroi. En mode de refroidissement, c'est l'inverse qui se produit, en effet, la température chute de moitié et tend vers celle de la paroi.

Les résultats représentés sur la **figure IV.39** font partie d'une communication internationale dans le cadre du **International Symposium on Multiphase flow and Transport Phenomena** qui a eu lieu en avril 2012 à Agadir au Maroc (**Annexe V**).

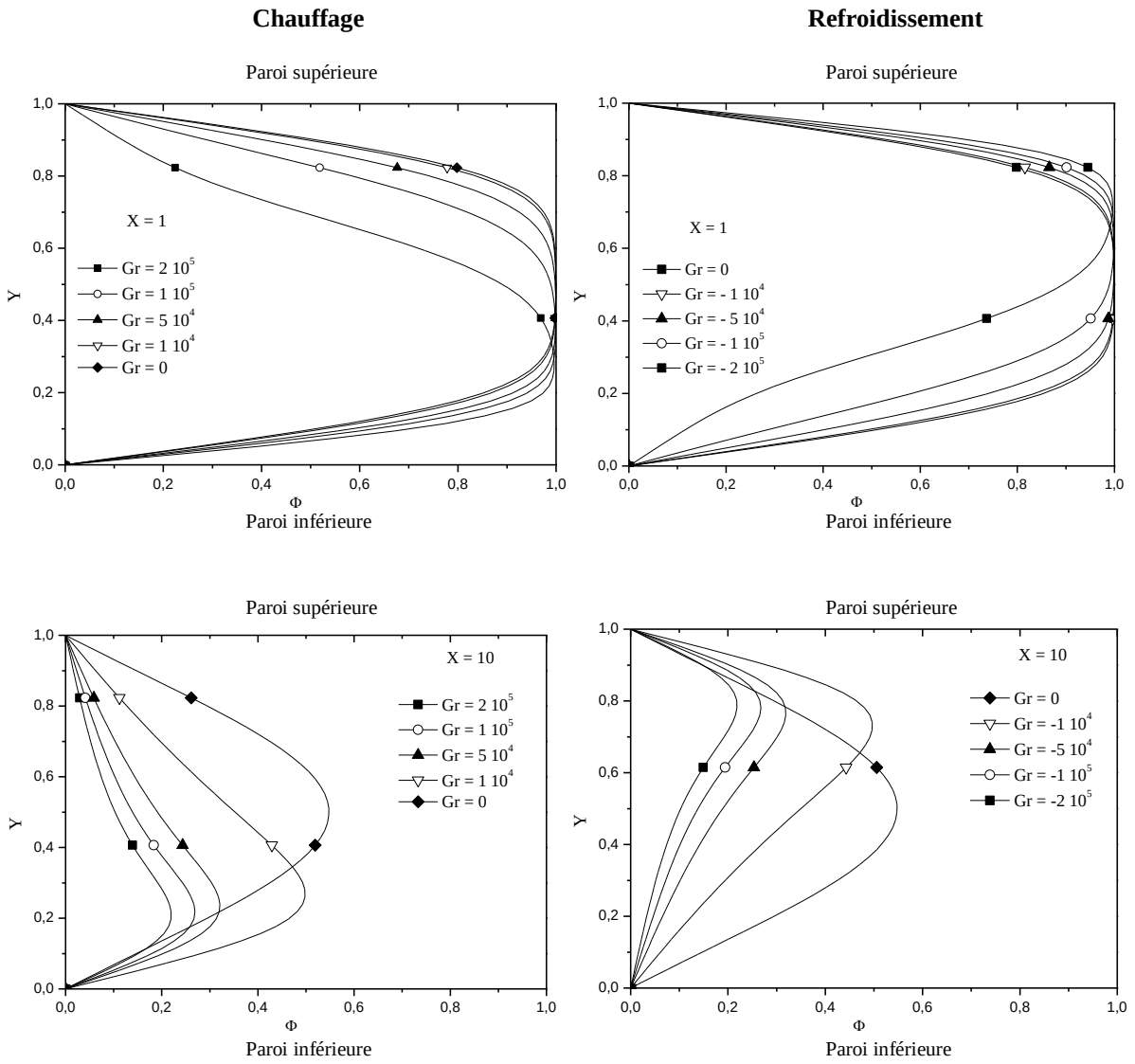
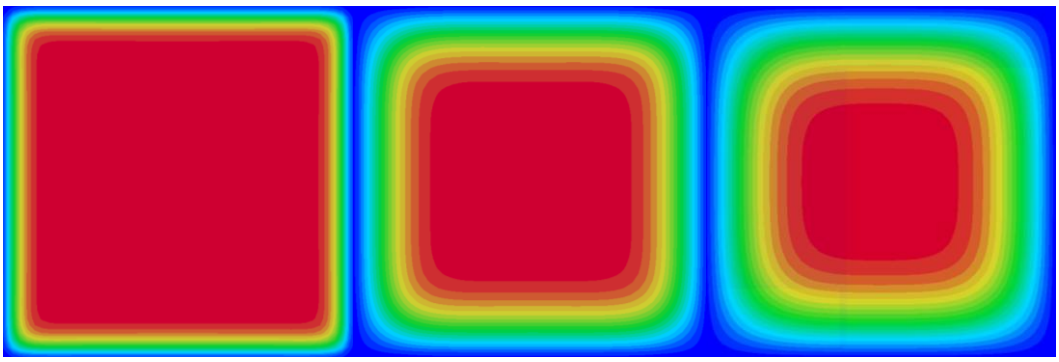


Figure IV.39 : Profils de température adimensionnelle en X = 1 et X = 10.
$\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; Z = 0,5.

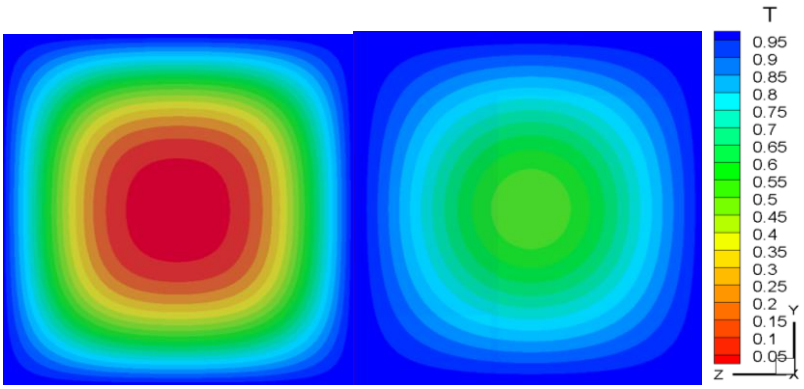
Pour mieux mettre en évidence la dissymétrie que présentent les courbes (profils de vitesse et de température) en mode de convection mixte ainsi que le sens de l'écoulement de chaleur, nous présentons sur la **figure IV. 40.1, 2 et 3**, l'évolution longitudinale (X = 11, 31, 41, 51 et 81) des isothermes sur différents plans transversaux YOZ en mode de convection forcée pure, de chauffage ($Gr = 2\ 10^4$) et de refroidissement ($Gr = -2\ 10^4$) respectivement.

Quelle que soit l'abscisse longitudinale, on remarque que le chauffage ou le refroidissement pariétal se fait de manière symétrique, étant donné que les quatre surfaces sont toutes portées à la même température. En fait, en mode de convection forcée pure, on ne fait pas de distinction entre les modes de chauffage et de refroidissement pariétal. En effet, les nombres adimensionnels apparaissant dans les équations de transfert sont indépendants de l'écart ΔT de température du fluide, entre l'entrée et la paroi.

On remarque également qu'en plus de la symétrie qu'offre la convection forcée, jusqu'à X = 51, le noyau central de la conduite se réduit certes, mais reste toujours à la même température que celle qu'il possède à l'entrée. A partir de X = 81, la chaleur (ou le froid), qui se propage au-delà des couches pariétales, a même atteint le cœur de la conduite qui ne présente plus la couleur rouge de départ, qui correspond à la température du fluide à son entrée.



X = 11 X = 31 X = 41



X = 51 X = 81

Figure IV.40.1 : Structure des isothermes le long de la direction longitudinale en convection forcée pure. Gr = 0 ; γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

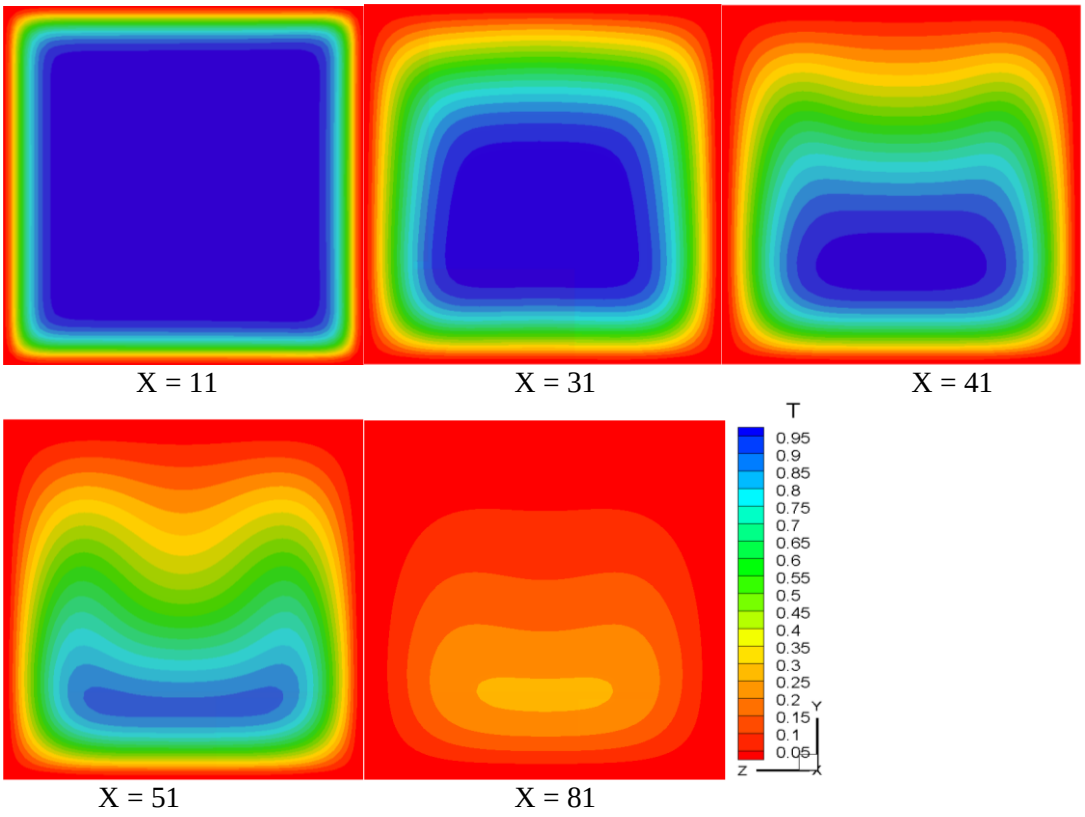


Figure IV.40.2 : Structure des isothermes le long de la direction longitudinale en convection forcée mixte. Gr = 2 10^4 ; γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

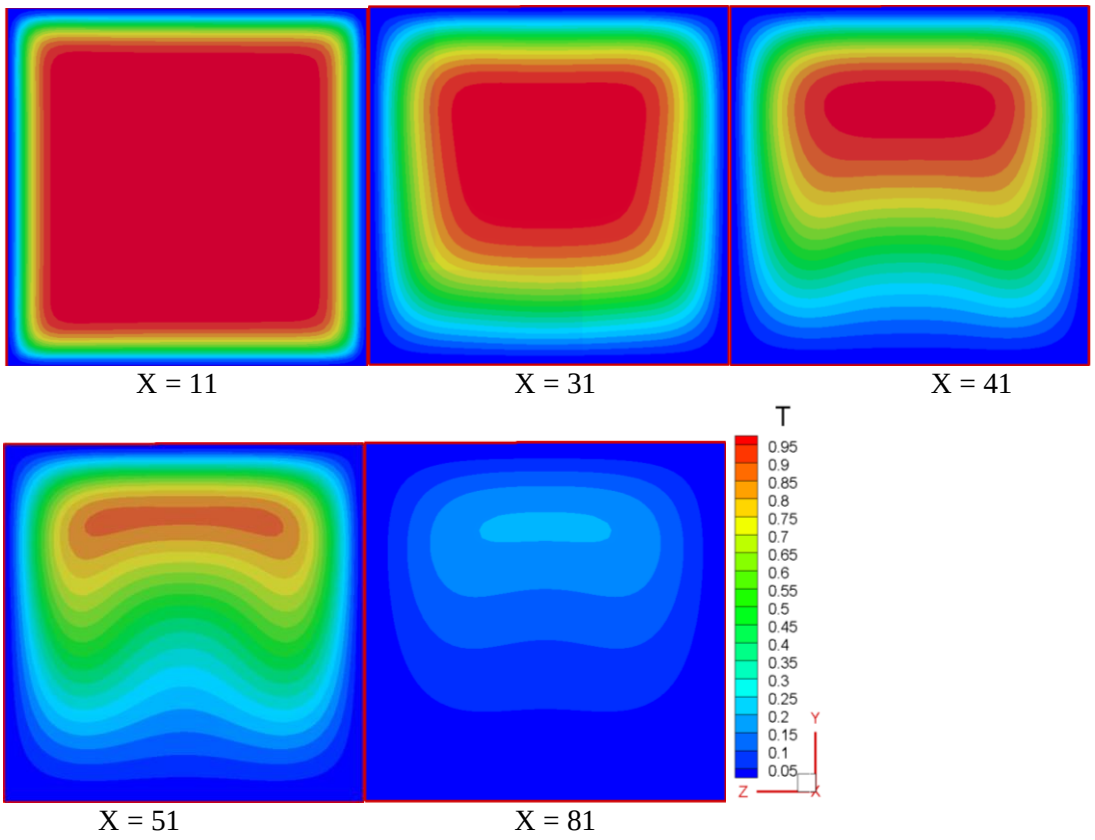


Figure IV.40.3 : Structure des isothermes le long de la direction longitudinale en convection forcée mixte. Gr = -2 10^4 ; γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

Pour le ***cas de chauffage*** (**figure IV.40.2**), pour les premières sections droites de la conduite, correspondant à X = 11 dans notre cas, on note que le chauffage pariétal se propage symétriquement vers les couche fluides à partir des quatre surfaces, portées à une même température pariétale, supérieure à celle du fluide à l'entrée de la conduite.

A partir de X = 31, la symétrie observée en amont est détruite, cependant, on note une symétrie des isothermes par rapport au plan XOY qui persiste quelque soit la section droite. On assiste alors à une migration du fluide en contact avec la paroi inférieure vers le haut de la conduite, en longeant les deux parois verticale (droite et gauche) de la conduite. Le fluide se réchauffe alors au fur et à mesure qu'il s'élève, amassant de grande quantité de liquide chaud en haut de la conduite par rapport au bas de celle-ci. Pour les sections droites suivantes (X = 41 et X = 51), le deux flux de fluide chaud, arrivant de part et d'autre du centre de la conduite, se rejoignent au centre de la conduite, puis redescendent par le centre de la conduite (Z = 0,5) formant ainsi deux cellules fermées en rotation dans le sens inverse l'une de l'autre (**Figure IV.36.1** à gauche), la cellule de droite dans le sens antihoraire et celle de gauche dans le sens horaire. La chaleur envahit, par le haut, les couches de fluide froid de la partie inférieure de la conduite et les confine dans un espace de plus en plus restreint.
Plus en aval de l'entrée X = 81, une plus grande quantité de fluide chaud occupe le haut de la conduite, tandis que le bas de la conduite se réchauffe intensément. Le cœur de la conduite n'est alors plus à sa température d'entrée.

En mode de ***refroidissement*** (**figure IV.40.3**), c'est le phénomène inverse que l'on observe. En effet, les parois de la conduite refroidissent les couches fluides pariétales. Celles en contact avec la paroi supérieure voient leur température chuter. Le fluide ainsi refroidi longe les parois verticales dans un mouvement descensionnel, puis les deux flux de fluide froid se rencontrent au niveau de la paroi inférieure, en son centre. S'en suit alors une remontée du fluide froid par le centre de la conduite, refroidissant ainsi le cœur de l'écoulement et refoulant le reste du fluide chaud vers le haut. Comme précédemment, deux cellules fermées se forment alors, celle de droite tournant dans le sens horaire alors que celle de gauche tourne dans le sens antihoraire (**Figure IV.36.2**à gauche).

La figure suivante (**figure IV.41**) trace l'évolution de la température moyenne réduite en fonction du nombre de Grashof dans les cas de chauffage et du refroidissement pariétal respectivement.

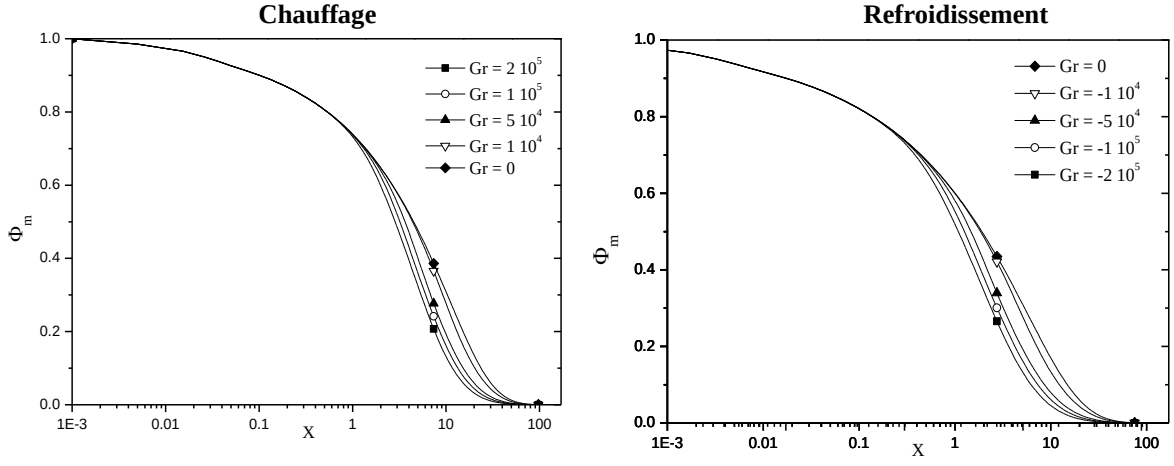


Figure IV.41 : Evolution longitudinale de la température moyenne.
γ = 1 ; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

Quelque soit le mode de chauffage, nous ne remarquons une augmentation de la température moyenne réduite du fluide en fonction du nombre de Grashof (valeur absolue), qu'à partir de la position longitudinale X = 1. En effet, la région d'entrée ainsi que celle de l'écoulement établi sont insensibles aux variations du nombre de Grashof. Notons également qu'au niveau de la région de l'écoulement établi, la température moyenne adimensionnelle du fluide atteint celle de la paroi.

La **figure IV.42** présente l'effet du nombre de Grashof sur le nombre de Nusselt local, relevé au niveau des parois supérieure et inférieure de la conduite pour les cas de chauffage et de refroidissement respectivement. Ces deux parois sont portées à une même température, supérieure à celle du fluide à l'entrée en mode de chauffage, ou, inversement inférieure à celle du fluide à l'entrée dans le cas d'un refroidissement.

Nous remarquons que pour le cas de chauffage, les nombres de Nusselt sur la paroi inférieure sont plus importants que ceux de la paroi supérieure, contrairement au cas de refroidissement, où l'on observe un comportement inverse. En effet, lors d'un chauffage pariétal, du fluide de plus en plus chaud est apporté en haut de la conduite et du fluide de plus en plus froid en bas de la conduite, en mode de convection mixte. Il en résulte des gradients de température plus importants en bas de la conduite qu'en haut de celle-ci.

Nous remarquons également que l'augmentation du nombre de Grashof provoque de plus grandes variations du nombre de Nusselt sur la paroi inférieure que sur la paroi supérieure en mode de chauffage, et inversement en mode de refroidissement. De même, comme dans le cas du coefficient de frottement apparent, les valeurs du nombre de Nusselt relevées sur les parois inférieure et supérieure en mode de chauffage correspondent exactement à celles relevées sur les parois supérieure et inférieure en mode de refroidissement respectivement.

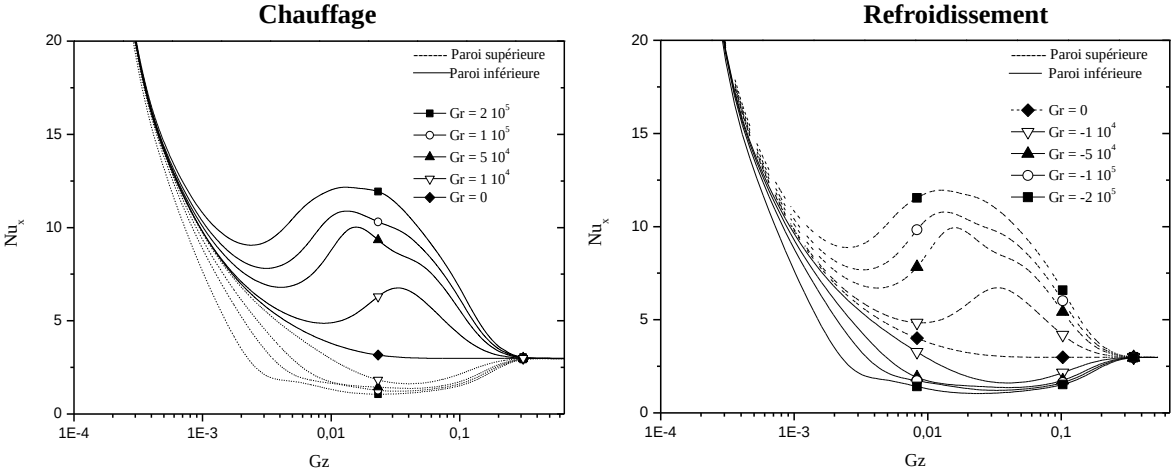


Figure IV.42 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt relevé sur les parois supérieure et inférieure de la conduite, $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

Par contre sur les parois gauche et droite, illustrées sur la **Figure IV.43**, nous remarquons que quelque soit le mode de chauffage, les courbes de la paroi gauche se superposent avec celles de la paroi droite. De même, l'effet de nombre de Grashof se fait ressentir qu'au niveau de la région intermédiaire entre la zone d'entrée et celle de

l'écoulement établi, où le transfert thermique est favorisé par l'augmentation du nombre de Grashof (en valeur absolue).

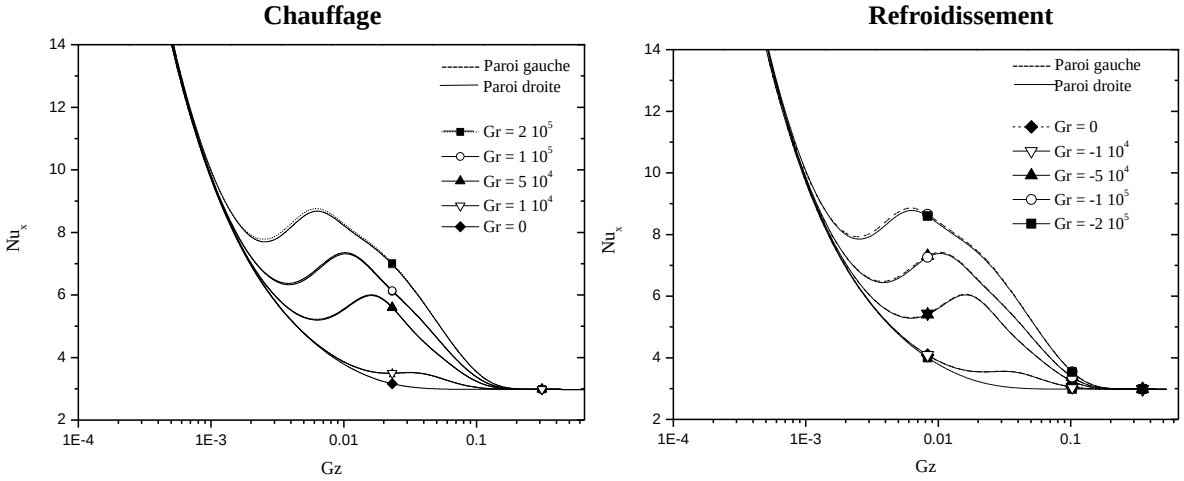


Figure IV.43 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt relevé sur les parois gauche et droite de la conduite. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

La figure suivante représente l'effet du nombre de Grashof (que l'on soit en mode de chauffage et/ou de refroidissement) sur l'évolution longitudinale du nombre de Nusselt total, moyenné pour une position longitudinale donné, sur les quatre parois (supérieure, inférieure, gauche et droite) de la conduite.

Comme précédemment, on y voit apparaitre la région d'entrée, de l'écoulement établi (thermiquement) et la région intermédiaire aux deux précédentes. Dans cette dernière, l'augmentation du nombre de Grashof entraine l'augmentation du nombre de Nusselt moyenné en toute section droite de l'écoulement.

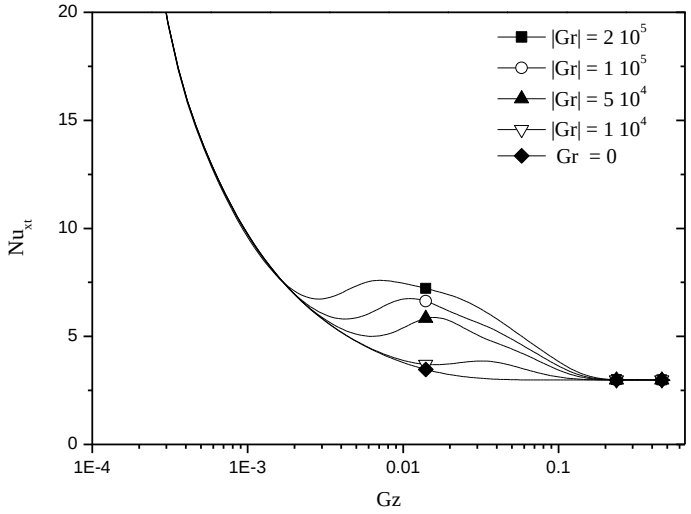


Figure IV.44 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt total.de la conduite $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0.

L'effet du nombre de Grashof sur l'évolution du nombre de Nusselt local relevé au niveau des parois supérieure, inférieure, gauche et droite de la conduite, pour le cas de chauffage a fait l'objet d'une communication internationale dans le cadre du **2^{éme} Congrès de**

l'Association Marocaine de Thermique qui s'est tenu à Casablanca au Maroc, en avril 2012 (**Annexe VI**).

IV.2.2.3 Effet de la dissipation visqueuse

Dans cette dernière partie des résultats, nous présentons l'effet de la prise en considération, dans l'équation de l'énergie, de la dissipation visqueuse (ou la fonction de dissipation) sur la structure de l'écoulement hydrodynamique et thermique. Elle correspond au produit du tenseur des gradients de vitesse symétrisé que l'on appelle tenseur des taux de déformations par le tenseur des contraintes visqueuses. On peut démontrer qu'elle est toujours négative, c'est-à-dire qu'elle correspond à un travail résistant : les frottements visqueux s'opposent aux déformations du fluide. Elle est strictement dissipative (on comprend mieux cette appellation) et mesure l'énergie mécanique qui est dégradée par unité de temps et par unité de volume, par les forces de frottement visqueux, au sein de l'écoulement.

a) En mode de convection forcée

Commençons au préalable par présenter l'impact de la fonction de dissipation, en mode de convection forcée, sur uniquement le transfert thermique. En effet, étant donné que le terme correspondant à cette fonction (à travers le nombre de Brinkman en l'occurrence) est rajouté à l'équation de l'énergie, et que les trois projections des équations de l'impulsion ne sont pas fonction de la température (tel ne serait pas le cas si l'on avait considéré le mode de convection mixte ou/et les propriétés physiques du fluide thermodépendantes), l'hydrodynamique ne s'en trouve pas perturbée.

Sur la **figure IV.45**, nous présentons l'évolution longitudinale de la température moyennée sur chaque section droite (orthogonale à l'écoulement incident et parallèle au plan YOZ) de l'écoulement d'un fluide newtonien pour différents nombres de Brinkman.

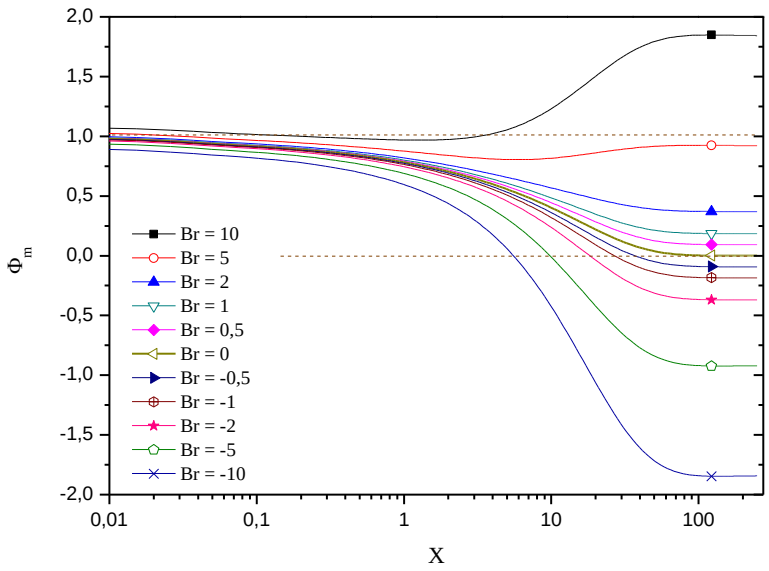


Figure IV.45: Evolution longitudinale de la température moyenne réduite pour différents nombres de Brinkman. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; Gr = 0.

Pour des nombres de Brinkman positifs et correspondant au ***mode de refroidissement*** du fluide, la température moyenne n'est affectée par les variations du nombre de Brinkman

que pour les grandes valeurs du nombre de Brinkman (Br > 2). En effet, pour tous les cas, la température moyenne adimensionnelle commence par décroitre depuis l'entrée de la conduite, où elle se trouve être à la température d'entrée du fluide, puis décroit de manière monotone pour tous les nombres de Brinkman utilisés, sauf pour les cas : Br = 5 et Br = 10, où le fluide voit sa température moyenne augmenter, voire même dépasser la température pariétale dans le cas Br = 10, à partir d'une certaine abscisse longitudinale, et ce à cause de la génération interne de chaleur.

En mode de ***chauffage pariétal***, le fluide voit sa température moyenne (dimensionnelle) augmenter progressivement au fil de l'écoulement à cause du chauffage pariétal imposé et de la génération interne de chaleur. Le cas est tel que pour une position longitudinale donnée, le fluide voit sa température moyenne atteindre celle de la paroi (**Nusselt infini**), voire même la dépasser, inversant en même temps le sens du transfert thermique. On assiste alors, à un refroidissement du fluide (Nusselt négatif).

Comme le prédisaient les résultats précédents, pour des nombres de Brinkman positifs (mode de refroidissement), les valeurs du nombre de Nusselt moyen (valeurs locales du nombre de Nusselt moyennées sur la périphérie de la section droite orthogonale à l'écoulement incident), toutes positives, décroissent au fil de l'écoulement et tendent asymptotiquement vers une valeur unique égale à 6,57 qui se situe au-dessus ce celle de l'écoulement correspondant à Br = 0 et égale à 2,99 (soit une augmentation de près de 120%).

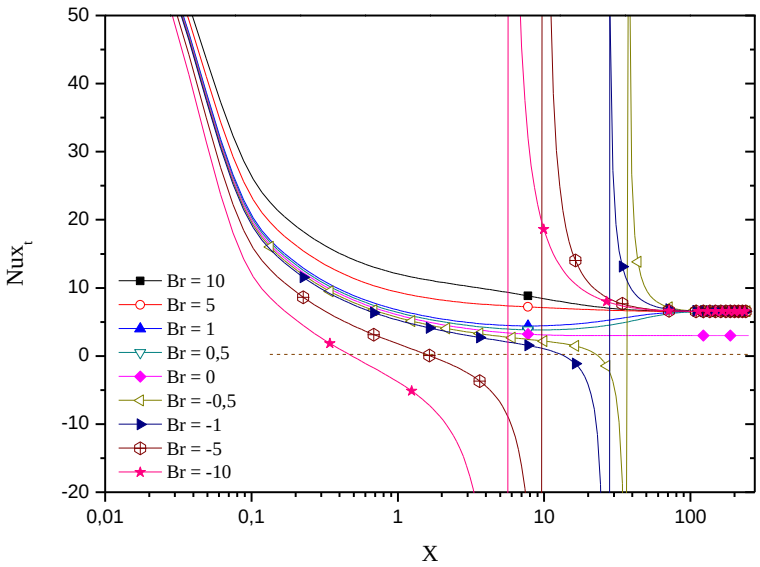


Figure IV.46: Evolution longitudinale du nombre de Nusselt total pour différents nombres de Brinkman. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; Gr = 0.

Pour les nombre de Brinkman négatifs et correspondant à un refroidissement pariétal, les courbes traduisant le nombre de Nusselt moyen commencent par diminuer puis s'annulent, traduisant une égalité entre la température de la paroi et celle des couches fluides à la paroi. A partir de cette abscisse, les gradients pariétaux de température (et par conséquent,les valeurs du nombre de Nusselt moyen) deviennent alors négatifs, montrant ainsi que la température du fluide a dépassé celle de la paroi. Cette situation perdure jusqu'à ce que la température moyenne réduite Φ_m s'annule à son tour. Le nombre de Nusselt (inversement proportionnel à

Φ_m) tend alors vers l'infini. A partir cette abscisse, la température moyenne réduite devenant négative, le nombre de Nusselt redevient positif et tend sa valeur limite ($Nu_\infty = 6{,}57$).

b) En mode de convection mixte

Dans ce paragraphe, la fonction de dissipation sera prise en compte dans le cas où l'on a affaire à un transfert thermique en mode convection mixte. Dans ce cas, le système d'équations devient fortement couplé étant donné que dans la projection longitudinale des équations de l'impulsion, la température y est introduite dans le terme de poussée. En conséquence en plus du champ thermique, le champ hydrodynamique en sera affecté.

Sur la **figure (IV.47)**, nous présentons l'allure des courbes traduisant l'évolution du coefficient de frottement apparent moyen (moyenné sur la périphérie de la section droite, orthogonale à l'écoulement incident) en fonction du nombre de Brinkman, en mode de convection forcée pure (Gr = 0) et mixte ($Gr = -10^5$).

Pour des nombres de Brinkman positifs (en d'autres termes, ***en mode de refroidissement***), le coefficient de frottement apparent est indépendant des valeurs du nombre de Brinkman tant qu'on se situe à des abscisses inférieures approximativement à X = 1. Au-delà, les courbes se séparent entre-elles, augmentent légèrement puis rediminuent et tendent asymptotiquement vers une valeur limite, qui est d'autant plus élevée que le nombre de Brinkman est élevé.

Cette augmentation du coefficient de Fanning en fonction du nombre de Brinkman est attribuée à l'augmentation des vitesses tangentielles (U et W) et par conséquent des gradients pariétaux de ces vitesses. En effet, le réchauffement produit par la fonction de dissipation se localise principalement dans les régions fortement cisaillées : au voisinage des parois, dont la température est inférieure à celle du fluide sur toute la longueur de la conduite (X > 1). En conséquence, au voisinage de la paroi froide, la température du fluide s'élève, favorisant ainsi les courants de convection naturelle.

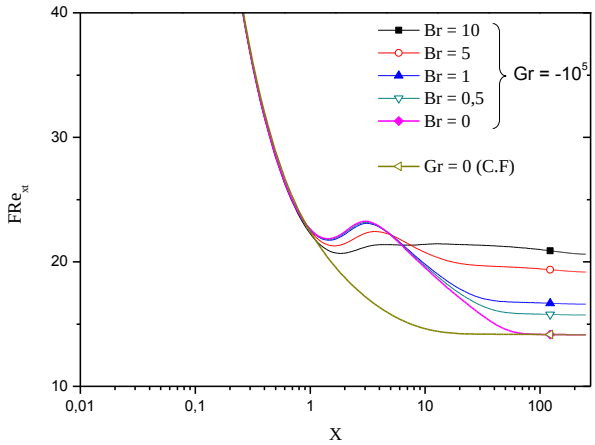


Figure IV.47 : Evolution longitudinale du coefficient de frottement périphérique pour différents nombres de Brinkman. $\gamma = 1$; Re = 100 ; Pr = 1 ; Bn = 0 ; $Gr = -10^5$.

La dernière **figure IV.48**, rapporte l'allure des courbes traduisant l'évolution du nombre de Nusselt moyen (moyenné sur la périphérie de la section droite, orthogonale à l'écoulement

incident) en fonction des nombres de Brinkman positifs, en mode de convection mixte ($Gr = -10^5$).

Le même phénomène obtenu en convection forcé se reproduit en convection mixte, avec cependant une différence notable au niveau de la zone établie dans laquelle, les valeurs asymptotiques du nombre de Nusselt tendent vers des valeurs limites différentes, qui sont d'autant plus élevées que le nombre de Brinkman est élevé.

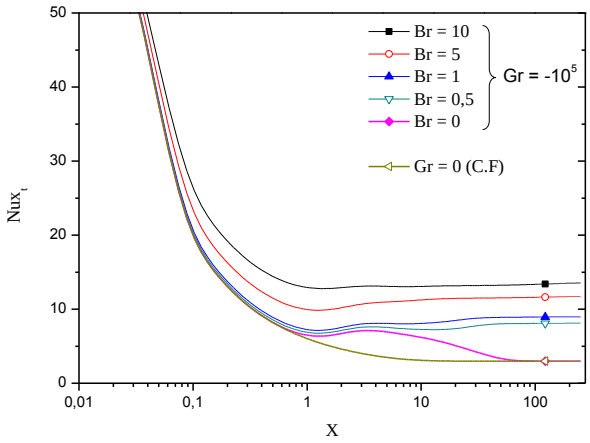


Figure IV.48 : Evolution longitudinale du nombre de Nusselt périphérique pour différents nombres de Brinkman. $\gamma = 1$; $Re = 100$; $Pr = 1$; $Bn = 0$; $Gr = -10^5$.

Dans cette dernière partie des résultats, nous avons introduit le fluide de Bingham dans la conduite à section droite carrée. Cette étude a fait l'objet d'une communication au **Congrès Nationale de Mécanique Appliquée** (**CNMA'2011**) organisée à Oran en novembre 2011.

En effet, l'étude de l'écoulement laminaire en mode de convection forcée d'un fluide incompressible de Bingham est entreprise dans cette étude. L'écoulement a lieu dans une conduite de section droite rectangulaire maintenue à une même température uniforme sur toutes les parois. Les résultats obtenus pour les différentes valeurs du nombre de Reynolds (Re = 100, 200, 300, et 500) montrent que l'influence de ce dernier sur l'évolution longitudinale du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt n'est significative qu'à l'entrée de la conduite, contrairement à la zone d'établissement du régime qui reste insensible à ces variations (**Annexe VII**).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à l'étude du comportement d'un fluide viscoplastique, en considérant également le cas limite d'un fluide newtonien, en écoulement laminaire à l'intérieur de deux types de conduites (deux plans parallèles et conduite à section droite rectangulaire). Nous avons considéré le transfert thermique en modes de convection forcé et mixte.

Il a été noté que l'introduction de la convection naturelle affecte d'une manière significative l'évolution du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement, en particulier pour les valeurs élevées du nombre de Grashof.

La prise en compte de la fonction de la dissipation dans le cas du transfert thermique en mode de convection mixte a un effet sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement étant donné que le système d'équations devient fortement couplé.

Les principaux résultats obtenus à partir des simulations numériques effectuées et des différents cas traités seront résumés dans la conclusion générale, à la suite de ce chapitre.

Conclusion générale

La présente étude a porté sur la simulation numérique de l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide viscoplastique dans deux configurations géométriques différentes ; il s'agit de l'écoulement entre deux plans parallèles (première configuration) et celui s'effectuant au sein d'une conduite à section droite rectangulaire (seconde configuration). Les parois des deux conduites sont portées à une température pariétale constante et uniforme mais différente de celle du fluide à l'entrée. Le fluide en question, subissant un transfert thermique en mode de convection mixte, obéit au modèle rhéologique de Bingham. Dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région à faibles taux de cisaillement, le modèle de viscosité proposé par Papanastasiou a été adopté pour décrire le comportement du fluide dans cette région.

Nous avons procédé dans un premier temps, à la mise en équations des problèmes physiques proposés en prenant en compte le mode de convection naturelle d'une part, et la fonction de dissipation visqueuse d'autre part. Cette partie a été suivie de la discrétisation des équations générales de conservation pour les deux géométries considérées, en utilisant la méthode des volumes finis. Les équations algébriques obtenues ont été résolues par le biais d'un code de calcul qui se base sur l'algorithme SIMPLER, que nous avons développé et adapté à nos configurations. Ce dernier a été validé après confrontation de nos résultats à ceux issus de travaux antérieurs de la littérature.

Les résultats obtenus à l'issue des simulations numériques effectuées ont été interprétés. Ils ont permis de proférer plusieurs constatations en ce qui concerne l'effet que subissent les structures hydrodynamique et thermique de l'écoulement suite à la variation des paramètres considérés dans l'étude. Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

- ✓ Dans le cas de la convection forcée, le transfert thermique est faiblement affecté par les variations du nombre de Bingham. Par contre, et en ce qui concerne l'hydrodynamique, on constate que l'augmentation du nombre de Bingham engendre, d'une part, l'augmentation du coefficient de frottement de Fanning et celle de l'étendue de la région caractérisée par le bouchon et d'autre part, la diminution de la vitesse centrale.

- ✓ Dans le cas de la convection mixte, il a été noté que la variation du nombre de Grashof ne révèle aucune influence sur l'évolution axiale du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt, à l'entrée de la conduite et dans la région correspondant à l'écoulement établi. En revanche, une modification significative des courbes est observée dans la zone intermédiaire, selon que l'on se trouve dans le cas de chauffage ou de refroidissement (pour les deux configurations géométriques étudiées). En effet, l'accroissement des valeurs positives du nombre de Grashof engendre, dans cette zone, une diminution du coefficient de frottement apparent et du nombre de Nusselt évalués à la paroi supérieure, contrairement au cas correspondant aux valeurs négatives du nombre de Grashof où l'on assiste à un accroissement considérable de ces derniers. Le phénomène inverse se produit au niveau de la paroi inférieure du canal et de la conduite pour le coefficient de frottement apparent et le nombre de Nusselt. Il a été noté, en outre, qu'u niveau des

deux parois latérales de la conduite, l'augmentation du nombre de Grashof (valeurs absolues) augmente, d'une manière similaire, le coefficient de frottement apparent et le nombre de Nusselt.

- ✓ L'effet de l'inclinaison du canal est beaucoup plus ressenti pour un nombre de Grashof élevé $Gr = 10^5$ en comparaison avec le cas $Gr = 2\ 10^4$, étant donné l'intensité grandissante des courants secondaires, au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de Grashof dans le canal. Il a été noté, en outre, qu'un maximum de transfert thermique et de perte de charge sont atteints lorsque le canal est placé de manière verticale $\alpha = 90°$, tandis qu'un minimum est observé pour $\alpha = -90°$. Ce résultat est valable pour un nombre de Nusselt local et un coefficient de frottement apparent évalués à l'une des parois : supérieure ou inférieure.

- ✓ L'augmentation du rapport de forme de la conduite rectangulaire entraine l'augmentation du nombre de Nusselt, ce qui se traduit par de meilleures performances thermiques. Le même effet est obtenu sur le coefficient de frottement apparent.

- ✓ L'introduction de la dissipation visqueuse influe sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement le long de la conduite. La valeur asymptotique du nombre de Nusselt, dans la zone établie, pour différentes valeurs du nombre de Brinkman, est deux fois plus grande que celle correspondant au cas où la dissipation visqueuse est négligée. Cependant, la fonction de dissipation n'influe que sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement lorsque le transfert thermique en mode de convection forcée est considéré étant donné que les équations sont découplées. Par contre, lorsque l'on considère le transfert thermique en mode de convection mixte, le système d'équations devient fortement couplé et par conséquent, le champ hydrodynamique subit également des modifications suite à la variation du nombre de Brinkman.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. Bejan, 'Convection Heat transfer'. 2nd Edition, John Wiley et Sons Inc., New York, USA, (1995).

[2] J.F. Sacadura, 'Initiation aux transferts thermiques'. Centre d'Actualisation Scientifique et Technique, INSA de Lyon, 4è tirage, Technique et documentation, 11, rue Lavoisier, 75008 paris, France, (1993).

[3] C. Simand, 'Comment les fluides coulent-ils', Laboratoire de Physique, ENS Lyon, France, (2011).

[4] N. Midoux, 'Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique, Technique et Documentation-Lavoisier, France, (1988).

[5] S. Poncet, 'Cours de Mécanique des fluides. IUT génie thermique et énergie', Marseille, France, (2010).

[6] H. Boussak, 'Caractérisation rhéologique d'une substance polymérique cas d'une suspensionbentonitique'. Thèse de magister, Université M'hamed Bougara, Algérie, (2008).

[7] E. Koller, 'Transport et stockage des fluides dans l'industrie', Technique et Ingénierie, Dunod/Industries et Technologies, France, (2002)

[8] A. Walicka, J. Falicki, 'Inertia affects in the flow of a simple Casson fluid between two fixed surfaces of revolution'. Chemical and Process Engineering, 30 (2009) pp. 603-619.

[9] A. Boutra, 'Simulation numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite horizontale avec transfert de chaleur par convection'. Thèse de magister, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Algérie, (2008).

[10] L. Ma, G.V. Barbosa-Chovas, 'RheologicalCharacterization of Mayonnaise. Part II: Flow and Viscoelastic Properties at Different Oil andXanthan Gum Concentrations', J. Food Engineering, 25 (1995) pp. 409-425.

[11] W. Canet, M.D. Alvarez, C. Fernandez, P. Luna, 'Comparisons of methods for measuringyield stresses in potatopuree, effect of temperature and freezing', J. Food Engineering, 68 (2005) pp. 143–153.

[12] S. Vandresen, M.G.N. Quadri, J.A.R. de Souza, D. Hotza'Temperature effect on the rheological behavior of carrot juices', J. Food Engineering, 92 (2009) pp. 269–274.

[13] J. Peixinho, C. Desaubry, M. Lebouche, ‘Heat transfer of a non-Newtonian fluid (Carbopol aqueous solution) in transitional pipe flow, Int. J. Heat and Mass Transfer 51 (2008) pp. 198–209.

[14] R.B. Bird, G.C. Dai, ‘The rheology and flow of viscoplastic materials, Reviews in Chemical Engineering’, 1(1) (1983) pp. 1-70.

[15] I. Nazrul, U.N. Gaitondeet, G.K. Sharma, ‘Mixed convection heattransfer in theentrance region of horizontal annuli’, Int. J. Heat and Mass Transfer, 44 (2001) pp. 2107-2120.

[16] G.C. Vradis, J. Dougher, S. Kumar, ‘Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic’, Int. J. Heat and Mass Transfer, 36 (3) (1993) pp. 543-552.

[17] T. Min, H.G. Choi, J.Y. Yoo, H. Choi, ‘Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe-Numerical approach-hydrodynamically and simultaneously developing flow’, Int. J. Heat and Mass transfer, 121 (1997) pp. 3689-3701.

[18] A. Barletta, ‘Laminar mixed convection with viscous dissipation in a vertical channel’, Int. J. Heat and Mass Transfer 44 (1998) pp. 4267–4275

[19] A. Barletta, E. Zankini, ‘Mixed convection with viscous dissipation in an inclined channel with prescribed wall temperatures’, Int. J. Heat and Mass Transfer 44 (2001) pp. 4267–4275.

[20] A. Barletta, E. Magyari, B. Keller, ‘Dual Mixed convection with variable viscosity in an inclined channel with prescribed wall temperatures’, Int. Comm. Heat Mass Transfer; 28 (8) (2001) pp. 1043-1052.

[21] M.M. Salah El-Din, ‘Effect of thermal and mass buoyancy forces on the development of laminar mixed convection between vertical parallel plates with uniform wall heat and mass fluxes’, Int. J. Thermal Sciences 42 (2003) pp. 447–453.

[22] W.M. Yan, ‘Combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion on laminar forced convection in horizontal rectangular ducts’, Int. J. Heat Mass Transfer. 39 (7) (1996) pp. 1479-1488.

[23] W.M. Yan, ‘Transport phenomena of developing laminar mixed convection heat and mass transfer in inclined rectangular ducts’, Int. J. Hear Mass Transfer. 38 (15) (1995) pp. 2905-2914.

[24] K.T. Lee, H.L. Tsai, W.M. Yan, ‘Mixed convection heat and mass transfer in vertical rectangular ducts’, Int. J. Heat Mass Transfer.Vol. 40 (7) (1997) pp 1621-1631.

[25] M.E. Sayed-Ahmed, ‘Numerical solution of power law fluids flow and heat transfer with a magnetic field in a rectangular duct’, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 27 (7) (2000) pp. 1013-1024.

[26] M.E. Sayed-Ahmed, ‘Laminar heat transfer for thermally developing flow of a Herschel-Bulkley fluid in a square duct’, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 33 (2006) pp. 1165–1176

[27] J.H. Jang, W.M. Yan, C.C. Huang, 'Mixed convection heat transfer enhancement through film evaporation in inclined square ducts', Int. J. Heat and Mass Transfer 48 (2005) pp. 2117–2125

[28] H.C. Chiu, J.H. Jang, W.M. Yan, 'Mixed convection heat transfer in horizontal rectangular ducts with radiation effects', Int. J. Heat and Mass Transfer 50 (2007) pp. 2874–2882.

[29] K. Hooman, A. Haji-Sheikh, 'Analysis of heat transfer and entropy generation for a thermally developing Brinkman–Brinkman forced convection problem in a rectangular duct with isoflux walls' Int. J. Heat and Mass Transfer 50 (2007) pp. 4180–4194.

[30] H.C. Chiu, J.H. Jang, W.M. Yan, 'Mixed convection heat transfer in inclined rectangular ducts with radiation effects', Int. J. Heat and Mass Transfer 51 (2008) pp. 1085–1094.

[31] P. Talukdar, C.R. Iskra, C.J. Simonson, 'Combined heat and mass transfer for laminar flow of moist air in a 3D rectangular duct: CFD simulation and validation with experimental data', Int. J. Heat and Mass Transfer 51 (2008) pp. 3091–3102.

[32] S.V. Patankar, 'Numerical heat transfer and fluid flow', Chem, McGraw, New York, (1980).

[33] H.K. Versteeg, W. Malalasekera, 'An introduction to computational fluid dynamics (The finite volume method)', Longman scientific & Technical, (1995).

[34] O. Jambal, T. Shigechi,T, G. Davaa, S. Momoki, 'Effects of viscous dissipation and fluid axial heat conduction on heat transfer for non-Newtonian fluids in ducts with uniform wall temperature Part I: Parallel plates and circular ducts', Int. Comm. Heat Mass Transfer, 32 (2005) pp. 1165–1173

[35] T. Lin, V.L. Shah, 'Numerical solution of heat transfer to yield power-law fluids flowing in the entrance region, in: Proc', Inter. Heat Transfer Conf. 6th. Toronto, 5 (1978) pp. 317-321.

[36] M.E. Sayed-Ahmed, K.M. Kishk, 'Heat transfer for Herschel–Bulkley fluids in the entrance regionof a rectangular duct' Int. Comm. Heat Mass Transfer, 35 (2008) pp. 1007–1016.