N° d'ordre 01/2004-E/GM

Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène

Faculté de Génie Mécanique et Génie des Procédés

THESE

Présentée à l'USTHB pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT D'ETAT

en
Génie Mécanique
Spécialité : Maintenance et Isolation Vibro-Acoustique

Par : **Abdelhamid MILOUDI**

Thème

Rayonnement Acoustique de Plaques par une Approche Temporelle : Application à la Synthèse Sonore de Modèles Vibro-Acoustiques

Soutenue le : 19 juillet 2004 devant le jury composé de :

Taoufik BOUKHAROUBA, Professeur à l'USTHB,	**Président**
Jean Louis GUYADER, Professeur à l'INSA de Lyon	**Directeur de Thèse**
Nacer Hamzaoui, Professeur à l'INSA de Lyon,	**Co-Directeur de Thèse**
Ammar BENCHAALA, Professeur à l'USTHB,	**Examinateur**
Said RECHAK, Professeur à l'ENP d'Alger	**Examinateur**
Ahmed DAMOU, Directeur de Recherche, VeilTech, Alger,	**Examinateur**
Noureddine OULEAA, Professeur à l'Université de Guelma,	**Examinateur**

REMERCIEMENTS

Pour m'avoir accueilli à maintes reprises au sein de son laboratoire, pour la confiance qu'il m'a témoigné, pour sa patience et sa direction scientifique avisée qui a guidé le développement de ce travail, j'exprime mes remerciements les plus vifs et les plus sincères à Monsieur Jean Louis Guyader, Professeur à l'INSA de Lyon.

Je voudrai témoigner de ma profonde gratitude à Monsieur Nacer Hamzaoui, Professeur à l'INSA de Lyon, qui guide ma carrière depuis fort longtemps, pour sa codirection de cette thèse, pour son soutien indéfectible, pour ses précieux conseils et sa disponibilité exceptionnelle qui fait de lui le directeur de thèse rêvé de tout doctorant.

Je tiens à remercier vivement les Professeurs Ammar Benchaala, Said Rechak, Mohamed Damou, Taoufik Boukharouba et Noureddine Ouelaa, pour avoir accepté de consacrer de leur temps pour évaluer et examiner cette thèse, et m'avoir honorer en participant au jury de soutenance et me faire bénéficier de leurs remarques.

Je voudrai également remercier tous les étudiants et post graduants qui ont largement contribué à l'avancement de mes travaux de recherche, je citerai particulièrement Mr Mahmoud Neder.

Un grand merci à Antoine Godoy, technicien au Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de Lyon qui a largement contribué à la conception et à la réalisation du dispositif expérimental lors de mon dernier passage au LVA, sans oublier ses encouragements et ses relations humaines que j'apprécie énormément.

Bien sûr, je ne peux pas oublier de citer l'ensemble du personnel du LVA, pour l'accueil chaleureux et leur soutien moral qu'ils m'ont réservé à chacun de mes stages au LVA. Je citerai tout particulièrement le Professeur Maurice Goteland qui m'a beaucoup orienté par ses précieux conseils.

Je voudrai remercier également mes collègues MM Bouzouane, Derouiche, Boukerroum, Ouali, Ahmed Benyahia, Azouaoui, et tant d'autres pour leurs encouragement et l'ambiance de travail qu'ils ont su créer au sein du Laboratoire de Mécanique Avancée de l'USTHB.

Je tiens spécialement à exprimer mes plus vifs remerciements et ma sincère reconnaissance à tous les auditeurs qui ont bien voulu subir le test de psychoacoustique dont les réponses ont été, dans l'ensemble cohérentes.

Enfin, un grand merci à ma femme Meriem et mes enfants Soumeya, Amira et Mehdi de m'avoir supporté durant ces longs mois de rédaction.

A la Mémoire de mon Père

SOMMAIRE

Introduction Générale 1

Chapitre I. Analyse Bibliographique et Position du Problème

I.1 Introduction 5
I.2 Position du problème 7
I.3 Influence la variation de l'épaisseur sur le rayonnement acoustique des plaques 7
I.4 La perception et la qualité sonore 8
I.5 Etude de l'impact 9
I.6 La synthèse sonore 11
I.7 Conclusion 12

Chapitre II. Formulation Vibratoire et Modélisation de l'Impact Sphère – Plaque

II.1 Introduction 14
II.2 Equations du problème 14
II.3 Conditions aux limites des plaques 16
II.3.1 Plaque appuyée sur ses quatre bords 16
II.3.2 Plaque encastrée sur ses quatre bords - Méthode de l'effet de bords (Bolotin) 17
II.3.3 Plaque appuyée sur deux bords opposés 21
II.4 Modélisation de l'impact sphère – plaque 22
II.4.1 Modélisation élastique de l'impact 23
II.4.1.1 Modèle bilan d'énergie 23
II.4.1.2 Modèles masse – ressort 25
II.4.2 Approche numérique de l'impact 26
II.4.2.1 Validation du modèle 27
II.4.2.2 Durée du contact 28
II.5 Analyses de la sensibilité de quelques paramètres 30
II.5.1 Effet de la masse de l'impacteur 30
II.5.2 Effet de la position de l'impact 31
II.5.3 Effet de la vitesse initiale de l'impact 31
II.6 Résolution du problème temporel 32
II.7 Conclusion 33

Chapitre III. Formulation Fréquentielle du Rayonnement Acoustique

III.1 Introduction 35
III.2 Etude vibratoire de plaques à épaisseur variable 35
III.2.1 Equations vibratoires 35
III.2.2 Réponse vibratoire de la plaque 37
III.2.3 Validation du calcul des fréquences propres 37
III.2.4 Réponse vibratoire forcée de la plaque 38
III.3 Rayonnement acoustique de la plaque 39
III.3.1 Définition du problème et solution classique 39

III.3.2 Intensité acoustique et puissance rayonnée par la plaque **40**
III.3.3 Calcul de la puissance rayonnée par utilisation des impédances de rayonnement **40**
III.3.4 Influence des impédances de rayonnement intermodales **41**
III.4 Etude numérique du rayonnement des plaques d'épaisseurs constantes et variables **43**
III.4.1 Effet de l'épaisseur sur le facteur rayonnement **43**
III.4.2 Effet de la variation de l'épaisseur sur le facteur rayonnement des plaques **45**
III.4.3 Effet d'un défaut géométrique sur le facteur de rayonnement **46**
III.5 Conclusion **48**

Chapitre IV. Formulation Temporelle du Rayonnement Acoustique et Synthèse Sonore

IV.1 Introduction **50**
IV.2 Formulation intégrale de l'équation d'onde **50**
IV.3 Résolution de l'intégrale de Rayleigh **53**
IV.3.1 Cas d'une plaque bafflée **53**
IV.4 Equation intégrale **53**
IV.5 Formulation intégrale simplifiée **56**
IV.5.1 Formulation intégrale complète **56**
IV.5.2 Simplifications **58**
IV.6 Conclusion **59**

Chapitre V. Validation des Résultats

V.1 Introduction **61**
V.2 Détermination de la réponse impulsionnelle de la plaque **61**
V.3 Validation du calcul des schémas modaux **63**
V.4 Validation du calcul vibratoire temporel **69**
V.5 Validation du calcul acoustique temporel **71**
V.5.1 Fonctions de transfert **71**
V.5.2 Influence du point d'écoute **74**
V.5.3 Analyse de la sensibilité de quelques paramètres **77**
V.5.3.1 Influence de l'épaisseur de la plaque **77**
V.5.3.2 Influence des conditions aux limites **77**
V.5.3.3 Influence de l'amortissement **77**
V.6 Analyse expérimentale **79**
V.6.1 Confrontations vibratoires **81**
V.6.2 Confrontations acoustiques **82**
V.6.3 Analyse des résultats **84**
V.6.3.1 Notions de plan d'expériences **91**
V.6.3.2 Réalisation des essais et résultats **93**
V.6.3.3 Dépouillement et exploitation des résultats **93**
V.6.3.4 Analyse graphique **95**
V.7 Conclusion **96**

Chapitre VI. Exploitations Numériques

VI.1 Introduction **99**
VI.2 Description des procédures de calcul **99**
VI.2.1 Description de la synthèse sonore **99**
VI.3 Propriétés du champ acoustique transitoire d'une plaque impactée **99**
VI.3.1 Déplacement transversal d'une plaque impactée **100**

VI.3.2 Symétrie radiale de l'onde de flexion **102**
VI.4 Analyses de la sensibilité de la pression acoustique à quelques paramètres **103**
VI.5 Analyse de la perception sonore **106**
VI.5.1 Principe général **107**
VI.6 Analyse des résultats subjectifs **108**
VI.6.1 Estimation de la moyenne et des effets moyens des différents facteurs **108**
VI.6.2 Dépouillement et exploitation des résultats **111**
VI.6.3 Analyse graphique **112**
VI.7 Analyse de la variance **113**
VI.7.1. Objet de cette étude **113**
VI.7.2 Principe de l'analyse **113**
VI.7.3 Estimation de la variance à partir des coefficients du modèle **114**
VI.7.4 Estimation de la variance de la variabilité naturelle **114**
VI.7.5 Résultat de l'analyse de la variance **115**
VI.8 Corrélation entre l'estimation et les résultats de préférence **117**
VI.9 Conclusion **122**

Chapitre VII. Conclusion Générale et Perspectives. **124**

Références Bibliographiques

Annexes

A1 Calcul de l'intensité acoustique sur la surface de la plaque
A2 Résolution de l'équation modale
A3 Etude vibratoire de plaques à épaisseur variable
A4 Résultats expérimentaux
A5 Description et analyse des tests perceptifs
A6 Table de Snedecor

NOMENCLATURE

Lettres majuscules

C : célérité du son dans l'air
C_{ijkl} : tenseur des constantes élastiques
D : rigidité de flexion de la plaque
D_0 : rigidité de flexion de la plaque à x = 0
E : module de Young
E^* : module de Young complexe
E_1 : module de Young de l'impacteur
E_2 : module de Young de la cible
E_{Ai} : Effet moyen du niveau i du facteur A
E_{bs} : énergie de flexion et de cisaillement
E_c : énergie de contact
E_m : énergie de membrane
F : vecteur force d'excitation
F_{crit} : facteur de Fisher Snedecor
F_I : la force d'impact
F_{mn} : force généralisée du mode (m,n)
G : fonction de Green explicite dépendant du temps
G(x) : fonction de variation de l'épaisseur
H(f) : fonction de transfert
I : intensité acoustique
I_z : intensité acoustique suivant z
K_{mn} : raideur généralisée du mode (m,n)
K_{mnkl} : tenseur de la raideur généralisée
K_1 : raideur de l'impacteur
K_2 : raideur de la cible
L_x : longueur de la plaque
L_y : largeur de la plaque
M : le point d'écoute
M_{mn} : masse généralisée du mode (m,n)
M_{mnkl} : tenseur de la masse généralisée
M_0 : un point de la surface vibrante
M_x : moment de flexion suivant y
M_y : moment de flexion suivant x
N_{mn} : la norme
N_x : nombre d'éléments suivant la direction x
N_y : nombre d'éléments suivant la direction y
P : pression acoustique
R : distance entre la source et le point d'écoute
R_1 : rayon de l'impacteur
R_{mnmn} : résistance de rayonnement modal
S_d : surface de contrôle
T : énergie cinétique
$\overline{T}$: moyenne générale
U_d : énergie de déformation
U_e : énergie potentielle externe
U_i : énergie potentielle interne
U_t : énergie potentielle totale
V : le domaine d'étude
V_a : la vitesse d'approche
V_i : la vitesse incidente de l'impacteur
V_n : la vitesse normale à la plaque
V(e) : variance de répétition
V(ε) : variance de résiduelle
Z_I : le déplacement de l'impacteur
Z_{mnmn} : impédance de rayonnement

Lettres minuscules

a : longueur de la plaque
a_{mn} : amplitude modale du mode (m,n)
b : largeur de la plaque
f : la fréquence
f_{mn} : fréquence propre du mode (m,n)
g : fonction de green explicite dépendant de la fréquence
h : épaisseur de la plaque
h_0 : épaisseur de la plaque à x = 0
h(t) : réponse impulsionnelle
h(x) : épaisseur variable de la plaque suivant la direction x
h(x,y) : épaisseur variable de la plaque suivant les directions x et y
k : nombre d'onde
k_{mn} : nombre d'onde du mode (m,n)
n_A : nombre de niveau du facteur A
n_B : nombre de niveau du facteur B
n_C : nombre de niveau du facteur C
q_{mn} : amplitude modale du mode (m,n)
$\overline{q}_{mn}$: amplitude complexe du déplacement
r : distance entre la source et le point d'impact
r_a : rayon de l'aire de contact
t : le temps
w : déplacement transversal de la plaque
x_0 : abscisse du point d'excitation

$\mathbf{x_1}$: déplacement de l'impacteur
$\mathbf{x_2}$: déplacement de la plaque
$\mathbf{y_0}$: ordonnée du point d'excitation

Lettres grecques

Δ : opérateur Laplacien
Φ_{mn} : déformée propre du mode (m,n)
Γ : contour de la plaque
Π_{ray} : puissance acoustique rayonnée
Ω : coefficient adimensionnel des fréquences propres
Ψ : fonctionnelle d'énergie
α : coefficient de variation de l'épaisseur
α_a : distance d'approche entre l'impacteur et la cible
δ : impulsion de Dirac
η : amortissement structural de la plaque
η_{mn} : amortissement structural équivalent du mode (m,n)
λ : rapport des dimensions de la plaque
λ_f : longueur d'onde de flexion
λ_{mn} : amortissement généralisé du mode (m,n)
ν : coefficient de Poisson de la plaque
ν_1 : coefficient de Poisson de l'impacteur
ν_2 : coefficient de Poisson de la cible
ρ : masse volumique
ρ_S : masse volumique de la structure
ρ_0 : masse volumique de l'air
τ : durée du contact lors de l'impact
σ_{ij} : tenseur des contraintes
σ_{mn} : facteur de rayonnement du mode (m,n)
ω : pulsation d'excitation
ϖ : amplitude complexe du déplacement harmonique de la plaque
ω_{mn} : pulsation propre du mode (m,n)

Abréviations

BEM : Méthode des éléments finis aux frontières (Boundary Element Method)
CL : Conditions aux limites
EDP : Equation aux Dérivées Partiels
FDM : Finite Difference Method
FEM : Méthode des éléments finis (Finite Element Method)
FFT : Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform)
Pref : préférence
SCE : Somme des Carrés des Ecarts
SLI : Système linéaire Indépendant
SCSC : Supported – Clamped - Supported – Clamped plate
SCSF : Supported – Clamped - Supported – Supported plate
SFSC : Supported – Free - Supported – Clamped plate
SFSF : Supported – Free - Supported – Free
SFSS : Supported – Free - Supported – Supported
SSSS : Supported – Supported - Supported – Supported plate
SVD : Singular Value Decomposition
TFI : Transformée de Fourier Inverse
ddl : degrés de liberté

En plus de la présentation des principales notations utilisées dans ce document, et dans un souci de faciliter la tâche au lecteur, nous avons jugé utile de présenter ici les principaux tests et leurs objectifs, utilisés en analyse perceptive.

Test de similarité

Ce test consiste à déterminer le degré de similarité entre deux sons en positionnant un curseur sur une échelle allant de très semblables à très dissemblables.

Celui-ci a pour but de positionner les sons dans un espace de dimension finie afin de déterminer les significations perceptives de ces dimensions puis d'en déduire les paramètres physiques et/ou acoustiques qui influent sur la perception des sons rayonnés.

Test de ressemblance

Ce test consiste à déterminer le degré de ressemblance entre deux sons en positionnant un curseur sur une échelle allant de très semblables à très différents.

Test d'agrément

Ce test consiste à évaluer le degré d'agrément d'un son en positionnant un curseur sur une échelle allant de très agréable à très désagréable.
Le but de ce test est de déterminer les paramètres mécaniques et/ou acoustique influençant la sensation d'agrément produite par ces sons.

Test de préférence

Ce test consiste à évaluer la préférence de l'auditeur pour l'un ou l'autre des deux sons qui se présente à lui. La valeur associée à la préférence varie de 0 à 1 selon la position du curseur (distance) entre les deux sons.

Test d'appariement forcé

Ce test consiste à présenter à l'auditeur deux série de sons et de demander à l'auditeur d'apparier les sons par paires, c'est à dire à regrouper par paire les sons qui se ressemblent.
Ce test est utilisé par exemple pour comparer des signaux réels et des signaux synthétisés correspondant.

Test d'appariement libre

Ce test consiste à présenter à l'auditeur une série de sons et de demander à l'auditeur d'apparier les sons par classes de ressemblance qu'il aurait lui même défini selon le principe ‘‘ qui se ressemble, s'assemble ’’

Test de reconnaissance

L'objectif de ce type de test, est la recherche d'une meilleure qualité sonore de la restitution.

RESUME

Notre étude a pour objectif de combiner les approches de la vibroacoustique et de la psychoacoustique pour évaluer les qualités sonores du rayonnement acoustique de plaques vibrantes, sous l'effet de différentes sollicitations.

Dans une première approche (fréquentielle), nous avons proposé une modélisation du comportement vibroacoustique d'une plaque à épaisseur variable. Le calcul de la puissance rayonnée a été effectué par intégration de l'intensité exacte et par l'utilisation des impédances de rayonnement.

L'approche intégro-modale nous a permis aussi d'évaluer l'effet du couplage intermodal qui est souvent négligé lors d'un calcul d'un rayonnement dans un fluide léger tel que l'air.

Dans la seconde approche (temporelle), nous avons modélisé numériquement le son produit par une plaque impactée, en un point donné de l'espace. Ce modèle est basé sur la résolution de l'intégrale de Kirchoff, qui est généralement utilisée dans le domaine fréquentiel et qu'on peut l'adapter dans l'espace temporel. Les signaux calculés à partir du modèle peuvent alors être exploités pour des tests psychoacoustiques destinés à évaluer, soit la qualité proprement dite des sons, soit plus généralement les effets perceptifs associés aux caractéristiques physiques des signaux acoustiques et donc aux paramètres mécaniques de la plaque ainsi que la caractérisation de l'impact.

Une étude expérimentale, de rayonnement acoustique de plaques impactée a été mené afin de vérifier expérimentalement l'influence de certains paramètres sur le niveau de pression mesuré. Les paramètres retenus pour cette étude expérimentale étaient : le matériau, la position du point d'impact ainsi que la position du point d'écoute.

Enfin, les sons synthétisés par le modèle élaboré, ont été soumis à un test psychoacoutique de perception sonore à une trentaine d'auditeurs. Dans ce cas, les paramètres retenus pour les douze sons étaient : le matériau, les conditions aux limites ainsi que la position du point d'impact. Quant au test perceptif, nous avons retenu le test de préférence.

Les résultats obtenus ont été soumis à trois type d'analyse : analyse graphique des plans d'expériences de Tagushi, l'analyse de la variance ainsi qu'une étude de corrélation entre l'estimation issue d'un modèle de préférence déduite du plan d'expérience et les résultats de préférence issus du test psychacoustique.

ABSTRACT

Our study aims to combine vibroacoustic and psychoacoustics approaches to evaluate sound qualities of the acoustic radiation of vibrating plates, under different solicitations effect.

In a first approach (frequency domain), we proposed a vibocoustic modelling of the behaviour of a plate with a linear varying thickness. The calculation of the radiated power has been done by integration of the exact intensity and the use of the radiance impedances.

The modal approach also permitted us to evaluate the effect of the intermodal coupling which is often neglected during a radiation calculation in a light fluid such as the air.

In the second approaches (temporal domain), we numerically modelled the sound generate by an impacted plate, in a given point of space. This model is based on the integral Kirchoff resolution which is generally used in frequencies domain which can be adapted for the temporal domain. Signals calculated from the model can be exploited then for psychoacoustics tests intended to evaluate, either the sounds quality, or more generally the perceptive effects associated with the physical characteristics of the acoustical signals and thus with the plate mechanical parameters as well as the characterisation of the impact.

An experimental study, of an impacted plate acoustic radiation has been done in order to verify experimentally some parameters influences on the measured pressure level. The parameters retained for this experimental study were: the material, the position of impact point as well as the listening point position.

Finally, the synthesized sounds by the elaborate model, were subjected to a psychoacoustics sound perception test to thirty listeners. In this case, the parameters retained for the twelve sounds were: material, boundary conditions and the impact point position. The psychoacoustics test we retained the preference test.

The obtained results were subjected to three analysis types : graphical analysis of Tagushi's experimental designs, the variance analysis either a correlation study between the estimate resulting from the preference model deduced from the experimental design and the preference results from the psychoacoustics test.

INTRODUCTION GENERALE

La présente étude a pour objectif de combiner les approches de la vibroacoustique et la perception sonore du rayonnement acoustique de plaques vibrantes. Ce travail a été réalisé conjointement au Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de Lyon et le Laboratoire de Mécanique Avancée de l'USTHB, et s'inscrit dans le cadre d'un axe de recherche sur la Maintenance Vibro-Acoustique, thème partagé par les deux Laboratoires. Il convient, dans un tout premier temps, de situer le sujet, dans son contexte et de préciser quels en sont les objectifs.

Les études de rayonnement de structure, autrefois limitées aux caractéristiques physiques des signaux acoustiques rayonnés, se complémentent maintenant de plus en plus d'une évaluation perceptive des sons produits.

En effet, l'image sonore est aujourd'hui un élément important d'appréciation de la qualité des produits ; la simple qualification du niveau acoustique en dBA ne suffit pas toujours pour traduire la perception sonore des utilisateurs. Le confort acoustique qui est souvent un motif de plaintes par la clientèle, pousse les industriels à l'amélioration de la qualité du bruit de leur produit.

Pour évaluer la perception sonore, il faut donc disposer d'échantillons sonores exprimés dans le domaine temporel. Le passage par la méthode fréquentielle, pour la reconstitution des signaux sonore via la TFI exige un balayage assez loin en hautes fréquences ce qui s'avère très coûteux en temps de calcul.

Le but de cette étude est de comprendre l'influence des défauts structuraux sur le rayonnement acoustique, dans le domaine fréquentiel, d'une part, et d'autre part, de jeter les bases d'un outil qui permette de synthétiser, dans le domaine temporel, le son généré par des plaques vibrantes sous l'influence de différents types de sollicitations, tout particulièrement le cas d'un impact.

Notre travail consiste donc à mettre en oeuvre des outils de simulations numériques du comportement vibroacoustique de plaques à épaisseurs linéairement variables et ceux appliqués à la synthèse sonore, alliant précision et capacité de prédiction.

Lors des deux dernières décennies, le calcul du rayonnement acoustique des structures a fait l'objet, d'un effort scientifique conséquent. On maîtrise aujourd'hui les principaux phénomènes, et on dispose d'outils de calcul puissant disponible dans le commerce. Cependant la prévision du comportement vibroacoustique des structures reste difficile et l'écart calcul-mesure est souvent fort sans que l'on sache exactement d'où il provient. L'acoustique des automobiles fournit un exemple où des objets industriellement identiques, c'est à dire possédant des dispersions structurales faibles, peuvent avoir des comportements vibroacoustiques assez différents.

Dans un deuxième temps, le problème particulier considéré est le suivant : on cherche à synthétiser la pression générée par une plaque rectangulaire en acier ou en aluminium, simplement appuyée ou encastrée sur ses quatre bords, sur laquelle vient percuter un impacteur à bout sphérique.

Une fois la synthèse sonore, établie, nous soumettons, alors, les signaux de synthèse sonore à l'écoute, en vue d'une analyse perceptive. Le fait de pouvoir écouter la solution numérique d'un modèle physique présente en effet un double intérêt :

- Pour les physiciens : de par les grandes capacités d'analyse et de discernement de l'oreille humaine, celle-ci constitue un outil extrêmement puissant pour évaluer la pertinence de la mise en équations d'un modèle physique. La comparaison par l'écoute des sons réels et simulés permet de détecter des erreurs de modélisation qu'il

est parfois difficile de mettre en évidence en appliquant des critères objectifs ou en comparant des courbes de résultats.

- Pour les psychoacousticien : l'évaluation de l'influence des paramètres physiques et géométriques en terme de critères subjectifs est largement facilitée grâce aux possibilités de contrôles offertes par la simulation numérique.

Dans ce contexte, la qualité du bruit associée à tout produit industriel est un concept dont l'importance s'affirme de jour en jour. L'étude subjective d'un bruit permet en effet de cerner les composantes agréables et désagréables contenu dans un bruit ainsi que les causes qui y sont rattachées. En effet, à défaut de vouloir filtrer toutes les composantes fréquentielles d'un bruit, ce qui peut paraître utopique voire dangereux pour des raisons de sécurité par exemple, on s'intéresse de plus en plus à ce que le bruit soit le moins désagréable possible. De nos jours, les industriels ont saisi toute l'importance d'une telle approche et intègrent désormais dans leur étude une approche qualitative du bruit émis par leur produit.

L'analyse subjective de l'influence de quelques paramètres physiques sur le rayonnement acoustique de plaques est en soi une première approche du problème général suivant : peut-on prédire la qualité sonore d'une structure soumise à une excitation quelconque ?

L'originalité d'une telle étude repose sur le fait qu'elle a amené à décrire le comportement vibratoire de plaques et le rayonnement acoustique associé dans le domaine temporel. Ainsi nous avons pu obtenir facilement des fichiers de synthèse sonore directement utilisables pour des tests perceptifs.

Le présent document se décompose de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré à une revue bibliographique des principaux travaux réalisés dans le domaine du comportement vibroacoustique des plaques vibrantes, ainsi que les récentes applications de la perception sonore sur les structures vibrantes telle que les plaques.

Le second chapitre, traite l'analyse vibratoire des plaques sous différentes conditions aux limites, tout particulièrement le cas de plaques encastrées partout pour lesquelles nous avons utilisé une intégration numérique par calcul symbolique pour l'analyse modale. En outre, nous avons proposé notre approche, basée sur un algorithme numérique, que nous avons validé par des résultats issus de la bibliographie. Nous avons également présentés quelques modèles de l'impact sphère-plaque, et les références de base permettant la validation de la force d'interaction, entre la plaque et l'impacteur, développée dans notre approche.

Le troisième chapitre est consacré à la formulation fréquentielle du rayonnement acoustique de plaques à épaisseurs constante et variable tout en analysant l'influence des défauts structuraux sur le comportement vibroacoustique des plaques.

Dans le quatrième chapitre est abordé le problème du rayonnement par approche temporelle pour la synthèse sonore. Il s'agit de déterminer, dans le domaine temporel, la pression acoustique rayonnée par une structure vibrante ; en l'occurrence : une plaque impactée par un impacteur à bout sphérique.

La validation des résultats vibratoires et acoustiques, obtenus sur la base des théories élaborées dans les chapitres précédents, ont fait l'objet du cinquième chapitre. De même une comparaison simulation – expérience permettant de valider l'ensemble du modèle (physique et numérique) a été présentée.

Dans le sixième chapitre, consacré à l'exploitation numérique, nous avons introduit une approche perceptive permettant d'exploiter les fichiers de synthèse sonore obtenus, et enfin de

faire une corrélation entre l'analyse subjective de la préférence, avec quelques paramètres physiques retenus. Un plan d'expérience est utilisé pour exploiter les résultats et extraire un modèle de préférence à partir de ces paramètres.

Enfin, nous terminons ce document par une conclusion générale et les perspectives qui s'ouvrent à cette étude.

CHAPITRE I

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

ET POSITION DU PROBLEME

I.1. Introduction

L'étude du rayonnement acoustique peut être abordé selon deux approches : la première fréquentielle et la seconde, temporelle dont les objectifs peuvent être différents mais complémentaires.

L'approche fréquentielle a fait l'objet de la première partie qui a pour objectif l'évaluation des effets sonores dus à la présence de défauts structuraux telle que l'épaisseur. A cet effet, nous nous sommes intéressé au rayonnement acoustique de plaques à épaisseurs linéairement variables. L'application industrielle d'une telle étude concerne le capotage des machines. Ce type de plaques est d'une importance immense en engineering de constructions aérospatiales (ailes d'avions), mécaniques et océanographiques. Leur usage est aussi répandu en génie civil (constructions parasismiques) et dans les équipements électroniques et optiques. Pour le confort acoustique leur conception nécessite une étude vibro-acoustique afin de déterminer leur rayonnement acoustique dans leur milieu opérationnel dans le but de le prendre à un niveau acceptable.

Par contre, les approches de prédictions du rayonnement acoustique dans le domaine temporel est en étroite liaison avec la perception sonore. Celle-ci s'intéresse plus particulièrement à l'évaluation subjective d'un calcul de rayonnement acoustique par rapport à une mesure, afin d'estimer qualitativement l'écart objectif entre un calcul et une mesure, et définir ainsi les paramètres prépondérants à connaître avec précision comme données d'entrée aux calculs.

La formulation du rayonnement acoustique dans le domaine temporel est un sujet d'actualité et revêt un intérêt certain. En effet, une des raisons d'une telle étude est le fait, qu'à partir des signatures dans le domaine temporel, on peut extraire certaines informations concernant la géométrie et/ou la composition du matériau des corps en question. Ainsi Stepanishen (1990) a traité le rayonnement transitoire et la propagation issus d'une charge fluide appliquée à des oscillateurs mécaniques, des membranes et des plaques par utilisation du domaine temporel. Le champ de pression est exprimé comme la somme des intégrales de convolutions mettant en jeu des réponses modales impulsionnelles et de vitesses exprimées dans le domaine temporel. L'ensemble des équations couplées des intégrales de convolution son développées pour mettre en relation les coefficients de la dépendance temporelle modale de la vitesse avec les forces modales des oscillateurs en question. La forme des équations couplées des intégrales de convolution est notée la même pour le cas d'une discrétisation spatiale ou continue des oscillateurs et les équations sont résolues par une procédure de balayage progressif dans le temps. Les résultats obtenus dans l'article, illustrent clairement l'effet des forces temporelles du rayonnement provoqué sur la réponse des oscillateurs. En général une diminution, dans le vide, des fréquences propres et un changement du facteur de qualité clairement observé en basses et moyennes fréquences des oscillateurs. Par contre, en hautes fréquences, on observe une diminution du facteur de qualité et régime établi pour le temps en raison du facteur de perte par rayonnement.

Par ailleurs, la formulation dans le domaine temporel de la méthode des sources équivalentes peut être appliquer à des problèmes de rayonnement et de dispersion. Le concept des sources équivalentes est traditionnellement utilisé dans le domaine fréquentiel et représente une alternative séduisante à la méthode des éléments frontières (BEM) pour le calcul du son rayonné par des structures de formes arbitraires, principalement grâce à une puissance de calcul nécessaire moindre pour la méthode des sources équivalentes que pour la BEM. La formulation dans le domaine temporel conduit à une nouvelle amélioration de la méthode. Un algorithme plus rapide et par conséquent une plus faible puissance de calcul nécessaire sont le résultat d'un passage du domaine fréquentiel dans le domaine temporel.

C'est d'ailleurs ce qu'ont utilisé Kropp et Svensson (1995), pour calculer le son rayonné par une plaque simplement appuyée, excitée par une force impulsion unité. Cette plaque est le coté d'une boite rectangulaire dans laquelle les autres parois sont supposées rigides. La méthode utilisée n'est pas restreinte aux phénomènes transitoires car le produit de convolution entre la fonction de Green et un signal arbitraire représentant la source peut toujours être calculé.

Pour la projection des champs acoustiques harmoniques, les méthodes de Fourier ont prouvé leur utilité. Ainsi l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT) permet de prendre deux dimensions du champ de pression dans un plan en face d'un transducteur plan ou d'une surface et de projeter le champ en avant ou en arrière pour trouver les champs de pression et de vitesse particulaire dans un plan loin ou proche de la source. Dans ce contexte, Forbes et al. (1995) ont étudié l'influence de la distance entre les deux champs de pression en question. Ainsi un champ de pression, représenté par un vecteur d'onde exprimé dans le domaine temporel, en un plan donné, peut être projeté, en un plan par une convolution dans le domaine temporel avec le vecteur d'onde de la réponse impulsionnelle. Le champ de pression est ainsi obtenu par l'utilisation de la transformée de Fourier inverse TFI. Ceci est particulièrement utile pour la reconstruction du champ des vitesses de la source à partir de la mesure du champ de pression devant la source. Ainsi, Fleischer et Axelrad (1986) ont utilisé le filtrage de Wiener pour la reconstitution d'une source sonore à partir de données de la pression.

L'étude du rayonnement acoustique des transducteurs est essentielle pour la représentation du système d'écho par impulsions ultrasoniques, utilisé dans les applications numériques de l'acoustique. Les transducteurs peuvent être conduits à une seule fréquence (excitation par une onde continue) ou par des excitations ayant une large gamme de fréquences. D'après Satyapal et Stepanishen (1993), beaucoup d'applications ultrasoniques mettent en jeu l'excitation impulsionnelle des éléments du transducteur incluant la caractérisation du matériau utilisé pour les évaluations non destructives, l'imagerie médicale ainsi que pour les systèmes de sonars sous-marins.

L'étude dans le domaine temporel peut aussi être utilisé pour la prédiction du champ acoustique rayonné par des structures vibrantes à trois dimensions. Ainsi Gouegou, Piwakowski et Delannoy (1995) se sont basés sur l'approche de la réponse impulsionnelle spatiale pour illustrer l'exemple d'une plaque rectangulaire bafflée et qu'ils ont validé par une étude expérimentale.

Les techniques de synthèse sonore par modèles physiques ont été introduites par Hiller et Ruiz (1970) dans les années 70 dans le cas d'une corde vibrante. Ces techniques permettent de contrôler le son par plusieurs quantités physiques, comme le déplacement, la vitesse, la pression ou la force qui sont directement liées aux sensations de l'oreille humaine. Le principe de base consiste à modéliser le système par des équations aux dérivées partielles qui décrivent les vibrations des structures, puis à discrétiser ces équations dans le domaine temporel.

La synthèse par simulation numérique est à l'origine un outil permettant de valider un modèle en comparant son comportement par rapport au comportement naturel du système mécano-acoustique étudié. Il est important de noter que la finalité première des simulations n'est pas de réaliser la structure en question, mais uniquement de valider quelques propriétés du modèle. Il s'agit donc d'aboutir à un modèle qui possède le plus de similitudes possibles avec le modèle naturel, afin de pouvoir identifier le modèle à la réalité physique et acoustique du système.

I.2. Position du problème

Le travail de notre thèse s'articule autour de deux grands axes : l'influence des défauts structuraux sur le rayonnement acoustique et la description du phénomène du bruit rayonné, exprimé dans le domaine temporel.

Pour le premier axe, nous, nous sommes intéressé à une problématique très importantes en vibroacoustique qui est donc de comprendre l'influence des défauts structuraux sur le rayonnement acoustique. Plusieurs travaux, ont montré le phénomène d'hypersensibilité dans les assemblages de plaques apparaissant pour de très faibles défauts des angles de jonctions.

Dans ce contexte, nous avons choisi de nous intéresser à la variation d'épaisseur de plaques planes. Ce paramètre est, en effet, très important en lutherie où le travail de finition, en vue d'un bon rendu musical consiste à affiner certaines partie de l'instrument.

Notre premier objectif est donc l'analyse de l'influence des défauts d'épaisseurs sur le rayonnement acoustique des structures. Pour le second, nous, nous intéressons à la synthèse sonore en vue d'une analyse perceptive des sons produits par des plaques impactées.

I.3. Influence de la variation d'épaisseur sur le rayonnement acoustique des plaques

Le calcul du rayonnement acoustique des structures a fait l'objet, lors des deux dernières décennies, d'un effort scientifique conséquent. On maîtrise aujourd'hui les principaux phénomènes, et on dispose d'outils de calcul puissants disponibles dans le commerce. Cependant la prévision du comportement vibroacoustique des structures reste difficile et l'écart calcul-mesure est souvent fort sans que l'on sache exactement d'où il provient. L'acoustique des automobiles fournit un exemple où des objets industriellement identiques, c'est à dire possédant des dispersions structurales faibles, peuvent avoir des comportements vibroacoustiques assez différents (Kompella et al., 1993).

Une problématique importante en vibroacoustique est donc de comprendre l'influence de défauts structuraux sur le rayonnement acoustique des structures. Les travaux de Rebillard et Guyader (1995), ont montré le phénomène d'hypersensibilité dans les assemblages de plaques, apparaissant pour de très faibles défauts des angles de jonctions.

Dans ce contexte, nous avons choisi de nous intéresser à la variation d'épaisseur des plaques planes. Ce paramètre est, en effet, important en lutherie où le travail de finition, en vue d'un bon rendu musical consiste à affiner certaines parties de l'instrument.

Dans cette partie, notre objectif est donc l'analyse de l'influence des défauts d'épaisseurs sur le rayonnement acoustique des structures. Afin de dégager les tendances, nous avons considéré un cas simple : une plaque rectangulaire, d'épaisseur linéairement variable, insérée dans un baffle plan, et sollicitée par une force harmonique ponctuelle. Le modèle théorique est basé sur l'approche intégro-modale, utilisant une décomposition de la réponse sur la base des modes propres d'une plaque à épaisseur constante et la représentation intégrale de simple couche pour la pression acoustique rayonnée.

Dans un premier temps, nous montrons si les simplifications classiques du calcul pour les plaques d'épaisseur constante (impédances de rayonnement intermodales négligées, couplage faible,…), restent valables pour une première approximation du rayonnement des plaques d'épaisseur variable.

Nous, nous intéressons, dans un deuxième temps, à la comparaison du comportement de plaques à épaisseurs constantes et une plaque à épaisseur linéairement variable. Nous analysons plus particulièrement leurs comportements à travers trois paramètres classiques de

la vibroacoustique : l'énergie vibratoire, la puissance acoustique rayonnée et le coefficient de rayonnement.

Enfin l'analyse de l'influence de la variation d'épaisseur est effectuée par rapport au rayonnement d'une plaque à épaisseur constante de même masse.

Dans certaines configurations industrielles, la variation de masse est localisée, cette situation sort du cadre de notre approche où la variation est continue. Cette situation d'hétérogénéité locale a fait l'objet de plusieurs publications (voir par exemple, Sandman (1977) et Rebillard (1992)).

I.4. La perception et la qualité sonore

Habituellement, les études de rayonnement des structures étaient généralement limitées aux seules caractéristiques physiques des signaux acoustiques. La part de l'analyse perceptive reste encore assez faible dans ces études. Les approches perceptives peuvent compléter très utilement les études physiques, afin d'extraire des informations permettant d'utiliser des méthodes d'analyses physiques et ainsi mieux choisir les réponses techniques à un problème de bruit.

La qualité du bruit émis par les produits industriels fait donc l'objet de nouvelles études en acoustique : ce nouvel axe de recherche ne concerne plus seulement le niveau de puissance sonore et sa réduction, mais aussi la sensation auditive et l'expérience subjective de l'individu.

Le bruit n'est pas simplement un phénomène physique, expliqué par les caractéristiques physiques des ondes acoustiques se propageant dans l'air, et par les caractéristiques des systèmes mécaniques en vibration le produisant. La caractérisation subjective des bruits, ses attributs relatifs à la perception sonore de l'individu, devient de plus en plus un aspect prioritaire pour un nombre croissant de secteurs industriels.

Ainsi les différents test psychoacoustiques sont destinés soit à évaluer la qualité proprement dite des sons, soit à évaluer les effets perceptifs associés aux caractéristiques physiques des signaux acoustiques et donc aux paramètres mécaniques de la structure.

Du point de vue de la recherche fondamentale, on observe un développement des études dites psychomécanique (McAdams, 2000), c'est à dire alliant les aspects vibroacoustique et psychoacoustique des problèmes de rayonnement. La plus approfondie de ces études est celle de Roussari (1999). Exploitant un modèle conçu par Chaigne et ses collègues (2001), il a examiné les divers attributs perceptifs de sons synthétiques simulant des rayonnements de barres ou de plaques frappées. L'un des pionniers en la matière semble avoir été Freed (1989), qui a procédé à des tests d'écoutes de sons émis par des objets métalliques frappés par un maillet et mis en évidence que les auditeurs pouvaient ressentir et évaluer la dureté du maillet. Une préoccupation similaire apparaît dans les articles de Lutfi et Oh (1997) et de Lutfi (2001), respectivement consacrés à la discrimination auditive de changement de matériau constituant des barres encastrées et à la détection auditive d'une portion creuse dans une tige solide en vibration.

Le problème de la qualité acoustique a particulièrement été étudié par Marquis Favre et ses collaborateurs (2001). Ces derniers ont surtout testé la transmission de bruit blanc à travers un modèle de plaque dont ils fixaient indépendamment les caractéristiques mécaniques telles que l'épaisseur, la densité, le module d'Young et l'amortissement. Les études portaient à la fois sur l'efficacité de la transmission et sur la qualité du signal transmis.

Dans une récente étude, Canevet et al. (2002) se sont intéressé à l'analyse auditive de vibrations transitoires de plaques. Le problème abordé et qui faisait suite à une pré-étude sur la qualité sonore de vibrations de structures (Meunier (2001)) est celui du rayonnement, par des plaques encastrées, de signaux brefs, induits par des excitations transitoires. L'originalité de ce travail, résidait dans l'approche théorique utilisée pour modéliser les vibrations et calculer le champ de pression acoustique engendré par cette vibration. En effet le modèle utilisé est basé sur un développement de la pression rayonnée en série de modes de résonance, qui est particulièrement bien adapté au domaine temporel, donc aux régimes transitoires. Les signaux calculés à partir du modèle ont été exploités pour des tests psychoacoustiques. Deux types de mesures ont été réalisées. D'une part, par une méthode d'estimation directe, où on évalue la qualité intrinsèques des sons. D'autre part, en procédant à une comparaison deux à deux de ces sons et de demander aux auditeurs d'indiquer le degré de dissamblance des sons de chaque paire. A cet effet, un ensemble de signaux a été calculé, pour une plaque encastrée bafflée et correspondant à des variations du point d'excitation, de l'amortissement et de la durée du signal d'excitation. Les tests perceptifs réalisés dans cette étude étaient : le test de similarité et le test d'agrément. L'analyse multidimensionnelle utilisée dans cette étude non métrique et sans pondération a permis d'observer finement l'influence respective des paramètres tels le timbre du signal, lié à l'excitation, et son aspect plus ou moins étouffé qui est, lui, directement lié à l'amortissement. Ce type d'analyse permet de mettre en évidence l'influence de chacun des paramètres mécaniques de la structure et de l'excitation.

I.5. Etude de l'impact

Le problème d'impact a suscité un grand intérêt chez les chercheurs depuis plusieurs années dans le but de comprendre le phénomène et les mécanismes d'endommagement, d'une part, et ceux du rayonnement acoustique d'autre part, pour une bonne prévention et une meilleure conception des structures. Dans ce domaine, l'approche de base a été proposé par Timoshenko (1913). Il a combiné la théorie des poutres d'Euler et la loi du contact hertzien pour étudier le problème d'impact, à faible vitesse, entre une bille en acier et une poutre élastique. L'approche a été par la suite appliquée à l'étude des plaques et coques soumises aux chocs.

Des modèles simplifiés du problème d'impact ont été également présentés par divers auteurs (Lee, 1940 ; Greszczuk, 1982 ; Lee et al., 1983 ; Shivakumar et al., 1985) pour surmonter la difficulté de résolution de l'équation intégrale non linéaire causée par la relation non linéaire de la loi du contact de Hertz. Nous présentons dans ce qui suit, d'une manière détaillée, quelques modèles élaborés par les différents chercheurs.

Un impact peut être représenté de manière globale par un bilan énergétique. L'avantage principal de ce type de présentation, réside dans le fait que les paramètres d'entrée sont directement des paramètres caractéristiques de l'impact : vitesse incidente, propriétés géométriques et mécaniques de la plaque et de l'impacteur.

Dans ses travaux, Greszuk (1982) a modélisé l'impact en sommant l'énergie de contact à celle de flexion. Shivakumar (1985) a amélioré le modèle précédent en couplant à la flexion une rigidité de cisaillement K_S et en introduisant une rigidité de membrane K_m dans le cas des plaques minces, en se basant sur les travaux de Rayleigh (1906) qui a montré que si la durée de contact, entre deux corps, est très longue devant leurs fréquences propres, alors les vibrations sont négligeables et la loi de Hertz (1881) peut être appliquée.

Ce modèle a également été utilisé par Benmedekhène (1996), qui a fait des prédictions des valeurs de déplacements et des charges maximales en fonction des énergies d'impact. Dans cette étude il a montré que les valeurs du modèle restent proches de l'expérience dans

les basses énergies où les faibles endommagements ne changent pas le comportement global de la plaque.

Le modèle basé sur le bilan d'énergie présenté précédemment permet de calculer les valeurs ultimes des déplacements et des forces, mais il ne permet pas de prédire l'histoire du chargement, de la vitesse ou du déplacement. Par contre, l'utilisation du modèle masse - ressort permettra de retracer toute l'histoire des différents paramètres de l'impact.

Différents types de modèles masses – ressorts ont été développés pour modéliser l'impact à basse vitesse. La caractéristique principale de ce type de modèle consiste dans le fait qu'ils ne prennent en compte aucune localisation de la déformation. Ainsi l'énergie incidente du projectile est absorbée sur tout le volume de la plaque.

Parmi les plus importants modèles présentés dans la littérature, celui de Caprino et al. (1984) est cité. Ces auteurs présentent l'impact par un seul degré de liberté. La rigidité du ressort K correspond à la rigidité statique de la plaque. Une bonne corrélation, entre la force calculée et mesurée, est constatée jusqu'à une vitesse de 2.5m/s.

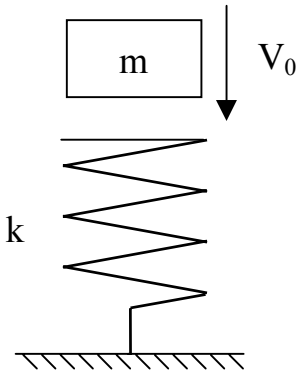


Figure I.1. *Modèle à un degré de liberté, Caprino et al (1984).*

Dans ce type de modèle, les effets de flexion et d'inertie de la plaque ne sont pas pris en considération, d'où les limites d'utilisation pour des vitesses plus importantes.

Sjoblom et al. (1987) ont alors suggéré un modèle à deux degrés de liberté qui permet d'intégrer la non linéarité au niveau du contact,. Avec ce modèle, il est possible de découpler le contact et la rigidité de la plaque.

Néanmoins, les effets de cisaillement localisés autour du point d'impact, importants pour les plaques épaisses ou pour les vitesses très élevées, ne sont pas pris en compte.

C'est pourquoi Lal a développé un modèle à trois ressorts K_c, K_b et K_s représentant respectivement les rigidités de poinçonnement, de flexion et de cisaillement. Ce modèle reste valable dans le case des petits déplacements, mais diverge pour les grands déplacements.

Shivakumar et al. (1985) ont alors pris en considération les effets de membranes en utilisant des modèles masses – ressorts à un et deux degrés de liberté avec quatre ressorts de rigidité K_m , K_b, K_s et K_c. Les indices m, s, b et c représentent respectivement la membrane, le cisaillement, la flexion et le contact de la plaque avec l'impacteur.

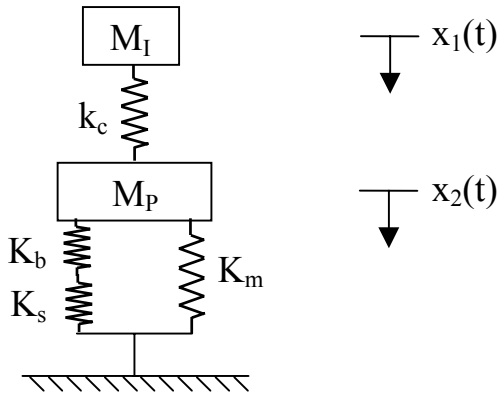


Figure I.2. *Modèle à deux degrés de liberté, Shivakumar et al (1985).*

Dans ce modèle, les deux masses M_I et M_P sont connectées par un ressort hertzien représentant la loi de charge – déformation du contact. Les propriétés force – déformation transversales sont représentées par la combinaison des ressorts de flexion, de cisaillement et de membrane.

I.6. La synthèse sonore

La synthèse sonore est une étape primordiale, dans toute étude perceptive ; elle concerne la constitution des sons à analyser. On doit d'abord, définir les configurations d'étude de la structure en question intégrant par exemple la durée de chaque échantillon sonore. Ensuite il faut s'assurer de la qualité de restitution des sons synthétisés par des tests de reconnaissance.

Notre but étant de mettre en œuvre un outil de synthèse sonore, dans le cas de plaques impactées. Nous, nous sommes limité à l'étude du domaine 0 ÷ 10 kHz, plage, où nous estimons que l'essentiel de l'information sonore intervient. L'intérêt de pouvoir s'imposer ces valeurs limites réside dans le fait qu'elles nous permettront de justifier l'application du modèle plaques minces, uniquement valable en basses fréquences.

Dans la thèse de Lambourg (1996), l'auteur a effectué une série de simulations sur les impacts sphère - plaque, où il est apparu que le signal de pression présentait un pic trop important au moment de l'impact. Ce phénomène s'est avéré très gênant à l'écoute, produisant un son sourd peu naturel. En effectuant des comparaisons avec des signaux mesurés, il s'est aperçu que l'amplitude de la pression simulée était effectivement surestimée au moment de l'impact.

La lecture de Igarashi (1985), nous permet de comprendre et de corriger en partie cette aberration dans la synthèse. Cet auteur de manière essentiellement qualitative les différentes phases de la génération d'un bruit d'impact pour un problème de collision plaque libre-sphère. D'après Igarashi (1985), on peut découper la forme d'onde du signal de pression en deux parties :

a) la première correspond à la durée du contact entre la sphère et la plaque. La moyenne spatiale de l'accélération de ces deux éléments est alors non nulle. Etant donné que l'efficacité de rayonnement d'une plaque vibrant en piston plan est largement supérieure à celle associée à l'onde de flexion, la principale contribution au rayonnement provient des mouvements de corps rigide de la plaque et la sphère.

b) dès que les deux éléments ne sont plus en contact, leur accélération devient nulle en moyenne. Seule la plaque contribue au rayonnement à travers ses modes de vibration.

Des simulations, par différences finies de collisions entre une sphère et une barre ont été réalisées par Doutaut (1995) au laboratoire d'acoustique de l'ENST (France). Ces travaux ont conduit à une modélisation très convaincante du rayonnement acoustique des instruments de percussion à clavier où des barres de section variable sont percutées par un maillet. En particulier il a été souligné l'intérêt d'appliquer une méthode temporelle pour simuler ce type d'interaction qui est fondamentalement non linéaire et généralement de durée très brève.

L'approche la plus directe pour caractériser le rayonnement d'une source sonore consiste à écrire l'équation des ondes de pression pour le fluide dans lequel elle baigne. Les équations sont alors des EDP qui peuvent être traitées à l'aide de méthodes numériques telles que les éléments finis ou les différences finies (Lambourg, (1996)). Elles consistent pour la FEM, à projeter les équations sur une base de fonctions d'essai et, pour les FDM, à discrétiser les opérateurs différentiels. Ces méthodes sont particulièrement bien adaptées pour traiter des problèmes d'interaction fluide – structures. Leur principal inconvénient réside dans le fait qu'elles imposent de mailler complètement le domaine d'étude, ce qui nécessite l'emploi d'ordinateurs puissants disposant d'une mémoire vive importante. Le traitement de problèmes extérieurs requiert alors la réalisation de CL absorbantes simulant la condition de Sommerfeld.

I.7. Conclusion

Etant donné que la très large majorité des études du comportement vibratoires de structures peu amorties sont menées dans le domaine fréquentiel, le but de notre étude, est de synthétiser, dans le domaine temporel, le son généré par des plaques vibrantes, sous différents types de sollicitations et différentes conditions aux limites de plaques.

Par la suite nous nous limiterons à l'étude du rayonnement acoustique de plaques impactées. Etant donné l'importance des conditions d'impact, sur le rayonnement acoustique, nous, nous attacherons à étudier l'influence des différents paramètres de l'impact en tentant d'expliquer ce qui les fait différencier à l'écoute.

Pour modéliser numériquement le champ acoustique transitoire, l'approche temporelle est plutôt employée que l'approche fréquentielle. L'évolution du champ acoustique, engendré par un impact, peut alors être étudiée par résolution numérique en champ proche dès le début de l'excitation.

CHAPITRE II

FORMULATION VIBRATOIRE ET MODELISATION DE L'IMPACT SPHERE - PLAQUE

II.1 Introduction

Le but de cette partie du document est de constituer un catalogue non exhaustif d'équations qui permette de définir les problèmes de vibrations de plaques relativement simples. Etant donné que ce modèle est destiné à être résolu numériquement dans le cadre d'un outil de synthèse sonore, il doit donc prendre en compte les différents phénomènes physique susceptibles de contribuer au timbre du son produit, tout en restant " applicable " numériquement, c'est à dire pouvant être traité par des moyens informatiques raisonnables.

La modélisation du comportement vibratoire des plaques couvre un champ d'investigation extrêmement vaste, comme en témoigne le nombre important de publications sur le sujet (lire par exemple Leissa 1977 à 1987). Il paraît donc indispensable de fixer " un cahier des charges " dicté par le domaine d'application envisagé, ici : la synthèse sonore.

L'étude de bruits transitoires, tels que ceux produits par des impacts, nécessite la connaissance assez précise du comportement vibratoire de la plaque, dont dépend principalement le bruit rayonné.

Nous, nous intéressons tout d'abord au cas idéal d'une plaque élastique non amortie située dans le plan $z = 0$ d'un repère cartésien (O,x,y,z) comme représenté dans la figure (II.1).

La suite du chapitre est consacrée à l'approximation numérique du déplacement transversal $w(x,y,t)$ de la plaque, grandeur physique à partir de laquelle on pourra accéder à la pression acoustique générée par la plaque.

Le milieu est supposé infini, cette hypothèse, permet de faciliter l'étude et considérer alors les solutions particulières de type onde plane.

II.2 Equations du problème

L'équation de flexion pure d'une plaque soumise à une excitation F(x,y,t), négligeant l'inertie rotationnelle, est donnée par :

$$M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \lambda\frac{\partial w}{\partial t} + D\Delta^2 w = F(x,y,t) \qquad \text{(II.1)}$$

avec Δ^2: opérateur Laplacien

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \qquad M = \rho_s h \qquad D = \frac{E h^3}{12(1-\upsilon^2)} \quad et \quad w = w(x,y,t)$$

ρ la masse volumique, h l'épaisseur de la plaque, λ l'amortissement, $w(x,y,t)$ le déplacement transversal et $D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ étant la rigidité en flexion où E est le module d'Young et υ le coefficient de Poisson.

Considérons, dans un premier temps, l'équation homogène de flexion des plaques sans amortissement :

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

Par séparation des variables d'espace et du temps, nous posons : $w(x,y,t) = a(t)f(x,y)$. Il vient alors :

$$\frac{1}{a(t)}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\frac{D}{\rho h.f(x,y)}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right) = Cte = -\omega^2 \qquad \text{(II.3)}$$

L'équation temporelle $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \omega^2 a(t) = 0$ se résout facilement : la solution $a(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ est l'amplitude modale.

L'équation spatiale est donnée par :

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right) - \omega^2 \frac{\rho h.f(x,y)}{D} = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

La résolution de cette équation de mouvement ne se résout analytiquement que pour quelques rares cas de conditions aux limites telles que le cas de la plaque appuyée sur ses quatre bords. Dans le cas d'une plaque encastrée, que nous aborderons plus loin, la méthode de l'effet de bords permet néanmoins d'obtenir une expression approchée de la solution $f(x,y) = \Phi(x,y)$.

En décomposant dans la base des modes propres, il vient :

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}(t).\Phi_{mn}(x,y) \qquad \text{(II.5)}$$

En remplaçant dans l'équation de mouvement :

$$M\sum_{p=1}^{\infty}\ddot{a}_p(t).\Phi_p(x,y) + \lambda\sum_{p=1}^{\infty}\dot{a}_p(t).\Phi_p(x,y) + D\sum_{p=1}^{\infty}a_p(t).\Delta^2\Phi_p(x,y) = F(x,y,t) \qquad \text{(II.6)}$$

En multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par $\Phi_{pq}(x,y)$ et en intégrant sur toute la surface de la plaque, nous aurons, en vertu de la propriété d'orthogonalité des modes propres:

$$M_{pq}.\ddot{a}_{pq}(t) + \lambda_{pq}.\dot{a}_{pq}(t) + K_{pq}.a_{pq}(t) = F_{pq}(t) \qquad \text{(II.7)}$$

avec :

$M_{pq} = \iint_S \rho h \Phi_{pq}^2(x,y)dxdy$ masse généralisée du mode (p,q),

$K_{pq} = \iint_S D.\Delta^2\left(\Phi_{pq}^2(x,y)\right)dxdy$ raideur généralisée du mode (p,q),

$\lambda_{pq} = \iint_S \lambda.\Phi_{pq}^2(x,y)dxdy$ amortissement généralisé du mode (p,q),

$F_{pq}(t) = \iint_S F(x,y,t).\Phi_{pq}(x,y)dxdy$ force généralisée du mode (p,q).

pour une plaque homogène, on a:

$$\int_S \Phi_{mn}(x,y).\Phi_{pq}(x,y)\,dx\,dy = \begin{cases} 0 & si \quad mn \neq pq \\ N_{mn} & si \quad mn = pq \end{cases} \qquad \text{(II.8)}$$

où N_{mn} est la norme.

II.3 Conditions aux limites des plaques

II.3.1 Plaque appuyée sur ses quatre bords

Dans le cas d'une plaque appuyée partout sur ses bords, les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} w = 0 \qquad sur \quad \Gamma \ (contour\ de\ la\ plaque) \\ \\ D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad pour \quad \begin{cases} x = 0, a \\ 0 \le y \le b \end{cases} \\ \\ D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad pour \quad \begin{cases} y = 0, b \\ 0 \le x \le a \end{cases} \end{cases} \tag{II.9}$$

et le schéma modal est classiquement connu, et donné par $(\omega_{mn}, \Phi_{mn}(x,y))$ tel que :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{M}}\left[\left(\frac{m.\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \tag{II.10}$$

$$\Phi_{mn}(x,y) = sin\frac{m\pi}{a}x.sin\frac{n\pi}{b}y \tag{II.11}$$

et dans ce cas, la norme est donnée par:

$$N_{mn} = \int_S \Phi_{mn}^2(x,y)dxdy = \frac{ab}{4} \tag{II.12}$$

d'où pour une plaque homogène, les grandeurs généralisées sont donnée par :

$M_{mn} = \int_S M.\Phi_{mn}^2(x,y)dxdy = M\dfrac{ab}{4}$ masse généralisée

$\lambda_{mn} = \int_S \lambda.\Phi_{mn}^2(x,y)dxdy = \lambda\dfrac{ab}{4}$ coefficient d'amortissement généralisé

$K_{mn} = \omega_{mn}^2.M_{mn} = \omega_{mn}^2.M\dfrac{ab}{4}$ raideur généralisée

$F_{mn}(x,y,t) = \int_S F(x,y,t).\Phi_{mn}(x,y)dxdy$ force généralisée associée à l'excitation

Donc pour résoudre le problème temporel, il nous faut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$M_{mn}.\ddot{a}_{mn}(t) + \lambda_{mn}.\dot{a}_{mn}(t) + K_{mn}.a_{mn}(t) = F_{mn}(t) \tag{II.13}$$

qu'on peut mettre sous la forme:

$$\ddot{a}_{mn}(t) + \frac{\lambda_{mn}}{M_{mn}}.\dot{a}_{mn}(t) + \frac{K_{mn}}{M_{mn}}.a_{mn}(t) = \frac{1}{M_{mn}}F_{mn}(t) \tag{II.14}$$

On définit l'amortissement structural équivalent du mode (m,n) par :

$$\eta_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{\omega_{mn}.M_{mn}} \tag{II.15}$$

ainsi nous aurons:

$$\ddot{a}_{mn}(t) + \eta.\omega_{mn}.\dot{a}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2.a_{mn}(t) = \frac{1}{M_{mn}}F_{mn}(t) \tag{II.16}$$

II.3.2. Plaque encastrée sur ses quatre bords Méthode de l'effet de bords (Bolotin)

La méthode de Bolotin (King, 1974) est basée sur une observation physique stipulant que les modes de rang élevé des plaques rectangulaires homogènes présentent des comportements différents selon que l'on se trouve loin des limites ou à proximité de celles-ci.

Nous devons trouver une solution approchée de l'équation (II.3) caractéristique de la variable d'espace $f(x,y)$. L'idée de la méthode consiste à utiliser des approximations de la solution différentes loin et à proximité des limites et basées sur la solution à variables d'espace séparées ; la forme supposée valide loin des bords $x = 0$ et $x = a$ est :

$$f(x,y) = \sin(k_1 x + \varphi_1) \cdot h_2(y) \tag{II.14}$$

Cette solution suppose que dans cette zone la solution dans la direction x ne contient que la solution interne $\sin(k_1 x + \varphi_1)$.

De manière symétrique, la forme supposée valide, loin des bords $y = 0$ et $y = b$, est :

$$f(x,y) = \sin(k_2 y + \varphi_2) \cdot h_1(x) \tag{II.15}$$

Ces formes de solution (II.14) et (II.15) doivent, d'une part, vérifier l'équation de mouvement (II.3) et d'autre part, coïncider quand le point d'observation est loin des quatre bords.

Le respect de (II.3) par la forme (II.15) entraîne :

$$\frac{d^4 h_1}{dx^4} - 2k_2^2 \frac{d^2 h_1}{dx^2} + \left(k_2^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \right) \cdot h_1 = 0 \tag{II.16}$$

cette dernière équation a pour solution :

$$h_1(x) = C_1 \sin(s_2 x + \psi_1) + D_1 e^{-s_1(a-x)} + E_1 e^{-s_1 x} \tag{II.17}$$

avec :
$$s_2 = \left(\sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega - k_2^2 \right)^{1/2} \tag{II.18}$$

$$s_1 = \left(\sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega + k_2^2 \right)^{1/2} \tag{II.19}$$

de même le respect de (II.3) par (II.14) entraîne :

$$h_2(y) = C_2 \sin(r_2 y + \psi_2) + D_2 e^{-r_1(b-y)} + E_2 e^{-r_1 y} \tag{II.20}$$

avec :
$$r_2 = \left(\sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega - k_1^2 \right)^{1/2} \tag{II.21}$$

$$r_1 = \left(\sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega + k_1^2 \right)^{1/2} \tag{II.22}$$

Les solutions (II.17) et (II.20) sont toutes deux constituées d'une solution interne sinusoïdale et d'effets de bords caractérisés par des exponentielles décroissantes quand on s'éloigne des limites. Ceci est bien conforme à l'hypothèse de départ ; loin des limites seule la solution interne subsiste. Cette hypothèse sera d'autant mieux vérifiée que le nombre d'onde s_1 (resp. r_1) sera grand.

Maintenant nous allons utiliser le fait que les deux formes de solutions doivent coïncider loin des limites, ce qui revient à dire que les solutions internes fournies par les deux formes de solutions doivent être égales :

$$C_1 \sin(k_1 x + \varphi_1) \sin(r_2 y + \psi_2) = C_2 \sin(k_2 y + \varphi_2) \sin(r_1 x + \psi_1) \tag{II.23}$$

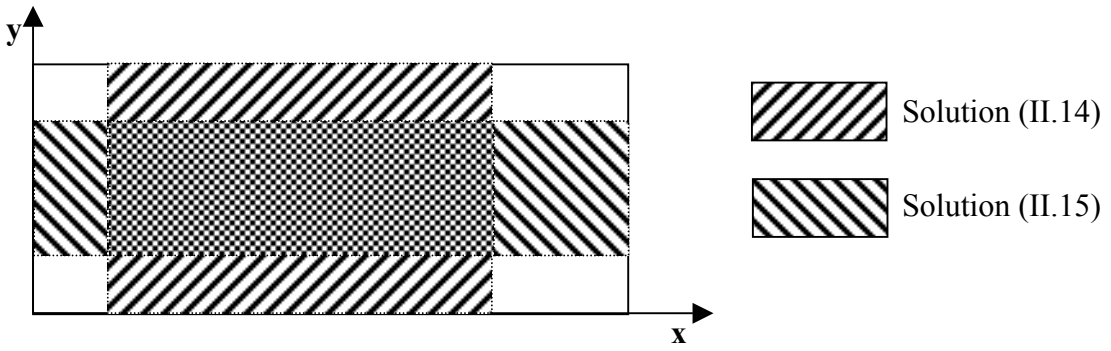


Figure II.1. *Zone de validité des solutions de la méthode de l'effet de bord.*

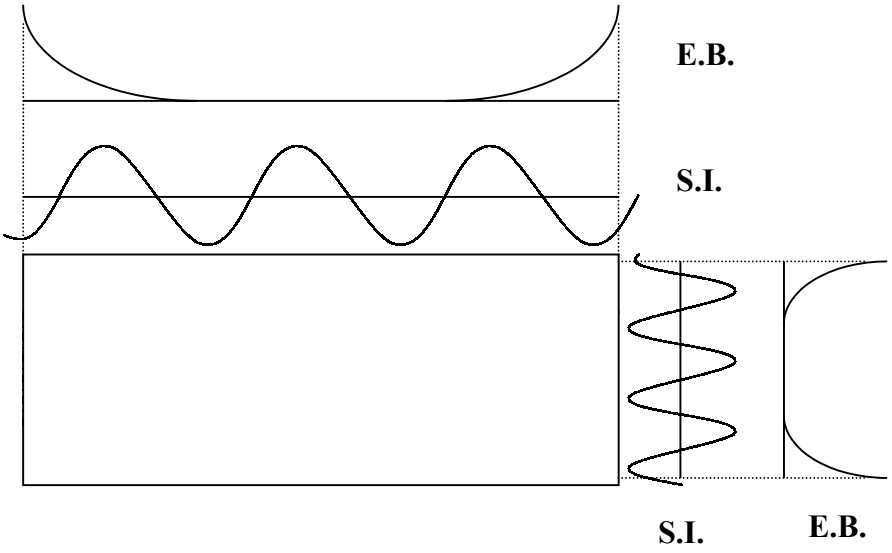


Figure II.2. *Représentation des solutions,*
S.I. : Solution Interne,
E.B. : Effet de Bords.

L'équation (22) conduit à l'identification suivante :

$$\begin{cases} r_1 = k_1 \\ \psi_1 = \varphi_1 \\ r_2 = k_2 \\ \psi_2 = \varphi_2 \\ C_1 = C_2 = C \end{cases} \tag{II.24}$$

La solution interne est donc fournie par :

$$C\sin(k_1 x + \varphi_1)\sin(k_2 y + \varphi_2) \tag{II.25}$$

En outre, avec (II.18) et (II.21) nous obtenons :

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(k_1^2 + k_2^2\right) \tag{II.26}$$

et avec (II.19) et (II.23) il vient :

$$s_1^2 = k_1^2 + 2k_2^2 \tag{II.27}$$

$$r_1^2 = k_2^2 + 2k_1^2 \tag{II.28}$$

Les deux formes de solutions sont donc finalement données par :

- x loin des bords $x = 0$ et $x = a$:

$$f(x,y) = C\sin(k_1x + \varphi_1)\sin(k_2y + \varphi_2) + D_2\sin(k_1x + \varphi_1)e^{-r_1(b-y)} + E_2\sin(k_1x + \varphi_1)e^{-r_1y} \qquad \text{(II.29)}$$

- y loin des bords $y = 0$ et $y = b$:

$$f(x,y) = C\sin(k_1x + \varphi_1)\sin(k_2y + \varphi_2) + D_1\sin(k_2y + \varphi_2)e^{-s_1(a-x)} + E_1\sin(k_2y + \varphi_2)e^{-s_1x} \qquad \text{(II.30)}$$

Les conditions limites pour l'encastrement s'écrivent :

$$\begin{cases} w(x,y,t) = 0 & sur \quad \Gamma \ (contour\ de\ la\ plaque) \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y,t) = 0 & pour \quad \begin{cases} x = 0,a \\ 0 \le y \le b \end{cases} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y}(x,y,t) = 0 & pour \quad \begin{cases} y = 0,b \\ 0 \le x \le a \end{cases} \end{cases} \qquad \text{(II.31)}$$

Nous allons imposer le respect des conditions limites en considérant la forme de solution (II.29) ou (II.30) adaptée au bord choisi. Considérons tout d'abord le coté $x=0$. Comme nous l'avons vu précédemment c'est la forme (II.30) qui convient. Cependant elle se simplifie car le deuxième terme de (II.30) représente l'effet de bord $x=a$ qui est négligeable en $x=0$. L'approximation de la solution au voisinage du bord $x=0$ est réduite à deux termes :

$$f(x,y) = C\sin(k_1x + \varphi_1)\sin(k_2y + \varphi_2) + E_1\sin(k_2y + \varphi_2)e^{-s_1x} \qquad \text{(II.32)}$$

Cette forme de solution n'est applicable sur le bord $x=0$ que loin des coins car l'effet de bord dans la direction y y devient important. Dans l'hypothèse où cet effet de bord est fortement (exponentiellement) décroissant quand on s'éloigne de la limite, il n'influera que très localement près des coins et aura un effet peu sensible sur le résultats.

Ainsi sur le bord $x=0$, l'application des conditions aux limites fournit les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} w(0,y,t) = 0 \ \Rightarrow \ f(0,y) = 0 \Rightarrow C\sin\varphi_1 + E_1 = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(0,y,t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \Rightarrow Ck_1\cos\varphi_1 - E_1s_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.33)}$$

En procédant de la même manière pour le bord $x=a$:

$$\begin{cases} w(a,y,t) = 0 \ \Rightarrow \ f(a,y) = 0 \Rightarrow C\sin(k_1a + \varphi_1) + D_1 = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(a,y,t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,y) = 0 \Rightarrow Ck_1\cos(k_1a + \varphi_1) + D_1s_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.34)}$$

En supposant le déterminant nul (infinité de solutions) du système linéaire (II.33), nous obtenons la première équation du système (II.35). En procédant de la même manière, pour le système linéaire (II.34), on tire la deuxième équation de (II.35) de façon à obtenir une solution non triviale :

$$\begin{cases} k_1\cos\varphi_1 + s_1\sin\varphi_1 = 0 \\ k_1\cos(k_1a + \varphi_1) - s_1\sin(k_1a + \varphi_1) = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.35)}$$

Le système (II.35) possède la solution suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1 = -k_1 \dfrac{a}{2} \pm n\dfrac{\pi}{2}, n = 0,1,2... \\ \dfrac{k_1}{s_1} = tan(-\varphi_1) \end{cases} \quad \text{(II.36)}$$

De façon symétrique, pour les bords $y = 0$ et $y = b$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \varphi_2 = -k_2 \dfrac{b}{2} \pm n\dfrac{\pi}{2}, n = 0,1,2... \\ \dfrac{k_2}{r_1} = tan(-\varphi_2) \end{cases} \quad \text{(II.37)}$$

A l'aide de (II.26) il ne nous reste plus qu'à déterminer les pulsations vérifiant simultanément (II.36) et (II.37). En utilisant (II.27) et (II.28), on déduit l'équation aux fréquences permettant de déterminer les nombres d'onde k_1 et k_2 nécessaire à la résolution de (II.26) :

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + 2k_2^2}} = \tan(k_1 \dfrac{a}{2} + p\dfrac{\pi}{2}) \text{ pour p = 0 ou 1} \quad \text{(a)} \\ \dfrac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + 2k_1^2}} = \tan(k_2 \dfrac{b}{2} + p\dfrac{\pi}{2}) \text{ pour p = 0 ou 1} \quad \text{(b)} \end{cases} \quad \text{(II.38)}$$

Remarque

Les solutions (II.33) et (II.34) sont définies à $\pi/2$ près. C'est pourquoi il faut bien considérer les deux cas où $p = 0$ et $p = 1$, et ce pour chaque nombre d'onde k_1 et k_2. On a ainsi en tout quatre systèmes non linéaires à résoudre pour obtenir toutes les solutions. En effet, pour une plaque (a = 0.6m X b = 0.4m), la résolution numérique de (II.38) avec le logiciel Mapple amène les résultats suivants :

		Equation (II.38a)	
		$p = 0$	$p = 1$
Equation (II.38b)	$p = 0$	m pair n pair	m impair n pair
	$p = 1$	m pair n impair	m impair n impair

Tableau II.1. *Parité du rang des solutions* k_{1mn} et k_{2mn} selon *le type de système (II.38) considéré.*

Obtention du schéma modal

Une fois que l'on a obtenu les pulsations propres ω_{mn} et donc à fortiori les nombres d'onde k_{1mn} et k_{2mn} (solutions de (II.38)) de chaque mode propre (m,n), il ne nous reste plus qu'à calculer l'approximation des déformées propres. A l'aide de (II.36) et (II.37), on déduit les valeurs de φ_1 et φ_2 :

$$\varphi_{1mn} = -k_{1mn}\frac{a}{2} + p\frac{\pi}{2},\ p = 0,1 \quad \text{et} \quad \varphi_{2mn} = -k_{2mn}\frac{b}{2} + p\frac{\pi}{2},\ p = 0,1$$

Enfin à l'aide de (II.33) (resp. (II.34)) on tire les valeurs de E_1 et D_1 :

$$E_{1mn} = -C \sin \varphi_{1mn}$$
$$D_{1mn} = -C \sin(k_{1mn} a + \varphi_{1mn})$$

Par symétrie, on tire aussi E_2 et D_2

$$E_{2mn} = -C \sin \varphi_{2mn}$$
$$D_{2mn} = -C \sin(k_{2mn} a + \varphi_{2mn})$$

Il suffit ensuite de reporter ces valeurs dans la forme générale $f_{mn}(x,y) = \Phi_{mn}(x,y) = h_{1mn}(x) h_{2mn}(y)$ pour enfin avoir l'expression de la déformée propre. La constante C reste indéterminée mais peut être prise égale à l'unité ce qui revient à l'injecter dans les constantes A_{mn} et B_{mn} de la solution temporelle issue de la résolution de (II.3) : $a_{mn}(t) = A_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn} t)$.

Pour résoudre le problème temporel dans le cas encastré, connaissant le schéma modal, il suffit d'exprimer le champ de déplacement $w(x,y,t)$ dans la base des modes propres :

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(a_{mn}(t)\right) \cdot \left(h_{1mn}(x) \cdot h_{2mn}(y)\right) \qquad \text{(II.39)}$$

Puis en utilisant la propriété d'orthogonalité des modes, nous obtenons l'équation différentielle suivante nous permettant de déterminer les amplitudes modales $a_{pq}(t)$:

$$M_{pq} . \ddot{a}_{pq}(t) + \lambda_{pq} . \dot{a}_{pq}(t) + K_{pq} . a_{pq}(t) = F_{pq}(t)$$

II.3.3. Plaques appuyées sur deux bords opposés

Ce cas de conditions aux limites permet de trouver une solution semi analytique pour le schéma modal. La méthode de calcul de ce dernier est directe et pose à priori la solution d'espace du problème sous la forme :

$$f_{mn}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cdot h_n(y) \qquad \text{(II.40)}$$

La décomposition en sinus offre la double propriété de définir une base fonctionnelle et de vérifier les conditions aux limites d'appui en $x = 0$ et $x = a$. Il reste d'une part à vérifier l'équation d'espace (II.3) puis les conditions aux limites restantes à $y = 0$ et $y = b$.

Sur les deux autres bords on peut, donc, appliquer n'importe quelles conditions aux limites standards, telles que, appui simple, encastrement ou bord libre.
L'équation différentielle peut s'écrire alors :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \left[\frac{d^4 h_m}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 h_m}{dy^2} + \left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \omega^2 \frac{\rho h}{D} \right) . h_m \right] \qquad \text{(II.41)}$$

Pour découpler les équations, on utilise la propriété d'orthogonalité des fonctions sinus :

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x . \sin \frac{p\pi}{a} x \, dx = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq p \\ \frac{a}{2} & si \quad m = p \end{cases} \qquad \text{(II.42)}$$

en multipliant l'équation (II.41) par $sin\ \frac{p\pi}{a}x$, puis en intégrant de '0' à 'a' il vient :

$$\frac{d^4 h_m(y)}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 h_m(y)}{dy^2} + \left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \omega^2 \frac{\rho h}{D}\right) h_m(y) = 0 \qquad \text{(II.43)}$$

C'est une équation différentielle qui se résout facilement en posant :

$$h_m(y) = A e^{ry}$$

en remplaçant dans l'équation, on trouve :

$$r_{1m} = \pm\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \omega\sqrt{\frac{\rho h}{D}}} \qquad \text{et} \qquad r_{2m} = \pm j\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \omega\sqrt{\frac{\rho h}{D}}} \qquad \text{(II.44)}$$

d'où on tire l'expression de $h_m(y)$:

$$h_m(y) = C\,sin\,r_{2m}y + D\,cos\,r_{2m}y + E\ sh\,r_{1m}y + F\,ch\,r_{1m}y \qquad \text{(II.45)}$$

Nous présentons dans l'annexe 2, les différentes conditions aux limites classiques écrites sur un bord de la plaque normal à l'axe x.

II.4. Modélisations de l'impact sphère - plaque

Dans cette partie du chapitre, nous présentons les différentes modélisations de l'impact, produit par un impacteur à bout sphérique à une vitesse incidente V_I au centre d'une plaque rectangulaire.

L'étude de la plaque au choc revient à résoudre l'équation différentielle du mouvement avec un second membre. La plaque sera donc excitée par une force extérieure dont l'évolution dans le temps est inconnue. La détermination de la force d'impact est très difficile. La connaissance de l'évolution de la force d'impact est nécessaire pour étudier le comportement des plaques au choc. Beaucoup de recherches ont été faites par des approches numériques et expérimentales mais on n'arrive toujours pas à trouver l'évolution exacte de la force d'impact.

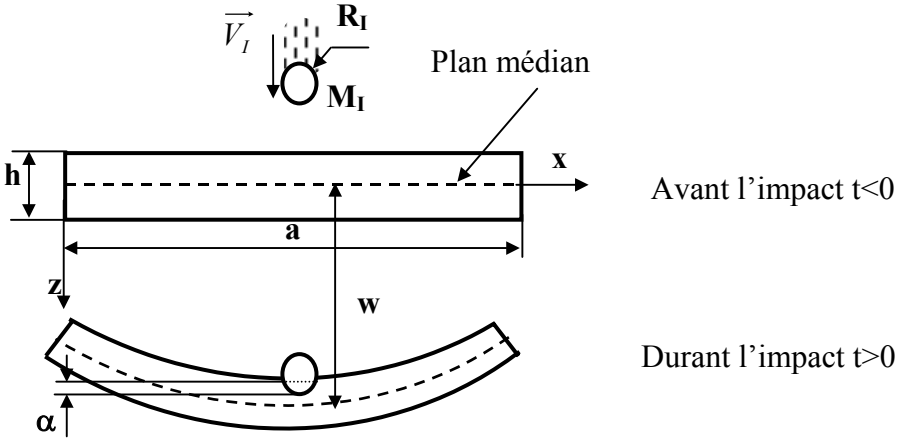


Figure I.1. *Impact transversal au centre d'une plaque rectangulaire.*

La modélisation du choc par des vibrations avec une vitesse initiale ou une force excitatrice instantanée est peu convaincante car elle ne permet pas de prévoir les phénomènes qui apparaissent pendant le choc (dans un intervalle de temps très réduit) tels que le bruit, l'endommagement local (au point d'impact) qui peuvent influer par la suite sur le comportement dynamique de la structure et aussi altérer les caractéristiques mécaniques de cette dernière. De plus, la déduction de l'amplitude de cette impulsion de force (ou de vitesse)

à partir des données du choc n'est pas évidente compte tenu de l'influence de plusieurs autres paramètres sur le comportement au choc.

De là, on peut deviner l'importance de trouver une approche qui peut prévoir l'évolution temporelle de la force mise en jeu pendant le contact lors d'un choc.

II.4.1. Modélisations élastique de l'impact

Un impact peut être représenté de manière globale par un bilan énergétique. L'avantage principal de ce type de présentation, réside dans le fait que les paramètres d'entrée sont directement des paramètres caractéristiques de l'impact : vitesse incidente, propriétés géométriques et mécaniques de la plaque et de l'impacteur. Dans ses travaux, Greszuk (1982) a modélisé l'impact en sommant l'énergie de contact à celle de flexion. Shivakumar (1985) a amélioré le modèle précédent en couplant à la flexion une rigidité de cisaillement K_S et en introduisant une rigidité de membrane K_m dans le cas des plaques minces.
Ainsi le bilan énergétique devient :

$$\frac{1}{2} M_I V_0^2 = E_c + E_{bs} + E_m \tag{II.46}$$

Les énergies de contact E_c, de flexion et cisaillement E_{bs} et de membrane E_m sont calculées à partir des relations force - déplacement correspondantes.

II.4.1.1. Modèle bilan d'énergie

A. Energie de contact

Considérons le cas d'un choc entre un impacteur et une cible tous deux isotropes. En considérant la masse et la vitesse de l'impacteur m_1 et v_1 et celles de la cible m_2 et v_2 au moment de l'impact on aura :

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -P \quad ; \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = -P \tag{II.47}$$

Soit α la distance d'approche des deux corps au point d'impact lié à la compression. La vitesse d'approche est donc donnée par :

$$\dot{\alpha} = v_1 + v_2 \tag{II.48}$$

Dans ses travaux, Rayleigh (1906) a montré que si la durée de contact entre les deux corps est très longue par rapport à leurs fréquences propres, alors, les vibrations sont négligeables. La loi de contact de Hertz peut ainsi être appliquée :

$$P = n.\alpha^{3/2} \tag{II.49}$$

Avec :

$$n = \frac{4\sqrt{R_1}}{3\pi(K_1 + K_2)} \tag{II.50}$$

avec R_1 est le rayon de l'impacteur et :

$$K_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi . E_1} \tag{II.51}$$

$$K_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi . E_2} \tag{II.52}$$

où E et ν représentent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson et les indices 1 et 2, désignent l'impacteur et la cible respectivement.

L'accélération d'approche est obtenue en dérivant l'équation (II.48), et la combinant avec les équations (II.47) et (II.49), il vient :

$$\ddot{\alpha} = n.M\alpha^{3/2} \tag{II.53}$$

Avec :
$$M = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{II.54}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (II.53) par α et en intégrant le résultat, on aboutit à l'expression suivante :

$$\dot{\alpha}^2 - V^2 = -\frac{4}{5} M n \alpha^{5/2} \tag{II.55}$$

avec V la vitesse d'approche des deux corps à $t = 0$ c'est à dire, au début de l'impact. Le maximum de déformation α_1 est obtenu pour $\dot{\alpha} = 0$.

$$\alpha = \left(\frac{5 V^2}{4 M n} \right)^{5/2} \tag{II.56}$$

La relation (II.56) peut être obtenue en passant par le bilan énergétique du système. En considérant que la cible est fixe et que l'impacteur mobile arrive à une vitesse V_1, le bilan d'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \int_0^{\alpha_1} P d\alpha \tag{II.57}$$

L'introduction de l'équation (II.49) dans (II.57) suivie d'une intégration permet d'avoir :

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{2}{5} n \alpha_1^{5/2} \tag{II.58}$$

Notons que dans le cas où $V_1 = V$ et $M = 1/m_1$, le remplacement de (II.56) dans (II.49) donnerait le résultat suivant :

$$P = n^{2/5} \left(\frac{5V^2}{4M} \right)^{3/5} \tag{II.59}$$

Dans le cas d'un contact hertzien, d'un impacteur sphérique sur une plaque avec une force P, la relation entre P et le rayon a de la surface de contact est donnée par (Hertz (1881))

$$a = \left[\frac{3\pi P}{4} (K_1 + K_2) R_1 \right]^{1/3} \tag{II.60}$$

En combinant les équations (II.59) et (II.60), le rayon maximum de l'aire de contact entre la plaque et l'impacteur sphérique serait :

$$a = \sqrt{R_1} \left(\frac{5 V^2}{4 M n} \right)^{1/5} \tag{II.61}$$

En conclusion, l'énergie de contact est obtenue par l'intégration du produit de la force P et du déplacement de contact α.

$$E_c = \int_0^{\alpha_1} P d\alpha \tag{II.62}$$

En remplaçant P par sa valeur de l'expression (II.49) et après intégration et simplification, on obtient l'énergie de contact E_c :

$$E_c = \frac{2}{5}\frac{P^{5/3}}{n^{2/3}} \tag{II.63}$$

B. Energie de flexion

La réponse à l'impact d'une plaque peut être obtenue en considérant les déformations subies d'une part à un contact hertzien α en plus d'une déformation globale δ de la plaque.

La relation hertzienne force - déformation liée au contact est décrite par :

$$P_c = n.\alpha^{3/2} \tag{II.64}$$

Quant à la relation force – déplacement d'une plaque sujette à une charge concentrée, elle est de la forme :

$$P_p = K_p.\delta_p \tag{II.65}$$

avec c et p, indices, désignant respectivement le contact et la plaque. K_p est lié aux constantes du matériau et aux conditions aux limites.

En utilisant ce modèle, dans sa thèse, Benmedekhène (1996), a fait des prédictions des valeurs de déplacements et des charges maximales en fonction des énergies d'impact. Dans cette étude il a montré que les valeurs du modèle restent proches de l'expérience dans les basses énergies où les faibles endommagements ne changent pas le comportement global de la plaque.

II.4.1.2. Modèles masses - ressorts

Dans un premier temps, on se propose de rappeler le modèle à deux degrés de liberté proposé par Shivakumar et al. (1985).

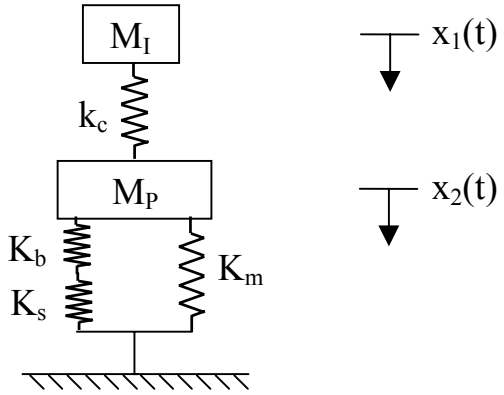


Figure II.3. *Modèle à deux degrés de liberté, Shivakumar et al (1985).*

Dans ce modèle, les deux masses M_I et M_P sont connectées par un ressort hertzien représentant la loi de charge – déformation du contact. Les propriétés force – déformation transversales sont représentées par la combinaison des ressorts de flexion, de cisaillement et de membrane.

Les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentent la réponse en déplacement des deux masses à chaque instant t. Les vitesses correspondantes sont représentées par $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$.

Le déplacement transverse de la plaque est représenté par : $\delta = x_2(t)$, et la déformation de contact est représentée par : $\alpha = x_1(t) - x_2(t)$.

L'équilibre du projectile et de la plaque peut alors s'écrire :

$$M_1 \ddot{x}_1(t) + \lambda\, n \left[x_1(t) - x_2(t)\right]^{3/2} = 0 \tag{II.66}$$

$$M_P \ddot{x}_2(t) + k_{bs}\, x_2(t) + k_m \left[x_2(t)\right]^3 - \lambda\, n \left[x_1(t) - x_2(t)\right]^{3/2} = 0 \tag{II.67}$$

avec :
$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \quad \text{pour } x_1 > x_2 \\ \lambda &= -1 \quad \text{pour } x_1 < x_2 \end{aligned} \tag{II.68}$$

Les conditions initiales sont :

$$x_1(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_1(0) = V_I \quad , \quad x_2(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_2(0) = 0 \tag{II.69}$$

Ces deux équations couplées, sont des équations différentielles non linéaires sont résolues par une méthode d'intégration numérique selon le schéma de Newmark (voir annexe 2) jusqu'à ce que $x_2(t)$ devienne nul ou négatif.

Cette dernière modélisation, nous a servi de base de référence pour la validation des résultats obtenus par l'approche que nous avons proposé.

II.4.2. Approche numérique de l'impact

Nous avons proposé une approche assez simple (Neder et Miloudi, 2002 et 2003), efficace, et qui donne des résultats très satisfaisants. Elle fait appel, elle aussi, à la théorie de contact de Hertz. Lors du contact, l'impacteur exerce une force P sur la plaque qui constitue la force du choc. A son tour, par le principe de l'action et de la réaction, la plaque exerce sur l'impacteur une force égale à P mais de sens opposé.
L'impacteur, ayant un bout sphérique, heurte la plaque au repos avec une vitesse incidente V_I. Ecrivons l'équation d'équilibre dynamique de l'impacteur :

$$\begin{cases} M_I \ddot{Z}_I + P = 0 \\ Z_I(0) = \ddot{Z}_I(0) = 0 \quad et \qquad \dot{Z}_I(0) = V_I \end{cases} \tag{II.70}$$

pour la plaque, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} \rho h \ddot{W} + D\nabla^4 W = P\delta(x - x_o)\delta(y - y_o) \\ W(x,y,0) = \dot{W}(x,y,0) = \ddot{W}(x,y,0) = 0 \end{cases} \tag{II.71}$$

avec P est la force d'impact qui entre en jeu pendant le contact et s'annule lorsque ce dernier se termine. Cette force est donnée par la loi de contact de Hertz pour un contact sphère-plan :

$$P = n\alpha^{3/2} \tag{II.72}$$

où α est l'approche des deux corps ou la pénétration de l'impacteur dans la cible :

$$\alpha(t) = Z_I(t) - W(x_o, y_o, t) \tag{II.73}$$

avec x_o, y_o sont les coordonnées du point d'impact.

Pour résoudre les deux équations de mouvement simultanément, on a recours à une méthode numérique itérative selon la procédure décrite ci-dessous.

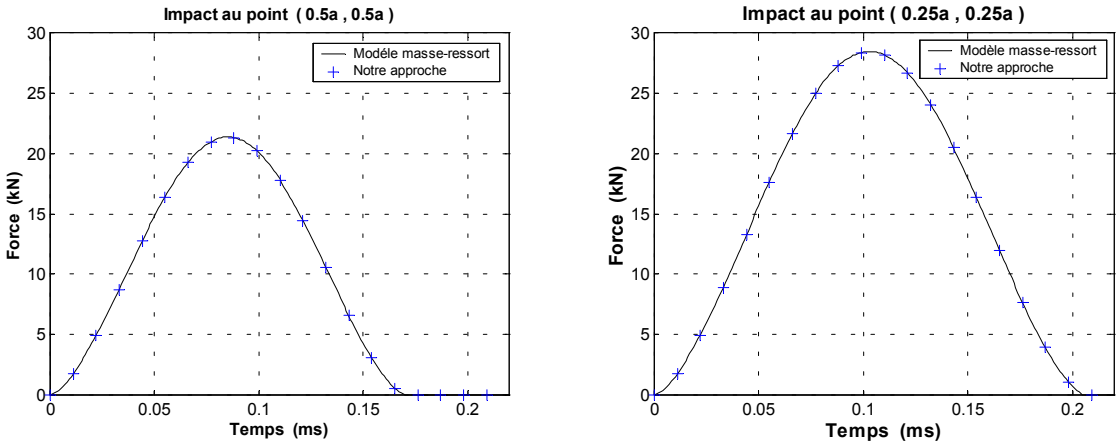
A l'instant initial $t_0 = 0$ (début du choc), l'impacteur possède une vitesse incidente V_I et la force de contact P est toujours nulle. A l'instant $t_1 = t_0 + dt$, la force P prend une valeur non nulle dont on ignore l'intensité. Afin de déterminer cette force à l'instant t_1, on se fixe une valeur arbitraire, non nulle, pour la force d'impact et on l'injecte dans l'équation (II.70) dans le but de déterminer $Z_I(t_1)$. Ce dernier est injecté, à son tour, dans l'équation (II.71) pour déterminer le déplacement de la plaque au point de l'impact $W(x_o, y_o, t_1)$ par décomposition modale, en utilisant le schéma d'intégration de Newmark (Bath (1976)). La force $P(t_1)$ est corrigée ensuite en utilisant la loi de contact de Hertz exprimée par le relation (II.72) après avoir déterminé la pénétration α de l'impacteur dans la cible, donnée par l'expression (II.73). La valeur de $P(t_1)$, ainsi obtenue, est réinjectée dans les équations (II.70) et (II.71), et reprendre le processus itératif jusqu'à la convergence de $P(t_1)$. On procède de la même manière pour déterminer la force de choc point par point jusqu'à ce que celle-ci soit nulle. Notons que le pas temporel dt doit être suffisamment petit pour assurer la convergence de la solution.

Une fois, l'évolution temporelle de la force d'impact, nous pouvons accéder au déplacement de n'importe quel point de la plaque, et donc les contraintes, en utilisant la superposition des modes comme mentionné dans le chapitre précédent.

II.4.2.1. Validation du modèle

Pour valider numériquement le modèle d'excitation par impact, nous faisons des simulations d'impact entre une sphère et une plaque (Hachemane et al., 2001). Les résultats obtenus sont comparés aux travaux récemment publiés dans le domaine. On étudie l'effet de la masse de l'impacteur, la position du point d'excitation et de la vitesse initiale avec des résultats obtenus expérimentalement ou trouvés dans la bibliographie.

Nous comparons dans un premier temps, l'évolution temporelle de la force d'impact, obtenue par les deux modélisations décrites aux paragraphes précédents ; il s'agit de la modélisation élastique de l'impact et l'approche numérique que nous avons proposé.



(a) **(b)**

Figure II.3. *Evolution temporelle de la force d'impact.*

Nous constatons que les résultats obtenus par les deux méthodes coïncident parfaitement. Ces résultats ont été obtenus pour la contribution du premier mode uniquement dans le calcul de la réponse vibratoire au point d'impact.

D'après Shivakumar et al. (1985), des études ont prouvé que la durée d'impact est beaucoup plus importante que le temps mis par les ondes de déformation pour aller aux

extrémités de la plaque et revenir. En outre, les effets des modes plus élevés, surtout quand la plaque subit de grandes déformations, sont petits et peuvent être négligés.

Dans un, de nos récents articles, (Neder et Miloudi, 2003) nous avons constaté que l'influence du nombre de modes pris en compte lors du calcul de la réponse vibratoire au point d'impact est assez importante, contrairement à ce qui a été avancé par Shivakumar et al. (1985). Ceci est dû au fait que dans notre cas, la masse de la plaque n'est pas faible devant celle de l'impacteur comme ce fut le cas de Shivakumar et al. (1985) où la masse de l'impacteur est plus que quatre fois plus grande que celle de la plaque.

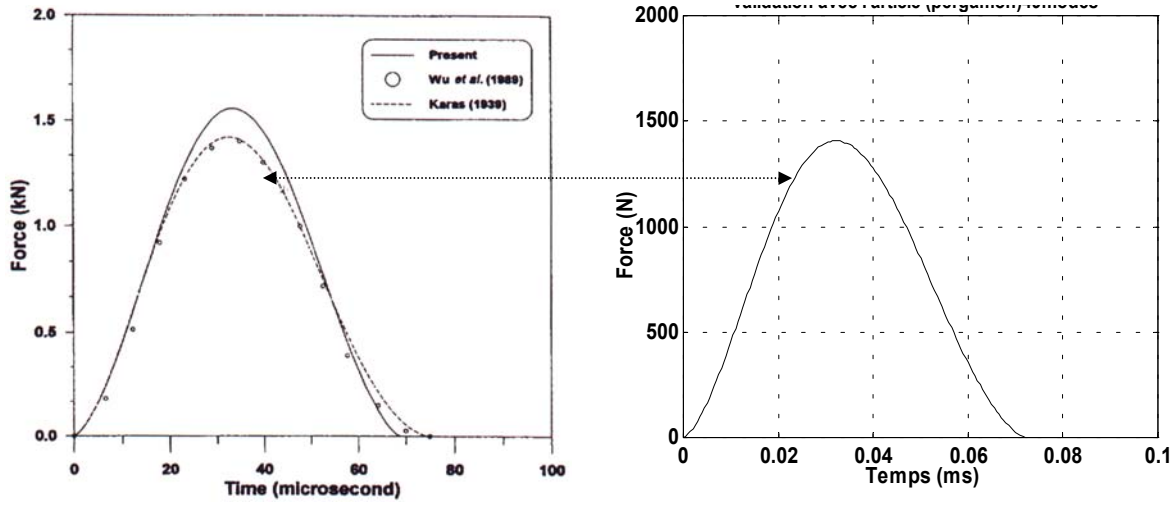
A cet effet, nous comparons nos résultats à ceux obtenus dans la bibliographie (Lu Chun, 1998) où nous avons pris en compte les 49 premiers modes propres.

Nous avons repris les paramètres donnés dans cet article, pour une plaque carrée simplement appuyée sur ses quatre bords :

Paramètres de la plaque		**Paramètres de l'impacteur**	
Dimensions :	0.2 m x 0.2 m	Masse :	0.0328 kg
Epaisseur :	0.008 m	Rayon :	0.01 m
Module de Young :	206 GPa	Module de Young :	210 GPa
Module de cisaillement :	79.85 GPa	Vitesse de l'impact :	1m/s
Coefficient de Poisson :	0.28		
Masse volumique :	7833 kg/m^3		

Tableau II.2. *Paramètres de la plaque et de l'impacteur.*

On se propose de comparer les forces d'interaction calculées par l'approche numérique proposée et celles obtenues par Lu Chun (1998), dans le cas d'un impact appliqué au centre de la plaque.
Les résultats des simulations sont représentés en figure 4, en prenant en compte 49 modes propres.



(a) Référence (Lu Chun, 1998). **(b)** Notre approche.

Figure II.4. *Comparaison de la force d'impact simulée par notre approche et celle obtenue par Lu Chun (1998).*

L'analyse des résultats obtenus par notre approche montre qu'ils sont presque identiques à ceux obtenus par les références (Wu et al., 1989 et Karas, 1939) mentionnées sur la figure 4a. Notons que les résultats obtenus par Wu et al. (1989) sont issus de calculs utilisant la méthode des éléments finis.

II.4.2.2. Durée du contact

Quand une surface plane massive est impactée par une sphère, la durée du contact est donnée par (Goldsmith, 1960) :

$$\tau = 4.53 \left[\frac{(\delta_p + \delta_i)\, m_i}{\sqrt{R_i V_i}} \right]^{0.4} \tag{II.74}$$

où m_i , R_i et V_i sont respectivement la masse, le rayon et la vitesse de l'impacteur (sphère) au moment du contact.

$$\delta = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \tag{II.75}$$

δ introduit les propriétés des matériaux respectivement de la surface plane et de la sphère.
avec :
μ est le coefficient de Poisson et E module de Young de la plaque (p) et de la sphère (i).

Nous comparons dans ce qui suit, pour différentes épaisseurs de la plaque, les résultats que nous avons obtenus par notre approche avec ceux obtenus par la formule de Goldsmith (1960).

Epaisseur (mm)	**1.0**	**1.5**	**2.0**
Erreur relative (%)	3.25	2.02	0.80

Tableau II.3 *Erreur relative du calcul du temps d'impact (prise en compte du 1er mode).*

Nous constatons que l'erreur relative diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque, en effet plus la plaque massive et plus l'erreur est faible. De plus, nous notons que dans la formule de Goldsmith (1960), qui est bien sûr approchée, le temps de contact ne dépend pas de l'épaisseur de la plaque ce qui est loin de la réalité comme nous allons le montrer par la suite où l'épaisseur de la plaque joue un rôle non négligeable dans la détermination de la force d'impact aussi bien en module qu'en durée d'impact.

La comparaison ci-dessus a été effectuée dans le cas où un seul mode est pris en compte. Dans la figure, ci-dessous, nous effectuons la même comparaison mais cette foi-ci en tenant compte de la contribution de différents nombres de modes.

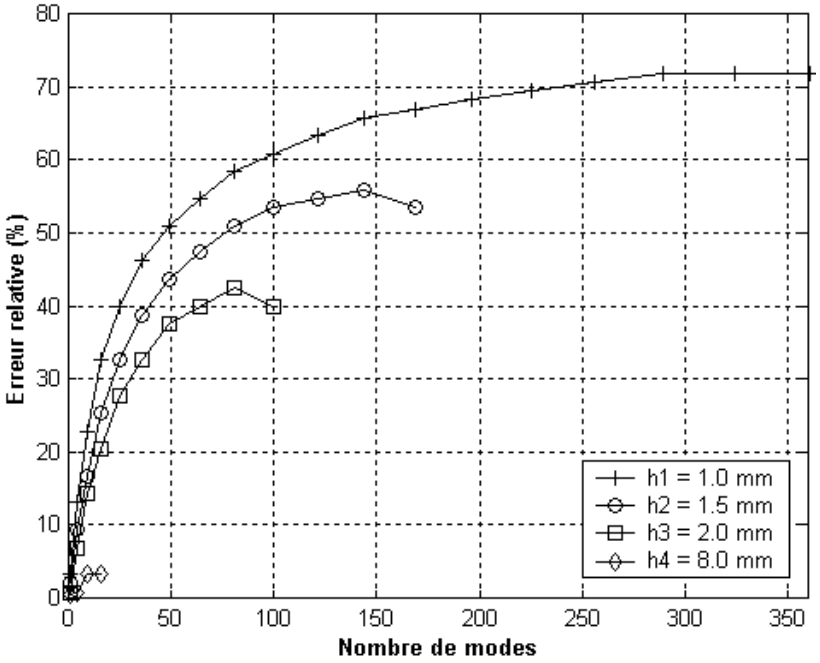


Figure II.5. Erreur relative de calcul de la durée de l'impact.

L'analyse de cette figure, montre, d'une part que l'erreur commise en adoptant la durée de la force d'impact, donnée par Goldsmith (1960), augmente avec le nombre de modes et qu'elle diminue avec l'augmentation de l'épaisseur. De plus nous constatons une convergence plus rapide dans le cas de plaques à épaisseur épaisse. C'est pour cela que la formule de Goldsmith (1960), reste valable uniquement pour le choc des plaques épaisses.

II.5. Analyses de la sensibilité de quelques paramètres

Dans cette partie, nous, nous intéressons principalement aux principaux paramètres affectant la force d'interaction entre l'impacteur et la plaque en question.

II.5.1. Effet de la masse de l'impacteur

On frappe la plaque en son centre avec la même vitesse initiale et pour différentes masses de la sphère. Les résultats des simulations (voir figures ci-dessous) montrent que les formes temporelles de la force d'impact sont différentes. On observe que les maximas des forces sont différents ainsi que la durée de contact entre la sphère et la plaque. Ceci est dû principalement à la différence des raideurs. En effet, la durée de contact augmente avec la diminution de la raideur.

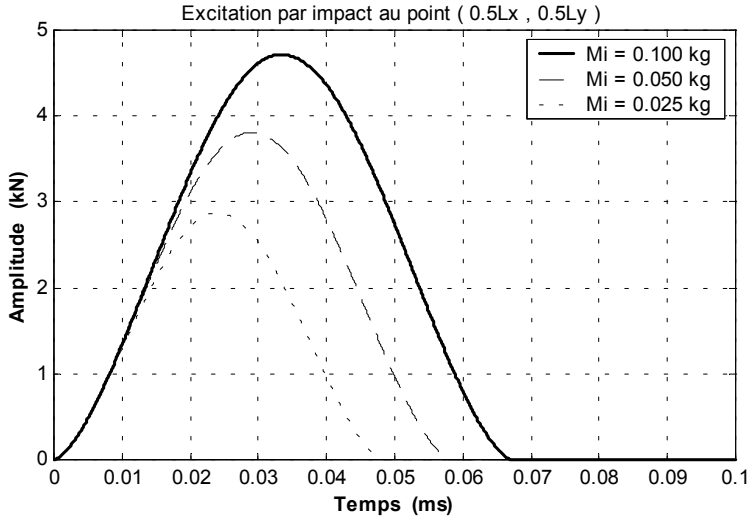


Figure II.6. *Evolution temporelle de la force d'impact pour différentes masses d'impacteur.*

II.5.2. Effet de la position de l'impact

Nous avons aussi examiné l'influence de la position du point d'impact sur l'évolution temporelle de la force d'impact. On frappe la plaque par un même impacteur sphérique sur trois positions différentes de sa surface en gardant la même vitesse initiale d'attaque de 1 m/s.

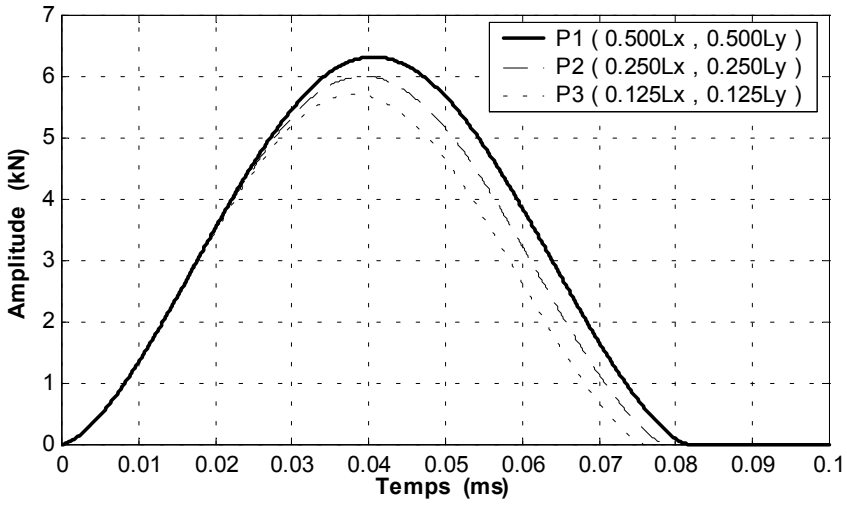


Figure II.7. *Evolution temporelle de la force d'impact en différents point de la plaque.*

Les résultats des simulations (figures ci-dessus) présentent des différences de comportement de la force d'impact. On observe l'influence de la rigidité de la plaque sur la durée de l'impact ainsi que l'intensité maximale de la force d'impact. En effet, la durée de l'excitation diminue quand la position d'excitation s'éloigne du centre de la plaque. La forme de l'évolution temporelle de la force d'impact dépend donc de la position du point d'impact.

II.5.3. Effet de la vitesse initiale de l'impact

L'effet de la vitesse initiale de l'impact sur la forme d'onde et sur l'évolution temporelle de l'impact n'est pas négligeable. En effet, la figure 7 montre que, pour une même position du point d'impact avec la même masse de l'impacteur mais avec des vitesses initiales différentes, on obtient différentes forces maximales et différentes durées de contact. La force

maximale augmente avec la vitesse, par exemple pour une vitesse initiale de 1 m/s l'intensité maximale de la force augmente dans le cas de la figure 7 est égale à ? N par contre pour une vitesse de 2 m/s est égale à ? N. On observe aussi que la vitesse initiale augmente, la forme temporelle de l'excitation devient plus étroite, c'est à dire la durée de contact devient petite, par contre la force maximale devient grande.

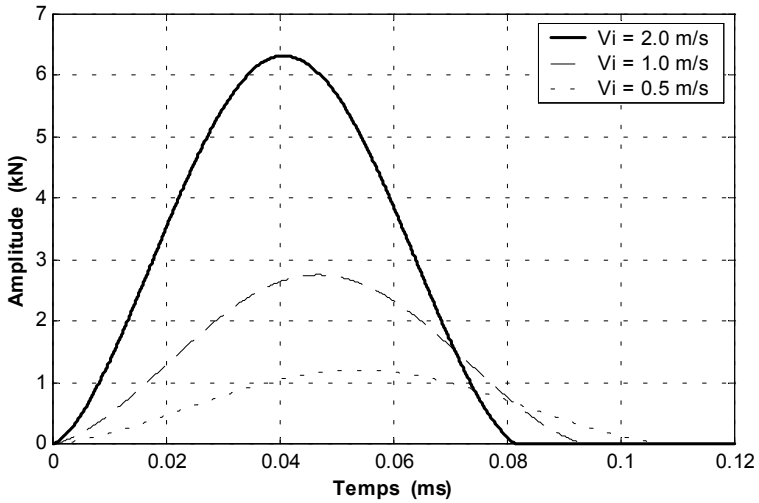


Figure II.8. *Evolution temporelle de la force d'impact pour différentes vitesses initiales.*

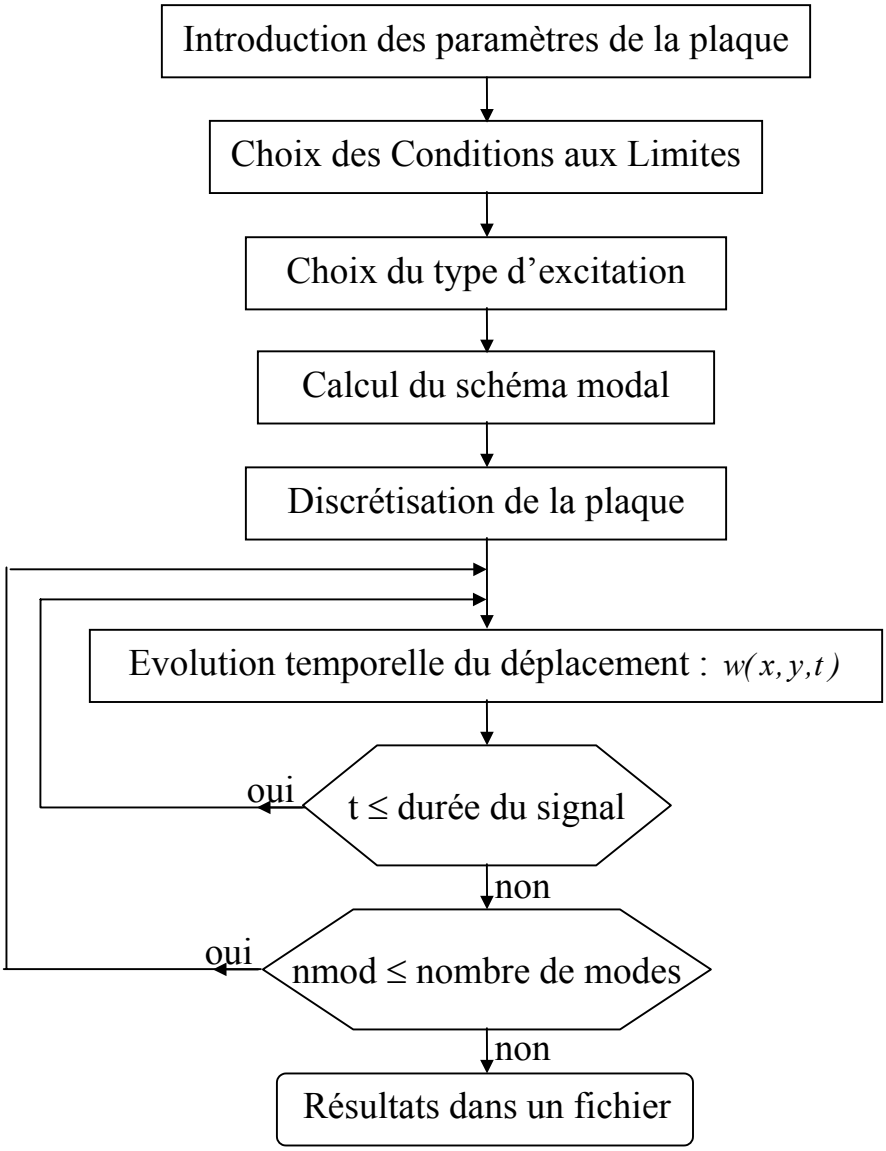
II.6. Résolution du problème temporel

Quel que soit le cas de conditions aux limites considéré, nous sommes, à ce stade, capable de déterminer les différents schémas modaux. Il ne nous reste plus qu'à déterminer l'amplitude modale en résolvant, pour chaque mode (m,n), le système différentiel d'ordre 2 en temps suivant :

$$\begin{cases} M_{mn}.\ddot{a}_{mn}(t) + \lambda_{mn}.\dot{a}_{mn}(t) + K_{mn}.a_{mn}(t) = F_{mn}(t) \\ a_{mn}(0) = a_0 \\ \dot{a}_{mn}(0) = \dot{a}_0 \end{cases} \qquad \text{(II.76)}$$

Pour résoudre ce système, nous utilisons, la méthode de Newmark (Raviart, 1983), décrite en annexe 2, qui est une méthode d'intégration à un pas nécessitant la connaissance de l'accélération au temps t_{n+1} pour déterminer la vitesse et le déplacement.

Les résultats de la simulation vibratoire sont obtenus en utilisant le programme de simulation établi dont on présente l'organigramme ci-dessous :



Organigramme de résolution du problème temporel

II.7. Conclusion

Dans cette étude, nous avons développé une approche numérique pour déterminer la force d'impact et la réponse dynamique d'une plaque rectangulaire impactée par un projectile sphérique. La réponse de la plaque est déterminée par décomposition modale par utilisation du schéma d'intégration de Newmark.

Les résultats obtenus ont été validés par ceux donnés par la littérature. Finalement une étude de l'influence de certains paramètres sur la force d'impact a été faite ainsi que sur la réponse dynamique de la plaque et sur les énergies échangées entre l'impacteur et la cible. De cette étude on fait ressortir les éléments suivants :

- lors du calcul de la force d'impact, les modes d'ordre supérieur à un ne sont pas négligeables, quand la masse de la plaque est importante devant celle de l'impacteur,
- les conditions d'appuis de la plaque ont une influence notable sur la force d'impact,
- le choc n'est pas parfaitement élastique, néanmoins on peut constater que le choc est moins élastique lorsque la masse de l'impacteur devient importante.

CHAPITRE III

FORMULATION FREQUENTIELLE DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE

III.1 Introduction

Le calcul du rayonnement acoustique des structures a fait l'objet, lors des deux dernières décennies, d'un effort scientifique conséquent. On maîtrise aujourd'hui les principaux phénomènes, et on dispose d'outils de calcul puissants disponibles dans le commerce. Cependant la prévision du comportement vibroacoustique des structures reste difficile et l'écart calcul-mesure est souvent fort sans que l'on sache exactemnt d'où il provient. L'acoustique des automobiles fournit un exemple où des objets industriellement identiques, c'est à dire possédant des dispersions structurales faibles, peuvent avoir des comportements vibroacoustiques assez différents (lire Kompella et al. (1993)).

Une problématique importante en vibroacoustique est donc de comprendre l'influence des défauts structuraux sur le rayonnement. Les travaux de Rebillard et al (1995), ont montré le phénomène d'hypersensibilité dans les assemblages de plaques, apparaissant pour de très faibles défauts des angles de jonctions.

Dans ce contexte nous avons choisi de nous intéresser à la variation d'épaisseur des plaques planes. Ce paramètre est, en effet, important en lutherie où le travail de finition, en vue d'un bon rendu musical consiste à affiner certaines partie de l'instrument.

Notre objectif est donc l'analyse de l'influence des défauts d'épaisseurs sur le rayonnement acoustique des structures. Afin de dégager les tendances, nous avons considérer un cas simple : une plaque rectangulaire, d'épaisseur linéairement variable, insérée dans un baffle plan, et sollicitée par une force harmonique ponctuelle. Le modèle théorique est basé sur l'approche intégro-modale, utilisant une décomposition de la réponse sur la base des modes propres d'une plaque à épaisseur constante et la représentation intégrale de simple couche pour la pression acoustique rayonnée.

Dans un premier temps, nous montrons si les simplifications classiques du calcul pour les plaques d'épaisseur constante (impédances de rayonnement intermodales négligées, couplage faible,…), restent valables pour une première approximation du rayonnement des plaques d'épaisseur variable.

Nous, nous intéressons, dans un deuxième temps, à la comparaison du comportement de plaques à épaisseurs constantes et une plaque à épaisseur linéairement variable. Nous analysons plus particulièrement leurs comportements à travers trois paramètres classiques de la vibroacoustique : l'énergie vibratoire, la puissance acoustique rayonnée et le coefficient de rayonnement.

Enfin l'analyse de l'influence de la variation d'épaisseur est effectuée par rapport au rayonnement d'une plaque à épaisseur constante de même masse.

Dans certaines configurations industrielles, la variation de masse est localisée : cette situation sort du cadre de notre approche où la variation est continue. Cette situation d'hétérogénéité locale a déjà fait l'objet de plusieurs publications (voir par exemple Sandman (1977) et Rebillard et al. (1992))

III.2 Etude vibratoire de plaque à épaisseur variable

III.2.1. Equations vibratoires

On considère une plaque rectangulaire de dimensions a et b, à épaisseur variable, symétrique par rapport au plan moyen Σ appartenant au plan XOY. En adoptant la théorie de Kirchhoff (cisaillement transverse négligeable), le champ de déplacement sera défini par une seule variable le déplacement transverse $w(x,y,t)$. Le problème dynamique est formulé en

termes énergétiques par utilisation du principe de Hamilton (cf. annexe 2). Après extrémalisation de la fonctionnelle d'énergie, nous obtenons l'équation de mouvement d'une plaque rectangulaire à épaisseur variable suivant les deux directions x,y.

$$\rho_S \cdot h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\cdot\nabla^4 w + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + 2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w + \nabla^2 D\cdot\nabla^2 w - \ldots$$
$$(1-\upsilon)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

ρ_s est la masse volumique, E est le module de Young, ν le coefficient de Poisson, h et D sont respectivement l'épaisseur et la rigidité de flexion de la plaque ; elles sont variables et de la forme :

$$h = h(x,y) \qquad \text{et} \qquad D = D(x,y) = \frac{Eh^3(x,y)}{12(1-\upsilon^2)}$$

Les conditions aux limites de la plaque sont du type appuyé sur ses bords, et fournies par :

$$\begin{cases} w = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma \ \text{(contour de la plaque)} & \text{(III.2a)} \\ \mathrm{M_x} = \mathrm{D}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad \begin{cases} \mathrm{x} = 0, \mathrm{a} \\ 0 \le \mathrm{y} \le \mathrm{b} \end{cases} & \text{(III.2b)} \\ \mathrm{M_y} = \mathrm{D}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad \begin{cases} \mathrm{y} = 0, \mathrm{b} \\ 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{a} \end{cases} & \text{(III.2c)} \end{cases}$$

Nous supposons par la suite que l'épaisseur et la rigidité varient uniquement suivant la direction x et donnée par :

$$h(x) = h_0\left(1 + \frac{\alpha}{a}x\right) \qquad \text{(III.3)}$$

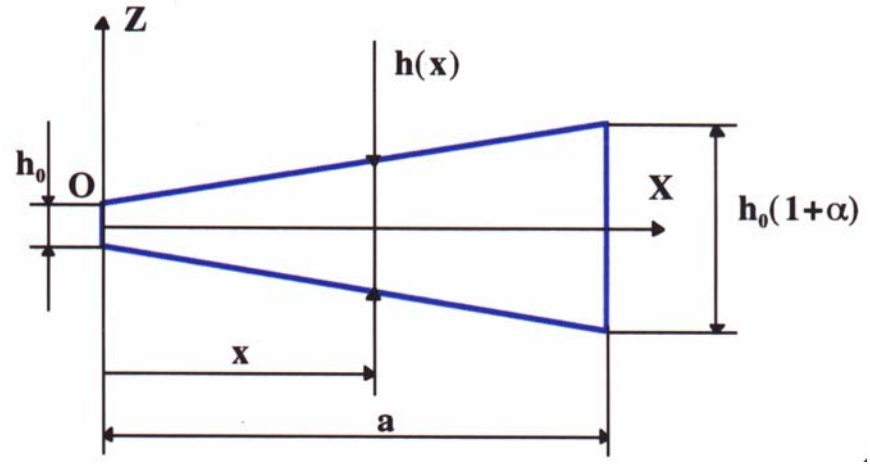


Figure III.1. *Représentation de la variation d'épaisseur de la plaque.*

Nous représentons dans la figure (III.1), la variation d'épaisseur suivant la direction x.
Dans ces conditions l'équation du mouvement (III.1) devient :

$$\rho_S \cdot h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\cdot\nabla^4 w + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \text{(III.4)}$$

III.2.2. Réponse vibratoire de la plaque

La réponse de la plaque est décomposée sur une base fonctionnelle vérifiant les conditions aux limites (III.2a), (III.2b) et (III.2c) ; notée $\Phi_{mn(x,y)}$. Les fonctions de base $\Phi_{mn(x,y)}$, se construisent facilement en utilisant les fonctions propres de la plaque d'épaisseur constante, de même surface et de même conditions aux limites, soit la plaque rectangulaire appuyée sur ses bords dont les déformées propres sont bien connues.

$$\Phi_{mn}(x,y) = \sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{III.5}$$

$$w(x,y,t) = \sum_m \sum_n q_{mn}(t)\cdot\Phi_{mn}(x,y) \tag{III.6}$$

Le problème ainsi posé, il convient maintenant de déterminer les inconnues $q_{mn}(t)$. Nous employons pour ceci la méthode de Galerkin classique, en introduisant la décomposition (III.6) dans l'équation (III.4), puis en calculant l'intégrale sur la surface de la plaque du produit de l'équation par une fonction $\phi_{kl}(x,y)$. On obtient tout calcul fait, pour chaque indice n :

$$\sum_k \left(\ddot{q}_{kn}M_{mnkn} + \ddot{q}_{kn}K_{mnkn}\right) = 0 \tag{III.7}$$

M_{mnkn} : tenseur de la masse généralisée donné par :

$$M_{mnkn} = \rho_S \frac{b}{2}\int_0^a \left(h(x)\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{k\pi}{a}x\right)dx \tag{III.8}$$

K_{mnkn} : tenseur de la raideur généralisée donné par :

$$K_{mnkn} = \frac{b}{2}\int_0^a L\left(\sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{k\pi}{a}x\right)dx \tag{III.9}$$

avec l'opérateur L donné par :

$$L = D\cdot\nabla^4 + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = 0$$

Pour chaque indice n, on a un système infini. Ceci traduit le fait que l'orthogonalité des modes de plaques d'épaisseur constante reste vérifiée dans la direction y ; par contre dans la direction x l'orthogonalité est détruite.

III.2.3. Validation du calcul des fréquences propres

Pour le calcul numérique, l'équation (III.7) est vérifiée de façon approchée par troncature de la série (III.6), et conduit ainsi à un système linéaire d'ordre fini, se pose alors la question de la convergence. Dans cette optique, nous présentons dans le tableau III.1, un exemple de validation de notre approche en comparant quelques fréquences propres à une méthode dite de polynôme caractéristique orthogonal, utilisée par Bhat et al. (1990) et la méthode des éléments finis.

Dans le tableau III.1 sont représentées les six premières fréquences propres d'une plaque d'épaisseur linéairement variable. Les coefficients Ω et λ qui représentent

respectivement le coefficient adimensionnel des fréquences propres et le rapport entre les dimensions de la plaque, sont donnés par :

$$\Omega_i^2 = \frac{\rho_s h_0 \omega_i^2 a^2}{D_0} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{a}{b}$$

	(1)		(2)	(3)
	10 X 10 éléments	20 X 20 éléments		
Ω_1	21.7537	21.6920	21.6920	21.6920
Ω_2	54.5149	54.2592	54.1607	54.1605
Ω_3	54.5372	54.3037	54.2047	54.2037
Ω_4	87.6709	87.0038	87.7528	86.7515
Ω_5	109.3524	108.4629	108.7610	108.0985
Ω_6	109.5747	108.7408	108.9320	108.3782

Tableau III.1. Comparaison des fréquences propres d'une plaque à épaisseur variable (α=0.2) (1) Méthode des éléments finis, (2) Polynôme caractéristique orthogonal, (3) notre approche.

L'analyse du tableau III.1, montre bien la convergence des résultats obtenus. De plus, la figure III.2, montre la convergence de la décomposition (III.6) pour n = 1, en fonction du nombre de termes k, on constate que la cinquième pulsation propre correspondant au mode (1,3) converge à 6.10^{-4} près dès 16 termes et exactement ensuite.

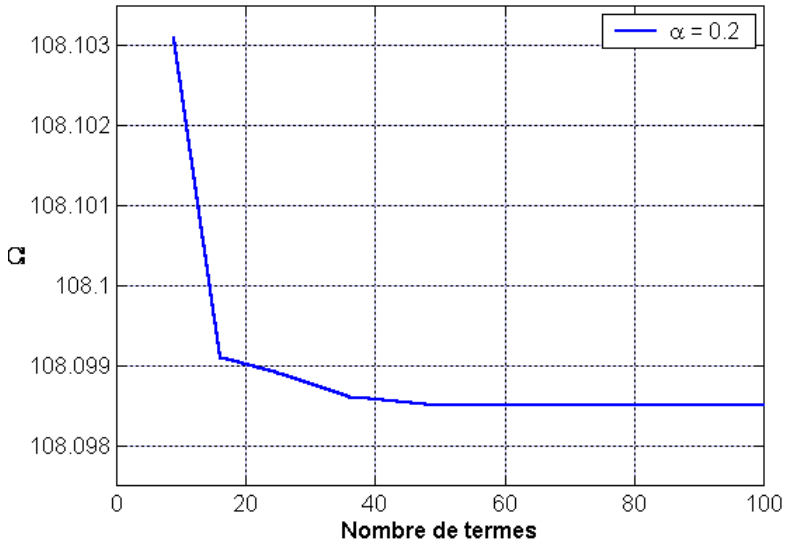


Figure III.2. *Convergence de la fréquence adimensionnelle* Ω *en fonction du nombre de termes de la série (III.6).*

III.2.4. Réponse vibratoire forcée de la plaque

Pour le calcul du rayonnement acoustique, nous allons nous placer dans l'hypothèse dite de fluide léger, qui consiste à négliger la charge acoustique pour la réponse de la plaque. Cette hypothèse a été étudiée par plusieurs auteurs , et on trouvera à titre d'exemple en référence (Guyader (1989)) une comparaison de la réponse vibroacoustique d'un cylindre bafflé calculée exactement et avec l'hypothèse de fluide léger.

Dans le cadre de cette hypothèse, le calcul de la réponse de la plaque s'effectue sans interaction avec le fluide. L'équation du mouvement forcé, dans le cas d'un mouvement harmonique ω est donnée par :

$$-\omega^2 \rho_S \cdot h\overline{w}(x,y) + D \cdot \nabla^4 \overline{w} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \overline{F}(x,y) \qquad \text{(III.10)}$$

où $\overline{w}(x,y)$ est l'amplitude complexe du déplacement harmonique de la plaque et $\overline{F}(x,y)$ est l'amplitude complexe de la force mécanique harmonique agissant sur la plaque.

En réutilisant un développement du type (III.6) on exprime :

$$\overline{w}(x,y) = \sum_m \sum_n \overline{q}_{mn} \cdot \Phi_{mn}(x,y) \qquad \text{(III.11)}$$

où $\overline{q}_{mn}$ est l'amplitude complexe du déplacement associé à la fonction de base $\Phi_{mn}(x,y)$. La vérification de l'équation (III.7) par le développement (III.11), conduit, grâce au procédé habituel aux équations matricielles à vérifier pour chaque indice n avec $n = 1,...,\infty$.

$$\sum_k \left(-\omega^2 M_{mnkn} \cdot \overline{q}_{kn} + K_{mnkn} \cdot \overline{q}_{kn}\right) = 0 \qquad \text{(III.12)}$$

Les matrices de masse et de raideur sont celles fournies en (III.8) et (III.9), avec cependant une différence pour la matrice de raideur car nous introduisons l'amortissement de la plaque par l'intermédiaire du module de Young complexe.

$$E^* = E(1 + j\eta) \qquad \text{(III.13)}$$

Il convient donc de remplacer E par E* dans l'expression de la matrice de raideur (III.9) et plus exactement dans l'expression de la rigidité à la flexion D. Le vecteur des forces excitatrices est donné par :

$$\overline{F}_{mn} = \iint_S \Phi_{mn}(x,y) \cdot \overline{F}(x,y)\, dx\, dy \qquad \text{(III.14)}$$

La résolution exacte du problème conduit à des systèmes matriciels (III.12) infinis, et seule une résolution approchée, par troncature de la série (III.11), est possible. C'est ce que nous effectuons dans la suite de ce chapitre.

III.3. Rayonnement acoustique de la plaque

III.3.1. Définition du problème et solution classique

Nous considérons le cas du rayonnement dans un milieu semi-infini, la plaque étant prolongée par un baffle rigide infini. Les équations régissant le mouvement du fluide, dans le milieu récepteur V_2 (demi espace z > 0), pour des mouvements harmoniques de pulsation ω, sont :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)P(M) = 0 & M \in V_2 \\ \dfrac{\partial P(M_0)}{\partial z} = -j\omega\rho_0 V_n(M_0) & M_0 \in S \\ V_n(x,y) = 0 \quad \begin{matrix} pour\ x \le 0 \ \ ou \ \ x \ge a \\ et \quad\ \ y \le 0 \ \ ou \ \ y \ge b \end{matrix} & (Baffle\ rigide) \\ + Condition\ de\ Sommerfeld \end{cases} \qquad \text{(III.15)}$$

La solution du problème (III.15) est fournie par l'intégrale de Rayleigh, qui permet de déterminer la pression acoustique en un point M de V à partir de la vitesse vibratoire sur la surface de la plaque.

$$P(M) = \frac{j\rho_0\omega}{2\pi}\iint_S V_n(M_0)\frac{e^{-jkr}}{r}dS \qquad avec \qquad r = \left|\overrightarrow{MM_0}\right| \tag{III.16}$$

III.3.2. Intensité acoustique et puissance rayonnée par la plaque

L'intensité acoustique au point M(x,y,z) est donnée par :

$$\vec{I}(M) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(P(M)\cdot\vec{V}^*(M)) \tag{III.17}$$

Cette intensité permet d'accéder à la puissance rayonnée par la plaque en intégrant son flux sur une surface de contrôle entourant la plaque. En calculant pour une surface de contrôle S_d confondue avec celle de la plaque z = 0, seule la composante de l'intensité suivant z est nécessaire pour le calcul de la puissance ; elle est donnée par :

$$I_z(x,y) = \frac{\rho_0\omega^2}{4\pi}\overline{w}^*(x,y)\times\oint\!\!\oint_S \overline{w}^*(x_0,y_0)\frac{e^{-jkr}}{r}dS \tag{III.18}$$

L'intégrale apparaissant dans (III.18) fait apparaître une singularité quand r = 0 ; afin de la lever, on utilise la méthode de collocation proposée par Sayhi (1979) et Hamzaoui (1984). Un bref rappel de la méthode est présenté dans l'annexe 1. Cette méthode, fournit le résultat exact de la puissance rayonnée par le champ vibratoire de la plaque puisque l'intensité est nulle sur le baffle.

La puissance acoustique rayonnée par la plaque est donc obtenue par intégration de I_z sur la surface de la plaque :

$$\Pi_{ray} = \int_S \vec{I}_z(M)\cdot\vec{n}(M)\,dS \tag{III.19}$$

III.3.3. Calcul de la puissance rayonnée par utilisation des impédances de rayonnement

Un calcul classique pour déterminer la pression acoustique pariétale rayonnée par une plaque dont les vibrations sont décrites par la décomposition (III.11) consiste à utiliser les impédances de rayonnement. On obtient tous calculs faits :

$$P(x,y,0) = j\omega\sum_{n,m}\sum_{k,l}\overline{q}_{nm}\cdot Z_{mnkl}\cdot\Phi_{kl}(x,y) \tag{III.20}$$

où Z_{mnkl} sont les impédances de rayonnement calculées par les expressions (voir Guyader et al. (1994)) :

$$Z_{mnkl} = \frac{4}{ab}\rho_0 C\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}\widetilde{\Phi}_{nm}(\lambda,\mu)\cdot\widetilde{\Phi}^*_{kl}(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu \tag{III.21}$$

où $\widetilde{\Phi}_{nm}(\lambda,\mu)$ est la double transformée de Fourier d'espace des fonctions $\Phi_{nm}(x,y)$. De cette expression de la pression pariétale on déduit facilement la puissance rayonnée par l'expression :

$$\Pi_{ray} = \frac{1}{2}\sum_m\sum_n\sum_k\sum_l\mathrm{Re}(P(M)\cdot\vec{V}^*(M)) \tag{III.22}$$

Une approximation est alors très souvent introduite, car elle simplifie les calculs et s'avère réaliste dans de nombreux cas pratiques de rayonnement dans un fluide léger. Elle consiste à négliger les contributions croisées devant les contributions modales, l'équation (III.22) se réduit alors à :

$$\Pi_{ray} = \frac{1}{2}\sum_m\sum_n \frac{ab}{4}\omega^2 \left|\overline{q}_{mn}\right|^2 R_{mnmn} \qquad \text{(III.23)}$$

où $R_{mnmn} = \mathrm{Re}(Z_{mnmn})$ est la résistance de rayonnement modal.

Cette approximation est licite quand $\Phi_{kl}(x,y)$ sont les modes propres de la structure, ce qui est le cas d'une plaque à épaisseur constante mais ne l'est pas quand la plaque est à épaisseur variable. L'approximation est-elle toujours valable ? Nous répondrons à cette question en comparant la puissance exacte calculée par l'intégrale de l'intensité (III.19) et la formule approchée (III.23). Pour le calcul des résistances de rayonnement modales R_{mnmn} nous utilisons les expressions de Wallace, (voir Wallace (1972)) et une intégration numérique basée sur l'algorithme de Gauss-Legendre.

III.3.4. Influence des impédances de rayonnement intermodales

Pour répondre à la question posée à la fin de la section III.3.3, nous représentons dans les figures III.3, III.4 et III.5 la différence de puissance acoustique rayonnée calculée exactement par (III.19) et approchée par (III.23).

Les plaques considérées sont : une plaque à épaisseur constante et deux plaques à épaisseur variable. Les plaques sont de dimension 1 m X 1m, d'épaisseur $h_0 = 0.008$ m et sont excitée mécaniquement au point de coordonnées (0.33 , 0.38). Toutes les plaques sont en acier.

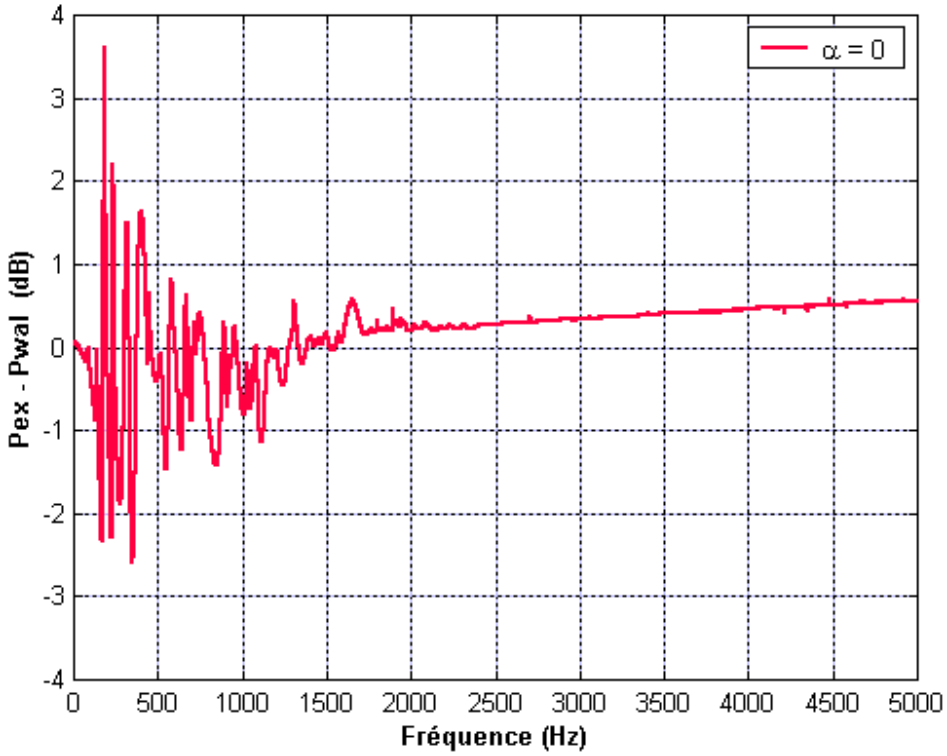


Figure III.3. *Différence de puissances acoustiques rayonnées calculées par (III.19) et approchée par (III.23), pour une plaque à épaisseur constante.*

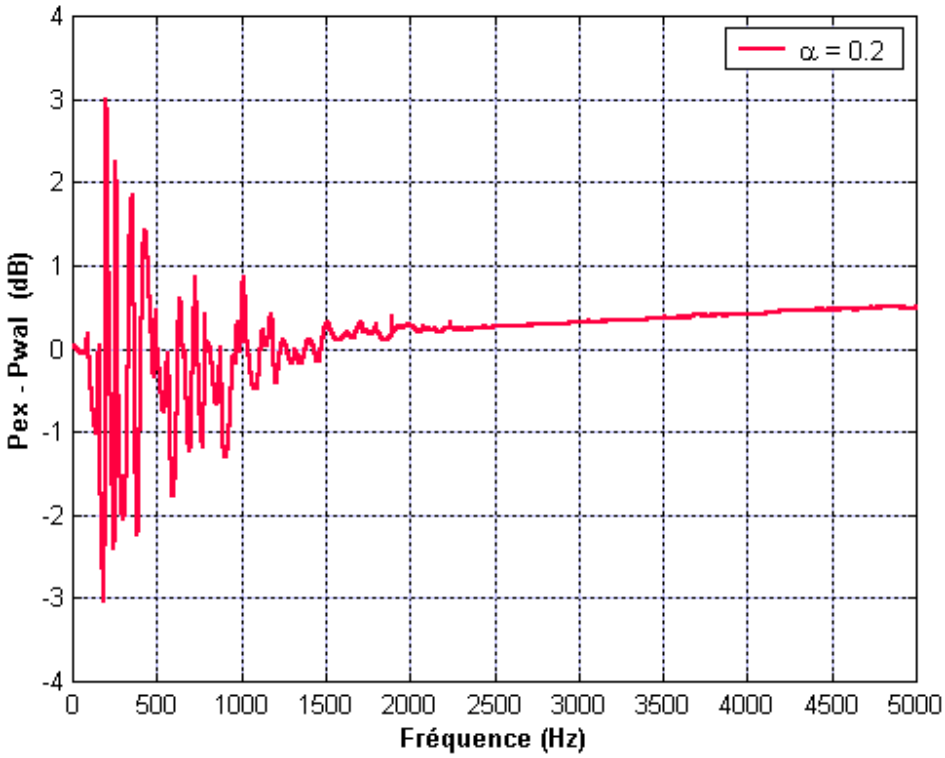


Figure III.4. *Différence de puissances acoustiques rayonnées calculées par (III.19) et approchée par (III.23), pour une plaque à épaisseur variable* $\alpha = 0.2$.

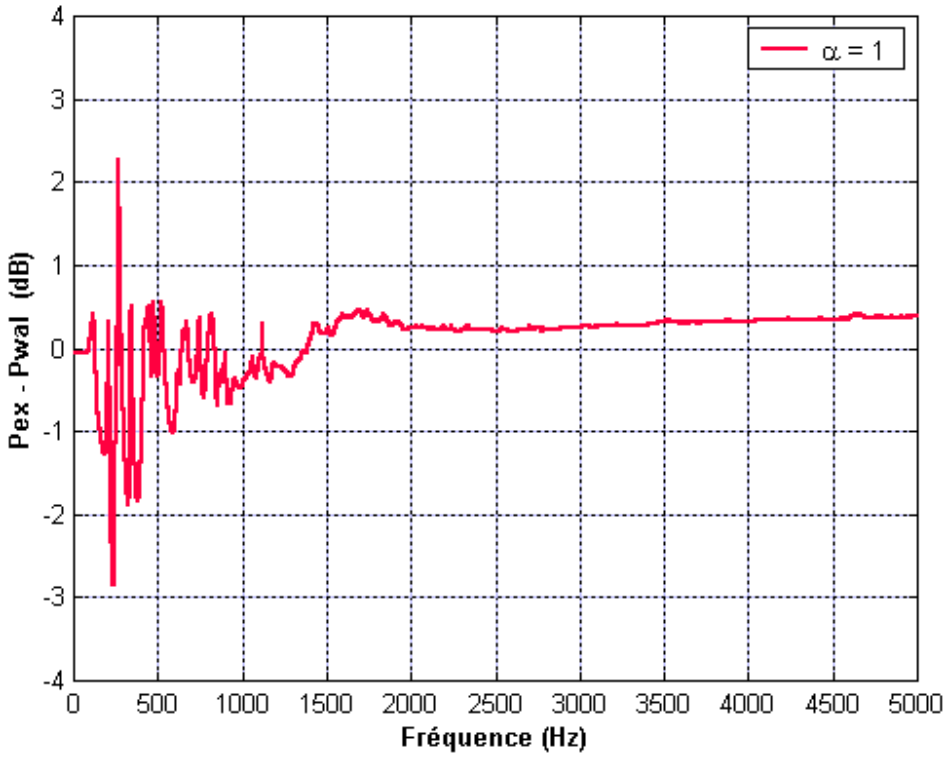


Figure III.5. *Différence de puissances acoustiques rayonnées calculées par (III.19) et approchée par (III.23), pour une plaque à épaisseur variable* $\alpha = 1$.

Dans les trois courbes, nous distinguons une zone, de basses fréquences, où la différence oscille fortement et peut atteindre 3 dB et une zone, de hautes fréquences, où cette différence a tendance à diminuer avec l'accroissement de la variation d'épaisseur α.

Le fait que la différence entre les calculs approchés et précis soit plus forte pour la plaque à épaisseur constante tient à l'effet de dissymétrie de la plaque à épaisseur variable.

Pour la plaque à épaisseur constante, le court circuit acoustique produit un facteur de rayonnement présentant de fortes chutes localisées en fréquence. La prise en compte ou non du couplage intermodal se traduit par une variation des résultats approchés et précis, dans la zone fréquentielle où se produit le court circuit.

Pour la plaque à épaisseur variable, la non symétrie, élimine une partie du court circuit, et la chute du facteur de rayonnement est limitée. Dans ce cas les fluctuations des fréquences liées à la résolution approchée et précise conduisent à des différences plus faibles que dans le cas des plaques d'épaisseur constante.

Nous pouvons affirmer que globalement, l'utilisation des coefficients de rayonnement R_{mnmn} s'avère assez précise et intéressante pour les plaques à épaisseur constante mais aussi pour celles à épaisseur variable. Le calcul approché est intéressant d'une part par la rapidité des calculs, et d'autre part pour l'évaluation hiérarchique de la contribution de chaque fonction de base sur le bruit rayonné globalement. Notons cependant que tous les résultats qui suivent sont des calculs issus de la méthode exacte.

III.4. Etude numérique du rayonnement des plaques d'épaisseurs constantes et variables

L'ensemble des résultats présentés porte sur le facteur de rayonnement σ des plaques dont la définitions est bien connue et que nous rappelons pour mémoire. Le facteur de rayonnement est le rapport de la puissance rayonnée par la plaque et sa vitesse quadratique. Ce facteur décrit le rendement acoustique du champ vibratoire et met clairement en évidence le couplage fluide-structure.

III.4.1. Effet de l'épaisseur sur le facteur de rayonnement (plaques à épaisseurs constantes)

Ce cas est bien connu et ne sert ici que de référence de comportement, pour l'étude des plaques d'épaisseurs variables. Les variations de la puissance acoustique et du coefficient de rayonnement en fonction de la fréquence sont montrées aux figures III.6 et III.7. On retrouve bien les deux zones fréquentielles de comportement vibroacoustique différent de part et d'autre de la fréquence critique. Le coefficient de rayonnement est inférieur à 1 en dessous de la fréquence critique et tend vers 1 au-dessus de la celle-ci. L'augmentation de l'épaisseur a pour rôle de diminuer la fréquence critique.

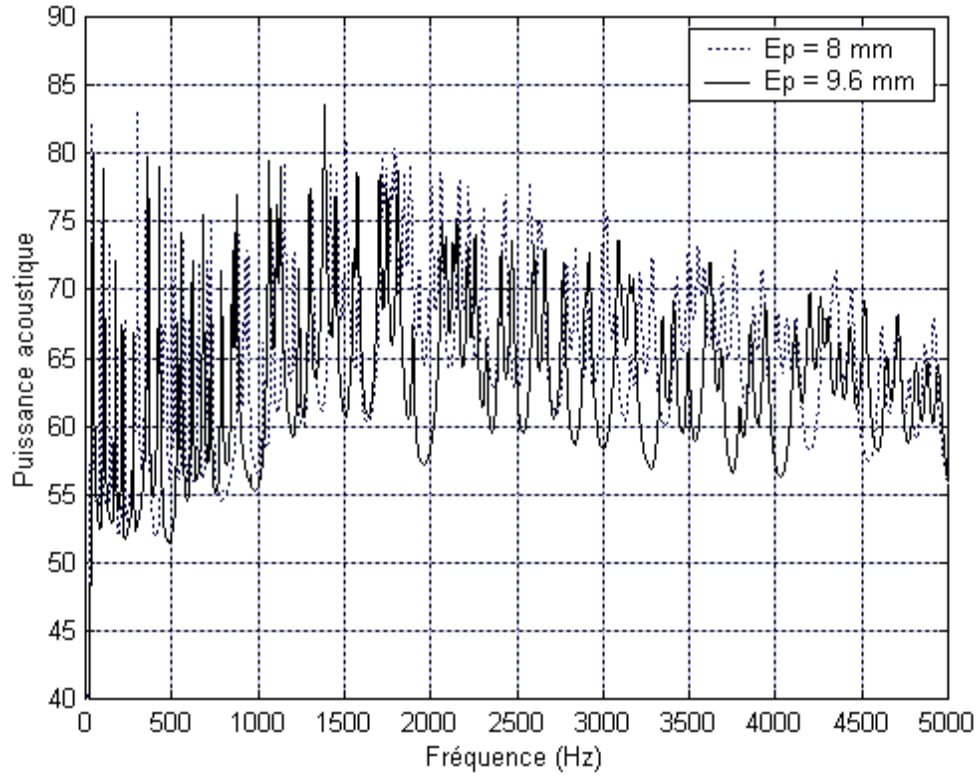


Figure III.6. *Puissance acoustique pour deux plaques à épaisseur constante.*

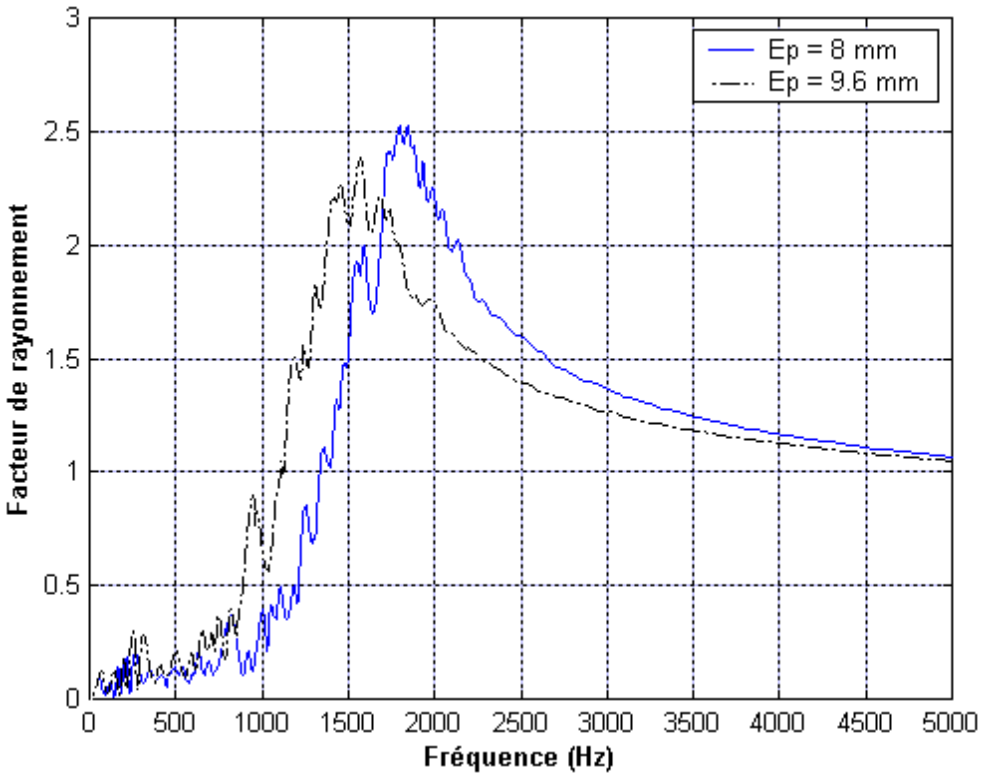


Figure III.7. *Facteur de rayonnement acoustique pour deux plaques à épaisseur constante.*

III.4.2. Effet de la variation d'épaisseur sur le facteur de rayonnement des plaques

Nous comparons à la figure III.8 et III.9, la puissance acoustique et le facteur de rayonnement d'une plaque à épaisseur constante et de deux plaques à épaisseur variable.

L'épaisseur de la première varie de 8 à 9.6 mm et celle de la seconde de 8 à 16 mm. Nous constatons que pour les plaques à épaisseur variable la fréquence critique diminue d'autant que l'épaisseur varie fortement. Il faut aussi noter que la bande de fréquences de fort facteur de rayonnement a tendance à s'étaler avec l'accroissement du coefficient de variation d'épaisseur α.

Au dessus de la fréquence critique des plaques (à partir de 3000 Hz), les facteurs de rayonnement des trois plaques sont voisins de l'unité, mais on constate cependant une différence des puissances acoustiques rayonnées. Ce phénomène est lié aux vibrations des plaques qui diminuent quand le facteur α augmente. Cette tendance est simple à expliquer puisque les structures utilisées ont une épaisseur moyenne d'autant plus grande que le facteur α est grand. On obtient donc des structures de mobilité décroissante avec α.

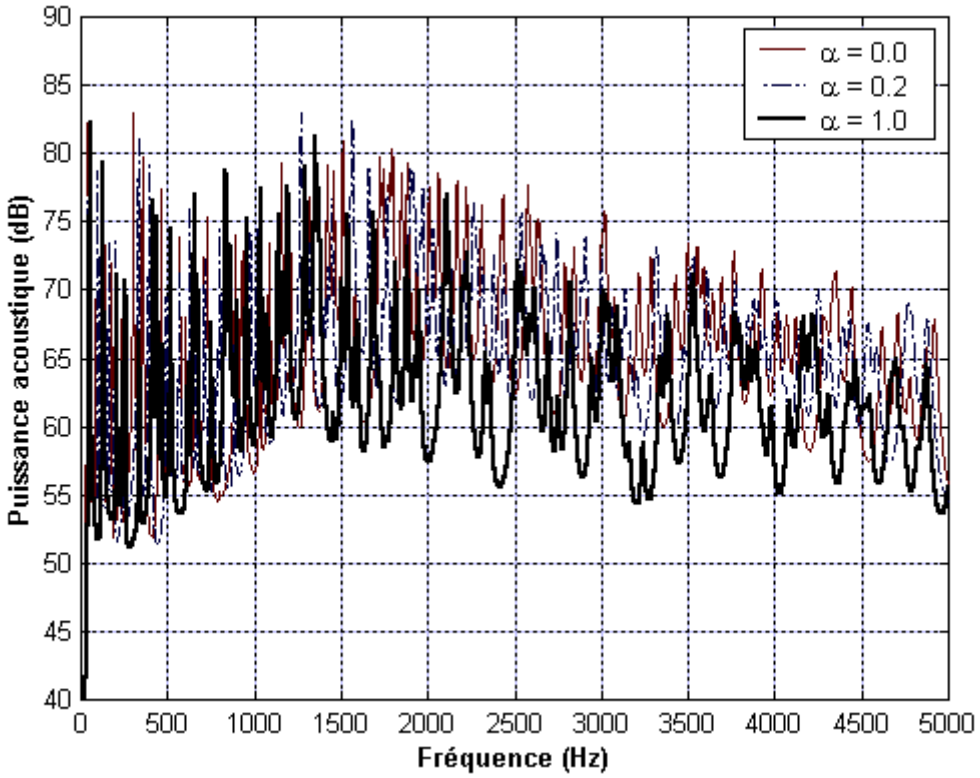


Figure III.8. *Comparaison de la puissance acoustique d'une plaque à épaisseur constante et de deux plaques à épaisseur variable.*

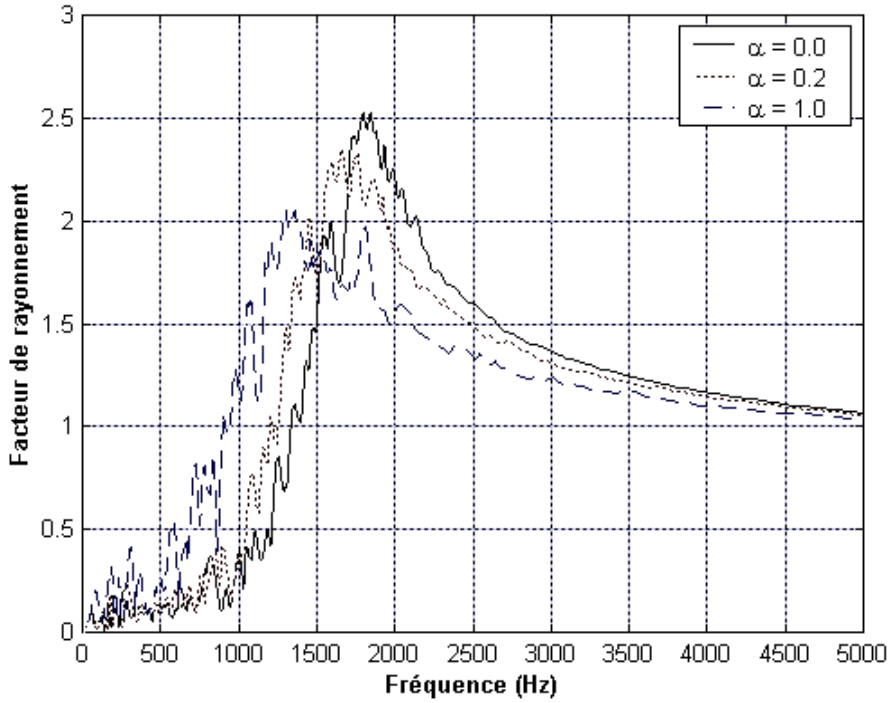


Figure III.9. *Comparaison du facteur de rayonnement d'une plaque à épaisseur constante et de deux plaques à épaisseur variable.*

III.4.3. Effet d'un défaut géométrique sur le facteur de rayonnement

Jusqu'à présent, la variation d'épaisseur étudiée était toujours accompagnée d'une variation de masse. Nous représentons aux figures III.10 à III.13, l'effet de la variation d'épaisseur purement géométrique c'est à dire sans variation de masse. Pour ces figures, les deux plaques sont de même masse mais l'une est à épaisseur constante et l'autre est à épaisseur linéairement variable.

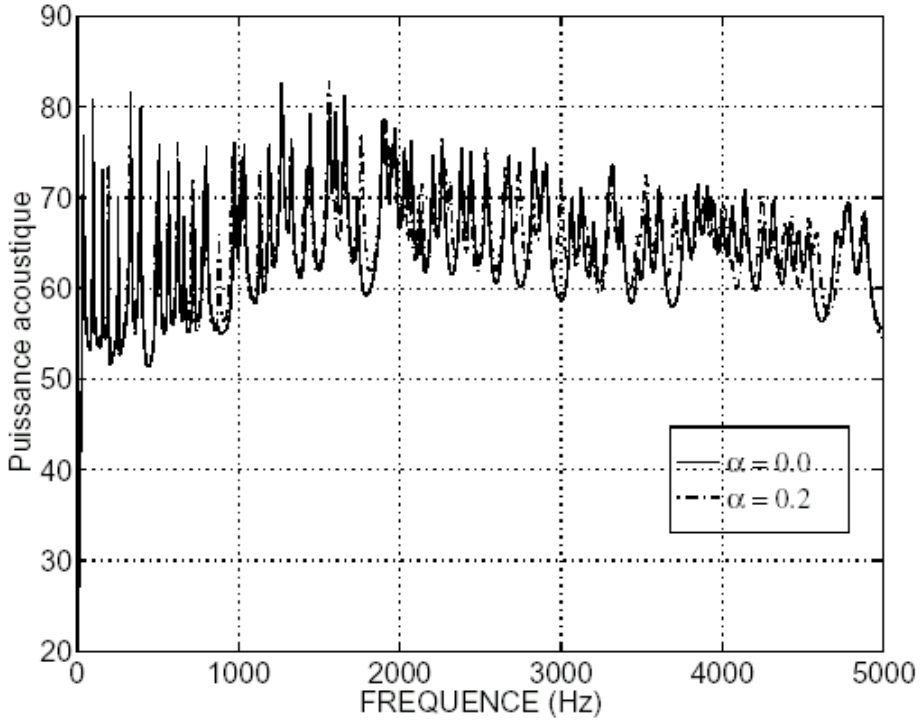


Figure III.10. *Influence d'un défaut d'épaisseur modéré (α = 0.2) sur la puissance acoustique.*

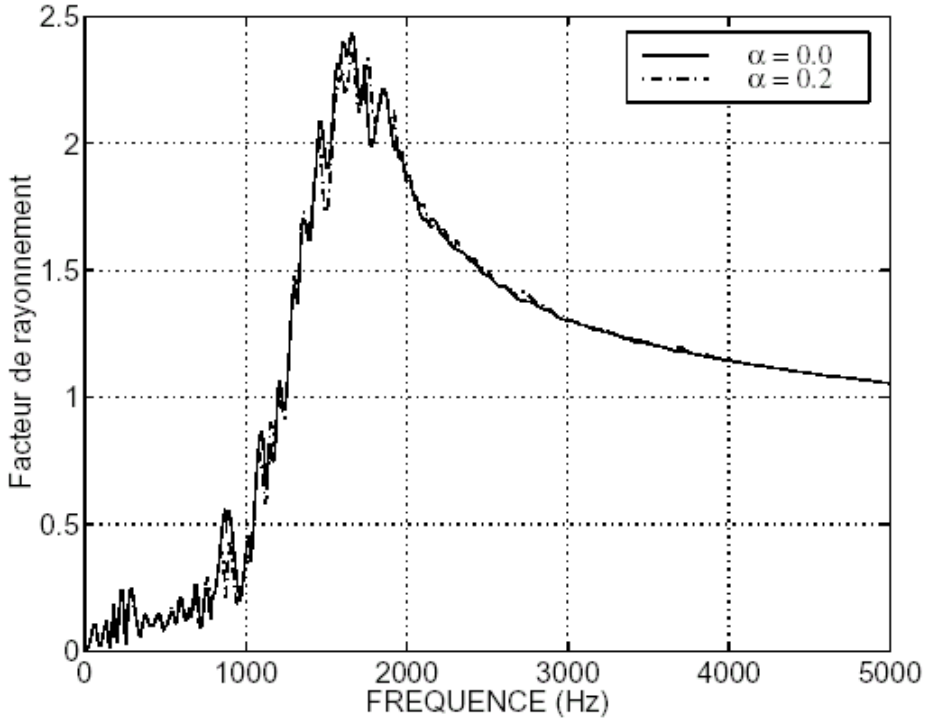


Figure III.11. *Influence d'un défaut d'épaisseur modéré (α = 0.2) sur le facteur de rayonnement acoustique.*

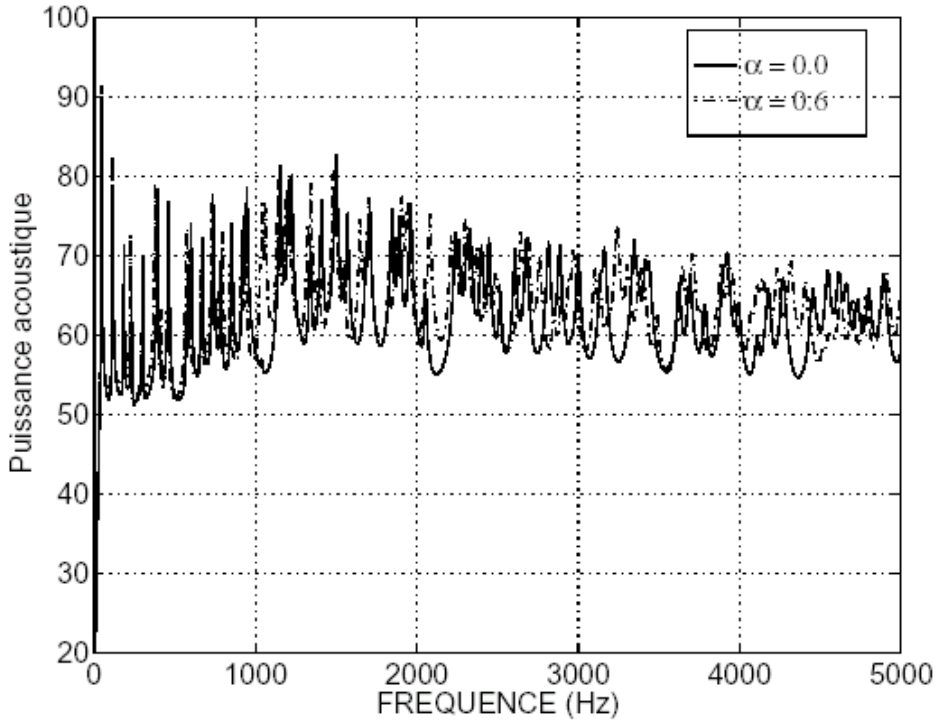


Figure III.12. *Influence d'un défaut d'épaisseur accentué (α = 0.6) sur la puissance acoustique.*

Nous constatons, que globalement les deux plaques se comportent de la même manière et par conséquent l'effet d'un défaut purement géométrique sur le rayonnement acoustique des plaques est faible.

Les facteurs de rayonnement sont quasiment superposables, ce qui démontre l'étonnante robustesse du facteur de rayonnement pour des plaques d'épaisseur variable de même masse.

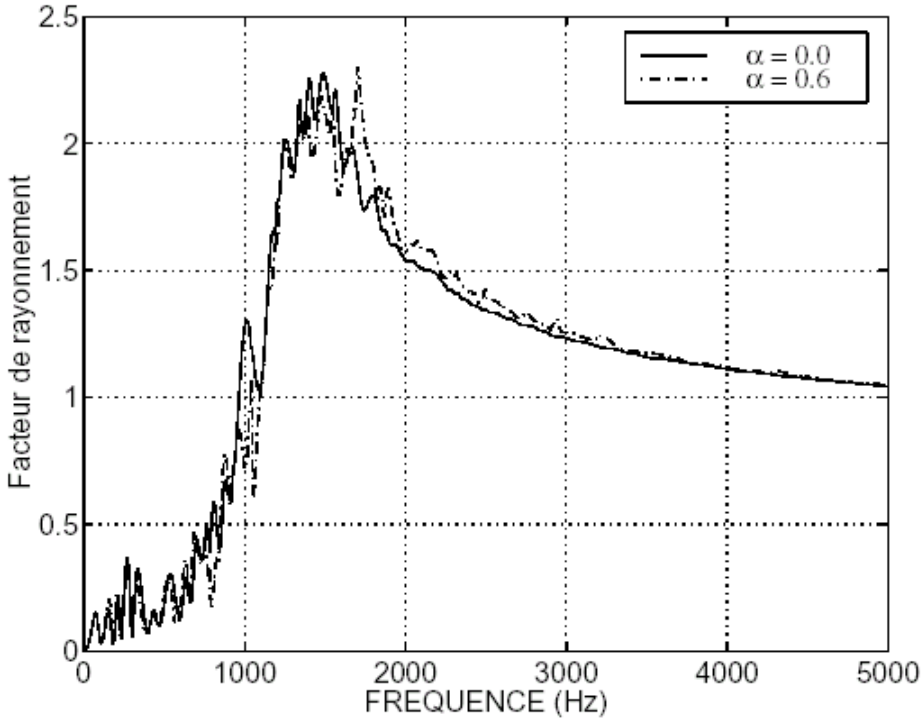


Figure III.13. *Influence d'un défaut d'épaisseur accentué (α = 0.6) sur le facteur de rayonnement acoustique.*

L'examen des courbes de puissances rayonnées fait apparaître des petites différences qui s'expliquent par des décalages de pics de résonance. Globalement, sur des bandes de fréquences incluant plusieurs modes, la différence de puissance rayonnée est très faible.

III.5. Conclusion

Nous avons proposé une modélisation du comportement vibroacoustique des plaques à épaisseur variable. Le calcul de la puissance acoustique a été effectué par intégration de l'intensité exacte et par utilisation des impédances de rayonnement.

L'approche intégro-modale nous a permis aussi d'évaluer l'effet du couplage intermodal qui est souvent négligé lors d'un calcul de rayonnement dans un fluide léger tel que l'air. Pour une plaque d'épaisseur variable, nous avons montré que la différence entre les puissances acoustiques calculées avec et sans prise en compte du couplage intermodal est du même ordre que pour une plaque à épaisseur constante.

L'analyse de ces résultats nous permet d'affirmer, que globalement, l'utilisation des coefficients de rayonnement modaux s'avère assez précise et très intéressante, d'une part pour la rapidité des calculs et d'autre part, pour l'évaluation hiérarchique de la contribution de chaque fonction de base sur le bruit rayonné globalement.

Pour l'influence des défauts d'épaisseur sur le facteur de rayonnement, nous avons montré qu'un défaut purement géométrique (sans variation de masse) n'altère pas le comportement acoustique mais par contre un défaut s'accompagnant d'une variation de masse déplace et étale la zone de fréquence critique. Ces variations restent cependant faibles et des défauts d'épaisseur ne peuvent expliquer les écarts théorie-expériences enregistrés pour le rayonnement des structures.

CHAPITRE IV

FORMULATION TEMPORELLE DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE ET SYNTHESE SONORE

IV.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de modéliser les phénomènes du rayonnement acoustique d'une structure vibrante (plaque) afin d'évaluer le bruit à la source. A cet effet, nous présentons l'approche temporelle du rayonnement acoustique qui est bien adaptée à la modélisation numérique du champ acoustique transitoire produit par des impacts. En effet, l'évolution du champ acoustique, engendré par un impact, peut alors être étudiée par résolution numérique en champ proche dès le début de l'excitation.

Comme pour l'approche fréquentielle, nous démarrons à partir des vitesses et accélérations vibratoires en différents points du maillage de la plaque, fournies par l'étude vibratoire. Nous assimilons les déformations en flexion de la plaque à une série de sources sonores placées au centre des mailles issues de la discrétisation de la plaque.

L'objectif est donc de déterminer la pression acoustique rayonnée, dans le milieu extérieur, d'une structure vibrante dont l'état vibratoire est connu. Il s'agit donc, d'accéder à la pression acoustique en tout point du milieu environnant la structure, à partir de la connaissance de son comportement vibratoire. La méthode utilisée est basée sur la résolution de l'intégrale de Kirchoff. Généralement utilisée dans le domaine fréquentiel, on peut l'adapter dans l'espace temporel pour l'intégrer dans la synthèse sonore.

IV.2. Formulation intégrale de l'équation d'onde

Une fois les caractéristiques vibratoires de la structure vibrante, sont déterminées, en fonction du temps et en utilisant les outils relatifs aux méthodes intégrales, nous pouvons désormais calculer la pression acoustique rayonnée en n'importe quel point de l'espace.

Dans notre cas, la pression acoustique rayonnée par une plaque vibrante est régie par les équations de l'acoustique linéaire qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta P(M,t) - \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 P(M,t)}{\partial t^2} = 0 & \forall M \in V \\ \dfrac{\partial P(M_0,t)}{\partial n} = -\rho_0 \dfrac{\partial V(M_0,t)}{\partial t} & \forall M_0 \in S \\ Condition\ de\ Sommerfeld\ à\ l'infini \end{cases} \qquad \text{(IV.1)}$$

avec :
P(M) : la pression acoustique au point M
$V(M_0)$: la vitesse vibratoire au point M_0
ρ_0 : la masse volumique du fluide
C : célérité du son dans le fluide
$\vec{n}$: la normale extérieure à la surface S au point M_0

Le problème étant constitué d'une structure vibrante de surface S, rayonnant dans un champ acoustique infini (cf. figure IV.1) ; nous utilisons donc la formulation intégrale pour exprimer la pression acoustique extérieure en un point M de l'espace.

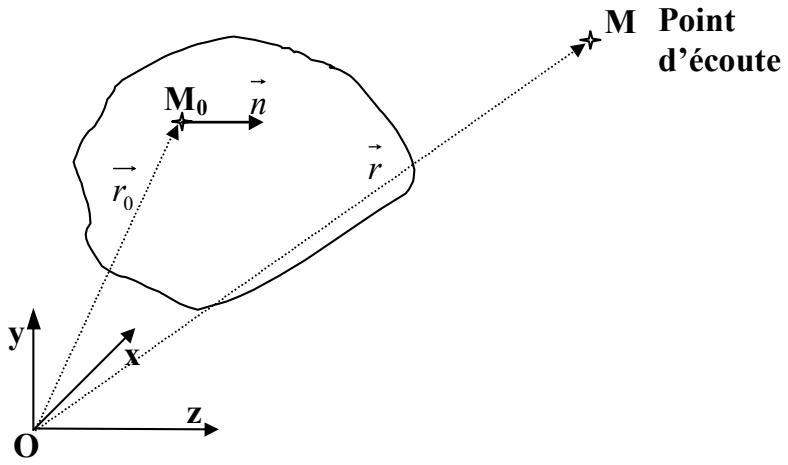


Figure IV.1.

où M_0 est un point de la surface vibrante,
$\vec{r}$ et $\overrightarrow{r_0}$ désignent respectivement les positions du point d'observation et du point source.
V est le domaine d'étude, S la surface d'une source quelconque et $\overrightarrow{V_n}(\overrightarrow{r_0},t)$ son profil de vitesse normale.

L'équation de propagation peut s'exprimer comme une équation intégrale de surface. Le champ de pression peut s'écrire comme une intégrale comprenant les valeurs de la pression sur la surface (obtenue grâce aux vitesses vibratoires) ainsi que la fonction de Green associée à l'équation d'onde.

En supposant que les termes de forces volumiques sont nuls (les termes sources sont alors introduit via les conditions aux limites sur la surface (S), la formulation intégrale de l'équation d'onde permettant de calculer la pression en un point quelconque de l'espace environnant la source est donnée, dans le domaine temporel, par l'expression suivante (lire par exemple C. Lambourg, 1996) :

$$P(\vec{r},t) = -\int_0^t \left[\iint_S \left(\rho_0 \frac{\partial V_n\left(\overrightarrow{r_0},t_0\right)}{\partial t_0} G + P\left(\overrightarrow{r_0},t_0\right) \frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{n_0}} \right) dS_0 \right] dt_0$$
$$-\frac{1}{C^2} \iiint_V \left[P\left(\overrightarrow{r_0},0\right) \frac{\partial G}{\partial t_0}\bigg|_{t_0=0} - G \frac{\partial P\left(\overrightarrow{r_0},t_0\right)}{\partial t_0}\bigg|_{t_0=0} \right] dV_0 \qquad \text{(IV.2)}$$

avec G : la fonction de Green explicite dépendant du temps donnée par :

$$G = \frac{\delta\left(\frac{R}{C} - \tau\right)}{4\pi R} \qquad \text{(IV.3)}$$

où : $R = \left| \vec{r} - \overrightarrow{r_0} \right|$ et $\tau = t - t_0$

Dans cette expression, le premier terme traduit l'influence de la source, le second terme les conditions initiales en $t = 0$. Dans le cas où ces dernières sont nulles, l'expression (IV.2) de la pression acoustique devient :

$$P(\vec{r},t) = -\int_0^t \left[\iint_S \left(\rho_0 \frac{\partial V_n\left(\vec{r_0},t_0\right)}{\partial t_0} G + P\left(\vec{r_0},t_0\right) \frac{\partial G}{\partial \vec{n_0}} \right) dS_0 \right] dt_0 \qquad \text{(IV.4)}$$

La difficulté liée à la résolution de cette formulation intégrale vient du fait qu'il est nécessaire dans un premier temps de calculer la pression pariétale $P(M_0)$ de la structure vibrante, dont on ne connaît généralement pas l'expression et qui nécessite l'utilisation de méthodes numériques de type éléments finis (FEM) ou éléments de frontières (BEM) très coûteuses en temps de calcul.

L'approximation de cette pression pariétale permet d'obtenir une formulation facilement exploitable et minimiser considérablement le temps de calcul. Néanmoins, il faut garder à l'aspect qualitatif de la prévision du bruit rayonné et une précision acceptable au niveau quantitatif.

Dans le cas de structures planes infinies, on peut simplifier l'expression de l'équation générale à l'aide de la méthode des images en se ramenant à une équation intégrale explicite dans laquelle la pression à la surface de la source n'intervient pas. C'est l'intégrale de Rayleigh qui s'écrit (avec P et $\overrightarrow{V_n}$ identiquement nuls en $t = 0$) :

$$P(\vec{r},t) = -2\rho_0 \int_0^t \left[\iint_S \left(\frac{\partial V_n\left(\vec{r_0},t_0\right)}{\partial t_0} \frac{\delta\left(\frac{R}{C} - \tau\right)}{4\pi R} \right) dS \right] dt_0$$

$$\Leftrightarrow \quad P(\vec{r},t) = -\frac{\rho_0}{2\pi} \iint_S \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_n\left(\vec{r_0}, t - \frac{R}{C}\right)}{\partial t} \right) dS \qquad \text{(IV.5)}$$

La pression générée par des plaques insérées dans un écran infini peut donc être calculée très simplement en intégrant numériquement l'accélération transversale de la plaque retardée et pondérée en fonction de la distance point source – point d'écoute. Un algorithme simple basé sur le schéma d'intégration de Newmark (Raviart, 1983), est proposé dans le paragraphe suivant.

Notons que l'écran est supposé infini si ses dimensions sont suffisamment grandes devant les longueurs d'onde de pressions considérées, c'est à dire typiquement $>> C/f_0$ où f_0 est la fréquence du mode fondamental de la plaque.

IV.3. Résolution de l'intégrale de Rayleigh

Comme pour le calcul fréquentiel, nous présentons les différentes hypothèses simplificatrices sur lesquelles repose l'approximation.

IV.3.1. Cas d'une plaque bafflée

Dans les précédents chapitres, nous avons vu comment calculer les accélérations vibratoires d'une plaque soumise à une excitation quelconque et ce quelles que soient les conditions limites. Connaissant le champ d'accélération et utilisant les outils relatifs aux méthodes intégrales, nous pouvons désormais calculer la pression acoustique rayonnée par la plaque en n'importe quel point de l'espace.
Considérons la configuration suivante :

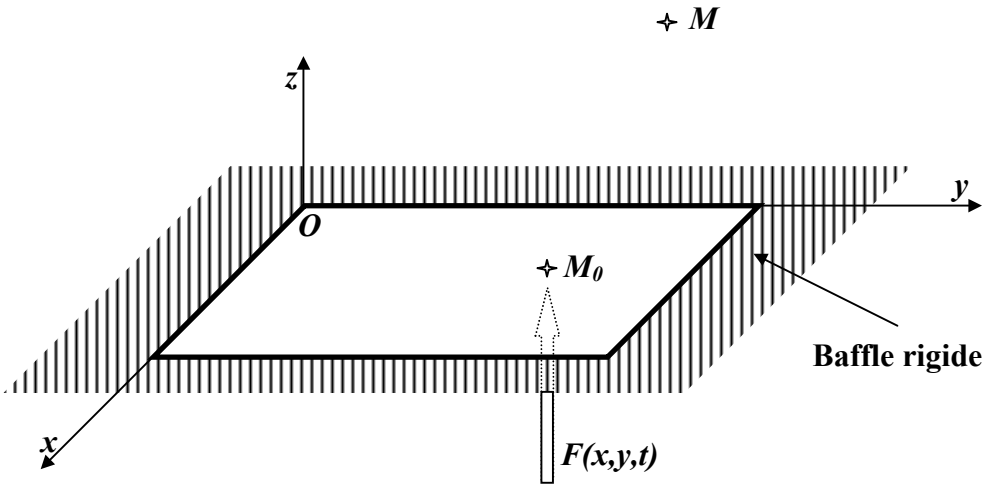


Figure IV.2. *Rayonnement acoustique d'une plaque rectangulaire.*

La plaque (S) est entourée d'un baffle (S_B) supposé infini et parfaitement rigide empêchant tout retour de l'onde arrière émise dans le demi-espace ($z < 0$). Par la suite, nous ne nous intéresserons plus qu'au demi-espace V tel que $z>0$. De plus, on se place en champ libre et on suppose les conditions de Sommerfeld vérifiées.
Le calcul de la pression rayonnée par la plaque est régi par :

$$\begin{cases} \Delta P(M,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 P(M,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \forall M \in (z>0) \\ \dfrac{\partial P(Q,t)}{\partial n} = -\rho_0 \dfrac{\partial V(Q,t)}{\partial t} \quad \forall Q \in S \\ \dfrac{\partial P(Q,t)}{\partial n} = 0 \quad \forall Q \in S_B \\ \textit{Conditions de Sommerfeld à l'infini} \end{cases} \tag{IV.6}$$

IV.4. Equation intégrale

L'équation de propagation peut s'exprimer comme une équation intégrale aux frontières. Le champ de pression peut s'écrire comme une intégrale comprenant les valeurs de la pression sur la surface et son gradient normal à la surface ainsi que la fonction de Green associée à l'équation d'onde.

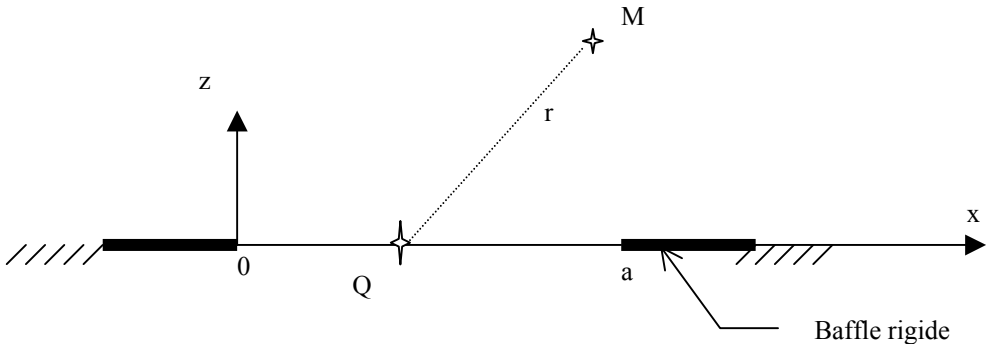


Figure 2. *Rayonnement d'une plaque rectangulaire dans le plan (Oxz).*

De plus comme il n'y a pas de source acoustique de volume, nous avons alors :

$$C(y)P(y,t)=\int_0^t\left\{\int_S\left[\frac{\partial P(x,\tau)}{\partial n}g(x,y,t')-P(x,\tau)\frac{\partial g(x,y,t')}{\partial n}\right]dS(x)\right\}d\tau \qquad \text{(IV.7)}$$

y : point où la pression acoustique est calculée
x : point sur la surface de la plaque
t : temps auquel la pression est calculée
τ : un temps dans l'intervalle [0, t]
t' = t-τ

$$C(y)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad y\in V\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad y\in S\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

P : la pression acoustique et g : la fonction de Green.

La fonction de Green et sa dérivée normale correspondent aux champs de pression acoustique et de vitesse induits par une impulsion émise au point x à l'instant τ et reçue au point y à l'instant t. Elle est solution de l'équation non homogène, équation de propagation dans le domaine temporel :

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)g(x,y,t')=-\delta(y-x)\delta(t-\tau)=-\delta(y-x)\delta(t') \qquad \text{(IV.8)}$$

où δ est la distribution de Dirac et c la célérité du son dans l'air.
L'expression d'une telle fonction est :

$$g(x,y,\tau,t)=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r}{c}-(t-\tau)\right)=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r}{c}-t'\right) \qquad \text{(IV.9)}$$

avec $r=\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|$, distance entre la source x et le point d'écoute y où la pression est calculée.

De plus d'après Bruneau (1983), en utilisant la méthode de la source image, l'expression de la fonction de Green et de sa dérivée normale se trouvent simplifiée. Dans notre cas, le domaine d'étude (V) est un espace semi-infini z>0, limité par un plan parfaitement réfléchissant, le baffle rigide, situé en z=0. Considérons le schéma suivant :

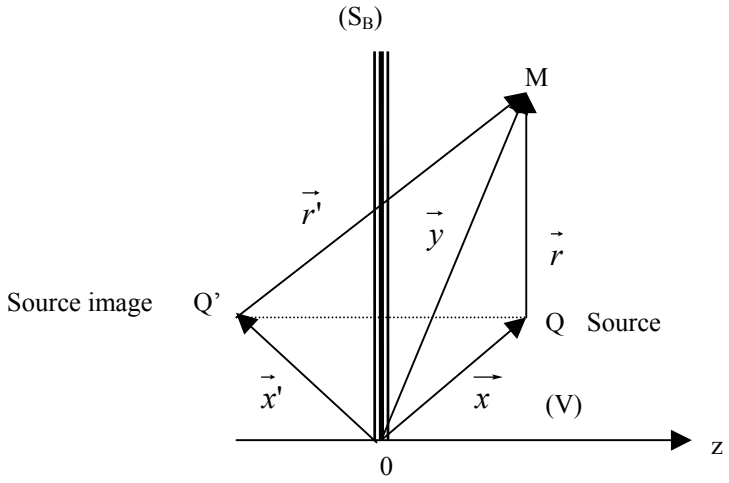


Figure IV.3. *Fonction de Green dans le domaine (V) : méthode de la source image.*

La somme de la fonction de Green $\frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r}{c}-t'\right)$ (où $r=\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|$ représente la distance séparant une source ponctuelle située en $\vec{x}$ d'un point d'écoute M située en $\vec{y}$) et de la fonction $\frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r'}{c}-t'\right)$ (où $r'=\left\|\vec{x'}-\vec{y}\right\|$ représente la distance séparant la source image ponctuelle située en $\vec{x'}$ d'un point d'écoute M située en $\vec{y}$) forme une nouvelle fonction de Green G(x,y,t,τ) :

$$G(x,y,\tau,t)=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r}{c}-t'\right)+\frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r'}{c}-t'\right) \qquad \text{(IV.10)}$$

toujours avec t'=t-τ.

Dans notre cas, la source est une plaque (S) située dans le plan réfléchissant (z=0). Ainsi nous avons *r'=r*, et (IV.10) s'écrit plus simplement :

$$G(x,y,\tau,t)=\frac{1}{2\pi r}\delta\left(\frac{r}{c}-t'\right) \qquad \text{(IV.11)}$$

mais la propriété fondamentale d'une telle fonction de Green G est que sa dérivée normale est nulle :

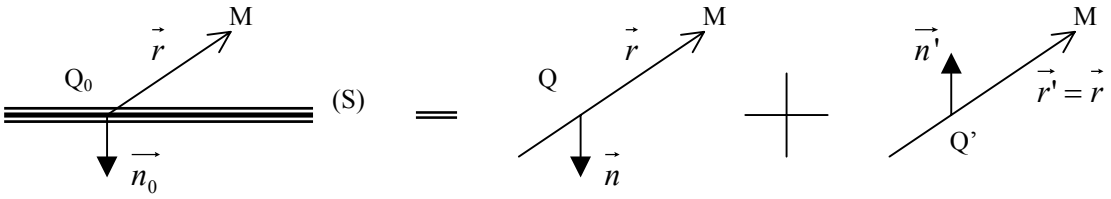


Figure IV.4. *Fonction de Green et sa dérivée normale : méthode de la source image.*

On a : $\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{n_0}}=\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{n}}+\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{n'}}=0$.

Ainsi l'équation intégrale (IV.7) se trouve simplifiée :

$$C(y)P(y,t)=\int_0^t\int_S \frac{\partial P(x,\tau)}{\partial n}\frac{1}{2\pi r}\delta\left(\frac{r}{c}-(t-\tau)\right)dSd\tau=\int_S \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial P(x,t-\frac{r}{c})}{\partial n}dS \qquad \text{(IV.12)}$$

Le temps de retard $t_r = t - \frac{r}{c}$ est en fait le temps où est émis le signal de pression par la source et qui atteindra le point d'écoute M au temps t, après avoir effectué un parcours r pendant la durée $\frac{r}{c}$. Nous avons bien entendu les contraintes causales suivantes :

$$\begin{cases} P(x,t_r)=0 \\ \dfrac{\partial P(x,t_r)}{\partial n}=0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad t_r \le 0 \qquad \text{(IV.13)}$$

Les conditions aux limites de vitesse de type Neumann entraînent :

$$\frac{\partial P(Q,t)}{\partial n}=-\rho_0\frac{\partial V(Q,t)}{\partial t}=-\rho_0\gamma_n(Q,t) \quad \forall Q\in S$$

avec γ_n l'accélération normale d'un point de la plaque.
L'équation (IV.10) a donc pour expression :

$$P(y,t)=\frac{-\rho_0}{2\pi C(y)}\int_S \frac{1}{r}\gamma_n(x,t-\frac{r}{c})dS$$

En discrétisant notre plaque en N_e éléments de centre x_i et de surface ΔS_i, nous pouvons approcher la solution par :

$$P(y,t)=\frac{-\rho_0}{2\pi C(y)}\sum_{i=1}^{N_e}\frac{1}{r_i}\gamma_{ni}(xi,t-\frac{r_i}{c})\Delta S_i \qquad \text{(IV.14)}$$

IV.5. Formulation intégrale simplifiée (Guyader 2002)

Le rayonnement des surfaces vibrantes peut être traité par une approche basée sur la résolution de l'intégrale de Kirchoff. Généralement utilisée dans le domaine fréquentiel, on peut l'adapter dans l'espace temporel (J.D. Chazot, 2002) pour l'intégrer dans la synthèse sonore. A partir des simplifications de la pression acoustique apportées par (N. Hamzaoui, 1997, 2002) et (T. Loyau, 2000) pour le domaine fréquentiel, deux expressions de la pression acoustique en tout point de l'espace permettent de recréer l'intégralité du spectre en respectant certaines conditions.

IV.5.1. Formulation intégrale complète

Le problème étant constitué d'une enveloppe vibrante de surface S, couplée à volume fluide externe V infini et respectant à grande distance les conditions de Sommerfeld.

La pression rayonnée par la plaque en vibrations est régie par les équations de l'acoustique linéaire qui s'écrivent par :

$$\begin{cases} \Delta P(M,t) - \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 P(M,t)}{\partial t} = 0 & \forall M \in V \\ \dfrac{\partial P(M_0,t)}{\partial n} = -\rho_0 \dfrac{\partial V(M_0,t)}{\partial t} & \forall M_0 \in S \\ \textit{Sommerfeld} & \end{cases}$$

La solution de ce système d'équations est une équation intégrale, exprimant la pression acoustique en tout point du volume V., en fonction de la pression pariétale et de la vitesse vibratoire sur la surface vibrante, donnée par :

$$P(M,t) = \int_0^t \left\{ \int_S \left[P(M_0,\tau)\frac{\partial g(M,M_0,t')}{\partial n} - \frac{\partial P(M_0,\tau)}{\partial n} g(M,M_0,t') \right] dS(M_0) \right\} d\tau \qquad \text{(IV.15)}$$

τ : un temps dans l'intervalle [0,t]

$$t' = t - \tau \qquad \text{(IV.16)}$$

La fonction de Green g(M,Q) et sa dérivée normale correspondent au rayonnement d'une impulsion unitaire émise au point Q à l'instant t et reçue au point M à l'instant t.

$$g(M,Q,t') = \frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r}{C} - t'\right) \qquad \text{(IV.17)}$$

$$\frac{\partial [g(M,Q,t']}{\partial n} = \frac{1}{4\pi r}\left[-\frac{1}{r}\delta\left(\frac{r}{C} - t'\right) + \frac{\partial}{\partial r}\delta\left(\frac{r}{C} - t'\right) \right] \qquad \text{(IV.18)}$$

L'équation (IV.15) devient alors :

$$P(M',t) = \int_0^t \left\{ \int_S \left[\frac{P(M,\tau)}{4\pi r}\left(-\frac{1}{r}\delta\left(\frac{r}{C} - t'\right) + \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial \tau}\delta\left(\frac{r}{C} - t'\right) \right)\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial P(M,\tau)}{\partial n}\frac{1}{4\pi r}\delta\left(\frac{r}{C} - t'\right) \right] dS(M$$

(IV.19)

$$t_r = t - \frac{r}{C} \qquad \text{(IV.20)}$$

Le temps de retard tr donné par l'expression (IV.20) correspond au temps où est émis le signal de pression de la source, et qui arrivera au point d'écoute à l'instant t après avoir franchi une distance r pendant la durée τ/C. En introduisant la simplification suivante :

$$\int_0^t f(\tau)\,\delta\left(\frac{r}{C} - t'\right)d\tau = \int_0^t f(\tau)\,\delta(\tau - t_r)\,d\tau = f(t_r) \qquad \text{(IV.21)}$$

et en exprimant la dérivée de r par rapport à n en fonction de l'angle θ, l'équation (IV.19) peut donc se réduire à :

$$P(M,t) = \int_S \left[\left(\frac{1}{r}P(Q,t_r) + \frac{1}{C}\dot{P}(Q,t_r) \right)\cos\theta + \rho_0 \dot{\gamma}_n(Q,t_r) \right] \frac{1}{4\pi r}\,dS(Q) \qquad \text{(IV.22)}$$

En discrétisant cette équation en N éléments, nous obtenons la solution suivante :

$$P(M,t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi r_i} \left[\left(\frac{1}{r_i} P(Q_i, t_{ri}) + \frac{1}{C} \dot{P}(Q_i, t_{ri}) \right) \cos\theta_i + \rho_0 \gamma_n(Q_i, t_{ri}) \right] \Delta S_i \qquad \text{(IV.23)}$$

La résolution de cette formulation intégrale conduit, dans le cas général, à des calculs longs et coûteux. L'origine de cette difficulté est l'obtention de la pression acoustique pariétale P(Q,t) de la structure vibrante, qui nécessite l'utilisation de méthodes numériques du type éléments finis ou éléments de frontière. L'approximation de cette pression pariétale permet d'obtenir une formulation facilement exploitable et minimise considérablement le temps de calcul. Néanmoins, il faut garder l'aspect qualitatif de la prévision du bruit, et une précision acceptable au niveau quantitatif.

IV.5.2. Simplifications

Cette simplification est basée sur des hypothèses qui s'appliquent pour les basses fréquences et les hautes fréquences.

a) Basses fréquences $\lambda >> L$

En basses fréquences, la longueur d'onde acoustique est prépondérante devant la plus grande dimension de la structure $\lambda >> L$. Ainsi, nous pouvons effectuer l'approximation suivante :

$$P(M_0) \approx \rho_0 L \frac{\partial V(M_0)}{\partial t} \qquad \text{(IV.24)}$$

L'expression (IV.23) permettant d'accéder à la pression acoustique en tout point de l'espace devient alors :

$$P_b(M,t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_0}{4\pi r_i} \left[\left(1 + \frac{L}{r_i} \cos\theta_i \right) \gamma_n(M_{0i}, t_{ri}) + \frac{L}{C} \cos\theta_i \dot{\gamma}_n(M_{0i}, t_{ri}) \right] \Delta S_i \qquad \text{(IV.25)}$$

b) Hautes fréquences et champ lointain $k^2 r^2 >> 1$

Pour les hautes fréquences et le champ lointain $k^2 r^2 >> 1$, nous pouvons utiliser l'impédance d'une onde sphérique en champ lointain, et considérer que :

$$\frac{P(M_0)}{V(M_0)} = \rho_0 C \qquad \text{(IV.26)}$$

L'expression (IV.23) devient alors :

$$P_b(M,t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_0}{4\pi r_i} \left(1 + \cos\theta_i \right) \gamma_n(Q_i, t_{ri}) \Delta S_i \qquad \text{(IV.27)}$$

Dans ces conditions a) et b), l'approximation de la pression pariétale simplifie considérablement la résolution de l'équation intégrale (IV.20), en un calcul intégral d'une fonction connue. Cette fonction acquise d'une manière discrète pour une structure de forme quelconque, dépend des paramètres géométriques caractérisant les données vibratoires et leur position par rapport au point d'écoute. Traduites en termes fréquentiels, ces conditions ne recouvrent pas toute la plage fréquentielle ; pour la recouvrir, on doit résoudre l'équation intégrale complète.

En résumé, un spectre de niveau de pression acoustique est obtenu en effectuant un test fréquentiel par rapport à deux fréquences notées f_{lim1} et f_{lim2}, schématisé comme suit :

$$f_{\lim 1} = \frac{C}{L} \qquad \text{et} \qquad f_{\lim 2} = \frac{C}{2\pi r} \tag{IV.28}$$

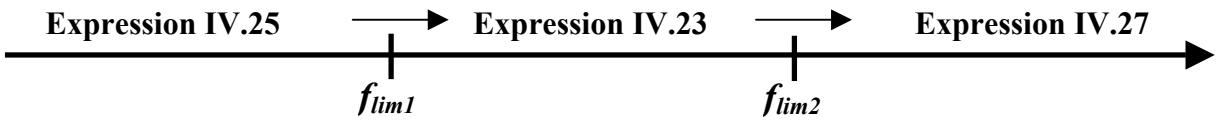


Figure IV.7. *Zones fréquentielles et expressions correspondantes.*

Dans le cadre de l'intégration de cette approche dans la synthèse sonore, il faut éviter d'effectuer un calcul complet (expression IV.23), en rapprochant les deux fréquences limites f_{lim1} et f_{lim2}. Les travaux dans le domaine fréquentiel de Hamzaoui (1997 et 2002) ont montré que la longueur à introduire dans f_{lim1} correspond à la plus grande dimension de la structure, et qu'à partir de f_{lim2} , l'expression IV.27 donne des résultats satisfaisants. Pour éviter le calcul complet (IV.23), nous choisissons une distance minimale entre le point d'écoute et la structure telle que $f_{lim1} = f_{lim2}$.

La pression acoustique rayonnée est donc obtenue par :

$$P(M,t) = P_b(M,t)\ filtrée\left[0 \to C/L\right] + P_h(M,t)\ filtrée\left[C/2\pi r_{\min} \to F_{\max}\right] \tag{IV.29}$$

Le choix de r_{min} est très important pour le respect des conditions d'applications de ces simplifications.

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre consacré principalement à une approche temporelle du rayonnement acoustique de plaques vibrantes, nous avons présenté :

1. les principales formulations relatives à un calcul de la pression acoustique en un point quelconque du milieu extérieur d'une structure,
2. une simplification, du calcul de la pression acoustique rayonnée, pouvant être appliquée à des structures à géométries complexes.

Pour le premier point, il a été question de la résolution de l'équation intégrale de Kirchhoff dans le domaine temporel. Dans le cas d'une plaque cette équation se simplifie et devient l'intégrale de Rayleigh qui permet d'accéder à la pression acoustique rayonnée par la plaque à partir de la connaissance de sa répartition surfacique vibratoire.

Pour le second point, le choix régissant l'utilisation des deux formulations simplifiées (basses fréquences et hautes fréquences), est imposée par les deux fréquences limites f_{lim1} et f_{lim2}. La première fréquence limite est calculée en utilisant la plus grande dimension de la structure vibrante. La seconde fréquence limite est calculée en utilisant la plus petite distance entre le point d'écoute et la structure vibrante.

CHAPITRE V

VALIDATION DES RESULTATS

V.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre, est la validation, dans un premier temps, des résultats vibratoires avant d'accéder à tout calcul acoustique. Il sera procédé, dans un premier temps, à la validation du calcul des schémas modaux pour différentes configurations de conditions aux limites, et dans un second, à la validation du calcul temporel des caractéristiques vibratoires de la plaque excitée mécaniquement par une force ponctuelle sinusoïdale.

Le calcul des schémas modaux sera validé par un code de calcul d'éléments finis, en l'occurrence Cosmos (1998) ainsi que par la formulation énergétique de Rayleigh contenue dans la référence de Blevins (1984) et décrite au chapitre II. En outre, dans le cas d'une plaque encastrée sur ses quatre bords, nous avons également comparé nos résultats aux fréquences propres relevées à partir du spectre de la réponse impulsionnelle en un point, convenablement choisi, de la plaque. Les résultats obtenus sont très acceptables même en hautes fréquences où l'erreur ne dépasse pas 10 % au maximum.

Une fois la validation du schéma modal accomplie, nous procédons à la validation du calcul temporel des caractéristiques vibratoires de la plaque. A cet effet, nous avons confronté les calculs des accélérations dans le domaine temporel avec ceux dans le domaine fréquentiel et les résultats obtenus sont très satisfaisants.

V.2. Détermination de la réponse impulsionnelle de la plaque

Afin d'avoir une excitation large bande [0 ÷ 2000 Hz]*, pour exciter avec la même énergie tous les modes compris dans cette plage de fréquences, il convient d'utiliser une excitation de type porte dont les caractéristiques temporelles et fréquentielles sont résumées dans la figure V.1. De plus les coordonnées du point d'excitation sont choisies telles qu'elles ne correspondent à aucun des nœuds de vibrations des premiers modes de plaques.

A cet effet, nous avons opté pour une impulsion d'amplitude arbitraire de 100 N dont la fréquence de coupure est de 5162 Hz comme mentionnée sur la figure V.1.

Notons que les calculs en temporel (d'accélérations, de pression,...) sont effectués sur une durée de T = 1s comprenant 11025* échantillons.

La détermination de la réponse impulsionnelle de la plaque, nous permet de prédire la réponse de la plaque à n'importe qu'elle force d'excitation. La solution est de convoluer cette réponse impulsionnelle à la force temporelle mesurée, issue d'un moteur d'une tondeuse à gazon par exemple.

Ainsi la connaissance de la réponse impulsionnelle de la plaque suffit pour déterminer la réponse de la plaque à toute excitation.

S.L.I : Système Linéaire Indépendant.

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) \tag{V.1}$$

où h(t) est la réponse impulsionnelle.

Le produit de convolution dans l'espace temps se transforme en produit simple dans l'espace fréquence, soit :

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \tag{V.2}$$

où $H(f)$, transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle, est la fonction de transfert de la plaque.

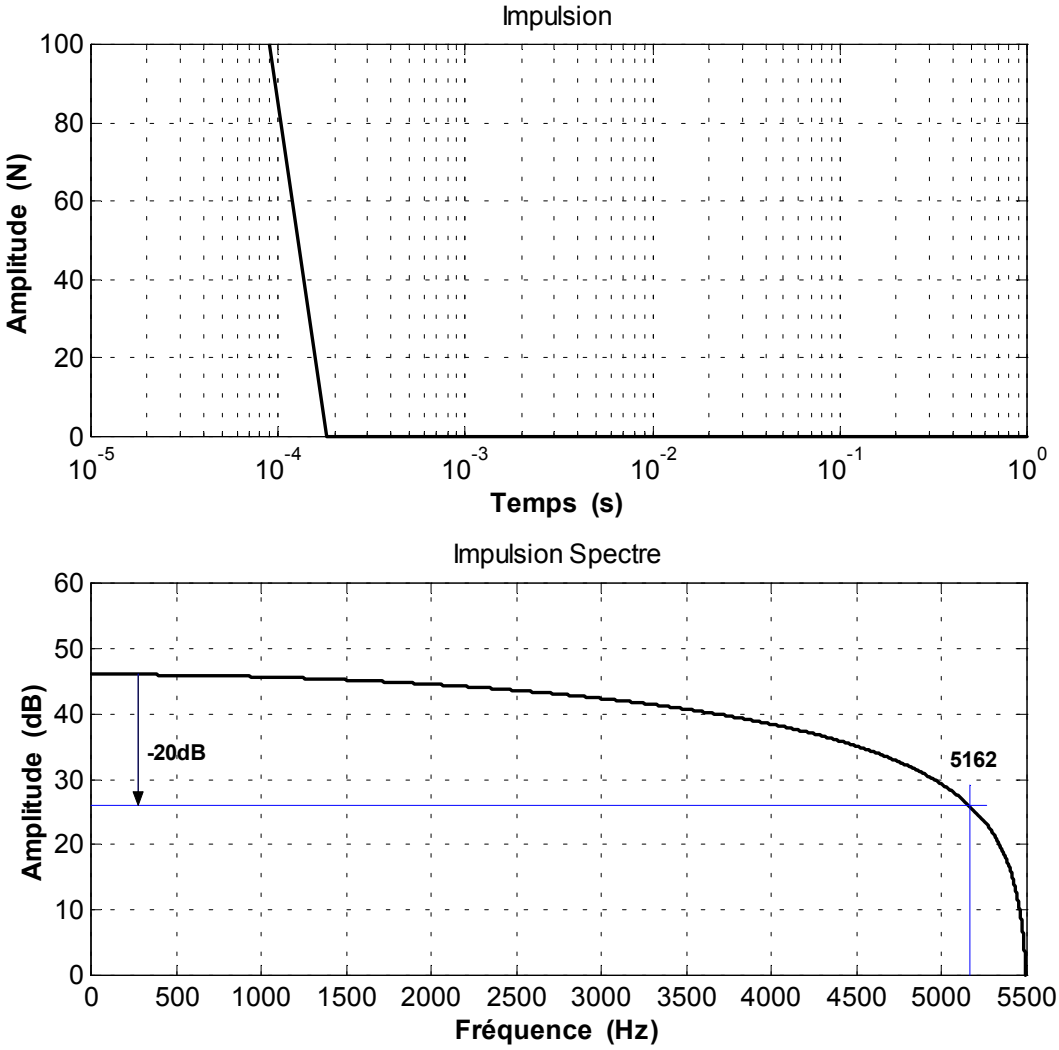


Figure V.1. *Caractéristiques temporelles et fréquentielles de l'excitation.*

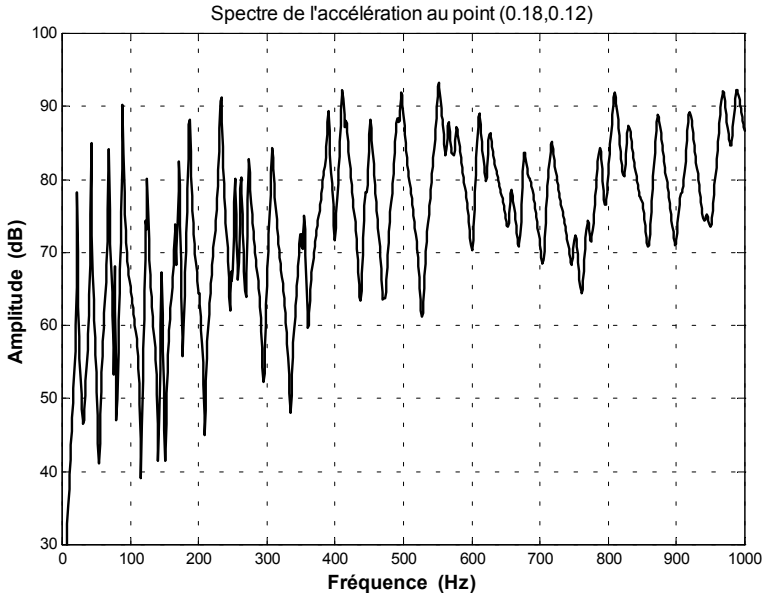


Figure V.2. *Spectre d'accélération au point d'excitation pour la plaque appuyée.*

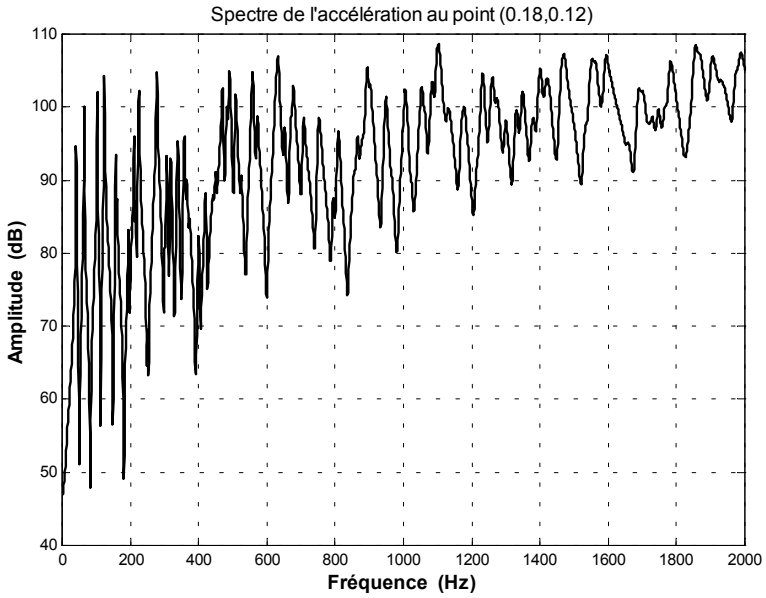


Figure V.3. *Spectre d'accélération au point d'excitation pour la plaque encastrée.*

V.3. Calcul des schémas modaux

Afin de valider les résultats des différents schémas modaux, nous procédons à la comparaison de nos résultats, obtenus sur la base des développements déjà présentés au chapitre II, avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis (via le code de calcul Cosmos [ ]), d'une part et ceux calculés par Blevins (1984).

La configuration de la plaque étudiée est résumée ci-dessous :

Dimensions :	0.6m X 0.4m
Epaisseur :	1.5 mm
Masse volumique :	7800 kg/m^3
Module de Young :	2.1 10^{11} N/m^2
Coefficient de Poisson :	0.3

Tableau V.1. *Caractéristiques de la plaque.*

Nous comparons dans le tableau ci-dessous, les fréquences des vingt cinq premiers modes d'une plaque rectangulaires pour deux types de conditions d'appuis de la plaque, à savoir : le cas d'une plaque simplement appuyée sur ses bords et une plaque encastrée sur ses bords.

Nous allons surtout nous intéresser à l'influence du maillage de la plaque et aux erreurs engendrées. Le critère de maillage choisi, avec λ la longueur d'onde (mécanique), est le suivant :

$$\frac{Nbre\ d'éléments}{\lambda} \geq 8 \qquad \text{(V.3)}$$

Notons qu'un élément de plaque est en fait un rectangle, caractérisé uniquement par son centre, où la grandeur physique calculée (accélération, vitesse,…) est considérée uniforme. Le critère (4) implique donc un maillage d'au moins 36*24 si l'on veut étudié le rayonnement mode (9,6) par exemple. Dans notre cas, nous voulons prendre en compte tous les modes de plaque compris entre 0 et 2000Hz pour des épaisseurs de 1, 1.5 et 2mm. Ainsi nous avons :

Epaisseur	1 mm	1.5 mm	2 mm
Nombre de modes	141	91	68
Maillage (Nx*Ny)	68*44	52*36	48*32

Tableau V.1. *Maillage nécessaire.*

Le maillage entraîne une erreur sur les fréquences propres calculées. En effet si l'on compare (figure V.4) les fréquences propres relevées à partir du spectre de la réponse impulsionnelle calculée et celles issues des formules théoriques, on s'aperçoit que l'erreur commise augmente avec la fréquence et donc avec le rang du mode (ce qui est bien naturel !) sans toutefois dépasser 10%.

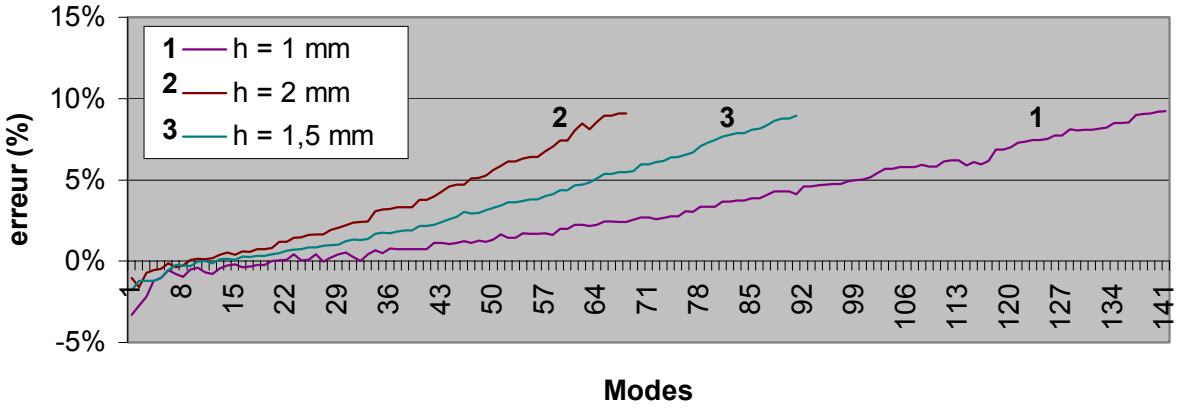


Figure V.4. *Erreurs relatives à la discrétisation (maillage à 4 éléments par demi longueur d'onde).*

Remarques

- ☛ L'identification des fréquences propres des modes s'est faite grâce au spectre de l'accélération d'un des points de la plaque (judicieusement choisi pour éviter tout nœud de vibration) et non pas à partir du spectre de la réponse impulsionnelle, tous les modes n'étant pas forcément rayonnant sous réserve que le point d'excitation ne tombe lui aussi sur un nœud.
- ☛ Le calcul nécessite beaucoup de mémoire vive : par exemple, pour une plaque de 1mm d'épaisseur, la variable AXYt de l'accélération des points de la plaque occupe $68*44*11025*8 \approx 264Mo$ avec un maillage de (68*44), 11025 échantillons temporels et un codage de valeur réelle sur 8 octets.

V.3.1. Cas d'une plaque simplement appuyée sur ses bords

Dans ce cas, nous avons l'avantage de disposer de la solution analytique du schéma modal donnée par :

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{\rho\, h}}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \qquad \text{(V.4)}$$

$$w_{mn}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad \text{(V.5)}$$

où f_{mn} est la fréquence propre du mode (m,n) et $w_{mn}(x,y)$ est sa déformée propre.

V.3.2. Cas d'une plaque encastrée sur ses bords

Dans ce cas de conditions aux limites, nous ne disposons pas de solution analytique comme le cas précédent, mais nous utilisons la méthode de l'effet de bord (Bolotin) (Lire, King, 1974), développée dans le chapitre II. Nous pouvons comparer le schéma modal obtenu avec celui fourni par une méthode énergétique (Rayleigh) issue du livre de référence de Blevins (1984). Concernant les fréquences propres, d'une plaque encastrée sur ses quatre bords, la formule de Blevins, est la suivante :

$$f_{ij} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{G_i^4}{a^4} + \frac{G_j^4}{b^4} + \frac{2J_iJ_j}{a^2b^2}\right]^{1/2}\left[\frac{Eh^3}{12\gamma\left(1-\nu^2\right)}\right]^{1/2} \text{ pour } i = 1,2,3... \text{ et } j = 1,2,3...$$

avec : $n = 1 : \quad G_1 = 1.506 \quad J_1 = 1.248$
$n = 2 : \quad G_2 = 2.5 \quad J_2 = 4.658$
$n = 3 : \quad G_3 = 3.5 \quad J_3 = 10.02$ (V.6)

et : $n > 4 : \quad G_n = n + \frac{1}{2} \quad J_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\left[1 - \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}\right]$

Cette partie du chapitre de validation des résultats vibratoires est consacrée aux conditions aux limites de type encastré partout. Comme pour la plus part des conditions aux limites, les solutions analytiques ne sont pas connues. On comparera donc ici les résultats de la simulation par la méthode de l'effet de bord (Bolotin) avec ceux calculés par Blevins (1984) ou par la méthode des éléments finis en utilisant le code de calcul Cosmos (1998).

Le tableau suivant résume les différences sur les valeurs des 25 premières fréquences propres selon la méthode utilisée :

Rang / mode			Fréquences propres				Erreurs		
N°	m	N	Cosmos	Blevins	Relev.	Bolotin	Bol./Cos	Bol/Ble	Bol/Rel
1	1	1	42.17	42.34	41.0	41.43	1,75	2,15	-1,05
2	2	1	65.11	65.45	64.0	64.32	1,21	1,73	-0,50
3	1	2	103.25	103.69	103.0	103.05	0,19	0,62	-0,05
4	3	1	103.85	104.44	-	103.35	0,48	1,04	
5	2	2	124.57	125.30	124.0	124.03	0,43	1,01	-0,02
6	4	1	157.36	158.28	157.0	157.10	0,17	0,75	-0,06
7	3	2	160.91	161.82	161.0	160.31	0,37	0,93	0,43
8	1	3	195.61	196.32	195.0	195.57	0,02	0,38	-0,29
9	4	2	212.28	213.63	211.0	211.83	0,21	0,84	-0,39
10	2	3	216.36	217.60	216.0	216.15	0,10	0,67	-0,07
11	5	1	225.06	226.33	225.0	224.99	0,03	0,59	0,00
12	3	3	251.49	252.81	251.0	251.21	0,11	0,63	-0,08
13	5	2	278.32	280.27	278.0	278.13	0,07	0,76	-0,05
14	4	3	301.24	302.83	-	301.08	0,05	0,58	
15	6	1	306.73	308.32	306.0	306.79	-0,02	0,50	-0,26
16	1	4	318.80	319.79	318.0	318.92	-0,04	0,27	-0,29
17	2	4	339.30	341.15	338.0	339.41	-0,03	0,51	-0,42
18	6	2	358.70	361.35	358.0	358.78	-0,02	0,71	-0,22
19	5	3	365.69	367.73	365.0	365.76	-0,02	0,54	-0,21
20	3	4	373.82	375.88	373.0	373.97	-0,04	0,51	-0,26
21	7	1	402.14	404.12	400.0	402.43	-0,07	0,42	-0,61
22	4	4	422.62	424.89	420.0	422.91	-0,07	0,47	-0,69
23	6	3	444.59	447.34	442.0	445.05	-0,10	0,51	-0,69
24	7	2	453.16	456.56	450.0	453.61	-0,10	0,65	-0,80
25	1	5	472.75	474.07	470.0	473.09	-0,07	0,21	-0,66

Tableau V.3. *Ecarts des fréquences propres pour une plaque 0.6 X 0.4 m^2 et de 1 mm d'épaisseur.*

L'écart relatif entre les valeurs données par les trois méthodes ne dépasse pas 2.20 %. La figure IV.5 permet de comparer les résultats de l'effet de bords avec ceux calculées par Blevins (1984) et la méthode des éléments finis.

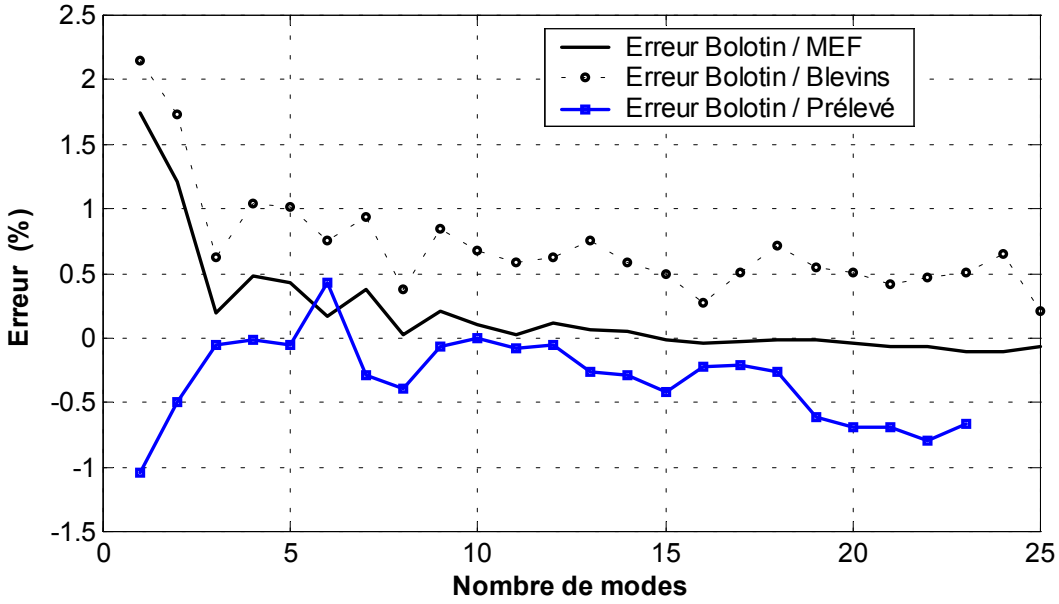


Figure V.5. *Ecarts relatifs des 25 premières fréquences propres d'une plaque encastrée partout sur ses bords.*

Nous pouvons également comparer ces résultats avec ceux issus du logiciel Sysnoise et de mesures expérimentales. A cet effet, nous avons comparé les six premiers modes d'une plaque en acier de 0.6 X 0.4 X 0.0015 m^3 de dimensions et les résultats obtenus sont mentionnés ci-dessous :

Rang / mode			Blevins	Cosmos	Sysnoise	Bolotin	Expérimental
N°	m	n					
1	1	1	63.51	63.24	63.42	62.15	68.35
2	2	1	98.18	97.64	97.98	96.48	109.37
3	1	2	155.54	154.82	156.17	154.58	134.76
4	3	1	156.66	155.73	156.75	155.02	162.00
5	2	2	187.94	186.76	188.18	186.05	175.78
6	4	1	237.42	235.96	238.67	235.65	208.98

Figure V.4. *Comparaison des six premières fréquences propres d'une plaque encastrée.*

Nous constatons que les fréquences propres calculées théoriquement sont assez proches les unes des autres par contre, comparées aux fréquences propres déterminées expérimentalement, nous notons une certaine différence ce qui prouve que les conditions d'appui de la plaque dans le cas expérimental ne sont pas des conditions idéales d'un encastrement. Néanmoins cette différence reste acceptable.

V.3.2. Cas d'une plaque appuyée sur deux bords opposés

Nous étudions maintenant, le calcul des schémas modaux dans le cas d'une plaque simplement appuyée sur deux bords opposés, de normales l'axe y, avec la combinaison des autres conditions aux limites au niveau des bords de normales l'axe x.

V.3.2.1. Cas d'une plaque appuyée – encastrée

Nous donnons, dans le tableau ci-dessous, la combinaison de l'appui simple et de l'encastrement

	Plaque SSSC			*Plaque SCSC*		
Ordre des Fréquences	**Cosmos**	**Blevins (1984)**	**Approche proposée**	**Cosmos**	**Blevins (1984)**	**Approche proposée**
1 (1 , 1)	29.50	29.52	29.52	39.08	39.12	39.11
2 (1 , 2)	47.84	47.90	47.90	54.73	54.83	54.83
3 (2 , 1)	80.60	80.73	80.71	85.31	85.52	85.50
4 (1 , 3)	83.89	83.99	83.99	101.38	101.56	101.54
5 (2 . 2)	102.24	102.46	102.48	117.75	118.08	118.07
6 (2 , 3)	127.53	127.80	127.80	130.95	131.27	131.28

Tableau V.5. *Les six premières fréquences propres d'une plaque SSSC et SCSC.*

On peut constater que l'encastrement produit un effet de raideur qui augmente bien sûr les fréquences propres, cet effet est d'autant plus marqué que le mode est de bas rang.

V.3.2.2. Cas d'une plaque libre

En combinant l'appui simple à l'appui libre, nous obtenons les résultats ci-dessous :

	Plaque SFSF				*Plaque SFSS*			
N°	**Ordre des fréquences**	**Cosmos**	**Blevins (1984)**	**Approche proposée**	**Ordre des fréquences**	**Cosmos**	**Blevins (1984)**	**Approche proposée**
1	**(1 , 1)**	6.64	6.63	6.85	**(1 , 1)**	9.51	9.52	9.51
2	**(1 , 2)**	14.98	15.01	14.73	**(1 , 2)**	30.24	30.25	30.24
3	**(1 , 3)**	26.88	26.88	27.40	**(1 , 3)**	33.11	33.22	33.22
4	**(2 , 1)**	38.02	38.07	37.95	**(2 , 1)**	56.39	56.56	56.56
5	**(1 . 4)**	45.21	45.67	45.02	**(2 . 2)**	64.33	64.34	64.34
6	**(2 , 2)**	60.83	60.83	61.66	**(1 , 4)**	85.90	86.47	86.47

Tableau V.6. *Les six premières fréquences propres d'une plaque SFSF et SSSF.*

En comparant les résultats mentionnés dans le tableau ci-dessus, nous constatons que plus la plaque a des contraintes aux bords et plus les fréquences glissent vers les hautes fréquences ceci est dû bien sûr à la rigidification de la structure par les contraintes imposées par les appuis.

V.3.2.3. Cas d'une plaque encastrée – libre SFSC

De même, pour une plaque simplement appuyée sur deux bords opposés, libre et encastrée sur les deux autres bords nous obtenons des résultats très proches les uns des autres, ce qui nous permet d'adopter la méthode employée pour la recherche des schémas modaux.

Ordre des fréquences	Cosmos (1998)	Blevins (1984)	Approche proposée
1 (1 , 1)	11.67	11.68	11.67
2 (1 , 2)	31.43	31.45	31.45
3 (1 , 3)	42.17	42.36	42.36
4 (2 , 1)	63.82	64.08	64.08
5 (2 . 2)	65.11	65.13	65.13
6 (1 , 4)	98.06	98.43	98.42

Tableau V.7. *Les six premières fréquences propres d'une plaque SCSF.*

Après avoir validé le calcul du schéma modal, pour différentes configurations de conditions aux limites, on peut maintenant envisager d'effectuer des comparaisons approche temporelle – approche fréquentielle. Celles-ci représentent un des aboutissement de cette étude étant donné qu'elles permettent d'évaluer la précision globale de tout le calcul vibratoire qui constitue un préalable au calcul du rayonnement acoustique.

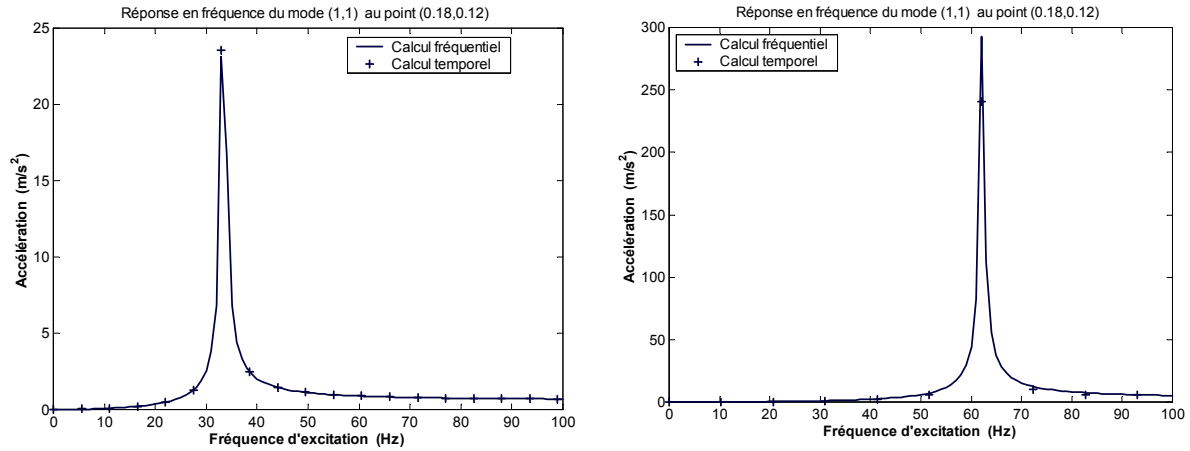
V.4. Validation du calcul vibratoire temporel

Afin de valider les résultats obtenus par le calcul temporel proposé, nous procédons à la comparaison des accélérations, au point d'excitation, obtenues par la méthode temporelle, d'une part et par la méthode fréquentielle d'autre part.

Notons que cette confrontation des résultats a été réalisée aussi bien pour une plaque appuyée que pour une plaque encastrée sur ses bords. Pour toute la suite de l'étude ces deux cas de conditions aux limites sont pris comme références et feront l'objet d'investigations.

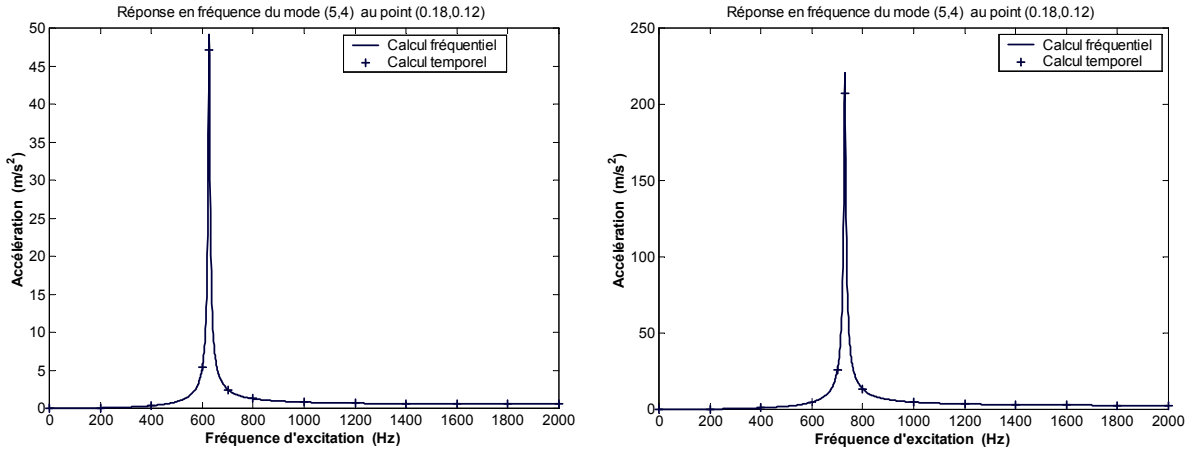
La configuration de la plaque est décrite au tableau 1. En ce qui concerne l'excitation, nous avons opté pour une excitation harmonique (sinus pur) entretenue, ponctuelle, appliquée au point $(0.18,0.12)$, de module $F_0 = 1N$. Le point de calcul de l'accélération est confondu avec celui de l'application de la force d'excitation.

Les résultats de la comparaison sont illustrés dans les figures V.6 et V.7 pour la contribution d'un seul mode et dans la figure V.8 et V9.



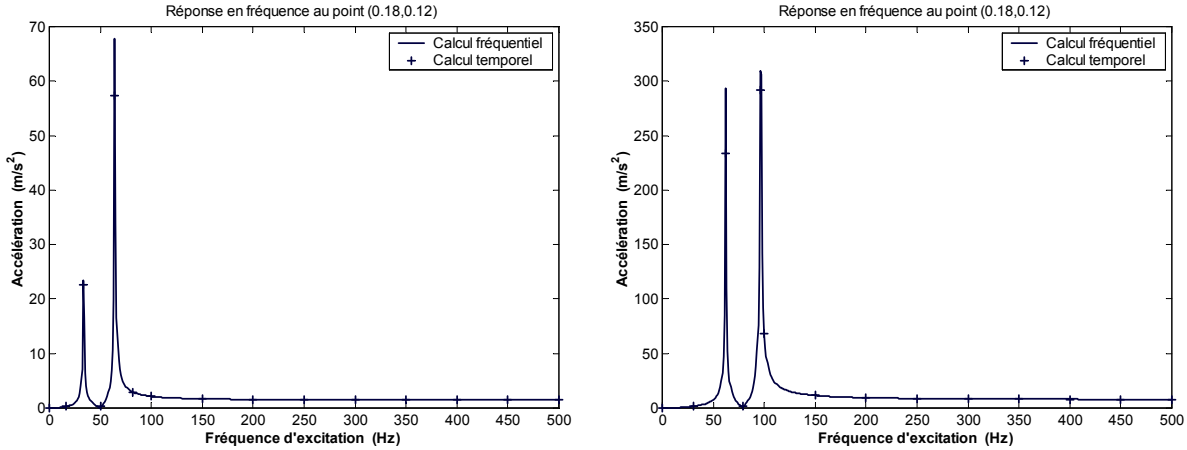
(a) Plaque appuyée **(b)** Plaque encastrée

Figure V.6. *Comparaison des accélérations, au point considéré, calculées par l'approche fréquentielle et temporelle pour la contribution du mode (1,1).*



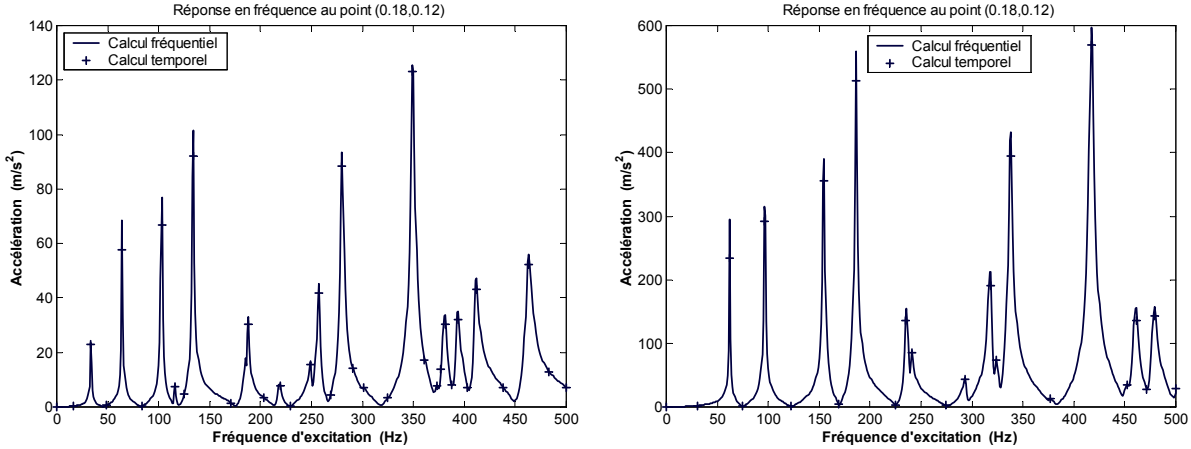
(a) Plaque appuyée **(b)** Plaque encastrée

Figure V.7. *Comparaison des accélérations, au point considéré, calculées par l'approche fréquentielle et temporelle pour la contribution du mode (5,4).*



(a) Plaque appuyée **(b)** Plaque encastrée

Figure V.8. *Comparaison des accélérations, au point considéré, calculées par l'approche fréquentielle et temporelle pour la contribution des deux premiers modes.*



(a) Plaque appuyée **(b)** Plaque encastrée

Figure V.9. *Comparaison des accélérations, au point considéré, calculées par l'approche fréquentielle et temporelle pour la contribution des modes de la plage [1. ÷ 1000.] Hz.*

L'analyse des figures V.6 à V.9 montre la bonne concordance entre le calcul temporel et fréquentiel pour une large plage de fréquences [0 ÷ 1000 Hz].

V.5. Validation du calcul acoustique temporel

L'objectif de cette partie du chapitre, est la validation des résultats acoustiques obtenus par approche temporelle. A cet effet, nous faisons varier le point d'écoute comme l'indiquent les figures V.19 et V.20 et l'on vérifie la cohérence des fonctions de transfert (spectre de la réponse impulsionnelle) obtenues pour deux types de conditions aux limites, plaque simplement appuyée sur ses bords et encastrée à ses bords.

V.5.1. Fonctions de transfert

Nous, nous intéressons maintenant à la fonction de transfert ou spectre de la réponse impulsionnelle de la plaque, puisque la connaissance de celle-ci suffit pour déterminer la réponse de la plaque à toute excitation, comme nous le verrons par la suite.

Dans les figures qui suivent, nous représentons l'évolution fréquentielle de la réponse impulsionnelle de la pression acoustique calculée en un point de l'espace ne coïncidant pas avec un plan de symétrie de la plaque afin d'éviter tout nœud acoustique.

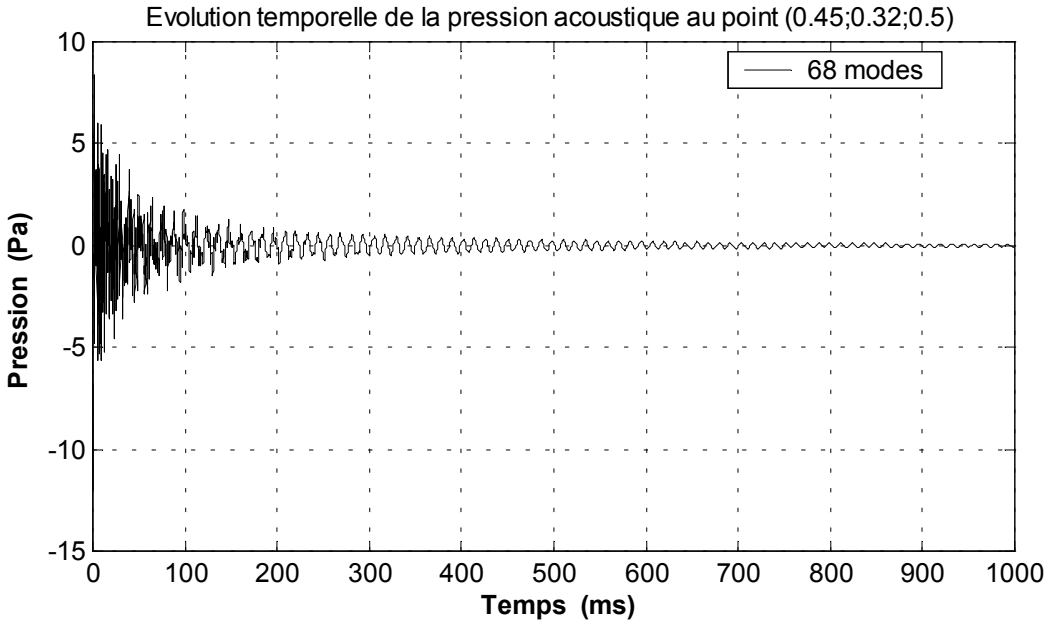


Figure V.10. *Evolution temporelle de la réponse impulsionnelle Calculée pour une plaque d'acier (0.6 X 0.4 X 0.002 m^3).*

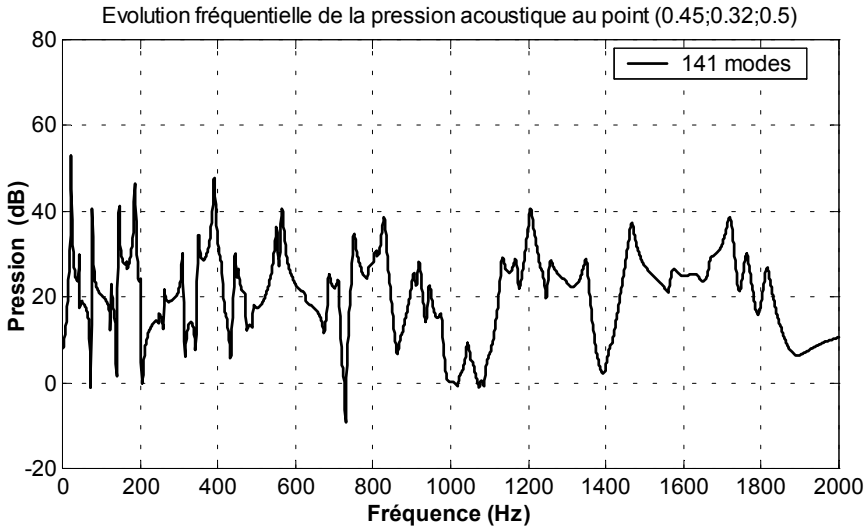


Figure V.11. *Evolution fréquentielle de la réponse impulsionnelle. calculée pour une plaque d'acier, appuyée, (0.6 X 0.4 X 0.001 m^3).*

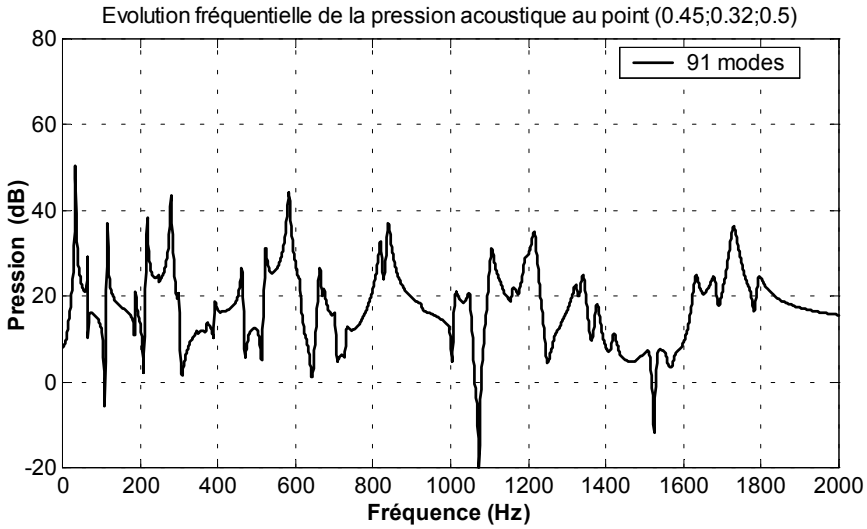


Figure V.12. *Evolution fréquentielle de la réponse impulsionnelle calculée pour une plaque d'acier, appuyée, (0.6 X 0.4 X 0.0015 m^3).*

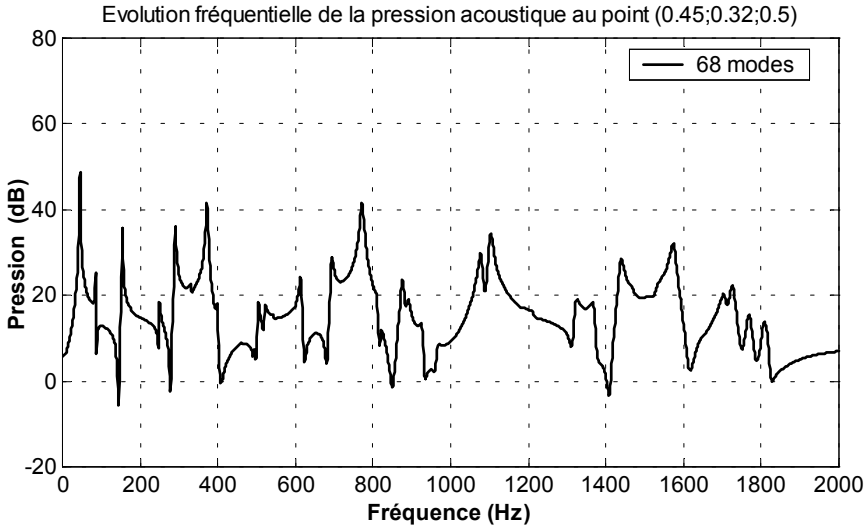


Figure V.13. *Evolution fréquentielle de la réponse impulsionnelle calculée pour une plaque d'acier, appuyée, (0.6 X 0.4 X 0.002 m^3).*

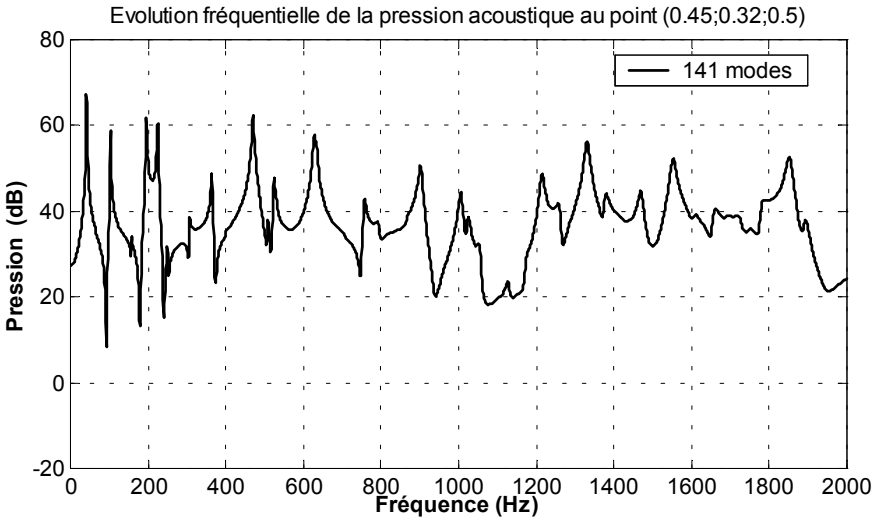


Figure V.14. *Evolution fréquentielle de la réponse impulsionnelle calculée pour une plaque d'acier, encastrée, (0.6 X 0.4 X 0.001 m^3).*

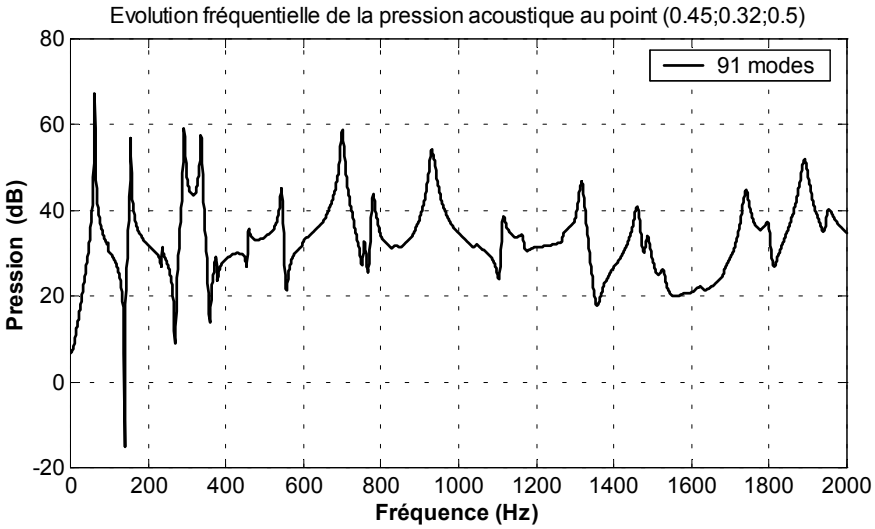


Figure V.15. *Evolution fréquentielle de la réponse impulsionnelle calculée pour une plaque d'acier, encastrée, (0.6 X 0.4 X 0.0015 m^3).*

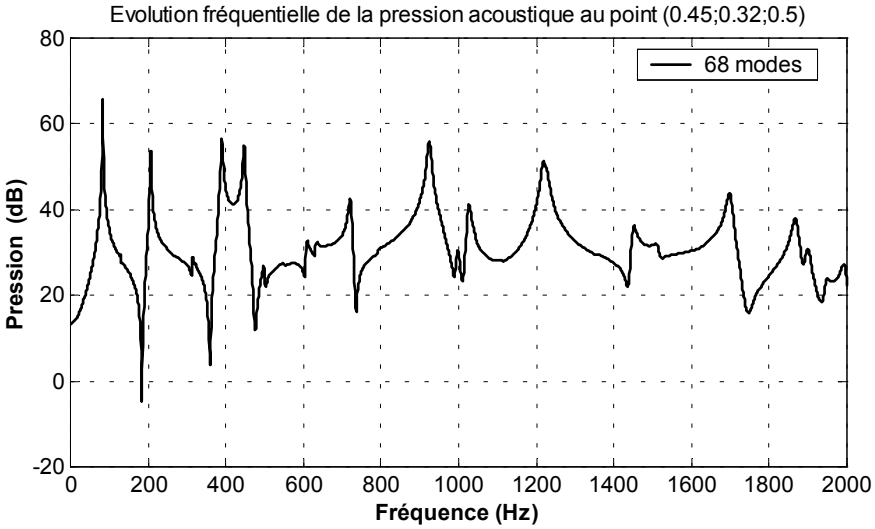


Figure V.16. *Evolution fréquentielle de la réponse impulsionnelle calculée pour une plaque d'acier, encastrée, (0.6 X 0.4 X 0.002 m^3).*

V.5.2. Influence du point d'écoute

Afin de mettre en évidence certaines caractéristiques de la pression acoustique rayonnée par la plaque, nous choisissons certains points particuliers de l'espace que nous représentons ci-dessous :

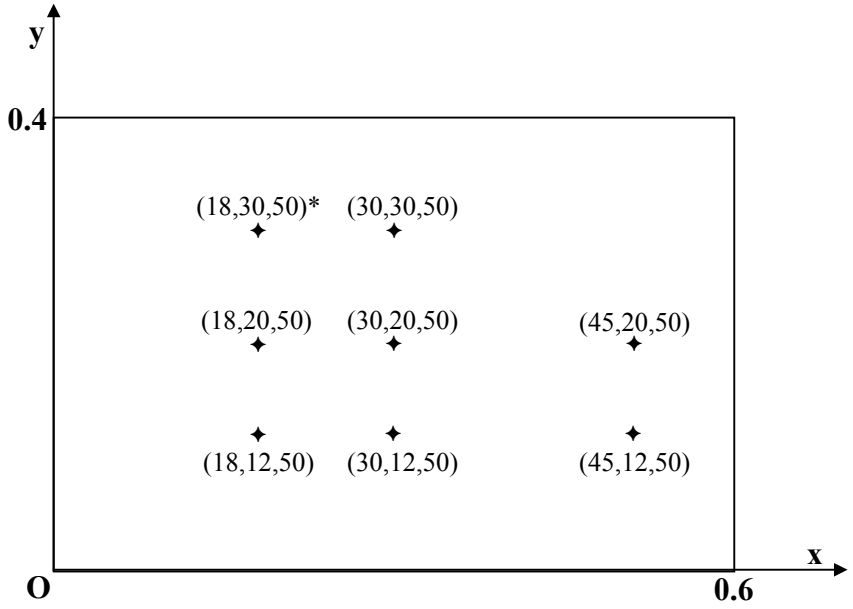


Figure V.17. *Points d'écoute, au dessus de la plaque, à une côte z = 0.5 m.*

* coordonnées en cm

(0.23,0.3,4)

(4,5,0.5)

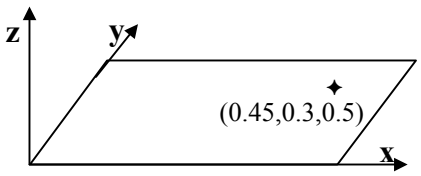


Figure V.18. *Autres points d'écoute.*

Les fonctions de transfert obtenues, aussi bien pour la plaque encastrée qu'appuyée, sont représentées sur les courbes des figures 19 et 20.

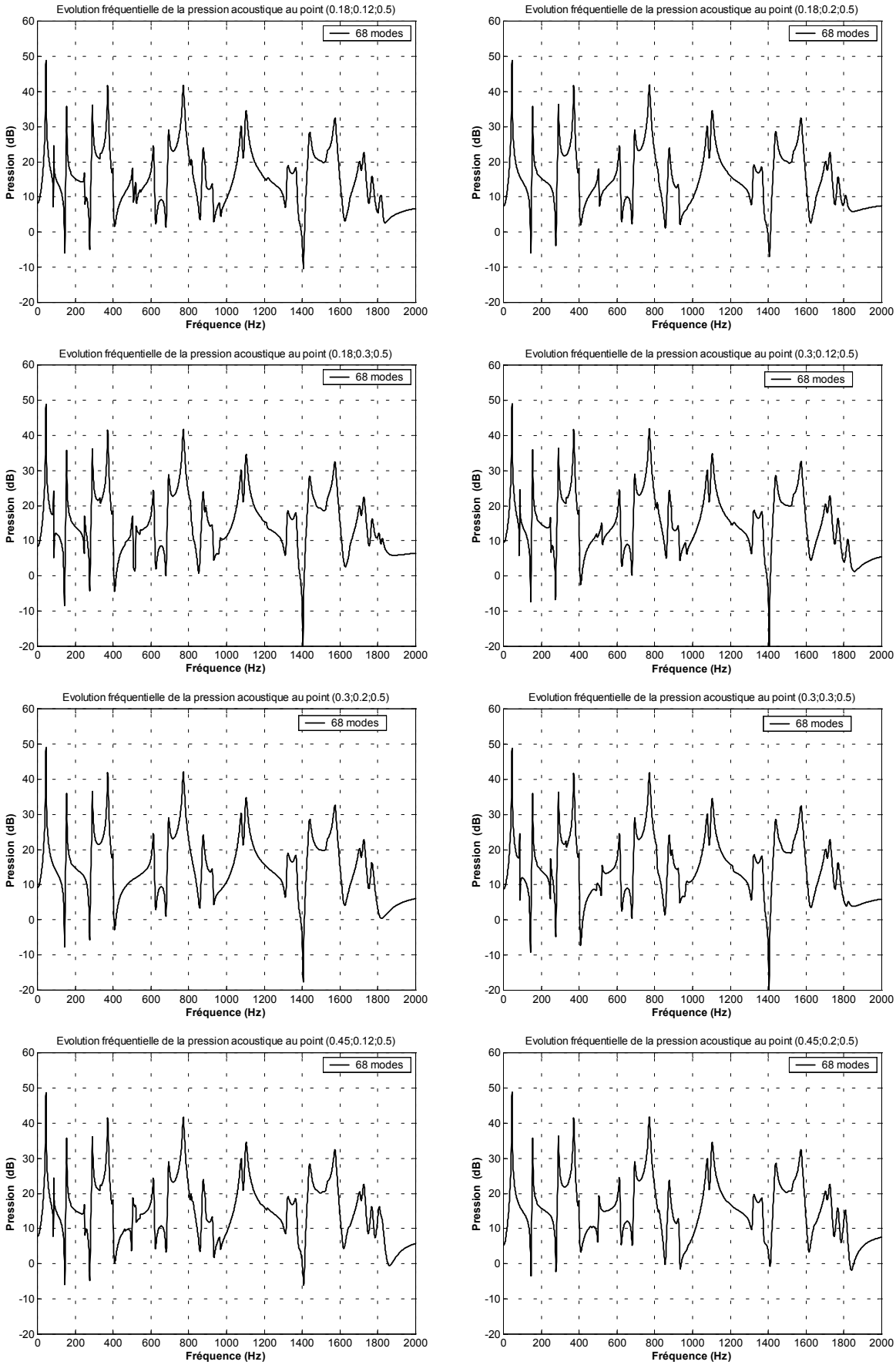


Figure V.19. *Spectres de la pression acoustique en différents points de l'espace Pour une plaque appuyée 0.6 m x 0.4 m x 0.002 m.*

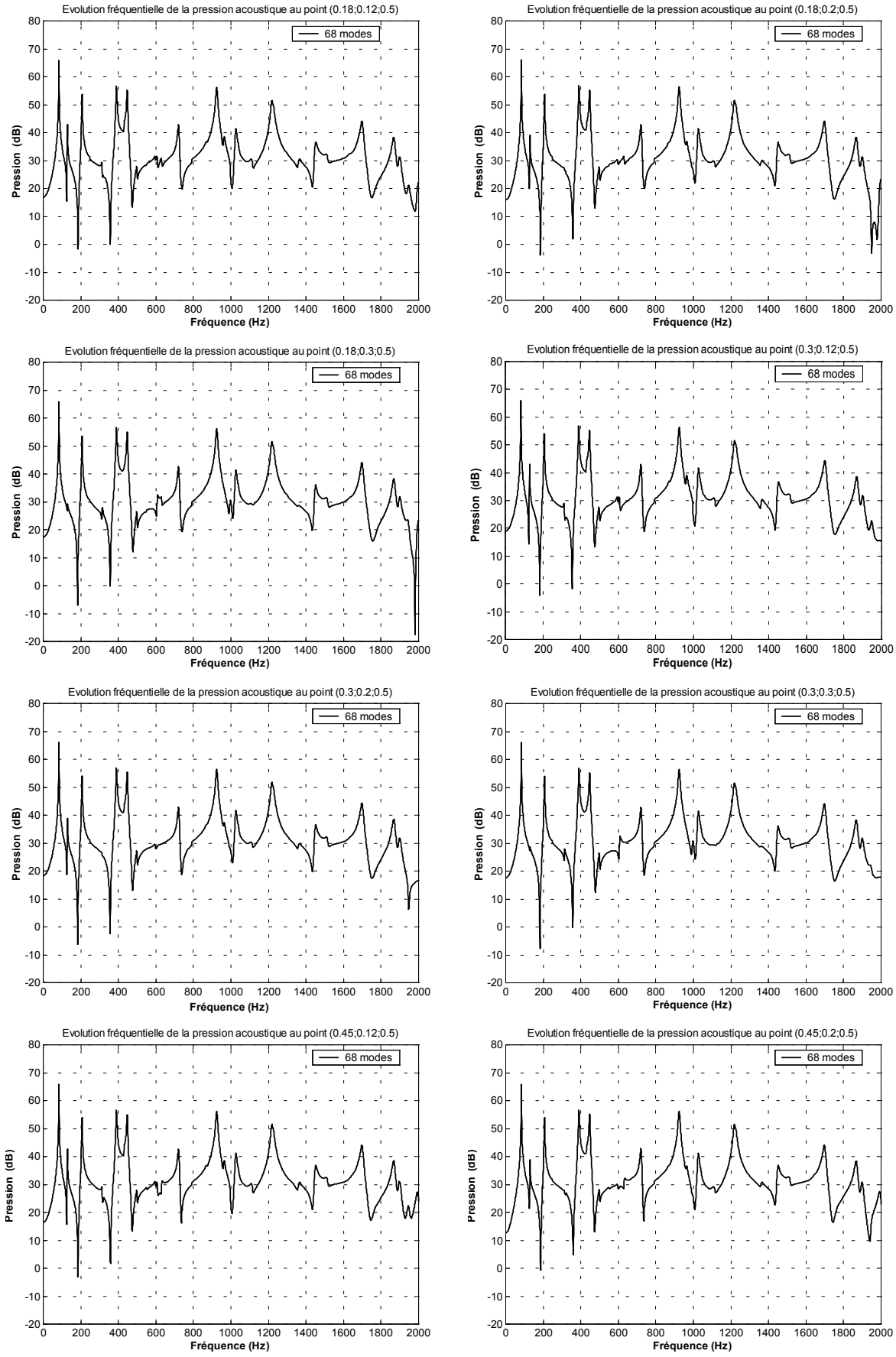


Figure V.20. *Spectres de la pression acoustique en différents points de l'espace Pour une plaque encastrée 0.6 m x 0.4 m x 0.002 m.*

Ainsi, nous constatons que, les spectres obtenus sont bien cohérents avec les résultats attendus notamment en ce qui concerne :

- la décroissance du niveau de pression avec la distance à la plaque,
- la présence des nœuds acoustiques et leurs influences sur le nombre de modes présents dans le cas du point d'écoute situé en face du milieu de la plaque : seuls les modes de rang impair apparaissent.

V.5.3. Analyse de la sensibilité de quelques paramètres

Dans cette partie, nous, nous intéressons principalement aux paramètres liés à la densité modale ainsi que l'amortissement. Ainsi nous étudions l'influence des paramètres cités ci-dessous sur les fonctions de transfert obtenues numériquement par le programme établi.
Les paramètres retenus sont :

- l'épaisseur de la plaque,
- les conditions aux limites,
- l'amortissement.

V.5.3.1. Influence de l'épaisseur de la plaque

Nous représentons sur la figure V.21, l'influence de l'épaisseur de la plaque sur la fonction de transfert de la plaque, obtenue numériquement.

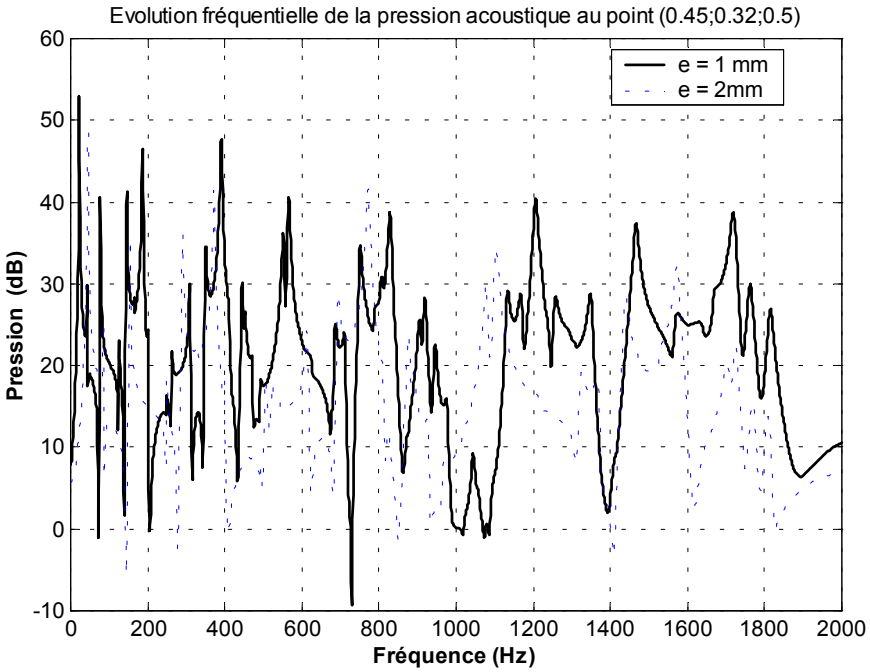


Figure V.21. *Influence de l'épaisseur sur la fonction de transfert de la plaque.*

V.5.3.2. Influence des conditions aux limites

La figure V.22 représente le niveau de pression acoustique pour deux types de conditions aux limites appuyée et encastrée d'où il apparaît clairement que la plaque encastrée rayonne plus que la plaque appuyée partout. Nous aurons l'occasion dans la suite de cette étude de le confirmer plusieurs fois.

V.5.3.3. Influence de l'amortissement

En ce qui concerne l'amortissement, il est évident que le niveau de la pression acoustique diminue avec l'augmentation de l'amortissement, c'est ce que nous avons vérifié dans la figure V.23, de plus nous vérifions biens bien que l'amortissement n'affecte pas les résonances des signaux.

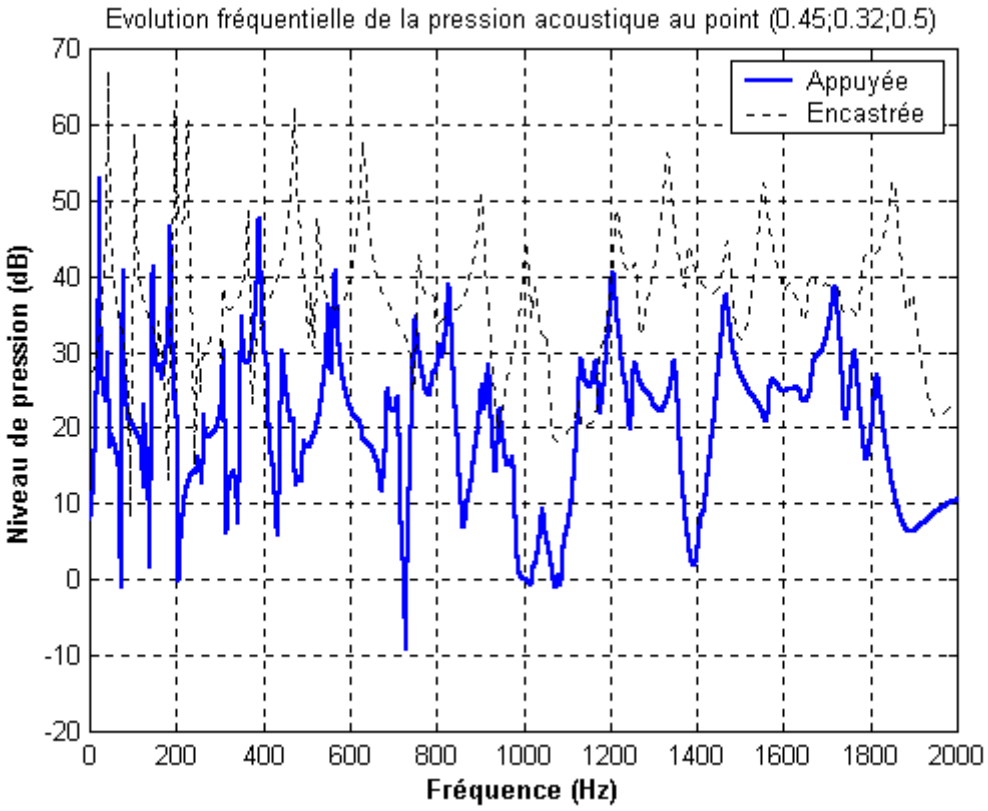


Figure V.22. *Influence des conditions aux limites sur la fonction de transfert de la plaque.*

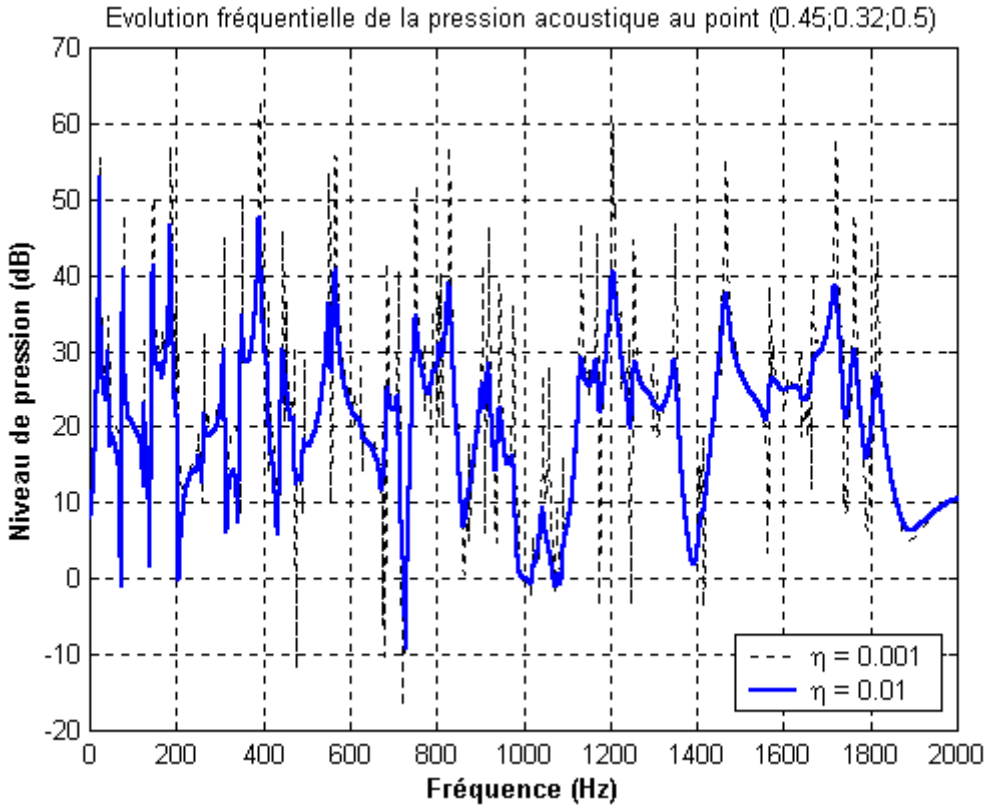


Figure V.23. *Influence de l'amortissement sur la fonction de transfert de la plaque.*

V.6. Analyse expérimentale

Le dispositif mis en œuvre est très simple. La plaque est insérée dans un baffle rigide de très grande dimensions. D'un coté de la plaque, on percute la plaque à l'aide d'un impacteur, à bout sphérique, de masse Mi et de vitesse Vi. De l'autre coté de la plaque, nous procédons à la mesure de la pression acoustique, en chambre anéchoïque, à l'aide d'un microphone situé à une distance d de la plaque. En ce qui concerne le dispositif mobile, l'impacteur est suspendu à l'aide d'une tige, à une articulation, située dans le plan de la plaque. L'impact est provoqué en laissant balancer le pendule jusqu'à ce qu'il vienne percuter la plaque, puis on le retient pour éviter les rebonds.

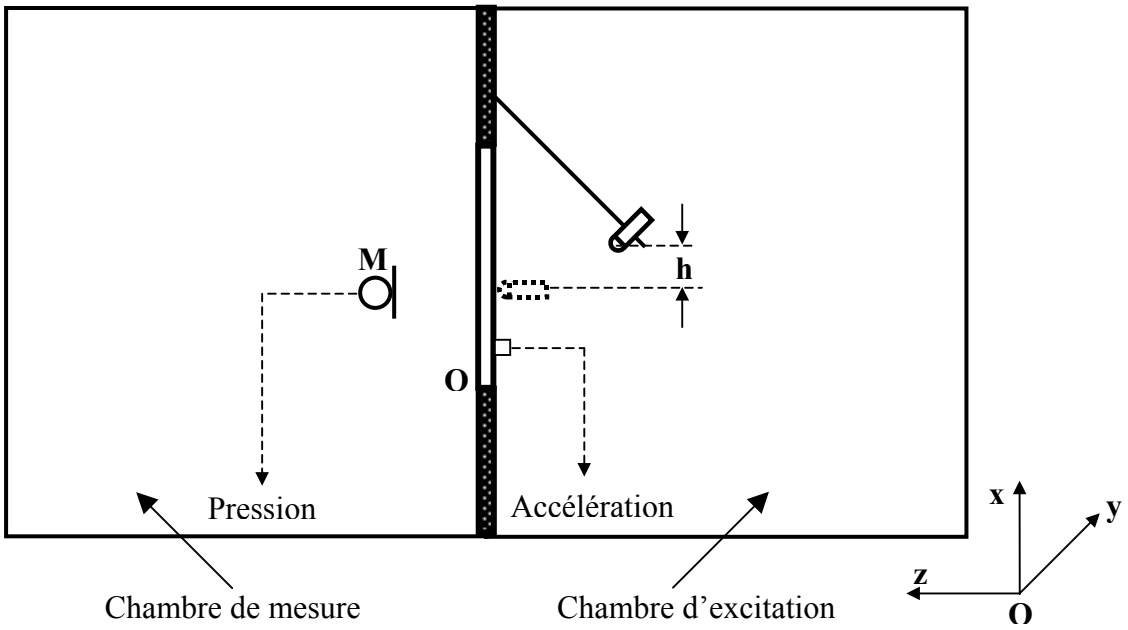


Figure V.24. *Schéma du dispositif expérimental.*

Dans le schéma ci-dessus, est représenté, en coupe, le dispositif expérimental. La vitesse d'impact peut être calculée à partir du dénivelé parcouru. Il faut noté que cette méthode conduit à des incertitudes relativement élevées, surtout pour des faibles valeur de vitesse initiale. La vitesse d'impact est donc donnée par :

$$Vi=\sqrt{2x9.81xh}$$

La fixation de la plaque sur le mur est faite à l'aide de boulons (38 boulons), répartis sur le contour de la plaque, comme le montrent les photos V.3. et V.4. Ce type de fixation ne peut assurer les conditions aux limites du type encastrement. On considère donc que les conditions aux limites varient entre l'encastrement et l'appui simple.

Les photos du dispositif expérimental sont présentées ci-dessous :

Photo V.1. *Avant l'impact.*

Photo V.2. *Pendant l'impact.*

Photo V.3. *Plaque encastrée.*

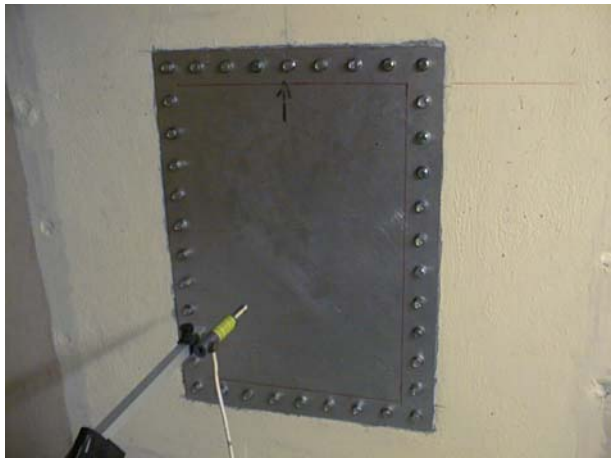


Photo V.4 *Mesure de pression.*

Pour notre étude expérimentale présentée ici, les signaux sonores ont été mesurés pour une plaque, en acier et une autre en aluminium, minces bafflées, encastrées dans un baffle rigide, et de dimensions Lx = 0.60 m , Ly = 0.40 m et h = 1 mm. Chaque signal est mesuré avec une fréquence d'échantillonnage de 11025 Hz sur une durée de 1.5 s. Les spectres s'étendent sur une bande de fréquences allant jusqu'à 5500 Hz, le premier mode étant à 40.4 Hz pour l'acier et 46.5 Hz pour l'aluminium. Le champ de pression est mesuré à deux distances de la plaque d = 0.5 m et d = 0.25 m. Nous avons choisi de faire varier trois paramètres : coordonnées du point d'excitation (l'origine étant en un coin de la plaque), les coordonnées du point d'écoute (l'origine étant la même que celle de la plaque) et le matériau. Le tableau V.8. présente les valeurs choisies pour les neuf sons retenus.

Son N°	Matériau	Point d'excitation	Point d'écoute
1	Acier	(0.30 , 0.20)	(0.30 , 0.20 , 0.50)
2		(0.30 , 0.20)	(0.45 , 0.11 , 0.50)
3		(0.41 , 0.11)	(0.30 , 0.20 ,0.50)
4		(0.41 , 0.11)	(0.45 , 0.11 , 0.50)
5	Aluminium	(0.30 , 0.20)	(0.30 , 0.20 , 0.50)
6		(0.30 , 0.20)	(0.45 , 0.11 , 0.50)
7		(0.41 , 0.11)	(0.30 , 0.20 ,0.50)
8		(0.41 , 0.11)	(0.45 , 0.11 , 0.50)
9		(0.30 , 0.20)	(0.30 , 0.20 , 0.25)

Tableau V.8. *Caractéristiques physiques des sons.*

En fonction du matériau, les sont obtenus expérimentalement, sont comparés dans la figure V.25, où nous constatons, que dans l'ensemble, la plaque en acier rayonne plus que celle en aluminium, dans le cas d'un impact.

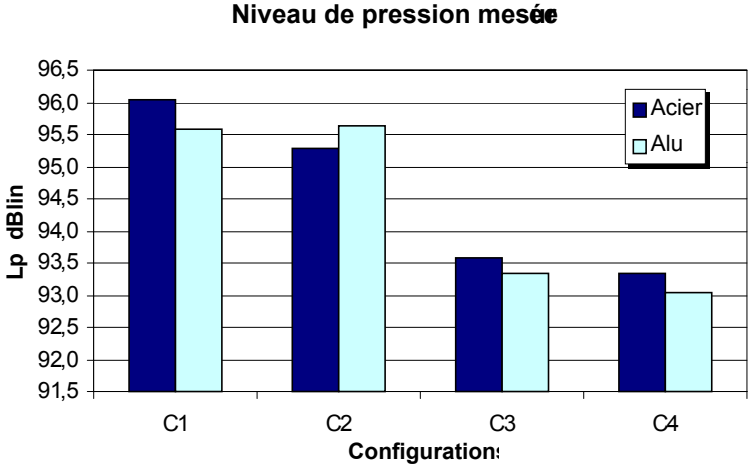


Figure V.25. *Comparaison des niveaux de pression.*

V.6.1. Confrontations vibratoires

Nous avons procédé à quelques comparaison qualitatives entre le calcul vibratoire et la mesure. A cet effet, nous avons choisi des conditions aux limites du type appuyé et encastré aux bords, pour les calculs. Les premières fréquences propres, d'une plaque en acier, sont concentrées dans le tableau ci dessous.

Rang	Résultats de calcul		Résultats expérimentaux
	Appuyé	Encastré	
1	22.27	42.21	40.38
2	42.82	65.19	61.91
3	68.51	103.53	89.50
4	77.08	104.07	97.57
5	89.07	124.89	111.70

Tableau V.9. *Fréquences propres de la plaque en acier.*

L'analyse de ces résultats, nous permet de constater que les résultats expérimentaux sont plus proches du cas d'encastrement que de l'appui simple pour les deux plaques.
Nous avons donc retenu les conditions aux limites d'encastrement pour la modélisation vibratoire. Nous comparons, dans le figure suivante, les fréquences propres théoriques et expérimentales de la plaque en acier.

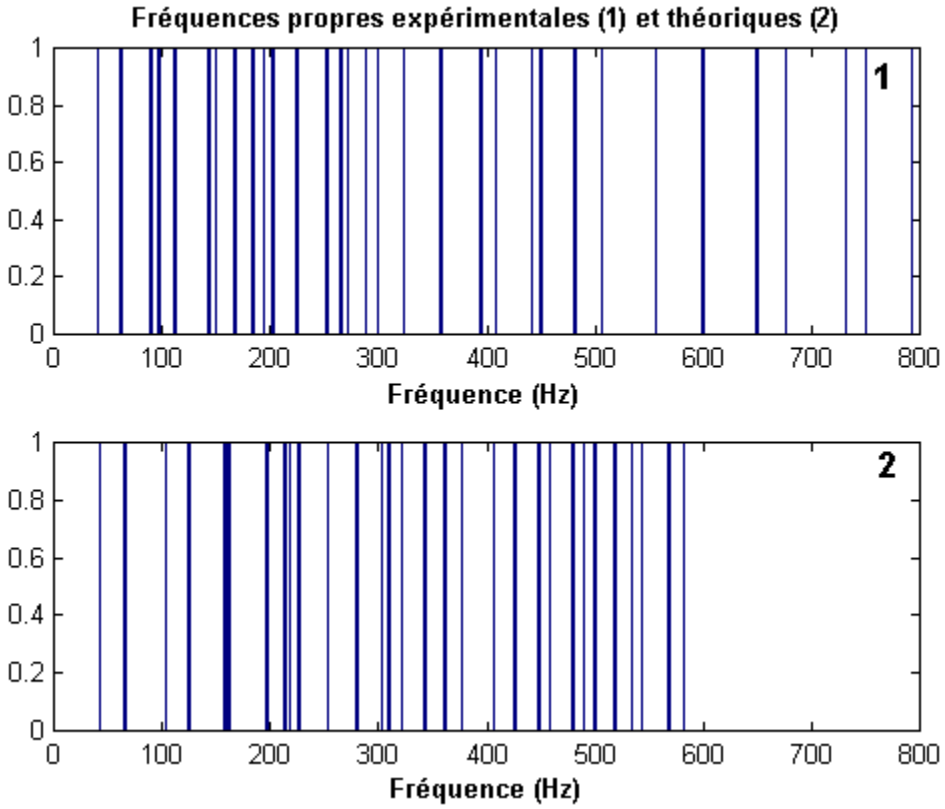


Figure V.26. Comparaison des 32 premières fréquences propres théoriques et expérimentales de la plaque en acier 0.6m X 0.4 m X 0.001m.

Nous constatons qu'en basses fréquences (0 ÷ 300 Hz), la densité modale, du cas expérimental est supérieure à celle du cas théorique. Au delà de 300 Hz, la densité s'inverse d'une manière très significative.

V.6.2. Confrontations acoustiques

Afin de valider le calcul acoustique dans le cas du rayonnement d'une plaque impactée, nous comparons les pressions acoustiques mesurée et calculée pendant un intervalle de temps

de 1 seconde. Les résultats obtenus sont illustrés dans les figures V.26. et V.27., où nous représentons l'évolution de la pression acoustique au point d'écoute en fonction du temps.

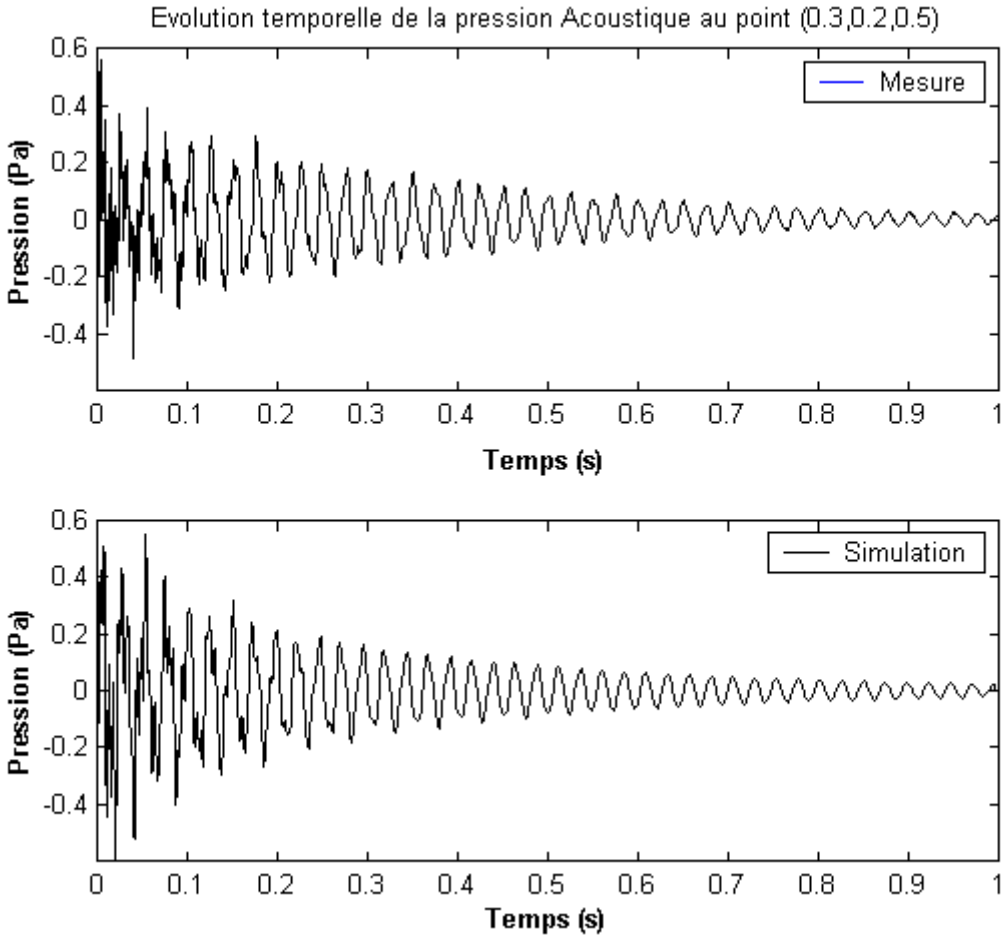


Figure V.27. Comparaison des pressions acoustiques simulée et mesurée pendant 1 s.

Les résultats de la pression acoustique de la simulation, obtenus dans le cas de l'impact semblent s'approcher des résultats expérimentaux. Afin de mieux analyser les résultats, intéressons nous à la première portion du signal qui est assez riche en information, à savoir la portion $0 \div 0.1$ s que nous représentons ci-après.

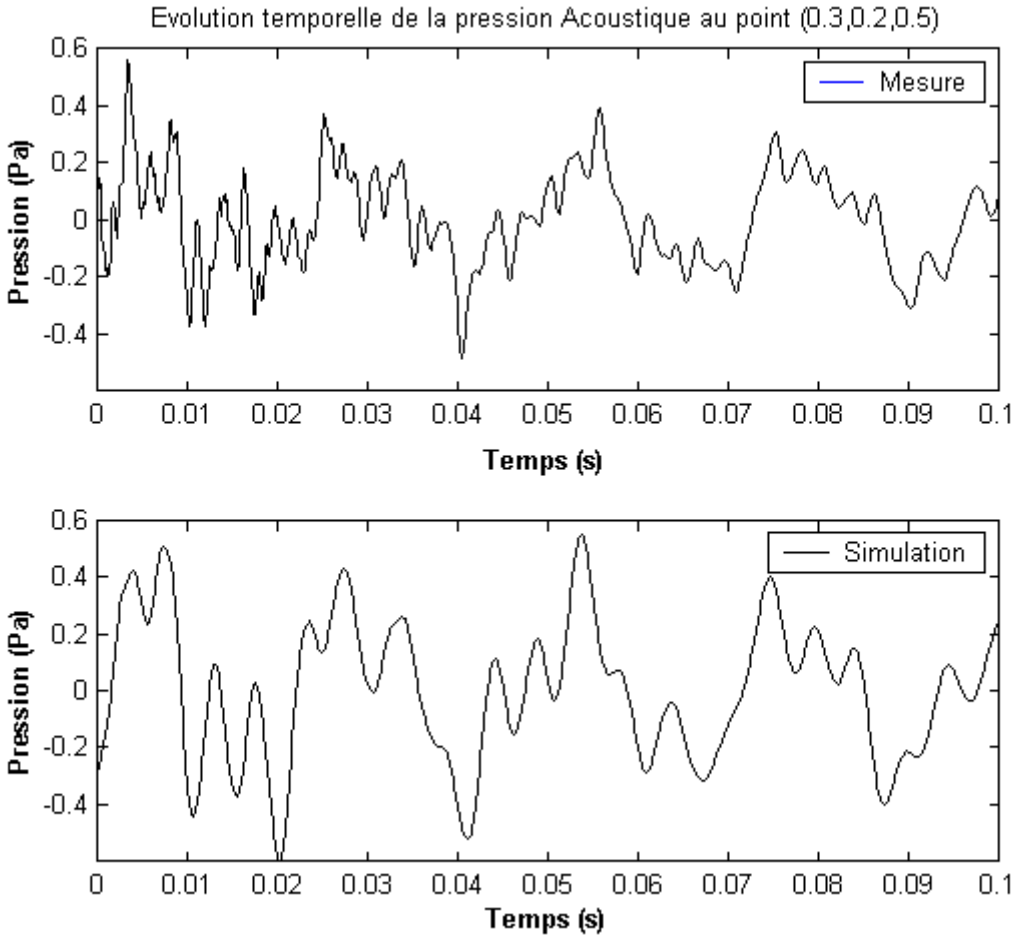


Figure V.28. Comparaison des pressions acoustiques simulée et mesurée pendant 0.1 s.

Nous constatons que le signal simulé représente presque l'enveloppe du signal mesuré, en d'autre terme, le signal expérimental renferme bien plus de fréquences que celui simulé. Ceci est tout à fait prévisible puisque nous l'avons déjà mentionné dans le paragraphe § VI.2. qu'en basses fréquences, la densité modale est plus importante dans le cas expérimental que dans celui simulé.

De même, nous constatons un léger décalage, dans le temps, entre les deux courbes ceci est dû au fait de la coupure des signaux expérimentaux qui commence bien avant l'impact.

V.6.3. Analyse des résultats

L'analyse des résultats est conduite selon deux critères : l'un objectif et le second subjectif. Il s'agit dans le premier cas de faire une étude du plan d'expérience des signaux mesurés et de dégager les tendances et les paramètres les plus influents dans le rayonnement acoustique de plaques impactée. Le second concerne une analyse de la perception sonore aussi bien pour les signaux mesurés que simulés à l'aide d'un test subjectif. Les signaux mesurés expérimentalement ainsi que leurs spectres sont illustrés sur les figures qui suivent :

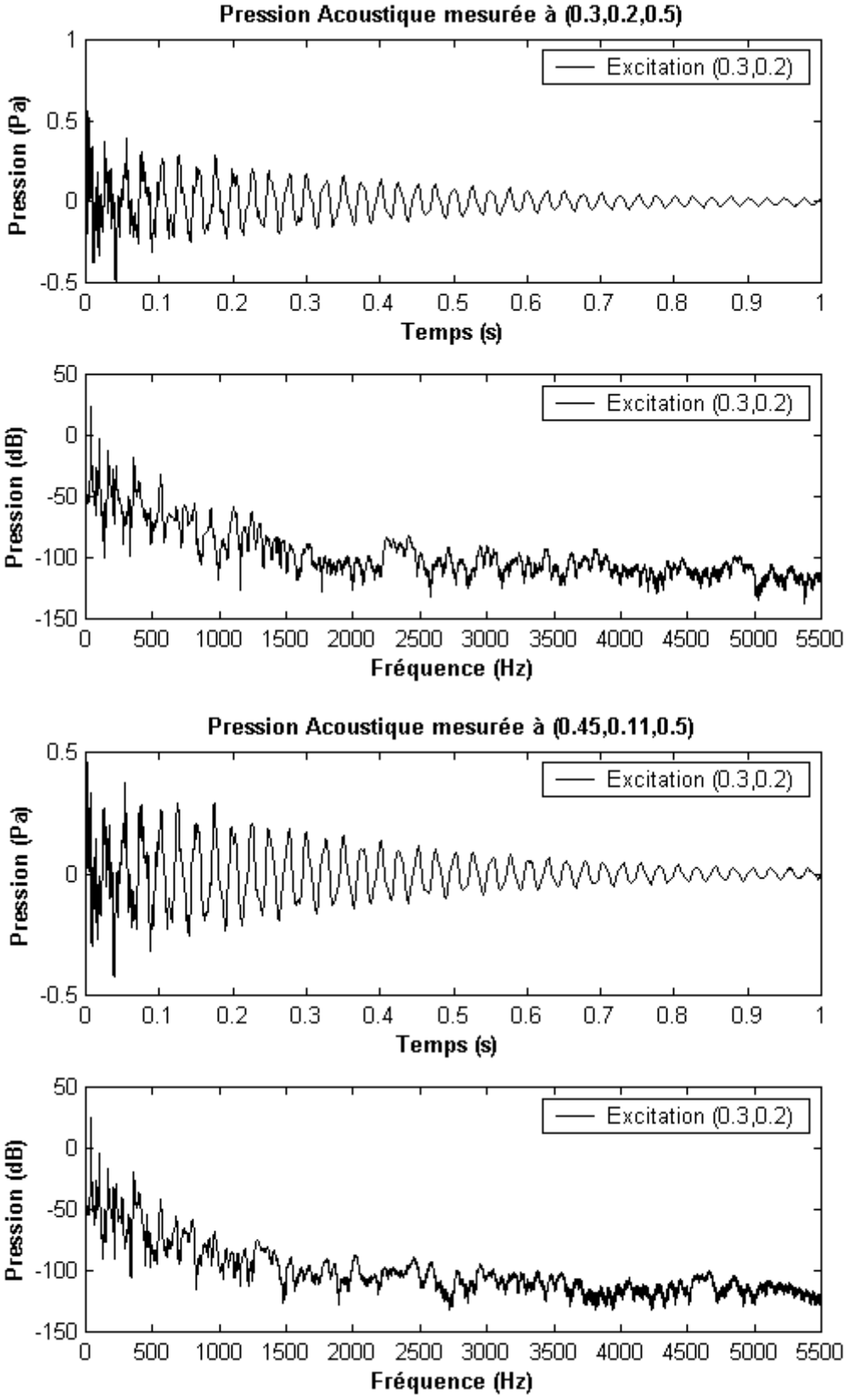


Figure V.29. *Evolution temporelle et spectre de la pression acoustique mesurée aux points donnés pour une excitation au point(0.3,0.2), la plaque est en acier.*

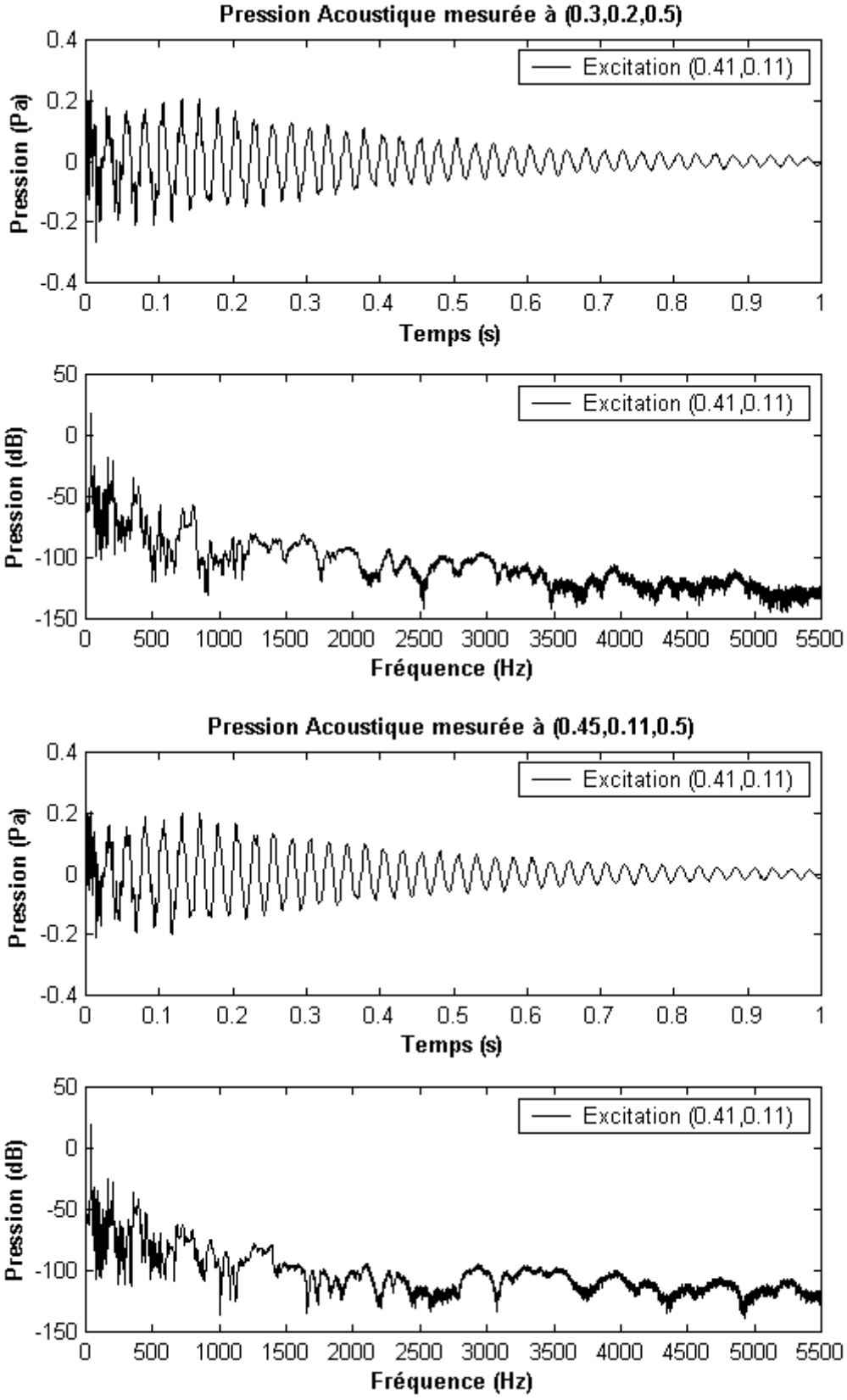


Figure V.30. *Evolution temporelle et spectre de la pression acoustique mesurée aux points donnés pour une excitation au point(0.3,0.2), la plaque est en acier.*

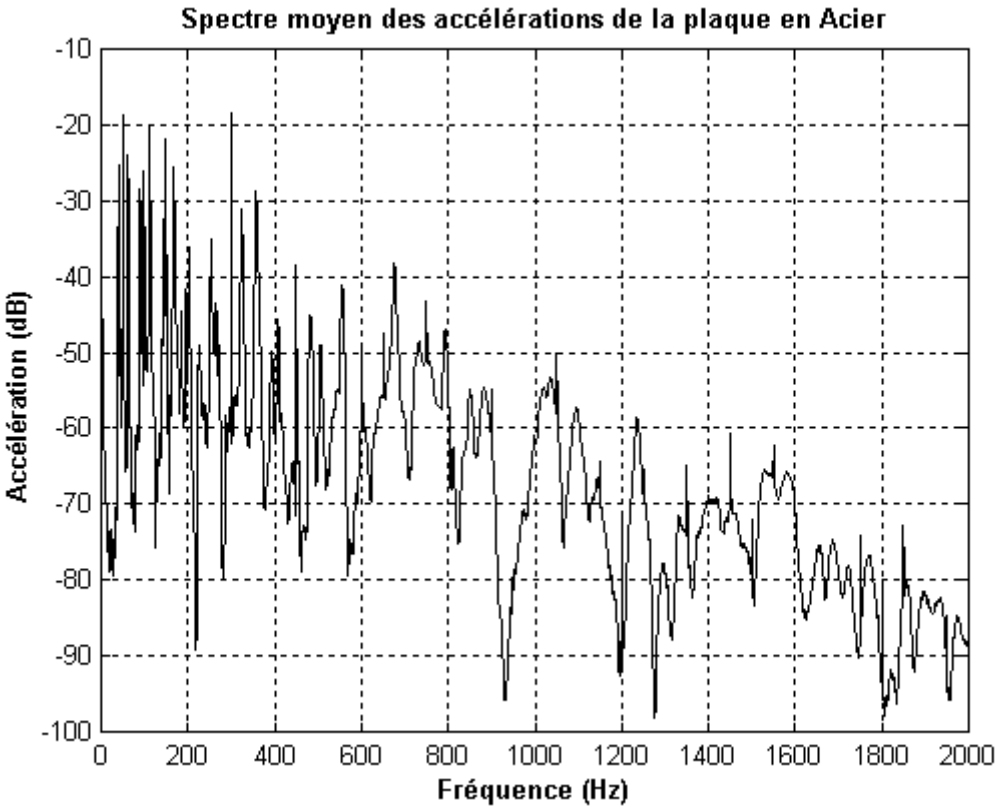


Figure V.31. *Spectre moyen de l'accélération, mesurée au point (,) pour une excitation au point(0.3,0.2).*

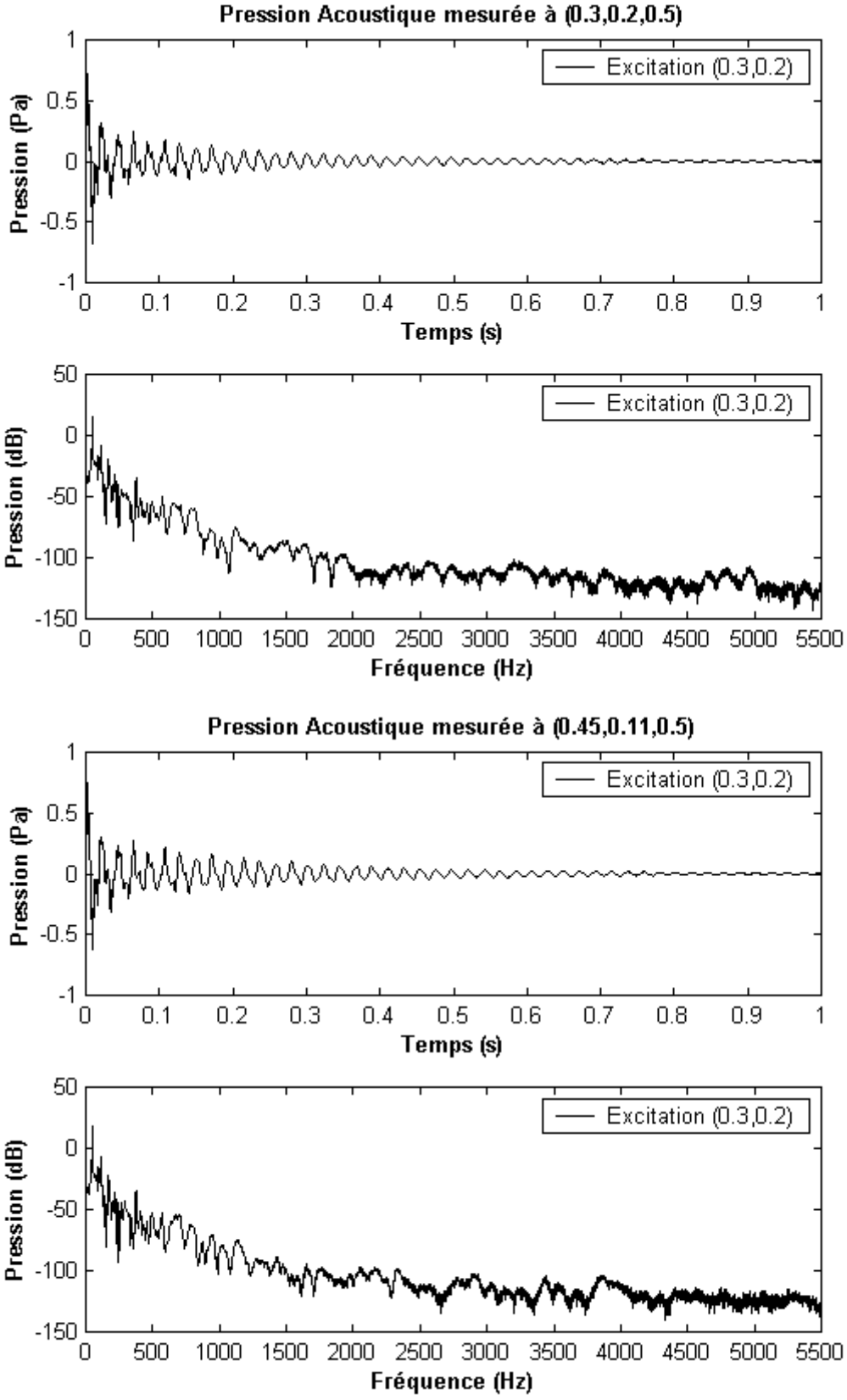


Figure V.32. *Evolution temporelle et spectre de la pression acoustique mesurée aux points donnés pour une excitation au point(0.3,0.2), la plaque est en aluminium.*

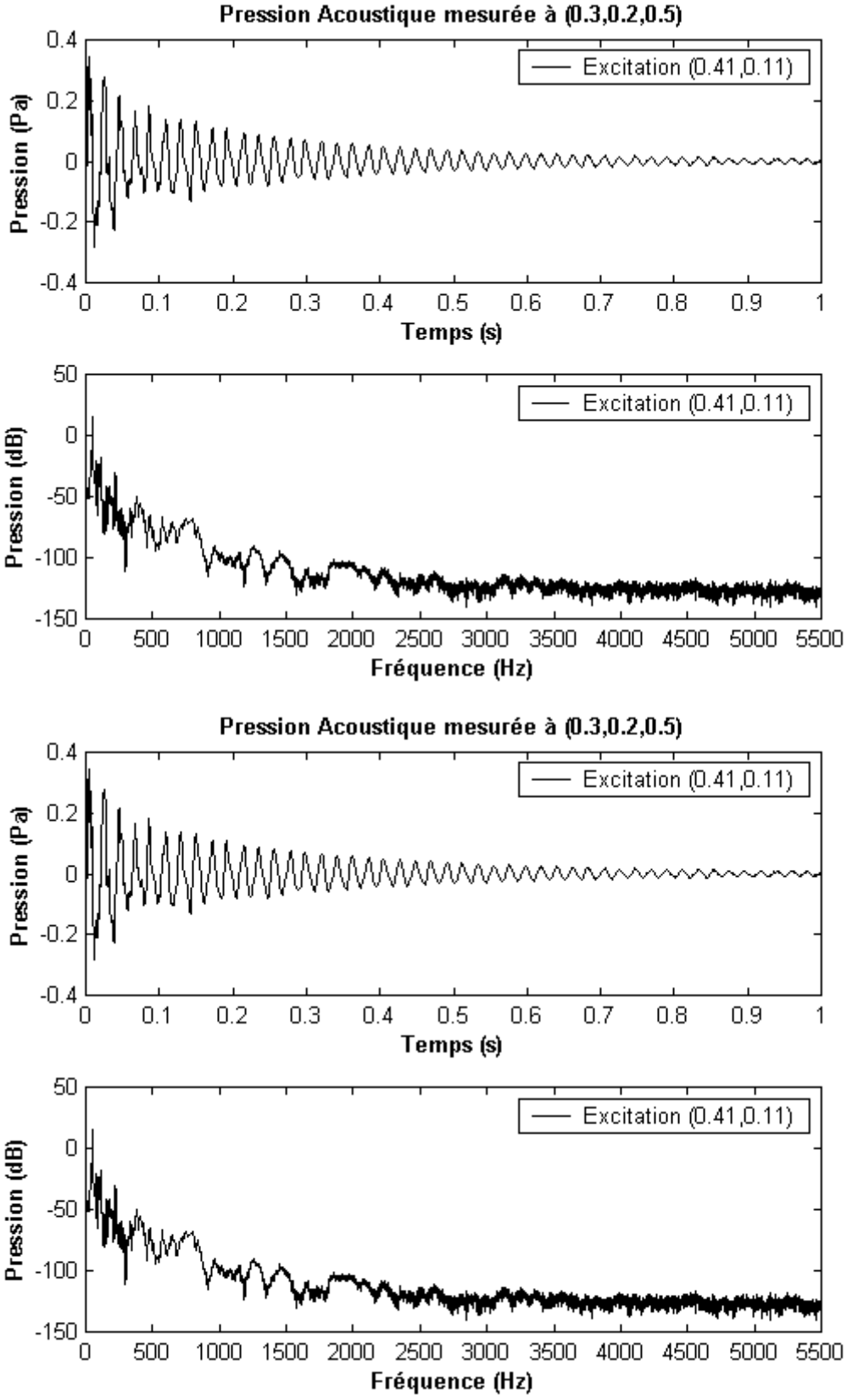


Figure V.33. *Evolution temporelle et spectre de la pression acoustique mesurée aux points donnés pour une excitation au point(0.3,0.2), la plaque est en aluminium.*

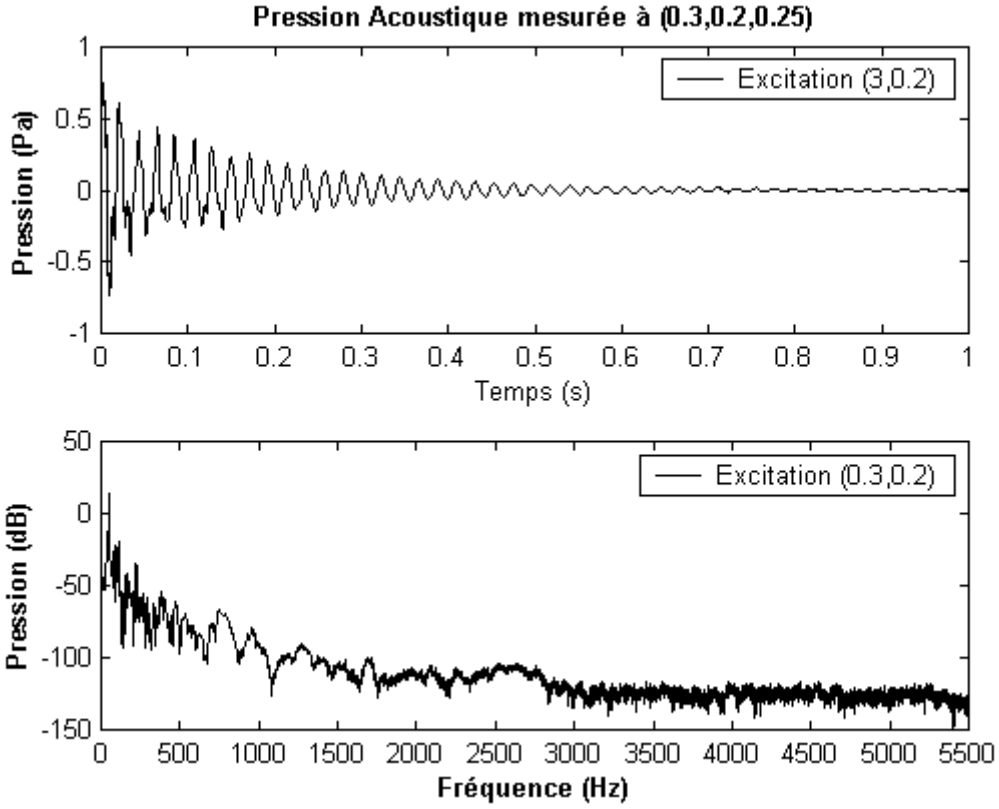


Figure V.34. *Evolution temporelle et spectre de la pression acoustique mesurée aux points donnés pour une excitation au point(0.3,0.2), la plaque est en aluminium.*

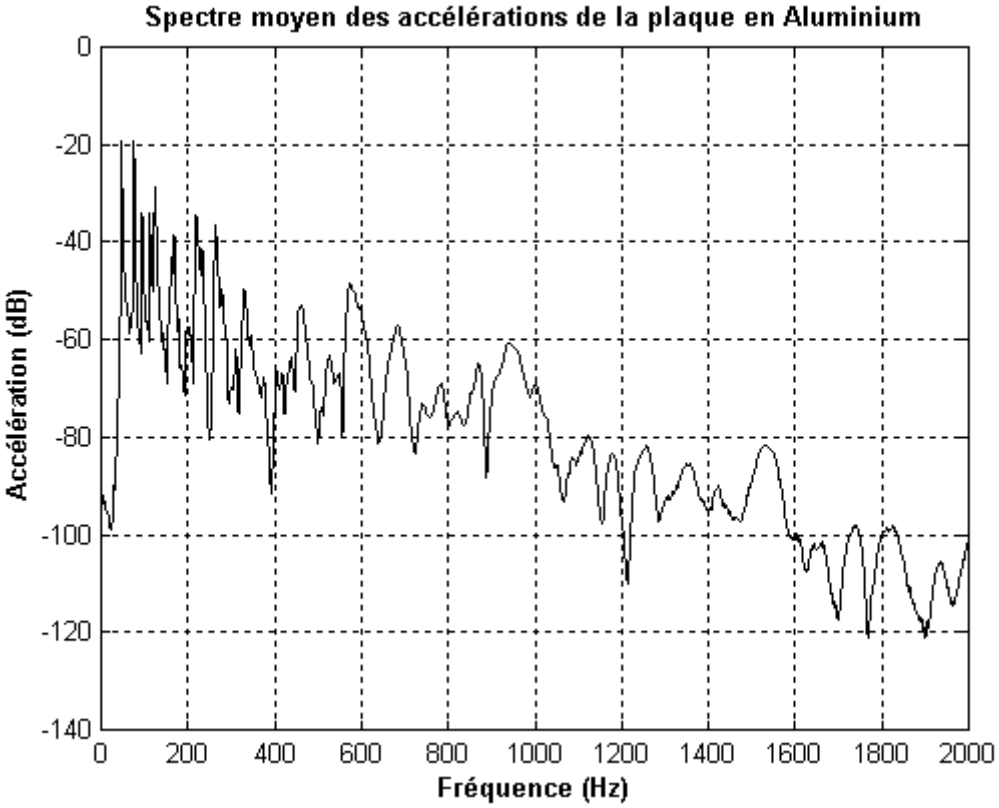


Figure V.35. *Spectre moyen de l'accélération, mesurée au point (), pour une excitation au point(0.3,0.2).*

V.6.3.1. Notion de plan d'expérience (Alexis, 1995).

Des générations d'ingénieur ont été formées à l'idée selon laquelle la connaissance détaillée des mécanismes d'une machine était nécessaire à l'amélioration de ses performances. Pour atteindre le meilleur réglage il fallait au préalable avoir décodé les lois reliant puissance, pression, température, déformation, etc. Hors d'un modèle causal explicatif, il n'avait point de salut.

Le plan d'expériences procède d'une démarche inverse, puisqu'il reconnaît la possibilité de faire des progrès notables en appliquant à la machine, considérée comme une boite noire, les conclusions provenant de données expérimentales. L'observation des effets induits par un changement volontaire des paramètres de fonctionnement permet de construire un plan de réglage efficace. L'opposition est nette ; dans la démarche classique la compréhension précède l'action. Dans l'approche expérimentale il n'est pas nécessaire de comprendre avant d'agir, une observation méthodique suffit.

Un plan d'expérience est donc une suite d'essais entièrement organisée à l'avance de manière à déterminer, en un minimum d'essais et avec un maximum de précision, l'influence des différents paramètres possibles, pour optimiser les performances du système étudié.

Il est important de souligner que par la méthode des plans d'expériences qui suit, nous aboutissons à un modèle mathématique image de la série d'expérience réalisée (8 combinaisons des paramètres cités au tableau V.10). En aucun cas, il ne s'agit d'un modèle prédictif, néanmoins, son principal intérêt est, comme nous allons le voir, de permettre de dégager qualitativement et quantitativement les effets des différents paramètres.

Les tests effectués nous donnent les résultats de niveau de pression des sons testés issus d'expérimentations d'impacts sur deux plaques ; l'une en acier et l'autre en aluminium. Comme nous l'avons vu précédemment, nous avons retenu trois paramètres fondamentaux dans le choix des 8 sons :

Facteurs	**Niveau 1**	**Niveau 2**
A : Matériau	Acier	Aluminium
B : Point d'impact	(0.3 , 0.2)	(0.41 , 0.11)
C : Point d'écoute	(0.3 , 0.2 , 0.5)	(0.45 , 0.11 , 0.5)

Tableau V.10. *Facteurs à tester et leurs niveaux.*

Ainsi notre modèle cherché de niveau de pression aura une réponse Y fonction de ces trois facteurs ainsi que leurs niveaux et de leurs éventuelles interactions.

Nos huit sons correspondent en fait à la liste de toutes les combinaisons de facteurs pour lesquels la réponse Y du modèle doit être observée. Nous pouvons les représenter sous forme d'un tableau dans lequel chaque colonne identifie les niveaux d'un facteur et chaque ligne une combinaison de facteurs. Un tel plan est appelé plan d'expérience factoriel complet.

A	B	C	Son correspondant
1	1	1	S1
1	1	2	S2
1	2	1	S3
1	2	2	S4
2	1	1	S5
2	1	2	S6
2	2	1	S7
2	2	2	S8

Tableau V.11. *Plan d'expérience.*

De plus ce plan est qualifié d'uniformément répété ou équilibré car chaque combinaison a été testé 4 fois ; ceci permet en outre de tenir compte de la variabilité naturelle des réponses. Enfin un tel plan est dit orthogonal car à chaque niveau d'un facteur, tous les niveaux des autres facteurs sont associés le même nombre de fois.

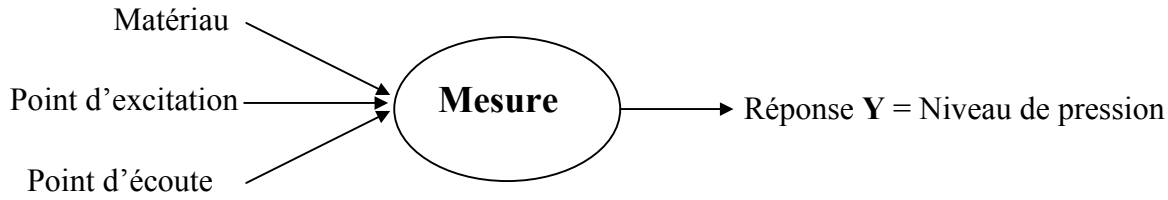


Figure V.36. *Test soumis à des effets des facteurs A, B et C.*

On désire également savoir s'il existe des interactions, du premier ordre, entre les différents facteurs deux à deux, ainsi qu'une interaction du 2ème ordre, entre les tous les facteurs.

La matrice d'expériences compatibles avec les objectifs de l'expérimentation à effectuer est une matrice L8, représentant 3 facteurs à 2 niveaux et 4 interactions, dans laquelle, la 3ème, 5ème et 6ème colonne, sont réservées respectivement aux interactions, du 1er ordre, AB, AC et BC, et la 7ème colonne, est réservée à l'interaction du 2ème ordre ABC.

N° colonnes		**1**	**2**	**4**	**7**	**3**	**5**	**6**
N° essai		**Facteurs Contrôlés**			**Inter. 2ème ordre**	**Interactions de 1er ordre**		
		A	**B**	**C**	**ABC**	**AB**	**AC**	**BC**
1		1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	1	2	2
3		1	2	1	2	2	1	3
4		1	2	2	1	2	2	4
5		2	1	1	2	3	3	1
6		2	1	2	1	3	4	2
7		2	2	1	1	4	3	3
8		2	2	2	2	4	4	4

Tableau V.12. *Matrice d'expérience.*

Dans ce plan factoriel complet, tous les effets sont purs. Dans la zone des interactions de 1er ordre, les chiffres correspondent aux diverses combinaisons A1B1, A1B2, A2B2… à mesurer. Par contre, seules les valeurs moyennes des 2 niveaux de l'interaction de 2ème ordre ABC peuvent être directement calculées.

V.6.3.2. Réalisation des essais et résultats

Pour chaque configuration, nous avons réalisé quatre essais. Nous avons relevé le niveau de pression et on a calculé la moyenne générale $\overline{T}$ de l'ensemble des essais.

N° colonnes 1 2 4 7 3 5 6

N° Essai		Facteurs Contrôlés			Inter. 2ème ordre	Interactions de 1er ordre			Valeurs mesurées				
		A	B	C	ABC	AB	AC	BC	N°1	N°2	N°3	N°4	Moy.
1		1	1	1	1	1	1	1	92.1	91.8	91.8	91.8	91.9
2		1	1	2	2	1	2	2	92.3	92.0	92.0	91.7	92.0
3		1	2	1	2	2	1	3	88.9	89.1	89.3	89.7	89.2
4		1	2	2	1	2	2	4	88.9	89.4	89.3	88.7	89.1
5		2	1	1	2	3	3	1	88.6	89.4	90.7	89.4	89.5
6		2	1	2	1	3	4	2	88.1	88.7	88.7	88.0	88.4
7		2	2	1	1	4	3	3	86.1	88.8	87.1	88.4	87.6
8		2	2	2	2	4	4	4	86.0	85.4	85.2	85.4	85.5

Moyenne générale $\overline{T} = 89.1$

Tableau V.13. *Réalisation des essais et résultats.*

V.6.3.3. Dépouillement et exploitation des résultats

Pour calculer les effets de chaque facteur et interaction testés, on construit un tableau des réponses contenant :

- La réponse moyenne pour chaque niveau de facteur correspond à la moyenne des résultats de tous les essais où le facteur se trouve à ce niveau. Par exemple :

$$\overline{A_i} = \frac{\sum \text{des résultats Y associés à } A_i}{\text{nombre de résultats associés à } A_i}$$

	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{ABC}$	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
Niveau 1	90.5	90.4	89.5	89.2	91.9	90.5	90.7
Niveau 2	87.5	87.8	88.7	89.0	89.1	90.5	90.2

Tableau V.14. *Réponse moyenne pour chaque niveau de facteur.*

La moyenne générale $\overline{T}$ de l'ensemble des essais correspond donc au point central des réponses moyennes pour les niveaux de chaque facteur.

- L'effet moyen de chaque niveau de facteur, s'apprécie par rapport à la moyenne générale, par :

$$E_{Ai} = \overline{A}_i - \overline{T}$$

Par exemple, l'effet moyen de A au niveau 1 est donné par :

$$E_{A1} = \overline{A}_1 - \overline{T}$$

De la même façon, on calcule l'effet moyen de A au niveau 2 :

$$E_{A2} = \overline{A}_2 - \overline{T}$$

Il est évident que : $E_{A1} = -\overline{E}_{A2}$

Remarque :

Par construction, lorsque le plan est orthogonal et équilibré, on a :

$$\sum_{i=1}^{n_A} E_{Ai} = 0$$

n_A étant le nombre de niveau du facteur A.

Pour les autres facteurs testés, le calcul est identique. Les résultats sont récapitulés dans le tableau des réponses (V.15).

N° facteur	Effet sur la mesure	
	Niveau 1	Niveau 2
A	1.4	-1.4
B	1.3	-1.3
C	0.4	-0.4

Tableau V.15. *Effet moyen de chaque niveau de facteur.*

A partir du tableau des réponses on peut voir que les facteurs A et B apparaissent comme ayant les effets les plus importants sur le niveau de pression acoustique rayonnée par une plaque impactée.

En ce qui concerne les interactions, l'estimation des différents effets se fait d'une manière analogue. Par exemple, si nous considérons l'interaction AB, nous avons :

$$E_{A_iB_j} = \overline{A_iB_j} - \overline{T} - E_{Ai} - E_{Bj}$$

où $\overline{A_kB_l}$ représente la moyenne de tous les résultats Y lorsque, à la fois A est au niveau i et B au niveau j. Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau VI.10.

I	**j**	$\mathbf{A_iB_j}$	$\mathbf{A_iC_j}$	$\mathbf{B_iC_j}$
1	1	0.15	-0.35	-0.1
1	2	-0.05	0.45	0.2
2	1	-0.05	0.45	0.2
2	2	0.15	-0.35	-0.1

Tableau V.16. *Moyennes des interactions entre les différents niveaux des facteurs.*

Pour les interactions entre plus de deux facteurs (interactions de 2ème ordre), le principe du calcul est identique à celui des interactions entre 2 facteurs (interactions de 1er ordre). Par exemple, si nous considérons l'interaction ABC, de notre cas (tableau VI.6.), nous avons :

$$E_{A_iB_jC_k} = \overline{A_iB_jC_k} - \overline{T} - E_{Ai} - E_{Bj} - E_{Ck} - E_{AiBj} - E_{AiCk} - E_{BjCk}$$

où $\overline{A_iB_jC_k}$ représente, dans notre cas, le résultat Y lorsque, à la fois A est au niveau i, B au niveau j et C au niveau k,

et E_{AiBj} , E_{AiCk} *et* E_{BjCk} , les 3 interactions de 1er ordre pouvant exister entre les 3 facteurs.

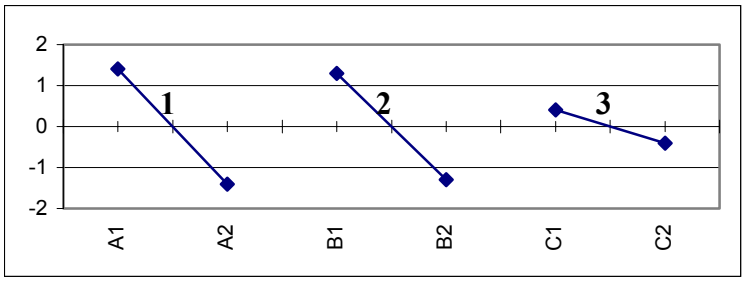
Cette relation permet de bien comprendre pourquoi les interactions entre plus de deux facteurs ont des valeurs fréquemment négligeables.

i	j	k	$\overline{A_iB_jC_k}$	$\overline{T}$	E_{Ai}	E_{Bj}	E_{Ck}	E_{AiBj}	E_{AiCk}	E_{BjCk}	$E_{A_iB_jC_k}$
1	1	1	91.9	89.1	1.4	1.3	0.4	0.15	-0.35	-0.1	0.0
1	1	2	92.0	89.1	1.4	1.3	-0.4	0.15	0.45	0.2	-0.2
1	2	1	89.2	89.1	1.4	-1.3	0.4	-0.05	-0.35	0.2	-0.2
1	2	2	89.1	89.1	1.4	-1.3	-0.4	-0.05	0.45	-0.1	0.0
2	1	1	89.5	89.1	-1.4	1.3	0.4	-0.05	0.45	-0.1	-0.2
2	1	2	88.4	89.1	-1.4	1.3	-0.4	-0.05	-0.35	0.2	0
2	2	1	87.6	89.1	-1.4	-1.3	0.4	0.15	0.45	0.2	0
2	2	2	85.5	89.1	-1.4	-1.3	-0.4	0.15	-0.35	-0.1	-0.2

Tableau V.17. *Effets moyens des facteurs et leurs différentes interactions.*

V.6.3.4. Analyse graphique

La représentation graphique des essais est utile pour appréhender les effets des interactions généralement difficilement appréciable.



1 : Matériau
2 : Point d'impact
3 : Point d'écoute

Figure V.37. *Représentation graphique des effets moyens des facteurs.*

L'effet du matériaux sur le niveau de pression est le plus important (pente la plus importante sur la figure ci-dessus), par contre celle de la position du point d'écoute est la plus faible.

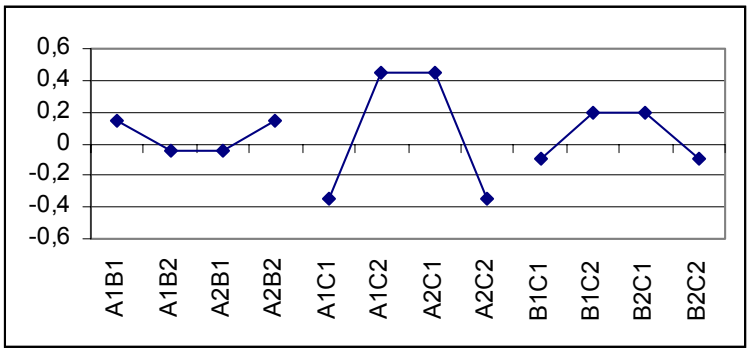


Figure V.38. *Représentation graphique des effets moyens des interactions entre les différents facteurs.*

On s'aperçoit que la plus grande interaction a lieu entre le matériau et la position du point d'écoute. En effet le matériau a une grande influence sur l'effet de la position du point d'écoute : c'est l'interaction AC.

On peut maintenant tracer le graphique des réponses de la figure V.36 avec le détail des 12 interactions, où nous constatons, que le type de matériau a une influence notable sur le point d'écoute : c'est l'interaction AC. Par contre, l'interaction AB (matériau – point d'impact), tout comme l'interaction BC (point d'impact – point d'écoute), s'avèrent être négligeables.

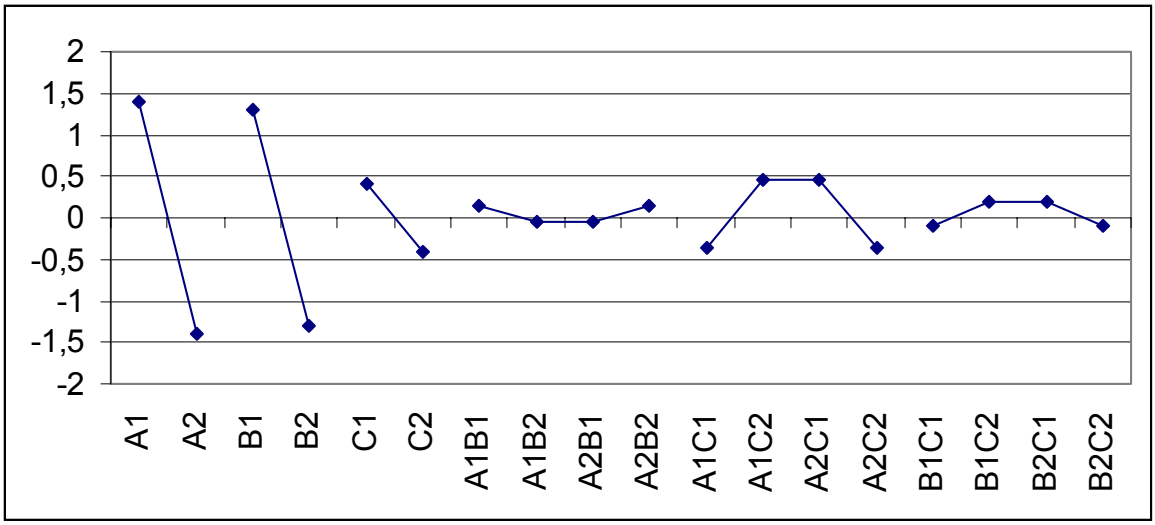


Figure V.39. *Graphique des réponses.*

V.7. Conclusion

Dans ce chapitre consacré principalement à la validation des résultats, il apparaît clairement que les résultats obtenus sont très satisfaisants et conformes aux résultats pressentis. Ainsi, nous avons présenté :

1. Le calcul des schémas modaux pour différentes conditions aux limites de la plaque a montré la bonne concordance avec les résultats issus des codes de calculs par éléments finis tels que Sysnoise et Cosmos ainsi que les formules de Blevins et les résultats expérimentaux. Toutefois, il faut signaler que dans le cas où la plaque est encastrée, sur ses quatre bords, nous remarquons que les résultats expérimentaux sont évidemment les plus éloignés ceci est dû principalement aux incertitudes de mesure et des conditions aux

limites d'encastrement qui, avec une fixation de la plaque par 38 boulons est loin d'être le cas idéal d'un encastrement.

2. Le calcul vibratoire temporel a montré la bonne concordance entre les accélérations obtenues par la méthode temporelle proposée, d'une part, et celles obtenues par la méthode fréquentielle d'autre part, en effectuant une FFT des résultats temporels bien sûr. Ceci a été vérifié aussi bien mode par mode qu'en tenant compte de plusieurs modes.

3. Le calcul acoustique a été validé par la vérification de la cohérence des fonctions de transferts (spectre de la réponse impulsionnelle) avec les résultats attendus notamment en ce qui concerne :

- La décroissance du niveau de pression avec la distance à la plaque,
- La présence des nœuds acoustiques et leurs influences sur le nombre de modes présents dans le cas du point d'écoute situé en face du milieu de la plaque : seuls les modes de rang impair apparaissent.

4. L'analyse de la sensibilité des paramètres lié à la densité modale a montré d'une part que la plaque, encastrée partout, rayonne plus que la plaque appuyée partout ceci va être particulièrement prouvé par la suite et d'autre part que l'augmentation de l'amortissement a pour rôle de diminuer le niveau de la pression acoustique sans altérer les résonances.

5. Le plan d'expérience élaboré, nous a permis de dégager les tendances de l'influence des trois paramètres retenus, sur le niveau de pression d'une plaque impactée, d'où il ressort :

- Le matériau et la position du point d'impact sont les facteurs ayant les effets les plus importants sur le niveau de pression acoustique. Par contre la position du point d'écoute a un effet très faible sur le niveau de pression acoustique rayonnée.
- La plus grande interaction a lieu entre le matériau et la position du point d'écoute. En effet, le matériau a une grande influence sur l'effet de la position du point d'écoute.

CHAPITRE VI

EXPLOITATIONS NUMERIQUES

VI.1. Introduction

Les études acoustiques consistent habituellement à procéder à un diagnostic expérimental ou à des calculs vibroacoustiques permettant de comprendre le fonctionnement physique de la source du bruit. La part de l'analyse perceptive reste encore assez faible dans ces études, en dépit qu'elle peut compléter très utilement les études physiques.

Globalement, on peut définir la démarche d'approche de la perception sonore par trois étapes : les mesures acoustiques et la synthèse sonore, les tests de perception et l'analyse des résultats de perception et leur corrélation avec la physique.

Dans ce chapitre, nous décrivons, dans un premier temps, l'outil de la synthèse sonore élaboré, dans le cadre de cette étude, et les mures acoustiques dans le cas d'un impact sphère-plaque. Les résultats obtenus sont ensuite analysés selon deux critères : l'un objectif, reposant sur des procédures d'évaluations physiques et l'autre, subjectif, reposant sur des tests perceptifs.

Nous introduisons également, la notion de plan d'expériences, pour une analyse assez fine des paramètres les plus influents du rayonnement acoustique de plaques impactées.

VI.2. Description des procédures de calcul

Afin d'étudier l'influence subjective des paramètres physiques de la plaque tel que le module de Young E, la masse volumique ρ etc… sur le rayonnement acoustique des plaques, il est tout d'abord nécessaire de disposer d'un outil permettant de calculer la pression rayonnée par une plaque dans le domaine temporel. A cet effet, nous avons élaboré un programme sous environnement Matlab permettant de calculer le rayonnement acoustique dans le cas d'une plaque appuyée sur ses bords. Une approche similaire a été effectuée par Didier (2000), dans le cas encastré en implémentant numériquement la méthode de l'effet de bord (cf. § II.3.2.). Dans les deux cas de conditions aux limites, le principe de calcul reste le même :

- maillage de la plaque en N points,
- calcul des accélérations des N points de la plaque soumise à une excitation du type impact,
- calcul de la pression rayonnée en un point donné de l'espace à l'aide d'une équation intégrale explicite dite de Rayleigh.

VI.2.1. Description de la synthèse sonore

Il s'agit d'élaborer un outil qui permette de synthétiser, dans le domaine temporel, le son généré par des plaques vibrantes soumises aux chocs. Le programme ainsi établi va nous permettre avant tout de générer un fichier son (.wav) image de la pression acoustique calculée numériquement.

VI.3. Propriétés du champ acoustique transitoire d'une plaque impactée

Dans cette partie du chapitre, nous exploitons les programmes de calculs établis sur la base de la théorie des chapitres précédents. Nous portons une attention particulière sur les mécanismes du rayonnement acoustique d'une plaque impactée. Dans ce contexte, nous, nous intéressons à la durée du champ acoustique transitoire et la symétrie de la propagation de l'onde de flexion.

Ainsi, nous procédons au calcul de la pression acoustique à partir du déplacement simulé, en résolvant numériquement l'intégrale de Rayleigh.

Notons qu'en basses fréquences, deux types d'ondes peuvent se propager dans les plaques :

- les ondes quasi-longitudinales, qui provoquent une déformation symétrique par rapport au plan médian de la plaque,
- les ondes de flexion, qui entraînent des déformations antisymétriques par rapport au plan médian de la plaque.

Etant donné que le type d'excitation considéré dans cette étude est un choc transversal, la prise en compte des déformations de flexion suffit pour décrire la large majorité des phénomènes dynamiques.

Dans ce qui suit, nous examinons le champ acoustique transitoire rayonné par une plaque impactée par un projectile à bout sphérique.

VI.3.1. Déplacement transversal d'une plaque impactée

Dans le souci de valider les programmes de calculs établis, nous avons repris les paramètres donnés dans l'article de Ross et al. (2002), d'une plaque en aluminium de masse m_0, simplement appuyée sur ses quatre bords et impactée en son centre par un impacteur, en acier, à bout sphérique. Les différents paramètres sont résumés dans le tableau VI.1.

Paramètres de la plaque		**Paramètres de l'impacteur**	
Dimensions :	0.61 m x 0.91 m	Masse :	0.028 kg
Epaisseur :	0.0048 m	Rayon :	0.0032 m
Module de Young :	69 GPa	Module de Young :	210 Gpa
Coefficient de Poisson :	0.3	Coefficient de Poisson :	0.3
Masse volumique :	2700 kg/m^3	Vitesse de l'impact :	1m/s

Tableau VI.1. *Paramètres de la plaque et de l'impacteur.*

La figure (VI.1.) montre les coordonnées (X,Y,Z) ayant pour origine un des coins de la plaque par contre les coordonnées (x,y,z) et (r,θ,ψ) ont pour origine le point d'impact.

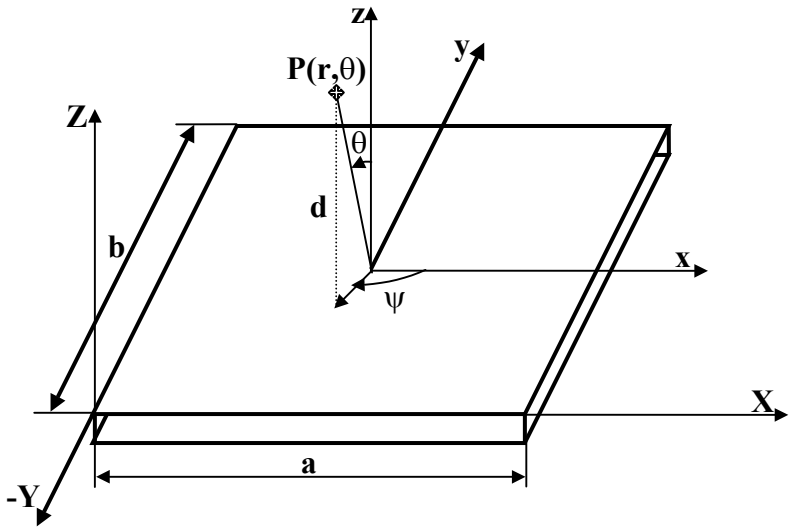


Figure VI.1. *Plaque et système de coordonnées utilisées.*

Le déplacement d'un élément de plaque $dS(X,Y)$, est donné par l'équation (VI.1), obtenu par la loi de contact de Hertz et la théorie classique des plaques (Goldsmith, 1960).

$$u(X,Y,t) = \frac{-4}{m_0}\sum_m\sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi X}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi Y}{b}\right)}{\omega_{mn}}\left[F\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) * \sin(\omega_{mn} t)\right] \quad \text{(VI.1)}$$

où ω_{mn} est la pulsation propre de la plaque du mode (m,n),
F et τ sont respectivement la force d'impact et la durée de contact (tous deux, évaluées par la théorie de contact de Hertz et vérifiées expérimentalement par Ross et al., 2002).

L'évaluation numérique de cette équation, au point d'impact ($X = a/2$, $Y = b/2$), est représentée sur la figure VI.2., pour 1 m à partir du début du contact.

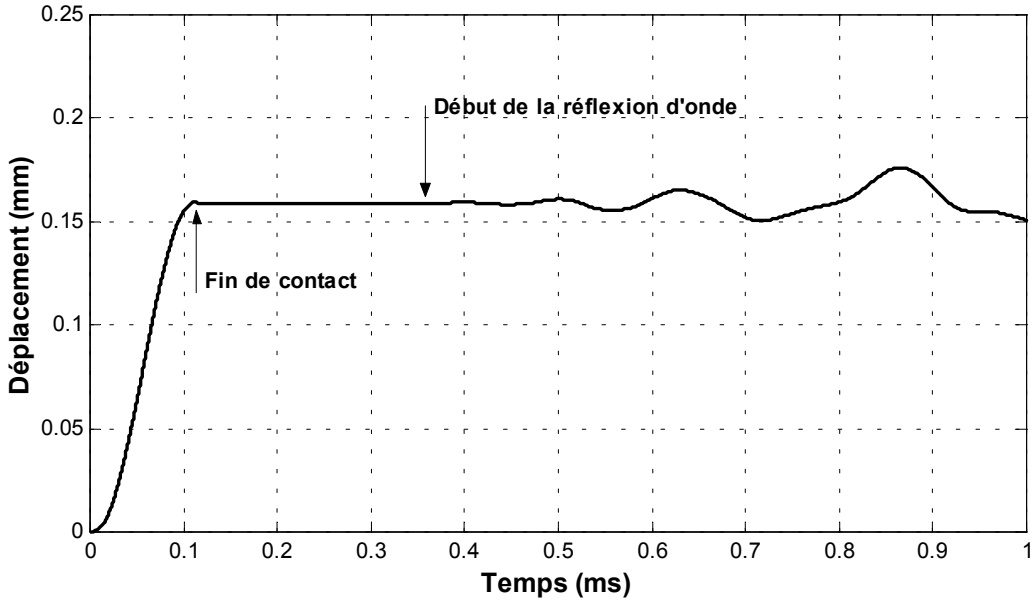


Figure VI.2. *Déplacement de la plaque au point d'impact.*

A partir de cette figure, nous pouvons constater que la déformation initiale tient environ 140 μs avant de se stabiliser pendant 240 μs. Pendant cette période, le déplacement maximal de la plaque (obtenu à la fin de la période de contact) est aux alentours de 0.16 mm qui est très petit comparativement à l'épaisseur de la plaque. Ainsi un modèle linéaire, peut être appliqué pour la propagation de l'onde de flexion.

VI.3.2. Symétrie radiale de l'onde de flexion

Puisque le rayonnement acoustique de la plaque impactée est provoqué par la propagation des ondes de flexion à travers elle, nous, nous intéressons aux déplacements transversaux de la plaque. Plus précisément, le bruit de l'accélération étant le résultat de la déformation initiale de la plaque, nous, nous concentrerons sur le court instant durant lequel la déformation est créée et propagée vers les bords de la plaque. Après cette période, l'onde est réfléchie par les appuis de la plaque et les déformations modales résultantes produisent le bruit sonore.

La symétrie de la propagation est mieux visible quand on adopte les coordonnées cylindriques (R,ψ) au lieu des coordonnées cartésiennes de l'équation (VI.1.), avec R = 0 au point d'impact. Avec ces coordonnées, le déplacement transversal de la plaque devient :

$$u(R,\psi,t) = \frac{-4}{m_0}\sum_m\sum_n (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \ldots$$
$$\ldots \times \sin\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi R\cos\psi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi R\sin\psi}{b}\right)\left[F\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) * \sin(\omega_{mn} t)\right] \quad \text{(VI.2)}$$

où m et n =1, 3, 5,

Figure VI.3. *Répartition spatiale du déplacement à la fin de l'impact.*

Une évaluation numérique de l'équation qui précède a été effectués sur 30 différents rayons équidistants R < a/2 (30 cm) et 20 différents angles $0 \le R \le 2\pi$ et à différents instants variant de 0.15 à 0.5 ms. La sommation des 400 modes impairs (m, n # 39) prouve clairement que pour tout instant t < 0.3 ms, les variations du déplacement u en fonction de R ont une grandeur au moins 2 fois plus petite que les déformations maximales de la plaque. Il est remarquable que 0.3 ms correspond approximativement au temps requis par une onde de flexion de 8000 hertz pour parcourir la distance de 30 centimètres du point d'impact aux appuis les plus proches de la plaque. Par ailleurs, selon l'équation (VI.2.), le rapport d'amplitude entre des modes plus élevés (fréquences au-dessus de 8 kHz) et le premier mode de la plaque est toujours inférieur à 0.05, indépendamment des paramètres de position et de temps. En conséquence, l'influence des ondes de fréquences élevées et leur réflexion sur les bords de la plaque est négligeable dans cette tranche de temps. La propagation initiale de l'onde de flexion, du point d'impact aux bords da la plaque, est donc symétrique autour de l'axe d'impact :

$$\frac{\partial u(R,\psi,t)}{\partial \psi} = 0 \qquad \text{(VI.3)}$$

VI.4. Analyse de la sensibilité de la pression acoustique à quelques paramètres

Afin de vérifier la partie du programme liée au calcul du rayonnement acoustique. Nous faisons varier quelques paramètres comme l'indique les figures VI.4. à VI.6. et l'on vérifie la cohérence des résultats obtenus. Les paramètres retenus sont :

- point d'impact,
- point d'écoute,
- épaisseur de la plaque,
- amortissement,

A partir des courbes VI.4 à VI.6, on peut, déjà constater qu'on retrouve bien une première zone pour laquelle la pression acoustique est nulle. Cette zone, correspond bien sûr au temps de retard, qui correspond au temps nécessaire à l'onde acoustique pour parcourir la plus petite distance entre la plaque et le point d'écoute.

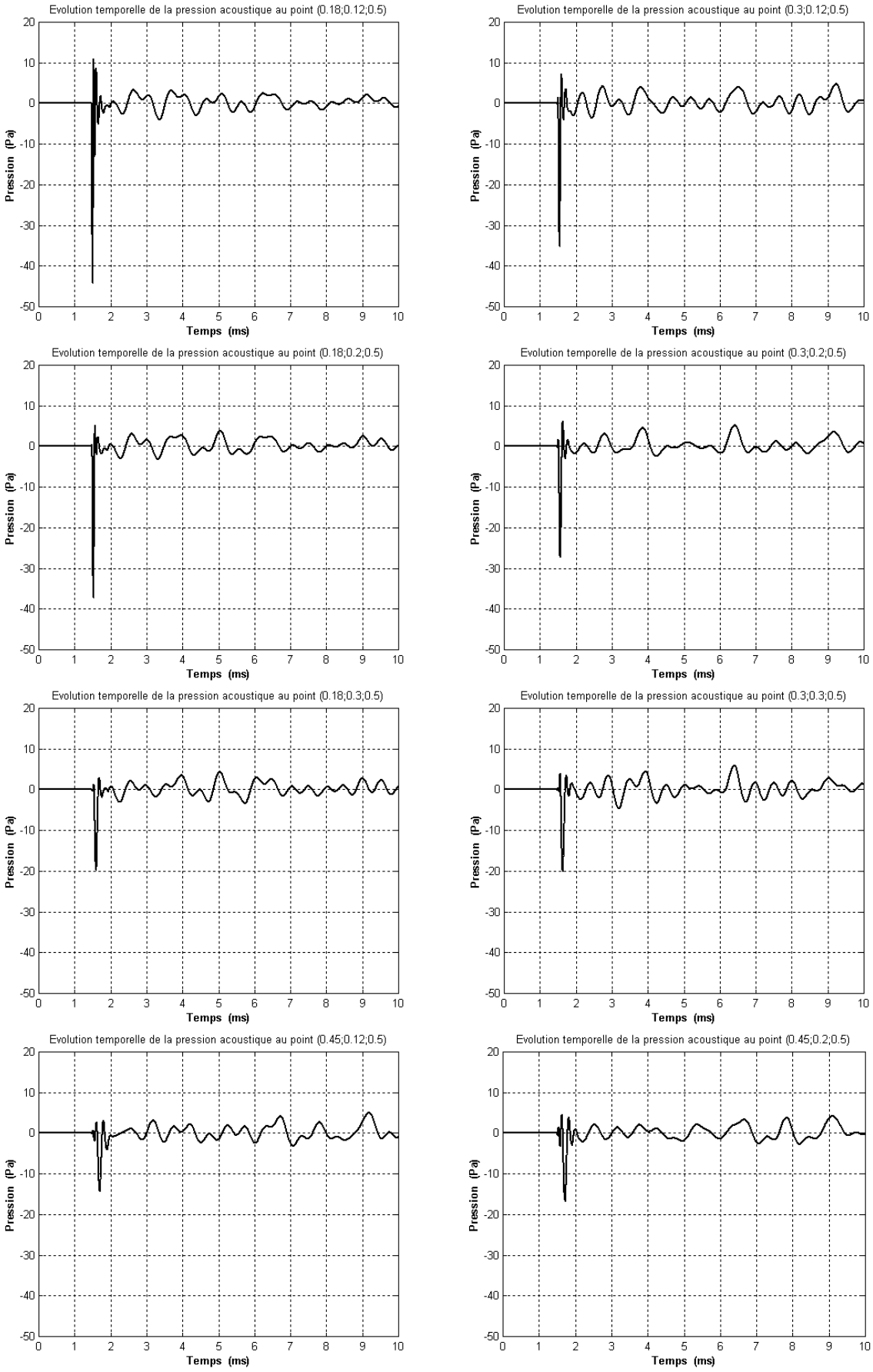


Figure VI.4. *Evolution temporelle de la pression acoustique en différents points de l'espace une plaque appuyée 0.6 m x 0.4 m x 0.002 m, impactée au point (0.18,0.12).*

On peut noter déjà que les évolutions temporelles de la pression acoustique, obtenues sont bien cohérentes avec les résultats attendus, notamment la présence des nœuds acoustiques et leur influence sur le nombre de modes présents ainsi que la décroissance du niveau de pression avec l'augmentation de la distance du point d'écoute à la plaque.

En effet les niveaux de pression acoustique les plus faibles correspondent, soit à un point d'écoute situé en face du milieu de la plaque (seuls les modes de rang impairs sont présents), soit à un point d'écoute situé à une distance considérable de la plaque.

Les figures qui suivent montrent l'influence de l'épaisseur et de l'amortissement sur l'évolution temporelle de la pression acoustique.

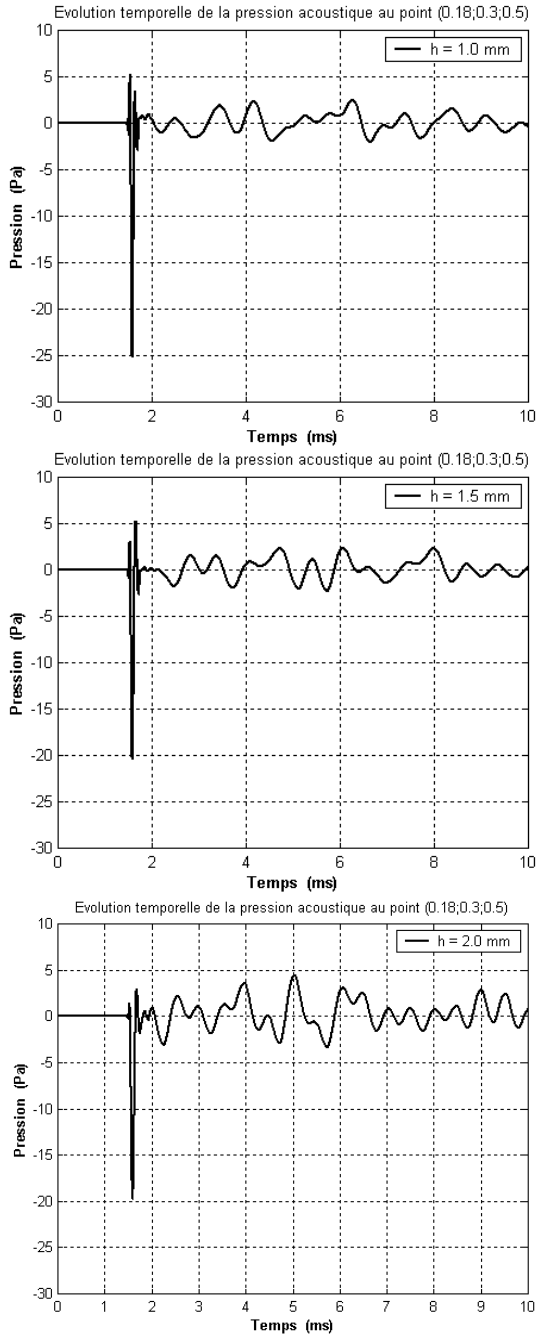


Figure VI.5. *Influence de l'épaisseur de la plaque sur la pression acoustique.*

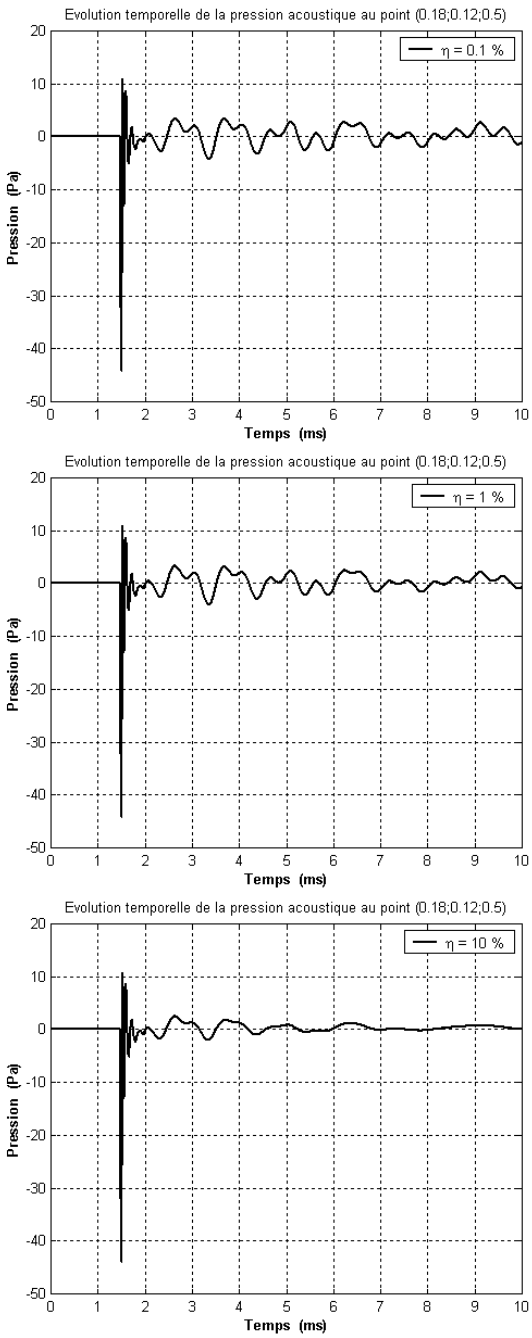


Figure VI.6. *Influence de l'amortissement de la plaque sur la pression acoustique.*

Nous constatons d'une part, que l'augmentation de l'épaisseur engendre une diminution de la pression acoustique rayonnée pendant l'impact et une augmentation de la pression acoustique, dans l'ensemble, au delà de l'instant de l'impact. D'autre part, nous signalons une faible influence de l'amortissement sur l'évolution temporelle de la pression acoustique d'une plaque impactée.

Pour cette étude, les signaux sonores ont été calculés pour deux plaques minces bafflées encastrées et de dimensions Lx = 0.6 m et Ly = 0.4 m et d'épaisseur h = 1 mm, l'une en acier et l'autre en aluminium. Chaque signal est calculé avec une fréquence d'échantillonnage de … Hz sur une durée de 1 seconde. Les spectres s'étendent sur une bande de fréquence allant jusqu'à 5000 Hz, le premier mode étant à 42.2 Hz pour la plaque en acier et de 41.1 Hz pour celle en aluminium.

Nous avons choisi de faire varier trois paramètres : coordonnées du point d'impact, les coordonnées du point d'écoute et le matériau. Le tableau VI.2, présente les valeurs choisis pour les neuf sons retenus.

VI.5. Analyse de la perception sonore

La mise en place d'un test d'appariement ou de reconnaissance, qui consiste à tester la capacité des auditeurs à apparier un son synthétisé avec le son mesuré correspondant, dont l'objectif est de vérifier la correspondance des sons simulés aux sons enregistrés en terme de reconnaissance auditive. Malheureusement les signaux enregistrés expérimentalement sont déjà difficilement discernables entre eux, en raison de la nature de l'excitation qui est très brève, d'une part et d'autre part des faibles variations des paramètres essayés. Etant donné que du point de vue de l'analyse physique les signaux simulés ont été vérifiés expérimentalement et ont donné satisfaction. A cet effet, nous avons décider de subir les sons issus de la synthèse sonore et qui correspondent à la variation de trois paramètres, à un test de préférence. Les résultats de ce test doivent permettre de répondre à la problématique : *est ce que les modifications des paramètres physiques ont un effet similaire sur les sons enregistrés et sur les sons de synthèse ?*.

Pour cette synthèse sonore, nous avons calculé la pression acoustique rayonné par la plaque impactée, au point (0.45,0.12,0.5). Une telle réponse est convertie en un fichier .wav. Cependant, on ne peut utiliser ce fichier son tel quel pour les tests psychoacoutique car d'une part sa durée est trop courte et d'autre part il est difficile de tirer des informations subjectives d'un son de type impact (impulsionnel). La solution retenue est de convoluer cette réponse à une force temporelle mesurée issue d'un moteur de tondeuse à gazon. Le son résultant de cette convolution aura ainsi une durée environ égale à la somme de celles de la force et de l'excitation.

Nous représentons dans la figure VI.22., le spectre de la force excitatrice, où nous remarquons qu'une telle force présente de l'énergie surtout avant 2000 Hz, bande de fréquences que nous avons retenue auparavant lors du choix du nombre de maillage de la plaque.

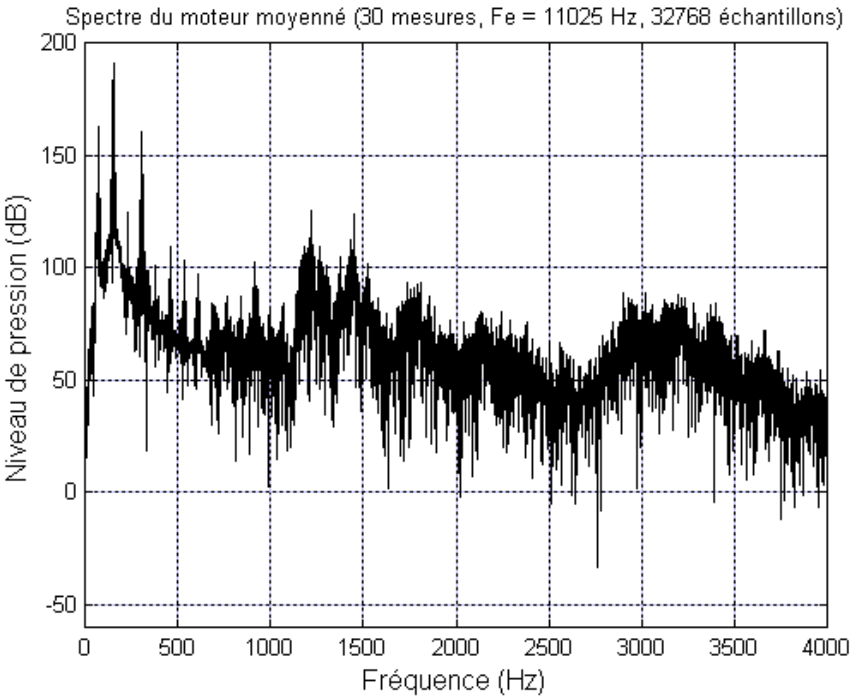


Figure VI.7. *Spectre de la force d'excitation du moteur de la tondeuse à gazon.*

La plaque retenue pour le test perceptif a pour dimensions 0.6 X 0.4 X 0.002 m^3, le nombre de modes pris en compte étant de 68 modes et le maillage retenu est de 48 X 32 éléments. La pression acoustique est calculée au point (0.45,0.12,0.5).

VI.5.1. Principe général

Comme nous l'avons vu précédemment, nous pouvons disposer de plusieurs sons issus de la synthèse sonore, élaborée, ainsi que ceux enregistrés par expérimentation. Le test choisis pour évaluer l'influence subjective des paramètres est la préférence. L'auditeur écoute une paire de sons et à l'aide d'un curseur évalue sa préférence pour l'un ou l'autre. Etant donné que toutes les paires de sons possibles doivent être écoutées, il a fallu prendre un nombre de sons assez raisonnable tout en gardant un aspect qualitatif de l'étude d'influence des principaux paramètres du rayonnement acoustique. A cet effet, nous avons retenu 12 sons représentant la variations de trois paramètres : le matériaux, les conditions aux limites et la position de l'impact, correspondant à la combinaison des cas suivants :

Matériau	Acier	Aluminium	
Conditions aux limites	Appuyée	Encastrée	
Position point d'impact	(0.12,0.2)	(0.3,0.3)	(0.45,0.12)

Tableau VI.2. *Combinaison des paramètres retenus.*

Les 3 premières paires du test ont été répétées à la fin du test, et c'est celles-ci que nous prendrons en compte afin de laisser le temps à l'auditeur de s'en accommoder. Ainsi, pour les 12 sons retenus, nous avons un test de préférence comportant en tout 69 paires de sons :

$$N_{paires} = \frac{12*11}{2} + 3 = 69 \text{ paires}$$

Comme nous l'avons vu dans précédemment, nous disposons de 12 sons de synthèse, correspondant aux différentes combinaisons des paramètres retenus (voir tableau VI.3). Ces sons retenus, pour l'évaluation perceptive ont été exploités dans un test de préférence que nous décrivons en détail à l'annexe 5.

VI.6. Analyse des résultats subjectifs

Cette partie du chapitre traite l'aspect dépouillement des données et met en place une stratégie d'exploitation des résultats subjectifs. On peut aller d'une simple exploitation des résultats des enquêtes de perception jusqu'à l'application d'un modèle de préférence permettant de lier la préférence à des paramètres physiques.

Comme pour les résultats expérimentaux, nous analysons les résultats subjectifs par un plan d'expériences factoriel complet. De plus, ce plan est uniformément répété car chaque combinaison a été testé par les 30 auditeurs ; ceci permet en outre de tenir compte de la variabilité naturelle des réponses. Enfin ce plan est dit orthogonal car à chaque niveau d'un facteur, tous les niveaux des autres facteurs sont associés le même nombre de fois.

Facteurs	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 3**
A : Matériau	Acier	Aluminium	
B : Conditions aux limites	Appuyée	Encastrée	
C : Point d'impact	(0.12 , 0.2)	(0.3 , 0.3)	(0.45 , 0.12)

Tableau VI.3. *Facteurs à tester et leurs niveaux*.

Notre test de préférence étant soumis aux facteurs A,B et C possède un comportement mesurable par une réponse Y. Dans notre cas, la préférence Y peut être modélisée par :

$$M : \quad Y = \overline{Y} + A + B + C + AB + AC + BC$$

$\overline{Y}$ est la moyenne des résultats sur les 30 auditeurs.

Les facteurs du 2ème ordre notés [AB], [AC] et [BC] représentent respectivement les différentes interactions entre les facteurs A et B, A et C ainsi que B et C.

Remarque :

Une interaction d'ordre 2 existe lorsque le système ne réagit pas à un facteur de façon identique selon le niveau d'un autre facteur. On peut ainsi définir des facteurs d'ordre supérieur mais ceux-ci sont toujours négligés dans une première étude, comme nous l'avons montré pour les signaux expérimentaux.

VI.6.1. Estimation de la moyenne et des effets moyens des différents facteurs

Le modèle M associé au plan P peut s'écrire schématiquement :

$$\hat{Y} = \overline{Y} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}[A]^t + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}[B]^t + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}[C]^t + [A]\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}[B]^t + \ldots$$

$$\ldots + [A]\begin{bmatrix} a_1c_1 & a_1c_2 & a_1c_3 \\ a_2c_1 & a_2c_2 & a_2c_3 \end{bmatrix}[C]^t + [B]\begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3 \\ b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3 \end{bmatrix}[C]^t$$

avec : $\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$ où : N = 12 X 30 = 360 sons (nombre total de réponses Y obtenues)

Plan d'expérience												
Facteur A	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
Facteur B	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
Facteur C	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Réponse	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**	**S12**
A1	0.435	0.359	0.340	0.583	0.769	0.611	0.220	0.306	0.459	0.547	0.722	0.649
A2	0.283	0.304	0.220	0.640	0.762	0.667	0.181	0.354	0.355	0.717	0.744	0.774
A3	0.380	0.363	0.286	0.631	0.673	0.634	0.354	0.358	0.400	0.646	0.588	0.687
A4	0.320	0.246	0.347	0.501	0.751	0.615	0.328	0.368	0.367	0.697	0.686	0.774
A5	0.387	0.355	0.339	0.627	0.657	0.600	0.379	0.365	0.371	0.600	0.637	0.683
A6	0.276	0.314	0.349	0.656	0.805	0.548	0.288	0.267	0.353	0.728	0.773	0.643
A7	0.282	0.432	0.407	0.665	0.671	0.559	0.384	0.353	0.326	0.679	0.608	0.634
A8	0.322	0.291	0.208	0.786	0.762	0.626	0.209	0.290	0.256	0.778	0.886	0.586
A9	0.245	0.324	0.347	0.642	0.713	0.660	0.281	0.389	0.388	0.587	0.684	0.739
A10	0.294	0.280	0.304	0.578	0.734	0.803	0.322	0.267	0.303	0.630	0.674	0.810
A11	0.205	0.269	0.276	0.676	0.821	0.684	0.170	0.227	0.322	0.752	0.776	0.823
A12	0.353	0.347	0.375	0.611	0.674	0.543	0.357	0.333	0.445	0.669	0.637	0.654
A13	0.354	0.262	0.271	0.749	0.760	0.565	0.237	0.266	0.319	0.703	0.763	0.751
A14	0.311	0.358	0.366	0.628	0.770	0.607	0.262	0.345	0.317	0.669	0.654	0.713
A15	0.338	0.287	0.289	0.781	0.885	0.666	0.170	0.135	0.171	0.844	0.810	0.624
A16	0.366	0.338	0.299	0.675	0.753	0.673	0.323	0.341	0.344	0.647	0.593	0.648
A17	0.401	0.386	0.365	0.565	0.617	0.675	0.383	0.380	0.403	0.587	0.584	0.656
A18	0.401	0.386	0.365	0.565	0.617	0.675	0.383	0.380	0.403	0.587	0.584	0.656
A19	0.215	0.228	0.216	0.681	0.733	0.699	0.307	0.274	0.433	0.762	0.712	0.740
A20	0.380	0.349	0.275	0.612	0.662	0.631	0.373	0.368	0.412	0.628	0.580	0.731
A21	0.325	0.353	0.424	0.757	0.792	0.320	0.285	0.321	0.421	0.739	0.813	0.496
A22	0.197	0.205	0.235	0.715	0.834	0.753	0.222	0.260	0.245	0.803	0.752	0.778
A23	0.195	0.242	0.244	0.689	0.875	0.572	0.246	0.286	0.337	0.800	0.809	0.704
A24	0.376	0.343	0.368	0.634	0.606	0.581	0.318	0.403	0.355	0.714	0.629	0.641
A25	0.249	0.267	0.281	0.646	0.799	0.681	0.188	0.230	0.316	0.745	0.758	0.808
A26	0.299	0.335	0.261	0.562	0.724	0.628	0.273	0.365	0.327	0.683	0.748	0.789
A27	0.259	0.253	0.287	0.673	0.774	0.653	0.210	0.275	0.348	0.696	0.759	0.786
A28	0.386	0.350	0.283	0.612	0.662	0.627	0.356	0.364	0.412	0.624	0.595	0.707
A29	0.333	0.325	0.322	0.759	0.799	0.649	0.202	0.200	0.220	0.819	0.789	0.619
A30	0.376	0.277	0.296	0.694	0.745	0.550	0.259	0.265	0.333	0.682	0.750	0.748

Figure VI.4. *Plan d'expérience uniformément répété et ses résultats.*

Le tableau ci-dessus recense les différents résultats de préférence pour chaque son issus des réponses des 30 auditeurs.

Nous représentons sur la figure VI.8, les scores moyens des préférences des 30 auditeurs.

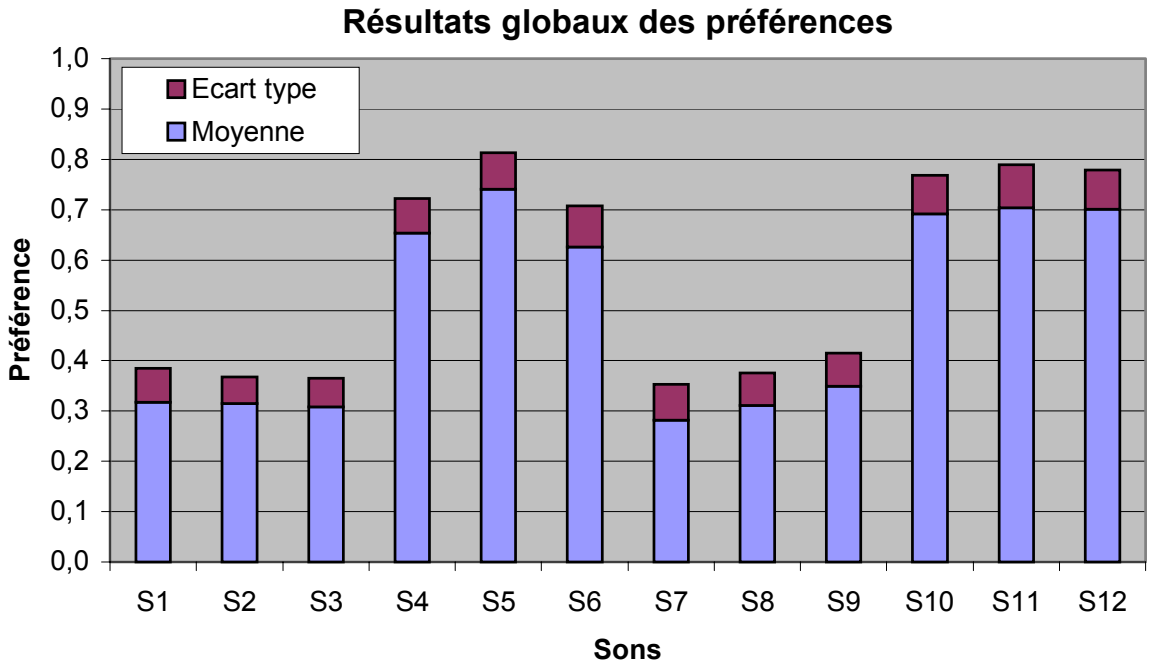


Figure VI.8. *Scores de préférence, des 12 sons étudiés.*

A partir des scores de préférence obtenus (figure VI.8), on peut affirmer que le type de conditions aux limites est le paramètres le plus prépondérants sur la préférence des sons simulés. En effet les sons 4, 5, 6, 10, 11 et 12 correspondent au cas de la plaque encastrée par contre, les autres correspondent au cas de plaque appuyée.

N° colonnes		**1**	**2**	**4**	**7**	**3**	**5**	**6**	
N° Essai		**Facteurs Contrôlés**			**Inter. 2ème ordre**	**Interactions de 1er ordre**			**Resu.**
		A	**B**	**C**	**ABC**	**AB**	**AC**	**BC**	**Moy.**
1		1	1	1	1	1	1	1	0.318
2		1	1	2	2	1	2	2	0.314
3		1	1	3	3	1	3	3	0.308
4		1	2	1	3	2	1	4	0.653
5		1	2	2	2	2	2	5	0.740
6		1	2	3	1	2	3	6	0.625
7		2	1	1	3	3	4	1	0.282
8		2	1	2	2	3	5	2	0.311
9		2	1	3	1	3	6	3	0.349
10		2	2	1	1	4	4	4	0.692
11		2	2	2	2	4	5	5	0.703
12		2	2	3	3	4	6	6	0.702

Moyenne générale $\overline{T} =$ 0.500

Tableau VI.5. *Réalisation des essais et résultats.*

VI.6.2. Dépouillement et exploitation des résultats

Comme pour les signaux expérimentaux, nous calculons les effets de chaque facteur et interaction testés et on construit les tableau des réponses contenant respectivement la réponse moyenne pour chaque niveau de facteur et l'effet moyen de chaque niveau de facteur.

	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$
Niveau 1	0.493	0.314	0.487
Niveau 2	0.507	0.686	0.517
Niveau 3			0.496

Tableau VI.6. *Réponse moyenne pour chaque niveau de facteur.*

N° facteur	Effet sur la mesure		
	Niveau 1	**Niveau 2**	**Niveau 3**
A	-0.0067	0.0067	
B	-0.1861	0.1861	
C	-0.0134	0.0173	-0.0039

Tableau VI.7. *Effet moyen de chaque niveau de facteur.*

I	**j**	$\mathbf{A_iB_j}$	$\mathbf{A_iC_j}$	$\mathbf{B_iC_j}$
1	1	0.0064	0.0059	0.0002
1	2	-0.0064	0.0167	-0.0184
1	3		-0.0226	0.0186
2	1	-0.0064	-0.0059	-0.0002
2	2	0.0064	-0.0167	0.0184
2	3		0.0226	-0.0186

Tableau VI.8. *Effet moyen des interactions entre les différents niveaux des facteurs.*

A partir des tableaux ci-dessus et avec ce qui précède nous sommes en mesure d'écrire le modèle de préférence sous la forme :

$$\hat{Y} = 0.5 + \begin{bmatrix} -.0067 & .0067 \end{bmatrix}[A]^t + \begin{bmatrix} -.1861 & .1861 \end{bmatrix}[B]^t + \begin{bmatrix} -.0134 & .0173 & -.0039 \end{bmatrix}[C]^t + \ldots$$

$$\ldots + [A]\begin{bmatrix} .0064 & -.0064 \\ -.0064 & .0064 \end{bmatrix}[B]^t + [A]\begin{bmatrix} .0059 & .0167 & -.0226 \\ -.0059 & -.0167 & .0226 \end{bmatrix}[C]^t + \ldots$$

$$\ldots + [B]\begin{bmatrix} .0002 & -.0184 & .0186 \\ -.0002 & .0184 & -.0186 \end{bmatrix}[C]^t$$

avec : $[A] = [1 \quad 2]$, $[B] = [1 \quad 2]$, $[C] = [1 \quad 2 \quad 3]$

A la vue de l'expression du modèle ci-dessus, nous pouvons déjà pressentir que certains facteurs ont un effet négligeable par rapport à d'autre. Par exemple. les matrices $[-.0067 \quad 0067]$ des effets de A et $[-0.0134 \quad 0.0173 \quad -0.0039]$ des effets de C présentent des coefficients nettement inférieurs à ceux de la matrice B. Ce résultat va être conforté par l'analyse graphique des effets qui suit et d'autre part par l'analyse de la variance que nous verrons en dernier point.

VI.6.3. Analyse graphique

Comme pour les signaux expérimentaux, nous présentons dans ce qui suit, la représentation graphique des effets de chaque paramètre, en vue de caractériser son influence sur la perception sonore du son synthétisé.

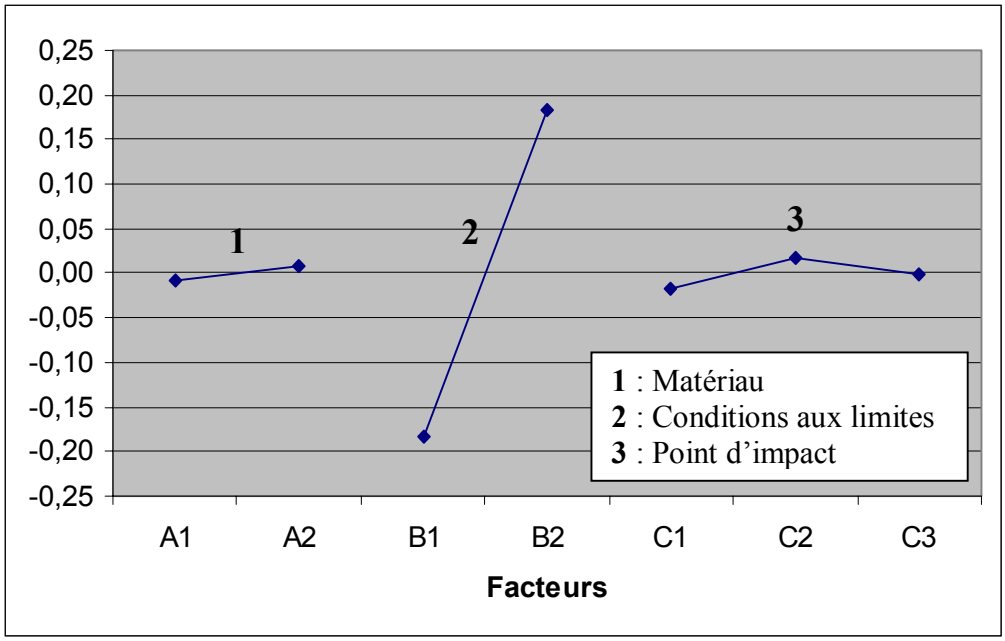


Figure VI.9. *Représentation graphique des effets moyens des facteurs.*

A partir du graphe ci-dessus, nous pouvons constater que l'effet des conditions aux limites sur la préférence est le plus important (pente la plus grande sur le graphe ci-dessus). Par contre, celle du matériau semble être quasi nulle, du moins pour les dimensions des plaques et des conditions d'impact retenues.

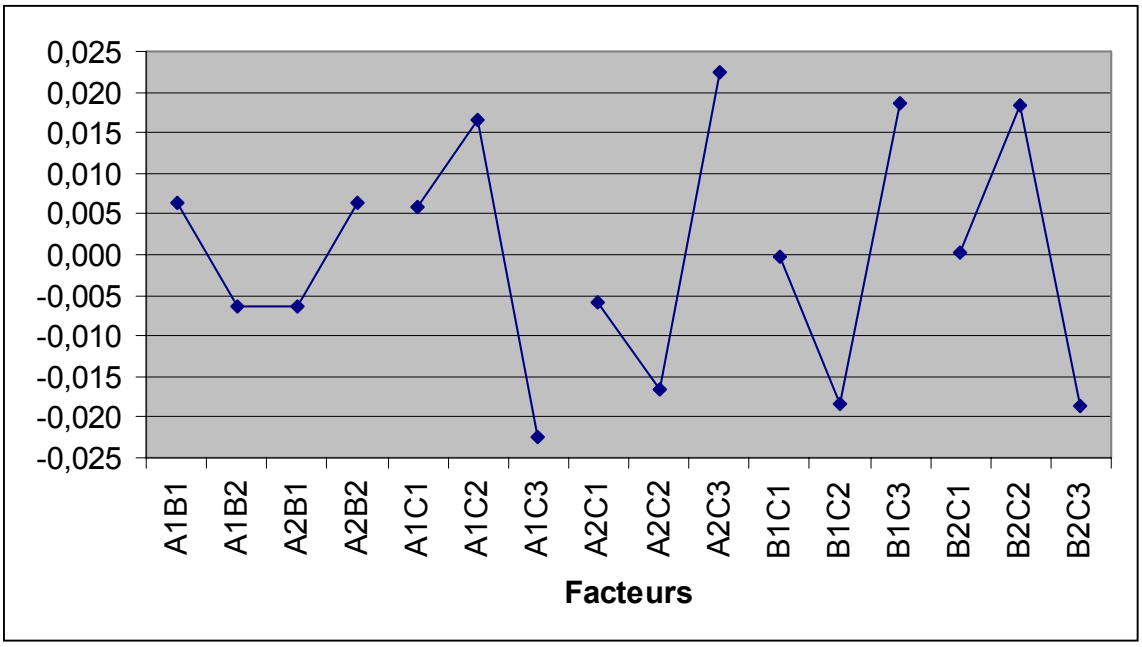


Figure VI.10. *Représentation graphique des interactions entre les différents facteurs.*

On s'aperçoit que la position du point d'impact a une influence sur le matériau et sur les conditions aux limites : c'est les interactions AC et BC respectivement. En effet pour les

positions 2 et 3 du point d'impact (interactions A1C2, A1C3, A2C2, A2C3, B1C2, B1C3, B2C2 et B2C3), le matériau et les conditions aux limites sont plus sensibles que dans le cas de la position 1 du point d'impact (interactions A1C1, A2C1, B1C1, B2C1). Par contre l'interaction AB semble être négligeable devant les autres interactions.

VI.7. Analyse de la variance

VI.7.1. Objet de cette étude (R. Veysseyre (2001))

La théorie de l'analyse de la variance est la procédure qui consiste à tester globalement l'ensemble de tous les échantillons en comparant leurs moyennes.

Le but de cette théorie est d'étudier la variabilité d'un produit en fonction d'un ensemble de facteurs de production dont on peut contrôler systématiquement les modes d'intervention et dont on souhaite dissocier la part revenant à chaque facteur.

On distingue :

- l'analyse de la variance à simple entrée, un seul paramètre est contrôlé, les autres facteurs étant regroupés sous le nom « facteurs non contrôlés),
- l'analyse de la variance à double entrée, qui étudie l'action simultanée de deux facteurs contrôlés, chacun agissant individuellement avec une possibilité d'interaction entre les deux,
- l' analyse de la variance à entrées multiples, plusieurs facteurs sont contrôlés.

Les méthodes utilisées dans cette théorie supposent que les résultats d'une mesure, influencés généralement par un certain nombre de facteurs, sont distribués suivant une loi normale. Cette hypothèse, difficile à vérifier si le nombre de mesures est petit, peut être admise sur la base de considérations physiques.

Dans notre étude, nous avons retenu une analyse de la variance à triple entrée sans répétition, où le facteur A (matériau) intervient à $n_A = 2$ niveaux, le facteur B (conditions aux limites) à $n_B = 2$ niveaux et le facteur C (point d'impact) à $n_C = 3$ niveaux. Pour chaque combinaison $A_iB_jC_l$ des trois facteurs, on a effectué une seule simulation (analyse sans répétition). Dans ces conditions, on doit admettre que l'interaction du troisième ordre ABC n'est pas significative.

VI.7.2. Principe de l'analyse (Schimmerling (1996) et Ouillon (2000))

L'analyse de la variance a pour but de comparer des ensembles de deux ou plusieurs moyennes. Dans son principe, elle consiste à comparer pour chaque facteur Q du modèle :

- une estimation V(Q) de la variance de la réponse Y associé à l'action Q et ce à partir des effets de cette action ; cette estimation serait, en cas d'effets réels nuls de Q, une estimation de la variance de la variabilité naturelle.
- Une estimation de la variance de la variabilité naturelle de Y soit à partir des résidus soit à partir des répétitions que l'on notera respectivement V(ε) et V(e).

Considérons les rapports $\frac{V(Q)}{V(\varepsilon)} = F_{\exp}$ ou $\frac{V(Q)}{V(e)} = F_{\exp}$.

En supposant les hypothèses de normalité de la réponse Y et d'indépendance des variances, le rapport F_{exp} suit une loi de Fisher Snedecor centrée si les effets réels du facteur Q sont nuls. Cette loi dépend des degrés de liberté (d.d.l.) des variances estimées du rapport F_{exp} : ν_1 = d.d.l.(ε) (ou d.d.l.(e)) et ν_2 = d.d.l.(Q). La table de Fisher Snedecor au seuil de α

(dans notre cas $\alpha = 0.05$), donne la valeur F_{crit} délimitant la borne supérieure du domaine dans lequel on a une probabilité de $(1-\alpha)$ de rencontrer F_{exp} si les hypothèses ci-dessus sont vérifiées.

En pratique nous ne savons pas à l'avance si les effets réels d'un facteur Q sur Y sont nuls. Une telle analyse va nous permettre de statuer sur l'hypothèse à retenir.

Pratiquement deux cas, peuvent se présenter :

1. **$F_{exp} < F_{crit}$** :

Cette situation doit apparaître avec une probabilité de $(1-\alpha)$ sous l'hypothèse d'effets réels nuls Nous retiendrons cette hypothèse et conclurons qu'il est fort probable que les effets réels de Q soient nuls ou tout du moins **pas significatifs** compte tenu de la variabilité naturelle de la réponse.

2. **$F_{exp} \geq F_{crit}$** :

Cette situation ne doit apparaître qu'avec une probabilité de α lorsque les effets de Q sont nuls. Nous rejetons cette hypothèses compte tenu de la faible probabilité. Dans ce cas nous concluons que les effets de Q **sont significatifs**.

Après analyse de la variance, les effets moyens des facteurs non significatifs sont annulés dans le modèle, et les interactions non significatives sont supprimées.

VI.7.3. Estimation de la variance des actions à partir des coefficients du modèle

✓ ***Cas d'un facteur Q :***

$$V(Q) = \frac{SCE(Q)}{ddl(Q)}$$

avec dans le cas où le plan est orthogonal et équilibré :

$$SCE(Q) = \frac{n}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} q_k^2 \text{ et } ddl(Q) = n_q - 1.$$

où n : est le nombre total de résultats du plan d'expérience, répétitions comprises.
Dans notre cas, n= 30 * 12 = 360.

n_q : nombre de niveaux du facteur Q.

q_k : Estimation du coefficient du facteur Q correspondant au niveau k dans le modèle.

SCE : Somme des Carrés des Ecarts.

ddl(Q) : degrés de libertés de Q (ou nombre de coefficients indépendants du facteur Q).

✓ ***Cas d'une interaction QR :***

Avec les mêmes notations que précédemment, nous avons $V(QR) = \frac{SCE(QR)}{ddl(QR)}$

avec dans le cas où le plan est orthogonal et équilibré :

$$SCE(QR) = \frac{n}{n_q \cdot n_r} \sum_{k=1}^{n_q} \sum_{l=1}^{n_r} (qr)_{kl}^2 \qquad \text{et} \qquad ddl(QR) = (n_q - 1)(n_r - 1).$$

VI.7.4. Estimation de la variance de la variabilité naturelle

✓ ***à partir des résidus :***

Le résidu ε_i du i^{ème} résultat individuel de la réponse est donné par l'expression : $y_i = y_{prèv,i} + \varepsilon_i$ où y_i est le i^{ème} résultat et $y_{prèv,i}$ est l'estimation par le modèle du i^{ème} résultat. Autrement dit $y_{prèv,i}$ est la part déterministe de y_i et ε_i est sa part aléatoire. Dans le cas d'un plan orthogonal et équilibré, la variance résiduelle V(ε) se calcule par :

$$V(\varepsilon) = \frac{SCE(\varepsilon)}{ddl(\varepsilon)} = \frac{SCE(y) - [SCE(A) + SCE(B) + SCE(C) + ... + SCE(AB) + ...]}{n - p}$$

avec n : nombre de résultats dans le plan, répétitions comprises et p : le nombre de coefficients indépendants dans le modèle.

✓ ***à partir des répétitions :***

Dans le cas d'un plan orthogonal et équilibré, l'estimation V(e) se calcule par :

$$V(e) = \frac{SCE(E)}{ddl(e)} = \frac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\left(y_{ik} - \overline{y_i}\right)^2}{n - q}$$

où :
y_{ik} : résultat obtenu pour la combinaison i et la répétition k ;
$\overline{y_i}$: moyenne des résultats des répétitions pour la combinaison i ;
n : nombre de résultats du plan, répétitions comprises ;
q : nombre de combinaisons du plan répété ;
r : nombre de répétitions de chaque combinaison du plan.

Remarques :

La variance de répétition V(e) est toujours l'estimation la plus objective de la variabilité naturelle du plan à condition que les répétitions soient affectés par les mêmes sources de variabilité que celles des combinaisons. Dans notre cas, cette condition n'est pas remplie ; V(e) est sous-estimée. La variance résiduelle V(ε) intègre en plus l'erreur d'adéquation du modèle. Elle a tendance à surestimer la variance de la loi de variabilité naturelle. Il faut toujours comparer la variance résiduelle à la variance de répétition.

Dans le cas d'un plan uniformément répété, les deux variances V(ε) et V(e) ne sont pas indépendantes. Par contre la variance V(δ) du défaut d'adéquation du modèle, définie plus loin, est indépendante de la variance de répétition V(e).

Nous avons : $V(\delta) = \frac{SCE(\delta)}{ddl(\delta)} = \frac{SCE(\varepsilon) - SCE(e)}{q - p}$ avec les notations définies plus haut. En comparant le rapport $F_{\exp} = \frac{V(\delta)}{V(e)}$ avec la valeur F_{crit} donnée par le test de Fisher-Snedecor, on vérifie l'adéquation du modèle si $F_{\exp} < F_{crit}$.

VI.7.5. Résultats de l'analyse de la variance

Dans notre cas, nous avons effectué un test comportant 12 sons (ou combinaisons) différentes ainsi que 30 répétitions par sons (30 auditeurs). Nous avons ainsi un total de n = 360 résultats.

Les tableaux ci-dessous résument tous les résultats issus d'une telle analyse :

Variations	Somme des Carrés des Ecarts	Nombre d.d.l.	Variance
Effet principal A	0.02	1	0.0160
Effet principal B	12.46	1	12.4624
Effet principal C	0.06	2	0.0297
Interaction AB	0.01	1	0.0149
Interaction AC	0.10	2	0.0493
Interaction BC	0.08	2	0.0410
Variation Totale	14.52	360	
Variation Résiduelle	1.78	351	0.0051
Répétition	1.74	348	0.0050

Tableau VI.9. *Analyse de la variance à triple entrée sans répétition.*

Variations	F table Snedecor 5%	Résidus		Répétition	
		F calculé	Fcal > Ftab	F calculé.	Fcal > Ftab
Effet principal A	3.86	3.15	Non	3.20	Non
Effet principal B	3.86	2451.91	Oui	2494.16	Oui
Effet principal C	3.00	5.84	Oui	5.94	Oui
Interaction AB	3.86	2.94	Non	2.99	Non
Interaction AC	3.00	9.69	Oui	9.86	Oui
Interaction BC	3.00	8.07	Oui	8.20	Oui

Tableau VI.10. *Résultat du test de l'analyse de la variance.*

Au seuil de 95 % de confiance, nous sommes en mesure d'affirmer que les facteurs prépondérants sont les conditions aux limites (facteur B) et la position du point d'application de l'impact (facteur C) car comme le montre le tableau ci dessus, nous avons bien :

$$F_B = \frac{V_B}{V_R} = 2451.91 > F_{tab.} = 3{,}86$$

$$F_C = \frac{V_C}{V_R} = 5.84 > F_{tab.} = 3{,}00$$

Par contre :

$$F_A = \frac{V_A}{V_R} = 3.15 < F_{tab.} = 3{,}86$$

De plus, le type de matériau (paramètre A) n'a d'influence qu'indirectement comme le montre le résultat de l'interaction AC.

Puisque, nous avons bien, $F_{\exp} < F_{crit}$ le modèle suivant est donc bien adéquat :

$$\hat{Y} = 0.5 + \begin{bmatrix} -.0067 & .0067 \end{bmatrix}[A]^t + \begin{bmatrix} -.1861 & .1861 \end{bmatrix}[B]^t + \begin{bmatrix} -.0134 & .0173 & -.0039 \end{bmatrix}[C]^t + \ldots$$

$$\ldots + [A]\begin{bmatrix} .0064 & -.0064 \\ -.0064 & .0064 \end{bmatrix}[B]^t + [A]\begin{bmatrix} .0059 & .0167 & -.0226 \\ -.0059 & -.0167 & .0226 \end{bmatrix}[C]^t + \ldots$$

$$\ldots + [B]\begin{bmatrix} .0002 & -.0184 & .0186 \\ -.0002 & .0184 & -.0186 \end{bmatrix}[C]^t$$

La figure suivante représente les résultats de préférence obtenues d'une part à partir du test et d'autre part à partir du modèle élaboré ci-dessus.

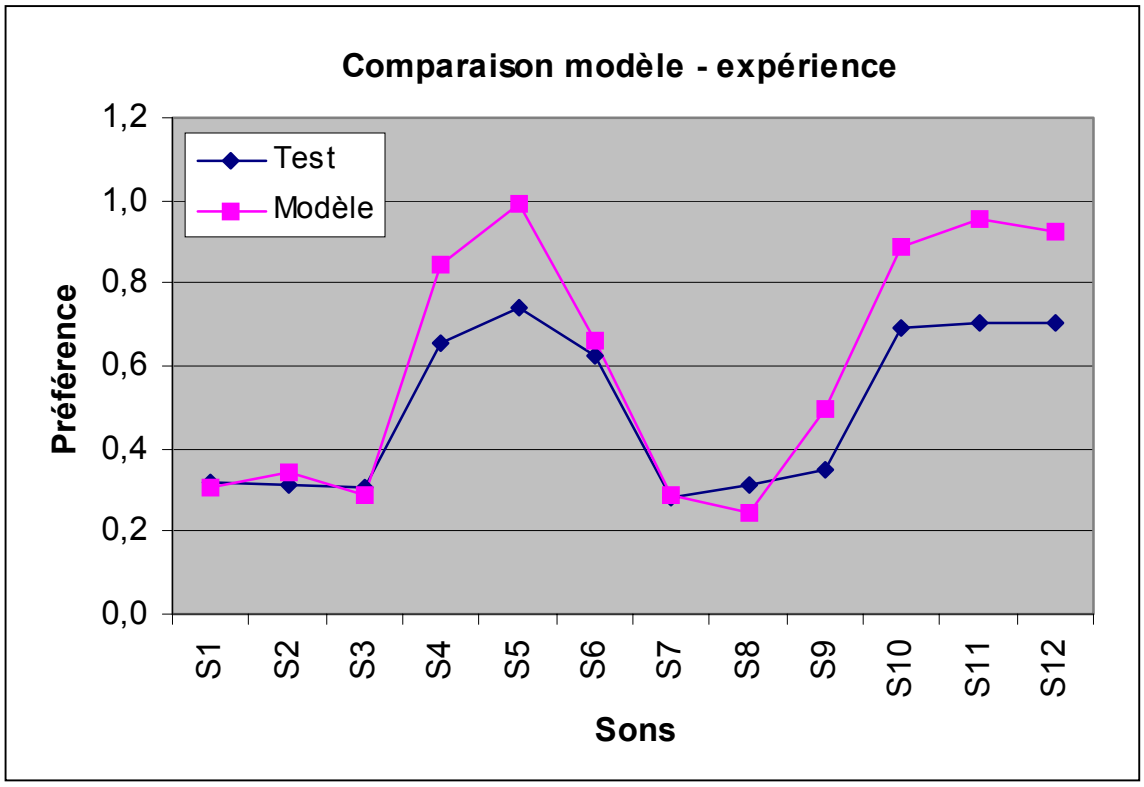


Figure VI.11. *Comparaison des scores de préférence issus De l'expérience et de la modélisation.*

Cette adéquation du modèle, sera conforté par la suite, par la corrélation des résultats où nous avons obtenu R^2=0.9764 et R^2=0.9755, respectivement pour les corrélations linéaires entre le matériau et les conditions aux limites, d'une part et les conditions aux limites et la position du point d'impact d'autre part.

VI.8. Corrélation entre l'estimation et les résultats de préférence

Un enjeu non moins important d'une analyse de résultats de préférence est d'aboutir à une expression mathématique donnant une estimation de la préférence.

Le modèle prédictif à deux paramètres A et B s'écrit : $\Pr ef = P_1 * A + P_2 * B + P_3$. Les coefficients de corrélation P_i se calculent en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & 1 \\ A_3 & B_3 & 1 \\ A_4 & B_4 & 1 \\ A5 & B5 & 1 \\ A_6 & B_6 & 1 \\ A_7 & B_7 & 1 \\ A_8 & B_8 & 1 \\ A_9 & B_9 & 1 \\ A_{10} & B_{10} & 1 \\ A_{11} & B_{11} & 1 \\ A_{12} & B_{12} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Pref. son1} \\ \text{Pref. son2} \\ \text{Pref. son3} \\ \text{Pref. son4} \\ \text{Pref. son5} \\ \text{Pref. son6} \\ \text{Pref. son7} \\ \text{Pref. son8} \\ \text{Pref. son9} \\ \text{Pref. son10} \\ \text{Pref son11} \\ \text{Pref son12} \end{bmatrix}$$

Le système précédent, de la forme $A * X = B$, est évidemment surdimensionné. Pour le résoudre, il faut faire appel à la pseudo inverse $[A]^+$ de $[A]$, appelée encore inverse généralisée, calculée à partir d'une décomposition en valeur singulière (SVD, Singular Value Decomposition) de la matrice $[A]$. La propriété d'une telle matrice est que $[A]^+[B]$ est la meilleure solution au sens des moindres carrés.

Nous calculons dans la suite, les coefficients dans chaque cas où (A,B) = (Matériau, Conditions aux Limites), puis (Matériau, Position du point d'impact) et enfin (Conditions aux Limites, Position du point d'impact). Nous représentons dans les graphes VI.27 à VI.29, les résultats obtenus, et nous ne retenons que le cas présentant le meilleur coefficient de corrélation.

La recherche d'une corrélation des scores de préférence avec une relation linéaire entre deux paramètres calculés, a donné de très bons résultats dans les cas AB (matériau - conditions aux limites, dont $R^2 = 0.9764$) et BC (conditions aux limites – position du point d'impact, dont $R^2 = 0.9755$)

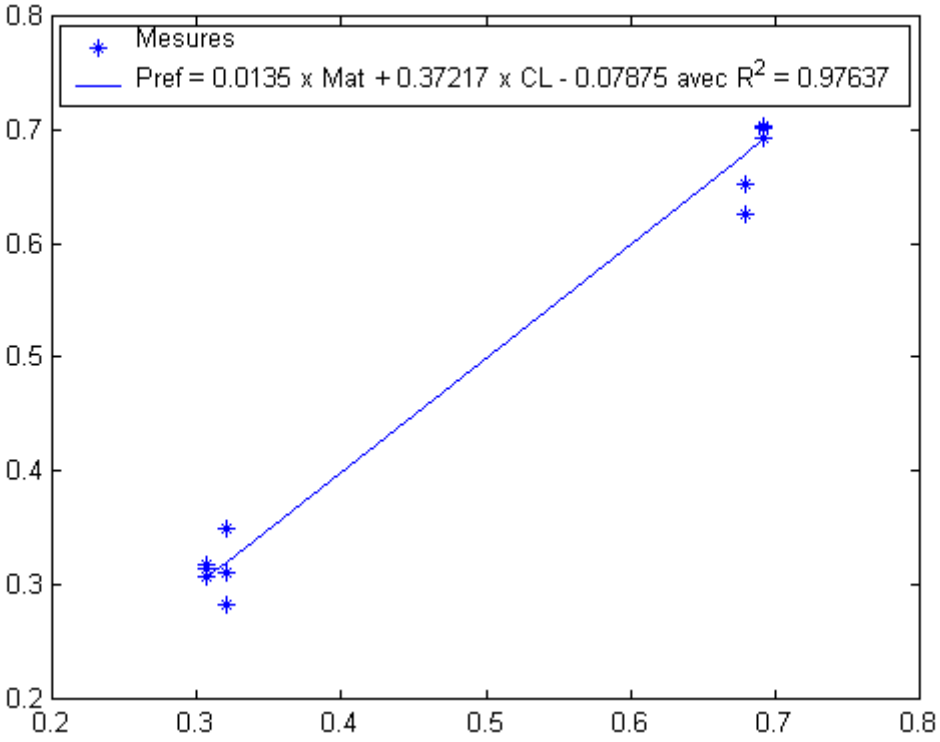


Figure VI.12. *Scores de préférence calculée, en fonction des scores de préférence mesurée.*

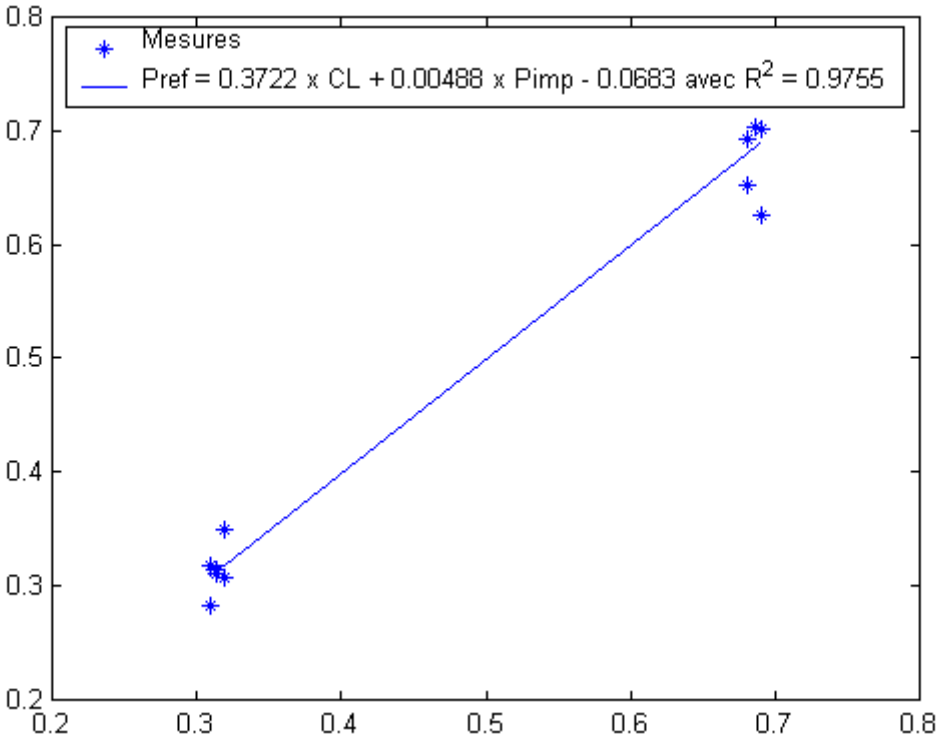


Figure VI.13. *Scores de préférence calculée, en fonction des scores de préférence mesurée.*

Par contre, nous constatons une absence totale de corrélation des scores de préférence entre les paramètres A (matériau) et C (position du point d'impact) (R^2 = 0.0017) comme le montre la figure VI.29.

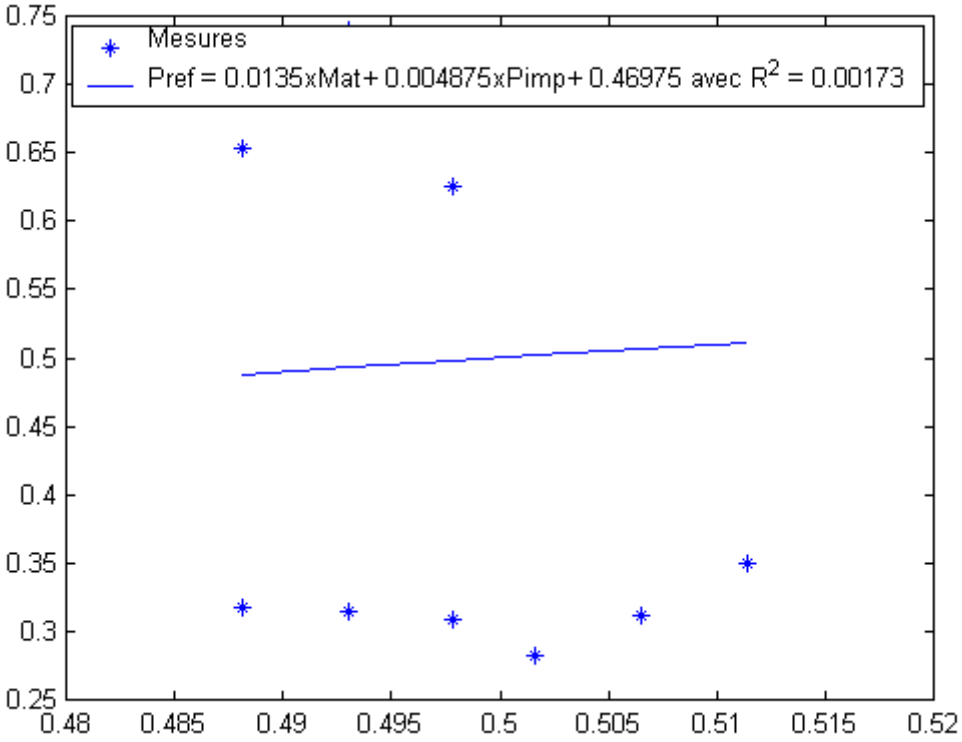


Figure VI.14. *Scores de préférence calculée, en fonction des scores de préférence mesurée.*

Nous remarquons, que conformément aux résultats précédents, le type de conditions aux limites et la position du point d'impact sont les deux paramètres présentant la meilleur corrélation. Toutefois, nous signalons que la faible valeur du coefficient de corrélation R^2 entre le matériau et la position du point d'impact, vient essentiellement du fait que le modèle n'étant qu'à deux paramètres et donc l'influence du type de conditions aux limites qui est importante, ne ressort pas dans l'expression mathématique. Afin de mieux illustrer nos propos, nous représentons sur les figures VI.30, les comparaisons entre les scores de préférences calculés par le modèle prédictif et mesurés pour les trois combinaisons.

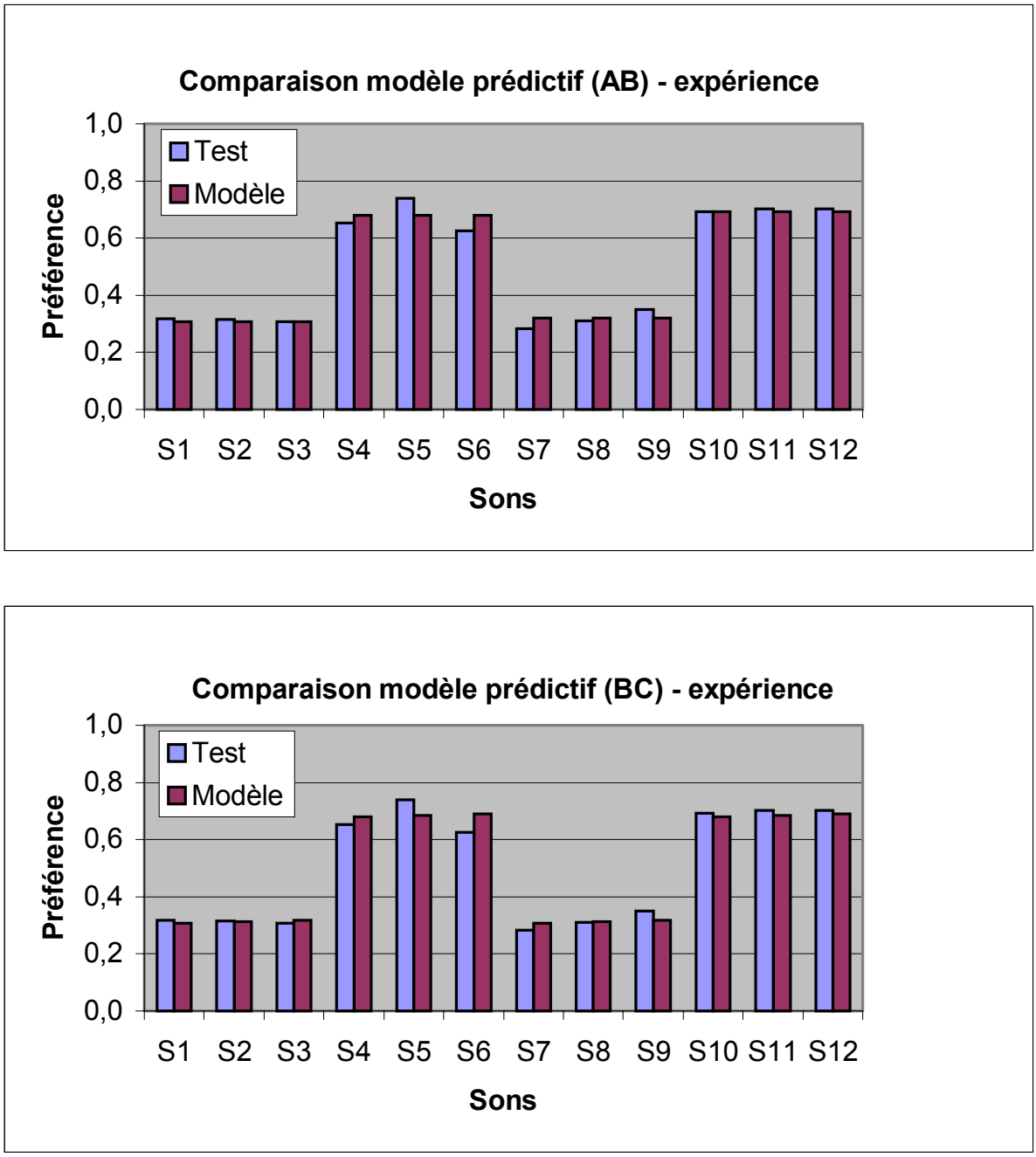


Figure VI.15. *Comparaison entre les scores de préférence calculés et mesurés.*

Pour le modèle prédictif retenu, la comparaison des scores de préférence calculés et mesurés, est présentée sur la figure VI.30. On constate une très bonne corrélation entre la prédiction et la mesure, dans les deux cas (AB) et (BC). Nous confirmons nos propos par l'illustration de la figure VI.31, dans laquelle, nous comparons les scores de préférence issus des deux modèles retenus (AB) et (BC).

L'analyse de ces courbes montre la très bonne corrélation entre les scores de préférence calculés à partir des deux modèles avec ceux de l'expérience. Ainsi nous pouvons conclure que les modèles sont bien valides pour l'estimation de la préférence recherchée.

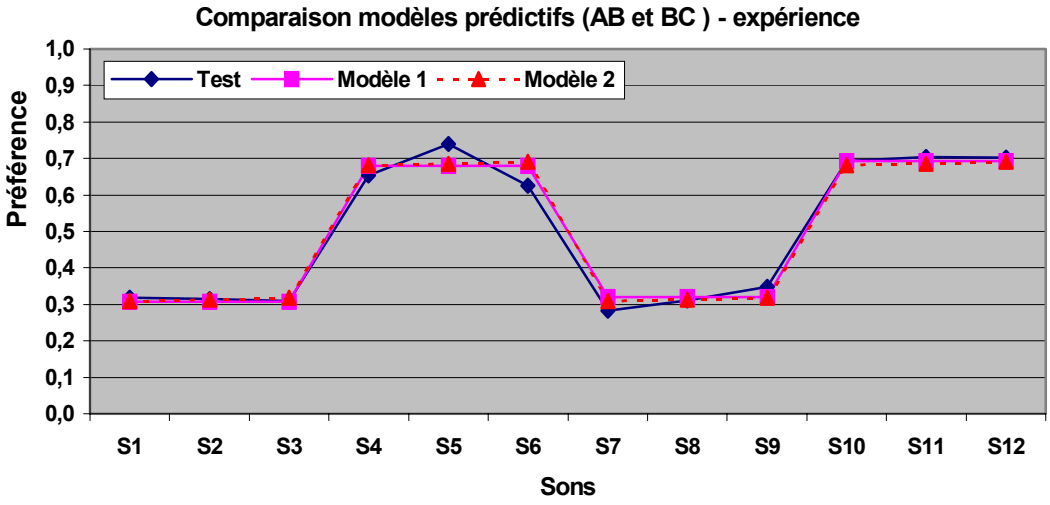


Figure VI.16. *Comparaison des scores de préférence issus de l'expérience et de deux modèles prédictifs.*

Une des exploitations de ce modèle peut être une étude de la contribution du matériau, des conditions aux limites ainsi que la position du point d'impact sur l'agrément sonore.

VI.9. Conclusion

Cette étude nous a permis d'utiliser la méthode des plans d'expériences qui présente des avantages décisifs, par rapport aux pratiques traditionnelles d'expérimentation où l'on procède de façon plus ou moins par tâtonnements successifs en essayant un seul facteur à la fois.

La méthode des plans d'expériences permet d'organiser une série d'essais successifs dans des conditions variées prédéfinies, ce qui constitue un gage de réussite puisqu'on trouvera toujours un essai donnant de meilleurs résultats que les autres. Elle permet en outre d'optimiser le temps et le coût de l'expérimentation, tout en donnant une interprétation rapide précise et sans équivoque des résultats des essais. Enfin, elle fournit un modèle prédictif permettant de définir la configuration optimale de niveaux des différents facteurs testés et de chiffrer les résultats qui en découlent.

Les différentes méthodes d'analyse de résultats (analyse graphique et variance) nous ont permis de détacher les paramètres les plus influents sur la préférence. En effet, les conditions aux limites restent le paramètre le plus significatif, ayant une influence directe très importante. Viennent ensuite la position du point d'impact et les interactions matériau – point d'impact d'une part et conditions aux limites – point d'impact d'autre part.

L'analyse de la variance nous a permis de confirmer les mêmes paramètres significatifs que précédemment avec un seuil de confiance de 95 %.

Enfin le modèle prédictif, de préférence, retenu nous a permis d'identifier les deux paramètres influant la nature du bruit simulé avec une très bonne corrélation.

CONCLUSION GENERALE
ET PERSPECTIVES

Au terme de cette étude consacrée à l'évaluation objective et subjective des paramètres physiques intervenant dans le calcul du rayonnement acoustique des plaques, force est de constater qu'il est impossible d'aborder tous les aspects du comportement vibroacoustique des plaques. Néanmoins, nous nous sommes contentés de l'étude des paramètres les plus significatifs dans tout calcul vibroacoustique. Ainsi, nous avons retenu l'influence du défaut d'épaisseur pour l'évaluation objective (approche fréquentielle), et le matériau, les conditions aux limites, la position du point d'impact ainsi que la position du point d'écoute, pour l'évaluation subjective (approche temporelle).

En ce qui concerne l'approche fréquentielle, nous avons proposé une modélisation du comportement vibroacoustique d'une plaque à épaisseur variable. Le calcul de la puissance rayonnée a été effectué par intégration de l'intensité exacte et par l'utilisation des impédances de rayonnement.

L'approche intégro-modale nous a permis aussi d'évaluer l'effet du couplage intermodal qui est souvent négligé lors d'un calcul de rayonnement dans un fluide léger tel que l'air. Pour une plaque d'épaisseur variable, nous avons montré que la différence entre les puissances acoustiques calculées avec et sans prise en compte du couplage intermodal est du même ordre que pour une plaque à épaisseur constante.

L'analyse de ces résultats, nous permet d'affirmer, que globalement, l'utilisation des coefficients de rayonnement modaux s'avère assez précise et très intéressante, d'une part pour la rapidité des calculs et d'autre part, pour l'évaluation hiérarchique de la contribution de chaque fonction de base sur le bruit rayonné globalement.

Pour l'influence des défauts d'épaisseur sur le facteur de rayonnement, nous avons montré qu'un défaut purement géométrique (sans variation de masse) n'altère pas le comportement acoustique mais par contre un défaut s'accompagnant d'une variation de masse déplace et étale la zone de la fréquence critique. Ces variations restent cependant faibles et des défauts d'épaisseur ne peuvent expliquer, à eux seuls, les écarts théorie-expérience enregistrés pour le rayonnement des structures.

Comme nous l'avons déjà énoncé en introduction, la principale particularité de la deuxième partie de l'étude présentée ici réside dans son application à la synthèse sonore et de dégager une tendance de l'influence de certains paramètres sur la perception sonore.

Les différentes méthodes d'analyse de résultats (analyse graphique et variance) nous ont permis de détacher les paramètres les plus influents sur la préférence. En effet, les conditions aux limites reste le paramètre le plus significatif, ayant une influence directe très importante. Viennent ensuite la position du point d'impact et les interactions matériau – point d'impact d'une part et conditions aux limites – point d'impact d'autre part.

L'analyse de la variance nous a permis de confirmer les mêmes paramètres significatifs que précédemment avec un seuil de confiance de 95 %.

Enfin le modèle prédictif, de préférence, retenu nous a permis d'identifier les deux paramètres influents la nature du bruit simulé avec une très bonne corrélation.

Dan cette étude, nous avons utilisé les outils de la perception sonore pour identifier d'une part, les paramètres les plus significatifs qui participent à la contribution perceptive du bruit rayonné par une plaque impactée, et d'autre part, pour la construction d'un modèle de préférence permettant de simuler des modifications de paramètres pour prédire la préférence.

En perspectives, la deuxième partie de cette étude, peut être étendue à d'autres types de matériaux ou de paramètres tels que l'épaisseur de la plaque, l'amortissement structural en

faisant une étude préliminaire sélective, pour cibler les paramètres à retenir pour éviter que le test de perception sonore ne devienne trop long et fastidieux.

Nous préconisons d'autres types de test comme par exemple le test d'agrément où tous les sons sont présentés à l'auditeur qui les évalue en termes d'agrément sonore. Des études ont révélé que ce type de test est beaucoup plus rapide et donne globalement les mêmes scores de préférences qu'un test de comparaison par paires.

Enfin, nous aurions aimé disposer du matériel adéquat au sein de notre laboratoire, afin d'explorer d'avantage les signaux de pression mesurée et de pouvoir disposer des combinaisons donnant lieu à des signaux exploitable en perception sonore.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Akay A. and Latcha M. (1983), *Sound Radiation from Impact – Excited Clamped Circular Plate in an Infinite Baffle*. J. Acoust. Soc. Am., 74(2), pp 640-648.

Alexis J. (1995), *Pratique Industrielle de la Méthode de Taguchi. Les Plans d'Expériences*. Edition AFNOR.

Appl F.C. and Byers N.R. (1965), *Fundamental Frequency of Simply Supported Rectangular Plates with Linear Varying Thickness*. Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 36, pp 787-790..

Bathe K.J. and Wilson E.L. (1976), *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hill, inc. Englewwood Cliffs, New Jersey.

Bhat R.B., Laura P.A.A., Gutierrez V.H. and Sanzi H.C. (1990), *Numerical Experiment of the Determination of Natural Frequencies of Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Non Uniform Thickness*. Journal of Sound and Vibrations 138(2), pp 205-219.

Benmedakhène S. (1996), *Etude Phénoménologique du Comportement à l'Impact des Matériaux Composites*. Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, France.

Blevins R.D. (1984), *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape.* R.E. Kriegen Publishing.

Bruneau M. (1983), *Introduction aux Théories de l'Acoustique*. Editions de l'Université du Maine.

Canévet G., Habault D. Mattei P.O. and Meunier S. (2001), *Analyse Auditive de Vibrations Transitoires de Plaques*. Actes du 6ème Congrès Français d'Acoustique, pp 475-478.

Caprino G., Crivelli-Visconti I. and Di Ilio A. (1984), *Elastic Behaviour of Composite Structures Under Low Velocity Impact*. Composites, 15, 3, pp 213-234.

Chaigne A. and Lambourg C. (2001), J. Acoust. Soc. Am., 109, pp 1422-1432.

Cosmos/M2.0® for windows (1998), *A Complete Finite Element Analysis System*, Structural Research and Analysis Coropration (SRAC).

Doutaut V. (1995), *Etude Expérimentale et Simulations Numériques de Percussion à Clavier.* PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications.

Faure J. and Marquis-Favre C. (2001), *Sounds Transmitted through Steel Plate : Perceptual Judgement Analysis.* Proceeding 17th ICA, Rome 2001.

Faure J., Marquis-Favre C. and Viollon S. (2001), *Qualitative Evaluation of Sounds Radiated from a Steel Plate: Influence of Mechanical and Geometrical Parameters.* Proceeding of InterNoise, Nice 2001.

Fleischer H. and Axelrad V. (1986), *Restoring an Acoustic Source from Pressure Data using Wiener Filtering*. Acustica 60 (2), pp 172-175.

Forbes M., Letcher S. and Stepanishen P.R. (1991), *A Wave Vector, Time-Domain Method of Forward Projecting Time-Dependent Pressure Fields*. J. Acoust. Soc. Am., 90(5), pp 2782-2793.

Freed D.J. (1989), J. Acoust. Soc. Am., 87, pp 311-322.

Goldsmith W., (1960), *Impact*. Edward Arnold Ltd, USA.

Goueygou M., Piwakowski S. and Delannoy B. (1995), *Time Domain Computing for Predicting the Acoustic Field Radiated by Vibrating Structures*. Vibration and Noise '95, pp 9-15.

Greszuk L.B. (1982), *Damage in Composite Materials due to low Velocity Impact*. Impact Dynamics, ZA Zukas and al. Wiley editions, New York, 1982, pp 55-94.

Guyader J.L. and Laulagnet B. (1989), *Modal Analysis of a Shell's Acoustic Radiation in Light and Heavy Fluids*. Journal of Sound and Vibrations, 131(3), pp 397-415.

Guyader J.L. et Lesueur C. (1994), *Cours d'Acoustique Générale, Transparence et Rayonnement Acoustique des Plaques Minces*. (Chapitre 8, Filippi P.J.T. Coordonateur), CNRS-LMA, Aix en Provence, France 1994.

Guyader G. (2003), *Modélisations Temporelles Simplifiées des Phénomènes Physiques à l'Origine du Bruit Moteur Dédiées au Portage Temps Réel et aux Applications de Design Sonore*. Thèse de Doctorat de l'INSA de Lyon.

Hachemane B., Neder M., Ahmed Benyahia A., Miloudi A. and Boukharouba T. (2001), *Study of the Dynamic Behaviour of Plates Subjected to Impact – A Numerical Approach.* proceeding of the 7th International Conference on Production Engineering, Design and Control, PEDAC'2001, Vol. II, pp 661-669, 13-15 February 2001, Alexandria, Egypt.

Hamzaoui N., (1984), *Etude du Champ Acoustique de Plaques par Intensimétrie.* Dissertation. INSA de Lyon, France 1984..

Hamzaoui N., (2002), *Contribution à la Résolution des Problèmes de Rayonnement Acoustique: Prédiction du Bruit, Diagnostic Vibro-acoustique des Défauts, Perception Sonore.* Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Laboratoire Vibrations Acoustique, INSA de Lyon.

Karas K. (1939), *Platten Unter Seitlichem Stoss.* Ingenieur Archiv 10, pp 237- 250.

King W.W. and Chien Chang Lin (1974), *Application of Bolotins Method to Vibrations of Plates*. AIAA Journal, pp 399-401.

Kompella M.S. and Bernhard R.J.L. (1993), *Measurement of the Statistical Variation of Structural Acoustical Characteristics of Automotive Vehicles*. S.A.E. Paper 12(931272), pp 65-81.

Kropp W. and Svensson P.U. (1995), *Application of the Time Domain Formulation of the Method of Equivalent Sources to Radiation and Scattering Problems*. Acustica 81(6), pp 528-542.

Lal K.M., *Residual Strength Assessment of Low Velocity Impact Damage of Graphite Epoxy Laminates*. Journal Reinf. Plast. Comp., 2 pp 226-238.

Lambourg C. (1996), *Modèle Temporel pour la Simulation Numérique de Plaques Vibrantes – Application à la Synthèse Sonore*. Thèse de Doctorat en Acoustique Appliquée de l'Université du Maine.

Lee E.H. (1940), *The Impact of a Mass Striking a Beam*. ASME Journal of Applied Mechanics 62, pp 129-138.

Lee Y., Hamilton, J.F. and Sullivan, J.W. (1983), *The Lumped Parameter Method for Elastic Impact Problems*. ASME Journal of Applied Mechanics 50, pp 823-827.

Lee J. D., Du. S. and Liebowitz, H. (1984), *Three Dimensional Finite Element and Dynamic Analysis of Composite Laminate Subjected to Impact*. Computers and Structures 19, pp 807-813.

Leissa A.,W. (1977), *Recent Research in Plate Vibrations : Classical Theory*. Shock Vib. Digest, 9(10), pp 13-24.

Leissa A.,W. (1978), *Recent Research in Plate Vibrations. 1973-1976: Complicating Effects*. Shock Vib. Digest, 10(12), pp 21-35.

Leissa A.,W. (1981), *Plate Vibration Research. 1976-1980: Classical Theory*. Shock Vib. Digest, 13(9), pp 11-22.

Leissa A.,W. (1981), *Plate Vibration Research. 1976-1980: Complicating Effects*. Shock Vib. Digest, 13(10), pp 19-36.

Leissa A.,W. (1987), *Recent Research in Plate Vibrations. 1981-85 part i : Classical Theory*. Shock Vib. Digest, 19(2), pp 11-18.

Leissa A.,W. (1987), *Recent Research in Plate Vibrations. 1981-85 part ii: Complicating Effects*. Shock Vib. Digest, 10(12), pp 10-24.

Lu Chun, Lam K.Y. (1998), *Dynamic Response of Fully-Clamped Laminated Composite Plates Subjected to Low-Velocity Impact of a Mass*. Int. J. Solids Structures, Vol.35, No.11, Elsevier Science Ltd., pp 963-979.

Lufti R.A. (1997), J. Acoust. Soc. Am., 102, pp 3647-3656.

Lufti R.A. and Oh E.L. (2001), J. Acoust. Soc. Am., 110, pp 1010-1019.

Marquis-Favre C. et Faure J. (2001), *Evaluations Physique et Subjective de l'Influence de Paramètres Structuraux pour une Plaque Rayonnante*. pp 241-251.

Marquis-Favre C. and Faure J. (2001), *Relationships between Quantitative and Qualitative Aspects of Sound : Case of Acoustic Radiation from a Plate.* Proceeding of InterNoise, Nice 2001.

McAdams S. (2000), *La Psychomécanique des Sources Sonores Simples*. Actes du 5ème Congrès Français d'Acoustique, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Meunier G., Habault D. and Canévet G. (2001), *Auditory Evaluation of Sound Signals Radiated by a Vibrating Surface*. Journal of Sound and Vibrations, JSV, 247(5), pp 897-915.

Miloudi A. (1992), *Comportement Vibroacoustique de Plaques à Epaisseur Linéairement Variable*. Thèse de Magister, soutenue en décembre 1992 à l'USTHB.

Miloudi A., Hamzaoui N. et Guyader J.L. (1997), *Influence de la Variation d'Epaisseur sur le Rayonnement Acoustique des Plaques*. Actes du 4ème Congrès Français d'Acoustique, Vol. 1, pp 209-212, 14-18 avril 1997 Marseille, France.

Miloudi A., Hamzaoui, N. et Guyader, J.L. (1999), *Influence de la Variation d'Epaisseur sur le Rayonnement Acoustique des Plaques*. Acta Acustica Vol. (85), pp 213-220.

Neder M. et Miloudi A. (2002), *Approche Numérique pour la Prédiction du Comportement Dynamique de Plaques Impactées*. Actes de la 4ème Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et des Sciences de l'Ingénieur, 23-25 Octobre 2002, CIMASI'2002, Casablanca, Maroc.

Neder M. et Miloudi A. (2003), *Etude Paramétrique du Comportement Dynamique de Plaques Impactées*. Proceeding du 16ème Congrès Français de Mécanique, Cfm2003, 23-25 Septembre 2003, Nice, France.

Ouillon D. (2002**),** *Modélisation et Analyse Subjective du Rayonnement d'une Plaque Bafflée : Effet de Quelques Variations Paramètriques*. Rapport de DEA, L.V.A., INSA de Lyon, France.

Ramdane A. (1991), *Modèles Numériques de Structures Vibrantes Mono et Bidimensionnelles pour la Synthèse Sonore par Modèle Physique*. Thèse de Doctorat en Signal et Images de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris.

Raviart P.A. et Thomas J.M. (1983), *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*. Editions Masson.

Rebillard E. and Guyader J.L. (1992), *Influence of an Embarked Spring-Mass System and Defects on the Acoustical Radiation of a Cylindrical Shell*. Applied Acoustic 36 pp 87-106.

Rebillard E. and Guyader J.L. (1995), *Vibrational Behaviour of a Population of Coupled Plates: Hypersensitivity to the Connection Angle*. J.S.V., 188(3), pp 435-454.

Rebillard E. (1995), *Vibroacoustique des Réseaux de Plaques: Modélisation, Hypersensibilité et Population des Structures*. Dissertation, INSA de Lyon, France, 1995.

Ross R.T. (1934), *Optimum Orders for the Presentation of Pairs in the Method of Paired Comparisons*. J. Educ. Psychol.

Ross A., Ostiguy, G. and Amram, M. (2002), *Proprieties of the Transient Acoustic Field of an Impacted Plate*. *ICSV9*.

Roussarie V. (1999), *Analyse Perceptive de Structures Vibrantes*. *Thèse de Doctorat de l'Université du Maine, Le Mans*.

Ruiz P.M. (1970), *A Technique of Simulating the Vibrations of Strings with a Digital Computer*. Master's thesis, University of Illinois.

Sandman B.E. (1977), *Fluid-Loaded Vibration of an Elastic Plate Carrying a Concentrated Mass*. J. Acoust. Soc. Am., 61(6), pp 1503-1509.

Satyapal S. and Stepanishen P.R. (1993), *Space/time Characteristic of Localized Transient Fields from Planar Axisymmetric Sources*. J. Acoust. Soc. Am., 93(2), pp 821-835.

Sayhi M. (1979), *Résolution du Problème de Rayonnement par Collocation des Formulations Intégrales Directe et Indirecte à l'aide de Potentiels de Simple et Double Couches*. Dissertation. UT de Compiegne, France 1979.

Schedin P., Lambourg C. and Chaigne A. (1999), *Transient Sound Field from Impacted Plates : Comparison Between Numerical Simulations and Experiments.* Journal of Sound and Vibrations, 221(3), pp 471-490.

Schimmerling P., Sisson J.C. et Zaïdi A. (1996), *Pratique des Plans d'Expériences*. Paris, Editions TECDOC, pp 53-55 et pp 197-231.

Shivakumar K.N., Elber W. and Illg W. (1985), *Prediction of Impact Force and Duration due to low Velocity Impact on Circular Composite Laminates*. Journal of Applied Mechanics, 52, pp 674-680.

Sjoblom P. (1987), *Simple Design Approach Against Low Velocity Impact Damage*. Proceedings of the 32nd SAMPE Symposium, Anaheim, CA, pp 30-52.

Stepanishen P.R. (1990), *Transient Radiation and Scattering from Fluid-Loaded Oscillators, Membranes and Plates*. J. Acoust. Soc. Am., 88(1), pp 374-385.

Sysnoise software (1993), *Time-Domain Acoustic*. Theoretical Manual (Revision 5,1) Numerical Integration Technologie Belgium.

Veysseyre R., (2001), *Statistique et Probabilités pour l'Ingénieur*. Editions Dunod.

Wallace C.E. (1972), *Radiation Resistance of Rectangular Panel*. J. Acoust. Soc. Am., 51(3) (part 2), pp 949-952.

Wu, His-Yung T. and Chang, Fu-Kuo (1989), *Transient Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates Subjected to Transverse Impact*. Computers and Structures 31(3), pp 453-466.

ANNEXES

ANNEXE 1

Calcul de l'intensité acoustique sur la surface de la plaque

L'intensité acoustique sur la surface de la plaque est donnée par (cf. III.3.2) :

$$I_z(x,y) = \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi} \overline{w}^*(x,y) \times \oiint_S \overline{w}^*(x_0,y_0) \frac{e^{-jkr}}{r} dS \qquad \text{(AI.1)}$$

Après transformations des intégrales de l'équation ci dessus, nous obtenons l'intensité acoustique normale à la surface de la plaque en un point d'indice i situé sur la surface de la plaque :

$$I_i^0 = \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi} \overline{w}^*(x_i,y_i) \sum_{i=1}^{Ne} \overline{w}^*(x_l,y_l) C_{il}^0 \qquad \text{(AI.2)}$$

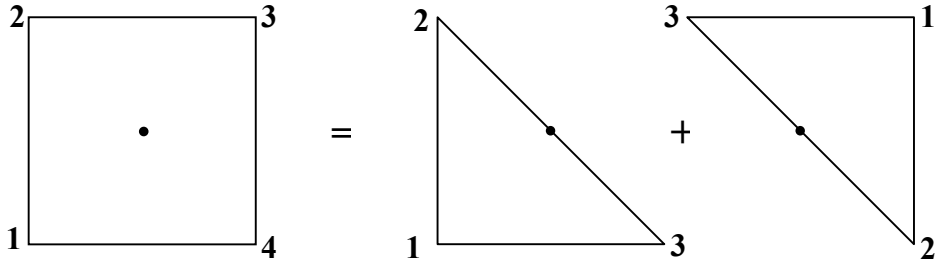
avec :

$$C_{il}^0 = \oiint_{cl} \frac{e^{-jkr}}{r} dS_{cl} \qquad \text{(AI.3)}$$

Ne : est le nombre d'éléments du maillage de la plaque,
cl : quadrilatère d'indice l, utilisé dans la méthode de collocation.

- Pour i = l ; les intégrales sont singulières et nous utilisons une résolution semi-analytique (coordonnées polaires + la méthode de Gauss unidimensionnelle).
- Pour i ≠ l ; nous avons utilisé une résolution numérique basée sur la méthode de Gauss-Legendre pour le calcul numérique des intégrales.

Pour le calcul des intégrales, nous décomposons l'élément quadrilatère en deux éléments triangulaires plans (3 nœuds géométriques) à interpolation constante (1 nœud physique situé sur l'hypoténuse) pour pouvoir travailler en coordonnées cartésiennes locales et éviter ainsi les coordonnées barycentriques.

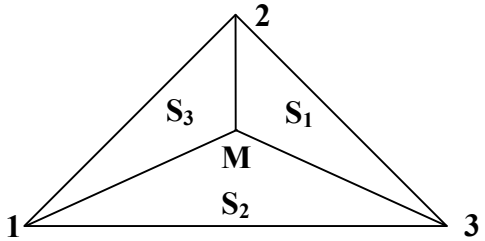


Un point M appartenant à l'élément T_l (l = 1,..,Ne) sera repéré par ses coordonnées de surface (ε_1 ,ε_2 ,ε_3)

$S_l = S_1 + S_2 + S_3$ (S_l : surface du triangle)

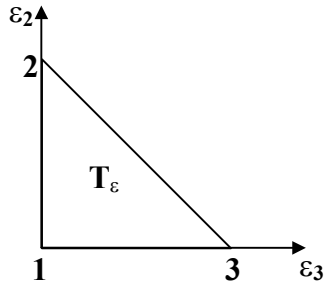
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$

où : $\varepsilon_i = \dfrac{S_i}{S_1 + S_2 + S_3}$



Ainsi le calcul des intégrales sur T_l se fait de la manière suivante :

$$\iint_{T_l} f(M_i, M)\, dS_M = 2 \cdot S_l \iint_{T\varepsilon} f(M_i, \varepsilon)\, d\varepsilon_2\, d\varepsilon_3 \qquad \text{(AI.4)}$$



En appliquant cette formulation à l'élément quadrilatère d'indice l et en respectant l'analogie définie entre les deux éléments (quadrilatère = 2 triangles), il vient :

$$\iint_{T\varepsilon} f(M_i, M)\, dS_M = 2 \cdot S_l \left[\iint_{T\varepsilon} f(M_i, \varepsilon)\, d\varepsilon_2\, d\varepsilon_3 + \iint_{T\varepsilon^*} f(M_i, \varepsilon)\, d\varepsilon_2\, d\varepsilon_3 \right] \qquad \text{(AI.5)}$$

S_c : surface du quadrilatère d'indice l.

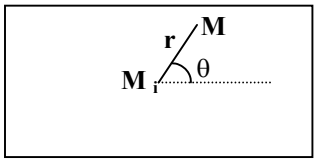
Notre maillage est effectué à partir d'un partage de la surface de la plaque en éléments quadrilatères égaux. Le point de calcul des vitesses ou des pressions est le centre de l'élément.

A1.1. Calcul des intégrales singulières

Cas où i = l

$$C_{il}^0 = \oint\!\!\oint_{cl} \frac{e^{-jkr}}{r}\, dS_{cl}$$

avec : $dS_{cl} = r \cdot dr \cdot d\theta$



où r et θ sont les coordonnées polaires de M dans le plan de l'élément.

$$\theta \in [0\ , 2\pi]$$
$$r \in [0\ , r^*(\theta)]$$

d'où

$$C_{il}^0 = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{r^*(\theta)} e^{-jkr}\, dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{-jk} \left[e^{-jkr^*(\theta)} - 1 \right] d\theta$$

$$C_{il}^0 = \frac{j}{k} \int_0^{2\pi} \left[e^{-jkr^*(\theta)} - 1 \right] d\theta \qquad \text{(AI.6)}$$

En appliquant la méthode de Gauss unidimensionnelle pour le calcul de C_{il}^0 :

$$\int_{-1}^{+1} f(z)\, dz = \sum_i H_i \cdot f(z_i) \qquad \text{(AI.7)}$$

Il vient :

$$C_{il}^0 = \frac{j}{k} \left[\frac{\alpha_1}{2} \sum_p^{Ng} \left(e^{-jkr_{1p}} - 1 \right) P_p + \frac{\alpha_2}{2} \sum_p^{Ng} \left(e^{-jkr_{2p}} - 1 \right) P_p + \frac{\alpha_3}{2} \sum_p^{Ng} \left(e^{-jkr_{3p}} - 1 \right) P_p + \frac{\alpha_4}{2} \sum_p^{Ng} \left(e^{-jkr_{4p}} - 1 \right) P_p \right]$$

(AI.8)

dès que Ng est donné P_p est déterminé à partir de tables.

A1.2. Calcul des intégrales non singulières

Cas où i ≠ l :
En utilisant l'équation (AI.5), il vient :

$$C_{il} = 2 \cdot S_l \iint_T \frac{e^{-jkr(\varepsilon)}}{r(\varepsilon)}\, d\varepsilon_2\, d\varepsilon_3 + 2 \cdot S_l \iint_{T*} \frac{e^{-jkr(\varepsilon)}}{r(\varepsilon)}\, d\varepsilon_2\, d\varepsilon_3 \qquad \text{(AI.9)}$$

Pour calculer l'intégrale (AI.9), nous appliquerons la méthode de Gauss-Legendre pour le calcul numérique des intégrales.

$$C_{il}^0 = 2S_l \int_0^1 \int_0^{1-\varepsilon 3} \frac{e^{-jkr_i(\varepsilon_{21},\varepsilon_{31})}}{r_i(\varepsilon_{21},\varepsilon_{31})} d\varepsilon_{21}\, d\varepsilon_{31} + 2S_l \int_0^1 \int_0^{1-\varepsilon 3} \frac{e^{-jkr_i(\varepsilon^*_{21},\varepsilon^*_{31})}}{r_i(\varepsilon^*_{21},\varepsilon^*_{31})} d\varepsilon^*_{21}\, d\varepsilon^*_{31}$$

d'où :

$$C_{il}^0 = S_l \sum_{p=1}^{Ng}\sum_{q=1}^{Ng} \frac{1-\varepsilon_{31p}}{2} H_p H_q \frac{e^{-jkr_i(\varepsilon_{21q},\varepsilon_{31p})}}{r_i(\varepsilon_{21q},\varepsilon_{31p})} + S_l \sum_{p=1}^{Ng}\sum_{q=1}^{Ng} \frac{1-\varepsilon^*_{31p}}{2} H_p H_q \frac{e^{-jkr_i(\varepsilon^*_{21q},\varepsilon^*_{31p})}}{r_i(\varepsilon^*_{21q},\varepsilon^*_{31p})} \qquad \text{(AI.10)}$$

Les valeurs de ε_{31p}, ε_{21q}, ε^*_{31p}, ε^*_{21q}, H_p et H_q sont données par des tables dès que l'on connaît N_g.

Pour définir les différents N_g appliqués aux différents maillages utilisés, Hamzaoui (1985) a mené une étude fine où il montre la précision du calcul de C_{il}^0.

Nous obtenons ainsi l'intensité acoustique normale à la surface de la plaque en un point d'indice i situé sur la surface de la plaque :

$$I_i^0 = \frac{j \cdot \rho_9 \cdot \omega^2}{4\pi} w_l^* \sum_{l=1}^{Ne} w_l \cdot C_{il}^0 \qquad \text{(AI.11)}$$

ANNEXE 2

Résolution de l'équation modale

Nous allons maintenant étudier une méthode de résolution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + a\dot{u}(t) + bu(t) = c.F(t) \\ u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = v_0 \end{cases} \tag{A2.1}$$

Commençons par considérer le problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = \varphi\left(t, y(t), \dot{y}(t)\right) \qquad 0 \le t \le T \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = z_0 \end{cases} \tag{A2.2}$$

où φ est une fonction continue de [0,T] X R X R dans R et où y_0 et z_0 sont donnés dans R.
Pour résoudre numériquement le système (A2.2), on introduit un pas de temps $\Delta t=T/N$ et un découpage uniforme de l'intervalle [0,T].

$$t_n = n.\Delta t \quad , \quad 0 \le n \le N \tag{A2.3}$$

On cherche alors à calculer pour tout n=1,...,N une approximation (y_n,z_n) du couple $\left(y(t_n), \dot{y}(t_n)\right)$. La méthode la plus couramment utilisée est la méthode de Newmark.

A2.1. Schéma d'intégration de Newmark (Bath (1974) et (Raviart (1983))

Le schéma d'intégration de Newmark, peut être considéré comme une extension de la méthode d'accélération linéaire de Wilson θ. Pour toute solution y suffisamment régulière de l'équation différentielle (A2.2), on a :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t.\dot{y}(t_n) + \Delta t^2\left[\alpha.\ddot{y}(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{y}(t_n)\right] + 0(\Delta t^3)$$

soit

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t.\dot{y}(t_n) + \Delta t^2\left[\alpha.\varphi\left(t_{n+1}, y(t_{n+1}), \dot{y}(t_{n+1})\right) + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\varphi\left(t_n, y(t_n), \dot{y}(t_n)\right)\right] + 0(\Delta t^3)$$

et

$$\dot{y}(t_{n+1}) = \dot{y}(t_n) + \Delta t\left[\delta.\ddot{y}(t_{n+1}) + (1-\delta)\ddot{y}(t_n)\right] + 0(\Delta t^2)$$

soit

$$\dot{y}(t_{n+1}) = \dot{y}(t_n) + \Delta t\left[\delta.\varphi\left(t_{n+1}, y(t_{n+1}), \dot{y}(t_{n+1})\right) + (1-\delta)\varphi\left(t_n, y(t_n), \dot{y}(t_n)\right)\right] + 0(\Delta t^2)$$

où α et δ sont des paramètres.

A2.2. Stabilité du schéma de Newmark

Le schéma de Newmark est inconditionnellement stable si les paramètres δ et α vérifient :

$$\begin{aligned} &\delta \ge 0.5 \\ &\alpha \ge 0.25\left(\delta + 0.25\right)^2 \end{aligned} \tag{A2.4}$$

Généralement on prend :

$$\delta = 0.5 \quad \text{et} \quad \alpha = 0.25 \tag{A2.5}$$

Ces valeurs satisfont les conditions (A2.4) et peuvent être utilisées dans la plus part des cas et toutes valeurs peuvent introduire de l'amortissement numérique.
Notons que la stabilité de la solution n'est assurée que pour Δt inférieur à une valeur Δt_c qui est liée à la plus petite période caractéristique de résonance Tmin du système physique étudié.

A2.3. Application du schéma de Newmark

Nous allons maintenant résoudre l'équation modale donnée par l'équation (II.13), que nous rappelons ci-après avec comme conditions initiales :

$$a_{mn}(0) = 0 \quad , \quad \dot{a}_{mn}(0) = 0 \quad , \quad \ddot{a}_{mn}(0) = 0 \tag{A2.6}$$

L'équation modale est donnée par :

$$M_{mn}.\ddot{a}_{mn}(t) + \lambda_{mn}.\dot{a}_{mn}(t) + K_{mn}.a_{mn}(t) = F_{mn}(t)$$

Nous utiliserons pour la suite, l'indice "0" pour les valeurs à l'instant t_0 et l'indice "1" pour les valeurs à l'instant $t_1 = t_0 + \Delta t$.
Le schéma de Newmark est construit à partir des développements de Taylor des déplacement, vitesse et accélération à l'instant t_1, soit :

$$a_{mn1} = a_{mn0} + \Delta t.\dot{a}_{mn0} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{a}_{mn0} + \frac{\Delta t^3}{6}(6\alpha)\ddot{a}_{mn0} + 0(\Delta t^4) \tag{A2.7}$$

$$\dot{a}_{mn1} = \dot{a}_{mn0} + \Delta t.\ddot{a}_{mn0} + \frac{\Delta t^2}{2}(2\delta)\ddot{a}_{mn0} + 0(\Delta t^3) \tag{A2.8}$$

$$\ddot{a}_{mn1} = \ddot{a}_{mn0} + \Delta t.\dddot{a}_{mn0} + 0(\Delta t^2) \tag{A2.9}$$

De l'équation (A2.9), nous pouvons tirer la dérivée troisième par rapport au temps t du déplacement à l'instant t_0 qui s'écrit donc :

$$\dddot{a}_{mn0} = \frac{\ddot{a}_{mn1} - \ddot{a}_{mn0}}{\Delta t} \tag{A2.10}$$

Les expressions (A2.7) et (A2.8) s'écrivent alors :

$$a_{mn1} = a_{mn0} + \Delta t.\dot{a}_{mn0} + \Delta t^2\left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{a}_{mn0} + \alpha\,\ddot{a}_{mn1}\right] \tag{A2.11}$$

$$\dot{a}_{mn1} = \dot{a}_{mn0} + \Delta t\left[(1-\delta)\ddot{a}_{mn0} + \delta\,\ddot{a}_{mn1}\right] \tag{A2.12}$$

Afin d'avoir la solution inconditionnellement stable on prendra $\delta = 0.5$ et $\alpha = 0.25$

En remplaçant dans les équations (A2.8) et (A2.9) on aura :

$$a_{mn1} = a_{mn0} + \Delta t.\dot{a}_{mn0} + \frac{\Delta t^2}{4}\left[\ddot{a}_{mn0} + \ddot{a}_{mn1}\right] \tag{A2.13}$$

$$\dot{a}_{mn1} = \dot{a}_{mn0} + \frac{\Delta t}{2}\left[\ddot{a}_{mn0} + \ddot{a}_{mn1}\right] \tag{A2.14}$$

ou bien :

$$\ddot{a}_{mn1} = \frac{4}{\Delta t^2}\left[a_{mn1} - a_{mn0} - \Delta t.\dot{a}_{mn0}\right] - \ddot{a}_{mn0} \tag{A2.15}$$

A l'instant t_1 l'équation modale (II.13), s'écrit :

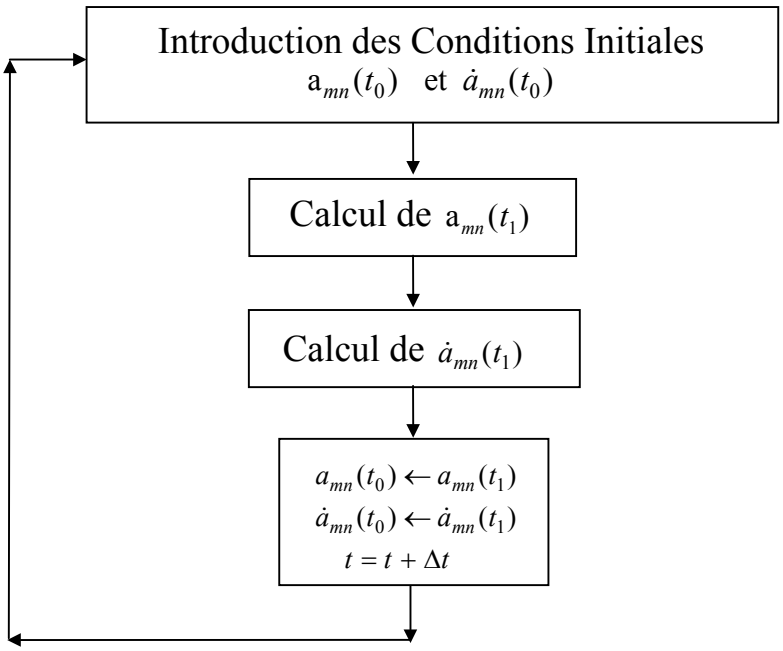
$$\ddot{a}_{mn1} + \eta.\omega_{mn}.\dot{a}_{mn1} + \omega_{mn}^2.a_{mn1} = \frac{1}{M_{mn}}F_{mn1} \tag{A2.16}$$

En remplaçant (A2.14) et (A2.15) dans (A2.16), on aura, après réarrangement :

$$\left\{\frac{4}{\Delta t^2}+\frac{2}{\Delta t}\eta.\omega_{mn}+\omega_{mn}^2\right\}a_{mn1}=\left\{\ddot{a}_{mn0}+\frac{4}{\Delta t}\dot{a}_{mn0}+\frac{4}{\Delta t^2}a_{mn0}\right\}+$$
$$\eta.\omega_{mn}\left\{\dot{a}_{mn0}+\frac{2}{\Delta t}a_{mn0}\right\}+\frac{1}{M_{mn}}F_{mn1} \qquad \text{(A2.17)}$$

Pour chaque pas de temps, une fois a_{mn1} déterminé, on tire $\ddot{a}_{mn1}$ à partir de l'équation (A2.15) et $\dot{a}_{mn1}$ de l'équation (A2.14). La résolution est alors conduite de manière itérative selon le processus décrit à l'organigramme ci-dessous :

Organigramme de résolution



Notons enfin que la stabilité de la solution n'est assurée que pour un pas de temps Δt inférieur à une valeur Δt_c liée à la plus petite période caractéristique de résonance T_{min} du système physique étudié.

ANNEXE 3

Etude vibratoire de plaques à épaisseur variable

A3.1. Mise en équations (Miloudi (1992))

Pour la mise en équations, notre choix consiste à formuler un problème de dynamique en termes énergétiques, c'est à dire à construire la fonctionnelle d'énergie Ψ et à la minimiser en utilisant le principe de Hamilton et les techniques du calcul variationnel.

$$\delta\,\Psi = 0 \tag{A3.1}$$

A3.1.1. Enoncé du principe de Hamilton

Entre deux instants t_0 et t_1 le mouvement d'un système conservatif s'effectue de telle sorte que :

$$\delta\,\Psi = 0 \qquad \text{donc} \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U_t)\, dt = 0 \tag{A3.2}$$

avec : $T = \frac{1}{2}\int_V \rho_S \cdot \dot{u}_i \cdot \dot{u}_i dv$ et $U_t = U_i + U_e$

T : est l'énergie cinétique

U_t : est l'énergie potentielle totale

$U_i = U_d$: est l'énergie potentielle interne ou énergie de déformation

U_e : est l'énergie potentielle externe qui ne dépend que de la position de la plaque et non des déformations.

On ne tiendra compte que de l'énergie de déformation U_d, et donc :

$$\Psi = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U_d)\, dt = 0 \qquad \text{où} \qquad E_d = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}\, dv \tag{A3.3}$$

A3.1.2. Calcul de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}\int_V \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right] dv = \frac{1}{2}\rho_S \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \left[\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dz\, dy\, dx$$

pour des plaques minces, z est faible, ce qui revient à :

$$T = \frac{1}{2}\rho_S \int_0^a \int_0^b 2 \int_0^{\frac{h(x,y)}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dz\, dy\, dx = \frac{\rho_S}{2}\int_S h(x,y) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dz\, dS \tag{A3.4}$$

A3.1.3. Calcul de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation d'une plaque est donnée par :

$$\text{avec} \qquad E_d = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}\, dv \qquad\qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \tag{A3.5}$$

où C_{ijkl} est le tenseur des constantes élastiques

$$C_{ijkl} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon^2}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{kl} = \begin{bmatrix} -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix}$$

en développant, l'équation (A3.5), nous aurons :

$$E_d = \frac{E}{24(1-\upsilon^2)}\int_S h^3(x,y)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\upsilon^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] dS \tag{A3.6}$$

Construisons maintenant la fonctionnelle Ψ et minimisant la : $\delta\,\Psi = 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Psi}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial w,t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial w,x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial w,y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial w,z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial w,xx}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial w,yy}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial w,xy}\right) = 0 \end{aligned} \tag{A3.7}$$

Après développement, de l'équation (A3.7), nous obtenons l'équation différentielle d'une plaque à épaisseur variable suivant les deux directions x et y (Appl (1965)).

$$\begin{aligned} &\rho_S \cdot h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\cdot\nabla^4 w + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + 2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w + \nabla^2 D\cdot\nabla^2 w - \ldots \\ &(1-\upsilon)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{A3.8}$$

avec :

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 D}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \qquad \text{et} \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$h(x,y)$: épaisseur de la plaque

$D = D(x,y) = \dfrac{Eh^3(x,y)}{12(1-\upsilon^2)}$: module de rigidité en flexion de la plaque

E : module de Young

ν : coefficient de Poisson

$w = w(x,y,t)$: déplacement transversal de la plaque

hypothèse

Pour notre étude, nous avons supposé que l'épaisseur et la rigidité varient linéairement suivant la direction de l'axe des x.

d'où $h = h(x) = h_0(1+G(x))$ avec : $G(x) = \left(1+\frac{\alpha}{a}x\right)$

et $D = D(x) = D_0(G(x))^3$ avec $D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\upsilon^2)}$

et donc : $\frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = 0$ (A3.9)

En injectant (A3.9) dans l'équation (A3.8), nous aurons :

$$\rho_S \cdot h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\cdot\nabla^4 w + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \text{(A3.10)}$$

Conditions aux limites

La plaque est simplement appuyé sur ses bords et donc on a :

$$\begin{cases} w = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma \text{ (contour de la plaque)} \\ \\ \mathrm{M_x} = \mathrm{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad \begin{cases} \mathrm{x} = 0, \mathrm{a} \\ 0 \le \mathrm{y} \le \mathrm{b} \end{cases} \\ \\ \mathrm{M_y} = \mathrm{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad \begin{cases} \mathrm{y} = 0, \mathrm{b} \\ 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{a} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{(A3.11)}$$

A3.1.4. Réponse vibratoire de la plaque

La réponse de la plaque est décomposée sur une base fonctionnelle vérifiant les conditions aux limites, notée $\phi_{mn}(x,y)$. Ces fonctions de base $\phi_{mn}(x,y)$, se construisent facilement en utilisant les fonctions propres de la plaque d'épaisseur constante, de même surface et de mêmes conditions aux limites, soit la plaque rectangulaire appuyée sur ses bords dont les déformées propres sont bien connues.

$$\Phi_{mn}(x,y) = \sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad \text{(A3.12)}$$

$$w(x,y,t) = \sum_m\sum_n q_{mn}(t)\cdot\Phi_{mn}(x,y) \qquad \text{(A3.13)}$$

Le problème ainsi posé, il convient maintenant de déterminer les inconnues $q_{mn}(t)$. Nous employons pour ceci la méthode de Galerkin classique, en introduisant la décomposition (A3.13) dans l'équation (A3.10), puis en calculant l'intégrale sur la surface de la plaque du produit de l'équation par une fonction $\phi_{kl}(x,y)$. On obtient tout calcul fait, pour chaque indice i :

$$\sum_k \left(\ddot{q}_{kn}M_{mnkn} + \ddot{q}_{kn}K_{mnkn}\right) = 0 \qquad \text{(A3.14)}$$

M_{mnkn} : tenseur de la masse généralisée donné par :

$$M_{mnkn} = \rho_S \frac{b}{2} \int_0^a \left(h(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x . \sin \frac{k\pi}{a} x \right) dx \qquad \text{(A3.15)}$$

K_{mnkn} : tenseur de la raideur généralisée donné par :

$$K_{mnkn} = \frac{b}{2} \int_0^a L \left(\sin \frac{m\pi}{a} x . \sin \frac{k\pi}{a} x \right) dx \qquad \text{(A3.16)}$$

avec l'opérateur L donné par :

$$L = D \cdot \nabla^4 + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = 0 \qquad \text{(A3.17)}$$

Après calcul, les expressions des tenseurs de la masse généralisée et de la raideur généralisée sont donné respectivement par :

$$M_{ijkl} = \begin{cases} \rho_S h_0 \dfrac{ab}{4} \left(1 + \dfrac{\alpha}{2} \right) & si\ k = i\ \ et\ \ l = j \\ \dfrac{\rho_S h_0 \alpha abki}{\pi^2 (i^2 - k^2)^2} \left[(-1)^{k+i} - 1 \right] & si\ k \neq i\ \ et\ \ l = j \\ 0 & si\ k = i\ \ et\ \ l \neq j \\ 0 & si\ k \neq i\ \ et\ \ l \neq j \end{cases} \qquad \text{(A3.18)}$$

Remarque

Nous remarquons, que si la plaque est à épaisseur constante ($\alpha = 0$), M_{ijkl} qui est un tenseur d'ordre 4 peut être ramené à une matrice diagonale dont tous les éléments seront égaux :

$$M_{ijkl} = \rho_S h_0 \frac{ab}{4}$$

Pour le tenseur de la raideur généralisée, on a :

$$K_{ijkl}\begin{cases} D_0\frac{ab}{4}\left[\begin{array}{l} k_{ij}^4\left[(1+\alpha)^3-\frac{\alpha}{4}(3\alpha^2+8\alpha+6)-\frac{3\alpha^2}{4i^2\pi^2}(\alpha+2)\right]-6\frac{\alpha^2}{a^2}\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^2\left(k_{xi}^2+\upsilon k_{yj}^2\right)+\ldots \\ \ldots+6k_{ij}^2\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{2a^2} \end{array}\right] & si\ k=i\ \ et\ \ l=j \\ D_0\frac{b}{2}\left[\begin{array}{l} k_{ij}^4\frac{6\alpha aki}{\pi(i^2-k^2)}\left[(1+\alpha)^2(-1)^{k+i}-1+\frac{4\alpha^2(i^2+k^2)}{\pi^2(i^2-k^2)^2}(1-(-1)^{k+i})\right]-\ldots \\ \ldots-12\left(k_{xi}^2+\upsilon k_{yj}^2\right)\frac{\alpha^3 ki}{a\pi(i^2-k^2)^2}((-1)^{k+i}-1)-\ldots \\ \ldots-6k_{ij}^2\frac{\alpha ki}{a(i^2-k^2)}\left[(1+\alpha)^2(-1)^{k+i}-1-\frac{2\alpha^2(3i^2+k^2)}{\pi^2(i^2-k^2)^2}(1-(-1)^{k+i})\right] \end{array}\right] & si\ k\neq i\ \ et\ \ l=j \\ 0 & si\ k=i\ \ et\ \ l\neq j \\ 0 & si\ k\neq i\ \ et\ \ l\neq j \end{cases}$$

(A3.19)

La même remarque que la précédente peut être mentionnée à savoir :

$$K_{ijkl}=D_0\frac{ab}{4}\cdot k_{ij}^4$$

où :

$h_{à}$ et D_0 sont respectivement l'épaisseur et la rigidité de flexion de la plaque à x = 0.

$k_{xi}=\frac{i\pi}{a}$ $\quad$ $k_{yj}=\frac{j\pi}{b}$ $\quad$ $k_{ij}^2=k_{xi}^2+k_{yj}^2$

ANNEXE 4

Résultats expérimentaux

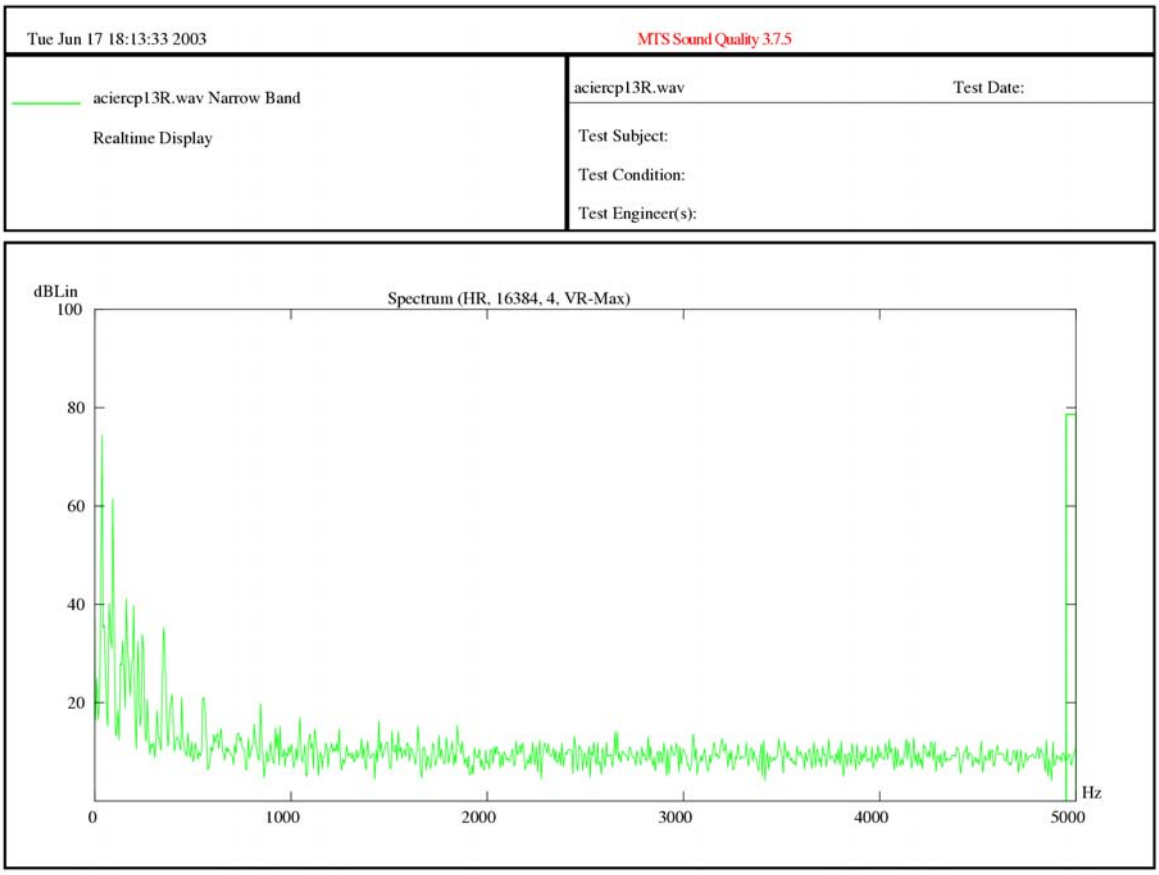
Nous présentons dans cette annexe les résultats expérimentaux de la mesure de la pression acoustique rayonnée par une plaque impactée par un impacteur à bout sphérique. Les différentes courbes représentent les différentes combinaisons élaborées en faisant varier trois paramètres dont les niveaux sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Les trois paramètres retenus sont :

- Le matériau,
- La position du point d'impact,
- La position du point d'écoute.

Facteurs	**Niveau 1**	**Niveau 2**
A : Matériau	Acier	Aluminium
B : Point d'impact	(0.3 , 0.2)	(0.41 , 0.11)
C : Point d'écoute	(0.3 , 0.2 , 0.5)	(0.45 , 0.11 , 0.5)

Tableau A4.1. *Facteurs testés et leurs niveaux.*



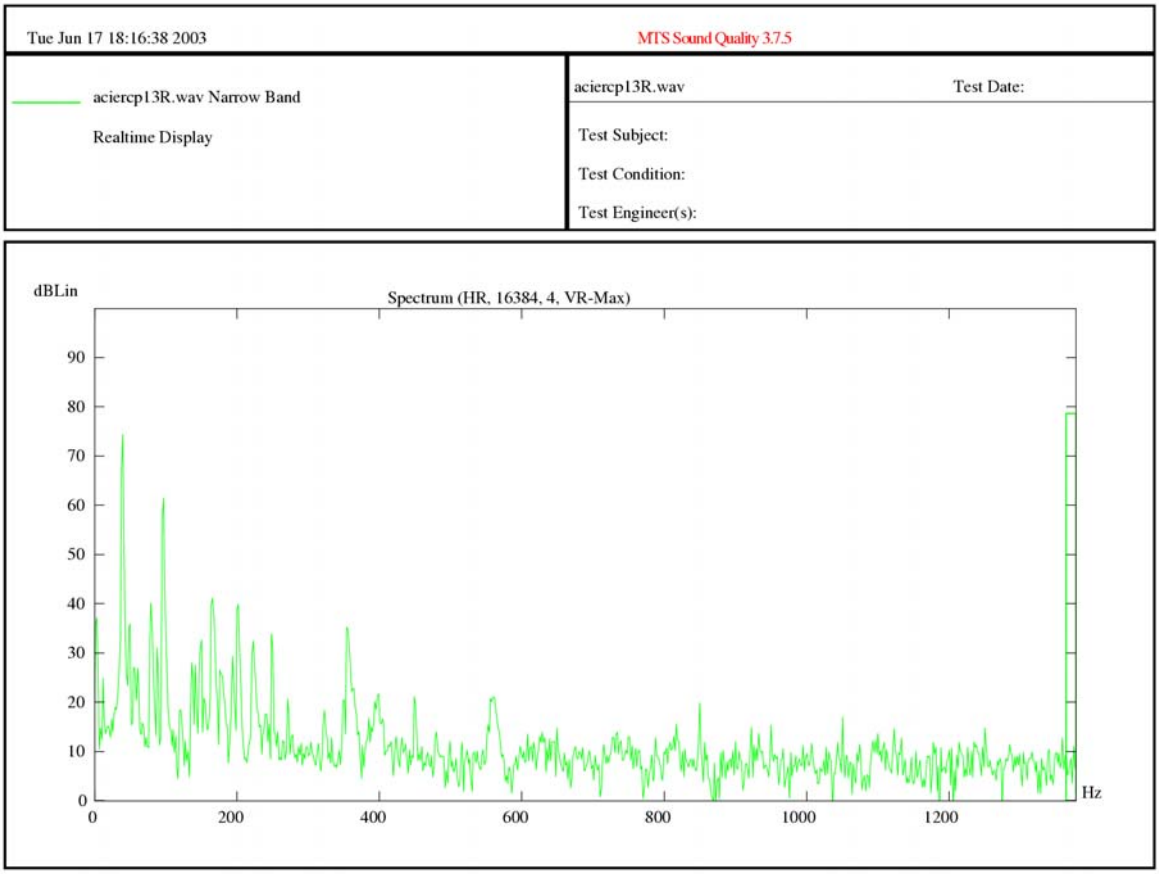
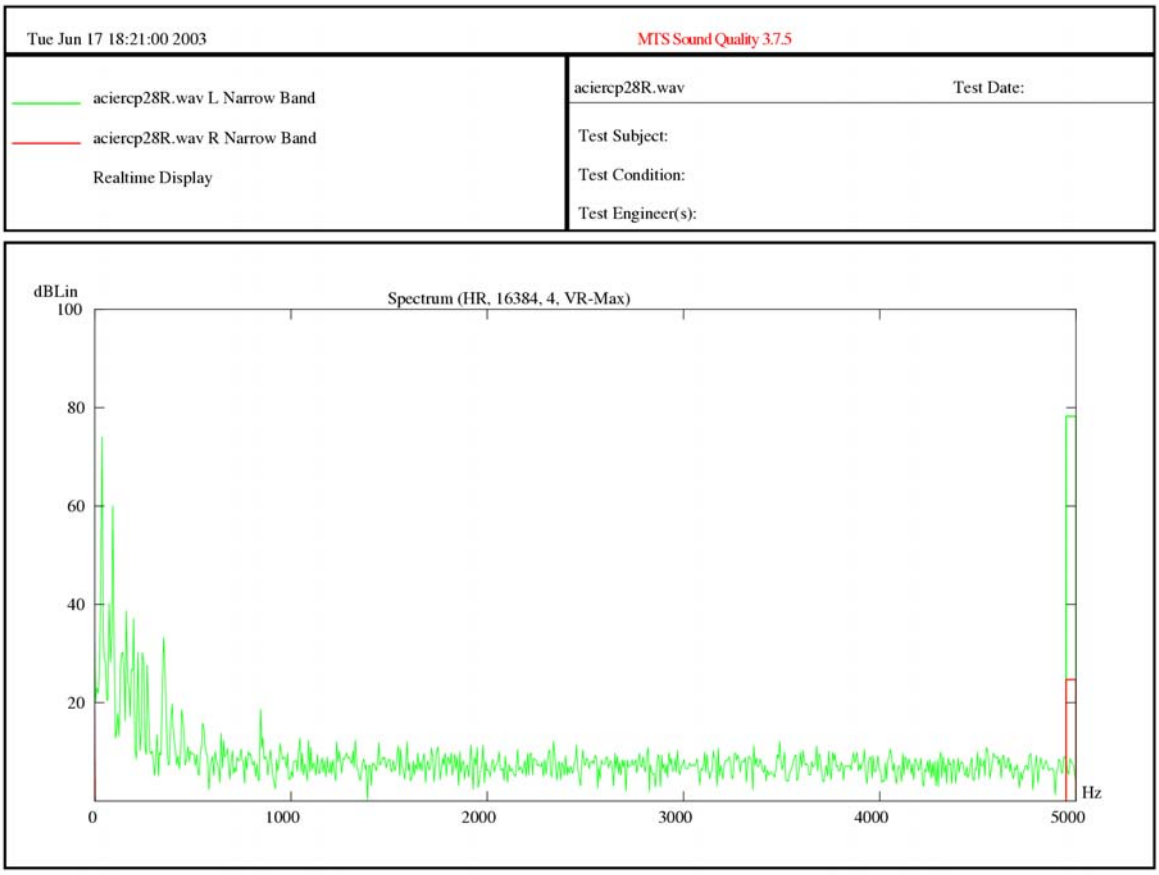


Figure A4.1. *Pression acoustique mesurée au point (0.3,0.2,0.5), pour la plaque en acier impactée au point (0.3,0.2).*



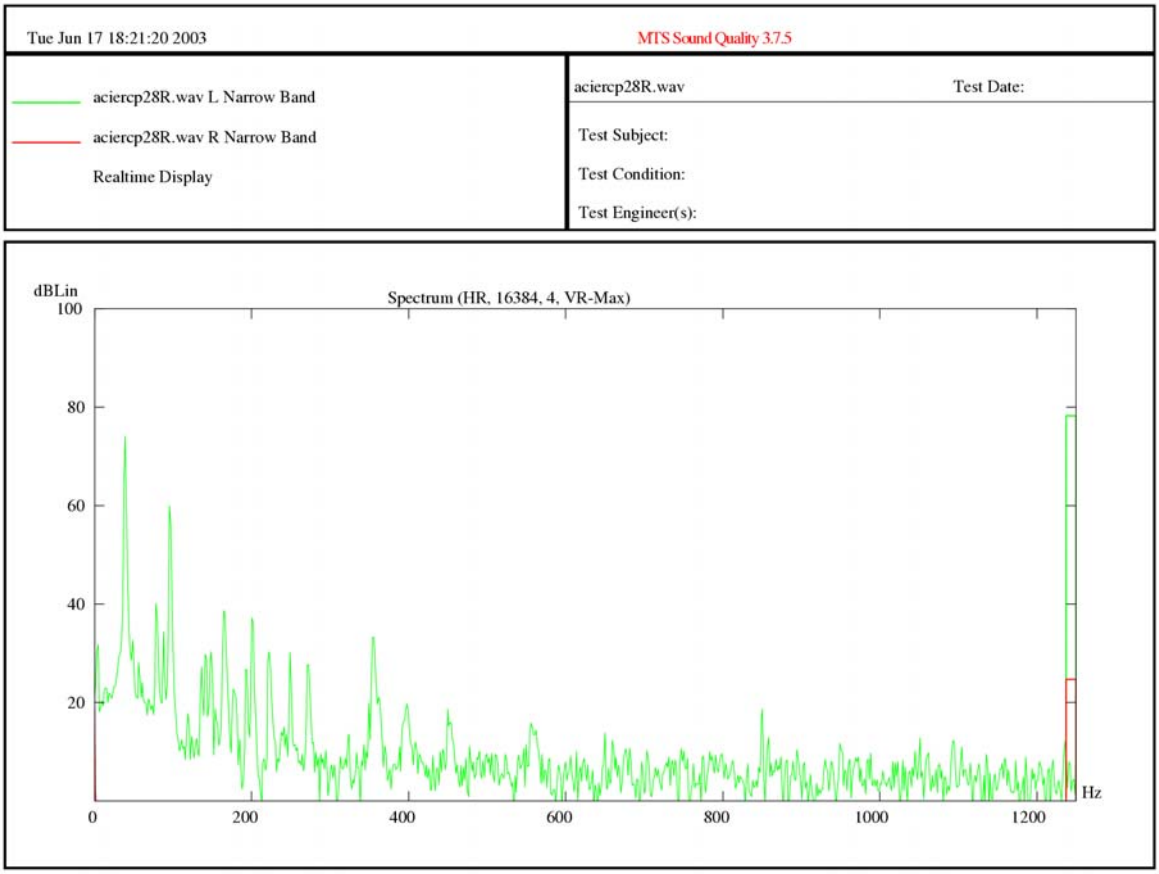


Figure A4.2. *Pression acoustique mesurée au point (0.45,0.11,0.5),*
Pour la plaque en acier impactée au point (0.3,0.2).

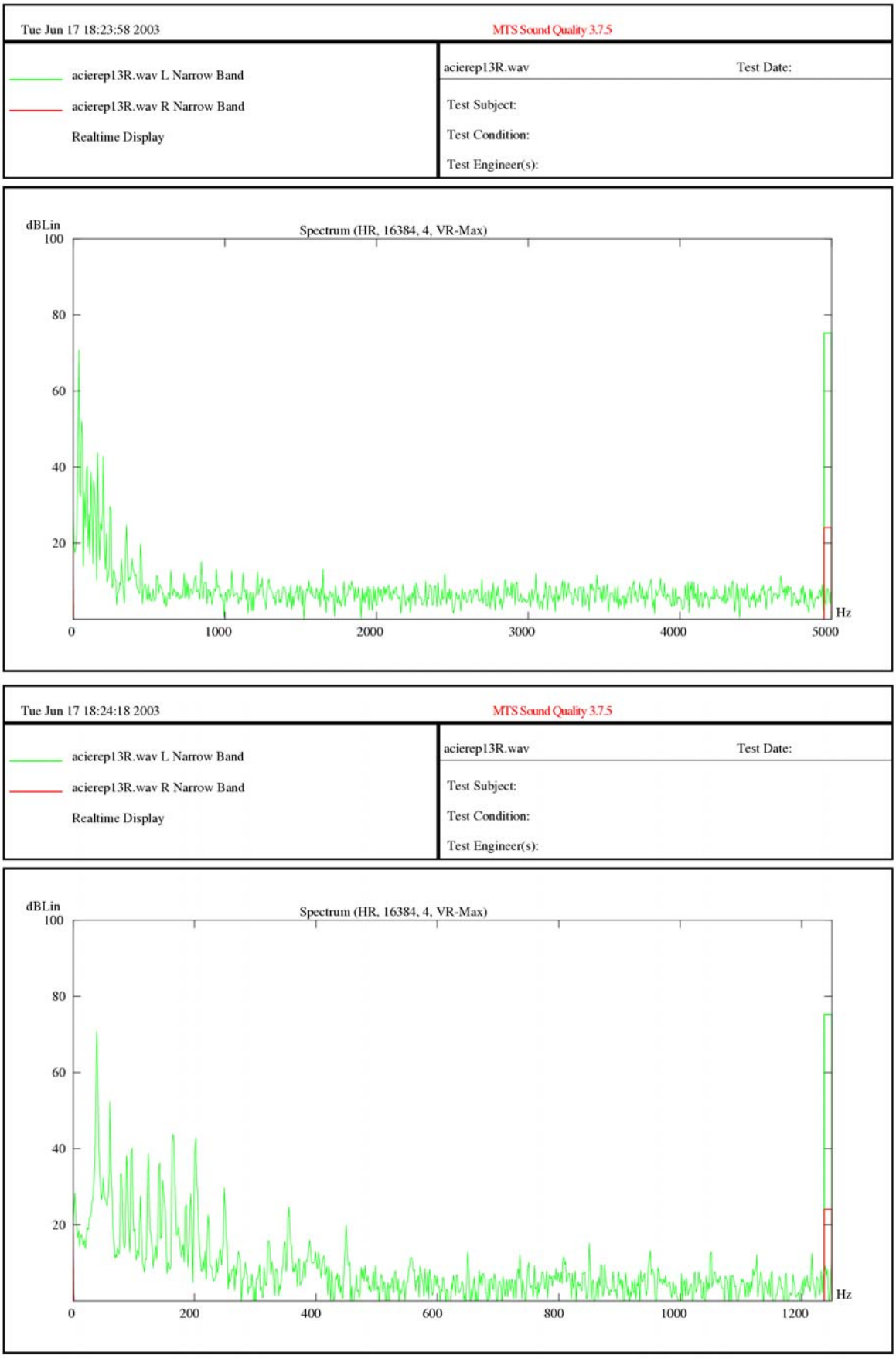
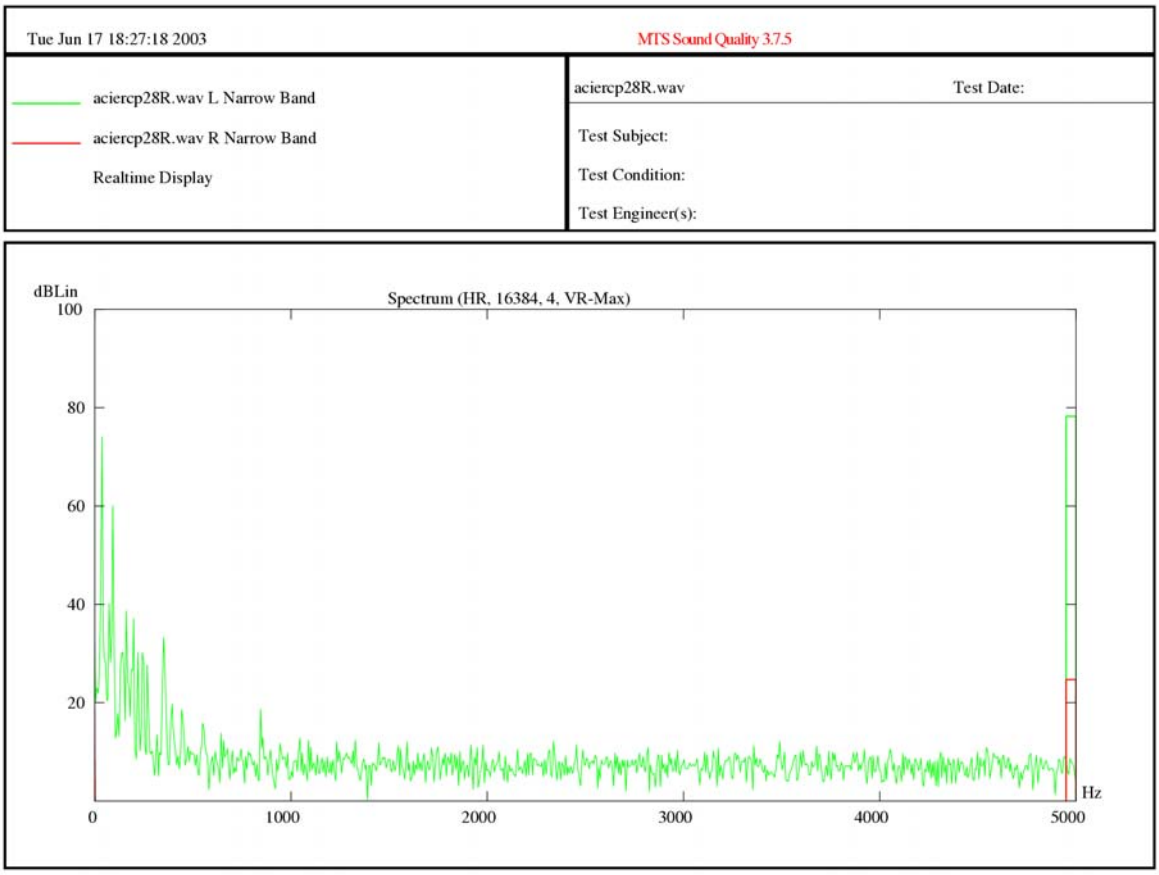


Figure A4.3. *Pression acoustique mesurée au point (0.3,0.2,0.5),*
Pour la plaque en acier impactée au point (0.41,0.11).



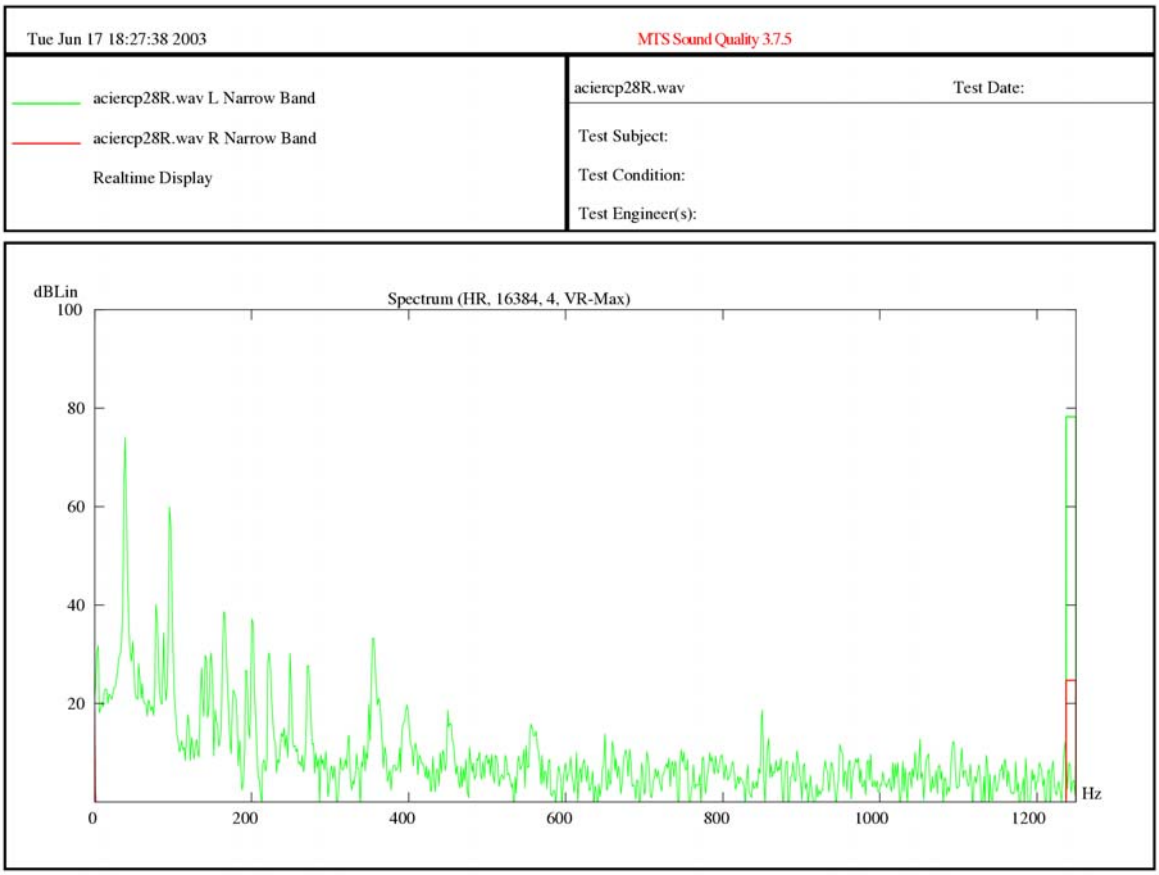
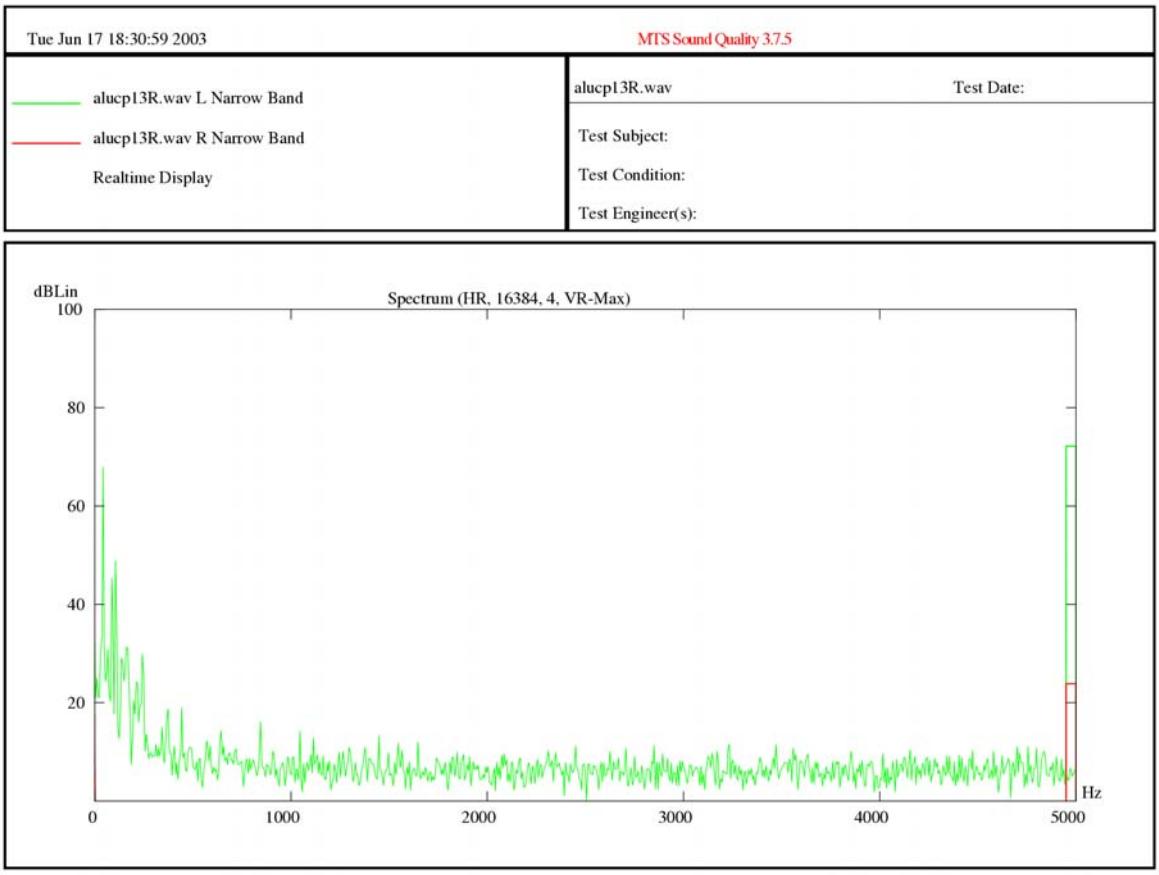


Figure A4.4. *Pression acoustique mesurée au point (0.45,0.11,0.5),*
Pour la plaque en acier impactée au point (0.41,0.11).



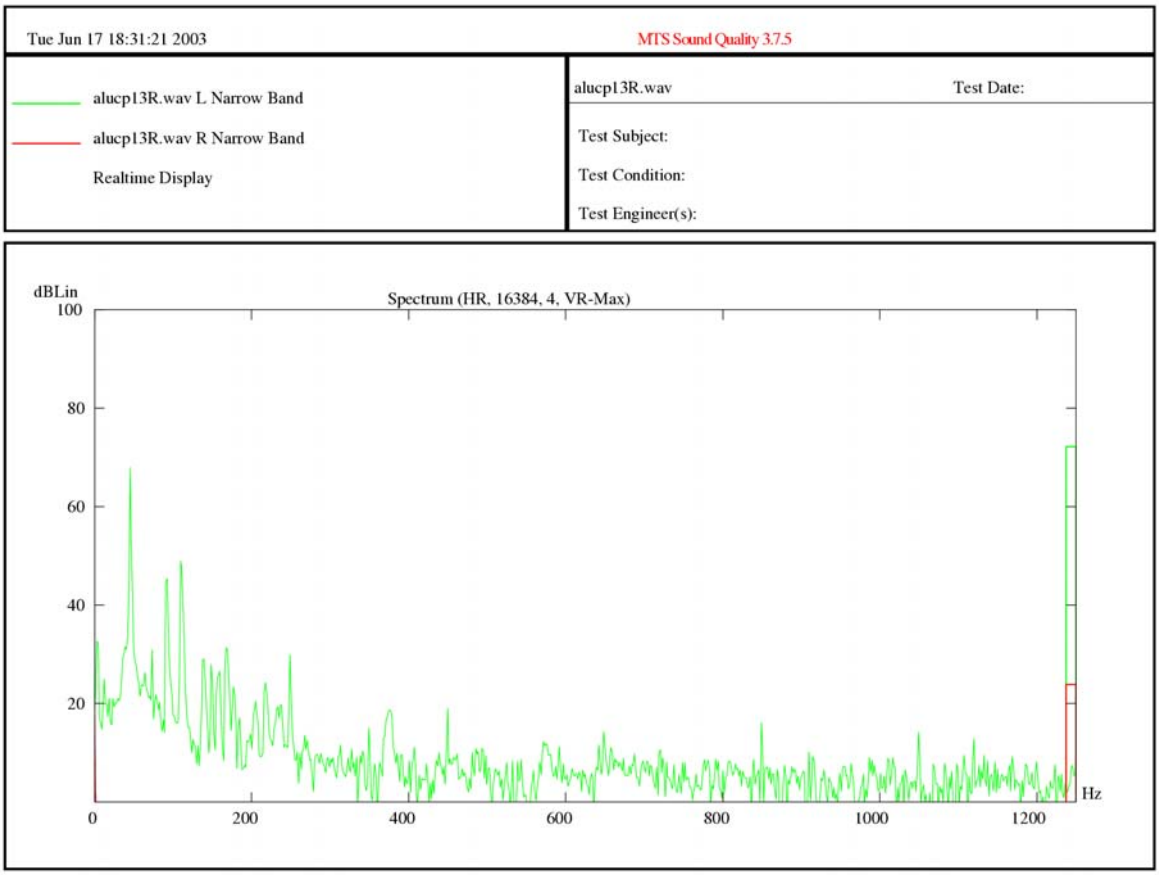
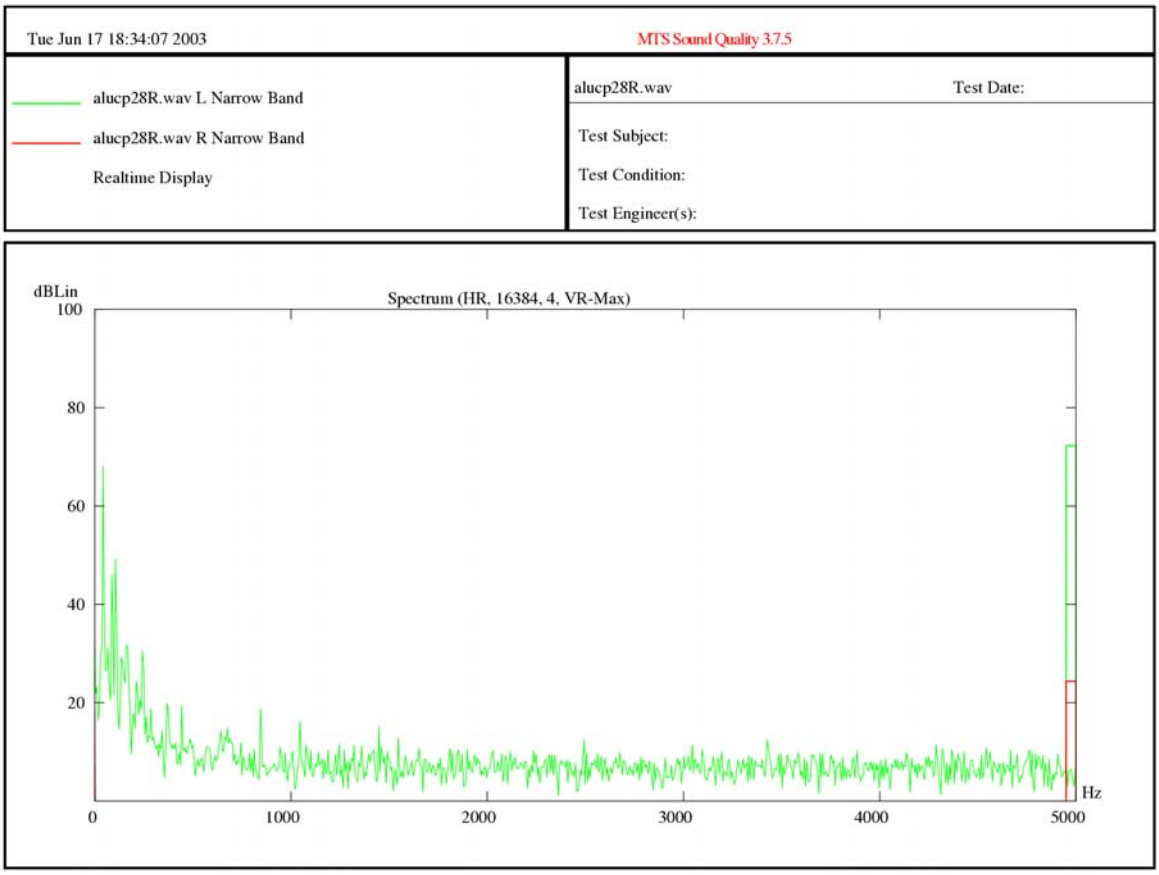


Figure A4.5. *Pression acoustique mesurée au point (0.3,0.2,0.5), pour la plaque en aluminium impactée au point (0.3,0.2).*



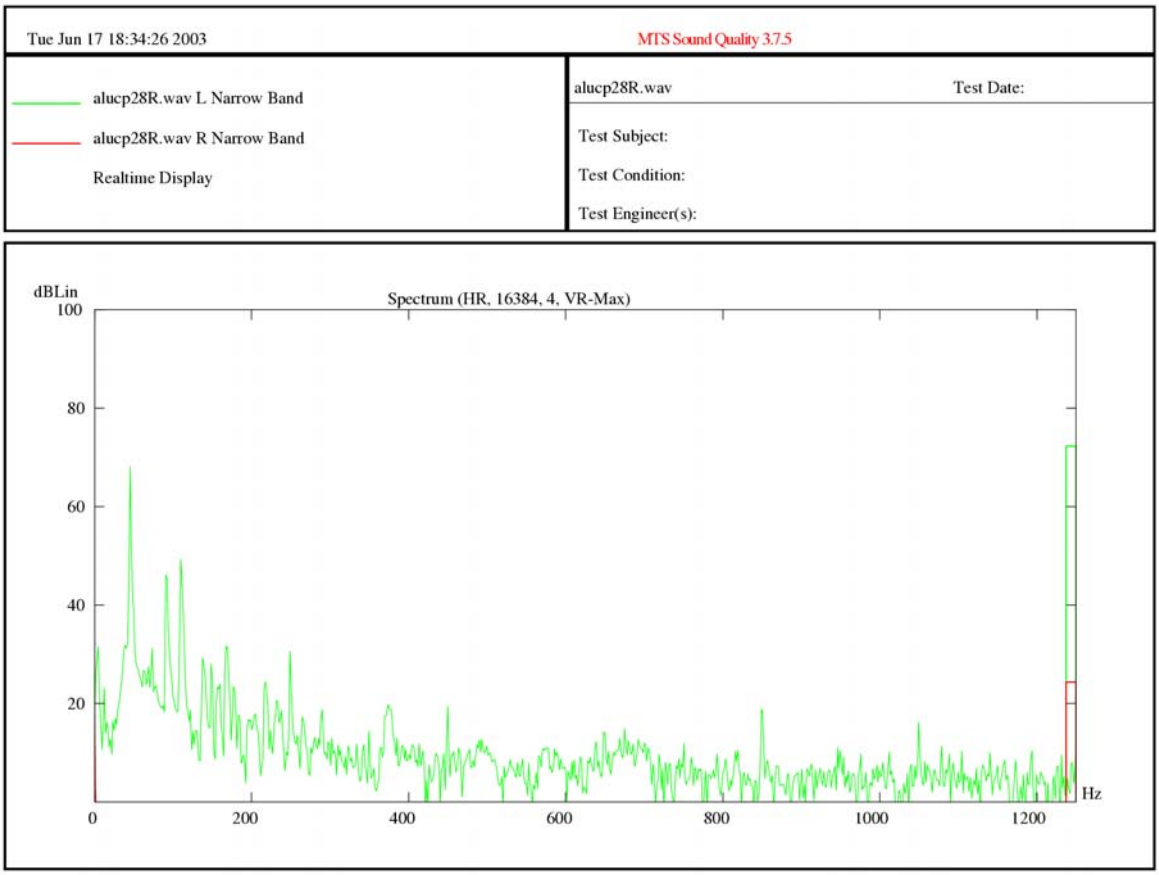
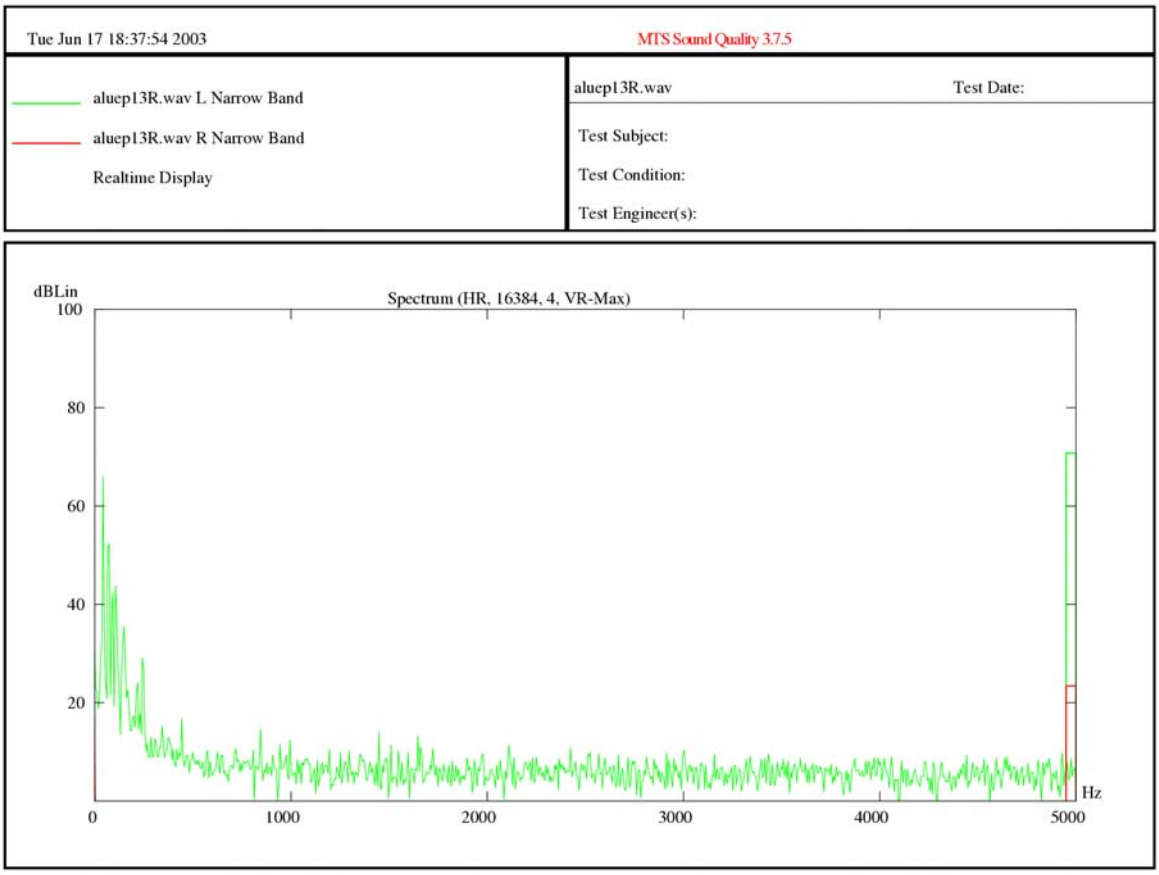


Figure A4.6. *Pression acoustique mesurée au point (0.45,0.11,0.5), pour la plaque en aluminium impactée au point (0.3,0.2).*



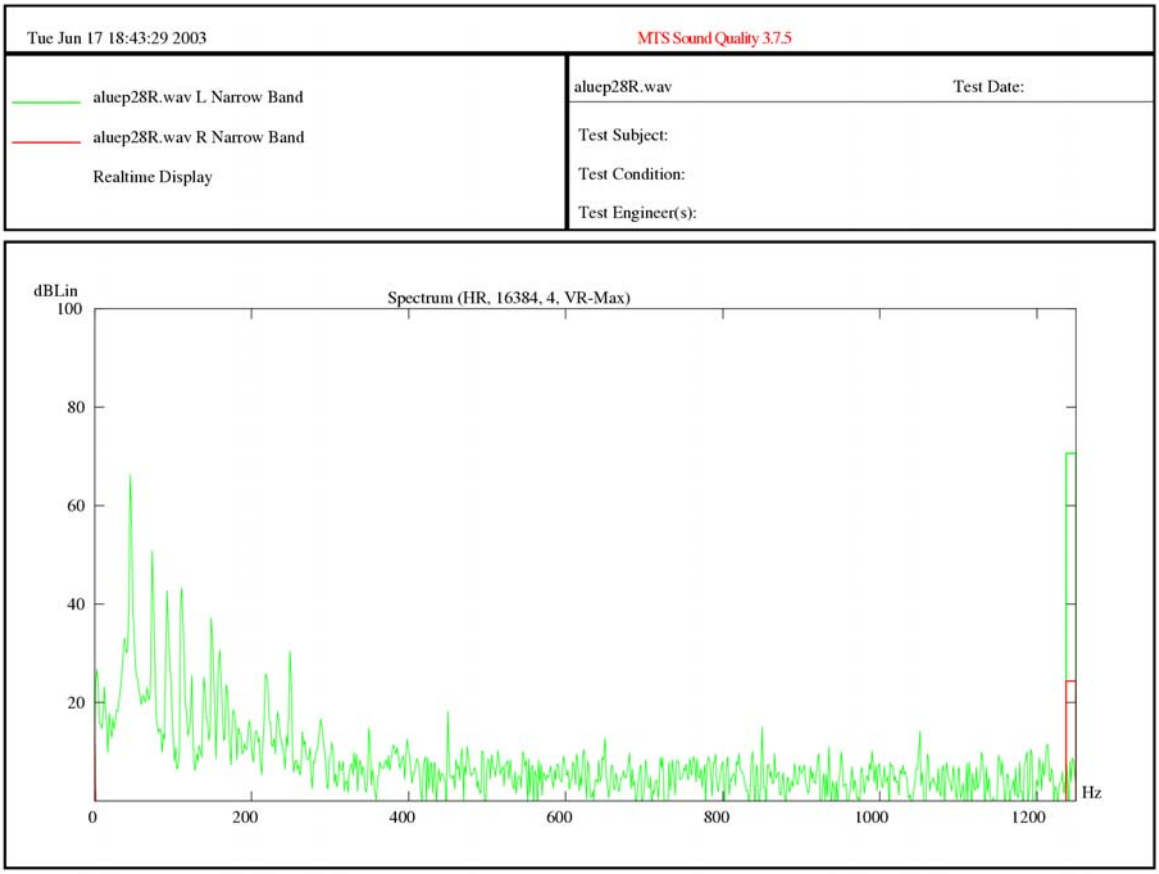
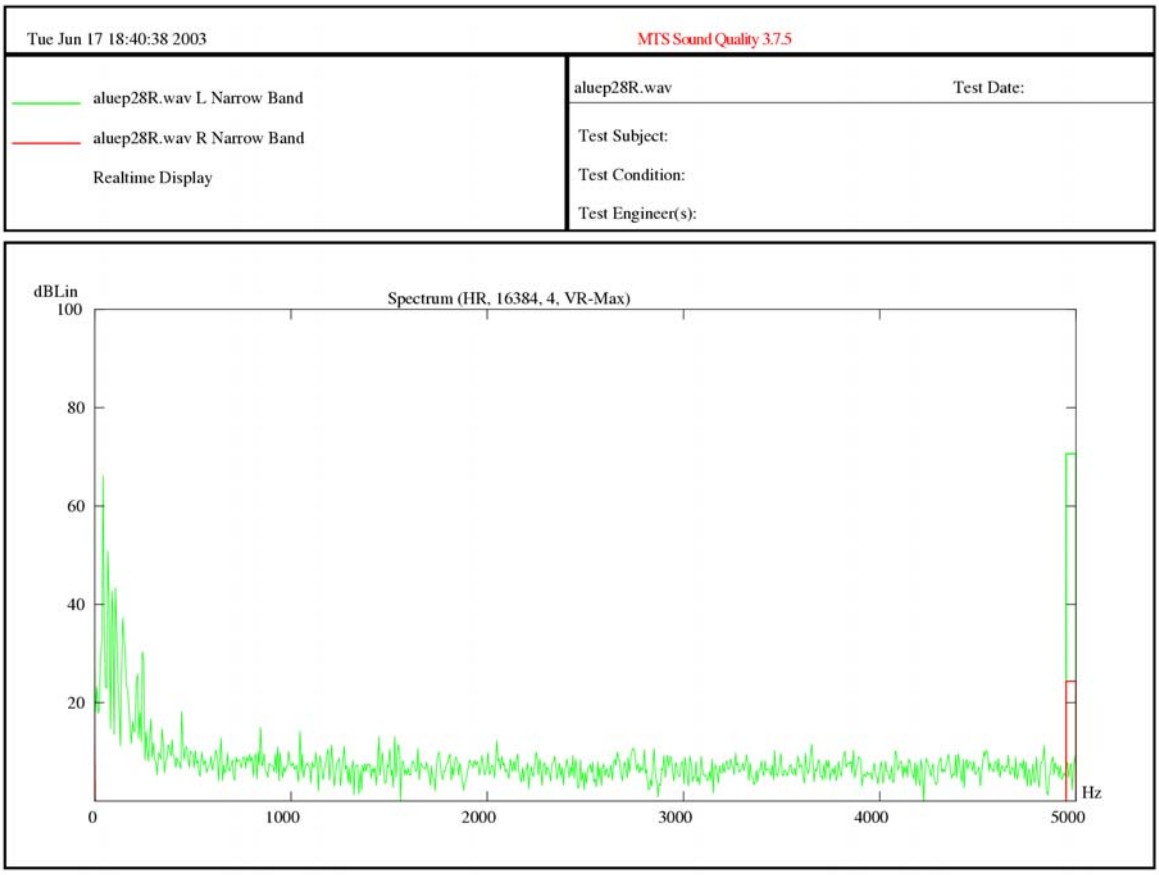


Figure A4.7. *Pression acoustique mesurée au point (0.41,0.11), pour la plaque en aluminium impactée au point (0.3,0.2).*



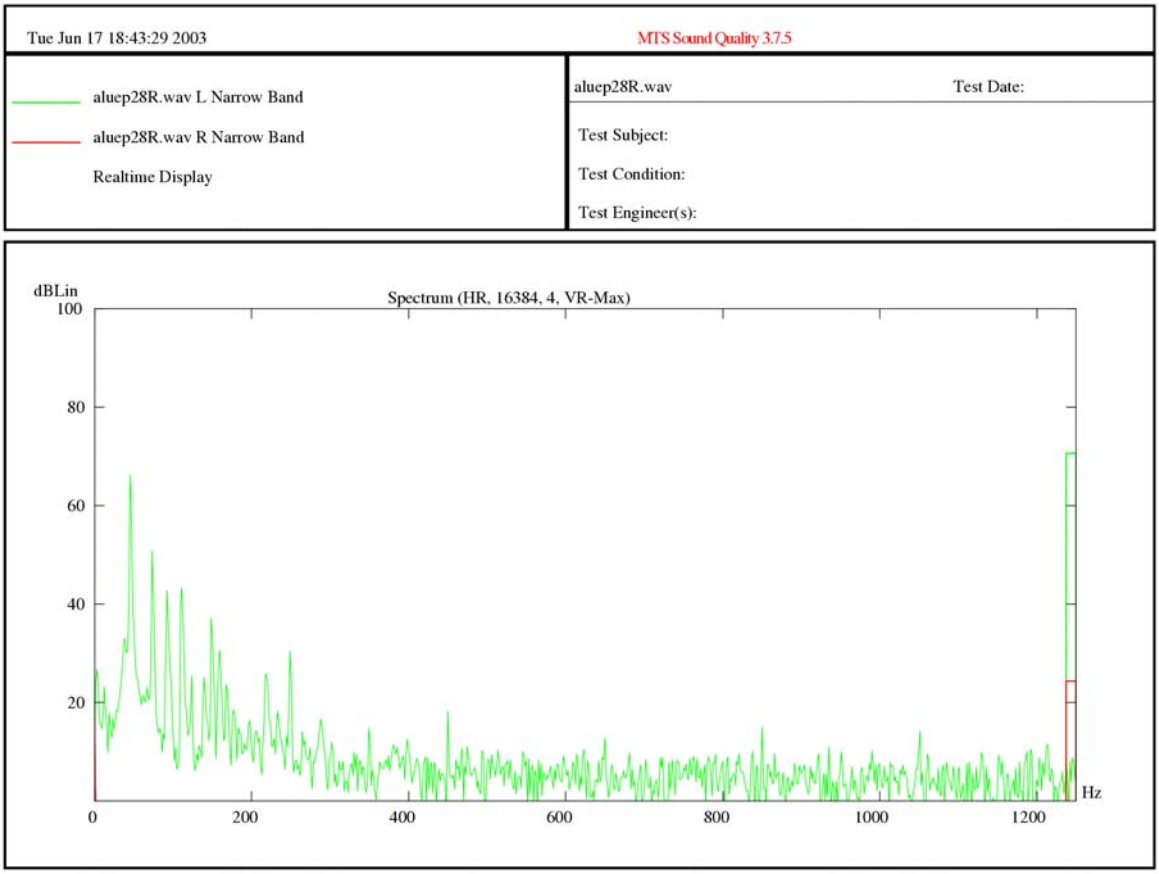
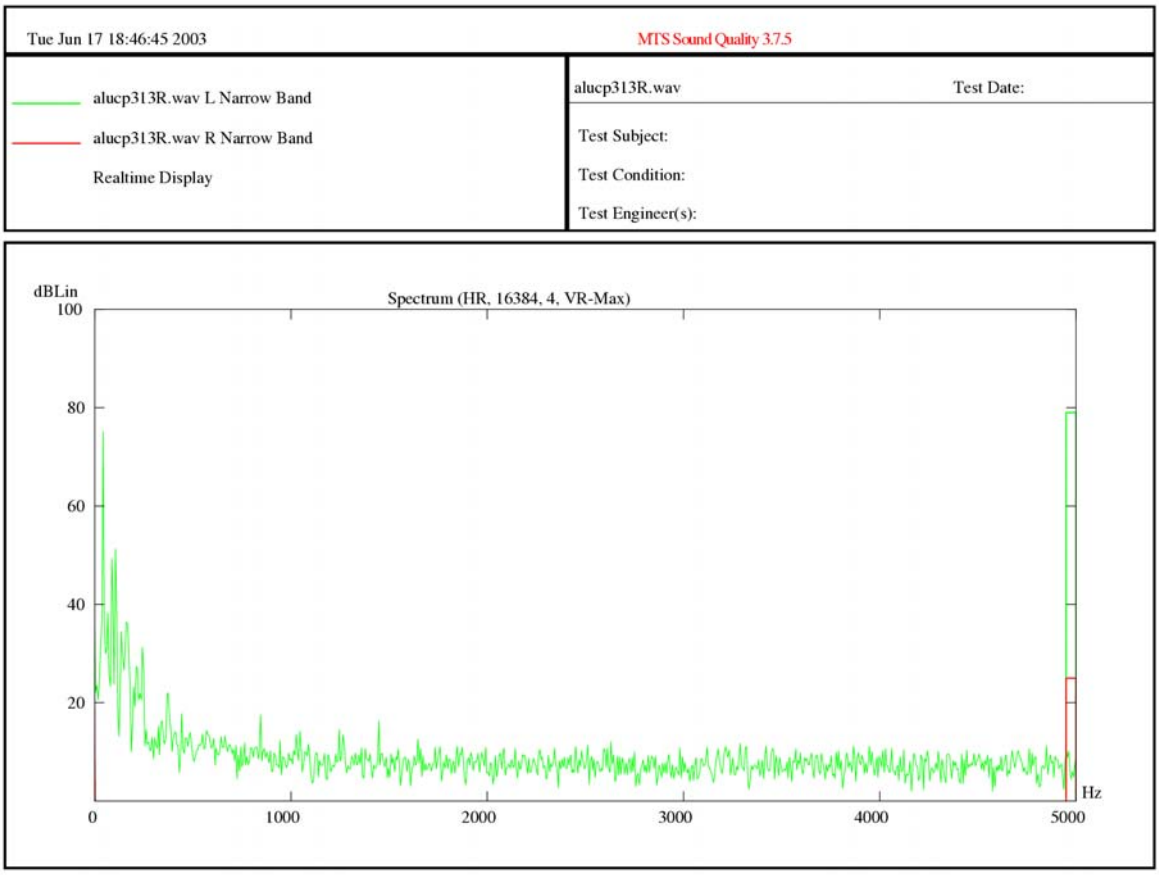


Figure A4.8. *Pression acoustique mesurée au point (0.45,0.11,0.5), pour la plaque en aluminium impactée au point (0.41,0.11).*



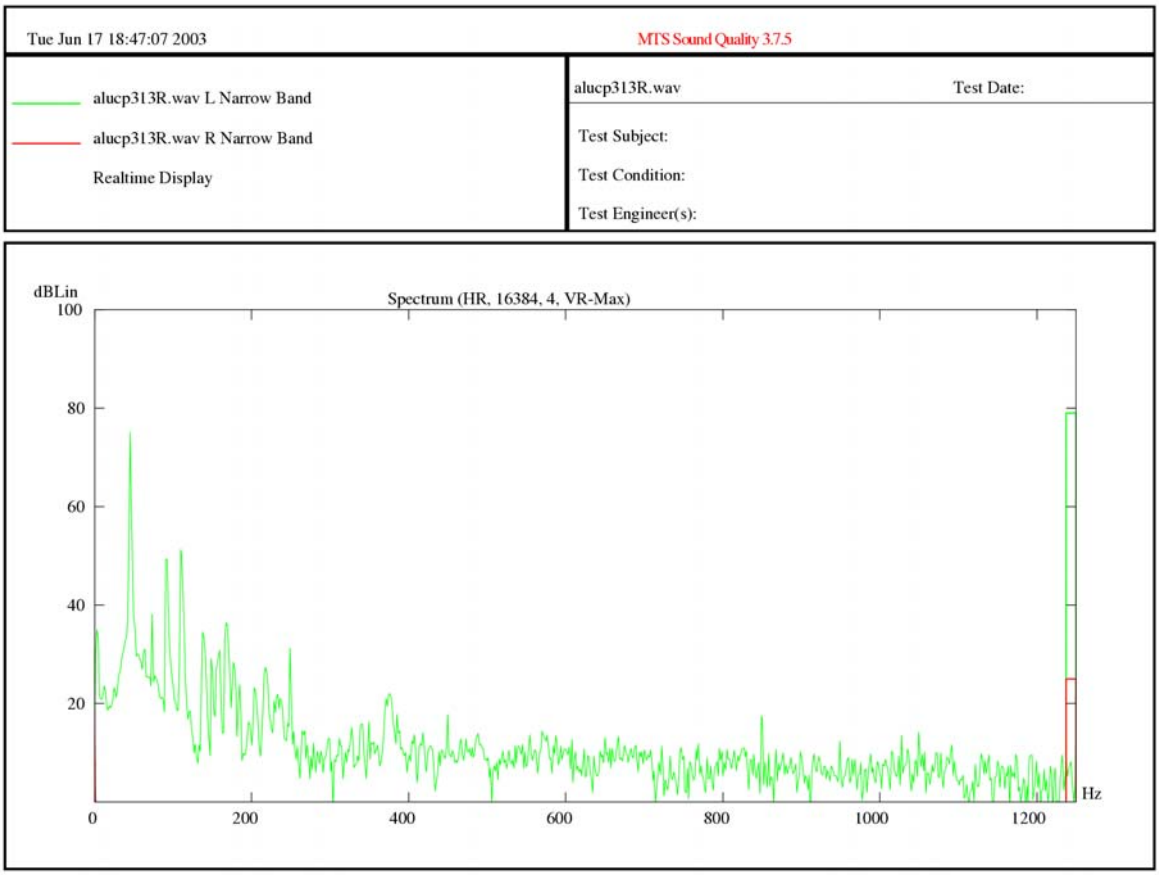


Figure A4.9. *Pression acoustique mesurée au point (0.3,0.2,0.25), pour la plaque en aluminium impactée au point (0.3,0.2).*

ANNEXE 5

Description du test perceptif de préférence

A5.1. Procédure du test

Au lancement du programme élaboré, l'interface d'invitation apparaît (figure A5.1). En haut à droite de l'interface, est situé un incrément permettant de compter le nombre d'auditeurs déjà passés. Comme indiqué sur la figure ci-dessous, le test se déroule en deux parties.

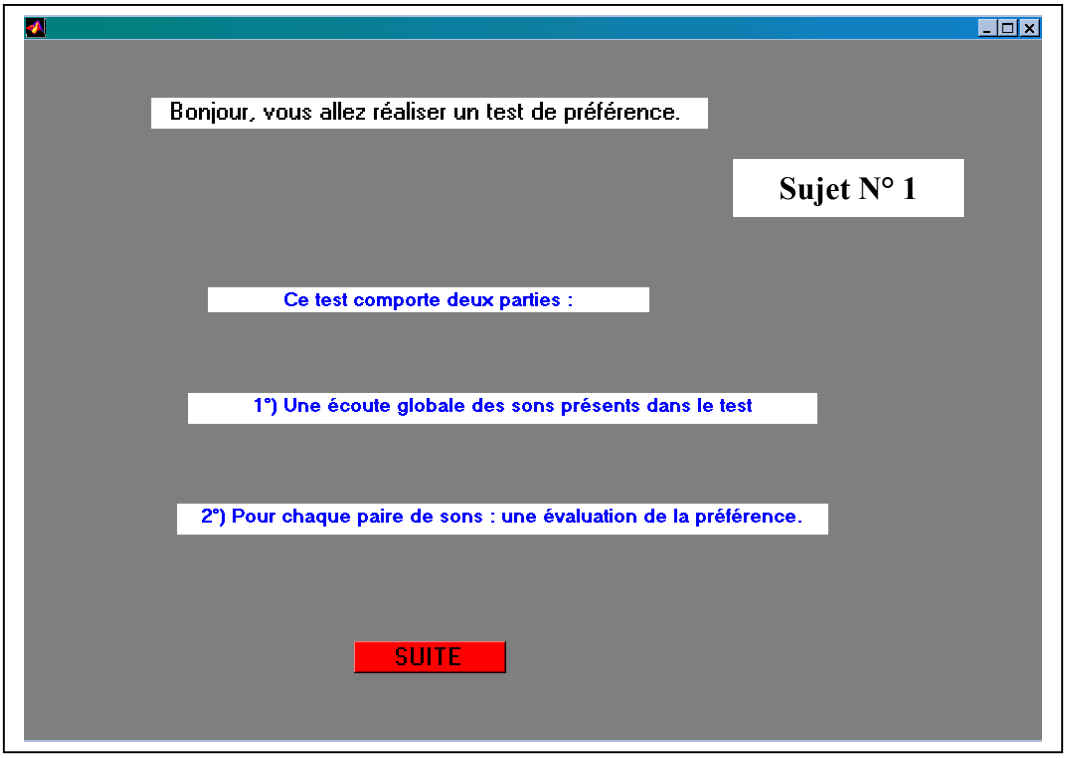


Figure A5.1. *Interface d'invitation au test de préférence.*

Tout d'abord, nous avons une phase d'apprentissage (figure A5.2) qui permet d'effectuer jusqu'à trois écoutes globales de tous les sons présents dans le test pour familiariser l'auditeur à son environnement du test.

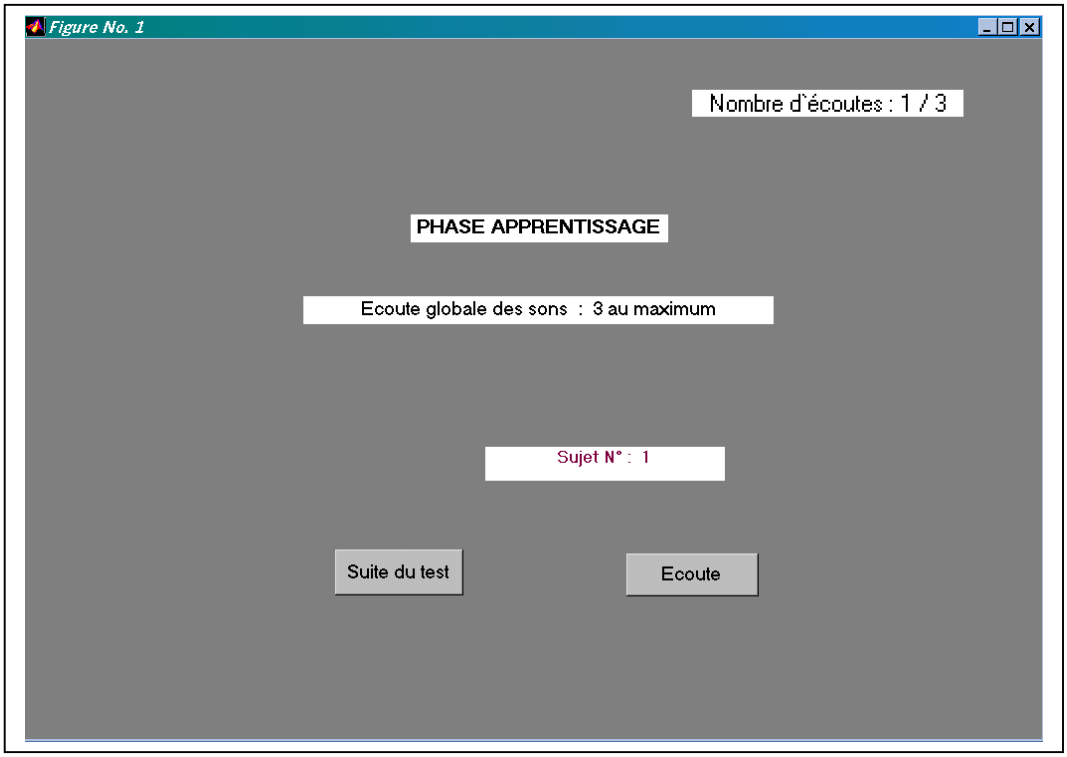


Figure A5.2. *Interface d'invitation au test de préférence.*

Une fois la phase d'apprentissage terminée, l'auditeur clique sur le bouton « suite du test » pour accéder à la fenêtre suivante.

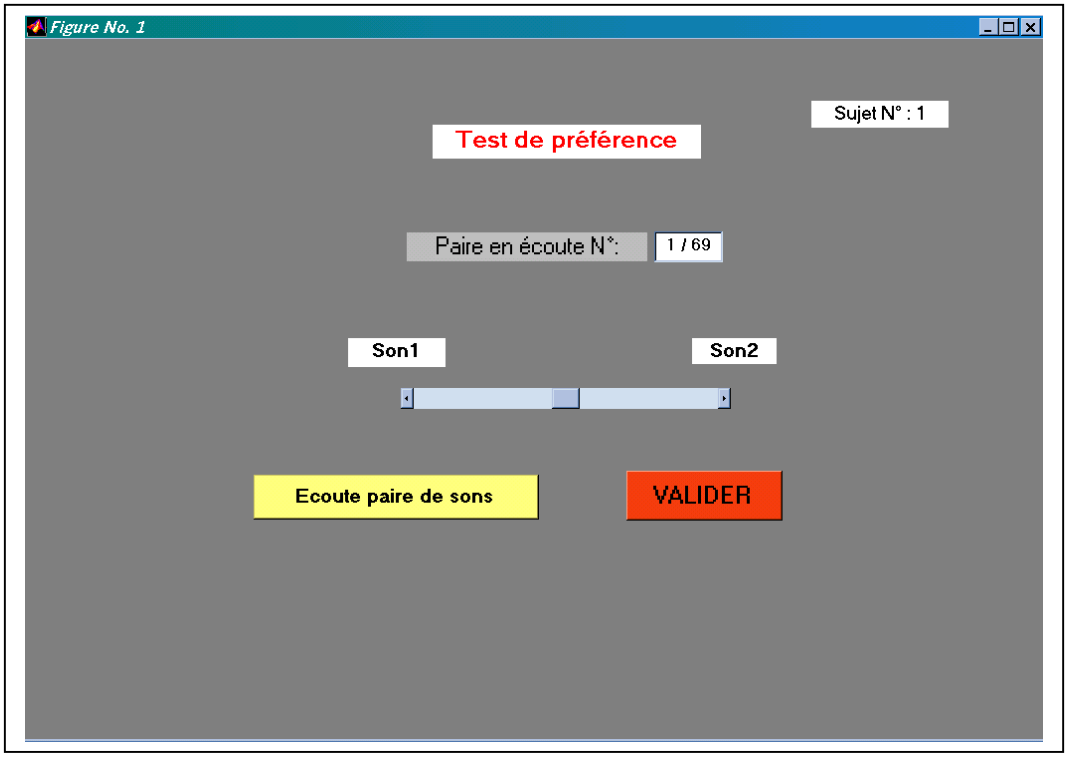


Figure A5.3. *Interface de test de préférence.*

Une fois l'auditeur aurait analysé les 69 paires de sons contenus dans le test, l'écran suivant apparaît.

Figure A5.4. *Interface remerciant l'auditeur et annonçant la fin test.*

En déplaçant le curseur, l'auditeur évalue lui-même sa préférence (subjective) pour l'un ou l'autre des deux sons. La valeur associée au curseur varie de 0 à 1 selon la position de celui-ci.

Si on note par d la valeur associée au curseur qui correspond aussi à sa distance de sa position extrême à gauche (son 1) alors le son 1 aura une préférence $p_1 = 1 - d$ et le son 2 aura une préférence égale à $p_2 = d$.

Les paires sont arrangées selon les séries de Ross (1934) permettant ainsi à ce qu'aucun son ne puisse se trouver trop proche (ou trop éloigné) d'une paire à la suivante. Pour 12 éléments, une telle série se présente sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 12 & 11 & 10 & 9 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 12 & 11 & 10 & 9 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 1 & 3 & 2 & 12 & 11 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 12 & 11 & 10 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 & 1 & 4 & 3 & 2 & 12 & 11 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 9 & 1 & 4 & 3 & 2 & 12 & 11 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 12 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 12 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Avec une telle série, les paires faisant intervenir le même son sont séparées par un maximum de 5 paires et par 4 paires au minimum. De plus, un codage aléatoire des numéros des sons permet de changer de série de Ross pour chaque auditeur tout en respectant le principe.

De plus une fois qu'une action (« clique sur le bouton ») a été entreprise, tous les boutons disparaissent de la fenêtre le temps de l'écoute, afin qu'il n'y ait aucune interférence (susceptible de planter l'ordinateur) entre la carte son d'une part et l'action demandée d'autre part.

Enfin d'autres sécurités sont ajoutées. Par exemple, l'auditeur ne peut valider son choix de préférence avant d'avoir pointé la souris sur le curseur pour être sûr qu'il ne valide pas un choix par inadvertance.

A5.2. Enregistrement et pré-analyse des résultats

Les résultats de préférence sont enregistrés dans des fichiers de données ASCII. Le nom du fichier est « pref » suivi du numéro de l'auditeur. Dans chaque fichier, nous avons trois colonnes de données numériques. Sur une même ligne, les deux premières correspondent à la paire de sons et la troisième à la valeur de préférence correspondante.

Par exemple pour les 5 premières paires de sons testées, nous pourrions avoir les résultats suivants :

```
1.2000000e+001  9.0000000e+000  1.0000000e-001
5.0000000e+000  1.0000000e+001  5.6500000e-001
1.0000000e+000  4.0000000e+000  9.7000000e-002
6.0000000e+000  7.0000000e+000  9.4700000e-001
8.0000000e+000  2.0000000e+000  6.7700000e-001
```

Ainsi pour la paire (6,7), une préférence de 0.947 indique un score local pour le son 6 et de $1 - 0.947 = 0.053$ et de 0.947 pour le son 6.

Puis en moyennant sur tous les scores de préférence faisant intervenir le son 8, nous obtenons la préférence moyenne du son 8 pour l'auditeur en question. On fait la même opération pour tous les sons et pour chaque auditeur. Puis on moyenne les résultats de préférence sur tous les auditeurs afin d'obtenir des résultats globaux de préférence par son.

ANNEXE 6

Table des valeurs $F_{\alpha}(Nu1,Nu2)$ de la variable aléatoire de Snedecor à Nu1 et Nu2 d.d.l. et ayant la probabilité α d'être dépassée.

Valeurs de la Variable de SNEDECOR

pour Alpha = 0.050

Nu2 \ Nu1	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	∞
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	238.88	243.91	245.95	248.01	250.10	252.20	254.31
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.43	19.45	19.46	19.48	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.85	8.74	8.70	8.66	8.62	8.57	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.86	5.80	5.75	5.69	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.62	4.56	4.50	4.43	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.94	3.87	3.81	3.74	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.51	3.44	3.38	3.30	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.22	3.15	3.08	3.01	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	3.01	2.94	2.86	2.79	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.85	2.77	2.70	2.62	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.72	2.65	2.57	2.49	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.62	2.54	2.47	2.38	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.77	2.60	2.53	2.46	2.38	2.30	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.46	2.39	2.31	2.22	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.40	2.33	2.25	2.16	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.35	2.28	2.19	2.11	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.31	2.23	2.15	2.06	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.27	2.19	2.11	2.02	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.23	2.16	2.07	1.98	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.20	2.12	2.04	1.95	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.18	2.10	2.01	1.92	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.15	2.07	1.98	1.89	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.37	2.20	2.13	2.05	1.96	1.86	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	2.11	2.03	1.94	1.84	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	2.09	2.01	1.92	1.82	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	2.07	1.99	1.90	1.80	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.31	2.13	2.06	1.97	1.88	1.79	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.29	2.12	2.04	1.96	1.87	1.77	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.28	2.10	2.03	1.94	1.85	1.75	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	2.01	1.93	1.84	1.74	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.92	1.84	1.74	1.64	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.10	1.92	1.84	1.75	1.65	1.53	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.02	1.83	1.75	1.66	1.55	1.43	1.25
∞	3.86	3.00	2.61	2.38	2.21	2.10	1.95	1.76	1.67	1.58	1.46	1.32	1.00