

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTE DES MATHÉMATIQUES

Thèse

En vue de l'obtention du grade de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité

Méthodes Stochastiques

Présentée par

BERBAR Hakima épouse MERAD

THEME

**ANALYSE BAYESIENNE DE MODELES A ERREURS
ARCH**

Soutenu le : 07/07/2004

Devant le jury composé de :

Mer M. BENTARZI.	Professeur	U.S.T.H.B.	Président
M ^{elle} H. GUERBYENNE.	Chargée de recherche	U.S.T.H.B.	Directrice de Thèse
Mer A. AÏSSANI.	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur
Mer O. ANES.	Maître de Conférence	I.N.P.S.	Examineur
Mer K. BOUKHETALA.	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur

REMERCIEMENTS

*Je remercie Dieu pour la force
et la persévérance dont il m'a dotée.*

A Mademoiselle GUERBYENNE Hafida qui a accepté la direction de ce travail de recherche, et qui m'a patiemment et efficacement encadrée jusqu'à son terme, j'exprime toute ma reconnaissance. Ce magister doit beaucoup à sa rigueur méthodologique. Qu'elle trouve ici l'expression de ma très profonde gratitude.

En témoignage de reconnaissance je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur Mohamed BENTARZI professeur à l'USTHB pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Monsieur Amar AISSANI professeur à l'USTHB me fait l'honneur de participer au jury de cette thèse marquant aussi l'égard qu'il porte à ce travail.

De même, Monsieur Ouali ANES maître de conférence à l'INPS de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'appartenir au jury de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Kamal BOUKHETALA professeur à l'USTHB de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury de cette thèse.

De même, j'aimerais remercier mes beaux-parents: ma belle-mère pour sa compréhension et son infinie patience, mes beaux-frères Nabil et Benali ainsi que ma belle-sœur Ryma pour leurs sympathiques encouragements et aide.

Je remercie également Amine, mon mari, qui m'a soutenue, encouragé et qui a été très patient avec moi tout le long de ce travail.

Merci aussi à mon cousin Teymour et mes frères Tarik et Moumen ainsi que ma belle sœur Souad pour leur aide et surtout leur gentillesse.

Ma gratitude va à mes parents qui m'ont toujours encouragée à donner le meilleur de moi-même.

Enfin, merci à mes amies, à ma belle-famille et à toute ma famille.

Sommaire

Introduction générale

1. Introduction	1
2. Apport et présentation de la thèse	5

CHAPITRE I

Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastique

I.1. Introduction	8
--------------------------	----------

I.2. Généralités	9
-------------------------	----------

I.2.1. Les processus stationnaires	9
------------------------------------	---

I.2.2. Les processus bruits blancs	10
------------------------------------	----

I.2.3. Les processus linéaires	10
--------------------------------	----

I.2.4. Les processus bilinéaires	12
----------------------------------	----

I.3. Les processus autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH)	13
---	-----------

I.3.1. Les processus autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques D'ordre p (ARCH(p))	13
--	----

I.3.2. Modèle GARCH d'ordre (p,q)	20
---------------------------------------	----

I.3.3. Modèle ARCH in mean (ARCH-M)	20
---------------------------------------	----

I.3.4. Modèle NARCH	21
---------------------	----

I.4. La fonction de vraisemblance d'un processus ARCH (p)	22
---	-----------

I.5. La matrice d'information de Fisher d'un processus ARCH (p)	24
---	-----------

I.6. Moment d'un processus ARCH linéaire d'ordre un	25
--	-----------

I.7. Les modèles de régression à erreurs ARCH (p)	30
---	-----------

I.8. Les modèles de position à erreurs ARCH (p)	38
---	-----------

I.9. Résolution des équations normales au moyen de l'algorithme du scores	
--	--

39

I.9.1. Présentation de méthode	39
--------------------------------	----

I.9.2. Algorithme du score pour un modèles autorégressifs d'ordre q à erreurs ARCH (p)	41
---	----

I.10. Applications numériques	43
I.11. Algorithme du score pour un processus répondant à un modèle de position à erreurs ARCH (p)	62
I.12. Applications numériques	64
I.13. Conclusion	74

CHAPITRE II

L'Analyse Bayésienne et le Griddy Gibbs Sampling

II.1. Introduction	75
II.2. Généralités	76
II.2.1. Loi a priori	76
II.2.2. Loi de probabilité a posteriori	76
II.2.3. Mode a posteriori	76
II.3. Lois de probabilité marginales	76
II.4. Méthode du Gibbs Sampling	77
II.4.1. Présentation du Gibbs Sampling	77
II.4.2. Comment les lois conditionnelles déterminent les lois marginales	
78	
II.4.3. Le choix de k	80
II.4.4. Algorithme du Gibbs Sampling	81
II.5. Le Griddy Gibbs Sampling	82
II.5.1. Les démarches de la méthode	82
II.5.2. Algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour l'estimation de p paramètres	84

CHAPITRE III

Analyse bayésienne d'un modèle autorégressifs à erreurs ARCH

III.1. Introduction	86
III.2. Modèles autorégressifs à erreur ARCH	87

III.3. Les lois de probabilité a posteriori des différents paramètres du modèle	87
III.4. L'algorithme du Griddy Gibbs Sampling	89
III.4.1. Algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour un AR (q) à erreurs ARCH (p)	90
III.4.2. Applications numériques	92
III.5. Conclusion	127

CHAPITRE IV

Analyse bayésienne d'un modèle de position à erreurs ARCH

IV.1. Introduction	128
IV.2. Modèle de position à erreurs ARCH	129
IV.3. Les lois de probabilité a posteriori des différents paramètres du modèle	129
IV.4. L'algorithme du Griddy Gibbs Sampling	131
IV.4.1 Algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour un modèle de position à erreurs ARCH (p)	131
IV.4.2. Applications numériques	133
IV.5. Conclusion	156
Conclusion générale	158
Bibliographie	160

Introduction générale

1. Introduction

Depuis l'introduction des modèles autorégressifs par Yule en 1927 et jusqu'au début des années 1980, les séries chronologiques ont été dominées par la référence aux modèles ARMA. Ces modèles ont connu, depuis que Wold les a étudiés de façon systématique et, en particulier après l'apparition de l'ouvrage de Box et Jenkins (1970) qui les a rendus populaires, un développement considérable tant dans le domaine pratique que théorique. Mais ces formulations classiques, fondées sur l'idée fondamentale que la variance est constante, se révèlent insuffisantes pour de nombreuses séries, en particulier celles de la finance (taux d'intérêt, taux de change, prix d'actifs,...), qui présentent une caractéristique de dynamique non linéaire dont la plus importante est le fait que leur variabilité instantanée (volatilité) est une fonction du temps. La volatilité a d'abord été remarquée par Mandelbrot (1963 a,b) et Fama (1965) (in Gouriéroux (1992)), mais elle n'a été maîtrisée et utilisée de façon adéquate qu'en 1982 grâce à Engle. De façon typique, on remarque que, pour ces séries, les périodes où la volatilité est élevée se succèdent ainsi que celles où elle est relativement plus faible. Les modèles ARCH (Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique) introduit par Engle (1982) sont une alternative au cadre classique insuffisant des modèles ARMA. Ils reposent sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle et permettent, par conséquent, la prise en compte de ce type de propriétés. En effet Engle, dans des travaux publiés en 1982, a mis l'accent sur l'importance de la variance de l'erreur. Les représentations classiques partent de l'idée que cette variance est constante. Cette hypothèse reflète cependant, bien souvent incorrectement, la réalité. Engle a cité l'étude sur la moyenne et la variance de l'inflation au Royaume Uni ; il préconise des perturbations hétéroscédastiques, c'est à dire, à variance non

constante dépendant du carré des perturbations passées. Un processus est un processus ARCH d'ordre si:

où est la tribu engendrée par le passé du processus jusqu'au temps (en d'autres termes, représente l'information dont on dispose au temps).

Le signe signifiant « de loi de probabilité ».

La littérature consacrée aux modèles ARCH a eu souvent un développement très rapide. Il a été remarqué qu'ils nécessitaient souvent un ordre relativement élevé pour être modélisables, en pratique, en particulier lorsqu'on tente d'identifier un modèle ARCH (q) linéaire. Bollerslev (1986) a étendu les modèles ARCH aux modèles GARCH qui combinent la parcimonie dans les paramètres et la flexibilité dans la structure de retard, par analogie aux modèles ARMA, dans la variance conditionnelle. Les modèles ARCH généralisés (Bollerslev (1986)), ou GARCH, sont une solution alternative qui a l'avantage de retenir une structure de retard plus souple. Engle et Bollerslev (1986) ont utilisé une loi de Student au lieu de la loi de Gauss pour les erreurs pour mieux prendre en charge l'excès de Kurtosis contenu généralement dans les données financières. Plusieurs généralisations non linéaires de la variance conditionnelle ont été proposées, en particulier, pour permettre une réponse asymétrique de la variance conditionnelle à un choc antérieur. Nous citerons comme exemple les modèles bilinéaires proposés par Granger et Andersen (1978) (et dont Subba Rao et Gabr (1980) donnèrent une excellente rétrospective), et les modèles non linéaires proposés par Jones (1965) et Priestley (1978).

La classe des modèles ARCH qui a donné lieu à une littérature abondante, a été utilisée en finance et a permis de vérifier certaines théories financières telle que l'APT ("Arbitrage Pricing Theory") par les modèles ARCH-M qui sont les ("ARCH in Mean"). Boukerdenna (2002) a donné les conditions de stationnarité et a estimé les paramètres d'un modèle AR(q) à erreur ARCH(p) dans le cas périodique par la méthode du maximum de vraisemblance, les estimations correspondantes sont obtenues par le biais de l'algorithme du score. Les propriétés statistiques des modèles ARCH ont d'abord été étudiées par Weiss

(1986a) et Milhoj (1984) puis par Bera et Higgins (1994) et Bollerslev et al (1994). De nombreux travaux ont été effectués sur les modèles ARCH. Engle (1983) s'est basé sur des données réelles de l'inflation qui suivent un modèle ARCH pour estimer la variance. Geweke (1989b) explique comment les densités prédictives exactes peuvent être obtenues dans le cas de modèles ARCH moyennant la méthode d'intégration de Monte Carlo et l'échantillonnage d'importance qui a déjà été utilisé dans Hammersley et Handscomb (1964), Kloek et Van Dijk (1978) et Geweke (1986c). Weiss (1984) a modélisé treize séries chronologiques macro-économiques à l'aide de modèles ARMA à erreurs ARCH. Engle, Hendry et Trumble (1985) ont aussi étudié les modèles autorégressifs à erreurs ARCH. Des tests ont été proposés et les conditions de stationnarité et d'ergodicité établies dans Engle (1982), et Bollerslev (1986). La volatilité a été aussi mise en relief par les résultats obtenus par French et al (1987), Black (1976). Il a été constaté que la volatilité est soixante dix fois plus grande quand les marchés sont ouverts, que lorsqu'ils sont fermés. Il a été remarqué que, bien que la méthode du maximum de vraisemblance (les estimations étant obtenues par le biais de l'algorithme du score) a l'avantage d'être rapide, elle ne respecte pas les conditions imposées sur les paramètres sans lesquels nous n'aurions pu garantir une variance positive. Bose et Mukherjee (2003) proposent un estimateur des moindres carrés en deux étapes d'un modèle ARCH pur. Ils montrent que les performances de celui-ci sont meilleures que celles du quasi maximum de vraisemblance et tout particulièrement pour les échantillons de petites tailles. Une alternative est, l'inférence bayésienne qui combine l'information a priori sur le paramètre à estimer, qui est l'information initiale dont nous disposons, avec l'information apportée par l'échantillon. L'inférence bayésienne bute souvent devant le calcul explicite des lois de probabilité a posteriori. Pour répondre à cela, des méthodes fondées sur les chaînes de Markov, appelées méthodes MCMC (Monte Carlo Markov Chain) ont été développées. La méthode d'intégration de Monte Carlo est une méthode qui permet de générer un échantillon d'une variable d'intérêt sans avoir recours au calcul explicite de sa loi de probabilité marginale qui nécessite souvent le calcul d'intégrales multiples, cet objectif étant souvent difficile à atteindre. Parmi les méthodes existantes inspirées de l'inférence bayésienne, nous citons par exemple l'échantillonnage d'importance appliqué aux modèles ARCH et GARCH: Geweke(1989a) et Kleibergen et Van Dijk (1993). Nakatsuma (2000), utilise l'analyse bayésienne et une pseudo-vraisemblance pour estimer les paramètres d'un modèle ARMA à erreurs GARCH réécrit sous la forme d'un modèle ARMA, en s'inspirant de la démarche de Chib et Greenberg (1994). Une autre méthode basée sur les méthodes MCMC (Monte Carlo Markov Chain) pour estimer les paramètres d'un modèle en utilisant l'approche bayésienne

est la méthode de Metropolis-Hastings(1970);elle a été développée par Metropolis et al (1953) et revue par Hastings (1970). Cette technique a été appliquée à un modèle de régression linéaire à erreurs ARMA(p,q), Chib et Greenberg(1994), et à un modèle de régression linéaire à erreurs GARCH, Müller et Pole (1995). En fait la méthode du Gibbs sampling apparut grâce aux travaux de Geman et Geman (1984) sur le traitement d'image, fut inspirée d'abord de l'algorithme de Metropolis et al (1953) amélioré par Hastings en 1970. Grâce aux travaux de Gelfand et Smith (1990) il y eut un regain d'intérêt pour le Gibbs Sampling. Ces auteurs ont montré son utilité dans des problèmes statistiques. La méthode du Gibbs Sampling est une technique qui permet d'approcher la distribution marginale sans avoir à la calculer explicitement, en se basant seulement sur les propriétés des chaînes de Markov. Cette méthode a été beaucoup utilisée dans le cadre bayésien (Tanner (1991)), Hemis(1999), Slama(1997), Houaoui (1998), Casella et George (1992), Tanner et Wong (1987), Raftery et Banfield (1990), George et Mc Culloch (1991) ont également adopté le le Gibbs Sampling ainsi que Gelman et Rubin (1991), Geyer, Müller (1991), Ritter et Tanner (1992), Tierney (1991). Comme il a été souligné précédemment, le Gibbs Sampling permet de générer des échantillons à partir de la densité marginale sans avoir à la calculer (et donc d'éviter le calcul d'intégrales simples ou multiples), en fait l'utilité de cette méthode augmente avec la dimension du paramètre à estimer; Devroye (1986), Ripley (1987), Gilks et Wild (1992). Dellaportas et Smith (1990) l'ont appliquée aux modèles linéaires généralisés en s'inspirant des travaux de Gilks et Wild), Zeger et Rizault Karim (1991). D'autres travaux ont été effectués sur l'échantillonnage de Gibbs: Diebold et Robert (1990), Eddy et Schervish (1990), Churchill et Casella (1991), Lange et al (1990). Mais les avantages que nous en tirons, sont que la méthode du Gibbs Sampling a ses limites. En effet puisque nous avons supposé implicitement que les densités a posteriori que nous utilisons pour générer nos variables sont de type connu (Carlin et Gelfand (1991)), (par exemple: loi normale ou loi exponentielle), c'est à dire que nous avons la possibilité de générer directement à partir des densités conditionnelles par ordinateur. Mais plusieurs cas se présentent où la loi a posteriori n'est pas de type connu et où la fonction de répartition est incalculable. Le Griddy Gibbs Sampling (Ritter et Tanner (1992)), permet de faire face à ces difficultés. C'est un algorithme inspiré du Gibbs Sampling, qui permet de générer des échantillons à partir de la loi de probabilité a posteriori conditionnelle dont la forme n'est pas connue. En fait cette méthode consiste d'abord à calculer la fonction de répartition du paramètre par des méthodes d'intégration numériques (Davis et Rabinowitz (1975)), ensuite à inverser cette fonction vers la variable aléatoire d'intérêt après avoir simulé une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle

[0,1]. Cette méthode a été utilisée dans l'estimation des paramètres d'un modèle ARCH (1) (Bauwens et Lubrano(1998)). En effet comme nous le verrons par la suite la densité a posteriori du paramètre du modèle n'est pas de type connu, et de plus le calcul de la densité marginale est analytiquement compliquée, d'où la nécessité de faire appel à cet algorithme plus approprié, qu'est le Griddy Gibbs Sampling.

2. Apport et présentation de la thèse

Bauwens et Lubrano (1998) adoptant l'analyse bayésienne n'ont considéré que le cas où $\rho = 1$ lorsque les erreurs suivent une loi de probabilité gaussienne, centrée réduite.

Dans ce travail nous effectuons une extension au cas où ρ est quelconque et inconnu, d'une part pour un modèle autorégressif d'ordre q à erreurs ARCH(p) et d'autre part pour un modèle de position à erreurs ARCH(p). A notre connaissance ce travail n'a pas été entrepris auparavant. Nous proposons l'adaptation à ce contexte de deux algorithmes fondée sur le Griddy Gibbs Sampling (Ritter et Tanner (1992)) pour estimer les paramètres dans les deux modèles suscités à l'aide du mode a posteriori.

Le programme informatique a été écrit en langage Matlab sous environnement Windows. Une étude de simulation intensive a été menée pour différentes tailles d'échantillons et différentes valeurs des paramètres, afin de comparer les performances de l'estimateur MLE (Maximum Likelihood Estimator) classique donné par l'algorithme du score - que nous avons présenté dans le détail et dont nous avons écrit le programme informatique - et le mode a posteriori. Bien que très coûteuse, l'analyse bayésienne donne de meilleures estimations que l'analyse classique au sens du critère RMSE (Root Mean Square Error)

CHAPITRE I

Modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques

Nous consacrons cette partie à une présentation de certains processus linéaires et non linéaires, ainsi qu'à l'introduction des processus autorégressifs conditionnellement

hétéroscédastiques (les processus ARCH). Nous avons présenté quelques caractéristiques principales de ce type de processus.

Emboitant le pas à Engle (1982), nous utilisons l'algorithme du score pour déduire les estimateurs des différents paramètres d'une part d'un modèle autorégressif à erreurs ARCH et d'autre part d'un modèle de position à erreurs ARCH. Un programme informatique a été écrit en langage Matlab et une étude de simulation intensive a été menée pour différentes tailles d'échantillons et différentes valeurs des paramètres.

CHAPITRE II

L'analyse Bayésienne et le Griddy Gibbs Sampling

Dans cette partie nous présentons l'analyse bayésienne, et ses outils fondamentaux que sont les lois a priori et a posteriori, la méthode du Gibbs Sampling son utilité et ses limites, et nous introduisons la méthode du Griddy Gibbs Sampling comme une extension du Gibbs Sampling, qui permet de gérer les difficultés rencontrées par le Gibbs Sampling.

CHAPITRE III

Analyse bayésienne d'un modèle autorégressif à erreurs ARCH

Dans cette partie, nous effectuons une extension des travaux de Bauwens et Lubrano (1998) au cas où ρ est quelconque et inconnu pour un modèle autorégressif à erreurs ARCH. Nous adaptons l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling (Ritter et Tanner (1992)) à ce contexte. Une étude de simulation intensive a été menée pour différentes tailles d'échantillons et différentes valeurs des paramètres afin de comparer les performances du mode a posteriori obtenu grâce au Griddy Gibbs Sampling (G.G.S) et la méthode du MLE (Maximum Likelihood Estimator) obtenu par l'algorithme du score au sens du RMSE.

CHAPITRE IV

Analyse bayésienne d'un modèle de position à erreurs ARCH

Dans cette partie, nous effectuons une extension des travaux de Bauwens et Lubrano (1998) au cas où β est quelconque et inconnu pour le même modèle de position à erreurs ARCH. Nous adaptons l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling (Ritter et Tanner (1992)) à ce contexte. Une étude de simulation intensive a été menée pour différentes tailles d'échantillons et différentes valeurs des paramètres afin de comparer les performances du mode a posteriori obtenu grâce au Griddy Gibbs Sampling et le MLE (Maximum Likelihood Estimator) obtenu par l'algorithme du score au sens du RMSE.

CHAPITRE I

Modèles Autorégressifs

Conditionnellement

Hétéroscédastiques

I.1. Introduction

Dans ce premier chapitre nous présentons les processus linéaires et certains processus non linéaires. Nous donnerons leurs conditions de stationnarité et d'inversibilité. Les applications pratiques soulignent les limites de la modélisation linéaire à variance constante et la nécessité de faire l'extension à des modèles plus sophistiqués susceptibles de prendre en charge certains aspects que peuvent présenter des données économiques, financières ou autres, en particulier une variabilité instantanée ou volatilité, laquelle, si elle n'est pas prise en charge peut conduire à des estimations des paramètres complètement erronées. Le pionnier dans ce domaine est Engle (1982). De nombreux travaux suivirent ; en particulier, Weiss (1984) a utilisé ce cadre pour modéliser 13 séries de données macroéconomiques et Pantula (1988) a considéré un processus autorégressif à erreurs ARCH et donné des propriétés d'ergodicité du modèle lorsque les erreurs suivent un ARCH(1). La consistance et la normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance sont présentés. Les lois de probabilité asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés et d'un estimateur des moindres carrés généralisés sont déduites.

I.2. Généralités

Dans ce premier chapitre nous faisons un rappel sur les processus linéaires et certains processus non linéaires.

Définition 1

Un processus stochastique ou aléatoire, $(X_t)_{t \in T}$ (ou noté X), est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) désignera la tribu engendrée par le passé du processus jusqu'au temps t .

I.2.1. Les processus stationnaires

Définition 2

$(X_t)_{t \in T}$ est un processus faiblement stationnaire (ou stationnaire du second ordre) si et seulement si:

(La covariance du processus ne dépend que de la différence entre les indices des deux variables. $\gamma(h)$ est appelée fonction d'autocovariance).

Définition 3

$(X_t)_{t \in T}$ est un processus fortement (ou strictement) stationnaire si et seulement si:
 X_t et X_{t+h} sont de même loi de probabilité

I.2.2. Les processus bruits blancs

Définition 4

$(X_t)_{t \in T}$ est un bruit blanc faible si et seulement si:

$E[X_t] = 0$ représente l'espérance conditionnelle linéaire et $\gamma(h)$ représente la variance du processus.

Définition 5

est un bruit blanc fort si et seulement si les ϵ_t sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées .

Définition 6

Le processus X_t est une différence de martingale homoscédastique si et seulement si:

(L'espérance conditionnelle est nulle et la variance est constante)

Définition 7

Le processus X_t est une différence de martingale hétéroscédastique si et seulement si:

(L'espérance conditionnelle est nulle et la variance conditionnelle est non constante)

I.2.3. Les processus linéaires

Grâce aux travaux de Box et Jenkins (1970), les modèles linéaires ont connu un grand rebondissement. Les méthodes d'exploitation de ces processus se résument en trois étapes: identification, estimation, validation.

Parmi les processus linéaires nous citerons:

1) Les processus autorégressifs

Définition 8

est un processus autorégressif d'ordre p (noté $AR(p)$) s'il est solution d'une équation stochastique du type:

(où ϵ_t est un bruit blanc et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les paramètres du modèle).

Proposition 1

Le processus $AR(p)$ est stationnaire si et seulement si les racines du polynôme caractéristique sont en dehors du cercle unité.

2) Les processus moyenne mobile**Définition 9**

est un processus moyenne mobile d'ordre q (noté $MA(q)$) s'il est solution d'une équation du type :

(où ε_t est un bruit blanc et θ_j sont les paramètres du modèle).

Proposition 2

Le processus $MA(q)$ est inversible si et seulement si les racines du polynôme caractéristique sont en dehors du cercle unité.

3) Les processus mixtes (autorégressifs moyenne mobile)**Définition 10**

est un processus mixte (noté $ARMA(p,q)$) d'ordre (p,q) s'il est solution de l'équation:

Seulement ce type de processus n'est pas suffisant pour gérer certains problèmes de modélisation, en particulier dans le domaine financier et monétaire (cours boursier,..) afin de parer à ce manquement, des modèles non linéaires ont été proposés.

Proposition 3

Le processus $ARMA(p,q)$ est stationnaire si et seulement si les racines du polynôme caractéristique sont en dehors du cercle unité.

Proposition 4

Le processus ARMA(q) est inversible si et seulement si les racines du polynôme caractéristique sont en dehors du cercle unité.

I.2.4. Les modèles bilinéaires

Un certain nombre de modèles non linéaires ont été proposés, parmi eux les modèles bilinéaires proposés par Granger et Andersen (1978). Le cas le plus simple des modèles bilinéaires est:

(telle que ϵ_t est un bruit blanc avec

Un calcul simple donne:

mais:

La variance conditionnelle dépend du temps, malheureusement la variance non conditionnelle n'existe pas toujours.

Dans le but de parer à ces insuffisances, un autre type de modèles a été proposé

I.3. Les processus autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH)

Ce type de processus ont été modélisés pour la première fois par Engle en 1982. Le cas le plus simple des modèles utilisés est le modèle ARCH d'ordre 1.

I.3.1. Les processus autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques d'ordre p (ARCH (p))

Définition 11

Un processus X_t admet une représentation ARCH(p), s'il est solution de l'équation stochastique:

($\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les paramètres inconnus du modèle)

Ce qui équivaut à:

Théorème1 (Engle 1982)

Le processus ARCH(p) avec $\omega > 0$ est stationnaire au second ordre si et seulement si l'équation caractéristique associée a toutes ses racines à l'extérieur du cercle unité. La variance stationnaire est donnée par:

Démonstration

Posons

D'où

car

D'où:

Nous avons

En continuant de la même façon jusqu'à l'ordre k , nous obtenons

Le processus est stationnaire si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ existe, c'est-à-dire que la série: $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge, ce qui nécessite que $\|A\| < 1$ converge vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$. Ce qui est équivalent à dire que toutes les valeurs propres de A sont à l'intérieur du cercle unité.

D'où lorsque

et

Or: $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$ et nous voulons calculer $(I - A)^{-1}$ qui est le premier élément de

Après un calcul rapide, nous trouvons:

Le déterminant de $(I - A)^{-1}$ est

D'où

Comme ceci à été spécifié dans l'article d'Engle 1982, nous pouvons proposer d'autres formulations pour la variance

Pour le premier cas la variance a l'avantage d'être positive sans mettre de restriction sur α_1 , mais les données générées à partir d'un tel modèle ont une variance infinie pour toute valeur de α_1 différente de 0 (Engle (1982)). Quand au second cas, la variance n'est positive qu'à condition que $\alpha_1 < 1$, mais l'avantage est que la variance est finie.

Dans le but d'introduire des conditions plus générales sur la variance du processus qui ne concerneraient pas que les modèles linéaires, Engle (1982) a défini les processus symétriques et réguliers.

Soit

$$\mathbf{z}_m = \begin{pmatrix} z_{m1} \\ \vdots \\ z_{m\ell} \\ z_{m\ell+1} \\ \vdots \\ z_{mp} \end{pmatrix} \text{ un vecteur aléatoire de l'espace } \Sigma \text{ et} \quad (I.3.2)$$

avec $1 \leq m \leq p$ qui est le vecteur dans lequel la ℓ composante est remplacée par son symétrique.

Nous définissons le processus ARCH général d'ordre p par

Définition 12

Le processus ARCH défini par ces deux relations est symétrique si et seulement si:

Définition 13

Le processus ARCH défini par (1) est régulier si et seulement si

Théorème 2 (Engle1982)

Le modèle linéaire ARCH(p) est régulier si

Démonstration

(a) Pour la première condition nous avons:

D'où

(b) Pour la seconde condition nous devons montrer que:

Nous avons:

existe car la densité conditionnelle est normale.

Posons

Alors:

Premier cas

$$i+j=m:$$

qui existe pour la raison que nous avons donné dans le premier cas ci-dessus.

Deuxième cas

$$i+j>m:$$

Troisième cas

$$i+j<m:$$

alors nous avons

Et nous procédons de la même façon que précédemment.

Nous remarquons que cette expression existe car elle ne dépend que des moments d'ordre trois du processus et de son moment absolu d'ordre un, et qu'elle ne contient qu'un nombre fini de termes.

et est fini.

Nous pouvons donc conclure que le modèle ARCH(p) est régulier.

I.3.2. Modèle GARCH d'ordre (p,q)

Il est vrai que les modèles ARCH sont une représentation de qui n'obéissent pas à une structure linéaire et de variance conditionnelle non constante dans le temps seulement cette modélisation s'avère dans certains cas, insuffisante, notamment lorsque la série présente une longue mémoire ; l'estimation sans structure de retards imposée mène souvent à la violation des contraintes de positivité des paramètres.

C'est dans cette optique et par analogie avec les travaux de Box et Jenkins (1970) que Bollerslev (1986) a introduit les modèles ARCH généralisés. L'idée sous-jacente de l'extension des modèles ARCH aux modèles GARCH trouve sa source dans l'extension faite par Box et Jenkins (1970) des modèles AR (autorégressifs) aux modèles ARMA (autoregrésifs moyenne mobile).

Un modèle GARCH(p,q) est défini par les équations stochastiques suivantes:

I.3.3. Modèle ARCH in mean (ARCH-M)

Ce genre de modèle était nécessaire dans le domaine de l'évaluation d'actifs financiers à cause de sa structure qui permettait le calcul de la prime de risque; "Les modèles de séries chronologiques pour actif financier devraient donc à la fois mesurer le risque, tenir compte de l'évolution de ce risque au cours du temps et l'inclure comme déterminant du prix."(1)

Ils sont connus sous la dénomination ARCH in mean (ARCH dans la moyenne) à cause de la présence de l'écart- type dans la moyenne conditionnelle du processus : Ce type de modèle revient à Engle et Lilien-Robbins (1987).

est le vecteur représentant la *tème* ligne d'une matrice x donnée et b est un vecteur de paramètres à estimer.

I.3.4. Modèle NARCH

La différence entre les modèles ARCH et les modèles NARCH est que ces derniers proposent une structure non linéaire de la variance conditionnelle, qui a l'avantage de modéliser plusieurs type de séries.

Un modèle NARCH d'ordre p se présente comme suit:

Il existe plusieurs types d'extension, comme par exemple les modèles TARCH, IGARCH, E-GARCH,..

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'étude des modèles ARCH.

(1) in "Modèles conditionnellement hétéroscédastiques" Olivier Scaillet

I.4. La fonction de vraisemblance d'un processus ARCH(p)

Soit $\{y_t, t \in Z\}$ un processus généré par un modèle ARCH d'ordre p , c'est-à-dire qu'il est solution des équations stochastiques suivantes :

où σ^2 et, ceci pour assurer la positivité de la variance conditionnelle et de la variance non conditionnelle de y_t

Comme le montre l'équation (I.4.1) le processus y_t que nous avons défini a toutes ses observations, conditionnellement au passé, normalement distribuées et comme nous ne disposons que des densités conditionnelles, alors nous exprimerons la fonction de vraisemblance en fonction de ces densité conditionnelles.

Soit L la fonction de vraisemblance et soit θ le vecteur des paramètres inconnus. Nous notons par f la fonction densité et T où T un entier positif.

$$(I.4.2)$$

Mais nous savons (en supposant que les valeurs initiales y_0 sont données) :

De même nous savons que y_1 c'est à dire:

En continuant jusqu'au k ème élément, nous aurons:

tel que y_k , d'où la fonction de vraisemblance:

$$(I.4.3)$$

c'est à dire:

- **Calcul de la dérivée première et seconde de la fonction de vraisemblance**

Nous avons:

Avec

Nous avons

I.5. La matrice d'information de Fisher d'un processus ARCH(p)

L'information de Fisher sur le paramètre θ apportée par l'échantillon

(I.5.1)

En remplaçant la fonction l par son expression

Mais par hypothèse nous avons

Mais comme θ est indépendant de l'information passée

D'où

Alors

Un estimateur consistant de θ est

Nous pouvons exprimer la matrice d'information de Fisher autrement, en effet en posant :

nous savons que

D'où

Alors

(I.5.2)

I.6. Moment d'un processus ARCH linéaire d'ordre un

Le modèle le plus simple parmi les modèles ARCH est le modèle ARCH(1) qui est défini par

Théorème 3 (Engle 1982)

En supposant que le processus démarre infiniment loin dans le passé avec les $2r$ premiers moments finis, alors le moment d'ordre $2r$ existe si et seulement si avec r un entier naturel non nul.

Démonstration

Engle a proposé une démonstration succincte de ce théorème, nous en proposons le détail.

Posons

Nous avons

Mais nous savons que

Mais comme les X_i sont des variables aléatoires indépendantes alors

Après un calcul rapide nous avons

Comme m (ensemble des nombres rationnels)

Dans toute la suite nous posons

Nous avons

Or nous savons que

D'où

D'après ces r égalités nous remarquons que

Nous posons

D'où

Or d'après ce qui précède

D'où pour $k > 0$

Mais

D'où

En continuant le procédé jusqu'à l'ordre k nous obtenons

La limite de $\|A^k\|$ existe, lorsque k tend vers l'infini, si et seulement si
lorsque

Mais nous savons que $\|A^k\| < 1$ si et seulement si les valeurs propres de la matrice A sont à l'intérieur du cercle unité. Or A est une matrice triangulaire supérieure, alors ses valeurs propres ne sont autres que ces éléments diagonaux.

Et

(I.6.2)

Application numérique

Pour $r=2$ nous avons

D'où

D'après le **théorème 3** :

existe si et seulement si $\rho < 1$ et existe si et seulement si $\rho < 1$

I.7. Les modèles de régression à erreurs ARCH(p)

Les modèles de régression à erreurs ARCH ne sont autres qu'une extension des modèles ARCH (dont les propriétés asymptotiques sont discutées dans Weiss (1986)). En fait ce type de modèle s'écrit comme combinaison linéaire de variables exogènes plus un terme d'erreur qui suit un modèle ARCH. Plus exactement, si $\{y_t; t \in Z\}$ est un processus qui obéit à un modèle de régression à erreurs ARCH(p) alors :

x_t est la $t^{\text{ième}}$ ligne d'une matrice x de dimension $T \times k$ et β est un vecteur colonne de dimension k . \mathcal{F}_t est la tribu engendrée par le passé du processus. Comme nous ne disposons que des densités conditionnelles, alors nous exprimerons la fonction de vraisemblance comme suit

Soit

Alors
$$L(\beta) = \prod_{t=1}^T f(y_t | x_t, \beta, \mathcal{F}_t) \quad (I.7.2)$$

Avec

Or, par hypothèse,

Donc

et

Posons

alors

Or

donc

D'où

(I.7.5)

Mais nous savons que

donc

et

Posons $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, nous aurons dans le second terme

Mais comme le processus est stationnaire au second ordre c'est à dire

Alors

(I.7.7)

Nous déduisons

Avec

De plus pour la dérivée seconde nous avons

et donc

(I.7.9)

Prenons l'espérance conditionnelle de cette quantité

Car

Or nous savons que la matrice d'information de Fisher pour θ est

Ceci après avoir effectué le changement de variable $\tau = t - t_0$ or comme le processus est stationnaire au second ordre alors

avec

De façon similaire nous calculerons $\gamma_{xx}(\tau)$, en effet nous avons

et donc

Si nous calculons l'espérance conditionnelle de

D'où

(I.7.13)

Nous verrons dans le théorème suivant que et donc notre matrice d'information de Fisher serait une matrice diagonale blocs, d'où l'estimation de l'un des paramètres pourra se faire indépendamment de l'estimation de l'autre.

Théorème 4

Soit un processus défini par les équations précédentes. Si le modèle est symétrique et régulier alors

Lemme

Soient u et v deux variables aléatoires, g une fonction de u et v antisymétrique en v telle son espérance existe; si la densité conditionnelle de u sachant v est symétrique en v , alors $E(g(u,v)/v)$ est antisymétrique en v

Preuve du lemme

Nous voulons montrer que $E(g(u,v)/v)$ est antisymétrique en v .

Nous avons $E(g(u,-v)/-v) = E(-g(u,v)/-v)$

$$= -E(g(u,v)/-v) \text{ (ceci car } g \text{ est antisymétrique en } v)$$

De plus nous avons $E(g(u,v)/-v) = E(g(u,v)/v)$ (car la densité conditionnelle est symétrique)

D'où $E(g(u,-v)/-v) = -E(g(u,v)/-v)$

$$= E(g(u,v)/v)$$

Nous concluons que $E(g(u,v)/v)$ est antisymétrique en v

Preuve du théorème

Nous avons

Or

D'où

Or nous savons que

D'où

Ce qui nous donne

Pour $i=1, \dots, p$ et $j=1, \dots, k$ nous avons

Considérons la quantité

ceci selon la condition b) de régularité.

Alors

D'où

Considérons à nouveau l'expression

Nous savons que

Avec

Or

De plus

est une fonction paire et g est une fonction impaire car est une fonction paire en , de plus est une fonction impaire en , d'où est une fonction impaire alors d'après le lemme est une fonction impaire en , c'est à dire est une fonction impaire. Alors notre expression qui contient l'intégrale de est une fonction impaire. Mais nous savons que l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine symétrique est nulle, c'est-à-dire que

D'où

D'où

C'est à dire

I.8. Les modèles de position à erreurs ARCH(p)

Le modèle de position à erreurs ARCH n'est autre qu'un cas particulier du modèle de régression avec constante à erreurs ARCH, avec , $\omega = 1$ et la constante .(est le paramètre de position).

I.9. Résolution des équations normales au moyen de l'algorithme du score

Les estimations des paramètres d'un modèle ne peuvent pas toujours être calculées de façon explicite à partir des équations normales obtenues en appliquant la méthode du maximum de vraisemblance. L'algorithme du score, fondé sur un développement limité à l'ordre un de la fonction score au voisinage, par exemple, d'une estimation par la méthode des moindres carrés, considérée comme valeur initiale pour l'algorithme, permet de lever cette difficulté d'ordre technique et fournit pour l'étape suivante une estimation du paramètre d'intérêt qui est une fonction linéaire de l'estimation du même paramètre, mais obtenue à l'étape précédente. Cette méthode fut introduite d'abord par Berndt et al (1974), et fut non seulement utilisée par Engle (1982) mais par bien d'autres chercheurs : Dhrymes et Taylor (1976), Pantula (1985) pour l'estimation d'un modèle autorégressif à erreurs ARCH, ainsi que Bollerslev (1986) pour l'estimation d'un modèle de régression à erreurs GARCH.

I.9.1. Présentation de la méthode

Dans un modèle de régression à erreurs ARCH, la matrice d'information est diagonale blocs (**Théorème 4**), en effet puisque $I(\beta) = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$. Ce qui est très avantageux, puisque ceci nous permet d'estimer nos paramètres β_1 et β_2 séparément. De plus chacun peut être estimé de façon efficace en se basant sur un estimateur consistant de l'autre (Cox et Hinkley (1974), in Engle (1982)).

Les étapes dans l'algorithme du score se font comme suit :
D'abord nous devons calculer l'estimateur des moindres carrés ordinaires de β_1 . Nous noterons $\hat{\beta}_1$ l'estimation correspondante et qui représentera la valeur avec laquelle nous initialiserons nos itérations. Avec les résidus obtenus de cette opération, nous calculerons un estimateur de β_2

que nous noterons $\hat{\beta}_0$ et que nous prendrons comme valeur initiale de β pour commencer nos itérations. Nous le calculons à l'aide de la méthode des moindres carrés.

Pour $i > 0$ nous calculons $\hat{\beta}_i$ à la i itération par la formule suivante

$$(I.9.1)$$

qui sera l'estimateur de β à la i étape à partir de l'estimateur de β à la $i-1$ étape, calculé pour $i-1$ par la formule suivante

$$(I.9.2)$$

où I_i sont les matrices d'information de β à la i itération et de β à la $i-1$ itération, respectivement. De même β_i et β_{i-1} sont la dérivée première de β à la i itération et de β à la $i-1$ itération, respectivement.

Après avoir fait quelque substitutions dans les équations nous obtenons

$$(I.9.3)$$

$$(I.9.4)$$

avec

$$(I.9.5)$$

$$(I.9.6)$$

$$(I.9.7)$$

$$(I.9.8)$$

Ceci pour la première formule, pour la seconde nous avons

$$(I.9.9)$$

$$(I.9.10)$$

où β_i sont les valeurs de β à la i itération. (β_i définis dans la section précédente) et r_i représente les résidus à l'étape i

I.9.2. Algorithme du score pour un modèle autorégressif d'ordre q à erreurs ARCH(p)

1/ Soit T fixée, taille de l'échantillon, θ le vecteur des paramètres de la partie ARCH du modèle et α est le vecteur des paramètres de sa partie autorégressive.

1.1/ Générer ϵ_t tel que

1.2/ Calculer σ_t^2 fixés à l'avance comme données initiales.

1.3/ Calculer $\hat{\theta}$ fixés à l'avance et poser

1.4/ Poser

1.5/ Calculer

2/ Poser

2.1/ Calculer $\hat{\theta}_t$ et

2.2/ Poser

2.3/ Calculer $\hat{\theta}_t$ et poser

2.4/ Poser

2.5/ Si $\hat{\theta}_t$ alors aller en 1.1/ sinon aller en 3/

3/ Calculer $\hat{\theta}$ fixés à l'avance comme données initiales.

3.1/ Calculer

3.2/ Calculer

3.3/ Calculer

3.4/ Calculer

3.5/ Calculer

4/ Calculer

4.1/ Calculer

4.2/ Calculer

4.3/ Calculer

et

5/ Calculer par la formule

5.1/ Si alors poser et aller en 2.4/

5.2/ Sinon arrêt des itérations ; est l'estimateur de obtenu par l'algorithme du score, et est l'estimateur de obtenu par le même algorithme.

I.10. Applications numériques

1- Le modèle

Les observations sont générées à partir du modèle suivant

(I.10.1)

respectivement pour μ et σ^2 .

Nous nous servons ensuite de ces données artificielles pour estimer les paramètres du modèle supposés inconnus en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance moyennant l'algorithme du score.

Nous tenons à préciser aussi que nous voulons étudier l'influence de ρ lorsqu'il est proche de la zone de non stationnarité sur l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance.

1er cas: simulation d'un processus ARCH(1) avec $\alpha = 0.6$

2ème cas: simulation d'un processus ARCH(1) avec $\alpha = 0.98$

2- Le programme informatique

Ce programme a été écrit en langage Matlab sous environnement Windows

```
close all;clear all;
%Estimation d'un AR(2) à erreur ARCH(1) par la méthode du
score
for k=1:100;
    clear y_tild;
    clear h1;
T=20;
D=3;
nu=randn(1,T+D+1);
alpha0=0.2; alpha1=0.98;
beta0=1.4; beta1=-0.7;
epsilon(1)=nu(1)*sqrt(alpha0);
for t=2:T+D;
    epsilon(t)=nu(t)*sqrt(alpha0+alpha1*epsilon(t-1)^2);
end;
y(1)=epsilon(1);
y(2)=beta1*y(1)+epsilon(2);
for t=3:T+D;
    y(t)=beta0*y(t-1)+beta1*y(t-2)+epsilon(t);
end;
for t=1:T;
    y_tild(t)=y(t+D);
end;
X(1,:)=[y(D),y(D-1)];
X(2,:)=[y_tild(1),y(D)];
for t=3:T;
    X(t,:)=[y_tild(t-1),y_tild(t-2)];
end;
y_tild=y_tild.';
```

```

BETA0=inv(X'*X)*X'*y_tild;
e0=y_tild-X*BETA0;
    x1(1,:)=[1,0];
for t=2:T;
    x1(t,:)=[1,e0(t-1)^2];
end;
ALPHA0=inv(x1'*x1)*x1'*e0.^2;
ALPHA0=abs(ALPHA0);
h0(1)=ALPHA0(1);
for t=2:T+1;
    h0(t)=ALPHA0(1)+ALPHA0(2)*e0(t-1)^2;
end;
h0.';

for t=1:T;
    r0(t)=sqrt((1/h0(t))+((2*e0(t)^2*ALPHA0(2)^2)/h0(t+1)^2));
end;
r0.';
dl0(1,:)=(e0(1)*X(1,:)*h0(1))/(T*h0(1)^2);
for t=2:T
    dl0(t,:)=(e0(t)*X(t,:)*h0(t)-(e0(t)^2-h0(t))*e0(t-1)*ALPHA0(1)*X(t-1,:))/(T*h0(t)^2);
end;
Dl0=sum(dl0);
Dl0=Dl0.';
for t=1:T;
    xtild(t,:)=X(t,:)*r0(t);
end;
BETA1=BETA0+inv(xtild'*xtild)*Dl0;
e1=y_tild-X*BETA1;
h1(1)=ALPHA0(1);
for t=2:T;
    h1(t)=ALPHA0(1)+ALPHA0(2)*e1(t-1)^2;
end;

```

```

h1=h1.';
ztild(1,:)=[1/h1(1),0];
for t=2:T;
ztild(t,:)=[1/h1(t),e1(t-1)^2/h1(t)];
end;
f=((e1.^2)-h1)./h1;
ALPHA1=ALPHA0+inv(ztild'*ztild)*ztild'*f;
ALPHA1=abs(ALPHA1);
while norm(ALPHA1-ALPHA0)>0.0001;
    ALPHA0=ALPHA1;
    BETA0=BETA1;
    e01=y_tild-X*BETA0;
h01(1)=ALPHA0(1);
for t=2:T+1;
    h01(t)=ALPHA0(1)+ALPHA0(2)*e01(t-1)^2;
end;
for t=1:T;
    r01(t)=sqrt((1/h01(t))+((2*e01(t)^2*ALPHA0(2)^2)/h01(t+1)^2));
end;
for t=1:T;
    xtild1(t,:)=X(t,:)*r01(t);
end;
dl01(1,:)=(e01(1)*X(1,:)*h01(1))/(T*h01(1)^2);
for t=2:T
    dl01(t,:)=(e01(t)*X(t,:)*h01(t)-(e01(t)^2-h01(t))*e01(t-1)*ALPHA0(1)*X(t-1,:))/(T*h01(t)^2);
end;
Dl01=sum(dl01);
Dl01=Dl01.';
BETA1=BETA0+inv(xtild1'*xtild1)*Dl01;
e11=y_tild-X*BETA1;
h11(1)=ALPHA0(1);
for t=2:T;

```

```

h11(t)=ALPHA0(1)+ALPHA0(2)*e11(t-1)^2;
end;
ztild1(1,:)=[1/h11(1),0];
for t=2:T;
ztild1(t,:)=[1/h11(t),e11(t-1)^2/h11(t)];
end;
f1=((e11.^2)-(h11.'))./(h11.>');
ALPHA1=ALPHA0+inv(ztild1'*ztild1)*ztild1'*f1;
ALPHA1=abs(ALPHA1);
end;
P(k,:)=[ALPHA1(1),ALPHA1(2),BETA1(1),BETA1(2)];
end;
P

```

3- Résultats des simulations et commentaires

Nous avons simulé 100 échantillons de tailles respectives 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140.

Les graphes suivants reflètent le comportement des estimateurs des différents paramètres en fonction de la taille des échantillons simulés (100 échantillons simulés pour chaque taille fixée d'échantillon)

Nous précisons ici qu'aucune sélection n'a été faite sur les estimateurs obtenus, c'est à dire que l'échantillon à été pris tel quel sans privilégier les meilleures valeurs.

Nous faisons remarquer avant tout que ces deux exemples n'ont nullement été choisis au hasard; en effet les mêmes valeurs de ρ ont été conservées (en rappelant que le domaine de définition de ρ est $[-1, 1]$ et $\sigma^2 > 0$) pour assurer la positivité de la variance et la stationnarité du processus. En fait pour le premier cas les valeurs que nous avons choisies pour ρ sont loin des bornes de non stationnarité ; $\rho = 0.99$ et $\rho = 0.98$, mais dans le deuxième cas le seul paramètre dont nous avons changé la valeur est σ^2 en l'égalant à 0.98, (proche de la borne de non stationnarité qui est égale à 1), dans le but de voir l'influence de la variation d'un paramètre de la partie ARCH du modèle sur l'estimation des autres paramètres d'un modèle AR(2) à erreurs ARCH(1).

- Nous précisons que par abus de langage, dans nos simulations, $\hat{\rho}_1$ est le premier paramètre de la partie AR (c'est à dire le coefficient de X_{t-1}) et $\hat{\rho}_2$ désigne le second paramètre de la partie AR (c'est à dire le coefficient de X_{t-2}); nous avons donné l'algorithme dans le cas général.

Les notations présentes dans la légende désignent :

- V.E désigne la valeur estimée du paramètre qui n'est autre que la moyenne arithmétique d'un échantillon de taille 100 de valeurs estimées du paramètre d'intérêt, pour un T fixé, résultant de nos simulations par l'algorithme du score
- V.V désigne la vraie valeur du paramètre que nous voulons estimer.

1^{er} cas $\alpha_1=0.6$

Valeurs estimées de pour =0.6

Figure 1

Valeurs estimées de pour = 0.6

Figure 2

Valeurs estimées de pour $=0.6$

Figure 3

Valeurs estimées de pour $= 0.6$

Figure 4

Comparaison entre les Ecart Type et les RMSE

Comparaison entre _____ et l'écart type

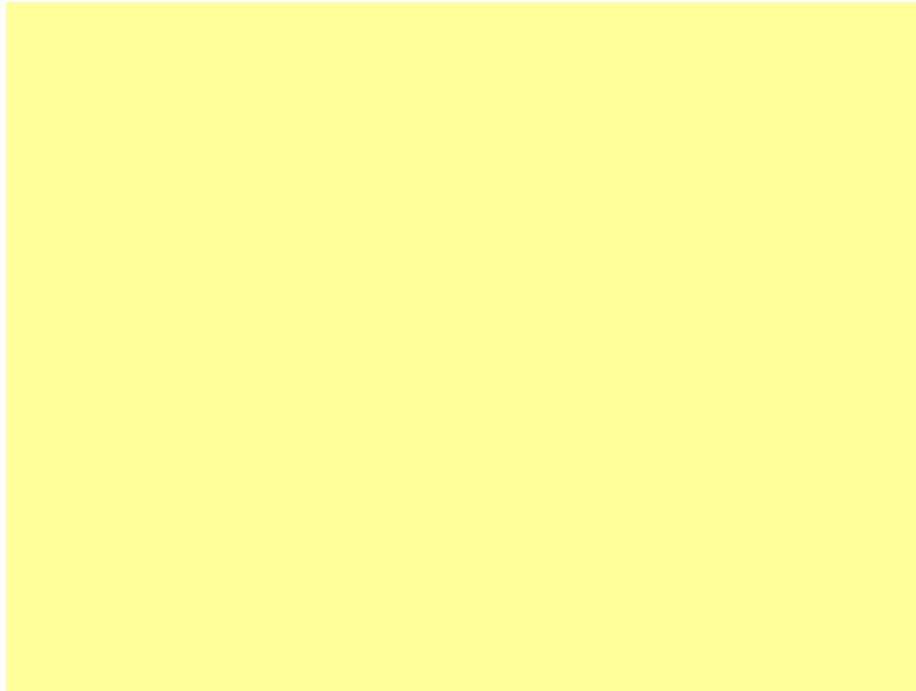
2^{er} cas $\alpha_1=0.98$

Valeurs estimées pour $\alpha_1 = 0.98$

Figure 5

Valeurs estimées de pour $\alpha_1 = 0.98$

Figure 6



Valeurs estimées de pour = 0.98

Figure 7

Valeurs estimées de pour = 0.98

Figure 8

Comparaison entre les Ecart Type et les RMSE

Comparaison entre _____ et l'écart type

- ❖ Nous remarquons que les deux graphes (voir **Figure 1** et **Figure 5**) représentant l'estimation de θ ont à peu près la même allure, ils se caractérisent par une certaine instabilité lorsque T est relativement faible et se rapprochent de façon impressionnante de la vraie valeur « 0.2 » lorsque T augmente. Néanmoins, nous remarquons que la convergence vers la vraie valeur du paramètre est plus rapide lorsque θ est loin de la zone de non stationnarité.
- ❖ Concernant les graphes représentant σ^2 (voir **Figure 2** et **Figure 6**), nous remarquons tout d'abord qu'ils n'ont pas la même allure. Même pour les petites tailles d'échantillon, la valeur estimée de σ^2 est plus éloignée de la vraie valeur du paramètre lorsque θ est proche de la zone de non stationnarité. Pour les grandes tailles d'échantillon, la différence est moins sensible.. Nous remarquons, en particulier que les valeurs estimées de σ^2 , pour le premier cas varient sur une étendue de l'ordre de $0.5683 - 0.5090 = 0.0593$, alors que dans le deuxième cas les valeurs varient sur une étendue de $0.9412 - 0.8400 = 0.1012$, donc lorsque θ est proche de la non stationnarité, il est moins bien estimé par la méthode des scores, que lorsqu'il est loin de la borne de non stationnarité et, ceci pour les 100 échantillons
- ❖ Pour $\theta = 0.2$ et pour $\theta = 0.8$, nous remarquons que les deux graphes (voir **Figure 3**, **Figure 4**, **Figure 7** et **Figure 8**) reflétant les estimations de chaque paramètre n'ont pas du tout la même allure. Mais ceci n'est probablement dû qu'aux fluctuations des échantillons de base, car dans les deux cas, les valeurs estimées ne semblent pas très éloignées des vraies valeurs des paramètres respectifs. Notons, que les estimations se rapprochent des vraies valeurs des paramètres lorsque la taille de l'échantillon augmente.
- ❖ Nous remarquons que pour le paramètre θ , nous avons $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ et ceci pour les échantillons de petites. Pour les échantillons de grandes tailles, nous avons le résultats suivant dû à Crowder (1976)

$$\hat{\theta} \xrightarrow{L} \theta$$
 en loi, c'est à dire que $\hat{\theta}$ est asymptotiquement sans biais et efficace. $\hat{\sigma}^2$ sera estimée par la variance empirique de $\hat{\theta}$.

I.11. Algorithme du score pour un processus répondant à un modèle de position à erreurs ARCH(p)

1/ Soit T fixé, taille de l'échantillon, θ le vecteur des paramètres de la partie ARCH et μ le paramètre de position.

1.1/ Générer ε_t tel que

1.2/ Calculer σ_t^2 fixés à l'avance comme données initiales.

1.3/ Calculer $\hat{\sigma}_t^2$ fixés à l'avance et poser

1.4/ Poser $\hat{\mu}$ un T -vecteur colonne

1.5/ Calculer

2/ Poser

2.1/ Calculer $\hat{\mu}_t$ et poser

2.2/ Poser

2.3/ Calculer $\hat{\sigma}_t^2$ et poser

2.4/ Poser

2.5/ Si $\hat{\sigma}_t^2 < \sigma_{\min}^2$ alors aller en 1.1/ sinon aller en 3/

3/ Calculer $\hat{\mu}_t$ fixés à l'avance comme données initiales.

3.1/ Calculer

3.2/ Calculer

3.3/ Calculer

3.4/ Calculer

3.5/ Calculer

4/ Calculer

4.1/ Calculer

4.2/ Calculer

4.3/ Calculer

et

5/ Calculer par la formule

5.1/ Si alors poser et aller en 2.4/

5.2/ Sinon arrêt des itérations ; est l'estimateur de donné par l'algorithme du score, et est l'estimateur de par le même algorithme.

I.12. Applications numériques

1- Le modèle

Les observations sont générées à partir du modèle suivant

(I.12.1)

respectivement pour μ et σ .

Nous nous servons ensuite de ces données artificielles pour estimer les paramètres du modèle supposés inconnus en utilisant l'approche bayésienne présentée au Chapitre II, à l'aide du mode a posteriori moyennant l'algorithme du Griddy Gibbs sampling. Nous comparerons ensuite les résultats avec ceux obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance moyennant l'algorithme du score.

Nous tenons à préciser aussi que nous cherchons à étudier l'influence de ρ lorsqu'il est proche de la zone de non stationnarité sur l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance.

1er cas: simulation d'un modèle de position avec $\rho = 0.6$

2ème cas: simulation d'un modèle de position avec $\rho = 0.98$

2- Le programme informatique

Ce programme informatique a été écrit en langage Matlab sous environnement Windows

```
close all;clear all;
%Estimation d'un ARCH(1) par la méthode du score avec
paramètre de position  $\mu$  inconnu
%et  $\alpha_0$  inconnu
for k=1:100;
    clear y_tild;
    clear h1;
    clear X;
    clear xtild;
T=20;
D=3;
```

```

nu=randn(1,T+D+1);
mu=0.5;
alphao=0.02; alpha1=0.6;
epsilon(1)=nu(1)*sqrt(alphao);
for t=2:T+D;
    epsilon(t)=nu(t)*sqrt(alphao+alpha1*epsilon(t-1)^2);
end;
for t=1:T+D;
    y(t)=mu+epsilon(t);
end;
for t=1:T;
    y_tild(t)=y(t+D);
end;
for t=1:T;
    X(t)=1;
end;
X=X.';
y_tild=y_tild.';
mu_chap=inv(X'*X)*X'*y_tild;
MU0=mu_chap;
e0=y_tild-MU0;
x1(1,:)=[1,0];
for t=2:T;
    x1(t,:)=[1,e0(t-1)^2];
end;
ALPHA0=inv(x1'*x1)*x1'*e0.^2;
ALPHA0=abs(ALPHA0);
ALPHA0(2)<1;
h0(1)=ALPHA0(1);
for t=2:T+1;
    h0(t)=ALPHA0(1)+ALPHA0(2)*e0(t-1)^2;
end;
h0.';
for t=1:T;

```

```

    r0(t)=sqrt((1/h0(t))+((2*e0(t)^2*ALPHA0(2)^2)/h0(t+1)^2));
end;
r0.';
dl0(1)=(e0(1)*h0(1))/(T*h0(1)^2);
for t=2:T
    dl0(t)=(e0(t)*h0(t)-(e0(t)^2-h0(t))*e0(t-1)*ALPHA0(1))/(T*h0(t)^2);
end;
Dl0=sum(dl0);
for t=1:T;
    xtild(t)=r0(t);
end;
xtild=xtild.';
MU1=MU0+inv(xtild'*xtild)*Dl0;
e1=y_tild-MU1;
h1(1)=ALPHA0(1);
for t=2:T;
h1(t)=ALPHA0(1)+ALPHA0(2)*e1(t-1)^2;
end;
h1=h1.';
ztild(1,:)=[1/h1(1),0];
for t=2:T;
ztild(t,:)=[1/h1(t),e1(t-1)^2/h1(t)];
end;
f=((e1.^2)-h1)./h1;
ALPHA1=ALPHA0+inv(ztild'*ztild)*ztild'*f;
ALPHA1=abs(ALPHA1);
ALPHA1(2)<1;
while norm(ALPHA1-ALPHA0)>0.0001;
    clear xtild1;
    ALPHA0=ALPHA1;
    MU0=MU1;
    e01=y_tild-MU0;
h01(1)=ALPHA0(1);

```

```

for t=2:T+1;
    h01(t)=ALPHA0(1)+ALPHA0(2)*e01(t-1)^2;
end;
for t=1:T;

r01(t)=sqrt((1/h01(t))+((2*e01(t)^2*ALPHA0(2)^2)/h01(t+1)^2));
end;
for t=1:T;
    xtild1(t)=r01(t);
end;
xtild1=xtild1.';
dl01(1,:)=(e01(1)*h01(1))/(T*h01(1)^2);
for t=2:T
dl01(t,:)=(e01(t)*h01(t)-(e01(t)^2-h01(t))*e01(t-1)*ALPHA0(1))/(T*h01(t)^2);
end;
Dl01=sum(dl01);
MU1=MU0+inv(xtild1'*xtild1)*Dl01;
e11=y_tild-MU1;
h11(1)=ALPHA0(1);
for t=2:T;
h11(t)=ALPHA0(1)+ALPHA0(2)*e11(t-1)^2;
end;
ztild1(1,:)=[1/h11(1),0];
for t=2:T;
ztild1(t,:)=[1/h11(t),e11(t-1)^2/h11(t)];
end;
f1=((e11.^2)-(h11.'))./(h11.>');
ALPHA1=ALPHA0+inv(ztild1'*ztild1)*ztild1'*f1;
ALPHA1=abs(ALPHA1);
ALPHA1(2)<1;
end;
P(k,:)=[ALPHA1(1),ALPHA1(2),MU1];
end;P

```

3- Résultats des simulations et commentaires

Comme pour le modèle autorégressif à erreurs ARCH(1) que nous avons estimé précédemment, nous avons simulé dans cette partie 100 échantillons de tailles respectives 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140.

Nous présentons les graphes ci dessous qui reflètent le comportement de la valeur de l'estimateur obtenu par la méthode du maximum par rapport à la taille T de l'échantillon.

Nous faisons remarquer avant tout que, comme ce qui a été fait dans la section précédente, ces deux exemples n'ont nullement été choisis au hasard. En effet, les mêmes valeurs de α , β , et γ pour assurer la positivité de la variance et la stationnarité du processus). Pour le premier cas, la valeur que nous avons choisie pour α est loin de la borne de non stationnarité : $\alpha = 0.98$ et $\beta = 0.02$, et dans le deuxième cas, on pose $\alpha = 0.98$ (proche de la borne de non stationnarité qui est égale à 1), dans le but de voir l'influence de la variation d'un paramètre clé du modèle ARCH sur l'estimation de α et sur l'estimation du paramètre de position γ .

Nous précisons ici que :

- V.E désigne la valeur estimée du paramètre qui n'est autre que la moyenne arithmétique d'un échantillon de taille 100 de valeurs estimées du paramètre d'intérêt, pour un T fixé, résultant de nos simulations par l'algorithme du score.
- V.V désigne la vraie valeur du paramètre que nous voulons estimer.

1^{er} cas $\alpha_1=0.6$

Valeurs estimées de pour = 0.6

Figure 9

Valeurs estimées de pour = 0.6

Figure 10

Valeurs estimées de α_1 pour $\alpha_2 = 0.6$

Figure 11

2^{er} cas $\alpha_1=0.98$

Valeurs estimées de α_1 pour $\alpha_2 = 0.98$

Figure 12

Valeurs estimées de pour = 0.98

Figure 13

Valeurs estimées de pour = 0.98

Figure 14

- ❖ Au premier abord, pour le paramètre μ , il paraît clair que l'allure générale du graphe des estimations dans le premier cas (voir **Figure 9**) ressemble beaucoup à celui du deuxième cas (voir **Figure 12**), en ce sens que, l'écart entre la valeur estimée et la vraie valeur du paramètre va en diminuant alors que la taille de l'échantillon augmente. Néanmoins, nous remarquons que la convergence vers la vraie valeur du paramètre est plus lente lorsque μ est proche de la non stationnarité.
- ❖ Concernant l'estimation de α_1 , nous remarquons que l'allure générale du graphe des estimations dans le premier cas (voir **Figure 10**) ressemble beaucoup à celui du deuxième cas (voir **Figure 13**), en ce sens que, l'écart entre la valeur estimée et la vraie valeur du paramètre va en diminuant alors que la taille de l'échantillon augmente. Néanmoins, le voisinage de la zone de non stationnarité pour α_1 ne semble pas affecter l'estimation de ce paramètre. De plus nous remarquons que si nous décalquons dans le premier cas le graphe pour les valeurs estimées de α_1 et en regardant depuis l'autre face, nous remarquerions une très grande ressemblance avec le graphe représentant les valeurs estimées de μ . D'où nous pouvons déduire que l'estimation de α_1 évolue de la même manière que celle de μ , seulement comme le premier est sous estimé et l'autre est surestimé alors les deux graphes sont opposés mais ils se comporte de la même façon par rapport à la vraie valeur.
- ❖ Pour le paramètre α_2 , nous remarquons dans les deux cas (voir **Figure 11** et **Figure 14**), contrairement à μ , que les estimations par la méthode du maximum de vraisemblance sont très proches de la vraie valeur du paramètre et ce, d'autant plus lorsque T augmente. L'influence de la valeur de α_1 est certaine bien que négligeable comme nous pouvons le remarquer sur les graphes **Figure 11** et **Figure 14**. La convergence de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre μ est très rapide, contrairement aux autres paramètres du modèle.

13. Conclusion

Les graphes nous ont beaucoup révélé sur le comportement des estimateurs des paramètres des modèles proposés, ainsi que l'influence qu'a (paramètre clé du modèle ARCH) sur les autres paramètres.

- L'estimation de α est influencée par le changement de la valeur de β , selon qu'elle est proche ou loin de la zone de non stationnarité, et, ceci, pour les deux modèles (I.10.1) et (I.12.1). Ainsi, le voisinage de la zone de non stationnarité pour β semble exercer un effet de frein sur l'estimation de α en l'éloignant un peu plus de la vraie valeur du paramètre.
- Quand aux paramètres de la régression, si nous comparons l'estimation de μ et celle de σ , nous remarquons que les deux paramètres se comportent de la même façon vis à vis de leur vraie valeur (même si le premier est sous estimé et l'autre est surestimé), que ce soit dans le cas où $\beta < 1$ ou dans le cas où $\beta > 1$, les graphes des deux paramètres sont opposé.
- Et enfin pour le paramètre de position γ , c'est le seul paramètre qui est le mieux estimé même lorsque β est proche de la zone de non stationnarité.

CHAPITRE II

L'Analyse Bayésienne et le Griddy Gibbs Sampling

II.1. Introduction

Les méthodes d'estimation classiques comme, par exemple, l'estimation par la méthode des moindres carrés, par celle du maximum de vraisemblance ou encore, celle par intervalle de confiance donnent des résultats très satisfaisants pour les échantillons de grandes tailles, mais pour les échantillons de moyenne et petite tailles, les résultats des estimations ne sont pas toujours bons. Ceci revient au fait de l'existence d'une tierce information en rapport avec le paramètre que nous voulons estimer, et dont nous n'avons pas tenu compte dans le processus d'inférence. En fait, ignorer l'information initiale, que nous appellerons information a priori du paramètre à estimer, n'est pas important si l'échantillon est grand, mais par contre cela peut fausser les résultats si l'échantillon est petit.

L'inférence bayésienne introduite par Thomas Bayes (1702 – 1761), est un procédé général pour combiner notre information a priori avec l'échantillon pour obtenir une inférence qui tienne compte de l'information existant dans le problème. Ce qui est à noter dans l'inférence bayésienne est que le paramètre n'est pas une constante inconnue, mais une variable aléatoire pour laquelle nous pouvons définir a priori une mesure qui reflète notre connaissance du problème.

II.2. Généralités

II.2.1. Loi a priori

Définition 1

Nous appelons loi a priori du paramètre ou (distribution initiale), la loi qui contient une tierce information dont nous disposons sur le paramètre avant de prélever l'échantillon.

Nous la noterons $\pi(\theta)$ étant le paramètre que nous voulons estimer.

II.2.2. Loi de probabilité a posteriori

Définition 2

La distribution a posteriori c'est la loi qui contient toute l'information nécessaire pour effectuer nos inférences sur le paramètre que nous voulons estimer. Elle est définie par :

où $f(x|\theta)$ représente la densité conjointe du vecteur X sachant le paramètre θ , qui représente aussi la fonction de vraisemblance du paramètre θ sachant les observations X : $L(\theta|X)$ et Θ est l'espace des paramètres.

II.2.3. Mode a posteriori

Définition 3

Le mode a posteriori d'un paramètre θ est le point de Θ en lequel la densité a posteriori de θ atteint sa plus grande valeur.

II.3. Lois de probabilité marginales

Une fois la loi de probabilité a posteriori du paramètre obtenue, l'estimation du paramètre n'est plus un problème; en effet, il suffit de considérer, par exemple, le mode a posteriori si l'on ne dispose pas d'une fonction de perte, et si nous recherchons des intervalles de confiance, il suffit de considérer la zone de confiance de cette distribution lorsqu'un niveau de confiance η est fixé au préalable. mais le problème est que la loi marginale a posteriori est souvent très compliquée à calculer voir même impossible, d'où la nécessité d'avoir recours à une méthode qui permet d'utiliser cette loi de probabilité marginale sans avoir à la calculer..

II.4. Méthode du Gibbs Sampling

Grâce à l'ordinateur la statistique a fait un bon en avant, puisque les calculs les plus longs et les plus compliqués sont effectués plus rapidement. La méthode du Gibbs Sampling, comme une réponse aux difficultés techniques que rencontre le statisticien, permet d'approcher la distribution marginale sans avoir à la calculer, en se basant seulement sur les propriétés des chaînes de Markov. (Geman et Geman (1984), Gelfand et Smith (1990), Casella et Georges (1992)).

Le Gibbs sampling est apparu grâce aux travaux de Geman et Geman (1984) sur le traitement d'image, mais cette méthode fut d'abord inspirée de l'algorithme de Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller et Teller (1953), qui fut améliorée par Hastings en 1970. Grâce aux travaux de Gelfand et Smith (1990), il y eut un regain d'intérêt pour le Gibbs Sampling. Ces travaux ont montré son utilité dans une grande variété de problèmes statistiques.

II.4.1. Présentation du Gibbs Sampling

Soit la distribution conjointe de θ du vecteur aléatoire X avec comme objectif d'avoir des information sur une fonctionnelle de la densité marginale comme, par exemple, la moyenne, la variance, le mode, etc...

Si la densité π était calculable le problème ne se poserait même pas, mais souvent le calcul est trop compliqué (voir même impossible) et c'est là où intervient l'échantillonneur de Gibbs.

En effet c'est une méthode qui nous permet de générer un échantillon π issu de la densité π sans utiliser celle-ci, uniquement à partir des densités conditionnelles.

A l'aide d'un échantillon suffisamment grand, de taille m , tous les moments pourront être calculés. Si, par exemple, nous voulons calculer l'espérance de π nous avons $\int x \pi(x) dx$, presque sûrement.

Afin de mieux comprendre l'échantillonnage de Gibbs, nous commencerons par le cas le plus simple qui est celui de deux variables aléatoires X et Y dont les densités conditionnelles sont connues; alors la procédure se fait comme suit :

- Nous prenons d'abord une valeur initiale x_0 . Alors y_1 sera calculé à partir de $\pi(y|x_0)$ que nous noterons par commodité y_1 ou encore y_1 c'est à dire que y_1 sera généré à partir de $\pi(y|x_0)$. Nous adopterons cette notation dans tout ce qui suit, que ce soit, pour le cas bivarié ou pour le cas multivarié.
- Ensuite x_2 sera généré à partir de $\pi(x|y_1)$, et ainsi de suite pour tout n , y_{n+1} sera généré à partir de $\pi(y|x_n)$ et x_{n+1} sera généré à partir de $\pi(x|y_n)$.

En supposant que π , nous obtiendrons la suite suivante : $(x_0, y_1, x_2, y_3, \dots)$ qui est appelée suite de Gibbs. Pour k suffisamment grand (x_k, y_{k+1}) est effectivement généré de π .

En fait la convergence en loi de la suite de Gibbs a été exploitée de différentes manières ; par exemple Gelfand et Smith (1990) ont proposé de générer m suites de Gibbs indépendantes, avec m suffisamment grand, de manière à reprendre le x_{k-1} de la suite précédente et l'utiliser comme valeur initiale dans la suite suivante. Ainsi, nous obtiendrons l'échantillon $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m)$ qui sera de même loi que π . De plus nous savons que

. C'est à dire que la moyenne de la densité conditionnelle tend vers la vraie densité : presque sûrement.

II.4.2. Comment les lois conditionnelles déterminent les lois marginales

La méthode du Gibbs Sampling est pratique pour déterminer la distribution marginale dans le cas où elle existe. Supposons que nous ayons deux variables aléatoires de densités conditionnelles .

1) Cas bivarié

La densité marginale de la variable aléatoire X est définie par .

De plus,

D'où

Or de même

D'où

avec dy

(4.2.1)

Cette équation (4.2.1) définit une équation intégrale du point fixe pour laquelle est une solution, (dont l'unicité a été démontrée dans l'article de Gelfand et Smith (1990).

Mais nous avons la relation (George et Casella (1992)) sachant que nous avons généré la suite de Gibbs :

:

2) Cas multivarié

Le cas de plusieurs variables s'avère plus compliqué. Soient les variables aléatoires dont nous ne connaissons pas les densités marginales, mais nous supposerons connues les densité conditionnelles du type :

Notre objectif étant de rechercher la loi marginale de , nous posons les valeurs initiales alors les itérations se feront comme suit

Après avoir utilisé ce procédé, nous obtenons la suite suivante qui est la suite de Gibbs :

Après avoir obtenu cette suite nous recommençons le procédé, seulement cette fois-ci pour la suite suivante nous prendrons comme valeurs initiales de la seconde suite et nous simulerons **le nouveau** à l'aide de la densité conditionnelle . On utilisera la notation :

De même

Et pour les itérations suivantes, nous procéderons comme pour la première suite de Gibbs. Ainsi nous constituerons m suites de Gibbs indépendantes dont nous prendrons de chacune les qui représenteront nos pour la suite suivante de Gibbs. Alors un estimateur de la fonction densité peut donc être ainsi défini :

II.4.3. Le choix de k

Il est bien connu que l'échantillonnage de Gibbs génère une suite appelée suite de Gibbs qui peut être exploitée pour obtenir les propriétés de la densité désirée pour une grande valeur de k , c'est pour cette raison que le choix de k est important.

L'avantage lorsque k est grand est, non seulement qu'il éloigne l'influence des valeurs initiales, mais surtout les données simulées proviendront de variables aléatoires indépendantes; l'on pourra, ainsi, obtenir pour l'estimateur de la densité désirée qu'il soit convergent presque sûrement vers cette même densité (cf., Casella et George (1992)). Mais le problème est que la méthode est très coûteuse. En fait la méthode la moins coûteuse pour l'exploitation de la suite de Gibbs, c'est d'utiliser toute les réalisations de la première suite, comme cela a été montré par George et Mc Culloch (1991), mais cette façon de procéder, bien que peu coûteuse, engendre une forte dépendance entre les variables et biaisera, par conséquent, l'estimateur obtenu.

L'efficacité de cette méthode dépend du taux de convergence ; plus converge rapidement vers la distribution limite, plus le taux de convergence est bon. D'autres méthodes proposant d'autres manières d'utiliser la suite de Gibbs ont été présentées par Gelman et Rubin (1991), Müller (1991), Ritter et Tanner (1990) et Tierney (1991).

II.4.4. Algorithme du Gibbs Sampling

- 1/ Soient k et m deux entiers positifs fixés, et des valeurs initiales de
- 2/ Poser
- 2.1/ Poser $n = 0$.
- 2.2/ $j = 1$.
- 2.3/ Générer à partir de la densité

2.4/ Si $u < \frac{p(x)}{p(x) + p(y)}$, poser $x = x$ et aller en 2.3/ sinon aller en 3/

3/ Si $u < \frac{p(y)}{p(x) + p(y)}$, poser $x = y$ et aller en 2.2/ sinon poser $x = y$ et poser $u = 1 - u$ et aller en 4/

4/ Si $u < \frac{p(x)}{p(x) + p(y)}$, poser $x = x$ et aller en 2.1/ sinon aller en 5/

5/ L'estimateur de la densité de la variable aléatoire x est

Que ce soit dans le cas classique ou dans le cadre bayésien, l'échantillonnage de Gibbs joue un rôle primordial. En effet son utilité est de plus en plus reconnue, puisque cette méthode permet d'obtenir une approximation d'intégrales multiples souvent difficiles à calculer que ce soit analytiquement ou à l'aide de méthodes numériques d'intégration (Gilks et Wild (1992)).

Mais le problème est que cette méthode présente des limites; en effet puisque nous avons supposé implicitement que les densités a posteriori que nous utilisons ont une forme connue qui donne la possibilité de générer directement à partir des densités conditionnelles, c'est à dire que si nous voulons générer directement par ordinateur, la loi de cette densité doit être de type connu : par exemple la loi normale, ou exponentielle, ou autre. Mais plusieurs cas se présentent où la densité a posteriori n'est pas de type connu, et où la fonction de répartition est incalculable. D'où la nécessité de faire une extension de cet algorithme afin de pouvoir s'adapter à ce genre de situation.

II.5. Le Griddy Gibbs Sampling

Cette technique (Ritter et Tanner (1992)) a été appliquée à des densités a posteriori bivariées . En fait dans cette méthode, avant d'appliquer l'échantillonnage de Gibbs, nous calculons la fonction de répartition de la densité a posteriori par des règles de calculs approchées (Davis et Rabinowitz 1975), ensuite nous inversons cette fonction vers la valeur aléatoire tirée de la loi uniforme sur l'intervalle [0,1].

II.5.1. Les démarches de la méthode

Supposons que nous ayons p variables aléatoires

- Nous désignons comme précédemment la densité a posteriori conditionnelle de θ par $\pi(\theta | y)$
- Nous calculons $\int \theta^k \pi(\theta | y) d\theta$ pour $k=1, \dots, p$ pour obtenir μ_k respectivement.
- Nous générons u (qui désigne la loi uniforme). Si U est une variable aléatoire de loi absolument continue, de fonction de répartition F alors $F(U)$ est uniformément réparti sur $[0, 1]$. Donc si nous voulons générer une variable aléatoire X alors il suffit de générer u et poser $X = F^{-1}(u)$, ce qui nous donne X car F est bijective puisqu'elle est strictement monotone et continue.
- Donc après avoir généré u de la loi uniforme et comme nous n'avons pas l'expression de la fonction de répartition de façon explicite, pour pouvoir calculer son inverse, nous nous contenterons de faire un calcul approché de cette fonction de répartition (par une des méthodes connues : trapèzes, Simpson ou Gauss).

Soit x_0, \dots, x_p , p points quelconques pris dans le support de F .

Nous calculons d'abord : $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \theta^k \pi(\theta | y) d\theta$ approximativement.

On génère u à partir de la loi uniforme $U(0, 1)$.

Premier cas

tel que $u \in [x_{i-1}, x_i]$ alors c'est terminé

Deuxième cas

Sinon ceci veut dire qu'il $u \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $u < x_{i-1}$ et dans ce cas il faudra à nouveau partager l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et nous recommençons le procédé jusqu'à cerner la valeur x_i .

Nous appliquons le même procédé pour θ^k .

Nous devons préciser qu'un certain nombre de remarques doivent être faites, afin de pouvoir exploiter cette méthode et surtout pour avoir des estimations optimales.

Remarques (Tanner (1990))

- a) Les points de la grille que nous avons formés n'ont nullement besoin d'être dispersés uniformément. En effet une bonne grille met plus de points au voisinage de la plus grande masse et moins de points là où la densité est moins importante. Nous pouvons par exemple construire une grille telle que la densité marginale entre deux points de cette grille, très très voisins soit approximativement constante.
- b) Le nombre de points dans la grille n'a pas besoin d'être constant à travers les itérations. Au début n peut être petit et dès que nous arrivons à cerner la valeur de θ , à ce moment nous pouvons affiner notre grille, bien entendu sur le sous intervalle où se trouve θ afin de pouvoir déterminer le θ tel que $\hat{\theta}$ avec plus de précision.
- c) Sur un intervalle borné, il est important de comparer $\hat{\theta}$ à θ
 - Si $\hat{\theta} < \theta$ alors nous devons rajouter des points dans la grille à gauche du point $\hat{\theta}$ (c'est à dire que si $\hat{\theta}$ est plus grand qu'un certain pourcentage de la valeur de M , alors nous devons placer une nouvelle grille à gauche de $\hat{\theta}$).
 - De même si $\hat{\theta} > \theta$ alors nous devons rajouter un quadrillage à droite de $\hat{\theta}$ (ceci nous amène à ce que nous avons dit précédemment, c'est à dire qu'une bonne grille est celle qui est la plus fine possible là où la densité est importante par rapport à la valeur maximale.

II.5.2. Algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour l'estimation de p paramètres

- 1/ Soient k et m deux entiers positifs fixés, et $\theta_1, \dots, \theta_m$ valeurs initiales de θ .
- 2/ Poser $\theta = \theta_1, \dots, \theta_m$.
- 2.1/ Générer $\theta_1, \dots, \theta_m$.
- 2.2/ Soient $\delta_1, \dots, \delta_m$ des intervalles fixés (ce sont les domaines de définition de $\theta_1, \dots, \theta_m$ respectivement), et soit n un entier positif (suffisamment grand)

3/ Calculer

3.1/ Calculer

3.2/ Calculer

par une des méthode de calculs d'intégrales approximées (Dans ce travail nous avons utilisé la méthode de Simpson).

3.3/ Poser le vecteur

3.4/ Si U_{n+1} est une valeur générée de U à la $(n+1)$ itération et aller en 3.6/ sinon $U_{n+1} < U_n$ et aller en 3.5/

3.5/ Poser $U_{n+1} = U_n$ et $U_n = U_{n+1}$ puis aller en 3/

3.6/ Si $U_{n+1} < U_n$, poser $U_{n+1} = U_n$ et aller en 3/ sinon aller en 4/

4/ Si $U_{n+1} < U_n$, poser $U_{n+1} = U_n$ et aller en 2.1/ sinon poser $U_{n+1} = U_n$ et poser $U_n = U_{n+1}$ aller en 5/

5/ Si $U_{n+1} < U_n$ poser $U_{n+1} = U_n$ et aller en 2.1/ sinon aller en 6/

6/ L'estimateur de la densité de la variable aléatoire c 'est

CHAPITRE III

Analyse bayésienne d'un modèle autorégressif à erreurs ARCH

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, notre but est d'une part, d'estimer les paramètres d'un modèle autorégressif à erreurs ARCH en utilisant l'approche bayésienne et l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour obtenir le mode a posteriori des différents paramètres, mais aussi de comparer les estimations obtenues par cette approche avec celles obtenues par la méthode classique du maximum de vraisemblance au moyen de l'algorithme du score. Nous supposons que tous les paramètres du modèle sont inconnus. A notre connaissance ce travail n'a pas été entrepris. Bauwens et Lubrano (1998), utilisant l'approche bayésienne et l'algorithme du

Griddy Gibbs Sampling, ont considéré un modèle de position à erreurs ARCH(1) avec . Geweke (1988) a estimé les paramètres d'un modèle de régression à erreurs ARCH en utilisant l'approche bayésienne et l'échantillonnage d'importance (sampling importance). Boose et Mukherjee (2003) proposent un estimateur des moindres carrés en deux étapes pour un modèle ARCH pur et donnent les propriétés asymptotiques des estimateurs obtenus.

III.2. Modèle autorégressifs à erreurs ARCH

Les modèles autorégressifs à erreurs ARCH, comme ils ont été définis dans le chapitre I, ne sont autres qu'une extension des processus ARCH (dont les propriétés asymptotiques ont été données dans Weiss(1986a)).

est un processus obéissant à un modèle autorégressif d'ordre q à erreurs ARCH(p) s'il vérifie les équations stochastiques suivantes :

où sont les paramètres de la partie autorégressive du modèle. étant la tribu engendrée par le passé du processus.

III.3. Les lois de probabilité a posteriori des différents paramètres du modèle

Théorème

En supposant les paramètres indépendants de lois a priori et , les lois a posteriori conditionnelles des différents paramètres d'un modèle AR(q) à erreurs ARCH(p) sont

où est la fonction de vraisemblance dont l'expression est la suivante

où \mathbf{y} est le vecteur des observations et $\boldsymbol{\theta}$ est défini par l'expression suivante

Remarque 1 : Geweke a considéré les trois lois a priori suivantes

i.

ii.

iii.

avec

Remarque 2 : Concernant notre travail d'estimation dans ce chapitre, nous choisirons les deux premières lois a priori définies ci-dessus.

$\pi(\boldsymbol{\theta})$ est la loi a priori de $\boldsymbol{\theta}$, que nous prendrons non informative, c'est-à-dire, ici, proportionnelle à une constante.

Démonstration du théorème

Nous ferons la démonstration seulement pour la densité a posteriori conditionnelle de $\boldsymbol{\theta}$; pour les autres paramètres la démonstration se fait de la même façon.

Nous savons d'après le théorème de Bayes que

Or comme θ_1 et θ_2 sont supposés indépendants, alors

D'où

Sans oublier de préciser que $L(\theta)$ représente la fonction de vraisemblance que nous remplacerons par $L(\theta)$.

III.4. L'algorithme du Griddy Gibbs Sampling

Notre but comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, est d'utiliser l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour estimer les paramètres d'un modèle autorégressif à erreurs ARCH, et de comparer les résultats avec ceux de l'estimateur du maximum de vraisemblance, les solutions des équations normales étant approchée au moyen de l'algorithme du score.

III.4.1. Algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour un AR(q) à erreurs ARCH(p)

Nous avons déjà présenté dans le chapitre II l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling (Ritter et Tanner (1992)), dans un cadre général ; à présent, nous adaptons cet algorithme à un modèle AR(q) à erreurs ARCH(p).

1/ Soit k, m, \dots , quatre entiers positifs fixés et \dots les données initiales de

2/ Poser

2.1/ Générer

2.2/ Soient \dots fixés (les domaines de définition de \dots)

3/ Calculer

3.1/ Calculer \dots en

3.2/ Calculer \dots (par

une méthode de calcul d'intégrales approximées, par exemple la méthode des trapèzes ou la méthode de Simpson)

3.3/ Poser

3.4/ Si \dots tel que \dots alors \dots et aller en

3.6/ sinon \dots tel que \dots et aller en 3.5/

3.5/ Poser \dots et \dots et aller en 3/

3.6/ Si \dots poser \dots et aller en 3/ sinon on obtient \dots aller en 4/

4/ Calculer

4.1/ Calculer

au points

4.2/ Calculer

pour (comme pour les , en utilisant une méthode numérique de calculs d'intégrales)

4.3/ Poser

4.4/ Si tel que alors et aller en

4.6/ sinon tel que et aller en 4.5/

4.5/ Poser , et aller en 4/

4.6/ Si poser et aller en 4/ sinon aller en 5/

5/ Si poser et aller en 2.1/ sinon poser

et puis aller en 6/

6/ Si poser et aller en 2.1/ sinon aller en 7/

7/ est l'estimateur de la

densité a posteriori de

De même est l'estimateur de

la densité a posteriori de

III.4.2. Applications numériques

1- Le modèle

Les observations données sont générées à partir du modèle suivant :

respectivement pour et

Nous nous servons ensuite de ces données artificielles pour estimer les paramètres, supposés inconnus, à l'aide du mode *posteriori*, en utilisant l'approche bayésienne présentée ci-dessus, au moyen de l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling. Nous comparerons ensuite les résultats avec ceux obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance moyennant l'algorithme du score.

Nous tenons à préciser aussi que nous voulons étudier l'influence de la valeur de lorsque celle-ci est proche de la zone de non stationnarité sur l'analyse bayésienne du modèle. Les graphes des deux séries simulées, suivant les valeurs de , ont été représentés dans le Chapitre I.

2- Le programme informatique

Ce programme a été écrit en langage Matlab 5.3 sous environnement Windows. Nous tenons à signaler que ce programme pour $T = 20$ (nous rappelons que T est la taille du vecteur des observations y) met deux heures sur un ordinateur Pentium 4. Nous pouvons expliquer cela par le fait qu'il contienne quatre sous programmes, qui sont les densités *a posteriori* conditionnelles de ; de plus l'expression de celle-ci contient un grand nombre d'opérations en plus de la présence de la fonction exponentielle que nous ne pouvons simplifier. Nous précisons aussi que nous avons pris un k égal à 15 qui joue un grand rôle dans la vitesse d'exécution du programme; en effet, il est vrai que dans l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, nous générons un échantillon de taille m , mais en vérité nous

générons un échantillon de taille $m \times k$ seulement nous ne sélectionnons que les $k^{\text{èmes}}$, c'est à dire que si $k = 15$ et $m = 100$ (comme nous l'avons fait dans cette thèse), nous avons généré non pas 100 estimateurs mais 1500 estimateurs (nous rappelons que le k est un entier représentant la suite de Gibbs comme nous l'avons dit dans le Chapitre II). C'est pour cette raison que nous nous sommes arrêtés à $T = 140$, qui déjà fait durer les calculs quatorze heures.

```
function valeur_vide=estimbayes
T=20;
epsilon=randn(1,T);
alpha1=0.18;
Beta0=1;
Beta1=-0.3;
v=15;
for m=1:100;
    for w=1:k;
        u=rand;
        %estimation de alpha0
        gx0(1)=0;
        for i=2:361;
            gx0(i)=gx0(i-1)+(pianote1(0.004+0.001*(i-2),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1)+...
                pianote1(0.004+0.001*(i-1),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1)+...
                4*pianote1(0.004+0.0005*(2*i-3),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1))*(0.001/6);
        end;
        N1=gx0(361);
        g0=gx0./N1;
        y0=find(g0>u);
        s0=y0(1);
        if (abs(g0(s0-1)-u)<0.0001;
            alphao_est=0.004+0.001*(s0-2);
        else
            a0=0.004+(s0-2)*0.001;
```

```

b0=0.004+(s0-1)*0.001;
h0=(b0-a0)/50;
g01(1)=0;
for i=2:51;
    g01(i)=g01(i-1)+(pianote1(a0+h0*(i-2),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1)+...
        pianote1(a0+h0*(i-1),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1)+...
        4*pianote1(a0+(h0/2)*(2*i-3),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1))*(h0)/6;
end;
g01=g01./N1;
Gx01=g0(s0-1)+g01;
y01=find(Gx01>u);
s01=y01(1);
if (abs(Gx01(s01-1)-u))<0.0001;
    alphao_est=a0+h0*(s01-2);
else
a01=a0+h0*(s01-2);
b01=a0+h0*(s01-1);
h01=(b01-a01)/5;
g02(1)=0;
for i=2:6;
    g02(i)=g02(i-1)+(pianote1(a01+h01*(i-2),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1)+...
        pianote1(a01+h01*(i-1),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1)+...
        4*pianote1(a01+(h01/2)*(2*i-3),epsilon,alpha1,Beta0,Beta1))*(h01)/6;
end;
g02=g02./N1;
Gx02=Gx01(s01-1)+g02;
y02=find(Gx02>u);
s02=y02(1);
if (abs(Gx02(s02-1)-u))<0.0001;
    alphao_est=a01+h01*(s02-2);
end;
end;
end;
alphao_est;

```

```
%estimation de alpha1
```

```
gx1(1)=0;
for i=2:334;
gx1(i)=gx1(i-1)+(pianote2(0.003*(i-2),epsilon,alphao_est,Beta0,Beta1)+...
    pianote2(0.003*(i-1),epsilon,alphao_est,Beta0,Beta1)+...
    4*pianote2((0.003/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,Beta0,Beta1))*(0.003)/6;
end;
N2=gx1(334);
g1= gx1./N2;
y1=find( g1>u);
s1=y1(1);
if (abs(g1(s1-1)-u))<0.0001;
    alpha1=0.003*(s1-2);
else
a1=(s1-2)*0.003;
b1=(s1-1)*0.003;
h1=(b1-a1)/40;
g11(1)=0;
for i=2:41;
    g11(i)=g11(i-1)+(pianote2(a1+h1*(i-2),epsilon,alphao_est,Beta0,Beta1)+...
        pianote2(a1+h1*(i-1),epsilon,alphao_est,Beta0,Beta1)+...
        4*pianote2(a1+(h1/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,Beta0,Beta1))*(h1)/6;
end;
g11=g11./N2;
Gx11=g1(s1-1)+g11;
y11=find(Gx11>u);
s11=y11(1);
if (abs(Gx11(s11-1)-u))<0.0001;
    alpha1=a1+h1*(s11-2);
end;
end;
alpha1;
%estimation de beta0
gx2(1)=0;
```

```

for i=2:301;
    gx2(i)=gx2(i-1)+(pianote3(1.236+0.001*(i-2),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1)+...
        pianote3(1.236+0.001*(i-1),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1)+...
        4*pianote3(1.236+0.0005*(2*i-3),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1))*(0.001/6);

end;
N3=gx2(301);
g2=gx2./N3;
y2=find(g2>u);
s2=y2(1);
if (abs(g2(s2-1)-u))<0.0001;
    Beta0=1.236+(s2-2)*0.001;
else
a2=1.236+(s2-2)*0.001;
b2=1.236+(s2-1)*0.001;
h2=(b2-a2)/40;
g21(1)=0;
for i=2:41;
    g21(i)=g21(i-1)+(pianote3(a2+h2*(i-2),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1)+...
        pianote3(a2+h2*(i-1),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1)+...
        4*pianote3(a2+(h2/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1))*(h2/6);
end;
g21=g21./N3;
Gx21=g2(s2-1)+g21;
y21=find(Gx21>u);
s21=y21(1);
if (abs(Gx21(s21-1)-u))<0.0001;
    Beta0=a2+h2*(s21-2);
else
a21=a2+h2*(s21-2);
b21=a2+h2*(s21-1);
h21=(b21-a21)/5;
g22(1)=0;
for i=2:6;

```

```

g22(i)=g22(i-1)+(pianote3(a21+h21*(i-2),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1)+...
    pianote3(a21+h21*(i-1),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1)+...
    4*pianote3(a21+(h21/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1))*(h21)/6;
end;
g22=g22./N3;
Gx22=Gx21(s21-1)+g22;
y22=find(Gx22>u);
s22=y22(1);
if (abs(Gx22(s22-1)-u)<0.0001;
    Beta0=a21+h21*(s22-2);
end;
end;
end;
Beta0;
%estimation de beta1
gx3(1)=0;
for i=2:208;
    gx3(i)=gx3(i-1)+(pianote4(-0.999+0.002*(i-2),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0)+...
        pianote4(-0.999+0.002*(i-1),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0)+...
        4*pianote4(-0.999+0.001*(2*i-3),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0))*(0.002/6);
end;
N4=gx3(208);
g3=gx3./N4;
y3=find(g3>u);
s3=y3(1);
if (abs(g3(s3-1)-u)<0.0001;
    Beta1=-0.999+(s3-2)*0.002;
else
a3=-0.999+(s3-2)*0.002;
b3=-0.999+(s3-1)*0.002;
h3=(b3-a3)/40;
g31(1)=0;
for i=2:41;
    g31(i)=g31(i-1)+(pianote4(a3+h3*(i-2),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0)+...

```

```

    pianote4(a3+h3*(i-1),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0)+...
    4*pianote4(a3+(h3/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0))*(h3)/6;
end;
g31=g31./N4;
Gx31=g3(s3-1)+g31;
y31=find(Gx31>u);
s31=y31(1);
if (abs(Gx31(s31-1)-u))<0.0001;
Beta1=a3+h3*(s31-2);
else
a31=a3+h3*(s31-2);
b31=a3+h3*(s31-1);
h31=(b31-a31)/5;
g32(1)=0;
for i=2:6;
    g32(i)=g32(i-1)+(pianote4(a31+h31*(i-2),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0)+...
        pianote4(a31+h31*(i-1),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0)+...
        4* pianote4(a31+(h31/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0))*(h31)/6;
end;
g32=g32./N4;
Gx32=Gx31(s31-1)+g32;
y32=find(Gx32>u);
s32=y32(1);
if (abs(Gx32(s32-1)-u))<0.0001;
    Beta1=a31+h31*(s32-2);
end;
end;
end;
Beta1;
X(w,1)=alphao_est;
X(w,2)=alpha1;
X(w,3)=Beta0;
X(w,4)=Beta1;
end;

```

```

Px1(m)=X(v,1);
Px2(m)=X(v,2);
Px3(m)=X(v,3);
Px4(m)=X(v,4);
end;
Px1,Px2,Px3,Px4
function yp1=pianote1(alpha0,epsilon,alpha1,Beta0,Beta1)
T=20;
c3=1/sqrt(2*pi);
Y(1)=epsilon(1);
Y(2)=1.4*Y(1)+epsilon(2)*(sqrt(0.2+0.6*Y(1)^2));
yh1=1.4*Y(2)-0.7*Y(1);
Y(3)=yh1+epsilon(3)*(sqrt(0.2+0.6*(Y(2)-1.4*Y(1))^2));
for t=4:T;
    yh=1.4*Y(t-1)-0.7*Y(t-2);
    Y(t)=yh+epsilon(t)*(sqrt(0.2+0.6*(Y(t-1)-yh1)^2));
    yh1=yh;
end;
yp1=1;
yp1=yp1*(1./sqrt(alpha0*2*pi))*exp(-Y(1)^2/(2*alpha0));
yz7=alpha0+alpha1*Y(1)^2;
yp1=yp1*c3*((yz7)^(-.5))*exp(-(Y(2)-Beta0*Y(1))^2/(2*...
    (yz7)));
yz7=alpha0+alpha1*(Y(2)-Beta0*Y(1))^2;
yp1=yp1*c3*((yz7)^(-.5))*exp(-(Y(3)-Beta0*...
    Y(2)-Beta1*Y(1))^2/(2*(yz7)));
yw8=(Y(3)-Beta0*Y(2)-Beta1*Y(1))^2;
for t=4:T;
    yz7=alpha0+alpha1*yw8;
    yw8=(Y(t)-Beta0*Y(t-1)-Beta1*Y(t-2))^2;
    yp1=yp1*(c3)*(1./sqrt(yz7))*exp(-yw8/(2*(yz7)));
end;
%yp1=yp1.*(abs(sqrt((1-alpha1)/alpha0)));

```

```

function yp1=pianote2(alpha,epsilon,alphao_est,Beta0,Beta1)
T=20;
c3=1/sqrt(2*pi);
Y(1)=epsilon(1);
Y(2)=1.4*Y(1)+epsilon(2)*(sqrt(0.2+0.6*Y(1)^2));
yh1=1.4*Y(2)-0.7*Y(1);
Y(3)=yh1+epsilon(3)*(sqrt(0.2+0.6*(Y(2)-1.4*Y(1))^2));
for t=4:T;
    yh=1.4*Y(t-1)-0.7*Y(t-2);
    Y(t)=yh+epsilon(t)*(sqrt(0.2+0.6*(Y(t-1)-yh)^2));
    yh1=yh;
end;
yp1=1;
yp1=yp1*(1./sqrt(alphao_est*2*pi))*exp(-Y(1)^2/(2*alphao_est));
yz7=alphao_est+alpha*Y(1)^2;
yp1=yp1*c3*((yz7)^(-.5))*exp(-(Y(2)-Beta0*Y(1))^2/(2*...
    (yz7)));
yz7=alphao_est+alpha*(Y(2)-Beta0*Y(1))^2;
yp1=yp1*c3*((yz7)^(-.5))*exp(-(Y(3)-Beta0*...
    Y(2)-Beta1*Y(1))^2/(2*(yz7)));
yw8=(Y(3)-Beta0*Y(2)-Beta1*Y(1))^2;
for t=4:T;
    yz7=alphao_est+alpha*yw8;
    yw8=(Y(t)-Beta0*Y(t-1)-Beta1*Y(t-2))^2;
    yp1=yp1*(c3)*(1./sqrt(yz7))*exp(-yw8/(2*(yz7)));
end;
%yp1=yp1.*(abs(sqrt((1-alpha)./alphao_est)));

```

```

function yp1=pianote3(beta0,epsilon,alphao_est,alpha1,Beta1)
T=20;
c3=1/sqrt(2*pi);
Y(1)=epsilon(1);
Y(2)=1.4*Y(1)+epsilon(2)*(sqrt(0.2+0.6*Y(1)^2));
yh1=1.4*Y(2)-0.7*Y(1);

```

```

Y(3)=yh1+epsilon(3)*(sqrt(0.2+0.6*(Y(2)-1.4*Y(1))^2));
for t=4:T;
    yh=1.4*Y(t-1)-0.7*Y(t-2);
    Y(t)=yh+epsilon(t)*(sqrt(0.2+0.6*(Y(t-1)-yh1)^2));
    yh1=yh;
end;
yp1=1;
yp1=yp1*(1./sqrt(alphao_est*2*pi))*exp(-Y(1)^2/(2*alphao_est));
yz7=alphao_est+alpha1*Y(1)^2;
yp1=yp1*c3*((yz7)^(-.5))*exp(-(Y(2)-beta0*Y(1))^2/(2*...
    (yz7)));
yz7=alphao_est+alpha1*(Y(2)-beta0*Y(1))^2;
yp1=yp1*c3*((yz7)^(-.5))*exp(-(Y(3)-beta0*...
    Y(2)-Beta1*Y(1))^2/(2*(yz7)));
yw8=(Y(3)-beta0*Y(2)-Beta1*Y(1))^2;
for t=4:T;
    yz7=alphao_est+alpha1*yw8;
    yw8=(Y(t)-beta0*Y(t-1)-Beta1*Y(t-2))^2;
    yp1=yp1*(c3)*(1./sqrt(yz7))*exp(-yw8/(2*(yz7)));
end;
function yp1=pianote4(beta1,epsilon,alphao_est,alpha1,Beta0)
T=20;
c3=1/sqrt(2*pi);
Y(1)=epsilon(1);
Y(2)=1.4*Y(1)+epsilon(2)*(sqrt(0.2+0.6*Y(1)^2));
yh1=1.4*Y(2)-0.7*Y(1);
Y(3)=yh1+epsilon(3)*(sqrt(0.2+0.6*(Y(2)-1.4*Y(1))^2));
for t=4:T;
    yh=1.4*Y(t-1)-0.7*Y(t-2);
    Y(t)=yh+epsilon(t)*(sqrt(0.2+0.6*(Y(t-1)-yh1)^2));
    yh1=yh;
end;
yp1=1;
yp1=yp1*(1./sqrt(alphao_est*2*pi))*exp(-Y(1)^2/(2*alphao_est));

```

```

yz7=alphao_est+alpha1*Y(1)^2;
yp1=yp1*c3*((yz7)^(-.5))*exp(-(Y(2)-Beta0*Y(1))^2/(2*(yz7)));
yz7=alphao_est+alpha1*(Y(2)-Beta0*Y(1))^2;
yp1=yp1*c3*((yz7)^(-.5))*exp(-(Y(3)-Beta0*...
    Y(2)-beta1*Y(1))^2/(2*(yz7)));
yw8=(Y(3)-Beta0*Y(2)-beta1*Y(1))^2;
for t=4:T;
    yz7=alphao_est+alpha1*yw8;
    yw8=(Y(t)-Beta0*Y(t-1)-beta1*Y(t-2))^2;
yp1=yp1*(c3)*(1./sqrt(yz7))*exp(-yw8/(2*(yz7)));end;

```

3- Résultats des simulations et commentaires

Nous avons simulé 100 échantillons de tailles respectives 20, 40, 60, 80, 100, 120 et 140 (100 pour chaque taille fixée d'échantillon)

Nous précisons ici qu'aucune sélection n'a été faite sur les estimateurs obtenus, c'est à dire que l'échantillon a été pris tel quel, sans privilégier les meilleures valeurs.

Nous avons représenté les graphes des différents RMSE afin de comparer le comportement, d'une part, des estimateurs du maximum de vraisemblance obtenus par le biais de l'algorithme du score, par rapport à la vraie valeur du paramètre et, d'autre part, en ce qui concerne la méthodologie bayésienne adoptée dans ce chapitre, d'avoir une idée précise sur les valeurs générées à partir des lois de probabilité a posteriori marginales des différents paramètres, au moyen de l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling.

Nous illustrons les résultats obtenus à l'aide de deux représentations graphiques

- L'histogramme, issu de l'application de l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, qui est un estimateur pour les différentes lois de probabilité a posteriori marginales des paramètres , afin d'en sélectionner le mode, pour $T = 20$.
- Les graphes des RMSE pour les deux techniques utilisés, à savoir, l'algorithme du score qui nous fournit les estimateurs du maximum de vraisemblance pour les différents paramètres et l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling qui nous permet de générer des échantillons pour les différents paramètres à partir de leurs lois de probabilité a posteriori marginales même si celles-ci ne sont pas disponibles.

Nous rappelons aussi que nous avons fait l'estimation bayésienne de notre modèle pour deux lois a priori du couple , qui ont été définies dans le théorème et qui **sont**

et dans le but de comparer leurs influences sur

l'estimation des paramètres ; nous comparerons également les résultats obtenus en utilisant respectivement l'algorithme du score et l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, et ceci à

l'aide du critère RMSE définit par $RMSE =$ où est la vraie valeur du

paramètre à estimer ; quand à $\hat{\theta}$ c'est la valeur estimée du paramètre pour θ et m est la taille de l'échantillon généré.

Les notations présentes dans la légende désignent :

- MLE désigne le RMSE calculé à partir d'un échantillon d'estimateurs obtenus par la méthode classique du maximum de vraisemblance moyennant l'algorithme du score (nous le noterons RMSE-MLE), sur la base de $m = 100$.
- A.B désigne le RMSE calculé à partir d'un échantillon généré à partir des lois de probabilité a posteriori marginales des différents paramètres, et ce, par le biais de l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, (nous le noterons RMSE-GGS) sur la base de $m = 100$.

Sans oublier de préciser que les histogrammes sont donnés pour $T = 20$ (qui est la taille la plus petite d'échantillon utilisée) dans le but de souligner l'efficacité de cette méthode pour les échantillons de petites tailles .

Dans le cas d'une loi a priori impropre proportionnelle à une constante, nous proposerons de plus graphiquement une comparaisons entre la vraie valeur du paramètre du modèle, l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance obtenue par le biais de l'algorithme du score et l'estimation par le mode a posteriori obtenu grâce à l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling.

1^{er} cas $\alpha_1=0.6$

a) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \text{constante}$

(a)

Graphe représentant le RMSE pour $\alpha_1 = 0.6$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_0 par le GGS

Figure1

Mode (α_0) = 0.1892

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec $\rho = 0.6$

(b)

**Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S
Figure2**

Mode () = 0.4292

(a)

Graphes représentant le RMSE pour avec $\rho = 0.6$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 3

Mode () = 1.4524

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec = 0.6

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 4

Mode (= -0.7846

- Les graphes suivant représentent les RMSE calculés pour le mode a posteriori et l'estimateur du maximum de vraisemblance ((c)) et les estimations des différents paramètres pour différentes tailles d'échantillon ((d)).

(c)

Graphe représentant les RMSE pour avec 0.6

(d)

Estimation du paramètre α_0

Figure5

(c)

Grphe représentant les RMSE pour avec $\sigma = 0.6$

(d)

Estimation du paramètre α_1

Figure 6

(c)

Graphe représentant les RMSE pour avec $\sigma = 0.6$

(d)

Estimation du paramètre

Figure 7

(c)

Grphe représentant les RMSE pour avec $\sigma=0.6$

(d)

Estimation du paramètre

Figure 8

b)

(a)

Grapshe représentans le RMSE pour avec = 0.6

(b)

Histogramme représentans les valeurs gèneses de par le G.G.S

Figure 9

Mode () = 0.2178

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec $\rho = 0.6$

(b)

**Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S
Figure 10**

Mode () = 0.2697

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec = 0.6

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 11

Mode () = 1.4862

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec = 0.6

(b)

**Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S
Figure 12**

Mode () = -0.6653

2^{er} cas $\alpha_1=0.98$

$p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \text{constante}$

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec $\alpha_1 = 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 13

La série est bimodale, mode ()

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec = 0.98

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 14

Mode () = 0.4978

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec $= 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 15

Mode () = 1.3920

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec $= 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs gènes de par le G.G.S

Figure 16

Mode () = -0.6882

b)

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec = 0.98

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 17

La série est multimodale, mode ()

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec $= 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 18

La série est bimodale, mode () =

(a)

Grapshe représentant le RMSE pour avec $= 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 19

La série est bimodale, mode () =

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec $\rho = 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 20

Mode () = -0.7023

- Pour le paramètre θ le premier modèle où le paramètre θ est connu, le premier point que nous remarquons sur les quatre figures contenant les représentations du RMSE calculé d'une part pour l'estimateur du maximum de vraisemblance (RMSE-MLE) moyennant l'algorithme du score et d'autre part, **pour des valeurs générées du paramètre** en utilisant la méthode bayésienne moyennant l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling (RMSE-G.G.S), est que le graphe du RMSE-GGS est en dessous du graphe RMSE-MLE (voir **Figure1 (a), Figure9 (a), Figure13 (a), Figure17 (a)**) D'où nous pouvons conclure que la méthode bayésienne pourrait mieux estimer, au sens du RMSE, le paramètre θ que la méthode classique du maximum de vraisemblance, ce que nous confirmerons avec les **Figure5 (a), Figure6 (a), Figure7 (a), et Figure8 (a)**). Cela reflète le fait que la distribution a posteriori du paramètre θ est concentrée autour de la vraie valeur du paramètre, en tout cas beaucoup plus que ne le sont les estimations par la méthode du maximum de vraisemblance autour de cette même valeur. Nous signalons que lorsque θ est loin de la zone de non stationnarité, les RMSE calculés décroissent très rapidement vers la plus petite valeur qui est atteinte en $T = 140$ (voir **Figure1 (a), Figure9 (a)**). Mais lorsque θ est proche de la zone de non stationnarité, le RMSE-MLE semble plus affecté car ses valeurs sont supérieures à celles calculées précédemment (voir **Figure1 (a), Figure13 (a)**). De plus nous remarquons qu'un changement de loi a priori n'influe en rien sur l'estimation du paramètre θ ; en effet puisque dans le $\theta = 0.6$, les deux graphes sont quasiment les mêmes pour les deux lois a priori (voir **Figure1 (a), Figure9 (a)**), de même dans le $\theta = 0.98$ l'allure du RMSE est quasiment la même quelque soit la loi a priori choisie (voir **Figure13 (a), Figure17 (a)**). Nous arrivons ainsi à la conclusion que le choix de la loi a priori n'a pas d'influence sur l'estimation du paramètre θ , mais par contre le choix de la valeur du paramètre θ a un impact important sur l'estimation du paramètre θ lorsque la taille de l'échantillon est petite.
- Concernant le premier cas pour l'estimation de θ (voir **Figure2 (a), Figure10 (a), Figure14 (a), Figure18 (a)**), nous remarquons que, indifféremment pour les deux lois a priori, le graphe du RMSE-GGS est légèrement en dessous du graphe du RMSE-MLE; ainsi θ serait mieux estimé dans ce cas par l'analyse bayésienne que par la méthode classique du maximum de vraisemblance (il est vrai qu'en $T = 140$ le RMSE-GGS est supérieur au RMSE-MLE (voir **Figure2 (a), Figure10 (a)**). Nous pouvons expliquer cela

par le fait que les estimateurs de μ et σ^2 fondés sur la méthode du maximum de vraisemblance sont asymptotiquement efficaces (voir Engle (1982), Crowder 1976)), c'est à dire qu'ils deviennent meilleurs, au sens du critère de la variance, au fur et à mesure que la taille T de l'échantillon augmente). De plus il ne faut pas oublier de noter que les deux graphes du RMSE-GGS ont quasiment la même allure. Nous pouvons donc dire que, dans les deux cas un changement de loi a priori **n'a pas d'influence** sur la génération des valeurs des paramètres en utilisant l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling. Nous remarquons que le graphe du RMSE-GGS est en dessous du graphe du RMSE-MLE pour les tailles d'échantillon inférieures à $T=80$, ce qui traduit la performance de la méthode bayésienne sur la méthode classique du maximum de vraisemblance. Mais au-delà de $T=80$, les deux méthodes semblent équivalentes au sens du RMSE..

- Pour le paramètre μ , nous remarquons sur les quatre figures représentant le RMSE (voir **Figure3 (a)**, **Figure11 (a)**, **Figure15 (a)**, **Figure19 (a)**), que le graphe du RMSE-GGS est en dessous de celui du RMSE-MLE, ce qui nous amène à conclure que la méthode bayésienne estimerait mieux le paramètre μ que la méthode du maximum de vraisemblance. De plus, nous noterons que dans le **Figure11 (a)** lorsque le paramètre μ est loin de la zone de non stationnarité (voir **Figure3 (a)**, **Figure11 (a)**), les graphes représentant le RMSE-GGS ont quasiment la même allure, sauf que dans le cas où $\mu = 0$ (voir **Figure11 (a)**) le RMSE-GGS décroît plus rapidement que lorsque $\mu = 1$ (voir **Figure3 (a)**), la différence étant quand même négligeable, de l'ordre de 3.10^{-2} . De même dans le **Figure15 (a)**, lorsque μ est proche de la zone de non stationnarité (voir **Figure15 (a)**, **Figure19 (a)**) les graphes des RMSE-GGS ont quasiment la même allure. Ainsi un changement de loi a priori n'a pas d'impact sur l'estimation, selon le critère RMSE, pour la méthode bayésienne. En ce qui concerne le RMSE-MLE, ses valeurs sont inférieures lorsque μ est loin de la zone de non stationnarité.

- Concernant le paramètre σ^2 , nous remarquons sur les quatre figures (voir **Figure4 (a)**, **Figure12 (a)**, **Figure16 (a)**, **Figure20 (a)**), que le graphe représentant les RMSE-GGS est pratiquement en dessous du graphe des RMSE-MLE. Ainsi, nous déduisons que la méthode bayésienne, estime mieux le paramètre σ^2 que la méthode du maximum de

vraisemblance au sens du critère RMSE et, ceci, quelque soit la loi a priori adopté et indépendamment de la position de θ .

Interprétation des graphes pour une loi a priori proportionnelle à une constante et des RMSE empiriques calculés pour le mode a posteriori

Dans cette partie pour chaque valeur de T , nous avons généré 10 échantillons de taille 100 à partir de l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, cela nous a permis d'obtenir 10 modes et avec ces modes : nous avons fait le calcul du RMSE-GGS-MOD

par la formule suivante RMSE θ où θ est le paramètre d'intérêt. Pour comparer les résultats avec ceux obtenus par la méthode du MLE, nous calculons le RMSE-MLE par la formule suivante RMSE θ où θ est un échantillon représentant les estimateurs de θ par la méthode du MLE.

- ❖ Concernant l'estimation de θ , le premier point que nous pouvons souligner est que la valeur maximale (en $T = 20$) pour le RMSE-GGS-MOD est bien inférieure à celle du RMSE-GGS pour le $\theta = \mathbf{a}$, ($0.09 < 0.14$); de même, globalement, les valeurs sont plus petites dans le cas où nous faisons les calculs des RMSE sur les modes. Ainsi, en moyenne, le mode a posteriori est plus proche de la valeur réelle du paramètre d'intérêt. Ce que nous pouvons noter est que, le graphe des RMSE des modes a posteriori calculés au moyen de l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling (RMSE-GGS-MOD) est en dessous du graphe des RMSE-MLE, sauf en $T = 140$ où nous remarquons une légère hausse visiblement négligeable que nous expliquons par les fluctuations d'échantillonnage et / ou par le fait que les estimateurs de θ et θ fondée sur la méthode du maximum de vraisemblance sont asymptotiquement efficaces (in Engle (1982), Crowder 1976)). Ceci est confirmé par le graphe des estimations du paramètre θ (**Figure 5 (d)**) où nous remarquons d'une part la performance relative du mode a posteriori sur le MLE, et d'autre part, l'influence de la taille de l'échantillon sur les deux estimateurs dont les valeurs se rapprochent de la vraie valeur du paramètre d'intérêt.

- ❖ Pour le paramètre β_1 ce que nous pouvons noter est que, le graphe des RMSE-GGS-MOD est en dessous du graphe des RMSE-MLE. Nous remarquons que le graphe représentant le RMSE-GGS-MOD connaît une diminution très rapide, comme nous le voyons sur la **Figure 6 (c)**. Alors que le graphe des RMSE-GGS du β_2 : **a)** paraît plus stable (comme nous le voyons sur la **Figure 2 (a)**). Ainsi, la taille de l'échantillon semble jouer un rôle certain dans la convergence du mode a posteriori vers la vraie valeur du paramètre d'intérêt. Ceci est confirmé par le graphe des estimations du paramètre β_1 (**Figure 6 (d)**) où nous remarquons d'une part la performance relative du mode a posteriori sur le MLE surtout lorsque la taille de l'échantillon n'est pas très grande (<60), et d'autre part, l'influence de la taille de l'échantillon sur les deux estimateurs dont les valeurs se rapprochent de la vraie valeur du paramètre d'intérêt
- ❖ En ce qui concerne le paramètre β_2 , l'estimation par l'approche bayésienne au moyen des modes a posteriori est bien meilleure que celle obtenue à partir de la méthode du maximum de vraisemblance qui paraît très instable lorsque la taille de l'échantillon est relativement faible (**Figure 7 (d)**); de plus nous remarquons que les deux graphes, RMSE-GGS-MOD et RMSE-MLE subissent les mêmes variations (**Figure 7 (c)**), seulement le graphe qui représente le RMSE-GGS-MOD commence à se stabiliser à partir de $T = 40$, contrairement à celui du MLE où nous remarquons la nette influence d'une grande taille d'échantillon dont l'action directe est une chute rapide du RMSE-MLE.
- ❖ De même pour le paramètre β_3 , nous remarquons que le graphe du RMSE-MLE connaît une diminution très rapide par rapport au graphe des RMSE-GGS-MOD (**Figure 8 (c)**); ce dernier connaît une stabilité étonnante à partir de $T = 40$; c'est à dire que le RMSE-MLE peut démarrer d'une grande valeur pour $T = 20$ et converger très rapidement vers une valeur relativement nettement plus petite, alors que le RMSE-GGS-MOD démarre d'une valeur qui est déjà relativement faible et se stabilise très vite. Nous remarquons qu'en $T = 20$, la valeur du RMSE - MLE vaut plus que le double de la valeur du RMSE-GGS-MOD, ce qui nous montre l'efficacité de l'analyse bayésienne pour les petits échantillons relativement à la méthode du maximum de vraisemblance. En ce qui concerne les estimations obtenues, il est clair d'après la **Figure 8 (d)** que l'estimation de β_1 par la méthode du maximum de vraisemblance est très instable surtout lorsque la taille de l'échantillon est relativement faible. Il se stabilise autour de la vraie valeur du paramètre lorsque la taille de l'échantillon augmente. Sur la même figure nous remarquons que le

mode a posteriori est plus stable et se concentre autour de la vraie valeur du paramètre beaucoup mieux que le MLE.

III.6. Conclusion

Comme nous l'avons spécifié dans l'introduction, ce chapitre se trace plusieurs objectifs à la fois : d'abord l'estimation d'un modèle autorégressif d'ordre q à erreurs ARCH(p) par la méthode bayésienne moyennant l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling que nous avons adapté à notre contexte (c'est à dire un modèle AR(q) à erreurs ARCH(p)). L'application numérique a été faite dans le cas particulier où $q = 2$ et $p = 1$; Les résultats obtenus par cette méthode et pour les deux lois a priori proposées par Geweke (1988) ont été comparés avec ceux de la méthode du maximum de vraisemblance.

- Le paramètre α_0 est mieux estimé par la méthode bayésienne que par celle du maximum de vraisemblance, et ceci indépendamment de la position du paramètre α_1 dans l'intervalle $]0,1[$ et pour les différentes lois a priori du couple (α_0, α_1) . De plus, son estimation par la méthode bayésienne n'est pas influencée par un changement de loi a priori puisque l'allure des graphes des RMSE-GGS reste la même. Geweke (1988) l'a déjà fait remarqué pour un modèle de régression à erreurs ARCH.. D'autre part, la loi de probabilité a posteriori de α_0 est concentrée autour de la vraie valeur du paramètre. Les mêmes remarques peuvent être faites pour le paramètre α_1 lorsqu'il est relativement loin de la zone de non stationnarité. Mais en revanche, la remarque supplémentaire que nous pourrions rajouter est que, lorsque α_1 est proche de la zone de non stationnarité les résultats des simulations montrent que les deux méthodes sont équivalentes.
- Quand aux paramètres de la partie autorégressive α_1 et α_2 , nous avons remarqué qu'ils sont mieux estimés par la méthode bayésienne; quelle que soit la taille de l'échantillon.

CHAPITRE IV

Analyse Bayésienne d'un modèle de position à erreurs ARCH

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons, d'une part à l'estimation bayésienne des paramètres d'un modèle de position à erreurs ARCH moyennant l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling et, d'autre part, nous voulons comparer, au moyen du critère RMSE, les estimations obtenues avec celles du maximum de vraisemblance, obtenues à l'aide de l'algorithme du score. Nous étudierons également par simulation l'impact éventuel d'un changement dans la loi a priori sur les estimations des paramètres. Ce travail a été fait par Bauwens et Lubrano (1998) pour α moyennant l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling. Nous tentons dans ce travail, de l'étendre au cas où α est quelconque et inconnu en adaptant l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling à notre contexte.

IV.2. Modèle de position à erreurs ARCH

Les modèles de position à erreurs ARCH sont un cas particulier des modèles autorégressifs à erreurs ARCH avec constante.

$\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus obéissant à un modèle de position à erreurs ARCH(p) s'il vérifie les équations stochastiques suivantes :

où α est le paramètre de position, et \mathcal{F}_t , la tribu engendrée par le passé du processus jusqu'au temps $t-1$.

IV.3. Les lois de probabilité a posteriori des différents paramètres du modèle

Théorème

Les lois a posteriori conditionnelles des différents paramètres θ d'un processus de position à erreurs ARCH(p) sont

où $L(\theta)$ est la fonction de vraisemblance dont l'expression est la suivante

où y est le vecteur des observations et θ est définie par l'expression suivante

désigne la loi a priori de θ .

Remarque 1 : Geweke a considéré les trois lois a priori suivantes

iv.

v.

vi.

avec

Remarque 2 : Concernant notre travail d'estimation dans ce chapitre, nous choisirons les deux premières lois a priori définies ci-dessus.

est la loi a priori de , que nous prendrons non informative, c'est-à-dire, ici, proportionnelle à une constante.

Démonstration du théorème

Nous ferons la démonstration seulement pour la densité de probabilité a posteriori conditionnelle de ; pour les autres paramètres la démonstration se fait de la même façon.

Nous savons d'après le théorème de Bayes que

Or comme et sont supposés indépendants, alors

D'où

Sans oublier de préciser que représente la fonction de vraisemblance que nous remplacerons par .

IV.4. L'algorithme du Griddy Gibbs Sampling

Notre but comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, est d'utiliser l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour estimer les paramètres d'un modèle de position à erreurs ARCH, et de comparer les résultats avec ceux obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance, les solutions des équations normales étant approchées au moyen de l'algorithme du score.

IV.4.1. Algorithme du Griddy Gibbs Sampling pour un modèle de position à erreurs ARCH(p)

Nous avons déjà présenté dans le chapitre II l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling (Ritter et Tanner (1992)) dans un cadre général ; à présent, nous adaptons cet algorithme à un modèle de position à erreurs ARCH(p) :

1/ Soit k, m, n, p , quatre entiers positifs fixés et f, g les données initiales de

2/ Poser

2.1/ Générer

2.2/ Soient a, b, c, d fixés (les domaines de définition de f, g)

3/ Calculer

3.1/ Calculer I_1, I_2 en

3.2/ Calculer I_1, I_2 (par une

méthode de calcul d'intégrales approximées, par exemple la méthode des trapèzes ou la méthode de Simpson)

3.3/ Poser

3.4/ Si $I_1 < \epsilon$ tel que $I_2 < \epsilon$ alors I_1, I_2 et aller en

3.6/ sinon $I_1 < \epsilon$ tel que $I_2 < \epsilon$ et aller en 3.5/

3.5/ Poser $\epsilon = \epsilon/2$ et aller en 3/

3.6/ Si $I_1 < \epsilon$ poser $\epsilon = \epsilon/2$ et aller en 3/ sinon on obtient I_1, I_2 aller en 4/

4/ Calculer

4.1/ Calculer I_1, I_2 au points

4.2/ Calculer I_1, I_2 pour n, m (comme pour les I_1, I_2 , en

utilisant une méthode numérique de calculs d'intégrales)

4.3/ Poser

4.4/ Si tel que alors et aller en 5/ sinon
tel que et aller en 4.5/

4.5/ Poser , et aller en 4/

5/ Si poser et aller en 2.1/ sinon poser

et puis aller en 6/

6/ Si poser et aller en 2.1/ sinon aller en 7/

7/ est l'estimateur de la densité de
probabilité a posteriori de

De même est l'estimateur de la densité de probabilité a
posteriori de .

IV. 4.2. Applications numériques

1- Le modèle

Les observations sont générées à partir du modèle suivant

respectivement pour et .

Nous nous servons ensuite de ces données artificielles pour estimer les paramètres du modèle, supposés inconnus, en utilisant l'approche bayésienne présentée ci-dessus, à l'aide du mode a posteriori moyennant l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling. Nous comparerons ensuite les résultats avec ceux obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance moyennant l'algorithme du score.

Nous tenons à préciser aussi que nous voulons étudier, par simulation, l'influence du choix de α lorsqu'il est proche de la zone de non stationnarité sur l'analyse bayésienne du modèle.

2- Le programme informatique

Ce programme a été écrit en langage Matlab 5.3 sous environnement Windows. Nous tenons à signaler que l'exécution de ce programme, qui contient moins de paramètres à estimer que dans le cas d'un modèle autorégressif à erreurs ARCH, (il y en avait quatre), met quand même, encore, beaucoup de temps ; ceci est dû au fait qu'il comporte tout de même trois sous programmes, en plus des fonctions exponentielles qui contiennent des expressions complexes et qui sont calculées à chaque itération dans notre programme informatique global.

```
function valeur_vide=esti_posi
T=20;
epsilon=randn(1,T)
alpha1=0.3;
mu=0.2;
v=15;
for m=1:100;
    for w=1:v;
        u=rand;
        %Estimation de alpha0
        gx0(1)=0;
        for i=2:249;
            gx0(i)=gx0(i-1)+(pos1(0.004+0.002*(i-2),epsilon,alpha1,mu)+...
                pos1(0.004+0.002*(i-1),epsilon,alpha1,mu)+...
                4*pos1(0.004+0.001*(2*i-3),epsilon,alpha1,mu))*(0.002)/6;
        end;
        N1=gx0(249);
        g0=gx0./N1;
        y0=find(g0>u);
```

```

s0=y0(1);
if (abs(g0(s0-1)-u)<0.0001;
    alphao_est=0.004+0.002*(s0-2);
else
a0=0.004+(s0-2)*0.002;
b0=0.004+(s0-1)*0.002;
h0=(b0-a0)/40;
g01(1)=0;
for i=2:41;
    g01(i)=g01(i-1)+(pos1(a0+h0*(i-2),epsilon,alpha1,mu)+...
        pos1(a0+h0*(i-1),epsilon,alpha1,mu)+...
        4* pos1(a0+(h0/2)*(2*i-3),epsilon,alpha1,mu))*(h0)/6;
end;
g01=g01./N1;
Gx01=g0(s0-1)+g01;
y01=find(Gx01>u);
s01=y01(1);
if (abs(Gx01(s01-1)-u)<0.0001;
    alphao_est=a0+h0*(s01-2);
else
a01=a0+h0*(s01-2);
b01=a0+h0*(s01-1);
h01=(b01-a01)/15;
g02(1)=0;
for i=2:16;
    g02(i)=g02(i-1)+( pos1(a01+h01*(i-2),epsilon,alpha1,mu)+...
        pos1(a01+h01*(i-1),epsilon,alpha1,mu)+...
        4*pos1(a01+(h01/2)*(2*i-3),epsilon,alpha1,mu))*(h01)/6;
end;
g02=g02./N1;
Gx02=Gx01(s01-1)+g02;
y02=find(Gx02>u);
s02=y02(1);
if (abs(Gx02(s02-1)-u)<0.0001;

```

```

    alphao_est=a01+h01*(s02-2);
end;
end;
end;
alphao_est;
%estimation de alpha1
gx1(1)=0;
for i=2:334;
gx1(i)=gx1(i-1)+( pos2(0.003*(i-2),epsilon,alphao_est,mu)+...
    pos2(0.003*(i-1),epsilon,alphao_est,mu)+...
    4*pos2((0.003/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,mu))*(0.003)/6;
end;
N2=gx1(334);
g1= gx1./N2;
y1=find( g1>u);
s1=y1(1);
if (abs(g1(s1-1)-u)<0.0001;
    alpha1=0.003*(s1-2);
else
a1=(s1-2)*0.003;
b1=(s1-1)*0.003;
h1=(b1-a1)/40;
g11(1)=0;
for i=2:41;
    g11(i)=g11(i-1)+( pos2(a1+h1*(i-2),epsilon,alphao_est,mu)+...
        pos2(a1+h1*(i-1),epsilon,alphao_est,mu)+...
        4*pos2(a1+(h1/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,mu))*(h1)/6;
end;
g11=g11./N2;
Gx11=g1(s1-1)+g11;
y11=find(Gx11>u);
s11=y11(1);
if (abs(Gx11(s11-1)-u)<0.0001;
    alpha1=a1+h1*(s11-2);

```

```

end;
end;
alpha1;
%estimation de mu
gx2(1)=0;
for i=2:301;
    gx2(i)=gx2(i-1)+( pos3(-0.3+0.003*(i-2),epsilon,alphao_est,alpha1)+...
    pos3(-0.3+0.003*(i-1),epsilon,alphao_est,alpha1)+...
    4*pos3(-0.3+(0.003/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,alpha1))*(0.003)/6;
end;
N3=gx2(301);
g2=gx2./N3;
y2=find(g2>u);
s2=y2(1);
if (abs(g2(s2-1)-u))<0.0001;
    mu=-0.3+(s2-2)*0.003;
else
a2=-0.3+(s2-2)*0.003;
b2=-0.3+(s2-1)*0.003;
h2=(b2-a2)/40;
g21(1)=0;
for i=2:41;
    g21(i)=g21(i-1)+( pos3(a2+h2*(i-2),epsilon,alphao_est,alpha1)+...
    pos3(a2+h2*(i-1),epsilon,alphao_est,alpha1)+...
    4*pos3(a2+(h2/2)*(2*i-3),epsilon,alphao_est,alpha1))*(h2)/6;
end;
g21=g21./N3;
Gx21=g2(s2-1)+g21;
y21=find(Gx21>u);
s21=y21(1);
if (abs(Gx21(s21-1)-u))<0.0001;
mu=a2+h2*(s21-2);
else
a21=a2+h2*(s21-2);

```

```

b21=a2+h2*(s21-1);
h21=(b21-a21)/5;
g22(1)=0;
for i=2:6;
    g22(i)=g22(i-1)+( pos3(a21+h21*(i-2),epsilon,alpha0_est,alpha1)+...
    pos3(a21+h21*(i-1),epsilon,alpha0_est,alpha1)+...
    4* pos3(a21+(h21/2)*(2*i-3),epsilon,alpha0_est,alpha1))*(h21)/6;
end;
g22=g22./N3;
Gx22=Gx21(s21-1)+g22;
y22=find(Gx22>u);
s22=y22(1);
if (abs(Gx22(s22-1)-u))<0.0001;
    Beta0=a21+h21*(s22-2);
end;
end;
end;
mu;
X(w,1)=alpha0_est;
X(w,2)=alpha1;
X(w,3)=mu;
end;
B1(m)=X(v,1);
B2(m)=X(v,2);
B3(m)=X(v,3);
end;
B1
B2
B3
function yp= pos1(alpha0,epsilon,alpha1,mu)
T=20;
c3=1/sqrt(2*pi);
Y(1)=0.5+epsilon(1)*sqrt(0.02+0.6*(0.5^2));
for t=2:T;

```

```

    Y(t)=0.5+epsilon(t)*sqrt(0.02+0.6*(Y(t-1)-0.5).^2);
end;
yp=1;
xp1=alpha0+alpha1.*mu.^2;
yp=yp*((xp1*2*pi).^(-0.5)).*exp(-(Y(1)-mu).^2./(2*xp1));
xp2=(Y(1)-mu)^2;
for t=2:T;
    yz5=alpha0+alpha1*xp2;
    xp3=(Y(t)-mu)^2;
    yp=yp.*(c3).*((yz5).^(-0.5)).*exp(-xp3/(2*yz5));
    xp2=xp3;
end;
%yp=yp.*(abs(sqrt((1-alpha1)/alpha0)));

```

```

function yp= pos2(alpha1,epsilon,alpha0,mu)

```

```

T=20;
c3=1/sqrt(2*pi);
Y(1)=0.5+epsilon(1)*sqrt(0.02+0.6*(0.5^2));
for t=2:T;
    Y(t)=0.5+epsilon(t)*(0.02+0.6*(Y(t-1)-0.5).^2).^0.5;
end;
yp=1;
xp1=alpha0+alpha1.*mu.^2;
yp=yp*((xp1*2*pi).^(-0.5)).*exp(-(Y(1)-mu).^2./(2*xp1));
xp2=(Y(1)-mu)^2;
for t=2:T;
    yz5=alpha0+alpha1*xp2;
    xp3=(Y(t)-mu)^2;
    yp=yp.*(c3).*((yz5).^(-0.5)).*exp(-xp3/(2*yz5));
    xp2=xp3;
end;
%yp=yp.*(abs(sqrt((1-alpha1)/alpha0)));

```

```

function yp= pos3(mu,epsilon,alpha0,alpha1)

```

```

T=20;
c3=1/sqrt(2*pi);
Y(1)=0.5+epsilon(1)*sqrt(0.02+0.6*(0.5^2));
for t=2:T;
    Y(t)=0.5+epsilon(t)*(0.02+0.6*(Y(t-1)-0.5).^2).^0.5;
end;
yp=1;
xp1=alpha0+alpha1.*mu.^2;
yp=yp*((xp1*2*pi).^(-0.5)).*exp(-(Y(1)-mu).^2./(2*xp1));
xp2=(Y(1)-mu)^2;
for t=2:T;
    yz5=alpha0+alpha1*xp2;
    xp3=(Y(t)-mu)^2;
    yp=yp.*(c3).*((yz5).^(-0.5)).*exp(-xp3/(2*yz5));
    xp2=xp3;
end;

```

3- Résultats des simulations et commentaires

Nous avons simulé 100 échantillons de tailles respectives 20, 40, 60, 80, 100, 120 et 140 (100 pour chaque taille fixée d'échantillon)

Nous précisons ici qu'aucune sélection n'a été faite sur les estimateurs obtenus, c'est à dire que l'échantillon à été pris tel quel sans privilégier les meilleures valeurs.

Nous avons représenté les graphes des différents RMSE afin de comparer le comportement, d'une part, des estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance qui s'appuie sur l'algorithme du score pour la résolution des équations normales et d'autre part, en ce qui concerne la méthodologie bayésienne adoptée dans ce chapitre, d'avoir une idée précise sur le comportement des valeurs générées à partir des lois de probabilité a posteriori marginales des différents paramètres, par le biais de l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, relativement à la vraie valeur du paramètre.

Nous illustrons les résultats obtenus à l'aide de deux représentations graphiques

- L'histogramme, de l'échantillon généré à partir des lois de probabilité a posteriori marginales moyennant l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, pour chacun des paramètres , afin d'en sélectionner le mode, pour $T = 20$.
- Les graphes des RMSE pour les deux techniques utilisées, à savoir, l'algorithme du score qui nous fournit les estimateurs du maximum de vraisemblance pour les différents paramètres et l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling qui nous permet de générer des échantillons pour les différents paramètres à partir de leurs lois de probabilités a posteriori marginales même si celles-ci ne sont pas disponibles.

En ce qui concerne les domaines de définition de chaque paramètre, nous demandons au lecteur de revenir en I.3.

Nous signalons aussi que nous avons effectué l'estimation bayésienne de notre modèle pour les deux lois a priori du couple , qui ont été définies dans le théorème donné dans ce chapitre et qui sont et dans le but de

comparer leurs influences sur les estimations des différents paramètres. Cela nous permettra d'avoir une échelle de comparaison entre les estimations obtenues par la méthode du maximum de vraisemblance et l'échantillon des valeurs générées à partir des différentes lois de probabilité a posteriori des différents paramètres et, ceci, à l'aide du RMSE, dont nous rappelons la formule dans le cas général
$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{\theta}_i - \theta)^2}$$
 où θ est la vraie valeur du paramètre à estimer ; quand $\hat{\theta}_i$ c'est la valeur estimée du paramètre pour i et m est la taille de l'échantillon généré.

Les notations présentes dans la légende désignent :

- MLE désigne le RMSE calculé à partir d'un échantillon d'estimateurs obtenus par la méthode classique du maximum de vraisemblance moyennant l'algorithme du score (nous le noterons RMSE-MLE), sur la base de $m = 100$.
- A.B désigne le RMSE calculé à partir d'un échantillon généré à partir des lois de probabilité a posteriori marginales des différents paramètres, et ce, par le biais de l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, (nous le noterons RMSE-GGS) sur la base de $m = 100$.

Sans oublier de préciser que les histogrammes sont donnés pour $T = 20$ (qui est la taille la plus petite d'échantillon utilisée) dans le but de souligner l'efficacité de cette méthode pour les échantillons de petites tailles .

1^{er} cas $\alpha_1=0.6$

a) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \text{constante}$

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec $\alpha_1 = 0.6$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure1

Mode () = 0.0136

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec $\rho = 0.6$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 2

Mode () = 0.4623

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec $\rho = 0.6$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 3

Mode () = 0.5230

b)

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec $\rho = 0.6$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 4

Mode () = 0.0139

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec = 0.6

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 5

Mode () = 0.3443

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec $\rho = 0.6$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 6

La série est bimodale, mode () =

2^{er} cas $\alpha_1=0.98$

a) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \text{constante}$

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec $\alpha_1 = 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 7

Mode () = 0.0128

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec = 0.98

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 8

Mode () = 0.5900

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec $\alpha = 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 9

Mode () = 0.5271

b)

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec $= 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 10

Mode ()

(a)

Grphe représentant le RMSE pour avec = 0.98

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 11

Mode () = 0.6491

(a)

Graphe représentant le RMSE pour avec $= 0.98$

(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de par le G.G.S

Figure 12

La série est bimodale : mode ()

❖ Après avoir fait nos simulations, nous obtenons pour l'analyse bayésienne, quatre représentations graphiques du RMSE pour chaque paramètre. Pour le paramètre α_1 , nous remarquons (voir **Figure 1 (a)**, **Figure 4 (a)**, **Figure 7 (a)**, **Figure 10 (a)**) que lorsque la loi a priori du couple (α_1, α_2) est proportionnelle à $\exp(-\alpha_1 x)$, le RMSE dans le premier cas ($\alpha_1 = 0.6$, voir **Figure 4 (a)**) et dans le deuxième cas ($\alpha_1 = 0.98$, voir **Figure 10 (a)**) ont à peu près la même allure générale. Sans oublier de dire que dans les deux cas, le RMSE-GGS présentent des valeurs petites, de l'ordre de 10^{-3} , ce qui reflète une concentration des valeurs générées de α_1 autour de la vraie valeur du paramètre. Néanmoins, nous remarquons l'influence de la valeur de α_1 lorsque celle-ci est proche de la zone de non stationnarité qui affecte les différents RMSE en faisant légèrement croître leurs valeurs (de l'ordre de $3 \cdot 10^{-3}$ lorsque la taille de l'échantillon est relativement faible. Il est clair, cependant que le RMSE-GGS se stabilise plus rapidement que le RMSE-MLE, et que le RMSE-GGS est toujours inférieur au RMSE-MLE comme en témoignent les **Figure 4 (a)** et **Figure 10 (a)**. Lorsque la loi a priori (α_1, α_2) est constante, nous remarquons, de même, que le RMSE a la même allure dans les deux cas (voir **Figure 1 (a)** et **Figure 7 (a)**). De plus, à partir de $T=60$, celui-ci tend à se stabiliser. Néanmoins, nous remarquons l'influence de la valeur de α_1 , lorsque celle-ci est proche de la zone de non stationnarité. Elle affecte, en effet, les différents RMSE en faisant légèrement croître leurs valeurs (de l'ordre de $9 \cdot 10^{-3}$ lorsque la taille de l'échantillon est inférieure à 60). D'où un résultat qui nous semble important est que, pour une loi a priori donnée, le changement de la valeur de α_1 dans un modèle n'influe pas sur l'estimation des paramètres dans les deux approches, bayésienne et classique. Il est clair, cependant, là aussi, que le RMSE-GGS se stabilise plus rapidement que le RMSE-MLE, et que le RMSE-GGS est toujours inférieur au RMSE-MLE comme en témoignent les **Figure 1 (a)** et **Figure 7 (a)**. Ainsi, α_1 est moins bien estimé par les deux approches lorsque α_1 est proche de la zone de non stationnarité. Mais nous pouvons conclure que pour les deux lois a priori, α_1 est mieux estimé par l'approche bayésienne que par la méthode du maximum de vraisemblance car il ne faut pas oublier de noter que nous n'avons calculé le RMSE que sur la base de l'échantillon généré par l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling, car en fait, il aurait fallu pour chaque échantillon de taille cent obtenu calculer le mode et faire cela au moins une centaine de fois, ensuite calculer le RMSE, mais pour cela il aurait fallu générer cent échantillons de

taille cent ($m=100$), et, ce, pour $T=20, 40, 60, 80, 100, 120$ et 140 , ce qui est techniquement impossible vu le temps que prend la simulation d'un seul échantillon de taille cent (qui est de trois jours) lorsque $T=140$, le matériel informatique dont nous disposons n'est malheureusement pas suffisamment performant pour ce type de calculs.

- ❖ Les commentaires que nous allons faire sur les graphes des RMSE issus de l'estimation de θ différent de ceux faits pour θ_0 , (voir **Figure 2 (a)**, **Figure 5 (a)**, **Figure 8 (a)**, **Figure 11 (a)**.) Concernant le premier cas (c'est à dire lorsque $\theta_0 < \theta$) et en faisant une comparaison pour les deux lois a priori, nous remarquons que les deux graphes ont la même allure. De même pour le deuxième cas (quand $\theta_0 > \theta$ est proche de la zone de non stationnarité) les deux graphes ont approximativement la même allure. Nous pouvons même dire que le RMSE-GGS pour θ n'est pas influencé par un changement de loi a priori. Nous remarquons aussi que, dans le premier cas, θ est mieux estimé par la méthode bayésienne, que par la méthode du maximum de vraisemblance. Par exemple, pour $T=20$, les **Figure 2 (b)** et **Figure 5 (b)** indiquent un mode respectivement en 0.4623 et 0.3443 pour les deux lois a priori, alors que le MLE est, pour l'échantillon simulé, égal à 0.3205. Mais pour le deuxième cas, quand θ_0 est proche de la zone de non stationnarité, à partir de $T=100$, la méthode du maximum de vraisemblance s'avère être une méthode d'estimation meilleure que la méthode bayésienne et le RMSE-MLE devient inférieur au RMSE-GGS. Ce comportement peut être expliqué par le fait que les estimateurs de θ et θ_0 fondés sur la méthode du maximum de vraisemblance sont asymptotiquement efficaces (in Engle (1982), Crowder 1976)), et la méthode bayésienne est une méthode exacte, c'est à dire qu'elle répond moins rapidement à l'influence de la taille de l'échantillon T . Enfin pour clore cette série de commentaires, nous ne devons pas oublier de noter que, dans le premier cas la plus grande valeur qu'atteint le RMSE-GGS (pour les deux loi a priori) vaut presque la moitié de la plus grande valeur atteinte par le RMSE-GGS dans le cas où θ_0 est proche de la zone de non stationnarité ; nous pouvons dire ainsi que, en moyenne, l'écart entre la valeur estimée de θ et la vraie valeur du paramètre diminue plus rapidement que lorsque θ_0 est loin de la borne de non stationnarité. Nous notons un dernier détail lorsque la loi a priori est proportionnelle à θ^{-1} : le RMSE-GGS évolue de la même façon dans les deux cas. mais le rapport entre les deux graphes A.B et M.L.E n'est pas le même (**Figures 2 (a)** et **8 (a)** et **Figures 5 (a)** et **11 (a)**).

- ❖ Pour l'estimation du paramètre de position μ , le premier point que nous notons sur les quatre figures (**Figure 3 (a)**, **Figure 6 (a)**, **Figure 9 (a)** et **Figure 12 (a)**) est que les graphes du RMSE-GGS et RMSE-MLE jusqu'en $T=100$, sont pratiquement confondus. A partir de $T=120$, nous remarquons la performance de la méthode bayésienne sur celle du maximum de vraisemblance et, ceci même lorsque μ est proche de la zone de non stationnarité. De plus, nous notons également que l'influence du choix de la loi a priori est négligeable

IV.5. Conclusion

- Dans ce chapitre nous avons adopté l'analyse bayésienne pour estimer les paramètres d'un modèle de position à erreurs ARCH. Bauwens et Lubrano (1998) ont étudié le même modèle lorsque α_0 est connu. Nous avons étendu leurs travaux au cas où α_0 est quelconque et inconnu. Pour cela nous avons adapté l'algorithme du Griddy Gibbs Sampling à ce modèle. Il s'agit d'une réponse à l'algorithme du Gibbs Sampling limité par le fait que les lois de probabilité a posteriori doivent être de type connu.
- Pour le paramètre μ , la première conclusion à laquelle nous aboutissons est que son estimation n'est pas influencée par la variation de la valeur de μ , seul, le RMSE prend des valeurs plus petites lorsque μ est loin de la zone de non stationnarité. De plus μ est mieux estimé par la méthode bayésienne que par la méthode du maximum de vraisemblance et l'influence de la loi a priori sur l'estimation de μ est négligeable. Le pic présenté par le RMSE-GGS en $T = 40$, pour la loi a priori μ constante, semble être dû aux fluctuations d'échantillonnage
- En ce qui concerne le paramètre α_1 et lorsque sa vraie valeur est loin de la zone de non stationnarité (par exemple, $\alpha_1 = 0.5$), nous pouvons dire que le RMSE-GGS pour α_1 n'est pas influencé par un changement de loi a priori et α_1 est mieux estimé par la méthode bayésienne, que par la méthode du maximum de vraisemblance. Alors que dans le deuxième cas, lorsque α_1 est proche de la zone de non stationnarité et pour les grandes tailles d'échantillon, la méthode du maximum de vraisemblance s'avère être une méthode d'estimation meilleure que la méthode bayésienne et le RMSE-MLE devient inférieur au RMSE-GGS.

- Pour le paramètre de position μ , la première conclusion à laquelle nous aboutissons est que l'estimation de μ n'est pas influencée par la loi a priori du couple (μ, σ^2) utilisée. En effet, comme nous l'avons expliqué dans les commentaires, que ce soit dans le premier cas ou dans le deuxième, l'allure des deux graphes représentant le RMSE-GGS est quasiment la même. Nous avons noté également, l'équivalence des deux méthodes, au sens du RMSE, pour les petites tailles d'échantillon. A partir de $T=120$, la performance de la méthode bayésienne sur celle du maximum de vraisemblance est certaine.

Bibliographie

1. BAUWENS L. et M. Lubrano., (1998), « Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler », 1, C23-C46.
2. BERA A.K. et M.L. Higgins, (1994), « ARCH models : Properties, Estimation and Testing », *Journal of Economic Surveys*, 7 (4), 305-62.
3. BLACK F., (1976), « Studies of prices volatility changes. proc. Am. Stat. Assoc. », *Bus. Econ. Stat. Section*, 177-81.
4. BOLLERSLEV T., R. F. Engle et D. B. Nelson, (1994), « ARCH models », in R. F. Engle et D. Mc Fadden Eds., *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, North Holland, Amsterdam.
5. BOLLERSLEV T.,(1986), « Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity », *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
6. BOOSE A. et K. Mukherjee, (2003), « Estimating the ARCH parameters by solving linear equations », *Journal of Time Series Analysis*, 24, n° 2, 127-136.
7. BOUKERDENNA F., (2002), *Etude des Modèles Autorégressifs à Erreurs ARCH Classiques et Périodiques*,
8. BOX G. et G. Jenkins., (1970), « Time Series Analysis : Forecasting and Control », Holden Day, San Francisco (CA).

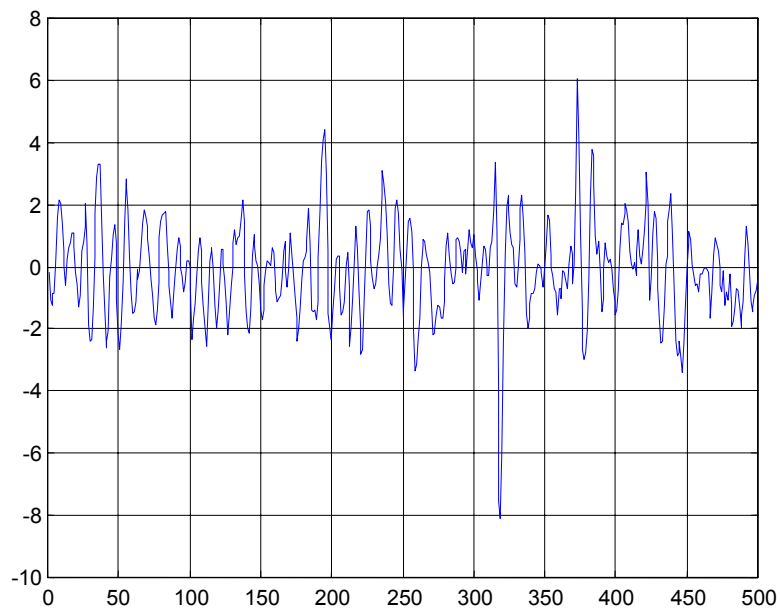
9. BRENDT E. K., B. H. Hall, R. E. Hall et J. A. Hausman, (1974), « Estimation and Inference in nonlinear structural models », *Annals of Economic and Social Measurement*, 4, 653-665.
10. BRENDT E.K., B.H. Hall., R.E. Hall et J.A. Hausman., (1974), « Estimation and Inference in non linear Structural Models », *Annals of Economic and Social Measurement*, 4, 653-65.
11. CARLIN B. P. and A. E. Gelfand., (1991), An iterative Monte Carlo method for non conjugate Bayesian analysis. *Stat. Comput.* 1, 119 – 28.
12. CASELLA G. and E. I. George, (1992), « Explaining the Gibbs sampler », *Am. Statistician*, 46, 167- 74.
13. CASELLA G. et GEORGE E., (1992), « Explaining the Gibbs Sampler », *American Statistical Association*, 40, 167-174.
14. CHIB S. et E. Greenberg., (1994), « Bayes Inference in Regression Models with ARMA(p,q) Errors », *Journal of Econometrics*, 64, 183-206.
15. CHIB S. et Greenberg E., (1994), « Bayes inference in regression models with ARMA (p,q) errors », *J. Econometrics*, 64, 183-206.
16. CHURCHIL G. et G. Casella., (1991), « Sampling Based Methods for the Estimation of DNA Sequence Accuracy », Technical Report BU-1138-M, Cornell University, Biometrics Unit.
17. COX D. R. et D. V. Hinkley. : *Theoretical Statistics*. London : Chapman and Hall. 1974.
18. CROWDER M. J., (1976), « Maximum Likelihood Estimation for Dependent Observations », *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 38, 45-53.
19. DAVIES P.J et P. Rabinowitz., (1975), *Methods of Numerical Integration*, New York, Academic Press.
20. DELLAPORTAS P. et A.F.M. Smith., (1990), « Bayesian Inference for Generalized Linear Models », Technical Report, University of Nottingham, Dept. of Mathematics.
21. DEVROY L., (1986), *Non Uniform Random Variate Generation*, New York, Springer-Verlag.
22. DHRYMES P. et J.B. Taylor., (1976), « On An Efficient Two Step Estimator for Dynamic Simultaneous Equations Models with Autoregressive Errors », *International Economic Reviews*, 17, 362-76.
23. DIEBOLD J. et C. Robert., (1990), « Estimation of Finite Mixture Distributions Through Bayesian Sampling », Technical Report, Université Paris IV, L.S.T.A.

24. EDDY W.F. et M.J. Schervish., (1990), « The Asymptotic Distribution of the Running Time of Quicksort », technical report, Carnegie Mellon University, Dept. of Statistics.
25. ENGLE R.F., D. Lillien. et R. Robbins., (1987), « Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure : The ARCH-M Model », *Econometrica*, 55, 391- 407.
26. ENGLE R.F. et T.P. Bollerslev., (1986), « Modelling the Persistence of Conditional Variances », *Econometric Review*, 5, 1-50.
27. ENGLE R.F., (1982), « Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation », *Econometrica*, 50, 987-1008.
28. ENGLE R.F., (1983), « Estimates of Variance of U.S. Inflation Based upon the ARCH Model », *Journal of Money, Credit and Banking*, 15, 286-301.
29. ENGLE R.F., D.F. Hendry et D. Trumble., (1985), « Small Sample Properties of ARCH Estimators and Tests », *Canadian Journal of Economics*, 18, 66-93.
30. FRENCH K. R., G. W. Schwert et R. F. Stanbaug, (1987), « Expected stock returns and volatility », *The Journal of Financial Economics*, 19, 3-29.
31. GELFAND A. E. et A.F.M. Smith, (1990), « Sampling-Based Approches to Calculating Marginal Densitie », *Journal of the American Statistical Association*, 85, 398-409.
32. GELFAND A.E., S.E. Hills., A. Racine-Poon. et A.F.M. Smith., (1990), « Illustration of Bayesian Inference in Normal Data Models Using Gibbs Sampling », *Journal of the American Statistical Association*, 85, 972-985.
33. GELMAN A. et D. Rubin., (1991), « An Overview and Approach to Inference From Iterative Simulation », Technical Report, University of California-Berkeley, Dept. Of Statistics.
34. GEMAN S. et D. Geman, (1984), « Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machines Intelligence*, 6, 721-741.
35. GEORGE E.I. et R.E. McCulloch, (1991), « Variable Selection via Gibbs Sampling », Technical Report, University of Chicago, Graduate School of Business.
36. GEWEKE J.,(1988), « Autoregressive Conditional Heteroscedasticity » in E. Berndt, H. White et W. Barnett (eds), *Dynamic Econometric Modeling*, 73-103.
37. GEWEKE J., (1986), « Exact Inference in the Inequality Constrained Normal Linear Regression Model », *Journal of Applied Econometrics*, 1, 127-141.

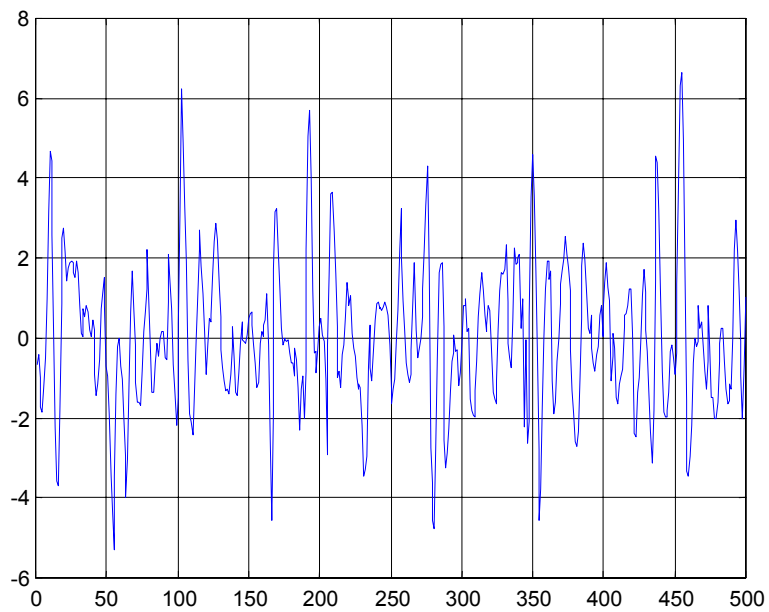
38. GEWEKE J., (1986c), Bayesian inference in econometric models using Monte Carlo integration, Manuscript (Duke University, Durham, NC).
39. GEWEKE J., (1989a), « Bayesian inference in econometric models using Monte Carlo integration, *Econometrica*, 57, 1317-1339.
40. GEWEKE J., (1989b), « Exact Predictive Densities for Linear Models with ARCH Disturbances », *Journal of Econometrics*, 40, 63-86.
41. GILKS W.R. et P. WILD., (1992), « Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling », *Journal of the Royal Statistical Society, Ser.C*, 41, 337-348.
42. GOURIEROUX Ch., (1992), Modèles ARCH : Applications financières et monétaires, Paris, Economica.
43. GRANGER C. et A. Andersen., (1978), An Introduction to Bilinear Time Series, Vandenhoeck et Ruprecht, Göttingen.
44. HAMMERSLY J. M. et D. C. Handscomb., (1964), Monte Carlo methods, 1st ed. (Methuen, London).
45. HASTINGS W.K., (1970), « Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications », *Biometrika*, 57, 97-109.
46. HEMIS R., (1999), « Sélection de l'ordre des modèles autorégressifs périodiques, approche classique et approche bayésienne ».
47. HOUAOUI Z., (1999), Approche bayésienne du problème de surdispersion en utilisant l'échantillonneur de Gibbs ; implémentation informatique appliquée aux données médicales.
48. JONES R. H.,(1965), « An experiment in non linear prediction », *Journal of Applied Meteorology* », 4, 701-705.
49. KLEIBERGEN F. et H. K van Dijk., (1993), « Non-stationarity in GARCH models : a Bayesian analysis », *J. Appl. Econometrics*, 8 (Supplement), 41-61.
50. KLOEK T. et H. K. van Dijk., (1978), « Bayesian estimates of equation system parameters : an application of integration by Monte Carlo, *Econometrica*, 46, 1-19.
51. LANGE N., Carlin B. P. et Gelfand A. E., (1990), « Hierarchical Bayes Models for the Progression of HIV Infection Using Longitudinal CD4+ Counts », technical report, Carnegie Mellon University, Dept. of Statistics.
52. METROPOLIS N., A.W. Rosenbluth., M.N. Rosenbluth., A.H. Teller et E. Teller., (1953), « Equations of State Calculations by Fast Computing Machines », *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087-1091.

53. MILHOJ A., (1984), The moment structure of ARCH processes, Research report 94 (Institute of Statistics, University of Copenhagen, Copenhagen).
54. MÜLLER P. et A. Pole, (1995), Monte Carlo posterior integration in GARCH models. Manuscript. Duke University.
55. MÜLLER P., (1991), « A Generic Approach to Posterior Integration and Gibbs Sampling », Technical Report 91-09, Puidue University, Dept. of Statistics.
56. NAKATSUMA T.,(2000), « Bayesian Analysis of ARMA-GARCH Models : A Markov Chain Sampling Approach », *Journal of Econometrics*, 95, 57-69.
57. PANTULA S. G., (1988), « Estimation of Autoregressive Models with ARCH Errors », *Sankhya : The Indian Journal of Statistics*, 50, series BPP 119-138
58. PANTULA S.G., (1985), « Estimation of Autoregressive Models with ARCH Errors », MS. Department of Statistics, North Carolina State University.
59. PRIESTLEY M., (1978), « Nonlinear Models in Time Series Analysis », *The Statistician*, 27, 159-176.
60. RAFTERY A.E. et J. D. Banfield., (1990), « Stopping the Gibbs sampler, the use Morphology, and Other Issues in Spatial Statistics », technical report, University of Washington, Dept. of Statistics.
61. RIPLEY B.D., (1987), Stochastic Simulation, New York : John Wiley.
62. RITTER C. et M.A. Tanner., (1992), « The Griddy Gibbs Sampler », technical report, University of Rochester.
63. SLAMA A., (1997), Test de signification bayesienne pour la stationnarité des paramètres dan un modèle de rupture à erreurs autocorrélées
64. SUBBA RAO T. et M. Gabr., (1980), An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models, Springer-Verlag.
65. TANNER M.A. et W. Wong, (1987), « The Calculation of Posterior Distrubutions by Data Augmentation »(with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, 82, 528-550.
66. TANNER M.A., (1991), Tools for Statistical Inference, New York ; Springer-Verlag.
67. TIERNEY L., (1991), « Markov Chains for Exploring Posterior Distributions », Technical Report 560, University of Minnesota, School of Statistics.
68. WEISS A.A. ,(1986a), « Asymptotic Theory for ARCH Models : Estimation and Testing », *Econometric Theory*, 2, 107-113.
69. WEISS A.A., (1984), « ARMA Models with ARCH Errors », *Journal of Time Series Analysis*, 5, 129-143.

70. ZEGER S. et M. Rizaul Karim., (1991), « Generalized Linear Models With Random Effects : A Gibbs Sampling Approche », *Journal of the American Statistical Association*, 86, 79-86.

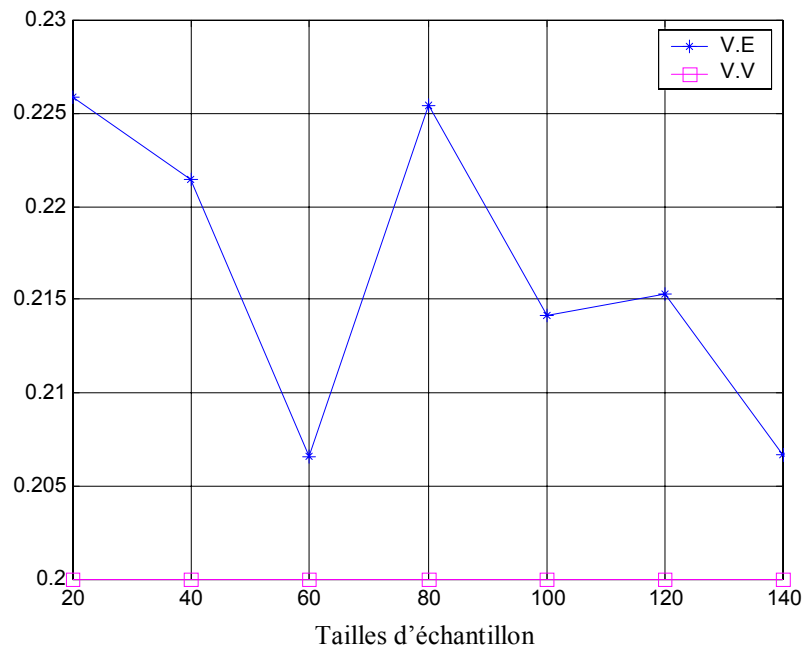


1er cas: simulation d'un processus ARCH(1) avec $\alpha_1 = 0.6$



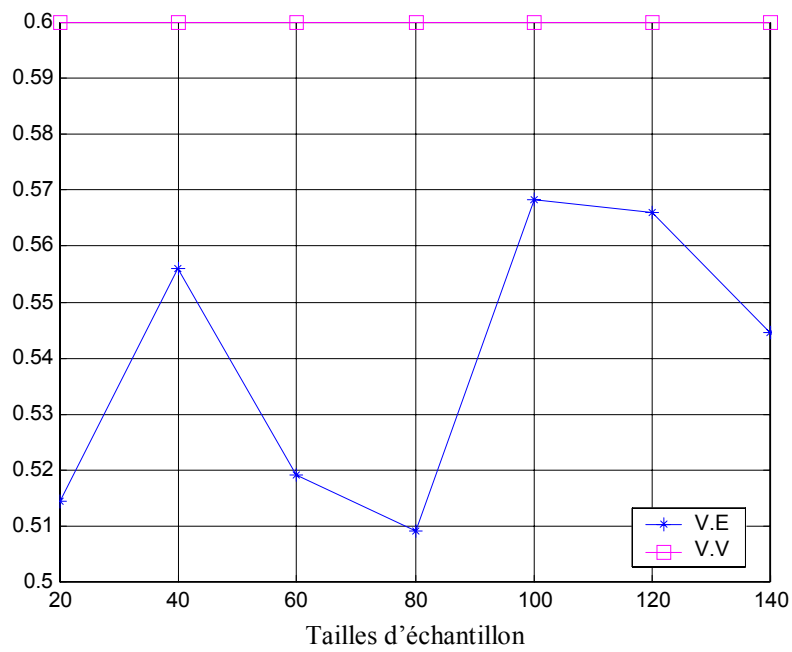
2ème cas: simulation d'un processus ARCH(1) avec $\alpha_1 = 0.98$

1^{er} cas $\alpha_1=0.6$



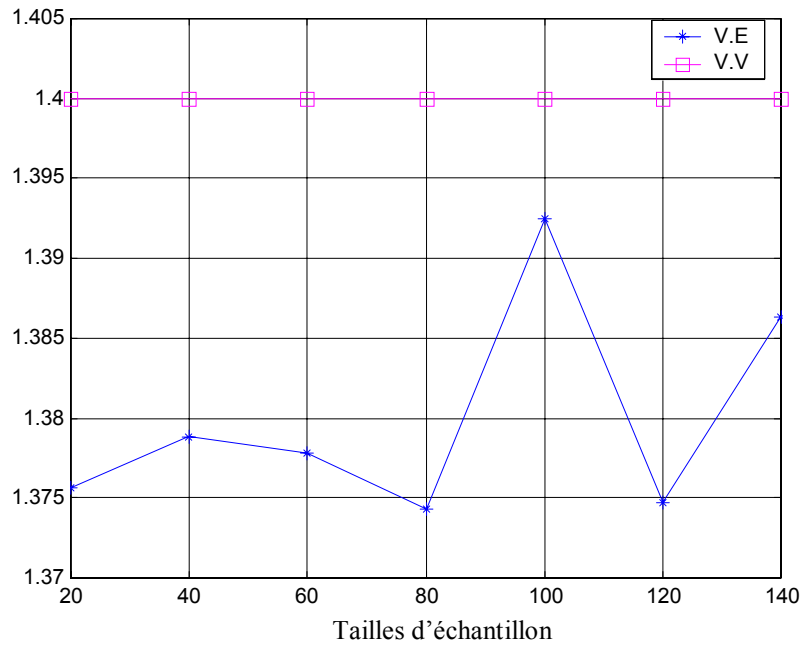
Valeurs estimées de α_0 pour $\alpha_1=0.6$

Figure 1



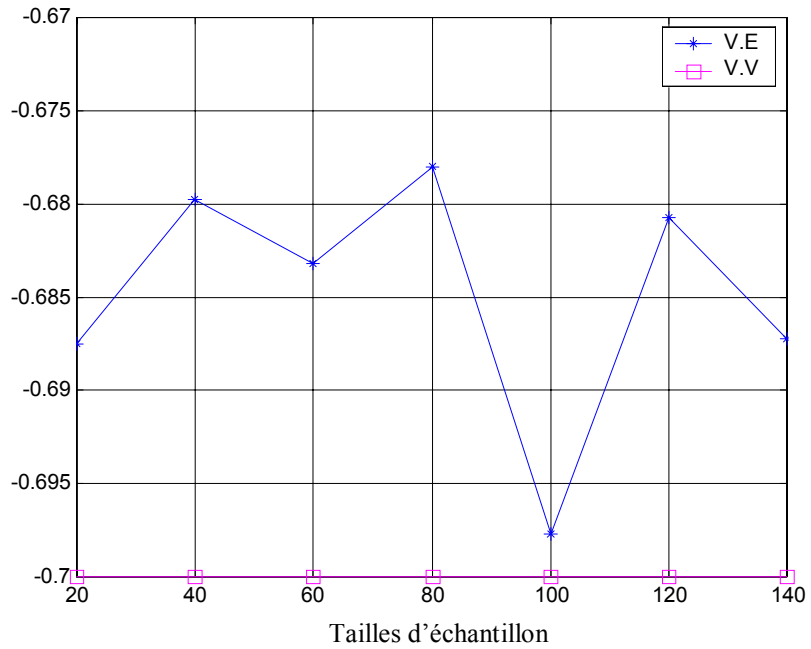
Valeurs estimées de α_1 pour $\alpha_1 = 0.6$

Figure 2



Valeurs estimées de β_0 pour $\alpha_1=0.6$

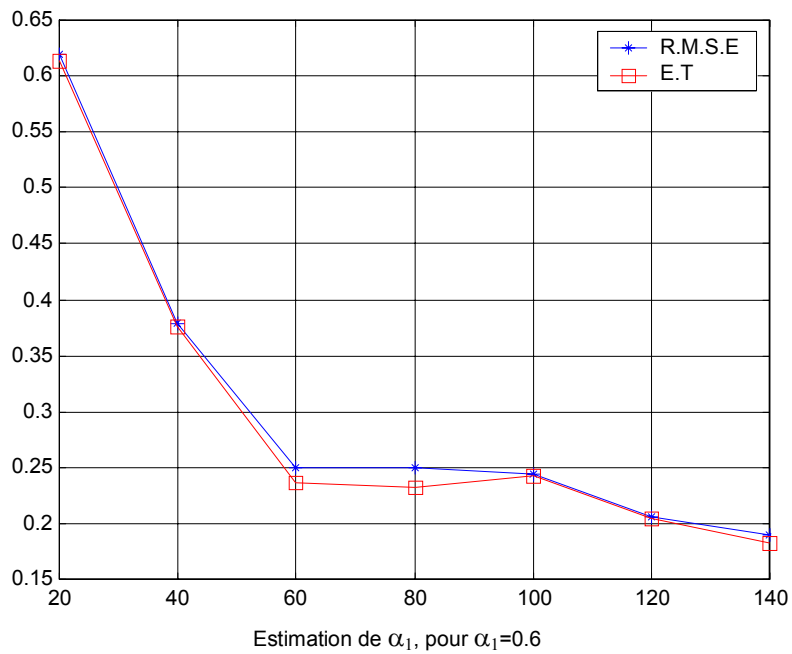
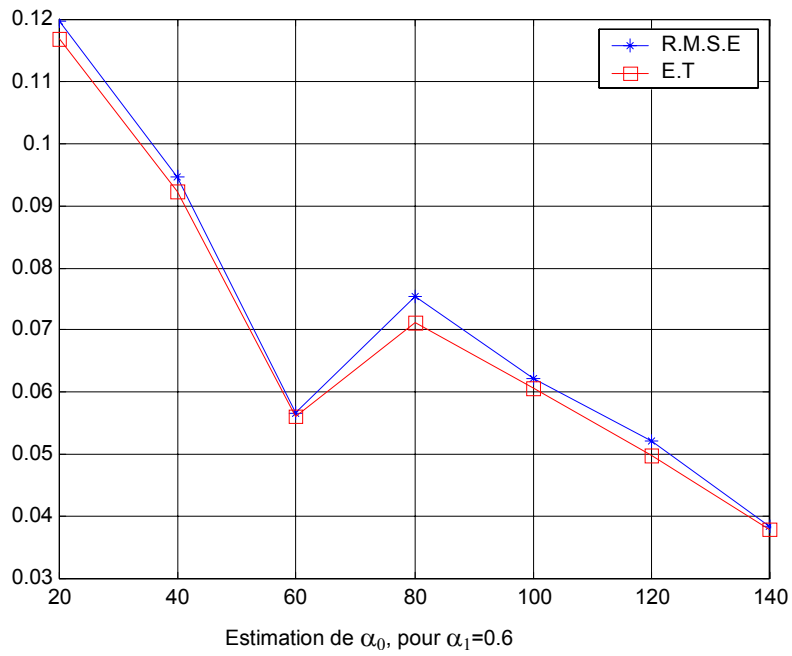
Figure 3

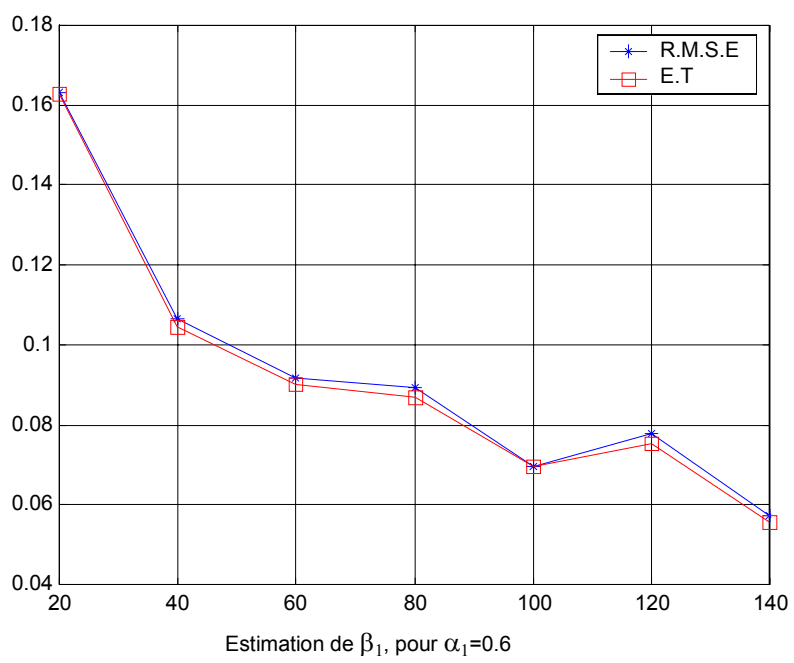
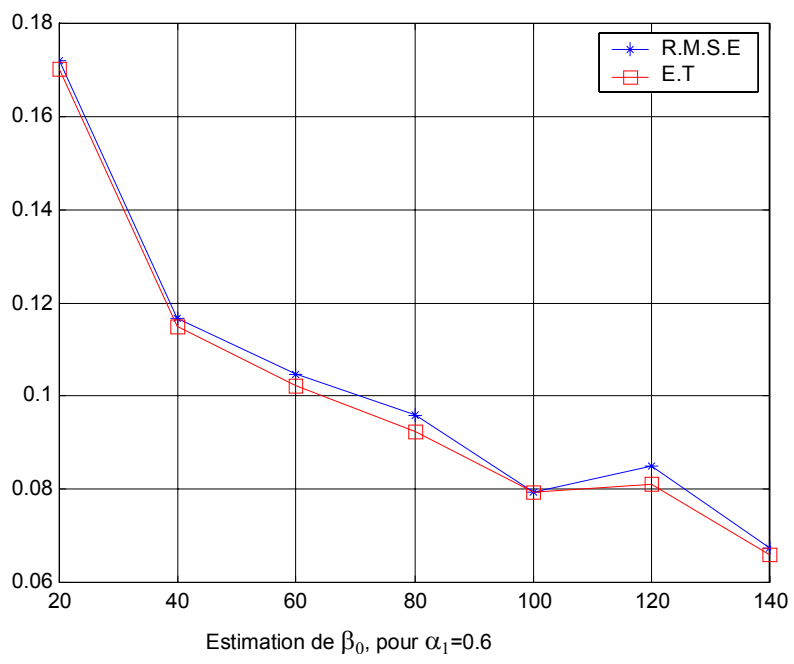


Valeurs estimées de β_1 pour $\alpha_1 = 0.6$

Figure 4

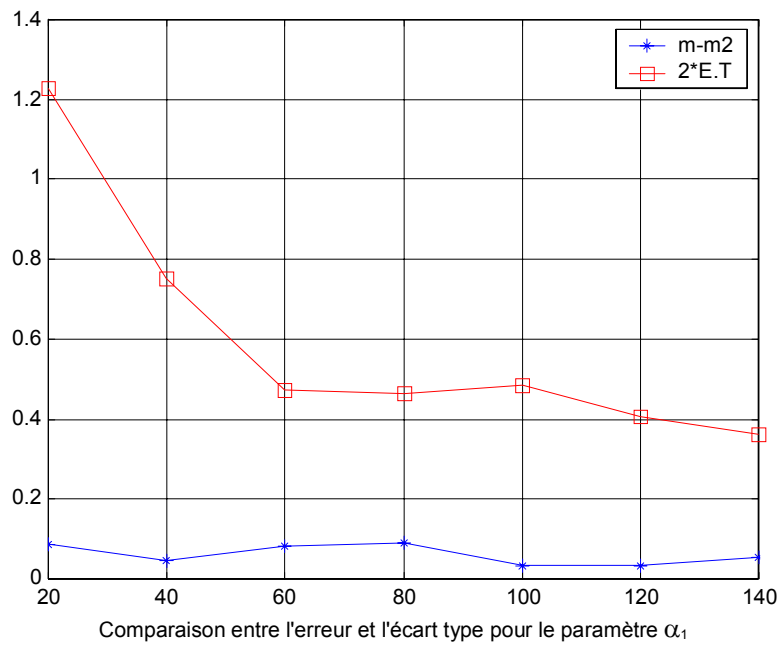
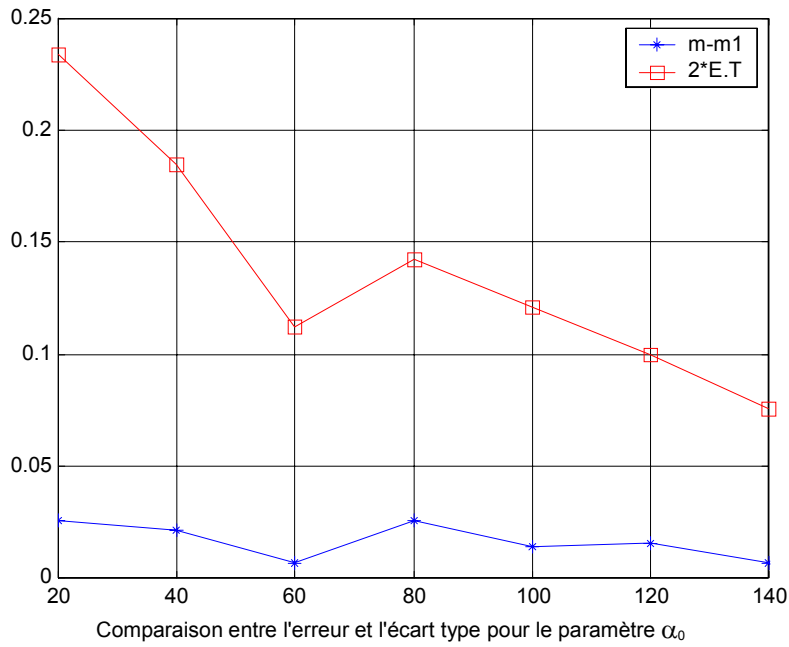
Comparaison entre les Ecart Type et les RMSE

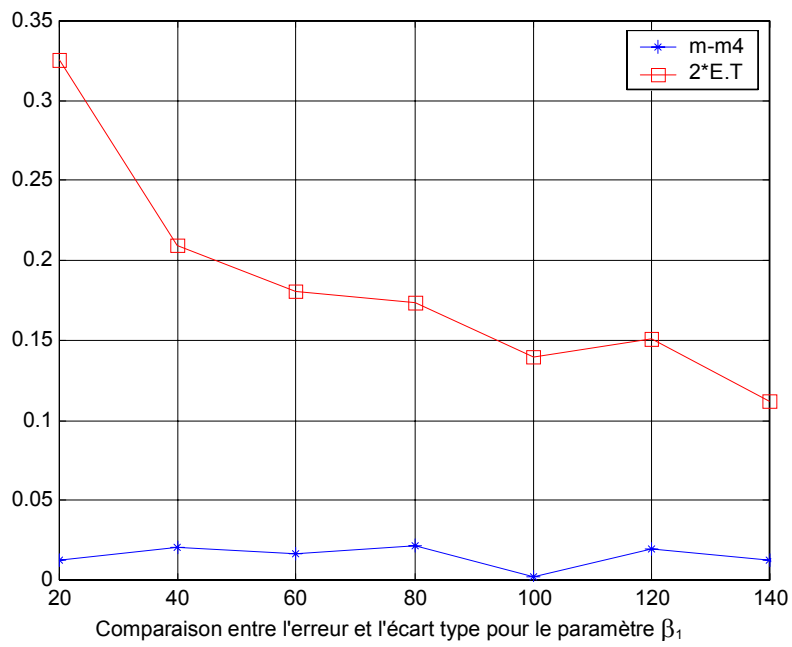
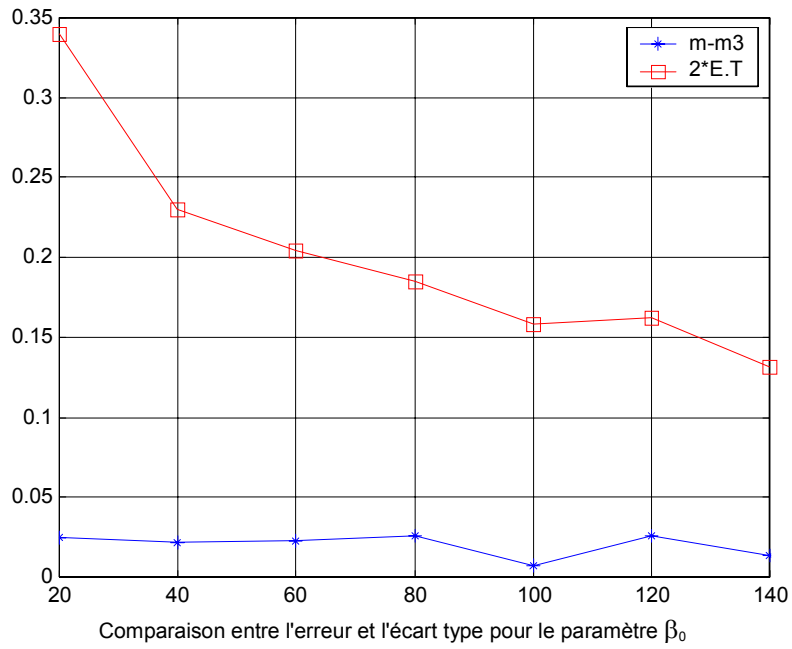




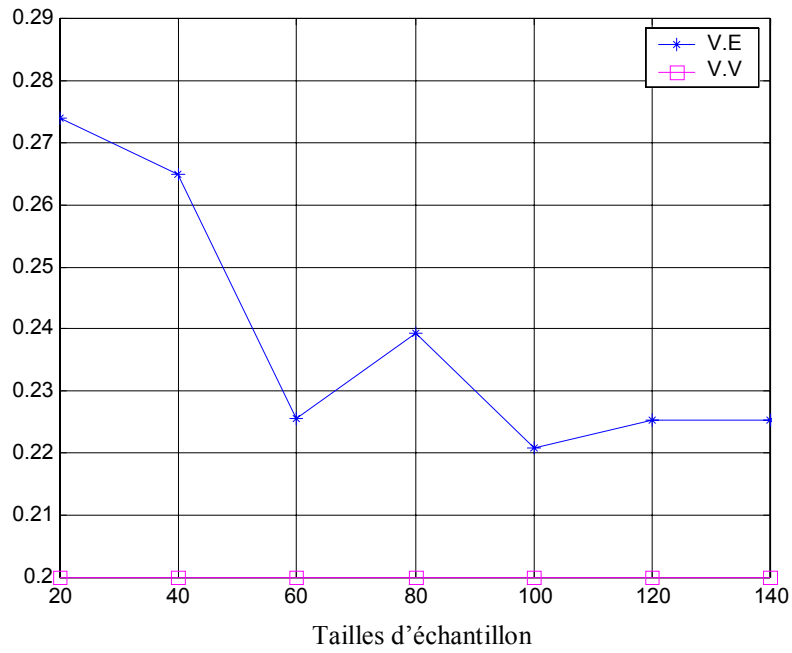
Comparaison entre $(\hat{\theta} - \theta)$ et l'écart type

$$\underline{\alpha_1 = 0.6}$$



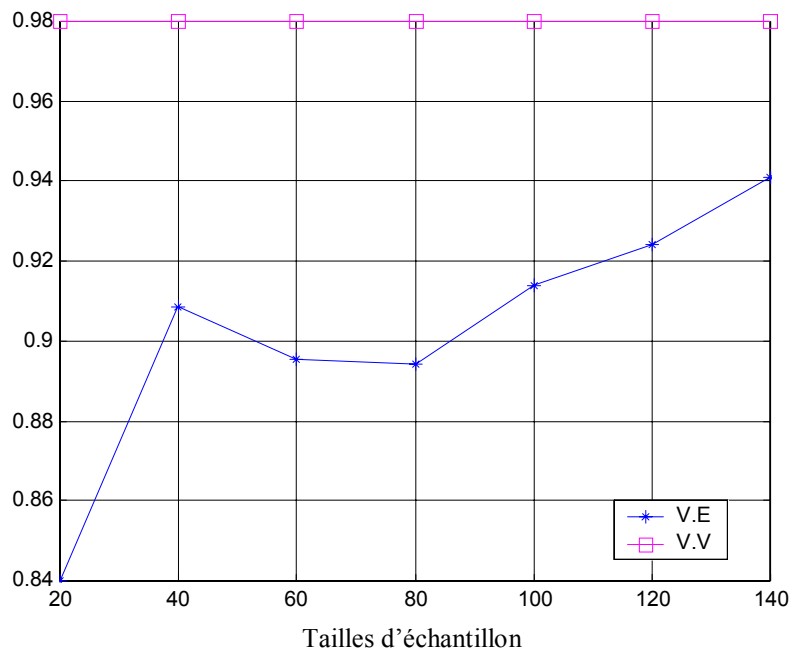


2^{er} cas $\alpha_1=0.98$



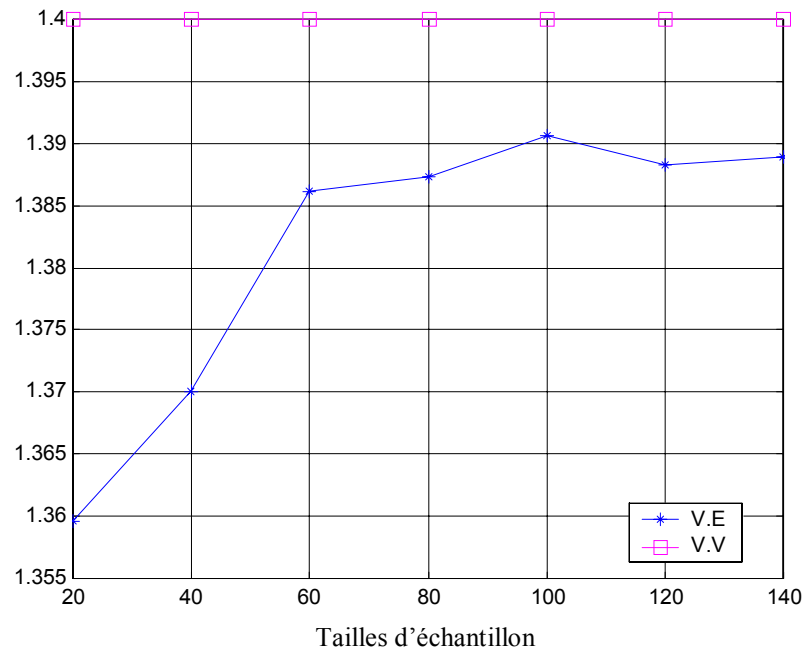
Valeurs estimées α_0 pour $\alpha_1 = 0.98$

Figure 5



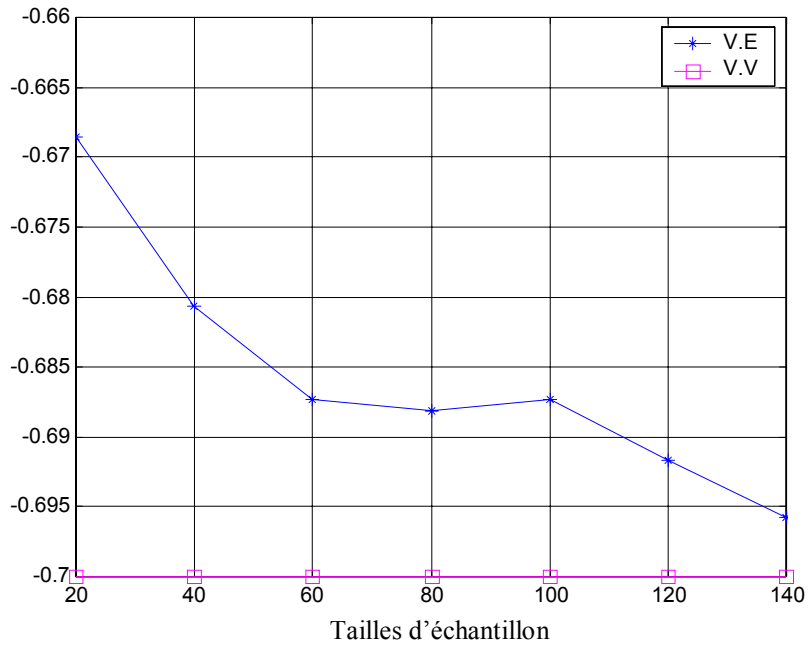
Valeurs estimées de α_1 pour $\alpha_1 = 0.98$

Figure 6



Valeurs estimées de β_0 pour $\alpha_1 = 0.98$

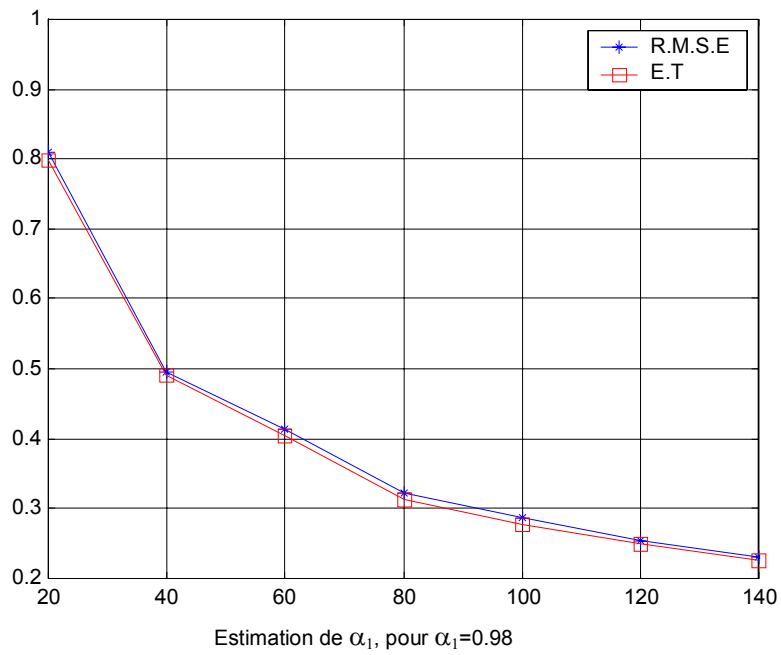
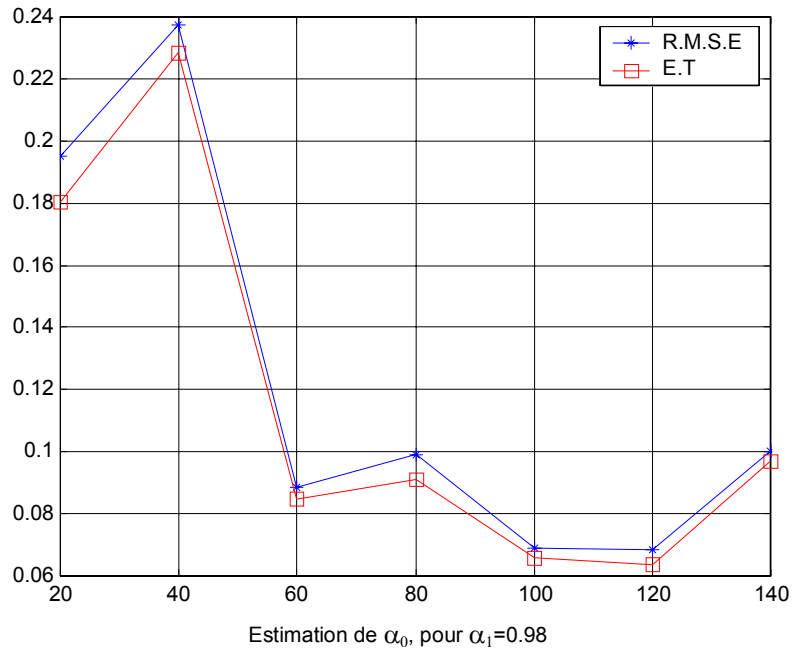
Figure 7

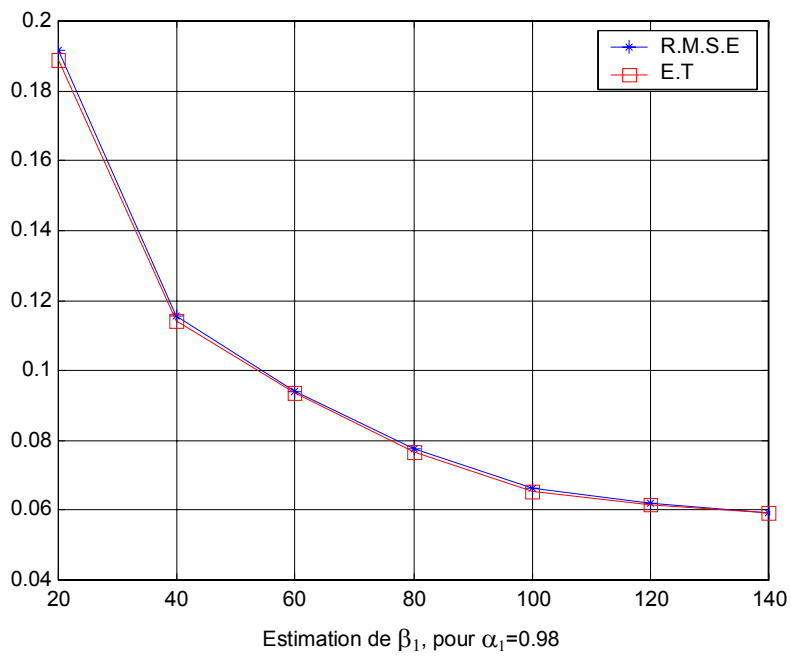
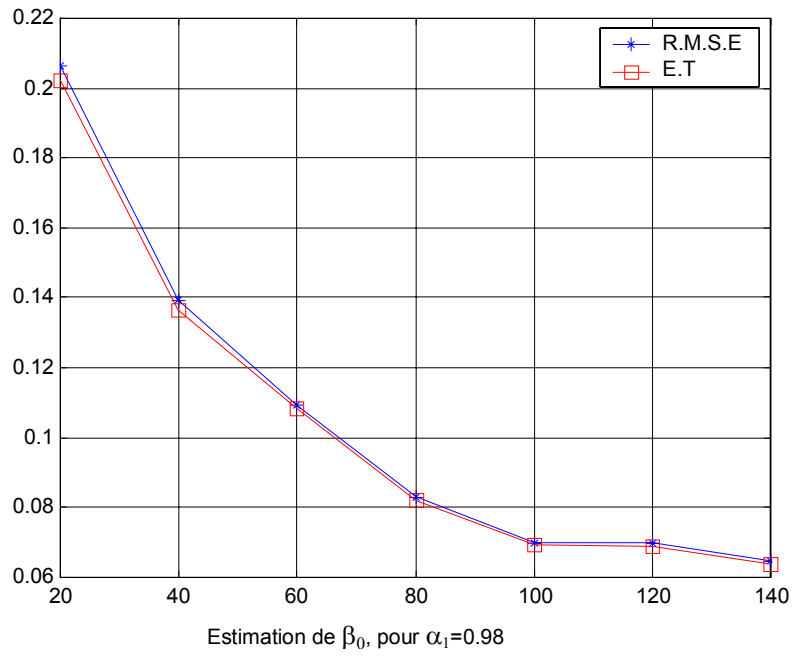


Valeurs estimées de β_1 pour $\alpha_1 = 0.98$

Figure 8

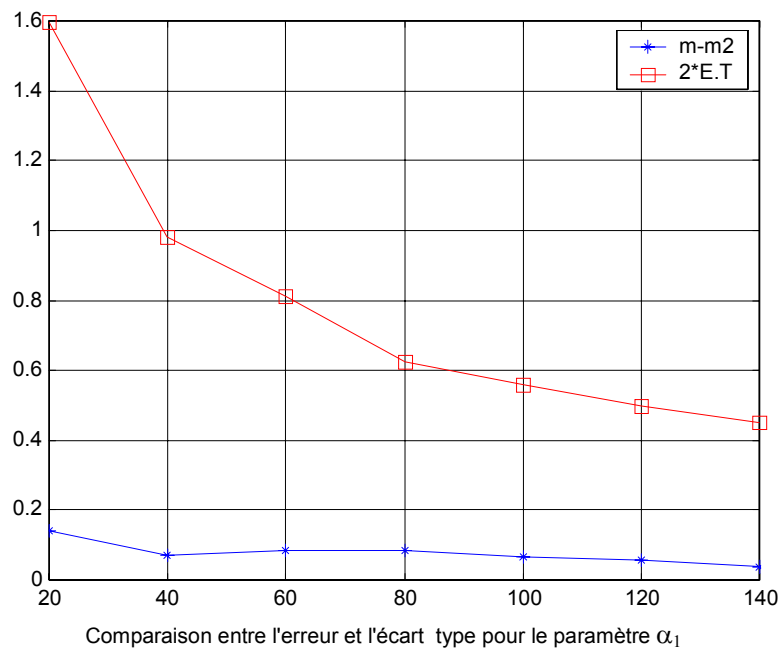
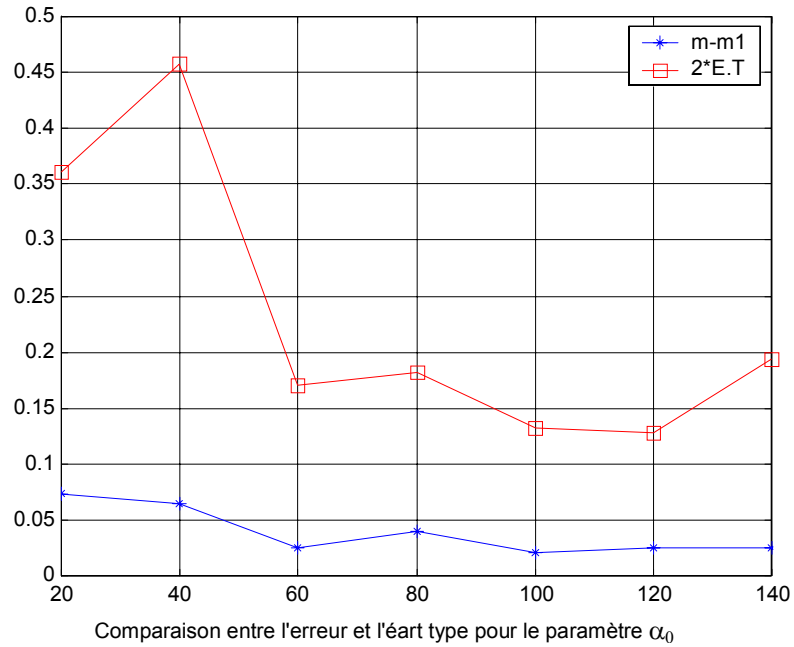
Comparaison entre les Ecart Type et les RMSE

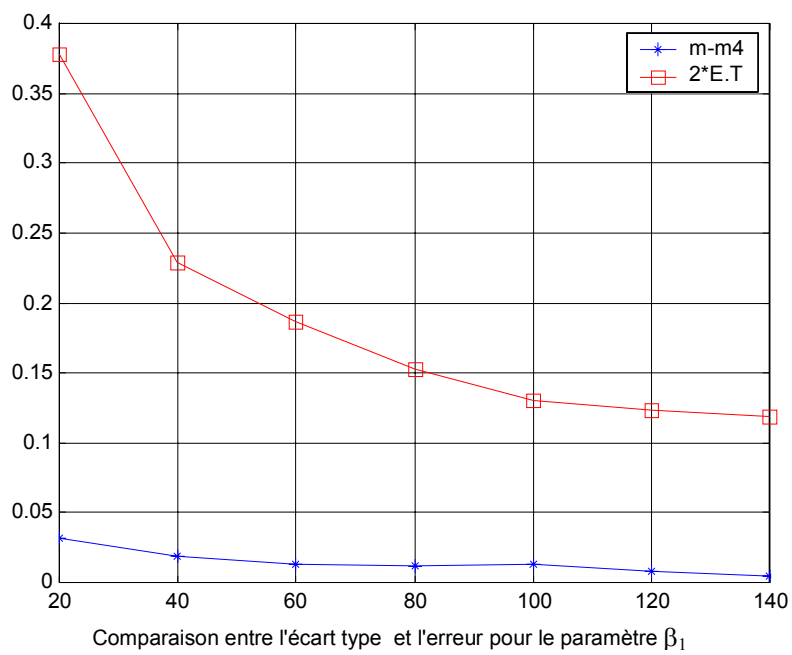
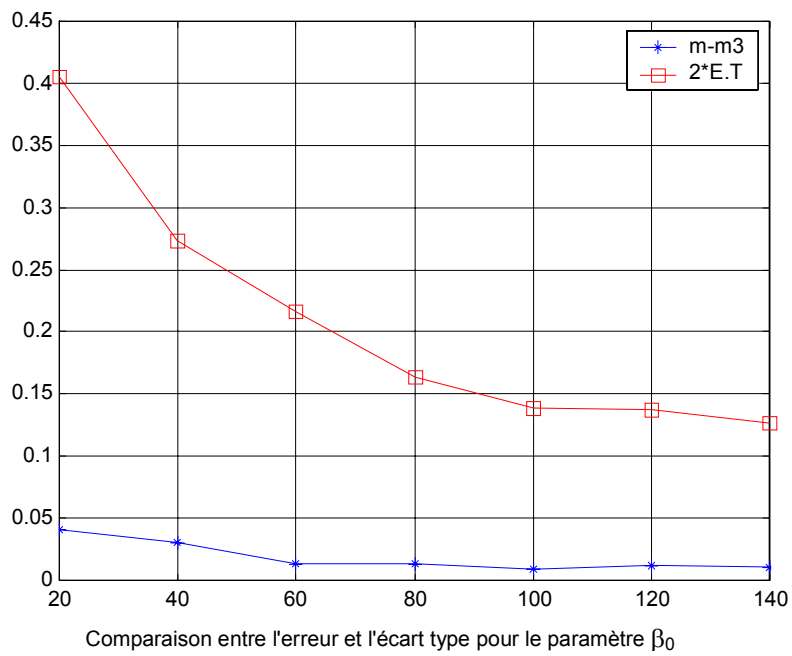


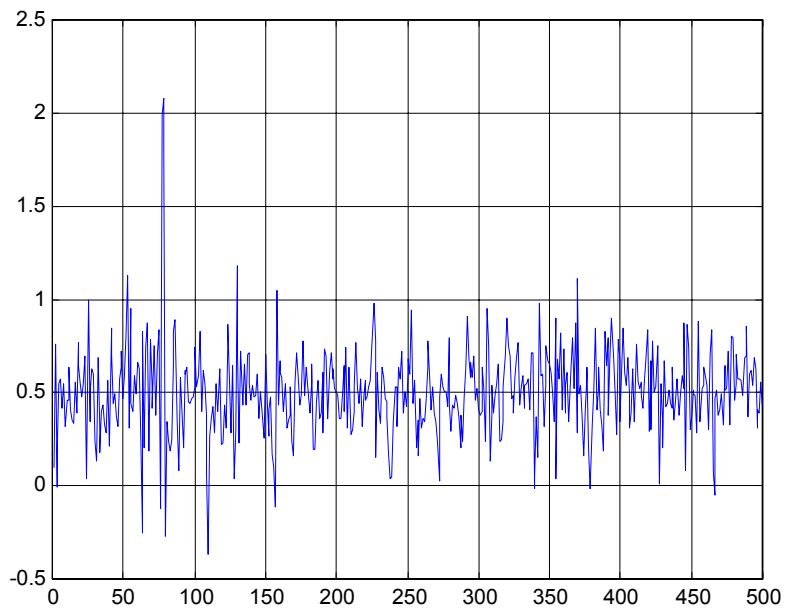


Comparaison entre $(\hat{\theta} - \theta)$ et l'écart type

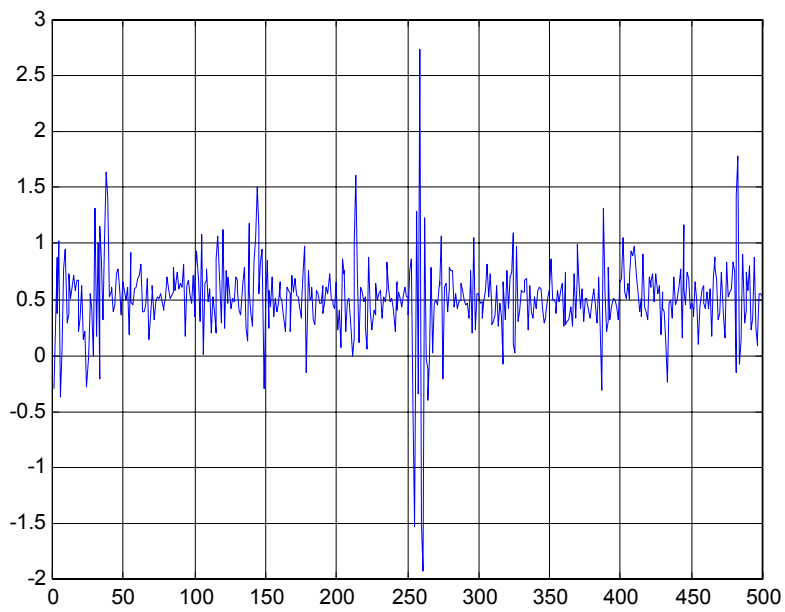
$$\underline{\alpha_1 = 0.98}$$





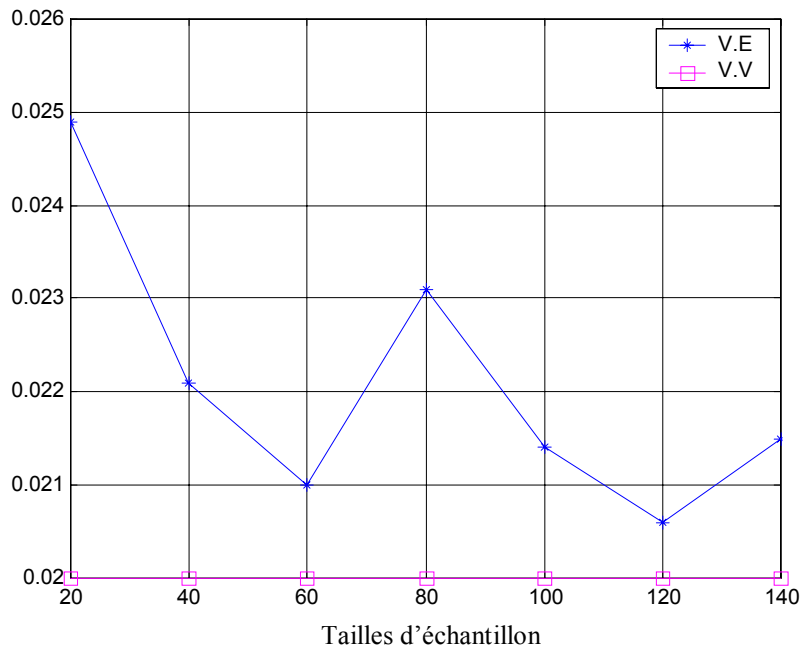


1er cas: simulation d'un modèle de position avec $\alpha_1 = 0.6$



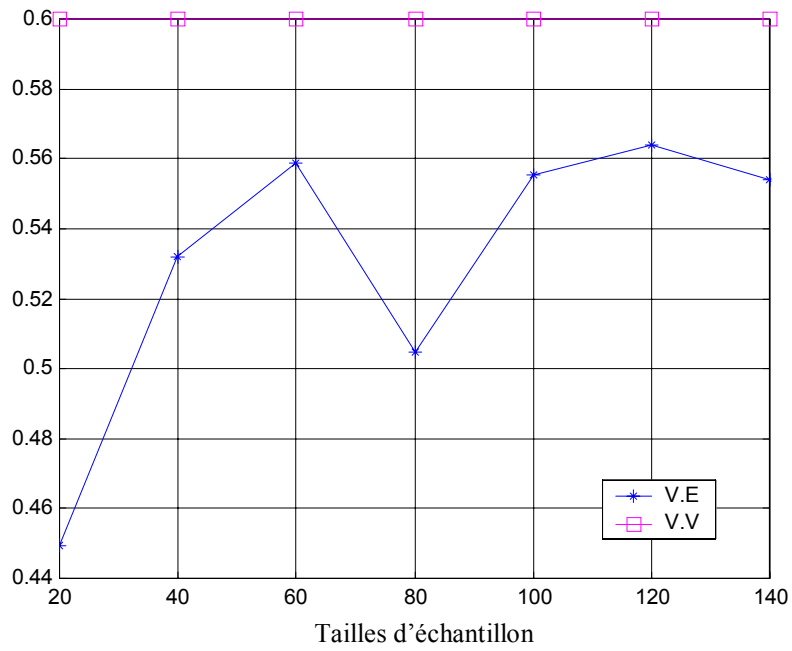
2ème cas: simulation d'un modèle de position avec $\alpha_1 = 0.98$

1^{er} cas $\alpha_1=0.6$



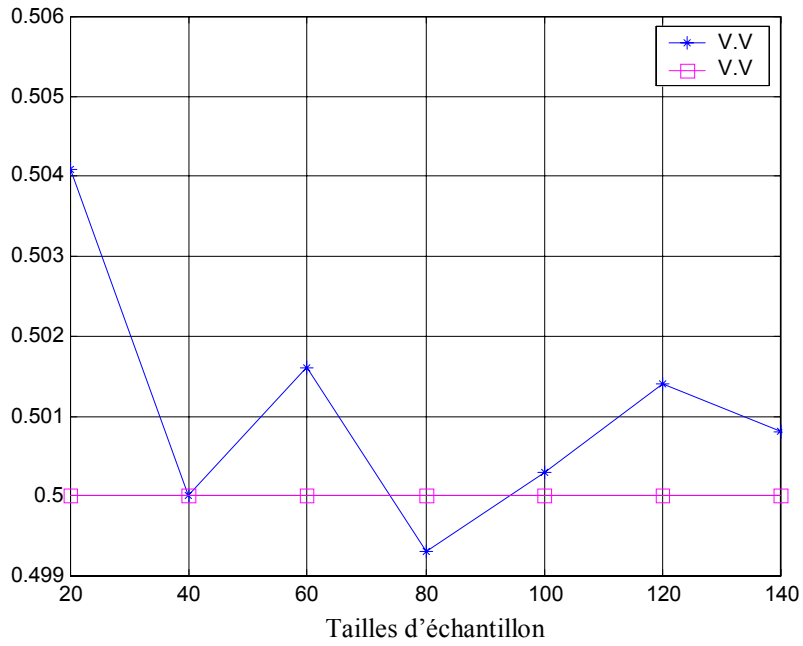
Valeurs estimées de α_0 pour $\alpha_1 = 0.6$

Figure 9



Valeurs estimées de α_1 pour $\alpha_1 = 0.6$

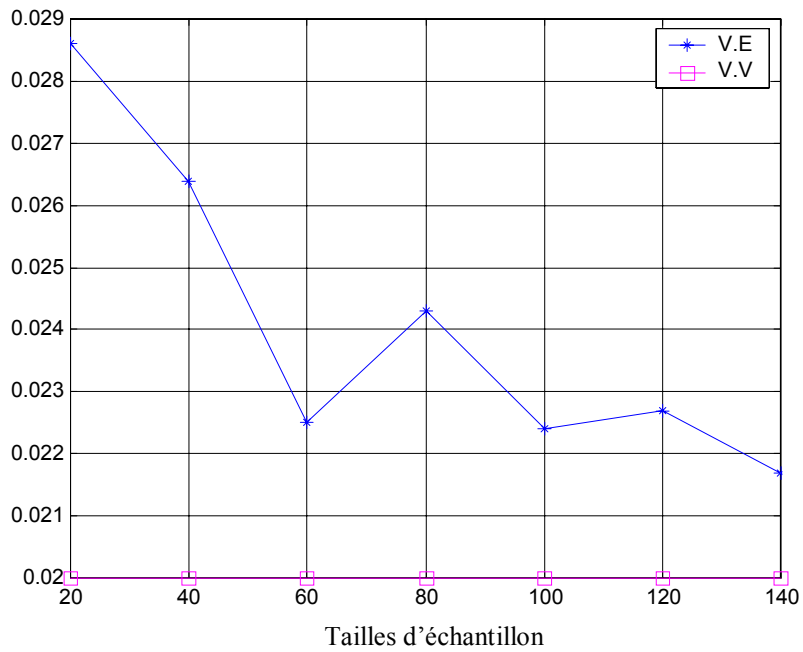
Figure 10



Valeurs estimées de μ pour $\alpha_1 = 0.6$

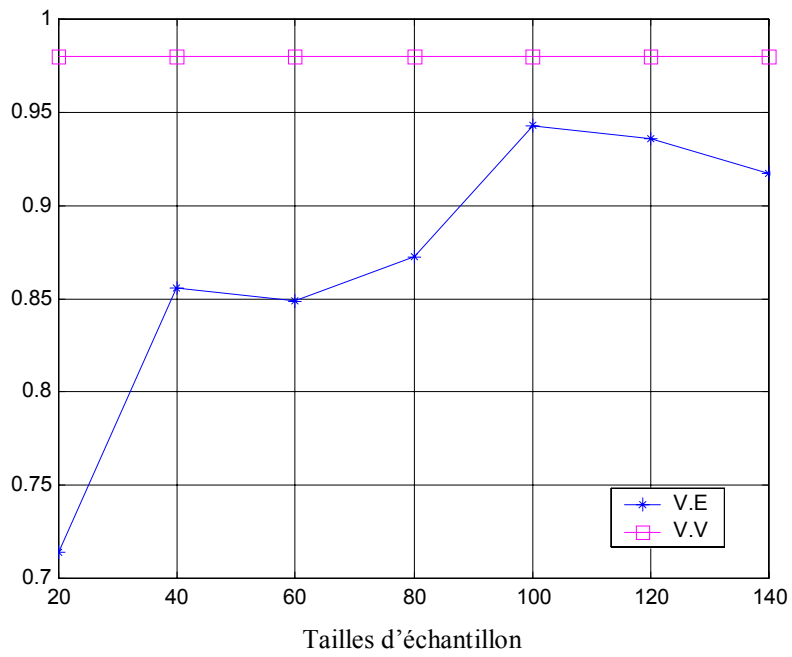
Figure 11

2^{er} cas $\alpha_1=0.98$



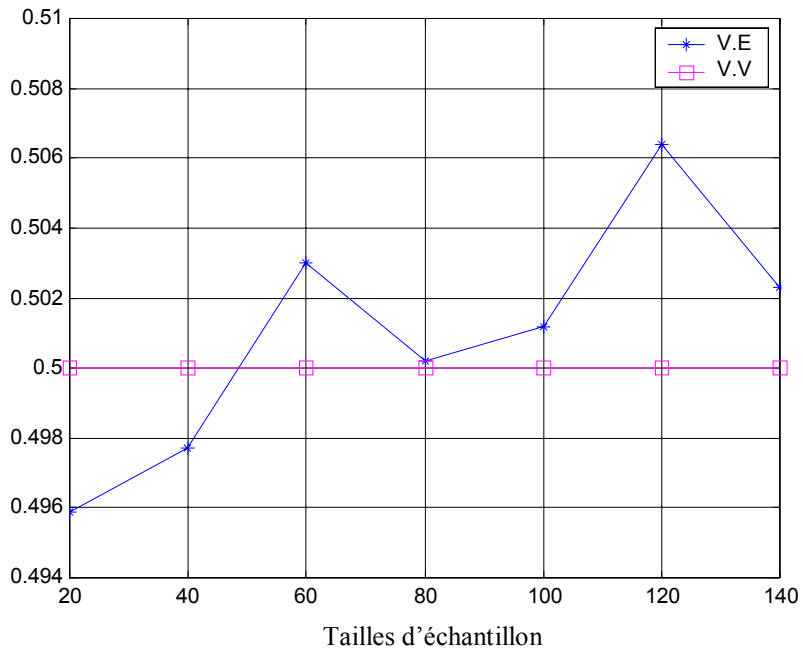
Valeurs estimées de α_0 pour $\alpha_1 = 0.98$

Figure 12



Valeurs estimées de α_1 pour $\alpha_1 = 0.98$

Figure 13

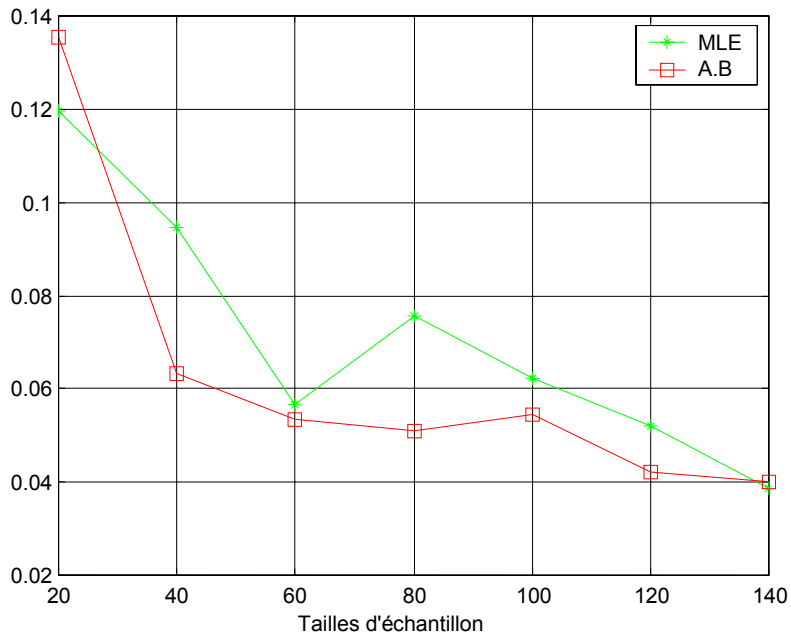


Valeurs estimées de μ pour $\alpha_1 = 0.98$

Figure 14

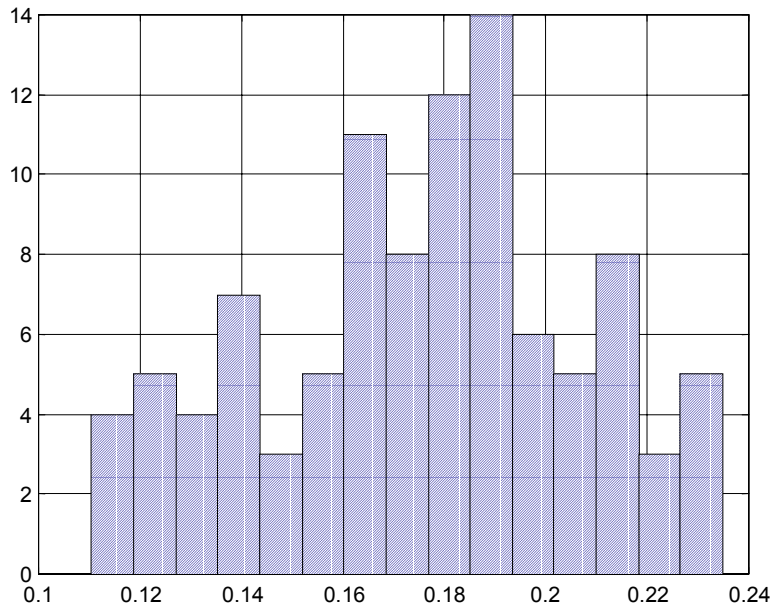
1^{er} cas $\alpha_1=0.6$

a) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \text{constante}$



(a)

Grphe représentant le RMSE pour α_0 avec $\alpha_1=0.6$

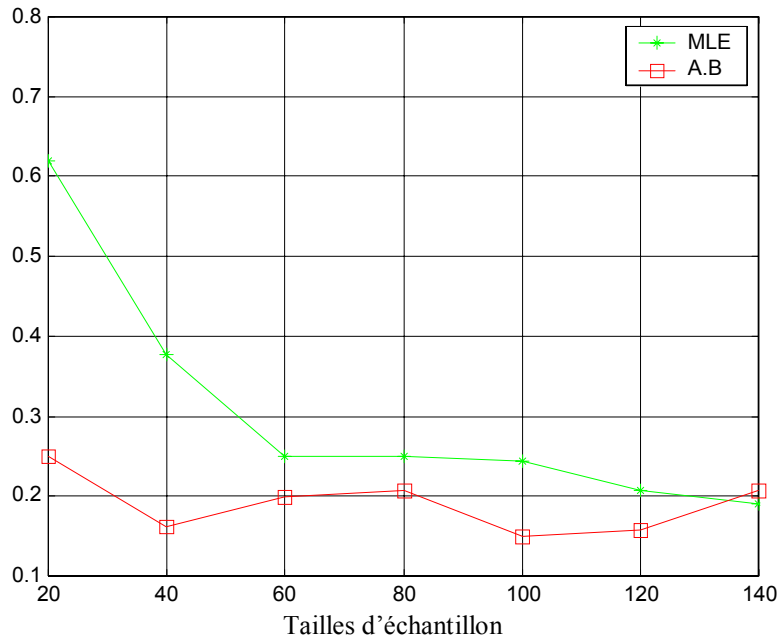


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_0 par le GGS

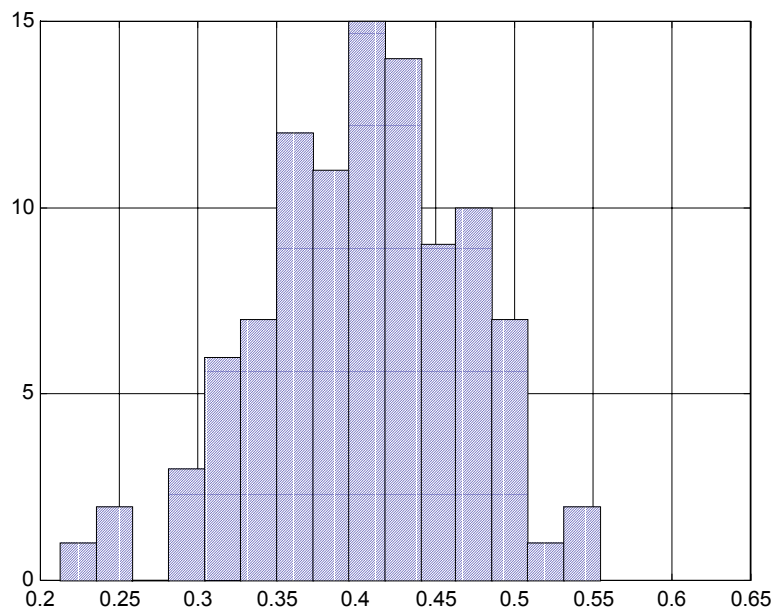
Figure1

Mode (α_0) = 0.1892



(a)

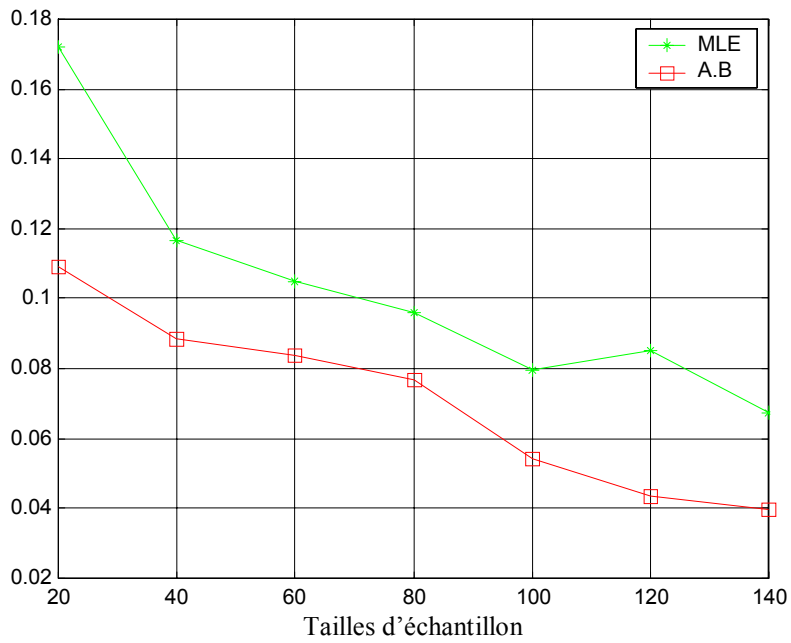
Graphique représentant le RMSE pour α_1 avec $\alpha_1 = 0.6$



(b)

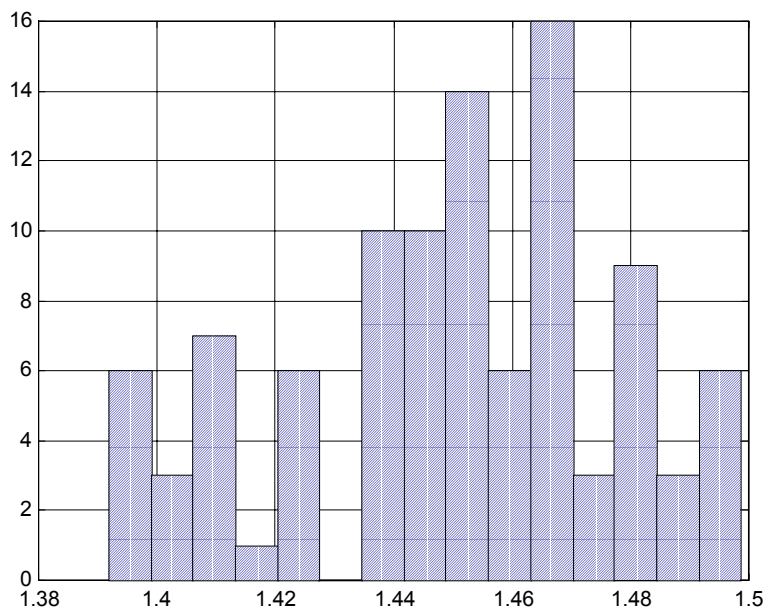
Histogramme représentant les valeurs générées de α_1 par le G.G.S
Figure2

Mode (α_1) = 0.4292



(a)

Graphes représentant le RMSE pour β_0 avec $\alpha_1 = 0.6$

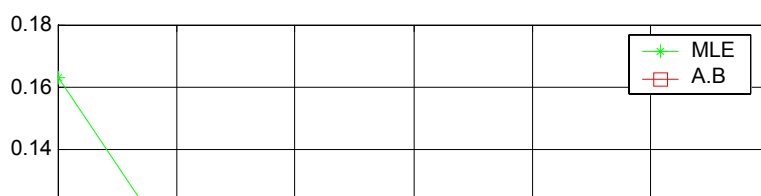


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de β_0 par le G.G.S

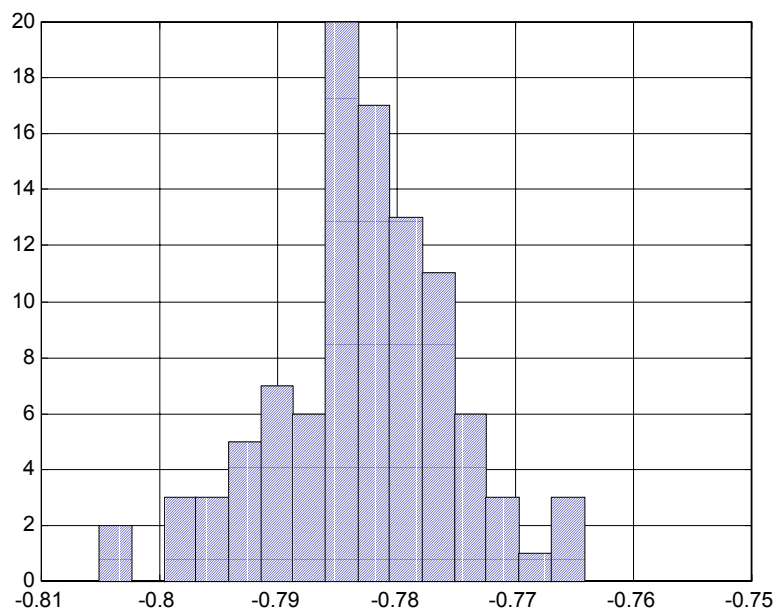
Figure 3

Mode (β_0) = 1.4524



(a)

Grappe représentant le RMSE pour β_1 avec $\alpha_1 = 0.6$



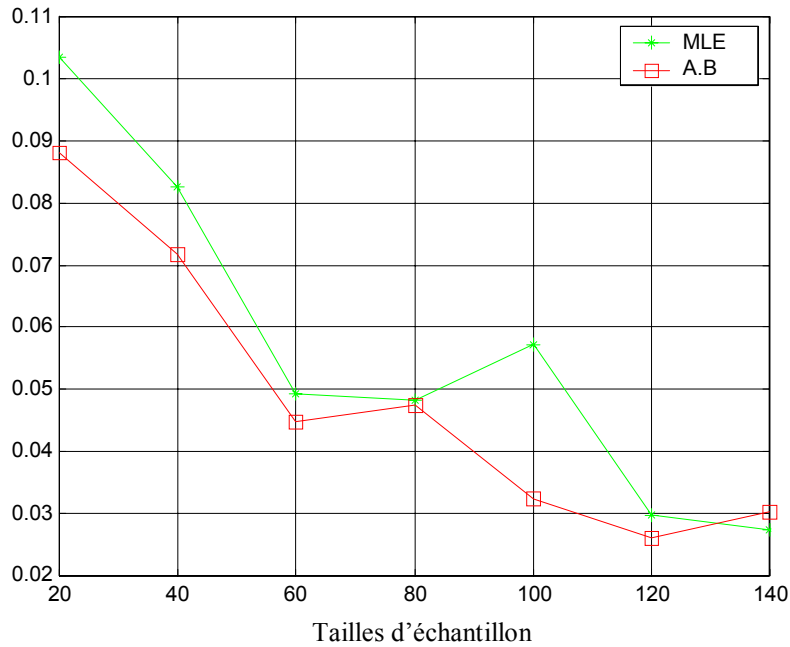
(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de β_1 par le G.G.S

Figure 4

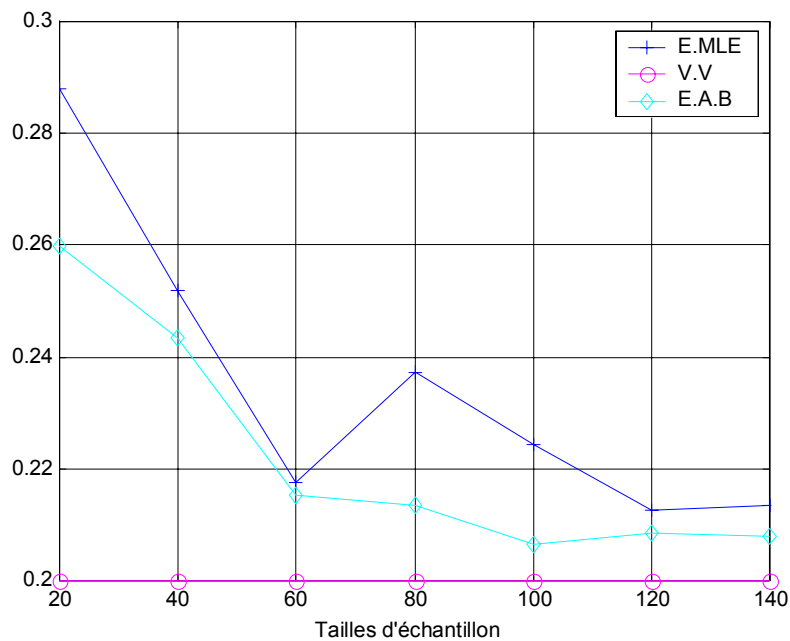
Mode (β_1) = -0.7846

- Les graphes suivant représentent les RMSE calculés pour le mode a posteriori et l'estimateur du maximum de vraisemblance ((c)) et les estimations des différents paramètres pour différentes tailles d'échantillon ((d)).



(c)

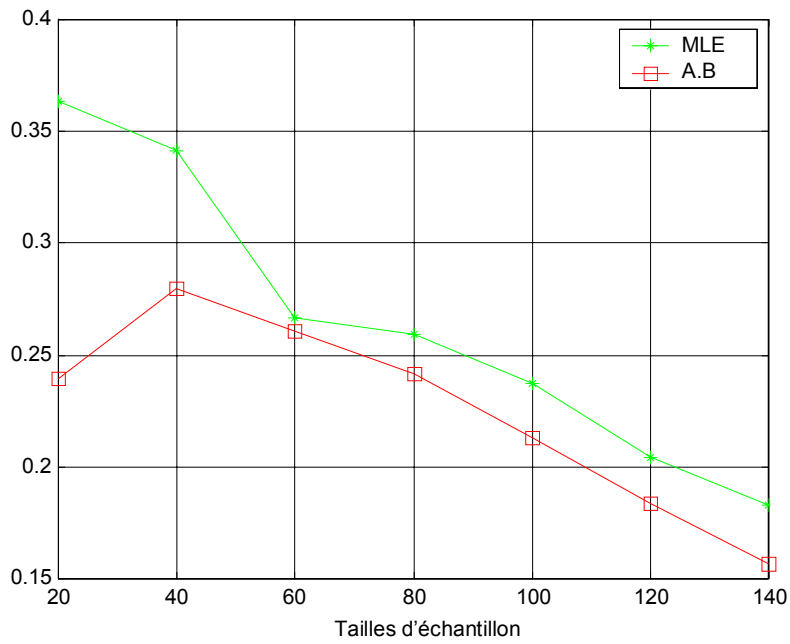
Graph representing the RMSE for α_0 with $\alpha_1 = 0.6$



(d)

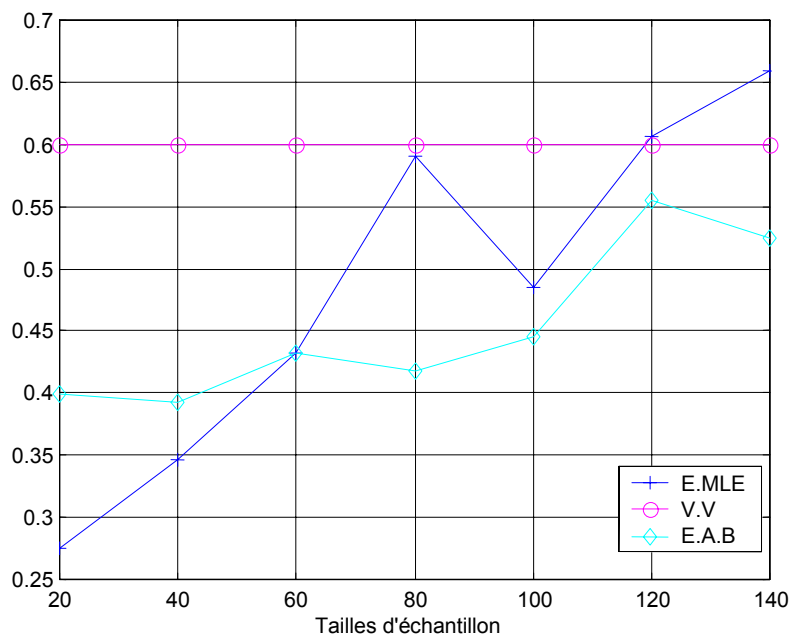
Estimation of the parameter α_0

Figure 5



(c)

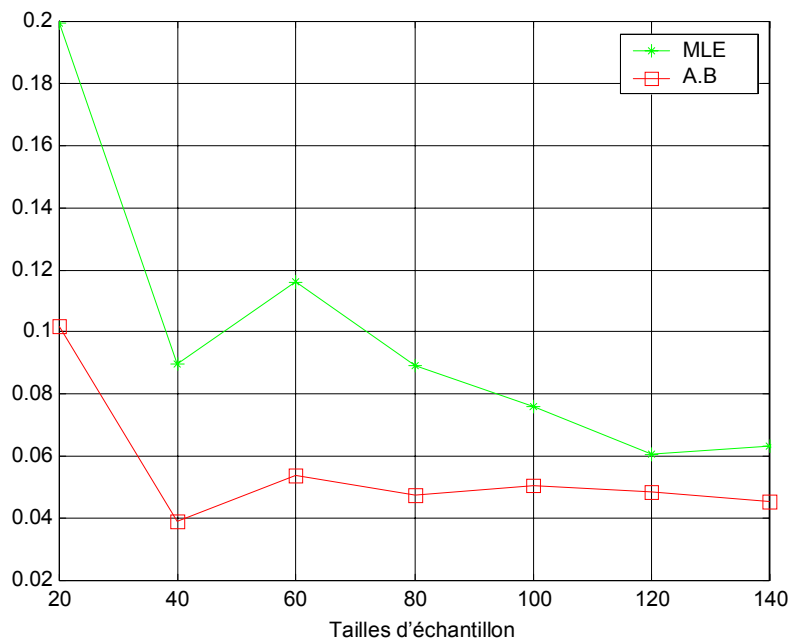
Graph representing the RMSE for α_1 with $\alpha_1=0.6$



(d)

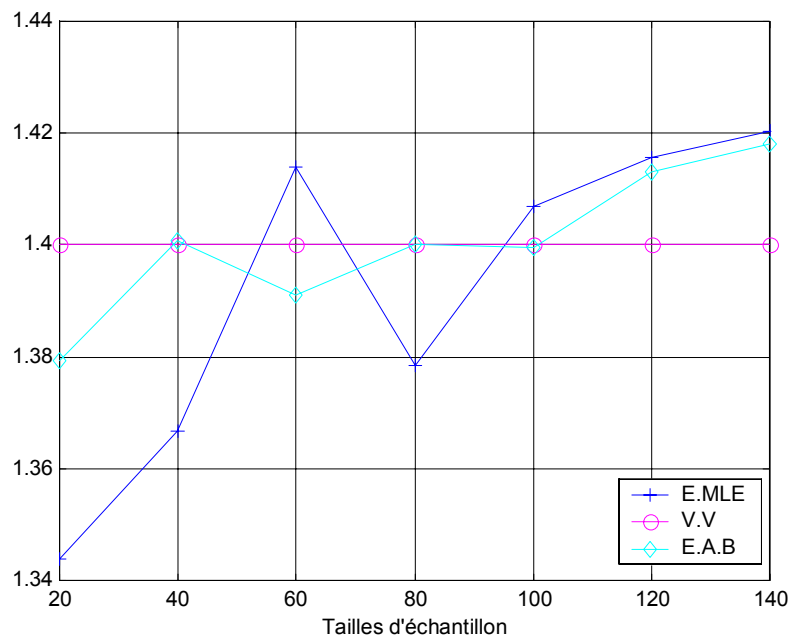
Estimation of the parameter α_1

Figure 6



(c)

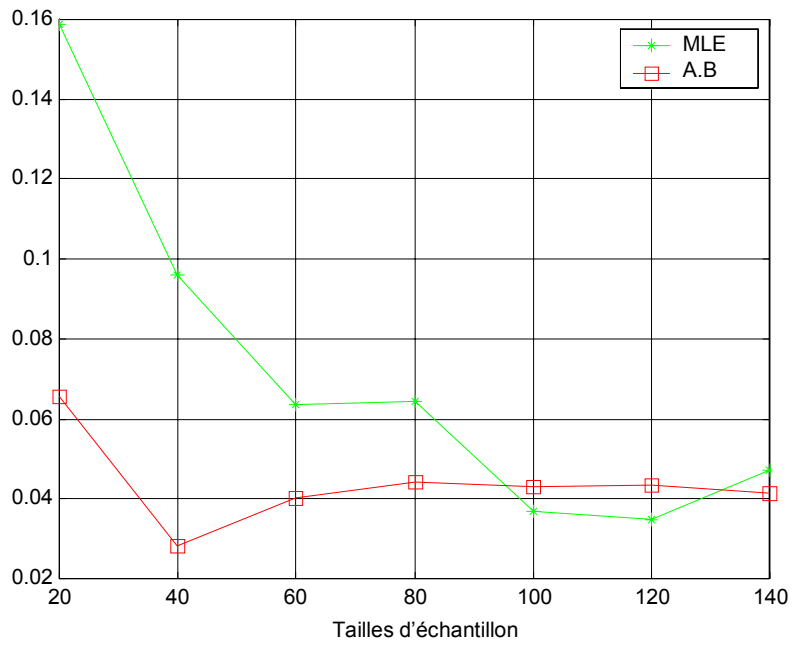
Graphique représentant les RMSE pour β_0 avec $\alpha_1 = 0.6$



(d)

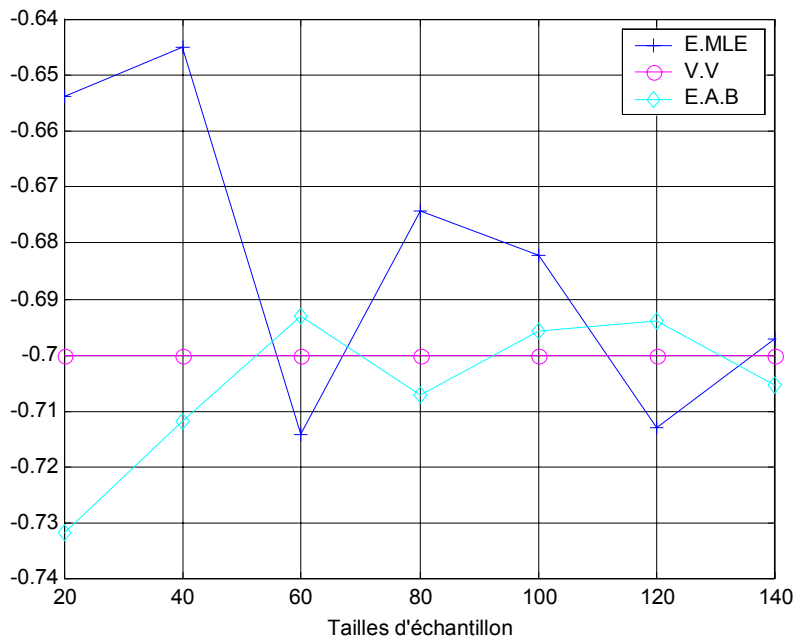
Estimation du paramètre β_0

Figure 7



(c)

Graph representing the RMSE for β_1 with $\alpha_1 = 0.6$

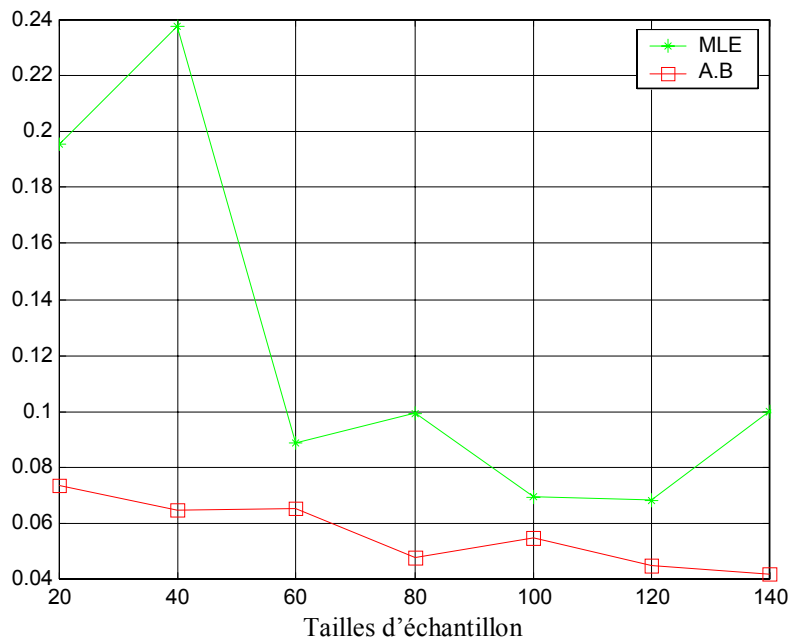


(d)

Estimation du paramètre β_1

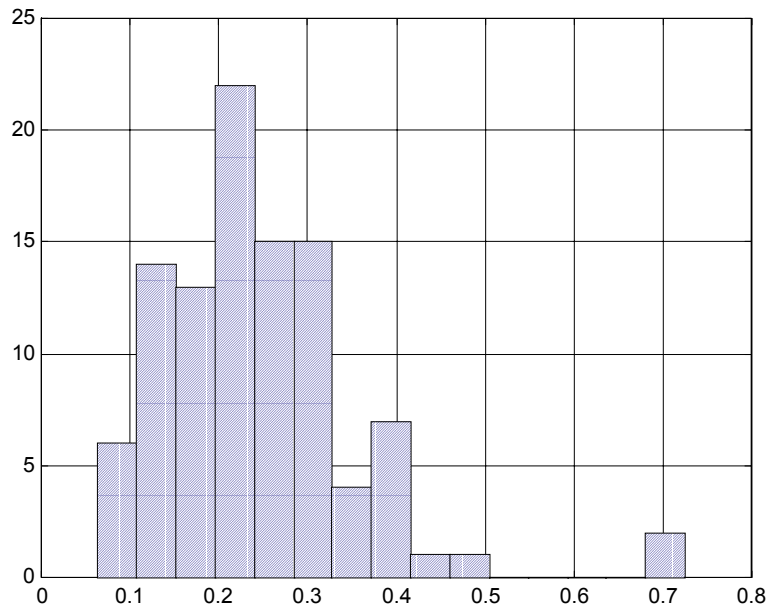
Figure 8

b) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \sqrt{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}}$



(a)

Graph representing the RMSE for α_0 with $\alpha_1 = 0.6$

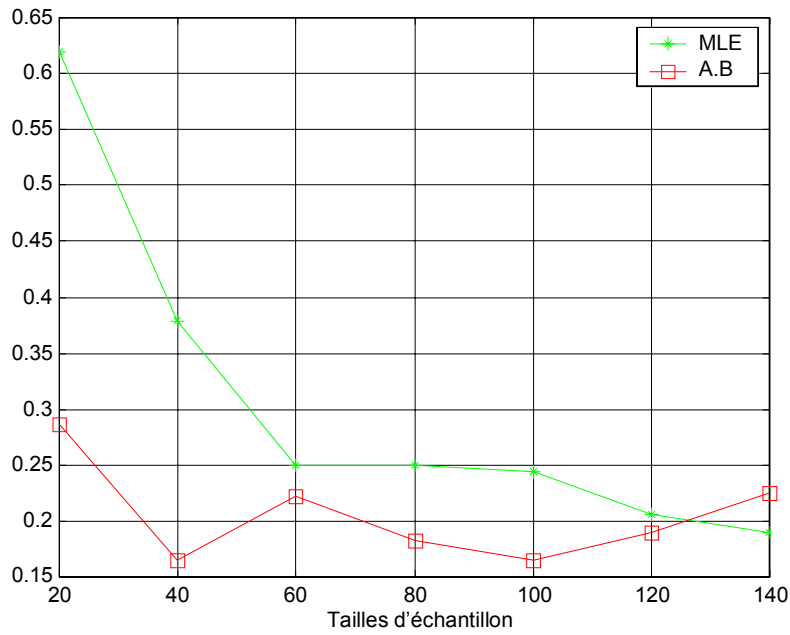


(b)

Histogram representing the generated values of α_0 by the G.G.S

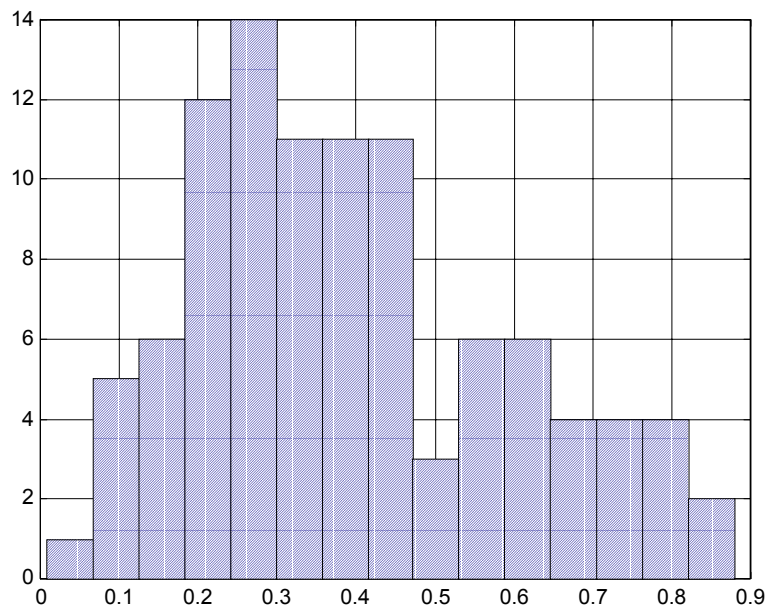
Figure 9

Mode (α_0) = 0.2178



(a)

Graph representing the RMSE for α_1 with $\alpha_1 = 0.6$

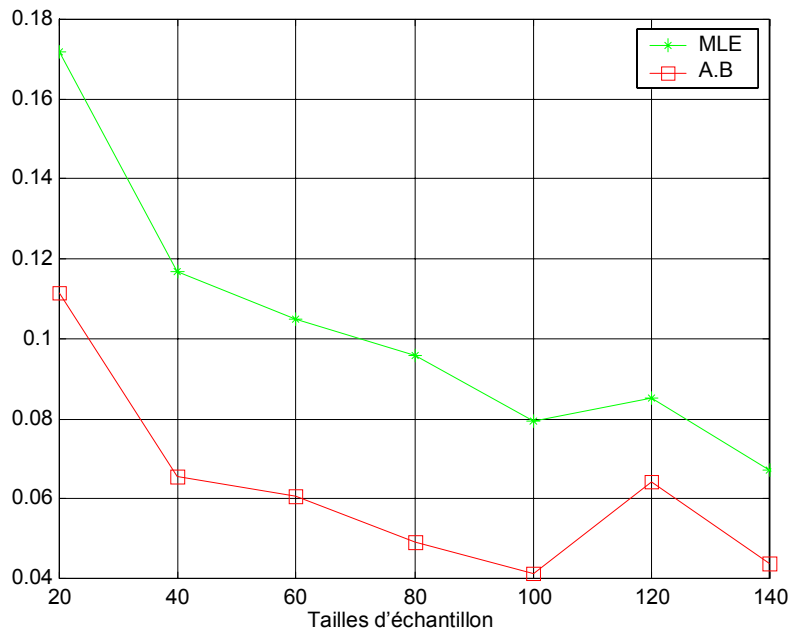


(b)

Histogram representing the values generated of α_1 by the G.G.S

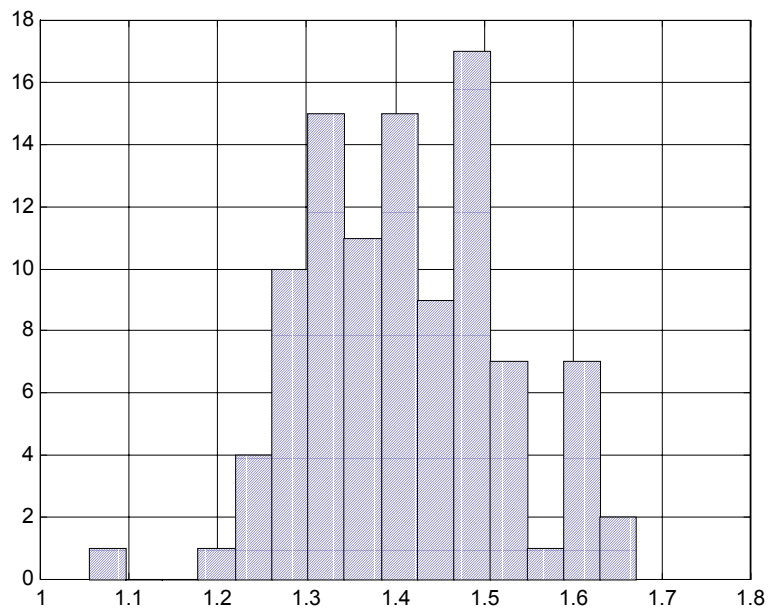
Figure 10

Mode (α_1) = 0.2697



(a)

Graphique représentant le RMSE pour β_0 avec $\alpha_1 = 0.6$

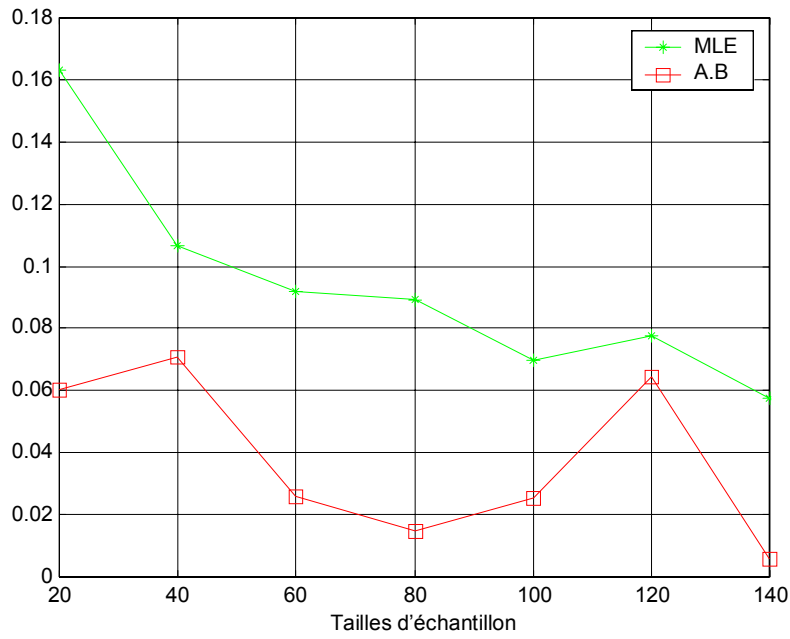


(b)

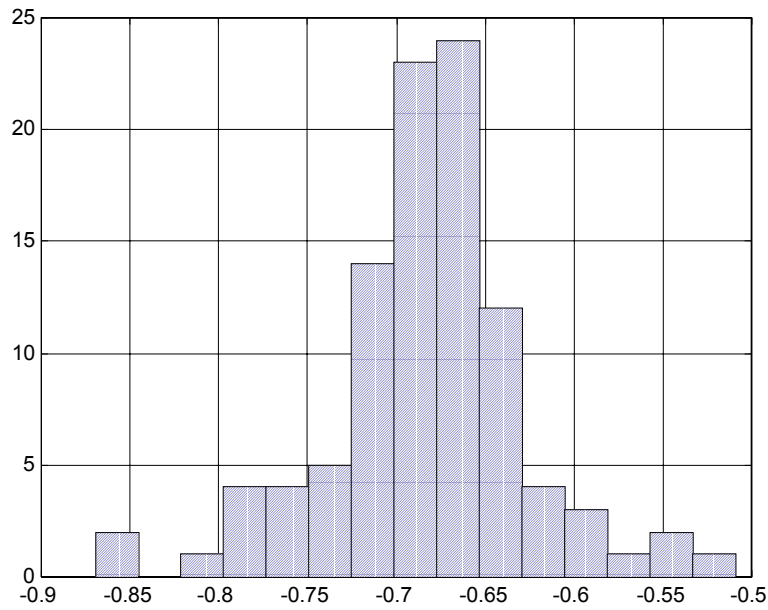
Histogramme représentant les valeurs générées de β_0 par le G.G.S

Figure 11

Mode (β_0) = 1.4862



Graphe représentant le RMSE pour β_1 avec $\alpha_1 = 0.6$



(b)

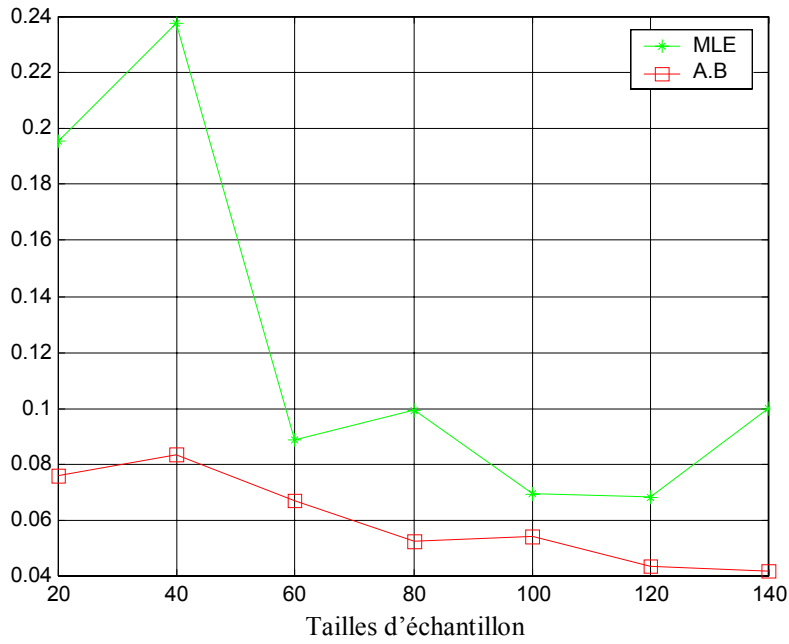
Histogramme représentant les valeurs générées de β_1 par le G.G.S

Figure 12

Mode (β_1) = -0.6653

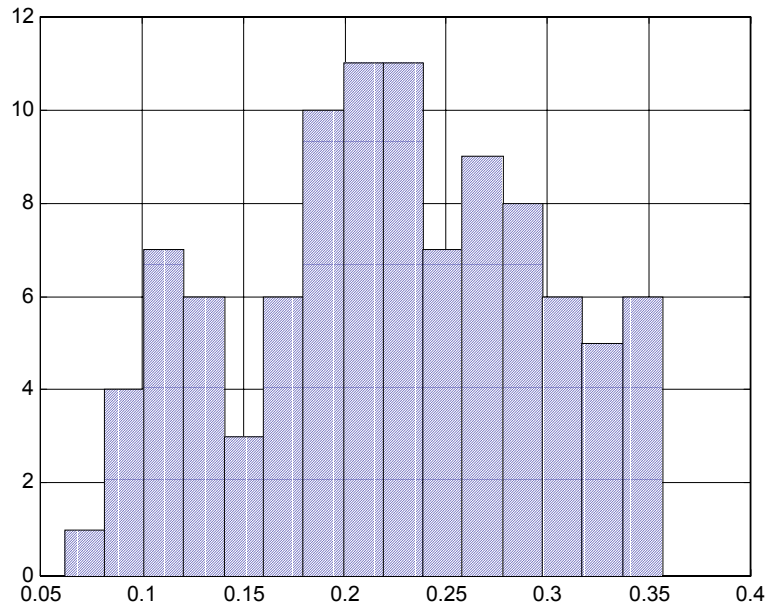
2^{er} cas $\alpha_1=0.98$

$p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \text{constante}$



(a)

Grphe représentant le RMSE pour α_0 avec $\alpha_1 = 0.98$

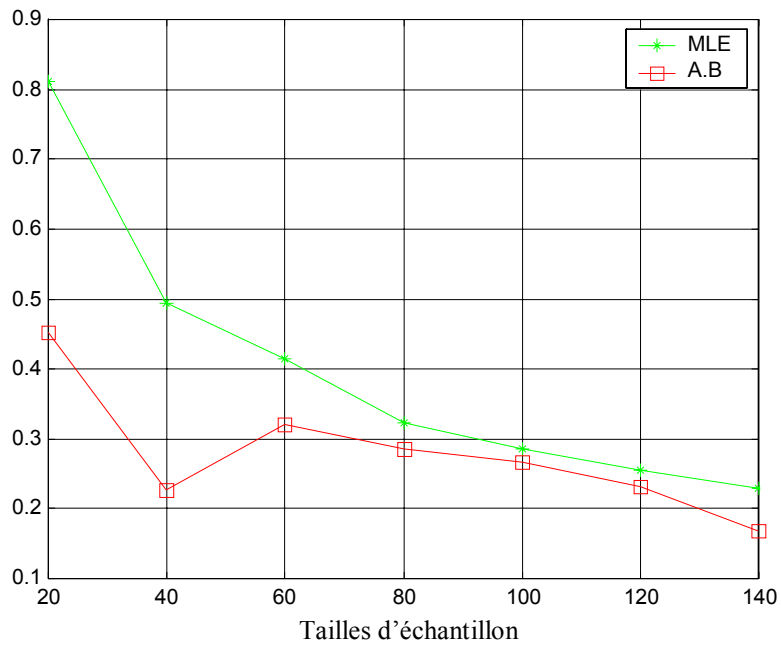


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_0 par le G.G.S

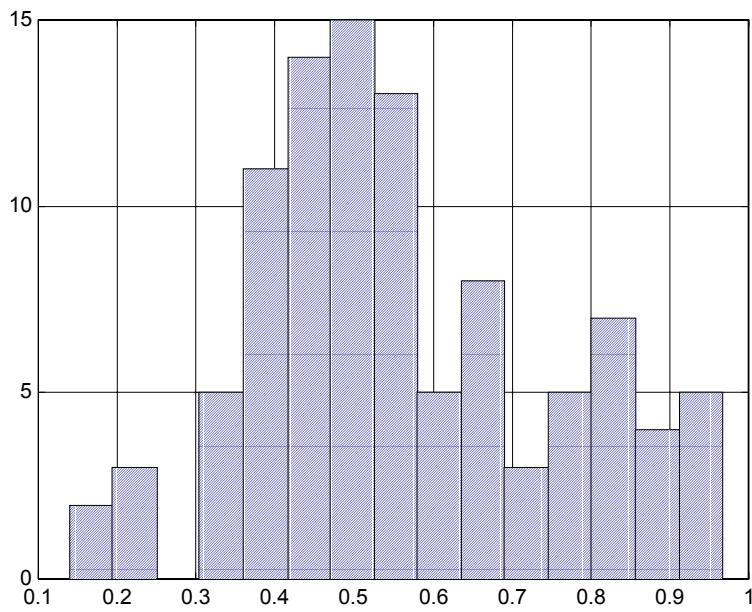
Figure 13

La série est bimodale, mode $(\alpha_0) \in \{0.2090, 0.2286\}$



(a)

Graphique représentant le RMSE pour α_1 avec $\alpha_1 = 0.98$

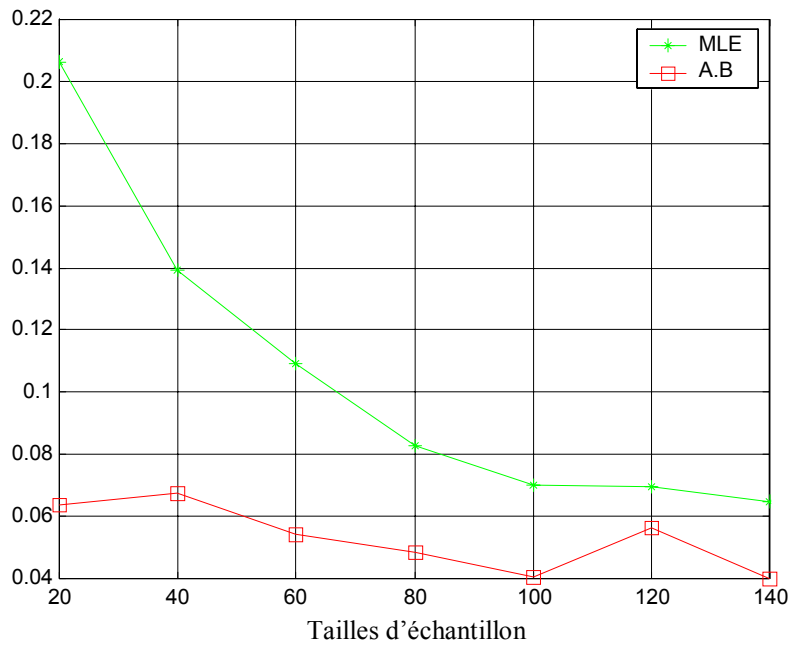


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_1 par le G.G.S

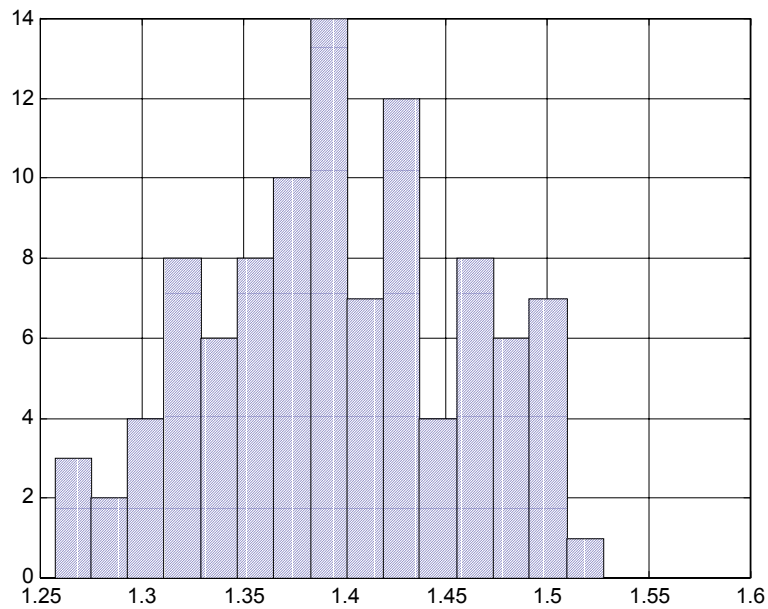
Figure 14

Mode (α_1) = 0.4978



(a)

Graphe représentant le RMSE pour β_0 avec $\alpha_1 = 0.98$

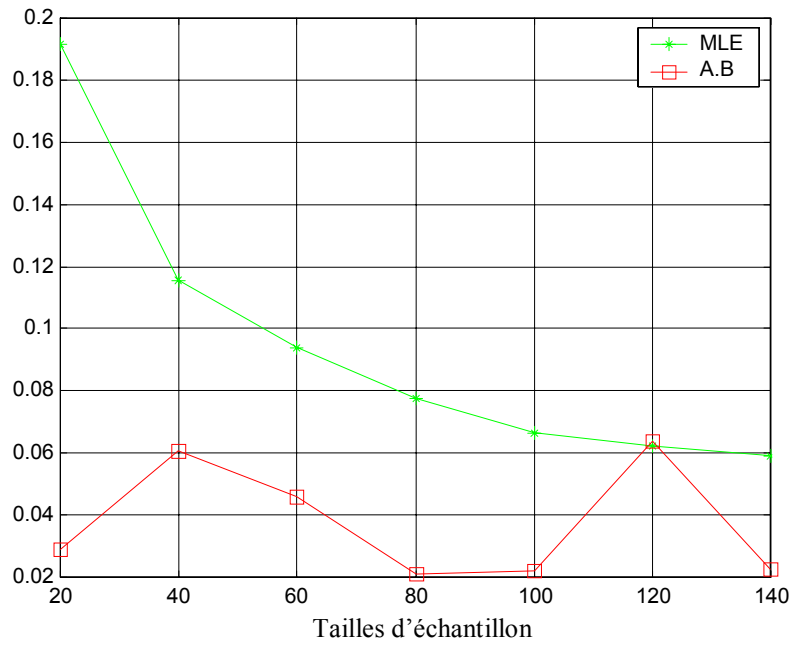


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de β_0 par le G.G.S

Figure 15

Mode (β_0) = 1.3920



(a)

Graph representing the RMSE for β_1 with $\alpha_1 = 0.98$



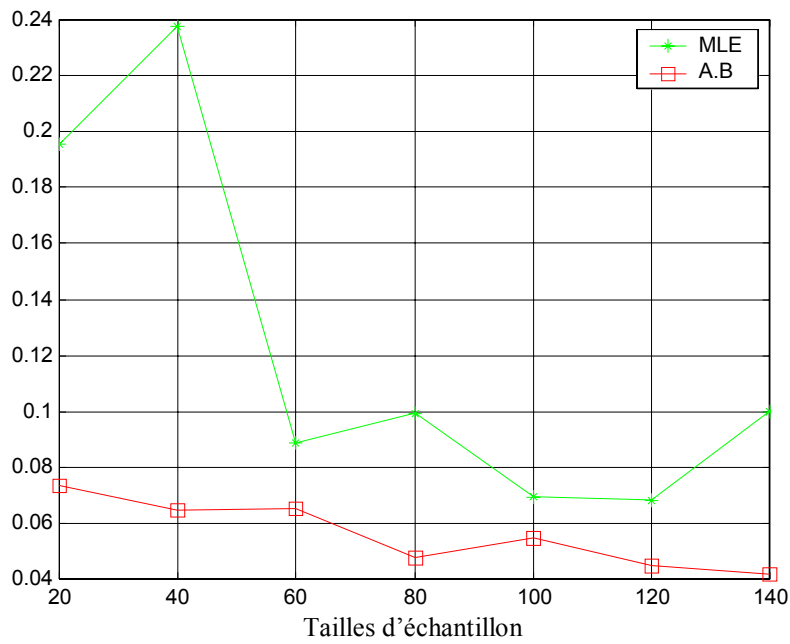
(b)

Histogram representing the values generated by the G.G.S for β_1

Figure 16

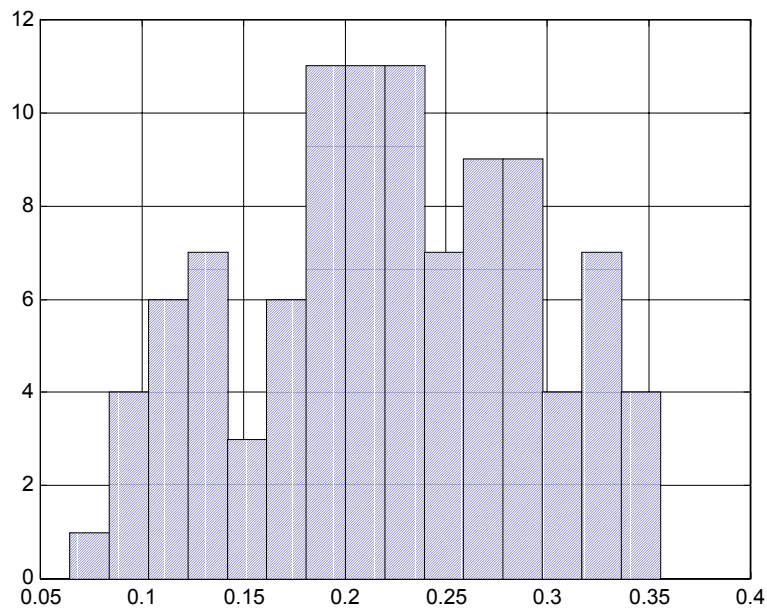
Mode (β_1) = -0.682

b) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \sqrt{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}}$



(a)

Graph representing the RMSE for α_0 with $\alpha_1 = 0.98$

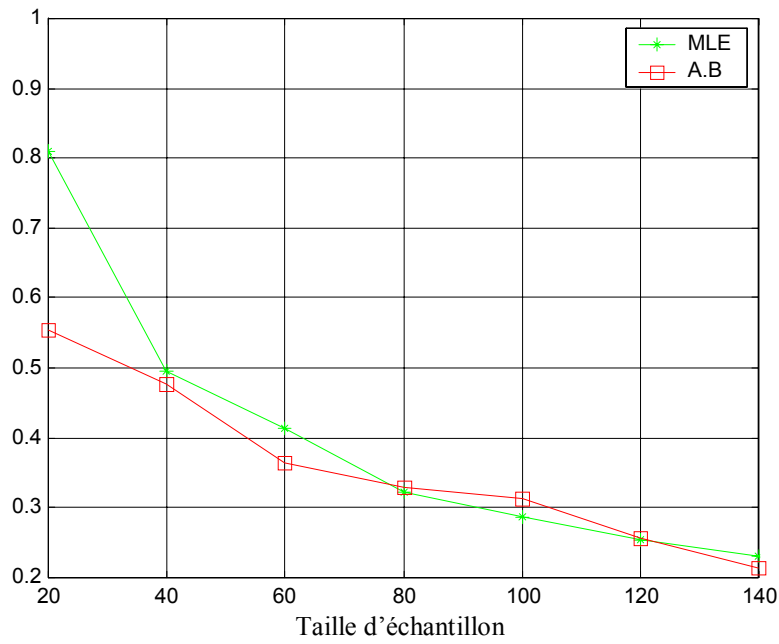


(b)

Histogram representing the values generated of α_0 by the G.G.S

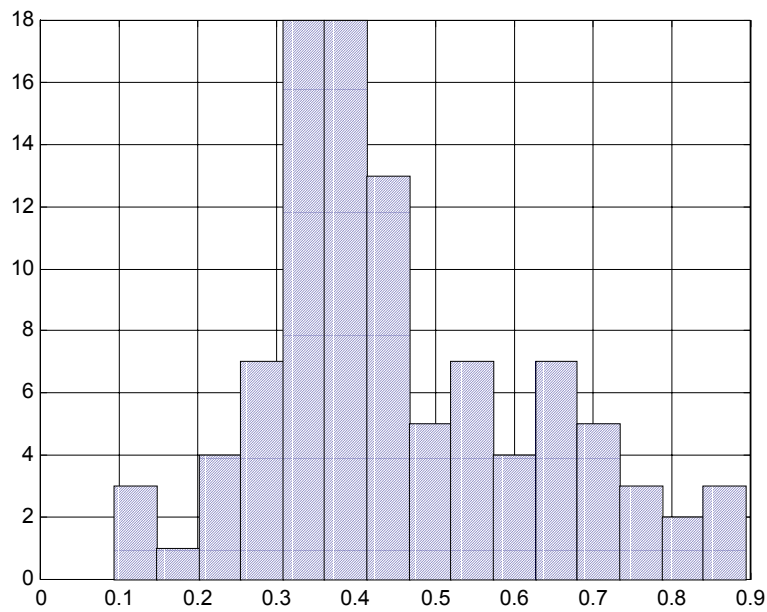
Figure 17

The series is multimodal, mode $(\alpha_0) \in \{0.2102, 0.2296, 0.2490\}$



(a)

Graphique représentant le RMSE pour α_1 avec $\alpha_1 = 0.98$

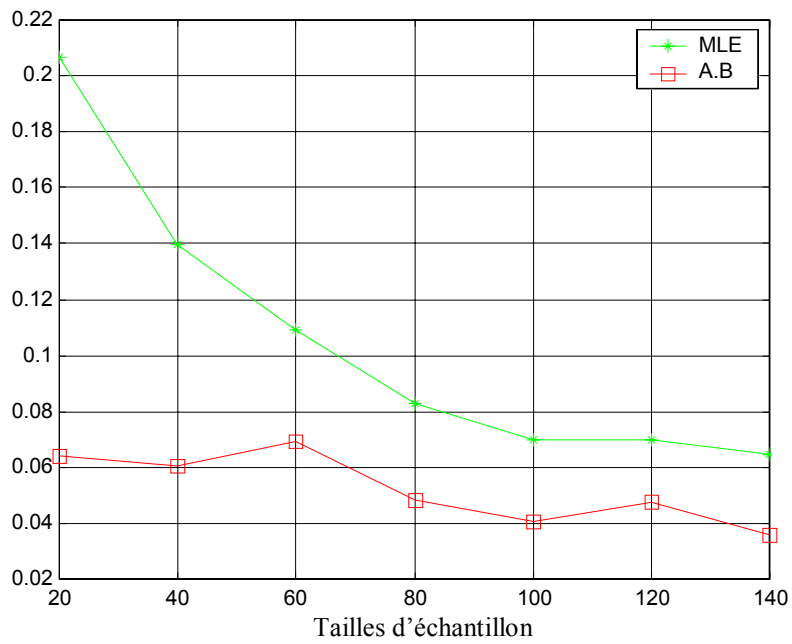


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_1 par le G.G.S

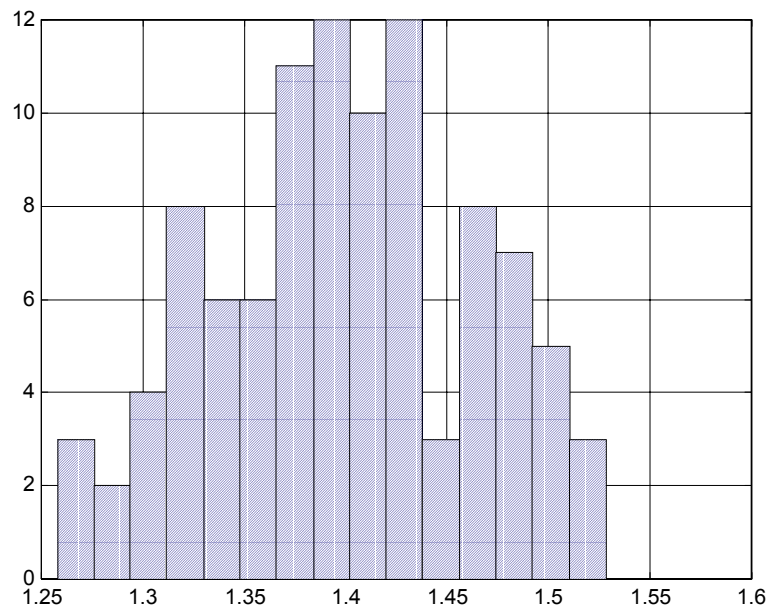
Figure 18

La série est bimodale, mode (α_1) = {0.3339 , 0.3872}



(a)

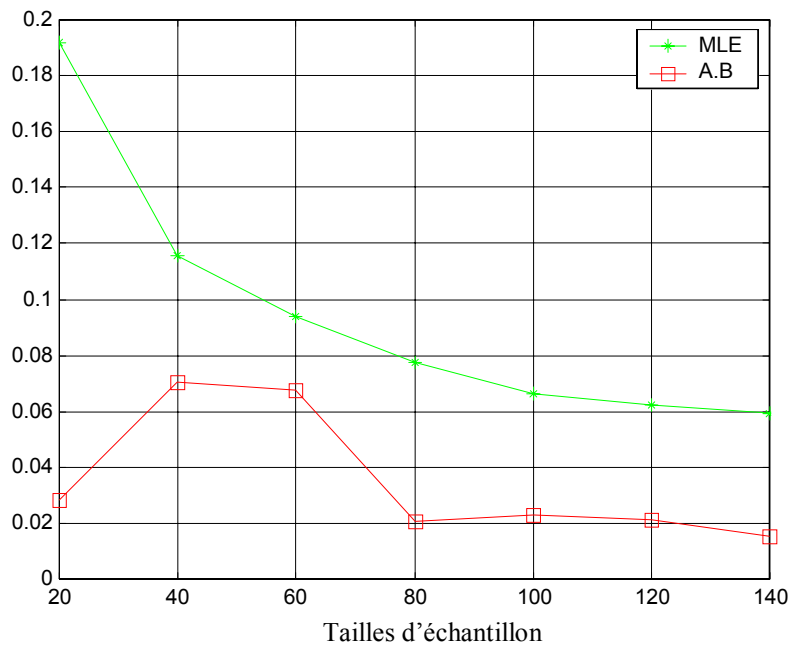
Graphique représentant le RMSE pour β_0 avec $\alpha_1 = 0.98$



Histogramme représentant les valeurs générées de β_0 par le G.G.S

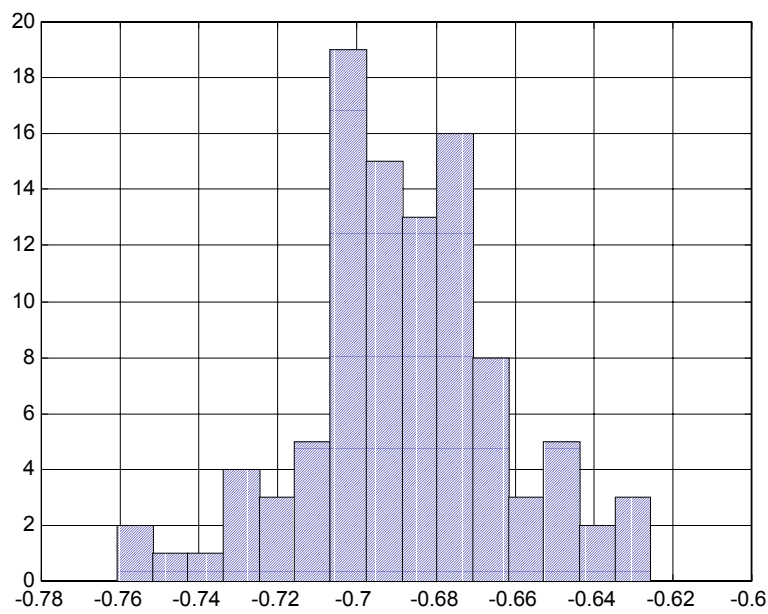
Figure 19

La série est bimodale, mode (β_0) = $\{1.3928, 1.4289\}$



(a)

Graphe représentant le RMSE pour β_1 avec $\alpha_1 = 0.98$



(b)

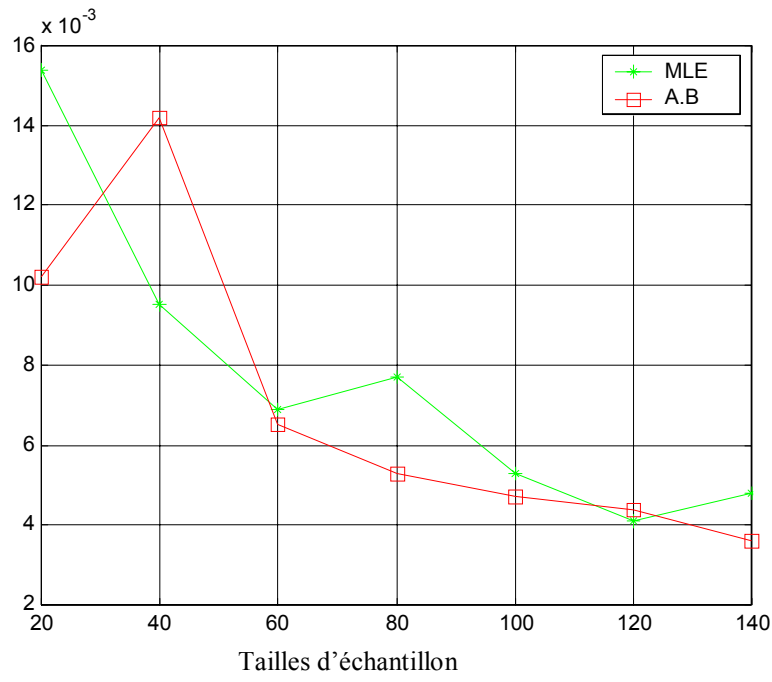
Histogramme représentant les valeurs générées de β_1 par le G.G.S

Figure 20

Mode (β_1) = -0.7023

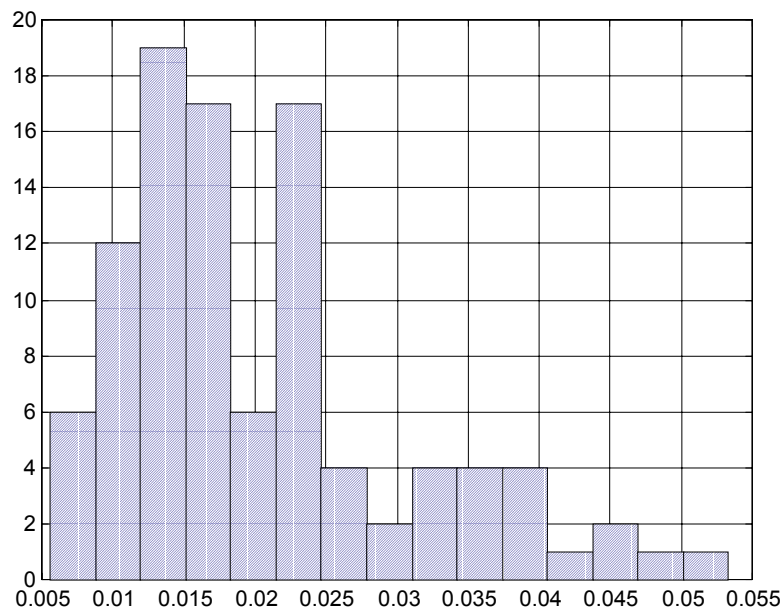
1^{er} cas $\alpha_1=0.6$

a) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \text{constante}$



(a)

Graphe représentant le RMSE pour α_0 avec $\alpha_1 = 0.6$

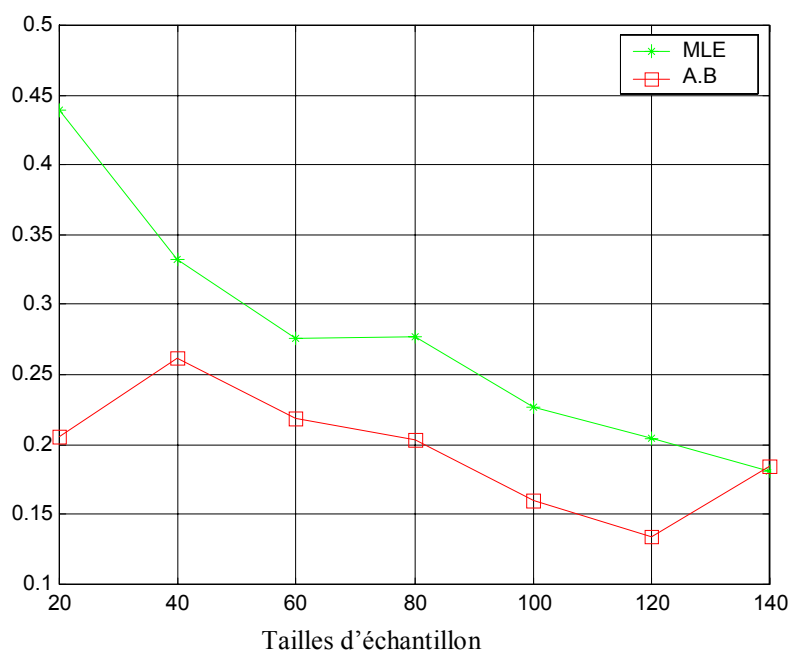


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_0 par le G.G.S

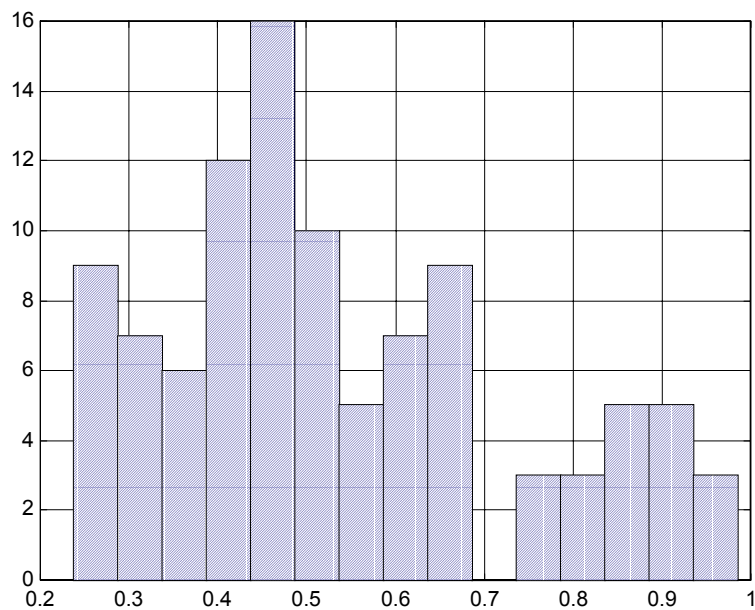
Figure1

Mode (α_0) = 0.0136



(a)

Graphique représentant le RMSE pour α_1 avec $\alpha_1 = 0.6$

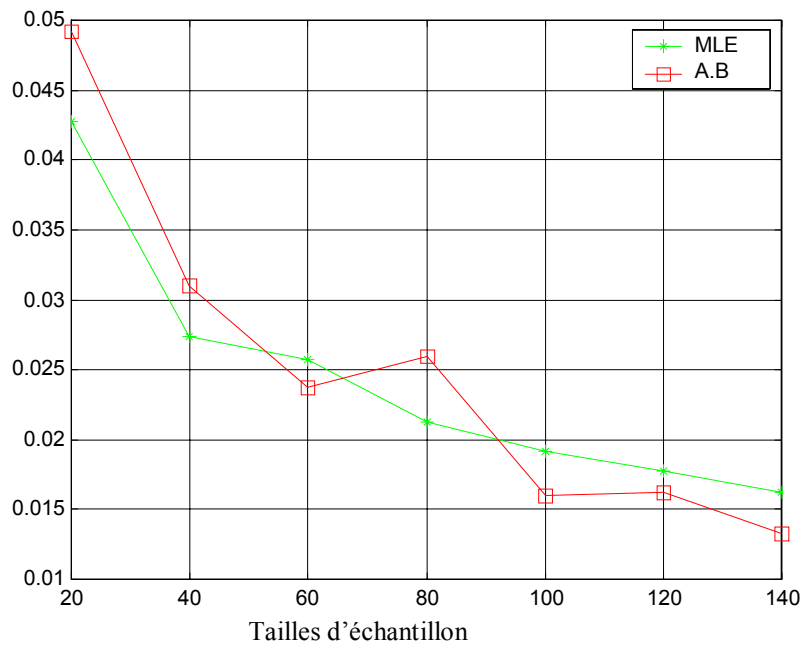


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_1 par le G.G.S

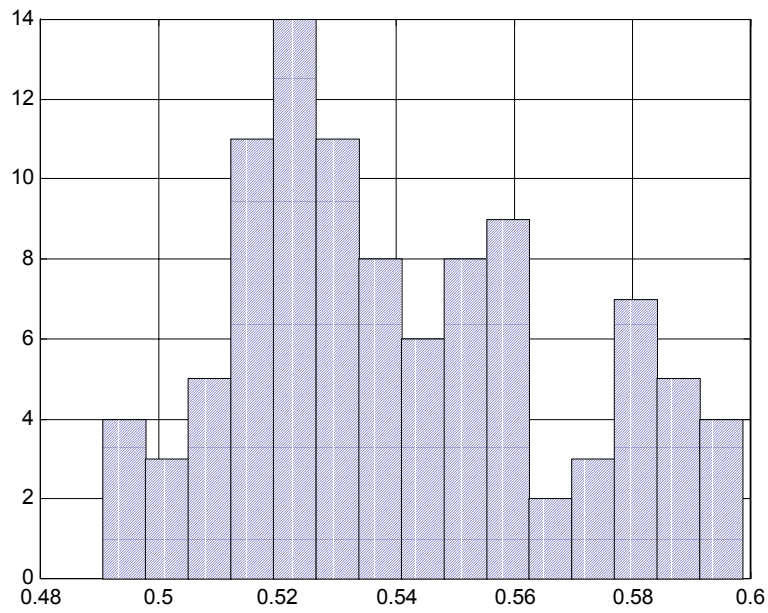
Figure 2

Mode (α_1) = 0.4623



(a)

Graphique représentant le RMSE pour μ avec $\alpha_1 = 0.6$



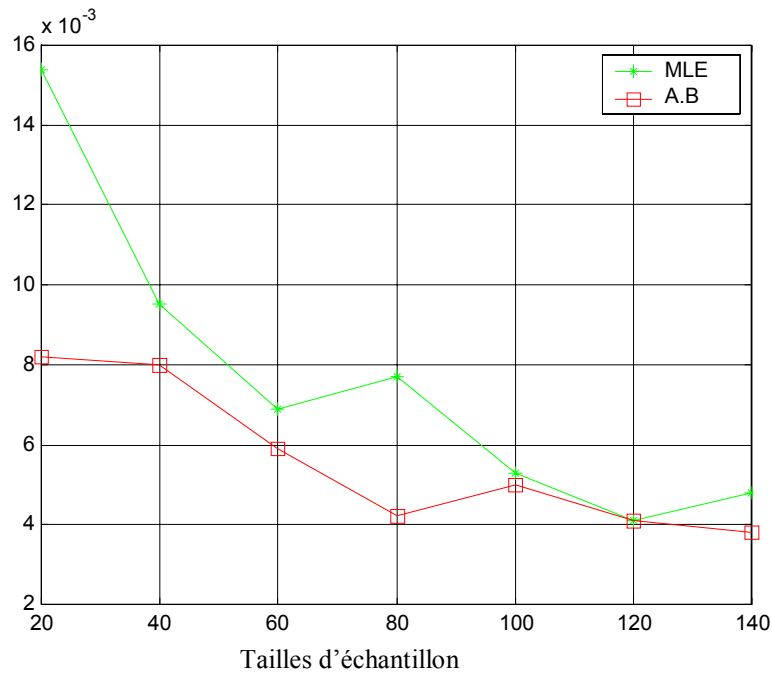
(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de μ par le G.G.S

Figure 3

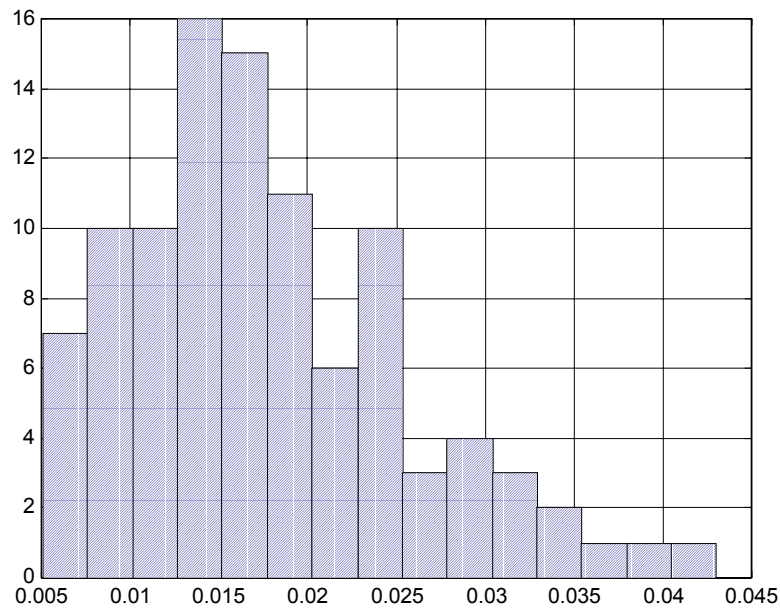
Mode (μ) = 0.5230

b) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \sqrt{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}}$



(a)

Graphe représentant le RMSE pour α_0 avec $\alpha_1 = 0.6$

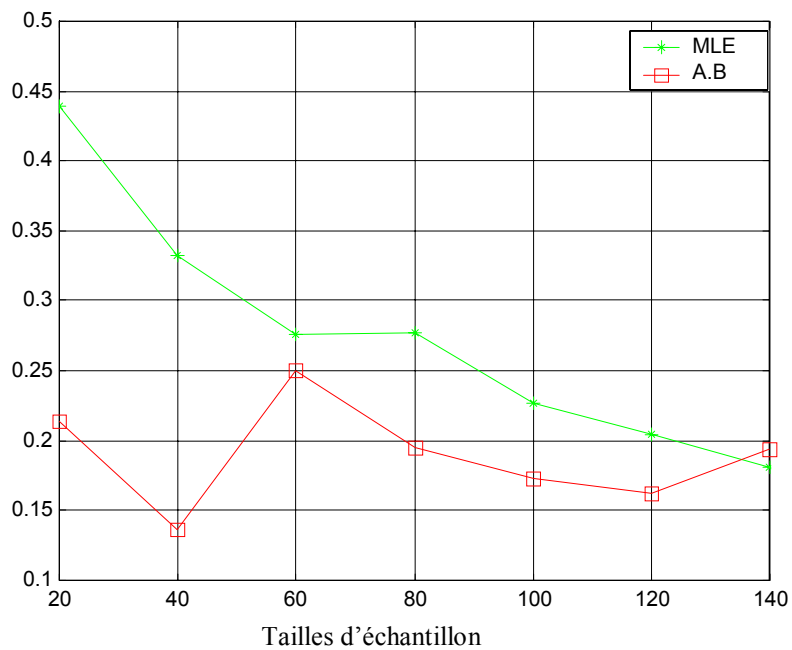


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_0 par le G.G.S

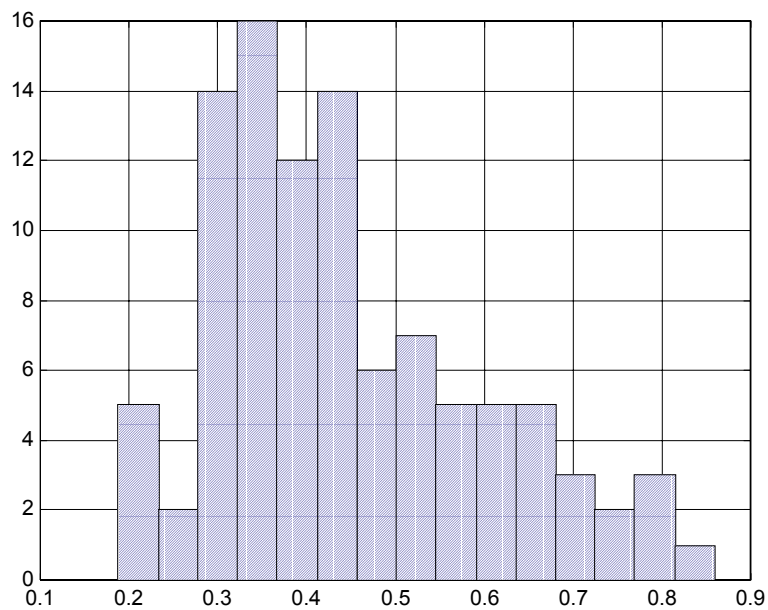
Figure 4

Mode (α_0) = 0.0139



(a)

Graphe représentant le RMSE pour α_1 avec $\alpha_1 = 0.6$

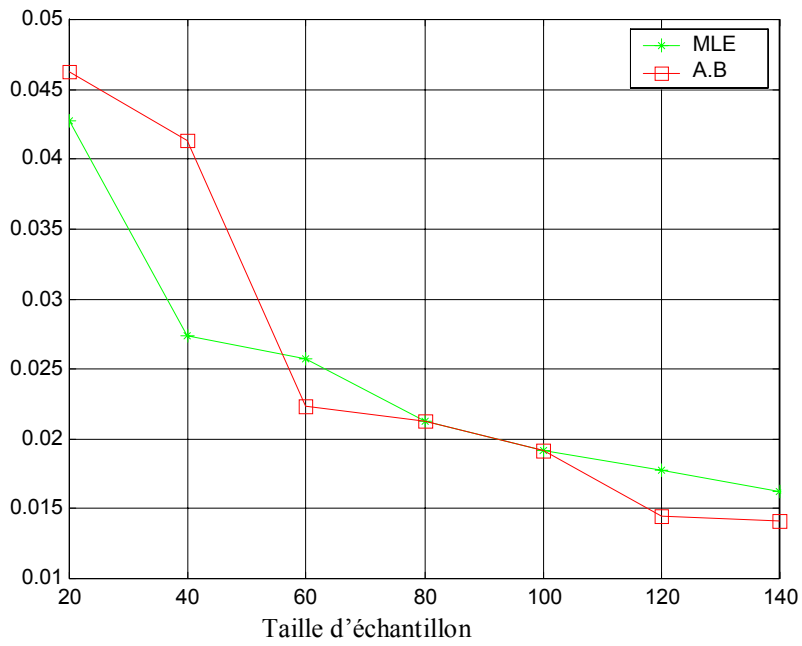


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_1 par le G.G.S

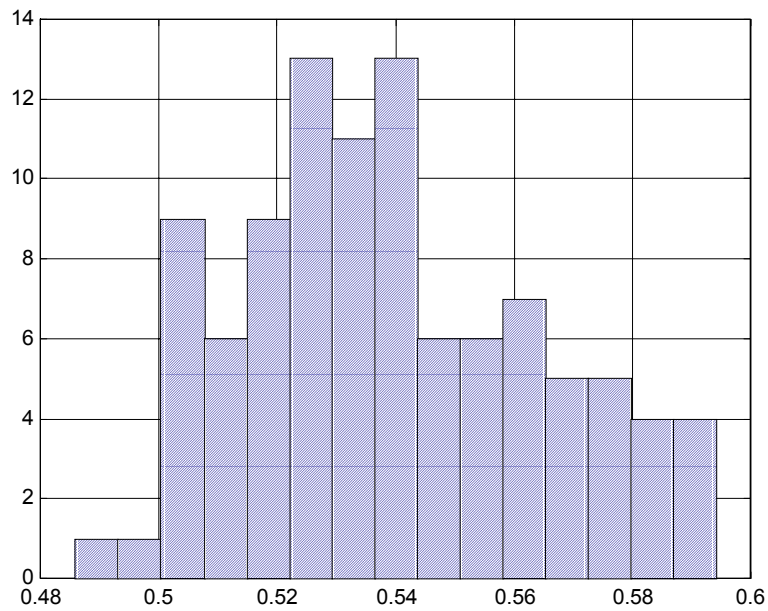
Figure 5

Mode (α_1) = 0.3443



(a)

Graphique représentant le RMSE pour μ avec $\alpha_1 = 0.6$



(b)

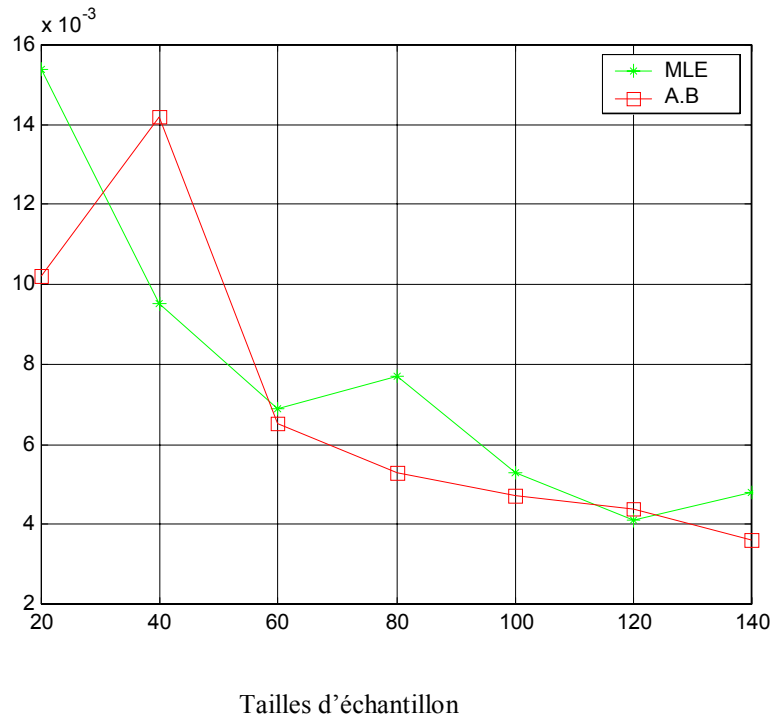
Histogramme représentant les valeurs générées de μ par le G.G.S

Figure 6

La série est bimodale, mode (μ) = $\{0.5256, 0.5401\}$

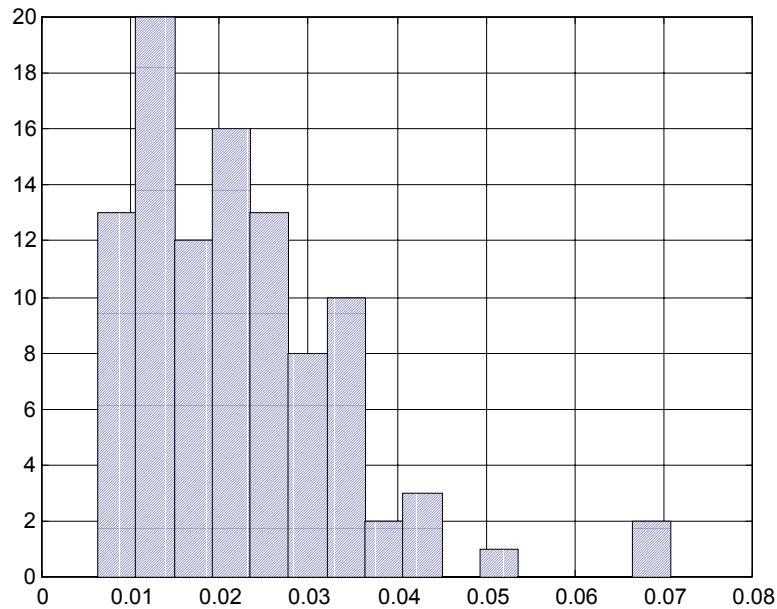
2^{er} cas $\alpha_1=0.98$

a) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \text{constante}$



(a)

Graphe représentant le RMSE pour α_0 avec $\alpha_1 = 0.98$

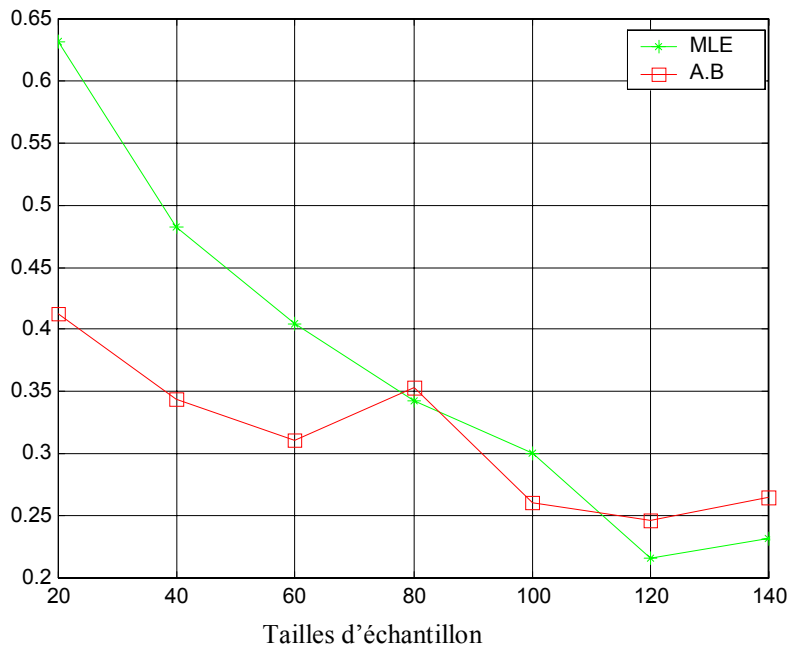


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_0 par le G.G.S

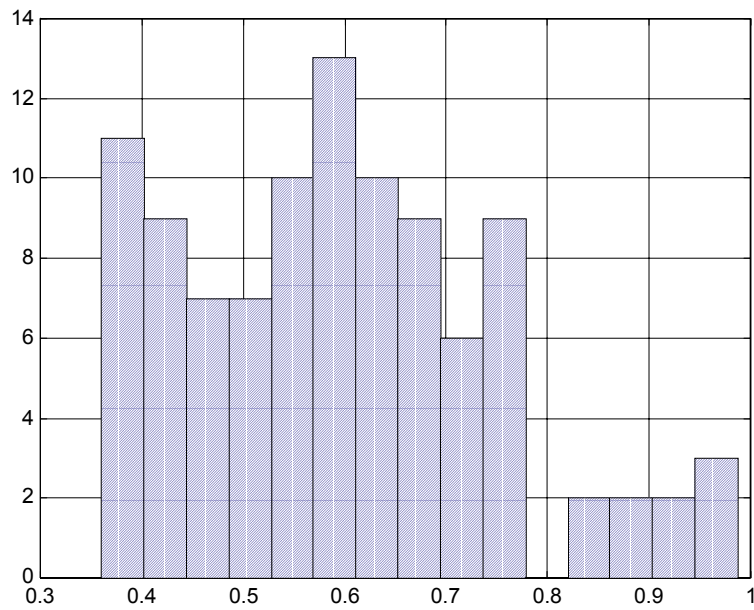
Figure 7

Mode (α_0) = 0.0128



(a)

Graphique représentant le RMSE pour α_1 avec $\alpha_1 = 0.98$

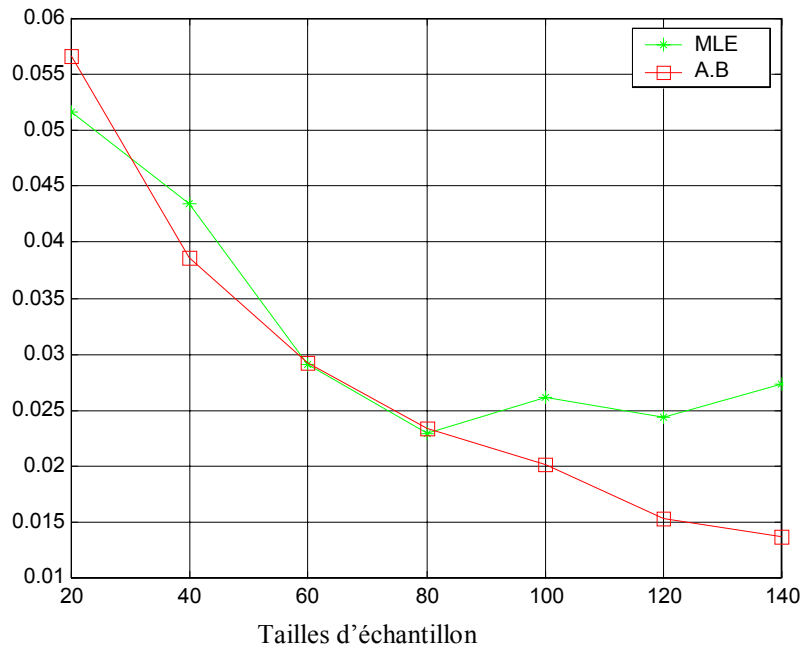


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_1 par le G.G.S

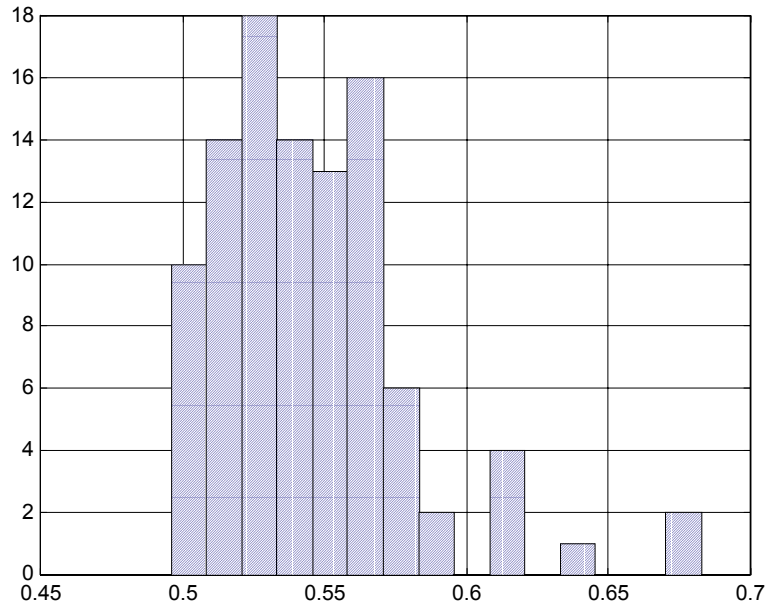
Figure 8

Mode (α_1) = 0.5900



(a)

Graphique représentant le RMSE pour μ avec $\alpha_1 = 0.98$



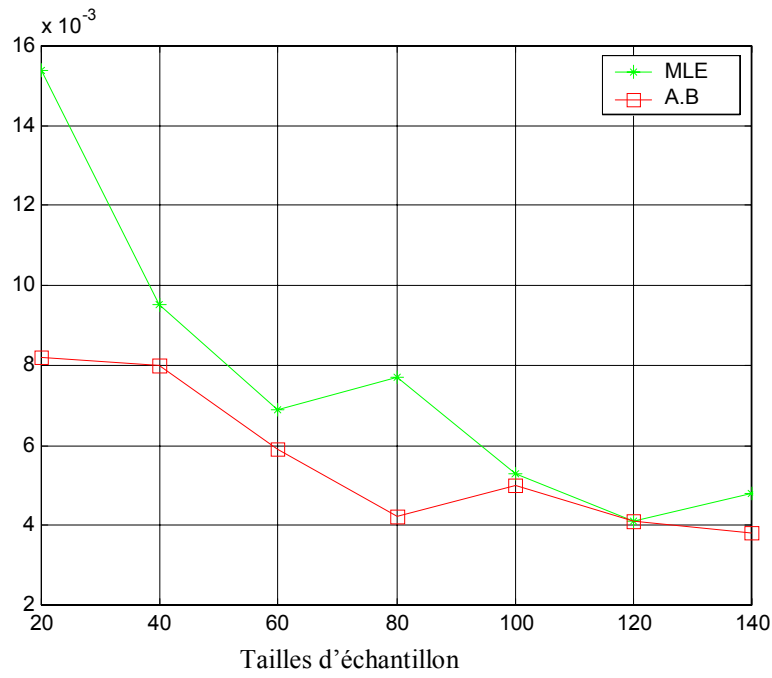
(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de μ par le G.G.S

Figure 9

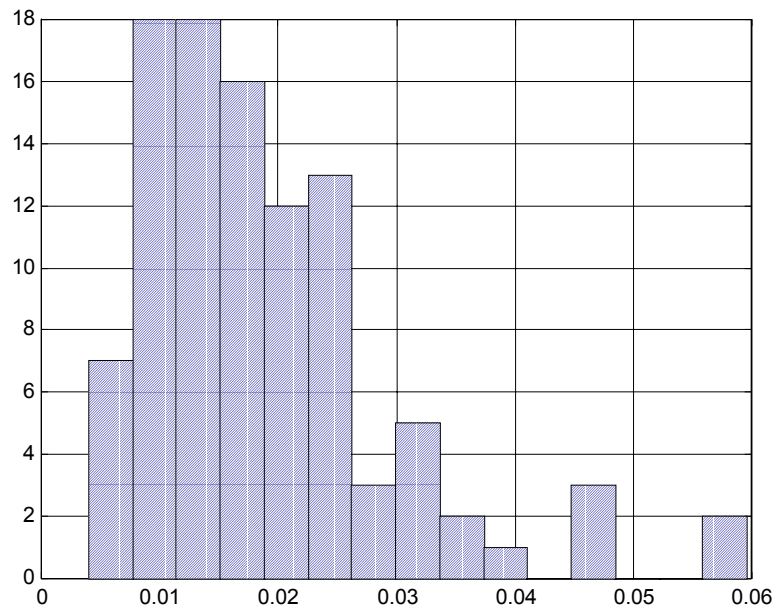
Mode (μ) = 0.5271

b) $p(\alpha_0, \alpha_1) \propto \sqrt{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}}$



(a)

Graphe représentant le RMSE pour α_0 avec $\alpha_1 = 0.98$

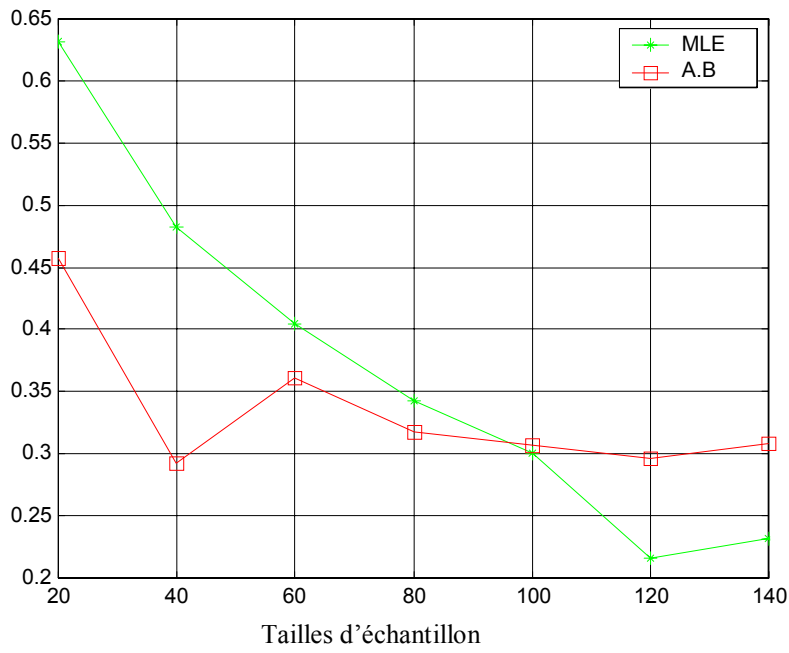


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_0 par le G.G.S

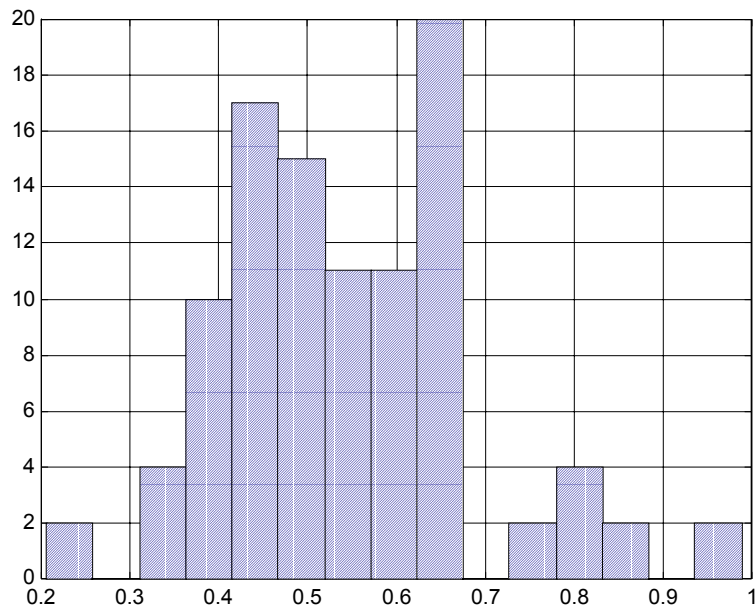
Figure 10

Mode (α_0) $\in \{0.0096, 0.0133\}$



(a)

Graphique représentant le RMSE pour α_1 avec $\alpha_1 = 0.98$

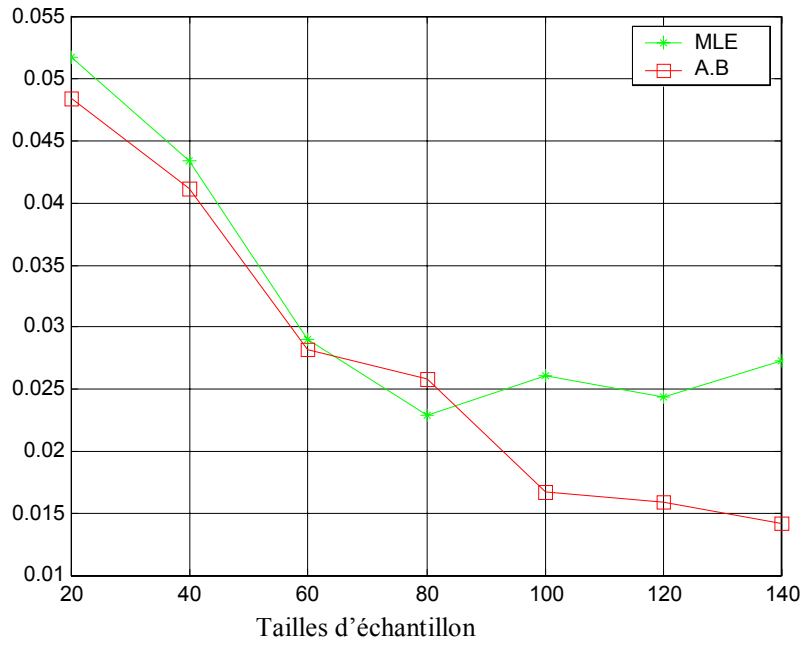


(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de α_1 par le G.G.S

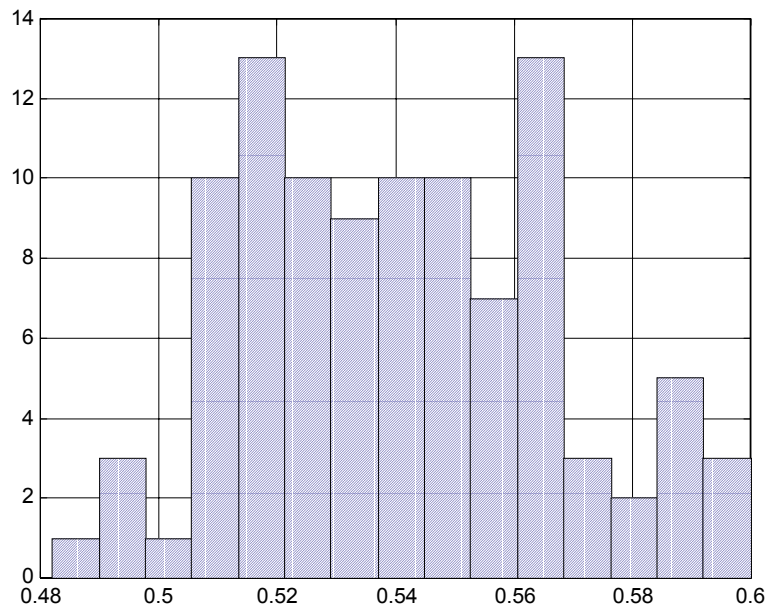
Figure 11

Mode (α_1) = 0.6491



(a)

Graphique représentant le RMSE pour μ avec $\alpha_1 = 0.98$



(b)

Histogramme représentant les valeurs générées de μ par le G.G.S

Figure 12

La série est bimodale : mode (μ) $\in \{0.5174, 0.5645\}$

