

N° d'ordre 11/2015-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de MATHEMATIQUES



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse : Equations aux dérivées Partielles

Par : AINOUZ Abdelhamid

Sujet

Homogénéisation de problèmes multi-structures composites

Soutenue publiquement, le 30/ 11 / 2015 devant le jury composé de :

M. M.S. MOULAY	Professeur (USTHB)	Président
M. K. LEMRABET	Professeur (USTHB)	Directeur de thèse
M. K. HAMDACHE	Directeur de Recherches (Paris)	Examineur
M. A. MOKRANE	Professeur (ENS Kouba)	Examineur
M. M. MOUSSAOUI	Professeur (ENS Kouba)	Examineur
M. D. TENIOU	Professeur (USTHB)	Examineur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens vivement à remercier

Pr. K. Lemrabet pour avoir bien voulu m'encadrer dans cette thèse de doctorat en sciences, pour son sérieux, son honnêteté et son amabilité;

Pr. M. S. Moulay pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury;

Pr. K. Hamdache, Pr. A. Mokrane, Pr. M. Moussaoui et Pr. D. Teniou pour avoir fait partie du jury et d'avoir bien voulu examiner ce travail.

A tous, je vous adresse mes reconnaissances et je suis gré de vos remarques, vos suggestions et vos corrections concernant le manuscrit et qui l'ont très bien améliorés.

Je tiens également à exprimer ma profonde sympathie à l'égard des Pr. R. Souam (Univ. Paris 7) et Pr. A. Meziani (FIU, Miami, Etats-unis) pour m'avoir accueilli dans leur laboratoire, pour leur gentillesse, leur disponibilité et pour leur soutien indéfectible, sans oublier leurs conseils et les discussions que nous avons pu partager.

J'adresse mes sincères remerciements au Pr. D. Teniou, directeur du Laboratoire AMNEDP, pour son dévouement au bon fonctionnement du laboratoire, pour son soutien aussi bien matériel que moral et pour sa grande disponibilité.

Un Grand Merci aussi à tous mes collègues de la faculté de mathématiques qui se reconnaîtront ici, pour leur soutien moral et pour leur aide. Je citerai entre autres : M. Aider, M. Ait-Yahia, A. Aknouche, R. Bebbouchi, M. Benabidallah, A. Berrachedi, S. Bouroubi, K. Boutarène, A. Boutiche, A. Debbache, F. Hamdi, D. Hamroun, T. Laadj, M. S. Moulay, T. Oulemane, Y. S. Raffed, M. Rahmani, A. Semri et O. Zair,...

Mes derniers remerciements et non des moindres s'adressent à toute ma famille et plus particulièrement à mes parents, à mes bien-aimés : Leila, Hayet, Samia, Azzedine et Merouane, à Dadda Amar, à Nana Roza et à mon cousin Abdelkader. C'est grâce à votre soutien actif et inconditionnel que je suis parvenu à cette étape de ma vie professionnelle et scientifique, grâce aussi à votre amour, votre dévotion, votre patience et votre attention. Je vous dédie tout particulièrement ce travail.

*A la mémoire
de nos valeureux martyrs,
de mes grands-parents,
de mon Cheikh Mohamed- Ouali Douakh
et de mes chers collègues A. Aider, M.S. Hachaichi et M. Zitouni.*

Table des Matières

- Introduction Générale** **iii**
- 0.1 Notion de convergence à deux échelles iv
- 0.2 Homogénéisation d'un problème de transfert de chaleur dans les tissus biologiques vi
- 0.3 Sur un modèle en milieux composites à interfaces rugueuses x
- 0.4 Généralisation du modèle d'Aifantis xii
- 0.5 Homogénéisation d'un modèle de double porosité en poro-élasticité xvi

- 1 Une introduction à l'homogénéisation périodique** **1**
- 1.1 Introduction 1
- 1.2 Problèmes de diffusion dans une barre composite 7
 - 1.2.1 Premier exemple 8
 - 1.2.2 Second exemple 13
- 1.3 Sur les fonctions Y -périodiques et oscillantes. 19
 - 1.3.1 Espaces $L^p_{\#}(Y)$, $1 \leq p \leq \infty$ 19
 - 1.3.2 Convergence dans $L^p_{\#}(Y)$, $1 < p < \infty$ 23
 - 1.3.3 Convergence dans $L^\infty_{\#}(Y)$ 27
 - 1.3.4 Convergence dans $L^1_{\#}(Y)$ 28
- 1.4 Une introduction à l'homogénéisation 31
 - 1.4.1 Procédé d'homogénéisation en dimension une 32
 - 1.4.2 Procédé d'homogénéisation en dimension supérieure 38
 - 1.4.3 Méthode de l'énergie ou des fonctions test oscillantes 53

2	Convergence à deux échelles	60
2.1	Introduction	60
2.2	Quelques espaces fonctionnels	61
2.3	Notion de convergence à deux échelles	63
2.4	Application : Homogénéisation d'un milieu bicomposite	72
3	Homogénéisation du transfert de chaleur dans les tissus biologiques	78
3.1	Introduction	78
3.2	Position du Problème	81
3.3	Preuve du Théorème d'existence 3.1	87
3.4	Application de la méthode des échelles multiples	91
3.5	Justification du modèle homogénéisé	98
4	Homogénéisation dans les milieux composites à interfaces rugueuses	102
4.1	Introduction	102
4.2	Position du problème	104
4.3	Procédé d'homogénéisation	110
5	Une généralisation du modèle d'Aifantis par l'homogénéisation	116
5.1	Introduction	116
5.2	Position du problème	121
5.3	Application de la convergence à deux échelles	127
6	Homogénéisation d'un modèle de double porosité en poro-élasticité	132
6.1	Introduction	132
6.2	Position du Problème	133
6.3	Preuve du résultat principal	142
	Conclusion Générale et Perspectives	153
	Annexe	155
	Convergence faible et convergence faible-*	155
	Espaces L^p et espaces de Sobolev	159

Introduction Générale

L'objectif principal de cette thèse est l'étude du comportement macroscopique des solutions de divers modèles mathématiques pour des matériaux composites par la théorie de l'homogénéisation [7, 8, 9, 10]. Ces composites sont décrits à l'échelle microscopique par des systèmes d'équations mathématiques issus de la théorie générale de l'élasticité linéaire et/ou des phénomènes de transfert de chaleur.

Dans cette thèse on étudiera le cas où ces composites sont constitués de deux structures différentes réparties périodiquement avec des conditions de transmission sur l'interface : une couche mince faite d'un matériau possédant une conductivité (ou une diffusivité) non négligeable et qui se traduit donc par un contact rugueux entre ces structures, constituant ainsi une barrière physique. Ces conditions sont modélisées par la continuité du flux mais spécifiquement par un saut des quantités physiques (vitesse de l'écoulement, température,...). Le cas de matériaux multi-structures composites se généralise aisément.

Si le contact entre les différents constituants est supposé parfait et donc pas de présence de saut interfacial, plusieurs travaux ont été réalisés. On citera notamment [19, 20, 25, 43, 48, 55, 59, 60, 80, 86, 91]. Cependant, peu de travaux sont réalisés dans le cas de saut interfacial. On citera entre autres [73, 76, 77].

Dans la théorie de l'homogénéisation périodique, on suppose que la période des structures à l'échelle locale est très petite comparée à la taille du milieu composite. Les modèles mathématiques posés à l'échelle microscopique consistent en des équations ayant des coefficients fortement oscillants décrivant la structure spatiale fortement hétérogène du matériau. Par ce procédé d'homogénéisation, on construit donc des modèles mathématiques posés à l'échelle macroscopique où les équations sont remplacées par d'autres numériquement faciles à traiter et ses coefficients, appelés effectifs, sont les propriétés

homogénéisées du matériau.

Les travaux présentés dans cette thèse sont principalement l'étude du comportement global

- de la température dans les tissus biologiques. Ce qui nous a permis de généraliser le modèle de Pennes [117] et constitue un nouveau modèle mathématique en bio-médecine;
- de la vitesse de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux non déformable; nous avons montré que le modèle de double porosité de Barenblatt-Zhel'tov-Kochina [33] peut se ramener à un modèle de simple porosité;
- de la vitesse de l'écoulement d'un fluide saturé dans un milieu poreux déformable composite, généralisant ainsi le modèle d'Aifantis [4];
- de la vitesse de l'écoulement d'un fluide saturé dans un milieu poreux déformable composite où cette fois les constituants présentent des perméabilités avec des ordres de magnitude différents lorsqu'ils sont exprimés en fonction de la période des micro-structures. Le modèle homogénéisé obtenu est nouveau et s'inscrit dans le cadre des systèmes homogénéisés contenant des effets de mémoire.

Pour mener à bien ces travaux nous avons pour cela utilisé la technique de convergence à deux échelles [11, 112] qu'on rappelle ci-après.

0.1 Notion de convergence à deux échelles

Soit $p \in [1, +\infty[$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) et $Y = (0, 1)^N$ le cube unité représentant la cellule de base. On dit qu'une famille (w^ε) dans $L^p(\Omega)$ converge à deux échelles vers $w_0 \in L^p(\Omega \times Y)$ (et on écrit $w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} w_0$) si pour toute fonction test admissible $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Ici $\mathcal{C}_\#(Y)$ désigne l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R}^N et Y -périodiques.

Les principaux résultats de compacité utilisés dans cette thèse sont

1. De toute famille bornée dans $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-famille qui converge à deux échelles.
2. Soit (w^ε) une famille bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W_0^{1,p}(\Omega)$). Alors il existe une sous-famille de (w^ε) qu'on note encore (w^ε) et il existe $w \in W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W_0^{1,p}(\Omega)$) et $w_1 \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(Y)/\mathbb{R})$ tels que

$$w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} w, \quad \nabla w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \nabla w + \nabla_y w_1.$$

où $W_{\#}^{1,p}(Y)$ désigne le sous-espace de $W^{1,p}(Y)$ des (classes) de fonctions ayant la même trace sur les faces opposées.

On suppose maintenant que $N > 1$. Soit $Y_1 \subset Y$ un ouvert de Y de frontière Σ régulière. Posons

$$\Sigma^\varepsilon = \left\{ x \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{Z}^N : \frac{x}{\varepsilon} \in \Sigma \right\}.$$

Si (w^ε) est une famille de fonctions dans $W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\|w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \varepsilon \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N} \leq C,$$

Il existe alors une sous-famille de (w^ε) qu'on note toujours (w^ε) et il existe $w_0(x, y) \in L^p(\Omega; W_{\#}^{1,p}(Y))$ telle que $w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} w_0$ et $\varepsilon \nabla w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \nabla_y w_0$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_{\#}^\infty(Y))$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) ds^\varepsilon(x) = \int_{\Omega \times \Sigma} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx ds(y).$$

Les paragraphes 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5 qui suivent sont un exposé succinct des principaux travaux réalisés dans cette thèse grâce à cette technique de convergence et qui sont présentés dans les chapitres 3, 4, 5 et 6 respectivement.

0.2 Homogénéisation d'un problème de transfert de chaleur dans les tissus biologiques

La modélisation des transferts de chaleur dans les tissus biologiques est très importante dans beaucoup d'applications en médecine telles que la radiothérapie, la dermatologie et la thermorégulation [36, 52, 137]. Le modèle mathématique le plus connu est certainement celui proposé par H.H. Pennes [117].

Nous nous proposons dans ce travail de construire par l'homogénéisation un modèle macroscopique en tenant compte de la forte hétérogénéité des tissus organiques et de la différence de l'ordre de magnitude de la perméabilité dans les différents composés cellulaires.

Les données phénoménologiques du modèle à l'échelle microscopique sont :

- ρ, c et κ la densité, la capacité calorifique et le coefficient de conductivité thermique du tissu, respectivement;
- ω_b le coefficient de la perfusion sanguine;
- ρ_b et c_b la densité et la capacité calorifique du sang;
- κ_b le coefficient de conductivité thermique du sang.

On supposera que ces paramètres phénoménologiques sont des constantes strictement positives et indépendantes de ε .

Soit $T > 0$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) de frontière régulière. Soit $Y =]0, 1[^N$ la cellule de base qu'on décompose comme suit : $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Sigma$ où Y_1, Y_2 sont deux domaines disjoints de Y et $\Sigma = \partial Y_1 \cap \partial Y_2$ est une sous-variété \mathcal{C}^∞ de dimension $(N - 1)$.

On suppose que le prolongement Y -périodique de Y_1 à \mathbb{R}^N est un ouvert régulier et connexe. Soit χ_1 (resp. χ_2) la fonction caractéristique de Y_1 (resp. Y_2) qu'on étend par Y -périodicité à \mathbb{R}^N .

Soit $\varepsilon > 0$ et on pose

$$\begin{aligned} \Omega_1^\varepsilon &= \{x \in \Omega : \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1\}, & \Omega_2^\varepsilon &= \{x \in \Omega : \chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1\}, & \Sigma^\varepsilon &= \overline{\Omega_1^\varepsilon} \cap \overline{\Omega_2^\varepsilon}, \\ Q &= (0, T) \times \Omega, & \Gamma &= (0, T) \times \partial\Omega, & S &= (0, T) \times \Sigma, \\ Q_1^\varepsilon &= (0, T) \times \Omega_1^\varepsilon, & Q_2^\varepsilon &= (0, T) \times \Omega_2^\varepsilon, & S^\varepsilon &= (0, T) \times \Sigma^\varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}, \quad \alpha_b = \frac{\kappa_b}{\rho_b c_b}, \quad \alpha_b^\varepsilon = \varepsilon^2 \alpha_b, \quad \gamma = \omega_b \rho_b \frac{c_b}{c}.$$

Soit le modèle de diffusion suivant :

$$\partial_t u^\varepsilon - \alpha \Delta u^\varepsilon = f \quad \text{dans } Q_1^\varepsilon, \quad (0.1)$$

$$\partial_t u_b^\varepsilon - \alpha_b^\varepsilon \Delta u_b^\varepsilon = f_b \quad \text{dans } Q_2^\varepsilon, \quad (0.2)$$

$$\alpha \nabla u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = \alpha_b^\varepsilon \nabla u_b^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon \quad \text{sur } S^\varepsilon, \quad (0.3)$$

$$\alpha \nabla u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = -\varepsilon \gamma (u^\varepsilon - u_b^\varepsilon) \quad \text{sur } S^\varepsilon, \quad (0.4)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (0.5)$$

$$u^\varepsilon(0, \cdot) = h(\cdot) \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon, \quad (0.6)$$

$$u_b^\varepsilon(0, \cdot) = h_b(\cdot) \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon \quad (0.7)$$

où f (resp. f_b) représente un terme source de chaleur dans les cellules (resp. le sang) et h, h_b sont les températures initiales dans $\Omega_1^\varepsilon, \Omega_2^\varepsilon$ respectivement. Dans () et (), ν^ε désigne la normale unitaire à Σ^ε dirigée vers l'extérieur de Ω_1^ε . On supposera sans perte de généralité que $f, f_b, h, h_b \in L^2(\Omega)$ et donc indépendantes du temps. Ce système modélise l'évolution de la température dans le tissu biologique (système cellulaire-sang) $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ avec comme barrière physique entre ces deux milieux : l'interface Σ^ε de conductivité thermique donnée par $\gamma^\varepsilon = \varepsilon \omega_b \rho_b c_b \rho$. Les inconnues u^ε et u_b^ε sont les températures dans Q_1^ε et Q_2^ε respectivement.

Maintenant on va établir le cadre variationnel de notre problème. Pour cela nous introduisons quelques notations. Soit $H^\varepsilon = L^2(\Omega_1^\varepsilon) \times L^2(\Omega_2^\varepsilon)$ et $V^\varepsilon = (H^1(\Omega_1^\varepsilon) \cap H_0^1(\Omega)) \times H^1(\Omega_2^\varepsilon)$. Notons

i) $a^\varepsilon(\cdot, \cdot) : V^\varepsilon \times V^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$a^\varepsilon(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_1^\varepsilon} \alpha \nabla \varphi_1 \nabla \psi_1 dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \alpha_b \nabla \varphi_2 \nabla \psi_2 dx + \int_{\Sigma^\varepsilon} \gamma^\varepsilon (\varphi_1 - \varphi_2) (\psi_1 - \psi_2) ds^\varepsilon$$

où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in V^\varepsilon$.

ii) $\mathcal{A}^\varepsilon \in \mathcal{L}(V^\varepsilon, (V^\varepsilon)')$ l'opérateur linéaire et continu, défini par

$$\mathcal{A}^\varepsilon(\varphi)\psi = a^\varepsilon(\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in V^\varepsilon;$$

iii) $w^\varepsilon = (u^\varepsilon, u_b^\varepsilon)$, $g = (h, h_b)$ et

$$f^\varepsilon = f\chi_1^\varepsilon + f_b\chi_2^\varepsilon, \quad \chi_m^\varepsilon(x) = \chi_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), m = 1, 2;$$

iv) l'espace fonctionnel

$$W^{1,2}(0, T; H^\varepsilon) = \left\{ w \in L^2(0, T; H^\varepsilon) : \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; H^\varepsilon) \right\}.$$

La formulation variationnelle du système (0.1)-(0.7) est donnée par : Trouver $w^\varepsilon = (u^\varepsilon, u_b^\varepsilon) \in L^2(0, T; V^\varepsilon)$ tel que pour tout $\varphi \in W^{1,2}(0, T; H^\varepsilon) \cap L^2(0, T; V^\varepsilon)$ avec $\varphi(T) = 0$, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (w^\varepsilon(t), \partial_t \varphi(t))_{H^\varepsilon} dt + \int_0^T \mathcal{A}^\varepsilon(w^\varepsilon(t)) \varphi(t) dt \\ & = \int_0^T (f^\varepsilon, \varphi(t))_{H^\varepsilon} dt + (g, \varphi(0))_{H^\varepsilon}. \end{aligned} \quad (0.8)$$

On montre alors facilement, grâce au Lemme de J.-L. Lions (voir Théorème A.10 ou par exemple R. Showalter [124, Prop. 2.3., Chap. III]), qu'il existe une unique solution faible $w^\varepsilon \in L^2(0, T; V^\varepsilon) \cap W^{1,2}(0, T; H^\varepsilon)$ du problème (0.8), vérifiant

$$\|w^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H^\varepsilon)} + \|w^\varepsilon\|_{L^2(0, T; V^\varepsilon)} \leq C$$

où C est une constante positive et indépendante de ε . Afin d'énoncer le résultat principal, on introduit la notion de température globale dans $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$:

$$U^\varepsilon(t, x) = \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon(t, x) + \chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_b^\varepsilon(t, x), \quad (t, x) \in Q.$$

En utilisant la technique de convergence à deux échelles on montre qu'il existe une sous-famille de (u^ε) , notée toujours (u^ε) et il existe $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $u_b \in L^2(Q; H_{\#}^1(Y))$ tels que

$$\begin{aligned} \chi_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) U^\varepsilon &\text{ converge faiblement vers } |Y_1| u \text{ dans } L^2(Q), \\ \chi_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) U^\varepsilon &\text{ converge faiblement vers } \int_{Y_2} u_b dy \text{ dans } L^2(Q); \end{aligned}$$

u est solution du problème

$$\partial_t u - \int_0^t \mathcal{H}(t - \tau) u(\tau) d\tau - \operatorname{div} \left(\tilde{A} \nabla u \right) + \tilde{\gamma} u = \mathcal{F} \text{ dans } Q,$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$u(0, x) = |Y_1| h(x), \quad x \in \Omega$$

où \mathcal{H} , \tilde{A} , $\tilde{\gamma}$ et \mathcal{F} sont respectivement donnés par (3.57), (3.47), (3.56) et (3.58); La température u_b est reliée à la température u par :

$$\begin{aligned} u_b(\tau, x, y) &= u_{bi}(\tau, x, y) + \int_0^\tau \partial_\tau \omega(\tau - t, y) u(t, x) dt \\ &\quad + \int_0^\tau \partial_\tau \sigma(\tau - t, y) f_b(t, x) dt \end{aligned}$$

où u_{bi} , ω et σ sont donnés par (3.53), (3.54) et (3.55) respectivement.

En résumé nous avons considéré un micro-modèle de diffusion de la chaleur à travers un milieu composite à deux phases où les conductivités thermiques sont supposées à l'échelle microscopique d'ordre de magnitude différent. La transition à travers l'interface des deux phases est régie par la loi de refroidissement de type Newton. Plus précisément le flux de chaleur à travers la couche mince séparant les deux milieux est proportionnel au saut de la température, par un facteur dépendant de la conductivité thermique de cette couche [49, 26]. Le modèle macroscopique ainsi construit est nouveau dans la littérature consacrée aux modèles mathématiques de la biomédecine et il est de type Barbashin intégro-différentiel pour la température globale, généralisant ainsi le modèle donné par le physiologiste de Pennes, voir [90] et peut donc constituer un nouveau modèle pour l'étude

de la diffusion de la chaleur dans les tissus biologiques.

0.3 Sur un modèle en milieux composites à interfaces rugueuses

L'étude des écoulements de fluides dans les milieux poreux est importante dans beaucoup de disciplines d'ingénierie, citons entre autres : en ingénierie pétrolière avec l'extraction du pétrole et du gaz dans les roches mères, en agronomie avec les phénomènes d'infiltration des eaux pluviales dans les terres arides et semi-arides et en médecine pour les écoulements sanguins dans les tissus biologiques et osseux. Notre deuxième travail s'inscrit dans le cadre de la modélisation des écoulements stationnaires de fluide dans des milieux poreux. Plus précisément cela consiste à homogénéiser un modèle mathématique de milieux hétérogènes, périodiques et bi-phasiques ayant des perméabilités d'ordre de magnitude différent à l'échelle microscopique et en présence d'une barrière hydraulique interfaciale. On montre sous certaines hypothèses de régularité sur les données physiques du modèle que le problème macroscopique est décrit par une équation monophasique. Ce qui constitue un autre modèle macroscopique que ceux déjà considérés dans la littérature concernant les écoulements stationnaires de fluides dans les milieux à double perméabilité [19, 59, 77]. Le modèle à l'échelle microscopique est décrit par le système suivant :

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f_1 \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \quad (0.9)$$

$$-\varepsilon^2 \operatorname{div}(B^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) = f_2 \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \quad (0.10)$$

$$A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = -\vartheta^\varepsilon (u^\varepsilon - v^\varepsilon) \text{ sur } \Sigma^\varepsilon, \quad (0.11)$$

$$\varepsilon^2 B^\varepsilon \nabla v^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = -\vartheta^\varepsilon (v^\varepsilon - u^\varepsilon) \text{ sur } \Sigma^\varepsilon, \quad (0.12)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (0.13)$$

où

- $A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ et $B^\varepsilon(x) = B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ avec A (resp. B) continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique et

satisfait à la condition d'ellipticité :

$$A\xi \cdot \xi \geq C|\xi|^2 \quad (\text{resp. } B\xi \cdot \xi \geq C|\xi|^2), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

- $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$;

- ϑ est une application continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique et vérifiant :

$$\exists C > 0 : \vartheta(y) \geq C > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

La formulation faible de (0.9)-(0.13) est alors donnée par : pour $\varepsilon > 0$ assez petit, trouver un couple $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in V^\varepsilon$, tel que $(\varphi, \psi) \in V^\varepsilon$, on a

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v^\varepsilon \nabla \psi dx + \varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} \vartheta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon - v^\varepsilon) (\varphi - \psi) ds^\varepsilon = \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1 \varphi dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2 \psi dx. \quad (0.14)$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram on montre qu'il existe un couple unique $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in V^\varepsilon$, solution du problème variationnel (0.14) tel que

$$\|(u^\varepsilon, v^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon} \leq C.$$

où C est une constante positive et indépendante de ε . Supposons que $f_2 \in H^1(\Omega)$. Soit $U^\varepsilon = \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon + \chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v^\varepsilon$ désignant la pression globale. On montre alors par la technique de la convergence à deux échelles qu'il existe une sous-famille extraite de $\varepsilon > 0$ toujours notée ε et il existe un unique $U \in H^1(\Omega)$ tels que (U^ε) converge faiblement vers U dans $H^1(\Omega)$. En outre, U est l'unique solution du problème homogénéisé :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla U) = F \text{ dans } \Omega, \\ U = G \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où \tilde{A} , F et G sont données par (4.36) et (4.37).

Ainsi nous avons construit un modèle macroscopique monophasique contrairement à certains cas où le modèle est biphasique (de type Barenblatt) et tout particulièrement lorsque f n'est plus dans $H^1(\Omega)$ mais seulement dans $L^2(\Omega)$. On pourra par exemple consulter G. Allaire [11] et H. Ene et D. Polisevski [77].

0.4 Généralisation du modèle d'Aifantis

L'objectif de ce travail est de construire un modèle homogénéisé de type Barenblatt-Biot pour l'écoulement d'un fluide dans un milieu composite poro-élastique où les phases sont réparties périodiquement et séparées par une barrière hydraulique, prenant en compte de l'hétérogénéité du milieu. Le micro-modèle est basé sur le système de Biot pour les processus de consolidation qu'on décrira comme suit : On suppose que Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^N avec $N \geq 3$ et une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ et que la cellule de base Y se décompose comme suit : $Y := Y_1 \cup Y_2 \cup \Sigma$ avec Y_1 et Y_2 deux domaines disjoints de Y et $\Sigma = \partial Y_1 \cap \partial Y_2$: une variété de classe \mathcal{C}^∞ de dimension $N - 1$. On suppose que l'ensemble $\cup_{k \in \mathbb{Z}^N} (k + Y_m)$ est un ouvert connexe de \mathbb{R}^N ($m = 1, 2$).

On définit

$$K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}^N : \varepsilon k + \varepsilon \overline{Y_2} \subset \Omega\},$$

$$\Omega_\varepsilon^{(2)} : = \cup_{k \in K_\varepsilon} (\varepsilon k + \varepsilon Y_2), \quad \Omega_\varepsilon^{(1)} := \Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon^{(2)}}, \quad \Sigma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon^{(1)} \cap \partial\Omega_\varepsilon^{(2)}.$$

On suppose que $\Omega_\varepsilon^{(m)}$ ($m = 1, 2$) est le siège d'un solide poro-élastique saturé par un fluide légèrement compressible et visqueux. On note $p_\varepsilon^{(m)}$ sa pression et

$$c_\varepsilon^{(m)}(x) = c^{(m)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad B_\varepsilon^{(m)}(x) = B^{(m)}(x) = \left(b_{ij}^{(m)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

la compressibilité et la perméabilité du matériau $\Omega_\varepsilon^{(m)}$, respectivement. On suppose que $c^{(m)}$ est définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$\exists C > 0 \text{ telle que } c^{(m)}(y) \geq C > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

On suppose aussi que $B^{(m)}$ est continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique, symétrique et vérifiant :

$$\langle B^{(m)}(y)\xi, \xi \rangle \geq C \langle \xi, \xi \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

On note \mathbf{u}_ε le vecteur déplacement dans Ω et $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (a_{ijkl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right))_{1 \leq i,j,k,l \leq N}$ le tenseur d'élasticité de Ω .

On suppose que $\mathcal{A}(\cdot)$ est continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique, et satisfait :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad a_{ijkl}(y) &= a_{jikl}(y) = a_{ijlk}(y) = a_{klij}(y), \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, N \\ \exists C > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \eta &= (\eta_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ avec } \eta_{ij} = \eta_{ji} \\ \sum_{i,j,k,l=1}^N a_{ijkl}(y) \eta_{kl} \eta_{ij} &\geq C \sum_{i,j=1}^N \eta_{ij} \eta_{ij}. \end{aligned}$$

Le tenseur total des contraintes est donné dans chaque phase $\Omega_\varepsilon^{(m)}$ ($m = 1, 2$) par

$$\sigma_\varepsilon^{(m)} = \mathcal{A}_\varepsilon e(\mathbf{u}_\varepsilon) - \alpha^{(m)} p_\varepsilon^{(m)} \mathbb{I}_N$$

où $e(\cdot) = (e_{ij}(\cdot))_{1 \leq i,j \leq N}$ désigne le tenseur des déformations linéarisé, $\alpha^{(m)}$ le paramètre de Biot-Willis dans chaque phase (m) et \mathbb{I}_N la matrice identité de taille N . Soit $T > 0$ et $t \in [0, T]$ la variable temps. Nous allons étudier le comportement global du système : pour chaque phase $m = 1, 2$, trouver \mathbf{u}_ε , $p_\varepsilon^{(m)}$ tels que

$$-\operatorname{div} \sigma_\varepsilon^{(m)} = \mathbf{f} \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\varepsilon^{(m)}, \quad (0.15)$$

$$\partial_t (c_\varepsilon^{(m)} p_\varepsilon^{(m)} + \alpha_\varepsilon^{(m)} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) - \operatorname{div} (B_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)}) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\varepsilon^{(m)}, \quad (0.16)$$

$$[\mathbf{u}_\varepsilon]_{\Sigma_\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad [\sigma_\varepsilon^{(m)}]_{\Sigma_\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = \mathbf{0} \text{ sur } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon, \quad (0.17)$$

$$(B_\varepsilon^{(1)} \nabla p_\varepsilon^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = -\varepsilon h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) [p_\varepsilon^{(m)}]_{\Sigma_\varepsilon} \text{ sur } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon, \quad (0.18)$$

$$[B_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)}]_{\Sigma_\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = \mathbf{0} \text{ sur } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon, \quad (0.19)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{0} \text{ et } p_\varepsilon^{(1)} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (0.20)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, p_\varepsilon^{(m)}(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon^{(m)} \quad (0.21)$$

où $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ est la force de volume dans tout le matériau Ω , \mathbf{n}_ε représente la normale unitaire de Σ_ε dirigée vers l'extérieur des inclusions $\Omega_\varepsilon^{(2)}$, $[\cdot]_{\Sigma_\varepsilon}$ exprime le saut à travers Σ_ε et $h(y)$ désigne la perméabilité de Σ qu'on suppose définie, continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique et vérifiant

$$\exists C > 0, \quad h(y) \geq C > 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^N.$$

Introduisons les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= [H_0^1(\Omega)]^N, \quad \mathbf{L}_\varepsilon = L^2(\Omega_\varepsilon^{(1)}) \times L^2(\Omega_\varepsilon^{(2)}), \\ V_\varepsilon^{(1)} &= \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon^{(1)}); v|_\Gamma = 0\}, \quad V_\varepsilon^{(2)} = H^1(\Omega_\varepsilon^{(2)}), \quad \mathbf{V}_\varepsilon = V_\varepsilon^{(1)} \times V_\varepsilon^{(2)}. \end{aligned}$$

\mathbf{V}_ε étant muni de la norme

$$\|\mathbf{p}\|_{\mathbf{V}_\varepsilon}^2 = \|\nabla p^{(1)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{(1)})}^2 + \|\nabla p^{(2)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{(2)})}^2 + \varepsilon \|[\mathbf{p}]_{\Sigma_\varepsilon}\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}^2.$$

La formulation variationnelle de (0.15)-(0.21) est donnée comme suit : Trouver $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon) \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \times L^2(0, T; \mathbf{V}_\varepsilon)$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_\varepsilon^{(1)}, p_\varepsilon^{(2)})$ tel que

$$\partial_t (c_\varepsilon^{(m)} p_\varepsilon^{(m)} + \alpha_\varepsilon^{(m)} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) \in L^2(0, T; (V_\varepsilon^{(m)})^*), \quad (0.22)$$

$$\int_\Omega \mathcal{A}_\varepsilon e(\mathbf{u}_\varepsilon) e(\mathbf{v}) + \sum_m \int_{\Omega_\varepsilon^{(m)}} \alpha_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)} \mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{f} \mathbf{v} \text{ for all } v \in \mathbf{H}, \quad (0.23)$$

$$\sum_m \left(\left\langle (c_\varepsilon^{(m)} p_\varepsilon^{(m)} + \alpha_\varepsilon^{(m)} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)_t, q^{(m)} \right\rangle_{(V_\varepsilon^{(m)})^*, V_\varepsilon^{(m)}} + \int_{\Omega_\varepsilon^{(m)}} B_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)} \nabla q^{(m)} \right) \quad (0.24)$$

$$+\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} h_\varepsilon [\mathbf{p}_\varepsilon]_{\Sigma_\varepsilon} [\mathbf{q}]_{\Sigma_\varepsilon} = 0 \text{ for all } \mathbf{q} = (q^{(1)}, q^{(2)}) \in V_\varepsilon^{(1)} \times V_\varepsilon^{(2)},$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, p_\varepsilon^{(m)}(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon^{(m)} \quad (m = 1, 2). \quad (0.25)$$

On démontre alors qu'il existe une solution unique $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon) \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \times L^2(0, T; \mathbf{V}_\varepsilon)$

du système (0.22)-(0.25) vérifiant :

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_\varepsilon)} + \|\mathbf{p}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}_\varepsilon)} + \|\mathbf{p}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}_\varepsilon)} \leq C.$$

Voir [127].

En utilisant la technique de convergence à deux échelles on montre qu'il existe une sous-famille de $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon)$ toujours notée $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon)$ et il existe

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad p^{(m)} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

vérifiant le problème homogénéisé

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \nabla p^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \nabla p^{(2)} &= \mathbf{f} \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \\ \left(\widetilde{c}^{(1)} p^{(1)} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\beta}^{(1)} e(\mathbf{u})) \right)_t - \operatorname{div} \left[\widetilde{B}^{(1)} \nabla p^{(1)} \right] + \widetilde{h} (p^{(1)} - p^{(2)}) &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \\ \left(\widetilde{c}^{(2)} p^{(m)} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\beta}^{(2)} e(\mathbf{u})) \right)_t - \operatorname{div} \left[\widetilde{B}^{(2)} \nabla p^{(2)} \right] - \widetilde{h} (p^{(1)} - p^{(2)}) &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad p^{(m)} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma, \\ u(0, x) = 0, \quad p^{(m)}(0, x) = 0 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

où $\sigma, \boldsymbol{\alpha}^{(m)}, \boldsymbol{\beta}^{(m)}, \widetilde{c}^{(m)}, \widetilde{B}^{(m)}$ et \widetilde{h} sont donnés par (5.35)-(5.41). Nous avons montré que le modèle homogénéisé et anisotrope (ainsi) construit est plus général que celui présenté par Aifantis [4, 5] pour un milieu homogène et isotrope car il tient compte de la forte hétérogénéité des milieux composites poro-élastiques à l'échelle locale. Mieux encore, les paramètres de Biot -Willis ne sont plus scalaires mais matriciels (voir (5.37)-(5.38)). Un problème intéressant serait de regarder le comportement limite de $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon)$, toujours par des techniques d'homogénéisation, lorsque les inclusions poro-élastiques ont des perméabilités relativement très basses, par exemple $\varepsilon^2 B^{(2)}$ (voir J.L. Auriault [22]). C'est l'objectif du travail suivant.

0.5 Homogénéisation d'un modèle de double porosité en poro-élasticité

On étudie dans ce travail l'homogénéisation d'une famille de modèles microscopiques pour l'écoulement d'un fluide dans un matériau composite poro-élastique contenant des inclusions distribuées périodiquement de perméabilité faible comparée à celle de la roche matricielle et avec un contact rugueux au niveau de l'interface. Plus précisément, on considère Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^N de frontière notée Γ et on suppose toujours que Y s'écrit : $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Sigma$ où Y_1, Y_2 sont deux ouverts connexes de Y et $\Sigma = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$ est une surface de classe C^∞ . On note $\mathbf{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$ le vecteur normal unitaire de ∂Y_1 dirigé vers l'extérieur de Y_1 . On note χ_1 et χ_2 les fonctions caractéristiques de Y_1 et Y_2 respectivement, prolongées par Y -périodicité à \mathbb{R}^N . On note alors pour $x \in \mathbb{R}^N$, $\chi_i^\varepsilon(x) = \chi_i(x/\varepsilon)$ et on pose

$$\begin{aligned}\Omega_i^\varepsilon &= \{x \in \Omega : \chi_i^\varepsilon(x) = 1\}, \quad i = 1, 2 \\ \Sigma^\varepsilon &= \overline{\Omega_1^\varepsilon} \cap \overline{\Omega_2^\varepsilon}.\end{aligned}$$

On suppose que $\cup_{e \in \mathbb{Z}^N} (Y_1 + e)$ est régulier et connexe. Soit $T > 0$ et $t \in [0, T]$ et on note

$$\begin{aligned}Q &= (0, T) \times \Omega, \\ \Sigma_T &= (0, T) \times \Sigma, \\ \Sigma_T^\varepsilon &= (0, T) \times \Sigma^\varepsilon, \\ Q_i^\varepsilon &= (0, T) \times \Omega_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

On suppose que chaque phase $\Omega_1^\varepsilon, \Omega_2^\varepsilon$ est occupée par un matériau poro-élastique. Soit \mathbf{u}_i^ε le déplacement du milieu Ω_i^ε , $i = 1, 2$.

La famille de micro-modèles est donnée par

$$-\operatorname{div}\sigma_1^\varepsilon = \mathbf{f}_1 \quad \text{dans } Q_1^\varepsilon, \quad (0.26)$$

$$-\operatorname{div}\sigma_2^\varepsilon = \mathbf{f}_2 \quad \text{dans } Q_2^\varepsilon, \quad (0.27)$$

$$\partial_t(c_1^\varepsilon p_1^\varepsilon + \alpha_1^\varepsilon \operatorname{div}\mathbf{u}_1^\varepsilon) - \operatorname{div}(B_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } Q_1^\varepsilon, \quad (0.28)$$

$$\partial_t(c_2^\varepsilon p_2^\varepsilon + \alpha_2^\varepsilon \operatorname{div}\mathbf{u}_2^\varepsilon) - \operatorname{div}(B_2^\varepsilon \nabla p_2^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } Q_2^\varepsilon, \quad (0.29)$$

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon = \mathbf{u}_2^\varepsilon, \quad \sigma_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon = \sigma_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon \quad \text{sur } \Sigma_T^\varepsilon, \quad (0.30)$$

$$(B_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon = (B_2^\varepsilon \nabla p_2^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon, \quad (B_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon = -g^\varepsilon (p_1^\varepsilon - p_2^\varepsilon) \quad \text{sur } \Sigma_T^\varepsilon, \quad (0.31)$$

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad p_1^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \quad (0.32)$$

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad p_1^\varepsilon(0, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon, \quad (0.33)$$

$$\mathbf{u}_2^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad p_2^\varepsilon(0, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon \quad (0.34)$$

où σ_i^ε est le tenseur symétrique des contraintes :

$$\sigma_i^\varepsilon = \mathbb{A}_i^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}_i^\varepsilon) - \alpha_i^\varepsilon p_i^\varepsilon \mathbb{I}_N, \quad \text{dans } \Omega_i^\varepsilon \quad (0.35)$$

et $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega)^N$ est une force volumique dans le matériau correspondant, $i = 1, 2$. Dans (0.35), \mathbb{A}_1^ε et \mathbb{A}_2^ε représentent les tenseurs d'élasticité des matériaux occupant Ω_1^ε et Ω_2^ε respectivement, $\mathbf{e}(\cdot)$ est le tenseur des déformations linéarisé, p_i^ε est la pression et α_i^ε est le coefficient de Biot-Willis du matériau poro-élastique Ω_i^ε . Soit c_1^ε (resp. c_2^ε) et B_1^ε (resp. B_2^ε) la porosité et la perméabilité du milieu Ω_1^ε (resp. Ω_2^ε). Dans (0.30) et (0.31), \mathbf{n}^ε désigne le vecteur normal unitaire de Σ^ε dirigé vers l'extérieur Ω_1^ε et g^ε est la perméabilité hydraulique sur la couche limite Σ^ε . Maintenant on se consacre aux hypothèses sur les données physiques du problème considéré. On se donne pour $i = 1, 2$

(H1) une application tensorielle d'ordre 4, $\mathbb{A}_i(y)$ définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et $\Xi \in \mathcal{M}_{\text{sym}}^{N \times N}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{A}_i^\varepsilon(x) = \mathbb{A}_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega, \quad (\mathbb{A}_i(y)\Xi : \Xi) \geq C(\Xi : \Xi);$$

(H2) une application scalaire $c_i(y)$ définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$c_i^\varepsilon(x) = c_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega \quad \text{et pour tout } y \in \mathbb{R}^N \quad c_i(y) \geq C > 0;$$

(H3) une application matricielle $D_i(y)$ définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$D_1^\varepsilon(x) = D_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad D_2^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 B_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega$$

$$\text{et } \exists C > 0 \quad \forall y, \xi \in \mathbb{R}^N \quad \langle D_i(y) \xi, \xi \rangle \geq C |\xi|^2;$$

(H4) une application scalaire $g(y)$ définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$g^\varepsilon(x) = \varepsilon g(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \inf_{y \in \mathbb{R}^N} g(y) \geq C > 0.$$

(H5) Les coefficients de Biot-Willis sont définis comme suit :

$$\alpha_1^\varepsilon(x) = \alpha_1 \text{ si } x \in \Omega_1^\varepsilon, \quad \alpha_2^\varepsilon(x) = \varepsilon \alpha_2 \quad \text{si } x \in \Omega_2^\varepsilon \tag{0.36}$$

où α_i est une constante strictement positive.

On introduit les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H_0^1(\Omega)^N, \quad L^\varepsilon = L^2(\Omega_1^\varepsilon) \times L^2(\Omega_2^\varepsilon), \quad \mathcal{E}_1^\varepsilon = \{q \in H^1(\Omega_1^\varepsilon); q|_\Sigma = 0\}, \\ \mathcal{E}_2^\varepsilon &= H^1(\Omega_2^\varepsilon), \quad \mathcal{E}^\varepsilon = \mathcal{E}_1^\varepsilon \times \mathcal{E}_2^\varepsilon. \end{aligned}$$

L'espace \mathbf{H} est muni de la norme usuelle $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} = \|e(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}$ et l'espace \mathcal{E}^ε de la norme :

$$\|(q_1, q_2)\|_{\mathcal{E}^\varepsilon}^2 = \|\nabla q_1\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla q_2\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)}^2 + \varepsilon \|q_1 - q_2\|_{L^2(\Sigma^\varepsilon)}^2.$$

Pour $(t, x) \in Q$, notons

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) = \chi_1^\varepsilon(x)\mathbf{u}_1^\varepsilon(t, x) + \chi_2^\varepsilon(x)\mathbf{u}_2^\varepsilon(t, x),$$

$$\mathbb{A}^\varepsilon(x) = \chi_1^\varepsilon(x)\mathbb{A}_1^\varepsilon(x) + \chi_2^\varepsilon(x)\mathbb{A}_2^\varepsilon(x),$$

$$\mathbf{f}^\varepsilon(x) = \chi_1^\varepsilon(x)\mathbf{f}_1(x) + \chi_2^\varepsilon(x)\mathbf{f}_2(x).$$

Dans toute la suite, on adopte la notation suivante : si \mathcal{F} est un espace de Banach alors $L_T^p(\mathcal{F})$ désigne l'espace $L^p(0, T; \mathcal{F})$. La formulation faible de (0.26)-(0.34) est la suivante : Trouver $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in L_T^\infty(\mathbf{H}) \times L_T^2(\mathcal{E}^\varepsilon)$ tel que $p^\varepsilon = (p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_T^\infty(L^\varepsilon)$,

$$\partial_t(c_1^\varepsilon p_1^\varepsilon + \alpha_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon) \in L_T^2(\mathcal{E}_1^{\varepsilon*}), \quad \partial_t(c_2^\varepsilon p_2^\varepsilon + \varepsilon \alpha_2 \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon) \in L_T^2(\mathcal{E}_2^{\varepsilon*})$$

et pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, $(q_1, q_2) \in \mathcal{E}^\varepsilon$, on a

$$\int_{\Omega} \mathbb{A}^\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \alpha_1 \nabla p_1^\varepsilon \mathbf{v} dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \alpha_2 \nabla p_2^\varepsilon \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}^\varepsilon \mathbf{v} dx, \quad (0.37)$$

$$\langle \partial_t(c_1^\varepsilon p_1^\varepsilon + \alpha_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon), q_1 \rangle_{\mathcal{E}_1^{\varepsilon*}, \mathcal{E}_1^\varepsilon} + \quad (0.38)$$

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} D_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon \nabla q_1 dx + \langle \partial_t(c_2^\varepsilon p_2^\varepsilon + \varepsilon \alpha_2 \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon), q_2 \rangle_{\mathcal{E}_2^{\varepsilon*}, \mathcal{E}_2^\varepsilon}$$

$$+ \int_{\Omega_2^\varepsilon} D_2^\varepsilon \nabla p_2^\varepsilon \nabla q_2 dx + \int_{\Sigma^\varepsilon} g^\varepsilon (p_1^\varepsilon - p_2^\varepsilon) (q_1 - q_2) ds^\varepsilon(x) = 0,$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad \chi_1(\cdot) p_1^\varepsilon(0, \cdot) + \chi_2(\cdot) p_2^\varepsilon(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (0.39)$$

Supposons (H1)–(H5) et que $\mathbf{f}^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Il existe alors un couple unique $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in L_T^\infty(\mathbf{H}) \times L_T^2(\mathcal{E}^\varepsilon)$ solution de la formulation faible (0.37)-(0.39) tel que

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L_T^\infty(\mathbf{H})} + \|p^\varepsilon\|_{L_T^2(\mathcal{E}^\varepsilon)} + \|p^\varepsilon\|_{L_T^\infty(L^\varepsilon)} \leq C. \quad (0.40)$$

Grâce aux estimations a priori (0.40) uniformes par rapport à ε , on est donc conduit à faire un passage à la limite lorsque ε tend vers 0 de la famille $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ et déterminer le problème limite. Grâce à la convergence à deux échelles on montre qu'il existe une sous-famille de $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ notée encore $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ et il existe $(\mathbf{u}, p) \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ tel

que

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faiblement,}$$

$$p_1^\varepsilon \rightharpoonup p_1 \text{ dans } L^2(Q) \text{ faiblement,}$$

$$p_2^\varepsilon \rightharpoonup \int_{Y_2} p_2(y) dy \text{ dans } L^2(Q) \text{ faiblement,}$$

avec $p = (p_1, \int_{Y_2} p_2(y) dy)$ et

$$p_2(t, x, y) = \int_0^t p_1(\tau, x) \partial_t \zeta(t - \tau, y) d\tau, \quad (t, x, y) \in Q \times Y_2.$$

Le couple (\mathbf{u}, p_1) est solution du problème homogénéisé :

$$-\operatorname{div} \tilde{\sigma}(\mathbf{u}) + B \nabla p_1 + \int_0^t \theta(t, \tau) p_1(\tau, x) d\tau = \mathbf{f} \text{ dans } Q,$$

$$\partial_t (\tilde{c} p_1 + \Lambda : \mathbf{e}(\mathbf{u})) - \operatorname{div}(\tilde{D} \nabla p_1) + \tilde{g} p_1 - \int_0^t \eta(t, \tau) p_1(\tau, x) d\tau = 0 \text{ dans } Q,$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \tilde{D} \nabla p_1 \cdot \nu = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial \Omega,$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, p_1(0, x) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où $\tilde{\sigma}$, B , θ , \mathbf{f} , \tilde{c} , Λ , \tilde{B} , \tilde{g} et η sont donnés dans (6.18)-(6.27).

On constate alors que ce modèle homogénéisé est nouveau dans la littérature consacrée à l'étude des modèles mathématiques de la poro-élasticité et plus précisément les modèles de consolidation de Biot. Il peut être considéré comme un nouveau modèle d'écoulement de fluide à travers les solides poreux déformables.

La thèse est constituée de 6 chapitres :

Le chapitre 1 est une introduction générale à la théorie de l'homogénéisation en exposant les techniques classiques : la méthode des échelles multiples [35, 123] et la méthode de l'énergie de L. Tartar [129].

Le chapitre 2 est une introduction à la technique de la convergence à deux échelles [11, 112]. On donnera les principaux résultats de compacité séquentielle qui nous permettront

par la suite de déterminer les problèmes homogénéisés des différents micro-modèles étudiés dans cette thèse.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude macroscopique d'un modèle de transfert de chaleur dans un tissu biologique constitué de deux systèmes interagissants : tissus cellulaires et régions sanguines. Le modèle homogénéisé contient un effet mémoire et peut être considéré comme un nouveau modèle pour la diffusion de la température dans les tissus biologiques.

Au chapitre 4, on étudie le comportement macroscopique de l'écoulement d'un fluide stationnaire dans un milieu hétérogène, ε -périodique constitué de deux phases qui s'interagissent entre elles : fissures et blocs, avec des perméabilités ayant un ordre de magnitude différent et avec la présence d'une barrière à l'interface. On montre alors que le modèle macroscopique est décrit par une seule équation décrivant l'écoulement monophasique d'un fluide dans un milieu homogène.

Au chapitre 5, nous avons construit un modèle homogénéisé du type Barenblatt-Biot pour l'écoulement de fluides dans des milieux poro-élastiques périodiques, généralisant le modèle présenté par Aifantis principalement en ingénierie pétrolière.

Le Chapitre 6 est consacré à l'homogénéisation d'écoulement d'un fluide peu compressible dans un matériau composite poro-élastique contenant des inclusions distribuées périodiquement, avec un contraste de perméabilités et avec un contact imparfait au niveau de l'interface séparant ces deux milieux. On montre que le système homogénéisé est un modèle plus général que celui proposé par Aifantis avec un terme mémoire supplémentaire. Il constitue un nouveau modèle qui ne figure pas encore dans la littérature consacrée aux modèles de poro-élasticité.

Nous donnerons également une conclusion à ce travail et quelques perspectives futures concernant d'autres applications de la technique de la convergence à deux échelles ou d'autres généralisations des modèles étudiés dans cette thèse.

Enfin, un chapitre Annexe est donné à la fin de cette thèse où l'on rappelle quelques notions et résultats de convergences faible et faible-*, sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev ainsi que des Théorèmes d'analyse fonctionnelle.

Chapitre 1

Une introduction à l'homogénéisation périodique

Ce chapitre est essentiellement consacré à une introduction de la méthode des échelles multiples et de la technique de l'énergie de L. Tartar [129]. Pour plus de détails, nous renvoyons aux références standards suivantes : G. Allaire [12], N. Bakhvalov, Panasenko [31], A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou [35], G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, A. S. Shamaev [53], D. Cioranescu, P. Donato [56], A. Defranceschi [69], J.-L. Lions [101], V. A. Marchenko, E. Y. Khruslov [104], E.-L. Persson, L. Persson, N. Svanstedt, J. Wyller [118], E. Sanchez-Palencia [123] et L. Tartar [129]...).

1.1 Introduction

L'étude des milieux composites a commencé il y a près de deux siècles. Les principaux développements historiques sont résumés dans les travaux de R. Landauer [97], K. Z. Markov [105] et K. Lichtenecker [100]. En revanche, le terme homogénéisation est apparu dans la discipline mathématique bien plus tard, plus précisément, en 1974 par I. Babuska [27, 28, 29] dans l'ingénierie nucléaire et un de ses problèmes concernait le calcul des températures et des contraintes dans le coeur d'un réacteur nucléaire.

En réalité, les composites sont présents partout, que ce soit des matériaux fabriqués ou se trouvant à l'état naturel. Les métaux tels l'acier, le laiton, le bronze sont des alliages.

On peut s'en rendre compte par exemple lorsque l'on casse une tige de métal, le caractère poly-cristallin est alors particulièrement visible à l'oeil nu à la surface de la fracture. Les martensites, du nom du scientifique allemand Martens, sont des composites ayant une structure laminaire contenant des couches alternées de deux métaux différents. Ce sont des exemples de matériaux appelés communément alliage de mémoire de forme. La céramique est un composite. Le propergol solide est un matériau composé de particules d'aluminium incrustés dans une matrice oxydante. L'étude des matériaux composites s'avère donc importante surtout dans la fabrication de matériaux tels les alliages métalliques, les matériaux intelligents comme les fibres de verre, les fibres de carbone léger spécifiquement utilisées dans l'industrie aérospatiale, automobiles, et même dans la fabrication des équipements sportifs, en ingénierie pétrolière, en géologie (tremblements de terre entre autres).

Les roches sont également considérées comme des corps composites [37]. A l'état naturel, les roches telles le granite sont un agrégat de cristaux. D'autres roches telles que le grès sont un amas de grains. Egalement, les météorites sont de nature composite où l'on voit clairement à la surface de ceux-ci les différents composés métalliques cristallins. Dans les milieux poreux, les roches sont des milieux solides contenant des pores où interagissent solides et liquides. En effet, les pores sont remplies d'eau (de mer, de pluie, ...) ou encore de gaz ou de pétrole. Le tissu osseux ou plus généralement l'os est un matériau composite. Généralement, l'os est considéré comme un matériau poro-visco-élastique constitué de trabécules : la partie solide supposée visco-élastique et les pores sont remplies par du sang interstitiel [79].

Egalement, les suspensions colloïdales, les émulsions, les mousses, les boues et les argiles sont des exemples de matières composites. Les nuages, les brouillards et la pluie sont composés d'air et d'eau. Les nuages de haute altitude sont un mélange d'air et de cristaux de glace. Nous savons très bien aujourd'hui que la poussière volcanique suspendue en haute altitude après une éruption influe significativement sur la température de la terre sans oublier bien évidemment les perturbations sur les plans de vol des compagnies aériennes. Cette poussière est en fait un corps composite constitué de plusieurs composés minéralogiques. L'air que nous respirons est aussi hétérogène (oxygène, azote,...) et

présente des fluctuations de densité. La mer de glace est composée de glace et de saumures, et modéliser ses propriétés est important pour la prédiction du climat. La laine et le coton sont aussi des milieux composés de fibres et d'air.

Les matériaux composites ont la particularité de combiner les attributs de chaque constituant. Ainsi, par exemple, si l'on se donne deux matériaux isotropes : un métal fortement conducteur d'électricité et un plastique particulièrement isolant et en les superposant en des couches alternées de façon à obtenir un matériau stratifié fortement isotrope ayant ainsi des propriétés conductrices du métal dans les directions parallèles aux couches et les propriétés d'isolation du plastique. Le béton, un mélange de sables et de ciment, n'est pas cher et relativement léger mais très résilient. En revanche, l'acier est dur mais cher et lourd. En versant le béton sur des barres d'acier précontraintes, on obtient ce qu'on appelle le béton armé qui est relativement peu cher, léger et dur. Le bois est aussi un exemple de matériau dur dans la direction de ses fibres mais malheureusement les fibres se démontent facilement. En alternant des couches de bois superposées dans les directions perpendiculairement opposées des fibres, on obtient ce qu'on appelle un contreplaqué devenant ainsi dur dans toutes les directions. Pour plus de détails et d'exemples sur la théorie des matériaux composites, nous renvoyons au livre de F. L. Matthews, R. D. Rawlings [106] et R. Christensen [54].

Fondamentalement, les composites sont des corps composés possédant des hétérogénéités sur une échelle bien plus grande que l'échelle atomique (ou moléculaire) permettant ainsi de les modéliser comme un milieu continu et de pouvoir par la suite utiliser les équations classiques de la physique ou de la mécanique des milieux continus. En revanche, les composites sont essentiellement homogènes (statistiquement) à l'échelle macroscopique (à l'oeil nu) ou au moins à une échelle intermédiaire (mésoscopique).

Comme signalé plus haut, l'homogénéisation est donc l'étude mathématique des corps hétérogènes ou composites. Il y a près de 40 ans, le terme "homogénéisation" est communément utilisé dans plusieurs domaines des sciences et de la technologie. D'un point de vue mathématique, la théorie de l'homogénéisation est l'étude de familles de fonctionnelles ou d'opérateurs dépendant d'un petit paramètre, fréquemment noté ε . La signification de ce paramètre dépend du problème considéré. Par exemple, il peut caractériser la

micro-structure, comme étant le rapport entre la taille de la cellule représentative de la micro-structure à celle du domaine tel qu'il est décrit à l'échelle macroscopique. Ainsi, ε peut représenter la taille moyenne des pores dans un milieu poreux ou celle des grains dans un milieu granulé.

La théorie générale des opérateurs ou fonctionnelles dépendant d'un petit paramètre tendant vers 0 possède un champ très large d'applications et ne se restreint pas qu'aux problèmes d'homogénéisation. On pourra citer par exemple la modélisation asymptotique des structures minces (plaque et coques entre autres). Voir les travaux de E. Acerbi & *al.* [1, 2], de K. Lemrabet [99], de P. Destuynder [71, 72] de H. Ledret [98] et de G. Panasenko [116].

L'homogénéisation qu'on appelle aussi upscaling ou passage micro-macro est la procédure qui consiste à construire le modèle homogène d'un milieu fortement ou finement hétérogène. Cela revient à dire qu'il existe une échelle très fine où l'on aperçoit clairement les détails des hétérogénéités; C'est l'échelle microscopique. En revanche, si on regarde le milieu à l'échelle macroscopique ces hétérogénéités ne sont pas discernables et on dit que le milieu est homogène. Le processus d'homogénéisation permet donc d'éviter des calculs numériques ou analytiques inutiles si l'on tient compte des hétérogénéités telles que fibres dans un composite, perforations dans un milieu poreux, micro-fissures dans un milieu fracturé. Il existe donc deux types d'échelles : locale et globale. Il est clair que si le milieu est sollicité à l'échelle globale la réponse sera affectée au niveau de l'échelle locale. On conviendra de séparer ces deux échelles en introduisant un petit paramètre souvent dans la littérature consacrée aux problèmes d'homogénéisation par ε et qui est le rapport de la taille moyenne des hétérogénéités à celle du milieu ambiant.

Etablir le procédé d'homogénéisation revient donc à trouver lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ le problème limite du micro-modèle considéré et dans une topologie à définir. En pratique, la répartition des différentes phases d'un milieu composite est plus ou moins inconnue, voire même dans certains cas aléatoire. Tout particulièrement, les milieux hétérogènes à l'état naturel présentent en général des micro-structures réparties aléatoirement. Toutefois, dans beaucoup de cas, il semble raisonnable de considérer des structures ayant des répartitions périodiques puisque certains matériaux composites fabriqués industriellement présentent

des micro-structures périodiques, voir [61, 50, 83, 85, 89, 121, 139],...

Dans ce travail, nous n'étudierons que l'homogénéisation dans des milieux présentant une structure périodique. Cette hypothèse, bien que restrictive, est largement utilisée et les résultats numériques corroborent les données expérimentales, voir par exemple Begis *É* *al.* [34]. Aussi, elle offre l'avantage de donner un comportement asymptotique moyennisé de certains phénomènes physiques dans des structures complexes ou même parfois justifier certaines lois de comportement expérimentales. Ainsi et à titre indicatif, nous citerons la justification de la loi expérimentale de Darcy [64], reliant la vitesse d'un fluide dans un milieu poreux au gradient de pression, obtenue comme problème limite de l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible dans un milieu perforé périodiquement, voir L. Tartar [131]. Les équations phénoménologiques de M. Biot en poro-élasticité linéaire [39, 40] sont obtenues par la technique de développement asymptotique multi-échelles où le micro-modèle considéré est un milieu élastique perforé par des trous répartis périodiquement à travers lesquels circule un fluide visqueux et incompressible, voir par exemple J.-L. Auriault et E. Sanchez-Palencia [25] et R. Burridge, J. B. Keller [48]. Enfin, on citera également le modèle d'Aifantis [4] (ou celui de Barenblatt-Biot donné par J. Berryman [37, 38]) dans le cas de milieux poro-élastiques à double porosité et qui est justifié par la technique de convergence à deux échelles, *Cf.* [7].

Sous cette hypothèse de périodicité, le modèle mathématique consiste en des équations différentielles où les coefficients sont fortement oscillants décrivant la structure spatiale fortement hétérogène du matériau à l'échelle microscopique. Par le procédé de moyennisation, les équations seront remplacées par d'autres numériquement faciles à traiter et ses coefficients appelés effectifs sont les propriétés homogénéisées du matériau. Ainsi, un matériau fortement hétérogène est donc approché par un matériau homogène. C'est donc cela le principe de la méthode d'homogénéisation.

Par définition, un milieu à structure périodique est un milieu constitué d'une répartition périodique d'éléments homothétiques à une cellule, appelée communément cellule de base et qu'on notera dans toute la suite Y . De tels milieux sont associés aux matériaux composites qui sont constitués de deux ou plusieurs composantes périodiquement répartis où la période est suffisamment grande par rapport à la taille caractéristique des

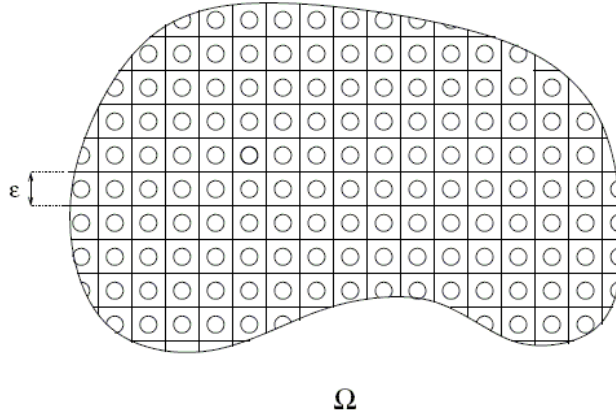


Figure 1-1: Un domaine composite

molécules mais suffisamment petite par rapport à celle du milieu ambiant afin de pouvoir procéder à une analyse asymptotique. En outre, on prend généralement la dimension spatiale caractéristique du milieu macroscopique égale à $L = O(1)$ de sorte que celle de la micro-structure est $O(\varepsilon)$ où $\varepsilon = \frac{\ell}{L}$ avec ℓ la dimension spatiale caractéristique de la cellule microscopique représentative. En général si Ω désigne le domaine macroscopique et \mathcal{Y} la micro-structure représentative, alors on prend à titre d'exemple $L = \text{diam}(\Omega)$ et $\ell = \text{diam}(\mathcal{Y})$. Voir figure 1-1.

En supposant que ε est assez petit, le procédé d'homogénéisation consiste donc en un passage à la limite lorsque ε tend vers 0 dans le modèle initial fortement hétérogène pour obtenir un modèle final homogène. Du point de vue mathématique on a une famille de problèmes aux limites

$$\begin{cases} A^\varepsilon u^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ + \text{ des conditions aux limites } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

posé dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) où $(A^\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille d'opérateurs différentiels à coefficients oscillants et périodiques (de période ε), f est un terme source donné. En supposant que la famille $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans une topologie adéquate vers une limite u lorsque ε tend vers 0, on construit par une technique d'homogénéisation le problème

limite :

$$\begin{cases} Au = f \text{ dans } \Omega \\ + \text{ des conditions aux limites sur } \Gamma. \end{cases}$$

appelé *problème homogénéisé*.

Afin de comprendre la nécessité d'homogénéiser un milieu composite nous allons dans le paragraphe suivant étudier en dimension 1 la diffusion de la chaleur dans une barre métallique composite constituée deux métaux de conductivité différente et répartis ε -périodiquement. Nous verrons que plus ε est petit, plus il y a présence de phénomènes fortement oscillants en sus du très grand nombre d'équations à résoudre.

1.2 Problèmes de diffusion dans une barre composite

Pour illustrer les difficultés qu'on rencontre souvent dans l'analyse mathématique sur les milieux composites et pour motiver l'utilisation des techniques d'homogénéisation sur ce type de milieux, nous allons étudier deux problèmes modèles de diffusion en dimension 1.

On considère une barre composite de longueur 1 (pour simplifier) mais de largeur et d'épaisseur négligeables de sorte qu'elle sera assimilée à un matériau hétérogène occupant par exemple l'intervalle ouvert $(0, 1)$. La barre étant composée de deux matériaux homogènes répartis périodiquement (voir figure 1-2) et décrite comme suit :

Soit m le nombre de cellules composant la barre qu'on supposera supérieur à ou égale à 2. Chaque cellule est représentée par l'intervalle ouvert (x_i, x_{i+1}) où $x_i = \frac{i}{m}$ avec $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Dans chacune de ces cellules, sont disposés deux matériaux homogènes et isotropes de coefficient de diffusivité donné respectivement par μ_1 et μ_2 supposés non nuls, indépendants de $i = 0, 1, \dots, m-1$ et avec

$$\mu_1 \neq \mu_2. \tag{1.1}$$

Ces matériaux sont répartis de façon alternée de sorte que le coefficient de diffusion

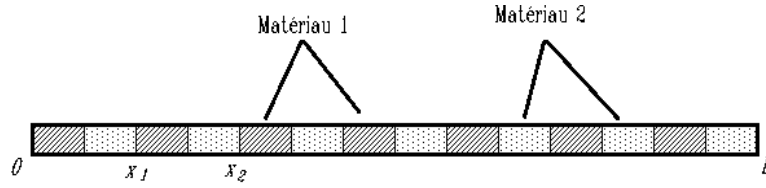


Figure 1-2: Une barre hétérogène constituée de deux matériaux homogènes et isotropes répartis alternativement.

de toute la barre noté μ_m est donné par :

$$\text{si } x \in (x_i, x_{i+1}), \text{ alors } \mu_m(x) = \begin{cases} \mu_1 \text{ si } x \in J_i := (x_i, x'_i), \\ \mu_2 \text{ si } x \in K_i := (x'_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

où $x'_i = \frac{2i+1}{2m}$ est le milieu de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) , $0 \leq i \leq m-1$.

Ainsi le matériau 1 est représenté (géométriquement) par $\cup_{i=0}^{m-1} J_i$ alors que le matériau 2 occupe l'espace $\cup_{i=0}^{m-1} K_i$. Par suite la barre est constituée de deux matériaux différents (puisque ayant deux coefficients de conductivité différents, voir (1.1)). De plus, ces deux matériaux sont répartis périodiquement (voir figure 1-2) où la taille de la période, qu'on notera ε (indépendante de i), est la longueur de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) , $0 \leq i \leq m-1$. C'est à dire

$$\varepsilon := x_{i+1} - x_i = \frac{1}{m}. \quad (1.2)$$

Nous considérons deux problèmes de diffusion de la température de la barre soumise à une source de chaleur supposée constante et égale en premier lieu à 0 et ensuite 1.

1.2.1 Premier exemple

Nous étudions d'abord le modèle de diffusion stationnaire où la source de chaleur étant supposée nulle alors qu' à l'extrémité $x = 0$ de la barre la température est égale à 0 et à l'autre extrémité : $x = 1$ la température est aussi supposée constante mais égale à 1 par

exemple. Donc le modèle considéré est

$$-\frac{d}{dx} \left(\mu_m \frac{du_m}{dx} \right) = 0 \text{ dans } (0, 1), \quad (1.3)$$

$$u_m(0) = 0, \quad u_m(1) = 1. \quad (1.4)$$

A noter que l'équation (1.3) est considérée au sens des distributions puisque μ_m est une fonction régulière par morceaux. Ce qui conduit à une reformulation du problème (1.15)-(1.16) en un problème de transmission :

$$-\frac{d^2 u_m^{(1)}}{dx^2} = 0 \text{ dans } J_i, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad (1.5)$$

$$-\frac{d^2 u_m^{(2)}}{dx^2} = 0 \text{ dans } K_i, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad (1.6)$$

$$\mu_1 \frac{du_m^{(1)}}{dx}(x) = \mu_2 \frac{du_m^{(2)}}{dx}(x), \quad x = x'_i, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad (1.7)$$

$$\mu_1 \frac{du_m^{(1)}}{dx}(x) = \mu_2 \frac{du_m^{(2)}}{dx}(x), \quad x = x_i, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (1.8)$$

$$u_m^{(1)}(x) = u_m^{(2)}(x), \quad x = x'_i, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad (1.9)$$

$$u_m^{(1)}(x) = u_m^{(2)}(x), \quad x = x_i, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (1.10)$$

$$u_m^{(1)}(0) = 0, \quad u_m^{(2)}(1) = 1 \quad (1.11)$$

où $u_m^{(1)}$ (resp. $u_m^{(2)}$) désigne la restriction de u_m à $\cup_i J_i$ (resp. $\cup K_i$).

La résolution du système (1.5)-(1.11) conduit à la solution suivante :

$$u_m(x) = \begin{cases} u_m^{(1)}(x) = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(x - \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \frac{i}{2m} \right) & \text{si } x \in J_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \\ u_m^{(2)}(x) = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \left(x - \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \frac{i+1}{2m} \right) & \text{si } x \in K_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

On notera au passage que u_m est continue sur $[0, 1]$. Cependant u_m n'est pas dérivable aux points x_i et x'_i et ceci à cause des conditions (1.7) et (1.8). Voir la Remarque 1.1.

Prenons maintenant et à titre d'exemple $\mu_1 = \frac{1}{2}$ et $\mu_2 = \frac{1}{4}$. On a alors

$$u_m(x) = \begin{cases} u_m^{(1)}(x) = \frac{2}{3} \left(x + \frac{i}{2m}\right) & \text{si } x \in J_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \\ u_m^{(2)}(x) = \frac{4}{3} \left(x - \frac{i+1}{4m}\right) & \text{si } x \in K_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

Notons μ^* la moyenne harmonique de μ_1 et μ_2 . C'est à dire

$$\mu^* = \frac{2}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} = \frac{1}{3}. \quad (1.12)$$

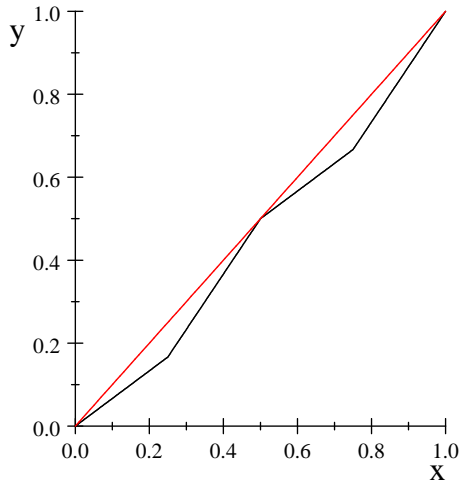
Soit u^{hom} la solution exacte du problème homogénéisé (voir Section 1.4.1) :

$$-\frac{d}{dx} \left(\mu^* \frac{du^{\text{hom}}}{dx} \right) = 0 \text{ dans } (0, 1), \quad (1.13)$$

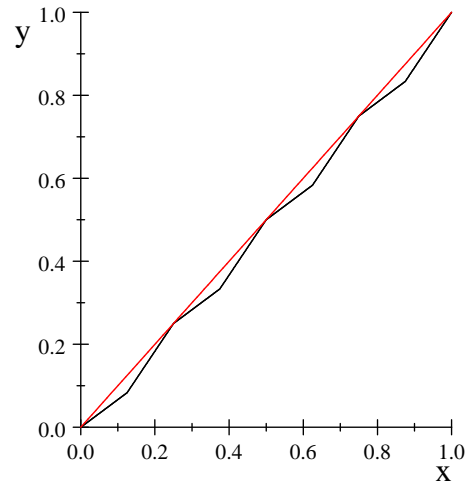
$$u^{\text{hom}}(0) = 0, \quad u^{\text{hom}}(1) = 1 \quad (1.14)$$

On vérifie sans peine que $u^{\text{hom}}(x) = x$, $x \in [0, 1]$. A noter que $u^{\text{hom}} \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$ et donc la solution du problème homogénéisé (1.13)-(1.14) est plus régulière que le modèle microscopique (1.3)-(1.4) (voir les Remarques 1.1, 1.2 et 1.9 plus loin).

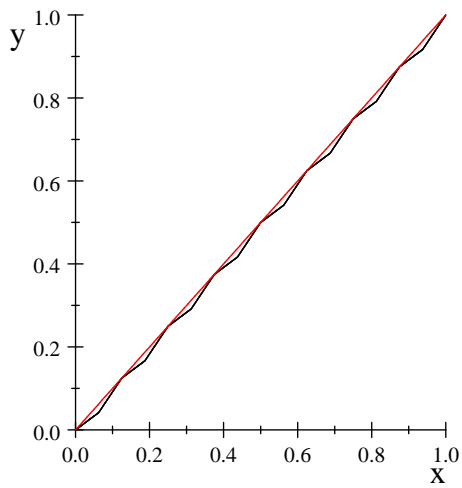
A titre illustratif nous allons tracer la courbe u^{hom} ainsi que les courbes de u_m pour les valeurs de $m = 2, 4, 8$ et 16, voir les figures correspondantes ci-dessous.



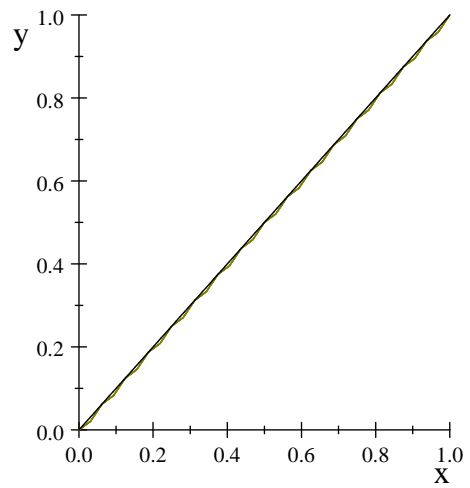
Courbe de u_2



Courbe de u_4 .

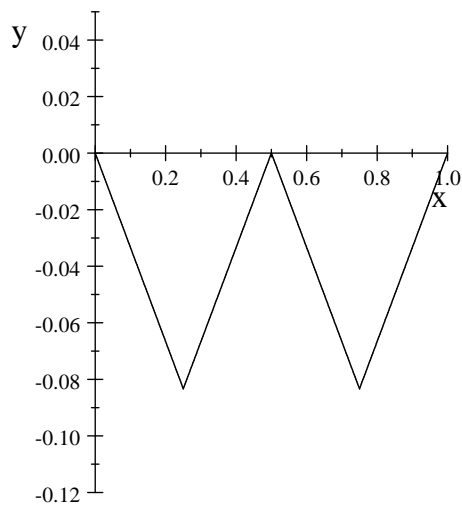


Courbe de u_8 .

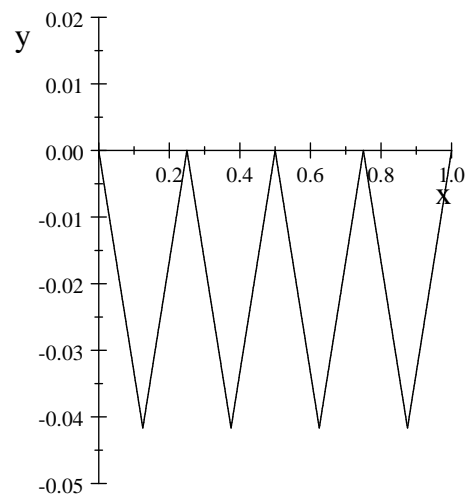


courbe de u_{16} .

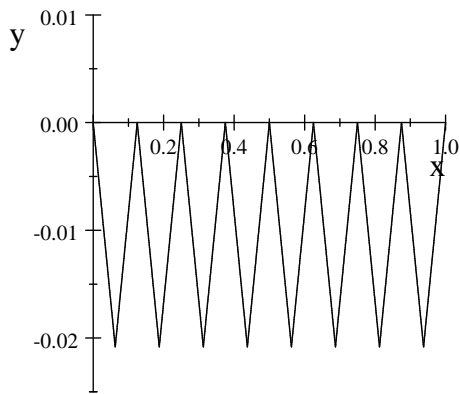
Nous allons maintenant tracer les courbes de la différence $u_m - u^{\text{hom}}$ pour les différentes valeurs de $m = 2, 4, 8$ et 16 (voir les 4 figures ci-après).



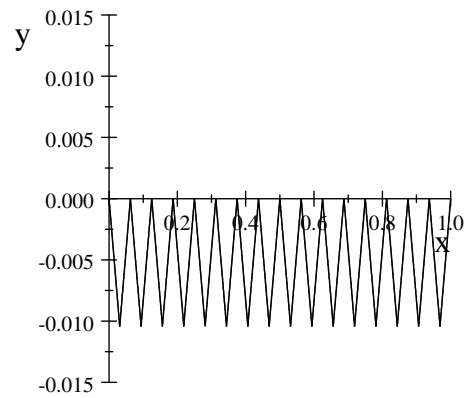
Courbe de $u_2 - u^{\text{hom}}$.



Courbe de $u_4 - u^{\text{hom}}$.



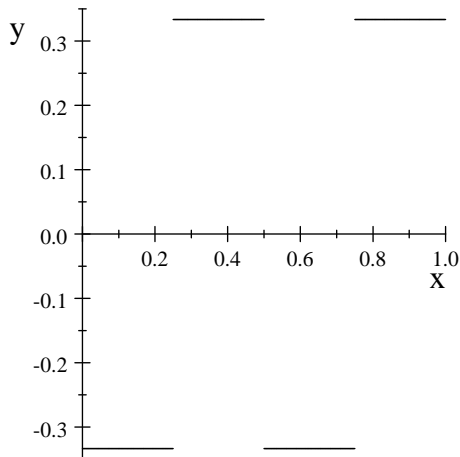
Courbe de $u_8 - u^{\text{hom}}$.



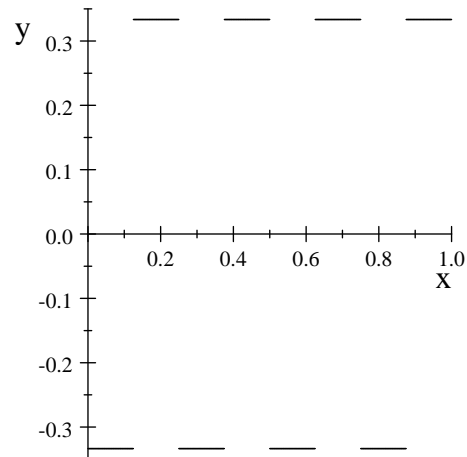
Courbe de $u_{16} - u^{\text{hom}}$.

Nous constatons à travers ces graphes que la différence $u_m - u^{\text{hom}}$ est une fonction périodique et oscillante. De plus on remarque que plus m augmente plus u_m se rapproche (converge simplement ou fortement) vers u^{hom} . On observe également que $u_m - u^{\text{hom}} = O(m^{-1})$ pour ces différentes valeurs de m .

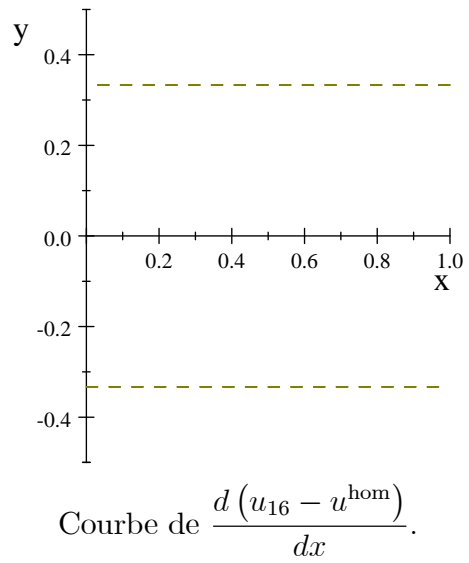
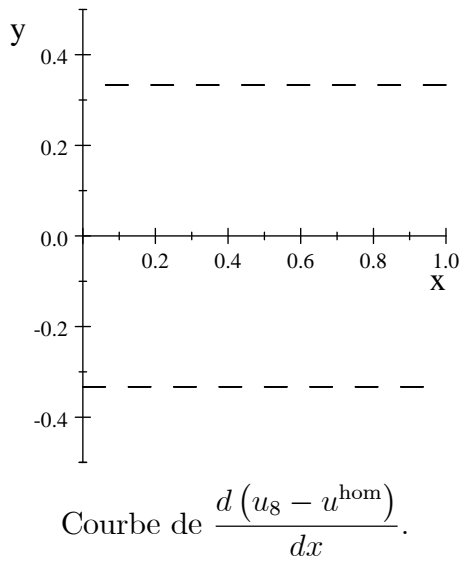
Nous allons voir ensuite le comportement de $\frac{d(u_m - u^{\text{hom}})}{dx}$ pour $m = 2, 4, 8$ et 16 , voir les figures ci-après.



Courbe de $\frac{d(u_2 - u^{\text{hom}})}{dx}$.



Courbe de $\frac{d(u_4 - u^{\text{hom}})}{dx}$.



Nous observons qu'à travers ces quatre courbes la différence des dérivées premières entre u_m et u^{hom} sont des fonctions constantes par morceaux et surtout périodiques. Nous constatons que ces courbes représentatives des fonctions $\frac{d}{dx}(u_m - u^{\text{hom}})$ sont oscillantes. Nous remarquons également que l'ordre de $|\frac{d}{dx}(u_m - u^{\text{hom}})| = \frac{1}{3}$ et donc indépendant de m . Nous verrons plus loin que dans ce type de problème, $\frac{d}{dx}(u_m - u^{\text{hom}}) \approx \frac{d}{dy}u_1$ où u_1 est une certaine fonction périodique appelée correcteur et $y = mx$ appelée variable microscopique. Nous verrons donc $\frac{d}{dx}(u_m - u^{\text{hom}})$ ne converge pas (fortement) vers 0.

Remarque 1.1 Grâce au Lemme de Lax-Milgram (voir annexe A.11.), on peut montrer que le problème (1.3)-(1.4) admet une solution faible $u_m \in H^1((0, 1))$ et puisque ce problème est monodimensionnel alors $u_m \in \mathcal{C}([0, 1])$ grâce aux injections de Sobolev (Théorème A.6.).

1.2.2 Second exemple

Nous considérons le problème de diffusion stationnaire d'une barre soumise à une source de chaleur supposée égale à 1 (pour simplifier) et maintenue à une température constante sur ses extrémités, par exemple égale à 0. Ceci étant modélisé par une équation de Poisson

avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogène. Le modèle est donné par :

$$-\frac{d}{dx} \left(\mu_m \frac{dv_m}{dx} \right) = 1 \text{ dans } (0, 1), \quad (1.15)$$

$$v_m(0) = v_m(1) = 0. \quad (1.16)$$

A noter également que l'équation (1.15) est considérée au sens des distributions. Ainsi et comme précédemment le problème (1.15)-(1.16) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 v_m^{(1)}}{dx^2} &= \frac{1}{\mu_1} \text{ dans } J_i, \quad 0 \leq i \leq m-1, \\ -\frac{d^2 v_m^{(2)}}{dx^2} &= \frac{1}{\mu_2} \text{ dans } K_i, \quad 0 \leq i \leq m-1, \\ \mu_1 \frac{dv_m^{(1)}}{dx}(x) &= \mu_2 \frac{dv_m^{(2)}}{dx}(x), \quad x = x'_i, \quad 0 \leq i \leq m-1, \\ \mu_1 \frac{dv_m^{(1)}}{dx}(x) &= \mu_2 \frac{dv_m^{(2)}}{dx}(x), \quad x = x_i, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ v_m^{(1)}(x) &= v_m^{(2)}(x), \quad x = x'_i, \quad 0 \leq i \leq m-1, \\ v_m^{(1)}(x) &= v_m^{(2)}(x), \quad x = x_i, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ v_m^{(1)}(0) &= v_m^{(2)}(1) = 0 \end{aligned}$$

où $u_m^{(1)}$ (resp. $u_m^{(2)}$) désigne la restriction de u_m à $\cup_i J_i$ (resp. $\cup K_i$).

En résolvant ce problème on obtient aisément

$$v_m(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\mu_1} x^2 + ax & \text{si } x \in J_0, \\ \frac{-1}{2\mu_1} x^2 + ax + b_i^{(1)} & \text{si } x \in J_i, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ \frac{-1}{2\mu_2} x^2 + bx + b_i^{(2)} & \text{si } x \in K_i, \quad 0 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 + \frac{\lambda\mu_2}{4\mu_1} \frac{2m-1}{m}}{\mu_2 + \mu_1}, \quad b = a \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad b_i^{(1)} = \lambda \left(\frac{2i^2 + i}{8\mu_1 m^2} - \frac{i}{2m} a \right), \\ b_i^{(2)} &= \lambda \left(-\frac{3i + 2i^2 + 1}{8m^2 \mu_1} + \frac{a(i+1)}{2m} \right), \quad 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Comme souligné au sous-paragraphe 1.2.1, on remarque aussi que v_m est continue sur $[0, 1]$ mais n'est pas dérivable aux points x_i et x'_i . En fait, le problème (1.15)-(1.16) admet une solution faible $v_m \in H_0^1((0, 1))$ et comme on est en dimension 1, on a donc $v_m \in \mathcal{C}([0, 1])$.

Prenons toujours $\mu_1 = \frac{1}{2}$ et $\mu_2 = \frac{1}{4}$. Soit v^{hom} la solution du problème aux limites homogénéisé :

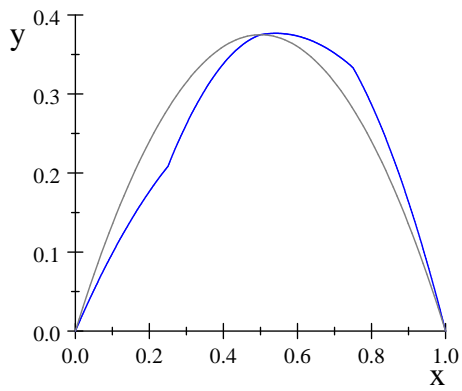
$$-\frac{d}{dx} \left(\mu^* \frac{d}{dx} v^{\text{hom}} \right) = 1 \text{ dans } (0, 1), \quad (1.18)$$

$$v^{\text{hom}}(0) = 0, \quad v^{\text{hom}}(1) = 0 \quad (1.19)$$

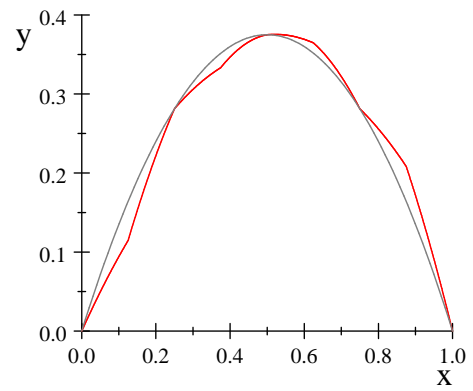
où μ^* est également donné par (1.12). Pour plus de détails voir la section 1.4.1. En résolvant le problème aux limites (1.18)-(1.19), on trouve aisément que $v^{\text{hom}}(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.

Remarque 1.2 *Le problème homogénéisé (1.18)-(1.19) (comme (1.13)-(1.14)) admet une solution $v^{\text{hom}} \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$ contrairement à (1.15)-(1.16) dont la solution n'est que dans $v_m \in H_0^1((0, 1))$. La raison essentielle est que, dans les deux problèmes homogénéisés, la diffusivité (ou la conductivité) est \mathcal{C}^∞ alors que dans les modèles (1.3)-(1.4) et (1.15)-(1.16) la diffusivité est dans L^∞ . A noter que dans les deux cas f est \mathcal{C}^∞ .*

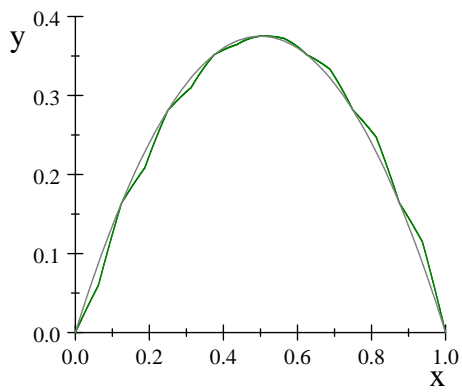
Nous allons à titre illustratif tracer la courbe de v_m ainsi que la solution v^{hom} pour les différentes valeurs de $m = 2, 4, 8$ et 16 voir les courbes ci-après.



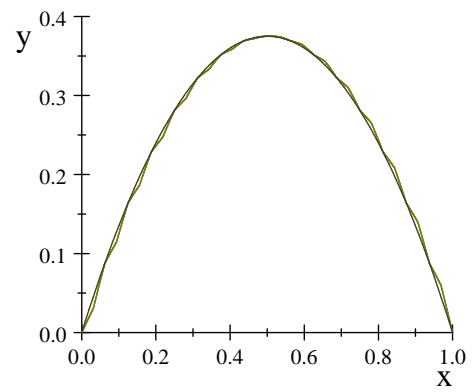
Courbe de v_2 .



Courbe de v_4 .

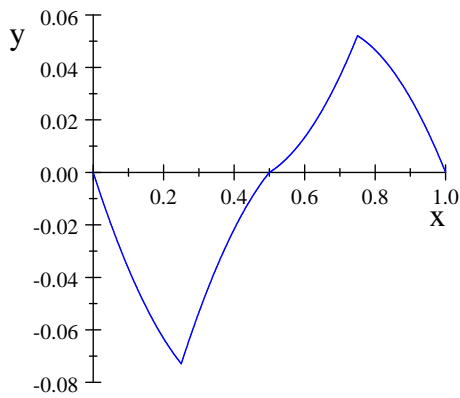


Courbe de v_8 .

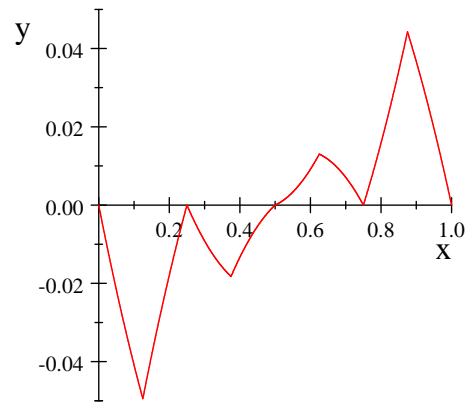


Courbe de v_{16} .

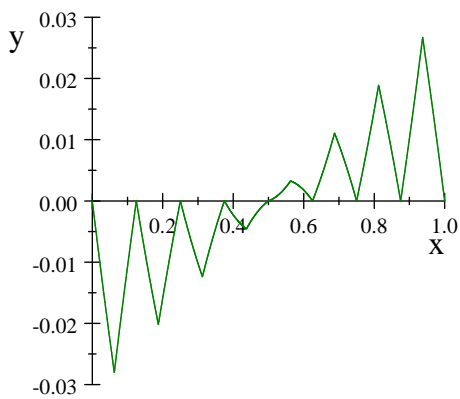
Maintenant nous allons tracer la fonction $x \mapsto v_m(x) - v^{\text{hom}}(x)$ pour $m = 2, 4, 8, 16$.
 Voir ci-dessous les représentations graphiques correspondantes.



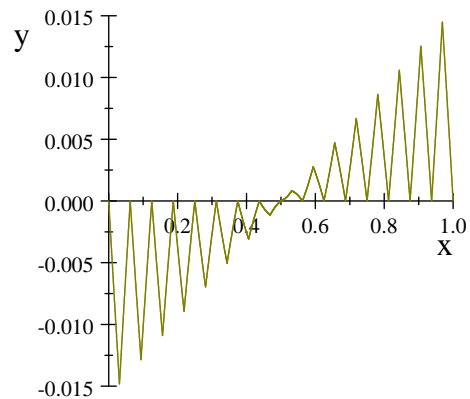
Courbe de $v_2 - v^{\text{hom}}$.



Courbe de $v_4 - v^{\text{hom}}$.



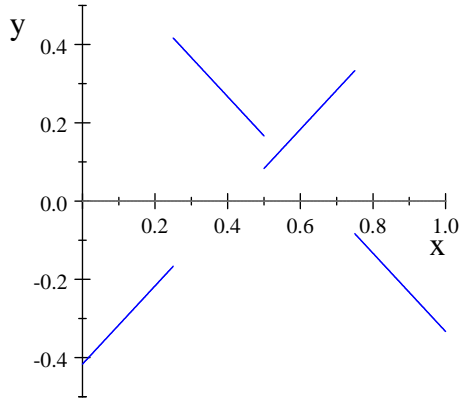
Courbe de $v_8 - v^{\text{hom}}$.



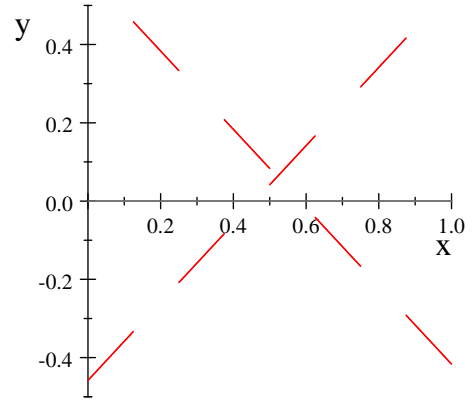
Courbe de $v_{16} - v^{\text{hom}}$.

Nous remarquons à travers ces courbes que plus m augmente plus la différence $v_m - v^{\text{hom}}$ oscille. De plus et comme noté dans le premier exemple ces graphes nous suggèrent que v_m converge (simplement ou fortement) vers v^{hom} . De même, on constate aussi que $v_m - v^{\text{hom}} = O(m^{-1})$ pour ces différentes valeurs de m .

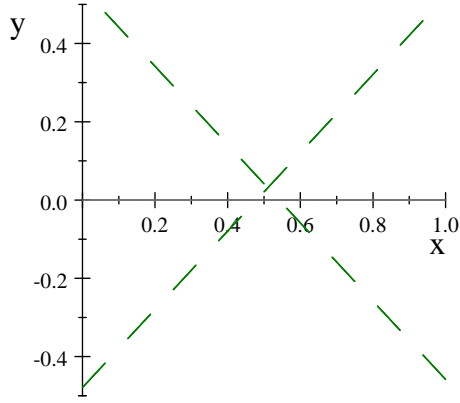
Dans ce qui suit nous allons également tracer la différence $\frac{d}{dx}(v_m - v^{\text{hom}})$ pour les valeurs de $m = 2, 4, 8$ et 16 , voir les figures ci-dessous.



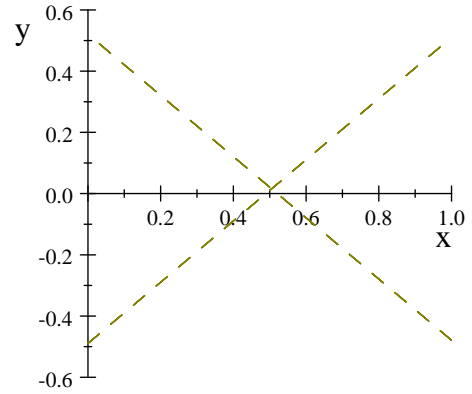
Courbe de $\frac{d}{dx} (v_2 - v^{\text{hom}})$.



Courbe de $\frac{d}{dx} (v_4 - v^{\text{hom}})$.



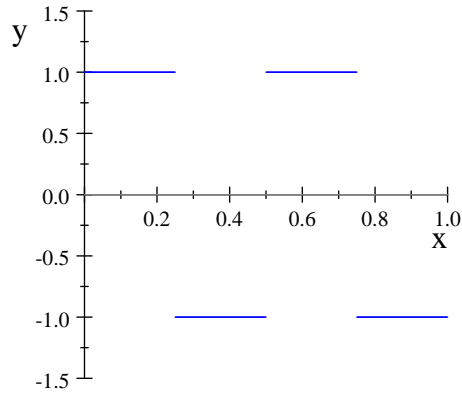
Courbe de $\frac{d}{dx} (v_8 - v^{\text{hom}})$.



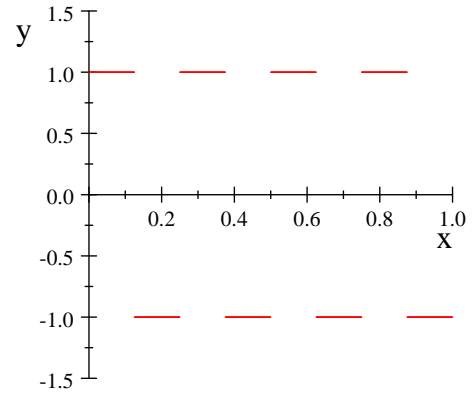
Courbe de $\frac{d}{dx} (v_{16} - v^{\text{hom}})$.

Nous constatons que ces courbes représentatives des fonctions $\frac{d}{dx} (v_m - v^{\text{hom}})$ sont oscillantes. Nous remarquons également que l'ordre de $\frac{d}{dx} (v_m - v^{\text{hom}})$ est toujours de $O(0.5)$ et par suite ne dépendant pas de m . Comme dans l'exemple précédent, nous verrons plus loin que dans ce type de problèmes, on a également $\frac{d}{dx} (u_m - v^{\text{hom}}) \approx \frac{d}{dy} u_1$ où u_1 est le terme correcteur et y la variable microscopique. Nous verrons également que $\frac{d}{dx} (u_m - v^{\text{hom}})$ ne converge pas (fortement) vers 0.

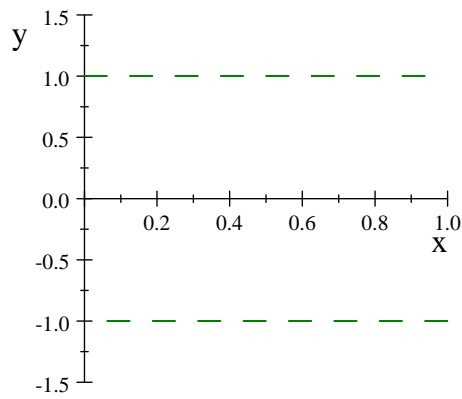
Ensuite nous allons tracer $\frac{d^2}{dx^2} (v_m - v^{\text{hom}})$ également pour ces mêmes valeurs de m , voir les figures ci-après.



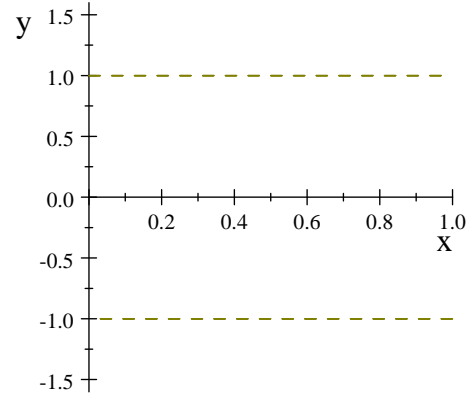
Courbe de $\frac{d^2}{dx^2} (v_2 - v^{\text{hom}})$.



Courbe de $\frac{d^2}{dx^2} (v_4 - v^{\text{hom}})$.



Courbe de $\frac{d^2}{dx^2} (v_8 - v^{\text{hom}})$.



Courbe de $\frac{d^2}{dx^2} (v_{16} - v^{\text{hom}})$.

Nous observons à travers ces quatre courbes que la différence des dérivées secondes entre v_m et v^{hom} sont des fonctions constantes par morceaux et périodiques.

Enfin, nous signalons que ces deux exemples nous amènent donc à l'étude des fonctions périodiques et oscillantes. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1.3 Sur les fonctions Y –périodiques et oscillantes.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ représentant la dimension de l'espace euclidien \mathbb{R}^N . Dans toute la suite, Ω désigne un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^N , représentant le corps homogène et Y désigne

le cube unité, c'est à dire $Y =]0, 1[^N$, représentant la cellule de base. On notera e_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^N . Ainsi $e_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq N}$ avec δ_{ij} le symbole de Krönecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1.3.1 Espaces $L^p_{\#}(Y)$, $1 \leq p \leq \infty$

On commencera ce paragraphe par donner la définition d'une fonction Y -périodique.

Définition 1.1 Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ est dite Y -périodique si pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ on a

$$\varphi(y + e_i) = \varphi(y).$$

Dans le cas unidimensionnel, on écrira 1-périodique.

Remarque 1.3 On pourra remplacer dans la définition précédente "pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ " par "pour p.p. $y \in \mathbb{R}^N$ " où p.p. désigne presque partout au sens de la mesure de Lebesgue. Nous rappelons qu'une propriété mathématique est vraie presque partout sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ s'il existe un sous-ensemble $F \subset E$ de mesure de Lebesgue nulle (ou négligeable) en dehors duquel cette propriété est vraie, c'est à dire sur $E \setminus F$.

Le résultat suivant nous dit que tout l'espace euclidien \mathbb{R}^N est recouvert par des pavages homothétiques à $\bar{Y} = [0, 1]^N$.

Lemme 1.1 Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut écrire

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} \varepsilon(k + \bar{Y}) \text{ et } (k + Y) \cap (k' + Y) = \emptyset \text{ si } k \neq k'.$$

Preuve. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Posons pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k_i = \left[\frac{x_i}{\varepsilon} \right]$ la partie entière de $\frac{x_i}{\varepsilon}$, et $y_i = \frac{x_i}{\varepsilon} - k_i$. Notons $k = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. On a alors $k \in \mathbb{Z}^N$, $y \in \bar{Y}$ et $x = \varepsilon(k + y) \in \varepsilon(k + \bar{Y})$. La deuxième propriété est évidente. ■

Remarque 1.4 *On peut généraliser la notion de Y -périodicité à la notion de P -périodicité où P est un ouvert de \mathbb{R}^N formant un réseau, c'est à dire $\mathbb{R}^N = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} \varepsilon(k + \overline{P})$ et $(k + P) \cap (k' + P) = \emptyset$ si $k \neq k'$. C'est exactement le cas d'un parallélépipède P défini par*

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i z_i : \lambda_i \in (0, 1), 1 \leq i \leq N \right\}$$

avec $\{z_i\}_{1 \leq i \leq N}$ une base de \mathbb{R}^N . Dans ce cas, on dira qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ est P -périodique si pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ on a

$$\varphi(y + z_i) = \varphi(y).$$

En fait, ces ouverts formant un réseau rentrent dans le cadre de la notion plus générale de tessellations voir par exemple A. Okabe, B. Boots et K. Sugihara [115]. On définit une tessellation de \mathbb{R}^N toute partie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant les propriétés suivantes

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{A \in \mathcal{T}} \overline{A},$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ pour toutes parties } A, B \in \mathcal{T} \text{ telles que } A \neq B,$$

$$0 \leq \text{card} \{A \in \mathcal{T} : A \cap K \neq \emptyset\} < +\infty \text{ pour toute partie bornée } K \subset \mathbb{R}^N.$$

Cette notion est souvent utilisée en géométrie stochastique (Cf. D. Stoyan, W.S. Kendall et J. Mecke [128]). Parmi les matériaux possédant une structure géométrique du type tessellation à l'échelle locale, on citera les polycristaux dont un travail d'homogénéisation sur un milieu hétérogène bi-structure avec une résistance interfaciale a été effectué par H.-K. Hummel [88].

Dans toute la suite de ce paragraphe et sauf mention contraire, φ est une fonction définie sur \mathbb{R}^N supposée Y -périodique. On notera toujours φ^ε la fonction définie par $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Grâce à la périodicité de φ , on note que $\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varphi(y)$ où $y = \frac{x}{\varepsilon} - \left[\frac{x}{\varepsilon}\right] \in Y$ et $\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] = \left(\left[\frac{x_1}{\varepsilon}\right], \left[\frac{x_2}{\varepsilon}\right], \dots, \left[\frac{x_N}{\varepsilon}\right]\right)$.

Soit $p \geq 1$. Nous noterons $L_{\#}^p(Y)$ l'espace des (classes de) fonctions f définies sur \mathbb{R}^N , Y -périodiques, mesurables sur Y telles que $|f|^p$ soit intégrable sur Y . Cet espace

est muni de la norme

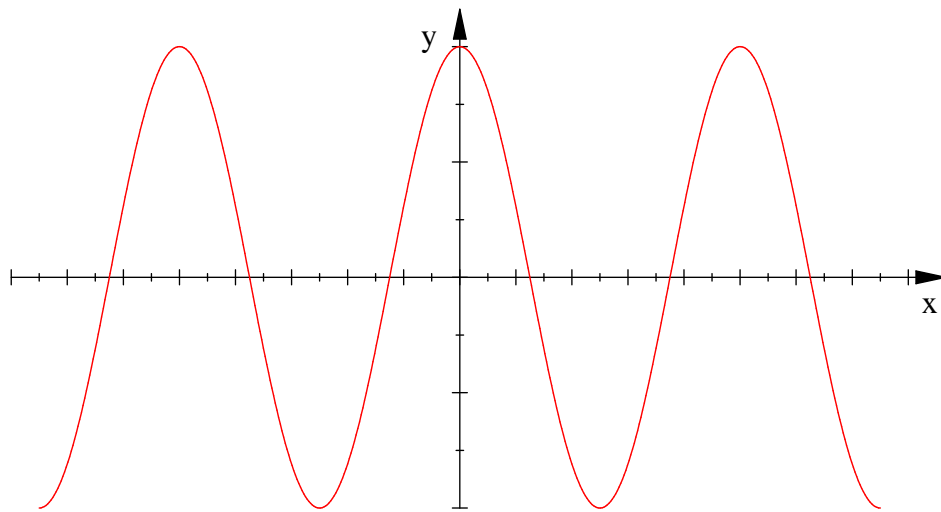
$$\|f\|_{p,\#} = \left(\int_Y |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

où dy désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N .

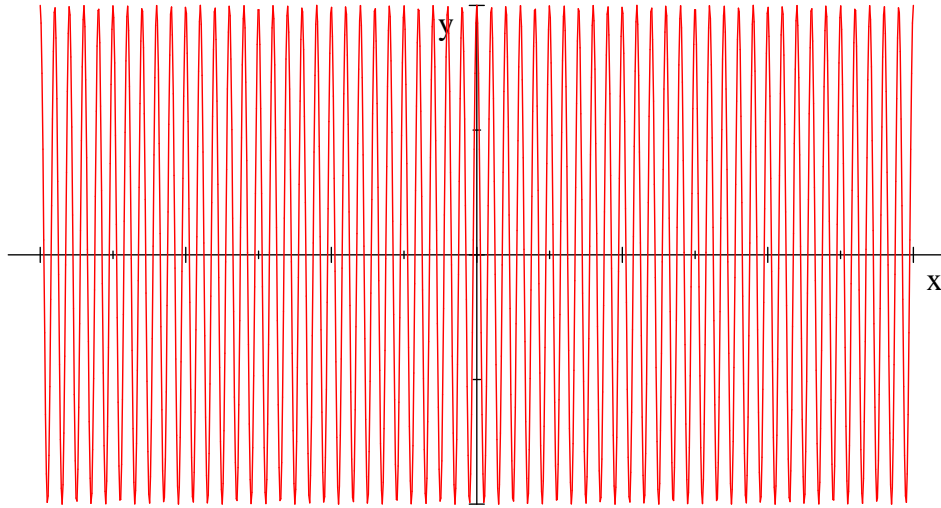
On notera également $L_{\#}^{\infty}(Y)$ l'espace des (classes de) fonctions f définies sur \mathbb{R}^N , Y -périodiques, mesurables sur Y telles qu'il existe un ensemble négligeable $E = E(f)$ en dehors duquel f est bornée sur Y . Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{\infty,\#} = \sup \{|f(x)|, \quad x \in Y \setminus E(f)\} =: \sup \text{ess} \{|f(x)|, \quad x \in Y\}.$$

Exemple. Prenons $\varphi(y) = \cos(2\pi y)$, $y \in \mathbb{R}$. On a $\varphi^{\varepsilon}(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)$ est de période ε alors que φ est de période 1. Ainsi, plus ε est petit et plus φ^{ε} oscille. A titre indicatif, nous traçons le graphe de φ^{ε} sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $\varepsilon = 1$ et 0.05. Voir les figures ci-après.



Le graphe de $\cos(2\pi x)$ ($\varepsilon = 1$).



Le graphe de $\cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)$ pour $\varepsilon = 0.05$.

Il est clair que

$$\|\varphi^\varepsilon\|_{L^2_\#(Y)} = \int_0^1 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{2} \quad (1.20)$$

et que pour tous a et b tels que $0 < a < b < 1$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \varphi^\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon}{2\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi b}{\varepsilon}\right) - \sin\left(\frac{2\pi a}{\varepsilon}\right) \right) \right] = 0. \quad (1.21)$$

Ainsi, il s'ensuit que la famille $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2_\#(Y)$ mais ne converge pas fortement.

Nous allons nous intéresser dans les paragraphes suivants à la convergence des familles $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ dans les différents espaces $L^p_\#(Y)$. Voir D. Cioranescu et P. Donato [56].

1.3.2 Convergence dans $L^p_\#(Y)$, $1 < p < \infty$

Nous avons le résultat principal suivant :

Théorème 1.1 *Soit \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Soit $\varphi \in L^p_\#(Y)$, $1 < p < \infty$. Alors*

$(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement vers $\tilde{\varphi}$ dans $L^p(\mathcal{O})$ où $\tilde{\varphi}$ est la moyenne de φ sur Y :

$$\tilde{\varphi} = \int_Y \varphi(y) \, dy. \quad (1.22)$$

Remarque 1.5 Si par exemple T est un parallélépipède et si $\varphi \in L^p_{\#}(T)$, $1 < p < \infty$. Alors $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement vers $\tilde{\varphi}$ dans $L^p(\mathcal{O})$ où $\tilde{\varphi}$ est la moyenne de φ sur Y :

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\lambda^N(T)} \int_T \varphi(y) \, dy$$

où $\lambda^N(T) = |T|$ désigne la mesure de Lebesgue de T ou encore son volume. A noter que dans (1.22) $\lambda^N(Y) = 1$.

Pour démontrer ce résultat nous avons besoin du Lemme suivant :

Lemme 1.2 Soit \mathcal{O} un pavé borné de \mathbb{R}^N , c'est à dire un produit cartésien d'intervalles bornés. Notons

$$K_0^\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}^N : \varepsilon(Y + k) \subset \mathcal{O}\}$$

et

$$K_1^\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}^N : \varepsilon(Y + k) \cap \partial\mathcal{O} \neq \emptyset\}.$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^N \text{card}(K_0^\varepsilon) = \frac{\lambda^N(\mathcal{O})}{\lambda^N(Y)}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^N \text{card}(K_1^\varepsilon) = 0.$$

Preuve. Ecrivons que $\mathcal{O} = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$ et $Y = \prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[$ où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, a_i, α_i, b_i et β_i sont des réels tels que $a_i < b_i$ et $\alpha_i < \beta_i$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, par exemple

$\varepsilon < \min_{1 \leq i \leq N} (b_i - a_i)$. Notons

$$c_i = b_i - a_i, \quad \gamma_i = \beta_i - \alpha_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

En écrivant que

$$\frac{c_i}{\varepsilon \gamma_i} = k_i^\varepsilon + \lambda_i^\varepsilon$$

où $k_i^\varepsilon = \left\lfloor \frac{c_i}{\varepsilon \gamma_i} \right\rfloor$ est la partie entière de $\frac{c_i}{\varepsilon \gamma_i}$ et λ_i^ε sa partie décimale, il vient alors

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^N \text{card}(K_0^\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^N \prod_{i=1}^N k_i^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^N \varepsilon k_i^\varepsilon \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{c_i}{\gamma_i} = \frac{\lambda^N(\mathcal{O})}{\lambda^N(Y)}. \end{aligned}$$

Notons ensuite

$$K_2^\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}^N : \exists i \in \{1, 2, \dots, N\} \exists k' \in K_0^\varepsilon : k = k' + e_i\}$$

où l'on rappelle que e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^N . Notons également

$$\mathcal{Y}_j^\varepsilon = \cup_{k \in K_j^\varepsilon} \varepsilon(Y + k), \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.23)$$

On a immédiatement

$$\mathcal{Y}_2^\varepsilon = \cup_{k \in K_0^\varepsilon} (\cup_{i=1}^N \varepsilon(Y + k + e_i)), \quad \mathcal{Y}_1^\varepsilon = \mathcal{Y}_2^\varepsilon \setminus \mathcal{Y}_0^\varepsilon.$$

Par suite

$$\text{card}K_2^\varepsilon = \prod_{i=1}^N (k_i^\varepsilon + 1), \quad \text{card}K_1^\varepsilon \leq \text{card}K_2^\varepsilon - \text{card}K_0^\varepsilon.$$

Evaluons maintenant la quantité $\text{card}K_2^\varepsilon - \text{card}K_0^\varepsilon$. On a

$$\begin{aligned} \text{card}K_2^\varepsilon - \text{card}K_0^\varepsilon &= \prod_{i=1}^N (k_i^\varepsilon + 1) - \prod_{i=1}^N k_i^\varepsilon \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq N} k_{i_1}^\varepsilon k_{i_2}^\varepsilon \dots k_{i_m}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque $k_i^\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$, on a donc

$$\text{card}K_2^\varepsilon - \text{card}K_0^\varepsilon = O(\varepsilon^{1-N})$$

de sorte que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^N \text{card}K_1^\varepsilon = 0.$$

Ce qui termine la démonstration du Lemme. ■

Preuve du Théorème 1.1. Soit $\varphi \in L^p_{\#}(Y)$, $1 < p < \infty$. Nous allons d'abord montrer ce résultat pour un pavé $\mathcal{O} = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$ où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $a_i < b_i$. On prend $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min_{1 \leq i \leq N} (b_i - a_i)$. Avec les notations (1.23), on peut écrire $\mathcal{O} = \mathcal{Y}_0^\varepsilon \cup \mathcal{O}^\varepsilon$ où

$$\mathcal{O}^\varepsilon = \{x \in \mathcal{O} : \exists k \in K_1^\varepsilon, x \in \varepsilon(Y + k)\}.$$

A noter que $\mathcal{Y}_0^\varepsilon \cap \mathcal{O}^\varepsilon = \emptyset$ et que $\mathcal{O}^\varepsilon \subset \mathcal{Y}_1^\varepsilon$. On a ainsi

$$\int_{\mathcal{O}} \varphi^\varepsilon(x) \, dx = \int_{\mathcal{Y}_0^\varepsilon} \varphi^\varepsilon(x) \, dx + \int_{\mathcal{O}^\varepsilon} \varphi^\varepsilon(x) \, dx$$

et par suite

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \varphi^\varepsilon(x) \, dx - \int_{\mathcal{Y}_0^\varepsilon} \varphi^\varepsilon(x) \, dx \right| \leq \left| \int_{\mathcal{Y}_1^\varepsilon} \varphi^\varepsilon(x) \, dx \right|.$$

C'est à dire

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \varphi^\varepsilon(x) \, dx - \sum_{k \in K_0^\varepsilon} \int_{\varepsilon(Y+k)} \varphi^\varepsilon(x) \, dx \right| \leq \sum_{k \in K_1^\varepsilon} \left| \int_{\varepsilon(Y+k)} \varphi^\varepsilon(x) \, dx \right|. \quad (1.24)$$

En tenant compte de la périodicité de φ et en utilisant le changement d'échelle $x = \varepsilon(y+k)$, $y \in Y$ il vient que

$$\int_{\varepsilon(Y+k)} \varphi^\varepsilon(x) \, dx = \varepsilon^N \int_Y \varphi(y) \, dy.$$

Par conséquent l'inégalité (1.24) devient

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \varphi^\varepsilon(x) \, dx - \varepsilon^N \text{card}(K_0^\varepsilon) \int_Y \varphi(y) \, dy \right| \leq \varepsilon^N \text{card}(K_1^\varepsilon) \left| \int_Y \varphi(y) \, dy \right| \quad (1.25)$$

Grâce à l'inégalité de Hölder (Proposition A.8), il convient de noter que

$$\left| \int_Y \varphi(y) \, dy \right| \leq [\lambda^N(Y)]^{1/p^*} \left| \int_Y |\varphi(y)|^p \, dy \right|^{1/p} = \|\varphi\|_{p,\#}$$

où p^* étant le conjugué de p : $p^* = p/(p-1)$. Par suite, l'inégalité (1.25) devient

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \varphi^\varepsilon(x) \, dx - \varepsilon^N \text{card}(K_0^\varepsilon) \int_Y \varphi(y) \, dy \right| \leq \varepsilon^N \text{card}(K_1^\varepsilon) \|\varphi\|_{p,\#}$$

et en passant à la limite dans cette dernière inégalité, en tenant compte du Lemme 1.2, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} \varphi^\varepsilon(x) \, dx = \frac{\lambda^N(\mathcal{O})}{\lambda^N(Y)} \tilde{\varphi} = \int_{\mathcal{O}} \tilde{\varphi} \, dx.$$

Maintenant, on considère le cas général d'un ouvert \mathcal{O} borné. Nous allons utiliser le Théorème A.1.

Il est clair que

$$\begin{aligned} \|\varphi^\varepsilon\|_{L^p(\mathcal{O})}^p &\leq \left| \int_{\mathcal{Y}_2^\varepsilon} |\varphi^\varepsilon(x)|^p dx \right| \\ &\leq \left| \varepsilon^N \text{card}K_2^\varepsilon \int_Y |\varphi(y)|^p dy \right| \\ &\leq C \|\varphi\|_{p,\#}^p < +\infty. \end{aligned}$$

De plus, si \mathcal{P} est un pavé contenu dans \mathcal{O} , on a d'après ce qui a précédé

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{P}} \varphi^\varepsilon(x) dx = \int_{\mathcal{P}} \tilde{\varphi} dx.$$

Ainsi d'après le Théorème A.1., il s'ensuit que φ^ε converge faiblement dans $L^p(\mathcal{O})$ vers $\tilde{\varphi}$. ■

1.3.3 Convergence dans $L_\#^\infty(Y)$

Si maintenant $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \in L^\infty(Y)$ et Y -périodique, on a alors le résultat suivant :

Théorème 1.2 *Soit $\varphi \in L_\#^\infty(Y)$, c'est à dire $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, Y -périodique et $\varphi|_Y \in L^\infty(Y)$. Alors $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faible-* vers $\tilde{\varphi}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ où $\tilde{\varphi}$ est la moyenne de φ sur Y donnée par (1.22).*

Preuve. Grâce à la périodicité de φ , on a bien $\|\varphi^\varepsilon\|_{\infty,\mathbb{R}^N} = \|\varphi\|_{\infty,\#}$. Par suite, $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on peut donc extraire une sous-famille, notée encore $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et une limite $\varphi^* \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faible-* vers φ^* .

Nous allons par la suite identifier φ^* . Pour ce faire, considérons \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $p > 1$ un nombre réel. Tout d'abord, il convient de noter que $\varphi^\varepsilon|_{\mathcal{O}} \in L^p(\mathcal{O})$. Ainsi, en utilisant le Théorème 1.1, on peut affirmer que $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement dans $L^p(\mathcal{O})$ vers sa moyenne sur Y , c'est à dire $\tilde{\varphi}$. D'autre part, soit $v \in L^q(\mathcal{O})$ une fonction test quelconque avec q le conjugué de p . Notons $\chi_{\mathcal{O}}$ la fonction caractéristique de l'ouvert \mathcal{O} . Donc, en observant que $v\chi_{\mathcal{O}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et en rappelant que $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faible-*

vers φ^* , il vient alors

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} \varphi^\varepsilon(x) v(x) \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^\varepsilon(x) v(x) \chi_{\mathcal{O}}(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^*(x) v(x) \chi_{\mathcal{O}}(x) \, dx \\ &= \int_{\mathcal{O}} \varphi^*(x) v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Autrement dit φ^ε converge faiblement vers φ^* dans $L^p(\mathcal{O})$. Par unicité de la limite, on a alors $\varphi^* = \tilde{\varphi}$ p.p. sur \mathcal{O} . Comme l'ouvert borné \mathcal{O} est quelconque, on déduit que $\varphi^* = \tilde{\varphi}$ p.p. sur \mathbb{R}^N . Enfin en appliquant le Théorème d'Eberlein-Smuljan (voir Théorème A.2.), il s'ensuit que c'est toute la famille (φ^ε) qui converge faible-* vers $\tilde{\varphi}$. ■

1.3.4 Convergence dans $L^1_{\#}(Y)$

Enfin nous donnons un dernier résultat concernant la convergence des familles de fonctions fortement oscillantes dans L^1 .

Théorème 1.3 *Soit $\varphi \in L^1_{\#}(Y)$. Alors pour tout ouvert borné \mathcal{O} , la famille $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement dans $L^1(\mathcal{O})$ vers sa moyenne $\tilde{\varphi}$.*

Preuve. Soit $\varphi \in L^1_{\#}(Y)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi^\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et par suite pour tout ouvert borné \mathcal{O} , $\varphi^\varepsilon|_{\mathcal{O}} \in L^1(\mathcal{O})$. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Comme Y est borné alors par le Théorème A.10. l'espace $L^2(Y)$ est dense dans $L^1(Y)$. Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $\varphi_l \in L^2(Y)$ telle que

$$\|\varphi - \varphi_l\|_{1,\#} \leq \frac{1}{l}. \tag{1.26}$$

A noter que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, φ_l n'est pas forcément périodique. Nous allons donc la prolonger par Y -périodicité à \mathbb{R}^N de la manière suivante. Posons

$$\psi_l(y) = \varphi_l(y - [y]), \quad \text{p.p. } y \in \mathbb{R}^N$$

où rappelons-le $[y]$ désigne la partie entière du vecteur y . Il est facile de voir que ψ_l est Y -périodique. En effet, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a bien

évidemment $[y + e_i] = [y] + e_i$. Par suite

$$\psi_l(y + e_i) = \varphi_l(y + e_i - [y + e_i]) = \varphi_l(y - [y]) = \psi_l(y), \quad \text{p.p. } y \in \mathbb{R}^N.$$

De plus, $\psi_l \in L^1_{\#}(Y)$. Notons ensuite pour tout $\varepsilon > 0$ et pour p.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $\psi_l^\varepsilon(x) = \psi_l(x/\varepsilon)$.

Soit maintenant P un cube dans \mathbb{R}^N contenant \mathcal{O} de côté $\alpha_P > \text{diam}(\mathcal{O})$ et tel que

$$P = \bigcup_{i=1}^{N_P^\varepsilon} P_i^\varepsilon,$$

où P_i^ε sont des cubes de côté ε et au nombre $N_P^\varepsilon = \frac{\text{vol}(P)}{\varepsilon^N} = \left(\frac{\alpha_P}{\varepsilon}\right)^N$. Ceci étant toujours possible car \mathcal{O} est borné.

Considérons maintenant une fonction test $\eta \in L^\infty(\mathcal{O})$ quelconque. On a

$$\left| \int_{\mathcal{O}} (\varphi^\varepsilon - \psi_l^\varepsilon) \eta \, dx \right| \leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \|\varphi^\varepsilon - \psi_l^\varepsilon\|_{L^1(\mathcal{O})} \leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \|\varphi^\varepsilon - \psi_l^\varepsilon\|_{L^1(P)}. \quad (1.27)$$

Observons que

$$\|\varphi^\varepsilon - \psi_l^\varepsilon\|_{L^1(P)} = \sum_{i=1}^{N_P^\varepsilon} \left(\int_{P_i^\varepsilon} \left| \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \psi_l\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \, dx_i^\varepsilon \right) \quad (1.28)$$

où dx_i^ε est l'élément de volume de P_i^ε pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N .

Notons que par un changement d'échelles $x = \varepsilon(k + y)$, $y \in Y$ et par la Y -périodicité des familles de fonctions φ^ε et ψ_l^ε , on peut écrire que

$$\int_{P_i^\varepsilon} \left| \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \psi_l\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \, dx_i^\varepsilon = \varepsilon^N \int_Y |\varphi(y) - \psi_l(y)| \, dy$$

et par suite (1.28) devient

$$\|\varphi^\varepsilon - \psi_l^\varepsilon\|_{L^1(P)} = \varepsilon^N \sum_{i=1}^{N_P^\varepsilon} \int_Y |\varphi(y) - \psi_l(y)| \, dy = \text{vol}(P) \left(\int_Y |\varphi(y) - \psi_l(y)| \, dy \right) \, dx.$$

(1.29)

Ainsi (1.27) et (1.29) donnent

$$\left| \int_{\mathcal{O}} (\varphi^\varepsilon - \psi_l^\varepsilon) \eta \, dx \right| \leq \text{vol}(P) \|\eta\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \|\varphi - \psi_l\|_{L^1(Y)} \quad (1.30)$$

et en utilisant (1.26), l'inégalité (1.30) entraîne que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \int_{\mathcal{O}} (\varphi^\varepsilon - \psi_l^\varepsilon) \eta \, dx \right| \leq \frac{\text{vol}(P)}{l} \|\eta\|_{L^\infty(\mathcal{O})}. \quad (1.31)$$

A noter que l'estimation (1.31) est uniforme par rapport à ε .

Par ailleurs, il est clair que pour tout $p \in]1, +\infty[$, $\psi_l^\varepsilon \in L^p(\mathcal{O})$ et d'après le Théorème 1.1, (ψ_l^ε) converge faiblement vers sa moyenne $\tilde{\psi}_l$ dans $L^p(\mathcal{O})$. Mais

$$\tilde{\psi}_l = \int_Y \psi_l(y) \, dy = \int_Y \varphi_l(y) \, dy = \tilde{\varphi}_l.$$

Donc pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\mathcal{O}} (\psi_l^\varepsilon - \tilde{\varphi}_l) \eta \, dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (1.32)$$

Remarquons aussi que

$$\left| \int_{\mathcal{O}} (\tilde{\psi}_l - \tilde{\varphi}_l) \eta \, dx \right| = \left| \int_{\mathcal{O}} \left(\int_Y (\varphi_l - \varphi) \, dy \right) \eta \, dx \right|$$

et par conséquent

$$\left| \int_{\mathcal{O}} (\tilde{\psi}_l - \tilde{\varphi}_l) \eta \, dx \right| \leq \text{vol}(\mathcal{O}) \|\varphi - \varphi_l\|_{1,\#} \|\eta\|_\infty.$$

Grâce à (1.26) on obtient

$$\left| \int_{\mathcal{O}} (\tilde{\psi}_l - \tilde{\varphi}_l) \eta \, dx \right| \leq \frac{\text{vol}(\mathcal{O})}{l} \|\eta\|_\infty \leq \frac{\text{vol}(P)}{l} \|\eta\|_\infty. \quad (1.33)$$

Ainsi, en combinant (1.31), (1.32) et (1.33) on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{O}} (\varphi^\varepsilon - \tilde{\varphi}) \eta \, dx \right| &\leq \left| \int_{\mathcal{O}} (\varphi^\varepsilon - \psi_l^\varepsilon) \eta \, dx \right| + \left| \int_{\mathcal{O}} (\psi_l^\varepsilon - \tilde{\psi}_l) \eta \, dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathcal{O}} (\tilde{\psi}_l - \tilde{\varphi}) \eta \, dx \right| \\ &\leq \frac{2\text{vol}(P)}{l} \|\eta\|_\infty + \left| \int_{\mathcal{O}} (\psi_l^\varepsilon - \tilde{\psi}_l) \eta \, dx \right| \end{aligned}$$

En fixant l d'abord et en faisant tendre ε vers 0 dans cette dernière inégalité, on trouve

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{O}} (\varphi^\varepsilon - \tilde{\varphi}) \eta \, dx \right| \leq \frac{2\text{vol}(P)}{l} \|\eta\|_\infty. \quad (1.34)$$

Ensuite en passant à la limite sur $l \rightarrow +\infty$ dans (1.34), on obtient le résultat désiré. ■

1.4 Une introduction à l'homogénéisation

Dans ce paragraphe, nous allons introduire la technique des échelles multiples pour construire formellement le problème homogénéisé d'un modèle de diffusion stationnaire dans un domaine composite. Nous justifierons ensuite au paragraphe 1.4.3 par la méthode de l'énergie de L. Tartar [129]. Nous commencerons par le cas de la dimension 1 qui est plus simple, ensuite nous généraliserons au cas de la dimension supérieure.

1.4.1 Procédé d'homogénéisation en dimension une

Dans la Section 1.2, nous avons considéré le problème de diffusion stationnaire de la température d'une barre composite soumise à une source de chaleur. Dans les deux exemples traités, nous avons observé d'après les graphes que la solution u_m (resp. v_m) converge (fortement) vers la solution u^{hom} (resp. v^{hom}) d'un problème (appelé homogénéisé) alors que $\frac{du_m}{dx}$ (resp. $\frac{dv_m}{dx}$) ne converge pas fortement vers $\frac{du^{\text{hom}}}{dx}$ (resp. $\frac{dv^{\text{hom}}}{dx}$). C'est l'une des caractéristiques des problèmes d'homogénéisation.

Considérons dans ce paragraphe, le modèle (plus général) de diffusion d'une barre

composite de longueur $L > 0$ et qui est décrit comme suit :

$$-\frac{d}{dx} \left(\mu \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d}{dx} u^\varepsilon \right) = f \text{ dans } (a, b), \quad (1.35)$$

$$u^\varepsilon(a) = u^\varepsilon(b) = 0 \quad (1.36)$$

où a et b sont deux réels tels que $a < b$, $L = b - a$ et

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \mu(y) \end{aligned}$$

est une fonction 1-périodique. Dans (1.35), f est une source de chaleur supposée mesurable au sens de Lebesgue sur l'intervalle (a, b) et appartenant à $L^2((a, b))$. Le caractère composite de la barre est bien évidemment exprimé par le coefficient de diffusivité thermique $\mu^\varepsilon(x) := \mu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Ainsi pour les deux exemples étudiés dans la Section 1.2, la diffusivité thermique prend la forme :

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \mu(y) = \begin{cases} \mu_1 \text{ si } y \in (0, \frac{1}{2}) + k \\ \mu_2 \text{ si } y \in (\frac{1}{2}, 1) + k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

et les valeurs de ε sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$ correspondantes aux valeurs de $m = 2, 4, 8$ et 16 respectivement.

Dans ce paragraphe nous supposerons de manière assez générale que

$$\mu \text{ est mesurable au sens de Lebesgue sur } \mathbb{R} \text{ et supposé appartenir à } L^\infty(\mathbb{R}). \quad (1.37)$$

De plus, on supposera également que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$

$$\mu(y) \geq c_0 > 0 \quad (1.38)$$

où c_0 une constante strictement positive indépendante de ε et bien sûr de y .

La formulation faible du problème (1.35)-(1.36) est donnée par :

Pour tout $\varepsilon > 0$, trouver $u^\varepsilon \in H_0^1((a, b))$ tel que

$$\int_a^b \mu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_a^b f v dx, \quad \forall v \in H_0^1((a, b)). \quad (1.39)$$

En utilisant le Lemme de Lax-Milgram (Voir Théorème A.11.), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une unique solution $u^\varepsilon \in H_0^1((a, b))$. De plus, en prenant $v = u^\varepsilon$ dans (1.39) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_a^b \mu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{du^\varepsilon}{dx}\right)^2 dx \leq \|f\|_{L^2((a,b))} \|u^\varepsilon\|_{L^2((a,b))}. \quad (1.40)$$

Dans toute la suite C désigne une constante indépendante de ε . En rappelant (1.38) et l'inégalité de Poincaré (voir Théorème A.7.), (1.40) entraîne l'estimation suivante :

$$\left\| \frac{du^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2((a,b))} \leq \frac{C_P}{c_0} \|f\|_{L^2((a,b))}$$

où C_P est la constante de Poincaré qui ne dépend que de p et de Ω . Par suite

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1((a,b))} \leq C. \quad (1.41)$$

Autrement dit la famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $H^1((a, b))$.

Ensuite on définit

$$\xi^\varepsilon = \mu^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx}.$$

Grâce à (1.37) et l'estimation (1.41) il s'ensuit que

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2((a,b))} \leq C. \quad (1.42)$$

Mieux encore

$$\left\| \frac{d\xi^\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2((a,b))} = \|f\|_{L^2((a,b))} \leq C.$$

Ainsi d'après le Théorème d'Eberlein-Smuljan (voir Théorème A.1.) il existe une sous-famille de $(u^\varepsilon, \xi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ notée toujours $(u^\varepsilon, \xi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et il existe $u \in H^1((a,b))$, $\xi \in H^1((a,b))$ tels que

$$(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \text{ converge faiblement vers } u \text{ dans } H^1((a,b)) \quad (1.43)$$

et

$$(\xi^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \text{ converge faiblement vers } \xi \text{ dans } H^1((a,b)). \quad (1.44)$$

L'objectif principal des problèmes d'homogénéisation est de déterminer le problème aux limites auquel u est solution. Pour cela il existe plusieurs techniques, nous citerons entre autres : méthode de développements asymptotiques combinée avec la méthode de l'énergie de L. Tartar [35, 129], méthode de compacité par compensation [109], H -convergence [110], Γ -convergence [21, 46, 67, 68], G -convergence [141], méthode de la convergence à deux échelles [11, 112] et méthode de l'éclatement périodique [57, 58]. Comme le problème (1.35)-(1.36) est unidimensionnel, on pourra tout particulièrement utiliser les techniques de compacité usuelles (convergence forte, faible et faible-* dans les espaces L^p), voir par exemple A. Bensoussan *et al.* [35], Y. Amirat, K. Hamdache & A. Ziani [16, 17, 18] et L. Tartar [129, 132].

D'abord on remarque que

$$\frac{d\xi}{dx} = f \text{ dans } (a,b). \quad (1.45)$$

En effet, en tenant compte de (1.44) et en passant à la limite dans (1.39), on trouve

$$\int_a^b \frac{d\xi}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_a^b f v dx, \quad \forall v \in H_0^1((a,b)). \quad (1.46)$$

Une simple intégration par parties dans (1.46) donne (1.45).

Ensuite, on déterminera ξ en fonction de u . En utilisant le Théorème de Rellich-Kondrachov (voir Théorème A.6) et (1.44), on peut dire que

$(\xi^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement vers ξ dans $L^2((a, b))$.

Remarquons que

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} = \frac{1}{\mu^\varepsilon} \xi^\varepsilon$$

et d'après le Théorème 1.2 on peut écrire

$\left(\frac{1}{\mu^\varepsilon}\right)_{\varepsilon>0}$ converge faible-* vers $\mathcal{M}\left(\frac{1}{\mu}\right)$

où rappelons-le

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{\mu}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\mu(y)} dy.$$

Donc on peut voir que $\frac{du^\varepsilon}{dx}$ est le produit de deux familles : l'une : $\left(\frac{1}{\mu^\varepsilon}\right)$ convergente faible-* dans $L^\infty((a, b))$ et l'autre : (ξ^ε) convergente fortement dans $L^2((a, b))$ et par suite on peut passer à la limite pour le produit $\frac{1}{\mu^\varepsilon} \xi^\varepsilon$. Plus précisément, on a

$\left(\frac{du^\varepsilon}{dx}\right)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement vers $\mathcal{M}\left(\frac{1}{\mu}\right) \xi$ dans $L^2((a, b))$.

Par conséquent, grâce à (1.41), on obtient une relation entre $\frac{du}{dx}$ et ξ , c'est à dire

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{-1} \frac{du}{dx} = \xi.$$

En rappelant (1.45), on trouve finalement le problème homogénéisé

$$\frac{d}{dx} \left(\mathcal{M} \left(\frac{1}{\mu} \right)^{-1} \frac{du}{dx} \right) = f \text{ dans } (a, b), \quad (1.47)$$

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (1.48)$$

A noter que la condition de Dirichlet (1.48) est obtenue grâce à (1.43) et à la continuité de l'application trace (Théorème A.5., voir aussi [3]).

Il est clair que (1.47)-(1.48) admet une unique solution faible dans $H_0^1((a, b))$. De ce fait, c'est toute la famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge faiblement vers u dans $H^1((a, b))$, voir le Théorème d'Eberlein-Smuljan en Annexe (Théorème A.1).

En général on a

$$\mathcal{M} \left(\frac{1}{\mu} \right)^{-1} \neq \frac{1}{\mathcal{M}(\mu)} = \frac{1}{\int_0^1 \mu(y) dy}.$$

Voir Remarque 1.7 ci-dessous. Par conséquent

$$\left(\mu^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx} \right)_{\varepsilon>0} \text{ ne converge pas faiblement vers } \mathcal{M}(\mu) \frac{du}{dx} \text{ dans } L^2((a, b)).$$

Remarque 1.6 *On pourra remplacer la diffusivité thermique par toute fonction μ^ε mesurable dans $L^\infty((a, b))$ et non nécessairement périodique. Ainsi, si*

$$0 < c_0 \leq \mu^\varepsilon \leq c_1 < +\infty$$

et si

$$\left(\frac{1}{\mu^\varepsilon} \right)_{\varepsilon>0} \text{ converge faible-* vers } \frac{1}{\mu^*} \text{ dans } L^\infty((a, b)),$$

le problème homogénéisé sera toujours

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\mu^* \frac{du}{dx} \right) &= f \text{ dans } (a, b), \\ u(a) &= u(b) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 1.7 *Si par exemple*

$$\mu(y) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } y \in Y_1, \\ \mu_2 & \text{si } y \in Y_2, \end{cases} \quad y \in Y$$

où Y_1 et Y_2 sont deux ouverts de Y avec $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup (\partial Y_1 \cap \partial Y_2)$, et μ_1 et μ_2 sont deux constantes indépendantes de $y \in Y$, alors

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{|Y_1|}{\mu_1} + \frac{|Y_2|}{\mu_2}} = \frac{|Y_1| + |Y_2|}{\frac{|Y_1|}{\mu_1} + \frac{|Y_2|}{\mu_2}}$$

qui est en quelque sorte la moyenne harmonique (pondérée) des quantités μ_1 et μ_2 . A noter qu'en général

$$\frac{1}{\frac{|Y_1|}{\mu_1} + \frac{|Y_2|}{\mu_2}} \leq \mu_1 |Y_1| + \mu_2 |Y_2|$$

avec égalité si et seulement si

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Dans ce cas le milieu (a, b) ne serait pas hétérogène. Plus généralement on a

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{-1} \leq \mathcal{M}(\mu).$$

En effet en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \sqrt{\mu} \frac{1}{\sqrt{\mu}} dy \leq \left(\int_0^1 (\sqrt{\mu})^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \right)^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\mathcal{M}(\mu) \mathcal{M}\left(\frac{1}{\mu}\right) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En prenant $\mu_1 = \frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{1}{4}, Y_1 = (0, \frac{1}{2})$ et $Y_2 = (\frac{1}{2}, 1)$ on trouve alors (voir aussi (1.12))

$$\mu^* = \mathcal{M}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{-1} = \frac{|Y_1| + |Y_2|}{\frac{|Y_1|}{\mu_1} + \frac{|Y_2|}{\mu_2}} = \frac{1}{3}.$$

1.4.2 Procédé d'homogénéisation en dimension supérieure

Soit Ω un domaine borné et régulier de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), supposé être le siège d'un matériau hétérogène présentant une répartition périodique de micro-structures décrite comme suit. On considère une fonction matricielle $a : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$ décrivant la diffusion de ce matériau à l'échelle microscopique telle que $a = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ et

- $a_{ij} : Y$ -périodique, i et $j \in \{1, \dots, N\}$;
- $a_{ij} \in L^\infty(Y)$;
- Il existe une constante $\alpha_0 > 0$ indépendante de ε telle que pour tout $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$

on a

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_j \xi_i \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^N \xi_i^2. \quad (1.49)$$

On notera par la suite

$$a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

On s'intéresse à l'homogénéisation du problème elliptique suivant :

$$-\operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \text{ dans } \Omega, \quad (1.50)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega. \quad (1.51)$$

C'est à dire trouver le comportement asymptotique de la solution (si elle existe) du problème (1.50)-(1.51). Ce qui revient à chercher le problème limite de (1.50)-(1.51) dans une topologie à préciser. Dans l'équation (1.50) f représente une source de densité qu'on supposera par exemple dans $L^2(\Omega)$.

Il est à noter que le matériau Ω de conductivité $a^\varepsilon(x)$ est fortement hétérogène avec des hétérogénéités réparties de façon périodique mais de taille microscopique de l'ordre

ε . Ainsi plus ε est petit, plus le nombre d'hétérogénéités est élevé. En pratique, on ne cherche pas à connaître localement le comportement de la solution u^ε sur chaque cellule. En effet, d'un point de vue numérique, résoudre le problème (1.50)-(1.51) par n'importe quelle technique numérique (différences finies, éléments finis, volumes finis, ...) nécessite un maillage de taille plus petite que ε . Lorsque ce paramètre ε est petit, cela conduit à considérer un maillage très fin et entraîne de ce fait un grand nombre de degrés de liberté qui augmente en $1/\varepsilon^N$. De telles équations discrétisées peuvent être très coûteuses en terme de temps de calcul (CPU) et en stockage de mémoire, voire parfois impossible à résoudre numériquement vu la grande complexité algorithmique qu'elles engendrent [44, 45, 95, 96]. C'est pour cette raison que l'on s'intéresse d'abord au comportement global ou moyennisé de la solution u^ε , à savoir étudier la limite de $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ autrement dit chercher le comportement effective du milieu Ω à l'échelle macroscopique, comme étant un matériau homogène et par la suite passer au calcul numérique par des techniques usuelles telles que les éléments finis pour construire des valeurs approchées du phénomène étudié (la température, la pression du fluide, ...).

Le problème (P_ε) est équivalent formellement au problème variationnel suivant :

Pour tout $\varepsilon > 0$, trouver $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (1.52)$$

Il est clair, d'après le lemme de Lax-Milgram (voir Théorème A.11.), que le problème (1.52) admet pour tout $\varepsilon > 0$, une unique solution $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ qui est de plus bornée :

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_p}{\alpha_1} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.53)$$

où rappelons-le la constante C_p est donnée par l'inégalité de Poincaré (Théorème A.7.). En effet Il suffit de prendre $v = u^\varepsilon$ dans l'équation (1.52), d'utiliser la condition de coercivité de (1.49) et l'inégalité de Poincaré.

A noter que l'estimation (1.53) est uniforme par rapport à ε . En utilisant le Théorème Eberlein-Smuljan (Théorème A.1.) il existe $u \in H^1(\Omega)$ et une sous famille extraite de $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ notée toujours $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge faiblement vers u dans $H^1(\Omega)$. En vertu du Théorème de Rellich-Kondrachov (Théorème A.6) on peut écrire que

$$u^\varepsilon \text{ converge fortement vers } u \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.54)$$

Une question naturelle se pose alors : trouver le problème limite auquel u est solution. Nous allons pour cela utiliser à titre d'exemple la technique asymptotique de double échelles associée avec la méthode de l'énergie de L. Tartar. En effet, la première technique qui consiste à introduire un développement asymptotique de la solution u^ε dans les équations (1.50)-(1.51) est très efficace pour déterminer le problème limite mais elle reste cependant formelle. Ce qui conduit donc à utiliser une autre méthode permettant de justifier mathématiquement ce procédé asymptotique. C'est la technique de l'énergie de L. Tartar qui consiste essentiellement en un bon choix de fonctions tests dans la formulation variationnelle associée et de passer ensuite à la limite, en utilisant bien sûr certains résultats de compacité.

Cette technique de développement asymptotique consiste à insérer un développement asymptotique approprié de la solution u^ε dans les équations (1.50)-(1.51) et obtenir ainsi une cascade de problèmes aux limites périodiques par un procédé d'identification des termes de même puissance en ε . Pour plus de détails et plus d'applications, on se référera aux ouvrages classiques de A. Bensoussan & al. [35] et de E. Sanchez-Palencia [123].

Plus précisément, on suppose que u^ε possède un développement asymptotique de la forme suivante :

$$u^\varepsilon(x) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \dots, \quad y \equiv x/\varepsilon \quad (1.55)$$

où les termes u_i sont Y -périodiques en la variable y pour chaque x fixé dans $\bar{\Omega}$.

Etant donné que (1.50) est une équation elliptique linéaire d'ordre 2 et que le second membre f ne dépend pas de ε , il convient donc de n'étudier ces équations (1.50)-(1.51) qu'à l'ordre -2 , -1 et 0 . Dans ce type de problèmes, la première équation obtenue par

identification à l'ordre -2 de (1.50) donne une information sur le premier terme u_0 dans le développement asymptotique de la solution u^ε . Dans ce genre de problèmes, ce terme est en général obtenu indépendamment de la variable microscopique et il est la limite faible de u^ε . La deuxième équation obtenue à l'ordre -1 permet de relier en général le terme "correcteur" u_1 d'ordre 1 dans le développement asymptotique de u^ε à u_0 et ceci grâce à la linéarité de (1.50). Enfin la troisième équation obtenue à l'ordre 0 déterminera le problème homogénéisé, c'est à dire le problème limite et ce en s'aidant d'une condition de compatibilité caractéristique de ces problèmes aux limites périodiques. Comme signalé plus haut, ce type de procédé, bien que très utilisé par les physiciens et les ingénieurs, n'est que formel et donc du point de vue mathématique, il est important de justifier la convergence de u^ε vers u dans une topologie précise, ou d'une autre manière justifier le développement asymptotique de u^ε à un ordre déterminé. Nous allons pour cela utiliser la méthode de l'énergie de L. Tartar. Voir le sous-paragraphe suivant.

Avant de décrire le procédé, nous allons commencer par donner quelques notations.

Notation 1.1 ∇_x, div_x (resp. ∇_y, div_y) désigne le gradient, la divergence par rapport à la variable x (resp. y). Pour $x \in \Omega$, on note $X^\varepsilon = \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$.

On utilisera les deux règles de dérivation suivantes : pour une fonction $g(x, y)$ régulière sur $\Omega \times \mathbb{R}^N$ on a

$$\nabla(g(X^\varepsilon)) = (\nabla_x g)(X^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} (\nabla_y g)(X^\varepsilon) \quad (1.56)$$

et pour toute fonction vectorielle $G(x, y)$ régulière sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ on a

$$\text{div}(G(X^\varepsilon)) = (\text{div}_x G)(X^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} (\text{div}_y G)(X^\varepsilon). \quad (1.57)$$

On supposera pour simplifier que les fonctions u_i sont assez régulières sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ justifiant les calculs qui suivent. Ainsi, par exemple

$$\nabla u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} (\nabla_y u_0) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \left((\nabla_x u_k) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + (\nabla_y u_{k+1}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right).$$

En injectant le développement asymptotique (1.55) et en tenant de compte des règles de dérivation (1.56) et (1.57), on obtient formellement :

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \operatorname{div}_y (a \nabla_y u_0) (X^\varepsilon) + \\ & \varepsilon^{-1} [\operatorname{div}_y (a (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) + \operatorname{div}_x (a \nabla_y u_0)] (X^\varepsilon) + \\ & \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^k [\operatorname{div}_y (a (\nabla_y u_{k+2} + \nabla_x u_{k+1})) + \operatorname{div}_x (a (\nabla_y u_{k+1} + \nabla_x u_k))] (X^\varepsilon) = -f(x). \end{aligned}$$

En procédant par identification suivant les puissances de ε dans cette dernière équation, il vient alors :

$$-\operatorname{div}_y (a \nabla_y u_0) = 0, \quad (1.58)$$

$$-\operatorname{div}_y (a \nabla_y u_1) = \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_0) + \operatorname{div}_x (a \nabla_y u_0), \quad (1.59)$$

$$-\operatorname{div}_y (a \nabla_y u_2) = f + \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (a (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)), \quad (1.60)$$

$$-\operatorname{div}_y (a \nabla_y u_{k+2}) = \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_{k+1}) + \operatorname{div}_x (a (\nabla_y u_{k+1} + \nabla_x u_k)), \quad k \geq 1. \quad (1.61)$$

A noter que ces équations (1.58)-(1.61) sont posées dans l'ouvert Y pour chaque x fixé dans Ω . De plus il faut ajouter à ces équations les conditions aux limites périodiques suivantes

$$u_0 : y \longmapsto u_0(x, y) \quad Y - \text{périodique}, \quad (1.62)$$

$$u_1 : y \longmapsto u_1(x, y), \quad Y - \text{périodique}, \quad (1.63)$$

$$u_2 : y \longmapsto u_2(x, y), \quad Y - \text{périodique}, \quad (1.64)$$

$$u_k : y \longmapsto u_k(x, y), \quad Y - \text{périodique}, \quad k \geq 1. \quad (1.65)$$

Nous allons par la suite étudier les problèmes aux limites : (1.58) et (1.62), (1.59) et (1.63), (1.60) et (1.64), (1.61) et (1.65). Remarquons que tous ces problèmes peuvent s'écrire :

$$(\wp_k) \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y (a \nabla_y u_k) = F_k, \\ u_k : y \longmapsto u_k(x, y), \quad Y - \text{périodique} \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_0) + \operatorname{div}_x (a \nabla_y u_0), \\
F_2 &= f + \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (a (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)), \\
F_k &= \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_{k-1}) + \operatorname{div}_x (a (\nabla_y u_{k-1} + \nabla_x u_{k-2})), \quad k \geq 3.
\end{aligned}$$

Afin de construire les formulations variationnelles correspondantes aux problèmes (φ_k) , nous avons besoin d'introduire deux espaces fonctionnelles suivants. Pour cela nous avons besoin de donner quelques notations. Soit pour $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned}
S_i^0 &: = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \bar{Y} : y_i = 0\}, \\
S_i^1 &: = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \bar{Y} : y_i = 1\}.
\end{aligned}$$

On considère $H_{\#}^1(Y)$ le sous-espace de $H^1(Y)$ des applications φ ayant la même trace sur les faces opposées de ∂Y . Soit $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ l'espace quotient de $H_{\#}^1(Y)$ par les applications constantes. La relation d'équivalence est la suivante :

$$u, v \in H_{\#}^1(Y), \quad u \mathfrak{R} v \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad u = v + \alpha, \quad \text{sur } Y.$$

On notera également $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'espace

$$V_{\#} = \left\{ \varphi \in H_{\#}^1(Y) : \int_Y \varphi \, dy = 0 \right\}$$

via l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R} &\longrightarrow V_{\#} \\
\dot{v} &\longmapsto v - \int_Y v \, dy.
\end{aligned}$$

La norme sur $V_{\#}$ est donnée grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir Théorème A.8.) par

$$\|\varphi\|_{V_{\#}} = \left(\int_Y |\nabla \varphi|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le problème (φ_k) est formellement équivalent au problème variationnel suivant :

pour $x \in \Omega$ fixé, trouver $u_k(x, \cdot) \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ tel que pour tout $\varphi \in H_{\#}^1(Y)$ on a

$$\sum_{i,j=1}^N \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy = \int_Y F_k \varphi \, dy. \quad (1.66)$$

Afin d'étudier ce problème, nous énonçons le résultat suivant :

Lemme 1.3 *On considère pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ des applications mesurables $\alpha_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, Y -périodiques et vérifiant :*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(y) \xi_j \xi_i &\geq c_0 \sum_{i=1}^N (\xi_i)^2 \text{ et } \left| \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(y) \xi_j \theta_i \right| \leq c_0^{-1} \sum_{i=1}^N \xi_i \theta_i, \quad y \in Y, \\ \forall \xi &= (\xi_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

avec $c_0 > 0$ une constante indépendante de la variable y . Soit $\eta \in H_{\#}^1(Y)^*$: le dual de $H_{\#}^1(Y)$. On pose

$$\begin{aligned} a(\psi, \varphi) &= \sum_{i,j=1}^N \int_Y \alpha_{ij}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy, \quad \psi, \varphi \in H_{\#}^1(Y) \\ \langle \eta, \varphi \rangle &= \int_Y \eta(y) \varphi(y) \, dy. \end{aligned}$$

Alors le problème variationnel :

$$\text{Trouver } \zeta \in H_{\#}^1(Y) \text{ tel que pour tout } \varphi \in H_{\#}^1(Y), \quad (1.67)$$

$$a(\zeta, \varphi) = \langle \eta, \varphi \rangle \quad (1.68)$$

admet une solution unique dans $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ si et seulement si η vérifie la condition de

compatibilité suivante :

$$\langle \eta, 1 \rangle = 0. \quad (1.69)$$

Preuve. En prenant par exemple $\varphi \equiv 1 \in H_{\#}^1(Y)$ dans (1.68), on obtient sans peine (1.69).

Réciproquement, supposons (1.69) et montrons que le problème (1.67)-(1.68) admet une solution unique $\zeta \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$. Nous allons à cet effet utiliser le Lemme de Lax-Milgram (Théorème A.11.).

L'espace $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ est muni (rappelons-le) de la norme

$$\|\varphi\|_{1,\#} := \left(\int_Y |\nabla_y \varphi|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a pour tout $\varphi, \psi \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |a(\varphi, \psi)| &= \int_Y |\alpha_{ij}(y) \partial_j \varphi \partial_i \psi| \, dy \leq c_0^{-1} \int_Y \partial_i \varphi \partial_i \psi \, dy \leq c_0^{-1} \|\varphi\|_{1,\#} \|\psi\|_{1,\#}, \\ a(\varphi, \varphi) &= \int_Y \alpha_{ij}(y) \partial_j \varphi \partial_i \varphi \, dy \geq c_0 \int_Y \partial_i \varphi \partial_i \varphi \, dy = c_0 \|\varphi\|_{1,\#}^2, \end{aligned}$$

c'est à dire que $a_{\#}$ est continue et coercive sur $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R} \times H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$. De plus, grâce à la condition de compatibilité (1.69) et grâce aussi à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (Théorème A.8.), on a

$$\begin{aligned} |\langle \eta, \varphi \rangle| &= \left| \left\langle \eta, \varphi - \int_Y \varphi \, dy \right\rangle \right| \\ &\leq \|\eta\|_{H_{\#}^1(Y)^*} \left\| \varphi - \int_Y \varphi \, dy \right\|_{H_{\#}^1(Y)} \\ &\leq C \|\varphi\|_{1,\#}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme de Lax-Milgram (Théorème A.11.), le problème

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \zeta &\in H_{\#}^1(Y) \text{ tel que pour tout } \varphi \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}, \\ a(\zeta, \varphi) &= \langle \eta, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (1.70)$$

admet donc une unique solution $\zeta \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$. En utilisant encore une fois (1.69), la solution ζ satisfait aussi à

$$a(\zeta, \psi) = \langle \eta, \psi \rangle$$

pour tout $\psi \in H_{\#}^1(Y)$. Il suffit de prendre dans (1.70) $\varphi = \psi - \int_Y \psi \, dy$.

Par conséquent (1.67)-(1.68) admet une solution $\zeta \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$. Ce qui achève la preuve du Lemme. ■

Nous avons aussi besoin du Lemme suivant

Lemme 1.4 *Pour tout $\varphi \in H_{\#}^1(Y)$, on a*

$$\int_{\partial Y} \varphi(y) \cdot \nu(y) \, ds(y) = 0$$

où $\nu(y)$ désigne la normale unitaire à ∂Y dirigée vers l'extérieur de Y et $ds(y)$ est l'élément de volume pour ∂Y .

Preuve. Soit e_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^N . Il est à noter que pour tout $z \in Y_i^0$ on a $z + e_i \in Y_i^1$ et pour tout $i = 1, 2, \dots, N$, $\varphi(z + e_i) = \varphi(z)$ car φ est Y -périodique et $\nu(z + e_i) = -\nu(z)$ parce que Y_i^0 et Y_i^1 sont deux faces opposées. Ainsi en effectuant un changement de variable on obtient

$$\begin{aligned} \int_{S_i^1} \varphi(y) \nu(y) \, ds(y) &= \int_{S_i^0} \varphi(z + e_i) \nu(z + e_i) \, ds(z), \quad y = z + e_i \\ &= - \int_{S_i^0} \varphi(z) \nu(z) \, ds(z) \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_{\partial Y} \varphi(y) \nu(y) \, ds(y) &= \sum_{i=1}^N \left(\int_{S_i^0} \varphi(y) \nu(y) \, ds(y) + \int_{S_i^1} \varphi(y) \nu(y) \, ds(y) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Revenons aux problèmes (1.66) et appliquons les Lemmes 1.3 et 1.4. Ceci se fera en trois étapes.

1^{er} étape. Pour $k = 0$, la condition (1.69) est clairement satisfaite. De plus l'application nulle $\dot{0}$ est évidemment une solution de (1.66) et par unicité $\dot{0}$ est bien la solution de (1.66) dans $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$. Ainsi pour chaque $x \in \Omega$, $\exists u(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\dot{0} = \dot{u}(x)$ et par suite on peut écrire

$$u_0(x, y) = u(x), \quad x \in \Omega, \quad y \in Y.$$

2^{ème} étape. Pour $k = 1$, en utilisant le fait que u_0 est indépendant de y et en s'aidant de la formule de la divergence et du Lemme 1.4 puisque a est Y -périodique, on obtient

$$\begin{aligned} \langle F_1, 1 \rangle &= \int_Y [\operatorname{div}_y (a \nabla_x u_0) + \operatorname{div}_x (a \nabla_y u_0)] \, dy \\ &= \int_Y \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_0) \, dy \\ &= \int_{\partial Y} (a(y) \nabla_x u_0) \cdot \nu(y) \, ds \\ &= \left(\int_{\partial Y} {}^t \nu(y) a(y) \, ds \right) \cdot \nabla_x u_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est à dire (1.69). Ainsi pour $x \in \Omega$ fixé, il existe un unique $u_1(x, \cdot) \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ tel que pour tout $\varphi \in H_{\#}^1(Y)$

$$a(u_1(x, \cdot), \varphi) = \langle F_1, \varphi \rangle = - \int_Y \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_0) \varphi \, dy.$$

De plus, grâce à la formule de Green et au Lemme 1.4, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_Y \operatorname{div}_y (a \nabla_x u_0) \varphi \, dy &= \left(\int_Y {}^t \nu a \varphi \, dy \right) \cdot \nabla_x u_0 - \int_Y (a \nabla_x u_0) \nabla_y \varphi \, dy \\ &= - \left(\int_Y {}^t \nabla_y \varphi a \, dy \right) \cdot \nabla_x u_0 \end{aligned}$$

et par conséquent $u_1(x, \cdot)$ est solution de

$$a(u_1(x, \cdot), \varphi) = \left(\int_Y {}^t \nabla_y \varphi a \, dy \right) \cdot \nabla_x u_0$$

En écrivant que

$$\nabla_x u_0(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) e_i, \quad \lambda_i(x) = \frac{\partial u_0}{\partial x_i},$$

il vient que

$$a(u_1(x, \cdot), \varphi) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \left(\int_Y a e_i \nabla_y \varphi \, dy \right). \quad (1.71)$$

Remarquons que le problème :

pour $i = 1, 2, \dots, N$, trouver $\omega_i \in H_{\#}^1(Y) / \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varphi \in H_{\#}^1(Y)$

$$a(\omega_i, \varphi) = \int_Y a e_i \nabla_y \varphi \, dy \quad (1.72)$$

admet une solution unique et ce en vertu du Lemme 1.3. Il est à noter que dans le problème (1.72) la variable macroscopique x n'y apparaît pas. De plus ω_i est aussi solution du problème aux limites :

$$(P_i) \begin{cases} -\operatorname{div}_y (a \nabla (\omega_i - y_i)) = 0 \text{ p. p. dans } Y, \\ y \mapsto \omega_i(y) \text{ } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

On remarque aussi que la première équation du problème (P_i) s'écrit aussi

$$\operatorname{div}_y (a \nabla \omega_i) = \operatorname{div}_y (a e_i) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_k} \text{ p. p. dans } Y. \quad (1.73)$$

Ensuite de (1.71) et (1.72) on obtient pour $x \in \Omega$ fixé et pour tout $\varphi \in H_{\#}^1(Y)$

$$a \left(u_1(x, \cdot) - \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \omega_i, \varphi \right) = 0.$$

Or, le problème qui consiste à trouver $\omega \in H_{\#}^1(Y) / \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varphi \in H_{\#}^1(Y)$ $a(\omega, \varphi) = 0$ admet comme solution unique $\omega = \dot{0} \in H_{\#}^1(Y) / \mathbb{R}$. Ce qui revient à dire que

ω est nulle à une constante près. Ainsi pour $x \in \Omega$

$$u_1(x, \cdot) - \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \omega_i(\cdot) = \omega(x),$$

autrement dit

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) \omega_i(y) + \omega(x). \quad (1.74)$$

Au vu de la relation (1.74), on a découplé les deux variables macroscopique x et microscopique y de sorte que le problème (1.72) est un problème microscopique.

Remarque 1.8 *Puisque $e_i = \nabla_y y_i$, il vient que*

$$a(\omega_i, \varphi) = \int_Y a \nabla_y \omega_i \nabla_y \varphi \, dy = \int_Y a e_i \nabla_y \varphi \, dy = \int_Y a \nabla_y y_i \nabla_y \varphi \, dy.$$

On serait tenter de dire que la solution du problème (1.72) est $\omega_i(y) = y_i$, mais ceci est complètement faux puisque $y_i \notin H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$. Plus précisément, y_i n'est pas périodique.

3^{ème} étape. $k = 2$. Dans ce cas la condition de compatibilité (1.69) se traduit par

$$0 = \langle F_2, 1 \rangle = \int_Y (f + \operatorname{div}_y(a \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x(a(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0))) \, dy. \quad (1.75)$$

Ainsi pour que le problème (1.66) avec $k = 2$ admette pour $x \in \Omega$ fixé une solution unique $u_2(x, \cdot) \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ il faut et il suffit que (1.75) soit satisfaite. Regardons de plus près cette équation. En utilisant le Théorème de la divergence et le Lemme 1.4, on a

$$\int_Y \operatorname{div}_y(a \nabla_x u_1) \, dy = \left(\int_{\partial Y} {}^t \nu a \, dy \right) \nabla_x u_1 - \int_{\partial Y} a \nabla_y 1 \nabla_x u_1 \, dy = 0. \quad (1.76)$$

D'autre part, en utilisant la relation (1.74), on peut écrire pour $j = 1, 2, \dots, N$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_k}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_l}(x) \omega_l(y) + \omega(x) \right)$$

et par conséquent

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_k}(x, y) = \sum_{l=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_l}(x) \frac{\partial \omega_l}{\partial y_k}(y)$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y_k}(x, y) + \frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \omega_j}{\partial y_k}(y) + \frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial y_k}(y) + \delta_{jk} \right) \end{aligned} \quad (1.77)$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

est le symbole de Krönecker.

Notons

$$a_{ij}^*(y) = \sum_{k=1}^N a_{ik}(y) \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial y_j}(y) + \delta_{kj} \right), \quad a_{ij}^{\text{hom}} = \int_Y a_{ij}^*(y) \, dy, \quad 1 \leq i, l \leq N.$$

Ainsi d'après (1.77), la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $a(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} a(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)_i &= \sum_{k=1}^N \left(a_{ik}(y) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_k} + \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N \left(a_{ik}(y) \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial y_k}(y) + \delta_{jk} \right) \right) \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \\ &= \sum_{j=1}^N a_{ij}^*(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \end{aligned}$$

et par suite

$$\text{div}_x (a(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) = \text{div}_x (a^*(y) \nabla u_0).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_Y \operatorname{div}_x (a (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) \, dy &= \int_Y \operatorname{div}_x (a^*(y) \nabla u_0) \, dy \\ &= \operatorname{div}_x (a^{\text{hom}} \nabla u_0). \end{aligned} \quad (1.78)$$

D'après (1.76) et (1.78), la condition de compatibilité (1.75) devient

$$0 = \int_Y (f + \operatorname{div}_x (a^{\text{hom}} \nabla u_0)) \, dy$$

c'est à dire

$$-\operatorname{div}_x (a^{\text{hom}} \nabla u_0(x)) = \int_Y f(x) \, dy = |Y| f(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Pour obtenir une condition aux limites sur le bord de Ω , on insérera formellement le développement asymptotique (1.55) dans la condition (1.51) et on identifie à l'ordre 0 seulement. On trouve alors

$$u_0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

On récapitule en disant que u_0 le terme d'ordre 0 dans le développement (1.55) vérifie le problème aux limites

$$(\mathcal{P}^{\text{hom}}) \begin{cases} -\operatorname{div}_x (a^{\text{hom}} \nabla u_0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

appelé communément problème macrosopique car il ne contient pas de variable microscopique. Il est aussi appelé problème homogénéisé par opposition au problème (1.50)-(1.51) qui lui contient des coefficients fortement oscillants et par suite fortement hétérogènes.

Remarque 1.9 *On pourra montrer que la matrice a^{hom} est définie positive :*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_j \xi_i \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^N \xi_i^2.$$

avec la même constante α_0 donnée dans (1.49). Pour plus de détails, voir A. Bensoussan & al. [35]. De ce fait le problème homogénéisé (φ^{hom}) admet une solution unique faible $u^{\text{hom}} \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+2}(\Omega)$ si Ω est régulier et $f \in H^k(\Omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donc la solution faible du problème homogénéisé (φ^{hom}) est plus régulière que celle du modèle initial (1.50)-(1.51). La raison principale est que la matrice $a^{\text{hom}} \in C^\infty$ alors que a n'est que L^∞ . Voir aussi les sous-paragraphes 1.2.1 et 1.2.2.

Signalons que le procédé utilisé pour la construction de (φ^{hom}) est purement formel. Il est donc nécessaire du point de vue mathématique de justifier le développement asymptotique du moins à l'ordre 0, c'est à dire montrer que la solution u^ε converge vers u_0 dans une topologie à préciser. Il existe pour cela plusieurs techniques. Nous citerons entre autres la convergence à deux échelles et la méthode de l'énergie de Luc Tartar que nous décrirons dans le paragraphe qui suit.

Enfin le problème (φ^{hom}) est formellement équivalent à

$$\text{trouver } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} a^{\text{hom}} \nabla u_0 \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

1.4.3 Méthode de l'énergie ou des fonctions test oscillantes

Nous allons commencer par introduire le problème aux limites suivant :

$$(\varphi^*) \left\{ \begin{array}{l} -\text{div}({}^t a \nabla (\omega_i^* - y_i)) = 0 \text{ dans } Y, \\ y \longmapsto \omega_i^*(y) \text{ } Y \text{ - périodique} \end{array} \right.$$

où ${}^t a$ désigne la matrice transposée de a et $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. A noter que dans ce paragraphe, nous supposons que A n'est pas nécessairement symétrique. Le problème (φ^*) est formellement équivalent à :

$$\text{trouver } \omega_i^* \in H^1(Y) / \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } \varphi \in H^1(Y),$$

$$\int_Y {}^t a \nabla \omega_i^* \nabla \varphi \, dy = \int_Y {}^t a e_i \nabla \varphi \, dy. \quad (1.79)$$

Posons ensuite

$$w_i(y) = \omega_i^*(y) - y_i, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in Y$$

et

$$w_i^\varepsilon(x) = \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega.$$

Avant de décrire la méthode de l'énergie de L. Tartar, on donne d'abord des résultats utiles pour la suite (Lemmes 1.5 et 1.6).

Lemme 1.5 *On a les convergences faibles suivantes :*

$$w_i^\varepsilon(x) \rightharpoonup x_i \text{ faiblement dans } H^1(\Omega), \quad (1.80)$$

$$\nabla w_i^\varepsilon \rightharpoonup e_i \text{ faiblement dans } L^2(\Omega)^N, \quad (1.81)$$

$${}^t a \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \nabla w_i^\varepsilon \rightharpoonup {}^t a^{\text{hom}} e_i \text{ faiblement dans } L^2(\Omega)^N. \quad (1.82)$$

Preuve. Commençons par observer que, grâce à la formule de Green et la Y -périodicité de ω_i^* , on a

$$\int_Y \nabla_y \omega_i^*(y) \, dy = 0.$$

Comme $\omega_i^* \in L^2_{\#}(Y)$ et $\nabla_y \omega_i^* \in L^2_{\#}(Y)^N$, on a d'après le Lemme 1.1

$$\omega_i^* \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \text{ converge faiblement vers } \int_Y \omega_i^*(y) \, dy, \quad (1.83)$$

$$\nabla_y \omega_i^* \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \text{ converge faiblement vers } \int_Y \nabla_y \omega_i^*(y) \, dy = 0. \quad (1.84)$$

Soit $\psi \in D(\bar{\Omega})$. Posons $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. On a

$$\int_{\Omega} w_i^\varepsilon(x) \psi(x) \, dx = -\varepsilon \int_{\Omega} \omega_i^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(x) \, dx + \int_{\Omega} x_i \psi(x) \, dx.$$

En vertu de (1.83), on a bien

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w_i^\varepsilon(x) \psi(x) \, dx = \int_{\Omega} x_i \psi(x) \, dx.$$

On a aussi

$$(\nabla w_i^\varepsilon)(x) = -(\nabla_y \omega_i^*)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + e_i.$$

Ainsi, en utilisant (1.84) on a

$$\int_{\Omega} \nabla w_i^\varepsilon(x) \psi(x) \, dx = \int_{\Omega} \left(-(\nabla_y \omega_i^*)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + e_i \right) \psi(x) \, dx$$

et donc

$$\int_{\Omega} \nabla w_i^\varepsilon(x) \psi(x) \, dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} e_i \psi(x) \, dx.$$

D'autre part, grâce encore au Lemme 1.1 (puisque ${}^t a \nabla w_i \in L^2_{\#}(Y)^N$), on a

$${}^t a \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) (\nabla w_i) \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \text{ converge faiblement vers } \int_Y {}^t a(y) \nabla w_i(y) \, dy. \quad (1.85)$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_Y a_{kj} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} \, dy &= \sum_{k=1}^N \int_Y a_{kj} \left(\frac{\partial \omega_i^*}{\partial y_k} + \delta_{ik} \right) \, dy \\ &= \sum_{k=1}^N \int_Y \left(a_{kj} \frac{\partial \omega_i^*}{\partial y_k} + a_{ij} \right) \, dy. \end{aligned} \quad (1.86)$$

D'après (1.73) on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \int_Y a_{kj} \frac{\partial \omega_i^*}{\partial y_k} dy &= - \sum_{k=1}^N \int_Y \frac{\partial a_{kj}}{\partial y_k} \omega_i^* dy = \int_Y \operatorname{div} (a \nabla \omega_j) \omega_i^* dy \\
&= \int_Y \omega_j \operatorname{div} ({}^t a \nabla \omega_i^*) dy = - \sum_{k=1}^N \int_Y \omega_j \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_k} dy \\
&= \sum_{k=1}^N \int_Y a_{ik} \frac{\partial \omega_j}{\partial y_k} dy.
\end{aligned}$$

Il en découle de (1.86) que

$$\sum_{k=1}^N \int_Y a_{kj} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} dy = \sum_{k=1}^N \int_Y \left(a_{ik} \frac{\partial \omega_j}{\partial y_k} + a_{ij} \right) dy = \sum_{k=1}^N \int_Y a_{ik} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial y_k} + \delta_{kj} \right) dy.$$

C'est à dire

$$\sum_{k=1}^N \int_Y a_{kj} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} dy = a_{ij}^{\operatorname{hom}}. \tag{1.87}$$

On peut dire grâce à (1.86) et à (1.87) que pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ fixé, la $j^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur $\int_Y {}^t a(y) \nabla w_i(y) dy$ est le coefficient de $a_{ij}^{\operatorname{hom}}$ de la matrice (a^{hom}) . Autrement dit le vecteur $\int_Y {}^t a(y) \nabla w_i(y) dy$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice (a^{hom}) :

$$\int_Y {}^t a(y) \nabla w_i(y) dy = e_i {}^t a^{\operatorname{hom}}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque 1.10 *D'après le Théorème de Rellich-Kondrachov (Théorème A.6.) et en utilisant (1.80) on peut écrire que*

$$w_i^\varepsilon(x) \rightarrow x_i \text{ fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.88}$$

On a également besoin du résultat suivant

Lemme 1.6 Pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} {}^t a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla w_i^\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \, dx = 0.$$

Preuve. D'après (1.79), on a

$$-\operatorname{div} ({}^t a \nabla \omega_i^*) = -\operatorname{div} ({}^t a e_i) \text{ dans } Y,$$

c'est à dire

$$-\operatorname{div} ({}^t a \nabla w_i) = 0 \text{ dans } Y.$$

En effectuant un changement de variables $x = \varepsilon(y + k)$, on a

$$-\operatorname{div} ({}^t a \nabla w_i^\varepsilon) = 0 \text{ dans } Y_k^\varepsilon.$$

où $Y_k^\varepsilon := \varepsilon(Y + k)$, $k \in \mathbb{Z}^N$.

Ainsi pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} {}^t a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla w_i^\varepsilon(x) \nabla \varphi(x) \, dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left({}^t a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla w_i^\varepsilon(x) \right) \varphi(x) \, dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \int_{\Omega \cap Y_k^\varepsilon} \operatorname{div} \left({}^t a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla w_i^\varepsilon(x) \right) \varphi(x) \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Enfin nous allons maintenant décrire la méthode de l'énergie ou des fonctions tests oscillantes. Posons

$$\xi^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega.$$

D'après (1.52), on peut écrire : pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \xi^\varepsilon \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \tag{1.89}$$

En vertu de (1.53), on peut établir aisément l'estimation suivante :

$$\|\xi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant pas de ε . Ainsi, il existe une sous-famille de (ξ^ε) notée encore (ξ^ε) et il existe $\xi \in L^2(\Omega)^N$ tel que

$$\xi^\varepsilon \text{ converge faiblement vers } \xi \text{ dans } L^2(\Omega)^N. \quad (1.90)$$

En passant à la limite dans (1.89), on obtient

$$\int_{\Omega} \xi \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (1.91)$$

Soit maintenant $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Alors $\psi w_i^\varepsilon, \psi u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$. D'après (1.89) et le Lemme 1.6, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \xi^\varepsilon \nabla(\psi w_i^\varepsilon) \, dx &= \int_{\Omega} f \psi w_i^\varepsilon \, dx \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} {}^t a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla w_i^\varepsilon(x) \nabla(\psi u^\varepsilon) \, dx &= 0. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux équations on obtient

$$\int_{\Omega} \xi^\varepsilon (\nabla \psi) w_i^\varepsilon \, dx - \int_{\Omega} {}^t a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla w_i^\varepsilon (\nabla \psi) u^\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} f \psi w_i^\varepsilon \, dx. \quad (1.92)$$

En vertu des convergences (1.54), (1.82), (1.88) et (1.90) on peut passer à la limite dans (1.92). On trouve alors

$$\int_{\Omega} \xi (\nabla \psi) x_i \, dx - \int_{\Omega} {}^t a^{\text{hom}} e_i (\nabla \psi) u \, dx = \int_{\Omega} f \psi x_i \, dx. \quad (1.93)$$

D'autre part, d'après (1.91), on a

$$\int_{\Omega} \xi (\nabla \psi) x_i \, dx = \int_{\Omega} f \psi x_i \, dx - \int_{\Omega} \xi \psi \nabla x_i \, dx. \quad (1.94)$$

Ainsi, de (1.93) et (1.94) on obtient

$$- \int_{\Omega} {}^t a^{\text{hom}} e_i (\nabla \psi) u \, dx = \int_{\Omega} \xi \psi \nabla x_i \, dx = \int_{\Omega} \xi \psi e_i \, dx. \quad (1.95)$$

En effectuant une intégration par parties dans (1.95) on trouve

$$\int_{\Omega} (\text{div} ({}^t a^{\text{hom}} e_i u) - \xi e_i) \psi \, dx = 0$$

pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Donc

$$\xi e_i = \text{div} ({}^t a^{\text{hom}} e_i u).$$

Un simple calcul montre qu'en fait

$$\xi e_i = \text{div} ({}^t a^{\text{hom}} e_i u) = (a^{\text{hom}} \nabla u)_i,$$

autrement dit

$$\xi = a^{\text{hom}} \nabla u.$$

Finalement le problème homogénéisé (1.91) s'écrit alors

$$\int_{\Omega} a^{\text{hom}} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (1.96)$$

où $v \in H_0^1(\Omega)$. La formulation faible (1.96) entraîne le problème aux limites homogénéisé suivant :

$$\begin{aligned} -\text{div} (a^{\text{hom}} \nabla u) &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Remarque 1.11 *L'idée principale de cette technique est donc d'utiliser des fonctions tests adéquates (en l'occurrence w_i^ε , $i = 1, 2, \dots, N$) dans l'équation (1.89) puis u^ε dans celle donnée dans le Lemme 1.6 et de soustraire les deux équations. Ce qui permet d'éliminer les produits de familles faiblement convergentes et de retrouver des produits de familles fortement et faiblement convergentes, où l'on pourra évidemment passer à la limite.*

Chapitre 2

Convergence à deux échelles

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à un concept de convergence dans l'espace de Lebesgue L^p très bien utilisé dans l'étude de problèmes d'homogénéisation. Plus précisément si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , Y le cube unité et ε un nombre strictement positif prenant ses valeurs dans une suite numérique convergente vers 0 alors d'après G. Nguetseng [112], de toute famille uniformément bornée (u^ε) dans $L^2(\Omega)$ il existe une sous-famille notée encore (u^ε) et il existe $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ tels que pour toute fonction φ assez régulière et Y -périodique

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy \quad (2.1)$$

Si de plus, (u^ε) est uniformément bornée dans $H^1(\Omega)$, alors u est indépendante de la variable microscopique y : $u_0(x, y) = u(x)$, voir Théorème 2.7. Cette convergence (2.1) bien qu'introduite par G. Nguetseng, a été appelée plus tard convergence à deux échelles par G. Allaire [11], où il a étudié plusieurs problèmes d'homogénéisation périodiques aussi linéaires que non linéaires. Voir également D. Lukassen, G. Nguetseng et P. Wall [103]. Nous rappellerons les quelques résultats essentiels utilisés tout au long de ce travail et qui ont permis la construction des problèmes homogénéisés principalement aux chapitres 4, 3, 5 et 6.

Ce chapitre est réparti comme suit : au paragraphe 2.2 suivant, on rappellera les

différents espaces fonctionnels dans lesquels a lieu la convergence à deux échelles, au paragraphe 2.3 on introduira cette notion de convergence et on donnera les principaux résultats. Enfin au dernier paragraphe 2.4, on s'intéressera à une application de cette notion à l'homogénéisation dans les milieux composites à deux phases.

2.2 Quelques espaces fonctionnels

On rappelle que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et que $Y = (0, 1)^N$ est le cube unité. On note $\mathcal{C}_\#(Y)$ l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R}^N et qui sont Y -périodiques. On munira $\mathcal{C}_\#(Y)$ de la norme de la convergence uniforme :

$$\|v\|_{\mathcal{C}_\#(Y)} = \sup \{|v(y)|, y \in \bar{Y}\}.$$

Il est facile de voir que $\mathcal{C}_\#(Y)$ est un espace de Banach séparable.

Soit $p \geq 1$. Par définition, $L^p(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ est l'espace des (classes) de fonctions $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_\#(Y)$ qui sont Lebesgue-mesurables sur Ω et telles que

$$\int_{\Omega} \|\varphi(x)\|_{\mathcal{C}_\#(Y)}^p dx < +\infty.$$

Dans toute la suite on prendra comme norme sur cet espace :

$$\|\varphi(x, y)\|_{L^p(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))} := \left(\int_{\Omega} \left(\sup_{y \in Y} |f(x, y)| \right)^p dx \right)^{1/p}.$$

On remarquera que toute fonction φ de $L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ peut-être identifiée à une fonction ψ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^N$ par la relation suivante : $\psi(x, y) = \varphi(x)(y)$. Nous énonçons d'abord et sans démonstration le Théorème de Pettis, voir par exemple dans K. Yoshida [134, page 131].

Théorème 2.1 (Pettis) *Une fonction φ définie sur Ω à valeurs dans $\mathcal{C}_\#(Y)$ est mesurable si et seulement si*

(i) *pour tout $\vartheta \in \mathcal{C}'_\#(Y)$: l'espace dual de $\mathcal{C}_\#(Y)$, la fonction $x \mapsto \langle \vartheta, \varphi(x) \rangle$ est mesurable*

et

(ii) s'il existe $\omega \subset \Omega$ tel que ω est de mesure nulle et $\{\varphi(x), x \in \Omega \setminus \omega\}$ est séparable.

Maintenant on donne le théorème concernant la caractérisation des fonctions de l'espace $L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$. Pour la preuve, nous renvoyons à G. Allaire [11].

Théorème 2.2 Une fonction φ est dans $L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ si et seulement s'il existe une partie $E \subset \Omega$, Lebesgue-négligeable telle que

i) pour tout $x \in \Omega \setminus E$, la fonction $y \mapsto \varphi(x, y)$ est continue et Y -périodique,

ii) pour tout $y \in Y$, la fonction $x \mapsto \varphi(x, y)$ est mesurable et

iii) la fonction $x \mapsto \max\{|\varphi(x, y)|, y \in \bar{Y}\} \in L^1(\Omega)$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ un paramètre prenant ses valeurs dans une suite numérique positive $(\varepsilon_m)_m$ convergente vers 0. Nous avons le résultat de convergence pour les fonctions de $L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$.

Théorème 2.3 Soit $\varphi \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$. Alors $x \mapsto \varphi^\varepsilon(x) := \varphi(x, x/\varepsilon)$ est mesurable sur Ω . On a

$$\|\varphi(x, x/\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\varphi(x, y)\|_{L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} \varphi(x, y) dx dy.$$

Preuve. Voir G. Allaire [11]. ■

Plus généralement des résultats similaires à celui énoncé dans le Théorème 2.3 peuvent être démontrés pour d'autres espaces fonctionnels $\mathcal{E}(\Omega; Y) := L^p(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$, $L^p_\#(Y; \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$ ou $\mathcal{C}(\bar{\Omega}; \mathcal{C}(Y))$. Plus précisément on a

Théorème 2.4 (G. Allaire [11]) Soit $\mathcal{E}(\Omega; Y) := L^p_\#(Y; \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$, $L^p(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$, $1 \leq p < \infty$ ou $\mathcal{C}(\bar{\Omega}; \mathcal{C}_\#(Y))$. Alors $\mathcal{E}(\Omega; Y)$ possède les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{E}(\Omega; Y)$ est un espace de Banach séparable;
2. $\mathcal{E}(\Omega; Y)$ est dense dans $L^p(\Omega \times Y)$;
3. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega; Y)$. Alors $x \mapsto \varphi^\varepsilon(x) := \varphi(x, x/\varepsilon)$ est mesurable sur Ω et on a

$$\|\varphi(x, x/\varepsilon)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\varphi(x, y)\|_{\mathcal{E}(\Omega; Y)}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^p dx = \int_{\Omega \times Y} |\varphi(x, y)|^p dx dy.$$

On pourra également citer le résultat de convergence faible dû à J. Ball et F. Murat [32].

Théorème 2.5 Soit $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y)$, $\varphi_1 \in L^{sp}(\Omega)$, $\varphi_2 \in L_{\#}^{tp}(Y)$ avec $1 \leq s, t \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$ et tel que $1/s + 1/t = 1$. Alors $x \mapsto \varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x, x/\varepsilon) \in L^p(\Omega)$ et

$$\varphi^\varepsilon \rightharpoonup \left(\int_Y \varphi_2 \right) \varphi_1 \text{ dans } L^p(\Omega).$$

2.3 Notion de convergence à deux échelles

Nous allons dans ce paragraphe introduire le concept de la convergence à deux échelles qui sera utilisé pour déterminer rigoureusement tous les problèmes homogénéisés étudiés dans ce travail. Dans toute la suite p et q désignent deux réels conjugués, i.e., $1/p + 1/q = 1$ avec $p > 1$. Nous rappelons la définition de la convergence à deux échelles introduite par G. Nguetseng [112] et développé par G. Allaire [11].

Définition 2.1 On dit qu'une famille (w^ε) dans $L^p(\Omega)$ converge à deux échelles vers $w_0 \in L^p(\Omega \times Y)$ (et on écrit $w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} w_0$) si pour toute fonction test admissible $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_{\#}(Y))$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy. \quad (2.2)$$

w_0 est appelée la limite à deux échelles de (w^ε)

Il est important de souligner que si la limite à deux échelles existe alors elle est unique. En effet, si $w_1 \in L^p(\Omega \times Y)$ est une autre limite à deux échelles alors pour tout $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} w_1(x, y) \varphi(x, y) \, dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx \\ \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) \, dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx \end{aligned}$$

et en faisant la différence on trouve

$$\int_{\Omega \times Y} (w_1(x, y) - w_0(x, y)) \varphi(x, y) \, dx dy = 0$$

ce qui entraîne $w_1(x, y) - w_0(x, y) = 0$, $x \in \Omega$ et pour tout $y \in Y$.

Remarque 2.1 On pourrait remplacer dans la définition le cube unité Y par n'importe quel ouvert P formant un réseau de \mathbb{R}^N , c'est à dire $\cup_{k \in \mathbb{Z}^N} (k + \overline{P}) = \mathbb{R}^N$ avec $(k + P) \cap (k' + P) = \emptyset$ pour $k \neq k'$. Un exemple typique est le parallélépipède

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^N t_i y_i : 0 < t_i < 1 \right\}$$

où $\{y_i\}_{1 \leq i \leq N}$ est une base de \mathbb{R}^N . Voir aussi Remarque 1.4.

Dans ce cas on multiplierait le membre de droite de 2.2 par $1/|P|$ où $|P|$ désigne le volume de P . Plus précisément on dira qu'une famille (w^ε) dans $L^p(\Omega)$ converge à deux échelles vers $w_0 \in L^p(\Omega \times P)$ si pour toute fonction test admissible $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(P))$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx = \frac{1}{|P|} \int_{\Omega \times P} w_0(x, y) \varphi(x, y) \, dx dy.$$

Supposons qu'une famille (w^ε) admette un développement asymptotique de la forme

$$w^\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^{m+1})$$

où $w_i(x, y) \in L^p(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$. Alors d'après le Théorème 2.3 on voit que pour tout $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times Y} w_i \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \int_{\Omega} w_i(x, y) \varphi(x, y) dx dy$$

et par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times Y} w^\varepsilon(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \int_{\Omega} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Ainsi on constate que la limite à deux échelles de $w^\varepsilon(x)$ est le terme d'ordre 0 de son développement asymptotique.

D'autre part si (w^ε) est une famille qui converge fortement vers une limite w dans $L^p(\Omega)$ alors (w^ε) converge à deux échelles vers $w_0(x, y) = w(x)$, $x \in \Omega$, $y \in Y$. En effet, si $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$, alors d'après les inégalités triangulaire et de Hölder (Proposition A.8.), on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy \right| \\ & \leq \|w^\varepsilon - w\|_{L^p(\Omega)} \left\| \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^q(\Omega)} + \\ & \quad \left| \int_{\Omega} w(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx - \int_{\Omega \times Y} w(x) \varphi(x, y) dx dy \right| \end{aligned}$$

Grâce au Théorème 2.4, on a

$$\|w^\varepsilon - w\|_{L^p(\Omega)} \left\| \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))} \leq \|w^\varepsilon - w\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi(x, y)\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))} \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, en vertu du Théorème 2.3 et par le fait que $w(x) \varphi(x, y) \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ on a

$$\int_{\Omega} w(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \rightarrow \int_{\Omega \times Y} w(x) \varphi(x, y) dx dy.$$

Ainsi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^{\varepsilon}(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Inversement si (w^{ε}) dans $L^p(\Omega)$ est une famille qui converge à deux échelles vers $w_0 \in L^p(\Omega \times Y)$ alors elle est bornée et converge faiblement vers $w(x) = \int_Y w_0(x, y) dy$, $x \in \Omega$. En effet, soit $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_{\#}(Y))$. On a alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^{\varepsilon}(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy. \quad (2.3)$$

Soit $\psi \in L^q(\Omega)$. On peut identifier ψ à une fonction dans $L^q(\Omega; \mathcal{C}_{\#}(Y))$ et dans ce cas en prenant $\varphi(x, y) = \psi(x)$ dans (2.3), on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^{\varepsilon}(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \psi(x) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_Y w_0(x, y) dy \right) \psi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} w(x) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi (w^{ε}) est une famille qui converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ et par conséquent elle est bornée. D'où le résultat.

Nous allons maintenant donner le résultat de compacité concernant la convergence à deux échelles.

Théorème 2.6 *De toute famille bornée dans $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-famille qui converge à deux échelles.*

Preuve. Soit (w^{ε}) une famille bornée dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que $\|w^{\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} \leq C$. Ainsi et en vertu de l'inégalité de Hölder (Proposition A.8.) et du Théorème 2.3, on a pour tout $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_{\#}(Y))$

$$\left| \int_{\Omega} w^{\varepsilon}(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right| \leq \|w^{\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_{\#}(Y))} \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_{\#}(Y))}. \quad (2.4)$$

Ainsi grâce au Théorème de Représentation de Riesz, il existe $W^\varepsilon \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^*$ le dual de $L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ tel que

$$\langle W^\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx, \quad \varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y)).$$

De plus, de (2.4) on obtient

$$\|W^\varepsilon\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^*} := \sup_{\substack{\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y)) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\langle W^\varepsilon, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))}} \leq \|w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

Ce qui entraîne que la famille (W^ε) est uniformément bornée par rapport à ε . Comme $L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ est un espace de Banach séparable (voir Théorème 2.4), il s'ensuit que l'on peut extraire une sous-famille de (W^ε) , toujours notée (W^ε) qui converge faible-* vers une limite $W \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^*$ (voir Théorème A.2. ou encore K. Yosida [134]). Ainsi pour tout $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle W^\varepsilon, \varphi \rangle = \langle W, \varphi \rangle \quad (2.5)$$

En utilisant encore une fois (2.4), on a

$$|\langle W^\varepsilon, \varphi \rangle| \leq \|w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))} \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))}. \quad (2.6)$$

En tenant compte de (2.5) et du Théorème 2.3, on obtient par passage à la limite dans (2.6) :

$$\langle W, \varphi \rangle \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))}, \quad \forall \varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y)).$$

Soit maintenant $\psi \in L^q(\Omega \times Y)$. Par densité de $L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ dans $L^q(\Omega \times Y)$ (Théorème 2.4), il existe alors une famille (ψ^m) dans $L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ qui converge vers ψ dans $L^q(\Omega \times Y)$. On définit alors le prolongement \tilde{W} de W à $L^q(\Omega \times Y)$ par

$$\langle \tilde{W}, \psi \rangle = \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle W, \psi^m \rangle.$$

D'après le Théorème de Représentation de Riesz (Cf. Théorème A.3), il existe $w \in L^p(\Omega \times Y)$ tel que pour tout $\psi \in L^q(\Omega \times Y)$

$$\langle \tilde{W}, \psi \rangle = \int_{\Omega \times Y} w(x, y) \psi(x, y) \, dx dy$$

et en particulier pour tout $\psi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx = \langle W, \varphi \rangle = \langle \tilde{W}, \psi \rangle = \int_{\Omega \times Y} w(x, y) \psi(x, y) \, dx dy.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Le Théorème 2.6 peut être comparé au Théorème de compacité sur l'espace $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, qui affirme que de toute famille bornée dans $L^p(\Omega)$ on peut extraire une sous-famille qui converge faiblement dans $L^p(\Omega)$.

Nous n'avons regardé jusqu'ici que la convergence à deux échelles dans les espaces de Lebesgue. Nous allons à présent nous intéresser au cas des familles bornées dans les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Nous verrons que la limite à deux échelles ne dépendent plus de la variable y . Mais avant cela nous ferons la notation suivante :

Notation 2.1 *l'espace $W_\#^{1,p}(Y)$ désigne le sous-espace de $W^{1,p}(Y)$ des (classes) de fonctions ayant la même trace sur les faces opposées. Dans toute la suite, on confondra une fonction $u \in W_\#^{1,p}(Y)$ et son prolongement Y -périodique à \mathbb{R}^N comme élément de l'espace $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Nous énonçons maintenant le résultat de convergence à deux échelles concernant les familles uniformément bornées dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.7 *Soit (w^ε) une famille uniformément bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W_0^{1,p}(\Omega)$). Alors il existe une sous-famille de (w^ε) notée encore (w^ε) et il existe $w \in W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W_0^{1,p}(\Omega)$), $w_1 \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(Y)/\mathbb{R})$ tels que l'on a*

$$w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} w,$$

$$\nabla w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \nabla w + \nabla_y w_1.$$

Preuve.

Par le Théorème 2.6, il existe une sous-famille de (w^ε) toujours notée (w^ε) et il existe $w_0 \in L^p(\Omega \times Y)$, $W_1 \in L^p(\Omega \times Y)^N$ tels que pour tout $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy \quad (2.7)$$

et pour tout $\Phi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^N$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla w^\varepsilon(x) \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} W_1(x, y) \Phi(x, y) dx dy. \quad (2.8)$$

Posons

$$w(x) = \int_Y w_0(x, y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Comme souligné plus haut, la famille (w^ε) converge faiblement vers w dans $L^p(\Omega)$. Soit $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^N$. En effectuant une intégration par parties, il vient que

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla w^\varepsilon(x) \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= -\varepsilon \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \operatorname{div}_x \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \operatorname{div}_y \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \end{aligned}$$

et en passant à la limite en tenant compte de (2.7) et (2.8) on obtient

$$0 = \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \operatorname{div}_y \Phi(x, y) dx.$$

Ce qui implique que w_0 est indépendant de la variable microscopique y (voir par exemple Alt [15, page 78]). Soit donc $w(x) = w_0(x, y)$, $y \in Y$ et $x \in \Omega$.

Soit maintenant $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^N$ tel que pour $x \in \Omega$ et pour $y \in Y$, $\operatorname{div}_y \Phi(x, y) = 0$. Une intégration par parties dans (2.8) avec prise en compte de (2.7)-(2.8) donnent

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} W_1(x, y) \Phi(x, y) dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla w^\varepsilon(x) \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \operatorname{div}_x \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\int_{\Omega \times Y} W_1(x, y) \Phi(x, y) \, dx dy = - \int_{\Omega \times Y} w(x) \operatorname{div}_x \Phi(x, y) \, dx.$$

Ce qui montre bien que $\nabla w \in L^p(\Omega)$ et que pour tout $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^N$ tel que $\operatorname{div}_y \Phi(x, y) = 0$ pour $x \in \Omega$ et $y \in Y$, on a

$$\int_{\Omega \times Y} (W_1(x, y) - \nabla w(x)) \Phi(x, y) \, dx dy = 0.$$

D'après le Théorème de de-Rham (voir L. Tartar [130] ou R. Temam [133]) il existe alors $w_1 \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(Y)/\mathbb{R})$ tel que

$$W_1(x, y) - \nabla w(x) = \nabla_y w_1(x, y)$$

pour $(x, y) \in \Omega \times Y$. ■

On supposera dans ce qui reste $N > 1$. Soit $Y_1 \subset Y$ un ouvert de Y de frontière Σ qu'on suppose assez régulière. Posons

$$\Sigma^\varepsilon = \left\{ x \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{Z}^N : \frac{x}{\varepsilon} \in \Sigma \right\}.$$

On notera que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon |\Sigma^\varepsilon|_{N-1} = |\Omega| |\Sigma|_{N-1}$$

où $|\cdot|_{N-1}$ désigne la $(N-1)$ -mesure de Hausdorff sur \mathbb{R}^N et $|\Omega|$ est le volume de Ω .

Notons ds^ε (resp. ds) l'élément de surface sur Σ^ε (resp. Σ). On a alors

Théorème 2.8 *Soit (w^ε) une famille de fonctions dans $W^{1,p}(\Omega)$ telle que*

$$\|w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \varepsilon \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N} \leq C.$$

Alors il existe une sous-famille de (w^ε) qu'on note toujours (w^ε) et il existe $w_0(x, y) \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(Y))$ tels que $w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} w_0$ et $\varepsilon \nabla w^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \nabla_y w_0$. De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} w^\varepsilon \varphi^\varepsilon ds^\varepsilon = \int_{\Omega \times \Sigma} w_0 \varphi dx ds, \quad \varphi^\varepsilon(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (2.9)$$

Preuve.

Soit (w^ε) une famille de fonctions dans $W^{1,p}(\Omega)$ vérifiant

$$\|w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \varepsilon \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^N} \leq C.$$

Alors d'après le Théorème 2.6, on peut extraire une sous-famille de (w^ε) qu'on notera toujours (w^ε) et il existe $w_0 \in L^p(\Omega \times Y)$, $W_0 \in L^p(\Omega \times Y)^N$ tels que pour tout $\varphi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy \quad (2.10)$$

et pour tout $\Phi \in L^q(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^N$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega} \nabla w^\varepsilon(x) \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} W_0(x, y) \Phi(x, y) dx dy. \quad (2.11)$$

Prenons ensuite $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))^N$ et faisons une intégration par parties dans (2.11).

Il vient alors

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\varepsilon \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \operatorname{div}_x \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \int_{\Omega} w^\varepsilon(x) \operatorname{div}_y \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right) = \\ & \int_{\Omega \times Y} W_0(x, y) \Phi(x, y) dx dy \end{aligned}$$

et en tenant compte de (2.10)-(2.11), on trouve

$$-\int_{\Omega \times Y} w_0(x, y) \operatorname{div}_y \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} W_0(x, y) \Phi(x, y) dx dy.$$

Ce qui montre que $w_0(x, y) \in L^p(\Omega; W_\#^{1,p}(Y))$ et

$$\nabla_y w_0(x, y) = W_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \times Y.$$

Pour ce qui est de (2.9), on renvoie par exemple à [13, 113]. ■

2.4 Application : Homogénéisation d'un milieu bi-composite

On considère Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N ($N \geq 3$) et on suppose que $Y =]0, 1[^N = Y_1 \cup Y_2 \cup \Sigma$ tels que $Y_1, Y_2 \subset Y$ sont deux ouverts disjoints de Y et $\Sigma = \partial Y_1 \cap \partial Y_2$. On supposera que Σ est une variété de dimension $N - 1$ et de classe C^∞ pour simplifier. Soit

$$Z_1 = \cup_{k \in \mathbb{Z}^N} (Y_1 + k), \quad \text{et} \quad Z_2 = \cup_{k \in \mathbb{Z}^N} (Y_2 + k) .$$

On suppose aussi que Z_1 est un ouvert régulier et connexe de \mathbb{R}^N . On notera

$$K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}^N : \varepsilon(k + Y_2) \subset \Omega \text{ et } \cup \varepsilon(k \pm e_i + \overline{Y_2}) \subset \Omega, \quad i = 1, \dots, N\}$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^N . On posera

$$\Omega_2^\varepsilon = \bigcup_{k \in K_\varepsilon} \varepsilon(k + Y_2), \quad \Omega_1^\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\Omega_2^\varepsilon}$$

et

$$\Sigma^\varepsilon = \partial \Omega_1^\varepsilon \cap \partial \Omega_2^\varepsilon.$$

On notera que Ω_1^ε est connexe.

Nous introduisons les données physiques du problème et nous faisons les hypothèses suivantes: Soit α (resp. β) la matrice de diffusion du milieu Z_1 (resp. Z_2) et γ le coefficient de transfert de chaleur interfacial sur Σ . Soit f_i une source de chaleur dans le milieu Z_i , $i = 1, 2$. On fait les hypothèses sur les données physiques du problème :

H1) α (resp. β) est continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique et satisfait à la condition d'ellipticité

:

$$\alpha\xi \cdot \xi \geq C|\xi|^2 \quad (\text{resp. } \beta\xi \cdot \xi \geq C|\xi|^2), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

H2) $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$;

H3) γ est une application continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique et vérifie :

$$\gamma(y) \geq C > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

On notera pour $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\alpha^\varepsilon(x) = \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \beta^\varepsilon(x) = \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \gamma^\varepsilon(x) = \varepsilon\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Le problème que nous allons homogénéiser par la technique de convergence à deux échelles est le suivant :

$$-\operatorname{div}(\alpha^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f_1 \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.12}$$

$$-\operatorname{div}(\beta^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) = f_2 \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.13}$$

$$\alpha^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = -\gamma^\varepsilon(u^\varepsilon - v^\varepsilon) \text{ sur } \Sigma^\varepsilon, \tag{2.14}$$

$$\beta^\varepsilon \nabla v^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = \alpha^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon \text{ sur } \Sigma^\varepsilon, \tag{2.15}$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{2.16}$$

où ν^ε est la normale à Σ^ε dirigée vers l'extérieur de Ω_1^ε . Ici, Ω_1^ε représente le solide 1 avec une diffusion donnée par la matrice α^ε et Ω_2^ε le solide 2 de diffusion donnée par β^ε . Les quantités physiques u^ε et v^ε sont respectivement les températures dans Ω_1^ε et Ω_2^ε . Le système (2.12) et (2.16) décrit la diffusion de la température dans le domaine composite $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$. La condition (2.14) exprime un contact rugueux [84] à l'interface Σ^ε et a pour nom condition d'interface de type Carlslaw-Jaeger, voir [5, 49].

Soit $H^\varepsilon = (H^1(\Omega_1^\varepsilon) \cap H_0^1(\Omega)) \times H^1(\Omega_2^\varepsilon)$. L'espace H^ε est muni de la norme :

$$\|(\varphi, \psi)\|_{H^\varepsilon}^2 = \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)}^2 + \varepsilon \|\varphi - \psi\|_{L^2(\Sigma^\varepsilon)}^2.$$

La formulation faible de (2.12)-(2.16) est : pour $\varepsilon > 0$ assez petit, trouver un couple $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in H^\varepsilon$, tel que pour tout $(\varphi, \psi) \in H^\varepsilon$, on a

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v^\varepsilon \nabla \psi dx +$$
(2.17)

$$\varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon - v^\varepsilon) (\varphi - \psi) ds^\varepsilon = \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1 \varphi dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2 \psi dx.$$

Maintenant on donne un résultat d'existence et d'unicité du problème variationnel (2.17).

Théorème 2.9 *Supposons H1)-H3). Alors $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un couple unique $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in H^\varepsilon$, solution du problème variationnel (2.17), tel que*

$$\|(u^\varepsilon, v^\varepsilon)\|_{H^\varepsilon} \leq C. \tag{2.18}$$

Pour plus de détails, voir les chapitres 4 et 3 .

Maintenant, nous allons procéder à l'homogénéisation du problème (2.17). Dans ce qui suit on adopte la notation :

$$\chi_i(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Y_i \\ 0 & \text{si } y \in Y \setminus Y_i \end{cases}, \quad i = 1, 2$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\varepsilon(x) &= \begin{cases} u^\varepsilon & \text{si } x \in \Omega_1^\varepsilon \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1^\varepsilon \end{cases}, & \tilde{v}^\varepsilon(x) &= \begin{cases} v^\varepsilon & \text{si } x \in \Omega_2^\varepsilon \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_2^\varepsilon \end{cases} \\ \widetilde{\nabla u^\varepsilon}(x) &= \begin{cases} \nabla u^\varepsilon & \text{si } x \in \Omega_1^\varepsilon \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1^\varepsilon \end{cases}, & \widetilde{\nabla v^\varepsilon}(x) &= \begin{cases} \nabla v^\varepsilon & \text{si } x \in \Omega_2^\varepsilon \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_2^\varepsilon \end{cases}. \end{aligned}$$

Grâce aux estimations a priori (2.18) et en utilisant les Théorèmes 2.6, 2.7 et 2.8, il

existe une sous-famille de $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ toujours notée $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ et il existe

$$u, v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}) \text{ et } v \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y_2)/\mathbb{R})$$

tels que

$$\widetilde{u}^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_1 u, \quad \widetilde{v}^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_2 v, \tag{2.19}$$

$$\widetilde{\nabla u}^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_1 (\nabla u + \nabla_y u_1), \tag{2.20}$$

$$\widetilde{\nabla v}^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_2 (\nabla v + \nabla_y v_1) \tag{2.21}$$

et pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_{\#}(Y))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma^\varepsilon} \varepsilon (u^\varepsilon - v^\varepsilon) \psi^\varepsilon ds^\varepsilon = \int_{\Omega \times \Sigma} (u - v) \psi dx ds, \quad \psi^\varepsilon(x) = \psi(x, x/\varepsilon). \tag{2.22}$$

Maintenant soit $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_{\#}^\infty(Y))$. Posons

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x) + \varepsilon \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \psi^\varepsilon(x) = \psi(x) + \varepsilon \psi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

En prenant $\varphi = \varphi^\varepsilon$ et $\psi = \psi^\varepsilon$ dans (2.17) et en passant à la limite en tenant compte de (2.19)-(2.22), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y_1} \alpha(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) (\nabla \varphi(x) + \nabla_y \varphi_1(x, y)) \, dx dy + \\ & \int_{\Omega \times Y_2} \beta(y) (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)) (\nabla \psi(x) + \nabla_y \psi_1(x, y)) \, dx dy \\ & \int_{\Omega \times \Sigma} \gamma(y) (u(x) - v(x)) (\varphi(x) - \psi(x)) \, dx ds \\ & = \int_{\Omega \times Y_1} f_1 \varphi \, dx dy + \int_{\Omega \times Y_2} f_2 \psi \, dx dy \end{aligned} \tag{2.23}$$

Par un argument de densité, l'équation (2.23) reste valide pour tout

$$(\varphi, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R})$$

$$(\psi, \psi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y_2)/\mathbb{R}).$$

Maintenant, en intégrant par parties dans (2.23) on a alors le système homogénéisé à deux échelles :

$$-\operatorname{div}_y (\alpha (\nabla u + \nabla_y u_1)) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_1, \quad (2.24)$$

$$-\operatorname{div}_y (\beta (\nabla v + \nabla_y v_1)) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_2, \quad (2.25)$$

$$-\operatorname{div} \left(\int_{Y_1} \alpha (\nabla u + \nabla_y u_1) \, dy \right) + \int_{\Sigma} \gamma (y) [u - v] \, ds = f_1 \text{ dans } \Omega, \quad (2.26)$$

$$-\operatorname{div} \left(\int_{Y_2} \beta (\nabla v + \nabla_y v_1) \, dy \right) - \int_{\Sigma} \gamma (y) [u - v] \, ds = f_2 \text{ dans } \Omega, \quad (2.27)$$

$$\alpha (\nabla u + \nabla_y u_1) \cdot \nu = \beta (\nabla v + \nabla_y v_1) \cdot \nu = 0 \text{ dans } \Omega \times \Sigma, \quad (2.28)$$

$$\alpha \nabla_y v_0 \cdot \nu = \beta \nabla_y v \cdot \nu = -\gamma (u - v) \text{ dans } \Omega \times \Sigma, \quad (2.29)$$

$$u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.30)$$

Tout d'abord, observons que les équations (2.24), (2.25) et (2.28) entraînent les relations suivantes :

$$u_1(x, y) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \alpha_j(y) + u^*(x), \quad (2.31)$$

$$v_1(x, y) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \beta_j(y) + v^*(x), \quad (2.32)$$

où, pour $1 \leq j \leq N$, $\alpha_j \in H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}$ est l'unique solution du problème microscopique :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (\alpha (\nabla_y \alpha_j + e_j)) = 0 \text{ dans } Y_1, \\ \alpha (\nabla_y \omega_j + e_j) \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.33)$$

et $u^*(x)$ est une fonction additive quelconque et indépendante de y , ainsi que $\beta_j \in H_{\#}^1(Y_2)/\mathbb{R}$ est l'unique solution du problème microscopique :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (\beta (\nabla_y \beta_j + e_j)) = 0 \text{ dans } Y_2, \\ \beta (\nabla_y \beta_j + e_j) \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.34)$$

Dans ce qui suit, on notera

$$\begin{aligned}
A &= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}, & a_{ij} &= \int_{Y_1} \alpha(y) (\nabla_y \alpha_i + e_i) \cdot (\nabla_y \alpha_j + e_j) \, dy, \\
B &= (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}, & b_{ij} &= \int_{Y_2} \beta(y) (\nabla_y \beta_i + e_i) \cdot (\nabla_y \beta_j + e_j) \, dy, \\
\tilde{f}_1 &= |Y_1| f_1, & \tilde{f}_2 &= |Y_2| f_2, & g &= \left(\int_{\Sigma} \gamma \, dy \right).
\end{aligned}$$

On peut montrer que A et B sont symétriques et définies positives [35]. En insérant (2.31)-(2.32) dans (2.24)-(2.30) on obtient le problème homogénéisé

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(A \nabla u) + g(u - v) &= \tilde{f}_1 \text{ dans } \Omega, \\
-\operatorname{div}(B \nabla v) + g(v - u) &= \tilde{f}_2 \text{ dans } \Omega, \\
u = v = 0 &\text{ sur } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Ce problème homogénéisé est de type Barenblatt-Zheltov-Kochina [33]. C'est donc un modèle à double diffusion. Nous verrons au chapitre 5 que si la donnée f_2 est plus régulière et si la conductivité thermique dans le matériau Ω_2^ε est relativement faible par rapport à la conductivité du matériau Ω_1^ε alors le modèle homogénéisé est monophasique.

Chapitre 3

Homogénéisation du transfert de chaleur dans les tissus biologiques

On considère un problème de transfert de chaleur sur des tissus biologiques posé dans un milieu présentant une répartition ε -périodique de ses constituants où le paramètre $\varepsilon > 0$ est destiné à tendre vers 0. Le micro-modèle étudié est un système bi-structure constitué de particules solides représentant les cellules biologiques et un système de pores interconnectées en lequel du sang artériel ou veineux circule. Ce système tissus-sang est décrit par deux équations de la chaleur : une pour les tissus cellulaires et l'autre pour le sang environnant. A l'interface entre ces deux milieux on suppose que le transfert de chaleur est décrit par la loi de refroidissement de type Newton. En utilisant la convergence à deux échelles, on montre que le macro-modèle présente quelques termes nouveaux et peut-être considéré particulièrement comme un nouveau modèle mathématique pour la thérapie humaine et le traitement médical par radiothérapie.

3.1 Introduction

L'étude théorique et expérimentale des transferts de chaleur dans les tissus biologiques est très importante dans beaucoup de disciplines de médecine telles que la thérapie, la radiothérapie, la cryogénie, la thermorégulation, la chirurgie et les brûlures de la peau ainsi que dans les industries textiles spécialement pour la fabrication et le design des

vêtements isolants contre le froid ou la chaleur. Voir par exemple S.A. Berger & *al.* [36], J.C. Chato [51], M. Gautherie [81], K. Khanafer & *al.* [93], M. Miyikawa et J.C. Bolomey (eds) [107], N. D. Ngo et K. K. Tamma [114], H. W. Zhang & *al.* [140],...

Plusieurs modèles mathématiques ont été proposés afin de prédire la distribution de la température dans les tissus biologiques. L'un de ces modèles les plus connus est certainement celui proposé par le physiologiste anglais H.H. Pennes [117]. Il est à ce jour connu comme étant le premier effectué dans cette direction. L'équation proposée s'appelle de nos jours équation de la bio-chaleur. Elle est basée sur la loi de Fourier avec un concept de perfusion sanguine. Elle s'écrit comme suit

$$\rho c \partial_t u - \operatorname{div}(\kappa \nabla u) + \omega_b \rho_b c_b \rho (u - u_b) = f \quad (3.1)$$

où u , ρ , c et κ sont respectivement la température, la densité, la capacité calorifique et le coefficient de conductivité thermique du tissu, ω_b est le coefficient de perfusion sanguine, ρ_b et c_b sont respectivement la densité et la capacité calorifique du sang et u_b est la température du sang dans les artères. Finalement f est une source externe de chaleur et elle est généralement considérée comme une somme de sources dues essentiellement à l'activité métabolique de l'organisme et aux rayons Laser absorbés durant l'exposition du patient.

Plusieurs scientifiques ont essayé de justifier le terme de Helmholtz dans (3.1). On citera entre autres M.M. Chen, K.R. Holmes [52], P. Wust & *al.* [137] et R. Hochmuth et P. Deuffhard [86]. Ces derniers ont développé une technique d'homogénéisation sur un modèle micro-vasculaire consistant en un assemblage de tissus organiques humains parcourus par du sang (fluide). Plus précisément ils ont étudié le micro-modèle suivant :

$$-\Delta u^\varepsilon = S^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (3.2)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu^\varepsilon} = \varepsilon \alpha (u_b^\varepsilon - u^\varepsilon) \text{ on } \partial Q^\varepsilon \quad (3.4)$$

où u^ε est la température et S^ε est le terme source de chaleur dans les tissus représentés par le domaine Ω^ε alors que u_b^ε est la température du sang. Ce domaine Ω^ε est obtenu

en retirant d'un domaine Ω , supposé borné et régulier, un ensemble de trous Q^ε où le fluide (qui est le sang) circule. Dans (3.4), ν^ε est la normale unitaire à ∂Q^ε dirigée vers l'extérieur de Ω^ε et $\alpha > 0$ un paramètre physiologique. Leur modèle homogénéisé proposé est donné par :

$$-\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u^*) + \alpha^*(u^* - u_b) = S$$

où \mathcal{A} est le tenseur de conductivité thermique homogénéisé, u^* est la limite faible dans $H^1(\Omega)$ d'une extension de la température $P^\varepsilon(u^\varepsilon)$ à l'ouvert Ω , S^ε est la limite faible dans $L^2(\Omega)$ du terme source S^ε et finalement α^* est le terme de Helmholtz effectif.

En réalité, les tissus biologiques peuvent être vus comme des milieux poreux où les cellules (matrice) sont séparées par des trous ou des pores en lesquels le sang circule. Ce système d'interaction cellules-sang peut aussi être interprété comme un milieu bi-structure. En connection avec ce type de milieux à deux composantes présentant une barrière thermique au niveau de l'interface séparant ces deux structures, on signalera les travaux de J.L. Auriault et H. Ene [24] où ils ont étudié le transfert de chaleur dans un milieu composite à deux constituants avec des coefficients de conductivité de même ordre de magnitude à l'échelle locale. Le modèle macroscopique est une équation elliptique appartenant à deux types d'équations : un modèle à une température et l'autre à deux températures et ce en fonction de l'ordre de magnitude de la conductivité thermique de l'interface qui est supposée comme une couche mince.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un micro-modèle de transfert de chaleur dans un tissu biologique constitué de deux systèmes interagissants (tissus cellulaires et régions sanguines) où les conductivités thermiques sont supposées d'ordre de magnitude différent. On suppose aussi que la transition entre les deux phases est régie par la loi de refroidissement de type Newton. C'est à dire que le flux de chaleur à travers la couche mince séparant les deux milieux est proportionnel au saut de la température, par un facteur dépendant de la conductivité thermique de cette couche. Pour plus de détails voir H.S. Carslaw et J.C. Jaeger [49], (voir également J.L. Auriault et H. Ene [24]). En fait, beaucoup de travaux ont souligné l'importance de considérer un tissu biologique comme

un milieu poreux et ont montré que la théorie du transport permet la compréhension des écoulements fluidiques et transfert de chaleur dans les milieux biologiques. Voir par exemple A.-R.A. Khaled et K. Vafai [92].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : Au paragraphe 3.2, on donnera la géométrie du domaine : siège du tissu biologique et on présentera le micro-modèle. Au paragraphe 3.3, on montrera l'existence et l'unicité d'une solution au micro-modèle et on donnera une estimation a priori uniforme par rapport à ε . Ensuite au paragraphe 3.4, on construira un développement asymptotique formel afin de dégager le modèle homogénéisé. Enfin dans le dernier paragraphe 3.5, on appliquera la convergence à deux échelles afin de justifier rigoureusement le procédé d'homogénéisation établi précédemment.

3.2 Position du Problème

On considère Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) de frontière $\partial\Omega$ supposée régulière. Soit $Y =]0, 1[^N$ la cellule de base qu'on décompose comme suit : $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Sigma$ où Y_1, Y_2 sont deux domaines disjoints de Y et $\Sigma = \partial Y_1 \cap \partial Y_2$ est une sous-variété \mathcal{C}^∞ de dimension $(N - 1)$. Comme dans G. Allaire et F. Murat [14], on suppose que le prolongement Y -périodique de Y_1 à l'espace entier, c'est à dire $\tilde{Y}_1 = \cup_{k \in \mathbb{Z}^N} (k + Y_1)$ est un ouvert régulier et connexe. On notera qu'aucune hypothèse sur la connexité de $\cup_{k \in \mathbb{Z}^N} (k + Y_2)$ n'est faite.

Soit χ_1 (resp. χ_2) la fonction caractéristique de Y_1 (resp. Y_2) qu'on étend par Y -périodicité à \mathbb{R}^N . C'est à dire

$$\begin{aligned} \chi_i(y + e_j) &= \chi_i(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \\ e_j &\text{ est le } j^{\text{ème}} \text{ vecteur de la base canonique de } \mathbb{R}^N, \\ j &= 1, 2, \dots, N, \\ \chi_i(y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Y_i, \\ 0 & \text{si } y \in Y \setminus Y_i. \end{cases} \end{aligned}$$

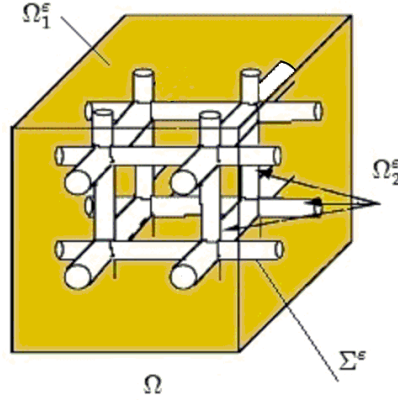


Figure 3-1: Le domaine composite $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre suffisamment petit destiné à tendre vers 0. On pose

$$\begin{aligned}\Omega_1^\varepsilon &= \left\{x \in \Omega : \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1\right\}, \\ \Omega_2^\varepsilon &= \left\{x \in \Omega : \chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1\right\}\end{aligned}$$

Soit $\Sigma^\varepsilon = \overline{\Omega_1^\varepsilon} \cap \overline{\Omega_2^\varepsilon}$ l'interface séparant les deux milieux Ω_1^ε et Ω_2^ε . Voir figure 3-1 ci-après.

Sans perte de généralité on supposera que la région Ω_2^ε est incrustée dans le domaine Ω_1^ε , c'est à dire mathématiquement parlant $\overline{\Omega_2^\varepsilon} \subset \Omega$. On voit alors que la frontière Ω_2^ε est constituée de l'interface Σ^ε alors que celle de Ω_1^ε se décompose en deux parties disjointes : Σ^ε et la frontière extérieure Γ . On peut écrire alors

$$\partial\Omega_2^\varepsilon = \Sigma^\varepsilon \text{ et } \partial\Omega_1^\varepsilon = \partial\Omega \cup \Sigma^\varepsilon.$$

On notera que grâce à l'hypothèse de connexité de \tilde{Y}_1 , l'ouvert Ω_1^ε est connexe alors que Ω_2^ε peut ne pas être connexe, spécifiquement lorsque $N = 2$ (Théorème de Jordan [74]).

Soit ρ, c et κ la densité, la capacité calorifique et le coefficient de conductivité thermique du tissu, respectivement. Soit ω_b le coefficient de la perfusion sanguine, ρ_b et c_b la densité et la capacité calorifique du sang. Notons par κ_b le coefficient de conductivité thermique du sang. On supposera que ces paramètres phénoménologiques : $\rho, c, \kappa, \omega_b, \rho_b, c_b$ et κ_b

sont des constantes strictement positives et indépendantes de ε .

Soit $T > 0$ de sorte que $(0, T)$ désigne l'intervalle de temps d'observation du phénomène considéré : l'évolution et la distribution de la température dans le tissu. Pour des raisons de commodité, on pose

$$\begin{aligned} Q &= (0, T) \times \Omega, \quad \Gamma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad S = (0, T) \times \Sigma, \\ Q_1^\varepsilon &= (0, T) \times \Omega_1^\varepsilon, \quad Q_2^\varepsilon = (0, T) \times \Omega_2^\varepsilon, \quad S^\varepsilon = (0, T) \times \Sigma^\varepsilon \end{aligned}$$

Soit aussi

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}, \quad \alpha_b = \frac{\kappa_b}{\rho_b c_b}, \quad \alpha_b^\varepsilon = \varepsilon^2 \alpha_b, \quad \gamma = \omega_b \rho_b \frac{c_b}{c}. \quad (3.5)$$

Le micro-modèle que nous allons homogénéiser dans ce chapitre est donné par le système suivant :

$$\partial_t u^\varepsilon - \alpha \Delta u^\varepsilon = f \quad \text{dans } Q_1^\varepsilon, \quad (3.6)$$

$$\partial_t u_b^\varepsilon - \alpha_b^\varepsilon \Delta u_b^\varepsilon = f_b \quad \text{dans } Q_2^\varepsilon, \quad (3.7)$$

$$\alpha \nabla u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = \alpha_b^\varepsilon \nabla u_b^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon \quad \text{sur } S^\varepsilon, \quad (3.8)$$

$$\alpha \nabla u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = -\varepsilon \gamma (u^\varepsilon - u_b^\varepsilon) \quad \text{sur } S^\varepsilon, \quad (3.9)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.10)$$

$$u^\varepsilon(0, \cdot) = h(\cdot) \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon, \quad (3.11)$$

$$u_b^\varepsilon(0, \cdot) = h_b(\cdot) \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon \quad (3.12)$$

où f (resp. f_b) représente un terme source de chaleur dans les cellules (resp. le sang), ν^ε désigne la normale unitaire à Σ^ε dirigée vers l'extérieur de Ω_1^ε et h, h_b sont les températures à l'instant initial dans $\Omega_1^\varepsilon, \Omega_2^\varepsilon$ respectivement. On supposera que

$$f, f_b, h, h_b \in L^2(\Omega). \quad (3.13)$$

Ce système modélise la distribution de la température dans le corps $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ un tissu biologique qui pourra être considéré comme un milieu poreux. De ce fait, Ω_1^ε est la zone

où vivent les cellules et la région poreuse Ω_2^ε est la région où le fluide sanguin circule transportant les nutriments dont les cellules ont besoin et évacuant les déchets et les toxines que rejettent ces cellules. Cet échange se fait au niveau de la paroi cellulaire : c'est à dire au niveau de la couche mince Σ^ε . C'est donc une zone d'activité et par suite un siège de transfert de chaleur. C'est pour cette raison que l'interface Σ^ε peut être considérée comme une barrière thermique avec un coefficient de conductivité thermique donné par $\gamma^\varepsilon = \varepsilon\omega_b\rho_b c_b\rho$.

Les inconnues u^ε et u_b^ε sont les températures dans Q_1^ε et Q_2^ε respectivement. La première équation décrit le flux de chaleur dans les cellules avec une grande conductivité thermique et la seconde équation décrit le flux de chaleur dans les pores avec une faible conductivité. La condition (3.8) exprime la continuité du flux à travers l'interface. Cependant, la température peut présenter en général des sauts sur Σ^ε . On a employé ici la loi de refroidissement de Newton donnée par (3.9), voir par exemple H.S. Carslaw et J.C. Jaeger [49]. L'interface Σ^ε peut être considérée comme un échangeur de chaleur. Enfin, (3.10) est la condition de type Dirichlet homogène sur le bord extérieur et les équations (3.11)-(3.12) représentent les conditions initiales.

A noter la présence du facteur ε^2 dans la matrice de diffusion A_b^ε (voir équation (3.5)). En effet, en supposant que les matrices de diffusion sont du même ordre de magnitude : $O(1)$ à l'échelle locale, de sorte que les équations écrites localement sont indépendantes de ε , et grâce à l'hypothèse : $\overline{\Omega_2^\varepsilon} \subset \Omega$, une mise à l'échelle macroscopique fait apparaître ce facteur, voir C. Conca [62, Lemma 6.1].

Maintenant on va établir le cadre variationnel de notre problème. Pour cela nous introduisons quelques notations. Soit

$$\begin{aligned} H^\varepsilon &= L^2(\Omega_1^\varepsilon) \times L^2(\Omega_2^\varepsilon), \\ V^\varepsilon &= H_{\partial\Omega}^1(\Omega_1^\varepsilon) \times H^1(\Omega_2^\varepsilon) \end{aligned}$$

où

$$H_{\partial\Omega}^1(\Omega_1^\varepsilon) = \{u \in H^1(\Omega_{\partial\Omega}^\varepsilon) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

On considère sur H^ε et V^ε les produits scalaires suivants :

$$(\varphi, \psi)_{H^\varepsilon} = \int_{\Omega_1^\varepsilon} \varphi_1 \psi_1 dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \varphi_2 \psi_2 dx, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \quad \psi = (\psi_1, \psi_2),$$

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi)_{V^\varepsilon} &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \nabla \varphi_1 \nabla \psi_1 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} \nabla \varphi_2 \nabla \psi_2 dx + \\ &\quad \varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} (\varphi_1 - \varphi_2) (\psi_1 - \psi_2) ds^\varepsilon \end{aligned}$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et ds^ε la mesure de Hausdorff sur Σ^ε . Les normes induites par ces produits scalaires sont $\|\cdot\|_{H^\varepsilon}$ et $\|\cdot\|_{V^\varepsilon}$, respectivement. Il est clair que H^ε et V^ε sont des espaces de Hilbert lorsqu'ils sont munis de leur normes. De plus, on peut aisément voir que V^ε est séparable et s'injecte continûment dans H^ε .

Introduisons ensuite la forme bilinéaire $a^\varepsilon(\cdot, \cdot) : V^\varepsilon \times V^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \alpha \nabla \varphi_1 \nabla \psi_1 dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \alpha_b \nabla \varphi_2 \nabla \psi_2 dx + \\ &\quad \int_{\Sigma^\varepsilon} \gamma^\varepsilon (\varphi_1 - \varphi_2) (\psi_1 - \psi_2) ds^\varepsilon \end{aligned}$$

où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in V^\varepsilon$. On voit que la forme $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est continue et uniformément coercive sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$.

On note $(V^\varepsilon)'$ l'espace dual de V^ε . Soit $\mathcal{A}^\varepsilon \in \mathcal{L}(V^\varepsilon, (V^\varepsilon)')$ l'opérateur linéaire et continu défini par

$$\mathcal{A}^\varepsilon(\varphi)\psi = a^\varepsilon(\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in V^\varepsilon.$$

Pour des raisons de commodité, on notera

$$\begin{aligned} w^\varepsilon &= (u^\varepsilon, u_b^\varepsilon), \quad g = (h, h_b), \\ f^\varepsilon &= f\chi_1^\varepsilon + f_b\chi_2^\varepsilon, \quad \chi_i^\varepsilon(x) = \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Soit l'espace fonctionnel

$$W^{1,2}(0, T; H^\varepsilon) = \left\{ \varphi \in L^2(0, T; H^\varepsilon) : \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, T; H^\varepsilon) \right\}.$$

La formulation variationnelle du système (3.6)-(3.12) est donnée par :

Trouver $w^\varepsilon \in L^2(0, T; V^\varepsilon)$ tel que pour tout $\varphi \in W^{1,2}(0, T; H^\varepsilon) \cap L^2(0, T; V^\varepsilon)$ avec $\varphi(T) = 0$, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (w^\varepsilon(t), \partial_t \varphi(t))_{H^\varepsilon} dt + \int_0^T \mathcal{A}^\varepsilon(w^\varepsilon(t)) \varphi(t) dt \\ = & \int_0^T (f^\varepsilon, \varphi(t))_{H^\varepsilon} dt + (g, \varphi(0))_{H^\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

où dt désigne la mesure de Lebesgue sur l'intervalle de temps $(0, T)$.

Nous allons par la suite donner un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel (3.14) dont la preuve sera donnée au paragraphe suivant.

Théorème 3.1 *Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre suffisamment petit. Alors, Il existe une unique solution faible $w^\varepsilon \in L^2(0, T; V^\varepsilon)$ du problème (3.14). De plus on a l'estimation d'énergie uniforme suivante :*

$$\|w^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H^\varepsilon)} + \|w^\varepsilon\|_{L^2(0, T; V^\varepsilon)} \leq C. \quad (3.15)$$

Afin de donner le résultat principal de ce chapitre, à savoir le Théorème d'homogénéisation 3.2, nous définissons la notion de température globale dans la région du tissu biologique, c'est à dire dans $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ de la façon suivante :

$$U^\varepsilon(t, x) = \chi_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u^\varepsilon(t, x) + \chi_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_b^\varepsilon(t, x), \quad (t, x) \in Q.$$

Remarque 3.1 *Généralement dans les problèmes d'homogénéisation où le milieu hétérogène possède plusieurs structures, on a tendance à étudier le comportement global de ces composantes séparément. Il est cependant intéressant d'étudier ce comportement pour tout le milieu composite et construire ainsi le modèle homogénéisé décrivant ainsi au mieux la description macroscopique. C'est pour cette raison qu'on a introduit la notion de température globale. Voir aussi le chapitre suivant.*

Nous énonçons maintenant le Théorème principal.

Théorème 3.2 *Il existe une sous-famille de (u^ε) toujours notée (u^ε) et il existe $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $u_b \in L^2(Q; H_{\#}^1(Y))$ tels que*

1. $\chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) U^\varepsilon$ converge faiblement vers $|Y_1| u$ dans $L^2(Q)$;
2. $\chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) U^\varepsilon$ converge faiblement vers $\int_{Y_2} u_b dy$ dans $L^2(Q)$;
3. u est la solution du problème homogénéisé :

$$\partial_t u - \int_0^t \mathcal{H}(t - \tau) u(\tau) d\tau - \operatorname{div}(\tilde{A} \nabla u) + \tilde{\gamma} u = \mathcal{F} \text{ dans } Q, \quad (3.16)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (3.17)$$

$$u(0, x) = |Y_1| h(x) \quad x \in \Omega \quad (3.18)$$

où \mathcal{H} , \tilde{A} , $\tilde{\gamma}$ et \mathcal{F} sont respectivement donnés par (3.57), (3.47), (3.56) et (3.58);

4. La température u_b est reliée à la température u par :

$$\begin{aligned} u_b(t, x, y) &= T_{bi}(t, x, y) + \int_0^t \partial_t \omega(t - \tau, y) u(\tau, x) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \partial_t \sigma(t - \tau, y) f_b(\tau, x) d\tau \end{aligned}$$

où u_{bi} , ω et σ sont donnés par (3.53), (3.54) et (3.55) respectivement.

On termine ce paragraphe en notant que le modèle homogénéisé (3.16) est une équation intégro-différentielle de type Barbashin [90].

3.3 Preuve du Théorème d'existence 3.1

On commence ce paragraphe par établir quelques Lemmes nécessaires pour la preuve du Théorème d'existence et d'unicité ainsi que les estimations a priori uniformes.

Lemme 3.1 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de ε telle que pour tout $\varphi_1 \in H^1_{\partial\Omega}(\Omega_1^\varepsilon)$ on a*

$$\|\varphi_1\|_{0,\Omega_1^\varepsilon} \leq C \|\nabla\varphi_1\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}. \quad (3.19)$$

Preuve. Voir par exemple G. Allaire et F. Murat [14, Lemma A.4]. ■

Lemme 3.2 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de ε telle que pour tout $\varphi_2 \in H^1(\Omega_2^\varepsilon)$ on a*

$$\|\varphi_2\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 \|\nabla\varphi_2\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}^2 + \varepsilon \|\varphi_2\|_{0,\Sigma^\varepsilon}^2 \right). \quad (3.20)$$

Preuve. Voir C. Conca [62, Lemma 6.1]. ■

Lemme 3.3 *Il existe une constante $C > 0$, indépendante de ε telle que pour tout $\varphi \in H^1(\Omega_1^\varepsilon)$ on a*

$$\varepsilon \|\varphi\|_{0,\Sigma^\varepsilon}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 + \|\varphi\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 \right) \quad (3.21)$$

et

$$\varepsilon \|\varphi\|_{0,\Sigma^\varepsilon}^2 \leq C \left(\|\nabla\varphi\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 \right). \quad (3.22)$$

Preuve. En utilisant le Théorème de trace sur Y_1 (Cf. Théorème A.5., voir également R. A. Adams et J. F. Fournier [3]), on sait qu'il existe une constante $C = C(Y_1) > 0$ telle que pour tout $\psi \in H^1(Y_1)$

$$\int_{\Sigma} |\psi|^2 ds \leq C \left(\int_{Y_1} |\nabla\psi|^2 dy + \int_{Y_1} |\psi|^2 dy \right).$$

Alors, en procédant au changement de variable de y par x/ε on obtient pour tout $\varphi \in H^1(Y_1^{\varepsilon k})$,

$$\varepsilon \int_{\Sigma^{\varepsilon k}} |\varphi|^2 ds^\varepsilon \leq C \left(\varepsilon^2 \int_{Y_1^{\varepsilon k}} |\nabla\varphi|^2 dx + \int_{Y_1^{\varepsilon k}} |\varphi|^2 dx \right) \quad (3.23)$$

où

$$Y_1^{\varepsilon k} = \varepsilon(k + Y_1), \quad \Sigma^{\varepsilon k} = \varepsilon(k + \Sigma) \quad k \in \mathbb{Z}^N.$$

A noter que la constante C apparaissant dans (3.23) est la même pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}^N$. Maintenant, en additionnant les inégalités (3.23) sur toutes les cellules $Y_1^{\varepsilon k}$ contenues dans Ω , on obtient

$$\varepsilon \|\varphi\|_{0,\Sigma^\varepsilon}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 + \|\varphi\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 \right).$$

C'est à dire (3.21). En fait, sur la partie des cellules contenant une portion du bord extérieur, l'estimation (3.21) reste encore valide, puisque ces cellules sont à une distance au plus $O(\varepsilon)$. Comme ε est suffisamment petit, disons $\varepsilon < 1$, on a, à partir de (3.21), que pour tout $\varphi \in H^1(\Omega_1^\varepsilon)$

$$\varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} |\varphi|^2 ds^\varepsilon \leq C \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla\varphi|^2 dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\varphi|^2 dx \right) \quad (3.24)$$

et en appliquant l'inégalité de Poincaré (3.19) dans (3.24), on obtient (3.22). ■

Preuve du Théorème 3.1. On utilisera le Théorème de J.-L. Lions (voir Théorème A.10 ou par exemple R. Showalter [124, Prop. 2.3., Chap. III]). Il est facile de voir que la forme bilinéaire $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est coercive et continue sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$. On va montrer que la forme linéaire L^ε est continue sur V^ε . Autrement dit, on montre que la forme :

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto L^\varepsilon((\varphi_1, \varphi_2)) = \int_0^T (h^\varepsilon, \varphi(t))_{H^\varepsilon} dt$$

est dans $L^2(0, T; (V^\varepsilon)')$. En effet, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les hypothèses (3.13), on voit que pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon$,

$$|L^\varepsilon((\varphi_1, \varphi_2))| = \left| \int_0^T \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1 \varphi_1 dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2 \varphi_2 dx \right) dt \right| \quad (3.25)$$

$$\leq M(f_1, f_2) (\|\varphi_1\|_{0,\Omega_1^\varepsilon} + \|\varphi_2\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}) \quad (3.26)$$

où

$$M(f_1, f_2) = T \max(\|f_1\|_{0,\Omega}, \|f_2\|_{0,\Omega}) < +\infty$$

est une constante indépendante de ε . Notons que $f \in L^2(0, T; H^\varepsilon)$. Ensuite, de l'inégalité (3.20), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\varphi_2|^2 dx &\leq C \left(\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\nabla \varphi_2|^2 dx + \varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 ds^\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} |\varphi_1|^2 ds^\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Maintenant, en combinant les inégalités (3.22) et (3.27) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\varphi_2|^2 dx &\leq C \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla \varphi_1|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\nabla \varphi_2|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 ds^\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\int_{\Omega_T^\varepsilon} |\varphi_2|^2 dx \leq C \|(\varphi_1, \varphi_2)\|_{V^\varepsilon}^2. \quad (3.28)$$

Observons que l'inégalité (3.20) entraîne que

$$\int_{\Omega_T^\varepsilon} |\varphi_1|^2 dx \leq C \|(\varphi_1, \varphi_2)\|_{V^\varepsilon}^2. \quad (3.29)$$

En utilisant les inégalités (3.26), (3.28) et (3.29) on déduit que

$$|L^\varepsilon((\varphi_1, \varphi_2))| \leq C \|(\varphi_1, \varphi_2)\|_{V^\varepsilon}. \quad (3.30)$$

Ainsi, la forme L^ε est continue sur $L^2(0, T; V^\varepsilon)$. Il est à noter que la constante C dans l'équation (3.26) est indépendante de ε .

En appliquant le Théorème A.10., on conclut qu'il existe une unique solution $(u^\varepsilon, u_b^\varepsilon) \in L^2(0, T; V^\varepsilon)$ au problème variationnel associé à (3.6)-(3.12). Finalement, en prenant

$(\varphi_1, \varphi_2) = (u^\varepsilon, u_b^\varepsilon)$ dans (3.14), en utilisant l'uniforme coercivité de la forme $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$, la continuité de L^ε et l'inégalité de Gronwall, on obtient l'estimation uniforme (3.15). Ce qui termine la preuve du Théorème 3.1. ■

3.4 Application de la méthode des échelles multiples

Tout d'abord, nous allons déterminer formellement le problème homogénéisé du micro-modèle (3.6)-(3.12) par la méthode des échelles multiples, voir paragraphe 1.4. Pour cela supposons que les températures u^ε et u_b^ε aient le développement asymptotique suivant :

$$u^\varepsilon(t, x) = u_0(t, x, y) + \varepsilon u_1(t, x, y) + \varepsilon^2 u_2(t, x, y) + \dots \quad (3.31)$$

$$u_b^\varepsilon(t, x) = u_b(t, x, y) + \varepsilon u_{b1}(t, x, y) + \varepsilon^2 u_{b2}(t, x, y) + \dots \quad (3.32)$$

où $y = x/\varepsilon$ est la variable microscopique et $u_k(\cdot, \cdot, y), u_{bk}(\cdot, \cdot, y), \dots$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) sont des fonctions inconnues mais supposées assez régulières et Y -périodiques en leur troisième variable y .

L'idée de la méthode des échelles multiples comme mentionné au paragraphe 1.4 est d'insérer les développements asymptotiques (3.31)-(3.32) dans l'ensemble des équations (3.6)-(3.12) et d'identifier ensuite les termes de même puissance en ε . Ce qui conduit donc à une hiérarchie de problèmes aux limites pour les termes successifs des deux développements, à savoir u_k, u_{bk} ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Puisque les équations du micro-modèle sont d'ordre 2 (ordre de dérivation), il est suffisant de procéder à une analyse asymptotique jusqu'à l'ordre $k = 2$. C'est ainsi que le procédé d'homogénéisation se fera en trois étapes : $k = 0, 1$ et 2 . Mais avant cela et puisque les inconnues u_k ou u_{bk} dépendent des deux variables que sont x : la variable lente et y : la variable rapide, nous allons donner une notation concernant les dérivations par rapport à ces deux variables, très commode dans les problèmes d'homogénéisation, voir également le paragraphe 1.4.

Notation 3.1 *Dans ce qui suit, les indices x, y posés sur des opérateurs différentiels*

désignent toujours la dérivation par rapport aux variables x et y respectivement. Par exemple $\nabla_y = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$.

1^{ère} étape. L'équation (3.6) à l'ordre ε^{-2} et l'équation (3.8) à l'ordre ε^{-1} donnent

$$-\operatorname{div}_y(\alpha \nabla_y u_0) = 0 \text{ dans } Q \times Y_1 \quad (3.33)$$

et

$$\alpha \nabla_y u_0 \cdot \nu = 0 \text{ sur } Q \times \Sigma, \quad (3.34)$$

où ν est la normale unitaire à Σ dirigée vers l'extérieur de Y_1 .

Notons

$$a_{Y_1}(\xi, \zeta) = \int_{Y_1} \alpha \nabla_y \xi \cdot \nabla_y \zeta \, dy, \quad \xi, \zeta \in H_{\#}^1(Y_1) / \mathbb{R}$$

En multipliant l'équation (3.33) par $\zeta \in H_{\#}^1(Y_1)$, en intégrant par parties sur Y_1 , en tenant compte de (3.34) et du fait que $\alpha \nabla_y u_0$ est Y -périodique, on obtient la formulation faible suivante :

$$\text{Trouver } u_0(t, x, \cdot) \in H_{\#}^1(Y_1) / \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \zeta \in H_{\#}^1(Y_1) / \mathbb{R},$$

$$a_{Y_1}(u_0, \zeta) = 0.$$

La forme bilinéaire a_{Y_1} est clairement continue et coercive sur $H_{\#}^1(Y_1) / \mathbb{R}$ et par conséquent en utilisant le Théorème 1.3 : un résultat standard sur les équations elliptiques posées dans des domaines périodiques (*Cf.* A. Bensoussan & *al.*[35]) on voit que u est indépendante de la variable y , c'est à dire il existe $u(t, x)$

$$u_0(t, x, y) = u(t, x), \quad t \in (0, T) \text{ et } x \in \Omega.$$

2^{ème} étape. L'équation (3.6) à l'ordre ε^{-1} , l'équation (3.8) à l'ordre ε^0 entraînent le

problème correcteur suivant :

$$-\alpha \Delta_y u_1 = 0 \text{ dans } Q \times Y_1, \quad (3.35)$$

$$(\alpha \nabla_y u_1) \cdot \nu = -(\alpha \nabla u) \cdot \nu \text{ sur } Q \times \Sigma, \quad (3.36)$$

$$y \longmapsto u_1(x, y) \text{ } Y \text{-périodique, } (t, x) \in Q. \quad (3.37)$$

La formulation faible correspondante est donnée par

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} a_{Y_1}(u_1, \zeta) = -a_{Y_1}(u, \zeta), \quad \forall \zeta \in H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}, \\ u_1 \in H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}. \end{cases}$$

Comme précédemment et grâce au Théorème 1.3, il existe une solution unique $u_1(t, x, \cdot) \in H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}$ du problème (\mathcal{P}) et qui peut être calculée comme suit : Considérons pour $1 \leq i \leq N$, les problèmes microscopiques suivants :

trouver $\omega_i \in H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}$ tel que pour tout $\zeta \in H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}$

$$(\mathcal{P}_i) \quad a_{Y_1}(\omega_i, \zeta) = -a_{Y_1}(e_i, \zeta)$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la base canonique.

Ces problèmes variationnels (\mathcal{P}_i) $i = 1, 2, \dots, N$ sont obtenus à partir de (\mathcal{P}) en remplaçant le vecteur ∇u par le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique : e_i . Il s'ensuit que pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, le problème variationnel (\mathcal{P}_i) admet une unique solution faible $\omega_i \in H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}$.

En outre, grâce à la linéarité du problème (\mathcal{P}) , on peut écrire :

$$u_1(t, x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) \omega_i(y) + \tilde{u}(t, x) \quad (3.38)$$

pour $(t, x, y) \in Q \times Y_1$ et où $\tilde{u}(t, x)$ est une fonction additive quelconque indépendante de la variable rapide.

3^{ème} étape. Les équations (3.6)-(3.7) à l'ordre ε^0 et les équations (3.8)-(3.9) à l'ordre ε^1

impliquent le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned} -\alpha\Delta_y u_2 &= f - \partial_t u + \alpha \operatorname{div}_y (\nabla_x u_1) + \\ &\quad \alpha \operatorname{div}_x ((\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) \text{ dans } Q \times Y_1, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\partial_t u_b - \alpha_b \Delta_y u_b = f_b \text{ dans } Q \times Y_2, \quad (3.40)$$

$$(\alpha \nabla_y u_2) \cdot \nu = -(\alpha \nabla_x u_1) \cdot \nu + (\alpha_b \nabla_y u_b) \cdot \nu \text{ sur } Q \times \Sigma, \quad (3.41)$$

$$\alpha \nabla_y u_2 \cdot \nu = -\alpha \nabla_x u_1 \cdot \nu + \gamma (u - u_b) \text{ sur } Q \times \Sigma, \quad (3.42)$$

$$y \mapsto u_2(t, x, y) \text{ } Y \text{ - périodique,} \quad (3.43)$$

$$y \mapsto u_b(t, x, y) \text{ } Y \text{ - périodique.} \quad (3.44)$$

La formulation faible des équations (3.39)–(3.43) est

$$\text{Trouver } u_2 \in H_{\#}^1(Y_1) / \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } \zeta \in H_{\#}^1(Y_1) / \mathbb{R},$$

$$(\mathcal{P}) \quad a_{Y_1}(u_2, \zeta) = \langle F, \zeta \rangle$$

où la forme linéaire F est donnée par

$$\begin{aligned} \langle F, \psi \rangle &= \left(\int_{Y_1} -\zeta \, dy \right) \partial_t u + \int_{Y_1} \operatorname{div}_x (\alpha (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) \zeta \, dy \\ &\quad - \int_{Y_1} \alpha \nabla_x u_1 \cdot \nabla_y \zeta \, dy + \int_{Y_1} f \zeta \, dy + \int_{\Sigma} \gamma (u - u_b) \zeta \, ds \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 1.3 (comme dans E. Sanchez-Palencia [123]), une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité du problème variationnel (\mathcal{P}) est donnée par $\langle F, 1 \rangle = 0$, c'est à dire

$$\begin{aligned} &\int_{Y_1} (-\partial_t u + \operatorname{div}_x (\alpha (\nabla_y u_1 + \nabla_x u))) \, dy \\ &+ \int_{\Sigma} \gamma (u - u_b) \, ds = |Y_1| f. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En utilisant l'équation (3.38), l'équation (3.45) devient

$$|Y_1| \partial_t u - \operatorname{div} \left(\tilde{A} \nabla u \right) + \int_{\Sigma} \gamma (u - u_b) \, ds = |Y_1| f \quad (3.46)$$

où $|Y_1|$ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N de l'ouvert Y_1 et la matrice $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est donnée par

$$\tilde{a}_{ij} = \int_{Y_1} \alpha (\nabla_y \omega_i + e_i) \cdot (\nabla_y \omega_j + e_j) \, dy. \quad (3.47)$$

L'équation (3.46) est l'équation macroscopique pour la température u . La condition au bord pour u est obtenue à partir de (3.10) à l'ordre ε^0 et s'écrit comme suit

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3.48)$$

De façon analogue, les équations (3.11)-(3.12) donnent les conditions initiales pour u et u_b :

$$u(0, x) = |Y_1| h(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.49)$$

$$u_{b0}(0, x, y) = \chi_2(y) h_b(x), \quad x \in \Omega, \quad y \in Y_2 \quad (3.50)$$

Ensuite, à partir des équations (3.41) et (3.42) on peut voir aisément que

$$\alpha_b \nabla_y u_b \cdot \nu = \gamma (u - u_b) \text{ sur } Q \times \Sigma. \quad (3.51)$$

On peut aussi montrer sans peine que le problème parabolique constitué des équations (3.40), (3.51) et (3.50) admet une solution unique faible $u_b \in L^2(0, T; H_{\#}^1(Y_2))$ (voir O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov et N. N. Uraltseva [94, Théorème 5.2, page 320.]).

Notons par

$$b(\zeta, \eta) = \int_{Y_2} \alpha_b \nabla_y \zeta \cdot \nabla_y \eta \, dy + \int_{\Sigma} \gamma \zeta \eta \, ds, \quad \zeta, \eta \in H^1(Y_2)$$

et

$$\mathcal{B} : H^1(Y_2) \longrightarrow H^1(Y_2)'$$

l'opérateur défini par

$$\langle \mathcal{B}(\zeta), \eta \rangle = b(\zeta, \eta).$$

En appliquant le principe de Duhamel (comme dans U. Hornung *et al.* [87]) aux équations (3.40), (3.51) et (3.50), la température du sang u_b peut être ainsi décomposée en une somme de trois termes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_b(\tau, x, y) &= u_{bi}(\tau, x, y) + \int_0^\tau \partial_\tau \omega(\tau - t, y) u(t, x) dt \\ &\quad + \int_0^\tau \partial_\tau \sigma(\tau - t, y) f_b(t, x) dt \end{aligned} \quad (3.52)$$

où u_{bi} est l'évolution de la température initiale h_b donnée par l'expression suivante :

$$u_{bi}(t, x, y) = e^{-t\mathcal{B}} h_b(x, y) = \theta(t, y) h_b(x) \quad (3.53)$$

avec $\theta(t, y)$ l'unique solution faible du problème variationnel associé au problème aux limites microscopique :

$$\begin{aligned} \partial_t \theta - \alpha_b \Delta_y \theta &= 0 \text{ dans } (0, T) \times Y_2, \\ \alpha_b \nabla_y \theta \cdot \nu + \gamma \theta &= 0 \text{ sur } (0, T) \times \Sigma, \\ y &\longmapsto \theta(t, y) \text{ } Y \text{ - périodique,} \\ \theta(0, y) &= 1 \text{ dans } \Omega \times Y_2 \end{aligned}$$

et ω , σ sont respectivement les solutions uniques des problèmes suivants :

$$\begin{aligned}
\partial_t \omega - \alpha_b \Delta_y \omega &= 0 \text{ dans } (0, T) \times Y_2, \\
\alpha_b \nabla_y \omega \cdot \nu + \gamma \omega &= \gamma \text{ sur } (0, T) \times \Sigma, \\
y &\longmapsto \omega(t, y) \text{ } Y - \text{périodique}, \\
\omega(0, y) &= 0 \text{ dans } \Omega \times Y_2,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

et

$$\begin{aligned}
\partial_t \sigma - \alpha_b \Delta_y \sigma &= 1 \text{ dans } (0, T) \times Y_2, \\
\alpha_b \nabla_y \sigma \cdot \nu + \gamma \sigma &= 0 \text{ sur } (0, T) \times \Sigma, \\
y &\longmapsto \sigma(t, y) \text{ } Y - \text{périodique}, \\
\sigma(0, y) &= 0 \text{ dans } \Omega \times Y_2.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

En insérant (3.52) dans (3.46) on obtient problème homogénéisé de type intégral-différentiel pour la température u (voir (3.16)-(3.18)):

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \int_0^t \mathcal{H}(t - \tau) u(\tau) d\tau - \operatorname{div} \left(\tilde{A} \nabla u \right) + \tilde{\gamma} u &= \mathcal{F} \text{ dans } Q, \\
u &= 0 \text{ sur } \Gamma, \\
u(0, x) &= |Y_1| h(x), \quad x \in \Omega
\end{aligned}$$

où

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{|Y_1|} \int_{\Sigma} \gamma ds \tag{3.56}$$

et les quantités \mathcal{H} , \mathcal{F} sont données par

$$\mathcal{H}(\tau, x) = \frac{1}{|Y_1|} \int_{\Sigma} \gamma(y) \partial_t \omega(\tau, y) ds, \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\tau, x) &= f(x) + \frac{1}{|Y_1|} \left(\int_{\Sigma} \gamma(y) u_{bi}(\tau, x, y) ds + \right. \\
&\quad \left. \int_0^{\tau} \int_{\Sigma} \partial_{\tau} \sigma(\tau - t, y) f_b(\tau, y) ds dt \right). \tag{3.58}
\end{aligned}$$

3.5 Justification du modèle homogénéisé

Dans ce paragraphe, nous allons justifier rigoureusement la méthode des échelles utilisée précédemment pour construire le problème homogénéisé (3.16)-(3.18). Pour cela, nous utiliserons la convergence à deux échelles, voir chapitre 2.

La notion de convergence à deux échelles peut également être généralisée au cas de familles dépendantes de la variable temps sans affecter ou modifier quoique ce soit les Théorèmes 2.6, 2.7 et 2.8. Suivant G.W. Clark et R. Showalter [60], on donne la définition suivante :

Définition 3.1 *On dit qu'une famille (ϑ^ε) dans $L^2(Q)$ converge à deux échelles vers $\vartheta \in L^2(Q \times Y)$ (et on écrira toujours $\vartheta^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \vartheta$) si, pour toute fonction test admissible $\varphi \in L^2(Q; \mathcal{C}_\#(Y))$, on a la convergence suivante :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \vartheta^\varepsilon(t, x) \varphi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dt dx = \int_{Q \times Y} \vartheta(t, x, y) \varphi(t, x, y) dt dx dy.$$

Remarque 3.2 *Si (ϑ^ε) est une famille uniformément bornée dans $L^2(Q)$, alors il existe une sous-famille de (ϑ^ε) notée encore (ϑ^ε) et il existe $\vartheta \in L^2(Q)$ tel que $\vartheta^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \vartheta$ au sens de la Définition 3.1. En outre, si (ϑ^ε) est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, alors on peut extraire une sous-famille (ϑ^ε) , notée toujours (ϑ^ε) et il existe $\vartheta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $\vartheta_0 \in L^2(Q; H^1_\#(Y)/\mathbb{R})$ tels que $\vartheta^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \vartheta$ et $\nabla \vartheta^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \nabla \vartheta + \nabla_y \vartheta_0$ toujours au sens de la Définition 3.1. D'autre part, si une famille (ϑ^ε) est telle que*

$$\|\vartheta^\varepsilon\|_{L^2(Q)} + \varepsilon \|\nabla \vartheta^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C,$$

alors, on peut extraire une sous-famille (ϑ^ε) , notée toujours (ϑ^ε) et il existe $\vartheta \in L^2(0, T; H^1_\#(Y))$ tel que $\vartheta^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \vartheta$ et $\varepsilon \nabla \vartheta^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \nabla_y \vartheta$. En outre, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(Q; \mathcal{C}_\#(Y))$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^\varepsilon} \vartheta^\varepsilon(t, x) \varphi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) ds^\varepsilon = \int_{Q \times \Sigma} \vartheta(t, x, y) \varphi(t, x, y) dx ds.$$

Nous allons appliquer la technique de convergence à deux échelles pour justifier la construction formelle du problème homogénéisé (3.16)-(3.18). Nous allons précisément appliquer les Théorèmes 2.6, 2.7 et 2.8 et la Remarque 3.2. Pour cela, on commence par choisir les fonctions tests admissibles suivantes : Soit

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\in W^{1,2}(0, T; \mathcal{D}(\Omega)), \quad \psi \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))), \\ \varphi_2 &\in W^{1,2}(0, T; \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))), \quad \varphi_1(T, \cdot, \cdot) = \varphi_2(T, \cdot, \cdot) = 0.\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi^\varepsilon(t, x) = \left(\varphi_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \varphi_2\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right).$$

En prenant $\varphi = \varphi^\varepsilon$ comme test fonction dans (3.14), on obtient

$$\begin{aligned}& - \int_{Q_1^\varepsilon} u^\varepsilon \partial_t \varphi_1 - \int_{Q_2^\varepsilon} u_b^\varepsilon \partial_t \varphi_2 + \int_{Q_1^\varepsilon} \alpha \nabla u^\varepsilon (\nabla \varphi_1 + (\nabla_y \psi)^\varepsilon) + \\ & \varepsilon \int_{Q_2^\varepsilon} \alpha_b \nabla u_b^\varepsilon (\nabla_y \varphi_2)^\varepsilon + \varepsilon \int_{S^\varepsilon} \gamma (u^\varepsilon - u_b^\varepsilon) (\varphi_1 - \varphi_2) \\ & = \int_{Q_1^\varepsilon} f \varphi_1 + \int_{Q_2^\varepsilon} f_b \varphi_2 + \int_{\Omega_1^\varepsilon} h \varphi_1(0) + \int_{\Omega_2^\varepsilon} h_b \varphi_2(0) + \varepsilon K^\varepsilon\end{aligned}\tag{3.59}$$

où

$$\begin{aligned}K^\varepsilon &= O(\varepsilon) = \int_{Q_1^\varepsilon} u^\varepsilon \partial_t \psi \, dt dx - \int_{Q_1^\varepsilon} \alpha \nabla u^\varepsilon (\nabla_x \psi)^\varepsilon \, dt dx \\ & \quad + \int_{Q_1^\varepsilon} f \psi \, dt dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} h \psi(0) \, dx + \varepsilon \int_{S^\varepsilon} \gamma (u^\varepsilon - u_b^\varepsilon) \psi \, dt ds^\varepsilon.\end{aligned}$$

Maintenant, grâce aux hypothèses (3.13), aux estimations a priori (3.15) et en utilisant les Théorèmes 2.6-2.8 et la Remarque 3.2, on a alors, à une sous-famille extraite près, les

convergences à deux échelles suivantes :

$$\chi_1 u^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_1 u, \chi_2 u_b^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_2 u_b,$$

$$\chi_1 \nabla u^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_1 (\nabla u + \nabla_y u_1), \varepsilon \chi_2 \nabla u_b^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_2 \nabla_y u_b,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) ds^\varepsilon = \int_{Q \times \Sigma} u(t, x) \varphi(t, x, y) dx ds,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^\varepsilon} u_b^\varepsilon(x) \varphi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) ds^\varepsilon = \int_{Q \times \Sigma} u_b(t, x, y) \varphi(t, x, y) dx ds,$$

où

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), u_b \in L^2(Q; H_\#^1(Y)) \text{ et } u_1 \in L^2(Q; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}).$$

Maintenant, en passant à la limite dans (3.59) et en tenant compte des limites à deux échelles établies ci-dessus, on arrive au système variationnel à deux échelles suivant :

$$\begin{aligned} & - \int_{Q \times Y_1} u \partial_t \varphi_1 - \int_{Q \times Y_2} u_b \partial_t \varphi_2 + \int_{Q \times Y_1} \alpha (\nabla u + \nabla_y u_1) (\nabla \varphi_1 + \nabla_y \psi) \\ & + \int_{Q \times Y_2} \alpha_b \nabla_y u_b \nabla_y \varphi_2 + \int_{Q \times \Sigma} \gamma (u - u_b) (\varphi_1 - \varphi_2) \\ & = \int_{Q \times Y_1} f \varphi_1 + \int_{Q \times Y_2} f_b \varphi_2 + \int_{\Omega \times Y_1} h \varphi_1 + \int_{\Omega \times Y_2} h_b \varphi_2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Maintenant, en effectuant une intégration par parties dans (3.60) on trouve le problème

aux limites suivant :

$$|Y_1| \partial_t u - \alpha \operatorname{div} \left(\int_{Y_1} (\nabla u + \nabla_y u_1) \right) + \int_{\Sigma} \gamma (u - u_b) = |Y_1| f \text{ dans } Q, \quad (3.61)$$

$$\partial_t u_b - \alpha_b \Delta_y u_b = |Y_2| f_b \text{ dans } Q \times Y_2, \quad (3.62)$$

$$-\alpha \operatorname{div}_y (\nabla u + \nabla_y u_1) = 0 \text{ dans } Q \times Y_2, \quad (3.63)$$

$$\alpha (\nabla u + \nabla_y u_1) \cdot \nu = 0 \text{ sur } Q \times \Sigma, \quad (3.64)$$

$$\alpha_b \nabla_y u_b \cdot \nu = \gamma (u - u_b) \text{ sur } Q \times \Sigma, \quad (3.65)$$

$$y \longmapsto u_1 \text{ } Y \text{ - p\u00e9riodique,} \quad (3.66)$$

$$y \longmapsto u_b \text{ } Y \text{ - p\u00e9riodique,} \quad (3.67)$$

$$u(0) = |Y_1| h \text{ dans } Q, \quad (3.68)$$

$$u(0) = \chi_2 h_b \text{ dans } Q \times Y_2, \quad (3.69)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3.70)$$

Enfin, on remarque que les \u00e9quations du syst\u00e8me (3.61)-(3.70) sont exactement et respectivement (3.45), (3.40), (3.35), (3.36), (3.51), (3.37), (3.44), (3.49), (3.50) et (3.48). Par cons\u00e9quent, on a donc retrouv\u00e9 le probl\u00e8me homog\u00e9nis\u00e9 (3.16)-(3.18) construit formellement au paragraphe pr\u00e9c\u00e9dent et par ricochet justifi\u00e9 rigoureusement \u00e0 l'ordre 2 le d\u00e9veloppement asymptotique multi-\u00e9chelles utilis\u00e9 \u00e0 cet effet. Ainsi le Th\u00e9or\u00e8me 3.2 est prouv\u00e9.

Chapitre 4

Homogénéisation dans les milieux composites à interfaces rugueuses

Nous étudierons le comportement macroscopique de l'écoulement stationnaire d'un fluide dans un milieu hétérogène, ε -périodique constitué de deux phases qui interagissent entre elles : fissures et blocs, avec des perméabilités ayant un ordre de magnitude différent et avec la présence d'une barrière à l'interface. Le procédé d'homogénéisation utilisé est la convergence à deux échelles. On montre alors que le modèle macroscopique est décrit par une seule équation décrivant l'écoulement monophasique d'un fluide monophasique dans un milieu homogène.

4.1 Introduction

L'étude des écoulements de fluide dans les milieux poreux est un sujet d'un intérêt pratique dans plusieurs disciplines d'ingénierie. On citera entre autres : la géomécanique, la science des matériaux, la gestion des ressources hydriques. Quelques de types de roches poreuses à l'état naturel, par exemple les roches aquifères ou les gisements de pétrole, sont habituellement décrits comme étant des milieux à double porosité ou à double perméabilité, du fait de la présence en général d'une bi-structure : l'une relié à la roche matricielle et l'autre au système constitué des fractures.

Lorsqu'un milieu poreux est composé de deux ou voire plusieurs constituants dif-

férents, une modélisation mathématique est nécessaire et ce afin de prédire le comportement de l'écoulement des fluides à travers ce milieu. En fait, et en raison de la complexité surtout géométrique de ces micro-structures, toute modélisation mathématique sur des milieux poreux fortement hétérogènes doit tenir compte des variations spatiales rapides des paramètres phénoménologiques. En outre, faire de l'analyse numérique sur de tels milieux conduit à l'échelle locale à un très grand nombre d'équations discrétisées de sorte que les calculs deviennent fastidieux voire très compliqués.

Il est donc important d'étudier les écoulements de fluides dans des milieux poreux à l'échelle microscopique et de construire des modèles macroscopiques pour ensuite faire de l'analyse numérique. De façon vague, cela consiste au passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique en faisant tendre ε vers 0. Ce paramètre ε est le quotient entre ces deux échelles caractéristiques, voir [35, 123].

L'homogénéisation dans des milieux à double porosité a été étudiée par plusieurs auteurs [7, 8, 19, 77, 119]. Par exemple dans [19], on y étudie un modèle microscopique constitué des équations standards décrivant l'écoulement d'un fluide de type Darcy dans un réservoir de porosité et de perméabilité très fortement discontinus. Il a été rigoureusement prouvé que l'équation macroscopique (homogénéisée) est un modèle à double porosité.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'homogénéisation d'un écoulement de fluide stationnaire dans des milieux faits de systèmes poreux avec un contraste élevé de perméabilité. En effet, pour une telle configuration, il est bien connu que la conductivité hydraulique dans les fractures est plus élevée à l'échelle locale que celle de la matrice rocheuse [19, 60]. Le micro-modèle que nous allons étudier dans ce chapitre est décrit par un système elliptique de deux équations aux dérivées partielles, avec prise en compte de la loi de Darcy dans chaque phase, avec des matrices de perméabilité d'ordre de magnitude différent et un couplage interfacial résultant du fait d'un contact rugueux entre les deux régions à l'échelle locale, voir le système (4.1)-(4.5) ci-dessous.

On construit le modèle macroscopique à l'aide de la méthode de convergence à deux échelles. On montre que le comportement global de l'écoulement du fluide dans ce type de milieux est un modèle à porosité unique et avec également une seule perméabilité (moyennisée) et obéit donc à une seule équation du type elliptique, voir (4.19) ci-dessous.

Ce qui signifie qu'aucun effet de double perméabilité ou de double porosité ne se produit à l'échelle macroscopique contrairement à ce qu'on l'on a obtenu avec d'autres considérations physiques, Cf par exemple [19, 60, 77]. En outre, le modèle homogénéisé présente un terme source supplémentaire provenant essentiellement du fait que

- (1) les blocs ont une faible perméabilité par rapport aux fissures,
- (2) une source de densité non nulle et "assez" régulière sur les blocs et
- (3) le contact interfacial entre les deux constituants est supposé imparfait.

Ce chapitre est organisé comme suit: Au paragraphe 4.2 on donne la position du micro-modèle ainsi que l'énoncé du résultat principal. Dans le paragraphe 4.3, on construit le macro-modèle par la méthode de la convergence de deux échelles.

4.2 Position du problème

On considère un domaine Ω supposé borné et régulier de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) et soit $Y =]0, 1[^N$ le cube unité : la cellule de base supposée toujours décomposée comme suit : $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Gamma$ où $\Gamma = \partial Y_1 \cap \partial Y_2$ est l'interface séparant les deux ouverts Y_1 et Y_2 . On supposera que Γ est une sous-variété de \mathbb{R}^N lisse et de codimension 1. On notera par ν la normale unitaire à Γ , dirigée vers l'extérieur de Y_1 . Pour $i = 1, 2$, on notera χ_i la fonction caractéristique de l'ouvert Y_i , qu'on étend par Y -périodicité à \mathbb{R}^N . Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on pose

$$\Omega_i^\varepsilon = \left\{ x \in \Omega : \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_1^\varepsilon \cap \partial\Omega_2^\varepsilon.$$

Voir figure 4-1. Afin d'éviter des calculs techniques inutiles, on supposera que $\overline{\Omega_2^\varepsilon} \subset \Omega$ de sorte que $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_2^\varepsilon$ et $\partial\Omega_1^\varepsilon = \partial\Omega \cup \Gamma^\varepsilon$. Soit $Z_i = \cup_{k \in \mathbb{Z}^N} (Y_i + k)$. Comme dans [11], on suppose aussi que Z_1 est un ouvert régulier et connexe de \mathbb{R}^N . A noter que Z_2 peut ne pas être connexe.

Soit A (resp. B) la matrice de perméabilité du milieu Z_1 (resp. Z_2). Soit f_i une application mesurable sur Ω , représentant une source de densité interne du milieu Ω_i^ε . Finalement, soit ϑ la perméabilité hydraulique non rééchelonné de la couche mince Γ^ε . Nous allons faire ensuite les hypothèses sur les différents paramètres phénoménologiques du micro-modèle :

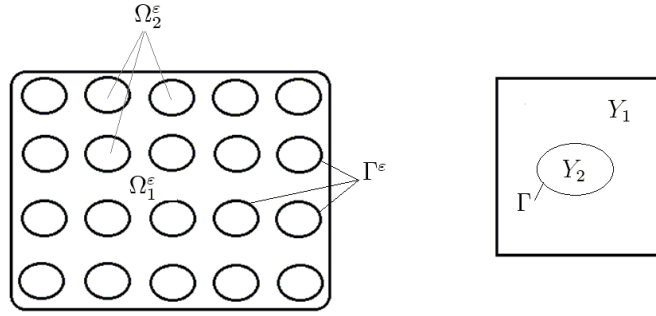


Figure 4-1: Le domaine composite et la cellule de base.

H1) A (resp. B) est continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique et satisfait à la condition d'ellipticité :

$$A\xi \cdot \xi \geq C|\xi|^2 \quad (\text{resp. } B\xi \cdot \xi \geq C|\xi|^2), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

où, et à travers tout ce chapitre, C désigne une constante indépendante de ε ;

H2) $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$;

H3) ϑ est une application continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique et minorée :

$$\vartheta(y) \geq C > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 4.1 *Il est utile de noter que l'hypothèse de continuité dans H1) n'est pas nécessaire. On pourra prendre $A, B \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et le résultat d'homogénéisation reste inchangé.*

Notation 4.1 *Lorsque l'on traite de l'homogénéisation périodique Il est souvent commode d'utiliser certaines notations. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}^N$, on notera*

$$\chi_i^\varepsilon(x) = \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad B^\varepsilon(x) = B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \vartheta^\varepsilon(x) = \varepsilon\vartheta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Le micro-modèle que nous allons étudier dans ce chapitre est donné par le système elliptique suivant :

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f_1 \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \quad (4.1)$$

$$-\varepsilon^2 \operatorname{div}(B^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) = f_2 \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \quad (4.2)$$

$$A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nu^\varepsilon = -\vartheta^\varepsilon (u^\varepsilon - v^\varepsilon) \text{ sur } \Gamma^\varepsilon, \quad (4.3)$$

$$\varepsilon^2 B^\varepsilon \nabla v^\varepsilon \cdot n^\varepsilon = -\vartheta^\varepsilon (v^\varepsilon - u^\varepsilon) \text{ sur } \Gamma^\varepsilon, \quad (4.4)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.5)$$

où ν^ε et n^ε sont les normales unitaires à Γ^ε dirigée vers l'extérieur de Ω_1^ε et Ω_2^ε , respectivement. Ici, Ω_1^ε représente la région fissurée avec perméabilité donnée par la matrice A^ε et Ω_2^ε la région rocheuse avec perméabilité donnée par $\varepsilon^2 B^\varepsilon$. Les quantités physiques u^ε et v^ε sont respectivement les pressions du fluide dans Ω_1^ε et Ω_2^ε . Comme dans Arbogast, Douglas, et Hornung [19], on a choisi un échelonnement particulier de la perméabilité dans $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ (voir précisément (4.2)). Ceci veut dire que les deux énergies potentielles $\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2$ et $\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\nabla v^\varepsilon|^2$ ont le même ordre de magnitude et conduisant ainsi à un équilibre dans la dissipation potentielle. Les équations (4.1) et (4.2) expriment la conservation de la masse du fluide avec prise en compte de la loi de Darcy linéaire dans Ω_1^ε et Ω_2^ε respectivement. Les conditions (4.3) et (4.4) quant à elles expriment respectivement la continuité du flux à travers l'interface Γ^ε et le contact imparfait entre la matrice et les fissures le long de Γ^ε supposée être également une couche (mince) de perméabilité donnée par ϑ^ε , voir [70]. La condition de transmission (4.4) est connue dans la littérature par la condition de Deresiewicz-Skalak. Finalement, (4.5) est la condition de Dirichlet homogène imposée sur la frontière extérieure de Ω .

Nous allons ensuite donner le cadre variationnel du système (4.1)-(4.5). Soit

$$H^\varepsilon = H_{\partial\Omega}^1(\Omega_1^\varepsilon) \times H^1(\Omega_2^\varepsilon). \text{ L'espace } H^\varepsilon \text{ est muni de la norme :}$$

$$\|(\varphi, \psi)\|_{H^\varepsilon}^2 = \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)}^2 + \varepsilon \|\varphi - \psi\|_{L^2(\Gamma^\varepsilon)}^2.$$

La formulation faible de (4.1)-(4.5) est alors donnée : pour $\varepsilon > 0$ assez petit, trouver un

couple $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in H^\varepsilon$ tel que $(\varphi, \psi) \in H^\varepsilon$, on a

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi \, dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla v^\varepsilon \nabla \psi \, dx + \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} \vartheta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon - v^\varepsilon) (\varphi - \psi) \, ds^\varepsilon = \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1 \varphi \, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2 \psi \, dx. \quad (4.6)$$

où dx et ds^ε désignent respectivement l'élément de volume de \mathbb{R}^N et l'élément d'aire sur Γ^ε . Maintenant, on donne un résultat d'existence et d'unicité du problème variationnel (4.6).

Théorème 4.1 *Supposons H1)-H3). Alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un couple unique $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in H^\varepsilon$, solution du problème variationnel (4.6), tel que*

$$\|(u^\varepsilon, v^\varepsilon)\|_{H^\varepsilon} \leq C. \quad (4.7)$$

Preuve. Nous allons pour cela utiliser le Lemme de Lax-Milgram (Théorème A.11.).

Notons

$$\begin{aligned} a^\varepsilon((\varphi, \psi), (\eta, \varsigma)) &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} A^\varepsilon \nabla \varphi \nabla \eta \, dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} B^\varepsilon \nabla \psi \nabla \varsigma \, dx + \\ &\quad \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} \vartheta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\varphi - \psi) (\eta - \varsigma) \, ds^\varepsilon, \\ L^\varepsilon((\varphi, \psi)) &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1 \varphi \, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2 \psi \, dx \end{aligned}$$

où $(\varphi, \psi), (\eta, \varsigma) \in H^\varepsilon$. Par conséquent, la formulation faible (4.6) est équivalent à : trouver $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in H^\varepsilon$ tel que pour tout $(\varphi, \psi) \in H^\varepsilon$ on a

$$a^\varepsilon((u^\varepsilon, v^\varepsilon), (\varphi, \psi)) = L^\varepsilon((\varphi, \psi)). \quad (4.8)$$

La coercivité et la continuité de la forme bilinéaire $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ s'ensuivent immédiatement des hypothèses H1) et H3). Il reste à prouver la continuité de la forme linéaire L^ε .

Premièrement, en vertu de H2), on voit facilement $(\varphi, \psi) \in H^\varepsilon$,

$$|L^\varepsilon((\varphi, \psi))| \leq M(f_1, f_2) \left(\left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |\psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.9)$$

où

$$M(f_1, f_2) = \max \left(\left(\int_{\Omega} |f_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_{\Omega} |f_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

est une constante indépendante de ε . Ensuite, suivant une idée de H. Ene et D. Polisevski [77], on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varphi = (\varphi, \psi) \in H^\varepsilon$

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\varphi|^2 dx \leq C \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad (4.10)$$

$$\int_{\Omega_2^\varepsilon} |\psi|^2 dx \leq C \left(\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\nabla \psi|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} |\psi|^2 ds^\varepsilon \right), \quad (4.11)$$

$$\varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} |\varphi|^2 ds^\varepsilon \leq C \left(\varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\varphi|^2 dx \right). \quad (4.12)$$

Les inégalités (4.10) et (4.11) sont des inégalités du type Poincaré et (4.12) est l'inégalité de la trace. Elles sont obtenues par le changement de variable :

$$x = \varepsilon(k + y), \quad k \in \{k \in \mathbb{Z}^N : \varepsilon(k + y) \subset \Omega_i^\varepsilon\}, \quad y \in Z_i, i = 1, 2$$

et en appliquant les inégalités de Poincaré et le Théorème de Trace sur l'ouvert Y_i (voir également la preuve du Lemme 3.3). Puisque ε est suffisamment petit, disons $\varepsilon < 1$, on a de (4.12)

$$\varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} |\varphi|^2 ds^\varepsilon \leq C \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\varphi|^2 dx \right). \quad (4.13)$$

En insérant (4.10) dans (4.13), on obtient

$$\varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} |\varphi|^2 \, ds^\varepsilon \leq C \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 \, dx \right). \quad (4.14)$$

Ensuite, en vertu de (4.11), on a

$$\int_{\Omega_2^\varepsilon} |\psi|^2 \, dx \leq C \left(\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\nabla \psi|^2 \, dx + \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} |\varphi - \psi|^2 \, ds^\varepsilon + \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} |\varphi|^2 \, ds^\varepsilon \right). \quad (4.15)$$

Maintenant, en combinant (4.14) et (4.15) on a

$$\int_{\Omega_2^\varepsilon} |\psi|^2 \, dx \leq C \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 \, dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\nabla \psi|^2 \, dx + \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} |\varphi - \psi|^2 \, ds^\varepsilon \right).$$

Autrement dit

$$\int_{\Omega_2^\varepsilon} |\psi|^2 \, dx \leq C \|(\varphi, \psi)\|_{H^\varepsilon}^2. \quad (4.16)$$

Observons que (4.10) entraîne que

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\varphi|^2 \, dx \leq C \|(\varphi, \psi)\|_{H^\varepsilon}^2. \quad (4.17)$$

Finalement, en utilisant (4.9), (4.16) et (4.17) on déduit que

$$|L^\varepsilon((\varphi, \psi))| \leq C \|(\varphi, \psi)\|_{H^\varepsilon}. \quad (4.18)$$

Ainsi, la forme L^ε est continue sur H^ε . Notons que la constante C apparaissant dans (4.9) est indépendante de ε .

Par le Lemme de Lax Milgram (Théorème A.11.), on conclut l'existence et l'unicité d'une solution $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in H^\varepsilon$ au problème variationnel (4.8). Enfin, en prenant $(\varphi, \psi) = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ dans (4.8), en appliquant l'uniforme coercivité de la forme bilinéaire $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ et la

continuité de L^ε on obtient l'estimation uniforme :

$$\|(\varphi, \psi)\|_{H^\varepsilon} \leq C$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ε . Ce qui achève la preuve du Théorème. ■

Maintenant, on énonce le résultat principal de ce chapitre dont la démonstration est donnée au paragraphe suivant.

Théorème 4.2 *Soit $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in H^\varepsilon$ la solution du problème (4.6). Supposons que $f_2 \in H^1(\Omega)$. Soit $U^\varepsilon = \chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon + \chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v^\varepsilon$ désignant la pression globale. Alors il existe une sous-famille extraite de (U^ε) toujours notée (U^ε) et il existe un unique $U \in H^1(\Omega)$ tels que (U^ε) converge faiblement vers U dans $H^1(\Omega)$. En outre, U est l'unique solution du problème homogénéisé :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla U) = F \text{ dans } \Omega, \\ U = G \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.19)$$

où \tilde{A} , F et G sont données dans (4.36)-(4.37).

Remarque 4.2 *A noter que nous avons imposé plus de régularité sur f_2 . Plus précisément, nous avons supposé que f_2 est dans $H^1(\Omega)$ afin que la fonction G définie par (4.37) soit dans $H^1(\Omega)$ et qui donne par voie de conséquence $F \in H^{-1}(\Omega)$. Voir aussi la Remarque 4.3 ci-dessous.*

Le reste de ce chapitre est consacré à la preuve du Théorème 4.2. Nous allons pour cela appliquer la technique de convergence à deux échelles.

4.3 Procédé d'homogénéisation

Maintenant, nous tournons notre attention vers la construction du problème homogénéisé (voir plus bas (4.19)).

Grâce aux estimations a priori (4.7) et en utilisant les Théorèmes 2.6, 2.7 et 2.8 il existe une sous-famille de $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ toujours notée $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ solution du problème (4.6) et il existe

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}) \text{ et } v_0 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y_2))$$

tels que

$$\begin{aligned} \chi_1^\varepsilon u^\varepsilon &\xrightarrow{2-s} \chi_1 u, \\ \chi_2^\varepsilon v^\varepsilon &\xrightarrow{2-s} \chi_2 v_0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} \chi_1^\varepsilon \nabla u^\varepsilon &\xrightarrow{2-s} \chi_1 (\nabla u + \nabla_y u_1), \\ \varepsilon \chi_2^\varepsilon \nabla v^\varepsilon &\xrightarrow{2-s} \chi_2 \nabla_y v_0 \end{aligned}$$

et pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_{\#}(Y))$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma^\varepsilon} \varepsilon (u^\varepsilon - v^\varepsilon) \psi^\varepsilon \, ds^\varepsilon = \int_{\Omega \times \Gamma} (u - v_0) \psi \, dx \, ds, \tag{4.21}$$

où l'on a noté $\psi^\varepsilon(x) = \psi(x, x/\varepsilon)$. Nous allons ensuite construire le problème homogénéisé par la technique de convergence à deux échelles. Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi_1, \psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_{\#}^\infty(Y))$.

Posons

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x) + \varepsilon \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \psi^\varepsilon(x) = \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

En prenant $\varphi = \varphi^\varepsilon$ et $\psi = \psi^\varepsilon$ dans (4.6), on a

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \left(\nabla \varphi + \nabla_y \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \varepsilon B^\varepsilon \nabla v^\varepsilon \nabla_y \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx + \tag{4.22}$$

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} v^\varepsilon (u^\varepsilon - v^\varepsilon) (\varphi - \psi^\varepsilon) \, ds^\varepsilon + \varepsilon R^\varepsilon = \int_{\Omega_1} f_1 \varphi \, dx + \int_{\Omega_2} f_2 \psi \, dx$$

où

$$R^\varepsilon = \int_{\Omega_1^\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla_x \varphi_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} B^\varepsilon \nabla v^\varepsilon \nabla_x \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx + \int_{\Gamma^\varepsilon} \vartheta^\varepsilon (u^\varepsilon - v^\varepsilon) \varphi_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) ds^\varepsilon.$$

Grâce à l'hypothèse H1) les fonctions vectorielles ${}^t A \nabla \varphi$, ${}^t A \nabla_y \varphi_1$, ${}^t B \nabla_x \psi$ et ${}^t B \nabla_y \psi$ sont des fonctions tests admissibles. En vertu des (4.20)-(4.21), on a alors les limites suivantes :

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} A^\varepsilon \nabla v^\varepsilon (\nabla \varphi + (\nabla_y \varphi_1)^\varepsilon) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times Y_1} A (\nabla u + \nabla_y u_1) (\nabla \varphi + \nabla_y \varphi_1) dx dy, \quad (4.23)$$

$$\int_{\Omega_2^\varepsilon} \varepsilon B^\varepsilon \nabla v^\varepsilon \nabla_y \psi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times Y_2} B \nabla v_0 \nabla_y \psi dx dy, \quad (4.24)$$

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \vartheta^\varepsilon (u^\varepsilon - v^\varepsilon) (\varphi - \psi^\varepsilon) ds^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times \Gamma} \vartheta (u - v_0) (\varphi - \psi) dx ds, \quad (4.25)$$

où on a noté pour des raisons de commodité

$$(\nabla_y \varphi_1)^\varepsilon(x) = (\nabla_y \varphi_1)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

De plus, en appliquant (4.7), il est facile de voir que $R^\varepsilon = O(1)$. Ainsi, en passant à la limite dans (4.6) et en tenant compte de (4.23), (4.24) et (4.25), on obtient la formulation variationnelle à deux échelles :

$$\int_{\Omega \times Y_1} A (\nabla u + \nabla_y u_1) (\nabla \varphi + \nabla_y \varphi_1) dx dy + \int_{\Omega \times Y_2} B (y) \nabla_y v_0 \nabla_y \psi dx dy + \int_{\Omega \times \Gamma} \vartheta (y) (u - v_0) (\varphi - \psi) dx ds = \int_{\Omega \times Y_1} f_1 \varphi dx + \int_{\Omega \times Y_2} f_2 \psi dx. \quad (4.26)$$

Par un argument de densité, l'équation (4.26) reste valide pour tout

$$(\varphi, \varphi_1, \varphi_2) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y_2)).$$

Maintenant, en intégrant par parties dans (4.26) on a alors le système homogénéisé à deux

échelles :

$$-\operatorname{div}_y (A (\nabla u + \nabla_y u_1)) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_1, \quad (4.27)$$

$$-\operatorname{div}_y (B \nabla_y v_0) = f_2 \text{ dans } \Omega \times Y_2, \quad (4.28)$$

$$-\operatorname{div} \left(\int_{Y_1} A (\nabla u + \nabla_y u_1) dy \right) + \int_{\Gamma} \vartheta(y) [u - v_0] ds = f_1 \text{ dans } \Omega, \quad (4.29)$$

$$(A (\nabla u + \nabla_y u_1)) \cdot \nu = 0 \text{ dans } \Omega \times \Gamma, \quad (4.30)$$

$$B \nabla_y v_0 \cdot \nu = -\vartheta (u - v_0) \text{ dans } \Omega \times \Gamma, \quad (4.31)$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (4.32)$$

Tout d'abord, observons que les équations (4.27) et (4.30) entraînent la relation suivante :

$$u_1(x, y) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \omega_j(y) + u^*(x), \quad (x, y) \in \Omega \times Y_1 \quad (4.33)$$

où, pour $1 \leq j \leq N$, $\omega_j \in H_{\#}^1(Y_1)/\mathbb{R}$ est l'unique solution du problème microscopique :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A (\nabla_y \omega_j + e_j)) = 0 \text{ dans } Y_1, \\ A (\nabla_y \omega_j + e_j) \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

et $u^*(x)$ est une fonction additive quelconque et indépendante de y . De façon similaire, des équations (4.28) et (4.31) on voit que v_0 peut-être exprimé comme suit :

$$v_0(x, y) - u(x) = \alpha(y) f_2(x), \quad (x, y) \in \Omega \times Y_2 \quad (4.34)$$

où $\alpha \in H_{\#}^1(Y_2)$ est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (B \nabla_y \alpha) = 1 \text{ dans } Y_2, \\ B \nabla_y \alpha \cdot \nu + \vartheta \alpha = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.35)$$

Dans ce qui suit, on notera

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}, \quad \tilde{a}_{ij} = \int_{Y_1} A (\nabla_y \omega_i + e_i) \cdot (\nabla_y \omega_j + e_j) dy, \quad (4.36)$$

$$f^* = |Y_1|f_1 + |Y_2|f_2, \quad G = \left(\int_{Y_2} \alpha \right) f_2, \quad F = f^* + \operatorname{div} \left(\tilde{A} \nabla G \right). \quad (4.37)$$

Grâce à l'hypothèse H1) \tilde{A} est symétrique et définie positive, voir par exemple [35]. Observons également que f^* appartient à $L^2(\Omega)$ et puisque $f_2 \in H^1(\Omega)$, G est aussi dans $H^1(\Omega)$. Par conséquent $F \in H^{-1}(\Omega)$. En insérant (4.33)-(4.34) dans (4.29) on obtient :

$$-\operatorname{div} \left(\tilde{A} \nabla u \right) = f^* \text{ dans } \Omega. \quad (4.38)$$

Maintenant, en tenant compte de (4.34), la pression globale $U^\varepsilon = \chi_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u^\varepsilon + \chi_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v^\varepsilon$ converge à deux échelles vers $u + \chi_2 \alpha f_2$. De ce fait, U^ε converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $U = u + G \in H^1(\Omega)$ qui est l'unique solution du problème homogénéisé :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\tilde{A} \nabla U \right) = F \text{ dans } \Omega, \\ U = G \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.39)$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 4.2.

Remarque 4.3 *Si l'hypothèse $f_2 \in H^1(\Omega)$ n'est plus satisfaite, disons f_2 est seulement dans $L^2(\Omega)$, alors comme signalé par G. Allaire dans [11, Remarque 4.5], la solution U ne vérifie pas la condition au bord de type Dirichlet. Il est alors préférable d'écrire U comme une somme de deux termes : u et $\int_{Y_2} v_0 dy$. Ainsi, le problème homogénéisé consiste en deux équations : (4.34), (4.38) avec la condition au bord de type Dirichlet homogène : $u = 0$ on $\partial\Omega$.*

Remarque 4.4 *En vertu de H2), on voit qu'on a simplement choisi les sources de densité indépendantes de ε et définies sur Ω alors qu'à travers ce chapitre, les valeurs () de f_1 et f_2 ont été seulement utilisées dans les régions Ω_1^ε et Ω_2^ε respectivement. En fait, on peut considérer aussi bien le cas où ces sources de densité sont définies dans leur*

régions respectives sans modifier substantiellement le modèle homogénéisé (4.39) sauf pour le terme moyennisé f^* donné dans (4.37). Plus précisément, si $f_i = f_i^\varepsilon$ dans Ω_i^ε ($i = 1, 2$), où $f_i^\varepsilon \in L^2(\Omega_i^\varepsilon)$ avec $\|f_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_i^\varepsilon)} \leq C$, alors en utilisant le prolongement par 0 à Ω de f_i^ε , on voit que

$$\left\| \chi_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) f_i^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

En désignant par f_i^0 la limite à deux échelles de $\chi_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) f_i^\varepsilon$, la limite faible de $\chi_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) f_i^\varepsilon$ est alors donnée (à une sous-famille près) par $F_i(x) = \int_{Y_i} f_i^0(x, y) dy$ au lieu de $|Y_i| f_i(x)$ (voir à cet effet, le membre de droite de la formulation variationnelle à deux échelles (4.26)) et le terme source moyennisé f^* est donné par $F_1 + F_2$ au lieu de $|Y_1| f_1 + |Y_2| f_2$.

Chapitre 5

Une généralisation du modèle d'Aifantis par l'homogénéisation

Nous allons construire par la technique de convergence à deux échelles le modèle de Barenblatt-Biot pour l'écoulement d'un fluide dans les milieux poro-élastiques périodiques où la taille de la période ε est très petite devant celle du milieu ambiant. Le micro-modèle consiste en un écoulement d'un fluide légèrement compressible et visqueux à travers un milieu poro-élastique composite à deux constituants séparés par une interface périodique constituant une barrière hydraulique à travers laquelle le flux est proportionnel au saut des vitesses des deux composantes et qui est modélisé par la condition interfaciale de type Deresiewicz-Skalak.

5.1 Introduction

L'étude des interactions entre l'écoulement de fluides à travers des milieux solides déformables revêt une importance capitale dans beaucoup de disciplines d'ingénierie telles que la géomécanique, la géophysique, ingénierie pétrolière, ...[63, 135].

Certains types de roches poreuses, comme les aquifères et les systèmes de réservoirs de pétrole, peuvent contenir des fractures. Il est connu que dans de tels milieux les écoulements se produisent principalement dans la région fracturée et le stockage des fluides est dominant dans les blocs rocheux. Dans ce cas, le réservoir possède deux structures

poreuses, une liée à la matrice rocheuse et l'autre associée aux fractures.

Cette notion de la double porosité / perméabilité a d'abord été introduite par Barenblatt, Zheltov et Kochina [33] pour modéliser l'écoulement d'un fluide peu compressible dans les milieux poreux naturellement fracturée sans tenir compte de leur déformation. Le modèle proposé est un système de deux équations aux dérivées partielles posé dans un domaine bi-structure avec prise en compte de la loi de Darcy dans chaque phase, en plus des termes d'échange représentant le couplage interfaciale qui résulte de l'interaction, à l'échelle microscopique entre les deux phases.

Généralement, les formations rocheuses fracturées présentent à l'échelle locale des degrés élevés d'hétérogénéité et la perméabilité est principalement déterminée par la taille des pores et par le degré de connectivité du système des fractures. Ainsi, toute modélisation mathématique de l'écoulement du fluide dans ces milieux poreux doit prendre en compte la variation spatiale rapide des paramètres phénoménologiques. En outre, du point de vue numérique, la modélisation de ces systèmes à l'échelle locale donne un grand nombre d'équations discrétisées, dont les calculs seraient fastidieux et complexes. Pour faire face à ces domaines très hétérogènes, l'idée est de remplacer ce milieu par un milieu homogène ou effective en élaborant une technique d'homogénéisation.

La méthode de convergence à deux échelles a été utilisée pour justifier rigoureusement le modèle à double porosité de Barenblatt-Zheltov-Kochina (BZK), voir par exemple H. Ene et D. Polisevski [77]. Toutefois, comme signalé plus haut, ce modèle ne prend pas en compte le comportement élastique du solide. En réalité, une augmentation de la pression interstitielle du fluide produit une dilatation de la masse du solide. D'autre part, une compression va augmenter la pression dans la zone des pores. Ce couplage de pression-déformation a déjà été considéré M. A. Biot [39] et qui nous a fourni le premier modèle de consolidation du sol pour un milieu poreux homogène et élastique dans le cadre multidimensionnel. Le modèle est basé sur une description à l'échelle macroscopique des quantités phénoménologiques et physiques où le volume élémentaire représentatif est décrit comme la superposition d'une particule de fluide et d'une particule de solide.

En supposant que les micro-structures sont régulièrement distribuées et que l'échelle des pores est très faible par rapport à l'échelle macroscopique, une technique de développe-

ment asymptotique à deux échelles a été utilisée pour déterminer formellement le modèle de Biot. Les modèles microscopiques sont basés sur les équations linéaires de l'élasticité dans la partie solide et sur les équations de Stokes pour le fluide dans la partie des pores et avec des conditions de transmission appropriées. Pour plus de détails, nous renvoyons à J.L. Auriault et E. Sanchez-Palencia [25] et R. Burridge et J. B. Keller [48].

Pour la modélisation dans les solides poro-élastiques hétérogènes, différents modèles effectifs ont été construits, voir par exemple [76, 82, 119]. Ainsi dans [119], on étudie l'homogénéisation d'un modèle de poro-élasticité sur les tissus osseux, décrivant les interactions entre la déformation de la matière osseuse et l'écoulement sanguin induit. La structure à double porosité est constituée des canaux de Volkmann-Havers (la porosité primaire) et des canalicules (la double porosité). Le modèle macroscopique est construit par la méthode d'éclatement périodique [58]. Il est décrit par le couplage déformation-fluide de type Darcy dans les porosités primaires alors que l'écoulement microscopique est responsable de l'apparition des effets de perte de mémoire par la loi de comportement macroscopique de type poro-visco-élastique.

Dans [7, 8], des modèles de consolidation de type Barenblatt-Biot pour des écoulements en milieux poreux élastiques et périodiques sont étudiés par la technique de convergence à deux échelles. Les micro-structures sont parcourues par un fluide légèrement visqueux et compressible. Ces milieux sont supposés à deux composantes poro-élastiques, séparées par une barrière interfaciale périodique et qui sont décrits par le modèle Biot de consolidation avec la condition de transmission de type Deresiewicz-Skalak.

En raison du couplage entre la déformation et la pression du fluide dans ces roches, le concept de la double porosité a été développé par Aifantis [4] pour modéliser l'écoulement d'huile dans des roches poreuses élastiques.

En fait, cette notion de double porosité dans les milieux poreux déformables ou poro-élastiques a été premièrement introduite par Aifantis pour l'étude des phénomènes de transport ou des procédés d'infiltration sur des modèles caractérisés par deux familles distinctes de diffusion habituellement appelées pores et fissures.

Les équations d'Aifantis s'écrivent (voir [4, 5, 136]) :

$$-\mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \alpha^{(1)}\nabla p^{(1)} + \alpha^{(2)}\nabla p^{(2)} = \mathbf{f}, \quad (5.1)$$

$$c^{(1)}\partial_t p^{(1)} + \alpha^{(1)}\operatorname{div}(\partial_t\mathbf{u}) - k^{(1)}\Delta p^{(1)} + \gamma(p^{(1)} - p^{(2)}) = g^{(1)}, \quad (5.2)$$

$$c^{(2)}\partial_t p^{(2)} + \alpha^{(2)}\operatorname{div}(\partial_t\mathbf{u}) - k^{(2)}\Delta p^{(2)} - \gamma(p^{(1)} - p^{(2)}) = g^{(2)}. \quad (5.3)$$

Ici \mathbf{u} est le champ de déplacement du solide poro-élastique, les constantes λ et μ sont appelées les coefficients de Lamé, les quantités $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ sont les pressions du fluide dans les pores et les fissures, respectivement. Le paramètre $c^{(m)}$ ($m = 1, 2$) est la compressibilité, $k^{(m)}$ est la perméabilité. Enfin $\alpha^{(1)}$ et $\alpha^{(2)}$ sont les coefficients de couplage pression-déformation. Ils sont connus dans la littérature comme étant les paramètres de *Biot-Willis* [42]. Ils mesurent le changement de porosité d'une phase à une autre, dû principalement aux contraintes volumétriques appliquées. Le terme de dilatation $\alpha^{(m)}\operatorname{div}(\partial_t\mathbf{u})$ compte pour le contenu fluide additionnel provenant des pores ou des fissures alors que le terme $\alpha^{(m)}\nabla p^{(m)}$ est la force s'exerçant sur la structure solide provenant des contraintes internes dues aux forces de pression.

On notera que si le volume des fissures est très petit de sorte que l'on peut négliger $c^{(2)}, \alpha^{(2)}, k^{(2)}$ et γ alors le système (5.1)-(5.3) se réduit à celui connu plus communément le modèle de consolidation de Biot (à une seule porosité ou monophasique):

$$-\mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \alpha^{(1)}\nabla p^{(1)} = \mathbf{f}, \quad (5.4)$$

$$c^{(1)}\partial_t p^{(1)} + \alpha^{(1)}\operatorname{div}(\partial_t\mathbf{u}) - k^{(1)}\Delta p^{(1)} = g^{(1)}. \quad (5.5)$$

Pour plus de détails sur ce modèle on se réfère par exemple aux travaux : [39, 40, 41, 63]. D'autre part, en négligeant les effets de déformation, le système (5.1)-(5.3) est celui donné par le modèle de Barenblatt-Zheltov-Kochina à double porosité [33] :

$$c^{(1)}\partial_t p^{(1)} - k^{(1)}\Delta p^{(1)} + \gamma(p^{(1)} - p^{(2)}) = g^{(1)}, \quad (5.6)$$

$$c^{(2)}\partial_t p^{(2)} - k^{(2)}\Delta p^{(2)} - \gamma(p^{(1)} - p^{(2)}) = g^{(2)}. \quad (5.7)$$

Ainsi la théorie d'Aifantis sur les processus de consolidation dans les milieux poro-élastiques à double porosité unifie les deux modèles : celui proposé par Biot et donné par les équations (5.4)-(5.5) posées dans le cas de milieux déformables avec prise en compte d'une seule porosité et celui proposé par Barenblatt-Zhel'tov-Kochina concernant les écoulements de fluide dans des milieux poreux indéformables avec effet de la double porosité et décrit par les équations (5.6)-(5.7).

Il est important de noter que le modèle d'Aifantis donné par (5.1)-(5.3) est posé dans un domaine occupé par un milieu homogène et isotrope. Le but de ce chapitre est de construire un modèle plus général que celui donné par Aifantis en tenant compte de l'hétérogénéité du milieu considéré à l'échelle microscopique. Ainsi nous considérerons des milieux poro-élastiques composites bi-structures. Le micro-modèle est basé sur le système de Biot pour les processus de consolidation avec une barrière interfaciale entre les deux structures : matrice et inclusions qu'on suppose réparties périodiquement. Nous ferons l'hypothèse essentielle que ces inclusions ont des tailles assez grandes par rapport à la taille des pores de sorte qu'il est logique d'envisager ces milieux comme étant le siège de matériaux poro-élastiques. Le macro-modèle qu'on obtient par homogénéisation s'écrit comme suit :

$$-\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\alpha}^{(1)}\nabla p^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}\nabla p^{(2)} = \mathbf{f} , \quad (5.8)$$

$$\left(\widetilde{c^{(m)}}p^{(m)} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\beta}^{(m)}e(\mathbf{u}))\right)_t - \operatorname{div}\left[\widetilde{B}^{(m)}\nabla p^{(m)}\right] - (-1)^m \widetilde{\gamma}(p^{(1)} - p^{(2)}) = g^{(m)} \quad (5.9)$$

où σ , $\boldsymbol{\alpha}^{(m)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(m)}$ et $\widetilde{B}^{(m)}$ sont des tenseurs homogénéisés ou effectives (pour leur définition voir plus loin (5.35)-(5.41)). Il est alors utile de remarquer que le modèle d'Aifantis (5.1)-(5.3) peut être vu comme un cas spécial du modèle homogénéisé (5.8)-(5.9). En effet il suffit juste de prendre en compte la loi de Hooke et poser $\boldsymbol{\beta}^{(m)} = \boldsymbol{\alpha}^{(m)} = \alpha^{(m)}\mathbb{I}_N$, où \mathbb{I}_N est la matrice identité et N la dimension du milieu. On voit bien dans ce cas le milieu est isotrope.

Le reste du chapitre est organisé comme suit : le paragraphe 5.2 est consacré à la position du problème à l'échelle locale de la double-diffusion dans un milieu fortement hétérogène constitué de deux matériaux poro-élastiques, l'un incrusté dans l'autre, séparés

par une interface supposée ε -périodique et où le contact entre ces deux matériaux est imparfait. Au paragraphe 5.3 on construira le problème homogénéisé par la technique de convergence à deux échelles. Ce problème est donné dans le résultat principal de ce chapitre : le Théorème 5.2.

5.2 Position du problème

On considère un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$. On rappelle que $Y = (0, 1)^N$ la cellule périodicité qu'on suppose décomposée comme suit : $Y := Y^{(1)} \cup Y^{(2)} \cup \Sigma$ où $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ sont deux ouverts disjoints de Y et $\Sigma = \partial Y^{(1)} \cap \partial Y^{(2)}$ est l'interface qui les sépare. On supposera pour simplifier la présentation que Σ est une variété de classe \mathcal{C}^∞ de dimension $N - 1$.

On supposera aussi que le prolongement à \mathbb{R}^N de $Y^{(m)}$ c'est à dire

$$Z^{(m)} = \cup_{e \in \mathbb{Z}^N} (e + Y^{(m)})$$

est un ouvert connexe de \mathbb{R}^N ($m = 1, 2$). Il est à noter que la condition $N \geq 3$ intervient dans la connexité des deux ouverts $Z^{(m)}$, $m = 1, 2$. En effet, si $N = 2$ ce n'est plus possible à cause du Théorème de séparation de Jordan, voir par exemple J. Dugundji [74].

Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre prenant ses valeurs dans une suite numérique convergente vers 0. On définit les "inclusions" comme suit :

$$\Omega_\varepsilon^{(2)} := \cup_{e \in J_\varepsilon} (\varepsilon e + \varepsilon Y^{(2)})$$

où

$$J_\varepsilon = \left\{ e \in \mathbb{Z}^N : \varepsilon e + \varepsilon \overline{Y^{(2)}} \subset \Omega \right\}.$$

Soit alors $\Omega_\varepsilon^{(1)} := \Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon^{(2)}}$ représentant la partie matrice et $\Sigma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon^{(1)} \cap \partial\Omega_\varepsilon^{(2)}$ l'interface ε -périodique entre les deux régions $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ et $\Omega_\varepsilon^{(2)}$. Voir figure 4-1.

Nous avons alors $\partial\Omega_\varepsilon^{(2)} \cap \partial\Omega = \emptyset$. A noter qu'on peut aussi avoir d'autres considérations

géométriques sans affecter le résultat principal à savoir le modèle macroscopique, voir par exemple [77, 6].

On suppose que les ouverts $\Omega_\varepsilon^{(m)}$ ($m = 1, 2$) sont occupés par des matériaux poro-élastiques saturés par un fluide légèrement compressible et visqueux de pression notée par $p_\varepsilon^{(m)}$. Soit

$$\begin{aligned} c_\varepsilon^{(m)}(x) &= c^{(m)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\text{et} \\ B_\varepsilon^{(m)}(x) &= B^{(m)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \left(b_{ij}^{(m)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)_{1 \leq i, j \leq N} \end{aligned}$$

désignant respectivement la compressibilité (ou la porosité) et la perméabilité du matériau $\Omega_\varepsilon^{(m)}$. On suppose que $c^{(m)}$ est définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$c^{(m)}(y) \geq C > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

où (ici et à travers ce chapitre) C est une constante strictement positive et indépendante de ε . On suppose aussi que pour tout $1 \leq i, j \leq N$ les fonctions $y \mapsto b_{ij}^{(m)}(y)$ sont définies et continues sur \mathbb{R}^N , Y -périodiques et vérifient les conditions de symétrie et de coercivité suivantes :

$$b_{ij}^{(m)}(y) = b_{ji}^{(m)}(y), \quad \forall i, j \quad 1 \leq i, j \leq N \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

et

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \sum_{i, j=1}^N b_{ij}^{(m)}(y) \eta_j \eta_i \geq C \sum_{i=1}^N \eta_i \eta_i, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \eta = (\eta_i) \in \mathbb{R}^N. \quad (5.10)$$

Nous allons maintenant décrire le tenseur total des contraintes. Soit \mathbf{u}_ε le vecteur déplacement dans Ω . On note $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (a_{ijkl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right))_{1 \leq i, j, k, l \leq N}$ le tenseur d'élasticité du matériau composite occupant Ω où pour tout $i, j, k, l = 1, 2, \dots, N$ les fonctions $a_{ijkl}(\cdot)$

sont continues sur \mathbb{R}^N , Y -périodiques et satisfont à la condition de symétrie :

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N, \quad a_{ijkl}(y) = a_{jikl}(y) = a_{ijlk}(y) = a_{klji}(y), \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, N \quad (5.11)$$

et à la condition de coercivité :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ avec } \eta_{ij} = \eta_{ji} \\ \sum_{i, j, k, l=1}^N a_{ijkl}(y) \eta_{kl} \eta_{ij} \geq C \sum_{i, j=1}^N \eta_{ij} \eta_{ij}. \end{aligned}$$

Dans le cadre de la théorie générale de la poro-élasticité le tenseur total des contraintes est donné dans chaque phase $\Omega_\varepsilon^{(m)}$ ($m = 1, 2$) par

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{(m)} = \mathcal{A}_\varepsilon e(\mathbf{u}_\varepsilon) - \alpha^{(m)} p_\varepsilon^{(m)} \mathbb{I}_N$$

où $e(\cdot) = (e_{ij}(\cdot))_{1 \leq i, j \leq N}$ désigne le tenseur linéarisé des déformations

$$e_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \mathbf{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq N}, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

pour une fonction \mathbf{v} suffisamment régulière.

Soit $T > 0$ et soit $t \in [0, T]$ la variable temps. Nous allons inclure dans ce travail le cas où les effets inertiels sont négligeables dans chaque phase de sorte que $\rho_\varepsilon^{(m)} \partial_{tt} \mathbf{u}_\varepsilon \approx 0$ où $\rho_\varepsilon^{(m)}$ est la densité du matériau $\Omega_\varepsilon^{(m)}$. Cette hypothèse est généralement adoptée dans les modèles de poro-élasticité linéaire et c'est ce qu'on appelle le processus de consolidation de Biot, voir R. Showalter [125, 126].

Le micro-modèle que nous allons homogénéiser est donné par le système suivant :

Pour chaque phase $m = 1, 2$, trouver le déplacement \mathbf{u}_ε , les pressions $p_\varepsilon^{(1)}$ et $p_\varepsilon^{(2)}$ tels que

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^{(m)} = \mathbf{f} \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\varepsilon^{(m)}, \quad (5.12)$$

$$\partial_t (c_\varepsilon^{(m)} p_\varepsilon^{(m)} + \alpha_\varepsilon^{(m)} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) - \operatorname{div} (B_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)}) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega_\varepsilon^{(m)}, \quad (5.13)$$

$$[\mathbf{u}_\varepsilon]_{\Sigma_\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad [\sigma_\varepsilon^{(m)}]_{\Sigma_\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = \mathbf{0} \text{ sur } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon, \quad (5.14)$$

$$(B_\varepsilon^{(1)} \nabla p_\varepsilon^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = -\varepsilon \gamma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) [p_\varepsilon^{(m)}]_{\Sigma_\varepsilon} \text{ sur } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon, \quad (5.15)$$

$$[B_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)}]_{\Sigma_\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_\varepsilon = \mathbf{0} \text{ sur } (0, T) \times \Sigma_\varepsilon, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{0} \text{ et } p_\varepsilon^{(1)} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad p_\varepsilon^{(m)}(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon^{(m)} \quad (5.18)$$

où $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ est la force de volume dans tout le matériau Ω , n_ε représente la normale unitaire à Σ_ε dirigée vers l'extérieur des inclusions $\Omega_\varepsilon^{(2)}$, $[\cdot]_{\Sigma_\varepsilon}$ exprime le saut à travers l'interface Σ_ε et $\gamma(y)$ désigne la perméabilité de l'interface Σ qu'on suppose définie, continue sur \mathbb{R}^N , Y -périodique et vérifiant

$$\exists C > 0, \quad \gamma(y) \geq C > 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 5.1 *Par souci de simplicité, nous avons supposé dans ce travail des coefficients phénoménologiques très réguliers à savoir continus sur \mathbb{R}^N . Il est tout à fait possible de prendre ces coefficients moins réguliers par exemple dans $L^\infty_\#(\mathbb{R}^N)$ sans affecter le résultat principal.*

Dans la littérature, l'interface Σ_ε peut être considérée comme une barrière hydraulique et la condition de transmission (5.15) est la condition aux limites de type *Deresiewicz-Skalak* [70].

Remarque 5.2 *Les conditions initiales données dans (5.18) ont déjà été utilisées par certains auteurs, voir par ex. P. Saint-Macary, H. Barucq et M. Madaune-Tort [122]. En fait, ces conditions sont plus fortes que celles considérées par R. E. Showalter [125, 126]. En réalité on n'a pas besoin de spécifier des données initiales des déplacements ainsi que celles des pressions indépendamment, puisque des conditions sur les termes $(c_i^\varepsilon p_i^\varepsilon + \alpha_i^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_i^\varepsilon)$ suffisent pour avoir un problème bien posé. A titre d'exemple on pourra imposer les conditions initiales :*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (c_i^\varepsilon p_i^\varepsilon(t) + \alpha_i^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_i^\varepsilon(t)) = v_i \quad \text{dans } L^2(\Omega_i^\varepsilon). \quad (5.19)$$

Voir [126] pour plus de détails. Notre choix de ces conditions homogènes est surtout d'ordre technique (voir aussi chapitre 6). Cependant il serait intéressant de regarder l'homogénéisation de ce modèle dans le cas où l'on remplacerait (5.18) par (5.19).

Maintenant nous allons nous consacrer au cadre variationnel du micro-modèle (5.12)-(5.18). Pour cela introduisons d'abord les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} & : = [H_0^1(\Omega)]^N, \\ \mathbf{L}_\varepsilon & : = L^2(\Omega_\varepsilon^{(1)}) \times L^2(\Omega_\varepsilon^{(2)}), \\ V_\varepsilon^{(1)} & : = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon^{(1)}); v|_\Gamma = 0\}, \\ V_\varepsilon^{(2)} & : = H^1(\Omega_\varepsilon^{(2)}), \\ \mathbf{V}_\varepsilon & : = V_\varepsilon^{(1)} \times V_\varepsilon^{(2)}. \end{aligned}$$

Grâce aux inégalités de Poincaré (Théorème A.7) et de Körn (Théorème A.9) \mathbf{H} est muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} = \left(\int_{\Omega} (e(\mathbf{u}) : e(\mathbf{u})) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $e(\mathbf{u}) : e(\mathbf{u})$ désigne le produit de contraction entre deux tenseurs définis comme suit

$$\varphi : \psi = \sum_{i,j=1}^N \varphi_{ij} \psi_{ij}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R}).$$

L'espace \mathbf{V}_ε est muni de la norme usuelle :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}\|_{\mathbf{V}_\varepsilon}^2 & = \|\nabla p^{(1)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{(1)})}^2 + \|\nabla p^{(2)}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^{(2)})}^2 + \varepsilon \|\llbracket \mathbf{p} \rrbracket_{\Sigma_\varepsilon}\|_{L^2(\Sigma_\varepsilon)}^2, \\ \mathbf{p} & = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in V_\varepsilon^{(1)} \times V_\varepsilon^{(2)}. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle de (5.12)-(5.18) est donnée comme suit :

Trouver $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon) \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \times L^2(0, T; \mathbf{V}_\varepsilon)$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_\varepsilon^{(1)}, p_\varepsilon^{(2)})$ tel que

$$\partial_t (c_\varepsilon^{(m)} p_\varepsilon^{(m)} + \alpha_\varepsilon^{(m)} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) \in L^2 \left(0, T; (V_\varepsilon^{(m)})^* \right), \quad (5.20)$$

$$\int_\Omega \mathcal{A}_\varepsilon e(\mathbf{u}_\varepsilon) e(\mathbf{v}) + \sum_m \int_{\Omega_\varepsilon^{(m)}} \alpha_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)} \mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{f} \mathbf{v} \text{ pour tout } v \in \mathbf{H}, \quad (5.21)$$

$$\sum_m \left(\left\langle (c_\varepsilon^{(m)} p_\varepsilon^{(m)} + \alpha_\varepsilon^{(m)} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)_t, q^{(m)} \right\rangle_{(V_\varepsilon^{(m)})^*, V_\varepsilon^{(m)}} + \int_{\Omega_\varepsilon^{(m)}} B_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)} \nabla q^{(m)} \right) \quad (5.22)$$

$$+ \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma_\varepsilon [\mathbf{p}_\varepsilon]_{\Sigma_\varepsilon} [\mathbf{q}]_{\Sigma_\varepsilon} = 0 \text{ pour tout } \mathbf{q} = (q^{(1)}, q^{(2)}) \in V_\varepsilon^{(1)} \times V_\varepsilon^{(2)},$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, p_\varepsilon^{(m)}(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon^{(m)} \quad (m = 1, 2). \quad (5.23)$$

On énonce sans démonstration le résultat d'existence et d'unicité du système (5.20)-(5.23).

Théorème 5.1 ([127]) *Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une solution unique $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon) \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_\varepsilon) \times L^2(0, T; \mathbf{V}_\varepsilon)$ du système (5.20)-(5.23).*

Ensuite nous allons donner des estimations a priori uniformes par rapport à ε . En prenant $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon$ dans (5.21), $q^{(m)}(\cdot) = p_\varepsilon^{(m)}(t, \cdot)$ ($t \in [0, T]$ et $m = 1, 2$) dans (5.22) et en additionnant ces deux équations on trouve

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \mathcal{A}_\varepsilon e(\mathbf{u}_\varepsilon) e(\mathbf{u}_\varepsilon) dx + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon^{(1)}} \alpha_\varepsilon^{(1)} (p_\varepsilon^{(1)})^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon^{(2)}} \alpha_\varepsilon^{(2)} (p_\varepsilon^{(2)})^2 dx \right) + \\ & \int_0^t \left(\int_{\Omega_\varepsilon^{(1)}} B_\varepsilon^{(1)} \nabla p_\varepsilon^{(1)} \nabla p_\varepsilon^{(1)} dx + \int_{\Omega_\varepsilon^{(2)}} B_\varepsilon^{(2)} \nabla p_\varepsilon^{(2)} \nabla p_\varepsilon^{(2)} dx \right) dt + \\ & \varepsilon \int_0^t \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma_\varepsilon ([\mathbf{p}_\varepsilon]_{\Sigma_\varepsilon})^2 ds^\varepsilon dt = \int_0^t \int_\Omega \mathbf{f} \mathbf{u}_\varepsilon dx. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ensuite, en tenant compte de (5.10), (5.11) et par les inégalités de Körn et de Poincaré l'équation (5.24) entraîne que

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}_\varepsilon)} + \|\mathbf{p}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}_\varepsilon)} + \|\mathbf{p}_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{L}_\varepsilon)} \leq C. \quad (5.25)$$

En vertu des estimations (5.25) qui, faut-il le souligner, sont uniformes par rapport à

ε , on est amené donc à étudier le comportement limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de la famille $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon)$. C'est l'objectif du paragraphe suivant.

5.3 Application de la convergence à deux échelles

L'étude du comportement limite de la solution $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon)$ est faite par la convergence à deux échelles. Grâce aux estimations a priori (5.25) et par les Théorèmes 2.6, 2.7 et 2.8 il existe une sous-famille de $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon)$ toujours notée $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon)$ et il existe

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\ \mathbf{u}_1 &\in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbf{H}_\#^1(Y)/\mathbb{R}^N)), \\ p^{(m)} &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ p_1^{(m)} &\in L^2((0, T) \times \Omega; H_\#^1(Y^{(m)})/\mathbb{R}), \quad m = 1, 2 \end{aligned}$$

tels que pour tout $\Phi = (\phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$,

$$\phi_{ij} = \phi_{ji} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}^\infty(Y))$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}((0, T) \times \Omega; \mathcal{C}^\infty(Y))$ et $\phi \in \mathcal{D}((0, T) \times \Omega; \mathcal{C}^\infty(Y))^N$ on a les convergences suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} e(\mathbf{u}_\varepsilon) \Phi_\varepsilon = \int_{\Omega \times Y} (e(\mathbf{u}) + e_y(\mathbf{u}_1)) \Phi, \quad (5.26)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon^{(m)}} p_\varepsilon^{(m)} \psi_\varepsilon = \int_{\Omega \times Y^{(m)}} p^{(m)} \psi, \quad (5.27)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon^{(m)}} \nabla p_\varepsilon^{(m)} \phi_\varepsilon = \int_0^t \int_{\Omega \times Y^{(m)}} (\nabla p^{(m)} + \nabla_y p_1^{(m)}) \phi \quad t \in (0, T), \quad (5.28)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Sigma_\varepsilon} \varepsilon \gamma_\varepsilon (p_\varepsilon^{(1)} - p_\varepsilon^{(2)}) \psi_\varepsilon = \int_0^t \int_{\Omega \times \Sigma} \gamma (p^{(1)} - p^{(2)}) \psi \quad t \in (0, T) \quad (5.29)$$

où l'on a noté $\Phi_\varepsilon(x) = \Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$, $\psi_\varepsilon(t, x) = \psi(t, x, \frac{x}{\varepsilon})$ et $\phi_\varepsilon(t, x) = \phi(t, x, \frac{x}{\varepsilon})$.

Nous allons par la suite décrire le procédé d'homogénéisation par la technique de convergence à deux échelles. Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, $\Psi_1 \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#^\infty(Y))^N$ et $\psi^{(m)} \in \mathcal{D}((0, T) \times \Omega)$.

Considérons les fonctions tests admissibles suivantes :

$$\begin{aligned}\Psi_\varepsilon(x) &= \Psi(x) + \varepsilon\Psi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \\ \psi_\varepsilon^{(m)}(t, x) &= \psi^{(m)}(t, x) + \varepsilon\psi_1^{(m)}\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad m = 1, 2, \\ \psi_1^{(m)} &\in \mathcal{D}\left((0, T) \times \Omega; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)\right).\end{aligned}$$

Prenons $\mathbf{v} = \Psi_\varepsilon$ dans (5.21). Nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathcal{A}_\varepsilon e(\mathbf{u}_\varepsilon) (e(\Psi) + \varepsilon e(\Psi_1) + e_y(\Psi_1)) + \\ \sum_m \int_{\Omega_\varepsilon^{(m)}} \alpha_\varepsilon^{(m)} \nabla p_\varepsilon^{(m)} (\Psi + \varepsilon\Psi_1) = \int_\Omega \mathbf{f}(\Psi + \varepsilon\Psi_1).\end{aligned}\tag{5.30}$$

En vertu des convergences à deux échelles (5.26), (5.27) et en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (5.30), on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \times Y} \mathcal{A}(e(\mathbf{u}) + e_y(\mathbf{u}_1)) (e(\Psi) + e_y(\Psi_1)) \\ + \sum_m \int_{\Omega \times Y^{(m)}} \alpha^{(m)} \left(\nabla p^{(m)} + \nabla_y p_1^{(m)}\right) \Psi = \int_\Omega \mathbf{f}\Psi.\end{aligned}\tag{5.31}$$

De façon similaire on passe à la limite dans (5.22) en prenant $q^{(m)} = \psi_\varepsilon^{(m)}$ et en tenant compte des limites à deux échelles (5.26), (5.27) et (5.29) on obtient

$$\begin{aligned}- \sum_m \int_0^T \int_{\Omega \times Y^{(m)}} \left[(c^{(m)} p^{(m)} + \alpha^{(m)} (\operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}_y \mathbf{u}_1)) \psi_t^{(m)} \right. \\ \left. + B^{(m)} \left(\nabla p^{(m)} + \nabla_y p_1^{(m)}\right) \left(\nabla \psi^{(m)} + \nabla_y \psi_1^{(m)}\right) \right] \\ + \int_0^T \int_{\Omega \times \Sigma} \gamma (p^{(1)} - p^{(2)}) (\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) = 0.\end{aligned}\tag{5.32}$$

Grâce à la linéarité de l'équation (5.31) on peut écrire que $(t, x, y) \in (0, T) \times \Omega \times Y$

$$\mathbf{u}_1(t, x, y) = - \sum_{k, h=1}^N \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial x_k}(t, x) \boldsymbol{\lambda}^{kh}(y) + \tilde{\mathbf{u}}(t, x)\tag{5.33}$$

où pour $1 \leq k, h \leq N$, $\boldsymbol{\lambda}^{kh} = (\lambda_i^{kh})_{1 \leq i \leq N} \in \mathbf{H}_\#^1(Y) / \mathbb{R}^N$ est la solution de l'équation

microscopique :

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\lambda}^{kh} - P^{kh}, \mathbf{w}) = 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\#}^1(Y) / \mathbb{R}^N,$$

où $P^{kh} = (y_k \delta_{hj})_{1 \leq j \leq N}$, δ_{hj} est le symbole de Krönecker et

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \int_Y \mathcal{A} e_y(\mathbf{z}) e_y(\mathbf{w}), \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\#}^1(Y) / \mathbb{R}^N.$$

Dans (5.33), $\tilde{\mathbf{u}}(t, x)$ est une fonction additive quelconque.

De façon analogue à (5.33), nous cherchons $p_1^{(m)}$ ($m = 1, 2$) sous la forme :

$$p_1^{(m)}(t, x, y) = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial p^{(m)}}{\partial x_i}(t, x) \zeta_i^{(m)}(y) + \tilde{p}_1(t, x), (t, x, y) \in (0, T) \times \Omega \times Y^{(m)} \quad (5.34)$$

où $\zeta_i^{(m)} \in (H^1(Y^{(m)})) / \mathbb{R}$ est la solution du problème :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y \left(B^{(m)}(y) \left(\nabla \zeta_i^{(m)} + e_i \right) \right) &= 0 \text{ dans } Y^{(m)}, \\ \left(\nabla \zeta_i^{(m)} + e_i \right) \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \Sigma, \\ y &\longmapsto \zeta_i^{(m)}(y) : Y - \text{périodique} \end{aligned}$$

avec e_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^N et \mathbf{n} la normale unitaire à Σ dirigée vers l'extérieur de $Y^{(2)}$. De même dans (5.34), $\tilde{p}_1(t, x)$ est également une fonction additive quelconque. Nous introduisons ensuite quelques notations utiles pour décrire le problème macroscopique. Nous donnerons les notations de tous les tenseurs effectifs ainsi que toutes les quantités moyennisées intervenant dans le problème homogénéisé donné par les équations (5.42)-(5.46) ci-dessous. Soit le tenseur des contraintes homogénéisé

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{a}_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}), \quad (5.35)$$

où est donné par

$$\mathbf{a}_{ijkl} = \mathbf{a}(\lambda^{kh} - P^{kh}, \lambda^{ij} - P^{ij}). \quad (5.36)$$

De façon similaire on introduit les tenseurs de conductivité hydrauliques effectifs correspondants à chaque phase m

$$\tilde{B}_{ij}^{(m)} = \int_{Y^{(m)}} b_{il}^{(m)}(y) \left(\delta_{lj} + \frac{\partial \zeta_j^{(m)}}{\partial y_l} \right) \quad \text{où } m = 1, 2. \quad (5.37)$$

Soit également les tenseurs de Biot-Willis

$$\alpha_{kh}^{(m)} = \int_{Y^{(m)}} \left(\alpha^{(m)} \sum_{i=1}^N \left(\delta_{ik} \delta_{ih} - \frac{\partial \lambda_i^{kh}}{\partial y_i} \right) \right), \quad (5.38)$$

$$\beta_{ij}^{(m)} = \int_{Y^{(m)}} \alpha^{(m)} B^{(m)}(y) (\nabla \zeta_i - e_i) (\nabla \zeta_j - e_j) \quad (5.39)$$

et soit les quantités moyennisées suivantes

$$\widetilde{c^{(m)}} = \int_{Y^{(m)}} c^{(m)}(y), \quad \widetilde{\gamma} = \int_{\Sigma} \gamma(s). \quad (5.40)$$

Enfin posons

$$\tilde{B}^{(m)} = \left(\tilde{B}_{ij}^{(m)} \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{(m)} = \left(\alpha_{ij}^{(m)} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta}^{(m)} = \left(\beta_{ij}^{(m)} \right)_{1 \leq i, j \leq N}. \quad (5.41)$$

Enfin, en insérant (5.33), (5.34) dans (5.31), (5.32), en tenant compte les notations (5.35)-(5.41) et en utilisant une intégration par parties on obtient le résultat d'homogénéisation suivant :

Théorème 5.2 *Les limites à deux échelles $(\mathbf{u}, p^{(1)}, p^{(2)})$ vérifient le problème homogénéisé*

$$-\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\alpha}^{(1)}\nabla p^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)}\nabla p^{(2)} = \mathbf{f}, \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (5.42)$$

$$\left(\widetilde{c}^{(1)}p^{(1)} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\beta}^{(1)}e(\mathbf{u}))\right)_t - \operatorname{div}\left[\widetilde{B}^{(1)}\nabla p^{(1)}\right] + \widetilde{\gamma}(p^{(1)} - p^{(2)}) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (5.43)$$

$$\left(\widetilde{c}^{(2)}p^{(m)} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\beta}^{(2)}e(\mathbf{u}))\right)_t - \operatorname{div}\left[\widetilde{B}^{(2)}\nabla p^{(2)}\right] - \widetilde{\gamma}(p^{(1)} - p^{(2)}) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega \quad (5.44)$$

$$\mathbf{u} = 0, p^{(m)} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma, \quad (5.45)$$

$$u(0, x) = 0, p^{(m)}(0, x) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (5.46)$$

Nous avons ainsi montré que le modèle "général" d'Aifantis peut-être obtenu à l'aide des techniques d'homogénéisation sur un micro-modèle de Biot pour un matériau composite multi-structure poro-élastique avec des interfaces constituant des barrières physiques imparfaites. Un problème intéressant serait de regarder le comportement limite, toujours par des techniques d'homogénéisation lorsque le potentiel dans les inclusions est de l'ordre ε^2 (voir au chapitre 3). Ce cas survient généralement lorsque ces inclusions poro-élastiques présentent des variations spatiales de très haute fréquence dues principalement à une perméabilité relativement très basse, par exemple $\varepsilon^2 B^{(2)}$, voir J.L. Auriault [22]. C'est l'objectif du chapitre suivant.

Chapitre 6

Homogénéisation d'un modèle de double porosité en poro-élasticité

Ce chapitre traite de l'homogénéisation d'une famille de micro-modèles pour l'écoulement d'un fluide dans un matériau composite contenant des inclusions poro-élastiques distribuées périodiquement mais avec un contraste de perméabilité et avec un contact imparfait au niveau de l'interface séparant ces deux milieux. Les micro-modèles sont basés sur le système de Biot pour les processus de consolidation dans chaque phase, avec une formulation de barrière interfaciale de type Deresiewicz-Skalak. En utilisant la technique de convergence à deux échelles, il est démontré que le système homogénéisé est un modèle plus général que celui proposé par Aifantis avec un terme de mémoire supplémentaire.

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'homogénéisation d'un modèle d'écoulement de fluide dans un milieu poro-élastique périodique constitué de deux composantes : la matrice et les inclusions, où les propriétés physiques changent rapidement sur une petite échelle caractérisée par un petit paramètre ε représentant la périodicité du milieu. Comme au chapitre 5, nous ferons également l'hypothèse que ces inclusions ont des tailles assez grandes par rapport à la taille des pores. Une question intéressante est d'étudier le comportement limite de ces milieux, lorsque l'écoulement du fluide dans les inclusions présente de très

haute fréquence de variation spatiale, à la suite d'une perméabilité relativement très faible comparée à celle de la roche mère, puisque on suppose ici que la vitesse de l'écoulement dans les pores est plus élevée à celle occurant dans l'espace poreux interconnecté des inclusions. Ainsi, la principale différence avec le modèle présenté au chapitre 5 précédent est que les coefficients de perméabilité sont ajustés de manière analogue à ceux donnés dans Arbogast et al [19] et aussi au chapitre 3. Cela conduit en particulier à une remise en échelles du potentiel d'écoulement dans les inclusions par un facteur ε^2 .

L'objectif principal de ce chapitre est de construire un modèle homogénéisé, plus général que celui donné au chapitre 3, en tenant compte cette fois de la déformabilité du milieu poreux. On montre que le comportement global de l'écoulement du fluide dans de tels milieux hétérogènes (présentant des inclusions à faible perméabilité sur l'échelle locale) peut présenter des termes de mémoire. Comme au chapitre 5, on montre également que dans ce type de milieux les coefficients de Biot-Willis ne sont plus des scalaires mais des tenseurs.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans le prochain paragraphe 6.2, nous posons notre problème et énonçons le résultat principal. Au paragraphe 6.3, nous nous consacrons à la preuve du résultat principal avec l'aide de la technique de convergence à deux échelles.

6.2 Position du Problème

On considère Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière notée Σ et soit $\varepsilon > 0$ un paramètre suffisamment petit ($\varepsilon \ll 1$). Comme aux chapitres précédents, on pose $Y =]0, 1[^N$ et on suppose que Y s'écrit : $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Sigma$ où Y_1, Y_2 sont deux ouverts connexes de Y et Σ est une surface de classe C^∞ qui sépare Y_1 et Y_2 :

$$\begin{aligned} \overline{Y_2} &\subset Y, & Y_1 \cap Y_2 &= \emptyset, \\ \Sigma &= \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} = \partial Y_2, & \partial Y_1 &= \Sigma \cup \partial Y. \end{aligned}$$

On note $\mathbf{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$ le vecteur normal unitaire à ∂Y_1 dirigé vers l'extérieur de Y_1 . On note χ_1 et χ_2 les fonctions caractéristiques de Y_1 et Y_2 respectivement, qu'on prolonge par

Y -périodicité à \mathbb{R}^N . On note alors pour $x \in \mathbb{R}^N$, $\chi_i^\varepsilon(x) = \chi_i(x/\varepsilon)$ et on pose

$$\begin{aligned}\Omega_i^\varepsilon &= \{x \in \Omega : \chi_i^\varepsilon(x) = 1\}, \quad i = 1, 2 \\ \Sigma^\varepsilon &= \overline{\Omega_1^\varepsilon} \cap \overline{\Omega_2^\varepsilon}.\end{aligned}$$

Soit $Z_i = \cup_{\vec{e} \in \mathbb{Z}^N} (Y_i + \vec{e})$, $i = 1, 2$. On suppose que Z_1 est régulier et connexe. Voir figure 3-1.

Avec ces hypothèses, le matériau occupant le volume Ω_2^ε est alors incrusté dans celui occupé par Ω_1^ε et l'interface Σ^ε est la frontière de Ω_2^ε . Notons que le bord de Ω_1^ε se décompose de deux parties : la frontière extérieure $\partial\Omega$ et l'interface Σ^ε . Usuellement, le domaine Ω_1^ε est appelé la matrice ou la roche mère alors que la zone Ω_2^ε est le siège des inclusions. Donc on peut dire que le volume Ω est occupé par deux matériaux poro-élastiques dont l'un est incrusté dans l'autre et sont séparés par une couche mince périodique.

Soit $T > 0$ et $t \in [0, T]$ représentant la variable "temps". On note

$$\begin{aligned}Q &= (0, T) \times \Omega, \quad \Sigma_T = (0, T) \times \Sigma, \\ Q_i^\varepsilon &= (0, T) \times \Omega_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2\end{aligned}$$

et

$$\Sigma_T^\varepsilon = (0, T) \times \Sigma^\varepsilon.$$

On suppose que chaque phase Ω_1^ε , Ω_2^ε est occupée par un matériau poro-élastique. Soit \mathbf{u}_i^ε le déplacement du milieu Ω_i^ε , $i = 1, 2$. Comme au chapitre précédent, nous allons également négliger dans chaque phase les effets inertiels. Plus précisément nous allons supposer que $\rho_i^\varepsilon \partial_{tt} \mathbf{u}_i^\varepsilon \approx 0$ où ρ_i^ε est la densité du matériau Ω_i^ε , $i = 1, 2$. C'est l'hypothèse de consolidation de Biot, voir R. Showalter [125, 126]. Ainsi les équations du mouvement dans $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ sont données par

$$-\operatorname{div} \sigma_1^\varepsilon = \mathbf{f}_1, \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{6.1}$$

$$-\operatorname{div} \sigma_2^\varepsilon = \mathbf{f}_2, \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon \tag{6.2}$$

où σ_i^ε est le tenseur symétrique des contraintes qui satisfait à la loi constitutive de la poro-élasticité linéaire de la forme :

$$\sigma_i^\varepsilon = \mathbb{A}_i^\varepsilon e(\mathbf{u}_i^\varepsilon) - \alpha_i^\varepsilon p_i^\varepsilon \mathbb{I}_N, \quad \text{dans } \Omega_i^\varepsilon \quad (6.3)$$

et $\mathbf{f}_i \in L^2(\Omega)^N$ est une force volumique dans le matériau correspondant, $i = 1, 2$. On supposera que \mathbf{f}_i est indépendante de ε .

Dans (6.3), \mathbb{A}_1^ε et \mathbb{A}_2^ε représentent les tenseurs d'élasticité (d'ordre 4), $e(\cdot)$ est le tenseur de déformation linéarisé, \mathbb{I}_N est la matrice identité, p_i^ε est la pression et α_i^ε est le coefficient de Biot-Willis du matériau poro-élastique Ω_i^ε , $i = 1, 2$. Cf. [42].

Soit c_1^ε (resp. c_2^ε) et D_1^ε (resp. D_2^ε) la porosité et la perméabilité du milieu Ω_1^ε (resp. Ω_2^ε). L'équation de conservation de la masse dans chaque phase est :

$$\partial_t(c_1^\varepsilon p_1^\varepsilon + \alpha_1^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_1^\varepsilon) - \operatorname{div}(D_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon, \quad (6.4)$$

$$\partial_t(c_2^\varepsilon p_2^\varepsilon + \alpha_2^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_2^\varepsilon) - \operatorname{div}(D_2^\varepsilon \nabla p_2^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon. \quad (6.5)$$

Sur Σ^ε , on associe à (6.1)-(6.2) les conditions de transmission :

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon = \mathbf{u}_2^\varepsilon, \quad \sigma_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon = \sigma_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon \quad (6.6)$$

et à (6.4)-(6.5) les conditions de Deresiewicz-Skalak

$$(D_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon = (D_2^\varepsilon \nabla p_2^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon, \quad (D_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon = -g^\varepsilon (p_1^\varepsilon - p_2^\varepsilon) \quad (6.7)$$

où \mathbf{n}^ε désigne le vecteur normal unitaire à Σ^ε dirigée vers l'extérieur de Ω_1^ε et g^ε est la perméabilité hydraulique de la barrière Σ^ε .

Sur la frontière extérieure $\partial\Omega$, on impose des conditions de type Dirichlet homogène :

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad p_1^\varepsilon = 0. \quad (6.8)$$

Enfin, le système (6.4)-(6.8) est complété par les conditions initiales homogènes :

-Dans la phase Ω_1^ε

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad p_1^\varepsilon(0, \cdot) = 0; \quad (6.9)$$

-Dans la phase Ω_2^ε

$$\mathbf{u}_2^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad p_2^\varepsilon(0, \cdot) = 0. \quad (6.10)$$

Remarque 6.1 *Comme signalé au chapitre précédent (voir Remarque 5.2), on considère ici pour des raisons de commodité des conditions initiales homogènes. Toutefois il serait intéressant d'étudier le cas non homogène. Ce qui conduirait à un modèle macroscopique présentant des effets de mémoire. Voir à cet effet le chapitre 3. De même il serait utile d'étudier le procédé d'homogénéisation pour notre modèle dans le cas où l'on remplacerait les conditions initiales (6.9) et (6.10) par (5.19).*

Dans ce qui suit (et à travers tout le chapitre) C désigne diverses constantes strictement positives et indépendantes de ε , de l'indice $i = 1, 2$ ainsi que de la variable microscopique $y \in \mathbb{R}^N$.

Maintenant on se consacre aux hypothèses sur les données physiques du problème. On se donne pour $i = 1, 2$

(H1) une application tensorielle $\mathbb{A}_i(y)$ d'ordre 4, définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i^\varepsilon(x) &= \mathbb{A}_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega, \\ \exists C > 0, \quad (\mathbb{A}_i(y)\Xi : \Xi) &\geq C(\Xi : \Xi) \end{aligned}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et $\Xi \in \mathcal{M}_{\text{sym}}^{N \times N}(\mathbb{R})$;

(H2) une application scalaire $c_i(y)$ définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$\begin{aligned} c_i^\varepsilon(x) &= c_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega, \\ c_i(y) &\geq C > 0 \end{aligned}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^N$;

(H3) une application matricielle $D_i(y)$ définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$D_1^\varepsilon(x) = D_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad D_2^\varepsilon(x) = \varepsilon^2 D_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega \quad (6.11)$$

et

$$\langle D_i(y) \xi, \xi \rangle \geq C |\xi|^2$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$;

(H4) une application scalaire $g(y)$ définie, continue sur \mathbb{R}^N et Y -périodique telle que

$$g^\varepsilon(x) = \varepsilon g(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \min_{y \in Y} g(y) \geq C > 0.$$

(H5) Les coefficients de Biot-Willis sont définis comme suit :

$$\alpha_1^\varepsilon(x) = \alpha_1 \text{ si } x \in \Omega_1^\varepsilon, \quad \alpha_2^\varepsilon(x) = \varepsilon \alpha_2 \quad \text{si } x \in \Omega_2^\varepsilon. \quad (6.12)$$

où α_i est une constante strictement positif, $i = 1, 2$.

Remarque 6.2 *Comme au chapitre 3, on a particulièrement choisi dans (6.11) une perméabilité plus grande dans le réseau des inclusions que celle dans la roche mère. Ce qui a donné le même ordre de magnitude pour les potentiels $\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla p_1^\varepsilon|^2 dx$ et $\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} |\nabla p_2^\varepsilon|^2 dx$. Pour plus de détails, on se réfère à T. Arbogast, J. Douglas et U. Hornung [19] (voir aussi G. Allaire [11], G.W. Clark [59]). De la même manière, une mise à l'échelle spécifique des paramètres de Biot-Willis pour des matériaux poro-élastiques a été effectuée, voir à cet effet (6.12). Voir également M. Eden et M. Böhm [76].*

Remarque 6.3 *Comme au chapitre précédent, on signale que les données du problème : \mathbb{A}_i, c_i, D_i et g sont supposées régulières et plus précisément continues sur \mathbb{R}^N . On pourra tout à fait considérer le cas où ces données appartiendraient par exemple à $L^\infty_{\#}(\mathbb{R}^N)$. Le résultat d'homogénéisation resterait le même.*

Nous introduisons maintenant les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= H_0^1(\Omega)^N, \quad L^\varepsilon = L^2(\Omega_1^\varepsilon) \times L^2(\Omega_2^\varepsilon), \\ \mathcal{E}_1^\varepsilon &= \{q \in H^1(\Omega_1^\varepsilon); q|_\Sigma = 0\}, \quad \mathcal{E}_2^\varepsilon = H^1(\Omega_2^\varepsilon), \quad \mathcal{E}^\varepsilon = \mathcal{E}_1^\varepsilon \times \mathcal{E}_2^\varepsilon.\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré (Théorème A.7.) et à l'inégalité de K orn (Théorème A.9.) l'espace \mathbf{H} est muni de la norme :

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} = \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}.$$

L'espace \mathcal{E}^ε est muni de la norme naturelle :

$$\|(q_1, q_2)\|_{\mathcal{E}^\varepsilon}^2 = \|\nabla q_1\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla q_2\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)}^2 + \varepsilon \|q_1 - q_2\|_{L^2(\Sigma^\varepsilon)}^2.$$

Notons pour $(t, x) \in Q$,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^\varepsilon(t, x) &= \chi_1^\varepsilon(x) \mathbf{u}_1^\varepsilon(t, x) + \chi_2^\varepsilon(x) \mathbf{u}_2^\varepsilon(t, x), \\ \mathbb{A}^\varepsilon(x) &= \chi_1^\varepsilon(x) \mathbb{A}_1^\varepsilon(x) + \chi_2^\varepsilon(x) \mathbb{A}_2^\varepsilon(x), \\ \mathbf{f}^\varepsilon(x) &= \chi_1^\varepsilon(x) \mathbf{f}_1(x) + \chi_2^\varepsilon(x) \mathbf{f}_2(x).\end{aligned}$$

Grâce à la condition de transmission (6.6), on remarque que le déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon(t, \cdot)$ est dans \mathbf{H} pour $t \in (0, T)$.

Notation 6.1 *A travers ce chapitre, nous allons adopter pour des raisons de commodité la notation suivante : si \mathcal{F} est un espace de Banach alors $L_T^p(\mathcal{F})$ désigne l'espace $L^p(0, T; \mathcal{F})$.*

Notation 6.2 *Dans toute la suite dx et ds^ε désignent respectivement les mesures de Lebesgue sur \mathbb{R}^N et de Hausdorff sur Σ^ε .*

La formulation faible de (6.1)-(6.10) est la suivante : Trouver $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in L_T^\infty(\mathbf{H}) \times L_T^2(\mathcal{E}^\varepsilon)$ tel que $p^\varepsilon = (p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_T^\infty(L^\varepsilon)$,

$$\partial_t(c_1^\varepsilon p_1^\varepsilon + \alpha_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon) \in L_T^2(\mathcal{E}_1^*), \quad \partial_t(c_2^\varepsilon p_2^\varepsilon + \varepsilon \alpha_2 \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon) \in L_T^2(\mathcal{E}_2^*)$$

et pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$, $(q_1, q_2) \in \mathcal{E}^\varepsilon$, on a

$$\int_{\Omega} \mathbb{A}^\varepsilon e(\mathbf{u}^\varepsilon) e(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \alpha_1 \nabla p_1^\varepsilon \mathbf{v} dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \alpha_2^\varepsilon \nabla p_2^\varepsilon \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}^\varepsilon \mathbf{v} dx, \quad (6.13)$$

$$\langle \partial_t(c_1^\varepsilon p_1^\varepsilon + \alpha_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon), q_1 \rangle_{\mathcal{E}_1^*, \mathcal{E}_1^\varepsilon} + \quad (6.14)$$

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} D_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon \nabla q_1 dx + \langle \partial_t(c_2^\varepsilon p_2^\varepsilon + \varepsilon \alpha_2 \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon), q_2 \rangle_{\mathcal{E}_2^*, \mathcal{E}_2^\varepsilon}$$

$$+ \int_{\Omega_2^\varepsilon} D_2^\varepsilon \nabla p_2^\varepsilon \nabla q_2 dx + \int_{\Sigma^\varepsilon} g^\varepsilon (p_1^\varepsilon - p_2^\varepsilon) (q_1 - q_2) ds^\varepsilon = 0,$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad \chi_1(\cdot) p_1^\varepsilon(0, \cdot) + \chi_2(\cdot) p_2^\varepsilon(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (6.15)$$

Sous les hypothèses (H1)–(H5), on établit le résultat d’existence et d’unicité dont la preuve peut être trouvée par exemple dans R. Showalter et B. Momken [127] avec une légère modification.

Théorème 6.1 *Supposons (H1)–(H5). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $\mathbf{f}^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, il existe une couple unique $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in L_T^\infty(\mathbf{H}) \times L_T^2(\mathcal{E}^\varepsilon)$, solution de la formulation faible (6.13)–(6.15) telle que*

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L_T^\infty(\mathbf{H})} + \|p^\varepsilon\|_{L_T^2(\mathcal{E}^\varepsilon)} + \|p^\varepsilon\|_{L_T^\infty(L^\varepsilon)} \leq C. \quad (6.16)$$

Grâce aux estimations a priori (6.16) uniformes par rapport à ε , on est donc conduit à faire un passage à la limite lorsque ε tend vers 0 de la famille $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ et déterminer le problème limite.

Afin d’énoncer le résultat principal, on introduit les problèmes auxiliaires suivants :

Pour $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$, on note $\mathbf{w}^{jk} \in (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^N$ la solution du problème micro-

scopique suivant :

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}_y(\mathbb{A}_1 e_y(\mathbf{w}^{jk} + \mathbf{d}^{jk})) &= 0 \quad \text{dans } Y_1, \\
-\operatorname{div}_y(\mathbb{A}_2 e_y(\mathbf{w}^{jk} + \mathbf{d}^{jk})) &= 0 \quad \text{dans } Y_2, \\
\mathbb{A}_1 e_y(\mathbf{w}^{jk} + \mathbf{d}^{jk}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbb{A}_2 e_y(\mathbf{w}^{jk} + \mathbf{d}^{jk}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma, \\
\mathbb{A}_1 e_y(\mathbf{w}^{jk} + \mathbf{d}^{jk}) \cdot \mathbf{n} &\text{ est } Y\text{-périodique}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{d}^{jk}(y) = (y_l \delta_{lk})_{1 \leq l \leq N}$ et (δ_{kj}) est le symbole de Kröner.

Pour $j = 1, 2, \dots, N$, soit $\pi_j \in H^1(Y_1)/\mathbb{R}$ l'unique solution du problème elliptique suivant :

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}_y(D_1(\nabla \pi_j + e_j)) &= 0 \quad \text{dans } Y_1, \\
D_1(\nabla \pi_j + e_j) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\
y \mapsto \pi_j &\text{ est } Y\text{-périodique}
\end{aligned}$$

où e_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique \mathbb{R}^N .

Soit $\zeta \in L_T^\infty(H_\#^1(Y_2))$ l'unique solution du problème d'évolution parabolique de type Robin :

$$\begin{aligned}
\partial_t(c_2 \zeta) - \operatorname{div}_y(D_2 \nabla_y \zeta) &= 0 \quad \text{dans } (0, T) \times Y_2, \\
D_2 \nabla_y \zeta \cdot \mathbf{n} &= -g(y)[1 - \zeta] \quad \text{sur } \Sigma, \\
y \mapsto \zeta &\text{ est } Y\text{-périodique,} \\
\zeta(0, y) &= 0, \quad y \in Y_2.
\end{aligned}$$

Maintenant, on définit le tenseur d'élasticité homogénéisé d'ordre 4 : $\tilde{\mathbb{A}} = (\tilde{a}_{j_1 j_2 j_3 j_4})_{1 \leq j_1, j_2, j_3, j_4 \leq N}$,

où les coefficients sont donnés par

$$\tilde{a}_{j_1 j_2 j_3 j_4} = \sum_{k_1, k_2=1}^N \int_Y a_{j_1 j_2 k_1 k_2}(y) (\delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_2} + e_{k_1 k_2, y}(\mathbf{w}^{j_3 j_4})(y)) dy.$$

Ici $(a_{ijklm})_{1 \leq i,j,k,l \leq N}$ sont les coefficients du tenseur \mathbb{A} défini par

$$\mathbb{A}(y) = \chi_1(y)\mathbb{A}_1(y) + \chi_2(y)\mathbb{A}_2(y), \quad y \in Y \quad (6.17)$$

et $e_{jk,y}(\cdot)$ est le tenseur local des déformations linéarisé, i.e. que les dérivées sont prises par rapport à la variable locale y .

On définit aussi les tenseurs homogénéisés suivants :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{u}) = (\tilde{\sigma}_{jk}(\mathbf{u})), \quad \tilde{D} = (\tilde{D}_{jk}), \quad B = (b_{jk}), \quad \Lambda = (\lambda_{jk}) \quad (6.18)$$

où pour $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\tilde{\sigma}_{jk}(\mathbf{u}) = \sum_{l,m=1}^N \tilde{a}_{jklm} e_{lm}(\mathbf{u}), \quad (6.19)$$

$$\tilde{D}_{jk} = \int_{Y_1} D_1(y) (\nabla_y \pi_j + e_j) (\nabla \pi_k + e_k) dy, \quad (6.20)$$

$$b_{jk} = \alpha_1 (|Y_1| \delta_{jk} + \int_{\Sigma} \pi_k(y) n_j ds), \quad (6.21)$$

$$\lambda_{jk} = \alpha_1 \int_{Y_1} \sum_{l=1}^N (\delta_{jl} \delta_{kl} + \frac{\partial w_l^{jk}}{\partial y_l}) dy. \quad (6.22)$$

Ici $|Y_i|$ est le volume de Y_i et $(w_l^{ij})_{1 \leq l \leq N}$ sont les composantes de \mathbf{w}^{ij} .

Enfin on introduit les quantités moyennisées suivantes :

$$\mathbf{f} = |Y_1| \mathbf{f}_1 + |Y_2| \mathbf{f}_2, \quad (6.23)$$

$$\tilde{c} = \int_{Y_1} c_1(y) dy, \quad (6.24)$$

$$\tilde{g} = \int_{\Sigma} g(y) ds \quad (6.25)$$

ainsi que

$$\theta(t, \tau) = \alpha_2 \int_{\Sigma} \partial_t \zeta(t - \tau, y) \mathbf{n} ds, \quad (6.26)$$

$$\eta(t, \tau) = - \int_{\Sigma} g(y) \partial_t \zeta(t - \tau, y) ds. \quad (6.27)$$

Avec toutes ces notations, on peut énoncer maintenant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 6.2 *Soit $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \times L^2(0, T; \mathcal{E}^\varepsilon)$ l'unique solution du problème variationnel (6.13). Alors, il existe une sous-famille de $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ notée toujours $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ et il existe $(\mathbf{u}, p) \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ tels que*

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faiblement,}$$

$$p_1^\varepsilon \rightharpoonup p_1 \text{ dans } L^2(Q) \text{ faiblement,}$$

$$p_2^\varepsilon \rightharpoonup \int_{Y_2} p_2(y) dy \text{ dans } L^2(Q) \text{ faiblement,}$$

où $p = (p_1, \int_{Y_2} p_2(y) dy)$ et

$$p_2(t, x, y) = \int_0^t p_1(\tau, x) \partial_t \zeta(t - \tau, y) d\tau, \quad (t, x, y) \in Q \times Y_2.$$

Le couple (\mathbf{u}, p_1) est solution du problème homogénéisé suivant :

$$-\operatorname{div} \tilde{\sigma}(\mathbf{u}) + B \nabla p_1 + \int_0^t \theta(t, \tau) p_1(\tau, x) d\tau = \mathbf{f} \text{ dans } Q,$$

$$\partial_t(\tilde{c} p_1 + \Lambda : \mathbf{e}(\mathbf{u})) - \operatorname{div}(\tilde{D} \nabla p_1) + \tilde{g} p_1 - \int_0^t \eta(t, \tau) p_1(\tau, x) d\tau = 0 \text{ dans } Q,$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \tilde{D} \nabla p_1 \cdot \nu = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega,$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \quad p_1(0, x) = 0 \text{ dans } \Omega$$

où $\tilde{\sigma}$, B , θ , \mathbf{f} , \tilde{c} , Λ , \tilde{D} , \tilde{g} et η sont donnés dans (6.18)-(6.27).

6.3 Preuve du résultat principal

Une application directe des Théorèmes 2.6, 2.7 et 2.8 et des estimations a priori (6.16) entraîne immédiatement le résultat de convergence à deux échelles concernant la solution $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ du problème (6.13)-(6.15).

Théorème 6.3 *Il existe une sous-famille de $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$, solution du problème (6.13)-(6.15), notée encore $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ et il existe*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L_T^\infty(\mathbf{H}), \quad \hat{\mathbf{u}} \in L_T^\infty(L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}))^N, \\ p_1 &\in L_T^\infty(H_0^1(\Omega)), \quad \hat{p}_1 \in L^2(Q; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}), \quad p_2 \in L_T^\infty(L^2(\Omega; H_\#^1(Y))) \end{aligned}$$

tels que, pour $t \in (0, T)$,

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, \cdot) \xrightarrow{2-s} \mathbf{u}(t, \cdot), \tag{6.28}$$

$$\chi_1^\varepsilon p_1^\varepsilon(t, \cdot) \xrightarrow{2-s} \chi_1 p_1(t, \cdot), \tag{6.29}$$

$$\chi_1^\varepsilon p_2^\varepsilon(t, \cdot) \xrightarrow{2-s} \chi_2 p_2(t, \cdot) \tag{6.30}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial \mathbf{x}_j} \xrightarrow{2-s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{y}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \tag{6.31}$$

$$\chi_1^\varepsilon \nabla p_1^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_1 (\nabla p_1 + \nabla_y \hat{p}_1), \tag{6.32}$$

$$\varepsilon \chi_2^\varepsilon \nabla p_2^\varepsilon \xrightarrow{2-s} \chi_2 \nabla_y p_2. \tag{6.33}$$

De plus, on a la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_T^\varepsilon} g^\varepsilon(p_1^\varepsilon - p_2^\varepsilon) \psi^\varepsilon dt ds^\varepsilon = \int_{Q \times \Sigma} g(p_1 - p_2) \psi dt dx ds, \tag{6.34}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}(Q; \mathcal{C}_\#(Y))$ avec $\psi^\varepsilon(t, x) = \psi(t, x, x/\varepsilon)$.

Afin de déterminer les équations limites du système (6.13)-(6.15), on commence par choisir les fonctions tests admissibles. Soit donc

$$\mathbf{v}^\varepsilon(x) = \mathbf{v}(x) + \varepsilon \hat{\mathbf{v}}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

où $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ et $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#^\infty(Y))^N$.

Soit $\varphi_1 \in \mathcal{D}((0, T) \times \bar{\Omega})$ et $\varphi_2, \hat{\varphi}_1 \in \mathcal{D}(Q; \mathcal{C}_{\#}^{\infty}(Y))$. Posons

$$q_1^{\varepsilon}(t, x) = \varphi_1(t, x) + \varepsilon \hat{\varphi}_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon}), \quad q_2^{\varepsilon}(t, x) = \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}).$$

En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\varepsilon}$ dans (6.13), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\varepsilon} \mathbf{v}^{\varepsilon} dx &= \int_{\Omega} \mathbb{A}^{\varepsilon}(x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \mathbf{e}(\mathbf{v}^{\varepsilon}) dx + \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} \alpha_1 \nabla p_1^{\varepsilon} \mathbf{v}^{\varepsilon} dx + \varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} \alpha_2 \nabla p_2^{\varepsilon} \mathbf{v}^{\varepsilon} dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{A}^{\varepsilon}(x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) (\mathbf{e}(\mathbf{v})(x) + \mathbf{e}_y(\hat{\mathbf{v}})(x, \frac{x}{\varepsilon})) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\alpha_1 \chi_1^{\varepsilon}(x) \nabla p_1^{\varepsilon} + \varepsilon \alpha_2 \chi_2^{\varepsilon}(x) \nabla p_2^{\varepsilon}) \mathbf{v}(x) dx + \varepsilon R_1^{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.35)$$

où

$$\begin{aligned} R_1^{\varepsilon} &= \int_{\Omega} \mathbb{A}^{\varepsilon}(x) \mathbf{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \mathbf{e}_x(\mathbf{w})(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx + \alpha_1 \int_{\Omega} \chi_1^{\varepsilon}(x) \nabla p_1^{\varepsilon} \mathbf{w}(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \\ &\quad + \varepsilon \alpha_2 \int_{\Omega} \chi_2^{\varepsilon}(x) \nabla p_2^{\varepsilon} \mathbf{w}(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx. \end{aligned}$$

Observons premièrement que

$$R_1^{\varepsilon} = O(1).$$

En passant à la limite dans (6.35) et en vertu de (6.31) (puisque $\mathbb{A}^t(\mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{e}_y(\hat{\mathbf{v}}))$ est une fonction test admissible) la première intégrale dans le membre de gauche de (6.35) converge vers

$$\int_{\Omega \times Y} \mathbb{A}(\mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{e}_y(\hat{\mathbf{u}})) (\mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{e}_y(\hat{\mathbf{v}})) dx dy \quad (6.36)$$

où le tenseur $\mathbb{A}(y)$ est donné par (6.17). En vertu de la formule de Green et grâce à (6.32)-(6.33), la seconde intégrale du membre de gauche de (6.35) tend vers

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \int_{\Omega \times Y_1} (\nabla p_1 + \nabla_y \hat{p}_1) \mathbf{v}(x) dx dy + \alpha_2 \int_{\Omega \times Y_2} \nabla_y p_2 \mathbf{v}(x) dx dy \\ &= \alpha_1 |Y_1| \int_{\Omega} \nabla p_1 \mathbf{v}(x) dx + \int_{\Omega \times \Sigma} (\alpha_1 \hat{p}_1 + \alpha_2 p_2) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dx ds. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Par le Théorème 2.6, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\varepsilon} \mathbf{v}^{\varepsilon}(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f}^{\varepsilon}(x) \mathbf{v}(x) dx + \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\varepsilon}(x) \hat{\mathbf{v}}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \mathbf{v}(x) dx \end{aligned} \quad (6.38)$$

où \mathbf{f} est donné par (6.23). Ainsi, en collectant toutes les limites (6.36)-(6.38), on obtient l'équation limite de (6.35) :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \times Y} \mathbb{A}[\mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{e}_y(\hat{\mathbf{u}})][\mathbf{e}(\mathbf{v}) + \mathbf{e}_y(\hat{\mathbf{v}})] dx dy + \alpha_1 |Y_1| \int_{\Omega} \nabla p_1 \mathbf{v} dx \\ &+ \int_{\Omega \times \Sigma} (\alpha_1 \hat{p}_1 + \alpha_2 p_2)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dx ds = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx \end{aligned} \quad (6.39)$$

qui est valide pour $t \in (0, T)$.

Ensuite, nous allons déterminer l'équation limite de (6.14). En prenant $q_1 = q_1^{\varepsilon}$ et $q_2 = q_2^{\varepsilon}$ dans (6.14), en intégrant par parties sur l'intervalle de temps $(0, T)$ et en prenant compte des conditions initiales (6.15), on obtient

$$\begin{aligned} &-\int_{Q_1^{\varepsilon}} (c_1^{\varepsilon}(x) p_1^{\varepsilon} + \alpha_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^{\varepsilon}) \partial_t \varphi_1(t, x) dt dx - \int_{Q_2^{\varepsilon}} c_2^{\varepsilon}(x) p_2^{\varepsilon} \partial_t \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx + \\ &\int_{Q_1^{\varepsilon}} D_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla p_1^{\varepsilon} (\nabla \varphi_1(t, x) + \nabla_y \hat{\varphi}_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon})) dt dx + \int_{Q_2^{\varepsilon}} \varepsilon k_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla p_2^{\varepsilon} \nabla_y \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Sigma^{\varepsilon}} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (p_1^{\varepsilon} - p_2^{\varepsilon}) (\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon})) dt ds^{\varepsilon} + \varepsilon R_2^{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

où

$$\begin{aligned} R_2^{\varepsilon} &= \int_{Q_1^{\varepsilon}} -(c_1^{\varepsilon}(x) p_1^{\varepsilon} + \alpha_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^{\varepsilon}) \partial_t \hat{\varphi}_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx \\ &+ \int_{Q_2^{\varepsilon}} -\alpha_2 \operatorname{div} \mathbf{u}^{\varepsilon} \partial_t \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx + \int_{Q_1^{\varepsilon}} D_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla p_1^{\varepsilon} \nabla_x \hat{\varphi}_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx + \\ &\varepsilon \int_{Q_1^{\varepsilon}} D_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla p_2^{\varepsilon} \nabla_x \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx + \varepsilon \int_{\Sigma^{\varepsilon}} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (p_1^{\varepsilon} - p_2^{\varepsilon}) \hat{\varphi}_1(t, x) dt ds^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Le premier terme intégral de (6.40) est égal à

$$\int_{\Omega_T} -\chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (c_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) p_1^{\varepsilon} + \alpha_1 \operatorname{div} \mathbf{u}^{\varepsilon}) \partial_t \varphi_1(t, x) dt dx$$

et grâce à (6.29) et (6.31) converge vers

$$\int_{Q \times Y} -\chi_1(y)(c_1(y)p_1 + \alpha_1(\operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}_y \hat{\mathbf{u}})) \partial_t \varphi_1(t, x) dt dx dy.$$

De façon similaire et par les équations (6.30) et (6.31) il s'ensuit que

$$\int_{Q_2^\varepsilon} c_2^\varepsilon(x) p_2^\varepsilon \partial_t \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx \rightarrow \int_{Q \times Y} \chi_2(y) c_2(y) p_2 \partial_t \varphi_2(t, x, y) dt dx dy$$

Maintenant, en vertu de (6.32) on peut déduire que

$$\begin{aligned} & \int_{Q_1^\varepsilon} D_1(\frac{x}{\varepsilon}) \nabla p_1^\varepsilon (\nabla \varphi_1(t, x) + \nabla_y \hat{\varphi}_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon})) dt dx \\ &= \int_Q \chi_1(\frac{x}{\varepsilon}) D_1(\frac{x}{\varepsilon}) \nabla p_1^\varepsilon (\nabla \varphi_1(t, x) + \nabla_y \hat{\varphi}_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon})) dt dx \\ &\rightarrow \int_{Q \times Y} \chi_1(y) D_1(y) (\nabla p_1 + \nabla_y \hat{p}_1) (\nabla \varphi(t, x) + \nabla_y \hat{\varphi}_1(t, x, y)) dt dx dy \end{aligned}$$

et grâce à (6.33), on a aussi

$$\begin{aligned} & \int_{Q_2^\varepsilon} \varepsilon k_2(\frac{x}{\varepsilon}) \nabla p_2^\varepsilon \nabla_y \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx \\ &= \int_Q \chi_2(\frac{x}{\varepsilon}) D_2(\frac{x}{\varepsilon}) \varepsilon \nabla p_2^\varepsilon \nabla_y \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dt dx \\ &\rightarrow \int_{Q \times Y} \chi_2(y) D_2(y) \nabla_y p_2 \nabla_y \varphi_2(t, x, y) dt dx dy. \end{aligned}$$

De (6.34) on trouve que

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Sigma^\varepsilon} g(\frac{x}{\varepsilon}) (p_1^\varepsilon - p_2^\varepsilon) (\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon})) dt ds^\varepsilon \\ &\rightarrow \int_{Q \times \Sigma} g(y) (p_1 - p_2) (\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x, y)) dt ds dy. \end{aligned}$$

Il est facile de voir

$$R_2^\varepsilon = O(1).$$

Ainsi, en collectant toutes limites précédentes on arrive à l'équation limite de (6.14) :

$$\begin{aligned}
& \int_{Q \times Y_1} -(c_1(y)p_1 + \alpha_1(\operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}_y \hat{\mathbf{u}})) \partial_t \varphi_1 dt dx dy \\
& + \int_{Q \times Y_1} D_1(y)(\nabla p_1 + \nabla_y \hat{p}_1)(\nabla \varphi_1 + \nabla_y \hat{\varphi}_1) dt dx dy \\
& + \int_{Q \times Y_2} (-c_2(y)p_2 \partial_t \varphi_2 + D_2(y) \nabla_y p_2 \nabla_y \varphi_2) dt dx dy \\
& + \int_{Q \times \Sigma} g(y)(p_1 - p_2)(\varphi_1 - \varphi_2) dt ds dy = 0.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Par un argument de densité, les équations (6.39) et (6.41) ont lieu aussi pour tout $(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) \in \mathbf{H} \times L^2(\Omega, H^1(Y)/\mathbb{R})^N$ et pour tout

$$(\varphi_1, \hat{\varphi}_1, \varphi_2) \in L_T^2(H^1(\Omega)) \times L^2(Q; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}) \times L^2(Q; H_{\#}^1(Y)).$$

En intégrant par parties dans (6.39) et (6.41), on obtient les équations homogénéisées à deux échelles suivantes :

$$-\operatorname{div}_y(\mathbb{A}_1[e(\mathbf{u}) + e_y(\hat{\mathbf{u}})]) = 0 \quad \text{dans } Q \times Y_1, \tag{6.42}$$

$$-\operatorname{div}_y(\mathbb{A}_2[e(\mathbf{u}) + e_y(\hat{\mathbf{u}})]) = 0 \quad \text{dans } Q \times Y_2, \tag{6.43}$$

$$-\operatorname{div}\left(\int_Y \mathbb{A}[e(\mathbf{u}) + e_y(\hat{\mathbf{u}})] dy\right) + \alpha_1 |Y_1| \nabla p_1 + \tag{6.44}$$

$$\int_{\Sigma} (\alpha_1 \hat{p}_1 + \alpha_2 p_2) \mathbf{n} ds = \mathbf{f} \quad \text{dans } Q$$

et

$$-\operatorname{div}_y(D_1(\nabla p_1 + \nabla_y \hat{p}_1)) = 0 \quad \text{dans } Q \times Y_1, \tag{6.45}$$

$$\partial_t(c_2 p_2) - \operatorname{div}_y(D_2 \nabla_y p_2) = 0 \quad \text{dans } Q \times Y_2, \tag{6.46}$$

$$\partial_t\left(\int_{Y_1} (c_1 p_1 + \alpha_1(\operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}_y \hat{\mathbf{u}}))\right) - \operatorname{div}\left(\int_{Y_1} D_1(\nabla p_1 + \nabla_y \hat{p}_1) dy\right) \tag{6.47}$$

$$+ \int_{\Sigma} g(y)[p_1 - p_2] ds = 0 \quad \text{dans } Q$$

avec les conditions de transmission et au bord :

$$\mathbb{A}_1[e(\mathbf{u}) + e_y(\hat{\mathbf{u}})] \cdot \mathbf{n} = \mathbb{A}_2[e(\mathbf{u}) + e_y(\hat{\mathbf{u}})] \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } Q \times \Sigma, \quad (6.48)$$

$$(D_1(\nabla p_1 + \nabla_y \hat{p}_1)) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } Q \times \Sigma, \quad (6.49)$$

$$(D_1(\nabla p_1 + \nabla_y \hat{p}_1)) \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \times Y_1, \quad (6.50)$$

$$D_2 \nabla_y p_2 \cdot \mathbf{n} = -g(y)[p_1 - p_2] \quad \text{sur } Q \times \Sigma, \quad (6.51)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (6.52)$$

$$y \mapsto \hat{\mathbf{u}}, \quad \hat{p}_1, p_2 \text{ sont } Y\text{-périodiques} \quad (6.53)$$

et les conditions initiales :

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.54)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(0, x, y) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times Y, \quad (6.55)$$

$$p_1(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.56)$$

$$\hat{p}_1(0, x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_1 \quad (6.57)$$

$$p_2(0, x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_2. \quad (6.58)$$

Maintenant, on va découpler le système (6.42)-(6.58). En vertu de la linéarité des deux premières équations (6.42)-(6.43), on peut écrire à une constante additive près que :

$$\hat{\mathbf{u}}(t, x, y) = \sum_{i,j=1}^N e_{ij}(\mathbf{u})(t, x) \mathbf{w}^{ij}(y) + C^{te}, \quad (t, x, y) \in Q \times Y \quad (6.59)$$

où l'on rappelle que pour $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\mathbf{w}^{ij} \in (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^N$ est la solution du système

$$-\text{div}_y(\mathbb{A}_1 e_y(\mathbf{w}^{ij} + \mathbf{d}^{ij})) = 0 \quad \text{dans } Y_1,$$

$$-\text{div}_y(\mathbb{A}_2 e_y(\mathbf{w}^{ij} + \mathbf{d}^{ij})) = 0 \quad \text{dans } Y_2,$$

$$\mathbb{A}_1 e_y(\mathbf{w}^{ij} + \mathbf{d}^{ij}) \cdot \mathbf{n} = \mathbb{A}_2 e_y(\mathbf{w}^{ij} + \mathbf{d}^{ij}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$y \mapsto \mathbf{w}^{ij} \quad Y\text{-périodique}$$

avec $\mathbf{d}^{kl} = (y_k \delta_{il})_{1 \leq i \leq N}$ et que (δ_{ij}) est le symbole de Krönecker.

De façon analogue, et en vertu de (6.45), (6.49) et (6.53) on peut alors exprimer \hat{p}_1 en fonction de p_1 comme suit :

$$\hat{p}_1(t, x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial p_1}{\partial x_i}(t, x) \pi_i(y) + C^{te}, \quad (t, x, y) \in Q \times Y_1 \quad (6.60)$$

où l'on rappelle pour $i = 1, 2, \dots, N$, la pression locale $\pi_i \in H^1(Y_1)/\mathbb{R}$ est la solution du problème stationnaire :

$$-\operatorname{div}_y(D_1(\nabla \pi_i + e_i)) = 0 \quad \text{dans } Y_1,$$

$$D_1(\nabla \pi_i + e_i) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$y \mapsto \pi_i \quad Y - \text{périodique.}$$

Ici e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^N .

Notons

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{A}} &= (\tilde{a}_{i_1 i_2 i_3 i_4})_{1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq N}, \\ \tilde{a}_{i_1 i_2 i_3 i_4} &= \sum_{j_1, j_2=1}^N \int_Y a_{i_1 i_2 j_1 j_2}(y) (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} + e_{j_1 j_2, y}(\mathbf{w}^{i_3 i_4})(y)) dy \end{aligned}$$

où (a_{ijklm}) sont les coefficients du tenseur d'élasticité \mathbb{A} et

$$e_{ij, y}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial y_j} + \frac{\partial w_j}{\partial y_i} \right), \quad \mathbf{w} = (w_j)_{1 \leq j \leq N}.$$

Aussi, définissons le tenseur des contraintes effectif

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{u}) = (\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}))_{1 \leq i, j \leq N}, \quad \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}) = \sum_{l, m=1}^N \tilde{a}_{ijlm} e_{lm}(\mathbf{u})$$

et la matrice de perméabilité effective

$$\tilde{D} = (\tilde{D}_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}, \quad \tilde{D}_{ij} = \int_{Y_1} D_1(y) (\nabla_y \pi_i + e_i) (\nabla \pi_j + e_j) dy,$$

ainsi que les matrices de Biot-Willis :

$$B = (b_{ij}), b_{ij} = \alpha_1(|Y_1|\delta_{ij} + \int_{\Sigma} \pi_j(y)n_i ds), \quad \mathbf{n} = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$$

et

$$\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}, \lambda_{ij} = \alpha_1 \sum_{m=1}^N \int_{Y_1} \left(\delta_{im} \delta_{jm} + \frac{\partial w_m^{ij}}{\partial y_m} \right) dy, \mathbf{w}^{ij} = (w_m^{ij})_{1 \leq m \leq N}.$$

Enfin soit les quantités moyennisées

$$\tilde{c} = \int_{Y_1} c_1(y) dy, \quad \tilde{g} = \int_{\Sigma} g(y) ds.$$

De (6.59)-(6.60) et des notations données ci-dessus on déduit:

$$-\operatorname{div} \tilde{\sigma}(\mathbf{u}) + B \nabla p_1 + \alpha_2 \int_{\Sigma} p_2 \mathbf{n} ds = \mathbf{f} \quad \text{dans } Q, \quad (6.61)$$

$$\partial_t(\tilde{c} p_1 + \Lambda : \mathbf{e}(\mathbf{u})) - \operatorname{div}(\tilde{D} \nabla p_1) + \tilde{g} p_1 - \int_{\Sigma} g(y) p_2 ds = 0, \quad \text{dans } Q, \quad (6.62)$$

$$\partial_t(c_2 p_2) - \operatorname{div}_y(D_2 \nabla_y p_2) = 0 \quad \text{dans } Q \times Y_2, \quad (6.63)$$

$$c_2 \nabla_y p_2 \cdot \mathbf{n} = -g(y)[p_1 - p_2] \quad \text{sur } Q \times \Sigma, \quad (6.64)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \tilde{D} \nabla p_1 \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \Sigma, \quad (6.65)$$

$$y \mapsto p_2 \quad Y - \text{périodique}, \quad (6.66)$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad p_1(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.67)$$

$$p_2(0, x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_2. \quad (6.68)$$

Il est à remarquer que (6.61)-(6.68) est ce qu'on appelle un système homogénéisé à deux échelles, puisque les équations (6.63)-(6.65) et (6.66) font intervenir la pression locale p_2 qui dépend de la variable microscopique y . Comme aux chapitres 4 et 3, nous allons étudier le comportement global de la pression totale du milieu Ω afin de découpler le système (6.61)-(6.68) pour n'en retenir que la variable macroscopique x . La variable y sera une variable cachée. Pour cela nous allons établir une relation entre les deux pressions p_1 et p_2 . Pour ce faire, on considère d'abord $\zeta \in L^\infty(0, T; H_{\#}^1(Y_2))$ l'unique solution du

problème parabolique :

$$\begin{aligned} \partial_t(c_2\zeta) - \operatorname{div}_y(D_2\nabla_y\zeta) &= 0 \quad \text{dans } (0, T) \times Y_2, \\ D_2\nabla_y\zeta \cdot \mathbf{n} &= -g(y)[1 - \zeta] \quad \text{sur } \Sigma, \\ y &\mapsto \zeta \quad Y - \text{périodique}, \\ \zeta(0, y) &= 0 \quad y \in Y_2. \end{aligned}$$

Puisque c_2, D_2, g dépendent du temps et p_1 est indépendante de y , on a

$$p_2(t, x, y) = \int_0^t p_1(\tau, x) \partial_t \zeta(t - \tau, y) d\tau, \quad (t, x, y) \in Q \times Y_2. \quad (6.69)$$

Par conséquent, le système homogénéisé (6.61)-(6.68) peut être réécrit comme suit :

$$-\operatorname{div}\tilde{\sigma}(\mathbf{u}) + B\nabla p_1 + \int_0^t \theta(t, \tau) p_1(\tau, x) d\tau = \mathbf{f} \quad \text{dans } Q,$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\tilde{c}p_1 + \Lambda : \mathbf{e}(\mathbf{u})) - \operatorname{div}(\tilde{D}\nabla p_1) + \\ \tilde{g}p_1 - \int_0^t \eta(t, \tau) p_1(\tau, x) d\tau &= 0, \quad \text{dans } Q, \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \tilde{D}\nabla p_1 \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega,$$

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{0}, \quad p_1(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où on a noté

$$\begin{aligned} \theta(t, \tau) &= \alpha_2 \int_{\Sigma} \partial_t \zeta(t - \tau, y) \mathbf{n} ds, \\ \eta(t, \tau) &= \int_{\Sigma} g(y) \partial_t \zeta(t - \tau, y) ds. \end{aligned}$$

Enfin, observons que la pression totale du fluide dans le micro-modèle donnée par

$$P^\varepsilon(t, x) = \chi_1^\varepsilon(x) p_1^\varepsilon(t, x) + \chi_2^\varepsilon(x) p_2^\varepsilon(t, x), \quad (t, x) \in Q$$

converge à deux échelles vers $\chi_1(y)p_1(t, x) + \chi_2(y)p_2(t, x, y)$ et grâce à (6.69) converge alors faiblement dans $L^2(Q)$ vers

$$|Y_1|p_1(t, x) + \int_0^t \int_{Y_2} p_1(\tau, x) \partial_t \zeta(t - \tau, y) dy d\tau.$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 6.2.

Conclusion Générale et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons utilisé la théorie de l'homogénéisation périodique par la technique de la convergence à deux échelles pour construire rigoureusement plusieurs modèles homogénéisés issus de micro-modèles posés dans des milieux composites possédant plusieurs structures séparées par une interface imparfaite ou rugueuse et modélisée par des conditions de transmission non standards. Ces macro-modèles obtenus seront certainement très pratiques dans beaucoup d'applications tout particulièrement en ingénierie pétrolière et en biomédecine.

Nous avons constaté que les modèles homogénéisés diffèrent selon le milieu et le phénomène considérés. Ainsi si le problème est stationnaire et elliptique et que le milieu composite possède une perméabilité de même ordre de magnitude dans les différentes structures alors le problème limite est généralement de type Barenblatt (si le phénomène est l'écoulement de fluide) et il est de type Carlslaw-Jaeger (si le phénomène est le transfert de chaleur), sans oublier le cas du système de Barenblatt qui peut se réduire à un modèle monophasique lorsque le milieu hétérogène présente des contrastes au niveau des perméabilités et avec un terme source assez régulier. Si le micro-modèle est un problème d'évolution de type parabolique avec également un contraste de perméabilité entre les différentes structures alors le modèle homogénéisé est de type intégro-différentiel, plus précisément de type Barbashin et donc il y a un effet mémoire. D'autres types de conditions de transmission peuvent être envisagées et plus précisément lorsque le flux de température à travers l'interface n'est plus continu.

En poro-élasticité linéaire les problèmes homogénéisés ainsi construits dans ces milieux appartiennent à deux grandes classes : Soit le modèle général d'Aifantis dans le cas de milieux composites où les micro-structures sont des matériaux poro-élastiques ayant

des perméabilités de même ordre de magnitude, soit c'est un modèle intégro-différentiel homogénéisé avec effet mémoire lorsque les perméabilités de ces micro-structures sont d'ordre ε^2 à l'échelle locale où ε est le rapport de la taille de la micro-structure au milieu ambiant. Il serait bien utile d'étudier le procédé d'homogénéisation pour les modèles exposés aux chapitres 5 et 6 lorsque les conditions initiales seront remplacées par (5.19). Aussi A. Boughammoura a étudié dans [43] l'écoulement d'un fluide à travers un solide élastique. Dans ce sens, il est également intéressant de considérer ces solides comme étant des matériaux poro-élastiques ou poro-visco-élastiques auquel cas le volume des pores est très petit comparé à celui des fissures. Cela permettra de construire de nouveaux modèles (mathématiques) homogénéisés pour les phénomènes de double porosité dans les milieux déformables.

On pourrait également appliquer cette technique à d'autres types d'équations par exemple en thermo-poro-élasticité et par suite construire de nouveaux modèles de double-diffusion/double porosité ou plus généralement multi-diffusion/multi-porosité que ceux qui existent déjà dans la littérature voir par exemple [30]. Il est également intéressant de regarder quelques problèmes de visco-élasticité avec effet de la double porosité et construire ainsi d'autres modèles homogénéisés en poro-visco-élasticité.

Annexe

A.1. Convergence faible et convergence faible-*

Soit E un espace de Banach. On notera $\|\cdot\|$ sa norme.

Définition A. 1. On dit qu'une famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans E converge (fortement) vers $u \in E$ si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u\| = 0$.

Dans la suite on présente les principaux résultats utilisés dans ce travail. Pour plus de détails on se réfère à H. Alt [15], H. Brézis [47], D. Cioranescu et P. Donato [56], J.-L. Lions et E. Magenes [102], J. Nečas [111], W. Rudin [120], K. Yosida [134] et E. Zeidler [138].

Définition A.2. L'ensemble des formes linéaires et continues sur E est appelé espace dual de E et il est noté E' (ou parfois E^*).

Notation A.1. Si $f \in E'$ et si $u \in E$ alors l'image $f(u)$ est souvent notée par le crochet de dualité $\langle f, u \rangle_{E', E}$.

Définition A.3. L'espace dual de E' , noté E'' , s'appelle le bidual de E .

Proposition A.1. Soit $u \in E$. On considère la forme :

$$\begin{aligned} f_u : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle f, u \rangle . \end{aligned}$$

Alors $f_u \in E''$ et

$$\begin{aligned} F : E &\longrightarrow E'' \\ u &\longmapsto f_u \end{aligned}$$

est une isométrie.

Définition A.4. On dit que E est réflexif si $F(E) = E''$.

Définition A.5. On dit qu'une famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans E converge faiblement vers $u \in E$ si pour tout $f \in E'$ on a

$$\lim \langle f, u^\varepsilon - u \rangle_{E',E} = 0.$$

u est appelé la limite faible de $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Notation A.2. Cette convergence est usuellement notée $u^\varepsilon \rightharpoonup u$.

Une conséquence du Théorème de Hahn-Banach sous sa forme géométrique (voir [47, Theorem 1.7]) est le résultat suivant.

Proposition A.2. La limite faible lorsqu'elle existe est unique.

Remarque A.1. En dimension finie les notions de convergence forte et faible coïncident. Ce qui n'est pas vrai en dimension infinie.

Un corollaire du Théorème de Banach-Steinhaus [47, Theorem 2.2] est le résultat suivant.

Proposition A.3. Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille dans E convergente faiblement vers $u \in E$ alors elle est uniformément bornée (par rapport à ε) et on a

$$\|u\| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|.$$

Définition 1.6. On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u, v \in E : \|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1 \text{ et } \|u - v\| > \varepsilon \\ \implies \left\| \frac{u + v}{2} \right\| < 1 - \delta. \end{aligned}$$

Proposition A.4. Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif. De plus tout espace de Hilbert est uniformément convexe et par suite réflexif.

Proposition A.5. Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille dans E et soit $u \in E$. Si $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge fortement vers $u \in E$ alors $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement vers $u \in E$ et $\|u\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|$. La réciproque est vraie si E est uniformément convexe.

L'un des principaux résultats sur la convergence faible utilisé dans ce travail est donné par le Théorème d'Eberlein-Smuljan suivant. Pour la preuve on renvoie à K. Yosida [134] et E. Zeidler [138].

Théorème A.1. (Eberlein-Smuljan) Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille bornée uniformément dans E . Alors il existe une sous-famille ε' de ε et il existe $u \in E$ tels que $u^{\varepsilon'}$ converge faiblement vers u dans E . De plus, si toutes les sous-familles convergentes faiblement de $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ dans E convergent vers la même limite u alors c'est toute la famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ qui converge faiblement vers u dans E .

Le résultat suivant nous permet de faire le passage à la limite dans un produit de deux familles : l'une convergente fortement et l'autre faiblement.

Proposition A.6. Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille dans E et soit $(f^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille dans E' telles que $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement vers un vecteur $u \in E$ et $(f^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge fortement vers une forme $f \in E'$. Alors $(\langle f^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{E',E})_{\varepsilon > 0}$ converge vers $\langle f, u \rangle_{E',E}$.

Nous allons passer maintenant à la notion de convergence faible-*

Définition 1.7. Soit E un espace de Banach. On dit qu'une famille $(f^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ dans E' converge faible-* vers $f \in E'$ dans E' si pour tout $u \in X$ on a

$$\lim \langle f^\varepsilon - f, u \rangle_{E',E} = 0.$$

f est appelé la limite faible-* de $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. On note cette convergence $f^\varepsilon \xrightarrow{*} f$ ou encore $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ faible-*

De même que pour la convergence faible, la limite faible-* est lorsqu'elle existe est unique. De plus la convergence faible dans E' entraîne la convergence faible-* dans E' . La réciproque est vraie si l'espace E est réflexif.

Proposition A.7. Soit $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille dans E' convergente faiblement vers $f \in E'$ alors elle est uniformément bornée (par rapport à ε) et on a

$$\|f\|_{E'} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f^\varepsilon\|_{E'}$$

où $\|f\|_{E'}$ désigne la norme sur E' définie par

$$\|f\|_{E'} = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{|\langle f, u \rangle_{E', E}|}{\|u\|}.$$

Définition 1.8. On dit que E est séparable s'il contient une partie dénombrable et dense dans E .

On énonce alors l'équivalent du Théorème A. 1.

Théorème A.2. (Eberlein-Smuljan) Soit E un espace de Banach séparable et soit $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille bornée uniformément dans E' . Alors il existe une sous-famille ε' de ε et il existe $f \in E$ tels que $f^{\varepsilon'}$ converge faible-* vers f dans E' . De plus, si toutes les sous-familles convergentes faible-* de $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans E' convergent vers la même limite f alors c'est toute la famille $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge faible-* vers f dans E' .

Comme précédemment on s'intéresse maintenant au produit de deux familles : l'une convergente fortement et l'autre faible-*.

Proposition A.6. Soit $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille dans E' et soit $(g^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille dans E'' telles que $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faible-* vers un vecteur $f \in E'$ et $(g^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement vers une forme $g \in E''$. Alors $(\langle g^\varepsilon, f^\varepsilon \rangle_{E'', E'})_{\varepsilon>0}$ converge vers $\langle g, f \rangle_{E'', E'}$.

Espaces L^p et espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$). On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles définies sur Ω infiniment différentiables et à support compact inclus dans Ω . On note aussi $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω . Soit $p \in [1, +\infty[$. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables sur Ω et telles que $|u|^p$ est intégrable sur Ω . L'espace $L^p(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur Ω . On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables sur Ω et essentiellement bornées sur Ω , c'est à dire

$$\exists C > 0, |u(x)| \leq C \text{ sur } \Omega.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_\infty := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ sur } \Omega\}.$$

On a pour

Proposition A.7. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Proposition A.8. (Inégalité de Hölder) Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et q son conjugué :

$$q = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < +\infty, \\ +\infty & \text{si } p = 1, \\ 1 & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Alors pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et pour tout $v \in L^q(\Omega)$ on a $uv \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Proposition A.9. Soit $1 \leq p \leq +\infty$.

1. Si $1 < p < +\infty$, alors $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe et donc réflexif;
2. Si $1 \leq p < +\infty$, alors $L^p(\Omega)$ est séparable;
3. Si $p = 2$, alors $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Le produit scalaire est donné par

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dx \quad u, v \in L^2(\Omega);$$

4. Si $1 \leq p < +\infty$, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$;
5. Si Ω est borné alors pour tout $r : p \leq r \leq +\infty$ on a $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et pour tout $u \in L^r(\Omega)$

$$\|u\|_p \leq C^* \|u\|_r$$

où

$$C^* = \begin{cases} |\Omega|^{\frac{r-p}{rp}} & \text{si } r < +\infty, \\ |\Omega|^{-1} & \text{si } r = +\infty \end{cases}$$

et $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de Ω .

Des points 4) et 5) on déduit la proposition suivante :

Proposition A.10. Soit $1 \leq p < +\infty$. Si Ω est borné alors pour tout $r : p \leq r \leq +\infty$ on a $L^r(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. En particulier $L^2(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$ (lorsque Ω est borné).

Nous allons énoncer maintenant le Théorème de représentation de Riesz pour les espaces L^p .

Théorème A.3. (Riesz) Soit $1 \leq p < +\infty$ et q son conjugué. Soit $f \in L^p(\Omega)'$ l'espace

dual de $L^p(\Omega)$. Alors il existe un unique $f^* \in L^q(\Omega)$ tel que

$$\langle f, u \rangle_{L^p(\Omega)', L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) f^*(x) \, dx$$

et

$$\|f^*\|_{L^q(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)'}$$

Ainsi on peut identifier algébriquement et topologiquement les espaces $L^p(\Omega)'$ et $L^q(\Omega)$ lorsque $1 \leq p < +\infty$. Par contre on montre que $L^1(\Omega) \not\subseteq L^\infty(\Omega)'$.

Par la suite on va donner une caractérisation des convergences faible et faible* dans les espaces $L^p(\Omega)$ lorsque l'ouvert Ω est borné.

Théorème A.4. On suppose que Ω est borné. Alors si $1 < p < +\infty$ on a

$$(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \rightharpoonup u \text{ dans } L^p(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \|u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C & \text{où } C \text{ est indépendante de } \varepsilon, \\ \int_P u^\varepsilon \, dx \rightarrow \int_P u \, dx & \text{pour tout pavé } P \subset \Omega \end{cases}$$

et si $p = +\infty$ on a

$$(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^\infty(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C & \text{où } C \text{ est indépendante de } \varepsilon, \\ \int_P u^\varepsilon \, dx \rightarrow \int_P u \, dx & \text{pour tout pavé } P \subset \Omega. \end{cases}$$

On termine ce paragraphe par le résultat suivant

Proposition A.11. Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, c'est à dire $u \in L^1(\omega)$ pour tout ouvert borné tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$. Supposons que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx = 0.$$

Alors $u = 0$, sur Ω .

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. On définit l'espace de Sobolev :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) : D^k u \in L^p(\Omega), \\ k = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N \quad |k| = k_1 + k_2 + \dots + k_N \leq m \end{array} \right\}.$$

Il est à noter les dérivées ont lieu au sens des distributions. Lorsque $p = 2$ cet espace est noté $H^m(\Omega)$. On munit $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{m,p} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|k| \leq m} \|D^k u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \max_{|k| \leq m} \|D^k u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

On a

Proposition A.12. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et soit $m \in \mathbb{N}$.

1. $W^{m,p}(\Omega)$ est de Banach;
2. Si $1 \leq p < +\infty$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable et uniformément convexe si $1 < p < +\infty$;
3. $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable. Le produit scalaire est donné par

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|k| \leq m} \int_{\Omega} D^k u D^k v dx, \quad u, v \in H^m(\Omega);$$

En général $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. On note alors $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. On a le résultat de densité suivant (voir L. C. Evans [78]).

Proposition A.12. Supposons que Ω est un ouvert borné de classe \mathcal{C}^1 . Alors pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On a le Théorème de trace suivant

Théorème A.5. Supposons que Ω est un ouvert borné de classe \mathcal{C}^1 et que $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe un opérateur linéaire et borné

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

appelé opérateur trace et tel que

1. si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ alors $Tu = u|_{\partial\Omega}$;
2. pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

où C est une constante ne dépendant que de Ω et de p ;

3. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $Tu = 0$ sur $\partial\Omega$.

On énonce le Théorème d'injection compacte suivant. Voir [3, Théorème 6.3]

Théorème A.6. (Rellich Kondrachov) Supposons que Ω est un domaine de \mathbb{R}^N et satisfait à la condition du cône. Soit $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < +\infty$. Alors

1. Si $mp < N$ on a

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \text{ avec injection compacte pour } 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp};$$

2. Si $mp \geq N$ on a

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \text{ avec injection compacte pour } 1 \leq q < +\infty.$$

3. Si $mp > N$ et $\frac{N}{p} \notin \mathbb{N}$ on a

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\Omega)$$

où $k = [m - \frac{N}{p}]$ et $\alpha = m - \frac{N}{p} - k$.

Théorème A.7. (Poincaré) Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante C_P ne dépendant que p et de Ω telle que pour tout $W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème A.8. (Poincaré-Wirtinger) Soit Ω un ouvert connexe, borné, de bord lipschitzien. Alors il existe une constante C ne dépendant que de p et de Ω telle que pour tout $W^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) \, dx \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

On énonce l'inégalité de Korn [75].

Théorème A.9. Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 par morceaux. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)^N$ ($N \geq 1$)

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} (e_{ij}(u))^2 \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (u_i)^2 \, dx \geq C \left[\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (u_i)^2 \, dx \right]$$

où

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Soit $T > 0$. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'ensemble $L^p(0, T; E)$ est l'espace des fonctions mesurables $u : (0, T) \rightarrow E$ telles que $\|u(\cdot)\|_E \in L^p(\Omega)$ et il est muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(0,T;E)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_E^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{t \in (0,T)} \|u(t)\|_E & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes :

1. Pour $1 \leq p \leq +\infty$ $L^p(0, T; E)$ est de Banach (si E est de Banach);
2. Pour $1 \leq p < +\infty$ $L^p(0, T; E)$ est séparable si E est séparable;
3. Pour $1 < p < +\infty$ $L^p(0, T; E)$ est réflexif si E est réflexif.

Soit maintenant $1 < p < +\infty$ et q son conjugué. Soit H un espace de Hilbert et V un espace de Banach tels que V est dense et s'injecte continûment dans H . Identifions H à

son dual. On notera ceci par $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$. Posons

$$W_p(0, T) = \left\{ u \in L^p(0, T; V) : \frac{du}{dt} \in L^q((0, T); V') \right\}$$

qui est muni de la norme

$$\|u\|_{W_p(0, T)} = \|u\|_{L^p(0, T; V)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^q((0, T); V')}, \quad u \in W_p(0, T).$$

On a alors $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ et

$$W_p(0, T) \subset \mathcal{C}([0, T]; H),$$

$$\exists C > 0 : \|u\|_{\mathcal{C}([0, T]; H)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_H \leq C \|u\|_{W_p(0, T)}, \quad \forall u \in W_p(0, T).$$

On suppose désormais que V et H sont deux espaces de Hilbert séparables tels que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$. On note $\mathcal{V} = L^2(0, T; V)$. Alors $\mathcal{V}' = L^2(0, T; V')$. Soit $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue

$$\exists M > 0 \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V \tag{A1}$$

et coercive

$$\exists M^{-1} > 0 \quad a(u, u) \geq M^{-1} \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V. \tag{A2}$$

Notons $\mathcal{A} : V \longrightarrow V'$ l'opérateur linéaire défini par $\langle \mathcal{A}(u), v \rangle_{V', V} = a(u, v)$, $u, v \in V$. on énonce un corollaire du Lemme de Lions (Voir R. Dautray, J.-L. Lions [66, Theorems 1& 2, §3, Chap. XVIII] ou R. Showalter [124, Theorem 2.1, Proposition 2.3, Chap. III]).

Théorème A.10. Supposons (A1), (A2), $f \in L^2(0, T; V')$ et $u_0 \in H$. Alors le problème de Cauchy abstrait

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u &\in L^2(0, T; V) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt} + \mathcal{A}(u) &= f \text{ dans } L^2(0, T; V') \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

admet une solution unique u dans $L^2(0, T; V)$ vérifiant

$$\|u\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq M^2 \left(\|f\|_{L^2(0, T; V')}^2 + \|u_0\|_H^2 \right).$$

De plus, on a $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$.

Enfin on termine notre annexe par énoncer le Lemme de Lax Milgram [65].

Théorème A.11. Supposons que V est un espace de Hilbert et supposons (A1), (A2), $f \in V'$. Alors le problème variationnel

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que pour tout } v \in V \quad a(u, v) = (f, v)_{V', V}$$

admet une unique solution $u \in V$.

Références bibliographiques

- [1] E. Acerbi, G. Butazzo, Reinforcement problems in the calculus of variations. *Ann. Ins. H. Poincaré. Ana. Non Linéaire*, 3(1986), pp 273-284.
- [2] E. Acerbi, G. Butazzo, D. Percivale, Thin inclusions in linear elasticity; a variational approach. *J. Reine Angew. Math.*, 300 (1988), 1-16.
- [3] R. A. Adams, J. F. Fournier, Sobolev spaces, 2nd edition, pure and applied mathematics series, Elsevier Ltd., 2003.
- [4] E. C. Aifantis; On the response de fissured rocks, *Develop. Mech.* 10 (1979), 249–253.
- [5] E. C. Aifantis and D. E. Beskos, Heat extraction from hot dry rock, *Mech. Res. Commun.*, 7 (1980) 1655170.
- [6] A. Ainouz, Derivation of a convection process in a steady diffusion–transfer problem by homogenization. *Int. J. of Appl. Math.* 21 (2008), 83–97.
- [7] A. Ainouz, Homogenized double porosity models for poro-elastic media with interfacial flow barrier, *Mathematica Bohemica* 136 (2011) 357–365.
- [8] A. Ainouz, Homogenization of a double porosity model in deformable media, *Electr. J. Diff. Equ.*, 90 (2013) 1–18.
- [9] A. Ainouz, Homogenization of a dual-permeability problem in two-component media with imperfect contact, *Applications of Mathematics*, 60 (2015) 185-196.
- [10] A. Ainouz, On a Multi-scale Analysis of a Micro-model of Heat Transfer in Biological Tissues, *BIOMAT 2014, Proceedings of the International Symposium on*

Mathematical and Computational Biology, Poznan, Poland, november 2014, Edited by R.P. Mondaini, World scientific Publishing (Singapore 2015).

- [11] G. Allaire, Homogenization and two scale convergence. *SIAM J.Math.Anal.* 23 (1992) 1482-1518.
- [12] G. Allaire, Shape optimization by the homogenization method, Springer, New-York 2001.
- [13] G. Allaire, A. Damlamian, U. Hornung, Two scale convergence on periodic surfaces and applications, in Proceedings of the international conference on mathematical modelling of flow through porous media (May 1995) A. Bourgeat et al. (Eds.) World Scientific Pub. Singapore (1996) 15–25.
- [14] G. Allaire et F. Murat, Homogenization of the Neumann problème with non-isolated holes, *Asymptotic Analysis*, 7 (1993) 81-95.
- [15] H. Alt. *Linear Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 2nd edition, 1992.
- [16] Y. Amirat, K. Hamdache et A. Ziani, Homogénéisation d'équations hyperboliques du premier ordre et applications aux écoulements miscibles en milieux poreux, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non Linéaire* 6 (1989) 397-417.
- [17] Y. Amirat, K. Hamdache et A. Ziani, Some results on homogenization of convection-diffusion equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 114 (1991) 155-178.
- [18] Y. Amirat, K. Hamdache et A. Ziani, Homogenisation of parametrised families of hyperbolic problems, *Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh* 120 (1992) 199-221.
- [19] T. Arbogast, J. Douglas et U. Hornung, Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, *SIAM J. Math. Anal.*, 21 (1990) 823-836.
- [20] Y. Asakuma, Y. Kanazawa, T. Yamamoto. Thermal radiation analysis of packed bed by a homogenization method. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 73 (2014) 97-102.

- [21] H. Attouch, Variational convergence for functions and operators, Applicable Mathematics series, Pitman (1984).
- [22] J.-L. Auriault, Acoustics of Biporous Saturated Media, *Transport in Porous Media*, 64 (2006) 247–259.
- [23] J.-L. Auriault, Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible? *Int. J. Eng. Sci.* 29 (1991) 785–795.
- [24] J. -L. Auriault, H. Ene, Macroscopic modelling of heat transfer in composites with interfacial thermal barrier, *Intern. J. Heat Mass Transfer*, 37 (1994) 2885-2892.
- [25] J. -L. Auriault, E. Sanchez-Palencia, Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable, *J. Mécani.*, 16 (1977) 575-603, .
- [26] J. -L. Auriault, C. Boutin, C. Geindreau, Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media, ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc. 2009.
- [27] I. Babuška, Solution of problem with interfaces and singularities, in *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, C. de Boor ed., pp 213-277 Academic Press, New York 1974.
- [28] I. Babuška, Homogenization approach in engineering, *Computing methods in applied sciences and engineering (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975)*, Part 1, pp. 137–153. *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems*, Vol. 134, Springer, Berlin, 1976.
- [29] I. Babuška, Homogenization and its application, *Mathematical and computational problems. Numerical solution of partial differential equations, III (Proc. Third Sympos. (SYNSPADE), Univ. Maryland, College Park, Md., 1975)*, pp. 89–116, Academic Press, New York, 1976.
- [30] M. Bai, D. Elsworth, Multiporosity/multipermeability approach to the simulation of naturally fractured reservoirs, *Water Resources Research*, 29 (1993) 1621–1633.

- [31] N. Bakhvalov, G. Panasenko, Homogenisation : Averaging Process in Periodic Media, Klüwer Academic Publishers 1989.
- [32] J. Ball and F. Murat. $W^{1,p}$ -quasiconvexity and variational problems for multiple integrals, J. Funct. Anal., 58 (1984) 225-253.
- [33] G. Barenblatt, Y. Zheltov, I. Kochina, On basic concepts of the theory of homogeneous fluids seepage in fractured rocks (in Russian). Prikl.Mat. i Mekh. 24 (1960), 852–864.
- [34] D. Begis, S. Dinari, G. Duvaut, A. Hassim, A. Piestre, MODULEF et les matériaux composites, 6ème- colloque, I.N.R.I.A. 1983.
- [35] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland, 1978.
- [36] S.A. Berger, W. Goldsmith, E.R. Lewis (Eds.), Introduction to Bioengineering, Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.
- [37] J. G. Berryman, Rocks as poroelastic composites, Poromechanics: A Tribute to Maurice A. Biot, Proc., Biot Conf. on Poromechanics, Université de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, J.-F. Thimus, Y. Abousleiman, A. H.-D. Cheng, O. Coussy, and E. Detournay, eds., Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 11–16. 1998
- [38] J. Berryman, Effective medium theories for multicomponent poroelastic composites, J. of . Eng. Mech. ASCE, 132 (2006) 519-531.
- [39] M. Biot, General theory of the three-dimensional consolidation. J. Appl. Phys., 12 (1941), 155–164.
- [40] M. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low-frequency range, J. A.S.A., 28 (1956) 168–178.
- [41] M. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. II. Higher frequency range J. A.S.A., 28 (1956) 179–191.

- [42] M. Biot, D. Willis, The elasticity coefficients of the theory of consolidation. *J. Appl. Mech.* 24 (1957), 594–601.
- [43] A. Boughammoura, Homogenization of a mixture of elastic solids and a slightly viscous fluid, *Afr. Math.*, 24 (2013) 439-456.
- [44] J.F. Bourgat, A. Dervieux, Méthode d’homogénéisation des opérateurs périodiques: étude des correcteurs du développement asymptotique, IRIA-LABORIA Report N°278, 1978.
- [45] J.F. Bourgat, H. Lanchon, Application of the homogenization method to composite materials with periodic structure, IRIA-LABORIA Report N°208, 1976.
- [46] A. Braides, Γ -convergence for beginners, Oxford Lecture Series in Math. and its Appl. , Oxford University Press 2002.
- [47] H. Brézis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Univertext, Springer 2011.
- [48] R. Burridge, J. B. Keller, Poroelasticity equations derived from microstructure, *J. Acoust. Soc. Am.*, 70 (1981) 1140-1146.
- [49] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, Conduction of heat in solids, Oxford university press, 1959.
- [50] J. B. Castillero, R. Rodríguez-Ramos, H. Mechkour, J. A. Otero, J. Hernández-Cabanas, L. Maykel-Sixto, R. Guinovart-Díaz, and J. S. Federico, Homogenization and effective properties of periodic thermomagnetoelastic composites, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 4 (2009) 819–836.
- [51] J.C. Chato, Fundamentals of Bioheat Transfer, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [52] M.M. Chen, K.R. Holmes, Microvascular contributions in tissue heat transfer, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 335 (1980) 137–150.

- [53] G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, A. S. Shamaev, Homogenization: methods and applications, Translation of mathematical monographs, 234, AMS Providence, Rhode Island 2007.
- [54] R. Christensen, Mechanics of composite materials, John Wiley, New-York 1979.
- [55] P. W. Chung, K. K. Tamma, and R. R. Namburu, Homogenization of Temperature-Dependent Thermal Conductivity in Composite Materials, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 15 (2001), 10-17.
- [56] D. Cioranescu, P. Donato, An introduction to homogenization, Oxford lecture series in mathematics and applications 17, Oxford 1999.
- [57] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 335 (2002) 99–104.
- [58] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso, The Periodic Unfolding Method in Homogenization, SIAM J. Math. Anal., 40 (2008) 1585-1620.
- [59] G. W. Clark, Derivation of Microstructure Models of Fluid Flow by Homogenization, J. of Math. Analysis and its applications, 226 (1998) 364-376.
- [60] G. W. Clark and R. E. Showalter; Two-scale convergence for a flow in a partially fissured medium, Electron. J. of Diff. Equations, 2 (1999) 1–20.
- [61] E. W. C. Coenen, V. G. Kouznetsova, M. G. D. Geers. Multi-scale modelling of damage and fracture. 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference (YIC 2013), Sep 2013, Bordeaux, France. <hal-00855829>
- [62] C. Conca, On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics, J. Math. Pures Appl., 64 (1985) 31–75.
- [63] O. Coussy, Poromechanics, John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- [64] H. Darcy, les fontaines publiques de la ville de Dijon, exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau, V. Dalmont, Paris 1856.

- [65] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 2: Functional and Variational Methods*, Springer-Verlag 1988.
- [66] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 5: Evolution Problems I*, Springer-Verlag 2000.
- [67] E. De Giorgi, Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area, *Rend. Mat.*, 8 (1975) 277-294.
- [68] E. De Giorgi, T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, *Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. Fis. Natur.*, 58 (1975) 842-850.
- [69] A. Defranceschi, School on homogenization. ICTP, TRIESTE, September 6-17 (1993).
- [70] H. Deresiewicz, R. Skalak, On uniqueness in dynamic poroelasticity, *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 53 (1963) 783–788.
- [71] P. Destuynder, *Modélisation des coques minces élastiques*, Masson, Paris 1997.
- [72] P. Destuynder, *Vibrations des Structures et des Systèmes Couplés*, Hermès - Lavoisier, 2007.
- [73] P. Donato, S. Monsurró, Homogenization of two heat conductors with an interfacial contact resistance, *Analysis and Applications* 2 (2004) 247-273.
- [74] J. Dugundji, *Topology, Series in advanced mathematics*, Allyn and Bacon, Inc. 1966.
- [75] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod (1972).
- [76] M. Eden, M. Böhm, Homogenization of a poro-elasticity model coupled with diffusive transport and a first order reaction for concrete, *Networks and Heterogeneous Media*, 9 (2014) 599-615.
- [77] H.I. Ene, D. Polisevski, Model of diffusion in partially fissured media, *Z. angew. Math. Phys.*, 53 (2002) 1052–1059.

- [78] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, 2nd edition, American Mathematical Society 2010.
- [79] M. Fang, R. P. Gilbert, A. Panchenko, A. Vasilic, Homogenizing the time-harmonic acoustics of bone: The monophasic case, *Mathematical and Computer Modelling*, 46 (2007) 331–340.
- [80] P. Furmański, *Heat Conduction in Composites: Homogenization and Macroscopic Behavior*, *Appl. Mech. Rev.*, 50 (1997) 327-356.
- [81] M. Gautherie, *Clinical Thermology: Thermotherapy*, vols. 1–4, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.
- [82] G. Griso, E. Rohan, On the homogenization of a diffusion–deformation problem in strongly heterogeneous media, *Ric. di Matematica*, 56 (2007) 161-188.
- [83] P. Guo, Coupled effects of capillary suction and fabric on the strength of moist granular materials, *Acta Mechanica*, 225 (2014) 2261-2275.
- [84] B. Gurevich and M. Schoenberg; Interface conditions for Biot’s equations of poroelasticity, *J. acoust. Soc. Am.*, 105 (1999) 2585–2589.
- [85] H. Hernandez-Cabanas, J.A. Otero1, G. Monsivais, R. Rodríguez-Ramos, Homogenization of periodical ellipsoidal inclusions composites, *Revista Elect. Nova Scientia*, 7 (2015) 286 – 313.
- [86] R. Hochmuth and P. Deuffhard, Multiscale Analysis of Thermoregulation in the Human Microvascular System, *Math. Methods. Appl. Sci.*, 27 (2004) 971-989.
- [87] U. Hornung ed., *Homogenization and porous media, interdisciplinary applied mathematics 6*, Springer-Verlag, 1997.
- [88] H.C. Hummel, Homogenization for Heat Transfer in Polycrystals with Interfacial Resistances, *Appl. An.* 75 (2000) 403-424.

- [89] A.L. Kalamkarov, I.V. Andrianov and V.V. Danishevs'kyi, Asymptotic Homogenization of Composite Materials and Structures, *Appl. Mech. Rev.*, 62 (2009) 030802.
- [90] A. S. Kalitvin, Some aspects of the theory of integro-differential Barbashin equations in function spaces, *Journal of Mathematical Sciences*, 188 (2013) 241-249.
- [91] M. Kaminski, Homogenization technique for transient heat transfer, in unidirectional composites, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 19 (2003) 503–512.
- [92] A.-R.A. Khaled and K. Vafai, The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues, *inter. J. of Heat and Mass Transfer*, 46 (2003) 4989-5003
- [93] K. Khanafer, A. Al-Amiri, I. Pop and J. L. Bull, Flow and heat transfer in biological tissues: Application of Porous media theory, *Emerging topics in heat and mass transfer in porous media*, P. Vadász editor, *Theory and applications of transport in porous media*, 22 (2008) 237-259.
- [94] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Uralt'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, *Translations of mathematical monographs* 23, American Mathematical Society 1968.
- [95] H. Lanchon, *Torsion elastoplastique d'un arbre cylindrique de section simplement ou multiplement connexe*, Thèse d'état, Université Paris VI, 1972.
- [96] H. Lanchon, *Torsion elastoplastique d'un arbre cylindrique de section simplement ou multiplement connexe*, *J. Mécanique*, 13 (1974) 267-320.
- [97] R. Landauer, *Electrical conductivity in inhomogeneous media*. In J. C. Garland and D. B. Tanner (eds.), *Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*, pp. 2–43. Woodbury, New York: American Institute of Physics, 1978.
- [98] H. Le dret, *Problèmes variationnels dans les multi-domaines: Modélisation des jonctions et applications*, *Recherches en mathématiques appliquées*, Masson, Paris, 1991.

- [99] K. Lemrabet, Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers. Thèse d'état, U.S.T.H.B (1987).
- [100] K. Lichtenecker, Die dielektrizitätskonstante natürlicher und künstlicher mischkörper, *Phys. Zeitschr.*, XXVII (1926) 115-158.
- [101] J.-L. Lions, some methods in the mathematical analysis of systems and their control theory, Science Press, Beijing, Gordon and Breach, New-York, 1981.
- [102] J.-L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol.1. Dunod, Paris, 1968.
- [103] D. Lukassen, G. Nguetseng and P. Wall, Two-scale convergence, *Int. J. of Pure and Appl. Math.*, 2 (2002) 35-86.
- [104] V. A. Marchenko, E. Y. Khruslov, Homogenization of partial differential equations, *Progress in mathematical physics* 46, Birkhäuser Boston 2006.
- [105] K. Z. Markov, Elementary micromechanics of heterogeneous media. In K. Markov and L. Preziosi (eds.), *Heterogeneous Media: Micromechanics Modeling Methods and Simulations, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, pp. 1–162. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag.
- [106] F. L. Matthews, R. D. Rawlings, *Composite Materials: Engineering and Science*, Chapman and Hall, London 1994.
- [107] M. Miyakawa, J.C. Bolomey (Eds.), *Non-invasive Thermometry of Human Body*, CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [108] A. H. Muliana, J. S. Kim, A two-scale homogenization framework for nonlinear effective thermal conductivity of laminated composites, *Acta Mechanica*, 212 (2010) 319-347.
- [109] F. Murat, Compacité par compensation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 5 (1978) 489-507.

- [110] F. Murat and L. Tartar, H-Convergence, séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'université d'Alger (1977). Traduction anglaise in " Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials", A. Cherkaev and R. Kohn eds., series progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhauser, Boston, pp. 21-43 (1997).
- [111] J. Nečas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson, Paris VI (1967).
- [112] G. N'Guetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal., 20 (3) (1989) pp 608-623.
- [113] M. Neuss-Radu, Some extensions of two-scale convergence. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 322 (1996) 899-904.
- [114] N. D. Ngo, K. K. Tamma, Computational developments for simulation based design: Multi-scale physics and flow/thermal/cure/stress modeling, analysis, and validation for advanced manufacturing of composites with complex micro-structures, Archives of Computational Methods in Engineering, 10 (2003) 3-206.
- [115] Okabe, B. Boots and K. Sugihara, Spatial tessellations - Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. Wiley, Chichester, 1992.
- [116] G. Panasenko, Multi-scale Modelling for Structures and Composites, Springer, Dordrecht 2005.
- [117] H.H. Pennes, Analysis of tissue and arterial temperature in the resting human forearm, J. Appl. Physiol., 1 (1948) 93-122.
- [118] L.-E. Persson, L. Persson, N. Svanstedt, J. Wyller, The homogenization method: An introduction, Studentlitteratur, Lund 1993.
- [119] E. Rohan, S. Naili, R. Cimirman, T. Lemaire, Multiscale modeling of a fluid saturated medium with double porosity: relevance to the compact bone. J. Mech. Phys. Solids, 60 (2012) 857-881.

- [120] W. Rudin, Real and complex analysis, Mc Graw Hill, New York, 1966.
- [121] F. Saadata, V. Birman, S. Thomopoulos and M. Genina, Effective elastic properties of a composite containing multiple types of anisotropic ellipsoidal inclusions, with the application to the attachment of tendon to bone, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, In Press, Accepted Manuscript.
- [122] P. Saint-Macary, H. Barucq and M. Madaune-Tort; Asymptotic Biot's models in porous media, *Adv. Differential Equations*, 11 (2006) 61–90.
- [123] E. Sanchez-Palencia, Non homogeneous media and vibration theory. Lecture notes on physics. 127, Springer-Verlag. New-York (1980).
- [124] R. Showalter, Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations, *Mathematical Surveys and Monographs*, **49**, American Mathematical Society 1997.
- [125] R. E. Showalter, Diffusion in Deforming Porous Media, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 10 (2003) 661–678.
- [126] R. E. Showalter, Diffusion in deformable media, Resource recovery, confinement and remediation of environmental hazards (Minneapolis, MN, 2000), *IMA Vol. Math. Appl.*, 131, Springer, New York, (2002), 115–129.
- [127] R. Showalter, B. Momken, Single-phase flow in composite poro-elastic media. *Math. Methods Appl. Sci.* 25 (2002) 115–139.
- [128] D. Stoyan, W.S. Kendall and J. Meke, *Stochastic Geometry and its Applications*. Wiley, Chichester, 1995.
- [129] L. Tartar, Cours Peccot au collège de France, partially written by F.Murat in Séminaire d'analyse Fonctionnelle and Numérique de l'université d'Alger (non publié). 1978.

- [130] L. Tartar, Topics in Nonlinear Analysis, Publications mathématiques d’Orsay 78.13, Université de Paris-Sud, 1978.
- [131] L. Tartar, Convergence of the homogenization process. Appendix of Non-homogeneous media and Vibration theory, lecture notes on physics 127, Springer-Verlag, New-York 1980.
- [132] L. Tartar, Non local effects induced by homogenization, in Essays of mathematical analysis in honour of E. De Giorgi, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 1 (1989) 925-938.
- [133] R. Temam, Navier-Stokes equations, North-Holland (1979).
- [134] K. Yoshida, Functional Analysis, 6th edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [135] H. F. Wang, Theory of linear poroelasticity with application to geomechanics and hydrogeology, Princeton University Press, Princeton, 2000.
- [136] R. Wilson, E. Aifantis, On the theory of consolidation with double porosity. Int. J. Engrg. Sci., 20 (1982) 1009–1035.
- [137] P. Wust, J. Nadobny, R. Felix, P. Deuffhard, W. John, and A. Louis, Numerical approaches to treatment planning in deep RF-hyperthermia, Strahlenther. Onkol., 165 (1989) 751–757.
- [138] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Part I and II, Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [139] C. Zhang, N. Waksanski, V. M. Wheeler, E. Pan, R. E. Larsen, The effect of photodegradation on effective properties of polymeric thin films: A micromechanical homogenization approach, International Journal of Engineering Science Volume 94, September 2015, 1–22.

- [140] H.W. Zhang, D.S. Yang, S. Zhang, Y.G. Zheng, Multiscale nonlinear thermoelastic analysis of heterogeneous multiphase materials with temperature-dependent properties, *Finite Elements in Analysis and Design* 88, 97-117 (2014).
- [141] V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag 1994.