

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Mathématiques de Gestion

Par

AOUANE Mohouhand

THÈME

**APPROCHE ALGORITHMIQUE POUR LA RÉOLUTION
DE QUELQUES PROBLÈMES DANS LES POSETS**

Soutenu publiquement, le 22/12/2005 devant le jury composé de :

H. AIT HADDADENE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Président.
I. BOUCHEMAKH	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directrice de mémoire.
M. AIDER	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
A. BERRACHEDI	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
S. BOUROUBI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

En premier, j'adresse mes très sincères et distingués remerciements à Isma BOUCHEMAKH, ma Directrice de thèse, Maître de Conférences et Directrice de recherche à l'université des sciences et de la technologie Houari Boumediene (USTHB), de m'avoir encadré, pour l'intéressant sujet qu'elle m'a proposé, dirigé le long de ce travail, pour ses encouragements, son suivi minutieux et continu, pour son entière disposition, sa sagesse et la confiance qu'elle m'a manifestée. Qu'elle trouve ici mes vifs et profonds respects, considérations, gratitude ainsi que reconnaissances.

Monsieur Hacène AIT HADDADENE, Maître de Conférence, Directeur de recherche et Directeur du laboratoire LAID3 à l'USTHB me fait un très grand honneur d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, qu'il trouve ici mes plus profonds respects et remerciements.

Je tiens vraiment à remercier le Professeur Abdelhafid BERRACHEDI, Chef du département de Recherche Opérationnelle et Directeur de recherche, à l'USTHB d'avoir accepté d'être dans le jury de cette thèse et d'examiner ce travail. Qu'il trouve ici mes plus profonds respects et considérations.

Que le Professeur Meziane AIDER, Directeur de recherche et Vice Doyen chargé de la Recherche et de la Post-graduation, à l'USTHB trouve mes plus distingués et sincères respects et remerciements pour avoir accepté d'être parmi les examinateurs de ce travail.

J'adresse mes doubles remerciements et respects à Monsieur Sadek BOUROUBI, Maître de Conférences et Directeur de recherche à l'USTHB d'avoir accepté d'examiner ce travail et pour ses fructueuses discussions. Je ne peux être insensible à sa franchise et le sens d'amitié qu'il me témoigne, je lui présente ma profonde considération.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes enseignants et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à ma formation.

J'adresse mes plus grands remerciements à ma mère et mon père pour ce qu'ils font pour moi, qu'Allah les protège et leur fait; à tous deux; miséricorde comme ils m'ont élevé tout petit, ainsi qu'à mes frères et sœurs.

Que ceux qui ont mis à ma disposition leurs matériels informatiques trouvent mes sincères remerciements et qu'Allah les récompense.

Que madame Assia AOUDANE trouve mes plus vifs remerciements pour m'avoir aidé à la réalisation du logiciel. Je lui présente mes sincères reconnaissances, qu'elle trouve ici le plus grand respect et la plus grande considération.

Et en fin pour tout ce qui m'ont de près ou de loin aidé conseillé et qui ne trouvent pas leurs noms ici, qu'ils me pardonnent et trouvent ici toute ma gratitude et ma grande reconnaissance.

Tables des Matières

	page
Introduction générale	1
1 Définitions et concepts fondamentaux	
1.1 Concepts de graphes	6
1.2 Théorie des Posets et des hypergraphes	8
1.2.1 Théorie des posets	8
1.2.2 Théorie des hypergraphes	12
1.3 Optimisation combinatoire	18
1.3.1 Généralités	18
1.3.2 Approche de résolution	19
2 Complexité Algorithmique et problème de reconnaissance	
2.1 Complexité Algorithmique	21
2.1.1 Algorithme	21
2.1.2 Complexité Algorithmique	23
2.3 Problème de reconnaissance des hypergraphes des intervalles maximaux d'un posets	
2.3.1 Définitions	27
2.3.2 Conditions nécessaires	29
2.3.3 Relations entre $\mathcal{H}(P)$ et la propriété de Helly	30
3 Ordre d'intervalles et stable de poids maximum	
3.1 Définitions et propriétés	33
3.2 Caractérisations des ordres d'intervalles	34
3.2.1 Caractérisation avec les ensembles de préd et succ	35
3.2.2 Caractérisation par des sous posets interdits	36
3.2.3 Caractérisation matricielle	36

3.3 Quelques invariants dans les ordres d'intervalles	37
3.3.1 Hauteur d'un ordre d'intervalles	37
3.3.2. Dimension d'un ordre d'intervalles	37
3.3.3 Nombre chromatique d'un ordre d'intervalles	38
3.4 Complexité algorithmique dans les ordres d'intervalles	39
3.4.1 Problème de reconnaissance d'un ordre d'intervalles	39
3.4.2 Complexité relatives aux principaux problèmes d'optimisation combinatoire dans les ordres d'intervalles	39
3.5 Stable de poids maximum dans l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$	40
3.5.1 Définitions	40
3.5.2 Algorithme de recherche du stable de poids maximum dans $\mathcal{H}(P)$	44
4 Ordre de trapèzes et propriété duale de König	
4.1 Définitions préliminaires	52
4.1.1 Ordres de trapèzes	52
4.1.2 Graphes de trapèzes	56
4.2 Conditions nécessaires	57
4.3 Configuration minimales interdites dans les ordres de trapèzes	58
4.4 Ordre de trapèzes et ordres d'intervalles	59
4.5 Ordre de trapèzes et propriété duale de König	60
Conclusion Générale	82
Perspectives	83
Bibliographie	84

Introduction générale

Introduction générale

La complexité et l'étendue de la nature, espace vital de l'homme, oblige celui-ci à comprendre, affronter et plus généralement à résoudre, des situations qu'il rencontre pendant son petit séjour, au sein de cet étendu vital. Présent dans un tel environnement, l'homme avec sa caractéristique, connue plus sous le nom «*d'intelligence*», se trouve doté de cette faculté d'inventer des outils ou de les modifier selon ses besoins, voire même de choisir, dans une collection de ses derniers, le meilleur qui soit plus adapté et lui fournissant des résultats optimaux parmi l'ensemble des solutions réalisant son objectif.

Pendant des ères et des ères, ému devant une telle situation kafkaïenne, l'homme s'est perdu à l'intérieur de ce labyrinthe, jusqu'au jour où on lui « a enseigné » *la science*. C'est la plus grande et plus importante des rencontres, de tous les temps, la rencontre de l'homme avec la science. Conséquence inévitable de la multiplicité et des exigences de la vie et de leurs évolutions presque exponentielles en des temps records, la machine «*ordinateur*» devient avec la grandeur des données des problèmes, qui se présentent dans la vie de tous les jours, un des seuls recours pour le scientifique tentant de résoudre ceux-ci, en des temps raisonnables. Dans de telles circonstances l'homme retrouve tout l'intérêt de l'*Optimisation* ou de l'*Optimisation combinatoire*, qui avec sa merveilleuse fusion avec l'informatique, disposent d'une suprématie scientifique dans la gestion des grands systèmes d'hommes.

Découlant directement de cette faculté qu'a l'homme, à choisir le meilleur des outils, qu'il possède pour sa fin, l'origine de l'optimisation remonte donc à très loin. On optimise presque dans toutes les sciences mais le noyau de l'optimisation peut être considéré comme étant la *recherche opérationnelle*. Celle-ci vise essentiellement la recherche des techniques rationnelles d'analyse et de résolution des problèmes, rencontrés principalement dans l'activité économique, et visant en général l'élaboration des décisions les plus efficaces pour l'obtention de meilleurs résultats. Pour de tels objectifs deux approches sont souvent utilisées pour tenter de résoudre ces problèmes ; *l'approche polyédrale*

et l'*approche algorithmique*. Tandis que la première approche est basée sur la recherche de l'enveloppe convexe, dit *polytope*, des contraintes du problème, la seconde vise essentiellement l'élaboration d'un système de symboles et de procédés de calcul, connu plus par le nom d'*Algorithme* qui transforme les données du problème en sa solution.

La résolution par l'une ou l'autre des deux approches suppose d'abord une modélisation du problème, par cette dernière on sous entend un modèle mathématique facilement généralisable à tous les cas, sous lesquels peut se présenter le problème. Eu égard à la puissance de la théorie des graphes, connue comme étant un puissant outil de modélisation et de résolution des problèmes rencontrés dans les différentes branches de la recherche opérationnelle, celui-ci s'avère impuissant devant certains problèmes, il était donc très naturel de penser à une généralisation du concept de graphe par celui d'*hypergraphe*, et d'aborder de nouveaux problèmes d'optimisation combinatoire.

Si E est l'ensemble des éléments représentatifs des configurations réalisables d'un problème d'optimisation combinatoire, la modélisation par les *hypergraphes* consiste en la formation d'une famille de sous-ensembles de ces éléments, et la résolution par ceux-ci consiste en l'étude des propriétés de cette famille ainsi, surpassant la contrainte d'une modélisation sous forme d'ensembles ou de sous-ensembles de cardinalité au plus deux, plusieurs problèmes d'optimisation sont modélisés et résolus par les hypergraphes.

Visant essentiellement la disposition des éléments de certains ensembles, selon un ordre donné, les ensembles partiellement ordonnés sont intimement liés à la classe des hypergraphes des intervalles maximaux d'un poset P , noté $\mathcal{H}(P)$. En effet, cette classe est définie en considérant les sommets d'un poset P comme ceux de l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ et ses intervalles maximaux comme étant les arêtes de $\mathcal{H}(P)$. C'est à cette dernière classe que s'intéresse notre étude. Plusieurs situations pratiques, font appel dans leurs modélisations et/ou résolutions à cette classe, pour ne citer que l'informatique, l'ordonnancement, l'intelligence artificielle, dynamique des systèmes complexes...etc.

Notre recherche dans cette classe d'hypergraphes s'est axée autour de deux classes de posets : les *ordres d'intervalles* et les *ordres de trapèzes*. On s'intéresse en premier lieu au problème de reconnaissance de cette classe d'hypergraphes et à la recherche du stable de poids maximum dans $\mathcal{H}(P)$ lorsque l'ordre est d'intervalles pour enfin traiter ce qui est de la validation de la propriété duale de König dans le cas où l'ordre est de trapèzes.

Notre motivation se situe dans la même optique que celle qui a motivé les travaux de I. Bouchemakh [10], qui sont une suite des travaux et résultats de B. Voigt et I. Wegener [49], sur la généralisation de la relation :

$$\text{Max}\{|S| : S \text{ stable de } \mathcal{H}(P)\} = \text{Min}\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ recouvrement par arêtes de } \mathcal{H}(P)\}.$$

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré essentiellement, aux définitions préliminaires des notions les plus utilisées dans ce dernier. Nous introduisons un certain nombre de notions fondamentales en optimisation combinatoire. On retrouve en particulier les principaux concepts et résultats des ensembles partiellement ordonnés ainsi que des hypergraphes et du vocabulaire et résultats de la théorie des graphes utilisés dans ce travail.

Dans le second chapitre on traite de ce qui est de l'approche algorithmique et des principaux concepts de la complexité algorithmique pour donner enfin certains éléments essentiels du problème de reconnaissance de notre classe d'hypergraphes.

Nous abordons dans le troisième chapitre, les ordres d'intervalles, les principaux résultats relatifs à cette classe de posets. Nous proposons un algorithme, polynomial d'ordre $O(n^3)$, pour la détermination du stable de poids maximum dans un ordre d'intervalles.

Le quatrième chapitre sera consacré à l'étude des ordres de trapèzes, nous étudierons les propriétés fondamentales de cet ordre et nous proposons une démonstration de la validation de la propriété duale de König pour $\mathcal{H}(P)$ où P est un ordre de trapèzes.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale sur tout ce qui a été traité dans ce mémoire et nous donnons à la fin de ce dernier des perspectives concernant ce travail.

Chapitre 1

Définitions et concepts fondamentaux

Sommaire

1.1 Concepts de graphes	6
1.2 Théorie des Posets et des hypergraphes	7
1.2.1 Théorie des posets	7
1.2.2 Théorie des hypergraphes	12
1.3 Optimisation combinatoire	17
1.3.1 Généralités	17
1.3.2 Approche de résolution	18

Introduction

Comme déjà mentionné, nous consacrons ce premier chapitre aux généralités ayant trait à ce travail. Nous donnerons dans ce qui suit un aperçu des principales notions et définitions utilisées dans ce travail, pour que les non habitués à ces notions ne se perdront pas dans la suite. Nous commencerons ce chapitre par un bref rappel sur la théorie des graphes, des hypergraphes et des ordres partiels. Nous nous pencherons que sur les éléments et résultats utilisés dans les chapitres qui suivront celui-ci.

1.1 Concepts de graphes

Une des notions les plus importantes dans notre époque est la notion de graphe au sens de Berge, qu'on peut définir dans ce qui suit :

Un *graphe* (non orienté) est la donnée de deux ensembles finis non vides E et V où V représente l'ensemble des sommets de G et E l'ensemble des couples des éléments de V appelés arêtes de G , le graphe ainsi obtenu se note $G = (V, E)$.

Deux sommets u, v sont dits *adjacents* dans G s'ils se trouvent dans une même arête. Une arête est donc notée (u, v) ou uv . u et v sont appelées extrémités de cette arête. Deux arêtes sont dites adjacentes si et seulement si elles ont au moins une extrémité en commun.

Un *voisin* d'un sommet v est un sommet qui est adjacent à v , on notera par $N(v) = \{u \in V(G) : u \text{ est voisin de } v \text{ dans } G\}$ l'ensemble des voisins de v .

Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités se confondent.

Toute arête d'un graphe G qui relie deux sommets non consécutifs d'une chaîne (respectivement d'un cycle) est appelée *corde* de la chaîne (respectivement du cycle).

Une *chaîne minimale* de longueur k est une séquence $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ de sommets distincts tels que v_i est adjacent à $v_{i+1} \forall i = \overline{0, k}$ sans corde et v_0, v_k représentent les deux extrémités de la chaîne, une telle chaîne est notée par P_k .

Un cycle sans corde ayant k sommets (de longueur k) est désigné par C_k . Un cycle élémentaire de longueur au moins quatre sans corde est appelé *trou* et un *anti-trou* est le complémentaire d'un trou.

Un *sous graphe induit* par $X \subseteq V(G)$ est le graphe $G(X) = (X, E_X)$ où $E_X = \{uv \in E : u \in X, v \in X\}$.

Soit C une application, définie de $V(G)$ (resp. de $E(G)$) dans \mathbb{R} qui associe à tout sommet v (resp. arête e) de G une valeur réelle $C(v)$ (resp. $C(e)$). C est appelée fonction poids et $C(v)$ (resp. $C(e)$) poids du sommet v (respectivement de l'arête e) de G . Le graphe obtenu est dit un graphe à sommets (resp. arêtes) *pondérés* (es).

Un graphe G est dit *graphe de Berge* si et seulement si, il n'admet pas de trou ni d'anti-trou impair de longueur ≥ 5 , comme sous graphe induit.

Un graphe G est dit *parfait* si pour tout sous graphe G' de G $\alpha(G') = \theta(G')$ ou $\gamma(G') = \omega(G')$, avec :

$$\alpha(G') = \text{Max} \{ |S|, S \text{ ensemble stable dans } G' \};$$

$$\theta(G') = \text{Min} \{ |F|, F \text{ une partition de } G' \text{ en cliques maximales} \};$$

$$\omega(G') = \text{Max} \{ |C|, C \text{ clique maximale de } G' \};$$

$$\gamma(G') = \text{Min} \{ |k|, k \text{ une coloration optimale des sommets de } G' \}.$$

Une coloration k est optimale si k est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier G telle que deux sommets adjacentes n'est pas la même couleur.

Théorème 1.2 [15]

Un graphe est parfait si et seulement si il est de Berge.

1.2 Théorie des Posets et des hypergraphes.

1.2.1 Théorie des Posets.

1.2.1.1 Définitions

Une relation \leq définie sur un ensemble P est dite *relation ordre* si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Notons que si tous les couples de $P \times P$ sont comparables ($x \leq y$ ou $y \leq x$), alors l'ordre est dit un *ordre total*, il est *partiel* sinon.

Si la relation est irreflexive, complète et transitive, l'ordre est dit un ordre linéaire.

Un ensemble (P, \leq_p) sur lequel est défini un ordre partiel est dit *un ensemble partiellement ordonné*, en abrégé par Poset (de l'anglais partially ordered set).

Dans la suite, nous considérons que tous les posets sont finis et nous noterons P au lieu de (P, \leq_p) si aucune ambiguïté ne se pose.

Une notion élémentaire dans les posets est la notion de *couverture*, on dira qu'un élément $x \in P$ *couvre* un autre élément $y \in P$ et on note $y \prec x$ si $y < x$ et si $y < z \leq x$ alors $z = x$. Cette dernière notion nous permet d'associer à tout poset P une représentation dans le plan appelée *diagramme de Hasse*, de la manière suivante :

- On associe à tout élément de P un point du plan.
- On place l'élément x couvrant y au dessus de y et on relie les deux points par un segment de droite ascendant.

La Figure 1.2 illustre le poset $P = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ ordonné par inclusion.

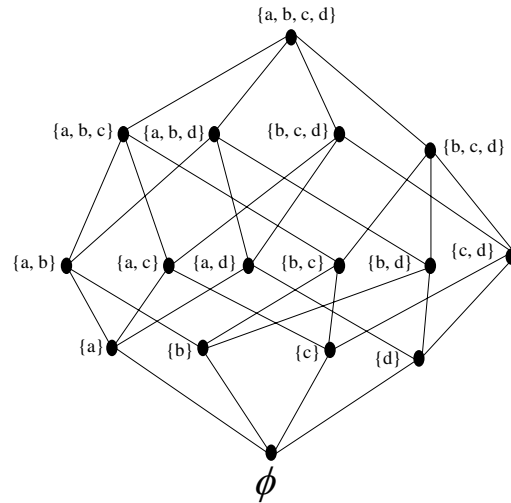


Figure 1.2 : Un poset.

Ainsi, deux éléments sont comparables par la relation d'ordre si et seulement si ils sont joints par une chaîne ascendante.

A tout poset (P, \leq_P) on associe un autre poset noté (P^*, \leq_{P^*}) appelé le *dual* de P , de la façon suivante :

- L'ensemble des sommets de P^* reste celui de P
- $x \leq_{P^*} y$ si et seulement si $y \leq_P x$.

La Figure 1.3 montre l'exemple d'un poset P et de son dual P^* .

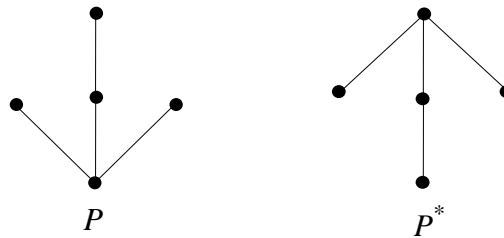


Figure 1.3 : Un poset et son dual.

Soit A un sous-ensemble de P . On définit l'ombre supérieure (resp. inférieure) de A et on note $R^+(A)$ (resp. $R^-(A)$) les sous-ensembles définis par :

$$R^+(A) = \{y \in P : \exists x \in A, x < y\} \quad (\text{resp. } R^-(A) = \{y \in P : \exists x \in A, y < x\}).$$

Si $A = \{x\}$, $R^+(A)$ et $R^-(A)$ sont notés $R^+(x)$ et $R^-(x)$.

Dans l'exemple de la Figure 1.2 on a :

$$R^+(\{a,b\}) = \{\{a,b,c\}, \{a,b,d\}\} \text{ et } R^-(\{a,b\}) = \{\{a\}, \{b\}\}.$$

Avec cette dernière définition, on peut partitionner l'ensemble des éléments d'un poset P en trois classes définies par :

- La classe des éléments dits *maximaux* : Ceux dont l'ombre supérieure est vide. Elle est notée \mathcal{M} .
- La classe des éléments dits *minimaux* : Ceux dont l'ombre inférieure est vide. Elle est notée m .
- La classe des éléments *intérieurs* : Ceux dont les deux ombres ne sont pas vides. Elle est notée $Int(P)$.

Dans la suite, nous supposons que le poset est sans sommets isolés c.à.d ne contient pas des sommets qui sont à la fois maximaux et minimaux.

Une *fonction de rang*, notée r , est une fonction définie par :

$r : P \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $r(x) = 0$ si x est un élément minimal de P et $r(y) = r(x) + 1$ si $x < y$.

Si une telle fonction existe alors P est un poset *rangé* ou gradué et on notera

$$r(P) = \max_{x \in P} r(x) \text{ le rang de } P.$$

Les sommets de tout poset rangé peuvent être partitionnés en $r(P) + 1$ sous-ensembles appelés niveaux, et sont définis pour tout $i \in \{0, 1, 2, \dots, r(P)\}$ par :

$$N_i(P) = \{x \in P : r(x) = i\}.$$

Le nombre $W_i(P) = |N_i(P)|$ est dit *$i^{\text{ème}}$ nombre de Whitney*.

Si nous reprenons l'exemple de la Figure 1.2, on obtient que $r(P) = 4$ et $W_0(P) = W_4(P) = 1$, $W_1(P) = W_3(P) = 4$, $W_2(P) = 6$.

Ces niveaux sont représentés dans la Figure 1.4, ci-dessous.

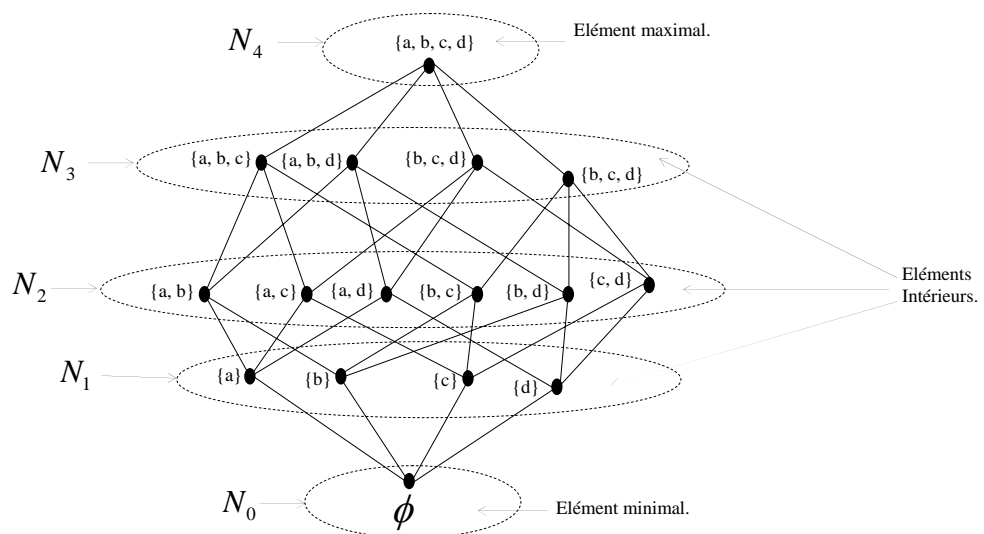


Figure 1.4 : Partition en niveaux et classification des éléments d'un poset.

Un *intervalle* de P est un sous-ensemble de P , de la forme $\{x \in P : p \leq x \leq q\}$ et est noté $[p, q]$. Si de plus p est un élément minimal et q un élément maximal, alors $[p, q]$ est dit *intervalle maximal* de P .

Si on considère le poset de la Figure 1.2, alors :

$[\emptyset, \{a, b, c, d\}] = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ est un intervalle maximal de P , mais pas $[\{a\}, \{a, c, d\}] = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\}$.

Un sous-ensemble $C = \{c_i\}_{i \in I}$ d'un poset P est une *chaîne* de P , si :

$\forall i \in I, \forall j \in I / i \neq j$ alors c_i et c_j sont comparables. Une telle chaîne est notée par $C = (c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{|I|})$ et le nombre $|I| - 1$ est dit *longueur* de C . C est dite *chaîne symétrique* si $r(P) = r(c_0) + r(c_{|I|})$. Elle est dite saturée si $C = (c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{|I|})$, si de plus c_0 est minimal et $c_{|I|}$ est maximal C est dite chaîne maximale.

Un poset P peut être partitionné en chaînes symétriques, s'il existe une famille \mathcal{F} de chaînes symétriques où chaque élément de P appartient à une unique chaîne de \mathcal{F} . Dans l'exemple de la Figure 1.5, les trois chaînes constituant la partition de P , sont représentées en segments discontinus.

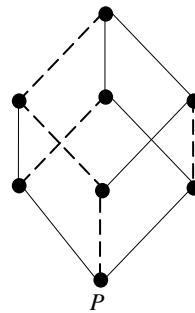


Figure 1.5 : Une partition en chaînes d'un poset.

Une *antichaîne* est un sous-ensemble de P où tous les éléments sont deux à deux incomparables. On note $a_i // a_j$ si a_i et a_j sont incomparables. Une telle famille est aussi appelée *famille de Sperner*.

1.2.1.2 Quelques propriétés des Posets

Notons qu'un résultat fondamental, à propos des antichaînes, obtenu par Sperner, a donné lieu à la naissance de toute une théorie dans les posets, appelée théorie de Sperner.

En effet, en 1928, Sperner a montré que la longueur maximale d'une antichaîne

est au plus $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ et que cette borne est atteinte.

Théorème 1.2 : [22]

Si \mathcal{F} est une famille de Sperner alors $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ et que cette borne est atteinte.

Plus tard, Dilworth obtient un lien de dualité entre chaînes et antichaînes, qui est résumé dans le théorème suivant :

Théorème 1.3 [18].

Soit P un poset, alors on a la relation de dualité suivante :

$$\text{Max}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ une antichaîne de } P\} = \text{Min}\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ une partition de } P \text{ en chaînes}\}.$$

Deux posets P et Q sont dits *isomorphes* et on note $P \approx Q$, s'il existe une application bijective φ de P dans Q telle que $x \leq_P y$ si et seulement si $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.

Le poset illustré dans la Figure 1.2, à savoir $(\mathcal{P}\{a,b,c,d\}, \subseteq)$ est isomorphe au poset $(\{0,1\}^4, \leq)$.

1.2.2 Hypergraphes et propriétés

L'un des premiers à avoir généralisé la notion de graphe est C. Berge, en remplaçant les arêtes d'un graphe par les sous-ensembles de ses sommets dans la classe d'hypergraphes. Nous ne traiterons pas ici de ce qui est de ces généralisations, mais nous ne nous intéresserons qu'aux définitions et propriétés relatives à ce travail.

Un *hypergraphe* \mathcal{H} , défini sur un ensemble fini X , est une famille $\mathcal{E} = \{A_i : i \in I\}$ de sous-ensembles de X vérifiant pour tout $i \in I$ $A_i \neq \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Le couple ainsi formé (X, \mathcal{E}) est appelé hypergraphe sur X et est noté $\mathcal{H}(X, \mathcal{E})$. X représente l'ensemble de ses sommets et \mathcal{E} l'ensemble des arêtes (hyper-arêtes).

Il est évident que si $\forall i \in I |A_i| = 2$ alors $\mathcal{H}(X, \mathcal{E})$ est un graphe. La Figure ci-dessous, Figure 1.10, donne un exemple d'un hypergraphe, avec :

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ comme ensemble de sommets et $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{7, 8, 9, 10, 11\}\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ comme étant celui des arêtes.

Un hypergraphe sera représenté par des points sur le plan représentant les sommets et par des traits pleins entourant les éléments de A_i si $|A_i| \geq 3$, par un trait joignant les deux sommets de A_i si $|A_i| = 2$ ou encore par une boucle si $|A_i| = 1$.

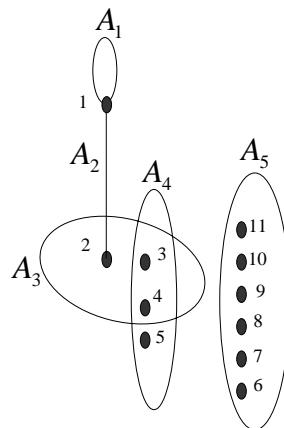


Figure 1. 10 : Un hypergraphe

Deux sommets d'un hypergraphe \mathcal{H} sont dits *adjacents* si et seulement si, il existe au moins une arête de \mathcal{H} les contenant et deux arêtes de \mathcal{H} sont dites *adjacentes* si et seulement si, elles s'intersectent.

Un hypergraphe \mathcal{H} peut être représenté par sa *matrice d'adjacence* $M = (a_{ij})$

où : $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in A_j \\ 0 & \text{si } x_i \notin A_j \end{cases}$. Ainsi, la matrice d'adjacence de l'hypergraphe de

l'exemple précédent (Figure 1. 10) est la suivante :

seulement si les deux arêtes leur correspondant ont une intersection non vide. De même le graphe représentatif du dual \mathcal{H}^* de l'hypergraphe \mathcal{H} , noté $L(\mathcal{H}^*)$ est défini en considérant comme ensemble de sommets les sommets de \mathcal{H} et deux sommets sont adjacents dans $L(\mathcal{H}^*)$ s'il existe au moins une arête dans \mathcal{H} les contenant. De ce fait les arêtes de \mathcal{H} correspondent à des cliques dans $L(\mathcal{H}^*)$. La Figure 1.12 illustre les graphes $L(\mathcal{H})$ et $L(\mathcal{H}^*)$ lorsque \mathcal{H} est l'hypergraphe de la Figure 1.10.

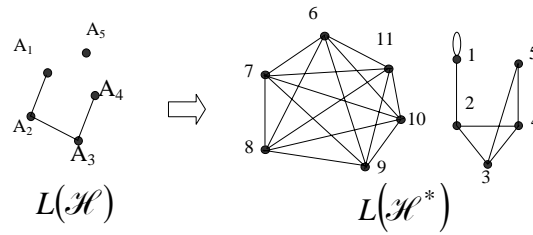


Figure 1. 12 : $L(\mathcal{H})$ et $L(\mathcal{H}^*)$ de l'hypergraphe de la figure 1. 10.

Un sous-ensemble S de sommets de \mathcal{H} est dit *stable* de \mathcal{H} si chaque arête de \mathcal{H} contient au plus un sommet de S .

Un sous-ensemble T de sommets de \mathcal{H} est dit *recouvrement par sommets* de \mathcal{H} si chaque arête de \mathcal{H} contient au moins un sommet de T .

Une famille \mathcal{R} d'arêtes de \mathcal{H} constitue un *recouvrement par arêtes* de \mathcal{H} si tout sommet de \mathcal{H} appartient à au moins une arête de \mathcal{R} .

Une famille \mathcal{E} d'arêtes de \mathcal{H} est dite *couplage* de \mathcal{H} si les arêtes de \mathcal{E} sont deux à deux disjointes.

Avec les définitions précédentes nous associons à chaque hypergraphe \mathcal{H} les quatre invariants, appelés respectivement *nombre de stabilité* $\alpha(\mathcal{H})$, *de couplage* $\nu(\mathcal{H})$, *de recouvrement par sommets* $\tau(\mathcal{H})$ et *nombre de recouvrement par arêtes* $\rho(\mathcal{H})$.

$$\alpha(\mathcal{H}) = \text{Max}\{ |S| : S \text{ stable dans } \mathcal{H} \};$$

$$\nu(\mathcal{H}) = \text{Max}\{ |E| : E \text{ un couplage dans } \mathcal{H} \};$$

$$\tau(\mathcal{H}) = \text{Min}\{ |T| : T \text{ un recouvrement par sommets de } \mathcal{H} \};$$

$$\rho(\mathcal{H}) = \text{Min}\{ |\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ recouvrement par arêtes de } \mathcal{H} \}.$$

Toute arête d'un recouvrement par arêtes contient au plus un sommet dans le stable, donc $\alpha(\mathcal{H}) \leq \rho(\mathcal{H})$ et chaque sommet d'un recouvrement par sommets appartient à au plus une arête du couplage, donc $\nu(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H})$.

Un hypergraphe \mathcal{H} possède la propriété de *König* si :

$$\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}).$$

Un hypergraphe \mathcal{H} a la propriété *duale de König* si :

$$\alpha(\mathcal{H}) = \rho(\mathcal{H}) \text{ ou de manière équivalente } \nu(\mathcal{H}^*) = \tau(\mathcal{H}^*).$$

Notons que ces deux dernières propriétés ne sont pas généralement vérifiées. Voir Figure 1.13.

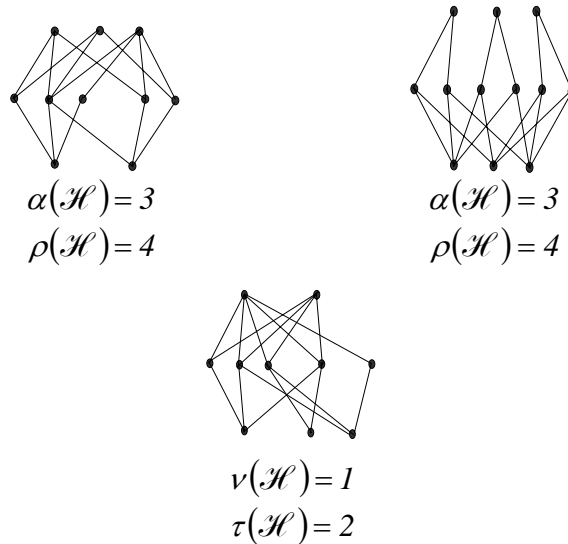


Figure 1. 13.

Etudier les hypergraphes de façon générale est chose très ardue, ceci oblige la restriction de celle-ci à des classes bien déterminées.

La classe des hypergraphes sur laquelle est axé ce travail est la classe des hypergraphes dont l'ensemble des sommets représente les éléments d'un poset P et l'ensemble des arêtes ses intervalles maximaux. Un hypergraphe de cette classe est appelé hypergraphe des intervalles maximaux d'un poset P , un hypergraphe de cette classe est noté $\mathcal{H}(P)$.

Une famille \mathcal{E} de sous-ensemble vérifie la propriété de *Helly* si pour toute sous famille $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pour tout $A_i, A_j \in \mathcal{E}'$ alors : $\bigcap_{A_i \in \mathcal{E}'} A_i \neq \emptyset$.

Un hypergraphe \mathcal{H} vérifie la propriété de *Helly* si la famille de ses arêtes possède la propriété de *Helly*.

Une autre caractérisation des hypergraphes vérifiant la propriété de *Helly* est donnée par Berge et Duchet[5] dans le corollaire suivant :

Corollaire 1.1 [5]

Un hypergraphe \mathcal{H} a la propriété de *Helly* si et seulement si pour trois sommets a_1, a_2, a_3 quelconques, la famille des arêtes qui contiennent au moins deux de ces sommets a_i a une intersection non vide.

Un hypergraphe \mathcal{H} est dit *conforme* si ses arêtes sont des cliques maximales d'un graphe.

Une caractérisation, obtenue pour cette classe d'hypergraphe est due à Gilmore [5] est :

Un hypergraphe \mathcal{H} est dit conforme si et seulement si pour toute famille de trois arêtes A_1, A_2, A_3 de \mathcal{H} , il existe une arête A_0 de \mathcal{H} telle que : $\{(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)\} \subset A_0$.

Un hypergraphe \mathcal{H} est *normal* si tout hypergraphe partiel \mathcal{H}' a la propriété des arêtes coloriées, c'est-à-dire : $q(\mathcal{H}') = \Delta(\mathcal{H}')$ où $q(\mathcal{H}')$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de \mathcal{H}' de sorte que deux arêtes intersectantes soient toujours de couleurs différentes et $\Delta(\mathcal{H}')$ est le degré maximum d'un sommet dans \mathcal{H}'

Le lien existant entre la propriété de *Helly* et la conformité d'un hypergraphe s'énonce dans le théorème suivant :

Théorème 1.4 [5]

Un hypergraphe \mathcal{H} est conforme si et seulement si son dual \mathcal{H}^ vérifie la propriété de Helly.*

Plusieurs caractérisations ont été obtenues pour la normalité d'un hypergraphe [5], mais nous ne citerons ici que celle que nous utiliserons dans la suite. Celle-ci est résumée dans le Théorème 1.5.

Théorème 1.5 [5]

Un hypergraphe \mathcal{H} est dit normal si et seulement si $L(\mathcal{H})$ est un graphe parfait et \mathcal{H} satisfait la propriété de Helly.

Le lien fort existant entre la propriété de *König* et la normalité d'un hypergraphe est énoncé dans le théorème qui suit.

Théorème 1.6 [5]

Un hypergraphe normal possède la propriété de König.

1.3 Optimisation combinatoire**1.3.1 Généralités**

De nature progressiste, l'homme ne peut s'abstenir de penser à une amélioration, de plus en plus considérable, d'une situation rencontrée ou vécue. Cette envie instinctive le contraint à de grandes réflexions sur le devenir de ces états. Pour un tel objectif il définit, en premier lieu un espace des évolutions possibles, pour tenter, en suite, d'atteindre la meilleure de ces possibilités, déjà bien définies. L'approche scientifique pour la réalisation de cette tâche, est connue beaucoup plus sous le nom d'*optimisation combinatoire*. Elle est située sur l'une des branches de la recherche opérationnelle donc des mathématiques, mais on retrouve son utilité dans la plupart des sciences (physiques, biologies, informatique.....), et consiste en la recherche de l'optimum d'une fonction donnée, définie sur un ensemble discret. Elle peut être vue comme étant un ensemble de procédés calculatoires et de théories relatives à ceux-ci visant,

généralement la résolution des problèmes de recherches des extrema d'une fonction modélisant un objectif.

1.3.2 Approches de résolution

Pour la résolution de tels problèmes on adopte, principalement deux approches, l'approche algorithmique et l'approche polyédrale et elles sont définies dans ce qui suit.

1.3.2.1 Approche algorithmique

Cette approche consiste en la recherche d'une procédure, dite *algorithme*, de type marquage, contraction, coloration, décomposition résolvant l'instance du problème, en un temps raisonnable. Cette approche consiste donc en la mise en œuvre d'un algorithme, de recherche de la solution de la plus mauvaise instance du problème, opérant en un temps, raisonnable, dit *polynomial*. Nous définissons, dans le chapitre suivant ceci, la majorité des notions fondamentales relatives à cette approche sur laquelle est basée ce travail et nous nous intéresserons dans la suite qu'à celle-ci, laissant de côté l'*approche polyédrale*, dont nous donnerons que la définition.

1.3.2.2 Approche polyédrale

Elle consiste en la recherche de l'enveloppe convexe des vecteurs, représentatifs des contraintes du problème et d'un optimum d'une fonction objectif, la fonction modélisant l'objectif désiré. La couverture convexe des vecteurs représentatifs des contraintes s'appelle le polytope, du problème, sous-jacent. La connaissance du polytope sous-jacent dans plusieurs cas (mais pas toujours, le cas du problème de la recherche du stable de cardinalité maximum dans les graphes sans étoile) aide beaucoup à la recherche de l'algorithme et à la connaissance de la structure du problème.

Chapitre 2

Complexité Algorithmique et problème de reconnaissance des hypergraphes des intervalles maximaux d'un poset

Sommaire

2.1 Complexité Algorithmique	20
2.1.1 Algorithme	20
2.1.2 Complexité Algorithmique	22
2.3 Problème de reconnaissance des hypergraphes des intervalles maximaux d'un posets	26
2.3.1 Définitions	26
2.3.2 Conditions nécessaires	28
2.3.3 Relations entre $\mathcal{H}(P)$ et la propriété de Helly	30

Nous aborderons dans ce présent chapitre le concept d'algorithme et de la complexité algorithmique puis nous pencherons sur le problème de reconnaissance des hypergraphes des intervalles maximaux d'un poset et nous donnerons des conditions nécessaires pour qu'un hypergraphe \mathcal{H} soit un $\mathcal{H}(P)$.

2.1 Algorithme et complexité.

2.1.1 Algorithme.

La notion d'algorithme ne peut être définie précisément, mais elle peut être vue comme étant une succession finie d'opérations élémentaires, mettant en jeu les données du problème à résoudre et donnant la solution de celui-ci. Autrement dit, un algorithme de résolution d'un problème est une procédure constituée d'opérations élémentaires qui transforme une chaîne de caractères représentant les données, se présentant sous n'importe quelle forme, en une autre chaîne de caractères représentant la solution. Le but d'un algorithme est donc de résoudre le problème, sous n'importe quelle forme où les données sont fixées. Elle est l'une des plus vieilles notions en mathématiques. Elle se proposait, beaucoup plus dans ses premiers temps de résoudre des problèmes de partages dans l'héritage pour tenter en suite de résoudre des problèmes très complexes, dans les sciences en générale et en mathématiques en particulier. Même si son nom est dû à *Mohamed ibn Mussr abd Allah al Khawarizmi*, mathématicien musulman du IX siècle, qui était à l'origine de plusieurs algorithmes de résolution des problème de partage d'héritage selon la jurisprudence musulmane, il était de ce fait un des plus respecté de l'assemblée de l'époque, « madjlis ». Mais on se convint que le plus ancien algorithme non trivial est l'algorithme d'Euclide, qui donne le plus grand diviseur commun entre deux nombres ou de prouver que deux nombres sont premiers entre eux.

La notion d'algorithme couvre une grande partie des problèmes rencontrés dans la vie quotidienne en général et dans les sciences en particulier. L'intérêt porté à celle-ci est de plus en plus grand, avec l'avènement des ordinateurs. Cependant il existe beaucoup de types d'algorithmes, mais ce à quoi nous nous

intéressons n'est pas de citer ces types, mais de définir des critères communs, sous lesquels on peut les étudier.

Eu égard à l'essor connu dans le domaine de l'informatique et de la construction des ordinateurs, d'une part et d'autre part la diversité des chemins menant à l'optimum, d'une fonction modélisant un problème d'optimisation combinatoire, ces deux facteurs sont à la base de la plus grande partie des difficultés, rencontrées dans cette approche. Ainsi, il n'est pas, en général, facile d'atteindre cet optimum, dans de meilleurs délais, vu la complexité des données et leur diversité. De ce fait, le nombre d'opérations dans cette succession peut croître trop rapidement avec le nombre de données, ce qui rendra vraiment la solution recherchée, ou la solution est quasi-impossible, c'est ce qui est connu par le nom *d'explosion combinatoire*.

De ces dernières remarques découle toute une science, la *complexité algorithmique*. Elle vise l'étude de l'espace-temps, utilisé en parcourant le chemin menant à la solution désirée, en prenant comme référence les capacités d'un calculateur, le plus performant. C'est ainsi qu'elle teste l'efficacité d'un algorithme, qui ne peut être utilisé pour résoudre un problème que si la solution est établie dans un espace-temps réalisable.

Même si un algorithme n'est pas en général bien défini, mais tout algorithme, objet d'étude de la complexité algorithmique, sera parfaitement défini.

Soit \mathcal{P} un problème qu'on tente de résoudre par un algorithme efficace (dont l'espace-temps utilisé est raisonnable), le fait qu'on ne connaît pas celui-ci, est-il dû à notre incapacité de trouver un ou parce qu'un tel algorithme n'existe pas dans la réalité. La complexité algorithmique ne peut toujours pas répondre à cette question de façon certaine, cependant elle classe chaque problème dans une classe bien définie. Elle tranche sur la question que s'il existe un algorithme efficace pour résoudre un problème d'une classe donnée alors il existerait un pour résoudre tous les problèmes de celle-ci. Pour chaque algorithme il existe donc deux types de complexité, la complexité spatiale et la complexité temporelle.

Instance : L'instance d'un problème est la forme sous laquelle peuvent se présenter les données de celui-ci. Les instances considérées par la complexité algorithmique sont les plus mauvaises, autrement dit les instances utilisées pour évaluer l'efficacité d'un algorithme sont celles où les données sont très grandes. Dans tout ce qui suit, on sous entendra par instance le pire des cas.

2.1.2 Complexité algorithmique

2.1.2.1 Complexité spatiale d'un algorithme

C'est l'évaluation de l'espace mémoire utilisé pour l'exécution d'un algorithme donné. Chaque algorithme a une complexité spatiale propre à lui.

Dans ce qui suit on ne s'intéressera qu'à la complexité temporelle.

2.1.2.2 Complexité temporelle d'un algorithme

C'est la mesure faite sur le temps d'exécution, utile pour aboutir à la solution avec l'algorithme, objet de l'étude. Celle-ci est spécifique à chaque algorithme.

Suivant cette dernière complexité, on distingue trois classes de problèmes. Cette classification est intimement liée avec l'existence ou non d'un algorithme efficace résolvant ceux-ci.

2.1.2.3 La classe des problèmes P

Un problème \mathcal{P} est dit dans la classe P s'il existe un algorithme le résolvant dont le temps d'exécution de cet algorithme est borné par un polynôme, en la taille n des données de \mathcal{P} . Autrement dit, un problème $\mathcal{P} \in P$ s'il existe un algorithme A tel que $\mathcal{T}(I_A(n)) \in o(q(n))$, où $\mathcal{T}(I_A(n))$ est le temps de résolution d'une instance I du problème \mathcal{P} par l'algorithme A et $q(n)$ est un polynôme en n . P est dite la classe des problèmes polynomiaux.

2.1.2.4 La classe NP

Pour bien définir cette classe on aura besoin des définitions suivantes.

2.1.2.5 Problème de décision ou problème de reconnaissance

Un problème de décision est un problème dont les deux seules réponses possibles sont soit vraie soit faux.

La solution d'un problème de reconnaissance est seulement vrai ou faux, une fois que la réponse est obtenue (oui ou non) le problème est alors résolu. Un problème de reconnaissance n'est pas, de ce fait un problème d'optimisation combinatoire mais, à tout problème d'optimisation combinatoire on peut faire associer un problème de reconnaissance en suivant la définition suivante.

Définition

Soit \mathcal{P} le problème d'optimisation combinatoire suivant :

Chercher le minimum $s^* \in S$ de la fonction f définie sur S , où S représente l'ensemble des solutions réalisables.

Soit alors k un nombre, on définit le problème de reconnaissance associé à ce problème par ce qui suit.

Existe-t-il une solution $\hat{a} \in S$ tel que $f(\hat{a}) \leq k$? La réponse à cette question est soit oui soit non, donc c'est le problème de reconnaissance associé au problème d'optimisation combinatoire \mathcal{P} , défini ci-dessus.

Exemple :

Soient P un poset, $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles maximaux de P et \mathcal{P} le problème de recherche d'un recouvrement minimum par sommets de \mathcal{H} .

Données

Un hypergraphe $\mathcal{H}(P)$, des intervalles maximaux d'un poset P , k entier.

Question

Existe-il un recouvrement par sommets de $\mathcal{H}(P)$, de cardinalité au plus k ?

La réponse à cette question est oui ou non donc ceci est un problème de décision.

Un problème de décision est dit NP si et seulement si on peut vérifier en un temps polynomial qu'une donnée est à réponse vrai.

Remarque.

NP ne veut pas dire non polynomial, mais non déterministe polynomial.

Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux problèmes de décisions, $D(\mathcal{P})$ et $D(\mathcal{Q})$ sont respectivement les ensembles des données de \mathcal{P} et \mathcal{Q} , on dira que \mathcal{P} se transforme polynomialement en \mathcal{Q} s'il existe une application $f : D(\mathcal{P}) \rightarrow D(\mathcal{Q})$ telle que :

- i- $\forall d \in D(\mathcal{P})$ le temps de calcul de $f(d)$ est borné par un polynôme en la taille de d .
- ii- d est une donnée à réponse positive de \mathcal{P} si et seulement si $f(d)$ est une donnée à réponse positive de \mathcal{Q} , on note cette transformation $\mathcal{P} \propto \mathcal{Q}$.

2.1.2.6 La classe NP-complet.

Soit \mathcal{P} un problème de décision, on dira que

$\mathcal{P} \in \text{NP-complet}$ si :

- i- $\mathcal{P} \in \text{NP}$
- ii- Tout problème de reconnaissance appartenant à la classe NP se transforme polynomialement à \mathcal{P} .

Notons que P est la classe des problèmes les plus faciles et NP-complet est la classe des problèmes les plus difficiles

Bien entendu, la classe P est incluse dans la classe NP mais $\text{NP} \subset \text{P}$ reste une conjecture redoutable, toujours ouverte. Celle-ci peut être représenté dans la représentation de la Figure 2.1.

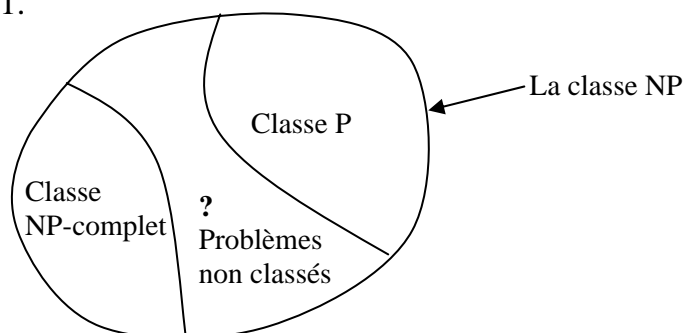


Figure 2.1 : Conjecture $\text{P} = \text{NP}$

La NP-complétude est une propriété très importante du fait que, si on aurait un algorithme polynomial pour un problème NP-complet alors on aurait un pour tous les problèmes de la classe NP ce qui donnerait $P = NP$.

Montrer qu'un problème est NP-complet est chose très importante du fait qu'une fois l'appartenance d'un problème à la classe NP-complet est établie, l'existence d'un algorithme polynomial résolvant celui-ci devient peu probable mais non impossible.

Les algorithmes polynomiaux peuvent être eux aussi classés en deux sous classes suivant ce qui suit :

Etant donné un algorithme polynomial A résolvant un problème \mathcal{P} de taille n , donc il existe un polynôme en n tel que le temps d'exécution de A est borné par ce polynôme (autrement dit, $\mathcal{T}(I_A(n)) \in o(n^k)$, où $\mathcal{T}(I_A(n))$ est le temps de résolution de la plus grande instance I du problème \mathcal{P} par l'algorithme A et $o(n^k)$ est un polynôme de degré k en n).

Les deux sous classes des algorithmes polynomiaux sont :

- Si $k \leq 3$ alors l'algorithme est dit très efficace (rapide) ;
 - Les algorithmes sub-linéaires sont ceux dont la complexité est en général en $o(\log n)$;
 - Les algorithmes linéaires de complexité $o(n)$ et ceux en complexité de $o(n \log n)$ sont considérés comme rapides ;
- Les algorithmes polynomiaux en $o(n^k)$ pour $k > 3$ sont considérés comme lents.

L'on s'accorde à dire que les algorithmes exponentiels (dont la complexité est supérieure à tout polynôme en taille n des données) sont impraticables dès que la taille des données n est supérieure à quelques dizaines d'unités.

Exemple de certains problèmes NP-complets dans les hypergraphes

Dans [11], on trouve les démonstrations de la NP-complétude de la plupart des problèmes relatifs aux hypergraphes des intervalles maximaux des posets. On peut citer principalement les problèmes suivants :

Soit $\mathcal{H}(P)$ un hypergraphe des intervalles maximaux d'un poset. Les problèmes qui suivent sont dans la classe NP-complet [11] :

- Le problème de recherche d'un stable de cardinalité maximum dans $\mathcal{H}(P)$;
- Le problème de recherche d'un couplage de cardinalité maximum dans $\mathcal{H}(P)$;
- Le problème de recherche d'un recouvrement par sommets de $\mathcal{H}(P)$;
- Le problème de recherche d'un recouvrement par arêtes de $\mathcal{H}(P)$.

Ces problèmes sont polynomiaux dans la classe des hypergraphes des intervalles maximaux des ordres d'intervalles. Cependant, le problème de reconnaissance de cette classe d'hypergraphes des intervalles maximaux reste toujours un problème ouvert. Nous donnons dans ce qui suit quelques éléments essentiels qui peuvent servir pour une éventuelle élaboration d'un outil de reconnaissance de cette classe d'hypergraphes.

2.2 Problème de reconnaissance des hypergraphes des intervalles maximaux d'un poset.

En se donnant un hypergraphe \mathcal{H} d'arêtes $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, le problème de reconnaissance associé à \mathcal{H} peut s'énoncer dans ce qui suit :

Données : Un hypergraphe \mathcal{H} d'arêtes $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$.

Question : Existe-t-il un poset P tel que à chaque arête E_i , avec $i = \overline{1, n}$ correspond un intervalle maximal dans P ? Autrement dit, existe-t-il une bijection entre l'ensemble des arêtes $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ et celui des intervalles maximaux de P ?

Exemple 2.1

Soit \mathcal{H} l'hypergraphe défini par $\mathcal{H} = \{\{x_1, x_2, \dots, x_5\}, \{E_1, E_2, E_3\}\}$ où $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $E_2 = \{2, 3, 5\}$ et $E_3 = \{4, 3\}$ alors \mathcal{H} est un $\mathcal{H}(P)$. En effet les intervalles maximaux du poset P (Figure 2.1) sont bien les arêtes de \mathcal{H} .

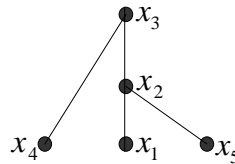


Figure 2.1 : Le poset P correspondant à $\mathcal{H}(P)$

Par ailleurs, si on considère l'hypergraphe $\mathcal{H}' = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{E_1, E_2, E_3\}\}$ où $E_1 = \{1, 2\}$, $E_2 = \{2, 3\}$ et $E_3 = \{3, 1\}$, alors il n'existe aucun poset dont E_1 , E_2 et E_3 sont ses intervalle maximaux, donc \mathcal{H}' n'est pas un $\mathcal{H}'(P)$.

Avant de s'étaler sur les conditions nécessaires, nous tenons à signaler les deux remarques suivantes :

Remarque 1

Soit \mathcal{H} un hypergraphe. Le poset P dont les intervalles maximaux sont les arêtes de \mathcal{H} n'est pas unique. En effet il suffit de faire une permutation entre les éléments d'un même intervalle ou changer l'ordre et on aura un autre poset. La Figure 2.2 est une illustration de cette remarque. En effet , soit \mathcal{H} l'hypergraphe défini par $\mathcal{H} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2, 3, 4\}\}\}$, alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P) = \mathcal{H}(P') = \mathcal{H}(P'')$.

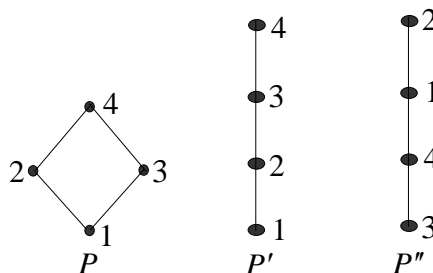


Figure 2.2 : Les posets P et P' correspondant à $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P) = \mathcal{H}(P') = \mathcal{H}(P'')$.

Remarque 2

Soit \mathcal{H} un hypergraphe. Si toutes les arêtes de \mathcal{H} sont deux à deux disjointes, alors \mathcal{H} est un $\mathcal{H}(P)$.

En effet il suffit de placer les éléments de chaque arête de \mathcal{H} l'un au dessus de l'autre et de former des chaînes, disjointes. On obtient ainsi autant de chaînes que d'arêtes de \mathcal{H} . La somme disjointe de ces chaînes donne un poset P dont les sommets sont ceux de l'hypergraphe \mathcal{H} et ses intervalles maximaux sont les arêtes de \mathcal{H} , c.à.d $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P)$.

Les conditions nécessaires que doit satisfaire un hypergraphe \mathcal{H} pour qu'il soit un $\mathcal{H}(P)$ sont énoncées dans la Proposition 2.1.

Proposition 2.1(Conditions nécessaires).

Soit \mathcal{H} un hypergraphe d'ensemble d'arêtes $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$. S'il existe un poset P tel que $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P)$ alors :

1. Les arêtes de \mathcal{H} sont incomparables par inclusion.
2. Si E_i et E_j sont deux arêtes distinctes de \mathcal{H} avec $x \in E_i$, $x \notin E_j$ et $y \in E_j$, $y \notin E_i$ et telles que $E_i - \{x\} = E_j - \{y\}$ alors il n'existe aucune arête de \mathcal{H} contenant à la fois x et y .

Preuve

1. Supposons que \mathcal{H} est un $\mathcal{H}(P)$ et qu'il existe une arêtes E_{i_0} contenant une autre arête E_{j_0} telles que $E_{i_0} \neq E_{j_0}$, comme \mathcal{H} est un $\mathcal{H}(P)$ donc toute arête de \mathcal{H} est un intervalle maximal d'un poset P donc chaque arête de \mathcal{H} contient à la fois un éléments maximal et un élément minimal de P . Or E_{j_0} est contenue dans E_{i_0} donc soit E_{j_0} ne contient pas, à la fois d'élément minimal ou maximal, contradiction car E_{j_0} est un intervalle maximal de P et $E_{j_0} \subset E_{i_0}$; soit E_{j_0} contient à la fois un élément minimal et un élément maximal donc les intervalles maximaux de P correspondants respectivement aux arêtes E_{j_0} et E_{i_0}

sont égaux donc $E_{j_0} = E_{i_0}$ contradiction car E_{j_0} et E_{i_0} sont deux arêtes distinctes dans \mathcal{H} .

2. Si de telles arêtes existent dans \mathcal{H} , alors x et y sont à priori des éléments maximaux de P . Il vient que ; ou bien les deux arêtes sont contenues dans l'arête contenant x et y contradiction d'après la première condition nécessaire ; ou bien x ou y ne peut être un élément maximal dans P , contradiction car E_i et E_j sont deux intervalles maximaux dans P .

2.2.3 Relations entre $\mathcal{H}(P)$ et la propriété de Helly

Soit \mathcal{H} un hypergraphe. Il n'est pas nécessaire que \mathcal{H} vérifie la propriété de Helly pour être un hypergraphe des intervalles maximaux d'un poset. En effet, l'hypergraphe défini par

$\mathcal{H} = (\{1, 2, 3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3\}, \{\{p_1, q_1, 1, 2\}, \{p_2, q_2, 1, 3\}, \{p_3, q_3, 2, 3\}\})$ est un hypergraphe des intervalles maximaux du poset de la Figure 2.3.

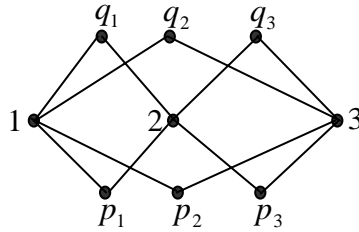


Figure 2.3

Directive

Notons que si E_j est une arête d'un hypergraphe \mathcal{H} , \mathcal{F} la famille des arêtes de \mathcal{H} intersectantes avec E_j , alors pour que \mathcal{H} soit un $\mathcal{H}(P)$, alors il existe relation entre le nombre $|E_j|$, nombre $|\mathcal{F}|$ et le nombre $|E_j \cap E_i|$ pour toute arête $E_i \in \mathcal{F}$.

En effet, comme toutes les arêtes de \mathcal{H} doivent correspondre à des intervalles maximaux d'un poset, pour que \mathcal{H} soit un $\mathcal{H}(P)$, alors toute arête E_j , telle

que $|E_j| \geq 2$ doit avoir exactement deux éléments maximaux (un éléments minimal et un éléments minimal). Or, si deux arêtes de \mathcal{H} s'intersectent en aux moins deux élément, alors forcément un de ces deux éléments doit être dans l'intérieur P . Cependant, si une arête E_j s'intersecte avec au moins $\left\lceil \frac{|E_j|}{2} \right\rceil$ arêtes de \mathcal{H} avec $|E_j \cap E_i| \geq 2$, $\{E_j \cap E_i\} \neq \{E_j \cap E_k\}$ et qu'il n'existe aucune arête de contenant $\{E_j \cap E_i\}$ pour toute arête E_j s'intersectant avec E_i , alors il devient impossible de faire correspondre un intervalle maximal dans P pour l'arête E_j sans créer une autre arête \mathcal{H} . En effet, on a de faible chance de construire l'intervalle maximal I_i de P correspondant à l'arête E_i du fait que les éléments de E_i susceptibles d'être les extrémités de I_i , appartiennent à d'autres arêtes, qui ont des éléments maximaux différents de ceux de E_i .

Une étude plus approfondie peut déterminer cette relation peut être une caractérisation de la classe $\mathcal{H}(P)$. L'exemple de la Figure 2.4 illustre cette remarque, en effet il n'existe aucun poset à uniquement trois intervalles maximaux correspondant aux arêtes de la Figure 2.4.

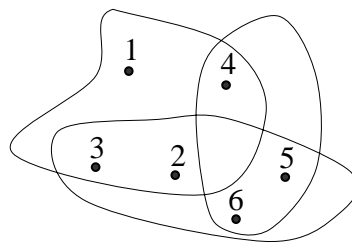


Figure 2.4

Chapitre 3

Ordre d'intervalles et stable de poids maximum

Sommaire

3.1 Définitions et propriétés	32
3.2 Caractérisations des ordres d'intervalles	33
3.2.1 Caractérisation avec les ensembles de préd et succ	34
3.2.2 Caractérisation par des sous posets interdits	35
3.2.3 Caractérisation matricielle	35
3.3 Quelques invariants dans les ordres d'intervalles	36
3.3.1 Hauteur d'un ordre d'intervalles	36
3.3.2. Dimension d'un ordre d'intervalles	36
3.3.3 Nombre chromatique d'un ordre d'intervalles	37
3.4 Complexité algorithmique dans les ordres d'intervalles	37
3.4.1 Problème de reconnaissance d'un ordre d'intervalles	37
3.4.2 Complexité relatives aux principaux problèmes d'optimisation combinatoire dans les ordres d'intervalles	38
3.5 Stable de poids maximum dans l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$	39
3.5.1 Définitions	39
3.5.2 Algorithme de recherche du stable de poids maximum dans $\mathcal{H}(P)$	49

Introduction

Nous abordons dans ce chapitre, la classe d'ordre d'intervalles, qui a été étudié entre autres dans [8], [11], [12], [20], [23], [24], [27], [28], [35], [36], [40], [42] et [48]. Cependant la classe des ordres d'intervalles trouve toute son utilité dans la résolution et modélisation des problèmes mathématiques en général et de la recherche opérationnelle en particulier, ainsi on retrouve l'introduction de cet ordre dans la modélisation des structures de préférences en aide multicritère à la décision, en informatique,...etc. De ce fait, il suscite l'intérêt de plusieurs chercheurs. Entre autres, Douglas B. West s'est intéressé à la recherche d'un recouvrement d'un poset par ordres d'intervalles [20], Fishburn [28] a caractérisé cet ordre par la non existence d'un sous poset induit isomorphe à la somme disjointe de deux chaînes de longueur 2 par ailleurs I. Bouchemakh [11] s'est intéressée à la propriété de *König* et duale de *König* dans cet ordre et à d'autres invariants. Notre apport pour cette classe de posets est de répertorier l'essentiel des résultats existants dans la littérature concernant l'ordre d'intervalles puis d'élaborer un algorithme polynomial pour la recherche du stable de poids maximum dans l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$.

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1

Un poset P est un poset d'intervalles si, à chaque élément v de P , on peut associer un intervalle I_v de la droite réelle tel que, $u < v$ dans P si et seulement si I_u est entièrement à gauche de I_v . Autrement dit, P est d'intervalles s'il existe une application bijective φ définie par : $\varphi : P \rightarrow I(\mathbb{R})$ qui associe à chaque élément de P , un intervalle de la droite réelle \mathbb{R} de sorte que pour tout éléments u et v de P :

$$u < v \text{ dans } P \Leftrightarrow \sup \varphi(u) < \inf \varphi(v).$$

Le poset P de la Figure 3.1 est un ordre d'intervalles par contre Q ne l'est pas du fait qu'il n'existe aucune représentation de Q sur le plan par des intervalles de la droite réelle.

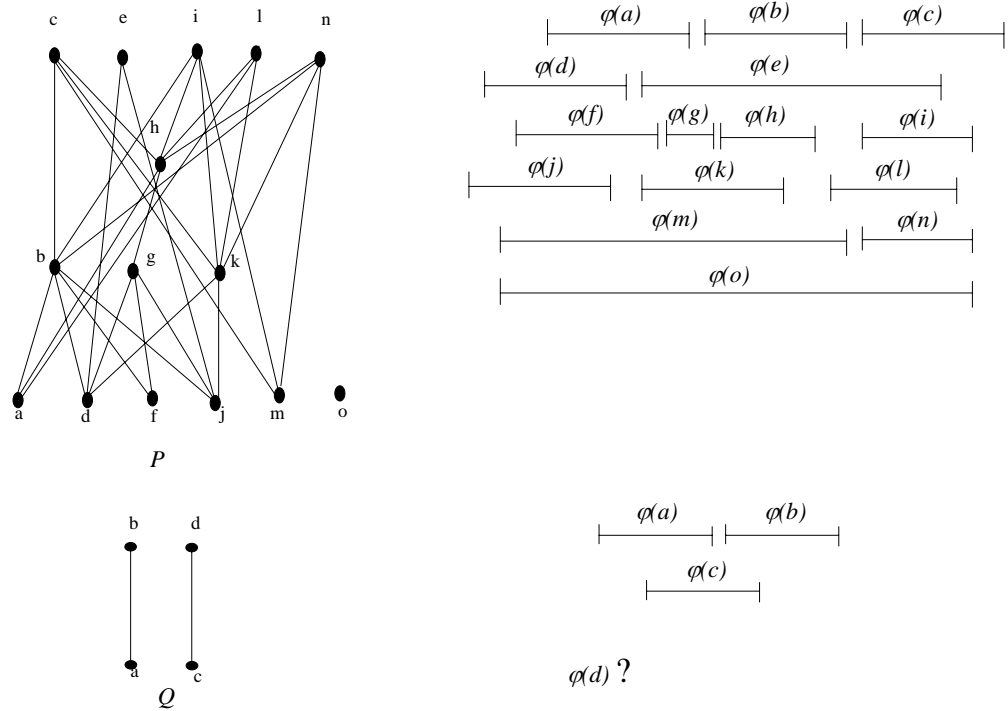


Figure 3.1 : Un poset P, d'intervalles et un poset Q, non d'intervalles.

Notons que tout sous poset induit d'un ordre d'intervalles est un ordre d'intervalles, mais un sous poset d'un ordre qui n'est pas d'intervalles peut être un ordre d'intervalles. En fait, Capelle [13] prouve que tout poset se décompose en union d'ordres d'intervalles et West [20] détermine son recouvrement par des ordres d'intervalles.

L'ordre d'intervalles n'est pas toujours gradué (Figure 3.1), mais comme tout ordre d'intervalles peut être transformé en un autre ordre d'intervalles sur le même ensemble fini en additionnant ou en supprimant quelques relations entre éléments, Doignon et Falmagne [19] prouvent que ces opérations élémentaires rendent la famille de tous les ordres d'intervalles sur un ensemble fini gradué.

3.2 Caractérisations des ordres d'intervalles.

Il existe plusieurs caractérisations de cet ordre ([34], [29]) mais, nous ne citerons que les plus connues d'entre elles. Parmi celles-ci on trouve une caractérisation

avec les ensembles des prédécesseurs et des successeurs tandis que l'autre est basée sur une configuration minimale interdite.

3.2.1 Caractérisation suivant les ensembles de prédécesseurs et successeurs.

Dans l'ordre d'intervalles, les ensembles de prédécesseurs et de successeurs possèdent des propriétés remarquables.

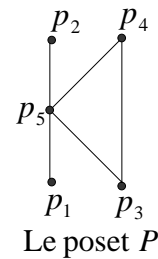
Définition 3.2

Soit x un élément de P . L'ensemble des prédécesseurs $préd(x)$ (resp. successeurs $Succ(x)$) de x , est l'ensemble de tous les éléments dans P strictement plus petits (resp. plus grands) que x . Autrement dit :

$$Succ(x) = \{y \in P : x < y\} \text{ et } préd(x) = \{z \in P : z < x\}.$$

Exemple

Soit P l'ordre d'intervalles, d'en face, On a :



$$préd(p_1) = préd(p_3) = \emptyset, \text{ } préd(p_2) = préd(p_4) = \{p_1, p_3, p_5\}, \text{ } préd(p_5) = \{p_1, p_3\}$$

$$\text{ et } Succ(p_1) = Succ(p_3) = \{p_2, p_4, p_5\}, \text{ } Succ(p_5) = \{p_2, p_4\} \text{ } Succ(p_2) = Succ(p_4) = \emptyset.$$

On remarque dans cet exemple que le nombre d'ensembles de prédécesseurs distincts est égal au nombre d'ensembles de successeurs distincts. De plus, ces deux ensembles sont ordonnés par inclusion. Cette remarque n'est en fait, pas seulement applicable qu'à cet exemple mais à tout autre ordre d'intervalles.

Proposition 3.1 [31].

Soit P un ordre d'intervalles. Les ensembles $\{préd(x) : x \in P\}$ et $\{Succ(x) : x \in P\}$ ont la même cardinalité.

Proposition 3.2 [45].

Soit P un ordre d'intervalles, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) P est un ordre d'intervalles.
- (2) La famille d'ensembles de prédécesseurs dans P est ordonnée linéairement par inclusion.

(3) La famille d'ensembles de successeurs dans P est ordonnée linéairement par inclusion.

3.2.2 Caractérisation par des sous posets interdits

La caractérisation des ordres d'intervalles par la non existence d'un certain sous poset induit est prouvée indépendamment par Fishburn [28] et Mirkin [39]. Bien plus tard, une preuve très simple, basée sur l'induction, est proposée par Balof et Bogart [2].

Proposition 3.3 [2], [28]

P est un ordre d'intervalles si et seulement si P ne contient pas un sous poset induit isomorphe à " $2+2$ ".

En d'autres termes, il n'existe pas quatre éléments a, b, c et d avec $a < b$ et $c < d$ comme seules relations de comparabilité entre ces éléments.

3.2.3 Caractérisation matricielle.

Pour chaque poset P , on définit un bloc par le couple (A, B) , où $\forall y \in B, \exists$ au moins un $x \in A$ tel que $y < x$ et

$\forall x \in A, \exists$ au moins un $y \in B$ tel que $y < x$. On convient que $(Max(P), \phi)$ et $(\phi, Min(P))$ sont des blocs de P . Considérons maintenant tous les blocs

$(A_i, B_j)_{i,j}$ de P tels que les A_i (respectivement B_j) forment une partition de P .

On supposera toujours que les blocs de P sont ordonnés de façon que si $x \in A_i$ et $x \in B_j$ alors $i < j$. De ces notations découle une représentation dite la *représentation de P par des blocs* qui est une $2 \times |I| = 2 \times |J|$ matrice avec les A_i dans la première ligne et les B_j dans la seconde, comme le montre la Figure 3.2.

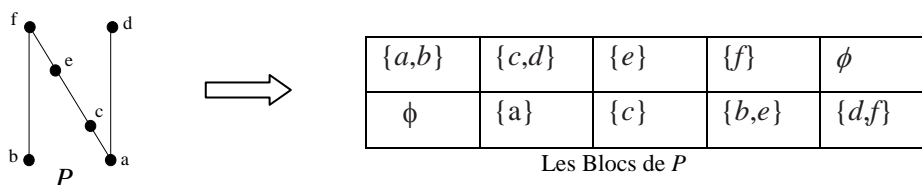


Figure 3.2 : Représentation d'un poset par blocs.

Une représentation matricielle d'un ordre P est une $M(n,n)$ matrice, où $n = |I| = |J|$, d'éléments $a_{i,j} = |A_i \cap B_j|$. La matrice M est unique à une permutation près de ses lignes et colonnes. L'ordre prescrit précité des blocs implique que $a_{i,j} = 0$ toute fois que $i \geq j$ d'où la stricte triangularité supérieure de la matrice M , représentante de l'ordre P . La matrice $M(P)$, ci-dessous, représentant le poset P de la Figure 3.2 illustre cette représentation.

$$M(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordre sans \mathbf{N} soit un ordre d'intervalles est résumée dans la Proposition 3.4.

Proposition 3.4 [3]

Soit P un ordre sans \mathbf{N} .

P est un ordre d'intervalles si et seulement si $M(P)$ n'a pas de zéro sur la super diagonale, i.e $m_{i,i+1} \neq 0$ pour tout $i = \overline{1, k-1}$.

3.3 Quelques invariants dans les ordres d'intervalles

3.3.1. Hauteur d'un ordre d'intervalles

Définition 3.3

Soit P un poset. Pour tout élément $u \in P$ est associé un invariant, appelé *hauteur* de u , noté $h(u)$, correspondant à la cardinalité maximum d'une chaîne de P ayant u comme élément maximal.

La *hauteur* de P , $h(P)$ est donc définie par $h(P) = \text{Max} \{ h(u) : u \in P \}$.

Dans l'exemple de la Figure 3.2 on a $h(f) = 4$, $h(a) = h(b) = 0$ et $h(P) = 4$.

3.3.2. Dimension d'un ordre d'intervalles

Soient P, Q deux posets sur X , on dira que P est une *extension* de Q si $Q \subseteq P$. Un ordre linéaire L sur un ensemble X sera dit une extension linéaire d'un autre ordre P sur le même ensemble X si $P \subseteq L$. Une famille \mathcal{F} d'extensions linéaires de P est appelée famille génératrice de P si $P = \bigcap_{i=1}^n A_i$ avec $A_i \in \mathcal{F} \forall i = \overline{1, n}$. Autrement dit, \mathcal{F} est une famille génératrice de P si $\forall x \in X, \forall y \in X, x \leq y$ dans P si et seulement si $x \leq y$ pour tout $A_i \in \mathcal{F}$.

Définition 3.4

Soit P un poset, la dimension de P , notée $d(P)$ est la cardinalité minimum d'une famille génératrice de P .

Proposition 3.5 [30]

Soit P un ordre d'intervalles à n sommets. La dimension maximum d'un ordre d'intervalles P vérifie $d(P) = \log \log n + \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \log \log \log n$.

3.3.3. Nombre chromatique d'un ordre d'intervalles

Définition 3.5

Soit P un ordre d'intervalles, et soit $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ un ensemble de k couleurs. Une coloration des sommets de P est une application définie par :

$$\begin{aligned} \zeta : X &\rightarrow C \\ x &\mapsto c_i \end{aligned}$$

telle que, deux sommets comparables de P , ont deux couleurs différentes. Le nombre minimum de couleurs utilisées pour colorier les sommets de P est appelé *nombre chromatique* de P . Plusieurs travaux ont été réalisés sur la coloration des sommets d'un ordre d'intervalles [30].

Théorème 3.1 [27]

Soit P un ordre d'intervalle, alors $\chi(P) \leq 2 + \log_2(h(P))$ où $\chi(P)$ est le nombre chromatique et $h(P)$ est la hauteur de P .

3.4. Complexité algorithmique dans les ordres d'intervalles

3.4.1 Problème de reconnaissance d'un ordre d'intervalles.

L'un des problèmes centraux de l'optimisation combinatoire et de la complexité algorithmique est le problème de reconnaissance. Dans [24] on trouve une étude du problème de reconnaissance de la classe des ordres d'intervalles. Stefan Felsner et all, ont montré que si on se donne un poset P quelconque alors reconnaître que P est d'ordre d'intervalles ou non requiert une complexité d'ordre $\binom{n}{2} - 1$ où n est le nombre des sommets.

3.4.2 Complexité relatives aux principaux problèmes d'optimisation combinatoire dans les ordres d'intervalles

Dans [10] on trouve des algorithmes polynomiaux de recherche des invariants $\alpha, \tau, \gamma, \rho$ et ν dans l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ lorsque P est un ordre d'intervalles.

Proposition 3.6 [10]

Soit P un ordre d'intervalles alors la détermination des invariants de $\mathcal{H}(P)$ est de complexité polynomiale.

3.5 Propriétés de König et duale de König dans l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ où P est un ordre d'intervalles.

L'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ possède la propriété de König. La preuve est algorithmique et met en évidence un algorithme polynomial. Celui-ci opère en deux phases : une phase primale donnant le couplage de cardinalité maximum et une phase duale donnant un recouvrement minimum par sommets.

Théorème 3.3 [11]

Si P est un ordre d'intervalles, alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété de König, autrement dit,

$$\nu(\mathcal{H}(P)) = \tau(\mathcal{H}(P))$$

Dans la même classe d'hypergraphes, on prouve la propriété duale de König. dans [11], deux preuves sont établies pour ce résultat: L'une se base sur la

normalité de l'hypergraphe \mathcal{H}^* , caractérisée par la perfection du graphe représentatif des arêtes de $(\mathcal{H}^*(P))$ et la réalisation de la propriété de *Helly* par $\mathcal{H}^*(P)$. L'autre preuve est algorithmique : Grâce à l'algorithme des parenthèses, un stable de cardinalité maximum et un recouvrement minimum par arêtes de même cardinalité sont déterminés.

Théorème 3.4 [11]

Si P est un ordre d'intervalles alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König, autrement dit

$$\alpha(\mathcal{H}(P)) = \rho(\mathcal{H}(P))$$

3.5 Stable de poids maximum dans l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ où P est un ordre d'intervalles.

3.5.1 Définitions

Le stable est l'un des grands problèmes fondamentaux de l'optimisation combinatoire, même si son origine remonte à très loin, vu son vaste champ d'application, l'on s'accorde de dire que le plus vieux problème, du point de vue de l'optimisation combinatoire, du stable est celui de la disposition des dames sur un échiquier [4]. Cette notion se trouve aussi dans les posets et c'est dans ces derniers que notre étude de cette notion est faite et ceci en considérant un ordre d'intervalles.

Notons par :

$$Int(P) = \{x \in P : x \text{ n'est ni un élément maximal, ni un élément minimal dans } P\}$$

et par \mathcal{M} et \mathcal{m} respectivement l'ensemble des éléments maximaux et minimaux de P .

Lemme 3.1 [11]

Si P est un ordre d'intervalles et S un stable dans l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$, alors $Int(P)$ contient au plus un élément de S .

Preuve.

Soient p_1, \dots, p_s les éléments minimaux de P où $r(p_1) \leq \dots \leq r(p_s)$ et soient q_1, \dots, q_t les éléments maximaux de P où $l(q_1) \leq \dots \leq l(q_t)$, où $r(p)$ est la borne supérieure de l'intervalle p et $l(p)$ sa borne inférieure.

Tout élément v de $Int(P)$ vérifie $r(p_i) < l(v) < r(v) < l(q_i)$ et donc appartient à l'intervalle $[p_i, q_i]$ de P . Par suite, l'existence de deux éléments de S dans $Int(P)$ signifie l'existence de deux éléments de S dans un même intervalle $[p_i, q_i]$ de P , ce qui est absurde.

L'algorithme proposé dans [11], utilise le Lemme 3.1. Il détermine en même temps un stable et un recouvrement par intervalles de même taille ce qui assure leur optimalité. D'abord, cet algorithme construit une famille d'arêtes de $\mathcal{H}(P)$ et un ensemble stable de même taille. Si ces arêtes couvrent tous les éléments de P , alors on obtient un stable maximum et un recouvrement minimum par intervalles. Sinon, on rajoute à cette famille d'arêtes et au stable précédemment définis, respectivement l'arête $[p_i, q_i]$ ou un sommet convenablement choisi de $Int(P)$. C'est cette idée, qui sera exploitée lors de l'élaboration de notre algorithme de recherche du stable de poids maximum.

Si P est un ordre d'intervalles, affectons à chacun de ses sommets, un poids réel $c(x)$ et à chacun de ses sous-ensembles de sommets Q le poids $c(Q) = \sum_{x \in Q} c(x)$.

On peut supposer sans perte de généralité que tous les poids sont positifs et que P est sans sommets isolés.

Bien évidemment, un stable de cardinalité maximum n'est autre qu'un stable de poids maximum lorsque tous les sommets ont le même poids. Il est donc naturel de s'intéresser à la recherche d'un algorithme donnant un stable de poids maximum qui n'est ni unique, ni de cardinalité maximum en général, mais qui généralise le concept de stable de cardinalité maximum. Le problème du stable de poids maximum dans $\mathcal{H}(P)$ peut se formuler sous forme de programme linéaire, en variables bivalentes de $\{0, 1\}$. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des sommets de poids respectifs $\{c(x_1), c(x_2), \dots, c(x_n)\}$ d'un ordre d'intervalles P , \mathcal{F}

la famille de ses intervalles maximaux et $X = (X(x_1), X(x_2), \dots, X(x_n))$ le vecteur représentatif d'un stable.

Le programme linéaire associé au problème du stable de poids maximum peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \max \sum_{x_i \in P} c(x_i) X(x_i) \\ \sum_{x_i \in I} X(x_i) \leq 1 \text{ pour tout intervalle } I \text{ de } P \\ X(x_i) \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Soit Q un sous poset induit de P .

Notons par $Com_Q(x)$ l'ensemble des éléments maximaux ou minimaux de Q comparables à x .

$$Com_Q(x) = \{y \in Q \cap \mathcal{M} : x < y\} \cup \{y \in Q \cap \mathcal{m} : y < x\}.$$

Pour un sous-ensemble de sommets A de Q on pose :

$$Com_Q(A) = \bigcup_{x \in A} Com_Q(x).$$

Soit f l'application définie de P dans \mathbb{R} par :

$$f_P(x) = c(x) - c(Com_P(x)).$$

et f_Q la restriction de f à Q , c'est à dire

$$f_Q(x) = c(x) - c(Com_Q(x)).$$

Soient P un ordre d'intervalles, S un stable dans P et P' le sous poset de P induit par l'ensemble des éléments maximaux et minimaux de P .

Définition 3.6

Si y est un élément de P et $y \notin S$, nous dirons que y est un *sommet augmentant* pour S , si $f_S(y) \geq 0$.

Un sommet y est *parfaitement augmentant* pour S s'il est augmentant et s'il existe un sommet z dans S tel que $y \in Com_P(z)$ et $f_{P'}(z) < 0$.

Si x est un élément de S , nous dirons que x est un *sommet diminuant* pour S , si $f_{P'}(x) < 0$.

Si x est un élément de S , nous dirons que x est un *sommet parfaitement diminuant* pour S , si $f_{P'}(x) < 0$ et $f_S(y) < 0$ pour tout $y \in \text{Com}_{P'}(x)$.

Lemme 3.2

Soit P un ordre d'intervalles et S un stable de poids maximum dans $\mathcal{H}(P)$. Si x est un élément de S , alors une et une seule des deux assertions est vraie.

- 1 $f_{P'}(x) \geq 0$.
- 2 $f_{P'}(x) < 0$ et $f_S(y) < 0$ pour tout $y \in \text{Com}_{P'}(x)$, x est parfaitement diminuant.

Preuve : Par l'absurde.

Supposons qu'aucun des deux cas ne se présente, alors $f_{P'}(x) < 0$ et $f_S(y) \geq 0$ pour un certain $y \in \text{Com}_{P'}(x)$. Donc il existe un sommet $y \in \text{Com}_{P'}(x)$ tel que $f_S(y) \geq 0$. En ajoutant y à S et en supprimant $\text{Com}_S(y)$ dans S on augmentera le poids de S donc S n'est pas un stable de poids maximum. Contradiction.

Exemple

On voit bien dans la Figure 3.4 que le stable de poids maximum est $S = \{a, c, e\}$ et que l'assertion 1 du Lemme 3.5 a lieu pour le sommet e , tandis que la deuxième assertion a lieu pour les sommets a et c .

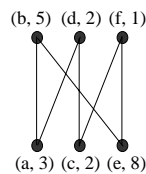


Figure 3.4

Dans ce qui suit, nous proposons un algorithme qui détermine un stable de poids maximum de $\mathcal{H}(P)$. Il est constitué de deux phases. Dans la première phase, nous exhibons un stable de poids maximum du sous poset induit par les éléments minimaux et maximaux de P donc $P' = \mathcal{M} \cup m$.

Dans la deuxième phase, nous essayons d'améliorer le poids de cet ensemble par le rajout d'un unique élément de $\text{Int}(P)$ à ce stable et la suppression des éléments

qui lui sont comparables et ceci en se basant sur les résultats déjà énoncés (Lemme 3.1 et le Lemme 3.2).

Soit S le stable de $\mathcal{H}(P)$ tel que $c(S) = \text{Max}\{c(\mathcal{M}), c(m)\}$.

Nous supposons sans perte de généralité que P est connexe.

3.5.2 Algorithme de recherche du stable de poids maximum dans $\mathcal{H}(P)$

Phase 1 :

1. Poser $S = \begin{cases} \mathcal{M} & \text{si } \text{Max}(c(\mathcal{M}), c(m)) = c(\mathcal{M}); \\ m & \text{si } \text{Max}(c(\mathcal{M}), c(m)) = c(m). \end{cases}$
 2. Pour tout x dans S , calculer $f_{P'}(x)$.
 3. Poser $Y_1 = \{x \in S : f_{P'}(x) < 0\}$.
 4. $\begin{cases} \text{Si } Y_1 = \emptyset & \text{aller en phase 2.} \\ \text{Sinon, soient } x_0, x_1, \dots, x_k & \text{les éléments de } Y_1 \text{ où } f_{P'}(x_0) \leq \dots \leq f_{P'}(x_k) < 0 \end{cases}$
 5. Tant que $i < k$ et $f_S(y) < 0$ pour tout $y \in \text{Com}_{P'}(x_i)$, faire $i = i + 1$.
 6. Si $i = k$ et $f_S(y) < 0$ pour tout $y \in \text{Com}_{P'}(x_i)$, aller en Phase 2, sinon aller en 7.
 7. Poser $S = S \cup A - \text{Com}_{P'}(A)$ où $A = \{y \in \text{Com}_{P'}(x_i) : f_S(y) \geq 0\}$.
- Aller en 2.
8. Tant qu'il existe un sommet z dans P' tels que $\text{Com}_S(z) = \emptyset$, ajouter z à S .

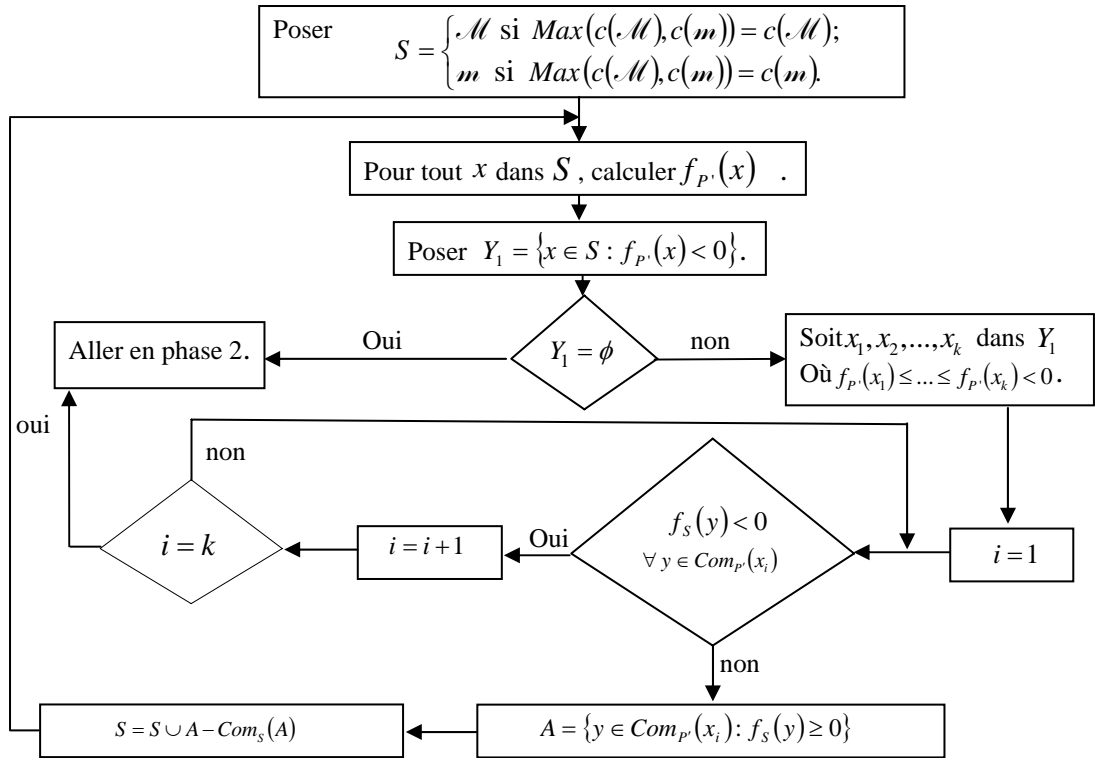
Phase 2 : Poser $c(\emptyset) = 0$, $Y_2 = \{y \in \text{Int}(P) \text{ tel que } f_S(y) > 0\}$.

1. Si $Y_2 = \emptyset$ alors S est un stable de poids maximum. Sinon aller en 2.
2. $\forall y \in Y_2$ poser $A_y = \{x \in \{\mathcal{M} \cup m\} - S : x // y, \text{Com}_{S \cup y - \text{Com}_S\{y\}}\{x\} = \emptyset \text{ et } c(x) > 0\}$, aller en 3.
3. Si $\forall y \in Y_2 A_y = \emptyset$, soit y_0 un élément de Y_2 tel que $f_S(y_0) = \text{Max}\{f_S(y) : y \in Y_2\}$, poser $S = S \cup \{y_0\} - \text{Com}_S(y_0)$, S est un stable de poids maximum. Sinon soit y_0 un élément de Y_2 tel que $\text{Max}(f_S(y_0), c(y_0) + c(A_{y_0})) = \text{Max}_{y \in Y_2}(f_S(y), c(y) + c(A_y))$, poser $S = S \cup \{y_0\} \cup A_{y_0} - \text{Com}_S(y_0)$, S est un stable de poids maximum.

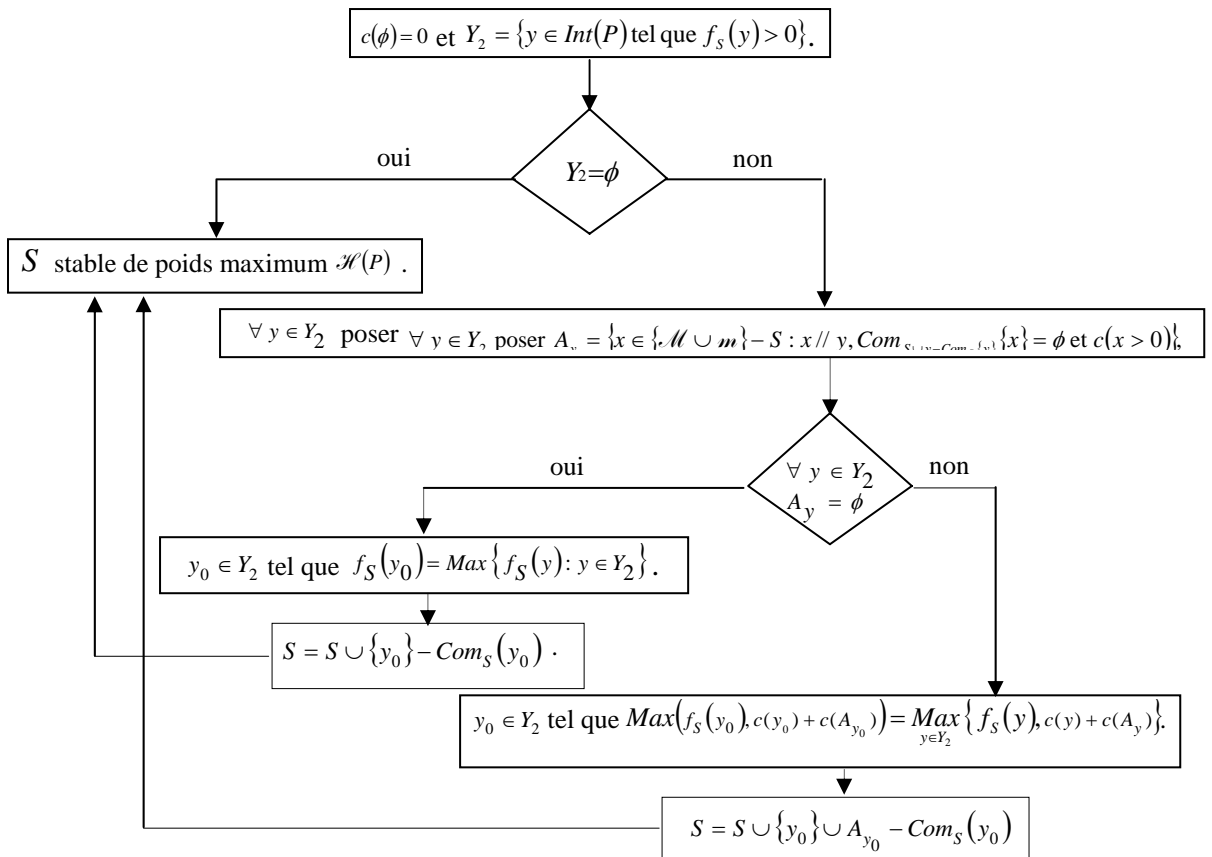
Fin.

Organigramme de l'algorithme.

Organigramme de la phase 1



Organigramme de la phase 2



Exemple

Soit P le poset, pondéré de la Figure 3.5.

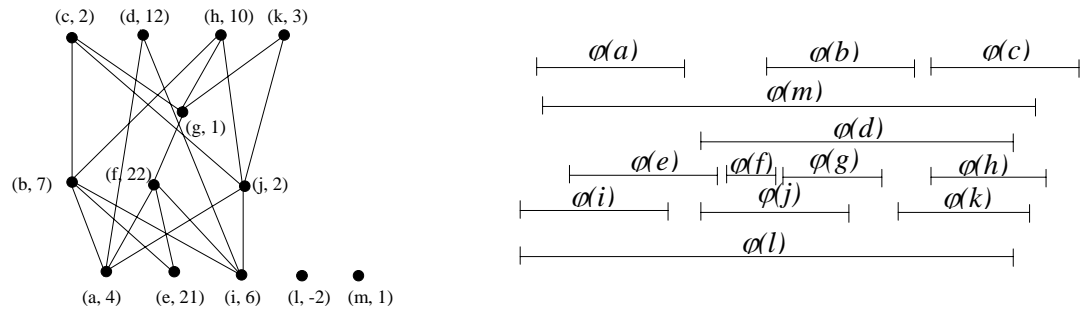


Figure 3.5

Phase 1

Le sous poset induit par les éléments minimaux et maximaux de P est le poset P' de la Figure 3.6

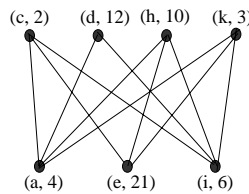


Figure. 3.6

$$\begin{aligned} \text{On a } c(S) &= \text{Max}((c(a) + c(e) + c(i)), (c(c) + c(d) + c(h) + c(k))) \\ &= \text{Max}((4 + 21 + 6), (2 + 12 + 10 + 3)) = \text{Max}(31, 27) = 31 \end{aligned}$$

donc le stable d'initialisation de l'algorithme est $S = \{a, e, i\}$, de poids 31.

Calcul des $f_p(x)$ pour tout x dans S .

$$f_p(a) = 4 - (2 + 12 + 10 + 3) = 4 - 27 = -23 < 0.$$

$$f_p(e) = 21 - (2 + 10 + 3) = 21 - 15 = 6 > 0.$$

$$f_p(i) = 6 - (2 + 12 + 10 + 3) = 6 - 27 = -25 < 0.$$

On voit bien que $f_p(a) < 0$ et $f_p(i) < 0$ donc les sommets a et i sont susceptibles de sortir du stable de départ (sommets diminuants). Du Lemme 3.2 ces sommets resteront dans le stable de départ si et seulement si ils sont parfaitement diminuants, pour ceci calculons les $f_s(y) \forall y \in P' - S$.

$$f_s(c) = 2 - (4 + 21 + 6) = 4 - 31 = -27 < 0 ;$$

$$f_s(d) = 12 - (4 + 6) = 12 - 10 = 2 > 0 ;$$

$$f_s(h) = 10 - (4 + 21 + 6) = 10 - 31 = -21 < 0 ;$$

$$f_s(k) = 3 - (4 + 21 + 6) = 3 - 31 = -28 < 0 .$$

De ces calculs on constate que le sommet d est parfaitement augmentant des sommets diminuants a et i (non parfaitement, sinon il resteront dans le stable de départ) dont d appartient à $Com_p(a)$ et $Com_p(i)$, ce qui fait que d rentre dans le stable de départ. Le nouveau stable est $S = S \cup d - Com_s(d) = \{a, e, i\} \cup \{d\} - \{a, i\} = \{e, d\}$ et $c(S) = 21 + 12 = 33$.

Considérons maintenant le nouveau stable de départ $S = \{e, d\}$ et faisant une deuxième itération de la phase 1.

Calcul des $f_p(x)$ pour tout x dans S .

$$f_p(e) = 21 - (2 + 10 + 3) = 21 - 15 = 6 > 0 ;$$

$$f_p(d) = 12 - (4 + 6) = 12 - 10 = 2 > 0 .$$

Il est bien clair de ces deux sommets resterons dans le stable de départ, d'après le Lemme 3.2.

Calculons les $f_s(y) \forall y \in P' - S$.

$$f_s(a) = 4 - 12 = -8 < 0 ;$$

$$f_s(c) = 2 - 21 = -19 < 0 ;$$

$$f_s(i) = 6 - 12 = -6 < 0 ;$$

$$f_s(h) = 10 - 21 = -11 < 0 ;$$

$$f_s(k) = 3 - 21 = -18 < 0 .$$

Des deux derniers calculs, vient que tous les sommets du stable de départ sont parfaitement augmentant donc aucun d'eux ne sortira du stable de départ et que tous les sommets de $P' - S$ sont parfaitement diminuant donc aucun d'eux ne peut être injecté dans le stable de départ d'où vient l'optimalité de ce dernier.

Le poset P de départ contient des sommets isolés donc on ajoute au stable de départ les sommets isolés dont le poids est positif ce qui donne $S = \{e, d\} \cup \{m\} = \{e, d, m\}$.

Phase 2

Appliquant maintenant la deuxième phase, c.à.d cherchons à améliorer le stable de départ par l'ajout d'un seul sommet de $Int(P)$ (Lemme 3.1), pour ceci calculons $f_s(y) \forall y \in Int(P)$

$$f_s(b) = 7 - (21) = -14 < 0 ;$$

$$f_s(f) = 22 - (21) = 1 > 0 ;$$

$$f_s(j) = 2 - 0 = 2 > 0 ;$$

$$f_s(g) = 1 - 21 = -20 < 0 .$$

On a $Y_2 = \{f, j\}$ et $f_s(j) = 2 = \text{Max}\{1, 2\} = \text{Max}\{f_s(y) : y \in Int(P)\}$ donc j est le sommet donnant la plus grande amélioration pour le stable de départ donc le stable de poids maximum est :

$$S = S \cup \{j\} - \text{Com}_s(j) = \{e, d, m\} \cup \{j\} - \emptyset = \{e, d, m, j\} \text{ et } c(S) = 12 + 21 + 2 + 1 = 36 .$$

Justification de l'algorithme

Phase 1

Comme le poset P est fini alors l'ensemble des éléments minimums et maximums est fini. La phase 1 s'itère donc sur un ensemble fini d'éléments et les étapes de 2 à 7 finissent l'algorithme (vue le Lemme 3.2) au cours d'au plus $|S|$ itérations, où $S = |\mathcal{M}|$ ou $S = |m|$, le ou est exclusif.

Phase 2

Le Lemme 3.1 réduit la deuxième phase à une seule itération, donc la finitude de cette phase découle directement de celle de l'ensemble $Int(P) = \{x \in P : x \notin \mathcal{M} \cup m\}$.

La finitude du poset P , de la première phase et de la deuxième phase entraîne la finitude de l'algorithme.

L'optimalité de la solution

L'optimalité de la solution provient du Lemme 3.1 et du Lemme 3.2.

Complexité de l'algorithme**Phase 1**

L'étape 1, requiert un temps d'exécution d'ordre $o(n^2)$, en effet l'exécution de cette étape nécessite au plus $\frac{n^2}{4}$ opérations élémentaires du fait qu'il s'agit d'une comparaison des éléments de P pour construire le sous poset induit par les éléments maximaux et minimaux de P .

L'étape 2 est constituée d'au plus n^2 additions, n soustractions et n^2 comparaisons donc requiert un temps d'exécution d'ordre $o(n^2)$.

Les étapes 3 et 4 sont constituées chacune de n comparaisons donc sont d'ordre $o(n)$.

L'étape 5 est linéaire.

L'étape 6 consiste en le calcul des $f_s(y)$ qui nécessite un temps d'ordre $o(n)$ pour chaque $y \in Com_p(x_i)$ où $x_i \in Y_1$ et en la comparaison de ces $f_s(y)$ avec 0 qui demande un temps d'ordre $o(n)$. Pour chaque $i = \overline{1, k}$ avec $k = |Y_1|$ requiert un temps d'ordre $o(n)$ donc la boucle requiert un ordre $o(n^2)$.

L'étape 7 est d'un ordre $o(n^2)$.

L'étape 8 est linéaire.

Par conséquent la phase 1 est d'ordre $o(n^3)$.

Phase 2

La phase est constituée d'une seule itération.

La phase 2 est un $o(n^2)$.

L'algorithme est un algorithme polynomial d'ordre $o(n^3)$.

Nous avons implémenté cet algorithme sur un ordinateur Pentium IV, 3 GHZ, 256Mo de mémoire vive (RAM), sur un poset à 70 sommets, le temps d'exécution est de moins d'une seconde.

Chapitre 4

Ordre de trapèzes et propriété duale de König

Sommaire

4-1-Définitions préliminaires	55
4-2 Conditions nécessaires	59
4-3 Configuration minimales interdites	
dans les ordres de trapèzes	61
4-4 Ordre de trapèzes et ordres d'intervalles	62
4-5 Ordre de trapèzes et propriété duale de König	64

Introduction

Nous abordons dans ce présent chapitre une autre classe de posets, appelée *ordre de trapèzes*. Celle-ci contient plusieurs autres ordres comme l'ordre des intervalles, l'ordre des triangles...etc. L'ordre de trapèzes est introduit dans la modélisation des problèmes de recherche opérationnelle : Nous citons la modélisation des structures de préférences, la gestion des stocks,...etc. Elle a été également étudiée dans [1], [7], [25], [26], [32], [33], [37], [43], [44] et [46]. L'étude faite ici est toute autre, nous nous proposons de vérifier la propriété duale de König pour les hypergraphes des intervalles maximaux d'un ordre de trapèzes.

Nous commençons ce chapitre par des notions fondamentales relatives à cet ordre. Nous tacherons de donner les configurations minimales interdites, les plus connues, dans cet ordre ainsi que les relations d'inclusions avec les autres classes de posets. Nous arrivons ensuite à l'objectif de ce chapitre, pour établir la propriété duale de König pour cette classe de posets.

4.1 Définitions préliminaires

4.1.1 Ordres de trapèzes

4.1.1.1 Définitions

Soit P un poset. On dit que P est un ordre de trapèzes s'il existe une application φ définie par :

$$\varphi: X \rightarrow T$$

$$x \mapsto T_x$$

telle que $x < y$ si et seulement si tous les points du trapèze T_x sont complètement à gauche de ceux du trapèze T_y .

Autrement dit, un poset P est dit un ordre de trapèzes s'il existe dans le plan deux droites horizontales et parallèles, appelées les lignes de bases, telles qu'on peut associer à tout $x \in P$ un trapèze T_x dont chacune des deux bases est sur l'une des deux lignes de bases, de sorte que $x < y$ si et seulement si $T_x \cap T_y = \emptyset$ et tous les points du trapèze T_x sont situés complètement à gauche de ceux du trapèze T_y .

Une *représentation propre* est une représentation dans laquelle aucun trapèze n'est proprement contenu dans un autre.

Une *représentation uniforme* est une représentation où tous les trapèzes ont une même aire.

Une *représentation parallélogramme* est une représentation où la base supérieure et la base inférieure de chaque trapèze ont une même longueur c-à-d chaque trapèze est un parallélogramme.

De même, une *représentation parallélogramme propre* est une représentation parallélogramme où aucun parallélogramme n'est proprement contenu dans un autre.

Une *représentation parallélogramme uniforme* est une représentation parallélogramme où tous les parallélogrammes ont une même aire.

Pour plus de détails sur ces définitions voir [6] et [46].

Définition

Soit P un poset. Un ordre des rectangles est un ordre de trapèzes avec une représentation par rectangles. Un tel ordre est un ordre d'intervalles quand les deux droites horizontales parallèles, dites lignes de bases, se confondent.

Il est bien évident que les propriétés de la définition 1 (propre, uniforme) s'appliquent de façon directe à l'ordre des rectangles en changeant trapèze par rectangle.

Les Figures 4.1_a, 4.1_b, 4.1_c, 4.1_d, ci-dessous, illustrent quelques une de ces dernières définitions.

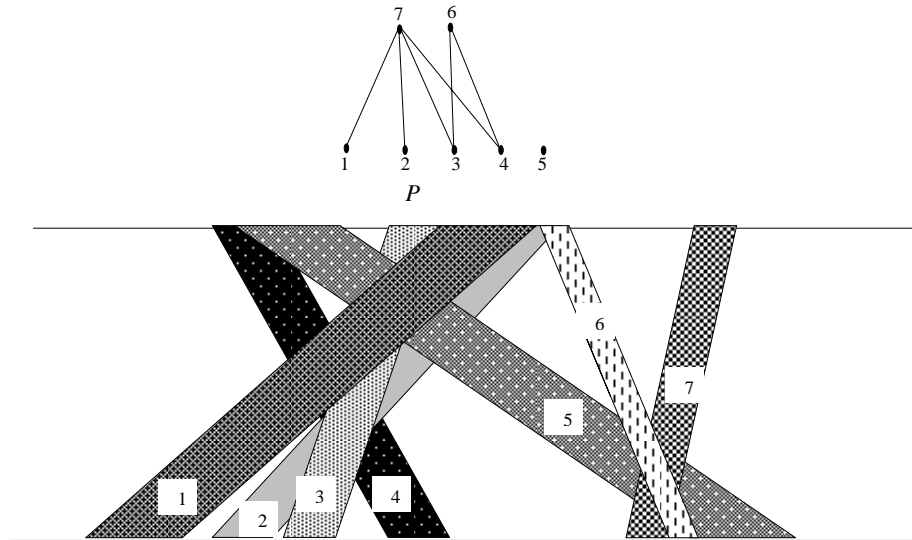


Figure 4.1_a : Représentation parallélogramme propre de l'ordre des trapèzes P

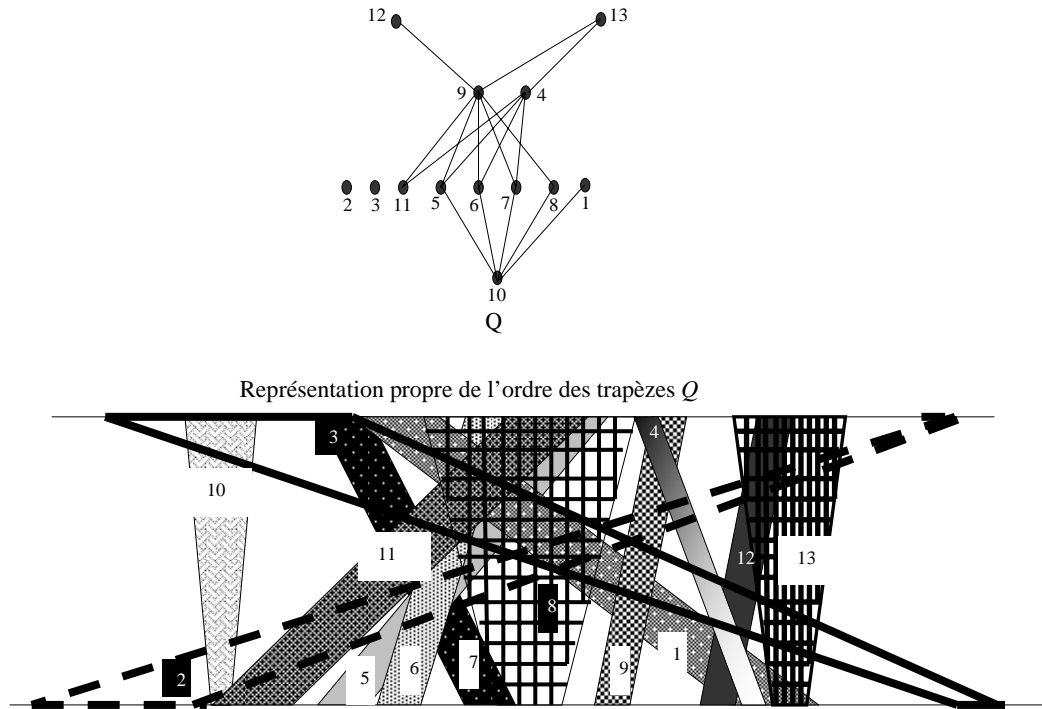


Figure 4.1_b

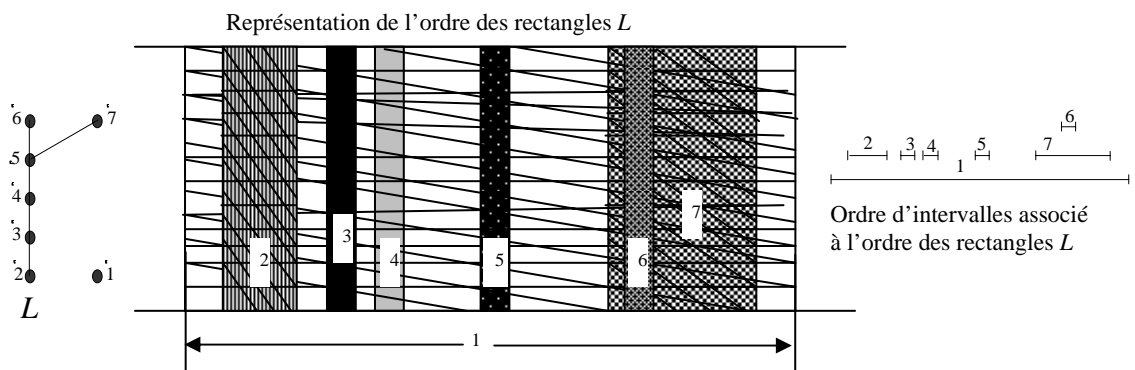


Figure 4.1_c

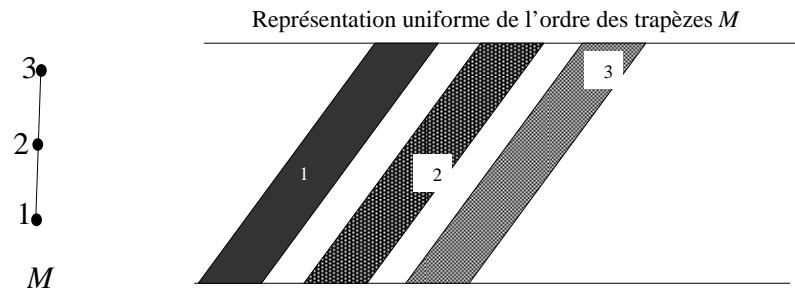


Figure 4.1d

Signalons qu'un ordre d'intervalles est un ordre de trapèzes mais un ordre de trapèzes peut ne pas être un ordre d'intervalles, comme le montre la Figure 4.2, ci-dessous. En effet, le poset P , de ladite Figure est une configuration interdite dans les ordres d'intervalles tandis qu'il est un ordre de trapèzes.

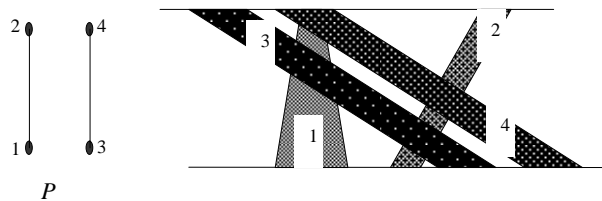


Figure 4.2

Chaque trapèze T_x définit deux intervalles, un sur chacune des lignes de bases, déterminés par l'intersection du trapèze T_x avec les lignes de bases. Nous appelons intervalle supérieur, l'intervalle déterminé par l'intersection du trapèze T_x avec la ligne de base supérieure, qu'on note $I_{sup}(x)$ et intervalle inférieur celui déterminé par l'intersection du trapèze T_x avec la ligne de base inférieure, il est noté $I_{inf}(x)$.

L'ensemble des intervalles supérieurs $\{I_{sup}(x) : x \in X\}$ et l'ensemble des intervalles inférieurs $\{I_{inf}(x) : x \in X\}$ définissent deux ordres d'intervalles sur l'ensemble X et $T_x < T_y$ (dans l'ordre de trapèzes) si et seulement si $I_{sup}(x) <_{sup} I_{sup}(y)$ et $I_{inf}(x) <_{inf} I_{inf}(y)$. Comme cette dernière condition n'est autre que la définition de l'intersection de deux ordres d'intervalles alors, un ordre de trapèzes est une intersection de deux ordres d'intervalles de dimension au plus 2, voir définition 3.4 du chapitre 3 pour la dimension d'un ordre d'intervalle.

Notons qu'un même ordre de trapèzes peut avoir plusieurs représentations, Figure 4.3.

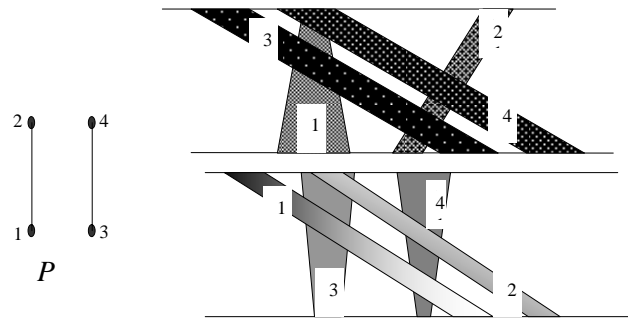


Figure 4.3

4.1.2 Graphes de trapèzes.

4.1.2.1 Définition

Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles du plan \mathbb{R}^2 , V un ensemble non vide et $I_1 = \{I_x : x \in V\}$, $I_2 = \{J_x : x \in V\}$ deux familles d'intervalles de D_1 et D_2 respectivement.

Pour tout $x \in V$ les deux intervalles I_x et J_x définissent un trapèze T_x en considérant la couverture convexe de $I_x \cup J_x$ dans \mathbb{R}^2 .

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ sera dit *un graphe de trapèzes* si pour tout sommet $x \in V$ on peut associer un trapèze T_x de sorte que :

$(x, y) \in E$ si et seulement si $T_x \cap T_y \neq \emptyset$.

4.1.2.2 Quelques propriétés des graphes de trapèzes

- 1) Un graphe de trapèzes est un graphe de co-comparabilité des ordres de trapèzes mais pas nécessairement de comparabilité [17].
- 2) Tout sous graphe d'un graphe de trapèzes est un graphe de trapèzes [14]
- 3) La classe des graphes de trapèzes ne contient pas de C_n et \bar{C}_n pour $n \geq 5$ [17].
- 4) Les chaînes P_n et leurs complémentaires \bar{P}_n sont de trapèzes pour tout $n \geq 1$ [44].

Comme il a été défini dans [17], à tout graphe de trapèzes on peut associer un ordre de trapèzes.

4.2 Conditions nécessaires

Il existe plusieurs conditions nécessaires pour qu'un ordre soit de trapèzes nous donnons ici, certaines d'entre elles.

Proposition 4.1 [44]

Soit P un ordre de trapèzes. Alors si $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ sont des éléments de P , deux à deux distincts, tels que :

$$(a_1 < a_2), (a_3 < a_2), (a_3 < a_4), (a_5 < a_4), (a_5 < a_6), (a_1 < a_6), (a_1 // a_4) \text{ et } (a_2 // a_5),$$

alors on a : $(a_3 < a_6)$.

Proposition 4.2 [44]

Soit P un ordre de trapèzes. Soient alors $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ des éléments de P , deux à deux distincts, tels que :

$$(a_1 < a_2), (a_3 < a_2), (a_3 < a_4), (a_5 < a_4), (a_5 < a_6), (a_7 < a_6), (a_7 < a_8), (a_1 < a_8), (a_1 // a_4), \\ (a_1 // a_6), (a_2 // a_5), (a_2 // a_7), (a_3 // a_6) \text{ et } (a_4 // a_7), \text{ alors on a :} \\ (a_3 < a_8) \text{ et } (a_5 < a_8)$$

De la transitivité de $<$ et des conditions sur les sommets $a_i, i = \overline{1,8}$ citées dans la proposition 4.2 on aurait : $a_8 \not< a_3$ et $a_8 \not< a_5$ car sinon :

- $a_7 < a_8 < a_3 < a_2 \Rightarrow a_7 < a_2$. Contradiction du fait que $a_7 // a_2$.
- $a_7 < a_8 < a_5 < a_4 \Rightarrow a_7 < a_4$. Contradiction du fait que $a_4 // a_7$.

La proposition qui suit, donne une condition nécessaire sur $2n$ sommets qui généralise les deux propositions 4.1 et 4.2.

Proposition 4.3 [44]

Si P est un ordre de trapèzes, alors :

$\forall a_i, i = \overline{1,2n}$ des sommets de P , deux à deux distincts, tels que :

$$(\alpha) \begin{cases} \bullet a_{2i+1} < a_{2i} \quad \forall i = \overline{1, n-1} \\ \bullet a_{2i+i} < a_{2i+2} \quad \forall i = \overline{1, n-1} \text{ et } (\beta) \\ \bullet a_1 < a_2 \text{ et } a_1 < a_{2n} \end{cases} \begin{cases} \bullet a_{2i} // a_{2k+1} \quad \forall i = \overline{1, n-2} \text{ et } \forall k = \overline{i+1, n-1} \\ \bullet a_{2i+1} // a_{2k} \quad \forall i = \overline{0, n-3} \text{ et } \forall k = \overline{i+2, n-1} \end{cases}$$

on a : $(\delta) a_{2i+1} < a_{2n} \quad \forall i = \overline{1, n-2}$.

Proposition 4.4 [44]

Soit P un ordre de trapèzes, alors :

$\forall a, b, c, d, e, f, g, h, i$, des sommets de X , deux à deux distincts, tels que :

$(a < b < c), (e < f < g), (b < d), (f < d), (a < h), (e < h), (a < i), (e < i), (a // e), (a // g), (b // h),$
 $(b // i), (c // e), (c // h), (d // h), (d // i), (f // h), (f // i), (d \not< c) \text{ et } (d \not< g),$
 alors on a $(h // i)$

De la transitivité de $<$ et des conditions de la proposition 4.4 précédente on aurait :

$(a // f), (b // e), (b // f), (b // g), (c // f), (c // g), (c // i), (g // h) \text{ et } (g // i)$.

Proposition 4.5 [17]

Soit P un ordre de trapèzes sur un ensemble fini non vide X alors :

$\forall a, b, c, d, e, f, g, h, i$ des sommets de X , deux à deux distincts tels que :

$(a < b < c), (e < f < g), (b < d), (f < d), (a < h), (e < h), (h < i), (a // e), (a // g), (b // h),$
 $(b // i), (c // e), (c // h), (d // h), (d // i), (f // h), (f // i), (d \not< c) \text{ et } (d \not< g),$
 on a $(f < i)$

4.3 Configuration minimales interdites dans les ordres de trapèzes

Nous exposons dans ce qui suit des configurations minimales interdites dans les ordres de trapèzes. Si P est un ordre de trapèzes alors il n'admet aucune des configurations de la Figure 4.4.

La configuration A_{2i} nous servira d'élément essentiel pour la démonstration d'une grande partie de la propriété duale de König, qui est l'objectif assigné à ce chapitre et notre apport à cette classe de posets.

Des propositions 4.1, 4.3, 4.4 et 4.5 on déduit que si P est un ordre de trapèzes, alors le poset P n'admet pas de sous poset induit isomorphe aux configurations minimales A_i , $\forall i = \overline{1,3}$ et A_{2i} pour tout $i \geq 3$, de la Figure 4.4.

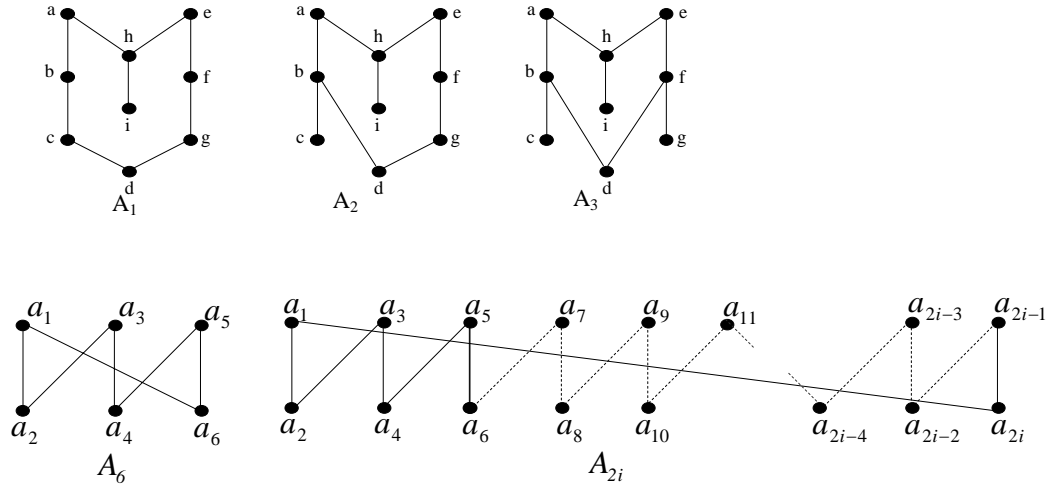


Figure 4.4 : configurations minimales interdites dans un poset de trapèzes.

4.4 Ordre de trapèzes et ordres d'intervalles

Comme mentionné au début de ce chapitre un fort lien existe entre l'ordre des trapèzes et celui d'intervalles en dépit du lien d'inclusion déjà cité.

En effet, à tout ordre de trapèzes $(P, <)$, défini par deux droites parallèles horizontales D_1 et D_2 (lignes de bases de l'ordre P) on peut associer deux ordres d'intervalles $(P, <_{sup})$ et $(P, <_{inf})$. Ceux-ci sont définis respectivement par l'intersection du trapèze T_x avec la ligne de base supérieure, donnant les intervalles $I_{sup}(x)$ pour tout $x \in P$ et par l'intersection du trapèze T_x avec la ligne de base inférieure, donnant les intervalles $I_{inf}(x)$ pour tout $x \in P$. Cependant tout ordre de trapèzes peut être défini par la connaissance des deux ordres d'intervalles qui lui sont associés et inversement, par ce qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x < T_y \Leftrightarrow I_{\text{sup}}(x) <_{\text{sup}} I_{\text{sup}}(y) \text{ et } I_{\text{inf}}(x) <_{\text{inf}} I_{\text{inf}}(y). \\ \\ T_x // T_y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_{\text{sup}}(x) //_{\text{sup}} I_{\text{sup}}(y) \text{ et } I_{\text{inf}}(x) //_{\text{inf}} I_{\text{inf}}(y); \\ \text{OU} \\ I_{\text{sup}}(x) //_{\text{sup}} I_{\text{sup}}(y) \text{ et } I_{\text{inf}}(x) <_{\text{inf}} I_{\text{inf}}(y); \\ \text{OU} \\ I_{\text{sup}}(x) <_{\text{sup}} I_{\text{sup}}(y) \text{ et } I_{\text{inf}}(x) //_{\text{inf}} I_{\text{inf}}(y); \\ \text{OU} \\ I(y) <_{\text{sup}} I_{\text{sup}}(x) \text{ et } I_{\text{inf}}(x) <_{\text{inf}} I_{\text{inf}}(y); \\ \text{OU} \\ I_{\text{sup}}(x) <_{\text{sup}} I_{\text{sup}}(y) \text{ et } I_{\text{inf}}(y) <_{\text{inf}} I_{\text{inf}}(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La Figure 4.5_a et 4.5_b donnent la représentation graphique de ces deux équivalences, qui n'est pas unique du fait de la non unicité de la représentation graphique d'un ordre de trapèzes.

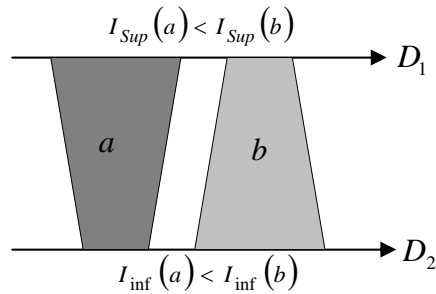


Figure 4.5_a : $T_a < T_b$

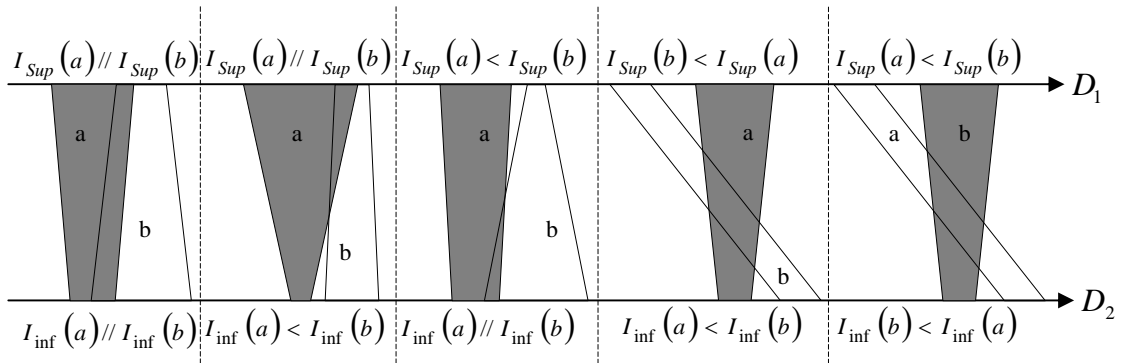


Figure 4.5_b : $T_a // T_b$

4.5 Ordre de trapèzes et propriété duale de König

Avant d'entamer l'étude de la propriété duale de König, rappelons quelques définitions et propriétés, élémentaires à cet objectif.

Soit P un ordre de trapèzes fini non vide et $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles maximaux de P . Comme défini dans le premier chapitre graphe représentatif du

dual $\mathcal{H}^*(P)$ est $L(\mathcal{H}^*(P)) = \left(P, E_{L(\mathcal{H}^*(P))} \right)$ de l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ est défini sur

l'ensemble des sommets de P par :

$$(x, y) \in E_{L(\mathcal{H}^*(P))} : \exists \text{ un intervalle } I \text{ dans } P \text{ tel que } x \in I \text{ et } y \in I.$$

La Figure 4.6, ci-dessous montre un poset P (non forcément de trapèzes) et son $L(\mathcal{H}^*(P))$.

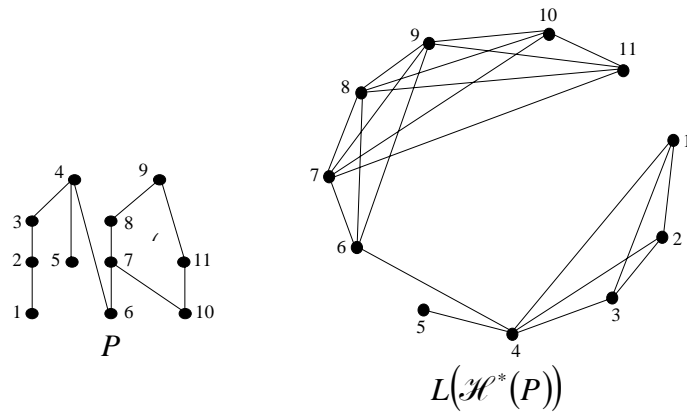


Figure 4.6 : le poset P et le $L(\mathcal{H}^*(P))$ associé.

Nous donnerons dans ce qui suit une démonstration de la validité de la propriété duale de König dans la classe des ordres de trapèzes. Cette démonstration est constituée de deux parties. Dans la première partie, nous établissons la normalité de $\mathcal{H}^*(P)$ par la perfection du graphe représentatif des arêtes de $\mathcal{H}^*(P)$, $L(\mathcal{H}^*(P))$, tandis que la deuxième partie sera réservée à la vérification de la propriété de Helly.

Partie I

Nous traiterons donc dans cette première partie de ce qui est de la perfection du graphe représentatif des arêtes de $\mathcal{H}^*(P)$, $L(\mathcal{H}^*(P))$. Pour établir cette perfection nous utiliserons le théorème fort des graphes parfaits, énoncé dans le chapitre 1 qui stipule que tout graphe de Berge est parfait [15].

Rappelons qu'un graphe est de Berge si et seulement si il n'admet ni de trou ni d'anti-trou impairs de longueur ≥ 5 .

Le choix de l'utilisation de cette caractérisation des graphes parfaits pour montrer que $L(\mathcal{H}^*(P))$ est parfait, n'est pas fortuit, du fait de la différence de la classe des graphes $L(\mathcal{H}^*(P))$ avec les classes de graphes parfaits de Berge implicite les plus connues. Nous avons pris le soin de vérifier ceci et les résultats obtenus sont énoncés dans la remarque 3.6 qui suit. Ainsi, notre démarche se trouvera justifiée pour démontrer la perfection de $L(\mathcal{H}^*(P))$.

Remarque 4.6

$L(\mathcal{H}^*(P))$ n'appartient pas à la classe des graphes sans étoile (voir Figure 4.7)

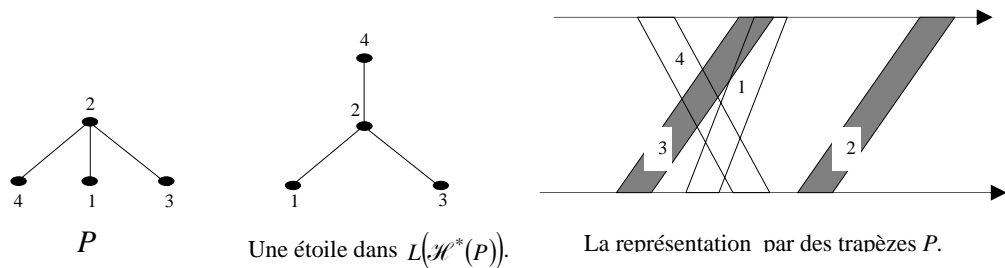


Figure 4.7

ni à la classe des graphes sans bulle (voir Figure 4.8)

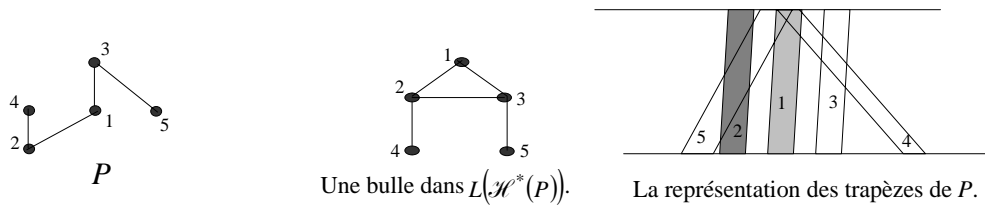


Figure 4.8

ni à la classe des graphes sans patte (voir Figure 4.9).

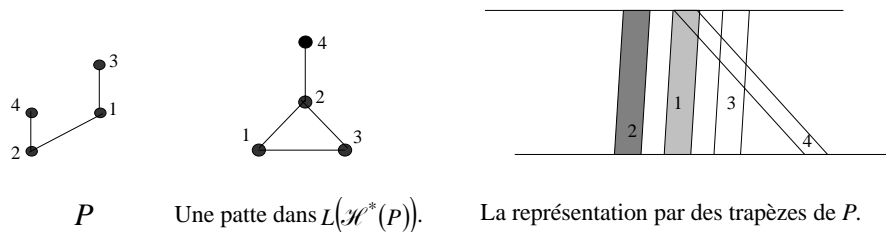


Figure 4.9

ni à la classe des graphes sans diamant(voir Figure 4.10)

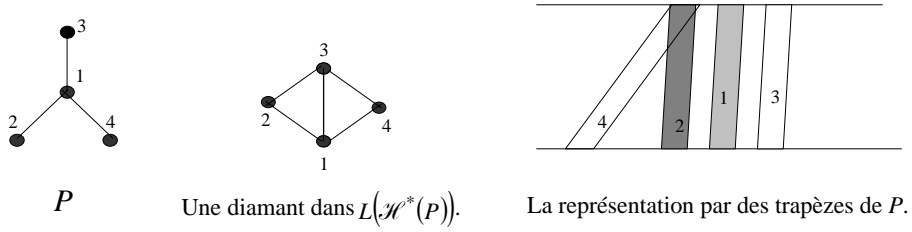


Figure 4.10

ni à la classe des graphes sans flèche (voir Figure 4.11)

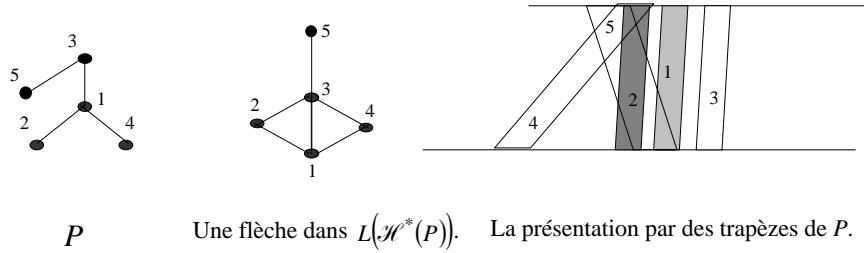


Figure 4.11

ni à la classe des graphes sans chaise (voir Figure 4.12)

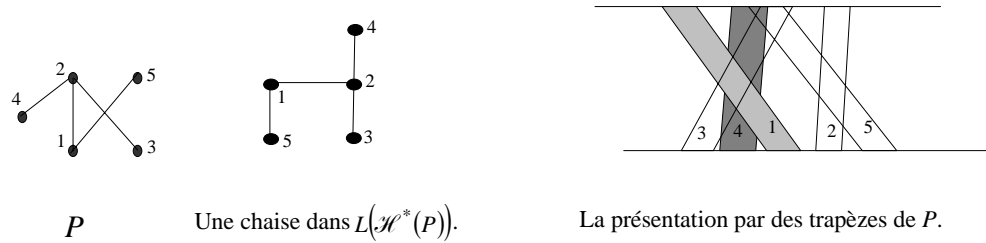


Figure 4.12

ni à la classe des graphes de Meyniel (voir Figure 4.13)

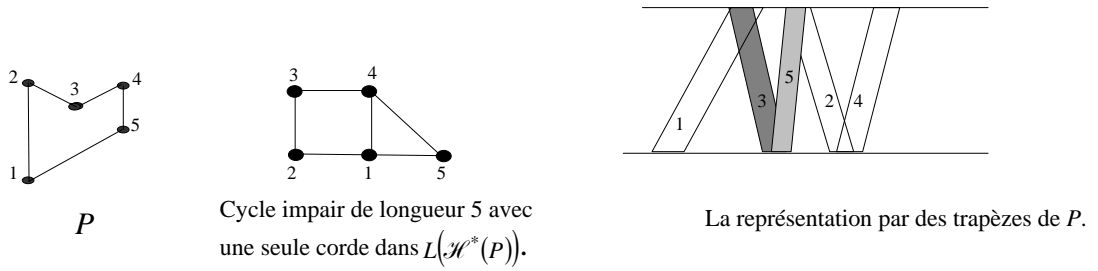


Figure 4.13

ni à la classe des graphes sans drapeau (voir Figure 4.14)

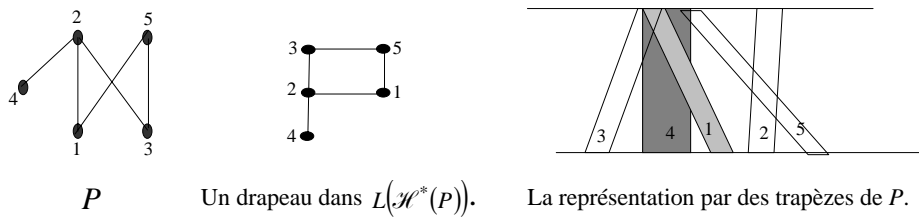


Figure 4.14

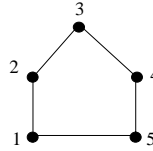
De cette remarque, l'utilisation du théorème fort des graphes parfaits se trouve ainsi justifiée. De ce fait, nous montrons que $L(\mathcal{H}^*(P))$ n'admet ni de trou ni d'anti-trou impair de longueur ≥ 5 .

Proposition 4.6

Soit P un ordre de trapèzes alors si $L(\mathcal{H}^*(P))$ admet un trou impair de longueur $k \geq 5$ alors P admet la configuration A_{2i} , de la Figure 4.4 (page 57), comme sous poset induit.

Preuve

Afin que le lecteur puisse suivre la démonstration de l'inexistence d'un trou impair de longueur ≥ 5 dans $L(\mathcal{H}^*(P))$. Nous montrons d'abord que $L(\mathcal{H}^*(P))$ n'admet pas de trou impair de longueur 5 (voir Figure 4.15), pour traiter ensuite le cas où la longueur impaire du trou est quelconque, donc ≥ 5 .

Figure 4.15 : Un trou C impair de longueur 5

$(1, 2)$ est une arête de $L(\mathcal{H}^*(P))$, donc il existe un intervalle de P contenant les sommets (1) et (2). Nous distinguons alors trois cas possibles :

Cas 1 : $(1) < (2)$.

Les cas qui suivent sont à exclure du fait qu'ils engendrent des cordes dans C .

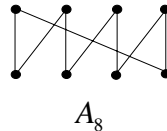
$(1) < (2) < (3)$	Corde $(1, 3)$;
$(1) < (2), (2) > (3) > (4)$	Corde $(2, 4)$;
$(1) < (2), (2) > (3) < (4) < (5)$	Corde $(3, 5)$;
$(1) < (2), (2) > (3), (3) < (4) > (5) > (1)$	Corde $(1, 4)$;
$(1) < (2), (2) > (3), (3) < (4), (5) < (4)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) > (3), (3) < (4), (5) // (4)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) > (3), (3) // (4), (4) < (5) < (1)$	Corde $(2, 5), (2, 4)$ et $(1, 4)$;
$(1) < (2), (2) > (3), (3) // (4)$ et $(1) < (5) < (4)$	Corde $(1, 4)$;
$(1) < (2), (2) > (3), (3) // (4), (5) < (4)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) > (3), (3) // (4), (5) // (4)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (3) < (4) < (5)$	Corde $(3, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (3) < (4), (5) < (4)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (3) < (4)$ et $(1) < (5) < (4)$	Corde $(1, 4)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (3) < (4), (5) // (4)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (5) < (4) < (3)$	Corde $(3, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (4) < (3), (4) < (5)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (4) < (3), (4) // (5)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (4) // (3), (4) < (5)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (4) // (3), (5) < (4)$ et $(5) < (1)$	Corde $(2, 5)$;
$(1) < (2), (2) // (3), (4) // (3)$ et $(1) < (5) < (4)$	Corde $(1, 4)$.

Les cas :

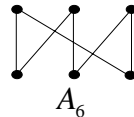
$(1) < (2), (2) > (3), (3) // (4), (5) // (4)$ et $(1) // (5),$

$(1) < (2), (2) // (3), (3) // (4), (5) // (4)$ et $(1) < (5)$ et

$(1) < (2), (2) // (3), (3) // (4), (5) // (4)$ et $(1) // (5)$ sont exclus car ils engendrent la configuration interdite A_8 , ci-dessous.



et enfin le restant des cas, découlant du cas $(1) < (2)$ engendrent la configuration interdite A_6 , ci-dessous.



Donc le cas $(1) < (2)$ ne peut se présenter car on aboutit soit à une corde dans le trou C_k soit à une configuration interdite dans les ordres de trapèzes.

Cas 2 : $(2) < (1).$

Par analogie avec le cas 1 et avec le même raisonnement, on construisant de proche en proche une corde ou la configuration interdite, et on exclu cas 2.

Cas 3 : $(1) // (2)$

Les cas suivant sont exclus du fait qu'ils engendrent des cordes.

- | | |
|---|------------------|
| $(1) // (2), (2) < (3) < (4)$ | Corde $(2, 4)$; |
| $(1) // (2), (2) < (3), (3) > (4) > (5)$ | Corde $(3, 5)$; |
| $(1) // (2), (2) < (3), (3) > (4), (4) < (5) < (1)$ | Corde $(1, 4)$; |
| $(1) // (2), (2) < (3), (3) // (4), (4) < (5) < (1)$ | Corde $(1, 4)$; |
| $(1) // (2), (2) > (3) > (4)$ | Corde $(2, 4)$; |
| $(1) // (2), (2) > (3), (3) < (4) < (5)$ | Corde $(3, 5)$; |
| $(1) // (2), (2) > (3), (3) < (4), (5) < (4)$ et $(1) < (5)$ | Corde $(1, 4)$; |
| $(1) // (2), (2) > (3), (3) // (4), (5) < (4)$ et $(1) < (5)$ | Corde $(1, 4)$; |

$(1)//(2), (2) > (3), (3)//(4), (5) > (4)$ et $(1) > (5)$	Corde $(1, 4)$;
$(1)//(2), (2)//(3), (3) < (4) < (5)$	Corde $(3, 5)$;
$(1)//(2), (2)//(3), (3) < (4), (5) < (4)$ et $(1) > (5)$	Corde $(1, 4)$;
$(1)//(2), (2)//(3), (3) > (4) > (5)$	Corde $(3, 5)$;
$(1)//(2), (2)//(3), (3) > (4), (5) < (4)$ et $(1) > (5)$	Corde $(1, 4)$;
$(1)//(2), (2)//(3), (3)//(4), (5) < (4)$ et $(1) < (5)$	Corde $(1, 4)$;
$(1)//(2), (2)//(3), (3)//(4), (5) > (4)$ et $(1) > (5)$	Corde $(1, 4)$.

Les cas :

$(1)//(2), (2) < (3), (3)//(4), (5) < (4)$ et $(1)//(5)$
$(1)//(2), (2) > (3), (3)//(4), (5)//(4)$ et $(1) > (5)$
$(1)//(2), (2) > (3), (3)//(4), (5)//(4)$ et $(1)//(5)$
$(1)//(2), (2)//(3), (3) < (4), (5)//(4)$ et $(1) < (5)$
$(1)//(2), (2)//(3), (3) > (4), (5)//(4)$ et $(1) > (5)$
$(1)//(2), (2) > (3), (3)//(4), (5)//(4)$ et $(1) > (5)$
$(1)//(2), (2)//(3), (3)//(4), (5) > (4)$ et $(1) < (5)$

sont exclus car ils engendrent la configuration interdite A_8 de la page 64.

De même que le cas 1, les autres cas restant du cas 3 engendrent la configuration A_6 de la page 64.

Donc il n'existe aucune représentation par des trapèzes pour que $L(\mathcal{H}^*(P))$ admette un trou de longueur 5.

Traitons maintenant le cas où la longueur impaire k du trou est ≥ 5 .

Soit pour $C_k = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k, x_1\}$ un tel trou, k impair et $k \geq 5$.

Pour que $L(\mathcal{H}^*(P))$ admet un tel trou on doit avoir dans le poset P ce qui suit :

- $\forall i = \overline{1, k-1}$ il existe un intervalle I_i de P tel que $x_i, x_{i+1} \in I_i$ et il existe un intervalle I_k de P tel que $x_1, x_k \in I_k$.
- $\forall i = \overline{1, k-1}$ il n'existe aucun intervalle contenant à la fois x_i et x_j avec $j \neq i+1$ si $i \neq 1$ et $j \neq k$ si $i = 1$.

3. $\forall i = \overline{1, k-1}, x_i < x_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} > x_{i+2}$ ou $x_{i+1} // x_{i+2}$ car sinon (x_i, x_{i+2}) serait une corde dans C_k .
4. $\forall i = \overline{1, k-1}, x_i > x_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} < x_{i+2}$ ou $x_{i+1} // x_{i+2}$ car sinon (x_i, x_{i+2}) serait une corde dans C_k .

Bien entendu 3 et 4 ont lieu pour les couples (x_k, x_1) et (x_1, x_2) .

Par conséquent, il existe au moins un couple (x_i, x_{i+1}) tel que $x_i // x_{i+1}$. En effet, de la parité de k (k impair) il existe au moins deux éléments consécutifs x_i, x_{i+1} de C_k qui sont incomparables, car sinon (x_2, x_k) serait une corde de C_k . Ceci nous assure l'existence d'au moins $k+2$ éléments dans le poset, donc du $k+1$ ^{ième} élément pour former la configuration interdite, qu'on construira pas à pas.

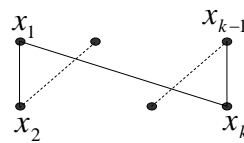
Nous assurons, en premier l'existence des deux extrémités de la configuration pour revenir ensuite au zigzag intermédiaire.

Existence des deux extrémités.

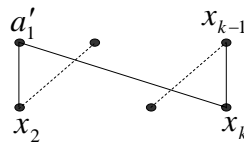
Cas 1 $x_k < x_1$

Donc $\begin{cases} x_{k-1} > x_k \text{ ou } x_{k-1} // x_k \\ x_1 > x_2 \text{ ou } x_1 // x_2 \end{cases}$

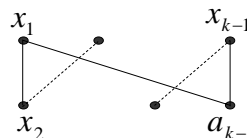
Cas 1-1 $x_k < x_1, x_{k-1} > x_k$ et $x_1 > x_2$.



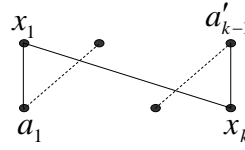
Cas 1-2 $x_k < x_1, x_{k-1} > x_k$ et $x_1 // x_2$ donc il existe a_1, a_1' tels que $x_1 > a_1 < x_2$ et $x_1 < a_1' > x_1$.



Cas 1-3 $x_k < x_1, x_1 > x_2$ et $x_{k-1} // x_k$ donc il existe a_{k-1}, a_k' tels que $x_{k-1} > a_{k-1} < x_k$ et $x_{k-1} < a_k' > x_k$



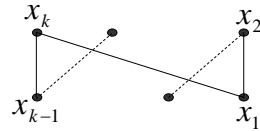
Cas 1-4 $x_k < x_1$, $x_1 // x_2$ et $x_{k-1} // x_k$ donc il existe a_1, a'_1 et a_{k-1}, a'_{k-1} tels que $x_{k-1} > a_{k-1} < x_k$ et $x_{k-1} < a'_{k-1} > x_k$ et $x_1 > a_1 < x_2$ et $x_1 < a'_1 > x_2$.



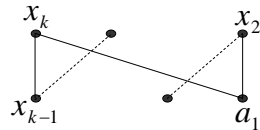
Cas 2 $x_k > x_1$

Donc $\begin{cases} x_{k-1} < x_k \text{ ou } x_{k-1} // x_k \\ x_1 < x_2 \text{ ou } x_1 // x_2 \end{cases}$

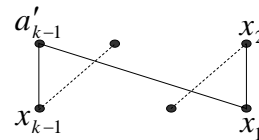
Cas 2-1 $x_k > x_1$, $x_{k-1} < x_k$ et $x_1 < x_2$.



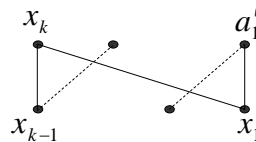
Cas 2-2 $x_k > x_1$, $x_{k-1} > x_k$ et $x_1 // x_2$ donc il existe a_1, a'_1 tels que $x_1 > a_1 < x_2$ et $x_1 < a'_1 > x_2$.



Cas 2-3 $x_k > x_1$, $x_1 < x_2$ et $x_{k-1} // x_k$ donc il existe a_{k-1}, a'_{k-1} tels que $x_{k-1} > a_{k-1} < x_k$ et $x_{k-1} < a'_{k-1} > x_k$.



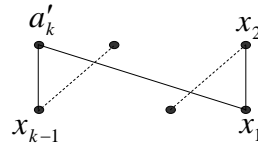
Cas 2-4 $x_k < x_1$, $x_1 // x_2$ et $x_{k-1} // x_k$ donc il existe a_1, a'_1 et b_1, b'_1 tels que $x_{k-1} > a_{k-1} < x_k$ et $x_{k-1} < a'_{k-1} > x_k$ et $x_1 > a_1 < x_2$ et $x_1 < a'_1 > x_2$.



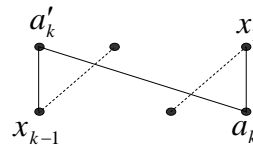
Cas 3 $x_k // x_1$

Donc $\begin{cases} x_{k-1} < x_k \text{ ou } x_{k-1} // x_k \text{ ou } x_{k-1} > x_k \\ x_1 < x_2 \text{ ou } x_1 // x_2 \text{ ou } x_1 > x_2 \end{cases}$

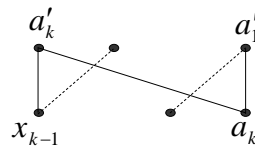
Cas3-1 $x_k // x_1, x_1 < x_2$ et $x_{k-1} < x_k$ donc il existe a_k, a'_k tels que $x_1 > a_k < x_k$ et $x_1 < a'_k > x_k$.



Cas 3-2 $x_k // x_1, x_1 > x_2$ et $x_{k-1} < x_k$ donc il existe a_k, a'_k tels que $x_1 > a_k < x_k$ et $x_1 < a'_k > x_k$.



Cas 3-3 $x_k // x_1, x_1 // x_2$ et $x_{k-1} < x_k$ donc il existe a_k, a'_k et a_1, a'_1 tels que $x_1 > a_k < x_k$ et $x_1 < a'_k > x_k$ et $x_1 > a_1 < x_2$ et $x_1 < a'_1 > x_2$.



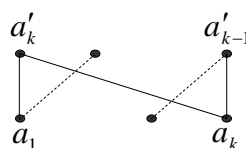
Cas 3-4 Par analogie aux trois cas précédents les cas suivant se déduisent

aisément $x_k // x_1, x_1 // x_2$ et $x_{k-1} > x_k$ et $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 > x_2. \\ \text{ou} \\ x_1 // x_2 \end{cases}$

Cas 3-5 $x_k // x_1, x_1 // x_2$ et $x_{k-1} // x_k$ donc il existe $a_k, a'_k, a_{k-1}, a'_{k-1}$ et a_1, a'_1 tels que

$x_1 > a_k < x_k$ et $x_1 < a'_k > x_k, x_1 > a_1 < x_2$ et $x_1 < a'_1 > x_2,$

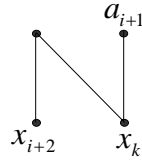
$x_{k-1} > a_{k-1} < x_k$ et $x_{k-1} < a'_{k-1} > x_k.$



Le zigzag est assuré par les cas suivants :

Cas 1 : $x_i < x_{i+1}$

Cas 1-1 $x_i < x_{i+1}$ et $x_{i+1} < x_{i+2}$

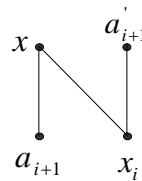


Cas1-2 $x_i < x_{i+1}$ et $x_{i+1} // x_{i+2}$.

Donc il existe a_{i+1}, a'_{i+1} tels que :

$x_{i+1} > a_{i+1} < x_{i+2}$ et $x_{i+1} < a'_{i+1} > x_{i+2}$. Et avec

$x = x_{i+3}$ si $x_{i+2} < x_{i+3}$, $x = x_{i+2}$ si $x_{i+3} < x_{i+2}$ ou $x = a'_{i+2}$ si $x_{i+2} // x_{i+3}$



Cas 2 : $x_i > x_{i+1}$

Le cas 2 est analogue au cas 1.

Cas 3 : $x_i // x_{i+1}$.

Donc $x_{i+1} < x_{i+2}$ ou $x_{i+1} > x_{i+2}$ ou $x_{i+1} // x_{i+2}$ et il existe a_i, a'_i tels que

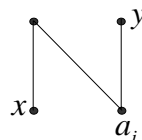
$x_i > a_i < x_{i+1}$ et $x_i < a'_i > x_{i+1}$.

Cas 3-1 : $x_i // x_{i+1}$ et $x_{i+1} < x_{i+2}$.

Donc il existe a_i, a'_i tels que $x_i > a_i < x_{i+1}$ et $x_i < a'_i > x_{i+1}$.

Avec $x = x_{i+2}$ si $x_{i+2} > x_{i+3}$ ou $x = a_{i+2}$ si $x_{i+2} // x_{i+3}$ et

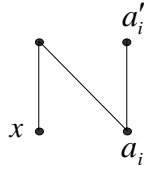
$y = x_{i+2}$ si $x_{i+2} > x_{i+3}$ ou $y = a'_{i+2}$ si $x_{i+2} // x_{i+3}$



Cas3-2 : $x_i // x_{i+1}$ et $x_{i+1} > x_{i+2}$.

Donc il existe a_i, a'_i tels que $x_i > a_i < x_{i+1}$ et $x_i < a'_i > x_{i+1}$.

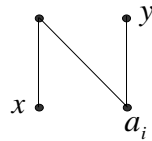
Avec $x = x_{i+2}$ si $x_{i+2} > x_{i+3}$ ou $x = a_{i+2}$ si $x_{i+2} // x_{i+3}$.



Cas : 3-3 $x_i // x_{i+1}$ et $x_{i+1} // x_{i+2}$

Donc il existe a_i, a'_i et a_{i+1}, a'_{i+1} tels que $x_i > a_i < x_{i+1}$ et $x_i < a'_i > x_{i+1}$ et $x_{i+1} > a_{i+1} < x_{i+2}$ et $x_{i+1} < a'_{i+1} > x_{i+2}$.

Avec $x = x_{i+2}$ si $x_{i+2} > x_{i+3}$, $x = a_{i+2}$ si $x_{i+2} // x_{i+3}$ ou encore $x = x_{i+3}$ si $x_{i+2} < x_{i+3}$ et avec $y = x_{i+2}$ si $x_{i+2} > x_{i+3}$, $y = a'_{i+1}$ si $x_{i+2} // x_{i+3}$ ou encore $y = x_{i+3}$ si $x_{i+2} < x_{i+3}$.



On associe de proche en proche les cas du zigzag avec les cas des extrémités pour former dans tous les cas la configuration (A_{2i}) interdite dans l'ordre des trapèzes, comme dans la cas où $k = 5$, ce qui termine la démonstration de la proposition 4.6.

Partie 2

Passant maintenant à la preuve de l'inexistence d'un anti-trou dans $L(\mathcal{H}^*(P))$.

Pour ceci nous avons besoin de la définition d'un anti-trou dans un poset.

Définition

Un anti-trou \bar{C}_k impair de longueur $k \geq 5$ d'éléments $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ est le complémentaire d'un trou (cycle élémentaire de longueur impair $k \geq 5$).

Proposition 4.7

Soit P un ordre de trapèzes. Si $L(\mathcal{H}^*(P))$ admet un anti-trou impair de longueur $k \geq 5$, alors P admet la configuration A_{2i} , de la Figure 4.4 (page 57), comme sous poset induit.

Preuve

Soit P un ordre de trapèzes tel que $L(\mathcal{H}^*(P))$ contient un anti-trou $\overline{C}_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\}$.

Soit $x_{i_0} \in P$.

Cas 1 : x_{i_0} maximal dans P .

Donc tous les autres éléments de \overline{C}_k , différents de x_{i_0+1} et x_{i_0-1} sont inférieurs à x_{i_0} .

Par conséquent il existe une chaîne entre tous les éléments de \overline{C}_k (autre que x_{i_0+1} et x_{i_0-1}) et x_{i_0} . Ainsi si x_i est un élément inférieur à x_{i_0} on a :

$$\begin{cases} x_i < x_{i_0+1} \text{ ou } x_i // x_{i_0+1} \\ x_i < x_{i_0-1} \text{ ou } x_i // x_{i_0-1} \end{cases} \text{ si non } x_{i_0+1} < x_{i_0} \text{ ou } x_{i_0-1} < x_{i_0}.$$

Deux cas essentiels peuvent se présenter, à savoir $x_{i_0+1} // x_{i_0-1}$ ou $x_{i_0+1} < x_{i_0-1}$ (le cas $x_{i_0+1} > x_{i_0-1}$ se déduit par dualité du cas $x_{i_0+1} < x_{i_0-1}$).

Cas 1.1 : $x_{i_0+1} // x_{i_0-1}$

Comme (x_{i_0+1}, x_{i_0-1}) est une arête dans \overline{C}_k alors il existe un intervalle dans P les contenant.

Soit alors x_{i_0+4} et x_{i_0+3} deux autres sommets de \overline{C}_k qui sont tous les deux inférieurs à x_{i_0} .

Les sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} sont incomparables et ne peuvent être à la fois des éléments minimaux car sinon deux sommets successifs appartiendraient à un même intervalle du fait qu'ils doivent à la fois être inférieurs à x_{i_0} et supérieurs aux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} .

De même le cas où un de ces sommets est minimal est exclu car sinon deux sommets successifs appartiendraient à un même intervalle de fait qu'ils doivent à la fois être inférieurs à x_{i_0} et supérieurs à un sommet qui est minimal.

Par conséquent les deux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} sont incomparables et appartiennent tous les deux à l'intérieur de P .

Les Figures 1.16 à 1.19, suivantes traitent les sous cas essentiels du cas 1.1.

Notons par $[p_i^j, q_i^j]$ l'intervalle qui contient les sommets x_i et x_j .

Si au moins un sommet parmi x_{i_0+4} et x_{i_0+3} est incomparable aux deux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} , alors on obtient la configuration interdite A_6 de la Figure 4.16.

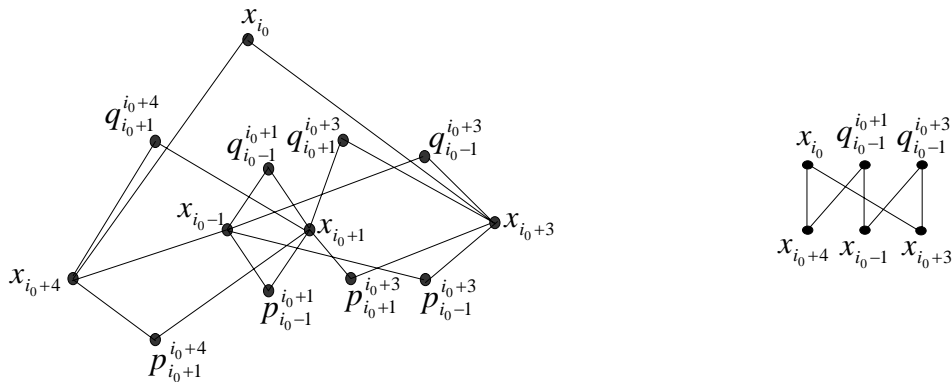


Figure 4.16

Si au moins un des deux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} est inférieur aux deux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} , alors on obtient la configuration interdite A_6 de la Figure 4.17.

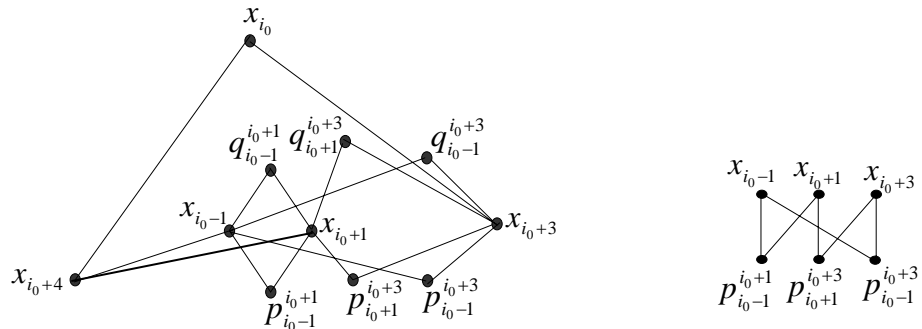


Figure 4.17

Si un des deux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} est inférieur aux deux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} et l'autre est inférieur à un des deux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} . Ce cas est aussi impossible car il engendre la configuration A_6 de la Figure 4.18.

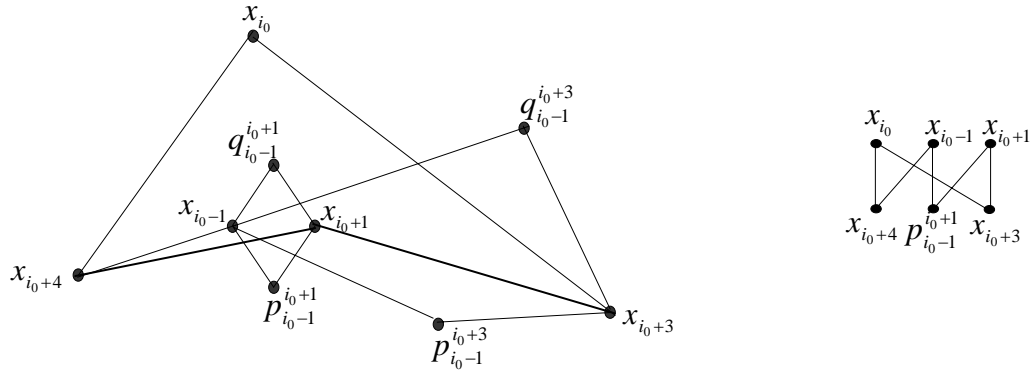


Figure 4.18

Le cas où les deux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} sont tous les deux incomparables aux deux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} se ramène au cas de la Figure 4.16.

Supposons maintenant que les deux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} sont tous les deux inférieurs aux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} . Dans un tel cas x_{i_0+4} couvre au moins un sommet de P ainsi que pour le sommet x_{i_0+3} . Soient x_{i_0+6} et x_{i_0+7} deux sommets de \bar{C}_k inférieurs respectivement à x_{i_0+4} et x_{i_0+3} . Comme x_{i_0+6} et x_{i_0+7} sont incomparables et n'appartiennent pas à un même intervalle alors forcément x_{i_0+7} et x_{i_0+4} sont incomparables et appartiennent à un même intervalle dans P . Par conséquent x_{i_0+4} et x_{i_0+3} sont dans un même intervalle de P donc (x_{i_0+4}, x_{i_0+3}) est une arête de \bar{C}_k (Figure 4.19). Contradiction.

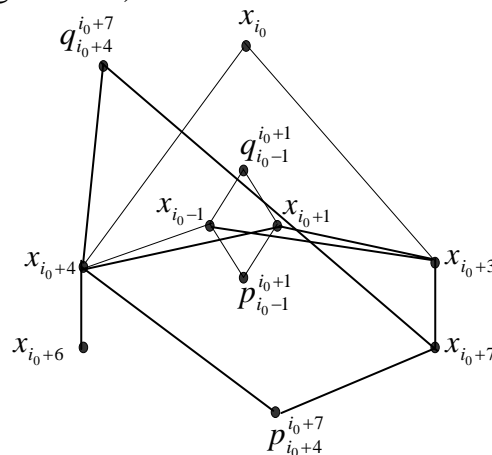


Figure 4.19

Finalement le cas 1.1 est exclu.

Cas 1.2 : $x_{i_0+1} < x_{i_0-1}$

Dans ce cas les deux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} ne peuvent être tous les deux inférieurs aux deux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} car comme ces deux sommets appartiennent tous les deux à l'intérieur de P , alors x_{i_0+4} et x_{i_0+3} seraient dans un même intervalle de P et formeraient de ce fait une arête dans \overline{C}_k Figure 4.20.

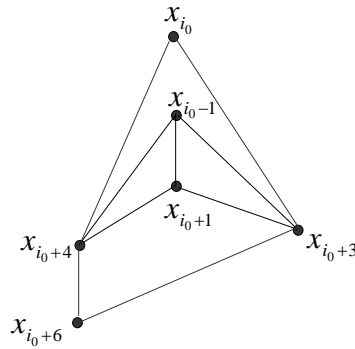


Figure 4.20

Si au moins un des deux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} est incomparable aux deux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} et que l'autre sommet est inférieur à au moins un des sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} . Alors ce cas est impossible car il engendre la configuration A_6 de la Figure 4.21.

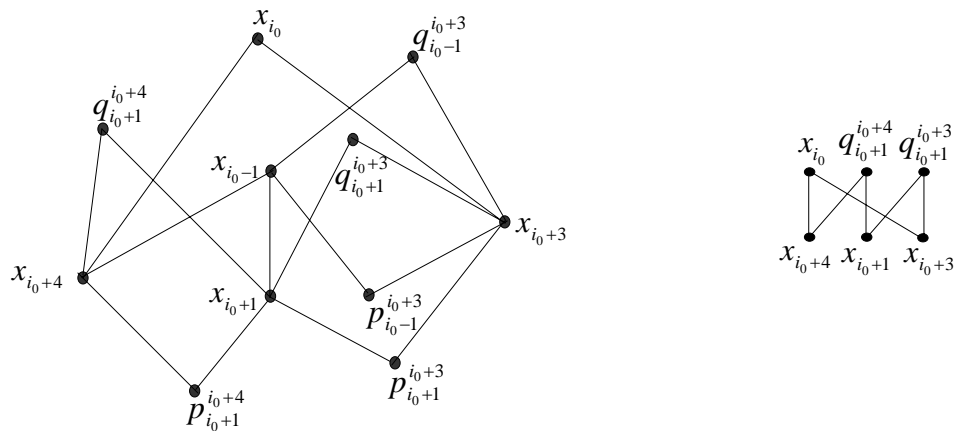
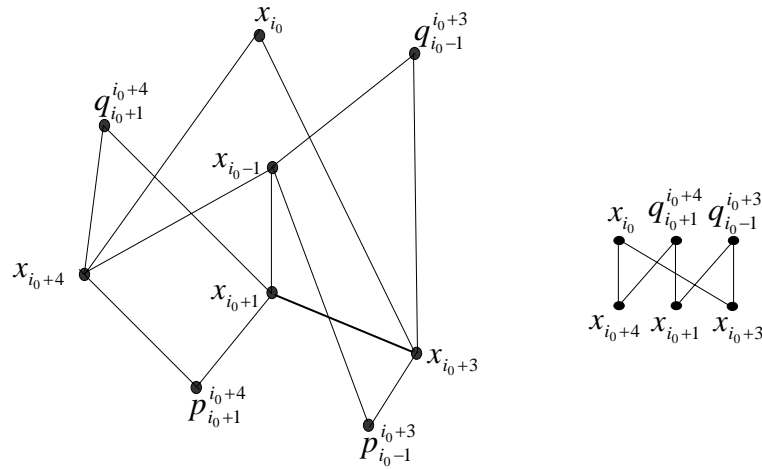


Figure 4.21

Si x_{i_0+4} est incomparable à x_{i_0+1} et inférieur à x_{i_0-1} et si x_{i_0+3} est incomparable à x_{i_0-1} et inférieur à x_{i_0+1} . Alors on aboutit à la configuration A_6 de la Figure 4.22.



Si les deux sommets x_{i_0+4} et x_{i_0+3} sont incomparables à la fois aux deux sommets x_{i_0+1} et x_{i_0-1} alors la configuration interdite A_6 se déduit facilement.

Donc on ne peut avoir $x_{i_0+1} < x_{i_0-1}$ et par dualité on exclut le cas $x_{i_0+1} > x_{i_0-1}$.

Par conséquent x_{i_0+1} et x_{i_0-1} ne peuvent être dans un même intervalle, contradiction car x_{i_0+1} et x_{i_0-1} sont adjacents dans l'anti-trou, donc x_{i_0} ne peut pas être un élément maximal dans P .

Cas 2 : x_{i_0} ne peut pas être minimal.

En effet, en passant au dual de P on retrouve le cas 1, ce qui exclut le cas 2.

Cas 3 : x_{i_0} n'est ni maximal ni minimal dans P ($x_{i_0} \in Int(P)$).

Des deux cas précédents, il existe deux sommets distincts de \overline{C}_k comparables à x_{i_0} et tels que x_{i_0} se situe entre eux.. Soit, sans perte de généralités x_{i_0+4} et x_{i_0+6} ces deux sommets(Figure 4.23).

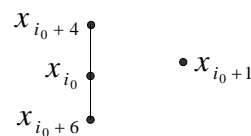


Figure 4.23

Dans la Figure 4.23 on ait obligatoirement

$x_{i_0+1} < x_{i_0+4}$ ou $x_{i_0+1} // x_{i_0+4}$ car sinon (x_{i_0+1}, x_{i_0}) est une arête de l'anti-trou.

De plus $x_{i_0+1} < x_{i_0+6}$ ou $x_{i_0+1} // x_{i_0+6}$ car sinon (x_{i_0+1}, x_{i_0}) est une arête de l'anti-trou.

Les Figures ci-après donnent les combinaisons possibles, et on constate que dans tous les cas (x_{i_0+1}, x_{i_0}) est une arête de l'anti-trou ce qui impossible.

$x_{i_0+1} < x_{i_0+4}$ et $x_{i_0+1} // x_{i_0+6}$ donc (x_{i_0+1}, x_{i_0}) est une arête de \bar{C}_k (Figure 4.24).

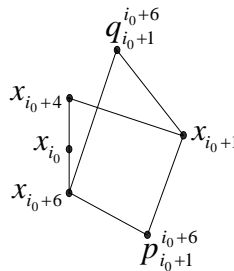


Figure 4.24

$x_{i_0+1} // x_{i_0+4}$ et $x_{i_0+1} > x_{i_0+6}$ donc (x_{i_0+1}, x_{i_0}) est une arête de \bar{C}_k (Figure 4.25).

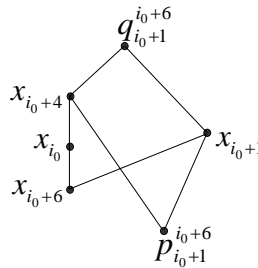


Figure 4.25

$x_{i_0+1} < x_{i_0+4}$ et $x_{i_0+1} > x_{i_0+6}$ donc (x_{i_0+1}, x_{i_0}) est une arête de \bar{C}_k (Figure 4.26).

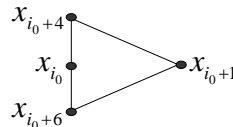


Figure 4.26

$x_{i_0+1} // x_{i_0+4}$ et $x_{i_0+1} // x_{i_0+6}$ donc (x_{i_0+1}, x_{i_0}) est une arête de \bar{C}_k (Figure 4.27).

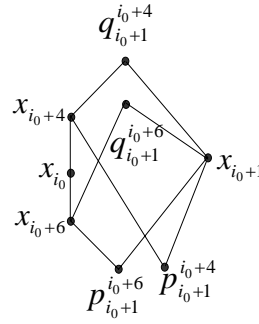


Figure 4.27

Donc les seuls éléments susceptibles de dominer x_{i_0} sont x_{i_0+3} et x_{i_0+2} or des cas précédents on déduit (x_{i_0+3}, x_{i_0+2}) ou (x_{i_0+3}, x_{i_0+4}) sont des arêtes de \overline{C}_k .

Donc même si x_{i_0} n'est ni maximal ni minimal on ne peut construire un anti-trou dans $L(\mathcal{H}^*(P))$ d'un ordre de trapèzes.

Reste donc le cas où tous les éléments de \overline{C}_k sont incomparables. Il est évident ce cas engendre directement la configuration interdite A_6 ..

Donc l'existence de \overline{C}_k dans $L(\mathcal{H}^*(P))$ est exclu, ce qui termine la démonstration de la Proposition 4.7.

Proposition 4.8

Si P est un ordre de trapèzes alors $L(\mathcal{H}^*(P))$ est un graphe parfait.

Preuve

Conséquence directe des Propositions 4.6 , 4.7 et du théorème fort des graphes parfaits.

Proposition 4.9

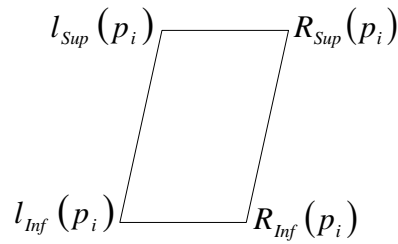
Soit P un ordre de trapèzes. L'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ a la propriété de helly.

Preuve

Soient $I_1 = [p_1, q_1]$, $I_2 = [p_2, q_2]$, $I_3 = [p_3, q_3]$ trois intervalles de P .

Montrons qu'il existe un intervalle I de P , $I = [p, q]$ de sorte que :

$$(I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_3) \cup (I_2 \cap I_3) \subset I$$



Pour ceci il suffit de prendre p comme étant l'élément qui apparaît au moins deux fois dans $\{p_1, p_2, p_3\}$ si $|\{p_1, p_2, p_3\}| \leq 2$ et

$$Max(R_{sup}(p), R_{inf}(p)) \leq Max(R_{sup}(p_i), R_{inf}(p_i)), \forall i = \overline{1,3} \text{ sinon}$$

et q comme étant l'élément qui apparaît au moins deux fois dans $\{p_1, p_2, p_3\}$ si $|\{q_1, q_2, q_3\}| \leq 2$ et $Min(l_{sup}(q), l_{inf}(q)) \geq Min(l_{sup}(q_i), l_{inf}(q_i)), \forall i = \overline{1,3}$ sinon.

Ainsi on aurait forcément $(I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_3) \cup (I_2 \cap I_3) \subset I$.

On a bien vérifié que $L(\mathcal{H}^*(P))$ est parfait et que $\mathcal{H}(P)$ est conforme donc $\mathcal{H}(P)$ vérifie la propriété duale de König.

Théorème.

Si P est un ordre de trapèzes alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König, autrement dit

$$\alpha(\mathcal{H}(P)) = \rho(\mathcal{H}(P))$$

Conclusion générale

Conclusion Générale

Du fait de sa généralisation du concept du graphe, les hypergraphes jouissent d'une grande importance dans la modélisation et la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire.

Les études faites sur ces derniers ont permis de définir une classe très remarquable des hypergraphes, à savoir les hypergraphes des intervalles maximaux d'un poset. Cette juxtaposition du concept de poset et d'hypergraphe, dans cette classe, donne lieu à un outil de grande utilité dans la théorie de Sperner. C'est dans cette dernière optique que se situe la plus grande partie de notre travail.

A l'issue de celui-ci, nous avons obtenu quelques conditions nécessaires pour qu'un hypergraphe soit un hypergraphe des intervalles maximaux d'un poset. Nous avons obtenu un algorithme de recherche d'un stable de poids maximum dans les ordres d'intervalles. Cet algorithme serait d'une utilité plus grande s'il serait généralisé à des ordres plus grand, tels que les ordres de trapèzes et permettrait ainsi de contribuer à la résolution de certains problèmes de décision, comme ceux relatifs aux structures de préférences. La validation de la propriété duale de König pour les hypergraphes des intervalles maximaux d'un ordre de trapèzes vient nous faciliter la tâche quant à la recherche des algorithmes de détermination des invariants des ordres de trapèzes.

Perspectives

Arrivé au terme de ce travail nous proposons ici quelques perspectives :

1. Etablir d'autres conditions nécessaires et suffisantes pour une caractérisation des hypergraphes des intervalles d'un poset.
2. Généraliser l'algorithme de stable de poids maximum à l'ordre de trapèzes.
3. Etablir la validité de la propriété de König dans les ordres de trapèzes.
4. Trouver une caractérisation des ordres de trapèzes.
5. Trouver un algorithme de recherche d'un recouvrement de poids minimum des hypergraphes des intervalles maximaux de certaines classes de posets.

Bibliographie

- [1] M. Abbas et M. S Maamra.
Contribution aux représentations numériques des structures de préférences.
Communiqué aux rencontres francophones de recherche opérationnelle, FRANCORO, Mons. 1995.

- [2] B. Balof and K. Bogart
Simple Inductive Proofs of the Fishburn and Mirkin Theorem and the Scott–Suppes Theorem.
Order 20: 49–51, 2003.

- [3] B.I. Bayoumi, M.H. El-Zahar, S.M. Khamis
Asymptotic enumeration of N-free partial orders.
Order 6, 219–232. 1989.

- [4] C. Berge
Graphes et hypergraphes.
Deuxième édition, Bordas, Paris, 1973.

- [5] C. Berge
Hypergraphes, combinatoires des ensembles finis.
Éditions Gauthier-Villars, Bordas, Paris 1987.

- [6] K. P. Bogart, R. H. Möhring and S. P. Ryan
Proper and unit trapezoid orders and graphs.
Technical Report #1996-080, MSRI, Berkeley, CA 94720, 1996.

- [7] K. P. Bogart, R. Möhring, S. P. Ryan
Proper and Unit Trapezoid Orders and Graphs.
Order 15: 325–340, 1998.

- [8] G. Bosi, J. Carlos Candeal, Esteban Induráin, Esteban Oloriz and Margarita Zudaire
Numerical Representations Of Interval Orders.
Order 18: 171–190, 2001.

- [9] I. Bouchemakh
Stabilité et recouvrement par intervalles dans des ordres partiels finis.
Thèse de Magister U.S.T.H.B., juin 1991.

- [10] I. Bouchemakh
Sur quelques problèmes extrémaux dans les ordres partiels finis.
Thèse d'État en Mathématiques, U.S.T.H.B., septembre 2001.
- [11] I. Bouchemakh, K. Engel
The order-interval hypergraph of a finite poset and the König property.
Elsevier Discrete Mathematics 170: 51-61, 1997.
- [12] V. Bouchitk, J. X. Rampon
On-line algorithms for orders.
Elsevier Theoretical Computer Science 175, 225-238, 1997.
- [13] C. Capelle
Representation of an order as union of interval orders.
Lecture Notes in Computer Science, V. Bouchitté et M. Morvan,
rédacteurs, number 831, pages 143-161. Springer-Verlag, 1994.
Proceedings of International Workshop ORDAL'94 - Lyon.
- [14] F. Cheah
A recognition algorithm for $//$ -Graphs.
Ph.D. thesis, TR 246/90, Dept. of computer science, Univ. of Toronto, 1990.
- [15] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. D. Seymour and R. Thomas
Progress on perfect graphs.
Mathematics Programming.
- [16] S. Cook
The complexity of theorem proving procedures.
Proceeding 3rd annual. A. C. M. Symposium on Theory of graph
151-158, 1971.
- [17] I. Dagan, M. C. Golumbic and R. Y. Pinter
Trapezoid graphs and their coloring.
Discrete Applied Mathematics, 21, 35-46, 1988.
- [18] R. P. Dilworth
A decomposition theorem for partially ordered sets.
Ann of Math, 51: 161-166, 1950.
- [19] J.-P. Doignon, J.-C. Falmagne
Well-graded families of relations.
Discrete Mathematics 173, 1997.

- [20] B. Douglas West
Covering a poset by interval orders.
Jornal of combinatorial théorie, series A 66, 169-171, 1994.
- [21] K. Engel and H.-D.O.F. Gronau. Sperrner
Theory in partially ordered sets.
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1985.
- [22] K. Engel. Sperrner
Theory
Cambridge university press, Cambridge, 1997.
- [23] U. Faigle, W. M. Nawijn
Note on scheduling intervals on-line.
Elsevier Discrete Applied Mathematics 58 13-17, 1995.
- [24] S. Felsner, R. Kant and C. Pandu Rangan, Dorothea Wagner
On the Complexity of Partial Order Properties.
Order 17: 179–193, 2000.
- [25] S. Felsner, R. Miiller, L Wernisch
Trapezoid graphs and generalizations, geometry and algorithms.
Discrete Applied Mathematics 74, 13-32, 1997.
- [26] S. Felsner, R. Muller and L. Wernisch
Trapezoid graphs and generalisations , Geometry and algorithms.
Serie B-Informatik B 94-02, 1994.
- [27] S. Felsner , T. W. Trotter
Colorings of diagrams of interval orders and or-sequences of sets.
Elsevier Discrete Mathematics 144, 23-31, 1995.
- [28] P. C. Fishburn
Intransitive indifference with unequal Infiference Intervals.
J. Math. Psycho, 7: 144-149, 1970.
- [29] P.C. Fishburn
Interval Orders and Interval Graphs.
John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [30] Z. Füredi, P. Hajnal, V. Rödl, W.T. Trotter,
Interval orders and shift graphs, in: A. Hajnal, V.T. Sos,
(Eds.), Sets, Graphs and Numbers, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai,
Vol. 60, 297-313, 1991.

- [31] T. L. Greenough
Representation and enumeration of interval orders and semiorders.
Ph.D.Thesis, Dartmouth College. Mathematics Ph.D., 1976.
- [32] M. Habib and R. H. Möhring
Recognition of partial orders with interval dimension two via transitive orientation with side constraints Technical report, TR 244/90.
Tu Berlin, 1990.
- [33] M. Hota, Madhumangal Pal, Tapan K. Pal
Optimal Sequential and Parallel Algorithms to Compute All Cut Vertices on Trapezoid Graphs.
Computational Optimization and Applications, 27, 95–113, 2004.
- [34] A. Kaufmann et E. Pichat
Méthodes Mathématiques non Numériques et leurs Algorithmes.
Éditions Masson, Paris, 1977.
- [35] H. A. Kierstead, W. T. Trotter
Interval orders and dimension.
Discrete Mathematics 213, 179-188, 2000.
- [36] A. James Reeds and C. Peter Fishburn
Counting Split Interval Orders.
Order 18: 129–135, 2001.
- [37] J. D. Laison.
Free Triangle Orders.
Order 20: 99–108, 2003.
- [38] M. Minoux
Programmation mathématiques, théorie des algorithmes.
Bordas et CENT – ENST, Paris, 1983.
- [39]. B. G. Mirkin
Ob odnom klasse otnoshenij predpochtenija, Matematicheskiye woprosy formirovanija ekonomitcheskich modelei, 1970.
- [40] H. Miyazawa and T. Erlebach
Improved randomized on-line algorithm for a weighted interval selection problem.
Journal of Scheduling 7: 293–311, 2004.
- [41]. R. H. Möhring
Computationally tractable classes of ordered sets, in I. Rival (ed.),
Algorithms and Orders, Reidel, Dordrecht, 105–194, 1989.

- [42] A. Ngo The, A. Tsoukiàs,
Numerical representation of *PQI* interval orders.
Discrete Applied Mathematics 147, 125– 146, 2005.
- [43] J. Niederle
Being a Proper Trapezoid Ordered Set Is a Comparability Invariant.
Order 17: 301–308, 2000.
- [44] D. Oudrar
Contribution à l'étude de quelques structures de préférence.
Thèse de Magister, U.S.T.H.B., décembre 1997.
- [45] T. Rabinovich
The dimension theory of semiorders and interval orders, Ph.D. Thesis,
Dartmouth College. Mathematics Ph.D., 1973.
- [46] S. P. Ryan
Trapezoid Order Classification.
Order 15: 341–354, 1998.
- [47] B. Sadi
Théorie des graphes complexité algorithmique.
Collection de cours de mathématique OPU , Ben aknoun Alger, 1993.
- [48] M. Soheir Khamis
Height counting of unlabeled interval and N-free posets.
Discrete Mathematics 275, 165–175, 2004.
- [49] B. Voigt et I. Wegener
A remark on minimal polynomials of boolean functions.
In. Berger, H. Kleine Buning and M. M. Richer editors, CLS (88 Proc.
2nd Workshop Computer, Science, Logic, Duisburg 1988), vol 385 of
Lecture Notes in Computer Science, 372-383, Springer-Verlag, Berlin,
Now York, 1989.