

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du

MAGISTER

Spécialité :

Electronique

Option :

Contrôle des processus et Robotique

Par

ZAOUCHE Mohamed

INGENIEUR E.M.P (ex. ENITA).

**ETUDE ET SIMULATION DES TECHNIQUES DE  
COMMANDES ROBUSTES ET ADAPTATIVES POUR LE  
PILOTAGE D'UN MISSILE 03 AXES.**

Soutenu publiquement le : 01 -02- 2001 devant la commission d'examen :

**Président :** Mr. R. TOUMI Professeur, Faculté de génie électrique, USTHB.

**Examineurs :** Mr. A. ADANE Professeur, Faculté de génie électrique, USTHB.  
Mr. F. BOUDJEMA Professeur, E.N.P d'El-Harrach.  
Mr. E.M. BERKOUK Maître de conférence, E.N.P d'El Harrach.

**Rapporteurs :** Mr. M. BENAHCENE Docteur d'état, DRD/CFDAT/MDN.  
Mr. M. TADJINE Docteur d'état, E.N.P d'El Harrach.

**Invité :** Mr M. BELOUNAR Docteur d'état, DRD/CFDAT/MDN.

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b>	4
<b>Chapitre 1 MODELISATION DYNAMIQUE DU MISSILE</b>	7
1- INTRODUCTION	7
2- PRESENTATION DE L'APPLICATION	8
2-1 description dynamique du modèle de l'engin	
2-2 Symboles et systèmes d'axes	
3- EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE	11
3-1 Description des gouvernes	
3-2 Equations du mouvement	
4- CONCLUSION	16
<b>Chapitre 2 LA COMMANDE LQG</b>	
1- INTRODUCTION	18
2- POSITION DU PROBLEME	18
3- COMMANDE LQG	19
4- INTERPRETATION $H_2$ DE LA COMMANDE LQ	20
5- AMELIORATION DES PERFORMANCES EN POURSUITE	21
5-1 Utilisation d'une matrice de gain	
5-2 Utilisation de l'action intégral	
6- APPLICATION D'UNE COMMANDE ADAPTATIVE LQG SUR UN MODELE DE SIMULATION D'UN MISSILE	25
6-1 Modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en roulis	
6-2 Modèle de simulation d'un missile stabilisé en roulis	
6-3 Conclusion	35
<b>Chapitre 3 LA COMMANDE <math>H_\infty</math></b>	37
1- INTRODUCTION	37
1-2 Principe de la commande $H_\infty$	
1-3 La commande $H_\infty$ optimale	
1-4 Positions des problèmes de commandes sous formes $H_\infty$	
1-5 Conclusion	
2- ELEMENTS D'ANALYSE DES SYSTEMES MIMO	41
2-1 Normes des systèmes linéaires	
2-2 Fonction de sensibilité	
2-3 Performances nominales	
2-3-1 Poursuite	
2-3-2 Rejet de perturbations	
2-3-3 Bruit de mesure	
2-3-4 Remarques	
2-4 Robustesse en stabilité vis à vis d'incertitudes	
2-4-1 Représentation des incertitudes	
2-4-2 Théorème du petit gain	
2-4-3 Marge de stabilité additive et multiplicative	
3- SYNTHESE D'UNE COMMANDE ROBUSTE	49
3-1 Objectifs de synthèse	
3-2 Le problème $H_\infty$ standard	
3-3 Résolution du problème $H_\infty$ standard	
3-4 Les hypothèses dans un cadre plus général	
3-5 Choix des fonctions de pondération	
4- APPROCHE PAR FACTORISATION PREMIERE	58
6- APPLICATION DE LA COMMANDE $H_\infty$ SUR UN MODELE DE SIMULATION D'UN MISSILE	63
6-1 Modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en roulis	
6-2 Modèle de simulation d'un missile stabilisé en roulis	
6-3 Conclusion	70

<b>Chapitre4 : SYNTHÈSE PAR MODE GLISSEMENT</b>	71
1 INTRODUCTION	72
2 POSITION DU PROBLÈME DE LA COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE	72
3 CHOIX DE LA SURFACE DE GLISSEMENT	73
4 EXISTENCE DU MODE DE GLISSEMENT	73
5 DYNAMIQUE DE RÉGIME GLISSANT	74
6 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE ROBUSTE	76
7- APPLICATION DE LA COMMANDE PAR MODE DE GLISSEMENT AU MODÈLE DE SIMULATION D'UN MISSILE 3 AXES	77
7-1 Modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en roulis	
7-2 Modèle de simulation d'un missile stabilisé en roulis	
7-3 Conclusion	88
<b>Chapitre 5 : ÉTUDE COMPARATIVE</b>	90
AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DES LOIS DE COMMANDES ÉLABORÉES	90
1- LA COMMANDE LQG	
2- LA COMMANDE $H_{\infty}$	
3- LA COMMANDE PAR MODE GLISSANT	
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	92
<b>Annexe A COMMANDE ADAPTATIVE</b>	94
1- INTRODUCTION	
2- PRINCIPE DE LA COMMANDE ADAPTATIVE	94
3- CLASSE DES PROCÉDES A COMMANDER	96
4- ALGORITHME D'ADAPTATION PARAMÉTRIQUE (A,A,P)	97
4-1 Introduction	
4-2 Formulation du problème	
4-3 Algorithme des moindres carrés récursifs	
5- ESTIMATEUR DE PARAMÈTRE ROBUSTE	99
5-1 Traitement de données	
5-2 Propriétés de l'algorithme d'adaptation paramétrique robuste	
5-3 Algorithme d'adaptation paramétrique	
<b>Annexe B</b>	103
BIBLIOGRAPHIE	108

## LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS

$m$  : La masse du missile.

$V$  : la vitesse du missile.

$u, v$  et  $w$  : les 03 composantes du vecteur vitesse  $V$ .

$\Omega$  : vitesse angulaire du missile.

$p, q$  et  $r$  : les 03 composantes de  $\Omega$ .

$\rho$  : masse spécifique de l'air (densité de l'air).

$M$  : le nombre de Mach (1 Mach=1250km/h)..

$a$  : Vitesse du son dans l'air.

$Q$  : pression cinétique  $= \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2}\rho a^2 M^2$ .

$X, Y$  et  $Z$  : les 3 forces aérodynamiques sur les axes de roulis  $G_x$ , l'axe de tangage  $G_y$  et l'axe de lacet.

$L, M$  et  $N$  : les moments des forces aérodynamiques.

$F$  : la poussée.

$A, B$  et  $C$  : les moments d'inertie principaux.

$S$  : surface de référence ( c'est la section droite du fuselage).

$l$  : longueur de référence ( c'est le diamètre du fuselage).

$\delta_L, \delta_M, \delta_N$  : Braquage de la commande du mobile respectivement de roulis, de tangage et du lacet. Un braquage positif correspond à un moment positif.

$\alpha$  : incidence dans le plan de tangage.

$\beta$  : angle de dérapage.

$U(t)$  : vecteur commande.

$Y(t)$  : vecteur de sortie.

$w(t)$  : perturbations d'état du système.

$v(t)$  : perturbations de sortie.

$x(t)$  : vecteur d'état.

$\theta$  : vecteur des paramètres.

$\Phi$  : vecteur d'observations.

$A, B, C$  et  $D$  : réalisation d'état.

$G$  : matrice de transfert du système.

$I_n$  : Matrice identité de dimension  $n$ .

$A^T$  : transposée de la matrice  $A$ .

$Q_c, R_c$  : Matrices de pondération de la commande LQ.

$K$  : Matrice de gain de la commande LQ.

$L, L^f$  : Matrices de gain du PK et du FK.

$\|x(t)\|_2$  : La norme  $H_2$  de la séquence  $\{x(t)\}$ .

$\|x(t)\|_\infty$  : La norme  $H_\infty$  de la séquence  $\{x(t)\}$ .

$S$  : fonctions de sensibilité.

$T$  : Fonctions de sensibilité complémentaire.

$J$  : Coût estimé et coût réalisé.

## INTRODUCTION

Depuis l'existence de l'automatique, les chercheurs s'intéressent au problème de la robustesse qui traduit l'invariance ou la résistance du comportement du système lorsqu'il est soumis à des perturbations de natures diverses.

La robustesse en stabilité est définie comme la possibilité de maintien de la stabilité du système en présence d'incertitudes.

Quant à la robustesse en performances, elle conserve certaines caractéristiques initialement spécifiées (temps de réponse, dépassement, précision, réjection des bruits...etc.).

Au cours de ces vingt dernières années, la commande adaptative a trouvé des applications dans beaucoup de domaines car elle prend en compte les non linéarités ainsi que la nature variante dans le temps du système à commander.

Parce que des instabilités du système de commande peuvent surgir, les chercheurs ont été amenés à prendre en considération l'aspect robustesse.

Le travail présenté dans cette thèse est principalement consacré à l'étude et à la synthèse des lois de commandes adaptatives, robustes, linéaires et non linéaires basées sur les techniques LQG,  $H_\infty$ , mode glissant pour le pilotage d'un missile 3 axes. Ce dernier présente de fortes non linéarités au niveau des équations régissant son mouvement ainsi que la variation des paramètres aérodynamiques en fonction du temps. Il vise à répondre à la question suivante :

Parmi les nouvelles techniques de commandes caractérisées par leur robustesse, leur rapidité et leur stabilité, quelle est la plus à même de garantir un compromis entre les contraintes de stabilité et de temps pour le pilotage d'un missile 03 axes ?

Pour y répondre:

On commence par modéliser un missile 3 axes afin d'obtenir un modèle de simulation.

Ensuite, on présente une étude théorique des lois de commande LQG et  $H_\infty$  qui sont appliquées aux systèmes non linéaires avec l'emploi de réseaux de modèles locaux.

Et, on entame la commande non linéaire par mode glissant.

On termine finalement par une étude comparative des différentes lois de commandes en mettant en évidence les avantages et les inconvénients de chacune d'elles en vue d'adopter la plus performante.

Il est à signaler que les simulations ont été effectuées en présence de non linéarités aérodynamiques, de dynamiques négligées, de couplages inter-voies, de bruit de mesure et de perturbations d'état.

Ce mémoire comprend cinq chapitres qui sont brièvement présentés comme suit :

**Chapitre I :** Ici on évoque le modèle de simulation utilisé tout au long de ce mémoire. Ceci nous amène à rappeler quelques notions de base de la mécanique de vol et à mettre le modèle dynamique du missile sous forme d'état ce qui permettra de vérifier les performances des différentes lois de commandes élaborées.

**Chapitre II :** Il comporte deux parties.

La première destinée à la présentation d'une étude théorique de la commande LQG et de celle du filtre de Kalman.

La seconde, à la présentation des résultats de simulation de la commande adaptative LQG appliquée au modèle simulé du missile 3 axes.

**Chapitre III :** Ici on a présenté une étude théorique de la commande  $H_\infty$  suivie de résultats de simulation de la commande adaptative  $H_\infty$  dans le cas du missile 3 axes.

**Chapitre IV :** Il concerne la commande par mode glissant, et les résultats obtenus en appliquant cette commande sur le modèle de simulation élaboré (missile 3 axes).

**Chapitre V :** Ici nous proposons une étude comparative des différentes lois de commandes adaptatives.

La commande adaptative est abordée en annexe.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale incluant une synthèse des résultats obtenus pour chaque type de commande.



œuvre des lois de guidage ( parfois appelées méthodes de conduite ) qui sont l'application d'une stratégie au traitement des écarts missile – cible.

Ces équipements de guidage ne sont pas obligatoirement situés dans le missile. Certains peuvent être situés à distance ( au sol, à bord de la plate-forme : avion, char, navire...).

Si le détecteur ou l'élaborateur d'ordre ne font pas partie des équipements du missile, il faut prévoir une transmission des informations.

- **Pilotage :**

C'est l'ensemble des équipements qui permettent :

- d'exécuter les ordres fournis par l'élaborateur d'ordre en donnant aux dispositifs de commande de la cellule, gouverne ou système de contrôle de poussée ou ailes mobiles, les ordres convenables.
- de stabiliser la cellule autour du centre de gravité, ceci quelque soient les conditions de vol ( Mach, altitude...) [2].

Comme il apparaît sur le schéma précédent, le pilotage nécessite :

- **Des organes de commande ( généralement des servomoteurs) :** Ce sont des équipements destinés à manœuvrer les dispositifs de pilotage.

- **Des dispositifs de pilotage :** Ce sont des sous – ensembles permettant de faire réaliser au missile le facteur de charge commandé.

- **Des détecteurs ( accéléromètres, gyromètres, gyroscopes,...) :** Ce sont des dispositifs permettant de connaître les paramètres du mouvement du missile.

- **Un autopilote** mettant en œuvre des lois de pilotage ( c'est à dire la stratégie permettant, à partir des informations disponibles, de définir l'ordre destiné aux organes de commande).

Ces équipements sont obligatoirement situés dans le missile.

Du point de vue du pilotage :

- Les sorties à commander sont constituées des accélérations normales et latérales.
- Les entrées correspondent aux braquages des gouvernes.

Notre projet consiste à élaborer des commandes robustes, adaptatives, linéaires et non linéaires de différentes familles pour exécuter l'ordre fourni par l'élaborateur d'ordre sous la contrainte de stabilité.

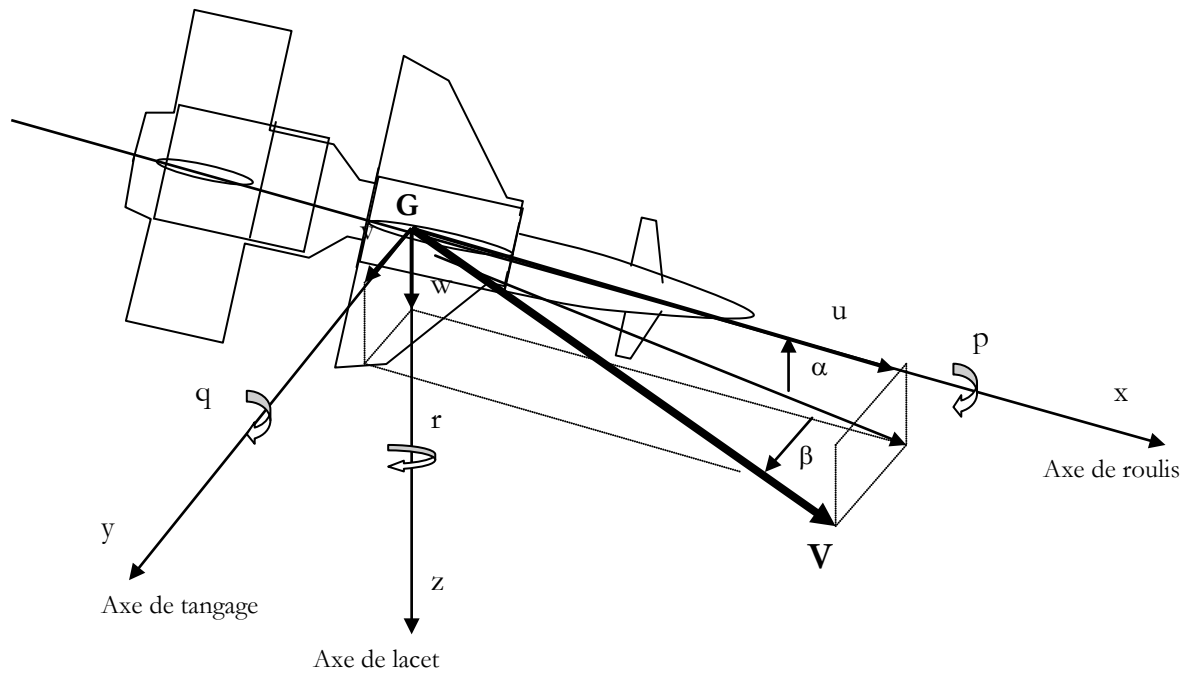
Pour obtenir un modèle de simulation qui permet de vérifier les performances des lois de commandes élaborées, on commence par la modélisation dynamique d'un missile 03 axes.

## 2- **PRESENTATION DE L'APPLICATION :**

### 2-1 **Description dynamique du modèle de l'engin :**

Cette description commence par quelques résultats de la mécanique classique concernant le mouvement d'un corps solide à 6 degrés de liberté – trois degrés permettant de définir la localisation d'un point de référence dans le corps ( habituellement le centre de gravité ) et trois définissant l'orientation qui est désignée couramment dans le cadre de ce type d'application comme l'attitude de l'engin.

**Symboles et systèmes d'axes :**



**FigureI-2 :** Vecteur vitesse par rapport au trièdre du missile

G: est le centre de gravité.

Gx : est l'axe de roulis.

Gy : est l'axe de tangage.

Gz : est l'axe de lacet.

$\alpha > 0$  : incidence dans le plan de tangage.

$\beta < 0$  : incidence dans le plan de lacet ou « dérapage ».

On a les relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2}} \text{ et } \operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{u} \\ \sin \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \text{ et } \operatorname{tg} \beta = -\frac{v}{u} \end{cases}$$

avec l'hypothèse  $\alpha$  et  $\beta$  petits, on a :

$$\alpha \approx \frac{w}{u}$$

$$\beta \approx -\frac{v}{u}$$

$$u = \|\vec{V}\| = V$$

**Coefficient aérodynamiques :**

Autour d'un point de vol donné, les expressions linéarisées des coefficients aérodynamiques sont considérées :

$$C_y = C_{y\beta} \cdot \beta + C_{y\delta_N} \cdot \delta_N$$

$$C_z = C_{z\alpha} \cdot \alpha + C_{z\delta_M} \cdot \delta_M$$

$$C_L = C_{L\delta_L} \cdot \delta_L + \frac{1}{V} C_{Lp} \cdot p + \Delta C_{L\alpha} \beta$$

$$C_M = C_{M\alpha} \cdot \alpha + C_{M\delta_M} \cdot \delta_M + \frac{1}{V} C_{Mq} \cdot q$$

$$C_N = C_{N\beta} \cdot \beta + C_{N\delta_N} \cdot \delta_N + \frac{1}{V} C_{Nr} \cdot r$$

avec :

$$C_{y\beta} = \frac{\partial C_y}{\partial \beta}, C_{z\alpha} = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha}, \dots$$

Les coefficients  $C_{z\alpha}$ ,  $C_{y\beta}$ ,  $C_{M\alpha}$  et  $C_{N\beta}$  peuvent présenter des non linéarités plus ou moins fortes. Dans le cadre de l'application, les caractéristiques  $C_z(\alpha)$ ,  $C_y(\beta)$ ,  $C_M(\alpha)$  et  $C_N(\beta)$  présentent des non linéarités faibles, dont l'allure est représentée par la figure suivante :

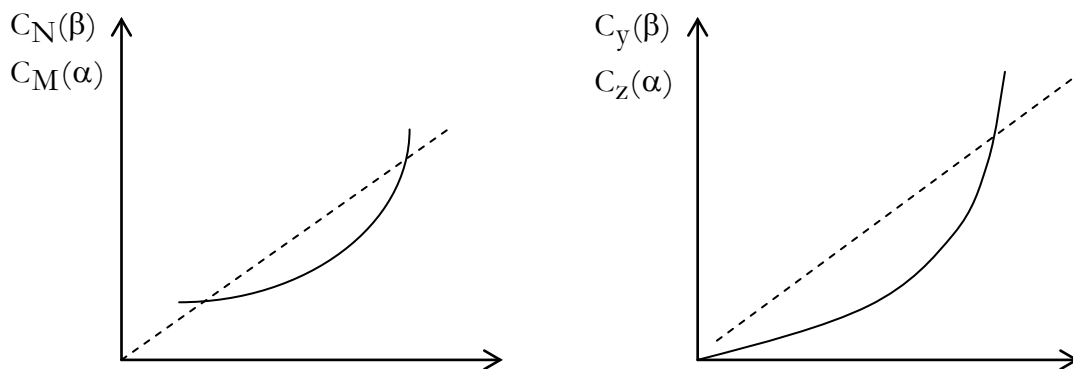


Figure I-3 : Variation des coefficients aérodynamiques

L'étude de petites perturbations autour de la position d'équilibre conduit souvent à séparer les équations définissant le mouvement longitudinal, dit de tangage, de celles définissant le mouvement latéral, dit de lacet. Les deux voies sont essentiellement couplées par les termes  $pq$  et  $pr$  qui apparaissent dans les équations des moments et par  $p\alpha$  et  $p\beta$ , qui interviennent dans les expressions approchées des accélérations définissant les équations des forces. Dans le cas d'un pilotage à plat (technique skid-to-turn), pour minimiser les couplages, le pilote est synthétisé de façon à ce que la dynamique de la chaîne de roulis soit plus grande comparée à celles des voies de lacet et de tangage. Dans le cas d'un pilotage type avion (bank-to turn), la démarche est analogue, la réduction de l'effet des couplages est obtenue en accélérant la chaîne de lacet par rapport aux deux autres. Cela permet dans de nombreux cas de considérer le système faiblement couplé et pour la synthèse il est possible de régler les chaînes indépendamment. Typiquement, la gouverne (équivalente) de direction permet principalement sur la voie de lacet, la gouverne de profondeur pilote la voie de lacet et les ailerons commandent la chaîne de roulis.

**Forces aérodynamiques :**

$$X = Q.S.C_x = Q.S.(C_{x0} + C_{x\delta})$$

$$Y = Q.S.C_y = Q.S.(C_{y\beta}.\beta + C_{y\delta_N}.\delta_N)$$

$$Z = Q.S.C_z = Q.S.(C_{z\alpha}.\alpha + C_{z\delta_M}.\delta_M)$$

**Remarque :** Ces équations sont valables pour l'aérodynamique linéaire (incidence inférieure à  $10^0$ - $15^0$ ).

**Moments aérodynamiques :**

- Moment de roulis

$$L = Q.S.l.C_L = Q.S.l.(C_{L\delta_L}.\delta_L + \frac{1}{V}C_{Lp}.p + \Delta C_{L\alpha\beta})$$

- Moment de tangage

$$M = Q.S.l.C_M = Q.S.l.(C_{M\alpha}.\alpha + C_{M\delta_M}.\delta_M + \frac{1}{V}C_{Mq}.q)$$

- Moment de lacet

$$N = Q.S.l.C_N = Q.S.l.(C_{N\beta}.\beta + C_{N\delta_N}.\delta_N + \frac{1}{V}C_{Nr}.r)$$

$\frac{1}{V}C_{Mq}$  et  $\frac{1}{V}C_{Nr}$  : dérivées partielles des moments par rapport à la vitesse (amortissement).

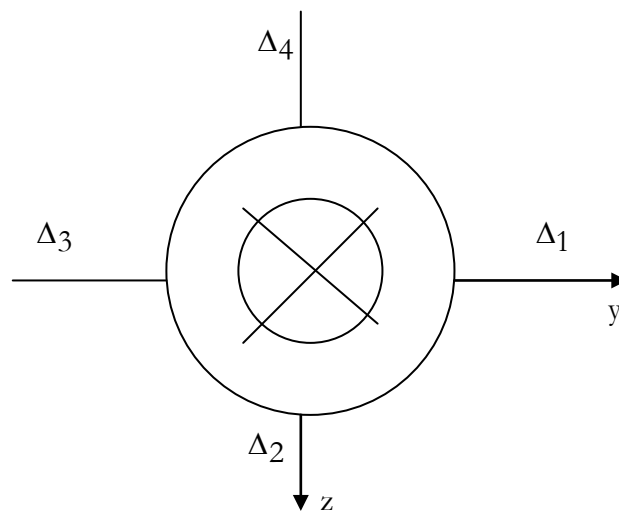
$\frac{1}{V}C_{Lp}$  : couple d'amortissement dû à la vitesse d'amortissement du roulis.

$\Delta C_{L\alpha\beta}$  : couplage éventuel entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

**3- EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE**

**3-1 Description des gouvernes :**

L'engin considéré est « cruciforme » avec les gouvernes situées à l'arrière. La figure I-4 représente l'engin vu de l'arrière.



**Figure I-4**

Les braquages réels des gouvernes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  se font suivant les axes  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ . Pratiquement, bien que disposant de quatre gouvernes pour piloter l'engin, seuls les 3 braquages équivalents  $\delta_L, \delta_N$  et  $\delta_M$  sont considérés, ils sont obtenus par la transformation suivante :

$$\begin{aligned}\delta_L &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \delta_N &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_4) \\ \delta_M &= \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)\end{aligned}$$

Les braquages réels s'obtiennent en posant :

$$\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

soit :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \delta_L + \delta_M \\ \sigma_2 &= \delta_N + \delta_M \\ \sigma_3 &= -\delta_L + \delta_M \\ \sigma_4 &= -\delta_N + \delta_M\end{aligned}$$

### 3-2 Equations du mouvement :

- Une première équation des forces est donnée par le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

#### Forces extérieures :

1. Forces aérodynamiques X, Y et Z.
2. Forces de propulsion :

On admet que la poussée est variable avec le temps et dirigée suivant l'axe longitudinal du missile.

3. Pesanteur :

La pesanteur est une force verticale et dirigée vers le sol et d'intensité  $mg$ .

4. Forces d'inertie.

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V} \right) = m \left( \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) = m \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} + ru - pw \\ \dot{w} - qu + pv \end{bmatrix}$$

d'où les équations des forces :

$$m[\dot{u} + qw - rv] = -X + F_x \quad (e1)$$

$$m[\dot{v} + ru - pw] = Q.S.(C_y \beta \cdot \beta + C_y \delta_N \cdot \delta_N) \quad (e2)$$

$$m[\dot{w} - qu - pv] = -Q.S.(C_z \alpha \cdot \alpha + C_z \delta_M \cdot \delta_M) \quad (e3)$$

- Une deuxième équation des moments est issue de l'application du théorème du moment cinétique.

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \bar{H}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \bar{H} = \begin{bmatrix} A\dot{p} \\ B\dot{q} \\ C\dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\dot{p} + (C-B)qr \\ B\dot{q} + (A-C)rp \\ C\dot{r} + (B-A)pq \end{bmatrix}$$

d'où les équations des moments :

$$A\dot{p} + (C-B)qr = \text{Q.S.l.}(C_L \delta_L \cdot \delta_L + \frac{1}{V} C_{Lp} + \Delta C_{L\alpha\beta}) \quad (e4)$$

$$B\dot{q} + (A-C)rp = \text{Q.S.l.}(C_M \alpha \cdot \alpha + C_M \delta_M \cdot \delta_M + \frac{1}{V} C_{Mq} \cdot q) \quad (e5)$$

$$C\dot{r} + (B-A)pq = \text{Q.S.l.}(C_N \beta \cdot \beta + C_N \delta_N \cdot \delta_N + \frac{1}{V} C_{Nr} \cdot r) \quad (e6)$$

Nous avons quatre groupes d'équations : l'équation (e1) qui va déterminer la vitesse, l'équation de roulis (e4) qui va déterminer p et deux groupes qui vont déterminer le mouvement en tangage (e3) et (e5) et celui du lacet (e2) et (e6). Dans le cas ces équations sont couplées.

### Modèle d'état global du missile :

On pose :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad \text{vecteur d'état}$$

$$U = \begin{bmatrix} \delta_L \\ \delta_N \\ \delta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \text{Arctg} \frac{x_3}{x_1}$$

$$\beta = \text{Arctg} - \frac{x_2}{x_1}$$

On remarque que les équations du mouvement du missile sont sous forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x).U \\ y = h(x) + d(x).U \end{cases}$$

avec :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_5x_3 + x_6x_2 - \frac{X + F_x}{m} \\ -x_6x_1 + x_4x_3 + \frac{Q.S}{m} C_{y\beta} \text{Arctg} \frac{-x_2}{x_1} \\ x_5x_1 - x_4x_2 - \frac{Q.S}{m} C_{z\alpha} \text{Arctg} \frac{x_3}{x_1} \\ \frac{(B-C)}{A} x_5x_6 + \frac{Q.S.l}{A} \left( \frac{1}{V} C_{Lp} \cdot x_4 + \Delta C_{L\alpha\beta} \right) \\ \frac{(C-A)}{B} x_6x_4 + \frac{Q.S.l}{B} \left( C_{M\alpha} \cdot \text{Arctg} \frac{x_3}{x_1} + \frac{1}{V} C_{Mq} x_5 \right) \\ \frac{(A-B)}{C} x_4x_5 + \frac{Q.S.l}{C} \left( C_{N\beta} \cdot \text{Arctg} \frac{-x_2}{x_1} + \frac{1}{V} C_{Nr} x_6 \right) \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q.S}{m} C_{yu2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Q.S}{m} C_{zu3} \\ \frac{Q.S.l}{A} C_{u1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q.S.l}{B} C_{Mu3} \\ 0 & \frac{Q.S.l}{C} C_{Nu2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$h(x) = \begin{bmatrix} -x_5x_3 + x_6x_2 - \frac{X + F_x}{m} \\ -x_2x_1 + x_4x_3 + \frac{Q.S}{m} \left( C_{y\beta} \text{Arctg} \frac{-x_2}{x_1} \right) \\ x_5x_1 - x_4x_2 - \frac{Q.S}{m} \left( C_{z\alpha} \text{Arctg} \frac{x_3}{x_1} \right) \end{bmatrix}$$

$$d(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q.S}{m} C_{yu2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Q.S}{m} C_{zu3} \end{bmatrix}$$

**Remarque :** Nous remarquons que le modèle obtenu est un système non linéaire multivariable et couplé. La sévérité de ces caractéristiques rend la commande de ce dernier un problème crucial.

**Vitesse :**

Pour  $v = x_2, w = x_3$  petits devant  $x_1 = u = V$  on aura :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{-x_2}{x_1}\right) \approx \frac{-x_2}{x_1}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x_3}{x_1}\right) = \frac{x_3}{x_1}$$

L'équation de la vitesse sera simplifiée en supprimant le terme (qw-rv). Donc elle est déterminée en intégrant l'équation (e1) :

$$\dot{x}_1 = \Gamma_x = -\frac{X + F_x}{m}$$

avec  $\Gamma_x$  est l'accélération de roulis.

### **Modèle d'état du missile stabilisé en roulis :**

On a  $p = x_4 = 0$ . On détermine le braquage  $\delta_L$  à partir de l'équation de roulis (e4).

$$U_1 = \delta_L = \frac{C - B}{Q.S.l.C_L \delta_L} x_5 x_6$$

Les deux groupes d'équation, tangage et lacet sont indépendants. Donc nous avons un guidage plan.

- **Mouvement de tangage**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Q.S.C_{z\alpha}}{mV} & V \\ \frac{Q.S.l.C_{M\alpha}}{B.V} & \frac{Q.S.l.C_{Mq}}{B.V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{Q.S.C_{zu3}}{m} \\ \frac{Q.S.l.C_{Nu3}}{B.V} \end{bmatrix} \cdot U_3$$

$$z_2 = \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{Q.S.C_{z\alpha}}{m.V} & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} - \frac{Q.S.C_{zu3}}{m} \cdot U_3$$

- **Mouvement de lacet :**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Q.S.C_{y\beta}}{mV} & -V \\ \frac{Q.S.l.C_{N\beta}}{C.V} & \frac{Q.S.l.C_{Nr}}{C.V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{Q.S.C_{yu2}}{m} \\ \frac{Q.S.l.C_{Nu2}}{C.V} \end{bmatrix} \cdot U_2$$

$$z_2 = \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{Q.S.C_{y\beta}}{m.V} & -V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} - \frac{Q.S.C_{yu2}}{m} \cdot U_2$$

### **Remarque :**

Les équations du lacet et du tangage ont la même structure mais les paramètres aérodynamiques et les moments d'inerties sont différents, c'est à dire :

$$C_{z\alpha} \neq C_{y\beta}$$

$$C_{zu3} \neq C_{yu2}, \dots$$

$$B \neq C$$

**Modèle d'état du missile cruciforme stabilisé en roulis :**

On a :

$$\begin{aligned} C_z\alpha &= C_y\beta \\ C_{zu_3} &= C_{yu_2}, \dots \\ B &= C \end{aligned}$$

ce qui conduit à avoir  $U_1 = 0$ .

On en conclut que les équations du tangage et celles du lacet sont identiques ; compte tenu des notations il faut remplacer  $\alpha$  par  $-\beta$ ,  $q$  par  $-r$  et  $\delta_M$  par  $-\delta_N$ .

En effet, sachant que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x_3}{V} \\ \beta &= -\frac{x_2}{V} \\ \Rightarrow x_3 &= x_2 \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} x_5 &= -x_6 \\ U_2 &= -U_3. \end{aligned}$$

Donc on étudie le tangage et les résultats sont identiques pour le lacet.

On remarque que le modèle de simulation d'un missile stabilisé en roulis (cruciforme ou non) est sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t).x(t) + B(t).U(t) \\ y(t) &= C(t).x(t) + D(t).U(t) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A(t) &= f(Q(t), V(t), C_z\alpha(t), C_y\beta(t), \dots) \\ B(t) &= f(Q(t), V(t), C_{zu_3}(t), C_{yu_2}(t), \dots) \\ C(t) &= f(Q(t), V(t), C_z\alpha(t), C_y\beta(t), \dots) \\ D(t) &= f(Q(t), C_{zu_3}(t), C_{yu_2}(t), \dots) \end{aligned}$$

**Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons modéliser un missile 03 axes. Ce dernier est représenté par un système dynamique variant dans le temps et incertain. Donc on doit élaborer des commandes robustes et ou adaptatives de différentes familles pour exécuter l'ordre fourni par l'élaborateur d'ordre sous la contrainte de stabilité. Après une analyse des lois de commandes existantes, on propose :

- La commande adaptative LQG
- La commande  $H_\infty$ .
- La commande par mode glissant.

## 1- INTRODUCTION

La commande linéaire quadratique est une méthode de synthèse de la commande particulière, qui suppose le système à commander linéaire et réalise un retour d'état linéaire obtenu par la minimisation d'un indice de performance quadratique. Cette méthode de synthèse utilisant un formalisme matriciel permet de traiter une large classe de systèmes de façon assez systématique.

En ce qui concerne la robustesse, la commande LQ est connue pour présenter des propriétés intrinsèques de stabilité et de robustesse vis à vis de certaines erreurs de modélisations [And71] et [Kwa72]. La robustesse du régulateur optimal est typiquement mesurée en terme de marge de gain et marge de phase étant donné qu'en commande classique, la notion de marges joue un rôle important pour quantifier le degré de robustesse d'un système vis à vis d'incertitudes. D'un point de vue pratique, des bornes inférieures sur ces quantités sont données comme spécifications, dans la mesure où bien souvent il s'avère que des marges trop faibles impliquent une détérioration importante des performances réalisées par rapport à celles synthétisées sur le modèle nominal.

Enfin les performances, obtenues à partir d'un régulateur optimal, sont déterminées par les pôles de la boucle fermée, dont la localisation est étroitement liée aux matrices de pondérations intervenant dans la définition de l'indice de performance. Le problème réside donc dans un choix judicieux de ces matrices.

## 2- POSITION DU PROBLEME

Considérons les systèmes linéaires invariants décrits par les équations d'état et de sortie :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}.\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}.U(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}.\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}.U(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; U(t) \in \mathbb{R}^m; \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$$

$\{\mathbf{w}(t)\}$  et  $\{\mathbf{v}(t)\}$  sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de covariances  $\mathbf{Q}_0$  et  $\mathbf{R}_0$ .

- La matrice de transfert correspondante est :

$$G(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}, \in \mathbb{R}^{mm}(s) \text{ avec } \Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \in \mathbb{R}^{nn}(s)$$

- La commande LQG consiste à minimiser le critère :

$$V(x(t_0), t_0, U) = \int_0^T \left\{ U(t)^T R_c(t) U(t) + x(t)^T Q_c(t) x(t) \right\} dt$$

$Q_c$  et  $R_c$  sont des matrices de pondérations telles que :  $Q_c = Q_c^T \geq 0$  et  $R_c = R_c^T \geq 0$  on suppose que :

- $(A, B)$  est stabilisable et  $(Q_c^{\frac{1}{2}}, A)$  est détectable.
- $(C, A)$  est détectable et  $(A, Q_0^{\frac{1}{2}})$  est stabilisable.
- La matrice de transfert  $G(s)$  est inversible.

### 3- COMMANDE LQG

La commande LQG résulte de la combinaison d'une commande LQ et d'un estimateur de Kalman , régis selon le principe de séparation. La loi de commande associée est

donnée par:  $U(t) = -K \hat{x}(t)$

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - LC] \hat{x}(t) + BU(t) + Ly(t)$$

$$K = R_c^{-1} B^T P$$

$$L = AL^f = AL_1 C^T R_0^{-1}$$

Avec :  
et

$$0 = A^T P A - A^T P B [R_c + B^T P B]^{-1} B^T P A + Q_c$$

$$0 = A.L_1.A^T + Q_0 - A.L_1.C^T [R_0 + C.L_1.C^T]^{-1} C.L_1.A^T$$

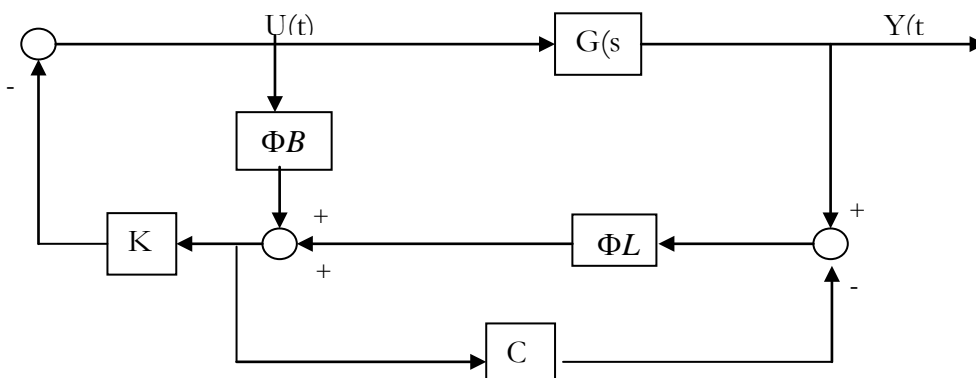


Figure II-1: Régulateur LQG

La commande LQG est alors entièrement déterminée par les matrices de gain  $K$  et  $L$  qui dépendent respectivement des matrices de pondération  $(Q_c, R_c)$  et des matrices de covariances  $(Q_0, R_0)$ .

#### **4- INTERPRETATION $H_2$ DE LA COMMANDE LQG**

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la commande LQG est équivalente à un problème d'optimisation  $H_2$  où la matrice à minimiser exprime un compromis performance / robustesse en entrée ou en sortie.

Le système de commande LQG peut être réécrit dans le **domaine fréquentiel** sous la forme :

$$y(s) = \begin{bmatrix} G(s) & C\Phi(s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ w(s) \\ v(s) \end{bmatrix}$$

avec

$$U(s) = -K(s)y(s)$$

où  $G(s) = C\Phi(s)B$  et  $K(s)$  sont respectivement les matrices de transfert du système à commander et du régulateur LQG.

Le système en boucle fermée qui en résulte est décrit par :

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = T_{BF}(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ v(s) \end{bmatrix}$$

avec

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} [I - \Phi BK(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}C]\Phi & -\Phi(s)BK(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} \\ -[I + K(s)G(s)]^{-1}K(s)C\Phi & -[I + K(s)G(s)]^{-1}K(s) \end{bmatrix}$$

$T_{BF}(s)$  est la matrice de transfert en boucle fermée que l'on peut récrire en utilisant la fonction de sensibilité à l'entrée du système  $S_e(s) = [I + K(s)G(s)]^{-1}$  et la fonction de sensibilité à la sortie

$S_s(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}$  comme suit :

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} [I - \Phi(s)BK(s)S_s(s)C]\Phi & -\Phi(s)BK(s)S_s(s) \\ -S_e(s)K(s)C\Phi(s) & -S_e(s)K(s) \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, le critère à minimiser  $J(x(t))$  peut se mettre sous la forme :

$$J(x(t)) = E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \gamma^T(t) \gamma(t) dt \right\}$$

avec

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Q_c^2} x(t) & \frac{1}{R_c^2} U(t) \end{bmatrix}^T$$

ou en utilisant le théorème de Parseval et la relation :

$$J(x(t)) = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} \left[ \Gamma(j\omega) \Gamma^*(-j\omega) \right]$$

avec :

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Q_c^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_c^2} \end{bmatrix} T_{BF}(s) \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{Q_0^2} \right)^T & 0 \\ 0 & \left( \frac{1}{R_0^2} \right)^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q^2 [I - \Phi B_R S_s C] \Phi \left( \frac{1}{Q_0^2} \right)^T & -Q_c^2 \Phi B K S_s \left( \frac{1}{R_0^2} \right)^T \\ -R_c^2 S_e K C \Phi \left( \frac{1}{Q_0^2} \right)^T & -R_c^2 S_e K \left( \frac{1}{R_0^2} \right)^T \end{bmatrix}$$

Ce résultat montre que la commande LQG peut être utilisée pour réaliser un bon compromis performance / robustesse en choisissant judicieusement les paramètres de synthèses à savoir les matrices de pondération de la commande LQ et les matrices de covariance des bruits d'état et de mesure.

## **5- AMELIORATION DES PERFORMANCES EN POURSUITE**

L'inconvénient majeur de la structure de commande quadratique est de ne pas assurer des erreurs statiques nulles lorsque les consignes imposées au procédé ne sont pas nulles. La minimisation du critère quadratique correspond en effet à un compromis entre les amplitudes des actions (entrée du système)  $U$  (représentées par le terme  $U^T R U$  et les amplitudes des écarts entre consignes et mesures (représentées par  $e^T Q e$ ). Cette caractéristique se révèle assez gênante

pour une application industrielle, pour cela on désire généralement que les consignes fixées soient effectivement atteintes.

Ce problème peut cependant être résolu de manière satisfaisante en ajoutant au système un gain statique ou un certain nombre d'intégrateurs numériques ou les deux en même temps. Ces intégrateurs ont pour entrées respectives les écarts entre consignes et mesures correspondantes et le gain statique compense les consignes.

### 5-1- Utilisation d'une matrice de gain

Soit le système de commande suivant :

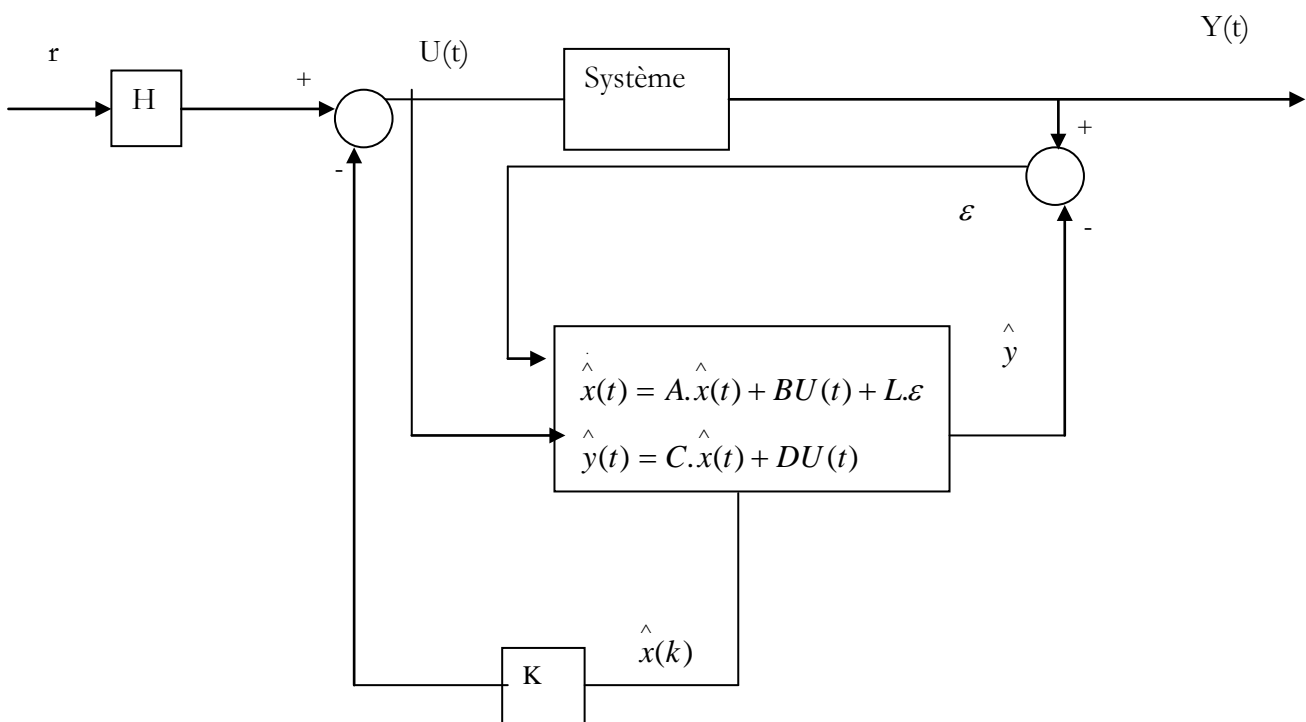


Figure II-2 : Régulateur LQG avec un gain statique H

L'équation du système est :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + DU(t)$$

où  $r(t)$  est un signal de référence que doit suivre la sortie du système  $y(t)$ .

L'équation du filtre de Kalman est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A \hat{x}(t) + BU(t) + L \cdot \varepsilon \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t) + DU(t) \end{aligned}$$

La commande LQG est :

$$U(t) = H \cdot r(t) - K \cdot \hat{x}(t)$$

$$\text{avec : } \varepsilon(t) = C \cdot x(t) - C \cdot \hat{x}(t)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A \hat{x}(t) - BK \hat{x}(t) + BHr(t) \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t) - D \cdot K \cdot \hat{x}(t) + DHr(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= (A - BK - LC) \hat{x}(t) + L \cdot C \cdot \hat{x}(t) + BHr(t) \end{aligned}$$

en utilisant la transformée en s, on obtient :

$$\begin{aligned} s \cdot x_T(s) &= A_T x_T(s) + B_T r(s) \\ y(s) &= C_T x_T(s) + D_T r(s) \end{aligned}$$

où

$$x_T(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}, \quad A_T = \begin{bmatrix} A & -B \cdot K \\ L \cdot C & A - B \cdot K - LC \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \quad C_T = [C \quad -D \cdot K], \quad D_T = D$$

en régime permanent ( $s=0$ ), la relation entre  $y(s)$  et  $r(s)$  est donnée par :

$$y(s) = \left[ C_T (sI - A_T)^{-1} B_T + D_T \right] Hr(s)$$

Si on veut avoir une erreur statique nulle il suffit de prendre

$$H = \left[ C_T (sI - A_T)^{-1} B_T + D_T \right]^{-1}$$

5-2- Utilisation de l'action intégrale

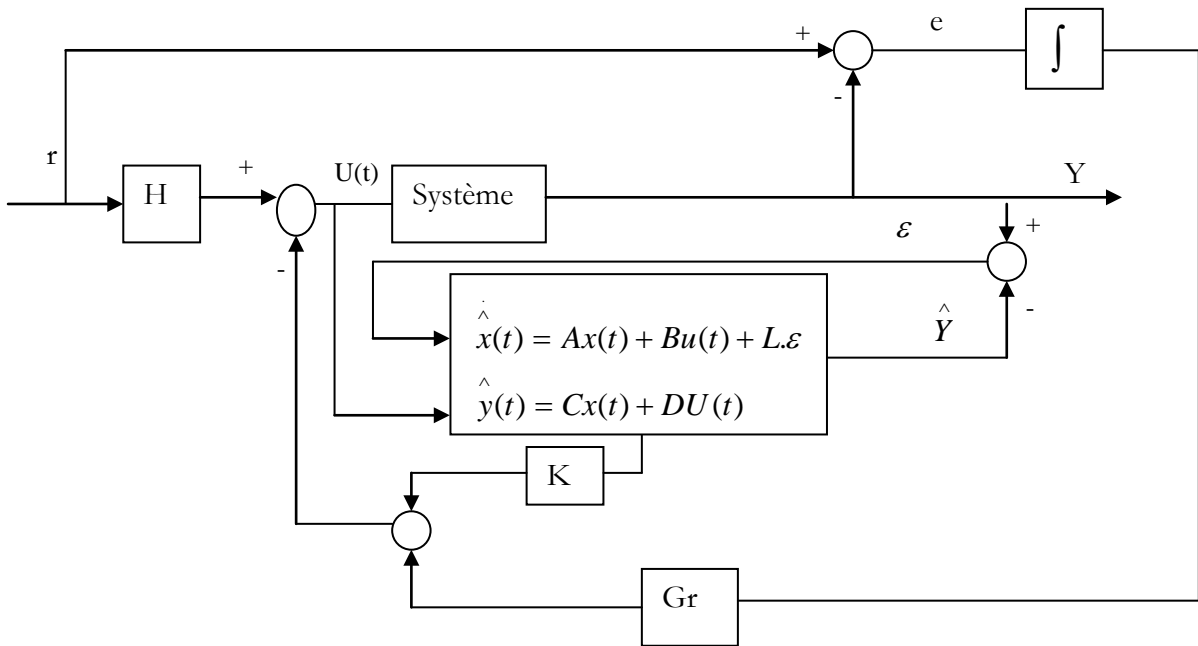


Figure II-3 : Régulateur LQG avec un gain statique H et intégration

Les intégrateurs sont de la forme :

$$\dot{V}(t) = e(t)$$

où  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Le vecteur  $V(t)$  est de dimension égale à la dimension du vecteur de sortie c'est à dire à  $m$ ,  $T$  étant la période d'échantillonnage.

$$\text{On a : } \dot{V}(t) = r(t) - C.x(t) - DU(t)$$

L'action intégrale rajoute  $m$  états au système de commande.

Le système augmenté peut être représenté par :

$$\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1U(t) + E.r(t)$$

$$y_1(t) = C_1x_1(t) + D_1U(t)$$

donc on aura :

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ V(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} U(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y = [C \quad 0]x_1 + D.U(t)$$

La détermination du gain d'intégration Gr se fait par la minimisation du critère quadratique. Dans ce cas, on a :  $U(t) = -K_a \cdot x_1(t)$  avec le gain Ka composé par le gain K de retour d'état et le gain d'intégration Gr

$$K=[K,Gr]$$

Avec dimension de Gr(m\*n)

## **6- APPLICATION D'UNE COMMANDE ADAPTATIVE LQG SUR UN MODELE SIMULE D'UN MISSILE 3 AXES**

### **6-1 Modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en roulis**

On étudie le mouvement de tangage et les résultats sont identiques pour le mouvement de lacet.

#### **Modèle utilisé dans les simulations**

On a :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \\ \frac{QSl}{BV} \cdot C_{M\alpha} & \frac{QSl}{BV} \cdot C_{Mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{QS}{m} C_{zu3} \\ \frac{QSl}{BV} \cdot C_{nu3} \end{bmatrix} U_3$$

Sous forme :

$$\dot{x}_3 = a_{11}x_3 + a_{12}x_5 + b_1U_3$$

$$\dot{x}_5 = a_{21}x_3 + a_{22}x_5 + b_2U_3$$

$$y = c_1x_3 + c_2x_5 + D.U_3 = C.x + D.U_3$$

**Le modèle utilisé d'un observateur :**

$$\hat{\dot{x}} = \hat{A} \cdot \hat{x} + \hat{B} \cdot U + L(y - \hat{y})$$

avec

$$y = C \cdot x + D \cdot U$$

$$\hat{y} = \hat{C} \cdot \hat{x} + D \cdot U$$

L est choisie pour avoir les pôles  $(p_1, p_2)$ .

$\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  et  $\hat{D}$  sont les paramètres estimés obtenus à partir des A A P .

**Algorithme d'adaptation paramétrique (AAP) :**

La fonction de transfert du missile est:

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Son estimée s'écrit:

$$\hat{P}(s) = \frac{\hat{b}_1 s + \hat{b}_2}{s^2 + \hat{a}_1 s + \hat{a}_2} = \frac{\hat{y}(s)}{U(s)}$$

$$\hat{y}(t) = \hat{\theta} \cdot \Phi(t)^T$$

$$\text{Avec : } \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -\hat{y}(t-1) & -\hat{y}(t-2) & U(t) & U(t-1) \end{bmatrix}$$

Les A-A-P sont données par:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\varepsilon(t+1)$$

$$F(t+1)^{-1} = F(t)^{-1} + \Phi(t)\Phi(t)^T$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\Phi(t)\Phi(t)^T F(t)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)}$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \Phi(t)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)}$$

F(t) est le gain d'adaptation.

**Calcul  $\hat{K}$**

La commande est calculée à partir de :

$$U = -\hat{K} \cdot x + H \cdot r$$

avec :

$$\hat{K} = R_c^{-1} \hat{B}^T \hat{P}$$

$$\dot{\hat{P}} = \hat{A}^T \hat{P} + \hat{P} \hat{A} - \hat{A}^T \hat{P} \hat{B} \left[ R_c + \hat{B}^T \hat{P} \hat{B} \right]^{-1} \hat{P} \hat{A} + Q_c$$

En régime permanent, on a  $s=0$  :

$$H = \left[ C_T (A_T)^{-1} B_T + D_T \right]^{-1}$$

$$x_T(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad A_T = \begin{bmatrix} A & -B \cdot \hat{K} \\ L \cdot C & A - L \cdot C (B + L \cdot D + L \cdot D) \cdot \hat{K} \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} B \\ \hat{B} + L \cdot D - L \cdot D \end{bmatrix},$$

$$C_T = \begin{bmatrix} C & -D \cdot \hat{K} \end{bmatrix}, \quad D_T = D$$

$r$  est la référence et  $H$  est la matrice de gain pour annuler l'erreur statique.

La synthèse de la loi de commande a été faite à partir des modèles linéaires, et directement appliquée aux modèles simulés d'un missile 3 axes. Pour cela on a utilisé les matrices de pondérations suivantes :

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad R_c = 0.1$$

Les résultats des simulations sont présentés sur les figures II-3 à II-8.

### Commentaire :

#### **Pour le cas où les paramètres réels sont fixes et inconnus (figureII-4) :**

On remarque que l'erreur de poursuite est faible malgré la présence d'un bruit de mesure à l'instant  $t=9$  secondes.

#### **Pour le cas où une variation brusque de tous les paramètres du missile est introduites aux instants (2, 6, 10, 14 et 18) figureII-6 :**

L'erreur de poursuite est très faible mais, des pics apparaissent aux instants (2, 6, 10, 14 et 18 secondes) ce qui correspond aux variations brusques des paramètres réels du missile.

#### **Pour le cas où les paramètres réels varient dans le temps (figureII-8) :**

$$\hat{K} = R_c^{-1} \hat{B}^T \hat{P}$$

$$\dot{\hat{P}} = \hat{A}^T \hat{P} + \hat{P} \hat{A} - \hat{A}^T \hat{P} \hat{B} \left[ R_c + \hat{B}^T \hat{P} \hat{B} \right]^{-1} \hat{B}^T \hat{P} \hat{A} + Q_c$$

En régime permanent, on a  $s=0$  :  $H = \left[ C_T (A_T)^{-1} B_T + D_T \right]^{-1}$

$$x_T(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad A_T = \begin{bmatrix} A & -\hat{B} \hat{K} \\ L.C & A - L.C(\hat{B} + L.D + L.D) \hat{K} \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} B \\ \hat{B} + L.D - L.D \hat{K} \end{bmatrix},$$

$$C_T = \begin{bmatrix} C & -D \hat{K} \end{bmatrix}, \quad D_T = D$$

$r$  est la référence et  $H$  est la matrice de gain pour annuler l'erreur statique.

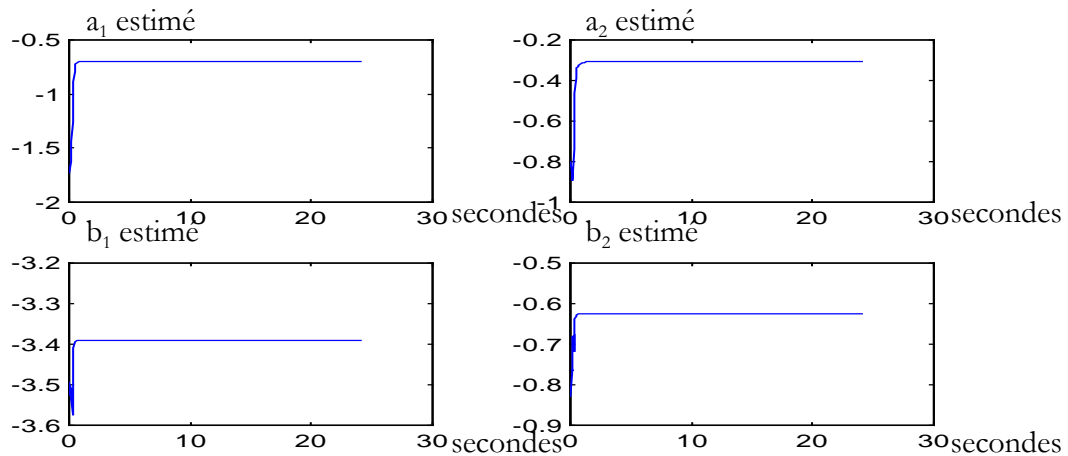
**Pour le cas où les paramètres réels sont fixes et inconnus :**

On suppose que les paramètres réels du missile sont fixes et inconnus :

$$\theta = [ a_1, a_2, b_1, b_2 ]$$

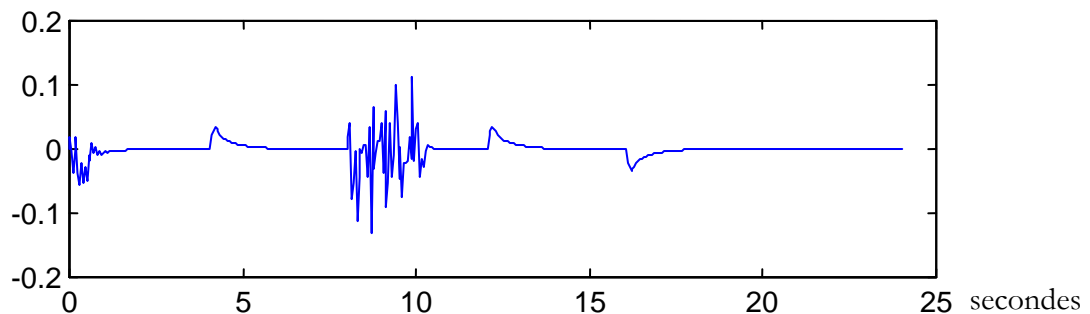
on initialise un vecteur des paramètres  $\theta_0 = [ a_1-0.7, a_2-0.8, b_1-0.9, b_2-0.7 ]$  et

on déroule l'algorithme. On obtient les résultats de simulations qui sont présentés par les figures II-3,II-4.



**Figure II-3 :** Les paramètres estimés de la fonction de transfert du missile

Commande (degrés).



On impose la variation des paramètres réels du missile sous la forme suivante :

$$\theta(t+1) = \theta(t) + 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 1 - e^{-5.t} \\ 1 - e^{-5.t} \\ 1 - e^{-5.t} \\ 1 - e^{-5.t} \\ 1 - e^{-5.t} \end{bmatrix}$$

On remarque que l'erreur est quasiment nulle dans la partie où les paramètres du missile sont stables. Par contre elle devient importante quand on injecte une perturbation sous forme de bruit de mesure à l'instant 2 secondes et s'annule rapidement.

## 6-2 Modèle simulé d'un missile stabilisé en Roulis

Concernant l'application d'une commande LQG au modèle simulé d'un missile stabilisé en roulis, on détermine la vitesse à partir de l'équation :

$$\Gamma_x = \dot{x}_1 = -\frac{X + F_x}{m}$$

avec :

$\Gamma_x$  : Accélération de Roulis.

$x_1 = V$  est la vitesse du missile.

et la commande  $U_1$  qui stabilise le Roulis :

$$U_1 = \delta_L = \frac{C - B}{QSl.C_L \delta_L} x_5 x_6$$

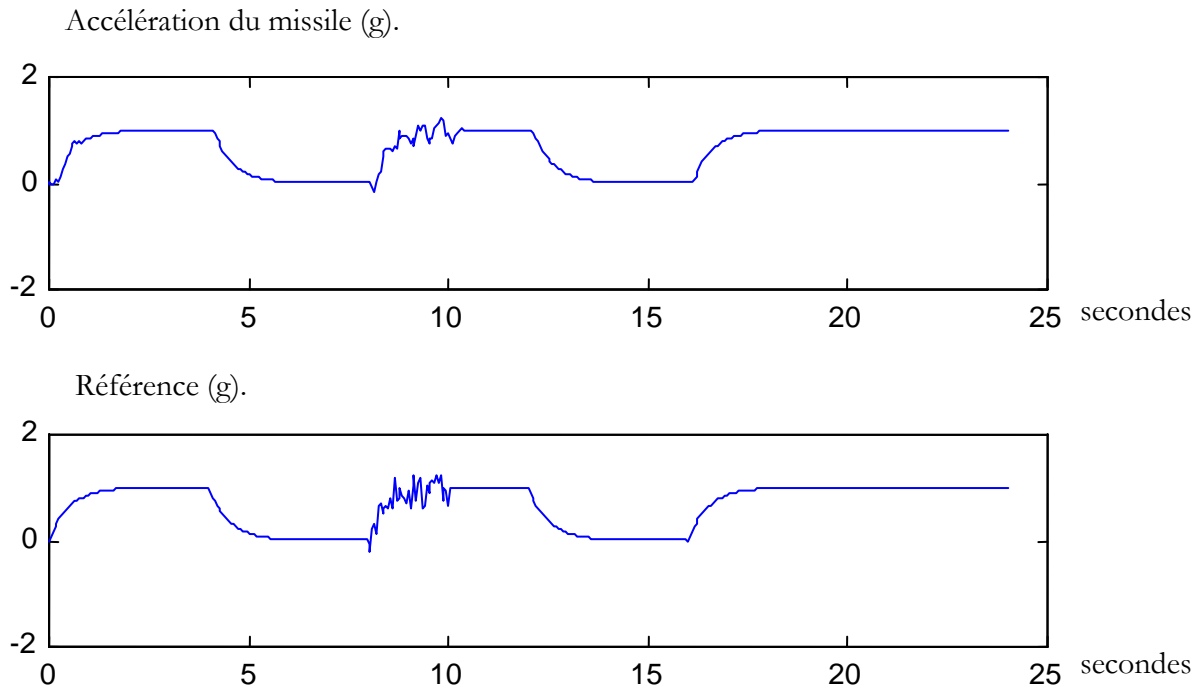
On a le mouvement de Lacet :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_y \beta}{mV} & -V \\ -\frac{QSlC_N \beta}{CV} & \frac{QSlC_N r}{CV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{QSC_{y u_2}}{m} \\ \frac{QSlC_{N u_2}}{C} \end{bmatrix} U_2$$

et l'accélération de Lacet est calculée à partir :

$$z_1 = \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_y \beta}{mV} & -V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} + \frac{QSC_{y u_2}}{m} \cdot U_2$$

Sous forme :



**Figure II-4 :** Commande LQG appliquée sur un modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en roulis dont les paramètres sont fixes et inconnus et en présence d'un bruit de mesure à l'instant  $t=9s$

**Commentaire :**

On remarque que l'erreur de poursuite est faible malgré la présence d'un bruit de mesure à l'instant  $t=9$  secondes.

**Pour le cas où une variation brusque de tous les paramètres du missile est introduite aux instants (2, 6, 10, 14 et 18) figureII-6 :**

On initialise un vecteur des paramètres  $\theta(0)=[ a_1 , a_2, b_1, b_2 ]$

On impose une variation brusque des paramètres réels du missile sous la forme suivante :

- Pour  $t \geq 2$  secondes :  $\theta(t) = 0.9 \cdot \theta(0)$
- Pour  $t \geq 6$  secondes :  $\theta(t) = 1.4 \cdot \theta(0)$
- Pour  $t \geq 10$  secondes :  $\theta(t) = 1.3 \cdot \theta(0)$
- Pour  $t \geq 14$  secondes :  $\theta(t) = 1.6 \cdot \theta(0)$
- Pour  $t \geq 18$  secondes :  $\theta(t) = 1.5 \cdot \theta(0)$

et on déroule l'algorithme. On obtient les résultats de simulations qui sont présentées par les figures II-5, II-6.

$$\dot{x}_L = A_L \cdot x_L + B_L \cdot U_2$$

$$z_1 = C_L \cdot x_L + D_L \cdot U_2$$

et la commande de Lacet est calculée à partir de :

$$U_2 = -\hat{K}_L \cdot \hat{x} + H_L \cdot r$$

On a le mouvement de Tangage :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ x_3 \\ \dot{x}_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \\ \frac{QSl}{BV} \cdot C_{M\alpha} & \frac{QSl}{BV} \cdot C_{Mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{QS}{m} C_{zu3} \\ \frac{QSl}{BV} \cdot C_{nu3} \end{bmatrix} \cdot U_3$$

$$z_2 = \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} - \frac{QSC_{zu3}}{m} \cdot U_3$$

Sous forme :

$$\dot{x}_T = A_T \cdot x_T + B_T \cdot U_3$$

$$z_2 = C_T \cdot x_T + D_T \cdot U_3$$

et la commande de Tangage est calculée à partir de :

$$U_3 = -\hat{K}_T \cdot \hat{x} + H_T \cdot r$$

Les modèles du Lacet et du Tangage ont la même structure mais les paramètres aérodynamiques et les moments d'inerties sont différents, c'est à dire :

et :  $C_{z\alpha} \neq C_{y\beta}$ ,  $C_{yu2} \neq C_{zu3}$ ,.....et  $B \neq C$ .

A noter que la commande U est calculée à partir du modèle linéaire de l'observateur .

Cette commande est appliquée au modèle simulé d'un missile stabilisé en roulis.

Les résultats des simulations sont présentés sur les figures II-9 à II14.

### Commentaire :

#### **Pour la vitesse du missile varie dans le temps :**

L'erreur de poursuite cinétique des deux mouvement de tangage et lacet est instantanément nulle.

**En conclusion**, malgré la présence des perturbations, les résultats de simulations sont satisfaisants. Ceci nous apprend que la commande LQG possède des propriétés de robustesse en performance et en stabilité remarquables.

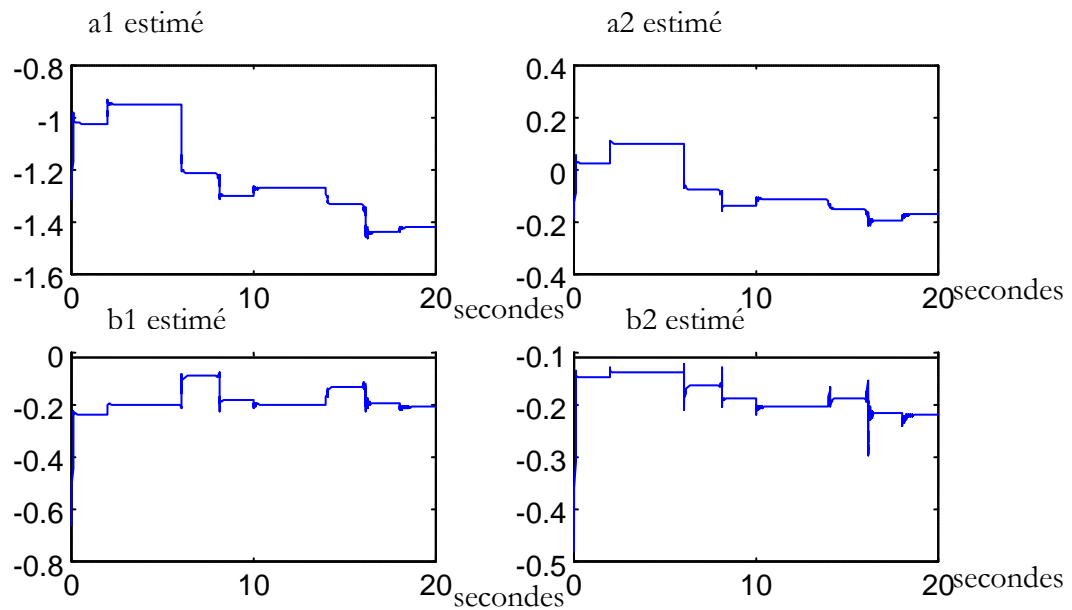


Figure II-5 : Les paramètres estimés de la fonction de transfert

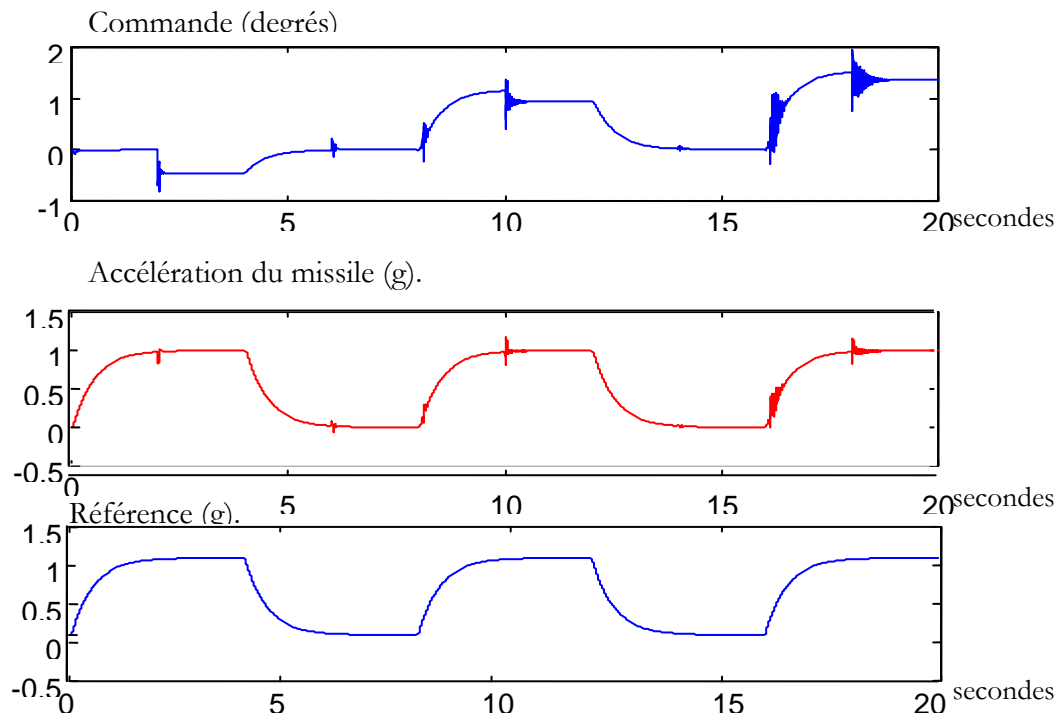


Figure II-6 : La commande LQG appliquée au modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en Roulis dont les paramètres varient brusquement

**Commentaire :** L'erreur de poursuite est très faible mais, des pics apparaissent aux instants (2, 6, 10, 14 et 18 secondes) ce qui correspond aux variations brusques des paramètres réels du missile.

Pour le cas où les paramètres réels varient dans le temps (figureII-8) :

On impose la variation des paramètres réels du missile sous la forme suivante :

$$\theta(t+1) = \theta(t) + 0.2 \cdot \begin{bmatrix} 1 - e^{-5.t} \\ 1 - e^{-5.t} \\ 1 - e^{-5.t} \\ 1 - e^{-5.t} \\ 1 - e^{-5.t} \end{bmatrix}$$

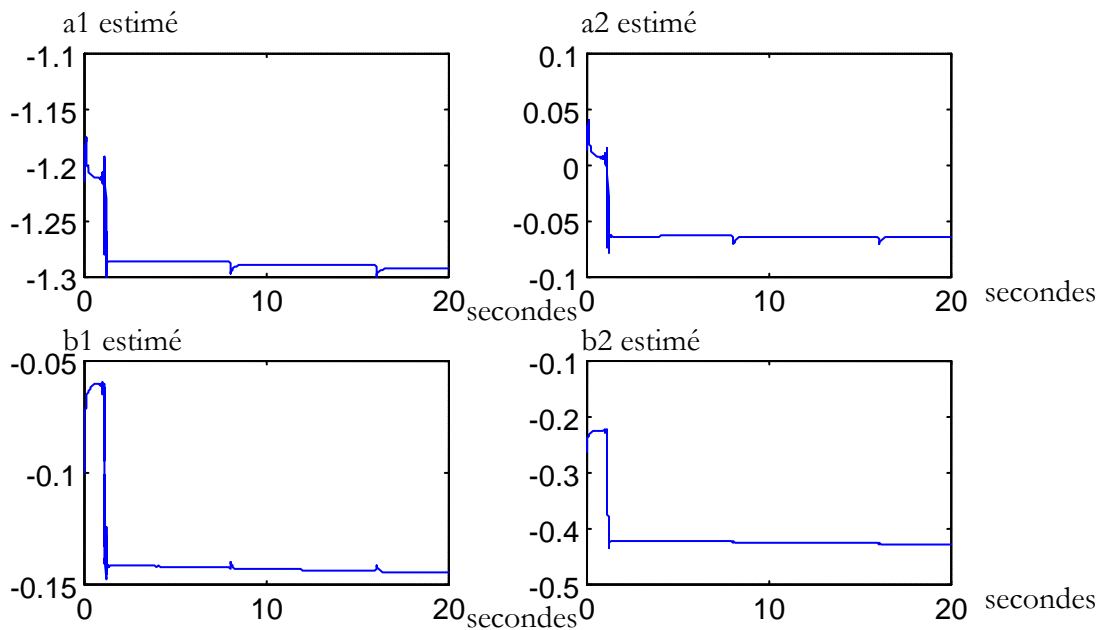
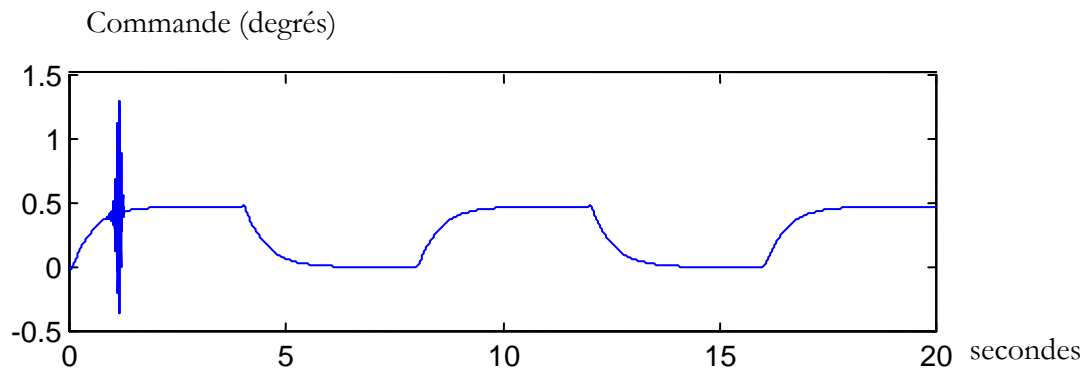


Figure II-7 : Les paramètres estimés de la fonction de transfert du missile



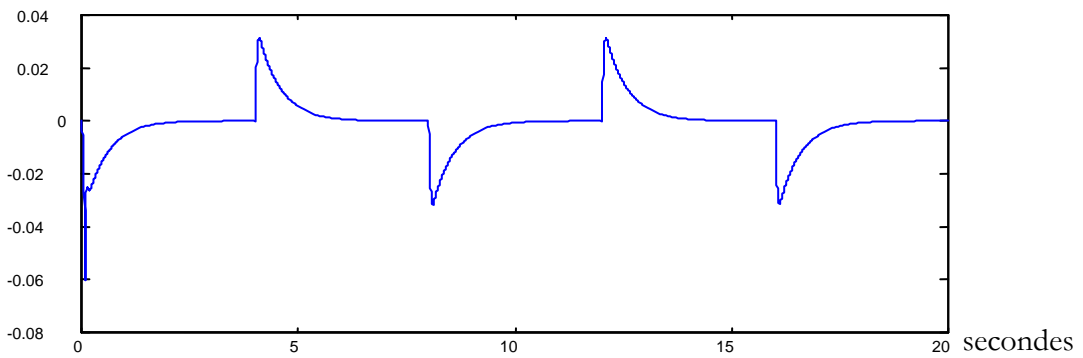
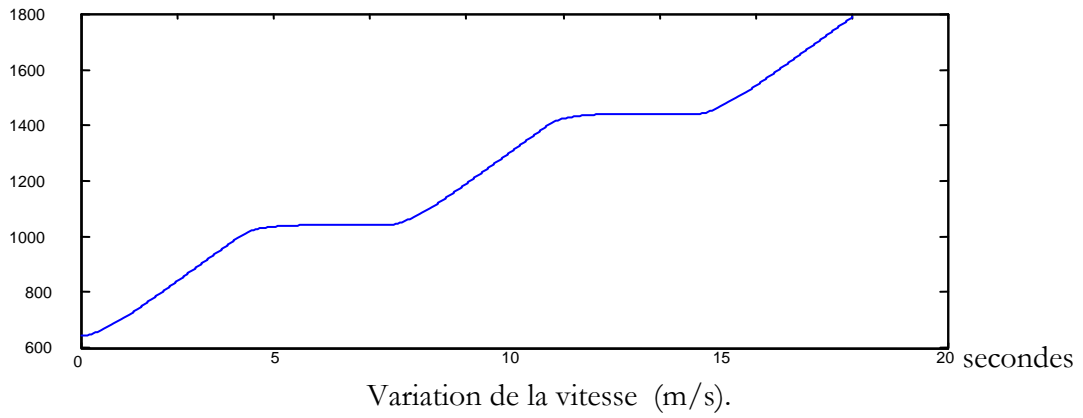


Figure II-10 : Commande (degrés)

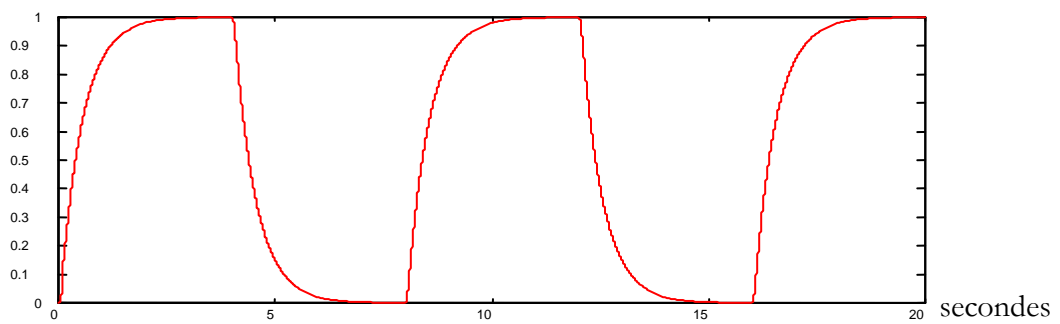
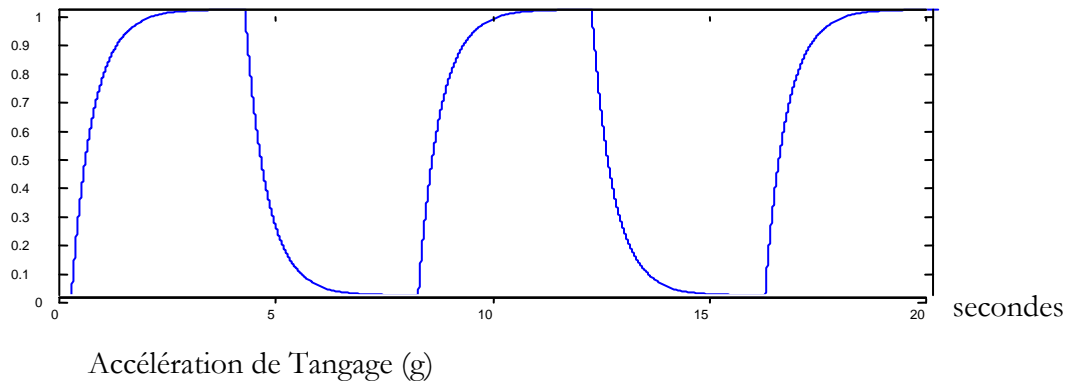
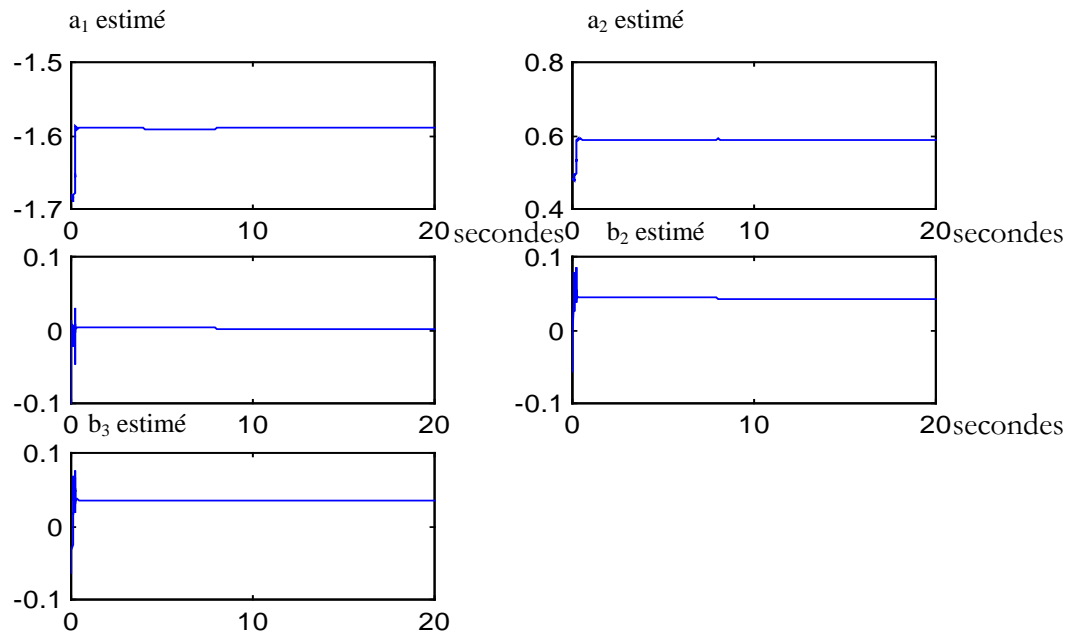
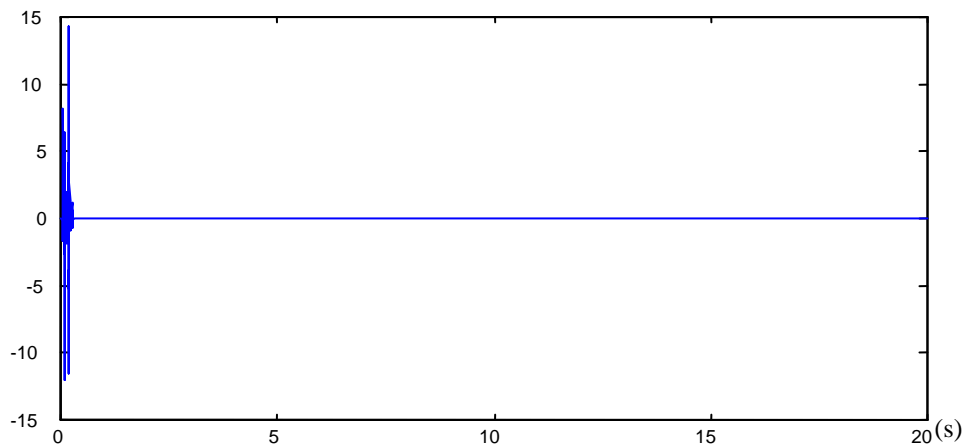
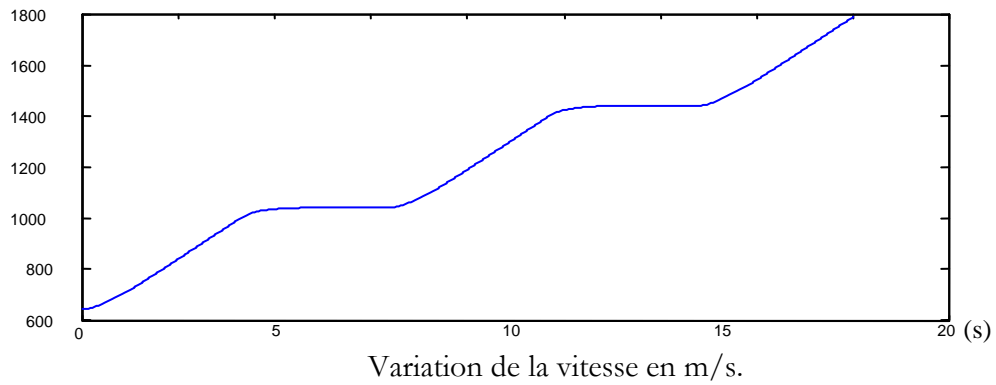


Figure II-11 : Résultats de simulations d'une commande LQG appliquée au modèle de simulation d'un missile stabilisé en Roulis (Mouvement de Tangage).

**Mouvement de Lacet :**



**Figure II-12 :** Les paramètres estimés de la fonction de transfert du missile



**Figure II-13 :** Commande (degrés)

## **1-INTRODUCTION A LA COMMANDE $H_\infty$**

### **1-1 Introduction**

Le calcul de la commande d'un processus physique passe par l'utilisation d'un modèle qui ne sera jamais qu'une représentation imparfaite de la réalité : il y'a toujours des incertitudes de modélisation, dont la conséquence est qu'on ne peut pas décrire exactement par un modèle mathématique le comportement d'un système physique. Parmi ces incertitudes de modèle, on peut notamment citer les dynamiques hautes fréquences qui sont mal connues, ou volontairement négligées dans l'écriture du modèle, les retards purs, les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques, les effets d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement, l'utilisation de modèles simplifiés pour les actionneurs et les capteurs,...Il convient donc d'étudier la robustesse de la loi de commande appliquée, afin d'être capable de garantir la stabilité et un certain degré de performances en dépit de ces incertitudes. Notons que cette exigence est implicitement mais imparfaitement prise en compte en Automatique traditionnelle, au moyen des marges de gain et de phase.

D'importants travaux ([6],[7],[17],[24]) ont montré l'intérêt de l'utilisation d'une norme matricielle pour pouvoir définir la robustesse d'un système multivariable, afin en particulier, d'en apprécier la proximité à l'instabilité. En analyse numérique, les valeurs singulières d'une matrice sont connues pour constituer une bonne mesure de la distance à la singularité. D'où l'intérêt de leur utilisation pour l'analyse de la robustesse.

Le comportement d'un système bouclé multivariable en présence d'incertitudes introduites par les erreurs de modélisation évoquées précédemment va être analysé. Auparavant, la définition des principales normes des systèmes linéaires est rappelée, une interprétation des fonctions de sensibilité d'un système bouclé est proposée, et enfin à partir du théorème des petits gains, des conditions suffisantes de stabilité du système perturbé sont établies, en particulier elles permettent de généraliser les critères de robustesse classiques en monovisible.

### **1-2 Principe de la commande $H_\infty$**

Le principe est simple :

Quelque soit le modèle utilisé, ce dernier sera toujours différent du système réel.

Si on fait en sorte que la commande stabilise le modèle nominal associé à la plus grande perturbation ou incertitude possible, alors on garantis la stabilité du système. En d'autres termes, on commande le pire des cas « WORST Case Control ».

Par exemple :

Soit  $g(s)$  la fonction de transfert nominal d'un système.

Si le système réel est représenté par :

$$G(s) = (1 + \delta(s)).g(s)$$

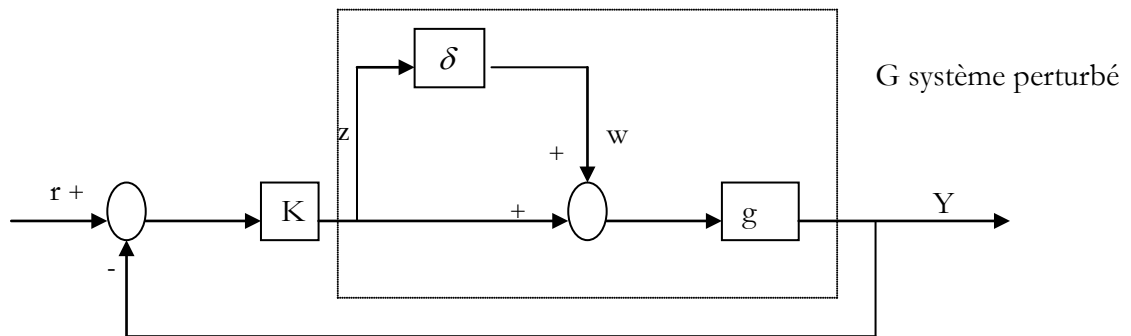


Figure III- 1

Avec  $\delta(s)$  fonction de transfert stable inconnu, mais bornée.

$$|\delta(j\omega)| < M, \forall \omega.$$

A partir du schéma de la figure III-1, on peut voir que :

$$z = gK(1 + gK)^{-1}w.$$

et donc la stabilité du système de la figure III-1 est équivalente de la figure III-2.

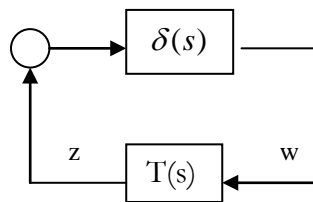


Figure III-2

$$T(s) = gK(1 + gK)^{-1}$$

Une condition suffisante pour la stabilité est donc :  $|\delta(j\omega)T(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$   
 $\Leftrightarrow \sup |\delta(j\omega)T(j\omega)| < 1$

Puisque le  $\delta(s)$  est inconnu on utilise la propriété suivante :

$$|\delta(j\omega)T(j\omega)| \leq |\delta(j\omega)| \cdot |T(j\omega)|$$

Une condition suffisante pour la stabilité du système est donc :

$$\sup_{\omega} |T(j\omega)| \cdot \sup_{\omega} |\delta(j\omega)| < 1.$$

et puisque nous avons supposé que :

$$\sup_{\omega} |\delta(j\omega)| < M.$$

alors le problème de la stabilité du système perturbé revient à trouver  $K(s)$  tel que :

$$\begin{aligned} &K(s) \text{ stabilise } g(s) \\ &\sup_{\omega} |T(j\omega)| < \frac{1}{M}, \quad T(j\omega) = gK(1 + gK)^{-1} \end{aligned}$$

la quantité  $\sup_{\omega} |T(j\omega)|$  vérifie les conditions d'une norme. Elle est appelée la norme infinie de la

fonction de transfert  $T$ .

$$\begin{aligned} \|T\|_{\infty} &= \sup_{\omega} |T(j\omega)| \\ \|T\|_{\infty} &\geq 0, \quad \|T\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow T = 0. \end{aligned}$$

Nous avons :  $\|\alpha \cdot T\|_{\infty} = |\alpha| \cdot \|T\|_{\infty} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|T + Q\|_{\infty} \leq \|T\|_{\infty} + \|Q\|_{\infty}$$

En plus la norme vérifie :

$$\|TQ\|_{\infty} \leq \|T\|_{\infty} \|Q\|_{\infty}$$

Cette dernière propriété se retrouve dans tous les théorèmes de la stabilité robuste.

### **1-3 La commande $H^\infty$ optimale**

Connaissant une borne d'incertitude, nous avons déduit au paragraphe 1-2 une condition sur  $K(s)$  pour stabiliser le système perturbé. On peut poser le problème autrement : on ne connaît pas la borne de  $|\delta(j\omega)|$ , mais on veut que le système soit stable pour la plus grande incertitude possible.

La condition de stabilité robuste s'écrit :

$$\sup_{\omega} |\delta(j\omega)| < \frac{1}{\sup_{\omega} |T(j\omega)|}$$

$$\|\delta(j\omega)\|_{\infty} < \frac{1}{\|T(j\omega)\|_{\infty}}$$

maximiser l'incertitude revient donc à minimiser  $\|T(j\omega)\|_{\infty}$

et donc le problème de stabilité robuste optimale est de trouver  $K(s)$  tel que :

$$K(s) \text{ stabilise } G \Rightarrow \left\| gK(1 + gK)^{-1} \right\|_\infty$$

Remarques :

Si  $g(s)$  est stable, le problème de stabilité robuste posé ci dessus a pour solution  $K(s)=0$ , c'est à dire pas de commande. C'est surprenant mais c'est logique, car on s'est posé seulement le problème de la stabilité, et pour  $g(s)$  stable, il est clair que le système reste stable pour toute incertitude  $\delta(s)$  stable, sans  $K$ . L'idée est que pour la commande  $H^\infty$  puisse être utile, il faut qu'on puisse traduire tous les objectifs de la commande (poursuite, rejet de perturbation,...ect) sous forme de minimisation d'une norme infinie.

**1-4 Positions des problèmes de commandes sous forme  $H^\infty$**

Nous allons montrer comment poser quelques problèmes de commande sous forme d'optimisation  $H^\infty$ .

Rejet de perturbations :

Soit le système de commande de la figure 3 :

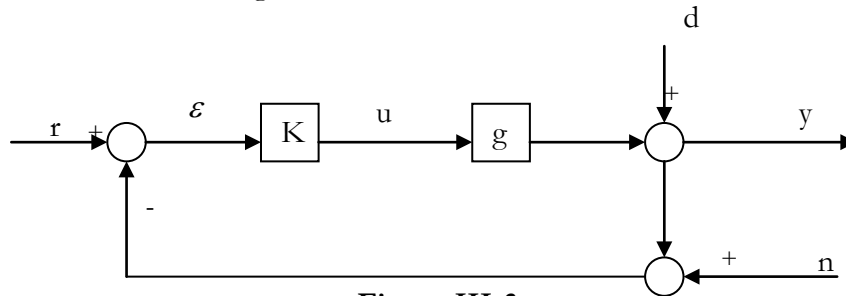


Figure III-3

$d$  est une perturbation sur la sortie.

$n$  est bruit de mesure.

On veut atténuer l'effet de  $d$  sur  $y$ .

Nous avons :

$$y = gK(1 + gK)^{-1}(r - n) + (1 + gK)^{-1}d.$$

L'effet de  $d$  sur  $y$  est :

$$y_d = (1 + gK)^{-1}d.$$

Minimiser  $y_d$  revient à minimiser  $\left\| (1 + gK)^{-1} \right\|_\infty$  (le gain maximum entre  $d$  et  $y$ ).

Le problème est donc de trouver  $K(s)$  pour :

- Stabiliser  $g$ .
- Minimiser  $(1+gK)^{-1}$ .

**Limitation de la commande :**

Parfois on veut minimiser l'énergie de la commande pour éviter les saturations et le gaspillage inutile d'énergie.

De la figure 3 on a :  $u = K(1 + gK)^{-1}(r - d)$ .

Minimiser la commande revient donc à minimiser tout simplement  $\|K(1 + gK)^{-1}\|_\infty$ .

Le problème de commande n'est jamais posé comme stabilisation toute seule ou rejet de perturbation seul, mais c'est un ensemble de spécifications à satisfaire. C'est pour cela qu'en général le problème de la commande  $H^\infty$  est de minimiser un critère formé de plusieurs objectifs.

Le problème est donc de trouver la commande qui minimise  $\|J(j\omega)\|_\infty$  avec :

$$J = [w_1h_1 \quad w_2h_2 \quad w_3h_3]$$

ou  $h_1, h_2$  et  $h_3$  sont des fonctions de transfert telles que :  $(1 + gK)^{-1}$ ,  $gK(1 + gK)^{-1}$ ,  $K(1 + gK)^{-1}$  et  $w_1(s)$ ,  $w_2(s)$ ,  $w_3(s)$  sont des fonctions de pondérations fréquentielles.

**1-5 Conclusion**

- La commande  $H^\infty$  est une méthode de synthèse fréquentielle qui tient compte explicitement des erreurs de modélisation.
- Le problème de la commande se ramène à une minimisation d'une norme infinie avec des contraintes de stabilité.

**2- ELEMENTS D'ANALYSE DES SYSTEMES MIMO**

Pour les systèmes SISO, les performances sont déterminées par le gain en boucle ouverte. Des notions telles que la bande passante (qui est liée à la rapidité), atténuation des bruits et des perturbations, peuvent être analysées à partir du diagramme de Bode par exemple, la robustesse peut être aussi étudiée en utilisant les marges de gain et de phase.

Pour généraliser cette approche aux systèmes multivariables, on rencontre le problème de gain d'une matrice de transfert. Le gain du système dépend des composantes du vecteur d'entrée. En raisonnant simplement, le gain est déterminé par le rapport :  $\frac{\|G(s).u(s)\|}{\|u(s)\|}$

ou  $\| \cdot \|$  est la norme euclidienne.

## 2-1 Normes des systèmes linéaires

La notion de norme apparaît comme un élément indispensable pour définir la robustesse d'un système. Un bref rappel de quelques définitions des espaces normés est fait, en particulier concernant les signaux et les fonctions de transfert, puisque ce sont précisément celles qui seront utilisées par la suite.

L'espace  $L_2^n$  désigne l'ensemble des fonctions  $y(s)$  de dimension  $n$ , de carré intégrable sur l'axe imaginaire telles que la quantité qui suit est finie :

$$\|y\|_2 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(j\omega)y(j\omega)d\omega \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Dans le cas où  $G(s)$  n'a pas de pôle dans le demi plan droit, le théorème de Parseval

donne une expression équivalente dans le domaine temporel :  $\|y\|_2 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} y^T(t)y(t)dt \right]^{\frac{1}{2}} .$

Une norme sur la matrice de fonctions de transfert  $G$  de dimension  $m \times n$  peut également être

définie, soit :  $\|G\|_2 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} \left[ G^*(j\omega)G(j\omega)d\omega \right] \right]^{\frac{1}{2}}$  où  $G$  permet de définir le système par

une relation d'entrée – sortie  $y(s) = G(s).u(s)$ .

$L_2$  désigne l'espace de Hilbert des matrices de fonctions strictement propres sur l'axe imaginaire.

Soit  $u \in L_2^n$  et  $G \in L_2^{m,n}$  alors  $y \in L_2^m$  et la norme de  $G$  induite par  $\| \cdot \|_\infty$  est égale à la valeur singulière supérieure de  $G(j\omega)$ , qui est définie comme la racine carrée de la plus grande valeur de  $G^*(j\omega)G(j\omega)$  où  $G(j\omega)G^*(j\omega)$ .

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma(G(j\omega)).$$

où  $\|G\|_\infty$  est la norme  $\infty$  de la fonction  $G$  dans le domaine fréquentiel.

$L_\infty$  est l'espace de Banach des matrices de fonction propres essentiellement bornées, sur l'axe imaginaire.  $H_\infty$  est défini comme l'espace des fonctions analytiques bornées dans le demi plan droit (pas de pôle à partie réelle positive), i.e. satisfaisant :

$$\bar{\sigma}(G(s)) < \infty \quad \forall \text{Re}(s) > 0.$$

## 2-2 Fonction de sensibilité

En boucle fermée on a:

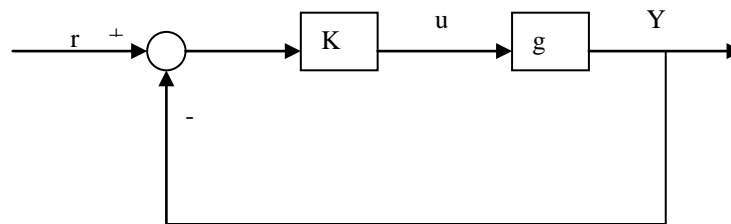


Figure III-4

$$y = \frac{GK}{(1 + gK)} \cdot r$$

$$S = \frac{1}{(1 + GK)} \quad (1)$$

On définit la fonction de sensibilité  $S$  par (1) et la fonction de sensibilité complémentaire par :

$$T = \frac{gK}{(1 + gK)}$$

$S$  est l'inverse de la fonction de décrivant la boucle de retour  $(1+gK)$ .  $T$  est la fonction de transfert en boucle fermée du système. Nous avons :  $S+T=1$ .

La relation (1) montre que l'effet des variations du modèle sur la sortie du système en boucle fermée dépend de la fonction de sensibilité  $S$ .

La relation (1) nous permet de d'écrire :

$|S| \ll 1 \Rightarrow$  le système est insensible aux variations de  $g$ .

$|S| > 1 \Rightarrow$  les variations de  $g$  sont amplifiées à la sortie.

Dans le cas MIMO, le modèle et le compensateur sont représenté par les matrices de transfert  $G$ ,  $K$ ,  $S$ , et  $T$  sont des matrices et sont définies par :

$$S = (I + GK)^{-1}$$

$$T = GK(I + GK)^{-1}$$

En multivariable les 'gains' de  $S$  n'étant plus définis, on utilise les valeurs singulières afin de pouvoir voir l'effet des faibles variations 'paramétriques' de  $G$  sur le système en boucle fermée.

La sensibilité est faible si sa plus grande valeur singulière est faible. Elle est élevée si sa plus petite valeur singulière est grande.

—  
 $\sigma(S) \ll 1 \Rightarrow$  la sensibilité est faible.

$\sigma(S) \gg 1 \Rightarrow$  le système est plus sensible qu'en boucle ouverte.  
 —

### 2-3 Performances nominales

On utilise les valeurs singulières pour analyser les performances d'un système multivariable.

Soit le système de commande suivant :

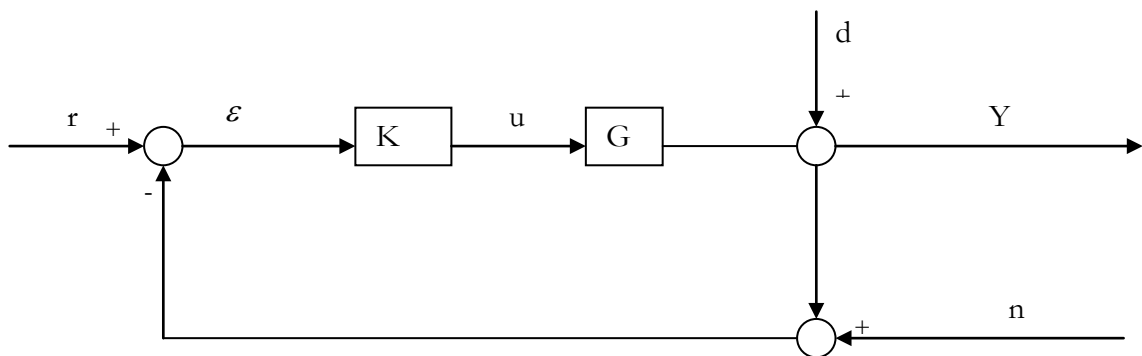


Figure III-5

$y$  : Signal de sortie.

$u$  : Signal de commande.

$\varepsilon$  : Erreur de poursuite.

$r$  : référence.

$d$  : perturbation.

$n$  : bruit de mesure.

Nous avons les relations suivantes :

$$y(s) = GK(I + GK)^{-1}(r - n) + (I + GK)^{-1}d \quad (1)$$

$$u(s) = K(I + GK)^{-1}(r - n - d) \quad (2)$$

$$\varepsilon(s) = (I + GK)^{-1}(r - n - d) \quad (3)$$

En utilisant Set T :

$$y(s) = T(r - n) + Sd \quad (4)$$

$$u(s) = KS(r - n - d) \quad (5)$$

$$\varepsilon(s) = S(r - n - d) \quad (6)$$

### **2-3-1 Poursuite**

La poursuite  $r \Leftrightarrow e \rightarrow 0$

A partir de (6), l'erreur est faible si  $\bar{\sigma}(S) \ll 1$ .

$$\bar{\sigma}(S) \ll 1 \Rightarrow \text{une bonne poursuite} \quad (I)$$

### **2-3-2 Rejet des perturbations**

A partir de (4), la perturbation d est rejetée si le gain de la fonction de sensibilité est faible et donc :

$$\bar{\sigma}(S) \ll 1 \Rightarrow \text{rejet des perturbations en sortie} \quad (II)$$

### **2-3-3 Bruit de mesure**

A partir de (4), le bruit de mesure est atténué si T est faible :

$$\bar{\sigma}(T) \ll 1 \Rightarrow \text{atténuation du bruit de mesure} \quad (III)$$

Mais pour une poursuite on a  $\bar{\sigma}(S) \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{\sigma}(T) \rightarrow 1$ .

Remarquons que lorsque le système suit la référence, le bruit de mesure est directement transmis à la sortie.

### **2-3-4 Remarques**

De (I) et (II) on peut voir que la poursuite de la référence r et le rejet de la perturbation d sont deux objectifs compatibles.

A partir de (I), (II) et (III) et en se rappelant que  $S+T=1$ , on voit qu'il n'est pas possible de réaliser une bonne poursuite et une atténuation du bruit de mesure simultanément.

Heureusement pour nous que les bruits de mesure sont en généralement de haute fréquence, et les consignes à suivre ainsi que les perturbations sont de basse fréquence.

Un bon comportement du système revient à avoir :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(S) < 1 & \omega < \omega_R \\ \bar{\sigma}(T) < 1 & \omega > \omega_R \dots\dots\dots(7) \end{cases}$$

$\omega_R$  délimite les basses fréquences, c'est en quelque sorte la bande passante du système. Où en utilisant S seulement  $\bar{\sigma}(\omega_s S) < 1$  avec  $\omega_s$  une fonction de transfert ayant un gain élevé pour les basses fréquences, permettant ainsi de garantir l'objectif (I).

**2-4 Robustesse en stabilité vis à vis d'incertitudes**

Pour étudier la stabilité robuste d'un système, il faut avoir des informations sur les erreurs de modélisation. Il existe plusieurs manières pour représenter les variations du modèle.

**2-4-1 Représentation des incertitudes**

Dans le cadre de la commande  $H^\infty$ , on représente le système perturbé par une matrice de transfert nominale, et une incertitude non structurée sous forme de matrice de transfert linéaire invariante  $\Delta(s)$ .

Une incertitude non structurée est une incertitude qui n'est connue que par une majoration de sa norme. Donc :

$$\bar{\sigma}(\Delta(s)) < \delta(s) \quad \forall s = j\omega$$

$$\Delta = \left\{ \Delta(j\omega), \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \delta(j\omega) \right\}$$

$\Delta$  représente un ensemble infini de matrices de transfert. Le système perturbé par  $\Delta$  peut être représenté de plusieurs manières.

**Incertitude additive :**

G : matrice de transfert nominale.

$\Delta_a$  : incertitude additive.

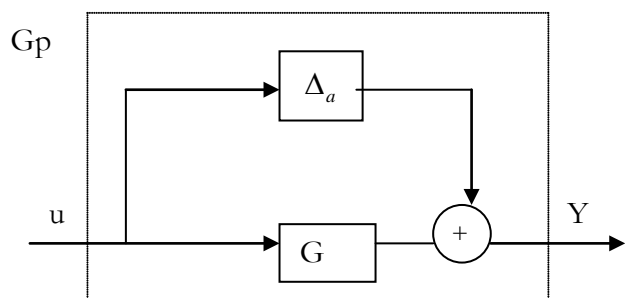


Figure III-6

$$\bar{\sigma}(\Delta_a(j\omega)) \leq \delta_a(j\omega)$$

Le système perturbé est donné par :

$$G_p = \left\{ G(s) + \Delta_a(s), \bar{\sigma}(\Delta_a(s)) \leq \delta_a(s) \right\}$$

**Incertitude multiplicative :**

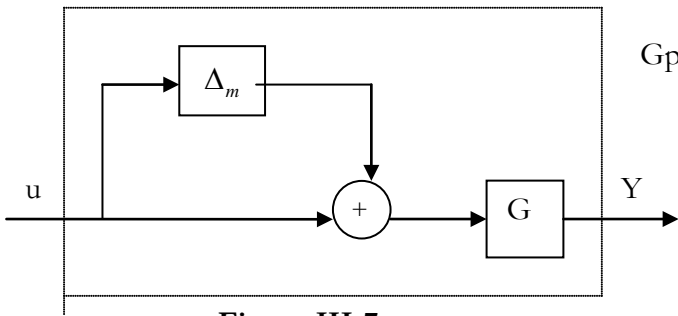


Figure III-7

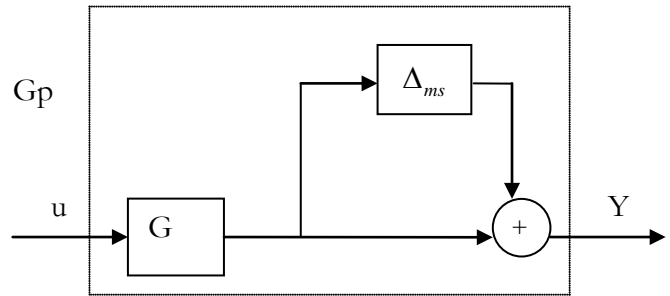


Figure III-8

La figure III-7 représente une incertitude multiplicative en entrée :

$$G_p(s) = \left\{ G(s)(I + \Delta_m(s)) \quad / \quad \bar{\sigma}(\Delta_m(s)) \leq \delta_m(s) \right\}$$

Puisque en multivariable le produit matriciel n'est pas commutatif, on représente dans la figure 5 une incertitude multiplicative en sortie.

$$G_p(s) = \left\{ (I + \Delta_{ms})G(s) \quad / \quad \bar{\sigma}(\Delta_{ms}(s)) \leq \delta_{ms}(s) \right\}$$

**Remarques :**

On peut représenter le système par des incertitudes inverses.  $\Delta$  est un bloc de retour.

Les incertitudes en entrée représentent les erreurs dues aux actionneurs tandis que l'effet des capteurs peut être représenté par des incertitudes en sortie.

Lorsqu'on a plus d'informations sur l'incertitude, il est préférable d'utiliser des incertitudes structurées car comme nous allons le voir les incertitudes non structurées tendent à « dramatiser ».

On peut sacrifier des performances pour garantir la stabilité à une classe de systèmes, qui ne se réalisera pas en réalité.

Mathématiquement, le problème de l'incertitude non structurée est plus facile à résoudre.

**2-4-2 Théorème des petits gains**

La forme classique du théorème des petits gains peut être obtenu en considérant le schéma de la figure 6.

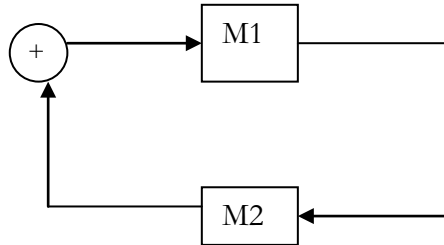


Figure III-9

Enoncé du théorème des petits gains (THM PG) :

**En supposant que  $M_1, M_2 \in H_\infty$  sont des fonctions de transfert bornées en gain, propres et stables, alors si :**

$\|M_1 M_2\|_\infty < 1 \Rightarrow$  le système bouclé est stable au sens de Lyapounov (SL) . De plus comme  $\|M_1 M_2\|_\infty \leq \|M_1\|_\infty \cdot \|M_2\|_\infty$ , la condition SL du système bouclé devient :  $\|M_1\|_\infty \cdot \|M_2\|_\infty < 1$ .

Nous allons voir comment appliquer ce théorème pour déduire des conditions de stabilité pour les systèmes perturbés décrite dans la section précédente.

**Pour les incertitudes additives :**

Soit le système de la figure III-10.

Pour étudier la stabilité Robuste, on doit se ramener Au schéma de la figure III-9.

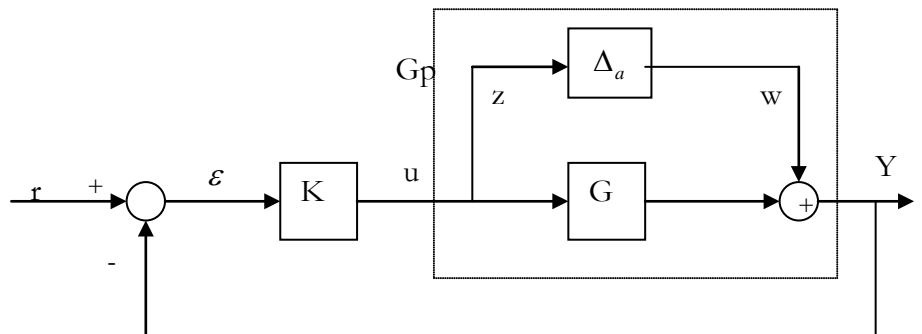


Figure III-10

Nous avons :

$$z = K(I + GK)^{-1}w$$

Le système est équivalent à la figure III-11 avec :

$$B(s) = K(I + GK)^{-1}$$

Pour appliquer le théorème 2-4-2, il faut :

$\Delta(s)$  soit stable

$B(s)$  soit stable  $\Rightarrow K(s)$  stable est stabilise G.

Pour ces conditions vérifiées on a donc :

Le système est stable si :

$$\bar{\sigma}(K(I + GK)^{-1}) \bar{\sigma}(\Delta_a) < 1.$$

et puisque  $\bar{\sigma}(\Delta_a(j\omega)) \leq \delta_a(j\omega)$ .

on peut écrire :

Pour  $K(s)$  stabilisant le système nominal, le système reste stable sous l'effet de  $\Delta_a(s)$  si

$$\bar{\sigma}(KS) \cdot \delta_a(s) < 1, \quad \forall s = j\omega \quad (8)$$

**Pour les incertitudes multiplicatives :**

De la même manière on utilise :

$K(s)$  stabilisant le système nominal, le système reste stable pour toute  $\Delta_m(s)$  stable si

$$\bar{\sigma}(T)\delta_m(s) < 1, \quad \forall s = j\omega.$$

Pour une incertitude multiplicative en sortie, on a la même relation avec  $T_a$  à la place de  $T$ .

$$T_a = KG(I + KG)^{-1}.$$

En général, pour toute forme d'incertitude  $\Delta$  :

On met le système sous forme de la figure (III-9), avec  $\Delta = \Delta_*$ . La condition suffisante de stabilité robuste est directement déduite du théorème du petit gain.

On se restreindra à ses deux formes d'incertitudes car ce sont les plus utilisées.

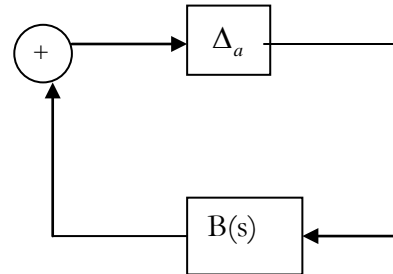


Figure III-11

### 2-4-3 Marge de stabilité additive et multiplicative

La marge de stabilité additive (ASM) est définie comme la norme infinie de la plus petite incertitude additive  $\Delta_a(s)$  stabilisant le système. De la même manière on définit la marge de stabilité multiplicative (MSM).

La condition de stabilité robuste pour incertitudes additives est :

$$\bar{\sigma}(\text{KS}) \bar{\sigma}(\Delta_a) < 1 \Leftrightarrow \|\text{KS}\|_\infty \cdot \|\Delta_a\|_\infty < 1$$

et donc :

$$\|\Delta_a\|_\infty < \frac{1}{\|\text{KS}\|_\infty} \quad (9)$$

Toute incertitude additive de norme infinie inférieure à  $\text{ASM} = \frac{1}{\|\text{KS}\|_\infty}$  garantit la stabilité du système perturbé. La condition suffisante de stabilité (8) est plus restrictive que (9), mais elle présente l'avantage qu'elle est indépendante de la fréquence  $w$ .

De la même manière, on a les incertitudes multiplicatives :

$$\bar{\sigma}(\text{T}) \bar{\sigma}(\Delta_m) < 1 \Leftrightarrow \|\Delta_m\|_\infty < \frac{1}{\|\text{T}\|_\infty}$$

donc :

$$\text{MSM} = \frac{1}{\|\text{T}\|_\infty}$$

Le principe de la commande  $H_\infty$  est de maximiser ASM , ou MSM et donc minimiser  $\|\text{KS}\|_\infty$  , où  $\|\text{T}\|_\infty$ .

## 3- SYNTHESE D'UNE COMMANDE ROBUSTE

Après avoir vu comment analyser les performances et la robustesse d'un système, nous allons voir comment synthétiser une commande robuste.

### 3-1 Objectifs de synthèse

Le correcteur doit donc permettre d'assurer les conditions :

$$\|w_1 S\|_\infty < 1 \Rightarrow \text{performances robustes} \Rightarrow \text{Rejet de la perturbation d.}$$

Poursuite de la référence.

$\|w_2KS\|_\infty < 1 \Rightarrow$  Limiter l'amplitude de la commande.

Maximiser la marge de stabilité additive.

$\|w_1T\|_\infty < 1 \Rightarrow$  La stabilité robuste  $\Rightarrow$  Atténuation du bruit de mesure d.

Maximiser la marge de stabilité multiplicative (incertitude multiplicative en entrée).

$$J = \left\| \begin{array}{c} w_1S \\ w_2KS \\ w_3T \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (10)$$

Le problème (10), ainsi que tous ceux que nous envisagerons par la suite, se présentent sous la même forme : il s'agit de faire en sorte que la norme  $H_\infty$  d'une matrice contenant différents transferts pondérés du système bouclé soit inférieure à 1, sous la contrainte de stabilité. Le problème  $H_\infty$  standard, présenté au paragraphe suivant, fournit un cadre général permettant de résoudre des problèmes de ce type.

### 3-2 Le problème $H_\infty$ standard

Considérons le schéma bloc représenté la figure (9). Le « processus » est un système comportant 2 ensembles d'entrées et 2 ensembles de sorties. Le vecteur  $w$  représente toutes les entrées extérieures, telles que signaux de référence, perturbations, bruits. Le vecteur  $u$  représente les commandes. Les sorties  $z$  représentent les erreurs de régulation, qu'on souhaite maintenir à 0. Enfin  $y$  représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

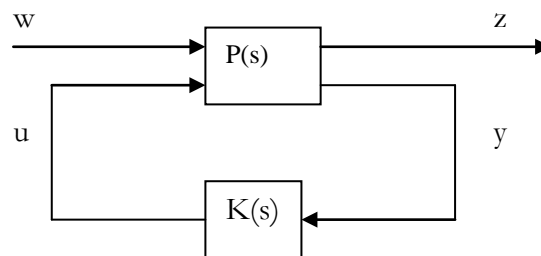


Figure III-12

La matrice de transfert entre  $w$  et  $z$  du système ainsi bouclé s'écrit sous la forme :

$$z = F(P, K)w = (P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21})w$$

La synthèse du correcteur peut alors être définie par le problème suivant :

**Problème  $H_\infty$  standard :**

**P(s) et  $\gamma(s)$  étant donnés, trouver K(s) qui stabilise le système bouclé de la figure III-12, et assure  $\|F(P,K)\|_\infty < \gamma$**

Les correcteurs assurant la valeur de  $\gamma$  la plus petite possible dits « optimaux ». Différentes méthodes peuvent être envisagées pour résoudre le problème  $H_\infty$  standard.

**3-3 Résolution du problème  $H_\infty$  standard**

Considérons le problème standard de la figure III-12, et supposons comme une représentation d'état correspondant au « processus » P(s), que l'on écrira sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

ou par sa matrice de transfert :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Puisque les solutions du problème standard sont connues, alors le seul problème qui reste est de transformer notre problème de commande en un problème standard.

**Mise des problèmes sous forme standard :**

On peut représenter le problème standard équivalent par le schéma :

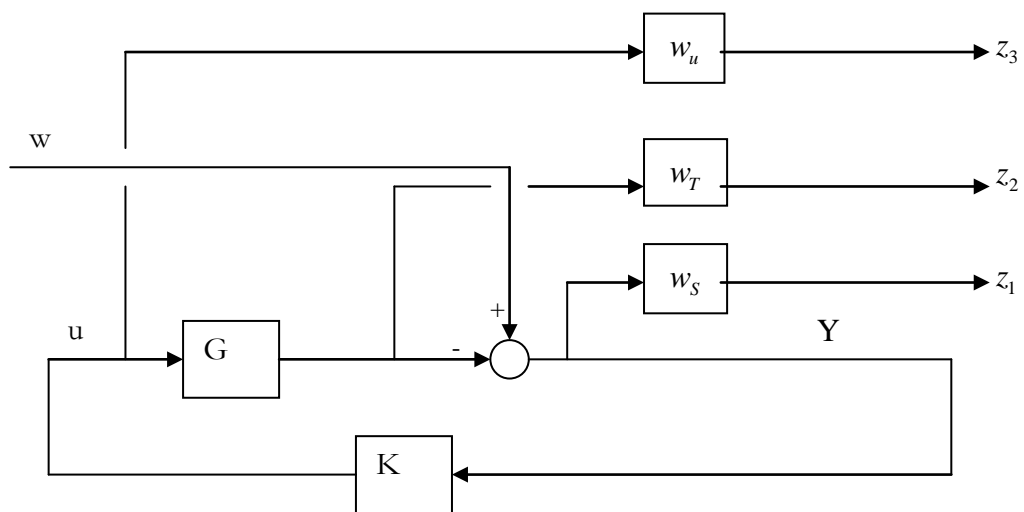


Figure III-13

$$\begin{aligned}
 y &= -Gu + w \\
 z_1 &= w_S(-Gu + w) \\
 z_2 &= w_T(Gu) \\
 z_3 &= w_u u
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_S & -w_S G \\ 0 & w_T \\ 0 & w_u \\ I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

en remplaçant  $u$  par  $Ky$ , on voit bien que :

$$J_{zw} = \begin{bmatrix} w_S S \\ w_T^T T \\ w_u K S \end{bmatrix}$$

**En résumé :** La synthèse d'une commande  $H_\infty$  passe par les étapes suivantes :

- 1- Traduire les objectifs  $\| \cdot \|_\infty$
- 2- Choisir les pondérations fréquentielles.
- 3- Trouver la matrice  $P$  du problème de standard équivalent.
- 4- Résoudre le problème d'optimisation.
- 5- Tester les performances, si c'est pas bon  $\rightarrow$  (2).

Doyle, Glover ont présenté les solutions de commande  $H_\infty$ . Ils ont même fait plus car dans « mu analysis and synthesis toolbox » de logiciel MATLAB, on trouve les programmes permettant de retrouver le problème standard à partir du système et des fonctions de pondération et puis de donner la représentation d'état du compensateur directement, sans avoir à faire aucun calcul.

Nous présenterons des solutions au problème de retour d'état de sortie  $H_\infty$ , dans le cadre d'hypothèses simplificatrices. Ainsi que pour familiariser avec les hypothèses à vérifier car avec les Toolbox « mutools » et « Robust », le seul problème qui reste est de vérifier les hypothèses : après les solutions nous parlerons des hypothèses.

**Retour d'état  $H_\infty$  :**

Pour la synthèse d'un retour d'état, on suppose que tout les états sont mesurables.

On fait aussi les hypothèses suivantes :

- 1-  $(A, B_2)$  est stabilisable.
- 2-  $D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$

3-  $D_{11} = 0$ .

$$P \text{ est donné par : } P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le problème est de trouver le compensateur stabilisant  $P$  et minimisant le critère  $\|J_{zw}\|_\infty$ .

La solution suivante est une solution sous optimale car elle garantit seulement que :

$$\|J_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (11).$$

**Théorème :**

Il existe un retour d'état stabilisant  $P$  et vérifiant (11) si et seulement si l'équation de Riccati dont le Hamiltonien est :

$$\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix}$$

admet une solution  $X$  vérifiant :  $X > 0$  (définie positive).

$$X = X^T$$

$X$  est stabilisant. La commande est alors donnée par :  $u = -B_2^T X \cdot x$   
 $u = -F \cdot x$ .

**Remarques :**

- L'hamiltonien  $\begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$  correspondant à l'équation de Riccati suivante

$$A^T X + XA + XRX - Q = 0. \quad X \text{ est stabilisant si } (A+RX) \text{ est stable.}$$

- L'hypothèse (1) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution.
- Les hypothèses (2) et (3) permettent de simplifier l'expression des solutions, et elles peuvent être évitées dans le cas général.
- Remarquons que pour  $\gamma \rightarrow \infty$ , on retrouve la solution de la commande LQ avec :

$$Q = C_1 C_1^T \quad \text{et} \quad R = 1.$$

$$J = \int_0^\infty (X^T C_1^T C_1 X + u^T u) dt.$$

- La solution ne minimise pas  $\|J_{zw}\|_\infty$ .

Pour minimiser  $\gamma$  il faut procéder par itérations successives, en diminuant  $\gamma$  jusqu'à ce que la solution de Riccati ne vérifie plus les conditions (12).

Pour notre cas nous allons pas utiliser le retour d'état  $H_\infty$ , car les états ne sont pas mesurables, nous allons voir la solution au problème  $H_\infty$  par retour de sorties.

### La commande $H_\infty$ par retour de sortie

Toujours pour présenter des solutions simples on prendra le cas où  $D_{11} = D_{22}$ .

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Les hypothèses suivantes sont supposées vérifiées :

1-  $(A, B_2)$  stabilisable,  $(A, C_2)$  détectable.

$$2- D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I] \quad (13)$$

$$3- \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

### Théorème :

Les conditions (1), (2) et (3) étant vérifiées.

Il existe un compensateur  $K(s)$  stabilisant  $P$  et vérifiant (11) si et seulement si :

1- Il existe une solution  $X=X^T \geq 0$  pour l'équation de Riccati :

$$\begin{bmatrix} A & \gamma^{-1} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1 C_1^T & -A^T \end{bmatrix}$$

2- Et il existe une solution  $y=y^T \geq 0$  pour l'équation de Riccati :

$$\begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$$

3-  $\rho(Xy) < \gamma^2$ .

$\rho$  : désigne le rayon spectral d'une matrice (la plus grande valeur propre).

La représentation d'état du compensateur est donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T + B_2 F + Z L C_2 & -ZL \\ F & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} F = -B_2^T X \\ L = -y C_2^T \\ Z = (I - \gamma^{-2} X \cdot y)^{-1} \end{cases}$$

Le compensateur peut être mis sous la forme d'un retour d'état avec un observateur :

$$\dot{\hat{X}} = A \hat{X} + B_1 \hat{d}_r + B_2 u + ZL(C_2 \hat{X} - y)$$

$$\hat{d}_r = \gamma^{-2} B_1^T X \cdot \hat{X}$$

$$u = F \hat{X}$$

$\hat{d}_r$  est un terme supplémentaire qui correspond à l'estimation de  $w$  dans cas le plus défavorable.

**Remarques :**

- Lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$  la condition (3) est impliquée par (1) et (2). ( $\hat{d}_r \rightarrow 0$ )  $\Rightarrow$  on retrouve le compensateur de la commande LQG.
- L'hypothèse (1) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution.
- Les conditions (2) et (3) permettent de simplifier l'expression des solutions.
- Le compensateur est du même ordre que le système augmenté P qui est égal au degré de G plus celui des fonctions de pondération.

Nous allons maintenant voir les conditions à vérifier dans un cadre plus général de la commande  $H_\infty$  et comment faire pour les valider.

**1-3-4 Les hypothèses dans un cadre plus général**

On se situe dans un cadre plus général.

Les hypothèses utilisées pour résoudre le problème  $H_\infty$  sont les suivantes :

1 -  $(A, B_2)$  stabilisable et  $(A, C_2)$  détectable.

2 -  $\text{Rang}(D_{12}) = m_2 = \dim(u)$  et  $\text{Rang}(D_{21}) = p_2 = \dim(y)$ .

3 -  $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$  ,  $D_{21} = [0 \quad I]$

4 -  $\text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{22} \end{bmatrix} = n + m_2$  ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ .

5 -  $\text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$  ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ .

Comme nous l'avons déjà dit, la condition (1) est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution.

Les hypothèses (2), (4) et (5) garantissant que le problème est bien posé, c'est à dire que le compensateur est propre.

Les hypothèses (4) et (5) signifient que  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  n'ont pas de zéro sur l'axe imaginaire, elles peuvent être évitées.

L'hypothèse (3) permet de simplifier la solution.

Si l'hypothèse (2) est vérifiée, on peut transformer le système pour vérifier l'hypothèse (3), c'est une opération qui est faite automatiquement par le programme hinfsys ou hinf de Matlab.

Le problème qui reste est la validation de l'hypothèse (2).

### **3-5 Choix des fonctions de pondérations**

Nous allons nous situer dans le cas d'un problème à sensibilité mixte, c'est à dire le critère est :  $J = \left\| \begin{matrix} w_S S \\ w_T T \end{matrix} \right\|_\infty$ . La commande doit vérifier  $J < 1$  et dans le cas optimal minimiser J.

$\|w_S S\|_\infty$  représente les performances nominales.

$\|w_T T\|_\infty$  représente la stabilité robuste.

#### **Le choix de $w_S$ :**

Les performances sont exigées dans le domaine des basses fréquences. Alors  $w_S$  doit être grand en basses fréquences et faible en hautes de fréquences, donc c'est un filtre passe bas. Nous allons utiliser une approche « loop shaping », c'est à dire on va considérer  $w_S$  comme borne supérieure de S en utilisant le fait que :

$$\bar{\sigma}(S) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(w_S(j\omega))} \quad , \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{\sigma}(w_S S) < 1.$$

Pour les systèmes multivariables on choisit une matrice de la forme  $W_S = w_S I$  où  $w_S$  est la fonction de pondération choisie. Et donc on choisit  $w_S$  pour que S vérifie :

$$|S(j\omega)| \prec \frac{1}{|w_S(j\omega)|}$$

ou

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \prec \frac{1}{|w_S(j\omega)|} \text{ pour MIMO.}$$

### **Le choix de $w_T$ :**

Nous avons vu qu'une condition suffisante de stabilité robuste pour incertitude multiplicative (en entrée) est donnée par :  $\bar{\sigma}(\Delta T) \prec 1$ .

Pour notre critère on vérifie :  $\bar{\sigma}(w_T T) \prec 1$ .

Et donc on doit avoir :  $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \prec |w_T(j\omega)|$  ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ .

Lorsque nous avons des informations assez précises sur l'amplitude de  $\Delta(j\omega)$  , alors il est essentiel de vérifier l'inégalité précédente.

Comme les incertitudes et les dynamiques négligées sont en général de hautes fréquences,  $w_T$  est un filtre passe haut et donc favorisant la robustesse pour les hautes fréquences  $w \succ w_\beta$  et les performances pour les basses fréquences  $w \prec w_\beta$  . Lorsqu'une borne sur  $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega))$  n'est pas connue alors on procède par « loop shaping » comme précédemment et  $|w_T(j\omega)|$  est considérée comme une borne supérieure de  $T(j\omega)$ .

## **4-APPROCHE PAR FACTORISATION PREMIERE**

Les paragraphes précédents ont traité de l'approche par les fonctions de sensibilité et l'algorithme de Glover-Doyle, qui est la plus utilisée. Nous présentons à présent une autre méthode, développée par McFarlane et Glover à partir de la notion de factorisation première d'une matrice de transfert. Cette approche présente des propriétés intéressantes, et sa mise en œuvre fait appel à des notions classiques de l'Automatique.

Soit  $G(s)$  une matrice de transfert d'un système. La factorisation première à droite normalisée de  $G(s)$  est constituée des 2 matrices de transfert  $M(s)$ ,  $N(s)$  propres et stables telles que :

$$\begin{cases} G(s) = N(s)M(s)^{-1} \\ \forall s \in \mathbb{C} \quad N(-s)^T N(s) + M(-s)^T M(s) = I \end{cases}$$

De même, la factorisation première à gauche normalisée est constituée des 2 matrices  $\hat{M}(s), \hat{N}(s)$  propres et stables telles que :

$$\begin{cases} G(s) = \hat{M}(s)^{-1} \hat{N}(s) \\ \forall s \in \mathbb{C} \quad \hat{N}(s) \hat{N}(-s)^T + \hat{M}(s) \hat{M}(-s)^T = I \end{cases}$$

Les matrices constituant ces 2 factorisations peuvent être construites à partir d'une représentation d'état minimale de  $G(s)$ . Nous supposons pour simplifier que cette dernière est strictement propre, soit  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N(s) \\ M(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C \\ -B^T X \end{pmatrix} \left( pI - A + BB^T X \right)^{-1} B + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{pmatrix} &= C(pI - A + YC^T C)^{-1} \begin{pmatrix} B & -YC^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $X$  et  $Y$  sont les matrices positives solutions des équations de Riccati :

$$\begin{aligned} A^T X + XA - XBB^T + C^T C &= 0 \\ AY + YA^T - YC^T C Y + BB^T &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

équations analogues à celles intervenant en commande LQG.

Exprimons le modèle nominal du système à réguler à partir de ses facteurs premiers à

gauche, soit  $G = \hat{M}^{-1} \hat{N}$ .

Les incertitudes de modèle peuvent être prises en compte en considérant un modèle de la forme

$\hat{G} = (\hat{M} + \Delta_M)^{-1} (\hat{N} + \Delta_N)$ , où  $\Delta_N, \Delta_M$  sont des matrices de transfert inconnues mais stables.

On peut alors définir une famille de modèles de la façon suivante :

$$G_t = \left\{ \hat{G} = (\hat{M} + \Delta_M)^{-1} (\hat{N} + \Delta_N) ; \|\Delta_N \quad \Delta_M\|_\infty \leq \varepsilon \right\} \quad (15)$$

Notons que cette forme de représentation est très générale, dans la mesure où  $G_t$  peut contenir des modèles d'ordres différents, n'ayant pas le même nombre de pôles dans le demi plan droit,...

Le problème de stabilisation robuste correspondant (figure 07) est de trouver la plus grande valeur de  $\varepsilon$  noté  $\varepsilon_{\max}$ , telle que tous les modèles dans l'ensemble  $G_t$  puissent être stabilisés par le même correcteur K.

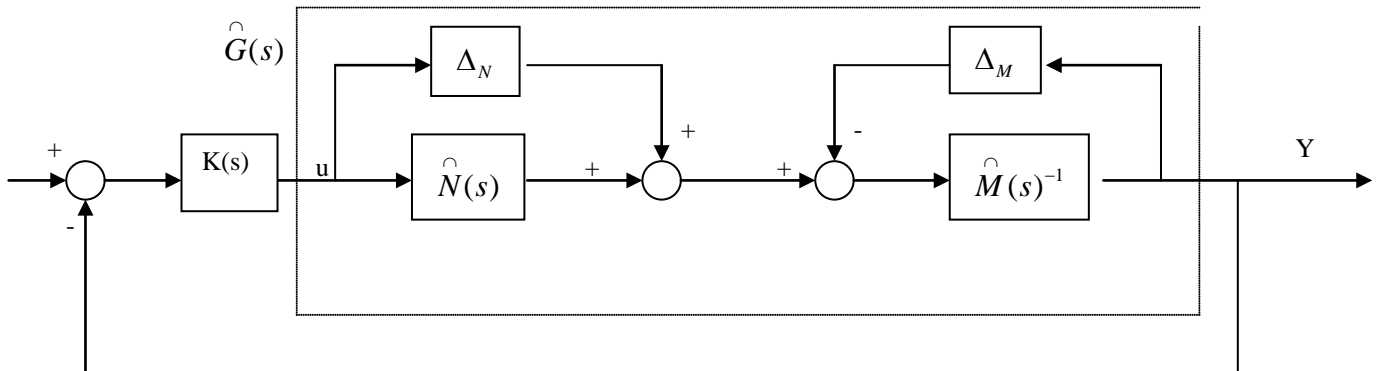


Figure III-14 : Stabilisation robuste d'un système décrit par factorisation première

A partir du schéma de la figure III-14 nous avons :

**En boucle ouverte :**

$$\begin{aligned}
 y &= (\hat{M} + \Delta_M)^{-1} (\hat{N} + \Delta_N) \cdot u \\
 \Rightarrow \hat{M} y &= -\Delta_M y + \Delta_N u + \hat{N} u \\
 \Rightarrow \hat{M} &= \hat{N} u + \begin{bmatrix} \Delta_N & -\Delta_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\
 \hat{M} y &= \hat{N} u + \Phi \\
 \text{avec : } \Phi &= \begin{bmatrix} \Delta_N & -\Delta_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\Phi$  représente l'incertitude du système.

**En boucle fermée :**

On peut montrer facilement que :

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \hat{M}^{-1} \Phi = H\Phi$$

Le système est donc équivalent à celui de la figure III-15 :

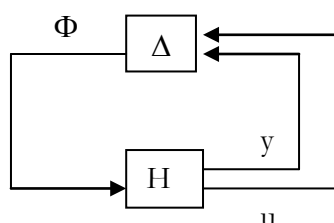


Figure III-15

Le théorème du petit gain nous permet d'assurer que :

Si  $K$  vérifie

$$\|H\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1.$$

ou en utilisant  $\|\Delta\|_\infty < \varepsilon$ .

On en déduit que le correcteur stabilise tous les modèles de la famille  $G_i$  si et seulement si la norme  $H_\infty$  de cette matrice est inférieure à  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Le problème de stabilisation robuste peut donc

s'écrire, en posant  $\gamma = \frac{1}{\varepsilon}$  :

Trouver  $K(s)$  stabilisant  $G(s)$  et tel que :

$$\left\| \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} (I + GK)^{-1} \hat{M}^{-1} \right\|_\infty < \gamma.$$

Les facteurs premiers étant normalisés, donc vérifiant :

$$\begin{pmatrix} \hat{M}(s) & \hat{N}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{M}(-s)^T \\ \hat{N}(-s)^T \end{pmatrix} = I$$

On peut encore s'écrire :

$$\left\| \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} (I + GK)^{-1} \begin{pmatrix} G & I \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} KSG & KS \\ SG & S \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

Le problème de la commande robuste optimale qui consiste à maximiser  $\varepsilon$  et minimiser  $\gamma$  revient à minimiser  $J = \left\| \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} [I - GK]^{-1} \begin{pmatrix} G & I \end{pmatrix} \right\|_\infty$

On voit que le critère à minimiser contient quatre objectifs  $S$ ,  $KS$ ,  $SG$  et  $KSG$ .

On reconnaît un problème  $H_\infty$  standard particulier, avec un critère 4 blocs, mais sans fonction de pondération. Ce problème peut bien sûr être résolu par la méthode de Glover – Doyle et les  $\gamma$  itérations. Cependant Mc Farlane et Glover ont montré que la valeur minimale de  $\gamma$  est connue à l'avance :  $\gamma_{\min} = \varepsilon_{\max}^{-1} = \sqrt{1 + \lambda_{\sup}(YX)}$ .

Où  $\lambda_{\sup}$  désigne la plus grande valeur propre et  $X, Y$  sont les solutions des équations (15). De plus, pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ , le correcteur central stabilisant tous les modèles  $G_i$  est donné par :

$$K(s) = B^T X (sI - A + BB^T X - \gamma^2 ZYC^T C)^{-1} \gamma^2 ZYC^T$$

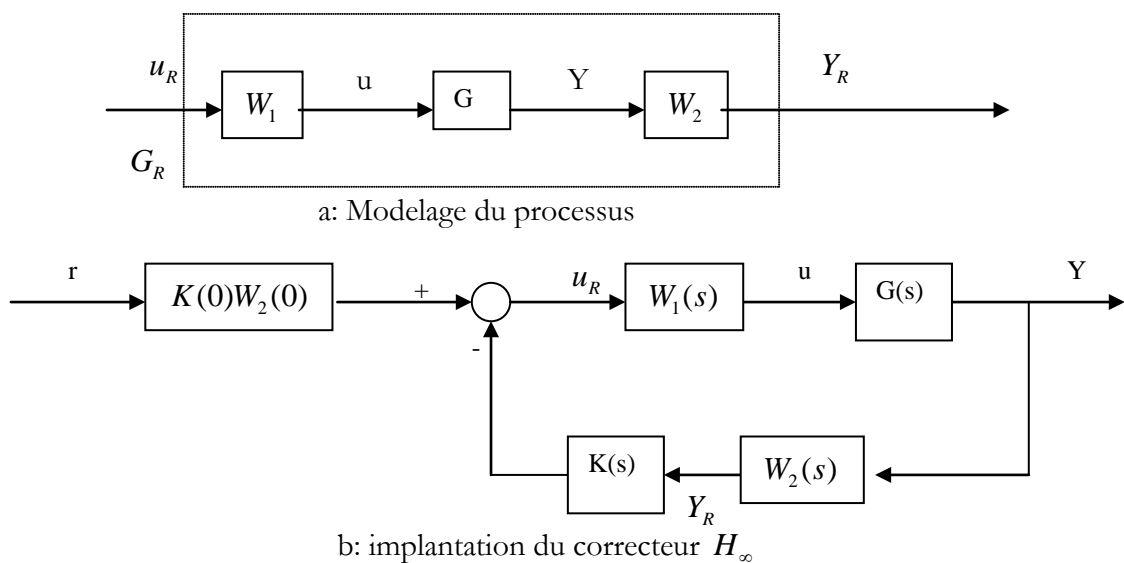
$$Z = (I + YX - \gamma^2 I)^{-1}.$$

On remarquera la simplicité de cette solution comparée à celle de Glover – Doyle. De plus, les équations de Riccati (14) sont en général beaucoup mieux conditionnées, et donc plus faciles à résoudre. Comme aucune fonction de pondération ne peut être introduite dans le critère (16), le réglage des performances est obtenu en effectuant un modelage en boucle ouverte « loop shaping » du processus, avant de calculer le correcteur. La démarche est donc la suivante :

- 1- Ajouter à la matrice  $G(s)$  du système à réguler un pré-compensateur  $W_1(s)$  et / ou un post-compensateur  $W_2(s)$ , de sorte que les valeurs singulières du système augmenté  $G_R(s) = W_2(s)G(s)W_1(s)$  présentent une forme satisfaisante : typiquement, on assurera du grand gain en basse fréquence (par exemple au moyen d'une action intégrale), du faible gain dans les hautes fréquences, et on choisira la fréquence de passage à 0db , qui correspond à peu près à la bande passante du système bouclé.
- 2- A partir des factorisations premières de  $G_R(s)$  , appliquer les résultats précédents pour calculer  $\varepsilon_{\max}$  , puis un correcteur  $K$  assurant une valeur de  $\varepsilon$  légèrement inférieur à  $\varepsilon_{\max}$  :

$$\gamma = \varepsilon^{-1} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + W_2 G W_1 K)^{-1} (I \quad W_2 G W_1) \right\|_\infty$$

- 3- La structure de correction est obtenue en combinant le correcteur  $K$  et les filtres  $W_1$  et  $W_2$  , en adoptant en général le schéma d'implantation de la figure 9-b.



**Figure III-16** : Synthèse par « loop shaping »

**Remarques :**

- La représentation des incertitudes par les facteurs premiers permet de décrire une plus grande classe de systèmes, et c'est la seule qui permettent que le système perturbé ait plus de pôles instables que le système nominal.
- La méthode des facteurs premiers fournit directement le  $\gamma$  minimal ( $\epsilon_{\max}$ ) sans passer par les  $\gamma$  itérations.
- L'implémentation par loop shaping permet de séparer la synthèse, en une première étape de loop shaping par  $W$  et une seconde étape de stabilisation par  $K$ .

**6-APPLICATION DE LA COMMANDE  $H_\infty$  SUR LE MODELE DE SIMULATION D'UN MISSILE :**

**6-1 Modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en Roulis**

Nous avons appliqué la commande par réseaux de modèles locaux basée sur la synthèse  $H_\infty$  au modèle simulé d'un missile cruciforme stabilisé en roulis, pour cela on a ajouter un pré - compensateur  $W_1(s) = 0.1$  et un post - compensateur  $W_2(s) = \frac{100}{s + 200}$  de sorte que les valeurs singulières du système augmenté  $G_R(s) = W_2(s)G(s)W_1(s)$  présente une forme satisfaisante : on assurera du grand gain en basse fréquence, du faible gain dans les hautes fréquences (figure7 et 8).

Nous avons perturbé le système augmenté par une incertitude multiplicative

$$\Delta_m = \frac{-0.7(0.005s + 1)}{0.0001s + 1}$$

Le régulateur  $H_\infty$  a été synthétisé sur la base de l'approche par factorisation première.

On suppose que les vrais paramètres du missiles varient dans le temps :

$$a = a_0 - 0.1.e^{-5t} \cdot \text{eye}(2)$$

avec

$$a_0 = \begin{bmatrix} -\frac{QS}{mV} C_{z\alpha} & V \\ \frac{QSl}{BV} C_{n\alpha} & \frac{QSl}{BV} C_{nq} \end{bmatrix}$$

t est le temps.

Les résultats de simulations sont présentés dans la figure 10.

Nous avons perturbé le système augmenté par une incertitude multiplicative

$$\Delta_m = \frac{-0.7(0.005s + 1)}{0.0001s + 1}$$

Le régulateur  $H_\infty$  a été synthétisé sur la base de l'approche par factorisation première.

On suppose que les vrais paramètres du missile varient dans le temps :

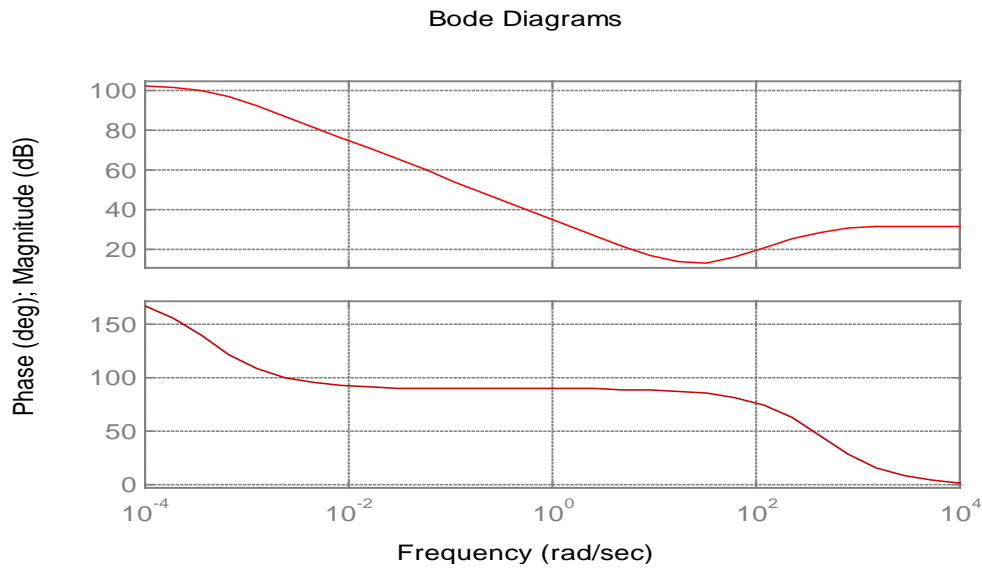
$$a = a_0 - 0.1.e^{-5t}.\text{eye}(2)$$

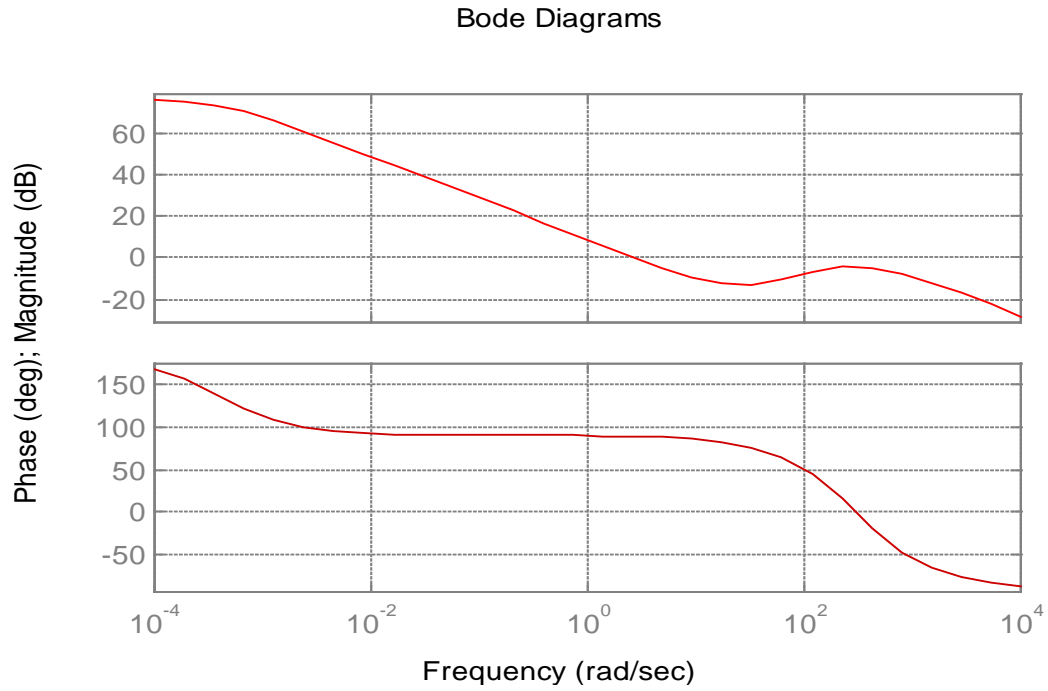
avec

$$a_0 = \begin{bmatrix} -\frac{QS}{mV}C_{z\alpha} & V \\ \frac{QSl}{BV}C_{n\alpha} & \frac{QSl}{BV}C_{nq} \end{bmatrix}$$

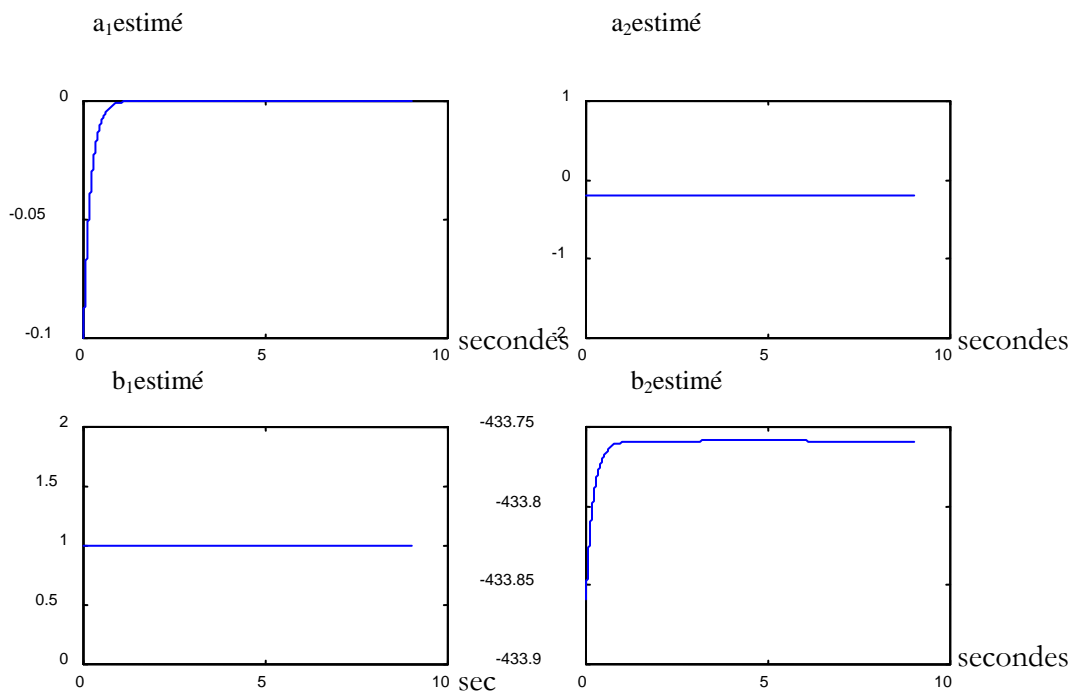
t est le temps.

Les résultats de simulations sont présentés dans la figure III-20

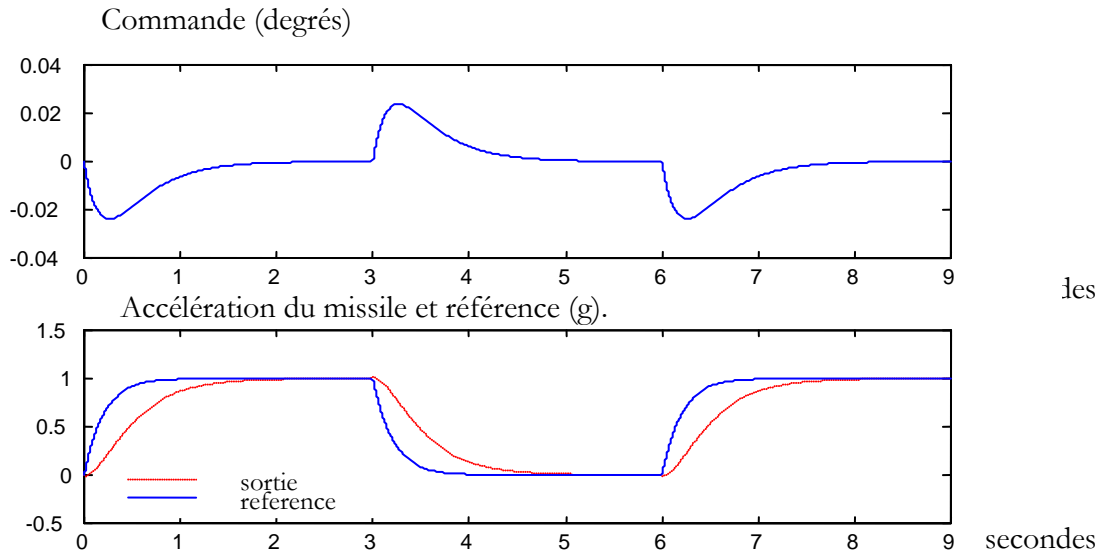




**Figure III-17 et III-18 :** Diagramme de Bode du modèle de simulation et du système augmenté.



**Figure III-19 :** Variation des paramètres de la fonction de transfert du missile



**Figure III-20 :** Résultats de simulation d'une commande  $H_\infty$  appliquée au modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en roulis dont les paramètres varient dans le temps.

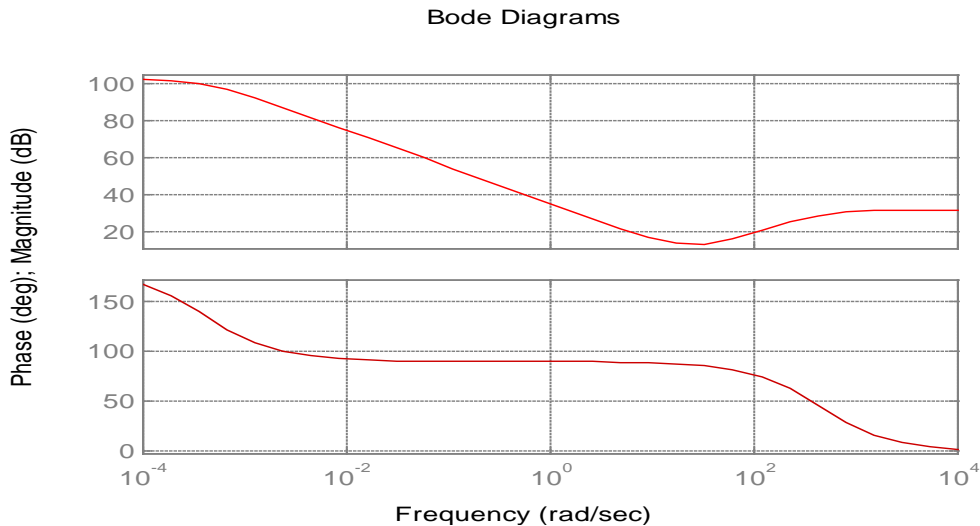
**Commentaire :**

On remarque que l'erreur de poursuite est en moyenne acceptable avec un retard du aux variations subites de l'accélération.

**6-2 Modèle de simulation d'un missile stabilisé en roulis :**

Les diagrammes de Bode des deux mouvements de Tangage et Lacet sont présentés sur les figures III-25 et III-29. Nous avons injecté une incertitude multiplicative citée auparavant dans les deux systèmes augmentés modélisant des deux mouvements de Tangage et de Lacet.

**Mouvement de tangage :**



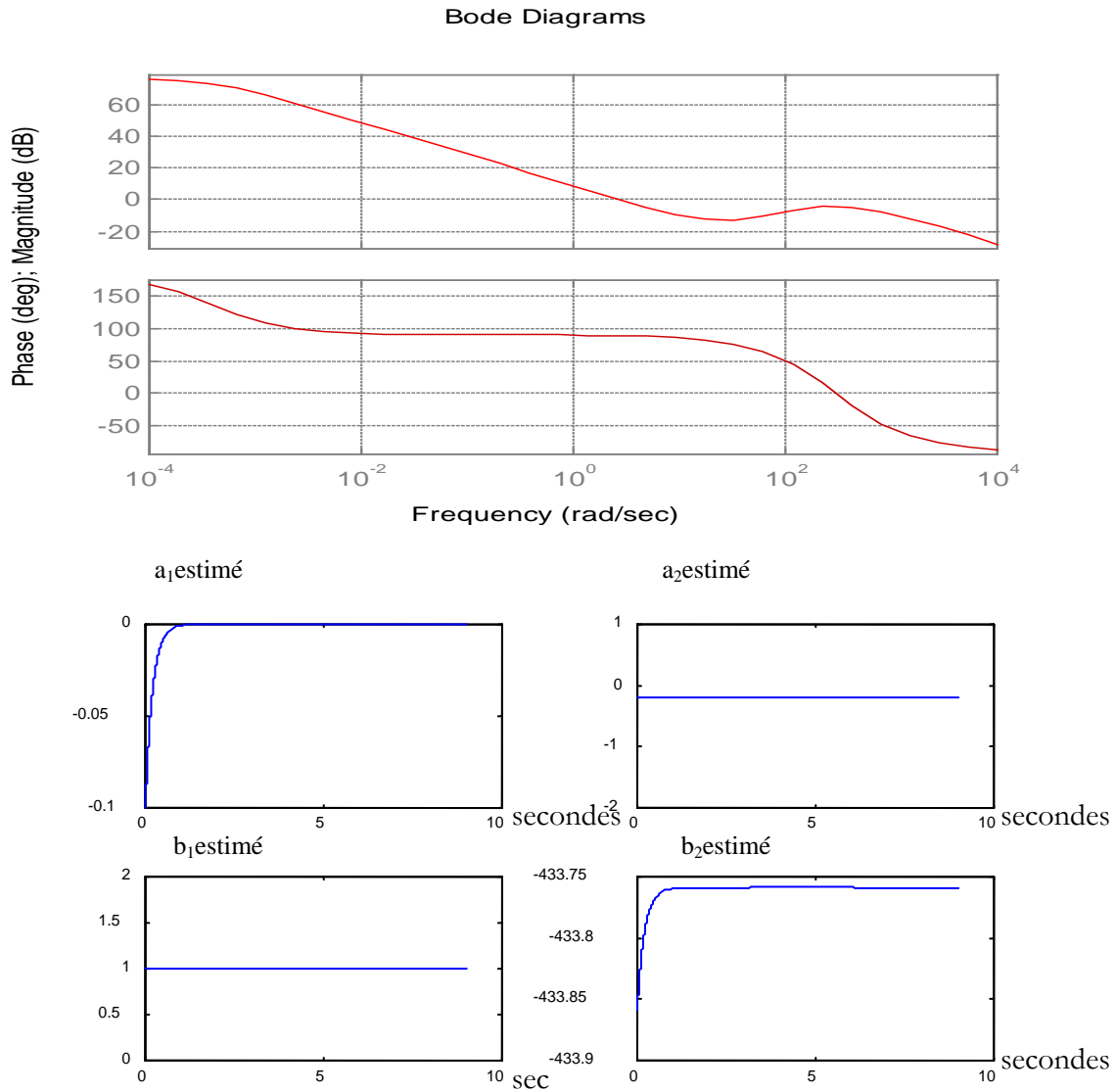
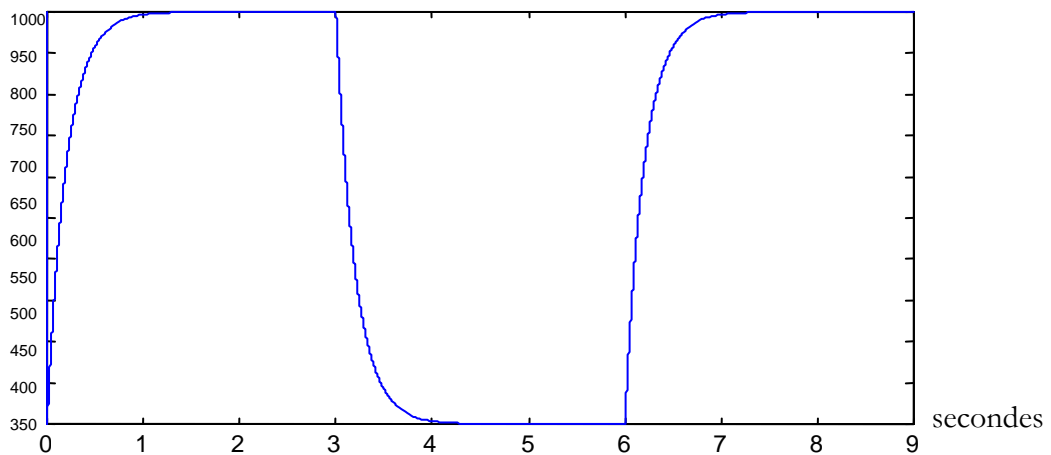
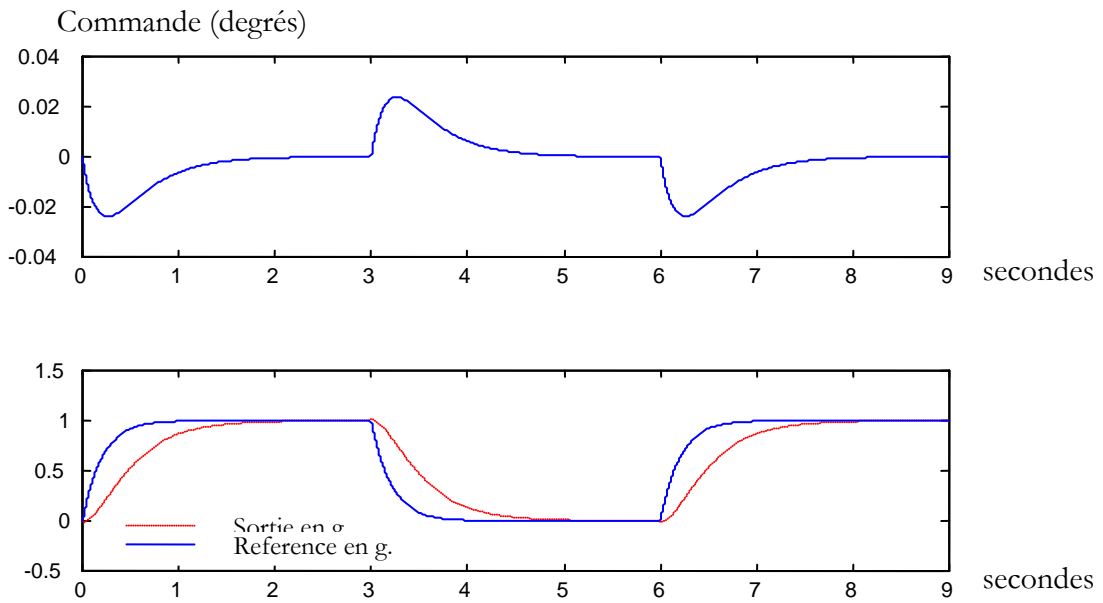


Figure III-23 : Variation des paramètres de la fonction de transfert du missile

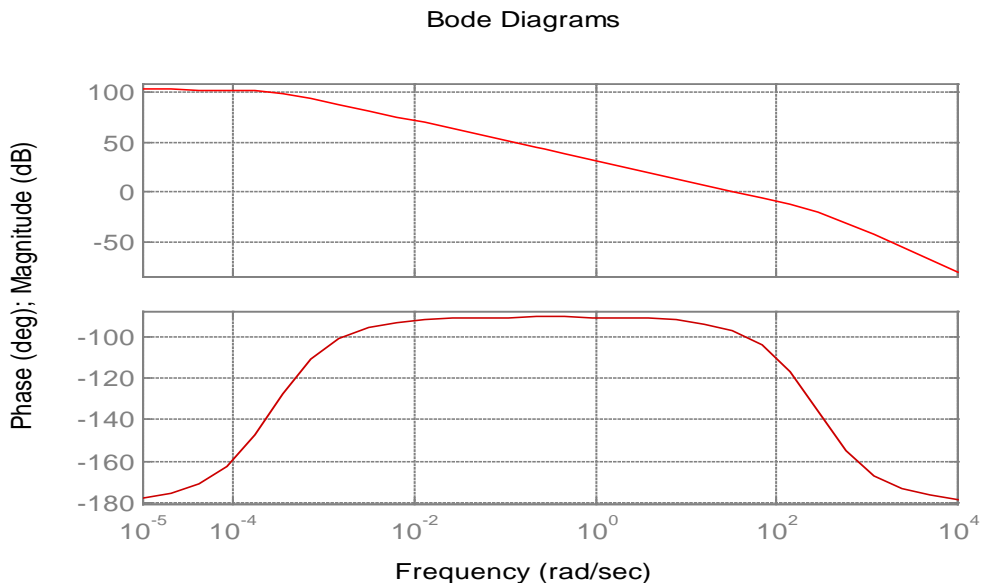


Variation de la vitesse du missile (m/s)



**Figure III-24 :** Résultats de simulations d'une commande  $H_\infty$  appliquée sur un modèle de simulation d'un missile stabilisé en roulis avec vitesse variée dans le temps (Mouvement de Tangage).

**Mouvement de Lacet :**



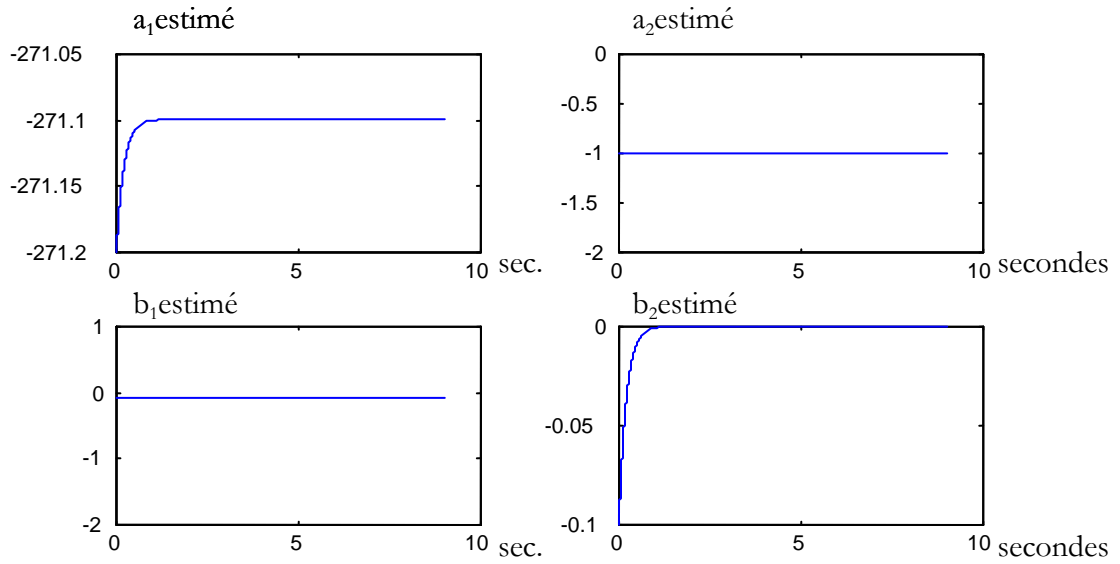
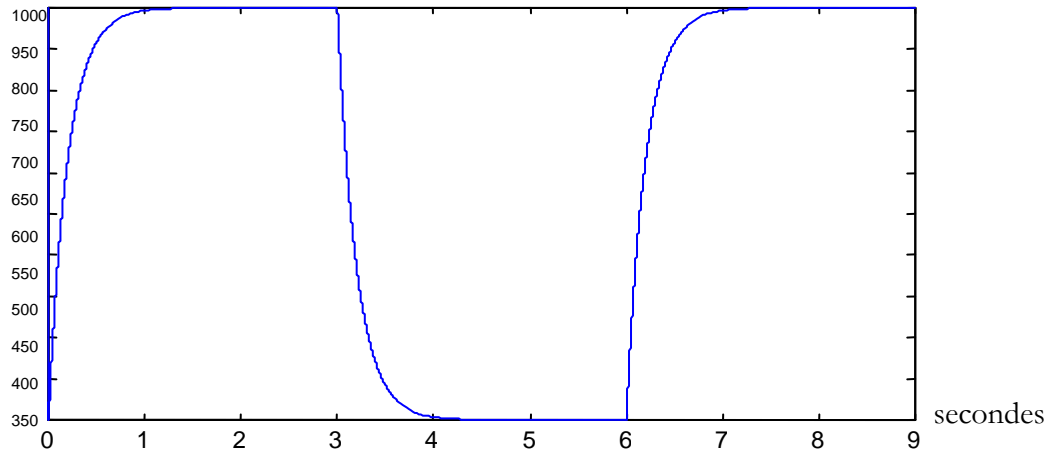
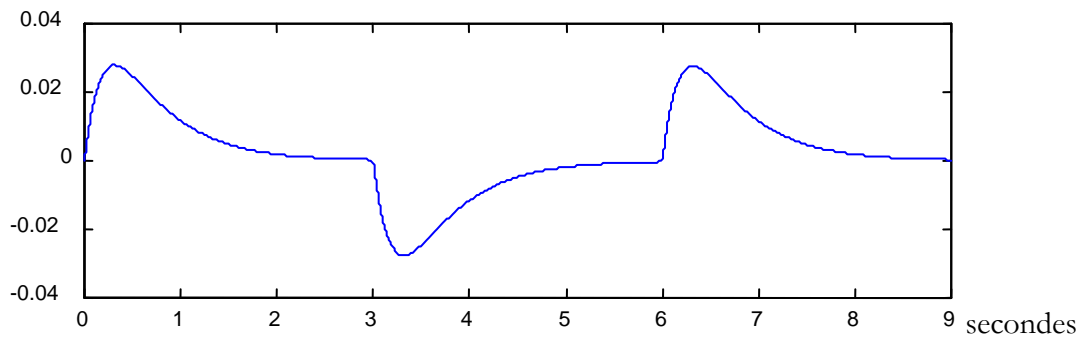


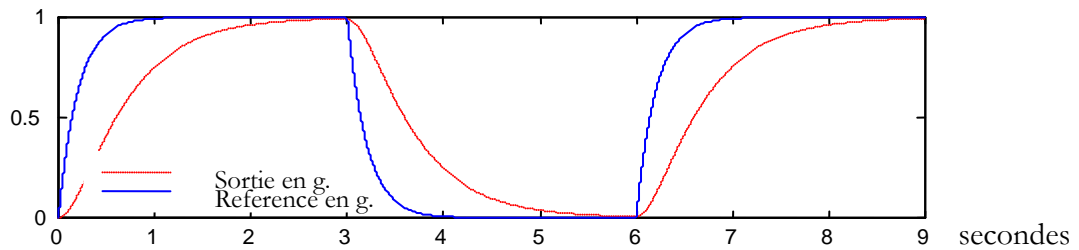
Figure III-27 : Variation des paramètres réel du missile



Variation de la vitesse du missile (m/s)

Commande (degrés)





**Figure III-29 :** Résultats de simulations d'une commande  $H_\infty$  appliquée au modèle de simulation d'un missile stabilisé en roulis avec la vitesse varie dans le temps (Mouvement de Lacet).

**Commentaire :**

On remarque que l'erreur de poursuite est en moyenne acceptable avec un retard dû aux variations subites de l'accélération.

**Conclusion :**

la commande  $H_\infty$  est robuste vis à vis des variations paramétriques et des perturbations et elle a une rapidité acceptable. Mais on remarque des retards de poursuite qui sont dus aux choix des fonctions de pondérations, ce qui confirme la complexité de son implémentation. Cette constatation nous amène à proposer la commande par mode glissant.

## SYNTHESE PAR MODE DE GLISSEMENT

### 1- INTRODUCTION

La commande par mode de glissement est une commande à structure variable, elle se distingue par les propriétés suivantes :

- Robustesse vis à vis des perturbations externes, et des variations paramétriques ainsi que des incertitudes du modèle.
- C'est une commande continue par morceaux dont le second terme est discontinu à cause du changement de la structure au passage de la surface dite de glissement.
- La dynamique en boucle fermée est imposée par les paramètres de la surface de glissement sauf dans le cas du régime hors glissement.
- Implémentations aisées à cause de l'avancement de l'électronique de puissance à haute fréquence.

Néanmoins il existe des inconvénients parmi lesquels on peut citer l'excitation permanente des organes de commande suite au commutation à haute fréquence. Des solutions à ce problème de chattering vont être exposées.

### 2- POSITION DU PROBLEME DE LA COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE

Soit le système

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)U$$

avec  $\dim x=n$ ,  $\dim u=m$ .

Le problème de la commande à structure variable se pose comme suit :

1. Trouver m surfaces de glissement représentées dans la forme vectorielle par  $\sigma(t)$ .
2. Trouver une commande à structure variable

$$U(x,t) = \begin{cases} U^+(x,t) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ U^-(x,t) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases}$$

de telle façon que le vecteur d'état soit ramené vers la surface de glissement en un temps fini.

Le sens physique des deux objectifs est le suivant :

1. Synthétiser une surface de la commande, c'est à dire imposer une dynamique qui dépend de cette surface et qui est d'ordre réduit.
2. Synthétiser la loi de commande qui garantira l'attractivité de la stabilité de cette surface.

Ainsi les systèmes à structure variable sont des systèmes globalement asymptotiquement stables.

### 3- CHOIX DE LA SURFACE DE GLISSEMENT

Le choix de la surface de glissement est la première étape dans la synthèse de la commande, car de la forme et des paramètres de cette surface dépendra la dynamique en régime glissant. Bien qu'il n'existe pas de spécifications précises pour faire un choix adéquat, et qu'un choix d'une surface non linéaire est possible mais une surface linéaire est préférable pour simplifier la synthèse de la loi de commande.

On considère la loi de commutation suivante :

$$\sigma(x,t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(x,t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_m(x,t) \end{bmatrix} = Sx + x_d(t)$$

avec

$x \in \mathbb{R}^n$  vecteur d'état du système.

$x_d \in \mathbb{R}^n$  vecteur d'état désiré (consigne).

$S \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrice des gains définissant la dynamique de la surface de glissement ;

donc

$$\sigma_i(x,t) = \sum_{j=1}^n S_{ij}x_j + x_{di} \quad i = 1, \dots, m.$$

### 4- EXISTENCE DU MODE DE GLISSEMENT

L'aspect le plus important après le choix de la surface de glissement est de vérifier l'existence du mode glissant.

Le régime de glissement existe si dans le voisinage de la surface  $\sigma(x,t) = 0$ , le vecteur vitesse de la trajectoire d'état est dirigé toujours vers la surface. Il y a trois approches qui traitent cette condition :

#### **Approche directe.**

C'est la plus ancienne, proposée par Utkin et Emelyanov

$$\dot{\sigma}_i \sigma_i < 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Utkin donne une condition suffisante similaire pour l'existence locale :

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}_i < 0 \text{ et } \lim_{\sigma_i \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}_i > 0$$

### Approche de la loi d'accessibilité

Cette méthode spécifie directement la dynamique de la surface de glissement.

On pose

$$\dot{\sigma} = -Q \operatorname{sgn}(\sigma) - kf(\sigma)$$

où k et f sont des matrices de gains diagonales avec des éléments positifs.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = [\operatorname{sgn}(\sigma_1) \quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) \quad \dots \quad \operatorname{sgn}(\sigma_m)]^T$$

$$f(\sigma) = [f_1(\sigma) \quad f_2(\sigma) \quad \dots \quad f_m(\sigma)]^T$$

Les fonctions scalaires  $f_i$  satisfont la condition :

$$\sigma_i f_i(\sigma_i) > 0 \text{ si } \sigma_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Le choix de Q et k donne différentes dynamiques à la surface, par exemple :

$$\dot{\sigma} = -Q \operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\dot{\sigma} = -Q \operatorname{sgn}(\sigma) - k\sigma$$

$$\dot{\sigma}_i = -k_i |\sigma_i|^\alpha \operatorname{sgn}(\sigma_i)$$

### Elimination du phénomène de Chattering :

Le problème des régimes glissant est que la commande est discontinue sur la surface de glissement et par conséquent, elle va commuter régulièrement et ceci à chaque traversée de cette surface, ceci à une fréquence théorique infinie. Une telle commande, en plus d'être difficile à réaliser en pratique, peut ne pas être applicable au système. Pour remédier à ce problème, la fonction discontinue est remplacée par une fonction continue (figure), ceci au voisinage de la surface de glissement, puis on procédera à un lissage de la commande.

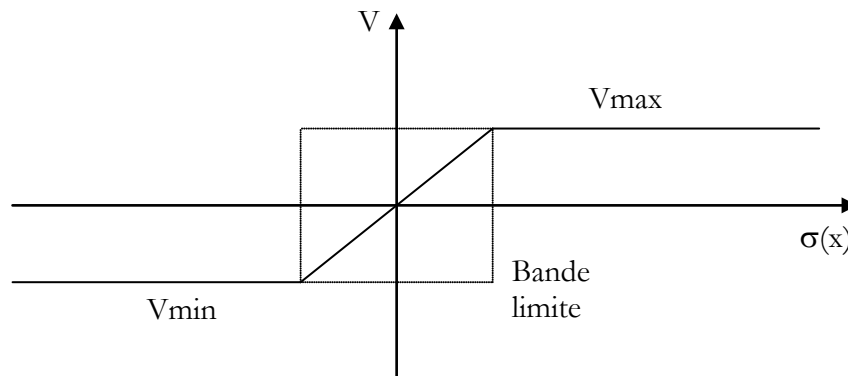


Figure IV-1 : Interprétation de la loi de commande au niveau de la bande limite

## 5- DYNAMIQUE DU REGIME GLISSANT

Soit le système dynamique non linéaire analytique :

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)U$$

en régime de glissement idéal on a :

$$\sigma(x,t) = 0$$

par conséquent, la dérivée par rapport au temps doit aussi toujours être nulle :

$$\dot{\sigma} = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]^T \dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ \Rightarrow \dot{\sigma} &= \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]^T \left( f(x,t) + g(x,t)U_{eq} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

avec  $u_{eq}$  est la commande équivalente en mode de glissement, d'après la dernière équation cette commande équivalente est donnée par la formule suivante

$$U_{eq} = - \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T f(x,t) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\}$$

avec :

$$\det \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right] \neq 0$$

étant la condition de transversabilité.

L'équation d'état en régime de glissement idéal devient :

$$\dot{x} = \left\{ 1 - g(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T \right\} f(x,t) - g(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

pour le cas particulier de notre surface

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= S\dot{x} + \dot{x}_d(t) \\ U_{eq} &= -[Sg(x,t)]^{-1} \{ Sf(x,t) + \dot{x}_d(t) \} \end{aligned}$$

L'équation d'état en mode de glissement devient :

$$\dot{x} = \left\{ 1 - g(x,t)[Sg(x,t)]^{-1} S \right\} f(x,t) - g(x,t)[Sg(x,t)]^{-1} \dot{x}_d$$

## 6- SYNTHÈSE DE COMMANDE ROBUSTE

Considérons le système monovarié suivant :

$$\ddot{x} = f + gU$$

où  $0 < g_{\min} < g < g_{\max}$

Le problème est de trouver la loi de commande qui assure la convergence de l'erreur de poursuite  $\sigma = x - x_d$  vers zéro,  $x_d$  étant la référence. Soit la surface :

$$\sigma(x,t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) x \quad \lambda > 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma^2 < -\eta |\sigma| \quad \eta > 0$$

soit  $\hat{g}$  l'estimer de  $g$ , en général on choisit la moyenne géométrique  $\hat{g} = \sqrt{g_{\min} g_{\max}}$

on peut ainsi écrire :

$$\beta^{-1} \leq \frac{\hat{g}}{g} \leq \beta$$

où

$\beta = \sqrt{\frac{g_{\min}}{g_{\max}}}$  qui caractérise la marge de gains du système.

Soit la loi de commande :

$$U = \hat{g}^{-1} \left[ \hat{g} U - k \cdot \text{sgn}(\sigma) \right]$$

$$\text{avec : } \hat{g} U = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\sigma}$$

$$\sigma = \dot{x} + \lambda x$$

La stabilité est garantie si  $\sigma \dot{\sigma} < 0$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= (f - g g^{-1} \hat{f}) + (1 - g g^{-1}) (-\ddot{x}_d + \lambda \dot{x}) g g^{-1} - k \text{sgn}(\sigma) \\ \dot{\sigma} < 0 &\Rightarrow k \geq g g^{-1} F + \eta g g^{-1} + \left| g g^{-1} - 1 \right| \left| \hat{f} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{x} \right| \\ &\Rightarrow k \geq \beta(F + \eta) + (\beta - 1) \left| \hat{U} \right| \\ \text{avec : } &\left| \hat{f} - f \right| \leq F \end{aligned}$$

### 7- OBSERVATEUR PAR MODE DE GLISSEMENT :

L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer le principe du mode de glissement pour la synthèse d'un observateur d'état non linéaire, et ce la pour exploiter les propriétés des modes glissant tel que la robustesse vis a vis des variations paramétriques.

#### 7-1 Exemple :

Considérons les systèmes donnés par :

$$\ddot{x}(t) = f(x, \dot{x}, t)$$

où : f est une fonction non linéaire inconnue. Si on met  $\dot{x}_1 = x_2$  ,  $x_2 = \dot{x}$  , le système sera décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

Supposons que seul l'état  $x_1$  est disponible, on doit synthétiser un observateur permettant d'estimer sans connaître la fonction f. La structure de l'observateur sera comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\alpha_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_2 - k_1 \text{sgn}(\hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\alpha_2 \hat{x}_1 + \hat{f} - k_2 \text{sgn}(\hat{x}_1) \end{aligned}$$

où :  $\hat{x}_1 = \hat{x}_1 - x_1$

$\hat{f}$  : la valeur estimée de f.

La dynamique de l'erreur est donnée par :

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + x_2 - k_1 \text{sgn}(x_1)$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_1 + \Delta f - k_2 \text{sgn}(x_1)$$

Les paramètres  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$  sont déterminés pour avoir des pôles stables  $k_i = 0, i = 1, 2$ .

La condition d'attractivité  $\dot{x}_1 x_1 < 0$  donne :

$$k_1 > \left| x_2 - \alpha_1 x_1 \right|$$

et quand l'erreur rejoint la surface de glissement  $x_1 = \dot{x}_1 = 0$  (Invariance) on trouve :

$$\text{sgn}(x_1)_{\text{eq}} = \frac{x_2}{k_1}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 > 0$$

on choisit une fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} x_2^2$$

donc :

$$\dot{V} = x_2 \dot{x}_2 < 0$$

- Si  $x_2 > 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \Delta f - k_2 < 0 \\ \Rightarrow k_2 &> \Delta f \end{aligned}$$

- Si  $x_2 < 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \Delta f + k_2 > 0 \\ \Rightarrow k_2 &> -\Delta f \end{aligned}$$

donc :

$$k_2 > |\Delta f|$$

Ainsi les erreurs d'estimations tendent vers zéro.

## 7-2 Extension au cas générale des systèmes non linéaire :

Soit le système :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,t) & x &\in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx & y &\in \mathbb{R}^p\end{aligned}$$

On définit l'observateur par la structure :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x},t) - H(y - \hat{y}) - k.I_s$$

où :

- $\hat{f}$  : représente notre modèle.
- $k$  : matrice de gain de dimension  $n \times p$ .
- $H$  : matrice de gain de dimension  $n \times p$ .
- $I_s$  : vecteur de dimension  $p$ .

$$I_s = \left[ \text{sgn}(\hat{y}_1) \quad \dots \quad \text{sgn}(\hat{y}_n) \right]^T$$

où :

$$\hat{y}_i = C_i \hat{x} - y_i$$

On définit la surface comme étant le vecteur de l'erreur :

$$\sigma = \hat{y} - y = C(\hat{x} - x)$$

Nous avons :

$$\dot{\sigma} = \Delta f - H \dot{Z} - K.I_s = \hat{f}$$

La surface de dimension  $p$  doit être attractive  $\Rightarrow \sigma_i \dot{\sigma}_i < 0$ .

Les matrices  $H$  et  $K$  sont choisies de manière à satisfaire cette condition, la méthode de synthèse de  $H$  et  $K$  dépend de cas traité, c'est à dire de la forme de  $f$ .

En utilisant le principe de commande équivalente d'UTKIN on a : une fois le régime glissant établi,  $\sigma = 0, \dot{\sigma} = 0$ .

$$\Rightarrow \text{grad}(\sigma) \hat{f}(\hat{X}, \hat{I}_s) = 0$$

où :

$$\hat{f} = \Delta f - H \dot{Z} - k I_s$$

$\hat{I}_s$  est le vecteur de glissement équivalent qui est obtenu par les équations précédentes.

On a

$$C(\Delta f - H \dot{Z} - k \hat{I}_s) = 0 \Rightarrow \hat{I}_s = (Ck)^{-1} C \Delta f$$

donc la dynamique de surface de glissement est :  $\dot{\sigma} = (I - k(Ck)^{-1}C)\Delta f.$

donc la dynamique de surface de glissement est :  $\dot{\sigma} = (I - k(Ck)^{-1}C)\Delta f.$

## 8 APPLICATION A UN MODELE DE SIMULATION D'UN MISSILE

### 8-1 Application sur un modèle de simulation d'un missile cruciforme stabilisé en roulis:

On étudie le mouvement de tangage et les résultats sont identiques pour le mouvement de lacet.

#### Modèle utilisé dans les simulations

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \\ \frac{QSl}{BV} \cdot C_{N\alpha} & \frac{QSl}{BV} \cdot C_{Nq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{QS}{m} C_{zu3} \\ \frac{QSl}{BV} \cdot C_{Nu3} \end{bmatrix} \cdot U_3$$

$$z_2 = \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} - \frac{QSC_{zu3}}{m} \cdot U_3$$

Sous forme :

$$\dot{x} = Ax + B.U_3$$

$$z = C.x + D.U_3$$

Le modèle utilisé d'un observateur glissant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{Z}}_1 = a_{11} \cdot \hat{Z}_1 + a_{12} \hat{Z}_2 + b_1 \cdot U_3 + k_1 \cdot \text{sgn}(\sigma_1) \\ \dot{\hat{Z}}_2 = a_{21} \cdot \hat{Z}_1 + a_{22} \hat{Z}_2 + b_2 \cdot U_3 + k_2 \cdot \text{sgn}(\sigma_1) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} Z_1 = x_3 \\ Z_2 = c_1 \cdot x_3 + c_2 \cdot x_5 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = e_2 = Z_2 - \hat{Z}_2 \quad \text{c'est la surface de glissement.}$$

On choisit  $k_2$  :

$$k_2 \succ \left| \frac{-}{a_{21}} e_1 \right|$$

et  $k_1$  de tel sorte :

$$k_1 \succ k_2 \frac{-}{a_{21}}$$

Voir annexe B.

**Calcul U :**

Soit le modèle simulé d'un missile cruciforme stabilisé en roulis :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B.U \\ y &= C.x + D.U\end{aligned}$$

**1. Choisir une surface S pour laquelle les objectifs de commande sont satisfaites :**

$$S = y - r$$

**2. Ramener l'état du missile sur S :**

Il s'agit de formuler une fonction scalaire positive  $V(x) > 0$  pour les variables d'état du système, et de choisir la loi de commutation qui fera décroître cette fonction. Elle est utilisée pour, estimer les performances de la commande, l'étude de la robustesse, et pour garantir la stabilité des systèmes non linéaires.

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ avec } V(x) > 0$$

En définissant la fonction de Lyapunov par :

$$V(x) = \frac{1}{2}S(x)^2$$

Pour que la fonction de Lyapunov décroisse, il suffit que sa dérivée est négative. Ceci est vérifié si

$$S(x)\dot{S}(x) < 0$$

On a :

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \dot{y} - \dot{r} \\ &= C.\dot{x} + D.\dot{U} - \dot{r} \\ &= C.(A.x + B.U) + D.\dot{U} - \dot{r} \\ &= -K_1.S - K_2.\text{sign}(S) \quad \text{avec } K_1, K_2 > 0\end{aligned}$$

Donc la commande dynamique est donnée par :

$$\dot{U} = D^{-1} \cdot [-K_1.S - K_2.\text{sign}(S) - C.A.x - C.B.U + \dot{r}]$$

**Résultats de simulations :**

Les résultats de simulations sont présentées dans les figures IV-3, 4 et 5.

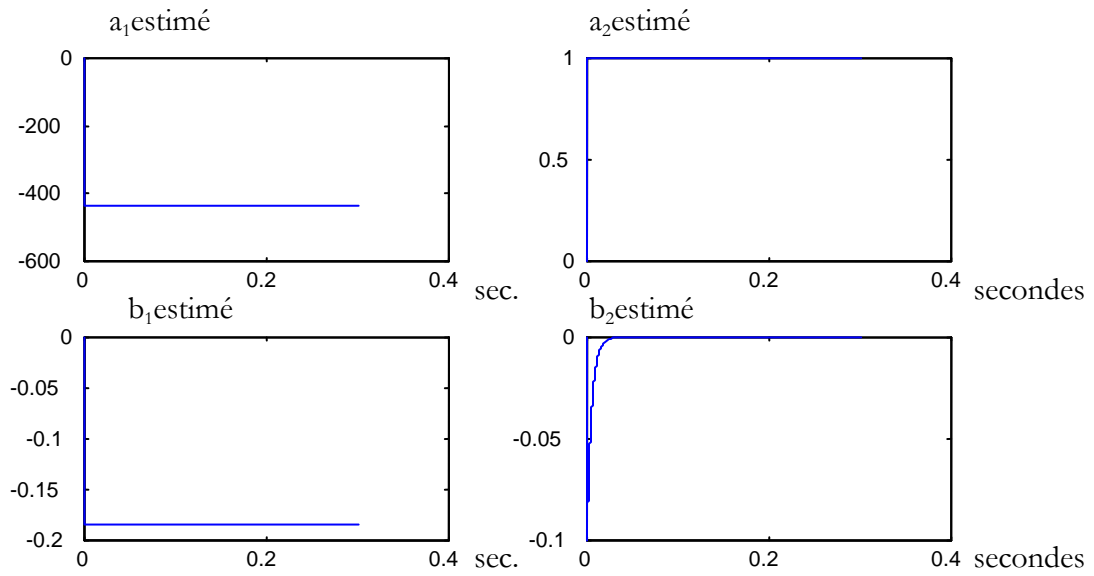


Figure IV-2 : Variation des paramètres du système réel

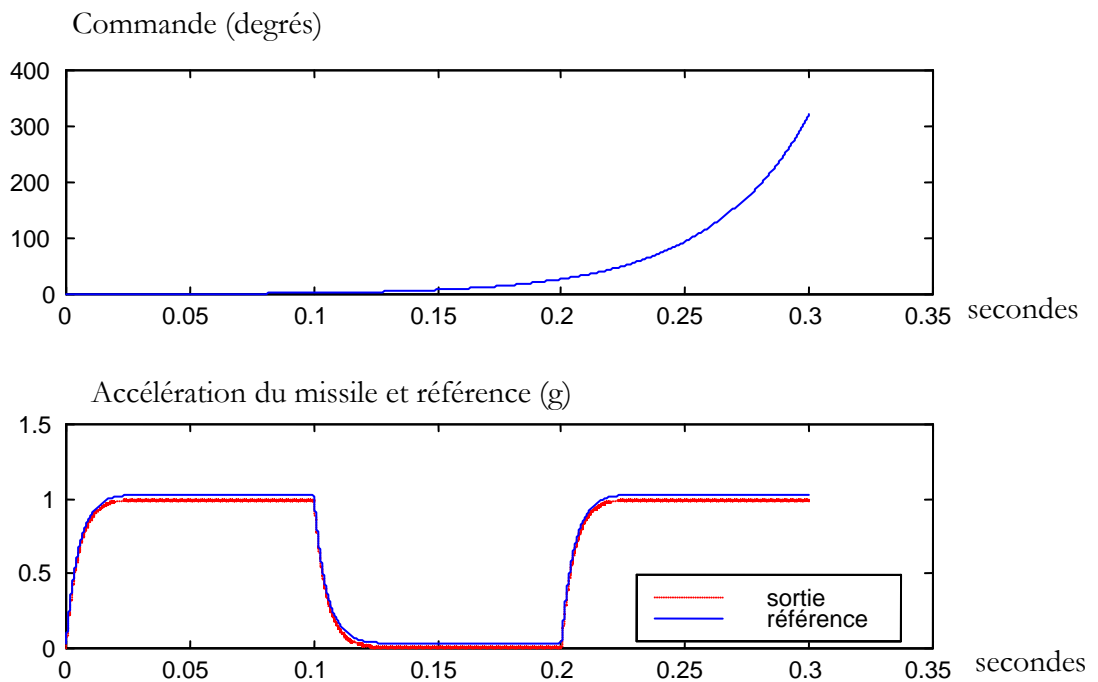


Figure IV-3: Simulation avec une fonction d'attractivité  $-K \cdot \text{Sign}(\sigma)$

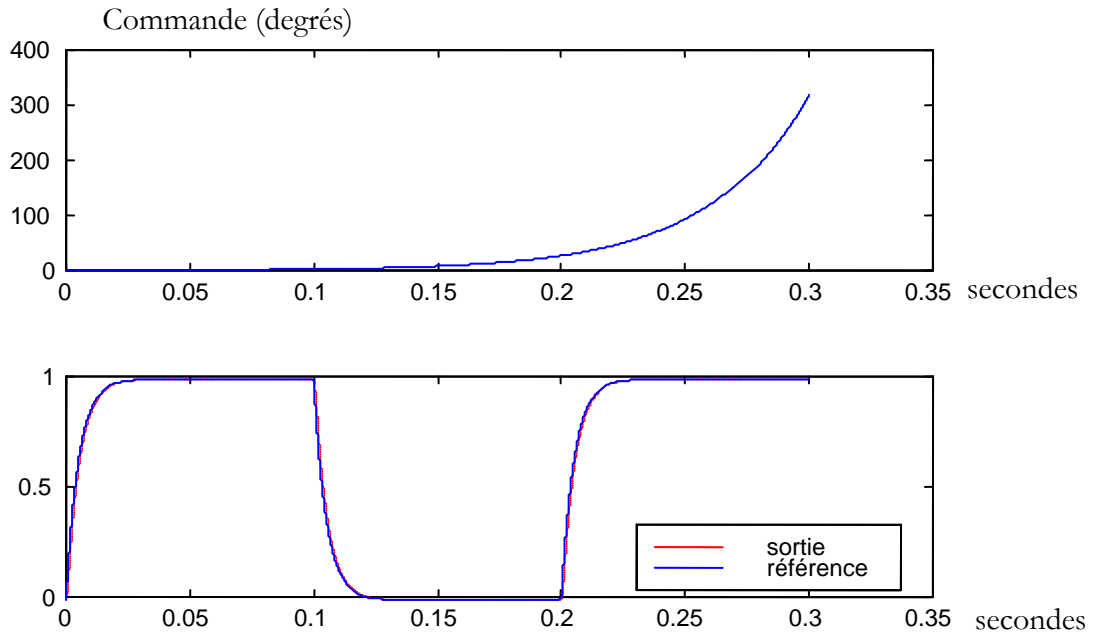


Figure IV-4 : Simulation avec une fonction d'attractivité :  $-K \cdot \text{sat}$

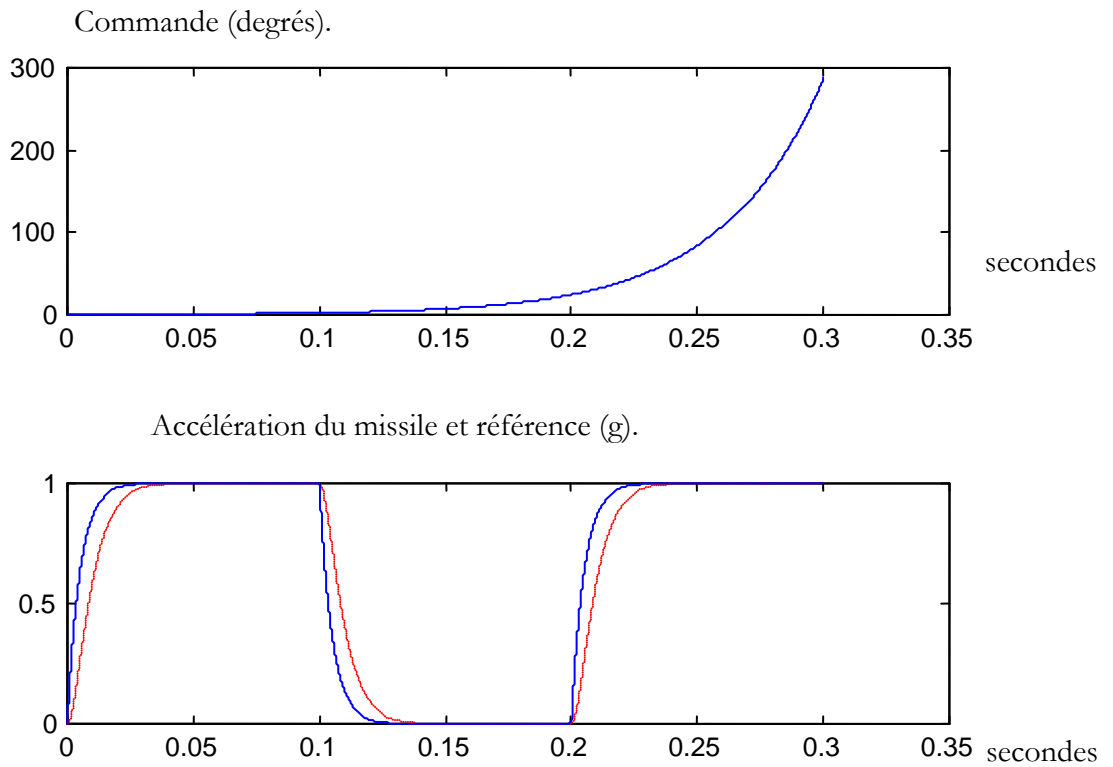


Figure IV-5: Simulation avec une fonction d'attractivité  $-K \cdot \sigma$

$$\begin{aligned}\dot{x}_T &= A_T \cdot x_T + B_T \cdot U_3 \\ z_2 &= C_T \cdot x_T + D_T \cdot U_3\end{aligned}$$

et la commande de Tangage est calculée à partir de :

$$\dot{U}_3 = D_T^{-1} \cdot \left[ -K_{1T} \cdot \sigma_T - K_{2T} \cdot \text{sign}(\sigma_T) - C_T \cdot A_T \cdot x_T - C_T \cdot B_T \cdot U_3 + \dot{r} \right]$$

avec :  $\sigma_T = z_2 - r$ .

et :  $C_{z\alpha} \neq C_{y\beta}$ ,  $C_{y\omega_2} \neq C_{z\omega_3}$ ,.....et  $B \neq C$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}_T &= A_T \cdot x_T + B_T \cdot U_3 \\ z_2 &= C_T \cdot x_T + D_T \cdot U_3\end{aligned}$$

et la commande de Tangage est calculée à partir de :

$$\dot{U}_3 = D_T^{-1} \cdot \left[ -K_{1T} \cdot \sigma_T - K_{2T} \cdot \text{sign}(\sigma_T) - C_T \cdot A_T \cdot x_T - C_T \cdot B_T \cdot U_3 + \dot{r} \right]$$

avec :  $\sigma_T = z_2 - r$ .

et :  $C_{z\alpha} \neq C_{y\beta}$ ,  $C_{y\omega_2} \neq C_{z\omega_3}$ ,.....et  $B \neq C$ .

**Mouvement de Tangage :**

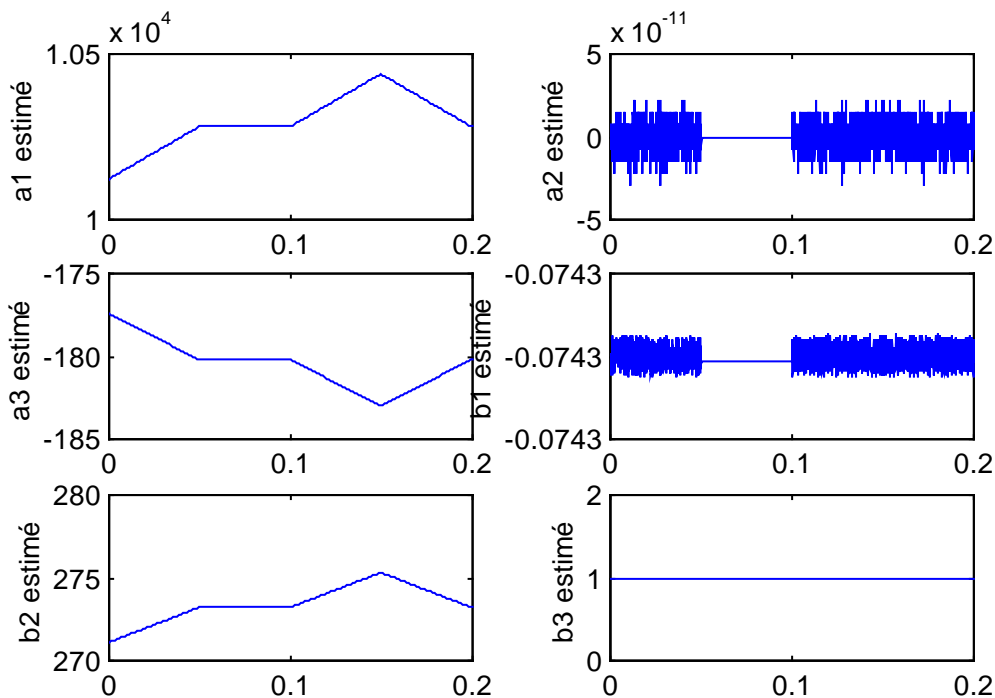


Figure IV-6 : Variation des paramètres réels du missile

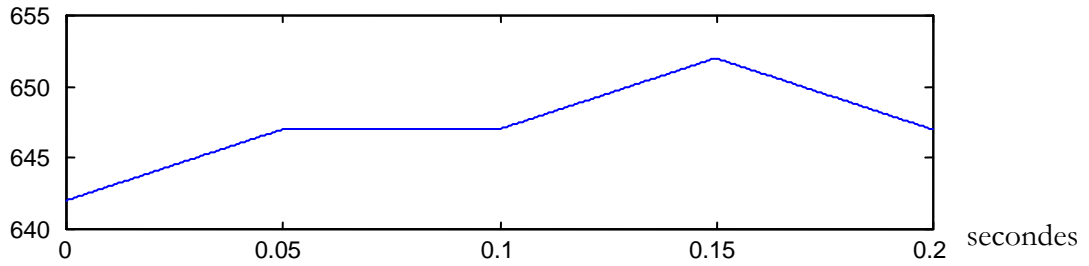


Figure IV-7: Variation de la vitesse du missile (m/s).

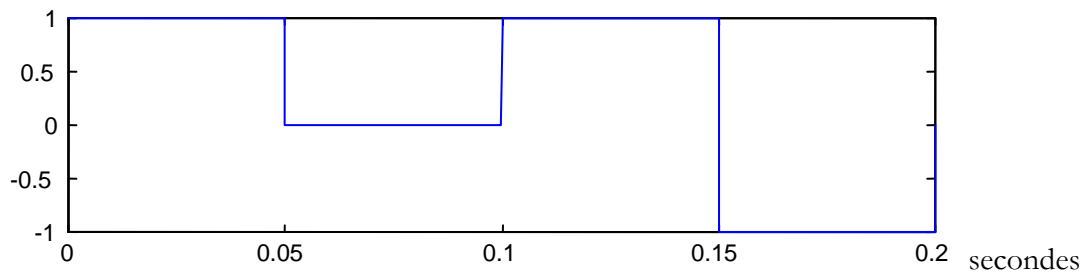


Figure IV-8: Accélération de roulis (g).

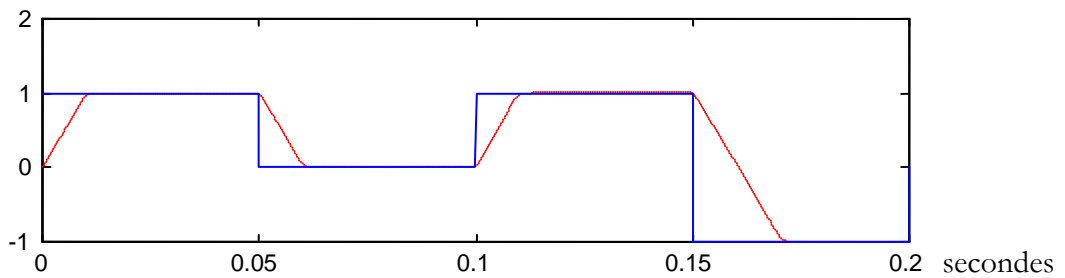


Figure IV-9 : Accélération de Tangage et référence en g.

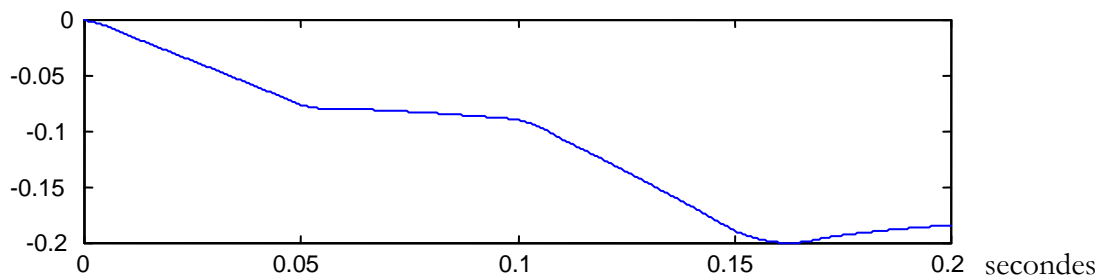
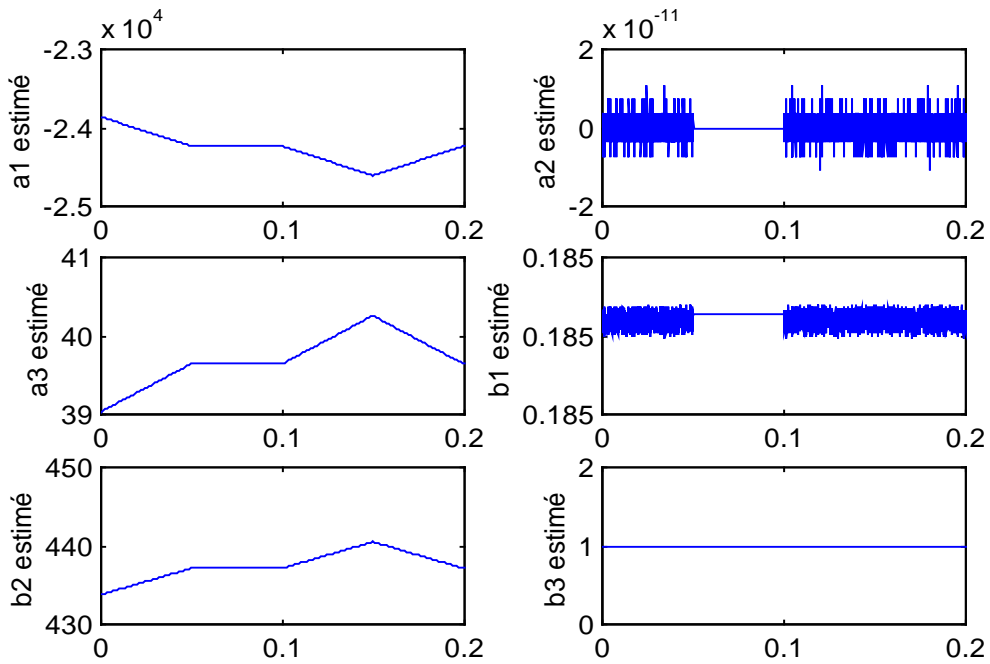
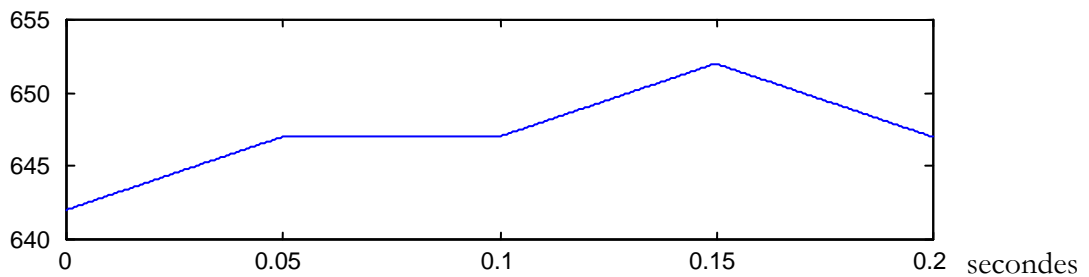


Figure IV-10: Commande de tangage (degrés).

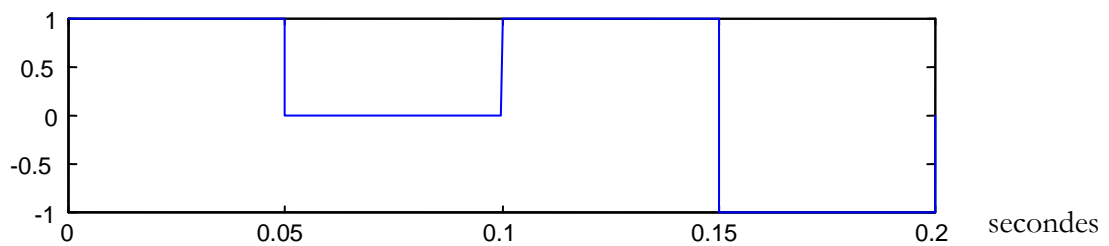
**Mouvement de Lacet :**



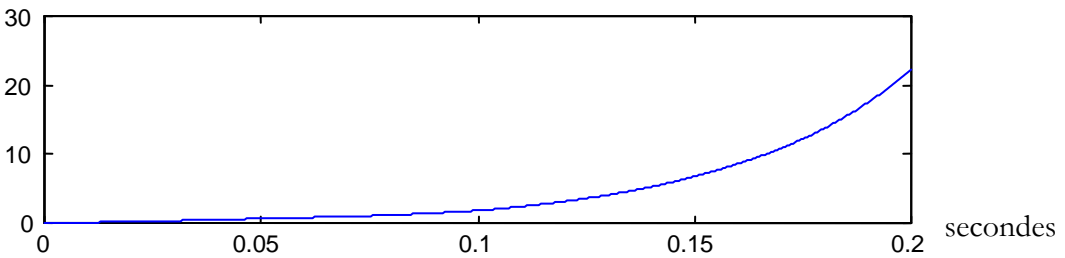
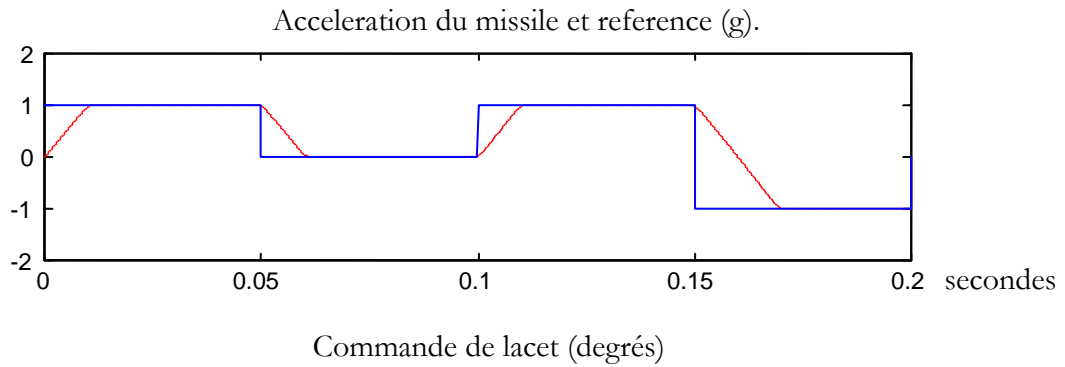
**Figure IV-11 :** Variation des paramètres réels du missile



**Figure IV-12:** Variation de la vitesse du missile (m/s)



**Figure IV-13:** Accélération de roulis (g).



**Figure IV-14:** Résultats de simulations d’une commande par mode glissant appliquée sur un modèle de simulation d’un missile stabilisé en roulis.

**Commentaire :**

Les résultats de simulations sont satisfaisants. On note que la commande est calculée à partir des matrices d’états initialement estimées du missile. Malgré la présence des non linéarités et des variations de ces matrices d’états pendant la simulation , nous remarquons une erreur de poursuite acceptable , ce qui confirme sa robustesse.

**Conclusion**

La commande par mode glissant est robuste, très rapide, mais elle présente l’inconvénient d’être une commande discontinue (problème de Chattering).

Dans ce chapitre, nous présentons une étude comparative entre les lois de commandes élaborées. Cette comparaison est basée sur les résultats de simulations obtenus pour les modèles du missile :

- Cruciforme stabilisé en roulis.
- Stabilisé en roulis.

## **AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES LOIS DE COMMANDES ELABOREES**

### **1- La commande LQG :**

#### **1-1- Avantages :**

- Facile à synthétiser.
- Commande robuste pour des lentes variations des paramètres.

#### **1-2- Inconvénients :**

- Sensible aux variations paramétriques :

Etant donné que cette commande s'appuie sur un modèle d'état du système à commander, la variation importante des paramètres de ce modèle influe négativement sur les performances de cette commande.

- Inadaptée aux systèmes non linéaires :

La commande LQG est une commande linéaire d'où la dégradation des performances en présence des fortes non linéarités.

### **2- La commande $H_\infty$**

#### **2-1 Avantages**

- Elle présente l'avantage d'être robuste vis à vis des variations paramétriques et des perturbations :

Etant donné que la norme  $H_\infty$  intègre les seuils de réjection du système aux bruits de mesures et aux perturbations.

- Elle a une rapidité acceptable.

#### **2-2 Inconvénients :**

- Synthèse difficile :

Choix des matrices de pondérations : Ce choix dépend souvent des connaissances à priori sur le comportement du système.

### 3- La commande par mode glissant :

#### 3-1 Avantages :

- Elle est robuste vis à vis des perturbations externes et des variations des paramètres du système.
- Elle est très rapide :  
 La commande est générée par une commutation.

#### 3-2 Inconvénients :

- Elle est discontinue ce qui pose le problème de « Chattering ».

Tableau synoptique des avantages et inconvénients des lois de commandes.

Types de commandes	Synthèse	Robustesse	Rapidité	Signal de commande
<b>LQG</b>	Facile.	Sensible aux variations paramétriques.	Acceptable.	Continu.
$H_\infty$	Difficile.	Robuste aux variations paramétriques.	Acceptable.	Continu.
<b>Mode glissant</b>	Facile.	Bonne.	Très rapide.	Discontinue (Le problème de Chattering).

Il ressort de ce tableau synoptique que la commande par mode glissant est celle qui offre les meilleurs résultats en évitant le phénomène de chattering.

## CONCLUSION GENERALE

En dépit de la complexité du modèle de simulation du missile 3 axes qui consiste en de fortes non linéarités au niveau des équations régissant son mouvement ainsi que la variation des paramètres aérodynamiques en fonction de temps, on a synthétisé des commandes robustes et adaptatives de différentes familles pour garantir un compromis acceptable entre les performances et la stabilité du missile.

Les diverses simulations effectuées sur les modèles stabilisés en roulis, cruciformes ou non ont abouti aux résultats suivants :

1- La commande adaptative LQG est sensible aux variations paramétriques, mais elle présente l'avantage d'être facile à synthétiser.

2- La commande  $H_\infty$  présente l'avantage d'être robuste et possède une rapidité acceptable, en revanche elle est difficile à synthétiser.

3- La commande par mode glissant est robuste, très rapide, mais elle présente l'inconvénient d'être une commande discontinue (problème de Chattering).

Les résultats nous amènent à déduire que la commande par mode glissant est celle qui garantit le compromis entre les contraintes de stabilité et de temps pour le pilotage d'un missile 03 axes.

Pour compléter ce travail, nous proposons l'étude des thèmes suivants :

- Introduire le pilotage dans la boucle de guidage.
- Application temps réel.
- Utilisation des techniques de commandes adaptatives par logique floue et réseaux de neurones pour le guidage d'un missile 03 axes.

## **ANNEXE A**

### **COMMANDE ADAPTATIVE**

#### **1- INTRODUCTION**

La plupart des techniques de synthèse des systèmes de commande sont basées sur la connaissance du processus à commander et de son environnement. Or les phénomènes mis en cause dans les processus industriels sont généralement trop complexes pour que l'on puisse établir rigoureusement un modèle mathématique de leur comportement. De plus, l'influence de l'environnement est souvent difficile à estimer et change avec le temps.

Dans la pratique, on est toujours amené à approcher la dynamique du processus à commander par un modèle paramétrique linéaire et stationnaire dans un domaine plus ou moins restreint autour de son point de fonctionnement. Ce type de modèle, désigné dans la littérature par un modèle de représentation ou de commande, établit une relation de cause à effet entre les variables auxquelles le fonctionnement du processus est le plus sensible de manière à réaliser un meilleur compromis entre l'erreur de modélisation et la simplicité du système de commande.

Par ailleurs, le caractère stationnaire des modèles de commande dépend du point de fonctionnement du processus, de ses non linéarités et des entrées secondaires considérées comme des perturbations, qui n'ont pas été prises en considération lors de leur élaboration. Les performances d'une loi de commande linéaire se dégradent au fur et à mesure que l'écart entre la dynamique effective du processus et celle de son modèle de commande croit.

Un réajustement de la loi de commande en fonction des variations de la dynamique du processus pour maintenir les performances du système de commande est alors impératif. C'est ainsi qu'apparaît le concept de commande adaptative qui permet d'éliminer l'effet des perturbations, sur la dynamique du processus, qui affectent les performances alors que la commande linéaire ne permet d'éliminer que les perturbations d'état du processus.

Les systèmes adaptatifs ont connu un développement considérable ces dernières années et attirent de plus en plus de personnes aussi bien dans le monde universitaire que dans le monde industriel.

#### **2- PRINCIPES DE LA COMMANDE ADAPTATIVE**

La commande adaptative c'est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des régulateurs des boucles de commande afin de réaliser ou maintenir un certain niveau de performances quand les paramètres du procédé à commander sont soit ou / et varient dans le temps .

Deux approches sont fondamentales dans la théorie de la commande adaptative, en l'occurrence les régulateurs stochastiques auto-ajustables et les systèmes adaptatifs avec modèle de référence . Ces deux approches sont par ailleurs équivalentes dans la plupart des cas et on distingue généralement deux types de schémas de commande adaptative.

- **La commande adaptative indirecte** qui comporte deux étapes à chaque période d'échantillonnage , dans une première phase on identifie de manière récursive un modèle du procédé , puis dans une deuxième phase on calcule les paramètres du régulateur à partir des paramètres estimés du procédé .

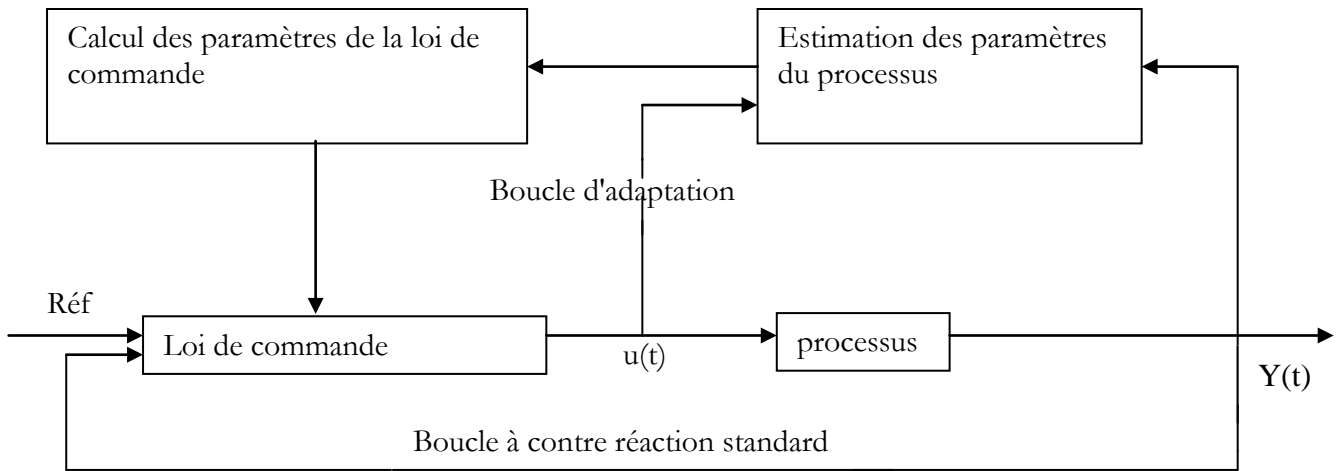


Figure 1 : Commande adaptative indirecte

- **La commande adaptative directe** qui ne comporte qu'une seule étape à chaque période d'échantillonnage, les paramètres du régulateur étant directement identifiés de manière récursive. Dans ce cas, on identifie en fait implicitement le procédé mais réparamétrisé en termes des paramètres du régulateur.

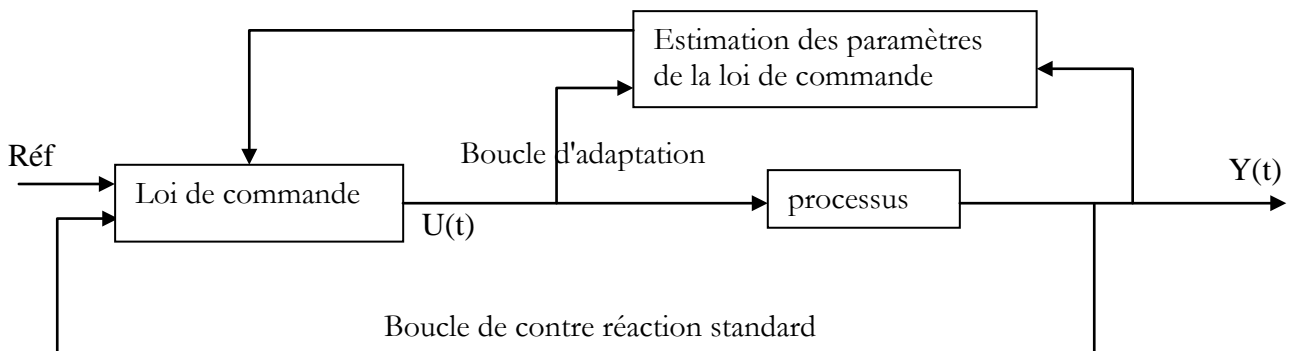


Figure 2 : Commande adaptative direct

Comme on le verra par la suite la commande adaptative est plus adaptée au cas des systèmes à minimum de phase et/ou temps de calcul est beaucoup plus court . La commande indirecte permet de traiter plus facilement les systèmes à non minimum de phase .

Les considérations suivantes sont fondamentales pour tout schéma de commande adaptative .

\* Il est composé de deux boucles , Une boucle à contre réaction ordinaire formée par le processus avec le régulateur et une boucle d'adaptation qui permet d'ajuster les paramètres du régulateur .

\* La boucle d'adaptation comprend un estimateur récursif de paramètres et un bloc de conception du régulateur dans le cas d'un schéma indirect . Ce dernier produit une solution en ligne du problème de système de synthèse de la loi de commande , désigné dans la littérature par problème de synthèse associé

### **3- CLASSE DES PROCÉDES A COMMANDER**

On considère la classe des procédés dont le Comportement entrée / sortie est décrit par

$$A(s)y(t) = B(s)u(t) + v(t) + w(t) \quad (1)$$

$$D(s)v(t) = \gamma(t) \quad (2)$$

avec :

$$A(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n.$$

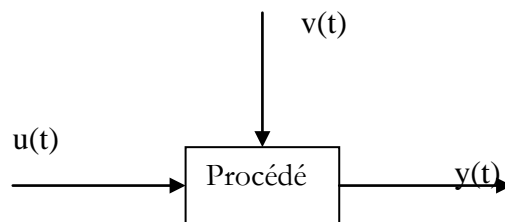
$$B(s) = b_0s^m + \dots + b_m$$

où  $u(t)$  et  $y(t)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système,  $v(t)$  représente les perturbations externes,  $\{\gamma(t)\}$  est une séquence d'impulsions largement espacées d'amplitude inconnue ou des variables aléatoires indépendantes de valeur moyenne nulle et de variance finie,  $w(t)$  représente les erreurs de modélisation inévitables. Le modèle des perturbations (2) est introduit conformément au principe du modèle interne pour assurer la propriété de précision requise.

Le modèle (1) peut être réécrit sous une forme appropriée du point de vue de l'estimation des paramètres. Pour ce faire, opérons à l'aide d'un filtre stable  $\frac{1}{E(s)}$  , où  $E(s) = s^n + e_1s^{n-1} + \dots + e_n$  .

Ce filtrage conduit au modèle suivant :

$$A(s) \frac{y(s)}{E(s)} = B(s) \frac{u(s)}{E(s)} + \frac{v(s)}{E(s)} + \frac{w(s)}{E(s)}$$



En ajoutant  $\frac{E(s) - A(s)}{E(s)}y(t)$  aux deux membres de l'équation, on obtient :

$$y(t) = [E(s) - A(s)]y_f(t) + B(s)u_f(t) + v_f(t) + w_f(t)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$y(t) = \theta^T \Phi_f(t) + v_f(t) + w_f(t)$$

avec

$$\begin{aligned} \theta^T &= [e_{n-1} - a_{n-1}, \dots, e_0 - a_0, b_m, \dots, b_0] \\ \Phi_f^T &= [s^{n-1}y_f(t), \dots, y_f(t), s^m u_f(t), \dots, u_f(t)] \end{aligned} \quad (3)$$

où f désigne le filtrage des signaux

$$E(s)X_f(t) = X(t)$$

Le modèle (2) - (3) définit un modèle d'estimation paramétrique dont l'utilisation effective requiert cependant des opérations complémentaires de filtrage et de normalisation que l'on précisera plus loin.

#### **4-ALGORITHME D'ADAPTATION PARAMÉTRIQUE (A.A.P)**

##### **4-1 Introduction**

On a des algorithmes récursifs d'adaptation paramétrique, soit pour l'ajustement des paramètres du régulateur dans les schémas de commande adaptative directe, soit pour l'ajustement des paramètres du prédicteur (modèle) du procédé dans les schémas de commande adaptative indirecte. Ces algorithmes ont été obtenus à partir de la minimisation d'un critère quadratique à un pas en terme de l'erreur procédé - modèle (de commande ou de prédiction) en utilisant la technique du gradient. Malgré la simplicité de l'approche les algorithmes d'adaptation paramétrique (A.A.P) obtenus n'assurent pas la stabilité du système global indépendamment des valeurs du gain d'adaptation et les transitoires d'adaptation sont souvent non satisfaisants.

Deux autres approches complémentaires conduisent à des A.A.P ayant des performances supérieures et plus de flexibilité quand à leur utilisation en diverses situations. Il s'agit de l'approche par la minimisation récursive d'un critère de type " moindres carrés " et de l'approche à partir des conditions de stabilité asymptotique imposées sur l'erreur procédé - modèle.

Nous présenterons la synthèse des algorithmes d'adaptation paramétrique à partir de la minimisation d'un critère de type " moindres carrés " et nous indiquerons les liens avec l'approche par les méthodes de stabilité.

##### **4-2- Formulation du problème**

Considérons le modèle discrétisé d'un procédé caractérisé par la fonction de transfert échantillonnée:

$$HP(q^{-1}) = \frac{y(t)}{u(t)} = q^{-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

La relation entrée - sortie s'exprime :  $A(q^{-1})y(t) = q^{-1}B(q^{-1})u(t)$

où :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n} = 1 + q^{-1}A^*(q^{-1})$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_mq^{-m} = 1 + q^{-1}B^*(q^{-1})$$

La sortie du procédé à l'instant  $t + 1$  s'écrit :

$$y(t+1) = -A^*(q^{-1})y(t) + B(q^{-1})u(t) = \sum_{i=1}^n a_i y(t+1-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(t+1-i)$$

$$= \theta^T \Phi(t)$$

où :  $\theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]$

$$\Phi^T(t) = [-y(t), \dots, y(t-n+1), u(t), \dots, u(t-m)]$$

La prédiction " a priori " de la sortie du procédé:

$$\hat{y}^0(t+1) = \hat{y}(t+1/\hat{\theta}(t)) = \hat{\theta}^T(t)\Phi(t)$$

on définit l'erreur de prédiction " a priori ":

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1)$$

et on va chercher un algorithme d'adaptation paramétrique ( A.A.P ) récursif de la forme :

$$\hat{\theta}(t+1) = f(\hat{\theta}(t), \Phi(t), \varepsilon^0(t+1))$$

qui réduira l'erreur procédé - modèle ( ou de prédiction ) au sens d'un certain critère à définir.

#### **4-3-Algorithmes des moindres carrés récursifs**

On a le critère suivant:

$$J(t) = \sum_{i=1}^t \left[ y(i) - \hat{\theta}(t)^T \Phi(i-1) \right]^2$$

Le terme :  $\hat{\theta}(t)^T \Phi(i-1) = \hat{y}(i/\hat{\theta}(t))$  correspond à une prédiction de la sortie à l'instant  $i \leq (i \leq t)$ , basée sur l'estimée des paramètres du procédé après  $t$  mesures.

Après la minimisation du critère, c'est-à-dire il s'agit de déterminer une estimation du vecteur des paramètres à l'instant  $t$  de telle sorte qu'il minimise la somme des carrés des écarts entre le procédé et le modèle de prédiction sur un horizon de  $t$  mesures.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t+1) &= \hat{\theta}(t) + F(t+1)\Phi(t)\varepsilon^0(t+1) \\ F(t+1) &= F(t) - \frac{F(t)\Phi(t)\Phi(t)^T F(t)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)} \\ \varepsilon^0(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \Phi(t) \end{aligned}$$

Une forme équivalente de cet algorithme s'obtient en introduisant l'expression  $F(t+1)$  donnée par l'équation (2) dans l'équation (1).

On obtient une deuxième forme pour l'algorithme A.A.P des M.C.R:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\Phi(t)\varepsilon(t+1) \quad (4)$$

$$F(t+1)^{-1} = F(t)^{-1} + \Phi(t)\Phi(t)^T \quad (5)$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\Phi(t)\Phi(t)^T F(t)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)} \quad (6)$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \Phi(t)}{1 + \Phi(t)^T F(t)\Phi(t)} \quad (7)$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique donné par l'équation (4) correspond à une structure générale des A.A.P. Ce qui change d'un algorithme à un autre, ce sont les variables contenues dans le "vecteur des observations" et la signification de  $\varepsilon(t+1)$  appelée en général "erreur d'adaptation a posteriori" qui est notée  $v(t+1)$  (par exemple  $v(t+1)$  peut correspondre à une erreur de prédiction filtrée).

### **5- ESTIMATEUR DES PARAMETRES ROBUSTE :**

Nous présentons les éléments permettant la robustesse des algorithmes d'adaptation paramétrique sous la forme :

- d'un traitement approprié des données E/S pour assurer que le problème d'adaptation paramétrique à considérer est bien posé. Ce traitement consiste en un filtrage des signaux d'entrée – sortie permettant de réduire les effets de la réponse non modélisée du procédé et en la normalisation des données afin d'assurer la bornitude de toutes les données requises pour l'estimation .
- d'un algorithme d'adaptation paramétrique robuste caractérisé par une régulation du gain d'adaptation pour assurer une bonne capacité d'adaptation et un gel d'adaptation paramétrique pour assurer la bornitude des paramètres estimés quand les signaux d'entrée sortie ne vérifient pas la condition d'excitation persistante.

### **5-1 Traitement des données :**

Pour que le modèle ait une forme appropriée du point de vue de l'estimation paramétrique, on doit filtrer et normaliser les données entrées / sorties. L'opération de filtrage permet de sensibiliser l'estimateur dans la bande de fréquence désirée. Elle a pour but de réduire les effets des perturbations d'état (par un filtrage passe – haut) et des dynamiques négligées et des bruits de mesure (par un filtrage passe – bas). Considérons le modèle (1) et opérons à l'aide d'un filtre passe bande  $F(q^{-1})X_f(t) = D(q^{-1})G(q^{-1})X(t)$  réglé à la bande de fréquence désirée. On obtient alors le modèle

$$\text{suivant } y_f(t) = \Phi_f(t)^T \theta + w_f(t)$$

Avec

« f » représente la fonction de filtrage des signaux d'entrée – sortie.

$$\theta^T = [e_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad e_0 - a_0 \quad b_m \quad \dots \quad b_0]$$

$$\Phi_f(t)^T = \begin{bmatrix} D^{n-1}y_f(t) & \dots & y_f(t) & D^m u_f(t) & \dots & u_f(t) \end{bmatrix}$$

La présence de dynamiques négligées peut induire des perturbations non bornées. Un tel problème est résolu en se ramenant au cas des perturbations bornées. Il s'agit alors de rechercher un mécanisme permettant d'assurer la bornitude uniforme de toutes les données nécessaires pour l'estimation.

Une approche consiste en une opération de normalisation. Cette méthode vise à remplacer par des quantités dont on garantit la bornitude en les divisant par un facteur de normalisation construit sur la base des signaux d'entrées / sorties.

L'adaptation paramétrique est réalisée par rapport au modèle suivant :

$$\frac{y_f(t)}{\eta(t)} = \theta^T + \frac{\Phi_f(t)}{\eta(t)} + \frac{w_f(t)}{\eta(t)}$$

$$\text{avec } \eta(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} (\|\Phi_f(\tau)\|)$$

Cette normalisation assure donc la bornitude uniforme de toutes les variables requises pour l'estimation.. Au niveau de l'algorithme d'adaptation paramétrique, on remplace l'erreur de prédiction filtrée et le vecteur régresseur filtré par les quantités normalisées.

### **5-2 Propriétés de l'algorithme d'adaptation paramétrique robuste :**

1- Les paramètres estimés sont uniformément bornés :

$$\exists R_{\theta} \in \mathbb{R} / \left\| \hat{\theta}(t) \right\| \leq R_{\theta}$$

2- Le modèle estimé reproduit le comportement d'entrée – sortie en moyenne, soit

$$\left\{ \left| \bar{y}_f(t) - \hat{\theta}(t) \bar{\Phi}_f(t) \right| \right\} \text{ est petite en moyenne.}$$

3- Les variations paramétriques sont petites en moyenne, soit

$$\left\{ \left| \theta(t) - \theta(t-1) \right| \right\} \text{ est petite en moyenne.}$$

4- Le modèle estimé est admissible en moyenne ; il existe une séquence croissante  $\{t_k\}, k \in \mathbb{N}$  , telle

que :  $t_k - t_{k-1}$  est bornée et  $\left( A(\theta(t_k), q^{-1}), B(\theta(t_k), q^{-1}) \right)$  est admissible.

On notera que les propriétés de stabilité ne concernent que l'estimateur des paramètres et que la convergence des paramètres du modèle estimé vers leurs vraies valeurs n'est pas nécessaire pour la stabilité du système de commande.

Les trois premières propriétés sont satisfaites par les estimateurs usuels et notamment par l'estimateur des moindres carrés judicieusement modifié si

$$\left\{ \bar{p}_f(t) \right\} \text{ est petite en moyenne.}$$

La propriété d'admissibilité signifie que le calcul de la loi de commande est possible à chaque instant et que la loi de commande stabilise le modèle estimé. Cette propriété est généralement vérifiée en pratique.

### **5-3 Algorithme d'adaptation paramétrique**

Si  $\Phi(t)$  vérifie la condition persistante, on utilisera l'algorithme d'adaptation paramétrique suivant :

$$\hat{\theta}(t+1) = \frac{F(t)\Phi_f(t)}{\eta(t) + \Phi_f(t)^T F(t)\Phi_f(t)} \left( y(t) - \Phi_f(t)^T \hat{\theta}(t) \right)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda(t)} \left( F(t) - \frac{F(t)\Phi_f(t)\Phi_f(t)^T F(t)}{\eta(t) + \Phi_f(t)^T F(t)\Phi_f(t)} \right) + R(t)$$

$$F(t) \succ 0, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad R(t) \geq 0.$$

Si la condition d'excitation persistante n'est pas vérifiée, on utilise le gel, la projection ou contraction des paramètres pour assurer la bornitude uniforme des paramètres estimés .

**ANNEXE B****Modèle utilisé dans les simulations**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \\ \frac{QSl}{BV} \cdot C_{N\alpha} & \frac{QSl}{BV} \cdot C_{Nq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{QS}{m} C_{zu3} \\ \frac{QSl}{BV} \cdot C_{Nu3} \end{bmatrix} \cdot U_3$$

$$z_2 = \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} - \frac{QSC_{zu3}}{m} \cdot U_3$$

Sous forme :

$$\dot{x} = Ax + B \cdot U_3$$

$$z = C \cdot x + D \cdot U_3$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \\ \frac{QSl}{BV} C_{N\alpha} & \frac{QSl}{BV} C_{Nq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{QS}{m} C_{zu3} \\ \frac{QSl}{BV} C_{Nu3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{QSC_{z\alpha}}{mV} & V \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2]$$

$$D = -\frac{QS}{m} C_{zu3}$$

On effectue un changement de variables :

$$\begin{cases} Z_1 = x_3 \\ Z_2 = c_1 \cdot x_3 + c_2 \cdot x_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_5 = \frac{Z_2 - c_1 \cdot Z_1}{c_2}$$

Donc on trouve :

$$\dot{\bar{Z}} = \bar{A} \bar{Z} + \bar{B} U_3$$

$$z = \bar{C} \bar{Z} + \bar{D} U_3$$

avec :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{12} \frac{c_1}{c_2} & \frac{a_{12}}{c_2} \\ c_1(a_{11} - a_{22}) + c_2 a_{21} - a_{12} \frac{c_1^2}{c_2} & a_{12} \frac{c_1}{c_2} + a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 b_1 + c_2 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = D$$

Puisque on a :

$$z = Z_2 + \bar{D}.U_3$$

$$\Rightarrow Z_2 = z - \bar{D}.U_3$$

Donc  $Z_2$  est disponible.

Le modèle utilisé d'un observateur glissant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{Z}}_1 = \bar{a}_{11} \hat{Z}_1 + \bar{a}_{12} Z_2 + \bar{b}_1.U_3 + k_1.\text{sgn}(\sigma_1) \\ \dot{\hat{Z}}_2 = \bar{a}_{21} \hat{Z}_1 + \bar{a}_{22} Z_2 + \bar{b}_2.U_3 + k_2.\text{sgn}(\sigma_1) \end{cases}$$

avec :  $\sigma_1 = e_2 = Z_2 - \hat{Z}_2$  c'est la surface de glissement.

**Calcul  $k_1$  et  $k_2$  :**

On l'erreur d'observation est définie par :

$$e = Z - \hat{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = \bar{a}_{11} e_1 - k_1.\text{sgn}(e_2) \\ e_2 = \bar{a}_{21} e_1 - k_2.\text{sgn}(e_2) \end{cases}$$

La condition de glissement :

$$\begin{aligned}
S_1 \dot{S}_1 &< 0 \\
\Rightarrow e_2 \cdot \dot{e}_2 &< 0 \\
\Rightarrow e_2 (\bar{a}_{21} e_1 - k_2 \operatorname{sgn}(e_2)) &< 0 \\
\Rightarrow (e_2 \bar{a}_{21} e_1 - e_2 k_2 \operatorname{sgn}(e_2)) &< 0
\end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}
e_2 \cdot \operatorname{sgn}(e_2) &= |e_2| \\
\text{et} \\
e_2 &= |e_2| \cdot \operatorname{sgn}(e_2)
\end{aligned}$$

Donc on aura :

$$\begin{aligned}
|e_2| (\operatorname{sgn}(e_2) \bar{a}_{21} e_1 - k_2) &< 0 \\
\Rightarrow k_2 &> \operatorname{sgn}(e_2) \bar{a}_{21} e_1
\end{aligned}$$

Donc on choisit  $k_2$  :

$$k_2 > \left| \bar{a}_{21} e_1 \right|$$

Sur la surface de glissement :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = \dot{\sigma}_1 &= 0 \\
\Rightarrow \dot{e}_2 = e_2 &= 0 \\
\Rightarrow (\bar{a}_{21} e_1 - k_2 \operatorname{sgn}(e_2)) &= 0 \\
\Rightarrow \operatorname{sgn}(e_2) &= \frac{\bar{a}_{21} e_1}{k_2}
\end{aligned}$$

Remplaçons la valeur de  $\operatorname{sgn}(e_2)$  dans  $\dot{e}_1$  on trouve :

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= \bar{a}_{11} e_1 - k_1 \left( \frac{\bar{a}_{21} e_1}{k_2} \right) \\
\Rightarrow \dot{e}_1 &= \left( \bar{a}_{11} - \bar{a}_{21} \frac{k_1}{k_2} \right) e_1
\end{aligned}$$

Pour que  $e_1 \rightarrow 0$  il suffit que :

$$\left( \bar{a}_{11} - \bar{a}_{21} \frac{k_1}{k_2} \right) < 0$$

Donc, il faut choisir  $k_1$  de tel sorte :

$$k_1 > k_2 \frac{a_{11}}{a_{21}}$$

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] H.Berger, “ Conception des missiles tactiques”, Ecole Centrale Paris, 1992-1993.
- [2] R.Carpentier, “Guidage des avions et des missiles aérodynamiques”, Ecole Nationale supérieur d’aéronautique et de l’espace Toulouse 1989.
- [3] P.Garnell, “Guided Weapon control systems”, Royal Military college of science, Swidon, England.
- [4] P.Zarchan, ”Tactical and strategic missile guidance”, progress in astraunotics and aeronautics.
- [5] R.Macfadzean, “Surface-based Air defense System Analysis”, Artech-house,1992.
- [6] A Rachid, “S ystèmes de régulation”, Masson , Paris 1996 .
- [7] M.S . Nedjari, thèse de magister, “Etude comparatives des techniques optimales LQG et  $H_\infty$ : Application à la commande des systèmes à suspension active”. ENP / Département de génis électrique, Option automatique El-Harrach Alger.
- [8] I D. Landau, “Identification et commande des systèmes”, Hermes, Paris 1993.
- [9] I D. Landau et L Dugard, “Commande adaptative: aspects pratiques et théoriques”, Masson Paris 1986.
- [10] Karl j. Astrom et B Wittenmark, “Adaptive control”, Wesley Publishing company, Inc” 1996.
- [11] B.D.O Anderson, J.B. Moore « Optimal Control Linéair Quadratic methods », Prentice Hall, 1990.
- [12] B. Friedland. « Control System Design An Introduction to State Space Methods », Mc Graw-Hill, 1987.

- [13] B. Shahian, M. Hanssul. «Control system Design Using Matlab », Prentice Hall.
- [15] Bourlès, H. et E. Irving (1991). La méthode MQG/LTR : une interprétation polynomiale temps continu / temps discret. APPII, 25, 545-592.
- [16] Commande et Filtrage Optimaux, Ecole d'été d'Automatique de Grenoble, Session 9 , 1994.
- [17] D. Mcfarlane, K. Glover. « A Loop – shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  Synthesis », IEEE, Trans. Contr.,Vol. 37, pp. 441-455, 1990.
- [18] F. Boudjema. « Commande par mode glissant : application aux convertisseurs électriques », Thèse Doctorat, CNRS, Toulouse, 1991, Conf., pp. 938-943.
- [19] G. Duc, « Robustesse des systèmes linéaires multivariables », Notes de Cours, Supélec Paris, 03317, 1993.
- [20] H. Buhler, « Réglage par mode glissant, Presse Polytechnique Romande » 1986.
- [21] J.C.Doyle, B.A. Francis, A.R.Tannenbaum, « Feedback Control Theory » Mc Millan Publishing Co, 1991.
- [22] M.Tadjine, « Commande LQG/LTR et identification robuste » thèse doctorat, Grenoble, 1994.
- [23] S.Atek, « Commande adaptative LQG appliquée au simulateur d'un hélicoptère », Thèse d'ingénieur. ENP. El-Harrach. 1999.
- [24] P.Bendotti « Commande adaptative appliquée au pilotage missile ». Thèse Doctorat. ENP Grenoble, 1993.