

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En : Mathématiques

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par

BOUKEDJANI Fatiha

Sujet

LOCALISATION DES ZÉROS DE POLYNÔMES
DANS LE PLAN COMPLEXE.

Soutenu publiquement le 16 avril 2008, devant le jury composé de :

Mr.	ZITOUNI	Mohamed	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	HERNANE	Mohand Ouamar	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	KESSI	Arezki	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr.	HACHAICHI	Mohamed Salah	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
M ^{elle} .	FLICI	Fatiha	Chargée de cours	U.M.B.B.	Examinatrice.

Dédicases

Je dédie se travail à mon chère papa qui nous a quitté le 26 février 2008, puisse Dieu le tout puissant lui accorder sa Miséricorde et l'accueillir dans son vaste paradis.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohamed Zitouni, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohand Ouamar Hernane mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Sa disponibilité alliée à sa gentillesse et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de cette thèse. Je lui dois toute ma reconnaissance. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je remercie vivement Monsieur Mohamed Salah Hachaïchi, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B. d'avoir accepté d'examiner ce travail en consacrant son temps à lire cette thèse au vue de la surcharge de travail dûe à ses fonctions au MESRS. Que Monsieur Arezki Kessi, Professeur à l'U.S.T.H.B., et Mademoiselle Fatiha Flici Chargée de cours à U.M.B. de Boumerdès qui ont bien voulu faire partie du jury, trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis spécialement Zahia Fernane, Senouci Aichouche et Azizi Hanane et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à ma formation.

LOCALISATION DES ZEROS DE POLYNÔMES DANS LE PLAN COMPLEXE

Résumé

Le problème de localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe est un sujet très classique; plusieurs auteurs se sont attelés à ce problème dont (M. Marden , A. Schinzel, M. Mignotte, ...)

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au cas de deux familles particulières de trinômes. La première famille provient d'un problème physique (Théorie du Signal) (cf. [15], [18] , [12] et [14]), la deuxième est liée aux polynômes caractéristiques des suites de Fibonacci [7].

Trois méthodes seront exposées et utilisées pour cette étude, il s'agit de ; la méthode des solutions approchées ; la méthode utilisant les fonctions implicites analytiques et enfin la méthode utilisant la théorie des séries hypergéométriques [2].

Grâce aux logiciel Maple, nous avons pu vérifier certains des résultats théoriques énoncés.

Table des matières

Introduction	1
1 Quelques résultats classiques	
de localisation de zéros de polynômes	3
1.1 Introduction	3
1.2 Localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe . . .	4
1.2.1 Localisation des zéros d'un polynôme dans un disque . . .	4
1.2.2 Localisation des zéros d'un polynôme dans une couronne .	17
1.2.3 Localisation des zéros d'un polynôme relativement à un secteur	21
1.2.4 Nombre de racines réelles d'un polynôme	21
1.2.5 Quelques rappels d'analyse	21
2 Méthode des solutions approchées	24
2.1 Introduction	24
2.2 Localisation des zéros de $f_{n, n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$	25
2.3 Solutions approchées du trinôme $f_n(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$	26
2.4 Solutions approchées du $z^{n+1} - a z + a - 1 = 0$	34

3	Développement en série entière des zéros du trinôme $z^{n+1} - (n+1)z + n$	40
3.1	Développement en série entière des zéros de $z^{n+1} - (n+1)z + n$. . .	40
3.2	Développement en série des zéros de $z^{n+1} - (n+1)z + n$	44
3.3	Développement du zéro négatif de G_n ou de H_n	50
4	Méthode des séries hypergéométriques	55
4.1	Introduction	55
4.2	Développement en série de la racine positive de $G_n(z)$	55
	Annexe	60
	Conclusion	65
	Bibliographie	65

Introduction

Dans de nombreux secteurs de l'activité scientifique, on est amené à résoudre des équations de type polynomiales.

Les méthodes heuristiques classiques pour obtenir les solutions approchées ne donnent en fait, ne peuvent donner de bons résultats que si les zéros du polynôme considéré ont été préalablement localisés, d'où l'intérêt de l'étude de la localisation des zéros de polynômes à coefficients réels ou complexes dans le plan complexe.

Le livre de M. Marden [17] “ Geometry of polynomials ” qui rassemble de très nombreux résultats sur ce sujet, constitue un ouvrage de référence important dans ce domaine.

Dans ce mémoire, notre intérêt s'est porté essentiellement sur l'étude de la localisation des zéros de deux familles particulières de trinômes définies par :

$$f_{n, n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n \quad (0.0.1)$$

$$G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1 \quad \text{et} \quad H_n(z) = \varphi z^{n+1} - (\varphi - 1)z^n - 1 \quad (0.0.2)$$

où φ est le nombre d'or, $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

La première famille de trinômes $f_{n, n+1}(z)$ provient d'un problème physique (Théorie du Signal), elle a été étudiée par J. -L. Nicolas et A. Schinzel (cf [18] et [12]).

La seconde famille de trinômes $G_n(z)$ et $H_n(z)$ est liée aux polynômes caractéristiques des suites de Fibonacci ; ces deux trinômes ont été étudiés par K. Dilcher, A. F. Horadam et G. Shamon (cf [7]).

Nous étudions également la famille de trinômes définie par :

$$f_{n, a}(z) = z^{n+1} - az + a - 1 \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}. \quad (0.0.3)$$

On notera que $G_n(z)$ est le polynôme réciproque de $f_{n,\varphi}(z)$, et ainsi l'ensemble des polynômes $f_{n,a}(z)$ dépendants de deux paramètres, englobe les deux premières familles de trinômes.

Trois méthodes sont utilisées pour localiser les racines de ces trinômes :

La méthode des solutions approchées (ou méthode de A. Schinzel), nous l'avons appliquée aux polynômes $f_{n,n+1}(z)$ et étendue à la famille $f_{n,a}(z)$.

Les deux autres méthodes sont basées sur le théorème des fonctions implicites analytiques, les séries hypergéométriques et la formule d'inversion de Lagrange (cf [20]).

Ce présent mémoire est constitué de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques résultats classiques concernant la localisation des zéros d'un polynôme dans le plan complexe; nous exposons entre autres le théorème de Cauchy (cf [17]), qui donne la localisation dans un disque et le théorème d'Eneström-Kakeya (cf [17]), qui donne la localisation dans une couronne.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons la méthode des solutions approchées puis nous l'appliquons aux deux trinômes $f_{n,n+1}(z)$ et $f_{n,a}(z)$.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode des fonctions implicites analytiques (cf [4] et [5]), cette méthode due à H. Delange permet sous certaines conditions de déterminer le développement asymptotique des zéros d'un polynôme. Son application au trinôme $f_{n,n+1}(z)$, nous a permis d'obtenir un développement en série entière par rapport à $1/n$ des racines de l'équation $f_{n,n+1}(z) = 0$. Aussi nous avons obtenu un développement en série entière suivant les puissances de $1/n$ pour la racine réelle $x_{2,n}$ de $G_n(z) = 0$ ou $H_n(z) = 0$ (selon la parité de n).

Dans le quatrième chapitre, nous étudions la méthode du développement en série hypergéométrique des racines d'un trinôme, cette méthode est due à G. Belardinelli (cf [2]). Elle utilise la formule d'inversion de Lagrange et le théorème des fonctions implicites analytiques. En l'appliquant à l'équation $G_n(z) = 0$, nous avons obtenu un développement en série hypergéométrique pour la racine positive $x_{1,n}$ différente de 1 du trinôme $G_n(z)$.

Enfin, nous terminons par une conclusion et une annexe où sont donnés deux programmes écrits à l'aide du Maple.

Chapitre 1

Quelques résultats classiques de localisation de zéros de polynômes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous énonçons avec démonstrations quelques théorèmes sur la localisation des zéros d'un polynôme dans le plan complexe. Nous nous sommes intéressés particulièrement à la localisation dans un disque, dans une couronne ainsi que la localisation relativement à un secteur.

Les théorèmes de Cauchy [17], d'Eneström Kakeya [17], de Birkhoff [17] et Pellet [17]. y sont exposés suivis de démonstrations et d'exemples d'application. Nous énonçons le théorème d'Erdős - Turán (cf [10]) qui donne la répartition dans le plan complexe des argument des zéros d'un polynôme à coefficients quelconques.

Enfin nous rappelons le théorème de Rouché [4], le principe du maximum [4], ainsi que le théorème des fonctions implicites.

1.2 Localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe

1.2.1 Localisation des zéros d'un polynôme dans un disque

Théorème 1.2.1 (*Cauchy*)(cf[17]):

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$ un polynôme à coefficients complexes

de degré $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$) tel que les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, ne soient pas tous nuls.

Alors, tous les zéros de P sont dans le disque $|z| \leq r$, où r est la racine réelle positive de l'équation:

$$|a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \dots + |a_{n-1}| z^{n-1} - |a_n| z^n = 0$$

Ce théorème est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.2.1 :

Soit $n \geq 1$, et $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, $(n+1)$ nombres complexes tels que

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \neq (0, 0, 0, \dots, 0)$$

et

$$F(z) = |a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \dots + |a_{n-1}| z^{n-1} - |a_n| z^n.$$

Alors il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que

$$F(\alpha) = 0$$

et vérifiant de plus

$$F(x) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < \alpha$$

$$F(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x > \alpha.$$

Preuve. (du lemme 1.2.1)

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, n nombres complexes non tous nuls, a_n un nombre complexe non nul, et

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| z^k - |a_n| z^n.$$

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$f(x) = \frac{F(x)}{x^n} = \frac{|a_0|}{x^n} + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{x} - |a_n|.$$

La fonction f ainsi définie est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $-|a_n|$ quand x parcourt l'intervalle $]0, +\infty[$. Il en résulte d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence et l'unicité d'un nombre réel positif α tel que $f(\alpha) = 0$ et vérifiant

$$\begin{aligned} f(x) &> 0, \text{ pour } 0 < x < \alpha \\ f(x) &< 0, \text{ pour } x > \alpha \end{aligned}$$

comme pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = x^n f(x)$, le lemme en résulte. ■

Preuve. (du théorème de Cauchy 1.2.1)

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, un polynôme à coefficients complexes avec $a_n \neq 0$, alors

$$|P(z)| \geq |a_n| |z|^n - [|a_0| + |a_1| |z| + \dots + |a_{n-1}| |z|^{n-1}].$$

D'après le lemme 1.2.1, il existe un unique nombre réel r positif tel que

$$|a_n| r^n - [|a_0| + |a_1| r + \dots + |a_{n-1}| r^{n-1}] = 0.$$

De plus, pour $|z| > r$, on a

$$|a_n| |z|^n - [|a_0| + |a_1| |z| + \dots + |a_{n-1}| |z|^{n-1}] > 0$$

d'où l'on déduit que $|P(z)| > 0$, pour $|z| > r$, donc tous les zéros de P sont dans le disque $|z| \leq r$. ■

Théorème 1.2.2 (Cauchy)[17]:

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$, alors tous les zéros de P sont dans le disque:

$$|z| < 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k/a_n|$$

Preuve. (du théorème 1.2.2)

Soit $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$, avec $a_n \neq 0$.

Posons

$$M = \max \left| \frac{a_k}{a_n} \right|, \text{ pour } 0 \leq k \leq n-1.$$

On a :

$$|P(z)| \geq |a_n| |z|^n - [a_0 + |a_1| |z| + \dots + |a_{n-1}| |z|^{n-1}]$$

d'où :

$$|P(z)| \geq |a_n| |z|^n \left[1 - \left(\left| \frac{a_0}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{|z|^n} + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{|z|^{n-1}} + \dots + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{|z|} \right) \right]$$

comme pour tout k , $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq M$$

on obtient :

$$|P(z)| \geq |a_n| |z|^n \left[1 - M \sum_{j=1}^n |z|^{-j} \right].$$

D'où

$$|P(z)| > |a_n| |z|^n \left[1 - M \sum_{j=1}^{+\infty} |z|^{-j} \right]$$

Pour z tel que $|z| > 1$, la série $\sum_{j=1}^{+\infty} |z|^{-j}$ converge et on a $\sum_{j=1}^{+\infty} |z|^{-j} = \frac{1}{|z| - 1}$

par suite pour $|z| > 1$, on a :

$$|P(z)| > |a_n| |z|^n \left[1 - \frac{M}{|z| - 1} \right] = |a_n| |z|^n \left(\frac{|z| - 1 - M}{|z| - 1} \right)$$

Si $|z| \geq 1 + M$ alors $|P(z)| > 0$, donc P admet tous ses zéros dans le disque $|z| < 1 + M$. ■

Application du théorème de Cauchy :

Soit $n \geq 1$ et

$$f_n(z) = f_{n, n+1} = z^{n+1} - (n+1)z + n.$$

Montrons que tout zéro de f_n est situé dans le disque $|z| \leq (2n)^{1/n}$.

Pour $n = 1$ et pour $n = 2$, ce résultat se vérifie facilement à l'aide d'un calcul directe des racines.

Supposons donc $n \geq 3$, et considérons l'équation associée à

$$F_n(z) = n + (n+1)z - z^{n+1} = 0.$$

Soit z une racine de l'équation $F_n(z) = 0$

pour montrer que $|z| \leq (2n)^{1/n}$ il suffit de montrer que la racine réelle positive r de $F_n(z) = 0$, satisfait l'inégalité $r \leq (2n)^{1/n}$. Il est suffisant pour cela de montrer que pour $n \geq 3$,

$$F_n((2n)^{1/n}) \leq 0,$$

on a

$$\begin{aligned} F_n((2n)^{1/n}) &= n + (n+1)(2n)^{1/n} - ((2n)^{1/n})^{n+1} \\ &= (n-1) \left[1 + \frac{1}{n-1} - (2n)^{1/n} \right] \end{aligned}$$

Montrons que pour $n \geq 3$, l'expression entre crochet est négative.

En effet pour $n \geq 3$, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \leq 3$$

alors

$$\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n \leq 3 \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{3n}{n-1}$$

or

$$\text{pour } n \geq 3, \quad \frac{3n}{n-1} \leq 2n$$

donc :

$$\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n \leq 2n$$

d'où

$$1 + \frac{1}{n-1} \leq (2n)^{1/n}$$

si et seulement si

$$\left(1 + \frac{1}{n-1} - (2n)^{1/n} \right) \leq 0$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 1.2.3 (Pellet) [17]:

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + \dots + a_n z^n$, $a_p \neq 0$, un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$

Si

$$F_p(z) \equiv |a_0| + |a_1| z + \dots + |a_{p-1}| z^{p-1} - |a_p| z^p + |a_{p+1}| z^{p+1} + \dots + |a_n| z^n$$

admet deux zéros réels positifs r et R , avec $r < R$.

Alors

- 1) $P(z)$ admet exactement p zéros dans le disque $|z| \leq r$.
- 2) $P(z)$ ne s'annule pas dans la couronne $r < |z| < R$.

Preuve.

La preuve repose sur le théorème de Rouché (cf [4])

Soit ρ un nombre réel positif tel que $r < \rho < R$

comme

$$F_p(x) > 0, \text{ pour } 0 < x < r \text{ et pour } x > R$$

il en résulte que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, suffisamment petit,

$$F_p(\rho) < 0 \text{ pour } r + \varepsilon < \rho < R - \varepsilon$$

or l'inégalité $F_p(\rho) < 0$ est équivalente à :

$$F_p(\rho) = |a_0| + |a_1| \rho + \dots + |a_{p-1}| \rho^{p-1} - |a_p| \rho^p + |a_{p+1}| \rho^{p+1} + \dots + |a_n| \rho^n < 0$$

si et seulement si

$$|a_p| \rho^p > \sum_{j=0}^{p-1} |a_j| \rho^j + \sum_{j=p+1}^n |a_j| \rho^j.$$

Posons

$$f(z) = \sum_{j=0, j \neq p}^n a_j z^j, \quad g(z) = a_p z^p$$

puisque pour $|z| = \rho$, on a

$$|f(z)| \leq \sum_{j=0, j \neq p}^n |a_j| \rho^j < |a_p| \rho^p = |g(z)| \neq 0.$$

1.2. Localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe

le théorème de Rouché implique alors que le polynôme $P(z) = f(z) + g(z)$ possède le même nombre P de racines que $g(z)$ dans le cercle $|z| < \rho$

Comme $r < \rho < R$, il en résulte que $P(z)$ admet exactement p zéros dans le disque $|z| \leq r$, et aucun zéros dans la couronne $r < |z| < R$. ■

Théorème 1.2.4 :

Pour tout p et q tels que $p > 1$, $q > 1$ et $1/p + 1/q = 1$.

Le polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, a tous ces zéros dans le cercle

$$|z| < \left\{ 1 + \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right|^p \right]^{q/p} \right\}^{1/q} \leq (1 + n^{q/p} M^q)^{1/q}.$$

Avec $M = \max \left| \frac{a_j}{a_n} \right|$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Preuve.

La preuve repose sur l'inégalité de Hölder (cf [17])

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \leq \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n (\beta_j)^q \right)^{1/q}$$

où $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$ pour tout j , $1 \leq j \leq n$, p et q entiers > 1 , vérifiant $1/p + 1/q = 1$.

On a

$$|P(z)| \geq |a_n| |z^n| - [|a_0| + |a_1| |z| + \dots + |a_{n-1}| |z^{n-1}|]$$

ou encore

$$|P(z)| \geq |a_n| |z^n| - \left(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| |z|^j \right)$$

L'inégalité de Hölder permet d'écrire :

$$|P(z)| \geq |a_n| |z^n| - \left(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=0}^{n-1} |z|^{jq} \right)^{1/q}$$

d'où

$$|P(z)| \geq |a_n| |z^n| \left\{ 1 - \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{|z|^{(n-j)q}} \right)^{1/q} \right\}$$

comme

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{|z|^{(n-j)q}} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^{jq}}$$

et que pour $|z| > 1$, la série géométrique $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^{jq}}$ de raison $\frac{1}{|z|^q}$ est convergente et a pour somme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^{jq}} = \frac{1}{|z|^q - 1}.$$

On obtient alors $|P(z)| > |a_n| |z|^n \left\{ 1 - \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right|^p \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|z|^q - 1} \right)^{1/q} \right\}$

en posant

$$A_p = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right|^p \right)^{1/p},$$

on obtient

$$|P(z)| > |a_n| |z|^n \left\{ 1 - \frac{A_p}{(|z|^q - 1)^{1/q}} \right\} = |a_n| |z|^n \left\{ \frac{(|z|^q - 1)^{1/q} - A_p}{(|z|^q - 1)^{1/q}} \right\}.$$

Si $|z|^q \geq 1 + A_p^q$ alors $|P(z)| > 0$

or l'inégalité $|z|^q \geq 1 + A_p^q$ est équivalente à

$$|z| \geq (1 + A_p^q)^{1/q}$$

par suite $P(z)$ a tous ses zéros dans le disque :

$$|z| < \left\{ 1 + \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right|^p \right)^{q/p} \right\}^{1/q}.$$

En posant : $M = \max_{j=0,1,\dots,n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right|$ on obtient,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\left| \frac{a_j}{a_n} \right|^p \right)^{q/p} \leq M^q \left(\sum_{j=0}^{n-1} 1 \right)^{q/p} = n^{q/p} M^q$$

d'où : $|z| < (1 + n^{q/p} M^q)^{1/q}$. ■

Remarque 1.2.1 :

Pour $p = q = 2$ on obtient : $|z| < \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|^2}{|a_n|^2} \right\}^{1/2}$.

Ce résultat est démontré par Carmichael-Mason Kelleher et Fujiwara (cf [17]).

1.2. Localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe

Nous obtenons des résultats analogues aux précédents dans le cas des développements d'un polynôme donné, en fonction de certains polynômes orthogonaux $\Psi_k(z)$ avec

$$\deg \Psi_k(z) = k$$

et

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = \sum_{k=0}^n b_k \Psi_k(z).$$

Lorsque $\Psi_k(z)$ est le polynôme d'Hermite, J. Turán a établi l'analogie du théorème 1.2.2.

Désignons par $H_k(z)$ le polynôme d'Hermite de degré k , $H_k(z)$ est donné par la formule de Rodrigues :

$$H_k(z) = (-1)^k e^{z^2} \frac{d^k}{dz^k} (e^{-z^2}).$$

Théorème 1.2.5 (Turán):

Soit $P(z)$ tel que :

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = \sum_{k=0}^n b_k H_k(z) \quad \text{où } a_n b_n \neq 0. \quad (1.2.1)$$

On pose :

$$M^* = \max_{0 \leq k \leq n-1} |b_k / b_n|$$

Alors tout zéro z de $P(z)$ vérifie :

$$|\operatorname{Im}(z)| < 1/2(1 + M^*).$$

Preuve.

On a $H_k(z) = (-1)^k e^{z^2} \frac{d^k}{dz^k} (e^{-z^2})$.

Nous montrons par récurrence que pour tout entier k ; $1 \leq k \leq n$, $H_k(z)$ est un polynôme de degré k .

Posons

$$y = f(z) = e^{-z^2}$$

et désignons par $f^{(k)}(z)$, la dérivée d'ordre k de f .

On a

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(e^{-z^2}) = -2ze^{-z^2}$$

d'où

$$H_1(z) = e^{z^2} \frac{d}{dz}(e^{-z^2}) = -2z$$

donc $H_1(z)$ est un polynôme de degré 1.

Supposons que $H_k(z)$ est un polynôme de degré k .

Montrons que $H_{k+1}(z)$ est aussi un polynôme de degré $(k+1)$.

La relation

$$f^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k}(e^{-z^2})$$

implique

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k e^{-z^2} H_k(z)$$

d'où

$$\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(e^{-z^2}) = f^{(k+1)}(z) = (-1)^k (-2z H_k(z) + H'_k(z)) e^{-z^2}.$$

en multipliant les deux membres de cette dernière relation par $(-1)^k e^{z^2}$, il vient

$$H_{k+1}(z) = (-1)^k e^{z^2} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(e^{-z^2}) = (-2z H_k(z) + H'_k(z))$$

d'où l'on déduit que $H_{k+1}(z)$ est un polynôme de degré $(k+1)$

par suite pour tout k , $H_k(z)$ est un polynôme de degré k

2) Montrons que tous les zéros de $H_k(z)$ sont réels

$f(z) = e^{-z^2}$, implique $f'(z) = -2ze^{-z^2} = -2zf(z)$

en appliquons la formule de Leibniz à l'ordre $(k-1)$, on obtient :

$$f^{(k)}(z) = -2 \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j z^{(j)} f^{(k-1-j)}(z) = -2 [C_{k-1}^0 z f^{(k-1)}(z) + C_{k-1}^1 f^{(k-2)}(z)]$$

d'où

$$f^{(k)}(z) = -2zf^{(k-1)}(z) - 2(k-1)f^{(k-2)}(z) \quad (1.2.2)$$

comme : $f^{(k)}(z) = (-1)^k H_k(z) e^{-z^2}$.

en remplaçant dans (1.2.2) puis en multipliant par $(-1)^k e^{z^2}$ les deux membres de la relation obtenue, il vient :

$$\begin{aligned} H_k(z) &= -2z(-1)^{2k-1} H_{k-1}(z) - 2(k-1)(-1)^{2k-2} H_{k-2}(z) \\ &= 2zH_{k-1}(z) - 2(k-1)H_{k-2}(z). \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$H_k(z) = 2zH_{k-1}(z) - 2(k-1)H_{k-2}(z).$$

Cette dernière relation montre que les polynômes $H_k(z)$ d'Hermite, constituent des suites de Sturm (cf [9]) du type

$$P_{j+1}(x) = (a_jx + b_j)P_j(x) - c_{j-1}P_{j-1}(x)$$

où P_j est un polynôme de degré j et a_j , b_j et c_{j-1} sont des nombres réels positifs.

D'après le théorème de Sturm, les racines de $H_k(z)$ sont toutes réelles.

3) Montrons que les zéros de $P(z)$ se situent dans la bande

$$|\operatorname{Im}(z)| < 1/2(1 + M^*)$$

avec les notations précédentes on a :

$y = e^{-z^2}$, alors

$$y^{(k)} = \frac{d^k}{dz^k} (e^{-z^2})$$

et

$$H_k(z) = (-1)^k e^{z^2} \frac{d^k}{dz^k} (e^{-z^2}) = (-1)^k e^{z^2} y^{(k)}$$

En dérivant, on obtient :

$$H'_k(z) = (-1)^k e^{z^2} [2zy^{(k)} + y^{(k+1)}]. \quad (1.2.3)$$

Montrons que l'on a :

$$y^{(k+1)} + 2zy^{(k)} = -2ky^{(k-1)}. \quad (1.2.4)$$

On raisonne par récurrence sur k .

Pour $k = 1$, on a :

$$y^{(1)} = y' = -2ze^{-z^2} \quad \text{et} \quad y^{(2)} = 4z^2e^{-z^2} - 2e^{-z^2}.$$

d'où :

$$y'' + 2y + 2zy' = 0$$

Sopposons que pour k donné on a :

$$y^{(k+1)} + 2ky^{(k-1)} + 2zy^{(k)} = 0 \quad (1.2.5)$$

En dérivant (1.2.5), il vient :

$$y^{(k+2)} + 2ky^{(k)} + 2y^{(k)} + 2zy^{(k+1)} = 0$$

c'est-à-dire :

$$y^{(k+2)} + 2(k+1)y^{(k)} + 2zy^{(k+1)} = 0$$

d'où l'on déduit que pour tout $k \geq 1$; la relation :

$$y^{(k+1)} + 2zy^{(k)} = -2ky^{(k-1)}.$$

Les relations (1.2.3) et (1.2.4), impliquent :

$$\begin{aligned} H'_k(z) &= (-1)^k e^{z^2} [-2ky^{(k-1)}] \\ &= (-1)^{k+1} 2ke^{z^2} y^{(k-1)} \end{aligned}$$

d'où

$$H'_k(z) = 2kH_{k-1}(z). \tag{1.2.6}$$

La relation (1.2.6) équivaut à la relation

$$H_{k-1}(z) = \frac{1}{2k} H'_k(z) \tag{1.2.7}$$

De (1.2.6) et (1.2.7), on déduit la relation

$$\frac{H_{k-1}(z)}{H_k(z)} = \frac{1}{2k} \frac{H'_k(z)}{H_k(z)}$$

Soit x_{jk} les k zéros réels de $H_k(z)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Alors :

$$H_k(z) = \prod_{j=1}^k (z - x_{jk})$$

et

$$H'_k(z) = \prod_{j=2}^k (z - x_{jk}) + \prod_{j=1, j \neq 2}^k (z - x_{jk}) + \dots + \prod_{j=1, j \neq k}^k (z - x_{jk})$$

d'où :

$$\frac{H'_k(z)}{H_k(z)} = \frac{\prod_{j=2}^k (z - x_{j_k})}{\prod_{j=1}^k (z - x_{j_k})} + \frac{\prod_{j=1, j \neq 2}^k (z - x_{j_k})}{\prod_{j=1}^k (z - x_{j_k})} + \dots + \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^k (z - x_{j_k})}{\prod_{j=1}^k (z - x_{j_k})}$$

en simplifiant cette expression, il vient :

$$\frac{H'_k(z)}{H_k(z)} = \frac{1}{z - x_{1k}} + \frac{1}{z - x_{2k}} + \dots + \frac{1}{z - x_{kk}}$$

autrment dit :

$$\frac{H'_k(z)}{H_k(z)} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{z - x_{jk}}$$

par suite :

$$\frac{H_{k-1}(z)}{H_k(z)} = \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{z - x_{jk}}$$

ce qui implique

$$\left| \frac{H_{k-1}(z)}{H_k(z)} \right| \leq \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^k \frac{1}{|z - x_{jk}|} \quad (1.2.8)$$

Posons $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x_{j_k} \in \mathbb{R}$,

alors $|z - x_{j_k}| = |x + iy - x_{j_k}| = \sqrt{(x - x_{j_k})^2 + y^2} \geq |y|$

avec l'égalité lorsque $x_{j_k} = \text{Re}(z) = x$.

Pour $x_{j_k} \neq x$, on a

$$|z - x_{j_k}| > |y| \quad \text{ce qui est équivalent à} \quad \frac{1}{|z - x_{j_k}|} < \frac{1}{|y|}.$$

Le second terme de (1.2.8) est alors majoré par :

$$\left| \frac{H_{k-1}(z)}{H_k(z)} \right| \leq \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{|y|} = \frac{1}{2|y|}$$

l'inégalité précédente implique

$$\begin{aligned} \left| \frac{H_k(z)}{H_n(z)} \right| &= \left| \frac{H_k(z)}{H_{k+1}(z)} \right| \cdot \left| \frac{H_{k+1}(z)}{H_{k+2}(z)} \right| \cdots \left| \frac{H_{n-1}(z)}{H_n(z)} \right| \\ \left| \frac{H_k(z)}{H_n(z)} \right| &< \frac{1}{2^{n-k} |y|^{n-k}}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Par (1.2.1), on a

$$P(z) = b_n H_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k H_k(z)$$

d'où

$$|P(z)| \geq |b_n H_n(z)| - \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| |H_k(z)| = |b_n H_n(z)| \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{b_k}{b_n} \right| \left| \frac{H_k(z)}{H_n(z)} \right| \right\} \quad (1.2.10)$$

Posons $M^* = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{b_k}{b_n} \right|$, alors

$$\left| \frac{b_k}{b_n} \right| \leq M^*, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (1.2.11)$$

Les inégalités (1.2.10) et (1.2.11) impliquent

$$|P(z)| \geq |b_n H_n(z)| \left\{ 1 - M^* \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{H_k(z)}{H_n(z)} \right| \right\} \quad (1.2.12)$$

Avec (1.2.9) et (1.2.12) on obtient :

$$|P(z)| > |b_n H_n(z)| \left\{ 1 - M^* \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n-k} |y|^{n-k}} \right\} \quad (1.2.13)$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n-k} |y|^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2|y|} \right)^{n-k} < \frac{1}{2|y| - 1} \quad (1.2.14)$$

On obtient alors par (1.2.13) et (1.2.14) l'inégalité ;

$$|P(z)| > |b_n H_n(z)| \left\{ 1 - M^* \frac{1}{2|y| - 1} \right\} \quad (1.2.15)$$

On observe que si $1 - M^* \frac{1}{2|y| - 1} \geq 0$ alors $|P(z)| > 0$

Autrement dit $2|y| - 1 - M^* \geq 0$, implique $|P(z)| > 0$

or

$$2|y| - 1 - M^* \geq 0 \text{ équivaut à } |y| \geq \frac{1}{2} (1 + M^*).$$

Donc $P(z)$ ne s'annule pas pour z tel que

$$|\operatorname{Im}(z)| = y \geq \frac{1}{2} (1 + M^*)$$

par conséquent tout zéro de $P(z)$ vérifie $|\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{2} (1 + M^*)$ ■

1.2.2 Localisation des zéros d'un polynôme dans une couronne

Théorème 1.2.6 (Eneström-Kakeya) [17]:

Soit $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$, où $a_n \neq 0$, un polynôme de degré n , à coefficients réels strictement positifs.

Soit z un zéro de P alors:

$$\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2$$

$$\text{où } \rho_1 = \min_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right] \quad \text{et} \quad \rho_2 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right].$$

Preuve.

Soit $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$, où $a_n \neq 0$, un polynôme à coefficients réels strictement positifs.

On pose

$$\rho_1 = \min_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right] \quad \text{et} \quad \rho_2 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right].$$

Comme pour tout $0 \leq j \leq n$, $a_j > 0$, alors

$$\rho_1 > 0 \quad \text{et} \quad \rho_2 > 0$$

De plus pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$a_k - \rho_1 a_{k+1} \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho_2 a_{k+1} - a_k \leq 0.$$

Soit z une racine de P dans $\mathbb{C}$.

En multipliant $P(z)$ par $(\rho_1 - z)$, on obtient :

$$(\rho_1 - z)P(z) = a_0\rho_1 - \left[a_n z^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - \rho_1 a_{k+1}) z^{k+1} \right] \quad (1.2.16)$$

en prenant la valeur absolue des deux membres de (1.2.16), il vient :

$$\begin{aligned} |(\rho_1 - z)P(z)| &\geq |a_0||\rho_1| - |a_n||z|^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - \rho_1 a_{k+1}| |z|^{k+1} \\ &= a_0\rho_1 - a_n |z|^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - \rho_1 a_{k+1}) |z|^{k+1} \\ &= \rho_1 \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k |z|^k \right) - |z| \left(a_n |z|^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k |z|^k \right) \\ &= (\rho_1 - |z|) P(|z|). \end{aligned}$$

d'où

$$|(\rho_1 - z) P(z)| \geq (\rho_1 - |z|) P(|z|)$$

Si $|z| < \rho_1$ alors $|(\rho_1 - z) P(z)| > 0$, ce qui implique $|P(z)| > 0$, d'où $|z| \geq \rho_1$

De la même manière, en multipliant $P(z)$ par $(z - \rho_2)$, on obtient :

$$|(z - \rho_2) P(z)| \geq (|z| - \rho_2) P(|z|).$$

Si $|z| > \rho_2$ alors $|P(z)| > 0$, donc $|z| \leq \rho_2$. ■

Théorème 1.2.7 (Birkhoff)[17] :

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, soit z_1 le zéro de plus grand module de $P(z)$.

Alors:

$$(2^{1/n} - 1)r \leq \alpha \leq |z_1| \leq r \leq \frac{\alpha}{2^{1/n} - 1}$$

où r est la racine réelle positive de l'équation $g(z) = 0$

où

$$g(z) = |a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \dots + |a_{n-1}| z^{n-1} - |a_n| z^n \quad \text{et} \quad \alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n C_n^k} \right|^{\frac{1}{k}}.$$

Preuve.

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$, les zéros de $P(z)$ ordonnés suivant leurs modules.

Supposons

$$|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n| \tag{1.2.17}$$

La décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[z]$, s'écrit

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

la relation entre les coefficients et les fonctions symétriques élémentaires des racines donne

$$\left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \leq (-1)^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |z_{i_1}| |z_{i_2}| \dots |z_{i_k}|, \quad 1 \leq k \leq n$$

la relation (1.2.17) implique

$$\left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |z_1|^k = C_n^k |z_1|^k, \quad 1 \leq k \leq n$$

d'où

$$\left| \frac{a_{n-k}}{a_n C_n^k} \right|^{\frac{1}{k}} \leq |z_1|.$$

Soit r la racine réelle positive de $g(z) = 0$, alors

$$|a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \dots + |a_{n-1}| r^{n-1} - |a_n| r^n = 0.$$

Comme $a_n \neq 0$, on obtient en divisant par a_n :

$$r^n = \left| \frac{a_0}{a_n} \right| + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| r + \left| \frac{a_2}{a_n} \right| r^2 + \dots + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| r^{n-1}.$$

posons :

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n C_n^k} \right|^{\frac{1}{k}}$$

alors $\alpha \leq |z_1|$ et on a :

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| \leq \alpha^n, \quad \left| \frac{a_1}{a_n} \right| \leq C_n^{n-1} \alpha^{n-1}, \dots, \quad \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \leq C_n^1 \alpha,$$

d'où

$$r^n \leq \alpha^n + C_n^{n-1} \alpha^{n-1} r + \dots + C_n^1 \alpha r^{n-1} = (\alpha + r)^n - r^n$$

ce qui est équivalent à

$$2r^n \leq (\alpha + r)^n,$$

autrement dit nous avons

$$2^{1/n} r \leq \alpha + r \quad \text{si et seulement si} \quad r \leq \frac{\alpha}{2^{1/n} - 1}$$

Par suite

$$(2^{1/n} - 1)r \leq \alpha \leq |z_1|$$

mais par le théorème 1.2.1, on a $|z_1| \leq r$ d'où

$$(2^{1/n} - 1)r \leq \alpha \leq |z_1| \leq r \leq \frac{\alpha}{2^{1/n} - 1}$$

ce qui achève la preuve du théorème. ■

Remarque 1.2.2 :

Les bornes inférieures et supérieures sont atteintes dans ce théorème

Soit $f(z) = (1+z)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k$

L'équation associée à f s'écrit

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k z^k - z^n = (z+1)^n - 2z^n,$$

La racine réelle r de $g(z) = 0$ est

$$r = \frac{1}{2^{1/n} - 1}.$$

comme, $z_1 = -1$ est une racine d'ordre n de $f(z) = 0$, on a bien

$$|z_1| = r(2^{1/n} - 1) = 1.$$

De la même manière nous montrons que la borne supérieure est également atteinte pour le polynôme:

$$f(z) = (z+1)^n - 2z^n.$$

Soit $g(z) = f(z)$ l'équation associée à $f(z)$ et r la racine positive de $g(z) = 0$, on a

$$r = \frac{1}{2^{1/n} - 1}.$$

écrivons

$$f(z) = \sum_{k=1}^n C_n^{n-k} z^{n-k} - z^n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} z^{n-k}$$

avec

$$a_{n-k} = C_n^{n-k}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \text{ et } a_n = -1$$

posons

$$\alpha = \max \left| \frac{a_{n-k}}{a_n C_n^k} \right|^{1/k}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

comme

$$\left| \frac{a_{n-k}}{a_n C_n^k} \right| = \left| \frac{C_n^{n-k}}{(-1) C_n^k} \right| = 1$$

alors $\alpha = 1$ et

$$\frac{\alpha}{2^{1/n} - 1} = \frac{1}{2^{1/n} - 1} = r.$$

ce qui prouve que la borne supérieure est atteinte pour $f(z) = (z+1)^n - 2z^n$.

1.2.3 Localisation des zéros d'un polynôme relativement à un secteur

Théorème 1.2.8 :

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$, $p < n$ et $a \in \mathbb{C}^*$, le trinôme $1 + z^p + az^n$, a au moins un zéro dans chacun des secteurs définis par :

$$\left| \arg z - (2k+1)\frac{\pi}{p} \right| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, p-1.$$

1.2.4 Nombre de racines réelles d'un polynôme

Théorème 1.2.9 (Erdős-Turán)[10] :

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, $|a_0 a_n| \neq 0$ un polynôme à coefficients complexes, $L(P) = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$ la longueur de P et $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1), \dots, z_n = r_n \exp(i\varphi_n)$ les racines de P , avec $r_k > 0$ et $0 \leq \varphi_k < 2\pi$, pour $0 \leq k \leq n$

Alors le nombre $N(\alpha, \beta)$ des arguments φ_k compris dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ vérifie l'inégalité:

$$\left| N(\alpha, \beta) - \frac{\alpha - \beta}{2\pi} n \right| < 16 \sqrt{n \log \frac{L(P)}{\sqrt{|a_0 a_n|}}}.$$

Preuve. (cf [10]) ■

Théorème 1.2.10 (Schur) [3]:

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, un polynôme de degré n tel que $|a_0 a_n| \neq 0$. Si $P(z)$ admet m zéros positifs, alors

$$m^2 \leq 2n \log \left(\frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|}{\sqrt{|a_0| |a_n|}} \right).$$

Preuve. (cf [3]), où une démonstration détaillée de ce théorème est donnée. ■

1.2.5 Quelques rappels d'analyse

Dans ce qui suit, nous rappelons quelques résultats d'analyse, dont nous aurons besoin par la suite .

Théorème 1.2.11 (Rouché) :

Soit f et g deux fonctions holomorphes dans le disque $|z| < \rho$ (où ρ est un nombre réel positif) vérifiant :

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \text{pour } |z| = \rho$$

alors

$f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros dans le disque $|z| < \rho$.

Théorème 1.2.12 (Principe du maximum) :

Soit D un ensemble ouvert connexe dans $\mathbb{C}$, et $z_0 \in D$.

Soit f une fonction de variable complexe, analytique dans D .

Si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, pour tout $z \in D$ tel que $|z - z_0| < r$.

Alors f est constante dans D .

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, une application continue.

On considère l'équation différentielle

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in U, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (E)$$

Définition 1.2.1 :

Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

- (i) $(\forall x \in I), \quad (x, y(x)) \in U.$
- (ii) $(\forall x \in I), \quad y'(x) = f(x, y(x)).$

Théorème 1.2.13 :

Une fonction y est une solution du problème de Cauchy de données initiales (x_0, y_0) si et seulement si :

- (i) y est continue et $(\forall x \in I), \quad (x, y(x)) \in U.$
- (ii) $(\forall x \in I), \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du.$

On note par $\overline{B}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^m$.

comme U est un ouvert, il existe un cylindre $C_0 = [x_0 - T_0, x_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ de longueur

$2T_0$ et de rayon r_0 tel que $C_0 \subset U$.

Soit $C = [x_0 - T, x_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$, un cylindre de même diamètre que C_0 et de demi-longueur $T \leq T_0$

Définition 1.2.2 :

On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation différentielle (E) si toute solution $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(x_0) = y_0$ avec $I \subset [x_0 - T, x_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Théorème 1.2.14 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , et (x_0, y_0) un point de Ω tels que $F(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Alors il existe deux réels s et r positifs tels que si on pose $I =]x_0 - s, x_0 + s[$ et

$J =]y_0 - r, y_0 + r[$, $I \times J \subset \Omega$ et il existe une fonction

$g :]x_0 - s, x_0 + s[\longrightarrow]y_0 - r, y_0 + r[$ de classe C^1 telle que $\forall (x, y) \in I \times J$, $F(x, y) = 0$ si et seulement si $y = g(x)$.

Remarque 1.2.3 : Notons que nous utiliserons la version explicite due à T.Fack, de ce théorème (proposition 3.1.1).

En remarquant qu'une solution de l'équation différentielle

$$(E) \begin{cases} y' = G(x, y) & = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

est une fonction implicite de l'équation $F(x, y) = 0$.

Chapitre 2

Méthode des solutions approchées

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude et à l'application de la méthode dite des solutions approchées.

La méthode consiste à trouver une solution approchée de l'équation considérée, puis en utilisant la formule de Taylor et le principe du maximum [6], nous montrons qu'il existe un zéro proche de la solution trouvée ([18], [12], [13] et [14]).

La solution approchée est déterminée par la méthode de A. Schinzel.

Déscription de la méthode de A. Schinzel.

On considère le trinôme

$$g(z) = z^n - az^m + b, \quad a, b \in \mathbb{R}^*, \quad n > m$$

Soit z_k une racine de l'équation $g(z) = 0$

$$z_k = r_k \exp i \left(\frac{2k\pi}{n+1} + \Psi_k \right); |\Psi_k| \leq \frac{\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq n$$

En séparant les parties réelles et imaginaires dans $g(z_k) = 0$ on obtient,

$$r_k^n \sin n\Psi_k = ar_k^m \sin \left(\frac{2km\pi}{n} + m\Psi_k \right) \quad (2.1.1)$$

et

$$r_k^n \cos n\Psi_k = ar_k^m \cos \left(\frac{2k\pi m}{n} + m\Psi_k \right) - b \quad (2.1.2)$$

En additionnant les carrés de (2.1.2) et (2.1.1) il vient :

$$r_k^{2n} = r_k^{2m} a^2 - 2abr_k^m \cos \left(\frac{2k\pi m}{n} + m\Psi_k \right) + b^2 \quad (2.1.3)$$

Dans (2.1.3) on pose $\Psi_k = 0$, pour trouver une valeur approchée de r_k et ensuite on pose $\Psi_k = 0$ dans le membre de droite de (2.1.2) et (2.1.1) pour trouver une valeur approchée de Ψ_k en utilisant le membre gauche. On peut répéter ce procédé avec la valeur trouvée de Ψ_k pour obtenir une seconde approximation, ainsi de suite..., . La méthode est inspirée par le théorème d'Erdős et Turán sur l'équidistribution des zéros d'un polynôme dans des domaines angulaires.

2.2 Localisation des zéros de $f_{n, n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$

Dans ([15]) pour résoudre un problème physique, les auteurs ont obtenu l'équation

$$z + z^2 + \dots + z^n = n \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.2.1)$$

Cette équation admet $z = 1$, comme racine évidente. En multipliant (2.2.1) par $(z - 1)$, on obtient :

$$z^{n+1} - (n+1)z + n = 0 \quad (2.2.2)$$

on a le :

Théorème 2.2.1 :

Soient $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, les racines différentes de 1 de l'équation (2.2.2).

Alors

$$\frac{n}{n-1} \leq |z_k| \leq (2n)^{1/n}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

et

$$\left| \arg z_k - \frac{2k\pi}{n+1} \right| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

2.3 Solutions approchées du trinôme $f_n(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$

Dans (cf [18]), J.-L.Nicolas et A.Schinzel montrent que le théorème 2.3.1, suivant est vérifié pour la constante $A = 10^{40}$, ce résultat a été sensiblement amélioré par M.O.Hernane et J.-L.Nicolas (cf [13]).

Nous montrons le :

Théorème 2.3.1 :

Il existe une constante absolue $A \geq 1$ ($A = 14$ convient) avec la propriété:

Pour tout $n \geq 2A$ et pour tout entier k vérifiant :

$$A \leq k \leq n - A$$

Si l'on pose

$$r_k = \left(2(n+1) \sin \left(\frac{4k+1}{4n+2} \pi \right) \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{et} \quad \rho = 3 \frac{r_k - 1}{r_k^n - 1}.$$

Alors

(i) $r_k > 1$ et $\rho \leq \frac{3}{n}$

(ii) L'équation

$$f(z) = f_{n, n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n = 0$$

admet une racine z_k satisfaisant à l'inégalité

$$|z_k - x_k| \leq \rho \quad \text{avec} \quad x_k = r_k \exp \left(i\pi \frac{4k+1}{2n+1} \right).$$

Démonstration. (du théorème 2.3.1)

Preuve de (i) :

Pour tout k vérifiant $A \leq k \leq n - A$, on a : $\frac{4k+1}{4n+2} \pi \in [0, \pi]$.

Comme pour tout $x \in [0, \pi]$, on a la minoration :

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} \min(x, \pi - x)$$

alors

$$\begin{aligned} r_k^{n+1} &= 2(n+1) \sin \left(\frac{4k+1}{4n+2} \pi \right) \geq 2(n+1) \frac{2}{\pi} \min \left(\frac{4k+1}{4n+2} \pi, \pi - \frac{4k+1}{4n+2} \pi \right) \\ &= 2(n+1) \frac{2}{\pi} \min \left(\frac{4k+1}{4n+2}, 1 - \frac{4k+1}{4n+2} \right) = (4n+4) \min \left(\frac{4k+1}{4n+2}, \frac{4n+2-4k-1}{4n+2} \right) \\ &= \frac{4n+4}{4n+2} (4 \min(k, n-k) + 1) > 4A + 1, \quad \text{car} \quad \min(k, n-k) = A \end{aligned}$$

d'où

$$r_k^{n+1} > 4A + 1.$$

Comme $A \geq 1$, il en résulte que $r_k > 1$.

D'autre part on a :

$$\rho = 3 \frac{r_k - 1}{r_k^n - 1} = \frac{3}{1 + r_k + r_k^2 + \dots + r_k^{n-1}}.$$

En utilisant l'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géométriques, on obtient:

$$\frac{3}{1 + r_k + r_k^2 + \dots + r_k^{n-1}} \leq \frac{3}{nr_k^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{3}{n}$$

car $r_k > 1$ d'où l'on a :

$$\rho \leq \frac{3}{n}.$$

Ce qui prouve le point (i) du théorème 2.3.1.

Preuve de (ii) :

Pour la suite de la preuve, nous utiliserons les notations et lemmes suivants:

L'hypothèse $n \geq 2A$, ainsi que l'inégalité $r_k^{n+1} > 4A + 1$, impliquent

$$r_k^n > (4A + 1)^{\frac{n}{n+1}} \geq (4A + 1)^{\frac{2A}{2A+1}}$$

Posons $R(A) = (4A + 1)^{\frac{2A}{2A+1}}$,

alors,

$$r_k^n \geq R(A)$$

Notons que :

Remarque 1 :

L'inégalité $t - 1 \leq t \log t$ valable pour tout $t \geq 1$, permet d'obtenir une majoration plus précise pour ρ .

En effet on a,

$$\rho = 3 \frac{r_k - 1}{r_k^n - 1} \leq 3 \frac{r_k \log r_k}{r_k^n - 1} = \frac{3nr_k \log r_k}{n(r_k^n - 1)}$$

en posant $\omega(t) = \frac{\log t}{t - 1}$, pour $t > 1$, il vient

$$\rho \leq \frac{3r_k}{n} \omega(r_k^n)$$

La fonction $t \mapsto \omega(t)$ étant décroissante pour $t > 1$, cela entraîne

$$\omega(r_k^n) \leq \omega(R(A))$$

puisque $r_k^n > R(A)$ d'où $\rho \leq \frac{3r_k}{n}\omega(R(A))$. ■

Lemme 2.3.1 :

Avec les notations du théorème 2.3.1, on a :

- (i) $|f(x_k)| \leq (n+1)(r_k - 1) + 1$.
- (ii) $|f'(x_k)| \geq (n+1)(r_k^n - 1) = \frac{3}{\rho}(n+1)(r_k - 1)$.
- (iii) pour $j \geq 2$, $|f^{(j)}(x_k)| \leq j! \binom{n+1}{j} r_k^{n+1-j}$.

Preuve.

On pose $\alpha = \left(\frac{2k+n+1}{2n+1}\right)\pi$, $\beta = \left(\frac{4k+1}{2n+1}\right)\pi$ et $x_k = r_k \exp(i\beta)$, on a alors

$$2\alpha = \left(\frac{4k+2n+2}{2n+1}\right)\pi = \left(\frac{4k+1}{2n+1} + 1\right)\pi = \beta + \pi$$

donc

$$2\alpha = \beta + \pi$$

et

$$\begin{aligned} \beta(n+1) &= \frac{(n+1)(4k+1)}{2n+1}\pi = \left(\frac{4kn+n+4k+1}{2n+1}\right)\pi = \\ &= \left(\frac{(2k+n+1)+2k(2n+1)}{2n+1}\right)\pi = \left(\frac{2k+n+1}{2n+1}\right)\pi + 2k\pi \\ &= \alpha + 2k\pi \end{aligned}$$

d'où

$$\beta(n+1) = \alpha + 2k\pi$$

Preuve de (i) du lemme 2.3.1

Calculons $f(x_k)$:

On a :

$$\begin{aligned} f(x_k) &= r_k^{n+1} \exp(i(n+1)\beta) - (n+1)r_k \exp(i\beta) + n \\ &= 2(n+1) \sin\left(\frac{4k+1}{2n+1}\pi\right) \exp(i(n+1)\beta) - (n+1)r_k \exp(i\beta) + n \\ &= -2(n+1) \cos\left(\frac{4k+1}{4n+2}\pi + \frac{\pi}{2}\right) \exp(i(n+1)\beta) - (n+1)r_k \exp(i\beta) + n \end{aligned}$$

2.3. Solutions approchées du trinôme $f_n(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$

$$\begin{aligned}
&= -2(n+1)(\cos \alpha) \exp(i(n+1)\beta) - (n+1)r_k \exp(i\beta) + n \\
&= -2(n+1)(\cos \alpha) \exp(i(n+1)\beta) - (n+1) \exp(i\beta) + n + 1 \\
&\quad - (n+1)(r_k - 1) \exp(i\beta) - 1.
\end{aligned}$$

En utilisant les relations $(n+1)\beta = \alpha + 2k\pi$ et $\beta = 2\alpha - \pi$, on obtient.

$$\begin{aligned}
f(x_k) &= [-2(n+1)(\cos \alpha) \exp(i\alpha) - (n+1) \exp(i(2\alpha - \pi)) + n + 1] - (n+1)(r_k - 1) \exp(i\beta) - 1. \\
&= -2(n+1)(\cos \alpha) \exp(i\alpha) + (n+1) \exp(2i\alpha) + n + 1 - (n+1)(r_k - 1) \exp(i\beta) - 1 \\
&= (n+1) [\exp(i\alpha) (-2 \cos \alpha + \exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha))] - (n+1)(r_k - 1) \exp(i\beta) - 1
\end{aligned}$$

Comme, $\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha) = 2 \cos \alpha$, il vient :

$$f(x_k) = -(n+1)(r_k - 1) \exp(i\beta) - 1$$

d'où

$$|f(x_k)| \leq (n+1)(r_k - 1) + 1.$$

Preuve de (ii) du lemme 2.3.1

On a

$$f'(z) = (n+1)z^n - (n+1)$$

alors

$$f'(x_k) = (n+1)r_k^n \exp(in\beta) - (n+1).$$

d'où

$$\begin{aligned}
|f'(x_k)| &\geq |n+1| [|r_k^n \exp(in\beta)| - 1] \\
|f'(x_k)| &\geq (n+1)(r_k^n - 1) = \frac{3}{\rho}(n+1)(r_k - 1)
\end{aligned}$$

puisque

$$\rho = \frac{r_k - 1}{r_k^n - 1}$$

Preuve de (iii) du lemme 2.3.1

Se démontre par récurrence sur l'entier, $j \geq 2$.

On a :

$$f''(z) = (n+1)nz^{n-1} = 2 \binom{n+1}{2} z^{n-1}$$

et

$$\begin{aligned} f'''(z) &= n(n+1)(n-1)z^{n-2} \\ f'''(z) &= 3! \binom{n+1}{3} z^{n-2} \end{aligned}$$

Supposons donc que

$$f^{(j)}(z) = j! \binom{n+1}{j} z^{n+1-j}$$

Montrons alors que

$$f^{(j+1)}(z) = (j+1)! \binom{n+1}{j+1} z^{n+1-(j+1)}$$

la dérivée d'ordre $(j+1)$ de $f(z)$ vaut :

$$f^{(j+1)}(z) = (f^{(j)}(z))' = j!(n+1-j) \binom{n+1}{j} z^{n+1-j-1}$$

il suffit donc de montrer que l'on a :

$$(j+1)! \binom{n+1}{j+1} = j!(n+1-j) \binom{n+1}{j}$$

ce qui est vrai puisque

$$\begin{aligned} j!(n+1-j) \binom{n+1}{j} &= (j+1)! \frac{(n+1-j)}{(j+1)} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \\ &= (j+1)! \frac{(n+1)!(n+1-j)}{(j+1)!(n+1-j)(n+1-(j+1))!} \\ &= (j+1)! \binom{n+1}{j+1} \end{aligned}$$

d'où l'on a donc

$$|f^{(j)}(z)| = j! \binom{n+1}{j} z^{n+1-j}, \text{ pour tout } j \geq 2.$$

Par suite : $|f^{(j)}(x_k)| \leq j! \binom{n+1}{j} r_k^{n+1-j}$ pour $j \geq 2$. ■

Avec les notations du théorème 2.3.1, et du début de sa démonstration, nous avons le :

Lemme 2.3.2 :

$$S = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{|f^{(j)}(x_k)|}{j!} \rho^j \leq \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{2A}\right) \exp\left(\frac{\log(4A+2)}{2A+1}\right) \frac{y(R(A))}{1 - \omega(R(A))}$$

où

$$y(x) = \frac{x \log^2 x}{(x-1)^2}, \text{ pour } x > 1$$

est une fonction décroissante de x pour $x > 1$.

Preuve. du lemme 2.3.2.

On a

$$S = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{|f^{(j)}(x_k)|}{j!} \rho^j$$

Linégalité (iii) du lemme 2.3.1, implique :

$$S \leq \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} \rho^j r_k^{n+1-j} = S'$$

le second membre de cette inégalité se développe comme suit :

$$S' = \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} \rho^j r_k^{n+1-j} = \binom{n+1}{2} \rho^2 r_k^{n-1} + \binom{n+1}{3} \rho^3 r_k^{n-2} + \binom{n+1}{4} \rho^4 r_k^{n-3} + \dots + \rho^{n+1}$$

d'où

$$\begin{aligned} S' &= \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \left[1 + \frac{n-1}{3} \frac{\rho}{r_k} + \frac{(n-1)(n-2)}{3 \cdot 4} \left(\frac{\rho}{r_k} \right)^2 + \dots \right] \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \left[1 + \frac{n}{3} \frac{\rho}{r_k} + \frac{n^2}{3 \cdot 4} \left(\frac{\rho}{r_k} \right)^2 + \frac{n^3}{27} \left(\frac{\rho}{r_k} \right)^3 \dots \right] \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{n}{3} \frac{\rho}{r_k}} \end{aligned}$$

d'où la majoration de S suivante :

$$S \leq \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{n}{3} \frac{\rho}{r_k}}$$

comme d'après la remarque 1, on a

$$\rho \leq \frac{3r_k}{n} \omega(R(A))$$

alors

$$S \leq \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \frac{1}{1 - \omega(R(A))} = \frac{n^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rho^2 r_k^{n-1} \frac{1}{1 - \omega(R(A))}$$

d'où :

$$S \leq \frac{n^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rho^2 r_k^{n-1} \frac{1}{1 - \omega(R(A))}$$

puisque $n \geq 2A$.

Majoration de $\rho^2 r_k^{n-1}$:

Par la remarque 1, on a :

$$\rho^2 r_k^{n-1} \leq \frac{9r_k^{n+1} \log^2 r_k}{(r_k^n - 1)^2} = \frac{9r_k}{n^2} y(r_k^n)$$

où

$$y(x) = \frac{x \log^2 x}{(x-1)^2} = \left(\frac{\log \sqrt{x}}{\sinh(\log \sqrt{x})} \right)^2, \text{ pour } x > 1.$$

La fonction $y(x)$ est décroissante pour $x > 1$, car la fonction $g(t) = \frac{\sinh(t)}{t}$ est croissante pour $t > 0$, puisqu'elle est analytique et les coefficients dans son développement de Mac Laurin sont positifs.

Comme $r_k^n > R(A)$ donc

$$y(r_k^n) < y(R(A))$$

donc

$$\rho^2 r_k^{n-1} \leq \frac{9r_k}{n^2} y(R(A))$$

La définition de r_k donne :

$$r_k \leq (2(n+1))^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left(\frac{\log(2n+2)}{n+1}\right)$$

d'où

$$r_k \leq \exp\left(\frac{\log(4A+2)}{2A+1}\right)$$

puisque $n \geq 2A$, et que la fonction $t \mapsto \frac{\log(2t+2)}{t+1}$ est décroissante pour $t \geq \frac{1}{2}e - 1$.

par suite, on obtient la majoration :

$$\rho^2 r_k^{n-1} \leq \frac{9}{n^2} \exp\left(\frac{\log(4A+2)}{2A+1}\right) y(R(A)).$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité

$$S \leq \frac{9}{n^2} \left(1 + \frac{1}{2A}\right) \exp\left(\frac{\log(4A+2)}{2A+1}\right) \frac{y(R(A))}{1 - \omega(R(A))}$$

ceci achève la preuve du lemme 2.3.2 ■

Démonstration. du théorème 2.3.1 (suite de la démonstration)

Preuve de (ii)

Supposons que f ne s'annule pas dans le disque de centre x_k et de rayon ρ ; on pourrait appliquer dans ce disque le principe du maximum à la fonction $\frac{1}{f}$, il existerait alors z , avec

$$|z - x_k| = \rho, \text{ tel que } \left| \frac{1}{f(x_k)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(z)} \right|.$$

Pour démontrer (ii), nous allons donc montrer que pour tout z , tel que $|z - x_k| = \rho$, on a $|f(z)| > f(x_k)$.

La formule de Taylor appliquée à $f(z)$ au point x_k , à l'ordre $(n+1)$, s'écrit :

$$f(z) = f(x_k) + f'(x_k)(z - x_k) + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_k)}{j!} (z - x_k)^j.$$

Ce qui implique :

$$|f(z)| \geq |f'(x_k)|\rho - |f(x_k)| - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{|f^{(j)}(x_k)|}{j!} \rho^j.$$

puisque $|z - x_k| = \rho$

d'où :

$$|f(z)| - |f(x_k)| \geq |f'(x_k)|\rho - 2|f(x_k)| - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{|f^{(j)}(x_k)|}{j!} \rho^j.$$

En utilisant le lemme 2.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} |f'(x_k)|\rho - 2|f(x_k)| &\geq 3(n+1)(r_k - 1) - 2(n+1)(r_k - 1) - 2 \\ &= (n+1)(r_k - 1) - 2 \geq (n+1)\log r_k - 2 = \log r_k^{n+1} - 2 \\ &\geq \log(4A + 1) - 2 \end{aligned}$$

puisque $r_k^{n+1} \geq 4A + 1$, d'après la remarque 1.

Grâce au lemme 2.3.2, on déduit que

$$|f(z)| - |f(x_k)| \geq \log(4A + 1) - 2 - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{2A}\right) \exp\left(\frac{\log(4A + 1)}{2A + 1}\right) \frac{y(R(A))}{1 - \omega(R(A))}$$

La fonction

$$x \mapsto \varphi(x) = \log(4x + 1) - 2 - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \exp\left(\frac{\log(4x + 1)}{2x + 1}\right) \frac{y(R(x))}{1 - \omega(R(x))}$$

est croissante pour $x \geq 1$, car la fonction R est croissante, et les fonctions $y(x)$ et $\omega(x)$ sont décroissantes, ainsi que les fonctions $1 + \frac{1}{2x}$ et $\frac{\log(4x+2)}{2x+1}$.

Les calculs numériques montrent que l'on a :

$$\varphi(14) = 0.176 > 0$$

Ce qui implique $|f(z)| > |f(x_k)|$, ceci achève la preuve de (ii)

et donc du théorème 2.3.1. ■

2.4 Solutions approchées du $z^{n+1} - a z + a - 1 = 0$

Théorème 2.4.1 :

Soit a un nombre réel, $a \geq 1$. Pour $n \geq 1$, on définit l'équation trinôme

$$f(z) = f_{n,a}(z) = z^{n+1} - az + a - 1 = 0 \quad (2.4.1)$$

pour $1 \leq k \leq n+1$, on pose :

$$x_k = r_k \exp \left(i \left(\frac{2k\pi}{n+1} + \Psi_k \right) \right) \quad (2.4.2)$$

avec

$$r_k = \left(1 + 4a(a-1) \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} \right)^{\frac{1}{2(n+1)}} \quad (2.4.3)$$

$$\Psi_k = \frac{2k\pi a}{(n+1)^2} \quad (2.4.4)$$

Soient trois nombres réels α, β, γ , vérifiant $0 < \beta \leq \gamma$, $\alpha > 0$ et

$$\alpha(1-\beta) \geq \gamma(84\gamma + 13\beta + 44\beta\gamma) + \alpha^2 e^\alpha \left(\frac{1}{2} + 10\gamma^2 \right) \quad (2.4.5)$$

On suppose que

$$n \geq 9, \quad \frac{a}{n+1} \leq \beta \quad \text{et} \quad 1 \leq k \leq \gamma \frac{n+1}{a}. \quad (2.4.6)$$

Alors, l'équation (2.4.1) admet une racine dans le disque de centre x_k et de rayon $\rho = \frac{\alpha}{(n+1)}$. Dans (2.4.5), on peut prendre par exemple $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.01$ et $\gamma = 0.02$.

Lorsque $a = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $k = 1$ et $n \geq 99$, on peut prendre $\alpha = \frac{300}{(n+1)^2}$,

$$\beta = \gamma = \frac{\varphi}{n+1}.$$

Preuve.

Montrons d'abord l'inégalité (2.4.5).

Lorsque $a = \varphi$ et $n \geq 99$, on a :

$$\alpha = \frac{300}{(n+1)^2} \leq \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{100} \quad \text{et} \quad \beta = \gamma = \frac{\varphi}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{100}$$

Il s'en suit que

$$\alpha(1 - \beta) \geq \alpha \left(1 - \frac{2}{100}\right) = \frac{294}{(n+1)^2}$$

et

$$\gamma(84\gamma + 13\beta + 44\beta\gamma) = \beta^2(84 + 13 + 44\beta) \leq \beta^2(97 + \frac{88}{100}) \leq 98 \frac{\varphi^2}{(n+1)^2} \leq \frac{257}{(n+1)^2},$$

d'autre part on a :

$$\alpha^2 e^\alpha (1/2 + 10\gamma^2) \leq \frac{300}{(n+1)^2} \frac{3}{100} e^{3/100} \left(\frac{1}{2} + 10 \frac{4}{10000}\right) \leq \frac{5}{(n+1)^2}$$

d'où

$$\beta^2(84 + 13 + 44\beta) + \alpha^2 e^\alpha (1/2 + 10\gamma^2) \leq \frac{262}{(n+1)^2}$$

or

$$\alpha(1 - \beta) \geq \frac{294}{(n+1)^2}$$

d'où en résulte l'inégalité (2.4.5).

Pour la suite de la démonstration nous suivrons les mêmes étapes que dans la preuve du théorème 2.3.1..

Le lemme suivant que nous démontrerons à la fin de la preuve de ce théorème, nous sera utile. ■

Lemme 2.4.1 :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|e^{it} - 1 - it| \leq \frac{t^2}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.4.7}$$

Preuve. (Suite de la preuve du théorème 2.4.1)

En appliquant à (2.4.3) l' inégalité

$$(1 + t)^\lambda \leq 1 + \lambda t$$

valable pour $t \geq 0$ et $0 \leq \lambda \leq 1$

et l'inégalité

$$\sin t \leq t \quad \text{pour } t \geq 0$$

on obtient

$$1 \leq r_k^{n+1} \leq \frac{1 + 2a(a-1) \pi^2 k^2}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad 1 \leq r_k \leq 1 + \frac{2a(a-1) \pi^2 k^2}{(n+1)^3}. \quad (2.4.8)$$

en suite nous appliquerons la formule de Taylor, nous avons besoin pour cela d'une majoration de $|f(x_k)|$, et d'une minoration de $|f'(x_k)|$, ainsi qu'une majoration du terme de reste.

Il vient en utilisant les relations (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) et (2.4.4),

$$\begin{aligned} f(x_k) &= r_k^{n+1} e^{(n+1)\Psi_k i} - a r_k e^{\frac{2i\pi k}{n+1} + i\Psi_k} + a - 1 \\ &= \left(e^{(n+1)\Psi_k i} - 1 - i(n+1)\Psi_k \right) - a \left(e^{\frac{2i\pi k}{n+1} + i\Psi_k} - 1 - \frac{2i\pi k}{n+1} - i\Psi_k \right) \\ &\quad - ia\Psi_k + (r_k^{n+1} - 1)e^{(n+1)\Psi_k i} - a(r_k - 1)e^{\frac{2i\pi k}{n+1} + i\Psi_k}. \end{aligned}$$

En utilisant deux fois la majoration donnée par le lemme 2.4.1, on obtient,

$$|f(x_k)| \leq \frac{(n+1)^2 \Psi_k^2}{2} + \frac{a}{2} \left(\frac{2k\pi}{n+1} + \Psi_k \right)^2 + a\Psi_k + (r_k^{n+1} - 1) + a(r_k - 1)$$

grâce à la relation (2.4.4) et à l'inégalité (2.4.8), on obtient

$$\begin{aligned} |f(x_k)| &\leq \frac{2k^2\pi^2 a^2}{(n+1)^2} + \frac{2a\pi^2 k^2}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{a}{n+1} \right)^2 \\ &\quad + \frac{2a^2 k\pi}{(n+1)^2} + \frac{2a(a-1)k^2\pi^2}{(n+1)^2} + \frac{2a^2(a-1)k^2\pi^2}{(n+1)^3}. \end{aligned}$$

Le membre de droite de cette inégalité s'écrit après simplification :

$$\frac{2k^2\pi^2 a^2}{(n+1)^2} \left(2 + \frac{a}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{k\pi} \right)$$

l'hypothèse $n \geq 9$, implique $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{10}$, en majorant π^2 par 10 et 2π par 6.5, on obtient

$$|f(x_k)| \leq \frac{k^2 a^2}{(n+1)^2} \left(42 + 22 \frac{a}{n+1} \right) + 6.5 \frac{ka^2}{(n+1)^2}$$

En tenant compte des hypothèses (2.4.5), on en déduit

$$|f(x_k)| \leq \gamma^2(42 + 22\beta) + 6.5\beta\gamma = \gamma(42\gamma + 22\beta\gamma + 6.5\beta)$$

Minoration de $|f'(x_k)|$

On a

$$f'(z) = (n+1)z^n - a$$

d'où l'on obtient par (2.4.2) et (2.4.3)

$$|f'(x_k)| = |(n+1)x_k^n - a| \geq (n+1)|x_k^n| - a = (n+1)r_k^n - a \geq n+1-a$$

l'hypothèse (2.4.6), implique alors

$$|f'(x_k)| \geq (n+1) \left(1 - \frac{a}{n+1}\right) \geq (n+1)(1-\beta). \quad (2.4.9)$$

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée au point x_k définie par (2.4.2), s'écrit

$$f(z) = f(x_k) + (z - x_k)f'(x_k) + \int_{x_k}^z (z-t)f''(t)dt \quad (2.4.10)$$

Majoration du reste intégral $\int_{x_k}^z (z-t)f''(t)dt$:

soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z - x_k| = \rho = \alpha / (n+1)$, il vient

$$\int_{x_k}^z (z-t)f''(t)dt = n(n+1) \int_{x_k}^z t^{n-1}(z-t)dt$$

en faisant le changement de variables $t = x_k + u(z - x_k)$, cette intégrale s'écrit

$$\int_{x_k}^z (z-t)f''(t)dt = n(n+1) \int_0^1 (x_k + u(z - x_k))^{n-1} (1-u)(z - x_k)^2 du$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_k}^z (z-t)f''(t)dt \right| &\leq n(n+1)\rho^2 (r_k + \rho)^{n-1} \int_0^1 (1-u)du \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 (r_k + \rho)^{n-1} \\ &\leq \frac{(n+1)^2}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \left(1 + \frac{\rho}{r_k}\right)^{n-1} \leq \frac{(n+1)^2}{2} \rho^2 r_k^{n+1} (1+\rho)^{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $\rho = \alpha / (n + 1)$, on obtient en utilisant (2.4.8)

$$\left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right| \leq \frac{\alpha^2}{2} \exp(\alpha) \left(1 + \frac{2a^2 k^2 \pi^2}{(n + 1)^2} \right)$$

les hypothèses (2.4.6), entraînent

$$\left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right| \leq \frac{\alpha^2}{2} \exp(\alpha) (1 + 20\gamma^2). \quad (2.4.11)$$

Supposons que f ne s'annule pas dans le disque de centre x_k et de rayon ρ on pourrait alors appliquer dans ce disque le principe du maximum à la fonction $1/f$: il existerait z , avec $|z - x_k| = \rho$ tel que $\left| \frac{1}{f(x_k)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(z)} \right|$ pour démontrer le théorème 2.4.1, nous allons montrer que pour tout z , tel que $|z - x_k| = \rho$, on a :

$$|f(z)| > |f(x_k)| \quad (2.4.12)$$

La formule (2.4.10) de Taylor avec reste intégral implique,

$$|f(z)| \geq |(z - x_k) f'(x_k)| - |f(x_k)| - \left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right|$$

ce qui est équivalent à :

$$|f(z)| - |f(x_k)| \geq |(z - x_k) f'(x_k)| - 2|f(x_k)| - \left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right|$$

l'inégalité (2.4.12) résultera donc de

$$\rho |f'(x_k)| - 2|f(x_k)| - \left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right| > 0$$

ou encore de

$$\rho |f'(x_k)| > 2|f(x_k)| + \left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right| \quad (2.4.13)$$

par (2.4.9), (2.4.5), on obtient

$$\rho |f'(x_k)| \geq \alpha(1 - \beta) \geq \gamma(84\gamma + 44\beta\gamma + 13\beta) + \frac{\alpha^2}{2} \exp(\alpha) (1 + 20\gamma^2).$$

grâce à (2.4.11), il vient

$$\rho |f'(x_k)| > 2 |f(x_k)| + \left| \int_{x_k}^z (z-t) f''(t) dt \right|$$

puisque $\gamma(42\gamma + 22\beta\gamma + 6.5\beta) > |f(x_k)|$.

Ce qui achève la preuve du théorème 2.4.1. ■

Preuve. (du lemme 2.4.1)

Posons

$$\omega(t) = e^{it}$$

on a

$$\omega'(t) = ie^{it} \quad \text{et} \quad \omega''(t) = -e^{it}$$

la formule de Taylor (2.4.10) avec reste intégrale appliquée à la fonction $\omega(t)$ sur l'intervalle $[0, t]$, s'écrit :

$$\omega(t) = \omega(0) + (t-0) \omega'(0) + \int_0^t (t-u) \omega''(u) du$$

d'où

$$e^{it} = 1 + it + \int_0^t (t-u) \omega''(u) du$$

par suite :

$$|e^{it} - 1 - it| = \left| \int_0^t (t-u) \omega''(u) du \right| \leq \int_0^t (t-u) du = \frac{t^2}{2}$$

ce qui prouve le lemme 2.4.1. ■

Chapitre 3

Développement en série entière des zéros du trinôme $z^{n+1} - (n+1)z + n$

3.1 Développement en série entière des zéros de $z^{n+1} - (n+1)z + n$

Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons au développement asymptotique des racines d'un polynôme, en utilisant la méthode de H. Delange. Cette Méthode basée sur le théorème des fonctions implicites analytiques dans sa version effective, elle est exposée dans le théorème 3.2.1. Elle nous a permis de trouver un développement en série des zéros des trinômes,

$$f_{n, n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n \quad (3.1.1)$$

$$G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1 \quad (3.1.2)$$

$$H_n(z) = \varphi z^{n+1} - (\varphi - 1)z^n - 1 \text{ où } \varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \quad (3.1.3)$$

Les résultats obtenus pour chacun de ces trinômes sont exposés dans les théorèmes (3.2.1 et 3.3.1).

La version effective du théorème des fonctions implicites analytiques s'énonce comme suit :

Proposition 3.1.1 :

Soit $F(x, y)$ une fonction de deux variables complexes, analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ contenant le rectangle.

$$R = R(x_0, y_0, s, r) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, |x - x_0| \leq s, |y - y_0| \leq r\}$$

telle que :

1) $F(x_0, y_0) = 0$, et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in R$

et que de plus.

2) Le rectangle R est un rectangle de sécurité pour la fonction

$$G(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

(c'est -à-dire $|x - x_0| \leq s$ et $|y - y_0| \leq r \Rightarrow |G(x, y)| < M = r/s$).

Alors, il existe une fonction $y = y(x)$ définie dans le disque $|x - x_0| \leq s$ telle que

$F(x, y(x)) = 0$ et $y(x_0) = y_0$.

Dans ce disque, cette fonction est analytique et vérifie $|y(x) - y_0| \leq r$.

Preuve.

Soit l'équation $F(x, y) = 0$ où $y = y(x)$, le théorème de dérivation d'une fonction implicite donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y' \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$$

ce qui est équivalent à

$$y' = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

Posons

$$G(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)},$$

et considérons l'équation différentielle $y' = G(x, y)$, cette équation admet une solution $y(x)$ analytique dans le disque $|x - x_0| \leq s = \frac{r}{M}$ dès que $|x - x_0| \leq \frac{r}{M}$ et $|y - y_0| \leq r$, implique $|G(x, y)| < M$.

La solution y vérifie $y(x_0) = y_0$ et $|y - y_0| \leq r$ (cf [5]), où le cas réel est traité. La preuve est une conséquence directe de la méthode usuelle du point fixe, utilisée pour montrer le théorème d'existence et d'unicité, en posant

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x G(t, y_n(t)) dt \text{ avec } y(x_0) = y_0$$

La fonction implicite $F(x, y(x))$ de la variable x a pour dérivée,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0,$$

elle est donc constante et vaut $F(x_0, y_0) = 0$. Ceci achève la preuve. ■

Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 3.1.1 :

L'équation complexe $e^z = 1 + z$ admet la racine $z_0 = 0$ et pour chaque valeur de l'entier $k \geq 1$, elle admet pour racine le nombre complexe $z_k = x_k + i y_k$ avec

$$2k\pi < y_k < 2k\pi + \pi/2 \text{ et } x_k > 1$$

et son conjugué $\bar{z}_k$.

Preuve.

L'équation complexe $e^z = 1 + z$, admet la racine réelle évidente $z_0 = 0$.

Comme si z est une racine de cette équation, alors $\bar{z}$ est aussi racine, on peut donc supposer $y > 0$.

Soit $z = x + iy$, une racine de l'équation $e^z - 1 - z = 0$, avec $y > 0$

alors

$$e^x e^{iy} - 1 - x - iy = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$e^x (\cos y + i \sin y) - 1 - x - iy = 0$$

d'où la relation,

$$e^x (\cos y + i \sin y) = 1 + x + iy \tag{3.1.4}$$

la relation (3.1.4) implique que y n'est pas un multiple de π et $x \neq -1$.

En calculant, puis en comparant les modules et les arguments des deux membres de (3.1.4), on obtient :

$$e^x = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \quad (3.1.5)$$

et en désignant par θ l'argument du deuxième membre de la relation (3.1.4), on a

$$\cos y = \cos \theta = \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \quad (3.1.6)$$

$$\sin y = \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \quad (3.1.7)$$

les relations (3.1.6) et (3.1.7), impliquent :

$$\frac{\cos y}{\sin y} = \frac{1+x}{y} \quad \text{si et seulement si} \quad x = -1 + y \cot y \quad (3.1.8)$$

les relations (3.1.8) et (3.1.5) permettent alors d'obtenir :

$$e^{-1+y \cot y} = \sqrt{(y \cot y)^2 + y^2} \quad \text{ou encore} \quad e^{-1+y \cot y} = y \sqrt{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\sin^2 y}}$$

d'où l'on a :

$$e^{-1+y \cot y} = y \frac{1}{|\sin y|}$$

en prenant le logarithme des deux membres, il vient

$$-1 + y \cot y - \log y + \log |\sin y| = 0$$

posons

$$H(y) := -1 + y \cot y - \log y + \log |\sin y| = 0$$

alors

$$H'(y) = \cot y + (-1 - \cot^2 y) - \frac{1}{y} + \cot y = -\frac{(y \cot y - 1)^2 + y^2}{y}$$

donc

$$H'(y) < 0, \text{ puisque } y > 0$$

La fonction H est continue et décroissante sur chaque intervalle ouvert de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\lim_{y \rightarrow 0} H(y) = 0$ et que $\lim_{y \rightarrow \pi} H(y) = -\infty$ donc $H(y) < 0$ pour tout $y \in]0, \pi[$

par conséquent l'équation (3.1.5), n'a pas de racines dans l'intervalle $]0, \pi[$.

On suppose $y > \pi$, l'équation (3.1.5) implique $e^{2x} \geq y^2 > \pi^2$ et donc $x > 1$.

Sur les intervalles $]2k\pi - \pi/2, 2k\pi[$, on a $\cot gy < 0$, en tenant compte de la relation (3.1.8), ceci est impossible. Comme $\lim_{y \rightarrow 2k\pi} H(y) = +\infty$ et $H(2k\pi + \pi/2) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de déduire qu'il existe une solution y_k de l'équation (3.1.5) tel que $2k\pi < y_k < 2k\pi + \pi/2$. Ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.1. ■

3.2 Développement en série des zéros de $z^{n+1} - (n+1)z + n$

Théorème 3.2.1 :

Soit $f(z) = f_{n, n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$, et soit b une racine complexe non nulle de l'équation $e^t = t + 1$. Alors il existe des coefficients complexes c_m , $m = 1, 2, \dots$, tels que, pour n suffisamment grand

1) la série $1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m n^{-m}$ soit convergente de somme S_n , et S_n soit racine de l'équation $f(z) = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} c_1 &= b, \quad c_2 = \frac{b(b-1)}{2}, \quad c_3 = \frac{b(4b^2 - 11b + 9)}{24}, \\ c_4 &= \frac{b(2b^3 - 10b^2 + 21b - 15)}{48}, \\ c_5 &= \frac{b(48b^4 - 362b^3 + 1330b^2 - 2445b + 1575)}{5760}. \end{aligned}$$

2) De plus, lorsque $b = 2.08... + i7.46...$, les coefficients c_m sont majorés en module par 1.4×25^m .

Preuve.

Posons $f(z) = f_{n, n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$ et considérons l'équation $f(z) = 0$.

En faisant le changement de variables : $z = \exp(xy)$ et en remplaçant le paramètre discret n par la variable réelle x , c'est à dire $n = \frac{1}{x}$, on obtient

$$e^y e^{xy} - \left(\frac{1}{x} + 1\right) e^{xy} + \frac{1}{x} = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$e^y e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy} - e^{xy} + \frac{1}{x} = 0,$$

et multipliant cette égalité par $(-xy)$ puis par e^{-xy} il vient

$$-xye^y + y + xy - ye^{-xy} = 0$$

si et seulement si

$$-xy(e^y - 1) - y(e^{-xy} - 1) = 0$$

d'où

$$\frac{e^y - 1}{y} = \frac{e^{-xy} - 1}{-xy}$$

où encore

$$\frac{e^y - 1}{y} - 1 = \frac{e^{-xy} - 1}{-xy} - 1$$

cette relation peut se mettre sous la forme

$$F(x, y) = 0$$

avec

$$F(x, y) = g(y) - g(-xy)$$

où

$$g(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}.$$

La fonction $F(x, y)$ est analytique dans $\mathbb{C}^2$.

On a $F(0, b) = g(b) = \frac{e^b - 1 - b}{b} = 0$, puisque b est une racine complexe de l'équation $e^t = 1 + t$.

La dérivée partielle de F par rapport à y vaut :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = g'(y) + xg'(-xy)$$

c'est à dire

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{(y-1)e^y + 1}{y^2} - x^2 \frac{1 - (xy+1)e^{-xy}}{x^2 y^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, b) = \frac{(b-1)e^b + 1}{b^2} = \frac{(b-1)(b+1) + 1}{b^2} = +1.$$

donc

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, b) \neq 0$$

En utilisant les notations de la proposition 3.1.1, avec $x_0 = 0$ et $y_0 = b$, la fonction $F(x, y)$ est analytique dans tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ contenant le rectangle

$$R = R(0, b, s, r) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, |x| \leq s, |y - b| \leq r\},$$

Comme $\frac{\partial F}{\partial y}(0, b) \neq 0$, il existe donc un rectangle de sécurité R_1 ,

$$R_1 = R(0, b, s_1, r) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, |x| \leq s_1, |y - b| \leq r\}, \quad \text{tel que } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in R_1$$

On a $F(x, y(x)) = 0$, le théorème de dérivation des fonctions implicites implique

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$$

Posons

$$G(x, y) = y = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

Les dérivées partielles de F sont

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = yg'(-xy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = g'(y) + xg'(-xy)$$

d'où

$$|G(x, y)| = \frac{|-yg'(-xy)|}{|g'(y) + xg'(-xy)|}$$

pour majorer $|G(x, y)|$ dans R_1 , nous allons majorer le numérateur et minorer le dénominateur.

Soient $(x, y) \in R_1$, alors

$$|x| \leq s_1 \quad \text{et} \quad |y - b| \leq r.$$

Comme,

$$g'(y) = \frac{(y-1)e^y + 1}{y^2}$$

alors

$$|g'(y)| \geq \frac{|(y-1)e^y| - 1}{|y|^2}.$$

Nous allons minorer le numérateur et majorer le dénominateur

pour $(y, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|y - b| \leq r$, on a :

$$|y| - |b| \leq ||y| - |b|| \leq |y - b| \leq r$$

d'où : $|y| - |b| \leq r$ ce qui équivaut à $|y| \leq |b| + r$

donc

$$\frac{1}{|y|^2} \geq \frac{1}{(|b| + r)^2} \quad (1)$$

d'autre part, on a

$$|y - b| = |b - y| \leq r.$$

Comme :

$$\operatorname{Re}(b - y) \leq |b - y| \leq r$$

alors :

$$\operatorname{Re}(y) \geq \operatorname{Re}(b) - r$$

Ecrivons :

$$\begin{aligned} |g'(y)| &\geq \frac{|(y-1)e^y| - 1}{|y|^2} = \frac{|(y-b+b-1)e^y| - 1}{|y|^2} \\ &= \frac{|(y-b)e^y + (b-1)e^y| - 1}{|y|^2} \\ &\geq \frac{|(b-1)e^y| - |(y-b)e^y| - 1}{|y|^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |g'(y)| &\geq \frac{|b-1|e^{\operatorname{Re}(y)} - re^{\operatorname{Re}(y)} - 1}{|y|^2} \geq \frac{(|b-1| - r)e^{\operatorname{Re}(y)} - 1}{(|b| + r)^2} \\ &\geq \frac{(|b-1| - r)e^{\operatorname{Re}(b)-r} - 1}{(|b| + r)^2} \end{aligned}$$

puisque d'après ce qui précède on a $e^{\operatorname{Re}(y)} \geq e^{\operatorname{Re}(b)-r}$

et pour $|y - b| \leq r$,

$$|g'(y)| \geq \frac{(|b-1| - r)e^{\operatorname{Re}(b)-r} - 1}{(|b| + r)^2}$$

d'autre part pour tout $t \in \mathbb{C}$, tel que $|t| \leq t_0$, on a $|g'(t)| \leq g'(t_0)$.

Comme pour tout $(x, y) \in R_1$, on a $|xy| \leq s_1(|b| + r)$, alors

$$|g'(-xy)| \leq g'(s_1(|b| + r))$$

d'où l'on obtient la majoration

$$\begin{aligned} |G(x, y)| &\leq \frac{(|b| + r) g'(|b| + r)}{\frac{(|b-1| - r)e^{\operatorname{Re}(b)-r} - 1}{(|b| + r)^2} - s_1 g'(|b| + r)} \\ &= \frac{(|b| + r) (s_1(|b| + r) - 1)e^{s_1(|b|+r)} + 1}{s_1^2((|b-1| - r)e^{\operatorname{Re}(b)-r} - 1)) - s_1 (s_1(|b| + r) - 1)e^{s_1(|b|+r)} + 1} \end{aligned}$$

on peut donc choisir

$$M = \frac{(|b| + r) (s_1(|b| + r) - 1)e^{s_1(|b|+r)} + 1}{s_1^2((|b-1| - r)e^{\operatorname{Re}(b)-r} - 1)) - s_1 (s_1(|b| + r) - 1)e^{s_1(|b|+r)} + 1}.$$

posons $s = \min(s_1, r/M)$, le rectangle $R(0, b, s, r) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, |x| \leq s, |y - b| \leq r\}$ est alors un rectangle de sécurité pour la fonction $G(x, y)$.

Détermination d'un rectangle de sécurité pour la fonction G :

Pour $s = \frac{1}{25}$ et $r = \frac{3}{5}$, $R = R(0, b, 1/25, 3/5) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, |x| \leq 1/25, |y - b| \leq 3/5\}$, est un rectangle de sécurité pour la fonction G .

En effet les calculs précédents permettent d'obtenir pour $(x, y) \in R(0, b, 1/25, 3/5)$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| = |y g'(-xy)| \leq (|b| + r) g'(|b| + r) \leq 5.24; \quad (3.2.1)$$

et

$$|g'(y)| \geq \frac{|y-1| e^{\operatorname{Re} y} - 1}{(|b| + r)^2} \geq 0.427; \quad (3.2.2)$$

il s'ensuit que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| \geq |g'(y)| - |x g'(-xy)| \geq |g'(y)| - s g'(|b| + r) \quad (3.2.3)$$

et par les relations (3.2.2) et (3.2.3) on a

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| \geq 0.427 - s g'(|b| + r) \geq 0.427 - 0.026 \geq 0.4 \quad (3.2.4)$$

Enfin de (3.2.1), (3.2.4) on déduit que

$$|G(x, y)| < \frac{5.24}{0.4} = 13.1 < r/s = 15 = M$$

Les conditions de la proposition (3.1.1) étant ainsi vérifiées, il existe donc une série entière convergente

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$$

de rayon de convergence $R \geq s$, et telle que $F(x, y(x)) = 0$.

De plus la fonction $z(x) = \exp(xy(x)) = \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m x^{m+1}\right)$ est analytique pour $|x| \leq s$. elle peut donc s'écrire

$$z(x) = \exp(xy(x)) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m \quad (3.2.5)$$

et comme $x = \frac{1}{n}$, alors $z(\frac{1}{n}) = \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{n^{m+1}}\right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{n^m}$.

Et pour n assez grand, la série $1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{n^m}$ est convergente de somme S_n et $S_n = z(\frac{1}{n})$ est bien racine de $f(z) = 0$.

Calcul des coefficients c_m :

La méthode de calcul est la suivante: on écrit

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m = b + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m,$$

puisque $y(0) = b$.

On calcule

$$\exp(y(x)) = \exp(b + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m) = e^b \exp(\sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m) = (1+b) \exp(\sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m), \quad \text{puisque } e^b = 1+b.$$

Ensuite on calcule $\exp(-xy(x))$ avec les coefficients indéterminés d_m , puis on identifie les coefficients dans les deux expressions pour évaluer les coefficients d_m .

Enfin on calcule les coefficients c_m , grâce à la relation $\exp(xy(x)) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m$.

Pour les petites valeurs de m , les coefficients c_m , peuvent être calculés à la main, cependant si m est grand, on les détermine à l'aide du logiciel Maple.

Soit $b = 2.08... + i7.46...$, la racine (de plus petit module) de l'équation $e^z - 1 - z = 0$.

Le point $(x, y(x))$ appartient au rectangle de sécurité R , on a donc, pour $|x| \leq 0.04$, $|y(x)| \leq |b| + r = 8.35$.

Par (3.2.5), on a

$$|z(x)| \leq e^{s(|b|+r)} \leq 1.4$$

Le théorème des résidus implique,

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=s} \frac{z(x)}{x^{m+1}} du \quad (3.2.6)$$

d'après (3.2.6) on a

$$|c_m| = \left| \int_{|x|=s} \frac{z(x)}{x^{m+1}} dx \right| \leq 1.4/s^m = 1.4 \times 25^m. \blacksquare$$

3.3 Développement du zéro négatif de G_n ou de H_n

Reprenons les expression des deux trinômes G_n et H_n .

On a :

$$G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1 \text{ et } H_n(z) = \varphi z^{n+1} - (\varphi - 1)z^n - 1$$

où $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Notons que φ est la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

La règle des signes de Descartes (cf [9]), implique que $G_n(z)$ admet deux racines réelles positives $z = 1$ et une deuxième que l'on désignera par $z = x_{1,n}$ ($x_{1,n} \neq 1$), alors que $H_n(z)$ admet $z = 1$, comme unique racine positive.

Pour les racines négatives, on considère les trinômes $G_n(-z)$ et $H_n(-z)$.

On a:

$$G_n(-z) = (-1)^{n+1}(\varphi - 1)z^{n+1} + (-1)^{n+1}\varphi z^n + 1$$

et

$$H_n(-z) = (-1)^{n+1}\varphi z^{n+1} + (-1)^{n+1}(\varphi - 1)z^n - 1$$

La suite des coefficients de $G_n(-z)$ est : $(-1)^{n+1}$, $(-1)^{n+1}$, $+1$, donc $G_n(z)$ admet une seule racine réelle négative si n est pair et zéro racine réelle si n est impair.

De même, la suite des coefficients de $H_n(-z)$ est : $(-1)^{n+1}$, $(-1)^{n+1}$, -1 .

Lorsque n est impair, cette suite présente un seul changement de signes donc $H_n(z)$ admet un seul zéro réel négatif, cependant lorsque n est pair la suite des coefficients $(-1, -1, -1)$ ne présente aucun changement de signes, donc $H_n(z)$ n'admet pas de racines réelles négatives.

Désignons par $x_{2,n}$, le zéro réel négatif de $G_n(z)$ lorsque n est pair et de $H_n(z)$ lorsque n est impair.

3.3. Développement du zéro négatif de G_n ou de H_n

Dans [7] on trouve l'estimation de $x_{2,n}$ suivante :

$$-1 + \frac{1}{2n} < x_{2,n} < -1 + \frac{\log 5}{2n};$$

ce résultat a été amélioré dans [13], nous montrons le :

Théorème 3.3.1 :

Il existe des coefficients réels $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$ tels que l'on ait, pour n impair assez grand,

$$x_{2,n} = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{n^m}$$

$$c_1 = -b, \quad c_2 = -\frac{b^2}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{5}}{10}, \quad c_3 = -\frac{b^3}{6} + \frac{b^2\sqrt{5}}{10} + \frac{3b^2}{5} - \frac{3b}{10} - \frac{b\sqrt{5}}{10}$$

où $b = -\frac{\log 5}{2} = -0.805\dots$ et les coefficients c_m vérifient $|c_m| \leq \frac{5}{4} \left(\frac{11}{2}\right)^m$.

Remarque 3.3.1 :

Notons que b est la racine réelle de $\exp(-b) = \sqrt{5}$ et que si l'on prend une racine complexe, $b = -\frac{\log 5}{2} + 2i\pi k$, on obtient un développement en série d'une autre racine de $H_n(z)$.

Preuve.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le théorème des fonctions implicites analytique.

Considérons l'équation $H_n(z) = \varphi z^{n+1} - (\varphi - 1)z^n - 1 = 0$, où $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

En faisant le changement de variable $z = -w$, dans l'équation $H_n(z) = 0$, on obtient,

$$H_n(-w) = (-1)^{n+1}\varphi w^{n+1} + (-1)^{n+1}(\varphi - 1)w^n - 1 = 0.$$

Comme n est impair, il vient

$$\varphi w^{n+1} + (\varphi - 1)w^n - 1 = 0 \tag{3.3.1}$$

En remplaçant le paramètre discret n par la variable réelle $x = 1/n$, et en posant $w = \exp(xy)$, l'équation (3.3.1) devient,

$$\varphi e^{(n+1)x y} + (\varphi - 1)e^{n x y} - 1 = 0,$$

3.3. Développement du zéro négatif de G_n ou de H_n

cette dernière est équivalente à l'équation

$$\varphi e^y e^{xy} + (\varphi - 1)e^y - 1 = 0$$

En divisant par e^y , on obtient :

$$\varphi e^{xy} + (\varphi - 1) - e^{-y} = 0$$

Posons

$$F(x, y) = \varphi e^{xy} + (\varphi - 1) - e^{-y} = 0.$$

Soit b la racine réelle de l'équation $e^{-z} = \sqrt{5}$, on a

$$F(0, b) = \varphi + (\varphi - 1) - e^{-b} = 2\varphi - 1 - \sqrt{5} = 0$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \varphi x e^{xy} + e^{-y}$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, b) = e^{-b} = \sqrt{5} \neq 0.$$

Posons comme dans le théorème précédent,

$$G(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

et montrons que le rectangle $R = R(0, b, s = 2/11, r = 1/3)$ est un rectangle de sécurité pour l'équation différentielle $y' = G(x, y)$.

On a,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \varphi y e^{xy}, \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \varphi x e^{xy} + e^{-y}$$

et pour $|x| \leq s$ et $|y - b| \leq r$, on obtient :

la majoration

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| \leq (|b| + r) \varphi e^{s(|b|+r)} \leq 2.26$$

et la minoration

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| \geq |e^{-y}| - |x| \varphi e^{|xy|} \geq e^{-b-r} - \varphi s e^{s(|b|+r)} \geq 1.24$$

d'où

$$\left| \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} \right| = \frac{2.26}{1.24} = 1.82 < \frac{r}{s} = \frac{11}{6}$$

donc R est bien un rectangle de sécurité pour G .

On peut donc appliquer la proposition 3.1.1 , et il existe des coefficients d_m telle que la série

$$y(x) = b + \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$$

vérifie $F(x, y(x)) = 0$.

De plus la fonction $z(x) = -w(x) = -\exp(xy(x)) = -\exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m x^{m+1}\right)$ est analytique pour $|x| \leq s$, elle peut donc s'écrire

$$z(x) = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m \quad (3.3.2)$$

comme $x = \frac{1}{n}$, alors $z(\frac{1}{n}) = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{n^m}$.

Et pour n assez grand, la série $-1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{n^m}$ est convergente de somme S_n et

$S_n = z(\frac{1}{n})$ est bien racine de $H_n(z) = 0$.

Les coefficients c_m , se calculent par la méthode précédente.

Dans ce rectangle R , on a $|y(x)| \leq |b| + r$ et $|z| = |\omega| \leq e^{|x|y} \leq e^{s(|b|+r)} \leq \frac{5}{4}$;

en utilisant le théorème des résidus, on obtient la majoration suivante des modules des

coefficients c_m ,

$$|c_m| = \left| \int_{|x|=s} \frac{z(x)}{x^{m+1}} dx \right| \leq \frac{5}{4s^m} = \frac{5}{4} \times \left(\frac{11}{2} \right)^m . \blacksquare$$

Remarque 3.3.2 :

La valeur de b a été obtenue comme la racine réelle de $e^{-b} = \sqrt{5}$. Si l'on prend pour b une racine complexe $b = -\frac{\log 5}{2} + 2ik\pi$, on obtiendra le développement en série d'une autre racine de $H_n(z)$.

Lorsque n est pair, $G_n(z)$ admet un zéro réel négatif $z = x_{2, n}$ (cf.[7]). Nous avons le

Théorème 3.3.2 :

Il existe des coefficients réels $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_m, \dots$ tels que l'on ait, pour n pair assez grand,

$$x_{2, n} = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m}{n^m}.$$

où $\tilde{c}_m$ est obtenu en remplaçant dans c_m , $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$.

Preuve.

Se démontre avec la même méthode précédente.

Le changement de variables $z = -\omega$ dans l'équation

$$G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1 = 0$$

conduit à

$$(\varphi - 1)\omega^{n+1} + \varphi\omega^n - 1 = 0$$

cette dernière est à un signe près, la conjuguée de l'équation

$\varphi w^{n+1} + (\varphi - 1)w^n - 1 = 0$, obtenue en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$. ■

Chapitre 4

Méthode des séries hypergéométriques

4.1 Introduction

La méthode du développement en série hypergéométrique est appliquée au cas des équations du type :

$$y^N + xy^P - 1 = 0 ; y(0) = 1, \quad (4.1.1)$$

où N et P sont deux nombres réels positifs.

Elle permet de déterminer un développement en série hypergéométrique des racines de l'équation considérée.

Cette méthode utilise un résultat de G. Belardinelli (cf [2]).

4.2 Développement en série de la racine positive de $G_n(z)$

Rappelons que d'après ce qui précède, la règle des signes de Descartes (cf [9]), affirme que $G_n(z)$ admet deux racines réelles positives, $z = 1$, et une $z = x_{1,n}$ ($x_{1,n} \neq 1$), dans [7] l'estimation suivante est donnée :

$$\varphi^2(1 - \varphi^{-2n}) \leq x_{1,n} \leq \varphi^2(1 - \varphi^{-2n-1}) \text{ où } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Le théorème que nous démontrons dans ce qui suit, améliore sensiblement l'estimation précédente :

Théorème 4.2.1 (cf[13]) :

Soit $x_{1,n}$ la racine positive différente de 1 du trinôme G_n , défini par

$$G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1.$$

On a le développement en série, convergent pour $n \geq 1$,

$$x_{1,n} = \varphi^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \varphi^{(2n+1)k}} \binom{(n+1)k-2}{k-1} \right)$$

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur la :

Proposition 4.2.1 :

Soit N et P deux nombres réels positifs, et μ un nombre réel.

On pose $Q = N - P$.

Le rayon de convergence de la série entière

$$y_\mu(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\mu}{\mu + Pk} \binom{(\mu + Pk)/N}{k} x^k \quad (4.2.1)$$

vaut

$$R = \frac{N}{\left(P^P |Q|^Q \right)^{1/N}} \quad (4.2.2)$$

Avec la convention $0^0 = 1$. De plus, pour $|x| < R$, on a $y_\mu(x) = (y_1(x))^\mu$ et $y(x) = y_1(x)$ vérifie l'équation

$$y^N + xy^P - 1 = 0. \quad (4.2.3)$$

La preuve de cette proposition nécessite le lemme 4.2.1.

On désigne par $[x^n] y(x)$ le coefficient de x^n dans la série entière $y(x)$.

Lemme 4.2.1 :

Soit une série entière $U(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} U_n x^n$, $V(x)$ une série entière vérifiant

$V(x) = U(xV(x))$ et soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, si $U_n(t) = [x^n] U(x)^t$ et $V_n(t) = [x^n] V(x)^t$

alors

$$V_n(t) = \frac{t}{t+n} U_n(t+n).$$

Preuve.

Se démontre grâce à la Formule d'inversion de Lagrange : ■

Lemme 4.2.2 (Formule d'inversion de Lagrange) (cf [20]) :

Soit $U(x)$ une série entière avec $U(0) \neq 0$. Posons $W(x) = \frac{x}{U(x)}$.

Soit $f(x)$ une série entière.

Alors la relation $W(f(x)) = x$ équivaut à $f(x) = xU(f(x))$ et on a pour $n, k \in \mathbb{N}$

$$n [x^n] f(x)^k = k [x^{n-k}] U(x)^n.$$

En particulier, pour $k = 1$ on a

$$[x^n] f(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] U(x)^n$$

Preuve. (du lemme 4.2.1)

Posons $W(x) = \frac{x}{U(x)}$ et $f(x) = xV(x)$ alors $W(xV(x)) = x$ et d'après le lemme 4.2.2, pour $n, k \in \mathbb{N}$ on a

$$[x^n] (x^k V^k(x)) = \frac{k}{n} [x^{n-k}] U(x)^n$$

soit

$$V_n(k) = [x^{n+k}] (x^k V^k(x)) = \frac{k}{n+k} [x^n] U(x)^{n+k} = \frac{k}{n+k} U_n(n+k)$$

Comme $U_n(t)$ et $V_n(t)$ sont tous les deux des polynômes en t de degré $\leq n$, ceci établit l'égalité pour tout nombre réel t . ■

Preuve. (de la proposition 4.2.1)

Le cas $N = 1$ et $P = 2$ est traité dans ([19], page 133).

Nous utilisons une idée due à J .Zeng (cf.([20])

On distingue deux cas

(i) Lorsque $N = P > 0$, l'équation

$$y^N + xy^P - 1 = 0$$

s'écrit

$$y = (1 + x)^{-1/P}$$

et l'on retrouve pour y^μ la formule du binôme avec un rayon de convergence égal à 1.

(ii) Lorsque $N \neq P$, la valeur de R s'obtient par la formule classique de Hadamard

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup |[x^k] y^\mu(x)|^{1/k}$$

Posons

$$a_k = [x^k] y^\mu(x) = (-1)^k \frac{\mu}{\mu + kP} \binom{\mu + kP}{N}{k},$$

pour calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup |a_k|^{1/k}$, nous évaluons $\binom{\mu + kP}{N}{k}$ en utilisant la formule de Stirling étendue aux nombres complexes :

$$z! = \Gamma(z + 1) \sim \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z}.$$

D'après le théorème des fonctions implicites analytiques, il existe une série entière $y(x)$ solution de (4.1.1)

avec $y(0) = 1$.

On pose

$$U(x) = (1 - x)^{P/N}, \text{ et } V(x) = y^P,$$

$V(x)$ vérifie la relation,

$$V(x) = (1 - xV(x))^{P/N}$$

Comme,

$$U_k(t) = [x^k] U(x)^t = [x^k] (1 - x)^{Pt/N} = (-1)^k \binom{Pt/N}{k}$$

le lemme 4.2.1, implique alors,

$$[x^k] y^\mu = [x^k] V(x)^{\mu/P} = (-1)^k \frac{\mu}{\mu + Pk} \binom{(\mu + Pk)/N}{k}$$

et comme $[x^k] y^\mu$ désigne le coefficient de x^k dans la série y^μ , donc

$$y_\mu(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\mu}{\mu + Pk} \binom{(\mu + Pk)/N}{k} x^k.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. ■

Preuve. (du théorème)

L'équation $G_n(z) = 0$, peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{\varphi} z^{n+1} - \varphi z^n + 1 = 0$, puisque

$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, ce qui est équivalent à $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

En effectuant les changements de variables $z = \varphi^2 y$, on obtient

$$\varphi^{2n+1} y^{n+1} - \varphi^{2n+1} y^n + 1 = 0,$$

en posant $y = \frac{1}{Y}$ et en divisant par $-\varphi^{2n+1}$, il vient

$$Y - \frac{1}{\varphi^{2n+1}} Y^{n+1} - 1 = 0$$

cette équation est de la forme :

$$\begin{aligned} y^N + xy^P - 1 &= 0, \\ \text{avec } N &= 1, P = n+1, \mu = -1 \text{ et } x = -\frac{1}{\varphi^{2n+1}} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

on peut donc lui appliquer la proposition 4.2.1.

La formule (4.2.1), implique

$$Y_{-1}(x) = (Y(x))^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{-1}{-1 + (n+1)k} \binom{(-1 + (n+1)k)}{k} \varphi^{-(2n+1)k}$$

et comme

$$\binom{(n+1)k-1}{k} = \frac{(n+1)k-1}{k} \binom{(n+1)k-2}{k-1}$$

et que $z = \varphi^2 y = \varphi^2 Y^{-1}$, on obtient

$$x_{1,n} = \varphi^2 \left[1 - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k \varphi^{(2n+1)k}} \binom{(n+1)k-2}{k-1} \right]$$

d'après (4.2.2), le rayon de convergence est $R = \frac{N}{(P^P |Q|^Q)^{\frac{1}{N}}}$, d'où :

$$R = R_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1} n^{-n}} = \frac{1}{(n+1)(1 + \frac{1}{n})^n}$$

comme $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$, donc

$$R \geq \frac{1}{e(n+1)}.$$

L'étude de la fonction :

$$t \mapsto \varphi^{2t+1} - e(t+1).$$

montre que pour tout $t \geq \frac{3}{2}$, on a $\varphi^{2t+1} - e(t+1) \geq 0$, ce qui entraîne

$$\frac{1}{\varphi^{(2n+1)}} < R_n \text{ pour } n \geq 2, \text{ et pour } n = 1, \text{ on a } R_1 = \frac{1}{4} > \frac{1}{\varphi^3} = 0.236...$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Annexe

Calculs numériques

Dans ce qui suit nous donnons deux programmes écrits en Maple, ces programmes nous ont permis de vérifier les résultats théoriques des deux théorèmes (2.3.1 et 3.2.1).

Le programme 1, calcul les racines approchées z_k de l'équation $f_{n,n+1}(z) = 0$, r_k et ρ , et fait le test $|z_k - x_k| \leq \rho$.

L'algorithme qui nous a permis d'écrire ce programme est inspiré de la méthode de A. Schinzel.

Le théorème 2.4.1 n'est valable que pour les polyômes de degré $n \geq 28$.

Pour nos calculs nous avons choisi $n = 30$.

notons que ce programme a été exécuté à l'aide d'un ordinateur (Pentium 4, 1.72GHz, 120 Mo de RAM), nous avons fait les calculs jusqu'à $n = 700$. On peut sans doute aller loin avec un ordinateur plus puissant.

Le programme 2, calcul les 2^n coefficients du développement en série des racines du trinôme $f_{n,n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$, la méthode utilisée est celle de Delange.

Programme 1:

```
f:=proc(n,z) z^(n+1)-(n+1)*z+n end;
r:=proc(k,n) evalf((2*(n+1)*sin((4*k+1)*Pi/(4*n+2)))^(1/(n+1))) end;
ro:=proc(k,n) evalf(3*(r(k,n)-1)/(r(k,n)^n-1)) end;
xk:=proc(k,n) evalf(evalc(r(k,n)*exp(I*Pi*(4*k+1)/(2*n+1)))) end;
test:=proc(n) local u,j,k,rho,z,com,li,lis,mi,kmax,rr,rh;
```

```
li:=fsolve(f(n,z),z,complex):
maxk:=0:kmax:=-1:
for k from 0 to n/2 do
rr:=r(k,n):
u:=xk(k,n): rh:=(rr-1)/(rr^n-1):
for j from 1 to n+1 do
if (abs(li[j]-u))/rh<3. then mi:=(abs(li[j]-u))/rh fi:od:
print('n=',n , 'k=',k,mi):
if mi > maxk then maxk:=mi:kmax:=k fi:od:
print ('n=',n,'Max=',maxk,'kmax=',kmax):end;
```

Table des valeurs obtenus pour $n = 2$

k	z_k	x_k	$ z_k - x_k /Rh$	ρ
0	-2, 1, 1	$0.993885 + 0.722100i$	1.60927	1.34618
1		-1.81712	0.515196	1.06492

Table des valeurs obtenus pour $n = 10$:

k	z_k	x_k	$ z_k - x_k /Rh$	ρ
0	$0.921738 \pm 0.796364i$	$1.03454 + 0.155932i$	1.97386	0.242741
1	$-1.09704 \pm 0.756988i$	$0.885968 + 0.822056i$	1.19287	0.110760
2	$-0.465689 \pm 1.22950i$	$0.282339 + 1.23697i$	1.03854	0.0821883
3	$0.310291 \pm 1.24228i$	$-0.475566 + 1.21170i$	0.874850	0.0698064
4	-1.33859	$-1.08981 + 0.743018i$	0.736623	0.0640626
5	1	-1.32446	0.679834	0.0623535

Table des valeurs obtenus pour $n = 30$:

k	z_k	x_k	$ z_k - x_k /Rh$	ρ
0	1	$1.01385 + 0.0522610i$	2.03580	0.0796716
1	-1.14441	$1.03396 + 0.272297i$	1.28304	0.0322134
2	$-1.11996 \pm 0.234369i$	$0.974508 + 0.487090i$	1.23724	0.0222318
3	$-1.04765 \pm 0.458564i$	$0.864186 + 0.683980i$	1.19616	0.0175226
4	$-0.930677 \pm 0.662856i$	$0.711832 + 0.853277i$	1.15443	0.0147279
5	$-0.774165 \pm 0.838387i$	$0.525525 + 0.987002i$	1.10970	0.0128743
6	$-0.584990 \pm 0.977564i$	$0.314067 + 1.07896i$	1.06471	0.0115604
7	$-0.371472 \pm 1.07439i$	$0.0870770 + 1.12487i$	1.01589	0.0105899
8	$-0.143012 \pm 1.12471i$	$-0.145337 + 1.12253i$	1.969874	0.00985851
9	$0.0903011 \pm 1.12644i$	$-0.372856 + 1.07189i$	0.922060	0.00929721
10	$0.318118 \pm 1.07961i$	$-0.585469 + 0.975015i$	0.877308	0.00886902
11	$0.530249 \pm 0.986400i$	$-0.773815 + 0.836026i$	0.837938	0.00854526
12	$0.717038 \pm 0.851037i$	$-0.929630 + 0.660892i$	0.803684	0.00830793
13	$0.869626 \pm 0.679596i$	$-1.04608 + 0.457163i$	0.774960	0.00814575
14	$0.979887 \pm 0.479665i$	$-1.11805 + 0.233639i$	0.761878	0.00805149
15	$1.03891 \pm 0.259440i$	-1.14240	0.751891	0.00801978

Programme 2:

```

g:=(exp(t)-1-t)/t ;
eq:=subs(t=Y,g)-subs(t=-x*Y,g);
net:=proc(s,z) subs(O(1)=0,map(normal,series(s,z))) end:
calcgdg:=proc(Y,z,k)
local expy,unsurexpy,zosurY,logexpy,c0,c1,val,s,y;
s:=series(Y,z,3);
c0:=subs(exp(b)=1+b,exp(coeff(s,z,0)));
val:=op(2,s);
zosurY:=1/op(1,s);
y:=Y-coeff(s,z,0);
s:=series(y,z,2);
c1:=coeff(s,z,1);
expy:=1+c1*z;
unsurexpy:=1/expy;
Order:=2;
to k do
unsurexpy:=net(unsurexpy*(2-unsurexpy*expy),z);
Order:=2*Order-1;
unsurexpy:=net(unsurexpy*(2-unsurexpy*expy),z);
logexpy:=net(Int(diff(expy,z)*unsurexpy,z),z);
expy:=net(expy*(y+1-logexpy),z);
zosurY:=net(zosurY*(2-zosurY*Y/z^val),z)
od;
net((c0*expy-1-Y)*zosurY/z^val,z),
net((c0*expy*(Y-1)+1)*zosurY*zosurY/z^(2*val),z)
end:
Order:=2:
y:=b-b*x/2:
invden:=1+(b/2-1)*x:

```

```

for i to nbiter do
print(i);
gdg:=calcgdg(y,x,i);
gxdgx:=calcgdg(-x*y,x,i);
Order:=2*Order-1;
invden:=net(invden*(2-invden*(gdg[2]+x*gxdgx[2])),x);
y:=net(y-(gdg[1]-gxdgx[1])*invden,x);
od:
y;
z:=taylor(exp(x*y),x=0,2^nbiter);
print(z);

```

Pour $n = 2$, les résultats obtenue sont les suivants:

$$z = 1 + bx + \left(-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b^2\right)x^2 + \left(\frac{3}{8}b - \frac{11}{24}b^2 + \frac{1}{16}b^3\right)x^3 + O(x^4)$$

où b est une racine complexe de l'équation $e^t - t - 1 = 0$.

Les premiers coefficients du développement en série entière obtenu pour $n = 5$ sont :

$$c_1 = b, c_2 = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b^2, c_3 = \frac{3}{8}b - \frac{11}{24}b^2 + \frac{1}{16}b^3, c_4 = \frac{7}{16}b - \frac{5}{16}b^2 + \frac{5}{24}b^3 + \frac{1}{24}b^4,$$

$$c_5 = \frac{35}{128}b - \frac{163}{384}b^2 + \frac{133}{576}b^3 - \frac{181}{2880}b^4 + \frac{1}{120}b^5.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié trois méthodes de localisation de zéros de polynômes dans le plan complexe. Nous avons appliqué ces méthodes à deux familles particulières de trinômes.

Nous pensons pouvoir les généraliser à des polynômes à coefficients réels de la forme $az^n + bz^m + cz^p + d$, et améliorer la constante effective A intervenant dans le théorème 2.3.1, ce qui permettra de le rendre valable pour les polynômes de degré $n \leq 27$.

Notons par ailleurs que le sujet traité est très vaste et que beaucoup reste sans doute à faire dans ce domaine. Nous envisageons d'autres pistes de recherche sur le produit des racines, la mesure et la hauteur d'un polynôme.

Bibliographie

- [1] AZOULAY. E. et AVIGNANT. J. – *Mathématiques 3. Analyse*, pp. 77-78.
- [2] BELARDINELLI. G. – *Fonction hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales* *Math*, 145, 1960, pp. 36-56.
- [3] BORWEIN. P. ERDELYI. T. – *Polynomials and Polynomial Inequalities Graduate texts in Mathematics* 161. pp 17-18. Springer-Verlag.
- [4] CARTAN. H. – *Théorie élémentaire des fonctions analytique d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, paris, 1961.
- [5] DEMAILLY. J. -P. – *Analyse numérique et équations différentielles* , Presses Universitaires de Grenoble, 1991 (124).
- [6] DIEUDONNE. J. – *Calcul infinitésimal*. Hermann, paris, 1968.
- [7] DILCHER. K. – *Zeros of certain cyclotomy-generated polynomials*, *Fibonacci Quart.*, 29, 1991, pp. 150-156.
- [8] DILCHER. K. NULTON. J. D. et STOLARSKI. K. B. – *The zeros of a certain family of trinomials*, *Glasgow Math. J.*, 34, 1992, pp. 55-74.
- [9] DURAND. E. – *Solutions numériques des équations algébriques (tome 1, chapitre 5)*.
- [10] ERDÖS. P. et TURAN. P. – *On the distribution of the roots of polynomials* *Annals of Math.* 51, 1950, pp. 105-119.

-
- [11] HENRICI. P. – *Applied and computational complex analysis, vol. 1, Power series - integration - conformal mappings - location of zeros*, J. Wiley and Sons, 1974.
- [12] HERNANE. M. -O. – *Localisation des zéros de polynômes intervenant en théorie du signal*, thèse de magister, Université d'Alger, 1989.
- [13] HERNANE. M. -O. et NICOLAS. J. -L. – *Localisation de zéros de familles de trinômes. Annales de la faculté des sciences de Toulouse. Vol. VIII, 3. 1999, pp. 471-490.*
- [14] HERNANE. M. -O. – *Méthodes asymptotiques en analyse et théorie des nombres thèse de Doctorat d'état. 2005.*
- [15] LACOUME. J. -L. HANNA. C. et NICOLAS. J. -L. – *Etalonnage de l'analyse spectrale par la méthode du modèle auto régressif. Annales de télécommunications, 36, 1981, pp. 579-584.*
- [16] LACOUME. J. -L. GHARBI. M. LATOMBE. C. et NICOLAS. J.-L. – *Close Frequency Resolution by Maximum Entropy Spectral Estimators, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-32, No. 5, octobrer 1984.*
- [17] MARDEN. M. – *Geometry of polynomials, Amer. Math. Soc 1966, Math survey n°3 second edition.*
- [18] NICOLAS. J. -L. et SCHINZEL. A. – *Localisation de zéros de polynômes intervenant en théorie du signal .In Cinquante ans de polynômes , ed.M.Langevin et M.Wald- Schmidt, Lecture Notes in Math., 1415, Springer Verlag, 1990, pp. 167-179.*
- [19] WHITTAKER. E. -T. WATSON. G. -N. – *A course of modern analysis , 4th ed Cambridge at the university Press , 1946,p 7.32.*
- [20] ZENG. J. – *Multinomial convolution polynomials, Discrete Math., 160, 1996.*