

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES



Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat d'Etat

En : Mathématiques

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par

HACENE BELBACHIR

Sujet

Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques

Soutenue le 16 /12/2007 devant le jury composé de :

Benali	BENZAGHOU	Prof. USTHB	Président
Abdelkader	KHELLADI	Prof. USTHB/CERIST	Directeur de Thèse
Farid	MOKRANE	Prof. Paris VIII	Codirecteur de Thèse
Daniel	BARSKY	D.R. CNRS/ Paris XIII	Examineur
Rachid	BEBOUCHI	Prof. USTHB	Examineur
Abdelhafid	BERRACHEDI	Prof. USTHB	Examineur
Sadek	BOUROUBI	M.C. USTHB	Examineur
Maurice	POUZET	Prof. Univ. Lyon I	Examineur

Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques

Doctorat d'Etat en Mathématiques

Thème principal : Combinatoire

Hacène BELBACHIR

16 décembre 2007

Table des matières

Remerciements	6
Introduction	9
1 Préliminaires sur les suites récurrentes linéaires liées aux éléments du triangle de Pascal.	13
1.1 Généralités sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux	13
1.2 Suites de Fibonacci et de Lucas généralisées	15
1.3 Suites récurrentes linéaires liées aux éléments du triangle de Pascal	16
2 Puissance n-ième d'une matrice carrée, suites récurrentes linéaires et coefficients $bi^qnomiaux$	18
2.1 Introduction	18
2.2 Expression explicite du terme général d'une suite récurrente linéaire	19
2.3 Application au dénombrement des mots d'un langage	24
2.4 Applications aux suites de Fibonacci et extensions	25
2.4.1 Première application : <i>suite de Fibonacci</i>	25
2.4.2 Seconde application : <i>la Fibonacci généralisée et la "multibonacci"</i>	27
2.5 Un analogue : les coefficients $bi^qnomiaux$	29
2.5.1 Introduction	29
2.5.2 Une expression mono-sommatoire des coefficients $bi^qnomiaux$	32
2.5.3 Coefficients $bi^qnomiaux$ et multibonacci	33
2.6 Coefficients $bi^qnomiaux$ et polynômes exponentiels de Bell partiels	35
2.7 Produit de convolution de la distribution uniforme discrète	36
2.8 Les coefficients $multi^qnomiaux$	37
2.9 Puissances successives d'une matrice carrée	38

<i>Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques</i>	2
2.10 Applications et extensions	40
2.10.1 Une belle identité relative aux coefficients binomiaux via les blocs de Jordan	40
2.10.2 Sur les traces de J. J. Sylvester	42
2.10.3 Une identité " <i>duale</i> " relative aux binomiaux : les nombres de Stirling	43
3 Unimodalité de suites liées aux coefficients binomiaux et <i>bi^qnomiaux</i>	46
3.1 Introduction	46
3.2 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal I : suites liées aux nombres de Fibonacci et de Lucas	47
3.2.1 Les polynômes $F_n(x)$ et $L_n(x)$	49
3.2.2 La suite $(F(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$	50
3.2.3 La suite $(L(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$	52
3.3 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal II : suites liées aux nombres de Pell et de Pell-Lucas	53
3.4 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal III : premières extensions . .	56
3.5 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal IV : autres extensions et conjectures	60
3.6 Interprétations combinatoires des précédentes suites	63
3.7 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal <i>étendu</i> : aux <i>bi^qnomiaux</i> . .	64
3.8 Expression explicite de la valeur modale pour la convolée de la loi discrète uniforme	65
4 Fonction génératrice	67
4.1 Introduction	67
4.2 Fonctions génératrices et coefficients <i>bi^qnomiaux</i> généralisés	68
4.3 Fonction génératrice d'une sous suite indicée par une progression arithmétique	71
4.4 Fonction génératrice des valeurs modales pour la convolée de la loi discrète uniforme	74
5 Sommes combinatoires liées aux nombres de Fibonacci et de Lucas généralisés	76
5.1 Introduction	76
5.2 Sommes de produits d'ordre deux de nombres de Fibonacci et de Lucas généralisés	79

5.2.1	Application première : extension aux résultats de Čerin	81
5.2.2	Application deuxième : extension aux résultats de Čerin et Gianella	82
5.3	Sommes trigonométriques	84
6	Sur certaines propriétés liées aux polynômes de Chebyshev et aux polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas	97
6.1	Introduction	97
6.2	Coordonnées remarquables de polynômes de Chebyshev dans des bases spécifiques	99
6.2.1	Introduction	99
6.2.2	Enoncé des Théorèmes	101
6.2.3	Preuve des Théorèmes	105
6.3	Extension à une suite linéaire d'ordre deux	108
6.3.1	Enoncé des Théorèmes	109
6.3.2	Preuve des Théorèmes	113
7	La valuation : un outil remarquable	117
7.1	Somme de puissances d'inverses d'une progression arithmétique	117
7.2	Sur une factorisation des entiers	120
8	Autour de l'hyperdéterminant	121
8.1	Introduction	121
8.2	Le $2k$ -produit scalaire et norme associée	122
8.3	Coefficient de corrélation "mutuelle"	123
8.4	L'inégalité de Gram généralisée	124
8.5	Une inégalité dans les espaces euclidiens	125
8.6	Un analogue via les déterminants (et les hyperdéterminants)	126
8.7	Identité de Lagrange généralisée	126
A	Approche combinatoire pour expliciter les autocovariances d'un modèle ARMA périodique	128
A.1	Introduction	128
A.2	La méthode	129
A.3	Illustration	131

<i>Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques</i>	4
B Norme ou q-norme	136
C Sur une inégalité intégrale "<i>déterminantale</i>"	139
D Rails (champs) du triangle de Pascal	143
Conclusion	150
Bibliographie	153

A la mémoire de Mohammed TEFIANI

Remerciements

L'élaboration d'une thèse est l'œuvre et l'investissement de toute une famille (environnement social, affectif et psychologique), tout particulièrement le dévouement des parents. On ne les remerciera jamais assez, et quand bien même nous en aurions les moyens, cela restera insuffisant : on ne pourra jamais rembourser leurs sacrifices.

Durant ces dernières années, particulièrement cette année-ci, j'ai négligé et fait subir à ma petite famille : ma femme Samia, mes filles Sarah, Amina et Assia beaucoup de désagréments, je m'en excuse auprès d'elles et les remercie pour toute leur patience.

Je remercie le Professeur Benali Benzaghrou de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Ma gratitude va également aux examinateurs. Je suis honoré par la présence dans mon jury des Professeurs Daniel Barsky, Rachid Bebbouchi, Abdelhafid Berrachedi, Sadek Bouroubi et Maurice Pouzet.

Je remercie vivement les Professeurs Abdelkader Khelladi et Farid Mokrane, qui ont accepté de m'accompagner dans l'élaboration de cette thèse, pour leur disponibilité et leur compréhension.

Je souhaite remercier les Professeurs Rachid Bebbouchi et Mahdi Abid qui m'ont particulièrement soutenu et appuyé à de nombreuses reprises, ainsi que le Professeur Affane qui m'a accompagné ces dernières années.

Dans cette thèse sont impliquées de nombreuses personnes. D'abord mes co-auteurs avec qui j'ai appris beaucoup de choses et partagé des moments forts. Il s'agit principalement de Farid Bencherif- les moments que nous avons passés ensemble resteront gravés dans ma mémoire- Abdelhakim Aknouche, Sadek Bouroubi, Fayçal Hamdi, Abdelkader Khelladi, Jean-Gabriel Luque, Szalay Laszlo, Madjid Mirzavaziri, Mohammed Sal Moslehian et Olivier Orcière. A tous, Merci !

Les personnes suivantes ont contribué à l'enrichissement de mes connaissances par les moyens qu'ils ont mis à ma disposition et à travers les fructueuses discussions que nous avons eues. Il s'agit de Abdelhamid Amroun, Daniel Barsky, Abdenour Chabour, Farid Mokrane, Maurice Pouzet, Kamal Redjah, Rabah Souam et Abdelghani Zeghib.

Je remercie vivement ceux qui ont aidé à l'aboutissement de ce travail, certains plus que d'autres :

Mon oncle Asmane, mes amis et collègues Lyes, Yassine et Rachid Aït Amrane, Hacène Aït Hadaddene, Abdelhamid Belmiloud, Larbi Benaïssa, Khoudir Benbellil, Abdelhamid Benmezaï, Mohamed Bentarzi, Isma Bouchemakh, Abdelkader Chebaïki, Farid Debièche, Hafidha Guerbyenne, Tewfik Kernane, Abdelouahab Latreche, Kamal Nouar, Said Yazid Raffed, Djamel Smaï, et notre regretté (que Allah ait son âme) Mohamed Tefiani.

Je remercie aussi tous les collègues de la Faculté de Mathématiques et de l'INPS. Nombre d'entre eux m'ont soutenu, soit par leurs actes, soit par leurs encouragements. Je leur exprime ici toute ma reconnaissance.

«Pour être versé dans une science, en connaître tous les aspects et s'en rendre maître, il faut en prendre le contrôle, en comprendre les fondements, en analyser les problèmes et parvenir à passer des principes aux applications. Faute d'un tel cheminement, on ne saurait prétendre à la maîtrise»

Ibn Khaldûn (1332-1406), *El Mouqaddima*

«La Muqaddima demeure sans aucun doute la plus grande oeuvre de son genre qui ait jamais été créée encore, par qui que ce soit, en tous temps et en tous lieux»

A. Toynbee (1889-1975), *A study of History*

Introduction

Le thème principal de la thèse est l'étude des propriétés combinatoires de suites numériques, telles que les suites récurrentes linéaires, et plus particulièrement les suites de Fibonacci, de Lucas, de Pell, de Pell-Lucas, de Jacobsthal, de Jacobsthal-Lucas, ainsi que leurs généralisations. D'autres suites, telles que celles liées aux coefficients binomiaux ainsi que la somme de puissances d'inverses de progressions arithmétiques, sont également abordées. Dans la plupart des cas, la propriété d'unimodalité de ces suites est établie.

Au chapitre premier, nous présentons des préliminaires sur les suites récurrentes linéaires en relation avec les éléments du triangle de Pascal. Plus précisément, nous explicitons la suite récurrente linéaire qui caractérise les sommes finies des éléments du triangle de Pascal, ce qui nous permet de répondre, sans ambiguïté aucune, à une question posée par Horadam en 2005, dans son article intitulée "Chebyshev and Pell connections".

Au chapitre deuxième, nous exprimons le terme général d'une suite récurrente linéaire. Ce résultat nous permet, entre autres, de dénombrer les mots que l'on peut former à partir d'un langage d'alphabet fini.

Notre étude s'est poursuivie par une analyse des propriétés des coefficients *binomiaux* $\left\{\binom{L}{k}_q\right\}_k$ que nous définissons par l'égalité

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^q)^L = \sum_{k \geq 0} \binom{L}{k}_q x^k.$$

Ces entiers sont des extensions naturelles des coefficients binomiaux. On établit trois liens remarquables : avec la suite de Fibonacci généralisée, les polynômes (partiels) exponentiels de Bell et la convolée de la loi uniforme discrète.

A la fin du chapitre, on présente une alternative à la méthode de Jordan pour calculer les puissances successives d'une matrice carrée. L'approche que nous adoptons a l'avantage d'être élémentaire, sans nécessité de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice en question. Comme application, nous déduisons quelques identités combinatoires : une variante du Théorème de J. J. Sylvester ainsi que deux belles identités : l'une relative aux coefficients binomiaux via les blocs de Jordan et sa duale relative aux nombres de Stirling.

Le chapitre troisième concerne le sens de variation d'une suite numérique, la première notion qui généralise celle de la monotonie est la notion d'unimodalité, elle est le thème

principal du second chapitre de la thèse.

Le premier résultat, qui concerne l'unimodalité de suites extraites du triangle de Pascal, autres que la suite des coefficients binomiaux, est dû à Tanny et Zuker [326]. Ils ont démontré que la suite $F(n, k) := \binom{n-k}{k}$ ($k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$) est unimodale. Cette dernière est fortement liée aux nombres de Fibonacci. Dans [327] et [328], Tanny et Zuker ont aussi exploré le cas des suites $\binom{n-qk}{rk}$. Nous allons traiter, entre autres, certains cas de la famille binomiale suivante $\binom{n-qk}{rk}$.

Benoumhani [57] a également montré l'unimodalité de la suite $L(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$ ($k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$), suite liée aux nombres de Lucas, avec une tentative pour préciser les pics et les plateaux. Nous apportons des compléments substantiels à son étude, ainsi que quelques précisions.

Nous passerons ensuite à l'étude des suites $P(n, k) = 2^{n-2k} \binom{n-k}{k}$ et $Q(n, k) = 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$ ($k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$), suites liées respectivement aux nombres de Pell et aux nombres compagnons de Pell (ou encore nombres de Pell-Lucas), ainsi qu'aux suites $J(n, k) = 2^k \binom{n-k}{k}$ et $j(n, k) = 2^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$ ($k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$), suites liées respectivement aux nombres de Jacobsthal et aux nombres de Jacobsthal-Lucas. Pour ces quatre suites nous prouvons l'unimodalité en spécifiant les pics et les plateaux.

Comme première extension, nous établissons que les familles de suites liées aux suites récurrentes linéaires d'ordre deux données par les relations $((\binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k)_k$ et $(\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k)_k$, lorsque x et y parcourent $\mathbb{R}_{\geq 0}$, sont unimodales.

Comme deuxième extension, nous établissons que pour toutes conditions initiales W_0 et W_1 positives et pour tout $n \geq 2$, la suite

$$W(n, k) := \binom{n-k}{k} \left(W_1 + \frac{k}{n-2k+1} W_0 \right), \quad (k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor),$$

est unimodale.

La dernière extension liée aux éléments du triangle de Pascal : les champs de type (ou de direction) $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ donnés par

$$T^{(q,r)}(n, k) = \binom{n-qk}{rk}, \quad (k = 0, \dots, \lfloor n/(r+q) \rfloor).$$

Nous prouvons que les suites $(T^{(1,2)}(n, k))_k$, $(T^{(-1,2)}(n, k))_k$ et $(T^{(-1,r)}(n, k))_k$, sont unimodales.

On établit aussi l'unimodalité de la suite liée aux éléments du triangle de Pascal étendu : les coefficients bi^qnomiaux. On en précise les pics et les plateaux. Comme application, nous donnons l'expression explicite de la valeur modale de la convolée de la loi discrète uniforme.

Enfin, une section est consacrée aux interprétations combinatoires. A notre sens, l'interprétation combinatoire aussi simple et aussi évidente soit-elle, est d'une importance primordiale.

Le chapitre quatrième concerne les fonctions génératrices. Pour les suites que nous avons déjà étudiées, nous déterminerons les fonctions génératrices qui y sont associées. pour ce

faire, nous commençons par établir les fonctions génératrices pour des suites en relation avec les coefficients binomiaux. Plus généralement, nous déterminons la fonction génératrice de n'importe quelle suite indicée par une progression arithmétique.

Le chapitre cinquième concerne les sommes combinatoires liées aux nombres de Fibonacci et aux nombres de Lucas généralisés.

Nous établissons d'abord plusieurs formules de sommes d'ordre deux et de sommes alternées d'ordre deux, en considérant toutes les combinaisons possibles de nombres de Fibonacci et de Lucas généralisés. En particulier, nous présentons, d'une manière beaucoup plus simple, une extension de tous les résultats de Z. Čerin [90] concernant la somme des carrés alternés, et la somme de produits alternés d'ordre deux, des nombres de Lucas ; ainsi que tous ceux de Z. Čerin et G. M. Gianella [95] concernant la somme des carrés, la somme des carrés alternés, la somme de produits d'ordre deux, et la somme de produits alternés d'ordre deux, des nombres de Pell-Lucas.

Comme deuxième type de relations combinatoires, concernant toujours les suites de Fibonacci et de Lucas généralisées, des relations sommatoires trigonométriques sont données. Nous retrouvons ainsi comme cas particuliers les deux Théorèmes de R. S. Melham [232] (1999) parus dans son article intitulé "Sums involving Fibonacci and Pell numbers", ainsi que tous les Théorèmes (six en tout) de R. S. Melham et A. G. Shannon [242] (1995) parus dans leur article intitulé "Inverse trigonometric and hyperbolic summation formulas involving generalized Fibonacci numbers".

Le chapitre sixième est consacré aux polynômes de Fibonacci bivariés généralisés. On y établit en premier lieu que les polynômes de Chebyshev de première et seconde espèce ont des coordonnées entières remarquables dans des bases spécifiques (l'une constituée uniquement de polynômes de Chebyshev de première espèce et l'autre constituée uniquement de polynômes de Chebyshev de deuxième espèce). Ensuite le cas général des polynômes bivariés de Fibonacci généralisés est traité en prouvant des résultats analogues.

Au chapitre septième, en se basant sur la théorie de la valuation, nous démontrons que la somme des puissances des inverses d'une progression arithmétique n'est jamais un entier.

Enfin deux inégalités, l'une concernant les formes bilinéaires symétriques positives et l'autre une généralisation de l'inégalité de Buniakowsky–Cauchy et de l'identité de Lagrange sont prouvées. C'est la version de l'hyperdéterminant de Gram discrète.

Le travail se termine par trois annexes :

Dans l'annexe A : une démonstration combinatoire permet de calculer explicitement les auto-covariances données par les équations de Yule-Walker périodiques d'un modèle PARMA, améliorant ainsi les algorithmes itératifs donnés par Li et Hui (1988) et Shao et Lund (2004).

Dans l'annexe B : l'identité du parallélogramme stipule que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ pour tous x et y dans un Hilbert, on en déduit ainsi l'inégalité du parallélogramme $\|x + y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Ceci nous incite à introduire une extension en l'inégalité triangulaire. Plus précisément, on introduit la notion de q -norme en remplaçant, dans la définition d'une norme, l'inégalité

triangulaire par l'inégalité $\|x + y\|^q \leq 2^{q-1} (\|x\|^q + \|y\|^q)$, où q est un réel ≥ 1 .

Nous établissons que toute q -norme est une norme au sens classique, et inversement.

Dans l'annexe C, une inégalité généralise celle due à Guo et Jiang au cas de plusieurs fonctions via une formulation 'déterminantale' (avec les déterminants).

Pour ce qui concerne les recherches en cours : dans une première étape, j'ai achevé un travail avec les collègues Adrien Boussicault et Jean-Gabriel Luque [43], de l'université de Marne-la-Vallée à Paris, concernant les polynômes de Jack et les hyperdéterminants - travail que nous avons soumis et est disponible sur Arxiv. D'autres perspectives de collaboration sont à l'étude. Dans une seconde étape, Olivier Orcière [47] de Thalès Communications-Paris et moi-même, avons entamé une série de travaux qui mettent en relief les travaux de Gauss concernant les lois de composition, et repris récemment par Bhargava dans une série d'articles publiés dans "Annals of Mathematics", et les hyperdéterminants. Le premier d'entre eux concerne les formes quadratiques et les hyperdéterminants. Dans une troisième étape, nous citons deux travaux réalisés par l'auteur en collaboration avec Farid Bencherif [34] et [40] sur les développements asymptotiques de sommes d'inverses de fonctions arithmétiques, généralisant ainsi un travail antérieur quand la fonction arithmétique en question est la fonction qui compte le nombre de nombres premiers.

Je saisis cette opportunité pour mentionner que mes travaux ont été en partie soutenus par les laboratoires LAID3 de l'USTHB, LAGA de Paris 13 et de l'accord CMEP de géométrie et systèmes dynamiques. Je souhaite ici exprimer ma gratitude à ces laboratoires ainsi qu'à la Faculté de Mathématiques de l'USTHB (tous Départements confondus).

Chapitre 1

Préliminaires sur les suites récurrentes linéaires liées aux éléments du triangle de Pascal.

Les suites récurrentes linéaires en relations avec les éléments du triangle de Pascal, comme les suites de Fibonacci, de Lucas, de Jacobsthal, de Morgan-Voyce et des généralisations de ces suites, ont fait l'objet de milliers de travaux de recherche. Il est donc difficile, voire impossible de faire le tour de la question. Il existe même une revue entièrement consacrée à ce type de suite :

"The Fibonacci Quarterly", le journal officiel de l'association "Fibonacci Association"

P.O. Box 320 Aurora SD 57002-0329, ISSN : 0015-0517.

Pour cette thèse, il y a aux alentours d'une centaine de références puisées dans cette seule revue.

Cependant il existe un ouvrage remarquable qui, à mon sens, est incontournable. On trouve dans cette référence plusieurs idées, déjà formulées à l'époque, et récemment republiées (qui ne citent d'ailleurs pas cette référence). Il contient, en outre, beaucoup d'autres idées non encore exploitées. Il s'agit de l'ouvrage de théorie des nombres de l'arithméticien *François Edouard Anatole Lucas* (4 avril 1842 - 3 octobre 1891), publié en 1891.

1.1 Généralités sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Par $(W_n)_{n \geq 0} = (W_n(x, y; a, b))_{n \geq 0}$, nous désignons la suite récurrente linéaire définie, pour $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, par

$$\begin{cases} W_0 = a \in \mathbb{R}, & W_1 = b \in \mathbb{R}, \\ W_n = xW_{n-1} + yW_{n-2}, & (n \geq 2). \end{cases} \quad (1.1)$$

Posons

$$W(n, k) = x^{n-2k} y^k \binom{n-k}{k} \left(W_1 + \frac{k}{n-2k+1} x W_0 \right), \quad (k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor). \quad (1.2)$$

On vérifie que l'on a

$$W_{n+1} = (n \bmod 2) \cdot y^{\frac{n+1}{2}} W_0 + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} W(n, k), \quad (n \geq 0). \quad (1.3)$$

On note $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ les suites appelées respectivement suite de Fibonacci généralisée¹ et, sa suite compagnon, la suite de Lucas généralisée, définies par : $U_n = W_n(x, y; 0, 1)$ et $V_n = W_n(x, y; 2, x)$

On vérifie que l'on a

$$U_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} U(n, k) \quad \text{avec} \quad U(n, k) = \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k, \quad (1.4)$$

$$V_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} V(n, k) \quad \text{avec} \quad V(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k. \quad (1.5)$$

Pour x, y, a, b entiers, les suites $(U(n, k))_k$ et $(V(n, k))_k$ sont des suites d'entiers que l'on dira associées respectivement à la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ et à la suite $(V_n)_{n \geq 0}$.

Définissons les suites $(F_n), (L_n), (P_n), (Q_n), (J_n)$ et (j_n) par

$$\begin{cases} F_n = W_n(1, 1; 0, 1) \\ L_n = W_n(1, 1; 2, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} P_n = W_n(2, 1; 0, 1) \\ Q_n = W_n(2, 1; 2, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} J_n = W_n(1, 2; 0, 1) \\ j_n = W_n(1, 2; 2, 1) \end{cases}$$

$\{F_n\}_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ est la *suite de Fibonacci*, Sloane² A000045,

$\{L_n\}_{n \geq 0} = (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots)$ est la *suite de Lucas*, Sloane A000032,

$\{P_n\}_{n \geq 0} = (0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots)$ est la *suite de Pell*, Sloane A000129,

$\{Q_n\}_{n \geq 0} = (2, 2, 6, 14, 34, 82, \dots)$ est la *suite de Pell-Lucas*, Sloane A002203,

$\{J_n\}_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots)$ est la *suite de Jacobsthal*, Sloane A001045,

$\{j_n\}_{n \geq 0} = (2, 1, 5, 7, 17, 31, \dots)$ est la *suite de Jacobsthal-Lucas*, Sloane A014551.

Les formes de Binet s'écrivent

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad \text{et} \quad L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \right) \quad \text{et} \quad Q_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n,$$

$$J_n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) \quad \text{et} \quad j_n = 2^n + (-1)^n.$$

¹Ici la généralisation intervient au niveau des coefficients.

²On renvoie à l'encyclopédie des suites numériques Sloane [300].

Les suites d'entiers associées à ces suites sont

$$F(n, k) := \binom{n-k}{k} \quad \text{et} \quad L(n, k) := \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \quad (1.6)$$

$$P(n, k) := 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} \quad \text{et} \quad Q(n, k) := 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \quad (1.7)$$

$$J(n, k) := 2^k \binom{n-k}{k} \quad \text{et} \quad j(n, k) := 2^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \quad (1.8)$$

Par exemple pour la suite de Fibonacci, la relation (1.4) s'écrit

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 0). \quad (1.9)$$

1.2 Suites de Fibonacci et de Lucas généralisées

Plus généralement, on définit la suite q -Fibonacci généralisée et sa suite compagnon q -Lucas généralisée, comme suit :

$$\begin{cases} U_0^{(q)} = 0, & U_k^{(q)} = x^{k-1}, \quad (1 \leq k \leq q), \\ U_n^{(q)} = xU_{n-1}^{(q)} + yU_{n-q-1}^{(q)}, & (n > q). \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} V_0^{(q)} = 2, & V_k^{(q)} = x^k, \quad (1 \leq k \leq q), \\ V_n^{(q)} = xV_{n-1}^{(q)} + yV_{n-q-1}^{(q)}, & (n > q). \end{cases} \quad (1.11)$$

Ce qui donne, pour tout $n \geq 0$

$$U_{n+1}^{(q)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} U_n^{(q)}(n, k), \quad \text{avec} \quad U_n^{(q)}(n, k) = \binom{n-qk}{k} x^{n-(q+1)k} y^k, \quad (1.12)$$

$$V_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} V_n^{(q)}(n, k), \quad \text{avec} \quad V_n^{(q)}(n, k) = \frac{n-(q-1)k}{n-qk} \binom{n-qk}{k} x^{n-(q+1)k} y^k. \quad (1.13)$$

Avec les formes de Binet correspondantes : si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q+1}$ sont les racines distinctes du polynôme caractéristique associé aux suites récurrentes données par (1.10) et (1.11), alors

$$U_n^{(q)} = \sum_{k=1}^{q+1} \frac{\alpha_k^n}{(q+1)\alpha_k - qx}, \quad \text{et} \quad V_n^{(q)} = \sum_{k=1}^{q+1} \alpha_k^n.$$

Ces deux suites sont liées par la relation linéaire

$$V_n^{(q)} = U_{n+1}^{(q)} + yU_{n-q}^{(q)}. \quad (1.14)$$

Nous allons maintenant donner les fonctions génératrices des suites $\{U_n^{(q)}\}_{n \geq 0}$ et $\{V_n^{(q)}\}_{n \geq 0}$.

$$U(z) := \sum_{n \geq 0} U_{n+1}^{(q)} z^n = \frac{1}{1 - xz - yz^{q+1}} \quad \text{et} \quad V(z) := \sum_{n \geq 0} V_n^{(q)} z^n = \frac{2 - xz^q}{1 - xz - yz^{q+1}}.$$

1.3 Suites récurrentes linéaires liées aux éléments du triangle de Pascal

Plus généralement, par rapport aux relations (1.4) et (1.12), on montre que pour $(q > -r)$, $(q, r) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$

$$T_{n+1}^{(q,r)} := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+r) \rfloor} T^{(q,r)}(n, k), \quad \text{avec} \quad T^{(q,r)}(n, k) = \binom{n - qk}{rk} x^{n-(q+r)k} y^k, \quad (1.15)$$

on a la fonction génératrice suivante

$$T(z) := \sum_{n \geq 0} T_{n+1} z^n = \frac{(1 - xz)^{r-1}}{(1 - xz)^r - yz^{q+r}}$$

Il n'est pas difficile de voir que la suite récurrente linéaire correspondante est donnée par

$$\begin{cases} T_n = x \binom{r}{1} T_{n-1} - x^2 \binom{r}{2} T_{n-2} + \dots + (-1)^{r-1} x^r \binom{r}{r} T_{n-r} + y T_{n-r-q}, & (n \geq r+q), \\ T_0 = 0, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = x, \dots, \quad T_q = x^{q-1}, \quad T_{q+1} = x^q, \dots, \quad T_{r+q-1} = x^{r+q-2}. \end{cases} \quad (1.16)$$

L'opérateur du shift permet de réécrire la suite récurrente linéaire de la manière suivante

$$(E^q(E - x)^r - y)T_n = 0.$$

Remarque 1 Les r termes qui succèdent à ceux données par les conditions initiales font intervenir une suite auxiliaire, à savoir : la suite $(a_l)_l$, de la manière suivante

$$T_{e+q+l} = x^{r+q+l-1} + a_l y x^{l-1}, \quad (l = 0, \dots, r-1),$$

avec

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \text{et} \quad a_l = 1 - \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j \binom{r}{j} a_{l-j}.$$

Remarque 2 Noter que la suite récurrente linéaire ainsi définie caractérise parfaitement tous les champs des éléments du triangle de Pascal de la forme $\binom{n-qk}{rk}$, $k = 0, \dots, \lfloor n/(q+r) \rfloor$. Pour les champs intermédiaires de la forme $\binom{n-qk}{rk+p}$, $k = 0, \dots, \lfloor n/(q+r) \rfloor$, avec p fixé ($1 \leq p \leq r$), nous proposons la suite récurrente linéaire précédente avec les conditions initiales

$$T_0 = 0 \quad \text{et} \quad T_l = x^{l-1} \binom{l-1}{p}, \quad (0 \leq l \leq q+r-1).$$

Commentaire 3 Ainsi, nous pouvons répondre à la question posée par Horadam [173, 2005] : peut-on trouver une formule permettant d'exprimer la suite suivante (connue dans la littérature comme étant "quasi Morgan-Voyce numbers")

$$T_n = \binom{2}{1} T_{n-1} + \binom{2}{2} T_{n-2} + x T_{n-r-q}, \quad \text{avec } q + r = 1,$$

dépendant des champs du triangle de Pascal ?

La réponse est négative, car la suite récurrente linéaire donnée par (1.16) caractérise tous les champs du triangle de Pascal, suite qui englobe la suite de Morgan-Voyce mais pas la quasi Morgan-Voyce.

Revenons maintenant à la suite initiale (1.16), en exploitant la remarque 1, nous nous proposons d'introduire la suite compagnon associée de la manière suivante

$$\begin{cases} S_n = x \binom{r}{1} S_{n-1} - x^2 \binom{r}{2} S_{n-2} + \cdots + (-1)^{r-1} x^r \binom{r}{r} S_{n-r} + y S_{n-r-q}, & (n \geq r + q), \\ S_0 = 2, S_1 = x, \dots, S_q = x^q, S_{q+l} = x^{q+r+l-1} + y x^{l-1} (1 + a_l), & (1 \leq l \leq r - 1). \end{cases}$$

De plus

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+r) \rfloor} S^{(q,r)}(n, k), \quad (n \geq 0),$$

avec

$$S^{(q,r)}(n, k) = \left(1 + \frac{rk(rk-1) \cdots (rk-r+1)}{(n-qk)(n-qk-1) \cdots (n-qk-r+1)} \right) \binom{n-qk}{rk} x^{n-(q+r)k} y^k.$$

On a l'identité remarquable suivante :

$$T_n = S_{n+1} + y S_{n-q}$$

(notons la ressemblance avec (1.14)).

Chapitre 2

Puissance n -ième d'une matrice carrée, suites récurrentes linéaires et coefficients *binomiaux*

2.1 Introduction

Il est établi par J. Mc. Laughlin [203, 2004] le Théorème suivant

Théorème 4 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice carrée d'ordre deux, $T = a + d$ sa trace et $D = ad - bc$ son déterminant. Soit

$$y_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} T^{n-2i} (-D)^i \quad (2.1)$$

alors, pour $n \geq 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} y_n - dy_{n-1} & by_{n-1} \\ cy_{n-1} & y_n - ay_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

En constatant que $A^n = y_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y_{n-1} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et que $(y_n)_{n \geq -1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, alors

$$\begin{cases} y_{-1} = 0, & y_0 = 1, \\ y_n = Ty_{n-1} - Dy_{n-2} & (n \geq 1), \end{cases} \quad (2.3)$$

On se propose de généraliser ce résultat aux matrices $A \in \mathcal{M}_m(\mathcal{A})$ (ensemble des matrices carrées d'ordre m à coefficients dans un anneau commutatif $\mathcal{A}$).

On applique ces généralisations aux suites classiques suivantes : la suite q -Fibonacci généralisée et à sa suite compagnon, la q -Lucas généralisée.

Les identités combinatoires que l'on obtient, en évaluant des expressions multi-sommatoires par des sommes simples, nous incitent à explorer une autre famille de coefficients qui proviennent des éléments du triangle de Pascal étendu : les coefficients *binomiaux*. On établit trois liens remarquables : avec la suite de Fibonacci généralisée, les polynômes (partiels) exponentiels de Bell et la convolée de la loi uniforme discrète.

2.2 Expression explicite du terme général d'une suite récurrente linéaire

Soient m un entier ≥ 2 et $a_1, a_2, \dots, a_m, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ des éléments d'un anneau commutatif unitaire $\mathcal{A}$.

Considérons la suite $(u_n)_{n \geq -m}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{-j} = \alpha_j & (0 \leq j \leq m-1), \\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_m u_{n-m} & (n \geq 1). \end{cases} \quad (2.4)$$

L'objectif principal de ce paragraphe est d'expliciter le terme général u_n en fonction de $n, a_1, a_2, \dots, a_m, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ (Théorème 9).

On définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des éléments de $\mathcal{A}$, avec la convention qu'une somme vide est nulle, par

$$y_n = \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = n} \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}. \quad (2.5)$$

La convention précédente nous assure que $y_n = 0$ pour $n < 0$.

Les coefficients multinomiaux qui apparaissent dans la somme précédente sont définis, pour des entiers $k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0$, par

$$\binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

et s'expriment aussi comme un produit de coefficients binomiaux de la manière suivante

$$\binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1 + \dots + k_{m-1}} \dots \binom{k_1 + k_2 + k_3}{k_1 + k_2} \binom{k_1 + k_2}{k_1}.$$

Nous poserons par convention, pour $k_1 + k_2 + \dots + k_m \geq 1$,

$$\binom{k_1 + k_2 + \dots + (k_j - 1) + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_j - 1, \dots, k_m} = 0, \quad (k_j = 0, j = 1, 2, \dots, m).$$

Nous sommes ainsi en mesure d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 5 Soient des entiers $k_j \geq 0$ pour $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, tels que $k_1 + k_2 + \dots + k_m \geq 1$. Alors

$$\binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \sum_{j=1}^m \binom{k_1 + k_2 + \dots + (k_j - 1) + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_j - 1, \dots, k_m}.$$

Ce dernier permet d'établir facilement le résultat qui suit

Lemme 6 La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, donnée par la relation (2.5), vérifie la relation de récurrence

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_m y_{n-m} \text{ pour } n \geq 1.$$

De plus, nous avons $y_0 = 1$ et $y_n = 0$ pour $n < 0$.

Preuve. Pour $n \geq 1$, notons d'abord que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, on a

$$a_j y_{n-j} = \sum_{k_1 + \dots + j k_j + \dots + m k_m = n} \binom{k_1 + \dots + (k_j - 1) + \dots + k_m}{k_1, \dots, k_j - 1, \dots, k_m} a_1^{k_1} \dots a_j^{k_j} \dots a_m^{k_m}.$$

On obtient ainsi la relation :

$$\sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} = y_n.$$

Les relations $y_0 = 1$ et $y_n = 0$ pour $n < 0$ en découlent. □

On peut, maintenant, énoncer le théorème suivant :

Théorème 7 Soit $(u_n)_{n > -m}$ la suite, d'éléments de $\mathcal{A}$, définie par :

$$\begin{cases} u_{-j} = 0 & (1 \leq j \leq m-1), \\ u_0 = 1, \\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_m u_{n-m} & (n \geq 1). \end{cases}$$

Alors, pour tout entier $n > -m$, on a

$$u_n = \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + m k_m = n} \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

La sommation étant étendue à tous les m -uplets $(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$ vérifiant la relation $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + m k_m = n$.

Corollaire 8 Soient q un entier, $q \geq 1$, $a, b \in \mathcal{A}$ et $(v_n)_{n \geq -q}$ la suite d'éléments de $\mathcal{A}$, définie par :

$$\begin{cases} v_{-j} = 0 & (1 \leq j \leq q), \\ v_0 = 1, \\ v_{n+1} = a v_n + b v_{n-q} & (n \geq 0). \end{cases} \quad (2.6)$$

Alors, pour tout $n \geq -q$, on a

$$v_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \binom{n-kq}{k} a^{n-k(q+1)} b^k, \quad (2.7)$$

de plus, pour tout $n \geq 1$, on a

$$v_n + bv_{n-q-1} = 2v_n - av_{n-1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \frac{n-k(q-1)}{n-kq} \binom{n-kq}{k} a^{n-k(q+1)} b^k. \quad (2.8)$$

Preuve. La relation (2.7) est une conséquence directe du Théorème 7, lorsque $m = q + 1$, $a_1 = a$, $a_m = b$ et $a_k = 0$ pour $1 < k < m$. A partir de la relation (2.7), on déduit l'identité (2.8) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} v_n + bv_{n-q-1} &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \binom{n-kq}{k} a^{n-k(q+1)} b^k + \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1)-1 \rfloor} \binom{n-1-(k+1)q}{k} a^{n-(q+1)(k+1)} b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \binom{n-kq}{k} a^{n-k(q+1)} b^k + \sum_{k=1}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \binom{n-1-kq}{k-1} a^{n-k(q+1)} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \binom{n-kq}{k} a^{n-k(q+1)} b^k + \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \frac{k}{n-kq} \binom{n-kq}{k} a^{n-k(q+1)} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \frac{n-k(q-1)}{n-kq} \binom{n-kq}{k} a^{n-k(q+1)} b^k. \end{aligned}$$

□

Le Théorème suivant, qui généralise le Théorème 7, nous permettra d'expliciter le terme général u_n en fonction de n , $a_1, a_2, \dots, a_m, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$.

Théorème 9 Soient $(u_n)_{n > -m}$, $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq m-1}$ et $(y_n)_{n > -m}$ les suites d'éléments de $\mathcal{A}$ définies par :

$$\begin{cases} u_{-j} = \alpha_j & (0 \leq j \leq m-1), \\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_m u_{n-m} & (n \geq 1), \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\lambda_j = - \sum_{0 \leq i \leq m-1-j} a_i \alpha_{i+j} \quad (0 \leq j \leq m-1), \quad \text{avec } a_0 = -1 \quad (2.10)$$

et

$$y_n = \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = n} \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \quad (n > -m).$$

Alors, pour tout entier $n > -m$, on a

$$u_n = \lambda_0 y_n + \lambda_1 y_{n+1} + \dots + \lambda_{m-1} y_{n+m-1}.$$

Notons que la relation (2.10) s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} \\ \lambda_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 & \cdots & -a_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m-2} \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix},$$

ou encore

$${}^t[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}] = C \cdot {}^t[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}], \quad (2.11)$$

où

$$C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad \text{avec } c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ -a_{j-i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit aussi, en utilisant (2.9) et (2.11), l'identité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+m-2} \\ u_{n+m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n & y_{n+1} & \cdots & y_{n+m-2} & y_{n+m-1} \\ y_{n+1} & y_{n+2} & \cdots & y_{n+m-1} & y_{n+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{n+m-2} & y_{n+m-1} & \cdots & y_{n+2m-4} & y_{n+2m-3} \\ y_{n+m-1} & y_{n+m} & \cdots & y_{n+2m-3} & y_{n+2m-2} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & -a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a_2 \\ 0 & & 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-2} \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

Preuve. Soit $\mathcal{S}$ le $\mathcal{A}$ -module des suites $(v_n)_{n > -m}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$v_n - a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2} - \cdots - a_m v_{n-m} = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

et considérons la famille des suites $(v_n^{(k)})_{n > -m}$, pour $0 \leq k \leq m-1$, définie par

$$\begin{cases} v_n^{(0)} &= y_n, \\ v_n^{(1)} &= y_{n+1} - a_1 y_n, \\ v_n^{(2)} &= y_{n+2} - a_1 y_{n+1} - a_2 y_n, \\ &\vdots \\ v_n^{(m-1)} &= y_{n+m-1} - a_1 y_{n+m-2} - a_2 y_{n+m-3} - \cdots - a_{m-1} y_n, \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{aligned} v_n^{(k)} &= y_{n+k} - (a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \cdots + a_k y_n) \\ &= \sum_{i=0}^k -a_i y_{n+k-i}, \quad \text{avec } a_0 = -1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Du Théorème 7, on est assuré que $(y_n)_{n > -m} \in \mathcal{S}$, et par conséquent $(y_{n+q})_{n > -m} \in \mathcal{S}$ pour $q \geq 0$; on en déduit finalement que

$$(v_n^{(k)})_{n > -m} \in \mathcal{S}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq m-1. \quad (2.13)$$

Il n'est pas difficile de voir que l'on a, pour $j, k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$,

$$v_{-j}^{(k)} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.14)$$

En effet, avec $a_0 = -1$, on peut écrire, pour $j, k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,

$$v_{-j}^{(k)} = - \sum_{i=0}^k a_i y_{-j+k-i}.$$

Si $k < j$, alors $-j + k - i < 0$ pour $1 \leq i \leq k$ et $v_{-j}^{(k)} = 0$ (car $y_q = 0$ pour $q < 0$).

Si $k = j$, alors $v_{-j}^{(k)} = v_{-j}^{(j)} = - \sum_{i=0}^j a_i y_{-i} = -a_0 y_0 = 1$.

Si $k > j$, alors pour $r = k - j < 0$, on a $r \geq 1$ et

$$\begin{aligned} v_{-j}^{(k)} &= y_r - (a_1 y_{r-1} + a_2 y_{r-2} + \cdots + a_k y_{r-k}) \text{ et en posant } r - k = -j \leq 0 \\ &= y_r - (a_1 y_{r-1} + a_2 y_{r-2} + \cdots + a_k y_{r-k} + \cdots + a_m y_{r-m}) \\ &= 0 \quad \text{car } (y_n)_{n > -m} \in \mathcal{S} \text{ et } r \geq 1. \end{aligned}$$

Les relations (2.13) et (2.14) permettent facilement d'établir, pour tout $n > -m$, que

$$u_n = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k v_n^{(k)}$$

et via l'identité (2.12), on arrive à

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \left(\sum_{i=0}^k -a_i y_{n+k-i} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^k -a_{k-j} \alpha_k y_{n+j} \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{k=j}^{m-1} -a_{k-j} \alpha_k \right) y_{n+j} \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j y_{n+j}.
 \end{aligned}$$

□

2.3 Application au dénombrement des mots d'un langage

On démontre que le nombre u_n de mots d'une partie dépendante de l'entier n d'un langage d'alphabet fini vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers.

Soit m un entier ≥ 1 , $s = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ et $p = n_1 + n_2 + \dots + n_m$. On considère un alphabet $\mathcal{A}_s$ constitué de p lettres distinctes que l'on désignera par

$$x_i^j \quad (1 \leq j \leq m \text{ et } 1 \leq i \leq n_j).$$

$$\mathcal{A}_s = \{x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1; x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2; \dots; x_1^m, x_2^m, \dots, x_{n_m}^m\}$$

Les lettres d'ordre 1 sont $x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1$, les lettres d'ordre 2 sont $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2$ et ainsi de suite, on a finalement les lettres d'ordre m : $x_1^m, x_2^m, \dots, x_{n_m}^m$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on convient d'appeler mot de longueur ou de poids n toute suite $\mathbf{m}$ de k lettres de $\mathcal{A}_s$ distinctes ou non :

$$\mathbf{m} = (x_{i_1}^{\alpha_1}, x_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, x_{i_k}^{\alpha_k}) \stackrel{\text{notée}}{=} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_k}^{\alpha_k} \text{ telle que } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n,$$

k étant un entier ≥ 1 avec $\alpha_j \in \{1, 2, \dots, m\}$ pour $1 \leq j \leq k$ et $1 \leq i_l \leq n_{\alpha_l}$ pour $1 \leq l \leq k$.

On désigne par $\mathcal{L}_s$ l'ensemble des mots ainsi définis, auquel on adjoint le mot vide de poids nul, et on note $u_n = u_n(s)$ le nombre de mots de $\mathcal{L}_s$ de poids n .

On a évidemment

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = n_1.$$

Exemple 10 Pour $s = (1, 1)$, on a $\mathcal{A}_s = (a, b)$

$$u_2 = \text{Card}\{aa, b^2\} = 2$$

$$u_3 = \text{Card}\{aaa, ab^2, b^2a\} = 3$$

$$u_4 = \text{Card}\{aaaa, aab^2, ab^2a, b^2aa, b^2b^2\} = 5$$

On constate aisément que, dans ce cas, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = u_n((1, 1)) = F_{n+1}$$

F_n étant le n -ième nombre de Fibonacci défini par

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \text{ et } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

L'objet de ce paragraphe est de donner dans le cas général, une expression explicite de u_k pour $1 \leq k \leq m-1$ et de prouver que, pour $n \geq m$, u_n vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers. Ce résultat est précisé dans le théorème suivant :

Théorème 11 Pour $1 < k \leq m$, on a

$$u_k = \sum_{i_1+2i_2+\dots+ki_k=k} (i_1 + i_2 + \dots + i_k)! \binom{n_1}{i_1} \binom{n_2}{i_2} \dots \binom{n_k}{i_k}.$$

Pour $n \geq m+1$, on a

$$u_n = n_1 u_{n-1} + n_2 u_{n-2} + \dots + n_m u_{n-m}.$$

Preuve. Pour les u_k , $1 < k \leq m$, on les dénombre directement. Pour la relation de récurrence, il suffit de voir que pour former un mot de longueur n , soit on prend un mot de longueur $n-1$ auquel on adjoint une lettre d'ordre 1 ce qui nous amène à $n_1 u_{n-1}$ possibilités, soit un mot de longueur $n-2$ auquel on adjoint une lettre d'ordre 2 ce qui nous amène à $n_2 u_{n-2}$ possibilités, $\dots$, soit un mot de longueur $n-m$ auquel on adjoint une lettre d'ordre m ce qui nous amène à $n_m u_{n-m}$ possibilités. Et on conclut par une sommation. $\square$

On obtient ainsi une suite récurrente linéaire d'ordre m , ayant pour premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_m$. Le Théorème 9, via un décalage adéquat, permet d'expliciter le terme général directement.

2.4 Applications aux suites de Fibonacci et extensions

Nous allons présenter quelques applications se rapportant aux résultats de la section 2.2.

2.4.1 Première application : suite de Fibonacci

Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ la suite de Fibonacci donnée par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

alors, en posant, pour tout $n \geq -1$

$$\varphi_n = F_{n+1},$$

on constate que la suite $(\varphi_n)_{n \geq -1}$ est aussi définie par les relations

$$\begin{cases} \varphi_{-1} = 0, \\ \varphi_0 = 1, \\ \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

L'application du Corollaire 8 fournit les relations suivantes :

$$\varphi_n = F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq -1), \quad (2.15)$$

relation citée dans [338], pp 18-20, et annoncée dans [273], et

$$F_n + F_{n+2} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \frac{n+1}{n+1-k} \binom{n+1-k}{k}, \quad (n \geq 0),$$

on retrouve ainsi les relations du Problème 6.98 données dans [317], à savoir :

$$F_{2n-1} + F_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$$

et

$$F_{2n} + F_{2n+2} = \sum_{k=0}^n \frac{2n+1}{2n+1-k} \binom{2n+1-k}{k}.$$

Le Théorème 9 permet de trouver d'autres identités pour les nombres de Fibonacci. Ainsi, on a le

Corollaire 12 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$F_n = \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{i} \binom{i}{n+1-2i} 8^i.$$

Dans cette sommation, on peut en fait se restreindre à sommer seulement sur les entiers i compris entre $(n+1)/3$ et $(n+1)/2$, le coefficient binomial de la formule étant nul pour les autres entiers.

Preuve. On constate que l'on a :

$$F_n = 2F_{n-2} + F_{n-3} \quad (n \geq 3).$$

En désignant par $(y_n)_{n \geq -2}$ la suite définie par

$$\begin{cases} y_{-2} = y_{-1} = 0, \\ y_0 = 1, \\ y_n = 2y_{n-2} + y_{n-3} \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

on remarque que pour tout $n \geq 1$

$$F_n = y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Le Théorème 9 permet d'affirmer que pour tout $n \geq -2$

$$y_n = \sum_{2k+3l=n} \binom{k+l}{l} 2^k = \sum_{0 \leq t \leq n} \binom{t}{n-2t} 2^{3t-n}.$$

Un simple calcul permet alors de retrouver la relation du Corollaire 12. □

On en déduit aussi le

Corollaire 13 *Pour tout entier $m \geq 1$, on a*

$$F_{2m-1} = \sum_{i=1}^{\lfloor m/3 \rfloor} \frac{m+i}{m-i} \binom{m-i}{2i} 2^{m-1-3i}.$$

2.4.2 Seconde application : la *Fibonacci généralisée* et la "*multibonacci*"

Dans cette section, nous allons présenter deux extensions distinctes de la suite de Fibonacci : la *Fibonacci généralisée* et la "*multibonacci*".

La suite de Fibonacci généralisée ou la q -Fibonacci

Pour $q \geq 1$, soient $(G_n^{(q)})_{n \geq 0}$ la suite de Fibonacci généralisée (ou q -Fibonacci), comme mentionnée dans [204], et $(H_n^{(q)})_{n \geq 0}$ sa suite duale, définies par

$$\begin{cases} G_0^{(q)} = G_1^{(q)} = \dots = G_q^{(q)} = 1, \\ G_{n+1}^{(q)} = G_n^{(q)} + G_{n-q}^{(q)} \quad (n \geq q), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} H_0^{(q)} = H_1^{(q)} = \dots = H_q^{(q)} = 1, \\ H_{n+1}^{(q)} = H_n^{(q)} - H_{n-q}^{(q)} \quad (n \geq q). \end{cases}$$

On peut facilement étendre ces suites à $(G_n^{(q)})_{n \geq -q}$ et $(H_n^{(q)})_{n \geq -q}$ de la manière suivante

$$\begin{cases} G_{-j}^{(q)} = 0 \quad (1 \leq j \leq q), \\ G_0^{(q)} = 1, \\ G_{n+1}^{(q)} = G_n^{(q)} + G_{n-q}^{(q)} \quad (n \geq 0), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} H_{-j}^{(q)} = 0 \quad \text{pour } (1 \leq j \leq q), \\ H_0^{(q)} = 1, \\ H_{n+1}^{(q)} = H_n^{(q)} - H_{n-q}^{(q)} \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

L'application du Corollaire 8 donne, pour $n \geq -q$, les relations

$$G_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \binom{n-kq}{k}, \quad \text{et} \quad H_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} (-1)^k \binom{n-kq}{k}.$$

Notons que $G_n^{(1)} = F_{n+1} = \varphi_n$, et $H_n^{(2)}$ est la suite d'entiers étudiée par L. Bernstein [60]. Ce dernier a montré, qu'en tant que fonction de n , les seuls zéros de $H_n^{(2)}$ sont $n = 3$ et $n = 12$. Ce résultat a aussi été traité par Carlitz [84] et [85] et récemment par J. Mc Laughlin and B. Sury [204].

La suite "multibonacci"

Considérons maintenant, pour $q > 1$, la suite "multibonacci" $(\phi_n^{(q)})_{n > -q}$ définie par

$$\begin{cases} \phi_{-(q-1)}^{(q)} = \dots = \phi_{-2}^{(q)} = \phi_{-1}^{(q)} = 0, \\ \phi_0^{(q)} = 1, \\ \phi_n^{(q)} = \phi_{n-1}^{(q)} + \phi_{n-2}^{(q)} + \dots + \phi_{n-q}^{(q)} \quad (n \geq 1), \end{cases} \quad (2.16)$$

notons que $\phi_n^{(2)} = \varphi_n = F_{n+1} = G_n^{(1)}$.

Le Théorème 9 permet d'affirmer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\phi_n^{(q)} = \sum_{k_1+2k_2+\dots+qk_q=n} \binom{k_1+k_2+\dots+k_q}{k_1, k_2, \dots, k_q}. \quad (2.17)$$

Ainsi, pour $q = 3$, on obtient

$$\phi_n^{(3)} = \sum_{i+2j+3k=n} \binom{i+j+k}{i, j, k} = \sum_{2i+3j \leq n} \binom{n-i-2j}{i+j} \binom{i+j}{i}.$$

La relation (2.16) permet d'écrire

$$\phi_{n+1}^{(q)} = 2\phi_n^{(q)} - \phi_{n-q}^{(q)}, \quad (n \geq 1).$$

Considérons la suite $(\psi_n)_{n \geq -q}$ définie par

$$\psi_n := \phi_n^{(q)}, \quad (n > -q \text{ et } \psi_{-q} = 1),$$

et satisfaisant la relation de récurrence

$$\psi_{n+1} = 2\psi_n - \psi_{n-q}, \quad (n \geq 0).$$

En appliquant le Théorème 9, on déduit, pour $n \geq 0$, que

$$\begin{aligned}\psi_n \left(\phi_n^{(q)} \right) &= \lambda_0 z_n + \lambda_1 z_{n+1} + \cdots + \lambda_q z_{n+q} \\ &= z_n - 2z_{n+q-1} + z_{n+q},\end{aligned}$$

avec

$$z_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \binom{n-kq}{k} 2^{n-k(q+1)} (-1)^k, \quad (n \geq -q).$$

On sait, d'après le Théorème 9 et le Corollaire 8 que la suite $(z_n)_{n \geq -q}$ vérifie la relation de récurrence

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-q} = 0, \quad (n \geq 0),$$

ce qui donne pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\phi_n^{(q)} &= z_n - z_{n-1} + (z_{n+q} - 2z_{n+q-1} + z_{n-1}) \\ &= z_n - z_{n-1}.\end{aligned}$$

En appliquant la relation (2.8) du Corollaire 8 on peut écrire pour $n \geq 1$

$$\phi_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} \frac{n-k(q-1)}{n-kq} \binom{n-kq}{k} 2^{n-1-k(q+1)} (-1)^k. \quad (2.18)$$

Ainsi

$$\sum_{k_1+2k_2+\cdots+qk_q=n} \binom{k_1+\cdots+k_q}{k_1, \dots, k_q} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} (-1)^k \frac{n-k(q-1)}{n-kq} \binom{n-kq}{k} 2^{n-1-k(q+1)}. \quad (2.19)$$

Le cas particulier $q = 3$, donne

$$\begin{aligned}\sum_{i+2j+3k=n} \binom{i+j+k}{i, j, k} &= \sum_{2i+3j \leq n} \binom{n-i-2j}{i+j} \binom{i+j}{i} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \frac{n-2k}{n-3k} (-1)^k \binom{n-3k}{k} 2^{n-1-4k}.\end{aligned}$$

2.5 Un analogue : les coefficients *bi^qnomiaux*

2.5.1 Introduction

Les coefficients *bi^qnomiaux* sont une extension naturelle des coefficients binomiaux classiques. Pour une introduction appropriée de ces nombres, on renvoie le lecteur à Smith et

Hogatt [301, 1979], Bollinger [69, 1986] et Andrews et Baxter [13, 1987]. Ces coefficients sont définis de la manière suivante :

Soient $q \geq 1$ et $L \geq 0$ deux entiers ; pour un entier $k = 0, 1, \dots, qL$, le coefficient bi^qnomial $\binom{L}{k}_q$ est défini comme étant le k -ième coefficient dans le développement

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^q)^L = \sum_{k \geq 0} \binom{L}{k}_q x^k, \quad (2.20)$$

avec $\binom{L}{k}_1 = \binom{L}{k}$ ($\binom{L}{k}$ étant le coefficient binomial classique) et $\binom{L}{k}_q = 0$ pour $k > qL$. Une expression via les coefficients binomiaux classiques est donnée par

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_q = k} \binom{L}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{q-1}}{j_q}. \quad (2.21)$$

Comme propriétés déjà bien établies, on a

la relation de symétrie

$$\binom{L}{k}_q = \binom{L}{qL - k}_q, \quad (2.22)$$

la relation de récurrence longitudinale

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{m=0}^q \binom{L-1}{k-m}_q, \quad (2.23)$$

et la relation de récurrence diagonale

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{m=0}^L \binom{L}{m} \binom{m}{k-m}_{q-1}. \quad (2.24)$$

Ces coefficients, comme c'est le cas pour les coefficients binomiaux classiques, vérifient via (2.23) un équivalent du triangle de Pascal : le " q -triangle de Pascal", voir les tables : 1, 2 et 3 ci dessous. Pour les premières valeurs de ces q -triangles, on peut consulter SLOANE [300] sous A027907 pour $q = 2$, sous A008287 pour $q = 3$, et sous A035343 pour $q = 4$.

Pour illustrer la relation de récurrence longitudinale, nous présentons les triangles des coefficients bitrinomiaux, biquadrinomiaux et bipentanomiaux.

Table 1 : Triangle des coefficients bitrinomiaux : $\binom{L}{k}_2$

$L \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	3	2	1						
3	1	3	6	7	6	3	1				
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1		
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1

Table 2 : Triangle des coefficients *biquadrinomiaux* : $\binom{L}{k}_3$

$L \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	1	1	1	1								
2	1	2	3	4	3	2	1					
3	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1		
4	1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4

Table 3 : Triangle des coefficients *bipentanomiaux* : $\binom{L}{k}_4$

$L \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1													
1	1	1	1	1	1									
2	1	2	3	4	5	4	3	2	1					
3	1	3	6	10	15	18	19	18+	15+	10+	6+	3+	1	
4	1	4	10	20	35	52	68	80	85	80	68	=52	35	20 ...

Plusieurs extensions et commentaires ont investi la littérature :

Brondarenko [79, 1993] a donné une interprétation combinatoire des $\text{bi}^q\text{nomiaux}$ $\binom{L}{k}_q$ comme étant le nombre de manières de distribuer " k " boules dans " L " urnes de sorte que chaque urne contienne au plus " q " boules.

En s'appuyant sur cet argument combinatoire, on peut facilement établir la relation suivante

$$\begin{aligned}
 \binom{L}{k}_q &= \sum_{L_1+2L_2+\dots+qL_q=k} \binom{L}{L_1} \binom{L-L_1}{L_2} \dots \binom{L-L_1-\dots-L_{q-1}}{L_q} \\
 &= \sum_{L_1+2L_2+\dots+qL_q=k} \binom{L}{L_1, L_2, \dots, L_{q-1}, L-L_1-L_2-\dots-L_{q-1}}. \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Pour une approche analytique ou calculatoire de l'identité (2.25), consulter Bollinger [69, 1986].

Andrews et Baxter [13, 1987] ont considéré l'extension aux " q -analogues" des coefficients $\text{bi}^q\text{nomiaux}$ (voir aussi [346, 1997] pour une bibliographie exhaustive). Ils ont défini le coefficient q -multinomial de la manière suivante

$$\left[\begin{matrix} L \\ k \end{matrix} \right]_q^{(p)} = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_q=k} q^{\sum_{l=1}^{q-1} (L-j_l)j_{l+1} - \sum_{l=q-p}^{q-1} j_{l+1}} \left[\begin{matrix} L \\ j_1 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} j_1 \\ j_2 \end{matrix} \right] \dots \left[\begin{matrix} j_{q-1} \\ j_q \end{matrix} \right],$$

où

$$\left[\begin{matrix} L \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} L \\ k \end{matrix} \right]_q = \begin{cases} (q)_L / (q)_k (q)_{L-k} & \text{si } 0 \leq k \leq L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est le coefficient q -binomial classique, avec $(q)_k = \prod_{m=1}^k (1 - q^m) / (1 - q^{k+1})$, appelée " q -série". Cette définition est motivée par la relation (2.21).

Une autre extension de ces coefficients a aussi été introduite par Schilling et Warnaar [285, 1998], il s'agit des coefficients "supernomiaux". Ils sont définis comme étant les coefficients de x^k dans le développement de $\prod_{j=1}^N (1 + x + \dots + x^j)^{L_j}$.

Un raffinement aux coefficients q -multinomiaux a été considéré (pour le cas trinomial) par Warnaar [347, 2001].

Barry [20, 2006] donne une généralisation du triangle de Pascal de la manière suivante

$$\binom{n}{k}_{a(n)} := \prod_{j=1}^k a(n-j+1) / a(j)$$

où $a(n)$ est une suite d'entiers bien déterminée.

Kallas [188, 2006] et Noe [256, 2006] donnent aussi une extension du triangle de Pascal, en considérant le coefficient de x^k dans le développement de $(a_0 + a_1x + \dots + a_qx^q)^L$.

2.5.2 Une expression mono-sommatoire des coefficients bi^qnomiaux

Si on désigne par x_i le nombre de boules dans l'urne i , l'interprétation combinatoire de Brondarenko équivaut à l'évaluation du nombre de solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_L = a, \\ 0 \leq x_1, \dots, x_L \leq q. \end{cases} \quad (2.26)$$

En considérant le système (2.26) pour $t \in]-1, 1[$, on obtient (voir aussi Comtet [102, Vol.1, p. 92 (pb 16).])

$$\sum_{k \geq 0} \binom{L}{k}_q t^k = (1 + t + \dots + t^q)^L = \sum_{0 \leq x_1, \dots, x_L \leq q} t^{x_1 + \dots + x_L},$$

et aussi

$$\begin{aligned} (1 + t + \dots + t^q)^L &= (1 - t^{q+1})^L (1 - t)^{-L} \\ &= \left(\sum_{j=0}^L (-1)^j \binom{L}{j} t^{j(q+1)} \right) \left(\sum_{j \geq 0} \binom{j+L-1}{L-1} t^j \right). \end{aligned}$$

Par identification, on aboutit au théorème suivant :

Théorème 14 *L'identité suivante est satisfaite*

$$\binom{L}{k}_q = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(q+1) \rfloor} (-1)^j \binom{L}{j} \binom{k - j(q+1) + L - 1}{L-1}. \quad (2.27)$$

Cette relation explicite est importante, au sens où elle permet d'exprimer les coefficients $bi^qnomiaux$ avec un unique symbole de sommation, contrairement aux relations (2.21), (2.23) et (2.24).

En 1711, de Moivre (voir [252, 1731] ou [251, 1756 3ième ed. p.39]) résout le système (2.26) comme étant le membre de droite de la relation (2.27).

Corollaire 15 *L'identité suivante a lieu*

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{j} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2n-3j-1}{n-1}.$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la relation (2.23) dans le Théorème 14 pour $q = 2$ et $k = L = n$.
□

2.5.3 Coefficients $bi^qnomiaux$ et multibonacci

Nous sommes aptes, à présent, à justifier la présence des coefficients $bi^qnomiaux$ dans ce chapitre. Pour cela, considérons la suite "multibonacci" $(\Phi_n^{(q)})_{n \geq -q}$, pour $q \geq 1$. On définit (noter la légère différence de notation avec (2.16) à cause du décalage d'indices)

$$\begin{cases} \Phi_{-q}^{(q)} = \dots = \Phi_{-2}^{(q)} = \Phi_{-1}^{(q)} = 0, \\ \Phi_0^{(q)} = 1, \\ \Phi_n^{(q)} = \Phi_{n-1}^{(q)} + \Phi_{n-2}^{(q)} + \dots + \Phi_{n-q-1}^{(q)} \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

On a déjà établi, relation (2.17), ce qui suit

$$\Phi_n^{(q-1)} = \sum_{k_1+2k_2+\dots+qk_q=n} \binom{k_1+k_2+\dots+k_q}{k_1, k_2, \dots, k_q},$$

ainsi que pour $n \geq 1$, voir relation (2.18)

$$\Phi_n^{(q-1)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} (-1)^k \frac{n-k(q-1)}{n-kq} \binom{n-kq}{k} 2^{n-1-k(q+1)},$$

pour aboutir à l'identité, voir relation (2.19)

$$\sum_{k_1+\dots+qk_q=n} \binom{k_1+\dots+k_q}{k_1, \dots, k_q} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(q+1) \rfloor} (-1)^k \frac{n-k(q-1)}{n-kq} \binom{n-kq}{k} 2^{n-1-k(q+1)}.$$

C'est un analogue de notre situation où on écrit une expression multi-sommatoire avec un unique symbole de sommation. Vue la ressemblance frappante avec la relation (2.25), ceci nous incite à établir une jonction entre la suite multibonacci et la suite des coefficients $bi^qnomiaux$, à travers le théorème suivant :

Théorème 16 *La connexion entre les coefficients binomiaux et la suite multibonacci est donnée par*

$$\Phi_n^{(q)} = \sum_{l=0}^{qm-r} \binom{n-l}{l}_q, \quad (2.28)$$

où m est donné par l'algorithme étendu de la division euclidienne (voir par exemple Lascoux [202, 2005]) : $n = m(q+1) - r$, $0 \leq r \leq q$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(q)} &= \sum_{k_1+2k_2+\dots+(q+1)k_{q+1}=n} \binom{k_1+k_2+\dots+k_{q+1}}{k_1, k_2, \dots, k_{q+1}} \\ &= \sum_{L \geq 0} \sum_{k_1+2k_2+\dots+(q+1)k_{q+1}=n} \binom{L}{k_1, k_2, \dots, k_{q+1}} \\ &= \sum_{L \geq 0} \sum_{k_2+2k_3+\dots+qk_{q+1}=n-L} \binom{L}{k_1, k_2, \dots, k_{q+1}} \\ &= \sum_{L \geq \frac{n}{q+1}}^n \binom{L}{n-L}_q. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'unique écriture de n , donnée par l'algorithme étendu de la division euclidienne : $n = m(q+1) - r$, $0 \leq r < q+1 \rightarrow \frac{n}{q+1} = m - \frac{r}{q+1}$, ce qui donne

$$\Phi_n^{(q)} = \sum_{k=0}^{qm-r} \binom{m+k}{qm-r-k}_q = \sum_{l=0}^{qm-r} \binom{m+k}{(q+1)k+r}_q = \sum_{l=0}^{qm-r} \binom{n-l}{l}_q.$$

□

Comme conséquence immédiate du Théorème 16, on établit les identités combinatoires suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_{(q+1)m}^{(q)} &= \sum_{l=0}^{qm} \binom{(q+1)m-l}{l}_q = \sum_{k=0}^{qm} \binom{m+k}{(q+1)k}_q, \\ \Phi_{(q+1)m-1}^{(q)} &= \sum_{l=0}^{qm-1} \binom{(q+1)m-l-1}{l}_q = \sum_{k=0}^{qm} \binom{m+k}{(q+1)k+1}_q, \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_{(q+1)m-r}^{(q)} &= \sum_{l=0}^{qm-r} \binom{(q+1)m-l-r}{l}_q = \sum_{k=0}^{qm} \binom{m+k}{(q+1)k+r}_q. \end{aligned}$$

Pour $q = 1$, on retrouve la suite de Fibonacci classique ($\Phi_n = F_{n+1}$)

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} & (n \geq 1), \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons l'identité bien connue déjà établie en (2.15)

$$F_{n+1} = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-l}{l}.$$

2.6 Coefficients *bi^qnomiaux* et polynômes exponentiels de Bell partiels

Dans cette section, on met en évidence un lien entre les coefficients bi^qnomiaux et les polynômes de Bell (exponentiels) partiels $B_{n,L}(t_1, t_2, \dots)$ définis (voir Comtet [102, 1970, p. 144]) comme suit :

$$\frac{1}{L!} \left(\sum_{m \geq 1} \frac{t_m}{m!} x^m \right)^L = \sum_{n \geq L} B_{n,L} \frac{x^n}{n!}, \quad L = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Une expression explicite de tels polynômes est donnée par

$$B_{n,L}(t_1, t_2, \dots) = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \dots = n \\ k_1 + k_2 + \dots = L}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots$$

Il est à noter que dans cette expression, le nombre de variables est fini, en accord avec $k_1 + 2k_2 + \dots = n$.

Voici quelques valeurs particulières de $B_{n,L}$:

$$\begin{aligned} B_{n,L}(1, 1, 1, \dots) &= \left\{ \begin{matrix} n \\ L \end{matrix} \right\} \text{ nombres de Stirling de seconde espèce,} \\ B_{n,L}(0!, 1!, 2!, \dots) &= \left[\begin{matrix} n \\ L \end{matrix} \right] \text{ nombres de Stirling de première espèce,} \\ B_{n,L}(1!, 2!, 3!, \dots) &= \frac{n!}{L!} \binom{n-1}{n-L}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dans [1, 2005], Abbas et Bouroubi donnent des valeurs complémentaires de $B_{n,L}$.

Le lien avec les coefficients bi^qnomiaux est donné par le théorème suivant :

Théorème 17 *L'identité suivante a lieu*

$$B_{n,L}(1!, 2!, \dots, (q+1)!, 0, \dots) = \frac{n!}{L!} \binom{L}{n-L}_q. \quad (2.31)$$

Preuve. En posant dans (2.29) $t_m = m!$ pour $1 \leq m \leq q+1$ et zéro dans les autres cas, on obtient

$$(x + \dots + x^{q+1})^L = L! \sum_{n-L \geq 0} B_{n,L}(1!, 2!, \dots, (q+1)!, 0, \dots) \frac{x^n}{n!},$$

ce qui nous mène à

$$\sum_{k \geq 0} \binom{L}{k}_q x^k = \sum_{n-L \geq 0} \frac{L!}{n!} B_{n,L}(1!, 2!, \dots, (q+1)!, 0, \dots) x^{n-L}.$$

□

Corollaire 18 Soient $q \geq 1$ et $L \geq 0$ deux entiers, et $k \in \{0, 1, \dots, qL\}$. Pour $q \geq k$, on a l'identité suivante

$$\binom{L}{k}_q = \binom{L+k-1}{k}.$$

Preuve. En utilisant le fait que $B_{n,L}(1!, 2!, \dots, (q+1)!, 0, \dots) = B_{n,L}(1!, 2!, 3!, \dots)$ pour $q+1 \geq n-L+1$, on obtient $\binom{L}{n-L}_q = \binom{n-1}{n-L}$ pour $q \geq n-L$. On conclut en posant $k = n-L$. □

2.7 Produit de convolution de la distribution uniforme discrète

Cette section se distingue des autres car elle traite un aspect probabiliste des coefficients binomiaux. On met en exergue une liaison entre ces derniers et la convolée de la loi discrète uniforme. Le membre de droite de l'identité (2.27) est une expression qui caractérise cette convolée. En effet, pour $q, L \in \mathbb{N}$, désignons par U_q^{*L} la L -ième convolée de la discrète uniforme

$$U_q := \frac{1}{q+1} (\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_q) \quad (\delta_a \text{ est la distribution de Dirac}),$$

alors pour $k \in \mathbb{N}$ (voir de Moivre [252, 1731] ou [146, 1998]), sa loi de probabilité est donnée par

$$P(U_q^{*L} = k) = \frac{1}{(q+1)^L} \sum_{j=0}^{\lfloor k/(q+1) \rfloor} (-1)^j \binom{L}{j} \binom{k - (q+1)j + L - 1}{L-1}. \quad (2.32)$$

En combinant le Théorème 14 et la relation (2.32), on obtient le résultat suivant :

Corollaire 19 En utilisant les notations précédentes, on a

$$P(U_q^{*L} = k) = (q+1)^{-L} \binom{L}{k}_q.$$

Remarque 20 Il est important de constater que les coefficients *bi^qnomiaux* peuvent être considérés comme étant le nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement simple $\{k\}$.

Il est aisé de voir que la distribution de $U_q^{\star L}$ est symétrique via la relation (2.22).

Corollaire 21 Les identités suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{qL} k \binom{L}{k}_q &= (q+1)^L \frac{qL}{2}, \\ \sum_{k=0}^{qL} k^2 \binom{L}{k}_q &= (q+1)^L \frac{qL}{2} \left(\frac{qL}{2} + \frac{q+2}{6} \right), \\ \sum_{k=0}^{qL} k^3 \binom{L}{k}_q &= (q+1)^L \left(\frac{qL}{2} \right)^2 \left(\frac{qL}{2} + \frac{q+2}{2} \right). \end{aligned}$$

Plus généralement, pour $m \geq 1$, l'identité suivante est satisfaite

$$\sum_{k=0}^{qL} k^m \binom{L}{k}_q = (q+1)^L \sum_{i_1+i_2+\dots+i_L=m} \binom{m}{i_1, i_2, \dots, i_L} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_L}$$

où u_i est le i -ième moment de la variable aléatoire U_q .

Preuve. Il suffit d'évaluer l'espérance de $U_q^{\star L}$, d'une part en utilisant sa distribution, d'autre part en exploitant l'espérance de la somme de distributions uniformes. $\square$

2.8 Les coefficients *multi^qnomiaux*

Ce paragraphe a pour premier¹ objectif la justification de l'appellation : coefficients *bi^qnomiaux* et *multi^qnomiaux*. La littérature anglo-saxonne ne traite que du premier cas qui est dénommé "*ordinary multinomials*".

Soient $q \geq 1$ et $L \geq 0$ deux entiers ; pour tout entier $a = 0, 1, \dots, qL$, le coefficient *bi^qnomial* $\binom{L}{a}_q$ est donné par

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^q)^L = \sum_{a \geq 0} \binom{L}{a}_q x^a.$$

On peut le réécrire de la manière suivante, en substituant à x le quotient x/y :

$$(y^q + y^{q-1}x + y^{q-2}x^2 + \dots + y^2x^{q-2} + yx^{q-1} + x^q)^L = \sum_{a+b=Lq} \binom{L}{a, b}_q x^a y^b.$$

¹Le second objectif étant l'étude des propriétés relatives à ces coefficients.

Plus généralement, on peut étudier les propriétés des coefficients *triq nomiaux*

$$\left(\sum_{i+j+k=q} x^i y^j z^k \right)^L = \sum_{a+b+c=Lq} \binom{L}{a, b, c}_q x^a y^b z^c$$

ou encore les coefficients *multiq nomiaux*

$$\left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=q} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m} \right)^L = \sum_{l_1+l_2+\dots+l_m=Lq} \binom{L}{l_1, l_2, \dots, l_m}_q x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_m^{l_m}.$$

2.9 Puissances successives d'une matrice carrée

Dans cette section, on se propose de présenter une alternative à la méthode de Jordan pour calculer les puissances successives d'une matrice carrée. L'approche que nous adoptons a l'avantage d'être élémentaires, sans nécessité de calculer les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres de la matrice en question (que l'on obtient souvent par résolution numérique via le polynôme caractéristique).

Théorème 22 Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathcal{A})$ et $P(X) = X^m - a_1 X^{m-1} - \dots - a_{m-1} X - a_m$ le polynôme caractéristique de A . Définissons $A_0, A_1, \dots, A_{m-1} \in \mathcal{M}_m(\mathcal{A})$ par

$$A_k = - \sum_{i=0}^k a_i A^{k-i}, \quad (0 \leq k \leq m-1), \quad (2.33)$$

et la suite $(y_n)_{n > -m}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ par

$$y_n = \sum_{k_1+2k_2+\dots+mk_m=n} \binom{k_1+k_2+\dots+k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}, \quad (n > -m).$$

Alors pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$A^n = y_n A_0 + y_{n-1} A_1 + \dots + y_{n-m+1} A_{m-1}. \quad (2.34)$$

Preuve. Posons pour $0 \leq k \leq m$,

$$P_k(X) = - \sum_{i=0}^k a_i X^{k-i}, \quad \text{avec } a_0 = -1. \quad (2.35)$$

Pour $0 \leq k \leq m-1$, on a

$$X P_k(X) = P_{k+1}(X) + a_{k+1}. \quad (2.36)$$

La relation (2.35) montre que le degré de P_k est k pour $0 \leq k \leq m$. Ce qui signifie que $(P_0, P_1, \dots, P_{m-1})$ constitue une base du $\mathcal{A}$ -module libre $\mathcal{A}_{m-1}[X]$ formé des polynômes de $\mathcal{A}[X]$ de degré $\leq m-1$.

Il en résulte qu'en désignant par R_n , $n \geq 0$, le reste de la division euclidienne de X^n par le polynôme unitaire P_m , R_n étant un polynôme de $\mathcal{A}_{m-1}[X]$, R_n s'écrit comme une combinaison linéaire des polynômes $P_0, P_1, \dots$ et P_{m-1} .

Pour tout $n \geq 0$, il existe ainsi une unique famille $(\alpha_{n,k})_{0 \leq k \leq m-1}$ telle que

$$R_n = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n,k} P_k. \quad (2.37)$$

Pour $0 \leq n \leq m-1$, on a

$$R_n(X) = X^n,$$

X^n est, dans ce cas, une combinaison linéaire de $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$ et on a

$$\begin{cases} \alpha_{0,0} = 1, \\ \alpha_{n,k} = 0 \end{cases} \quad (n < k \leq m-1). \quad (2.38)$$

Les relations (2.36) et (2.37) entraînent

$$\begin{aligned} XR_n(X) &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n,k} (P_{k+1}(X) + a_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} \alpha_{n,k} + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_{n,k-1} P_k(X) + \alpha_{n,m-1} P_m(X). \end{aligned}$$

Il en résulte que le polynôme

$$R_{n+1}(X) - XR_n(X) - \alpha_{n,m-1} P_m(X),$$

est de degré $\leq m-1$, divisible par le polynôme P_m qui est de degré m .

Ce polynôme est donc nul ainsi que toutes ses composantes dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_{m-1})$. Cela nous fournit les relations suivantes pour $n \geq 0$

$$\alpha_{n+1,0} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1} \alpha_{n,k}, \quad (n \geq 0), \quad (2.39)$$

$$\alpha_{n+1,k} = \alpha_{n,k-1} \quad (1 \leq k \leq m-1). \quad (2.40)$$

Posons pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$z_n = \begin{cases} \alpha_{n,0} & (n \geq 0), \\ 0 & (n < 0). \end{cases} \quad (2.41)$$

On vérifie aisément que pour tout entier $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq m-1$, on a

$$\alpha_{n,k} = z_{n-k}. \quad (2.42)$$

En effet, si $n \geq k$ cette relation résulte de (2.40) et (2.41), sinon $0 \leq n < k \leq m-1$ et elle résulte alors de (2.39) et (2.41). Compte tenu de cette relation, de (2.40), (2.41) et (2.42), on peut affirmer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfait la relation

$$\begin{cases} z_n = 0 & (n < 0), \\ z_0 = 1, \\ z_n = a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-2} + \cdots + a_{m-1} z_{n-m+1} + a_m z_{n-m} & (n \geq 1). \end{cases}$$

On sait alors d'après le Théorème 7, que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$y_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=n} \binom{k_1+k_2+\cdots+k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}.$$

Cette dernière identité, combinée avec le Théorème de Cayley-Hamilton et les relations (2.37), (2.35), (2.33) et (2.42), donne

$$A^n = R_n(A) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{n,i} P_i(A) = \sum_{i=0}^{m-1} z_{n-i} A_i = \sum_{i=0}^{m-1} y_{n-i} A_i.$$

ce qui achève la preuve de (2.34). □

2.10 Applications et extensions

Comme application du Théorème 22, nous allons présenter quelques identités combinatoires.

2.10.1 Une belle identité relative aux coefficients binomiaux via les blocs de Jordan

Corollaire 23 *Pour tout entier n positif, on a l'identité combinatoire suivante*

$$\sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=n} \binom{k_1+\cdots+k_m}{k_1, \dots, k_m} (-1)^{n-\sum_i k_i} \binom{m}{m-1}^{k_1} \cdots \binom{m}{0}^{k_m} = \binom{n+m-1}{m-1}, \quad (2.43)$$

où $\binom{n+m-1}{m-1}$ correspond au nombre de combinaisons avec répétitions de m éléments pris parmi n .

Preuve. Soit J_m le bloc de Jordan $m \times m$

$$J_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de J_m vaut $(X - 1)^m$, de plus on a

$$J_m^n = \left(\binom{n}{j-i} \right)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

En appliquant le Théorème 22 pour $A = J_m$, et en considérant le terme d'indice $(1, m)$ dans les deux membres de l'égalité (2.34), on obtient la relation

$$\binom{n}{m-1} = y_{n-(m-1)},$$

qui nous mène au résultat. $\square$

Pour $m = 2, 3$ et 4 , le corollaire 23 permet d'écrire les identités combinatoires suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{2i \leq n} (-1)^i \binom{n-i}{i} 2^{n-2i} &= n+1, \\ \sum_{2i+3j \leq n} (-1)^i \binom{n-i-2j}{i+j} \binom{i+j}{i} 3^{n-i-3j} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \\ \sum_{2i+3j+4k \leq n} (-1)^{i+k} \binom{n-i-2j-3k}{i+j+k} \binom{i+j+k}{i+j} \binom{i+j}{i} 2^{2n-3i-4j-8k} 3^i \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Comme J. Mc Laughlin et B. Sury [204, Corollaire 6], on peut retrouver le Corollaire 23 grâce au résultat suivant :

Corollaire 24 ([204, Théorème 1]) *Soient $x_1, x_2, \dots, x_m$ des éléments d'un anneau commutatif unitaire $\mathcal{A}$ et*

$$s_k := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m.$$

Alors pour tout entier positif n , on a

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=n} \binom{k_1+\cdots+k_m}{k_1, \dots, k_m} (-1)^{n-k_1-\cdots-k_m} s_1^{k_1} \cdots s_m^{k_m}.$$

Preuve. Procédons à la démonstration de ce résultat en utilisant le Théorème 7. Pour $n > -m$ et $1 \leq l \leq m$, considérons

$$q_n^{(l)} := \sum_{k_1+k_2+\dots+k_l=n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_l^{k_l}, \text{ et } q_n := q_n^{(m)}.$$

Soit $E : \beta_n \mapsto \beta_{n+1}$ l'opérateur shift qui agit sur les suites $(\beta_n)_n$ et, pour $1 \leq l \leq m$, soit Q_l l'opérateur défini par

$$Q_l := (E - x_1)(E - x_2) \dots (E - x_l).$$

Notons que

$$Q_m = E^m - s_1 E^{m-1} + \dots + (-1)^m s_m.$$

Alors, pour $n \geq 1$ et $2 \leq l \leq m$, on a

$$(E - x_l) \cdot q_{n-l}^{(l)} = q_{n-(l-1)}^{(l-1)}.$$

Ce qui donne

$$Q_m \left(q_{n-m}^{(m)} \right) = Q_{m-1} \left(q_{n-(m-1)}^{(m-1)} \right) = \dots = Q_1 \left(q_{n-1}^{(1)} \right) = 0.$$

Ainsi

$$q_n = s_1 q_{n-1} - s_2 q_{n-2} + \dots + (-1)^{m-1} s_m q_{n-m}, \quad (n \geq 1). \quad (2.44)$$

De la définition de q_n , on déduit

$$q_n = 0 \quad (n < 0 \text{ et } q_0 = 1). \quad (2.45)$$

Enfin, on applique le Théorème 7 à la suite $(q_n)_{n > -m}$. □

Le corollaire 23 se déduit immédiatement en posant $x_i = 1$ pour tout i dans le Corollaire 24.

2.10.2 Sur les traces de J. J. Sylvester

Le théorème suivant est une extension du résultat de J. J. Sylvester [324], redécouvert par J. D. Louck [216], repris par G. Bhatnagar [67], Z-H. Sun [318] et J. Mc Laughlin et B. Sury [204, Théorème 3].

Théorème 25 *On se donne K un corps de caractéristique zéro, et $x_1, x_2, \dots, x_m$ des éléments de K . On a alors, dans $K(x_1, x_2, \dots, x_m)$, l'identité suivante :*

$$\sum_{k_1+\dots+k_m=n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} = \sum_{i=1}^m \frac{x_i^{n+m-1}}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Preuve. Pour $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \in K(x_1, x_2, \dots, x_m)$, notons $V(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ le déterminant de Vandermonde associé

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) = \det(\gamma_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq m}.$$

Il est bien établi que

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\gamma_j - \gamma_i).$$

En utilisant la relation (2.44), la suite $(q_n)_{n \geq -m}$ définie par

$$q_n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

est une suite récurrente de polynôme caractéristique

$$X^m - s_1 X^{m-1} + \dots + (-1)^m s_m = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_m).$$

Ce dernier admet m racines distinctes $x_1, x_2, \dots, x_m$. On en déduit qu'il existe m éléments $A_i = A_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \in K(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $1 \leq i \leq m$, tels que

$$q_n = \sum_{i=1}^m A_i x_i^n \quad (n \geq -m).$$

Les conditions initiales données par (2.44) nous mènent au système de Cramer suivant

$$\sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x_i^j} = \delta_{j,0} \quad (0 \leq j \leq m-1).$$

La résolution de ce dernier donne

$$A_i = \frac{V\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_{i-1}}, 0, \frac{1}{x_{i+1}}, \dots, \frac{1}{x_m}\right)}{V\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_{i-1}}, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_{i+1}}, \dots, \frac{1}{x_m}\right)} = \frac{x_i^{m-1}}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}, \quad (1 \leq i \leq m).$$

Ce qui achève la démonstration. □

2.10.3 Une identité "duale" relative aux binomiaux : les nombres de Stirling

Nous allons consacrer cette section à une application aux nombres de Stirling de première et de deuxième espèces, ce qui permet d'aboutir à une relation duale à l'identité donnée par (2.43).

Pour $n \geq 0$, avec les notations de [140], les nombres de Stirling de première espèce, notés $[n]$, et les nombres de Stirling de seconde espèce, notés $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, sont définis par les équations

$$X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k, \quad (2.46)$$

avec

$$X^{\overline{n}} := \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ X(X+1)(X+2) \cdots (X+n-1) & (n \geq 1), \end{cases}$$

et

$$X^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} X^{\underline{k}}, \quad (2.47)$$

avec

$$X^{\underline{k}} := \begin{cases} 1 & (k = 0), \\ X(X-1)(X-2) \cdots (X-k+1) & (k \geq 1). \end{cases}$$

Il est bien établi [102, pp38, vol. 2] que

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Le Théorème 25 et le Corollaire 24 donnent

$$\sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=n} \binom{k_1+\cdots+k_m}{k_1, \dots, k_m} (-1)^{n-k_1-\cdots-k_m} s_1^{k_1} \cdots s_m^{k_m} = \sum_{i=1}^m \frac{x_i^{n+m-1}}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}. \quad (2.48)$$

Si on pose $x_k = -(k-1)$ pour $1 \leq k \leq m$, on obtient ainsi

$$s_k = (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ m-k \end{bmatrix}, \quad (1 \leq k \leq m),$$

et en utilisant (2.48), on aboutit au résultat suivant

Corollaire 26 *Pour tous entiers m et n , on a*

$$\sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=n} \binom{k_1+\cdots+k_m}{k_1, \dots, k_m} (-1)^{n-\sum_i k_i} \begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}^{k_1} \cdots \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}^{k_m} = \left\{ \begin{smallmatrix} n+m-1 \\ m-1 \end{smallmatrix} \right\}. \quad (2.49)$$

Notons que le Théorème 25, permet d'obtenir la relation suivante, citée dans [102, pp 42, vol. 2]

Pour tous entiers m et n , on a

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n+m-1 \\ m-1 \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k_1+\cdots+k_{m-1}=n} 1^{k_1} 2^{k_2} \cdots (m-1)^{k_{m-1}}.$$

Pour $m = 3, 4$ et 5 , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{2i \leq n} (-1)^i \binom{n-i}{i} 2^i 3^{n-2i} &= 2^{n+1} - 1, \\ \sum_{2i+3j \leq n} (-1)^i \binom{n-i-2j}{i+j} \binom{i+j}{i} 6^{n-2i-2j} 11^i &= \frac{3^{n+2} - 2^{n+3} + 1}{2}, \\ \sum_{2i+3j+4k \leq n} (-1)^{i+k} \binom{n-i-2j-3k}{i+j+k} \binom{i+j+k}{i+j} \binom{i+j}{i} 2^{n-2i-2j-k} 3^k 5^{n-i-j-4k} 7^i \\ &= \frac{4^{n+3} - 3^{n+4} + 3 \cdot 2^{n+3} - 1}{6}. \end{aligned}$$

Corollaire 27 Soient n un entier positif et x, y deux indéterminées. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{2i+3j+4k \leq n} (-1)^{i+k} \binom{n-i-2j-3k}{i+j+k} \binom{i+j+k}{i+j} \binom{i+j}{i} (2x+2y)^{n-2i-2j-4k} \times \\ \times (xy)^{j+2k} (x^2+4xy+y^2)^i = \frac{(n+1)(x^{n+3}-y^{n+3}) - (n+3)xy(x^{n+1}-y^{n+1})}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

Corollaire 28 Soient n un entier positif et x, y deux indéterminées. On a

$$\begin{aligned} \sum_{2i+3j+4k \leq n} (-1)^{i+k} \binom{n-i-2j-3k}{i+j+k} \binom{i+j+k}{i+j} \binom{i+j}{i} \times \\ \times (3x+y)^{n-2i-3j-4k} x^{i+2j+3k} y^k (3x+3y)^i (x+3y)^j \\ = \frac{(n+1)(n+2)(x^{n+3}-y^{n+3}) - (n+3)y[n(x^{n+2}-y^{n+2}) + (n+2)x^{n+1}(x-y)]}{2(x-y)^3}. \end{aligned}$$

Preuve des Corollaires 27 et 28. Il suffit de poser dans le Corollaire 23, $x_1 = x_2 = x$ et $x_3 = x_4 = y$ pour obtenir le Corollaire 27, et $x_1 = x_2 = x_3 = x$ avec $x_4 = y$ pour obtenir le Corollaire 28. $\square$

Chapitre 3

Unimodalité de suites liées aux coefficients binomiaux et *bi^qnomiaux*

“Combinatorialists love to prove that counting sequences are unimodal.”

D. Zeilberger

3.1 Introduction

Pour ce qui concerne le sens de variation d’une suite numérique, la première notion qui généralise celle de la monotonie est la notion d’unimodalité, elle est le thème principal du second chapitre de la thèse. Elle est définie comme suit :

Définition 29 Soit $(v_k)_{0 \leq k \leq m}$ une suite finie réelle positive avec $m \geq 2$. On dit qu’elle est unimodale s’il existe un entier $l \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que la suite (v_k) est croissante pour $k \in \{0, \dots, l\}$ et elle est décroissante pour $k \in \{l, \dots, m\}$. Un tel entier l est appelé mode de la suite $(v_k)_{0 \leq k \leq m}$.

La suite $(v_k)_{0 \leq k \leq m}$ est strictement log-concave (SLC en abrégé) si elle vérifie la propriété

$$v_k^2 > v_{k-1}v_{k+1}, \quad (1 \leq k \leq m-1).$$

Il est facile de constater que, si la suite $(v_k)_{0 \leq k \leq m}$ est SLC, alors elle est unimodale et elle atteint son maximum soit en un unique point (dans ce cas, on dit qu’elle possède un pic), soit en deux points consécutifs (dans ce dernier cas, on dit qu’elle possède un plateau à deux points).

Le théorème suivant, dû à Newton (voir [148]), est souvent utile pour l’étude de l’unimodalité d’une suite finie réelle positive.

Théorème 30 Soit $(v_k)_{0 \leq k \leq m}$ une suite finie réelle positive et $G(x) = \sum_{k=0}^m v_k x^k$ son polynôme générateur. Si toutes les racines de $G(x)$ sont réelles, alors la suite $(v_k)_{0 \leq k \leq m}$ est SLC.

Les suites unimodales apparaissent dans beaucoup de domaines mathématiques, principalement en algèbre, en combinatoire, en informatique, en probabilité, en statistique et en géométrie. De plus, les techniques utilisées pour prouver l'unimodalité sont d'une diversité hors du commun, et dans beaucoup de cas, non évidentes. Des surveys concernant l'unimodalité ont été écrits, on pourra consulter dans l'ordre chronologiques les papiers de :

- Richard P. Stanley [313], intitulé "Log concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics and geometry" (1980).
- S. Dharmadhikari et K. Joak-Dev [105], intitulé "Unimodality, Convexity and Applications" (ouvrage) (1988).
- Michel Balazard [16], intitulé "Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres" (1990).
- Francesco Brenti [75], intitulé "Log concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics and geometry : an update" (1994).

Une bonne introduction se trouve aussi dans les ouvrages de Comtet [102] et Wilf [352].

Nous allons lister quelques exemples de suites unimodales :

1. La suite des coefficients du polynôme $\prod_{k=1}^n (1 + x^k)$.
2. Les suites de nombres de Stirling de première et de seconde espèce $([n]_k)_k$ et $(\{n\}_k)_k$.
3. Les suites $(A(n, k))_k$ de partitions de n en k parts, et $(B(n, k))_k$ de partitions de n en k parts distinctes, pour n suffisamment grand.
4. La suite de nombres $(A(n, k, m))_m$ de partitions de n en k parts dont la plus grande est au plus égale à m .
5. La suite des coefficients du binômes de Newton $\binom{n}{k}$ (est trivialement unimodale).

Il est à noter que la suite constituée des nombres de Stirling de première espèce admet comme mode l'entier le plus proche du nombre harmonique $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Ce résultat surprenant a été démontré par J. H. Hammersley [147]. De plus P. Erdős a montré que H_n demeure un pic pour $n \geq 3$.

3.2 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal I : suites liées aux nombres de Fibonacci et de Lucas

S. Tanny et M. Zuker [326] ont prouvé que la suite combinatoire $(\binom{n-k}{k})_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$, liée aux nombres de Fibonacci, est strictement log-concave et donc unimodale avec pic ou plateau à deux points. Ils ont aussi précisé le point où le maximum est atteint et ont prouvé qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles cette suite possède un plateau à deux points. M. Benoumhani [57] démontre un théorème d'unimodalité pour une large famille de suites. Il tente d'appliquer son théorème à la suite combinatoire étudiée par S. Tanny et M. Zuker ainsi qu'à la suite $(\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k})_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ liée aux nombres de Lucas. Nous nous proposons d'apporter des compléments conséquents à son étude ainsi que des précisions.

Dans [326], S. Tanny et M. Zuker ont montré que la suite $(F(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ liée aux nombres de Fibonacci est SLC et donc unimodale, avec un pic ou un plateau au plus à deux éléments, avec comme plus petit mode

$$r_n = \left\lceil \frac{5n - 3 - \sqrt{5n^2 + 10n + 9}}{10} \right\rceil.$$

Cette formule leur permet de préciser

$$r_n \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil \right\}. \quad (3.1)$$

Ils spécifient aussi que les plateaux à deux éléments r_n et $r_n + 1$ s'identifient à $n \in \{F_{4k} - 1 \mid k \geq 0\}$. Ainsi

$$r_n = \frac{1}{5} (F_{4k-1} - 4), \quad \text{pour } n = F_{4k} - 1. \quad (3.2)$$

Dans [57], M. Benoumhani a montré que la suite $(L(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$, liée aux nombres de Lucas est SLC, et donc unimodale avec un pic ou un plateau au plus à deux éléments, avec comme plus petit mode

$$s_n = \left\lceil \frac{5n - 4 - \sqrt{5n^2 - 4}}{10} \right\rceil.$$

Cette formule lui permet de préciser

$$s_n \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil \right\}. \quad (3.3)$$

Les entiers n pour lesquels cette suite admet un plateau s_n et $s_n + 1$ sont les entiers $n \in \{F_{4k+1} \mid k \geq 0\}$ avec

$$s_n = F_{2k}^2, \quad \text{pour } n = F_{4k+1}.$$

Le théorème suivant (voir [148], [53] et [57]) permet d'étudier l'unimodalité d'une large famille de suites.

Théorème 31 Soit $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite réelle positive telle que le polynôme suivant

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$$

n'admette que des racines réelles négatives.

Alors la suite $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ est unimodale avec pic ou plateau à deux éléments. De plus, chaque mode l de la suite $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ vérifie

$$\lfloor \mu_n \rfloor \leq l \leq \lceil \mu_n \rceil, \quad \text{avec } \mu_n = \frac{G'_n(1)}{G_n(1)}.$$

Nous allons montrer qu'effectivement la relation (3.3) se déduit du Théorème 31. Alors que la relation (3.1) ne peut être la conséquence du Théorème 31, lequel permet de conclure seulement que

$$r_n \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil \right\},$$

contrairement à ce qu'affirme Benoumhani [57].

3.2.1 Les polynômes $F_n(x)$ et $L_n(x)$

Considérons, pour $n \geq 0$:

$$F_n(x) := \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{4x+1}}{2} \right)^{n+1} \right) \quad (3.4)$$

et

$$L_n(x) := \left(\frac{1+\sqrt{4x+1}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{4x+1}}{2} \right)^n \quad (3.5)$$

Pour tout $n \geq 0$, F_n et L_n sont des polynômes. Il suffit d'observer que

$$F_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (4x+1)^k \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (4x+1)^k.$$

Ils vérifient, pour $n \geq 2$, les relations de récurrence

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + xF_{n-2}(x) \quad \text{avec} \quad F_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad F_1(x) = x, \quad (3.6)$$

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + xL_{n-2}(x) \quad \text{avec} \quad L_0(x) = 2 \quad \text{et} \quad L_1(x) = 1. \quad (3.7)$$

Notons que

$$\begin{aligned} F_0(1) &= 1 = F_1, & F_1(1) &= 1 = F_2, \\ L_0(1) &= 2 = L_0, & L_1(1) &= 1 = L_1. \end{aligned}$$

On obtient, pour $n \geq 0$,

$$F_n(1) = F_{n+1} \quad \text{et} \quad L_n(1) = L_n. \quad (3.8)$$

En utilisant les relations (3.6) et (3.7), on a

$$L_n(x) = F_n(x) + xF_{n-2}(x), \quad (n \geq 2), \quad (3.9)$$

$$(4x+1)F_{n-1}(x) = L_{n+1}(x) + xL_{n-1}(x), \quad (n \geq 1). \quad (3.10)$$

Pour $x = 1$, ces relations donnent, pour $n \geq 1$

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \quad (3.11)$$

$$5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}. \quad (3.12)$$

Les relations (3.6) et (3.7) permettent de vérifier que pour tout $n \geq 0$, on a

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} F(n, k) x^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^k. \quad (3.13)$$

Et en utilisant (3.9), pour $n \geq 1$, on déduit

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} L(n, k) x^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^k. \quad (3.14)$$

Les relations (3.4) et (3.5) donnent

$$(4x+1)F'_n(x) = nL_n(x) - F_{n-1}(x), \quad (n \geq 1), \quad (3.15)$$

$$L'_n(x) = nF_{n-2}(x), \quad (n \geq 2). \quad (3.16)$$

3.2.2 La suite $(F(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$

Les racines de $F_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} F(n, k) x^k$ sont réelles et négatives [57]. Ainsi, le Théorème 31 est applicable à la suite $(F(n, k))_k$.

Théorème 32 *On a*

$$r_n \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil \right\}.$$

Preuve. Posons

$$\mu_n := \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} k \binom{n-k}{k}}{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}}.$$

En utilisant les relations (3.15) et (3.8), on a

$$\mu_n = \frac{F'_n(1)}{F_n(1)} = \frac{nL_n - F_n}{5F_{n+1}}.$$

Pour $\alpha := (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta := (1 - \sqrt{5})/2$ et $a := \beta/\alpha = (\sqrt{5} - 3)/2 = -0.38\dots$, on a

$$\begin{aligned}\mu_n &= \frac{n}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \right) - \frac{F_n}{5F_{n+1}} \\ &= \frac{n}{\alpha\sqrt{5}} \left(\frac{1 + a^n}{1 - a^{n+1}} \right) - \frac{F_n}{5F_{n+1}} \\ &= \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) A_n - \frac{F_n}{5F_{n+1}} \quad \text{avec } A_n = \frac{1 + a^n}{1 - a^{n+1}}.\end{aligned}$$

Posons

$$\theta_n := \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) (A_n - 1) - \frac{F_n}{5F_{n+1}},$$

on peut donc écrire

$$\mu_n = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) + \theta_n.$$

Il reste à montrer que $\theta_n \in]-1, 0[$.

Pour $n \geq 1$, on a

$$\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \geq 2n + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 2n + |a|. \quad (3.17)$$

Ainsi, par récurrence, on obtient

$$|a^{-n}| - |a| \geq 2n.$$

Notons que

$$\theta_n = \left(\frac{3\sqrt{5} - 5}{10} \right) \left(\frac{na^n}{1 - a^{n+1}} \right) - \frac{F_n}{5F_{n+1}}; \quad (3.18)$$

en utilisant la relation 3.17, on obtient

$$\left| \frac{na^n}{1 - a^{n+1}} \right| = \frac{n}{|a^{-n} - a|} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.19)$$

Ce qui permet d'établir facilement que

$$\frac{1}{10} \leq \frac{F_n}{5F_{n+1}} \leq \frac{1}{5} \quad (3.20)$$

et en utilisant (3.18), (3.19) et (3.20), on obtient

$$-0.2854\dots = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{20} \leq \theta_n \leq \frac{3\sqrt{5} - 7}{20} = -0.0145\dots, \quad \text{ainsi } \theta_n \in]-1, 0[.$$

□

Remarque 33 *Quelques commentaires s'imposent*

1. En exploitant

$$\mu_n = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) + \theta_n, \quad \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \notin \mathbb{Z} \quad \text{avec } \theta_n \in]-1, 0[$$

on obtient

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor - 1 < \mu_n < \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil.$$

2. Considérons l'ensemble

$$M_n := \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil \right\}.$$

On a $\lfloor \mu_n \rfloor, \lceil \mu_n \rceil \in M_n$. On peut affirmer d'après le Théorème 31 que $r_n \in M_n$, cependant, nous ne pouvons en déduire que

$$r_n \neq \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor - 1$$

pour cause $\lfloor \mu_n \rfloor = \lfloor n(1 - \sqrt{5}/5)/2 \rfloor - 1$ pour les valeurs de $n = 11, 22, 29, 33, 40, 51, 58, 69, 76, 80, 87, 98, \dots$

Ainsi, on peut affirmer, en utilisant la relation (3.3) et le Théorème 31 que pour ces mêmes valeurs de n , on a

$$r_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor.$$

Malheureusement, nous ne pouvons utiliser la même approche pour étudier la suite $(L(n, k))_k$. Une autre approche est proposée dans la sous section suivante.

3.2.3 La suite $(L(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$

Les racines de $L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} L(n, k) x^k$ sont réelles et négatives [57]. Ainsi le Théorème 31 est applicable à la suite $(L(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$.

Théorème 34 *Le plus petit mode s_n de la suite $(L(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ vérifie*

$$s_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor \quad \text{ou} \quad s_n = \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil.$$

Pour démontrer le Théorème 34, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 35 *Soient a et b deux entiers et c un réel tels que $a/b \notin \mathbb{N}$, $c \notin \mathbb{N}$ et $|a - bc| < 1$. Alors, on a*

$$\lfloor a/b \rfloor = \lfloor c \rfloor \text{ et } \lceil a/b \rceil = \lceil c \rceil.$$

Preuve. Soient a, b, c donnés par le lemme, alors on a $(a - 1)/b < c < (a + 1)/b$. On en déduit que $(a - 1)/b - 1 < \lfloor c \rfloor < (a + 1)/b$, ainsi $a - 1 - b < b \lfloor c \rfloor < a + 1$ et finalement $a - b \leq b \lfloor c \rfloor \leq a$, i.e. $\lfloor c \rfloor \leq \frac{a}{b} \leq \lfloor c \rfloor + 1$. Comme a/b et c ne sont pas des entiers, on obtient

$$\lfloor a/b \rfloor = \lfloor c \rfloor \text{ et } \lceil a/b \rceil = \lceil c \rceil.$$

□

Preuve du Théorème 34. Soient $a := nF_{n-1}$, $b := L_n$ et $c := n(1 - \sqrt{5}/5)/2$. En utilisant les relations (3.8) et (3.16), on obtient

$$\frac{L'_n(1)}{L_n(1)} = \frac{nF_{n-1}}{L_n} = \frac{a}{b}.$$

Et du Théorème 31, on déduit

$$\lfloor a/b \rfloor \leq s_n \leq \lceil a/b \rceil.$$

On a

1. $a/b \notin \mathbb{N}$ car L_n ne divise pas n ($L_n > n$) et il est premier avec F_{n-1} pour $n \geq 2$; de plus par (3.11), on a

$$\begin{aligned} (L_n, F_{n-1}) &= (F_{n+1} + F_{n-1}, F_{n-1}) \\ &= (F_{n+1}, F_{n-1}) = (F_n, F_{n-1}) = (F_{n-1}, F_{n-2}) = \dots = (F_2, F_1) = 1 \end{aligned}$$

2. $c \notin \mathbb{N}$ car $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

3. $|a - bc| < 1$ car $|a - bc| = |nF_{n-1} - nL_n(1 - \sqrt{5}/5)/2| = n\sqrt{5}/5\alpha^n \leq \alpha/\sqrt{5} < 1$.

Le Théorème 34 se déduit en appliquant le Lemme 35. □

3.3 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal II : suites liées aux nombres de Pell et de Pell-Lucas

Nous rappelons que les suites de Pell et de Pell-Lucas $(P_n)_{n \geq 0}$ et $(Q_n)_{n \geq 0}$ sont définies par

$$\begin{cases} P_0 = 0, P_1 = 1 & \text{et } P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad (n \geq 2), \\ Q_0 = 2, Q_1 = 2 & \text{et } Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{cases} \quad (3.21)$$

La suite $(P_n)_{n \geq 0}$ est la suite des nombres de Pell.

La suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ est la suite des nombres compagnons de Pell ou Pell-Lucas.

Le but de cette section est d'établir les deux théorèmes suivants

Théorème 36 *La suite $(P(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ est unimodale avec pic ou plateau à deux points. Son plus petit mode r_n est donné par*

$$r_n = \left\lceil \frac{4n - 3 - \sqrt{8n^2 + 16n + 9}}{8} \right\rceil.$$

Les entiers n pour lesquels cette suite possède un plateau $\{r_n, r_n + 1\}$ à deux points sont les entiers de la forme

$$n = \frac{1}{2} P_{4m} - 1 \text{ avec } r_n = \frac{1}{16} (Q_{4m-1} - 14), \quad (m \geq 1).$$

Théorème 37 *La suite $(Q(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ est unimodale avec pic ou plateau à deux points. Son plus petit mode s_n est donné par*

$$s_n = \left\lceil \frac{4n - 5 - \sqrt{8n^2 - 7}}{8} \right\rceil.$$

Les entiers n pour lesquels cette suite possède un plateau $\{s_n, s_n + 1\}$ à deux points sont les entiers de la forme

$$n = \frac{1}{2} (Q_{2m} - (-1)^m P_{2m}), \text{ avec } s_n = \frac{1}{16} (8P_{2m-1} - (-1)^m Q_{2m-1} - 10), \quad (m \geq 1).$$

Remarque 38 *Avec les notations des Théorèmes 36 et 37, on a*

$$r_n, s_n \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rceil \right\}.$$

Les entiers n pour lesquels les suites $(2^{n-2k} \binom{n-k}{k})_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ et $(2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k})_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ possèdent un plateau à deux points sont respectivement

m	$n = \alpha_m$	$r_n = \beta_m$		m	$n = \gamma_m$	$s_n = \delta_m$
1	5	0		1	11	1
2	203	29		2	134	19
3	6 929	1 014		3	373	54
4	235 415	34 475	et	4	4 552	666
5	7 997 213	1 171 164		5	12 671	1 855
6	271 669 859	39 785 129		6	154 634	22 645
7	9 228 778 025	1 351 523 250		7	430 441	63 036

Remarque 39 De plus, les suites (α_m) , (β_m) , (γ_m) , (δ_m) vérifient les relations de récurrence suivantes

$$\begin{aligned}\alpha_m &= 34\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2} + 32, \\ \beta_m &= 34\beta_{m-1} - \beta_{m-2} + 28, \\ \gamma_m &= 34\gamma_{m-2} - \gamma_{m-4}, \\ \delta_m &= 34\delta_{m-2} - \delta_{m-4} + 20.\end{aligned}$$

Ces suites récurrentes, via le calcul des premiers termes, montrent qu'effectivement ce sont des suites d'entiers.

Considérons $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite des nombres de Pell et $(Q_n)_{n \geq 0}$ la suite des nombres compagnons de Pell définis en (3.21) et établissons le lemme suivant utile pour démontrer les Théorèmes 36 et 37.

Lemme 40 On a

1. $S_1 := \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid u^2 - 2v^2 = 1\} = \{(\frac{1}{2}Q_{2m}, P_{2m}), m \in \mathbb{N}\},$
2. $S_2 := \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid u^2 - 8v^2 = 1\} = \{(\frac{1}{2}Q_{2m}, \frac{1}{2}P_{2m}), m \in \mathbb{N}\},$
3. $S_3 := \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid u^2 - 8v^2 = 1 \text{ et } u \equiv 1 \pmod{4}\} = \{(\frac{1}{2}Q_{4m}, \frac{1}{2}P_{4m}), m \in \mathbb{N}\},$
4. $S_4 := \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid u^2 - 8v^2 = -7 \text{ et } u \equiv -1 \pmod{4}\}$
 $= \left\{ \left(4P_{2m} - \frac{(-1)^m}{2}Q_{2m}, \frac{1}{2}Q_{2m} - \frac{(-1)^m}{2}P_{2m} \right), m \in \mathbb{N}^* \right\}$

Preuve. 1. Résolution classique (voir Yan [355, 2002]).

2. C'est une conséquence de 1. en utilisant le fait que $(u, v) \in S_2 \Leftrightarrow (u, 2v) \in S_1$ avec P_{2m} pair.

3. Il suffit d'exploiter $\frac{1}{2}Q_{2m} \equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod{2}.$

4. Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on a l'équivalence suivante $u^2 - 8v^2 = -7 \Leftrightarrow (v + \varepsilon(u + \varepsilon v)/7)^2 - 8((u + \varepsilon v)/7)^2 = 1.$

De plus pour $(u, v) \in S_4$, on a $u \geq v \geq (u - v)/7$ et $u \pm v \equiv 0 \pmod{7}$, ce qui donne $(u + \varepsilon v)/7 \geq 0$ ainsi que $v + \varepsilon(u + \varepsilon v)/7 \geq 0$ pour $\varepsilon = \pm 1$. Ainsi $(u, v) \in S_4$ si et seulement si on peut trouver $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $u \equiv -1 \pmod{4}$ et $(v + \varepsilon(u + \varepsilon v)/7, (u + \varepsilon v)/7) \in S_2$; en exploitant 2, cela devient équivalent à $u = 4P_{2m} - \varepsilon Q_{2m}/2$, $v = (Q_{2m} - \varepsilon P_{2m})/2$, $(x, v) \in \mathbb{N}$ avec $u \equiv -1 \pmod{4}$. Puisque Q_{2m} et P_{2m} sont pairs, u et v sont nécessairement des entiers. La condition $u \equiv -1 \pmod{4}$ équivaut à $\varepsilon \equiv \frac{1}{2}Q_{2m} \pmod{4}$. En utilisant les formules de Binet, on obtient $\frac{1}{2}Q_{2m} \equiv 1 - 2m \equiv (-1)^m \pmod{4}$, ce qui donne $\varepsilon = (-1)^m$. On vérifie enfin que u et v sont dans $\mathbb{N}$ uniquement pour $m \geq 1$. $\square$

Preuve des Théorèmes 36 et 37. Soient $F_n(x)$, $L_n(x)$, $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ les fonction génératrices de $\binom{n-k}{k}$, $\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$, $P(n, k)$ et $Q(n, k)$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ respectivement. Les valeurs de ces fonctions en $x = 1$ sont respectivement F_{n+1} , L_n , P_{n+1} et Q_n .

Benoumhani [48], a montré que les zéros des polynômes $F_n(x)$ et $L_n(x)$ sont réels. En utilisant les relations

$$\begin{aligned} P_n(x) &: = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} x^k = 2^n F_n(x/4), \\ Q_n(x) &: = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^k = 2^n L_n(x/4), \end{aligned}$$

on obtient la même chose pour les polynômes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$.

Ces racines sont, respectivement pour $k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$,

$$z_k = - \left(1 + \tan^2 \frac{k\pi}{n+1} \right) \quad \text{et} \quad z'_k = - \left(1 + \tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right).$$

Les suites $(P(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ et $(Q(n, k))_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ sont SLC par le Théorème 31, donc unimodales avec un pic ou un plateau à deux éléments. Pour tout entier $k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor - 1$, on a

$$\begin{aligned} P(n, k+1) - P(n, k) &= 2^{n-2k-2} \frac{(n-k-1)!}{(k+1)!(n-2k)!} A_n(k) \\ Q(n, k+1) - Q(n, k) &= 2^{n-2k-2} \frac{(n-k-2)!n}{(k+1)!(n-2k)!} B_n(k), \end{aligned}$$

avec $A_n(u) = 8u^2 - 2(4n-3)u + n(n-5)$ et $B_n(u) = 8u^2 - 2(4n-5)u + n^2 - 5n + 4$. Les signes de $(P(n, k+1) - P(n, k))$ et $(Q(n, k+1) - Q(n, k))$ sont identiques à $A_n(k)$ et $B_n(k)$ respectivement.

Pour $n > 5$, on a $A_n(0) = n(n-5) > 0$ et $A_n(n/2) = -n(n+2) < 0$, ainsi que $B_n(0) = n(n-5) + 4 > 0$ et $B_n(n/2) = 4 - n^2 < 0$. On en déduit que $A_n(u)$ et $B_n(u)$ ont une unique solution dans l'intervalle $[0, n/2]$. En les nommant $h(n)$ et $l(n)$ respectivement, on a $r_n = \lceil h(n) \rceil = \lceil (4n-3 - \sqrt{8n^2+16n+9})/8 \rceil$ et $s_n = \lceil l(n) \rceil = \lceil (4n-5 - \sqrt{8n^2-7})/8 \rceil$.

La suite $(P(n, k))_k$ admet un plateau si et seulement si $h(n) \in \mathbb{N}$, ce qui revient à trouver un entier $u \geq 0$ vérifiant $8n^2 + 16n + 9 = u^2$ et $4n - 3 - u \equiv 0 \pmod{8}$, conditions que l'on peut écrire $(u, n+1) \in S_3$ et $4n - 3 - u \equiv 0 \pmod{8}$. Le lemme 40 permet d'obtenir $u = \frac{1}{2}Q_{4m}$ et $n = \frac{1}{2}P_{4m} - 1$, quand $m \geq 1$. En utilisant le fait que $4P_{4m} - Q_{4m} = Q_{4m-1}$, on aboutit à $4n - 3 - u = 8\beta_m \equiv 0 \pmod{8}$. Tout entier $m \geq 1$, répond à la question, de plus $r_n = \beta_m$. La même démarche convient pour la suite $(Q(n, k))_k$. $\square$

3.4 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal III : premières extensions

Nous revenons à la suite $\{W_n\}_{n=0}^\infty$, une suite récurrente linéaire d'ordre deux de valeurs initiales $W_0 \in \mathbb{R}$ et $W_1 \in \mathbb{R}$, non simultanément nulles, définie par

$$W_n = xW_{n-1} + yW_{n-2}, \quad (n \geq 2),$$

à laquelle est associée la suite

$$W(n, k) = x^{n-2k} y^k \binom{n-k}{k} \left(W_1 + \frac{k}{n-2k+1} x W_0 \right), \quad k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor. \quad (3.22)$$

Il s'agit dans cette section d'étudier l'unimodalité de la suite $\{W(n, k)\}_k$.

Les Théorèmes 41-45 concernent trois classes de suites relatives à la relation (3.22) et généralisent la majorité des résultats déjà établis en ce qui concerne l'unimodalité des suites associées aux coefficients binomiaux. En général, la suite, $\{W(n, k)\}_k$ n'est pas unimodale, même si x et y sont positifs. Par exemple, si $x = y = 1$, avec $W_0 = -8$, $W_1 = 5$, la suite finie

$$W(8, k) = 5, 27, 27, -30, -27, \quad (k = 0, \dots, 4)$$

n'est pas unimodale.

Théorème 41 Soient x et y deux nombres réels tels que $x > 0$, on suppose que $U_0 = 0$ et $U_1 = 1$. Pour $n \geq 2$, la suite

$$U(n, k) = x^{n-2k} y^k \binom{n-k}{k}, \quad (k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$$

est unimodale si et seulement si $y \geq 0$. Dans ce cas, son pic $k = r_n$ vérifie

$$r_n \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4y/x^2 + 1}} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4y/x^2 + 1}} \right) \right\rceil \right\},$$

et le plateau à deux éléments est atteint en r_n et $r_n + 1$.

Il est immédiat de constater que $U(n, k)$ ne peut être unimodale pour les valeurs négatives de y , et elle est trivialement unimodale pour $y = 0$.

Preuve. Il reste seulement le cas $y > 0$ à considérer. L'inégalité suivante

$$x^{n-2k} y^k \binom{n-k}{k} \leq x^{n-2(k+1)} y^{k+1} \binom{n-(k+1)}{k+1}, \quad (k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor - 1)$$

est équivalente à

$$0 \leq (4c+1)k^2 - (4c+1)kn + cn^2 + (2c+1)k - (c+1)n$$

avec $c = y/x^2 > 0$. En multipliant l'inégalité précédente par $4(4c+1)$, on obtient

$$(4c+1)(n+1)^2 + 4c^2 \leq ((4c+1)(2k-n) + (2c+1))^2. \quad (3.23)$$

Il est facile de voir que $(4c+1)(2k-n) + (2c+1) < 0$. Par conséquent, en utilisant (3.23), on a

$$k \leq t_n = \frac{(4c+1)n - (2c+1) - \sqrt{(4c+1)(n+1)^2 + 4c^2}}{2(4c+1)}. \quad (3.24)$$

Posons $t_n^* = (n/2)(1 - 1/\sqrt{4c+1})$. De la double inégalité $-1 < t_n - t_n^* < 0$, il s'ensuit que le pic r_n de $\{U(n, k)\}$ est l'un des deux entiers $\lfloor t_n^* \rfloor$ ou $\lceil t_n^* \rceil$. Lorsque t_n est un entier, la suite $\{U(n, k)\}$ possède un plateau à deux éléments en $k = r_n$ et $k = r_n + 1$. Trivialement, les plateaux peuvent être identifiés par les solutions entières positives u et v de l'équation de Pell $(4c+1)(u+1)^2 + 4c^2 = v^2$. $\square$

Remarque 42 La formule (3.24) se traduit en

$$k \leq \frac{5n-3-\sqrt{5n^2+10n+9}}{10} \quad \text{et} \quad k \leq \frac{4n-3-\sqrt{8n^2+16n+9}}{8}$$

dans le cas particulier des suites de Fibonacci et de Pell respectivement.

Un théorème analogue au Théorème 41 est aussi établi pour la suite compagnon de U_n : la Lucas-suite.

Théorème 43 Soient $x > 0$ et y deux nombres réels, $V_0 = 2$, $V_1 = x$ et $n \geq 2$ un entier. La suite

$$V(n, k) = x^{n-2k} y^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad (k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$$

est unimodale si et seulement si $y \geq 0$. La description des pics et des plateaux coïncide avec ceux du Théorème 41.

Preuve. Supposons $y > 0$ et suivons les étapes de la preuve du Théorème 41. Donc on peut transformer $V(n, k) \leq V(n, k+1)$ avec

$$0 \leq (4c+1)k^2 - (4c+1)kn + cn^2 + (2c+2)k - (c+1)n + 1, \quad (3.25)$$

($c = y/x^2$) et en multipliant par le terme adéquat la relation (3.25), on obtient

$$(4c+1)n^2 + 4c(c-2) \leq ((4c+1)(2k-n) + (2c+2))^2.$$

Ainsi

$$k \leq \frac{(4c+1)n - (2c+2) - \sqrt{(4c+1)n^2 + 4c(c-2)}}{2(4c+1)}. \quad (3.26)$$

On établit aussi que r_n est soit $\lfloor t_n^* \rfloor$ soit $\lceil t_n^* \rceil$ avec le même t_n^* obtenu au Théorème 41. Pour les plateaux, l'équation diophantienne $(4c+1)u^2 + 4c(c-2) = v^2$ doit être étudiée. $\square$

Remarque 44 L'inégalité (3.26) donne la formule

$$k \leq \frac{5n-4-\sqrt{5n^2-4}}{10} \quad \text{et} \quad k \leq \frac{4n-5-\sqrt{8n^2-7}}{8}$$

dans le cas des nombres de Lucas et des compagnons Lucas respectivement.

Le choix $W_0 = 0$ et $W_1 = 1$ rend l'expression donnée par la relation (3.22) la plus simple possible. Le théorème suivant généralise ce qui précède au sens où on ne fixe pas les valeurs initiales de la suite récurrente mais plutôt ses coefficients.

Théorème 45 *On se donne W_0 et W_1 deux nombres réels positifs, $x = y = 1$ et un entier $n \geq 2$. Alors la suite*

$$W(n, k) = \binom{n-k}{k} \left(W_1 + \frac{k}{n-2k+1} W_0 \right), \quad (k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor)$$

est unimodale.

Preuve. L'hypothèse $x = y = 1$ accompagnant l'inégalité $W(n, k) \leq W(n, k+1)$ conduit à

$$(n-k)(k+1)(W_1(n-2k+1) + W_0k) \leq (n-2k+1)(n-2k)(W_1(n-2k-1) + W_0(k+1)),$$

ce qui équivaut à $0 \leq f_n(k) = \sum_{i=0}^3 e_i(n)k^i$, où

$$\begin{aligned} e_0(n) &= n^3 + (h-1)n^2 + (h-2)n, \\ e_1(n) &= (h-7)n^2 + (-4h+2)n + (-2h+3), \\ e_2(n) &= (-5h+15)n + (3h-1), \\ e_3(n) &= 5h-10, \end{aligned}$$

avec $h = W_0/W_1 > 0$. Le cas particulier $h = 2$ a été particulièrement traité par Benoumhani [57] et complété au paragraphe 3.2. Ainsi, en regardant le signe de $e_3(n)$, on est amené à distinguer deux cas :

Dans un premier temps, on suppose $h > 2$, ce qui entraîne que les coefficients du polynôme de degrés trois $f_n(k)$ sont positifs. De plus $f_n(0) = e_0(n) > 0$ et $f_n(n/2) = -(hn^3 + (2h+2)n^2 + 4n)/8 < 0$, il s'ensuit que $f_n(k)$ possède une unique racine dans l'intervalle $[0; n/2]$. L'unimodalité de la suite $(W(n, k))_k$ en découle.

Dans le second cas, on suppose $0 < h < 2$ ce qui entraîne $e_3(n) < 0$. On peut facilement vérifier que $f_n(0) = n(n^2 + (h-1)n + (h-2))$ est positif lorsque $n \geq 2$ et $f_n(n/2) < 0$ comme dans le cas précédent. Cependant, le signe de $e_3(n)$ ne facilite pas l'étude de $f_n(k)$, ce qui nous amène à l'analyse suivante. Le polynôme

$$f'_n(k) = (15h-30)k^2 + ((-10h+30)n + (6h-2))k + ((h-7)n^2 + (-4h+2)n + (-2h+3))$$

admet deux racines distinctes du fait que son discriminant

$$D = 20(2h^2 - 3h + 3)n^2 + 40(3h^2 - 5h + 3)n + 4(39h^2 - 111h + 91)$$

est positif lorsque $0 < h < 2$. Ainsi, $2h^2 - 3h + 3 > 0$ et le discriminant

$$D_1 = -960(h-2)^2(11h^2 - 19h + 19)$$

de D admet des valeurs négatives dans l'intervalle $]0, 2[$.

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que la racine réelle maximale f_2 de $f'_n(k)$ vérifie $n/2 < f_2$, plus précisément

$$f_2 = \frac{(10h - 30)n + (2 - 6h) - \sqrt{D}}{30h - 60} > \frac{n}{2}.$$

Pour le voir, il suffit de signaler que $2 - 6h - 5hn < \sqrt{D}$, ce qui est vrai pour $h \geq 1/3$. A l'inverse, lorsque $h < 1/3$, il suffit de vérifier que

$$0 < (-h + 2)n^2 + (-4h + 4)n + (-8h + 12).$$

Ce qui est le cas sous les hypothèses posées. $\square$

3.5 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal IV : autres extensions et conjectures

Une direction, tout aussi intéressante, serait d'étudier l'unimodalité de la suite $W^{(q,r)}(n, k) = \binom{n-qk}{rk}$, avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$. Cette famille, en q et r , caractérise tous les champs que l'on peut déduire des éléments du triangle de Pascal. Si q ou r est nul, l'unimodalité est trivialement vérifiée, c'est aussi le cas pour $(q, r) = (-1, 1)$. Le cas $(q, r) = (1, 1)$ a été traité par Tanny et Zuker dans [326] (voir les détails au paragraphe 3), ainsi que le cas $q > 1$, $r = 1$ dans [327] et [328].

On traitera dans un premier temps la paire $(q, r) = (1, 2)$, qui correspond à $W^{(1,2)}(n, k) = \binom{n-k}{2k}$. Remarquons que $a_n := \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n-k}{2k}$ vérifie la relation de récurrence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4}$ avec comme valeurs initiales $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et $a_3 = 2$ (Sloane : A005251).

Théorème 46 *La suite $W^{(1,2)}(n, k) = \binom{n-k}{2k}$ est unimodale ($k = 0, \dots, \lfloor n/3 \rfloor$).*

Preuve. En constatant que $\binom{n-k}{2k} \leq \binom{n-k-1}{2k+2}$, on obtient

$$0 \leq f(k) = -23k^3 + (23n - 21)k^2 + (-9n^2 + 12n - 4)k + (n^3 - 3n^2).$$

Comme $f(0) = n^2(n - 3) \geq 0$ si $n \geq 3$, et que $f(n/3) = -4n(n + 3)(2n + 3)/27 < 0$, il suffit de vérifier que $f(k)$ est strictement décroissante. Ce que l'on réalise en considérant f comme une fonction réelle pour $n \geq 3$ et comme $f'(k) \neq 0$ on a le résultat. $\square$

Une tout aussi intéressante paire à étudier est $(q, r) = (-1, 2)$. On reconnaît, dans ce cas, la sous suite de Fibonacci d'indices impairs $F_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k}$ (Sloane : A001519). Elle satisfait aussi la relation de récurrence $b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2}$ ($n \geq 2$) où $b_n = F_{2n+1}$.

Théorème 47 *La suite $W^{(-1,2)}(n, k) = \binom{n+k}{2k}$ est unimodale ($k = 0, \dots, n$). Les plateaux existent si et seulement si $n = (F_{12\mu+4} - 1)/2$ et $n = (F_{12\mu+8} - 1)/2$ avec $k = (L_{12\mu+4} - 7)/10$ et $k = (L_{12\mu+8} - 7)/10$ ($\mu \in \mathbb{N}$), respectivement.*

Donnons les deux tables suivantes à titre d'exemples

Table 1

μ	$F_{12\mu+4}$	n	$L_{12\mu+4}$	k	$\binom{n+k}{2k} = \binom{n+k+1}{2k+2}$
0	3	1	7	0	$\binom{1}{0} = \binom{2}{2}$
1	987	493	2207	220	$\binom{713}{440} = \binom{714}{442}$
2	317811	158905	710647	71064	$\binom{229969}{142128} = \binom{229970}{142130}$

Table 2

μ	$F_{12\mu+8}$	n	$L_{12\mu+8}$	k	$\binom{n+k}{2k} = \binom{n+k+1}{2k+2}$
0	21	10	47	4	$\binom{14}{8} = \binom{15}{10}$
1	6765	3382	15127	1512	$\binom{4894}{3024} = \binom{4895}{3026}$
2	2178309	1089154	4870847	487084	$\binom{1576238}{974168} = \binom{1576239}{974170}$

Preuve. Sachant que $W(n, k) \leq W(n, k+1)$, on a

$$0 \leq f(k) = -5k^2 - 7k + (n^2 + n - 2).$$

Comme $k = -0.7$ est l'unique solution de $f'(k) = 0$, il s'ensuit que $f(k)$ est strictement décroissante dans l'intervalle $[0; n-1]$. Ainsi, les zéros du polynôme $f(k)$ sont

$$f_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{20n^2 + 20n + 9}}{-10}, \quad (3.27)$$

dont le plus petit f_1 est négatif et le plus grand f_2 est proche de $0.45n$, donc

$$f\left(\frac{n}{\sqrt{5}} - 1\right) \cdot f\left(\frac{n}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}(4 + \sqrt{5})n^2 - \frac{2}{5}(5 + 3\sqrt{5})n < 0$$

entraîne que $n/\sqrt{5} - 1 < f_2 < n/\sqrt{5}$. Par suite $W^{(-1,2)}(n, k)$ est unimodale, et son plus petit mode $k_n = \lceil f_2 \rceil$ vérifie $\lfloor n/\sqrt{5} \rfloor \leq k_n \leq \lceil n/\sqrt{5} \rceil$.

Maintenant, il reste à justifier l'existence de plateaux. En utilisant la relation (3.27), on va résoudre l'équation de Pell suivante $20u^2 + 20u + 9 = v^2$. Il est bien connu que l'équation diophantienne

$$v^2 - 5(2u + 1)^2 = 4$$

entraîne $v = L_{2\lambda}$ et $2u + 1 = F_{2\lambda}$. Un nombre de Fibonacci d'indice pair est impair si et seulement si 3 ne divise pas λ . Pour $\lambda = 3\mu \pm 1$, une simple vérification montre que $L_{6\mu \pm 2} \equiv \pm 7 \pmod{10}$ selon la parité de μ . En choisissant les cas appropriés, on en déduit que f_2 est un entier positif. $\square$

Remarque 48 Une seconde preuve peut être donnée, en introduisant la fonction génératrice de la suite finie $W^{(-1,2)}(n, k)$: $M_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{2k} x^k$, donnée par

$$M_n(x) = \frac{1}{x^n \sqrt{x^2 + 4x}} \left(\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2} \right)^{2n+1} - \left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2} \right)^{2n+1} \right).$$

Il suffit pour cela de voir que

$$\begin{aligned} M_0(x) &= 1, \\ M_1(x) &= x + 1, \\ M_n(x) &= (x + 2) M_{n-1}(x) - M_{n-2}(x), \end{aligned}$$

suite de polynômes connue sous le nom des polynômes de Morgan-Voyce.

On en déduit que $M_n(x)$ admet n racines réelles distinctes données par

$$x_k = -2 \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

donc la suite $W^{(-1,2)}(n, k) = \binom{n+k}{2k}$ est SLC, ce qui assure l'unimodalité ainsi que la présence de pics ou de plateaux à deux éléments au plus.

Pour $m \geq 3$ posons $\{\alpha_m\}_{m \geq -1}$ et $\{\beta_m\}_{m \geq -1}$ les suites définies par

$$\begin{cases} \alpha_m = 322\alpha_{m-2} - \alpha_{m-4} + 160, & \text{avec } (\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (-11, -2, 1, 10) \\ \beta_m = 322\beta_{m-2} - \beta_{m-4} + 224, & \text{avec } (\beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = (4, 0, 0, 4) \end{cases}$$

Les entiers n pour lesquels les suites $\binom{n+k}{2k}$, ($k = 0, 1, \dots, n$) admettent un plateau à deux éléments $\{k_n, k_n + 1\}$ sont exactement les entiers α_s , $s \geq 1$ tels que $k_{\alpha_s} = \beta_s$ pour $s \geq 1$.

Table

s	$n = \alpha_s$	$k_n = \beta_s$
1	1	0
2	10	4
3	493	220
4	3382	1512
5	158905	71064
6	1089154	487084

Finalement, considérons le cas $(-1, r)$. Lorsque $r = 3$, la suite de nombres $c_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+k}{3k}$ pour $n \equiv 0 \pmod 3$ produit la suite de Padovan $\{p_n\}$ définie par $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$ avec $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = 0$ (Sloane : A003522) : $c_n = p_{3n+3}$. Le Théorème 49 généralise partiellement le Théorème 47.

Théorème 49 La suite $W^{(-1,r)}(n, k) = \binom{n+k}{rk}$ est unimodale ($r \geq 2$, $k = 0, \dots, \lfloor n/(r-1) \rfloor$).

En ce qui concerne ce théorème, on va utiliser la stricte log-concavité pour le démontrer.

Preuve. Montrer que le fait que $W^{(-1,r)}(n, k)$ soit strictement log-concave équivaut à montrer l'inégalité

$$\binom{n+k}{rk}^2 > \binom{n+k-1}{rk-r} \binom{n+k+1}{rk+r}. \quad (3.28)$$

Posons $b = r - 1 \geq 1$. Ainsi (3.28) est équivalente à

$$\frac{(n+k)(n-bk+1)}{(n+k+1)(n-bk)} \cdot \prod_{i=0}^{r-1} \left(1 + \frac{r}{rk-i}\right) \cdot \prod_{j=1}^{b-1} \left(1 + \frac{b+1}{n-bk-j}\right) > 1.$$

Comme $(n+k)(n-bk+1) > (n+k+1)(n-bk) > 0$, et que les autres termes sont trivialement plus grands que 1, on achève la preuve. $\square$

Conjecture 50 Soit $\binom{n}{k}$ un élément fixé du triangle de Pascal par lequel passe un trait. Alors la suite des coefficients binomiaux passant le long de ce trait est unimodale.

Conjecture 51 Etant donné un triangle de Pascal généralisé et la suite Tribonacci donnée par $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ ($n \geq 3$) avec $T_0 = T_1 = 0$, $T_2 = 1$. Les éléments de ce triangle sont définis par

$$\binom{n}{k}_2 = \sum_{i=m}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{n!}{i! \cdot (k-2i)! \cdot (n-k+i)!} = \sum_{i=m}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{n}{n-i} \binom{n-i}{k-2i}$$

où $m = \max\{0, k-n\}$. On conjecture que la suite $\binom{n-k}{k}_2$ est unimodale.

3.6 Interprétations combinatoires des précédentes suites

Dans cette section il s'agit essentiellement de donner des interprétations combinatoires de certaines des suites étudiées dans ce document.

Pour ce qui concerne l'interprétation combinatoire des suites $F(n, k)$ et $L(n, k)$, les ouvrages classiques de combinatoire en parlent. On pourra consulter à titre indicatif la référence de Stanley [312] à ce sujet.

Pour les suite liées aux nombres de Pell et de Pell-Lucas, on a le résultat suivant :

Théorème 52 Une interprétation combinatoire des suites $P(n, k)$ et $Q(n, k)$.

1. Le nombre de mots que l'on peut former avec les lettres A, B, C et D , de longueur n , commençant avec k A consécutifs et contenant exactement k fois la lettre B est $P(n, k)$.
2. Le nombre de façons d'arranger k adultes et $n - k$ enfants, dont au moins k garçons, autour d'une table, de sorte que le voisin gauche de chaque adulte soit un garçon est $Q(n, k)$.

Preuve. Par un raisonnement combinatoire simple, on aboutit à la première interprétation.

Pour ce qui concerne la seconde interprétation, numérotions les sièges autour de la table par $1, 2, \dots, n$ dans le sens des aiguilles d'une montre. Installons les k adultes sans qu'il

y en aient deux côte à côte, ainsi que les $n - k$ enfants. Lorsque la place numéro 1 est occupée par un enfant, on installe les k adultes sur les $n - k$ sièges vacants entre les enfants de $\binom{n-k}{k}$ manières. Sinon, on installe les $k - 1$ adultes entre les $n - k - 1$ sièges occupés par les enfants (on exclut les places numérotés 2 et n adjacentes à la numéro 1) de $\binom{n-k-1}{k-1}$ manières. Ainsi, on obtient $\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$ possibilités. Pour ce qui concerne les sièges occupés par les enfants, au moins k d'entre eux sont des garçons, donc les $(n - k) - k$ sont indifféremment occupés par un garçon ou une fille, ce qui fait 2^{n-2k} possibilités. Ce qui établit le résultat. $\square$

Théorème 53 *Plus généralement, par rapport à $F(n, k)$ et $P(n, k)$, en considérant deux entiers naturels A et B , une interprétation combinatoire de la suite liée aux nombres de Fibonacci généralisés $A^{n-2k} B^k \binom{n-k}{k}$ serait le nombre de mots que l'on peut former avec les lettres $R, S_1, \dots, S_A, T_1, \dots, T_B$ de longueur n , commençant avec k fois la lettre R et contenant exactement k lettres parmi $\{T_1, \dots, T_B\}$.*

3.7 Unimodalité des éléments du triangle de Pascal étendu : aux *bi^qnomiaux*

Afin d'illustrer la récurrence donnée par la relation (2.23), nous allons présenter, à titre d'exemples, les triangles des coefficients *bipentanomiaux* et *bihexanomiaux*, en mettant en relief les valeurs maximales de chacune des lignes de chaque table. Ces dernières sont les valeurs modales des suites $\{\binom{L}{k}_4\}_{k=0}^{4L}$ et $\{\binom{L}{k}_5\}_{k=0}^{5L}$ respectivement.

Table 1 : Triangle des coefficients *bipentanomiaux* : $\binom{L}{k}_4$

$L \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
0	1														
1	1	1	1	1	1										
2	1	2	3	4	5	4	3	2	1						
3	1	3	6	10	15	18	19	18+	15+	10+	6+	3+	1		
4	1	4	10	20	35	52	68	80	85	80	68	=52	35	20	...
5	1	5	15	35	70	121	185	255	320	365	381	365	320	255	...

Table 2 : Triangle des coefficients *bihexanomiaux* : $\binom{L}{k}_5$

$L \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
0	1															
1	1	1	1	1	1	1										
2	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
3	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
4	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	...
5	1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	...

A la lumière des observations faites sur les tables, nous allons procéder à l'étude de l'unimodalité de la suite des coefficients binomiaux $\left\{\binom{L}{k}_q\right\}_{k=0}^{qL}$, coefficients déjà introduits et définis au chapitre précédent. C'est en fait le résultat principal de cette section.

Théorème 54 *Soient $q \geq 1$ et $L \geq 0$ deux entiers. Alors la suite des coefficients binomiaux $\left\{\binom{L}{k}_q\right\}_{k=0}^{qL}$ est unimodale et son plus petit mode est donné par*

$$k_L := \arg \max_k \binom{L}{k}_q = \lfloor (qL + 1) / 2 \rfloor .$$

En outre, on a la relation de récurrence suivante

$$\binom{L}{k_L}_q = \sum_{i \in I_q} \binom{L-1}{k_{L-1} + i}_q ,$$

avec

$$I_q = \begin{cases} \{-q/2, \dots, q/2\} & \text{si } q \text{ est pair,} \\ \{-(q+1)/2, \dots, (q-1)/2\} & \text{si } q \text{ et } L \text{ sont impairs,} \\ \{-(q-1)/2, \dots, (q+1)/2\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Il suffit pour chacun des deux cas : q impair et q pair, de procéder par récurrence sur L en exploitant la relation de récurrence (2.23). $\square$

Remarque 55 *Pour les valeurs impaires de qL on a un plateau de longueur deux : $qL/2$ et $qL/2 + 1$. Dans les autres cas on est en présence du pic : $(qL + 1) / 2$.*

Conjecture 56 *Soit $\left(\binom{L}{k}_q\right)_q$ un élément fixé du triangle de Pascal étendu par lequel passe un trait. Alors la suite des coefficients binomiaux passant le long de ce trait est unimodale.*

3.8 Expression explicite de la valeur modale pour la convolée de la loi discrète uniforme

Au début du dix-huitième siècle l'expression de la convolée d'une loi discrète uniforme était bien connue (de Moivre 1711, voir [251, 3rd ed., 1756] ou [252, 1731]). Cette convolée intervient dans beaucoup de situations pratiques, comme les jeux à chances égales, affectation aléatoire des tâches pour plusieurs serveurs, les marches aléatoires, etc. Il est bien établi que la convolée de deux lois discrètes unimodales n'est pas nécessairement unimodale, voir Dharmadhikari et Joak-Dev [105, 1988, p. 108-109]. Cependant, si de plus ces distributions sont symétriques, alors on obtient une distribution unimodale symétrique. C'est la version discrète d'un analogue au Théorème de Wintner [353, 1938]. Comme on sait que la convolée de la loi uniforme discrète est symétrique et unimodale, la détermination des valeurs modales ou probabilités maximales d'une telle distribution reste une question d'actualité. Pour citer un

travail récent concernant ce problème, on peut consulter le travail de Mattner et Roos [230, 2007] où ils exhibent une borne supérieure pour la valeur modale $c_{q,L} < \sqrt{6/\pi q} (q+2) \bar{L}$ ($c_{q,L}$ étant la probabilité maximale de la L -ième convolée d'une loi discrète uniforme sur $\{0, 1, \dots, q\}$). Il y a dans la littérature plusieurs travaux concernant la recherche de telles bornes. A titre d'exemple, on cite un travail antérieur à Mattner et Roos, durant la même année, celui de Siegmund-Schultze et von Weizsäcker [297, 2007]. Ces derniers montrent l'existence d'une constante A telle que $c_{q,L} < A/(q+1) \sqrt{L}$ et donnent une application de ces bornes supérieures pour la construction d'une marche aléatoire polygonale.

Pour ce qui nous concerne, nous nous proposons de donner une expression explicite du mode de la L -ième convolée d'une loi discrète uniforme en exploitant l'unimodalité de la suite des coefficients binomiaux. Pour ces derniers, en revenant aux probabilités, nous établissons la log-concavité asymptotique.

Dans cette section, nous utilisons les notations du paragraphe 1.6.

nous sommes maintenant en mesure d'explicitier les probabilités maximales de la convolée L -ième de la loi uniforme discrète.

Nous avons déjà établi au Corollaire 19 que

$$P(U_q^{*L} = k) = \frac{\binom{L}{k}_q}{(q+1)^L}, \quad k = 0, 1, \dots, qL.$$

En utilisant le Théorème 54, on précise les valeurs de $c_{q,L} := \max_k \binom{L}{k}_q / (q+1)^L$. On peut donc énoncer le théorème suivant

Théorème 57 *La probabilité maximale de la L -convolée d'une loi discrète uniforme sur $\{0, 1, \dots, q\}$ est donnée par*

$$c_{q,L} = \frac{1}{(q+1)^L} \binom{L}{\lfloor (qL+1)/2 \rfloor}_q.$$

Remarque 58 *D'après Odlyzko et Richmond [258, 1985] on sait que pour L suffisamment grand, la suite des probabilités $\{P(U_q^{*L} = k)\}_k$ est log-concave, on peut donc en déduire facilement que la suite $\{\binom{L}{k}_q\}_k$ est asymptotiquement log-concave.*

Conjecture 59 *Pour tout entier positif q , la suite $\{\binom{L}{k}_q\}_k$ est SLC.*

Chapitre 4

Fonction génératrice

4.1 Introduction

A notre connaissance il n'existe pas de manuels en combinatoire qui ne traite de la fonction génératrice, c'est l'un des outils fondamentaux des combinatoriciens. Il existe même des ouvrages consacrés entièrement aux fonctions génératrices comme ceux d'Egorychev [118, 1974], Srivastava et Manocha [309, 1984], Wilf [352, 1994] et Lando [201, 2003], pour ne citer que ceux-là.

De plus, la notion de fonction génératrice se trouve être un outil fécond et efficace dans plusieurs domaines mathématiques autres que la combinatoire, comme les systèmes dynamiques, les probabilités, la géométrie, l'analyse, etc. On peut citer les manuels de Mc Bride [78, 1971] pour les fonctions hypergéométriques, de Nilson [255, 1972] pour les triangles de Pascal généralisés, de Gomez [134, 1973] pour la géométrie combinatoire, de Shilman [298, 1978] pour les systèmes dynamiques, de Kenney et Koeping [194, 1951] et de Khamitov [195, 1991] pour les probabilités, et de Bousquet-Mélou [71, 2005] pour la théorie du langage.

Nous citons aussi les références suivantes comme exemples de travaux en systèmes dynamiques, théorie ergodique, équations aux différences et équations fonctionnelles : Shannon et Horadam [291, 1971], Panaretos [261, 1987], Siafarikas [296, 1995], Théorêt [330, 1995], Meyer [247, 1996], Feng [126, 1998], Kamchatnov et Pavlov [190, 2002], Pavlov [262, 2006] et Ozer et al [260, 2007].

Pour ce qui nous concerne, les fonctions génératrices de la plupart des suites que nous avons étudiées dans ce document sont connues, essentiellement celles associées aux suites récurrentes linéaires, aux puissances de suites de nombres, aux sommes binomiales, et à leurs inverses. On pourra consulter les travaux de Carlitz [86, 1962], Zeitlin [359, 1965], Horadam [181, 1965] et [177, 1974], Shannon et Horadam [291, 1971], Haukkanen et Rutkowski [150, 1991], Haukkanen [151, 1995], Pinter et Srivastava [266, 1999], Wenchang [350, 2000], Mansour [229, 2003], Djordjevic [113, 2004], Gould [138, 2004], et tout récemment Terrana et Chen [329, 2007] et Zhang et Xi [363, 2007].

Plus précisément, si on considère la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} W_n = x \binom{r}{1} W_{n-1} - x^2 \binom{r}{2} W_{n-2} + \cdots + (-1)^{r-1} x^r \binom{r}{r} W_{n-r} + y W_{n-r-q} & (n \geq r+q) \\ W_0 = 0, \quad W_l = x^{l-1} & (l = 1, \dots, r+q-1) \end{cases}$$

sa fonction génératrice est donnée par

$$W(z) := \sum_{n \geq 0} W_{n+1} z^n = \frac{(1-xz)^{r-1}}{(1-xz)^r - yz^{r+q}}$$

calcul que l'on peut mener sans grande difficulté en s'inspirant des travaux de Sprugnoli [308, 1994] ou de Wenchang [350, 2000]. Cette suite est intimement liée aux rails ou champs¹ du triangle de Pascal. Pour les fonctions génératrices les concernant, on peut consulter l'article de Smith et Hoggatt [301, 1979] et tout récemment la référence très complète et intéressante de Merlini et Sprugnoli [245, 2007].

Pour les fonctions génératrices liées aux polynômes issus de suites récurrentes linéaires comme les polynômes de Chebyshev, de Fibonacci, de Pell, de Lucas, de Jacobsthal, de Morgan-Voyce et de Gengenbauer, ainsi que des généralisations s'y rapportant, on peut consulter les travaux de Mahon et Horadam [227, 1987] et [228, 1987], de Wenchang et Vicenti [351, 2003] et de Callan [83, 2007]. Toutes ces familles de polynômes (sauf exceptions) sont des cas particuliers de polynômes de Humbert, voir Gould [139, 1965] et Zeitlin [360, 1967], ces derniers sont définis via la fonction génératrice suivante :

$$(c - mxt + yt^m)^p = \sum_{n \geq 0} t^n P_n(m, x, y, p, c)$$

Il reste (objet de la section 2) à déterminer la fonction génératrice de suites liées aux coefficients *bi^qnomiaux*. Nous allons commencer par déterminer les fonctions génératrices des suites $\left\{\binom{z}{n}_q\right\}_n$ et $\left\{\binom{nz}{n}_q\right\}_n$, $z \in \mathbb{C}$, ainsi que de la "sur suite" contenant la suite de probabilités maximales de la convolée d'une loi uniforme discrète, à savoir la suite $\{c_{q,2n/q}\}_n$.

Cependant la fonction génératrice associée à la suite $\{c_{q,n}\}_n$ ne peut être évaluée avec les outils existants, ce qui nous a amené à établir un résultat, dans la section 3, permettant d'explicitier la dite fonction génératrice. Plus généralement, on détermine explicitement la fonction génératrice de la sous suite des multiples d'un entier fixé d'une suite donnée, voire même d'une sous suite indicée par une progression arithmétique.

4.2 Fonctions génératrices et coefficients *bi^qnomiaux* généralisés

Dans cette section, nous allons évaluer les fonctions génératrices pour des suites en relation avec les coefficients *bi^qnomiaux*, il s'agit essentiellement de :

¹Voir en annexe le développement de ce concept.

- la suite des coefficients bi^qnomiaux généralisée $\left\{\binom{z}{n}_q\right\}_n, z \in \mathbb{C}$,
- une variante de la suite des coefficients bino^qmiaux généralisée $\left\{\binom{nz}{n}_q\right\}_n, z \in \mathbb{C}$,
- la suite liée aux probabilités maximales de la convolée d'une loi uniforme discrète $\{c_{q,2n/q}\}_n$.

Définition 60 Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit la suite des coefficients bi^qnomiaux généralisée, de la manière suivante

$$\binom{z}{k}_q := \sum_{k_1+k_2+\dots+k_q=k} \frac{z(z-1)\dots(z-k_1+1)}{(k_1-k_2)!(k_2-k_3)!\dots(k_{q-1}-k_q)!k_q!}. \quad (4.1)$$

Cette définition est motivée par la relation (2.21).

Le lemme suivant donne une autre caractérisation de la suite des coefficients bino^qmiaux généralisée.

Lemme 61 On a l'égalité suivante

$$\sum_{k_1+\dots+k_q=k} \frac{z(z-1)\dots(z-k_1+1)}{(k_1-k_2)!\dots(k_{q-1}-k_q)!k_q!} = \sum_{\substack{h_1+2h_2+\dots+qh_q=k \\ h_1+h_2+\dots+h_q=k_1}} \frac{z(z-1)\dots(z-k_1+1)}{h_1!h_2!\dots h_{q-1}!h_q!}.$$

Théorème 62 Soit $z \in \mathbb{C}$, la fonction génératrice de la suite des coefficients bi^qnomiaux généralisée est donnée par

$$\sum_{n \geq 0} \binom{z}{n}_q t^n = (1 + t + t^2 + \dots + t^q)^z.$$

Preuve. Via le Lemme précédent, on a

$$\sum_{n \geq 0} \binom{z}{n}_q t^n = \sum_{\substack{h_1+2h_2+\dots+qh_q=n \\ h_1+h_2+\dots+h_q=m}} \binom{z}{m} \frac{m!}{h_1!h_2!\dots h_{q-1}!h_q!} t^n.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} (1 + t + t^2 + \dots + t^q)^z &= \sum_{m \geq 0} \binom{z}{m} (t + t^2 + \dots + t^q)^m \\ &= \sum_{m \geq 0} \binom{z}{m} \sum_{\substack{l_1+2l_2+\dots+ql_q=n \\ l_1+l_2+\dots+l_q=m}} \frac{m!}{l_1!l_2!\dots l_{q-1}!l_q!} t^{l_1+2l_2+\dots+ql_q}. \end{aligned}$$

On conclut, en remarquant que la sommation sur les $n \geq 0$ est équivalente à la sommation sur les $m \geq 0$. $\square$

Remarque 63 Dans Comtet [102], Vol.1, p. 172, problème 19, on trouve

$$\sum_{n \geq 0} x^n \mathfrak{L}_{t^n} (1 + t + t^2)^n = (1 - 2x - 3x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

En utilisant le fait que le coefficient du terme t^n dans le développement² de $(1 + t + t^2)^n$: $\mathfrak{L}_{t^n} (1 + t + t^2)^n = \binom{n}{2}_2$ est égal à $\max_k \binom{n}{k}_2$, on établit l'identité combinatoire suivante

$$G_2(t) := \sum_{n \geq 0} c_{2,n} t^n = \left(1 + \frac{t}{3}\right)^{-1/2} (1 - t)^{-1/2}.$$

Ce qui correspond à la fonction génératrice de la suite $\{c_{2,n}\}_n$.

Nous allons maintenant déterminer la fonction génératrice des suites $\{\binom{z}{n}_q\}_n$ et $\{\binom{nz}{n}_q\}_n$, $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 64 Soit $z \in \mathbb{C}$, alors la fonction génératrice de la suite $\{\binom{nz}{n}_q\}_n$ est donnée par

$$\sum_{n \geq 0} \binom{nz}{n}_q t^n = u \left(1 - z \frac{u + 2u^2 + \dots + qu^q}{1 + u + u^2 + \dots + u^q}\right)^{-1},$$

où u est solution de l'équation $t = u(1 + u + u^2 + \dots + u^q)^{-z}$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème d'inversion d'Hermite [102] pour la fonction $t \mapsto t(1 + t + \dots + t^q)^{-z}$. $\square$

Le Théorème d'Hermite, tel qu'utilisé ici, est une version bien adapté à notre problème, du Théorème d'inversion de Lagrange. On pourra, à titre complémentaire, consulter la référence très intéressante de Merlini, Sprugnoli et Verri [246, 2006] où ils développent le pourquoi et le comment quant à l'utilisation du Théorème d'inversion de Lagrange.

Théorème 65 Pour q entier pair, la fonction génératrice de la suite $\{c_{q,2n/q}\}_n$ est donnée par

$$G_q(t) := \sum_{n \geq 0} t^n c_{q,2n/q} = \left(1 - \frac{2}{q} \frac{u + 2u^2 + \dots + qu^q}{1 + u + u^2 + \dots + u^q}\right)^{-1} = \frac{q}{2} \frac{1 + \sum_{k=1}^{q/2} (u^{-k} + u^k)}{\sum_{k=1}^{q/2} k(u^{-k} - u^k)},$$

où u est solution de l'équation

$$t = u \left(\frac{q+1}{1 + u + u^2 + \dots + u^q} \right)^{2/q} = \left(\frac{q+1}{1 + \sum_{k=1}^{q/2} (u^{-k} + u^k)} \right)^{2/q}.$$

²La notation utilisée ici est celle de Comtet, $\mathfrak{L}_{t^n}$ veut dire coefficient de t^n .

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème précédent pour $z = 2/q$, puis de faire le changement de variables $t \rightarrow (q + 1)t$. $\square$

Remarque 66 La suite $\{c_{q,2n/q}\}_n$ contient strictement la sous suite $\{c_{q,L}\}_L$. Cependant, il est intéressant de déterminer la fonction qui génère la suite $\{c_{q,L}\}_L$. Pour cela, nous aurons besoin d'un résultat plus puissant qui sera établi au paragraphe suivant. Néanmoins, pour $q = 4$, nous pouvons déjà évaluer la fonction génératrice de cette suite via le Corollaire suivant. Elle fera l'objet de la Remarque 69.

Corollaire 67 Pour $q = 4$, la fonction génératrice de la suite $\{c_{4,n/2}\}_n$, définie pour $t \in]-\sqrt{5}, 1[$, est donnée par

$$G_4(t) := \sum_{n \geq 0} t^n c_{4,n/2} = \left(1 - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{200}t(5t^2 + 20)^{\frac{3}{2}}\right)^{-1/2}.$$

Corollaire 68 Les identités suivantes sont satisfaites

$$\sum_{n \geq 0} (-5)^{-n} \binom{n/2}{n}_4 = 2 \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n c_{4,n/2} = 2/\sqrt{5}.$$

Remarque 69 La fonction génératrice de la suite $\{c_{4,n}\}_n$, définie pour $t \in]-1, 1[$, est donnée par

$$\sum_{n \geq 0} t^n c_{4,n} = (G_4(\sqrt{|t|}) + G_4(-\sqrt{|t|}))/2.$$

4.3 Fonction génératrice d'une sous suite indicée par une progression arithmétique

On a déjà vu l'importance de la fonction génératrice en mathématiques pour une suite de nombres donnée. Cependant, dans certaines situations pratiques, nous sommes amenés à considérer des sous suites spécifiques, comme la sous suite indicée par une progression arithmétique et, plus particulièrement, la sous suite des multiples d'un entier donné. En dehors des sous suites d'indice pair³, il est rare⁴ de trouver des travaux se consacrant à la fonction génératrice d'une sous suite régulière de la suite en question. Le but de cette section est donc de démontrer un résultat qui répond aux dernières préoccupations, c'est-à-dire expliciter la fonction génératrice d'une sous suite indicée par une progression arithmétique. Un exemple original attire l'attention. Il s'agit de la fonction génératrice qui génère les probabilités maximales de la suite des convolées d'une distribution uniforme discrète.

³Par exemple, pour la fonction génératrice des sous suites de Fibonacci d'indices pairs et d'indices impairs, on pourra consulter [140].

⁴En fait, je ne connais pas.

Théorème 70 Soit $G(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ la fonction génératrice de la suite $\{a_n\}_n$. Alors, pour tout entier $s \geq 2$, la fonction génératrice $G_r(t) := \sum_{m \geq 0} a_{sm+r} t^m$ de la suite $\{a_{sm+r}\}_m$ ($r = 0, \dots, s-1$) est donnée par

$$G_0(t) = \frac{(-1)^s}{s} \sum_{k=1}^s G(t_k t^{1/s}) \quad (r = 0), \quad (4.2)$$

$$G_r(t) = t^{-r/s} \sum_{k=1}^s (-1)^{k+r} G(t_k t^{1/s}) V(k, r) \quad (0 < r < s), \quad (4.3)$$

où

$$V(k, r) = \prod_{1 \leq j \neq k \leq s} (t_j - t_k)^{-1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{s-1-r} \leq s \\ j_1, \dots, j_{s-1-r} \neq k}} t_{j_1} \cdots t_{j_{s-1-r}}.$$

Preuve. Considérons $t_1, t_2, \dots, t_s$ les racines de l'équation $t^s = 1$, ainsi

$$\begin{aligned} G(t_k t^{1/s}) &= \sum_{n \geq 0} a_n t_k^n t^{n/s}, \quad \text{en posant } n = sm + r, \text{ on obtient} \\ &= \underbrace{\sum_{m \geq 0} a_{sm} t^m}_{S_0} + \underbrace{\sum_{m \geq 0} a_{sm+1} t^{m+1/s} t_k}_{S_1} + \cdots + \underbrace{\sum_{m \geq 0} a_{sm+s-1} t^{m+(s-1)/s} t_k^{s-1}}_{S_{s-1}} \\ G(t_k t^{1/s}) &= \sum_{r=0}^{s-1} S_r t_k^r \quad \text{avec } S_r = G_r(t) \cdot t^{r/s} \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à résoudre le système de Cramer suivant

$$\begin{cases} S_0 + t_1 S_1 + \cdots + t_1^{s-1} S_{s-1} = G(t_1 t^{1/s}), \\ S_0 + t_2 S_1 + \cdots + t_2^{s-1} S_{s-1} = G(t_2 t^{1/s}), \\ \vdots \\ S_0 + t_s S_1 + \cdots + t_s^{s-1} S_{s-1} = G(t_s t^{1/s}). \end{cases}$$

Ainsi

$$S_r = \frac{\Delta_r}{\Delta} \quad (r = 0, \dots, s-1)$$

où $\Delta := V(t_1, t_2, \dots, t_s)$ est le déterminant de Vandermonde,

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{r-1} & G(t_1 t^{1/s}) & t_1^{r+1} & \cdots & t_1^{s-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{r-1} & G(t_2 t^{1/s}) & t_2^{r+1} & \cdots & t_2^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_s & \cdots & t_s^{r-1} & G(t_s t^{1/s}) & t_s^{r+1} & \cdots & t_s^{s-1} \end{vmatrix}, \quad (r = 1, \dots, s-1),$$

et

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} G(t_1 t^{1/s}) & t_1 & \cdots & t_1^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(t_s t^{1/s}) & t_s & \cdots & t_s^{s-1} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^s G(t_k t^{1/s}) (-1)^k \frac{t_1 \cdots t_s}{t_k} V(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_s)$$

Pour $r = 0$, on a

$$\begin{aligned}
S_0 &= \sum_{k=1}^s G(t_k t^{1/s}) (-1)^k \frac{t_1 \cdots t_s}{t_k} \frac{V(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_s)}{V(t_1, t_2, \dots, t_s)} \\
&= \sum_{k=1}^s (-1)^k G(t_k t^{1/s}) \frac{t_1 \cdots t_s}{t_k} \frac{1}{\prod_{1 \leq j \leq k} (t_l - t_j) \prod_{k \leq j \leq s} (t_j - t_l)} \\
&= \sum_{k=1}^s (-1)^k G(t_k t^{1/s}) (2i)^{s-1} \exp\left\{i \frac{\pi}{s} \left(\frac{s(s+1)}{2} - sk\right)\right\} \prod_{j \neq k} \sin\left(\frac{\pi(j-k)}{s}\right)
\end{aligned}$$

Il est bien établi par Mordechai [250, 1980] que

$$\prod_{k=1}^{\lfloor (s-1)/2 \rfloor} \sin\left(\frac{k\pi}{s}\right) = \frac{\sqrt{s}}{(\sqrt{2})^{s-1}}$$

donc

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ j \neq k}} \sin(j-k) \frac{\pi}{s} = (-1)^{k-1} \prod_{k=1}^{s-1} \sin \frac{k\pi}{s} = (-1)^{k-1} \frac{s}{2^{s-1}}$$

ce qui donne

$$G_0(t) = \sum_{k=1}^s (-1)^k \prod_{j \neq k} (1 - t_j \bar{t}_k)^{-1} G(t_k t^{1/s}) = \frac{(-1)^s}{s} \sum_{k=1}^s G(t_k t^{1/s}).$$

Pour $r \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_r &= (-1)^r \begin{vmatrix} G(t_1 t^{1/s}) & 1 & t_1 & \cdots & t_1^{r-1} & t_1^{r+1} & \cdots & t_1^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(t_s t^{1/s}) & 1 & t_s & \cdots & t_s^{r-1} & t_s^{r+1} & \cdots & t_s^{s-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^r \sum_{k=1}^s (-1)^k G(t_k t^{1/s}) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{r-1} & t_1^{r+1} & \cdots & t_1^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{k-1} & \cdots & t_{k-1}^{r-1} & t_{k-1}^{r+1} & \cdots & t_{k-1}^{s-1} \\ 1 & t_{k+1} & \cdots & t_{k+1}^{r-1} & t_{k+1}^{r+1} & \cdots & t_{k+1}^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_s & \cdots & t_s^{r-1} & t_s^{r+1} & \cdots & t_s^{s-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^r \sum_{k=1}^s (-1)^k G(t_k t^{1/s}) V_r(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_s)
\end{aligned}$$

et

$$S_r = (-1)^r \sum_{k=1}^s (-1)^k G(t_k t^{1/s}) \frac{V_r(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_s)}{V(t_1, \dots, t_s)}$$

par conséquent

$$G_r(t) = (-1)^r t^{-r/s} \sum_{k=1}^s (-1)^k G(t_k t^{1/s}) \frac{V_r(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_s)}{V(t_1, \dots, t_s)}.$$

Il n'est pas très difficile de voir que

$$V_r(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_s) = \prod_{\substack{1 \leq j < l \leq s \\ j, l \neq k}} (t_j - t_l) \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{s-1-r} \leq s \\ j_1, \dots, j_{s-1-r} \neq k}} t_{j_1} \cdots t_{j_{s-1-r}}. \quad (4.4)$$

(Vandermonde sans la k -ième ligne et la $(r+1)$ -ième colonne). $\square$

Remarque 71 Pour avoir une forme explicite de $G_r(t)$, il reste à calculer la quantité $V(k, r) := \frac{V_r(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_s)}{V(t_1, \dots, t_s)}$ qui ne dépend que des racines s -ièmes de l'unité, expression qui, nous pensons, n'est pas évidente à évaluer.

Remarque 72 Pour le calcul de déterminants liés au déterminant de Vandermonde, on pourra consulter l'excellent ouvrage de Vein et Dale [331, 1999] et, particulièrement, pour ce qui concerne les racines s -ièmes de l'unité, les travaux de Evans et Issacs [123, 1976], Schlickewei et Viola [286, 2000] et Wybourn [354, 2002].

4.4 Fonction génératrice des valeurs modales pour la convolée de la loi discrète uniforme

Il s'agit maintenant de déterminer, pour q pair, la fonction génératrice de la suite des probabilités maximales $\{c_{q,L}\}_L$ de la convolée d'une loi uniforme discrète. Chose que l'on peut déduire à partir de la relation (4.2) du Théorème 70.

On a déjà établi au Théorème 65 que, pour q entier pair, la fonction génératrice de la suite $\{c_{q,2n/q}\}_n$ est donnée par

$$G_q(t) := \sum_{n \geq 0} t^n c_{q,2n/q} = \frac{q}{2} \frac{1 + \sum_{k=1}^{q/2} (u^{-k} + u^k)}{\sum_{k=1}^{q/2} k (u^{-k} - u^k)},$$

où u est solution de l'équation

$$t = \left(\frac{q+1}{1 + \sum_{k=1}^{q/2} (u^{-k} + u^k)} \right)^{2/q}.$$

Considérant la sous suite donnée par les multiples de $s = q/2$ (q pair), nous obtenons ainsi :

Théorème 73 *Pour q entier pair, la fonction génératrice de la suite $\{c_{q,L}\}_L$ est donnée par*

$$\Gamma_q(t) := \sum_{L \geq 0} t^L c_{q,L} = (-1)^{q/2} \frac{1 + \sum_{k=1}^{q/2} (u^{-k} + u^k)}{\sum_{k=1}^{q/2} k (u^{-k} - u^k)},$$

où u est solution de l'équation

$$t = \frac{q+1}{1 + \sum_{k=1}^{q/2} (u^{-k} + u^k)}.$$

Preuve. C'est une simple combinaison calculatoire des Théorèmes 70 et 65. □

Chapitre 5

Sommes combinatoires liées aux nombres de Fibonacci et de Lucas généralisés

5.1 Introduction

Les nombres de Fibonacci ont fasciné un grand nombre d'auteurs. On trouve dans la littérature une multitude d'articles concernant des expressions sommatoires et trigonométriques les concernant.

Comme ce chapitre est consacré à l'évaluation de certaines sommes combinatoires liées aux nombres de Fibonacci et de Lucas généralisées, plus précisément aux sommes d'ordre deux et sommes alternées d'ordre deux (en considérant tous les cas possibles), ainsi qu'aux sommes trigonométriques, il n'est pas sans intérêt de les situer dans la littérature.

Pour ce qui concerne les sommes d'inverses (ou sommes d'ordre -1) de nombres de Fibonacci et de Lucas ou les généralisations s'y rapportant, on peut consulter les travaux d'André-Jeannin [6, 1989], [7, 1990], [8, 1991] et [12, 1997], Melham et Shannon [243, 1991] et [241, 1995], Melham [239, 1996], [234, 2000], [238, 2003] et, tout récemment, l'article de Chu et Magli [349, 2007]. Aussi, pour les sommes d'inverses de sous suites spécifiques, comme celles indicées par des puissances d'entiers, on peut consulter les travaux de Lucas [218, 1878], Rabinowitz [271, 1998], Horadam [158, 1965] et [159, 1988], Brady [72, 1971], Millin [249, 1974], Good [135, 1994], Bruckman et Good [80, 1976], Hoggatt Jr. et Bicknel [156, 1976] et [157, 1976], Shannon [289, 1976], Greig [141, 1977] et [142, 1977], Bergum et Hoggatt [63, 1979] et Popov [267, 1984], [268, 1985] et [269, 1986].

Pour les sommes de produits de nombres de Fibonacci, de Lucas, de Jacobsthal et les généralisations s'y rapportant (comme les suites récurrentes linéaires), on peut consulter les papiers de Zeitlin [359, 1965], Bergum et Hoggatt [62, 1975], Er [121, 1984], Brugia et al [80, 1991], Shannon et Melham [292, 1993], Melham et Jennings [240, 1995], Melham [232, 1999], [233, 1999], [236, 2003], [235, 2004], El Nachie [119, 2001], Zhao et Wang [365, 2001], He et

Zhang [153, 2002], Liu [212, 2002], Yuan et Zhang [357, 2002], Zhang [361, 2002], Howard [182, 2003], Feng et Zhang [125, 2003], Johnson [184, 2004], Rajesh et Leversha [273, 2004], Čerin [90, 2005], [91, 2006], Čerin et Gianella [95, 96, 2006], [94, 92, 93, 2007] et Seibert et Trojovsky [287, 2007].

Pour des expressions trigonométriques liées aux nombres de Fibonacci et de Lucas, on peut voir les articles de Johnston [186, 1940], Bedrosian [21, 1973], Mordechai [250, 1980], Obaid [257, 1991], Pethe et Fernandez [263, 1995], Melham [237, 1999] et récemment Emrah et Dursun [120, 2007]. Plus particulièrement, pour les sommes hyperboliques et trigonométriques, on renvoie aux travaux de Melham et Shannon [242, 1995], Melham [232, 1999], Hu and al [183, 2003], Katai [192, 2006], Garnier et Ramaré [131, 2007].

Soient x et y deux entiers tels que $xy \neq 0$ et $\Delta := x^2 + 4y \neq 0$. On a déjà défini les suites généralisées de Fibonacci et de Lucas $(U_n) = (U_n(x, y))$ et $(V_n) = (V_n(x, y))$, pour tout n , par les récurrences

$$\begin{cases} U_0 = 0, & U_1 = 1, & U_n = xU_{n-1} + yU_{n-2} \\ V_0 = 2, & V_1 = x, & V_n = xV_{n-1} + yV_{n-2} \end{cases}$$

Les formes de Binet suivantes sont satisfaites

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ et } V_n = \alpha^n + \beta^n$$

où α et β sont les racines du polynôme caractéristique $t^2 - xt - y = 0$ associé aux suites récurrentes. On a

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } \beta = \frac{x - \sqrt{\Delta}}{2}$$

avec

$$\alpha + \beta = x \text{ et } \alpha\beta = -y.$$

Les suites (U_n) et (V_n) vérifient les propriétés données par les deux propositions suivantes

Proposition 74 *Pour tous entiers n , m et h , on a*

1. $U_{-n} = -(-y)^{-n} U_n$,
2. $V_{-n} = (-y)^{-n} V_n$,
3. $\Delta U_n U_m = V_{n+m} - (-y)^m V_{n-m}$,
4. $V_n V_m = V_{n+m} + (-y)^m V_{n-m}$,
5. $U_n V_m = U_{n+m} + (-y)^m U_{n-m}$,
6. $V_n U_m = U_{n+m} - (-y)^m U_{n-m}$,
7. $U_n U_{m+h} - U_{n+h} U_m = (-y)^m U_h U_{n-m}$,
8. $V_n V_{m+h} - V_{n+h} V_m = -(-y)^m \Delta U_h U_{n-m}$,
9. $V_n V_{m+h} - \Delta U_{n+h} U_m = (-y)^m V_h V_{n-m}$,
10. $U_n V_{m+h} - U_{n+h} V_m = -(-y)^m U_h V_{n-m}$.

Preuve. Il suffit d'utiliser les formes de Binet. $\square$

Corollaire 75 *Pour $y = 1$ et pour tous entiers n et k , on a*

1. $U_n^2 - U_{n+k}U_{n-k} = (-1)^{n-k} U_k^2$,
2. $V_n^2 - V_{n+k}V_{n-k} = -\Delta (-1)^{n-k} U_k^2$,
3. $U_n^2 + U_{n+k}U_{n-k} = \Delta^{-1} \left(2V_{2n} - (-1)^{n-k} V_k^2 \right) = \Delta^{-1} \left(2V_n^2 - (-1)^n \left((-1)^k V_k^2 + 4 \right) \right)$,
4. $V_n^2 + V_{n+k}V_{n-k} = 2V_{2n} + (-1)^{n-k} V_k^2 = 2\Delta U_n^2 + (-1)^n \left((-1)^k V_k^2 + 4 \right)$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la Proposition 74. $\square$

Proposition 76 *Pour $y = 1$ et pour tous entiers n et k , on a les relations d'ordre quatre suivantes :*

1. $U_n^4 - U_{n-2k}U_{n-k}U_{n+k}U_{n+2k} = (-1)^{n-k} V_{2n} \left(V_{4k} + V_{2k} - 4(-1)^k \right) - (V_{6k} + V_{2k} - 4)$,
2. $U_n^4 \mp U_{n-k}U_n^2U_{n+k} = \pm U_{n-2k}U_{n-k}U_{n+k}U_{n+2k}$.

Preuve. On utilise les formes de Binet. $\square$

Proposition 77 *Pour tous entiers r et $n \geq 0$, on a*

1. $\Delta U_2 \sum_{i=0}^n U_{r+4i} = V_{4n+r+2} - V_{r-2} = \Delta U_{2n+r} U_{2n+2}$,
2. $U_2 \sum_{i=0}^n V_{r+4i} = U_{4n+r+2} - U_{r-2} = V_{2n+r} U_{2n+2}$,
3. $V_2 \sum_{i=0}^n (-1)^i U_{r+4i} = (-1)^n U_{4n+r+2} + U_{r-2} = \begin{cases} U_{2n+r} V_{2n+2} & (n \text{ pair}) \\ -V_{2n+r} U_{2n+2} & (n \text{ impair}) \end{cases}$
4. $V_2 \sum_{i=0}^n (-1)^i V_{r+4i} = (-1)^n V_{4n+r+2} + V_{r-2} = \begin{cases} V_{2n+r} V_{2n+2} & (n \text{ pair}) \\ -\Delta U_{2n+r} U_{2n+2} & (n \text{ impair}) \end{cases}$

Preuve. Ce sont des conséquences des relations 3. 4. 5. et 6. de la proposition 74. $\square$

Pour $n \geq 0$, les suites de Fibonacci (F_n) , Lucas (L_n) , Pell (P_n) , Pell-Lucas (Q_n) , Jacobsthal (J_n) , Jacobsthal-Lucas (j_n) listés respectivement A000045, A00032, A000129, A002203, A001045, A014551 dans Sloane [300] en sont des cas particuliers

$$\begin{aligned} (F_n, L_n) &= (U_n(1, 1), V_n(1, 1)), \\ (P_n, Q_n) &= (U_n(2, 1), V_n(2, 1)), \\ (J_n, j_n) &= (U_n(1, 2), V_n(1, 2)). \end{aligned}$$

On trouvera aussi dans Sloane [300] la suite listée A006190 correspondant à $(U_n(3, 1)) = (0, 1, 3, 10, 33, \dots)$ ainsi que sa duale listée A006497 et correspondant à la suite $(V_n(3, 1)) = (2, 3, 11, 36, \dots)$, appelées suites de Morgan-Voyce.

5.2 Sommes de produits d'ordre deux de nombres de Fibonacci et de Lucas généralisés

Dans cette section, on établit plusieurs formules de sommes d'ordre deux et de sommes alternées d'ordre deux, en considérant toutes les combinaisons possibles de nombres de Fibonacci et de Lucas généralisés.

En particulier, nous donnons une extension de tous les résultats de Z. Čerin [90, 2005] concernant la somme des carrés alternés, et la somme de produits alternés d'ordre deux, des nombres de Lucas. nous donnons aussi, de manière beaucoup plus simple, tous ceux de Z. Čerin et G. M. Gianella [95, 2006] concernant la somme des carrés, la somme des carrés alternés, la somme de produits d'ordre deux, et la somme de produits alternés d'ordre deux des nombres de Pell-Lucas. Signalons que, récemment, Z. Čerin [94, 2007] a évalué la somme des carrés, la somme des carrés alternés, la somme de produits d'ordre deux, et la somme de produits alternés d'ordre deux, des nombres de Jacobsthal.

Pour r et s deux entiers et des suites $(X_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ et $(Y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$, les sommes d'ordre deux ordinaire et alternée sont définies de la manière suivante

$$S_n^{(r,s)}(X, Y) := \sum_{i=0}^n X_{r+2i} Y_{s+2i} \quad \text{et} \quad A_n^{(r,s)}(X, Y) := \sum_{i=0}^n (-1)^i X_{r+2i} Y_{s+2i},$$

pour simplifier, on posera

$$S_n^{(r,s)}(X) := S_n^{(r,s)}(X, X) \quad \text{et} \quad A_n^{(r,s)}(X) := A_n^{(r,s)}(X, X).$$

Dans [90, 2005], Čerin a évalué la somme $A_n^{(r,s)}(L)$ pour $s = r$ et $s = r + 1$ lorsque r est impair, et dans [95, 2006] Čerin et Gianella ont étudié les sommes $S_n^{(r,s)}(Q)$ et $A_n^{(r,s)}(Q)$ pour $s = r$ et $s = r + 1$ lorsque r est pair.

Dans cette section, on se propose de donner des relations simplifiées de $S_n^{(r,s)}(U)$, $S_n^{(r,s)}(V)$, $S_n^{(r,s)}(U, V)$, $A_n^{(r,s)}(U)$, $A_n^{(r,s)}(V)$ et $A_n^{(r,s)}(U, V)$. Dans tout ce qui suit, on suppose $y = \pm 1$ (ce qui assure $V_2 \neq 0$, $U_2 \neq 0$ et $U_4 \neq 0$).

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit les suites (a_n) , (b_n) , (c_n) , (d_n) et (e_n) par les relations

$$a_n = \frac{U_{2n}}{U_2}, \quad b_n = \frac{V_{4n+2}}{V_2}, \quad c_n = \frac{U_{4n+4}}{U_4}, \quad d_n = \frac{b_{n+1} - 1}{x^2 \Delta}, \quad e_n = x(b_n - 1).$$

Ces suites, ne dépendant que de x et y , vérifient les relations de récurrence suivantes

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -1, & a_0 &= 0, & a_n &= V_2 a_{n-1} - a_{n-2}, \\ b_{-1} &= 1, & b_0 &= 1, & b_n &= V_4 b_{n-1} - b_{n-2}, \\ c_{-1} &= 0, & c_0 &= 1, & c_n &= V_4 c_{n-1} - c_{n-2}, \\ d_{-1} &= 0, & d_0 &= 1, & d_n &= V_4 d_{n-1} - d_{n-2} + 1, \\ e_{-1} &= 0, & e_0 &= 0, & e_n &= V_4 e_{n-1} - e_{n-2} + x^3(x^2 - 4). \end{aligned}$$

Pour $(x, y) = (1, 1)$, on a

$$\begin{aligned}(U_n(1, 1))_{n \geq 0} &= (F_n)_{n \geq 0} \text{ (Fibonacci),} \\ (V_n(1, 1))_{n \geq 0} &= (L_n)_{n \geq 0} \text{ (Lucas),} \\ (a_n(1, 1))_{n \geq 0} &= (0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, \dots) \rightarrow \text{Sloane A001906,} \\ (b_n(1, 1))_{n \geq 0} &= (1, 6, 41, 281, 1926, 13201, \dots) \rightarrow \text{Sloane A049685,} \\ (c_n(1, 1))_{n \geq 0} &= (1, 7, 48, 329, 2255, 15456, \dots) \rightarrow \text{Sloane A004187,} \\ (d_n(1, 1))_{n \geq 0} &= (1, 8, 56, 385, 2640, 18096, \dots) \rightarrow \text{Sloane A092521.}\end{aligned}$$

Pour $(x, y) = (2, 1)$, on a

$$\begin{aligned}(U_n(2, 1))_{n \geq 0} &= (P_n)_{n \geq 0} \text{ (Pell),} \\ (V_n(2, 1))_{n \geq 0} &= (Q_n)_{n \geq 0} \text{ (Pell-Lucas),} \\ (a_n(2, 1))_{n \geq 0} &= (0, 1, 6, 35, 204, \dots) \rightarrow \text{Sloane A001109,} \\ (b_n(2, 1))_{n \geq 0} &= (1, 33, 1121, 38081, \dots) \rightarrow \text{Sloane A077420,} \\ (c_n(2, 1))_{n \geq 0} &= (1, 34, 1155, 39236, \dots) \rightarrow \text{Sloane A029547,} \\ (d_n(2, 1))_{n \geq 0} &= (1, 35, 1190, 40426, \dots) \rightarrow \text{Sloane A029546.}\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = (1 + (-1)^n)/2$, le théorème suivant donne les sommations d'ordre deux ; leurs expressions étant condensées, nous les nommerons pour les repérer par rapport aux autres références. Il s'agit de

- La somme des produits d'ordre deux des nombres de Fibonacci généralisés. Lorsque $r = s$, on obtient la somme des carrés des nombres de Fibonacci généralisés.
- La somme des produits d'ordre deux des nombres de Lucas généralisés. Lorsque $r = s$, on obtient la somme des carrés des nombres de Lucas généralisés.
- La somme mixte¹ des produits d'ordre deux des nombres de Fibonacci généralisés avec les nombres de Lucas généralisés.
- La somme alternée des produits d'ordre deux des nombres de Fibonacci généralisés. Lorsque $r = s$, on obtient la somme alternée des carrés des nombres de Fibonacci généralisés.
- La somme alternée des produits d'ordre deux des nombres de Lucas généralisés. Lorsque $r = s$, on obtient la somme alternée des carrés des nombres de Lucas généralisés.
- La somme alternée mixte des produits d'ordre deux des nombres de Fibonacci généralisés avec les nombres de Lucas généralisés.

¹A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de résultats concernant les sommes mixtes de produits d'ordre deux (qu'elle soit alternée ou non).

Théorème 78 *Pour tous r, s et $n \geq 0$, on a*

$$S_n^{(r,s)}(U) = x^{-1} \Delta^{-1} [U_{4n+r+s+2} - U_{r+s-2}] - (n+1) \Delta^{-1} (-y)^r V_{s-r}, \quad (5.1)$$

$$S_n^{(r,s)}(V) = x^{-1} [U_{4n+r+s+2} - U_{r+s-2}] + (n+1) (-y)^r V_{s-r}, \quad (5.2)$$

$$S_n^{(r,s)}(U, V) = x^{-1} \Delta^{-1} [V_{4n+r+s+2} - V_{r+s-2}] - (n+1) \Delta^{-1} (-y)^r U_{s-r}, \quad (5.3)$$

$$A_n^{(r,s)}(U) = \Delta^{-1} V_2^{-1} [V_{r+s-2} + (-1)^n V_{4n+r+s+2}] - \varepsilon \Delta^{-1} (-y)^r V_{s-r}, \quad (5.4)$$

$$A_n^{(r,s)}(V) = V_2^{-1} [V_{r+s-2} + (-1)^n V_{4n+r+s+2}] + \varepsilon (-y)^r V_{s-r}, \quad (5.5)$$

$$A_n^{(r,s)}(U, V) = V_2^{-1} [U_{r+s-2} + (-1)^n U_{4n+r+s+2}] - \varepsilon (-y)^r U_{s-r}. \quad (5.6)$$

Le Corollaire 79 présente une variante du Théorème 78 en exploitant les suites (a_n) , (c_n) , et (d_n) .

Corollaire 79 *Pour tous r, s et $n \geq 0$, on a*

$$\Delta S_n^{(r,s)}(U) = a_{n+1} V_{2n+r+s} - (n+1) (-y)^r V_{s-r}, \quad (5.7)$$

$$S_n^{(r,s)}(V) = a_{n+1} V_{2n+r+s} + (n+1) (-y)^r V_{s-r}, \quad (5.8)$$

$$S_n^{(r,s)}(U, V) = a_{n+1} U_{2n+r+s} - (n+1) (-y)^r U_{s-r}, \quad (5.9)$$

$$\Delta A_n^{(r,s)}(U) = \begin{cases} b_m V_{4m+r+s} - (-y)^r V_{s-r} & \text{si } n = 2m \\ -x \Delta c_m U_{4m+r+s+2} & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}, \quad (5.10)$$

$$A_n^{(r,s)}(V) = \begin{cases} b_m V_{4m+r+s} + (-y)^r V_{s-r} & \text{si } n = 2m \\ -x \Delta c_m U_{4m+r+s+2} & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}, \quad (5.11)$$

$$A_n^{(r,s)}(U, V) = \begin{cases} b_m U_{4m+r+s} - (-y)^r U_{s-r} & \text{si } n = 2m \\ -x c_m V_{4m+r+s+2} & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}. \quad (5.12)$$

Le Corollaire 80 met en relief des combinaisons linéaires, de même nature, des couples de sommes $(S_n^{(s,s)}(U), S_n^{(r,r)}(U))$, $(S_n^{(s,s)}(V), S_n^{(r,r)}(V))$ et $(S_n^{(s,s+t)}(V), S_n^{(r,r+t)}(U))$.

Corollaire 80 *Pour tous r, s, t et $n \geq 0$, on a*

$$S_n^{(s,s)}(U) - (-y)^{s-r} S_n^{(r,r)}(U) = a_{n+1} U_{s-r} U_{2n+r+s+t}, \quad (5.13)$$

$$\Delta^{-1} (S_n^{(s,s)}(V) - (-y)^{s-r} S_n^{(r,r)}(V)) = a_{n+1} U_{s-r} U_{2n+r+s+t}, \quad (5.14)$$

$$S_n^{(s,s+t)}(V) + \Delta (-y)^{s-r} S_n^{(r,r+t)}(U) = a_{n+1} V_{s-r} V_{2n+r+s+t}. \quad (5.15)$$

Preuves. On obtient le Théorème 78 et le Corollaire 79 à partir des relations 3. 4. 5. 6. de la Proposition 74 et de la Proposition 77, et pour le Corollaire 80 à partir des relations (5.7), (5.8) et des relations 3. 4. de la Proposition 74. $\square$

5.2.1 Application première : extension aux résultats de Čerin

Le Théorème suivant est une généralisation de tous les résultats de Čerin cités dans [90] : à savoir des Théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3.

Théorème 81 *Pour tous entiers $m \geq 0$ et k , nous avons*

$$x^2y + V_{2k}^2 = \Delta U_{2k-1}U_{2k+1} \text{ et } yV_2^2 + V_{2k-1}^2 = \Delta U_{2k-3}U_{2k+1}, \quad (5.16)$$

$$\delta_n + A_n^{(2k,2k)}(V) = \begin{cases} \Delta b_m U_{2k+2m+1}U_{2k+2m-1} & \text{si } n = 2m, \\ -x\Delta c_m U_{2k+2m+3}V_{2k+2m-1} & \text{si } n = 2m+1, \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\theta_n + A_n^{(2k-1,2k-1)}(V) = \begin{cases} \Delta b_m U_{2k+2m-1}^2 & \text{si } n = 2m, \\ -x\Delta c_m U_{2k+2m+1}V_{2k+2m-1} & \text{si } n = 2m+1, \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\xi_n + A_n^{(2k-1,2k)}(V) = \begin{cases} \Delta b_m U_{2k+2m-1}U_{2k+2m} & \text{si } n = 2m, \\ -x\Delta c_m U_{2k+2m}V_{2k+2m+1} & \text{si } n = 2m+1. \end{cases} \quad (5.19)$$

Où (δ_n) , (θ_n) et (ξ_n) sont définis comme suit : $(\delta_{2m}, \delta_{2m+1}) = (yV_{2m+1}^2, xy\Delta U_{4m+4})$, $(\theta_{2m}, \theta_{2m+1}) = (2y(1+b_m), x^2y\Delta c_m)$, $(\xi_{2m}, \xi_{2m+1}) = (xy(1+b_m), -x\Delta c_m)$.

Les relations $\delta_m = \delta_{m-2} + x^2y\Delta V_{2m}$ et $\theta_m = \theta_{m-2} + x^2y\Delta b_{(m-1)/2}$ pour m impair, et $\theta_m = -\theta_{m-2} + 2yV_{m/2}^2$ pour m pair, s'établissent facilement. Ce qui permet de retrouver tous les Théorèmes de l'article de Čerin [90] lorsque $(x, y) = (1, 1)$.

Preuve. Pour la relation (5.16), on utilise la relation 9. de la proposition 74 avec $(n, m, h) = (2k, 2k-1, 1)$ et $(n, m, h) = (2k-1, 2k-3, 2)$ respectivement. Pour les relations (5.17), (5.18) et (5.19), utiliser (5.11) pour $(r, s) = (2k, 2k)$ resp. $(r, s) = (2k-1, 2k-1)$ et $(r, s) = (2k-1, 2k)$ et noter qu'en utilisant les relations 3. 4. 5. et 6. de la Proposition 74, on a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} U_{4k+4m+2} = U_{2k+2m+3}V_{2k+2m-1} + yU_4, \\ V_{4k+4m} = \Delta U_{2k+2m+1}V_{2k+2m-1} - yV_2 \text{ et } V_{4m+2} - 2y = V_{2m+1}^2, \end{cases} \\ \text{resp. } & \begin{cases} U_{4k+4m} = U_{2k+2m+1}V_{2k+2m-1} + yU_2, \\ V_{4k+4m-2} = \Delta U_{2k+2m-1}^2 - 2y, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_{4k+4m+1} = U_{2k+2m}V_{2k+2m+1} + 1, \\ V_{4k+4m-1} = \Delta U_{2k+2m-1}U_{2k+2m} - xy. \end{cases} \end{aligned}$$

□

5.2.2 Application deuxième : extension aux résultats de Čerin et Gianella

Le théorème suivant est en soi original, il en découle tous les Théorèmes de Čerin et Gianella [95], lorsque $(x, y) = (2, 1)$.

Théorème 82 *Pour tous entiers $n \geq 0$, r, s, t et k , on a les égalités suivantes*

$$S_n^{(s,s+t)}(V) = \lambda_n + a_{n+1}V_{s-r}V_{2n+r+s+t}, \text{ où } \lambda_n = (-y)^{r-s+1} \Delta S_n^{(r,r+t)}(U), \quad (5.20)$$

$$A_n^{(2k,2k)}(V) = \begin{cases} b_m V_{2k+2m}^2 - 2x^2 \Delta d_{m-1} & \text{si } n = 2m \\ x^2 \Delta c_m (1 - a_{k+m+1} V_{2k+2m}) & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}, \quad (5.21)$$

$$A_n^{(2k+1,2k+1)}(V) = \begin{cases} -\Delta U_{2m+1}^2 + b_m V_{2k+2m} V_{2k+2m+2} & \text{si } n = 2m \\ -x^2 \Delta c_m a_{k+m+1} V_{2k+2m+2} & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}, \quad (5.22)$$

$$A_n^{(2k,2k+1)}(V) = \begin{cases} b_m V_{2k+2m} V_{2k+2m+1} - e_m & \text{si } n = 2m \\ -x \Delta c_m (U_{2k+2m+3} V_{2k+2m} - x^2 - y) & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}. \quad (5.23)$$

Preuve. Pour (5.20) on utilise (5.15).

Pour (5.21), (5.22) et (5.23), on utilise (5.11) avec $r = s = 2k$ resp. $r = s = 2k + 1$ et $(r, s) = (2k, 2k + 1)$, ainsi que, pour $t = 0$ resp. $t = 2$ et $t = 1$, les relations $V_{4k+4m+t} = V_{2k+2m+t} V_{2k+2m} - V_t$ et $U_{4k+4m+t+2} = U_{2k+2m+2-r(r-2)} V_{2k+2m+r(r-1)} - U_{(2-r)(2r+1)}$, déduites des relations 4. et 5. de la Proposition 74. En outre pour la relation (5.22), on exploite aussi la double égalité $V_2 b_m + 2y = V_{4m+2} + 2y = \Delta U_{2m+1}^2$ déduite de la relation 3. de la Proposition 74. $\square$

Noter que, voir [95], de la première relation du Théorème 78, on a

$$\lambda_n = -x^{-1} (-y)^{s-r} (U_{4n+2r+t+2} - U_{2r+t-2}) + (n+1) (-y)^s V_t,$$

ainsi que

$$e_m = x V_{2m}^{-1} (V_{4m+2} - V_{-2}) = x^3 \Delta \sum_{j=0}^m c_{j-1}$$

en utilisant la première relation de la Proposition 77.

Pour $(x, y) = (2, 1)$, on obtient les Théorèmes 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 de Čerin et Gianella cités dans [95] : la relation (5.20), avec $(s, t) = (2k, 0)$ et $r \in \{0, 2, 1, -1\}$ donnent respectivement le Théorème 1 ainsi que les relations (2.3), (2.4) et (2.5), avec $(s, t) = (2k + 1, 0)$ et $r \in \{2, 3\}$ donne les Théorèmes 2 et 3, et avec $(s, t) = (2k, 1)$ et $r = 0$ donne le Théorème 4. Les relations (5.21), (5.22) et (5.23) donnent les Théorèmes 5, 6 et 7.

Enfin, les relations 8. 9. de la Proposition 74 permettent d'obtenir de façon immédiate le théorème suivant :

Théorème 83 *Pour tous entiers n, m, r et s , on a*

$$\begin{aligned} V_n V_m &= V_{n+r} V_{m-r} + (-y)^n \Delta U_r U_{m-n-r} \\ &= \Delta U_{n+s} U_{m-s} + (-y)^{m-s} V_s V_{n-m+s}. \end{aligned}$$

Preuve. Se déduisent facilement des formes de Binet. $\square$

Pour $(x, y) = (2, 1)$, $n = 2k$, $m = 2k + 1$, $r = 3$ et $s = 2$, et en posant $P_n^* = 2P_n$ pour tout n , on a $Q_{2k} Q_{2k+1} = Q_{2k+3} Q_{2k-2} - 80 = 8P_{2k+2} P_{2k-1} - 12 = 2(P_{2k+2}^* P_{2k-1}^* - 6)$ qui n'est rien d'autre que le Théorème 8 de [95], où Čerin et Gianella nomment la suite $(P_n^*)_n$ comme étant celle de Pell au lieu de la suite $(P_n)_n$.

5.3 Sommes trigonométriques

Des relations sommatoires trigonométriques concernant les nombres de Fibonacci, de Lucas, de Pell et de Pell-Lucas ont fait l'objet de plusieurs travaux par différents auteurs (voir introduction). Nous allons donner pour ces mêmes suites d'autres identités trigonométriques ainsi que des extensions à des suites récurrentes linéaires d'ordre deux plus générales. En particulier, nous donnons des extensions de tous les Théorèmes de Melham et Shannon [242] et des deux Théorèmes principaux de Melham [232].

Dans toute cette section, on supposera $y = 1$.

Nous allons commencer par les deux théorèmes suivants

Théorème 84 *Pour tous entiers n et k (pourvu que les relations aient un sens), on a*

$$\begin{aligned}
1. \quad \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{U_{n+k}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{U_{n-k}} \right) &= - \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{U_k^2 V_n}{U_n^2} \right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont pairs} \\ \tan^{-1} \left(\frac{U_k V_k}{U_n} \right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont impairs} \end{cases} \\
2. \quad \tanh^{-1} \left(\frac{U_k}{U_{n+k}} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{U_k}{U_{n-k}} \right) &= - \begin{cases} \tanh^{-1} \left(\frac{U_k^2 V_n}{U_n^2} \right) & \text{si } k \text{ pair et } n \text{ impair} \\ \tanh^{-1} \left(\frac{U_k V_k}{U_n} \right) & \text{si } k \text{ impair et } n \text{ pair} \end{cases} \\
3. \quad \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_k}{V_{n+k}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_k}{V_{n-k}} \right) &= - \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{\delta^3 U_k^2 U_n}{V_n^2} \right) & \text{si } k \text{ pair et } n \text{ impair} \\ \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_k V_k}{V_n} \right) & \text{si } k \text{ impair et } n \text{ pair} \end{cases} \\
4. \quad \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_k}{V_{n+k}} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_k}{V_{n-k}} \right) &= - \begin{cases} \tanh^{-1} \left(\frac{\delta^3 U_k^2 U_n}{V_n^2} \right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont pairs} \\ \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_k V_k}{V_n} \right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont impairs} \end{cases} \\
5. \quad \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{U_{n+k}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{U_{n-k}} \right) &= \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{U_k V_k}{U_n} \right) & \text{si } k \text{ pair et } n \text{ impair} \\ \tan^{-1} \left(\frac{U_k^2 V_n}{U_n^2} \right) & \text{si } k \text{ impair et } n \text{ pair} \end{cases} \\
6. \quad \tanh^{-1} \left(\frac{U_k}{U_{n+k}} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{U_k}{U_{n-k}} \right) &= \begin{cases} \tanh^{-1} \left(\frac{U_k V_k}{U_n} \right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont pairs} \\ \tanh^{-1} \left(\frac{U_k^2 V_n}{U_n^2} \right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont impairs} \end{cases} \\
7. \quad \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_k}{V_{n+k}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_k}{V_{n-k}} \right) &= \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_k V_k}{V_n} \right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont pairs} \\ \tan^{-1} \left(\frac{\delta^3 U_k^2 U_n}{V_n^2} \right) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont impairs} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$8. \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_k}{V_{n+k}} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_k}{V_{n-k}} \right) = \begin{cases} \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_k V_k}{V_n} \right) & \text{si } k \text{ pair et } n \text{ impair} \\ \tanh^{-1} \left(\frac{\delta^3 U_k^2 U_n}{V_n^2} \right) & \text{si } k \text{ impair et } n \text{ pair} \end{cases}$$

Preuve. Ce sont des conséquences directes du Corollaire 75. $\square$

Théorème 85 Pour tous entiers n et k (pourvu que les relations aient un sens), on a

$$\begin{aligned} 1. \tan^{-1} \left(\frac{U_{n-k}}{U_n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{U_n}{U_{n+k}} \right) &= \begin{cases} (-1)^{n+1} \tan^{-1} \left(\frac{U_k^2}{V_k U_n^2} \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ (-1)^n \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{U_n V_n} \right) & \text{sinon} \end{cases} \\ 2. \tanh^{-1} \left(\frac{U_{n-k}}{U_n} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{U_n}{U_{n+k}} \right) &= \begin{cases} (-1)^{n+1} \tanh^{-1} \left(\frac{U_k}{U_n V_n} \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ (-1)^n \tanh^{-1} \left(\frac{U_k^2}{V_k U_n^2} \right) & \text{sinon} \end{cases} \\ 3. \tan^{-1} \left(\frac{V_{n-k}}{V_n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{V_n}{V_{n+k}} \right) &= \begin{cases} (-1)^n \tan^{-1} \left(\frac{\Delta U_k^2}{V_k V_n^2} \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ (-1)^{n+1} \tan^{-1} \left(\frac{U_k}{U_n V_n} \right) & \text{sinon} \end{cases} \\ 4. \tanh^{-1} \left(\frac{V_{n-k}}{V_n} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{V_n}{V_{n+k}} \right) &= \begin{cases} (-1)^n \tanh^{-1} \left(\frac{U_k}{U_n V_n} \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ (-1)^{n+1} \tanh^{-1} \left(\frac{\Delta U_k^2}{V_k V_n^2} \right) & \text{sinon} \end{cases} \\ 5. \tan^{-1} \left(\frac{U_{n-k}}{U_n} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{U_n}{U_{n+k}} \right) &= \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{2V_n^2 - (-1)^n (4 + V_k^2)}{\Delta U_k U_n V_n} \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ \tan^{-1} \left(\frac{2V_n^2 - (-1)^n (4 - V_k^2)}{\Delta V_k U_n^2} \right) & \text{sinon} \end{cases} \\ 6. \tanh^{-1} \left(\frac{U_{n-k}}{U_n} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{U_n}{U_{n+k}} \right) &= \begin{cases} \tanh^{-1} \left(\frac{2V_n^2 - (-1)^n (4 + V_k^2)}{\Delta V_k U_n^2} \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ \tanh^{-1} \left(\frac{2V_n^2 - (-1)^n (4 - V_k^2)}{\Delta U_k U_n V_n} \right) & \text{sinon} \end{cases} \\ 7. \tan^{-1} \left(\frac{V_{n-k}}{V_n} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{V_n}{V_{n+k}} \right) &= \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{2\Delta U_n^2 + (-1)^n (4 + V_k^2)}{\Delta U_k U_n V_n} \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ \tan^{-1} \left(\frac{2\Delta U_n^2 + (-1)^n (4 - V_k^2)}{V_k V_n^2} \right) & \text{sinon} \end{cases} \\ 8. \tanh^{-1} \left(\frac{V_{n-k}}{V_n} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{V_n}{V_{n+k}} \right) &= \begin{cases} \tanh^{-1} \left(\frac{2\Delta U_n^2 + (-1)^n (4 + V_k^2)}{V_k V_n^2} \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ \tanh^{-1} \left(\frac{2\Delta U_n^2 + (-1)^n (4 - V_k^2)}{\Delta U_k U_n V_n} \right) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve. Ce sont des conséquences directes du Corollaire 75. □

Corollaire 86 *Dans le cas de la suite de Fibonacci ($x = 1$), on obtient*

1. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n-2}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{L_{2n}}{F_{2n}^2}\right)$
2. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)$
3. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+3}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{F_{2n+1}}\right)$
4. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{L_{2n}}{F_{2n}^2}\right)$
5. $\tan^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{F_n}{F_{n+2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3F_n^2}\right)$
6. $\tan^{-1}\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(-1)^n}{F_n L_n}\right)$
7. $\tan^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{F_n}{F_{n+2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2L_n^2 - 13(-1)^n}{5F_n L_n}\right)$
8. $\tan^{-1}\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2L_n^2 - 3(-1)^n}{5F_n^2}\right)$
9. $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+3}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right) = -\tanh^{-1}\left(\frac{L_{2n+1}}{F_{2n+1}^2}\right)$
10. $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right) = -\tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$
11. $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n-2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{3}{F_{2n}}\right)$
12. $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{L_{2n+1}}{F_{2n+1}^2}\right)$
13. $\tanh^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{F_n}{F_{n+2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{F_n L_n}\right)$
14. $\tanh^{-1}\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{(-1)^n}{F_n^2}\right)$
15. $\tanh^{-1}\left(\frac{F_{n-2}}{F_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{F_n}{F_{n+2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{2L_n^2 - 13(-1)^n}{15F_n^2}\right)$
16. $\tanh^{-1}\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{2L_n^2 - 3(-1)^n}{5F_n L_n}\right)$

Corollaire 87 Dans le cas de la suite de Lucas ($x = 1$), on obtient

1. $\tan^{-1}\left(\frac{L_{2n+1}}{\sqrt{5}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{L_{2n-3}}{\sqrt{5}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{5}F_{2n-1}}{L_{2n-1}^2}\right)$
2. $\tan^{-1}\left(\frac{L_{2n+1}}{\sqrt{5}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{L_{2n-1}}{\sqrt{5}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n}}\right)$
3. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n+2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n-2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{5}}{L_{2n}}\right)$
4. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n+2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{5}F_{2n+1}}{L_{2n+1}^2}\right)$
5. $\tan^{-1}\left(\frac{L_{n-2}}{L_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{L_n}{L_{n+2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{10F_n^2 + 13(-1)^n}{5L_nF_n}\right)$
6. $\tan^{-1}\left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{10F_n^2 + 3(-1)^n}{L_n^2}\right)$
7. $\tan^{-1}\left(\frac{L_{n-2}}{L_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{L_n}{L_{n+2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5(-1)^n}{3L_n^2}\right)$
8. $\tan^{-1}\left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{F_nL_n}\right)$
9. $\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n+2}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n-2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{5\sqrt{5}F_{2n}}{L_{2n}^2}\right)$
10. $\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n-2}}\right) = -\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n-1}}\right)$
11. $\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n+1}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n-3}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{3\sqrt{5}}{L_{2n-1}}\right)$
12. $\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n+1}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2n-1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{5\sqrt{5}F_{2n}}{L_{2n}^2}\right)$
13. $\tanh^{-1}\left(\frac{L_{n-2}}{L_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{L_n}{L_{n+2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{10L_n^2 + 13(-1)^n}{3L_n^2}\right)$
14. $\tanh^{-1}\left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{10F_n^2 + 3(-1)^n}{5F_nL_n}\right)$
15. $\tanh^{-1}\left(\frac{L_{n-2}}{L_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{L_n}{L_{n+2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{(-1)^n}{F_nL_n}\right)$
16. $\tanh^{-1}\left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{5(-1)^{n-1}}{L_n^2}\right)$

Corollaire 88 Dans le cas de la suite de Pell ($x = 2$), on obtient

1. $\tan^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n+2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n-2}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{4Q_{2n}}{P_{2n}^2}\right)$
2. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{P_{2n+2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{P_{2n}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n+1}}\right)$
3. $\tan^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n+3}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n-1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{12}{P_{2n+1}}\right)$
4. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{P_{2n+1}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{P_{2n-1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{Q_{2n}}{P_{2n}^2}\right)$
5. $\tan^{-1}\left(\frac{P_{n-2}}{P_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{P_n}{P_{n+2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2(-1)^n}{3P_n^2}\right)$
6. $\tan^{-1}\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{P_n}{P_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(-1)^n}{P_n Q_n}\right)$
7. $\tan^{-1}\left(\frac{P_{n-2}}{P_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{P_n}{P_{n+2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{Q_n^2 - 20(-1)^n}{8P_n Q_n}\right)$
8. $\tan^{-1}\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{P_n}{P_{n+1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{Q_n^2}{8P_n^2}\right)$
9. $\tanh^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n+3}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n-1}}\right) = -\tanh^{-1}\left(\frac{4Q_{2n+1}}{P_{2n+1}^2}\right)$
10. $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{P_{2n+1}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{1}{P_{2n-1}}\right) = -\tanh^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n}}\right)$
11. $\tanh^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n+2}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{2}{P_{2n-2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{12}{P_{2n}}\right)$
12. $\tanh^{-1}\left(\frac{1}{P_{2n+2}}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{1}{P_{2n}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{Q_{2n+1}}{P_{2n+1}^2}\right)$
13. $\tanh^{-1}\left(\frac{P_{n-2}}{P_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{P_n}{P_{n+2}}\right) = (-1)^{n+1} \tanh^{-1}\left(\frac{2}{P_n Q_n}\right)$
14. $\tanh^{-1}\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{P_n}{P_{n+1}}\right) = (-1)^n \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2P_n^2}\right)$
15. $\tanh^{-1}\left(\frac{P_{n-2}}{P_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{P_n}{P_{n+2}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{Q_n^2 - 20(-1)^n}{24P_n^2}\right)$
16. $\tanh^{-1}\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right) + \tanh^{-1}\left(\frac{P_n}{P_{n+1}}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{Q_n}{4P_n}\right)$

Corollaire 89 Dans le cas de la suite de Pell-Lucas ($x = 2$), on obtient

1. $\tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n+3}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n-1}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{64\sqrt{2}P_{2n+1}}{Q_{2n+1}^2}\right)$

$$\begin{aligned}
2. \quad & \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{Q_{2n+1}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{Q_{2n-1}} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n}} \right) \\
3. \quad & \tan^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n+2}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n-2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{24\sqrt{2}}{Q_{2n}} \right) \\
4. \quad & \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{Q_{2n+2}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{Q_{2n}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{16\sqrt{2}P_{2n+1}}{Q_{2n+1}^2} \right) \\
5. \quad & \tan^{-1} \left(\frac{Q_{n-2}}{Q_n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{Q_n}{Q_{n+2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{16(-1)^n}{3Q_n^2} \right) \\
6. \quad & \tan^{-1} \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{Q_n}{Q_{n+1}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{P_n Q_n} \right) \\
7. \quad & \tan^{-1} \left(\frac{Q_{n-2}}{Q_n} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{Q_n}{Q_{n+2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2P_n^2 + 5(-1)^n}{2P_n Q_n} \right) \\
8. \quad & \tan^{-1} \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{Q_n}{Q_{n+1}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{8P_n^2}{Q_n^2} \right) \\
9. \quad & \tanh^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n+2}} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n-2}} \right) = -\tanh^{-1} \left(\frac{64\sqrt{2}P_{2n}}{Q_{2n}^2} \right) \\
10. \quad & \tanh^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{Q_{2n+2}} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{Q_{2n}} \right) = -\tanh^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n+1}} \right) \\
11. \quad & \tanh^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n+3}} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2n-1}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{24\sqrt{2}}{Q_{2n+1}} \right) \\
12. \quad & \tanh^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{Q_{2n+1}} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{Q_{2n-1}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{16\sqrt{2}P_{2n}}{Q_{2n}^2} \right) \\
13. \quad & \tanh^{-1} \left(\frac{Q_{n-2}}{Q_n} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{Q_n}{Q_{n+2}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{2(-1)^n}{P_n Q_n} \right) \\
14. \quad & \tanh^{-1} \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right) - \tanh^{-1} \left(\frac{Q_n}{Q_{n+1}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{4(-1)^{n+1}}{Q_n^2} \right) \\
15. \quad & \tanh^{-1} \left(\frac{Q_{n-2}}{Q_n} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{Q_n}{Q_{n+2}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{8P_n^2 + 20(-1)^n}{3Q_n^2} \right) \\
16. \quad & \tanh^{-1} \left(\frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right) + \tanh^{-1} \left(\frac{Q_n}{Q_{n+1}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{2P_n}{Q_n} \right)
\end{aligned}$$

Remarque 90 Il est à noter que nous retrouvons les deux Théorèmes de R. Melham [232] parus dans son article intitulé "Sums involving Fibonacci and Pell numbers". Les relations 1, 3, 9 et 12 du Corollaire 86 constituent les relations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) de son Théorème 1, et les relations 8 et 16 du Corollaire 88 et du Corollaire 89 respectivement constituent les relations (2.20), (2.22), (2.21) et (2.23) de son Théorème 2.

Notons aussi que nous retrouvons tous les Théorèmes donnés par Melham et Shannon [242]. En effet, les secondes relations de 1. et 5. (resp. de 2. et 6.) du Théorème 84 constituent leur Théorème 1 (resp. Théorème 4) et les relations 1., 3., la seconde relation de 2. et la relation 4. du Théorème 85 sont respectivement leurs Théorèmes 2, 3, 5 et 6.

On retrouve aussi la relation 2 du Théorème 3 cité dans [36] comme étant la relation 2 du Corollaire 88, ainsi qu'une variante de la relation 3 du même Théorème comme étant la relation 2 du Corollaire 89.

Théorème 91 Pour tous entiers r et k tels que $0 \leq r \leq 2k$, on a

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(U_{2k}^2 \frac{V_{4km+2r}}{U_{4km+2r}^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{U_{2k+2r}}{U_{2k}} \right) \\
2. \quad & \sum_{m \geq 2} \tanh^{-1} \left(\frac{U_{2k+1} V_{2k+1}}{U_{4km+2m+2r}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{U_{2k+1}}{U_{6k+2r+3}} \right) \\
3. \quad & \sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(\delta \frac{U_{2k+1} V_{2k+1}}{V_{4km+2m+2r}} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{V_{2k+2r+1}}{\delta U_{2k+1}} \right) \\
4. \quad & \sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(\delta^3 U_{2k}^2 \frac{U_{4km+2r}}{V_{4km+2r}^2} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k}}{V_{2k+2r}} \right) \\
5. \quad & \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(U_{2k+1}^2 \frac{V_{4km+2m+2r}}{U_{4km+2m+2r}^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{U_{2k+1}}{U_{2k+2r+1}} \right) \\
6. \quad & \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\frac{U_{2k} V_{2k}}{U_{4km+2r}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{U_{2k}}{U_{2k+2r}} \right) \\
7. \quad & \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k} V_{2k}}{V_{4km+2r}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k}}{V_{2k+2r}} \right) \\
8. \quad & \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\delta^3 U_{2k+1}^2 \frac{U_{4km+2m+2r}}{V_{4km+2m+2r}^2} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k+1}}{V_{2k+2r+1}} \right)
\end{aligned}$$

Preuve. Pour la première relation, il suffit de poser dans la relation 1. du Théorème 84, $n = 4km + 2r$, ($0 \leq r \leq 2k$), de sommer l'identité de $m = 1$ à $m = s$, puis faire tendre s vers $+\infty$. Ce raisonnement est valable pour toutes les relations des Théorèmes 91 et 94. $\square$

Corollaire 92 Cas des suites de Fibonacci et de Lucas

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(\frac{L_{4m}}{F_{4m}^2} \right) = \frac{\pi}{4}; \\
2. \quad & \sum_{m \geq 2} \tanh^{-1} \left(\frac{1}{F_{2m}} \right) = \tanh^{-1} \frac{1}{2};
\end{aligned}$$

3. $\sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2m}} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}},$
4. $\sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(5\sqrt{5} \frac{F_{4m}}{L_{4m}^2} \right) = \tanh^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3},$
5. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{L_{2m}}{F_{2m}^2} \right) = \frac{\pi}{4},$
6. $\sum_{m \geq 2} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\frac{3}{F_{4m}} \right) = -\tanh^{-1} \frac{1}{8}$
7. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{3\sqrt{5}}{L_{4m}} \right) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3}$
8. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(5\sqrt{5} \frac{F_{2m}}{L_{2m}^2} \right) = -\tanh^{-1} \frac{\sqrt{5}}{4}$

Corollaire 93 *Cas des suites de Pell et de Pell-Lucas*

1. $\sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(4 \frac{Q_{4m}}{P_{4m}^2} \right) = \frac{\pi}{4}$
2. $\sum_{m \geq 2} \tanh^{-1} \left(\frac{2}{P_{2m}} \right) = \tanh^{-1} \frac{1}{5}$
3. $\sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2m}} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(64\sqrt{2} \frac{P_{4m}}{Q_{4m}^2} \right) = \tanh^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3}$
5. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{Q_{2m}}{P_{2m}^2} \right) = \frac{\pi}{4}$
6. $\sum_{m \geq 2} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\frac{12}{P_{4m}} \right) = -\tanh^{-1} \left(\frac{1}{35} \right)$
7. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{24\sqrt{2}}{Q_{4m}} \right) = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3}$
8. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(16\sqrt{2} \frac{P_{2m}}{Q_{2m}^2} \right) = \tanh^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$

Théorème 94 *Pour tous entiers r et k tels que $0 \leq r \leq 2k$, on a*

1. $\sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(\frac{U_{2k+1} V_{2k+1}}{U_{4km+2m+2r+1}} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{U_{2r+2k+2}}{U_{2k+1}} \right),$
2. $\sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(\frac{U_{2k}^2 V_{4km+2r+1}}{U_{4km+2r+1}^2} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{U_{2k}}{U_{2r+2k+1}} \right),$
3. $\sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(\delta^3 U_{2k}^2 \frac{U_{4km+2r+1}}{V_{4km+2r+1}^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{V_{2r+2k+1}}{\delta U_{2k}} \right),$
4. $\sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k+1} V_{2k+1}}{V_{4km+2m+2r+1}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k+1}}{V_{2r+2k+2}} \right),$
5. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{U_{2k} V_{2k}}{U_{4km+2r+1}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{U_{2k}}{U_{2r+2k+1}} \right),$
6. $\sum_{m \geq 2} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(U_{2k+1}^2 \frac{V_{4km+2m+2r+1}}{U_{4km+2m+2r+1}^2} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{U_{2k+1}}{U_{2r+2k+4}} \right),$
7. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\delta^3 U_{2k+1}^2 \frac{U_{4km+2m+2r+1}}{V_{4km+2m+2r+1}^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k+1}}{V_{2r+2k+2}} \right),$
8. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k} V_{2k}}{V_{4km+2r+1}} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{\delta U_{2k}}{V_{2r+2k+1}} \right).$

Corollaire 95 *Cas des suites de Fibonacci et de Lucas*

1. $\sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(\frac{1}{F_{2m+1}} \right) = \frac{\pi}{4};$
2. $\sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(\frac{L_{4m+1}}{F_{4m+1}^2} \right) = \tanh^{-1} \frac{1}{2};$
3. $\sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(\frac{5\sqrt{5}F_{4m+1}}{L_{4m+1}^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4}{\sqrt{5}}$
4. $\sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{5}}{L_{2m+1}} \right) = \tanh^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3}$
5. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{3}{F_{4m+1}} \right) = \tan^{-1} \frac{1}{2}$
6. $\sum_{m \geq 2} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\frac{L_{2m+1}}{F_{2m+1}^2} \right) = \tanh^{-1} \frac{1}{3}$
7. $\sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{5\sqrt{5}F_{2m+1}}{L_{2m+1}^2} \right) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$8. \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\frac{3\sqrt{5}}{L_{4m+1}} \right) = \tanh^{-1} \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Corollaire 96 *Cas des suites de Pell et de Pell-Lucas*

$$\begin{aligned} 1. & \sum_{m \geq 0} \tan^{-1} \left(\frac{2}{P_{2m+1}} \right) = \frac{\pi}{2} \\ 2. & \sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(4 \frac{Q_{4m+1}}{P_{4m+1}^2} \right) = \tanh^{-1} \frac{2}{5} \\ 3. & \sum_{m \geq 1} \tan^{-1} \left(64\sqrt{2} \frac{P_{4m+1}}{Q_{4m+1}^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{7}{\sqrt{2}} \\ 4. & \sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{Q_{2m+1}} \right) = \tanh^{-1} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 5. & \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{12}{P_{4m+1}} \right) = \tan^{-1} \frac{2}{5} \\ 6. & \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\frac{Q_{2m+1}}{P_{2m+1}^2} \right) = \tanh^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \\ 7. & \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tan^{-1} \left(\frac{16\sqrt{2}P_{2m+1}}{Q_{2m+1}^2} \right) = \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 8. & \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \tanh^{-1} \left(\frac{24\sqrt{2}}{Q_{4m+1}} \right) = \tanh^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

Remarque 97 *Il est à noter que nous retrouvons les relations (2.12), (2.13), (2.14) et (2.15) de R. Melham [232]. Ce sont, pour $k = 2$, respectivement la relation 1 du Théorème 91 (voir aussi relation 1 du Corollaire 92), la relation 5 du Théorème 94 (voir aussi relation 5 du Corollaire 95), la relation 6 du Théorème 91 (voir aussi relation 6 du Corollaire 92) et la relation 6 du Théorème 94 (voir aussi relation 6 du Corollaire 94).*

On retrouve aussi (première relation du Corollaire 95) la célèbre relation de Lehmer [208] qui stipule que $\sum_{m \geq 0} \tan^{-1} (1/F_{2m+1}) = \pi/4$, relation que l'on retrouve dans l'article Hoggatt et Ruggles [155] et de Melham et Shannon [242], ainsi que sa duale $\sum_{m \geq 0} \tan^{-1} (2/P_{2m+1}) = \pi/2$, relation que l'on retrouve dans l'article de Mahon et Horadam [226] et Melham et Shannon [242].

Finalement, les sommes infinies du Théorème 3 cité dans [36] ne sont rien d'autre que la relation 1 du Corollaire 96 et une variante de la relation 3 du Corollaire 93.

Théorème 98 *Des relations avec des produits infinis, pour tous entiers k et r , on a*

1.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{U_{4km+2r+1}^2 + U_{2k}^2 V_{4km+2r+1}}{U_{4km+2r+1}^2 - U_{2k}^2 V_{4km+2r+1}} = \frac{U_{2k+2r+1} + U_{2k}}{U_{2k+2r+1} - U_{2k}}, \quad (r \leq k),$$
2.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{U_{4km+2m+2r} + U_{2k+1} V_{2k+1}}{U_{4km+2m+2r} - U_{2k+1} V_{2k+1}} = \frac{U_{2k+2r+1} + U_{2k+1}}{U_{2k+2r+1} - U_{2k+1}} \quad (r < k),$$
3.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{V_{4km+2m+2r+1} + \delta U_{2k+1} V_{2k+1}}{V_{4km+2m+2r+1} - \delta U_{2k+1} V_{2k+1}} = \frac{V_{2k+2r+2} + \delta U_{2k+1}}{V_{2k+2r+2} - \delta U_{2k+1}} \quad (r \leq k),$$
4.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{V_{4km+2r}^2 + \delta^3 U_{2k}^2 U_{4km+2r}}{V_{4km+2r}^2 - \delta^3 U_{2k}^2 U_{4km+2r}} = \frac{V_{2k+2r} + \delta U_{2k}}{V_{2k+2r} - \delta U_{2k}} \quad (r < k),$$
5.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{U_{4km+2m+2r+1}^2 + (-1)^{m-1} U_{2k+1}^2 V_{4km+2m+2r+1}}{U_{4km+2m+2r+1}^2 - (-1)^{m-1} U_{2k+1}^2 V_{4km+2m+2r+1}} = \frac{U_{2k+2r+2} + U_{2k+1}}{U_{2k+2r+2} - U_{2k+1}} \quad (r \leq k),$$
6.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{U_{4km+2r} + (-1)^{m-1} U_{2k} V_{2k}}{U_{4km+2r} - (-1)^{m-1} U_{2k} V_{2k}} = \frac{U_{2k+2r} + U_{2k}}{U_{2k+2r} - U_{2k}} \quad (r < k),$$
7.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{V_{4km+2r+1} + (-1)^{m-1} \delta U_{2k} V_{2k}}{V_{4km+2r+1} - (-1)^{m-1} \delta U_{2k} V_{2k}} = \frac{V_{2k+2r+1} + \delta U_{2k}}{V_{2k+2r+1} - \delta U_{2k}} \quad (r \leq k),$$
8.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{V_{4km+2m+2r}^2 + (-1)^{m-1} \delta^3 U_{2k+1}^2 U_{4km+2m+2r}}{V_{4km+2m+2r}^2 - (-1)^{m-1} \delta^3 U_{2k+1}^2 U_{4km+2m+2r}} = \frac{V_{2k+2r+1} + \delta U_{2k+1}}{V_{2k+2r+1} - \delta U_{2k+1}} \quad (r < k).$$

Preuve. Il suffit de prendre les relations 2., 4., 6. et 8. des Théorèmes 91 et 94 et d'exploiter l'équivalence $\sum_{m \geq 1} \tanh^{-1} a_m = \tanh^{-1} a \Leftrightarrow \prod_{m \geq 1} \frac{1+a_m}{1-a_m} = \frac{1+a}{1-a}$. $\square$

Remarque 99 *Pour les relations 2 et 6 du Corollaire précédent, lorsque $r = 0$, considérer le produit à partir de $m \geq 2$ et remplacer U_{2k+2r} par U_{6k+2r} ainsi que $U_{2k+2r+1}$ par $U_{6k+2r+3}$.*

Corollaire 100 *Cas des suites de Fibonacci et de Lucas*

1.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{F_{4m+1}^2 + L_{4m+1}}{F_{4m+1}^2 - L_{4m+1}} = 3,$$
2.
$$\prod_{m \geq 2} \frac{F_{4m+2m} + 8}{F_{4m+2m} - 8} = \frac{9}{8},$$
3.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{L_{4m+2m+1} + 8\sqrt{5}}{L_{4m+2m+1} - 8\sqrt{5}} = \frac{7 + 2\sqrt{5}}{7 - 2\sqrt{5}},$$
4.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{L_{4m}^2 + 5\sqrt{5}F_{4m}}{L_{4m}^2 - 5\sqrt{5}F_{4m}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}},$$
5.
$$\prod_{m \geq 1} \frac{F_{4m+2m+1}^2 + 4(-1)^{m-1} L_{4m+2m+1}}{F_{4m+2m+1}^2 - 4(-1)^{m-1} L_{4m+2m+1}} = 5,$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & \prod_{m \geq 2} \frac{F_{4m} + 3(-1)^{m-1}}{F_{4m} - 3(-1)^{m-1}} = \frac{9}{7}, \\
7. \quad & \prod_{m \geq 1} \frac{L_{4m+1} + 3\sqrt{5}(-1)^{m-1}}{L_{4m+1} - 3\sqrt{5}(-1)^{m-1}} = \frac{4 + \sqrt{5}}{4 - \sqrt{5}}, \\
8. \quad & \prod_{m \geq 1} \frac{L_{4m+2m}^2 + 20\sqrt{5}(-1)^{m-1}F_{4m+2m}}{L_{4m+2m}^2 - 20\sqrt{5}(-1)^{m-1}F_{4m+2m}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 101 *Cas des suites de Pell et de Pell-Lucas*

$$\begin{aligned}
1. \quad & \prod_{m \geq 1} \frac{P_{4m+1}^2 + 4Q_{4m+1}}{P_{4m+1}^2 - 4Q_{4m+1}} = \frac{7}{3}, \\
2. \quad & \prod_{m \geq 2} \frac{P_{4m+2m} + 70}{P_{4m+2m} - 70} = \frac{99}{98}, \\
3. \quad & \prod_{m \geq 1} \frac{Q_{4m+2m+1} + 140\sqrt{2}}{Q_{4m+2m+1} - 140\sqrt{2}} = \frac{17 + 5\sqrt{2}}{17 - 5\sqrt{2}}, \\
4. \quad & \prod_{m \geq 1} \frac{Q_{4m}^2 + 64\sqrt{2}P_{4m}}{Q_{4m}^2 - 64\sqrt{2}P_{4m}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}, \\
5. \quad & \prod_{m \geq 1} \frac{P_{4m+2m+1}^2 + 25(-1)^{m-1}Q_{4m+2m+1}}{P_{4m+2m+1}^2 - 25(-1)^{m-1}Q_{4m+2m+1}} = \frac{17}{7}, \\
6. \quad & \prod_{m \geq 2} \frac{P_{4m} + 12(-1)^{m-1}}{P_{4m} - 12(-1)^{m-1}} = \frac{18}{17}, \\
7. \quad & \prod_{m \geq 1} \frac{Q_{4m+1} + 24\sqrt{2}(-1)^{m-1}}{Q_{4m+1} - 24\sqrt{2}(-1)^{m-1}} = \frac{7 + 2\sqrt{2}}{7 - 2\sqrt{2}}, \\
8. \quad & \prod_{m \geq 1} \frac{Q_{4m+2m}^2 + 400\sqrt{2}(-1)^{m-1}P_{4m+2m}}{Q_{4m+2m}^2 - 400\sqrt{2}(-1)^{m-1}P_{4m+2m}} = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{7 - 5\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Remarque 102 *Il est à noter que nous retrouvons les deux relations (2.16) et (2.17) de R. Melham [232] parues dans son article intitulé "Sums involving Fibonacci and Pell numbers". Ce sont la relation 1 du Théorème 98 (voir aussi relations 1 du Corollaire 100) et la relation 6 du Théorème 98 lorsque $k = 1$.*

Théorème 103 *Pour des relations avec des produits finis, pour tous k, r, s tels que $r \leq 2k$, nous avons*

$$\begin{aligned}
1. \quad & \prod_{m=1}^s \left(\frac{U_{2km+r} + V_{2km+r} + U_{2k}}{U_{2km+r} + V_{2km+r} - U_{2k}} \right)^{(-1)^r} = \frac{U_{2k+r} + U_r}{U_{2k+r} - U_r} \cdot \frac{U_{2ks+2k+r} - U_{2ks+r}}{U_{2ks+2k+r} + U_{2ks+r}} \\
2. \quad & \prod_{m=1}^s \left(\frac{V_{2k+1}U_{2km+m+r}^2 + U_{2k+1}^2}{V_{2k+1}U_{2km+m+r}^2 - U_{2k+1}^2} \right)^{(-1)^{m+r-1}} = \frac{U_{2k+r+1} + U_r}{U_{2k+r+1} - U_r} \cdot \frac{U_{2ks+2k+s+r+1} - U_{2ks+s+r}}{U_{2ks+2k+s+r+1} + U_{2ks+s+r}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \prod_{m=1}^s \left(\frac{U_{2km+r} + V_{2km+r} + U_{2k}}{U_{2km+r} + V_{2km+r} - U_{2k}} \right)^{(-1)^r} = \frac{V_{2k+r} + V_r}{V_{2k+r} - V_r} \cdot \frac{V_{2ks+2k+r} - V_{2ks+r}}{V_{2ks+2k+r} + V_{2ks+r}} \\
4. \quad & \prod_{m=1}^s \left(\frac{V_{2k+1} V_{2km+m+r}^2 + \delta^2 U_{2k+1}^2}{V_{2k+1} V_{2km+m+r}^2 - \delta^2 U_{2k+1}^2} \right)^{(-1)^{m+r-1}} = \frac{V_{2k+r+1} + V_r}{V_{2k+r+1} - V_r} \cdot \frac{V_{2ks+2k+s+r+1} - V_{2ks+s+r}}{V_{2ks+2k+s+r+1} + V_{2ks+s+r}} \\
5. \quad & \prod_{m=1}^s \left(\frac{\delta^2 V_{2k} U_{2km+r}^2 + 2V_{2km+r} - (-1)^r (V_{2k}^2 + 4)}{\delta^2 V_{2k} U_{2km+r}^2 - 2V_{2km+r} + (-1)^r (V_{2k}^2 + 4)} \right)^{(-1)^{m-1}} \\
& = \frac{U_{2k+r} + U_r}{U_{2k+r} - U_r} \cdot \left(\frac{U_{2ks+2k+r} + U_{2ks+r}}{U_{2ks+2k+r} - U_{2ks+r}} \right)^{(-1)^s} \\
6. \quad & \prod_{m=1}^s \left(\frac{\delta^2 U_{2k+1} U_{2km+m+r} V_{2km+m+r} + 2V_{2km+m+r}^2 - (-1)^{m+r} (4 - V_{2k+1}^2)}{\delta^2 U_{2k+1} U_{2km+m+r} V_{2km+m+r} - 2V_{2km+m+r}^2 + (-1)^{m+r} (4 - V_{2k+1}^2)} \right)^{(-1)^{m-1}} \\
& = \frac{U_{2k+r+1} + U_r}{U_{2k+r+1} - U_r} \cdot \left(\frac{U_{2ks+2k+s+r+1} + U_{2ks+s+r}}{U_{2ks+2k+s+r+1} - U_{2ks+s+r}} \right)^{(-1)^s} \\
7. \quad & \prod_{m=1}^s \left(\frac{V_{2k} U_{2km+r}^2 + 2\delta^2 U_{2km+r} + (-1)^r (V_{2k}^2 + 4)}{V_{2k} U_{2km+r}^2 - 2\delta^2 U_{2km+r} - (-1)^r (V_{2k}^2 + 4)} \right)^{(-1)^{m-1}} \\
& = \frac{V_{2k+r} + V_r}{V_{2k+r} - V_r} \cdot \left(\frac{V_{2ks+2k+r} + V_{2ks+r}}{V_{2ks+2k+r} - V_{2ks+r}} \right)^{(-1)^s} \\
8. \quad & \prod_{m=1}^s \left(\frac{\delta^2 U_{2k+1} U_{2km+m+r} V_{2km+m+r} + 2\delta^2 U_{2km+m+r}^2 - (-1)^{m+r} (4 - V_{2k+1}^2)}{\delta^2 U_{2k+1} U_{2km+m+r} V_{2km+m+r} - 2\delta^2 U_{2km+m+r}^2 + (-1)^{m+r} (4 - V_{2k+1}^2)} \right)^{(-1)^{m-1}} \\
& = \frac{V_{2k+r+1} + V_r}{V_{2k+r+1} - V_r} \cdot \left(\frac{V_{2ks+2k+s+r+1} + V_{2ks+s+r}}{V_{2ks+2k+s+r+1} - V_{2ks+s+r}} \right)^{(-1)^s}
\end{aligned}$$

Chapitre 6

Sur certaines propriétés liées aux polynômes de Chebyshev et aux polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas

6.1 Introduction

Les polynômes de Chebyshev de première et seconde espèce sont étroitement liés aux nombres de Pell et de Pell-Lucas, lien établi en (6.5), (6.6) et en remarque 118. D'autres corrélations, entre ces deux familles, ont été réalisées, nous en donnons trois exemples. Horadam et Mahon [181, 1985] ont établi un lien en terme de convolution via la fonction génératrice, Zhang et Wang [362, 2004] en terme de dérivées partielles et Horadam [173, 2005] a établi un lien avec les rails du triangle de Pascal.

Dans ce chapitre on démontre, en premier lieu, que les polynômes de Chebyshev, de première espèce et de seconde espèce, ont des coordonnées entières remarquables dans des bases spécifiques (l'une constituée uniquement de polynômes de Chebyshev de première espèce et l'autre constituée uniquement de polynômes de Chebyshev de seconde espèce). Si T_n (resp. U_n) désigne le n -ième polynôme de Chebyshev de première (resp. de deuxième) espèce, on prouve que les familles $(X^k T_{n-k})_k$ et $(X^k U_{n-k})_k$ pour $n - 2 \lfloor n/2 \rfloor \leq k \leq n - \lfloor n/2 \rfloor$ sont des bases du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{E}_n[X]$ constitué des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de même parité que n et de degré $\leq n$. De plus T_n et U_n de $\mathbb{E}_n[X]$ ont des coordonnées entières remarquables sur chacune de ces deux bases.

Il s'avère que cette propriété s'étend à d'autres familles de polynômes largement cités dans la littérature comme :

- Les polynômes de Jacobsthal et de Jacobsthal-Lucas, définis comme suit

$$\begin{aligned} J_{n+1}(x) &= J_n(x) + 2xJ_{n-1}(x) \text{ avec } J_0(x) = 0 \text{ et } J_1(x) = 1, \\ j_{n+1}(x) &= j_n(x) + 2xj_{n-1}(x) \text{ avec } j_0(x) = 2 \text{ et } j_1(x) = 1, \end{aligned}$$

voir Horadam [162, 1997], [163, 1997], [161, 2002], Djordjević [110, 2000], [109, 2000] et [108, 2005], Horadam et Philipponi [178, 1997], et Shannon et Horadam [290, 1999].

- Les polynômes de Vieta de première et seconde espèce sont définis comme suit

$$\begin{aligned} V_{n+1}(x) &= xV_n(x) + V_{n-1}(x) \text{ avec } V_0(x) = 0 \text{ et } V_1(x) = 1, \\ v_{n+1}(x) &= xv_n(x) + v_{n-1}(x) \text{ avec } v_0(x) = 2 \text{ et } v_1(x) = x, \end{aligned}$$

on peut consulter Vieta [333, 1615], Horadam [174, 2002] et [164, 2003], Robbins [278, 1991] et Shannon et Horadam [290, 1999].

- Les polynômes de Morgan-Voyce, les coefficients de ces polynômes sont exactement les lignes des triangles DFF et DFFz étudiés par Ferri, Faccio et D’Amico [128, 1991] et [129, 1992]. En outre ces polynômes sont très connus et utilisés dans les réseaux d’échelle et en électricité, ils sont définis comme suit

$$\begin{cases} M_{n+1}(x) = (x+2)M_n(x) - M_{n-1}(x), \\ M_0(x) = u, \quad M_1(x) = x + r(x) + u, \end{cases}$$

pour $(u = 0, r = 1 - x)$ et $(u = 2, r = 0)$, on peut consulter Morgan-Voyce [254, 1959], Swamy [320, 1966], [323, 1968], [319, 2000], Swamy et Bhattacharyya [322, 1967], Lahr [200, 1986], Haukkanen [149, 1996], Horadam [170, 1998], [168, 1998], [167, 1999], [166, 2000], [171, 2002] et [173, 2005], Horadam et Philipponi [179, 2001] et le tout récent article de Chen et Shapiro [100, 2007].

- Les polynômes duaux de Morgan-Voyce

$$\begin{cases} M_{n+1}(x) = (x+2)M_n(x) + M_{n-1}(x), \\ M_0(x) = u, \quad M_1(x) = x + r(x) + u, \end{cases}$$

pour $(u = 0, r = 1 - x)$ et $(u = 2, r = 0)$, voir Horadam [165, 1999], [175, 2003] et [173, 2005].

- Les polynômes de Morgan-Voyce étendus et/ou généralisés, définis comme suit

$$\begin{cases} W_{n+1}(x) = (x+p)W_n(x) - qW_{n-1}(x), \\ W_0(x) = u, \quad W_1(x) = x + r(x, p) + u + p - 2, \end{cases}$$

pour $(u = 0, r = 3 - x - p)$ et $(u = 2, r = 0)$, on peut consulter André-Jeannin [9, 1994], [10, 1995] et [11, 1995], Horadam [172, 1996], [169, 1997] et [175, 2003], Swamy [321, 2000], Djordjević [111, 1999] et [112, 2000] (pour des cas particuliers) et Lee [205, 2002].

Ce qui nous amène à établir, en deuxième lieu (section 3), des résultats analogues pour une famille plus vaste de polynômes associés aux suites récurrentes linéaires d’ordre deux : les polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas. On montre que leurs coordonnées, sur des bases

appropriées, sont des familles d'entiers vérifiant des relations de récurrence remarquables. Ces polynômes ont déjà été étudiés par d'autres auteurs, par exemple Bergum et Hoggatt Jr. [61, 1974] ont exploré la question de l'irréductibilité. Horadam et Filipponi [180, 1993] se sont intéressés à la suite des intégrales et Zho [366, 1996], Yu et Liang [356, 1997] et Djordjević [106, 2001] et [107, 2005] se sont intéressés à la suite des dérivées partielles, pour ne citer que ceux-là.

6.2 Coordonnées remarquables de polynômes de Chebyshev dans des bases spécifiques

6.2.1 Introduction

Pour chaque entier $n \geq 0$, $T_n = T_n(X)$ et $U_n = U_n(X)$ sont les uniques polynômes, à coefficients entiers, vérifiant

$$\cos nx = T_n(\cos x) \text{ et } \sin((n+1)x) = \sin x U_n(\cos x), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Les premières valeurs de ces polynômes, jusqu'à $n = 4$, sont les suivantes

$$\begin{array}{ll} T_0 = 1 & U_0 = 1 \\ T_1 = X & U_1 = 2X \\ T_2 = 2X^2 - 1 & U_2 = 4X^2 - 1 \\ T_3 = 4X^3 - 3X & U_3 = 8X^3 - 4X \\ T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1 & U_4 = 16X^4 - 12X^2 + 1 \end{array}$$

La formule de Moivre permet d'obtenir les formules explicites suivantes de T_n et U_n

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}((X + \sqrt{X^2 - 1})^n + (X - \sqrt{X^2 - 1})^n) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2\sqrt{X^2 - 1}}((X + \sqrt{X^2 - 1})^{n+1} - (X - \sqrt{X^2 - 1})^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} X^{n-2k} (1 - X^2)^k \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ainsi, en posant $n \geq 0$ et pour $k \geq 0$

$$Q(n, k) = 2 \sum_{i-j=k} \binom{n}{2i} \binom{i}{j} \quad (6.3)$$

et

$$P(n, k) = \sum_{i-j=k} \binom{n+1}{2i+1} \binom{i}{j}, \quad (6.4)$$

on déduit des relations (6.1) et (6.2)

$$T_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k Q(n, k) X^{n-2k} \quad (6.5)$$

et

$$U_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k P(n, k) X^{n-2k}. \quad (6.6)$$

On constate que T_n et U_n sont effectivement des polynômes à coefficients entiers, de degré n . De plus le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour $n \geq 1$ et celui de U_n est égal à 2^n pour $n \geq 0$.

On vérifie aussi aisément que

$$T_n(-X) = (-1)^n T_n(X) \quad \text{et} \quad U_n(-X) = (-1)^n U_n(X),$$

T_n et U_n sont donc de même parité que n .

Des relations (6.1) et (6.2), on déduit aussi les relations de récurrence suivantes

$$T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \text{ avec } T_0 = 1 \text{ et } T_1 = X, \quad (6.7)$$

$$U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \text{ avec } U_0 = 1 \text{ et } U_1 = 2X, \quad (6.8)$$

on peut aussi les déduire des formules de Simpson [218] suivantes, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos nx &= 2 \cos x \cos (n-1)x - \cos (n-2)x, \\ \sin (n+1)x &= 2 \cos x \sin nx - \sin (n-1)x. \end{aligned}$$

Les relations (6.7) et (6.8) nous permettent de vérifier les relations suivantes

$$T_n = U_n - XU_{n-1}, \quad (6.9)$$

$$U_{n+2} - U_n = 2T_{n+2} \quad (6.10)$$

et aussi d'obtenir les fonctions génératrices ordinaires des polynômes de Chebyshev

$$\sum_{n \geq 0} T_n t^n = \frac{1 - tX}{1 - 2tX + t^2}, \quad (6.11)$$

$$\sum_{n \geq 0} U_n t^n = \frac{1}{1 - 2tX + t^2}, \quad (6.12)$$

desquelles on déduit les expressions explicites suivantes de T_n et U_n

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k 2^{n-1-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} X^{n-2k}, \quad (6.13)$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} X^{n-2k}. \quad (6.14)$$

En comparant (6.13) et (6.14) avec (6.5) et (6.6), on retrouve les expressions simplifiées

$$Q(n, k) = 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } k \leq n/2, \quad (6.15)$$

$$P(n, k) = 2^{n-2k} \binom{n-k}{k}, \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } k \leq n/2. \quad (6.16)$$

En comparant (6.15) et (6.16) avec (6.3) et (6.4), on obtient les identités

$$\sum_{i-j=k} \binom{n}{2i} \binom{i}{j} = 2^{n-1-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 1 \text{ et } k \leq n/2), \quad (6.17)$$

$$\sum_{i-j=k} \binom{n+1}{2i+1} \binom{i}{j} = 2^{n-2k} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 0 \text{ et } k \leq n/2), \quad (6.18)$$

on retrouve ainsi les relations 3.120 et 3.121 de Gould "Combinatorial identities", appelées aussi relations de Moriarty [136].

Une interprétation combinatoire de $P(n, k)$ et $Q(n, k)$ est donnée dans [36] et [293]

Pour tout entier $n \geq 0$, désignons par $\mathfrak{B}_n = (X^{n-2k})_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$ la base canonique du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{E}_n[X]$, auquel appartiennent les polynômes T_n et U_n .

Les coordonnées de T_n et U_n relativement à la base $\mathfrak{B}_n$ sont données par les relations (6.13) et (6.14).

Le but de cette section est de prouver que les familles $\mathfrak{T}_n := (X^k T_{n-k})_k$ et $\mathfrak{U}_n := (X^k U_{n-k})_k$ pour $n - 2 \lfloor n/2 \rfloor \leq k \leq n - \lfloor n/2 \rfloor$ constituent deux autres bases de $\mathbb{E}_n[X]$ (Théorème 104) par rapport auxquelles les polynômes T_n et U_n possèdent des coordonnées entières remarquables.

Les coordonnées de T_n sur $\mathfrak{T}_n$ et de U_n sur $\mathfrak{U}_n$ sont triviales quand n est pair et sont données au Théorème 105 quand n est impair, tandis que celles de T_n sur $\mathfrak{U}_n$ et de T_n sur $\mathfrak{U}_n$ sont données au Théorème 106 pour n pair et au Théorème 107 pour n impair.

6.2.2 Enoncé des Théorèmes

Le premier résultat important de cette section est le suivant

Théorème 104 *Pour tout $n \geq 0$, $\mathfrak{T}_n$ et $\mathfrak{U}_n$ sont deux bases de $\mathbb{E}_n[X]$.*

Aussi, on décompose T_{2n+1} et U_{2n+1} (resp. T_{2n} et U_{2n}) sur chacune des deux bases $\mathfrak{T}_{2n+1}$ et $\mathfrak{U}_{2n+1}$ (resp. $\mathfrak{T}_{2n}$ et $\mathfrak{U}_{2n}$). Les décompositions de T_{2n} sur $\mathfrak{T}_{2n}$ et U_{2n} sur $\mathfrak{U}_{2n}$ sont triviales, il reste à examiner les six autres décompositions. Celles de

1. T_{2n+1} sur $\mathfrak{T}_{2n+1}$ et U_{2n+1} sur $\mathfrak{U}_{2n+1}$ (Théorème 105).
2. T_{2n} sur $\mathfrak{T}_{2n}$ et U_{2n} sur $\mathfrak{U}_{2n}$ (Théorème 106).
3. T_{2n+1} sur $\mathfrak{U}_{2n+1}$ et U_{2n+1} sur $\mathfrak{T}_{2n+1}$ (Théorème 107).

Considérons maintenant les familles d'entiers $(\alpha_{n,k})$, $(\beta_{n,k})$ et $(\gamma_{n,k})$ données par les égalités suivantes

$$-(1-2X)^n = \sum_{k \geq 0} \alpha_{n,k} X^k, \quad (6.19)$$

$$(X-1)(1-2X)^n = \sum_{k \geq 0} \beta_{n,k} X^k, \quad (6.20)$$

$$(2X-1)^n + 2(1 + (2X-1) + \cdots + (2X-1)^{n-1}) = \sum_{k \geq 0} \gamma_{n,k} X^k, \quad (6.21)$$

on en déduit ainsi, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, les relations suivantes

$$\alpha_{n,k} = (-1)^{k+1} 2^k \binom{n}{k}, \quad (6.22)$$

$$\beta_{n,k} = \alpha_{n,k} - \alpha_{n,k-1}, \quad (6.23)$$

$$\gamma_{n,k} = (-1)^{n+1} \alpha_{n,k} + 2 \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \alpha_{j,k}. \quad (6.24)$$

Théorème 105 *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$T_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_{n,k} X^k T_{2n+1-k}, \quad (6.25)$$

$$U_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{n+1,k} X^k U_{2n+1-k}. \quad (6.26)$$

Théorème 106 *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$T_{2n} = U_{2n} - XU_{2n-1}, \quad n \geq 1, \quad (6.27)$$

$$U_{2n} = \sum_{k=0}^n \gamma_{n,k} X^k T_{2n-k}. \quad (6.28)$$

Théorème 107 Pour tout $n \geq 0$, on a

$$T_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (\alpha_{n+1,k} - \delta_{k,1}) X^k U_{2n+1-k}, \quad (6.29)$$

$$U_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (\gamma_{n,k-1} + \beta_{n,k}) X^k T_{2n+1-k}, \quad (6.30)$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

Les suites de nombres $(\alpha_{n,k})$, $(\beta_{n,k})$ et $(\gamma_{n,k})$ satisfont les relations de récurrence suivantes

$$\begin{cases} \alpha_{n,0} = -1, & (n \geq 0), \\ \alpha_{0,k} = 0, & (k \geq 1), \\ \alpha_{n,k} = \alpha_{n-1,k} - 2\alpha_{n-1,k-1}, & (n, k \geq 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{n,0} = -1, & (n \geq 0), \\ \beta_{0,1} = 1 \text{ et } \beta_{0,k} = 0, & (k \geq 2), \\ \beta_{n,k} = \beta_{n-1,k} - 2\beta_{n-1,k-1}, & (n, k \geq 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{n,0} = 1, & (n \geq 0), \\ \gamma_{0,k} = 0, & (k \geq 1), \\ \gamma_{n,k} = -\gamma_{n-1,k} + 2\gamma_{n-1,k-1}, & (n, k \geq 1). \end{cases}$$

Les tables suivantes donnent les valeurs de $\alpha_{n,k}$, $\beta_{n,k}$ et $\gamma_{n,k}$, pour $0 \leq n \leq 4$,

n	$\alpha_{n,0}$	$\alpha_{n,1}$	$\alpha_{n,2}$	$\alpha_{n,3}$	$\alpha_{n,4}$
0	-1				
1	-1	2			
2	-1	4	-4		
3	-1	6	-12	8	
4	-1	8	-24	32	-16

n	$\beta_{n,0}$	$\beta_{n,1}$	$\beta_{n,2}$	$\beta_{n,3}$	$\beta_{n,4}$	$\beta_{n,5}$
0	-1	1				
1	-1	3	-2			
2	-1	5	-8	4		
3	-1	7	-18	20	-8	
4	-1	9	-32	56	-48	16

n	$\gamma_{n,0}$	$\gamma_{n,1}$	$\gamma_{n,2}$	$\gamma_{n,3}$	$\gamma_{n,4}$
0	1				
1	1	2			
2	1	0	4		
3	1	2	-4	8	
4	1	0	8	-16	16

Notons que $\alpha_{n,k} = \gamma_{n,k} = 0$ pour $k > n$ et $\beta_{n,k} = 0$ pour $k > n + 1$.

En exploitant les tables précédentes, on obtient

– Le Théorème 105 donne

$$\begin{aligned} T_1 &= XT_0, \\ T_3 &= 3XT_2 - 2X^2T_1, \\ T_5 &= 5XT_4 - 8X^2T_3 + 4X^3T_2, \\ T_7 &= 7XT_6 - 18X^2T_5 + 20X^3T_4 - 8X^4T_3, \\ T_9 &= 9XT_8 - 32X^2T_7 + 56X^3T_6 - 48X^4T_5 + 16X^5T_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= 2XU_0, \\ U_3 &= 4XU_2 - 4X^2U_1, \\ U_5 &= 6XU_4 - 12X^2U_3 + 8X^3U_2, \\ U_7 &= 8XU_6 - 24X^2U_5 + 32X^3U_4 - 16X^4U_3. \end{aligned}$$

– Le Théorème 106 donne

$$\begin{aligned} T_0 &= U_0, \\ T_2 &= U_2 - XU_1, \\ T_4 &= U_4 - XU_3, \\ T_6 &= U_6 - XU_5, \\ T_8 &= U_8 - XU_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_0 &= T_0, \\ U_2 &= T_2 + 2XT_1, \\ U_4 &= T_4 + 0XT_3 + 4X^2T_2, \\ U_6 &= T_6 + 2XT_5 - 4X^2T_4 + 8X^3T_3, \\ U_8 &= T_8 + 0XT_7 + 8X^2T_6 - 16X^3T_5 + 16X^4T_4. \end{aligned}$$

– Le Théorème 107 donne

$$\begin{aligned} T_1 &= XU_0, \\ T_3 &= 3XU_2 - 4X^2U_1, \\ T_5 &= 5XU_4 - 12X^2U_3 + 8X^3U_2, \\ T_7 &= 7XU_6 - 24X^2U_5 + 32X^3U_4 - 16X^4U_3, \\ T_9 &= 9XU_8 - 40X^2U_7 + 80X^3U_6 - 80X^4U_5 + 32X^5U_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= 2XT_0, \\ U_3 &= 4XT_2, \\ U_5 &= 6XT_4 - 8X^2T_3 + 8X^3T_2, \\ U_7 &= 8XT_6 - 16X^2T_5 + 16X^3T_4, \\ U_9 &= 10XT_8 - 32X^2T_7 + 64X^3T_6 - 64X^4T_5 + 32X^5T_4. \end{aligned}$$

6.2.3 Preuve des Théorèmes

Preuve du Théorème 1

$\mathfrak{T}_n$ et $\mathfrak{U}_n$ sont des familles de polynômes de $\mathbb{E}_n[X]$ avec $\text{card}\mathfrak{T}_n = \text{card}\mathfrak{U}_n = \dim \mathbb{E}_n[X] = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. De plus, le lemme suivant prouve que les déterminants de $\mathfrak{T}_n$ et $\mathfrak{U}_n$ relativement à la base canonique $\mathfrak{B}_n$ de $\mathbb{E}_n[X]$ sont non nuls. Le Théorème 104 en découle.

Lemme 108 *Pour tout entier $n \geq 0$, et en posant $m = \lfloor n/2 \rfloor$, nous avons*

$$\det_{\mathfrak{B}_n}(\mathfrak{T}_n) = 2^{m(m-1)/2} \quad \text{et} \quad \det_{\mathfrak{B}_n}(\mathfrak{U}_n) = 2^{m(m+1)/2}.$$

Preuve. Pour tout entier $m \geq 0$ et pour $1 \leq k \leq m+1$, posons

$$V_k^{(m)}(X) := (2X)^{k-1} T_{2m+1-k}(X) \quad \text{et} \quad W_k^{(m)}(X) := (2X)^{k-1} U_{2m+1-k}(X).$$

$V_k^{(m)}$ et $W_k^{(m)}$ sont des polynômes de $\mathbb{E}_{2m}[X]$ de coefficient dominant respectivement 2^{2m-1} et 2^{2m} . De plus, on déduit à partir des relations de récurrence (6.7) et (6.8) que

$$V_{k+1}^{(m)} - V_k^{(m)} = V_k^{(m-1)} \quad \text{et} \quad W_{k+1}^{(m)} - W_k^{(m)} = W_k^{(m-1)}.$$

Il en résulte que si l'on pose

$$\Delta_m = \det_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \dots, V_{m+1}^{(m)} \right) \quad \text{et} \quad D_m = \det_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(W_1^{(m)}, W_2^{(m)}, \dots, W_{m+1}^{(m)} \right),$$

on a

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \det_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(V_1^{(m)}, V_2^{(m)} - V_1^{(m)}, V_3^{(m)} - V_2^{(m)}, \dots, V_{m+1}^{(m)} - V_m^{(m)} \right) \\ &= \det_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(V_1^{(m)}, V_1^{(m-1)}, V_2^{(m-1)}, \dots, V_m^{(m-1)} \right) \\ &= 2^{2m-1} \Delta_{m-1} \\ &= 2^{(2m-1)+(2m-3)+\dots+1} \Delta_0 \\ &= 2^{m^2}, \end{aligned}$$

de même

$$D_m = 2^{2m} D_{m-1} = 2^{2m+(2m-2)+\dots+2} D_0 = 2^{m(m+1)}.$$

Maintenant pour $n \geq 0$, on peut écrire $n = 2m + r$ avec $m = \lfloor n/2 \rfloor$ et $r \in \{0, 1\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathfrak{B}_n}(\mathfrak{T}_n) &= \det_{\mathfrak{B}_{2m+r}} \left(X^r T_{2m}(X), X^{r+1} T_{2m+1}(X), \dots, X^{r+m} T_m(X) \right) \\ &= \det_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(T_{2m}(X), X T_{2m+1}(X), \dots, X^m T_m(X) \right) \\ &= 2^{-(1+2+\dots+m)} \Delta_m \\ &= 2^{m(m-1)/2}. \end{aligned}$$

De même, on établit

$$D_m = 2^{-(1+2+\dots+m)} D_m = 2^{m(m+1)/2}.$$

□

Preuve des Théorèmes 105, 106 et 107

Soit E l'opérateur sur les suites $(u_n(X))$ de polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ défini classiquement par

$$E(u_n(X)) = u_{n+1}(X),$$

ou encore de manière plus simple

$$EW_n = W_{n+1}, \quad (n \geq 0).$$

Pour tout $m \geq 0$, considérons les opérateurs

$$\begin{aligned} A_m &= -(E - 2X)^m, \\ B_m &= (X - E)(E - 2X)^m, \\ C_m &= (2X - E)^m + 2 \sum_{k=1}^m E^k (2X - E)^{m-k}. \end{aligned}$$

Les relations (6.19), (6.20) et (6.21), donnent

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} X^k E^{m-k}, \\ B_m &= \sum_{k=0}^{m+1} \beta_{m,k} X^k E^{m+1-k}, \\ C_m &= \sum_{k=0}^m \gamma_{m,k} X^k E^{m-k}. \end{aligned}$$

Lemme 109 *Pour tout entier n , on a*

- (a) $(2X - E)^n T_m = T_{m-n}$ et $(2X - E)^n U_m = U_{m-n}$, ($m \geq n \geq 0$).
- (b) $T_n = U_n - XU_{n-1}$ ($n \geq 1$).
- (c) $2T_n = U_n - U_{n-2}$ ($n \geq 2$).
- (d) $U_{2n} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n T_{2k}$ ($n \geq 0$).

Preuve. (a) Pour $m \geq 1$, on a $(2X - E)T_m = 2XT_m - T_{m+1} = T_{m-1}$ et $(2X - E)U_m = 2XU_m - U_{m+1} = U_{m-1}$. On conclut par un raisonnement par récurrence.

(b) Pour $n \geq 1$, soit $W_n = T_n - U_n + XU_{n-1}$, la suite $(W_n)_{n \geq 1}$ vérifie la relation suivante

$$W_n = 2XW_{n-1} - W_{n-2}, \quad (n \geq 3), \quad \text{avec } W_1 = W_2 = 0,$$

ainsi $W_n = 0$, pour $n \geq 1$.

(c) Pour $n \geq 2$, on a $2T_n = U_n + (U_n - 2XU_{n-1})$ par (b) et donc $2T_n = U_n - U_{n-2}$ via la relation (6.8).

(d) Pour $n \geq 0$, on a $U_{2n} = U_0 + \sum_{k=1}^n (U_{2k} - U_{2k-2}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n T_{2k}$ par (c). $\square$

Preuve du Théorème 105. Les relations (6.25) et (6.26) sont respectivement équivalentes à

$$B_n T_n = 0 \quad \text{et} \quad A_{n+1} U_n = 0, \quad (n \geq 0).$$

Ces deux dernières relations se déduisent du Lemme 109 (a). On a, pour tout entier $n \geq 0$

$$\begin{aligned} B_n T_n &= (-1)^n (X - E) (2X - E)^n T_n \\ &= (-1)^n (X - E) T_0 \\ &= (-1)^n (X T_0 - T_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_{n+1} U_n &= (-1)^{n+1} (2X - E) (2X - E)^n U_n \\ &= (-1)^{n+1} (2X - E) U_0 \\ &= (-1)^{n+1} (2X U_0 - U_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 106. La relation (6.27) se déduit du Lemme 109 (b).

La relation (6.28) est équivalente à

$$U_{2n} = C_n T_n, \quad (n \geq 0).$$

On obtient ainsi, pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned} C_n T_n &= ((2X - E)^n + 2 \sum_{k=1}^n E^k (2X - E)^{n-k}) T_n \\ &= T_0 + 2 \sum_{k=1}^n T_{2k} \\ &= U_{2n}, \quad ((d) \text{ du Lemme 109}). \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 107. Pour $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} T_{2n+1} &= U_{2n+1} - X U_{2n}, \quad ((b) \text{ du Lemme 109}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{n+1,k} X^k U_{2n+1-k} - X U_{2n} \quad (\text{par (12)}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (\alpha_{n+1,k} - \delta_{k,1}) X^k U_{2n+1-k}. \end{aligned}$$

En outre, pour $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
 U_{2n+1} &= XU_{2n} + T_{2n+1}, \quad ((b) \text{ du Lemme 109}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \gamma_{n,k} X^{k+1} T_{2n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \beta_{n,k} X^k T_{2n+1-k}, \quad ((6.25) \text{ et } (6.27)) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} (\gamma_{n,k-1} + \beta_{n,k}) X^k T_{2n+1-k}.
 \end{aligned}$$

6.3 Extension à une suite linéaire d'ordre deux

Nous avons établi dans la section précédente un résultat qui permet d'exprimer les polynômes de Chebyshev, de première et de seconde espèce, comme ayant des coordonnées entières remarquables dans des bases spécifiques. Il s'avère que cette propriété peut s'étendre aux polynômes bivariés associés à des suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

Soient $(U_n) = (U_n(x, y))$ et $(V_n) = (V_n(x, y))$ les suites de polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas (de $\mathbb{Z}[x, y]$), définis par

$$\begin{cases} U_0 = 0, & U_1 = 1, \\ U_n = xU_{n-1} + yU_{n-2}, & (n \geq 2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 2, & V_1 = x, \\ V_n = xV_{n-1} + yV_{n-2}, & (n \geq 2) \end{cases}$$

Il est établi, en (1.4) et (1.5), que l'on a

$$U_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k.$$

Soit $\mathcal{E}_n$ le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par la famille libre $\mathcal{C}_n = (x^{n-2k} y^k)_k$, $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Alors les relations (1) et (2) apparaissent comme des décompositions de U_{n+1} et V_n sur la base canonique $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{E}_n$.

Posons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_U &= \mathcal{B}_{n,U} = (x^{n-k} U_{n+k+1})_{0 \leq k \leq n}, \\
 \mathcal{B}_V &= \mathcal{B}_{n,V} = (x^{n-k} V_{n+k})_{0 \leq k \leq n}, \\
 \mathcal{B}_U^* &= \mathcal{B}_{n,U}^* = (x^{n-k} U_{n+k})_{0 \leq k \leq n-1}, \\
 \mathcal{B}_V^* &= \mathcal{B}_{n,V}^* = (x^{n-k} V_{n+k-1})_{0 \leq k \leq n-1}.
 \end{aligned}$$

Le but de cette section est de prouver que pour $n \geq 1$, $\mathcal{B}_U$ et $\mathcal{B}_V$ (resp. $\mathcal{B}_U^*$ et $\mathcal{B}_V^*$) sont des bases de $\mathcal{E}_{2n}$ (resp. $\mathcal{E}_{2n-1}$) par rapport auxquelles les polynômes U_{2n+1} et V_{2n} (resp. U_{2n} et V_{2n-1}) admettent des coordonnées entières remarquables.

6.3.1 Enoncé des Théorèmes

Nous commençons naturellement par énoncer le résultat suivant :

Théorème 110 *Pour tout entier naturel n , on a*

1. $\mathcal{B}_{n,U}$ et $\mathcal{B}_{n,V}$ sont des bases de $\mathcal{E}_{2n}$ ($n \geq 0$),
2. $\mathcal{B}_{n,U}^*$ et $\mathcal{B}_{n,V}^*$ sont des bases de $\mathcal{E}_{2n-1}$ ($n \geq 1$).

Ainsi, U_{n+1} et V_n (resp. U_{2n+1} et V_{2n}) se décomposent sur les bases $\mathcal{B}_{n,U}$ et $\mathcal{B}_{n,V}$ de $\mathcal{E}_{2n}$ (resp. $\mathcal{B}_{n,U}^*$ et $\mathcal{B}_{n,V}^*$ de $\mathcal{E}_{2n-1}$). Il y a donc, à priori, 8 décompositions possibles :

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} U_{2n+1} \swarrow \searrow \\ \text{sur } \mathcal{B}_U \boxed{1} \rightarrow \text{trivial} \\ \text{sur } \mathcal{B}_V \boxed{2} \rightarrow \text{Th. A} \end{array} & \begin{array}{l} V_{2n} \swarrow \searrow \\ \text{sur } \mathcal{B}_U \boxed{3} \rightarrow \text{simple} \\ \text{sur } \mathcal{B}_V \boxed{4} \rightarrow \text{trivial} \end{array} \\
 \begin{array}{l} U_{2n} \swarrow \searrow \\ \text{sur } \mathcal{B}_U^* \boxed{5} \rightarrow \text{Th. B} \\ \text{sur } \mathcal{B}_V^* \boxed{6} \rightarrow \text{Th. E} \end{array} & \begin{array}{l} V_{2n-1} \swarrow \searrow \\ \text{sur } \mathcal{B}_U^* \boxed{7} \rightarrow \text{Th. C} \\ \text{sur } \mathcal{B}_V^* \boxed{8} \rightarrow \text{Th. D} \end{array}
 \end{array}$$

Cependant certaines décompositions sont triviales : il s'agit des cas 1 et 4 car $U_{2n+1} \in \mathcal{B}_U$ et $V_{2n} \in \mathcal{B}_V$. La décomposition de V_{2n} dans $\mathcal{B}_U$ est simple : on a $V_{2n} = 2U_{2n+1} - xU_{2n}$.

Les autres cas font l'objet des cinq Théorèmes suivants :

Théorème 111 (A). *Ecriture de U_{2n+1} sur la base $\mathcal{B}_V$.*

Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$2U_{2n+1} = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^{n-k} V_{n+k}$$

avec

$$a_{n,k} = (-1)^{k+1} \binom{n}{k} + 2(-1)^{n-k} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{j}{n-k}.$$

De plus $(a_{n,k})_{n,k \geq 0}$ est une famille d'entiers qui vérifient les relations de récurrence

$$\begin{cases} a_{n,k} = a_{n-1,k} - a_{n-1,k-1} + 2\delta_{n,k}, & (n \geq 1, k \geq 1) \\ a_{n,0} = 1 & (n \geq 0), \\ a_{0,k} = \delta_{0,k} & (k \geq 0). \end{cases}$$

($\delta_{i,j}$ étant le symbole de Kronecker).

Les relations de récurrence permettent d'obtenir le tableau suivant :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	0	1						
3	1	-1	1	1					
4	1	-2	2	0	1				
5	1	-3	4	-2	1	1			
6	1	-4	7	-6	3	0	1		
7	1	-5	11	-13	9	-3	1	1	
8	1	-6	16	-24	22	-12	4	0	1

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 2U_1 &= V_0, \\
 2U_3 &= xV_1 + V_2, \\
 2U_5 &= x^2V_2 + 0V_3 + V_4, \\
 2U_7 &= x^3V_3 - x^2V_4 + xV_5 + V_6.
 \end{aligned}$$

Théorème 112 (B). *Ecriture de U_{2n} sur la base $\mathcal{B}_U^*$.*

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$U_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k} x^{n-k} U_{n+k}$$

avec

$$b_{n,k} = (-1)^{n-k+1} \binom{n}{k}.$$

De plus $(b_{n,k})_{n,k \geq 0}$ est une famille d'entiers qui vérifient les relations de récurrence

$$\begin{cases}
 b_{n,k} = -b_{n-1,k} + b_{n-1,k-1} \quad (n \geq 1, k \geq 1), \\
 b_{n,0} = (-1)^{n+1} \quad (n \geq 0), \\
 b_{0,k} = -\delta_{0,k} \quad (k \geq 0).
 \end{cases}$$

Les relations de récurrence permettent d'obtenir le tableau suivant :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	-1					
1	1	-1				
2	-1	2	-1			
3	1	-3	3	-1		
4	-1	4	-6	4	-1	
5	1	-5	10	-10	5	-1

on en déduit que

$$\begin{aligned} U_2 &= xU_1 \\ U_4 &= -x^2U_2 + 2xU_3 \\ U_6 &= x^3U_3 - 3x^2U_4 + 3xU_5 \\ U_8 &= -x^4U_4 + 4x^3U_5 - 6x^2U_6 + 4xU_7 \end{aligned}$$

Théorème 113 (C). *Ecriture de V_{2n-1} sur la base $\mathcal{B}_U^*$.*

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$V_{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} x^{n-k} U_{n+k} \text{ avec } c_{n,k} = 2(-1)^{n-k+1} \binom{n}{k} - \delta_{n-1,k}$$

De plus $(c_{n,k})_{n,k \geq 1}$ est une famille d'entiers qui vérifient les relations de récurrence

$$\begin{aligned} c_{n,k} &= -c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1} - \delta_{n,k+2}, \quad (n \geq 2, k \geq 1), \\ c_{n,0} &= 2(-1)^{n+1} - \delta_{n,1} \quad (n \geq 1), \\ c_{1,k} &= \begin{cases} 1 & \text{si } k=0, \\ -2 & \text{si } k=1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Les relations de récurrence permettent d'obtenir le tableau suivant :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	1	-2				
2	-2	3	-2			
3	2	-6	5	-2		
4	-2	8	-12	7	-2	
5	2	-10	20	-20	9	-2

On en déduit que

$$\begin{cases} V_1 = xU_1, \\ V_3 = -2x^2U_2 + 3xU_3, \\ V_5 = 2x^3U_3 - 6x^2U_4 + 5xU_5, \\ V_7 = -2x^4U_4 + 8x^3U_5 - 12x^2U_6 + 7xU_7. \end{cases}$$

Théorème 114 (D). *Ecriture de V_{2n-1} sur la base B_V^* .*

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$2V_{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} d_{n,k} x^{n-k} V_{n+k-1} \text{ avec } d_{n,k} = (-1)^{n-k+1} \frac{n+k}{n} \binom{n}{k}.$$

De plus $(d_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 0}$ est une famille à entiers qui vérifient les relations de récurrence

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= -d_{n-1,k} + d_{n-1,k-1}, \quad (n \geq 2, k \geq 1), \\ d_{n,0} &= (-1)^{n+1} \quad (n \geq 1), \\ d_{1,k} &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ -2 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Les relations de récurrence permettent d'obtenir le tableau suivant :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
1	1	-2					
2	-1	3	-2				
3	1	-4	5	-2			
4	-1	5	-9	7	-2		
5	1	-6	14	-16	9	-2	
6	-1	7	-20	30	-25	11	-2

On en déduit que

$$\begin{cases} 2V_1 = xV_0, \\ 2V_3 = -x^2V_1 + 3xV_2, \\ 2V_5 = x^3V_2 - 4x^2V_3 + 5xV_4, \\ 2V_7 = -x^4V_3 + 5x^3V_4 - 9x^2V_5 + 7xV_6. \end{cases}$$

Théorème 115 (E). *Ecriture de U_{2n} sur la base $\mathcal{B}_V^*$.*

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$2U_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} e_{n,k} x^{n-k} V_{n+k-1} \quad \text{avec } e_{n,k} = \frac{1}{2} (a_{n-1,k} + d_{n,k}) + \delta_{n,k}.$$

De plus, $(e_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 0}$ est une famille d'entiers qui vérifient les relations de récurrence

$$e_{n,k} = -e_{n-1,k} + e_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} \quad (n \geq 2, k \geq 1),$$

avec $e_{n,0} = (1 - (-1)^n)/2$ ($n \geq 1$), et $e_{1,k} = \delta_{0,k}$ ($k \geq 0$).

Les relations de récurrence permettent d'obtenir le tableau suivant :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	0	2				
3	1	-2	3			
4	0	2	-4	4		
5	1	-4	8	-8	5	
6	0	2	-8	14	-12	6

On en déduit que

$$\begin{cases} 2U_2 = xV_0, \\ 2U_4 = 0x^2V_0 + 2xV_2, \\ 2U_6 = x^3V_2 - 2x^2V_3 + 3xV_4, \\ 2U_8 = 0x^4V_3 + 2x^3V_4 - 4x^2V_5 + 4xV_6. \end{cases}$$

6.3.2 Preuve des Théorèmes

Le Théorème 110 découle du Lemme suivant

Lemme 116 $\det_{\mathcal{C}_{2n}}(\mathcal{B}_{n,U}) = \det_{\mathcal{C}_{2n-1}}(\mathcal{B}_{n,U}^*) = 1$ et $\det_{\mathcal{C}_{2n}}(\mathcal{B}_{n,V}) = \det_{\mathcal{C}_{2n-1}}(\mathcal{B}_{n,V}^*) = 2$.

Preuve. Prouvons la première égalité, la preuve des autres égalités est similaire.

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{C}_{2n}}(\mathcal{B}_{n,U}) &= \det_{\mathcal{C}_{2n}}(W_0, W_1, \dots, W_n) \quad \text{où } W_k = x^{n-k}U_{n+k+1} \\ &= \det_{\mathcal{C}_{2n}}(W_0, W_1 - W_0, \dots, W_{n-1} - W_{n-2}, W_n - W_{n-1}), \end{aligned}$$

or

$$W_j - W_{j-1} = x^{n-j}U_{n+j+1} - x^{n-j+1}U_{n+j} = x^{n-j}(U_{n+j+1} - xU_{n+j}) = x^{n-j}yU_{n+j-1}.$$

Ainsi

$$\det_{\mathcal{C}_{2n}}(\mathcal{B}_{n,U}) = \det_{\mathcal{C}_{2n}}(x^nU_{n+1}, x^{n-1}yU_n, x^{n-2}yU_{n+1}, \dots, yU_{2n-1}).$$

La "composante" sur x^{2n} de $W_0 = x^nU_{n+1}$ est égale à 1.

La "composante" sur x^{2n} de $x^{n-j}yU_{n+j-1}$ est égale à 0, ainsi

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{C}_{2n}}(\mathcal{B}_{n,U}) &= \det_{\mathcal{C}_{2n-2}}(x^{n-1}U_n, x^{n-2}U_{n+1}, \dots, U_{2n-1}) \\ &= \det_{\mathcal{C}_{2n-2}}(x^{n-1-j}U_{n+j})_{0 \leq j \leq n-1} \\ &= \det_{\mathcal{C}_{2n-2}}(\mathcal{B}_{n-1,U}) \\ &= \det_{\mathcal{C}_{2n-4}}(\mathcal{B}_{n-2,U}) = \dots = \det_{\mathcal{C}_0}(\mathcal{B}_{0,U}) = 1. \end{aligned}$$

□

Soient $E, A_m, B_m, C_m, D_m, E_m$ les opérateurs de $(\mathbb{Q}[x, y])^{\mathbb{N}}$ définis par

$$E((W_n)_n) = (W_{n+1})_n$$

E est l'opérateur "avance" et on convient d'écrire : $EW_n = W_{n+1}$

$$\begin{aligned} A_m &= (x - E)^m + 2 \sum_{k=1}^m E^k (x - E)^{m-k} \quad (m \geq 0), \\ B_m &= -(E - x)^m \quad (m \geq 0), \\ C_m &= 2E^m + 2B_m - xE^{m-1} \quad (m \geq 1), \\ D_m &= (E - x)^{m-1} (x - 2E) \quad (m \geq 1), \\ E_m &= \frac{1}{2} (xA_{m-1} + D_m + 2C_m) \quad (m \geq 0). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
A_m &= \sum_{k=0}^m a_{m,k} x^{m-k} E^k \quad \text{avec} \quad a_{m,k} = (-1)^{k+1} \binom{m}{k} + 2(-1)^{m-k} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{j}{m-k}, \\
B_m &= \sum_{k=0}^m b_{m,k} x^{m-k} E^k \quad \text{avec} \quad b_{m,k} = (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k}, \\
C_m &= \sum_{k=0}^{m-1} c_{m,k} x^{m-k} E^k \quad \text{avec} \quad c_{m,k} = 2(-1)^{m-k+1} \binom{m}{k} - \delta_{m-1,k}, \\
D_m &= \sum_{k=0}^m d_{m,k} x^{m-k} E^k \quad \text{avec} \quad d_{m,k} = \frac{(-1)^{m-k+1} (m+k)}{m} \binom{m}{k}, \\
E_m &= \sum_{k=0}^{m-1} e_{m,k} x^{m-k} E^k \quad \text{avec} \quad e_{m,k} = \frac{1}{2} (a_{m-1,k} + d_{m,k}) + \delta_{m,k}.
\end{aligned}$$

Avec ces notations, les relations des théorèmes A , B , C , D et E se traduisent par les relations suivantes (à prouver) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a.} \quad & \forall n \in \mathbb{N} \quad A_n V_n = 2U_{2n+1}, \\
\mathbf{b.} \quad & \forall n \in \mathbb{N} \quad B_n U_n = 0, \\
\mathbf{c.} \quad & \forall n \in \mathbb{N}^* \quad C_n U_n = V_{2n-1}, \\
\mathbf{d.} \quad & \forall n \in \mathbb{N}^* \quad D_n V_{n-1} = 0, \\
\mathbf{e.} \quad & \forall n \in \mathbb{N}^* \quad E_n V_{n-1} = 2U_n.
\end{aligned}$$

Pour cela, le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 117 *Pour tous entiers n et m , nous avons*

$$\begin{aligned}
1. \quad & (x - E)^n U_m = (-y)^n U_{m-n} \quad \text{et} \quad (x - E)^n V_m = (-y)^n V_{m-n} \quad (m \geq n \geq 0), \\
2. \quad & V_n = 2U_{n+1} - xU_n \quad (n \geq 0), \\
3. \quad & V_n = U_{n+1} + yU_{n-1} \quad (n \geq 1), \\
4. \quad & \sum_{k=1}^n (-y)^{n-k} V_{2k} = U_{2n+1} - (-y)^n \quad (n \geq 0).
\end{aligned}$$

Preuve.

1. On procède par récurrence sur n , en observant que pour $n = 1$, on a $(x - E)^n U_m = xU_m - U_{m+1} = -yU_{m-1}$ et que $(x - E)^n V_m = -yU_{m-1}$, pour $m \geq 1$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons : $S_n := 2U_{n+1} - xU_n$. On constate que : $S_0 = 2$, $S_1 = x$ et $S_n = xS_{n-1} + yS_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = S_n = 2U_{n+1} - xU_n$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons, d'après la relation précédente $V_n = U_{n+1} + (U_{n+1} - xU_n) = U_{n+1} + yU_{n-1}$.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons $T_n := U_{2n+1} - \sum_{k=1}^n (-y)^{n-k} V_{2k}$. La relation à prouver équivaut à $T_n = (-y)^n$ ($n \geq 0$). On remarque alors que, d'après la relation 1 de ce lemme, nous avons pour tout entier $n \geq 1$:

$$T_n + yT_{n-1} = U_{2n+1} + yU_{2n-1} - V_{2n} = 0,$$

$(T_n)_{n \geq 0}$ est ainsi une suite géométrique de raison $(-y)$ et de premier terme $T_0 = 1$. Il en résulte que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $T_n = (-y)^n$.

□

Preuve des relations a., b., c., d. et e.

a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A_n V_n &= ((x - E)^n + 2 \sum_{k=1}^n E^k (x - E)^{n-k}) V_n \\ &= (-y)^n V_0 + 2 \sum_{k=1}^n (-y)^{n-k} V_{2k} \quad (\text{d'après le 1 du lemme}) \\ &= 2U_{2n+1}. \end{aligned}$$

b. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} B_n U_n &= -(E - x)^n U_n \\ &= -(-y)^n U_0 \quad (\text{d'après le 1 du lemme}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

c. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} C_n U_n &= (2E^n + 2B_n - xE^{n-1}) U_n \\ &= 2U_{2n} + 2B_n U_n - xU_{2n-1}, \end{aligned}$$

or $B_n U_n = 0$ (d'après a.), ainsi

$$\begin{aligned} C_n U_n &= 2U_{2n} - xU_{2n-1} \\ &= V_{2n-1}. \end{aligned}$$

d. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} D_n V_{n-1} &= (x - 2E)(E - x) V_{n-1} \\ &= (x - 2E) V_0 \\ &= xV_0 - 2V_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

e. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} E_n V_{n-1} &= \left(\frac{1}{2}x A_{n-1} + \frac{1}{2}D_n + E^n\right) V_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}x A_{n-1} V_{n-1} + \frac{1}{2}D_n V_{n-1} + V_{2n-1}. \end{aligned}$$

or $A_{n-1} V_{n-1} = 2U_{2n-1}$ (d'après c.) et $D_n V_{n-1} = 0$ (d'après b.), il est en résulte que

$$\begin{aligned} E_n V_{n-1} &= xU_{2n-1} + V_{2n-1} \\ &= 2U_{2n} \quad (\text{d'après le 2 du lemme}). \end{aligned}$$

□

Remarque 118 *Les Théorèmes A, B, C, D et E généralisent les résultats obtenus pour les polynômes de Chebyshev de la section précédente. En effet*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V_n(2x, 1) &= T_n(x) \text{ est le polynôme de Chebyshev de première espèce,} \\ U_{n+1}(2x, 1) &= U_n(x) \text{ est le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce,}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} T_n(x) = 2xT_{n-1} - T_{n-2}, \\ T_0 = 1, T_1 = x, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_n(x) = 2xU_{n-1} - U_{n-2}, \\ U_0(x) = 1, U_1 = 2x. \end{cases}$$

Chapitre 7

La valuation : un outil remarquable

7.1 Somme de puissances d'inverses d'une progression arithmétique

En 1915, Taeisinger a montré que le nombre harmonique $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ n'est jamais un entier sauf pour H_1 . Plus généralement, Kurschak en 1918, a montré que la somme des inverses d'entiers consécutifs (qui n'est rien d'autre qu'une progression arithmétique de raison un), ne commençant pas nécessairement par 1, n'est jamais un entier [154, p.157]. En 1932, le célèbre Paul Erdős a montré que la somme des inverses d'entiers en progression arithmétique n'est jamais un entier [122].

Nous nous proposons de donner quelques extensions de ces résultats. Cela nous permettra de mettre en évidence leur intime lien avec les fractions égyptiennes et de comprendre un peu mieux la structure des nombres parfaits.

Soient n un entier positif et p un nombre premier. On définit la p -valuation de n comme étant l'unique entier positif $v_p(n)$ vérifiant $n = u \cdot p^{v_p(n)}$ avec $\gcd(u, p) = 1$.

Notre approche se base sur l'inégalité fondamentale concernant la valuation d'une somme de deux entiers consécutifs. Soient n et m deux entiers, il est bien établi que $v_p(n + m) \geq \min\{v_p(n), v_p(m)\}$, avec la propriété remarquable suivante :

$$\text{si } v_p(n) > v_p(m) \text{ alors } v_p(n + m) = v_p(m).$$

On va commencer par introduire le théorème suivant, dont la preuve repose essentiellement sur le postulat de Bertrand (postulat démontré par Chebyshev).

Théorème 119 *Soient n un entier ≥ 2 et $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ des entiers positifs. Alors*

$$H_n(\underline{\alpha}) = H_n(\alpha_2, \dots, \alpha_n) := 1 + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha_n}} \quad (7.1)$$

n'est jamais un entier.

Lorsque $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ on obtient le Théorème de Taeisinger.

Preuve. Soit P le plus grand nombre premier $\leq n$. Il est bien connu, d'après le postulat de Bertrand, qu'il existe un nombre premier Q vérifiant $P < Q < 2P$. On en déduit que $n < 2P$. Ainsi, P est premier avec tous les entiers $k \in n(P) := \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{P\}$.

Supposons que $H_n(\underline{\alpha})$ est un entier. En posant $D_n(\underline{\alpha}) = 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$, on obtient

$$D_n(\underline{\alpha}) H_n(\underline{\alpha}) - \sum_{k \in n(P)} \frac{D_n(\underline{\alpha})}{k^{\alpha_k}} = \frac{D_n(\underline{\alpha})}{P^{\alpha_P}}.$$

Le membre de gauche admet P comme facteur dans sa décomposition, alors que le membre de droite est premier à P . Ceci contredit le fait que $H_n(\underline{\alpha})$ est un entier. $\square$

En utilisant les mêmes arguments, on établit les résultats suivants

Corollaire 120 *Le nombre rationnel*

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p_n}$ n'est jamais un entier, où p_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier,
2. $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}$ n'est jamais un entier, avec $n_1 < \dots < n_k$ et n_k étant un nombre premier,
3. $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}$ n'est jamais un entier, pour tous $n_1, n_2, \dots, n_k$ pourvu que l'un des n_j soit le plus grand premier $\leq n_k$.

On va maintenant considérer le cas d'une progression arithmétique. En s'appuyant sur un résultat démontré par Shorey et Tijdeman [295, 1990], on établit une extension du Théorème d'Erdos et de Kurshak.

Théorème 121 (Shorey et Tijdeman) *Soient a et d deux entiers premiers entre eux et k un entier ≥ 2 . Posons $\Delta = \prod_{j=1}^k (a + (j-1)d)$ et $P := \max_{p|\Delta} p$, le plus grand facteur premier de Δ , alors pour $d > 1$, on a $P \geq k$.*

En d'autres termes, le plus grand premier figurant dans une progression arithmétique, non triviale (termes consécutifs), est toujours plus grand que la longueur de la progression. Ce qui est assez remarquable.

Théorème 122 *Soient a, d et k des entiers vérifiant $\gcd(a, d) = 1$, $k \geq 2$, et $a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-1)d$, une progression arithmétique. Alors pour tous entiers $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, le nombre rationnel*

$$A_k(\underline{\alpha}) = \frac{1}{a^{\alpha_0}} + \frac{1}{(a+d)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{1}{(a+(k-1)d)^{\alpha_{k-1}}} \quad (7.2)$$

n'est jamais un entier.

Lorsque $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 1$, on retrouve le Théorème d'Erdős, si de plus $d = 1$, on retrouve le Théorème de Kurshak.

Preuve. Supposons qu'il existe i et j , $i < j$ tel que le plus grand premier P (donné par le Théorème 119) est facteur commun de $a + (i - 1)d$ et $a + (j - 1)d$, ce qui entraîne que P divise $a + (i - 1)d$ et $a + (j - 1)d$ ainsi P divise la différence $(i - j)d$. En exploitant le fait que $\gcd(P, d) = 1$ (comme conséquence de $\gcd(a, d) = 1$), on en déduit que P divise $(j - i)$ et finalement en utilisant le Théorème 121 de Shorey et Tijdeman, on obtient $k \leq P < j - i \leq k$; d'où la contradiction. Le reste de la preuve est analogue à celle donnée au Théorème 119. $\square$

Le théorème suivant est classique en théorie de la valuation.

Théorème 123 Soient $n_1, n_2, \dots, n_k$ des entiers positifs. On suppose qu'il existe un nombre premier P tel que $v_P(n_{j_P})$ est maximale, non nulle, pour un unique $j_P \in \{1, 2, \dots, k\}$. Alors

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} \quad (7.3)$$

n'est jamais un entier.

Remarque 124 Nombres parfaits et fractions égyptiennes [145].

On dit qu'un entier, non nul, est parfait si il est égal à la somme de ses diviseurs propres. Exemples : $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Il est bien connu que la somme des inverses des diviseurs (distincts de 1) d'un nombre parfait est égale à un. Pour les exemples précédents, nous avons : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 1$ (Une expression de la forme $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}$ est dite fraction égyptienne de longueur k , où les a_i sont des entiers distincts). Les sommes des dénominateurs qui constituent la fraction égyptienne sont appelés nombres égyptiens : $2 + 3 + 6 = 11$ et $2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 55$ sont des nombres égyptiens.

Qu'est ce qui fait que la somme des inverses (en dehors de un) d'un nombre égyptien donne un entier ? La raison principale est due au fait que la valuation maximale de chaque nombre premier qui apparaît au niveau des dénominateurs ressort deux fois, ce qui n'est pas conforme aux hypothèses du Théorème 123.

La même situation se produit pour la suite utilisée par Soundararajan [304, 2005], définie par

$$a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 1 + a_1 a_2 \dots a_k, \quad \text{et vérifiant} \quad \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_1 \dots a_k} = 1.$$

Il n'est pas difficile de voir que pour $i \neq j$, $\gcd(a_i, a_j) = 1$, la valuation de chaque nombre premier apparaît au moins deux fois (dans l'un des a_i et dans leur produit).

Corollaire 125 Soit $a_1, a_2, \dots, a_k$ une suite finie d'entiers telle que la somme de leur inverses est un entier. Alors pour chaque nombre premier P , il existe i et j , $1 \leq i < j \leq k$ tels que

$$v_P(a_i) = v_P(a_j).$$

Preuve. C'est une conséquence du Théorème 123. $\square$

7.2 Sur une factorisation des entiers

Il est bien connu que tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ admet une unique écriture de la forme : $n = qm^2$ avec $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, q sans facteur carré.

Le Théorème suivant constitue une extension de ce résultat.

Théorème 126 *Soit k un entier ≥ 2 . Alors pour tout entier $n \geq 1$, il existe une unique suite d'entiers $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ vérifiant*

$$n = a_1 a_2^2 \dots a_k^k$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ sont premiers entre eux et sans facteur carré.

Preuve. Pour $n = 1$, on a trivialement $a_1 = 1$. Pour $n \geq 2$, la factorisation canonique donne $n = \prod_{p/n} p^{v_p(n)}$, où $v_p(n)$ est la valuation p -adique de n . Pour tout nombre premier p divisant l'entier n , la division euclidienne de $v_p(n)$ par k donne

$$v_p(n) = kq_p + r_p, \text{ avec } r_p \in \{1, 2, \dots, k-1\}.$$

Posons alors

$$\begin{aligned} a_j &: = \prod_{p/n \text{ et } r_p=j} p = \prod_{p/n \text{ et } v_p(n) \equiv j \pmod{k}} p, \quad (1 \leq j \leq k-1), \\ a_k &: = \prod_{p/n} p^{q_p} = \prod_{p/n} p^{\lfloor v_p(n)/k \rfloor}. \end{aligned}$$

Montrons ainsi l'unicité de la décomposition. Si

$$n = a_1 a_2^2 \dots a_k^k$$

alors

$$v_p(n) = v_p(a_1) + 2v_p(a_2) + \dots + kv_p(a_k)$$

avec

$$v_p(a_j) \in \{0, 1\} \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1,$$

comme ils sont premiers entre eux, on en déduit qu'il existe au plus un entier $1 \leq j \leq k-1$ tel que $v_p(a_j) \neq 0$.

On peut ainsi affirmer que

- Si k divise $v_p(n)$ on a $v_p(a_1) = v_p(a_2) = \dots = v_p(a_{k-1}) = 0$ et $v_p(a_k) = v_p(n)/k$.
- Sinon, il existe un unique entier $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ tel que $v_p(a_s) = 1$ et $v_p(a_j) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq k-1$ et $j \neq s$.

En conclusion $v_p(n) = kv_p(a_k) + s$ et $v_p(a_k) = \lfloor v_p(n)/k \rfloor$. $\square$

Chapitre 8

Autour de l'hyperdéterminant

8.1 Introduction

Le concept d'hyperdéterminant a été introduit par Cayley au milieu du 19^{ième} siècle comme une extension du déterminant classique opérant sur les tenseurs (hypercubes).

$$M = (M_{i_1, i_2, \dots, i_k})_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n}$$

Il a proposé plusieurs généralisations, principalement citées dans les articles :

- On the theory of determinants (1843).
- Mémoires sur les hyperdeterminants (1846).
- On the theory of permutants (1851).

La généralisation la plus simple a été pratiquement abandonnée. La dernière référence répandue qui en parle est celle de Muir, dans son livre sur la théorie des déterminants. Il leur réserve un chapitre intitulé : "Determinants of higher class".

Cependant il existe une référence, beaucoup moins répandue, qui en parle de manière assez détaillée ; le livre russe dû à N.P. Sokolov

- Introduction to the theory of multidimensional matrices (1972).

L'hyperdéterminant est défini comme étant le polynôme invariant d'un tenseur d'ordre pair $(2k)$ ayant un nombre pair d'indices défini sur un espace vectoriel de dimension n .

$$\det (M_{i_1, i_2, \dots, i_{2k}})_1^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma_1 \cdots \sigma_{2k}) \prod_{i=1}^n M_{\sigma_1(i) \cdots \sigma_{2k}(i)}.$$

(Trivialement ce déterminant vaut zéro si le tenseur M est d'ordre impair).

Ces dernières années l'hyperdéterminant a été à l'origine de plusieurs articles : Haukkanen (1992), Gherardelli (1993), Barvinok (1995), Luque et Thibon (2002, 2003, 2004), Luque (2006).

Comme exemple d'application de ces hyperdéterminants : Ils permettent l'évaluation de certaines intégrales multiples comme celles de Selberg et d'Aomoto :

$$S_n(a, b; \gamma) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Delta(x)|^{2\gamma} \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} dx_1 \cdots dx_n,$$

$$A_n^{a,b;k}(y) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Delta(x)|^{2k} \prod_{i=1}^n (y-x_i) x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} dx_1 \cdots dx_n$$

où

$$\Delta(x) = \det(x_i^{j-1}) = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

et tout récemment, une application aux polynômes de Jack [43].

Nous avons aussi traité le cas des hyperdéterminants associés à des tenseurs d'ordre entier (non nécessairement pair) via une interprétation ou illustration que l'on a développé dans [22]. On distingue les deux cas : ordre pair et ordre impair.

Et dans [47], sachant que le cas impair ne donne pas un invariant, on montre qu'en fait ça engendre un groupe d'invariant. Comme motivation, on y donne une interprétation géométrique de la loi de Gauss [132, 1801] relativement aux formes quadratiques, récemment découverte par M. Bhargava [65, 2001] et [66, 2004], déjà pressenti par D. Shanks [288, 1989], et tout dernièrement étudié et appliqué à la cryptographie par O. Orrière [259, 2006].

Pour notre part, dans ce chapitre, nous nous proposons d'établir un analogue de l'inégalité de Gram, connue dans un espace de Hilbert, pour les espaces L^{2k} , ($k \geq 1$). Pour ce faire, on va introduire un analogue du produit scalaire dans les L^{2k} .

8.2 Le $2k$ -produit scalaire et norme associée

Définition 127 Soient E un $\mathbb{R}$ -e.v. et $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{2k}$ l'application définie par

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{2k} : E \times E \times \cdots \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{2k}) &\longmapsto \langle x_1, \dots, x_{2k} \rangle_{2k} \end{aligned}$$

On dira que $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{2k}$ est un $2k$ -produit scalaire si

1. $\forall \sigma \in S \quad \langle x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(2k)} \rangle_{2k} = \langle x_1, \dots, x_{2k} \rangle_{2k},$
2. $\langle y_1 + \lambda z_1, \dots, x_{2k} \rangle_{2k} = \langle y_1, \dots, x_{2k} \rangle_{2k} + \lambda \langle z_1, \dots, x_{2k} \rangle_{2k},$
3. $\langle x, \dots, x \rangle_{2k} \geq 0$ et on a l'égalité ssi $x = 0$.

Remarque 128 Lorsque $k = 1$, on retrouve le produit scalaire classique.

Exemple 129 $E = \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\langle x, y, \dots, z \rangle_{2k} = \sum_i x_i y_i \cdots z_i.$

E : ensemble des fonctions intégrables sur Ω et $\langle f, g, \dots, h \rangle_{2k} = \int_{\Omega} f g \cdots h.$

Dans la suite, les résultats que nous allons présenter sont relatifs à ces deux exemples.

Le théorème suivant est une compilation de plusieurs résultats établis et démontrés dans [25].

Théorème 130 *Le $2k$ -produit scalaire satisfait les propriétés suivantes :*

1. *L'application $x \mapsto \|x\|_{2k} := \langle x, x, \dots, x \rangle_{2k}^{\frac{1}{2k}}$ est une norme sur L^{2k} . C'est la norme usuelle de L^{2k} .*
2. *La norme de L^{2k} provient d'un $2k$ -produit scalaire et vérifie l'inégalité de Hölder*

$$\langle x, y, \dots, z \rangle_{2k} \leq \|x\|_{2k} \|y\|_{2k} \cdots \|z\|_{2k}.$$

3. *Le $2k$ -produit scalaire est continu par rapport à la norme induite*

$$\text{si } \lim_n \|x_n - x\|_{2k} = \lim_n \|y_n - y\|_{2k} = \cdots \lim_n \|z_n - z\|_{2k} = 0$$

alors

$$\lim_n \|x_n\|_{2k} = \|x\|_{2k} \quad \text{et} \quad \lim_n \langle x_n, y_n, \dots, z_n \rangle_{2k} = \langle x, y, \dots, z \rangle_{2k}.$$

4. *Le $2k$ -produit scalaire s'exprime en fonction de la norme associée*

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_2 &= \frac{1}{2 \cdot 2!} (\|x + y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2) \\ \langle x, y, z, t \rangle_4 &= \frac{1}{2^3 \cdot 4!} (\|x + y + z + t\|_4^4 - \|x - y + z - t\|_4^4 \\ &\quad - \|x + y - z + t\|_4^4 - \|x + y + z - t\|_4^4 \\ &\quad + \|x - y - z + t\|_4^4 + \|x - y + z - t\|_4^4 \\ &\quad + \|x + y - z - t\|_4^4 - \|x - y - z - t\|_4^4) \end{aligned}$$

plus généralement

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_{2k} \rangle_{2k} = \frac{1}{2^{2k} (2k)!} \left(\left\| \sum_{i=1}^{2k} x_i \right\|_{2k}^{2k} + \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq 2k} \left\| \sum_{i=1}^{2k} x_i - 2 \sum_{l=1}^j x_{i_l} \right\|_{2k}^{2k} \right).$$

5. *On démontre le Théorème de la projection dans L^{2k} en utilisant le $2k$ -produit scalaire.*

8.3 Coefficient de corrélation "mutuelle"

Pour des variables aléatoires $X_1, X_1, \dots, X_{2k}$, on définit la covariance de la manière suivante

$$\text{cov}(X_1, X_2, \dots, X_{2k}) := E \left(\prod_{i=1}^{2k} (X_i - EX_i) \right)$$

et l'écart moyen d'ordre $2k$ par

$$\sigma_{2k}(x) := [E((x - EX))^{2k}]^{\frac{1}{2k}}.$$

En posant

$$\langle X_1, X_2, \dots, X_{2k} \rangle_{2k} = \text{cov}(X_1, X_2, \dots, X_{2k})$$

il est naturel de définir le coefficient de corrélation mutuelle de la manière suivante

$$\rho_{X_1, X_2, \dots, X_{2k}} := \frac{\text{cov}(X_1, X_2, \dots, X_{2k})}{\sigma_{2k}(X_1) \sigma_{2k}(X_2) \cdots \sigma_{2k}(X_{2k})}$$

de plus on a le résultat suivant

Théorème 131 *Le coefficient de corrélation mutuelle se comporte comme un cosinus*

$$-1 \leq \rho_{X_1, X_2, \dots, X_{2k}} \leq 1.$$

8.4 L'inégalité de Gram généralisée

Inégalité de Gram dans le cas classique : Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit le déterminant de Gram

$$G(x_1, \dots, x_n) := \det(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

alors

$$G(x_1, \dots, x_n) \geq 0.$$

Soit E un espace vectoriel muni d'une forme $2k$ -linéaire symétrique notée $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{2k}$

On peut munir $E \otimes \cdots \otimes E = E^{\otimes n}$ d'une forme $2k$ -linéaire symétrique (associée à $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{2k}$) notée $\langle (\cdot, \dots, \cdot) \rangle$ et définie par

$$\langle (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n; y_1 \otimes \cdots \otimes y_n; \dots; z_1 \otimes \cdots \otimes z_n) \rangle := \prod_{i=1}^n \langle x_i, y_i, \dots, z_i \rangle_{2k}.$$

Posons

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
& \|x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n\|^{2k} \\
&= \langle (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, \dots, x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \rangle \\
&= \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma_1 \cdots \sigma_{2k}) \langle (x_{\sigma_1(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma_1(n)}, \dots, x_{\sigma_{2k}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma_{2k}(n)}) \rangle \\
&= \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{2k} \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma_1 \cdots \sigma_{2k}) \prod_{i=1}^n \langle x_{\sigma_1(i)}, x_{\sigma_2(i)}, \dots, x_{\sigma_{2k}(i)} \rangle \\
&= n! \det(\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{2k}} \rangle_1^n)
\end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que l'hyperdéterminant de Gram, d'où le théorème suivant¹ :

Théorème 132 *Identité de Lagrange généralisée*

$$\det(\langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{2k}} \rangle_1^n) = \frac{1}{n!} \|x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n\|^{2k}$$

vu que le second membre est positif, nous obtenons l'inégalité de Gram.

Application : En combinant le coefficient de corrélation mutuelle et l'hyperdéterminant de Gram via

$$\langle X_1, X_2, \dots, X_{2k} \rangle_{2k} = \text{cov}(X_1, X_2, \dots, X_{2k})$$

on obtient l'hyperdéterminant du tenseur des corrélations mutuelles. C'est l'équivalent pour $k = 1$ du déterminant de la matrice des variances-covariances ou de la matrice des corrélations.

8.5 Une inégalité dans les espaces euclidiens

Comme application du raisonnement précédent, nous établissons l'inégalité suivante, qui en soit peut être redémontrer directement, mais l'approche que nous présentons à l'avantage de se généraliser au $2k$ -produit scalaire.

Théorème 133 *L'inégalité suivante a lieu*

$$2 \prod_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \prod_{i=1}^n \|y_i\|^2$$

Preuve. Pour $\alpha = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$, on a

$$\begin{aligned}
\langle (\alpha, \alpha) \rangle &= \langle (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \rangle \\
&= \langle (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \rangle - \langle (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \rangle \\
&\quad - \langle (y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \rangle + \langle (y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \rangle \\
&= \prod_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle - 2 \prod_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle + \prod_{i=1}^n \langle y_i, y_i \rangle
\end{aligned}$$

on conclut par $\langle (\alpha, \alpha) \rangle \geq 0$. □

¹Pour $k = 1$, cela donne une preuve simple de l'inégalité de Gram [24]. En fait, cette approche permet aussi d'expliciter le terme "Lagrange", connu dans le cas discret, par rapport à des espaces plus abstraits.

8.6 Un analogue via les déterminants (et les hyperdéterminants)

Aussi, en faisant (voir [26]) le développement par rapport à

$$\alpha = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \pm \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \varepsilon(\sigma) y_{\sigma(1)} \otimes y_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(n)},$$

nous établissons ce qui suit :

Théorème 134 *L'inégalité suivante a lieu*

$$2. \left| \begin{array}{ccc} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_n \rangle \\ \langle x_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_2, y_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, y_n \rangle \end{array} \right| \leq \left| \begin{array}{ccc} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \langle y_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_2, y_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{array} \right|$$

que l'on peut encore écrire

$$\det(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \pm 2. \det(\langle x_i, y_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} + \det(\langle y_i, y_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \geq 0.$$

Si on adopte la même démarche pour le $2k$ -produit scalaire, nous obtenons des identités remarquables relatives aux hyperdéterminants.

8.7 Identité de Lagrange généralisée

Le but de cette section est de donner une généralisation de l'identité de Lagrange, et donc, vu que le second membre est positif, de l'inégalité de Buniakovsky-Cauchy.

Soient $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s \in \mathbb{C}$. Posons

$$D_k = \sum_{k=0}^{2k-1} (-1)^j \binom{2k-1}{j} (\sum a^{2k-j} b^j) (\sum a^j b^{2k-j})$$

où $\sum a^j b^{2k-j}$ désigne $\sum_{i=1}^s a_i^j b_i^{2k-j}$.

Théorème 135 *Identité de Lagrange généralisée*

$$D_k = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^{2k}.$$

Comme le second membre est positif, on obtient l'inégalité de Cauchy-Buniakovsky généralisée. Ce qui donne pour les premières valeurs

$$\begin{aligned} (\sum a_i^2) (\sum b_i^2) - (\sum a_i b_i)^2 &= \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \longrightarrow \text{Lagrange.} \\ (\sum a_i^4) (\sum b_i^4) + 3 (\sum a_i^2 b_i^2)^2 - 4 (\sum a_i^3 b_i) (\sum a_i b_i^3) &= \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^4 \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de considérer l'hyperdéterminant de Gram pour $k = 1$ et $\langle x, y, \dots, z \rangle = \sum_i x_i y_i \cdots z_i$. $\square$

Pour le cas impair nous renvoyons à [28].

Remarque 136 *Pour d'autres extensions et applications de ces inégalités discrètes, on pourra consulter [23].*

Annexe A

Approche combinatoire pour expliciter les autocovariances d'un modèle *ARMA* périodique

A.1 Introduction

Cette section est consacrée au calcul de la fonction d'autocovariances d'un modèle autorégressif moyenne mobile à coefficients périodiques dépendant du temps (Periodic AutoRegressive Moving Average models, *PARMA*). Un processus aléatoire $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ du second ordre ($E(y_t^2) < \infty$) est dit admettre une représentation *PARMA* d'ordre p et q et de période S , s'il est solution de l'équation aux différences stochastiques suivante

$$y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j^{(t)} y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j^{(t)} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.1})$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc périodique, i.e., une suite de variables aléatoires non corrélées ($E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0$ pour $h \neq 0$) de fonction moyenne $E(\varepsilon_t)$ nulle et de fonction variance $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$. Les paramètres $\phi_j^{(t)}$, $\theta_j^{(t)}$ et σ_t^2 sont périodiques en t de période S , i.e. $\phi_j^{(t+Sn)} = \phi_j^{(t)}$, $n \in \mathbb{Z}$ et ainsi de suite. Ces modèles ont été largement étudiés lors de ces trois dernières décennies. Le but étant de représenter plusieurs séries chronologiques rencontrées dans divers domaines scientifiques (tels que l'économie, l'hydrologie, la météorologie et le traitement de signal) caractérisés par une structure de corrélation périodique, structure qui ne peut être suffisamment expliquée par les modèles *ARMA* saisonniers à coefficients constants (Seasonal *ARMA*, *SARMA*). Ils sont aussi utilisés dans l'analyse multivariée afin de réduire sensiblement le nombre de paramètres correspondants.

Cependant, comparés à la formulation *SARMA*, les modèles *PARMA* requièrent une représentation comprenant une structure d'autocovariance plus complexe ainsi qu'un plus grand nombre de paramètres à prendre en charge. Ceci complique la mise en oeuvre ainsi que l'analyse des propriétés algébriques et probabilistes de tels modèles. Par ailleurs, il est bien

connu que l'outil fondamental pour la représentation des modèles de séries chronologiques, notamment les modèles *PARMA*, est la fonction d'autocovariances $\gamma_h^{(t)} = E(y_t y_{t-h})$. En outre, la fonction $\gamma_h^{(t)}$ permet d'évaluer la fonction de vraisemblance d'un modèle *PARMA*, d'estimer ses paramètres, de calculer la variance asymptotique de ses estimateurs et de prévoir les valeurs futures des séries qu'il se propose de générer. Cependant, le calcul de $\gamma_h^{(t)}$ a suscité peu d'intérêt dans la littérature, probablement en raison de la complexité inhérente à l'absence de symétrie et par là même de la propriété de Toeplitz dans sa structure.

Les méthodes de calcul de $\gamma_h^{(t)}$ proposées dans la littérature (voir Bentarzi et Aknouche, 2005) sont généralement basées sur l'approche de l'équation aux différences qui fait appel aux dites équations de Yule-Walker périodiques. Cette approche a été adoptée d'abord par Li et Hui (1988) qui donnent les autocovariances de démarrage $\gamma_h^{(v)}$ (i.e. relativement aux $(p+1)$ premiers retards, $h \leq p$, $1 \leq v \leq S$) comme solutions du système linéaire

$$A\gamma = y,$$

où γ est le $(p+1)S \times 1$ -vecteur des autocovariances de démarrage. Ce système est cependant encombrant tant du point de vue analytique que du point de vue numérique puisque la matrice A n'est pas donnée explicitement mais formée à partir d'un algorithme approprié. En adoptant la même approche, Shao et Lund (2004) ont montré que pour $r = \max(p, q) + 1$ les $r \times S$ autocovariances de démarrage ($\gamma_h^{(v)}$ $0 \leq h \leq r$, $1 \leq v \leq S$) peuvent être obtenues en résolvant, par rapport à γ , le système d'équations linéaires

$$\Gamma U \gamma = \kappa,$$

où Γ et U sont, respectivement, des matrices de dimensions $rS \times (p+1)rS$ et $(p+1)rS \times rS$. Contrairement au résultat de Li et Hui (1988), ces matrices sont données explicitement mais la méthode demeure relativement encombrante puisqu'elle requiert un nombre d'opérations considérablement plus grand dû au produit de matrices qui sont de taille plus grande.

En se basant sur la même approche (équation aux différences), nous proposons une alternative pour calculer les autocovariances d'un modèle *PARMA*. La méthode proposée calcule les $S(p+1)$ autocovariances de démarrage en se basant sur la résolution d'un système linéaire dont la matrice est donnée explicitement avec une forme analytique à structure circulaire, naturellement en adéquation avec la périodicité du modèle.

A.2 La méthode

Réécrivons le modèle *PARMA* (A.1), en faisant ressortir la périodicité, comme suit

$$\sum_{j=0}^p \phi_j^{(v)} y_{v-j+nS} = \sum_{j=0}^q \theta_j^{(v)} \varepsilon_{v-j+nS}, \quad 1 \leq v \leq S, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.2})$$

où $\phi_0^{(v)} = \theta_0^{(v)} = -1$. Soit $\gamma_h^{(v)} = E(y_{v+nS} y_{v+nS-h})$ la fonction d'autocovariance de retard $h \in \mathbb{Z}$ et de saison v . Alors, il est bien connu (Li et Hui, 1988; Shao et Lund, 2004) qu'en

multipliant (A.2) par y_{v+nS-h} et en prenant l'espérance des deux membres de l'équation obtenue, la fonction d'autocovariances $\gamma_h^{(v)}$, $1 \leq v \leq S$, $h \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation aux différences linéaire à coefficients périodiques (dite équations de Yule-Walker périodiques)

$$\gamma_h^{(v)} - \sum_{j=1}^p \phi_j^{(v)} \gamma_{h-j}^{(v)} = - \sum_{j=h}^q \theta_j^{(v)} \psi_{j-h}^{(v-h)} \sigma_{v-j}^2 \mathbf{1}_{[h \leq q]}, \quad h \geq 0, \quad (\text{A.3})$$

où les covariances croisées normalisées $\psi_k^{(v)}$, $v = 1, \dots, S$, $k \in \mathbb{Z}$, coefficients de l'unique représentation causale du processus *PARMA* $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, sont données par (voir e.g. Lund et Basawa, 2000; Shao et Lund, 2004)

$$\psi_k^{(v)} = -\theta_k^{(v)} \mathbf{1}_{[k \leq q]} + \sum_{j=1}^{\min(k,p)} \phi_j^{(v)} \psi_{k-j}^{(v-j)}, \quad k \geq 1, \quad v = 1, \dots, S, \quad (\text{A.4})$$

où $\psi_0^{(v)} = 1$ et $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice. La solution de (A.3) existe et est unique pourvu que le modèle (A.1) soit causal (e.g., Bentarzi, 1998).

Pour déterminer la fonction d'autocovariance à partir de l'équation aux différences (A.3), nous avons besoin des valeurs de démarrage $\gamma_h^{(v)}$, $0 \leq h \leq p$ et $1 \leq v \leq S$. Une fois que ces valeurs sont connues, les $\gamma_h^{(v)}$ ($h > p$) sont calculées récursivement à partir de (A.3) tout en faisant appel à (A.4). Les autocovariances $\gamma_h^{(v)}$ pour des retards négatifs sont obtenues en utilisant la relation $\gamma_{-h}^{(v)} = \gamma_h^{(v+h)}$. L'objet de ce paragraphe est la formulation d'un système linéaire destiné à calculer la fonction d'autocovariance pour les $p+1$ premiers retards et ce, via la relation (A.3) pour $0 \leq h \leq p$ et $1 \leq v \leq S$.

Soient $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0^{(1)}, \dots, \gamma_p^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \dots, \gamma_p^{(2)}, \dots, \gamma_0^{(S)}, \dots, \gamma_p^{(S)})'$ le $S(p+1)$ -vecteur des autocovariances et $\boldsymbol{\zeta}$ le $S(p+1)$ -vecteur défini par

$$\zeta_{hS+v} = \sum_{j=h}^q \theta_j^{(v)} \psi_{j-h}^{(v-h)} \sigma_{v-j}^2, \quad 1 \leq v \leq S \text{ et } 0 \leq h \leq p.$$

Considérons la famille de *matrices fondamentales* $\boldsymbol{\varphi}_h^{(v)}$ ($h \geq 0$, $1 \leq v \leq S$) d'ordre $(p+1) \times (p+1)$

$$\boldsymbol{\varphi}_h^{(v)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} & \mathbf{0}_{h \times (p+1-h)} & & & & \mathbf{0}_{h \times h} \\ -\phi_h^{(v)} & -\phi_{h+1}^{(v)} & \cdots & & -\phi_p^{(v)} & \\ 0 & -\phi_h^{(v)} & 0 & \cdots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & & 0 & -\phi_h^{(v)} & \end{array} \right) \quad \begin{matrix} \mathbf{0}_{(p+1-h) \times h} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (0 \leq h \leq p) \quad (\text{A.5})$$

et $\boldsymbol{\varphi}_h^{(v)} = \mathbf{0}_{(p+1) \times (p+1)}$, pour $h \geq p+1$, à partir de laquelle est définie la matrice $\boldsymbol{\Phi}_k^{(v)}$ ($k, v \in \{1, \dots, S\}$) comme suit

$$\boldsymbol{\Phi}_k^{(v)} = \sum_{i \equiv 1-k \pmod{S}} \boldsymbol{\varphi}_i^{(v)}, \quad \text{pour } v, k \in \{1, \dots, S\}. \quad (\text{A.6})$$

Formons à partir des $(\Phi_k^{(v)})$ la matrice circulaire par blocs d'ordre $S(p+1) \times S(p+1)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \cdots & \Phi_{S-1}^{(1)} & \Phi_S^{(1)} \\ \Phi_S^{(2)} & \Phi_1^{(2)} & \cdots & \Phi_{S-2}^{(2)} & \Phi_{S-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Phi_3^{(S-1)} & \Phi_4^{(S-1)} & \cdots & \Phi_1^{(S-1)} & \Phi_2^{(S-1)} \\ \Phi_2^{(S)} & \Phi_3^{(S)} & \cdots & \Phi_S^{(S)} & \Phi_1^{(S)} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{0}_{m \times n}$ est la matrice nulle de dimension $m \times n$. Alors, nous avons le résultat suivant.

Proposition 137 *Le vecteur des autocovariances de démarrage, γ , est l'unique solution du système linéaire suivant*

$$\Phi \gamma = \zeta, \quad (\text{A.7})$$

pourvu que le modèle (A.1) soit causal.

Preuve. Le système (A.7) s'obtient directement en explicitant (A.3) pour $1 \leq v \leq S$ et $0 \leq h \leq p$, et en réarrangeant les coefficients de $\gamma_h^{(v)}$. $\square$

La propriété d'être circulaire par blocs permet de réduire les calculs. En effet, la formule (A.6) peut être utilisée seulement pour évaluer le premier bloc $\Phi_k^{(1)}$, $k = 1, \dots, S$. Les autres blocs $\Phi_k^{(v)}$ ($v = 2, \dots, S$) en sont déduits en remplaçant les paramètres $\phi_j^{(1)}$ par $\phi_j^{(v)}$ pour $j = 1, \dots, p$.

On se propose, maintenant, de donner explicitement la forme de Φ , élément par élément. Si on note $\Phi = (\Phi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq (p+1)S}$, alors en écrivant $i = \alpha(p+1) + \beta$ et $j = \gamma(p+1) + \delta$, l'expression de $\Phi_{i,j}$ devient

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{\alpha(p+1)+\beta, \gamma(p+1)+\delta} = \text{Coe}f_{\gamma, \delta} \left(\Phi_{S-\alpha+\beta+1}^{(\alpha+1)} \right) = \sum_{\nu \equiv \alpha - \beta \pmod{S}} \text{Coe}f_{\gamma, \delta} \left(\varphi_{\alpha+1}^{(\nu)} \right),$$

où $\text{Coe}f_{k,l}(A)$ désigne le (k, l) -ème coefficient du bloc $\varphi_{\alpha+1}^{(v)}$.

A.3 Illustration

Afin de rendre les choses plus palpables, nous allons donner deux exemples.

Exemple 3.1 Considérons le modèle causal $PARMA(6, q)$ de période $S = 3$. En explicitant l'équation (A.3) pour $1 \leq v \leq 3$ et $0 \leq h \leq 6$, les autocovariances de démarrage $\gamma_0^{(1)}, \dots, \gamma_6^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \dots, \gamma_6^{(2)}, \dots, \gamma_0^{(3)}, \dots, \gamma_6^{(3)}$ du modèle peuvent être données par système (A.6) avec

[illegible]

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que la matrice Φ peut être écrite par blocs comme suit

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & \Phi_2^{(1)} & \Phi_3^{(1)} \\ \Phi_3^{(2)} & \Phi_1^{(2)} & \Phi_2^{(2)} \\ \Phi_2^{(3)} & \Phi_3^{(3)} & \Phi_1^{(3)} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(v)} &= \begin{pmatrix} 1 & -\phi_1^{(v)} & -\phi_2^{(v)} & -\phi_3^{(v)} & -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_3^{(v)} & -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & 1-\phi_6^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_3^{(v)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_3^{(v)} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\phi_6^{(v)} & 0 & 0 & -\phi_3^{(v)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Phi_2^{(v)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_2^{(v)} & -\phi_3^{(v)} & -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_2^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_2^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & 0 & -\phi_2^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_3^{(v)} & 0 & 0 & -\phi_2^{(v)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Phi_3^{(v)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_1^{(v)} & -\phi_2^{(v)} & -\phi_3^{(v)} & -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & 0 \\ 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & -\phi_1^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_4^{(v)} & 0 & 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_4^{(v)} & 0 & 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les trois matrices $\Phi_1^{(v)}$, $\Phi_2^{(v)}$ et $\Phi_3^{(v)}$ peuvent être factorisées comme suit

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(v)} &= \varphi_0^{(v)} + \varphi_3^{(v)} + \varphi_6^{(v)} \\ \Phi_2^{(v)} &= \varphi_2^{(v)} + \varphi_5^{(v)} \\ \Phi_3^{(v)} &= \varphi_1^{(v)} + \varphi_4^{(v)}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(v)} &= \begin{pmatrix} 1 & -\phi_1^{(v)} & -\phi_2^{(v)} & -\phi_3^{(v)} & -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Phi_1^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_1^{(v)} & -\phi_2^{(v)} & -\phi_3^{(v)} & -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & 0 \\ 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi_1^{(v)} & 0 \end{pmatrix} \\ \Phi_2^{(v)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_2^{(v)} & -\phi_3^{(v)} & -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_2^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_2^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_2^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi_2^{(v)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \Phi_3^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_3^{(v)} & -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_3^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_3^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_3^{(v)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Phi_4^{(v)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_4^{(v)} & -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_4^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_4^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \Phi_5^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_5^{(v)} & -\phi_6^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_5^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Phi_6^{(v)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_6^{(v)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemple 3.2 De façon similaire, si on considère un modèle causal $PARMA_S(6, q)$ avec

$p = 6$ et $S = 9$, alors on obtient

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(1)} & \varphi_5^{(1)} & \varphi_4^{(1)} & \varphi_3^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \varphi_1^{(1)} \\ \varphi_1^{(2)} & \varphi_0^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(2)} & \varphi_5^{(2)} & \varphi_4^{(2)} & \varphi_3^{(2)} & \varphi_2^{(2)} \\ \varphi_2^{(3)} & \varphi_1^{(3)} & \varphi_0^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(3)} & \varphi_5^{(3)} & \varphi_4^{(3)} & \varphi_3^{(3)} \\ \varphi_3^{(4)} & \varphi_2^{(4)} & \varphi_1^{(4)} & \varphi_0^{(4)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(4)} & \varphi_5^{(4)} & \varphi_4^{(4)} \\ \varphi_4^{(5)} & \varphi_3^{(5)} & \varphi_2^{(5)} & \varphi_1^{(5)} & \varphi_0^{(5)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(5)} & \varphi_5^{(5)} \\ \varphi_5^{(6)} & \varphi_4^{(6)} & \varphi_3^{(6)} & \varphi_2^{(6)} & \varphi_1^{(6)} & \varphi_0^{(6)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(6)} \\ \varphi_6^{(7)} & \varphi_5^{(7)} & \varphi_4^{(7)} & \varphi_3^{(7)} & \varphi_2^{(7)} & \varphi_1^{(7)} & \varphi_0^{(7)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varphi_6^{(8)} & \varphi_5^{(8)} & \varphi_4^{(8)} & \varphi_3^{(8)} & \varphi_2^{(8)} & \varphi_1^{(8)} & \varphi_0^{(8)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi_6^{(9)} & \varphi_5^{(9)} & \varphi_4^{(9)} & \varphi_3^{(9)} & \varphi_2^{(9)} & \varphi_1^{(9)} & \varphi_0^{(9)} \end{pmatrix}.$$

Annexe B

Norme ou q -norme

L'identité du parallélogramme stipule que pour tous x et y dans un Hilbert, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

entraînant ainsi l'inégalité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

S. Saitoh [284] a constaté que cette inégalité est beaucoup plus souple à manipuler que l'inégalité triangulaire. Cette dernière lui a servi à établir, de manière canonique, que la somme "naturelle" de deux espaces de Hilbert est un espace de Hilbert. Cependant, on sait que dans tout espace normé, l'inégalité triangulaire entraîne l'inégalité du parallélogramme. Ceci nous motive pour introduire une extension à l'inégalité triangulaire. Plus précisément, on introduit la notion de q -norme en remplaçant, dans la définition d'une norme, l'inégalité triangulaire par

$$\|x + y\|^q \leq 2^{q-1} (\|x\|^q + \|y\|^q), \text{ où } q \text{ est un réel } \geq 1.$$

On établit que toute q -norme est une norme au sens classique, et inversement. On a adopté les notation de Johnson et Lindenstrauss [185].

Définition 138 Soient X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $q \in [1, \infty)$. On appelle q -norme sur X toute application $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $x \in X$ et tout scalaire λ ,
3. $\|x + y\|^q \leq 2^{q-1} (\|x\|^q + \|y\|^q)$ pour tous $x, y \in X$.

Nous commencerons par établir le résultat, facile, suivant :

Proposition 139 *Toute norme au sens classique est une q -norme.*

Preuve. L'application $t \mapsto f(t) = \frac{1+t^q}{2} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^q$ est croissante sur $[1, \infty)$. Donc

$$\left(\frac{1 + \|y\|/\|x\|}{2}\right)^q \leq \frac{1 + (\|y\|/\|x\|)^q}{2} \text{ pour } \|x\| \leq \|y\|$$

(sinon prendre $\|x\|/\|y\|$).

$$\text{Ce qui donne } \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q \leq \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{2}\right)^q \leq \frac{\|x\|^q + \|y\|^q}{2} \text{ pour tous } x, y \in X.$$

Il s'ensuit que $\|\cdot\|$ est une q -norme. $\square$

Le résultat suivant est important en soi, puisqu'il établit un lien (sous certaines conditions simples) entre l'inégalité triangulaire et la convexité de la boule unité.

Théorème 140 *Soient X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ une application vérifiant 1. et 2. dans la définition de la q -norme. Alors $\|\cdot\|$ est une norme si et seulement si l'ensemble $B = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ est convexe.*

Preuve. Si $\|\cdot\|$ est une norme, alors B est trivialement un ensemble convexe.

Inversement, on suppose que B est convexe. Pour $x, y \in \mathcal{X}$ tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, posons $x' = x/\|x\|$ et $y' = y/\|y\|$ on a $x', y' \in B$. De plus $\lambda x' + (1 - \lambda)y' \in B$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$. En particulier, pour $\lambda = \|x\|/(\|x\| + \|y\|)$ on obtient

$$\left\|\frac{x}{\|x\| + \|y\|} + \frac{y}{\|x\| + \|y\|}\right\| = \|\lambda x' + (1 - \lambda)y'\| \leq 1.$$

Et donc $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\square$

Le Théorème que nous venons d'établir nous permet de montrer le résultat principal de cette section

Théorème 141 *Toute q -norme est une norme au sens classique.*

Preuve. Il suffit de montrer que $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ est convexe. Soit $x, y \in B$, on a alors

$$\|x + y\|^q \leq 2^{q-1} (\|x\|^q + \|y\|^q) \leq 2^{q-1} (1 + 1) = 2^q.$$

donc $\|(x + y)/2\|^2 \leq 1$, ainsi $\frac{1}{2}x + (1 - \frac{1}{2})y \in B$.

Par conséquent si $A := \{\frac{k}{2^n} \mid n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots, 2^n\}$, on a, pour tout $\lambda \in A$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B$.

Soient $0 \leq \lambda \leq 1$ et $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Comme A est dense dans $[0, 1]$, il existe une suite décroissante $\{r_n\}$ dans A telle que $\lim_n r_n = \lambda$. En posant $\beta_n = \frac{1-r_n}{1-\lambda}$, nécessairement

$0 \leq \beta_n \leq 1$, $\lim_n \beta_n = 1$ et $\frac{r_n + \beta_n - 1}{r_n} \leq 1$. Donc $\frac{r_n + \beta_n - 1}{r_n}x \in B$ et $r_n \in A$, et nous concluons que

$$\beta_n z = \lambda \beta_n x + (1 - \lambda) \beta_n y = r_n \frac{r_n + \beta_n - 1}{r_n} x + (1 - r_n) y \in B.$$

Ainsi $\beta_n \|z\| = \|\beta_n z\| \leq 1$ pour tout n . En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\|z\| \leq 1$, i.e. $z \in B$. $\square$

Annexe C

Sur une inégalité intégrale "déterminantale"

Inspirés par un résultat démontré par Bai-Ni Guo et Xin Jiang [143], nous prouvons une inégalité qui généralise leur résultat, au cas de plusieurs fonctions.

Dans leur article, les auteurs suscités démontrent ce qui suit

Théorème 142 Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ et $f, g \in L(\Omega)$ telles que $f \geq 0$ et $g \geq 0$. On pose $I(f) := \int_{\Omega} f(x) dx$.

Considérons $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h^2 \in L(\Omega)$. Si

$$I(f) I(gh) = I(fh) I(g)$$

alors

$$I(fh^2) (I(g))^2 + I(gh^2) (I(f))^2 \geq I(fh) I(gh) I(f+g) \quad (\text{C.1})$$

et l'égalité a lieu si et seulement si h est constante.

On présente une autre formulation de ce Théorème qui nous permettra de percevoir une généralisation à plusieurs fonctions.

Théorème 143 (bis) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f, g \in L(\Omega)$ telles que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tous $x \in \Omega$.

Considérons $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h^2 \in L(\Omega)$. si

$$I(f) I(gh) = I(fh) I(g),$$

alors

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} I(g) & I(fh) \\ I(gh) & I(fh^2) \end{array} \right| \geq 0 \text{ et } \left| \begin{array}{cc} I(f) & I(gh) \\ I(fh) & I(gh^2) \end{array} \right| \geq 0, \\ & I(f) \left| \begin{array}{cc} I(f) & I(gh) \\ I(fh) & I(gh^2) \end{array} \right| + I(g) \left| \begin{array}{cc} I(g) & I(fh) \\ I(gh) & I(fh^2) \end{array} \right| \geq 0, \end{aligned}$$

(cette dernière relation est équivalente à l'inégalité (C.1)).

Si de plus $I(f)I(g) \neq 0$, on a égalité si et seulement si h est constante.

Preuve. Il suffit de prouver la première inégalité. L'inégalité de Schwarz donne

$$(I(fh))^2 \leq I(fh^2)I(f),$$

ainsi

$$\begin{vmatrix} I(f) & I(fh) \\ I(fh) & I(fh^2) \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{et donc} \quad \begin{vmatrix} I(f)I(g) & I(fh) \\ I(fh)I(g) & I(fh^2) \end{vmatrix} \geq 0$$

en exploitant l'égalité $I(f)I(gh) = I(fh)I(g)$, on obtient

$$I(f) \begin{vmatrix} I(g) & I(fh) \\ I(gh) & I(fh^2) \end{vmatrix} \geq 0$$

on en déduit ainsi l'inégalité pour $I(f) \neq 0$ (le cas $I(f) = 0$ est trivial, il entraîne $I(fh) = 0$). $\square$

Pour voir un peu l'évolution de la généralisation, nous donnons le cas de trois fonctions.

Théorème 144 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f, g, h \in L(\Omega)$ telles que $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Considérons $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u^k \in L(\Omega)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

On pose

$$\Delta(f, g, h) = \begin{vmatrix} I(f) & I(gu) & I(hu^2) \\ I(fu) & I(gu^2) & I(hu^3) \\ I(fu^2) & I(gu^3) & I(hu^4) \end{vmatrix}.$$

Si pour $r = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} I(f)I(gu^r) &= I(fu^r)I(g), \\ I(g)I(hu^r) &= I(gu^r)I(h), \\ I(h)I(fu^r) &= I(hu^r)I(f), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \Delta(f, g, h) &\geq 0, \quad \Delta(g, h, f) \geq 0, \quad \text{et} \quad \Delta(h, f, g) \geq 0, \\ (I(f))^2 \Delta(f, g, h) &+ (I(g))^2 \Delta(g, h, f) + (I(h))^2 \Delta(h, f, g) \geq 0. \end{aligned}$$

Si de plus $I(f)I(g)I(h) \neq 0$, alors on a égalité si et seulement si u est constante.

Dans le cas de plusieurs fonctions, nous obtenons

Théorème 145 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f_1, f_2, \dots, f_m \in L(\Omega)$, $m \geq 2$ telles que $f_k(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $k \in \{1, \dots, m\}$.

Considérons $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u^k \in L(\Omega)$ pour $k = 1, \dots, 2m - 2$.

Posons pour $\sigma \in \mathcal{S}_m$ (groupe des permutations de $\{1, \dots, m\}$),

$$\Delta_\sigma(f_1, f_2, \dots, f_m) := \begin{vmatrix} I(f_{\sigma(1)}) & I(f_{\sigma(2)}u) & \cdots & I(f_{\sigma(m)}u^{m-1}) \\ I(f_{\sigma(1)}u) & I(f_{\sigma(2)}u^2) & \cdots & I(f_{\sigma(m)}u^m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I(f_{\sigma(1)}u^{m-1}) & I(f_{\sigma(2)}u^m) & \cdots & I(f_{\sigma(m)}u^{2m-2}) \end{vmatrix}.$$

Si pour $r = 1, \dots, 2m - 3$; et pour tous $i, j : 1 \leq i \neq j \leq m$ on a

$$I(f_i) I(f_j u^r) = I(f_i u^r) I(f_j)$$

alors

$$\Delta_\sigma(f_1, f_2, \dots, f_m) \geq 0 \text{ pour toute permutation circulaire } \sigma \text{ de } \mathcal{S}_m, \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m / \sigma \text{ circulaire}} (I(f_{\sigma(1)}))^{m-1} \Delta_\sigma(f_1, f_2, \dots, f_m) \geq 0.$$

Si de plus $\prod_{k=1}^m I(f_k) \neq 0$, on a égalité si et seulement si u est constante.

Preuve. Il suffit de montrer la première inégalité, la seconde en est une conséquence.

Sans perte de généralité, il convient de faire la preuve pour $\sigma = Id$.

Posons $G(x_1, x_2, \dots, x_m) := \det(\langle x_i, x_j \rangle)$, il est bien établi que $G(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq 0$ (appelée inégalité de Gram).

On a

$$G\left(f_m^{\frac{1}{2}}, f_m^{\frac{1}{2}}u, \dots, f_m^{\frac{1}{2}}u^{m-1}\right) \geq 0, \text{ avec } \langle f, g \rangle = \int_\Omega fg$$

alors

$$I(f_1) I(f_2) \cdots I(f_{m-1}) G\left(f_m^{\frac{1}{2}}, f_m^{\frac{1}{2}}u, \dots, f_m^{\frac{1}{2}}u^{m-1}\right) \geq 0$$

ce qui équivaut à

$$\begin{vmatrix} I(f_1) I(f_m) & I(f_2) I(f_m u) & \cdots & I(f_{m-1}) I(f_m u^{m-2}) & I(f_m u^{m-1}) \\ I(f_1) I(f_m u) & I(f_2) I(f_m u^2) & \cdots & I(f_{m-1}) I(f_m u^{m-1}) & I(f_m u^m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I(f_1) I(f_m u^{m-1}) & I(f_2) I(f_m u^m) & \cdots & I(f_{m-1}) I(f_m u^{2m-3}) & I(f_m u^{2m-2}) \end{vmatrix} \geq 0$$

et en utilisant les hypothèses, on obtient

$$\begin{vmatrix} I(f_1) I(f_m) & I(f_2 u) I(f_m) & \cdots & I(f_{m-1} u^{m-2}) I(f_m) & I(f_m u^{m-1}) \\ I(f_1 u) I(f_m) & I(f_2 u^2) I(f_m) & \cdots & I(f_{m-1} u^{m-1}) I(f_m) & I(f_m u^m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I(f_1 u^{m-1}) I(f_m) & I(f_2 u^m) I(f_m) & \cdots & I(f_{m-1} u^{2m-3}) I(f_m) & I(f_m u^{2m-2}) \end{vmatrix} \geq 0$$

c'est-à-dire

$$(I(f_m))^{m-1} \Delta_{Id}(f_1, f_2, \dots, f_m) \geq 0 \text{ ie : } \Delta_{Id}(f_1, f_2, \dots, f_m) \geq 0 \text{ pour } I(f_m) \neq 0.$$

Le cas $I(f_m) = 0$ est trivial ($\Rightarrow \int_{\Omega} f_m u = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f_m u.u = 0 \dots$).

□

Annexe D

Rails (champs) du triangle de Pascal

Soit n un entiers non nul. Nous appelons *rails* ou *champs* du triangle de Pascal, de direction $(q, r) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$, les suites définies par

$$T^{(q,r)}(n, k) = \binom{n - qk}{rk}, \quad (k = 0, \dots, \lfloor n / (r + q) \rfloor).$$

et les champs intermédiaires de direction $(q, r) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ et d'ordre $p = 1, 2, \dots, r - 1$ sont définis par

$$T^{(q,r,p)}(n, k) = \binom{n - qk}{rk + p}, \quad (k = 0, \dots, \lfloor n / (r + q) \rfloor).$$

A part le cas trivial, c'est à dire les lignes du triangle de Pascal, il est utile d'illustrer l'évolution de ces suites de nombres à travers quelques exemples concrets.

Nous allons présenter les champs du triangle de Pascal pour les suites suivantes :

$$T^{(-1,2)}(n, k) = \binom{n+k}{2k}, \quad T^{(-1,2,1)}(n, k) = \binom{n+k}{2k+1}.$$

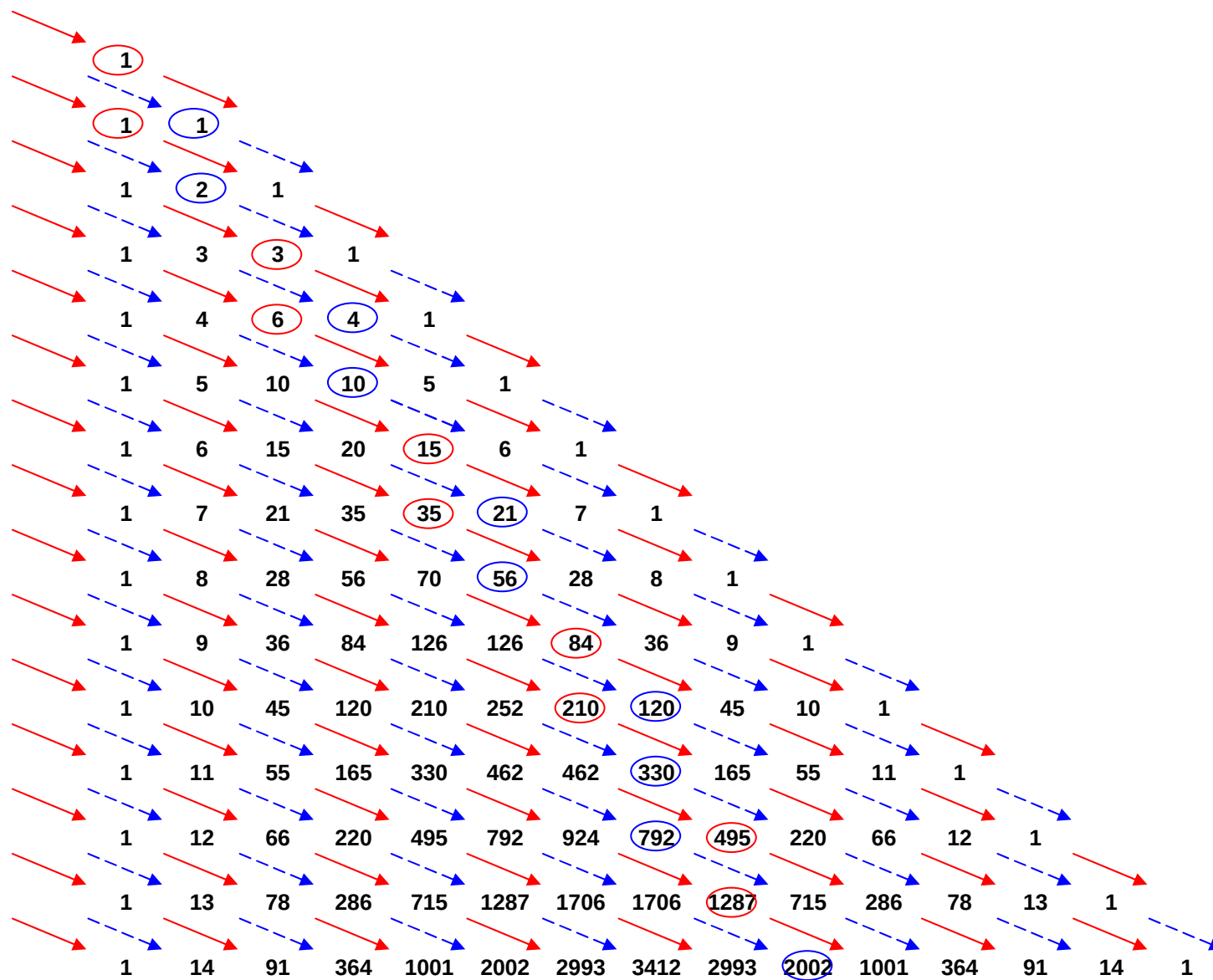
$$T^{(1,1)}(n, k) = \binom{n-k}{k}.$$

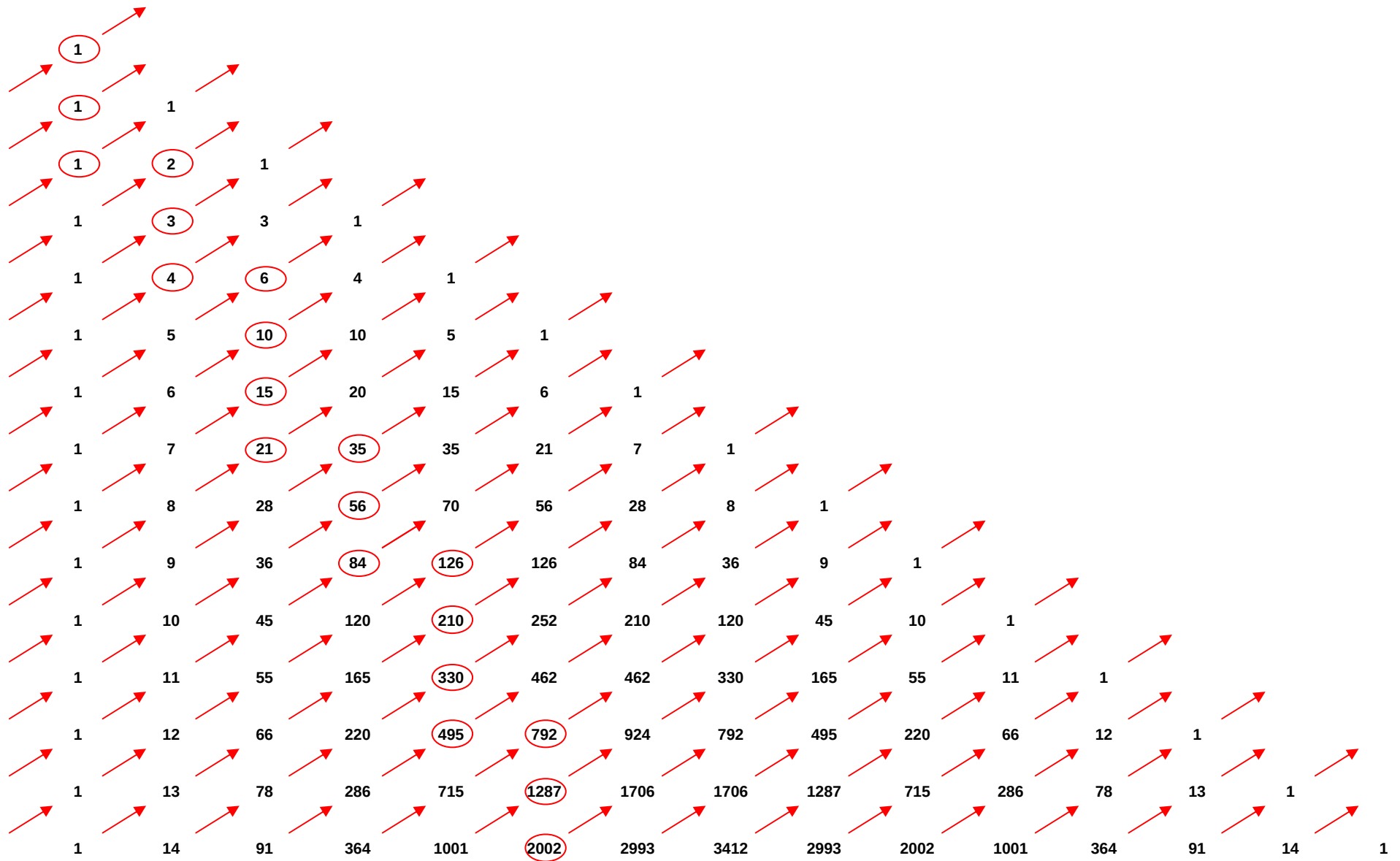
$$T^{(1,2)}(n, k) = \binom{n-k}{2k}, \quad T^{(1,2,1)}(n, k) = \binom{n-k}{2k+1}.$$

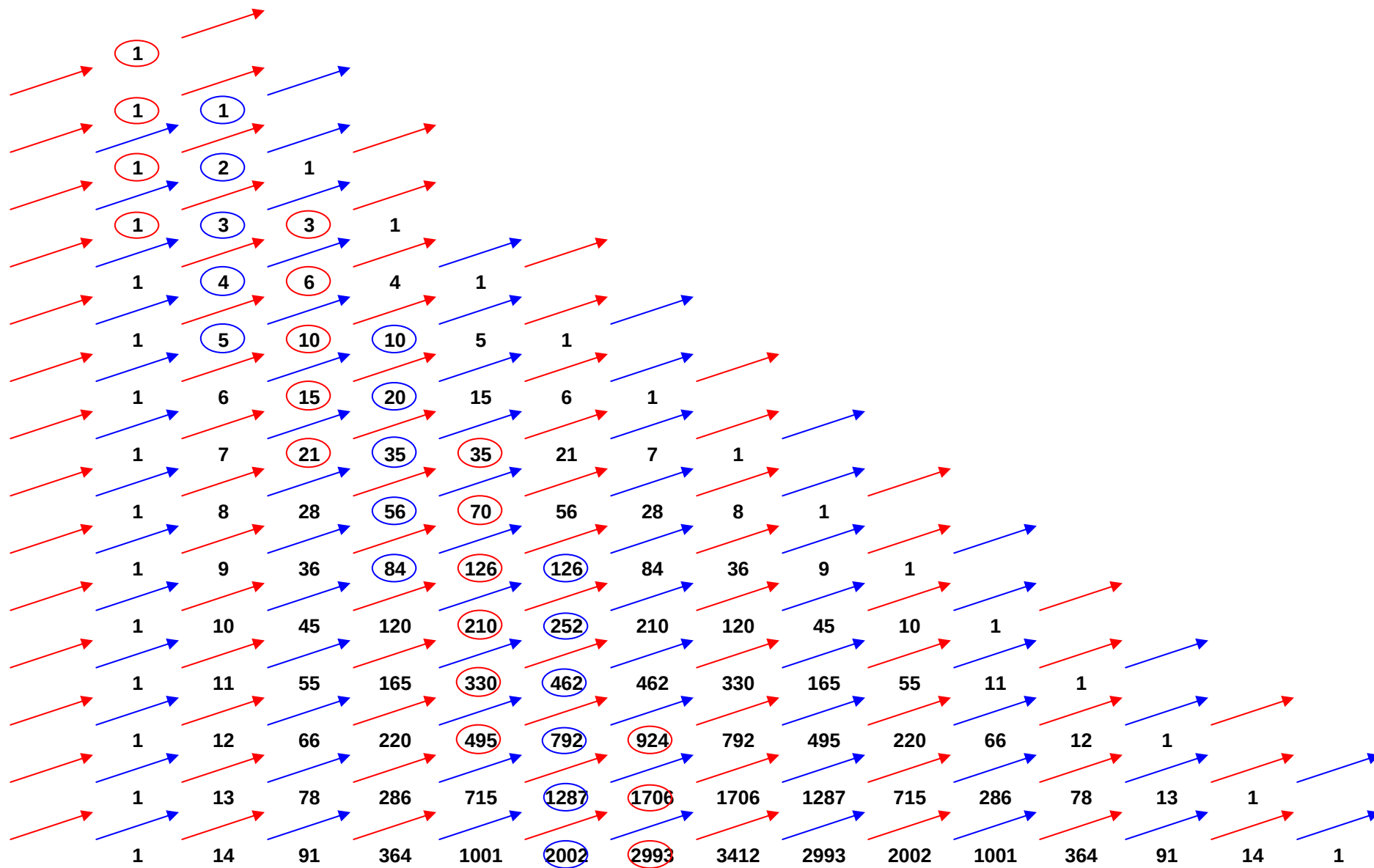
$$T^{(1,4)}(n, k) = \binom{n-k}{4k}, \quad T^{(1,4,1)}(n, k) = \binom{n-k}{4k+1}, \quad T^{(1,4,2)}(n, k) = \binom{n-k}{4k+2}, \quad T^{(1,4,3)}(n, k) = \binom{n-k}{4k+3}.$$

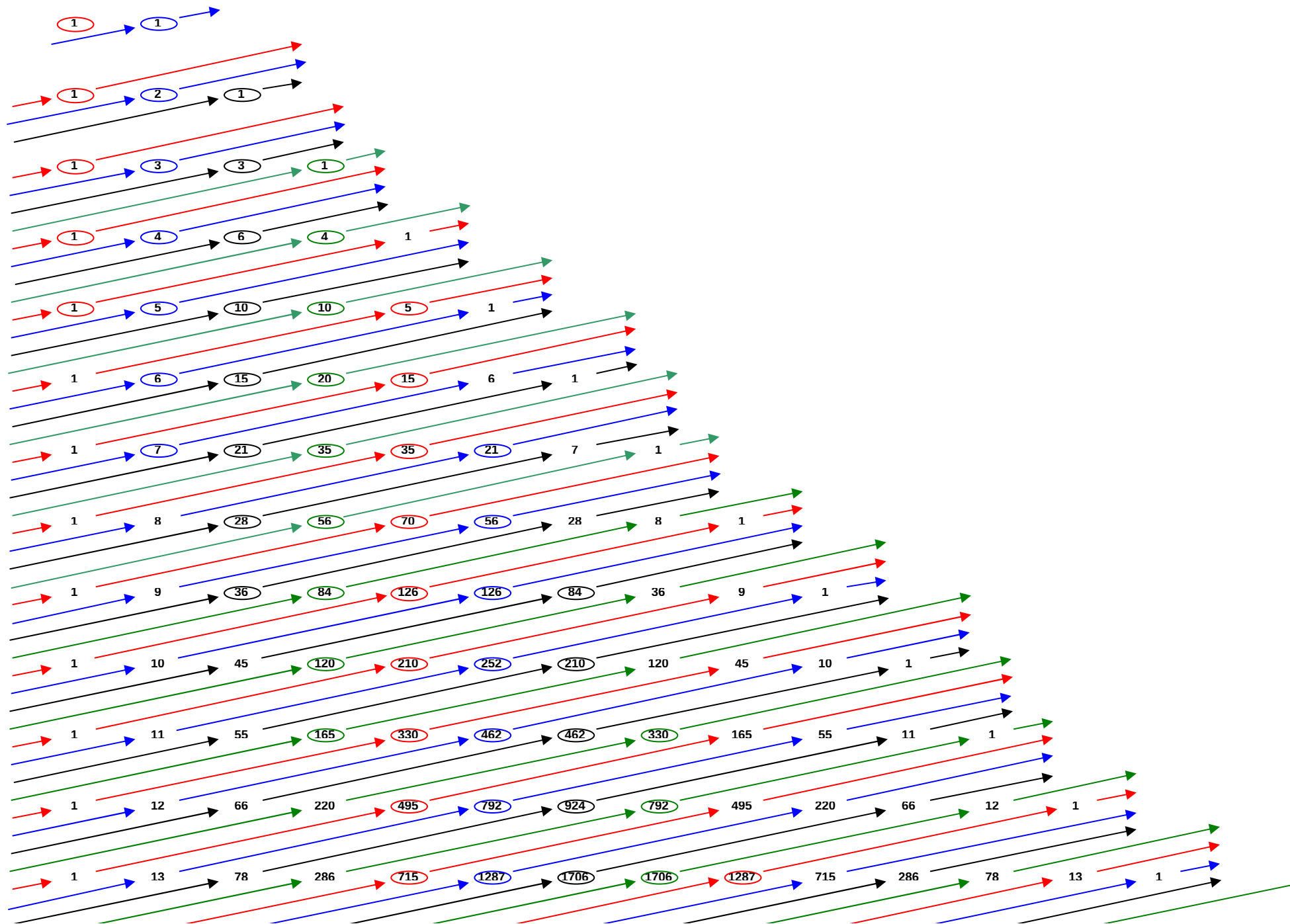
$$T^{(2,2)}(n, k) = \binom{n-2k}{2k}, \quad T^{(2,2,1)}(n, k) = \binom{n-2k}{2k+1}.$$

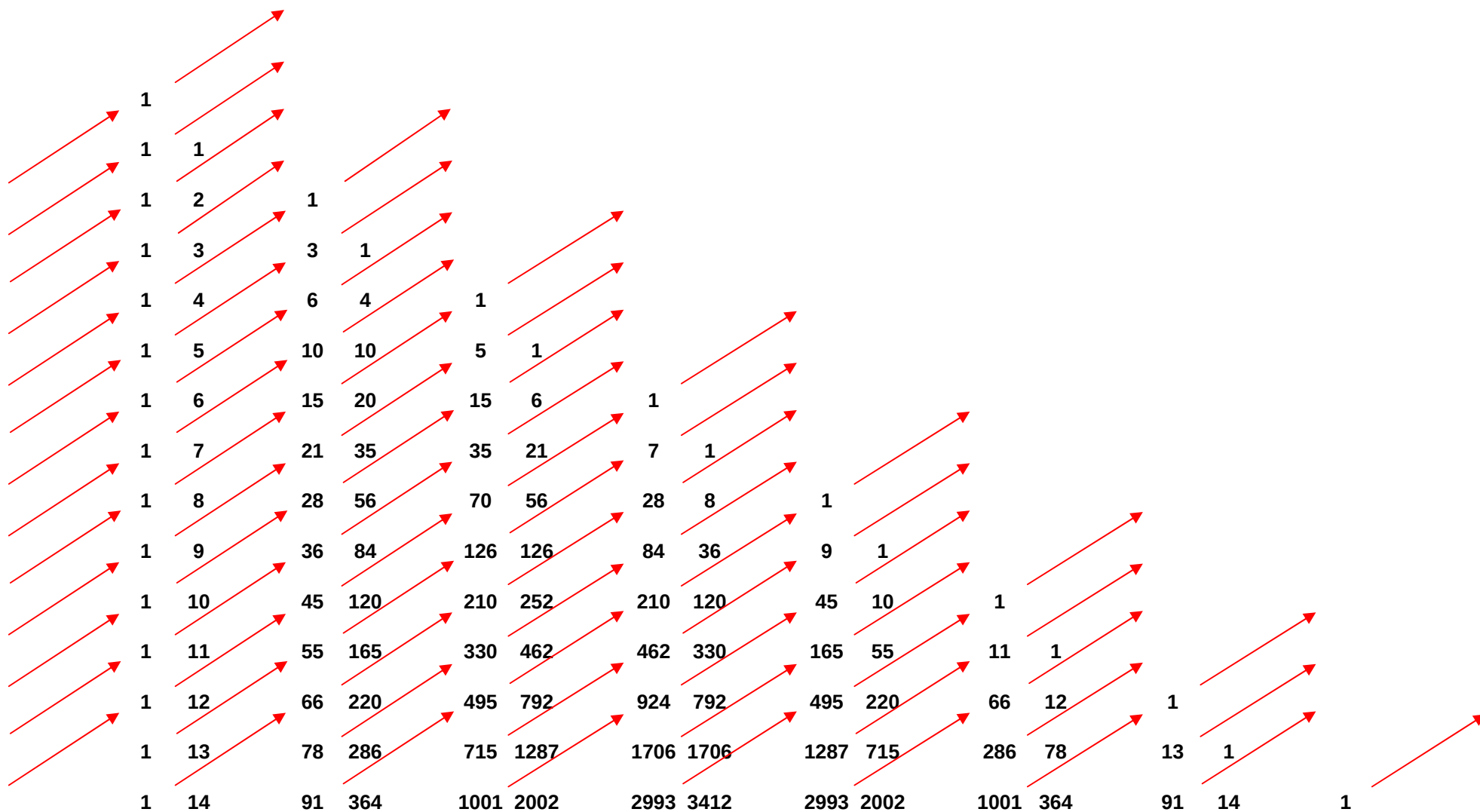
$$T^{(2,3)}(n, k) = \binom{n-2k}{3k}, \quad T^{(2,3,1)}(n, k) = \binom{n-2k}{3k+1}, \quad T^{(2,3,2)}(n, k) = \binom{n-2k}{3k+2}.$$

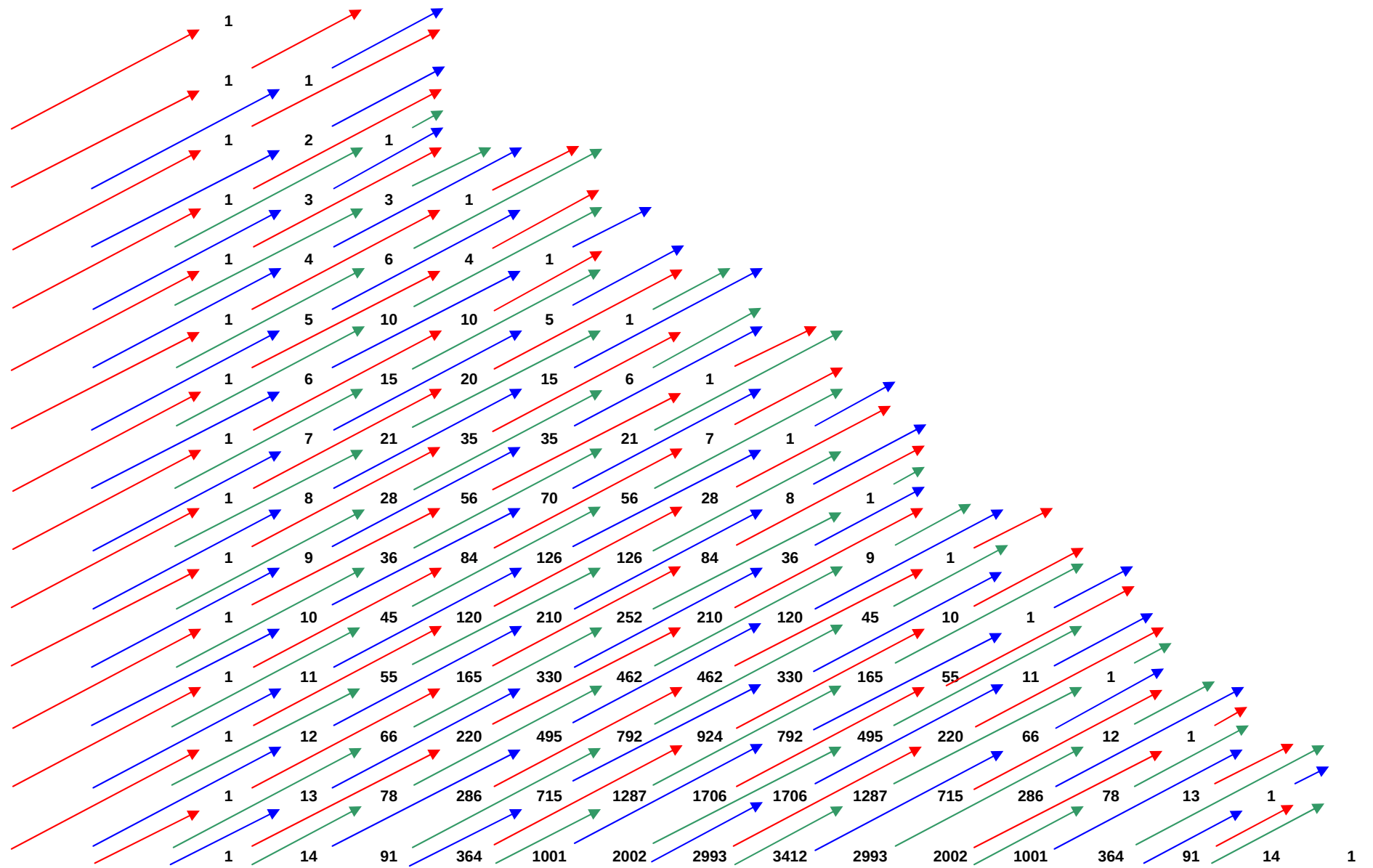












Conclusion

Tout au long de ce document, nous avons étudié des propriétés combinatoires de suites numériques, principalement les suites numériques liées aux champs ou rails du triangle de Pascal, de direction $(q, r) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$T^{(q,r)}(n, k) = \binom{n - qk}{rk} x^{n-(q+r)k} y^k, k = 0, \dots, \lfloor n / (r + q) \rfloor, \quad (\star)$$

les propriétés de ces suites et des sommes partielles de ces suites ont fait l'objet du chapitre premier.

Dans le chapitre troisième, pour chaque n fixé, nous avons établi l'unimodalité de la suite $(T(n, k))_k$, pour $(q, r) = (1, 2)$, $(-1, 2)$ et $(-1, r)$ lorsque $x = y = 1$.

Pour $(q, r) = (1, 1)$, nous avons établi l'unimodalité de la suite $(T(n, k))_k$ lorsque $(x, y) = (2, 1)$ et $(1, 2)$, ainsi que pour la suite compagnon :

$$W^{(1,1)}(n, k) = \frac{n}{n - k} \binom{n - k}{k} x^{n-2k} y^k$$

pour les mêmes valeurs de (x, y) . (Le cas $(x, y) = (1, 1)$ étant traité par Tanny et Zucker pour la suite $(T(n, k))_k$ et par Benoumhani pour la suite $(W(n, k))_k$).

Tous les autres cas restent, à notre connaissance, encore ouverts. La moindre information serait la bienvenue. Nous avons aussi établi l'unimodalité des éléments du triangle de Pascal étendu, à savoir celle des coefficients bi^qnomiaux. Ces derniers ont des liens étroits, propriétés établies au chapitre deuxième, avec la suite de Fibonacci généralisée, avec les polynômes exponentiels de Bell, et avec la suite des convolées de la loi uniforme discrète. Il serait tout aussi intéressant d'étudier les propriétés des coefficients multi^qnomiaux, ce qui correspond à la pyramide de Pascal étendue.

La suite donnée par $(\star)$ est associée, via la suite des sommes partielles à la suite récurrente linéaire donnée par :

$$T_n = x \binom{r}{1} T_{n-1} - x \binom{r}{2} T_{n-2} + \dots + (-1)^{r-1} x^r \binom{r}{r} T_{n-r} + y T_{n-r-q}$$

Ce qui nous amène à l'étude de suites récurrentes linéaires. Nous avons explicité le terme général d'une suite récurrente linéaire à coefficients dans un anneau commutatif. Ce résultat

nous a permis, entre autres, comme une alternative à l'approche de Jordan, de calculer les puissances successives d'une matrice carrée donnée. Ainsi, en exploitant les deux approches, des identités combinatoires remarquables en découlent.

Au chapitre quatrième, nous avons établi la fonction génératrice d'une suite indicée par une progression arithmétique. Des questions naturelles surviennent alors :

- peut-on exprimer la fonction génératrice d'une suite indicée par une progression polynomiale (comme l'a fait T. Tao pour la recherche des nombres premiers en progression polynomiale voir arXiv).
- reprendre le même travail pour les fonctions génératrices à deux variables, je pense que pour ce faire, nous devons passer par les hyperdéterminants de Vandermonde.

Au chapitre cinquième, nous avons évalué des sommes combinatoires liées aux nombres de Fibonacci et de Lucas généralisés. Nous y avons particulièrement explicité les sommes d'ordre deux. Nous pensons que les sommes d'ordre pair peuvent être évaluées sans trop de difficultés.

Le chapitre sixième a fait l'objet d'une étude liée aux polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas, généralisant ainsi les résultats déjà établis pour les polynômes de Chebyshev. Il me semble réalisable d'étendre ces travaux aux polynômes de Gegenbauer et, plus généralement, aux polynômes de Humbert.

Au chapitre septième, nous avons mis en évidence que la somme des puissances des inverses d'une progression arithmétique n'est jamais un entier, généralisant ainsi les travaux de Kerschak, Taiesinger et Erdős. Peut-on établir un analogue pour les progressions polynomiales ? D'autres questions intéressantes liées à cette section paraissent importantes :

- Dans le cas où $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}$ est un entier tel que $2 < n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Que peut-on dire des diviseurs premiers des n_i ? Existe-t-il une infinité de solutions pour lesquelles les n_i sont composés au plus de deux facteurs premiers ? Trois facteurs premiers ? Quatre ?
- Concernant la somme harmonique $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, en tant que fraction irréductible a_n/b_n , quel est le comportement asymptotique de a_n ? Quels sont ses diviseurs premiers ?

Enfin au dernier chapitre, nous donnons deux conséquences liées à l'hyperdéterminant de Gram discret : une extension de l'inégalité de Buniakovski-Cauchy et une inégalité dans les espaces euclidiens.

Dans l'annexe A, nous avons proposé une approche combinatoire pour expliciter les valeurs de démarrage de l'équation aux différences déterminant la fonction d'autocovariance d'un modèle *ARMA* périodique (*PARMA*).

Dans l'annexe B, on a établi une caractérisation de la norme.

Dans l'annexe C, on présente une extension d'une inégalité due à Gûo et Jiang, généralisation que l'on peut envisager aux hyperdéterminants (passant ainsi à plusieurs variables).

Je terminerai cette conclusion en affectant aux différents chapitres de cette thèse les publications et les prépublications correspondantes, et en précisant que la grande majorité de leur contenu est reprise dans cette thèse (sauf celles citées en introduction). Le chapitre premier est concerné par [29] ; le second par [33] et [42] ; le troisième par [35], [36] et partiellement

par [32] et [36] ; le quatrième par [45] et le complément de [32] ; le cinquième par [37] et le complément de [36] ; le sixième par [39] et [38] ; le septième par [44] ; le huitième par [25], [26], [24], [23], [22], [27], [28] et [30] ; l'annexe A par [3] ; l'annexe B par [46] et l'annexe C par [31]. Par contre, les références [34], [40], [43] et [47] sont seulement citées en introduction.

Bibliographie

- [1] M. Abbas, S. Bouroubi, *On new identities for Bell's polynomials*, Discrete Math. 293 (2005) 5–10.
- [2] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover Publications, (1972).
- [3] A. Aknouche, **H. Belbachir**, F. Hamdi, *Note on calculating autocovariances of periodic ARMA Models*, à paraître dans Communications in Statistics-Simulation and Computation in, Volume 37, issue #5 (2008).
- [4] J. Alvarez, M. Amadis, L. Rosales, *Unimodality and log-concavity of polynomial coefficients*, article disponible sur <http://www.uprh.edu/~simu/Reports2000/Integration/JLM/LJMReport.pdf> (2000).
- [5] J. Alvarez, M. Amadis, G. Boros, D. Karp, V. H. Moll, L. Rosales, *An extension of a criterion for unimodality*, Electron. J. Combin. 8 (2001), no. 1, Research Paper 30, 7 pp. (electronic).
- [6] R. André-Jeannin, *Irrationalité de la somme de certaines suites récurrentes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 19, 539–541.
- [7] R. Andrée-Jeannin, *Lambert series and the summation of reciprocals in certain Fibonacci-Lucas-type sequences*, Fibonacci Quart. 28 (1990), no. 3, 223–226.
- [8] R. André-Jeannin, *Summation of certain reciprocal series related to Fibonacci and Lucas numbers*, Fibonacci Quart. 29 (1991), no. 3, 200–204.
- [9] R. André-Jeannin, *A generalization of Morgan-Voyce polynomials*, Fibonacci Quart. 32 (1994), 228–231.
- [10] R. André-Jeannin, *A note on a general class of polynomials. II*, Fibonacci Quart. 33 (1995), no. 4, 341–351.
- [11] R. André-Jeannin, *Differential Properties of a General Class of Polynomials*, Fibonacci Quart. 33 (1995), no. 5, 453–458.
- [12] R. Andrée-Jeannin, *Summation of reciprocals in certain second-order recurring sequences*, Fibonacci Quart. 35 (1997), no. 1, 68–74.
- [13] G. E. Andrews, J. Baxter, *Lattice gas generalization of the hard hexagon model III q-trinomials coefficients*, J. Stat. Phys. 47 (1987) 297–330.
- [14] N. Asai, I. Kubo, H.-H. Kuo, *Bell numbers, log-concavity, and log-convexity*, *Classical and Quantum White Noise*, L. Accardi et al. (eds), Kluwer Academic Publishers, (1999).

- [15] N. Asai, I. Kubo, H.-H. Kuo, *Bell numbers, log-concavity, and log-convexity*, Acta Appl. Math. 63 (2000) 79–87.
- [16] M. Balazard, *Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier*, Ann., 2 (1990), 255–270.
- [17] M. Balazard, *Sur les dilatations entières de la fonction "partie fractionnaire"*. Func. Approx. Comment. Math. 35 (2006), 37–49.
- [18] M. Balazard, *Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres*, Sémin. Théor. Nombres Bordeaux (2) 2 (1990), no. 1, 13–30.
- [19] A I Barvinok, *New algorithms for linear k -matroid intersection and matroid k parity problem*, Mathematical Programming **69** (1995), 449–470.
- [20] P. Barry, *On Integer-sequences-based constructions of generalized Pascal triangles*, J. Integer Seq, Vol.9 (2006), Art. 06.2.4.
- [21] S. D. Bedrosian, *The Fibonacci numbers via trigonometric expressions*, J. Franklin Inst. 295 (1973), 175–177.
- [22] **H. Belbachir**, *Le déterminant multidimensionnel*, prépublication de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, n°246/1998.
- [23] **H. Belbachir**, *Une généralisation de l'identité de Lagrange et de l'inégalité de Cauchy-Buniakowsky*, prépublication de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, n°247/1998.
- [24] **H. Belbachir**, *Une démonstration simple de l'inégalité de Gram*, prépublication de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, n°248/1998.
- [25] **H. Belbachir**, *An inequality for determinants with respect to inner product*, prépublication de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, n°062/2001.
- [26] **H. Belbachir**, *Le p -produit scalaire*, prépublication de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, n°061/2001.
- [27] **H. Belbachir**, *An inequality in Euclidean spaces*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 7 (2004), 45–46.
- [28] **H. Belbachir**, *A generalized Lagrange identity and Cauchy-Buniakowsky inequality*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 7 (2004), 39–44.
- [29] **H. Belbachir**, *Recurrence relation associated to the Pascal triangle arrays*, preprint (2007).
- [30] **H. Belbachir**, *Hyperdéterminant de Gram*, preprint (2007).
- [31] **H. Belbachir**, *An extension of some integral inequalities*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 18 (2007), 28–31.
- [32] **H. Belbachir**, *Unimodality of ordinary multinomials and maximal probabilities of convolution powers of discrete uniform distribution*, Preprint, <http://arXiv.org/abs/math.PR/0708.2341v1> (2007).
- [33] **H. Belbachir**, F. Bencherif, *Linear recurrent sequences and powers of a square matrix*, Integers 6 (2006), A12, 17pp.

- [34] **H. Belbachir**, F. Bencherif, *On a sum involving powers of the prime counting function*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 17 (2006), 45–51.
- [35] **H. Belbachir**, F. Bencherif, *On unimodality of sequences associated to the binomial coefficients*, Les Annales Road. Volume n°1 (2006), 47–55.
- [36] **H. Belbachir**, F. Bencherif, *Unimodality of sequences associated to Pell numbers*, à paraître dans Ars Combinatoria, (2007).
- [37] **H. Belbachir**, F. Bencherif, *Sums of products of generalized Fibonacci and Lucas numbers*, soumis (2007).
- [38] **H. Belbachir**, F. Bencherif, *On some properties of bivariate Fibonacci and Lucas polynomials*, soumis (2007).
- [39] **H. Belbachir**, F. Bencherif, *On some properties of Chebychev polynomials*, Discuss. Math. Gen. Algebra Appl., 28 (2), (2008).
- [40] **H. Belbachir**, F. Bencherif, *Développement asymptotique de la somme des inverses d'une fonction arithmétique*. Accepté pour publication après arbitrage, (Congrès International, Algèbre Théorie des nombres et leurs Applications, mai 2006, Oujda).
- [41] **H. Belbachir**, F. Bencherif, L. Szalay, *Unimodality of certain sequences connected with binomial coefficients*, J. Integer Seq, Vol. 10, Art. 07.2.3.(2007).
- [42] **H. Belbachir**, S. Bouroubi, A. Khelladi, (2007). *Connection between ordinary multinomials, generalized Fibonacci numbers, Bell polynomials and convolution powers of discrete uniform distribution*. Preprint, <http://arXiv.org/abs/math.CO/0708.2195v1>.
- [43] **H. Belbachir**, A. Boussicault, J.-G. Luque. *Hankel hyperdeterminants, rectangular Jack polynomials and even powers of the Vandermonde*, <http://arXiv.org/abs/math.CO/0709.3021v1> (2007).
- [44] **H. Belbachir**, A. Khelladi, *On a sum involving powers of reciprocals of an arithmetical progression*, à paraître dans Annales Mathematicae et Informaticae.
- [45] **H. Belbachir**, J.-G. Luque. *Generating function for a subsequence indexed by an arithmetical progression*, preprint (2007).
- [46] **H. Belbachir**, M. Mirzavaziri, M. Sal Moslehian, *q-norms are really norms*, Aust. J. Math. Anal. Appl., Vol. 3, 1, Art. 2, pp. 1–3, (2006).
- [47] **H. Belbachir**, O. Orcière, *Quadratic forms and hyperdeterminants*, preprint (2007).
- [48] R. Ben Taher, M. Rachidi, *Linear recurrent relations in the algebra of matrices and applications*, Linear Algebra Appl. 330 (2001) 15–24.
- [49] R. Ben Taher, M. Mouline and M. Rachidi, *Fibonacci-Horner Decomposition of the matrix exponential and the fundamental system of solutions*, Electron. J. Linear Algebra, Vol15, 178–190 (2006).
- [50] R. Ben Taher, M. Rachidi, *Some explicit formulas for the polynomial decomposition of the matrix exponential and applications*, Linear Algebra Appl. 350 (2002) 171–184.
- [51] E. A. Bender : *Central and local theorems applied to asymptotic enumeration*, J. Combin. Theory, Ser. A.15 (1973), 91–111.

- [52] E. A. Bender, E. R. Canfield, *Log-concaity and related properties of the cycle index polynomials*, J. Combin. Theory Ser. A 74 (1996) 57–70.
- [53] M. Benoumhani, *Sur une propriété des polynomes à racines négatives*, J. Math. Pures Appl., 75 (1996), 85–105.
- [54] M. Benoumhani, *On Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Math 159 (1996) 13–33.
- [55] M. Benoumhani, *On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices*, Adv. in Appl. Math. 19 (1997) 106–116.
- [56] M. Benoumhani, *Log-concavity of Whitney numbers of Dowling lattices*, Adv. in Appl. Math. 22 (1999) 186–189.
- [57] M. Benoumhani, *A sequence of binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers*, J. Integer Seq., 6 (2003), Article 03.2.1.
- [58] M. Bentarzi, *Model-building problem of periodically m-variate moving average processes*, Journal of Multivariate Analysis, 66, (1998) 1–21.
- [59] M. Bentarzi, A. Aknouche, *Calculation of the Fisher information matrix for periodic ARMA models*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 34, (2005) 891–903.
- [60] L. Bernstein, *Zeros of the function $f(n) = \sum_i (-1)^i \binom{n-2i}{i}$* , J. Number Theory, 6 (1974), 264–270.
- [61] G. E. Bergum, V. E. Jr. Hoggatt, *Irreducibility of Lucas and generalized Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 12 (1974) 95–100.
- [62] G. E. Bergum, V. E. Jr. Hoggatt, *Sums and products for recurring sequences*, Fibonacci Quart. 13 (1975), 115–120.
- [63] G. E. Bergum, V. E. Jr. Hoggatt, *Infinite series with Fibonacci and Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 17 (1979), 147–151.
- [64] E. M. J. Bertin, R. Theodorescu, *Some characterizations of discrete unimodality*, Statist. Probab. Lett., 2, (1984). 23–30.
- [65] M. Bhargava, *Higher Composition Laws*, Ph.D. Thesis, Princeton University, (2001).
- [66] M. Bhargava, *Higher composition laws I : A new view on Gauss composition and quadratic generalizations*, Ann. of Math. 159 (2004), no. 1, 217–250.
- [67] G. Bhatnagar, *A short proof of an identity of Sylvester*, Int. j. Math. Sci., no. 2, (1999) 431–435.
- [68] M. Bicknell-Johnson, C. Spears, *Classes of identities for the generalized Fibonacci numbers $G_n = G_{n-1} + G_{n-c}$ from matrices with constant valued determinants*, Fibonacci Quart. 34 (1996) 121–128.
- [69] R. C. Bollinger, *A note on Pascal T-triangles, Multinomial coefficients and Pascal Pyramids*, Fibonacci Quart. 24 (1986) 140–144.
- [70] G. Boros, V. H. Moll, *A Sequence of Unimodal Polynomials*, J. Math. Anal. Appl. 237 (1999), no. 1, 272–287.

- [71] M. Bousquet-Mélou, *Algebraic generating functions in enumerative combinatorics and context-free languages*, STACS 2005, 18–35, Lecture Notes in Comput. Sci., 3404, Springer, Berlin, (2005).
- [72] G. Brady, *Addition to the summation of reciprocal Fibonacci and Lucas series*, Fibonacci Quart. 9 (1971), 402–404, 412.
- [73] F. Brenti, *Unimodal, log-concave, and Polyá frequency sequences in combinatorics*, Mem. Amer. Math. Soc. 413 (1989).
- [74] F. Brenti, *Unimodal polynomials arising from symmetric functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990) 1133–1141.
- [75] F. Brenti, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry : an update*. In Jerusalem combinatorics '93, vol. 178 of Contemp. Math. AMS, Providence, RI, (1994) p. 71–89.
- [76] F. Brenti, *Combinatorics and total positivity*, J. Combin. Theory Ser. A 71 (1995) 175–218.
- [77] D. M. Bressoud, *Unimodality of Gaussian polynomials*, Discrete Math. 99 (1992), no. 1–3, 17–24.
- [78] E. B. McBride, *Obtaining generating functions*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1971) viii+100 pp.
- [79] Brondarenko B.A., *Generalized Pascal triangles and Pyramids, their fractals, graphs and applications*, The Fibonacci Association, Santa Clara (1993), Translated from Russian by R.C. Bollinger.
- [80] P.S. Bruckman, I.J. Good, *A generalization of a serie of De Morgan with application of Fibonacci type*, Fibonacci Quart. 14 (1976), 193–196.
- [81] O. Brugia, A. Di Porto, P. Filipponi, *On certain Fibonacci-type sums*, Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 22 (1991) 609–613.
- [82] P. L. Butzer, M. Schmidt, E. L. Stark, L. Vort, *Central factorial numbers ; their main properties and some applications*, Numer. Funct. Anal. Optim. 10 (1989), no. 5–6, 419–488.
- [83] D. Callan, *On generating functions involving the square root of a quadratic polynomial*, J. Integer Seq, Vol. 10 (2007), Article 07.5.2.
- [84] L. Carlitz, *Some combinatorial identities of Bernstein*. SIAM J. Math. Anal., 9 (1978), no. 1, 65–75.
- [85] L. Carlitz : *Recurrences of the third order and related combinatorial identities*, Fibonacci Quart. 16 (1978), no. 1, 11–18.
- [86] L. Carlitz, *Generating functions for powers of certain sequences of numbers*, Duke Math. J. 29 (1962), 521–537.
- [87] A. Cayley, *On the theory of determinants*, Transaction of the Cambridge Philosophical Society, 8, (1843) 1–16.
- [88] A. Cayley, *Mémoire sur les hyperdéterminants*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 30, (1846) 1–37.

- [89] A. Cayley, *On the theory of permutants*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 7, (1851) 40–51.
- [90] Z. Čerin, *Some alternating sums of Lucas numbers*, Central European J. Math. 3 (1), (2005), 1–13.
- [91] Z. Čerin, *Properties of odd and even terms of the Fibonacci sequence*, Demonstratio, Math., 39 (2006), 55–60.
- [92] Z. Čerin, *On sums of squares of odd and even terms of the Lucas sequence*, Proceedings of the 11th Fibonacci Conference, (to appear).
- [93] Z. Čerin, *Alternating sums of Fibonacci products*, Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena e Reggio Emilia, (à paraître).
- [94] Z. Čerin, *Sums of squares and products of Jacobsthal numbers*, J. Integer Seq, Vol. 10 (2007), Art. 07.2.5.
- [95] Z. Čerin, G. M. Gianella, *On sums of squares of Pell-Lucas numbers*, INTEGERS : Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 6 (2006), #15.
- [96] Z. Čerin, G. M. Gianella, *Formulas for sums of squares and products of Pell numbers*, Acc. Sc. Torino - Atti Sci. Fis. 140 (2006).
- [97] L. Cerlienco, M. Mignotte, F. Piras. *Suites récurrentes linéaires : Propriétés algébriques et arithmétiques*, Enseign. Math., 33 (1987) 67–108.
- [98] U. Cerruti, F. Vaccarino. *R-algebra of linear recurrent sequences*, J. Algebra, 175 (1), (1995) 332–338.
- [99] U. Cerruti, F. Vaccarino. *Applications of fibonacci numbers*, volume 6, pages 53–62. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, (1996).
- [100] R. Chen, L. W. Shapiro, *On sequences G_n satisfying $G_n = (d + 2)G_{n-1} - G_{n-2}$* , J. Integer Seq, Vol. 10 (2007), Art. 07.8.1.
- [101] I. Chiorean, L. Lupsa, N. Popovici, *Unimodal multicriteria optimization via Fibonacci numbers*, Creative Math. & Inf. 16 (2007), 114–123.
- [102] L. Comtet, *Analyse combinatoire*. Puf, Coll. Sup. Paris, (1970), Vol. 1 et Vol. 2.
- [103] R. S. Costas-Santos, *On the determinant of a sum of matrices*, arXiv : math/0612464v3, (2006).
- [104] J. N. Darroch, *On the distribution of the number of successes in independent trials*, Ann. Math. Statist. 35 (1964) 1317–1321.
- [105] S. Dharmadhikari, K. Joak-Dev, *Unimodality, Convexity and Applications*, Academic Press, Boston, MA (1988).
- [106] G. B. Djordjević, *Some properties of partial derivatives of generalized Fibonacci and Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 39 (2001), 138–141.
- [107] G. B. Djordjević, *On the k^{th} -order derivative sequences of generalized Fibonacci and Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 43 (2005), 290–298.
- [108] G. B. Djordjević, H. M. Srivastava, *Incomplete Generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers*, Mathematical and computer modelling 42 (2005) 1049–1056.

- [109] G. B. Djordjević, *Generalized Jacobsthal polynomials*, Fibonacci Quart. 38, 239–243, (2000).
- [110] G. B. Djordjević, *Derivative sequences of generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 38, 334–338, (2000).
- [111] G. B. Djordjević, *Polynomials related to Morgan-Voyce polynomials*, Fibonacci Quart. 37 (1999), 61–66
- [112] G. B. Djordjević, *A composite of generalized Morgan-Voyce polynomials*, Fibonacci Quart. 38 (2000), 458–463.
- [113] G. B. Djordjević, *Generating functions of the incomplete generalized Fibonacci and generalized Lucas numbers*, Fibonacci Quart. 42 (2004), 106–113.
- [114] T. Došlić, *Log-balanced combinatorial sequences*, Int. J. Math. Sci. (2005), no. 4, 507–522.
- [115] T. Došlić, *Logarithmic behavior of some combinatorial sequences*, math/CO. 0603379.
- [116] T. Došlić, D. Veljan, *Calculus proofs of some combinatorial inequalities*, Math. Inequal. Appl. 6 (2003), no. 2, 197–209.
- [117] E. Ehrhart, *Associated hyperbolic and Fibonacci identities*, Fibonacci Quart. 21 (1983), 87–96.
- [118] G. P. Egoryčev, *Combinatorial sums and the method of generating functions*, Krasnoyarsk. Gos. Univ. Krasnoyarsk, (1974), 200pp.
- [119] M.S. El Naschie, *Notes on superstrings and the infinite sums of Fibonacci and Lucas numbers*, Chaos Solitons Fractals 12 (2001), 1937–1940.
- [120] K. Emrah, T. Dursun, *Factorizations and representations of the backward second-order linear recurrences*, J. Comput. Appl. Math. 201 (2007), no. 1, 182–197.
- [121] M. C. Er, *Sums of Fibonacci numbers by matrix methods*, Fibonacci Quart. 22 (3) (1984) 204–207.
- [122] P. Erdős, *Verallgemeinerung eines elementar-zahlentheoretischen Satzes von Kürschák. (Generalization of an elementary number-theoretic theorem of Kürschák.)*, Mat. Fiz. Lapok 39,(1932) 17–24.
- [123] R. J. Evans and I. M. Issacs, *Generalized Vandermonde determinants and roots of unity of prime order*, Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976), 51–54.
- [124] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Third Edition, Vol. I, John Wiley and sons, New York, (1968).
- [125] H. Feng, Z. Zhang, *Computational formulas for convoluted generalized Fibonacci and Lucas numbers*, Fibonacci Quart. 41 (2003), 144–151.
- [126] K. Feng, *The calculus of generating functions and the formal energy for Hamiltonian algorithms*, J. Comput. Math. 16 (1998), no. 6, 481–498.
- [127] D. Ferrand. *Suites récurrentes*. IRMAR, Université de Rennes, (1988).
- [128] G. Ferri, M. Faccio, A. D’Amico, *A new numerical triangle showing links with Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 29 (1991), no. 4, 316–320.

- [129] G. Ferri, M. Faccio, A. D'Amico, *Fibonacci numbers and ladder networks impedance*, Fibonacci Quart. 30 (1992), no. 1, 62–67.
- [130] P. Filippini, *Incomplete Fibonacci and Lucas numbers*, Rend. Circ. Mat. Palermo (Ser. 2) 45,(1996) 37–56.
- [131] N. Garnier, O. Ramaré, *Fibonacci numbers and trigonometric identities*, preprint (2006).
- [132] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, (1801).
- [133] F Gherardelli, *Remarks on hyperdeterminants* (Italian), Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A 127 (1993), no. 1, (1994) 107–113.
- [134] P.W. Gomez, *Generating functions and convolution applied to geometric counting problems*. A thesis presented to the faculty of the Department of Mathematics, California State University, San Jose, Calif., (1973), vi+159pp.
- [135] I. J. Good, *A reciprocal serie of Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 12 (1974), 346.
- [136] H. W. Gould, *Combinatorial Identities*, Rev. Ed., Morgantown, W. Va., (1972).
- [137] H. W. Gould, *The case of the strange binomial identities of Professor Moriarty*, Fibonacci Quart. 10 (1972), 382–392.
- [138] H. W. Gould, *Sums and convolved sums of catalan numbers and their generating function*, Indian J. Math. 46 (2004), no. 2–3, 137–160.
- [139] H. W. Gould, *Inverse series relations and other expansions involving Humbert polynomials*, Duke Math. J. 32 (1965), 697–711.
- [140] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik : *Concrete Mathematics*, Addison Wesley Publishing Company, Inc., (1994).
- [141] W. E. Greig, *Sums of Fibonacci reciprocals*, Fibonacci Quart. 15 (1977), 46–48.
- [142] W. E. Greig, *On sums of Fibonacci-type reciprocals*, Fibonacci Quart. 15 (1977), 356–358.
- [143] B.-N. Guo, X. Jiang, *Some integral inequalities*, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Math., 10 (1999), 27–29.
- [144] V. J. W. Guo, J. Zeng, *The Eulerian distribution on involutions is indeed unimodal*, J. Combin. Theory Ser. A 113 (2006) 1061–1071.
- [145] R. K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, second edition, Springer Verlag, NY, (1994).
- [146] A. Hald, *A history of mathematical statistics from 1750 to 1930*, John Wiley, N. Y. (1998).
- [147] J. H. Hammersley, *The sum of the products of natural numbers*, Proceeding of the London M. S. (1951), 435–452.
- [148] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya : *Inequalities*, Cambridge University Press, (1956).
- [149] P. Haukkanen, *On a binomial sum for the Fibonacci and related numbers*, Fibonacci Quart. 34 (1996), 326–331.

- [150] P. Haukkanen, J. Rutkowski, *On generating functions for powers of recurrence sequences*, Fibonacci Quart. 29 (1991), no. 4, 329–332.
- [151] P. Haukkanen, *Some binomial inversions in terms of ordinary generating functions*, Publ. Math. Debrecen, 47 (1995), no. 1–2, 181–191.
- [152] P. Haukkanen, *Higher-dimensional GCD matrices*, Linear Algebra and its Applications 170 (1992), 53–63.
- [153] P.-A. He, Z. Zhang, *The multiple sum on the generalized Lucas sequences*, Fibonacci Quart. 40 (2002), 124–127.
- [154] P. Hoffman, *The man who loved only numbers : The story of Paul Erdos and the search for mathematical truth*, N.Y. Hyperion (1998).
- [155] V. E. Hoggatt, I.D. Ruggles, *A primer for the Fibonacci numbers—Part V*, Fibonacci Quart. 2(1964), 59–65.
- [156] V. E. Hoggatt, M. Bicknell, *A primer for the Fibonacci numbers, part XV, variations on summing a serie of reciprocal of Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 14 (1976), 272–276.
- [157] V. E. Hoggatt, M. Bicknell, *A reciprocal series of Fibonacci numbers with subscripts 2^nk* , Fibonacci Quart. 14 (1976), 453–455.
- [158] A. F. Horadam, *Basic properties of a certain generalized sequence of numbers*, Fibonacci Quart. 3 (1965), 161–176.
- [159] A. F. Horadam, *Elliptic functions and Lambert series in the summation of reciprocals in certain recurrence-generated sequences*, Fibonacci Quart. 26 (1988), 98–114.
- [160] A. F. Horadam, *Jacobsthal representation numbers*, Fibonacci Quart. 34 (1996), 40–54.
- [161] A. F. Horadam, *Convolutions for Jacobsthal-Type polynomials*, Fibonacci Quart. 40 (2002), 212–223.
- [162] A. F. Horadam, *Jacobsthal representation polynomials*, Fibonacci Quart. 35 (1997), 137–148.
- [163] A. F. Horadam, *Rodrigues' formulas for Jacobsthal-Type polynomials*, Fibonacci Quart. 35 (1997), 361–370.
- [164] A. F. Horadam, *Vieta convolutions and diagonal polynomials*, Fibonacci Quart. 41 (2003), no. 3, 240–252.
- [165] A. F. Horadam, *Quasi Morgan-Voyce polynomials and Pell convolutions*, Applications of Fibonacci numbers, Vol. 8 (Rochester, NY, 1998), 179–193, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1999).
- [166] A. F. Horadam, *Completion of numerical values of generalized Morgan-Voyce and related polynomials*, Fibonacci Quart. 38 (2000), no. 3, 260–263.
- [167] A. F. Horadam, *Associated Legendre polynomials and Morgan-Voyce polynomials*, Notes Number Theory Discrete Math. 5 (1999), no. 4, 125–134.
- [168] A. F. Horadam, *Morgan-Voyce type generalized polynomials with negative subscripts*, Fibonacci Quart. 36 (1998), no. 5, 391–395.

- [169] A. F. Horadam, *A composite of Morgan-Voyce generalizations*, Fibonacci Quart. 35 (1997), no. 3, 233–239.
- [170] A. F. Horadam, *New aspect of Morgan-Voyce polynomials. Applications of Fibonacci numbers*, Vol. 7 (Graz, 1996), 161–176, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1998).
- [171] A. F. Horadam, *Morgan-Voyce convolutions*, Fibonacci Quart. 40 (2002), no. 2, 98–105.
- [172] A. F. Horadam, *Polynomials associated with generalized Morgan-Voyce polynomials*, Fibonacci Quart. 34 (1996), no. 4, 342–348.
- [173] A. F. Horadam, *Chebyshev and Pell Connections*, Fibonacci Quart. 43 (2005), 108–121.
- [174] A. F. Horadam, *Vieta polynomials*, Fibonacci Quart. 40 (2002), 223–232.
- [175] A. F. Horadam, *Unexpected Pell and quasi Morgan-Voyce summation connections*, Fibonacci Quart. 41 (2003), no. 4, 352–359.
- [176] A. F. Horadam, *Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers*, Duke Math. J. 32 (1965), 437–446.
- [177] A. F. Horadam, *On generating functions for powers of a generalized sequence of numbers*, Fibonacci Quart. 12 (1974), 348, 350, 353, 362.
- [178] A. F. Horadam, P. Filipponi, *Derivative sequences of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 35 (1997), 352–357.
- [179] A. F. Horadam, P. Filipponi, *Morgan-Voyce polynomial derivative sequences*, Fibonacci Quart. 39 (2001), no. 2, 116–122.
- [180] A. F. Horadam, P. Filipponi, *Integration sequences of Fibonacci and Lucas polynomials*, Applications of Fibonacci numbers, Vol. 5 (St. Andrews, 1992), 317–330, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1993).
- [181] A. F. Horadam, J. M. Mahon, *Pell and Pell-Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 23 (1985), no. 1, 7–20.
- [182] F. T. Howard, *The sum of the squares of two generalized Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 41 (2003), 80–84.
- [183] H. Hu, Z.-W. Sun, J.-X. Liu, *Reciprocal sums of second order recurrent sequences*, Fibonacci Quart. 39 (2001), no. 3, 214–220.
- [184] R. C. Johnson, *Matrix methods for Fibonacci and related sequences*, www.dur.ac.uk/bob.johnson/fibonacci/, (2004).
- [185] W. B. Johnson (ed.) and J. Lindenstrauss (ed.), *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.
- [186] L. S. Johnston, *The Fibonacci sequence and allied trigonometric identities*, Amer. Math. Monthly 47, (1940). 85–89.
- [187] Ch. Jordan, *On Stirling's numbers*, The Tôhoku Mathematical Journal, Vol.37, (1933) 254–278).
- [188] G. Kallos, *A generalization of Pascal triangles using powers of base numbers*, Annales mathématiques Blaise Pascal, Vol. 13, no. 1 (2006), p 1–15.

- [189] D. Kalman, *Generalized Fabinacci numbers by matrix methods*, Fibonacci Quart. 20 (1) (1982) 73–76.
- [190] A. M. Kachatnov, M. V. Pavlov, *On generating functions in the AKNS hierarchy*, Phys. Lett. A 301 (2002), no. 3–4, 269–274.
- [191] S. Karlin, *Total Positivity*, vol. I, Stanford Univ. Press, (1968).
- [192] I. Kātai, *A remark on trigonometric sums*, Acta Math. Hungar. 112 (2006), no. 3, 221–225.
- [193] J. Keilson, H. Gerber, *Some results for discrete unimodality*, J. Amer. Statist. Assoc., 66, (1971) 386–389.
- [194] J. F. Keeney and E. S. Keeping, *Cumulants and the cumulant-generation functions ; Additive property of cumulants and Sheppard's correction*, in "Mathematics of Statistics," Pt 2, 2nd ed., pp. 77–82, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, (1951).
- [195] G. P. Khamitov, *The generation function method in probability theory*, Irkut.sk. Gos. Univ., Irkutsk, (1991). 104 pp. 0.40 r. ISBN 5-7430-0264-9
- [196] E. Kilic, B. Altunkaynak, D. Tasci, *On the computing of the generalized order-k Pell numbers in time*, Appl. Math. Comput. 181 (2006), no. 1, 511–515.
- [197] E. Kilic, D. Tasci, *The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers*, Taiwanese J. Math. (in press).
- [198] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, (2001).
- [199] V. L. Kurakin, A. S. Kuzmin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev, *Linear recurring sequences over rings and modules*, J. of Math. Sci., 76(6) : 2793–2915, (1995).
- [200] J. Lahr, *Fibonacci and Lucas numbers and the Morgan-Voyce polynomials in ladder networks and electrical line theory*, *Fibonacci numbers and their applications*, ed. G. Bergum, A. N. Filippou & A. GF. Horadam, Vol. 1 141–161, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1986).
- [201] S. K. Lando, *Lectures on generating functions*, American Mathematical Society, Providence, RI, (2003). xvi+148 pp.
- [202] A. Lascoux, P. Pragacz, *Bezoutians, euclidean algorithm and orthogonal polynomials*, Annals of Combinatorics, 9 (2005), 301–319.
- [203] J. Mc Laughlin : *Combinatorial identities deriving from the n -th power of 2×2 matrix*, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, A19, 4 (2004).
- [204] J. Mc Laughlin, B. Sury, *Powers of matrix and combinatorial identities*, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, A13, 5 (2005).
- [205] J. Y. Lee, *On the Morgan-Voyce polynomial generalization of the first kind*, Fibonacci Quart. 40 (2002), 59–65.
- [206] G. Y. Lee, H. G. Seol, *k -Lucas numbers and completeness*, Far East J. Math. Sci. (FJMS) 23(3) (2006), 421–433.
- [207] G. Y. Lee, J. S. Kim and S. G. Lee, *Factorizations and eigenvalues of Fibonacci and symmetric Fibonacci matrices*, Fibonacci Quart. 40 (2002), 203–211.

- [208] D. H. Lehmer, *Problem 3801*, The American Mathematical Monthly 632, (1936).
- [209] C. Levesque, *On m -th order linear recurrences*, Fibonacci Quart. 23 (4) (1985) 290–295.
- [210] M. Lewin, *Some combinatorial identities*, Fibonacci Quart. 18, 214–220, (1980).
- [211] W. K. Li, Y. V. Hui, *An Algorithm for the exact likelihood of periodic autoregressive moving average models*, Communication in Statistics-Simulation and computation, 16, (1988), 1483–1494.
- [212] L. Liu, Y. Wang, *A unified approach to polynomial sequences with only real zeros*, Preprint, arXiv :math.CO/0509207 v4 (2006).
- [213] L. Liu, Y. Wang, *On the log-convexity of combinatorial sequences*, to appear in Advances in Applied Mathematics, arXiv : math/ 0602672.
- [214] G. Liu, *Formulas for convolution Fibonacci numbers and polynomials*, Fibonacci Quart. 40 (2002), 352–357.
- [215] C. T. Long, *Discovering Fibonacci identities*, Fibonacci Quart. 24, 160–167, (1986).
- [216] D. J. Louck, *Theory of angular momentum in N dimensional space*, Tech Rep. LA-2451, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos, NM, (1960).
- [217] E. Lucas, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, Amer. J. Math, 1 (1878), 184–240, 289–321.
- [218] E. Lucas, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris (1891).
- [219] R. Lund, I. V. Basawa, *Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic ARMA models*, Journal of Time Series Analysis, 21, (2000) 75–93.
- [220] J.-G. Luque, *Hyperdeterminants on semilattices*, à paraître dans Linear and Multilinear Algebra, (2007).
- [221] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *Pfaffian and Hafnian identities in shuffle algebra*, Advances in Applied Mathematics 29, 620–646, (2002).
- [222] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals*, J. Phys. A, Math. Gen., **36**, (2003) 5267.
- [223] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *Hyperdeterminantal calculations of Selberg’s and Aomoto’s integrals*, Molecular Physics, 10-20 June (2004), Vol. 102, No 11-12, 1351–1359.
- [224] X. R. Ma, *The general solution of Ming Antu’s problem*, Acta Math. Sin, 20 (2004), no. 1, 157–162.
- [225] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second edition, Oxford University Press Inc., New York (1995).
- [226] J. M. Mahon, A. F. Horadam, *Inverse trigonometrical summation formulas involving Pell polynomials*, Fibonacci Quart. 23 (1985), no. 1, 319–324.
- [227] J. M. Mahon, A. F. Horadam, *Ordinary generating functions for Pell polynomials*, Fibonacci Quart. 25 (1987), no. 1, 45–56.
- [228] J. M. Mahon, A.F.Horadam, *Exponential generating functions for Pell polynomials*, Fibonacci Quart. 25 (1987), no. 3, 223–232.

- [229] T. Mansour, *A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence*, Australas. J. Combin. 30 (2004), 207–212.
- [230] L. Mattner, B. Roos, *Maximal probabilities of convolution powers of discrete uniform distributions*, Preprint, <http://arXiv.org/abs/math.PR/0706.0843v1>, (2007).
- [231] P. Medgyessy, *On the unimodality of discrete distributions*, Period. Math. Hungar., 2, (1972), 245–257.
- [232] R. S. Melham, *Sums involving Fibonacci and Pell numbers*, Portugaliae Mathematica, Vol. 56, Fasc. 3, (1999).
- [233] R. S. Melham, *On sums of powers of terms in a linear recurrence*, Portugaliae Mathematica, Vol. 56, Fasc. 4, (1999).
- [234] R. S. Melham, *A generalization of a result of André-Jeannin concerning summation of reciprocals*, Portugaliae Mathematica, Vol. 57, Fasc. 1, (2000).
- [235] R. S. Melham, *Certain classes of finite sums that involve generalized Fibonacci and Lucas numbers*, Fibonacci Quart. 42 (2004), 47–54.
- [236] R. S. Melham, *A three-variable identity involving cubes of Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 41 (2003), 220–223.
- [237] R. S. Melham, *Families of identities involving sums of powers of the Fibonacci and Lucas numbers*, Fibonacci Quart. 37 (1999), 315–319.
- [238] R. S. Melham, *On some reciprocal sums of Brousseau : An alternative approach to that of Carlitz*, Fibonacci Quart. 41 (2003), 59–62.
- [239] R. S. Melham, *On reciprocal sums of second order sequences*, Applications of Fibonacci numbers, Vol. 6 (Pullman, WA, 1994), 355–364, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996).
- [240] R. S. Melham, D. Jennings, *On the general linear recurrence relation*, Fibonacci Quart. 33 (1995), 142–146.
- [241] R. S. Melham, A. G. Shannon, *On reciprocal sums of Chebyshev related sequences*, Fibonacci Quart. 33 (1995), 194–202.
- [242] R. S. Melham, A. G. Shannon, *Inverse trigonometric and hyperbolic summation formulas involving generalized Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 33 (1995), 32–40.
- [243] R. S. Melham, A. G. Shannon, *On reciprocal sums of second order sequences*, Applications of Fibonacci numbers, Vol. 6 (Pullman, WA, 1994), 355–364, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1996).
- [244] K. V. Menon, *On the convolution of logarithmically concave sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969) 439–441.
- [245] D. Merlini, R. Sprugnoli, *Playing with somme identities of Andrews*, J. Integer Seq, Vol. 10 (2007), Article 07.9.5.
- [246] D. Merlini, R. Sprugnoli, M.C. Verri, *Lagrange inversion : When and how*, Acta Appl. Math. 94 (2006) 233–249.
- [247] K. R. Meyer, *Equivariant generating and periodic points, New trends for Hamiltonian systems and celestial mechanics* (Cocoyoc, 1994), 289–299, Adv. Ser. Nonlinear Dynam., 8, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1996).

- [248] E. P. Miles, *Generalized Fibonacci numbers and associated matrices*, Amer. Math. Monthly 67 (1960) 745–752.
- [249] D. A. Millin, *Problem H-237*, Fibonacci Quart. 12 (1974), 309.
- [250] L. Mordechai, *Some combinatorial identities*, Fibonacci Quart. 18 (3) (1980), 214–220.
- [251] A. de Moivre, *The doctrine of chances*, (first ed. 1718 and second ed. 1738), reprinted by Chelsea, N. Y (1967), Third edition (1756).
- [252] A. de Moivre, *Miscellanea Analytica de Scrichus et Quadraturis*, J. Tomson and J. Watts, London, (1731).
- [253] M. Mouline, M. Rachidi, *Application of Markov chains properties to r -generalized Fibonacci sequences*, Fibonacci Quar. 37 (1999) 34–38.
- [254] A. M. Morgan-Voyce, *Ladder networks analysis using Fibonacci numbers*, I.R.E. Transl. Circuit Theory 6, no. 3, (1959), 321–322.
- [255] P. A. Nilson, *Multisecting the column-generating functions of generalized Pascal triangles*, A thesis presented to the faculty of the Department of Mathematics, California State University, San Jose, Calif., in partial fulfillment of the requirements for the degree Master of Arts. California State University, San Jose, Calif., (1972). vii+74 pp.
- [256] T.D. Noe, *On the divisibility of generalized central trinomial coefficients*, J. Integer Seq. Vol. 9 (2006) Art. 06.2.7.
- [257] S. A. Obaid, *New Fibonacci and Lucas identities*, *The mathematical heritage of C. F. Gauss*, 562–572, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
- [258] A. M. Odlyzko, L. B. Richmond, *On the unimodality of high convolutions*, Ann. Probability, 13, (1985), 299–306.
- [259] O. Orcière, *Class group in cryptography*, Thèse de Doctorat, Toulouse, (2006).
- [260] M. Özer, A. Čenys, Y. Polatoglu, G. Hacibekiroglu, E. Akat, A. Valaristos, A. N. Anagnostopoulos, *Bifurcations of Fibonacci generating functions*, Chaos Solitons Fractals 33 (2007), no. 4, 1240–1247.
- [261] J. Panaretos, *On a fonctionnal equation for the generating function of the logarithmic series distribution*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 32 (1987), no. 4, 365–367.
- [262] M. V. Pavlov, *Classification of integrable hydrodynamic chains and generating functions of conservation laws*, J. Phys. A. 39 (2006), no. 34, 10803–10819.
- [263] S. P. Pethe, R. M. Fernandes, *Two generalized trigonometric Fibonacci sequences*, Ulam Quart. 3 (1995), no. 1, 15 ff., approx. 12 pp.
- [264] A.N. Philippou, *A note of the Fibonacci sequence of order k and the Multinomial coefficients*, Fibonacci Quart. 21 (1983) 82–86.
- [265] A. N. Phillipou, G. N. Philippou, *The Pell sequence of order- k multinomial coefficients and probability*, Bull. Soc. Math. Greece (N.S.) 22 (1981) 74–84.
- [266] A. Pintér, H. M. Srivastava, *Generating functions of the incomplete Fibonacci and Lucas numbers*, Rend. Circ. Mat. Palermo (Ser. 2) 48, 591–596, (1999).

- [267] B. S. Popov, *On certain series of reciprocal of Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 22 (1984), 261–265.
- [268] B. S. Popov, *A note on the sums of Fibonacci and Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 23 (1985), 238–239.
- [269] B. S. Popov, *Summation of reciprocal series of numerical functions of second order*, Fibonacci Quart. 24 (1986), 17–21.
- [270] D. Port, *A characterization of exponential and ordinary generating functions*, J. Combin. Theory Ser. A 98 (2002) 219–234.
- [271] S. Rabinowitz, *A note on the sum $\sum 1/w_k 2^n$* . Missouri J. Math. Sci. 10 (1998), no. 3, 141–146.
- [272] R. K. Raina, H. M. Srivastava, *A class of numbers associated with the Lucas numbers*, Math. Comput. Modelling 25 (7), 15–22, (1997).
- [273] Rajesh Ram, *Fibonacci number formulae*, <http://users.tellurian.net/hsejar/maths/fibonacci/> (2003).
- [274] V. Rajesh and G. Leversha, *Some properties of odd terms of the Fibonacci sequence*, Math. Gazette, 88 (2004), 85–86.
- [275] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York, (1958).
- [276] J. Riordan, *Introduction to combinatorial analysis*, Dover, (2002).
- [277] T. J. Rivlin, *Chebyshev Polynomials : From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, second edition, Wiley Interscience, (1990).
- [278] N. Robbins, *Vieta triangular array and a related family of polynomials*, Internat. J. Math. Sci. 14 (2), (1991), 239–244.
- [279] S. Roman, *The Umbral Calculus*, Academic Press, New York, (1984).
- [280] B. E. Sagan, *Unimodality and the reflection principle*, Ars Combin. 48 (1998), 65–72.
- [281] B. E. Sagan, *Composition inside a rectangle and unimodality*, Preprint, <http://arXiv.org/abs/math.CO/0707.1052v1>. (2007).
- [282] B. E. Sagan, *Inductive and injective proofs of log concavity results*, Discrete Math 68 (1988) 281–292.
- [283] B. E. Sagan, *Log concave sequences of symmetric functions and analogs of the Jacobi-Trudi determinants*, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992) 795–811.
- [284] S. Saitoh, *Generalizations of the triangle inequality*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 4 (2003), No. 3, Article 62, 5 pp.
- [285] A. Schilling, S.O. Warnaar, *Supernomial coefficients*, Polynomial identities and q -series. The Ramanujan J. 2 (1998) 459–494.
- [286] H. P. Schlickewei, C. Viola, *Generalized Vandermonde determinants*, Acta Arithmetica, 65. 2 (2000), 123–137.
- [287] J. Seibert, P. Trojoský, *On multipl sums of products of Lucas numbers*, J. Integer Seq. 10 (2007), no. 4, Article 07.4.5, 17 pp. (electronic).
- [288] D. Shanks, *On Gauss and composition I and II*, Number Theory Applications, (1989).

- [289] A. G. Shannon, *Solution to problem H-237 : Sum reciprocal!*, Fibonacci Quart. 14 (1976), 186–187.
- [290] A. G. Shannon, A. F. Horadam, *Some relationships among Vieta, Morgan-Voyce and Jacobsthal polynomials*, Application of Fibonacci numbers, Vol. 8, Ed. F. Howard, Dordrecht : Kluwer, (1999), 307–323.
- [291] A. G. Shannon, A. F. Horadam, *Generating functions for powers of third order recurrence sequences*, Duke Math. J. 38 (1971), 791–794.
- [292] A. G. Shannon, R. S. Melham, *Carlitz generalizations of Lucas and Lehmer sequences*, Fibonacci Quart. 31 (1993), 105–111.
- [293] M. Shattuck, *Combinatorial proofs of some Moriarty-type binomial coefficient identities*, Electronic journal of combinatorial number theory, 6 (2006), #A35.
- [294] Q. Shao, R. Lund, *Computation and characterization of autocorrelations and partial autocorrelations in periodic ARMA models*, Journal of Time Series Analysis, 25, (2004) 359–372.
- [295] T.N. Shorey, R. Tijdeman, *On the greatest prime factor of an arithmetical progression*, in "A tribute of Paul Erdos", Edited by A. Baker, B. Bollobas, and A. Hainal. Cambridge University Press (1990), 385–389.
- [296] P. D. Siafarikas, *A note on generating functions*, Bull. Greek. Math. Soc. 37 (1995), 93–96.
- [297] R. Siegmund-Schultze, H. von Weizsäcker, *Level crossing probabilities II : Polygonal recurrence of multidimensional random walks*, Adv. Math. 208, (2007) 680–698.
- [298] S. V. Shilman, *Generating function method in the theory of dynamical systems*, Series in Theoretical Foundations of Engineering Cybernetics, "Nauka", Moscow, (1978), 335 pp.
- [299] S. Singh, *A note on linear recurring sequences*, Lin. Alg. and its Applications, 104, 97–101, (1988).
- [300] N. J. A. Sloane, *The online Encyclopedia of Integer sequences*, Published electronically at [http ://www.research.att.com /~njas/sequences](http://www.research.att.com/~njas/sequences), (2007).
- [301] C. Smith, V. E. Hogatt , *Generating functions of central values of generalized Pascal triangles*, Fibonacci Quart. 17 (1979) 58–67.
- [302] N. P. Sokolov, *Spatial matrices and their applications* (in Russian), Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, (1960).
- [303] N. P. Sokolov, *Introduction to the theory of multidimensional matrices* (in Russian), Nukova Dumka, Kiev, (1972).
- [304] K. Soundararajan, *Approximating 1 from below using n Egyptian fractions*, Arxiv :math.CA/0502247 v1, (2005).
- [305] M. Z. Spivey, *Fibonacci Identities via the Determinant Sum Property*, College Math. J. 37 (2006), no. 4, 286–289.
- [306] R. Sprugnoli, *Riordan arrays and the Abel-Gould identity*, Discrete Math. 142 (1995), no. 1–3, 213–233.

- [307] R. Sprugnoli, *Sums of reciprocals of the central binomial coefficients*, Integers 6 (2006), A27, 18 pp.
- [308] R. Sprugnoli, *Riordan arrays and combinatorial sums*, Discrete Math. 132 (1994), no. 1–3, 267–290.
- [309] H. M. Srivastava, H. L. Manocha, *A Treatise on Generating Functions*, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, (1984).
- [310] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (1997).
- [311] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (1997).
- [312] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Wadsworth and Brooks / Cole, Monterey, California. (1986).
- [313] R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry In graph theory and its applications : East and West* (Jinan, 1986), vol. 576 of N. Y. Acad. Sci., p. 500–535. (1989).
- [314] R. P. Stanley, *Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough*, Amer. Math. Monthly 104 (1997) 344–350.
- [315] R. P. Stanley, *Alternating permutations and symmetric functions*, J. Combin. Theory Ser. A 114 (2007) 436–460.
- [316] R. P. Stanley, *Positivity Problems and Conjectures in Algebraic Combinatorics*, Mathematics : frontiers and perspectives, 295–319, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2000).
- [317] Z. F. Starc, *Solution of the Problem 6.98*, Univ. Beograd. Publikac. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 13 (2002), 103–105.
- [318] Z.-H. Sun, *Linear recursive sequences and powers of matrices*, Fibonacci Quart. 39 (2001) 339–351.
- [319] M. N. S. Swamy, *Rising diagonal polynomials associated with Morgan-Voyce polynomials*, Fibonacci Quart. 38 (2000), no. 1, 61–70.
- [320] M. N. S. Swamy, *Properties of the polynomial defined by Morgan-Voyce*, Fibonacci Quart. 4 (1966), no. 1, 73–81.
- [321] M. N. S. Swamy, *Generalization of modified Morgan-Voyce polynomials*, Fibonacci Quart. 38 (2002), 8–16.
- [322] M. N. S. Swamy and B. Bhattacharyya, IEEE Trans. Circuit Theory 14 (1967), no. 3, 260–264.
- [323] M. N. S. Swamy, *Further properties of Morgan-Voyce polynomials*, Fibonacci Quart. 6 (1968), no. 2, 166–175.
- [324] J. J. Sylvester Quart J. Mad th. 1 (1857), 141–152 ; reprinted in Collected mathematical papers, Vol. II, 90–99, Chelsea, New York, (1973).
- [325] W. Tianming, Z. Zhizheng, *Recurrence sequences and Nörlund-Euler polynomials*, Fibonacci Quart. 34 (1996), 314–319.

- [326] S. Tanny, M. Zuker, *On a unimodality sequence of binomial coefficients*, Discrete Math 9 (1974), 79–89.
- [327] S. Tanny, M. Zuker, *On a unimodal sequence of binomial coefficients*, J. Combin. Inform. System Sci., 1 (1976), 81–91.
- [328] S. Tanny, M. Zuker, *Analytic methods applied to a sequence of binomial coefficients*, Discrete Math., 24 (1978), 299–310.
- [329] D. Terrana, H. Chen, *Generating functions for the powers of Fibonacci sequences*, Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 38 (2007), no. 4, 531–537.
- [330] P. Théorêt, *Fonctions génératrices pour une classe d'équations aux différences partielles*, Ann. Sci. Math. Québec 19 (1995), no. 91–105.
- [331] R. Vein, P. Dale, *Determinants and their applications in mathematical physics*, Springer Verlag, N. Y. (1999).
- [332] L. Verde-Star, *Functions of matrices*, Linear Algebra App. 406 (2005) 285–300.
- [333] F. Vieta, *Opera Mathematica : Ad Angulus Sectiones*, (Theorema VI). Paris, (1615). (repris de [278]) ;
- [334] M. B. Villarino, *The probability of a run*, Preprint arXiv.math.PR/0511652 v1 (2005)
- [335] A. Vince. *Period of linear recurrence*, Acta Arithmetica, 39 :303–311, (1981).
- [336] V. Voinov, M. Nikulin, *On some statistical and probability problem related to unipartite and multipartite partitions*, Rev. Roumaine Math. pures Appl. 42 (1997), no. 1–2, 163–180.
- [337] H. von Koch, *Elementary proof of unimodality in Gauss polynomials*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 495–500 (1983).
- [338] N. N. Vorob'ev, *Fibonacci numbers*, Translated from the russian by Halina Moss, Translation editor Ian N. Sneddon Blaisdell Publishing Co., New York-London, (1961).
- [339] Y. Wang, *A Simple proof of a conjecture of Simion*, J. Combin. Theory Ser. A 100 (2002) 399–402.
- [340] Y. Wang, *Proof of a conjecture of Ehrenborg and Steingr'ímsson on excedance statistic*, European J. Combin. 23 (2002) 355–365.
- [341] Y. Wang, *Linear transformations preserving log-concavity*, Linear Algebra Appl. 359 (2003) 161–167.
- [342] Y. Wang, Y.-N. Yeh, *Proof of a conjecture on unimodality*, European J. Combin. 26 (2005) 617–627.
- [343] Y. Wang, Y.-N. Yeh, *Polynomials with real zeros and P'olya frequency sequences*, J. Combin. Theory Ser. A 109 (2005) 63–74.
- [344] Y. Wang, Y.-N. Yeh, *Log-concavity and LC-positivity*, J. Combin. Theory Ser. A 114 (2007) 195–210.
- [345] M. Ward, *The arithmetical theory of linear recurring series*, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1993), no. 3, 600–628.
- [346] S.O. Warnaar *The Andrews-Gordon Identities and q-Multinomial coefficients*, Commun. Math. Phys. 184 (1997) 203–232.

- [347] S.O. Warnaar *Refined q -trinomial coefficients and character identities*, J. Stat. Phys. 102 (2001), no. 3–4, 1065–1081.
- [348] C. Wenchang, L. De Donno, *Binomial identities and harmonic numbers*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 10 (2007), no. 1, 213–235.
- [349] C. Wenchang, P. Magli, *Summation formulae on reciprocal sequences*, European Journal of Combinatorics 28 (2007) 921–930.
- [350] C. Wenchang, V. Vicenti, *Generating functions and incomplete Fibonacci and Lucas polynomials*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 6(2003), no. 2, 289–308.
- [351] C. Wenchang, *Generating functions and binomial sums*, Ricerche Mat. 49 (2000), no. 2, 317–326 (2001).
- [352] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press (1994).
- [353] A. Wintner, (1938), *Asymptotic distributions and infinite convolutions*, Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan.
- [354] B. G. Wybourne, *The Vandermonde determinant revisited*, Instytut Fizyki, Uniwersytet Mikolaya Koperniska, 87–100 Toruń, Poland, (2002).
- [355] S. Y. Yan, *Number theory for computing*, Springer Verlag, (2002).
- [356] H. Yu, C. Liang, *Identities involving partial derivatives of bivariate Fibonacci and Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 35 (1997), no. 1, 19–23.
- [357] Y. Yuan, W. Zhang, *Some identities involving the Fibonacci Polynomials*, Fibonacci Quart. 40 (2002), 314–318.
- [358] B. Zay, *Solutions of linear recursive system*, Publ. Math. Debrecen, 41(1{2) :127–134, (1992).
- [359] D. Zeitlin, *Generating functions for products of recursive sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. 116 (1965) 300–315.
- [360] D. Zeitlin, *On a class of polynomials obtained from generalized Humbert polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 18, No. 1. (Feb., 1967), pp. 28–34.
- [361] W. Zhang, *On Chebyshev Polynomials and Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 40 (2002), 424–428.
- [362] Z. Zhang, J. Wang, *On some identities involving yhe Chebyshev polynomials*, Fibonacci Quart. 40 (2004), 245–249.
- [363] Z. Zhang, X. Gaowen, *Some computational formulas of mixed-convoluted sum for Fibonacci and Lucas sequences*, Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang) 14 (2007), no. 2, 283–292.
- [364] F.-Z. Zhao, T. Wang, *Some identities involving the powers of the generalized Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 39 (2001), 165–167.
- [365] F.-Z. Zhao, T. Wang, *Generaliation of some identities involving the Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart. 41 (2003), 7–12.
- [366] C. Zhou, *On the K th-order derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials*, Fibonacci Quart. 34 (1996), 394–408.
- [367] Z. F. Zhu, *The unimodality of independence polynomials of some graphs*, Australas. J. Combin. 38 (2007), 27–33.