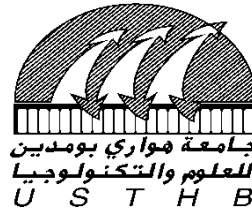


N° d'ordre : 04 /2016-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR EN SCIENCES

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : Mohammed Said MAAMRA

Sujet

**Combinatoire de certaines classes de polynômes de  
partition**

Soutenue publiquement, le 10 /12 /2016, devant le jury composé de :

M. M. ABBAS	Professeur à l'USTHB /FMT	Président
M. M. MIHOUBI	Professeur à l'USTHB /FMT	Directeur de thèse
M. H. BELBACHIR	Professeur à l'USTHB /FMT	Examineur
M. S. BOUROUBI	Professeur à l'USTHB /FMT	Examineur
M. A. DERBAL	Professeur à l'E.N.S. Kouba	Examineur
M. M. BLIDIA	Professeur à l'U. Blida	Examineur
M. B. SADI	M.C.A. à l'UMMTizi Ouzou	Examineur

**Combinatoire de certaines classes de polynômes  
de partition**

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Doctorat en Mathématiques

**Mohammed Said MAAMRA**

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Éléments de la combinatoire énumérative</b>	<b>11</b>
1.1 Dénombrement . . . . .	11
1.1.1 $r$ -permutation . . . . .	11
1.1.2 $r$ -combinaison . . . . .	12
1.1.3 Factorielle descendante . . . . .	12
1.1.4 Factorielle montante . . . . .	12
1.1.5 Coefficient binomial . . . . .	13
1.1.6 Principe d'inclusion-exclusion . . . . .	13
1.1.7 Dénombrement des injections . . . . .	14
1.1.8 Dénombrement des surjections . . . . .	15
1.2 Fonctions génératrices . . . . .	15
1.3 Log-concavité et unimodularité . . . . .	18
1.4 Permutations . . . . .	19
1.5 Nombres de Stirling et nombres de Bell . . . . .	21
1.5.1 Partition et Nombres de Stirling de deuxième espèce . . . . .	21
1.5.2 Nombres de Bell . . . . .	23
1.5.3 Nombres $r$ -Stirling de deuxième espèce . . . . .	24
1.5.4 Nombres $r$ -Bell . . . . .	26

1.5.5	Permutations et nombres de Stirling de première espèce . . . . .	26
1.5.6	Nombres r-Stirling de première espèce . . . . .	28
1.6	Suites de type binomial . . . . .	29
1.6.1	Opérateur . . . . .	29
1.6.2	Suites polynomiales de type binomial . . . . .	30
1.7	Graphe . . . . .	31
1.7.1	Définitions . . . . .	31
1.7.2	Voisinage et connexité . . . . .	32
1.7.3	Classes particulières de graphes . . . . .	33
1.7.4	Coloration . . . . .	33
1.7.5	Opérations sur les graphes . . . . .	34
1.8	Polynômes de partition . . . . .	34
1.8.1	Système héréditaire . . . . .	34
1.8.2	Polynôme de partition . . . . .	35
1.8.3	$\sigma$ -polynôme d'un graphe . . . . .	35
1.8.4	Polynômes de Bell exponentiels . . . . .	37
1.8.5	Polynômes de Touchard . . . . .	38
1.8.6	Polynôme chromatique . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Polynômes de Touchard, Polynômes partiels de Bell et Polynômes de type binomial</b>	<b>43</b>
2.1	Introduction . . . . .	43
2.2	Notations et hypothèses . . . . .	44
2.3	Principaux résultats . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Nombres <math>(r_1, \dots, r_p)</math>-Stirling de deuxième espèce</b>	<b>53</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.2	Nombres $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce . . . . .	54
3.2.1	Relations récurrentes combinatoires . . . . .	54

3.2.2	Fonctions génératrices des nombres $(r, s)$ -Stirling . . . . .	59
3.2.3	Polynômes $(r, s)$ -Bell . . . . .	61
3.2.4	Identités et conséquences . . . . .	62
3.3	Nombres $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce . . . . .	66
3.3.1	Introduction . . . . .	66
3.3.2	Relations récurrentes combinatoires . . . . .	67
3.3.3	Identités et conséquences . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Polynômes <math>(r_1, \dots, r_p)</math>-Bell</b>	<b>79</b>
4.1	Introduction . . . . .	79
4.2	Log-concavité des nombres $\mathbf{r}_p$ -Stirling . . . . .	81
4.3	Réurrences généralisées et conséquences . . . . .	85
4.4	Fonctions génératrices ordinaires . . . . .	91
4.5	Fonctions génératrices du nombre $\mathbf{r}_p$ -Bell ordonné . . . . .	92
4.6	Réurrence pour les polynômes $\mathbf{r}_p$ -Bell ordonnés . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Restrictions des nombres de Stirling de deuxième espèce</b>	<b>102</b>
5.1	Introduction . . . . .	102
5.2	Définitions . . . . .	102
5.3	Relations récurrentes et quelques conséquences . . . . .	103
5.4	Application au graphe $K_{r_1} \cup \dots \cup K_{r_p} \cup O_n$ . . . . .	109
5.5	Application au graphe $K_{r_1, \dots, r_p} \cup O_n$ . . . . .	112
5.6	Application au graphe $T_{r_1} \cup \dots \cup T_{r_p} \cup O_n$ . . . . .	115
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>118</b>

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents qui ont toujours tout donné pour que je fasse des études. J'exprime aussi ma profonde gratitude à ma **femme Rachida** qui a su prendre en charge mes caprices et mon stress, sans elle cette thèse n'aurait jamais eu lieu.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse Monsieur le Professeur **Miloud MIHOUBI**. Je lui adresse mes plus sincères remerciements pour sa disponibilité à mon égard et pour ses précieux conseils.

Mes remerciements vont également à Messieurs les membres de jury qui m'ont honoré par leur acceptation d'en être membres.

Je n'aurais sans doute jamais achevé mes études sans le soutien, les encouragements permanents et les enseignements de mes anciens professeurs.

# Dédicace

*A la mémoire de mon cher **père** (décédé le 11 juillet 2016) dont la perte m'a laissé un très grand vide*

*A la mémoire de mon cher **beau père** Ammi Ahmed,*

*A ma femme bien aimée, Rachida*

*A mes chers fils Khaled, Youcef et Abdelfetah ainsi qu'à ma chère fille Amira  
je dédie ce modeste travail*

# Introduction

Parmi les polynômes de partition les plus connus en combinatoire énumérative, nous citons les **polynômes partiels de Bell** qui ont été introduits par Bell (en 1927) [8]. Ces polynômes ont été précédemment utilisé par Faa di Bruno (en 1855) [28] pour exprimer les dérivées des fonctions composées. Par la suite, ces polynômes ont trouvé de nombreuses applications en combinatoire, en théorie des probabilités et des statistiques, ainsi qu'en théorie des nombres. Ils ont aussi joué et continuent à jouer un rôle très important dans des différentes applications et dans la détermination de plusieurs propriétés et identités mathématiques. Pour plus d'informations sur ces polynômes voir par exemple [20, 23, 49, 50].

En 1939, Touchard [63] dans son étude de certaines permutations cycliques a introduit de nouveaux polynômes de partition qui ont été par la suite appelés polynômes de Touchard et classés dans la série d'extension des polynômes partiels de Bell. Quelques propriétés algébriques, combinatoires et probabilistiques de ces polynômes ont été étudiés par Touchard [63], Chrysaphinon [22], Charalambides [20] et Kuzmier et al. [41].

Toujours dans le but de généraliser les polynômes de partition et motivés par les travaux de Duncan [27], et en s'inspirant de la définition du polynôme de partition d'un système d'ensemble fini dans [64], nous sommes menés à définir le **polynôme de partition** selon le concept suivant :

Etant donné un ensemble fini  $V$  à  $n$  éléments (appelés sommets). Soit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(V)$  un sous ensemble de parties de  $V$ . Un **système héréditaire** est la donnée d'un couple  $(V, \mathcal{F})$  qui vérifie les conditions suivantes :

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$
2.  $V = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$
3. Si  $S \in \mathcal{F}$  et  $S' \subset S$  alors  $S' \in \mathcal{F}$ .

Les éléments de  $\mathcal{F}$  sont appelés les **indépendants** du système  $(V, \mathcal{F})$ . Dans la suite, nous représentons le système héréditaire  $(V, \mathcal{F})$  par l'ensemble de ses indépendants  $\mathcal{F}$ .

Le polynôme de partition associé à  $\mathcal{F}$ , noté  $\rho(\mathcal{F}, x)$ , est défini comme suit :

$$\rho(\mathcal{F}, x) = \sum_{i \geq 1} a_i(\mathcal{F}) x^i,$$

où  $a_i(\mathcal{F})$  est le nombre de partitions des sommets de  $V$  en  $i$  indépendants (éléments de  $\mathcal{F}$ ) non vides.

Ici une partition de l'ensemble  $V$  est une collection,  $\pi \subseteq \mathcal{F}$ , de sous ensembles non vides telle que

$$V = \bigcup_{A \in \pi} A.$$

Si nous prenons par exemple  $V = \{a, b, c\}$  et  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$  alors

$$\rho(\mathcal{F}, x) = x^3 + x^2 + x.$$

Il est facile de voir que l'ensemble des stables d'un graphe  $G = (V, E)$  (un stable est un ensemble de sommets sans arêtes) est un système héréditaire, nous l'appelons le **système héréditaire des stables**. Le polynôme de partition associé à ce système est connu dans la littérature sous le nom de  $\sigma$ -polynôme [38].

Les polynômes de partition généralisent plusieurs polynômes classiques tels que les polynômes de Bell, de Touchard, les  $\sigma$ -polynômes et ainsi que d'autres.

Un autre polynôme associé aux partitions d'un ensemble de sommets d'un graphe est le polynôme chromatique d'un graphe  $G = (V, E)$ , défini par

$$P(G, x) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i(\mathcal{F}) x^i,$$

où  $\mathcal{F}$  est le système héréditaire des stables de  $G$ ,  $x^i = x(x-1) \cdots (x-i+1)$  si  $i \geq 1$  et  $x^0 = 1$ .

Dans le cas du système héréditaire des stables, nous pouvons facilement remarquer que les deux polynômes ( $\sigma$ -polynôme et chromatique) ont respectivement les mêmes coefficients par rapport aux bases  $\{x^i\}_{i \geq 1}$  et  $\{x^{\dot{i}}\}_{i \geq 1}$ .

L'objectif de cette thèse est d'exploiter des polynômes de partition associés à des classes particulières de graphes afin de déduire des identités, des relations récurrentes ainsi que des propriétés d'unimodularité, log-concavité, fréquence de Polyà pour des nombres de Stirling restreints tels que les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce [52] et par la suite donner des preuves simples pour plusieurs propriétés des nombres  $r$ -Stirling citées dans [17].

Dans le premier chapitre nous présentons les éléments de base utilisés dans cette thèse, en rappelant les interprétations combinatoires, les fonctions génératrices et quelques propriétés de certaines suites telles que les suites de partition, les suites de permutation, les coefficients binomiaux ainsi que les notions de graphe, les polynômes de partition et les polynômes chromatiques.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons quelques relations entre les polynômes de Touchard, les polynômes partiels de Bell et les polynômes  $r$ -Bell. Par la suite nous exploitons ces relations et les polynômes de type binomial afin de dériver certaines identités et relations relatives aux polynômes de Touchard.

En 1984, Broder [17] a introduit et étudié le nombre  $r$ -Stirling de deuxième espèce  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$ , qui compte le nombre de partitions de l'ensemble  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  sous ensembles non vides (appelés blocs) tels que les  $r$  premiers éléments soient dans des blocs différents. Les polynômes  $r$ -Bell qui lui sont associés ont été introduits et étudiés (en 2011) par Mezö [45].

Dans le troisième chapitre nous avons introduit et étudié les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p}$ , qui comptent le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  sous ensembles non vides (appelés blocs) tels que les éléments de chacun des  $p$  sous ensembles disjoints  $R_1, \dots, R_p$  de  $[n]$ , soient, respectivement, dans des blocs différents.

Ce chapitre a été motivé par les travaux de Mezö sur les polynômes  $r$ -Bell [45] ainsi que ceux de Mihoubi et al. sur les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce [52], dans lesquels ils ont établi

1. la log-concavité des nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de second espèce [43],
2. des relations récurrentes généralisées pour les polynômes  $(r_1, \dots, r_p)$ -Bell [43] , et
3. les fonctions génératrices ordinaires associées à ces nombres et à ces polynômes.

Dans notre contribution, nous donnons plus de propriétés sur les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce et les polynômes  $\mathbf{r}_p$ -Bell, (ici  $\mathbf{r}_p$  désigne le vecteur  $(r_1, \dots, r_p)$ ).

Dans le quatrième chapitre, nous montrons que la suite  $\left( \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} ; 0 \leq k \leq n + |\mathbf{r}_{p-1}| ; |\mathbf{r}_{p-1}| = \sum_{i=1}^{p-1} r_i \right)$  est strictement log-concave et nous donnons aussi une approximation au nombre  $\left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour un  $k$  fixé et nous écrivons  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  dans la base

$$\{B_{n+k}(z; \mathbf{r}_p) : 0 \leq k \leq |\mathbf{r}_{p-1}|\} \text{ et } B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p),$$

et dans la famille des bases

$$\{z^j B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p) : 0 \leq j \leq n\}.$$

Comme conséquences, nous donnons des identités pour les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce et à la fin du chapitre, nous donnons les fonctions génératrices horizontales associées aux nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce et les fonctions génératrices ordinaires associées aux polynômes  $\mathbf{r}_p$ -Bell.

Au cinquième chapitre nous établissons une relation entre les polynômes chromatiques de certaines classes de graphes et les nombres de Stirling de deuxième espèce (restreints). Nous introduisons aussi d'autres variétés des nombres de Stirling de deuxième espèce qui expriment le nombre de partitions soumis à des contraintes et nous relierons ces nombres aux polynômes chromatiques de certaines classes particulières de graphes [44] et nous déduisons par la suite quelques propriétés combinatoires. Pour un graphe donné  $G = (V, E)$  d'ordre  $n \geq 1$ , l'expression du polynôme chromatique sous forme factorielle est donnée par  $P(G, \lambda) = \sum_{i=\chi(G)}^n \alpha_i(G) (\lambda)^{\underline{i}}$ , voir [26, Thm. 1.4.1], avec  $(\lambda)^{\underline{i}} = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - i + 1)$  si  $i \geq 1$  et  $(\lambda)^{\underline{0}} = 1$ ,  $\alpha_i(G)$  est le nombre de partitions de l'ensemble des sommets,  $V$ , en  $i$  ensembles indépendants (c'est à dire, deux sommets adjacents dans  $G$  n'appartiennent pas au même bloc). Nous notons  $\chi(G)$  le nombre chromatique de  $G$ .

Le contenu de ce chapitre a été motivé par les résultats de Duncan et al. [27] sur les nombres de Stirling de deuxième espèce associés aux graphes et ceux par Mihoubi et al. [52, 43] sur les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce. Etant donné un graphe quelconque  $H$ , nous donnons une relation récurrente aux coefficients  $\alpha_k(G \cup H)$  pour certaines classes particulières de graphes  $G$  et quelques résultats sur la log-concavité et la fréquence de Pólya pour des suites relatives à ces coefficients.

Nous terminons cette thèse par une conclusion et des perspectives.

Cette thèse a fait l'objet de divers travaux publiés et communications :

1. **M. S. Maamra** and M. Mihoubi, The  $(r_1, \dots, r_p)$ -Bell polynomials. *Integers* 14 (2014) Article A34.
2. **M. S. Maamra** and M. Mihoubi, Note on some restricted Stirling numbers of the second kind, *Comptes Rendus Mathématique*, Volume 354, Issue 3, March 2016, 231–234.
3. M. Mihoubi and **M. S. Maamra**, Touchard polynomials, partial Bell Polynomials and polynomials of binomial type. *J. Integer Seq.* 14 (2011), Article 11.3.1.
4. M. Mihoubi and **M. S. Maamra**, The  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling numbers of the second kind. *Integers* 12 (2012) Article A35.
5. **M. S. Maamra**, M. Mihoubi, Some applications of the chromatic polynomials : arXiv preprint, arXiv :0905045, 4 feb 2014.

6. **M. S. Maamra**, M. Mihoubi, The compositional inverses of remarkable power series, International Conference on Discrete Mathematics & Computer Science, "DIMACOS'11", May 5- 8, 2011, University Hassan II – Mohammedia- Casablanca, Maroc.
7. **M. S. Maamra**, Touchard polynomials and partial Bell polynomials, Congrès des Mathématiciens Algériens - CMA2012, 7 et 8 mars 2012, Université Badji Mokhtar, Annaba, Algérie.

# Chapitre 1

## Éléments de la combinatoire énumérative

### 1.1 Dénombrement

Ce chapitre est consacré aux notations et définitions que nous avons besoin dans les chapitres qui suivent. Elles sont principalement extraites des ouvrages [9, 20, 23].

Nous notons  $\delta_{k,r}$  le symbole de Kronecker est défini comme suit :

$$\delta_{k,r} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = r, \\ 0 & \text{si } k \neq r, \end{cases}$$

#### 1.1.1 r-permutation

**Définition 1.1** Soit  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  un ensemble à  $n$  objets distincts. Pour  $0 \leq r \leq n$ , une  $r$ -permutation de  $[n]$  est la façon d'arranger  $r$  objets de  $[n]$  en une liste. Lorsque  $r = n$ , une  $n$ -permutation est simplement appelée une permutation.

Le nombre de  $r$ -permutations de  $[n]$ , noté  $P_r^n$  vaut

$$P_r^n = n(n-1) \cdots (n-r+1).$$

Si nous utilisons la notation factorielle  $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ , alors

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Par convention, nous posons  $0! = 1$ . Nous notons  $P_0^n = 1$  et  $P_n^n = n!$ .

### 1.1.2 r-combinaison

**Définition 1.2** Soit  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  un ensemble à  $n$  objets distincts. Pour  $0 \leq r \leq n$ , une  $r$ -combinaison de  $[n]$  est un sous ensemble de  $[n]$  à  $r$  éléments.

Le nombre de  $r$ -combinaisons d'un ensemble  $[n]$  vaut

$$\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

En particulier

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1, \\ \binom{n}{n} &= 1. \end{aligned}$$

### 1.1.3 Factorielle descendante

**Définition 1.3** Soient  $x$  un nombre réel ou complexe et  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction **factorielle descendante** d'ordre  $n$ , notée  $(x)^{\underline{n}}$ , est définie par :

$$(x)^{\underline{n}} = x(x-1) \cdots (x-n+1) \quad \text{si } n \geq 1 \quad \text{et } x^{\underline{0}} = 1.$$

Notons que pour  $x, y \in \mathbb{C}$  et  $k, r \in \mathbb{Z}$ , on a

$$x^{\underline{k+r}} = x^{\underline{k}}(x-k)^{\underline{r}} \quad \text{et} \quad (x+n-1)^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}}$$

et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous posons

$$(x)^{\overline{-k}} = \frac{1}{(x+k)^{\underline{k}}}.$$

### 1.1.4 Factorielle montante

**Définition 1.4** Soient  $x$  un nombre réel ou complexe et  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction **factorielle montante** d'ordre  $n$ , notée  $(x)^{\overline{n}}$ , est définie par :

$$(x)^{\overline{n}} = x(x+1) \cdots (x+n-1) \quad \text{si } n \geq 1 \quad \text{et } (x)^{\overline{0}} = 1.$$

Nous avons

$$(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n (x)^{\overline{n}} \quad \text{et} \quad (-x)^{\overline{n}} = (-1)^n (x)^{\underline{n}}.$$

### 1.1.5 Coefficient binomial

**Définition 1.5** Soient  $x$  un nombre réel ou complexe et  $n \in \mathbb{N}$ , le coefficient binomial, noté  $\binom{x}{n}$ , est défini par :

$$\binom{x}{n} = \frac{(x)_n}{n!}.$$

La **formule binomiale** et l'**identité de Vandermonde** [3] sont données respectivement par :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} x^k y^{n-k},$$

et

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)^k (y)^{n-k}.$$

**Définition 1.6** Soient  $k_1, \dots, k_m, m \geq 1$  des entiers relatifs, nous définissons le coefficient multinomial, noté  $\binom{k_1 + \dots + k_m}{k_1, \dots, k_m}$ , par :

$$\binom{k_1 + \dots + k_m}{k_1, \dots, k_m} = \frac{(k_1 + \dots + k_m)!}{k_1! \dots k_m!} \quad \text{si } k_i \geq 0, i \in [m] \quad \text{et } 0 \text{ ailleurs.}$$

Ce coefficient est une généralisation du coefficient binomial et apparaît dans l'identité suivante :

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{k_1 + \dots + k_m}{k_1, \dots, k_m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}.$$

### 1.1.6 Principe d'inclusion-exclusion

En combinatoire, le principe d'inclusion-exclusion (**PIE**) permet d'exprimer le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une réunion finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Il est une conséquence de la formule de développement de produit suivant

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \left( \prod_{i \in I} x_i \right). \quad (1.1)$$

**Théorème 1.7** Pour toute collection  $A_1, \dots, A_n$  d'ensembles finis, nous avons :

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

**Preuve.** Pour prouver le PIE, soit  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  un ensemble fini et soit l'ensemble  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  et posons  $f_i : A \rightarrow \{0, 1\}$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $A_i$ , c'est à dire

$$f_i(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout  $a \in A$ , nous avons  $\prod_{i=1}^n (1 - f_i(a)) = 0$  et, nous appliquons la formule (1.1) en posant  $x_i = -f_i(a)$ , nous obtenons

$$\sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left( \prod_{i \in I} f_i(a) \right) = 0.$$

Par sommation sur  $a \in A$  de ces égalités, nous obtenons :

$$0 = \sum_{a \in A} \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left( \prod_{i \in I} f_i(a) \right) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left( \sum_{a \in A} \prod_{i \in I} f_i(a) \right). \quad (1.2)$$

Il suffit maintenant de remarquer que le produit  $\prod_{i \in I} f_i(a)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $\bigcap_{i \in I} A_i$ , nous obtenons donc l'égalité

$$\sum_{a \in A} \prod_{i \in I} f_i(a) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

En particulier, pour  $I = \emptyset$ , nous posons par convention  $\prod_{i \in \emptyset} f_i(a) = 1$ . Par conséquent

$$\sum_{a \in A} \prod_{i \in \emptyset} f_i(a) = \sum_{a \in A} 1 = |A|.$$

De l'équation (1.2) nous déduisons que

$$|A| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

□

### 1.1.7 Dénombrement des injections

Nous rappelons que le nombre des applications de  $[n]$  dans  $[k]$  est  $k^n$ .

Soit  $I([n], [k])$ , l'ensemble des applications injectives de  $[n]$  dans  $[k]$ . Si  $n > k$  cet ensemble est vide. Si  $n = 0$ , on convient qu'il existe une application injective (et une seule) de

l'ensemble vide dans  $[k]$ ; son image est vide. Il est clair que  $I([n], [k])$  ne dépend que de  $n$  et  $k$ . Désormais, nous supposons que  $n \leq k$  et posons

$$I(n, k) = |I([n], [k])|.$$

Nous avons  $k$  choix pour l'image de 1,  $k - 1$  choix pour l'image de 2, et ainsi de suite jusqu'à  $n$  pour lequel on a  $k - n + 1$  choix pour son image. Donc le nombre d'applications injectives d'un ensemble à  $n$  éléments dans un ensemble à  $k$  éléments ( $k \geq n$ ) est

$$I(n, k) = k(k-1) \cdots (k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!} = (k)_n.$$

### 1.1.8 Dénombrement des surjections

Notons  $\sum([n], [k])$  l'ensemble des applications surjectives de  $[n]$  dans  $[k]$ . Supposons que  $k \leq n$  sinon l'ensemble est vide.

Nous utilisons le principe d'inclusion-exclusion pour énumérer le nombre d'applications  $[n] \rightarrow [k]$  ( $k \leq n$ ) qui ne sont pas surjectives. A cet effet, pour  $1 \leq i \leq k$ , notons  $A_i$  l'ensemble des applications  $[n] \rightarrow [k]$  telles que  $i$  n'est pas atteint par l'application. Il est clair que pour des entiers  $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$ , on a  $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = (k-j)^n$ , car chaque élément de  $[n]$  peut être affecté à un des  $k-j$  entiers de  $[k]$  autorisés. Ainsi, d'après le principe d'inclusion exclusion, si on note  $\mathbf{Surj}(n, k) = |\sum([n], [k])|$ , nous aurons

$$\begin{aligned} k^n - \mathbf{Surj}(n, k) &= \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\mathbf{Surj}(n, k) = k^n - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

Pour plus de détails voir [29].

## 1.2 Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices sont utilisées pour :

- représenter efficacement des suites en codant les termes d'une suite comme coefficients des puissances d'une variable  $x$  dans une série formelle ;
- résoudre de nombreux types de problèmes d'énumération, tels que le nombre de façons de sélectionner ou de distribuer des objets de différentes sortes, sous réserve d'une variété de contraintes ;
- résoudre les relations de récurrence en traduisant une telle relation entre les termes d'une suite en une équation impliquant une fonction génératrice. Cette équation peut alors être résolue pour trouver une forme explicite de la fonction génératrice. A partir de cette forme, les coefficients de la fonction génératrice peuvent être trouvés, et par la suite, résoudre la relation de récurrence initiale ;
- prouver des identités combinatoires en tirant partie des relations relativement simples entre les fonctions qui peuvent être traduites en identités impliquant les termes de la suite.
- pour étudier de nombreuses propriétés des suites, telles que leur utilisation pour établir des formules asymptotiques des termes d'une suite.

**Définition 1.8** Soit  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes et soit  $x$  une indéterminée sur  $\mathbb{C}$ .

Une *série formelle* sur  $\mathbb{C}$  à une indéterminée  $x$  est l'expression :

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

où  $a_0, a_1, \dots$  sont des nombres réels

Si  $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , alors  $a_n$  le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de  $A(x)$ , pour lequel nous écrivons

$$a_n = [x^n] A(x).$$

Dans cette thèse, nous considérons seulement les séries formelles d'indice non négatif, c'est à dire  $a_k = 0$  pour tout  $k < 0$ . Le coefficient  $a_0$  est appelé le coefficient constant de la série formelle  $A(x)$  et nous écrivons

$$a_0 = A(0).$$

L'ensemble des séries formelles sur  $\mathbb{C}$  est désigné par  $\mathbb{C}[[x]]$ .

**Définition 1.9** Une série formelle  $A(x)$  est dite **réversible** s'il existe une série formelle notée  $A^{-1}(x)$  (appelée **réciroque** de  $A$ ) telle que

$$A(A^{-1}(x)) = A^{-1}(A(x)) = x.$$

**Définition 1.10** La fonction génératrice **ordinaire** de la suite  $\{a_0, a_1, \dots, a_k, \dots\}$  des nombres réels est la série formelle :

$$O(a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés importantes sur les séries formelles qui seront utilisées dans le traitement des fonctions génératrices.

**Proposition 1.11** Soient  $O(a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  et  $O(b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ . Alors

$$O(a_k) + O(b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k = O(a_k + b_k), \quad (1.3)$$

et

$$O(a_k) \times O(b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) x^k = O \left( \left( \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) \right). \quad (1.4)$$

**Définition 1.12** La fonction génératrice **exponentielle** de la suite  $\{a_0, a_1, \dots, a_k, \dots\}$  des nombres réels est la série formelle

$$E(a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} = O\left(\frac{a_k}{k!}\right).$$

**Proposition 1.13** Soient  $E(a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$  et  $E(b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$ . Alors

$$E(a_k) + E(b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \frac{x^k}{k!} = E(a_k + b_k), \quad (1.5)$$

et

$$E(a_k) \times E(b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k \frac{k! a_j b_{k-j}}{j! (k-j)!} \right) \frac{x^k}{k!} = E \left( \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j} \right) \right). \quad (1.6)$$

Pour les **suites à double indices** nous avons les définitions suivantes :

**Définition 1.14** La fonction génératrice **verticale** de la suite  $\{a_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  est la série infinie

$$V_l(a_{n,m}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} \frac{x^k}{k!}.$$

La fonction génératrice **horizontale** de la suite  $\{a_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  est la série infinie

$$H_k(a_{n,m}) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} x^l.$$

La fonction génératrice **ordinaire double** (bivariée ordinaire) de la suite  $\{a_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  des nombres réels est la série infinie

$$OD(a_{k,j}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} a_{k,l} x^l z^k.$$

La fonction génératrice **exponentielle double** (bivariée exponentielle) de la suite  $\{a_{k,l}\}_{k,l \in \mathbb{N}}$  des nombres réels est la série infinie

$$ED(a_{k,j}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,l} \frac{x^l z^k}{l! k!}.$$

**Remarque 1.15** Dans le cas où la suite  $\{a_{k,l}\}_{k,l \in \mathbb{N}}$  est **triangulaire** (c'est à dire  $a_{k,l} = 0$  pour  $k < l$ ), il est plus commode d'utiliser la fonction génératrice suivante (dite **fonction génératrice mixte**) :

$$\Phi(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,l} x^l \frac{z^k}{k!}.$$

### 1.3 Log-concavité et unimodularité

La log-concavité et l'unimodularité sont des propriétés importantes des suites combinatoires et ont été trouvées dans de nombreuses applications et sujets tels que la combinatoire, l'algèbre, la géométrie et les statistiques, pour plus de détails voir par exemple [16, 61]

**Définition 1.16** Soit  $\{a_n\}$  une séquence de nombres réels positifs. Elle est dite :

- Unimodale si  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_d \geq \dots \geq a_n$  pour un certain  $d \in \mathbb{N}^*$
- Log-concave si  $a_{i+1}^2 \geq a_i a_{i+2}$  pour tout  $0 \leq i \leq n$
- Strictement log-concave si  $a_{i+1}^2 > a_i a_{i+2}$  pour tout  $0 \leq i \leq n$

La log-concavité d'une suite  $\{a_n\}$  est équivalente à la concavité de la suite  $\{\log a_n\}$ , i.e.

$$a_{i+1}^2 \geq a_i a_{i+2} \iff \log a_{i+1} \geq \frac{\log a_i + \log a_{i+2}}{2}.$$

**Remarque 1.17** Il est connu que pour tout entier  $n$ , la suite de terme général  $\binom{n}{k}$  est log-concave et que le produit de deux suites positives log-concaves est une suite log-concave.

**Définition 1.18** Soit  $q$  un indéterminé et  $\{f_n(q)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes en  $q$ . Si pour  $n \geq 1$ , les coefficients du polynôme  $f_n^2(q) - f_{n-1}(q)f_{n+1}(q)$  sont non négatifs ( $\geq 0$ ), nous disons que  $\{f_n(q)\}_{n \geq 0}$  est  **$q$ -log-concave**.

La  $q$ -log-concavité des polynômes joue un rôle important dans la preuve de la log-concavité des suites combinatoires (voir [66]).

**Proposition 1.19** (Inégalité de Newton [33, p. 104]) Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des nombres réels. Si tous les zéros du polynôme  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  sont des réels, alors les coefficients de  $P$  satisfont à l'inégalité suivante :

$$a_i^2 \geq \left(1 + \frac{1}{i}\right) \left(1 + \frac{1}{n-i}\right) a_{i+1} a_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

**Définition 1.20** Une suite de nombres réels  $\{a_k\}_{k \geq 0}$  est appelée **une suite de fréquence de Polya** (ou une suite de **PF**) si la matrice infinie  $(a_{j-i})_{i,j=0}^{\infty}$  est totalement positive (c'est à dire tous les mineurs ont un déterminant non négatif) où nous adoptons la convention que  $a_k = 0$  pour  $k < 0$ . Ce concept est étendu à des suites finies en complétant la suite avec des termes nuls

**Proposition 1.21** (Caractérisation de Aissen-Schoenberg-Whitney) [4] : Une suite finie  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  est une suite de PF si et seulement si toutes les racines du polynôme  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$  sont réelles.

Les racines de la fonction génératrice ordinaire d'une suite finie jouent un rôle important dans l'étude de la log-concavité.

Une approche classique pour prouver la log-concavité d'une suite finie est d'utiliser l'inégalité de Newton [33]. En particulier, à partir de cette inégalité (1.19), une suite de PF est nécessairement log-concave. Pour plus de détails sur les suites de PF, voir [35].

## 1.4 Permutations

**Définition 1.22** Une permutation  $\sigma$  d'un ensemble fini  $C$  est une bijection

$$\sigma : C \rightarrow C.$$

**Définition 1.23** On appelle orbite de  $c \in C$  d'une permutation  $\sigma$ , le sous ensemble de  $C$  contenant les éléments  $c, \sigma(c), \sigma^2(c), \dots, \sigma^{k-1}(c)$ , où  $k$  est le plus petit entier  $\geq 1$  satisfaisant  $\sigma^k(c) = c$ , appelé la longueur de l'orbite. Si  $k = 1$ , on dit que  $c$  est un point fixe.

**Définition 1.24** Une permutation est dite cyclique si l'orbite de tout élément de  $C$  est  $C$ , c'est à dire

$$C = \{c, \sigma(c), \sigma^2(c), \dots, \sigma^{n-1}(c)\}, \quad n = |C|.$$

En général, toute permutation  $\sigma$  peut être décomposée en cycles ou en permutations cycliques, c'est à dire en orbites de  $\sigma$  formant une partition  $\Pi$  de  $C$  de telle sorte que chaque restriction  $\sigma_B$  de  $\sigma$ ,  $B \in \Pi$  est une permutation cyclique. La partition en orbites est appelée partition sous jacente à  $\sigma$  et on note  $p(\sigma) = \Pi$ .

Lorsque l'ensemble  $C$  est totalement ordonné  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , il existe plusieurs façons de faire correspondre à  $\sigma$  une liste ou ordre total sur  $C$  :

$$\sigma \rightarrow \sigma(c_1) \sigma(c_2) \dots \sigma(c_n).$$

La seconde représentation consiste d'abord à donner la représentation d'une permutation cyclique. Si  $\sigma$  est cyclique, le plus petit élément de  $C$  est placé en premier sur la liste, puis par ses images  $\sigma$

$$\sigma \rightarrow c_1 \sigma(c_1) \sigma^2(c_1) \dots \sigma^{n-1}(c_1).$$

Ainsi, une permutation cyclique correspond à un ordre linéaire dont le premier élément est le minimum de  $C$ .

Le nombre de permutations cycliques est alors  $(n-1)!$ . Si  $\sigma$  se décompose en cycles

$$\sigma = \{\sigma_B\}_{B \in \Pi}$$

les blocs de  $\Pi$  sont d'abord triés dans l'ordre décroissant et à chaque cycle est attribué son ordre linéaire correspondant, et ensuite les listes sont juxtaposées dans l'ordre de blocs :

$$\sigma \rightarrow \sigma_{B_k} \sigma_{B_{k-1}} \dots \sigma_{B_1}.$$

Par exemple, la permutation  $(c_2, c_4, c_1)(c_5, c_9, c_3), (c_7, c_6, c_8)$  correspond à la liste

$$687359124$$

qui est une bijection. Par exemple à la liste 798564132 correspond la permutation  $\sigma = (798)(56)(4)(132)$ , qui est obtenu selon la première obtention des minimums locaux en traversant la liste de gauche à droite, puis décomposer la liste en cycles, chacun avec des éléments entre deux minimums locaux :

$$798564132 \rightarrow 798|56|4|132 \rightarrow (798)(56)(4)(132)$$

Dans ce qui suit nous posons  $C = [n]$  et  $S_n$  l'ensemble des permutations de  $[n]$ .

**Définition 1.25** Soit  $\sigma \in S_n$ . Un ensemble  $T$  de  $[n]$  de cardinalité deux (à deux éléments) est appelé une transposition de  $\sigma$  si nous transposons l'ordre de ces deux éléments, à savoir si  $i, j \in T, i < j \implies \sigma(i) > \sigma(j)$ .

**Définition 1.26** La signature d'une permutation, notée  $\text{sign}$ , est donnée par la parité du nombre de ses transpositions.

$$\text{sign}(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in P_2[n]} I(\sigma, \{i, j\})$$

où

$$I(\sigma, \{i, j\}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \{i, j\} \text{ est une transposition de } \sigma \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que

$$I(\sigma\tau, \{i, j\}) = I(\sigma, \{\tau(i), \tau(j)\}) I(\tau, \{i, j\})$$

et par la suite

$$\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau).$$

Nous déduisons alors que la signature

$$\text{sign} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$$

est une fonction multiplicative.

La signature du cycle  $(12 \dots n)$  est  $(-1)^{n-1}$  puisqu'il contient  $n - 1$  transpositions. Pour un cycle quelconque  $\sigma = (1, \sigma(1), \dots, \sigma^{n-1}(1))$  il existe une permutation  $\eta$  telle que

$$(12 \dots n) = \eta\sigma\eta^{-1}.$$

Par la multiplicativité de la signature, nous avons alors  $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{n-1}$  pour un cycle de longueur  $n$ .

La signature d'une permutation de  $S_n$  ne dépend donc que du nombre  $k$  de ses cycles

$$\text{sign}(\sigma) = \prod_{B \in \Pi} (-1)^{|B|-1} = (-1)^{n-k}.$$

## 1.5 Nombres de Stirling et nombres de Bell

### 1.5.1 Partition et Nombres de Stirling de deuxième espèce

**Définition 1.27** une partition d'un ensemble  $C$  est une collection de sous ensembles, non vides, de  $C$ , deux à deux disjoints et dont l'union est  $C$ . Les éléments d'une partition sont appelés des blocs. Une partition à  $k$  blocs est appelée une  $k$ -partition.

Considérons l'ensemble  $\Pi(C)$  de toutes les partitions de l'ensemble  $C$ . Si  $C = \emptyset$ ,  $\Pi(\emptyset)$  se compose d'un seul élément, et est dit la partition vide.

**Définition 1.28** Une partition de l'ensemble  $[n] = \{1, \dots, n\}$  est dite de type  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  si elle contient :

$\lambda_1$  blocs de cardinalité 1

$\lambda_2$  blocs de cardinalité 2

$\vdots$

$\lambda_n$  blocs de cardinalité  $n$

**Définition 1.29** Le nombre de Stirling de deuxième espèce, noté  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ , où  $n$  et  $k$  sont des entiers non négatifs, est défini comme étant le cardinal de l'ensemble des partitions à  $k$  blocs sur un ensemble à  $n$  éléments. En d'autres termes :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = |\Pi_k([n])|,$$

où  $\Pi_k([n])$  désigne l'ensemble des partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  blocs.

**Proposition 1.30** Le nombre de partitions de type  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  d'un ensemble à  $n$  éléments (où  $n = \sum_{i=1}^n i\lambda_i$ ) est

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1} \dots (n!)^{\lambda_n} \lambda_1! \dots \lambda_n!}$$

**Proposition 1.31** Le nombre de Stirling de deuxième espèce  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  est donné par l'expression

$$\sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = k, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n} \frac{n!}{(1!)^{\lambda_1} \dots (n!)^{\lambda_n} \lambda_1! \dots \lambda_n!}.$$

**Proposition 1.32** [20] Les nombres de Stirling de deuxième espèce  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  satisfont aux conditions initiales et à la formule récursive suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} &= 1, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} &= 0, \quad n > 0, \\ \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$n = 1$	1					
$n = 2$	1	1				
$n = 3$	1	3	1			
$n = 4$	1	7	6	1		
$n = 5$	1	15	25	10	1	
$n = 6$	1	31	90	65	15	1

FIG. 1.1 – Nombre de Stirling de deuxième espèce

**Proposition 1.33** [20] *Pour tout  $k \geq 0$ , les fonctions génératrices exponentielle et ordinaire des nombres de Stirling de deuxième espèce sont données respectivement par*

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = x^k \prod_{j=0}^{k-1} (1 - jx)^{-1}.$$

Le tableau suivant nous donne certaines valeurs du nombre de Stirling de deuxième espèce

### 1.5.2 Nombres de Bell

**Définition 1.34** *Le nombre de Bell, noté  $B_n$ , compte le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments.*

Puisque  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ , pour  $0 \leq k \leq n$ , compte le nombre de partitions de  $[n]$  en  $k$  sous ensembles disjoints, nous obtenons immédiatement la relation suivante :

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Les nombres de Bell vérifient la relation récurrente suivante :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad B_0 = 1.$$

Le tableau suivant nous donne certaines valeurs du nombre de Bell

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$B_n$	1	2	5	15	52	203	877	4140

FIG. 1.2 – Nombre de Bell

**Proposition 1.35** *Pour tout  $k \geq 0$ , les fonctions génératrices exponentielle et ordinaire des nombres de Bell sont données respectivement par*

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} B_n x^n = \sum_{k \geq 0} x^k \prod_{j=0}^k (1 - jx)^{-1}.$$

### 1.5.3 Nombres $r$ -Stirling de deuxième espèce

Le nombre  $r$ -Stirling de deuxième espèce, noté  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$ , compte le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  blocs non vides et disjoints de telle sorte que les éléments  $1, 2, \dots, r$  soient dans des blocs différents. Broder dans [17] a donné des interprétations combinatoires et quelques propriétés algébriques à ces nombres. Il a aussi établi plusieurs identités, des relations récurrentes ainsi que les fonctions génératrices associées à ces nombres.

**Proposition 1.36** [17, Thms. 2 et 4] *Les nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce vérifient les propriétés suivantes :*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = 0, \quad n < r \quad (1.7)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \delta_{k,r}, \quad n = r$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r; \quad n > r \quad (1.8)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}; \quad n \geq r \geq 1 \quad (1.9)$$

**Proposition 1.37** [17, (39)] *La fonction génératrice mixte du nombre  $r$ -Stirling de deuxième espèce est :*

$$\sum_{n, k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} z^k = \exp(z(\exp t - 1) + rt) \quad (1.10)$$

Les deux tableaux suivants nous donnent respectivement certaines valeurs des nombres 2-Stirling et 3-Stirling de deuxième espèce (nous avons utilisé la formule 1.8)

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_2$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
$n = 2$	1					
$n = 3$	2	1				
$n = 4$	4	5	1			
$n = 5$	8	19	9	1		
$n = 6$	16	65	55	14	1	
$n = 7$	32	211	285	125	20	1

FIG. 1.3 – Nombre 2-Stirling de deuxième espèce

$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_3$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
$n = 3$	1					
$n = 4$	3	1				
$n = 5$	9	7	1			
$n = 6$	27	37	12	1		
$n = 7$	81	175	97	18	1	
$n = 8$	243	781	660	205	25	1

FIG. 1.4 – Nombre 3-Stirling de deuxième espèce

Plusieurs auteurs ont étudié ces nombres et ont donné leur rôle en probabilité, en approximations, en congruences et en d'autres domaines. Par exemple, Chrysaphinou [22] a introduit les polynômes de Touchard et leur relation avec les nombres  $r$ -Stirling ainsi que d'autres types de nombres, Hsu et al [34] ont étudié les propriétés et les approximations d'une famille de nombres de Stirling, Mezó [45, 46] a étudié les nombres  $r$ -Bell et le maximum des nombres  $r$ -Stirling. Mihoubi et al [51] ont donné des propriétés relatives aux nombres  $r$ -Stirling. D'autres résultats sur ces nombres ont été publiés dans [17, 20, 55]

#### 1.5.4 Nombres $r$ -Bell

Le nombre  $r$ -Bell, noté  $B_{n,r}$ , est le nombre de partitions d'un ensemble à  $n+r$  éléments tel que, dans chaque partition, les  $r$  premiers éléments sont dans des blocs différents. Ce nombre est donné par la formule [45] :

$$B_{n,r} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r.$$

Les nombres  $r$ -Bell vérifient la relation de récurrence suivante [18] :

$$B_{n,r+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{k,r}.$$

et admettent la fonction génératrice exponentielle donnée par [45, Thm. 3.1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r} \frac{z^n}{n!} = \exp(e^z - 1 + rz).$$

#### 1.5.5 Permutations et nombres de Stirling de première espèce

**Définition 1.38** Une permutation sur l'ensemble  $[n] = \{1, \dots, n\}$  est dite de type  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  si sa décomposition en cycles contient :

$\lambda_1$  cycles de cardinalité 1

$\lambda_2$  cycles de cardinalité 2

$\vdots$

$\lambda_n$  cycles de cardinalité  $n$

**Proposition 1.39** Le nombre de permutations de type  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$  sur un ensemble à  $n$  éléments (où  $n = \sum_{i=1}^n i\lambda_i$ ) est

$$\frac{n!}{(1)^{\lambda_1} \dots (n)^{\lambda_n} \lambda_1! \dots \lambda_n!}.$$

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$n = 1$	1					
$n = 2$	1	1				
$n = 3$	2	3	1			
$n = 4$	6	11	6	1		
$n = 5$	24	50	35	10	1	
$n = 6$	120	274	225	85	15	1

FIG. 1.5 – Nombre de Stirling de première espèce

**Définition 1.40** Soit  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  le nombre de permutations avec exactement  $k$  cycles (disjoints) sur un ensemble à  $n$  éléments. Alors

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = k, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n} \frac{n!}{(1)^{\lambda_1} \dots (n)^{\lambda_n} \lambda_1! \dots \lambda_n!}$$

ce nombre est dit le **nombre de Stirling de première espèce**.

**Proposition 1.41** [20] Pour tout  $n \geq k \geq 1$ , les nombres de Stirling de première espèce vérifient les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1, \\ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} &= 0, \quad n > 0, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} - (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Proposition 1.42** [17] Pour tout  $k \geq 0$ , les fonctions génératrices horizontale et verticale du nombre de Stirling de première espèce sont données respectivement par

$$\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = (x)^{\underline{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k [\log(1-x)]^k}{k!}.$$

Le tableau suivant nous donne certaines valeurs du nombre de Stirling de première espèce

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
$n = 3$	1					
$n = 4$	3	1				
$n = 5$	12	7	1			
$n = 6$	60	47	12	1		
$n = 7$	360	342	119	18	1	
$n = 8$	2520	2754	1175	245	25	1

FIG. 1.6 – Nombre 3-Stirling de première espèce

### 1.5.6 Nombres r-Stirling de première espèce

Pour tout entier positif  $r$  la quantité  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$  désigne le nombre de permutations sur l'ensemble  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  ayant exactement  $k$  cycles de telle sorte que les  $r$  premiers éléments de  $[n]$  soient dans des cycles distincts. La relation de récurrence est la même que celle des nombres de Stirling de première espèce.

**Proposition 1.43** *Pour tout  $n \geq k \geq 1$ , les nombres de r-Stirling de première espèce vérifient les propriétés suivantes.*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= 0 & \text{si } n < r, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \delta_{kr} & \text{si } n = r, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r & \text{si } n > r. \end{aligned}$$

Broder, dans son article [17], a démontré que :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \frac{x^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \left( \frac{1}{1-x} \right)^r \left( \log \left( \frac{1}{1-x} \right) \right)^k, \quad n \geq r \geq 0, \\ \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r x^k &= x^r (x+r)(x+r+1) \cdots (x+n-1), \quad n \geq r \geq 0. \end{aligned}$$

Les deux tableaux suivants nous donnent respectivement certaines valeurs des nombres 2-Stirling et 3-Stirling de première espèce

## 1.6 Suites de type binomial

Les suites de type binomial ont été introduites par Rota, Kahaner et Odlyzko en 1973 [57] et jouent un rôle important dans la théorie du calcul ombral [56]. En dehors du contexte du calcul ombral, les suites de polynômes de type binomial possèdent la propriété des suites qui sont complètement déterminées par leur valeur lorsqu'elles sont évaluées en un seul point. Plusieurs suites polynomiales importantes, telles que les polynômes d'Abel et les polynômes de Bell, sont de type binomial. Le point de départ sont les familles de polynômes de type binomial. Elles satisfont aux propriétés des puissances et à celles de l'identité binomiale.

### 1.6.1 Opérateur

Un opérateur sur les polynômes est une application linéaire

$$T : \mathbb{C}[[x]] \longrightarrow \mathbb{C}[[x]].$$

Puisque une suite polynomiale  $\{p_n(x)\}$  donne une base de  $\mathbb{C}[[x]]$ , un opérateur  $Q$  est déterminé par les valeurs  $Qp_n(x)$ .

L'opérateur **identité**  $I$  transforme tout polynôme à lui-même et si  $T$  est un opérateur, nous notons par convention  $T^0 = I$ .

Si  $a$  est un élément de  $\mathbb{C}$ , l'opérateur de décalage, noté  $E^a$ , est l'opérateur qui transforme un polynôme  $p(x)$  à  $p(x+a)$ . Nous écrivons  $E^1 = E$ .

Un opérateur  $Q$  est **shift-invariant** si  $QE^a = E^aQ$  pour tout élément  $a$  dans  $\mathbb{C}$ .

L'opérateur shift-invariant le plus familier est l'**opérateur de différenciation**  $D$ , défini par  $Dx^n = nx^{n-1}$ . L'opérateur  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$  est également shift-invariant.

Un opérateur  $Q : \mathbb{C}[[x]] \longrightarrow \mathbb{C}[[x]]$  est un opérateur **delta** si  $Q$  est Shift-invariant et  $Qx = c$ , où  $c$  est une constante non nulle.

**Proposition 1.44** [39] *Soit  $Q$  un opérateur delta et  $p(x)$  un polynôme de degré  $n$ . Alors  $Qp(x)$  est un polynôme de degré (exactement)  $n - 1$ .*

### 1.6.2 Suites polynomiales de type binomial

**Définition 1.45** Une suite de polynômes  $\{p_n(x)\}$  est dite de **type binomial** si elle satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ \deg(p_n) &= n, \\ p_n(x+y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y). \end{aligned}$$

**Remarque 1.46** A partir de l'identité binomiale nous pouvons déduire facilement que le terme constant du polynôme  $p_n(t)$  est nul pour tout  $n > 0$ .

**Lemme 1.47** Une famille de polynômes de type binomial  $\{p_n(x)\}$  est complètement déterminée par leurs valeurs au point 1. Autrement dit, si  $\{q_n(x)\}$  est une autre famille de polynômes de type binomial telle que pour tout  $n$ ,  $p_n(1) = q_n(1)$  alors les deux familles sont les mêmes, c'est à dire  $p_n(x) = q_n(x)$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Preuve.** Comme les deux familles satisfont à l'identité binomiale, alors pour tout  $j \geq 1$  nous avons,

$$\begin{aligned} p_n(j) &= p_n\left(\overbrace{1+1+\dots+1}^j\right) \\ &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_j=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_j} p_{k_1}(1) p_{k_2}(1) \cdots p_{k_j}(1) \\ &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_j=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_j} q_{k_1}(1) q_{k_2}(1) \cdots q_{k_j}(1) \\ &= q_n(j), \end{aligned}$$

nous obtenons donc  $p_n(x) = q_n(x)$ . □

**Théorème 1.48** [39] Soit  $\{p_n(x)\}$  une suite polynomiale et  $Q : \mathbb{C}[[x]] \longrightarrow \mathbb{C}[[x]]$  l'opérateur défini par  $Qp_n(x) = np_{n-1}(x)$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La suite  $\{p_n(x)\}$  est de type binomial.
2.  $Q$  est un opérateur delta.
3. L'opérateur  $Q$  est représenté par la série formelle :

$$Q = q(D) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{D^n}{n!},$$

où  $D$  est l'opérateur de différenciation et  $q(t)$  est une série formelle dont le terme constant est nul ( $a_0 = 0$ ) et  $a_1 \neq 0$ .

4. Les deux relations suivantes sont satisfaites et équivalentes :

$$\begin{aligned} e^{xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \frac{q(t)^n}{n!}, \\ e^{xf(t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

où  $f(t)$  et  $q(t)$  sont des séries formelles à terme constant nul et telles que  $f(q(t)) = q(f(t)) = t$ .

**Proposition 1.49** [39] Une famille de polynômes  $\{p_n(x)\}$  est de type binomial si et seulement si sa fonction génératrice exponentielle est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xF(t)}, \quad (1.11)$$

où  $F$  est une série formelle réversible.

A partir de cette proposition nous pouvons facilement déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 1.50** Les polynômes de type binomial  $(p_n(x))$  sont définis par la relation

$$\sum_{n \geq 0} p_n(x) \frac{t^n}{n!} = \left( \sum_{n \geq 0} p_n(1) \frac{t^n}{n!} \right)^x,$$

avec  $p_0(x) = 1$  et  $p_1(x) \neq 0$  pour  $x \neq 0$ .

## 1.7 Graphe

### 1.7.1 Définitions

Un graphe  $G = (V, E)$  est constitué de  $V$ , un ensemble non vide de **sommets** (ou nœuds) et  $E$ , une famille d'**arêtes** (qui représente des sous ensembles de  $V$  contenant un ou deux éléments). Chaque arête, notée  $uv$  ( $u$  et  $v$  sont des sommets du graphe), a un ou deux sommets qui lui sont associés, appelés ses extrémités. Une arête est dite **incidente** à ses extrémités.

L'ensemble des sommets  $V$  d'un graphe  $G$  peut être infini. Un graphe avec un ensemble de sommets infini ou un nombre infini d'arêtes est appelé un graphe infini, tandis qu'un

graphe avec un ensemble de sommets fini et un ensemble d'arêtes fini est appelé un graphe **fini**.

Dans cette thèse, nous allons considérer que tous les graphes sont finis.

Un graphe est dit **simple** si

- chaque arête est incidente à deux sommets différents et
- deux arêtes ne sont pas incidentes à la même paire de sommets

A noter que, dans un graphe simple, chaque arête est associée à une paire non ordonnée de sommets, et aucune autre arête n'est associée à cette même paire. Par conséquent, toute arête d'un graphe simple est associée à  $\{u, v\}$ , et nous pouvons dire aussi, sans confusion possible, que  $\{u, v\}$  est une arête du graphe.

Deux sommets  $u$  et  $v$  dans un graphe  $G$  sont appelés **adjacents** (ou **voisins**) dans  $G$  si  $u$  et  $v$  sont les extrémités d'une arête  $e$  de  $G$ .

La **réunion** de deux graphes simples  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  est le graphe simple dont l'ensemble des sommets soit  $V_1 \cup V_2$  et celui des arêtes  $E_1 \cup E_2$ . La réunion de  $G_1$  et  $G_2$  est désigné par  $G_1 \cup G_2$ .

### 1.7.2 Voisinage et connexité

Soit  $n$  un entier positif et  $G$  un graphe simple. Une **chaîne** de longueur  $n$  reliant le sommet  $u$  à  $v$  dans  $G$  est une séquence de  $n$  arêtes  $e_1, \dots, e_n$  de  $G$  pour laquelle il existe une séquence  $u = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = v$  de sommets tels que  $e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) a, pour extrémités les sommets  $x_{i-1}$  et  $x_i$ . Nous notons cette chaîne par sa séquence de sommets  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (parce que la liste de ces sommets détermine la chaîne d'une manière unique). La chaîne est dite un **cycle** si elle commence et se termine au même sommet, c'est à dire, si  $u = v$ , et a une longueur (le nombre de ses arêtes) supérieure à zéro. Un cycle ou une chaîne est dit(e) **simple** s'il (elle) ne contient pas la même arête plus d'une fois. Un graphe est dit **connexe** si pour toute paire de sommets  $(x, y)$  il existe une chaîne reliant  $x$  à  $y$ .

L'ensemble de tous les voisins d'un sommet  $v$  de  $G = (V, E)$ , noté  $N(v)$ , est appelé le **voisinage** de  $v$ . Si  $A$  est un sous-ensemble de  $V$ , nous notons  $N(A)$  l'ensemble de tous les sommets  $G$  qui sont adjacents à au moins un sommet dans  $A$ . Ainsi,  $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$ . Un sommet  $v$  du graphe  $G$  est dit **universel** si  $N(v) = V \setminus \{v\}$ .

### 1.7.3 Classes particulières de graphes

Un graphe **complet** sur  $n$  sommets, noté  $K_n$ , est un graphe simple qui contient exactement une arête entre chaque paire de sommets distincts. Un **arbre** à  $n$  sommets, noté  $T_n$ , est un graphe connexe sans cycle simple. Un graphe **vide** à  $n$  sommets, noté  $O_n$ , est un graphe sans arêtes.

Un sous-graphe d'un graphe  $G = (V, E)$  est un graphe  $H = (W, F)$ , où  $W \subseteq V$  et  $F \subseteq E$ . Un tel graphe  $H$  de  $G$  est un sous-graphe propre de  $G$  si  $H \neq G$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Le graphe induit par un sous-ensemble  $W$  de l'ensemble des sommets  $V$  est le graphe  $(W, F)$ , où l'ensemble des arêtes  $F$  contient une arête de  $E$  si et seulement si les deux extrémités de cette arête appartiennent à  $W$ . Un sous graphe d'un graphe  $G$  est dit un **stable** s'il ne contient pas d'arêtes. Une **clique** d'un graphe  $G$  est un sous graphe complet du graphe  $G$ .

Nous appelons graphe **biparti complet** tout graphe s'écrivant  $G = (X \cup Y, A)$ , où  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles de sommets disjoints et où  $A = \{xy, x \in X; y \in Y\}$ . Si nous posons  $p = |X|$  et  $q = |Y|$ , nous notons ce graphe  $K_{p,q}$ . En particulier le graphe  $K_{1,n}$  ( $n \geq 1$ ) est appelé un **graphe étoile**.

Plus généralement, le graphe à  $n$  sommets obtenu en partitionnant l'ensemble des sommets en  $p$  sous-ensembles disjoints  $V_1, \dots, V_p$  de cardinaux respectifs  $r_1, \dots, r_p$  (de sorte que  $V = V_1 \cup \dots \cup V_p$  et  $n = r_1 + \dots + r_p$ ) et en reliant entre eux tous les couples de sommets n'appartenant pas à un même  $V_i$  est appelé **graphe multiparti complet** correspondant à la partition  $r_1, \dots, r_p$  et noté  $K_{r_1, \dots, r_p}$ .

### 1.7.4 Coloration

Une  $k$ -coloration d'un graphe simple  $G = (V, E)$  est une application  $c$  de  $V$  dans  $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$  vérifiant

$$\{x, y\} \in E \implies c(x) \neq c(y),$$

c'est à dire, l'affectation d'une couleur à chaque sommet du graphe de sorte que deux sommets adjacents ne sont pas affectés de la même couleur.

Le **nombre chromatique** d'un graphe  $G = (V, E)$ , noté  $\chi(G)$ , est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour une coloration de ce graphe.

### 1.7.5 Opérations sur les graphes

**Ajout d'une arête** :  $a \in E$  étant une arête de  $G$ , nous posons

$$G + a = (V, E \cup \{a\}),$$

**Contraction d'une arête** : Soient  $G = (V, E)$  un graphe et une arête  $a \in E$ . La contraction de  $a$  signifie que nous contractons les deux sommets de  $a = xy$  en un seul nouveau sommet, puis nous enlevons toutes les arêtes multiples qui peuvent surgir par cette contraction. Le graphe résultant est noté  $G.a$ , et il est formellement défini comme suit :

$$G.e = (V', E')$$

où

$$V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{z\},$$

$$E' = \{e \in E : e \cap xy = \emptyset\} \cup \{zt : t \in V \setminus \{x, y\}, tx \in E \text{ ou } ty \in E\};$$

ici  $z \notin V$  désigne un nouveau sommet.

## 1.8 Polynômes de partition

### 1.8.1 Système héréditaire

**Définition 1.51** *Etant donné un ensemble fini  $V$  à  $n$  éléments (appelés sommets), et une famille de sous ensembles  $\mathcal{F} \subset 2^V$ . Le couple  $(V, \mathcal{F})$  est dit un système héréditaire si :*

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ,
2.  $V = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ ,
3. Si  $S \in \mathcal{F}$  et  $S' \subset S$  alors  $S' \in \mathcal{F}$ ,

*les éléments de  $\mathcal{F}$  sont appelés les indépendants du système héréditaire  $(V, \mathcal{F})$ .*

**Remarque 1.52** *Dans ce qui suit, nous exprimons le système héréditaire  $(V, \mathcal{F})$ , par l'ensemble  $\mathcal{F}$  de ses indépendants.*

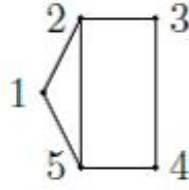


FIG. 1.7 – Graphe Maison

### 1.8.2 Polynôme de partition

**Définition 1.53** Le polynôme de partition associé à  $\mathcal{F}$ , noté  $\rho(\mathcal{F}, x)$ , est défini comme suit :

$$\rho(\mathcal{F}, x) = \sum_{i \geq 1} a_i(\mathcal{F}) x^i,$$

où  $a_i(\mathcal{F})$  est le nombre de partitions de l'ensemble des sommets  $V$ , en  $i$  indépendants non vides. Ici une partition de l'ensemble  $V$  est une collection  $\pi \subset \mathcal{F}$  de sous ensembles non vides telle que

$$V = \bigcup_{A \in \pi} A.$$

**Exemple 1.54** Soient  $V = \{a, b, c\}$  et  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ . Alors

$$\rho(\mathcal{F}, x) = x^3 + x^2 + x.$$

### 1.8.3 $\sigma$ -polynôme d'un graphe

L'ensemble des stables d'un graphe  $G = (V, E)$  (un stable est un ensemble de sommets sans arêtes) est un système héréditaire, noté  $\mathfrak{S}$  et on l'appelle aussi un système héréditaire des stables. Le polynôme de partition associé au système  $\mathfrak{S}$ , est connu dans la littérature sous le nom de  $\sigma$ -polynôme du graphe  $G$  [38]

$$\sigma(G, x) = \sum_{i=\chi(G)}^n a_i x^i,$$

où  $a_i$  est le nombre de partitions de l'ensemble  $V$  en  $i$  stables disjoints.

A titre d'exemple, et pour fixer les idées, supposons que  $G$  soit un graphe  $G = (V, E)$  avec  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $E = \{12, 23, 34, 45, 25\}$  (voir Fig. 1.7).

Dans ce graphe l'ensemble  $\mathfrak{S}$  des stables du graphe  $G$ , est donc

$$\mathfrak{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}.$$

Si nous notons  $\Pi_k(V)$  l'ensemble des partitions de l'ensemble  $V$  à  $k$  blocs, alors nous avons :

$$\begin{aligned}\Pi_3(V) &= \{\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}, \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3, 5\}\}, \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}\} \\ \Pi_4(V) &= \{\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}, \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}\}\} \\ &\quad \cup \{\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{5\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 5\}\}\} \\ \Pi_5(V) &= \{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}\}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$a_1 = |\Pi_1(V)| = 0, \quad a_2 = |\Pi_2(V)| = 0, \quad a_3 = |\Pi_3(V)| = 3, \quad a_4 = |\Pi_4(V)| = 4, \quad \text{et} \quad a_5 = |\Pi_5(V)| = 1.$$

Le  $\sigma$ -polynôme du graphe  $G$  est donc

$$\sigma(G, x) = 3x^3 + 4x^4 + x^5$$

Si  $G = O_n$  ( le graphe vide à  $n$  sommets), le  $\sigma$ -polynôme du graphe  $G$  n'est autre que le polynôme de Bell classique, c'est à dire

$$\sigma(G, x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Comme nous l'avons montré dans notre exemple, les partitions du système héréditaire des stables (d'un graphe  $G$ ) peuvent être énumérées, en les regroupant en fonction du nombre de blocs qu'elles contiennent. Par conséquent, pour tout  $\chi(G) \leq k \leq n$ , nous notons  $S(G, k)$  pour définir le nombre de partitions des sommets du graphe  $G$ , en exactement  $k$  blocs.

Bien sûr, pour un graphe vide  $O_n$ , le nombre  $S(G, k)$  n'est autre que le nombre de Stirling de deuxième espèce

$$S(G, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Si  $G = K_r \cup O_n$ , alors  $S(G, k)$  n'est autre que le nombre  $r$ -Stirling de deuxième espèce [17]

$$S(G, k) = \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k \end{matrix} \right\}_r.$$

Motivé par les résultats de Broder [17], nous avons étudié, dans cette thèse, le  $\sigma$ -polynôme du graphe  $K_{r_1} \cup \dots \cup K_{r_p} \cup O_n$ , ( $p$  entier) et nous l'avons baptisé, le polynôme  $(r_1, \dots, r_p)$ -Bell [43].

Ce travail nous a poussé à étudier les nombres associés à ce polynôme, dits les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce, qui généralisent les nombres de Stirling mentionnés ci-dessus.

### 1.8.4 Polynômes de Bell exponentiels

**Définition 1.55** Les polynômes **partiels (exponentiels) de Bell** sont les polynômes  $B_{n,k}(x_1, x_2, \dots)$  de nombre infini de variables  $x_1, x_2, \dots$ , définis par leur fonction génératrice verticale

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left( \sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!} \right)^k.$$

**Définition 1.56** Les polynômes **complets (exponentiels) de Bell** sont les polynômes  $A_n(x_1, x_2, \dots)$  définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x_1, x_2, \dots) \frac{t^n}{n!},$$

ou en d'autres termes, ils sont définis par

$$A_n(x_1, x_2, \dots) := \sum_{k=1}^n B_{n,k}(x_1, x_2, \dots), \quad n \geq 1, \quad \text{et} \quad A_0(x_1, x_2, \dots) := 1.$$

**Théorème 1.57** Les polynômes partiels de Bell,  $B_{n,k}(x_1, x_2, \dots)$ , admettent l'expression exacte :

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{x_1}{1!} \right)^{k_1} \left( \frac{x_2}{2!} \right)^{k_2} \dots,$$

où  $\pi(n, k)$  est l'ensemble de toutes les solutions  $(k_1, k_2, \dots)$  des entiers naturels tels que :

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots = k \quad \text{et} \quad k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots = n,$$

et on a

$$B_n(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^n \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left( \frac{x_1}{1!} \right)^{k_1} \left( \frac{x_2}{2!} \right)^{k_2} \dots$$

Ici, les indices dans le polynôme  $B_{n,k}$  nous indique la partition d'un ensemble à  $n$  éléments en  $k$  blocs. L'indice de la variable  $x_i$  nous indique la présence d'un bloc à  $i$  éléments dans une partition donnée et l'exposant du monôme  $x_i^j$  indique qu'il existe  $j$  blocs de taille  $i$  dans une partition.

Le polynôme  $A_n(x, x, \dots)$  est dit polynôme de Bell univarié ou tout simplement **polynôme de Bell** et est noté  $B_n(x)$ .

**Proposition 1.58** Nous avons

$$B_{n,k}(x, x, \dots) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n! (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n}} x^k = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k,$$

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(x, x, \dots) = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k.$$

Nous rappelons ici que les polynômes de Bell vérifient la relation de récurrence suivante :

$$B_n(x) = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x).$$

**Proposition 1.59** *Nous avons*

$$\begin{aligned} B_{n,k}(0!, -1!, 2!, \dots) &= (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \\ B_{n,k}(0!, 1!, 2!, \dots) &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \\ B_{n,k}(1, 1, 1, \dots) &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

**Istvan Mező** [45] a défini le polynôme  $r$ -Bell comme suit :

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r x^k.$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes  $r$ -Bell est donnée par l'expression suivante [45, Thm. 3.1] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x) \frac{z^n}{n!} = \exp(x(e^z - 1) + rz).$$

### 1.8.5 Polynômes de Touchard

**Définition 1.60** [22] Les **polynômes de Touchard** notés  $T_{n,k} = T_{n,k}(x_1, \dots; y_1, \dots)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $k = 0, 1, \dots, n$  sont définis par

$$T_{n,k} = \sum_{H(n,k)} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{k_2} \left(\frac{y_1}{1!}\right)^{r_1} \dots \left(\frac{y_2}{2!}\right)^{r_2},$$

où  $H(n, k)$  est l'ensemble de toutes les solutions  $(k_1, \dots, k_n, r_1, \dots, r_n)$  des entiers naturels tels que :

$$\sum_{i=1}^n k_i = k \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n i(k_i + r_i) = n.$$

Il est facile de voir que  $T_{n,0} = B_n(y_1, \dots, y_n)$  et  $T_{n,n} = x_1^n = B_{n,n}$ .

**Proposition 1.61** [22] La fonction génératrice verticale de la suite des polynômes  $T_{n,k}$  est

$$T_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n,k} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \{x(z)\}^k e^{y(z)}$$

où

$$x(z) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{z^j}{j!} \quad \text{et} \quad y(z) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{z^j}{j!}.$$

**Proposition 1.62** [22] *La fonction génératrice mixte de la suite des polynômes de Touchard est*

$$T(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} T_{n,k} \frac{z^n}{n!} u^k = \exp(ux(z) + y(z)) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (ux_k + y_k) \frac{z^k}{k!}\right).$$

**Proposition 1.63** [22] *Pour des valeurs particulières de  $x_j$  et  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , nous avons les relations suivantes :*

$$\text{Si } x_j = (j-1)! \text{ et } y_j = 0, \text{ alors } T_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

$$\text{Si } x_j = 1 \text{ et } y_j = 0, \text{ alors } T_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

$$\text{Si } x_j = 1, y_1 = r \text{ et } y_j = 0, j = 2, \dots, \text{ alors } T_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r.$$

**Proposition 1.64** [22] *Si  $x_j = x$ ,  $y_1 = r$  et  $y_j = 0$ ,  $j = 2, \dots$ , alors*

$$T_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r x^k,$$

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n T_{n,k}.$$

## 1.8.6 Polynôme chromatique

Nous terminons ce chapitre par des notions plus élémentaires. Nous avons vu au paragraphe 1.7.4 la manière de colorier les sommets d'un graphe avec  $k$  couleurs. On peut également se demander quel est le nombre de façons distinctes de réaliser un tel coloriage.

Soit  $G = (V; E)$  un graphe simple ayant au moins un sommet et  $k \geq 1$ . Notons  $P_G(k)$  (ou  $P(G, k)$ ) le nombre de colorations possibles

$$f : V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

de  $G$  avec au plus  $k$  couleurs.  $P_G$  est une fonction croissante à valeurs entières  $P_G : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ .

Il est clair que :

- si  $k < \chi(G)$  alors  $P_G(k) = 0$  ;
- si  $k \geq \chi(G)$  alors  $P_G(k) > 0$  ;

( $\chi(G)$  est le nombre chromatique de  $G$ ). Par conséquent  $\chi(G)$  est le plus petit entier positif  $k$  tel que  $P_G(k) > 0$ .

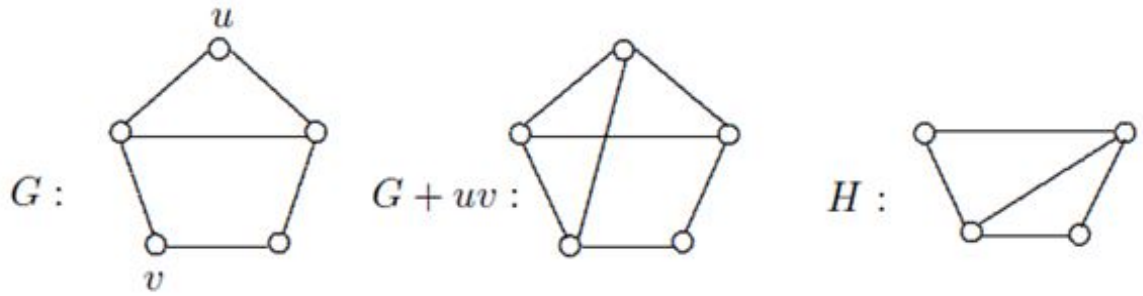


FIG. 1.8 – Opérations d'ajout et de contraction d'une arête

**Proposition 1.65** [26] Pour tout entier positif  $k$ ,

- $P(K_n, k) = k^n$ ,
- $P(O_n, k) = k^n$  et
- $P(T_n, k) = k(k-1)^{n-1}$ .

**Proposition 1.66** [21] Le nombre de  $k$ -colorations de  $G$  est égal au nombre de  $k$ -colorations de  $G$  dans lesquelles  $u$  et  $v$  sont colorés différemment, plus le nombre de  $k$ -colorations de  $G$  dans lesquelles  $u$  et  $v$  sont de la même couleur.

Etant donné que le nombre des  $k$ -colorations de  $G$  dans lesquelles  $u$  et  $v$  sont colorés différemment est le nombre de  $k$ -colorations de  $G+uv$  alors que le nombre des  $k$ -colorations de  $G$  dans lequel  $u$  et  $v$  sont de même couleur est le nombre des  $k$ -colorations du graphe  $H$  obtenu en contractant  $u$  et  $v$  (voir Fig. 1.8), il s'ensuit que :

**Théorème 1.67** [21] Soit  $G$  un graphe contenant des sommets non adjacents  $u$  et  $v$  et soit  $H$  le graphe obtenu de  $G$  en contractant  $u$  et  $v$ . Nous avons :

$$P(G, k) = P(G + uv, k) + P(H).$$

Nous allons déduire de ce théorème particulièrement simple que  $P_G$  peut être considéré, dans une certaine mesure, comme un polynôme ou plus précisément comme une fonction polynomiale de la variable entière  $k$ .

En continuant ainsi, comme le montre la figure 1.9, nous obtenons :

$$P(G, k) = k^5 + 4k^4 + 3k^3.$$

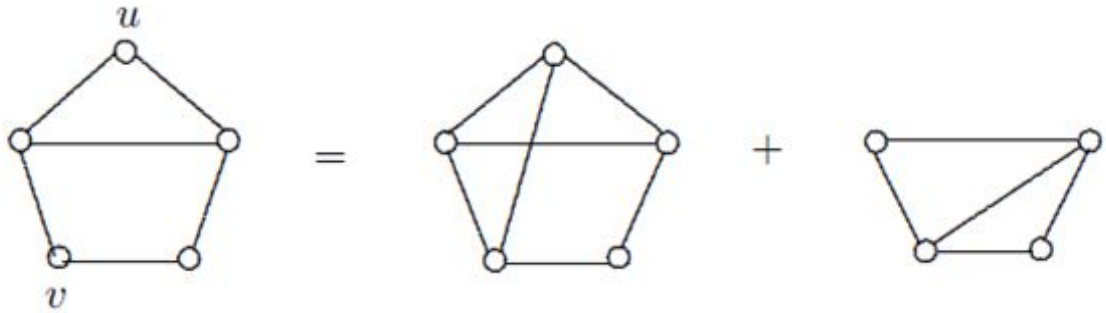


FIG. 1.9 – Somme de deux polynômes chromatiques

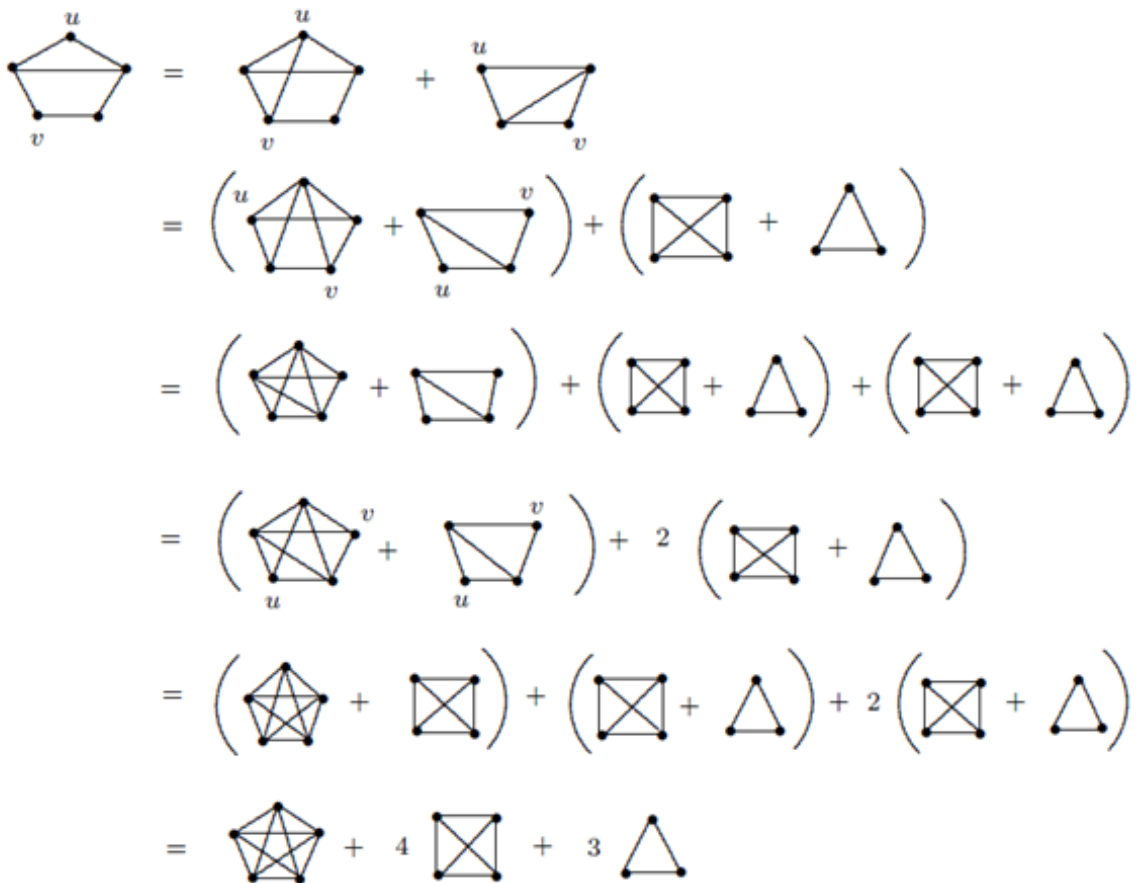


FIG. 1.10 – Calcul du polynôme chromatique

**Proposition 1.68** [21]  $P_G$  est une fonction polynomiale.

**Preuve.** Montrons qu'il existe un polynôme (qui est nécessairement unique)  $F_G \in \mathbb{Z}[x]$  tel que  $\forall k \geq 1 F_G(k) = P_G(k)$ . Raisonnons par récurrence sur  $m = |E|$ .

Si  $m = 0$  alors  $P_G(k) = k^n$ , ( $n = |V|$ ), donc  $P_G$  est la fonction polynomiale  $x^n$ .

Supposons que l'assertion est vraie pour  $m$  : soit  $G$  un graphe simple ayant  $m + 1$  arêtes. La fonction  $F_G = P_{G+a} + P_{G.a}$  est une fonction polynomiale par hypothèse de récurrence ; d'après le théorème précédent, elle satisfait  $F_G(k) = P_G(k)$  pour tout entier  $k$  ; donc  $P_G$  est elle-même fonction polynomiale.  $\square$

$P_G$  est appelé **polynôme chromatique** de  $G$ . Nous avons ainsi :

$$P_G(x) = P_{G+a}(x) - P_{G.a}(x), \quad \forall a \in E.$$

**Théorème 1.69** [26] Soit  $G = (V; E)$  un graphe ayant pour composantes connexes  $(G_i)_{1 \leq i \leq c}$ , alors

$$P_G = \prod_{1 \leq i \leq c} P_{G_i}$$

**Preuve.** En effet les composantes connexes ont des colorations indépendantes.  $\square$

**Théorème 1.70** [26] Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Alors :

$$P(G, x) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i(\mathcal{F}) x^i,$$

où  $\mathcal{F}$  est le système héréditaire des stables de  $G$  et  $x^i = x(x-1)\cdots(x-i+1)$ .

**Remarque 1.71** Dans le cas du système héréditaire des stables, nous pouvons facilement remarquer que les deux polynômes (de partition et chromatique) ont respectivement les mêmes coefficients par rapport aux bases  $\{x^k\}_{k=1}^n$  et  $\{x^{\underline{k}}\}_{k=1}^n$ .

## Chapitre 2

# Polynômes de Touchard, Polynômes partiels de Bell et Polynômes de type binomial

### 2.1 Introduction

Parmi les **polynômes de partition** les plus connus en combinatoire, nous avons cité dans le premier chapitre les polynômes **partiels** de **Bell** qui ont été introduits par Bell [8]. Ces polynômes ont joué et continuent à jouer un rôle important dans des différentes applications et dans la détermination de plusieurs propriétés et identités combinatoires, voir [1, 20, 23, 49, 50].

Un autre polynôme de partition, appelé le **polynôme de Touchard**, introduit par Touchard [63] et qui présente une extension des polynômes partiels de Bell. Quelques propriétés algébriques, combinatoires et probabilistiques de ces polynômes ont été étudié par Touchard [63], Chrysaphinon [22], Charalambides [20], Kuzmier et Leonova [41].

Dans ce chapitre, nous donnons quelques relations entre le polynôme de Touchard et les polynômes partiels de Bell et par la suite nous exploitons ces relations et les caractéristiques des suites polynomiales de **type binomial** afin de dériver quelques identités.

## 2.2 Notations et hypothèses

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations et les hypothèses suivantes :

$$D \equiv \frac{d}{dx}, \quad D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}, \quad D_{x=x_0}^k \equiv \frac{d^k}{dx^k} \Big|_{x=x_0},$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , où  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres réels, nous posons

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \text{ pour } k = 1, 2, \dots \text{ et } \binom{x}{0} = 1.$$

Aussi, pour tous les entiers non négatifs  $n, m$  nous notons

$$1_{(m|n)} = \begin{cases} 1, & \text{si } m \text{ divise } n, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad 1_{(n \geq m)} = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq m, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient  $\{x_j; j \geq 1\}$  et  $\{y_j; j \geq 1\}$  deux suites de nombres réels, nous notons les polynômes de Touchard

$$T_{n,k}(x_j; y_j) := T_{n,k}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n), \quad n \geq k \geq 0,$$

et les polynômes partiels de Bell

$$B_{n,k}(x_j) := B_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = T_{n,k}(x_1, \dots, x_n; 0, \dots, 0), \quad n \geq k \geq 0.$$

Pour  $n < 0$ , soit  $\{f_n(x)\}$  une suite de type binomial, nous posons

$$f_n(x) = 0, \quad T_{n,k}(x_j; y_j) = 0 \text{ et } B_{n,k}(x_j) = 0.$$

## 2.3 Principaux résultats

Dans cette section, nous établissons quelques relations entre les polynômes de Touchard, les polynômes partiels de Bell et ceux de type binomial. Par la suite, nous utilisons ces relations afin de développer plusieurs identités pour les polynômes de Touchard. Tout d'abord nous rappelons la proposition suivante :

**Proposition 2.1** [49] Soit  $\{f_n(x)\}$  une suite de type binomial. Pour un nombre réel  $a$  on considère dans la suite suivante  $\{f_n(x; a)\}$  définie par :

$$f_n(x; a) := \frac{x f_n(an + x)}{an + x}.$$

La suite  $\{f_n(x; a)\}$  est aussi de **type binomial**.

Pour plus de détails sur les suites de type binomial voir [2].

**Théorème 2.2** Soient  $n, k, m$  des entiers tels que :  $n \geq k \geq 1$ ,  $m \geq 1$ ,  $a$  un nombre réel et  $\{x_n\}$  une suite de nombres réels, alors

$$T_{n,k} \left( x_j; -m(j-1)!a^{j/m}1_{(m|j)} \right) = B_{n,k}(x_j) - am! \binom{n}{m} B_{n-m,k}(x_j).$$

**Preuve.** Soit  $y_n = -m(n-1)!a^{\frac{n}{m}}1_{(m|n)}$ . Pour  $a = 0$  le théorème est trivial, autrement, pour  $|t| < |a|^{-1/m}$  nous avons

$$\exp \left( \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) = \exp \left( - \sum_{j \geq 1} a^j \frac{t^{mj}}{j} \right) = \exp(\ln(1 - at^m)) = 1 - at^m,$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} T_{n,k}(x_j; y_j) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \left( \sum_{i \geq 1} x_i \frac{t^i}{i!} \right)^k \exp \left( \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left( \sum_{i \geq 1} x_i \frac{t^i}{i!} \right)^k (1 - at^m) \\ &= \left( \sum_{n \geq k} B_{n,k}(x_j) \frac{t^n}{n!} \right) (1 - at^m) \\ &= \sum_{n \geq k} B_{n,k}(x_j) \frac{t^n}{n!} - at^m \sum_{n \geq k} B_{n,k}(x_j) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq k} B_{n,k}(x_j) \frac{t^n}{n!} - a \sum_{n \geq k} B_{n,k}(x_j) \frac{t^{n+m}}{n!} \\ &= \sum_{n \geq k} \left( B_{n,k}(x_j) - a \frac{n!}{(n-m)!} B_{n-m,k}(x_j) \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ainsi le théorème est démontré par identification des coefficients associés à  $t^n$ .  $\square$

**Proposition 2.3** [49] Soit  $\{f_n(x)\}$  une suite de type binomial avec  $f_0(x) = 1$ . Alors pour tous nombres réels  $a, b$  et tous entiers  $n, k$ ;  $n \geq k \geq 1$ , nous avons

$$B_{n,k} \left( f_0(b), \dots, \frac{ibf_{i-1}(a(i-1)+b)}{a(i-1)+b}, \dots \right) = \binom{n}{k} \frac{bf_{n-k}(a(n-k)+b)}{a(n-k)+b}$$

Si nous posons  $x_n = n f_{n-1}(x; b)$  dans le théorème 2.2 et nous utilisons la proposition 2.3 nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 2.4** Soit  $(f_n(x))$  une suite de polynôme de type binomial, alors nous avons

$$T_{n,k} \left( j f_{j-1}(x; b); -m(j-1)! a^{j/m} 1_{(m|j)} \right) = \frac{n!}{k!} \left( \frac{f_{n-k}(kx; b)}{(n-k)!} - a \frac{f_{n-m-k}(kx; b)}{(n-m-k)!} \right).$$

**Exemple 2.5** Pour  $f_n(x) = x^n$  dans le corollaire 2.4 avons

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( jx(b(j-1) + x)^{j-2}; -m(j-1)! a^{j/m} 1_{(m|j)} \right) \\ &= x \frac{n!}{(k-1)!} \left( \frac{(b(n-k) + kx)^{n-k-1}}{(n-k)!} - a \frac{(b(n-m-k) + kx)^{n-m-k-1}}{(n-m-k)!} 1_{(n \geq m+k)} \right) \end{aligned}$$

et pour  $f_n(x) = n! \binom{x}{n}$  dans le corollaire 2.4 nous avons

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( xj! \frac{\binom{b(j-1) + x}{j-1}}{b(j-1) + x}; -m(j-1)! a^{j/m} 1_{(m|j)} \right) \\ &= x \frac{n!}{(k-1)!} \left( \frac{\binom{b(n-k) + kx}{n-k}}{b(n-k) + kx} - a \frac{\binom{b(n-m-k) + kx}{n-m-k}}{b(n-m-k) + kx} 1_{(n \geq m+k)} \right). \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, pour des cas particuliers des polynômes de Touchard, la proposition suivante donne une autre expression en termes de polynômes de type binomial.

**Proposition 2.6** Soient  $b, \alpha$  deux réels et  $\{f_n(x)\}$  une suite de polynômes de type binomial. Nous avons

$$T_{n,k}(j f_{j-1}(x); \alpha D f_j(0)) = \binom{n}{k} f_{n-k}(kx + \alpha).$$

Plus généralement, si  $b \neq 0$  nous avons

$$T_{n,k} \left( jx \frac{f_{j-1}(b(j-1) + x)}{b(j-1) + x}; \alpha \frac{f_j(b_j)}{b_j} \right) = \binom{n}{k} (kx + \alpha) \frac{f_{n-k}(b(n-k) + kx + \alpha)}{b(n-k) + kx + \alpha}.$$

**Preuve.** Soit

$$1 + \sum_{n \geq 1} f_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp \left( x \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) \quad (2.1)$$

la fonction génératrice exponentielle de la suite  $\{f_n(x)\}$  (1.11) et posons  $x_n = n f_{n-1}(x)$ . Nous avons nécessairement  $y_n = D f_n(0)$  (nous dérivons les deux côtés de l'identité (2.1)

au point  $x = 0$  et nous déduisons  $y_n$  par identification). Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{i \geq 1} x_i \frac{t^i}{i!} &= \sum_{i \geq 1} i f_{i-1}(x) \frac{t^i}{i!} \\
&= t \sum_{i \geq 1} f_{i-1}(x) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \sum_{i \geq 0} f_i(x) \frac{t^i}{i!} \\
&= 1 + \sum_{i \geq 1} f_i(x) \frac{t^i}{i!} \\
&= t \exp \left( x \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq k} T_{n,k}(x_j; \alpha y_j) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \left( \sum_{i \geq 1} x_i \frac{t^i}{i!} \right)^k \exp \left( \alpha \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) \\
&= \frac{t^k}{k!} \exp \left( (kx + \alpha) \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) \\
&= \frac{t^k}{k!} \sum_{n \geq 0} f_n(kx + \alpha) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} f_{n-k}(kx + \alpha) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par la suite, nous obtenons

$$T_{n,k}(j f_{j-1}(x); \alpha D f_j(0)) = \binom{n}{k} f_{n-k}(kx + \alpha).$$

Afin de finir la preuve de la proposition, nous remplaçons  $f_n(x)$  par  $f_n(x; b)$  dans la dernière identité.  $\square$

**Exemple 2.7** Pour  $f_n(x) = x^n$  dans la proposition 2.6 nous avons

$$\begin{aligned}
&T_{n,k} \left( x j (b(j-1) + x)^{j-2}; \alpha (j-1) (b_j)^{j-2} \right) \\
&= \binom{n}{k} (kx + \alpha) (b(n-k) + kx + \alpha)^{n-k-1}
\end{aligned}$$

et pour  $f_n(x) = n! \binom{x}{n}$  dans la proposition 2.6 nous avons

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( \frac{j!x}{b(j-1)+x} \binom{b(j-1)+x}{j-1}; \alpha (-1)^{j-1} (j-1)! \right) \\ &= \frac{n!}{k!} \frac{kx + \alpha}{n(n-k) + kx + \alpha} \binom{n(n-k) + kx + \alpha}{n-k}. \end{aligned}$$

Ainsi on peut enoncer ce qui suit :

**Corollaire 2.8** Soient  $r, s, p$  des entiers non négatifs,  $r \geq 1$  et  $\{x_n\}$  une suite de nombres réels avec  $x_1 = 1$  nous avons

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( \frac{js}{(r(j-1)+s)} \frac{B_{(r+1)(j-1)+s, r(j-1)+s}(x_i)}{\binom{(r+1)(j-1)+s}{r(j-1)+s}}; \frac{p}{rj} \frac{B_{(r+1)j, rj}(x_i)}{\binom{(r+1)j}{rj}} \right) \\ &= \binom{n}{k} \frac{ks + p}{r(n-k) + ks + p} \frac{B_{(r+1)(n-k)+ks+p, r(n-k)+ks+p}(x_i)}{\binom{(r+1)(n-k) + ks + p}{r(n-k) + ks + p}}. \end{aligned}$$

**Preuve.** Pour  $x_2 \neq 0$  soit  $\{f_n(x)\}$  une suite de type binomial telle que  $f_n(1) = \frac{xn+1}{n+1}$ .

De l'identité connue

$$B_{n,k}(j f_{j-1}(1)) = \binom{n}{k} f_{n-k}(k)$$

nous obtenons

$$f_n(k) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k}(x_i), \quad n \geq 0, k \geq 1.$$

Prenons  $b = r, x = s$  et  $\alpha = p$  dans la proposition 2.6 afin d'obtenir

$$T_{n,k} \left( js \frac{f_{j-1}(r(j-1)+s)}{r(j-1)+s}; p \frac{f_j(rj)}{rj} \right) = \binom{n}{k} (ks + p) \frac{f_{n-k}(r(n-k) + ks + p)}{r(n-k) + ks + p}.$$

Ainsi, il suffit d'utiliser l'identité

$$f_n(k) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k}(x_i)$$

pour exprimer dans la dernière identité  $f_{i-1}(r(i-1)+s)$  et  $f_{n-k}(s(n-k) + ks + p)$  par le polynôme partiel de Bell.

Pour le cas  $x_2 = 0$  les corollaires restent vrais par continuité □

**Exemple 2.9** En utilisant le corollaire 2.8 et l'identité  $B_{n+k,k}(1!, 2!, \dots, (q+1)!, 0, \dots) = \frac{n!}{k!} \binom{k}{n-k}_q$  de [6], nous obtenons

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( \frac{j!s}{r(j-1)+s} \binom{r(j-1)+s}{j-1}_q; \frac{(j-1)!p}{r} \binom{rj}{j}_q \right) \\ &= \frac{n!}{k!} \frac{ks + p}{r(n-k) + ks + p} \binom{r(n-k) + ks + p}{n-k}_q, \end{aligned}$$

où  $\binom{k}{n}_q$  sont des coefficients définis par l'équation suivante :

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^q)^k = \sum_{n \geq 0} \binom{k}{n}_q x^n$$

Aussi, pour  $x_n = 1$ ,  $x_n = (-1)^{n-1} (n-1)!$  ou  $x_n = n!$  nous obtenons des identités reliant avec les polynômes de Touchard aux nombres de Stirling de première et seconde espèce.

Les deux propositions suivantes donnent des relations entre les polynômes de Touchard et les dérivées successives de polynômes de type binomial.

**Proposition 2.10** Soient  $b$  un nombre réel,  $b \neq 0$ , et  $\{f_n(x)\}$  une suite de polynômes de type binomial, nous avons :

$$T_{n,k}(Df_j(0); xDf_j(0)) = \frac{1}{k!} D^k f_n(x),$$

ou plus généralement,

$$T_{n,k}\left(\frac{f_j(b_j)}{b_j}; x \frac{f_j(b_j)}{b_j}\right) = \frac{1}{k!} D^k \left( \frac{x}{bn+x} f_n(bn+x) \right).$$

**Preuve.** Soit  $\{f_n(x)\}$  une suite de type binomial définie par l'équation (2.1) et  $x_n = n f_{n-1}(x)$ . Nous avons nécessairement  $y_n = Df_n(0)$  et

$$\sum_{n \geq k} D^k f_n(x) \frac{t^n}{n!} = \left( \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right)^k \exp \left( x \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) = k! \sum_{n \geq k} T_{n,k}(y_j; xy_j) \frac{t^n}{n!}.$$

alors

$$T_{n,k}(y_j; xy_j) = T_{n,k}(Df_j(0); xDf_j(0)) = \frac{1}{k!} D^k f_n(x).$$

Après cela, nous remplaçons  $f_n(x)$  par  $f_n(x; b)$  dans la dernière identité.  $\square$

**Exemple 2.11** Pour  $f_n(x) = x^n$  dans la proposition 2.10 nous avons

$$T_{n,k}\left((bj)^{j-1}; x(bj)^{j-1}\right) = \frac{n!}{(k!)^2} (bn+x)^{n-k-1} (b(n-1)+x),$$

et pour  $f_n(x) = n!$  dans la proposition 2.10 nous avons

$$T_{n,k}\left(\frac{j!}{bj} \binom{bj}{j}; x \frac{j!}{bj} \binom{bj}{j}\right) = \frac{n!}{k!} D^k \left( \frac{x}{bn+x} \binom{bn+x}{n} \right).$$

**Proposition 2.12** Soient  $b, \alpha, \beta$  des nombres réels,  $r$  un entier positif et  $\{f_n(x)\}$  une suite de polynômes de type binomial, nous avons :

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( j D_{z=0}^r \left( e^{\beta z} f_{j-1}(x+z) \right); \alpha D f_j(0) \right) \\ &= \frac{(kr)!}{k!} T_{n,kr} \left( \beta 1_{(j=1)} + j D f_{j-1}(0) 1_{(j \geq 2)}; (kx + \alpha) D f_j(0) \right), \end{aligned}$$

ou plus généralement,

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( j D_{z=0}^r \frac{(x+z) f_{j-1}(b(j-1) + x + z)}{b(j-1) + x + z} e^{\beta z}; \alpha \frac{f_j(b_j)}{b_j} \right) \\ &= \frac{(kr)!}{k!} T_{n,kr} \left( \beta 1_{(j=1)} + j \frac{f_{j-1}(b(j-1))}{b(j-1)} 1_{(j \geq 2)}; (kx + \alpha) \frac{f_j(b_j)}{b_j} \right). \end{aligned}$$

**Preuve.** Soit  $\{f_n(x)\}$  une suite de type binomial définie par l'équation (2.1) et  $x_n = n D_{z=0}^r (e^{\beta z} f_{n-1}(x+z))$ , nous avons nécessairement  $y_n = D f_n(x)(0)$  et

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i \geq 1} x_i \frac{t^i}{i!} \right)^k &= \left( \sum_{i \geq 1} i D_{z=0}^r \left( e^{\beta z} f_{i-1}(x+z) \right) \frac{t^i}{i!} \right)^k \\ &= \frac{t^k}{k!} F(t)^{kx} \left( D_{z=0}^r \left( e^{\beta z} F(t)^z \right) \right)^k \\ &= \frac{t^k}{k!} F(t)^{kx} (\beta + \ln F(t))^{kr} \\ &= \frac{t^k}{k!} D_{z=0}^{kr} \left( e^{\beta z} F(t)^{kx+z} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left( \beta t + \sum_{i \geq 2} i y_{i-1} \frac{t^i}{i!} \right)^{kr} \exp \left( kx \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} T_{n,k}(x_j; \alpha y_j) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \left( \sum_{i \geq 1} x_i \frac{t^i}{i!} \right)^k \exp \left( \alpha \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left( \beta t + \sum_{i \geq 2} i y_{i-1} \frac{t^i}{i!} \right)^{kr} \exp \left( (kx + \alpha) \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) \\ &= \frac{(kr)!}{k!} \sum_{n \geq k} T_{n,kr} \left( \beta 1_{(j=1)} + j y_{j-1} 1_{(j \geq 2)}; (kx + \alpha) y_j \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( j D_{z=0}^r \left( e^{\beta z} f_{j-1}(x+z) \right); \alpha D f_j(0) \right) \\ &= \frac{(kr)!}{k!} T_{n,kr} \left( \beta 1_{(j=1)} + j y_{j-1} 1_{(j \geq 2)}; (kx + \alpha) D f_j(0) \right). \end{aligned}$$

Pour finir la preuve, remplacer  $f_n(x)$  par  $f_n(x; b)$  dans la dernière identité □

**Exemple 2.13** Pour  $f_n(x) = x^n$  dans la proposition 2.12 nous avons

$$\begin{aligned} & T_{n,k} \left( j D_{z=0}^r \left( (x+z)(b(j-1)+x+z)^{j-2} e^{\beta z} \right); \alpha (b_j)^{j-1} \right) \\ &= \frac{(kr)!}{k!} T_{n,kr} \left( \beta 1_{(j=1)} + j (b(j-1))^{j-2} 1_{(j \geq 2)}; (kx + \alpha) (b_j)^{j-1} \right). \end{aligned}$$

**Proposition 2.14** Soient  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  deux suites de nombres réels et  $r$  un entier positif, nous avons

$$B_{n,k} \left( \frac{r}{\binom{j+r-1}{r-1}} T_{j+r-1,r}(x_i; y_i) \right) = \frac{\binom{kr}{k}}{\binom{n+(r-1)k}{(r-1)k}} T_{n+(r-1)k,kr}(x_i; ky_i).$$

**Preuve.** D'après la définition de la fonction génératrice exponentielle des polynômes de Touchard nous avons

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n \geq r} T_{n,r}(x_i; y_i) \frac{t^n}{n!} \right)^k &= \frac{1}{(r!)^k} \left( \sum_{i \geq 1} x_i \frac{t^i}{i!} \right)^{kr} \exp \left( k \sum_{i \geq 1} y_i \frac{t^i}{i!} \right) \\ &= \frac{(kr)!}{(r!)^k} \sum_{n \geq kr} T_{n,kr}(x_i; ky_i) \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

ceci montre que

$$T_{n,kr}(x_i; ky_i) = \frac{(r!)^k k!}{(kr)!} B_{n,k} \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{r-1}, T_{r,r}(x_i; y_i), T_{r+1,r}(x_i; y_i), \dots \right),$$

et puisque nous avons dans [20, p. 450]

$$B_{n,k}(0, \dots, 0, a_r, a_{r+1}, \dots) = \frac{n!}{(n - (r-1)k)!} B_{n-(r-1)k,k} \left( \frac{i! a_{i+r-1}}{(i+r-1)!} \right).$$

donc

$$T_{n,kr}(x_j; ky_j) = \frac{(r!)^k n! k!}{(kr)! (n - (r-1)k)!} B_{n-(r-1)k,k} \left( \frac{j!}{(r-1-j)!} T_{r-1-j,r}(x_i; y_i) \right).$$

Il suffit maintenant de changer  $n$  par  $n + (r-1)k$  pour arriver à prouver la proposition.

□

**Exemple 2.15** Soient  $r, s, p, q$  des entiers non négatifs avec  $q \geq 1$ . En utilisant la proposition 2.14, nous obtenons

$$\begin{aligned} & B_{n,k} \left( \frac{j! (rs+p)}{r(j-1)+rs+p} \binom{r(j-1)+rs+p}{j-1}_q \right) \\ &= \frac{n!}{k!} \frac{k(rs+p)}{r(n-k)+k(rs+p)} \binom{r(n-k)+k(rs+p)}{n-k}_q. \end{aligned}$$

A partir de l'identité  $T_{n,r}(i!; (i-1)!s) = \frac{n!}{r!} \binom{n+s-1}{r+s-1}$  donnée en [20, p. 453] nous obtenons

$$B_{n,k} \left( j! \binom{j+r+s-2}{r+s-1} \right) = \frac{n!}{k!} \binom{n+k(r+s-1)-1}{k(r+s)-1}$$

Puisque nous avons dans [22, Thm. 3.3]

$$T_{n,r}((i-1)!; (i-1)!s) = \begin{bmatrix} n+s \\ r+s \end{bmatrix}_s \quad \text{et} \quad T_{n,r}(1; s1_{(i=1)}) = \left\{ \begin{matrix} n+s \\ r+s \end{matrix} \right\}_s$$

Ces identités et la proposition 2.14 nous donnent

$$B_{n,k} \left( \frac{r}{\binom{j+r-1}{r-1}} \left[ \begin{matrix} j+r+s-1 \\ r+s \end{matrix} \right]_s \right) = \frac{\binom{kr}{k}}{\binom{n+(r-1)k}{(r-1)k}} \left[ \begin{matrix} n+(r+s-1)k \\ (r+s)k \end{matrix} \right]_{ks},$$

$$B_{n,k} \left( \frac{r}{\binom{j+r-1}{r-1}} \left\{ \begin{matrix} j+r+s-1 \\ r+s \end{matrix} \right\}_s \right) = \frac{\binom{kr}{k}}{\binom{n+(r-1)k}{(r-1)k}} \left\{ \begin{matrix} n+(r+s-1)k \\ (r+s)k \end{matrix} \right\}_{ks}.$$

## Chapitre 3

# Nombres $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce

### 3.1 Introduction

Nous rappelons que le nombre de **Stirling** de deuxième espèce, noté  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ , est le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  blocs non vides disjoints. Dans [32] nous trouverons une excellente introduction à ces nombres.

Le nombre **r-Stirling** de deuxième espèce, noté  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$ , compte le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  blocs non vides disjoints de telle sorte que les éléments  $1, 2, \dots, r$  soient dans des blocs différents. Broder dans [17] a donné des interprétations combinatoires et quelques propriétés algébriques à ces nombres. Il a aussi établi plusieurs identités, des relations récurrentes et les fonctions génératrices de ces nombres.

Plusieurs auteurs ont étudié ces nombres et ont donné leur rôle en probabilité, en approximations, en congruences et en d'autres domaines. Par exemple, Chrysaphinou [22] a introduit les polynômes de Touchard et leur relation avec les nombres  $r$ -Stirling ainsi que d'autres types de nombres, Hsu et al. [34] ont étudié les propriétés et les approximations d'une famille de nombres de Stirling, Mező [45, 46] a étudié les nombres  $r$ -Bell et le maximum des nombres  $r$ -Stirling.

Mihoubi et al. [51] ont donné des propriétés relatives aux nombres  $r$ -Stirling. D'autres résultats sur ces nombres ont été publiés dans [17, 20, 55].

Dans ce chapitre nous donnons une certaine généralisation aux nombres  $r$ -Stirling. Cette généralisation consiste à définir les nombres  $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce et par la suite les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce et à établir :

- Une généralisation des formules de Dobinski [25].
- Une interprétation combinatoire du coefficient de  $(z)^k$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots$ , dans le polynôme  $P_t(z, \mathbf{r}_p) = (z + r_p)^{r_1} + \dots + (z + r_p)^{r_{p-1}}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .
- Des inégalités qui généralisent celles données par Bouroubi [15] sur les polynômes de Bell à une seule variable.
- Quelques propriétés sur les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce.

### 3.2 Nombres $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce

Soient  $R$  et  $S$  deux sous ensembles de  $\{1, 2, \dots, n\}$  avec  $|R| = r$  et  $|S| = s$ . Nous nous intéressons en premier lieu au nombre de  $k$ -partitions (partition d'un ensemble en exactement  $k$  blocs) de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tel que les éléments de  $R$  (resp.  $S$ ) soient dans des blocs différents. Ce nombre, noté  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}$  et dit  $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce. Nous avons évidemment

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{s,r}$$

Par la propriété de la symétrie des nombres  $(r, s)$ -Stirling de seconde espèce par rapport au couple  $(r, s)$ , nous pouvons supposer, sans perdre de généralités, que  $r \leq s$ ,  $R = \{1, \dots, r\}$  et  $S = \{r + 1, \dots, r + s\}$ .

#### 3.2.1 Relations récurrentes combinatoires

Dans cette section, nous commençons d'abord par donner un théorème dans lequel nous exprimons les nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce en fonction des nombres de Stirling de deuxième espèce classiques. Ce théorème permet de déduire de nombreux résultats combinatoires qui seront mentionnés dans la suite de ce chapitre.

**Théorème 3.1** *Nous avons*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{(k-r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\} (k-i)! \quad (3.1)$$

**Preuve.** Soit  $\pi$  une partition de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  blocs. Supposons que cette partition soit composée de  $i$  blocs sous forme de singletons parmi les  $r$  premiers éléments et  $(k-i)$  blocs non vides extraits de l'ensemble  $\{r+1, \dots, n\}$ .

Dan ce cas, pour  $i = 0, 1, \dots, r$ , il existe  $\binom{r}{i}$  façons pour extraire  $i$  singletons parmi les éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, r\}$  et  $\left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\}$  façons pour partitionner l'ensemble

$\{r + 1, \dots, n\}$  en  $k - i$  blocs.

Les éléments de l'ensemble  $\{i + 1, \dots, r\}$ , seront par la suite insérés dans les  $(k - i)$  blocs (construits ci-dessus) en

$$(k - i) \cdots ((k - i) - (r - i) + 1) = \frac{(k - i)!}{(k - r)!}$$

façons. Alors, le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en  $k$  blocs tels que les éléments de l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$  soient dans des blocs différents est

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{(k - r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left\{ \begin{matrix} n - r \\ k - i \end{matrix} \right\} (k - i)!.$$

□

**Exemple 3.2** En posant  $r = 1$ , nous aurons la relation récurrente classique des nombres de Stirling de deuxième espèce

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{(k - 1)!} \left[ \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\} k! + \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right\} (k - 1)! \right] \\ &= k \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité 3.1, nous pouvons établir la fonction génératrice mixte des nombres  $r$ -Stirling. C'est à dire

$$\sum_{n, k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n + r \\ k + r \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} z^k = \exp(z(\exp t - 1) + rt).$$

Le théorème suivant est la version du théorème précédent appliquée aux nombres  $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce.

**Théorème 3.3** Nous avons

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \frac{1}{(k - s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \left\{ \begin{matrix} n - s \\ k - j \end{matrix} \right\}_r (k - j)! \\ &= \frac{1}{(k - r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left\{ \begin{matrix} n - r \\ k - i \end{matrix} \right\}_s (k - i)!, \quad n \geq r + s \end{aligned} \tag{3.2}$$

**Preuve.** Soit  $\pi$  une partition de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  blocs. Supposons que cette partition soit composée de  $i$  blocs sous forme de singletons parmi les  $r$  premiers éléments et  $(k - i)$  blocs non vides extraits de l'ensemble  $\{r + 1, \dots, n\}$ .

Dan ce cas, pour  $i = 0, 1, \dots, r$ , il y a  $\binom{r}{i}$  façons pour former  $i$  singletons parmi les

éléments de l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$  et  $\left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\}_s$  partitions de l'ensemble  $\{r+1, \dots, n\}$  en  $k-i$  sous ensembles tels que les éléments  $\{r+1, \dots, r+s\}$  soient dans des blocs différents. Les  $r-i$  éléments de l'ensemble  $\{i+1, \dots, r\}$  peuvent être insérés dans les  $k-i$  blocs en

$$(k-i) \dots ((k-i) - (r-i) + 1) = \frac{(k-i)!}{(k-r)!}$$

façons. Alors le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en  $k$  blocs tels que les éléments de  $\{1, \dots, r\}$  (resp.  $\{r+1, \dots, r+s\}$ ) sont dans des blocs différents est :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = \frac{1}{(k-r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\}_s (k-i)!$$

A partir de la propriété de symétrie de ces nombres par rapport au couple  $(r, s)$  nous obtenons la deuxième égalité dans (3.2).  $\square$

Les deux théorèmes suivants nous donnent quelques relations récurrentes qui généralisent celles qui ont été données en (3.1) et [17].

**Théorème 3.4** *Les nombres  $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce satisfont aux propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} &= 0 \quad \text{si } n < r+s \text{ ou } k < s \text{ ou } k > n, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \frac{r!s!}{(k-r)!(k-s)!(r+s-k)!} \quad \text{si } n = r+s \text{ et } s \leq k \leq r+s, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} &= k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s} \quad \text{si } n > r+s. \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Preuve.** Pour partitionner un ensemble à  $n$  éléments, il est évident que les hypothèses suivantes doivent être satisfaites :  $n \geq r+s$  et  $\text{Max}(r, s) \leq k \leq n$ .

Pour  $n = r+s$  et  $\max(r, s) \leq k \leq n$ , nous utilisons l'une des identités du théorème 3.3.

En effet

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k-j)! \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r \\ &= \frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k-j)! \left\{ \begin{matrix} r \\ k-j \end{matrix} \right\}_r \end{aligned}$$

et du fait que, pour  $j = 0, \dots, s$ , on a

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ k-j \end{matrix} \right\}_r = \delta_{k-j,r},$$

il s'ensuit que

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = \frac{1}{(k-s)!} \binom{s}{k-r} r! = \frac{r!s!}{(k-s)!(k-r)!(s+r-k)!}.$$

Pour  $n > r + s$ , nous présentons deux démonstrations (l'une combinatoire et la seconde algébrique) :

**Démonstration combinatoire** : Soit  $\pi$  une partition de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  blocs telle que les éléments de  $\{1, \dots, r\}$  (resp.  $\{r+1, \dots, r+s\}$ ) soient dans des blocs différents . Cette partition est formée :

- Soit à partir d'une partition de l'ensemble  $[n-1]$  en  $k$  blocs et en ajoutant par la suite l'élément  $n$  à chacun des  $k$  blocs. Alors Il existe dans ce cas  $k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}$  partitions.

- Soit à partir d'une partition de l'ensemble  $[n-1]$  en  $k-1$  blocs et en ajoutant par la suite l'ensemble  $\{n\}$  en tant que  $k^{\text{ème}}$  bloc. Alors Il existe dans ce cas  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s}$  partitions.

Evidemment, pour  $n > r + s$  la distribution des éléments  $1, \dots, r$  et des éléments  $r+1, \dots, r+s$  dans les différents blocs n'a aucune influence sur ce processus. Par conséquent, nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s}.$$

**Démonstration algébrique** : Posons

$$\alpha = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} - k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} - \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s}.$$

Alors, en utilisant l'une des identités du théorème 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k-1-j)!}{(k-s)!} \\ &\times \left( (k-j)! \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r - k(k-j) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r - (k-s) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-1-j \end{matrix} \right\}_r \right). \end{aligned}$$

Vu que  $n-s > r$  nous utilisons l'identité

$$\left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r = (k-j) \left\{ \begin{matrix} n-s-1 \\ k-j \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n-s-1 \\ k-j-1 \end{matrix} \right\}_r,$$

pour évaluer la valeur de  $\alpha$ . Autrement dit :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k-1-j)!}{(k-s)!} \left( -j(k-j) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r + (s-j) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-1-j \end{matrix} \right\}_r \right) \\
 &= -\frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k-j)! j \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r \\
 &\quad + \frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k-1-j)! (s-j) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-1-j \end{matrix} \right\}_r \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r,s}.$$

□

**Théorème 3.5** Les nombres  $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} - (r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} \\
 &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s-1} - (s-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s-1}, \quad n \geq r+s, \quad r,s \geq 1.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

**Preuve.** Par symétrie de  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}$  sur  $r, s$ , nous démontrons seulement la première partie des identités du théorème 3.5 (La deuxième partie se démontre de la même manière).

**Démonstration combinatoire.** La première partie des identités du théorème 3.5 peut être écrite sous la forme suivante :

$$(r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} - \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}.$$

Le nombre  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} - \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}$  représente le nombre de partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en  $k$  blocs tels que les éléments  $1, \dots, r-1$  et  $r+1, \dots, r+s$  soient respectivement dans des blocs différents **et** l'élément  $r$  se trouve dans l'un des blocs contenant un élément de l'ensemble  $\{1, \dots, r-1\}$ . Ce nombre est aussi égal à  $(r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s}$  car de telles partitions peuvent être obtenues en  $r-1$  façons à partir des partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\} - \{r\}$  en  $k$  blocs (les éléments  $1, \dots, r-1$  sont dans des blocs différents) et en insérant l'élément  $r$  dans l'un des  $r-1$  blocs contenant un élément de l'ensemble  $\{1, \dots, r-1\}$ .

**Démonstration algébrique.** En utilisant l'identité (1.9), les nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce satisfont

$$(r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1} - \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r, \quad n \geq r \geq 1.$$

Donc, d'après l'identité (3.2) nous avons

$$\begin{aligned}
(r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} &= \frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k-j)! \left( (r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_{r-1} \right) \\
&= \frac{1}{(k-s)!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k-j)! \left( \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_{r-1} - \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-j \end{matrix} \right\}_r \right) \\
&= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1,s} - \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r,s}.
\end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Fonctions génératrices des nombres $(r, s)$ -Stirling

**Lemme 3.6** *Pour  $r \leq s + k$ , nous avons*

$$\begin{aligned}
D_x^r \left( x^k (x+1)^s \right) &= \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k+j)!}{(k+j-r)!} x^{k+j-r} \quad \text{et} \\
D_x^r \left( x^k (x+1)^s \right) &= x D_x^r \left( x^{k-1} (x+1)^s \right) + r D_x^{r-1} \left( x^{k-1} (x+1)^s \right).
\end{aligned}$$

**Preuve.** L'identité

$$x^k (x+1)^s = x^k \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} x^j = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} x^{k+j}$$

montre que

$$D_x^r \left( x^k (x+1)^s \right) = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k+j)!}{(k+j-r)!} x^{k+j-r}.$$

Pour la deuxième identité, d'après la formule de Leibnitz nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
D_x^r \left( x^k (x+1)^s \right) &= D_x^r \left( x x^{k-1} (x+1)^s \right) \\
&= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} D_x^i (x) D_x^{r-i} \left( x^{k-1} (x+1)^s \right) \\
&= x D_x^r \left( x^{k-1} (x+1)^s \right) + r D_x^{r-1} \left( x^{k-1} (x+1)^s \right).
\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.7** *Nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x^k (x+1)^s \right). \quad (3.5)$$

En particulier, pour  $r = 0$  nous obtenons la fonction génératrice verticale des nombres  $r$ -Stirling :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (\exp(t) - 1)^k \exp(st).$$

**Preuve.** Supposons que  $r \leq s$  (le cas  $r \geq s$  pourra être étudié d'une manière similaire).

Pour  $k \leq r$  nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+s-j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+s-j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j} (k+j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j} (k+j)! \sum_{n \geq k+j-r} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j-r+r \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \exp(rt) \sum_{j=r-k}^s \frac{(k+j)!}{(k+j-r)!} \binom{s}{j} (\exp(t) - 1)^{k+j-r}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.6 nous déduisons que

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x^k (x+1)^s \right)$$

et pour  $k > r$  nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n \geq k-r} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq k-r} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+s-j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+s-j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq k-r} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s (k+j)! \binom{s}{j} \sum_{n \geq k-r+j} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \exp(rt) \sum_{j=0}^s \frac{(k+j)!}{(k+j-r)!} \binom{s}{j} (\exp(t) - 1)^{k+j-r} \\
&= \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x^k (x+1)^s \right).
\end{aligned}$$

□

Nous notons que pour  $k = 0$  ou  $k = 1$  dans (3.5) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ s \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \frac{s!}{(s-r)!} s^n \text{ et} \\
\left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ s+1 \end{matrix} \right\}_{r,s} &= \frac{s!}{(s-r+1)!} \left( (s+1)^{n+1} - s^n (s+1-r) \right).
\end{aligned}$$

**Corollaire 3.8** Nous avons

$$\sum_{n,k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} z^k = D_{x=\exp(t)-1}^r \left( (x+1)^s \exp(xz+rt) \right). \quad (3.6)$$

En particulier, pour  $r = 0$  nous avons

$$\sum_{n,k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s \frac{t^n}{n!} z^k = \exp(z(\exp(t) - 1) + st).$$

### 3.2.3 Polynômes $(r, s)$ -Bell

**Définition 3.9** Les polynômes  $(r, s)$ -Bell sont définis comme suit :

$$B_n(z; r, s) = \sum_{k=0}^{n+r} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} z^k, \quad n \geq 0.$$

Pour  $z = 1$ , les nombres  $B_n(1; r, s)$  sont appelés les nombres  $(r, s)$ -Bell. Ces nombres comptent le nombre total des partitions d'un ensemble à  $n + r + s$  éléments tels que les éléments des ensembles

$$B_n(1; r, s) = \sum_{k=0}^{n+r} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s}$$

$\{1, \dots, r\}$  et  $\{r+1, \dots, r+s\}$  soient respectivement dans des blocs différents.

Nous rappelons que dans [17], les nombres de Stirling et les nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce ont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n,$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (j+r)^n,$$

et que les polynômes de Bell et les polynômes  $r$ -Bell ont les formules de Dobinski respectives suivantes [45] :

$$B_n(z) : = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} z^j = \exp(-z) \sum_{j \geq 0} \frac{j^n}{j!} z^j,$$

$$B_n(z; r) : = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r z^j = \exp(-z) \sum_{j \geq 0} \frac{(j+r)^n}{j!} z^j.$$

Le théorème suivant donne des expressions similaires pour les polynômes  $(r, s)$ -Bell et les nombres  $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce. Ces expressions coïncident avec les cas des nombres de Stirling (resp. Bell) pour  $r = 0$  et  $s = 0$  et les nombres  $r$ -Stirling (resp.  $r$ -Bell) pour  $r = 0$ .

**Théorème 3.10** (Formule de Dobinski [45]) Nous avons

$$B_n(z; r, s) = \exp(-z) \sum_{j \geq 0} (j+s)^r \frac{(j+s)^n}{j!} z^j, \quad (3.7)$$

et

$$\left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (j+s)^r \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (j+s)^n. \quad (3.8)$$

**Preuve.** A partir de (3.5) nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_n(z; r, s) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n, k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} z^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x^k (x+1)^s \right) z^k \\ &= \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( (x+1)^s \sum_{k \geq 0} \frac{(xz)^k}{k!} \right) \\ &= D_{x=\exp(t)-1}^r \left( (x+1)^s \exp(xz + rt) \right) \\ &= \exp(rt - z) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( (x+1)^s \exp((x+1)z) \right) \\ &= \exp(rt - z) D_{x=\exp(t)-1}^r \sum_{j \geq 0} (x+1)^{j+s} \frac{z^j}{j!} \\ &= \exp(st - z) \sum_{j \geq 0} (j+s)^r \frac{(z \exp(t))^j}{j!} \\ &= \exp(-z) \sum_{j \geq 0} (j+s)^r \frac{z^j \exp((j+s)t)}{j!} \\ &= \exp(-z) \sum_{j \geq 0} (j+s)^r \frac{z^j}{j!} \sum_{n \geq 0} \frac{(j+s)^n}{n!} t^n \\ &= \exp(-z) \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{j \geq 0} (j+s)^r (j+s)^n \frac{z^j}{j!}. \end{aligned}$$

L'identité (3.8) pourra être déduite à partir de (3.7) par identification des coefficients des  $z^k$ .  $\square$

### 3.2.4 Identités et conséquences

**Corollaire 3.11** Pour  $1 \leq r \leq s$  nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n+r+s+1 \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left( \left\{ \begin{matrix} j+r+s \\ k+s-1 \end{matrix} \right\}_{r,s} + r \left\{ \begin{matrix} j+r+s \\ k+s-1 \end{matrix} \right\}_{r-1,s} \right).$$

**Preuve.** A partir de (3.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & k \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x \left( x^{k-1} (x+1)^s \right) \right), \end{aligned}$$

et, en utilisant la deuxième identité du lemme 3.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} & k \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \exp(rt) (\exp(t)-1) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x^{k-1} (x+1)^s \right) \\ & \quad + \frac{r}{(k-1)!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^{r-1} \left( x^{k-1} (x+1)^s \right) \\ &= (\exp(t)-1) \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k-1+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} + r \exp(t) \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r-1+s \\ k-1+s \end{matrix} \right\}_{r-1,s} \frac{t^n}{n!} \\ &= \exp(t) \sum_{n \geq 0} \left( \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s-1 \end{matrix} \right\}_{r,s} + r \left\{ \begin{matrix} n+r-1+s \\ k+s-1 \end{matrix} \right\}_{r-1,s} \right) \frac{t^n}{n!} \\ & \quad - \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s-1 \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

ce qui donne par identification

$$k \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} + \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s-1 \end{matrix} \right\}_{r,s} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left( \left\{ \begin{matrix} j+r+s \\ k+s-1 \end{matrix} \right\}_{r,s} + r \left\{ \begin{matrix} j+r-1+s \\ k+s-1 \end{matrix} \right\}_{r-1,s} \right).$$

En utilisant (3.3), nous obtenons l'identité demandée.  $\square$

En utilisant (3.7) nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 3.12** *Pour  $r \leq s$ , nous avons*

$$z \frac{d}{dz} (z^s \exp(z) B_n(z; r, s)) = z^s \exp(z) B_{n+1}(z; r, s), \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dz} (\exp(z) B_n(z; r, s)) = \exp(z) B_n(z; r, s+1), \quad (3.10)$$

$$B_{n+1}(z; r, s) = z B_n(z; r, s+1) + s B_n(z; r, s). \quad (3.11)$$

**Corollaire 3.13** *Nous avons*

$$\begin{aligned} B_0(z; r, s) &= \sum_{k=0}^r \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k+s-r+1 \end{matrix} \right]_{s-r+1} B_k(z), \\ B_n(z; r, s) &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s z^k B_0(z; r, s+k), \end{aligned} \quad (3.12)$$

où

$$B_n(z) = B_n(z; 0, 0) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} z^k.$$

**Preuve.** A partir de [17, Thm. 21] nous avons

$$\begin{aligned} (z+s)^r &= (z+s-r+1)^{\bar{r}} = \sum_{k=0}^r \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k+s-r+1 \end{matrix} \right]_{s-r+1} z^k \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^k \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k+s-r+1 \end{matrix} \right]_{s-r+1} \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} z^l. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} B_0(z; r, s) &= \exp(-z) \sum_{j \geq 0} (j+s)^r \frac{z^j}{j!} \\ &= \exp(-z) \sum_{j \geq 0} \left( \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^k \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k+s-r+1 \end{matrix} \right]_{s-r+1} \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} j^l \right) \frac{z^j}{j!} \\ &= \exp(-z) \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^k \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k+s-r+1 \end{matrix} \right]_{s-r+1} \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} \sum_{j \geq 0} j^l \frac{z^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^r \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k+s-r+1 \end{matrix} \right]_{s-r+1} \sum_{l=0}^k \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} z^l \\ &= \sum_{k=0}^r \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k+s-r+1 \end{matrix} \right]_{s-r+1} B_k(z), \end{aligned}$$

et d'après [17, Corollaire 9] nous obtenons

$$\sum_{k=0}^r \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k+s-r+1 \end{matrix} \right]_{s-r+1} z^k = z^{-(s-r+1)} \sum_{k=s-r+1}^{s+1} \left[ \begin{matrix} s+1 \\ k \end{matrix} \right]_{s-r+1} z^k = (z+s)^r.$$

Dans [17, Thm. 22] nous avons

$$(z+s)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s z^k,$$

donc

$$\begin{aligned} B_n(z; r, s) &= \exp(-z) \sum_{j \geq 0} (j+s)^r (j+s)^n \frac{z^j}{j!} \\ &= \exp(-z) \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s \sum_{j \geq 0} (j+s)^r j^k \frac{z^j}{j!} \\ &= \exp(-z) \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s z^k \sum_{j \geq 0} (j+s+k)^r \frac{z^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s z^k B_0(z; r, s+k). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.14** *Pour  $r \leq s$ , nous avons*

$$B_n(z; r, s) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} B_{n+i}(z; s), \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} n+i+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s, \quad (3.14)$$

où  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  sont les nombres de Stirling de première espèce et

$$B_n(z; r) := \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r z^k, \quad n \geq 0.$$

**Preuve.** Il suffit d'utiliser dans (3.7) et (3.8) l'identité connue

$$(j+s)^r = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} (j+s)^i.$$

□

Le théorème suivant nous montre que les coefficients de  $z^k$  du polynôme  $(z+s)^n (z+s)^r$  sont les nombres  $(r, s)$ -Stirling de deuxième espèce.

**Théorème 3.15** *Nous avons*

$$(z+s)^n (z+s)^r = \sum_{k=0}^{n+r} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} z^k. \quad (3.15)$$

**Preuve.** En utilisant (3.14) et [17, Thm. 22] nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_k \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} z^k &= \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} \sum_k \left\{ \begin{matrix} n+i+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s z^k \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} (z+s)^{n+i} \\ &= (z+s)^n \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} (z+s)^i \\ &= (z+s)^n (z+s)^r. \end{aligned}$$

□

Comme conséquence de (3.15), en utilisant [17, Thm. 22] et la deuxième identité de (3.2), nous pouvons affirmer que pour  $n = 0$  dans (3.15) nous avons :

$$\sum_{k=0}^r \left\{ \begin{matrix} r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} z^k = \sum_{k=0}^r k! \binom{s}{k} \binom{r}{k} z^{r-k} = (z+s)^r = \sum_{k=0}^r \left\{ \begin{matrix} r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_s z^k.$$

### 3.3 Nombres $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce

#### 3.3.1 Introduction

**Définition 3.16** Soient  $R_1, \dots, R_p$  des sous-ensembles de l'ensemble  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , avec

1.  $|R_i| = r_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$ ,
2.  $|R_i \cap R_j| = \emptyset$  pour tout  $i, j = 1, \dots, p$  et  $i \neq j$ .

Le nombre  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce,  $p \geq 1$ , noté par  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, r_2, \dots, r_p}$ , compte le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  sous-ensembles non vides (appelés blocs), tel que les éléments de chacun des  $p$  sous ensembles  $R_1 = [r_1]$ ,  $R_2 = [r_1 + r_2] \setminus [r_1]$ ,  $\dots$ ,  $R_p = [r_1 + \dots + r_p] \setminus [r_1 + \dots + r_{p-1}]$  soient respectivement dans des blocs différents..

A partir de cette définition, nous pouvons facilement vérifier que les nombres  $(r_1, r_2, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce satisfont les propriétés suivantes :

1.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} = 0$ ,  $n < r_1 + \dots + r_p$  où  $k < \max(r_1, \dots, r_p)$  car si  $n < r_1 + \dots + r_p$  nous ne pouvons pas partitionner l'ensemble  $[n]$  en  $p$  sous-ensembles  $R_i$  et si  $k < r_M = \max(r_1, \dots, r_p)$ , nous ne pouvons pas trouver une partition en  $k$  sous-ensembles non vides tels que les éléments de  $R_M$  soient dans des blocs différents.
2.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ , si  $r_1, \dots, r_p \in \{0, 1\}$ ,
3.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_p}$  si  $r_1, \dots, r_{p-1} \in \{0, 1\}$ ,
4.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p, 0} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p, 1}$ ,
5.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(p)}}$  pour toute permutation  $\sigma$  sur l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$ .

A partir de la propriété 5, nous remarquons la symétrie du nombre  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce par rapport aux nombres  $r_1, \dots, r_p$ , nous pouvons donc, sans perdre de généralité, supposer que  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ .

Dans ce chapitre nous noterons

$$- D_{z=z_0}^n = \left. \frac{d^n}{dz^n} \right|_{z=z_0},$$

$$- \mathbf{r}_p = (r_1, \dots, r_p),$$

- $|\mathbf{r}_p| = r_1 + \dots + r_p$ ,
- $P_t(z, \mathbf{r}_p) = (z + r_p)^t (z + r_p)^{r_1} \dots (z + r_p)^{r_{p-1}}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

### 3.3.2 Relations récurrentes combinatoires

Broder dans [17] a introduit les nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce et a montré d'une manière combinatoire que ces nombres vérifient les relations suivantes (voir [17, Thms. 2 et 4]) :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= 0, \quad n < r, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= \delta_{r,k}, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r, \quad n > r, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}, \quad n \geq r \geq 1. \end{aligned}$$

Dans cette section nous montrerons que les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce satisfont à des relations recurrentes similaires à celles des nombres de Stirling de deuxième espèce ainsi qu'à celles des nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce mais avec des conditions initiales modifiées (voir les théorèmes 3.18 et 3.19 ci dessous).

**Théorème 3.17** *Soit  $\mathbf{r}_{p,\alpha} = (r_1, \dots, r_{\alpha-1}, r_{\alpha+1}, \dots, r_p)$ ;  $1 \leq \alpha \leq p$ . Les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce peuvent être exprimé sous la forme suivante :*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \frac{1}{(k - r_\alpha)} \sum_{j=0}^{r_\alpha} \binom{r_\alpha}{j} \left\{ \begin{matrix} n - r_\alpha \\ k - j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_{p,\alpha}} (k - j)!.$$

**Preuve.** Vu le rôle symétrique que jouent les éléments  $r_1, \dots, r_p$  dans les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling nous considérons, sans perdre de généralité, seulement le cas où  $\alpha = p$ .

Pour  $i = 0, \dots, p$ , il existe  $\binom{r_\alpha}{i}$  façons pour former  $i$  singletons en utilisant les éléments de l'ensemble  $R_p$  et  $\left\{ \begin{matrix} n - r_\alpha \\ k - i \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_{p-1}}$  façons pour partitionner l'ensemble  $[n] \setminus R_p$  en  $k - i$  sous ensembles de sorte que les éléments de chaque sous ensemble  $R_i$   $i = 1, \dots, p - 1$ , soient dans des blocs différents.

Les  $r_p - i$  éléments restant de l'ensemble  $R_p$  et qui ne sont pas encore utilisés dans la partition peuvent être insérés dans les  $k - i$  sous ensembles déjà construits en  $\frac{(k - i)!}{(k - r_p)!}$  façons. Alors le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  sous ensembles tels que les éléments de chaque ensemble  $R_i$   $i = 1, \dots, p$  soient respectivement dans des blocs différents

est

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \frac{1}{(k - r_\alpha)} \sum_{j=0}^{r_\alpha} \binom{r_\alpha}{j} \left\{ \begin{matrix} n - r_\alpha \\ k - j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_{p,\alpha}} (k - j)!.$$

□

**Théorème 3.18** *Les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce satisfont à la relation récurrente suivante :*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = k \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} + \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$$

**Preuve.** Pour former une partition de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  sous ensembles non vides, nous construisons.

- une partition de l'ensemble  $[n - 1]$  en  $k$  sous ensembles non vides et ajoutons l'élément  $n$  à l'un des blocs de la partition construite, nous aurons dans ce cas  $k \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  partitions, ou bien
- une partition de l'ensemble  $[n - 1]$  en  $k - 1$  sous ensembles non vides et ensuite nous ajoutons l'ensemble  $\{n\}$  à la partition construite pour former une partition à  $k$  blocs, nous aurons dans ce cas  $\left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  partitions.

Evidemment, pour  $n > |\mathbf{r}_p|$ , la répartition des éléments des ensembles  $R_i$   $i = 1, \dots, p$ , en différents sous ensembles n'est pas influencée par ce processus. □

**Théorème 3.19** *Soit  $e_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de l'espace  $\mathbb{R}^p$ . Alors, pour tout  $i = 1, \dots, p$ ; le nombre  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce satisfait à la relation récurrente suivante :*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - e_i} + (r_i - 1) \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - e_i}, \quad n \geq |\mathbf{r}_p|, \quad r_1, \dots, r_p \geq 1.$$

**Preuve.** Pour tout  $i = 1, \dots, p$ , l'identité du théorème peut s'écrire comme suit :

$$(r_i - 1) \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - e_i} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} - \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - e_i}.$$

Le nombre du côté droit de cette nouvelle identité représente le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  sous ensembles non vides tels que :

- les éléments des ensembles  $R_1, \dots, R_{i-1}, R_i \setminus \{\mathbf{r}_i\}, \dots, R_p$  soient respectivement dans des blocs différents,
- l'élément  $|\mathbf{r}_i|$  appartient à l'un des blocs de partition qui contiennent un élément de d'ensemble  $R_i \setminus \{\mathbf{r}_i\}$ .

Ce nombre est aussi égal à  $(r_i - 1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - e_i}$  car ces partitions peuvent être obtenues en  $(r_i - 1)$  façons à partir des partitions de l'ensemble  $[n] \setminus \{\mathbf{r}_i\}$  en  $k$  sous ensembles non vides tels que les éléments des ensembles  $R_1, \dots, R_{i-1}, R_i \setminus \{\mathbf{r}_i\}, \dots, R_p$  soient respectivement dans des blocs différents et en insérant par la suite l'élément  $|\mathbf{r}_i|$  dans l'un des  $|\mathbf{r}_i| - 1$  blocs contenant un élément de l'ensemble  $R_i \setminus \{\mathbf{r}_i\}$ .  $\square$

**Théorème 3.20** *Pour  $r \leq s$  nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x^k (x+1)^s \right).$$

**Preuve.** pour  $k \leq r$ , en appliquant le théorème 3.17 et posant  $p = 2, \alpha = 2, r_1 = r, r_2 = s, n \leftarrow n+r+s$  et  $k \leftarrow k+s$  nous avons

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+s-j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+s-j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}.$$

Posons  $s \leftarrow s-j$ , nous aurons sous la contrainte  $k+j \geq r$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j-j} (k+j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n \geq 0} \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j} (k+j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j} (k+j)! \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j-r+r \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction génératrice verticale du nombre  $r$ -Stirling de deuxième espèce [17, Thm. 16], nous déduisons que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j} (k+j)! \frac{1}{(k+j-r)!} (e^t - 1)^{k+j-r} \exp(rt) \\ &= \frac{1}{k!} \exp(rt) \sum_{j=r-k}^s \binom{s}{j} \frac{(k+j)!}{(k+j-r)!} (e^t - 1)^{k+j-r} \\ &= \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x^k (x+1)^s \right). \end{aligned}$$

Pour  $k > r$ , sous la condition  $n+r+s \geq k+s$  alors  $n \geq k-r$  et par la suite nous avons,

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq k-r} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!}.$$

En appliquant le théorème 3.18 et posant  $p = 2, \alpha = 2, r_1 = r, r_2 = s, n \leftarrow n+r+s$  et  $k \leftarrow k+s$  nous avons

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq k-r} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+s-j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+s-j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!};$$

Posons  $s - j \leftarrow j$ ,

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq k-r} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (k+j)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}.$$

Sous la condition  $n+r \geq k+j \implies n \geq k-r+j$ , nous aurons

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \sum_{j=0}^s \frac{1}{k!} \binom{s}{j} (k+j)! \sum_{n \geq k-r+j} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+j \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!}.$$

Vu que la fonction génératrice verticale des nombres  $r$ -Stirling est donnée par

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k \exp(rt).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{j=0}^s \frac{1}{k!} \binom{s}{j} (k+j)! \sum_{n \geq k-r+j} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ (k-r+j)+r \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k+j)!}{(k+j-r)} (e^t - 1)^{k+j-r} \exp(rt) \\ &= \frac{1}{k!} \exp(rt) \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(k+j)!}{(k+j-r)} (e^t - 1)^{k+j-r}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.6 nous déduisons que

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+s \\ k+s \end{matrix} \right\}_{r,s} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \exp(rt) D_{x=\exp(t)-1}^r \left( x^k (x+1)^s \right).$$

□

**Théorème 3.21** *Pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$  nous avons*

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \exp(r_1 t) D_{x_1=\exp(t)-1}^{r_1} D_{x_2=x_1}^{r_2} \cdots D_{x_{p-1}=x_{p-2}}^{r_{p-1}} \left( x_{p-1}^k \prod_{i=1}^{p-1} (x_i+1)^{r_{i+1}} \right). \end{aligned}$$

**Preuve.** Par récurrence sur  $p$ . En utilisant le Théorème 3.20, le théorème est vrai pour  $p = 2$  (en posant  $r = r_1, s = r_2$ ). En supposant que l'assertion est vraie pour  $p \geq 2$ , posons

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k!} \exp(r_1 t) D_{x_1=\exp(t)-1}^{r_1} D_{x_2=x_1}^{r_2} \cdots D_{x_p=x_{p-1}}^{r_p} \left( x_p^k \prod_{i=1}^p (x_i+1)^{r_{i+1}} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \exp(r_1 t) D_{x_1=\exp(t)-1}^{r_1} D_{x_2=x_1}^{r_2} \cdots D_{x_p=x_{p-1}}^{r_p} \left( x_p^k (x_p+1)^{r_{p+1}} \prod_{i=1}^{p-1} (x_i+1)^{r_{i+1}} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \exp(r_1 t) D_{x_1=\exp(t)-1}^{r_1} D_{x_2=x_1}^{r_2} \cdots D_{x_p=x_{p-1}}^{r_p} \left( \sum_{j=0}^{r_{p+1}} \binom{r_{p+1}}{j} x_p^{k+j} \prod_{i=1}^{p-1} (x_i+1)^{r_{i+1}} \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.6 nous aurons

$$A = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{r_{p+1}} \binom{r_{p+1}}{j} \frac{(k+j)!}{(k+j-r_p)!} \\ \times \exp(r_1 t) D_{x_1=\exp(t)-1}^{r_1} D_{x_2=x_1}^{r_2} \cdots D_{x_{p-1}=x_{p-2}}^{r_{p-1}} \left( x_{p-1}^{k+j-r_p} \prod_{i=1}^{p-1} (x_i+1)^{r_{i+1}} \right).$$

D'après l'hypothèse de la récurrence, nous avons

$$\frac{1}{(k+j-r_p)!} D_{x_1=\exp(t)-1}^{r_1} D_{x_2=x_1}^{r_2} \cdots D_{x_{p-1}=x_{p-2}}^{r_{p-1}} \left( x_{p-1}^{k+j-r_p} \prod_{i=1}^{p-1} (x_i+1)^{r_{i+1}} \right) \\ = \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + j - r_p + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \frac{t^n}{n!} \\ = \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \frac{t^n}{n!}.$$

Alors

$$A = \sum_{j=0}^{r_{p+1}} \binom{r_{p+1}}{j} \frac{(k+j)!}{k!} \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \frac{t^n}{n!} \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^{r_{p+1}} \binom{r_{p+1}}{j} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \frac{(k+j)!}{k!}$$

D'après le théorème 3.17, nous pouvons écrire

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_{p+1}| \\ k + r_{p+1} \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_{p+1}} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{r_{p+1}} \binom{r_{p+1}}{j} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} (k+j)!,$$

donc

$$A = \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_{p+1}| \\ k + r_{p+1} \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_{p+1}} \frac{t^n}{n!}.$$

□

**Théorème 3.22** *Soit*

$$B_n(z, \mathbf{r}_p) = \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k, \quad n \geq 0$$

Pour  $r_1 \leq \cdots \leq r_p$  nous avons

$$B_n(z, \mathbf{r}_p) = \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_n(k, r_p) \frac{z^k}{k!}, \quad (3.16)$$

et

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_n(j, r_p). \quad (3.17)$$

**Preuve.** En utilisant le théorème 3.21 nous obtenons

$$\sum_{n \geq 0} B_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} = \exp(r_1 t - z) D_{x_1 = \exp(t) - 1}^{r_1} D_{x_2 = x_1}^{r_2} \cdots D_{x_{p-1} = x_{p-2}}^{r_{p-1}} \left( \exp(z(x_{p-1} + 1)) \prod_{i=1}^{p-1} (x_i + 1)^{r_{i+1}} \right).$$

Le développement de  $\exp(z(x_{p-1} + 1))$  et la dérivation par rapport à  $x_{p-1}$  nous donnent

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{j \geq 0} \exp(r_1 t - z) D_{x_1 = \exp(t) - 1}^{r_1} D_{x_2 = x_1}^{r_2} \cdots D_{x_{p-1} = x_{p-2}}^{r_{p-1}} \\ &\quad \left( \frac{z^j}{j!} (x_{p-1} + 1)^j \prod_{i=1}^{p-1} (x_i + 1)^{r_{i+1}} \right) \\ &= \exp(r_1 t - z) D_{x_1 = \exp(t) - 1}^{r_1} D_{x_2 = x_1}^{r_2} \cdots D_{x_{p-2} = x_{p-3}}^{r_{p-2}} \\ &\quad \left( \sum_{j \geq 0} (j + r_p)^{\overline{r_{p-1}}} (x_{p-2} + 1)^{j+r_p} \frac{z^j}{j!} \prod_{i=1}^{p-3} (x_i + 1)^{r_{i+1}} \right), \end{aligned}$$

et par des dérivations successives nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} &= \exp(r_1 t - z) \sum_{j \geq 0} P_0(j; \mathbf{r}_p) (x_1 + 1)^{j+r_p-r_1} \frac{z^j}{j!} \Big|_{x_1 = \exp(t) - 1} \\ &= \exp(-z) \sum_{j \geq 0} P_0(j; \mathbf{r}_p) \frac{z^j}{j!} \exp((j + r_p)t) \\ &= \exp(-z) \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{j \geq 0} P_n(j; \mathbf{r}_p) \frac{z^j}{j!}. \end{aligned}$$

Donc, par identification, nous déduisons la première identité (3.16). La deuxième identité (3.17) se déduit à partir du développement suivant :

$$B_n(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{i, j \geq 0} (-1)^i P_n(j; \mathbf{r}_p) \frac{z^{i+j}}{i! j!} = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_n(j; \mathbf{r}_p).$$

□

A partir du théorème 3.22 nous pouvons déduire que :

**Corollaire 3.23** Pour  $r_1 \leq \cdots \leq r_p$  nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \frac{t^n}{n!} &= \frac{\exp(r_p t)}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_0(j; \mathbf{r}_p) \exp(jt), \\ \sum_{n, k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k \frac{t^n}{n!} &= \exp(r_p t - z) \sum_{j \geq 0} P_0(j; \mathbf{r}_p) \frac{(z \exp(t))^j}{j!}. \end{aligned}$$

### 3.3.3 Identités et conséquences

Soient  $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$  et  $\{q_n(x)\}_{n \geq 0}$  deux suites de polynômes de degré  $n$ , telles que chaque polynôme  $p_n(x)$  peut être exprimé comme combinaison linéaire des polynômes de la suite  $\{q_n(x)\}_{n \geq 0}$ , c'est à dire

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} q_k(x)$$

Les nombres  $a_{n,k}$  sont appelés des coefficients de connexion (voir [5]).

Beaucoup de familles de nombres en combinatoire, comme par exemple les coefficients binomiaux, les nombres de Stirling de première et deuxième espèce et le nombre de Lah, peuvent être interprétés comme des coefficients de connexion entre des suites de polynômes appropriés. Dans ce qui suit nous citons les nombres suivants :

1. Les coefficients binomiaux

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

- 2 Les nombres de stirling de deuxième espèce

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k, \quad \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = (k+1) \left\{ \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

- 3 Les nombres de stirling de première espèce

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k, \quad \left[ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right] = n \left[ \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right].$$

Une interprétation combinatoire des nombres  $r$ -Stirling en tant que constantes de connexion entre le polynôme  $z^k$  et le polynôme  $(z+r)^n$  est donnée en [17] par la relation

$$(z+r)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r z^k.$$

Dans le théorème ci dessous, nous généralisons ce résultat en donnant une interprétation combinatoire des nombres  **$r_p$ -Stirling** en tant que coefficients de connexion entre le polynôme  $z^k$  et le polynôme  $P_n(z, \mathbf{r}_p)$ .

En d'autres termes nous écrivons le polynôme  $P_n(z, \mathbf{r}_p)$  sous forme d'une combinaison linéaire des factorielles descendantes, ce qui prouve que les nombres  $r_p$ -Stirling peuvent être interprétés comme des coefficients de connexion Voir [5]

**Théorème 3.24** Pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$  nous avons

$$P_n(z, \mathbf{r}_p) = \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k$$

**Preuve.** D'après le théorème 3.22, nous avons

$$B_n(z, \mathbf{r}_p) = \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k = \sum_{l=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \frac{D_{z=0}^l (B_n(z, \mathbf{r}_p))}{l!} z^l, \quad n \geq 0.$$

Donc, en appliquant la **formule de Leibniz**, nous aurons

$$\begin{aligned} D_{z=0}^m (\exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p)) &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} D_{z=0}^l (B_n(z, \mathbf{r}_p)) \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} l! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \\ &= \sum_{l=0}^m \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} m^l, \end{aligned}$$

en plus nous avons

$$\exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p) = \sum_{k \geq 0} P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!},$$

ce qui implique

$$D_{z=0}^m (\exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p)) = P_n(m, \mathbf{r}_p) = \sum_{l=0}^m \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} m^l, \quad 0 \leq m \leq n+|\mathbf{r}_{p-1}|.$$

Alors, le polynôme

$$Q_n(z, \mathbf{r}_p) := P_n(z, \mathbf{r}_p) - \sum_{l=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ l+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^l,$$

s'annule en tout entier non négatif  $z = m$ . Il résulte que

$$P_n(z, \mathbf{r}_p) = \sum_{l=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ l+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^l.$$

□

Les trois corollaires donnés ci-dessous sont des conséquences des théorèmes 3.22 et 3.24. Le premier corollaire donne une expression du nombre  $\left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  en fonction des termes

$\left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  et les nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce.

**Corollaire 3.25** Pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$  nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{j+r_p}, \quad 0 \leq k \leq n + |\mathbf{r}_{p-1}|.$$

En particulier, pour  $p = 2$  et  $r \leq s$ , nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n + r + s \\ k + s \end{matrix} \right\}_{r,s} = \sum_{j=0}^{\min\{k,r\}} \binom{s}{j} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} n + r + s - j \\ k + j \end{matrix} \right\}_{r+s-j} j!, \quad 0 \leq k \leq n + r.$$

**Preuve.** A partir des théorèmes de 3.22 et 3.24 nous obtenons

$$\begin{aligned} B_n(z, \mathbf{r}_p) &= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} (k + r_p)^n P_0(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \\ &= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} (k + r_p)^n \left( \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \binom{k}{j} \right) \frac{z^k}{k!} \\ &= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} (k + r_p)^n z^k \left( \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \frac{1}{(k-j)!} \right) \\ &= \exp(-z) \left( \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \sum_{k \geq j} \frac{(k + r_p)^n}{(k-j)!} z^k \right) \\ &= \exp(-z) \left( \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \sum_{k \geq 0} \frac{(k + j + r_p)^n}{k!} z^{k+j} \right) \\ &= \exp(-z) \left( \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j \sum_{k \geq 0} \frac{(k + j + r_p)^n}{k!} z^k \right). \end{aligned}$$

Vu que le polynôme  $r$ -Bell s'écrit sous la forme suivante (voir [45, Thm. 5.1])

$$B_n(z, r) = \exp(-z) \sum_{i \geq 0} \frac{(i+r)^n}{i!} z^i = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r z^k,$$

alors

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(k + j + r_p)^n}{k!} z^k = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ k + j + r_p \end{matrix} \right\}_{j+r_p} z^k,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} B_n(z, \mathbf{r}_p) &= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ i + j + r_p \end{matrix} \right\}_{j+r_p} z^i \\ &= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ i + j + r_p \end{matrix} \right\}_{j+r_p} z^{i+j} \\ &= \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left( \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{j+r_p} \right) z^k. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.26** Pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$  nous avons

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} (z^{r_p} \exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p)) &= z^{r_p} \exp(z) B_{n+1}(z, \mathbf{r}_p), \\ \frac{d}{dz} (\exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p)) &= \exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p + e_p), \\ B_{n+1}(z, \mathbf{r}_p) &= z B_n(z, \mathbf{r}_p + e_p) + r_p B_n(z, \mathbf{r}_p). \end{aligned}$$

où  $e_p$  est le  $p^{\text{ième}}$  vecteur de la base canonique de l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

**Preuve.** Dans le théorème 3.22 nous avons démontré que

$$B_n(z, \mathbf{r}_p) = \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!},$$

donc, nous avons l'identité

$$z^{r_p} \exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p) = z^{r_p} \sum_{k \geq 0} P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!}.$$

Cette identité montre que

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} (z^{r_p} \exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p)) &= \sum_{k \geq 0} (k + r_p) P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^{k+r_p-1}}{k!} z \\ &= z^{r_p} \sum_{k \geq 0} P_{n+1}(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \\ &= z^{r_p} \exp(z) B_{n+1}(z, \mathbf{r}_p). \end{aligned}$$

Pour la deuxième identité du corollaire, nous avons

$$\exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p) = \sum_{k \geq 0} P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p)) &= \sum_{k \geq 0} P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} P_n(k+1, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \\ &= \exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p + e_p). \end{aligned}$$

Pour la troisième identité, nous avons

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(z, \mathbf{r}_p) &= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_{n+1}(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \\
&= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} (z + r_p) P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \\
&= \exp(-z) \left[ z \sum_{k \geq 0} P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} + r_p \sum_{k \geq 0} P_n(k, \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \right].
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.27** Pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$  nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| + k \\ r_p + j + k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p + k\mathbf{e}_p} = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ r_p + j + i \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} (j+i)^i.$$

**Preuve.** En utilisant le corollaire précédent et la **formule de Leibniz**, nous obtenons

$$\exp(-z) \frac{d^k}{dz^k} (\exp(z) B_n(z, \mathbf{r}_p)) = B_n(z, \mathbf{r}_p + k\mathbf{e}_p) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{d^j}{dz^j} B_n(z, \mathbf{r}_p).$$

Le résultat du corollaire découle de la définition des polynômes  $B_n(z, \mathbf{r}_p + k\mathbf{e}_p)$  et  $B_n(z, \mathbf{r}_p)$  dans la dernière identité. □

Le théorème 3.22 peut être utilisé pour généraliser la distribution de Poisson discrète ainsi que les inégalités données par Bouroubi [15] sur les polynômes de Bell à une seule variable. Dans ce contexte, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 3.28** Soit  $t$  un nombre réel,  $\alpha, \beta$  deux nombres réels positifs avec  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  et pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$  posons

$$B_t(\lambda, \mathbf{r}_p) = \exp(-\lambda) \sum_{k \geq 0} P_t(k, \mathbf{r}_p) \frac{\lambda^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}, r_p \geq 1.$$

Pour  $\lambda > 0$ , soit  $X$  une variable aléatoire définie par sa probabilité discrète

$$\Pr(X = k) = \frac{P_t(k, \mathbf{r}_p)}{B_t(\lambda, \mathbf{r}_p)} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Alors

$$\mathbb{E}(X + r_p)^x = \frac{B_{t+x}(\lambda, \mathbf{r}_p)}{B_t(\lambda, \mathbf{r}_p)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

et

$$\begin{aligned}
B_{t+x+y}(\lambda; \mathbf{r}_p) B_t(\lambda; \mathbf{r}_p) &\geq B_{t+x}(\lambda; \mathbf{r}_p) B_{t+y}(\lambda; \mathbf{r}_p), \quad x, y \geq 0, \\
B_{t+x+y}(\lambda; \mathbf{r}_p) &\leq (B_{t+\alpha x}(\lambda; \mathbf{r}_p))^{1/\alpha} (B_{t+\beta y}(\lambda; \mathbf{r}_p))^{1/\beta}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \\
(B_{t+x}(\lambda; \mathbf{r}_p))^{1/x} &\leq (B_{t+y}(\lambda; \mathbf{r}_p))^{1/y} (B_t(\lambda; \mathbf{r}_p))^{1/x-1/y}, \quad 0 < x \leq y, \\
(B_{t+y}(\lambda; \mathbf{r}_p))^2 &\leq B_{t+y-x}(\lambda; \mathbf{r}_p) B_{t+y+x}(\lambda; \mathbf{r}_p), \quad 0 \leq x \leq y.
\end{aligned}$$

**Preuve.** L'égalité de l'espérance est évidente. La première inégalité se déduit à partir de l'inégalité suivante

$$\mathbf{E}(X + s)^{x+y} \geq \mathbf{E}(X + s)^x \mathbf{E}(X + s)^y, \quad x, y \geq 0,$$

et pour obtenir la seconde inégalité nous utilisons l'inégalité de Hölder

$$\mathbf{E}(X + s)^{x+y} \leq (\mathbf{E}(X + s)^{\alpha x})^{1/\alpha} \left( \mathbf{E}(X + s)^{\beta y} \right)^{1/\beta}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

La troisième inégalité provient de l'inégalité de Lyapunov

$$(\mathbf{E}(X + s)^x)^{1/x} \leq (\mathbf{E}(X + s)^y)^{1/y}, \quad 0 < x \leq y,$$

et la quatrième inégalité provient de l'inégalité de Schwarz

$$(\mathbf{E}(X + s)^y)^2 \leq \mathbf{E}(X + s)^{y-x} \mathbf{E}(X + s)^{y+x}, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Pour plus de détails voir [10].

□

## Chapitre 4

# Polynômes $(r_1, \dots, r_p)$ -Bell

### 4.1 Introduction

En 1984, Broder [17] a introduit et étudié le nombre  $r$ -Stirling de deuxième espèce  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$ , qui énumère le nombre de partitions de l'ensemble  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  sous ensembles non vides (appelés blocs) tels que les  $r$  premiers éléments soient dans des blocs différents.

En 2011, Mező [45] a introduit et étudié les polynômes  $r$ -Bell.

En 2012, Mihoubi et al. [52] ont introduit et étudié les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p}$ , qui énumèrent le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  sous ensembles non vides (appelés des blocs) tels que les éléments de chacun des  $p$  ensembles

$$\begin{aligned} R_1 & : = \{1, \dots, r_1\}, \\ R_2 & : = \{r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2\}, \\ & \vdots \\ R_p & : = \{r_1 + \dots + r_{p-1} + 1, \dots, r_1 + \dots + r_p\} \end{aligned}$$

soient respectivement dans des blocs différents.

Le contenu de ce chapitre a été motivé par l'étude des polynômes  $r$ -Bell [45] et les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce [52], dans lesquels nous allons établir

- la log-concavité des nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce,
- des relations récurrentes généralisées pour les polynômes  $(r_1, \dots, r_p)$ -Bell, et
- les fonctions génératrices ordinaires associées à ces nombres et à ces polynômes.

Vu la symétrie des nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce par rapport aux paramètres  $r_1, \dots, r_p$ , nous pouvons supposer, sans perdre de généralités, que  $r_1 \leq r_2 \leq$

$\dots \leq r_p$ . A travers ce chapitre nous utiliserons les notations et les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p & : = (r_1, \dots, r_p), \\ |\mathbf{r}_p| & : = r_1 + \dots + r_p, \\ P_t(z; \mathbf{r}_p) & : = (z + r_p)^t (z + r_p)^{r_1} \dots (z + r_p)^{r_{p-1}}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ B_n(z; \mathbf{r}_p) & : = \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

et  $\mathbf{e}_i$  représente le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^p$ .

Dans [52], Nous avons démontré ce qui suit :

$$B_n(z; \mathbf{r}_p) = \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_n(k; \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!}, \quad (4.1)$$

$$P_n(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k. \quad (4.2)$$

Dans ce qui suit nous utiliserons les nombres suivants :

$$a_k(\mathbf{r}_{p-1}) = (-1)^{|\mathbf{r}_{p-1}|-k} \sum_{|\mathbf{j}_{p-1}|=k} \begin{bmatrix} r_1 \\ j_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} r_{p-1} \\ j_{p-1} \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{j}_{p-1}| = j_1 + \dots + j_{p-1},$$

où  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  sont les nombres de Stirling de première espèce.

En utilisant l'identité connue

$$(u)^r = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix} u^j,$$

nous pouvons affirmer que nous avons

$$\sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) u^k = (u)^{r_1} \dots (u)^{r_{p-1}}. \quad (4.3)$$

Dans notre contribution, nous donnons plus de propriétés pour les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce et les polynômes  $\mathbf{r}_p$ -Bell. Ce chapitre est organisé comme suit :

Dans le paragraphe suivant, nous montrons que la suite  $\left( \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}; 0 \leq k \leq n+|\mathbf{r}_{p-1}| \right)$  est strictement log-concave et nous donnons aussi une approximation au nombre  $\left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour un  $k$  fixé.

Dans le troisième paragraphe nous écrivons  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  dans la base

$$\{B_{n+k}(z; \mathbf{r}_p) : 0 \leq k \leq |\mathbf{r}_{p-1}|\},$$

et  $B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p)$  dans la familles des bases

$$\{z^j B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p) : 0 \leq j \leq n\}.$$

Comme conséquences, nous donnons aussi des identités pour les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce.

Dans le quatrième paragraphe, nous donnons la fonction génératrice verticale associée aux nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de deuxième espèce et la fonction génératrice ordinaire des polynômes  $\mathbf{r}_p$ -Bell.

## 4.2 Log-concavité des nombres $\mathbf{r}_p$ -Stirling

Dans ce paragraphe, nous discutons les racines réelles du polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$ , la log-concavité de la suite  $\left( \left\{ \begin{smallmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}, 0 \leq k \leq n+|\mathbf{r}_p| \right)$ , le plus grand indice maximisant le nombre  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  et nous donnons une approximation au nombre  $\left\{ \begin{smallmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ m+r_p \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  quand  $n$  tend vers l'infini. Le cas  $p = 1$  a été étudié par Mező [46] et une autre étude a été donnée par Zhao [71] pour une large classe des nombres de Stirling.

Dans la suite de ce chapitre, si l'ordre des paramètres  $r_1, \dots, r_p$  est inconnu, nous représentons le polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  par  $B_n(z; r_1, \dots, r_p)$  pour lesquels les paramètres  $r_1, \dots, r_p$  sont pris dans un ordre quelconque.

**Théorème 4.1** *Les racines du polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  sont des réelles non positives.*

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le lemme suivant :

**Lemme 4.2** *Soit  $j, p$  des entiers non négatifs et posons*

$$B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p) := \exp(-z) \frac{d^j}{dz^j} (z^{r_p} \exp(z) B_n(z; \mathbf{r}_p)),$$

où  $r_0 := 0$  et  $B_n(z; \mathbf{r}_0) := B_n(z) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} z^k$ . Alors, nous avons

$$\begin{aligned} B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p) &= z^{r_p-j} B_n(z; r_1, \dots, r_p, j) \quad \text{si } j < r_p, \\ B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p) &= B_n(z; r_1, \dots, r_p, j) \quad \text{si } j \geq r_p, \end{aligned}$$

avec  $\deg B_n^{(j)} = n + |\mathbf{r}_p|$ . En particulier, nous avons  $B_n^{(r_p+1)}(z; \mathbf{r}_p) = B_n(z; \mathbf{r}_{p+1})$ .

**Preuve.** La définition de  $B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p)$  et l'identité (4.1) montrent que nous avons

$$\begin{aligned} \exp(z) B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p) &= \frac{d^j}{dz^j} \left( \sum_{k \geq 0} P_n(k; \mathbf{r}_p) \frac{z^{k+r_p}}{k!} \right) \\ &= \sum_{k \geq \max(0, j-r_p)} (k+r_p)^n (k+r_p)^{\underline{r_1}} \cdots (k+r_p)^{\underline{r_{p-1}}} (k+r_p)^{\underline{j}} \frac{z^{k+r_p-j}}{k!}. \end{aligned}$$

Alors pour  $0 \leq j < r_p$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \exp(z) B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p) &= \sum_{k \geq 0} (k+r_p)^n (k+r_p)^{r_1} \cdots (k+r_p)^{r_{p-1}} (k+r_p)^j \frac{z^{k+r_p-j}}{k!} \\ &= z^{r_p-j} \exp(z) B_n(z; r_1, \dots, r_p, j), \end{aligned}$$

et pour  $j \geq r_p$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \exp(z) B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p) &= \sum_{k \geq j-r_p} (k+r_p)^n (k+r_p)^{r_1} \cdots (k+r_p)^{r_{p-1}} (k+r_p)^j \frac{z^{k+r_p-j}}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} (k+j)^n (k+j)^{r_1} \cdots (k+j)^{r_{p-1}} (k+j)^{r_p} \frac{z^k}{k!} \\ &= \exp(z) B_n(z; r_1, \dots, r_p, j). \end{aligned}$$

Il est évident que nous avons  $\deg B_n^{(j)} = n + |\mathbf{r}_p|$  et pour  $j = r_{p+1} \geq r_p$  nous obtenons  $B_n^{(r_{p+1})}(z; \mathbf{r}_p) = B_n(z; r_1, \dots, r_p, r_{p+1}) = B_n(z; \mathbf{r}_{p+1})$ .  $\square$

**Preuve.** (Preuve du théorème 4.1). Nous utilisons la récurrence sur  $p$  pour démontrer que les racines des polynômes  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  sont réelles et non positives.

En effet, pour  $p = 0$  le polynôme de Bell classique  $B_n(z; \mathbf{r}_0) = B_n(z)$  a seulement des racines réelles non positives et pour  $p = 1$  le polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_1)$  est le polynôme  $r_1$ -Bell qui a été introduit dans [45] et a été démontré qu'il n'a que des racines réelles non positives.

Supposons maintenant que, pour  $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_p$ , les racines du polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  sont réelles et négatives, notées  $z_1, \dots, z_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|}$  avec  $0 > z_1 \geq \cdots \geq z_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|}$ .

Nous prouverons que le polynôme  $B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p)$  n'a que des racines réelles non positives et nous concluons que le polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_{p+1}) = B_n^{(r_{p+1})}(z; \mathbf{r}_p)$  n'a que des racines réelles non positives (voir le lemme 4.2).

Premièrement, nous examinons les polynômes  $B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p)$  pour  $j < r_p$ .

En effet, les énoncés ci dessus montrent que la fonction

$$f_n(z; \mathbf{r}_p) := \exp(z) B_n^{(0)}(z; \mathbf{r}_p) = z^{r_p} \exp(z) B_n(z; \mathbf{r}_p),$$

s'annule au point  $z_0, z_1, \dots, z_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|}$  avec  $z_0 = 0 > z_1 \geq \cdots \geq z_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|}$  et  $z_0 = 0$  (de multiplicité  $r_p$ ). le lemme 4.2 nous donne

$$\frac{d}{dz} (f_n(z; \mathbf{r}_p)) = \exp(z) B_n^{(1)}(z; \mathbf{r}_p) = z^{r_p-1} \exp(z) B_n(z; r_1, \dots, r_{p-1}, r_p, 1),$$

et en appliquant le théorème de Rolle à la fonction  $f_n(z; \mathbf{r}_p)$  nous concluons que sa dérivée  $\frac{d}{dz} (f_n(z; \mathbf{r}_p))$  s'annule en certains points  $x_1, \dots, x_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|}$  avec  $0 > x_1 \geq z_1 \geq x_2 \geq z_2 \geq$

$\cdots \geq x_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \geq z_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|}$ . Par conséquent, le polynôme  $B_n^{(1)}(z; \mathbf{r}_p)$  s'annule au points  $x_1, \dots, x_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|}$  et au point  $x_0 = 0$  (de multiplicité  $r_p - 1$ ). Le nombre de ces racines est  $(n + |\mathbf{r}_{p-1}|) + (r_p - 1) = n + |\mathbf{r}_p| - 1$ .

Puisque  $B_n^{(1)}(z; \mathbf{r}_p)$  est de degré  $n + |\mathbf{r}_p|$  (voir le lemme 4.2), il doit avoir exactement  $n + |\mathbf{r}_p|$  racines finies, alors la racine qui manque, notée  $x_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|+1}$ , ne peut pas être un nombre complexe.

Par le fait que les coefficients de  $z^k$  dans le polynôme  $B_n(z; r_1, \dots, r_{p-1}, r_p, 1)$  sont positifs, la racine  $x_{n+|\mathbf{r}_{p-1}|+1}$  doit être négative aussi.

Donc, le polynôme  $B_n^{(1)}(z; \mathbf{r}_p)$  a  $n + |\mathbf{r}_{p-1}| + 1$  racines réelles négatives et  $z = 0$  est une racine avec une multiplicité  $r_p - 1$ . De la même manière, nous appliquons le théorème de Rolle à la fonction  $\frac{d}{dz}(f_n(z; \mathbf{r}_p))$  pour conclure que le polynôme  $B_n^{(2)}(z; \mathbf{r}_p)$  a  $n + |\mathbf{r}_{p-1}| + 2$  admet des racines réelles négatives et  $z = 0$  est une racine avec une multiplicité  $r_p - 2$  et ainsi de suite. Donc, chacun des polynômes  $B_n^{(0)}(z; \mathbf{r}_p), B_n^{(1)}(z; \mathbf{r}_p), \dots, B_n^{(r_p-1)}(z; \mathbf{r}_p)$  n'a que des racines réelles non positives.

Deuxièmement, nous examinons les polynômes  $B_n^{(j)}(z; \mathbf{r}_p)$  pour  $r_p \leq j \leq r_{p+1}$ .

En effet, nous avons  $B_n^{(r_p)}(0; \mathbf{r}_p) \neq 0$  et considérons la fonction

$$\frac{d^{r_p-1}}{dz^{r_p-1}} f_n(z; \mathbf{r}_p) = \exp(z) B_n^{(r_p-1)}(z; \mathbf{r}_p) = z \exp(z) B_n(z; r_1, \dots, r_{p-1}, r_p, r_{p-1}).$$

Comme il a été démontré ci dessus, cette fonction a  $n + |\mathbf{r}_p| - 1$  et admet des racines réelles négatives et la racine  $z = 0$ , donc le théorème de Rolle montre que sa dérivée

$$\frac{d^{r_p}}{dz^{r_p}} f_n(z; \mathbf{r}_p) = \exp(z) B_n^{(r_p)}(z; \mathbf{r}_p) = \exp(z) B_n(z; r_1, \dots, r_{p-1}, r_p, r_p),$$

a au moins  $n + |\mathbf{r}_p| - 1$  racines réelles négatives. Ceci signifie que le polynôme

$$B_n^{(r_p)}(z; \mathbf{r}_p) = B_n(z; r_1, \dots, r_{p-1}, r_p, r_p),$$

a au moins  $n + |\mathbf{r}_p| - 1$  racines réelles négatives et puisqu'il est de degré  $n + |\mathbf{r}_p|$ , alors la racine qui manque ne peut pas être un nombre complexe.

Par le fait que les coefficients de  $z^k$  dans  $B_n(z; r_1, \dots, r_{p-1}, r_p, r_p)$  sont positifs, cette racine doit être négative aussi. Donc le polynôme  $B_n^{(r_p)}(z; \mathbf{r}_p)$  a  $n + |\mathbf{r}_p|$  racines réelles négatives.

D'une manière similaire, nous appliquons le théorème de Rolle à la fonction  $\frac{d^{r_p}}{dz^{r_p}} f_n(z; \mathbf{r}_p)$  et nous déduisons que le polynôme  $B_n^{(r_p+1)}(z; \mathbf{r}_p)$  a  $n + |\mathbf{r}_p|$  admet des racines réelles négatives et ainsi de suite. Donc chacun des polynômes  $B_n^{(r_p)}(z; \mathbf{r}_p), \dots, B_n^{(r_p+1)}(z; \mathbf{r}_p)$  s'annule

seulement en des nombres négatifs. Donc, le polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_{p+1}) = B_n^{(r_{p+1})}(z; \mathbf{r}_p)$  n'a que des racines réelles négatives (voir le lemme 4.2).  $\square$

En utilisant l'inégalité de Newton [33, p. 52] 1.19 nous pouvons facilement déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 4.3** *La suite  $\left\{ \left\{ \begin{smallmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}, 0 \leq k \leq n+|\mathbf{r}_{p-1}| \right\}$  est strictement log-concave (et donc unimodale).*

Cette propriété d'unimodularité, montre que la séquence  $(\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}, 0 \leq k \leq n)$  admet un indice  $K \in \{0, 1, \dots, n\}$  pour lequel  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ K \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  étant le maximum de  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$ .

Une application de l'inégalité de Darroch [24] nous aidera à localiser cet indice.

**Théorème 4.4** [24] *(Inégalité de Darroch) Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des nombres réels. Si toutes les racines du polynôme  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  sont réelles et négatives et  $P(1) > 0$ , alors la valeur de  $K$  pour lequel  $a_k$  est maximisé satisfait à l'inégalité suivante :*

$$\left| K - \frac{P'(1)}{P(1)} \right| < 1.$$

Le corollaire suivant nous donne un intervalle contenant cet indice.

**Corollaire 4.5** *Soit  $K_{n, \mathbf{r}_p}$  le plus grand indice qui maximise le nombre  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$ . Nous avons*

$$\left| K_{n+|\mathbf{r}_p|, \mathbf{r}_p} - \left( \frac{B_{n+1}(1; \mathbf{r}_p)}{B_n(1; \mathbf{r}_p)} - (r_p + 1) \right) \right| < 1.$$

**Preuve.** Puisque la suite  $\left\{ \begin{smallmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$  est strictement log-concave, il existe un indice  $K_{n+|\mathbf{r}_p|, \mathbf{r}_p}$  pour lequel

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ r_p \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} < \dots < \left\{ \begin{smallmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ K_{n+|\mathbf{r}_p|, \mathbf{r}_p} \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} > \dots > \left\{ \begin{smallmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ n+r_p \end{smallmatrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}.$$

Alors, en appliquant le théorème 4.1 et le théorème de Darroch, nous obtenons

$$\left| K_{n+|\mathbf{r}_p|, \mathbf{r}_p} - \frac{\left. \frac{d}{dz} B_n(z; \mathbf{r}_p) \right|_{z=1}}{B_n(1; \mathbf{r}_p)} \right| < 1.$$

Ensuite nous utilisons la première identité donnée dans [49, Corollaire 12] par

$$z \frac{d}{dz} (B_n(z; \mathbf{r}_p)) = B_{n+1}(z; \mathbf{r}_p) - (z + r_p) B_n(z; \mathbf{r}_p).$$

pour obtenir

$$\left. \frac{d}{dz} B_n(z; \mathbf{r}_p) \right|_{z=1} = B_{n+1}(1; \mathbf{r}_p) - (r_p + 1) B_n(1; \mathbf{r}_p),$$

d'où, découle l'inégalité désirée.

$\square$

### 4.3 Récurrences généralisées et conséquences

Dans ce paragraphe, les différentes représentations du polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  dans différentes bases ou des familles de base sont données par les théorèmes 4.6 et 4.9.

En effet, une représentation dans la base  $\{B_{n+k}(z; r_p) : 0 \leq k \leq |\mathbf{r}_{p-1}|\}$  est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 4.6** *Nous avons*

$$B_n(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) B_{n+k}(z; r_p), \quad (4.4)$$

$$B_n(z; \mathbf{r}_{p+q}) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) B_{n+k}(z; r_p, \dots, r_{p+q}). \quad (4.5)$$

**Preuve.** En utilisant le fait que  $(k + r_p)^{r_m} = \sum_{j=0}^{r_m} (-1)^{r_m-j} \begin{bmatrix} r_m \\ j \end{bmatrix} (k + r_p)^j$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} B_n(z; \mathbf{r}_p) &= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_n(k; \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \\ &= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{r_m} (-1)^{r_m-j} \begin{bmatrix} r_m \\ j \end{bmatrix} \frac{P_0(k; \mathbf{r}_p)}{(k + r_p)^{r_m}} (k + r_p)^{n+j} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{r_m} (-1)^{r_m-j} \begin{bmatrix} r_m \\ j \end{bmatrix} B_{n+j}(z; \mathbf{r}_p - r_m \mathbf{e}_m), \quad m = 1, 2, \dots, p-1, \end{aligned}$$

et en utilisant le même processus, nous obtenons

$$\begin{aligned} B_n(z; \mathbf{r}_p) &= \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_{p-1}=0}^{r_{p-1}} (-1)^{|\mathbf{r}_{p-1}| - |\mathbf{j}_{p-1}|} \begin{bmatrix} r_1 \\ j_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} r_{p-1} \\ j_{p-1} \end{bmatrix} B_{n+|\mathbf{j}_{p-1}|}(z; r_p) \\ &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} (-1)^{|\mathbf{r}_{p-1}| - k} B_{n+k}(z; r_p) \sum_{|\mathbf{j}_{p-1}|=k} \begin{bmatrix} r_1 \\ j_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} r_{p-1} \\ j_{p-1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) B_{n+k}(z; r_p). \end{aligned}$$

Ceci implique la première identité (4.4).

Maintenant, à partir du lemme 4.2 nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &\exp(-z) \frac{d^{r_{p+1}}}{dz^{r_{p+1}}} (z^{r_p} \exp(z) B_n(z; \mathbf{r}_p)) \\ &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) \exp(-z) \frac{d^{r_{p+1}}}{dz^{r_{p+1}}} (z^{r_p} \exp(z) B_{n+k}(z; r_p)). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2 nous obtenons :

$$B_n(z; \mathbf{r}_{p+1}) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) B_{n+k}(z; r_p, r_{p+1}).$$

Nous pouvons répéter ce processus  $q$  fois pour obtenir la deuxième identité (4.5).  $\square$

Ainsi, les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling admettent une expression en termes des nombres  $r$ -Stirling usuels donnée par le corollaire suivant :

**Corollaire 4.7** *Nous avons*

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{r_p} a_j(\mathbf{r}_{p-1}).$$

**Preuve.** En utilisant le théorème 4.6, le polynôme  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_j(\mathbf{r}_{p-1}) B_{n+j}(z; r_p) &= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_j(\mathbf{r}_{p-1}) \sum_{k=0}^{n+j} \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{r_p} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} z^k \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_j(\mathbf{r}_{p-1}) \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{r_p} \end{aligned}$$

et puisque  $B_n(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k$ , nous déduisons l'identité du corollaire par identification des coefficients de  $z^k$ .  $\square$

Dans [43], nous avons prouvé ce qui suit

$$\sum_{n \geq 0} B_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} = B_0(z \exp(t); \mathbf{r}_p) \exp(z(\exp(t) - 1) + r_p t).$$

Le théorème suivant donne plus de détails sur la fonction génératrice exponentielle des polynômes  $\mathbf{r}_p$ -Bell et qui sera utilisée ultérieurement pour déduire de nouvelles identités.

**Théorème 4.8** *Nous avons*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} &= B_m(z \exp(t); \mathbf{r}_p) \exp(z(\exp(t) - 1) + r_p t) \\ &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (\exp(z(\exp(t) - 1) + r_p t)). \end{aligned}$$

**Preuve.** En utilisant (4.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \left( \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_0(k; \mathbf{r}_p) (k + r_p)^{n+m} \frac{z^k}{k!} \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_0(k; \mathbf{r}_p) (k + r_p)^m \frac{z^k \exp((k + r_p)t)}{k!} \\ &= B_m(z \exp(t); \mathbf{r}_p) \exp(z(\exp(t) - 1) + r_p t). \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité du théorème, nous utilisons le théorème 4.6 pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) \sum_{n \geq 0} B_{n+m+k}(z; r_p) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} \left( \sum_{n \geq 0} B_n(z; r_p) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (\exp(z(\exp(t) - 1) + r_p t)). \end{aligned}$$

□

En utilisant des arguments combinatoires Spivey [60] a démontré l'identité suivante :

$$B_{n+m} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k,$$

où  $B_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  nombre de Bell, c'est à dire le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments en sous ensembles non vides.

Après cela, Belbachir et al. [7] et Gould et al. [31] ont démontré, en utilisant des méthodes différentes, que le polynôme  $B_{n+m}(z) = B_{n+m}(z; \mathbf{0})$  admet une relation de récurrence relative à la famille  $\{z^i B_j(z)\}$  comme suit :

$$B_{n+m}(z) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ j \end{matrix} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} z^j B_k(z). \quad (4.6)$$

Quatre ans plus tard, Xu [70] a donné une relation récurrente sur une large famille des nombres de Striling, et Mihoubi [50] a étendu la relation (4.6) aux polynômes  $r$ -Bell comme suit :

$$B_{n+m,r}(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left\{ \begin{matrix} m+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \binom{n}{k} j^{n-k} x^j B_{k,r}(x). \quad (4.7)$$

D'autres relations récurrentes ont été données par Mező [47]. Le théorème suivant généra-

lise les identités (4.6), (4.7) et les identités de Carlitz [18, 19] données par

$$B_{n+m}(1; r) = \sum_{k=0}^m \left\{ \begin{matrix} m+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r B_n(1; k+r),$$

$$B_n(1; r+s) = \sum_{k=0}^s \left[ \begin{matrix} s+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r (-1)^{s-k} B_{n+k}(1; r),$$

et montre que  $B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p)$  admet les coefficients de récurrence des nombres  $r$ -Stirling dans les familles de bases

$$\{z^j B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p) : 0 \leq j \leq n\},$$

$$\{z^j B_{m+i}(z; r+j) : 0 \leq i \leq |\mathbf{r}_{p-1}|, 0 \leq j \leq n\},$$

où  $B_n(1; r)$  est le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments en sous ensembles non vides tels que les  $r$  premiers éléments soient dans des blocs différents.

**Théorème 4.9** *Nous avons*

$$B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r_p \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{r_p} z^j B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p), \quad (4.8)$$

$$B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{i=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r_p \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{r_p} a_i(\mathbf{r}_{p-1}) z^j B_{m+i}(z; r_p + j), \quad (4.9)$$

$$z^n B_m(z; \mathbf{r}_p + n\mathbf{e}_p) = \sum_{j=0}^n \left[ \begin{matrix} n+r_p \\ j+r_p \end{matrix} \right]_{r_p} (-1)^{n-j} B_{m+j}(z; \mathbf{r}_p). \quad (4.10)$$

**Preuve.** Soit

$$T_m(z; \mathbf{r}_p) := \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r_p \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{r_p} z^j B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p) \right) \frac{t^n}{n!}.$$

La seconde identité donnée dans ([52, Corollaire 12]) par

$$\exp(z) B_m(z; \mathbf{r}_p + \mathbf{e}_p) = \frac{d}{dz} (\exp(z) B_m(z; \mathbf{r}_p)),$$

peut être utilisée pour obtenir

$$\exp(z) B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p) = \frac{d^j}{dz^j} (\exp(z) B_m(z; \mathbf{r}_p)). \quad (4.11)$$

L'identité (4.11) et la fonction génératrice exponentielle du nombre  $r$ -Stirling [17, Thm. 16] dont l'expression s'écrit comme suit :

$$\sum_{n \geq j} \left\{ \begin{matrix} n+r_p \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{r_p} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{j!} (\exp(t) - 1)^j \exp(r_p t)$$

montrent que

$$\begin{aligned} T_m(z; \mathbf{r}_p) &= \sum_{j \geq 0} B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p) z^j \frac{1}{j!} (\exp(t) - 1)^j \exp(r_p t) \\ &= \exp(r_p t - z) \sum_{j \geq 0} \frac{d^j}{dz^j} (\exp(z) B_m(z; \mathbf{r}_p)) \frac{(z(\exp(t) - 1))^j}{j!}. \end{aligned}$$

Maintenant, d'après le développement de Taylor-Maclaurin nous avons

$$\sum_{j \geq 0} \frac{d^j}{dz^j} (\exp(z) B_m(z; \mathbf{r}_p)) \frac{(u - z)^j}{j!} = \exp(u) B_m(u; \mathbf{r}_p).$$

Donc, ce développement et le théorème (4.8) montrent que nous avons

$$\begin{aligned} T_m(z; \mathbf{r}_p) &= \exp(r_p t - z) \exp(z \exp(t)) B_m(z \exp(t); \mathbf{r}_p) \\ &= \sum_{n \geq 0} B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de  $t^n$  dans les deux expressions du polynôme  $T_m(z; \mathbf{r}_p)$ , nous arrivons à démontrer l'identité (4.8) de ce théorème.

La seconde identité (4.9) se déduit en remplaçant  $B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p)$  par son expression donnée dans le théorème 4.9 par :

$$\sum_{i=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_i(\mathbf{r}_{p-1}) B_{m+i}(z; j + r_p).$$

Pour la troisième identité (4.10), soit

$$A := \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n + r_p \\ j + r_p \end{bmatrix}_{r_p} (-1)^{n-j} B_{m+j}(z; \mathbf{r}_p).$$

En utilisant l'identité (4.1) et l'identité connue suivante (voir [17, Thm. 21]) :

$$(k + r_p)^{\bar{n}} = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n + r_p \\ j + r_p \end{bmatrix}_{r_p} k^j,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
A &= \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_m(k; \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^n \begin{Bmatrix} n+r_p \\ j+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} (-1)^{n-j} (k+r_p)^j \\
&= (-1)^n \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_m(k; \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^n \begin{Bmatrix} n+r_p \\ j+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} (-k-r_p)^j \\
&= (-1)^n \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_m(k; \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} (-k-r_p+r_p)^{\bar{n}} \\
&= \exp(-z) \sum_{k \geq n} P_m(k; \mathbf{r}_p) k^{\underline{n}} \frac{z^k}{k!} \\
&= z^n \exp(-z) \sum_{k \geq 0} P_m(k+n; \mathbf{r}_p) \frac{z^k}{k!} \\
&= z^n B_m(z; \mathbf{r}_p + n\mathbf{e}_p).
\end{aligned}$$

□

Comme conséquences du théorème 4.9, quelques identités pour les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling de second espèce peuvent être déduites comme le montre le corollaire suivant.

**Corollaire 4.10** *Nous avons*

$$\sum_{i=0}^k \begin{Bmatrix} m+|\mathbf{r}_p| \\ i+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} \begin{Bmatrix} n+r_p \\ k-i+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} = \begin{Bmatrix} n+m+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p}, \quad (4.12)$$

$$\sum_{j=0}^n \begin{Bmatrix} m+j+|\mathbf{r}_p| \\ k+n+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} \begin{Bmatrix} n+r_p \\ j+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} (-1)^{n-j} = \begin{Bmatrix} m+|\mathbf{r}_p|+n \\ k+r_p+n \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p+n\mathbf{e}_p}, \quad (4.13)$$

$$\sum_{j=0}^n \begin{Bmatrix} m+j+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} \begin{Bmatrix} n+r_p \\ j+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} (-1)^{n-j} = 0, \quad k < n. \quad (4.14)$$

**Preuve.** A partir de la première identité du théorème 4.9 nous avons

$$B_{n+m}(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{j=0}^n \begin{Bmatrix} n+r_p \\ j+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} z^j B_m(z; \mathbf{r}_p + j\mathbf{e}_p),$$

qui peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+m+|\mathbf{r}_p-1|} \begin{Bmatrix} n+m+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} z^k &= \sum_{j=0}^n \begin{Bmatrix} n+r_p \\ j+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} z^j \sum_{i=0}^{m+|\mathbf{r}_p-1|} \begin{Bmatrix} m+|\mathbf{r}_p| \\ i+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} z^i \\
&= \sum_{k=0}^{n+m+|\mathbf{r}_p-1|} z^k \sum_{i=0}^k \begin{Bmatrix} m+|\mathbf{r}_p| \\ i+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} \begin{Bmatrix} n+r_p \\ k-i+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p}.
\end{aligned}$$

Donc, l'identité (4.12) se déduit par identification des coefficients de  $z^k$  dans le dernier développement. En utilisant la définition de  $B_n(z; \mathbf{r}_p)$  et la troisième identité du théorème

4.9, la deuxième et la troisième identité (4.13 et 4.14) du corollaire 4.10 nous aurons l'expression suivante :

$$B_m(z; \mathbf{r}_p + n\mathbf{e}_p) = \sum_{k=0}^{m+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} m + |\mathbf{r}_p| + n \\ k + r_p + n \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p + n\mathbf{e}_p} z^k,$$

et le développement (théorème 4.9 expression (4.10))

$$\begin{aligned} B_m(z; \mathbf{r}_p + n\mathbf{e}_p) &= z^{-n} \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n + r_p \\ j + r_p \end{bmatrix}_{r_p} (-1)^{n-j} B_{m+j}(z; \mathbf{r}_p) \\ &= z^{-n} \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n + r_p \\ j + r_p \end{bmatrix}_{r_p} (-1)^{n-j} \sum_{k=0}^{m+j+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} m + j + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+n+|\mathbf{r}_{p-1}|} z^{k-n} \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} m + j + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \begin{bmatrix} n + r_p \\ j + r_p \end{bmatrix}_{r_p} (-1)^{n-j} \\ &= \sum_{k=-n}^{m+|\mathbf{r}_{p-1}|} z^k \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} m + j + |\mathbf{r}_p| \\ k + n + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \begin{bmatrix} n + r_p \\ j + r_p \end{bmatrix}_{r_p} (-1)^{n-j}. \end{aligned}$$

□

#### 4.4 Fonctions génératrices ordinaires

La fonction génératrice horizontale des nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce [17, Corollaire 10] est donnée par l'expression :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n + r \\ k + r \end{matrix} \right\}_r t^n = t^k \prod_{j=0}^k (1 - (r + j)t)^{-1}. \quad (4.15)$$

Un résultat analogue pour les nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling est donné par le théorème suivant.

**Théorème 4.11** *Soit*

$$\tilde{B}_n(z; \mathbf{r}_p) := \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_p| \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k.$$

*Alors, nous avons*

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_p| \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} t^n = t^{k+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left( \frac{1}{t} \right)^{r_1} \cdots \left( \frac{1}{t} \right)^{r_{p-1}} \prod_{j=0}^{k+|\mathbf{r}_{p-1}|} (1 - (r_p + j)t)^{-1}, \quad (4.16)$$

$$\sum_{n \geq 0} \tilde{B}_n(z; \mathbf{r}_p) t^n = \left( \frac{1}{t} \right)^{r_1} \cdots \left( \frac{1}{t} \right)^{r_{p-1}} \sum_{k \geq |\mathbf{r}_{p-1}|} \frac{z^{k-|\mathbf{r}_{p-1}|} t^k}{\prod_{j=0}^k (1 - (r_p + j)t)}. \quad (4.17)$$

**Preuve.** Nous utilisons le corollaire 4.7 pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_p| \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} t^n &= \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_{p-1}| + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} t^n \\ &= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_j(\mathbf{r}_{p-1}) t^{-j} \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ k + |\mathbf{r}_{p-1}| + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} t^{n+j} \\ &= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_j(\mathbf{r}_{p-1}) t^{-j} \sum_{n \geq k+j} \left\{ \begin{matrix} n + r_p \\ k + |\mathbf{r}_{p-1}| + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} t^n, \end{aligned}$$

et puisque  $\left\{ \begin{matrix} n+r_p \\ k+|\mathbf{r}_{p-1}|+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = 0$  pour  $n = k, \dots, k + |\mathbf{r}_{p-1}| - 1$ , nous obtenons

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_p| \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} t^n = \left( \sum_{n \geq k+|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n + r_p \\ k + |\mathbf{r}_{p-1}| + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} t^n \right) \left( \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_j(\mathbf{r}_{p-1}) t^{-j} \right).$$

La première fonction génératrice (4.16) du théorème découle de l'utilisation de (4.3) et (4.15). Pour (4.17), nous utilisons la définition de  $\tilde{B}_n(z; \mathbf{r}_p)$  et le dernier développement.

□

## 4.5 Fonctions génératrices du nombre $r_p$ -Bell ordonné

**Définition 4.12** Une partition ordonnée d'un ensemble fini  $S$  est une collection ordonnée de blocs non vides et disjoints  $A_1, A_2, \dots, A_k$  telle que

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = S.$$

**Exemple 4.13**  $13|2|45$   $13|45|2$   $2|13|45$   $2|45|13$   $45|13|2$   $45|2|13$

sont des partitions ordonnées différentes de l'ensemble  $[5]$  et qui correspondent à la même partition non ordonnée  $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\}\}$ .

**Théorème 4.14** [29] Le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble à  $n$  éléments en exactement  $k$  blocs est

$$k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

(C'est le nombre de surjections de  $[n]$  dans  $[k]$ ).

Soit  $F_n$  [30] le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble à  $n$  éléments et  $F_{n,r}$  le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble à  $n$  éléments tel que les  $r$  premiers éléments

soient dans des blocs différents. Nous savons que

$$F_n = \sum_{j=0}^n j! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} = \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{2^{k+1}} \quad \text{et}$$

$$F_{n,r} = \sum_{j=0}^n (j+r)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r = \sum_{k \geq 0} \frac{(k+r)^r (k+r)^n}{2^{r+k+1}}.$$

Dans ce qui suit nous notons

$$F_n(z; \mathbf{r}_p) := \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} (j+r_p)! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j.$$

Le théorème suivant nous donne, dans un cas particulier, un résultat similaire à celui des nombres  $\mathbf{r}_p$ -Stirling.

**Théorème 4.15** *Pour  $|z| < 1$  et  $m = 0, 1, 2, \dots$  nous avons*

$$\sum_{k \geq 0} (k+m)^m P_n(k; \mathbf{r}_p) z^{k+m+1} = \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} (j+m)! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left( \frac{z}{1-z} \right)^{j+m+1}.$$

En particulier pour  $z = \frac{1}{2}$  :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(k+m)^m P_n(k; \mathbf{r}_p)}{2^{m+k+1}} = \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} (j+m)! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}.$$

Pour  $\mathbf{r}_{p-1} = \mathbf{0}$  la fonction génératrice ci-dessus devient

$$\sum_{k \geq 0} (k+m)^m (k+r)^n z^{k+m+1} = \sum_{j=0}^n (j+m)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r \left( \frac{z}{1-z} \right)^{j+m+1}.$$

**Preuve.** En utilisant la fonction génératrice ordinaire de la suite  $\{(k+m)^m P_n(k; \mathbf{r}_p); k \geq 0\}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \geq 0} (k+m)^m P_n(k; \mathbf{r}_p) z^{k+m+1} \\
&= \sum_{k \geq 0} z^{k+m+1} \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} (k+m)^m k^j \\
&= \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^{m+j+1} \sum_{k \geq j} (k+m)^{m+j} z^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^{m+j+1} \frac{d^{m+j}}{dz^{m+j}} \left( \sum_{k \geq j} z^{k+m} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^{m+j+1} \frac{d^{m+j}}{dz^{m+j}} \left( \frac{1}{1-z} - \sum_{i=0}^{m+j-1} z^i \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} (m+j)! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left( \frac{z}{1-z} \right)^{j+m+1}, \quad |z| < 1,
\end{aligned}$$

d'où le théorème est démontré.  $\square$

**Remarque 4.16** Le théorème 4.15 montre que le polynôme  $z^{r_p+1} F_n(z; \mathbf{r}_p)$  peut s'écrire comme suit :

$$z^{r_p+1} F_n(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{k \geq 0} (k+r_p)^n (k+r_p)^{\underline{r_1}} \cdots (k+r_p)^{\underline{r_p}} \left( \frac{z}{z+1} \right)^{k+r_p+1}, \quad \left| \frac{z}{z+1} \right| < 1. \quad (4.18)$$

Aussi, la fonction

$$H_{n,m}(z; \mathbf{r}_p) := \exp(z^2/2) \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} (j+m)! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^{j+m}$$

satisfait à l'équation

$$z^2 \frac{d}{dz} (H_{n,m}(z; \mathbf{r}_p)) = H_{n,m+1}(z; \mathbf{r}_p).$$

**Corollaire 4.17** Soient  $\alpha, \lambda$  des nombres réels tels que  $\alpha > n + |\mathbf{r}_p-1| - 1$  et  $\lambda > -1$ .

Nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(k+\lambda+1) (k+m)! P_n(k; \mathbf{r}_p)}{\Gamma(k+\alpha+\lambda+m+3) k!} \\
&= A \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \Gamma(j+\lambda+1) \Gamma(\alpha-j+1) (j+m)!,
\end{aligned}$$

où

$$A = \frac{1}{\Gamma(\alpha + m + 2)\Gamma(\alpha + \lambda + 2)} \text{ et } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt, \quad x > 0.$$

En particulier, pour  $n = 0$ ,  $\mathbf{r}_{p-1} = \mathbf{0}$  nous obtenons

$$\sum_{k \geq 0} \binom{k+m}{m} \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{\Gamma(k+\alpha+\lambda+m+3)} = \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+m+2)\Gamma(\alpha+\lambda+2)},$$

avec  $\alpha > -1, \lambda > -1, m \in \mathbb{N}$ .

**Preuve.** En multipliant les deux côtés de l'identité du théorème 4.15 par  $z^{\lambda-m-1}(1-z)^{\alpha+m+1}$  nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} (k+m)^m P_n(k; \mathbf{r}_p) z^{k+\lambda} (1-z)^{\alpha+m+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} (j+m)! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^{j+\lambda} (1-z)^{\alpha-j} \end{aligned}$$

et en intégrant les deux côtés de la nouvelle identité sur l'intervalle  $[0, 1[$  nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} (k+m)^m P_n(k; \mathbf{r}_p) \beta(k+\lambda+1, \alpha+m+2) \\ &= \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} (j+m)! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \beta(j+\lambda+1, \alpha-j+1), \end{aligned}$$

L'identité connue  $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$  termine la preuve. □

**Théorème 4.18** *Nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} F_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} = \frac{\exp(r_p t)}{(1 - z(\exp(t) - 1))^{r_p+1}} F_0\left(\frac{z \exp(t)}{1 - z(\exp(t) - 1)}; \mathbf{r}_p\right), \quad |z| < 1.$$

En particulier, pour  $\mathbf{r}_{p-1} = \mathbf{0}$  et  $r_p = r$ , nous avons

$$\begin{aligned} F_n(z; r) &= \sum_{j=0}^n (j+r)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r z^j, \\ \sum_{n \geq 0} F_n(z; r) \frac{t^n}{n!} &= \frac{r! \exp(rt)}{(1 - z(\exp(t) - 1))^{r+1}}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

**Preuve.** La fonction génératrice exponentielle de la suite  $\{F_n(z; \mathbf{r}_p); n \geq 0\}$  est

$$\sum_{n \geq 0} F_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} (k+r_p)! z^k \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \frac{t^n}{n!}.$$

En utilisant le corollaire [52, Corollaire 9] nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n \geq 0} F_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} \\
 &= \sum_{k \geq 0} (k + r_p)! z^k \frac{\exp(r_p t)}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_0(j; \mathbf{r}_p) \exp(jt) \\
 &= \exp(r_p t) \sum_{j \geq 0} P_0(j; \mathbf{r}_p) \frac{(z \exp(t))^j}{j!} \sum_{k \geq 0} (k + j + r_p)! \frac{(-z)^k}{k!} \\
 &= \exp(r_p t) \sum_{j \geq 0} (r_p + j)^{\underline{r_p}} P_0(j; \mathbf{r}_p) (z \exp(t))^j \sum_{k \geq 0} \binom{k + r_p + j}{r_p + j} (-z)^k \\
 &= \frac{\exp(-t)}{z^{r_p+1}} \sum_{j \geq 0} (r_p + j)^{\underline{r_p}} P_0(j; \mathbf{r}_p) \left( \frac{z}{z+1} \exp(t) \right)^{j+r_p+1}
 \end{aligned}$$

et puisque à partir du théorème 4.15 nous avons

$$\sum_{k \geq 0} (k + r_p)^{\underline{r_p}} P_0(k; \mathbf{r}_p) z^{k+r_p+1} = \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} (j + r_p)! \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left( \frac{z}{1-z} \right)^{j+r_p+1},$$

alors

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n \geq 0} F_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} \\
 &= \frac{\exp(-t)}{z^{r_p+1}} \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} (j + r_p)! \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left( \frac{\frac{z}{z+1} \exp(t)}{1 - \frac{z}{z+1} \exp(t)} \right)^{j+r_p+1} \\
 &= \frac{\exp(-t)}{z^{r_p+1}} \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} (j + r_p)! \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left( \frac{z}{(z+1) \exp(-t) - z} \right)^{j+r_p+1} \\
 &= \frac{\exp(-t)}{((z+1) \exp(-t) - z)^{r_p+1}} F_0 \left( \frac{z}{(z+1) \exp(-t) - z}; \mathbf{r}_p \right).
 \end{aligned}$$

□

en particulier, quand  $\mathbf{r}_{p-1} = \mathbf{0}$  dans le théorème 4.18 nous obtenons  $F_0(x; r) = r!$  et

$$\sum_{n \geq 0} F_n(z; r) \frac{t^n}{n!} = \frac{r! \exp(rt)}{(z+1 - z \exp(t))^{r+1}}, \quad \sum_{n \geq 0} F_n(z; 0) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{z+1 - z \exp(t)}, \quad |z| < 1. \tag{4.19}$$

Le théorème suivant utilise la fonction génératrice donnée dans (4.19) et les polynômes partiels de Bell pour déduire une identité sur les polynômes partiels de Bell. En effet, rappelons que les polynômes partiels de Bell (exponentiels)  $B_{n,k}(x_1, x_2, \dots)$  sont définis par leur fonction génératrice :

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x_1, x_2, \dots) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left( \sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!} \right)^k.$$

Ces polynômes étudiés intensivement par Bell [8] paraissent comme un outil mathématique standard et surviennent en analyse combinatoire. Pour plus de détails, voir [23, 51, 52].

**Théorème 4.19** *Nous avons*

$$\begin{aligned} & B_{n+r+1,r+1}(F_0(z;0), 2F_1(z;0), 3F_2(z;0), \dots) \\ &= \frac{1}{r!(r+1)!} \binom{n+r+1}{r+1} \sum_{j=0}^n (j+r)! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} z^j. \end{aligned}$$

**Preuve.** Montrons l'identité

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r (-r)^{n-k}. \quad (4.20)$$

En effet, en exprimant le polynôme de Bell usuel  $B_n(z;0) = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} z^j$  en termes des polynômes  $r$ -Bell  $B_k(z;r) = \sum_{j=0}^k \left\{ \begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r z^j$ ,  $0 \leq k \leq n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} B_n(z;0) &= \exp(-z) \sum_{j \geq 0} j^n \frac{z^j}{j!} \\ &= \exp(-z) \sum_{j \geq 0} (j+r-r)^n \frac{z^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(z;r) (-r)^{n-k}, \end{aligned}$$

ou d'une manière équivalente

$$\sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} z^j = \sum_{j=0}^n z^j \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r (-r)^{n-k}$$

ce qui implique l'identité (4.20).

Maintenant, les identités (4.19) impliquent

$$\sum_{n \geq 0} F_n(z;r) \frac{t^n}{n!} = \frac{r! \exp(rt)}{(z+1 - z \exp(t))^{r+1}} = r! \exp(rt) \left( \sum_{n \geq 0} F_n(z;0) \frac{t^n}{n!} \right)^{r+1}.$$

Alors, en multipliant les deux côtés extrêmes par  $t^{r+1}$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} F_n(z; r) \frac{t^n}{n!} t^{r+1} &= \sum_{n \geq 0} F_n(z; r) \frac{t^{n+r+1}}{n!} \\
&= \sum_{l \geq r+1} F_{l-r-1}(z; r) \frac{t^l}{(l-r-1)!} \\
&= (r+1)! \sum_{n \geq 0} \binom{n}{r+1} F_{n-r-1}(z; r) \frac{t^n}{n!} \\
&= r! \exp(rt) \left( \sum_{n \geq 1} n F_{n-1}(z; 0) \frac{t^n}{n!} \right)^{r+1} \\
&= r! (r+1)! \exp(rt) \left( \sum_{n \geq r+1} B_{n,r+1}(j F_{j-1}(z; 0)) \frac{t^n}{n!} \right),
\end{aligned}$$

et ceci implique

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \geq r+1} B_{n,r+1}(F_0(z; 0), 2F_1(z; 0), 3F_2(z; 0), \dots) \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{\exp(-rt)}{r! (r+1)!} \sum_{n \geq 0} \binom{n}{r+1} F_{n-r-1}(z; r) \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{r! (r+1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r+1} (-r)^{n-k} F_{k-r-1}(z; r) \right).
\end{aligned}$$

Ce développement et l'identité (4.20) impliquent

$$\begin{aligned}
&B_{n+r+1,r+1}(F_0(z; 0), 2F_1(z; 0), 3F_2(z; 0), \dots) \\
&= \frac{1}{r! (r+1)!} \binom{n+r+1}{r+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-r)^{n-k} F_k(z; r) \\
&= \frac{1}{r! (r+1)!} \binom{n+r+1}{r+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-r)^{n-k} \left( \sum_{j=0}^k (j+r)! \left\{ \begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r z^j \right) \\
&= \frac{1}{r! (r+1)!} \binom{n+r+1}{r+1} \sum_{j=0}^k (j+r)! z^j \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right\} (-r)^{n-k} \\
&= \frac{1}{r! (r+1)!} \binom{n+r+1}{r+1} \sum_{j=0}^k (j+r)! \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} z^j,
\end{aligned}$$

et ceci implique, par identification, l'identité désirée.  $\square$

## 4.6 Récurrence pour les polynômes $r_p$ -Bell ordonnés

Soient  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  le nombre de Stirling de première espèce et les nombres (4.3)

$$a_k(\mathbf{r}_{p-1}) = (-1)^{|\mathbf{r}_{p-1}|-k} \sum_{|\mathbf{j}_{p-1}|=k} \left[ \begin{smallmatrix} r_1 \\ j_1 \end{smallmatrix} \right] \cdots \left[ \begin{smallmatrix} r_{p-1} \\ j_{p-1} \end{smallmatrix} \right], \quad |\mathbf{j}_{p-1}| = j_1 + \cdots + j_{p-1}.$$

Le polynôme  $F_n(z; \mathbf{r}_p)$  peut s'écrire dans la base  $\{F_{n+k}(z; r_p) : 0 \leq k \leq n + |\mathbf{r}_{p-1}|\}$  comme suit :

**Théorème 4.20** *Nous avons*

$$F_n(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) F_{n+k}(z; r_p),$$

ou plus généralement

$$F_n(z; \mathbf{r}_{p+q}) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) F_{n+k}(z; r_p, \dots, r_{p+q}).$$

**Preuve.** En utilisant le fait que

$$(k + r_p)^{r_m} = \sum_{j=0}^{r_m} (-1)^{n-j} \left[ \begin{smallmatrix} r_m \\ j \end{smallmatrix} \right] (k + r_p)^j,$$

et (4.18) nous obtenons

$$\begin{aligned} F_n(z; \mathbf{r}_p) &= \frac{1}{(z+1)^{r_p+1}} \sum_{k \geq 0} (k+r_p)^n (k+r_p)^{r_1} \cdots (k+r_p)^{r_p} \left( \frac{z}{1+z} \right)^k \\ &= \frac{1}{(z+1)^{r_p+1}} \sum_{k \geq 0} \frac{(k+r_p)^n (k+r_p)^{r_1} \cdots (k+r_p)^{r_p}}{(k+r_p)^{r_m}} \left( \frac{z}{1+z} \right)^k \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{r_m} (-1)^{n-j} \left[ \begin{smallmatrix} r_m \\ j \end{smallmatrix} \right] (k+r_p)^j \\ &= \frac{1}{(z+1)^{r_p+1}} \sum_{j=0}^{r_m} (-1)^{n-j} \left[ \begin{smallmatrix} r_m \\ j \end{smallmatrix} \right] \\ &\quad \times \sum_{k \geq 0} \frac{(k+r_p)^{n+j} (k+r_p)^{r_1} \cdots (k+r_p)^{r_p}}{(k+r_p)^{r_m}} \left( \frac{z}{1+z} \right)^k \\ &= \sum_{j=0}^{r_m} (-1)^{n-j} \left[ \begin{smallmatrix} r_m \\ j \end{smallmatrix} \right] F_{n+j}(z; \mathbf{r}_p - r_m \mathbf{e}_m), \quad m = 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
F_n(z; \mathbf{r}_p) &= \sum_{j_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{j_{p-1}=0}^{r_{p-1}} (-1)^{|\mathbf{r}_{p-1}| - |\mathbf{j}_{p-1}|} \begin{bmatrix} r_1 \\ j_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} r_{p-1} \\ j_{p-1} \end{bmatrix} F_{n+|\mathbf{j}_{p-1}|}(z; r_p) \\
&= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} (-1)^{|\mathbf{r}_{p-1}| - k} F_{n+k}(z; r_p) \sum_{|\mathbf{j}_{p-1}|=k} \begin{bmatrix} r_1 \\ j_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} r_{p-1} \\ j_{p-1} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) F_{n+k}(z; r_p).
\end{aligned}$$

□

Le théorème suivant exprime le polynôme  $F_n(z; \mathbf{r}_p)$  dans la famille de bases

$$\{z^j F_n(z; j + r_p + 1); j = 0, \dots, |\mathbf{r}_{p-1}|\}.$$

**Théorème 4.21** *Nous avons*

$$F_n(z; \mathbf{r}_p) = \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j F_n(z; j + r_p).$$

**Preuve.** A partir du théorème 4.18 et par le fait que  $F_0(z; r) = r!$  nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} F_n(z; \mathbf{r}_p) \frac{t^n}{n!} &= \exp(-t) u^{r_p+1} F_0(zu; \mathbf{r}_p), \quad u = \frac{\exp(t)}{z + 1 - z \exp(t)}, \quad |z| < 1. \\
&= \exp(-t) u^{r_p+1} F_0(zu; \mathbf{r}_p) \\
&= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j (\exp(-t) u^{j+r_p+1} (j + r_p)!) \\
&= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j \sum_{n \geq 0} F_n(z; j + r_p) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j F_n(z; j + r_p).
\end{aligned}$$

Par conséquent le théorème est démontré. □

**Corollaire 4.22** *Nous avons*

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left\{ \begin{matrix} n + j + r_p \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{j+r_p}.$$

**Preuve.** En utilisant l'identité des théorèmes 4.18 et 4.21 nous obtenons

$$\begin{aligned}
F_n(z; \mathbf{r}_p) &= \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} (k+r_p)! \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^k \\
&= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j F_n(z; j+r_p) \\
&= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} z^j \sum_{i=0}^n (i+j+r_p)! \left\{ \begin{matrix} n+j+r_p \\ i+j+r_p \end{matrix} \right\}_{j+r_p} z^i \\
&= \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} z^k \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} (k+r_p)! \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j+r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} \left\{ \begin{matrix} n+j+r_p \\ k+r_p \end{matrix} \right\}_{j+r_p}.
\end{aligned}$$

□

**Remarque 4.23** L'identité du corollaire 4.22 est la même que celle du corollaire 11 donné dans [49].

## Chapitre 5

# Restrictions des nombres de Stirling de deuxième espèce

### 5.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'exploiter quelques propriétés des polynômes chromatiques d'un graphe pour étudier plusieurs restrictions des nombres de Stirling de deuxième espèce. Nous rappelons que les polynômes chromatiques ont été introduits d'abord en 1912 pour les graphes planaires, par George David Birkhoff [11] qui cherchait à démontrer le théorème des quatre couleurs. Par la suite ils ont été étudiés par Whitney [68, 69], Birkhoff et Lewis [12], Read [54] et plusieurs autres auteurs.

Le polynôme chromatique peut être utilisé comme un outil pour trouver le nombre de partitions possibles en sous ensembles indépendants de sommets d'un graphe. Il peut aussi être utilisé pour déduire des identités relatives au nombre de partitions possibles d'un ensemble fini sous certaines restrictions particulières telles que le nombre de Stirling de deuxième espèce [67].

### 5.2 Définitions

Pour un graphe donné  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  et  $\lambda \in \mathbb{N}$ , une application  $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$  est appelée une  $\lambda$ -coloration de  $G$  si  $f(u) \neq f(v)$  pour tous sommets  $u$  et  $v$  adjacents dans  $G$ . Les deux  $\lambda$ -colorations  $f$  et  $g$  de  $G$  sont dites distinctes si  $f(x) \neq g(x)$  pour un certain  $x$  dans  $G$ . Le polynôme chromatique, noté  $P(G, \lambda)$ , compte le nombre des

$\lambda$ -colorations de  $G$ . Par exemple, il est connu que pour  $n \geq 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} P(O_n, \lambda) &= \lambda^n, \\ P(K_n, \lambda) &= (\lambda)^n, \\ P(T_n, \lambda) &= \lambda(\lambda - 1)^{n-1}, \end{aligned}$$

où  $O_n$  est le graphe d'ordre  $n$  et sans arêtes,  $K_n$  est le graphe complet d'ordre  $n$ ,  $T_n$  est un arbre d'ordre  $n$  et  $(\lambda)^n = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1)$  si  $n \geq 1$  et  $(\lambda)^0 = 1$ .

Plus généralement, le polynôme chromatique d'un graphe  $G$  peut s'écrire comme suit (voir [26, Thm. 1.4.1]) :

$$P(G, \lambda) = \sum_{i=\chi(G)}^n \alpha_i(G) (\lambda)^i,$$

où  $\alpha_i(G)$  est le nombre de partitions de l'ensemble  $V$  en  $i$  sous ensembles indépendents (appelés blocs) et  $\chi(G)$  est le nombre chromatique du graphe  $G$ .

Pour une utilisation ultérieure, nous rappelons que, si  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  sont des graphes dont leurs ensembles des sommets respectifs sont disjoints, leur réunion est définie par le graphe  $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$  et par conséquent  $P(G_1 \cup G_2, \lambda) = P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda)$ , (voir par exemple [26, Sec. 1.2])

Dans ce chapitre, pour un graphe donné  $H$ , nous présentons quelques propriétés des familles de graphes  $O_n \cup H$ ,  $K_n \cup H$  et  $T_n \cup H$ . Nous donnons quelques relations récurrentes pour les coefficients  $\alpha_k(O_n \cup H)$ ,  $\alpha_k(K_n \cup H)$  et  $\alpha_k(T_n \cup H)$  des polynômes chromatiques de ces trois familles de graphes et quelques résultats sur la log-concavité la fréquence de Pólya-pour des suites associées à ces coefficients. Nous présentons aussi trois applications sur certaines classes restreintes des nombres de Stirling de deuxième espèce restreints.

### 5.3 Relations récurrentes et quelques conséquences

Soient  $H$  un graphe à  $h$  sommets,  $O_n$  le graphe à  $n$  ( $\geq 1$ ) sommets et sans arêtes et posons  $O_0$  le graphe sans sommets,  $K_n$  le graphe complet à  $n$  ( $\geq 1$ ) sommets avec  $K_0$  un graphe sans sommets et  $T_n$  un arbre à  $n$  ( $\geq 1$ ) sommets avec  $T_0$  un arbre sans sommets.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques relations récurrentes pour les coefficients  $\alpha_k(O_n \cup H)$ ,  $\alpha_k(K_n \cup H)$ ,  $\alpha_k(T_n \cup H)$  ainsi que quelques conséquences.

**Lemme 5.1** *Soient  $k$  un entier non négatif,  $\lambda, x$  des nombres réels. Nous avons*

$$(\lambda - x) \lambda^k = \lambda^{k+1} + (k - x) \lambda^k.$$

**Preuve.** L'identité recherchée découle de l'expression  $\lambda^{k+1}$  donnée par :

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k(\lambda - k) = \lambda^k(\lambda - x + x - k) = \lambda^k(\lambda - x) - \lambda^k(k - x). \quad \square$$

**Proposition 5.2** Soient  $n, k$  des entiers non négatifs. Supposons que

$$P(G_n, \lambda) = (\lambda - s_{n-1})P(G_{n-1}, \lambda) \quad \text{avec } n > n_0,$$

pour un certain entier  $n_0$  non négatif et des nombres réels  $s_0, \dots, s_{n-1}$  tels que  $s_0 = 0$ .

Pour  $n > n_0$ , nous avons

$$\alpha_k(G_n) = \begin{cases} (k - s_{n-1})\alpha_k(G_{n-1}) + \alpha_{k-1}(G_{n-1}) & \text{si } \chi(G_n) \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Preuve.** Il est évident que si  $k < \chi(G)$  ou  $k > n$ ,  $\alpha_k(G_n) = 0$ .

Pour  $\chi(G) \leq k \leq n$ , en utilisant le lemme 5.1 nous arriverons facilement à déduire la valeur de  $\alpha_k(G_n)$  □

**Proposition 5.3** [26] Soit  $H$  un graphe contenant un  $K_r$  comme un sous-graphe, et soit  $G$  le graphe obtenu à partir de  $H$  en ajoutant un nouveau sommet  $w$  qui est adjacent seulement aux sommets de  $K_r$  ( $w$  est dit un **sommet simplicial**), alors nous avons

$$P(G, \lambda) = (\lambda - r)P(H, \lambda).$$

**Théorème 5.4** Soient  $n, s, k$  des entiers non négatifs ( $\geq 0$ ) avec  $0 \leq s \leq n$ . Alors,  $\alpha_k(O_n \cup H) = 0$  si  $k < \chi(H)$  ou  $k > n + h$  et pour  $\chi(H) \leq k \leq n + h$  nous avons

$$\alpha_k(O_n \cup H) = \sum_{j=\chi(H)}^k \left\{ \begin{matrix} s+j \\ k \end{matrix} \right\}_j \alpha_j(O_{n-s} \cup H).$$

En particulier, pour  $s = n$ , nous obtenons

$$\alpha_k(O_n \cup H) = \sum_{j=\chi(H)}^k \left\{ \begin{matrix} n+j \\ k \end{matrix} \right\}_j \alpha_j(H),$$

où les nombres  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$  sont les nombres  $r$ -Stirling de deuxième espèce.

**Preuve.** A partir de [26, Sec. 1.2] nous avons pour  $0 \leq s \leq n$

$$P(O_n \cup H, \lambda) = \lambda^s P(O_{n-s} \cup H, \lambda).$$

Donc, puisque le graphe  $O_n \cup H$  est d'ordre  $n + h$  et

$$\chi(O_n \cup H) = \max(\chi(O_n), \chi(H)) = \max(1, \chi(H)) = \chi(H),$$

nous pouvons dire que si  $k < \chi(H)$  ou  $k > n + h$ ,

$$\alpha_k(O_n \cup H) = 0$$

Dans le cas où  $\chi(H) \leq k \leq n + h$ , nous avons

$$\sum_{k=\chi(H)}^{n+h} \alpha_k(O_n \cup H) (\lambda)^{\underline{k}} = \lambda^s \sum_{j=\chi(H)}^{n+h-s} \alpha_j(O_{n-s} \cup H) (\lambda)^{\underline{j}} = \sum_{j=\chi(H)}^{n+h-s} \alpha_j(O_{n-s} \cup H) \lambda^s (\lambda)^{\underline{j}}.$$

En utilisant l'identité connue  $(z + j)^s = \sum_{k=0}^s \left\{ \begin{smallmatrix} s+j \\ k+j \end{smallmatrix} \right\}_j (z)^{\underline{k}}$ , voir [17], nous pouvons écrire

$$\lambda^s (\lambda)^{\underline{j}} = (\lambda)^{\underline{j}} (\lambda - j + j)^s = \sum_{k=0}^s \left\{ \begin{smallmatrix} s+j \\ k+j \end{smallmatrix} \right\}_j (\lambda)^{\underline{j}} (\lambda - j)^{\underline{k}}$$

et puisque  $(\lambda)^{\underline{j}} (\lambda - j)^{\underline{k}} = (\lambda)^{\underline{k+j}}$  nous obtenons

$$\lambda^s (\lambda)^{\underline{j}} = \sum_{k=0}^s \left\{ \begin{smallmatrix} n+j \\ k+j \end{smallmatrix} \right\}_j (\lambda)^{\underline{k+j}} = \sum_{k=j}^{s+j} \left\{ \begin{smallmatrix} s+j \\ k \end{smallmatrix} \right\}_j (\lambda)^{\underline{k}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=\chi(H)}^{n+h} \alpha_k(O_n \cup H) (\lambda)^{\underline{k}} &= \sum_{j=\chi(H)}^{n+h-s} \alpha_j(O_{n-s} \cup H) \sum_{k=j}^{s+j} \left\{ \begin{smallmatrix} s+j \\ k \end{smallmatrix} \right\}_j (\lambda)^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=\chi(H)}^{n+h} (\lambda)^{\underline{k}} \sum_{j=\chi(H)}^k \alpha_j(O_{n-s} \cup H) \left\{ \begin{smallmatrix} s+j \\ k \end{smallmatrix} \right\}_j. \end{aligned}$$

Donc, nous obtenons

$$\alpha_k(O_n \cup H) = \sum_{j=\chi(H)}^k \alpha_j(O_{n-s} \cup H) \left\{ \begin{smallmatrix} s+j \\ k \end{smallmatrix} \right\}_j.$$

□

**Théorème 5.5** Soient  $n, s, k$  des entiers non négatifs ( $\geq 0$ ) avec  $0 \leq s \leq n$ . Alors,  $\alpha_k(K_n \cup H) = 0$  si  $k < \max(n, \chi(H))$  ou  $k > n + h$  et pour  $\max(n, \chi(H)) \leq k \leq n + h$  nous avons

$$\alpha_k(K_n \cup H) = \sum_{j=\max(n-s, \chi(H))}^k \binom{s}{k-j} (j + s - n)^{\overline{s+j-k}} \alpha_j(K_{n-s} \cup H).$$

En particulier, pour  $s = n$ , nous avons

$$\alpha_k(K_n \cup H) = \sum_{j=\chi(H)}^k \binom{n}{k-j} (j)^{\overline{n+j-k}} \alpha_j(H),$$

**Preuve.** A partir de [26, Sec. 1.2] nous avons  $P(K_n \cup H, \lambda) = (\lambda - n + 1) P(K_{n-1} \cup H, \lambda)$ , nous pouvons facilement déduire que :

$$P(K_n \cup H, \lambda) = (\lambda - n + s)_s P(K_{n-s} \cup H, \lambda), \quad 0 \leq s \leq n.$$

Puisque le graphe  $K_n \cup H$  est d'ordre  $n + h$  et

$$\chi(K_n \cup H) = \max(\chi(K_n), \chi(H)) = \max(n, \chi(H)),$$

nous pouvons dire que pour  $k < \max(n, \chi(H))$  ou  $k > n + h$ , nous avons

$$\alpha_k(K_n \cup H) = 0,$$

et pour  $\chi(H) \leq k \leq n$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=\max(n, \chi(H))}^{n+h} \alpha_k(K_n \cup H) (\lambda)_k &= (\lambda - n + s)^s \sum_{j=\max(n-s, \chi(H))}^{n-s+h} \alpha_j(K_{n-s} \cup H) (\lambda)_j^{\underline{j}}. \\ &= \sum_{j=\max(n-s, \chi(H))}^{n-s+h} \alpha_j(K_{n-s} \cup H) (\lambda - n + s)^s (\lambda)_j^{\underline{j}}. \end{aligned}$$

Par le fait que la suite des polynômes  $((\lambda)_n^{\underline{n}}, n \geq 0)$  est de type binomial, l'expression  $(\lambda - n + s)^s (\lambda)_j^{\underline{j}}$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} (\lambda - n + s)^s (\lambda)_j^{\underline{j}} &= (\lambda - j + j + s - n)^s (\lambda)_j^{\underline{j}} \\ &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} (j + s - n)^{s-k} (\lambda - j)^k (\lambda)_j^{\underline{j}} \\ &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} (j + s - n)^{s-k} (\lambda)^{k+j} \\ &= \sum_{k=j}^{s+j} \binom{s}{k-j} (j + s - n)^{s+j-k} (\lambda)^k. \end{aligned}$$

Donc, il résulte que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=\max(n, \chi(H))}^{n+h} \alpha_k(K_n \cup H) (\lambda)_k^{\underline{k}} \\ &= \sum_{j=\max(n-s, \chi(H))}^{n-s+h} \alpha_j(K_{n-s} \cup H) \sum_{k=j}^{s+j} \binom{s}{k-j} (j + s - n)^{s+j-k} (\lambda)_k^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=\max(n, \chi(H))}^{n+h} (\lambda)_k^{\underline{k}} \sum_{j=\max(n-s, \chi(H))}^k \binom{s}{k-j} (j + s - n)^{s+j-k} \alpha_j(K_{n-s} \cup H). \end{aligned}$$

L'identification des coefficients de  $(\lambda)_k^{\underline{k}}$  complète la démonstration. □

**Théorème 5.6** Soient  $n, s, k$  des entiers non négatifs avec  $0 \leq s \leq n$ . Alors

$$\alpha_k(T_n \cup H) = 0 \text{ pour } k < \max(2 - \delta_{(n=1)} - 2\delta_{(n=0)}, \chi(H)) \text{ ou } k > n + h,$$

et, pour  $\max(2 - \delta_{(n=1)} - 2\delta_{(n=0)}, \chi(H)) \leq k \leq n + h$  nous avons

$$\alpha_k(T_n \cup H) = \sum_{j=\max(k-s,0)}^k \left\{ \begin{matrix} s+j-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{j-1} \alpha_j(T_{n-s} \cup H).$$

En particulier, pour  $s = n$ , nous obtenons

$$\alpha_k(T_n \cup H) = \sum_{j=1}^k \left\{ \begin{matrix} s+j-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{j-1} \alpha_j(H)$$

**Preuve.** Vu que le graphe  $T_n \cup H$  est d'ordre  $n + h$  et que nous avons

$$\chi(T_n \cup H) = \max(\chi(T_n), \chi(H)) = \max(2 - \delta_{(n=1)} - 2\delta_{(n=0)}, \chi(H)),$$

alors nous déduisons que si  $k < \max(2 - \delta_{(n=1)} - 2\delta_{(n=0)}, \chi(H))$  ou  $k > n + h$  alors

$$\alpha_k(T_n \cup H) = 0,$$

et pour  $\max(2 - \delta_{(n=1)} - 2\delta_{(n=0)}, \chi(H)) \leq k \leq n + h$

$$P(T_n \cup H, \lambda) = P(T_n, \lambda) P(H, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1} P(H, \lambda),$$

ce qui donne

$$P(T_n \cup H, \lambda) = (\lambda - 1)^s P(T_{n-s} \cup H, \lambda), \quad 0 \leq s \leq n.$$

Cette relation est équivalente à

$$\sum_{k=0}^{n+h} \alpha_k(T_n \cup H) (\lambda)^k = \sum_{j=0}^{n+h-s} \alpha_j(T_{n-s} \cup H) (\lambda - 1)^s (\lambda)^j.$$

De même que  $\lambda^s (\lambda)^j$  (voir la preuve du théorème 5.4), nous obtenons

$$(\lambda - 1)^s (\lambda)^j = \sum_{k=j}^{s+j} \left\{ \begin{matrix} s+j-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{j-1} (\lambda)^k.$$

Alors, la dernière équation devient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+h} \alpha_k(T_n \cup H) (\lambda)^k &= \sum_{j=0}^{n+h-s} \alpha_j(T_{n-s} \cup H) \sum_{k=j}^{s+j} \left\{ \begin{matrix} s+j-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{j-1} (\lambda)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+h} (\lambda)^k \sum_{j=\max(k-s,0)}^k \left\{ \begin{matrix} s+j-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{j-1} \alpha_j(T_{n-s} \cup H), \end{aligned}$$

□

**Corollaire 5.7** Soient  $n, k$  des entiers et

$$H_n^\square := \square_n \cup H \quad \text{pour} \quad \square = O, K, T.$$

Supposons que  $n > n_0^\square$ , où  $n_0^O = n_0^K = n_0^T - 1 = 0$ .

Si  $\chi(H_n^\square) \leq k \leq n + h$ , nous obtenons

$$\alpha_k(H_n^\square) = (k - s_{n-1}^\square) \alpha_k(H_{n-1}^\square) + \alpha_{k-1}(H_{n-1}^\square),$$

et  $\alpha_k(H_n^\square) = 0$  autrement, où  $s_n^O = 0$ ,  $s_n^K = n$ , et  $s_n^T = 1$ .

De plus,  $\chi(H_n^O) = \chi(H)$ ,  $\chi(H_n^K) = \max(n, \chi(H))$  et  $\chi(H_n^T) = \max(\chi(T_n), \chi(H))$ .

**Preuve.** Il suffit d'observer que  $P(H_n^\square, \lambda) = (\lambda - s_{n-1}^\square) P(H_{n-1}^\square, \lambda)$ ,  $n > n_0^\square$ , (voir proposition 5.3) et appliquer la proposition 5.2. Nous notons que la dernière égalité et les valeurs de  $\chi(H_n^\square)$  sont bien connues comme résultats dans la littérature (voir par exemple [26, Sect. 2]). □

Pour la proposition suivante, nous rappelons quelques définitions et résultats sur la log-concavité, la fréquence de Pólya et la  $q$ -log-convexité.

Une suite  $(u_n; n \geq 0)$  de nombres réels non négatifs est appelée **log-concave** (LC) si  $u_{i-1}u_{i+1} \leq u_i^2$  pour tout  $i > 0$ , et, elle est une suite de fréquence de Pólya (ou une suite PF) si tous les mineurs de la matrice  $A = (u_{i-j})_{i,j \geq 0}$  ont des déterminants non négatifs (où  $u_k = 0$  si  $k < 0$ ), pour plus d'information voir [35]. Une suite de polynômes réels  $(P_n(q), n \geq 0)$  est dite  **$q$ -log-convexe** si le polynôme  $P_n(q)^2 - P_{n-1}(q)P_{n+1}(q)$  a des coefficients non négatifs pour tout  $n \geq 1$ , (voir [58, 59, 71]).

En particulier, soit  $(T(n, k), n, k \geq 0)$  une suite de nombres non négatifs satisfaisant pour  $n \geq k \geq 1$  la récurrence suivante :

$$T(n, k) = \begin{cases} (a_1n + a_2k + a_3)T(n-1, k) + (b_1n + b_2k + b_3)T(n-1, k-1), & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $T(0, 0) > 0$ ,  $a_1 \geq 0$ ,  $a_1 + a_2 \geq 0$ ,  $a_1 + a_3 \geq 0$  et  $b_1 \geq 0$ ,  $b_1 + b_2 \geq 0$ ,  $b_1 + b_2 + b_3 \geq 0$ .

Il a été montré :

1. dans [40, Thm. 2] que, pour chaque  $n$  fixé, la suite  $(T(n, k), 0 \leq k \leq n)$  est strictement log-concave.
2. si nous avons  $a_2b_1 \geq a_1b_2$  et  $a_2(b_1 + b_2 + b_3) \geq (a_1 + a_3)b_2$ , cette suite est de fréquence de Pólya [65, Cor. 3] et de plus,

3. en posant  $T_n(q) = \sum_{k=0}^n T(n, k) q^k$ , si  $(a_2b_1 - a_1b_2)n + a_2b_2k + a_2b_3 - a_3b_2 \geq 0$  pour  $0 < k \leq n$ , alors, la suite des polynômes  $(T_n(q), n \geq 0)$  est  $q$ -log-convexe [42, Thm. 4.1].

**Proposition 5.8** *Pour  $n, k \geq 0$ , soit*

$$U_{n,k}^\square = \alpha_{k+h+n_0^\square} \left( H_{n+n_0^\square}^\square \right) \quad \text{et} \quad U_n^\square(q) = \sum_{k=0}^n U_{n,k}^\square q^k.$$

Alors,

1. pour  $\square = O, K$ , la suite  $(U_{n,k}^\square, 0 \leq k \leq n)$  est strictement log-concave,
2. pour  $\square = O, K, T$ , elle est une suite de fréquence de Pólya et
3. pour  $\square = O, K$ , la suite des polynômes  $(U_n^\square(q))$  est  $q$ -log-convexe.

**Preuve.** Nous avons  $U_{0,0}^O = U_{0,0}^K = \alpha_h(H) = 1$  et  $U_{0,0}^T = \alpha_{h+1}(T_1 \cup H) = 1$ . De plus, pour  $n \geq k \geq 1$ , le Corollaire 5.7 implique

$$U_{n,k}^\square = U_{n-1,k-1}^\square + \left( k + h + n_0^\square - n_{n-1}^\square \right) U_{n-1,k}^\square.$$

Donc, la log-concavité découle de [40, Thm. 2], la fréquence de Pólya de [65, Cor. 3] et la  $q$ -log-convexité de [42, Thm. 4.1]. □

## 5.4 Application au graphe $K_{r_1} \cup \dots \cup K_{r_p} \cup O_n$

Soit  $p \geq 1$  un entier. Nous considérons le graphe  $G_{n,r_p} = K_{r_1} \cup \dots \cup K_{r_p} \cup O_n$  d'ordre  $n + r_1 + \dots + r_p$  dont le nombre chromatique

$$\chi(G_{n,r_p}) = \max \left( \chi(K_{r_1}), \dots, \chi(K_{r_p}), \chi(O_n) \right) = \max(r_1, \dots, r_p, 1).$$

Avant tout, nous rappelons la définition du nombre  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce introduit par Mihoubi et al. dans [43, 52].

**Définition 5.9** *Soit  $R_1, \dots, R_p$  des sous ensembles de l'ensemble  $[n]$  avec  $|R_i| = r_i$  et  $R_i \cap R_j = \emptyset$  pour tout  $i, j = 1, \dots, p, i \neq j$ . Le nombre  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce,  $p \geq 1$ , noté  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p}$ , compte le nombre de partitions de l'ensemble  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  sous ensembles non vides (appelés blocs) tels que les éléments de chacun des  $p$  ensembles  $R_1, \dots, R_p$  soient dans des blocs différents.*

A partir de cette définition, nous pouvons facilement voir que ces nombres vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} &= 0, \quad n < r_1 + \dots + r_p \text{ ou } k < \max(r_1, \dots, r_p, 1), \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_p} \text{ si } r_1, \dots, r_{p-1} \in \{0, 1\}, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(p)}} \text{ pour toute permutation } \sigma \text{ sur l'ensemble } \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

En outre, pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ , le coefficient  $\alpha_k(G_{n, \mathbf{r}_p})$  représente le nombre de partitions de l'ensemble à  $n + |\mathbf{r}_p|$  sommets du graphe  $G_{n, \mathbf{r}_p}$  en  $k$  sous ensembles indépendants (appelés blocs), et par la définition du graphe  $G_{n, \mathbf{r}_p}$ , les éléments de chacun des  $p$  sous graphes  $K_{r_1}, \dots, K_{r_p}$  doivent être dans des blocs distincts. Donc, ce nombre est exactement  $\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$ . Alors, nous pouvons dire que

$$\alpha_k(G_{n, \mathbf{r}_p}) = \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}.$$

En particulier

$$\alpha_k(K_r \cup O_n) = \left\{ \begin{matrix} n + r \\ k \end{matrix} \right\}_r \text{ et } \alpha_k(O_n) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Maintenant, nous présentons de nouvelles démonstrations à certaines propriétés des nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce ainsi que d'autres résultats.

**Théorème 5.10** *Pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ , le polynôme  $(z + r_p)^{r_1} + \dots + (z + r_p)^{r_{p-1}} (z + r_p)^n$  peut s'écrire dans la base  $\left\{ (z)^k, k = 0, 1, \dots, n + |\mathbf{r}_{p-1}| \right\}$  comme suit*

$$(z + r_p)^{r_1} + \dots + (z + r_p)^{r_{p-1}} (z + r_p)^n = \sum_{k=0}^{n + |\mathbf{r}_{p-1}|} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} (z)^k,$$

où  $\mathbf{r}_p := (r_1, \dots, r_p)$  et  $|\mathbf{r}_p| := r_1 + \dots + r_p$ . En particulier, nous avons

$$(z + r)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n + r \\ k + r \end{matrix} \right\}_r (z)^k.$$

**Preuve.** A partir de [26, Sec. 1.2], le polynôme chromatique du graphe  $G_{n, \mathbf{r}_p}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P(G_{n, \mathbf{r}_p}, z + r_p) &= P(O_n, z + r_p) P(K_{r_1}, z + r_p) \dots P(K_{r_p}, z + r_p) \\ &= (z + r_p)^n (z + r_p)^{r_1} (z + r_p)^{r_2} \dots (z + r_p)^{r_p}, \end{aligned}$$

et, par définition du polynôme chromatique nous avons,

$$\begin{aligned} P(G_{n, \mathbf{r}_p}, z + r_p) &= \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} (z + r_p)^{k+r_p} \\ &= \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_p-1|} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} (z + r_p)^{r_p} (z)^k. \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du théorème.  $\square$

**Remarque 5.11** *A partir de [62] ou [26, p. 102] nous avons l'identité suivante*

$$\alpha_k(G_{n, \mathbf{r}_p}) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(G_{n, \mathbf{r}_p}, j),$$

ou d'une manière équivalente,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} &= \frac{1}{(k + r_p)!} \sum_{j=r_p}^{k+r_p} (-1)^{k+r_p-j} \binom{k + r_p}{j} (j)^{r_1} \dots (j)^{r_p} j^n \\ &= \frac{1}{(k + r_p)!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k + r_p}{j + r_p} (j + r_p)^{r_1} \dots (j + r_p)^{r_p} (j + r_p)^n \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (j + r_p)^{r_1} \dots (j + r_p)^{r_{p-1}} (j + r_p)^n. \end{aligned}$$

Donc, les deux valeurs initiales de ces nombres sont données par

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ r_p \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} &= (r_p)^n (r_p)^{r_1} \dots (r_p)^{r_{p-1}}, \\ \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ r_p + 1 \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} &= (r_p + 1)^{r_1} \dots (r_p + 1)^{r_{p-1}} (r_p + 1)^n - (r_p)^{r_1} \dots (r_p)^{r_{p-1}} (r_p)^n. \end{aligned}$$

Maintenant, posons  $K_{r_i} \cup H := K_{r_1} \cup \dots \cup K_{r_p} \cup O_n$  ( $i = 1, \dots, p$ ) dans le théorème 5.2 et nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 5.12** *Soient  $n, k$  des entiers non négatifs avec  $n \geq |\mathbf{r}_p|$ . Alors, pour  $i$  fixé dans l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$ , si  $r_i \geq 1$  nous avons*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - \mathbf{e}_i} + (k + 1 - r_i) \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - \mathbf{e}_i},$$

où  $\mathbf{e}_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de l'espace  $\mathbb{R}^p$ .

Un cas particulier du dernier corollaire, lorsque  $p = 1$  nous obtenons l'identité connue suivante

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right\}_{r-1} + (k + 1 - r) \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}.$$

En posant  $H := K_{r_1} \cup \dots \cup K_{r_p}$  dans le théorème 5.4 nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 5.13** Soient  $n, k$  des entiers tels que  $r_p \leq k \leq n$  et  $n \geq |\mathbf{r}_p|$ . Nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \sum_{j=r_p}^k \left\{ \begin{matrix} s+j \\ k \end{matrix} \right\}_j \left\{ \begin{matrix} n-s \\ j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}, \quad 0 \leq s \leq n - |\mathbf{r}_p|.$$

En particulier, pour  $s = 1$ , ces nombres obéissent à la relation récurrente suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p},$$

et pour  $s = n - |\mathbf{r}_p|$  nous obtenons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \sum_{j=r_p}^k \left\{ \begin{matrix} n - |\mathbf{r}_p| + j \\ k \end{matrix} \right\}_j \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}.$$

En particulier, pour  $p = s = 1$  dans le corollaire 5.13, nous obtenons l'identité connue

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r,$$

et pour  $s = n - |\mathbf{r}_p|$ ,  $p = 2$  et  $(r_1, r_2) = (1, r)$  dans le corollaire 5.13, nous obtenons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{1,r} = (r+1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r+1}.$$

Maintenant, à l'aide de la proposition 5.8, nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

**Corollaire 5.14** Pour  $0 \leq k \leq n$  posons

$$U(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_p| \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}.$$

Alors, la suite  $(U(n, k), 0 \leq k \leq n)$  est log-concave et une suite de fréquence de Pólya, et la suite des polynômes  $(U_n(q), n \geq 0)$  définie par

$$U_n(q) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_p| \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} q^k$$

est une suite  $q$ -log-convexe.

## 5.5 Application au graphe $K_{r_1, \dots, r_p} \cup O_n$

Soit  $p \geq 2$  un entier. Pour une deuxième application des polynômes chromatiques, nous considérons dans cette section le graphe  $K_{n, \mathbf{r}_p} = K_{r_1, \dots, r_p} \cup O_n$  d'ordre  $n + r_1 + \dots + r_p$  et dont le nombre chromatique

$$\chi(K_{n, \mathbf{r}_p}) = \max(\chi(K_{r_1, \dots, r_p}), \chi(O_n)) = \max(p, 1) = p.$$

D'une manière similaire aux nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce, nous présentons ici une nouvelle classe des nombres de Stirling qui ont aussi une relation de récurrence triangulaire.

Pour commencer, nous donnons la définition suivante :

**Définition 5.15** Soient  $R_1, \dots, R_p$  des sous ensembles de l'ensemble  $[n]$  avec  $|R_i| = r_i$  et  $R_i \cap R_j = \emptyset$  pour tout  $i, j = 1, \dots, p, i \neq j$ . Le nombre  $K(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce noté  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(r_1, \dots, r_p)}$ , compte le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  sous ensembles non vides (appelés blocs) tel que si  $x \in R_i$  et  $y \in R_j$  avec  $i \neq j$ , alors chaque bloc ne doit pas contenir simultanément  $x$  et  $y$ .

A partir de cette définition, nous donnons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(r_1, \dots, r_p)} &= 0, \quad n < r_1 + \dots + r_p \text{ ou } k < p, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(r_1, \dots, r_p)} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1 + \dots + r_p} \quad \text{si } r_1, \dots, r_p \in \{0, 1\}, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(r_1, \dots, r_p)} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(p)})} \quad \text{pour toute permutation } \sigma \text{ sur l'ensemble } \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

En outre, pour  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ , le coefficient  $\alpha_k(K_{n, \mathbf{r}_p})$  représente le nombre de partitions de l'ensemble à  $n + |\mathbf{r}_p|$  sommets du graphe  $K_{n, \mathbf{r}_p}$  en  $k$  sous ensembles indépendants (appelés blocs), et par la définition du graphe  $K_{n, \mathbf{r}_p}$ , deux éléments du sous graphe  $K_{r_1, \dots, r_p}$ ,  $x \in R_i$  et  $y \in R_j$ , avec  $i \neq j$ , ne peuvent pas appartenir au même bloc. Donc, ce nombre est exactement  $\left\{ \begin{matrix} n+r_1+\dots+r_p \\ k \end{matrix} \right\}_{K(r_1, \dots, r_p)}$ . Alors, nous pouvons dire

$$\alpha_k(K_{n, \mathbf{r}_p}) = \left\{ \begin{matrix} n+r_1+\dots+r_p \\ k \end{matrix} \right\}_{K(r_1, \dots, r_p)} := \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)}.$$

En posant  $H := K_{r_1, \dots, r_p}$  dans le théorème 5.4 nous obtenons

**Corollaire 5.16** Soient  $n, k$  des entiers tels que  $p \leq k \leq n$  et  $n \geq |\mathbf{r}_p|$ . Nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} = \sum_{j=p}^k \left\{ \begin{matrix} s+j \\ k \end{matrix} \right\}_j \left\{ \begin{matrix} n-s \\ j \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)}, \quad 0 \leq s \leq n - |\mathbf{r}_p|.$$

Pour  $s = 1$  nous déduisons que ces nombres obéissent à la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)}, \quad n \geq k \geq 1.$$

et pour  $s = n - |\mathbf{r}_p|$  dans le corollaire 5.16, nous obtenons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} = \sum_{j=p}^k \left\{ \begin{matrix} n-|\mathbf{r}_p|+j \\ k \end{matrix} \right\}_j \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)}.$$

En particulier, pour  $s = r_1 = \dots = r_p = 1$  dans le corollaire 5.16 nous obtenons l'identité connue :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_p = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_p + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_p.$$

**Remarque 5.17** En posant  $s = 1$  et  $k = p$  ou  $p + 1$  dans le corollaire 5.16 et à l'aide des identités données dans [72] et [26, Lemme 4.4.2] par

$$\left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ p \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} = 1, \quad \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ p+1 \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} = \sum_{j=1}^p 2^{r_j-1} - p,$$

nous obtenons les deux premières valeurs de ces nombres

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} &= \left\{ \begin{matrix} n - |\mathbf{r}_p| + p \\ p \end{matrix} \right\}_p, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ p+1 \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} &= \left\{ \begin{matrix} n - |\mathbf{r}_p| + p \\ p+1 \end{matrix} \right\}_p + \left\{ \begin{matrix} n - |\mathbf{r}_p| + p + 1 \\ p+1 \end{matrix} \right\}_{p+1} \left( \sum_{j=1}^p 2^{r_j-1} - p \right). \end{aligned}$$

**Proposition 5.18** Soit

$$B(\lambda; K_{n, \mathbf{r}_p}) := \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} \lambda^k.$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} B(\lambda; K_{n, \mathbf{r}_p}) &= \lambda \exp(-\lambda) \frac{d}{d\lambda} (\exp(\lambda) B(\lambda; K_{n-1, \mathbf{r}_p})), \quad n \geq 1, \\ B(\lambda; K_{0, \mathbf{r}_p}) &= B_{r_1}(\lambda) \cdots B_{r_p}(\lambda), \end{aligned}$$

où  $B_n(\lambda) = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} \lambda^j$  est le polynôme de Bell classique.

**Preuve.** A partir du corollaire 5.16 nous avons

$$\sum_{k \geq 1} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} \lambda^k = \sum_{k \geq 1} k \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| - 1 \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} \lambda^k + \sum_{k \geq 1} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| - 1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)} \lambda^k$$

ce qui donne la première identité. La deuxième découle du [26, Lemma 4.4.1]. □

**Corollaire 5.19** Pour  $n \geq |\mathbf{r}_p|$ , la suite des nombres  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(\mathbf{r}_p)}$ ,  $k = p, p + 1, \dots, n$ , est log-concave.

**Preuve.** Nous appliquons le théorème de Rolle sur la fonction  $f_n(\lambda) := \exp(\lambda) B(\lambda; K_{n, \mathbf{r}_p})$  et nous utilisons le fait que les racines du polynôme  $B_n(\lambda)$  sont réelles et non positives (voir par exemple [65]) pour conclure que (par récurrence sur  $n$ ) que le polynôme  $B(\lambda; K_{n, \mathbf{r}_p})$  a seulement des racines réelles non positives. Par la suite, nous appliquons l'inégalité de Newton [33, p. 52] pour compléter la démonstration. □

### 5.6 Application au graphe $T_{r_1} \cup \dots \cup T_{r_p} \cup O_n$

Soit  $p \geq 1$  un entier. Pour donner une troisième application des polynômes chromatiques, nous considérons dans cette section le graphe  $T_{n,\mathbf{r}_p} = T_{r_1} \cup \dots \cup T_{r_p} \cup O_n$ . Ici

$$\chi(T_{n,\mathbf{r}_p}) = \max\left(\chi(T_{r_1}), \dots, \chi(T_{r_p}), \chi(O_n)\right) = \min(r_1, \dots, r_p, 2).$$

De la même façon que les nombres ci dessus, nous présentons ici une nouvelle classe des nombres de Stirling qui ont aussi une relation de récurrence triangulaire. Alors, nous commençons par donner la définition suivante :

**Définition 5.20** Soient  $R_1, \dots, R_p$  des sous ensembles de l'ensemble  $[n]$  avec  $|R_i| = r_i$  et  $R_i \cap R_j = \emptyset$  pour tout  $i, j = 1, \dots, p, i \neq j$ . Le nombre  $T(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce, noté  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{T(r_1, \dots, r_p)}$ , compte le nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  sous ensembles non vides (appelés blocs) tels que l'élément minimum de l'ensemble  $R_i$  ne peut pas être dans le même bloc qui contient un autre élément de  $R_i, i = 1, \dots, p$ .

A partir de cette définition, nous pouvons déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{T(r_1, \dots, r_p)} &= 0, \quad n < r_1 + \dots + r_p \text{ or } k < \min(r_1, \dots, r_p, 2), \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{T(r_1, \dots, r_p)} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \text{ if } r_1, \dots, r_p \in \{0, 1\}, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{T(r_1, \dots, r_p)} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{K(r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(p)})} \text{ pour toute permutation } \sigma \text{ sur l'ensemble } \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

En outre, puisque les arbres de même ordre ont le même polynôme chromatique, il est suffisant d'appliquer de tels résultats aux graphes étoiles. Donc, choisir  $T_i$  en tant que graphe étoile à  $r_i$  sommets ( $T_i = K_{1, r_i-1}$ ) et dont l'élément minimum est le sommet universel de  $R_i$  (l'ensemble des sommets de l'arbre  $T_i$ ).

Donc, le coefficient  $\alpha_k(T_{n,\mathbf{r}_p})$  représente le nombre de partitions de l'ensemble à  $n + |\mathbf{r}_p|$  sommets du graphe  $T_{n,\mathbf{r}_p}$  en  $k$  ensembles indépendants (appelés blocs), et par définition du graphe  $T_{n,\mathbf{r}_p}$ , le sommet universel de  $T_{r_i}$  ( $i = 1, \dots, p$ ) ne peut pas être dans le même bloc qui contient un autre élément de  $T_{r_i}$ . Donc, ce nombre est exactement  $\left\{ \begin{matrix} n+r_1+\dots+r_p \\ k \end{matrix} \right\}_{T(r_1, \dots, r_p)}$ .

Alors, nous pouvons conclure que

$$\alpha_k(T_{n,\mathbf{r}_p}) = \left\{ \begin{matrix} n+r_1+\dots+r_p \\ k \end{matrix} \right\}_{T(r_1, \dots, r_p)} := \left\{ \begin{matrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)}.$$

**Théorème 5.21** *Pour  $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ , le polynôme  $z^{n+p} (z-1)^{|\mathbf{r}_p|-p}$  peut s'écrire dans la base  $\left\{ (\lambda)^k, k = 0, 1, \dots, n + |\mathbf{r}_p| \right\}$  comme suit :*

$$z^{n+p} (z-1)^{|\mathbf{r}_p|-p} = \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_p|} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} (z)^k,$$

En outre, nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} = \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{T(|\mathbf{r}_p|-p+1)}.$$

**Preuve.** A partir de [26, Sec. 1.2], le polynôme chromatique du graphe  $T_{n, \mathbf{r}_p}$  est

$$\begin{aligned} P(T_{n, \mathbf{r}_p}, z) &= P(O_n, z) P(T_{r_1}, z) \cdots P(T_{r_p}, z) \\ &= (z)^{n+p} (z-1)^{|\mathbf{r}_p|-p} \\ &= \sum_{i=0}^{n+|\mathbf{r}_p|} \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ i \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} (z)^i. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ceci donne le premier résultat. En particulier, nous avons

$$z^{n+1} (z-1)^{r-1} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k \end{matrix} \right\}_{T(r)} (z)^k,$$

et en combinant ce résultat avec l'identité (5.1) nous obtenons le deuxième résultat  $\square$

En choisissant  $H := T_{r_1} \cup \dots \cup T_{r_p}$  dans le théorème 5.4 nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 5.22** *Soient  $n, k$  des entiers tels que  $2 \leq k \leq n$  et  $n \geq |\mathbf{r}_p|$ . Alors, pour  $1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_p$ , nous avons*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} = \sum_{j=2}^k \left\{ \begin{matrix} s+j \\ k \end{matrix} \right\}_j \left\{ \begin{matrix} n-s \\ j \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)}, \quad 0 \leq s \leq n - |\mathbf{r}_p|.$$

En particulier, pour  $s = 1$ , ces nombres satisfont à la relation de récurrence triangulaire suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)},$$

et pour  $s = n - |\mathbf{r}_p|$  nous obtenons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} = \sum_{j=2}^k \left\{ \begin{matrix} n - |\mathbf{r}_p| + j \\ k \end{matrix} \right\}_j \left\{ \begin{matrix} |\mathbf{r}_p| \\ j \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)}.$$

Pour  $i = 1, \dots, p$ , en posant  $s = 1$  et  $T_{r_i} \cup H := T_{r_1} \cup \dots \cup T_{r_p} \cup O_n$  dans le théorème 5.6 nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 5.23** Soient  $n, k$  des entiers tels que  $1 \leq k \leq n$  et  $n \geq |\mathbf{r}_p|$ . Alors, pour  $i$  fixé ( $i = 1, \dots, p$ ) avec  $r_i \geq 1$ , nous avons

$$\alpha_k(G_{n, \mathbf{r}_p}) = (k - 1) \alpha_k(G_{n, \mathbf{r}_p - \mathbf{e}_i}) + \alpha_{k-1}(G_{n, \mathbf{r}_p - \mathbf{e}_i}), \quad n \geq 1.$$

**Remarque 5.24** Pour  $1 \leq r_1 \leq \dots \leq r_p$ , alors d'une manière similaire à la remarque 5.11, nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^{n+p} (j-1)^{|\mathbf{r}_p|-p},$$

et puisque  $\chi(T_{n, \mathbf{r}_p}) = 2$ , quand  $r_1, \dots, r_p > 1$ , alors les deux premières valeurs de ces nombres sont données par :

$$\left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ 2 \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} = 2^{n+p-1}, \quad \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ 3 \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} = 3^{n+p-1} \times 2^{|\mathbf{r}_p|-p-1} - 2^{n+p-1},$$

et pour  $r_1 = \dots = r_p = 1$  nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

De manière similaire au corollaire 5.14, nous avons

**Corollaire 5.25** Pour  $0 \leq k \leq n$  posons

$$V(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_p| \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)}.$$

Alors, la suite  $\{V(n, k), 0 \leq k \leq n\}$  est log-concave et de fréquence de Pólya, et la suite des polynômes  $\{V_n(q), n \geq 0\}$  définie par

$$V_n(q) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n + |\mathbf{r}_p| \\ k + |\mathbf{r}_p| \end{matrix} \right\}_{T(\mathbf{r}_p)} q^k$$

est une suite  $q$ -log-convexe.

# Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons essayé d'étudier les polynômes de partition associés à une classe particulière de graphes et leur contribution dans le domaine de la combinatoire énumérative.

Ce travail n'est qu'une première investigation et un point de départ pour mener les chercheurs à travailler sur d'autres classes de graphes.

Des perspectives ont déjà exploité ce travail pour trouver d'autres identités relatives aux différentiation et les opérateurs de création et d'annihilation en mécanique quantique.

A travers les chapitres de cette thèse, nous pouvons savoir à quel point les polynômes de partition peuvent être un outil très efficace pour extraire facilement des identités, et des relations récurrentes qui étaient très difficiles à déduire à travers des techniques classiques de la combinatoire énumérative

Les polynômes de partition et les polynômes chromatiques peuvent être utilisés pour résoudre ou exprimer plusieurs concepts mathématiques et combinatoires.

Le nombre Stirling du deuxième espèce  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  énumère le nombre de partitions d'un ensemble de taille  $n$  en  $k$  blocs non vides. Une interprétation théorique graphique de ce nombre (le nombre de partitions du graphe vide (sans arêtes) d'ordre  $n$  en  $k$  sous ensembles indépendants non-vides), admet une généralisation naturelle aux graphes arbitraires composés d'un stable à  $n$  sommets et  $p$  cliques (les nombres  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling de deuxième espèce).

Une interprétation plus analytique, le coefficient de  $x^k$  dans le polynôme de partition  $p(x)$  (ou le coefficient de  $x^k$  dans le polynôme chromatique) pourra être donnée et plus précisément en mécanique quantique (les opérateurs bosoniques de création et d'annihilation) [13, 14, 37].

Les nombres de Stirling de deuxième espèce satisfont aussi à la relation suivante :

$$(xD)^n f(x) = \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k D^k.$$

où  $f$  est une fonction arbitraire et  $D$  est la différenciation par rapport à  $x$ . Plus généralement, chaque mot  $w$  en alphabet  $\{x, D\}$  pourra être identifié par un nombre de Stirling de deuxième espèce restreint. Cette identification reste à être représentée et interprétée par les polynômes chromatiques.

# Bibliographie

- [1] M. Abbas and S. Bouroubi, On New Identities for Bells Polynomials. *Discrete Mathematics*, 293, (2005), 5-10.
- [2] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer, 1979.
- [3] M. Aigner, *A Course in Enumeration*, Springer, 2007.
- [4] M. Aissen, I. J. Schoenberg and A.M. Whitney, On the generating function of totally positive sequences I, *J. Anal.Math.* 2 (1952), 93–103.
- [5] O. M. D’Antona and E. Munarini, A Combinatorial Interpretation of the Connection Constants for Persistent Sequences of Polynomials. *European J. Combin.* 26 (2005), 1105–1118.
- [6] H. Belbachir, S. Bouroubi and A. Khelladi, Connection between ordinary multinomials, generalized Fibonacci numbers, partial Bell partition polynomials and convolution powers of discrete uniform distribution. *Ann. Math. Inform.* 35 (2008), 21–30.
- [7] H. Belbachir and M. Mihoubi, A generalized recurrence for Bell polynomials : An alternate approach to Spivey and Gould Quaintance formulas. *European J. Combin.* 30 (2009), 1254–1256.
- [8] E. T. Bell, Exponential polynomials. *Ann. Math.* 35 (1934), 258–277.
- [9] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1974,
- [10] P. Billingsley, *Probability and Measure*, second ed. Wiley, New York, (1986).
- [11] G. D. Birkhoff, A determinant formula for the number of ways of colouring a map. *Ann. Math.*, 14(2), (1912), 42–46.
- [12] G. D. Birkhoff and D. C. Lewis, Chromatic polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* 60, (1946), 355–451.
- [13] P. Blasiak, K. A. Penson and A. I. Solomon, The general boson normal ordering problem, *Phys. Lett.* A309 (2003) 198
- [14] P. Blasiak, K. A. Penson and A. I. Solomon, The Boson Normal Ordering Problem and Generalized Bell Numbers, *Ann. Comb.* 7 (2003) 127

- [15] S. Bouroubi, Bell Numbers and Engel's Conjecture. Rostock. Math. Kolloq. 62 (2007), 61–70.
- [16] F. Brenti, Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics and geometry : an update, Contemp. Math.178 (1994), 71-89
- [17] A. Z. Broder, The r-Stirling numbers. Discrete Math., 49 (1984), 241–259.
- [18] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind – I. Fibonacci Quart.18 (1980), 147–162.
- [19] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind – II. Fibonacci Quart.18 (1980), 242–257.
- [20] C. A. Charalambides, Enumerative Combinatorics. Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [21] G. Chartrand and P. Zhang, Chromatic Graph Theory. Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [22] O. Chrysaphinou, On Touchard polynomials. Discrete Math. 54 (1985), 143–152.
- [23] L. Comtet, Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1974.
- [24] J. N. Darroch, On the distribution of the number of successes in independent trials, Ann. Math. Stat. 35 (1964), 1317–1321.
- [25] G. Dobinski, Summirung der Reihe  $\sum n^m/n!$  für  $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , Grunert Archv (Arch. für Mat. und Physik) 61 (1877), 333-336.
- [26] F. M. Dong, K. M. Koh and K. L. Teo, Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs. World Scientific, British library, (2005).
- [27] B. Duncan and R. Peele, Bell and Stirling numbers for graphs, J. Integer Seq. 12 (2009), Article 09.7.1.
- [28] C. F. Faa di Bruno, Sulle funzioni isobariche, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche 7, (1855), 76-89.
- [29] P. Faljolet and R. Sedgewick, Analytic Combinatorics, Cambridge Univ. Press, 2009.
- [30] I.J. Good, The number of orderings of  $n$  candidates when ties are permitted, Fibonacci Quart. 13 (1975), 11-18.
- [31] H. W. Gould and J. Quaintance, Implications of Spivey's Bell number formula, J. Integer Seq. 11, (2008), Article 08.3.7.
- [32] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, Concrete Mathematics. Addison-Wesley, Reading, MA, (1989).
- [33] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Plóya, Inequalities. Cambridge, The University Press (1952).

- [34] L. C. Hsu and P. J. S. Shiue, A unified approach to generalized Stirling numbers. *Adv. Appl. Math.* 20, (1998), 366–384.
- [35] S. Karlin, *Total Positivity*, vol. I. Stanford University Press, Stanford, (1968).
- [36] J. Katriel, Bell numbers and coherent states, *Phys. Lett. A* 237, (2000), 159–161.
- [37] J. Katriel and G. Duchamp, Ordering relations for  $q$ -boson operators, continued fraction techniques and the  $q$ -CBH enigma, *J. Phys. A* 28 (1995) 7209–7225.
- [38] R. R. Korfhage,  $\sigma$ -polynomials and graph coloring, *J. Combin. Theory Ser. B* 24 (1978), 137–153.
- [39] J.P.S. Kung, G. C. Rota and C. H. Yan, *Combiatorics : The Rota Way*, Cambridge Univ. Press, 2009.
- [40] D. C. Kurtz, A note on concavity properties of triangular arrays of numbers. *J. Combin. Theory Ser. A* 3 (1972), 135–139.
- [41] O. V. Kuzmin and O. V. Leonova, Touchard polynomials and their applications. *Disc. Math. Appl.* 10 (2000), 391–402.
- [42] L. L. Liu and Y. Wang, On the log-convexity of combinatorial sequences. *Adv. in Appl. Math.* 39 (2007), 453–476.
- [43] **M. S. Maamra** and M. Mihoubi, The  $(r_1, \dots, r_p)$ -Bell polynomials. *Integers* 14 (2014) Article A34.
- [44] **M. S. Maamra** and M. Mihoubi, Note on some restricted Stirling numbers of the second kind, *Comptes Rendus Mathematique*, Volume 354, Issue 3, March 2016, 231–234
- [45] I. Mező, The  $r$ -Bell numbers. *J. Integer Seq.* 14 (2011), Article 11.1.1.
- [46] I. Mező, On the maximum of  $r$ -Stirling Numbers. *Adv. Appl. Math.* 41 (2008), 293–306.
- [47] I. Mező, The Dual of Spivey’s Bell number formula, *J. Integer Seq.* 15(2) (2012), Article 12.2.4.
- [48] M. Mihoubi and H. Belbachir, Linear recurrences for  $r$ -Bell polynomials. *J. Integer Seq.* Vol. 17 (2014), Article 14.10.6
- [49] M. Mihoubi, Bell polynomials and binomial type sequences. *Discrete Math.* 308 (2008), 2450–2459.
- [50] M. Mihoubi, The role of binomial type sequences in determination identities for Bell polynomials. *Ars Combinatoria* Volume CXI, July, 2013, 323–337.
- [51] M. Mihoubi and **M. S. Maamra**, Touchard polynomials, partial Bell Polynomials and polynomials of binomial type. *J. Integer Seq.* 14 (2011), Article 11.3.1.

- [52] M. Mihoubi and **M. S. Maamra**, The  $(r_1, \dots, r_p)$ -Stirling numbers of the second kind. *Integers* 12 (2012) Article A35.
- [53] R. Mullin and G. C. Rota, On the foundations of combinatorial theory : III. theory of binomial enumeration, *Graph Theory and its applications*, Harris, Bernard. Academic Press, 1970.
- [54] R. C. Read, An introduction to chromatic polynomials. *J. of combinatorial theory* 4, (1968), 52-71..
- [55] J. Riordan, *Combinatorial Identities*. R. E. Krieger, (1979).
- [56] G. C. Rota and M. R. Steven, The umbral calculus, *Advances in Mathematics* 27 (1978), no. 2, 95–189.
- [57] G. C. Rota, D. Kahaner, and A. Odlyzko, On the foundations of combinatorial theory. VIII. finite operator calculus, *J. Math. Anal. Appl.* 42 (1973), 684–760.
- [58] B. E. Sagan, Log concave sequences of symmetric functions and analogs of the Jacobi–Trudi determinants. *Trans. Amer. Math. Soc.* 329 (1992), 795–811.
- [59] B. E. Sagan, Inductive proofs of  $q$ -log concavity. *Discrete Math.* 99 (1992), 298–306.
- [60] M. Z. Spivey, A generalized recurrence for Bell numbers. *J. Integer Seq.* 11 (2008), Article 08.2.5.
- [61] R. P. Stanley, Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 576,(1989), 500-535.
- [62] I. Tomescu, *Problems in combinatorics and graph theory*. Translated from the Romanian by R. A. Milner. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics. A Wiley Interscience Publication. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1985.
- [63] J. Touchard, Sur les cycles des substitutions, *Acta Math.* 70 (1939), 243–279.
- [64] D. G. Wagner, The partition polynomial of a finite set system, *J. Combin. Theory Ser. A* 56, (1991),138-159.
- [65] Y. Wang and Y. N. Yeh, Polynomials with real zeros and Pólya frequency sequences. *J. Combin. Theory Ser. A* 109 (2005), 63–74.
- [66] Y. Wang and Y. N. Yeh. Log-concavity and LC-positivity. *J. of Combin. Theory Ser. A* 114, (2007), 195-210.
- [67] E. G. Whitehead, Stirling number identities from chromatic polynomials. *J. Combin. Theory Ser. A* 24, (1978), 314–317.
- [68] H. Whitney, A logical expansion mathematics. *Bull. amer. Math. Soc.* 38, (1932), 572-579.
- [69] H. Whitney, On the colouring of graphs. *Ann. Math.* (12) 33, (1933), 688-718.

- [70] A. Xu, Extensions of Spivey's Bell number formula. *Electron. J. Comb.* 19 (2), (2012), Article P6.
- [71] F. Z. Zhao, On log-concavity of a class of generalized Stirling numbers. *Electron. J. Comb.* 19 (2), (2012), Article P11.
- [72] H. W. Zou, The chromatic uniqueness of certain complete  $t$ -partite graphs. *Discrete Math.* 275, (2004), 375–383.