

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE D'ENSEINGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
« HOUARI BOUMEDIEN »  
FACULTE D'ELECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE



## MÉMOIRE

Présenté Pour l'Obtention du diplôme de **MAGISTER**

EN : ELECTRONIQUE

Spécialité : Contrôle des Processus et Robotique

Par : **HAMERLAIN FAIZA**

### **Stabilisation par modes glissants d'ordre supérieur de systèmes non holonomes : Cas de robots mobiles à roues**

Soutenu le 12/06/ 2005, devant le jury composé de :

Mme- N. SAADIA	Maître de conférences	U.S.T.H.B	Président
Mr- K. ACHOUR	Directeur de recherche	CDTA	Directeur de thèse
Mr- R. TOUMI	Professeur	U.S.T.H.B	Examineur
Mr- F. BOUDJEMAA	Professeur	ENP	Examineur
Mme- N. ACHOUR	Maître de conférences	USTHB	Examineur
Mr- H. REZINE	Chargé de cours	EMP	Examineur

A ma famille,  
A Mélissa.

## REMERCIEMENTS

Ce mémoire présente la synthèse des travaux de recherche que j'ai effectué au Centre de Développement des Technologies Avancées (CDTA), au sein de la Division Robotique et Productique.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude à Madame N. SAADIA maître de conférences à l'Institut d'Electronique de L'USTHB pour l'honneur qu'elle me fait en présidant ce jury.

Je remercie Monsieur R. TOUMI, Professeur à l'Institut d'Electronique de L'USTHB, pour ses remarques constructives concernant le manuscrit et sa participation au jury.

Je remercie Monsieur F. BOUDJAMA, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, pour avoir accepté d'examiner ce travail et d'être membre du jury.

Je remercie Madame N. ACHOUR, maître de conférences à l'Institut d'Electronique de L'USTHB pour avoir accepté d'examiner ce travail et d'être membre du jury.

Je tiens également à remercier Monsieur H. REZINE, chargé de cours à l'Ecole MILITAIRE Polytechnique pour avoir accepté d'être examinateur et membre du jury.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur K. ACHOUR, Directeur de Recherche au CDTA, qui a encadré mes travaux et dont l'aide efficace et précieuse m'a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie aussi tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de mon travail.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Position du problème et Etat de l'art</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Formes canoniques de systèmes non holonomes . . . . .	7
1.2.1	Forme chaînée . . . . .	9
1.2.2	Forme puissance . . . . .	9
1.2.3	Forme ENI . . . . .	9
1.3	Problèmes de la commande des systèmes non holonomes . . . . .	10
1.3.1	Stabilisation de systèmes non holonomes . . . . .	10
1.3.2	Problème de la stabilisation et approches proposées . . . . .	11
1.3.3	Commande à Structure Variable . . . . .	12
1.4	Modes glissants d'ordre supérieur . . . . .	13
1.4.1	Position du problème et notions importantes . . . . .	13
1.4.2	Contrôleurs par modes glissants d'ordre arbitraire . . . . .	17
1.5	Conclusion . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Modélisation et mise en forme de systèmes non holonomes</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Non holonomie des robots mobiles . . . . .	21
2.3	Cinématique des robots mobiles à roues . . . . .	22
2.3.1	Description et classification de robots . . . . .	22
2.4	Modèle cinématique de position . . . . .	32
2.4.1	Modèles cinématiques des robots de types (2,0) et (1,1) . . . . .	33
2.4.2	Contrôlabilité, stabilisabilité et linéarisabilité par retour d'état . . . . .	36
2.5	Mise en forme . . . . .	37
2.5.1	Forme canonique de commandabilité généralisée . . . . .	37
2.5.2	Forme chaînée . . . . .	39
2.6	Conclusion . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Stabilisation par modes glissants d'ordre un</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Définitions . . . . .	45
3.3	Conception de la commande par modes glissants . . . . .	46
3.3.1	Choix de la surface de glissement . . . . .	46
3.3.2	Conditions d'existence du régime glissant . . . . .	47

3.3.3	Loi de commande . . . . .	49
3.3.4	Propriétés de robustesse . . . . .	50
3.4	Le phénomène de Chattering . . . . .	50
3.5	Application à un moteur DC . . . . .	51
3.6	Stabilisation de systèmes non holonomes . . . . .	55
3.6.1	Stabilisation en utilisant une surface invariante dans le temps . . . . .	56
3.6.2	Stabilisation Pratique . . . . .	57
3.7	Application à un robot mobile : résultats de simulation . . . . .	59
3.7.1	Cas de la stabilisation en utilisant une seule surface . . . . .	59
3.7.2	Cas de la stabilisation pratique . . . . .	68
3.7.3	Robustesse vis à vis des erreurs de modélisation . . . . .	72
3.8	Conclusion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Stabilisation par modes glissants d'ordre supérieur</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	77
4.2	Définitions des modes glissants . . . . .	78
4.2.1	Modes glissants par rapport à des fonctions contraintes . . . . .	78
4.3	Modes glissants dans les systèmes de contrôle . . . . .	79
4.3.1	Introduction . . . . .	79
4.3.2	Glissement réel et convergence en temps fini . . . . .	80
4.4	Modes glissants et notion de degré relatif . . . . .	81
4.4.1	Introduction . . . . .	81
4.4.2	Régime glissant avec degré relatif supérieur à un . . . . .	82
4.5	Algorithmes glissants d'ordre supérieur . . . . .	83
4.5.1	Maintien exact de la contrainte : formulation du problème . . . . .	83
4.5.2	Algorithmes glissants d'ordre deux . . . . .	86
4.6	Stabilisation par MGOS de systèmes non holonomes . . . . .	90
4.6.1	Stabilisation en temps fini via les MGOS . . . . .	90
4.7	Application à un robot mobile : résultats de simulation . . . . .	91
4.7.1	Stabilisation en temps fini par modes glissants d'ordre deux . . . . .	91
4.8	Conclusion . . . . .	103
<b>II</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>105</b>
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>109</b>

Première partie  
Introduction générale



Ces dernières années, les robots mobiles ont pris une place très importante dans l'industrie comme moyen de transport, d'inspection et d'intervention dans les milieux hostiles. Ces robots appartiennent à la classe des systèmes non holonomes, qui comprend également les véhicules articulés ou les robots sauteurs, et qui a reçu un intérêt croissant de la part des communautés automaticiennes et roboticiennes.

Commander un système non holonome pour l'amener d'une configuration de départ à une configuration d'arrivée n'est pas chose aisée. Le problème a suscité un regain d'intérêt des automaticiens pour la robotique : la commande non linéaire trouvait là un beau problème applicatif, autrement dit il n'existe pas aujourd'hui d'algorithme général permettant de résoudre le problème pour n'importe quel système non holonome. Des solutions exactes sont connues seulement pour certaines classes de systèmes. Pour les autres, on ne dispose que de méthodes approchées. Un des problèmes majeurs en ce qui concerne la commande des systèmes non holonomes est la non existence d'un retour d'état continu ou différentiel assurant une stabilisation asymptotique [7].

Pour remédier à ce problème, des méthodes de synthèse de lois de commandes ont été proposées. Parmi ces méthodes, on rencontre les retours d'état variant dans le temps [32], des méthodes basées sur la platitude [9], ou encore des techniques récursives du backstepping. [31]. Il est important de noter que peu de commandes assurent à la fois robustesse et convergence rapide. Au cours de ces dernières années, apparurent des méthodes de synthèse de lois de commandes robustes. Parmi celles qui ont connu les plus grands développements nous citerons les régimes glissants classiques, les régimes glissants immergés dans le contexte de l'algèbre différentielle et les régimes glissants d'ordre supérieur qui assurent non seulement la robustesse de la stabilité, mais aussi la robustesse en performances [25]. Dans ce travail, nous nous intéressons à la commande de systèmes non holonomes via les modes glissants dans un objectif de stabilisation. La technique de la commande par modes glissants est basée sur la théorie des systèmes à structure variable développée en ex-URSS [51]. Le principe de cette technique de commande est de contraindre le système à atteindre et ensuite rester sur une hypersurface choisie a priori. La dynamique résultante du système appelée régime glissant idéal et le mode de stabilisation sont alors complètement déterminés par les coefficients de l'hypersurface de commutation, et le système devient alors insensible aux perturbations. Toutefois, un phénomène connu sous le nom *chattering* ou réticence limite l'application de cette technique en milieu industriel, c'est alors ainsi que les modes glissants d'ordre supérieur (**MGOS**) ont été introduits [15], [33]. Ceux-ci sont caractérisés par des actions discontinues non pas sur la première dérivée de la variable de contrainte comme dans le cas des modes glissants classiques mais sur ses dérivées d'ordre supérieur. En préservant les principaux avantages de l'approche originale, les modes glissants d'ordre supérieur (**MGOS**) éliminent l'effet du "chattering" tout en garantissant une meilleure précision de convergence par rapport aux imperfections de modèle ou d'organes de commande en réalisation. L'ordre de glissement caractérise le degré de continuité des dynamiques du système au voisinage de la surface et correspond au nombre de dérivées continues de la variable contrainte (incluant celles égales à zéro) au voisinage du mode glissant.

L'objectif de ce mémoire est de donner une solution au problème de la stabilisation

robuste de systèmes non holonomes perturbés en utilisant les modes glissants d'ordre supérieur. Il s'agit de développer des algorithmes générant des modes glissants d'ordre un et deux, capables de stabiliser de façon robuste et en temps fini des modèles en forme chaînée perturbés de robots mobiles à roues.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre constitue un état de l'art sur les modes glissants d'ordre supérieur et expose le problème de la stabilisation de systèmes non holonomes. Le deuxième chapitre a pour objectif de présenter, d'une part, la classification et la modélisation cinématique de robots mobiles à roues, et d'autre part, la forme canonique chaînée de systèmes non holonomes qui servira de modèle de base pour réaliser des commandes par modes glissants par la suite.

La première partie du chapitre trois présente les principes de base de la commande par modes glissants : notions d'attractivité et d'invariance d'une surface, propriétés de robustesse, ainsi qu'une application sur un moteur DC. La deuxième partie se veut plus pratique, et élabore deux formes de stabilisation robuste par modes glissant d'ordre un pour une forme chaînée perturbée de systèmes non holonomes de dimension trois. Des résultats de simulation sur un robot mobile de type unicycle mis sous forme chaînée perturbée seront données.

Le dernier chapitre consiste à la présentation des modes glissants d'ordre supérieur, et plus particulièrement à la description d'algorithmes permettant de générer des modes glissants d'ordre deux, et ceci en vue de leurs application pour la stabilisation robuste et en temps fini de systèmes non holonomes. Différentes simulations sur le robot mobile unicycle illustrent les performances obtenues en terme de robustesse et de convergence. Enfin, nous donnons une conclusion et des perspectives.

# Chapitre 1

## Position du problème et Etat de l'art

### 1.1 Introduction

Le problème de la commande des robots mobiles constitue un des thèmes prépondérants de la recherche en matière de robotique. Ces thèmes considèrent différents problèmes que rencontre le concepteur de lois de pilotage automatique, pour essayer d'automatiser sa démarche en fonction des contraintes industrielles. Deux types de problèmes sont considérés : Ceux liés à la performance des lois, puis ceux liés à la robustesse du système vis à vis des incertitudes sur certains paramètres du modèle non linéaire, ou vis à vis de modes structuraux basses fréquences pouvant conduire à une instabilité. Dans ce cas, les différents objectifs fixés sont :

- La stabilité et l'amélioration de la robustesse du système.
- Le développement de nouvelles techniques de commande permettant de synthétiser de lois de commande sans avoir recours au filtrage.

Ce chapitre expose le problème de la stabilisation de systèmes nonholonomes et résume les développements récents dans le domaine du contrôle par modes glissants d'ordre supérieur. L'objectif est de donner une présentation unifiée et accessible, de formes canoniques de systèmes nonholonomes, de formulation du problème, des approches proposées et des résultats obtenus en ce domaine.

### 1.2 Formes canoniques de systèmes non holonomes

Beaucoup de systèmes mécaniques sont sujets à des contraintes de position et/ou vitesse ; c'est-à-dire que plusieurs relations entre les positions et /ou vitesses des différents points du système doivent être satisfaites pendant tout le mouvement. Ces contraintes sont dites holonomes si on peut les intégrer et on aboutit donc à des relations algébriques liant les différentes coordonnées de position. Ces dernières peuvent être éliminées par un changement de variables approprié, et le système est dit **holonome**. Dans le cas de contraintes non intégrables, l'élimination n'est pas possible, et les contraintes doivent être prises en considération lors de la modélisation, le système est alors dit **non holonome**. Une classe particulière de systèmes nonholonomes est représentée par les robots mobiles à roues où les

contraintes sont formulées comme des équations différentielles non intégrables du premier ordre, contenant des dérivées dans le temps des coordonnées généralisées et représentées sous la forme [10] :

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (1.1)$$

avec

- $\dot{q}$  : vecteur de dimension  $n$  des coordonnées généralisées de la vitesse,
- $A(q)$  : matrice des contraintes de rang  $(m \times n)$ .

Le robot mobile unicycle qui sera présenté au chapitre deux est soumis à une contrainte de roulement sans glissement qui se traduit par l'équation :

$$A(q)\dot{q} = \dot{x} \cdot \cos \theta - \dot{y} \cdot \sin \theta = 0 \quad (1.2)$$

On sait, par expérience, qu'en dépit de cette contrainte, un robot mobile peut atteindre n'importe quelle configuration (en l'absence d'obstacle) : c'est le sens de la non-intégrabilité de l'équation différentielle.

Récemment, le problème de la commande des systèmes non holonomes a reçu beaucoup d'attention. Les systèmes de commande non holonomes résultent au fait des formulations de systèmes incluant des entrées de commande. Généralement la forme d'un système de commande non holonome exprimé sous forme cinématique est donnée par le système de commande non linéaire sans dérive :

$$\dot{x} = g_1(x).u_1 + \dots + g_m(x) u_m \quad (1.3)$$

où

- $x$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ ,
- $2 \leq m \leq n$ ,
- $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont des champs de vecteurs formant une base,
- $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont les entrées de commande.

Dans plusieurs applications, les systèmes de commande non holonomes ont une forme canonique spéciale, ou peuvent être transformés en une forme spéciale, qui peut être reconnue et exploitée. Dans le cas d'un système à deux entrées ( $m = 2$ ), plusieurs classes de systèmes de commande non holonomes ont été mises sous différentes formes canoniques :

- Forme canonique de commandabilité généralisée [19],
- Forme régulière généralisée [46],
- Forme chaînée [44],
- Forme puissance [43],
- Forme ENI (Extended Nonholonomic Integrators)[28].

### Remarque

La forme chaînée et la forme puissance sont les plus importantes formes canoniques des systèmes de commande non holonomes.

### 1.2.1 Forme chaînée

Les systèmes non holonomes en forme chaînée sont décrits par

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = z_2 v_1 \\ \dot{z}_j = z_{j-2} v_1, & j = 3, \dots, n \end{cases} \quad (1.4)$$

où

- $z_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sont les états,
- $v_1, v_2$  sont les deux entrées.

Il est à noter que, même si un système n'est pas sous forme chaînée, il peut, sous certaines conditions, être ramené à un système chaîné, moyennant un changement de coordonnées [44].

### 1.2.2 Forme puissance

La forme puissance est équivalente à la forme chaînée via une transformation d'état et est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = z_1 v_2 \\ \dot{z}_j = \frac{1}{(j-2)!} z_1^{j-2} v_2, & j = 3, \dots, n \end{cases} \quad (1.5)$$

où

- $z_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sont les états,
- $v_1, v_2$  sont les deux entrées.

### 1.2.3 Forme ENI

Récemment, une nouvelle forme canonique, appelée Extended Nonholonomic Integrators (**ENI**), a été introduite pour les systèmes non holonomes [28]. Cette forme est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = z_2 v_1 - z_1 v_2 \\ \dot{z}_j = z_{j-1} v_1, & j = 4, \dots, n \end{cases} \quad (1.6)$$

où

- $z_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) est le vecteur d'état du système,
- $v_i$ , ( $i = 1, 2$ ) sont les entrées.

Il a été montré [28] que les formes *ENI*, chaînée et puissance de systèmes non holonomes sont équivalentes via un difféomorphisme d'état approprié.

## 1.3 Problèmes de la commande des systèmes non holonomes

Les obstacles majeurs concernant la commande de systèmes non holonomes sont :

1. Le caractère **non linéaire** du système,
2. La **non commandabilité** de leur approximation linéaire, malgré que le système est commandable,
3. La non adéquation avec la condition nécessaire de Brockett [7] pour l'existence d'un retour d'état, continu et indépendant du temps, stabilisant le système.

La difficulté relative du problème de la commande ne dépend pas seulement de la nature non holonome du système, mais aussi de l'objectif du contrôle. En effet, pour certains objectifs de contrôle tels que :

- la stabilisation vers une variété choisie contenant la variété d'équilibre,
- la stabilisation de trajectoires,
- le suivi de chemin,

les approches classiques de commande non linéaire (par exemple la linéarisation par retour d'état) sont efficaces.

Néanmoins, pour des objectifs de contrôle plus importants tels que la planification de mouvement et la stabilisation vers un état d'équilibre, ces approches ne sont plus efficaces, et de nouvelles approches ont été développées. Dans ce qui suit, nous exposons le problème de stabilisation vers l'état d'équilibre ainsi que les solutions existantes pour le résoudre.

### 1.3.1 Stabilisation de systèmes non holonomes

Nous nous intéressons dans ce travail au problème de la stabilisation en un point fixe, c'est à dire trouver une loi de commande telle que le point d'équilibre qui représente généralement l'origine soit stable. Ce problème de stabilisation est très différent du point de vue de l'automatique, des problèmes de stabilisation de trajectoire et de suivi de chemin.

Deux types de stabilisation seront étudiées tout au long de ce mémoire :

1. Stabilisation asymptotique : les trajectoires du système se rapprochent infiniment près du point d'équilibre, mais sans jamais l'atteindre
2. Stabilisation en temps fini : les trajectoires du système sont emmenées exactement au point d'équilibre au bout d'un certain temps, et y restent ensuite.

Les principales applications de ce problème sont liées aux manoeuvres de parking (créneau, etc) et plus généralement, aux applications qui nécessitent une immobilisation du véhicule s'accompagnant d'un positionnement précis. Dans la pratique, bon nombre d'applications ne nécessitant pas un positionnement très précis, a fait que ce problème n'a été étudié qu'assez récemment. En effet, l'utilisation des méthodes de commande non linéaires génère des difficultés à la fois au niveau de la synthèse et au niveau de l'analyse

des propriétés de ces commandes, et en particulier l'analyse de la robustesse. Ce problème est celui pour lequel les propriétés de non holonomie interviennent de la manière la plus contraignante, et pour lequel les méthodes classiques de l'automatique linéaire se montrent insuffisantes.

### 1.3.2 Problème de la stabilisation et approches proposées

Un aspect primordial du problème de la stabilisation des systèmes non holonomes est lié à la non existence d'un retour d'état continu et indépendant du temps assurant une stabilisation asymptotique. Ceci découle d'un résultat important établi par Brockett [7].

**Théorème 1** [7] : *Soit le système de commande ( $\dot{x} = f(x, u), x \in R^n, u \in R^m$ ) avec  $f$  différentiable et  $(x, u) = (0, 0)$  un point d'équilibre de ce système. Une condition nécessaire pour qu'il existe un retour d'état  $u$  continu tel que l'origine du système bouclé :*

$$\dot{x} = f(x, u(x))$$

*soit localement asymptotiquement stable, est la surjectivité locale de l'application  $(x, u) \mapsto f(x, u)$  au voisinage de  $(x, u) = (0, 0)$ . Plus précisément, pour tout voisinage  $\Omega$  de  $(0, 0)$  dans  $R^{n+m}$ , l'image par  $f$  de  $\Omega$  doit être un voisinage de 0 dans  $R^n$ .*

Ce résultat implique que de nombreux systèmes non linéaires ne sont pas asymptotiquement stabilisables par retour d'état continu malgré qu'ils soient commandables. C'est le cas de systèmes non holonomes et en particulier les robots mobiles à roues.

Nous allons montrer ici ce résultat dans le cas d'un robot mobile de type unicycle. La forme cinématique de l'unicycle est donnée par :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.7}$$

avec

$$x = (x_1, x_2, x_3), u = (u_1, u_2), f(x, u) = (u_1 \cos x_3, u_1 \sin x_3, u_2)^T$$

Considérons un vecteur  $f$  dans  $R^3$  donné par la forme :  $f(x, u) = (0, \delta, 0)^T$  avec  $\delta \neq 0$ .

On constate immédiatement que cette équation n'admet pas de solution au voisinage de  $(x, u) = (0, 0)$ , puisque la première équation à satisfaire, c'est à dire  $u_1 \cos x_3 = 0$  implique  $u_1 = 0$ , et il n'y a pas alors de solution à la deuxième équation si  $\delta$  est différent de zéro, si petit soit-il. Ceci montre bien que  $f$  n'est pas localement surjective au voisinage de  $(x, u) = (0, 0)$ .

Il est bien connu que l'approximation linéaire des systèmes non holonomes n'est pas commandable (voir chapitre 2). En effet, en prenant le même de type de robot mobile, c'est à dire celui de l'unicycle, on voit bien que le linéarisé de ces équations (au point d'équilibre  $(x, u) = (0, 0)$ ) n'est pas commandable, ainsi les méthodes de commande linéaires ne peuvent être employées pour stabiliser asymptotiquement (localement) le point d'équilibre.

En conséquence, le robot mobile unicycle ne peut être stabilisé asymptotiquement, en une position/orientation donnée, par un retour d'état continu invariant dans le temps.

**Remarque :** La preuve de ce théorème est similaire pour les autres types de robots mobiles.

Afin de résoudre ce problème de stabilisation plusieurs approches ont été proposées, et peuvent être classifiées en trois types :

- Stabilisation par retours d'état discontinus invariants [6],
- Stabilisation par retours d'état variant dans le temps [47], [32],
- Stabilisation par retours d'état hybrides [4].

Cette dernière classe est principalement constituée de retours d'état variant dans le temps, continus ou non, mais dont la spécificité est que tout ou partie de la dépendance par rapport à l'état n'est réinitialisée que périodiquement et non pas de manière continue, comme c'est le cas des retours d'état variant dans le temps.

Dans ce contexte on s'est intéressé à la première approche et plus particulièrement à la stabilisation discontinue utilisant les modes glissants.

### 1.3.3 Commande à Structure Variable

La commande à structure variable par régime glissant est apparue depuis le début des années 60, grâce aux résultats théoriques du mathématicien A.F. Filippov [22] sur les équations différentielles à second membre discontinu. Cette commande non-linéaire est basée sur l'utilisation d'un terme discontinu de première espèce dans la commande, pour contraindre l'état du système à suivre une équation différentielle, linéaire, invariante et exponentiellement stable.

Après les travaux développés par l'équipe du Professeur Emelyanov [14] et à cause des problèmes de chattering et de réalisation, la structure variable a attendu la fin des années soixante dix pour connaître sa réapparition et son épopée avec l'avancée de l'électronique et l'informatique. Les travaux de recherche [51], [55], donnent un bon aperçu de cette approche qui a gagné en occident une popularité certaine en raison de sa simplicité et de ses applications dans divers domaines comme la mécanique, l'électrotechnique et la robotique [1].

Concernant cette classe de commandes étudiée, la variabilité de la structure de ces systèmes est propre aux paramètres du contrôleur qui évoluent selon une loi définie par exemple par l'équation d'une hyper surface dans l'espace des phases. En vérifiant certaines conditions, cette loi de commande (discontinue) permet de ramener tout d'abord et le plus rapidement le point représentatif du système sur l'hypersurface puis de l'y faire glisser jusqu'au point d'équilibre. On parle alors de système de commande à structure variable par régime glissant (en anglais Sliding Mode). En boucle fermée, ne dépendant que des coefficients (positifs pour des raisons de stabilité) de l'hypersurface, la dynamique des systèmes à structure variable se voit ainsi réduite en dimension d'une unité (SISO) par rapport au système à commander. Jouissant ainsi de la propriété d'indépendance vis à vis

des perturbations paramétriques et extérieures, ces systèmes de commande n'exigent pas une grande précision dans l'identification des paramètres du système à commander.

Toutefois, malgré l'ensemble des avantages de la commande à structure variable dite jusqu'ici classique, un phénomène limite la généralisation de son application dans le milieu industriel. En effet, dû à des commutations rapides de la commande discontinue, des oscillations de hautes fréquences peuvent exciter les parties non modélisées de la dynamique du système. Ceci est néfaste aux actionneurs.

Pour remédier à cela et éviter ce phénomène de chattering, différentes techniques ont été proposées dans la littérature. L'idée de base était d'introduire des changements de dynamique au voisinage de la discontinuité de la surface dans le but d'éliminer les discontinuités réelles tout en conservant les principales propriétés du système entier :

- par augmentation de la fréquence de commutation [27],
- par commande continue dans une bande au tour de la surface [2],
- par décomposition de la commande équivalente en une composante continue en basse fréquence et une composante discontinue en haute fréquence [51].

Toutes ces techniques ont été remplacées par l'approche de la commande à structure variable généralisée. Après obtention de la forme canonique de commande généralisée [19] découle un bouclage qui peut être considéré comme générique de différents types de correcteurs. Parmi ces correcteurs figurent ceux qui utilisent un bouclage discontinu avec régime glissant. La discontinuité n'intervient plus sur l'entrée mais sur la dérivée d'ordre le plus élevé [20]. Néanmoins, nous avons constaté qu'en utilisant ces différentes techniques, la précision et la robustesse ont été partiellement affectées. De plus, ces outils mathématiques d'algèbre différentielle basées sur des dynamiques ou extensions différentielles aboutissent à des représentations d'état du système non plus Kalmaniennes mais généralisées.

Dans le cas où le degré relatif du système est égal à un, la structure variable généralisée suffit amplement pour réduire le chattering. Dans le cas où le degré relatif du système est supérieur à un, les modes glissants d'ordre supérieur (MGOS) [15], [33] s'imposent tout en conservant les propriétés de robustesse ainsi que le maintien des performances de la loi de commande.

## 1.4 Modes glissants d'ordre supérieur

L'idée à exploiter ici est de cacher la discontinuité dans les dérivées élevées de la contrainte. Dans le cas le plus simple, ceci peut être réalisé en implantant entre le relais et le système un actionneur rapide et stable. L'état et les magnitudes de vibration de la vitesse correspondant au mode résultant tendent vers zéro quand les imperfections de commutation disparaissent, et en même temps le comportement du système est décrit par les équations du mode glissant.

### 1.4.1 Position du problème et notions importantes

Soit un système non linéaire dont la dynamique est décrite par le système différentiel :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (1.8)$$

$$s = s(t, x) \quad (1.9)$$

où

- $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in X$  représente le vecteur d'état,  $X \subset \mathbb{R}^n$ .
- $X$  est une variété différentielle ou un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- La commande  $u \in \mathbb{R}$  est une fonction discontinue et bornée dépendant de l'état et du temps.
- $f$  est une fonction supposée suffisamment différentiable, mais connue de façon incertaine.
- $s : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction à valeur réelle suffisamment différentiable telle que ses  $(r - 1)$  premières dérivées par rapport au temps ne sont que des fonctions de l'état  $x$  (ce qui veut dire qu'elles sont continues). Nous supposons ici que  $s \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathbb{R}$ .

On définit l'ensemble :

$$S = \{x \in X : s(t, x) = 0\} \quad (1.10)$$

qui représente une sous variété de  $X$  de dimension  $(n - r)$  appelée surface de glissement ou de commutation ou encore contrainte.

Le problème posé est de contraindre la trajectoire du système à évoluer sur cette surface de glissement : c'est à dire maintenir la contrainte  $S = 0$ . Le mouvement sur la variété discontinue est déterminé par la procédure de Filippov [23].

Nous supposons que la fonction  $f$  est discontinue sur la surface  $S = 0$  et continue dans tous les autres points.

En dérivant par rapport au temps la fonction  $s$ , on obtient l'équation :

$$\dot{s} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot f(t, x, u)$$

Cette fonction est ainsi continue partout sauf sur la variété  $S = 0$ .

Considérons  $s_+$  et  $s_-$  ( $f_+$  et  $f_-$ ) comme les limites de  $s$  (ou  $f$ ) quand  $x$  tend vers le point  $P$ ,  $s(P) = 0$  à partir de  $s(t, x) > 0$  et  $s(t, x) < 0$  respectivement.

Les principaux types de discontinuités étudiées par Filippov dans les années 1960-1963 sont schématisées sur la figure 1.1. Les modes glissants classiques correspondent au cas c) et vérifiant l'inégalité suivante :

$$s_+ \cdot s_- \neq 0 \quad (1.11)$$

Pour garantir l'existence d'un régime glissant, la surface de glissement doit être localement attractive, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\lim_{s^{0+}} \dot{s}' < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s^{0-}} \dot{s}' > 0 \quad (1.12)$$

Cette condition traduit le fait, que dans un voisinage de la surface de glissement, les vecteurs vitesses des trajectoires du système doivent toujours pointer vers cette surface comme on le voit sur la figure 1.1, c).

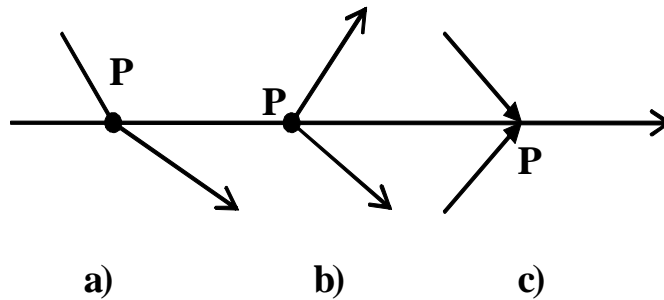


Figure 1.1.  $\dot{s}_+ \dot{s}_- \neq 0$

La condition (1.12) est plus souvent rencontrée sous la forme :

$$s\dot{s} < 0 \quad (1.13)$$

Considérons maintenant le cas où l'égalité suivante est vérifiée :

$$\dot{s}_+ \dot{s}_- = 0 \quad (1.14)$$

Ce cas n'a pas été considéré par Filippov dans ces derniers travaux. En effet, si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\dot{s}_+ = \dot{s}_- = 0 \quad (1.15)$$

$$f_+, f_- \neq 0 \quad (1.16)$$

Alors il existe un nombre infini de rotations et les trajectoires convergent en temps fini ou infini vers le point P, comme on le voit sur la figure 1.2. Ce cas est nouveau pour les systèmes à structure variable.

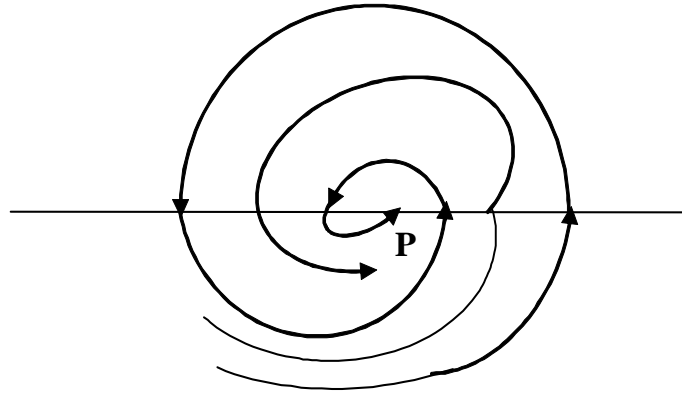


Figure 1.2.  $s_+ = s_- = 0, f_+, f_- \neq 0$

Aux trajectoires permettant le maintien des égalités  $s = s_+ = s_- = 0$  correspond un mode glissant d'ordre deux sur la variété  $S = 0$ , (voir figure 1.2).

En s'accordant à la définition donnée par Filippov [23], la solution de l'équation différentielle discontinue (1.8) pour un retour discontinu  $u(x)$ , est donnée par l'équivalent d'une inclusion différentielle de la forme :

$$\dot{x} \in V(x) \quad (1.17)$$

et toute solution de l'équation (1.8) définie comme une fonction absolument continue  $x(t)$ , satisfaisant l'inclusion différentielle presque partout.

En considérant les systèmes à structure variable classique, la variable de commande  $u(t)$  est un retour désigné par une sortie relais. On sait bien qu'un algorithme de glissement classique  $u = -\text{sign}(s)$  procure l'existence d'un mode glissant classique ( $r = 1$ ) représenté par l'équation  $s = 0$ . L'objectif ici est d'installer une sortie continue d'un sous système dynamique à la place de la sortie relais.

L'objectif du concept des **MGOS** est d'obtenir une convergence en temps fini sur l'ensemble des conditions de contraintes :

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0, r \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

### a - Précision de glissement

On sait bien qu'en pratique la précision des modes glissants classiques est proportionnelle à l'intervalle de temps entre les mesures (la période d'échantillonnage), c'est à dire de l'ordre de  $\tau$ . La réalisation d'un mode glissant d'ordre  $r$  procure une précision de glissement d'ordre  $r$ , c'est à dire de l'ordre de  $\tau^r$  [33]. Différents contrôleurs générant

des régimes glissants de tout ordre ont été décrits dans la littérature [15], [33], [3]. Ces contrôleurs appelés algorithmes glissant d'ordre  $r$  ont donné de nouvelles significations à la conception des systèmes à structure variable. En effet, avec des mesures discrètes ces algorithmes procurent une précision de glissement de leur ordre par rapport à la mesure de la période d'échantillonnage.

### b - Convergence des MGOS

Il est bien connu que les modes glissants classiques procurent une convergence en temps fini, la convergence des Modes Glissants d'Ordre Supérieur "MGOS" peut être aussi bien asymptotique. Des cas triviaux de modes glissants d'ordre supérieur asymptotiquement stables sont facilement rencontrés dans plusieurs systèmes à structure variable classiques.

Par exemple, en prenant le cas d'un système à structure variable à deux dimensions, où la contrainte définie par  $x + \dot{x} = 0$  doit être maintenue par un mode glissant d'ordre 1, il existe un mode glissant d'ordre 2 asymptotiquement stable par rapport à la contrainte  $x = 0$  à l'origine  $x = \dot{x} = 0$  (à ce point seulement). Les modes glissants MGOS asymptotiquement stables ou instables sont apparus de façon inévitable dans les systèmes à structure variable avec les actionneurs rapides [26]. Dans ce cas les MGOS stables se sont révélés utiles par la disparition spontanée de l'effet de Chattering.

Des modes glissants dynamiques procurant des modes glissants MGOS asymptotiquement stables ont été développés dans [50]. Néanmoins peu d'exemples de MGOS assurant une convergence en temps fini étaient connus pour  $r = 1$  (évident), pour  $r = 2$  [33],[36] et pour  $r = 3$  [26].

Généralement, les contrôleurs par modes glissants d'ordre deux sont utilisés particulièrement pour éliminer le chattering ou pour maintenir des contraintes de degré relatif deux. Des algorithmes glissants réels de second ordre comme le "Drift algorithm" [16] ou le "super twisting algorithm" [33] ont été proposés. Une autre famille de contrôleurs par modes glissants à convergence en temps fini est basée sur ce qu'on appelle "les modes glissants terminaux" [53].

Il est à noter que les algorithmes glissants réels de second ordre ont été implémentés avec succès pour résoudre des problèmes réels, tandis que les contrôleurs glissants d'ordre  $r$  arbitraire n'ont été étudiés seulement qu'en théorie.

## 1.4.2 Contrôleurs par modes glissants d'ordre arbitraire

Considérons un système dynamique de la forme :

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad s = s(t, x) \quad (1.19)$$

où

–  $x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}$  est la commande,

- $a$ ,  $b$  et  $s$  sont des fonctions continues et inconnues,  $n$  est aussi incertain.

Soit la contrainte définie par l'équation

$$\sigma = s - v(t) = 0,$$

où

- $s$  est une variable de sortie d'un système dynamique incertain à une seule entrée et une seule sortie SISO,
- $v(t)$  une entrée continue inconnue à l'avance qu'on doit poursuivre en temps réel.

Si le degré relatif du système est égal 1, *i.e.* si  $\dot{\sigma}$  dépend explicitement de la commande  $u$  et  $\dot{\sigma}_u > 0$ , alors la commande par mode glissant classique  $u = -K \text{sign}(\sigma)$  peut être considérée comme un contrôleur de sortie universel applicable. Il est clair qu'en pratique la plupart des problèmes de la commande d'une sortie correspondent aux cas de systèmes à degré relatif égal 2, 3, 4 et rarement 5. Une famille de contrôleurs de glissements d'ordre  $r$  avec convergence en temps fini a été récemment présentée dans des conférences [35], [37].

Inspirés des travaux sur la commande par mode glissant terminale, ces contrôleurs assurent la commande en temps réel de chaque variable de sortie si le degré relatif du système dynamique est connu. Dans un objectif de poursuite, ces contrôleurs universels permettent actuellement le contrôle complet en temps réel de la sortie  $s$  des systèmes dynamiques **SISO** à minimum de phase à degré relatifs connus.

Dans le cas où le modèle mathématique du système est connu et l'état complet est disponible, les dérivées en temps réel des sorties  $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}$ , sont directement calculées, ainsi l'implémentation du contrôleur est envisageable et aucune réduction du système dynamique en une forme spécifique n'est exigée.

Dans le cas réel où le système est soumis à des incertitudes, le modèle mathématique n'est pas réellement nécessaire et il est suffisant de connaître seulement le degré relatif du système. Les dérivées totales d'ordre supérieur de la sortie nécessaire à l'implémentation du contrôleur sont calculées en temps réel au moyen de différentiateurs exacts robustes à convergence en temps fini [36].

Ces différentiateurs sont généralement basés sur des modes glissants de second ordre. Les paramètres du contrôleur ont été choisis à l'avance, ainsi un seul paramètre scalaire (gain) est ajusté pour n'importe quel système à un degré relatif donné. Chaque contrôleur procure une précision de l'ordre  $r$ th par rapport à la période d'échantillonnage, qui représente la meilleure précision obtenue avec un glissement d'ordre  $r$ th. En effet, c'est la première fois qu'une précision de glissement réel d'ordre supérieur à 3 est démontrée [33]. Ces résultats ont été publiés récemment dans [38].

Récemment des différentiateurs exacts, robustes avec convergence en temps fini ont été proposés permettant ainsi la construction d'un contrôleur universel **SISO** [39]. Ce contrôleur est constitué d'une combinaison d'un contrôleur basé sur un mode glissant d'ordre

$r$  convergent en temps fini et un différentiateur exact robuste d'ordre  $r$  à convergence temps fini. Les performances de deux contrôleurs d'ordre 3 et 4 ont été illustrées en simulation pour la commande en poursuite du modèle cinématique de type voiture. Il a été montré que ce contrôleur procure une haute précision de poursuite en absence de bruits, et le chattering est totalement éliminé. En présence de bruits de mesure, la précision de différentiation se détériore rapidement avec l'ordre croissant de différentiation, ainsi une observation directe de ces dérivées est souhaitable.

Le problème majeur de la réalisation de cette approche est qu'elle nécessite le calcul ou la mesure de ces dérivées. Une solution à ce problème de différentiation a été donnée dans [40], en imposant des restrictions sur le signal d'entrée non bruité. En particulier, une différentiation exacte et robuste est possible si la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de l'entrée (signal de base) est supposée avoir une constante Lipschitz connue. Le contrôleur obtenu est localement applicable au cas général de systèmes SISO, et est robuste par rapport aux bruits de sorties. Il est à noter que l'information nécessaire à la mesure du bruit est seulement sa magnitude.

La commande élaborée jusqu'à présent est de type discontinue, c'est à dire une fonction discontinue de la déviation de poursuite  $\sigma$  et ses dérivées successives en temps réel. La structure complexe de la discontinuité de l'ensemble des contrôleurs engendre une certaine redondance du phénomène de chattering au niveau du régime transitoire, pour cela, la dérivée de la commande a été considérée comme une nouvelle commande.

Pour remédier à ce problème, un nouveau contrôleur de glissement d'ordre arbitraire a été très récemment proposé dans [41] ce qui a abouti à une seconde famille de contrôleurs par modes glissants d'ordre arbitraire. En effet, ce contrôleur procure un mode glissant  $\sigma = 0$  à l'aide d'une commande qui dépend seulement de  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ , continue partout sauf sur la variété définie par les équations en mode glissant d'ordre  $r$  :

$$\sigma = \dot{\sigma} = 0, \dots = \sigma^{(r-1)} = 0.$$

Par conséquent, l'effet de chattering est nettement réduit de manière significative. A notre connaissance, ces travaux représentent la publication la plus complète sur l'approche par modes glissants d'ordre  $r$ . Le contrôleur obtenu en combinant ce contrôleur avec le différentiateur exact temps réel [42], est le premier contrôleur par mode glissant à retour de sortie, d'ordre  $r$  avec  $r > 2$ . En effet, sa nature robuste par rapport aux mesures de bruits et les performances obtenues encourage son application en pratique.

## 1.5 Conclusion

Après avoir introduit les différentes formes canoniques de systèmes non holonomes, nous avons présenté en premier lieu les problèmes de la commande de ces systèmes et plus particulièrement le problème de la stabilisation en un point fixe. En second lieu, nous avons donné un état de l'art sur les modes glissants d'ordre supérieur. Pour cela, nous avons positionné le problème et donné les notions importantes (précision, convergence)

relatives à la théorie des modes glissants d'ordre supérieur ainsi que les contrôleurs par mode glissant d'ordre  $r$  arbitraire. A travers cette étude, il nous a semblé que la théorie des modes glissants classiques, et plus particulièrement la théorie des modes glissants d'ordre supérieur, peut représenter une solution pour la stabilisation robuste de systèmes non holonomes comme nous allons le voir dans les prochains chapitres.

# Chapitre 2

## Modélisation et mise en forme de systèmes non holonomes

### 2.1 Introduction

Les robots mobiles représentent une classe particulière de systèmes non holonomes dont les conditions du contact des roues avec le sol sont régies par des contraintes sur les vitesses, et qui ne sont pas intégrables. La plupart des travaux de recherche concernant la commande de ces robots utilisent principalement des modèles cinématiques simplifiés, mais pour certains objectifs, ces modèles doivent inclure les effets dynamiques, et ceci est le cas de l'utilisation des couples comme entrées de commande [54].

Plusieurs exemples de dérivation des modèles cinématiques ou/et dynamiques pour des robots mobiles à roues sont disponibles en littérature [10][17]. Une présentation générale et unifiée de la modélisation issue des robots mobiles à roues incluant les propriétés structurelles et la classification des modèles cinématiques et dynamiques, a été donnée dans [8].

L'objectif de la première partie de ce chapitre est de donner une présentation de la classification et de la modélisation des robots mobiles à roues. Essentiellement, le concept de non holonomie des robots mobiles à roues est présenté. Les aspects de contrôle résultants et reliés aux propriétés structurelles des types de ces robots ont été abordés. La seconde partie a pour but de présenter différentes formes canoniques de systèmes non holonomes, en particulier la forme chaînée, qui sera par la suite très utile pour l'élaboration de lois de commande par modes glissants.

### 2.2 Non holonomie des robots mobiles

Les contraintes de non holonomie en robotique et en mécanique sont définies par des conditions cinématiques qui ne peuvent pas être représentées par une équation  $g(q, t) = 0$  contenant seulement les coordonnées généralisées  $q$  et le temps  $t$ . Pour les robots mobiles à roues, ces contraintes sont formulées comme des équations différentielles non intégrables du premier ordre, contenant des dérivées dans le temps des coordonnées généralisées et représentées sous la forme Pfaff [10] :

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (2.1)$$

avec

- $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)^t$  coordonnées généralisées de la vitesse
- $A(q) = (a_1(q), a_2(q), \dots, a_m(q))^t$  matrice de rang  $(m \times n)$

Les covecteurs  $a_1, a_2, \dots, a_m$  sont linéairement indépendants telle que la matrice  $A(q)$  soit de rang plein pour tout  $q \in R^n$ .

Le degré de liberté (*d.l*) est défini comme la différence entre le nombre de coordonnées généralisées et le nombre de contraintes indépendantes, donné par :

$$d.l = n - m.$$

Il a été montré que l'équation d'état est écrite comme dans le cas des systèmes sans dérive [44] sous la forme :

$$\dot{x} = G(x).U \quad (2.2)$$

où

- $x$  : vecteur d'état de dimension  $n$ ,
- $G = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n-m}(x))^t$  forme une base de vecteurs,
- $U = (u_1, u_2, \dots, u_{n-m})$  vecteur des entrées de commande.

Une hypothèse essentielle (voir [44] pour plus de détails) est que le rang de contrôlabilité de l'algèbre de Lie généré par les crochets de Lie de  $g_1, g_2, \dots, g_{n-m}$  est  $n$ , où le crochet de Lie de deux vecteurs  $g_1, g_2$  est un nouveau vecteur  $[g_1, g_2]$ , définie par

$$[g_1, g_2](x) = \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 \right) (x).$$

Cette supposition concernant l'algèbre de Lie garantit qu'il n'existe pas de fonctions non triviales intégrant les contraintes représentées par l'équation (2.2). Dans ce cas, (2.2) est dit complètement non holonomique et contrôlable.

## 2.3 Cinématique des robots mobiles à roues

### 2.3.1 Description et classification de robots

Un robot mobile est un véhicule à roues capable de se mouvoir d'une façon autonome (sans un opérateur humain). Nous supposons que le véhicule est conçu à partir des éléments rigides et équipé de roues indéformables évoluant dans un plan horizontal. La position du véhicule dans le plan est décrite comme le montre la figure 2.1. Une base orthonormée

inertielle  $\{0, \vec{I}_1, \vec{I}_2\}$  est fixée dans le plan du mouvement. On définit le point  $P$  comme référence arbitraire du corps et une base arbitraire  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  attachée à ce corps.

La position du véhicule est complètement spécifiée par les trois variables  $x, y, \theta$  :

- $x, y$  sont les coordonnées du point de référence  $P$  dans la base inertielle,
- $\theta$  est l'orientation de la base  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  par rapport à la base d'inertie  $\{\vec{I}_1, \vec{I}_2\}$ .

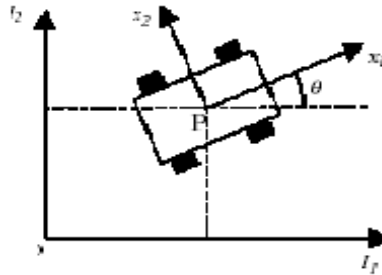


Figure 2.1. Définition de la posture du robot.

La posture du robot mobile est définie par le vecteur  $\zeta$  comme suit :

$$\zeta = (x \ y \ \theta)^T \quad (2.3)$$

### Description des roues

Nous supposons que, durant le déplacement du robot dans le plan, chaque roue reste verticale, et que l'orientation de la roue par rapport au cadre peut être fixe ou variable. On distingue deux classes fondamentales de roues idéales : les roues conventionnelles et les roues suédoises. Il est supposé ici que le contact entre la roue et le sol est réduit à un seul point du plan, c'est à dire un contact ponctuel.

Deux types de contraintes cinématiques doivent être satisfaites en chaque point de la plate-forme mobile, et ceci pour permettre au robot de bouger :

- le long du plan de la roue : supposition que la roue roule seulement, i.e. la rotation de la roue dans son plan vertical est entièrement manifestée comme un déplacement le long de l'axe principal du robot dans le plan horizontal du mouvement.
- orthogonal au plan de la roue : supposition de non glissement des roues, i.e. la vitesse du robot au long de l'axe orthogonal au plan de la roue est nulle.

Pour une roue conventionnelle, on suppose que le contact entre la roue et le sol satisfait les conditions de roulement parfait et sans glissement, ceci implique donc que la vitesse

du point de contact  $V_c$  est nulle. Pour une roue suédoise ; seule une composante de la vitesse du point de contact de la roue avec le sol est supposée nulle et ceci tout le long du mouvement. La direction de cette composante nulle est à priori arbitraire, mais elle est fixée par rapport à l'orientation de la roue.

Ces contraintes sont formulées en tant que relations différentielles non intégrables des niveaux de vitesses parmi les variables généralisées, et donnant les modèles cinématiques. Nous explicitons ci dessous les expressions de ces contraintes pour chaque type de classe de roues.

#### a - Roues conventionnelles :

Nous caractérisons au niveau de la figure 2.2, la position d'une roue. Une roue d'un robot mobile est décrite (au plus) par six paramètres : trois angles ( $\alpha$   $\beta$   $\gamma$ ) et trois longueurs ( $l$   $d$   $r$ ). Trois configurations sont considérées pour les roues conventionnelles : roues fixes, roues orientables centrées, et roues orientables décentrées. En utilisant les coordonnées polaires, la position de  $A$  dans la base  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  est caractérisée par la distance  $PA = l$  et l'angle  $\alpha$ . L'orientation du plan de la roue par rapport à  $PA$  est caractérisé par l'angle  $\beta$  constant pour des roues fixes et variable c'est à dire  $\beta(t)$  pour des roues orientables centrées et décentrées. La rotation de la roue autour de son axe (horizontal) est décrit par l'angle variable  $\varphi(t)$ , et enfin, le rayon de la roue est noté  $r$ .

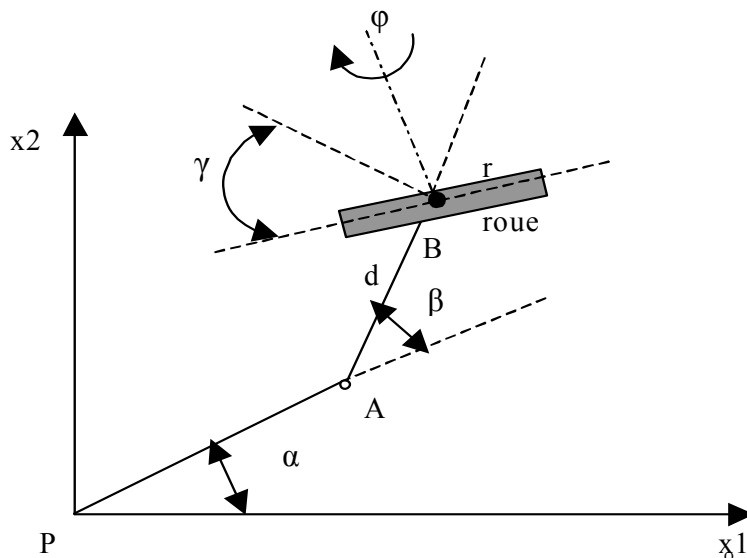


Figure 2.2. Position d'une roue.

La différence entre les roues orientables centrées et celles décentrées, est que pour une roue décentrée, la rotation du plan de la roue se fait autour d'un axe vertical qui ne passe pas par le centre de la roue noté ici ( $B$ ). Dans ce cas, la description du mouvement de cette roue nécessite plus de paramètres. Le centre de la roue est lié à la structure par une tige rigide  $AB$  de longueur constante ( $d$ ), est qui peut tourner autour d'un axe vertical

au point  $A$ . Ce point  $A$  qui est lui-même un point de la structure, a pour position en coordonnées polaires " $l$ " et " $\alpha$ ", comme auparavant. Le plan de la roue est aligné le long de  $AB$ .

Les contraintes de roulement parfait et sans glissement peuvent être exprimées sous la forme suivante :

◇ le long du plan de la roue :  $V_{cn} = 0$

$$[-\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) l \cos \beta] R(\theta) \dot{\zeta} + r \dot{\varphi} = 0 \quad (2.4)$$

◇ Orthogonal au plan de la roue :  $V_{ct} = 0$

$$[\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) d l \sin \beta] R(\theta) \dot{\zeta} + d \dot{\beta} = 0 \quad (2.5)$$

où

- $d = 0$  pour les roues fixes et celles orientables centrées
- $\dot{\beta} = 0$  pour les roues fixes évidemment.
- $R(\theta)$  est la matrice de rotation orthogonale donnée par :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

#### b - Roues suédoises :

Une roue suédoise est constituée de deux rouleaux passifs incorporés dans la roue elle-même. Comme pour les roues conventionnelles, la position de la roue suédoise par rapport à la base  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  est décrite par trois paramètres constants :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l$ . Le seul paramètre additionnel pour caractériser la direction par rapport au plan, de la composante nulle de la vitesse du point de contact, est représenté par l'angle  $\gamma$ .

La contrainte de mouvement (roulement pur) pour les roues suédoises est exprimé comme suit :

$$[-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cos(\alpha + \beta + \gamma) l \cos(\beta + \gamma)] R(\theta) \dot{\zeta} + r \cos(\gamma) \dot{\varphi} = 0 \quad (2.7)$$

### Mobilité et types de robots mobiles

Considérant maintenant, un robot mobile général, équipé de  $N$  roues, et qui sont des quatre types présentés auparavant.

$$N = N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw}$$

avec

- $N_f$  : nombre de roues conventionnelles fixes.
- $N_c$  : nombre de roues conventionnelles orientables centrées
- $N_{oc}$  : nombre de roues conventionnelles orientables décentrées
- $N_{sw}$  : nombre de roues suédoises.

La configuration du robot est totalement décrite par les vecteurs suivants :

- Coordonnées de position :  $\zeta(t) = (x(t) \ y(t) \ \theta(t))^T$  : pour les coordonnées en position dans le plan.
- Coordonnées angulaires :  $\beta_c(t)$  pour l'orientation des angles des roues orientables centrées, et  $\beta_{oc}(t)$  pour l'orientation des roues orientables décentrées.
- Coordonnées de rotation,  $\varphi(t) = (\varphi_f(t) \ \varphi_c(t) \ \varphi_{oc}(t) \ \varphi_{sw}(t))^T$  pour l'orientation des angles de rotation des roues autour de leur axes horizontaux.

Les contraintes cinématiques (roulement pur sans glissement) formulées par les équations (2.4) et (2.5) peuvent être synthétisées sous forme matricielle comme suit :

- Contraintes longitudinales :

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)^T \dot{\zeta} + J_2 \dot{\phi} = 0 \quad (2.8)$$

- Contraintes latérales :

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)^T \dot{\zeta} + C_2 \dot{\beta}_{oc} = 0 \quad (2.9)$$

avec

$$R(\theta)^T = R(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**a -Définition des paramètres  $J_1, J_2$  :**

Les matrices  $J_1, J_2$  sont ainsi données par :

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) = (J_{1c}(\beta_c) \quad J_{1oc}(\beta_{oc}) \quad J_{1sw})^T$$

$$J_2 = \text{diag}(r)$$

où

- $J_{1f}, J_{1c}(\beta_c), J_{1oc}(\beta_{oc}), J_{1sw}$  sont des matrices respectivement de dimension  $(N_f \times 3), (N_c \times 3), (N_{oc} \times 3), (N_{sw} \times 3)$ . Leurs lignes sont dérivées des équations de la contrainte de roulement pur (2.4) et (2.7).
- $J_2$  est une matrice de dimension  $(N \times N)$ . Les éléments de cette diagonale sont données par les rayons des roues. Dans le cas de roues suédoises ces éléments sont multipliés par  $\cos(\gamma)$ .

### b -Définition des paramètres $C_1$ et $C_2$

Les matrices  $C_1$  et  $C_2$  sont aussi données par :

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc}) = (C_{1f} \quad C_{1c}(\beta_c) \quad C_{1oc}(\beta_{oc}))^T$$

$$C_2 = (0 \quad 0 \quad C_{2c})^T$$

où

- $C_{1f}, C_{1c}(\beta_c), C_{1oc}(\beta_{oc})$  sont des matrices respectivement de dimension  $(N_f \times 3), (N_c \times 3), (N_{oc} \times 3)$  et dont les lignes sont extraits de l'équations de la contrainte de non glissement (2.5).
- $C_{2c}$  est une matrice diagonale dont les lignes sont égales à  $d$ .

### Degré de mobilité et degré d'orientabilité

Comme on vient de le voir, ces contraintes font intervenir les dérivées temporelles des différentes variables du robot. En fait, il apparaît que pour les roues fixes, centrées orientables, le vecteur  $[\dot{\zeta}R(\theta)]$  appartient à l'espace nul des matrices :

$$\dot{\zeta}R(\theta) \in N(C_1^*(\beta_c))$$

avec

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{pmatrix}$$

Les contraintes sur les vitesses de posture peuvent également s'interpréter de manière géométrique. En effet, à chaque instant le mouvement du robot peut être assimilé à une rotation au tour d'un point appelé Centre de Rotation Instantané (CRI). La position du CRI par rapport à la plateforme peut être variable, ce qui implique que le vecteur vitesse de chaque point de la plateforme est orthogonal à la ligne joignant ce point et le CRI. Ce dernier, dans le plan horizontal, est situé à l'intersection des axes horizontaux de rotation des roues fixes, centrées orientables.

D'après les contraintes et l'interprétation géométrique donnée ci-dessus, il est immédiat de constater que le nombre de roues et leur emplacement ne peuvent pas être choisis arbitrairement. La mobilité du robot doit satisfaire les contraintes de roulement pur et de non glissement des roues, ainsi un robot mobile doit satisfaire à un minimum de degrés de liberté. A cet effet, nous nous fixons les hypothèses suivantes :

– Hypothèse 1 [8]

\*  $\text{rang}[C_{1f}] \leq 1$ , si le  $\text{rang}[C_{1f}] = 2$ , le robot mobile a au moins 2 roues fixes, et s'il en a plus de 2, leurs axes doivent être concourant au CRI. le robot mobile est contraint à tourner autour d'un CRI fixe au cours du temps.

\*  $\text{rang}[C^*(\beta_c)] \leq 2$ , on suppose que le robot mobile est non dégénéré à savoir non immobile. Evidemment le rang de la matrice dépend de la conception du robot mobile.

Cette hypothèse est équivalente aux conditions suivantes :

1. les centres des roues conventionnelles centrées orientables n'appartiennent pas à l'axe commun des roues fixes.
2. le  $\text{rang}[C_{1c}(\beta_c)] \leq 2$  représente le nombre de roues conventionnelles centrées orientables pouvant être commandées indépendamment pour réorienter le robot.

De ces restrictions découlent les définitions suivantes :

**Définition 2** : On appelle degré de mobilité d'un robot mobile, noté  $\delta_m$ , le degré de liberté de mouvement instantané de la plateforme :  $\delta_m = 3 - \text{rang}[C^*(\beta_c)]$ .

**Définition 3** : On appelle degré d'orientabilité, noté  $\delta_s$ , le nombre de roues directrices pouvant être orientées de façon indépendante :  $\delta_s = \text{rang}[C_{1c}(\beta_c)]$ .

De plus si le robot est équipé de plus de  $\delta_s$  roues centrées orientables ( $N_c > \delta_s$ ), le mouvement des roues doit être coordonné pour garantir l'existence d'un centre de rotation instantané.

Le degré de mobilité est le premier critère de la manoeuvrabilité du robot mobile à roues : il est égal au nombre de degré de liberté pouvant être manipulé directement à partir des entrées, sans aucune réorientation des roues centrées. La somme  $\delta_M = \delta_m + \delta_s$  est appelée degré de manoeuvrabilité.

### Types de robots mobiles

En respectant ces différentes restrictions, cinq structures non singulières ayant un intérêt pratique, existent dont le degré de mobilité  $\delta_m$ , d'orientabilité  $\delta_s$  et le degré de manoeuvrabilité  $\delta_M$  satisfont les trois inéquations suivantes :

$$\begin{cases} 1 \leq \delta_m \leq 3; \\ 0 \leq \delta_s \leq 2 \\ 2 \leq \delta_M \leq 3 \end{cases}$$

Les structures sont ainsi désignées par la forme : robot mobile de type  $(\delta_m, \delta_s)$ . Suivant le critère de mobilité, deux classes importantes de robots mobiles apparaissent :

- Robots omnidirectionnels : mobilité totale dans le plan ( $\delta_m = 3$ )

- Robots à **mobilité réduite** : degré de mobilité inférieur à 3 ( $\delta_m < 3$ ).

D'ici, il existe seulement cinq types de robots mobiles, qui correspondent aux cinq paires des valeurs de  $\delta_m$ ,  $\delta_s$ , et qui satisfont les trois dernières inéquations, comme le montre le tableau 2.1 :

Type	I	II	III	IV	V
$\delta_m$	3	2	2	1	1
$\delta_s$	0	0	1	1	2

Tableau 2.1 : Types de robots mobiles.

Les caractéristiques principales de la conception de chaque type de robot mobile sont décrites brièvement et notre attention a porté sur des robots mobiles à trois roues. Une description complète peut être trouvée dans [8].

I Robot de type (3, 0). Ces robots n'ont ni de roues conventionnelles fixes ( $N_f = 0$ ), ni de roues centrées orientables ( $N_c = 0$ ). Le robot est dit "omnidirectionnel" parce qu'il a une totale mobilité dans le plan, i.e. qu'il peut bouger dans n'importe quelle direction sans aucune réorientation à chaque instant. Inversement, les quatre autres types de robots mobiles ont une mobilité réduite.

**Exemple 1** : un robot omnidirectionnel, i.e. du type (3, 0), avec trois roues décentrées orientables (fig.2.3).

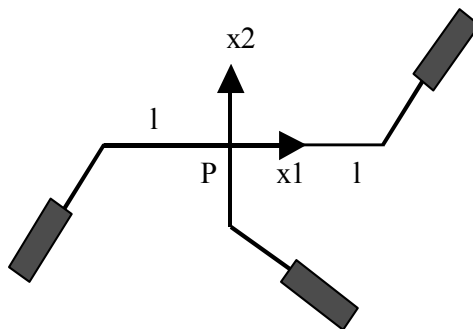


Figure 2.3. Robot mobile de type (3,0).

I Robot de type (2, 0). Ces robots n'ont pas de roues conventionnelles centrées orientables, mais ils ont une roue conventionnelle fixe, ou même plusieurs mais qui sont montées sur un seul axe commun. Le robot le plus connu et appartenant à cette classe est le robot **Hilare**.

**Exemple 2** : un robot du type  $(2, 0)$ , avec deux roues conventionnelles fixes sur le même axe et une roue décentrée orientable (fig 2.4).

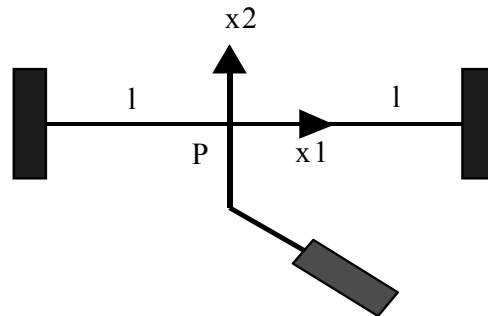


Figure 2.4. Robot mobile de type  $(2,0)$ .

l Robot de type  $(2, 1)$ . Ces robots n'ont pas de roues conventionnelles fixes. Ils ont une roue conventionnelle orientable centrée et deux roues conventionnelles orientables non-centrées.

**Exemple 3** : un robot du type  $(2, 1)$ , avec deux roues conventionnelles orientables décentrées et une roue centrée orientable (fig.2.5).

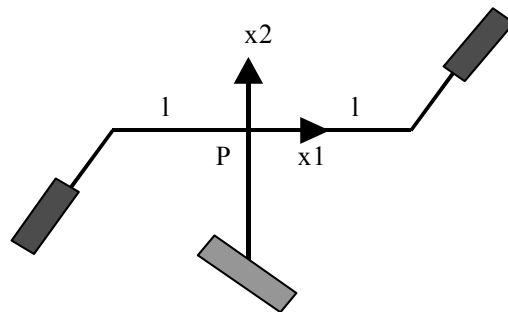


Figure 2.5. Robot mobile de type  $(2,1)$ .

l Robot de type  $(1, 1)$ . Ces robots ont une ou plusieurs roues conventionnelles fixes avec un seul axe commun et aussi une ou plusieurs roues conventionnelles centrées orientables.

**Exemple 4** : un robot du type  $(1, 1)$ , avec deux roues conventionnelles fixes sur le même axe et une roue centrée orientable, c'est le cas d'un tricycle (fig.2.6).

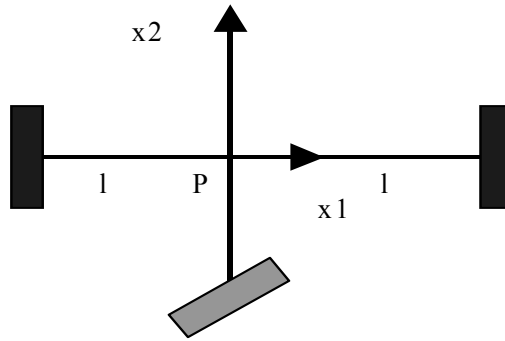


Figure 2.6. Robot mobile de type (1,1).

l Robot type (1,2). Ces robots n'ont pas de roues conventionnelles fixes. Ils ont au minimum deux roues conventionnelles orientables centrées.

**Exemple 5** : un robot du type (1,2), avec deux roues conventionnelles orientables centrées et une roue décentrée orientable (fig.2.7).

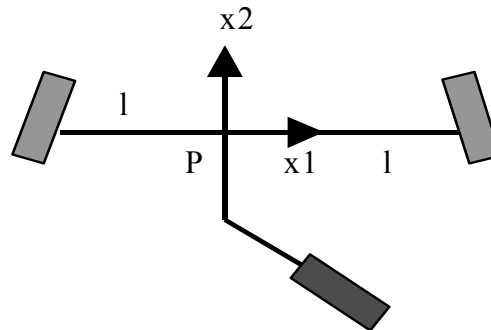


Figure 2.7. Robot mobile de type (1,2).

### Classification des modèles des robots mobiles

A partir de cette description, on a pu introduire quatre types de modèles d'état très intéressants pour décrire le comportement des robots mobiles avec roues :

- **Modèle cinématique de position ( PKM ) :**

C'est le modèle d'état le plus simple, qui donne une globale description du robot. C'est pourquoi il est très utilisé dans les tâches de contrôle.

- **Modèle cinématique de configuration (CKM) :**

C'est le modèle qui décrit l'évolution de toutes les variables de configuration. Il permet l'analyse du comportement des robots mobiles dans le cadre de la théorie des systèmes non holonomes.

· **Modèle dynamique de configuration (CDM) :**

Ce modèle tient compte de la dynamique du robot, c'est le modèle le plus général, il donne une description complète de la dynamique des systèmes y compris les forces généralisées provenant des actionneurs.

· **Modèle dynamique de position (PDM) :**

Ce modèle équivalent au (CDM) est utilisé pour analyser la réductibilité, la commandabilité et les propriétés de stabilisabilité. Les équations de ce modèle peuvent être obtenues à partir du modèle cinématique de position en ajoutant tout simplement un intégrateur à chaque entrée.

## 2.4 Modèle cinématique de position

L'étude de manoeuvrabilité faite ci-dessus est maintenant reformulée pour garantir un modèle cinématique associé à chacune des 5 classes de robot mobile non dégénéré.

Quel que soit le type du robot mobile, la vitesse  $\dot{\zeta}$  est contrainte à appartenir à une distribution  $\Delta_c$  définie par le sous espace vectoriel engendré par les colonnes de  $R^T(\theta) \sum(\beta_c)$ , soit :

$$\dot{\zeta}(t) \in \Delta_c = \text{span} \{ \text{col} R^T(\theta) \sum(\beta_c) \}$$

où les colonnes de la matrice  $\sum(\beta_c)$  forment une base pour  $N[C_1^*(\beta_c)]$  tel que :

$$N[C_1^*(\beta_c)] = \text{span}\{ \text{col} \sum(\beta_c) \}$$

Ceci est trivialement équivalent à dire que :

Quel que soit  $t$ , il existe un vecteur dans le temps  $\eta(t)$  tel que :

$$\dot{\zeta}(t) = R^T(\theta) \sum(\beta_c) \eta(t) \quad (2.10)$$

La dimension de la distribution  $\Delta_c$  (qui est celle du vecteur  $\eta(t)$ ) est le degré de mobilité du robot  $\delta_m$ . Par conséquent, dans le cas où le robot n'a pas de roues conventionnelles centrées orientables ( $N_c = 0$ ) ou  $\delta_s = 0$ ; la matrice  $\sum$  est constante et l'expression (2.10) se réduit à :

$$\dot{\zeta}(t) = R^T(\theta) \sum \eta(t) \quad (2.11)$$

Inversement, si  $\delta_s > 0$ ; la matrice  $\Sigma$  dépend explicitement de la coordonnée angulaire  $\beta(t)$ , et l'expression (2.11) pourra être augmentée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = R^T(\theta) \Sigma(\beta_c) \eta(t) \\ \dot{\beta}_c = \xi \end{cases} \quad (2.12)$$

La représentation (2.11) ou (2.12) peut être considérée comme une description dans l'espace d'état du système, aussi appelée " le modèle cinématique de position" (PKM) avec :

- les coordonnées de position  $\zeta$  et (éventuellement) les coordonnées angulaires  $\beta_c$  considérées comme variables d'états ;
- $\eta$  et  $\xi$  (ce sont là des vitesses homogènes) peuvent être considérées comme des entrées de commande.

**Remarque :** Cette interprétation doit être utilisée avec précaution, parce que les vraies entrées physiques de commande du robot mobile sont les moments fournis par les moteurs embarqués. Le modèle cinématique de position est un sous système du modèle dynamique général.

Le modèle cinématique de position 'PKM' d'un robot mobile peut s'écrire sous la forme compacte suivante [8] :

$$\dot{z} = B(z).u \quad (2.13)$$

avec

$$z = \zeta; \quad B(z) = R^T(\theta) \Sigma; \quad u = \eta; \quad si \quad N_c = 0;$$

ou

$$z = \begin{pmatrix} \zeta \\ \beta_c \end{pmatrix}; \quad B(z) = \begin{pmatrix} R^T(\theta) \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}; \quad si \quad N_c > 0$$

### 2.4.1 Modèles cinématiques des robots de types (2,0) et (1,1)

On montre dans [8] qu'aux cinq classes de robot mobile non dégénéré correspondent cinq modèles cinématiques réduits. Dans le cadre de ce travail, on s'est intéressé aux modèles cinématiques de deux types de robots mobiles, à savoir le robot mobile de type (2,0) et le robot mobile de type (1,1). Avant d'établir ces deux modèles, nous décrivons les propriétés mécaniques de chacune de ces deux structures.

### a - Propriétés mécaniques du robot de type (2,0)

Ce robot appelé classiquement unicycle se caractérise par un centre instantané de rotation situé sur une droite (2 degrés de mobilité) et par l'absence de train de roues directeurs. Il est constitué de 4 éléments : la plateforme, les deux roues fixes et une roue folle (voir figure 2.7). Notons que chacune des roues fixes est commandée par un moteur indépendamment de l'autre, et la commande est de type différentielle. La stabilité horizontale du système est assurée par la roue folle.

Les caractéristiques géométriques de chacune des roues sont décrites au tableau 2.2. Soit  $l$  la mi distance séparant les 2 roues fixes et  $r$  le rayon des roues, le vecteur des positions généralisées est alors donné par  $q = (x, y, l\theta, r\varphi_1, r\varphi_2)^T$  ainsi que celui des vitesses généralisées par  $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, l\dot{\theta}, r\dot{\varphi}_1, r\dot{\varphi}_2)^T$ .

### b - Propriétés mécaniques du robot de type (1,1)

Ce type de robot peut être l'exemple d'un tricycle ou le cas d'une voiture. Dans le cas où il s'agit de la voiture, ce robot mobile est constitué d'une plateforme et de quatre roues, ces dernières étant regroupées par paires sur deux trains. Les deux roues de l'essieu arrière sont fixes assurant ainsi la stabilité du système. Les deux roues de l'essieu avant de type centrées orientables, permettent de faire tourner le robot dans la direction désirée. Par souci de simplicité, nous supposons que le train de roues avant est représenté par une roue virtuelle située au milieu de l'essieu, le robot admet alors la représentation de la figure (2.8). L'orientation de cette roue est assurée par un moteur et les 2 roues fixes peuvent être commandées par un seul moteur ou bien par deux moteurs indépendamment. Soit  $L$  la distance séparant le centre des 2 roues arrière et celui de la roue avant et  $r$  le rayon de celles-ci. Alors, l'évolution du système est complètement déterminée par le vecteur des positions généralisées :  $q = (x, y, l\theta, \psi, r\varphi_1, r\varphi_2)^T$  et celui des vitesses généralisées  $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, l\dot{\theta}, \dot{\psi}, r\dot{\varphi}_1, r\dot{\varphi}_2)^T$ .

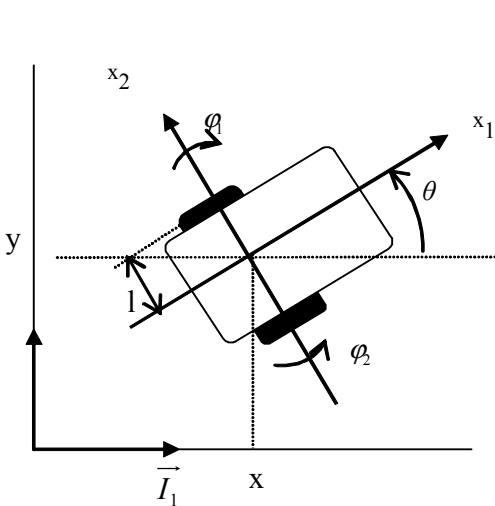


Figure 2.8. Robot mobile de type (2,0).

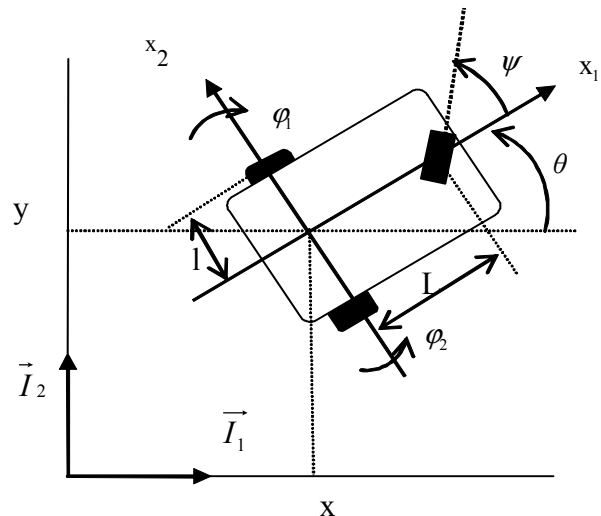


Fig.2.9. Robot mobile de type (1,1).

Les caractéristiques géométriques des roues pour chaque type de robot mobile ainsi qu'une présentation de leurs matrices de contraintes sont respectivement décrites aux

tableaux (2.2) et (2.3).

Type du robot	(2, 0)			(1, 1)		
<i>Les roues \ Les paramètres</i>	$\alpha$	$\beta$	$l$	$\alpha$	$\beta$	$l$
1 <sup>ière</sup> Roue(fixe)	$\pi/2$	0	$l$	$\pi/2$	0	$l$
2 <sup>ième</sup> Roue(fixe)	$-\pi/2$	$\pi$	$l$	$-\pi/2$	$\pi$	$l$
3 <sup>ième</sup> Roue(orientable)	-	-	-	0	$\beta = \pi/2 + \psi$	$L$

Tableau 2.2. Paramètres décrivant la position des roues.

Type de Robot	$j_1$	$j_2$	$c_1$	$c_2$
(2, 0)	$\begin{matrix} [j_1 f] \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & l \\ -1 & 0 & -l \end{array} \right) \end{matrix}$	$diag(r)$	$\begin{matrix} [C_1 f] \\ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$	-
(1, 1)	$\begin{matrix} [j_1 f \quad j_1 c] \\ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & l \\ -1 & 0 & -l \\ -\cos \psi & -\sin \psi & -L \sin \psi \end{array} \right) \end{matrix}$	$diag(r)$	$\begin{matrix} [C_1 f \quad C_1 c] \\ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & L \cos \psi \end{array} \right) \end{matrix}$	-

Tableau 2.3. Matrices des contraintes.

Le tableau ci-dessous donne le PKM du robot de type (2, 0) et celui de type (1, 1) :

Type de Robot	$z$	$\sum(\beta_c)$ ou $\sum$	PKM $\dot{z} = B(z)u$
(2, 0)	$x, y, \theta$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u_2 \end{aligned}$
(1, 1)	$x, y, \theta, \psi$	$\begin{pmatrix} L \cos \psi \\ 0 \\ \sin \psi \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u_1 \frac{\tan \psi}{L} \\ \dot{\psi} &= u_2 \end{aligned}$

Tableau 2.4. Modèles cinématiques des robots mobiles de types (2, 0) et (1,1).

Ces différents modèles cinématiques ont été calculés à partir d'un sous-ensemble des contraintes cinématiques latérales (2.9). Pour dériver le modèle cinématique complet, appelé modèle cinématique de configuration, il faut utiliser les contraintes cinématiques restantes pour décrire l'évolution des angles d'orientation et de rotation des roues n'apparaissant pas dans le modèle cinématique.

### Irréductibilité du PKM

**Définition 4** : un modèle d'état est dit "réductible" s'il existe un changement de variables tel que une partie des nouvelles coordonnées doit être nulle tout au long du mouvement.

Pour le PKM, qui est un système non linéaire sans termes de dérives :  $\dot{z} = B(z).u$ , la réductibilité est liée à la distribution involutive fermée (i.e. la plus petite distribution involutive)  $\bar{\Delta}$  de la distribution  $\Delta$  qui est générée par les colonnes de l'espace nul de la matrice  $B$  :

$$\Delta(z) = \text{span}\{\text{col}(B(z))\} \quad (2.14)$$

La conséquence bien connue du Théorème de Frobenius [29] stipule que le système est réductible si et seulement si :

$$\dim \bar{\Delta} < \dim z \text{ où les variables } (\dim(z) - \dim \bar{\Delta}) \text{ sont intégrables.}$$

Propriété 1 : pour le modèle cinématique de position d'un robot mobile non dégénéré :

$$\dot{z} = B(Z).u$$

(a) la matrice d'entrée  $B(z)$  a un rang plein, i.e.  $\text{rang } B(z) = \delta_m + \delta_s$ , pour tout  $z$ .

(b) la distribution involutive  $\bar{\Delta} = \text{inv span}\{\text{col}(B(z))\}$  a une dimension maximale constante :  $\dim \bar{\Delta} = 3 + \delta_s$ , pour tout  $z$ . ("inv" veut dire ici : distribution involutive).

Par conséquent ; le modèle cinématique de position d'un robot mobile à roues est **irréductible**. Ceci est une propriété des coordonnées libres.

## 2.4.2 Contrôlabilité, stabilisabilité et linéarisabilité par retour d'état

### A. Contrôlabilité

L'approximation linéaire autour d'un état d'équilibre ( $\bar{z}, \bar{u} = 0$ ) est donné par :

$$\frac{d}{dt}(z - \bar{z}) = B(\bar{z})u$$

Ainsi la matrice de contrôlabilité se réduit à  $B(\bar{z})$  dont le rang est  $(\delta_m + \delta_s)$  pour tout  $\bar{z}$ .

Par conséquent l'approximation linéaire du modèle cinématique de posture des robots omnidirectionnels (type (3,0)) est contrôlable du moment que  $\delta_m$  est la dimension d'état, mais il est non contrôlable pour des robots à mobilité réduite (type(2,0), ou pour  $\delta_m \leq 2$ ) puisque  $\text{rang}(B(z)) < \dim(z) = 3 + \delta_s$ .

Le modèle cinématique de posture PKM  $\dot{z} = B(z).u$  est contrôlable ce qui implique la contrôlabilité des systèmes sans dérive.

### B. Stabilisabilité

Pour les robots à mobilité réduite, le PKM est non stabilisable par un retour d'état statique invariant dans le temps  $u(z)$ . En effet, la condition nécessaire de Brockett [6] n'est

pas satisfaite et le PKM est stabilisable par un retour d'état continu variant dans le temps  $u(z, t)$ .

### C. Linéarisabilité par retour d'état

Le PKM des robots à mobilité réduite est un "système différentiellement plat" au sens de Fliess et Rouchon [21], ce qui implique qu'il est complètement linéarisable par retour d'état dynamique et ceci tant que l'entrée  $u$  du robot est différente de zéro ( $u \neq 0$ ), c'est dire que le robot doit être en mouvement. Pour plus de détails, on peut se référer aux articles [11], [45].

## 2.5 Mise en forme

Afin de faciliter la synthèse de lois de commande, des mises en forme de systèmes non holonomes ont été introduites. Il a été montré que par l'intermédiaire de changements de coordonnées locaux dans l'espace d'état, ces systèmes peuvent être mis sous différentes formes canoniques : forme régulière généralisée [46], forme canonique de commandabilité généralisée [19], forme puissance ou forme chaînée [47],[25]. Dans ce qui suit, on s'intéressera aux deux dernières formes, et plus précisément à la forme chaînée qui s'avère être intéressante du point de vue commande et stabilisation de systèmes non holonomes.

### 2.5.1 Forme canonique de commandabilité généralisée

Les travaux de recherche de Fliess sur l'algèbre différentielle ont permis de généraliser la forme canonique de commandabilité de systèmes non linéaires donnant lieu à la forme canonique de commandabilité généralisée (*GCCF*).

La transformation d'état aboutissant à cette forme comprend la variable d'entrée  $u$  et ses dérivées :  $u, u', \dots, u^\alpha$ .

La forme canonique de commandabilité généralisée existe pour tous les systèmes non linéaires, commandables ou non et qui peut se mettre sous la forme :

$$(GCCF). \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} = x_n \\ x_n = C(x_1, \dots, x_n, u, u', \dots, u^\alpha) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Dans cette représentation  $X = [x_1, \dots, x_n]$  est un état généralisé et l'entrée  $u$  et ses  $\alpha$  premières dérivées interviennent dans la dynamique du système.

Si on associe à la forme canonique de commandabilité généralisée (*GCCF*) l'équation

de la sortie  $y = x_1$  (élément primitif différentiel), on aboutit alors à la forme canonique d'observabilité généralisée (*GOCF*) donnée par :

$$(GOCF) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} = x_n \\ x_n = C(x_1, \dots, x_n, u, u', \dots, u^\alpha) \\ y = x_1 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

A partir de la forme canonique de commandabilité généralisée (2.15), Fliess a introduit le bouclage linéarisant [19] :

$$C(x_1, \dots, x_n, u, u', \dots, u^\alpha) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + v \quad (2.17)$$

où

- $v$  est la nouvelle entrée du système et les coefficients  $a_i$  sont choisis tels que le polynôme  $a_1 + a_2 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n$  soit stable

L'introduction de ce bouclage permet ainsi la linéarisation du système s'il existe une entrée  $u(t)$  solution de (2.17).

Il est à noter que ce bouclage peut être générique de correcteurs qui utilisent un bouclage discontinu avec régime glissant et des commutations sur l'entrée.

### Exemple :

Soit le système classique monovariante non linéaire [20] représenté dans l'espace d'état par :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = z_1^2 + z_2 \\ z_2 = z_3 + u \\ z_3 = \lambda \cdot z_3. \end{array} \right.$$

où

- $z = [z_1, z_2, z_3]^t$  désigne l'état,
- $u$  : désigne l'entrée,
- $\lambda$  : est un paramètre réel.

On cherche une équation différentielle de type(2.17), faisant intervenir seulement  $z_1$ ,  $u$  et leurs dérivées et on obtient la suivante :

$$\ddot{z}_1 - (2.z_1 + \lambda).\dot{z}_1 + 2.\lambda.z_1.z_1 - 2.z_1^2 + \lambda.u - u.$$

En prenant comme élément primitif différentiel  $y = z_1 = x_1$  et en définissant un nouvel état  $[x_1, x_2, x_3]$  où

$$x_2 = \dot{x}_1 \text{ et } x_3 = \ddot{x}_1$$

Alors on déduit une dynamique généralisée définie par la forme canonique (*GCCF*) associé au système précédent :

$$(GCCF) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 2.(x_1 x_3 + x_2^2) + \lambda(x_3 - 2.x_1 x_2 - u) + u \end{cases}$$

Un bouclage linéarisant peut être écrit sous la forme :

$$2.(x_1 x_3 + x_2^2) + \lambda(x_3 - 2.x_1 x_2 - u) + u = \sum_{i=1}^n a_i . x_i + v$$

avec  $a_i$  choisis de façon que le système linéaire d'équation caractéristique  $a_1 + a_2 s + a_3 . s^2$  soit stable

## 2.5.2 Forme chaînée

Récemment des mises en forme chaînée des systèmes ont été introduites afin de modéliser les équations cinématiques des robots mobiles à roues. La possibilité de modéliser ces équations cinématiques par ce qu'on appelle équations en forme chaînée a été donnée par [44] en traitant le cas d'un véhicule de type voiture. Plusieurs résultats concernent la classe de systèmes non holonomes à 2 degrés de libertés, c'est à dire  $n - m = 2$ . Nous nous intéressons ici au cas de systèmes à "2 entrées avec une seule chaîne".

En se reportant à l'équation état (2.2) pour  $n - m = 2$ , on aura :

$$\dot{x} = g_1 u_1 + g_2 u_2 \tag{2.18}$$

Sous certaines conditions [44], il a été montré que le système (2.18) peut se mettre sous la forme d'un système chaîné par difféomorphisme et retour d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = z_2 v_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1} v_1 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où

–  $Z \in R^n$  est le nouveau vecteur d'état et  $v_1$  et  $v_2$  sont les nouvelles entrées.

On définit les distributions suivantes :

$$\Delta_0 = Vect \{g_1, g_2, \dots, ad_{g_1}^{n-2} g_2\} \quad (2.20)$$

$$\Delta_1 = Vect \{g_2, ad_{g_1} g_2, \dots, ad_{g_1}^{n-2} g_2\} \quad (2.21)$$

$$\Delta_2 = Vect \{g_2, ad_{g_1} g_2, \dots, ad_{g_1}^{n-3} g_2\} \quad (2.22)$$

avec l'opérateur  $ad$  définie par :

$$ad_{g_1}^k g_2(x) = [g_1, ad_{g_1}^{k-1} g_2](x), k \geq 1$$

et

$$ad_{g_1}^0(x) = g_2(x)$$

**Théorème 5** [44] *Si le système (2.18) satisfait les hypothèses suivantes :*

*H1) rang  $\Delta_0(x) = n$  pour tout  $x \in R^n$ ,*

*H2)  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont involutives,*

*H3) il existe une fonction  $h_1(x)$  telle que  $dh_1 \Delta_1 = 0$  et  $dh_1.g_1 = 1$ ,*

alors le système (2.18) peut être transformé en (2.19) en utilisant le difféomorphisme

$$Z = \phi(x) = [h_1(x), L_{g_1}^{n-2} h_2(x), \dots, L_{g_1} h_2(x), h_2(x)] \quad (2.23)$$

et le retour d'état

$$u = \psi(x)v = \frac{1}{L_{g_2} L_{g_1}^{n-2} h_2(x)} \begin{pmatrix} L_{g_2} L_{g_1}^{n-2} h_2(x) & 0 \\ -L_{g_1}^{n-2} h_2(x) & 1 \end{pmatrix} v, \quad (2.24)$$

où  $h_2$  est une fonction indépendante de  $h_1$  telle que

$$dh_2 \cdot \Delta_2 = 0 \quad (2.25)$$

et la dérivée de  $h_2$  le long de  $g_1$  est donnée par :

$$L_{g_1} h_2(x) = dh_2 \cdot g_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_2}{\partial x_i}(x) g_{1i}(x),$$

$$L_{g_1}^k h_2(x) = dL_{g_1}^{k-1} h_2(x) \cdot g_1(x),$$

$$L_{g_1}^0 h_2(x) = h_2(x).$$

**Remarque :** L'existence de  $h_2$  est assurée par le théorème de Frobenius [29] étant donné que  $\Delta_2 \subset \Delta_1$  sont toutes deux involutives.

Nous représentons ci dessous la modélisation en forme chaînée de deux exemples de type de robots mobiles : le type (2,0) et le type (1,1).

**Exemple1 :** *cas de robot mobile de type (2,0)*

Nous allons voir ici que le modèle cinématique réduit des robots mobiles de classe (2,0) donnée dans la tableau 2.4 peut être transformé en forme chaînée. En considérant la transformation suivante sur le vecteur des commandes :

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

L'unicyle peut être décrit dans l'espace de coordonnées généralisées par :

$$\dot{q} = g_1 w_1 + g_2 w_2$$

avec

$$q = (x, y, \theta)^t, g_1 = (0, 0, 1)^t, g_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 0)^t$$

$u_1$  et  $u_2$  respectivement les vitesses linéaire et angulaire

En calculant le crochet de Lie :

$$[g_1, g_2]^T = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}^T$$

Et en vérifiant bien les 2 hypothèses (*H1 et H2*) du théorème, il vient :

- $\text{rang } \Delta_0 = 3,$
- $\Delta_1 = \text{Vect} \{g_2, [g_1, g_2]\}$  est involutive
- $\Delta_2 = \text{Vect} \{g_2\}$  est involutive

D'après l'hypothèse  $H3$ , les fonctions  $h_1$  et  $h_2$  résultantes sont données par :

$$\begin{aligned} h_1 &= \theta, \\ h_2 &= x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned}$$

En utilisant le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} z_1 = \theta_1 \\ z_2 = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \\ z_3 = x \cdot \sin \theta - y \cdot \cos \theta \end{cases}$$

et le retour d'état statique :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 + z_3 v_1 \end{cases}$$

le modèle est transformé en forme chaînée :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = z_2 v_1 \end{cases} \quad (2.26)$$

avec  $z_1$  et  $z_2$  comme sorties linéarisantes.

**Exemple 2** : cas de robot mobile de type (1,1)

En se référant au PKM du robot mobile de type (1,1) et en considérant la transformation suivante sur le vecteur des commandes :

$$w = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

Le robot mobile de type (1,1) qui peut correspondre au tricycle ou à la voiture est décrit dans l'espace de coordonnées généralisé par la dynamique :

$$q' = g_1 w_1 + g_2 w_2$$

avec

$$g_1 = (1, \tan \theta, \frac{\tan \psi}{L \cos \theta}, 0)^T, \quad g_2 = (0, 0, 0, 1)^T$$

En calculant les deux crochets de Lie :

$$[g_1, g_2]^T = \left( 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L \cos \theta \cos \psi^2} \quad 0 \right)^T$$

$$[g_1, [g_1, g_2]]^T = \left( 0 \quad -\frac{1}{L \cos \theta^3 \cos \psi^2} \quad 0 \quad 0 \right)^T$$

on constate immédiatement que :

- rang  $\Delta_0 = 4$
- $\Delta_1 = Vect \{g_2, [g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]\}$  est involutive
- $\Delta_2 = Vect \{g_2, [g_1, g_2]\}$  est involutive.

Le modèle PKM réduit des robots mobiles de type (1, 1) peut donc être transformé sous forme chaîné. Les fonctions  $h_1$  et  $h_2$  sont ainsi données par les formes suivantes :

$$h_1 = x$$

$$h_2 = y$$

Le couple de difféomorphisme et retour d'état résultant de l'application de ces fonctions est le suivant :

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z_2 = \frac{\tan(\psi)}{L \cos(\theta)^3} \\ z_3 = \tan(\theta) \\ z_4 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = w_1 = u_1 \cos \theta \\ v_2 = \frac{3 \tan(\psi)^2 \sin(\theta)}{L^2 \cos(\theta)^3} w_1 + \frac{1}{L \cos(\theta)^3 \cos(\psi)^2} w_2 \end{cases}$$

ce qui donne naturellement la forme chaînée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = z_2 v_1 \\ \dot{z}_4 = z_3 v_1 \end{cases}$$

### Conversion en une forme chaînée perturbée

Nous supposons maintenant que le système est soumis à des perturbations  $p$  dépendant de l'état et /ou du temps. Le système perturbé s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + p(x, t) \quad (2.27)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  sont les deux entrées de commande,  $g_1, g_2$  sont des champs de vecteurs linéairement indépendants et suffisamment différentiables, et  $p(x, t) \in \mathbb{R}^n$  est une perturbation additive.

Les résultats de Murray et de Sastry donnés dans [44] ont été étendus dans [24], où ils montrent que sous certaines conditions, plusieurs systèmes non holonomes perturbés pour (2.27) peuvent être transformés en une forme chaînée perturbés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = v_1 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2 (v_1 + p^1(z, t)) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1} (v_1 + p^1(z, t)), \end{array} \right. \quad (2.28)$$

où  $p^1$  et  $p^2$  sont des perturbations après changement de coordonnées et retour d'état.

**Théorème 6** [24] *Considérons le système perturbé (2.27). Sous les hypothèses H1-H,3, (2.26) peut être transformé en la forme chaînée (2.27) si et seulement si pour tout  $t$*

$$p(x, t) \in \text{Vect} \{g_1(x), g_2(x)\}.$$

La preuve de ce théorème a été donnée dans la référence [24].

## 2.6 Conclusion

Ce chapitre concerne la modélisation et la mise en forme de systèmes non holonomes cas de robots mobiles à roues. La première partie de ce chapitre présente les robots mobiles à roues et une rigoureuse représentation de leurs modélisation et classification. En effet, l'aspect mobilité de ces systèmes mécaniques est accompagné de leurs contraintes cinématiques de la propriété de non holonomie ce qui a permis de classifier les robots mobiles à roues en cinq types distincts, chacun de ces types a son modèle cinématique PKM et une configuration de roues propre à lui. Certaines aspects de contrôle tels que la contrôlabilité, la linéarisabilité par retour d'état et la stabilisabilité de ces systèmes résultant de propriétés des types de robots ont été également abordés.

La deuxième partie consacrée à la mise en forme de systèmes non holonomes nous a permis d'introduire la forme canonique de commandabilité généralisée et la forme chaînée. Deux modèles en forme chaînée ont été donnés correspondant chacun à un modèle de robot mobile de type (2,0) et de type (1,1). Il a été vu en dernier qu'un système non holonome perturbé peut être mis, sous certaines conditions, sous forme chaînée perturbée. Cette dernière forme qui s'avère très intéressante du point de vue commande sera par la suite utilisée dans l'élaboration de différents algorithmes de stabilisation par modes glissants.

# Chapitre 3

## Stabilisation par modes glissants d'ordre un

### 3.1 Introduction

Les modes glissants sont utilisés afin de retenir une dynamique du système de façon précise pour une contrainte donnée. Dans les systèmes de contrôle ces modes sont caractérisés par des actions discontinues dans le temps de la commande et le maintien exact de la contrainte sur l'hypersurface est atteint dans la limite à une fréquence infinie de la commutation de la commande. Quand l'état du système évolue sur l'hypersurface choisie, la dynamique du système est dite plongée dans l'état d'un système réduit et libre, c'est à dire le système évolue sur une sous variété de dimension inférieure d'une unité à la dimension du système.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

Après avoir donné quelques définitions, nous présentons en section 1, les principes de base de la commande à structure variable ainsi qu'une application sur un moteur DC. La section 2 présente une solution au problème de la stabilisation des systèmes non holonomes. Deux formes de stabilisation robuste par modes glissants classiques seront synthétisées pour une forme chaînée perturbé d'un système non holonome de dimension  $n = 3$ . Afin d'illustrer les différents résultats, des simulations basées sur un robot mobile de type unicycle seront données.

### 3.2 Définitions

Considérons le système dynamique non linéaire, mono entrée et affine en l'entrée, donné par l'équation :

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u \quad (3.1)$$

où

$x = (x_1, \dots, x_n)^T \in X$  représente le vecteur d'état,

$X$  est une variété différentielle ou un ensemble ouvert de  $R^n$ ,

$u : R^n \rightarrow R$  représente l'entrée et peut aussi dépendre du temps,  $f$  et  $g$  sont des champs de vecteurs supposés suffisamment différentiables, définis sur  $X$ .

La structure d'un système de commande à structure variable est gouverné par le signe d'une fonction scalaire  $s$  supposée suffisamment différentiable, et appelé fonction de commutation ou de glissement. Généralement une fonction de commutation  $s$  décrit une surface linéaire donnée par l'équation  $s(x, t) = 0$ .

**Définition 7** [52] *S'il existe un temps fini  $t_f$  tel que la solution du système (3.1) satisfasse  $s(x, t) = 0$  pour tout  $t \geq t_f$ , alors un régime (ou un mode) glissant idéal existe sur  $S$ .*

### 3.3 Conception de la commande par modes glissants

Le problème de base de la conception d'une commande par modes glissants consiste à établir dans un premier temps la fonction de commutation  $s$  représentant la dynamique désirée et par la suite construire la loi de commande à structure variable  $u(x, t)$  telle que la surface de commutation  $s(x, t) = 0$  est atteinte en un temps fini.

La loi de commande  $u(x, t)$  est définie comme suit :

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } s(x, t) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases}, u^+(x, t) > u^-(x, t) \quad (3.2)$$

$u^+(x, t)$  et  $u^-(x, t)$  étant des fonctions continues.

Ainsi, la réalisation d'un contrôleur par mode glissant  $u(x, t)$  pour le système (3.1) se fait selon trois étapes :

- Choix de la surface de glissement,
- Etablissement des conditions d'existence et de convergence,
- Etablissement de la loi de commande.

#### 3.3.1 Choix de la surface de glissement

Ce choix concerne le nombre nécessaire de surfaces individuelles et leurs formes. Généralement le nombre de surfaces est égal à la dimension de l'entrée de commande du système. Un système d'ordre  $n$  avec  $m$  entrées peut avoir jusqu'à  $(2^m - 1)$  surfaces. Le choix de ces surfaces doit être fait de manière à ce que leur intersection permette d'avoir le comportement désiré du système.

Pour le choix de la forme de la surface de glissement, Slotine [48] a proposé une forme générale qui consiste à définir une fonction scalaire des surfaces de glissements dans le plan de phase, donnée par :

$$s(x) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{r-1} e(x) \quad (3.3)$$

avec

- $e(x)$  : déviation donnée par  $e(x) = x_d - x$
- $\lambda$  : coefficient de surface,  $\lambda > 0$
- $x_d$  : état désirée,
- $r$  : degré relatif (nombre de sorties dérivables pour avoir une forme explicite de la commande  $u$ ).

### 3.3.2 Conditions d'existence du régime glissant

Nous présentons ici deux approches afin d'établir les conditions d'existence et d'atteignabilité du régime glissant :

#### Approche de la commutation directe

La condition d'existence d'un régime glissant est souvent donnée par l'inégalité [30] :

$$s\dot{s} < 0 \quad (3.4)$$

et est appelé condition d'attractivité.

Malgré que cette condition soit globale, la convergence en temps fini n'est pas garantie.

En dérivant la surface  $s$  par rapport au temps  $t$ , on aura :

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} \cdot (f(x) + g(x)u) \quad (3.5)$$

En utilisant la commutation de la loi de commande dans (3.4), le changement de vitesse de la fonction  $s(x)$  garantit le croisement de la surface de chaque côté. Ainsi la surface de glissement est localement attractive, et ceci se traduit mathématiquement par :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial s}{\partial x} \cdot (f(x) + g(x)u^+) < 0 \text{ et } \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial s}{\partial x} \cdot (f(x) + g(x)u^-) > 0 \quad (3.6)$$

Alors un régime glissant existe sur une surface de glissement si, et seulement si, dans un voisinage de cette surface les vecteurs vitesses des trajectoires du système sont dirigées vers elle, comme le montre la figure 3.1. Une fois la surface intersectée, les trajectoires restent dans  $\epsilon$  voisinage de  $s$ , et le régime glissant est dit idéal si on a exactement  $s(x) = 0$ .

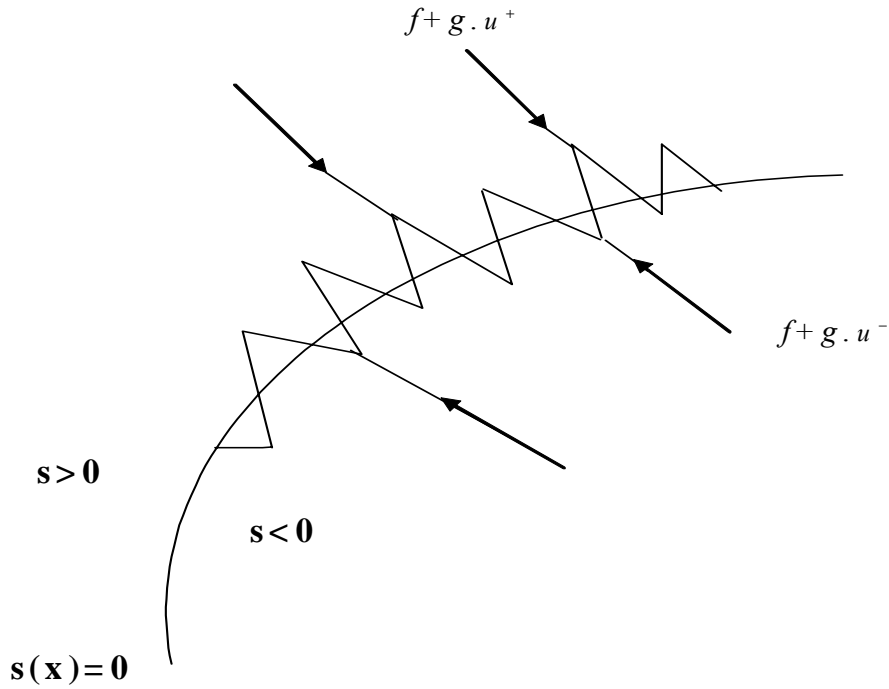


Figure 3.1. Commutation des champs de vecteurs sur S.

### Approche de la fonction de Lyapunov

Cette approche est basée sur la détermination d'une fonction de Lyapunov. La fonction de Lyapunov  $V(s, x, t)$  est choisie sous la forme quadratique comme suit :

$$V(s, x, t) = \frac{1}{2} s^T(x) s(x) \quad (3.7)$$

Cette fonction vérifie bien pour tout  $t$  et pour tout  $x$  :

$$V(s, x, t) > 0 \text{ si } s(x) \neq 0 \text{ et } V(0, x, t) = 0.$$

Ainsi la condition d'existence du régime glissant est obtenue si la dérivée dans le temps de la fonction de Lyapunov est négative. L'expression de cette condition est donnée par [48] :

$$\frac{dV}{dt} = s^T(x) \cdot \dot{s}(x) < 0 \quad \text{telle que } s(x) \neq 0 \quad (3.8)$$

Finalement on retrouve l'inéquation utilisée pour la détermination du régime glissant dans le formalisme classique.

Afin de garantir une convergence en temps fini, la condition (3.8) est souvent remplacée par la condition dite de  $\eta$ -attractivité [48] :

$$s^T(x) \cdot \dot{s}(x) \leq -\eta |s(x)| \quad \text{telle que } s(x) \neq 0 \quad (3.9)$$

où  $\eta$  est une constante positive définissant le temps de convergence,  $t_f$ .

### 3.3.3 Loi de commande

Pour la détermination de la trajectoire d'état  $x(t)$ , solution du système en mode glissant, nous présentons ici la méthode de la commande équivalente :

#### Méthode de la commande équivalente

La méthode de la commande équivalente, due à Utkin [52] est un moyen de déterminer le comportement du système lorsque un régime glissant idéal (ni seuil, ni retard, ni hystérésis) est établi. Ce glissement s'effectue sur la surface d'équation  $s(x, t) = 0$ , de ce fait:

$$\frac{ds(x, t)}{dt} = 0$$

Ainsi le comportement du système est donné par les conditions d'invariance de la surface :

$$s(x, t) = 0 \quad (3.10)$$

$$\dot{s}(x, t) = 0 \quad (3.11)$$

On exprime ainsi  $\dot{s}$  pour avoir la commande équivalente  $u_{eq}$  :

$$\begin{aligned} \frac{ds(x, t)}{dt} &= \left( \frac{\delta s}{sx} \right)^T \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta s}{st} \\ &= \left( \frac{\delta s}{sx} \right)^T [f(x, t) + g(x, t) \cdot u_{eq}] + \frac{\delta s}{st} = 0 \end{aligned}$$

Si on suppose la condition d'existence :

$$\left[ \left( \frac{\delta s}{sx} \right)^T g(x, t) \right]^{-1} \neq 0 \quad (3.12)$$

La commande équivalente s'exprime ainsi de la façon suivante :

$$u_{eq}(x, t) = - \left[ \left( \frac{\delta s}{sx} \right)^T g(x, t) \right]^{-1} \left\{ \left( \frac{\delta s}{sx} \right)^T \cdot f(x, t) + \frac{\delta s}{st} \right\} \quad (3.13)$$

La commande équivalente est bien définie si elle existe et est déterminée de façon unique par les conditions d'invariance.

L'équation (3.12) définit une condition de transversalité et ne constitue qu'une condition nécessaire pour l'existence d'un régime glissant.

En portant l'expression de  $u_{eq}(x, t)$  dans l'équation (3.1), la trajectoire d'état  $x(t)$  décrivant le système en régime glissant est solution de l'équation d'état :

$$\dot{x} = \left\{ I - g(x, t) \left[ \begin{pmatrix} \frac{\delta s}{sx} \end{pmatrix}^T g(x, t) \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\delta s}{sx} \end{pmatrix}^T \right\} f(x, t) - g(x, t) \left[ \begin{pmatrix} \frac{\delta s}{sx} \end{pmatrix}^T g(x, t) \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\delta s}{sx} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

### 3.3.4 Propriétés de robustesse

Reprenons le système (3.1) que l'on suppose maintenant soumis à des perturbations  $p$  :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t).u + p \quad (3.15)$$

Ces perturbations représentent :

- des incertitudes paramétriques sur le terme nominal de la dérive  $f : p = \delta f(t, x)$
- des perturbations externes indépendantes de l'état :  $p = q(t)$ .

**Théorème 8** [24] *Un régime glissant sur  $S$ , du système perturbé (3.15), est indépendant du vecteur de perturbation  $p$ , si et seulement si celui-ci vérifie*

$$p \in Vect \{g(x)\} \quad (3.16)$$

La condition (3.16) est appelée condition de recouvrement ou "matching condition".

**Remarques :**

- Une généralisation de ce théorème a été donnée ultérieurement, concernant les systèmes non holonomes mis sous forme chaînée.
- Cette condition d'invariance par rapport aux perturbations se rapproche de la condition d'invariance par rapport aux perturbations externes établie par Drazenovic [13].

## 3.4 Le phénomène de Chattering

La nature discontinue de la loi de commande des systèmes à structure variable est caractérisée par des commutations autour de la surface. Dans le cas d'un régime glissant idéal, la fréquence de ces commutations est supposée infinie, ce qui est impossible en pratique. De plus, la présence des imperfections, de retards au niveau des commutations ou de petites constantes de temps au niveau des actionneurs engendre un comportement

particulier au voisinage de la surface appelé communément phénomène de réticence ou broutement en français, ou encore chattering en anglais. Ce phénomène est décrit par de fortes oscillations de haute fréquences autour de la surface de commutation du système à commander comme on le voit sur la figure 3.2. En conséquence, les performances et la robustesse du système sont dégradées et cela peut même conduire à l'instabilité.

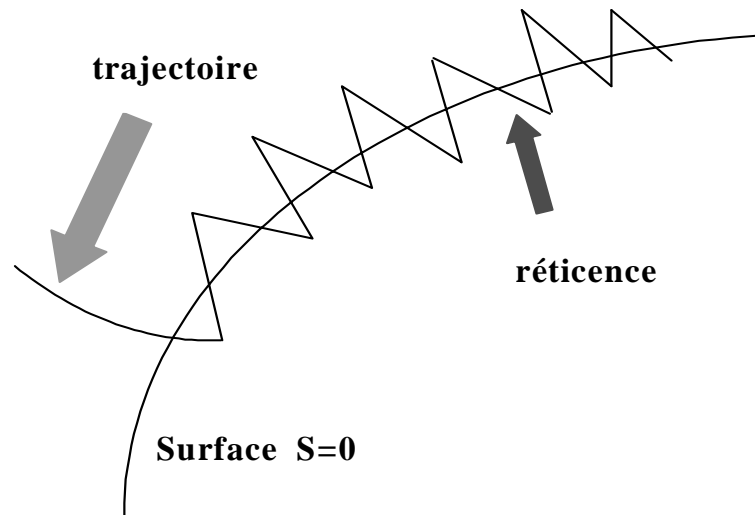


Figure 3.2. Phénomène de Chattering.

Pour réduire ce phénomène, des extensions technologiques de la commande à structure variable ont été élaborées :

- Augmentation de la fréquence [27],
- Linéarisation de la commande par bande de surface en utilisant les fonctions continues de lissage [27] ou de saturation [48],
- Décomposition de la commande en un terme équivalent (basse fréquence) et un terme discontinu (haute fréquence) [51].

Toutes ces extensions méthodologiques ont été avantagement remplacées par la loi de commande à structure variable généralisée. L'utilisation de dérivées de la commande pour générer les régimes glissants permet de résoudre des problèmes liés au chattering. La commutation de l'entrée est faite sur la dérivée la plus élevée de la commande, permettant ainsi de réduire le chattering, en effet, la commande est opérée par des intégrations successives.

### 3.5 Application à un moteur DC

Considérons un moteur DC à courant continu dont le modèle est donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Si on veut que la dynamique désirée du moteur en régime glissant est analogue à un premier ordre et de constante de temps  $\tau = \frac{1}{\lambda}$ , on définit alors une surface de glissement de la forme :  $s = x_2 + \lambda x_1 = 0, \lambda > 0$  d'où

$$\dot{s} = (\lambda - 2)x_2 - x_1 + u$$

On choisit dans un premier temps une loi de commande de type relais

$$u = -K \text{sign}(s), K > 0$$

En utilisant l'approche de la commutation directe, la condition de glissement vérifie l'inégalité :

$$s\dot{s} < |s| (|(\lambda - 2)x_2 - x_1| - K)$$

alors un régime glissant existe si et seulement si le gain  $K$  vérifie :

$$K > |(\lambda - 2)x_2 + x_1|$$

Avec une période d'échantillonnage  $Te = 6ms$  et en choisissant comme paramètres  $\lambda = 4, K = 3$ , on représente ci-dessous les résultats de simulation (figure 3.3) obtenus avec cette loi de commande.

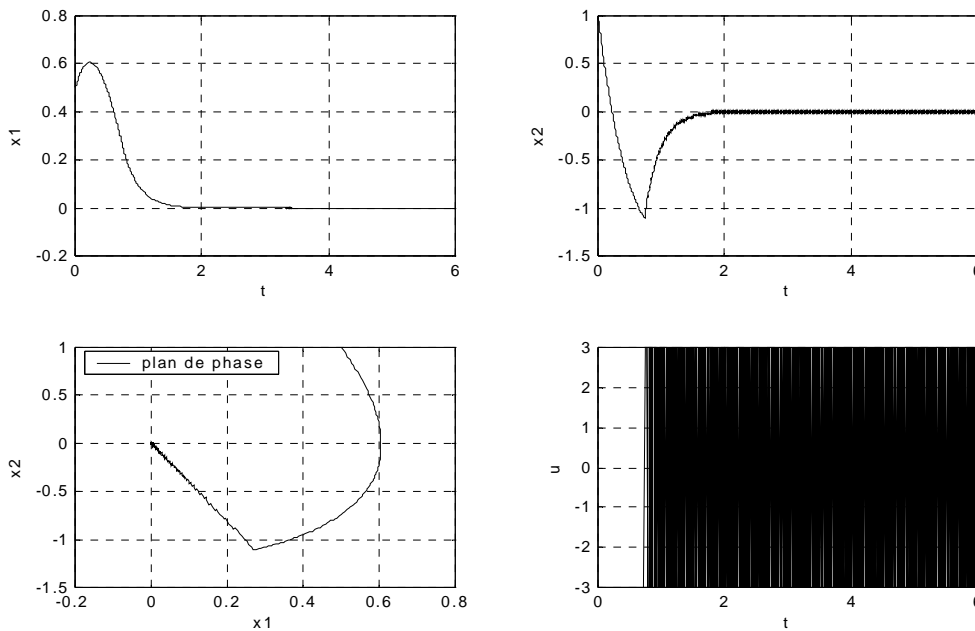


Figure 3.3. Etats, trajectoire dans la plan de phase et commande  $u = -K \text{sign}(s)$ .

Utilisant maintenant l'approche de la commande équivalente, en effet, à partir de  $\dot{s} = 0$ , on peut déduire la commande équivalente  $ueq$  qui est donnée par :

$$ueq = (\lambda - 2)x_2 + x_1$$

Ainsi en modifiant l'entrée de commande comme suit :

$$u = ueq - Ks$$

on obtient

$$s\dot{s} = -Ks^2$$

Ce qui donne par intégration :

$$s = s(0)e^{-Kt}$$

En prenant les mêmes paramètres ( $\lambda = 4, K = 3$ ) avec la même période d'échantillonnage, on donne ci-dessous les résultats obtenus avec cette loi de commande (figure 3.4).

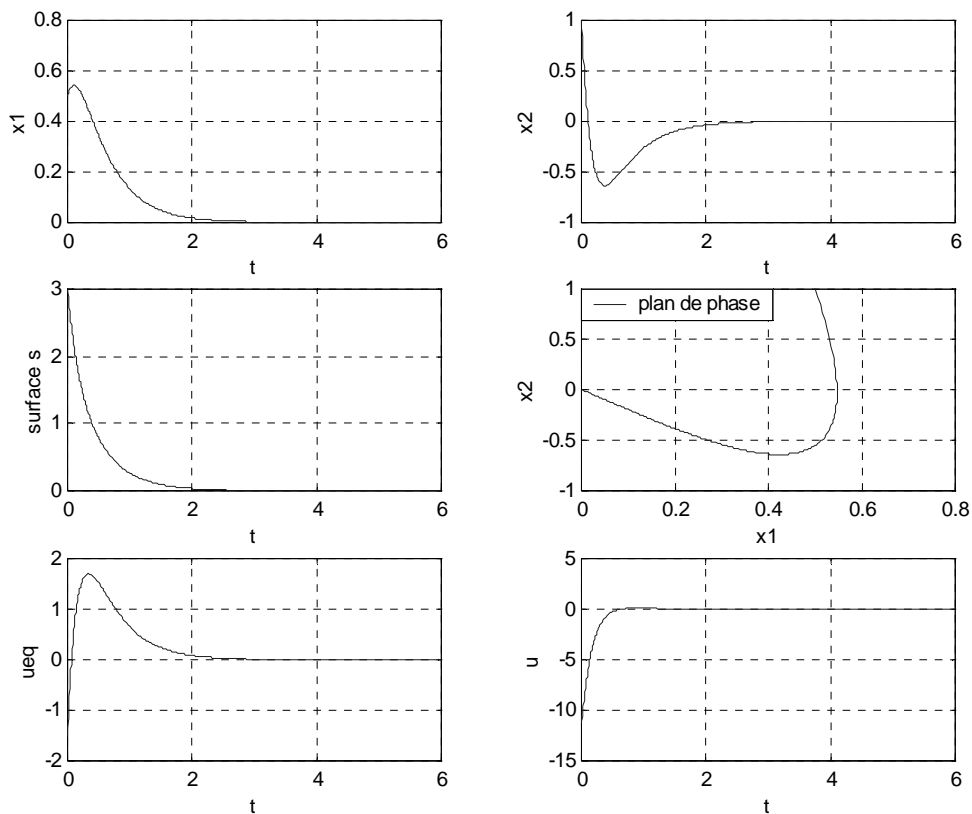


Figure 3.4. Etats, trajectoire, surface et commande :  $u = ueq - Ks$ .

La condition (3.4) est vérifiée mais seule la convergence asymptotique vers  $s = 0$  est obtenue. Afin d'obtenir une convergence en temps fini vers  $s = 0$ , on utilise souvent la condition (3.9). Dans cette optique, on fera le choix d'une loi de commande de type :

$u = ueq - K \text{sign}(s)$ . L'inégalité  $s\dot{s} \leq -K|s|$  est obtenue et est toujours vérifiée. En effet, par intégration, on obtient :

$$|s(t)| - |s(0)| \leq -Kt,$$

Par conséquent, le temps  $t_f$  requis pour atteindre la surface, partant d'une condition initiale  $s(0)$  est borné par :

$$t_f \leq \frac{s(0)}{K}$$

Les résultats de simulation obtenus avec les paramètres ( $\lambda = 4, K = 3, Te = 6ms$ ) sont données ci-dessous par la figure 3.5.

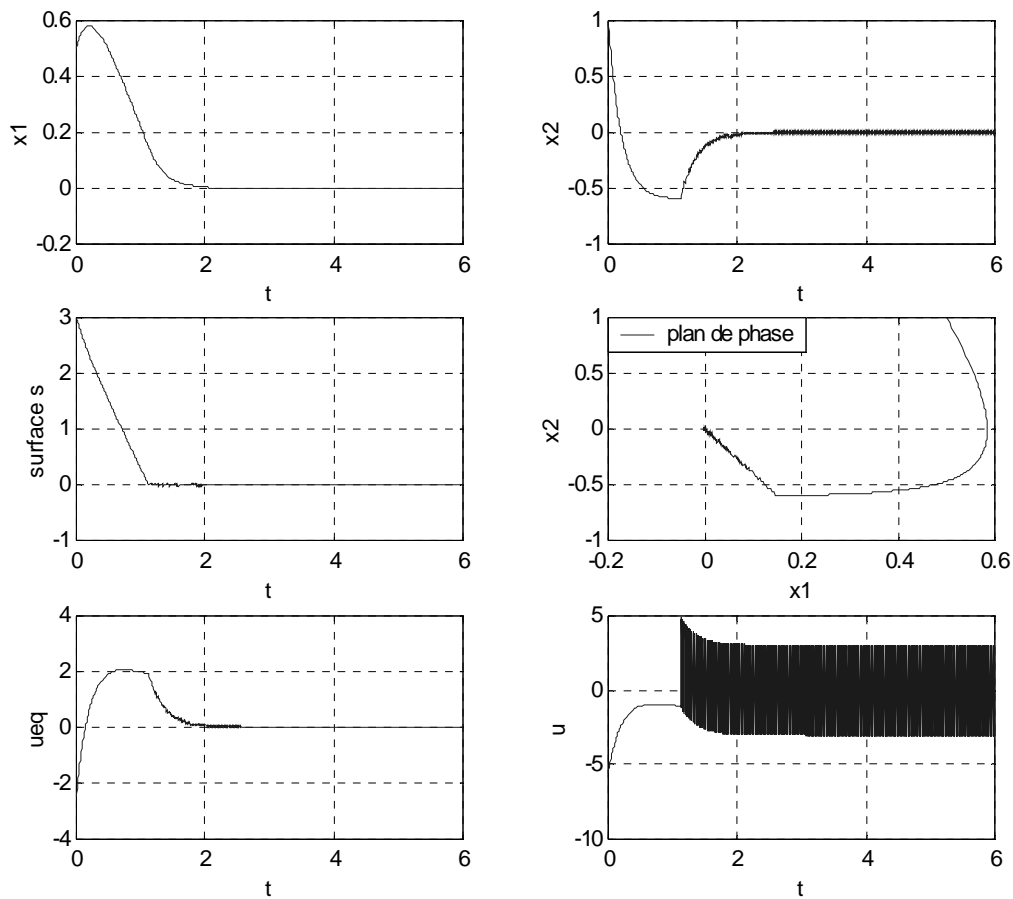


Figure 3.5. Etats, trajectoire, surface et commande :  $u = ueq - K \text{sign}(s)$ .

Les figures 3.3, 3.4, 3.5 montrent qu'après un temps  $t_f \simeq 1.1$  sec, un régime glissant est atteint et le système est plongé dans l'état d'un système réduit. La dynamique équivalente du système est du premier ordre soit :

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 = x_2$$

Le plan de phase donnant le comportement du système montre deux états :

- un état hitting (en anglais) caractérisé par une trajectoire parabolique avant que la surface ne soit atteinte,
- un état oscillatoire où le système glisse le long de la surface  $s = 0$ .

En comparant la figure 3.3 avec les deux autres, on remarque bien que l'effet du chattering sur les variables  $x_1$  et  $x_2$  est réduit par introduction de la commande équivalente. Au niveau de la figure (3.5), on voit bien qu'une fois le système est en régime glissant, la commande commute à très haute fréquence.

## 3.6 Stabilisation de systèmes non holonomes

Dans cette partie nous nous intéressons à stabiliser un système nonholonome à deux entrées, soumis à des perturbations :

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + p(x, t) \quad (3.17)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  sont les deux entrées de commande,  $g_1, g_2$  sont des champs de vecteurs linéairement indépendants, et  $p(x, t) \in \mathbb{R}^n$  est une perturbation additive. Dans le chapitre précédent, des conditions ont été données, permettant d'écrire le système (3.17) sous la forme chaînée perturbée donnée par l'équation (2.27).

La technique des modes glissants, du fait de leurs propriétés de robustesse et leur caractère discontinu, apparaît être une bonne solution pour stabiliser un système nonholonome perturbé. Deux formes de stabilisation par modes glissants ont été élaborées. Selon le choix du terme discontinu de la loi de commande, la première forme procure sous certaines conditions initiales une convergence asymptotique ou en temps fini vers l'origine, tandis que la deuxième procure une stabilisation pratique. Dans ce qui suit, nous considérons le cas particulier où  $n = 3$  (représentatif de nombreux systèmes réels), c'est à dire :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2 (v_1 + p^1(z, t)) \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $p^1, p^2$  sont supposés bornés pour tout  $t$  et  $z$  comme suit :

$$\begin{aligned} |p^1(z, t)| &\leq \sigma_1, \\ |p^2(z, t)| &\leq \sigma_2, \end{aligned}$$

avec  $\sigma_1, \sigma_2$  constantes positives.

### 3.6.1 Stabilisation en utilisant une surface invariante dans le temps

Nous utilisons ici l'approche par modes glissants proposée par Bloch et Drakunov [6] pour désigner un retour d'état stabilisant l'origine du système considéré (3.18).

Tout d'abord on définit une surface de glissement  $s$  donnée par l'équation :

$$s = z_3 - \frac{z_1 z_2}{2} \quad (3.19)$$

Nous proposons les lois de commande suivantes :

$$v_1 = -z_1 - \alpha_1 z_2 \cdot \text{sign}(s) \quad (3.20)$$

$$v_2 = -z_2 + \alpha_1 z_1 \cdot \text{sign}(s) \quad (3.21)$$

avec  $\alpha_1 > 0$ .

Considérons une fonction de Lyapunov  $V$  donnée par :

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) \quad (3.22)$$

La dérivée dans le temps de  $V$  le long des trajectoires du système (3.18) est donnée par :

$$\dot{V} = z_1 v_1 + z_2 v_2$$

En remplaçant  $v_1$  et  $v_2$  par leurs expressions respectives on aura :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_1(-z_1 + \alpha_1 z_2 \cdot \text{sign}(s)) + z_2(-z_2 - \alpha_1 z_1 \cdot \text{sign}(s)) \\ &= -z_1^2 - z_2^2 \\ &= -2V \end{aligned}$$

On voit bien que  $\dot{V}$  est négative, et par intégration on obtient :

$$V(t) = V(0)e^{-2t} \quad (3.23)$$

et  $V(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$

Par conséquent les variables  $z_1$  et  $z_2$  sont stabilisées :  $z_1 \rightarrow 0$ ,  $z_2 \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Considérons maintenant la variable de glissement  $s$ . La dérivée temporelle de  $s$  peut être exprimée par :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \dot{z}_3 - \frac{\dot{z}_1 z_2}{2} - \frac{z_1 \dot{z}_2}{2} \\ &= \frac{z_2 v_1}{2} - \frac{z_1 v_2}{2}\end{aligned}$$

Après avoir remplacer  $v_1$  et  $v_2$  par leurs expressions,  $\dot{s}$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -\frac{\alpha_1}{2}(z_1^2 + z_2^2)\text{sign}(s) \\ &= -\alpha_1 V \text{sign}(s)\end{aligned}\tag{3.24}$$

$V$  est une fonction positive et la valeur absolue de la variable  $s$  est décroissante, en effet  $|s|$  peut atteindre zéro en temps fini si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\alpha_1 \int_0^\infty V(\tau) d\tau > |s(0)|\tag{3.25}$$

Une fois  $s(t)$  atteint l'origine, elle doit y rester, ainsi toutes les trajectoires sont dirigées vers la surface  $|s|$  et  $z_1$  et  $z_2$  convergent toujours vers l'origine à l'intérieur de cette surface.

En substituant l'expression de l'équation (3.23) dans (3.25), une condition pour que le système peut se stabiliser est donnée par :

$$\alpha_1 V(0, 0) \geq |s(0)|\tag{3.26}$$

**Remarque :**

- Si l'inégalité (3.26) est une égalité, alors la surface  $s(t)$  converge vers l'origine au bout d'un temps infini (convergence asymptotique).

### 3.6.2 Stabilisation Pratique

La théorie de la commande par modes glissants classique stipule plusieurs exemples de systèmes procurant une convergence à l'équilibre en temps fini. En effet, l'utilisation d'une variété lisse ne génère pas une stabilité en temps fini, mais une stabilité pratique en temps fini. Le terme "**pratique**" signifie que le système est stabilisé dans une bulle contenant l'origine dont le rayon est choisi aussi petit que l'on désire. Une stratégie de commande par modes glissants d'ordre supérieur procurant une convergence pratique a été développée dans [12]. Dans cette partie, nous synthétisons des contrôleurs par modes glissants pour la stabilisation pratique du modèle en forme chaînée perturbé (3.18).

Les surfaces de glissement sur lesquelles nous voulons restreindre le mouvement du système sont choisies comme suit :

$$s_1 = z_1 + C \int_0^t f(\tau) z_3(\tau) d\tau, \quad (3.27)$$

$$s_2 = z_2 - Cg(t), \quad (3.28)$$

où  $C = \text{sgn}(z_{20})$  si  $z_{20} \neq 0$  et  $C = 1$  si  $z_{20} = 0$ .

Les fonctions continues et dépendantes du temps  $f$  et  $g$  sont supposées satisfaire les propriétés suivantes :

- $f$  et  $g$  sont positives pour tout  $t > 0$ ,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ ,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) z_3(\tau) d\tau = \infty$ .

**Théorème 9** [24] *Par le biais des contrôleurs par modes glissants*

$$v_1 = \begin{cases} v_{11} = -k_1 \text{sign}(s_1), & t \leq t_2, \\ v_{12} = -k_1 \text{sign}(z_1), & t > t_2 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$v_2 = \begin{cases} v_{21} = -k_2 \text{sign}(s_2), & t \leq t_1 \\ v_{22} = -k_2 \text{sign}(z_2), & t > t_1 \end{cases} \quad (3.30)$$

où

$k_1(z) = \sigma_1 + |f(t)z_3| + k'_1$ ,  $k_2(z) = \sigma_2 + |g| + k'_2$ , ( $k'_1, k'_2 > 0$ ),  $t_1$  étant l'instant où  $\{s_1 = s_2 = 0$  et  $|z_3| \leq \varepsilon\}$  et  $t_2$  le premier instant tel que  $z_2(t_2) = 0$ , l'état de (3.18) converge en temps fini à l'intérieur de l'ensemble défini par  $\Omega_\varepsilon = \{z_1 = z_2 = 0$  et  $|z_3| < \varepsilon\}$ .

**Preuve :**

En appliquant les contrôles  $v_{11}$  et  $v_{21}$ , nous avons  $s_i \dot{s}_i < -k'_i |s_i|$ ,  $i = 1, 2$ . En effet,  $s_1 \dot{s}_1 = s_1(-k_1 \text{sgn}(s_1) + p^1(z) + Cf(\tau)z_3) < -k'_1 |s_1|$ . Par des considérations similaires, on obtient  $s_2 \dot{s}_2 < -k'_2 |s_2|$ . Ce qui implique (voir [52]) que pour  $t \geq t_0$ , un régime glissant s'installe sur la surface  $s_1 = s_2 = 0$ . Notons que  $\text{sign}(z_2) = \text{sign}(Cg(t))$ , et donc  $z_2(t)$  atteint la surface  $z_2 = Cg(t)$  sans avoir traversé l'axe  $z_2 = 0$  avant  $t_0$ . Ceci est indispensable car sinon le contrôle  $v_1$  commute vers  $v_1 = -k_1 \text{sign}(z_1)$  et la convergence de  $z_3$  vers l'origine est alors impossible.

Une fois les surfaces de glissement atteintes :

$$\begin{aligned} z_1 &= -C \int_0^t f(\tau) z_3(\tau) d\tau, \\ z_2 &= Cg(t). \end{aligned}$$

L'égalité  $\dot{s}_1 = 0$  nous donne l'expression de la commande équivalente :

$$v_1 + p^1(z, t)_{eq} = -Cf(t)z_3,$$

et finalement le comportement de  $z_3$  en régime glissant (pour  $t > t_0$ ) :

$$\dot{z}_3 = -f(t)g(t)z_3.$$

Par intégration on obtient :

$$z_3 = z_3(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau)d\tau\right).$$

et  $z_3$  tend vers zéro car, par hypothèse,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau)d\tau = +\infty$ .  $z_2$  s'annule aussi du fait des propriétés de la fonction  $g$ . Il existe donc  $t_1 \geq t_0$  tel que pour  $t \geq t_1$ ,  $|z_3| \leq \varepsilon$ .

Après cet instant,  $v_2 = -k_2 \text{sign}(z_2)$  et  $z_2$  atteint la surface  $z_2 = 0$  en un temps fini  $t_2$ . Pour  $t \geq t_2$ ,  $z_3$  reste inférieur à  $\varepsilon$  car  $\dot{z}_3 = z_2(v_1 + p^1(z))$  et  $z_2 = 0$ . Après  $t_2$ , la commande  $v_1$  commute vers  $v_1 = -k_1 \text{sign}(z_1)$  ce qui force  $z_1$  à s'annuler en temps fini  $t_3$ , et la trajectoire d'état reste à l'intérieur de l'ensemble  $\Omega_\varepsilon$  après  $t_3$ .

## 3.7 Application à un robot mobile : résultats de simulation

Afin de valider la commande par modes glissants pour les deux formes de stabilisation étudiées, nous nous sommes intéressés à une application à un robot mobile celui de l'unicycle. En utilisant le logiciel Matlab Version 5.3, nous donnons ci-dessous les résultats de simulations pour la stabilisation robuste de l'unicycle au point d'équilibre (origine). Les résultats de la première forme de stabilisation ont été présentés pour deux modèles en forme chaînée de l'unicycle :

a)-Modèle non perturbé donné par l'équation (2.26),

b)-Modèle perturbé donné par l'équation (3.18),

tandis que celle de la deuxième forme, on a opté pour le modèle en forme chaînée soumis à deux formes de perturbations.

### 3.7.1 Cas de la stabilisation en utilisant une seule surface

La période d'échantillonnage étant choisie égale à  $\tau = 10ms$ . Les conditions initiales pour le vecteur d'état  $z$  du système sont prises égales à  $z_0 = (z_{10}, z_{20}, z_{30})^T = (\pi/8, 2, 1.5)^T$ , soit  $x_0 = 2.42m$ ,  $y_0 = -0.62m$ , et  $\theta_0 = \pi/8rd$  pour le robot mobile. Les perturbations  $p^1(z, t)$ ,  $p^2(z, t)$  supposées bornées sont prises comme étant des bruits blancs aléatoires gaussiens de moyenne nulle et de variance l'unité.

#### A – Stabilisation asymptotique

Tout d'abord on choisit les formes de la loi de commande comme suit :

$$v_1 = -z_1 - \alpha_1 z_2 \cdot s \quad (3.31)$$

$$v_2 = -z_2 + \alpha_1 z_1 \cdot s \quad (3.32)$$

avec un gain de contrôle  $\alpha_1 = 5$ .

Il est à noter qu'avec ce choix de type de commande, la surface  $s(t)$  converge vers l'origine de manière asymptotique. Les figures 3.6, 3.9 a), b) montrent bien l'évolution des coordonnées de position ainsi que celle du plan de phase convergeant vers le point d'origine. Le plan de phase  $(x, y)$  est représenté montrant ainsi la trajectoire du centre de gravité du robot (voir figures 3.6 a) et b)). Le mouvement du robot mobile unicycle est également représenté en figures (3.9 a) et b). On remarque bien qu'après un certain temps le système rentre en régime glissant ainsi la dynamique de celui-ci est donnée par l'équation  $s = 0$  comme on le voit sur les figures 3.8 a) et b) représentant les surfaces de glissements. Les figures 3.7 a), b) donnant les graphes de commande montrent l'allure des entrées de commande du robot. Les deux figures de la première ligne des figures 3.7 a) et b) représentent les entrées de commande après changement de coordonnées et la deuxième ligne celles des entrées réelles c'est à dire les vitesses linéaire et angulaire du robot mobile. On constate d'une part, que ces deux vitesses s'annulent une fois que le robot mobile atteint la position désirée qui est le point d'origine. En effet,  $z_3 = 0$  au bout de 3sec puis  $z_2 = 0$  à l'instant  $t = 5.6$ sec ensuite  $z_3 = 0$  à partir de l'instant  $t \simeq 5.8$ sec. D'autre part, on remarque au niveau des graphes de commande qu'il n'existe pas d'oscillations. On remarque aussi que la convergence est similaire pour les deux cas de modèles utilisés, a) et b) de l'unicycle, ce qui montre vraiment la robustesse de la commande et par conséquent l'insensibilité du système vis à vis des perturbations extérieures.

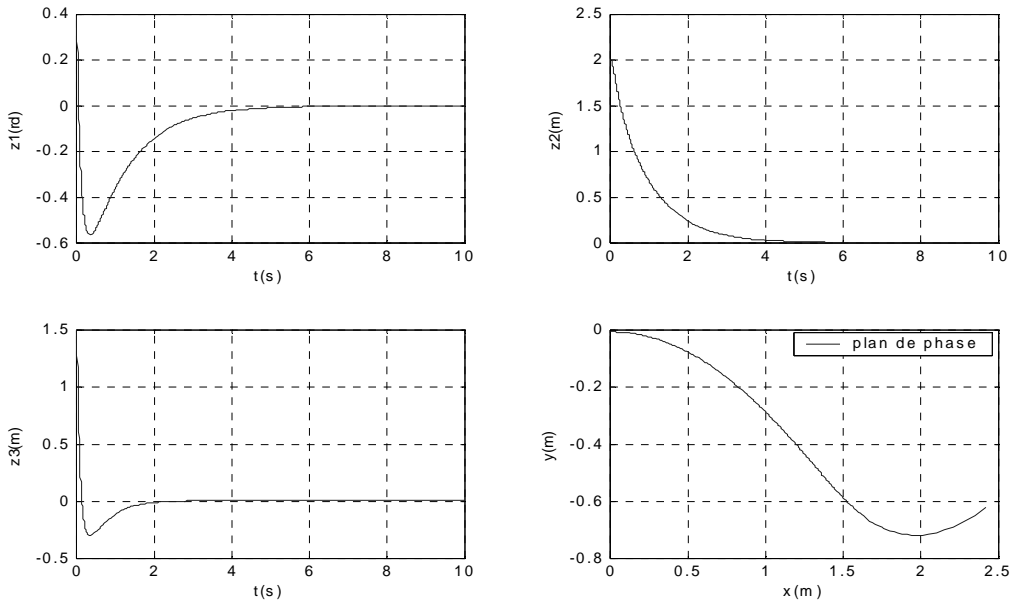


Figure 3.6.a) Coordonnées :  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire  $y=f(x)$ .

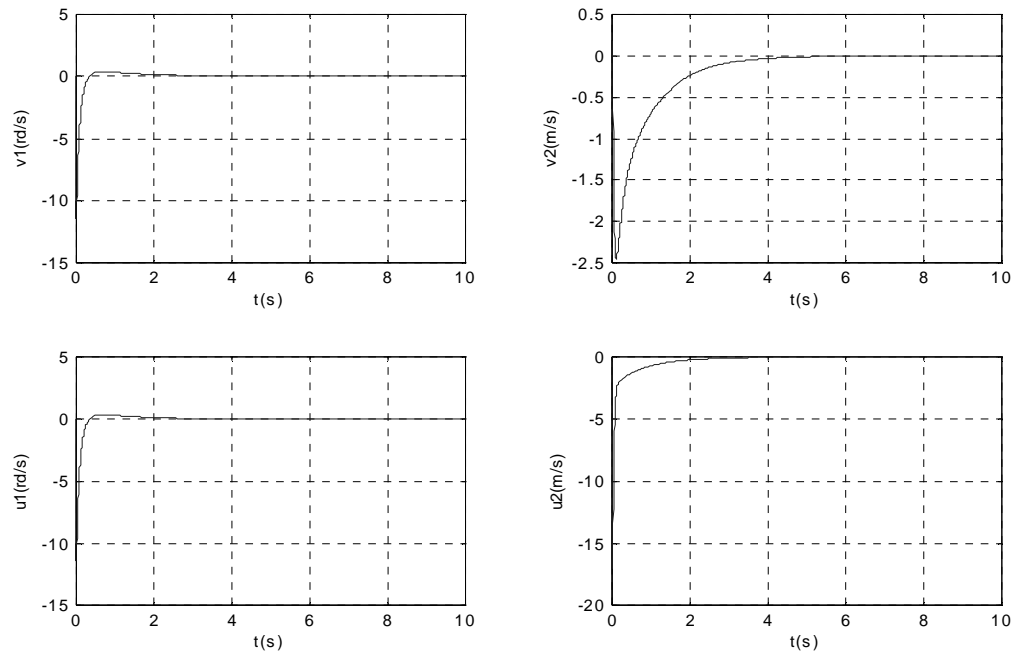


Figure 3.7.a). Commandes en vitesse.

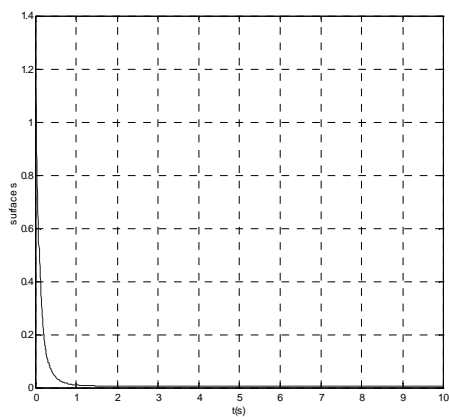


Figure. 3.8.a) Surface de glissement.

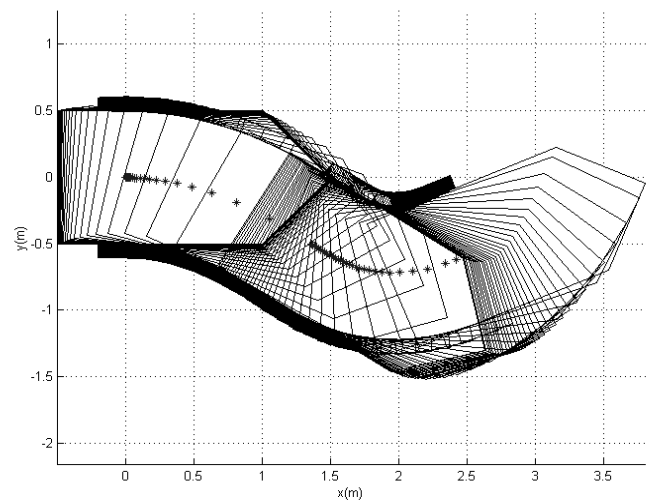


Figure 3.9.a) Mouvement du robot.

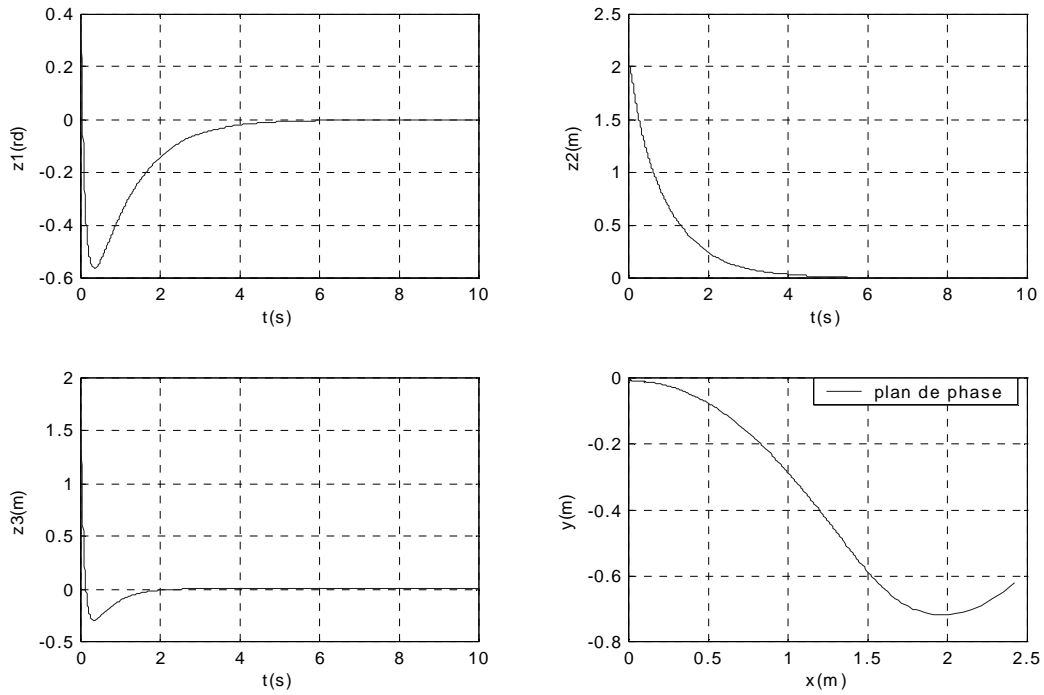
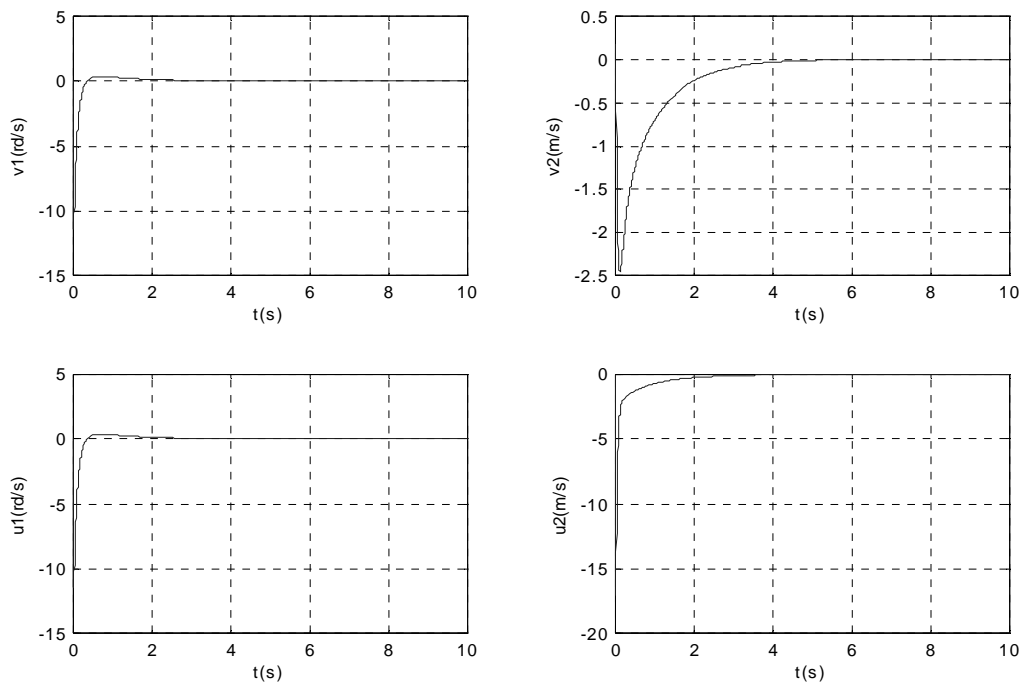
Figure.3.6.b) Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$ .

Figure 3.7.b) Commandes en vitesse.

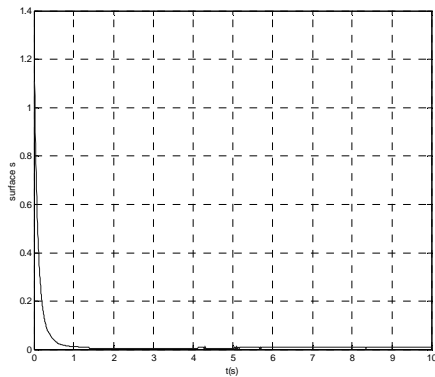


Figure 3.8.b) Surface de glissement.

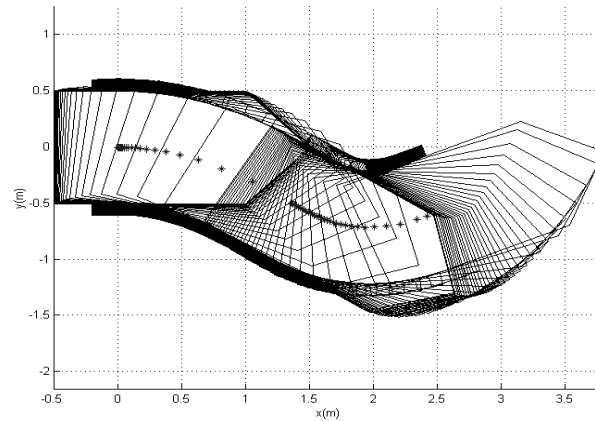


Figure 3.9.b) Mouvement du robot.

### B – Stabilisation en temps fini

Dans le but d'obtenir une convergence en temps fini sous les conditions initiales de l'état, on choisit les lois de commande données par les équations (3.20),(3.21). A partir de l'équation de  $\dot{s}$  (3.24) on peut aisément exprimer la condition de glissement, soit :

$$s\dot{s} = -\alpha_1 V s \cdot \text{sign}(s)$$

Ce qui implique

$$s\dot{s} \leq -\alpha_1 V |s|$$

et qu'elle est toujours vérifiée.

Les résultats obtenus sont représentés ci-dessous par les figures 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 pour le modèle de l'unicycle sans perturbations (a) et pour le modèle perturbé (b)). Les figures 3.10-3.13 a) et b) montrent bien que les coordonnées de position ainsi que le plan de phase convergent vers l'origine de manière robuste. On remarque dans ce cas que la convergence obtenue est plus rapide. En effet,  $z_3$  tend vers zéro au bout de 3.5s,  $z_2$  converge vers zéro à partir de l'instant  $t = 5.2\text{sec}$  et  $z_1 \simeq 0$  au bout de 5.6sec. En comparant les figures 3.7 a),b) avec les figures 3.11, a) et b), on remarque qu'un effet de chattering apparaît au niveau des variables d'états  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ . Cet effet se manifeste par de grandes oscillations au niveau des graphes de commande représentés par les figures 3.11 a) et b). L'effet de chattering dû à la forme discontinue de la commande n'existe pratiquement pas lorsque on a utilisé la première forme de commande et ceci est au détriment du mode de convergence obtenu ici (convergence en temps fini)..On remarque aussi que la convergence est similaire pour les deux cas de modèles utilisés de l'unicycle a) et b), ce qui confirme la robustesse de la commande par rapport aux perturbations extérieures.

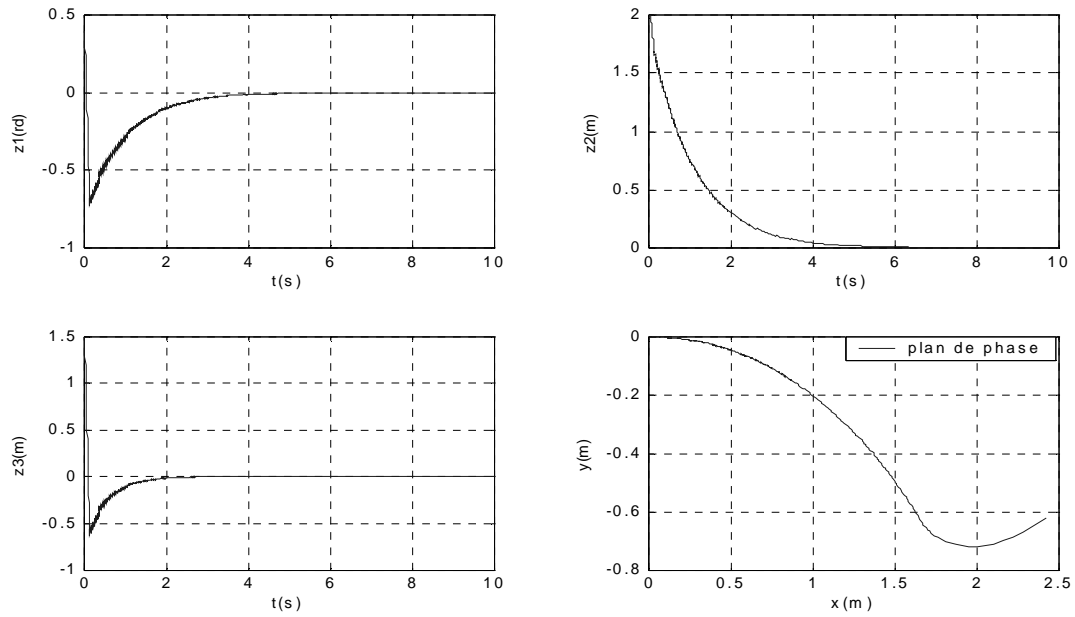
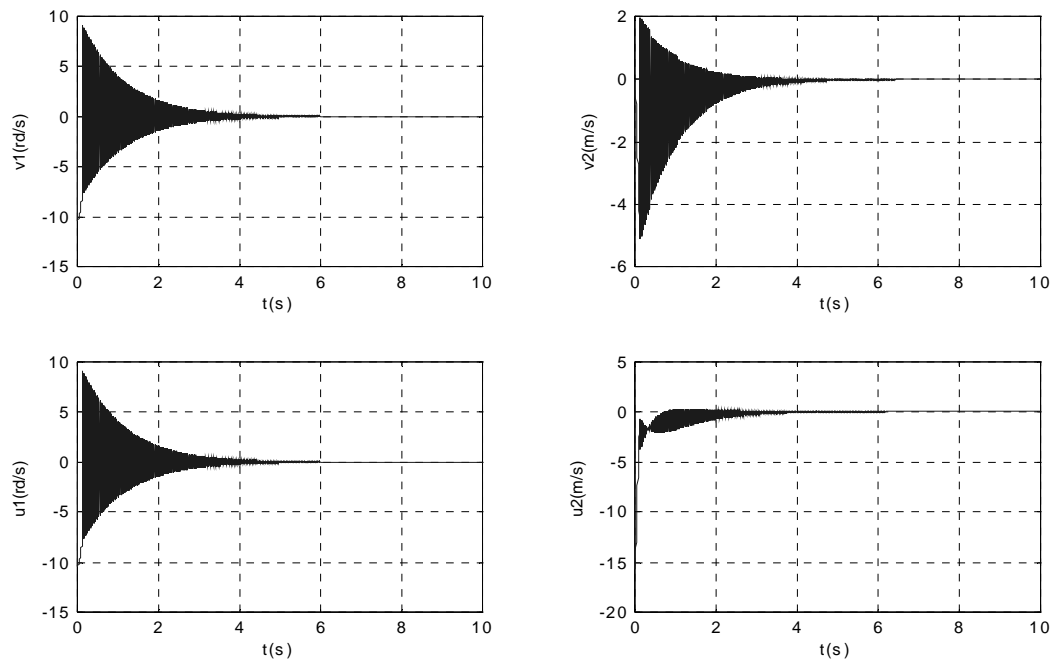
Figure 3.10.a) Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$ 

Figure 3.11. a) Commandes en vitesses.

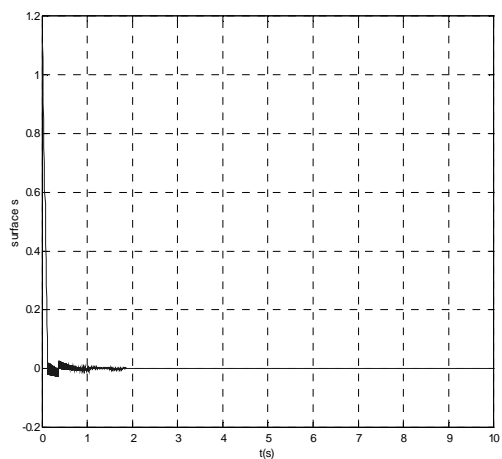


Figure 3.12. a) Surface de glissement.

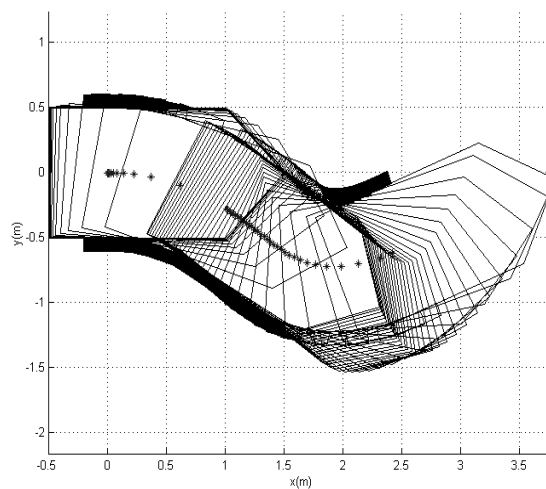


Figure 3.13. a) Mouvement du robot.

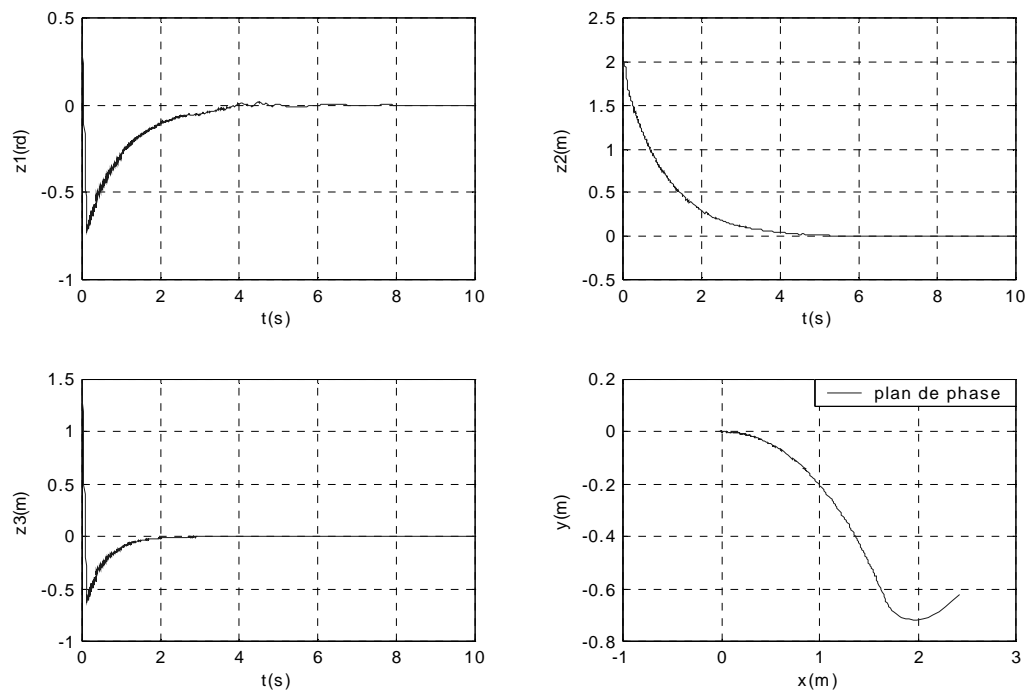


Figure 3.10. b) Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$

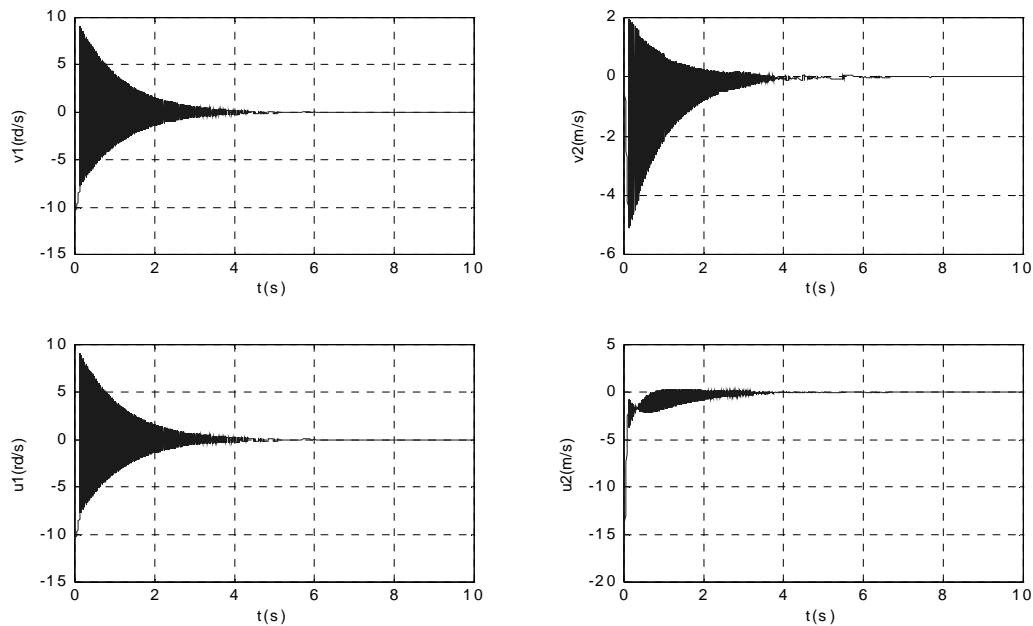


Figure 3.11. b) Commandes en vitesse.

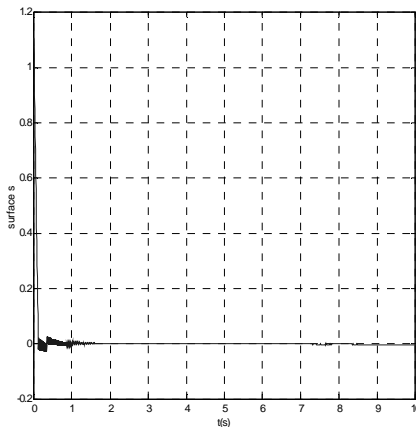


Figure 3.12. b) Surface de glissement.

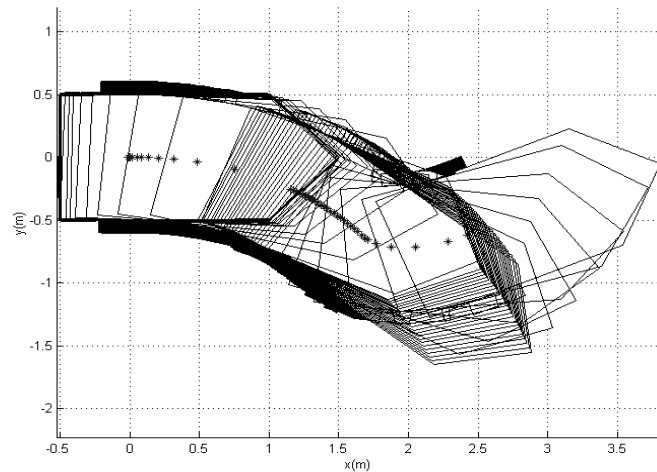


Figure 3.13. b) Mouvement du robot.

### C – Réduction du chattering

Afin de réduire l'effet de chattering qui se manifeste par de grandes oscillations au niveau des graphes de commandes en vitesse, on a opté pour la commande continue par lissage, et ceci en remplaçant dans la bande  $|s| \leq \Phi$  la fonction  $sign(s)$  au niveau du terme discontinue par la fonction ' $Cont(s)$ '. Pour cela, nous avons proposé les lois de commande suivantes :

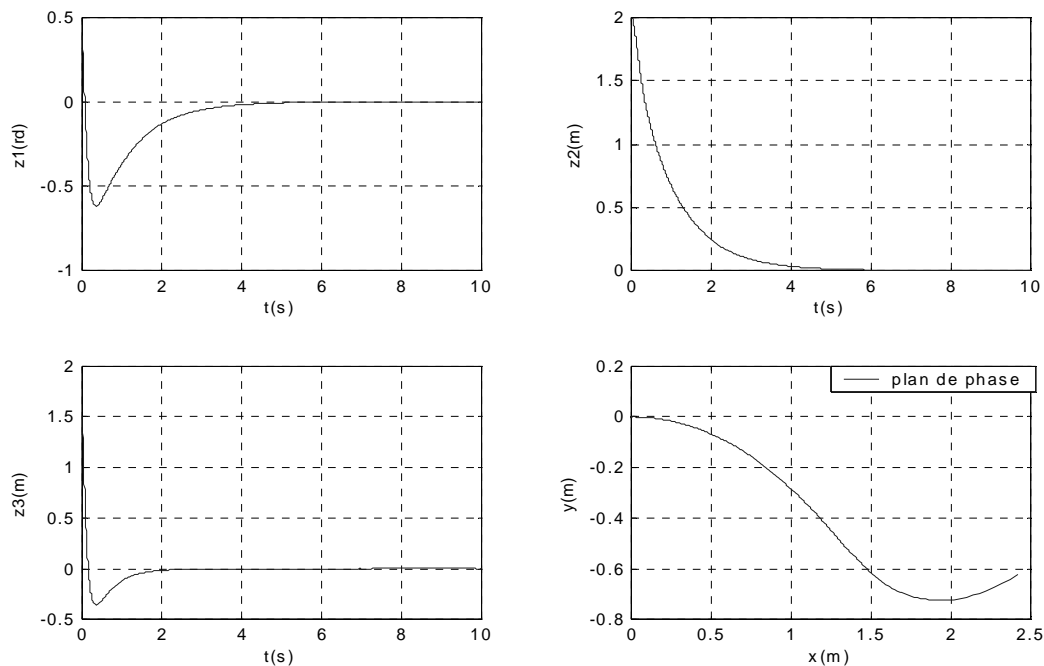
$$v_1 = -z_1 - \alpha_1 z_2 \cdot Cont(s) \quad (3.33)$$

$$v_2 = -z_2 + \alpha_1 z_1 \cdot Cont(s) \quad (3.34)$$

avec la fonction

$$Cont(s) = \begin{cases} \frac{s}{|s|+\delta} & si \quad |s| \leq \Phi \\ sign(s) & si \quad |s| > \Phi \end{cases}$$

Pour cette application on a pris le modèle perturbé de l'unicycle b) avec comme valeur du paramètre  $\delta$  ( $\delta = 0.5$ ). On représente ci-dessous les graphes donnant les états, le plan de phase, les commandes, la surface de glissement et le mouvement du robot mobile (figure 3.17 b)). Les figures 3.14, 3.16, 3.17 b) montrent bien que les coordonnées de position ainsi que le plan de phase convergent vers le point d'équilibre. En effet,  $z_3$  converge vers zéro au bout de  $2ses$ ,  $z_2$  tend vers zéro à partir de l'instant  $t = 5sec$  et  $z_1$  converge vers zéro au bout de 5.2 sec. On voit au niveau de la figure 3.14 b) que la réticence est vraiment réduite au niveau des variables  $z_1, z_2$  et  $z_3$  en comparaison avec les variables d'états de la figure 3.10 b). Concernant le type de commande appliquée, les figures 3.15 b), 3.11 b) montrent qu'il existe une grande différence du point de vue allure de la commande. En effet, la réticence est vraiment réduite (voir figure 3.15 b)) dont on voit l'effet sur la commande (vitesses) elle même et également sur les graphes des variables d'états.



Figures 3.14.b) Coordonnées  $z_1, z_2, z_3$ , plan de phase  $y=f(x)$ .

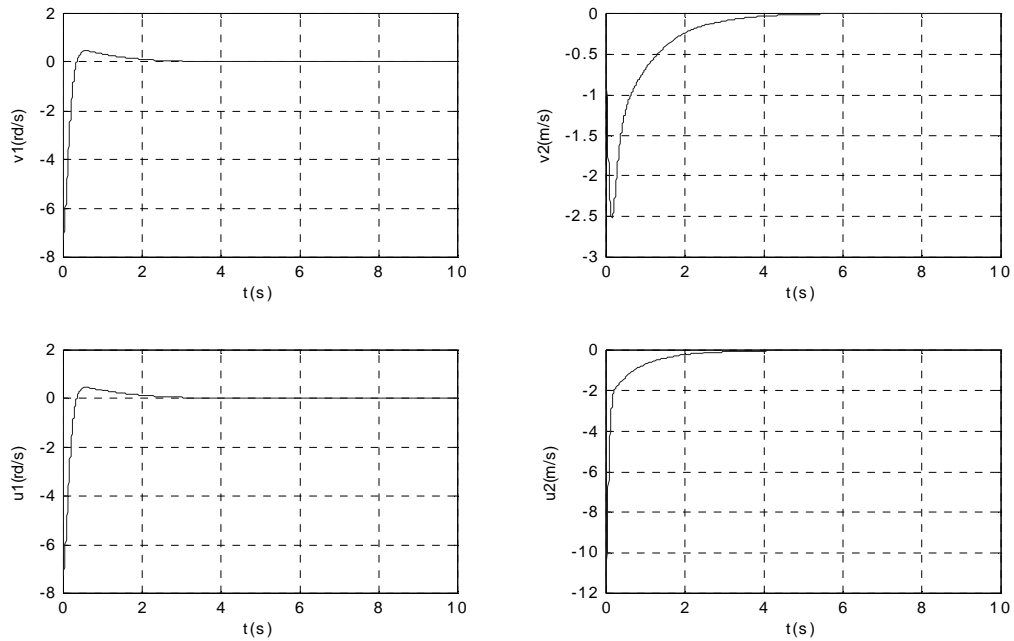


Figure 3.15. b) Commandes en vitesse.

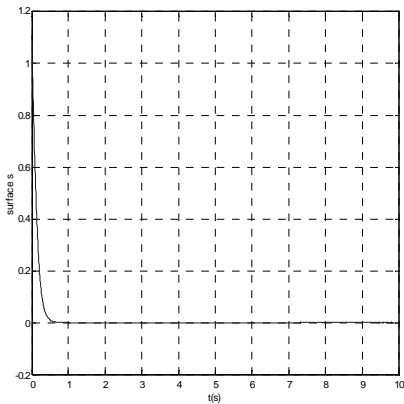


Figure 3.16. b) Surface de glissement.

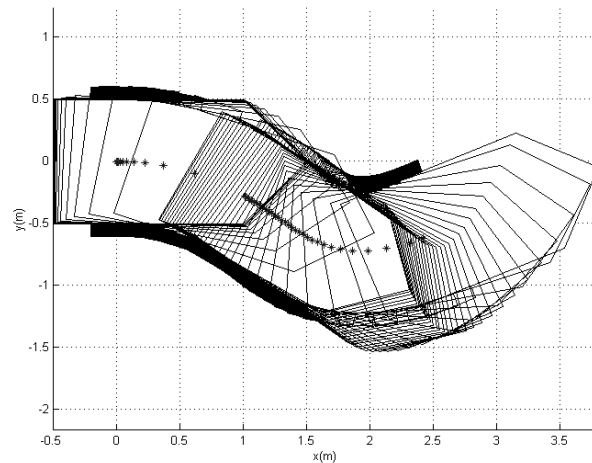


Figure 3.17. b) Mouvement du robot.

### 3.7.2 Cas de la stabilisation pratique

Les fonctions choisies pour la conception de la commande et les simulations sont telles que :

$$\begin{cases} f(t) = (t^3 + 1) \\ g(t) = \frac{1}{(t^3 + 1)} \end{cases}$$

La période d'échantillonnage étant prise égale à  $\tau = 6ms$  avec les gains de commande  $k_1 = 10, k_2 = 1$ . Les conditions initiales pour les coordonnées de position sont :  $z_{10} = \pi/4, z_{20} = 2, z_{30} = 3$ , soit  $x_0 = 3.53m, y_0 = -0.70m$ , et  $\theta_0 = \pi/4rd$ . Deux formes de perturbations ont été prises en considération. La première perturbation étant un bruit blanc aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance l'unité, tandis que la deuxième est un bruit blanc à bande limitée. Les résultats de simulation donnée en figures 3.18, 3.20, 3.21, 3.24, montrent que les coordonnées de position de l'unicycle perturbé convergent vers le point d'équilibre qui est l'origine. Nous pouvons observer que la variable  $z_3$  converge vers zéro à l'instant  $t_1$  ( $t_1 \simeq 2sec$ ) plus rapidement que  $z_2$ . En effet  $z_2$  converge vers zéro au bout d'un temps  $t_2$  ( $t_2 \simeq 3$ ). Une fois que  $z_2 = 0$ , c'est à dire après un temps  $t_2$ , la commande  $v_1$  commute vers  $v_{12} = -k_1 sign(z_1)$  ainsi la variable  $z_1$  atteint l'origine en temps fini à partir de l'instant  $t = 3.4sec$ .

### A -Cas d'une perturbation type gaussien

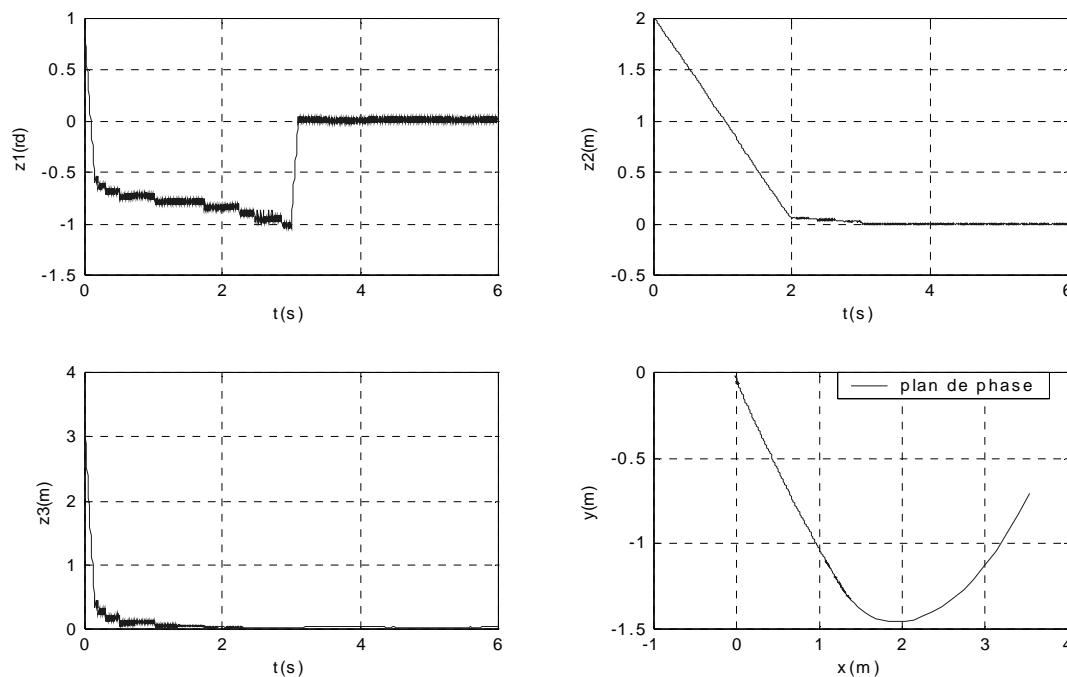


Figure 3.18. Coordonnées  $z_1, z_2, z_3$  et trajectoire  $y=f(x)$ .

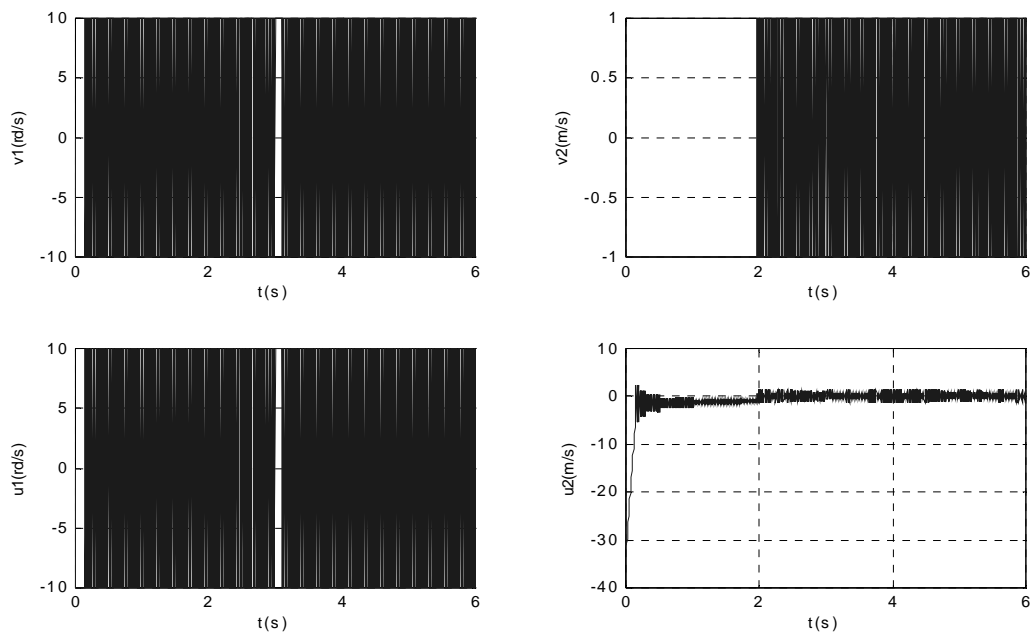
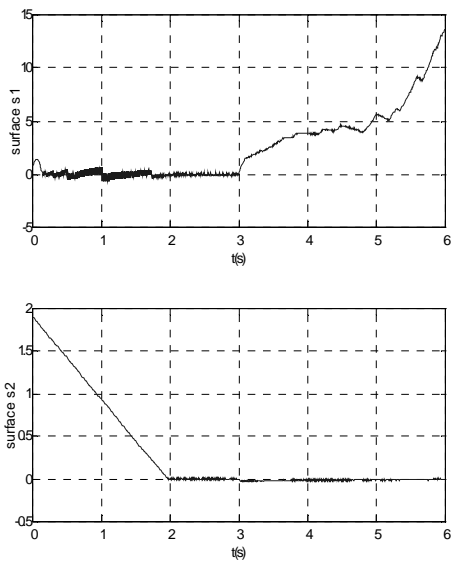


Figure 3.19. Commandes en vitesse.



Figures 3.20. Surfaces de glissements.

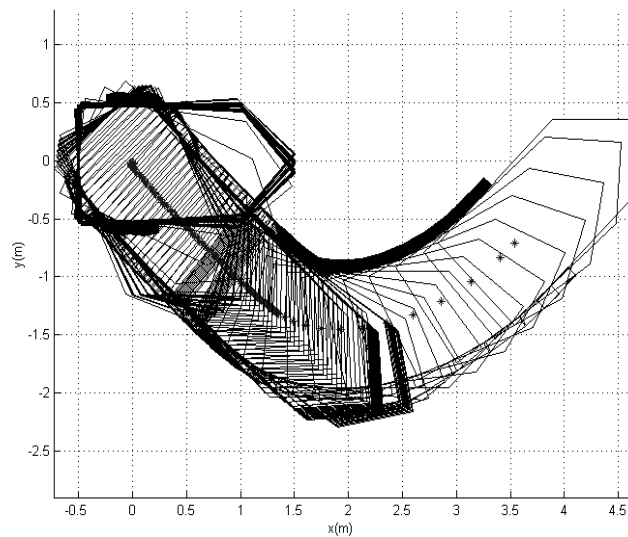


Figure 3.21. Mouvement du robot.

## B -Cas d'une perturbation type bruit blanc

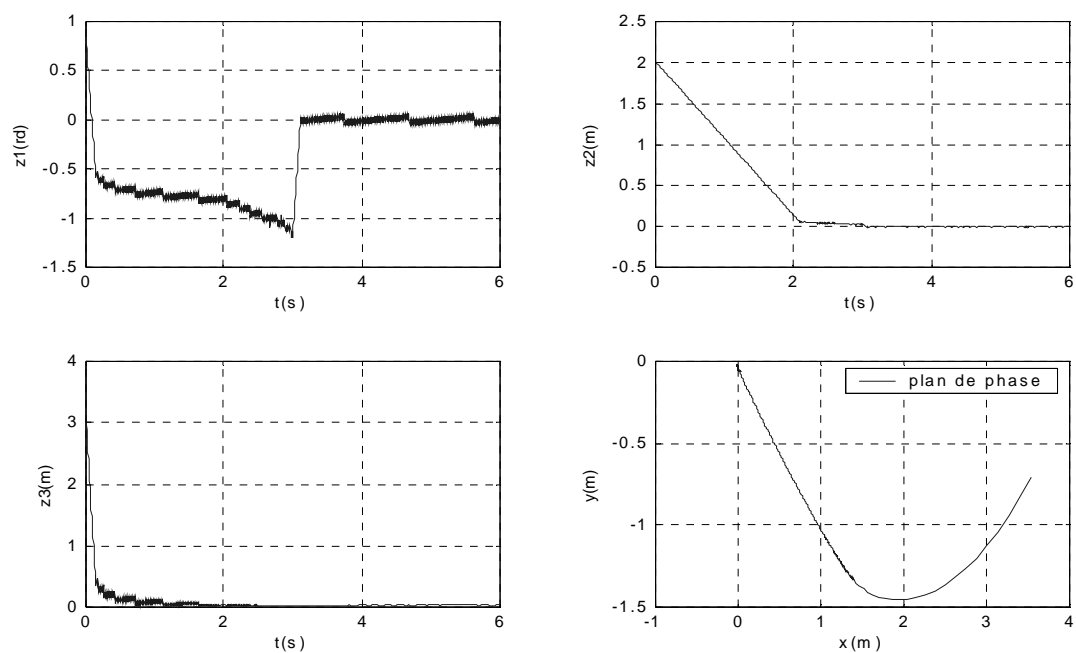
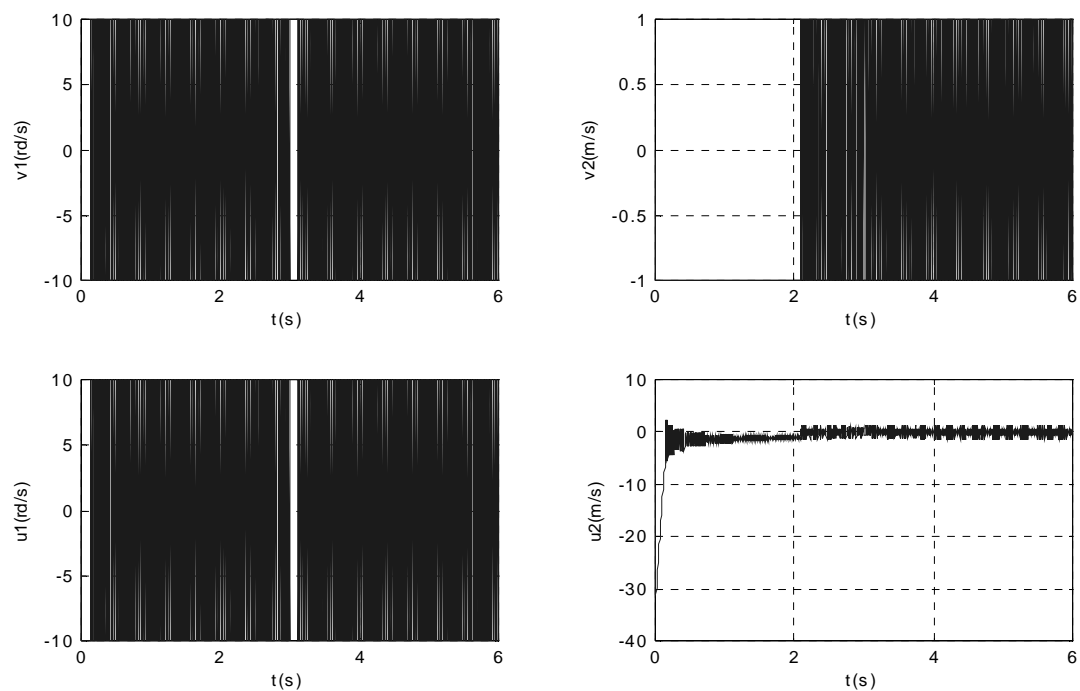
Figure 3.22. Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$ .

Figure 3.23. Commandes en vitesse

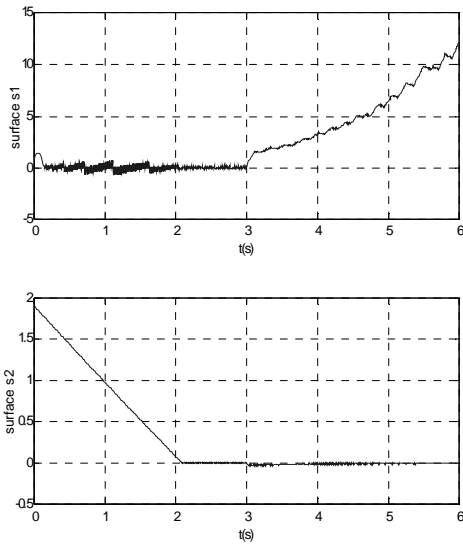


Figure 3.24 . Surfaces de glissements.

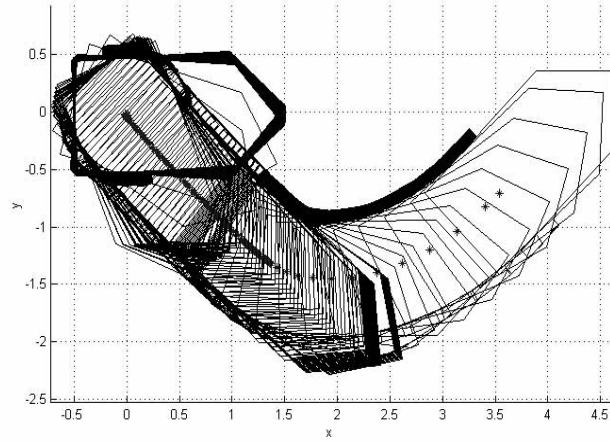


Figure 3.25. Mouvement du robot.

### 3.7.3 Robustesse vis à vis des erreurs de modélisation

Dans le but de tester la robustesse des deux contrôleurs proposés par rapport aux erreurs de modélisation, la dynamique des actionneurs a été prise en compte. En effet, la dynamique d'un actionneur de constante de temps égal à  $0.1s$  et de gains proches de 1 ont été inclus dans le système (3.18), et le système résultant donné par les équations suivantes a également été simulé :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = w_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(w_1 + p^1(z, t)) \\ \dot{w}_1 = -10w_1 + 10v_1 \\ \dot{w}_2 = -10w_2 + 10.5v_2 \end{cases} \quad (3.35)$$

On donnera ci-dessous les résultats obtenus pour chaque cas de stabilisation étudiée auparavant. Les figures représentées ci-dessous montrent que le système n'est pas affecté par la dynamique de l'actionneur puisque la convergence est relativement similaire à chacune des deux premières simulations ce qui confirme les propriétés de la robustesse de la commande à structure variable vis à vis des erreurs de modélisation.

#### A)-Cas de la stabilisation en utilisant une surface

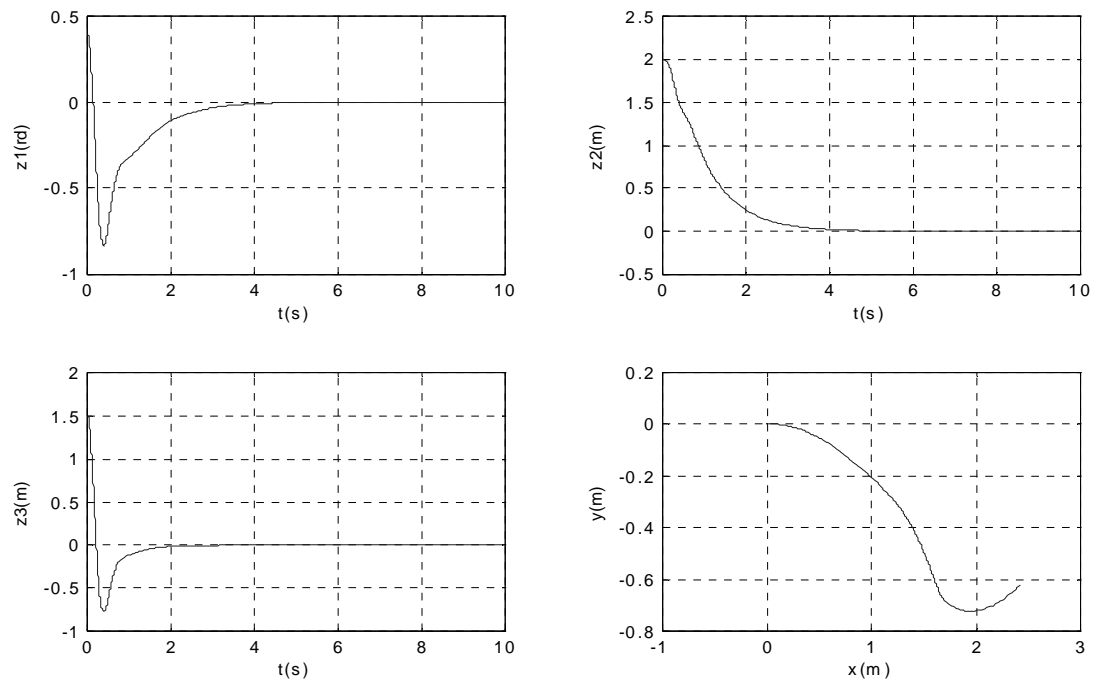


Figure 3.26. b) Coordonnées  $z1$ ,  $z2$ ,  $z3$  et trajectoire  $y=f(x)$ .

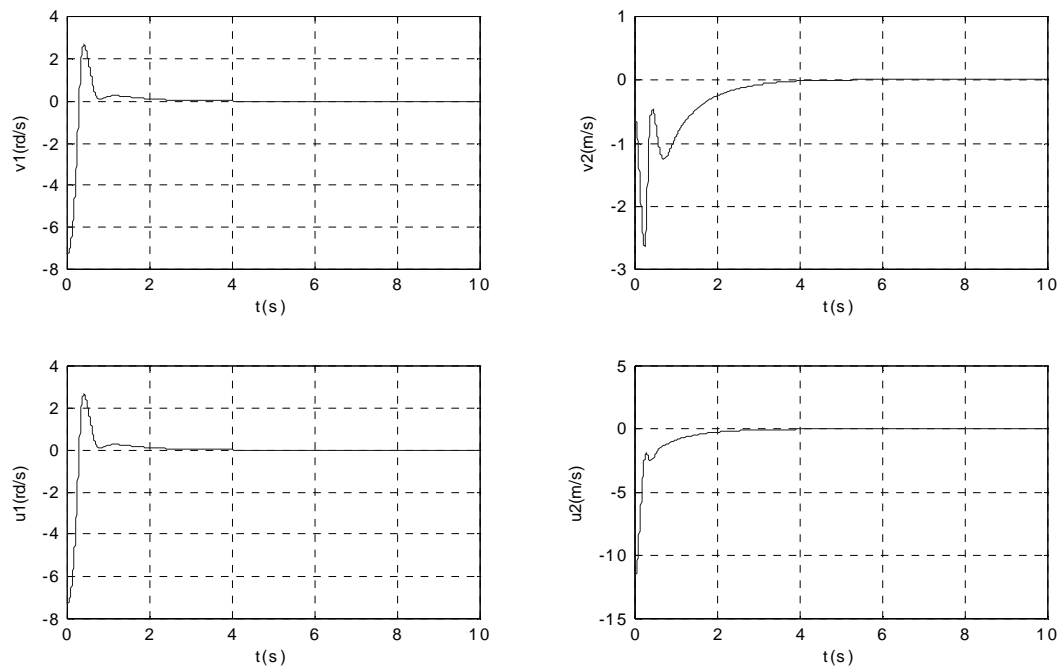


Figure 3.27. b) Commandes en vitesse.

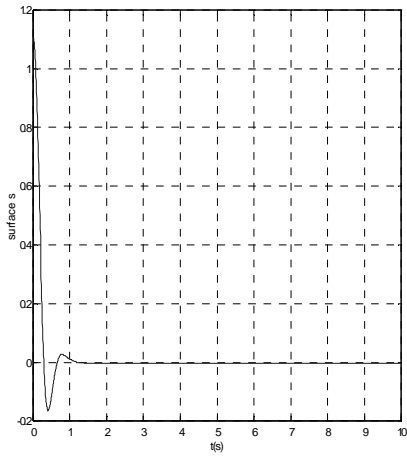


Figure 3.28. b) Surface de glissement.

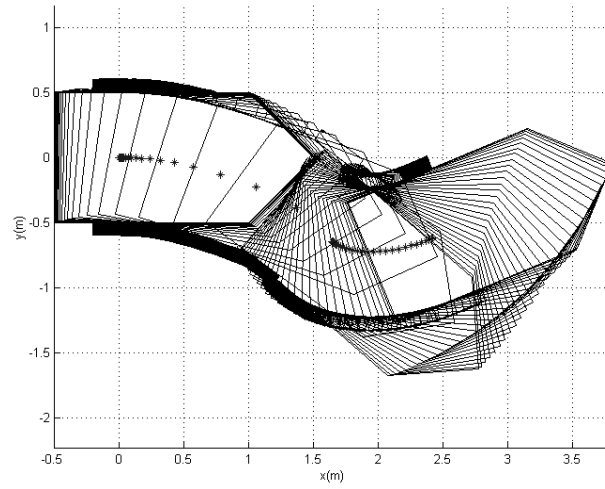
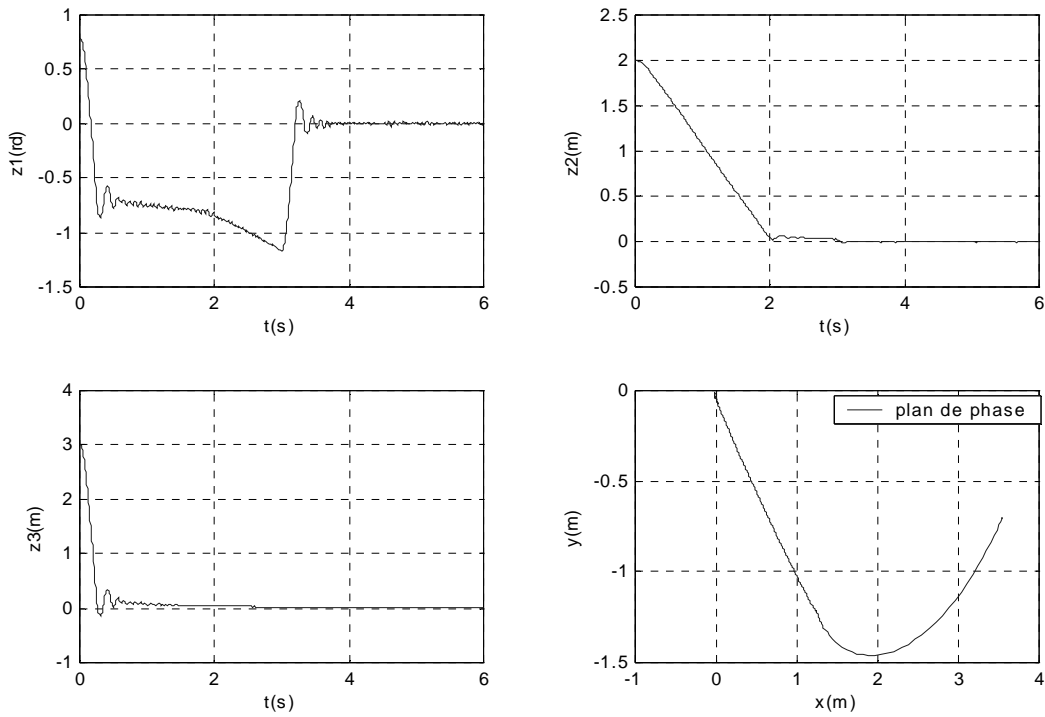


Figure 3.29.b). Mouvement du robot.

### B)-Cas de la stabilisation pratique

Figure 3.30. Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire  $y=f(x)$ .

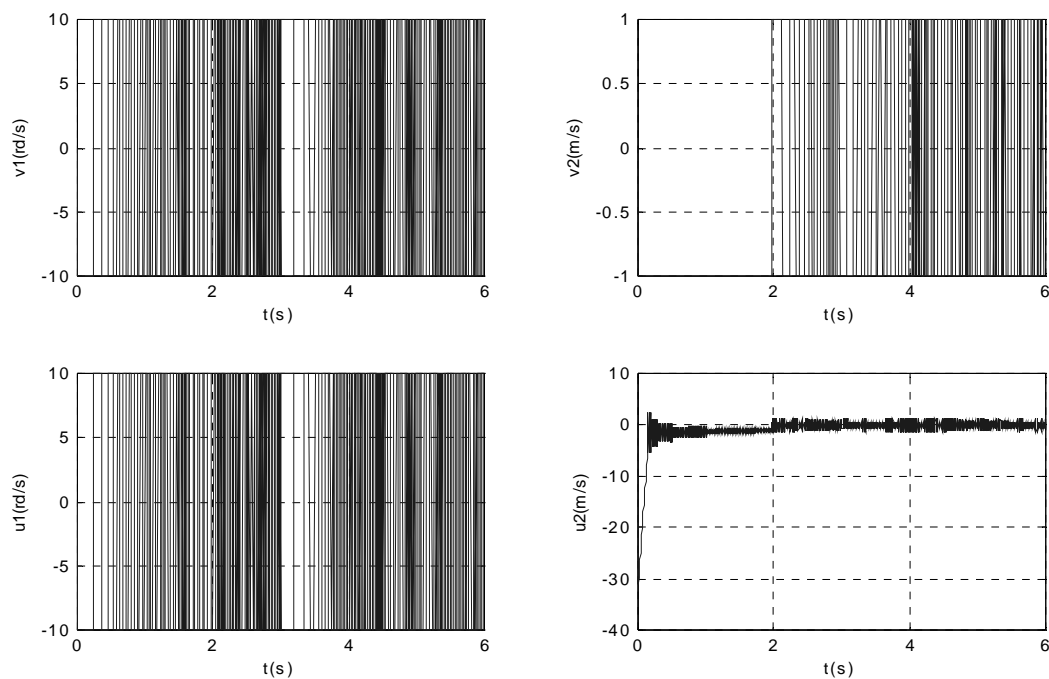


Figure 3.31. Commandes en vitesse.

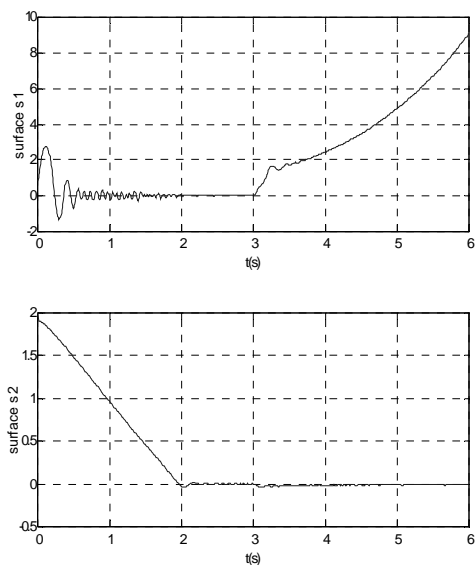


Figure 3.32. Surfaces de glissements.

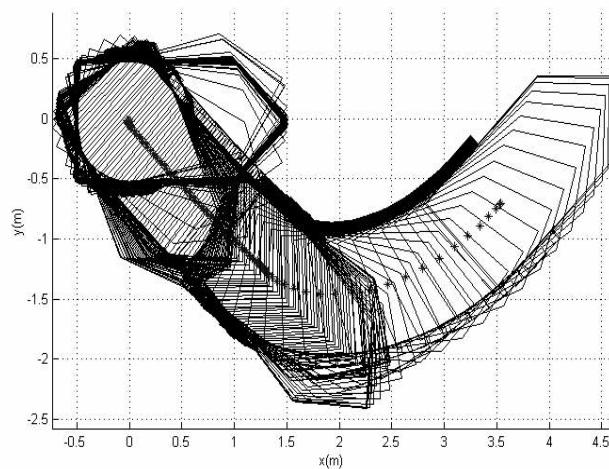


Figure 3.33. Trajectoire du robot.

## 3.8 Conclusion

Nous avons présenté dans la première section de ce chapitre les principes de base de la commande par modes glissants ainsi qu'une application sur un moteur DC. La deuxième section a été consacrée à l'étude de la stabilisation de systèmes non holonomes mis sous forme chaînée perturbé via les modes glissants classiques. Deux formes de stabilisation robuste pour un système non holonome de dimension trois ont été élaborées. Sous certaines hypothèses sur les conditions initiales de l'état et selon le choix du terme discontinu de la commande, la première forme procure une stabilisation asymptotique ou en temps en temps fini, tandis que la deuxième procure une stabilisation pratique. Cette dernière forme de stabilisation a été obtenue par commutation de lois de commande entre plusieurs contrôleurs à modes glissants. Les performances obtenues par ces deux types de contrôleurs en terme de temps réponse, précision et robustesse sont très satisfaisantes. En effet, des simulations sur un robot mobile type unicycle ont illustré ces performances. L'inconvénient majeur de cette technique de commande est le phénomène de chattering. Ce dernier a pu être réduit par introduction de la commande par modes glissants à bande de surface et ceci en remplaçant la fonction signe par la fonction continue dans un voisinage de la surface. Néanmoins, il a été remarqué que les performances du système en terme de convergence se sont dégradées. Il s'agit maintenant de chercher une autre solution qui allie à la fois robustesse et convergence en temps fini. Cette solution repose sur les modes glissants d'ordre supérieur qu'on va voir par la suite.

# Chapitre 4

## Stabilisation par modes glissants d'ordre supérieur

### 4.1 Introduction

Il est bien connu que les modes glissants classiques possèdent les propriétés de convergence en temps fini, du maintien précis de la contrainte et de robustesse par rapport aux perturbations internes et externes. Par ailleurs, en pratique l'utilisation de ces modes est limitée par certaines restrictions sèvères telle que :

- l'implémentation en mode glissant classique n'est possible que si le système est de degré relatif égal à un. En effet, la contrainte  $S$  est donnée par une égalité de la variable de sortie égale à zéro, et la commande apparaît toujours de façon explicite dans la première dérivée de la contrainte  $S$ .
- les commutations de la commande en haute fréquence induisent le phénomène de broutement "chattering" qui peut dégrader les performances du système et même conduire à l'instabilité.

En généralisant la notion des modes glissants et ces principales propriétés, nous proposons ici une méthode originale levant toutes ces restrictions. Cette méthode est basée sur la prise en compte des dérivées d'ordre supérieur de la variable de contrainte au lieu de celle de la première dérivée comme dans le cas du mode glissant classique. On parle dans ce cas des modes glissants d'ordre supérieur **MGOS** [15], [26] [33].

Ce chapitre a pour objectif l'étude de la stabilisation en temps fini et robuste de systèmes non holonomes via les modes glissants d'ordre supérieur. Nous donnons en premier lieu les définitions formelles des modes glissants d'ordre supérieur, et nous exhibons le lien entre le degré relatif et les régimes glissants, en particulier dans le cas d'un système de degré relatif supérieur à un. En second lieu, nous traitons le problème de la stabilisation robuste et en temps fini d'un système nonholonome mis sous forme chaînée perturbé. Pour cela, différents contrôleurs par modes glissants d'ordre deux sont générés afin de stabiliser de façon robuste et en temps fini le robot mobile unicycle.

## 4.2 Définitions des modes glissants

Les définitions et propositions données ci-dessous sont basées sur les travaux de Emelyanov et.al. [15] et Levant [33] [34]. Pour des raisons de simplicité, nous nous restreindrons aux modes glissants par rapport seulement à des fonctions contraintes scalaires.

### 4.2.1 Modes glissants par rapport à des fonctions contraintes

Nous donnons ici les définitions des modes glissants basées sur les fonctions de contraintes en se rapprochant du problème posé au chapitre 1.

L'ensemble de glissement d'ordre  $r$  par rapport à la fonction contrainte  $s$  est donné par :

$$S_r = \{x \in X : s = s' = s'' = \dots = s^{(r-1)} = 0\} \quad (4.1)$$

L'équation (4.1) est une condition de dimension  $r$  sur l'état d'un système dynamique

**Définition 10** [33] *Soit  $S_r$  l'ensemble de glissement d'ordre  $r$ , considérée non vide, et supposons qu'il désigne localement un ensemble intégral au sens de Filippov. Alors la dynamique satisfaisant (4.1) est appelée mode glissant d'ordre  $r$  par rapport à la fonction contrainte  $s$ .*

Supposons que  $s, s', \dots, s^{(r-1)}$  sont des fonctions différentielles par rapport à  $x$  et que, localement :

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial}{\partial x} s, \frac{\partial}{\partial x} s', \dots, \frac{\partial}{\partial x} s^{(r-2)} \right] = r - 1 \quad (4.2)$$

L'équation (4.2) est appelée condition de régularité faible de glissement.

Si  $S_r$  est une variété différentielle et si pour tout  $i = 1, \dots, r - 1$ , les  $S_i$  sont des variétés régulières, alors la condition (4.1) s'étend à la condition de régularité de glissement donnée par l'équation :

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial}{\partial x} s, \frac{\partial}{\partial x} s', \dots, \frac{\partial}{\partial x} s^{(r-1)} \right] = r \quad (4.3)$$

**Proposition :** Supposons la condition de régularité (4.3) vérifiée et la variété de glissement d'ordre  $r$  (4.1) non vide. Alors un mode glissant d'ordre  $r$  par rapport à la contrainte  $s$  existe si et seulement si l'intersection du champs de vecteur au sens de Filippov avec l'espace tangent à la variété (4.1) n'est vide pour aucun point de glissement d'ordre  $r$ .

**Preuve :** L'intersection des champs de vecteurs au sens de Filippov avec l'espace tangent à la variété (4.1), induit une inclusion différentielle sur cette variété. Cette inclusion satisfait toutes les conditions données par Filippov pour l'existence de la solution. La variété (4.1) est une variété intégrale.

**Remarque :**

L'extension de ces définitions est valable pour des fonctions contraintes de dimension  $m > 1$  :

$$s : R^n \rightarrow R^m, s = [s_1, \dots, s_m]^T \quad (4.4)$$

Supposons que les  $(r_i - 1)$  premières dérivées par rapport au temps de  $s_i$  composantes de  $s$  soient continues et que l'ensemble donné par les égalités :

$$\left\{ s_i = \dot{s}_i = \ddot{s}_i = \dots = s_i^{(r_i-1)} = 0, i = 1, \dots, m. \right\} \quad (4.5)$$

soit localement un ensemble intégral au sens de Filippov. Alors la dynamique satisfaisant ces égalités est appelée régime glissant de vecteur d'ordre  $r$  par rapport au vecteur contraint  $s$ .

La condition de régularité du glissement correspondant a la forme suivante :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} s_i, \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}_i, \dots, \frac{\partial}{\partial x} s_i^{(r-1)} \end{bmatrix}_{i=1, \dots, m} = r_1 + \dots + r_m \quad (4.6)$$

**Remarque :**

Pour exclure un cas trivial d'une variété intégrale dans un système, nous pouvons par exemple appeler un mode glissant "non trivial" si l'ensemble des vitesses possibles  $V(x)$  au sens de Filippov contient plus d'un vecteur.

## 4.3 Modes glissants dans les systèmes de contrôle

### 4.3.1 Introduction

La qualité d'un système de commande dépend directement de la précision du maintien de la contrainte. Le maintien exact de la contrainte est atteint dans la limite à une fréquence de commutation infinie. La contrainte implique que le point de phase appartient à une variété dans l'espace de phase du système de contrôle en boucle fermée.

Un mode glissant classique (premier ordre) correspond à une discontinuité du champ de vecteurs des vitesses sur la variété contrainte. On sait bien que ce mode est atteint

en temps fini, ce qui signifie que les trajectoires se rencontrent à n'importe quel point de glissement. En effet, les courbes de phase approchent la variété contrainte  $S = 0$  de différentes directions avec des vecteurs vitesse traversant la variété. En s'accordant aux définitions précédentes, ces modes glissants sont de premier ordre ( $\dot{s}$  est discontinu).

Le mode glissant de second ordre ( $\ddot{s}$  est discontinu) est atteint aux points de la variété contrainte où chaque vecteur de vitesse, obtenu en passant à la limite quand le point approche la variété contrainte, est tangent à la variété, comme on le voit sur la figure 4.1.

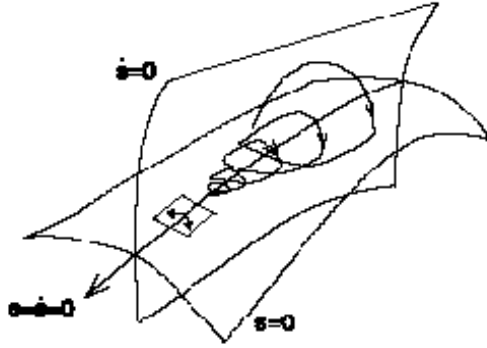


Figure 4.1. Trajectoire en mode glissant d'ordre 2.

### 4.3.2 Glissement réel et convergence en temps fini

Jusqu'à présent, nous avons considéré seulement les modes glissants idéaux avec le maintien exact de la contrainte  $S = 0$ . Les organes de commande commutent à une fréquence infinie et le régime du mode idéal est interprété comme les trajectoires limites lorsque les imperfections de ces organes sont inexistantes [26]. Un exemple d'imperfection de commutation est celui de la commutation discrète causée par des mesures discrètes.

En réalité, ces imperfections existent et sont prises en compte. La contrainte  $S = 0$  est maintenue seulement de façon approximative, on parle dans ce cas de mode glissant réel. Considérons  $\varepsilon$  une mesure de ces imperfections de commutation. Ainsi la précision du glissement de la technique du mode glissant peut être décrite par une précision de glissement asymptotique avec  $\varepsilon \rightarrow 0$  [33].

**Définition 11** [33] Soit  $\gamma(\varepsilon)$  une fonction à valeur réelle telle que  $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Un algorithme de glissement réel sur la contrainte  $s = 0$  est dit d'ordre  $r$  ( $r > 0$ ) par rapport à  $\gamma(\varepsilon)$  si pour tout ensemble local de conditions initiales il existe un temps  $t_1$  et une constante  $C$  tels que,  $\forall t > t_1$ , l'inégalité suivante soit satisfaite

$$|s| \leq C |\gamma(\varepsilon)|^r \quad (4.7)$$

Lorsque  $\gamma(\varepsilon)$  est le plus petit intervalle de continuité de la commande, les mots "par rapport à  $\gamma$ " sont en général omis. C'est le cas d'un glissement réel résultant d'une discrétisation de commutation. La définition suivante est une extension aux algorithmes concernant des lois de commande discontinues et des fréquences de commutation bornées.

**Définition 12** [33] *Soit un algorithme, dépendant d'un paramètre  $\varepsilon \in R^\lambda$ , générant un régime glissant sur la surface  $S$ , et dont l'action est continue par morceau par rapport au temps, avec des intervalles de continuité pas plus petits que  $\tau(\varepsilon) > 0$ , où  $\tau(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si cet algorithme est d'ordre  $r$  par rapport à  $\tau$ , on dit alors que c'est un algorithme par modes glissants réel d'ordre  $r$  par rapport à la surface  $S$ .*

De ces définitions découle la notion de précision des modes glissants réels. Il a été montré [33] que la meilleure précision de glissement qu'on peut atteindre avec des mesures discrètes dans  $s^r$  est donnée par la relation suivante :

$$|s| \simeq \tau^r \quad (4.8)$$

où  $\tau$  est l'intervalle de temps minimum entre les commutations.

De plus, les relations suivantes :

$$|s^{(k)}| \sim \tau^{r-k} \quad (4.9)$$

$$k = 0, 1, \dots, r, \quad (4.10)$$

sont satisfaites en même temps.

On peut en déduire que pour avoir une précision d'un glissement d'ordre  $r$  en réalisation discrète, l'ordre du mode de glissement dans le système continu en commutation doit être au moins égal à  $r$ .

Ainsi, obtenir un mode glissant réel d'ordre  $r$  avec des mesures discrètes requiert que les égalités  $s = s' = \dots = s^r = 0$ , soient satisfaites en mode glissant idéal. Il s'ensuit de là que pour améliorer la précision de glissement nous devons maintenir à zéro non seulement la fonction contrainte  $s$  mais aussi ses dérivées successives dans le temps.

**Remarque :**

Il est bien à noter qu'en pratique la précision finale du glissement est atteinte toujours en temps fini. Ainsi, il est raisonnable de supposer que la précision maximale mentionnée ci-dessus est obtenue seulement pour des modes glissants avec convergence en temps fini.

## 4.4 Modes glissants et notion de degré relatif

### 4.4.1 Introduction

La notion de degré relatif a été introduite dans un premier temps dans le cas seulement autonome [29], par la suite l'application a été faite dans le cas non autonome. Cette

notion est un concept fondamental qui a joué un grand rôle récemment dans la compréhension du contrôle des dynamiques non linéaires. En effet, à l'aide des transformations des coordonnées d'état issues de difféomorphismes définis, le système est exprimé dans des coordonnées appelées coordonnées forme normales [29]. Dans ces coordonnées la structure du système est clairement exhibée et ses propriétés dynamiques sont facilement établies [49].

Dans ce qui suit, nous examinons le lien existant entre le concept de degré relatif et les systèmes de commande à structure variable opérant en mode glissant. Pour un bref rappel concernant le degré relatif d'un système, utilisant dans le formalisme des dérivées de Lie, le lecteur est invité à consulter l'annexe 1.

#### 4.4.2 Régime glissant avec degré relatif supérieur à un

Considérons le système donné par l'équation (1.8) (voir chapitre 1) avec sa sortie  $h = s(t, x)$ . H. Sira-Ramirez [49] a montré qu'un régime glissant d'ordre un existe si et seulement si le degré relatif du système (1.8) est égal à un.

Si dans la fonction  $h = s(t, x)$ , le système exhibe localement un degré relatif  $r$  strictement supérieur à un, alors une alternative pour créer un mouvement de glissement est d'utiliser la fonction sortie auxiliaire définie par :

$$R(x) = W = a_{r-1}L_f^{r-1}.s(t, x) + a_{r-2}L_f^{r-2}.s(t, x) + \dots + a_0.s(t, x) \quad (4.11)$$

avec  $a_{r-1} = 1$ .

Une autre manière de procéder est d'utiliser les coordonnées de la forme normale :

$$W = z_r + a_{r-2}z_{r-1} + \dots + a_1z_2 + a_0z \quad (4.12)$$

$L_{\frac{\partial f}{\partial u}}.R(x_0) \neq 0$ , ce qui est évident.

Ainsi le système donné par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ W = R(x) \end{cases} \quad (4.13)$$

est de degré relatif un par rapport à  $R$ .

Le régime glissant idéal est donné par :  $W = 0$ , soit  $z_r = -a_{r-2}z_{r-1} - \dots - a_1z_2 - a_0z_1$ .

Il est clair que si les coefficients  $a_0, \dots, a_{r-2}$  sont choisis tels que le polynôme  $p(\lambda) = \sum a_{i-1}\lambda_i$  soit de Hurwitz, un mouvement asymptotiquement stable converge vers zéro est obtenu pour chacun des  $z_i$ .

Notons qu'il ya deux modes glissants différents dans le système (4.13) :

- un mode glissant classique de premier ordre sur  $R(x) = 0$ , par rapport à la contrainte  $W$

- un mode glissant d'ordre  $r$ , asymptotiquement stable, par rapport à la contrainte  $s = 0$  qui est maintenue dans les points de la variété de glissement d'ordre  $r$ ,  $\Sigma$  :

$$\Sigma : s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0$$

Ainsi la sortie originale  $h$  et ses premières dérivées approchent asymptotiquement zéro.

On voit bien qu'avec cette méthode, plus le degré relatif du système croit, plus on doit avoir des informations sur une partie de l'état. Par ailleurs, la convergence obtenue est asymptotique sur  $s$ , ceci nous amène à rechercher des algorithmes de modes glissants d'ordre supérieur assurant une convergence en temps fini sur la surface  $s(t, x) = 0$ .

## 4.5 Algorithmes glissants d'ordre supérieur

Les définitions énoncées précédemment concernant les régimes glissants réels d'ordre  $r$  ont permis d'introduire un outil de comparaison de différents algorithmes de contrôle générant ces modes. On distingue ainsi les algorithmes idéaux des algorithmes réels. En effet, les travaux de Levant [33] montrent qu'un ordre de glissement réel ne doit pas excéder l'ordre du mode de glissement correspondant. Les modes glissants standard procurent, ainsi un mode glissant réel seulement de premier ordre et un mode glissant réel de second ordre est réellement obtenu par modification de commutation discrètes des algorithmes glissants de second ordre. Un mode glissant réel peut aussi être obtenu par un moyen différent de celui de la réalisation discrète du mode glissant et c'est le cas du "Drift algorithm" qu'on va voir par la suite.

Généralement, pour utiliser un algorithme de glissement d'ordre  $r$  par rapport à  $s = 0$ , on a besoin de connaître  $s$ ,  $\dot{s}$  et  $s^{(r-1)}$ , ce qui induit une difficulté d'implantation lorsque l'ordre de glissement augmente. Les algorithmes réels ne requièrent que les mesures de  $s$ ,  $\dot{s}$  et  $s^{(r-2)}$  et ceci constitue une bonne solution pour les modes glissants du second ordre. En effet, seule l'information sur  $s$  est nécessaire.

### 4.5.1 Maintien exact de la contrainte : formulation du problème

◦Premier cas :

Supposons que le système (1.8) est de degré relatif  $p$  égal à 1 ( $p = 1$ ), c'est à dire ,  $\frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \neq 0$ .

Considérons l'opérateur différentiel :

$$L_u(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)f(t, x, u)$$

où  $L_u$  est la dérivée totale par rapport au temps, et le long de (1.8) pour  $u$  constante.

Différencions 2 fois de façon successive la fonction contrainte  $s$  :

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= L_u s(t, x) = \frac{\partial s}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial s}{\partial x}(\cdot) f(t, x, u) \\
\ddot{s} &= L_u L_u s(t, x) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \dot{u} \\
&= \frac{\partial \dot{s}}{\partial t}(t, x, u) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial x}(t, x, u) f(t, x, u) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial u}(t, x, u) \dot{u}(t)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Dans ce qui suit nous nous intéressons aux modes glissants d'ordre 2. Assumons que  $f$  et  $s$  sont des fonctions  $C^1$  et  $C^2$ , et que la seule information disponible consiste aux valeurs de  $t$ ,  $u(t)$ ,  $s(t, x)$  et possiblement le signe de la première dérivée de  $s$ .

Afin d'exposer le problème de la commande de façon rigoureuse, formulons tout d'abord les hypothèses suivantes :

1. La fonction  $u$  est bornée et discontinue dans le temps sur l'ensemble  $\mathcal{U} = \{u : |u| < U_M\}$ . De plus, la solution de l'équation différentielle (1.8) à second membre discontinu admet des solutions au sens de Fillipov sur l'ensemble de glissement d'ordre 2 pour tout  $t$  :

$$s = \{x \in X / s(t, x) = \dot{s}(t, x) = 0\}$$

2. Il existe  $u_1 \in ]0, U_M[$  telle que pour toute fonction continue  $u \in \mathcal{U}$  avec  $|u| > u_1$ , il existe un temps  $t_1$  telque  $s(t, x)u(t) > 0$  pour tout  $t > t_1$ . Ainsi la commande  $u = -U_M \text{sign}[s(t_0)]$ , où  $t_0$  est l'instant initial, assure de croiser la surface  $s = 0$  au bout d'un temps fini.
3. Il existe des constantes positives  $s_0, K_m, K_M$  telles que, si  $|s(t, x)| < s_0$ ,

$$0 < K_m < \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} < K_M$$

Le terme  $\frac{\partial \dot{s}}{\partial u}$  ne doit pas s'annuler et est nécessaire pour l'existence de la commande équivalente  $u_{eq}$  en régime glissant.

4. A l'intérieur de l'ensemble  $R_l = \{t, x : |s(t, x)| < s_0\}$  appelé région de linéarité et pour tout  $t, x, u$ , il existe une constante  $C$  telle que :

$$|L_u L_u s(t, x)| < C$$

La condition 2 signifie que, partant de n'importe quel point de l'espace d'état, il est possible de définir une commande amenant la fonction contrainte à l'intérieur d'un ensemble tel que les conditions de bornitude sur les dynamiques de glissements définies par les conditions 3 et 4 sont satisfaites. En effet, la dérivée seconde de  $s$  est uniformément bornée dans un certain domaine. Il s'en suit du théorème des fonctions implicites, qu'il existe une fonction  $u_{eq}(t, x)$  qui peut être considérée comme la commande équivalente satisfaisant l'équation  $\dot{s} = 0$ .

Une fois  $s = 0$  est atteint, la commande  $u = u_{eq}(t, x)$  permet le maintien exact de la contrainte c'est à dire  $s = \dot{s} = 0$ , et la variation de  $u_{eq}$  est bornée.

◦ **Second cas :**

Supposons que le système est de degré relatif deux :  $p \geq 2$ , c'est à dire,

$$\frac{\partial \dot{s}^{(i)}}{\partial u} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r - 1),$$

$$\frac{\partial \dot{s}^{(p)}}{\partial u} \neq 0.$$

L'état du problème de la commande peut être dérivé à partir du cas précédent, en considérant la variable  $u$  comme une variable d'état et  $\dot{u}$  comme la commande actuelle.

Considérons la dynamique du système (1.8) affine en l'entrée, i.e

$$f(t, x, u) = \bar{f}(t, x) + \bar{g}(t, x).u$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathcal{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathcal{R}^n \\ \bar{g} : \mathcal{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathcal{R}^n \end{aligned}$$

fonctions vecteurs suffisamment différentielles.

Par dérivation successives, on obtient :

$$\ddot{s} = \chi(t, x) + \xi(t, x)u \quad (4.15)$$

avec  $\chi$  et  $\xi$  des fonctions bornées comme suit à l'intérieur de la région de linéarité  $R_L$  :

$$|\chi| < C, \quad C > 0 \quad (4.16)$$

$$0 < k_m \leq \xi \leq k_M \quad (4.17)$$

Considérons les coordonnées locales  $[x_1, x_2]^T = [s_1, s_2]^T$ . En se basant sur les définitions et les conditions précédentes, le problème de la commande par modes glissants d'ordre 2 dans les deux cas peut être exprimé en terme de problème de stabilisation en temps fini du système incertain d'ordre deux [33] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \chi(t, x) + \xi(t, x)v \end{aligned} \quad (4.18)$$

où  $x_2$  peut ne pas être mesurable mais avec un signe connu. Selon le degré relatif par rapport à la fonction contrainte,  $v$  est considéré comme une entrée du système ou sa dérivée par rapport au temps ( $v = \dot{u}$ ).

### 4.5.2 Algorithmes glissants d'ordre deux

L'objectif du contrôleur par modes glissants d'ordre 2 est de générer un régime glissant d'ordre 2 sur la surface  $s = 0$  et d'obtenir en temps fini  $s = \dot{s} = 0$ . Dans ce qui suit, nous allons décrire les principaux algorithmes du second ordre ( $r = 2$ ), en détaillant plus particulièrement l'algorithme de twisting qui va être très utilisé.

#### Algorithme de Twisting

Historiquement connu comme le premier contrôleur par mode glissant d'ordre 2, cet algorithme tourne autour de l'origine du plan de glissement d'ordre 2. La convergence en temps fini vers l'origine du plan de phase  $(s, \dot{s})$  est obtenue grâce à la commutation de la commande entre deux valeurs, de telle façon que l'abscisse et l'ordonnée soient croisées de plus en plus vers l'origine. Nous présentons ici la version idéale et la version réelle pour cet algorithme.

##### a)- Cas idéal

L'algorithme de commande est défini par la loi de commande suivante [33], où  $u_{\max}$  est la valeur maximale de  $u$  autorisée physiquement :

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > u_{\max} \\ -\lambda_m \text{sign}(x_1) & \text{si } x_1 \dot{x}_1 \leq 0 \\ -\lambda_M \text{sign}(x_1) & \text{si } x_1 \dot{x}_1 > 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

avec les conditions suffisantes assurant la convergence en temps fini sur la variété de glissement

$$\lambda_m > \frac{C}{K_m} \quad (4.20)$$

$$K_m \lambda_M - C > k_M \lambda_m + C \quad (4.21)$$

En prenant en compte les trajectoires limites solution du système (4.18) et en évaluant les intervalles de temps entre les croisements successifs de l'axe des abscisses, la borne supérieure du temps de convergence peut être précisée (ceci quel que soit le quadrans du plan de phase) :

$$T_{tw\infty} \leq t_{M_1} + \Psi_{tw} \left( \frac{C}{k_m} \right) \frac{1}{1 - \phi_{tw} \left( \frac{C}{k_m} \right)} \sqrt{|x_{1M_1}|}$$

$x_{1M_1}$  est la valeur de  $x_1$  la première fois que l'axe des abscisses dans le plan  $(x_1, x_2)$  est traversé,  $t_{M_1}$  étant l'instant correspondant. Les expressions de  $\Psi_{tw}$  et  $\phi_{tw}$  sont données par les formes suivantes :

$$\Psi_{tw} \left( \frac{C}{k_m} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_m + \lambda_M}{\left( \lambda_M - \frac{C}{k_m} \right) \sqrt{\lambda_m + \frac{C}{k_m}}}$$

$$\phi_{tw}\left(\frac{C}{k_m}\right) = \sqrt{\frac{\lambda_m k_m + C}{\lambda_M k_m - C}}$$

Dans le cas où le système est de degré relatif 2, le contrôleur appliqué au système (4.18)

$$u = \begin{cases} -\lambda_m \operatorname{sign}(x_1) & \text{si } x_1 \dot{x}_1 \leq 0 \\ -\lambda_M \operatorname{sign}(x_1) & \text{si } x_1 \dot{x}_1 > 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

permet d'avoir une convergence en temps fini vers l'ensemble  $\{s = \dot{s} = 0\}$ .

### b)- Cas réel

Cette forme utilise seulement l'information sur la surface considérée et non pas sa dérivée. En effet, cette forme tient compte des contraintes d'ordre pratique telles que l'échantillonnage des mesures et de la loi de commande. Pour des raisons de simplicité, la période d'échantillonnage est prise la même pour les mesures et la commande. On définit alors la loi de commande suivante :

$$u = \begin{cases} -\lambda_m \operatorname{sign}(s) & \text{si } s \Delta_s \leq 0, \\ -\lambda_M \operatorname{sign}(s) & \text{si } s \Delta_s > 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

avec

$$\Delta_s = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ (s(k\tau) - s(k-1)\tau), & k \geq 1 \end{cases}$$

et  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  vérifient les conditions (4.20), (4.21).

Afin d'améliorer la vitesse de convergence du système (4.18), la loi de commande suivante a été proposée [24].

$$\begin{aligned} u &= -\alpha^2 x_1 - 2\alpha \dot{x}_1 + \begin{cases} -\lambda_m \operatorname{sign}(x_1), \text{if } x_1 \dot{x}_1 \leq 0 \\ -\lambda_M \operatorname{sign}(x_1), \text{if } x_1 \dot{x}_1 > 0 \end{cases} \quad \text{avec } \alpha > 0 \quad (4.24) \\ &= \Gamma(x_1, \dot{x}_1, \alpha, \lambda_m, \lambda_M) \end{aligned}$$

### Algorithme sous-optimal

Cet algorithme développé pour des systèmes de commande à degré relatif égal 2 [3], ainsi que le terme sous-optimal employé ici, sont inspirés de la commande bang-bang qui génère des trajectoires optimales (en temps minimum) pour un double intégrateur. La loi de commande est définie par :

$$u(t) = -\alpha(t)\lambda_M \operatorname{sign}(x_1(t) - \frac{1}{2}x_{1M}), \quad (4.25)$$

$$\alpha(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^* & \text{si } [x_1(t) - \frac{1}{2}x_{1M}] [x_{1M} - x_1(t)] > 0 \\ 1 & \text{si } [x_1(t) - \frac{1}{2}x_{1M}] [x_{1M} - x_1(t)] \leq 0 \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

où  $x_{1M}$  représente la valeur de  $x_1$  au dernier instant d'annulation de  $x_2$  (i.e. la dernière valeur singulière de la fonction  $x_1(t)$ ).

Conditions suffisantes de convergence :

$$\alpha^* \in ]0, 1] \cap \left] 0, \frac{3K_m}{K_M} \right] \quad \square \quad (4.27)$$

$$\lambda_M > \max\left(\frac{C}{\alpha^* K_m}, \frac{4C}{3K_m - \alpha^* K_M}\right) \quad (4.28)$$

Borne supérieure du temps de convergence :

$$T_{so\infty} \leq t_{M_1} + \Theta_{s0} \frac{1}{1 - \theta_{s0}} \sqrt{|x_{1M_1}|}$$

où  $x_{1M_1}, t_{M_1}$  sont définis comme pour l'algorithme du twisting

$$\Theta_{so} = \frac{(K_m + \alpha^* K_M) \lambda_M}{(K_m \lambda_M - C) \sqrt{\alpha^* K_M \lambda_M + C}}$$

$$\theta_{so} = \sqrt{\frac{\alpha^* K_M - K_m}{2(K_m \lambda_M - C)}} \lambda_M + 2C$$

La connaissance de la valeur de  $x_2$  n'est pas nécessaire, toutefois il faut avoir une estimation assez précise de la dernière valeur singulière de  $x_1$ .

Dans le cas d'un gain unitaire  $\gamma = 1$  la loi de commande pouvait être simplifiée en posant  $\alpha = 1$  et en choisissant  $V_M > 2C_0$  [3]. La preuve de convergence de cet algorithme, ainsi que l'évaluation du temps de convergence sont disponibles dans [3].

### Algorithme du Super Twisting

Cet algorithme a été développé pour des systèmes de commande à degré relatif égal 1 afin d'éviter le chattering. L'algorithme de commande est défini par la loi de commande qui elle-même constituée de deux termes. Le premier terme est défini par sa dérivée discontinue, tandis que le deuxième est une fonction continue de la variable de glissement [33].

$$u = u_1(t) + u_2(t)$$

$$\dot{u}_1 = \left\{ \begin{array}{ll} -u & \text{si } |u| > |u_e| \\ -W \text{sign}(x_1) & \text{si } |u| \leq |u_e| \end{array} \right\} \quad (4.29)$$

$$u_2 = \left\{ \begin{array}{ll} -\lambda s_0^\rho \operatorname{sign}(x_1) & \text{si } |s| > |s_0| \\ -\lambda |x_1|^\rho \operatorname{sign}(x_1) & \text{si } |s| \leq |s_0| \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

et les conditions suffisantes de convergence en temps fini sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} W > \frac{C}{K_m} \\ \lambda^2 \geq \frac{4C}{K_m^2} \frac{K_M(W+C)}{K_m(W-C)} \\ 0 < \rho \leq 0.5 \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Ce contrôleur peut être simplifié si le système de contrôle est linéairement dépendant de la commande, ainsi la loi de commande est donnée par :

$$\begin{aligned} u &= -\lambda |s|^{1/2} \operatorname{sign}(x_1) + u_1, \\ \dot{u}_1 &= -W \operatorname{sign}(x_1) \end{aligned} \quad (4.32)$$

L'intérêt de cet algorithme est qu'il ne requiert aucune information sur la dérivée de  $s$ .

### Algorithme de Drift [16]

L'idée de ce contrôleur est de diriger la trajectoire vers un mode glissant d'ordre deux  $s = 0$  tout en gardant  $\dot{s}$  relativement petite. Ce contrôleur procure un glissement réel d'ordre 2 et l'algorithme de commande est défini par la loi de commande suivante (degré relatif est 1) :

$$\dot{u} = \left\{ \begin{array}{ll} -u & \text{si } |u| > 1 \\ -V_m \operatorname{sign}(\Delta x_{1i}) & \text{si } x_1 \Delta x_{1i} \leq 0, |u| \leq 1 \\ -V_M \operatorname{sign}(\Delta x_{1i}) & \text{si } x_1 \Delta x_{1i} > 0, |u| \leq 1 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

avec

$$\Delta x_{1i} = x_{1i}(t_i) - x_{1i}(t_i - \tau).$$

Dans le cas où le système est de degré relatif 2, un contrôleur similaire est donné par :

$$\dot{u} = \left\{ \begin{array}{ll} -V_m \operatorname{sign}(\Delta x_{1i}) & \text{si } x_1 \Delta x_{1i} \leq 0 \\ -V_M \operatorname{sign}(\Delta x_{1i}) & \text{si } x_1 \Delta x_{1i} > 0 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Il est à noter que cet algorithme ne présente pas de dépassements si les paramètres sont choisis de façon appropriée.

## 4.6 Stabilisation par MGOS de systèmes non holonomes

### 4.6.1 Stabilisation en temps fini via les MGOS

Dans cette partie, nous nous intéressons à la stabilisation en temps fini de systèmes non holonomes. Il est important à noter que peu de lois de commande allient à la fois robustesse et performances au niveau de la précision de convergence, tel est le cas de l'utilisation des modes glissants classiques vu au chapitre précédent. Nous allons voir dans cette partie, que la théorie des modes glissants d'ordre supérieur est efficace pour concevoir des lois de commande procurant une stabilisation robuste et en temps fini de systèmes non holonomes perturbés. Maintenant nous allons montrer que la stabilisation robuste du système nonholonome mis en forme chaînée perturbé (2.28) peut être obtenue en temps fini malgré les perturbations.

Les perturbations sont supposées vérifier :

$$\left| \frac{\partial^i p^1}{\partial z^i}(z, t) \right| \leq \sigma_i^z, i = 0, \dots, n - 2, \quad (4.35)$$

$$\left| \frac{\partial^i p^1}{\partial t^i}(z, t) \right| \leq \sigma_i^t, i = 0, \dots, n - 2, \quad (4.36)$$

$$|p^2(z, t)| \leq \sigma_2, \quad (4.37)$$

pour tout  $z, t$ , avec  $\sigma_i^z, \sigma_i^t$  et  $\sigma_2$  des constantes positives. Introduisons également l'extension dynamique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = \xi_1 + p^1(z, t) \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-3} = \xi_{n-2} \\ \dot{\xi}_{n-2} = w \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(\xi_1 + p^1(z, t)) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1}(\xi_1 + p^1(z, t)) \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Les conditions (4.34), (4.35), (4.36) et l'addition de  $(n - 2)$  intégrateurs avant l'entrée  $v_1$  sont nécessaires si on veut utiliser des modes glissants d'ordre supérieur. La stabilisation du système s'effectue en trois étapes :

– Première étape :

La commande  $\omega$  est choisie comme étant un algorithme glissant d'ordre  $(n - 1)$  par rapport à la surface  $s_1 = z_1 - at = 0, a > 0$ . Celui-ci assure que les trajectoires atteignent la surface  $s_1 = 0$  au bout d'un temps fini  $T_1$  et y évoluent après cet instant. Pour  $t \geq T_1$ , la dynamique équivalente, obtenue lorsque  $s_1 = \dot{s}_1 = \dots\dots\dots s_1^{(n-1)} = 0$ , est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = a \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = az_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = az_{n-1} \end{array} \right.$$

– Seconde étape :

On applique un algorithme glissant d'ordre  $(n - 1)$  par rapport à  $z_n = 0$  sur l'entrée  $v_2$ . Ce qui génère en temps fini  $T_2$  une trajectoire de glissement d'ordre  $(n - 1)$  et les équations suivantes au bout d'un temps fini  $T_2$

$$z_n = \dot{z}_n = \dots\dots\dots = z_n^{(n-2)} = 0$$

– Troisième étape :

Après  $t = T_1 + T_2$ , les deux commandes commutent en

$$v_1 = -k_1 \text{sign}(z_1)$$

$$v_2 = -k_2 \text{sign}(z_2)$$

avec  $k_1 > \sigma_1, k_2 > \sigma_2$ . Ceci permet de maintenir  $z_2 = 0$ , et donc  $z_3 = z_4 = \dots\dots\dots = z_n = 0$  et finalement d'atteindre la variété  $z_1 = 0$  en temps fini, aboutissant à la stabilisation du système (4.38) en temps fini  $T_3$ .

## 4.7 Application à un robot mobile : résultats de simulation

### 4.7.1 Stabilisation en temps fini par modes glissants d'ordre deux

Nous allons montrer que la stabilisation robuste du robot mobile unicycle mis en forme chaînée (3.18) peut être obtenue en temps fini en utilisant les modes glissants d'ordre deux. Une commande par modes glissants d'ordre deux est alors utilisée. L'algorithme choisi dans un premier temps est la version modifiée de l'algorithme du twisting qui permet d'avoir une convergence plus rapide.

## A- Cas de stabilisation avec une seule commande par modes glissants d'ordre 2

La stabilisation du système en forme chaînée (3.18) se déroule en trois étapes en commutant entre différents types de contrôleurs à modes glissants :

– **Première étape :**

Le contrôle  $v_1$  est utilisé comme un algorithme par mode glissant classique sur la surface  $s_1 = z_1 - at$ ,  $a > 0$ , et ceci sans ajout d'extension dynamique. Ceci assure que les trajectoires atteignent la variété  $s_1 = 0$  en temps fini  $T_1$  et y restent après  $T_1$ .

– **Seconde étape :**

Pour  $t \geq T_1$ , une fois la surface  $\{s_1 = 0\}$  atteinte, les trajectoires évoluent suivant le système réduit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = az_2 \end{cases}$$

et le système par rapport à la variable de glissement  $z_3$  présente un degré relatif égal 2.

L'algorithme par mode glissant d'ordre deux (algorithme de Twisting accéléré) est appliqué sur l'entrée  $v_2$

$$\begin{aligned} v_2 &= -\alpha^2 z_3 - 2\alpha \dot{z}_3 + \begin{cases} -\lambda_m \operatorname{sign}(z_3), & \text{si } z_3 \dot{z}_3 \leq 0 \\ -\lambda_M \operatorname{sign}(z_3), & \text{si } z_3 \dot{z}_3 > 0 \end{cases} \\ &= \Gamma(z_3, \dot{z}_3, \alpha, \lambda_m, \lambda_M) \end{aligned}$$

Par dérivation de  $\dot{z}_3$  on a

$$\ddot{z}_3 = a(v_2 + p^2(z, t))$$

Ceci implique la convergence des trajectoires d'états sur l'ensemble de glissement défini par  $\{z_3 = \dot{z}_3 = 0\}$ , ainsi la variété  $z_3 = \dot{z}_3 = 0$  est atteinte en temps fini  $t \leq T_1 + T_2$ .

– **Troisième étape:**

Après  $t = T_1 + T_2$ , les lois de commande commutent en

$$v_1 = -k'_1 \operatorname{sgn}(z_1),$$

$$v_2 = -k'_2 \operatorname{sgn}(z_2)$$

assurant ainsi la convergence en temps fini de l'état à l'origine, avec  $k'_1 > \sigma_1$  et  $k'_2 > \sigma_2$ .

Nous pouvons résumer tout ces faits dans l'algorithme suivant.

### Algorithme par modes glissants d'ordre deux

Partant d'un compact  $K_r = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \leq r \right\} \subset \Omega$ , avec  $r > 0$ , et en utilisant les lois de commande définies par

$$v_1 = \begin{cases} v_{11} = -k_1 \text{sign}(s_1), & t \leq T_1 + T_2 \\ v_{12} = -k'_1 \text{sign}(z_1), & t > T_1 + T_2 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{cases} v_{21} = \Gamma(z_3, \dot{z}_3, \alpha, \lambda_m, \lambda_M), & T_1 \leq t \leq T_1 + T_2 \\ v_{22} = -k'_2 \text{sign}(z_2), & t > T_1 + T_2 \end{cases}$$

où  $s_1 = z_1 - at$ ,  $k_1 > \sigma_1 + a$ ,  $k'_1 > \sigma_1$ ,  $k'_2 > \sigma_2$ ,  $\lambda_m > \sigma_2/a$ ,  $\lambda_M > \lambda_m + 2\sigma_2/a$ ,  $T_1 = \frac{|r-a|}{k_1}$ ,  $T_2 = t_{M_1} + \Psi_{tw}(\sigma_2) \frac{1}{1-\phi_{tw}(\sigma_2)} \sqrt{|z_{3M_1}|}$ , le système (3.18) atteint l'origine en temps fini.

Nous donnons ici les résultats en simulation de l'application de l'algorithme par modes glissants d'ordre deux pour la stabilisation en temps fini et robuste de l'unicycle décrit par (3.18). Les conditions initiales pour les coordonnées de position sont :  $z_{10} = \pi/4$ ,  $z_{20} = 2$ ,  $z_{30} = 3$ , soit  $x_0 = 3.53m$ ,  $y_0 = -0.70m$ , et  $\theta_0 = \pi/4rd$ . La période d'échantillonnage étant prise égale à  $\tau = 6ms$  avec les paramètres suivants :  $a = 4$ ,  $k_1 = 2$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\lambda_m = 2$ ,  $\lambda_M = 10$ ,  $k'_1 = 10$ ,  $k'_2 = 5$ . La perturbation étant un bruit blanc aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance l'unité. Les figures 4.2, 4.3, 4.4, montrent que la trajectoire d'état du système rejoint en temps fini l'origine de manière robuste. Néanmoins, comme on le voit, avant que la surface  $s_1 = 0$  ne soit atteinte, le phénomène de chattering apparaît sur les variables d'état  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  dans ce cas, comme sur les graphes de commande en vitesse (figure 4.3).

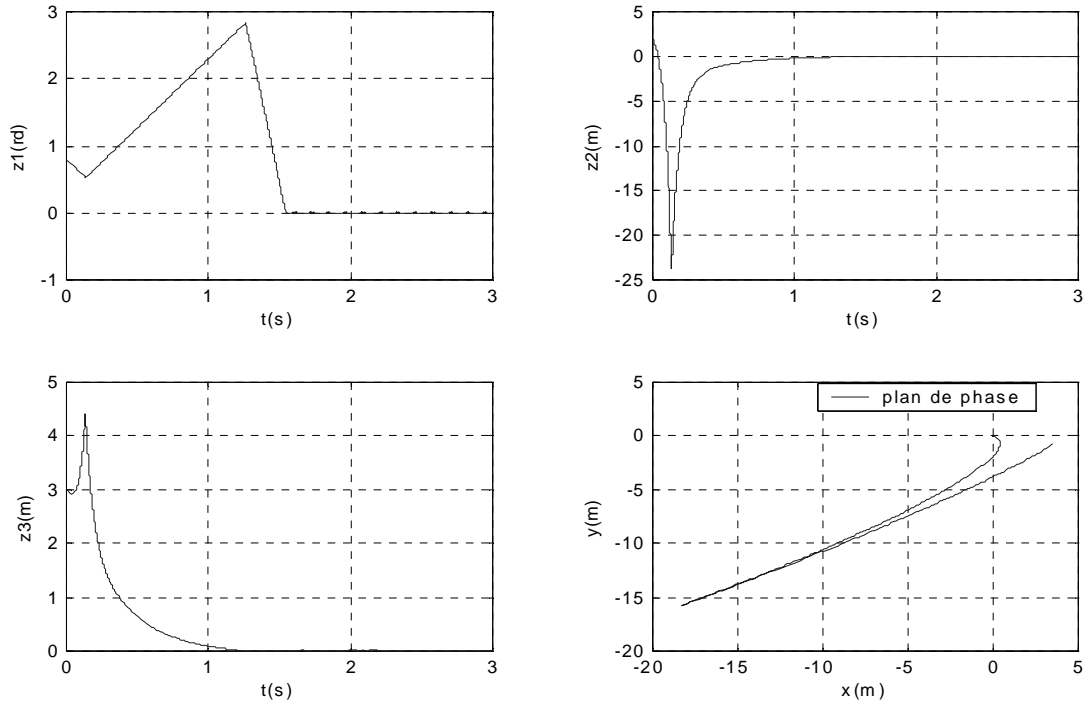


Figure 4.2. Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$ .

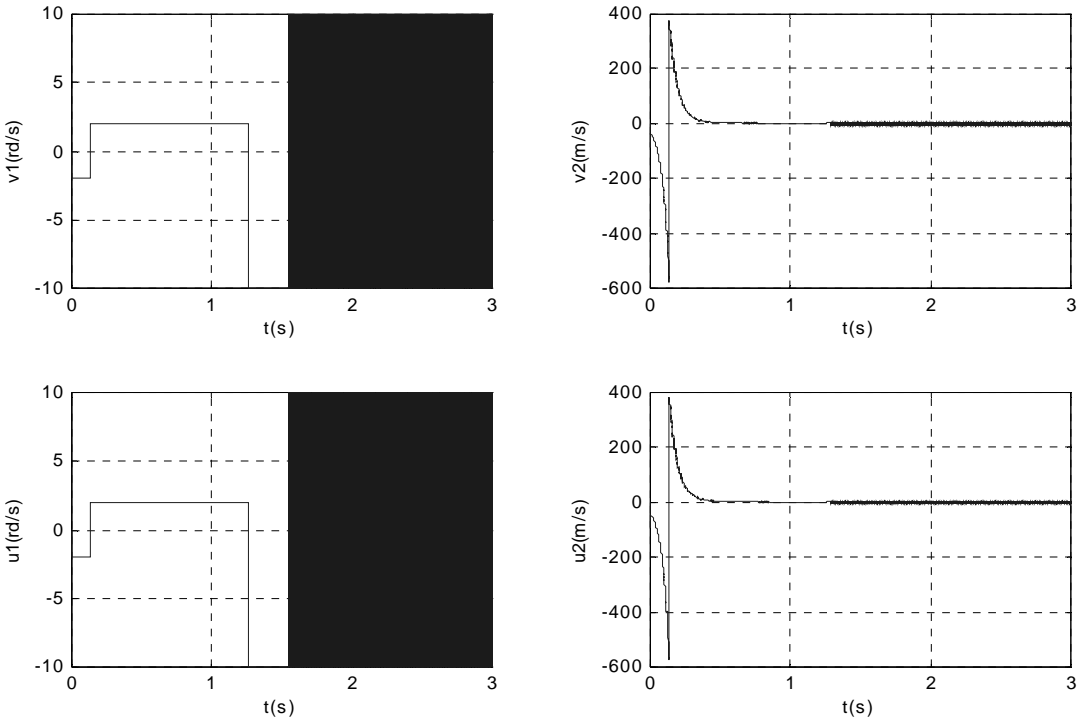


Figure 4.3. Commandes en vitesse.

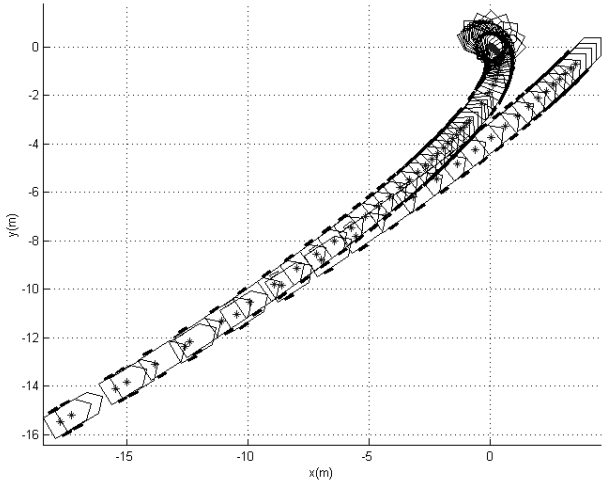


Figure 4.4. Mouvement du robot.

### B - Cas de stabilisation avec deux commandes par MGO2

Dans le cas précédent, en ayant choisi une commande par modes glissants de premier ordre au niveau de la première étape, la surface  $s_1 = 0$  est atteinte en temps fini mais avec une précision de l'ordre de  $o(\tau)$ . De plus, l'effet de chattering apparaît au niveau des variables d'états  $z_1, z_2$  et  $z_3$ . Pour éviter l'effet de chattering et améliorer la précision de la convergence de chaque variété, nous avons remplacé la commande  $v_{11}$  par un algorithme glissant d'ordre deux. Parmi les algorithmes exposés, trois types ont été choisis, à savoir :

- a)- l'algorithme de twisting classique,
- b)- la version modifiée de l'algorithme de twisting (twisting accéléré),
- c)- l'algorithme de Drift,
- d)- l'algorithme du super twisting.

Pour les applications a), b) et c) une extension dynamique est introduite dans le système (degré relatif égal 1). Ceci est nécessaire dans la première étape de la conception de la commande. Le système résultant est donné par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_4 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2 (z_4 + p^1(z, t)) \\ \dot{z}_4 = w \end{cases} \quad (4.39)$$

Avec la supposition que  $\left| \frac{dp^1(z, t)}{dt} \right|$  est bornée, le système est contraint à atteindre la surface en temps fini.

#### a)-Cas du Twisting classique

La loi de commande  $v_{11}$  est donnée par la forme suivante :

$$w = \begin{cases} -\rho_m \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } s_1 \dot{s}_1 \leq 0, \\ -\rho_M \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } s_1 \dot{s}_1 > 0, \end{cases}$$

avec les paramètres  $s_1 = z_1 - 4t$ ,  $\rho_m = 5$ ,  $\rho_M = 10$ .

En procédant de la même manière pour les étapes, on obtient une convergence en temps fini pour tout le système comme il est montré dans les figures ci-dessous 4.5, 4.6 et 4.7. La surface  $s_1 = 0$  ( $z_1 = 4t$ ) ayant été atteinte, l'algorithme glissant du second ordre de la seconde étape entraîne la convergence de  $z_2$  et  $z_3$  vers zéro. Ceci réalisé, la variable  $z_1$  converge également vers l'origine grâce à la commande par modes glissants d'ordre un donnée dans la troisième étape. De plus, il est à noter que la surface  $s_1$  est atteinte avec une précision de l'ordre de  $o(\tau^2)$  avec une commande par modes glissants d'ordre deux.

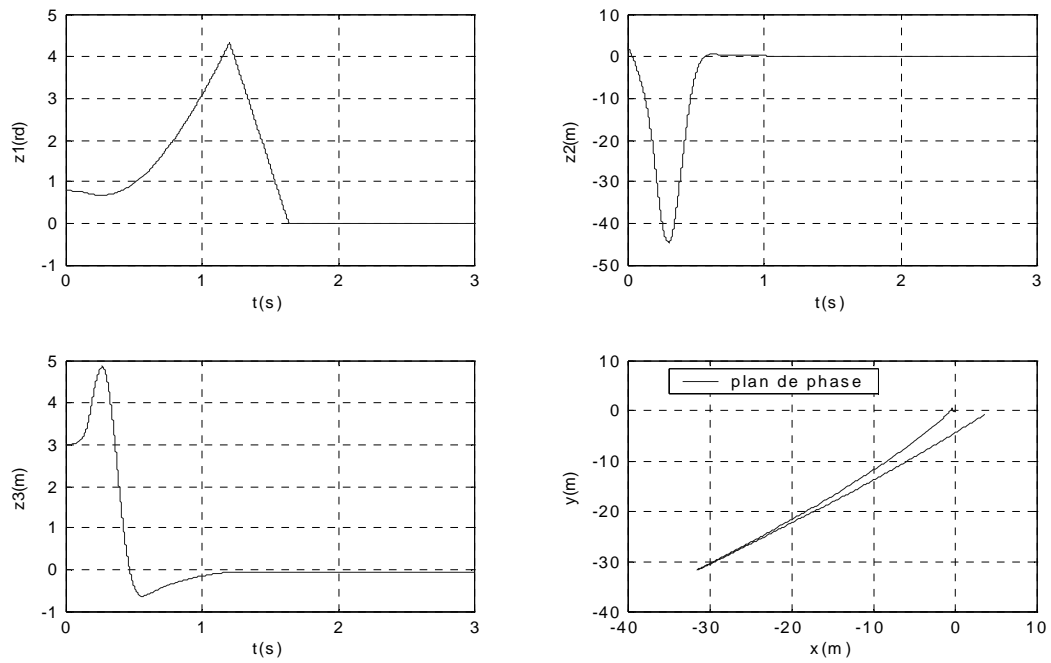


Figure 4.5. Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$ .

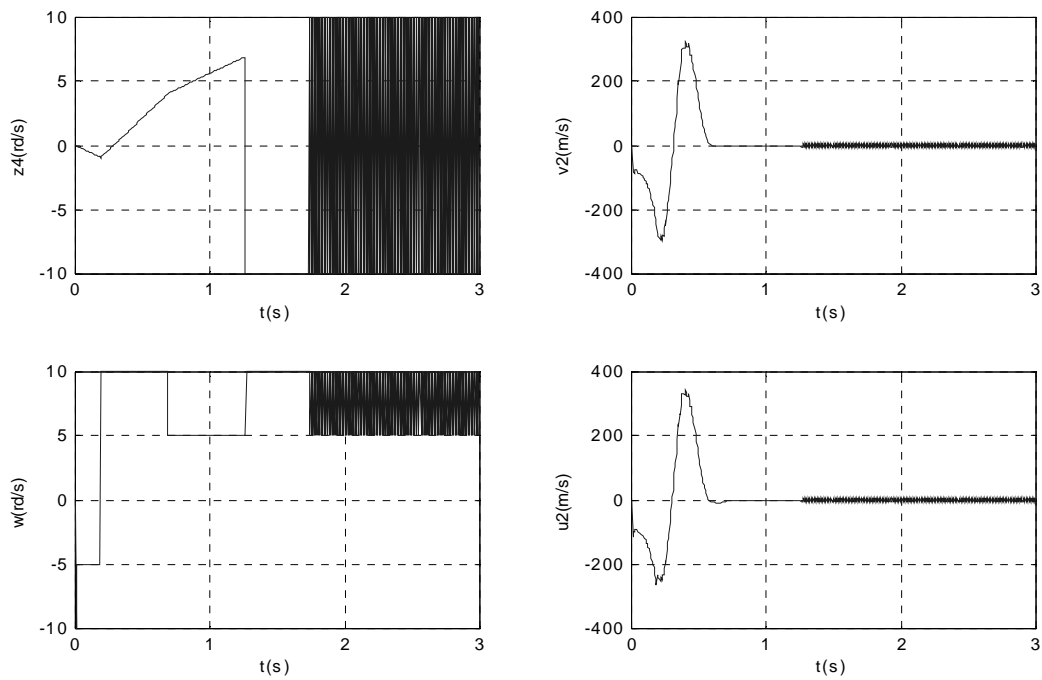


Figure 4.6. Commandes en vitesse.

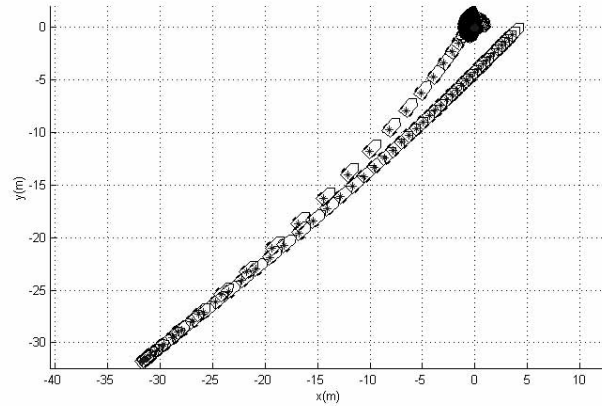


Figure 4.7. Mouvement du robot.

### b)-Cas du Twisting accéléré

Dans le but d'améliorer la convergence du système vers l'origine, on a appliqué l'algorithme du twisting accéléré. La loi de commande est donnée par :

$$w = -\beta^2 s_1 - 2\beta \dot{s}_1 + \begin{cases} -\rho_m \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } s_1 \dot{s}_1 \leq 0, \\ -\rho_M \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } s_1 \dot{s}_1 > 0, \end{cases}$$

avec

$$\beta = 4, \rho_m = 5, \rho_M = 10.$$

En procédant aussi de la même manière pour les étapes, on obtient une convergence en temps fini pour tout le système comme il est montré dans les figures 4.5, 4.6, 4.7. En comparant les trajectoires dans le plan de phase correspondant au twisting classique (figure 4.6) avec celles du twisting accéléré (figure 4.8), on remarque bien que, l'utilisation de l'algorithme du twisting accéléré permet de diminuer l'amplitude des trajectoires et le temps de convergence. A travers les tests de simulation effectués pour différentes valeurs de  $\beta$ , on a remarqué que le taux de convergence est réglé par le paramètre  $\beta$ , au fait, plus  $\beta$  croit, plus la convergence est rapide. Au niveau des graphes de commandes en vitesse pour le cas du twisting classique et celui du twisting accéléré (figures 4.6 et 4.9), on remarque aussi qu'il existe une différence du point de vue amplitude de la commande. En effet, avec l'algorithme du twisting accéléré, l'amplitude des entrées de commandes est diminuée.

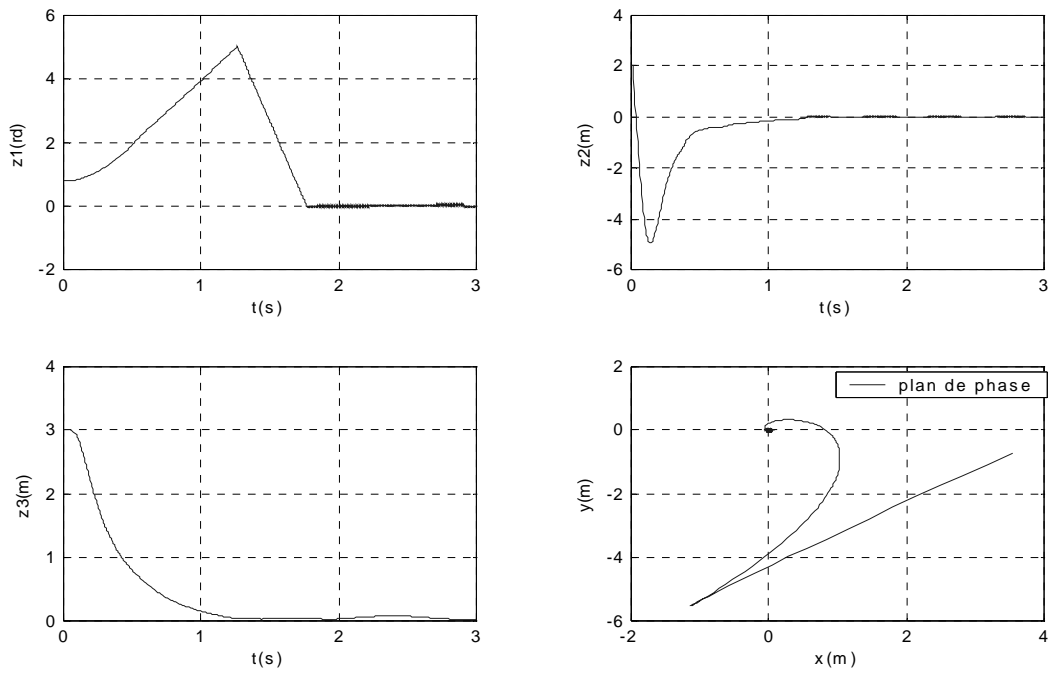


Figure 4.8. Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$ .

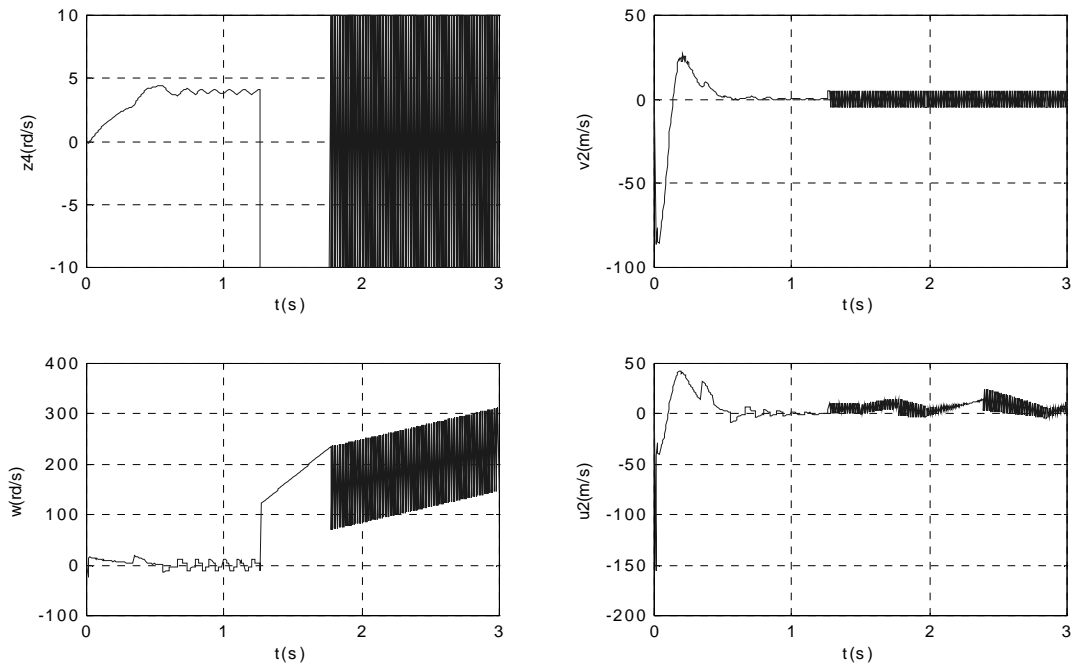


Figure 4.9. Commandes en vitesse.

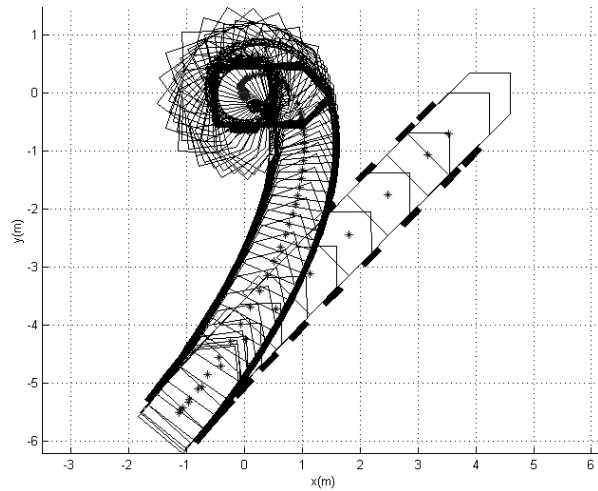


Figure 4.10. Mouvement du robot.

### c)-Cas de l'algorithme de Drift

Le test en simulation a été effectué aussi en utilisant l'algorithme de Drift au niveau de la première étape. La loi de commande est donnée par

$$w = \begin{cases} -V_m \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } s_1 \dot{s}_1 \leq 0, \\ -V_M \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } s_1 \dot{s}_1 > 0, \end{cases}$$

avec les paramètres  $V_m = 5, V_M = 12$ .

Les résultats obtenus de l'application de l'algorithme par modes glissants d'ordre deux avec cette loi de commande sont représentés ci-dessous par les figures 4.11, 4.12, 4.13. Ces figures montrent bien le comportement des différentes variables du système au cours des trois étapes. La trajectoire de phase (figure 4.11) ainsi que le mouvement du robot unicycle (figure 4.13) converge vers l'origine de manière robuste. En effet, l'état du système est stabilisé en temps fini.

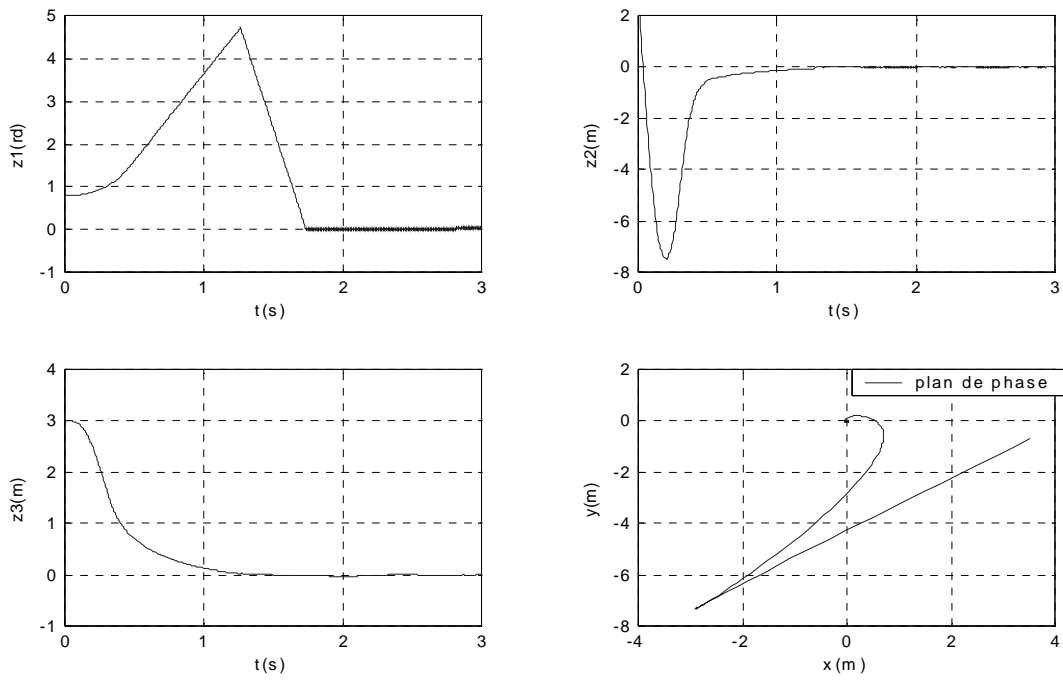


Figure 4.11. Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$

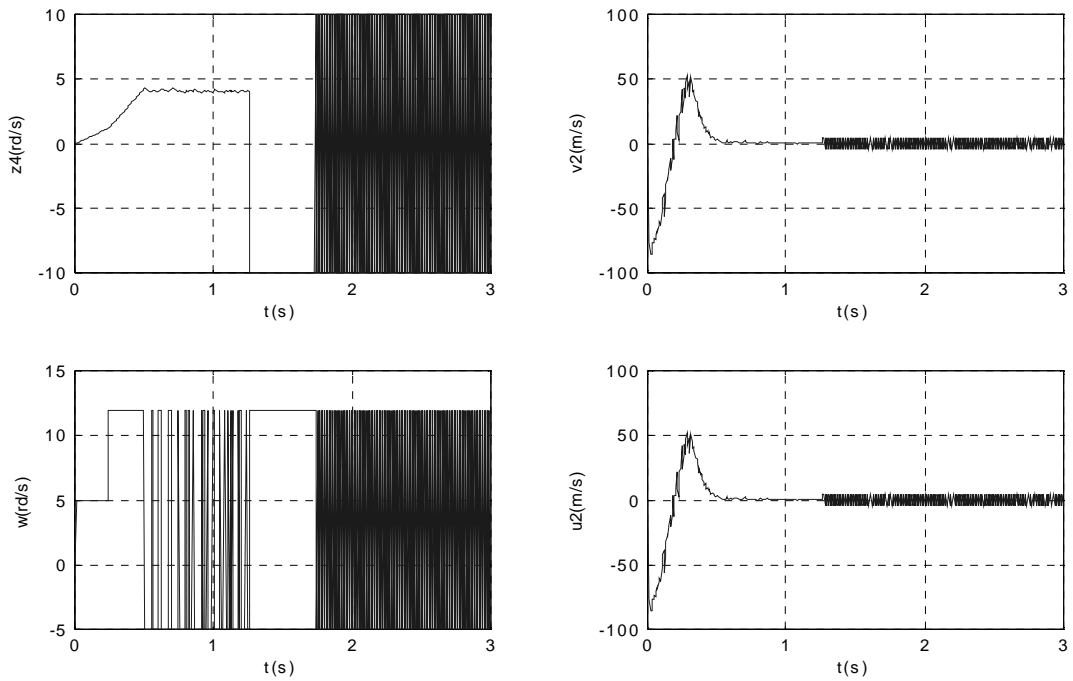


Figure 4.12. Commandes en vitesse.

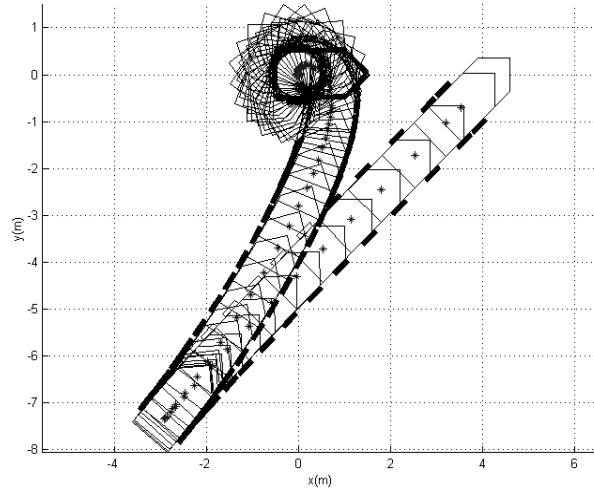


Figure 4.13. Mouvement du robot.

#### d)-Cas du super Twisting

Nous donnons ci-dessous les résultats obtenus lorsqu'on utilise l'algorithme du super twisting. Au niveau de la première étape la loi de commande  $v_1$  est donnée par

$$\begin{aligned} v_1 &= -\lambda |s_1|^{1/2} \text{sign}(s_1) + u_1, \\ \dot{u}_1 &= -W \text{sign}(s_1) \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec les paramètres suivant :  $s_1 = z_1 - 4t$ ,  $W = 1$ ,  $\lambda = 2$ .

Les résultats de l'application de cet algorithme obtenus en figures 4.14, 4.15, 4.16 montrent que l'état du robot unicycle est encore une fois stabilisé de manière robuste et en temps fini. On voit bien que  $z_2$  et  $z_3$  convergent vers zéro au bout d'un temps  $t \simeq 1.2 \text{ sec}$ , et la variable  $z_3$  converge au bout de  $t = 2.2 \text{ sec}$ . En comparant ces figures avec les figures 4.2, 4.3, 4.5, on remarque qu'avec un super twisting utilisé au niveau de la première phase, l'effet de chattering est éliminé. Ces résultats sont les mêmes que ceux obtenus ci-dessus, seulement dans la pratique où on ne dispose pas toujours de l'information sur  $\dot{s}$ , l'utilisation de cet algorithme est souhaitable. De plus, par ses bonnes propriétés de robustesse, ce contrôleur est utilisé pour réaliser un dérivateur robuste en temps réel.

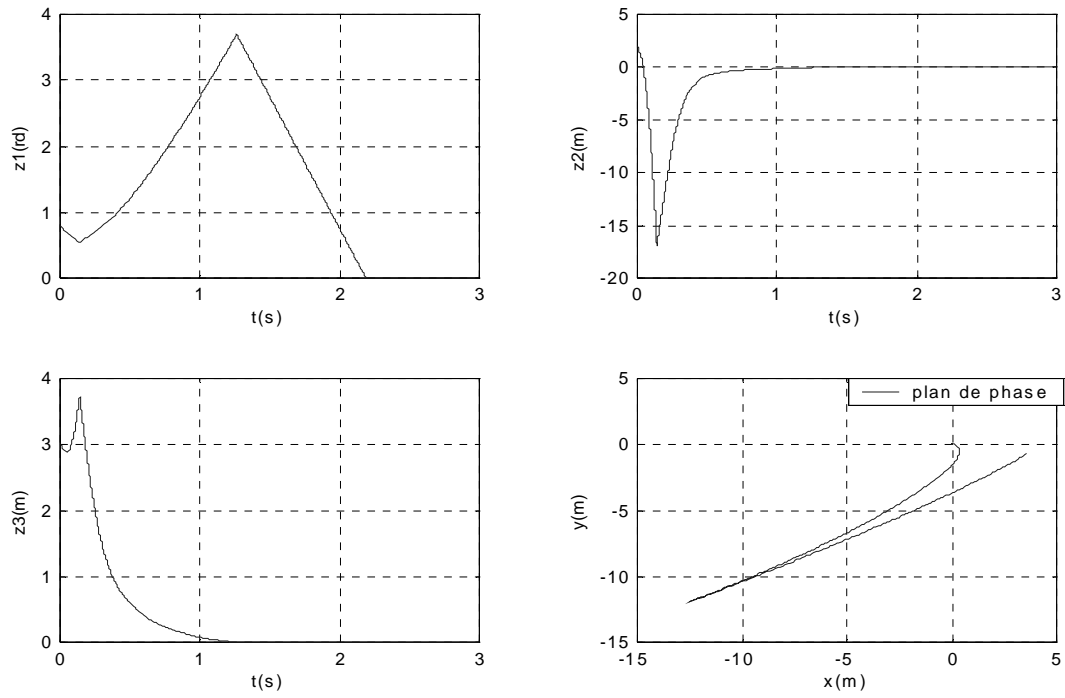


Figure 4.14. Coordonnées  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et trajectoire de phase  $y=f(x)$ .

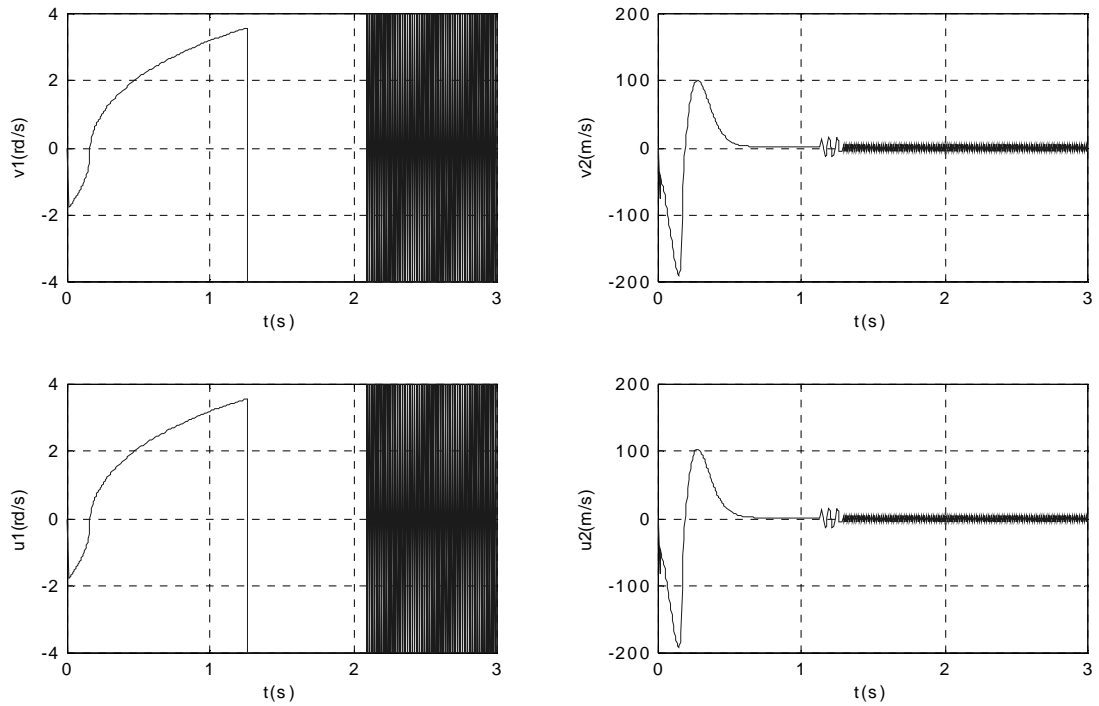


Figure 4.15. Commandes en vitesse.

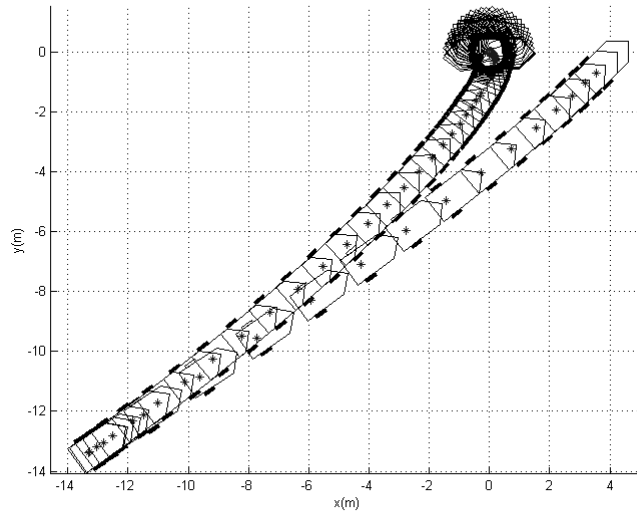


Figure 4.16. Mouvement du robot.

L'intérêt d'utiliser les modes glissants d'ordre supérieur est qu'après la première étape, la dynamique équivalente réinjectée dans le reste du système est d'autant plus précise que l'ordre de l'algorithme est important. Le choix d'une stratégie de commande par modes glissants d'ordre deux permet de faire face au chattering, du moment que la discontinuité agit sur la première dérivée de la commande  $v_{11}$  au lieu de  $v_{11}$ . De plus, comme on le voit la trajectoire du système est douce (lisse) du moment qu'il y a moins de perturbations et d'incertitudes sur les informations injectées dans la dynamique équivalente en deuxième étape. En effet, la variété est atteinte avec une précision de l'ordre de  $o(\tau^2)$  et la dynamique équivalente est  $\dot{z}_3 = z_2(a + o(\tau))$ , alors qu'elle est  $\dot{z}_3 = z_2(a + o(1))$  dans le cas d'un mode glissant d'ordre un.

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilisation robuste et en temps fini de systèmes non holonomes via les modes glissants d'ordre supérieur. L'étude de la première partie avait pour but d'exposer les notions essentielles des fondements théoriques de l'approche des modes glissants d'ordre supérieur. On sait bien que cette approche a été introduite à l'origine du problème de chattering. Par ailleurs, on a vu qu'il y a un lien étroit entre les modes glissants et le degré relatif du système concernant le problème de convergence en temps fini sur la surface. Il a été vu aussi à la deuxième partie que l'utilisation des modes glissants d'ordre supérieur représente une bonne solution au problème de la stabilisation robuste de systèmes non holonomes. En effet, le chattering est totalement éliminé, et la convergence est obtenue en temps fini, tout en garantissant une meilleure précision en réalisation. Les résultats de simulation obtenus par application d'algorithmes glissants d'ordre deux pour la stabilisation robuste et en temps fini de l'unicycle ont illustré ces performances.



Deuxième partie  
Conclusion générale



Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au problème de la commande de systèmes non holonomes par modes glissants d'ordre supérieur, et ceci dans un but de stabilisation.

L'objectif de notre travail a été d'élaborer différents contrôleurs par modes glissants d'ordre un puis d'ordre deux pour la stabilisation robuste et en temps fini d'une classe particulière de systèmes non holonomes (robots mobiles à roues) soumis à des perturbations.

Afin d'atteindre cet objectif, nous avons présenté, dans un premier temps, le problème de la stabilisation de systèmes non holonomes ainsi qu'un état de l'art sur les modes glissants d'ordre supérieur. Pour cela, nous avons donné une présentation générale, des différentes formes canoniques de systèmes non holonomes, des différentes approches pour résoudre ce problème ainsi que des développements récents sur les modes glissants d'ordre supérieur qui se manifestent par la construction de contrôleurs robustes universel d'ordre  $r$  arbitraire basés sur des différentiateurs exactes d'ordre  $r$  aussi.

La modélisation cinématique et la mise en forme chaînée de systèmes non holonomes ont fait l'objet du deuxième chapitre. Une représentation de la modélisation des robots mobiles à roues a été présentée de façon générale pour les robots mobiles à roues, et de façon particulière et détaillée pour les robots mobiles de type  $(2, 0)$  et  $(1, 1)$ . L'étude sur la mise en forme chaînée de systèmes non holonomes nous a permis d'élaborer deux modèles en forme chaînée correspondant chacun à ces deux types de robots mobiles.. Il a été vu par la suite qu'un système non holonome perturbé peut être mis, sous certaines conditions, sous forme chaînée perturbée.

Avant d'entamer l'étude des modes glissants d'ordre supérieur, et dans le but de mieux comprendre l'apport et l'utilité de ces modes, nous avons consacré le chapitre trois à l'étude du problème de la stabilisation via les modes glissants classiques, c'est à dire d'ordre un, dont les principes sont les mêmes. Nous avons alors présenté les notions de base telles que l'attractivité et l'invariance des surfaces de glissements, la commande équivalente, la dynamique en régime glissant, les propriétés de robustesse, la réticence ainsi qu'une application sur un moteur DC. Pour notre application sur les systèmes non holonomes, deux formes de stabilisation robuste par modes glissants d'ordre un ont été élaborées pour une forme chaînée perturbée d'un système non holonome de dimension trois. Sous certaines conditions initiales sur l'état du système, et selon le choix de la forme du terme discontinu de la loi de commande, la première procure une convergence en temps fini ou asymptotique, tandis que la deuxième procure une stabilisation pratique. Il a été vu que la forme chaînée choisie est vraiment bien appropriée pour une stratégie de commande à structure variable. Les résultats de simulation sur un robot mobile de type unicycle montrent bien les performances obtenues par ces deux types contrôleurs en terme de convergence et de robustesse. Toutefois, ces performances s'en trouvent dépréciées si on veut éliminer le chattering. Il fallait donc trouver une autre solution qui permet d'avoir un bon compromis performance (au niveau de la vitesse de convergence) et robustesse de la commande tout en éliminant le chattering.

Pour pallier à ce problème, nous avons utilisé l'approche par modes glissants d'ordre supérieur. Le principe général est de contraindre le système à évoluer sur des surfaces définies de manière à ce que le comportement du système y soit stable et en temps fini. Il

a été vu que les modes glissants d'ordre supérieur étaient en étroite relation avec le degré relatif du système considéré, notamment en ce qui concerne les problèmes de convergence en temps fini sur la surface choisie ou la réduction du phénomène de chattering. L'un des intérêts des modes glissants d'ordre supérieur est que la dynamique équivalente réinjectée dans le système est d'autant plus précise que l'ordre du système est important. Des algorithmes permettant de générer des régimes glissants d'ordre deux ont été développés afin de stabiliser de façon robuste et en temps fini un système non holonome de dimension trois. Les principaux algorithmes glissants d'ordre deux utilisés s'appuient sur l'algorithme de Twisting accéléré. Il est à noter que dans la pratique, il est souhaitable d'utiliser la version discrétisée de ces algorithmes ou d'autres qui nécessitent juste l'information sur la surface  $s$  (et non de ses dérivées successives) tel est le cas de l'algorithme du super Twisting déjà vu. Des simulations sur le robot mobile unicycle ont illustré les bonnes performances de la commande par modes glissants d'ordre supérieur. En effet, le chattering est éliminé et une stabilisation robuste et en temps fini est obtenue avec une meilleure précision.

En perspective, il serait intéressant de rechercher des algorithmes générant des modes plus importants ( $r > 2$ ) pour la stabilisation de systèmes non holonomes de dimension plus élevée ( $n > 3$ ), tel est le cas du Robucar : robot mobile de type (1,1) et de dimension  $n = 4$ . Ce robot mobile disponible au niveau du laboratoire de robotique du CDTA, vient juste d'être opérationnel et on espère mettre en validation des stratégies de commande par modes glissants d'ordre deux voir trois, pour certains objectifs de contrôle tels que la stabilisation ou la poursuite de trajectoire. Un autre point est celui de prendre en considération le cas où les hypothèses idéales sur les contraintes cinématiques de non holonomie (roulement pur sans glissement des roues de robots mobiles) ne sont plus satisfaites, c'est à dire d'autres formes de perturbations seront considérées au niveau du modèle. Une autre perspective de ce travail est celle d'étudier les performances de la commande par modes glissants d'ordre supérieur en présence de ces formes de perturbations.

# Troisième partie

## Annexes



### Annexe 1. Notions de degré relatif et dynamique des zéros

Considérons le système (1.8) avec sa sortie  $h = s(t, x)$  définie comme fonction contrainte.

Un système de commande est de degré relatif  $r$  par rapport à la sortie  $s$  si la commande  $u$  apparaît pour un premier temps explicitement seulement dans la dérivée totale d'ordre  $r$  de  $s$ .

Un degré relatif égal à  $r$  signifie [29] qu'au voisinage d'un point donnée :

$$L_f^0 h, L_f h, \dots, L_f^{r-2} h = 0$$

et en ce point, on a :

$$L_f^{r-1} h \neq 0$$

ou de façon plus simple on a :

$$\frac{\partial s^i}{\partial u} \equiv 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-1.$$

et à chaque point donné :

$$\frac{\partial s^r}{\partial u} \neq 0$$

Dans ce cas la condition de régularité de glissement donnée par l'équation (20) est satisfaite.

**Proposition 13** *Supposons que le système (1.8) est de degré relatif  $r$  au point  $x_0$ . Posons  $\psi_i(x) = L_f^{i-1} h_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, r$  et choisissons des fonctions  $\psi_{r+j}(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-r$ , indépendantes des  $r$  premières fonctions et vérifiant localement au tour de  $x_0$ ,  $L_{\frac{\partial f}{\partial u}} \psi_{r+j}(x) = 0$ , ceci est possible grace au théorème de Frobenius [29].*

Définissons de nouvelles coordonnées  $z$  tels que  $z = \Phi(x)$  et  $\Phi(x) = [\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)]$  un difféomorphisme local sur un voisinage de  $x_0$ .

Ainsi le système (1.8) est exprimé localement, autour de  $z_0 = \Phi(x_0)$  comme suit :

$$\begin{cases} z_i = z_{i+1}, i = 1, 2, \dots, r-1 \\ z_r = L_f^r \sigma(\Phi^{-1}(z), u) \\ z_{r+j} = \gamma_j(z), j = 1, 2, \dots, n-1 \\ y = z_1. \end{cases}$$

où  $\gamma_j(z)$  est une fonction vecteur de dimension  $n-r$ , le système (4.24) est dit alors sous forme normale.

La dynamique des zéros correspond à la dynamique du comportement interne du système quand les conditions initiales et les actions de commande contraignent l'évolution des trajectoires d'état à maintenir localement une valeur de sortie nulle :

$$h = s(x) = 0.$$

Il y a une relation certaine entre la notion de degré relatif et la dynamique des zéros. La dynamique des zéros correspond ici au régime glissant idéal d'ordre 1. Généralement cette dynamique est supposée asymptotiquement stable en un point d'équilibre de la surface  $s$ . Dans ce cas le système (1.8) est dit à minimum de phase par rapport à la sortie  $h = s(t, x)$ .

## Annexe 2. Preuve sur la convergence de l'algorithme du Twisting

Grâce aux hypothèses sur les gains  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$ , on peut montrer que les trajectoires du système (4.17) dans le plan de phase  $(x_1, x_2)$  sont inscrites à l'intérieur de deux trajectoires limites définies par les bornes des fonctions  $\chi$  et  $\xi(\pm C, K_m$  et  $K_M)$  et qui convergent toutes deux en temps fini vers l'origine (voir Figure A.1).

Montrons que, dans le cas de la limite extérieure, le système converge en temps fini vers l'origine.

Sans perte de généralité, on peut considérer que  $x_1(0) = 0^+, x_2(0) > 0$ .

Considérant (4.17), le système devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\lambda_M K_m + C \end{cases}$$

ce qui donne par intégration

$$\begin{cases} x_2 = (-\lambda_M K_m + C)t + x_2(0) \\ x_1 = (-\lambda_M K_m + C)\frac{t^2}{2} + x_2(0)t \end{cases}$$

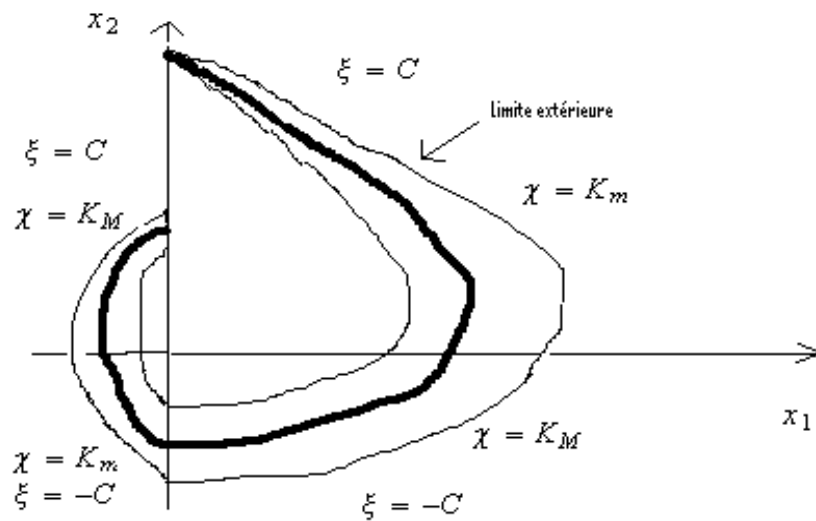


Figure A.1. Trajectoires limites (en trait fin).

Puisque, par hypothèse,  $\lambda_M > \frac{C_0}{K_m}$ ,  $x_2$  décroît et s'annule pour

$$t_1 = \frac{x_2(0)}{\lambda_M K_m - C},$$

où

$$x_1(t_1) = \frac{x_2^2(0)}{2(\lambda_M K_m - C)}$$

La commande commute alors étant donné que  $x_1 x_2$  change de signe. On a maintenant  $x_1(0) >$ ,  $x_2(0) = 0^-$  et le comportement du système est donné par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = -(-\lambda_m K_M + C)t \\ x_1 = -(\lambda_m K_M + C)\frac{t^2}{2} + \frac{x_2(0)}{2(\lambda_M K_m - C)} \end{array} \right\}$$

$x_1$  et  $x_2$  décroissent et la surface  $x_1 = 0$  est atteinte pour le temps

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{(\lambda_M K_m - C) + (\lambda_m K_M + C)}} x_2(0)$$

où l'on a

$$x_2(t_1 + t_2) = -\frac{(\lambda_m K_M + C)}{(\lambda_M K_m - C)} x_2(0)$$

$u$  commute alors une nouvelle fois et le système évolue dans la partie du plan  $x_1(0) < 0$ ,  $x_2(0) < 0$  jusqu'au nouvel instant de commutation donné par :

$$t_3 = \frac{1}{(\lambda_M K_m - C)} \sqrt{\frac{(\lambda_m K_M + C)}{(\lambda_M K_m - C)}} x_2(0),$$

et

$$\begin{aligned} x_2(t_1 + t_2 + t_3) &= 0 \\ x_1(t_1 + t_2 + t_3) &= -\frac{1}{2} \frac{(\lambda_m K_M + C)}{(\lambda_M K_m - C)^2} x_2^2(0). \end{aligned}$$

Le dernier quadrant du plan de phase est alors parcouru et, en procédant comme précédemment, on obtient que la loi de commande commute après un temps

$$t_4 = \frac{\omega_1(0)}{(\lambda_M - \Pi)},$$

où l'état a pour valeur

$$x_1(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 0$$

$$x_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = \sqrt{\frac{(\lambda_m K_M + C)}{(\lambda_M K_m - C)}} x_2(0).$$

A ce stade, on peut remarquer qu'on est revenu au même point dans le plan de phase qu'au début de l'algorithme, si ce n'est que la condition initiale sur  $x_2$  est maintenant donnée par :

$$x_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = rx_2(0)$$

avec

$$r = \frac{(\lambda_m K_M + C)}{(\lambda_M K_m - C)},$$

qui est inférieur à un puisque par hypothèse,  $\lambda_M K_m - C_0 > \lambda_m K_M + C$ . Le temps total mis pour effectuer cette rotation est de :

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{1}{\lambda_M - \Pi} (1 + \sqrt{r})(1 + \frac{1}{\sqrt{r}})\omega_1(0),$$

soit

$$T = \frac{1}{\lambda_M K_M - C} (1 + \sqrt{r})(1 + \frac{1}{\sqrt{r}})x_2(0).$$

Il apparaît donc que, dans le plan de phase  $(x_1, x_2)$ , les trajectoires décrivent un nombre infini de spirales tout en convergeant en temps fini vers l'origine. Les fonctions  $x_1$  et  $x_2$  décroissent avec une progression géométrique et atteignent la surface de glissement  $x_1 = x_2 = 0$  dans un temps fini égal à

$$t_\infty = \sum_0^\infty T_i = T(\frac{1}{1-r}).$$

# Bibliographie

- [1] H. Asada et J.J.E. Slotine, "Robot analysis and control". Wiley, New York, 1985.
- [2] H. Asada et J.J.E. Slotine, " Robot analysis and control". A WILEY interscience publication, John WILEY and sons, 1986.
- [3] G. Bartolini, A. Ferrara, et E. Usai, "Chattering avoidance by second-order sliding mode control". IEEE Trans. Automat. Control, vol. 43, no.2, pp.241-246, 1998.
- [4] M.K. Benmami, P. Rouchon, "Robust stabilisation of flat and chained systems". Proceedings of the European control conference, ECC'97, p.2642-2646, 1995.
- [5] A.M. Bloch et al, "Control and stabilisation of nonholonomic dynamic systems". IEEE Trans. On Automatic Control, vol 37. N°11., pp.1746-1757, 1992.
- [6] A.M. Bloch, S.V. Drakunov, "Stabilisation of nonholonomic systems via sliding modes". In proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, pp.2961-2963, 1994.
- [7] R.W. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilisation". In differential geometric control theory, eds Boston : Birkhauser, pp.181-191, 1983.
- [8] G. Campion, G. Bastin, B. D'Andréa-Novel, "Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots". IEEE, transactions on Robotics and Automation, vol 12, n°1, february 1996.
- [9] J.A. Chacal B et H. Sira-Ramirez, " On the sliding mode control of wheeled mobile robots". In Proc.IEEE Int Conf Syst.Man. Cybern., pp.938-1943, sep1994.
- [10] B. D'Andréa-Novel, G. Campion, G. Bastin, "Modeling and Control of nonholonomic wheeled mobile robots". Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, Sacramento, pp.1130-1135, April 1991.
- [11] B. D'Andréa-Novel, G. Campion, G. Bastin, "Dynamic feedback linearization of non-holonomic wheeled mobile robots". Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, Nice, France-May 1992.
- [12] M. Djemai and J.P. Barbot, "Smooth manifolds and high order sliding mode control". IEEE Conf. on Decision and Control. 2002.
- [13] B. Drazhenovic, "The invariance conditions in variable structure systems". Automatica, Vol.5, No 3, pp.287-295, 1969.
- [14] S.V. Emelyanov et Taran, "Sur une classe de systèmes de régulation automatique à structure variable". Journal de l'académie des sciences d'URSS, Energétique et Automatique no3, 1962.

- [15] S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, L.V. Levantovsky, "Higher order sliding regimes in the binary control systems". Soviet Physics, Doklady, vol. 31, no. 4, pp. 291-293, 1986.
- [16] S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, L.V. Levantovsky., "Drift algorithm in control of uncertain processes". Problems of control and information theory, Vol 15, no6, pp : 425-438, 1986.
- [17] [Esp-98] F. Espinosa, et al, "Modeling and Simulation of the Kinematic and Dynamic Behavior of A Fork-Lift- Truck". 3 IFAC Symposium on Intelligent Autonomuous Vehicles, March 27-29, 1998, Madrid.
- [18] M. Fliess, "Automatique et corps différentiels," Forum Math.,Vol. 1 pp :227-238, 1989.
- [19] M. Fliess, "Generalized canonical forms for linear and nonlinear dynamics". IEEE Trans AC,Vol.35, pp : 994,1001, 1990.
- [20] M. Fliess, "Sur la commande en régime glissant", C.R. Acad. Sc. Paris,t.313, série I,pp 951-956, 1992.
- [21] M. Fliess, J. Levine, P. Martin et P. Rouchon, "Flatness and defect of non-linear systems : Introductory theory and examples". International Journal on Control, Vol.61, No6, pp.1327-1361,1995.
- [22] A.F.Filippov, "Equations différentielles à second membre discontinu", Journal de mathématiques, tome 51 no1,1960
- [23] A.F. Filippov, "Differential Equations with Discontinuous Right-hand Side". Kluwer, Dordrecht, the Hetherlands, 1988.
- [24] T. Floquet, "Contribution à la commande par modes glissants d'ordre supérieur". Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lille. Décembre 2000.
- [25] T. Floquet et al, " Higher order sliding mode stabilisation for a class of non holonomic perturbed system". Automatica 2003.
- [26] L. Fridman, et A. Levant, "Sliding Modes of Higher Order as a Natural Phenomenon in Control Theory", in : F. Garofalo, L. Glielmo (eds.). Robust Control via Variable Structure & Lyapunov Techniques. - (Lecture Notes in control and Information Science ; 217), Springer-Verlag, London, 107-133, 1996.
- [27] F. Harashima, H. Hashimoto, K. Maruyama, "Practical robust control of robot arm using variable structure systems". Proc, of IEEE, Int. Conf on Robotics and Automation, San Francisco, 532-538, 1986.
- [28] W. Huo, S.S. Ge, "Exponential stabilisation of non-holonomic systems : an ENI approach". Int. J. Control, vol.74, No.15, 1492-1500, 2001.
- [29] A. Isidori, " Nonlinear Control Systems". Springer Verlag, New York, (1989).
- [30] U. Itkis, " Control systems of variable structure". Wiley, New-York, 1976.
- [31] Z-P. Jiang et H. Nijmeijer, "A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form", IEEE.Transactions on Automatic Control, vol.44, N°.2,pp. 265-279, 1999.
- [32] Z.-P. Jiang et al, "Saturated stabilization and tracking of a nonholonomic mobile robot". Systems and Control letters 42, pp.327-332. Elsevier Science B.V .2001.

- [33] A. Levant A. (L.V. Levantovsky), "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control". *International Journal of Control*, vol. 58, no.6, pp.1247-1263, 1993.
- [34] A. Levant, "Higher order sliding : Collection of design tools". *Proceedings of the 4th European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [35] A. Levant, "Arbitrary-order sliding modes with finite time convergence". *Proceedings of the 6th IEEE Mediterranean Conference on Control and systems*, Alghero, Italy 1998.
- [36] A. Levant, "Robust exact differentiation via sliding mode technique". *Automatica*, 34(3),pp.379-384, 1998.
- [37] A. Levant, "Controlling output variable via higher order sliding modes". *Proceedings of the European control conference*,Karlshruhe, 1999.
- [38] A. Levant, "Universal SISO sliding -mode controllers with finite-time convergence". *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46(9), 2001, pp.1447-1451, 2001.
- [39] A. Levant, "Higher order sliding modes and arbitrary exact robust differentiation". *Proc. of the European conference control*, ECC'01, porto, Portugal, pp.996-1001, september 2001.
- [40] A. Levant, "Universal output-feedback SISO controller". *Proc. of the 15th IFAC Congress*, Bracelona, July 2002.
- [41] A. Levant, "Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers". *Proc. Of the 42 nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA, december 2003.
- [42] A. Levant, "Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control ". *Int. Journal of Control*, 76 (9/10), pp.924-941, 2003.
- [43] R.T. M'closky, R.M. Murray, "Convergence rate for nonholonomic systems in power form". In *proceedings of the Americain Control Conference*, Chicago, IL, USA, pp.2489-2493, 1993.
- [44] R.M. Murray, S. Sastry, "Nonholonomic motion planning : steering using sinusoids". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.38, pp. 77-716, 1993.
- [45] G. Oriolo et al, "WDR Control via dynamic feedback linearisation : design , implementation and experimental validation". *IEEE Trans. On Control Systems Technology*, 2002.
- [46] W. Perruquetti, J.P. Richard et P. Borne, "A Generalized Regular Form for Sliding Mode Stabilisation of MIMO Systems". *Proceeding of the 36<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, 1997.
- [47] C. Samson, "Control of chained systems : application to path folowing and time-varying point-stabilization of mobile robots". *IEEE.Tans. On Automatic Control*, vol 40. N°.1. January 1995.
- [48] J-J.E. Slotine, "Applied nonlinear control",Verlag. Prentice Hall.1990.
- [49] H. Sira-Ramirez, " Structure at infinity, zero dynamic and normal forms of systems undergoing sliding motion".*Int. J. Systems Sciences*, Vol.21 no4,665-674, 1990.
- [50] H. Sira-Ramirez, "On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems,".*Int. Journal of Control*, 57(5), pp.1039-1061, 1993.

- [51] V.I. Utkin, "Sliding mode and their application in variable structure systemes," (Mouscow : MIR), 1978.
- [52] V.I. Utkin, "Sliding modes in Optimization and Control Problems," Springer Verlag, New York, 1992.
- [53] Y.Wu, X.Yu ,Z. Man, "Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems". Systems and Control Letters, vol.34, pp.281-287, 1998.
- [54] J-M. Yang, J-H. Kim, "Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots". IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol.15, No 3, pp.578-588, Juin 1999.
- [55] A.S.I. Zinober (editor), "Deterministic Control of Uncertain Systems". Peter Pergri-nus, London, 1990.