N° d'ordre : 17 / 2011-M-ED / MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET

DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

" Houari Boumedien"

Faculté de Mathématiques

Département de Recherche Opérationnelle

MÈMOIRE

présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle.

Option : Génie Mathématiques

Par : **Slimane HADJ BRAHIM**

THÈME

Les posets flous

Soutenu le 07/12/2011, devant le jury composé de :

M^r.	Farid	BENCHERIF	M.C.A à l'U.S.T.H.B	Président
M^r.	Sadek	BOUROUBI	Professeur à l'U.S.T.H.B	Directeur de Mémoire
M^r.	Abdelhafid	BERRACHEDI	Professeur à l'U.S.T.H.B	Examinateur
M^{lle}.	Isma	BOUCHEMAKH	Professeur à l'U.S.T.H.B	Examinatrice

Remerciements

Au tout Puissant Allah qui m'a permis de surmonter toutes les épreuves.

J'exprime ma profonde gratitude au Professeur **Sadek BOUROUBI** mon Directeur de thèse, professeur à la Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B., de m'avoir proposé ce sujet et de m'avoir encadré pendant toutes ces années. Je le remercie vivement pour son aide, ses conseils, sa patience, sa disponibilité, ses orientations et ses indications. Je lui adresse toutes mes reconnaissances pour m'avoir fait confiance et pour m'avoir mis à l'aise tout au long de l'avancement de cette thèse.

Ma reconnaissance va ensuite aux personnes qui me font l'honneur de composer ce jury : Monsieur **Farid BENCHERIF**, M.C.A à la Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B., pour avoir accepté de présider ce jury.

Monsieur **Abdelhafid BERRACHEDI** (Professeur à la Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B.), Mademoiselle **Isma BOUCHEMAKH** (Professeur à la Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B.) d'avoir accepté d'être les examinateurs de ce travail.

Nous ne saurons oublier de remercier toute personne qui, d'une manière ou d'une autre, nous a aidé dans l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma mère, qui est la clé de ma réussite dans mes études, son rêve de voir son fils dans un grade d'études très avancées m'a toujours poussé à faire des efforts pour réaliser son souhait.

Mon père, qui m'aide chaque fois que j'en ai besoin.

*Mes trois soeurs, mes deux frères **NACERADINE** et **ANIS**, qui essayent de me conforter à chaque fois que je passe des périodes pénibles.*

Ma tante, qui j'aime bien et je prie Dieu pour qu'il l'aide à surpasser son handicap.

*Mon oncle **MOUHAMED**, et à toute ma grande famille.*

*Tous mes collègues de l'université, surtout **ABOUD** et **AMROUCHE**, et les fidèles amis, surtout **YAHIA** et **BABAHANI**.*

*Tous les membres du groupe **AL FERDAOUS**.*

*Tous ceux qui aiment **HADJ BRAHIM** et à tous ceux que **HADJ BRAHIM** aime.*

Tlimane Hadj Brahim.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des treillis ordinaires par deux approches différentes, à la présentation de certaines classes définies à travers chaque approche et à la présentation des théorèmes de passage entre ces deux approches.

Ensuite, nous introduisons les ensembles flous avec certaines de leurs propriétés, nous présenterons aussi les ordres flous de deux manières différentes.

Enfin, nous présenterons les treillis flous à travers les dites approches, et présenterons les théorèmes de transition entre-elles.

***Mots clés* :** Ensembles flous, posets flous, structures algébriques floues, L-treillis flous, relations floues, coupes.

Abstract

In this work, we are interested to study the ordinary lattice with two different approaches, and present some classes according to each approach, and theorems for the transition between them.

Then we introduce the fuzzy sets and some of these properties. The orders are also presented as fuzzy with two different approaches.

In the end, we present fuzzy lattices with two different approaches, and theorems of transitions between them.

***Keywords* :** Fuzzy sets, fuzzy posets, L-fuzzy lattices, fuzzy relations, cutworthy approach.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

La modélisation est devenue une issue importante dans l'ingénierie et la science. Les approches traditionnelles de modélisation insistaient énormément sur la précision et la description exacte des systèmes. L'utilisation des outils mathématiques comme les treillis ordinaires, équations aux différences, ...etc. est appropriée et justifiée pour les systèmes bien définis. Mais, quand la complexité augmente, ces outils deviennent moins efficaces. Le traitement des systèmes complexes nécessite souvent la manipulation d'informations vagues, imprécises, incertaines ou à la fois imprécises et incertaines. L'être humain est compétent dans la manipulation de tels systèmes de façon naturelle. Au lieu de raisonner en termes mathématiques, l'être humains décrit le comportement du système par des propositions linguistiques. Par exemple, un conducteur peut formuler une partie de sa connaissance par : " Si la vitesse est élevée et qu'il n'y a pas un virage, alors freiner ".

Afin de pouvoir représenter ce type d'informations, Zadeh a proposé de modéliser le mécanisme de la pensée humaine par un raisonnement approximatif basé sur des variables linguistiques. Il a introduit la théorie des ensembles flous en 1965, qui constitue une interface entre les mondes linguistiques et numériques.

Comme application, la modélisation floue est le processus par lequel un système dynamique est modélisé non dans la forme conventionnelle des treillis ordinaires, équations différentielles ou aux différences, mais dans la forme d'un ensemble de règles floues et fonctions d'appartenance. C'est une approche permettant de modéliser des systèmes non linéaires complexes, de façon qualitative.

Les mathématiques du flou, de plus en plus désignées sous le terme générique de théorie du flou, regroupent plusieurs théories qui sont des généralisations ou des extensions de leurs homologues classiques : la théorie des sous-ensembles flous étend celle des sous-ensembles classique, la logique floue étend la logique binaire, la théorie des possibilités étend celle des probabilités. Elles ont toutes pour objectifs de proposer des concepts, des techniques et des méthodes formellement rigoureuses pour recueillir, représenter et traiter des connaissances et des données floues, c'est-à-dire, contenant de l'imprécision, de l'incertitudes ou de la subjectivité ; ces trois facettes principales du flou étant souvent coexistantes.

Notre travail appartient à la théorie des sous-ensembles flous qui est l'extension de la théorie des ensembles classique.

De point de vue historique, Zadeh en 1965 a défini les $[0,1]$-ensembles flous et généralisés par la suite par J. Goguen[5] à la notion des L-ensembles flous en 1967.

D'autre part, quelques années après la création de la notion des ensembles flous, Rosenfield[8] a commencé le travail dans le domaine de brouillage des objets algébriques, avec ses travaux sur les groupes floues en 1971.

Ce mémoire se veut une contribution à cette théorie fondée sur les idées des auteurs suivants : Rosenfield (1971), Ajmal (1994-1995), Yuan et Wu (1990), Šešelja et Tepavčevič (1990-2006).

Ce travail est subdivisé en cinq chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous rappelons des notions relatives aux relations d'ordres et aux ensembles ordonnés.
- Dans le second chapitre, nous présentons le treillis, une fois comme étant une structure algébrique, et comme une structure ordonnée une autre fois, et présentons l'equivalence entre ces deux approches.
- Dans le troisième chapitre, nous introduisons les notions nécessaires aux sous-ensembles flous.
- Dans le quatrième chapitre, nous présentons les relations d'ordres floues et les posets flous.
- Dans le cinquième chapitre, nous présentons le treillis flou de deux manières différentes, d'une part, comme étant une structure algébrique floue et d'autre part, comme une structure ordonnée floue et prouvons l'equivalence entre-elles.

Chapitre 1

$\mathscr{C}$*oncepts et exemples*

Dans ce chapitre, nous allons rappeler des notions relatives aux relations d'ordres et aux ensembles ordonnés.

1.1 Fonctions caractéristiques et leurs propriétés

Soient X un ensemble non vide et $P(X)$ l'ensemble des parties de X. Pour une partie A de X, on définit une fonction caractéristique sur A de la manière suivante :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{A}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note par ailleurs par $\chi(X)$ l'ensemble des toutes les fonctions caractéristiques des sous-ensembles de X.

Théorème 1.1. *[4] $\chi(X)$ est en bijection avec $P(X)$.*

Théorème 1.2. *[4] Soit f une application de X dans $\{0,1\}$, alors : $f \in \chi(X)$.*

1.1.1 Propriétés des fonctions caractéristiques :

Soient A et B deux parties de X.

- $A \subseteq B \Longleftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$.

- $A = B \Longleftrightarrow \mu_A = \mu_B$.
- $\mu_{A \cap B} = \mu_A.\mu_B$.
- $\mu_{A \cup B} = \mu_A + \mu_B - \mu_A.\mu_B$.
- $\mu_{A \setminus B} = \mu_A - \mu_A.\mu_B$.

1.2 Relation binaire

Soient A et B deux ensembles non vides. Le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des paires ordonnées (a, b) ou $a \in A$ et $b \in B$.
Une **relation binaire** $\mathscr{R}$ est un sous-ensemble non vide de $A \times B$. La notation $(x, y) \in \mathscr{R}$ (ou $x\mathscr{R}y$) signifie que le couple (x, y) appartient à la relation $\mathscr{R}$.
Si $A = B = X$, on dit que $\mathscr{R}$ est homogène sur X.
Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble X est :

1. **Réflexive** si :
   $\forall x \in X : x\mathscr{R}x$.
   D'une manière équivalente : $\forall x \in X : \mu_{\mathscr{R}}(x, x) = 1$.
2. **Faiblement réflexive** si :
   $\forall x, y \in X$: si $x\mathscr{R}y$, alors : $x\mathscr{R}x$ et $y\mathscr{R}y$.
   D'une manière équivalente : $\forall x, y \in X$: si $\mu_{\mathscr{R}}(x, y) = 1$, alors : $\mu_{\mathscr{R}}(x, x) = 1$ et $\mu_{\mathscr{R}}(y, y) = 1$.
3. **Antisymétrique** si :
   $\forall x, y \in X : x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Longrightarrow x = y$.
   D'une manière équivalente : $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\mu_{\mathscr{R}}(x, y) = 1 \Longrightarrow \mu_{\mathscr{R}}(y, x) = 0$.
4. **Transitive** si :
   $\forall x, y, z \in X : x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Longrightarrow x\mathscr{R}z$.
   D'une manière équivalente : $\forall x, y, z \in X$, $\mu_{\mathscr{R}}(x, z) \geq \mu_{\mathscr{R}}(x, y).\mu_{\mathscr{R}}(y, z)$.

1.2.1 Relation d'ordre

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire.

Si une relation binaire $\mathscr{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive, alors elle est dite une **relation d'ordre** (ou simplement **ordre**).

L'ordre $\mathscr{R}$ est dit **total** si, pour tout $x, y \in X$, si $(x, y) \notin \mathscr{R}$ implique $(y, x) \in \mathscr{R}$.

Exemple : La relation de la divisibilité sur $\mathbb{N}^*$, définie par n/m ssi n divise m, est une relation d'ordre.

1.2.2 Relation d'ordre faible

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire.

Si une relation binaire $\mathscr{R}$ est faiblement réflexive, antisymétrique et transitive, alors elle est dite une **relation d'ordre faible** (ou simplement **ordre faible**).

1.3 Ensembles ordonnés

Un **ensemble ordonné** est un couple $P = (X, \mathscr{R})$, où X est un ensemble et $\mathscr{R}$ est un ordre.

Si $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$, on dit que x et y sont **comparables**, dans le cas contraire on dit que x et y sont **incomparables**.

Si $\mathscr{R}$ est un ordre total, $P = (X, \mathscr{R})$ est alors appelé un **ensemble totalement ordonné** (ou **ensemble linéairement ordonné** ou **chaîne**), sinon $P = (X, \mathscr{R})$ est appelé **ensemble partiellement ordonné** (ou simplement **poset**).

La **relation de couverture** d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$, notée $\prec_P$ ou simplement $\prec$, est définie par $x \prec y$ si ($x < y$ et $x \leq z < y$) implique $x = z$, on dit alors que x est **couvert** par y ou que y **couvre** x.

Le **diagramme de Hasse** d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est une représentation de son graphe de couverture dans laquelle les éléments x de P sont représentés par des points $p(x)$ du plan, de telle sorte que les deux règles suivantes soient respectées :

1. Si $x < y$, $p(x)$ est au dessous de $p(y)$.
2. $p(x)$ et $p(y)$ sont joints par un segment de droite si et seulement si $x \prec y$.

On peut représenter l'ensemble ordonné P de différentes manières :

1. Un réseau dans le plan dont les points correspondent aux éléments de X et les arcs aux couples de $\mathscr{R}$, les boucles représentant les couples de la forme (x, x).
2. Un tableau.
3. Le diagramme de Hasse.

Exemple :

Soient $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, \mathscr{R})$ l'ensemble ordonné où $\mathscr{R} = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e)\}$.

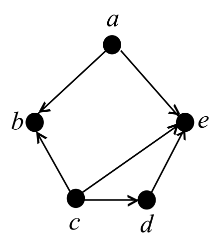


FIGURE 1.1 – Un ensemble ordonné P représenté par un réseau ordonné dans le plan.

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	1
b	0	0	0	0	0
c	0	1	0	1	1
d	0	0	0	0	1
e	0	0	0	0	0

TABLE 1.1 – Un ensemble ordonné P représenté par un tableau.

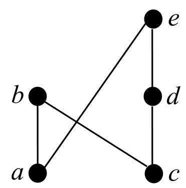


FIGURE 1.2 – Diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné P.

Soient $P = (X, \mathscr{R})$ un ensemble ordonné et Y une partie de X, la restriction de l'ordre $\mathscr{R}$ sur la partie Y est un ordre, noté $\mathscr{R}_Y$ et appelé un **sous-ordre** de $\mathscr{R}$, on dit alors que $Q = (Y, \mathscr{R}_Y)$ est un sous-ensemble ordonné de P, noté $Q \sqsubseteq P$.
Si de plus, $x \prec y$ dans Q implique $x \prec y$ dans P, on dit que Q est un sous-ensemble ordonné **couvrant** de P.

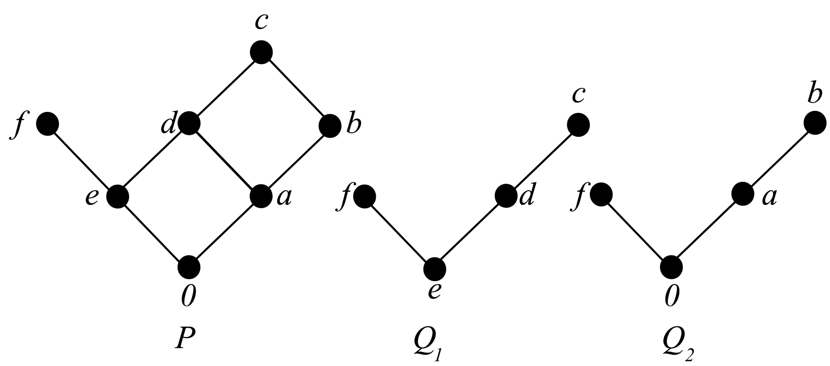


FIGURE 1.3 – Q_1 est un sous-ensemble ordonné couvrant de P et Q_2 est un sous-ensemble ordonné non couvrant de P.

1.4 Éléments particuliers

Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné.

1.4.1 Infimum, supremum

Un élément x de P est :

1. le **minimum** de P si, $x \leq y$ pour tout $y \in P$.
2. le **maximum** de P si, $y \leq x$ pour tout $y \in P$.
3. un élément **minimal** de P s'il n'existe pas $y \in P$ avec $y < x$.
4. un élément **maximal** de P s'il n'existe pas $y \in P$ avec $x < y$.

Un élément minimal (respectivement, maximal) de P, lorsqu'il est unique, est souvent noté 0_P (respectivement, 1_P) ou simplement 0 (respectivement, 1).

Si Y est une partie de $P = (X, \leq)$, un **minorant** (respectivement, un **majorant**) de Y est un élément m de P tel que $m \leq x$ (respectivement, $m \geq x$) pour tout $x \in Y$, la partie Y est dite **minorée** (respectivement, **majorée**) si elle admet au moins un minorant (respectivement, majorant).
Si $Y = \{x\}$, l'ensemble $\{m \in P/m \leq x\}$ est appelé l'**ensemble des minorants** (respectivement, $\{m \in P/x \leq m\}$ est appelé l'**ensemble des majorants**) de x, et sera noté par $(x]$ (respectivement, $[x)$).
Si $Y = \{x\}$, l'ensemble $\{m \in P/m \leq x,\ x \neq m\}$ est appelé l'**ensemble des minorants strict** (respectivement, $\{m \in P/x \leq m,\ x \neq m\}$ est appelé l'**ensemble des majorants strict**) de x, et sera noté $(x[$ (respectivement, $]x)$).

Soit Y une partie d'un ensemble ordonné P, on dit que $r \in P$ est l'**infimum** de Y (ou sa borne inférieure) si Y est minorée et si l'ensemble de ses minorants admet r pour maximum, on le note $\bigwedge Y$.

De même, Y a un **supremum** (ou une borne supérieure) t si Y est majorée et si l'ensemble de ses majorants admet t pour minimum, on le note $\bigvee Y$.

Si $Y = \{x, y\}$, on note $x \wedge y$ (respectivement, $x \vee y$) son **infimum** (respectivement, son **supremum**).

1.4.2 Éléments irréductibles

1. $x \in P$ est sup-irréductible s'il n'est pas supremum de la partie $(x[$.
   D'une manière équivalente : si $x = b \vee c$ implique $x = b$ ou $x = c$.
2. $x \in P$ est inf-irréductible s'il n'est pas infimum de la partie $]x)$.
   D'une manière équivalente : si $x = b \wedge c$ implique $x = b$ ou $x = c$.
3. $x \in P$ est irréductible s'il est sup-irréductible ou inf-irréductible ; il est dit doublement irréductible s'il est sup-irréductible et inf-irréductible.

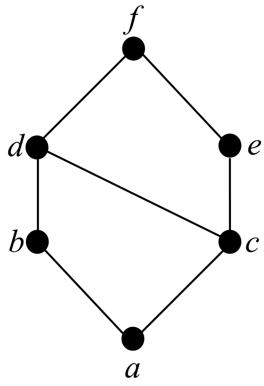


FIGURE 1.4 – P un ensemble ordonné.

Dans la figure ci-dessus, l'élément d n'est pas sup-irréductible car $d = b \vee c$. Par contre, e est sup-irréductible. L'élément c n'est pas inf-irréductible car $c = d \wedge e$. Par contre, b est inf-irréductible.

1.4.3 Atomes, co-atomes

Si P admet 0_P, alors, on appelle **atome** tout élément couvrant 0_P.
Si P admet 1_P, alors, on appelle **co-atome** tout élément couvert par 1_P. Si P admet un seul atome a, alors a est appelé un monolithe.
Un poset P avec 0_P est dit **atomique**, si tout élément de P différent de 0_P est un supremum de certains atomes.

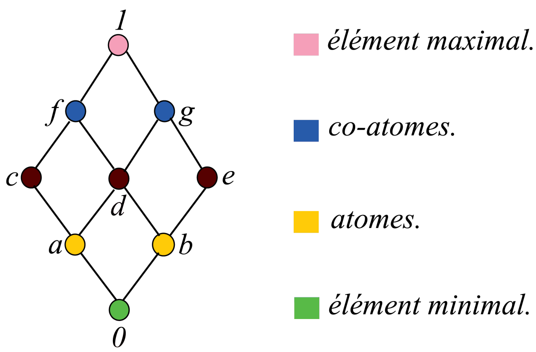


FIGURE 1.5 – Les atomes et co-atomes d'un ensemble ordonné.

1.5 Parties particulières

Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné.

On appelle un **idéal engendré** par x, noté $\downarrow x$, tout sous-ensemble de X, défini de la manière suivante :

$$\downarrow x = \{y \in X |\ y \leq x\}.$$

Par dualité, on appelle **filtre engendré** par x, noté $\uparrow x$, tout sous-ensemble de X, défini de la manière suivante :

$$\uparrow x = \{y \in X |\ y \geq x\}.$$

Exemple : Soient $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, o\}$ et $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné, présenté par son diagramme de Hasse.

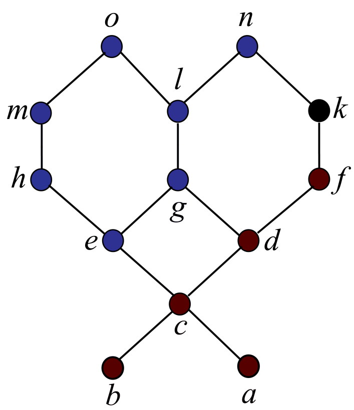


FIGURE 1.6 – Idéal engendré par f et filtre engendré par e dans P.

1.6 Isomorphisme et dualité

En mathématiques la notion d'isomorphisme entre deux structures est fondamentale. Elle permet de montrer que deux ensembles d'objets de nature totalement différente peuvent vérifier les mêmes propriétés.

Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ sont dits isomorphes s'il existe une bijection f de X sur Y vérifiant :

$$x \leq_P y \Longleftrightarrow f(x) \leq_Q f(y).$$

La bijection f est appelée un isomorphisme d'ordre entre P et Q et on écrit $P \equiv Q$. Dans le cas où $P = Q$, on dit que f est un automorphisme de P.

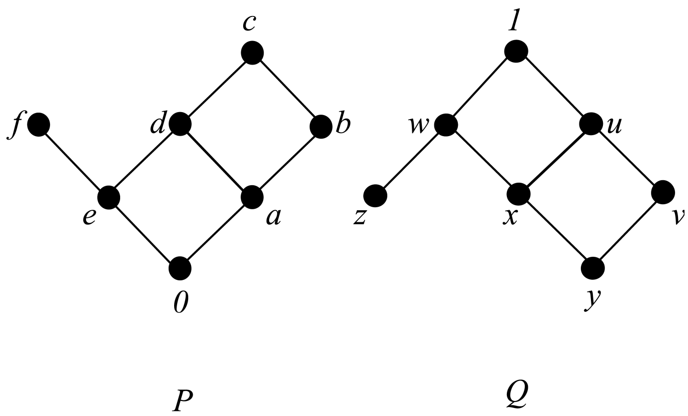


FIGURE 1.7 – Deux ensembles ordonnés P et Q duaux.

Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ sont dits anti-isomorphes (ou duaux) s'il existe une bijection f de X sur Y vérifiant :

$$x \leq_P y \Longleftrightarrow f(x) \geq_Q f(y).$$

La bijection f est appelée un anti-isomorphisme d'ordre entre P et Q et on écrit $P \equiv_d Q$.

Un cas particulièrement intéressant d'anti-isomorphisme est obtenue en considérant l'ensemble ordonné $P^d = (X, \leq^d)$ dual d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ et défini par :

$$x \leq^d y \Longleftrightarrow y \leq x.$$

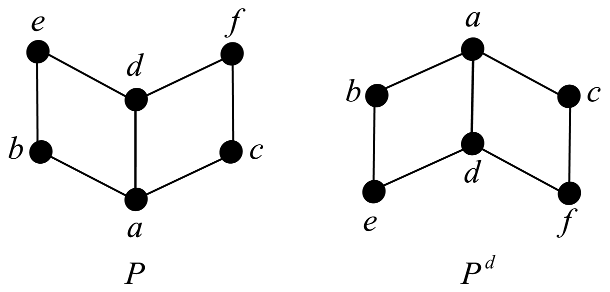


FIGURE 1.8 – Un ensemble ordonné P et son ensemble ordonné dual P^d.

1.7 Opérations entre ensembles ordonnés

1.7.1 Substitution

Soit $Q = (Y, \leq_Q)$ un ensemble ordonné et soit $P_i = (X_i, \leq_i)$ (avec $i = 1, ..., h \leq \mid Y \mid$), h ensembles ordonnés, tels que les ensembles $Y, X_1, \ldots, X_h$ soient mutuellement disjoints. Étant donnés h éléments $y_1, \ldots, y_n$ distincts de Y, on note : $P = Q^{P_1 \cdots P_h}_{y_1 \cdots y_h}$ l'ensemble ordonné obtenu en substituant chaque élément y_i de Y par l'ensemble ordonné P_i. De façon précise, en posant $P = (X, \leq_p)$ on a :
$X = (Y \backslash \{y_1 \cdots y_h\}) \cup (\bigcup_{1 \leq i \leq h} X_i)$ et

$$a \leq_p b \Longleftrightarrow \begin{cases} a, b \in Y \backslash \{y_1 \cdots y_h\} & \text{et } a \leq_Q b\,; \\ \exists i : a \in X_i, b \in Y \backslash \{y_1 \cdots y_h\} & \text{et } y_i <_Q b\,; \\ \exists i : a \in Y \backslash \{y_1 \cdots y_h\}, b \in X_i & \text{et } a <_Q y_i\,; \\ \exists i : a, b \in X_i & \text{et } a \leq_i b\,; \\ \exists i \neq j : a \in X_i, b \in X_j & \text{et } y_i <_Q y_j. \end{cases}$$

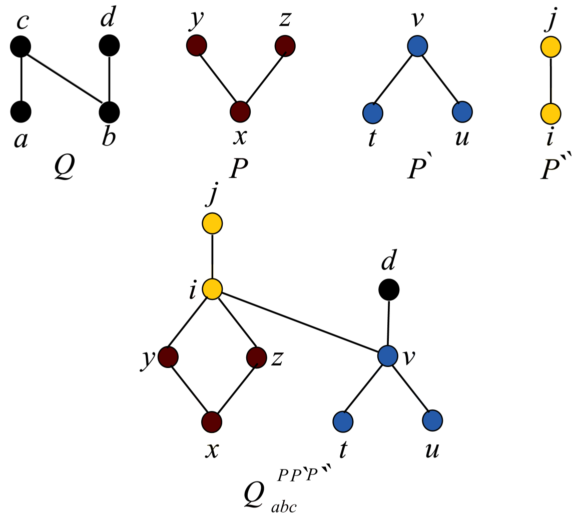


FIGURE 1.9 – Exemple de substitution sur quatre ensembles ordonnés Q, P, P', P''

1.7.2 Union disjointe

Soient $P_1 = (X_1, \leq_{P_1})$ et $P_2 = (X_2, \leq_{P_2})$ deux posets, avec leurs ensembles correspondants disjoints, i.e., $(X_1 \bigcap X_2 = \emptyset)$. L'**union disjointe** des deux posets P_1 et P_2 (notée par $P_1 \mathring{\bigcup} P_2$) est le poset $P_1 \mathring{\bigcup} P_2 = (X_1 \bigcup X_2, \leq_{P_1 \mathring{\bigcup} P_2})$, où $\leq$ est défini par :

$$x \leq_{P_1 \mathring{\bigcup} P_2} y \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq_{P_1} y, \;\; si \; x, y \in P_1, \\ ou \\ x \leq_{P_2} y, \;\; si \; x, y \in P_2. \end{cases}$$

Au niveau des diagrammes, l'union disjointe revient à placer les diagrammes de P_1 et P_2, l'un à coté de l'autre.

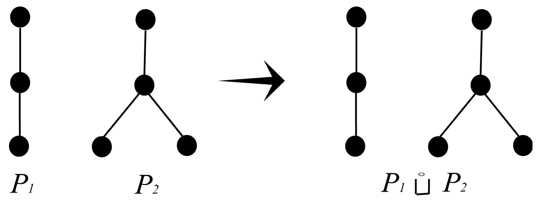


FIGURE 1.10 – Union disjointe $P_1 \mathring{\bigcup} P_2$ des deux ensembles ordonnés P_1 et P_2

1.7.3 Somme linéaire

La **somme linéaire** des deux posets $P_1 = (X_1, \leq_{P_1})$ et $P_2 = (X_2, \leq_{P_2})$, notée par $P_1 \oplus P_2$, est le poset $P_1 \oplus P_2 = (X_1 \bigcup X_2, \leq_{P_1 \oplus P_2})$, où $\leq_{P_1 \oplus P_2}$ est définie par :

$$x \leq_{P_1 \oplus P_2} y \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq_{P_1} y, & \text{si } x, y \in P_1 \\ ou & \\ x \leq_{P_2} y, & \text{si } x, y \in P_2 \\ ou & \\ x \in P_1, y \in P_2 & \end{cases}$$

Au niveau des diagrammes, la somme linéaire revient à mettre le diagramme P_1 au-dessous du diagramme P_2, en reliant chaque élément maximal de P_1 à chaque élément minimal de P_2.

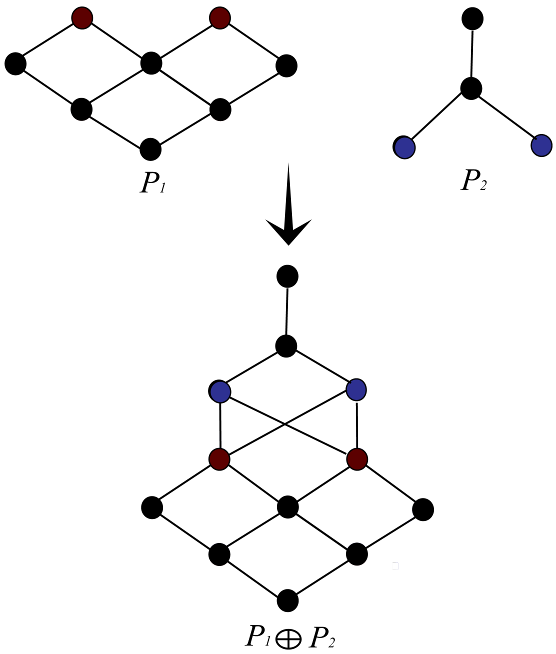


FIGURE 1.11 – Somme linéaire $P_1 \oplus P_2$ des deux posets P_1 et P_2

1.8 Graduation d'un ensemble ordonné

Un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est **rangé** (ou **gradué**) s'il admet une fonction de **rang** (on dit aussi une **graduation**), i.e., une application r de X dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in P, x \prec y \Longrightarrow r(y) = r(x) + 1,$$
$$\text{et } r(x) = 0, \text{ si } x \text{ est minimal.}$$

Autrement dit, si y couvre x, son rang est supérieur d'une unité à celui de x.

Chapitre 2

$\mathscr{T}$reillis ordinaires

L'une des structures les plus étudiées et discutées parmi les structures ordonnées est certainement la structure de treillis. Le concept de treillis a été introduit par E. Schröder en 1890 [9].

Il est bien connu que les treillis sont introduits, soit comme des ensembles ordonnés, ou comme des structures algébriques. Dans ce chapitre, nous présentons les deux approches et montrons l'équivalence entre-elles à travers les théorèmes de transition.

2.1 Treillis vu comme une structure algébrique

On appelle une **loi de composition** " $\star$ " sur les ensembles X_1, X_2 et X_3, toute fonction de $X_1 \times X_2$ dans X_3. Autrement dit, à toute paire $(x, y) \in X_1 \times X_2$ on fait correspondre un élément et un seul $z \in X_3$.

Si $X_1 = X_2 = X_3 = X$, alors : " $\star$ " est appelé une **loi de composition interne** ou un **opérateur**, et $(X, \star)$ est appelé une **structure algébrique munie d'un opérateur**. On peut définir plusieurs lois de composition sur un même ensemble X, soit par exemple deux lois " $\star$ ", " $\bullet$ " sur X ; on dit alors que : $(X, \star, \bullet)$ est **une structure algébrique munie de deux opérateurs**.

Une structure algébrique $(L, \wedge, \vee)$ est un **treillis** si, les deux lois de composition interne de L, habituellement notées $\wedge$ et $\vee$ vérifient les assertions suivantes :

1. la **commutativité**, i.e., $\forall x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$,

2. l'**associativité**, i.e., $\forall x, y, z \in L$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ et $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

3. l'**idempotence**, i.e., $\forall x \in L$, $x \vee x = x$ et $x \wedge x = x$,

4. l'**absorption**, i.e., $\forall x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ et $x \wedge (x \vee y) = x$.

2.2 Les principaux types de treillis de point de vue algébrique

2.2.1 Treillis modulaire

Un treillis L est dit **modulaire** si, $\forall x, y, z \in L : (x \leq z) \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Si on remplace x par z et on applique la commutativité de $\vee$ et $\wedge$, on obtient une relation équivalente à la définition de la modularité, i.e., $\forall x, y, z \in L : (x \geq z) \Longrightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$.

Exemple : Le treillis présenté ci-dessous est modulaire.

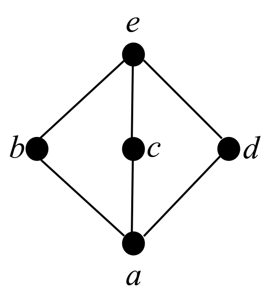


FIGURE 2.1 – Treillis modulaire

Théorème 2.1. *[6] Soit $(L, \wedge, \vee)$ un treillis. Si $\forall x, z \in L$, tel que $x \leq z$ et $\forall y \in L$, y est comparable soit à x, soit à z, alors $(L, \wedge, \vee)$ est modulaire.*

DÉMONSTRATION : Soit $(L, \wedge, \vee)$ un treillis, et soit $x, z \in L$, tel que $x \leq z$. Soit $y \in L$, y est comparable soit à x, soit à z, i.e., on a quatre situations $x \leq y$ ou $y \leq z$ ou $x \geq y$ ou $y \geq z$.

Supposons que $x \leq y$, dans ce cas on a d'une part $x \vee (y \wedge z) = y \wedge z$ (car $x \leq z$ et $x \leq y$).

D'autre part, $y \wedge z = (x \vee y) \wedge z$ (car $y = x \vee y$).

Donc $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

La preuve est similaire pour les autres cas. □

Nous représentons dans ce qui suit une classe de treillis modulaires, appelée treillis distributifs.

Treillis distributif Un treillis $(L, \wedge, \vee)$ est dit **distributif** si, $\forall x, y, z \in L$, on a :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

et/ou

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Les deux relations précédentes sont duales l'une de l'autre et l'une des deux relations suffit pour définir la propriété de distributivité.

Exemple : Le treillis présenté ci-dessous est distributif.

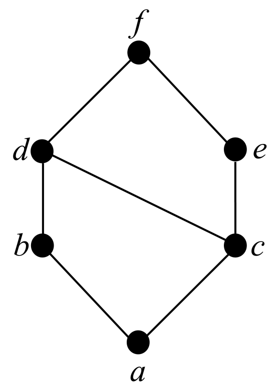


FIGURE 2.2 – Treillis distributif

Théorème 2.2. *[6] Tout treillis distributif* $(L, \wedge, \vee)$ *est modulaire.*

DÉMONSTRATION : Soit $(L, \wedge, \vee)$ un treillis distributif, i.e., $\forall x, y, z \in L$, tel que : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Supposons que $x \leq z$, i.e., $x \vee z = z$. On remplace dans la relation précédente $x \vee z$ par z, i.e., $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$, ce qui implique la modularité. □

2.2.2 Treillis complémenté

Soit L un treillis possède l'élément minimal 0 et l'élément maximal 1, on appelle **complément** d'un élément, tout élément vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in L, \exists y \in L, \text{tel que} : x \wedge y = 0_L \quad \text{et } x \vee y = 1_L.$$

Si le complément d'un élément x est unique on le note souvent $\overline{x}$.

Un treillis $(L, \wedge, \vee)$ est dit **complémenté** quand il possède l'élément minimal 0 et l'élément maximal 1 et quand, tout élément de $(L, \wedge, \vee)$ possède un complément.

Exemple :

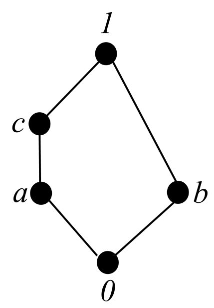


FIGURE 2.3 – Treillis complémenté

Théorème 2.3. *[6] Dans un treillis distributif $(L, \wedge, \vee)$, si le complément $\overline{x}$ d'un élément x de L existe, il est unique.*

DÉMONSTRATION : Soient $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ deux compléments de x. Alors,
$x \wedge \overline{x_1} = x \wedge \overline{x_2} = 0$ et $x \vee \overline{x_1} = x \vee \overline{x_2} = 1$.

$$\begin{aligned}
\overline{x_1} &= \overline{x_1} \vee (x \wedge \overline{x_1}) \quad (\text{ par l'absorption}) \\
&= \overline{x_1} \vee (x \wedge \overline{x_2}) \quad (\text{ par hypothése}) \\
&= (\overline{x_1} \vee x) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \quad (\text{ par la distributivité}) \\
&= 1 \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \\
&= (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}).
\end{aligned}$$

Donc $\overline{x_1} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \Longrightarrow \overline{x_1} \leq \overline{x_2}$.

Par symétrie, $\overline{x_2} = \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \Longrightarrow \overline{x_2} \leq \overline{x_1}$.

D'où $\overline{x_1} = \overline{x_2}$. □

2.2.3 Treillis booléen

Un treillis $(L, \wedge, \vee)$ est dit **booléen** (ou simplement **treillis de Boole**) s'il est distributif et complémenté.

Théorème 2.4. *[6] Soit $(L, \wedge, \vee)$ un treillis booléen, alors :*

$$\forall x, y \in L : \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \text{ et } \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}.$$

*Ce théorème est appelé le **théorème de De Morgan**.*

Nous suggérons dans ce qui suit une preuve propre à nous.

DÉMONSTRATION : Comme on a : $(x \wedge y) \wedge (\overline{x \wedge y}) = 0$ et $(x \vee y) \vee (\overline{x \vee y}) = 1$ (car L est complémenté), pour démontrer que $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ et $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, il suffit de démontrer que $(x \wedge y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) = 0$ et $(x \wedge y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y}) = 1$, en vertu de l'unicité du complément et la dualité.

On a d'abord :

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) &= ((x \wedge y) \wedge \overline{x}) \vee ((x \wedge y) \wedge \overline{y}) \quad \text{(la distributivité)} \\
&= (x \wedge (y \wedge \overline{x})) \vee (x \wedge (y \wedge \overline{y})) \quad \text{(l'associativité)} \\
&= (x \wedge (y \wedge \overline{x})) \vee (x \wedge 0) \quad (L \text{ est complémenté}) \\
&= (x \wedge (y \wedge \overline{x})) \vee 0 \\
&= (x \wedge (\overline{x} \wedge y)) \vee 0 \quad \text{(la commutativité)} \\
&= ((x \wedge \overline{x}) \wedge y) \vee 0 \quad \text{(l'associativité)} \\
&= (0 \wedge y) \vee 0 \quad (L \text{ est complémenté}) \\
&= 0 \vee 0 \\
&= 0 \quad \text{(l'idempotence)}.
\end{aligned}$$

De façon similaire, on a :

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y}) &= (x \vee (\overline{x} \vee \overline{y})) \wedge (y \vee (\overline{x} \vee \overline{y})) \quad \text{(la distributivité)} \\ &= (x \vee (\overline{x} \vee \overline{y})) \wedge (y \vee (\overline{y} \vee \overline{x})) \quad \text{(la commutativité)} \\ &= ((x \vee \overline{x}) \vee \overline{y}) \wedge ((y \vee \overline{y}) \vee \overline{x}) \quad \text{(l'associativité)} \\ &= (1 \vee \overline{y}) \wedge (1 \vee \overline{x}) \\ &= 1 \wedge 1 \\ &= 1 \quad \text{(l'idempotence).}\end{aligned}$$

□

2.2.4 Treillis complet

Un treillis $(L, \wedge, \vee)$ est dit **complet**, si pour chaque $S \subseteq L$, S admet un supremum $\bigvee S$ et un infimum $\bigwedge S$ dans L.

Théorème 2.5. *[6] Tout treillis fini $(L, \wedge, \vee)$ est complet.*

DÉMONSTRATION : Toute partie S d'un treillis fini $(L, \wedge, \vee)$ est finie, alors $\bigvee S$ et $\bigwedge S$ sont dans L, car $\wedge$ et $\vee$ sont des lois internes. □

2.3 Treillis vu comme un ensemble ordonné

Soit $(P, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné ou simplement poset.
$(P, \leq)$ est un **inf-demi-treillis**, si tout couple $\{x, y\}$ de P admet un infimum $x \wedge y$ dans P.
$(P, \leq)$ est un **sup-demi-treillis**, si tout couple $\{x, y\}$ de P admet un supremum $x \vee y$ dans P.
$(P, \leq)$ est un **treillis** (vu comme ensemble ordonné), si tout couple $\{x, y\}$ de P admet un infimum $x \wedge y$ et un supremum $x \vee y$ dans P. Autrement dit, s'il est à la fois inf-demi-treillis et sup-demi-treillis.
Un treillis est souvent noté $(L, \leq)$, ainsi qu'un inf-demi-treillis et un sup-demi-treillis.

Exemple : Soit X un ensemble, $(P(X), \subseteq)$ est un treillis.

En effet, le supremum d'un couple $\{A, B\}$ de parties de X est $A \bigcup B$, son infimum est la partie $A \bigcap B$. On a donc, $A \wedge B = A \bigcap B$ et $A \vee B = A \bigcup B$.

Exemple : L'ensemble $\mathbb{N}$ ordonné par divisibilité, $(\mathbb{N}^*, |)$, est un treillis. En effet, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \wedge b = pgcd(a, b)$, et $a \vee b = ppcm(a, b)$.

Exemple :

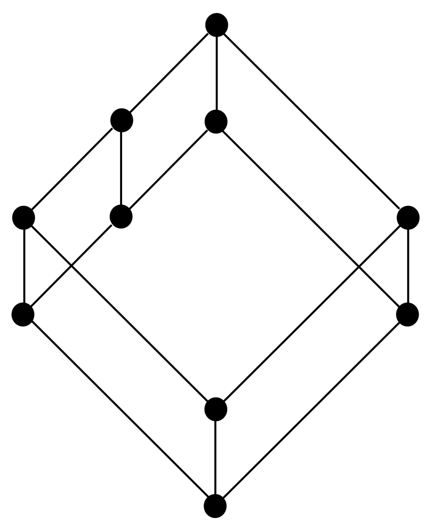


FIGURE 2.4 – Un treillis.

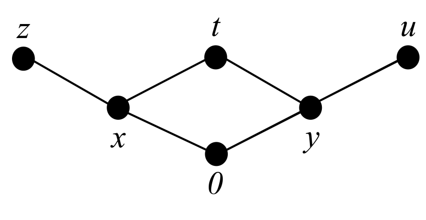


FIGURE 2.5 – Un inf-demi-treillis.

2.4 La typologie de treillis de point de vue ensembliste

2.4.1 Sous-treillis

Si $(L, \leq)$ est un inf-demi-treillis, on appelle un sous-inf-demi-treillis, toute partie A de $(L, \leq)$, vérifiant, $x, y \in A$ implique $x \wedge y \in A$.

Si $(L, \leq)$ est un sup-demi-treillis, on appelle un sous-sup-demi-treillis, toute partie A de $(L, \leq)$, vérifiant, $x, y \in A$ implique $x \vee y \in A$.

Si $(L, \leq)$ est un treillis, on appelle un sous-treillis d'un treillis $(L, \leq)$, toute partie A de $(L, \leq)$, vérifiant, $x, y \in A$ implique $x \wedge y \in A$ et $x \vee y \in A$. Autrement dit un sous-treillis est à la fois un sous-inf-demi-treillis et un sous-sup-demi-treillis.

Exemple :

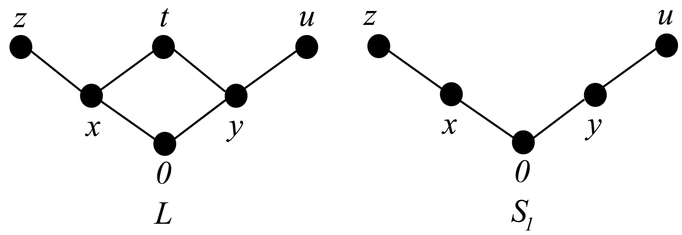


FIGURE 2.6 – L est un inf-demi-treillis et S_1 est un sous-inf-demi-treillis de L.

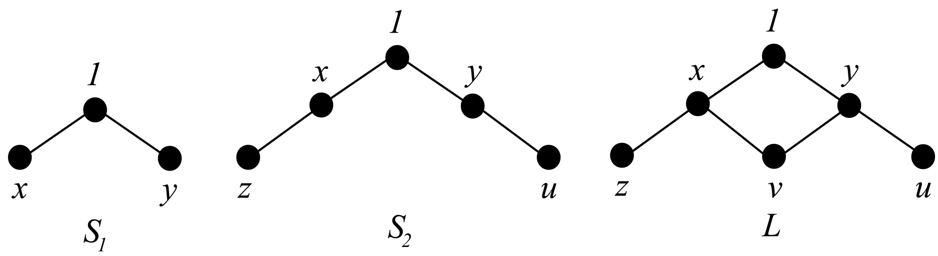


FIGURE 2.7 – L est un sup-demi-treillis et S_1 et S_2 sont un sous-sup-demi-treillis de L.

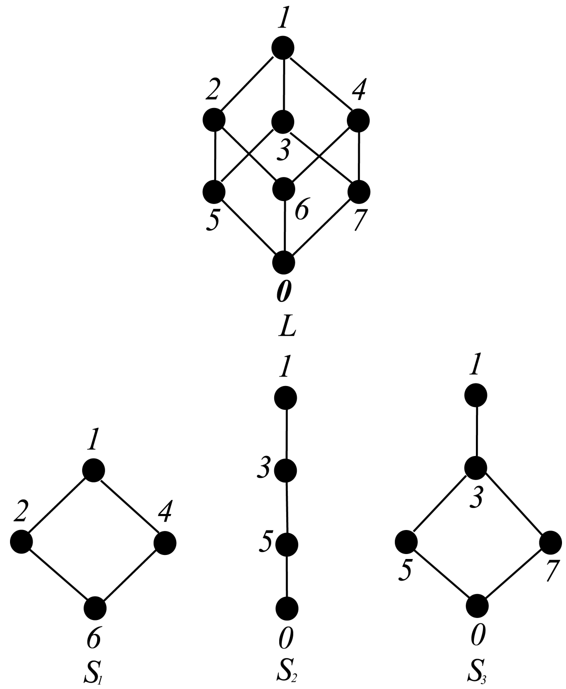


FIGURE 2.8 – L est un treillis et S_1, S_2 et S_3 sont des sous-treillis de L.

Proposition 2.1. *[6] Soit A une partie d'un inf-demi-treillis fini $(L, \leq)$. A admet un supremum si et seulement si elle est majorée.*

DÉMONSTRATION : Le supremum d'une partie A d'un inf-demi-treillis $(L, \leq)$ lorsqu'il existe, est un majorant particulier de A (ceci reste vrai pour tout ensemble ordonné $(P, \leq)$).
Inversement, soit A une partie majorée d'un inf-demi-treillis $(L, \leq)$. Si A ne possède pas de supremum, l'ensemble non vide des majorants de A n'a donc pas de minimum. Il existe ainsi deux majorants distincts t_1 et t_2 de A, minimaux parmi les majorants de A. $(L, \leq)$ étant un inf-demi-treillis, $t_1 \wedge t_2$ existe, avec t_1 et t_2 étant incomparables, $t_1 \wedge t_2$ est strictement inférieur à t_1 et t_2. Or $t_1 \wedge t_2$ est un majorant de A, strictement inférieur à t_1 et t_2, ce qui contredit la minimalité supposée de t_1 et t_2 parmi les majorants de A. On déduit alors que A possède un supremum dés lors qu'elle est majorée. $\square$

Nous suggérons dans ce qui suit une proposition propre à nous.

Proposition 2.2. *Soit A une partie d'un sup-demi-treillis fini $(L, \leq)$. A admet un infimum si et seulement si elle est minorée.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de prendre le dual de $(L, \leq)$ et d'utiliser la proposition 2.1. □

Théorème 2.6. *[2] Un inf-demi-treillis $(L, \leq)$ ayant un maximum est un treillis.*

DÉMONSTRATION : Soit $(L, \leq)$ un inf-demi-treillis de maximum 1_L. Toute partie de L étant majorée par 1_L, on déduit de la proposition précédente que toute partie de L a un supremum. Par conséquent $(L, \leq)$ est un sup-demi-treillis et donc un treillis. □

Nous suggérons dans ce qui suit un théorème propre à nous.

Théorème 2.7. *Un sup-demi-treillis $(L, \leq)$ ayant un minimum est un treillis.*

DÉMONSTRATION :
Il suffit de prendre le dual de $(L, \leq)$ et d'utiliser le théorème 2.6. □

2.4.2 Demi-treillis complet et treillis complet

Un sup-demi-treillis (resp. inf-demi-treillis) L est dit sup-complet (resp. inf-complet) si tout sous-ensemble A (fini ou infini) de L admet un supremum $\bigvee A$ (resp. un infimum $\bigwedge A$) dans L.
Un treillis L est dit complet s'il est à la fois inf-complet et sup-complet.
Exemple : En ajoutant l'élément $+\infty$ à $\mathbb{Z}$, l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est sup-complet. En revanche, $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné qui n'est pas sup-complet. Car, le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{Q} | x \leq \sqrt{2}\}$ de $\mathbb{Q}$ n'a pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$. i.e., $\sqrt{2}$ est plus petit des majorants qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Théorème 2.8. *[7] Un sup-demi treillis complet $(L, \leq)$ est un treillis complet si et seulement si, il admet un infimum 0_L.*

Démonstration : Soit L un treillis complet, alors toute partie $S \subseteq L$ admet un infimum et un supremum dans L, en particulier $L \subseteq L$, donc L admet infimum 0_L.
D'autre part, supposons que L est un sup-demi-treillis complet et possède un infimum 0_L. Soit $S = \{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sous-ensemble non vide de L, et $M = \{m_\beta\}_{\beta \in B}$ l'ensemble des minorants de S.
L'ensemble M est non vide car $0_L \in M$. Posons $m = \bigvee_{\beta \in B} m_\beta$; l'élément m est dans L car L est sup-complet.
Par définition de l'ensemble M, $\forall s_\alpha \in S, \forall m_\beta \in M$, $m_\beta \leq s_\alpha$, ou encore, $\forall s_\alpha \in S, m = \bigvee_{\beta \in B} m_\beta \leq s_\alpha$. Donc m est un minorant de S, et par conséquent, il est le plus grand des minorants de S. Ainsi tout sous-ensemble non vide de L admet un plus grand minorant. Donc L est un inf-demi-treillis complet et donc également un treillis complet. □

2.5 Équivalence entre les deux approches : ensembliste et algébrique

On présente dans cette partie les théorèmes de transitions entre le treillis vu comme une structure algébrique vers le treillis vu comme une structure ordonné, et vice versa.

Théorème 2.9. *[3] Soit $(L, \leq)$ un treillis, vu comme une structure ordonné. Alors $\wedge$ et $\vee$ satisfont les assertions suivantes :*
- (L_1) $\forall x \in L : x \vee x = x$ *(loi d'idempotence)*
- $(L_1)^\delta$ $\forall x \in L : x \wedge x = x$ *(loi d'idempotence)*
- (L_2) $\forall x, y \in L : x \vee (x \wedge y) = x$ *(loi d'absorption)*
- $(L_2)^\delta$ $\forall x, y \in L : x \wedge (x \vee y) = x$ *(loi d'absorption)*
- (L_3) $\forall x, y \in L : x \vee y = y \vee x$ *(loi de commutativité)*
- $(L_3)^\delta$ $\forall x, y \in L : x \wedge y = y \wedge x$ *(loi de commutativité)*
- (L_4) $\forall x, y, z \in L : x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *(loi d'associativité)*
- $(L_4)^\delta$ $\forall x, y, z \in L : x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ *(loi d'associativité)*

Démonstration : La loi $\wedge$ est idempotence. En effet, par la réflexivité de $\leq$, on a pour tout $x \in L$, $x \leq x$, ce qui implique que, $x \wedge x = x$.

Identiquement, pour $\vee$.

Soient $x, y \in L$, on a $x \wedge y \leq x$, ce qu'implique que $x \vee (x \wedge y) = x \vee x$, alors : $x \vee (x \wedge y) = x$, donc on trouve la loi d'absorption.

Identiquement, pour $x \wedge (x \vee y) = x$.

La loi $\wedge$ est commutative. En effet, soient $x, y \in L$, on a $x \wedge y \leq y$ et $x \wedge y \leq x$, ce qui implique que, $x \wedge y \leq y \wedge x$, d'autre part, $y \wedge x \leq x$ et $y \wedge x \leq y$, ce qui implique que, $y \wedge x \leq x \wedge y$. Alors : $x \wedge y = y \wedge x$.

Identiquement, pour $\vee$.

La loi $\wedge$ est associative. En effet, soient $x, y, z \in L$, on a $y \wedge z \leq y$, donc $x \wedge (y \wedge z) \leq x \wedge y$ et $y \wedge z \leq z$, donc $x \wedge (y \wedge z) \leq z$, ce qui implique que, $x \wedge (y \wedge z) \leq (x \wedge y) \wedge z$, ceci d'une part. D'autre part, $y \geq x \wedge y$, donc $y \wedge z \geq (x \wedge y) \wedge z$ et $x \geq x \wedge y$, donc $x \geq (x \wedge y) \wedge z$, ce qui implique que, $x \wedge (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z$. Alors : $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

Identiquement, pour $\vee$. □

Théorème 2.10. *[6] Soit $(L, \wedge, \vee)$ un treillis vu comme une structure algébrique, où $\wedge$ et $\vee$ sont des lois de composition interne de L. Alors $(L, \leq)$ est un treillis vu comme un ensemble ordonné.*

DÉMONSTRATION : Notons $\leq$ la relation définie sur L par : $x \leq y \iff x \wedge y = x$.

1. La relation $\leq$ est réflexive. En effet, $x \wedge x = x$ (car $\wedge$ est idempotente), donc $x \leq x$.
2. La relation $\leq$ est transitive. En effet, $\forall x, y, z \in L$:
   si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \wedge y = x$ et $y \wedge z = y$.
   Montrer alors que $x \leq z$, i.e., $x \wedge z = x$.
$$\begin{aligned} x \wedge z &= (x \wedge y) \wedge z \\ &= x \wedge (y \wedge z) \quad (\wedge \text{ est associative}) \\ &= x \wedge y \\ &= x. \end{aligned}$$
3. La relation $\leq$ est antisymétrique. En effet, supposons que l'on ait, simultanément : $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x \wedge y = x$ et $y \wedge x = y$.
   Par la commutativité de $\wedge$, on a donc $x \wedge y = y \wedge x$, ce qui entraîne : $x = y$.

Identiquement, pour la loi $\vee$.

Ainsi $\leq$ est un ordre sur L.

Par conséquent, $(L, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Soient $x, y \in L$, montrons que $x \wedge y$ est un minorant de $\{x, y\}$ dans L, i.e., $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge y$ et $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge y$.

On a :

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \wedge x &= x \wedge (y \wedge x) \text{ (} \wedge \text{ est associative)} \\
&= x \wedge (x \wedge y) \text{ (} \wedge \text{ est commutative)} \\
&= (x \wedge x) \wedge y \text{ (} \wedge \text{ est associative)} \\
&= x \wedge y \text{ (} \wedge \text{ est idempotente).}
\end{aligned}$$

Donc $x \wedge y$ est un minorant de x. De la même façon on montre $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge y$.

Montrons maintenant que $x \wedge y$ est la borne inférieur de $\{x, y\}$ dans L.

Soit m un minorant quelconque de $\{x, y\}$, on a : $m \wedge x = m$ et $m \wedge y = m$ (par définition de $\leq$).

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned}
m \wedge (x \wedge y) &= (m \wedge x) \wedge y \text{ (} \wedge \text{ est associative)} \\
&= m \wedge y \text{ (} m \text{ est un minorant de } x\text{)} \\
&= m \text{ (} m \text{ est minorant de } y\text{).}
\end{aligned}$$

Donc $m \wedge (x \wedge y) = m$, ceci signifie que tout minorant de $\{x, y\}$ est majoré par $x \wedge y$ lequel est le plus grand des minorants de $\{x, y\}$.

Par conséquent, $x \wedge y$ est la borne inférieur de $\{x, y\}$.

Identiquement, pour la borne supérieur $x \vee y$ de $\{x, y\}$. $\square$

Chapitre 3

$\mathscr{S}$ous-ensembles flous

3.1 Introduction

La théorie des sous-ensembles flous est assez récente, elle a débuté en 1965 avec la publication de l'article "fuzzy sets" (ensembles flous) par Lotfi ZADEH [17], qui a proposé pour la première fois le concept des sous-ensembles flous pour pallier à la modélisation de l'incertitude des modèles classiques. Cette théorie introduit la graduation dans l'appartenance d'un élément à une classe, c'est à dire qu'un élément peut appartenir plus ou moins fortement à cette classe.

Les fonctions d'appartenances sont des applications qui généralisent les fonctions caractéristiques dans la théorie des ensembles.

Dans ce chapitre on présente les sous-ensembles flous, P-ensembles flous et L-ensembles flous.

3.2 Sous-ensembles flous

Dans le concept de la théorie des ensembles classiques, un sous-ensemble A de X est caractérisé par sa fonction caractéristique μ_A qui prend la valeur 0 pour les éléments x n'appartenant pas à A et la valeur 1 pour les éléments x appartenant à A.

Définition 3.1. *Soient X un ensemble, et A un sous-ensemble de X. On définit un sous-ensemble flou A de X par la donnée d'une application $\overline{A}$ de X dans l'intervalle réel* $[0, 1]$, *qui a tout élément $x \in X$ fait associe une valeur $\overline{A}(x)$ telle que :*

$$0 \leq \overline{A}(x) \leq 1.$$

L'application $\overline{A}$ est appelée fonction d'appartenance de l'ensemble flou A ou simplement $[0,1]$-ensemble flou.

On peut distinguer trois cas, pour tout élément x dans X :

- $\overline{A}(x) = 0 \Longleftrightarrow x$ *n'appartient pas à A.*
- $\overline{A}(x) = 1 \Longleftrightarrow x$ *appartient à A.*
- $\overline{A}(x) = p$, $p \neq 0$ *et* $p \neq 1$, *dans ce cas, le degré d'appartenance $\overline{A}(x)$ est une valeur intermédiaire entre 0 et 1. On dit que x appartient partiellement à l'ensemble flou A.*

Autrement dit,

$$\begin{aligned} \overline{A} : X &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \overline{A}(x) \end{aligned}$$

tel que :

$$\overline{A}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A, \\ 0 & si\ x \notin A, \\ p & si\ x\ appartient\ partiellement\ à\ A. \end{cases}$$

Remarques :

La fonction d'appartenance généralise la fonction caractéristique.

Un sous-ensemble classique est un cas particulier d'un sous-ensemble flou.

Exemple : Soit A un ensemble dénommé "grand" de personnes défini de la manière suivante : " toute personne de plus d'un mètre quatre-vingt est dans cet ensemble".

Dans la version classique, on modélise cet exemple par la fonction caractéristique suivante :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1.80\ m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Entre "grand" et "non grand" correspond une dichotomie parfaite : toute personne de plus de 1.80 m est dans l'ensemble "grand", il n'y a pas de "degré de grandeur", si la taille d'une personne est de 1.75 m alors elle est petite, celle d'une autre personne de taille 1.80m est grande.

Mais dans un sous-ensemble flou, l'appartenance des personnes admet des degrés, i.e., si la personne a une taille de 1.20 m elle n'est absolument pas grand, alors que quelqu'un de 1.90 m est parfaitement grand, les tailles intermédiaires ont des valeurs d'appartenance différentes de 0 et 1, ces valeurs nous indiquent une mesure de compatibilité avec la notion "grand".

Exemple : Soit X l'ensemble des âges des êtres humains, utilisé comme ensemble universel, et soit $A = \{x \in X | x \text{ est vieille}\}$. Comme la propriété " vieille " n'est pas bien définie et ne peut pas être avec précision mesurée, par exemple si une personne qui est de 40 ans, il n'est pas clair si elle appartient à l'ensemble A ou pas. On modélise le sous-ensemble A d'une manière précise et rigoureuse par la fonction d'appartenance suivante :

$$\overline{A}(x) = \min\left(1, \frac{x}{80}\right).$$

Les seules personnes qui sont considérées comme " absolument vieilles " ont au moins 80 ans. Les seules personnes qui sont considérées comme " absolument jeunes " sont les nouveaux-nés. Toutes les autres personnes sont aussi bien âgées que jeunes. Par exemple, une personne âgée de 40 ans est considérée comme " vieille " avec un degré d'appartenance égal à " $0,5$ " et en même temps aussi " jeune " avec un degré d'appartenance égal à " $0,5$ ", selon la fonction d'appartenance qu'on a utilisé. Donc on ne peut pas exclure cette personne de l'ensemble A ni de l'inclure complètement, i.e., cette personne appartient partiellement à A.

Exemple : Soit X l'ensemble des villes algériennes, nous pouvons définir le sous-ensemble flou A des villes proches d'alger. Ce sous-ensemble peut être décrit par la fonction d'appartenance suivante : $\overline{A}(x) = max\left(0, [1 - \frac{d(x,a)}{100}]\right)$, où $d(x,a)$ représente la distance entre la ville " x " et Alger.

Villes	Boumerdes	Tipasa	Blida	Alger
$d(x,a)$	40	40	50	0
$\overline{A}(x)$	0.6	0.6	0.5	1

Exemple : Soient D un usine de production de tomates conservés et $T = \{T_1, T_2, ..., T_9\}$ l'ensemble des tâches qui sont traitées dans ce projet et qui sont données ci-dessous avec leurs degré d'appartenance.

Problème : classer ces tâches selon leurs importance.

On définit la fonction d'appartenance de la manière suivante :

$$\overline{A}(x) = \min\left(1, \frac{T_i}{10000}\right).$$

	Tâches	unité / jour	degré d'appartenance
T_1	Nombre des boites remplis	15000	1
T_2	Nombre des boites emballées	15000	1
T_3	Nombre des boites distribuées	7000	0.7
T_4	Nombre des boites stockées	3000	0.3
T_5	Achat de la matière première	7000	0.7
T_6	Nombre des machines nettoyées	700	0.07
T_7	Nombre des machines réparées	5	0.0005
T_8	Nombre de passages publicitaires	2	0.0002

3.2.1 Caractéristiques des sous-ensembles flous

Support

Soit un sous-ensemble flou A de X. Le support du sous-ensemble flou A noté $supp(A)$, est un sous-ensemble ordinaire de X auxquels est associé un degré d'appartenance $\overline{A}(x)$ non nul :

$$supp(A) = \{x \in X / \overline{A}(x) \neq 0\}.$$

Hauteur

La hauteur, notée $h(A)$, d'un sous-ensemble flou A de X est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance :

$$h(A) = sup_{x \in X} \overline{A}(x).$$

Noyau

Le noyau d'un sous-ensemble flou A de X, est un sous-ensemble ordinaire de X où chaque élément possède un degré d'appartenance égale 1, on note :

$$noy(A) = \{x \in X / \overline{A}(x) = 1\}.$$

Remarque : Si A est un sous-ensemble ordinaire de X, sa hauteur est égale à 1 et son noyau est A lui même.

3.2.2 Operations sur les sous-ensembles flous

Égalité de sous-ensembles flous

Deux sous-ensembles flous A et B de X sont égaux si leurs fonctions d'appartenance sont telles que :

$$\overline{A}(x) = \overline{B}(x), \ \forall x \in X.$$

Inclusion

Soient deux sous-ensembles flous A et B de X. Le sous-ensemble flou A est inclus dans le sous-ensemble flou B (ou simplement $A \subseteq B$), si leurs fonctions d'appartenance sont telles que :

$$\overline{A}(x) \leq \overline{B}(x), \ \forall x \in X.$$

Intersection

L'intersection de deux sous-ensembles flous A et B de X est un sous-ensemble flou $A \cap B$ tel que :

$$\overline{A \cap B}(x) = \min(\overline{A}(x), \overline{B}(x)), \ \forall x \in X.$$

Union

L'union de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou $A \cup B$ tel que :

$$\overline{A \cup B}(x) = \max(\overline{A}(x), \overline{B}(x)), \ \forall x \in X.$$

Complément d'un sous-ensemble flou

Le complément A^c d'un sous-ensemble flou A de X est le sous-ensemble flou de X définit par sa fonction d'appartenance :

$$\overline{A^c}(x) = 1 - \overline{A}(x), \ \forall x \in X.$$

Contrairement aux sous-ensembles classiques, les sous-ensembles flous vérifient généralement :

$$A^c \cap A \neq \emptyset \text{ et } A^c \cup A \neq X.$$

Idempotence

Soit A un sous-ensemble flou de X, alors :

$$A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A.$$

Commutativité

Soient A et B deux sous-ensembles flous de X, alors :

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A.$$

Associativité

Soient A, B et C trois sous-ensembles flous de X, alors :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \text{ et } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Distributivité

Soient A, B et C trois sous-ensembles flous de X, alors :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Relations de De Morgan

Soient A et B deux sous-ensembles flous de X, alors :

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ et } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Absorption

Soient A et B deux sous-ensembles flous de X, alors :

$$A \cap (A \cup B) = A \text{ et } A \cup (A \cap B) = A.$$

Produit cartésien

Soient $A_1, A_2, \ldots A_n$ des sous-ensembles flous définis respectivement sur $X_1, X_2, \ldots X_n$. Le produit cartésien $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est défini comme un sous-ensemble flou de $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ de fonction d'appartenance :

$$\overline{A}(x) = min(A_1(x_1), A_2(x_2), \ldots A_n(x_n)),\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in X.$$

3.3 P-ensembles flous

Le co-domaine $[0,1]$ d'un $[0,1]$-ensemble flou est un poset, il est donc tout à fait naturel de considérer le cas général qui consiste à remplacer $[0,1]$ par un poset quelconque P.

Soient A un ensemble non vide, et P un poset. On appelle un P-**ensemble flou** sur A, toute fonction $\overline{A} : A \longrightarrow P$. Soit B un sous-ensemble de A, la fonction $\overline{B} : B \longrightarrow P$ est appelée P-**sous-ensemble flou** de A.

Étant donné un élément $p \in P$, on appelle un **sous-ensemble coupe** (ou simplement p-**coupe**), tout sous-ensemble A_p de A définit de la manière suivante :

$$A_p = \{x \in A | \overline{A}(x) \geq p\}.$$

A tout $p \in P$, on fait correspondre une fonction caractéristique μ_{A_p} de A_p, appelée **fonction coupe** (ou simplement p-**coupe**).

Proposition 3.1. *[14] Soit* $\overline{A} : A \longrightarrow P$ *un* P*-ensemble flou sur* A*. Alors :*
$\forall x \in A, \overline{A}(x) = \bigvee(p \in P|\mu_{A_p}(x) = 1)$*, i.e., le supremum de l'ensemble* $\{p \in P|\mu_{A_p}(x) = 1\}$ *existe et est égale à* $\overline{A}(x)$*.*

Démonstration : Soit $x \in A$, $\exists r \in P$, tel que : $\overline{A}(x) = r$, donc $\mu_{A_r}(x) = 1$.
Si $\mu_{A_p}(x) = 1$, pour $p \in P$, alors $\overline{A}(x) \geq p$, ce qu'implique que, $r \geq p$. Comme $r \in \{p \in P|\mu_{A_p}(x) = 1\}$, donc r est le supremum de $\{p|\mu_{A_p}(x) = 1\}$, i.e., $\overline{A}(x) = r = \bigvee\{p|\mu_{A_p}(x) = 1\}$. $\square$

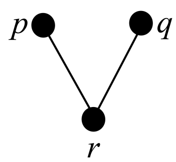
Proposition 3.2. *[14] Soit* $\overline{A} : A \longrightarrow P$ *un* P*-ensemble flou sur* A*.*

$$\forall p,\ q \in P,\ si\ p \leq q,\ alors\ A_q \subseteq A_p.$$

Démonstration : Soit $x \in A_q$, donc $\overline{A(x)} \geq q$. Comme $p \leq q$, on a $\overline{A(x)} \geq p$, ce qui entraîne $x \in A_p$. $\square$

Remarque : La réciproque n'est pas toujours vérifiée comme on peut le voire à travers l'exemple suivant :

Exemple : Soient $A = \{a, b, c\}$ un ensemble, et $(P, \leq)$ le poset donné ci-après :



Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A, tel que :

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & p & r \end{pmatrix}$$

Les p-coupes du P-ensemble flou $\overline{A}$ sont les suivantes :

$$A_p = \{a, b\}, \quad A_q = \{\emptyset\}, \quad A_r = \{a, b, c\}.$$

On remarque que $A_q \subseteq A_p$, par contre p et q sont incomparables dans P.

Lemme 3.1. *[15] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A. Alors :*

$$\overline{A}(x) \geq \overline{A}(y) \Longrightarrow \mu_{A_p}(x) \geq \mu_{A_p}(y).$$

Démonstration : $\mu_{A_p}(y) = 1$ si et seulement si $\overline{A}(y) \geq p$. Comme $\overline{A}(x) \geq \overline{A}(y)$, il s'ensuit que, $\overline{A}(x) \geq p$, ce qui implique que $\mu_{A_p}(x) = 1$. Par conséquent, $\mu_{A_p}(x) \geq \mu_{A_p}(y)$. $\square$

Proposition 3.3. *[14] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A. Alors :*
(a) $\forall x, y \in A$, $\overline{A}(x) \neq \overline{A}(y)$ si et seulement si $A_{\overline{A}(x)} \neq A_{\overline{A}(y)}$.
(b) pour $p \in P$ et $x \in A$, $\overline{A}(x) \geq p$ si et seulement si $A_{\overline{A}(x)} \subseteq A_p$.

Démonstration : (a) Soit $\overline{A}(x) = \overline{A}(y)$, on a alors $A_{\overline{A}(x)} = A_{\overline{A}(y)}$.
D'autre part, soit $\overline{A}(x) \neq \overline{A}(y)$, alors $\overline{A}(x) \ngeq \overline{A}(y)$ ou $\overline{A}(x) \nleq \overline{A}(y)$. Dans ce cas, soit $x \notin A_{\overline{A}(y)}$ alors qu'il est dans $A_{\overline{A}(x)}$, soit $y \notin A_{\overline{A}(x)}$ alors qu'il est dans $A_{\overline{A}(y)}$. D'où $A_{\overline{A}(x)} \neq A_{\overline{A}(y)}$.
(b) On suppose que $\overline{A}(x) \geq p$, d'après la proposition 3.2, on a $A_{\overline{A}(x)} \subseteq A_p$.
D'autre part, en supposant que $\overline{A}(x) \ngeq p$, alors x n'appartient pas à A_p, comme $A_{\overline{A}(x)}$ contient x, $A_{\overline{A}(x)} \nsubseteq A_p$. $\square$

Corollaire 3.1. *[14] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A, alors pour $x, y \in A$ $\overline{A}(y) \leq \overline{A}(x)$ si et seulement si $A_{\overline{A}(x)} \subseteq A_{\overline{A}(y)}$.*

Démonstration : Il suffit de poser dans (b) de la proposition 3.3 $p = \overline{A}(y)$. $\square$

Notations : Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A. On note

– A_P l'ensemble des sous-ensembles coupes, $A_P := \{A_p | p \in P\}$.
– $\overline{A}_P$ l'ensemble des fonctions coupes, $\overline{A}_P := \{\overline{A}_p | p \in P\}$.

Proposition 3.4. *[10] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A. Alors :*

1. *$\forall P_1 \subseteq P$, tel que $\bigvee P_1$ existe, alors $\bigcap(A_p | p \in P_1) = A_{\bigvee(p|p\in P_1)}$.*
2. *$\bigcup(A_p | p \in P) = A$.*
3. *$\forall x \in A$, $\bigcap(A_p | x \in A_p) \in A_P$.*

Démonstration :

1. Soit $\bigvee P_1$ existe, alors :

$$\begin{aligned} x \in A_{\bigvee(p|p\in P_1)} &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq \bigvee(p|p \in P_1) \\ &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq p, \forall p \in P_1 \\ &\Longleftrightarrow \forall p \in P_1, x \in A_p \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap(A_p | p \in P_1). \end{aligned}$$

2. Soit $x \in A$, donc $\exists p \in P$ tel que $\overline{A}(x) = p$, il s'ensuit que, $x \in A_p$, et par conséquent, $x \in \bigcup(A_p | p \in P)$.
   D'autre part, soit $x \in \bigcup(A_p | p \in P)$, alors $\exists p \in P$ tel que $x \in A_p$, et donc $x \in A$.
3. Soit $x \in A$, $\exists p \in P$ tel que $x \in A_p$, donc $\mu_{A_p}(x) = 1$. Par conséquent, $\bigcap(A_p | x \in A_p) = \bigcap(A_p | \mu_{A_p}(x) = 1)$, on a alors $\bigcap(A_p | x \in A_p) = A_{\bigvee(p|\mu_{A_p}(x)=1)}$ (d'après 1), et comme $A_{\bigvee(p|\mu_{A_p}(x)=1)} \in A_P$, alors $\bigcap(A_p | x \in A_p) \in A_P$.

□

Nous proposons la proposition suivante :

Proposition 3.5. *Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A. Alors : $\forall P_1 \subseteq P$, tel que $\bigwedge P_1$ existe, alors $\bigcup(A_p | p \in P_1) = A_{\bigwedge(p|p\in P_1)}$.*

DÉMONSTRATION : Soit $P_1 \subseteq P$, $\bigwedge P_1$ existe, alors :

$$\begin{aligned} x \in \bigcup(A_p | p \in P_1) &\Longleftrightarrow \exists p \in P_1, \overline{A}(x) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \exists p \in P_1, x \in A_p \\ &\Longleftrightarrow \exists p \in P_1, \overline{A}(x) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq \bigwedge(p | p \in P_1) \\ &\Longleftrightarrow x \in A_{\bigwedge(p|p\in P_1)}. \end{aligned}$$

□

Définition 3.2. *Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A, tel que A est un ensemble et P un poset. On définit la relation binaire $\approx$ sur P de la manière suivante :*

$$\forall p,\ q \in P,\ p \approx q \text{ si et seulement si } A_p = A_q.$$

Cette relation " $\approx$ " est une relation d'équivalence sur P.
On définit $\overline{A}(A)$ de la manière suivante :

$$\overline{A}(A) = \{p \in P | p = \overline{A}(x),\ \text{pour un certain } x \in A\}.$$

On énoncera certaines propriétés principales sur la partition de P et l'ordre induit correspondant à cette partition.

Proposition 3.6. *[10] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A. Alors :*

$$\forall p, q \in P, p \approx q \text{ si et seulement si } \uparrow p \bigcap \overline{A}(A) = \uparrow q \bigcap \overline{A}(A),$$

où $\uparrow p$ représente le filtre engendré par p, i.e., $\uparrow p = \{q \in P/q \geq p\}$.

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} p \approx q &\Longleftrightarrow A_p = A_q \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in A,\ \overline{A}(x) \geq p \Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq q \\ &\Longleftrightarrow \{x \in A | \overline{A}(x) \in \uparrow p\} = \{x \in A | \overline{A}(x) \in \uparrow q\} \\ &\Longleftrightarrow \uparrow p \bigcap \overline{A}(A) = \uparrow q \bigcap \overline{A}(A). \end{aligned}$$

□

Dans toute la suite on notera $[p]_{\approx}$ la $\approx$-classe (ou simplement classe d'équivalence) de p, i.e., $[p]_{\approx} := \{q \in P | p \approx q\}$.
Les valeurs de la fonction d'appartenance sont des éléments maximums des $\approx$-classes, comme c'est présenté dans la proposition suivante.

Lemme 3.2. *[14] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou, alors $\overline{A}(x)$ est un élément maximum de sa $\approx$-classe, $\forall x \in A$.*

Démonstration : Soit $q \in [\overline{A}(x)]_{\approx}$, i.e., $\overline{A}(x) \approx q$, donc $A_{\overline{A}(x)} = A_q$, il s'ensuit que $\overline{A}(x) \geq q$, et par conséquent, $\overline{A}(x)$ est le maximum dans sa $\approx$-classe. □

Dans toute la suite on notera $P/\approx$ l'ensemble des classes d'équivalences, $P/\approx := \{[p]_{\approx}/p \in P\}$.

Définition 3.3. *Ci-dessous, on définit un ordre sur $P/\approx$ de la manière suivante :*

$$\forall p, q \in P, [p]_{\approx} \leq [q]_{\approx} \text{ si et seulement si } \uparrow q \bigcap \overline{A}(A) \subseteq \uparrow p \bigcap \overline{A}(A).$$

Proposition 3.7. *[14] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A. Alors :*

$$[p]_{\approx} \leq [q]_{\approx} \text{ si et seulement si } A_q \subseteq A_p.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
[p]_{\approx} \leq [q]_{\approx} &\Longleftrightarrow \uparrow q \bigcap \overline{A}(A) \subseteq \uparrow p \bigcap \overline{A}(A) \\
&\Longleftrightarrow \{x \in A | \overline{A}(x) \in \uparrow q\} \subseteq \{x \in A | \overline{A}(x) \in \uparrow p\} \\
&\Longleftrightarrow x \in A, \overline{A}(x) \geq q \Longrightarrow \overline{A}(x) \geq p \\
&\Longleftrightarrow A_q \subseteq A_p.
\end{aligned}$$

□

Remarque : D'après la proposition 3.6 précédente, on peut mettre en bijection le poset $(P/\approx, \leq)$ et le poset des coupes $(A_P, \subseteq)$, tel que $f : [p]_{\approx} \longmapsto A_p$. Ce que permet de dire que $(P/\approx, \leq)$ est anti-isomorphe à $(A_P, \subseteq)$.

Proposition 3.8. *[14] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A. Alors :*

$$\forall p, q \in P, [p]_{\approx} \leq [q]_{\approx} \text{ si et seulement si } \bigvee [p]_{\approx} \leq \bigvee [q]_{\approx}.$$

Démonstration : Soit $[p]_\approx \leq [q]_\approx$, alors $A_q \subseteq A_p$, d'après le lemme 3.2 on a $A_{\bigvee [q]_\approx} \subseteq A_{\bigvee [p]_\approx}$, il s'ensuit d'après la proposition 3.4 que $A_{\bigvee [q]_\approx \vee \bigvee [p]_\approx} = A_{\bigvee [q]_\approx}$, ce qui implique que $\bigvee [q]_\approx \vee \bigvee [p]_\approx \approx \bigvee [q]_\approx$, comme de plus $\bigvee [q]_\approx = q$, d'après le lemme 3.2, il vient $\bigvee [q]_\approx \vee \bigvee [p]_\approx \in [q]_\approx$, i.e., $\bigvee [q]_\approx \vee \bigvee [p]_\approx \leq \bigvee [q]_\approx$, donc $\bigvee [p]_\approx \leq \bigvee [q]_\approx$.
D'autre part, si on suppose que $\bigvee [p]_\approx \leq \bigvee [q]_\approx$, alors $A_{\bigvee [q]_\approx} \subseteq A_{\bigvee [p]_\approx}$, ce qui implique d'après le lemme 3.2 que $A_q \subseteq A_p$, et par conséquent, $[p]_\approx \leq [q]_\approx$. □

Remarque : Dans le cas des P-ensembles flous, si chaque $\approx$-classe contient un seul élément, alors il n'est pas toujours vrai que $P \cong P/\approx$. i.e., $p \leq q$ dans P n'implique pas toujours $[p]_\approx \leq [q]_\approx$, ceci est illustré par l'exemple suivant.
Exemple : Soient $A = \{a, b\}$ un ensemble, et $(P, \leq)$ le poset donné ci-après :

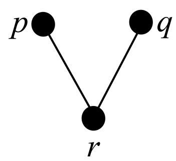


Figure 3.1 – Ensemble partiellement ordonné $(P, \leq)$

Il existe $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A, tel que $\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ p & r \end{pmatrix}$
Supposons $[p]_\approx = \{p\}, [q]_\approx = \{q\}$ et $[r]_\approx = \{r\}$, sachant que $[p]_\approx \leq [q]_\approx \Longleftrightarrow A_q \subseteq A_p$, d'après la proposition 3.6, on a donc $A_p = \{a\}$, $A_r = \{a, b\}$, $A_q = \{\emptyset\}$, donc $[r]_\approx \leq [p]_\approx \leq [q]_\approx$, i.e., $r \leq p \leq q$, ce qui est faux, car P n'est pas une chaîne, et par conséquent, $P \ncong P/\approx$.

Théorème 3.1. *[14] Soit P une famille de sous-ensembles d'un ensemble non vide A, tel que $\forall x \in A, \bigcup_{p \in P} p = A$ et $\bigcap(p \in P/x \in p) \in P$ et soit $\overline{A} : A \longrightarrow P$ une application définie de la manière suivante :*

$$\overline{A}(x) := \bigcap(p \in P/x \in p) \in P.$$

Alors, si on muni P de l'ordre " $\leq$ " tel que $(P, \leq)$ soit anti-isomorphe à $(P, \subseteq)$, alors $\overline{A}$ est un P-ensemble flou sur A, tel que $\forall p \in P$, $p = A_p$.

DÉMONSTRATION : Soit P une telle famille, $(P, \leq)$ est un poset, où $p \leq q \Longleftrightarrow q \subseteq p$, ce qui fait que $\overline{A} : A \longrightarrow P$ est bien un P-ensemble flou sur A, étant donné qu'elle est bien définie. Montrons que $p = A_p$, i.e., la famille des sous-ensembles coupes du P-ensemble flou coïncide avec les éléments de P. Soit $x \in A$, on a :

$$\begin{aligned} x \in A_p &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \bigcap(q \in P / x \in q) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \bigcap(q \in P / x \in q) \subseteq p \\ &\Longleftrightarrow x \in p. \end{aligned}$$

□

Exemple : Soient $A = \{a, b, c, d\}$ un ensemble, et $(P, \leq)$ le poset donné ci-après :

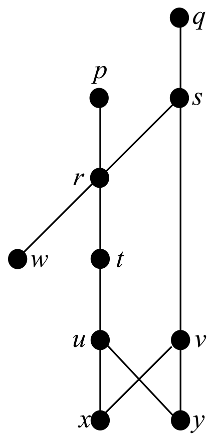


FIGURE 3.2 – Le poset $(P, \leq)$.

Il existe $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A, tel que

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ u & v & r & q \end{pmatrix}$$

Les sous-ensembles coupes sont : $A_p = \emptyset$, $A_q = A_s = \{d\}$, $A_r = A_t = A_w = \{c, d\}$,

$A_u = \{a,c,d\}$, $A_v = \{b,d\}$, $A_x = A_y = \{a,b,c,d\}$, donc $A_P = \{\emptyset,\ \{d\},\ \{c,d\},\ \{b,d\},$ $\{a,c,d\},\ \{a,b,c,d\}\}$.
Les classes d'équivalences sont : $[x]_\approx = \{x,y\}$, $[u]_\approx = \{u\}$, $[v]_\approx = \{v\}$, $[r]_\approx = \{r,w,t\}$, $[q]_\approx = \{q,s\}$, $[p]_\approx = \{p\}$.

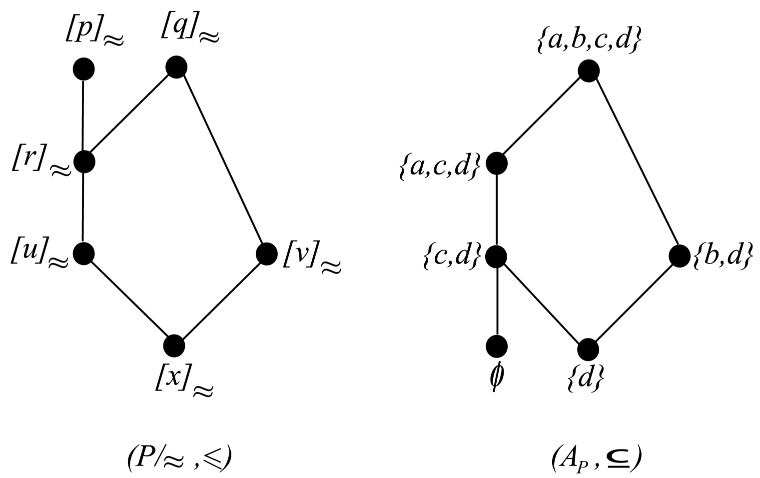


FIGURE 3.3 – Les diagrammes du poset quotient $(P/\approx, \leq)$ et du poset des coupes $(A_P, \subseteq)$.

3.3.1 Représentation canonique

Définition 3.4. *Soient A un ensemble, P un poset, $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A et $\mathfrak{C}$ le poset des coupes de $\overline{A}$. On appelle une représentation canonique de $\overline{A}$, toute application $\overline{cA} : A \longrightarrow \mathfrak{C}$, telle que :*

$$\overline{cA}(x) = \bigcap (f \in \mathfrak{C}/x \in f),\ \forall x \in A.$$

Une f-coupe de $\overline{cA}$ est définie de la manière suivante :

$$cA_f = \{x \in A/\overline{cA}(x) \geq f\}.$$

Le théorème 3.1 montre que les posets des coupes de $\overline{A}$ et $\overline{cA}$ sont isomorphes, c'est-à-dire que les co-domaines de $\overline{A}$ et $\overline{cA}$ sont isomorphes.

Proposition 3.9. *[14] Soient $\overline{A} : A \longrightarrow P$ un P-ensemble flou sur A et $\overline{cA} : A \longrightarrow \mathfrak{C}$ sa représentation canonique, alors :*

(a) $\forall x \in A$, $\overline{cA}(x) = A_{\overline{A}(x)}$.

(b) $\forall f \in \mathfrak{C}$, $cA_f = f$.

DÉMONSTRATION : (a) Soit $y \in \overline{cA}(x) = \bigcap(A_p|x \in A_p)$, alors $\forall p \in P$, tel que $x \in A_p$, $y \in A_p$, par conséquent, $y \in A_{\overline{A}(x)}$, donc $\overline{cA}(x) \subseteq A_{\overline{A}(x)}$.
D'autre part, si $y \in A_{\overline{A}(x)}$, alors $y \in A_p$, $\forall p \in P$, tel que $A_{\overline{A}(x)} \subseteq A_p$, par conséquent, $y \in \bigcap(A_p|A_{\overline{A}(x)} \subseteq A_p) = \bigcap(A_p|\overline{A}(x) \geq p) = \bigcap(A_p|x \in A_p)$. Donc $y \in \overline{cA}(x)$, et par conséquent, $A_{\overline{A}(x)} \subseteq \overline{cA}(x)$, ce qui prouve l'égalité.
(b) Soit $f = A_p$, pour $p \in P$, et soit $x \in cA_{A_p}$, alors $\overline{cA}(x) \geq A_p$ dans $\mathfrak{C}$, on a donc, d'après a, $A_{\overline{A}(x)} \geq A_p$, il s'ensuit que, $A_{\overline{A}(x)} \subseteq A_p$, ce qui implique que $\overline{A}(x) \geq p$, et par conséquent, $x \in A_p$.
D'autre part, si $x \in A_p$, alors $\overline{A}(x) \geq p$, il s'ensuit que, $A_{\overline{A}(x)} \subseteq A_p$, et par conséquent, $x \in \{y|A_{\overline{A}(y)} \subseteq A_p\} = \{y|\overline{cA}(y) \subseteq A_p\} = \{y|\overline{cA}(y) \geq A_p\} = cA_{A_p}$. D'où l'égalité des deux ensembles. □

3.3.2 Complétion des familles d'ensembles par des posets

On a déjà vu que si A est un ensemble et $\mathfrak{C}$ est une famille de sous-ensembles particuliers de A, on peut toujours déterminer un P-ensemble flou (ou simplement représentation canonique) de A vers $\mathfrak{C}$, avec $\cup\mathfrak{C} = A$ et $\bigcap\{f \in \mathfrak{C}/x \in f\} \in \mathfrak{C}$. On peut commencer par exemple par une famille arbitraire $\mathfrak{C}$ de sous-ensembles de A et on cherche un P-ensemble flou $\overline{A}$ sur A, tel que $\mathfrak{C}$ soit inclut dans le poset des coupes de $\overline{A}$. Il existe toujours un tel P-ensemble flou dont le poset des coupes est minimal parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{C}$ comme un sous-ensemble du poset des coupes.

Lemme 3.3. *[14] Soient A un ensemble non vide et $\mathfrak{C}$ une famille des sous-ensembles de*

A. Pour tout $a, b \in \mathfrak{C}$, si $a \in \bigcap\{f \in \mathfrak{C}/b \in f\}$, alors :

$$\bigcap\{f/a \in f\} \subseteq \bigcap\{f/b \in f\}.$$

DÉMONSTRATION : Soit $x \in \bigcap\{f/a \in f\}$, i.e., $\forall f \in \mathfrak{C}$, si $a \in f$ alors $x \in f$, comme par hypothèse $a \in \bigcap\{f \in \mathfrak{C}/b \in f\}$ alors $\forall f \in \mathfrak{C}$, si $b \in f$ alors $a \in f$ et donc $x \in f$, et par consequent $x \in \bigcap\{f/b \in f\}$. □

Théorème 3.2. *[14] Soit $\mathfrak{C}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble non vide A, dont l'union donne A. Alors, il existe un P-ensemble flou $\overline{A} : A \longrightarrow P$ sur A, tel que P est un poset de coupes minimal (au sens d'inclusion) contenant $\mathfrak{C}$.*

DÉMONSTRATION : Soit P la famille des sous-ensembles de A obtenue en ajoutant à $\mathfrak{C}$ l'intersection des éléments de $\mathfrak{C}$ qui contiennent x, pour tout $x \in A$. D'après le théorème 3.1, il existe un P-ensemble flou $\overline{A}$ ayant P comme poset des coupes, puisque $\bigcup\{p/p \in P\} = A$ et pour tout $x \in A, \bigcap\{p \in P/x \in p\} \in P$, tel que $A_p = p$. Plus précisément A_p contient les éléments de $\mathfrak{C}$ et l'intersection de tous les membres de $\mathfrak{C}$ qui contiennent x, $\forall x \in A$.
De plus, aucun autre ensemble flou P' sur A ne pourrait être contenu strictement dans P, car il manquerait certainement d'au moins une intersection associée à un certain $x \in A$.
□

Remarque : La fonction $\overline{A}$ ainsi définie est appelée P-complétion de la famille $\mathfrak{C}$.

Si $\mathfrak{C}$ est une famille arbitraire de sous-ensembles d'un ensemble A non vide, telle que $\bigcup\{f/f \in \mathfrak{C}\} \neq A$, il n'est pas possible d'appliquer le théorème 3.1. Cependant, il existe une procédure qui permet d'obtenir un P-ensemble flou contenant $\mathfrak{C}$ vu comme un sous-ensemble des coupes de A_P, présentée ci-dessous.

Définition 3.5. *Soit A un ensemble non vide, et $\mathfrak{C}$ une famille de ses sous-ensembles. On définit la P-complétion $\mathfrak{C}_P$ de $\mathfrak{C}$ de la manière suivante :*

$$\mathfrak{C}_P := \begin{cases} \mathfrak{C} \cup \mathfrak{C}' & si \bigcup \mathfrak{C} = A\,; \\ \mathfrak{C} \cup \{A\} \cup \mathfrak{C}' & sinon. \end{cases}$$

où $\mathfrak{C}' := \{F_x/F_x = \bigcap(f \in \mathfrak{C}/x \in f)\}$.

Exemple : Soit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble et soit $\mathfrak{C} = \{\{a, b, c, d, f\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b\}, \{c\}, \{d, e$ une famille de sous-ensembles de A, telle que $\bigcup\{f/f \in \mathfrak{C}\} = A$.

Soit P la famille de sous-ensembles de A obtenue en ajoutant à $\mathfrak{C}$ l'intersection des éléments de $\mathfrak{C}$ qui contiennent x, pour tout $x \in A$, i.e., $P = \mathfrak{C} \cup \{\{b\}, \{d\}\}$.

P est un poset muni de l'ordre " $\leq$ " tel que $(P, \leq)$ soit anti-isomorphe à $(A_P, \subseteq)$.

P satisfait aux conditions du théorème 3.1, alors il existe un P-ensemble flou

$$\begin{aligned} \overline{A} : & A \longrightarrow P \\ & x \longmapsto \overline{A}(x) = \bigcap\{f \in P/x \in f\}. \end{aligned}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ \{a, b\} & \{b\} & \{c\} & \{d\} & \{d, e\} & \{a, b, c, d, f\} \end{pmatrix}.$$

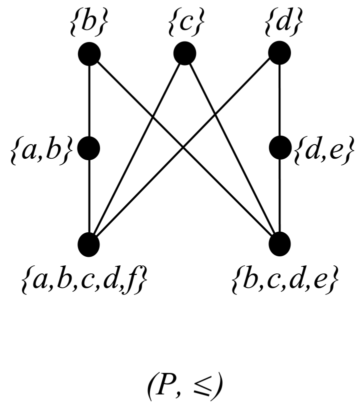


FIGURE 3.4 – Une complétion P de $\mathfrak{C}$

3.4 L-ensembles flous

Étant donné un treillis complet L, toutes les propriétés qui sont valables pour les P-ensembles flous, sont aussi valables pour les L-ensembles flous. Cependant, ils existent d'autres propriétés qui sont valables seulement pour les L-ensembles flous. Dans ce qui suit, nous présenterons certaines d'entre-elles.

Proposition 3.10. *Soit $\overline{A}$ un L-ensemble flou sur A, alors pour tout $x \in A$, $\overline{A}(x) = \bigvee_{p\in L} p \cdot \mu_{A_p}(x)$, où :*

$$p \cdot \mu_{A_p}(x) = \begin{cases} p & si\ \mu_{A_p}(x) = 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION : Soit $x \in A$, $\exists r \in L$, tel que $\overline{A}(x) = r$, donc $\mu_{A_r}(x) = 1$, i.e., $\overline{A}(x) = r \cdot \mu_{A_r}(x)$.
Si $\mu_{A_p}(x) = 1$, pour $p \in L$, alors $\overline{A}(x) \geq p$, i.e., $\overline{A}(x) \geq p \cdot \mu_{A_p}(x)$, ce qui implique que, $r \geq p$. Comme $r \in \{p \in L | \mu_{A_p}(x) = 1\}$, donc r est le supremum de $\{p | \mu_{A_p}(x) = 1\}$, i.e., $\overline{A}(x) = r \cdot \mu_{A_r}(x) = \bigvee\{p | \mu_{A_p}(x) = 1\} = \bigvee_{p\in L} p \cdot \mu_{A_p}(x)$. □

Définition 3.6. *Soit A un ensemble non vide. Une famille de moore sur A est une partie F de l'ensemble $P(A)$ des parties de A, vérifiant :*

- *$A \in F$.*
- *$F' \subseteq F \Longrightarrow \cap\{f/f \in F'\} \in F$.*

Proposition 3.11. *[11] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow L$ un L-ensemble flou sur A, alors :*
(1) $\bigcap(A_p | p \in K \subseteq L) = A_{\bigvee(p|p\in K)}$.
(2) La famille $A_L = \{A_p | p \in L\}$ des sous-ensembles coupes de $\overline{A}$ est une famille de Moore de sous-ensembles de A. De plus A_L en tant qu'ensemble ordonné par inclusion est un treillis.

Nous suggérons dans ce qui suit une preuve propre à nous.
DÉMONSTRATION : (1) Soit $K \subseteq L$, alors

$$\begin{aligned} x \in A_{\bigvee(p|p\in K)} &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq \bigvee(p|p \in K) \\ &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq p, \forall p \in K \\ &\Longleftrightarrow \forall p \in K, x \in A_p \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap(A_p | p \in K). \end{aligned}$$

(2) Soit A_L la famille des sous-ensembles coupes de $\overline{A}$. On a tout d'abord $A = A_{0_L}$ car, $\forall x \in A, \overline{A}(x) \geq 0_L$.

Soit F un sous-ensemble de A_L. D'après 1, il existe $r \in L$ tel que $\bigcap\{A_p/A_p \in F\} = A_r \in A_L$.

□

Pour les L-ensembles flous, il existe une méthode particulière de partager L en différentes $\approx$-classes. Cette méthode est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.12. *[14] Soit $\overline{A} : A \longrightarrow L$ un L-ensemble flou sur A, où L est un treillis fini. Alors, toutes les coupes A_p de $\overline{A}$ sont distincts si et seulement si tous les éléments inf-irréductibles de L différents de 1 sont dans $\overline{A}(A)$.*

Démonstration :

- Soit $p \neq 1$ un élément inf-irréductible qui n'est pas dans $\overline{A}(A)$. Il existe un unique $q \in L$ couvrant p, il s'ensuit que, $\overline{A}(A) \bigcap \uparrow p = \overline{A}(A) \bigcap \uparrow q$ (car $p \notin \overline{A}(A)$). Soit $x \in A$, alors :

$$\begin{aligned} x \in A_p &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \in \overline{A}(A) \bigcap \uparrow p \\ &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \in \overline{A}(A) \bigcap \uparrow q \\ &\Longleftrightarrow \overline{A}(x) \geq q \\ &\Longleftrightarrow x \in A_q. \end{aligned}$$

  Donc, $A_p = A_q$.
- Soient p et q deux éléments distincts de L, inf-irréductibles, différents de 1, dans $\overline{A}(A)$. On a alors,

$$\begin{aligned} p &= \bigwedge\{r \in L/p \leq r < 1, r \text{ est inf-irréductible}\}, \\ q &= \bigwedge\{s \in L/q \leq s < 1, s \text{ est inf-irréductible}\}. \end{aligned}$$

  A cette étape on distingue deux cas :

  1^{ere}*cas* : p et q sont incomparables. Dans ce cas, $p \in \overline{A}(A) \bigcap \uparrow p$ et $p \notin \overline{A}(A) \bigcap \uparrow q$, i.e., $\overline{A}(A) \bigcap \uparrow q \neq \overline{A}(A) \bigcap \uparrow p$, et par conséquent, $A_p \neq A_q$.

2^{ime}*cas* : p et q sont comparables, et supposons $p < q$. Dans ce cas $p \in \overline{A}(A) \bigcap \uparrow p$ et $p \notin \overline{A}(A) \bigcap \uparrow q$, ce qui implique, $\overline{A}(A) \bigcap \uparrow q \neq \overline{A}(A) \bigcap \uparrow p$, et par conséquent, $A_p \neq A_q$.

□

Remarques :

1. La caractérisation des ensembles coupes par les éléments inf-irréductibles ne peut être appliquée pour les $[0,1]$-ensembles flous, car l'intervalle $[0,1]$ n'est pas un treillis fini.
2. La notion de représentation canonique définie pour les P-ensembles flous est valable pour les L-ensembles flous. Nous présentons à titre illustratif un exemple.

Exemple : Soient $A = \{a, b, c\}$ un ensemble et L un treillis, tel que $\overline{A} : A \longrightarrow L$ est un L-ensemble flou sur A, avec $\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}$

Les sous-ensembles coupes de $\overline{A}$ sont : $A_1 = A_s = \emptyset$, $A_r = \{c\}$, $A_p = \{a\}$, $A_q = \{b, c\}$, $A_0 = \{a, b, c\}$.

Le poset des coupes $\mathfrak{C} = \{\emptyset, \{c\}, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, où l'ordre $\leq$ est défini de la manière suivante : si $A_p \subseteq A_q$ alors $A_q \leq A_p$.

La représentation canonique de $\overline{A}$ est une application :

$$\begin{aligned} \overline{cA} : & A \longrightarrow \mathfrak{C} \\ & x \longmapsto \overline{cA}(x) = \bigcap (f \in \mathfrak{C} / x \in f). \end{aligned}$$

où $\overline{cA} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \{a\} & \{b, c\} & \{c\} \end{pmatrix}$.

Évidemment, $\overline{A}$ et $\overline{cA}$ ont familles des coupes identiques, et leurs posets des co-domaines sont isomorphes.

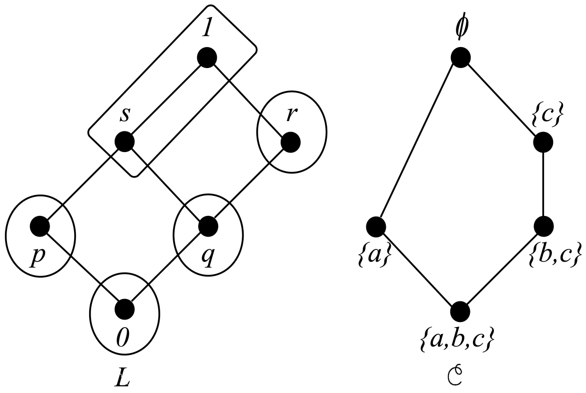


FIGURE 3.5 – L est un treillis et $\mathfrak{C}$ est un poset des coupes.

FIGURE 3.6 – Isomorphisme entre les co-domaines de $\overline{A}$ et $\overline{cA}$.

Chapitre 4

L-posets flous et L-relations floues

On présente dans ce chapitre la L-relation d'ordre floue (ou simplement ordre flou) de deux manière différents :

- On présente une relation d'ordre ordinaire comme étant une application de $A^2 \longrightarrow \{0,1\}$, on remplace $\{0,1\}$ par un treillis complet, et on obtiendra une L-relation d'ordre floue.
- On définit un L-poset flou, et on propose à partir d'un théorème comment construire une L-relation d'ordre floue à partir d'un L-poset flou.

4.1 L-relations floues

Le concept de relation floue généralise celui de relation classique. Il met en evidence des liaisons imprécises graduelles entre les éléments d'un ensemble.

Soient A un ensemble non vide et $(L, \wedge, \vee)$ un treillis complet, avec l'élément minimal 0_L et l'élément maximal 1_L.

On appelle une L-**relation floue** sur A, toute application $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$.

Étant donné un élément $p \in L$, on appelle **relation coupe** (ou simplement p-**coupe**) de $\overline{\rho}$, tout sous-ensemble ρ_p de A^2 définit de la manière suivante :

$$\rho_p = \{(x,y) \in A^2 / \overline{\rho}(x,y) \geq p\}.$$

A tout $p \in L$, on fait correspondre une **relation coupe forte** (ou simplement **coupe**

forte) de $\overline{\rho}$, noté $\rho_p^>$ définit de la manière suivante :

$$\rho_p^> = \{(x,y) \in A^2/\overline{\rho}(x,y) > p\}.$$

Une L-**relation floue** est :

1. **réflexive** si : $\overline{\rho}(x,x) = 1_L$, $\forall x \in A$.
2. **faiblement réflexive** si : $\overline{\rho}(x,x) \geq \overline{\rho}(x,y)$ et $\overline{\rho}(x,x) \geq \overline{\rho}(y,x)$, $\forall x,y \in A$.
3. **antisymétrique** si : $\overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,x) = 0_L$, $\forall x,y \in A, x \neq y$.
4. **transitive** si : $\overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,z) \leq \overline{\rho}(x,z)$, $\forall x,y,z \in A$.

Une L-relation floue $\overline{\rho}$ est une L-**relation d'ordre floue** (ou simplement **ordre flou**) sur A, si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Une L-relation floue $\overline{\rho}$ est une L-**relation d'ordre floue faible** (ou simplement **ordre flou faible**) sur A, si elle est faiblement réflexive, antisymétrique et transitive.

Théorème 4.1. *[16] Soit $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$ une L-relation floue, alors :*
$\overline{\rho}$ est une L-relation d'ordre floue si et seulement si toutes les p-coupes ρ_p de $\overline{\rho}$ sauf 0_L-coupe sont des relations d'ordres.

Démonstration :

- Soit $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$ une L-relation d'ordre floue, et soit $p \in L$. Si $p = 0_L$, alors $\rho_{0_L} = \{(x,y) \in A^2/\overline{\rho}(x,y) \geq 0_L\}$, i.e., $\rho_{0_L} = A^2$, mais A^2 n'est pas une relation d'ordre sauf si $|A| = 1$.
- Soit $p \neq 0_L$, par la réflexivité de $\overline{\rho}$, on a pour tout $x \in A$, $\overline{\rho}(x,x) = 1_L$, il s'ensuit que, $\overline{\rho}(x,x) \geq p, \forall p \in L$, ce qui implique que $(x,x) \in \rho_p$, et par conséquent, ρ_p est réflexive.
- Soient $(x,y) \in \rho_p$ et $(y,x) \in \rho_p$, alors $\overline{\rho}(x,y) \geq p$ et $\overline{\rho}(y,x) \geq p$, et par conséquent, $\overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,x) \geq p$, et comme $\overline{\rho}$ est antisymétrique, alors $x = y$.
- Soient $(x,y) \in \rho_p$ et $(y,z) \in \rho_p$, alors $\overline{\rho}(x,y) \geq p$ et $\overline{\rho}(y,z) \geq p$, comme $\overline{\rho}$ est transitive, $\overline{\rho}(x,z) \geq \overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,z) \geq p$, et par conséquent, $(x,z) \in \rho_p$.
- D'autre part, supposons que toutes les coupes (sauf 0_L-coupe) sont des relations d'ordres. Montrons que $\overline{\rho}$ est une L-relation d'ordre floue.

- Comme toutes les p-coupes sont des relations réflexives, alors $(x, x) \in \rho_p$, pour tout $p \in L$, i.e., $\overline{\rho}(x, x) \geq p, \forall p \in L$. Donc $\overline{\rho} = 1$, ce qui signifié que.
- Supposons que $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, x) = p \neq 0$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x, y) \geq p$ et $\overline{\rho}(y, x) \geq p$, ce qui implique que, $(x, y) \in \rho_p$ et $(y, x) \in \rho_p$, et par l'antisymétrie de ρ_p, on a donc $x = y$. Donc $\overline{\rho}$ est antisymétrique.
- On veut démontrer que $\overline{\rho}(x, z) \geq \overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z)$?.

  Supposons que $\overline{\rho}(x, z) < \overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z)$.

  Soit $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z) = p$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x, y) \geq p$ et $\overline{\rho}(y, z) \geq p$, ce qui implique que, $(x, y) \in \rho_p$ et $(y, z) \in \rho_p$, et par la transitivité de ρ_p on a $(x, z) \in \rho_p$, i.e., $\overline{\rho}(x, z) \geq p$, alors $\overline{\rho}(x, z) \geq \overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z)$, contradiction. Donc $\overline{\rho}$ est transitive.

  Par conséquent $\overline{\rho}$ est une L-relation d'ordre floue.

$\square$

Exemple :

Soient $A = \{a, b, c, d, e\}$ un ensemble et L le treillis complet suivant :

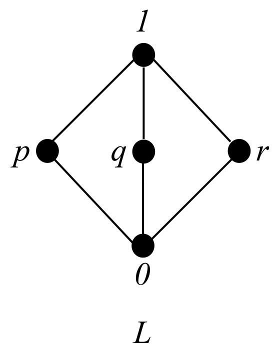


FIGURE 4.1 –

Soit $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$ une L-relation d'ordre floue sur un A, définie ci-après :

$\overline{\rho}$	a	b	c	d	e
a	p	p	0_L	0_L	0_L
b	0_L	1_L	0_L	0_L	r
c	p	1_L	1_L	0_L	r
d	0_L	q	q	q	0_L
e	p	p	0_L	0_L	1_L

Les coupes de la L-relation floue $\overline{\rho}$ sont les suivantes :

ρ_p	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	0
b	0	1	0	0	0
c	1	1	1	0	0
d	0	0	0	0	0
e	1	1	0	0	1

ρ_q	a	b	c	d	e
a	0	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0
d	0	1	1	1	0
e	0	0	0	0	1

ρ_r	a	b	c	d	e
a	0	0	0	0	0
b	0	1	0	0	1
c	0	1	1	0	1
d	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	1

ρ_{1_L}	a	b	c	d	e
a	0	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0
d	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	1

ρ_{0_L}	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1
d	1	1	1	1	1
e	1	1	1	1	1

Les diagrammes de Hasse des p-coupes vues comme posets sont décrits ci-dessous :

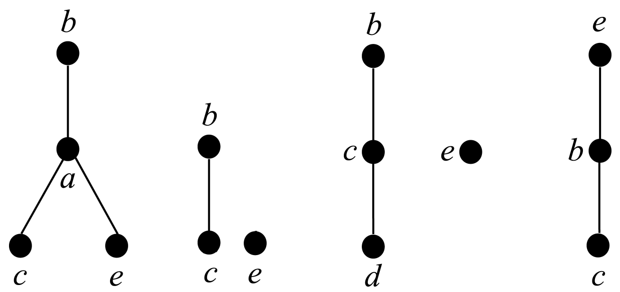


FIGURE 4.2 – Representation les p-coupes de $\overline{\rho}$

Lemme 4.1. *[16] Soit $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$ une L-relation d'ordre floue, où L est un treillis complet avec un monolithe a. Alors, la coupe forte $\rho^{>}_{0_L}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble A.*

Démonstration :

- Comme $\overline{\rho}$ est réflexive, i.e., pour tout $x \in A$, $\overline{\rho}(x,x) = 1_L > 0_L$, ce qui implique que, $(x,x) \in \rho^{>}_{0_L}$, donc $\rho^{>}_{0_L}$ est réflexive.
- Soient $(x,y) \in \rho^{>}_{0_L}$ et $(y,x) \in \rho^{>}_{0_L}$, alors $\overline{\rho}(x,y) > 0_L$ et $\overline{\rho}(y,x) > 0_L$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x,y) \geq a$ et $\overline{\rho}(y,x) \geq a$, ce qui implique que, $\overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,x) \geq a$, et comme $\overline{\rho}$ est antisymétrique, on a $x = y$. Donc $\rho^{>}_{0_L}$ est antisymétrique.
- Soient $(x,y) \in \rho^{>}_{0_L}$ et $(y,z) \in \rho^{>}_{0_L}$, alors $\overline{\rho}(x,y) > 0_L$ et $\overline{\rho}(y,z) > 0_L$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,z) \geq a$, et par la transitivité de $\overline{\rho}$ on a $\overline{\rho}(x,z) \geq a > 0_L$, ce qui implique que, $(x,z) \in \rho^{>}_{0_L}$. Alors $\rho^{>}_{0_L}$ est transitive.

□

4.2 Certaines propriétés des L-relations floues

On présente dans ce qui suit certaines propriétés des L-relations d'ordres floues relations avec les coupes relations d'ordres.

Proposition 4.1. *Soit $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$ une L-relation d'ordre floue, alors : $p \leq q$ implique $\rho_q \subseteq \rho_p$.*

Démonstration : Soit $(x,y) \in \rho_q$, alors $\overline{\rho}(x,y) \geq q$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x,y) \geq p$, i.e., $(x,y) \in \rho_p$. Donc $\rho_q \subseteq \rho_p$. □

Proposition 4.2. *[16] Soit $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$ une L-relation d'ordre floue, tel que L est un treillis atomique. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des atomes de L, alors il existe une famille de posets $\{P_a / a \in \mathfrak{A}\}$ déduite de $\overline{\rho}$, tels que chaque poset de cette famille est un poset maximum par rapport à l'ordre d'inclusion. De plus, chaque coupe est un sous-poset d'un poset de cette famille.*

DÉMONSTRATION :

D'après le théorème 4.1, toute p-coupe, $p \neq 0_L$ est une relation d'ordre sur A. Posant $P_a = \rho_a$, pour $a \in \mathfrak{A}$, comme L est atomique pour tout $p \in L$, $\exists a \in \mathfrak{A}$ tel que $p \geq a$, donc $\rho_p \subseteq \rho_a$.

□

Proposition 4.3. *[16] Soit $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$ une L-relation d'ordre floue, où L est un treillis atomique avec $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des atomes, alors $\overline{\rho}(x, y) > 0$ si et seulement s'il existe un $a \in \mathfrak{A}$, tel que : $x \leq y$ dans ρ_a.*

DÉMONSTRATION :

- Soit $\overline{\rho}(x, y) = p > 0$, pour un $p \in L$, L étant atomique il existe un atome $a \in \mathfrak{A}$, tel que $p \geq a$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x, y) \geq a$, et par consequent, $(x, y) \in \rho_a$, i.e., $x \leq y$ dans ρ_a.
- D'autre part, soit un atome $a \in \mathfrak{A}$, tel que $x \leq y$ dans ρ_a, i.e., $(x, y) \in \rho_a$, donc $\overline{\rho}(x, y) \geq a$, et par conséquent, $\overline{\rho}(x, y) > 0$.

□

Proposition 4.4. *[16] Soit $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L$ une L-relation d'ordre floue, où L est un treillis atomique, alors $\overline{\rho}(x, y) = \bigvee_{(a \in \mathfrak{A})} a.\mu_{\rho_a}(x, y)$, où $\mu_{\rho_a}(x, y) = 1$ si $x \leq y$ dans ρ_a et 0 sinon. avec $a.1 = a$ et $a.0 = 0$.*

DÉMONSTRATION :

La preuve est immédiat en vertu de fait que chaque élément différents de 0_L de L est supremum d'atomes. □

4.3 L-Posets flous

Soient $(P, \leq)$ un poset et $(L, \wedge, \vee)$ un treillis complet avec l'élément minimal 0_L et l'élément maximal 1_L.

On appelle un L-**poset flou** sur P, toute fonction $\overline{\omega} : P \longrightarrow L$.

Soit $p \in L$, une **sous-ensemble coupe** est un sous-ensemble, noté ω_p, de P définit de la manière suivante :

$$\omega_p = \{x \in P | \overline{\omega}(x) \geq p\}.$$

Le théorème suivant donne un procédé de construction d'un ordre flou à partir d'un L-poset flou.

Théorème 4.2. *[16] Soit $\overline{\omega} : P \longrightarrow L$ un L-poset flou, alors l'application $\overline{\rho} : P^2 \longrightarrow L$ définit par :*

$$\overline{\rho}(x, y) = \begin{cases} 1_L & si\ x = y \\ \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(y) & si\ x < y \\ 0_L & sinon. \end{cases}$$

est une L-relation d'ordre floue (ou ordre flou).

Démonstration :

- $\overline{\rho}$ est réflexive par définition.
- $\overline{\rho}$ est antisymétrique. En effet, supposons que $x \neq y$, on distingue trois cas : soit $x < y$ ou $x > y$ ou x et y sont incomparables.

  Si $x < y$, alors $\overline{\rho}(x, y) = \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(y)$ et $\overline{\rho}(y, x) = 0_L$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, x) = 0_L$.

  De même pour $x > y$.

  Si x et y sont incomparables, alors $\overline{\rho}(x, y) = 0_L$ et $\overline{\rho}(y, x) = 0_L$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, x) = 0_L$.
- $\overline{\rho}$ est transitive. En effet, supposons que $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z) = 0_L$, il s'ensuit que, $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z) \leq \overline{\rho}(x, z)$.

  Si maintenant $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z) > 0_L$, on distingue trois cas : soit ($x = y$ et $y < z$) ou ($y = z$ et $x < y$) ou ($x < y$ et $y < z$).

  Si $x = y$ et $y < z$, alors $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z) = \overline{\rho}(x, x) \wedge \overline{\rho}(x, z) = 1_L \wedge \overline{\rho}(x, z) = \overline{\rho}(x, z)$.

  De même pour $y = z$ et $x < y$.

  Si maintenant $x < y$ et $y < z$, alors $\overline{\rho}(x, y) \wedge \overline{\rho}(y, z) = \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(y) \wedge \overline{\omega}(y) \wedge \overline{\omega}(z) \leq \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(z) = \overline{\rho}(x, z)$.

□

Dans toute la suite, on pose $L' = 0 \oplus L$, où $\oplus$ est la somme linéaire. L'élément inférieure 0_L de L devient un monolithe de L' tel que c'est décrit dans la figure suivant :

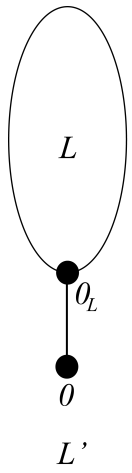


FIGURE 4.3 – Treillis complet avec un monolithe

Théorème 4.3. *[16] Soit $\overline{\omega} : P \longrightarrow L$ un L-poset flou, alors :*
l'application $\overline{\rho} : P^2 \longrightarrow L'$ définit de la manière suivante :

$$\overline{\rho}(x,y) = \begin{cases} \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(y) & si\ x \leq y \\ 0_L & sinon. \end{cases}$$

est une L-relation d'ordre faible floue. De plus, les coupes ρ_p et ω_p coincident en tant que sous-posets de P, pour tout $p \in L$, y compris 0.

DÉMONSTRATION :

- Soient $x, y \in P$. Si $x \leq y$, alors $\overline{\rho}(x,x) = \overline{\omega}(x) \geq \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(y) = \overline{\rho}(x,y)$. Dans le cas contraire, i.e., $x \nleq y$, on a $\overline{\rho}(x,y) = 0_L$, $\overline{\rho}(x,x) \geq \overline{\rho}(x,y) = 0_L$. Par conséquent $\overline{\rho}$ est faiblement réflexive.
- La preuve de l'antisymétrie de $\overline{\rho}$ est identique à celle du théorème 4.2.
- La preuve de la transitivité de $\overline{\rho}$ est identique à celle du théorème 4.2, sauf pour un

seul cas $\overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,z) > 0_L$, et $x \leq y$ et $y \leq z$. Dans ce cas on :

$$\overline{\rho}(x,z) = \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(z) \geq \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(y) \wedge \overline{\omega}(y) \wedge \overline{\omega}(z) = \overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,z)$$

. Donc $\overline{\rho}$ est L-relation d'ordre faible floue.

– Soit $p \in L$, on a :

$$\begin{aligned}(x,y) \in \rho_p &\Longleftrightarrow \overline{\rho}(x,y) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \overline{\omega}(x) \wedge \overline{\omega}(y) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \overline{\omega}(x) \geq p \text{ et } \overline{\omega}(y) \geq p \\ &\Longleftrightarrow x,\ y \in \omega_p.\end{aligned}$$

Il reste à démontrer que ρ_p ou ω_p est un ordre, il suffit de démontrer l'un des deux. Soit $(x,y) \in \rho_p$, montrons que $(x,x) \in \rho_p$. Comme $\overline{\rho}$ est un ordre faible flou, alors $\overline{\rho}(x,x) \geq \overline{\rho}(x,y) \geq p$, il s'ensuit que $(x,x) \in \rho_p$, donc ρ_p est réflexive.

Soient (x,y) et $(y,x) \in \rho_p$, alors $\overline{\rho}(x,y) \geq p$ et $\overline{\rho}(y,x) \geq p$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,x) \geq p$, et comme $\overline{\rho}$ est antisymétrique, alors $x = y$, et par conséquent, ρ_p est antisymétrique.

Soient (x,y) et $(y,z) \in \rho_p$, il s'ensuit que, $\overline{\rho}(x,y) \geq p$ et $\overline{\rho}(y,z) \geq p$, ce qui implique que $\overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,z) \geq p$, et comme $\overline{\rho}$ est transitive, on a $\overline{\rho}(x,z) \geq \overline{\rho}(x,y) \wedge \overline{\rho}(y,z)$, donc $\overline{\rho}(x,z) \geq p$, il s'ensuit que $(x,z) \in \rho_p$, et par consequent, ρ_p est transitive.

Alors ρ_p est un ordre.

□

Le théorème suivant propose un procédé inverse à celui du théorème précédent, c'est à dire à partir d'un ordre flou, on peut créer un L-poset flou.

Théorème 4.4. *[16] Soient $\overline{\rho} : P^2 \longrightarrow L'$ une L-relation d'ordre faible floue et A un ensemble définit de la manière suivante :*

$$A = \{x \in P / \overline{\rho}(x,x) > 0\},$$

alors l'application $\overline{\omega} : A \longrightarrow L$ définie par $\overline{\omega}(x) = \overline{\rho}(x,x)$, est un L-poset flou sur $(A, \leq)$, où l'ordre est la 0_L-coupe forte, i.e., $\leq = \rho^{>}_{0_L}$.

De plus, pour tout $p \in L$, $(x,y) \in \rho_p$ implique $x, y \in \omega_p$.

DÉMONSTRATION : D'après le lemme 4.1, la coupe forte $\rho_{0_L}^{>}$ est une relation d'ordre, noté $\leq$, donc $(A, \leq)$ est un poset. Donc l'application $\overline{\omega} : A \longrightarrow L$ est un L-poset flou sur A.

Soit $(x, y) \in \rho_p$, alors $\overline{\rho}(x, y) \geq p$, comme $\overline{\rho}$ est faiblement réflexive alors $\overline{\rho}(x, x) \geq p$ et $\overline{\rho}(y, y) \geq p$, ce qui implique que, $\overline{\omega}(x) \geq p$ et $\overline{\omega}(y) \geq p$, et par conséquent $x \in \omega_p$ et $y \in \omega_p$. $\square$

Chapitre 5

$\mathscr{T}$reillis flous

5.1 Introduction

La structure de treillis est l'une des structures les plus discutées et largement utilisées en mathématiques discrètes.

Comme il est bien connu, un treillis est vu soit comme un ensemble ordonné, ou soit comme une structure algébrique.

Dans ce chapitre, on présente les L-treillis flou de deux approaches différentes, et on donne les théorèmes de transitions entre ces approaches.

La première approche est obtenue en utilisant l'idée de brouillage d'appartenance des éléments du treillis, vu comme structure algébrique dans un treillis complet.

Pour la seconde approche, il s'agit de brouiller la relation d'ordre dans un treillis complet.

5.2 Treillis flou vu comme une structure algébrique floue (la première approche)

On va définir les L-treillis flous obtenus par le brouillage de l'appartenance des éléments du treillis M dans un treillis complet L.

Définition 5.1. *Soient* $(M, \wedge_M, \vee_M)$ *un treillis vu comme une structure algébrique et* L

un treillis complet, avec l'élément minimal 0_L *et l'élément maximal* 1_L.

Toute application $\overline{M} : M \longrightarrow L$ *est appelée une* L***-structure algébrique floue***.

Étant donné $p \in L$, *on appelle une* p***-coupe***, *tout sous-ensemble* M_p *de* M *définit de la manière suivante :*

$$M_p = \{x \in M / \overline{M}(x) \geq p\}.$$

Une L*-structure algébrique floue est dite* L***-treillis flou***, *si toutes les* p*-coupes* M_p *de* $\overline{M}$ *sont des sous-treillis de* M.

Exemple : Soient $(M, \wedge_M, \vee_M)$ un treillis et $(L, \wedge_L, \vee_L)$ un treillis complet donnés ci-après :

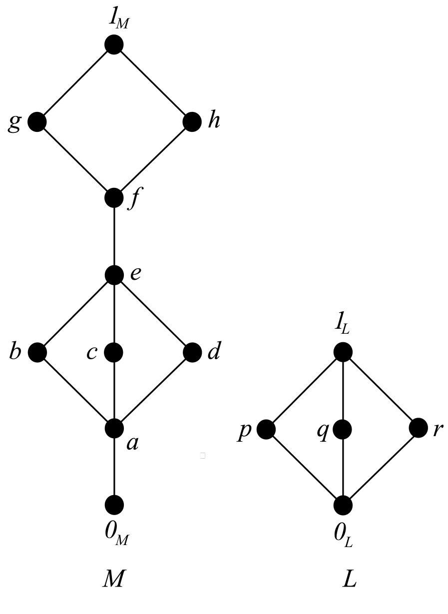


FIGURE 5.1 – Représentations d'un treillis M et d'un treillis complet L

Soit $\overline{M} : M \longrightarrow L$ la L-structure algébrique floue définie de la manière suivante :

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 0_M & a & b & c & d & e & f & g & h & 1_M \\ q & q & q & q & q & r & 1_L & r & p & 1_L \end{pmatrix}$$

Les p-coupes M_p de $\overline{M}$ sont donnés ci-après :

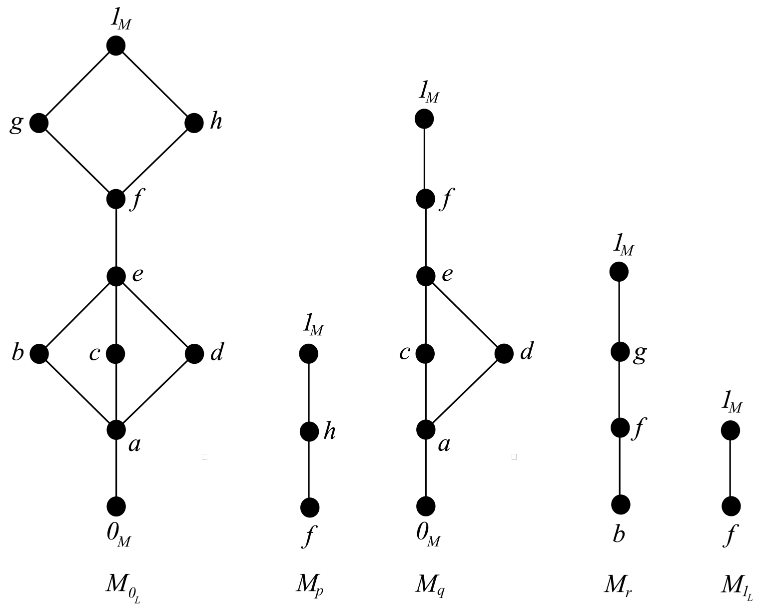


FIGURE 5.2 – Les p-coupes M_p de $\overline{M}$ sont des sous-treillis de M

Donc $\overline{M}$ est un L-treillis flou.

Proposition 5.1. *[13] Soit $\overline{M} : M \longrightarrow L$ un L-treillis flou, pour tout $p, q \in L$, si $p \leq q$, alors M_q est un sous-treillis de M_p.*

DÉMONSTRATION : Soit $x \in M_q$, alors $\overline{M(x)} \geq q$, comme $p \leq q$, il s'ensuit que $\overline{M(x)} \geq p$, ce qui implique que $x \in M_p$, i.e., $M_q \subseteq M_p$, et comme M_q et M_p sont de sous-treillis de M, donc M_q est un sous-treillis de M_p. $\square$

Proposition 5.2. *[13] Soient $\overline{M} : M \longrightarrow L$ un L-treillis flou et $\mathfrak{F}$ la famille des coupes de $\overline{M}$ muni de l'ordre "$\subseteq$". Alors, $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ est un treillis avec l'élément minimal M_{1_L} et l'élément maximal $M_{0_L} = M$.*

DÉMONSTRATION : Il est claire que $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ est un poset. D'après la proposition 5.2, on a pour tout $p \in L$, $p \leq q$ implique $M_q \subseteq M_p$, i.e., $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ est anti-isomorphe à L, donc $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ est un treillis. $\square$

Exemple : Soient $(M, \wedge_M, \vee_M)$ le treillis et $(L, \wedge_L, \vee_L)$ le treillis complet donnés ci-après :

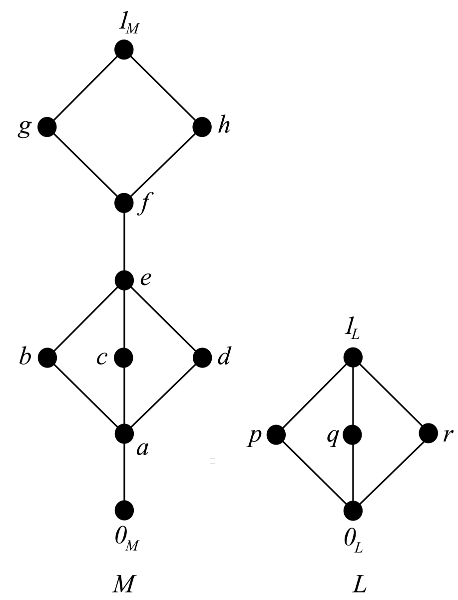


FIGURE 5.3 – Representations d'un treillis M et d'un treillis complet L

L'application $\overline{M} : M \longrightarrow L$ définit de la manière suivante est un L-treillis flou

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 0_M & a & b & c & d & e & f & g & h & 1_M \\ q & q & q & q & q & r & 1_L & r & p & 1_L \end{pmatrix}$$

Soit $\mathfrak{F} = \{M_{0_L}, M_p, M_q, M_r, M_{1_L}\}$ la famille des coupes de $\overline{M}$ ordonnée par inclusion de diagramme donné ci-après :

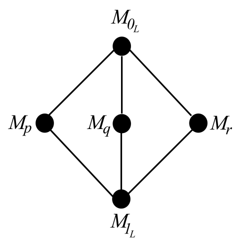


FIGURE 5.4 – La famille $\mathfrak{F}$ des coupes de $\overline{M}$

Proposition 5.3. *[13] Soient* $(M, \wedge_M, \vee_M)$ *un treillis et* $(L, \wedge_L, \vee_L)$ *un treillis complet. Alors, l'application* $\overline{M} : M \longrightarrow L$ *est un L-treillis flou si et seulement si les deux des relations suivantes sont vérifiées pour tout* $x, y \in M$ *:*

$$\overline{M}(x \wedge_M y) \geq \overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y),$$

et

$$\overline{M}(x \vee_M y) \geq \overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y).$$

DÉMONSTRATION : Soit $p \in L$, tel que $\overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y) = p$, ce qui implique que $\overline{M}(x) \geq p$ et $\overline{M}(y) \geq p$, il s'ensuit que $x \in M_p$ et $y \in M_p$, et comme toutes les coupes M_p de $\overline{M}$ sont des sous-treillis de M, alors $x \wedge_M y \in M_p$ et $x \vee_M y \in M_p$, et par conséquent $\overline{M}(x \wedge_M y) \geq p$ et $\overline{M}(x \vee_M y) \geq p$, donc $\overline{M}(x \wedge_M y) \geq \overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y)$ et $\overline{M}(x \vee_M y) \geq \overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y)$.
D'autre part, soient $x, y \in M_p$, alors $\overline{M}(x) \geq p$ et $\overline{M}(y) \geq p$, donc $\overline{M}(x) \wedge \overline{M}(y) \geq p$, il s'ensuit que $\overline{M}(x \wedge_M y) \geq p$ et $\overline{M}(x \vee_M y) \geq p$, et par conséquent $x \wedge_M y \in M_p$ et $x \vee_M y \in M_p$, donc $\forall p \in L$, M_p est un sous-treillis de M. Alors $\overline{M}$ est un L-treillis flou.
□

Corollaire 5.1. *[13] Soient* $(M, \wedge_M, \vee_M)$ *un treillis et* $(L, \wedge_L, \vee_L)$ *un treillis complet. Alors, toute application* $\overline{M} : M \longrightarrow L$ *est un L-treillis flou si et seulement si la relation suivante est vérifiée, pour tout* $x, y \in M$ *:*

$$\overline{M}(x \vee_M y) \wedge_L \overline{M}(x \wedge_M y) \geq \overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y).$$

DÉMONSTRATION : La preuve est immédiate en vertu de la proposition précédente.
□

Théorème 5.1. *[13] Soit* $\mathfrak{F}$ *une famille de treillis avec leurs ensembles correspondants deux à deux disjoints. Alors, il existe un L-treillis flou sur* $\mathfrak{F}$ *dont les p-coupes non triviaux* $(p \neq 0)$ *sont exactement les treillis de* $\mathfrak{F}$.

DÉMONSTRATION : Soit $\mathfrak{F}$ la famille de treillis $(M_i, \wedge_i, \vee_i)$, $i \in I$, tels que $M_i \bigcap M_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, avec M_i admet un élément minimal 0_i et un élément maximal 1_i, pour tout

$i \in I$. Posons $M = 0_M \oplus \mathring{\bigcup}_{i\in I} M_i \oplus 1_M$, où 0_M et 1_M sont l'un des éléments des treillis M_i. Alors M est un treillis par construction. Soit L le treillis complet donné ci-après :

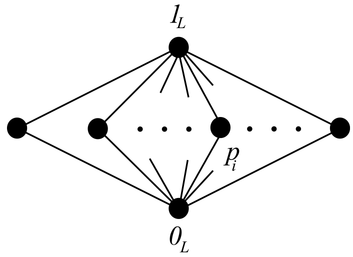


FIGURE 5.5 – Représentation de treillis complet L

Il existe un L-treillis flou $\overline{M} : M \longrightarrow L$, tel que $\overline{M}(x) = p_i$, pour tout $x \in M_i$, $\forall i \in I$ et $\overline{M}(0_M) = \overline{M}(1_M) = 0_L$. Il est clair que toutes les p-coupes de $\overline{M}$ sont exactement des treillis de $\mathfrak{F}$. $\square$

Exemple : Soit $\mathfrak{F}$ une famille des treillis M_1 ,M_2, M_3. Posons $M = 0_M \oplus \mathring{\bigcup}_{1\leq i\leq 3} M_i \oplus 1_M$, tel que 0_M et 1_M sont respectivement l'un des éléments minimaux et maximaux des treillis $M_i, i = \overline{1,3}$.

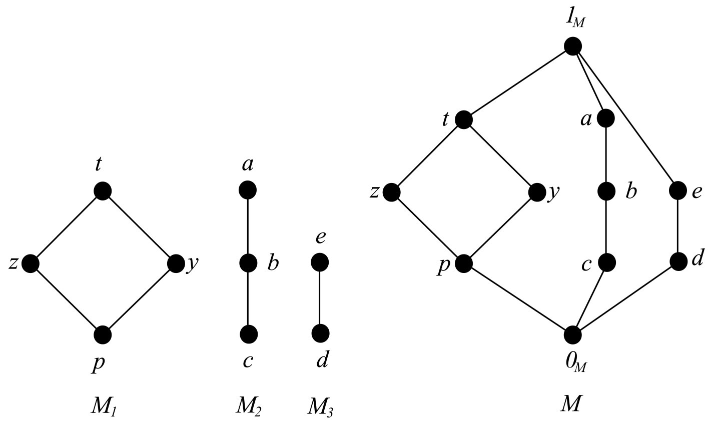


FIGURE 5.6 –

Soit L le treillis complet donné ci-après :

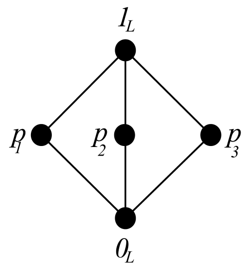


FIGURE 5.7 – Représentation du treillis complet L

L'application $\overline{M} : M \longrightarrow L$ telle que $\overline{M}(x) = p_i, x \in M_i$, pour tout $i = \overline{\{1, 3\}}$ et $\overline{M}(0_M) = \overline{M}(1_M) = 0_L$ est un L-treillis flou.
i.e.,

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & p & t & y & z & 0_M & 1_M \\ p_2 & p_2 & p_2 & p_3 & p_3 & p_1 & p_1 & p_1 & p_1 & 0_L & 0_L \end{pmatrix}$$

Nous suggérons dans ce qui suit une proposition propre à nous.

Proposition 5.4. *Soit $\overline{M} : M \longrightarrow L$ un L-treillis flou. Alors, pour tout $p, q, z \in L$, $z \leq p \wedge q$ implique $M_p \cup M_q \subseteq M_z$.*

DÉMONSTRATION : Soit $x \in M_p \cup M_q$, alors $x \in M_p$ ou $x \in M_q$, ce qui implique que $\overline{M}(x) \geq p$ ou $\overline{M}(x) \geq q$, il s'ensuit que $\overline{M}(x) \geq p \wedge q$, donc $\overline{M}(x) \geq z$, et par conséquent $x \in M_z$. □

Nous suggérons dans ce qui suit une proposition propre à nous.

Proposition 5.5. *Soit $\overline{M} : M \longrightarrow L$ un L-treillis flou, pour tout $p, z \in L$, si $z \leq \bigwedge p$. Alors, $\bigcup M_p \subseteq M_z$.*

DÉMONSTRATION : Soit $x \in \bigcup M_p$, alors $\exists p \in L$, tel que $x \in M_p$, ce qui implique que $\overline{M}(x) \geq p$, il s'ensuit que $\overline{M}(x) \geq \bigwedge p$, donc $\overline{M}(x) \geq z$, et par conséquent $x \in M_z$. □

5.3 Treillis flou vu comme une relation floue (la deuxième approche)

Les L-treillis flous introduits dans cette partie sont des L-treillis flous obtenus par le brouillage de la relation d'ordre d'un treillis M dans un treillis complet L'.

Soient A un ensemble non vide, $(L, \leq)$ un treillis complet avec l'élément minimal 0_L et l'élément maximal 1_L et $L' = 0 \oplus L$. Toute application $\overline{\rho} : A^2 \longrightarrow L'$ est appelée une L-**relation floue** sur A.

Étant donné $p \in L$, on appelle une p-**coupe**, tout sous-ensemble ρ_p de A, définit par $\rho_p = \{(x, y) \in A^2 / \overline{\rho}(x, y) \geq p\}$.

Pour tout $p \in L'$, on note par N_p l'ensemble suivant : $N_p = \{x \in A / \overline{\rho}(x, x) \geq p\}$.

Définition 5.2. *Soit $\overline{\rho} : M^2 \longrightarrow L'$ une L-relation floue, le couple $(M, \overline{\rho})$ est appelée un L-**treillis flou**, si (M, ρ_{0_L}) est un treillis et tous les p-coupes de $\overline{\rho}$ sont des sous-treillis de (M, ρ_{0_L}), $\forall p \in L$.*

Théorème 5.2. *[13] Soient M un treillis non vide et $L' = 0 \oplus L$ un treillis complet. Alors, $\overline{\rho} : M^2 \longrightarrow L'$ est un L-treillis flou si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$\overline{\rho}$ est une L-relation faible floue.*

2. *$\forall x, y \in M, \exists S \in M$ et $\forall p \in \{0\} \cup \{p \in L | x, y \in N_p\}, \overline{\rho}(x, S) \geq p$ et $\overline{\rho}(y, S) \geq p$.*

   et

   $\forall s \in M, \overline{\rho}(x, s) \geq p$ et $\overline{\rho}(y, s) \geq p \Longrightarrow \overline{\rho}(S, s) \geq p$.

3. *$\forall x, y \in M, \exists I \in M$ et $\forall p \in \{0\} \cup \{p \in L | x, y \in N_p\}, \overline{\rho}(I, x) \geq p$ et $\overline{\rho}(I, y) \geq p$.*

   et

   $\forall i \in M, \overline{\rho}(i, x) \geq p$ et $\overline{\rho}(i, y) \geq p \Longrightarrow \overline{\rho}(i, I) \geq p$.

DÉMONSTRATION :

– Soit $\overline{\rho} : M^2 \longrightarrow L'$ un L-treillis flou, alors (M, ρ_{0_L}) est un treillis, i.e., pour tout $x, y \in M$, le supremum S et l'infimum I de (x, y) existent, donc pour $p = 0_L$, les relations (2) et (3) sont vérifiées.

Soient $p \in L$ et $x, y \in N_p$, comme la coupe ρ_p est un sous-treillis de ρ_{0_L}, alors le supremum et l'infimum de (x, y) existe dans le treillis (N_p, ρ_p), donc les relations (2) et (3) sont vérifiées.

Comme toutes les p-coupes (N_p, ρ_p) sont des sous-treillis de (M, ρ_{0_L}), alors ρ_p sont des relations d'ordres sur leurs sous-ensembles correspondants (N_p), il s'ensuit que tous les p-coupes sont des relations d'ordres faibles sur M.

– Supposons que l'application $\overline{\rho} : M^2 \longrightarrow L'$ satisfaite les conditions $(1) - (3)$, par la condition (2), on a $\overline{\rho}(x, S) \geq 0_L$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x, x) \geq \overline{\rho}(x, S)$, ce qui implique $\mu_{\rho_{0_L}}(x, x) = 1$ pour tout $x \in M$, il s'ensuit que $(x, x) \in \rho_{0_L}$, ce qui implique que ρ_{0_L} est réflexive, et ρ_{0_L} contient seulement les éléments qui vérifient la réflexivitè, ce qui implique ρ_{0_L} est une relation d'ordre. Les conditions (2) et (3) signifient que pour tout $x, y \in M$, $\exists$ un supremum S et un infimum I dans M, ce qui implique que (M, ρ_{0_L}) est un treillis.

Comme $\overline{\rho}$ est une relation d'ordre faible floue sur M, il est facile de voire que la restriction de ρ_p est une relation d'ordre sur N_p.

Les conditions (2) et (3) signifient que pour tout $x, y \in M$, $\exists$ un supremum S et un infimum I dans N_p, ce qui implique que (N_p, ρ_p) est un treillis aussi bien que d'un sous-treillis de (M, ρ_{0_L}).

□

5.4 Equivalence entre les deux approches

Nous démontrons dans cette partie l'équivalence entre les deux approches.

Le théorème suivant montre que, on peut déterminer d'une manière naturelle un L-treillis flou vu comme une L-relation floue à partir d'un L-treillis flou vu comme une L-structure algébrique floue.

Théorème 5.3. *[13] Soit $\overline{M} : M \longrightarrow L$ un L-treillis flou vu comme une L-structure algébrique floue, où $(M, \wedge, \vee)$ est un treillis et soit $L' = 0 \oplus L$. Alors, l'application*

$\overline{\rho} : M^2 \longrightarrow L'$ *définit par :*

$$\overline{\rho}(x,y) = \begin{cases} \overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y) & si\ x \leq y, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

est une L-treillis flou vu comme une L-relation floue. De plus, M_p et (N_p, ρ_p) sont égales et sont des sous-treillis de M.

Démonstration : Soit $x, y \in M$, alors $\overline{M}(x) \geq 0_L$ et $\overline{M}(y) \geq 0_L$, il s'ensuit que $\overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y) \geq 0_L$, ce qui implique que $\overline{\rho}(x,y) \geq 0_L$, donc $\mu_{\rho_{0_L}}(x,y) = 1$, pour tout $x \leq y$, sinon $\mu_{\rho_{0_L}}(x,y) = 0$, et par consequent (M, ρ_{0_L}) est le même treillis que $(M, \wedge, \vee)$.
Soit $p \in L$, alors,

$$\begin{aligned} x \in M_p &\Longleftrightarrow \overline{M}(x) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \overline{\rho}(x,x) \geq p \\ &\Longleftrightarrow x \in N_p. \end{aligned}$$

Donc M_p et N_p sont égaux.
Dans la suite, nous allons prouver qu'ils sont égaux comme des sous-treillis de $M(= N_{0_L})$.
Soit $x, y \in M_p$, tel que $x \leq y$ alors $\overline{M}(x) \geq p$ et $\overline{M}(y) \geq p$, il s'ensuit que $\overline{\rho}(x,y) = \overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y) \geq p$, et par conséquent $(x,y) \in \rho_p$.
D'autre part, soit $(x,y) \in \rho_p$, alors $\overline{\rho}(x,y) \geq p$, ce qui implique que $\overline{\rho}(x,y) = \overline{M}(x) \wedge_L \overline{M}(y) \geq p$, pour $x \leq y$, il s'ensuit que $\overline{M}(x) \geq p$ et $\overline{M}(y) \geq p$, et par conséquent $x, y \in M_p$.
Nous avons prouvé que les ordres ρ_p sur M_p et $\leq$ sur M_p sont les mêmes.
Comme $(M_p, \leq)$ est un sous-treillis de $(M, \leq)$, on conclut que (N_p, ρ_p) est un sous-treillis de (M, ρ_{0_L}).
Alors $\overline{\rho}$ est un L-treillis flou vu comme une L-relation floue. □

Exemple : Soient $(M, \wedge_M, \vee_M)$ un treillis et $(L, \wedge_L, \vee_L)$ un treillis complet donnés ci-après :

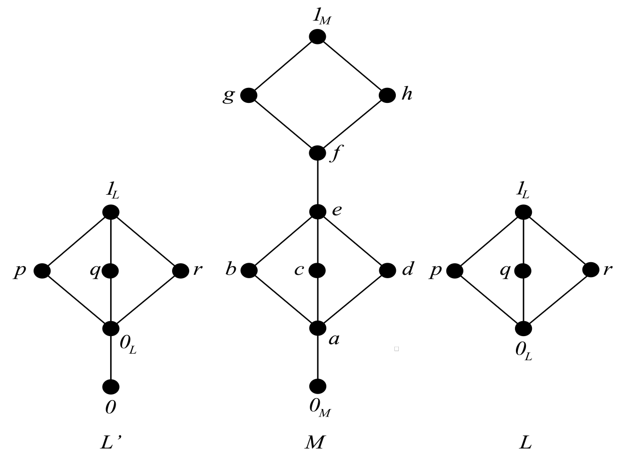


FIGURE 5.8 – Représentations des treillis complets L et L' et M

Soit $\overline{M} : M \longrightarrow L$ L-treillis flou vu comme une L-structure algébrique floue définit de la manière suivante :

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 0_M & a & b & c & d & e & f & g & h & 1_M \\ q & q & q & q & q & r & 1_L & r & p & 1_L \end{pmatrix}$$

On applique le théorème pour déterminer un L-treillis flou vu comme une L-relation floue.

$\overline{\rho}(x,y)$	0_M	a	b	c	d	e	f	g	h	1_M
0_M	q	0_L	q	q	q	q	q	q	0_L	0_L
a	0	q	0_L	q	q	q	q	q	0_L	0_L
b	0	0	r	0	0	0_L	r	r	r	0_L
c	0	0	0	q	0	q	q	q	0_L	0_L
d	0	0	0	0	q	q	q	q	0_L	0_L
e	0	0	0	0	0	q	q	q	0_L	0_L
f	0	0	0	0	0	0	1_L	r	p	1_L
g	0	0	0	0	0	0	0	r	0	r
h	0	0	0	0	0	0	0	0	p	p
1_M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1_L

TABLE 5.1 –

Le théorème suivant donne l'inverse du théorème précèdent, c-à-d, que tous les L-treillis flous vu comme une L-relation floue détermine d'une manière naturelle un L-treillis flou vu comme une L-structure algébrique floue.

Théorème 5.4. *[13] Soit $\overline{\rho} : M^2 \longrightarrow L'$ un L-treillis flou vu comme une L-relation floue. Alors, l'application $\overline{M} : M \longrightarrow L$ définie par $\overline{M}(x) = \overline{\rho}(x, x)$, est un L-treillis flou vu comme une L-structure algébrique floue. De plus, M_p et (N_p, ρ_p) sont les mêmes sous-treillis de M.*

DÉMONSTRATION : Soit (M, ρ_{0_L}) un treillis, on définit les opérations dans ce treillis de la manière suivante :

$$x \vee y = sup\{x, y\} \text{ et } x \wedge y = inf\{x, y\}.$$

Montrons que les coupes de $\overline{M}$ sont des sous-treillis de M.
Soit $p \in L$, alors,

$$\begin{aligned} x \in M_p &\Longleftrightarrow \overline{M}(x) \geq p \\ &\Longleftrightarrow \overline{\rho}(x, x) \geq p \\ &\Longleftrightarrow x \in N_p. \end{aligned}$$

Donc $M_p = N_p$. Comme N_p est un sous-treillis de (M, ρ_{0_L}), il s'ensuit que M_p est un sous-treillis de M.
Alors $\overline{M}$ est un L-treillis flou vu comme une L-structure algébrique floue. □

5.5 Domaine d'application

La théorie des ensembles flous peut être appliquée dans trois types de problèmes :

1. Les problèmes de satisfaction et de propagation de contraintes :
   - Problèmes de conception d'image.
   - Problèmes d'aide à la décision et recherche documentaire dans les bases de données.

2. Les problèmes d'étiquetage symbolique et de classification :
   - Reconnaissance des formes.
   - Vision par ordinateur.
   - Analyse des données.
   - Les capteurs intelligents.
3. Les problèmes de représentation de l'imprécis et de l'incertain et leurs propagation :
   - Intelligence artificielle.
   - Analyse du risque basé sur des opinions d'experts.

Exemple : (Traitement d'image)

- Une image réelle va être transformée en une image numérique par différents outils de transformation (caméra, scanner, satellite...).
- Cette image numérique est constituée de pixels contenant chacun différentes informations (intensité lumineuse, couleur...).
- L'image obtenue après acquisition contient un nombre très élevé d'information. Ces informations sont de plus imparfaites, car les conditions d'acquisition ne sont jamais idéales, de plus, la richesse des informations est néfaste car souvent les informations apportées ne sont pas pertinentes : de nombreux détails de l'image concernent des objets que l'on ne veut pas prendre en considération.

Définition 5.3. *(Traitement d'image)*
*On désigne par **traitement d'images numériques** l'ensemble des techniques permettant de modifier une image numérique dans le but de l'améliorer ou d'en extraire des informations.*

Définition 5.4. *(Segmentation d'une image)*
*La **segmentation** est une opération de traitement d'images qui consiste à créer une partition d'une image I_0 en sous-ensembles R_i, appelés régions, tels que :*

$$\begin{cases} \forall i, R_i \neq \emptyset, \\ \forall i, j,\ \ R_i \cap R_j = \emptyset, \\ I_0 = \bigcup_i R_i. \end{cases}$$

Définition 5.5. *(Région)*

*Une **région** est un ensemble connexe de pixels ayant des propriétés communes (intensité, texture,...) qui les différencie des pixels des régions voisines.*

Définition 5.6. *(Traitement flou)*

*Le **traitement flou** des images est un ensemble d'approches qui fait face aux imperfections dans la représentation et le traitement des régions, des classes, des segments ou de l'image entière. Il traite aussi des connaissances et des raisonnements à l'aide de la théorie floue dans le but d'améliorer le traitement. L'avantage essentiel de cette modélisation est d'être plus proche de l'image réel.*

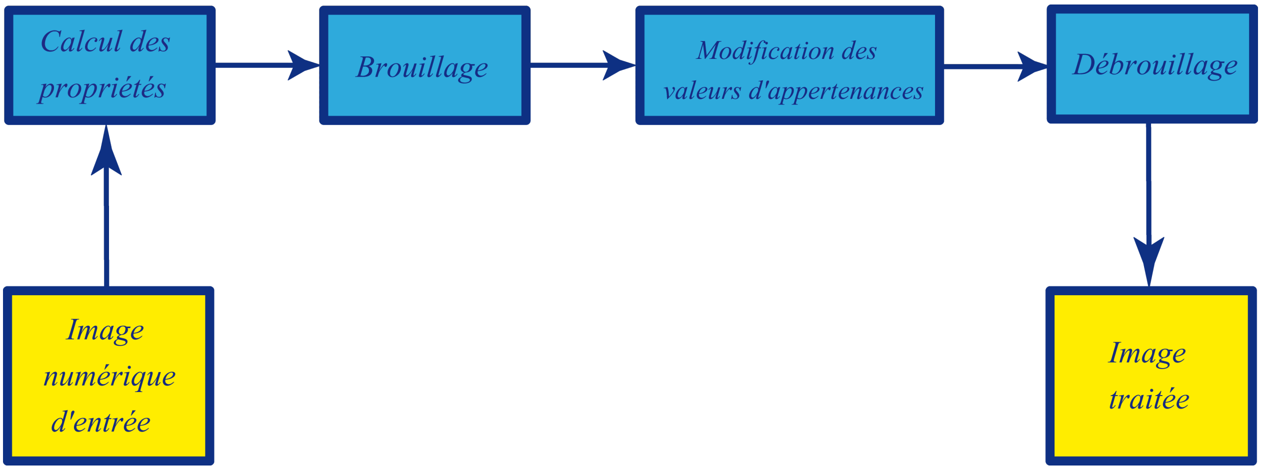


FIGURE 5.9 – Modèle de représentation du traitement flou des images "TFI".

Calcul des propriétés :

On doit extraire tout d'abord de l'image d'entrée des attributs (homogénéité, transition d'une région,...), et chaque attribut admet une formule pour le calculer.

Brouillage :

Le brouillage qui consiste à traduire un niveau de gris en degrés d'appartenance aux termes linguistiques décrivant l'attribut calculé (grande homogénéité, faible transition,...).

Débrouillage :

Le débrouillage traduit l'ensemble flou de sortie en une valeur précise correspondant à un niveau de gris. Cette étape n'est nécessaire que pour obtenir une image de sortie visualisable.

Modification des valeurs d'appartenance :

Est la partie la plus importante du "TFI" est la modification des valeurs d'appartenance au moyen de diverses techniques floues.

Principe du seuillage flou :

- Cette méthode est fondée sur un principe hiérarchique pour pallier au problème d'éclairage non uniforme que présente la plupart des images réelles.
- La méthodologie de construction de la hiérarchie est descendante et se base sur la mesure d'un critère d'homogénéité. Ainsi, une image à binariser est subdivisée en sous-images homogènes de tailles différentes et appartenant à des niveaux hiérarchiques différents.
- Une image appartenant à un niveau hiérarchique est divisible en quatre sous-images filles si le critère d'homogénéité est non satisfait.
- A chaque niveau hiérarchique les degrés d'appartenance à la classe objet ou à la classe fond des pixels des sous-images non homogènes sont évalués.

Méthodologie de construction de la hiérarchie :

- Soit une image à niveau de gris notée I_0 de taille $N \times M$ à laquelle est associée une hiérarchie.
- Cette hiérarchie est construite en divisant successivement I_0 en sous-images de tailles de plus en plus petites.
- Une image ne peut être décomposée en quatre sous-images que si un critère d'homogénéité n'est pas satisfait.

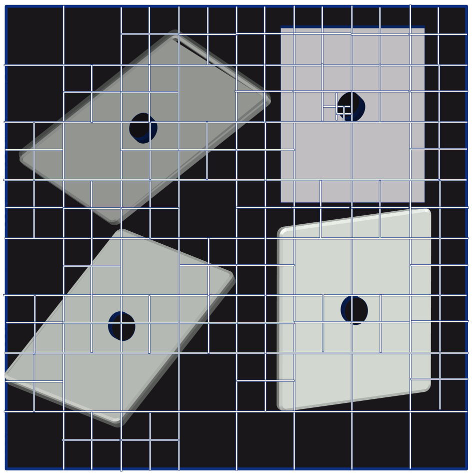


FIGURE 5.10 – Exemple de décomposition hiérarchique.

Conclusion Générale

5.6 Conclusion

Le flou fédère trois facettes souvent coexistantes : imprécision, incertitude, subjectivité.

La théorie floue a influencée plusieurs branches mathématiques modernes.

Notre intention par ce mémoire était de présenter une partie de tel influence dans la théorie des ensembles et des structures ordonnées.

Nos études ont étés principalement concentrées sur les propriétés algébriques sur les ordres flous.

Dans la vie réelle, nous prenons régulièrement de bonnes décisions à partir d'informations floues. La théorie floue est un cadre formel qui permet la modélisation et le traitement rigoureux de ce type d'information.

Il est possible d'étudier les propriétés particulières (la distributivité, la modularité, la completude,... etc) de façon analogue.

Découvrir de nouvelles techniques en utilisant la théorie des ensembles flous pour résoudre des problèmes du monde réel.

Bibliographie

[1] U. Bodenhofer, B. De Baets, J. Fodor : A compendium of fuzzy weak orders : Representations and constructions. Fuzzy Sets and Systems 158, 811-829 (2007).

[2] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet : Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages, 2007 - 340 pages, springer.

[3] B. A. Davey, H. A. Priestley : Introduction to lattices and order, Cambridge University Press, Cambridge, NEW YORK 1990.

[4] B. DUSHNIK, E. W. Miller : Partially ordered sets. Amer. J. math., 63, 600-610, 1941.

[5] J. Goguen : L-fuzzy sets. Journal of Mathematical Analysis and Applications., 18 (1967) 145–174.

[6] A. Kaufmann, G. Boulaye : Théorie des treillis en vue des applications, 1978 - 146 pages.

[7] I. Ouerghi : Thèse de DOCTORAT, Automatique et Informatique Appliquée, 7 décembre 2006 à l'ISTIA - Université d'Angers.

[8] A. Rosenfeld : Fuzzy groups. J. Math. Anal. Appl. 35 (1971), pp. 512–517.

[9] E. Schröder : Vorlesungen über die Algebra der Logik, 3 vol, Teubner verlag, Leipzig (1890).

[10] B. Seselja, A. Tepavcevic : On a construction of codes by P-fuzzy sets, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 20 (2)(1990) 71–80.

[11] B. Seselja, A. Tepavcevic, G. Vojvodic : L-fuzzy sets and codes, Fuzzy Sets and Systems 53 (1993) 217–222.

[12] B. Seselja, A. Tepavcevic : On a generalization of fuzzy algebras and congruences, Fuzzy Sets and Systems 65 (1994) 85–94.

[13] B. Seselja, A. Tepavcevic : L-fuzzy lattices, an introduction. Fuzzy Sets and Systems 123, 209–216, 2001.

[14] B. Seselja, A. Tepavcevic : Completion of Ordered Structures by Cuts of Fuzzy Sets, An Overview. Fuzzy Sets and Systems 136, 1–19, 2003.

[15] B. Seselja, A. Tepavcevic : Representing Ordered Structures by Fuzzy Sets. An Overview, Fuzzy Sets and Systems 136, 21–39, 2003.

[16] B. Seselja, A. Tepavcevic : Fuzzy Ordering Relation and Fuzzy Poset., 209-216, 2007.

[17] L. A. Zadeh : Fuzzy sets, Inform. and control., 8(1965), 338-353.