

N° d'ordre : 05/2008 – M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté des Sciences Mathématiques



MEMOIRE

Présenté Pour l'obtention du Diplôme de **MAGISTER**
En : **MATHEMATIQUES**
Spécialité : **Probabilités et Statistiques**

Par :

M^{elle}. ZERFAOUI Karima

THEME

Limites de Queues de Distributions de Files d'Attente avec Rappels

Soutenu le : Jeudi 18 Septembre 2008, devant le jury composé de :

M ^r .M. DJEDOUR	Professeur	U.S.T.H.B	Président
M ^r . A. AISSANI	Professeur	U.S.T.H.B	Directeur de thèse
M ^{me} GUERBYENNE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Examinatrice
M ^r . Abd.H.AKNOUCHE	Docteur	U.S.T.H.B	Examinateur
M ^r . T. LARDJANE	Chargé de cours	U.S.T.H.B	Invité

MEMOIRE

**LIMITES DE QUEUES DE DISTRIBUTIONS DE
FILES D'ATTENTE AVEC RAPPELS**

KARIMA ZERFAOUI

REMERCIEMENTS

Je remercie Allah de m'avoir donné le courage et la force pour terminer ce travail de mémoire de Magister, et je le prie de me guider vers la voie juste.

Je tiens à remercier professeur Aissani Amar et lui exprimer toute ma gratitude, il a suivi et dirigé mon travail avec patience et compréhension mais aussi avec beaucoup de rigueur et de compétence.

Je souhaite aussi exprimer ma gratitude au professeur Djedour pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury. Mes remerciements vont aussi au Monsieur Aknouche, à Madame Guerbyenne et à Monsieur Lardjane d'avoir accepté le travail délicat d'examineur.

Enfin, j'aimerais remercier Melle Saggou Hafida et Melle Taleb Samira pour leurs conseils précieux et leurs soutiens qu'elles n'ont cessé d'en apporter suivant toute cette période.

Résumé

On a étudié dans cette thèse le comportement asymptotique des files d'attentes avec rappels. On a travaillé avec les queues de distributions qu'on trouve dans certaine application traitant d'événement rare comme (la fiabilité, l'analyse se survie, les assurances,...), ce qui a motivé un tel intitulé : queue de distribution de files d'attentes avec rappels.

Le but de notre étude est de vérifier comment la distribution limite de la taille de la file M/G/1 avec rappels, peut être approchée sous certaines conditions en utilisant le système M/G/1 FIFO classique.

Ce résultat utilise la décomposition stochastique de la taille de la file en deux variables indépendantes l'une d'elle représente la taille de la file M/G/1 classique.

Le troisième chapitre montre le lien et la différence des lois non paramétriques avec les queues lourdes.

Enfin, des comparaisons numériques ont été illustrées pour confirmer notre thématique.

SOMMAIRE

Introduction Générale	1
1. Queues lourdes	4
1.0 Introduction.....	4
1.1 Distributions à queues lourdes.....	4
1.1.1 Subexponentialité.....	6
1.1.2 Distribution à variations régulières.....	13
1.2 Distributions à queues légères.....	20
1.3 Conclusion	20
2. Les files avec rappels	21
2.0 Introduction.....	21
2.1 Description du modèle générale de files d'attente avec rappels.....	21
2.2 Exemples des systèmes modélisés par des files d'attentes avec rappels	23
2.2.1 Systèmes téléphoniques	23
2.2.2 File d'attente au détail d'achat.....	23
2.2.3 Protocoles d'accès aléatoire dans les réseaux numériques de transmission.....	23
2.3 Modèles de files d'attentes avec rappels	24
2.3.1 Modèles Markoviens.....	24
2.3.2 Modèles non markoviens.....	27
2.4 Système de file d'attente M/G/1 avec taux de rappels constant.....	31
2.4.1 Description du modèle	31
2.5 Système de file d'attente M/G/1 avec taux de rappel linéaire.....	35
2.6 Autres systèmes de files d'attentes avec rappels.....	37
2.6.1 Rappels dus à l'empêchement et à l'impatience.....	37
2.6.2 Modèles avec des abonnés non persistants.....	37
2.6.3 Les files à multi classes avec rappels.....	37
2.7.4 Files avec rappels par groupes (ou par lots).....	37
2.6.5 Files avec rappels avec un nombre fini de source.....	38
2.7 Conclusion.....	38

3. Comportement asymptotique à queue lourde de la taille de la file M/G/1 avec rappels	
3.0 Introduction.....	39
3.1 Quelques lemmes de base.....	39
3.2 La file G/G/1.....	41
3.3 Subexponentialité de la taille à l'état stationnaire	43
3.4 Queues à variation régulières de la taille stationnaire de la file.....	46
3.5 Le cas des queues lourdes modérées.....	47
3.6 Relation entre queues lourdes et lois non paramétriques.....	48
3.7 Quelques identités utiles en termes de processus de renouvellement.....	53
3.8 Conclusion.....	54
4. Simulation des distributions à queues lourdes dans les modèles d'attentes	
4.0 Introduction.....	55
4.1 La méthode TAM.....	57
4.2 La méthode FFT.....	59
5. Conclusion Générale.....	67

Introduction générale

Les files d'attentes avec rappels se trouvent dans de nombreuses applications en particulier dans les systèmes téléphoniques, les réseaux cellulaires et les réseaux informatiques. Ces modèles ont été introduit par Kosten [40], Wilkinson [61], et Cohen [15] dans leurs versions les plus simples, lors de la modélisation de service d'abonnés dans un central téléphonique, et sont utilisés d'avantage pour modéliser divers problèmes dans les systèmes de production, les systèmes informatiques et les réseaux de télécommunication.

Par exemple, dans les systèmes de télécommunications, l'abonné (client) qui trouve le signal occupé, peut renouveler son appel autant de fois qu'il le désire jusqu'à ce qu'une connexion soit établie avec succès. Dans le cas où la connexion ne peut être établie, l'abonné peut décider d'abandonner son appel, un tel appel est dit perdu.

A vrai dire, le temps durant lequel un abonné répète les appels est plus ou moins déterminé par la persistance de l'abonné et l'urgence de l'appel.

Les premiers travaux de Kosten [40], Wilkinson [63] et Cohen [15] montrent que les files avec rappels sont des modèles mathématiques convenables pour modéliser le comportement des abonnés dans les réseaux téléphoniques

Ces modèles ont suscité beaucoup d'attention dans la communauté des chercheurs des trois dernières décennies. En plus du grand nombre d'articles publiés sur les files avec rappels, les articles de synthèse de Yang et Templeton [68], Falin [25], Kulkarni [41], un livre de Falin et Templeton [26], et une bibliographie par Artalejo [2] témoignent de leurs significations.

Le travail de Leland et Al [44] en 1993 a indiqué que les files avec les distributions à queues lourdes (heavy-tailed) peuvent produire des trafics auto similaires dans les réseaux. La relation asymptotique entre le temps de service et les mesures de performance du système d'attente y compris la longueur de la file, période d'activité, et le temps d'attente est devenue une matière importante de recherche.

Dans beaucoup d'applications à la téléphonie il n'est pas permis à un appel recevant un signal occupé d'attendre la fin de l'état occupé. Dans ce contexte chaque appel bloqué produit une source des demandes de services répétées indépendamment du reste des appels dans l'orbite. Ainsi la politique classique avec rappels suppose que la probabilité d'une tentative répétée pendant l'intervalle $(t, t + dt)$, étant donné que j appels sont en orbite au temps t , est :

$j\mu dt + o(dt)$. Contrairement à ceci, quelques applications aux réseaux d'ordinateur et de transmission sont basées sur le fait que le temps entre deux tentatives répétées successives est commandé par un dispositif électronique et, par conséquent, est indépendant du nombre d'unités s'appliquant pour le service ainsi la probabilité d'une tentative répétée durant $(t, t + dt)$ étant donné que l'orbite n'est pas vide, est : $\mu dt + o(dt)$. Ce type de discipline est appelée ; Politique avec rappel constant. Artalejo et Gomez [4] ont traité les deux modèles de manière unique en définissant la politique avec rappel linéaire.

Plusieurs manuels incluent des sections ou des chapitres consacrés aux files d'attente avec rappels et une monographie spécifique à été éditée par Falin et Templeton [26]. Pour mieux comprendre ces résultats le lecteur peut se référer aux articles [5, 6, 25, 40, 63]. Quelques journaux consacrent des éditions spéciales à la théorie des files avec rappels comme le Journal of Applied Probability, Advances in Applied Probability, Operations Research, etc., des Congrès et des Séminaires internationaux ont fait consacrer des sections aux files avec rappels, et récemment des séries d'ateliers internationaux sur les files avec rappels ont commencés à Madrid (Septembre 1998), à Minsk (Juin 1999), à Amsterdam (Mars 2000) et à Cochin (Décembre 2002).

Pour les distributions asymptotiques à queues lourdes du nombre de clients à l'état stationnaire les lecteurs peuvent se référer à Resnick [51], Roughan et Al [53], Jelenkovic [35], Asmussen [8], Foss et Korshunov [30].

Pour l'analyse asymptotique de la période d'activité on peut trouver des résultats dans Meyers et Teugels [58], Zwart [69], Boxma et Dumas [14].

Pour la distribution du temps d'attente, des travaux par Erramilli [24], Boxma et Cohen [13], Whitt [61] et Takine [57] peuvent être notés.

La distribution subexponentielle asymptotique du nombre de clients dans la file avec des temps de service subexponentiels ont été discutés par Asmussen [8] et Foss et Korshunov [30].

Alors qu'Asmussen [8] et Foss et Korshunov [30] obtenaient leurs résultats par l'intermédiaire de la loi de Little, nous effectuons l'analyse asymptotique en montrant que la

distribution subexponentielle de la file $M/G/1$ est déterminée en utilisant la décomposition stochastique de la file $M/G/1$ avec rappel.

Les études analytiques de la majorité des modèles de files d'attentes se sont avérées très complexes. Les efforts fournis pour simplifier les modèles afin d'obtenir des équations les régissant n'ont pas suffi pour avoir la solution générale, puisque même si on est souvent arrivé à définir les équations du modèle, leur résolution n'a pas toujours été évidente. En effet, dans la majorité des cas, on se retrouve confronté à des systèmes d'équations dont la résolution est complexe, ou possédant des solutions qui ne sont pas facilement interprétables pour que le praticien puisse en bénéficier. Dans bien des cas l'existence et l'unicité de la solution sont difficiles à établir.

Dans le premier chapitre de ce mémoire on donne, un aperçu sur les distributions à queues lourdes en introduisant plusieurs classes de ces distributions et leurs propriétés.

Le second chapitre donne un rappel des résultats pour les files $M/G/1$ avec rappels en particulier la propriété de décomposition stochastique.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique à queue lourde de la taille de la file $M/G/1$ avec rappels et on termine par la relation entre les queues lourdes et les ordres stochastiques.

Le quatrième chapitre est consacré à des comparaisons et illustrations numériques, cette partie a nécessité un recours à des outils d'inversions numériques de la fonction génératrice.

Enfin, une conclusion générale résumera les différents résultats obtenus dans ce travail.

Chapitre 1

Distribution à queues lourdes

1.0 Introduction :

Dans ce chapitre on va introduire quelques définitions et résultats de base concernant les distributions à queues lourdes pour lesquelles la queue décroît plus lentement que toute queue à distribution exponentielle. On mettra tout cela au clair en introduisant plusieurs classes de distributions à queues lourdes.

Une des distributions les plus importantes des distributions à queues lourdes est la distribution subexponentielle qui joue un rôle très important dans les modèles de files d'attentes. Les situations avec des temps de service extrêmes, modélisés par des distributions subexponentielles, ont comme conséquence des temps d'attentes énormes dans le système.

Pendant ces dernières décennies une nouvelle direction importante s'est développée dans l'évaluation des performances des systèmes informatiques : l'étude des distributions à queue lourde.

Ce sont des distributions dont les queues suivent une loi puissance, contrairement aux distributions traditionnelles (e.g. Gaussienne, Exponentielle, Poisson) dont les queues décroissent plus rapidement.

Vers la fin des années 80 une constatation expérimentale a commencé à s'accumuler, que quelques files d'attentes dans les systèmes informatiques et des réseaux sont des distributions à queues très longues ensuite, l'attention s'est tournée vers les distributions à queue lourdes en particulier dans les années 90.

1.1 Distributions à queues lourdes

Pour définir les queues lourdes avec précision on a :

1.1.1 Définition :

Soit X une variable aléatoire avec sa fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$ et sa queue $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$.

On dit que $F(x)$ est à queue lourde si :

$$\bar{F}(x) \sim cx^{-\alpha} \quad 0 < \alpha < 2 \quad c : \text{constante positive}$$

Avec $a(x) \sim b(x)$ veut dire que : $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/b(x) = 1$.

1.1.1 Proposition : F est à queue lourde Si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E(e^{\varepsilon X}) = \infty,$$

C'est équivalent à dire :

$$F \text{ est à queue lourde si pour tout } \varepsilon > 0, \frac{P(X > x)}{e^{-\varepsilon x}} \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Une sous classe majeure des distributions à queues lourdes est la classe des distributions à queues longues définie par :

1.1.2 Définition : F est dite à queue longue si pour tout $y > 0$ fixé, et $x \rightarrow \infty$,

$$P(X > x+y \mid X > x) = \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} \rightarrow 1. \quad (1.2)$$

La classe des distributions à queues longues est noté par ζ . On écrira parfois $X \in \zeta$ au lieu de $F \in \zeta$.

1.1.1 Lemme : Si $X \in \zeta$ et Y est indépendant de X et non négative,

$$\frac{P(X - Y > x)}{P(X > x)} \rightarrow 1. \quad (1.3)$$

La distribution à l'état d'équilibre :

Si X à une moyenne finie $1/\sigma$, on définit sa distribution à l'état stationnaire (ou à l'état d'équilibre)

par : $F_e(x) = P(X_e < x) = \sigma \int_0^x \overline{F}(y) dy$. Cette distribution a une large application dans l'analyse du

risque, la fiabilité et la théorie des files d'attente.

1.1.2 Lemme : Si $X \in \zeta$ (ie X à queue longue) alors : $X_e \in \zeta$ et $\frac{\overline{F_e(x)}}{\overline{F(x)}} \rightarrow \infty$.

Cela veut dire que la queue de X_e est plus lourde que la queue de X .

Si X à une distribution exponentielle, dans ce cas les distributions de X et X_e coïncident donc ils ont des queues lourdes égales.

Les deux sous sections suivantes concernent les deux sous classes importantes des distributions à queue lourdes. Nous allons aborder les distributions subexponentielles dans la section 1.1.1 ensuite on traitera dans la section 1.1.2 les distributions à variations régulières.

1.1.1 Subexponentialité :

Les distributions subexponentielles ont été introduites par Chistayov [16] et Chover et al. [17]. Un des premiers articles qui à reconnu l'utilité des classes subexponentielles est Teugels [56]. On pourra constater le rôle qu'elles jouent dans la théorie des files d'attente et des assurances.

Les distributions subexponentielles sont des classes très importantes des distributions à queues lourdes, ce nom provient de l'une de ses propriétés celle ou la queue décroît plus lentement qu'une queue à distribution exponentielle ; (voir proposition 1.1.1). Ceci implique que les grandes valeurs peuvent se produire dans un échantillon avec une probabilité non négligeable, Ce qui fait des distributions subexponentielles des candidats naturels pour modéliser des situations, où quelques valeurs extrêmement grandes se produisent dans un échantillon comparé à la taille moyenne des données. Un tel modèle est souvent vu dans des données d'assurance, par exemple dans : l'assurance contre l'inondation (collectivement connue comme assurance de catastrophes).

Quelques noms principaux qui ont beaucoup travaillé dans le développement du sujet (jusqu'à 1990) sont Chistayov [16], Athreya and Ney [9], Teugels [58], Embrechts [20], Goldie [32], Veraverbeke[60] et Pitman[49].

Dans cette section on va revoir quelques définitions et résultats classiques voir [8].

1.1.3 Définition :

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ variables aléatoires positives iid de fonction de répartition F

On note par : $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $x \geq 0$, la queue de $F(x)$ et

$\bar{F}^{n*} = 1 - F^{n*}(x) = P(X_1 + \dots + X_n > x)$ est la queue de la nième convolée de F .

$$F^{n*}(x) = \int_{u=0}^x F^{(n-1)*}(x-u) dF(u).$$

La classe des fonctions à distributions subexponentielles est notée par S elle est définie comme suit :

1.1.4 Définition : F est subexponentielle si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} = n \text{ pour tout } n \geq 2, \tag{1.4}$$

La définition de la Subexponentialité peut être affaiblie, ce qui a été montré dans Embrechts et Goldie [21] comme suit :

$$F \in S \quad \text{si} \quad P(X_1 + \dots + X_n > x) \sim n P(X_1 > x), \text{ pour } n \geq 2.$$

1.1.2 Proposition : F est subexponentielle si pour tout $n \geq 2$,

$$P(X_1 + \dots + X_n > x) \sim P(\max(X_1, \dots, X_n) > x). \tag{1.5}$$

L'interprétation de cette définition est : la somme de n variables subexponentielles est grande si est seulement si leur maximum l'est.

Remarques :

- La définition 1.1.4 vient de Chistayov(1964) [16]. Il a montré que la limite s'applique pour $n \geq 2$ si et seulement si elle s'applique pour $n = 2$. Embrechts et Goldie (1982)[20] l'ont également prouvé.
- L'équivalence entre la définition 1.1.4 et la proposition 1.1.2 a été démontrée dans Embrechts et Goldie (1980) [21].

La démonstration est la suivante :

$$P(\max(X_1, \dots, X_n) > x) = 1 - F^n(x) = \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) \sim n \overline{F}(x)$$

Et $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x) \sim n \overline{F}(x)$ [\sim veut dire que le quotient tend vers 1]

$$\frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, \dots, X_n) > x)} \sim \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{n\overline{F}(x)} \rightarrow 1 \iff F \in S \tag{1.6}$$

La proposition 1.1.2 donne des conditions pour que les distributions à queues lourdes soient subexponentielles. Ces distributions sont encore justifiées par des implications (d'abord montrées par Chistayov (1964))

$$F \in S \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1 \quad \forall y \in \mathcal{R} \tag{1.7}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} dF(x) = \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{1.8}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}} \rightarrow \infty \quad \forall \varepsilon > 0 . \tag{1.9}$$

La propriété (1.9) montre que la queue de F décroît plus lentement que n'importe quelle queue de distribution exponentielle.

La propriété (1.8) montre que la distribution subexponentielle n'a pas de moment.

Ceci empêche l'utilisation des méthodes qui exigent l'existence de moments exponentiels.

Plusieurs distributions de probabilité connues sont subexponentielles, par exemple :

❖ Pareto,

$$P(X > x) = \left(\frac{a}{a+x} \right)^{\nu}, \quad a, \nu > 0.$$

❖ Lognormal,

$$P(X > x) = P(e^{\mu + \sigma U} > x), \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \text{ avec } U \text{ une va Normale } N(0,1)$$

❖ Weibull,

$$P(X > x) = e^{-ax^b}, \quad a > 0, \quad 0 < b < 1.$$

1.1.3 Lemme : On suppose (p_n) une mesure de probabilité telle que $\sum_{n=0}^{\infty} P_n (1+\varepsilon)^n < +\infty$,

$\forall \varepsilon > 0$. On pose $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n F^{n*}(x)$, $x \geq 0$.

$$F \in S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} np_n \Leftrightarrow G \in S \text{ et } \bar{F}(x) \neq 0(\bar{G}(x)).$$

1.1.4 Lemme : Si F et G sont deux fonctions de répartition, telles que $F \in \mathcal{S}$ et $\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} \rightarrow 0$

alors :

$$F * G \in \mathcal{S} \text{ et } \overline{F * G}(x) \sim \overline{F}(x).$$

Les distributions subexponentielles sont très importantes dans les modèles continus, nous choisirons le modèle de risque d'assurance pour montrer la méthode générale.

1.2.1 Probabilité de ruine :

On considère le modèle de Sparre-Andersen [21], où les temps de réclamations constituent un processus de renouvellement, i.e. les temps inter-reclamations

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des v.a iid et nous supposons qu'elles ont un moment d'ordre 2 fini.

La taille des réclamations $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (indépendantes des réclamations du processus d'arrivée) sont des v.a.iid de fonction de répartition F et $E(X_1) = \mu < \infty$.

On note par $R_0 = u$ le risque initial et par $c > 0$ l'intensité de la prime du risque. On suppose également que $m = E(X_1) - cE(T_1) = \mu - c/\lambda < 0$, et λ l'intensité des arrivées.

Le processus de risque pour $u \geq 0$ est :

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0,$$

Où $N(0) = 0$ et $N(t) = \sup \{ k \geq 0 : \sum_{i=1}^k T_i \leq t \}$ pour $t > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ la variable $R(n)$ c'est-à-dire le niveau du processus de risque ou la réserve de l'assurance après n réclamations, constitue une marche aléatoire. On pose $Z_k = X_k - cT_k$, $k \in \mathbb{N}$, la séquence :

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n Z_k, \quad n \in N,$$

définit une marche aléatoire avec une moyenne $m < 0$. (sous la condition $\rho = \lambda\mu/c < 1$).

La probabilité de ruine dans un temps fini est définie par :

$$\psi(u, t) = P(R(t) < 0, \text{ pour } 0 \leq t \leq T \mid R(0) = u), \quad 0 < T < \infty, \quad u \geq 0.$$

La probabilité de ruine dans un temps infini est alors : $\psi(u) = \psi(u, \infty)$ pour $u \geq 0$.

D'après la définition du processus de risque, la ruine ne peut se produire qu'aux instants des réclamations, par conséquent pour $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(R(t) < 0, \text{ pour } t \geq 0 \mid R(0) = u) \\ &= P(u + \sum_{k=1}^n (cT_k - X_k) < 0 \text{ pour } n \in N) \\ &= P(\max_{n \geq 1} S_n > u). \end{aligned}$$

Si les temps inter-réclamations $(T_n)_{n \in N}$ sont exponentiels, i.e. le processus d'arrivée des réclamations est un processus de Poisson, alors la dernière probabilité à une représentation explicite appelée la formule de Pollacek-Khinchine. Ce modèle est appelé le modèle de Cramer-Lundberg.

1.1.1 Théorème : (Formule de Pollacek Khinchine)

Dans le modèle de Cramer-Lundberg, où le processus d'arrivée des réclamations constituent un processus de Poisson, la probabilité de ruine est donnée par :

$$\psi(u) = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \overline{F}_e^{n*}(u) \quad u \geq 0, \quad (1.10)$$

Où $\rho = \lambda\mu/c$ et $F_e(u) = \mu^{-1} \int_0^u P(X_1 > y) dy$, $u \geq 0$, est la distribution de X_1 à l'état stationnaire.

En divisant les deux cotés de la formule de (1.10) par $\overline{F}_e(u)$, la définition 1.1.4 produit une évaluation asymptotique pour $\psi(u)$ à condition que l'on puisse sans risque échanger la limite et la somme infinie, ceci est assuré par le lemme suivant dû à Kosten [39] (pour la preuve voir Athreya et Ney (1972) [9], et le théoreme de la convergence dominée de Lebesgue.

1.1.5 Lemme : Si $F \in S$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une certaine constante positive $K(\varepsilon)$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$\frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n. \quad (1.11)$$

Comme remarqué, ces considérations mènent à une évaluation asymptotique de ψ . Il s'avère que ce n'est pas simplement une conséquence de la Subexponentialité, mais est caractérisé par elle, comme suit.

1.1.2 Théorème : (La probabilité de ruine dans le modèle de Cramer- Lundberg ; réclamations subexponentielles)

On considère le modèle de Cramer-Lundberg, où le processus d'arrivée des réclamations constitue un processus de Poisson, et la taille des réclamations est subexponentielle de fonction de répartition F , on a :

$$F_e \in S, \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \psi \in S, \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{F_e(u)} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Remarques :

- L'importance de la subexponentialité pour la théorie de risque en assurance a été identifiée par Teugels (1975) [56].
- Un manuel sur le traitement des distributions subexponentielles dans le contexte de la théorie de risque peut être trouvé dans Embrechts, Kluppelberg [38].
- Le théorème 1.1.2 est dû à Embrechts et Veraverbeke (1982)[22] basé sur les travaux de Embrechts, Goldie[20] et Veraverbeke (1982) ; voir également Veraverbeke (1977)[57].

1.1.2 Distributions à variations régulières :

Dans la section précédente nous avons donné trois exemples de distributions subexponentielles : Pareto, Lognormale, et Weibull. Dans cette section nous étudions la classe des distributions à variation régulière. Cette classe peut être considérée comme une généralisation de la distribution de Pareto. On note que les distributions de Weibull et Lognormale ne sont pas à variation régulière.

Cette classe est appliquée dans plusieurs domaines, comme l'analyse complexe, la théorie des nombres et la théorie des probabilités. Dans la théorie des probabilités les variations régulières jouent un rôle très important dans la théorie des valeurs extrêmes, les théorèmes de limite centrale et la théorie des files d'attente et autres. Plusieurs auteurs ont traité la classe des variations régulières comme Bingham et al [12], Resnick [50] et Embrechts [20].

1.1.5 Définition : f est dite à variation régulière d'indice, $\alpha \in \mathcal{R}$ ($f \in R_\alpha$)

si pour $y > 0$,

$$\frac{f(yx)}{f(x)} \rightarrow y^\alpha, \quad x \rightarrow \infty \tag{1.12}$$

Si $\alpha = 0$, alors f est dite à variation lente.

Les fonctions à variations lentes sont souvent notées par L .

Exemples : les fonctions constantes et logarithmiques [12]. La classe des distributions à variations régulières est notée par R .

Exemple : (Queues de distributions à variations régulières)

Soit $\bar{F} \in R_{-\alpha}$ pour $\alpha \geq 0$, alors $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, $x > 0$, pour $L \in R_0$.

Notons d'abord que $F \in \zeta$, par conséquent elle est candidate pour S .

Nous vérifions la définition 1.1.4. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de répartition F . En utilisant la décomposition suivante :

$$P(X_1 + X_2 > x) = P(X_1 \leq \frac{x}{2}, X_1 + X_2 > x) + P(X_2 \leq \frac{x}{2}, X_1 + X_2 > x) \\ + P(X_1 > \frac{x}{2}, X_2 > \frac{x}{2}).$$

Alors :

$$\frac{\bar{F}^{2*}(x)}{\bar{F}(x)} = 2 \int_0^{x/2} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + \frac{\bar{F}^2(x/2)}{\bar{F}(x)}.$$

Immédiatement par la définition de $R_{-\alpha}$, le dernier terme tend vers zéro. L'intégrale satisfait $\bar{F}(x-y)/\bar{F}(x) \leq \bar{F}(x/2)/\bar{F}(x)$ pour $0 \leq y \leq x/2$, en appliquant le théorème de la convergence dominée et pour $F \in \zeta$, l'intégrale tend vers 1 quand $x \rightarrow \infty$.

Exemples de queues de distributions à variations régulières : Pareto, log-gamma et les distributions stables. (voir le tableau 1.1).

1.1.6 Définition : (La classe S^*)

Soit F une fonction de répartition sur $[0, +\infty]$ tel que $\bar{F}(x) > 0, x \geq 0$.

On dit que $F \in S^*$ si F a une moyenne $1/\sigma$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \bar{F}(y) dy = \frac{2}{\sigma}$

Le prochain résultat rend la classe S^* utile pour les applications.

1.1.3 Proposition : Si $F \in S^*$, alors $F \in S$ et $F_e \in S$.

S^* inclut (quand la moyenne est finie) les distributions suivantes : Pareto, Burr, log-gamma, lognormal, heavy-tailed Weibull, et beaucoup d'autres.

Distribution	Queue \bar{F} ou densité f	Paramètres
Pareto	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x} \right)^\alpha$	$\alpha, k > 0$
Burr	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x^n} \right)^\alpha$	$\alpha, k, n > 0$
Log-gamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha > 1, \beta > 0$
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-x^n}$	$0 < n < 1$
Presque exponentielle	$\bar{F}(x) = e^{-x(\ln x)^\alpha}$	$\alpha > 0$

Tableau 1.1 Distributions subexponentielles.

Toutes ces distributions sont dans S^* quand la moyenne est finie

Remarques

- Les queues de distributions dans S^* sont des distributions subexponentielles (Kluppelberg (1989)).

Rappelons que $S^* \subset S \subset \zeta$.

1.1.6 Lemme [12] :

Pour $\alpha > 1$, on a : L est à variation régulière $\Leftrightarrow \int_x^\infty y^{-\alpha} L(y) dy \sim \frac{1}{\alpha-1} x^{-(\alpha-1)} L(x)$.

1.2.2 Fonctions de répartition à variations régulières

1.1.7 Lemme : Soit $P(X > x) = \bar{F}(x) = L(x)x^{-\alpha}$, alors :

(i) $X \in S$.

(ii) $E(X^\theta) < \infty$ si $\theta < \alpha$, $E(X^\theta) = \infty$ si $\theta > \alpha$.

(iii) Si $\alpha > 1$, alors : $X_e \in R_{-(\alpha-1)}$ et $P(X_e > x) \sim \frac{1}{(\alpha-1)E(X)} L(x)x^{-(\alpha-1)}$.

Plusieurs applications des distributions à variations régulières se trouvent dans le chapitre 8 de [12].

1.1.3 Théorème : Si f est à variation régulière d'indice α , alors (dans le cas

$\alpha > 0$, supposons f est bornée sur tout intervalle $]x, +\infty[$, pour $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha$$

Sur $[a, b]$ ($0 < a \leq b < \infty$) si $\alpha = 0$,

Sur $(0, b]$ ($0 < b < \infty$) si $\alpha > 0$,

Sur $[a, \infty)$ ($0 < a < \infty$) si $\alpha < 0$.

Preuve [12]

Le cas $\alpha = 0$, est la définition 1.1.5. Nous allons montrer seulement le cas $\alpha > 0$, le cas $\alpha < 0$ se fait de la même manière.

Choisir $\varepsilon \in]0, 1[$, $\lambda \in [0, 1]$, et poser $\mu = (\frac{1}{8}\varepsilon)^{1/\alpha}$, alors

$$0 < \lambda^\alpha < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad 0 < 4\lambda^{\alpha+1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad (0 < \lambda \leq \mu). \quad (1.13)$$

D'après [8] Si f est à variation régulière d'indice α , on a :

$$f(x) = x^\alpha L(x) = x^\alpha c(x) \exp \left\{ \int_a^\infty \varepsilon(u) du / u \right\} \quad (x \geq a) \quad a > 0 \quad (1.14)$$

Ou $c(x) \rightarrow c \in]0, +\infty[$, $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ qd $x \rightarrow \infty$.

Nous devons trouver X_1 , tel que les fonctions dans (1.14) vérifient

$$\frac{1}{2}c \leq c(x) \leq 2c, \quad \varepsilon(x) \leq 1 \quad (x \geq X_1) \quad (1.15)$$

Ainsi pour $0 < \lambda \leq \mu$ et $x \geq X_1 / \lambda$, (1.15) est satisfaite pour x et λx , d'où :

$f(\lambda x) / f(x) \leq 4\lambda^{\alpha+1}$, et alors en utilisant (1.13) on a :

$$\left| f(\lambda x) / f(x) - \lambda^\alpha \right| < \varepsilon \quad (0 < \lambda \leq \mu, x \geq X_1 / \lambda). \quad (1.16)$$

Posons $M = \sup_{0 < t \leq X_1} f(t) < \infty$, ensuite nous devons trouver X_2 de sorte que $M / f(x) < \frac{1}{2}\varepsilon$ pour tout $x \geq X_2$.

En utilisant (1.13) encore une fois,

$$\left| f(\lambda x) / f(x) - \lambda^\alpha \right| < \varepsilon \quad (0 < \lambda \leq \mu, X_2 \leq x \leq X_1 / \lambda). \quad (1.17)$$

Pour les fonctions à variation lente $L(x) = f(x) / x^\alpha$, à partir de la définition 1.1.5 nous pouvons trouver X_3 tel que :

$$\left| L(\lambda x) / L(x) - 1 \right| < \varepsilon \quad (\mu \leq \lambda \leq 1, x \geq X_3).$$

Alors

$$\left| f(\lambda x) / f(x) - \lambda^\alpha \right| = \lambda^\alpha \left| L(\lambda x) / L(x) - 1 \right| \leq \varepsilon \quad ((\mu \leq \lambda \leq 1, x \geq X_3)).$$

En combinant entre (1.16) et (1.17),

$$\left| f(\lambda x) / f(x) - \lambda^\alpha \right| \leq 2\varepsilon \quad (0 < \lambda \leq 1, x \geq \max(X_2, X_3))$$

Error! Objects cannot be created from editing field codes.

Ce qui donne le résultat.

I.1.4 Proposition : Si f est à variation lente, X est suffisamment grand,

$f(x)$ est bornée dans $[X, \infty[$ et $\alpha > -1$, alors :

$$\int_x^x t^\alpha f(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1} f(x)}{\alpha+1} \quad (x \rightarrow \infty).$$

I.1.5 Proposition : Si f est à variation lente et $\alpha < -1$ alors :

$$\int_x^\infty t^\alpha f(t) dt \text{ converge et } \frac{x^{\alpha+1} f(x)}{\int_x^\infty t^\alpha f(t) dt} \rightarrow -\alpha - 1 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Preuve : [12]

Soit $\rho = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$, alors $g(x) = x^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} f(x) \in R_\rho$. On a :

$$\frac{\int_x^\infty t^\alpha f(t) dt}{x^{\alpha+1} f(x)} + \frac{1}{\alpha+1} = \int_1^\infty \left\{ \frac{g(ux)}{g(x)} - u^\rho \right\} u^{\rho-1} du$$

Le terme à droite entre parenthèse tend vers zéro quand $x \rightarrow \infty$. En utilisant le théorème 1.1.3. ; quand $u^{\rho-1}$ est intégrable en dehors de $]1, \infty[$, l'intégrale tend vers zéro.

La manière de se rappeler de la proposition 1.1.4. est que $f(t)$ peut être prise à l'extérieur de l'intégrale comme si c'était $f(x)$: ainsi

$$\int_X^x t^\alpha f(t) dt \sim f(x) \int_X^x t^\alpha dt \quad (x \rightarrow \infty);$$

Pareil pour la proposition 1.1.5.

I.2 Distributions à queues légères :

I.2.1 Définition :

On dit que F est une distribution à queue légère si pour tout $\varepsilon > 0$, $E(e^{\varepsilon X}) < \infty$.

Elles sont aussi appelées distributions avec moments exponentiels.

Exemples : les distributions suivantes :

Exponentielle (λ), Gamma (α, β), Weibull (δ, β).

I.3 Conclusion :

Dans ce chapitre on a essayé de donner des définitions plus simples sur les distributions à queue lourde avec des démonstrations et des exemples.

Il existe une quantité considérable d'ouvrages et d'articles, sur la distribution subexponentielle, on a cité quelques uns dans la bibliographie.

Notons que la classe des distributions à variation régulière appartient à la classe des distributions à queue lourde et contient des exemples typiques de distributions avec une variance infinie.

Chapitre 2

Les files avec rappels

2.0 Introduction :

Les modèles de files d'attente avec rappels constituent un outil théorique ou appliqué pour la modélisation, l'évaluation de performances et le contrôle de systèmes de production. Les modèles d'attente développés ces dernières années, tiennent compte de l'influence non négligeable des phénomènes de rappels sur des systèmes réels, tels que les systèmes de télécommunications.

Les modèles standards de files d'attentes ne tiennent pas compte du phénomène des rappels et ne peuvent pas donc être appliqués en résolvant un certain nombre de problèmes pratiquement importants. L. Kosten[40 , page 33] note que : « n'importe quel résultat théorique qui ne prend pas en compte cet effet de répétition devrait être considéré comme suspect . » Les files avec rappels (ou clients de renvoi, appels répétés, etc.) ont été introduite pour résoudre cette insuffisance.

Dans ce chapitre nous allons décrire le modèle général de file d'attente avec rappels, donner des exemples pratiques, étudier les files $M/G/1$ avec taux de rappels constant et linéaire. D'autres modèles de files d'attentes avec rappels seront examinés à la fin de ce chapitre..

2.1 Description du modèle général de files d'attente avec rappels :

Un système de files d'attente avec rappels est un système composé de m serveurs identiques et indépendants ($m \geq 1$), et de $s - m$ positions d'attentes ($s \geq m$), et d'une orbite de capacité finie ou infinie.

S'il y a un ou plusieurs serveurs libres, un client qui arrive est immédiatement pris en charge par l'un de ces serveurs. Sinon il rejoint la file d'attente, s'il y a une position d'attente libre. Par ailleurs si tous les serveurs et toutes les positions d'attente sont occupés, il quitte définitivement le système avec une probabilité $1 - H_0$, ou bien entre en orbite avec la probabilité H_0 . Il devient alors une source d'appels secondaires et il retentera sa chance après une durée aléatoire.

Les clients qui reviennent et rappellent pour service sont dits « en orbite ». Si l'orbite est à capacité finie et saturée, le client qui trouve tous les serveurs et positions d'attente occupés, à son arrivé, sera contraint de quitter le système sans être servi.

Tout client de l'orbite est appelé client secondaire. Il est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps aléatoires, ces clients secondaires sont traités comme des clients primaires. Si un client de l'orbite (secondaire) rappelle pour le service et trouve un serveur ou la position d'attente libre, il occupe le service ou une position dans la file s'il n y a aucun

serveur libre. Par contre si tous les serveurs et toutes les positions d'attentes sont occupées, il quitte définitivement le système avec une probabilité $1 - H_k$ (ou k représente la $k^{\text{ème}}$ tentative infructueuse), ou bien il rejoint l'orbite (si elle n'est pas saturée) avec une probabilité H_k .

Les politiques qui existent dans les files avec rappels sont : la politique linéaire classique et la politique constante. La première est caractérisée par le fait que chaque client en orbite essaye de rejoindre le serveur indépendamment des autres clients en orbite. La seconde politique est dès que le serveur se trouve libre, un seul client en orbite (le premier en file) reçoit son service et quitte le système, ce qui veut dire que le taux de rappels ne dépend pas du nombre de clients dans l'orbite.

Le schéma général d'un système avec rappels est donné par la figure (fig. 2.1).

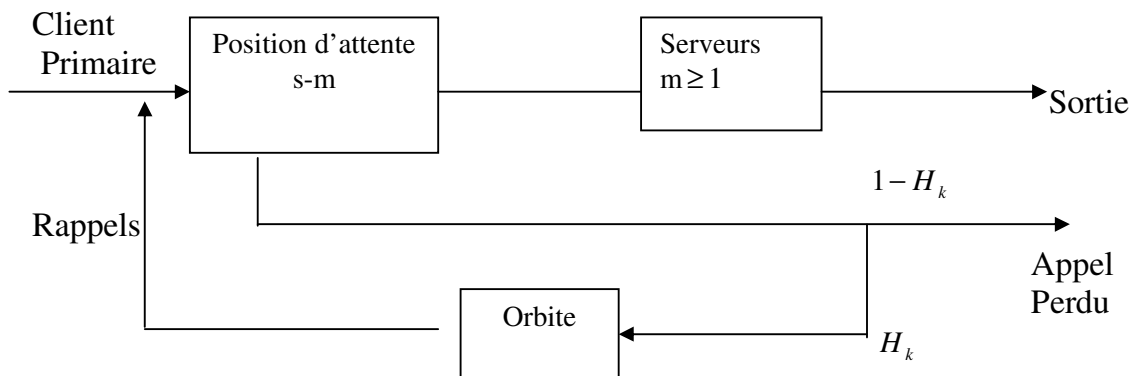


Fig.2.1 : Modèle de file d'attente avec rappels.

Remarque

Le modèle décrit ci-dessus, est un modèle général. Plusieurs systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être considérés comme des cas particuliers, tel que : les systèmes sans positions d'attente et les systèmes à un serveur.

2.2 Exemples des systèmes modélisés par des files d'attentes avec rappels :

Dans la théorie classique des files d'attentes, on suppose habituellement qu'un client qui ne peut pas obtenir le service juste après son arrivée rejoint la file d'attente (puis il est servi selon une certaine discipline) ou quitte le système pour toujours. Parfois des clients impatients quittent la file, mais il se peut également que ces clients quittent le système pour toujours. En fait la supposition au sujet de la perte des clients qui ont choisi de quitter le système est juste une première approximation de situation réelle.

Habituellement certains clients après une période de temps retournent au système et tentent leur service une nouvelle fois.

La suite donne des exemples qui expliquent cette remarque générale avec plus de détails.

2.2.1 Systèmes téléphoniques :

Tout le monde sait de sa propre expérience qu'un abonné de téléphone qui obtient un signal occupé répète l'appel jusqu'à ce que la communication soit établie.

En conséquence, l'écoulement des appels circulant dans un réseau téléphonique se compose de deux parties: l'écoulement des appels primaires, qui reflète les vrais souhaits des abonnés du téléphone, et l'écoulement des appels répétés, qui est la conséquence du manque de succès des tentatives précédentes.

2.2.2 File d'attente dans une vente au détail :

Dans un magasin, un client qui constate qu'une file d'attente est trop longue peut souhaiter faire autre chose et retourner plus tard avec l'espoir que la file d'attente ait disparu. Un comportement semblable peut montrer quelques clients impatients qui ont fait la file d'attente, puis ont découvert que le temps d'attente résiduel est trop long.

2.2.3 Protocoles d'accès aléatoire dans les réseaux numérique de transmission : (Random access protocols in digital communication networks)

Considérons une ligne de communication avec un temps partagé par plusieurs stations. Si deux stations ou plus transmettent des paquets simultanément alors une collision prend place, c'est-à-dire tous les paquets sont détruits et doivent être retransmis. Si les stations impliquées en conflit essaieraient de retransmettre les paquets, alors une collision certaine se produit. Pour éviter ceci, chaque station indépendamment des autres stations, transmet le paquet avec

la probabilité p et retarde des actions avec la probabilité $1-p$, ou d'une manière équivalente, chaque station présente une variable aléatoire de retard avant la prochaine tentative de transmettre le paquet.

2.3 Modèles de files d'attente avec rappels

2.3.1 Modèles Markoviens

Les modèles Markoviens sont des systèmes où les intervalles de temps séparant les arrivées primaires, les durées de service et les temps inter-rappels sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées.

Considérons un système de file d'attente avec rappels à m serveurs dont les clients arrivent suivant un flux poissonnien de taux λ . Si un client primaire trouve au moins un serveur libre, il est immédiatement pris en charge et quitte le système à la fin de son service, sinon il entre en orbite et devient une source d'appels répétés [15].

Dans ce modèle tous les clients ont droit aux rappels, La durée de service suit une loi exponentielle de paramètre θ , la durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire suit aussi une loi exponentielle de paramètre μ . Dans ce cas il n'y a pas de positions d'attente ($m = s$) et l'orbite est de capacité infinie.

L'état du système peut être décrit par le processus Markovien homogène

$X(t) = \{ C(t), N(t) \}_{t \geq 0}$ d'espace d'états $S = \{ 0, 1, \dots, m \} \times \mathbb{N}$ ou :

- $C(t)$ est le nombre de clients en cours de service à l'instant t .
- $N(t)$ est le nombre de clients en orbite à l'instant t .

Soit $P_{ij}(t) = P(C(t) = i, N(t) = j)$ avec $i = 0, 1, \dots, m$ et $j \geq 0$

Les taux de transitions à l'état stationnaire sont donnés par :

Si $m = 0$ alors :

$$q_{(m,n)(i,j)} = \begin{cases} \lambda & \text{Si } (i,j) = (1,n) \\ n\mu & \text{Si } (i,j) = (1,n-1) \\ -(\lambda + n\mu) & \text{Si } (i,j) = (0,n) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Si $m \geq 1$ alors :

$$q_{(m,n)(i,j)} = \begin{cases} \lambda & \text{Si } (i,j) = (m+1,n+1) \\ n\mu & \text{Si } (i,j) = (m+1,n) \\ \theta & \text{Si } (i,j) = (0,n) \\ -(\lambda + \theta + n\mu) & \text{Si } (i,j) = (m,n) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Dans le cas ou $m = 1$ (un serveur), on montre que la condition d'ergodicité est :

$$\rho = \lambda\beta_1 < 1.$$

Dans ce cas les probabilités stationnaires P_{ij} existent et sont données par les expressions suivantes [26] :

$$P_{0n} = \frac{\rho^n}{n! \mu^n} \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda + i\mu)(1 - \rho)^{\lambda/\mu + 1}$$

$$P_{1n} = \frac{\rho^{n+1}}{n! \mu^n} \prod_{i=1}^n (\lambda + i\mu)(1 - \rho)^{\lambda/\mu + 1}$$

Toutes les mesures de performance s'obtiennent soit de manière directe soit à partir des fonctions génératrices [15].

Par ailleurs, Falin [25] a étudié le modèle markovien avec rappels et positions d'attente, et a obtenu des résultats explicites uniquement pour le cas d'un seul serveur.

Dans le cas ou on a plusieurs serveurs ($m \geq 2$), on n'a pas trouvé de formules analytiques explicites. Les résultats disponibles dans [15], sont difficilement exploitables dans les cas pratiques.

Pour cela, en vue d'avoir des résultats interprétables, de nombreuses approches ont été proposées, entre autre :

- Méthodes d'approximations.
- Méthodes itératives [31].
- Méthodes numériques [27,44]
- Méthodes asymptotiques [25,27].

Si on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité des deux quantités stochastiques c'est-à-dire le temps inter-arrivées et la durée de service ou lorsque on introduit des paramètres supplémentaires spécifiques au modèle étudié, alors on n'aura plus de processus markovien, ce qui rend l'analyse du système très délicate. Souvent on se ramène à un processus markovien judicieusement choisi, et ceci grâce aux méthodes d'analyses suivantes :

● Méthode des étapes d'Erlang

Elle a pour principe d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox qui possède la propriété d'absence de mémoire.

● Méthode de la chaîne de Markov induite

Cette méthode élaborée par Kendall, consiste à choisir une séquence d'instantanés $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (déterministes ou aléatoires) telle que le processus induit $\{X_n, n \geq 0\}$, tel que $X_n = X(\theta_n)$ soit markovien et homogène

● Méthode des variables supplémentaires

Elle consiste à compléter l'information sur le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ de telle manière à lui donner un caractère markovien, ainsi on aura à étudier le processus :

$$(X(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t))_{t \geq 0}$$

ou $\xi_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des variables aléatoires dites auxiliaires (supplémentaire).

● Méthode des événements fictifs

L'idée de la méthode est d'introduire des événements fictifs, qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformés de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

● Méthodes d'approximations

On distingue entre autres :

- des méthodes asymptotiques.
- L'estimation par borne de certaines de ces caractéristiques.

● Simulation

La simulation est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel sur ordinateur, à l'aide de cette imitation, nous obtenons des données sur le système qui nous permettent de mesurer sa performance. Plusieurs modèles de simulation existent qu'ils soient statiques ou dynamiques, déterministes ou aléatoires.

2.3.2 Modèles non markoviens :

Le modèle M/G/1 avec rappels est le modèle le plus étudié par les spécialistes, des résultats très intéressants sont obtenus sur ses diverses propriétés [25,34,28]

Dans ce système, le flot des arrivées primaires est poissonnien de taux λ . Un client primaire qui arrive dans le système et qui trouve le serveur libre est immédiatement pris en charge et quitte le système à la fin de son service, sinon il entre en orbite et devient source d'arrivées secondaires, après une durée de temps aléatoire il rappelle pour le service. Les intervalles inter-rappels suivent une loi exponentielle de taux μ .

Un client provenant de l'orbite et trouvant le serveur libre l'occupe et quitte le système après la complétion de service, par contre s'il le trouve occupé, il retourne dans l'orbite. Les rappels qui arrivent durant un temps de service n'influent pas sur le processus. La durée de service suit une loi générale de distribution $B(x)$ de moyenne β_1 et de transformée de Laplace $B(s)$.

Les inter-arrivées des clients primaires, les intervalles entre les rappels répétés des clients secondaires et le temps de service sont supposés mutuellement indépendants. Bien que ce

système soit semi-markovien, on peut l'analyser par les méthodes d'analyse des systèmes non markoviens citées précédemment.

La méthode de la variable supplémentaire s'applique aux systèmes M/G/1 avec rappels en complétant l'information sur $X(t) = \{C(t), N(t)\}_{t \geq 0}$ par la variable $\xi(t)$ qui représente le temps de service écoulé à l'instant t . Le processus $\{X(t), \xi(t)\}_{t \geq 0}$ décrit complètement le système M/G/1 avec rappels. Le calcul de son régime transitoire fait intervenir des équations aux dérivées partielles dont la résolution est difficile. La méthode de la chaîne de Markov induite ramène l'étude de ce processus au cas discret.

En effet en considérant (t_n^+) les instants de départ du nième client, le processus $\{X(t_n^+), \xi(t_n^+)\}$ sera équivalent à $N_n = N(t_n^+)$ puisque $\xi(t_n^+) = 0$.

S_n : durée de service du n^{ième} clients. On suppose que les (S_n) sont des variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition $B(x)$.

La suite X_n qui représente le nombre de clients dans le système juste après l'instant (t_n) , est une chaîne de Markov à temps discret. On effet on considère le processus $(A_n)_{n \geq 0}$ représentant le nombre d'arrivées primaires durant le service du nième clients, les variables A_n sont indépendantes entre elles, de meme loi que A et leurs distributions commune est:

$$K_n = P(A = n) = \int_0^{+\infty} P(A = n / S = x) dB(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^n}{n!} dB(x), \quad \forall n \geq 0.$$

$$K_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dB(x) = \beta(\lambda).$$

Fonction génératrice de A :

$$\sum_{n \geq 0} z^n K_n = \sum_{n \geq 0} z^n \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^n}{n!} dB(x) = \int_0^{+\infty} \exp[-\lambda x(1-z)] dB(x) = \beta(\lambda - \lambda z)$$

$\beta(\lambda - \lambda z)$: est la transformée de Laplace du nombre de clients qui arrivent durant une durée de service.

On à l'équation de récurrence suivante :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_{n+1} + A_{n+1} \quad n \in N$$

Avec δ_n la variable de Bernoulli :

$$\delta_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } n^\circ = n+1 \text{ provient de l'orbite} \\ 0 & \text{si le client } n^\circ = n+1 \text{ provient de l'extérieur} \end{cases}$$

$$P(\delta_n = 1 / X_n = 1) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \mu \exp(-\mu x) dx = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

$$P(\delta_n = 0 / X_n = 1) = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

ou μ est le taux de rappels.

Les probabilités de transitions de la chaîne de Markov X_n sont données par :

$$P_{nm} = P[X_{k+1} = m / X_k = n]$$

$$P_{0m} = P[A = m] = K_m, \quad \forall m \geq 0$$

$$P_{1m} = P[X_k - \delta_{n+1} + A = m / X_k = 1] = P[A - \delta_{n+1} = m - 1 / X_k = 1] =$$

$$P[\delta_{n+1} = 1 / X_k = 1]P[A = m] + P[\delta_{n+1} = 0 / X_k = 1]P[A = m - 1] =$$

$$P_{1m} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} K_m + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} K_{m-1}.$$

$$P_{nm} = P[\delta_{n+1} = 1 / X_k = n]P[A = m - n + 1] + P[\delta_{n+1} = 0 / X_k = n]P[A = m - n] =$$

$$P_{nm} = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} K_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} K_{m-n}.$$

Régime stationnaire :

Si $\lambda\beta_1 < 1$, alors la chaîne de Markov X_n admet une distribution stationnaire π_k et on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X(t^+_n) = k) = \pi_k$$

Ainsi la solution ergodique de X_n est la même pour $X(t)$, t quelconque.

Le noyau de transition du système M/G/1 avec rappels s'écrit :

$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^j}{j!} d\mathbf{B}(x) & \text{si } i = 0 \\ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) d\mathbf{B}(x) & \text{si } i = j + 1 \\ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} d\mathbf{B}(x) + \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} d\mathbf{B}(x) & \text{si } j \geq i \geq 1 \end{cases}$$

La fonction génératrice de la distribution du nombre de clients dans le système est donnée par :

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z} \cdot \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1-B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x)-x} dx \right\} \quad (2.1)$$

et
$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z} \quad (2.2)$$

La formule (2.1) est appelée la décomposition stochastique du système M/G/1 avec rappels.

La formule (2.2) n'est autre que la formule de Pollaczek-Khintchine pour le nombre de clients dans le système classique M/G/1 sous la discipline FIFO.

Lemme : (*Décomposition Stochastique*)

Le nombre total de clients dans la file M/G/1 avec rappel, N_μ , peut être représenté par la somme de deux variables aléatoires indépendants : l'une est le nombre de clients total dans le système de la file M/G/1 classique, N_∞ , et l'autre est le nombre de clients dans l'orbite sachant que le serveur est libre qu'on note R_μ .

$$N_\mu = N_\infty + R_\mu$$

Les fonctions génératrices de N_∞ et R_μ sont données par :

$$Ez^{N_\infty} = \Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z}$$

$$Ez^{R_\mu} = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1-k(x)}{k(x)-x} dx\right\}, \quad k(z) = B^*(\lambda-\lambda z)$$

Artalejo et Falin [7] ont donné diverses applications de cette propriété de décomposition pour un système d'attente avec rappels. Ils ont obtenu que la vitesse de convergence du système M/G/1 avec rappels vers le système M/G/1 classique quand le taux de rappels tend vers l'infini.

2.4 Système de file d'attente M/G/1 avec taux de rappel constant

2.4.1 Description du modèle

On reprend le modèle précédent lorsque le taux de rappel est indépendant de la taille de l'orbite :

Les équations des états sont données par :

$$P_{0n}(t+h) = (1-\lambda h - \mu h + O(h))P_{0n}(t) + \int_0^\infty P_{1n}(t,x)b(x)h dx \quad (2.3)$$

$$P_{1n}(t+h, x+h) = (1-\lambda h - b(x)h)P_{1n}(t,x) + \lambda h P_{1n-1}(t,x) \quad (2.4)$$

$$P_{1n}(0) = \lambda P_{0n} + \mu P_{1n-1}(t,x) \quad (2.5)$$

On divise les équations (2.3) et (2.4) par h et on prend la limite lorsque $h \rightarrow 0$ pour obtenir :

$$\frac{dP_{0n}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_{0n}(t) + \int_0^\infty P_{1n}(x)b(x)dx \quad (2.6)$$

$$\frac{dP_{1n}(t,x)}{dt} + \frac{dP_{1n}(t,x)}{dx} = -(\lambda + b(x))P_{1n}(x) + \lambda P_{1n-1}(x) \quad (2.7)$$

A l'état stationnaire, on a P_{ij} existe et indépendante de t et donc $\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = 0$

D'où les équations suivantes :

$$(\lambda + \mu)P_{0n}(t) = \int_0^{\infty} P_{1n}(x)b(x)dx \quad (2.8)$$

$$\frac{dP_{1n}(t, x)}{dx} = -(\lambda + b(x))P_{1n}(x) + \lambda P_{1n-1}(x) \quad (2.9)$$

$$P_{1n}(0) = \lambda P_{0n} + \mu P_{0n+1} \quad (2.10)$$

En passant aux fonctions génératrices on obtient :

$$(\lambda + \mu)P_0(z) = \int_0^{\infty} P_1(z, x)b(x)dx \quad (2.11)$$

$$\frac{dP_1(z, x)}{dx} = -(\lambda + b(x) - \lambda z)P_1(z, x) \quad (2.12)$$

$$P_1(z, 0) = (\lambda + \mu/z)P_0(z) - (\mu/z)P_{00} \quad (2.13)$$

De l'équation (2.12) on obtient $P_1(z, x)$

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0)(1 - b(x)) \exp(-(\lambda - \lambda z)x) \quad (2.14)$$

On remplace $P_1(z, x)$ par sa valeur dans l'équation (2.11) pour obtenir :

$$(\lambda + \mu)P_0(z) = P_1(z, 0)k(z) \quad (2.15)$$

Et en remplaçant $P_1(z, 0)$ par sa valeur dans l'équation (2.12) on trouve :

$$\frac{(\lambda + \mu)P_0(z)}{k(z)} = (\lambda + \mu/z)P_0(z) - (\mu/z)P_{00}$$

D'où $P_0(z)$ égale à :

$$P_0(z) = \frac{(\mu/z)k(z)P_{00}}{(\lambda + \mu/z)k(z) - (\lambda + \mu)} \quad (2.16)$$

$$\text{Et } P_1(z) = \int_0^{\infty} P_1(z, x)dx = P_1(z, 0) \frac{(1 - k(z))}{\lambda - \lambda z}$$

$$P_1(z) = \frac{(\mu/z)(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu/z)k(z) - (\lambda + \mu)} P_{00} \quad (2.17)$$

En utilisant les conditions de normalisation

$$P_0(1) + P_1(1) = 1$$

Avec l'aide de la règle de l'hôpital :

$$\lim_{z \rightarrow 1} P_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{[(\mu/z)(\lambda + \mu)]'}{[(\lambda + \mu/z)k(z) - (\lambda + \mu)]'} \quad \text{on trouve :}$$

$$P_0(z) = \frac{\lambda(\lambda + \mu)(\mu(\lambda + \mu)^{-1} - \rho)z(1 - k(z))}{\mu(\lambda + \mu)^{-1}(\mu(\lambda + \mu)^{-1}(1 - z)k(z) - z(1 - k(z)))} \quad (2.18)$$

On fait le même calcul pour $P_1(z)$ on trouve :

$$P_1(z) = \frac{\lambda(\mu(\lambda + \mu)^{-1} - \rho)(1 - z)}{\mu(\lambda + \mu)^{-1}(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \frac{(1 - k(z))}{(\lambda - \lambda z)} \quad (2.19)$$

Théorème [33] :

Si $\rho < \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, alors la distribution stationnaire de $\{X(t), t \geq 0\}$ est donnée par :

$$P_{00} = 1 - \frac{\rho}{\mu/\lambda + \mu},$$

$$P_0(z) = \frac{\lambda(\lambda + \mu)(\mu(\lambda + \mu)^{-1} - \rho)z(1 - k(z))}{\mu(\lambda + \mu)^{-1}(\mu(\lambda + \mu)^{-1}(1 - z)k(z) - z(1 - k(z)))},$$

$$P_1(z) = \frac{\lambda(\mu(\lambda + \mu)^{-1} - \rho)(1 - z)}{\mu(\lambda + \mu)^{-1}(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \frac{(1 - k(z))}{(\lambda - \lambda z)},$$

Et la fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par :

$$Q(z) = P_{00} + P_0(z) + zP_1(z)$$

$$Q(z) = \frac{(\lambda(\lambda + \mu)^{-1} - \rho)(1 - z)k(z)}{\lambda(\lambda + \mu)^{-1}(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))}$$

2.5 Système de file d'attente M/G/1 avec taux de rappel linéaire :

On considère la file M/G/1 où le taux de rappel dépend du nombre de clients dans l'orbite ; c'est-à-dire remplacer μ par $n\mu$, en utilisant la méthode de la variable supplémentaire.

Théorème [25]:

Pour la file M/G/1 avec rappel linéaire, dans le cas stationnaire la distribution conjointe de l'état du serveur et la taille de la file est donnée par :

$$P_{0n} = P[C(t) = 0, N(t) = n],$$

$$P_{1n}(x) = \frac{d}{dx} P[C(t) = 1, \zeta(t) < x, N(t) = n],$$

Leurs fonctions génératrices :

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{0n} = (1 - \rho) \exp\left[\frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1-k(u)}{k(u)-u} du\right]. \quad (2.20)$$

$$P_1(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1n}(x) = \lambda \frac{1-z}{k(z)-z} P_0(z) [1-B(x)] \exp(-(\lambda - \lambda z)x). \quad (2.21)$$

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{1n} = \frac{1-k(z)}{k(z)-z} P_0(z) \quad (2.22)$$

Preuve : En général on obtient les équations à l'état d'équilibre :

$$(\lambda + n\mu)P_{0n} = \int_0^{\infty} P_{1n}(x)b(x)dx,$$

$$P'_{1n}(x) = -(\lambda + b(x))P_{1n}(x) + \lambda P_{1,n-1}(x),$$

$$P_{1n}(0) = \lambda P_{0n} + (n+1)\mu P_{0,n+1}.$$

Les fonctions génératrices de ces équations sont données par :

$$\lambda P_0(z) + \mu z \frac{dP_0(z)}{dz} = \int_0^{\infty} P_1(z, x)b(x)dx, \quad (2.23)$$

$$\frac{dP_1(z, x)}{dx} = -(\lambda - \lambda z + b(x))P_1(z, x), \quad (2.24)$$

$$P_1(z, 0) = \lambda P_0(z) + \mu \frac{dP_0(z)}{dz}. \quad (2.25)$$

De l'équation (2.24) on trouve $P_1(z, x)$:

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0)[1 - B(x)]e^{-(\lambda - \lambda z)x} \quad (2.26)$$

Avec l'aide de l'équation (2.26) l'équation (2.23) peut être écrite comme suit :

$$\lambda P_0(z) + \mu z \frac{dP_0(z)}{dz} = k(z)P_1(z, 0) \quad (2.27)$$

En éliminant $P_0'(z)$ des équations (2.27) et (2.25) on trouve :

$$P_1(z,0) = \lambda \frac{1-z}{k(z)-z} P_0(z)$$

Donc de (2.26) nous avons l'équation (2.21).

En intégrant l'équation (2.21) par rapport à x et en utilisant la formule connue :

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} (1-B(x)) dx = \frac{1-\beta(s)}{s}$$

On trouve l'équation (2.22).

Notons que a partir l'équation (2.22) on a $P_1(1) = \frac{\rho}{1-\rho} P_0(1)$. Avec les conditions de normalisation $P_0(1) + P_1(1) = 1$

On trouve :

$$P_0(1) = 1 - \rho, \quad P_1(1) = \rho.$$

Dans le but de trouver $P_0(z)$, en éliminant $P_1(z,0)$ de (2.27) et (2.25) :

$$\mu[k(z)-z] \frac{dP_0(z)}{dz} = \lambda[1-k(z)]P_0(z). \quad (2.28)$$

Considérons le coefficient $f(z) \equiv k(z) - z$.

- a) $f(1) = \beta(0) - 1 = 1 - 1 = 0$;
- b) $f'(z) = -\lambda\beta'(\lambda - \lambda z) - 1$ et $f'(1) = -\lambda\beta'(0) - 1 = \rho - 1 < 0$;
- c) $f''(z) = \lambda^2 \beta''(\lambda - \lambda z) \geq 0$.

La fonction $f(z)$ est décroissante dans l'intervalle $[0,1]$ et positive c'est-à-dire pour $z \in [0,1]$ on a : $z < k(z) \leq 1$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-k(z)}{k(z)-z} = \frac{k'(1)}{1-k'(1)} = \frac{\rho}{1-\rho} < \infty$$

On peut réécrire l'équation (2.28) comme suit :

$$\frac{dP_0(z)}{dz} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1-k(z)}{k(z)-z} P_0(z),$$

$P_0(1) = 1 - \rho$ est connue. On peut résoudre cette simple équation différentielle, ce qui donne l'équation (2.20) et qui complète la démonstration.

Avec l'aide des fonctions génératrices $P_0(z)$ et $P_1(z)$ on a plusieurs mesures de performances :

La distribution du nombre de clients dans l'orbite $q_n = P[N(t) = n]$ sa fonction génératrice est :

$$P(z) = P_0(z) + P_1(z)$$

$$= (1 - \rho) \frac{1 - z}{k(z) - z} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - k(u)}{k(u) - u} du \right\}.$$

$$E(N(t)) = \frac{\lambda^2}{1 - \rho} \left[\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right]$$

La distribution du nombre de clients dans le système $Q_n = P[K(t) = n]$ à la fonction génératrice :

$$Q(z) = P_0(z) + zP_1(z)$$

$$= (1 - \rho) \frac{(1 - z)k(z)}{k(z) - z} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - k(u)}{k(u) - u} du \right\}$$

$$E(K(t)) = \rho + \frac{\lambda^2}{1 - \rho} \left[\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right]$$

La probabilité de blocage est donnée par :

$$P_1 = P_1(1) = \rho.$$

2.6 Autres systèmes de files d'attentes avec rappels :

2.6.1 Rappels dus à l'empêchement et à l'impatience

La plupart des systèmes des files d'attentes avec rappels sont motivés par les applications en informatique et en télécommunication où une tentative répétée semble due au blocage dans un système

avec la capacité de service limitée. Par conséquent l'existence des files avec rappels peut être dû à d'autres raisons. Par exemple Fayolle et Brun [31] ont étudié un

système à un seul serveur avec rappels ou les tentatives répétées sont dues à l'impatience des clients dans la file. Une deuxième possibilité est fournie par la considération des modèles mélangés en ligne d'attente et orbite [29]. Là où un client trouvant une longue file d'attente à l'arrivée, peut décider d'assister à un autre travail secondaire et de revenir plus tard espérant trouver la file plus courte.

2.6.2 Modèles avec des abonnés non persistants

Supposons qu'un abonné après quelques rappels non réussis décide d'abandonner le système. Cette variante pratique peut être modélisée avec l'aide de la fonction de persistance $\{H_j; j \geq 0\}$, où H_j représente la probabilité que après l'échec de la j ème tentative, l'abonné effectue la $(j+1)$ ème tentative [24, section 13].

2.6.3 Les files à multi classes avec rappels

Dans le modèle principal il est supposé que le processus des appels primaires est homogène comme le temps de service et les distributions du temps inter-rappels. Dans la pratique, cependant, ces caractéristiques peuvent largement différer pour différents groupes d'abonnés. Ceci nous mènent aux files d'attente multi classes avec rappels [25, Section 12]. Les modèles multi classes sont plus difficiles pour l'analyse mathématique que les modèles simples parce que maintenant le processus de la taille de la file est une marche aléatoire sur Z_+^n plutôt que sur Z_+ .

2.6.4 Files avec rappels par groupes (ou par lots) [7]

Il est très commun d'avoir dans les systèmes de communication pour lesquels des unités qui arrivent par groupes. Dans les files avec rappels ou les arrivées viennent par groupes, il est supposé qu'à chaque instant d'arrivée une série d'unités primaires k arrivent avec la probabilité c_k . Si $c = 1$ et le canal est occupé à l'instant d'arrivée, alors le groupe entier rejoint l'orbite, tandis que si le canal est libre, alors une des unités arrivées commence son service et le reste forment une source des appels répétés. La considération des files avec rappels à plusieurs serveurs et où les arrivées viennent par groupes mène à un générateur infinitésimal Q de la file du type $M/G/1$. Bien que la méthode exigée pour étudier ce type de modèles à

plusieurs serveurs semble standard, nous ne connaissons aucun travail traitant l'analyse algorithmique de ces systèmes.

2.6.5 Files avec rappels avec un nombre fini de source [7]

On suppose que le flot des arrivées primaires est de Poisson. Habituellement ceci signifie que les arrivées primaires sont produites par un nombre très grand de sources et chacune d'elles produit des appels primaires très rarement. De ce point de vue ce modèle est un modèle avec un nombre infini de sources. Cependant, dans beaucoup de situations pratiques il est important de tenir compte du fait que le taux de reproduction de nouveaux appels primaires diminue lorsque le nombre de clients dans le système augmente.

2.7 Conclusion

La littérature des files avec rappels est riche et vaste ainsi il est possible de trouver un grand nombre de variantes et de généralisations comprenant des systèmes avec des modèles prioritaires, avec des arrivées négatifs et des désastres, systèmes de vote, systèmes de sur chargement, etc. Le lecteur intéressé peut trouver le matériel utile au sujet des variantes ci-dessus et beaucoup d'autres modèles avec rappels dans la monographie, les articles et les références là-dedans. En ce moment, on devra préciser l'impossibilité d'avoir des solutions analytiques des systèmes avec rappels dans le cas de la distribution non exponentielle des intervalles entre les arrivées primaires et les périodes inter-rappels. Comme une alternative que beaucoup d'efforts ont été adressées pendant les dernières décennies à la recherche numérique sur des files avec rappels complexes. Dans ce sens, nous allons mentionner l'utilisation des méthodes matricielles analytiques pour les modèles avec rappels avec distribution des inter-arrivées et des inter-rappels du type *PH, MAP, etc.*

Chapitre 3

Comportement asymptotique à queue lourde de la taille de la file M/G/1 avec rappels

3.0 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier le comportement asymptotique à queues lourdes de la taille de la file M/G/1 avec rappels. Nous montrons que la distribution de queue subexponentielle du nombre de clients dans la file M/G/1 avec rappels est déterminée par la distribution subexponentielle du nombre de clients dans la file M/G/1 classique. Par conséquent, la distribution du nombre de clients dans la file M/G/1 avec rappels est subexponentielle si la distribution du nombre de clients dans la file M/G/1 classique est subexponentielle.

Ces résultats pour les queues de distributions subexponentielles sont également applicables pour les queues de distributions à variations régulières.

On termine ce chapitre en énonçant quelques résultats sur la relation entre les queues lourdes et les lois non paramétriques.

3.1 Quelques lemmes de base :

3.1.1 Proposition [8] :

Si $\{M(t)\}$ à une distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $T > 0$ est une variable aléatoire du temps, indépendante de fonction de répartition F satisfaisant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(te^{x/\sqrt{t}})}{\overline{F}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(t + x\sqrt{t})}{\overline{F}(t)} = 1, \quad x \geq 0 \quad (3.1)$$

Alors :

$$P(M(T) > k) \sim \overline{F}(k/\lambda), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Pour montrer cette proposition nous avons besoin des deux lemmes suivant :

3.1.1 Lemme :

Si $M(t)$ à une distribution de Poisson et T est une variable aléatoire indépendante de fonction de répartition F , alors :

$$P(M(T) \geq k-1) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ku} g(u) du, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

$$g(u) = \overline{F}(e^u) e^{-\lambda e^u}.$$

3.1.2 Lemme :

Soit $g(u) = \gamma(u)e^{-\psi(u)}$ ou ψ et γ vérifient les propriétés suivantes :

ψ'' existe et $\psi'' > 0$, $\sigma = (\psi'')^{-1/2}$ et vérifient :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sigma(u + x\sigma(u))}{\sigma(u)} = 1 \quad (3.4) \quad \text{et} \quad \lim_{u \leftarrow -\infty} \frac{\gamma(u + x\sigma(u))}{\gamma(u)} = 1 \quad (3.5)$$

Alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ku} g(u) du \sim \gamma(\psi'^{\leftarrow}(k)) \sigma(\psi'^{\leftarrow}(k)) \sqrt{2\pi} e^{\psi^*(k)}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

ψ'^{\leftarrow} : L'inverse de ψ' . ψ^* : Le conjugué convexe de ψ .

3.1.1 Preuve de la proposition :

Dans (3.6) on pose $\gamma(u) = \overline{F}(e^u)$, $\psi(u) = \lambda e^u$. Nous vérifions les conditions (3.4) et (3.5) quand $\psi^{(n)} = \lambda e^u$ pour tout $n \geq 0$,

la fonction $\sigma(u) = 1/\sqrt{\psi''(u)} = 1/\sqrt{\lambda e^{-u/2}}$ à une dérivée égal à $\sigma'(u) = -1/(2\sqrt{\lambda})e^{-u/2} \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow \infty$.

En utilisant les conditions (3.1),

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\gamma(u + x\sigma(u))}{\gamma(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(e^{u+(x/\sqrt{\lambda})e^{-u/2}})}{\overline{F}(e^u)} = 1,$$

Soit $u = \psi'^{\leftarrow}(k) = \ln(k/\lambda)$ et notons que $u \rightarrow \infty$ si et seulement si $k \rightarrow \infty$.

$\psi^*(k) = ku - \psi(u) = k \ln(k/\lambda) - k$ est le conjugué convexe de ψ .

En utilisant la formule de Stirling : $(k-1)! = e^{-(k-1)} (k-1)^{k-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}$ donne dans (3.3)

$$\begin{aligned} P(M(T) \geq k-1) &\sim \lambda^k e^{k-1} (k-1)^{-(k-\frac{1}{2})} \overline{F}\left(\frac{k}{\lambda}\right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \left(\frac{k}{\lambda}\right)^k e^{-k} \\ &= e^{-1} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{-k} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{1/2} \overline{F}\left(\frac{k}{\lambda}\right) \\ &\sim \overline{F}\left(\frac{k}{\lambda}\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

3.1.3 Lemme :

(a) Si F satisfait (3.1), alors F est à queue lourde.

(b) Si F satisfait (3.1), alors F_e le satisfait aussi.

(Nous rappelons que F_e est la distribution de F à l'état d'équilibre)

3.2 La file G/G/1 (sans rappels et FIFO) :

Les temps inter arrivés des clients $\{T_n\}$ sont i.i.d. de moyenne finie $1/\lambda$, et de durée de service $\{S_n\}$ i.i.d. distribuées selon $G(x) = P(S \leq x)$ de moyenne finie $1/\mu$. Ces deux séquences sont indépendantes.

On note $\{M(t)\}$ le processus de comptage des arrivées Poisson, on note $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Le temps d'attente du nième clients est noté par D_n et satisfait :

$$D_{n+1} = (D_n + S_n - T_n)_+, \quad n \geq 0.$$

D est le temps d'attente à l'état stationnaire : $P(D \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n \leq x)$.

3.2.1 Théorème [8] : D est subexponentielle si S_e est subexponentielle, et dans ce cas on a :

$$P(D > x) \sim \frac{\rho}{1-\rho} P(S_e > x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Si $W = D + S$ est le temps d'attente total passé dans le système.

D'après le théorème 3.2.1, si S_e est subexponentielle alors :

$$P(W > x) \sim P(D > x), \quad x \rightarrow \infty.$$

(Voir e.g. [20], lemme A3.28).

Dans la file M/G/1 classique, si la distribution du temps de service est subexponentielle alors la distribution de la taille de la file à l'état stationnaire N_∞ peut ne pas être subexponentielle, exemple la distribution de Weibull de queue $\exp\{-x^\beta\}$, $0 < \beta < 1$, si $\beta < 1/2$, N_∞ est subexponentielle mais si $\beta \geq 1/2$, N_∞ n'est pas subexponentielle.

C'est pour cette raison qu'on a ajouté une autre condition pour garantir la subexponentialité de la taille de la file à l'état stationnaire, comme on le voit dans le lemme suivant (voir par exemple la proposition 3.3 dans Asmussen et al [8]).

3.2.1 Lemme [62]:

Si la distribution du temps de service à l'état stationnaire B_e est subexponentielle ($B_e \in S$) et satisfait

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{B_e}(ye^{x/\sqrt{y}})}{\overline{B_e}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{B_e}(y + x\sqrt{y})}{\overline{B_e}(y)} = 1, \quad (3.7)$$

Alors :

$$N_\infty \in S, \quad \text{et} \quad P(N_\infty > k) \sim \frac{\rho}{1-\rho} \overline{B_e}(k/\lambda), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Ca vaut la peine de préciser que si $B \in S^*$ et \overline{B} satisfait l'équation (3.7), alors $B_e \in S$ et $\overline{B_e}$ aussi satisfait l'équation (3.7). D'après le lemme 3.2.1 si le temps de service suit la distribution à queue lourde de Weibull avec $\alpha \in (0, 1/2)$ ou de distribution à variation régulière avec $\alpha > 1$, alors la taille de la file M/G/1 standard est subexponentielle et sa queue peut être estimée en utilisant l'équation (3.8). Foss et Korshunov [30] donnent les conditions du lemme suivant pour garantir la subexponentialité de la taille de la file M/G/1 classique.

3.2.2 Lemme [62] :

Soit $1/2 < \nu \leq 1$ et $g(x) = -\log \overline{B_e}(x)$. Pour toute fonction $d(x) = O(x^{1/2})$ tel que $d(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\text{Si } g(x + x^\nu / d(x)) = g(x) + O(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (3.9)$$

Alors :

$$N_\infty \in S, \\ P(N_\infty > k) \sim \frac{\rho}{1-\rho} \overline{B}_e(k/\lambda), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

3.3 Subexponentialité de la taille à l'état stationnaire :

Dans cette section, nous discutons la distribution asymptotique subexponentielle du nombre de clients totale dans le système M/G/1 avec rappel. Pour la décomposition stochastique $N_\mu = N_\infty + R_\mu$.

Il est intéressant de voir comment les queues de deux variables N_∞ et R_μ déterminent celle de N_μ .

Nous voulons trouver une condition nécessaire pour que la taille stationnaire de la file soit subexponentielle, notre analyse se résume dans le théorème suivant :

3.3.1 Théorème [62]:

Si $N_\infty \in S$, alors $N_\mu \in S$ et $P(N_\mu > k) \sim P(N_\infty > k)$, $k \rightarrow \infty$.

Preuve :

Soit $p_k = P(N_\infty = k)$ pour **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** et

$Ez^{N_\infty} = y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$. alors de

$$y(z) = (1-\rho) \frac{1-z}{k(z)-z} k(z),$$

on obtient :

$$k(z) = \frac{y(z)z}{y(z) - (1-\rho)(1-z)}.$$

Soit $Ez^{R_\mu} = \exp(t(z))$, ou

$$t(z) = \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1-k(u)}{k(u)-u} du \\ = \frac{\lambda}{\mu} \left[(1-z) + \int_1^z \frac{1-u}{k(u)-u} du \right] \\ = \frac{\lambda}{\mu} \left[(1-z) + \int_1^z \frac{y(u) - (1-\rho)(1-u)}{(1-\rho)u} du \right]$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} \left[-\log z + \frac{1}{1-\rho} \int_1^z \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^{k-1} du \right]$$

$$= \frac{\lambda}{\mu(1-\rho)} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{z^k - 1}{k}.$$

Alors :

$$Ez^{R_\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\lambda}{\mu(1-\rho)} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{z^k - 1}{k} \right]^n. \quad (3.11)$$

Soit V une variable aléatoire non négative avec $P(V = k) = v_k = p_k / k$, $k \geq 1$ et $P(V = 0) = v_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} v_k > 0$. On écrit $Ez^V = d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$, et $c = \frac{\lambda}{\mu}(1-\rho)$.

De l'équation (7), on a :

$$Ez^{R_\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [c(d(z) - 1)]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \left[\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (-1)^{n-m} d^m(z) \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} d^m(z) \left[\sum_{n=m}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \frac{n!}{m!(n-m)!} (-1)^{n-m} \right]$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{\infty} d^m(z) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{m+k}}{m!k!} (-1)^k \right] \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m d^m(z)}{m!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k}{k!} \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m e^{-c}}{m!} d^m(z). \quad (3.12)$$

Soit M une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson avec $P(M = m) = w_m = e^{-c} c^m / m!$ pour $m \geq 0$.

De l'équation (3.8) on peut obtenir $R_\mu = \sum_{n=1}^M V(n)$, ou $V(1), V(2), \dots$ sont i.i.d.

On note $V^{(m)} = \sum_{n=1}^m V(n)$ pour $m \geq 1$, et $N_\infty^{(m)} = \sum_{n=1}^m N_\infty(n)$ pour $m \geq 1$. Avec $N_\infty(1), N_\infty(2), \dots$ sont i.i.d.

Pour $m > 1$ et $k \geq 0$,

$$P(V^{(m)} > k) = v_0 P(V^{(m-1)} > 1) + \sum_{n=1}^k v_n P(V^{(m-1)} > k - n) + P(V > k),$$

$$P(N_\infty^{(m)} > k) = p_0 P(N_\infty^{(m-1)} > k) + \sum_{n=1}^k p_n P(N_\infty^{(m-1)} > k - n) + P(N_\infty > k)$$

En se basant sur les deux équations ci-dessus nous obtenons par récurrence.

$$P(V^{(m)} > k) \leq \frac{d^{m-1}}{k+1} P(N_\infty^{(m)} > k), \quad m \geq 1, k \geq 0,$$

Ou $d = 1/p_0 + 2$. On note que :

$$\frac{P(R_\mu > k)}{P(N_\infty > k)} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} w_m P(V^{(m)} > k)}{P(N_\infty > k)} \leq \Delta_1(k), \quad (3.13)$$

Avec

$$\Delta_1(k) = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} w_m \left(\frac{d^{m-1}}{k+1}\right) P(N_\infty^{(m)} > k)}{P(N_\infty > k)}.$$

$$\Delta_2(k) = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} w_m d^{m-1} P(N_\infty^{(m)} > k)}{P(N_\infty > k)},$$

$\Delta_1(k) \leq \Delta_2(k)$. Par hypothèse N_∞ est subexponentielle. En appliquant le lemme 1.1.3. du chapitre 1 nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_2(k) = c e^{c(d-1)} < +\infty.$$

D'après le Théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_1(k) = c e^{c(d-1)} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k+1}\right) = 0. \quad (3.14)$$

Les équations (3.9) et (3.10) impliquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(R_\mu > k)}{P(N_\infty > k)} = 0.$$

D'après les lemmes et 1.1.4 du chapitre 1, on trouve le résultat.

3.4 Queues à variations régulières de la taille stationnaire de la file

Il est clair que notre analyse pour les queues subexponentielles est applicable pour les queues asymptotiques à variations régulières. Nous présentons le comportement asymptotique de queue à variation régulière de la taille de la file dans le corollaire suivant.

3.4.1 Corollaire :

Si le temps de service est à variation régulière avec $\bar{B}(x) \sim x^{-\alpha} L(x)$, $x \rightarrow \infty$ pour $\alpha > 1$, Alors :

$$P(N_\mu > k) \sim P(N_\infty > k) \sim \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)(1-\rho)} k^{-(\alpha-1)} L(k), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

Preuve :

La première équivalence a été montrée dans le Théorème 3.3.1, nous allons montrer seulement la

deuxième équivalence. D'après la proposition 1.1.5 du chapitre 1, nous avons pour $\alpha > 1$, $\int_x^{+\infty} y^{-\alpha} L(y) dy$

converge et

$$\frac{x^{-(\alpha-1)} L(x)}{\int_x^{+\infty} y^{-\alpha} L(y) dy} \rightarrow \alpha - 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Et d'après le lemme 3.2.1 du chapitre 3, on a :

$$P(N_\infty > k) \sim \frac{\rho}{1-\rho} \bar{B}_e(k/\lambda), \quad k \rightarrow \infty.$$

On sait que :

$$B_e(x) = \frac{1}{\beta_1} \int_0^x \bar{B}(y) dy \quad \text{donc} \quad \bar{B}_e(x) = 1 - \frac{1}{\beta_1} \int_x^\infty \bar{B}(y) dy = \frac{1}{\beta_1} \int_x^{+\infty} y^{-\alpha} L(y) dy$$

$$\text{D'après le lemme 1.1.6 du chapitre 1, } \int_x^\infty y^{-\alpha} L(y) dy \sim \frac{1}{\alpha-1} x^{-(\alpha-1)} L(x).$$

Ce qui implique que :

$$\bar{B}_e(x) = \frac{1}{\beta_1} \int_x^{+\infty} y^{-\alpha} L(y) dy \sim \frac{x^{-(\alpha-1)} L(x)}{\beta_1(\alpha-1)}. \quad (3.16)$$

On remplace $\bar{B}(k/\lambda)$ par sa valeur on obtient :

$$P(N_\infty > k) \sim \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)(1-\rho)} k^{-(\alpha-1)} L(k), \quad k \rightarrow \infty. \quad \text{avec } \rho = \lambda\beta_1$$

D'où le résultat.

3.5 Le cas des queues lourdes modérées [8] :

Nous considérons maintenant F une distribution à queue lourde, mais avec une queue proportionnelle à la distribution de Weibull avec $\beta=1/2$. Notons que la distribution de Weibull avec $\beta=1/2$ est incluse ici ce qui prouve que cette distribution critique tombe dans ce cas de queue lourde modérée, et rapporte une valeur asymptotique pour $M(t)$ qui est différente de (3.2).

3.5.1 Théorème : (voir réf [8] pour la démonstration)

Soit $M(t)$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $T > 0$, une variable aléatoire avec comme fonction de répartition F tel que $\bar{F}(t) = \tilde{\gamma}(t) \exp[-t^\beta]$ pour $1/2 \leq \beta < 1$ et $\tilde{\gamma}$ est une fonction continue.

On suppose que $\gamma = \tilde{\gamma} \times \exp$ satisfait :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\gamma(u + xe^{-u/2})}{\gamma(u)} = 1$$

Alors :

$$P(M(t) > k) \sim \tilde{\gamma}\left(\frac{k}{\lambda}\right) \exp\left\{-\beta\left(\frac{k}{\lambda}\right)^\beta - (1-\beta)t^\beta\right\}, \quad k \rightarrow \infty,$$

3.5.2 Remarque :

$\exp(t^\beta)$ est un facteur important pour la queue F . Le facteur $\tilde{\gamma}$ tient compte de la flexibilité du modèle.

Pour $\beta = 1/2$ l'équation $\beta t^\beta + \lambda t = k$ est une équation quadratique pour \sqrt{t} et peut être résolu explicitement.

Exemple :

Pour la file stable M/G/1 avec une distribution de service Weibull.

$B(x) = P(S \leq x) = 1 - e^{-x^\beta}$ avec $1/2 \leq \beta < 1$, la taille de la file à l'état stationnaire N_∞ satisfait :

$$P(N_\infty > k) \sim \frac{1}{\beta} \left(\frac{k}{\lambda}\right)^{1-\beta} \exp\left\{-\beta\left(\frac{k}{\lambda}\right)^\beta - (1-\beta)t^\beta\right\}, \quad k \rightarrow \infty$$

Où $t = t(k)$ est la solution de l'équation $\beta t^\beta + \lambda t = k$.

Preuve : on note que $\overline{B_e}(x) \sim \beta^{-1} x^{1-\beta} e^{-x^\beta}$ et on prend $\tilde{\gamma}(x) = \beta^{-1} x^{1-\beta}$.

3.6 Relation entre queues lourdes et lois non paramétriques :

Les distributions sont fondamentales en probabilité et en statistique. Beaucoup de distributions ont été proposées dans la théorie et les applications de fiabilité. En fiabilité, des distributions de variables aléatoires non négatives qu'on appelle distributions d'âge sont employées pour décrire le comportement des durées de vie des dispositifs et des systèmes. En assurance ces distributions de vie sont des modèles

de base pour les probabilités de pertes ou de risques. Les distributions exponentielles, gamma, Pareto, et Weibull sont des exemples des distributions d'âge souvent utilisées en fiabilité et en assurance.

Bien que chaque distribution a une expression unique beaucoup de distributions différentes partagent les mêmes propriétés distributionnelles. Par exemple la distribution gamma a une fonction génératrice des moments et par conséquent elle est une distribution à queue légère, par contre la distribution de Pareto n'a pas de moments et par conséquent elle est à queue lourde.

En fiabilité, les distributions d'âge sont habituellement classées par les taux de défaillances, les durées de vie résiduelles moyenne et les distributions d'équilibre. En général les classes les plus utilisées en fiabilité sont les classes IFR (increasing failure rate), IFRA (increasing failure rate in average), NBU (new better than used), NBUC (new better than used in convex ordering), DMRL (decreasing mean residual life), NBUE (new better than used in expectation), et HNBUE (harmonic new better than used in expectation) avec leurs classes duales DFR (decreasing failure rate), DFRA (decreasing failure rate in average), NWU (new worse than used), NWUC (new worse than used in convex ordering), IMRL (increasing mean residual life), NWUE (new worse than used in expectation), et HNWUE (harmonic new worse than used in expectation).

Dans les assurances ces classes de distribution d'âge ont été employées pour classifier les distributions du nombre de réclamations ou les distribution de risques ; voir par exemples [11].

3.6.1 Définitions :

Avant tout nous allons d'abord donner les définitions de ces classes :

- 1- La distribution F est dite être une distribution IFR si la fonction $\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}$ est décroissante en $t \geq 0$.
- 2- La distribution F est dite être une distribution IFRA si la fonction $-\ln \bar{F}(t)/t$ est croissante en $t \geq 0$.
- 3- La distribution F est dite être une distribution NBU si $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ pour tout $x, y \geq 0$.

4- La distribution F de moyenne finie $\mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx > 0$ est dite être une distribution NBUC si

$$\int_{x+y}^{\infty} \bar{F}(t) dt \leq \bar{F}(x) \int_y^{\infty} \bar{F}(t) dt \text{ pour tout } x, y \geq 0.$$

5- La distribution F est dite être une distribution DMRL si la fonction $\int_x^{\infty} \bar{F}(y) dy / \bar{F}(x)$ est décroissante en x .

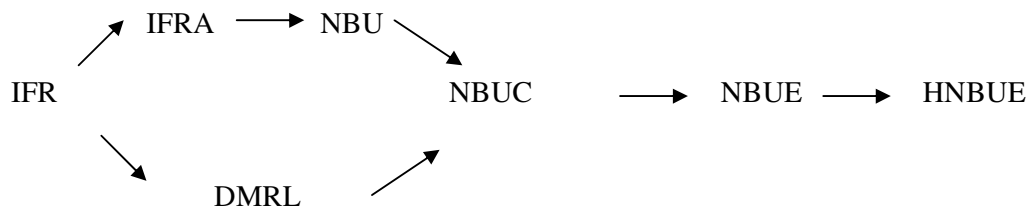
6- La distribution F est dite être une distribution NBUE si $\int_x^{\infty} \bar{F}(y) dy \leq \mu \bar{F}(x)$ pour tout $x \geq 0$.

7- La distribution F est dite être une distribution HNBUE si $\int_x^{\infty} \bar{F}(y) dy \leq \mu e^{-x/\mu}$ pour tout $x \geq 0$.

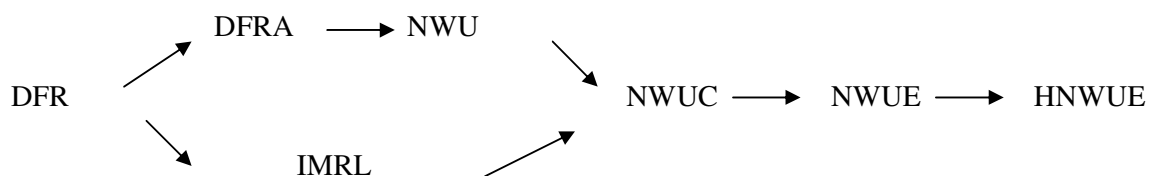
En inversant les inégalités plus haut on obtient les définitions des classes :

DFR, DFRA, NWU, NWUC, IMRL, NWUE et HNWUE.

Les implications existantes entre ces classes sont indiquées dans la figure suivante :



Et



Dans les assurances, les distributions d'âge sont également classifiées par les fonctions génératrices des moments. On dit que la distribution F est à queue légère si sa fonction génératrice du moment

$$\text{ou } \int_0^{\infty} e^{sx} dF(x) < \infty, \text{ pour } s > 0.$$

Tandis que F est dite à queue lourde si sa fonction génératrice du moment $\int_0^{\infty} e^{sx} dF(x)$ n'existe pas pour $s > 0$. Il faut préciser que les distributions dans toutes les sept classes IFR,

IFRA, NBU, DMRL, NBUC, NBUE, HNBUE sont à queues légères. En fait, si $F \in$ HNBUE, la plus grande classe parmi les sept alors il existe $s > 0$ tel que $\int_0^{\infty} e^{sx} dF(x) < \infty$; voir Cai and Garrido, (1998)

[18] pour plus de détails. Cependant il existe quelques intersections entre la classe HNWUE et la classe des distributions à queues lourdes. Dans la classe HNWUE on trouve les deux distributions, queues lourdes et queues légères. Par exemple la distribution gamma avec un paramètre inférieure à l'autre est $DFR \subset$ HNWUE est à queue légère. D'autre part quelques distributions peuvent être HNWUE et à queues lourdes, par exemple la distribution de Pareto est à la fois DFR et à queue lourde.

Nous considérons la queue de probabilité de somme de variables aléatoires. La relation entre les classes de distributions de fiabilité et les distributions à queues lourdes indiquent que beaucoup de résultats précédents sur l'estimation des queues probabilités ne sont pas applicables aux distributions à queue lourdes.

Soit $\{ X_i, i \geq 1 \}$ des variables aléatoires positives, indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d) de fonctions de répartition F . Soit N une variable aléatoire indépendante de $\{ X_i, i \geq 1 \}$ avec $P(N = n) = p_n$ pour $n \geq 0$.

La distribution de la somme $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$

avec ($S = 0$ si $N = 0$) est donnée par :

$$P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{(n)}(x). \quad \text{ou } F^{(n)} \text{ est la } n\text{ième convolée de } F \text{ avec } F^{(0)}(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

La distribution de queue de la somme est définie par :

$$\psi(x) = P(S > x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \bar{F}^{(n)}(x).$$

Avec $\bar{F}^{(n)} = 1 - F^{(n)}$ est la fonction de survie de $F^{(n)}$.

Les queues de distributions de sommes apparaissent dans beaucoup de modèles appliqués de probabilité tels que les risques d'assurances, la théorie de fiabilité et les files d'attente.

Un résultat célèbre pour la probabilité de ruine $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n \bar{F}^{(n)}(x)$ est l'inégalité de

Lundberg qui déclare que s'il existe une constante k satisfaisant la condition de Cramer-Lundberg ,

$$\int_0^{\infty} e^{ky} dF(y) = \frac{1}{\phi}.$$

Alors :

$$\psi(x) \leq e^{-kx}, \quad x \geq 0.$$

Mais les distributions à queues lourdes ne peuvent satisfaire la condition de Cramer-Lundberg. C'est pour cette raison que la condition de Cramer-Lundberg généralisée à été proposée dans laquelle la fonction de distribution exponentielle a été remplacée par une fonction B de distribution NWU ou NBU c'est-à-dire :

$$\int_0^{\infty} [\bar{B}(y)]^{-1} dF(y) = \frac{1}{\phi} \tag{3.17}$$

Propriété (1):

Si est F NBUE avec une moyenne finie μ , alors F n'est pas une distribution à queue lourde.

Preuve :

Si F NBUE, d'après le Théorème 3 de Klefsjo (1982) [43], $\bar{F}(x) \leq \exp\left\{\frac{\mu - x}{\mu}\right\}$, $x \geq \mu$.

Ceci implique que F à une queue exponentielle mais n'est pas une distribution à queue lourde.

Toutes les limites ou les bornes basées sur la condition que F est un membre d'IFR, IFRA, DMRL, NBU et NBUE ne sont pas applicable pour les distributions à queues lourdes : par exemple, (2.8), (2.13), et (2,14) de Lin (1996), [43].

Propriété (2): Si B est une distribution NBU, alors la condition (3.17) n'est pas satisfaite avec F est une distribution à queue lourde.

Preuve [18]:

La condition (3.17) implique que $[\bar{B}(x)]^{-1}\bar{F}(x) \rightarrow 0$ qd $x \rightarrow \infty$, il doit exister un $M > 0$ tel que $\bar{F}(x) \leq \bar{B}(x) \leq \exp\left(\frac{\mu_B - x}{\mu_B}\right)$, $x \geq \max(M, \mu_B)$, avec μ_B est la moyenne de B . Ce qui implique que la distribution F ne peut être à queue lourde.

3.6.2 Remarque

La propriété (2) implique que toutes les autres sous classes basée sur la condition (3.17) et B est NBU ne veut pas dire qu'on a une distribution à queue lourde.

3.7 Quelques identités utiles en termes de processus de renouvellement :

Pour $n \geq 0$, définir $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $N(x) = \sup \{ n \geq 0 : S_n \leq x \}$, $\{ N(x), x \geq 0 \}$ est un processus de renouvellement associé à la variable $\{ X_i, i \geq 1 \}$

On a :

$$\Pr \{ N(x) \geq n \} = \Pr \{ S_n \leq x \} = F^{(n)}(x), \quad x \geq 0.$$

Et

$$0 \leq S_{N(x)} \leq S_{N(x)+1}$$

La probabilité de queue $\psi(x)$ a une relation avec le processus de renouvellement $\{ N(x), x \geq 0 \}$, a savoir :

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n \bar{F}^{(n)}(x) = E[\rho^{N(x)+1}], \quad x \geq 0.$$

Ceci est une représentation simple et utile de la probabilité de ruine en terme du processus de renouvellement.

3.8 Conclusion :

Dans ce chapitre il a été montré que sous certaines conditions si la distribution du temps de service est subexponentielle alors la distribution de la taille de la file N_∞ à l'état stationnaire est subexponentielle.

On a également montré qu'il suffisait que N_∞ soit de distribution subexponentielle pour que la distribution du nombre de clients total dans le système N_μ le soit.

Chapitre 4

Simulations Des Distributions A Queues lourdes dans Les Modèles D'attentes

4.0 Introduction :

Dans beaucoup d'applications modernes de la théorie des files d'attente, l'acceptation classique des distributions exponentielles du temps de service ne s'applique pas. En particulier, dans les problèmes de risque d'assurance et Internet qui peuvent impliquer les distributions à queues lourdes.

La difficulté avec les distributions à queues lourde est qu'elles ne peuvent pas avoir la forme analytique sous transformées de Laplace. Les chercheurs, pour venir à bout ceci, ont approché ces distributions à queues lourdes par des familles exponentielles. Les approches développées lors de cette recherche évitent les problèmes et les pièges de trouver des distributions approximatives en employant les distributions à queues lourdes.

Une méthode qui approxime la transformée de Laplace est la version discrète de la distribution à queue lourde qu'on appelle TAM (Transform approximation method)[56].

Les distributions de probabilité pour les modèles de files d'attentes peuvent souvent être déterminées sous forme de transformée de Laplace. Il est identifié que les transformées sont utiles pour une analyse asymptotique, par exemple, pour calculer des moments et pour déterminer le comportement asymptotique des queues de probabilités. Cependant, les transformées de Laplace sont également utiles pour calculer des valeurs numériques des fonctions de répartition et des fonctions de masse de probabilité par inversion numérique.

Mais l'inversion numérique peut même être commode quand une expression directe pour la fonction de répartition est disponible.

Pour illustrer tout ça, considérons l'exemple familier du temps d'attente $W(t)$ à l'état stationnaire avant de commencer le service dans la file d'attente M/G/1.

La formule célèbre de Pollaczek-Khintchine exprime la transformée de Laplace Stieltjes (LST) par :

$$W(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dW(t) = \frac{(1-\rho)}{s - \lambda(1-\beta(s))}.$$

ρ est l'intensité du trafic et $\beta(s)$ est la transformée de Laplace du temps de service .

On peut inverser analytiquement $W(s)$ en utilisant $(1 - y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$,

$$W(t) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n B_e^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

$B_e^{n*}(t)$ est la nième convolée de la distribution du temps de service à l'état d'équilibre (déjà vu au chapitre 1), de fonction de répartition $B_e(t)$,

avec $B_e^{0*}(t) = 1, t \geq 0$.

Il est facile de calculer le temps d'attente $W(t)$ mais pour sa transformée de Laplace ce sera un peu plus compliqué c'est pour cette raison qu'on aura besoin de la méthode de transformé de Fourier (FFT) qu'on expliquera plutard.

Le problème de la taille de la file M/G/1 est un peu plus complexe. Pour cette file on sait que si λ est le taux d'arrivée des clients, $E(S)$ le temps moyen d'attente et $\beta^*(s)$ est sa transformée de Laplace, et la fonction génératrice du nombre de client Q à l'état stationnaire est donnée par :

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n$$

$$= (1 - \rho)(1 - z) \frac{B^*(\lambda(1 - z))}{B^*(\lambda(1 - z)) - z}$$

$$p_n = P(Q = n)$$

Il est facile de dériver la fameuse formule de Pollaczek-Khintchine

$$L = E(Q)$$

$$= \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}(S)}{2(1 - \rho)}$$

avec $p_0 = P(Q = 0) = 1 - \rho$.

Pour que la formule de Pollaczek-Khintchine soit utilisée, il faut que $\rho < 1$ et $Var(S)$ existe. Ainsi elle ne peut pas être utilisée quand la $Var(S)$ n'existe pas. En fait la distribution de Pareto n'a pas de moment de second ordre quand son paramètre est inférieur à 1. Les distributions Log normale et Weibull ont des moments de second ordre pour toutes valeurs du paramètre, mais ceux-ci peuvent être très grands.

Quand la distribution du service est à queue lourde, alors on ne peut avoir la forme analytique de la transformée de Laplace.

Pour calculer $P(z)$ on a besoin de $\beta^*(s)$, ainsi toute procédure pour inverser $P(z)$ devient difficile, ce qu'on va faire avec la méthode TAM (Transform Approximation Method) est de remplacer $\beta^*(s)$ par :

$$\hat{\beta}^*(s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{-sx_k}$$
 ou les $x_k, k = 1, 2, \dots, N$ sont choisies pour couvrir l'espace des variables aléatoires inter-temps avec $B(x_k) = \frac{k}{N+1}$.

Retournons à notre problème d'inversion de $P(z)$. Abate et Whitt, 1992 et 1996 [1], donnent un excellent sommaire des méthodes de séries de Fourier pour invertir la fonction génératrice $P(z)$, mais nous utilisons la plus facile en employant l'inversion de la transformée rapide de Fourier (Fast Fourier Transform FFT) présentée dans Tijms, 1994(page 29) [57], qu'on définira plutard.

4.1 Comment la méthode TAM fonctionne ?

Soit $A(y)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire, Y .

Pour un échantillon de taille N , et $k = 1, 2, \dots, N$, on résoud l'équation $A(y(k)) = \frac{k}{N+1}$.

Les $y(k)$ sont choisis comme une approximation discrète de N -points équiprobables pour la variable aléatoire originale Y tels que $A(y(k)) = \frac{k}{N+1}$

On appelle $y(k)$ les échantillons de la méthode TAM.

La transformée de la densité de Y est approximée par la transformée de la variable aléatoire discrète Z :

$$A^*(s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{-y(k)s} \quad \text{ou} \quad \Pr(Z \leq y(k)) = \frac{k}{N+1}$$

Exemple :

1-La distribution de Pareto :

$$1- f(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} \quad \text{pour } \alpha > 0, \quad x > 0$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

$$\text{Si } \alpha > 1, \quad \text{la moyenne} = \frac{1}{\alpha-1}$$

$$\text{Si } \alpha > 2, \quad \text{la variance} = \frac{2}{(\alpha-2)(\alpha-1)} - \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\text{TAM échantillon : } y(k) = \frac{1}{(1-k/(N+1))^{1/\alpha}} - 1$$

La transformée de Laplace n'existe pas.

2- La distribution de Weibull :

$$f(x) = \alpha \beta^{-\alpha} x^{(\alpha-1)} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad x > 0, \beta > 0.$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\beta)^\alpha}$$

Si $\alpha < 1$, Weibull est à queue lourde

La moyenne = $\beta \Gamma(1/\alpha)$, $\Gamma(t)$ est la fonction gamma.

La variance = $\beta^2 (2\Gamma(2/\alpha) - \Gamma(1/\alpha)^2) / \alpha$

TAM échantillon $y(k) = \beta [-\ln(1-k/(N+1))]^{1/\alpha}$ pour $k = 1, 2, \dots, N$.

4.2 La méthode FFT (Fast Fourier Transform)

Il sera instructif de savoir comment la méthode FFT calcule les p_n de la fonction génératrice $P(z)$.

Choisir un entier N telle que la probabilité de queue $\sum_{k=N}^{\infty} p_k$ est négligeable et alors $P(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} p_n z^n$,
 $|z| \leq 1$ (1)

La méthode FFT exige que $N = 2^m$ pour un entier m .

Définissons maintenant les nombres complexes f_k :

$$f_k = P(e^{2\pi i k / N}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \dots\dots\dots(2)$$

ou i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Le calcul numérique des f_k dans (2) n'est pas demandé quand $P(z)$ tient compte d'une expression analytique simple.

En prenant $z = e^{2\pi i k / N}$ dans (1) alors : $f_k \approx \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{2\pi i k n / N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

La méthode FFT récupère les p_n de f_k en utilisant la formule inverse qui suit :

$$p_n \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k n / N}, \quad n = 0, \dots, N-1. \dots\dots\dots(3)$$

Cette formule d'inversion suit du fait que la matrice W_N dont le $(n, k)^{ème}$ élément est égale à $e^{2\pi i k n / N}$ peut être montrée en ayant $(1/N)\overline{W}_N$ comme matrice inverse, ou les éléments de \overline{W}_N sont des nombres complexes conjugués de la matrice W_N .

Le vecteur des p_n est obtenue a partir de (3) en multipliant le vecteur des f_k par la matrice dont le $(n, k)^{ème}$ élément est la constante $w = e^{-2\pi i / N}$ a la puissance $n \times k$.

Les multiplications de la matrice dans (3) exigeraient normalement N^2 multiplications. Cependant la méthode de Fourier rapide (FFT) exécute les multiplications de manière extrêmement rapide et ingénieuse. La clef de cette méthode est la simple observation, que la transformée de Fourier discrète de longueur N peut être écrite comme la somme de deux transformées de Fourier discrète de longueur $N/2$.

On aura :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k n / N} &= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} f_{2k} e^{-2\pi i n(2k) / N} + \sum_{k=0}^{(N/2)-1} f_{2k+1} e^{-2\pi i n(2k+1) / N} \\ &= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} f_{2k} e^{-2\pi i n k / (N/2)} + w^n \sum_{k=0}^{(N/2)-1} f_{2k+1} e^{-2\pi i n k / (N/2)} . \end{aligned}$$

avec $w = e^{-2\pi i / N}$.

En d'autres termes, le problème de calculer la transformée de Fourier inverse discrète des N points, peut être réduit au problème de calculer la transformation de ses $N/2$ points pairs et de ses $N/2$ points impairs.

Ce tour peut être appliqué périodiquement. Il est clair maintenant pourquoi N devrait être égale à 2^m pour un entier m .

La distribution de Pareto qu'on appelle aussi la distribution puissance avec des moments qui sont toujours finis et qui croit rapidement.

Un autre exemple bien connu des distributions à queue lourdes est la distribution de Weibull avec un paramètre inférieure à 1. Les schémas des figures 1,2,3 montrent le comportement de ces distributions plus la distribution gamma sur plusieurs intervalles de l'axe des abscisses. La distribution gamma n'est pas à queue lourde elle est incluse ici pour le but de comparaison.

Les coefficients de variations communs (où le coefficient de variation (cv) égale à l'écart type divisé par la moyenne) sont employés pour ces quatre distributions.

Dans la figure (3) on remarque que la distribution de Pareto domine toutes les autres distributions.

Fonctions de densité- cv=3, moyenne=0.8

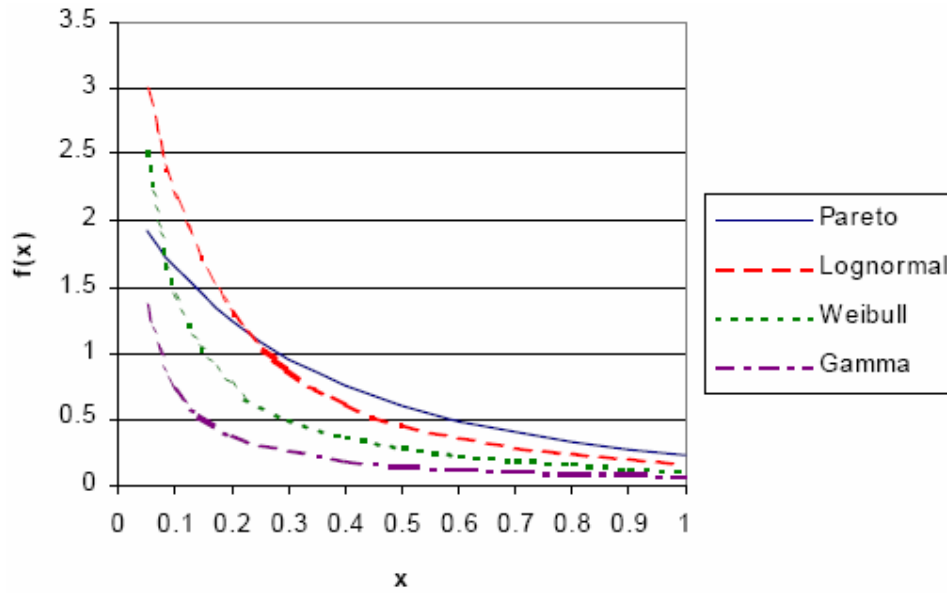


Figure1. Densité pour x dans $[0,1]$

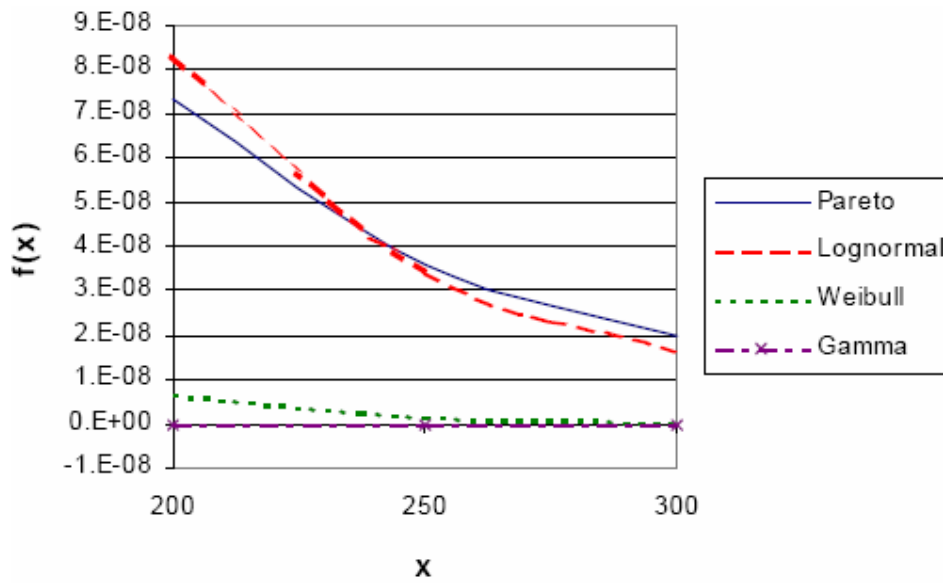


Figure 2. Densité pour x dans $[200,300]$

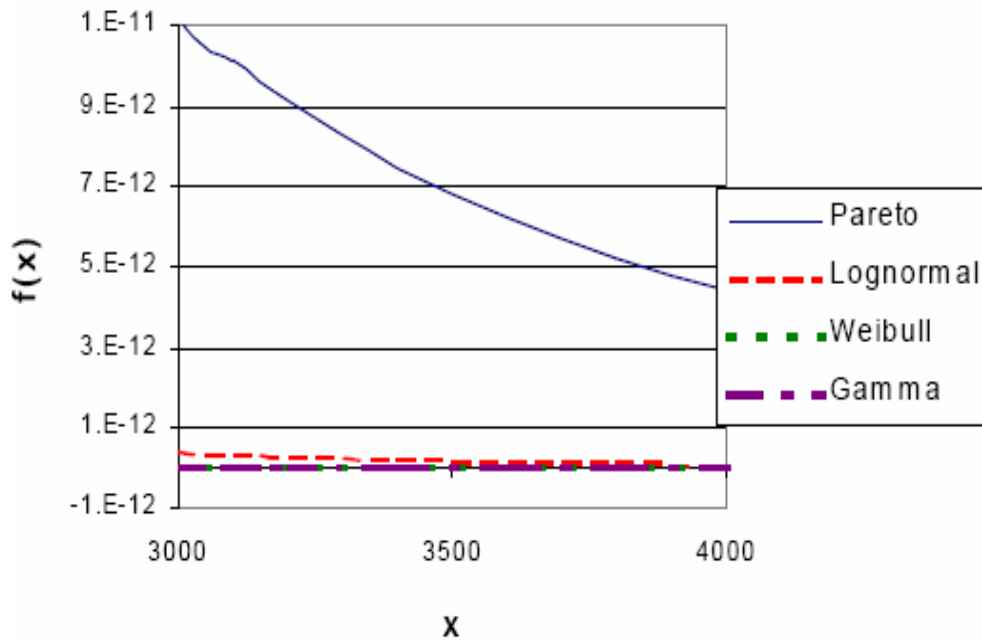


Figure 3. Densité pour x dans [3000,4000]

Les exemples numériques considéré : rho=0.8

Distribution	CV=3	CV=5	CV=10
Pareto	$\lambda = 1$ $\alpha = 2.25$	$\lambda = 0.866666$ $\alpha = 2.083333$	$\lambda = 0.8161616$ $\alpha = 2.020202$
Weibull	$\lambda = 1$ $\alpha = 0.4113$ $\beta = 0.2595$	$\lambda = 0.866666$ $\alpha = 0.311341$ $\beta = 0.117157$	$\lambda = 0.8161616$ $\alpha = 0.233207$ $\beta = 0.0262295$
Lognormal	$\lambda = 1$ $\mu = -1.374436$ $\sigma = 1.517427$	$\lambda = 0.866666$ $\mu = -1.709091$ $\sigma = 1.80502$	$\lambda = 0.8161616$ $\mu = -2.327561$ $\sigma = 2.14823$

Pour $\rho < 1$ et $VarS$ finie on va calculer la queue de distribution de la taille de la file M/G/1 classique pour les distributions de service Pareto et Log-normale , avec la méthode TAM

➤ **Service Pareto et Weibull (CV=3)**

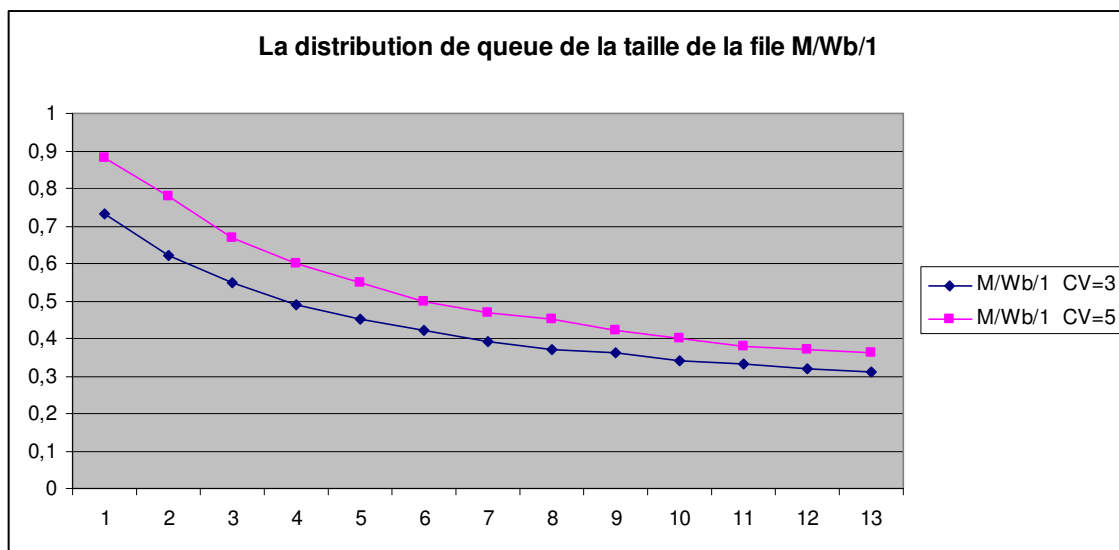
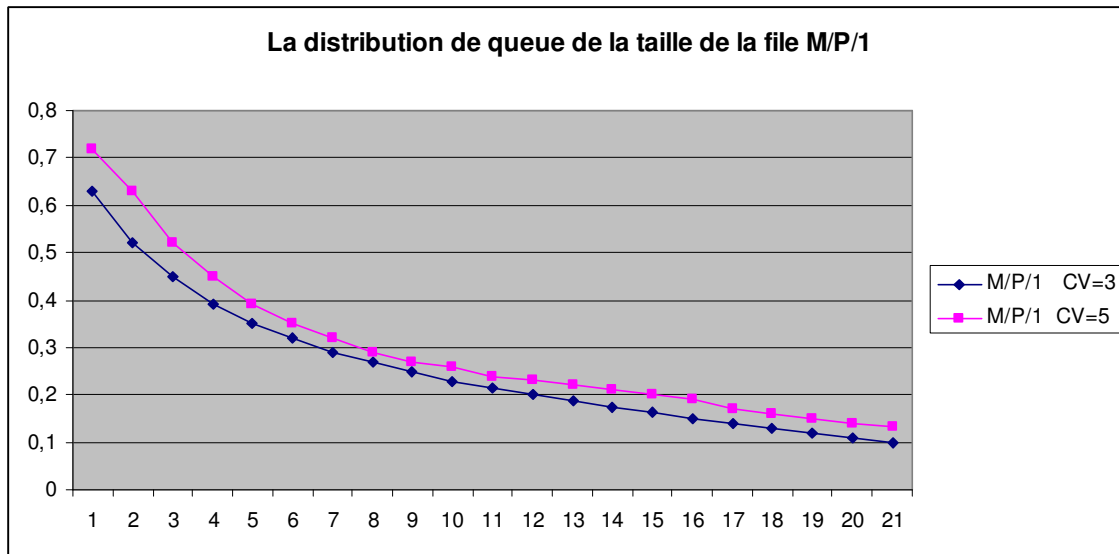
$$\rho = 0,8, \lambda = 1, \mu = 1$$

n	$P(N_{\infty} > k)$ (Pareto)	$P(N_{\infty} > k)$ (Weibull)
0	0,63	0,72
1	0,52	0,63
2	0,45	0,52
3	0,39	0,45
4	0,35	0,39
5	0,32	0,35
6	0,29	0,32
7	0,27	0,29
8	0,24	0,27
9	0,22	0,26
10	0,21	0,24
11	0,20	0,23
12	0,18	0,22
13	0,17	0,21
14	0,16	0,2
15	0,15	0,19
16	0,14	0,17
17	0,13	0,16
18	0,12	0,15

➤ **Service Pareto et Weibull (CV=5)**

$$\rho = 0,79, \lambda = 0,86, \mu = 1$$

n	$P(N_{\infty} > k)$ (Pareto)	$P(N_{\infty} > k)$ (Weibull)
0	0,73	0,88
1	0,62	0,78
2	0,55	0,67
3	0,49	0,6
4	0,45	0,55
5	0,42	0,5
6	0,39	0,47
7	0,37	0,45
8	0,36	0,42
9	0,34	0,4
10	0,33	0,38
11	0,32	0,37
12	0,31	0,36
13	0,28	0,35
14	0,26	0,34
15	0,24	0,32
16	0,23	0,33



D'après les graphes ci-dessus plus le coefficient de covariance augmente plus les valeurs de la queue de distribution augmente, on remarque également que la queue de la distribution de Pareto est inférieure par rapport à la queue de la distribution de Weibull.

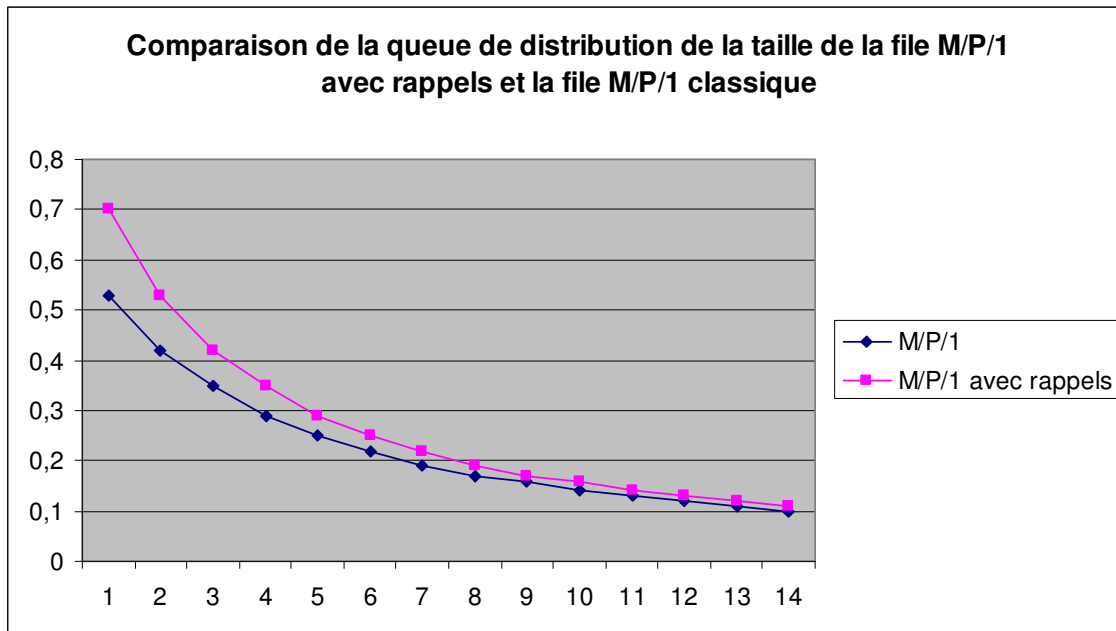
Pour vérifier notre théorie nous avons voulu comparer l'allure de la courbe de la queue de distribution de la taille de la file M/P/1 classique contre la queue de distribution de la taille de la file M/P/1 avec rappels a partir des formules qu'on a trouvé dans le chapitre 3.

$$P(N_\infty > k) \sim \frac{\rho}{1-\rho} \overline{B}_e(k/\lambda), \quad k \rightarrow \infty.$$

$$P(N_\mu > k) \sim P(N_\infty > k), \quad k \rightarrow \infty.$$

$$P(N_\mu > k) \sim P(N_\infty > k) \sim \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)(1-\rho)} k^{-(\alpha-1)} L(k), \quad k \rightarrow \infty$$

Pour la distribution de service Pareto on obtient le graphe suivant :



On remarque que les deux graphes sont compatibles pour les grandes valeurs de n et elles décroissent également plus lentement.

5. Conclusion générale

Dans ce mémoire on a étudié le comportement asymptotique de queue de la taille de la file $M/G/1$ avec rappels. Nous avons montré que la distribution du nombre de clients dans la file $M/G/1$ avec rappels est subexponentielle (ou à variation régulière) si la distribution du nombre de clients dans la file $M/G/1$ standard est subexponentielle (à variation régulière).

Cela signifie que la queue de la taille de la file $M/G/1$ avec rappels est équivalente à la queue de la taille de la file $M/G/1$ standard, quand $x \rightarrow \infty$.

Nous avons également constaté que cette équivalence n'est vérifiée que pour des grandes valeurs de n . On a également montré le lien et la différence des lois non paramétriques avec les distributions à queues lourdes ou subexponentielles. Un contre exemple a été donné : on montre qu'une loi NBUE de moyenne finie ne peut être à queue lourde. Cela signifie que les résultats limites basées sur la condition que F est un élément des classes inférieures (IFR, IFRA, DMRL, NBU, NBUE) ne sont pas applicables pour les distributions à queues lourdes.

La difficulté avec les queues lourdes est que la transformée de Laplace de la distribution d'attente peut ne pas exister sous une forme analytique explicite. Nous avons utilisé la méthode TAM (Transform Approximation Method) pour pouvoir faire cette approche.

Les efforts fournis pour simplifier les modèles afin d'obtenir des équations simples n'ont pas suffi pour obtenir la solution générale, puisque même si on est souvent arrivé à définir les équations du modèle, leurs résolutions n'est pas toujours évidente.

Les futures recherches de simulation de files d'attente à queue lourdes, peuvent porter sur la recherche de techniques d'échantillonnage alternatives de sorte que des moments d'attente puissent être estimés.

On peut également étudier l'utilisation de ces méthodes sur des files d'attente où le processus des arrivées et la loi du service peuvent être à queue lourdes en même temps. On peut également généraliser cette étude sur des files $G/G/1$ avec rappels.

Annexe

1- Convergence en distribution :

Définition. On dit que (A_n) converge en distribution ou converge faiblement vers la v.a. A ($A_n \xrightarrow{d} A$) si pour toute fonction f conjointe continue la relation

$$E(f(A_n)) \longrightarrow E(f(A)), \quad n \rightarrow \infty,$$

est vérifiée.

2- Convergence en probabilité :

Définition. On dit que (A_n) converge en probabilité vers la v.a. A ($A_n \xrightarrow{P} A$) si pour tout ε positif la relation

$$P(|A_n - A| > \varepsilon) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

est vérifiée.

La convergence en probabilité implique la convergence en distribution, l'inverse est vrai si et seulement si $A = a$ p.s. pour une constante a .

3- Convergence presque sûr :

Définition. On dit que (A_n) converge presque sûrement (p.s.) ou avec la probabilité 1 vers la v.a. A ($A_n \xrightarrow{p.s.} A$) si pour P-presque tout $\omega \in \Omega$ la relation

$$A_n(\omega) \longrightarrow A(\omega), \quad n \rightarrow \infty,$$

est vérifiée.

4- Convergence en mesure

On dit que la suite f_n converge en mesure si :

$$\forall \varepsilon > 0, \mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

5- Théorème de la convergence dominée

Soient f_n une suite de fonction mesurable et g une fonction intégrable tel que :

(1) $|f_n| \leq g$, $\forall n \geq 1$ (f_n dominée par g)

(2) f_n converge en mesure vers f ($f_n \xrightarrow{\mu} f$) alors :

* f_n intégrable $\forall n$.

* $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$

6- La fonction conjuguée convexe :

Le conjugué convexe de $f : R^n \rightarrow R \cup \{\infty\}$ est $f^*(y) = \sup_x (y^T x - f(x))$.

6.1- Exemples de fonctions conjuguées convexes:

1- Pour $f(x) = -\log x$, on a $f^*(y) = \sup_x (yx + \log x)$.

Si $y \geq 0$ $f^*(y) = \infty$. si $y < 0$ le supremum est réalisé au point $x = -1/y$ et alors

$$f^*(y) = -1 + \log(-1/y) = -\log(-y) - 1.$$

2- Pour $f(x) = e^x$, $f^*(y) = \sup_x (yx - e^x)$. $y < 0$ $f^*(y) = \infty$.

$$f^*(0) = \sup_x -e^x = 0, \text{ et pour } y > 0, \text{ le supremum est atteint à } \log y. f^*(y) = y \log y - y, \text{ pour } y > 0.$$

3- $f(x) = x \log x$, $f^*(y) = \sup_x (yx - x \log x)$. pour tout y le supremum est atteint à $x = e^{y-1}$ et alors

$$f^*(y) = ye^{y-1} - e^{y-1}(y-1) = e^{y-1}.$$

Programme

```
N=25;
m=2^4;
a=2.25;
b=1;
c=0.8;
for k=1:N;
    d(k)=1-k./(N+1);
    a1=1/a;
    y(k)=(1/d(k)).^a1;
    y2=y-1;
end
for j=1:m;
    z(j)=exp((2*pi*i*(j-1))./m+1);
end
    z1=1-z;

for j=1:m;

for k=1:N;
z2(k,j)=y2(k).*z1(j);
end
end
for j=1:m;
    for k=1:N;
z5(k,j)=exp(-z2(k,j));
    end
end
B=sum(z5);
B1=B./N;
p3=real(B1);
p=((1-a).*z1.*p3)./(p3-z);
p3=real(p);
for k=1:m;
    for n=1:m;
z6(k,n)=p(k).*exp(-2*pi*i*(n-1).*(k-1)./N);
    end
end
p4=real(z6);
p1=sum(z6);
p2=p1./(m+2);
p4=real(p2);
for n=1:m;
    h(n)=(n-1)*p4(n);
    h1=sum(h);
end
```

Bibliographie

- [1] Abate, J., W. Whitt. The Fourier series Method for inverting Transforms of Probability Distributions. *Queueing Systems*, 10, pages 5-88. 1992.
- [2] J.R. Artalejo, A classified bibliography of research on retrial queues: Progress in 1990-1999, *Top 7* 187–211. (1999)
- [3] Artalejo J.R. Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations. *Computer and Operations Researchs* 24, 493-504. (1997).
- [4] Artalejo J.R. and A. Gomez-Corral, steady state solution of a single server queue with linear repeated requests, *Journal of Applied Probability* 34, 223-233. (1997).
- [5] Artalejo J.R. (Ed), *Retrial queueing systems*, *Mathematical and Computer Modelling* 30 1-228. (1999)
- [6] Artalejo J.R. Accessible bibliography on retrial queues, *Mathematical and Computer Modelling* 30, 1-6. (1999).
- [7] Artalejo J.R. and G. Falin. Standard and Retrial Queueing Systems: A comparative Analyse. *Revista Matematica Complutense* (2002) vol, XV, num 1, 101-129. (2002).
- [8] S. Asmussen, C. Kluppelberg and K. Sigman, Sampling at subexponential times, with queueing applications, *Stochastic Processes and Their Applications* 79 , 265–286. (1999)
- [9] Athreya , K. B. and Ney, P.E. *Branching Processes*. Springer. Berlin. (1972)
- [10] Adler R., R. Feldman, and M.S. Taqqu, (Birkh`auser, Boston) pp. 435–459.-1998.
- [11] Barlow, R.E. et Proschan, F. *Statistical theory of Reliability and life Testing. Probability models*. Silver. Spring, Maryland.(1981).
- [12] Bingham N.H. C.M. Goldie and J.L. Teugels, *Regular Variation* (Cambridge University Press, 1987).
- [13] Boxma .O.J and J.W. Cohen, Heavy-traffic analysis for the GI/G/1 queue with heavytailed distributions, *Queueing Systems* 33 - 177–204.(1999).
- [14] Boxma.O.J and V. Dumas, The busy period in the fluid queue, *Performance Evaluation Rev.* 26 - 100–110.(1998).
- [15] Cohen W.J. Basics problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls. *Philips Telecom Rev* .18. N°2, 49-100. (1975).
- [16] Chistayov, V.P. A theorem on sums of independent, positive random variables and its applications to branching processes. *Theory of probability and its applications* 9, 640-648. (1964).

- [17] Chover, J., Ney, P., Wainger, S. Functions of probability measures. *Journal d'Analyse Mathematique* 26, 256- 302. (1973).
- [18] Cai and Garrido.J, A unified approach to the study of tail probabilities of compound distributions, *Journal of Applied Probability* 36, 1058-1073. (1998).
- [19] Crovella, M.E. and L. Lpski. Long-Lasting Transient Conditions in Simulations with Heavy-tailed Workloads. In *Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference*, ed. S. Andradottir, K, J. Healy, D.H. Whithers, and B.L. Nelson, 1005-1012. Piscataway, New Jersey: Institute of Electrical and Electronics Engineers.(1997).
- [20] Embrechts,P. , C. Klueppelberg and T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance* (Springer, Heidelberg, 1997
- [21] Embrechts,P., Goldie, C. On closure and factorization properties of subexponential and related distributions . *Journal of the Australian Mathematical Society Series* 29, 243-256.(1980).
- [22] Embrechts,P., Veraverbeke, N. (1982). Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance: Mathematics and Economics* 1, 55-72.
- [23] Embrechts, P., Goldie, C. On convolution tails. *Stochastic Processes and their Applications* 13, 263-278.(1982).
- [24] Erramilli A. , O. Narayan and W. Willinger, Experimental queueing analysis with long-range dependent packet traffic, *IEEE / ACM Transactions on Networking* 4 - 209–223.(1996).
- [25] Falin G.I, A survey of retrial queues, *Queueing Systems* 7 - 127–167.(1990).
- [26] Falin G.I and J.G.C. Templeton, *Retrial Queues* (Chapman & Hall: London, 1997)
- [27] Falin G.I., Artalejo J.R. and Martin M. On the single server retrial queue with priority Customers. *Queueing Systems* 14, 439-455.(1993).
- [28] Falin G.I. and Falin A.I. Heavy traffic analysis of M/G/1 type queueing systems with Markov modulated arrivals. *Top* 7, 279-291.(1990).
- [29] Falin G.I and Artalejo J.R , *Approximation for multiserver queues with balking/retrial discipline*, *OR Spektrum* 17, 446-460.(1991).
- [30] Foss . S.and D. Korshunov, Sampling at a random time with a heavy-tailed distribution, *Markov Processes Relat. Fields* 6 -543–568.(2000).
- [31] Fayolle. G. and M.A. Brun, On a system with impatience an drepeated calls. In: *Queueing Systems and its applications.Liber Amircorum for J.W. Cohen* (Eds.O.J. Boxma and R.Syski), pp.
- [32] Goldie. C.M and C. Kluppelberg, Subexponential distributions, in: *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques for Analyzing Heavy Tailed Distributions*, eds.
- [33] Gomez-Corral. A . *Stochastic Analysis of a single server retrial queue with general retrial times*. *Naval Research Logistics*, Vol 46 (1999).
- [34] Hasida O. and Kawashima. K . Buffer behaviour with repeated calls. *Electronics and Communication in japan* 62. B. 3-27.(1979).
- [35] Jelenkovi´c P.R , Subexponential loss rates in a GI/G/1 queue with

applications, *Queueing Systems* 33 - 91–123.(1999).

[36] Janssens, G.K, The quasi-random input queueing system With repeated attempts as a model for a collision-avoidance star local area network, *IEEE transactions on communications* 45 , 360-364.(1997).

[37] Khalil .Z. Falin G.I -Stochastic inequalities for M/G/1 retrial queues. *Operations Research Letters* 16. 285-290.(1994).

[38] Kluppelberg C., Subexponential distributions and integrated tails, *J. Appl. Prob.* 25 (1988) 132–141. (1988).

[39] Kleinrock.L, *Queueing Systems, Volume 1: Theory*, Wiley, New York (1975).

[40] Kosten. L . On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking. *De ingenieur* 59, (dutch).(1977).

[41] Kulkarni V.G., *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*, Chapman and Hall, London (1995).

[42] Kulkarni V.G.and H.M. Liang, Retrial queues revisited, in: *Frontiers in Queueing: Models and Applications in Science and Engineering*, ed. J.H. Dshalalow (CRC Press: BocaRaton, FL) pp. 19–34.(1997).

[43] Klefsjo,B. The HNBUE and HNWUE classes of life distributions. *Naval Res. Logistic. Quart*, 29, 331- 344.(1982).

[44] Leland W.E., M.S. Taqqu, W. Willinger and D.V. Wilson, On the self-similar nature of Ethernet traffic, in: *ACM SIGCOMM93* (1993). An extended version of this paper was published in *IEEE / ACM Trans. Networking* 2 - 1–15.(1994).

[45] Lin, X. Tail of compound distributions and excess time.*J.Appl. Prob.* 33, 184-195.(1996).

[46] Meyer .A.Dand J.L. Teugels, On the asymptotic behaviour of the distributions of the busy period and service time in M/G/1, *J. Appl. Prob.* 17 . 802–813.(1980).

[47] NeutsM.F. and Rao B.M. Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems* 7, 169-190.(1990).

[48] Pakes, A.G. On the tails of waiting time distributions. *J. Appl Prbab.* 12, 555-564.(1975).

[49] Pitman, E.J.G. Subexponential distribution functions. *Journal of the Australian Mathematical Society Series A* 29, 337-347.(1980).

[50] Resnick S., Performance decay in a single server exponential queueing model with long range dependence, *Oper. Res.* 45 . 235–243.(1997).

[51] Resnick, *Extreme values, Regular variation, and point processes* Springer, New York(1987).

[52] Riordan.J.,*Stochastic Service Systems*, Wiley, New York (1962).

[53] Roughan M., D. Veitch and M.P. Rumsewicz, Computing queue-length distributions for power-law queues, *Proceedings, Inforcom'98* (1998).

[54] R.B. Cooper, *Introduction to queueing theory*, Edward Arnold, (1981).

- [55] Shortle, J.F. and M.J. Fisher, "Using the transformation method to analyse queues with Pareto Service", Submitted to Annals of Operation Research, 2001.
- [56] Shortle, J.F. and M.J. Fisher, D. Gross, Masi. Using The Transform Approximation Method to Analyze Queues With Heavy Tailed Service. D.M.B. J. of Prob. and Stat. Sciences 1(1). 15-27, 2003.
- [57] Takine T. , Subexponential asymptotics of the waiting time distribution in a single server queue with multiple Markovian arrival streams, Stochastic Models 17- 429–448.(2001).
- [58] Teugels, J. The class of subexponential distributions. Annals of Probability 3, 1000-1011.(1975).
- [59] Tijms, H. Stochastic Models : An Algorithm Approach, Wiley.(1994).
- [60] Veraverbeke, N. Asymptotic behaviour of Wiener-Hopf factors of a random walk. Stochastic Processes and their Applications 5, 27-37.(1977).
- [61] Whitt W., The impact of a heavy-tailed service-time distribution upon the M/G/s waiting-time distribution, Queueing Systems 36 -71–87.(2000).
- [62] Weixin Shang and Liming Liu, Tail Asymptotics for the queue length in an M/G/1 retrial queue . Queueing System Vol 52. (2006/N°3 . 193-198)(2006).
- [63] Wilkinson R.I. Théories for toll traffic engineering in the U.S.A .. Bell System Tech. J. 35(2), 421-507. (1956).
- [64] Willmot, G.E. Refinements and distributional generalizations of Lundburg's inequality, Insurance Mathematics and Economics 15, 49-63. (1994).
- [65] Xiaoyong Wu, Percy Brill and Myron Hlynka. (2005). An M/G/1 retrial queue with balking and retrial during service. Operationnal Research, Vol 1. Nos. 1/2, 2005.
- [66] Ying. Q.L. Li, Y. and Y.Q. Zhao, A BMAP/G/1 retrial queue with a server subject to breakdowns and repairs, Ann. Oper. Res. (2005) accepted.
- [67] Ying. Q.L. Li and Y.Q. Zhao, Heavy-tailed asymptotics of stationary probability vectors of Markov chains of GI/G/1 type, Adv. in Appl. Probab. 37 . 482–509.(2005).
- [68] Yang T. and J.G.C. Templeton, A survey on retrial queues, Queueing Systems 2 . 201–233. (1987).
- [69] Zwart A.P , Tail asymptotics for the busy period in the GI/G/1 queue, Math. Oper. Res. 26 - 485–493.(2001).