

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle - Génie Mathématiques

Par : AHMIA Moussa

THÈME

**Log-concavité, log-convexité et unimodalité de suites numériques**

Soutenue publiquement, le 15/06/ 2015, devant le jury composé de :

Mr.	<b>B. BENZAGHOU</b>	Professeur, à l'USTHB	Président
Mr.	<b>H. BELBACHIR</b>	Professeur, à l'USTHB	Directeur de Thèse
Mr.	<b>A. BOUYAKOUB</b>	Professeur, à l'Université d'Oran	Examineur
Mr.	<b>M. MIHOUBI</b>	Professeur, à l'USTHB	Examineur
Mr.	<b>L. SZALAY</b>	Professeur, à l'Université de Sopron	Examineur
Mr.	<b>M. BENOUMHANI</b>	MCF/A à l'Université de M'sila	Examineur

**Log-concavité, log-convexité et unimodalité  
de suites numériques**

Thèse de Doctorat en Mathématiques

Thème principal : Combinatoire énumérative

**Moussa AHMIA**

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Panorama sur certaines suites classiques</b>	<b>7</b>
1.1 Les suites récurrentes linéaires d'ordre deux . . . . .	7
1.2 Les hyper-suites . . . . .	11
1.3 Quelques suites classiques . . . . .	12
1.4 Les $q$ -analogues des coefficients binomiaux . . . . .	16
1.5 Les $p, q$ -analogues des coefficients binomiaux . . . . .	18
1.6 Les coefficients bi <sup>s</sup> nomiaux . . . . .	20
1.7 Les coefficients $q$ -bi <sup>s</sup> nomiaux . . . . .	22
1.8 Préliminaires sur les suites log-concaves, log-convexes et unimodales . . . .	23
1.9 Les directions dans le triangle de Pascal . . . . .	28
<b>2 Préservation de la log-concavité des <math>q</math>-analogues et des <math>p, q</math>-analogues de coefficients binomiaux et bi<sup>s</sup>nomiaux</b>	<b>30</b>
2.1 Définitions et notations . . . . .	30
2.2 Préservation de la log-concavité associée aux coefficients $p, q$ -binomiaux . .	34
2.3 Log-concavité des transversales associées aux coefficients $p, q$ -binomiaux . .	35

<b>3</b>	<b>Préservation de la log-convexité des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux</b>	<b>38</b>
<b>4</b>	<b>Unimodalité des transversales associées aux coefficients q-bi<sup>s</sup>nomiaux</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>Combinatoire et monotonie des hyper-suites</b>	<b>46</b>
5.1	Combinatoire des suites hyperpell et hyperjacobsthal . . . . .	47
5.2	Log-concavité et log-convexité des suites hyperpell et hyperpell-lucas . . .	50
5.3	q-log-concavité des suites hyperpell et hyperpell-lucas . . . . .	55
5.4	Log-concavité et log-convexité des suites hyperjacobsthal et hyperjacobsthal-lucas . . . . .	56
	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>

# Remerciements

Cette thèse, intitulée "Log-concavité, log-convexité et unimodalité de suites numériques", s'est déroulée dans le cadre de l'école doctorale de Recherche Opérationnelle à l'**USTHB** sous la direction du Professeur Hacène BELBACHIR.

Mes premiers remerciements iront au directeur de thèse pour m'avoir soutenu le long de ces années de recherche, ainsi que pour sa précieuse aide, sa disponibilité et ses conseils éclairés pour la réalisation de ce travail. J'aimerais lui adresser mes plus vifs remerciements.

Je remercie le Professeur Benali Benzaghrou de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Ma gratitude va également aux examinateurs. Je suis honoré par la présence dans mon jury des Professeurs Moussa Benoumhani, Abdelkader Bouyakoub, Miloud Mihoubi et Laszlo Szalay.

Je ne pourrais terminer ces remerciements sans penser aux êtres qui me sont les plus chers, qui ont eu un rôle essentiel et continu pour ma réussite, et qui sans eux aucune réussite n'aurait été possible. J'adresse de tout mon cœur mes remerciements à ma famille, particulièrement à mes chers parents, mes frères et ma sœur, ainsi qu'à mes amis. Ils ont toujours été présents et ont rempli ma vie, je leurs suis infiniment reconnaissant pour leur amour et leur soutien.

Je remercie aussi mes collègues de l'école doctorale, nombre d'entre eux m'ont soutenu, soit par leurs actes, soit par leurs encouragements.

# Introduction

Les suites log-concaves et diverses propriétés liées à la log-concavité jouent un rôle de plus en plus important dans la combinatoire, les probabilités, les statistiques, l'optimisation, l'économétrie et d'autres domaines des mathématiques appliquées, voir Butler [28] et Stanley [67]. En vue de ces développements, des propriétés combinatoires associées à la log-concavité et à la log-convexité ont été établies.

Un grand nombre de suites sont log-concaves ou à défaut unimodales (la log-concavité entraîne l'unimodalité, l'inverse est en général faux, voir par exemple Brenti [25]). Il s'agit de propriétés difficiles à montrer et non conservées par des transformations linéaires en général. Parmi les applications combinatoires, nous citerons à titre non exhaustif, la coloration des graphes et la complexité algorithmique.

Notre objectif, est l'étude de : la log-concavité, la log-convexité et l'unimodalité des suites numériques, telles que les suites récurrentes linéaires en relation avec les éléments du triangle de Pascal, les hyper-suites, celles liées aux coefficients binomiaux, et celles liées aux  $q$ -analogues et  $p, q$ -analogues des éléments des triangles de Pascal, ordinaire et généralisé.

Dans le premier chapitre, on présente des outils et préliminaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. On introduit les suites récurrentes linéaires en relation avec le triangle de Pascal, les hyper-suites, les coefficients binomiaux et leurs  $q$ -analogues, ainsi que les notions de log-concavité, de log-convexité et d'unimodalité.

Le chapitre deuxième est d'une part, une vue d'ensemble sur la préservation de la log-concavité (par abréviation PLC), de la log-convexité (par abréviation PLX) pour les triangles ordinaire et généralisés (ou  $s$ -triangles) i.e : étant donné un  $s$ -triangle de nombres positifs  $\{a_s(n, k)\}_{0 \leq k \leq sn}$  et deux suites log-concaves  $\{x_n\}_n$  et  $\{y_n\}_n$ , on souhai-

traiterait pouvoir récupérer une suite log-concave  $\{z_n\}_n$  via la transformation suivante  $z_n = \sum_{k=0}^{sn} a_s(n, k)x_k y_{sn-k}$ . Plusieurs résultats ont été établis pour le cas classique  $\{a(n, k)\}_{0 \leq k \leq n}$  : Stanley [67] a montré que la convolution ordinaire  $z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}$  préserve la log-concavité ; la convolution binomiale  $z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k y_{n-k}$  aussi préserve la log-concavité voir Walkup [74] et la log-convexité voir H. Davenport et G. Pólya [36]. D'autre part, nous établissons la préservation de la log-concavité des  $p, q$ -analogue du coefficient binomial et des suites parcourant les transversales du triangle associé.

Au chapitre trois, nous établissons la préservation de la log-convexité pour le triangle de Pascal généralisé issu des coefficients binomiaux : étant donné deux suites log-convexes  $\{x_n\}_n$  et  $\{y_n\}_n$ , on récupère une suite log-convexe  $\{z_n\}_n$  via la convolution binomiale  $z_n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x_k y_{sn-k}$ . Ce résultat généralise le Théorème de H. Davenport et G. Pólya [36] pour le cas binomial.

Le chapitre quatre concerne les transversales des  $q$ -triangle généralisés issus des coefficients binomiaux. On montre qu'ils préservent la log concavité. Les  $q$ -analogues en question sont introduits par S. Ole Warnaar [77].

Le dernier chapitre est consacré aux hypersuites, ce sont des itérés des suites des sommes partielles associées à une suite donnée. Ces dernières ont été introduites pour certaines suites classiques, telles que la suite des nombres harmoniques, la suite de Fibonacci et sa suite compagnon dite de Lucas, par Dil et Mező [38]. Plus précisément, on introduit la définition de la suite hyperpell, hyperjacobsthal et leurs suites compagnons, ainsi que quelques identités associées qui nous faciliteront l'étude de la monotonie de ces suites, dont on établit la log-concavité, la log-convexité et l'unimodalité. Nos résultats sont des compléments aux résultats de Zheng et Liu [85] : ils ont traité le cas de la suite hyperfibonacci et sa suite compagnon hyperlucas.

On termine cette introduction par l'affectation de nos publications et nos prépublications correspondantes aux différents chapitres de cette thèse. Le chapitre deux est concerné par la référence [3] ; le troisième par la référence [2] ; le quatrième par la référence [4] ; le dernier par la référence [5].

## Listes des publications originales de la thèse

1. **M. Ahmia**, H. Belbachir, *Preserving log-convexity for generalized Pascal triangles*, Electron. J. Combin. **19** (2012), no. 2, Paper 16, 6 pp.
2. **M. Ahmia**, H. Belbachir, *Preserving log-concavity for  $p, q$ -binomial coefficient*, Submitted.
3. **M. Ahmia**, H. Belbachir, *Unimodal rays associated to the  $q$ -ordinary multinomial coefficients, under revision in Journal of Integer Sequences*.
4. **M. Ahmia**, H. Belbachir, A. Belkhir, *The log-concavity and log-convexity properties associated to hyperpell numbers and hyperpell-lucas numbers*, Annales Mathematicae et Informaticae. 43 (2014) pp. 3–12.

# Chapitre 1

## Panorama sur certaines suites classiques

Certaines suites classiques ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche, comme les suites récurrentes linéaires en relation avec les éléments du triangle de Pascal, les hypersuites, les suites des  $q$ -analogues et  $p, q$ -analogues des coefficients binomiaux. Dans la plupart des cas, la propriété de la monotonie de ces suites est présentée, et plus précisément l'unimodalité, la log-concavité et/ou la log-convexité. Il existe plusieurs références relatives à ces propriétés qui seront citées tout au long de ce chapitre.

### 1.1 Les suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Cette section est largement puisée de la thèse de Doctorat d'Etat de H. Belbachir [9].

Soit  $\{H_n\}_{n \geq 0} = \{H_n(x, y; a, b)\}_{n \geq 0}$  une suite récurrente linéaire d'ordre deux définie par les valeurs initiales  $(H_0, H_1) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  et par la relation de récurrence :

$$H_n = xH_{n-1} + yH_{n-2}, \quad (n \geq 2), \quad (1.1)$$

où les coefficients  $x$  et  $y$  sont des nombres réels. Posons

$$H(n, k) = x^{n-2k} y^k \binom{n-k}{k} \left( H_1 + \frac{k}{n-2k+1} H_0 \right), \quad (k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor). \quad (1.2)$$

La suite  $\{H_n\}_{n \geq 0}$  satisfait

$$H_{n+1} = (n \bmod 2) \cdot y^{\frac{n+1}{2}} H_0 + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} H(n, k), \quad (n \geq 0). \quad (1.3)$$

On note par  $\{U_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  les suites appelées respectivement suite de Fibonacci généralisée et, sa suite compagnon, la suite de Lucas généralisée, définies par

$$U_n = H_n(x, y; 0, 1) \quad \text{et} \quad V_n = H_n(x, y; 2, 1).$$

On a

$$U_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} U(n, k) \quad \text{avec} \quad U(n, k) = \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k, \quad (1.4)$$

et pour  $n \geq 1$

$$V_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} V(n, k) \quad \text{avec} \quad V(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k. \quad (1.5)$$

Ci dessous des exemples de suites récurrentes linéaires associées à la relation (1.1).

### Exemple 1

1. Pour  $(x, y) = (1, 1)$  et  $(a, b) = (0, 1)$ , nous avons la suite de Fibonacci,  $\{F_n\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ , Sloane A000045 (voir, [66]).

La forme de Binet s'écrit :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

La suite associée à  $\{F_n\}_{n \geq 0}$  est :

$$F(n, k) = \binom{n-k}{k}.$$

La relation (1.4) s'écrit :

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 0). \quad (1.6)$$

2. Pour  $(x, y) = (1, 1)$  et  $(a, b) = (2, 1)$ , nous obtenons la suite de Lucas,

$$\{L_n\}_{n \geq 0} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots\}, \text{ Sloane A000032.}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$L_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

La suite associée est

$$L(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

La relation (1.5) s'écrit

$$L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 1). \quad (1.7)$$

3. Pour  $(x, y) = (2, 1)$  et  $(a, b) = (0, 1)$ , nous obtenons la suite de Pell,

$$\{P_n\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots\}, \text{ Sloane A000129.}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right).$$

La suite associée à  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est :

$$P(n, k) = 2^{n-2k} \binom{n-k}{k}.$$

La relation (1.4) s'écrit

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-2k} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 0). \quad (1.8)$$

4. Pour  $(x, y) = (2, 1)$  et  $(a, b) = (2, 1)$ , nous aurons la suite de Pell-Lucas,

$$\{Q_n\}_{n \geq 0} = \{2, 2, 6, 14, 34, 82, \dots\}, \text{ Sloane A002203.}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$Q_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n.$$

La suite associée est :

$$Q(n, k) = 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

La relation (1.5) s'écrit

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 1). \quad (1.9)$$

5. Pour  $(x, y) = (1, 2)$  et  $(a, b) = (0, 1)$ , nous avons la suite de Jacobsthal,

$$\{J_n\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots\} \text{ Sloane A002045.}$$

Sa forme de Binet est :

$$J_n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n).$$

La suite associée est :

$$J(n, k) = 2^k \binom{n-k}{k}.$$

La relation (1.4) s'écrit

$$J_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^k \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 0). \quad (1.10)$$

6. Pour  $(x, y) = (1, 2)$  et  $(a, b) = (2, 1)$ , nous obtenons la suite de Jacobsthal-Lucas,

$$\{j_n\}_{n \geq 0} = \{2, 1, 5, 7, 17, 31, \dots\}, \text{ Sloane A014551.}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$j_n = 2^n - (-1)^n.$$

La suite associée est :

$$j(n, k) = 2^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

La relation (1.5) s'écrit

$$j_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad (n \geq 1). \quad (1.11)$$

### **Autres relation de récurrence et suites associées**

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ ;

Les suites  $r$ -Fibonacci généralisée  $(U_n^{(r)})_n$  et sa suite compagnon  $r$ -Lucas généralisée  $(V_n^{(r)})_n$  sont définies par leurs relations de récurrence :

$$\begin{cases} U_0^{(r)} = 0, & U_k^{(r)} = x^{k-1}, \quad (1 \leq k \leq r), \\ U_{n+1}^{(r)} = xU_n^{(r)} + yU_{n-r}^{(r)}, \quad (n \geq r). \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} V_0^{(r)} = 2, & V_k^{(r)} = x^k, \quad (1 \leq k \leq r), \\ V_{n+1}^{(r)} = xV_n^{(r)} + yV_{n-r}^{(r)}, \quad (n \geq r). \end{cases} \quad (1.13)$$

Ce qui donne, pour tout  $n \geq 0$  et  $n \geq 1$  respectivement,

$$U_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} U^{(r)}(n, k), \quad \text{avec} \quad U^{(r)}(n, k) = \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k, \quad (1.14)$$

$$V_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} V^{(r)}(n, k), \quad \text{avec} \quad V^{(r)}(n, k) = \frac{n-(r-1)k}{n-rk} \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k. \quad (1.15)$$

## 1.2 Les hyper-suites

La notion d'hyper-suite a été introduite pour certaines suites classiques, telles que la suite des nombres harmoniques par Conway et Guy [33], la suite de Fibonacci et la suite de Lucas proposées par Dil et Mezó [38].

**Définition 2** Soit  $r$  un entier positif et soient  $(F_n)$  et  $(L_n)$  la suite de Fibonacci et la suite de Lucas respectivement. On définit les nombres hyperfibonacci  $(F_n^{[r]})$  et hyperlucas  $(L_n^{[r]})$  par :

$$F_n^{[r]} = \sum_{k=0}^n F_k^{[r-1]}, \quad \text{avec} \quad F_n^{[0]} = F_n, \quad (F_0^{[r]} = 0, \quad F_1^{[r]} = 1),$$

$$L_n^{[r]} = \sum_{k=0}^n L_k^{[r-1]}, \quad \text{avec} \quad L_n^{[0]} = L_n, \quad (L_0^{[r]} = 2, \quad L_1^{[r]} = 2r + 1).$$

Les fonctions génératrices de  $F_n^{[r]}$  et  $L_n^{[r]}$  sont données par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{[r]} t^n = \frac{t}{(1-t-t^2)(1-t)^r},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{[r]} t^n = \frac{2-t}{(1-t-t^2)(1-t)^r}.$$

Ces identités permettent de déduire les relations de convolution suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{[r]} t^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^{n+1} \right) \left( \sum_{r \leq k} \binom{n}{k} t^k \right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{[r]} t^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} L_n t^n \right) \left( \sum_{r \leq k} \binom{n}{k} t^k \right).$$

Dans un travail récent, Belbachir et Belkhir [11] ont proposé une interprétation combinatoire pour les hyperfibonacci ainsi que la forme explicite suivante :

$$F_n^{[r]} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n+r-k-1}{k+r}.$$

Ci dessous quelques propriétés élémentaires pour  $r = 1, 2$ ;

$$\begin{aligned} F_n^{[1]} &= F_{n+2} - 1, \\ F_n^{[2]} &= F_{n+4} - n - 3 = \sum_{k=0}^n (n-k)F_k, \\ L_n^{[1]} &= L_{n+2} - 1 = F_n + F_{n+2} - 1, \\ L_n^{[2]} &= L_{n+3} - n - 4 = 4F_{n+1} + 3F_n - n - 4. \end{aligned}$$

Quelques valeurs de  $\{F_n^{[1]}\}$  et  $\{L_n^{[1]}\}$  sont données dans le tableau suivant :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$F_n^{[1]}$	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232	376	609	986	1596	2583
$L_n^{[1]}$	2	3	6	10	17	28	46	75	122	198	321	520	842	1363	2206	3570	5777

Table 1 : valeurs de  $\{F_n^{[1]}\}$  et  $\{L_n^{[1]}\}$ .

Ce sont les suites A000071 et A001610 dans Sloane [66].

Pour des propriétés complémentaires de  $\{F_n^{[r]}\}$  et  $\{L_n^{[r]}\}$  voir Cao et Zhao [30].

### 1.3 Quelques suites classiques

Dans cette section, nous donnons la définition de quelques suites classiques utiles dans cette thèse.

**Définition 3** Les nombres de Stirling de première espèce, notés  $s(n, k)$ , et les nombres de Stirling de seconde espèce, notés  $S(n, k)$ , sont définis par les équations

$$X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k)X^k,$$

avec

$$X^{\bar{n}} := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ X(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1) & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

et

$$X^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) X^k,$$

avec

$$X^{\underline{k}} := \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1) & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

**Définition 4** Polynômes de Bell et Eulériens

1. Le polynôme de Bell est défini par :  $B_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k$ .
2. Le polynôme Eulérien est :  $A_n(x) = x \sum_{k=0}^n k! S(n, k)(x-1)^{n-k}$ .

**Définition 5** Le nombre Eulérien, noté par  $A(n, k)$  ou  $\langle n-1 \rangle_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , compte le nombre de permutations de  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  avec exactement  $k$  descentes. Il est défini par la relation de récurrence suivante :

$$A(n, k) = kA(n-1, k) + (n-k+1)A(n-1, k-1),$$

avec  $A(n, 1) = 1$  ( $n \neq 0$ ).

La forme explicite est donnée par

$$A(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n.$$

**Définition 6** Les nombres d'Euler  $\{E_n\}$  représentent les coefficients de la fonction génératrice exponentielle de  $\sec x$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!} &= \sec x \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} + 5\frac{x^4}{4!} + 16\frac{x^5}{5!} + 61\frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

Ils satisfont la relation suivante

$$E_0 = 1 \text{ et } 2E_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k E_{n-k} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^+.$$

**Définition 7** La suite de Catalan est définie par  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

Les nombres de Catalan satisfont la relation de récurrence :

$$C_0 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 1 \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}.$$

D'autre part, ils satisfont la relation de récurrence :

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}.$$

La série génératrice des nombres de Catalan est définie par

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Les nombres de Catalan peuvent être interprétés de différentes façon dont voici quelques exemples :

1. Le nombre de mots de Dyck de longueur  $2n$ .
2. Le nombre de façons différentes de placer des parenthèses autour de  $n + 1$  facteurs, pour préciser une expression faisant intervenir  $n$  fois une loi de composition interne non associative
3. Le nombre d'arbres binaires entiers à  $n + 1$  feuilles.
4. Le nombre de façons de découper en triangles un polygone convexe à  $n + 2$  côtés en reliant certains de ses sommets par des segments de droite.

**Définition 8** Nombres et polynômes de Narayana

1. Le nombre de Narayana est  $N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}$ ;
2. Le polynôme de Narayana est  $N(x) = \sum_{k=0}^n N(n, k) x^k$ .

Le nombre de Narayana est  $N(n, k)$  compte le nombre de parenthésages corrects en  $n$  paires de parenthèses et qui contiennent  $k$  occurrences de la paire '()'.

La somme des nombres de Narayana  $N(n, k)$  est un nombre de Catalan :

$$\sum_{k=1}^n N(n, k) = C_n.$$

La série génératrice des nombres de Narayana est :

$$\sum_{n>0, k>0} N(n, k)x^n y^k = \frac{1}{2x} \left( 1 - x(1+y) - \sqrt{(1-x(1+y))^2 - 4yx^2} \right).$$

**Définition 9** Les polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce sont définis respectivement par :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

et

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arcsin x)}{\sin(\arcsin x)}.$$

Ils vérifient la relation de récurrence suivante :

$$W_{n+1}(x) = 2xW_n(x) - W_{n-1}(x),$$

Les premières valeurs de ces polynômes sont :

$n$	$T_n(x)$	$U_n(x)$
0	1	1
1	$x$	$2x$
2	$2x^2 - 1$	$4x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$	$8x^3 - 4x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$	$256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$
9	$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$	$512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$

## 1.4 Les $q$ -analogues des coefficients binomiaux

En mathématiques, plus précisément dans le domaine de la combinatoire, un  $q$ -analogue d'un théorème, d'une identité ou d'une expression est une généralisation impliquant un nouveau paramètre  $q$  qui se spécialise en le théorème original lorsque l'on prend le cas limite où  $q$  tend vers 1. Les premiers  $q$ -analogues furent les séries hypergéométriques basiques, introduites au XIX<sup>e</sup> siècle. Pour plus d'informations voir Exton [46].

Il existe généralement plusieurs  $q$ -analogues d'une suite donnée, et il est même parfois un  $q$ -analogue avec plusieurs paramètres  $q_1, q_2, \dots$ , indépendants.

Le  $q$ -analogue du coefficient binomial, appelé aussi polynôme de Gauss, est défini pour  $0 \leq k \leq n$ , par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}, \quad (1.16)$$

où  $[n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q$ , avec  $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ . Le coefficient  $q$ -binomial s'écrit aussi pour  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{[n-i]_q}{[i]_q}. \quad (1.17)$$

Pour  $q = 1$ , le coefficient  $q$ -binomial est le coefficient binomial classique.

Le coefficient  $q$ -binomial est donné aussi par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^k)(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^{n-k})} = \sum_{j \geq 0} a_j q^j. \quad (1.18)$$

Ce coefficient a plusieurs propriétés, par exemple il est symétrique et polynômial en  $q$  avec des coefficients  $\{a_k\}$ .

Nous présentons quelques valeurs du triangle des coefficients  $q$ -binomiaux ci-dessous :

$n/k$	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	$1 + q$	1	
3	1	$1 + q + q^2$	$1 + q + q^2$	1
4	1	$1 + q + q^2 + q^3$	$1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$	$1 + q + q^2 + q^3$
5	1	$1 + q + q^2 + q^3 + q^4$	$1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6$	$1 + q + 2q^2 + 2q^3 + \dots$

Table 2 : Table des valeurs de  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ .

Comme les coefficients binomiaux, les coefficients  $q$ -binomiaux sont symétriques, c'est à dire :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n - k \end{bmatrix}_q. \quad (1.19)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n - 1 \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{n-1} q^i. \quad (1.20)$$

Les coefficients  $q$ -binomiaux satisfont l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n - 1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n - 1 \\ k - 1 \end{bmatrix}_q, \quad (1.21)$$

pour tout  $n \geq 1$  et  $1 \leq k \leq n$ . Cette équation est l'analogie de l'identité de Pascal pour le cas classique.

Il y a aussi l'analogie de la formule du binôme de Newton pour les coefficients  $q$ -binomiaux :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k x) = \sum_{k=0}^n q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k. \quad (1.22)$$

**Définition 10** La suite  $q$ -Catalan est définie par

$$C_n(q) = \frac{1}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q$$

avec  $C_0(q) = 1$

Elle vérifie la relation de récurrence suivante :

$$C_{n+1}(q) = \sum_{k=0}^n q^{(k+1)(n-k)} C_k(q) C_{n-k}(q).$$

**Définition 11** La suite  $q$ -Narayana  $N_q(n, k)$  est donné par

$$N_q(n, k) = \frac{1}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{k^2+k}.$$

**Définition 12** Le nombre  $q$ -Stirling de première espèce, noté  $s_q(n, k)$ , il satisfait la relation de récurrence suivante :

$$s_q(n, k) = s_q(n-1, k-1) + [n-1]_q s_q(n-1, k), \quad (n \geq 1),$$

avec  $s_q(0, 0) = 1$ .

**Définition 13** Le nombre  $q$ -Stirling de seconde espèce, noté  $S_q(n, k)$ , il satisfait la relation de récurrence suivante :

$$S_q(n, k) = S_q(n-1, k-1) + [k]_q S_q(n-1, k), \quad (n \geq 1),$$

avec  $S_q(0, 0) = 1$ .

## 1.5 Les $p, q$ -analogues des coefficients binomiaux

Le concept de  $p, q$ -analogue des coefficients binomiaux a été développé par Corcino [34].

Le  $p, q$ -analogue des coefficients binomiaux, appelés  $p, q$ -binomiaux, sont définis par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \prod_{i=1}^k \frac{p^{n-i+1} - q^{n-i+1}}{p^i - q^i}, \quad p \neq q. \quad (1.23)$$

En utilisant la notation  $[k]_{p,q} = \frac{p^k - q^k}{p - q}$ , on peut réécrire la relation (1.23) comme suit :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}! [k]_{p,q}!} = \frac{[n]_{p,q}}{[k]_{p,q}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q},$$

où  $[k]_{p,q}! = [k]_{p,q} [k-1]_{p,q} \cdots [2]_{p,q} [1]_{p,q}$ .

Il est à noter que (voir aussi [59])

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,p}. \quad (1.24)$$

On a aussi la relation de symétrie :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_{p,q}.$$

Clairement, quand  $p = 1$ , le coefficient  $p, q$ -binomial  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}$  est le coefficient  $q$ -binomial  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ .

Nous présentons quelques valeurs du triangle des coefficients  $p, q$ -binomiaux :

$n/k$	1	2	3
1	1		
2	$p + q$	1	
3	$p^2 + pq + q^2$	$p^2 + pq + q^2$	$p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$
4	$p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$	$(p^2 + pq + q^2)(p^2 + q^2)$	$\dots$

Table 3 : Table des valeurs de  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}$ .

Le coefficient  $p, q$ -binomial satisfait la relation de récurrence triangulaire :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = p^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}. \quad (1.25)$$

La relation de récurrence verticale est donnée par :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \sum_{i=k}^n p^{(n-i)(k+1)} q^{i-k} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_{p,q}, \quad (1.26)$$

et la relation de récurrence horizontale est donnée par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i p^{-(i+1)(n-k) + \binom{i+1}{2}} q^{ik + \binom{i+1}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+i+1 \end{bmatrix}_{p,q}. \quad (1.27)$$

La fonction génératrice horizontale pour les coefficients  $p, q$ -binomiaux est donnée par :

$$\prod_{r=0}^{n-1} (p^r + xq^r) = \sum_{k=0}^n p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^k \quad (1.28)$$

Nous avons aussi la relation, fort utile, suivante

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p/q}. \quad (1.29)$$

Pour d'autres relations, voir Corcino [34].

## 1.6 Les coefficients binomiaux

Cette section est largement puisée des travaux de Belbachir et al [16] et Belbachir [9].

Les coefficients binomiaux sont une extension naturelle des coefficients binomiaux classiques. Ils sont définis comme suit :

Soient  $s \geq 1$  et  $n \geq 0$  deux entiers ; pour un entier  $k = 0, 1, \dots, sn$ , le coefficient binomial  $\binom{n}{k}_s$  est défini comme étant le  $k$ -ième coefficient dans le développement

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^s)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}_s x^k, \quad (1.30)$$

avec  $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$  ( $\binom{n}{k}$  étant les coefficients binomiaux classiques) et  $\binom{n}{k}_s = 0$  pour  $k > sn$  ou  $k < 0$ . Une expression via les coefficients binomiaux classiques est donnée par :

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_s = k} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-1}}{j_s}. \quad (1.31)$$

Comme propriétés déjà bien établies, on a la relation de symétrie

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn - k}_s, \quad (1.32)$$

la relation de récurrence longitudinale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n-1}{k-m}_s, \quad (1.33)$$

et la relation de récurrence diagonale

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^s \binom{n}{m} \binom{m}{k-m}_{s-1}. \quad (1.34)$$

Ces coefficients, comme c'est le cas pour les coefficients binomiaux classiques, vérifient via (1.33) un équivalent du triangle de Pascal : le " $s$ -triangle de Pascal" ou "triangle de Pascal généralisé", voir la table 4 ci-dessous pour une illustration. Pour les premières valeurs de ces  $s$ -triangles, on peut consulter l'encyclopédie des suites numériques de SLOANE [66] sous A027907 pour  $s = 2$ , sous A008287 pour  $s = 3$ , sous A035343 pour  $s = 4$ .

**Interprétation combinatoire.** Bondarenko [27] a donné une interprétation combinatoire des coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}_s$  comme étant le nombre de manières de distribuer " $k$ " boules dans " $n$ " urnes de sorte que chaque urne contienne au plus " $s$ " boules.

**Remarque 14** *Cet argument combinatoire, permet d'établir la relation suivante :*

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{n_1+2n_2+\dots+sn_s=k} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_s, n-n_1-\dots-n_s}. \quad (1.35)$$

Pour illustrer la relation de récurrence longitudinale, nous présentons les triangles des coefficients bitrinomiaux.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1	1	1	1														
2	1	2	3	2	1												
3	1	3	6	7	6	3	1										
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1								
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1						
6	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1				
7	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77	28	7	1		
8	1	8	36	112	266	504	784	1016	1107	1016	784	504	266	112	36	8	1

Table 4 : Triangle des coefficients bitrinomiaux,  $\binom{n}{k}_2$ .

Belbachir et *al.* [16] ont donné le Théorème de De Moivre suivant qui établit une expression mono-sommatoire des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux

**Théorème 15** *L'identité suivante est satisfaite*

$$\binom{N}{k}_s = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(s+1) \rfloor} (-1)^j \binom{N}{j} \binom{k-j(s+1)+N-1}{N-1}. \quad (1.36)$$

Cette relation explicite est importante, au sens où elle permet d'exprimer les coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux avec un unique symbole de sommation, contrairement aux relations (1.31) et (1.35).

En 1711, De Moivre (voir [62] ou [63]) avait déjà exprimé l'expression de droite de l'identité (1.36) pour établir l'interprétation combinatoire donnée par Bondarendo [27].

## 1.7 Les coefficients $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux

Warnaar [77] a introduit le  $q$ -analogue des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux (voir aussi [78] pour une bibliographie exhaustive). Il a proposé  $(s+1)$  différentes  $q$ -déformations du coefficient bi<sup>s</sup>nomial. Elles sont motivées par la relation (1.31).

**Définition 16** *Pour  $p = 0, \dots, s$ , on définit les coefficients  $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux par*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1} - \sum_{l=s-p}^{s-1} j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} n \\ j_{s-1} \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

avec  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = 0$  pour  $k > sn$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)} &= \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} n \\ j_{s-1} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(1)} &= \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1} - j_s} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} n \\ j_{s-1} \end{bmatrix}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(s)} = \sum_{j_1 + \dots + j_s = k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-j_l)j_{l+1} - \sum_{l=0}^{s-1} j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} n \\ j_{s-1} \end{bmatrix},$$

où  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!}$  est le coefficient  $q$ -binomial.

Notons que  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} \neq 0$ , pour uniquement  $k = 0, \dots, sn$ , et que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \delta_{k,0} \text{ (Symbole de Kronecker)}. \quad (1.38)$$

Comme propriétés déjà bien établies, il y a les relations de symétrie et les récurrences fondamentales

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = q^{(s-p)n-k} \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_s^{(s-p)}, \quad p \neq 0 \text{ and } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)} = \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_s^{(0)}, \quad (1.39)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \sum_{m=0}^{s-p} q^{m(n-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-m \end{bmatrix}_s^{(m)} + \sum_{m=s-p+1}^s q^{n(s-p)-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-m \end{bmatrix}_s^{(m)}. \quad (1.40)$$

Belbachir et Benmezai [15] ont proposé une autre variante du  $q$ -analogue des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux comme suit :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s := \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_s = k} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix} q^{\sum_{r=1}^s \binom{j_r}{2}} (-1)^k a^{-\sum_{r=1}^s r j_r}, \quad (1.41)$$

avec  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  (les coefficients  $q$ -binomiaux) et  $a = \exp i \frac{2\pi}{s+1}$  avec  $i^2 = -1$ .

## 1.8 Préliminaires sur les suites log-concaves, log-convexes et unimodales

Les suites log-concaves, log-convexes et unimodales apparaissent dans beaucoup de domaines mathématiques, principalement en combinatoire, en algèbre, en géométrie, en informatique, en probabilité et en statistique. Il existe un nombre considérable de recherches consacrées à ces sujets (voir [67] et [25] pour plus d'information).

**Définition 17** Soit  $\{x_k\}_k$  une suite de nombres réels positifs. On dit qu'elle est **log-concave (LC)** si pour tout entier  $k > 0$ ,  $x_{k-1}x_{k+1} \leq x_k^2$ .

Dans Brenti [26, prop. 2.5.1], on trouve le résultat fort utile suivant :

**Théorème 18** Soit  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  une suite de nombres réels strictement positifs, la suite  $\{x_k\}$  est log-concave si et seulement si  $x_{i-1}x_{j+1} \leq x_i x_j$  pour tout  $j \geq i \geq 1$ .

Ci-dessous des exemples de suites log-concaves :

**Exemple 19** Quelques suites log-concaves (on peut consulter pour les quatre premiers exemples les travaux de Wang et Yeh [76])

1. La suite des coefficients binomiaux  $\left\{\binom{n}{k}\right\}_{k \geq 0}$  ;
2. Les nombres de Stirling (non signés) de première espèce  $\{s(n, k)\}_k$  ;
3. Les nombres de Stirling de seconde espèce  $\{S(n, k)\}_k$  ;
4. Les nombres Eulériens  $\{A(n, k)\}_k$  ;
5. Les suites combinatoires suivantes correspondants à des transversales dans le triangle de Pascal  $\left\{\binom{n-k}{k}\right\}_k$  et  $\left\{\binom{n-\alpha k}{k}\right\}_k$  [72, 73] ;
6. Le cas général des transversales du triangle de Pascal ordinaire et généralisé ont été traités par Belbachir et Szalay [20] : ils ont montré la log-concavité des suites  $\left\{\binom{n-\alpha k}{u+\beta k}\right\}_k$  et  $\left\{\binom{n-\alpha k}{u+\beta k}_s\right\}_k$  avec  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^*$ ,  $u \leq \beta - 1$  et  $n \geq u$ .
7. La suite des coefficients  $q$ -binomiaux  $\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\right\}_{k \geq 0}$  est log-concave pour  $q \geq 1$ , (Butler, [28]).

8. Su et Wang [70] ont démontré que pour  $p, q > 0$ , la suite des coefficients  $p, q$ -binomiaux  $\left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \right\}_{k \geq 0}$  est unimodale ou bimodale ainsi la propriété de log-concavité pour  $p \geq 1$  (ou  $q \geq 1$  par symétrie), fait observé par Lundow et Rosengren [59].

**Définition 20** Soit  $\{x_k\}_k$  une suite de nombres réels positifs. On dit qu'elle est **log-convexe (LX)** si pour tout entier  $k > 0$ ,  $x_{k-1}x_{k+1} \geq x_k^2$ .

Ainsi, une suite de nombres réels  $\{x_k\}_{k \geq 0}$ , strictement positifs, est log-convexe si et seulement si la suite  $\{x_k/x_{k-1}\}_k$  est croissante.

**Remarque 21** La log-convexité d'une suite de nombres positifs  $\{x_k\}_k$  est équivalente à la log-concavité de sa suite inverse  $\left\{ \frac{1}{x_k} \right\}_k$ . Cependant, la log-concavité est préservée par la convolution ordinaire et la convolution binomiale (Walkup [74], Stanley [67]), alors que, la convolution ordinaire de deux suites log-convexes n'est pas nécessairement log-convexe.

Comme analogue au Théorème 18, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 22** Soit  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  une suite de nombres réels strictement positifs, la suite  $\{x_k\}$  est log-convexe si et seulement si  $x_{i-1}x_{j+1} \geq x_i x_j$  pour tout  $j \geq i \geq 1$  (voir, Brenti [26]).

Récemment, Došlić [39, 40, 41], Došlić et Veljan [42], et Liu et Wang [57] ont développé des techniques pour prouver la log-convexité des suites.

Ci-dessous des exemples de suites log-convexes.

**Exemple 23** Quelques exemples de suites log-convexes

1. Le coefficient binomial central  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ ;
2. Les nombres de Bell [44, 21] :  $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$ ;
3. Les nombres de Catalan [57]:  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ ;
4. Les nombres de Motzkin [39, 57] :  $M_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} C_k$ .
5. Les nombres centraux de la suite de Delannoy [42] :  $d_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 2^k$ .

**Définition 24** Soit  $\{x_k\}_k$  une suite de nombres réels positifs. On dit qu'elle est **log-balancée (LB)** si pour tout entier  $k > 0$ ,  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  est log-convexe et  $\{\frac{x_k}{k!}\}_{k \geq 0}$  est log-concave.

La notion de *log-balancement* est introduite par Došlić, [39] où il a démontré que la suite des nombres de Bell vérifient cette propriété, ce qui lui a permis de fournir des exemples importants dans la théorie du son. Elle est observé aussi au Théorème de E. Bender et E. Canfield.

**Théorème 25** [21] Soit  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  une suite log-concave de nombres positifs, et soit  $\{a_n\}_n$  définie par

$$\sum_{n \geq 1} a_n \frac{t^n}{n!} = \exp \left( \sum_{n \geq 1} x_n \frac{t^n}{n!} \right). \quad (1.42)$$

Alors  $\{a_n\}_n$  est log-convexe et  $\{\frac{a_n}{n!}\}_n$  est log-concave.

Ce concept ne sera utilisé qu'au dernier chapitre.

**Exemple 26** Soient  $\{F_n\}_n$  et  $\{L_n\}_n$  les suites de Fibonacci et de Lucas respectivement, ainsi (Zheng et Liu [85]) les suites  $\{n! \sum_{k=0}^n F_k\}_n$  et  $\{n! \sum_{k=0}^n L_k\}_n$  sont log-balancées.

**Définition 27** Soit  $\{a_k\}_{0 \leq k \leq m}$  une suite de nombres réels positifs avec  $m \geq 2$ . On dit qu'elle est **unimodale** si il existe un entier  $l \in \{0, 1, \dots, m\}$  tel que la suite  $\{a_k\}$  est croissante pour  $k \in \{0, \dots, l\}$  et est décroissante pour  $k \in \{l, \dots, m\}$ . Un tel entier  $l$  est appelé **mode** de la suite  $\{a_k\}_{0 \leq k \leq m}$ .

Une suite  $\{a_k\}_{0 \leq k \leq m}$  est strictement log-concave (**SLC**) si elle vérifie la propriété

$$a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m-1.$$

**Théorème 28** Toute suite de nombres positifs strictement log-concave est unimodale (on peut consulter [26]).

Donc, si la suite  $\{a_k\}_{0 \leq k \leq m}$  est SLC, alors elle est unimodale et son maximum est : soit une unique valeur (dans ce cas, on dit qu'elle possède un pic), soit deux valeurs consécutives (dans ce dernier cas, on dit qu'elle possède un plateau à deux points).

Le théorème suivant, dû à Newton (voir [50]), est souvent utile pour l'étude de l'unimodalité d'une suite finie réelle positive.

**Théorème 29** *Soit  $\{u_k\}_{0 \leq k \leq m}$  une suite finie réelle positive et  $G(x) := \sum_{k=0}^m u_k x^k$  son polynôme générateur. Si toutes les racines de  $G(x)$  sont réelles, alors la suite  $\{u_k\}$  est SLC.*

Il n'y a pas de procédure directe qui permet d'établir l'unimodalité de manière systématique. Cependant, selon la nature des suites, certains auteurs ont proposé différentes approches : Stanley [67], Dharmadhikari et Joak-Dev [37], Balazard [8], Brenti [26].

**Exemple 30** *Quelques exemples de suites unimodales :*

1. La suite des coefficients du binôme de Newton  $\{\binom{n}{k}\}_k$  (est trivialement unimodale) ;  
La suite des coefficients du polynôme  $\prod_{k=0}^n (1 + z^k)$  l'est aussi, on parle d'unimodalité du polynôme en question.
2. La suite associée au polynôme de Gauss  $\{a_k\}$  (relation (1.18)) est unimodale, fait observé par Cayley [31] et démontré pour la première fois par Sylvester [71]. Les nombres  $(a_k)$  ont plusieurs interprétations combinatoires. La preuve combinatoire de l'unimodalité de cette suite est donnée par O'Hara [32]. Cette preuve est constructive, longue et assez technique, ce qui a motivé D. Zeilberger à l'alléger, la simplifier et la commenter voir [81] et [82].
3. Les nombres de Stirling (non signé) de première espèce  $\{s(n, k)\}_k$ .  
Comme l'a signalé Belbachir dans sa Thèse, la suite constituée des nombres de Stirling de première espèce a comme mode l'entier le plus proche du nombre harmonique  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . Ce résultat surprenant a été démontré par J. H. Hammersley [49]. De plus P. Erdős [45] a montré que  $H_n$  demeure un pic pour  $n \geq 3$ .
4. Les nombres de Stirling de seconde espèce  $\{S(n, k)\}_k$ .
5. La suite de nombres Eulériens  $\{A(n, k)\}_k$  qui compte le nombre de partitions de  $\{1, \dots, n\}$  en  $k$  parts, et  $\{B(n, k)\}_k$  qui compte le nombre de partitions de  $\{1, \dots, n\}$  en  $k$  parts distinctes, pour  $n$  suffisamment grand.
6. La suite  $\{A(n, k, m)\}_k$  qui compte le nombre de partitions de  $\{1, \dots, n\}$  en  $k$  parts dont la plus grande part est au plus égale à  $m$ .

Le théorème suivant permet de localiser le mode de certaines familles de suites.

**Théorème 31 (Darroch, Benoumhani )** [35, 21] Soit  $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n}$  une suite des nombres réels positifs de sorte que le polynôme suivant

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

n'admette que des racines réelles négatives. Alors la suite  $\{a_k\}_k$  est unimodale avec un pic ou un plateau avec deux éléments. De plus chaque mode  $l$  de la suite  $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n}$  satisfait :

$$\lfloor \mu_n \rfloor \leq l \leq \lceil \mu_n \rceil, \quad \text{avec } \mu_n = P'(1)/P(1).$$

Pour plus de détails voir les articles de Krattenthaler [54], et Benoumhani [23, 24].

Pour des exemples sur la localisation du mode de certaines familles de suites unimodales, nous listons ci-dessous quelques suites mentionnées en première section.

### Exemple 32

1. S. Tanny et M. Zuker [72] ont montré que la suite  $\left\{ \binom{n-k}{k} \right\}_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$  liée aux nombres de Fibonacci (voir page 9) est SLC et donc unimodale, avec un pic ou un plateau au plus à deux éléments, avec comme plus petit mode  $r_n = \left\lfloor \frac{5n-3-\sqrt{5n^2+10n+9}}{10} \right\rfloor$  d'où  $r_n \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil \right\}$ , ensuite H. Belbachir et F. Bencherif [12] l'ont amélioré par :

$$r_n \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil \right\}.$$

2. Pour la suite  $\left\{ \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \right\}_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$  liée aux nombres de Lucas (voir page 9), M. Benoumhani [24] a montré qu'elle est SLC, et donc unimodale avec un pic ou un plateau au plus à deux éléments, avec comme plus petit mode  $s_n = \left\lfloor \frac{5n-4-\sqrt{5n^2-4}}{10} \right\rfloor$  d'où  $s_n$  appartient au même intervalle de  $r_n$  donné par S. Tanny et M. Zuker. H. Belbachir et F. Bencherif [12] l'ont retrouvé, ils ont montré que  $s_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rfloor$  ou  $s_n = \left\lceil \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\rceil$ .
3. H. Belbachir et F. Bencherif [13] ont montré que les suites  $\left\{ 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} \right\}_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$  et  $\left\{ 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \right\}_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$  liées aux nombres de Pell et Pell-Lucas respectivement sont unimodales avec pic ou plateau à deux points. Leur plus petit mode est  $r_n = \left\lfloor \frac{4n-3-\sqrt{8n^2+16n+9}}{10} \right\rfloor$  et  $s_n = \left\lfloor \frac{4n-5-\sqrt{8n^2-7}}{10} \right\rfloor$  respectivement.

4. H. Belbachir et al [14] ont montré que les suites  $\{U(n, k)\}_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$  et  $\{V(n, k)\}_{0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor}$  associées respectivement à la suite de Fibonacci généralisée et, sa suite compagnon, la suite de Lucas généralisée données par les relations (1.14) et (1.5) respectivement sont unimodales avec pour mode :

$$r_n \in \left\{ \left\lfloor \left[ \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{4y/x^2 + 1}} \right) \right] \right\rfloor, \left\lceil \left[ \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{4y/x^2 + 1}} \right) \right] \right\rceil \right\}, \quad (x > 0, y \geq 0 \text{ et } n \geq 2).$$

Pour plus d'information voir la thèse de H. Belbachir [9].

Nous allons maintenant introduire le concept de sur-log-concavité.

**Définition 33** On dit qu'une suite  $\{u_k\}_k$  est **sur-log-concave** si

1. Elle est log-concave :  $u_k^2 - u_{k-1}u_{k+1} \geq 0$  pour tout entier  $k$ .

2. Elle satisfait  $2u_k^2 - u_{k-1}u_{k+1} - u_{k-2}u_{k+2} \geq 0$  pour tout entier  $k$ .

1.  $\Leftrightarrow \forall i > j, u_i u_j - u_{i-1} u_{j+1} \geq 0$ .

2.  $\Leftrightarrow 2u_{k-i} u_{k+i} - u_{k-i-1} u_{k+i+1} - u_{k-i+1} u_{k+i-1} \geq 0$  pour tout entier  $k \geq j \geq l$ .

## 1.9 Les directions dans le triangle de Pascal

Nous assimilons les éléments du triangle de Pascal au treillis  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  par l'application  $(n, k) \mapsto \binom{n}{k}$  avec la convention  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k > n$  ou  $k < 0$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^+$  et  $\alpha \in \mathbb{Z}$  avec  $\alpha + \beta > 0$ . Alors le point de la grille  $(n, 0)$  et la direction  $(\beta, \alpha)$  définissent *une direction dans le triangle de Pascal* portée par les éléments

$$T^{(\beta, \alpha)}(n, k) = \binom{n - \alpha k}{\beta k} x^{n - (\alpha + \beta)k} y^{\beta k}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{\alpha + \beta} \right\rfloor, \quad (1.43)$$

avec  $x, y \in \mathbb{R}^*$ .

Lorsque  $\beta \geq 1$ , il apparaît  $\beta$  transversales intermédiaires. Celle d'ordre  $u$  ( $u = 0, 1, \dots, \beta - 1$ ) est portée par :

$$T^{(\beta, \alpha, u)}(n, k) = \binom{n - \alpha k}{u + \beta k} x^{n - u - (\alpha + \beta)k} y^{u + \beta k}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n - u}{\alpha + \beta} \right\rfloor. \quad (1.44)$$

Quand  $u = 0$  la relation (1.44) devient identique à (1.43) (on se place sur la diagonale).

**Exemple 34 (de directions)** *On prend les cas où  $u = 0$ .*

1. *Le cas  $(\beta, \alpha) = (1, 1)$ . Cette direction est la plus connue dans les transversales du triangle de Pascal, elle est liée à la suite  $U(n, k)$  donnée par la relation (1.4).*

– *Pour  $(x, y) = (2, 3)$ , on obtient la suite de Fermat  $\Phi(n)_{n \geq 0} = (0, 1, 3, 11, 39, \dots)$  Sloane A007482 (voir, [66]). Donc*

$$\Phi_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 3^{n-2k} 2^k \binom{n-k}{k},$$

*satisfait*

$$\begin{cases} \Phi_0 = 0, & \Phi_1 = 1, \\ \Phi_n = 3\Phi_{n-1} + 2\Phi_{n-2}, & (n \geq 2). \end{cases}$$

2. *Le cas  $(\beta, \alpha) = (2, -1)$ . Cette direction est liée à la suite de Morgan-Voyce  $(M_n)_n$  définie par :*

$$T^{(2,-1)} = \binom{n+k}{2k} \rightarrow M_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+k}{2k}.$$

## Chapitre 2

# Préservation de la log-concavité des $q$ -analogues et des $p, q$ -analogues de coefficients binomiaux et bi<sup>s</sup>nomiaux

Ce chapitre est dédié à l'étude de la préservation de la log-concavité des  $q$ -analogues et  $p, q$ -analogues des transversales des coefficients binomiaux. La première section est consacré à une vue d'ensemble sur la préservation de la log-concavité de la log-convexité pour les triangles généralisés. Dans la deuxième section, nous reprenons et détaillons ce qui est traité dans [3].

### 2.1 Définitions et notations

Soient  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{y_k\}_{k \geq 0}$  deux suites log-concaves, et notons par  $\{a_s(n, k)\}_{0 \leq k \leq sn}$  un  $s$ -*triangle* (ou un triangle pour  $s = 1$ ) de nombres positifs, son  $s$ -*triangle inverse* est donné par  $a_s^*(n, k) = a_s(n, sn - k)$ . On conviendra que  $a_s(n, k) = 0$  pour  $k < 0$  ou  $k > sn$ , et que  $x_k = y_k = 0$  pour  $k < 0$ .

Illustration du  $s$ -triangle (ci dessous  $s = 4$ ),  $n$  représente la ligne et  $k$  la colonne :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>0</b>	*																
<b>1</b>	*	*	*	*	*												
<b>2</b>	*	*	*	*	*	*	*	*	*								
<b>3</b>	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*				
<b>4</b>	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Considérons, pour  $n \geq 0$ , les deux transformations suivantes :

$$z_n = \sum_{k=0}^{sn} a_s(n, k) x_k, \quad (2.1)$$

et

$$t_n = \sum_{k=0}^{sn} a_s(n, k) x_k y_{sn-k}. \quad (2.2)$$

### Définition 35

1. On dit que la transformation (2.1) a la propriété **PLC** ou encore préserve la log-concavité des suites, si la log-concavité de la suite  $\{x_n\}$  entraîne celle de la suite  $\{z_n\}$ .
2. On dit que la transformation (2.2) a la propriété **double-PLC** si la log-concavité des suites  $\{x_n\}$  et  $\{y_n\}$  entraîne celle de la suite  $\{t_n\}$ .

Le  $s$ -triangle (ou triangle) correspondant  $\{a_s(n, k)\}$  hérite aussi des appellations PLC et double-PLC respectivement. Trivialement, la propriété double-PLC implique la propriété PLC.

Ci dessous des exemples de préservation de la log-concavité.

### Exemple 36

1. La transformation linéaire

$$z_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

est PLC (Karlin [51], 1968; Brenti [26], 1989).

2. Wang [75] a prouvé que la transformation

$$z_n = \sum_{k=0}^n \binom{a+n}{b+k} x_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

est PLC pour  $a, b$  deux nombres entiers strictement positifs tels que  $a \geq b$ , le cas  $b = 0$  étant traité par (Ehrenborg et Steingrímsson [43], 2000).

3. La convolution ordinaire

$$z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

est PLC (Stanley [67], 1989) et est double-PLC (Karlin [51, p. 394], 1968; Menon [61], 1989).

4. La convolution exponentielle (ou binomial)

$$z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

est double-PLC (Walkup [74], 1976).

5. De plus (Zhang [84], 2008) a établi les versions  $q$ -analogues de (2.3) et (2.4), il a établi que les transformations :

$$z_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} x_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

et

$$t_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} x_k y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

sont PLC et double-PLC respectivement pour  $q$  une indéterminée donnée.

6. La transformation

$$z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{a-n}{b-k} x_k y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

est double PLC (Permantle [64], 2000; Liggett [56], 1997).

7. Wang et Yeh ([76], 2007) ont prouvé que les transformations suivantes :

$$z_n = \sum_{k=0}^n \binom{a+n}{b+k} x_k y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et

$$z_n = \sum_{k=0}^n \binom{a-n}{b-k} x_k y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sont double PLC pour  $a, b$  deux nombres entiers strictement positifs tels que  $a \geq b$ ;

Ils ont aussi exploité que la transformation

$$x_n := \sum \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_l} x_{k_1}^1 x_{k_2}^2 \cdots x_{k_l}^l \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

où la somme est étendue à tous les entiers positifs  $k_1, k_2, \dots, k_l$  tel que  $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$ , est multiple PLC.

### Définition 37

1. On dit que la transformation (2.1) a la propriété **PLX** ou encore préserve la log-convexité des suites, si la log-convexité de  $\{x_k\}_k$  entraîne celle de  $\{z_k\}_k$  et dans ce cas le  $s$ -triangle correspondant est dit PLX.
2. On dit que la transformation (2.2) a la propriété **double-PLX**, si la log-convexité des suites  $\{x_k\}_k$  et  $\{y_k\}_k$  entraîne celle de  $\{t_k\}_k$  et dans ce cas le  $s$ -triangle correspondant est dit double-PLX.

Ci dessous des exemples de triangles qui préservent la (double) log-convexité.

### Exemple 38

1. Davenport et Pólya ([36], 1949) a montré que
  - La transformation linéaire :  $z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$  est PLX;
  - La convolution exponentielle :  $z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k y_{n-k}$  est double PLX.
2. Liu et Wang ([57], 2007) a prouvé que
  - La suite d'Euler :  $2E_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k E_{n-k}$  est LX;
  - La transformation linéaire :  $z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} x_k$  est PLX;
  - La transformation de Stirling de seconde espèce :  $z_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) x_k$  est PLX;
  - La transformation de Stirling de première espèce :  $z_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x_k$  est PLX;
  - La suite définie par :  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k B_{n-k}$  est LX.
3. La suite de Bell :  $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$  est LX, (Engel [44], 1994).

4. La suite de Delannoy  $D(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} b(k)$  est LX avec  $b(k) := \binom{2k}{k}$  étant le coefficient binomial central, (Doslic [39], Liu et Wang [57]).
5. La suite de Schröder  $r(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} C_k$  est LX avec  $C_k$  étant la suite de Catalan, (Doslic [39], Liu et Wang [57]).

## 2.2 Préservation de la log-concavité associée aux coefficients $p, q$ -binomiaux

Dans cette section, nous proposons d'étendre certains résultats établis par Zhang [84] dans le cas du  $q$ -analogue du coefficient binomial. Principalement, nous traitons la préservation de la log-concavité pour les coefficients  $p, q$ -binomiaux.

Nous commençons par énoncer le Théorème de Zhang.

On établit le théorème suivant, comme une extension du Théorème de Zhang donné par (2.6) et (2.5).

### Théorème 39

1. La transformation linéaire

$$z_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{k(k-n)} x_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

préserve la log-concavité.

2. La transformation

$$t_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{k(k-n)} x_k y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

préserve la double log-concavité.

**Preuve.** Soit

$$\begin{aligned}
z_n &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{k(k-n)} x_k \\
&= \sum_{k=0}^n q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p/q} p^{k(k-n)} x_k \quad (\text{par la relation (1.29)}) \\
&= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p/q} \left(\frac{p}{q}\right)^{k(k-n)} x_k \\
&= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q'} (q')^{k(k-n)} x_k \quad (\text{par le changement } q' = p/q). \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Le Théorème de Zhang [84] permet de conclure.

Le même principe est valable pour le second point.  $\square$

## 2.3 Log-concavité des transversales associées aux coefficients $p, q$ -binomiaux

On va étudier la log-concavité des suites parcourant les transversales du  $p, q$ -triangle de Pascal pour  $p \geq 1, q \geq 0$  (ou par symétrie  $q \geq 1, p \geq 0$ ). Pour ce faire, on va commencer par les transversales des coefficients  $q$ -binomiaux pour  $q \geq 0$  et  $k = 0, 1, 2, \dots \left( \begin{bmatrix} n-\alpha k \\ u+\beta k \end{bmatrix}_q \right)_k$ .

Le lemme suivant, de Su et Wang [69], nous sera fort utile.

**Lemme 40** *Si une suite  $\{a_k\}_{k \geq 0}$  de nombres positifs est log-concave, alors la sous suite  $\{a_{n+\gamma k}\}_{k \geq 0}$  est aussi log-concave, pour  $n$  et  $\gamma$  des nombres entiers fixés arbitrairement.*

**Théorème 41** *Soient  $n, u, \beta$  trois entiers positifs avec  $n \geq u$ , et  $\alpha$  un entier négatif. Pour  $q \geq 0$ , définissons la suite*

$$C_k = \begin{bmatrix} n - \alpha k \\ u + \beta k \end{bmatrix}_q, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

*Alors*

- (i) *Si  $\beta = -\alpha$  ou  $\beta = 0$ , la suite est log-concave, et donc unimodale;*
- (ii) *Si  $\beta > -\alpha$ , la suite est log-concave, et donc unimodale.*

**Preuve.** Posons  $\alpha = -\gamma$ . Pour  $q \geq 0$ , on a

- (i) Si  $\beta = 0$ ,  $C_k = \begin{bmatrix} n+\gamma k \\ u \end{bmatrix}_q$ . La suite  $\begin{bmatrix} k \\ u \end{bmatrix}_q$  est log-concave en  $k$  (voir Sagan, [65]), alors la suite  $(C_k)_k$  est aussi log-concave par le Lemme 40, et donc unimodale par le Théorème 28. Le cas  $\beta = \gamma$  est similaire car  $C_k = \begin{bmatrix} n+\gamma k \\ n-u \end{bmatrix}_q$ .
- (ii) Pour montrer la log-concavité de  $\{C_k\}_{k \geq 0}$  pour  $\beta > \gamma$ , il suffit de montrer que pour  $n \geq k$ ,

$$\begin{bmatrix} n+\gamma \\ u+\beta \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-\gamma \\ u-\beta \end{bmatrix}_q \leq \begin{bmatrix} n \\ u \end{bmatrix}_q^2.$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+\gamma \\ u+\beta \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-\gamma \\ u-\beta \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+\gamma]_q! [n-\gamma]_q!}{[n-u-(\beta-\gamma)]_q! [u+\beta]_q! [n-u+(\beta-\gamma)]_q! [u-\beta]_q!} \\ &= \begin{bmatrix} n+\gamma \\ n-u \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-\gamma \\ n-u \end{bmatrix}_q \frac{\begin{bmatrix} n-u \\ \beta-\gamma \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} u-\gamma \\ \beta-\gamma \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n-u+\beta-\gamma \\ \beta-\gamma \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} u+\beta \\ \beta-\gamma \end{bmatrix}_q}. \end{aligned}$$

Maintenant  $\begin{bmatrix} n-u \\ \beta-\alpha \end{bmatrix}_q \leq \begin{bmatrix} n-u+\beta-\gamma \\ \beta-\gamma \end{bmatrix}_q$ ,  $\begin{bmatrix} u-\gamma \\ \beta-\alpha \end{bmatrix}_q \leq \begin{bmatrix} u+\beta \\ \beta-\alpha \end{bmatrix}_q$  et  $\begin{bmatrix} n+\gamma \\ n-u \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-\gamma \\ n-u \end{bmatrix}_q \leq \begin{bmatrix} n \\ n-u \end{bmatrix}_q^2$  par (i).

Donc

$$\begin{bmatrix} n+\gamma \\ u+\beta \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-\gamma \\ u-\beta \end{bmatrix}_q \leq \begin{bmatrix} n \\ u \end{bmatrix}_q^2.$$

Donc la suite  $\{C_k\}_{k \geq 0}$  est log-concave et donc unimodale par le Théorème 28, comme désiré. □

Nous passons maintenant à la version  $p, q$ -analogue du Théorème 41.

**Théorème 42** Soient  $n, u, \beta$  trois entiers positifs avec  $n \geq u$ , et  $\alpha$  un entier négatif.

Pour  $p \geq 1, q \geq 0$ , définissons la suite

$$D_k := \begin{bmatrix} n + \alpha k \\ u + \beta k \end{bmatrix}_{p,q}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Alors

- (i) Si  $\beta = -\alpha$  ou  $\beta = 0$ , la suite est log-concave, et donc unimodale;
- (ii) Si  $\beta > -\alpha$ , la suite est log-concave, et donc unimodale.

**Preuve.** Par (1.24), on a

$$\left[ \begin{matrix} n + \alpha k \\ u + \beta k \end{matrix} \right]_{p,q} = p^{(u+\beta k)(n-u-(\beta-\alpha)k)} \left[ \begin{matrix} n + \alpha k \\ u + \beta k \end{matrix} \right]_{q/p}. \quad (2.11)$$

La relation (2.11) est le fait d'un produit de deux suites :  $p^{(u+\beta k)(n-u-(\beta-\alpha)k)}$  et  $\left[ \begin{matrix} n+\alpha k \\ u+\beta k \end{matrix} \right]_{q/p}$ . La première suite est log-concave pour  $p \geq 1$  et log-convexe pour  $p \leq 1$ . Il est clair que le produit de deux suites log-concaves est aussi log-concave. Alors, si  $p \geq 1$ ,  $q \geq 0$  et par le Théorème 41 on aura :

- (i) Pour  $\beta = -\alpha$  ou  $\beta = 0$ , la suite  $\{C_k\}$  est log-concave, et donc unimodale par le Théorème 28;
- (ii) Pour  $\beta > -\alpha$ , la suite  $\{C_k\}$  est log-concave, et donc unimodale par le Théorème 28.

□

# Chapitre 3

## Préservation de la log-convexité des coefficients binomiaux

Ce chapitre concerne la préservation de la log-convexité via le triangle de Pascal généralisé issu des coefficients binomiaux, appelée aussi convolution binomiale. Ce dernier résultat est une généralisation du Théorème de Davenport et Pólya "On the product of two power series" (voir [36]). Ce travail a fait l'objet de la publication [2].

La convolution des suites joue un rôle important en Mathématiques, et spécialement en Combinatoire. Pour le cas des suites log-convexes il y a le résultat de H. Davenport et G. Pólya, qui concerne la convolution binomiale.

**Théorème 43 (H. Davenport et G. Pólya)** *Si les suites de nombres positifs  $\{u_n\}_n$  et  $\{v_n\}_n$  sont log-convexes, alors la convolution binomiale*

$$w_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k v_{n-k}, \quad n \geq 0,$$

*est aussi log-convexe.*

La question : étant données deux suites  $\{x_n\}_n$  et  $\{y_n\}_n$ , les deux transformations suivantes

$$z_n := \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x_k, \quad (n \geq 0), \tag{3.1}$$

et

$$t_n := \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x_k y_{sn-k}, \quad (n \geq 0), \tag{3.2}$$

préservent-elles la log-convexité ?

On commence par le résultat suivant de Liu et Wang [57].

**Théorème 44** *Si les suites  $\{x_n\}_n$  et  $\{y_n\}_n$  sont log-convexes, alors la suite  $\{x_n + y_n\}_n$  est aussi log-convexe.*

En procédant par induction sur  $n$ , on a le corollaire suivant :

**Corollaire 45** *Si les  $l$  suites  $\{x_n^{(1)}\}_n, \{x_n^{(2)}\}_n, \dots, \{x_n^{(l)}\}_n$  sont log-convexes, alors la suite  $\{x_n^1 + x_n^2 + \dots + x_n^l\}_n$  est aussi log-convexe.*

Maintenant, on donne le résultat principal du chapitre :

**Théorème 46** *Si les suites  $\{x_n\}_n$  et  $\{y_n\}_n$  de nombres positifs sont log-convexes, alors la "convolution binomiale"*

$$t_n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x_k y_{sn-k}, \quad (n \geq 0).$$

*est aussi log-convexe.*

**Preuve.** Prenant  $n = 2$  et  $s = 2$ , on a

$$\begin{aligned} t_0 t_2 &= x_0 y_0 \sum_{k=0}^4 \binom{2}{k}_2 x_k y_{4-k} \\ &= x_0 y_0 (x_0 y_4 + 2x_1 y_3 + 3x_2 y_2 + 2x_3 y_1 + x_4 y_0) \\ &= x_0^2 y_0 y_4 + 2x_0 x_1 y_0 y_3 + 3x_0 x_2 y_0 y_2 + 2x_0 x_3 y_0 y_1 + x_0 x_4 y_0^2 \\ &= x_0^2 y_0 y_4 + 2x_0 x_1 y_0 y_3 + 2x_0 x_2 y_0 y_2 + 2x_0 x_3 y_0 y_1 + x_0 x_4 y_0^2 + x_0 x_2 y_0 y_2 \\ &\geq x_0^2 y_2^2 + x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_0^2 + 2x_0 x_1 y_1 y_2 + 2x_0 x_2 y_0 y_2 + 2x_1 x_2 y_0 y_1 \text{ (log-convexité de } \{x_k\}_k \\ &\quad \text{et } \{y_k\}_k \text{)} \\ &= (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0)^2 = t_1^2. \end{aligned}$$

Supposons que cette hypothèse est vraie pour  $s = q$ . Et on montre qu'elle reste vraie pour  $s = q + 1$ .

Pour  $s = q$ , on a

$$t_0 t_2 = x_0 y_0 \sum_{k=0}^{2q} \binom{2}{k}_q x_k y_{2q-k} \geq \left\{ \sum_{k=0}^q x_k y_{q-k} \right\}^2 = t_1^2. \quad (3.3)$$

Alors, pour  $s = q + 1$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} t_0 t_2 &= x_0 y_0 \sum_{k=0}^{2(q+1)} \binom{2}{k}_{q+1} x_k y_{2(q+1)-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2(q+1)} \sum_{m=0}^2 \binom{2}{m} \binom{m}{k-m}_q x_0 x_k y_0 y_{2(q+1)-k} \quad \text{par la récurrence diagonale (1.34)} \\ &= \sum_{k=0}^{2(q+1)} \left[ \binom{0}{k}_q + 2 \binom{1}{k-1}_q + \binom{2}{k-2}_q \right] x_0 x_k y_0 y_{2(q+1)-k} \\ &= x_0^2 y_0 y_{2(q+1)} + 2 \sum_{k=1}^{q+1} x_0 x_k y_0 y_{2(q+1)-k} + \sum_{k=2}^{2(q+1)} \binom{2}{k-2}_q x_0 x_k y_0 y_{2(q+1)-k} \\ &= x_0^2 y_0 y_{2(q+1)} + 2 \sum_{k=1}^{q+1} x_0 x_k y_0 y_{2(q+1)-k} + \sum_{k=0}^{2q} \binom{2}{k}_q x_0 x_{k+2} y_0 y_{2q-k} \\ &\geq x_0^2 y_0 y_{2(q+1)} + 2 \sum_{k=1}^{q+1} x_0 x_k y_0 y_{2(q+1)-k} + \sum_{k=0}^{2q} \binom{2}{k}_q x_1 x_{k+1} y_0 y_{2q-k} \quad (\{x_k\} \text{ est LX}) \\ &\geq x_0^2 y_0 y_{2(q+1)} + 2 \sum_{k=1}^{q+1} x_0 x_k y_0 y_{2(q+1)-k} + \left\{ \sum_{k=0}^q x_{k+1} y_{q-k} \right\}^2 \quad (\text{par la relation (3.3)}) \\ &\geq x_0^2 y_{q+1}^2 + 2 \sum_{k=1}^{q+1} x_0 x_k y_{q+1} y_{(q+1)-k} + \left\{ \sum_{k=0}^q x_{k+1} y_{q-k} \right\}^2 \quad (\{x_k\} \text{ et } \{y_k\} \text{ sont LX}) \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{q+1} x_k y_{(q+1)-k} \right\}^2 = t_1^2. \end{aligned}$$

On procède par induction sur  $n$ . Notons que

$$\begin{aligned}
t_n &= \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x_k y_{sn-k} \\
&= \sum_{k=0}^{sn} \sum_{j=0}^s \binom{n-1}{k-j}_s x_k y_{sn-k} \quad \text{utilisant la relation de récurrence longitudinale (1.33)} \\
&= \sum_{k=0}^{sn} \binom{n-1}{k}_s x_k y_{sn-k} + \sum_{k=0}^{sn} \binom{n-1}{k-1}_s x_k y_{sn-k} + \cdots + \sum_{k=0}^{sn} \binom{n-1}{k-s}_s x_k y_{sn-k} \\
&= \sum_{k=0}^{s(n-1)} \binom{n-1}{k}_s x_k y_{sn-k} + \sum_{k=0}^{s(n-1)} \binom{n-1}{k}_s x_{k+1} y_{sn-k-1} + \cdots \\
&\quad \cdots + \sum_{k=0}^{s(n-1)} \binom{n-1}{k}_s x_{k+s} y_{s(n-1)-k}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Donc, par l'hypothèse d'induction, les  $s$  sommes du membre de droite sont log-convexes. Par la Proposition 45, la suite  $\{t_n\}_n$  est log-convexe.  $\square$

En prenant  $y_k = 1$  pour  $0 \leq k \leq sn$ , on aura le corollaire suivant.

**Corollaire 47** *Si la suite  $\{x_n\}_n$  de nombres positifs est log-convexe, alors la transformation bi<sup>s</sup> nomiale*

$$z_n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x_k, \quad (n \geq 0),$$

*est aussi log-convexe.*

### Exemples et applications.

Nous commençons par le lemme suivant :

**Lemme 48** *La suite  $x_k = (k+1)^k$  est log-convexe pour  $k \geq 0$ .*

**Preuve.** Par la définition 20, la suite  $\{x_k\}_k$  est log-convexe si et seulement si  $x_{k-1}x_{k+1} \geq x_k^2$ , c'est à dire  $\left\{\frac{x_k}{x_{k-1}}\right\}_k$  est croissante. Pour  $k \geq 1$ , on a

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} = k \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Par la croissance de  $k \mapsto \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ , alors la suite  $\{x_k\}$  est log-convexe.  $\square$

Nous obtenons, le résultat suivant.

**Corollaire 49** La suite  $\{z_n\}_{n \geq 0}$  définie par

$$z_n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s (k+1)^k,$$

est log-convexe.

**Preuve.** Conséquence du Lemme 48 et du Corollaire 47. □

**Remarque 50** La suite  $x_n = (n+1)^n$  peut s'écrire aussi :

$$x_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k.$$

Ci dessous des exemples de suites qui sont log-convexes par la transformation bi<sup>s</sup>nomiale.

### Exemple 51

1. La suite définie par :  $y_n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s \binom{2k}{k}$  est log-convexe avec  $\binom{2k}{k}$  est le coefficient binomial central. Pour  $s = 2$ , c'est la suite A082760.
2. La suite définie par :  $z_n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s B_k$  est log-convexe avec  $B_k$  est le nombre de Bell. Pour  $s = 2$ , c'est la suite A207864.
3. La suite définie par :  $t_n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s C_k$  est log-convexe avec  $C_k$  est le nombre de Catalan ;
4. La suite définie par :  $w_n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s M_k$  est log-convexe avec  $M_k$  est le nombre de Motzkin.

# Chapitre 4

## Unimodalité des transversales associées aux coefficients $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux

Ce chapitre est dédié à l'étude de la préservation de la log-concavité des  $q$ -analogues et  $p, q$ -analogues des transversales des coefficients  $q$ -bi<sup>s</sup>nomiaux

Nous allons établir que les suites parcourant les transversales du  $q$ -triangle de Pascal généralisé  $(\begin{smallmatrix} n-\alpha k \\ u+r k \end{smallmatrix})_s^{(p)}$ ,  $p \geq 0$  et  $k = 0, 1, 2 \dots$ ) sont log-concaves et donc unimodales. C'est l'objet du travail de la référence [4].

Nous reprenons de manière succincte avec quelques compléments l'Exemple 32. Le premier résultat, qui concerne l'unimodalité de suites extraites du triangle de Pascal, autres que la suite des coefficients binomiaux est dû Tanny et Zuker [72]. Ils ont démontré que la suite des termes  $\binom{n-k}{k}$  est unimodale. Cette dernière est fortement liée aux nombres de Fibonacci. Benoumhani [24] a montré l'unimodalité de la suite  $\left\{ \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \right\}_k$ , suite liée aux nombres de Lucas : suite compagnon de la suite de Fibonacci ; Belbachir et Bencherif [12] ont repris ce dernier travail et ont explicité les modes comme complément au travail de Benoumhani. Ensuite, Belbachir et Bencherif [13] ont prouvé que les suites  $\left\{ 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} \right\}_k$  et  $\left\{ 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \right\}_k$  liés à la suite de Pell et sa suite compagnon, la suite de Pell-Lucas, respectivement, fournissent des suites unimodales. Puis vient le travail de Belbachir, Bencherif et Szalay [14] qui généralise certains résultats relatifs à l'unimodalité

des suites généralisant celles mentionnées ci-dessus. Dans [19], Belbachir et Szalay ont établi que les suites parcourant toute transversale du triangle de Pascal  $\left\{ \binom{n+\alpha k}{u+\beta k} \right\}_k$  sont log concaves et donc unimodales. Pour le concept des transversales du triangle de Pascal et l'interprétation combinatoire de  $\binom{u+\alpha k}{v+\beta k}$ , nous référons aux travaux de Belbachir, Komatsu et Szalay [17, 18], le second complétant le premier par le calcul de la fonction génératrice de la suite récurrente associée aux transversales. Toujours dans [19], les auteurs ont établi un résultat analogue pour les éléments du triangle de Pascal généralisé (c'est à dire le triangle issu des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux)  $\binom{u+\alpha k}{v+\beta k}_s$ . Dans un autre registre, Belbachir et Szalay [20] établissent que toute suite d'entiers parcourant une transversale de la pyramide de Pascal est log-concave, par conséquent unimodale. Notre objectif est d'établir que chaque transversale parcourant le  $q$ -triangle de Pascal généralisé (constitué par les  $q$ -analogues des coefficients bi<sup>s</sup>nomiaux) est log-concave, et donc unimodale.

La log-concavité et la  $q$ -log-concavité des coefficients  $q$ -binomiaux ayant été établies par Butler [28].

**Définition 52** *Nous assimilons les éléments du triangle de Pascal généralisé au treillis  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  par l'application  $(n, k) \mapsto \binom{n}{k}_s$  avec la convention  $\binom{n}{k}_s = 0$  pour  $k > sn$  ou  $k < 0$ .*

*Soit  $\beta \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$  avec  $s\alpha + \beta > 0$ . Alors le point de la grille  $(n, 0)$  et la direction  $(\beta, \alpha)$  définissent une transversale du triangle de Pascal généralisé qui porte les éléments*

$$\binom{n - \alpha k}{u + \beta k}_s, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{sn - u}{s\alpha + \beta} \right\rfloor. \quad (4.1)$$

Quand  $\beta \geq 2$ , on introduit les transversales *intermédiaires* d'ordre  $u$  ( $u = 1, 2, \dots, \beta - 1$ ).

Comme mentionné ci-dessus, notre objectif est d'examiner la log-concavité des transversales finies relatives au  $q$ -triangle de Pascal généralisé.

Il est bien établi qu'étant donnés  $\{a_k\}$  et  $\{b_k\}$  deux suites log-concaves, alors la suite  $\{c_k\}$  donnée par la convolution ordinaire

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}, \quad k = 0, 1, \dots$$

est aussi log-concave. (Voir l'exemple 17-3 du chapitre 2)

Ce résultat peut être étendu à

**Lemme 53** Soient  $\{a_j^{(1)}\}, \{a_j^{(2)}\}, \dots, \{a_j^{(m)}\}$ ,  $m$  suites log-concaves, alors la suite  $\{a_k\}$  donnée par

$$a_k = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_m=k} a_{j_1}^{(1)} a_{j_2}^{(2)} \cdots a_{j_m}^{(m)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.2)$$

est aussi log-concave.

Maintenant nous sommes outillés pour donner le résultat principal du chapitre.

**Théorème 54** Soit  $s$  un nombre strictement positif. Les  $s + 1$   $q$ -déformations des coefficients  $bi^s$  nomiaux situées le long d'une transversale du  $s$ -triangle de Pascal associé

$$\begin{bmatrix} n - \alpha k \\ u + \beta k \end{bmatrix}_s^{(0)}, \begin{bmatrix} n - \alpha k \\ u + \beta k \end{bmatrix}_s^{(1)}, \dots, \begin{bmatrix} n - \alpha k \\ u + \beta k \end{bmatrix}_s^{(s)}$$

sont log-concaves et donc unimodales.

**Preuve.** La preuve est la même pour chaque  $p = 0, \dots, s$ , on va l'établir pour  $p = 0$ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n - \alpha k \\ u + \beta k \end{bmatrix}_s^{(0)} &= \sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=u+\beta k} q^{\sum_{l=1}^{s-1} (n-\alpha k-j_l)j_{l+1}} \begin{bmatrix} n - \alpha k \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=u+\beta k} a_{j_1}^{(1)} a_{j_2}^{(2)} \cdots a_{j_s}^{(s)}, \end{aligned}$$

où  $a_{j_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} n-\alpha k \\ j_1 \end{bmatrix}$ ,  $a_{j_2}^{(2)} = q^{(n-\alpha k-j_1)j_2} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $a_{j_s}^{(s)} = q^{(n-\alpha k-j_{s-1})j_s} \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix}$ .

Alors, en utilisant la log-concavité du coefficient  $q$ -binomial pour  $q \geq 1$  (voir Butler [28]), les suites  $\{a_{j_1}^{(1)}\}, \{a_{j_2}^{(2)}\}, \dots, \{a_{j_s}^{(s)}\}$  sont log-concaves. Donc, par le Lemme 53, la transformation

$$\sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=u+\beta k} a_{j_1}^{(1)} a_{j_2}^{(2)} \cdots a_{j_s}^{(s)}$$

est log-concave, et donc unimodale par le Théorème 28 (voir, Chapitre 1).  $\square$

**Corollaire 55** Soit  $s$  un nombre strictement positif. Les  $(s + 1)$  suites d'argument  $k$  :

1.  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)}, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(1)}, \dots, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(s)}$ ,
2.  $\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)}, \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_s^{(1)}, \dots, \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_s^{(s)}$ ,

sont log-concaves et donc unimodales. Ce sont respectivement, les lignes et les diagonales principales des  $(s + 1)$  triangles associés aux coefficients  $q$ - $bi^s$  nomiaux.

# Chapitre 5

## Combinatoire et monotonie des hyper-suites

Soit  $r \geq 0$ , Zheng et Liu [85] ont donné les propriétés des nombres hyperfibonacci  $F_n^{[r]}$  et des nombres hyperlucas  $L_n^{[r]}$ . Ensuite, ils ont étudié la log-concavité (log-convexité) de la suite de ces nombres avec des généralisations.

Les formes de Binet des suites de Fibonacci généralisée et de Lucas généralisée sont respectivement comme suit :

$$U_n = \frac{\tau^n - (-1)^n \tau^{-n}}{\sqrt{\Delta}}, \quad V_n = \tau^n + (-1)^n \tau^{-n}; \quad (5.1)$$

avec  $\Delta = p^2 + 4$ ,  $\tau = (p + \sqrt{\Delta})/2$ , et  $p \geq 1$ . Les suites  $\{U_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  vérifient la relation de récurrence suivante :

$$W_{n+1} = pW_n + W_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad \text{avec } U_0 = 0, U_1 = 1, V_0 = 2, V_2 = p; \quad (5.2)$$

Pour un entier positif  $r$ , les nombres hyperfibonacci généralisé  $U_n^{[r]}$  et hyperlucas généralisé  $V_n^{[r]}$  sont définis comme suit :

$$U_n^{[r]} = \sum_{k=0}^n U_k^{[r-1]} \quad \text{et} \quad V_n^{[r]} = \sum_{k=0}^n V_k^{[r-1]}, \quad (5.3)$$

avec  $U_n^{(0)} = U_n$  et  $V_n^{(0)} = V_n$ . Pour d'autres propriétés de  $\{U_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{V_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$ , voir Cao et Zhao [30], Liu et Zhao [58].

Le résultat suivant est dû à Zheng et Liu [85].

**Théorème 56** *Pour tous  $r \geq 1$  et  $p \geq 1$ , les suites  $\{U_n^{[r]}\}_{n \geq 1}$  et  $\{V_n^{[r]}\}_{n \geq 3}$  sont log-concaves.*

Ce théorème nous permet de raffiner certains résultats pour  $p = 2$ . Premièrement, nous allons proposer des résultats sur la log-concavité (log-convexité) pour le cas où  $p = 2$  ce qui correspond aux suites des nombres hyperpell et hyperpell-lucas. Ensuite, nous allons établir d'autres résultats duaux concernant les suites des nombres hyperjacobsthal et hyperjacobsthal-lucas.

## 5.1 Combinatoire des suites hyperpell et hyperjacobsthal

Dans cette section, on introduit le concept des nombres hyperpell, hyperjacobsthal et des suites compagnons associées.

**Définition 57** *Pour un entier positif  $r$ , les nombres hyperpell  $P_n^{[r]}$  et hyperpell-lucas  $Q_n^{[r]}$  sont définis comme suit :*

$$P_n^{[r]} = \sum_{k=0}^n P_k^{[r-1]}, \quad \text{avec } P_n^{(0)} = P_n,$$

$$Q_n^{[r]} = \sum_{k=0}^n Q_k^{[r-1]}, \quad \text{avec } Q_n^{(0)} = Q_n,$$

où  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  sont les suites de Pell et Pell-Lucas respectivement.

Les valeurs initiales de  $\{P_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  sont données par.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_n^{[1]}$	0	1	3	8	20	49	119	288	696	1681	3959
$Q_n^{[1]}$	2	4	10	24	58	140	338	816	1970	4756	11482

Table 7 : Les valeurs initiales de  $\{P_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$ .

**Définition 58** Pour un entier positif  $r$ , les nombres hyperjacobsthal  $J_n^{[r]}$  et hyperjacobsthal-lucas  $j_n^{[r]}$  sont définis comme suit :

$$J_n^{[r]} = \sum_{k=0}^n J_k^{[r-1]}, \quad \text{avec } J_n^{(0)} = J_n,$$

$$j_n^{[r]} = \sum_{k=0}^n j_k^{[r-1]}, \quad \text{avec } j_n^{(0)} = j_n,$$

où  $\{J_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{j_n\}_{n \geq 0}$  sont les suites de Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas, respectivement.

Les valeurs initiales de  $\{J_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{j_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  sont données dans le tableau :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$J_n^{[1]}$	0	1	2	5	10	21	42	85	170	341	682
$j_n^{[1]}$	2	3	8	15	32	63	128	255	512	1023	2048

Table 8 : les valeurs initiales de  $\{J_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{j_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$ .

Maintenant, nous rappelons quelques propriétés pour les suites de Pell, de Jacobsthal et des suites compagnons associées. Les formules de Binet de  $P_n$ ,  $J_n$ ,  $Q_n$ ,  $j_n$  sont :

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (-1)^n(1 + \sqrt{2})^{-n}}{2\sqrt{2}}, \quad Q_n = (1 + \sqrt{2})^n + (-1)^n(1 + \sqrt{2})^{-n}, \quad (5.4)$$

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad j_n = 2^n + (-1)^n, \quad (5.5)$$

respectivement.

Les suites  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{J_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{j_n\}_{n \geq 0}$  satisfont respectivement les relations de récurrence suivantes :

$$V_n = 2V_{n-1} + V_{n-2}, \quad (n \geq 2), \quad (5.6)$$

$$W_n = W_{n-1} + 2W_{n-2}, \quad (n \geq 2). \quad (5.7)$$

Des relations (5.4) et (5.5), il s'ensuit que :

$$P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = (-1)^{n-1},$$

$$Q_n^2 - Q_{n-1}Q_{n+1} = 8(-1)^n. \quad (5.8)$$

$$J_n^2 - J_{n-1}J_{n+1} = (-1)^{n-1}2^{n-1}, \quad (5.9)$$

$$j_n^2 - j_{n-1}j_{n+1} = 9(-1)^n2^{n-1}, \quad (5.10)$$

et par induction, on établit

$$P_n \geq n, \quad Q_n \geq n, \quad (n \geq 1), \quad (5.11)$$

$$J_n \geq n - 1, \quad j_n \geq n, \quad (n \geq 1), \quad (5.12)$$

$$J_{n+1} = 2J_n + (-1)^n, \quad j_{n+1} = 2j_n - 3(-1)^n; \quad (n \geq 0). \quad (5.13)$$

### Fonctions génératrices des suites hyperpell et hyperjacobsthal et de leurs suites compagnons

Notons par  $G_P(t)$ ,  $G_Q(t)$ ,  $G_J(t)$  et  $G_j(t)$  les fonctions génératrices des suites de Pell, Jacobsthal et leurs suites compagnons respectivement. Elles sont données, respectivement, par :

$$G_P(t) = \frac{t}{1 - 2t - t^2} \quad \text{et} \quad G_Q(t) = \frac{2 - 2t}{1 - 2t - t^2}, \quad (5.14)$$

$$G_J(t) = \frac{t}{1 - t - 2t^2} \quad \text{et} \quad G_j(t) = \frac{2 - t}{1 - t - 2t^2}. \quad (5.15)$$

Donc, on peut établir la fonction génératrice des suites hyperpell, hyperjacobsthal et leurs suites compagnon. Il suffit d'utiliser les relations de récurrence suivantes :

$$P_n^{[r]} = P_{n-1}^{[r]} + P_n^{[r-1]}, \quad (5.16)$$

$$Q_n^{[r]} = Q_{n-1}^{[r]} + Q_n^{[r-1]}, \quad (5.17)$$

$$J_n^{[r]} = J_{n-1}^{[r]} + J_n^{[r-1]}, \quad (5.18)$$

$$j_n^{[r]} = j_{n-1}^{[r]} + j_n^{[r-1]}. \quad (5.19)$$

En utilisant les relations précédentes, nous obtenons les résultats suivants

**Théorème 59** *On a :*

$$G_P^{[r]}(t) = \frac{t}{(1 - 2t - t^2)(1 - t)^r}, \quad (5.20)$$

$$G_Q^{[r]}(t) = \frac{2 - 2t}{(1 - 2t - t^2)(1 - t)^r}, \quad (5.21)$$

$$G_J^{[r]}(t) = \frac{t}{(1-t-2t^2)(1-t)^r}, \quad (5.22)$$

$$G_j^{[r]}(t) = \frac{2-t}{(1-t-2t^2)(1-t)^r}, \quad (5.23)$$

où  $G_P^{[r]}(t)$ ,  $G_Q^{[r]}(t)$ ,  $G_J^{[r]}(t)$  et  $G_j^{[r]}(t)$  sont les fonctions génératrices des suites hyperpell, hyperpell-lucas, hyperjacobsthal et hyperjacobsthal-lucas respectivement.

**Proposition 60** *Nous avons les relations de convolution suivantes*

$$\begin{aligned} G_P^{[r]}(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^{n+1} \right) \left( \sum_{r \leq k} \binom{n}{k} t^k \right), \\ G_Q^{[r]}(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n \right) \left( \sum_{r \leq k} \binom{n}{k} t^k \right), \\ G_J^{[r]}(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} J_n t^{n+1} \right) \left( \sum_{r \leq k} \binom{n}{k} t^k \right), \\ G_j^{[r]}(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} j_n t^n \right) \left( \sum_{r \leq k} \binom{n}{k} t^k \right). \end{aligned}$$

**Preuve.** Il suffit d'utiliser les identités (5.14) et (5.15) □

Dans les deux prochaines sections, on va s'intéresser à la log-concavité (log-convexité) des suites hyperpell  $\{P_k^{[r]}\}_k$ , hyperjacobsthal  $\{J_k^{[r]}\}_k$  et leurs suites compagnon  $\{Q_k^{[r]}\}_k$  et  $\{j_k^{[r]}\}_k$  respectivement. De plus, on va établir la  $q$ -log-concavité de quelques suites liées à ces suites.

## 5.2 Log-concavité et log-convexité des suites hyperpell et hyperpell-lucas

Cette section a fait l'objet du travail de la référence [5].

**Théorème 61** *Les suites  $\{P_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  sont log-concaves pour  $r \geq 1$  et  $r \geq 2$  respectivement.*

**Preuve.** On peut vérifier que

$$P_n^{[1]} = \frac{1}{4}(Q_{n+1} - 2) \quad \text{et} \quad Q_n^{[1]} = 2P_{n+1}. \quad (5.24)$$

Pour  $n = 1$ ,  $(P_n^{[1]})^2 - P_{n-1}^{[1]}P_{n+1}^{[1]} = 1 > 0$ .

Quand  $n \geq 2$ , il s'ensuit par (5.6) et (5.8) que

$$\begin{aligned} (P_n^{[1]})^2 - P_{n-1}^{[1]}P_{n+1}^{[1]} &= \frac{1}{16} [(Q_{n+1} - 2)^2 - (Q_n - 2)(Q_{n+2} - 2)] \\ &= \frac{1}{16} (Q_{n+1}^2 - Q_n Q_{n+2} - 4Q_{n+1} + 2Q_n + 2Q_{n+2}) \\ &= \frac{1}{4} (2(-1)^{n-1} + Q_{n+1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Alors  $\{P_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  est log-concave. Par la convolution ordinaire de suites log-concaves et l'induction sur  $r$ , on aura ainsi, pour  $r \geq 2$  que la suite  $\{P_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  est log-concave.

Par (5.24) et (5.6), il s'ensuit aussi que

$$(Q_n^{[1]})^2 - Q_{n-1}^{[1]}Q_{n+1}^{[1]} = 4(P_{n+1}^2 - P_n P_{n+2}) = 4(-1)^n = \pm 4.$$

Donc  $\{Q_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  n'est pas log-concave.

On vérifie aussi que

$$Q_n^{[2]} = \frac{1}{2}(Q_{n+2} - 2) = 2P_{n+1}^{[1]}. \quad (5.25)$$

Alors  $\{Q_n^{[2]}\}_{n \geq 0}$  est log-concave. Par la convolution ordinaire de suites log-concaves et l'induction sur  $r$ , la suite  $\{Q_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  ( $r \geq 3$ ) est log-concave.  $\square$

**Corollaire 62** Les suites  $\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k^{[r]} \right\}_{n \geq 0}$  et  $\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Q_k^{[r]} \right\}_{n \geq 0}$  sont log-concaves, pour  $r \geq 1$  et  $r \geq 2$  respectivement.

**Théorème 63** Soient

$$T_n = (P_n^{[1]})^2 - P_{n-1}^{[1]}P_{n+1}^{[1]}, \quad R_n = (Q_n^{[2]})^2 - Q_{n-1}^{[2]}Q_{n+1}^{[2]}, \quad (n \geq 1).$$

Alors  $\{T_{2n}\}_{n \geq 1}$ ,  $\{R_{2n+1}\}_{n \geq 0}$  sont log-concaves, et  $\{T_{2n+1}\}_{n \geq 0}$  et  $\{R_{2n}\}_{n \geq 1}$  sont log-convexes.

C'est la log-concavité et la log-convexité d'ordre deux, on peut se référer au travail de Peter. McNamara et B. Sagan [60].

**Preuve.** En utilisant (5.25) puis (5.8), on a

$$(Q_n^{[2]})^2 - Q_{n-1}^{[2]}Q_{n+1}^{[2]} = 2(-1)^n + Q_{n+1},$$

ainsi, pour  $n \geq 1$ ,

$$T_n = \frac{1}{4} (2(-1)^{n-1} + Q_n) \quad \text{et} \quad R_n = 2(-1)^n + Q_{n+1},$$

par suite, pour  $n \geq 1$ , on obtient

$$Q_{2n}^2 - Q_{2n-2}Q_{2n+2} = -32, \quad Q_{2n+1}^2 - Q_{2n-1}Q_{2n+3} = 32.$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} T_{2n}^2 - T_{2(n-1)}T_{2(n+1)} &= \frac{1}{16} (Q_{2n}^2 - Q_{2n-2}Q_{2n+2} - 4Q_{2n} + 2Q_{2n-2} + 2Q_{2n+2}) \\ &= 4(Q_{2n} - 4) > 0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{2n+1}^2 - R_{2n-1}R_{2n+3} &= (Q_{2n+2}^2 - Q_{2n}Q_{2n+2} - 4Q_{2n+2} + 2Q_{2n} + 2Q_{2n+4}) \\ &= 64(Q_{2n+2} - 4) > 0. \end{aligned}$$

Alors  $\{T_{2n}\}_{n \geq 1}$ , et  $\{R_{2n+1}\}_{n \geq 0}$  sont log-concaves.

De même, on obtient

$$T_{2n+1}^2 - T_{2n-1}T_{2n+3} = -\frac{1}{2}Q_{2n+1} < 0,$$

et

$$R_{2n}^2 - R_{2(n-1)}R_{2(n+1)} = -8Q_{2n+1} < 0.$$

Alors  $\{T_{2n+1}\}_{n \geq 0}$ , et  $\{R_{2n}\}_{n \geq 1}$  sont log-convexes. □

**Corollaire 64** Les suites  $\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_{2k} \right\}_{n \geq 0}$  et  $\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} R_{2k+1} \right\}_{n \geq 0}$  sont log-concaves.

**Preuve.** Par la convolution ordinaire de suites log-concaves. □

**Corollaire 65** Les suites  $\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_{2k+1} \right\}_{n \geq 0}$  et  $\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} R_{2k} \right\}_{n \geq 0}$  sont log-convexes.

**Preuve.** Par la convolution binomial de suites log-convexes.  $\square$

**Lemme 66** Soit  $a_n := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{k+1}$ , où  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est la suite de Pell. Alors  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence suivante

$$a_n = 3a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k \quad \text{and} \quad a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

**Preuve.** Considérons  $b_n := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k$ , où  $\{P_n\}_{n \geq -1}$  est la suite de Pell étendue à  $P_{-1} = 1$ .

En utilisant la formule de Pascal et la relation de récurrence associée à la suite de Pell dans le développement  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{k+1}$ , on obtient  $a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1}$ , ainsi que  $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ . Un procédé itératif de cette dernière relation donne  $a_n = 3a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k$  (avec  $b_0 = 0$  et  $a_0 = 1$ ), d'où l'on tire  $a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$ .  $\square$

**Théorème 67** La suite  $\left\{ nQ_n^{[1]} \right\}_{n \geq 0}$  est log-concave, et  $\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Q_k^{[1]} \right\}_{n \geq 0}$  est log-convexe.

**Preuve.** Soient

$$S_n := n^2 (Q_n^{[1]})^2 - (n^2 - 1)Q_{n-1}^{[1]}Q_{n+1}^{[1]} \quad \text{et} \quad K_n := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Q_k^{[1]},$$

avec la convention  $K_{<0} = 0$ .

Par (5.31), on aura

$$\begin{aligned} S_n &= 4(n^2 - 1)(-1)^n + (Q_n^{[1]})^2 \\ &= 4[(n^2 - 1)(-1)^n + P_{n+1}^2] \\ &\geq 4[(n^2 - 1)(-1)^n + (n+1)^2] > 0. \end{aligned}$$

Alors  $\left\{ nQ_n^{[1]} \right\}_{n \geq 0}$  est log-concave.

En utilisant le Lemme 66, on vérifie que :

$$K_n = 4K_{n-1} - 2K_{n-2} \tag{5.26}$$

La forme de Binet associée est

$$K_n = \frac{(1 + \sqrt{2}) \alpha^n - (1 - \sqrt{2}) \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \text{avec } \alpha, \beta = 2 \pm \sqrt{2},$$

ce qui assure

$$K_n^2 - K_{n-1}K_{n+1} = -2^{n+1} < 0.$$

Ainsi  $\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Q_k^{[1]} \right\}_{n \geq 0}$  est log-convexe. □

**Remarque 68** Les termes de la suite  $\{K_n\}_n$  vérifient  $K_n = 2^{(n+2)/2} P_{n+1}$  pour  $n$  pair, et  $K_n = 2^{(n-1)/2} Q_{n+1}$  pour  $n$  impair.

Maintenant, nous donnons un résultat lié au concept de la "log-balancé".

**Théorème 69** Les suites  $\left\{ n! P_n^{[1]} \right\}_{n \geq 0}$  et  $\left\{ n! Q_n^{[2]} \right\}_{n \geq 0}$  sont log-balancées.

**Preuve.** Par le Théorème 61, et dans le but de montrer la propriété log-balancée des suites  $\left\{ n! P_n^{[1]} \right\}_{n \geq 0}$  et  $\left\{ n! Q_n^{[2]} \right\}_{n \geq 0}$  on a juste besoin de montrer qu'elles sont log-convexes. Du Théorème 61 on déduit que

$$(P_n^{[1]})^2 - P_{n-1}^{[1]} P_{n+1}^{[1]} = \frac{1}{4} (2(-1)^{n-1} + Q_{n+1}), \quad (5.27)$$

et de la preuve du Théorème 72 que

$$(Q_n^{[2]})^2 - Q_{n-1}^{[2]} Q_{n+1}^{[2]} = 2(-1)^n + Q_{n+1}. \quad (5.28)$$

Soient

$$\begin{aligned} M_n &:= n (P_n^{[1]})^2 - (n+1) P_{n-1}^{[1]} P_{n+1}^{[1]}, \\ B_n &:= n (Q_n^{[2]})^2 - (n+1) Q_{n-1}^{[2]} Q_{n+1}^{[2]}, \end{aligned}$$

des relations (5.25), (5.27) et (5.28), on a

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{(n+1)}{4} (2(-1)^{n-1} + Q_{n+1}) - \frac{1}{4} (Q_{n+1} - 2)^2, \\ B_n &= (n+1) (2(-1)^n + Q_{n+1}) - \frac{1}{4} (Q_{n+2} - 2)^2. \end{aligned}$$

Il est clair que  $B_n \leq 0$  pour  $n = 0, 1, 2$ . On établit par récurrence pour  $n \geq 1$ , que  $Q_n \geq n + 1$ . Ceci donne

$$B_n \leq (Q_{n+1} - 1) (2(-1)^n + Q_{n+1}) - \frac{1}{4}(2Q_{n+1} + Q_n - 2)^2 < 0.$$

De même,  $M_n \leq 0$  pour  $n = 2$  et pour  $n \geq 3$ ,  $Q_n \geq n + 6$ . Ce qui entraîne  $n + 1 \leq Q_{n+1} - 6$ , ainsi

$$\begin{aligned} M_n &\leq \frac{1}{4} [(Q_{n+1} - 6) (2(-1)^{n-1} + Q_{n+1}) - (Q_{n+1} - 2)^2] \\ &= \frac{1}{4} [(-2 + 2(-1)^{n-1}) Q_{n+1} - 4 - 12(-1)^{n-1}] < 0. \end{aligned}$$

On conclut que  $\{n!P_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{n!Q_n^{[2]}\}_{n \geq 0}$  sont log-convexes. Comme de plus les suites  $\{P_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n^{[2]}\}_{n \geq 0}$  sont log-concaves, ainsi, les suites  $\{n!P_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{n!Q_n^{[2]}\}_{n \geq 0}$  sont log-balancées.  $\square$

### 5.3 $q$ -log-concavité des suites hyperpell et hyperpell-lucas

Maintenant, on traite de la  $q$ -log-concavité des suites hyperpell et hyperpell-lucas.

**Théorème 70** *Définissons les polynômes en  $q$  :*

$$P_{n,r}(q) = \sum_{k=0}^n P_k^{[r]} q^k \quad \text{et} \quad Q_{n,r}(q) = \sum_{k=0}^n Q_k^{[r]} q^k \quad (r \geq 2).$$

Alors  $P_{n,r}(q)$  ( $r \geq 1$ ) et  $Q_{n,r}(q)$  ( $r \geq 2$ ) sont  $q$ -log-concaves.

**Preuve.** Pour  $n \geq 1$ ,  $r \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
P_{n,r}^2(q) - P_{n-1,r}(q)P_{n+1,r}(q) &= \left( \sum_{k=0}^n P_k^{[r]} q^k \right)^2 - \left( \sum_{k=0}^{n-1} P_k^{[r]} q^k \right) \left( \sum_{k=0}^{n+1} P_k^{[r]} q^k \right) \\
&= \left( \sum_{k=0}^n P_k^{[r]} q^k \right)^2 \\
&\quad - \left( \sum_{k=0}^n P_k^{[r]} q^k - P_n^{[r]} q^n \right) \left( \sum_{k=0}^n P_k^{[r]} q^k + P_{n+1}^{[r]} q^{n+1} \right) \\
&= \left( P_n^{[r]} q^n - P_{n+1}^{[r]} q^{n+1} \right) \sum_{k=0}^n P_k^{[r]} q^k + P_n^{[r]} P_{n+1}^{[r]} q^{2n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \left( P_k^{[r]} P_n^{[r]} - P_{k-1}^{[r]} P_{n+1}^{[r]} \right) q^{k+n}.
\end{aligned}$$

Pour  $n \geq 1$  et  $r \geq 2$ , par un simple calcul, on a

$$Q_{n,r}^2(q) - Q_{n-1,r}(q)Q_{n+1,r}(q) = \sum_{k=1}^n \left( Q_k^{[r]} Q_n^{[r]} - Q_{k-1}^{[r]} Q_{n+1}^{[r]} \right) q^{k+n} + Q_n^{[r]} q^n.$$

De la log-concavité de  $\{P_n^{[r]}\}$  et  $\{Q_n^{[r]}\}$  pour  $r \geq 1$  et  $r \geq 2$  respectivement et par le Théorème 61, les polynômes  $P_{n,r}(q)$  ( $r \geq 1$ ) et  $Q_{n,r}(q)$  ( $r \geq 2$ ) ont des coefficients positifs, donc ils sont  $q$ -log-concaves.  $\square$

## 5.4 Log-concavité et log-convexité des suites hyperjacobsthal et hyperjacobsthal-lucas

Cette section est consacré aux résultats établis dans notre travail [?].

**Théorème 71** *Les suites  $\{J_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  et  $\{j_n^{[r]}\}_{n \geq 1}$  pour  $r \geq 2$ , et  $\{j_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  pour  $r \geq 3$  sont log-concaves.*

**Preuve.** On démontre que

$$J_n^{[1]} = \frac{1}{2} (J_{n+2} - 1), \quad j_n^{[1]} = \frac{1}{2} (j_{n+2} - 1). \quad (5.29)$$

$$J_n^{[2]} = \frac{1}{4} (J_{n+4} - 2n - 5), \quad j_n^{[2]} = \frac{1}{4} (j_{n+4} - 2n - 9) \quad (5.30)$$

Pour  $n = 1$ ,  $(J_n^{[2]})^2 - J_{n-1}^{[2]}J_{n+1}^{[2]} = 1 > 0$ . Et pour  $n \geq 2$ , les relations (5.30), (5.13) et (5.7)-(5.9) donnent

$$\begin{aligned} (J_n^{[2]})^2 - J_{n-1}^{[2]}J_{n+1}^{[2]} &= \frac{1}{16} [(J_{n+4} - (2n+5))^2 - (J_{n+3} - (2n+3))(J_{n+5} - (2n+7))] \\ &= \frac{1}{16} (J_{n+4}^2 - J_{n+3}J_{n+5} - 2(2n+5)J_{n+4} \\ &\quad + (2n+7)J_{n+3} + (2n+3)J_{n+5} + 4) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16} (J_{n+4}^2 - J_{n+3}J_{n+5} + 4(2n+3)J_{n+1} - 8J_{n+2} + 4) \\ &= \frac{1}{4} ((-1)^{n+1}2^{n+1} + (2n+3)J_{n+1} - 2J_{n+2} + 1) \\ &= \frac{1}{4} ((-1)^{n+1}2^{n+1} + (2n-1)J_{n+1} - 2(-1)^{n+1} + 1) \\ &> \frac{1}{4} ((-1)^{n+1}2^{n+1} + (2n-1)J_{n+1} - 1) \\ &= \frac{1}{4} \left( (-1)^{n+1}2^{n+1} + (2n-1)\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Il y aura deux cas, si  $n$  est pair, alors

$$\begin{aligned} (J_n^{[2]})^2 - J_{n-1}^{[2]}J_{n+1}^{[2]} &= -2^{n+1} + (2n-1)\frac{2^{n+1} + 1}{3} - 1 \\ &= \frac{2n-4}{12}(2^{n+1} + 1) \\ &\geq 0; \end{aligned}$$

sinon

$$\begin{aligned} (J_n^{[2]})^2 - J_{n-1}^{[2]}J_{n+1}^{[2]} &= 2^{n+1} + (2n-1)\frac{2^{n+1} - 1}{3} - 1 \\ &= \frac{2n+2}{12}(2^{n+1} - 1) \\ &\geq 10. \end{aligned}$$

Ainsi  $\{J_n^{[2]}\}_{n \geq 0}$  est log-concave. Donc, par (3)-Exemple 17 et l'induction sur  $r$ ,  $\{J_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  ( $r \geq 2$ ) est log-concave.

Par (5.30), (5.13) et (5.7)-(5.10) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (j_n^{[2]})^2 - j_{n-1}^{[2]}j_{n+1}^{[2]} &= \frac{1}{16} [(j_{n+4} - (2n+9))^2 - (j_{n+3} - (2n+7))(j_{n+5} - (2n+11))] \\ &= \frac{1}{16} [j_{n+4}^2 - j_{n+3}j_{n+5} + 4(2n+7)j_{n+1} - 8j_{n+2} + 4] \\ &= \frac{1}{4} [9(-1)^{n+2}2^{n+1} + (2n+3)j_{n+1} + 6(-1)^{n+1} + 1]. \end{aligned}$$

Quand  $n = 1$ , on aura

$$(j_n^{[2]})^2 - j_{n-1}^{[2]}j_{n+1}^{[2]} = -1 < 0,$$

et pour  $n \geq 2$ , on a

$$\begin{aligned} (j_n^{[2]})^2 - j_{n-1}^{[2]}j_{n+1}^{[2]} &= \frac{1}{4} [9(-1)^{n+2}2^{n+1} + (2n+3)j_{n+1} + 6(-1)^{n+1} + 1] \\ &= \frac{1}{4} [9(-1)^{n+2}2^{n+1} + (2n+3)2^{n+1} + (2n+9)(-1)^{n+1} + 1] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Il y aura deux cas. si  $n$  est pair, alors

$$(j_n^{[2]})^2 - j_{n-1}^{[2]}j_{n+1}^{[2]} = 9 \cdot 2^{n+1} + (2n+3)(2^{n+1} - 1) - 5 > 0;$$

sinon

$$\begin{aligned} (j_n^{[2]})^2 - j_{n-1}^{[2]}j_{n+1}^{[2]} &= -9 \cdot 2^{n+1} + (2n+3)2^{n+1} + 2n + 10 \\ &= (2n-6)2^{n+1} + 2n + 10 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $\{j_n^{[2]}\}_{n \geq 1}$  est log-concave.

On vérifie que

$$j_n^{[3]} = \frac{1}{8} (j_{n+6} - 2(n+1)(n+9) - 31). \quad (5.34)$$

En utilisant (5.34), (5.7) et (5.10), on obtient

$$\begin{aligned} &(j_n^{[3]})^2 - j_{n-1}^{[3]}j_{n+1}^{[3]} \\ &= \frac{1}{64} [j_{n+6} - ((2n+2)(n+9) + 31)]^2 - \frac{1}{64} [j_{n+5} - (2n(n+8) + 31)] \\ &\quad [j_{n+7} - ((2n+4)(n+10) + 31)] \\ &= \frac{1}{64} [j_{n+6}^2 - j_{n+5}j_{n+7} - 2((2n+2)(n+9) + 31)j_{n+6} + ((2n+4)(n+10) + 31)j_{n+5} \\ &\quad + (2n(n+8) + 31)j_{n+7} + ((2n+2)(n+9) + 31)^2 - (2n(n+8) + 31) \\ &\quad ((2n+4)(n+10) + 31)] \\ &= \frac{1}{64} [j_{n+6}^2 - j_{n+5}j_{n+7} + 2(2n(n+8) + 31)j_{n+5} - 2((2n+2)(n+9) + 31)j_{n+4} \\ &\quad - (4n+18)j_{n+6} + (4n+22)j_{n+5} + ((2n+2)(n+9) + 31)^2 - (2n(n+8) + 31) \\ &\quad - ((2n+4)(n+10) + 31)] \\ &= \frac{1}{64} [j_{n+6}^2 - j_{n+5}j_{n+7} + 4(2n(n+8) + 31)j_{n+3} - 4(4n+18)j_{n+4} + 4j_{n+5} \\ &\quad + ((2n+2)(n+9) + 31)^2 - (2n(n+8) + 31)((2n+4)(n+10) + 31)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{64} [j_{n+6}^2 - j_{n+5}j_{n+7} + 4(2n(n+8) + 33)j_{n+3} - 4(4n+17)j_{n+4} \\
&\quad + (8n^2 + 80n + 200)] \\
&= \frac{1}{64} [9(-1)^{n+4}2^{n+5} + 4(2n(n+8) + 33)j_{n+3} - 4(4n+17)j_{n+4} \\
&\quad + (8n^2 + 80n + 200)] \\
&= \frac{1}{16} [-9(-1)^{n+3}2^{n+3} + (2n(n+4) - 1)j_{n+3} + 3(4n+17)(-1)^{n+3} \\
&\quad + (2n^2 + 20n + 50)]. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Il y a deux cas. Pour  $n$  pair, on a

$$\begin{aligned}
(j_n^{[3]})^2 - j_{n-1}^{[3]}j_{n+1}^{[3]} &= \frac{1}{16} [9 \cdot 2^{n+3} + (2n(n+4) - 1)(2^{n+3} - 1) - 3(4n+17) + (2n^2 + 20n + 50)] \\
&= \frac{1}{16} [8 \cdot 2^{n+3} + 2n(n+4)2^{n+3}] \\
&> 0;
\end{aligned}$$

sinon

$$\begin{aligned}
(j_n^{[3]})^2 - j_{n-1}^{[3]}j_{n+1}^{[3]} &= \frac{1}{16} [-9 \cdot 2^{n+3} + (2n(n+4) - 1)(2^{n+3} + 1) + 3(4n+17) + (2n^2 + 20n + 50)] \\
&= \frac{1}{16} [(2n^2 + 8n - 10)2^{n+3} + (4n^2 + 40n + 100)] \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Ainsi  $\{j_n^{[3]}\}_{n \geq 0}$  est log-concave. Par la relation (3) de l'exemple 17 et l'induction sur  $r$ , on aura  $\{j_n^{[r]}\}_{n \geq 0}$  ( $r \geq 3$ ) est log-concave.  $\square$

Le théorème suivant concerne la log-concavité d'ordre deux dans les suites hyperjacobsthal et hyperjacobsthal-lucas.

**Théorème 72** *Soient*

$$T_n := (J_n^{[2]})^2 - J_{n-1}^{[2]}J_{n+1}^{[2]} \text{ et } R_n := (j_n^{[3]})^2 - j_{n-1}^{[3]}j_{n+1}^{[3]}, \quad n \geq 1.$$

*Alors  $\{T_{2n}\}_{n \geq 1}$ ,  $\{R_{2n}\}_{n \geq 1}$ ,  $\{T_{2n+1}\}_{n \geq 0}$  et  $\{R_{2n+1}\}_{n \geq 0}$  sont log-concaves.*

**Preuve.** De la preuve du Théorème 61, on obtient

$$T_n = \frac{1}{4} [(-1)^{n+1}2^{n+1} + (2n-1)J_{n+1} - 2(-1)^{n+1} + 1], \quad n \geq 1, \tag{5.36}$$

$$R_n = \frac{1}{16}[-9(-1)^{n+3}2^{n+3} + (2n(n+4) - 1)j_{n+3} + 3(4n+17)(-1)^{n+3} + (2n^2 + 20n + 50)]. \quad (5.37)$$

En appliquant (5.36)-(5.37), (5.35) et

$$J_{2n+1}^2 - J_{2n-1}J_{2n+3} = -2^{2n-1}, \quad n \geq 1,$$

$$j_{2n+3}^2 - j_{2n+1}j_{2n+5} = 9 \times 2^{2n+1}, \quad n \geq 1,$$

on aura

$$\begin{aligned} & T_{2n}^2 - T_{2(n-1)}T_{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{16}[(-2^{2n+1} + (4n-1)J_{2n+1} + 3)^2 - (-2^{2n-1} + (4n-5)J_{2n-1} + 3) \\ & \quad (-2^{2n+3} + (4n+3)J_{2n+3} + 3)] \\ &= \frac{1}{16}[(4n-1)^2(J_{2n+1}^2 - J_{2n-1}J_{2n+3}) + 16J_{2n-1}J_{2n+3} + (12n+4)2^{2n-1} \\ & \quad - 9(12n+17)J_{2n-1} + 3(12n+17)] \\ &= \frac{1}{16}[-(4n-1)^22^{2n-1} + 16J_{2n-1}J_{2n+3} + (12n+4)2^{2n-1} + (12n+17)(3-9J_{2n-1})] \\ &= \frac{1}{16}[-(4n-1)^22^{2n-1} + 256J_{2n-1}^2 + (12n+4)2^{2n-1} - 3(12n+17)2^{2n-1} \\ & \quad - 80J_{2n-1}] \\ &= \frac{1}{16}[-16(n^2+n+3)2^{2n-1} + 16J_{2n-1}(16J_{2n-1}-5)] \\ &= -(n^2+n+3)2^{2n-1} + J_{2n-1}(16J_{2n-1}-5) \\ &= -(n^2+n+3)2^{2n-1} + \frac{2^{2n-1}+1}{9}(16 \cdot 2^{2n-1} + 1) \\ &\geq -(2^{2n-1}+3)2^{2n-1} + \frac{2^{2n-1}+1}{9}(16 \cdot 2^{2n-1} + 1) \\ &= \frac{7}{9}2^{2n-1} \times 2^{2n-1} - \frac{10}{9}2^{2n-1} + \frac{1}{9} \\ &= 2^{2n-1} \left[ \frac{7}{9}2^{2n-1} - \frac{10}{9} \right] + \frac{1}{9} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Et pour  $\{R_{2n}\}_{n \geq 1}$  :

$$\begin{aligned}
R_{2n}^2 - R_{2(n-1)}R_{2(n+1)} &= \frac{1}{256}[(9 \times 2^{2n+3} + (8n^2 + 16n - 1)(j_{2n+3} + 1))^2 - (9 \times 2^{2n+1} \\
&\quad + (8n^2 - 9)(j_{2n+1} + 1))(9 \times 2^{2n+5} + (8n^2 + 32n + 23)(j_{2n+5} + 1))] \\
&= \frac{2^{4n+6}}{256}[(8n^2 + 16n + 8)^2 - 64n^2(n^2 + 4n + 4)] \\
&= \frac{2^{4n+6}}{4} [(n + 1)^4 - n^2(n + 2)^2] \\
&= 2^{4n+4}[2n^2 + 4n + 1] \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Ainsi  $\{T_{2n}\}_{n \geq 1}$  et  $\{R_{2n}\}_{n \geq 1}$  sont log-concaves.

En utilisant (5.31) – (5.37), (5.13) et

$$J_{2n+2}^2 - J_{2n}J_{2n+4} = 2^{2n}, \quad n \geq 1,$$

$$j_{2n+4}^2 - j_{2n+2}j_{2n+6} = 9 \times 2^{2n+2}, \quad n \geq 1,$$

on aura

$$\begin{aligned}
T_{2n+1}^2 - T_{2n-1}T_{2n+3} &= \frac{1}{16}[(2^{2n+2} + (4n + 1)J_{2n+2} - 1)^2 - (2^{2n} + (4n - 3)J_{2n} - 1) \\
&\quad (2^{2n+4} + (4n + 5)J_{2n+4} - 1)] \\
&= \frac{1}{16}[(4n + 1)^2 (J_{2n+2}^2 - J_{2n}J_{2n+4}) + 16J_{2n}J_{2n+4} + 2^{2n}(12n - 8) \\
&\quad + (12n + 23)(3J_{2n} + 1)] \\
&= \frac{1}{16}[(4n + 1)^2 2^{2n} + 16J_{2n}J_{2n+4} + 2^{2n}(12n - 8) + (12n + 23)(2^{2n} + 2)] \\
&> 0,
\end{aligned}$$

On fait la même chose pour  $R_{2n+1}^2 - R_{2n-1}R_{2n+3}$ . Alors  $\{T_{2n+1}\}_{n \geq 0}$ , et  $\{R_{2n+1}\}_{n \geq 0}$  sont log-concaves.  $\square$

**Théorème 73** *Définissons les polynômes en  $q$  :*

$$J_{n,r}(q) = \sum_{k=0}^n J_k^{[r]} q^k \quad (r \geq 2), \quad j_{n,r}(q) = \sum_{k=0}^n j_k^{[r]} q^k \quad (r \geq 3).$$

Les polynômes  $J_{n,r}(q)$  et  $j_{n,r}(q)$  pour  $r \geq 2$  et  $r \geq 3$  respectivement sont  $q$ -log-concaves.

**Preuve.** Pour  $n \geq 1$ ,  $r \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} J_{n,r}^2(q) - J_{n-1,r}(q)J_{n+1,r}(q) &= \left( \sum_{k=0}^n J_k^{[r]} q^k \right)^2 - \left( \sum_{k=0}^{n-1} J_k^{[r]} q^k \right) \left( \sum_{k=0}^{n+1} J_k^{[r]} q^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( J_k^{[r]} J_n^{[r]} - J_{k-1}^{[r]} J_{n+1}^{[r]} \right) q^{k+n}. \end{aligned}$$

Et pour  $n \geq 1$ ,  $r \geq 3$ , par un simple calcul on obtient

$$j_{n,r}^2(q) - j_{n-1,r}(q)j_{n+1,r}(q) = \sum_{k=1}^n \left( j_k^{[r]} j_n^{[r]} - j_{k-1}^{[r]} j_{n+1}^{[r]} \right) q^{k+n} + j_n^{[r]} q^n.$$

Comme  $\{J_n^{[r]}\}$  et  $\{j_n^{[r]}\}$  ( $r \geq 2$ ) sont log-concaves par le Théorème 71, alors les polynômes  $J_{n,r}(q)$  et  $j_{n,r}(q)$  ( $r \geq 2$ ) ont des coefficients positifs, donc ils sont  $q$ -log-concaves.

□

# Conclusion générale

Dans ce document, nous avons étudié la monotonie de certaines suites combinatoires. Principalement nous avons établi des résultats intéressants concernant la log-concavité, la log-convexité et l'unimodalité dans : les analogues du triangle de Pascal, les hyper-suites qui sont liées avec ce triangle.

Comme premier résultat, nous avons étudié la préservation de la log-concavité dans le cas  $p, q$ -analogue du coefficient binomial ainsi que la log-concavité et l'unimodalité des suites parcourant les transversales des triangles issues de ces coefficients et des coefficients  $q$ -binomiaux. De plus, nous avons établi la préservation de la log-convexité dans le triangle de Pascal généralisé issu des coefficients binomiaux qui ne vérifient pas la propriété de  $q$ -log-convexité. Le cas du coefficient binomial est déjà étudié par H. Davenport et G. Pólya [36]. Des exemples ont été donné, il concernent les suites de Catalan, Bell, Motzkin et la suite  $x_k = (k + 1)^k$ .

Au dernier chapitre, nous avons donné une extension des résultats établis pour la log-concavité des suites hyperfibonacci et hyperlucas, un travail fait par r. Zheng et R. Liu [85]. Nous avons défini les suites hyperpell, hyperjacobsthal et leurs compagnons, et quelques identités associées. Après, nous avons établi quelques résultats concernant la log-concavité (la log-convexité) de ces suites.

Parmi les questions et les travaux qui peuvent présenter des perspectives et qu'on souhaite les aborder pour l'avenir on y trouve :

- Peut-on établir la préservation de la log-concavité dans le  $q$ -triangle de Pascal généralisé ?
- Peut-on vérifier la  $q$ -log-convexité pour le triangle  $\left\{ \binom{n}{k}_s \right\}_{0 \leq k \leq sn}$  ?
- Existe-t-il des triangles qui vérifient la  $q$ -log-convexité ?

- Les travaux effectués sur la  $q$ -log-concavité et la  $q$ -log-convexité par Butler et al [28, 29], nous laisse voir l'importance de ces résultats pour les coefficients  $q$ -binomiaux.
- Les applications de l'unimodalité, la log-concavité dans d'autres domaines peut-être, à l'origine d'un chantier vierge dans les mains d'un chercheur.

# Bibliographie

- [1] **M. Ahmia**, H. Belbachir, *Preserving log-concavity and generalized triangles*, AIP Conference Proc. **1264** (2010) 81-89.
- [2] **M. Ahmia**, H. Belbachir, *Preserving log-convexity for generalized Pascal triangles*, Electron. J. Combin. **19** (2012), no. 2, Paper 16, 6 pp.
- [3] **M. Ahmia**, H. Belbachir, *Preserving log-concavity for  $p, q$ -binomial coefficient*, Submitted.
- [4] **M. Ahmia**, H. Belbachir, *Unimodal rays associated to the  $q$ -ordinary multinomial coefficients, under revision in Journal of integer sequences*.
- [5] **M. Ahmia**, H. Belbachir, A. Belkhir, *The log-concavity and log-convexity properties associated to hyperpell numbers and hyperpell-lucas numbers*, Annales Mathematicae et Informaticae. 43 (2014) pp. 3–12.
- [6] M. A. Alvarez, *The  $q$ -log-concavity of  $q$ -Stirling polynomials of the second kind*, International Mathematical Forum, Vol. **8**, 2013, no. 21, 1023 - 1048.
- [7] G. E. Andrews, J. Baxter, *Lattice gas generalization of the hard hexagon model III  $q$ -trinomials coefficients*, J. Stat. Phys. **47** (1987) 297–330.
- [8] M. Balazard, *Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres*, Sémin. Théor. Nombres Bordeaux (**2**) **2** (1990), no. 1, 13–30.
- [9] H. Belbachir, *Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques. USTHB Alger*, Thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques (Décembre 2007).
- [10] H. Belbachir, *Determining the mode for convolution powers of discrete uniform distribution* Probab. Engrg. Inform. Sci. **25** (2011), no. 4, 469–475.
- [11] H. Belbachir, A. Belkhir, *Combinatorial Expressions Involving Fibonacci, Hyperfibonacci, and Incomplete Fibonacci Numbers*, J. Integer Seq. **17** (2014), Article 14.4.3.

- [12] H. Belbachir, F. Bencherif, *On unimodality of sequences associated to the binomial coefficients*, Les Annales Road. Volume n° 1 (2006), 47–55.
- [13] H. Belbachir, F. Bencherif, *Unimodality of sequences associated to Pell numbers*, Ars Combin. **102** (2011), 305–311.
- [14] H. Belbachir, F. Bencherif, L. Szalay, *Unimodality of certain sequences connected with binomial coefficients*, J. Integer Seq. **10** (2007), Article 07. 2. 3.
- [15] H. Belbachir, A. Benmezai, *A  $q$ -analogue for binomial coefficients and generalized Fibonacci sequences*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **352** (2014) 167–171.
- [16] H. Belbachir, S. Bouroubi, A. Khelladi, *Connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution*, Annales Mathematicae et Informaticae, **35** (2008) 21–30.
- [17] H. Belbachir, T. Komatsu, L. Szalay, *Characterization of linear recurrences associated to rays in Pascal’s triangle*, AIP Conference Proc. **1264** (2010) 90-99.
- [18] H. Belbachir, T. Komatsu, L. Szalay, *Linear recurrences associated to rays in Pascal’s triangle and combinatorial identities*, Math. Slovaca, **64** (2014), No. 2, 287-300.
- [19] H. Belbachir, L. Szalay, *Unimodal rays in the regular and generalized Pascal pyramids* Electron. J. Combin. **18** (2011), no. 1, Paper 79, 9 pp.
- [20] H. Belbachir, L. Szalay, *Unimodal rays in the regular and generalized Pascal triangles*, J. of Integer Seq. **11** (2008), Article. 08.2.4.
- [21] E. A. Bender, E. R. Canfield, *Log-concavity and related properties of the cycle index polynomials*, J. Combin. Theory Ser. A **74** (1996) 57–70.
- [22] M. Benoumhani, *Polynômes à racines négatives et applications combinatoires*, Thèse de Doctorat : Sciences et Techniques Communes, Lyon 1 (1993).
- [23] M. Benoumhani, *Sur une propriété des polynômes à racines négatives*, J. Math. Pures Appl., **75** (1996), 85–105.
- [24] M. Benoumhani, *A sequence of binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers*, J. Integer Seq., **6** (2003), Article 03.2.1.
- [25] F. Brenti, *Log-concave and unimodal sequence in algebra, combinatorics and geometry : an update*. Elec. Contemp. Math. **178** (1994,1997), 71–84.

- [26] F. Brenti, *Unimodal, log-concave and Pólya frequency sequences in combinatorics*, Mem. Amer. Math. Soc. no. **413** (1989).
- [27] B. A. Bondarenko, *Generalized Pascal triangles and Pyramids, their fractals, graphs and applications*, The Fibonacci Association, Santa Clara (1993), Translated from Russian by R. C. Bollinger.
- [28] L. M. Butler, *The  $q$ -log-concavity of  $q$ -binomial coefficient*; IMA Preprint Series 418 (April 1988).
- [29] L. M. Butler, W. P. Flanigan, *A note on log-convexity of  $q$ -Catalan numbers*. Annals of Combinatorics **11** (2007) 369–373.
- [30] N.-N. Cao, F.-Z. Zhao, *Some properties of hyperfibonacci and hyperlucas Numbers*, J. Integer Seq. **13** (2010), Article 10.8.8.
- [31] A. Cayley, *A second memoir upon quantics*, Coll. Math papers vol **2**, pp. 250–275, Cam. Univ. Press, 1889.
- [32] W. Y. C. Chen, L. X. W. Wang, A. L. B. Yang, *Schur Positivity and the  $q$ -Log-convexity of the Narayana Polynomials*, J. Algebr. Comb. (2010) **32** : 303–338.
- [33] J. H. Conway, R. Guy, *The book of numbers*, Copernicus (1995).
- [34] R. B. Corcino, *On  $p, q$ -binomial coefficients*, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, INTEGERS, **8** (2008), #A29.
- [35] J. N. Darroch, *On the distribution of the number of successes in independent trials*, Ann. Math. Stat. **35** (1964), 1317–1321.
- [36] H. Davenport et G. Pólya, *On the product of two power series*, Canadian J. Math. **1**, 1–5 (1949).
- [37] S. Dharmadhikari, K. Joak-Dev, *Unimodality, Convexity and Applications*, Academic Press, Boston, MA (1988).
- [38] A. Dil and r. Mező, *A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers*, Appl. Math. Comput. **206** (2008), 942–951.
- [39] T. Došlić, *Log-balanced combinatorial sequences*, Published electronically at <http://arxiv.org/pdf/math/0603403.pdf>.
- [40] T. Došlić. *Log-convexity of combinatorial sequences from their convexity*. J. Math. Inequal., **3** : 437–442, 2009.

- [41] T. Došlić. *Seven (lattice) paths to log-convexity*. Acta Math. Appl., **110** : 1371–1392, 2010.
- [42] T. Došlić and D. Veljan. *Logarithmic behavior of some combinatorial sequences*. Discrete Math., **308** : 2182–2212, 2008.
- [43] R. Ehrenborg, E. Steingrímsson, *The excedance set of a permutation*, Adv. Appl. Math. **24** (2000) 284–299.
- [44] K. Engel, *On the average rank of an element in a filter of the partition lattice*, J. Combin. Theory Ser. A **65** (1994) 67–78.
- [45] P. Erdős, *Verallgemeinerung eines elementar-zahlentheoretischen Satzes von Kürschák. (Generalization of an elementary number-theoretic theorem of Kürschák.)*, Mat. Fiz. Lapok **39**, (1932) 17–24.
- [46] H. Exton, *q-Hypergeometric Functions and Applications*, New York : Halstead Press, Chichester : Ellis Horwood, 1983.
- [47] J. Fürlinger, J. Hofbauer, *q-Catalan numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **40** (1985), 248–264.
- [48] A. Hald, *A history of mathematical statistics from 1750 to 1930*, John Wiley, N. Y. (1998).
- [49] J. H. Hammersley, *The sum of the products of natural numbers*, Proceeding of the London M. S. (1951), 435–452.
- [50] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya : *Inequalities*, Cambridge University Press, (1956).
- [51] S. Karlin, *Total Positivity*, Vol.I, Stanford University Press, (1968).
- [52] Kathleen M. O’Hara, *Unimodality of Gaussian coefficients : a constructive proof*, J. Comb. Theory, Ser. A **53**, 29–52 (1990).
- [53] W. Koepf, *Hypergeometric Summation : An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities*, Braunschweig, Germany : Vieweg, 1999.
- [54] C. Krattenthaler, *On the q-log-concavity of Gaussian binomial coefficients*, Monatsh. Math. **107** (1989) 333–339.
- [55] P. Leroux, *Reduced matrices and q-log-concavity properties of q-Stirling numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **54** (1990), 64–84.

- [56] T. M. Liggett, *Ultra log concave sequence and negative dependence*, J. Combin. Theory Ser. A **79** (1997) 315–325.
- [57] L. L. Liu, Y. Wang, *On the log-concavity of combinatorial sequences* Advances in Applied Mathematics vol.**39**, Issue. 4, 453–476 (2007).
- [58] R. Liu, F-Z. Zhao, *On the sums of reciprocal hyperfibonacci numbers and hyperlucas numbers*, J. Integer Seq. **15** (2012), Article 12.4.5.
- [59] P. H. Lundow, A. Rosengren, *On the  $p, q$ -binomial distribution and the Ising model*, Philos. Mag. **90** (2010) 3313–3353.
- [60] P. McNamara, B. Sagan, *Infinite Log-Concavity : Developments and Conjectures*, Advances in Applied Mathematics **44** (2010) 1–15
- [61] K. V. Menon, *On the convolution of logarithmically concave sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969) 439–441.
- [62] A. de Moivre, *The doctrine of chances*, (first ed. 1718 and second ed. 1738), reprinted by Chelsea, N. Y (1967), Third edition (1756).
- [63] A. de Moivre, *Miscellanca Analytica de Scrichus et Quadraturis*, J. Tomson and J. Watts, London, (1731).
- [64] R. Pemantle, *Towards a theory of negative dependence*, J. Math. Phys. **41** (2000) 1371–1390.
- [65] B. E. Sagan, *Inductive proofs of  $q$ -log concavity*, Discrete Math. **99** (1992) 289–306.
- [66] N. J. A. Sloane, *The On Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Published electronically at <http://www.research.att.com/~njas/sequences>, 2014.
- [67] R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Ann. New York Acad. Sci. **576** (1989) 500–534.
- [68] R. P. Stanley, *Positivity problems and conjectures in algebraic combinatorics, Mathematics : frontiers and perspectives*, (2000) 295–319, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.
- [69] X.-T. Su, Y. Wang, *On unimodality problems in Pascal's triangle*, Electron. J. Combin. **15** (2008), Research Paper 113, 12 pp.
- [70] X.-T. Su, Y. Wang, *Proof of a conjecture of Lundow and Rosengren on the bimodality of  $p, q$ -binomial coefficients* J. Math. Anal. Appl. **391** (2012) 653–656.

- [71] S. Sylvester, *Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants*, Coll. Math papers vol **3**, pp. 117–126, Chelsea.NY, 1973
- [72] S. Tanny, M. Zuker, *On a unimodality sequence of binomial coefficients*, Discrete Math. **9** (1974) 79–89.
- [73] S. Tanny, M. Zuker, *On a unimodal sequence of binomial coefficients II*, J. Combin. Inform. System Sci. **1** (1976) 81–91.
- [74] D. W. Walkup, *Pólya sequences, binomial convolution and the union of random sets*, J. Appl. Probability **13** (1976) 76–85.
- [75] Y. Wang, *Linear transformations preserving log-concavity*, Linear Algebra Appl. **359** (2003) 162–167.
- [76] Y. Wang, Y.-N. Yeh, *Log-concavity and LC-positivity*, J. Combin. Theory Ser. A, **114** (2007) 195–210.
- [77] S. O. Warnaar, *The Andrews-Gordon Identities and  $q$ -Multinomial coefficients* Commun. Math. Phys. **184** (1997) 203–232.
- [78] S. O. Warnaar, *Refined  $q$ -trinomial coefficients and character identities*, J. Stat. Phys. **102** (2001), no. 3–4, 1065–1081.
- [79] H. S. Wilf, *Generating functionology, 2nd ed.*, Academic Press, Boston, 1994.
- [80] D. E. White, *Monotonicity and unimodality of the pattern inventory*, Adv. in Math. **38** (1980), pp 101–108.
- [81] D. Zeilberger, *Kathy O'hara's constructive proof of the unimodality of Gaussian polynomials*, American Math. Monthly.
- [82] D. Zeilberger, *A one line high school algebra proof of the unimodality of Gaussian polynomials*
- [83] D. Zeilberger, *Proofs that  $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$  if  $k < n/2$* , Arxiv.
- [84] H. Zhang, *Two Linear Transformations Preserving Log-Concavity*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. **3**, (2008), no. 5, 223–228.
- [85] L-N. Zheng, R. Liu, *On the log-concavity of the hyperfibonacci numbers and the hyperlucas numbers*, J. Integer Seq. **17** (2014) Article 14.1.4.
- [86] B.-X. Zhu, *Log-convexity and strong  $q$ -log-convexity for some triangular arrays*, Adv. in Appl. Math., in press, DOI :10.1016/j.aam.2012.11.003, 2012.