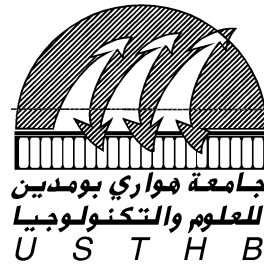


REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté des Mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTEUR EN SCIENCES**

En : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : **Algèbre et Théorie des Nombres.**

Par : **GOUBI MOULOU**

Sujet :

**SUR LES DILATÉES ENTIÈRES DE LA FONCTION
PARTIE FRACTIONNAIRE.**

Soutenue publiquement le :28/05/2016, devant le jury composé de :

M. Hacène	BELBACHIR,	Professeur,	U.S.T.H-B,	Président
M. Abdelmejid	BAYAD,	HDR,	Univ. Evry,	Directeur de thèse
M. Mohand Ouamar	HERNANE,	Professeur,	U.S.T.H-B,	Co-directeur de thèse
M. Kamel	BETINA,	Professeur,	U.S.T.H-B,	Examineur
M. Arezki	KESSI,	Professeur,	U.S.T.H-B,	Examineur
M. Abdallah	DERBAL,	Professeur,	E.N.S. Kouba,	Examineur
M. Abdellah	MOKRANE,	Professeur,	Univ. Paris 8,	Examineur
M. Ahmed	SEBBAR,	Professeur,	Univ. Bordeaux 1,	Examineur

Remerciements

Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Michel BALAZARD Professeur à l'Université de Bordeaux 1, pour m'avoir fourni le sujet de cette thèse et Monsieur le Professeur Abdelmedjid BAYAD de l'Université d'Evry Val-d'Essonne, pour avoir patiemment dirigé durant ces trois années, cette thèse avec sa précieuse aide scientifique, ses encouragements et son soutien moral sans réserve qui ont énormément contribué à l'aboutissement de cette recherche.

Je remercie infiniment Monsieur le Professeur Mohand Ouamar HERNANE, de l'USTHB, pour sa gentillesse sa disponibilité et pour avoir accepté de co-diriger cette thèse.

J'apprécie au plus haut point, l'honneur que me fait Monsieur le Professeur Hacène BELBACHIR, en acceptant de consacrer son temps pour lire cette thèse et d'en présider le jury au vu de la surcharge de travail due à ses fonctions.

Je remercie Monsieur Kamel BETINA, Professeur à l'USTHB, pour s'être intéressé à ce travail et pour avoir bien voulu être membre du Jury.

Je remercie Monsieur Arezki KESSI, Professeur à l'USTHB, pour s'être intéressé à ce travail et pour avoir bien voulu être membre du Jury.

Je remercie Monsieur Abdallah DERBAL, Professeur à l'ENS Kouba, pour s'être intéressé à ce travail et pour avoir bien voulu être membre du Jury.

Je remercie Monsieur Farid MOKRANE, Professeur à l'Université Paris 8, pour s'être intéressé à ce travail et pour avoir bien voulu être membre du Jury.

Je remercie Monsieur Ahmed SEBBAR, Professeur à l'Université Bordeaux 1, pour s'être intéressé à ce travail et pour avoir bien voulu être membre du Jury.

Enfin je remercie toute personne physique ou morale qui directement ou indirectement a contribué à l'aboutissement de cette thèse.

Table des matières

Introduction	1
1 Outils analytiques et algébriques autour des Critères de Beurling-Nyman et Báez-Duarte-Balazard pour l'hypothèse de Riemann	4
1.1 Introduction	4
1.2 Critères de Beurling-Nyman et Báez-Duarte-Balazard pour l'hypothèse de Riemann	5
1.3 Espace de Hilbert $H = L^2([0; +\infty[, t^{-2} dt)$	6
1.3.1 Définitions et propriétés générales	6
1.3.2 Orthogonalité et décomposition orthogonale	8
1.3.3 Bases hilbertiennes de H	9
1.4 Procédé de Gram- schmidt	10
1.5 Déterminant de Gramm et distance	11
2 Preuve d'une conjecture de Möbius	13
2.1 Introduction	13
2.2 Théorèmes fondamentaux	14
2.3 Preuve des deux théorèmes	14
2.3.1 Les fonctions e_n , χ et v_n	14
2.3.2 Formule d'inversion de Möbius	16
2.4 Calcul de la somme de quelques séries numériques convergentes	20
3 Etude des sommes des cotangentes de Vasyunin. Loi de Réciprocité	22
3.1 Introduction	22
3.2 Loi de réciprocité	23
3.3 Preuves du théorème 3.1 et corollaire 3.2	24
3.4 La fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction partie fractionnaire	27
4 Fractions continues, fonction digamma. Application aux sommes de Vasyunin : Formule explicites et asymptotiques	30
4.1 Fractions continues	30
4.2 Etude de la fonction digamma ψ	36
4.3 Application des fractions continues aux sommes des cotangentes de Vasyunin.	38
4.3.1 Preuve du théorème 4.9 et du corollaire 4.10	40
4.4 Application de la fonction digamma aux sommes de Vasyunin	43
4.5 Développement asymptotique de $V(1, n)$	48
4.5.1 Théorème fondamental	49

TABLE DES MATIÈRES

4.5.2	Exemples	50
4.5.3	Preuve du Théorème fondamental et Corollaire 4.19	51
4.6	Autres estimations de $V(p, q) + V(q, p)$	52
5	Perspectives	55
5.1	Introduction	55
5.2	Aperçu sur les travaux de S. Bettin et J.B. Conrey	55
5.3	Définition de la somme des cotangentes de Vasyunin généralisée	57
5.4	Hypothèse de Riemann	59
5.4.1	Cas particulier $c_1 = 0$	59
	Conclusion	61
	Bibliographie	62

Introduction

Cette thèse est consacrée essentiellement à l'étude des sommes des cotangentes de Vasyunin

$$V(n, m) = \sum_k^{m-1} \left\{ \frac{kn}{m} \right\} \cot \left(\frac{\pi k}{m} \right), \quad (n, m) = 1 \quad (0.0.1)$$

qui interviennent dans le calcul de la distance de la fonction indicatrice $\chi : \chi_{[1, +\infty[}$ au sous espace H_N engendré par la famille de vecteurs $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ de l'espace de Hilbert $H = L^2([0, +\infty[; t^{-2}dt)$, où la fonction e_n est définie pour tout $t \geq 0$ par,

$$e_n(t) = \left\{ \frac{t}{n} \right\}. \quad (0.0.2)$$

Le critère de Bález-Duarte-Balazard [5] affirme que l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si la distance d_N de la fonction indicatrice χ au sous espace H_N tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini.

Ce travail est structuré en deux parties. La première partie est constituée de deux chapitres dans lesquels nous exposons les notions de base sur les espaces de Hilbert en analyse fonctionnelle, ainsi que le théorème de Möbius.

La seconde partie de cette thèse est composée de trois chapitres; elle est consacrée à l'étude des sommes des cotangentes de Vasyunin $V(n, m)$, dont nous aurons besoin pour calculer les produits scalaires $\langle e_n, e_m \rangle$.

Dans le chapitre trois, nous établissons une loi de réciprocité satisfaite par ces sommes.

Au chapitre quatre, nous donnons les formules explicites et les développements asymptotiques de la somme $V(n, m)$, en utilisant les fractions continues et la dérivée logarithmique de la fonction Gamma. Les résultats présentés dans les chapitres 3 et 4 ont fait l'objet d'un article à paraître [26].

Par souci de clarté nous avons adopté la présentation suivante :

Dans le premier chapitre, nous étudions les propriétés géométriques de l'espace de Hilbert $H = L^2([0, +\infty[; t^{-2}dt)$; nous donnons l'expression de la distance en fonction du déterminant de Gramm et nous rappelons les définitions d'une base hilbertienne et de la projection orthogonale.

INTRODUCTION

Au second chapitre, nous nous sommes intéressés à la conjecture de Möbius énoncée en 1832 qui affirme que la série numérique $\sum_{k \geq 1} \mu(k) \frac{\log k}{k}$ est convergente de somme égale à -1 .

Ce résultat important a été démontré pour la première fois par E. Landau en 1899 [31]. Nous énonçons un théorème plus général où la conjecture de Möbius apparaît comme un cas particulier. Pour cela nous avons obtenu la caractérisation d'une classe de fonctions arithmétiques ϕ satisfaisant la condition

$$\sum_{k \geq 1} \mu(k) \phi(n) = -1.$$

Le troisième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude des sommes des cotangentes de Vasyunin $V(n, m)$. Nous avons obtenu une loi de réciprocité similaire à celle vérifiée par les sommes de Dedekind [21]. Plus précisément nous avons montré que,

$$V(n, m) + V(m, n) = \frac{1}{\pi} \log n^{m-1} m^{n-1} - \frac{2}{\pi} - ng \left(\frac{1}{n} \right) - mg \left(\frac{1}{m} \right) - \frac{2}{\pi} G(n, m) \quad (0.0.3)$$

où

$$G(n, m) = \sum_{r=1}^{nm-1} \left(\psi \left(\frac{r+1}{nm} \right) - \psi \left(\frac{r}{nm} \right) \right) \left\{ \frac{r}{n} \right\} \left\{ \frac{r}{m} \right\}$$

et

$$g(x) = -\frac{\log 2\pi x - \gamma}{\pi} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k (2k)!} x^k + o(x^{N+1}),$$

lorsque $x \rightarrow 0$, où γ est la constante d'Euler.

Ce résultat améliore la loi de réciprocité,

$$\frac{\bar{m}}{n} V(m, n) + V(\bar{n}, \bar{m}) = -\frac{1}{\pi n} - g \left(\frac{\bar{m}}{n} \right) \quad \text{où } n\bar{n} \equiv 1(m) \text{ et } m\bar{m} \equiv 1(n) \quad (0.0.4)$$

obtenue par S. Bettin et J. B. Conrey [20].

En outre la loi de réciprocité (0.0.3) nous a permis d'évaluer d'une manière plus précise le produit scalaire $\langle e_n, e_m \rangle$.

Dans le quatrième chapitre de cette thèse, nous établissons les formules explicites et les développements asymptotiques des sommes des cotangentes de Vasyunin. En particulier nous exprimons la valeur de $V(1, n)$ sous forme d'une intégrale,

$$V(1, m) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{(m-2)x^m - mx^{m-1} + mx - m + 2}{(x-1)^2(x^m-1)} dx. \quad (0.0.5)$$

Cette formule améliore d'une manière significative les résultats obtenus récemment par

INTRODUCTION

H. Maier et M. Th. Rassias [39].

Enfin au chapitre 5 de cette thèse, nous avons donné une définition des sommes des cotangentes de Vasyunin généralisées $V_a(n, m)$ pour tout entier a . Pour $a = 0$ on obtient $V(n, m)$.

Comme problème ouvert nous pouvons considérer la question de savoir si la somme symétrique $V_a(n, m) + V_a(m, n)$ satisfait une certaine loi de réciprocité.

Chapitre 1

Outils analytiques et algébriques autour des Critères de Beurling-Nyman et Báez-Duarte-Balazard pour l'hypothèse de Riemann

1.1 Introduction

La fonction zêta de Riemann est définie pour tout $s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \quad (1.1.1)$$

Cette série est divergente pour $s \leq 1$. Riemann a été le premier à considérer $\zeta(s)$ comme une fonction de la variable complexe s . Il l'a prolongé en une fonction ; toujours notée $\zeta(s)$ méromorphe sur \mathbb{C} , avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. On pose $s = \sigma + it$, cette série est convergente pour $\sigma > 1$. Dans ce cas le produit d'Euler donne

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (1.1.2)$$

Nous rappelons que

- 1) La fonction zêta de Riemann n'admet pas de zéros dans le demi plan $\Re(s) > 1$.
 - 2) La fonction zêta n'admet pas de zéros sur la droite $\sigma = 1$ ($\zeta(1 + it) \neq 0$)
- Il reste donc trois possibilités pour localiser les zéros de ζ :
- a) Les zéros qui sont à l'extérieur de la bande $0 < \sigma < 1$: sont des zéros réels $-2, -4, \dots, -2n$ qui sont appelés zéros triviaux.
 - b) Les zéros qui sont dans la bande $0 < \sigma < 1$, appelés zéros non triviaux ou zéros complexes.
 - c) Les zéros sur la droite critique $\sigma = \frac{1}{2}$, dont on trouve une infinité.

d) Si ρ est un zéro de zêta, alors $1 - \rho$ est aussi un zéro de zêta. En outre tous les zéros trouvés sont situés sur la droite critique $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

e) Riemann a montré que la fonction zêta satisfait l'équation fonctionnelle

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s) \quad (1.1.3)$$

L'hypothèse de Riemann (*HR*) s'énonce comme suit.

Tous les zéros non triviaux de la fonction zêta sont situés sur la droite critique $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

1.2 Critères de Beurling-Nyman et Báez-Duarte-Balazard pour l'hypothèse de Riemann

Soit la fonction indicatrice χ de l'intervalle $[1; +\infty[$. Elle est définie par

$$\chi(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [1, \infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Et pour tout entier naturel n on définit la fonction e_n sur $[0; +\infty[$ par,

$$e_n(t) = \left\{ \frac{t}{n} \right\} \quad (1.2.5)$$

où $\{t\} = t - [t]$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel t .

Etant donné un entier naturel N ; Le *critère de Báez-Duarte* pour l'hypothèse de Riemann est : (*HR*) est équivalente au fait que la fonction indicatrice χ appartient à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs e_1, \dots, e_N .

M. Balazard a établi de son côté que (*HR*) est équivalente à la convergence de la distance de la fonction χ à ce même espace vers zéro. Ce qui sera appelé le *critère de Báez-Duarte-Balazard*.

L'idée de départ a été donnée par Beurling [3]. Soit B l'ensemble des fonctions complexes $f \in L^2([0, 1])$ définie par

$$f(t) = \sum_{k=1}^N a_k \left\{ \frac{\theta_k}{t} \right\} \quad (1.2.6)$$

où $N \geq 1$, $a_k \in \mathbb{C}$ et $0 < \theta_k \leq 1$.

Le résultat de Nymann-Beurling, complété par Bercovici et Foias s'énonce comme suit. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, les trois assertions suivantes sont équivalentes

1) $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans le demi plan $\Re(s) > \frac{1}{p}$

1.3. ESPACE DE HILBERT $H = L^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$

2) B est dense dans l'espace $L^p(0, 1)$

3) La fonction constante -1 est dans l'adhérence de B dans l'espace $L^p(0, 1)$.

B est appelé espace de Beurling, les éléments de B sont appelés fonctions de Beurling. Dans le cas $p = 2$, le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ nous ramène à l'espace de Hilbert $H = L^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$ au lieu de l'espace $L^2(0, 1)$.

La théorie des espaces de Hilbert est détaillée dans [29] pp.186 – 239. Dans ce chapitre nous projectons cette théorie sur l'espace H pour étudier la géométrie des fonctions χ, e_1, \dots, e_N .

1.3 Espace de Hilbert $H = L^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$

1.3.1 Définitions et propriétés générales

On note $\mathcal{L}^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$ l'ensemble des fonctions f mesurables de $([0; +\infty[, t^{-2}dt)$ dans \mathbb{R} telles que :

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2 t^{-2} dt < +\infty.$$

Pour la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par

$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f(t) = g(t) \text{ presque partout}$$

On note $H = L^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$ l'ensemble des classes d'équivalence de l'ensemble des applications de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} contenant au moins une fonction de $\mathcal{L}^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$.

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés élémentaires des espaces de Hilbert et la caractérisation des normes dérivées d'un produit scalaire.

Définition 1.1. Soit X un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Un produit scalaire sur X est une application $\Phi : X \times X \rightarrow K$ telle que pour tout x, x_1, x_2, y de X on a

1. $\Phi(x, x) \geq 0$ et $\Phi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$
2. $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$
3. $\Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y)$
4. $\Phi(\lambda x, y) = \lambda \Phi(x, y)$

Dans toute la suite de ce travail, on désigne $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de x et y . Le produit scalaire euclidien usuel sur H est égal à

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(t) g(t) \frac{dt}{t^2}. \quad (1.3.7)$$

Définition 1.2. Un espace vectoriel X muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

1.3. ESPACE DE HILBERT $H = L^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$

Théorème 1.3. Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles de H alors

$$\int_0^{\infty} f(t)g(t) \frac{dt}{t^2} \leq \left(\int_0^{\infty} f^2(t) \frac{dt}{t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} g^2(t) \frac{dt}{t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.8)$$

Démonstration. .

$$X \in \mathbb{R}, \int_0^{\infty} (f(t) + Xg(t))^2 t^{-2} dt \geq 0$$

Donc,

$$P(X) = \left(\int_0^{\infty} g^2(t) t^{-2} dt \right) X^2 + 2 \left(\int_0^{\infty} f(t)g(t) t^{-2} dt \right) X + \int_0^{\infty} f^2(t) t^{-2} dt \geq 0$$

$P(X)$ étant un polynôme de degré 2, positif donc son discriminant $\Delta \leq 0$. Mais on a

$$\Delta = 4 \left(\int_0^{\infty} f(t)g(t) t^{-2} dt \right)^2 - 4 \left(\int_0^{\infty} f^2(t) t^{-2} dt \right) \left(\int_0^{\infty} g^2(t) t^{-2} dt \right),$$

alors,

$$\left(\int_0^{\infty} f(t)g(t) t^{-2} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{\infty} f^2(t) t^{-2} dt \right) \left(\int_0^{\infty} g^2(t) t^{-2} dt \right)$$

d'où le résultat \square .

De l'inégalité (1.3.8) du théorème précédent on déduit,

$$\int_0^{\infty} f(t)g(t) \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} f^2(t) \frac{dt}{t^2} + \int_0^{+\infty} g^2(t) \frac{dt}{t^2} \right) \quad (1.3.9)$$

Ce qui justifie le fait que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique de f et g .

Définition 1.4. Une norme sur X est une application $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour f, g de X et λ de \mathbb{R} on a :

1. $\|f\| \geq 0$ et $\|f\| = 0$ si et seulement si $f = 0$
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Corollaire 1.5. Dans l'espace préhilbertien H l'application

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+; \|f\| = \int_0^{+\infty} f(t)^2 \frac{dt}{t^2} \quad (1.3.10)$$

est une norme sur X .

Démonstration. . Soit $f \in H$ alors

$$\|f\| = \langle f, f \rangle$$

Les propriétés du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ donne le résultat. \square

1.3. ESPACE DE HILBERT $H = L^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$

La norme ainsi définie est dite norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, elle vérifie la loi du parallélogramme.

Théorème 1.6. *La norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisfait l'égalité*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2). \quad (1.3.11)$$

Démonstration. . Dans le cas général on a,

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \int_0^{+\infty} |f(t) + g(t)|^2 \frac{dt}{t^2} \\ &= \langle f, f + g \rangle + \langle g, f + g \rangle \\ &= \overline{\langle f + g, f \rangle} + \overline{\langle f + g, g \rangle} \\ &= \overline{\langle f, f \rangle} + \overline{\langle g, f \rangle} + \overline{\langle f, g \rangle} + \overline{\langle f, f \rangle} \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

et

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \int_0^{+\infty} |f(t) - g(t)|^2 \frac{dt}{t^2} \\ &= \langle f, f - g \rangle - \langle g, f - g \rangle \\ &= \overline{\langle f - g, f \rangle} - \overline{\langle f - g, g \rangle} \\ &= \overline{\langle f, f \rangle} - \overline{\langle g, f \rangle} - \overline{\langle f, g \rangle} - \overline{\langle g, g \rangle} \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 - \langle f, g \rangle - \overline{\langle f, g \rangle} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

La somme de (1.3.12) et (1.3.13) donne le résultat. \square

1.3.2 Orthogonalité et décomposition orthogonale

Définition 1.7. *Deux vecteurs f et $g \in H$ sont orthogonaux si*

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Et on note $f \perp g$.

Définition 1.8. *Dans l'espace H l'angle θ entre les deux vecteurs f et g est exprimée par*

$$\cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \cdot \|g\|} \quad (1.3.14)$$

où $0 < \theta \leq \pi$ si $f, g \neq 0$ et $\theta = 0$ si $f = 0$ ou $g = 0$.

Le produit scalaire de f et g s'écrit comme suit

$$\langle f, g \rangle = \|f\| \cdot \|g\| \cos \theta \quad (1.3.15)$$

Définition 1.9. *Soient A_1 et A_2 deux ensembles non vides de H . Nous disons que A_1 est orthogonale à A_2 , et on note $A_1 \perp A_2$ si et seulement si pour tout $f \in A_1$ et tout $g \in A_2$ on a $\langle f, g \rangle = 0$.*

1.3. ESPACE DE HILBERT $H = L^2([0; +\infty[, t^{-2}dt)$

Théorème 1.10. *Soit A un ensemble non vide de H et soit \bar{A} son adhérence. Alors*

$$A^\perp = \bar{A}^\perp \quad (1.3.16)$$

Démonstration. . Il est évident que $\bar{A}^\perp \subset A^\perp$. Maintenant si $f \in A^\perp$ alors $\forall g \in \bar{A}$,

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

pour une certaine suite de A . La continuité de la fonction $g \rightarrow \langle f, g \rangle$ nous permet d'écrire

$$\langle f, g \rangle = \left\langle f, \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, g_n \rangle = 0$$

d'où $f \in \bar{A}^\perp$. \square

En particulier si A est dense dans H alors,

$$f = 0, \text{ et } A^\perp = \{f; f \in H / f \perp A\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de H . A^\perp s'appelle l'orthogonal de A .

1.3.3 Bases hilbertiennes de H

Définition 1.11. *Un ensemble non vide A de H est un système orthogonal si pour tout $f, g \in A$ on a $\langle f, g \rangle = 0$.*

Définition 1.12. *Un système orthogonal A de H est dit orthonormé si on a*

$$\|f\| = 1, \forall f \in A.$$

Définition 1.13. *Une famille $\{f_i\}_{i \in I}$ de H est une base hilbertienne de H s'il est une famille génératrice et orthonormée.*

Tout espace hilbertien admet au moins une base hilbertienne. Si $B = \{f_i\}_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H alors,

Proposition 1.14. *Tout élément f de H s'écrit sous la forme*

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle f_i \quad (1.3.17)$$

et satisfait l'identité de Parseval.

$$\|f\|^2 = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle^2 \quad (1.3.18)$$

Démonstration. . Tout élément f de H s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i.$$

Comme B est une base hilbertienne alors,

$$\langle f, f_i \rangle = \alpha_i$$

1.4. PROCÉDÉ DE GRAMM- SCHMIDT

d'où

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, f_i \rangle f_i.$$

D'autre part,

$$\|f\| = \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{i \in I} \alpha_i f_i, \sum_{j \in I} \alpha_j f_j \right\rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \langle f_i, f_j \rangle \alpha_i \alpha_j = \sum_{i \in I} \alpha_i^2$$

D'où la relation (1.3.18) est vérifiée \square

1.4 Procédé de Gramm- schmidt

On peut construire un système orthonormal à partir d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants. Grâce au procédé de Gramm-Schmidt on obtient.

Théorème 1.15. *Soit $\{f_i, i \in I\}$ une famille de vecteurs de H linéairement indépendants. Alors on peut construire un système orthonormal $\{g_i, i \in I\} \subset H$ tel que chaque g_i est combinaison linéaire des f_i .*

Démonstration. . Puisque la famille $\{f_i, i \in I\} \subset H$ est linéairement indépendante, posons

$$g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$$

alors $\|g_1\| = 1$. Ensuite on pose

$$h_2 = f_2 - \lambda_1 g_1,$$

où λ_1 est déterminé par la condition

$$\langle f_2, g_1 \rangle h_2 \neq 0$$

et posons

$$g_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|},$$

alors $\|g_2\| = 1$ et $\langle g_2, g_1 \rangle = 0$.

Avec ce procédé nous construisons les vecteurs g_1, g_2, \dots, g_n tels que

$$\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij}$$

où g_i est une combinaison linéaire des vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Ensuite posons

$$h_{n+1} = f_{n+1} - (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n)$$

Puisque $\langle h_{n+1}, g_j \rangle = 0$, on obtient

$$\lambda_j = \langle f_{n+1}, g_j \rangle$$

1.5. DÉTERMINANT DE GRAMM ET DISTANCE

. D'où

$$g_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{\|h_{n+1}\|},$$

alors g_{n+1} est une combinaison linéaire des f_j .

D'autre part on a

$$f_{n+1} = \|h_{n+1}\|g_{n+1} + \langle f_{n+1}, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f_{n+1}, g_n \rangle g_n.$$

Donc

$$[g_1, g_2, \dots, g_n] = [f_1, f_2, \dots, f_n]$$

On désigne par P_n la projection orthogonale de H sur $[f_1, f_2, \dots, f_n]$ alors g_{n+1} est donné par

$$g_{n+1} = \frac{(I - P_n) f_n}{\|(I - P_n) f_n\|}.$$

□

1.5 Déterminant de Gramm et distance

Définition 1.16. Soit $\{f_i, 1 \leq i \leq n\}$ une famille finie des vecteurs de H . Le déterminant de Gramm de cette famille est défini par

$$G(f_1, \dots, f_n) = \text{Det}[\langle f_i, f_j \rangle, 1 \leq i, j \leq n] \quad (1.5.19)$$

Lemme 1.17. Le déterminant de Gram $G(f_1, \dots, f_n)$ est positif, il est nul si et seulement si les vecteurs f_1, \dots, f_n sont linéairement dépendants.

Démonstration. . Soit

$$F = \text{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

et

$$N = \dim F \leq n$$

considérons $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ une base orthonormale de F et la matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{N,n}(\mathbb{R})$ dont le terme a_{ij} est défini par

$$f_j = \sum_{i=1}^N a_{ij} u_i.$$

Alors $\text{Rg}(A) = N$ et

$$[\langle f_i, f_j \rangle, 1 \leq i, j \leq N] = {}^t A A.$$

Comme $\det({}^t A) = \det(A)$. Alors

$$G = \det(A)^2.$$

D'où le lemme est établi. □

Avec le déterminant de Gramm, on exprime la distance d de $f \in H$ à F par

$$d = d(f, F) = \inf_{h \in F} \|f - h\| = \|f - P(f)\|.$$

Et le théorème suivant découle

1.5. DÉTERMINANT DE GRAMM ET DISTANCE

Théorème 1.18. [19] On a

$$d^2 = \frac{\text{Gram}(f, f_1, f_2, \dots, f_n)}{\text{Gram}(f_1, f_2, \dots, f_n)} \quad (1.5.20)$$

Démonstration. . L'élément $f - P(f)$ est orthogonal à F , alors pour $1 \leq i \leq n$ on a

$$\langle f_i, f \rangle = \langle f_i, P(f) \rangle. \quad (1.5.21)$$

On pose,

$$P(f) = \sum_{j=1}^n a_j f_j. \quad (1.5.22)$$

de la relation (1.5.22) on obtient le système linéaire,

$$\sum_{j=1}^n \langle f_j, f_i \rangle a_j = \langle f_i, f \rangle, 1 \leq i \leq n.$$

Les coefficients a_j vérifient la relation

$$a_j = \frac{G_j}{\text{Gram}(f_1, \dots, f_n)},$$

G_j est obtenue par le déterminant de Gramm où la colonne j est remplacé par les éléments $\langle f_i, f \rangle, 1 \leq i \leq n$. On a donc

$$d_n^2 = \|f - P(f)\|^2 = \langle f, f - P(f) \rangle = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n a_j \langle f_j, f \rangle,$$

d'où

$$d_n^2 G = \|f\|^2 G - \sum_{j=1}^n a_j \langle f_j, f \rangle G_j, \text{ où } G = \text{Gram}(f_1, \dots, f_n).$$

En développant suivant la première ligne, le déterminant de $\text{Gram}(f, f_1, \dots, f_n)$ et posons

$$\Delta_j = (-1)^{j-1} G_j,$$

alors on a

$$\text{Gram}(f, f_1, \dots, f_n) = \|f\|^2 G + \sum_{j=1}^n a_j \langle f_j, f \rangle (-1)^j \Delta_j.$$

De la relation (1.5.19) on a

$$\text{Gram}(f, f_1, \dots, f_n) = \|f\|^2 G - \sum_{j=1}^n a_j \langle f_j, f \rangle G_j.$$

et donc

$$\text{Gram}(f, f_1, \dots, f_n) = d_n \text{Gram}(f_1, \dots, f_n)$$

d'où le résultat. \square

Chapitre 2

Preuve d'une conjecture de Möbius

2.1 Introduction

En 1832, Möbius a conjecturé que

$$\sum_{n \geq 1} \mu(n) \frac{\log n}{n} = -1 \quad (2.1.1)$$

où μ est la fonction arithmétique de Möbius définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 \dots p_k; p_1, \dots, p_k \text{ premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous présentons une preuve de la conjecture de Möbius [19, 23] différente de celle donnée par Landau [31]. Pour cela nous utilisons des outils techniques de la théorie analytique des nombres.

Rappelons que dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0, \infty[; \frac{dt}{t^2})$ le produit scalaire est donné par,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t)g(t) \frac{dt}{t^2}, \quad (2.1.2)$$

et la norme induite par,

$$\|f\| = \left(\int_0^\infty f^2(t) \frac{dt}{t^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.3)$$

2.2 Théorèmes fondamentaux

Dans cette section nous donnons la caractérisation de l'action de la fonction de Möbius sur certaines fonctions arithmétiques.

Théorème 2.1. . Soient $\sum_{k \geq 1} c_k$ une série absolument convergente de somme $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$, et la fonction φ définie par,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left\{ \frac{k}{x} \right\}, \quad x \in [1, \infty[.$$

Alors on a,

$$\sum_{n \geq 1} \mu(n) \varphi(n) = -1. \quad (2.2.4)$$

En particulier pour la fonction arithmétique,

$$\frac{\log n}{n}$$

on obtient le résultat suivant,

Théorème 2.2. Pour tout entier positif n on a,

$$\frac{\log n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{n} \right\}. \quad (2.2.5)$$

Ainsi la série

$$\sum \frac{1}{k(k+1)}$$

est absolument convergente avec pour somme 1.

La conjecture de Möbius (2.1.1) est une conséquence des Théorème 2.1 et Théorème 2.2.

2.3 Preuve des deux théorèmes

Dans cette section nous démontrons les théorèmes 2.1 et 2.2.

2.3.1 Les fonctions e_n , χ et v_n

La constante d'Euler γ est donnée par

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right)$$

que l'on peut aussi écrire comme suit

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right),$$

2.3. PREUVE DES DEUX THÉORÈMES

autrement dit on a :

$$\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right)$$

M. Balazard dans [9] et [16] a démontré le résultat suivant,

$$\langle \chi, e_n \rangle = \frac{\log n + 1 - \gamma}{n}, \quad (2.3.6)$$

d'où l'on déduit que,

$$\langle \chi, e_1 \rangle = 1 - \gamma.$$

Dans ce qui suit nous exposons une autre preuve de la formule précédente.

On a

$$\begin{aligned} \langle \chi, e_n \rangle &= \int_1^{+\infty} \left\{ \frac{t}{n} \right\} t^{-2} dt \\ &= \int_1^n \left\{ \frac{t}{n} \right\} t^{-2} dt + \int_n^{+\infty} \left\{ \frac{t}{n} \right\} t^{-2} dt \\ &= \frac{\log n}{n} + \int_n^{+\infty} \left\{ \frac{t}{n} \right\} t^{-2} dt \\ &= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \{t\} t^{-2} dt \\ &= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k \geq 1} \int_n^{+\infty} (t - k) t^{-2} dt \\ &= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right). \end{aligned}$$

Comme,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &= \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k(k+1)} + \log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 - \gamma \end{aligned}$$

alors le résultat en découle.

Pout tout entier naturel n considérons la fonction v_n définie par,

$$v_n(t) = \left\{ \frac{\lfloor t \rfloor}{n} \right\} \quad (2.3.7)$$

2.3. PREUVE DES DEUX THÉORÈMES

Les fonctions e_n et v_n vérifient la relation suivante,

$$v_n(t) = e_n(t) - \frac{\{t\}}{n}. \quad (2.3.8)$$

Donc v_n est aussi un élément de H .

Lemme 2.3. *Pour tout entier positif n on a,*

$$\langle \chi, v_n \rangle = \frac{\log n}{n}. \quad (2.3.9)$$

Démonstration. . Des relations (2.3.8) et (2.3.6), on obtient les égalités suivantes

$$\langle \chi, v_n \rangle = \langle \chi, e_n \rangle - \frac{1}{n} \langle \chi, e_1 \rangle = \frac{\log n + 1 - \gamma}{n} - \frac{1 - \gamma}{n} = \frac{\log n}{n}.$$

ce qui prouve le résultat. \square

Lemme 2.4. *Soit n un entier positif. Alors on a*

$$\langle \chi, v_n \rangle = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{n} \right\}. \quad (2.3.10)$$

Démonstration. . En exprimant le produit scalaire $\langle \chi, v_n \rangle$ sous la forme d'une série convergente. De (2.3.7) on obtient,

$$\langle \chi, v_n \rangle = \int_1^\infty \left\{ \frac{\lfloor t \rfloor}{n} \right\} \frac{dt}{t^2} = \sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} \left\{ \frac{k}{n} \right\} \frac{dt}{t^2} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{n} \right\}.$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Enfin, grâce aux lemmes 2.3 et 2.4 on obtient le théorème 2.2.

2.3.2 Formule d'inversion de Möbius

Considérons la fonction arithmétique v définie par

$$v(n) = \sum_{d|n} \mu(d).$$

v ainsi définie satisfait l'identité de Möbius donnée par,

Lemme 2.5. *Pour tout entier positif n , on a l'identité suivante*

$$v(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Démonstration. . Si $n = 1$, on a $v(1) = 1$. supposons que $n > 1$ et dans ce cas le nombre n se décompose en produit de nombres premiers

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}.$$

2.3. PREUVE DES DEUX THÉORÈMES

Comme $\mu(d) = 0$ si d est un multiple d'un carré, alors les diviseurs de n s'écrivent sous la forme $d = \prod_{i \in I} p_i$, avec $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$ et $\mu(d) = (-1)^{|I|}$ et il y'a $C_k^{|I|}$ diviseurs et on a $1 \leq |I| \leq k$. D'où l'on a

$$\begin{aligned} v(n) &= 1 + \sum_{|I|=1}^k C_k^{|I|} (-1)^{|I|} \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. Soient f et g deux fonctions arithmétiques telles que

$$g(n) = \sum_{m|n} f(m).$$

Alors,

$$f(n) = \sum_{m|n} \mu(m) g(m)$$

Démonstration. .

$$\begin{aligned} \sum_{m|n} \mu(m) g(m) &= \sum_{m|n} \mu(m) \left(\sum_{m|\frac{n}{k}} f(k) \right) \\ &= \sum_{k, m, km|n} \mu(m) f(k) \\ &= \sum_{k|n} f(k) \sum_{m|\frac{n}{k}} \mu(m) \\ &= f(n) \end{aligned}$$

□

Il existe dans le cas réel une formule analogue de la formule d'inversion de Möbius, donnée par le lemme suivant

Lemme 2.7. Soient f et g deux fonctions arithmétiques telles que

$$g(t) = \sum_{m \leq t} f\left(\frac{t}{m}\right).$$

Alors

$$f(t) = \sum_{m \leq t} \mu(m) g\left(\frac{t}{m}\right) \tag{2.3.12}$$

2.3. PREUVE DES DEUX THÉORÈMES

Démonstration. . Comme $v(n) = 0$ pour $n > 1$. Alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \leq t} \mu(m) g\left(\frac{t}{m}\right) &= \sum_{m \leq t} \mu(m) \left(\sum_{k \leq \frac{t}{m}} f\left(\frac{t}{mk}\right) \right) \\
 &= \sum_{k, m, km \leq t} \mu(m) f(k) \\
 &= \sum_{n \leq t} f\left(\frac{t}{n}\right) \left(\sum_{d|n} \mu(d) \right) \\
 &= \sum_{n \leq t} f\left(\frac{t}{n}\right) v(n) \\
 &= f(t)
 \end{aligned}$$

□

En utilisant la formule d'inversion de Möbius dans le cas réel, on obtient le lemme suivant.

Lemme 2.8. *Pour tout entier positif n , on a l'identité suivante,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\{ \frac{t}{n} \right\} = -1 \tag{2.3.13}$$

Démonstration. . On calcule d'abord la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor.$$

Comme,

$$\left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor = 0 \text{ si } n > t, \tag{2.3.14}$$

alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor = \sum_{n \leq t} \mu(n) \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor. \tag{2.3.15}$$

Or on a,

$$\lfloor t \rfloor = \sum_{n \leq t} 1, \tag{2.3.16}$$

alors par la relation (2.3.16) et la formule d'inversion de Möbius (2.3.12), appliquée aux fonctions arithmétiques $g(t) = \lfloor t \rfloor$ et $f(t) = 1$ on obtient l'identité

$$1 = \sum_{n \leq t} \mu(n) \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor. \tag{2.3.17}$$

2.3. PREUVE DES DEUX THÉORÈMES

Et grâce aux égalités (2.3.15), (2.3.16) il vient,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor = 1. \quad (2.3.18)$$

Pour terminer la preuve de lemme, on remarque que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\{ \frac{t}{n} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left(\frac{t}{n} - \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor \right) = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor. \quad (2.3.19)$$

En utilisant la formule classique d'inversion de Möbius,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s}, \quad (\Re(s) > 1).$$

Par le prolongement analytique de la fonction zeta et la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ on obtient,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0. \quad (2.3.20)$$

Et avec les relations (2.3.18), (2.3.20) et (2.3.20), on termine la preuve. \square

Preuve du Théorème 2.1 : On a

$$\sum_{n \geq 1} \mu(n) \phi(n) = \sum_{n \geq 1} \mu(n) \sum_{k \geq 1} c_k \left\{ \frac{k}{n} \right\}, \quad (2.3.21)$$

Grâce à la convergence absolue de la série $\sum_k c_k$ on obtient,

$$\sum_{n \geq 1} \mu(n) \phi(n) = \sum_{k \geq 1} c_k \sum_{n \geq 1} \mu(n) \left\{ \frac{k}{n} \right\}, \quad (2.3.22)$$

et en utilisant le Lemme 4.2 et l'équation (2.3.22) il vient

$$\sum_{k \geq 1} c_k \sum_{n \geq 1} \mu(n) \left\{ \frac{k}{n} \right\} = - \sum_{k \geq 1} c_k = -1. \quad (2.3.23)$$

D'où le résultat

$$\sum_{n \geq 1} \mu(n) \phi(n) = -1.$$

est démontré.

Les théorèmes 2.1 et 2.2 impliquent

Corollaire 2.9.

$$\sum_{n \geq 1} \mu(n) \frac{\log(n)}{n} = -1. \quad (2.3.24)$$

2.4 Calcul de la somme de quelques séries numériques convergentes

La formule précédente de $\frac{\log n}{n}$ permet de calculer la somme d'une famille de séries numériques s'exprimant sous la forme,

$$\sum_{k \geq 1} \frac{n}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{n} \right\}$$

pour tout entier positif n .

La division euclidienne de k par n donne une autre reformulation de ces séries donnée par l'expression suivante :

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(in+r)(in+r+1)}$$

dont la somme est $\log n$.

Dans ce qui suit on donne deux exemples pour $n = 2$ et $n = 3$.

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{(2i+1)(i+1)} = 2 \log 2.$$

D'un autre côté, comme $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i(i+1)} = 1$, alors

$$1 = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{2i(2i+1)} + \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(2i+1)(2i+2)}$$

et donc

$$2 = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i(2i+1)} + \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(2i+1)(i+1)}.$$

Ainsi

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i(2i+1)} = 2 - \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(2i+1)(i+1)}$$

d'où

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i(2i+1)} = 2 - 2 \log 2.$$

Pour $n = 3$ on a

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{r=1}^2 \frac{r}{(3i+r)(3i+r+1)} = \log 3.$$

Et alors

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{(3i+1)(3i+2)} + \sum_{i \geq 0} \frac{2}{(3i+2)(3i+3)} = \log 3.$$

Comme

$$\frac{1}{3i+1} + \frac{2}{3i+3} = \frac{9i+5}{(3i+1)(3i+3)}$$

2.4. CALCUL DE LA SOMME DE QUELQUES SÉRIES NUMÉRIQUES CONVERGENTES

Alors

$$\sum_{i \geq 0} \frac{9i + 5}{(3i + 1)(3i + 2)(3i + 3)} = \log 3.$$

Mais

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k + 1)} = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{3i(3i + 1)} + \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(3i + 1)(3i + 2)} + \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(3i + 2)(3i + 3)}$$

Les mêmes calculs que dans le cas $n = 2$ donnent

$$\sum_{i \geq 1} \frac{2i + 1}{i(3i + 1)(3i + 2)(i + 1)} = \frac{3}{2}(1 - \log 3)$$

Chapitre 3

Etude des sommes des cotangentes de Vasyunin. Loi de Réciprocité

3.1 Introduction

Soient m, n deux entiers positifs et $d = (n, m)$. Pour calculer le produit scalaire $\langle e_n, e_m \rangle$; Vasyunin a introduit la formule suivante [16, 44]) :

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) + \frac{n-m}{2nm} \log \frac{m}{n} \\ &\quad - \frac{\pi d}{2nm} [V(m_0, n_0) + V(n_0, m_0)] \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

où

$$V(m_0, n_0) = \sum_{k=1}^{n_0-1} \left\{ \frac{km_0}{n_0} \right\} \cot \left(\frac{\pi k}{n_0} \right). \quad (3.1.2)$$

et $n_0 = \frac{n}{d}, m_0 = \frac{m}{d}$.

On a besoin d'évaluer la valeur de la somme $V(m_0, n_0) + V(n_0, m_0)$ de façon plus précise.

Pour simplifier, considérons dans ce qui suit $d = 1$, sauf mention contraire. La somme de cotangentes de Vasyunin $V(n, m)$ reste mystérieuse. S. Bettin et J. B. Conrey [21, Theorem 1] ont montré récemment la formule suivante,

$$\frac{\bar{m}}{n} V(m, n) + V(\bar{n}, \bar{m}) = -\frac{1}{\pi n} - g\left(\frac{\bar{m}}{n}\right) \quad (3.1.3)$$

où $n\bar{n} \equiv 1 (m)$ et $m\bar{m} \equiv 1 (n)$.

Cette loi de réciprocité est utile pour l'étude de la fonction zêta d'Estermann, par contre elle ne simplifie pas le calcul de produit scalaire $\langle e_n, e_m \rangle$. Dans ce chapitre nous donnons une bien meilleure loi de réciprocité satisfaite par la somme des cotangentes de Vasyunin; ce qui nous permet d'établir une nouvelle formule pour le produit scalaire $\langle e_n, e_m \rangle$.

3.2. LOI DE RECIPROCITÉ

3.2 Loi de reciprocité

Soit ψ la fonction digamma définie sur \mathbb{C}^* par

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right), \quad (3.2.4)$$

on a $\psi(1) = -\gamma$.

La fonction ψ est croissante sur \mathbb{R}_+ , en effet on a pour $a \leq b$

$$\psi(b) - \psi(a) = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right) \geq 0$$

L'étude de la fonction ψ est détaillée au chapitre suivant. Maintenant considérons la fonction symétrique G définie en fonction de ψ par,

$$G(n, m) = \sum_{r=1}^{nm-1} \left(\psi \left(\frac{r+1}{nm} \right) - \psi \left(\frac{r}{nm} \right) \right) \left\{ \frac{r}{n} \right\} \left\{ \frac{r}{m} \right\}. \quad (3.2.5)$$

et g une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, dont le développement asymptotique est

$$g(x) = -\frac{\log 2\pi x - \gamma}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^N \frac{\zeta(k) B_k}{k} x^k + o(x^{N+1}), \quad (3.2.6)$$

où $N \geq 2$, $x \rightarrow 0$ et B_k est le $k^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

Comme on a

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!},$$

Le développement asymptotique peut alors s'écrire sous la forme :

$$g(x) = -\frac{\log 2\pi x - \gamma}{\pi} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k (2k)!} x^k + o(x^{N+1}), \quad (3.2.7)$$

La fonction G est bien définie même si n, m ne sont pas premiers entre eux. Elle intervient dans la loi de reciprocité satisfaite par $V(n, m)$ et $V(m, n)$ donnée par le théorème

Théorème 3.1. *Pour n et m deux entiers premiers entre eux on a,*

$$V(n, m) + V(m, n) = \frac{1}{\pi} \log n^{m-1} m^{n-1} - \frac{2}{\pi} - ng \left(\frac{1}{n} \right) - mg \left(\frac{1}{m} \right) - \frac{2}{\pi} G(n, m). \quad (3.2.8)$$

Cette loi permet de réécrire le produit scalaire $\langle e_n, e_m \rangle$ de la manière suivante,

3.3. PREUVES DU THÉORÈME 3.1 ET CORROLLAIRE 3.2

Corollaire 3.2. *Pour n et m tels que $(n, m) = 1$, on a*

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{2 + (\log 2\pi - \gamma)(n + m)}{2nm} - \frac{1}{2nm} \log n^{n-1} m^{m-1} \\ &+ \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{m} g\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} g\left(\frac{1}{m}\right) \right) + \frac{1}{nm} G(n, m). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Dans le cas général $d \geq 1$, c'est-à-dire n, m sont quelconques, comme conséquence du théorème 3.1, on obtient une nouvelle expression de produit scalaire (3.1.1).

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{2d + (\log 2\pi - \gamma)(n + m)}{2nm} \\ &- \frac{1}{2nm} ((n - d) \log n + (m - d) \log m - (n + m - 2d) \log d) \\ &+ \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n} g\left(\frac{d}{m}\right) + \frac{1}{m} g\left(\frac{d}{n}\right) \right) + \frac{d}{nm} G\left(\frac{n}{d}, \frac{m}{d}\right). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

3.3 Preuves du théorème 3.1 et corollaire 3.2

Soit n un entier naturel, et v_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$v_n(t) = \left\{ \frac{\lfloor t \rfloor}{n} \right\}. \quad (3.3.11)$$

La fonction v_n est la restriction de la fonction e_n à \mathbb{N} . La relation naturelle entre v_n et e_n comme nous l'avons déjà vu est donnée par,

$$v_n = e_n - \frac{1}{n} e_1.$$

Comme on a

$$v_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in [0, 1[, \\ \left\{ \frac{k}{n} \right\}, & x \in [k, k + 1[\end{cases}$$

Alors l'expression de $\langle v_n, v_m \rangle$ déduite de la définition(3.3.11) est,

$$\langle v_n, v_m \rangle = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{n} \right\} \left\{ \frac{k}{m} \right\}. \quad (3.3.12)$$

Lemme 3.3. *Soient n et m tels que $(n, m) = 1$, alors*

$$\frac{2nm}{\pi} \langle v_n, v_m \rangle = V(1, n) + V(1, m) - (V(n, m) + V(m, n)) + \frac{1}{\pi} \log n^{m-1} m^{n-1}. \quad (3.3.13)$$

Démonstration. . En utilisant la relation (3.3.12), on obtient

$$\begin{aligned} \langle v_n, v_m \rangle &= \left\langle e_n - \frac{1}{n} e_1, e_m - \frac{1}{m} e_1 \right\rangle \\ &= \langle e_n, e_m \rangle + \frac{1}{nm} \langle e_1, e_1 \rangle - \frac{1}{n} \langle e_1, e_m \rangle - \frac{1}{m} \langle e_1, e_n \rangle. \end{aligned}$$

3.3. PREUVES DU THÉORÈME 3.1 ET CORROLLAIRE 3.2

De la relation de Vasyunin (3.1.1),

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_m \rangle &= \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1-m}{2m} \log m \\ &- \frac{\pi}{2m} V(1, m),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_n \rangle &= \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1-n}{2n} \log n \\ &- \frac{\pi}{2n} V(1, n)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle e_n, e_m \rangle &= \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{n-m}{2nm} \log \frac{m}{n} \\ &- \frac{\pi}{2nm} [V(m, n) + V(n, m)].\end{aligned}$$

Lorsque $n = m = 1$, on obtient

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \log 2\pi - \gamma,$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{2nm}{\pi} \langle v_n, v_m \rangle &= V(1, n) + V(1, m) - V(n, m) - V(m, n) \\ &+ \frac{1}{\pi} (m \log n + n \log m - \log nm).\end{aligned}$$

□

La série de fonctions

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{n} \right\} \left\{ \frac{k}{m} \right\}, \quad (3.3.14)$$

est convergente. Pour tout entier positif k , on a,

$$k \equiv r(nm), 1 \leq r \leq nm - 1$$

alors,

$$\left\{ \frac{k}{n} \right\} \left\{ \frac{k}{m} \right\} = \left\{ \frac{r}{n} \right\} \left\{ \frac{r}{m} \right\}.$$

La série (3.3.14) vaut,

$$\sum_{r=1}^{nm-1} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(inm+r)(inm+r+1)} \left\{ \frac{r}{n} \right\} \left\{ \frac{r}{m} \right\}. \quad (3.3.15)$$

Enfin, pour estimer la valeur de $\langle v_n, v_m \rangle$ on a besoin de calculer la somme de de la série

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{(inm+r)(inm+r+1)}.$$

3.3. PREUVES DU THÉORÈME 3.1 ET COROLLAIRE 3.2

Lemme 3.4. *Soient a, b deux nombres positifs distincts alors :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{\psi(a) - \psi(b)}{a-b}. \quad (3.3.16)$$

Démonstration. . On a

$$\begin{aligned} \psi(a) - \psi(b) &= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k+b} - \frac{1}{k+a} \right) \\ &= \frac{a-b}{ab} + (a-b) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+a)(k+b)} \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha > 0$, le corollaire suivant est une conséquence du lemme 3.4

Corollaire 3.5.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha k + a)(\alpha k + b)} = \frac{\psi\left(\frac{a}{\alpha}\right) - \psi\left(\frac{b}{\alpha}\right)}{\alpha(a-b)}. \quad (3.3.17)$$

Démonstration. .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha k + a)(\alpha k + b)} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{a}{\alpha}\right)\left(k + \frac{b}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{\psi\left(\frac{a}{\alpha}\right) - \psi\left(\frac{b}{\alpha}\right)}{\alpha(a-b)} \end{aligned}$$

□

Dans [35] M. Luis et A. Victor on montré la représentation intégrale suivante de la différence $\psi(a) - \psi(b)$:

$$\psi(a) - \psi(b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{1 - e^{-t}} dt.$$

Elle est déduite de l'expression intégrale de la somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)}$$

autrement dit on a,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a-b}{(k+a)(k+b)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+b} - \frac{1}{k+a} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{k+b-1} - x^{k+a-1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{1-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{1 - e^{-t}} dt. \end{aligned}$$

Corollaire 3.6. *Pour n, m quelconques, on a*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{nm}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{n} \right\} \left\{ \frac{k}{m} \right\} = G(n, m). \quad (3.3.18)$$

Démonstration. . En prenant $\alpha = nm$, la relation (3.3.18) est immédiatement déduite des relations (3.2.5), (3.3.15) et (3.3.17) du corollaire 3.5. \square

3.4 La fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction partie fractionnaire

Définition 3.7. *La fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction partie fractionnaire A est définie sur \mathbb{R}_+ par l'expression,*

$$A(\lambda) = \int_0^{+\infty} \{t\} \{\lambda t\} t^{-2} dt \quad (3.4.19)$$

La fonction A est reliée au produit scalaire $\langle e_n, e_m \rangle$ par la formule donnée par,

Lemme 3.8. *De la définition (3.4.19) on obtient*

$$\frac{1}{n} A\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{m} A\left(\frac{m}{n}\right) = \langle e_n, e_m \rangle \quad (3.4.20)$$

Démonstration. .

$$\begin{aligned} A\left(\frac{n}{m}\right) &= \int_0^{+\infty} \{t\} \left\{ \frac{nt}{m} \right\} t^{-2} dt \\ &= n \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{t}{n} \right\} \left\{ \frac{t}{m} \right\} t^{-2} dt \end{aligned}$$

Ce résultat est obtenu par le changement de variable $y = nt$ \square

Ainsi la valeur de A en 1 est $\log 2\pi - \gamma$ et $A(0) = 0$.

La fonction A est étudiée dans l'article [11], ici la nouvelle formule du produit scalaire $\langle e_n, e_m \rangle$ permet d'écrire A sous la forme :

$$\begin{aligned} A\left(\frac{n}{m}\right) &= \frac{2d + (\log 2\pi - \gamma)(n + m)}{2m} \\ &- \frac{1}{2m} ((n - d) \log n + (m - d) \log m - (n + m - 2d) \log d) \\ &+ \frac{\pi}{2} \left(g\left(\frac{d}{m}\right) + \frac{n}{m} g\left(\frac{d}{n}\right) \right) + \frac{d}{m} G\left(\frac{n}{d}, \frac{m}{d}\right). \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Dans [11] Báez-Duarte et al. ont montré que A admet un maximum local en tout entier naturel, le lemme suivant donne la valeur de ce maximum en $n = 1$

3.4. LA FONCTION D'AUTOCORRÉLATION MULTIPLICATIVE DE LA FONCTION PARTIE FRACTIONNAIRE

Lemme 3.9.

$$\log 2\pi - \gamma = 1 + \sum_{k \geq 1} \left(1 - 2k \log \frac{k+1}{k} + \frac{k}{k+1} \right) \quad (3.4.22)$$

Démonstration. .

$$\begin{aligned} A(1) &= \int_0^{+\infty} \{t\}^2 t^{-2} dt \\ &= 1 + \int_1^{+\infty} \{t\}^2 t^{-2} dt \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} (t-k)^2 t^{-2} dt \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} (t^2 - 2kt + k^2) t^{-2} dt \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} \left(1 - 2k \frac{1}{t} + \frac{k^2}{t^2} \right) dt \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} \left(1 - 2k \log \frac{k+1}{k} + \frac{k}{k+1} \right) \end{aligned}$$

□

Dans le cas général on a

Lemme 3.10.

$$A(n) = \log 2\pi - \gamma + n \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \left\{ \frac{k}{n} \right\} \quad (3.4.23)$$

3.4. LA FONCTION D'AUTOCORRÉLATION MULTIPLICATIVE DE LA FONCTION PARTIE FRACTIONNAIRE

Démonstration. .

$$\begin{aligned}
A(n) &= \int_0^{+\infty} \{t\} \{nt\} t^{-2} dt \\
&= n \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{t}{n} \right\} \{t\} t^{-2} dt \\
&= 1 + n \int_1^{+\infty} \left(\frac{t}{n} - \left[\frac{t}{n} \right] \right) (t - [t]) t^{-2} dt \\
&= 1 + n \sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} \left(\frac{t}{n} - \left[\frac{k}{n} \right] \right) (t - k) t^{-2} dt \\
&= 1 + n \sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{k}{n} + \left[\frac{k}{n} \right] \right) \frac{1}{t} + k \left[\frac{k}{n} \right] t^{-2} \right) dt \\
&= 1 + n \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{k}{n} + \left[\frac{k}{n} \right] \right) \log \frac{k+1}{k} + \frac{\left[\frac{k}{n} \right]}{k+1} \right) \\
&= 1 + \sum_{k \geq 1} \left(1 - 2k \log \frac{k+1}{k} + \frac{k}{k+1} \right) + n \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \left\{ \frac{k}{n} \right\} \\
&= A(1) + n \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \left\{ \frac{k}{n} \right\} \\
&= \log 2\pi - \gamma + n \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \left\{ \frac{k}{n} \right\}
\end{aligned}$$

□

Comme conséquence du théorème 2.1, le lemme suivant découle [24]

Corollaire 3.11.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n) A(n)}{n} = \gamma - 1 \tag{3.4.24}$$

Démonstration. .

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \frac{A(n) \mu(n)}{n} &= \sum_{n \geq 1} \frac{(\log 2\pi - \gamma) \mu(n)}{n} + \sum_{n \geq 1} \mu(n) \left(\sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \left\{ \frac{k}{n} \right\} \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} \mu(n) \left(\sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \left\{ \frac{k}{n} \right\} \right) \\
&= \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \sum_{n \geq 1} \mu(n) \left\{ \frac{k}{n} \right\} \\
&= - \sum_{k \geq 1} \left(\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \gamma - 1
\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Fractions continues, fonction digamma. Application aux sommes de Vasyunin : Formule explicites et asymptotiques

4.1 Fractions continues

Une fraction continue s'écrit sous la forme

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

ou bien

$$[a_0, a_1, a_3, \dots],$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont les quotients de la fraction continue. Si tous les a_i sont dans \mathbb{Z} la fraction continue est dite simple. Dans ce qui suit on utilise le terme fraction continue pour désigner une telle fraction [30, 41].

Tout nombre réel admet une décomposition en fraction continue. En effet.

Soit $x \in \mathbb{R}$, Alors $x = [x] + \{x\}$. On pose $a_0 = [x]$ et $\xi_0 = \{x\}$. Si $\xi_0 = 0$ alors x est représenté par $x = [a_0]$; si $\xi_0 \neq 0$ alors $\left\lfloor \frac{1}{\xi_0} \right\rfloor > 1$, on prend $r_1 = \frac{1}{\xi_0}$ on obtient $x = [a_0, r_1]$. On itère le processus pour $x = r_1$. $a_1 = [r_1]$ et $\xi_1 = r_1 - a_1$; si $\xi_1 = 0$ alors

$$x = a_0 + \frac{1}{r_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1].$$

Sinon on prend $r_2 = \frac{1}{\xi_1}$. Cet algorithme permet de construire une suite a_0, a_1, a_2, \dots . Cette suite est finie si et seulement si x est un nombre rationnel. Pour toute fraction continue $[a_0, a_1, \dots, a_l]$, la k^{ieme} réduite est $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ et le k^{ieme} quotient est $[a_k, a_{k+1}, \dots, a_l]$.

Dans le cas des nombres rationnels on traduit cet algorithme comme suit : On exprime a/b sous forme d'une fraction continue $a/b = [a_0, a_1, \dots, a_l]$, avec $a_{l+1} = 0$.

4.1. FRACTIONS CONTINUES

Pour déterminer a_0, a_1, \dots, a_l , on utilise l'algorithme d'Euclide ; on considère la suite p_k définie par,

$$p_0 = a, p_1 = b \text{ and } p_{l+1} = 0.$$

et pour $k \geq 1$ on considère la formule de récurrence suivante :

$$p_{k-1} = a_{k-1}p_k + p_{k+1}. \quad (4.1.1)$$

Comme $p_{l+1} = 0$, p_l divise tous les p_k . Alors p_l divise p et q , d'où $p_l = 1$.

Dans ce qui suit nous donnons quelques propriétés des fractions continues.

Lemme 4.1. *Soit la fraction continue $[a_0, a_1, \dots, a_l]$, $l \geq 1$. Alors*

$$[a_0, a_1, \dots, a_l] = \left[a_0, a_1, \dots, a_{l-1} + \frac{1}{a_l} \right], \quad (4.1.2)$$

$$[a_0, a_1, \dots, a_l] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_l]}. \quad (4.1.3)$$

Démonstration. . Le résultat est immédiat, on le déduit de la définition des fractions continues. \square

Soient s_k, t_k deux suites numériques définies par

$$s_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = -2 \\ 1 & \text{si } k = -1 \\ a_k s_{k-1} + s_{k-2} & \text{si } k \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$t_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -2 \\ 0 & \text{si } k = -1 \\ a_k t_{k-1} + t_{k-2} & \text{si } k \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Une définition similaire est donnée dans [27]. Pour calculer s_k et t_k , nous utilisons la représentation matricielle (cf. [18]).

$$\begin{pmatrix} s_k & s_{k-1} \\ t_k & t_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{k-1} & s_{k-2} \\ t_{k-1} & t_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors,

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{-1} \\ t_0 & t_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et les autres termes s_k, t_k se déduisent de la récurrence précédente pour tout ordre k .

Le lemme suivant donne les propriétés des suites p_k, s_k et t_k .

4.1. FRACTIONS CONTINUES

Lemme 4.2. *On a,*

$$[a_0, a_1, \dots, a_k] = \frac{s_k}{t_k}, \quad k \geq 0, \quad (4.1.6)$$

$$[a_k, a_{k-1}, \dots, a_1] = \frac{t_k}{t_{k-1}}, \quad k \geq 1, \quad (4.1.7)$$

$$[0, a_{k-1}, \dots, a_n] = \frac{p_k}{p_{k-1}}, \quad k \geq 0 \quad (4.1.8)$$

et

$$[a_k, a_{k-1}, \dots, a_0] = \frac{s_k}{s_{k-1}}, \quad k \geq 0. \quad (4.1.9)$$

Démonstration. . Toutes les relations du lemme 4.2 se démontrent par récurrence sur l'entier k .

En effet la relation (4.1.6) est satisfaite pour $k = 0$ et $k = 1$

$$[a_0] = a_0 = \frac{s_0}{t_0} = \frac{a_0}{1},$$

Comme $s_1 = a_1 a_0 + 1$ et $t_1 = a_1$ alors,

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1].$$

Pour $k \geq 2$, on suppose que

$$[a_0, a_1, \dots, a_k] = \frac{s_k}{t_k} = \frac{a_k s_{k-1} + s_{k-2}}{a_k t_{k-1} + t_{k-2}}$$

La relation (4.1.2) du lemme 4.1 donne,

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] &= \left[a_0, a_1, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right] \\ &= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) s_{k-1} + s_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) t_{k-1} + t_{k-2}} \\ &= \frac{(a_{k+1} a_k + 1) s_{k-1} + a_{k+1} a s_{k-2}}{(a_{k+1} a_k + 1) t_{k-1} + a_{k+1} a t_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1} (a_k s_{k-1} + s_{k-2}) + s_{k-1}}{a_{k+1} (a_k t_{k-1} + s_{k-2}) + t_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1} s_k + s_{k-1}}{a_{k+1} t_k + t_{k-1}} = \frac{s_{k+1}}{t_{k+1}}. \end{aligned}$$

L'égalité (4.1.7) est satisfaites pour $k = 1$,

$$\frac{t_1}{t_0} = a_1 = [a_1].$$

4.1. FRACTIONS CONTINUES

Supposons que pour $k \geq 2$, on a

$$[a_k, a_{k-1}, \dots, a_1] = \frac{t_k}{t_{k-1}}$$

alors,

$$\begin{aligned} [a_{k+1}, a_k, \dots, a_1] &= a_{k+1} + \frac{1}{[a_k, a_{k-1}, \dots, a_1]} \\ &= a_{k+1} + \frac{t_{k-1}}{t_k} \\ &= \frac{a_{k+1}t_k + t_{k-1}}{t_k} = \frac{t_{k+1}}{t_k}. \end{aligned}$$

La troisième relation (4.1.8) est satisfaite pour $k = 1$,

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{b}{a} = \frac{1}{[a_0, a_1, \dots, a_l]} = [0, a_0, a_1, \dots, a_l].$$

Pour $k \geq 2$, on suppose que

$$[0, a_{k-1}, \dots, a_l] = \frac{p_k}{p_{k-1}},$$

alors

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{1}{[a_{k-1}, a_k, \dots, a_l]} = \frac{1}{a_{k-1} + [0, a_k, \dots, a_l]}. \quad (4.1.10)$$

Mais on a

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{p_k}{a_{k-1}p_k + p_{k+1}} = \frac{1}{a_{k-1} + \frac{p_{k+1}}{p_k}}. \quad (4.1.11)$$

Des relations (4.1.10) et (4.1.11), on obtient $[0, a_k, \dots, a_l] = \frac{p_{k+1}}{p_k}$.

Enfin l'égalité (4.1.9) est satisfaite pour $k = 0$,

$$\frac{s_0}{s_{-1}} = a_0.$$

Supposons pour $k \geq 1$ que,

$$\frac{s_k}{s_{k-1}} = [a_k, \dots, a_0]$$

alors

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{a_{k+1}s_k + s_{k-1}}{s_k} = a_{k+1} + \frac{s_{k-1}}{s_k} = a_{k+1} + [a_k, \dots, a_0] = [a_{k+1}, a_k, \dots, a_0].$$

□

Corollaire 4.3. Soit $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \dots, a_l]$ alors,

$$p_k = b \prod_{j=2}^k [0, a_{j-1}, \dots, a_l], \quad k \geq 2, \quad (4.1.12)$$

et

$$b = p_k t_{k-1} + p_{k+1} t_{k-2}, \quad k \geq 1. \quad (4.1.13)$$

4.1. FRACTIONS CONTINUES

Démonstration. . La preuve consiste à écrire,

$$\frac{p_k}{b} = \frac{p_k}{p_{k-1}} \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} \dots \frac{p_2}{p_1}.$$

Utilisant la relation (4.1.8) du lemme 4.2, le résultat est immédiat.

La preuve de la relation (4.1.13) se fait par la récurrence sur l'entier k .

$$k = 1, \quad p_1 t_0 + p_2 t_{-1} = p_1 = b.$$

Supposons

$$b = p_k t_{k-1} + p_{k+1} t_{k-2}, \text{ pour } k \geq 2$$

alors,

$$\begin{aligned} p_{k+1} t_k + p_{k+2} t_{k-1} &= p_{k+1} (a_k t_{k-1} + t_{k-2}) + p_{k+2} t_{k-1} \\ &= (a_k p_{k+1} + p_{k+2}) t_{k-1} + p_{k+1} t_{k-2} \\ &= p_k t_{k-1} + p_{k+1} t_{k-2} = b. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.4. Les suites s_k , t_k et p_k satisfont les propriétés suivantes

$$t_k s_{k-1} - t_{k-1} s_k = (-1)^k, \quad (4.1.14)$$

$$p_k = (-1)^k (a_k t_{k-2} - b s_{k-2}), \quad k \geq 1 \quad (4.1.15)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{p_k p_{k+1}} = \frac{1}{b^2 [a_0, a_1, \dots, a_{l-2}] - ab}. \quad (4.1.16)$$

Démonstration. . La relation (4.1.14) se démontre par récurrence sur k .

Soit la suite

$$x_k = t_k s_{k-1} - t_{k-1} s_k$$

alors,

$$\begin{aligned} x_k &= t_k s_{k-1} - t_{k-1} s_k \\ &= (a_k t_{k-1} + t_{k-2}) s_{k-1} - t_{k-1} (a_k s_{k-1} + s_{k-2}) \\ &= t_{k-2} s_{k-1} - t_{k-1} s_{k-2} \\ &= -x_{k-1}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que,

$$x_k = (-1)^k x_0,$$

Mais on a,

$$x_0 = t_0 s_{-1} - t_{-1} s_0 = 1,$$

4.1. FRACTIONS CONTINUES

donc la relation (4.1.14) reste vraie.

La deuxième égalité (4.1.15) se démontre aussi par récurrence.

$$k = 1, -(at_{-1} - bs_{-1}) = b = p_1.$$

On suppose que,

$$at_{k-2} - bs_{k-2} = (-1)^k p_k$$

alors,

$$\begin{aligned} at_{k-1} - bs_{k-1} &= a(a_{k-1}t_{k-2} + t_{k-3}) - b(a_{k-1}s_{k-2} + s_{k-3}) \\ &= a_{k-1}(at_{k-2} - bs_{k-2}) + at_{k-3} - bs_{k-3} \\ &= (-1)^k a_{k-1}p_k + (-1)^{k-1} p_{k-1} \\ &= (-1)^k (a_{k-1}p_k - p_{k-1}) \\ &= (-1)^{k+1} p_{k+1}. \end{aligned}$$

Preuve de l'égalité de la relation (4.1.16) ; on a, relation (4.1.13)

$$\frac{t_{k-1}}{p_{k+1}} + \frac{t_{k-2}}{p_k} = \frac{b}{p_k p_{k+1}},$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k}{p_k p_{k+1}} &= \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{l-1} \left(\frac{(-1)^k t_{k-1}}{p_{k+1}} + \frac{(-1)^k t_{k-2}}{p_k} \right) \\ &= \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k t_{k-1}}{p_{k+1}} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k t_{k-2}}{p_k} \\ &= \frac{1}{b} \sum_{k=2}^l \frac{(-1)^{k-1} t_{k-2}}{p_k} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k t_{k-2}}{p_k} \\ &= \frac{(-1)^{l-1} t_{l-2}}{p_l b} - \frac{t_{-1}}{b p_1} \\ &= \frac{(-1)^{l-1} t_{l-2}}{p_l b}. \end{aligned}$$

Examinons la valeur de

$$\frac{(-1)^{l-1} t_{l-2}}{p_l b}.$$

De l'égalité (4.1.15) on déduit que

$$p_l = (-1)^l (at_{l-2} - bs_{l-2})$$

et alors,

$$\frac{(-1)^{l-1} p_l}{t_{l-2}} = \left(b \frac{s_{l-2}}{t_{l-2}} - a \right). \quad (4.1.17)$$

4.2. ETUDE DE LA FONCTION DIGAMMA ψ

La relation (4.1.6) du lemme 4.2 implique

$$\frac{s_{l-2}}{t_{l-2}} = [a_0, a_1, \dots, a_{l-2}] \quad (4.1.18)$$

Des relations (4.1.17) et (4.1.18), on tire,

$$\frac{(-1)^{l-1} t_{l-2}}{p_l b} = \frac{1}{b^2 [a_0, a_1, \dots, a_{l-2}] - ab}.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k}{p_k p_{k+1}} = \frac{1}{b^2 [a_0, a_1, \dots, a_{l-2}] - ab}.$$

□

4.2 Etude de la fonction digamma ψ

Considérons le nombre harmonique,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On pose pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > 0$

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+z}.$$

Dans ces conditions on peut donner une autre expression de ψ comme limite d'une suite numérique convergente : en effet on montre,

Lemme 4.5. *Soit z un nombre complexe tel que $Re(z) > 0$ alors,*

$$\psi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n - H_n(z)) \quad (4.2.19)$$

et pour $z = n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\psi(n+1) = -\gamma + H_n. \quad (4.2.20)$$

Démonstration. . On a,

$$\begin{aligned} \psi(z) &= -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+z} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+z} \right) \end{aligned}$$

4.2. ETUDE DE LA FONCTION DIGAMMA ψ

et

$$\begin{aligned}
 \psi(n+1) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\log m - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+n+1} \right) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\log m - \sum_{k=n}^{m+n} \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\log m - \left(\sum_{k=0}^{m+n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) \right) \\
 &= -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.
 \end{aligned}$$

□

La fonction logarithme néperien peut être considérée comme une somme d'une série numérique convergente ; la formule est donnée par le lemme suivant

Lemme 4.6. *Pour tout entier naturel n non nul, on a*

$$\frac{\log p}{p} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{p} \right\}. \quad (4.2.21)$$

Démonstration. . On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \leq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{p} \right\} &= \sum_{k \leq 1} \left\{ \frac{k}{p} \right\} \int_0^1 (x^{k-1} - x^k) dx \\
 &= \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{i \geq 0} \left\{ \frac{r}{p} \right\} \int_0^1 (x^{ip+r-1} - x^{ip+r}) dx \\
 &= \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{\sum_{r=1}^{p-1} r x^{r-1}}{1+x+\dots+x^{p-1}} dx \\
 &= \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{d(1+x+\dots+x^{p-1})}{1+x+\dots+x^{p-1}} \\
 &= \left[\frac{1}{q} \log(1+x+\dots+x^{p-1}) \right]_0^1 \\
 &= \frac{\log p}{p}.
 \end{aligned}$$

□

Remarque 4.7. *Une autre preuve de la relation (4.2.21) est donnée d'une manière explicite dans l'article de A. Bayad et M. Goubi [19].*

La géométrie des vecteurs $\psi\left(\frac{r}{n}\right)$ est étudiée dans [28, 40], le corollaire suivant établit la relation entre $\log p$ et $\psi\left(\frac{r}{n}\right)$ pour $1 \leq r \leq n-1$.

Corollaire 4.8. *Soit n un entier positif non nul, alors*

$$\log n = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} r \left(\psi\left(\frac{r+1}{n}\right) - \psi\left(\frac{r}{n}\right) \right) \quad (4.2.22)$$

4.3. APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES AUX SOMMES DES COTANGENTES DE VASYUNIN.

Démonstration. . On a

$$\begin{aligned} \frac{\log n}{n} &= \sum_{k \leq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{n} \right\} \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{i \geq 0} \frac{1}{(in+r)(in+r+1)} \right) \left\{ \frac{r}{n} \right\}. \end{aligned}$$

De la relation (3.3.17) du corollaire 3.5, on obtient

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(ni+r)(ni+r+1)} = \frac{\psi\left(\frac{r+1}{n}\right) - \psi\left(\frac{r}{n}\right)}{n},$$

d'où le résultat. \square

4.3 Application des fractions continues aux sommes des cotangentes de Vasyunin.

Soient $1 < m < n$ deux entiers positifs premiers entre eux, on note \bar{n} l'inverse modulo m de n et on considère la fraction continue $\bar{n}/m = [a_0, a_1, \dots, a_l]$. On définit la suite p_k par la formule de récurrence

$$p_{k-1} = a_{k-1}p_k + p_{k+1},$$

avec

$$p_0 = \bar{n}, p_1 = m \text{ et } p_{l+1} = 0$$

En utilisant les propriétés des fractions continues et grâce à la loi de réciprocité [21, Theorem 1] on obtient,

Théorème 4.9. *Soient m et n deux entiers positifs premiers entre eux tels que $1 < m < n$. Avec les notations précédentes on a*

(4.3.23)

$$\begin{aligned} V(n, m) &= - \sum_{k=2}^l (-1)^k g([0, a_{k-1}, \dots, a_l]) \prod_{j=2}^k [a_{j-1}, \dots, a_l] \\ &\quad + \frac{1}{\pi (m[a_0, a_1, \dots, a_{l-2}] - \bar{n})} \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Corollaire 4.10. *Soit $\frac{m}{n} = [b_0, \dots, b_l]$. q_k la suite définie par la relation de récurrence ; $q_{k-1} = b_{k-1}q_k + q_{k+1}$, $q_0 = m$, $q_1 = n$ et $q_l = 1$.*

Alors,

(4.3.25)

$$\begin{aligned} V(m, n) &= -\frac{1}{\pi} - ng\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\pi} \log nm + \frac{1}{\pi} \left(\log m + (-1)^l \log q_{l-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k (q_k \log q_{k+1} + q_{k+1} \log q_k - 2G(q_k, q_{k+1})). \end{aligned}$$

4.3. APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES AUX SOMMES DES COTANGENTES DE VASYUNIN.

Posons,

$$f_k = \prod_{j=1}^k [0, b_{j-1}, \dots, b_l],$$

alors

$$\begin{aligned} V(m, n) &= -m \left(f_1 g \left(\frac{1}{mf_1} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k (f_k \log f_{k+1}) + f_{k+1} \log f_k \right) \\ &+ \frac{(-1)^l}{\pi} \log f_{l-1} + \frac{(-1)^l - 1}{\pi} \log m + \left((-1)^l f_{l-1} - f_1 \right) \frac{m \log m}{\pi} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k G(mf_k, mf_{k+1}) - \frac{1}{\pi} (1 + \log f_1). \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Pour démontrer le théorème 4.9 et le corollaire 4.10 on a besoin du lemme suivant

Lemme 4.11. *On a*

$$V(n, m) = \frac{m}{\pi} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k}{p_k p_{k+1}} - q \sum_{k=2}^l \frac{(-1)^k}{p_k} g(p_k/p_{k-1}). \quad (4.3.27)$$

Démonstration. . Eu utilisant la loi de réciprocité (4.5.49), on obtient,

$$\frac{1}{\bar{n}} V(\bar{m}, \bar{n}) + \frac{1}{m} V(n, m) = -\frac{1}{q} \left(\frac{1}{\pi \bar{n}} + g \left(\frac{m}{\bar{n}} \right) \right), \quad (4.3.28)$$

prenant $\bar{n} = a$ et $m = b$ avec la suite p_k définie dans la relation (4.1.1), il vient,

$$\frac{1}{p_{k-1}} V(\bar{p}_k, p_{k-1}) + \frac{1}{p_k} V(\bar{p}_{k-1}, p_k) = \frac{1}{p_k} \left(\frac{1}{\pi p_{k-1}} + g(p_k/p_{k-1}) \right). \quad (4.3.29)$$

Or on a

$$p_{k-1} = a_{k-1} p_k + p_{k+1},$$

alors

$$\bar{p}_{k-1} = \bar{p}_{k+1}$$

et

$$V(\bar{p}_{k-1}, p_k) = V(\bar{p}_{k+1}, p_k).$$

La relation (4.3.29) s'écrit,

$$\frac{1}{p_{k-1}} V(\bar{p}_k, p_{k-1}) + \frac{1}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) = -\frac{1}{p_k} \left(\frac{1}{\pi p_{k-1}} + g(p_k/p_{k-1}) \right). \quad (4.3.30)$$

Calculons la somme :

$$\sum_{k=1}^l \left[\frac{(-1)^k}{p_{k-1}} V(\bar{p}_k, p_{k-1}) + \frac{(-1)^k}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) \right].$$

4.3. APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES AUX SOMMES DES COTANGENTES DE VASYUNIN.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l \left[\frac{(-1)^k}{p_{k-1}} V(\bar{p}_k, p_{k-1}) + \frac{(-1)^k}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) \right] &= \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^k}{p_{k-1}} V(\bar{p}_k, p_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(-1)^{k+1}}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) \\ &= -\frac{1}{p_0} V(\bar{p}_1, p_0) + \frac{(-1)^l}{p_l} V(\bar{p}_{l+1}, p_l). \end{aligned}$$

Comme $p_{l+1} = 0$ et $V(\bar{p}_{l+1}, p_l) = 0$ alors,

$$\sum_{k=1}^l \left[\frac{(-1)^k}{p_{k-1}} V(\bar{p}_k, p_{k-1}) + \frac{(-1)^k}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) \right] = -\frac{1}{\bar{n}} V(\bar{m}, \bar{n}).$$

et

$$-\frac{1}{\bar{n}} V(\bar{m}, \bar{n}) = -\frac{1}{\bar{n}} V(\bar{m}, \bar{n}) - \frac{1}{m} V(n, m) + \sum_{k=2}^l \left[\frac{(-1)^k}{p_{k-1}} V(\bar{p}_k, p_{k-1}) + \frac{(-1)^k}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) \right].$$

$$\frac{1}{m} V(n, m) = \sum_{k=2}^l \left[\frac{(-1)^k}{p_{k-1}} V(\bar{p}_k, p_{k-1}) + \frac{(-1)^k}{p_k} V(\bar{p}_{k+1}, p_k) \right] ..$$

Alors on a :

$$\frac{1}{m} V(n, m) = -\sum_{k=2}^l \frac{(-1)^k}{p_k} \left(\frac{1}{\pi p_{k-1}} + g(p_k/p_{k-1}) \right)$$

et

$$\frac{1}{m} V(n, m) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k}{p_k p_{k+1}} - \sum_{k=2}^l \frac{(-1)^k}{p_k} g(p_k/p_{k-1}).$$

□

4.3.1 Preuve du théorème 4.9 et du corollaire 4.10

Preuve du théorème 4.9. En prenant $a = \bar{p}$ et $b = q$, dans la relation (4.1.16) du lemme 4.4 on obtient,

$$\frac{m}{\pi} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(-1)^k}{p_k p_{k+1}} = \frac{1}{m [a_0, a_1, \dots, a_{n-2}] - \bar{n}}. \quad (4.3.31)$$

De l'égalité 4.1.12 du corollaire 4.3 on a,

$$\frac{1}{p_k} = \frac{1}{m} \prod_{j=2}^k [a_{j-1}, \dots, a_l], \quad k \geq 2.$$

4.3. APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES AUX SOMMES DES COTANGENTES DE VASYUNIN.

et de l'égalité 4.1.8 du lemme 4.2

$$\sum_{k=2}^l \frac{(-1)^k}{p_k} g(p_k/p_{k-1}) = \sum_{k=2}^l \frac{1}{m} g([a_{k-1}, \dots, a_l]) \prod_{j=2}^k [a_{j-1}, \dots, a_l]. \quad (4.3.32)$$

En rapportant les quantités (4.3.31) et (4.3.32) dans la relation (4.3.27) du lemme 4.11 on obtient.

Preuve du corollaire 4.10

En remarquant que pour $n \equiv r(m)$ on a

$$V(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ V(r, m) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.33)$$

Appliquons plusieurs fois la loi de réciprocité (3.2.8) du théorème 3.1 à la suite q_k pour calculer,

$$\sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \theta(q_{k-1}, q_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k [V(q_{k-1}, q_k) + V(q_k, q_{k-1})]$$

où

$$\theta(q_{k-1}, q_k) = \frac{1}{\pi} (q_{k-1} \log q_k + q_k \log q_{k-1} - \log q_{k-1} q_k) - \frac{2}{\pi} - q_{k-1} g\left(\frac{1}{q_{k-1}}\right) - q_k g\left(\frac{1}{q_k}\right) - \frac{2}{\pi} G(q_{k-1}, q_k).$$

En utilisant la relation (4.3.33)

$$V(q_{k+1}, q_k) = V(q_{k-1}, q_k) \text{ and } V(q_{l-1}, q_l) = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \theta(q_{k-1}, q_k) &= \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k V(q_{k-1}, q_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k V(q_k, q_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k V(q_{k+1}, q_k) + \sum_{k=0}^{l-2} (-1)^{k+1} V(q_{k+1}, q_k) \\ &= -V(n, m) - (-1)^l V(q_l, q_{l-1}). \end{aligned}$$

Mais on a,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \theta(q_{k-1}, q_k) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k [(q_{k-1} \log q_k + q_k \log q_{k-1} - \log q_{k-1} q_k)] \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k [1 + G(q_{k-1}, q_k)] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \left[q_{k-1} g\left(\frac{1}{q_{k-1}}\right) + q_k g\left(\frac{1}{q_k}\right) \right], \end{aligned}$$

4.3. APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES AUX SOMMES DES COTANGENTES DE VASYUNIN.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \left[q_{k-1} g \left(\frac{1}{q_{k-1}} \right) + q_k g \left(\frac{1}{q_k} \right) \right] &= \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k q_{k-1} g \left(\frac{1}{q_{k-1}} \right) + \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k q_k g \left(\frac{1}{q_k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{l-2} (-1)^{k+1} q_k g \left(\frac{1}{q_k} \right) + \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k q_k g \left(\frac{1}{q_k} \right) \\
&= -q g \left(\frac{1}{q} \right) + (-1)^{n-1} q_{n-1} g \left(\frac{1}{q_{n-1}} \right) .,
\end{aligned}$$

et aussi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \log q_{k-1} q_k &= \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k (\log q_{k-1} + \log q_k) \\
&= \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \log q_{k-1} + \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \log q_k \\
&= \sum_{k=0}^{l-2} (-1)^{k+1} \log q_k + \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \log q_k \\
&= -\log q - (-1)^l \log q_{l-1}.
\end{aligned}$$

D'où l'on a,

$$\begin{aligned}
-V(n, m) - (-1)^l V(q_n, q_{n-1}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k (q_{k-1} \log q_k + q_k \log q_{k-1}) + m g \left(\frac{1}{q} \right) \\
&+ (-1)^l q_{l-1} g \left(\frac{1}{q_{l-1}} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k [1 + G(q_{k-1}, q_k)] \\
&+ \frac{1}{\pi} (\log m + (-1)^l \log q_{l-1})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-V(n, m) &= (-1)^l V(q_l, q_{l-1}) + (-1)^l q_{l-1} g \left(\frac{1}{q_{l-1}} \right) - \frac{1}{\pi} (m \log n + n \log m) + m g \left(\frac{1}{m} \right) \\
&+ \frac{1}{\pi} (\log m + (-1)^l \log q_{l-1}) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k [q_k \log q_{k+1} + q_{k+1} \log q_k - 2G(q_k, q_{k+1}) - 2] \\
&+ \frac{2}{\pi} (1 + G(m, n)) \\
&= \frac{(-1)^{l+1}}{\pi} - V(n, m) - V(m, n) - \frac{1}{\pi} \log nm - n g \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{\pi} (\log m + (-1)^l \log q_{l-1}) \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k [q_k \log q_{k+1} + q_{k+1} \log q_k - 2G(q_k, q_{k+1}) - 2].
\end{aligned}$$

4.4. APPLICATION DE LA FONCTION DIGAMMA AUX SOMMES DE VASYUNIN

On a donc

$$\begin{aligned} V(m, n) &= \frac{(-1)^{l+1}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k - \frac{1}{\pi} \log nm - ng \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\log m + (-1)^l \log q_{l-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k [q_k \log q_{k+1} + q_{k+1} \log q_k - 2G(q_k, q_{k+1})]. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{(-1)^{l+1}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k = -\frac{1}{\pi},$$

alors

$$\begin{aligned} V(m, n) &= -\frac{1}{\pi} - ng \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{\pi} \log nm + \frac{1}{\pi} \left(\log m + (-1)^l \log q_{l-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^k [q_k \log q_{k+1} + q_{k+1} \log q_k - 2G(q_k, q_{k+1})]. \end{aligned}$$

Alors la relation (4.3.26) est déduite de la relation (4.3.25), en remarquant que pour tout entier $1 \leq k \leq n$

$$q_k = m \prod_{j=1}^k [0, b_{j-1}, \dots, b_l].$$

4.4 Application de la fonction digamma aux sommes de Vasyunin

Soit B_1 la première fonction de Bernoulli normalisée :

$$B_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \{x\} - \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4.34)$$

On définit la série,

$$\varphi_1(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{B_1(kx)}{k} \quad (4.4.35)$$

En particulier, cette série est convergente pour des valeurs rationnelles de x . Dans ce cas on montre que

Lemme 4.12.

$$\varphi \left(\frac{n}{m} \right) = -\frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m-1} B_1 \left(\frac{rn}{m} \right) \psi \left(\frac{r}{m} \right) \quad (4.4.36)$$

4.4. APPLICATION DE LA FONCTION DIGAMMA AUX SOMMES DE VASYUNIN

Démonstration. . On a

$$\begin{aligned}
 \varphi_1\left(\frac{n}{m}\right) &= \sum_{k \geq 1} \frac{B_1\left(\frac{kn}{m}\right)}{k} \\
 &= \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{i \geq 0} \frac{B_1\left(\frac{rn}{m}\right)}{im+r} \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{i \geq 0} \frac{B_1\left(\frac{rn}{m}\right)}{i + \frac{r}{m}} \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{i \geq 0} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{B_1\left(\frac{rn}{m}\right)}{i + \frac{r}{m}},
 \end{aligned}$$

comme

$$\sum_{r=1}^{m-1} B_1\left(\frac{rn}{m}\right) = 0,$$

alors,

$$\sum_{r=1}^{m-1} \frac{B_1\left(\frac{rn}{m}\right)}{i} = 0,$$

et donc,

$$\begin{aligned}
 \varphi_1\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m-1} B_1\left(\frac{rn}{m}\right) \frac{r}{m} + \frac{1}{m} \sum_{i \geq 0} \sum_{r=1}^{m-1} B_1\left(\frac{rn}{m}\right) \left(\frac{1}{i + \frac{r}{m}} - \frac{1}{i}\right) \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m-1} B_1\left(\frac{rn}{m}\right) \frac{r}{m} + \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{m-1} B_1\left(\frac{rn}{m}\right) \left(\sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{i + \frac{r}{m}} - \frac{1}{i}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Or on a

$$\sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{i + \frac{r}{m}} - \frac{1}{i}\right) = -\psi\left(\frac{r}{m}\right) - \gamma - \frac{r}{m}$$

D'où le résultat. \square

Proposition 4.13.

$$V(n, m) = -\frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{m-1} B_1\left(\frac{rn}{m}\right) \psi\left(\frac{r}{m}\right) \quad (4.4.37)$$

Démonstration. . Le résultat est conséquence des deux relations suivantes

$$\psi(1-t) - \psi(t) = \pi \cot \pi t$$

et

$$B_1(t) = \frac{1}{2} (\{t\} + \{-t\})$$

\square

4.4. APPLICATION DE LA FONCTION DIGAMMA AUX SOMMES DE VASYUNIN

Dans ce qui suit nous montrons que $V(n, m)$ peut se mettre sous forme d'une série convergente. L'idée est d'utiliser un résultat classique cité [1, §6.3.7] reliant la fonction ψ à la fonction cotangente.

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot \pi z. \quad (4.4.38)$$

Lemme 4.14. *Pour $x = \frac{\bar{n}}{m}$ avec $(n, m)=1$, et $\text{den}(x) = m$ le dénominateur de x .*

Alors

$$V(n, m) = \frac{1}{\pi \text{den}(x)} \sum_{k \geq 0} \sum_{r=1}^{\text{den}(x)-1} \frac{r(1-2rx)}{(k+1-rx)(k+rx)}. \quad (4.4.39)$$

Démonstration. . On a :

$$V(n, m) = \sum_{r=1}^{m-1} \left\{ \frac{rn}{m} \right\} \cot \left(\frac{\pi r}{m} \right) = \sum_{r=1}^{m-1} \frac{r}{m} \cot \left(\frac{\pi r \bar{n}}{m} \right)$$

et

$$\cot \left(\frac{\pi r \bar{n}}{m} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\psi \left(\frac{m-r\bar{n}}{m} \right) - \psi \left(\frac{r\bar{n}}{m} \right) \right).$$

De la relation (3.3.17) on tire

$$\psi \left(\frac{m-r\bar{n}}{m} \right) - \psi \left(\frac{r\bar{n}}{m} \right) = m \sum_{k \geq 0} \frac{m-2r\bar{n}}{(m(k+1)-r\bar{n})(mk+r\bar{n})},$$

d'où

$$V(n, m) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{k \geq 0} \frac{r(m-2r\bar{n})}{(m(k+1)-r\bar{n})(mk+r\bar{n})},$$

par la suite on obtient

$$V(n, m) = \frac{1}{\pi \text{den}(x)} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{k \geq 0} \frac{r(1-2rx)}{(k+1-rx)(k+rx)}.$$

□

Montrons que

$$\pi m V(n, m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{k=0}^N \frac{r(1-2rx)}{(k+1-rx)(k+rx)}.$$

La somme partielle

$$\sum_{k=0}^N \sum_{r=1}^{m-1} \frac{r(1-2rx)}{(k+1-rx)(k+rx)},$$

est une suite à valeurs rationnelles, $\pi m V(n, m)$ appartient à l'adhérence du corps rationnel \mathbb{Q} .

On montre que

4.4. APPLICATION DE LA FONCTION DIGAMMA AUX SOMMES DE VASYUNIN

Corollaire 4.15. *Soit m un entier positif, alors on a*

$$V(1, m) = -\frac{m(\psi(m) + \gamma - 2) + 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{r(m-2r)}{(m(k+1)-r)(mk+r)}, \quad (4.4.40)$$

et

$$V(1, m) = -\frac{m(\psi(m) + \gamma - 2) + 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(m-2r)^2}{(m(k+1)-r)(mk+r)}. \quad (4.4.41)$$

Démonstration. . En prenant $n = 1$ dans la relation (4.4.39), on obtient

$$V(1, m) = \frac{1}{\pi m} \sum_{k \geq 0} \sum_{r=1}^{q-1} \frac{r \left(1 - 2\frac{r}{q}\right)}{\left(k+1 - \frac{r}{m}\right) \left(k + \frac{r}{m}\right)}.$$

D'où

$$V(1, m) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{r(m-2r)}{(m(k+1)-r)(mk+r)},$$

et

$$\begin{aligned} V(1, m) &= \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{m-2r}{m-r} - \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{r(m-2r)}{(m(k+1)-r)(mk+r)} \\ &= \frac{1}{\pi} (m(2 - H_{m-1}) - 2) + \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{r(m-2r)}{(m(k+1)-r)(mk+r)}. \end{aligned}$$

Mais de la relation (4.2.20) du lemme 4.5 on a

$$H_{m-1} = \psi(m) + \gamma,$$

d'où l'on déduit la relation (4.4.40).

Pour montrer la relation (4.4.41), on remarque que pour $t + r = m$ on a :

$$\frac{1}{(m(k+1)-r)(mk+r)} = \frac{1}{(m(k+1)-t)(mk+t)}$$

et

$$r(m-2r) + t(m-2t) = (m-2r)^2.$$

□

Le résultat qui suit donne l'expression intégrale de $V(1, m)$. On a :

Corollaire 4.16.

$$V(1, m) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{(m-2)x^m - mx^{m-1} + mx - m + 2}{(x-1)^2(x^m-1)} dx. \quad (4.4.42)$$

4.4. APPLICATION DE LA FONCTION DIGAMMA AUX SOMMES DE VASYUNIN

La fonction rationnelle dans le second membre de la relation (4.4.42) est intégrable au sens de Riemann. On peut remarquer que $(x-1)^3$ divise le polynôme

$$(m-2)x^m - mx^{m-1} + qx - m + 2.$$

En utilisant la relation (3.1.3) on obtient

$$g\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{\pi m} \int_0^1 \left(\frac{(m-2)x^m - mx^{m-1} + mx - m + 2}{(x-1)^2(x^m-1)} - 1 \right) dx.$$

Démonstration. . Des relations (4.4.40) du corollaire 4.15 on a,

$$V(1, m) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 0} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{r(m-2r)}{(m(k+1)-r)(mk+r)},$$

alors

$$V(1, m) = \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{m-1} r \sum_{k \geq 0} \frac{m-2r}{(m(k+1)-r)(mk+r)},$$

mais on a

$$\begin{aligned} \frac{m-2r}{(m(k+1)-r)(mk+r)} &= \frac{1}{mk+r} - \frac{1}{mk+m-r} \\ &= \int_0^1 (x^{mk+r-1} - x^{mk+m-r-1}) dx, \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{m-2r}{(m(k+1)-r)(mk+r)} &= \int_0^1 \sum_{k \geq 0} (x^{mk+r-1} - x^{mk+m-r-1}) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{r-1} - x^{m-r-1}}{1-x^m} dx. \end{aligned}$$

et

$$V(1, m) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sum_{r=1}^{m-1} r(x^{r-1} - x^{m-r-1})}{x^m - 1} dx.$$

Pour conclure, on doit calculer la somme,

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{m-1} r(x^{r-1} - x^{m-r-1}) \\ &\sum_{r=1}^{q-1} r(x^{r-1} - x^{q-r-1}) = \sum_{r=1}^{m-1} rx^{r-1} - \sum_{r=1}^{m-1} rx^{m-r-1} \\ &= \sum_{r=1}^{m-1} rx^{r-1} - \sum_{r=1}^{m-1} (m-r)x^{r-1} \\ &= 2 \sum_{r=1}^{m-1} rx^{r-1} - m \sum_{r=1}^{m-1} x^{r-1}. \end{aligned}$$

4.5. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $V(1, n)$

On a :

$$\sum_{r=1}^{m-1} x^{r-1} = \frac{x^{m-1} - 1}{x - 1} \quad (4.4.43)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m-1} r x^{r-1} &= \sum_{r=1}^{m-1} (x^r)' \\ &= \left(\sum_{r=1}^{m-1} x^r \right)' \\ &= \left(\frac{x^m - 1}{x - 1} \right)' = \frac{(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned} \quad (4.4.44)$$

Les relations (4.4.43) et (4.4.44) donnent le résultat. \square

Dans [21] S. Bettin et B. Conrey ont dressé une table pour les valeurs de la somme $V(1, m)$ dans des cas particuliers. Ces valeurs sont écrites sous forme d'une intégrale de fonctions rationnelles.

Exemple 4.17. On a

$$V(1, 2) = 0, V(1, 3) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, V(1, 4) = -\frac{1}{2} \text{ and } V(1, 6) = -\frac{7}{3\sqrt{3}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} V(1, 3) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} + \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= -\frac{1}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$V(1, 4) = -\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} V(1, 6) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{3}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx = -\frac{3}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + V(1, 3) \\ &= -\frac{7}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4.5 Développement asymptotique de $V(1, n)$

Pour $m = 1$, la somme des cotangentes (3.1.2) a été étudiée par Vasyunin [44] qui a donné le développement asymptotique de $V(1, n)$:

$$V(1, n) = -\frac{n \log n}{\pi} + \frac{n}{\pi} (\log 2\pi - \gamma) + o(\log n). \quad (4.5.45)$$

4.5. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $V(1, n)$

Cette formule a été améliorée par M. Rassias [42] et H. Maier-Rassias [36] en montrant que,

$$V(1, n) = -\frac{n \log n}{\pi} + \frac{n}{\pi} (\log 2\pi - \gamma) + o(1). \quad (4.5.46)$$

Soit $n, k \in \mathbb{N}$, $n > 6N$, avec $N = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, H. Maier et M. Th. Rassias [37, Theorem 1.7] ont montré qu'il existe des constantes réelles $A_1, A_2 > 1$ et des autres constantes $E_l, l \in \mathbb{N}$ with $|E_l| < (A_1 l)^{2l}$, telles que pour chaque n on a ;

$$V(1, n) = -\frac{n \log n}{\pi} + \frac{n}{\pi} (\log 2\pi - \gamma) + \frac{1}{\pi} - \sum_{l=1}^k E_l n^{-l} - R_k^*(n). \quad (4.5.47)$$

où $|R_k^*(n)| < (kA_2)^{4k} n^{-(k+1)}$.

$V(n, m)$ ainsi définie est la valeur en $s = 0$ de la fonction zeta d'Estermann [21, 33])

$$E_0\left(s, \frac{n}{m}\right) = \sum_{k \geq 1} \frac{\tau(k)}{n^s} \exp\left(\frac{2\pi i k p}{m}\right). \quad (4.5.48)$$

La somme $V(n, m)$ a été étudiée récemment dans [20, 21] et dans [21], les auteurs ont montré que $V(n, m)$ satisfait la formule de réciprocité pour tout couple d'entiers (n, m) premiers entre eux.

$$\frac{\bar{m}}{n} V(m, n) + V(\bar{n}, \bar{m}) = -\frac{1}{\pi n} - g\left(\frac{\bar{m}}{n}\right) \quad (4.5.49)$$

Dans la suite nous donnons un développement asymptotique pour la somme $V(\bar{a}, na + r)$ comme dans [25].

4.5.1 Théorème fondamental

Théorème 4.18. *Pour $a > r$ et n entiers tels que $(a, na + r) = 1$, $\bar{a}a \equiv 1 \pmod{(an + r)}$ et $\bar{r}r \equiv 1 \pmod{(a)}$. Alors pour n assez grand on a*

$$\begin{aligned} V(\bar{a}, na + r) &= -\left(n + \frac{r}{a}\right) V(\bar{r}, a) - \frac{1}{\pi a} + \frac{1}{\pi} \left(n + \frac{r}{a}\right) \left(\log \frac{2\pi a}{na + r} - \gamma\right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{a}{na + r}\right)^{2k-1} + o\left(\frac{1}{n^N}\right). \end{aligned} \quad (4.5.50)$$

Pour $a = 1$ et $r = 0$, on obtient le corollaire suivant :

4.5. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $V(1, n)$

Corollaire 4.19. *Pour n suffisamment grand*

$$\begin{aligned}
 V(n+1, an+a-1) &= -\left(n+1-\frac{1}{a}\right)V(1, a) - \frac{1}{\pi a} \\
 &+ \frac{1}{\pi} \left(n+1-\frac{1}{a}\right) \left(\log \frac{2\pi a}{(n+1)a-1} - \gamma\right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{a}{(n+1)a-1}\right)^{2k-1} + o\left(\frac{1}{n^N}\right).
 \end{aligned} \tag{4.5.51}$$

Remarque :

Dans le cas particulier $a = 1$ on obtient,

$$\begin{aligned}
 V(1, n) &= \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{2\pi}{n} - \gamma\right) n - \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{144n} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{2k-1} + o\left(\frac{1}{n^N}\right).
 \end{aligned} \tag{4.5.52}$$

Alors le développement asymptotique de la somme $V(1, n)$ de H. Maier et Michael Th. Rassias dans [37, Theorem 1.7] devient une conséquence de (4.5.52).

4.5.2 Exemples

D'autres développements asymptotiques sont données dans les exemples suivants.

Exemple 4.20. *On a montré que :*

$$\begin{aligned}
 V(n+1, 2n+1) &= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\log \frac{4\pi}{2n+1} - \gamma\right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{2k-1} + o\left(\frac{1}{n^N}\right).
 \end{aligned}$$

Exemple 4.21. *On a*

$$\begin{aligned}
 V(2n+1, 3n+1) &= -\frac{n+\frac{1}{3}}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{\pi} \left(n + \frac{1}{3}\right) \left(\log \frac{3\pi}{2} - \gamma\right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{3}{3n+1}\right)^{2k-1} + o\left(\frac{1}{n^N}\right).
 \end{aligned}$$

Exemple 4.22.

$$\begin{aligned}
 V(n+1, 3n+2) &= \frac{n+\frac{2}{3}}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{\pi} \left(n + \frac{2}{3}\right) \left(\log \frac{6\pi}{5} - \gamma\right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{3}{3n+2}\right)^{2k-1} + o\left(\frac{1}{n^N}\right).
 \end{aligned}$$

4.5. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $V(1, n)$

4.5.3 Preuve du Théorème fondamental et Corollaire 4.19

De la loi de réciprocité (4.5.49) on a

$$\frac{a}{pa+r}V(\bar{a}, pa+r) + V(\bar{r}, a) = -\frac{1}{\pi(pa+r)} - g\left(\frac{a}{pa+r}\right)$$

on déduit

$$V(\bar{a}, pa+r) = -\frac{pa+r}{a}V(\bar{r}, a) - \frac{1}{\pi a} - \frac{pa+r}{a}g\left(\frac{a}{pa+r}\right).$$

Mais pour p assez grand on a

$$g\left(\frac{a}{pa+r}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\log\frac{2\pi a}{pa+r} - \gamma\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{4^k \pi^{2k-1} B_{2k}^2}{k(2k)!} \left(\frac{a}{pa+r}\right)^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^{N+1}}\right)$$

et le résultat découle alors.

Prenons $r = a - 1$, on remarque que pour $a \geq 1$ on a $(p+1)a \equiv 1 \pmod{(pa+a-1)}$ et $(a-1)^2 \equiv 1 \pmod{a}$. Alors $\bar{a} = p+1$ et $\bar{r} = r = a-1$.

Comme on a

$$\begin{aligned} V(a-1, a) &= \sum_{k=1}^{a-1} \left\{ \frac{k(a-1)}{a} \right\} \cot\left(\frac{\pi k}{a}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{a-1} \left\{ \frac{a-k}{a} \right\} \cot\left(\frac{\pi k}{a}\right) \\ &= \sum_{i=a-1}^1 \left\{ \frac{i}{a} \right\} \cot\left(\frac{\pi(a-i)}{a}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{a-1} \left\{ \frac{i}{a} \right\} \cot\left(\pi - \frac{\pi i}{a}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{a-1} \left\{ \frac{i}{a} \right\} \cot\left(\frac{\pi i}{a}\right) \\ &= V(1, a), \end{aligned}$$

alors la relation (4.5.51) du corollaire 4.19 est déduite de la relation (4.5.50) du théorème 4.18. Enfin la dernière relation (4.5.52) est déduite de la relation (4.5.51), en prenant $a = 1$.

4.6. AUTRES ESTIMATIONS DE $V(p, q) + V(q, p)$

4.6 Autres estimations de $V(p, q) + V(q, p)$

Pour établir la formule asymptotique de la somme $V(p, q) + V(q, p)$, on a besoin de la proposition suivante

Proposition 4.23. *Soient p, q deux nombres premiers entre eux, on pose :*

$$\Delta(p, q) = \frac{2}{\pi} \left(1 + \max \left\{ \frac{(p-1)(q-1)}{4} \psi \left(\frac{1}{pq} \right), \min \{q - \gamma - \psi(q), p - \gamma - \psi(p)\} \right\} \right),$$

Alors,

$$\Delta(p, q) < \frac{1}{\pi} \log p^{q-1} q^{p-1} - pg \left(\frac{1}{p} \right) - qg \left(\frac{1}{q} \right) - V(p, q) - V(q, p) \leq \frac{2 + 2\sqrt{pq \log p \log q}}{\pi}. \quad (4.6.53)$$

Démonstration. . De 4.2.21 du lemme 4.6 on a

$$\langle v_p, v_q \rangle \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{p} \right\} = \frac{\log p}{p},$$

et

$$\langle v_p, v_q \rangle \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{q} \right\} = \frac{\log q}{q}.$$

d'où l'on déduit que,

$$\langle v_p, v_q \rangle^2 \leq \frac{\log p \log q}{pq},$$

et par suite on a,

$$\langle v_p, v_q \rangle \leq \sqrt{\frac{\log p \log q}{pq}}.$$

Pour tout entier a positif on a,

$$\langle v_p, v_q \rangle > \sum_{k=1}^a \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{k}{p} \right\} \left\{ \frac{k}{q} \right\},$$

alors pour $q < p$ et $a = q$ on a,

$$\langle v_p, v_q \rangle > \frac{1}{pq} \sum_{k=1}^{q-1} \frac{k}{k+1}.$$

Dans le cas $p < q$, on obtient,

$$\langle v_p, v_q \rangle > \frac{1}{pq} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{k}{k+1},$$

4.6. AUTRES ESTIMATIONS DE $V(p, q) + V(q, p)$

implique que,

$$\langle v_p, v_q \rangle > \frac{1}{pq} \left(q - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k+1} \right)$$

or on a

$$\langle v_p, v_q \rangle > \frac{1}{pq} \left(p - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k+1} \right)$$

et avec la relation 4.2.20 du lemme 4.5; on obtient

$$\langle v_p, v_q \rangle > \frac{1}{pq} (q - \gamma - \psi(q))$$

et

$$\langle v_p, v_q \rangle > \frac{1}{pq} (p - \gamma - \psi(p)).$$

d'où

$$\langle v_p, v_q \rangle > \frac{1}{pq} \min \{ q - \gamma - \psi(q), p - \gamma - \psi(p) \}.$$

Enfin on a

$$\frac{1}{\pi pq} \min \{ q - \gamma - \psi(q), p - \gamma - \psi(p) \} < \frac{1}{\pi} \langle v_p, v_q \rangle \leq \sqrt{\frac{\log p \log q}{pq}}. \quad (4.6.54)$$

Mais on a

$$pq \langle v_p, v_q \rangle = G(p, q) = \sum_{r=1}^{pq-1} \left(\psi \left(\frac{r+1}{pq} \right) - \psi \left(\frac{r}{pq} \right) \right) \left\{ \frac{r}{p} \right\} \left\{ \frac{r}{q} \right\}.$$

De plus on utilise l'inégalité

$$\psi(x+y) \geq \psi(x) + \psi(y)$$

valable pour $x > 0$ et $0 < y < 1$ [43].

Et prenant $x = \frac{r}{pq}$ et $y = \frac{1}{pq}$ on obtient,

$$G(p, q) \geq \psi \left(\frac{1}{pq} \right) \sum_{r=1}^{pq-1} \left\{ \frac{r}{p} \right\} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \quad (4.6.55)$$

$$\geq \frac{(p-1)(q-1)}{4} \psi \left(\frac{1}{pq} \right). \quad (4.6.56)$$

Les (4.6.54), (4.6.55) et (4.6.56) permettent d'obtenir,

$$\frac{1}{pq} \max \left\{ \frac{(p-1)(q-1)}{4} \psi \left(\frac{1}{pq} \right), \min \{ q - \gamma - \psi(q), p - \gamma - \psi(p) \} \right\} < \langle v_p, v_q \rangle \leq \sqrt{\frac{\log p \log q}{pq}},$$

4.6. AUTRES ESTIMATIONS DE $V(p, q) + V(q, p)$

d'où on a

$$\frac{2}{\pi} \max \left\{ \frac{(p-1)(q-1)}{4} \psi \left(\frac{1}{pq} \right) \min \{q - \gamma - \psi(q), p - \gamma - \psi(p)\} \right\} < \frac{2}{\pi} G(p, q) \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{pq \log p \log q}.$$

Par la relation (3.2.8) du théorème 3.1 on obtient la relation (4.6.53). \square

Chapitre 5

Perspectives

5.1 Introduction

Nous envisageons de généraliser les résultats exposés aux chapitres 4 et 5. Pour cela nous commençons par rappeler les résultats obtenus par S. Bettin et J.B. Conrey.

5.2 Aperçu sur les travaux de S. Bettin et J.B. Conrey

S. Bettin et J.B. Conrey [20, 21] ont étudié la somme

$$c_0\left(\frac{n}{m}\right) = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{m} \cot\left(\frac{\pi kn}{m}\right) \quad (5.2.1)$$

pour $(n, m) = 1$ et $m \geq 1$.

où c_0 est la valeur en $s = 0$ de $D\left(s, \frac{n}{m}\right)$, la fonction zéta d'Estermann définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$D\left(s, \frac{n}{m}\right) := \sum_{k \geq 1} \frac{d(n) \exp(2\pi i kn/m)}{n^s}, \quad (5.2.2)$$

où

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

est le nombre des diviseurs de n

Ensuite ils ont montré que la somme c_0 satisfait pour tout nombre rationnel $x \neq 0$ la loi de réciprocité [21],

$$xc_0(x) + c_0\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\pi \text{Den}(x)} = g(x) \quad (5.2.3)$$

où $\text{Den}(x)$ est le dénominateur de x quand x écrit sous sa forme réduite.

Le lien de c_0 à V est donné par la relation

$$V(n, m) = -c_0(\bar{n}, m)$$

La preuve est facile à établir.

5.2. APERÇU SUR LES TRAVAUX DE S. BETTIN ET J.B. CONREY

Dans [20], la généralisation de c_0 à c_a pour tout entier a a été défini par

$$c_a\left(\frac{n}{m}\right) = m^a \sum_{k=1}^{m-1} \cot \frac{\pi kn}{m} \zeta\left(-a, \frac{k}{m}\right) \quad (5.2.4)$$

Cette somme apparait comme la valeur en $s = 0$ de la fonction d'Estermann :

$$D\left(s, \frac{n}{m}\right) := \sum_{k \geq 1} \frac{\sigma_a(n) \exp(2\pi i kn/m)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1, \quad (5.2.5)$$

avec

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a.$$

Ensuite, ils ont montré que c_a satisfait la loi de réciprocité :

$$c_a\left(\frac{n}{m}\right) - \left(\frac{m}{n}\right)^{a+1} c_a\left(-\frac{m}{n}\right) + \frac{a\zeta(1-a)}{\pi n} m^a = -i\zeta(-a) \psi_a\left(\frac{n}{m}\right) \quad (5.2.6)$$

où

$$\psi_a(z) := E_{a+1}(z) - \frac{1}{z^{a+1}} E_{a+1}\left(-\frac{1}{z}\right) \quad (5.2.7)$$

et

$$E_{a+1}(z) = 1 + \frac{2}{\zeta(-a)} S_a(z) \quad (5.2.8)$$

avec

$$S_a(z) := \sum_{k \geq 1} \sigma(z) \exp(2\pi i kz) \quad (5.2.9)$$

5.3 Définition de la somme des cotangentes de Vasyunin généralisée

La suite B_n des polynômes de Bernoulli est définie par

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}; B'_{n+1}(x) = (n+1) B_n(x)$$

Définition 5.1. Soient n, m deux entiers positifs premiers entre eux. Pour tout entier rationnel a on définit la somme des cotangentes de Vasyunin généralisée $V_a(n, m)$ par :

$$V_a(n, m) = \frac{n^a}{a+1} \sum_{k=1}^{m-1} B_{a+1}\left(\left\{\frac{kn}{m}\right\}\right) \cot \frac{\pi k}{m}, \quad a \geq 0, \quad (5.3.10)$$

et

$$\frac{(-1)^a}{m^k (-a-1)!} \sum_{k=1}^{m-1} \psi\left(-a-1, \left\{\frac{kn}{m}\right\}\right) \cot \frac{\pi k}{m}, \quad a < 0 \quad (5.3.11)$$

où

$$\psi(a, z) = \frac{d^{a+1}}{z^{a+1}} \Gamma(z) \quad (5.3.12)$$

Pour $a = 0$ on obtient,

$$\begin{aligned} V_0(n, m) &= \sum_{k=1}^{m-1} B_1\left(\left\{\frac{kn}{m}\right\}\right) \cot \frac{\pi k}{m} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left(\left\{\frac{kn}{m}\right\} - \frac{1}{2}\right) \cot \frac{\pi k}{m} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left\{\frac{kn}{m}\right\} \cot \frac{\pi k}{m} \\ &= V(n, m) \end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cot \frac{\pi k}{m} = 0.$$

Cette définition généralise la définition des sommes de Vasyunin. L'idée est inspirée des travaux de S. Bettin et B. Conrey [20] qui ont donné une généralisation des sommes de cotangentes de la manière suivante :

$$c_a\left(\frac{n}{m}\right) = m^a \sum_{k=1}^{m-1} \cot \frac{\pi kn}{m} \zeta\left(-a, \frac{k}{m}\right)$$

5.3. DÉFINITION DE LA SOMME DES COTANGENTES DE VASYUNIN GÉNÉRALISÉE

Ainsi pour $a = l \geq 0$, on a

$$c_l \left(\frac{n}{m} \right) = -m^l \sum_{k=1}^{m-1} \cot \left(\frac{\pi kn}{m} \right) \frac{B_{l+1} \left(\frac{k}{m} \right)}{l+1}$$

et pour $a = -l \leq 0$, on trouve,

$$c_{-l} \left(\frac{n}{m} \right) = \frac{(-1)^l}{k^n (l-1)!} \sum_{k=1}^{m-1} \cot \left(\frac{\pi kn}{m} \right) \psi \left(l-1, \frac{k}{m} \right)$$

c_a ainsi définie est une généralisation de la somme de dedekind s définie par :

$$s \left(\frac{n}{m} \right) = -\frac{1}{4m} \sum_{k=1}^{m-1} \cot \left(\frac{\pi k}{m} \right) \cot \left(\frac{\pi kn}{m} \right)$$

qui satisfait la loi classique de réciprocité :

$$s \left(\frac{n}{m} \right) + s \left(\frac{m}{n} \right) - \frac{1}{12nm} = \frac{1}{12} \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n} - 3 \right)$$

En effet, on a :

$$c_{-1} \left(\frac{n}{m} \right) = 2\pi s \left(\frac{n}{m} \right)$$

Nous nous intéressons à la somme des cotangentes de Vasyunin liée à ça par la relation,

$$V_a(n, m) = -c_a(\bar{n}, m)$$

où $\bar{n}n \equiv 1(m)$ et $1 \leq \bar{n} \leq m-1$

V_a satisfait la loi de réciprocité induite par c_a , et on a

$$-V_a(n, m) + \left(\frac{m}{\bar{n}} \right)^{a+1} V_a(-\bar{m}, \bar{n}) + \frac{a\zeta(1-a)}{\pi\bar{n}} m^a = -i\zeta(-a) \psi_a \left(\frac{\bar{n}}{m} \right) \quad (5.3.13)$$

Questions :

1) Peut-on trouver la loi de réciprocité satisfaite par la somme symétrique $V_a(n, m) + V_a(m, n)$?

2) Dans le cas $a = 0$ peut-on améliorer la loi de réciprocité obtenue ?

5.4 Hypothèse de Riemann

Báez-duarte propose de chercher une fonction de Beurling f_n écrite sous forme

$$f_n = c_1 e_1 + \sum_{k=2}^n c_k v_k$$

de telle sorte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \chi\| = 0$$

Si cette fonction existe, l'hypothèse de Riemann sera établit.

Ou encore on peut se satisfaire de la recherche de telle fonction pour que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\chi, f_n) = 0$$

Nous rappelons que cette distance (chapitre1) est donnée par la formule :

$$d_n^2(\chi, f_n) = 1 - \frac{\langle \chi, f_n \rangle^2}{\|f_n\|^2}$$

5.4.1 Cas particulier $c_1 = 0$

Lorsque on suppose $c_1 = 0$, f_n devient

$$f_n = \sum_{k=2}^n c_k v_k.$$

Alors f_n est périodique de période entier positif au plus égale $N!$ et la distance de χ à cette fonction est donnée par,

$$d_n^2(\chi, f_n) = 1 - \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{f_n(k)}{k(k+1)} \right)^2}{\sum_{k=1}^n \frac{f_n^2(k)}{k(k+1)}}$$

Posons p la période de f_n . Alors, en faisant intervenir la fonction ψ cette distance peut être exprimée par

$$d_n^2(\chi, f_n) = 1 - \frac{\left(\sum_{r=1}^{p-1} \left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right) - \psi\left(\frac{r}{p}\right) \right) f_n(r) \right)^2}{\sum_{r=1}^{p-1} \left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right) - \psi\left(\frac{r}{p}\right) \right) f_n^2(r)} \quad (5.4.14)$$

Le numérateur de (5.4.14) (qui représente le produit scalaire $\langle \chi, f_n \rangle$) se simplifie comme suit

$$\sum_{r=1}^{p-1} \left(\psi\left(\frac{r+1}{p}\right) - \psi\left(\frac{r}{p}\right) \right) f_n(r) = \sum_{k=1}^n c_k \frac{\log k}{k}. \quad (5.4.15)$$

Question :

5.4. HYPOTHÈSE DE RIEMANN

Peut-on exprimer la somme finie

$$\sum_{r=1}^{p-1} \left(\psi \left(\frac{r+1}{p} \right) - \psi \left(\frac{r}{p} \right) \right) f_n^2(r)$$

indépendamment de la période p .

Conclusion

Dans ce travail nous avons réussi à trouver une loi de réciprocité satisfaite par les sommes des cotangentes de Vasyunin, similaire à celle satisfaite par les sommes de Dedekind. Cette loi intervient dans le calcul de certains produits scalaires liés au critère de Báez-Duarté-Balazard pour l'hypothèse de Riemann.

Différentes formules explicites et développements asymptotiques de la somme des cotangentes de Vasyunin ont été établies. En outre nous avons amélioré d'une manière significative les résultats dus à H. Maier et M. Th. Rassias concernant la somme $V(1, n)$.

Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ , I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Function with Formula, Graphs and Mathematical Tables*, tenth printing with corrections, United States Department of Commerce, New York, 1972.
- [2] L. BÁEZ-DUARTE. *A general strong Nyman-Beurling criterion for the Riemann Hypothesis*, Publication de l'Institut Mathématiques. Nouvelle série, Tome 78(92) (2005), 117-125.
- [3] L. BÁEZ-DUARTE. *News versions of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann Hypothesis*, IJMMS (2002) 387-406.
- [4] L. BÁEZ-DUARTE, *Harmonic series summation lamma and Vasyunin's formulas*. Journal of Mathematical Sciences , Vol. 120, No. 5, 2004.
- [5] L. BÁEZ-DUARTE, M. BALAZARD, B. LANDRAU, E. SAIAS. *Note sur la fonction ζ de Riemann*, 3. Advances in Mathematics 149, 130-144 (2000).
- [6] L. BÁEZ-DUARTE. *On Beurling Real Variable Re formulation of the Riemann Hypothesis*, Advances in Mathematics 101, 10-30 (1993).
- [7] L. Béz-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the a Riemann hypothesis*, Rend. Mat. Acc. Lincei (9), **14** (2003), pp. 5–11.
- [8] L. BÁEZ-DUARTE. *On Beurling Real Variable Re formulation of the Riemann Hypothesis*, Advances in Mathematics **101** (1993), pp.10-30.
- [9] L. BÁEZ-DUARTE. *News versions of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Int. J. Math. Math. Sci. Vol. **31**, Issue 7, (2002), pp.387-406.
- [10] L. BÁEZ-DUARTE. *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the a Riemann hypothesis*, Rend. Mat. Acc. Lincei (9), Vol. **14** (2003), pp. 5–11.
- [11] L. BÁEZ-DUARTE, M. BALAZARD, B. LANDRAU, E. SAIAS. *Etude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction partie fractionnaire*, The Ramanujan Journal, 9, 215-240, (2005).
- [12] L. BÁEZ-DUARTE, M. BALAZARD, B. LANDREAU, E. SAIAS. *Notes sur la fonction ζ de Riemann*, 3, Adv. in Maths. **149** (2000), 130-144
- [13] M. BALAZARD et A. DE ROTON. *Sur un critère de Baez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann*, hall 00345313, version 1-8 Dec 2008.
- [14] M. BALAZARD et E. SAIAS. *Notes sur la fonction ζ de Riemann*, 1, Advances in Mathematics 139, 310-321 (1998).
- [15] M. BALAZARD . *Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann*, SMF-Gazette-126, octobre 2010.

BIBLIOGRAPHIE

- [16] M. BALAZARD *Sur les Dilatations entières de la Fonction Partie Fractionnaire*, Funct. Approx. Comment. Math. **35** (2006), pp.37-49.
- [17] M. BALAZARD, A. DE ROTON, *Sur un critère de Báez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann*, Int. J. Number theory Vol. **6**, no. 4 (2010), 883-903
- [18] P. BARRUCAND, M.DEBOUÉ, *Fraction continues, sommes de Dedekind et formes quadratiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2)**33** (1984), no. 1, 62-84.
- [19] A. BAYAD et M. GOUBI. *Proof of the Möbius conjecture revisited*, Proc. Jangjeon Math. Soc. **16** (2013), No. 2, pp. 237-243.
- [20] S. BETTIN, J. B. CONREY, *Period functions and cotangent sums*, Algebra and Number Theory **7**, no.1 (2013), 215-242.
- [21] S. BETTIN, J. B. CONREY, *A reciprocity formula for a cotangent sum*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2013), no. 24, 5709-5726.
- [22] M. GOUBI, *Sur une forme équivalente de la formule de Vassiounine*, Prépublication N°**240** (2010) (USTHB). Alger.
- [23] M. GOUBI, *The proof of the Möbius theorem*, 25th international Conference of Jangjeon Mathematical Society, ICJMS'2012, July 25-28, (2012), Seoul Korea. <http://www.jangjeon.or.kr>
- [24] M. GOUBI, *An important result about Mertens function*, International conference on Algebra in honour of Patrick Smith and John Clark's 70th birthday Balikesir-Turkey 12-15 August 2013.
- [25] M. GOUBI, *Asymptotic formula for Vasyunin cotangent sum*, 28th international Conference of Jangjeon Mathematical Society, ICJMS'2015, May 15-19, (2015), Akdeniz university , Antalya Turkey. <http://www.jangjeon.or.kr>
- [26] M. GOUBI, A. BAYAD, M.O. HERNANEZ *Explicit and Asymptotic formulae for Vasyunin-Cotangent sums* Publ. Inst. Maths (Beograd) (à apparaitre).
- [27] K. GIRSTMAIR, *Continued fractions and Dedekind sums : three term relations and distribution*, J. Number Theory **119** no.1, (2006) 66-85
- [28] S. GUN, M. RAM MURTY, P. RATH, *Linear independence of digamma function and a variant of a conjecture of Rohrlich*, J. Number Theory **129** (2009), no. 8 pp. 1858-1873
- [29] W. HENGARTNER, M. LAMBERT, C. RIESHER. *Introduction à l'analyse fonctionnelle*, Press de l'Université de Québec (1981).
- [30] D. HICKERSON, *Continued fractions and density results for Dedekind sums*, J. Reine Angew. Math. **290** (1977), 113-116
- [31] E. LANDAU, *Contribution à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, CRAS. Paris. **129** (1899), pp.812-815.
- [32] B. LANDRAU, F. RICHARD. *Le critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann : Aspects numériques*, Experimental Mathematics, Vol.11 (2002), No.3
- [33] M. ISHIBASHI, *The value of the Estermann zeta function at $s=0$* , Acta Arith.**73** (1995) no.4, 357-361
- [34] B. LANDREAU, F. RICHARD, *Le critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann : aspects numériques*, Experiment. Math. **11** (2002) no.3 349-360
- [35] L. A MEDINA, V.H. MOLL, *The integrals in Gradshteyn and Ryzhik. X. The digamma function*, Sci. Ser. A. Math. Sci. (N.S.) **17** (2009), 45-66

BIBLIOGRAPHIE

- [36] H. MAIER, M. Th. RASSIAS, *The order of magnitude for moments for certain cotangent sums*, J. Math. Anal. Appl. **429** (2015) no. 1, 576-590.
- [37] H. MAIER, M. Th. RASSIAS, *Generalization of a cotangent sum associated to the Estermann zeta function*, Communications in Contemporary Mathematics (2015)
- [38] H. MAIER, M. Th. RASSIAS, *The rate of growth of moments of certain cotangent sums*, Aequationes Mathematicae (2015), DOI 10.1007/s00010-015-0361-3.
- [39] H. MAIER, M. Th. RASSIAS, *Asymptotics and equidistribution of cotangent sums associated to the Estermann and Riemann zeta functions*, In : From Arithmetic to Zeta-Functions. Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz, Springer, Basel (to appear).
- [40] M. RAM MURTY, N. SARADHA, *Transcendental values of the digamma function*, J. Number Theory **125** (2007), no.2, 298-318.
- [41] I. NIVEN, H.S. ZUCKERMAN, *An introduction to the theory of Numbers*, 3rd ed., New York, (1972)
- [42] M. Th. RASSIAS, *A cotangent sum related to the zeros of the Estermann zeta function*, Appl. Math. Comp. **240**, (2014), pp. 161-167
- [43] W.T. SULAIMAN, *Turan inequalities for the digamma and polygamma functions* South Asian J. Math., (2011), **Vol.1** (2), 49-55
- [44] V.I. VASYUNIN, *On a biorthogonal system associated with the Riemann hypothesis* Algebra i Analiz **7** (3) (1995), 118-135.