

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE**  
**FACULTÉ DE GÉNIE CIVIL**



# THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour l'obtention du grade de Docteur

En Génie Civil

Spécialité: Construction

Par BELAID Toufik

**Thème**

**MODÉLISATION THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE POUR L'ÉTUDE DU  
DÉVERSEMENT ÉLASTIQUE DES ÉLÉMENTS MÉTALLIQUES AVEC  
MAINTIEN LATÉRAL AU NIVEAU D'UNE SEMELLE**

*Soutenue publiquement le 08/12/2019, devant le jury composé de :*

Mr.	A. BOUKHALED	Professeur,	à l'USTHB/FGC	Président
Mme	F. AMMARI	Professeure,	à l'USTHB/FGC	Directrice de thèse
Mr.	R. ADMAN	Professeur,	à l'USTHB/FGC	Codirecteur de thèse
Mr.	M. SAIDANI	Professeur,	à l'Université de Coventry	Examinateur
Mr.	M. ABED	Professeur,	à l'USDB	Examinateur
Mr.	Y. SIYOUCEF	Maître de Conférences /A,	à l'EPAU	Examinateur

## ملخص

يمثل التحنيب الجانبي مشكلة شائعة لاستقرار العارضة. تم إجراء الكثير من البحوث حول هذا الموضوع، مما أدى إلى العديد من الصيغ تحدد طريقة التحقق من مقاومة التحنيب الجانبي. لكن، تنطبق هذه الصيغ فقط على العارضة غير المثبتة بشكل جانبي. في الممارسة العملية، يتم استخدام الدعم الجانبي بشكل شائع لتحسين استقرار العوارض. ومع ذلك، فقد أجريت دراسات قليلة فقط على هذه الحالات.

يهدف هذا العمل إلى اقتراح طريقة للتحقق من عدم التحنيب الجانبي متكيفة مع العوارض المدعومة جانبيًا عند الجناح المشدود. بعد انجاز الجزء النظري، و بواسطة أساليب ريتز وجاليركين تم تحديد صيغة العزم الحاسم للتحنيب لعارضة في الحالات التي تكون فيها غير مقيدة، مقيدة في المنتصف أو مقيدة باستمرار في الجناح المشدود، لكن من حالات الأحمال.

و لكل حالة، يتم تحديد صيغة العزم الحاسم للتحنيب. يتمثل تأثير الانحناء وموضع الحمولة بقيم المعاملين C1 و C2 حيث يتم تحديد هذه القيم بواسطة أساليب ريتز وجاليركين، و مقارنتها بتلك الموجودة في البحوث. نقتراح صيغة للمعامل C1 في حالة عارضة غير مدعومة .

استخدام معاملات بدون بعد، يسمح لنا بتحديد الحد الأدنى من صلابة الدعم بدلالة وضعه العرضي ووضع التحميل. هذا يسمح لنا بدراسة تأثير تغيرات عزم الانحناء وكذلك وضع الحمولة في العزم الحاسم. و كما يتم تحليل تأثير هندسة العارضة و وضع الدعم الجانبي في العزم الحاسم.

يتم إنشاء العديد من النماذج العددية بواسطة برنامج LTBeamN لجميع الحالات، مقارنة بالنتائج التحليلية، أنها جد مرضية. أخيرًا، تم اقتراح تعبير للعزم الحاسم للتحنيب الجانبي لعارضة مقيدة جانبيًا في الجناح المشدود.

## كلمات مفتاحية

التحنيب الجانبي، الجناح المشدود، العزم الحاسم، الكود الأوربي 3، الدعم الجانبي

## RÉSUMÉ

Le Déversement est un problème courant lorsqu'il s'agit de la stabilité des poutres. Des recherches approfondies ont été menées sur le sujet, donnant lieu à de nombreuses expressions de calcul de la stabilité au déversement. Cependant, ces expressions s'appliquent principalement aux poutres non maintenues. En pratique, des maintiens latéraux sont couramment utilisés pour améliorer la stabilité au déversement des poutres en flexion. En revanche, seulement peu d'études ont été menées sur ces cas.

Le présent travail a pour but de proposer une méthode de vérification de la stabilité au déversement adaptée aux poutres maintenues latéralement au niveau de la semelle tendue.

En développant l'ensemble de la partie théorique, des résolutions par les méthodes de Ritz et de Galerkin nous ont permis d'établir les expressions du moment critique de déversement des poutres dans le cas où elles sont non maintenues, puis maintenues à mi travée et enfin maintenues de manière continue au niveau de la semelle tendue, et ceci pour divers cas de charges.

Pour chaque configuration, l'expression du moment critique de référence a été déterminée. Les effets de la distribution du moment fléchissant ainsi que la position de la charge ont été représentés par les valeurs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$ . Ces valeurs, qui ont été déterminées par les méthodes de résolution de Ritz et de Galerkin, ont été comparées à celles qui sont disponibles dans la littérature. Dans le cas d'une poutre non maintenue soumise à des moments d'extrémité, une expression du coefficient  $C_1$  a été proposée.

L'introduction de paramètres adimensionnels nous a permis de déterminer la rigidité minimale du maintien discret, requise pour constituer un blocage, en fonction de sa position transversale et du mode de chargement. Une étude de l'influence du mode de chargement ainsi que de la position de la charge sur le moment critique a été réalisée dans le cas d'un maintien rigide.

Les effets de la géométrie de la poutre et de la position du maintien sur le moment critique ont été également analysés. Des modélisations numériques ont été faites, à l'aide du logiciel

LTBeamN, pour toutes les configurations et tous les cas de charges étudiés. La comparaison des résultats numériques avec ceux trouvés analytiquement est très satisfaisante. Enfin, une expression du moment critique de déversement, pour des poutres avec maintien continu rigide au niveau de la semelle tendue, a été proposée.

**Mots-Clefs :** Déversement, Maintien latéral, Moment critique, Semelle tendue, Eurocode 3.

## ABSTRACT

Lateral torsional buckling is a common problem of beam stability. Extensive research has been conducted on the subject, leading to many equations for Lateral torsional buckling resistance. However, these equations only apply to non-laterally restrained beams with simple support conditions. In practice, lateral restraints are commonly used to improve resistance to lateral-torsional buckling of beams. However, only a few studies have been conducted on these cases.

The present work aims to propose a lateral torsional Buckling verification method adapted to beams restrained laterally at flange. The development of theoretical part, and resolution by Ritz and Galerkin methods allowed us to establish the expressions of the critical moment of beams in the cases where they unrestrained, restrained at mid-span or with continuous restraint at tense flange, for many cases loads.

For each configuration, the expression of reference critical moment is determined. The effect of bending moment and position of load is represented by the values of coefficients C1 and C2. These values are determined by Ritz and Galerkin methods and they are compared to those found in the literature. In the case of an unrestrained beam subjected to end moments, an expression of coefficient C1 is proposed.

Introduction of dimensionless parameters allows us to determine minimum stiffness of discrete restraint, as function of transverse position and loading mode. This allows us to study the influence of moment diagram as well as the position of load on the critical moment in case of rigid restraint.

Effect of beam geometry and the position of restraint on the critical moment are also analyzed. Many numerical models by LTBeamN software for all cases are established. Compared to analytical results, they are very satisfactory. Finally, an expression of lateral-torsional critical moment for beams with rigid continuous restraint at tense flange has been proposed.

**Keywords:** Lateral Torsional Buckling, Lateral restrain; Critical moment, Tense flange, Eurocode 3

## REMERCIEMENTS

Par ces quelques lignes, je tiens à montrer ma reconnaissance envers tous ceux qui m'ont accompagné et soutenu, de près ou de loin, au cours de mes années de travail.

Je tiens à adresser en premier lieu mes remerciements à ma directrice de thèse Madame F. AMMARI, Professeure à l'USTHB, qui m'a encadré le long de cette thèse. Qu'elle soit aussi remerciée pour sa gentillesse, sa patience, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'elle m'a prodigués. Je tiens particulièrement à la remercier de sa confiance et de la liberté qu'elle m'a laissée pendant ces années de thèse.

Je tiens à remercier également mon codirecteur de thèse Monsieur R. ADMAN, Professeur à l'USTHB, pour toute son aide. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car, outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je remercie sincèrement Monsieur A. BOUKHALED, Professeur à l'USTHB, pour l'honneur qu'il me fait en présidant mon jury. Qu'il trouve, ici, le témoignage de ma reconnaissance et de mon profond respect. Je lui reste reconnaissant pour sa généreuse disponibilité.

Toute ma gratitude s'adresse à Monsieur M. ABED, Professeur à l'USDB, pour avoir accepté de consacrer de son temps précieux à ce travail et a accepté de l'examiner et de participer au jury.

Je remercie tout particulièrement Monsieur M. SAIDANI, Professeur à l'université de Coventry, qui malgré ses nombreuses charges, a bien voulu examiner ma thèse et a accepté de participer au jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Y. SIYOUCEF, Maître de Conférences /A à l'EPAU, pour l'honneur qu'il me fait en examinant mon travail et en participant à mon jury.

Toufik BELAID

# TABLE DES MATIÈRES

ملخص.....	i
Résumé .....	ii
Abstract .....	iv
Remerciements .....	v
Table des matières .....	vi
Notations .....	xi
Glossaire.....	xvi
Liste des tableaux .....	xvii
Liste des figures.....	xix
1 Introduction.....	1
1.1 Introduction .....	2
1.2 Définition du déversement .....	3
1.3 Motivation .....	5
1.4 Objectifs de la thèse et méthodologie .....	6
1.5 Hypothèses et limites de la recherche .....	8
1.6 Conclusion.....	9
2 Étude Bibliographique.....	10
2.1 Introduction .....	11
2.2 Stabilité élastique .....	11
2.2.1 Introduction.....	11
2.2.2 Définition de la stabilité.....	13

2.3	Critères d'instabilité .....	14
2.3.1	Critère de bifurcation .....	14
2.3.2	Critère cinématique .....	14
2.3.3	Critère de l'énergie .....	15
2.4	Méthodes de résolution des problèmes d'Instabilité .....	15
2.4.1	Méthodes approchées .....	16
2.4.2	Méthode Numérique (LTBeamN).....	17
2.5	Généralités sur les poutres.....	17
2.5.1	Poutre d'Euler-Bernoulli.....	18
2.5.2	Poutre de Timoshenko .....	18
2.5.3	Poutre de Vlassov .....	19
2.6	Torsion des poutres ouvertes à parois minces .....	21
2.7	Déversement des poutres non maintenues .....	27
2.7.1	Expression du moment critique de déversement .....	28
2.7.2	Facteurs influençant la stabilité au déversement .....	31
2.8	Déversement des poutres maintenues .....	37
2.8.1	Maintiens en construction métallique .....	38
2.8.2	Poutre maintenue discrètement au niveau d'une semelle .....	40
2.8.3	Poutre avec maintien continu au niveau de la semelle tendue .....	41
2.9	Le déversement selon l'Eurocode 3 .....	42
2.9.1	Principe de vérification du déversement.....	42
2.9.2	Vérification du déversement des poutres maintenues.....	44
2.9.3	Maintiens latéraux continus .....	45
2.10	Revue bibliographique.....	46
2.11	Conclusion.....	50
3	Étude d'un élément à parois minces .....	52
3.1	Introduction .....	53
3.2	Cinématique .....	53
3.2.1	Déplacements .....	54

3.2.2	Déformations.....	54
3.3	Formulation du potentiel.....	56
3.3.1	Énergie.....	56
3.3.2	Formulation du potentiel.....	58
3.4	Équations d'Équilibre.....	60
3.4.1	Équation d'Euler-Lagrange.....	60
3.4.2	Équations différentielles d'équilibre.....	60
3.5	Conclusion.....	62
4	Déversement des Poutres Non Maintenues.....	63
4.1	Introduction.....	64
4.2	Détermination de l'expression du moment critique de Déversement.....	64
4.2.1	Cas d'un moment linéairement variable.....	65
4.2.2	Poutre avec charge Concentrée à mi travée traitée par la méthode de Ritz.....	68
4.2.3	Poutre soumise à une charge uniforme traitée par la méthode de Galerkin.....	69
4.3	Détermination des Coefficients.....	70
4.4	Comparaison Numérique.....	73
4.5	Conclusion.....	77
5	Déversement des Poutres avec Maintien Discret.....	78
5.1	Introduction.....	79
5.2	Expression analytique.....	79
5.2.1	Cas d'un moment constant.....	80
5.2.2	Cas d'un chargement uniformément réparti.....	82
5.2.3	Cas d'une charge Concentrée.....	83
5.3	Expression adimensionnelle du moment critique.....	85
5.4	Position longitudinale optimale du maintien.....	87
5.5	Influence de la rigidité du maintien en translation.....	88
5.6	Rigidité du maintien en translation.....	91
5.7	Poutre maintenue au droit de la semelle tendue.....	98
5.7.1	Effet de la rigidité de translation du maintien sur le moment critique.....	98

5.7.2	Effet de la rigidité de torsion de la poutre sur le moment critique .....	100
5.8	Comparaison Numérique.....	103
5.9	Conclusion.....	107
6	Déversement des Poutres avec Maintien Continu le Long de la Semelle Tendue.....	108
6.1	Introduction .....	109
6.2	Poutre Rigidement Maintenu.....	109
6.2.1	Formulation de l'équation différentielle .....	109
6.2.2	Calcul des valeurs du coefficient $\overline{C}_b$ .....	113
6.2.3	Comparaison Numérique .....	117
6.3	Poutre avec maintien élastique.....	119
6.3.1	Cas d'un moment constant.....	120
6.3.2	Cas d'un chargement réparti .....	121
6.3.3	Expression adimensionnel du moment .....	121
6.3.4	Effets de la rigidité du maintien latéral sur le moment critique.....	122
6.3.5	Effet de la rigidité de torsion sur le moment critique .....	124
6.3.6	Comparaison Numérique .....	127
6.4	Conclusion.....	130
	Conclusion .....	131
	Contributions majeures .....	132
	Travaux futurs de recherche et perspectives.....	133
	Annexe A.....	135
	Résolution pour le calcul du moment critique par la méthode analytique pour le cas d'un moment constant.....	136
	Annexe B .....	139
	Modélisation par le logiciel LTBeamN .....	140

B.1	Présentation LTBeamN .....	140
B.2	Domaine d'application.....	141
B.3	Interface.....	142
B.4	Modélisation.....	142
B.4.1	Définition de la poutre .....	142
B.4.2	Choix de la section .....	143
B.4.3	Les maintiens.....	143
B.4.3.1	Maintien ponctuel .....	144
B.4.3.2	Maintien continu .....	144
B.4.4	Paramètre d'un appui .....	145
B.4.5	Chargement.....	145
B.5	Résultats .....	147
	Bibliographie .....	149

## NOTATIONS

$A$	Aire de la section.
$\hat{a}$	Paramètre prenant en compte la position du maintien
$a$	Position transversale du point d'application du maintien par rapport au centre de torsion.
$B_{\omega}$	Bi-moment.
$C$	Centre de torsion.
$C_1$	Coefficient prenant en compte la distribution du moment.
$C_2$	Coefficient prenant en compte le point d'application de la charge suivant l'axe Z relatives au centre de gravité.
$C_3$	Coefficient prenant en compte la dissymétrie par rapport à y-y.
$C_b$	Coefficient de variation du moment.
cr	Critique.
$\tilde{C}_1; \tilde{C}_2$	Coefficients dépendant de la variation du moment de la position de la charge.
$\overline{C_b}$	Coefficient de chargement unique d'une poutre rigidement maintenue au niveau de la semelle tendue.
$E$	Module d'élasticité.
$e_y$	Position d'application de la charge par rapport à y.
$e_z$	Position d'application de la charge par rapport à z.
$E I_w$	Rigidité du gauchissement.
$E I_z$	Rigidité de flexion par rapport à l'axe le plus faible.
$f_y$	Contrainte élastique de l'acier.

$G$	Centre de gravité ; Module d'élasticité au cisaillement.
$g$	Paramètre qui prend en compte la courbure dans le plan de flexion avant flambement.
$GJ$	Rigidité à la torsion de la poutre.
$h$	Hauteur de la section.
$I_x I_y I_z$	Moment d'Inertie par rapport aux axes x, y et z.
$I_0$	Moment d'inertie polaire.
$I_\omega$	Moment d'inertie sectorielle inerte de Gauchissement.
$i$	Rayon de giration.
$i_{f,z}$	Rayon de giration par rapport à l'axe faible de la semelle comprimée équivalente.
$J$	Moment d'inertie torsion de St.-Venant.
$Kc$	Facteur de correction de l'élanement.
$k_c$	Rigidité du maintien continu en translation.
$k_v$	Rigidité du maintien discret en translation.
$k_z$ et $k_w$	Coefficients d'encastrement aux appuis.
$L$	Longueur de la poutre.
$Lc$	Longueur entre ces maintiens.
$L_b$	Longueur de flambement de la poutre.
$M$	Moment de flexion.
$M_y$	Moments de flexion par rapport à y.
$M_z$	Moments de flexion par rapport à z.
$M_t$	Moment de torsion.
$M_{b,Rd}$	Moment résistant au déversement.
$M_0$	Valeur maximale du moment à l'extrémité.
$M_{cr}$	Moment critique de déversement.
$M_{cr0}$	Moment critique de déversement sollicité par un moment constant.
$M_{Max}$	Moment maximum.
$M_{Ed}$	Valeur de calcul du moment fléchissant.
$M_{b,Rd}$	Moment résistant de calcul au déversement.

$M_{cr}^P$	Moment critique dû à une charge concentrée appliqué à mi- travée.
$M_{cr}^q$	Moment critique dû à une charge répartie le long de la poutre.
$M^{\text{Lim}}$	Moment critique de déversement d'une poutre non maintenue de longueur $L/2$ .
$\bar{M}_{cr}$	Moment critique de déversement d'une poutre rigidement maintenue au niveau de la semelle tendue.
$m_{cr}$	Moment critique adimensionnel.
$m_0$	Moment critique adimensionnel dû a une moment constant.
$m_{cr}^q$	Moment critique adimensionnel dû a une charge répartie.
$m_{cr}^P$	Moment critique adimensionnel dû a une charge concentrée.
$m^{\text{Num}}$	Moment critique adimensionnel numérique.
$\bar{m}$	Moment adimensionnel d'une poutre non maintenue de longueur $L/2$ .
O	Origine du repère.
$P_{cr}$	Charge critique d'Euler.
P	Charge concentrée appliquée suivant Z.
$Q_{abcd}$	Constantes d'intégration.
$q_z$	Charge répartie.
S	Rigidité de cisaillement de la tôle à profil trapézoïdal.
$T_{Sd}$	Sollicitation de torsion totale.
$T_{v,Sd}$	Moment de torsion de St Venant.
$T_{w,Sd}$	Moment de torsion non uniforme.
$t_f$	Épaisseur de la semelle.
$t_w$	Épaisseur de l'âme.
U	Énergie de torsion.
$u(x); v(x); w(x)$	Déplacements du centre de torsion.
$u_M; v_M; w_M$	Déplacements du point M.

$W$	L'énergie fournie au système.
$W_y$	Module de résistance approprié.
$y_c$	Coordonnée du centre de torsion selon l'axe y.
$z_c$	Coordonnée du centre de torsion selon l'axe z.
$\Pi$	Potentiel total.
$\Pi_f$	Potentiel de flexion simple.
$\Pi_b$	Potentiel provoquant l'instabilité.
$\Psi$	Coefficient multiplicateur du moment ( $-1 \leq \Psi \leq 1$ ).
$\Pi_{kc}$	Potentiel du maintien continu en translation.
$\Pi_{k_v}$	Potentiel du maintien discret en translation.
$\Delta$	L'écart.
$\alpha$	Paramètre prenant en compte la position de la charge.
$\alpha_{LT}$	Facteur d'imperfection.
$\beta_z$	Coefficient de Wagner.
$\gamma_c$	Paramètre prenant en compte la Rigidité en translation du maintien continu.
$\gamma_v$	Paramètre prenant en compte la Rigidité en translation du maintien discret.
$\bar{\gamma}_v$	Valeur de la rigidité minimale.
$\gamma_{M_1}$	Coefficient de sécurité d'instabilités.
$\delta\Pi$	Variationnel de l'énergie potentielle.
$\varepsilon_{xx}$	Déformation.
$\varepsilon_l$	Déformation linéaire.
$\varepsilon_{nl}$	Déformation non linéaire.
$\theta(x)$ ,	Expression de la rotation au tour de l'axe x.
$\kappa$	Rigidité adimensionnelle de torsion.
$\kappa_{lim}$	Rigidité adimensionnelle de torsion limite
$\lambda$	Élancement.

$\lambda_v$	Paramètre adimensionnel qui représente la position longitudinale du point d'application du maintien en translation.
$\bar{\lambda}_{LT}$	Élancement réduit
$\bar{\lambda}_f$	Élancement la semelle comprimée équivalente.
$\mu$ ,	Paramètre de l'effet du gauchissement par rapport à la torsion uniforme.
$v(x)$	Expression du déplacement.
$\xi_1$	Paramètre de la variation du diagramme du moment.
$\xi_2$	Paramètre de l'influence de la position de la charge.
$\chi$	Paramètre de Timoshenko.
$\chi_{LT}$	Coefficient de réduction pour le déversement.
$\omega$	Coordonnée sectorielle.

## GLOSSAIRE

Discret	Ponctuel.
Fonction de coordonnées	Fonction de la position (fonction numérique à plusieurs variables réelles).
Fonction quadratique et homogène	En mathématiques, une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables.
Mode 1	Déformation en une seule demi-onde.
Mode 2	Déformation en deux demi-ondes due au blocage au niveau du maintien.
Problème variationnel	Problème physique régi par des équations différentielles ou aux dérivées partielles.
Rigidité adimensionnelle de torsion	Rigidité adimensionnelle de torsion de la poutre reflétant le rapport de la rigidité de torsion uniforme par rapport à la rigidité de gauchissement.
Rigidité minimale	Rigidité adimensionnelle de l'élément aboutissant, nécessaire pour constituer un blocage.

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2-1 Importance de la torsion de St Venant et du gauchissement pour différents types de section [11].....	22
Tableau 2-2 Valeurs du coefficient $C_1$ [5] .....	35
Tableau 2-3 Valeurs recommandées pour les facteurs d'imperfection des courbes de déversement [4].....	43
Tableau 4-1 Coefficients $C_1, C_2$ et $C_3$ .....	73
Tableau 4-2 Caractéristique de l'IPE 300.....	73
Tableau 4-3 Cas d'un moment variable.....	75
Tableau 4-4 Cas d'une charge concentrée appliquée à mi-travée.....	75
Tableau 4-5 Cas d'une charge uniformément répartie.....	76
Tableau 5-1 Valeurs des coefficients $\beta_i$ .....	91
Tableau 5-2 Valeurs de $\kappa_{lim}$ pour un maintien de la semelle tendue .....	97
Tableau 5-3 Valeurs des coefficients $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ pour $\kappa < \kappa_{lim}$ .....	103
Tableau 5-4 Valeurs numériques du moment critique pour une poutre maintenue latéralement à mi travée au niveau de la semelle tendue.....	104
Tableau 5-5 Comparatif du moment critique pour une poutre maintenue latéralement à mi travée au niveau de la semelle tendue « Cas d'un moment constant ».....	105
Tableau 5-6 Comparatif du moment critique pour une poutre maintenue latéralement à mi travée au niveau de la semelle tendue « Cas charge répartie ».....	106
Tableau 6-1 Variation de $\overline{C}_b$ pour un moment linéairement variable .....	115
Tableau 6-2 Moment critique de déversement pour un IPE 300 maintenu rigidement au niveau de la semelle tendue (moment constant) .....	117

Tableau 6-3 Moment critique de déversement pour un IPE 300 maintenu rigidement au niveau de la semelle tendue (Moment variable) .....	117
Tableau 6-4 Moment critique de déversement pour un IPE 300 maintenu rigidement au niveau de la semelle tendue (Charge Répartie).....	118
Tableau 6-5 Coefficients de chargement .....	122
Tableau 6-6 Variation du moment critique adimensionnel en fonction de la rigidité en torsion des poutres soumises à un moment constant.....	125
Tableau 6-7 Valeurs des Coefficients $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ .....	127
Tableau 6-8 Valeurs théoriques et numériques du moment critique (Moment Constant).....	128
Tableau 6-9 Valeurs théoriques et numériques du moment critique (Charge Répartie).....	129
Tableau 6-10 Comparaison entre les valeurs théoriques et numériques du moment critique	129

## LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 Cas fondamental du déversement [1].....	3
Figure 1-2 Déformation d'un profilé .....	4
Figure 1-3 Différents cas de déversement des poutres métalliques .....	4
Figure 2-1 Flambement d'un poteau.....	12
Figure 2-2 États d'équilibres.....	13
Figure 2-3 Dessin originaux de Saint Venant de torsion de barre à section elliptique [9] .....	19
Figure 2-4 Réduction de charge selon Vlassov.....	20
Figure 2-5 Déformation d'une poutre due à la torsion .....	22
Figure 2-6 Poutre en I soumise à un moment de torsion uniforme.....	24
Figure 2-7 Variation de $\theta$ le long de la poutre .....	25
Figure 2-8 Variation de la Torsion Uniforme le long de la poutre .....	25
Figure 2-9 Variation du Bi-moment le long de la poutre.....	26
Figure 2-10 Variation du gauchissement le long de la poutre .....	26
Figure 2-11 Déversement élastique des poutres en I [12].....	28
Figure 2-12 Poutre à section constante soumise à des moments d'extrémités .....	28
Figure 2-13 Appuis en fourche [14].....	29
Figure 2-14 Déplacements induits par le déversement .....	29
Figure 2-15 Influence du niveau d'application de la charge.....	32
Figure 2-16 Distribution du moment [25].....	34
Figure 2-17 Variation du coefficient $C_1$ en fonction du chargement .....	36
Figure 2-18 Types de maintiens.....	38
Figure 2-19 Poutre maintenue à mi-travée- chargement équivalent.....	40
Figure 2-20 Cas d'une poutre avec maintien continu au niveau de la semelle tendue [6] .....	42
Figure 2-21 courbes de flambement [48].....	44

Figure 3-1 Schématisation d'un élément à parois minces dans un repère cartésien.....	53
Figure 4-1 Variation du coefficient $C_1$ en fonction du chargement.....	72
Figure 5-1 Poutre en I maintenue en un point à une distance $\lambda_v L$ .....	80
Figure 5-2 Déplacements dus au déversement.....	80
Figure 5-3 Variation de « m » en fonction de la position longitudinale du maintien.....	87
Figure 5-4 Relation typique entre charge de déversement et rigidité du maintien. ....	89
Figure 5-5 Variation de $M_{cr}$ en fonction de L pour différentes valeurs de $k_v$ .....	90
Figure 5-6 Variation $\bar{\gamma}_v$ en fonction de $\kappa$ .....	92
Figure 5-7 Variation de $\bar{\gamma}_v$ en fonction de $\kappa$ cas –Moment Constant-.....	93
Figure 5-8 Variation de $\bar{\gamma}_v$ en fonction de $\kappa$ $\hat{a} = +1$ .....	95
Figure 5-9 Variation de $\bar{\gamma}_v$ en fonction de $\kappa$ cas $\hat{a} = 0$ .....	96
Figure 5-10 Variation de $\bar{\gamma}_v$ en fonction de $\kappa$ cas $\hat{a} = -1$ .....	97
Figure 5-11 Déformation d'un IPE 300 sous moment constant maintenue au niveau de la semelle tendue.....	98
Figure 5-12 Variation du moment en fonction de $\gamma_v$ « $\kappa < 15.8$ ».....	99
Figure 5-13 Variation du moment en fonction de $\kappa$ «Moment Constant».....	100
Figure 5-14 Variation du moment en fonction de $\kappa$ «Charge Concentrée».....	101
Figure 5-15 Variation du moment en fonction de $\kappa$ «Charge Répartie».....	102
Figure 6-1 Poutre en I maintenue latéralement au niveau de la semelle tendue.....	110
Figure 6-2 Schématisation transversale d'une poutre bi symétrique maintenue au niveau de la semelle tendue.....	110
Figure 6-3 Variation du coefficient $\bar{C}_b$ en fonction du point d'application de la charge.....	116
Figure 6-4 Valeurs du coefficient $\bar{C}_b$ pour 03 points d'application de la charge.....	116
Figure 6-5 Déplacements dus au déversement.....	119
Figure 6-6 Variations du Moment critique adimensionnel en fonction de $\gamma_c$ .....	123
Figure 6-7 Variations du moment critique fonction de la rigidité de torsion (moment constant) .....	125

Figure 6-8 Variations du moment critique fonction de la rigidité de torsion (charge répartie) .....	126
Figure A-1: Déplacements Induits par le Déversement .....	136
Figure B-1 Interface d'accueil LTBeamN .....	142
Figure B-2 Boite de dialogue « Définition Poutre » .....	143
Figure B-3 Boite de dialogue « Édition du maintien » .....	145
Figure B-4 Boite de dialogue « Chargement » .....	146
Figure B-5 Boite de dialogue « Tableau des résultats » .....	147
Figure B-6 Déformée de la poutre .....	147
Figure B-7 Déformées modales .....	148

# 1 INTRODUCTION

## 1.1 Introduction

En construction métallique, le déversement élastique demeure l'un des phénomènes d'instabilité les plus importants en matière de stabilité des poutres. En phase de dimensionnement ou de vérification, l'ingénieur est appelé à choisir les formes des sections en fonction des sollicitations, puis à vérifier l'ensemble des éléments constituant sa structure selon la réglementation en vigueur.

Lorsqu'il s'agit d'un effort de flexion, les sections en I sont particulièrement efficaces puisqu'elles possèdent une inertie très grande selon l'axe fort (plan de chargement), cet avantage se fait au détriment d'une inertie relativement très faible favorisant ainsi le déversement de la poutre.

La valeur du moment critique de déversement élastique est directement liée aux caractéristiques de la poutre, à son chargement et à ses conditions de maintien. Cette valeur est obtenue par des expressions du moment critique que proposent les codes de calcul pour des cas bien déterminés. Pour d'autres cas, et en absence de méthode de calcul, le concepteur se voit dans l'obligation d'adopter des hypothèses trop sécuritaires, ou de faire appel à des dispositions constructives pour améliorer la stabilité des poutres ; mais, les deux solutions sont généralement onéreuses.

Les expressions du moment critique de déversement des poutres maintenues latéralement ne sont pas données de manière explicite dans les codes de calcul et particulièrement dans le cas des poutres maintenues au niveau de leurs semelles tendues. Habituellement, il est admis que le maintien de la semelle tendue n'apporte aucune amélioration de la stabilité au déversement.

Le présent travail de recherche vise à étudier le déversement élastique des éléments métalliques avec maintien latéral au niveau d'une semelle. Nous allons commencer par définir le phénomène de déversement, par la suite nous allons présenter en détail les motivations ainsi que la méthodologie adoptée dans le cadre de cette thèse.

1.2 Définition du déversement

Le déversement est un phénomène d'instabilité lié à la flexion. Le cas fondamental du déversement se définit par une poutre simple avec appuis à fourches soumise à un moment de flexion constant (Figure 1-1).

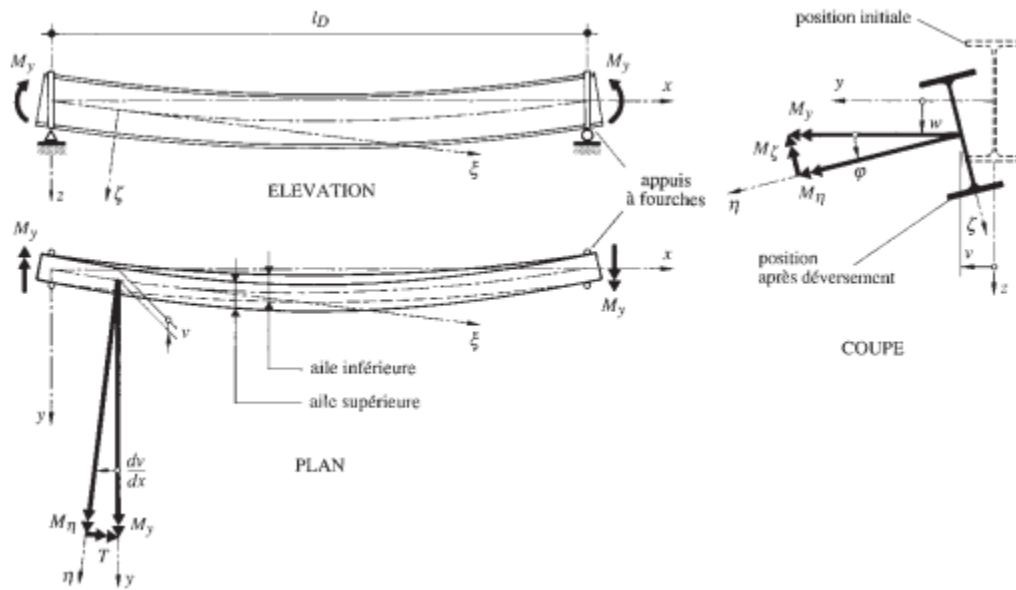
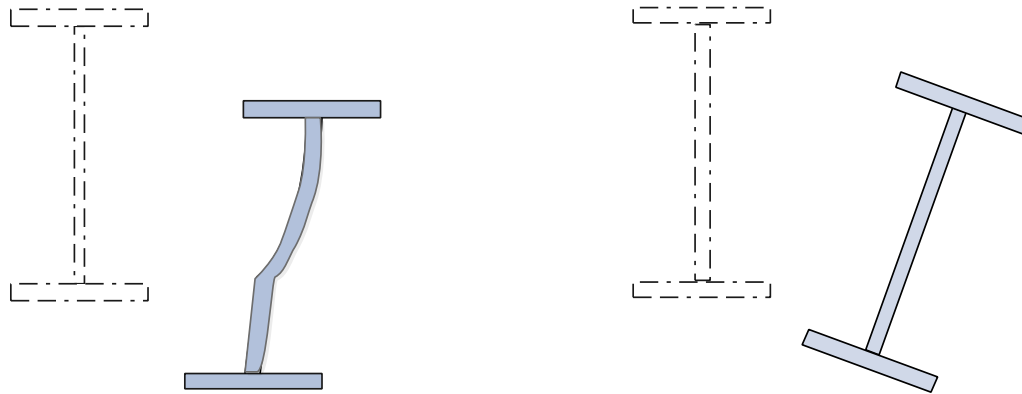


Figure 1-1 Cas fondamental du déversement [1]

Lorsqu'une poutre est soumise à une flexion selon l'axe de forte inertie, la semelle ainsi que la partie de l'âme comprimée sont susceptibles de flamber. Le flambement de la semelle comprimée dans le plan de l'âme est empêché par l'âme, en raison de sa grande rigidité dans son plan, et donc, c'est le flambement de la semelle dans son plan qui devient critique, de ce fait nous pouvons observer deux situations. La première est lorsque l'âme est très élancée (Figure 1-2-a), cette dernière risque probablement de se déformer, de telle sorte que l'encastrement devient négligeable et le déversement est très proche du flambement de la semelle par flexion par rapport à l'axe le plus faible de la section droite. Le deuxième cas, est lorsque une âme est relativement rigide, le flambement de la semelle comprimée amène la section à tourner (figure 1.2-b). A cause de la rotation des axes principaux par rapport à leurs directions initiales, la déformation qui en résulte est une combinaison de torsion et de flexion latérale, à partir de là nous pouvons dire que la poutre déverse.



-a- Profilé à âme élancée

b- Profilé à âme trapue

Figure 1-2 Déformation d'un profilé

L'histoire a montré que le phénomène de déversement est soudain et peut mener à la ruine partielle ou totale des poutres ou des ouvrages comme il est illustré dans les figures (1.3).



(a) Pont sur le canal de Mittelland près de Dedensen , 1982[2]

(b) Pont de Saint-ilizpz, France 2004[2]

(c) Effondrement total d'une toiture [3]

Figure 1-3 Différents cas de déversement des poutres métalliques

La figure (1-3-a) montre un cas de ruine d'un pont métallique en cours de démontage. Lors de cette opération, l'option du grutage en berge a été adoptée. Pour ce faire, il faut déconnecter les entretoises servant de maintien latéral, cela a créé l'instabilité par déversement de la poutre.

La figure (1-3-b) montre un pont suspendu avec deux poutres latérales en treillis. La cause du déversement de la membrure supérieure est due au passage d'un poids lourds en surcharge.

La figure (1-3-c) expose la ruine totale d'un bâtiment industriel sous une charge de neige, du fait du déversement des poutres du portique qui ont basculé et entraîné toute la structure au sol. Les trois exemples précédents montrent bien que le déversement peut se manifester en travée, au stade de montage (ou démontage) ou en service.

### 1.3 Motivation

Le Déversement est un problème courant lorsqu'il s'agit de la stabilité des poutres. Des recherches approfondies ont été menées sur le sujet, donnant lieu à de nombreuses formules de calcul de la stabilité au déversement. Cependant, ces formules s'appliquent principalement aux poutres non maintenues latéralement avec des conditions d'appuis simples. En pratique, des maintiens latéraux sont couramment utilisés pour améliorer la résistance au déversement des poutres en flexion, cependant, seules quelques études ont été menées sur ces cas.

Le premier élément moteur de cette recherche découle des normes Algériennes de construction métallique [4] ou encore des normes Européennes EN 1993-1-1 [5] qui ne prévoient pas de manière explicite des expressions permettant la détermination du moment critique élastique de déversement des poutres maintenues latéralement.

Le deuxième élément moteur provient des pratiques courantes de justification des poutres métalliques. A titre d'exemple, lors du dimensionnement des pannes de toiture, les praticiens recommandent de ne pas vérifier la stabilité au déversement lorsque la semelle supérieure est comprimée, du fait que la couverture représente un maintien continu et prémunie cette pièce vis-à-vis du déversement. Mais la même pièce peut être sujette à un chargement opposé (cas du vent), dans ce cas la couverture est attachée à la semelle tendue et ne peut en aucun cas empêcher les déformations dues au flambement de la semelle comprimée, donc, la poutre est considérée non maintenue et elle est vérifiée comme telle. Ce raisonnement reste valable si

on assimile le déversement à un flambement de la semelle comprimée, néanmoins cette approche reste trop sécuritaire. De ce fait, nous nous sommes fixé comme objectif d'étudier le comportement des poutres vis à vis du déversement en prenant en compte les maintiens de la semelle tendue.

#### 1.4 Objectifs de la thèse et méthodologie

Le but principal de la présente thèse est de :

« *Proposer une expression du moment critique de déversement adaptée aux poutres maintenues latéralement au niveau de la semelle tendue* ».

Ce but se construit sur une série d'objectifs intermédiaires représentant le développement par étapes de ce travail dont les principaux points sont :

- Développement analytique dans lequel on établit, selon le cas de charge, les potentiels énergétiques ainsi que les équations d'équilibre d'une poutre (selon le modèle de Vlassov).
- Étude de la stabilité au déversement d'une poutre non maintenue sous différentes conditions de chargement.
- Étude de la stabilité au déversement d'une poutre maintenue discrètement, sous les mêmes conditions de chargements, et pour diverses positions du maintien.
- Étude de la stabilité au déversement d'une poutre maintenue latéralement au niveau de la semelle tendue, sous chargement réparti le long de la poutre.

Afin d'atteindre les objectifs fixés pour ce travail de recherche, cette thèse est organisée en six chapitres dont le premier est dédié essentiellement à la présentation de la méthodologie tracée pour atteindre nos objectifs.

L'objectif du deuxième chapitre est de présenter les aspects théoriques et réglementaires relatifs au déversement élastique des poutres. Dans ce même chapitre, nous avons également présenté une revue de littérature dans le domaine de recherche se rapportant à l'étude du déversement des poutres.

Le chapitre 3 est dédié à l'étude d'un élément à parois minces. Nous écrivons, à partir de la cinématique, les expressions des potentiels énergétiques des poutres soumises à des cas de

charges courants. Par la suite, ces potentiels seront mis sous la forme d'équations différentielles appelées équations d'équilibres.

Dans le chapitre 4, nous procéderons à la détermination d'une expression générale du moment critique de déversement d'une poutre bi symétrique. L'utilisation des méthodes de résolution de Ritz et de Galerkin nous permettra de déterminer, pour chaque cas de charge, les coefficients caractéristiques de l'expression du moment critique de déversement. Par la suite des simulations numériques à l'aide du logiciel LTBeamN seront présentées. Les résultats obtenus seront discutés et comparés à ceux disponibles dans la littérature.

Le déversement des poutres avec maintien discret fera l'objet du chapitre 5. L'expression générale du moment critique de déversement, par la méthode de résolution de Ritz, sera développée. Cette expression sera utilisée pour la détermination de la position longitudinale adéquate du maintien. Par la suite, et en considérant cette position optimale, la rigidité minimale requise pour constituer un maintien fixe sera établie en fonction du type de chargement et des positions transversales du maintien et de la charge.

Pour le cas du maintien de la semelle tendue, une formule simple permettant de déterminer le moment critique de déversement sera présentée et valorisée à l'aide d'une comparaison avec des résultats issus de la modélisation numérique.

Dans le sixième chapitre, nous procéderons à l'étude de la stabilité au déversement d'une poutre bi symétrique maintenue de manière continue au niveau de la semelle tendue, les configurations possibles du maintien en translation (maintien rigide ou élastique) seront étudiées. Pour les deux cas, nous procéderons à la détermination de l'expression du moment critique de déversement.

Le cas d'un maintien rigide sera traité en utilisant la méthode de résolution de Galerkin. La méthode de résolution de Ritz sera utilisée pour le cas du maintien élastique. L'influence de différents paramètres sur la stabilité au déversement, sera mise en évidence. Pour chaque type de maintien, des comparaisons entre les formules proposées et les modèles numériques par éléments finis seront établis.

Pour le cas du maintien rigide, une formule simple permettant de calculer le moment critique de déversement sera déterminée.

Enfin, une comparaison entre les résultats obtenus, pour un maintien rigide, par les différentes méthodes utilisées sera présentée.

Ce travail sera clôturé par une conclusion qui synthétise les contributions majeures de ce travail de recherche, ainsi que les perspectives futures concernant la poursuite de cette étude.

### **1.5 Hypothèses et limites de la recherche**

Le présent travail est un développement analytique dont les résultats seront comparés avec ceux issus d'une modélisation numérique. L'objectif du travail est de proposer des expressions du moment critique de déversement élastique en prenant en considération l'effet des maintiens latéraux des poutres étudiées. Ce développement analytique est basé sur les hypothèses suivantes :

- La poutre, dont la section est constante et bi-symétrique, est parfaitement rectiligne et sans imperfection.
- La section transversale de la poutre est indéformable.
- La poutre repose sur des appuis de type « fourche ».
- Le matériau de la poutre est infiniment élastique linéaire.
- La rigidité en flexion dans le plan de flexion de la poutre est beaucoup plus grande que sa rigidité en flexion dans le plan latéral.
- Les déformations de la poutre sont petites.
- La déformée de la poutre est sinusoïdale du première ordre (une seule demi-onde).

Ce travail de recherche ne prend pas en considération :

- L'effet des imperfections géométriques.
- L'effet des contraintes résiduelles.
- L'effet des déformations de cisaillement.
- L'effet de l'élanement de l'âme.

## 1.6 Conclusion

Nous avons présenté le contexte ainsi que les motivations qui nous ont poussés à traiter le thème du présent travail de recherche. Nous avons clarifié les objectifs intermédiaires ainsi que l'objectif final par une méthodologie détaillée.

Les conséquences d'une méthode de vérification des poutres maintenues latéralement dans le contexte actuel sont doubles :

- Possibilité de projeter des nouveaux ouvrages plus économiques tout en étant aussi sûrs.
- Avoir une meilleure connaissance en termes de résistance des poutres maintenues latéralement.

## 2 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter et analyser un certain nombre de notions théoriques nécessaires aux développements qui seront effectués dans les chapitres suivants.

Nous commencerons par une présentation des principaux critères d'instabilité utilisés dans le domaine élastique. Par la suite, nous parlerons des méthodes de résolution utilisées pour la détermination des charges critiques de stabilité.

Un exposé sur les théories de poutres les plus couramment utilisées dans le domaine élastique sera présenté afin de bien choisir les hypothèses à adopter pour notre étude.

Le déversement étant un phénomène d'instabilité qui fait intervenir les caractéristiques de rigidité à la torsion des poutres, nous ferons donc une présentation et une analyse relatives à la torsion des poutres ouvertes à parois minces.

Après toutes ces présentations, nous parlerons des études sur le déversement des poutres non maintenues et maintenues en mettant l'accent sur les principaux facteurs qui influencent la stabilité au déversement.

Nous terminerons ce chapitre par une revue des principaux travaux de recherche se rapportant à l'étude du déversement des poutres.

## 2.2 Stabilité élastique

### 2.2.1 Introduction

Les premiers problèmes d'instabilité élastique, se rapportant au flambement de pièces comprimées, ont été résolus il y a plus de deux cents ans par L. Euler (1744). À cette époque, les principaux matériaux de construction étaient le bois et la pierre. Leur résistance relativement faible nécessitait des pièces trapues pour lesquelles la question de la stabilité élastique ne jouait pas un rôle de premier plan. C'est pourquoi la théorie d'Euler relative à des pièces de forme élancée, demeura longtemps sans application pratique. Ce ne fut qu'au début de la construction des ponts en acier pour les chemins de fer que la question du flambement des pièces minces prit une importance pratique, l'emploi de l'acier conduit naturellement à des types de constructions comportant des pièces élancées soumises à la compression.

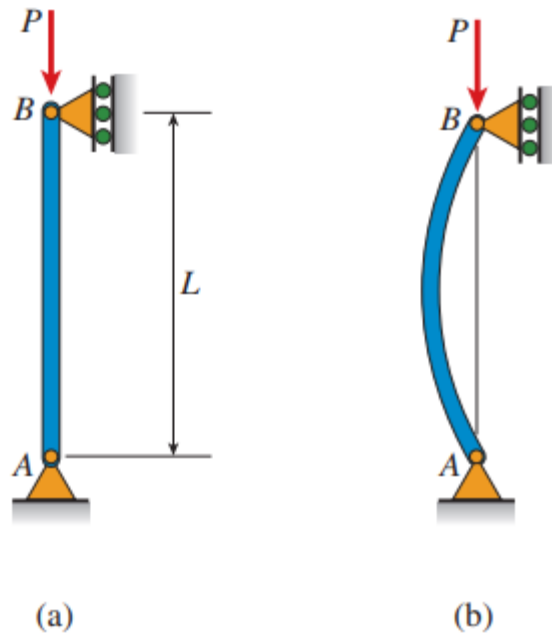


Figure 2-1 Flambement d'un poteau

Euler étudie une barre simplement appuyée de longueur L (figure 2-1) pour laquelle, il a formulé l'équation différentielle ordinaire, qui peut être écrite comme suit :

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{P.v(x)}{EI} = 0 \quad \text{Eq. 2-1}$$

La solution générale de cette équation est écrite sous la forme  $v(x) = A \sin kx + B \cos kx$  ;

$$\text{Avec } k^2 = \frac{P}{EI}$$

Après résolution de l'équation (2-1) on trouve :

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad \text{Eq. 2-2}$$

Pour des charges inférieures à cette quantité, la seule autre solution que l'équation (2-1) est le cas trivial de  $v(x) = 0$ , donc ce que L.Euler avait trouvé, était la charge de compression minimale qui fait fléchir latéralement la barre une fois droite, c'est-à-dire la charge à laquelle,

la barre perd de la stabilité. Cette charge minimale est connue sous le nom de « charge critique d'Euler ».

### 2.2.2 Définition de la stabilité

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement. Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet [6] : « L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant, à chacun d'eux, une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ».

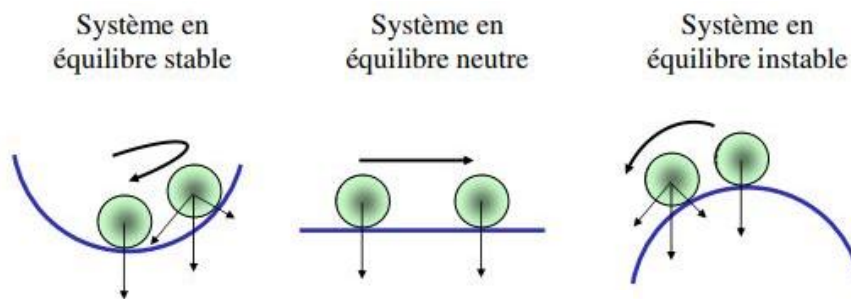


Figure 2-2 États d'équilibres

Cette définition montre que la stabilité détermine une solution (une solution d'équilibre) d'un système et que le problème de s'assurer de la stabilité d'une solution concerne le « voisinage » de cette solution particulière. Si on considère un système élastique conservatif, initialement en état d'équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, le système s'écartera de cet état d'équilibre seulement s'il subit une force perturbatrice temporaire. L'énergie  $W$  fournie au système par cette force perturbatrice est constante. Elle est égale à la somme de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie potentielle  $\Pi$ .

Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe (figure 2-2). Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable ; si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre. D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de  $\Pi$  minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion

va conduire très rapidement à de grands déplacements et vitesses et on dit que le système est instable. C'est le cas lorsque la bille repose au sommet d'une surface convexe ou au point d'inflexion horizontal d'une surface. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit «neutre».

### 2.3 Critères d'instabilité

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques. Tout d'abord, un critère de stabilité est une condition suffisante définissant un système instable. Plusieurs critères sont utilisés dans le domaine élastique avec beaucoup de succès ; on peut citer :

- le critère de bifurcation,
- le critère cinétique,
- le critère de l'énergie.

#### 2.3.1 Critère de bifurcation

Ce critère est aussi connu sous les noms de méthode géométrique, méthode classique, méthode de l'équilibre adjacent. Mathématiquement, c'est un problème de valeurs propres. Cette méthode est très ancienne et fréquemment utilisée de nos jours dans le domaine linéaire. Dans cette méthode, on tente de répondre à la question suivante :

Soit une action extérieure appliquée de manière quasi-statique sur un système ; quel est le niveau de cette action qui permet au système de prendre plus d'une position d'équilibre différente mais très proche ?

#### 2.3.2 Critère cinématique

Appelé aussi méthode dynamique, dans laquelle les équations d'équilibre sont établies pour un niveau fini de l'action extérieure ; bien entendu, ce niveau est inférieur à celui de la charge critique. On crée alors une perturbation dans le système dont on observe les influences sur le mouvement ; parallèlement, le niveau de charge est augmenté de plus en plus jusqu'à ce que

le mouvement devienne illimité ; on a atteint le niveau critique. Par conséquent, l'équilibre est dit stable si pour une petite variation de la position d'équilibre du système, ce dernier revient à sa position initiale ou demeure dans une position très proche de celle-ci. La condition critique est atteinte quand l'écart entre la position initiale et finale cesse d'être limité. Notons encore que ce critère est purement dynamique et qu'il s'occupe du mouvement au voisinage de la position d'équilibre. Nous dirons donc que l'équilibre d'un système est stable si, pour une perturbation suffisamment petite, le système évolue au voisinage de la configuration d'équilibre.

### 2.3.3 Critère de l'énergie

Dans cette méthode, le système doit être conservatif. Ce dernier est en équilibre stable quand l'énergie potentielle totale est minimale. Le critère de l'énergie est basé sur la théorie de Lagrange-Dirichlet. Il est considéré comme une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité. On l'utilise pour la découverte de la charge critique, simplement en cherchant le niveau de charge pour lequel le système ne répond plus de manière stable. Autrement dit, le système est stable si la variation de l'énergie potentielle totale est définie positive.

## 2.4 Méthodes de résolution des problèmes d'Instabilité

Les charges critiques de stabilité peuvent être déterminées en utilisant l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- Résolution directe des équations différentielles de l'équilibre, avec comme résultats les valeurs exactes des charges critiques.
- L'utilisation de méthodes approchées qui sont, pour la plupart d'entre elles, basées sur des méthodes énergétiques et qui conduisent à des solutions approchées des problèmes de stabilité.

La résolution des équations différentielles de l'équilibre, afin de satisfaire les conditions aux limites présente beaucoup de difficultés et ne peut être réalisée que pour des problèmes simples. Ce n'est plus donc cette approche qui sera prise en compte dans des problèmes complexes où il faut se focaliser plutôt sur des méthodes énergétiques alternatives. Il faut noter que l'on peut aussi utiliser des méthodes itératives puissantes pour résoudre les

problèmes de stabilité.

### 2.4.1 Méthodes approchées

Quand on fait certaines hypothèses sur la nature de la déformation d'un système élastique pendant le changement associé à l'équilibre neutre (mode de flambement), le système élastique peut être approché en utilisant des paramètres adéquats, déterminés de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre. Cette idée est à la base des méthodes approchées ; on utilisera parmi plus les connues de ces méthodes celles de Ritz et de Galerkin [7].

La méthode de Ritz suppose que la solution exacte du problème variationnel peut être approchée par une combinaison linéaire de «fonctions de coordonnées» correctement choisies. Quand la solution est approchée, la fonction variationnelle  $\delta\Pi$  à évaluer devient une fonction quadratique et homogène. L'équation de la fonction variationnelle  $\delta\Pi$  peut alors s'écrire sous une forme matricielle. L'annulation du déterminant fournit une équation dont la valeur positive la plus petite est considérée comme la charge critique.

Les fonctions de coordonnées sont choisies, par avance, selon la connaissance et les hypothèses faites sur la nature de la déformation. On peut noter que l'efficacité de la méthode dépend du caractère judicieux du choix fait pour les fonctions et que c'est un avantage si elles satisfont toutes les conditions aux limites.

La méthode de Ritz nous donne une solution après avoir écrit le problème variationnel, la méthode de Galerkin fournit directement les solutions approchées des équations différentielles et elle s'applique que l'on puisse ou non écrire la transformation sous la forme d'un problème variationnel. Elle semble donc s'appliquer plus largement que la méthode de Ritz et être plus attractive en pratique dans la mesure où elle ne nécessite pas de déterminer une fonction potentielle. On peut dire, cependant, que les deux méthodes sont étroitement liées.

Donc, pour une équation dont on ne connaît pas de fonctionnelle naturelle et qu'on souhaite résoudre de manière approchée, les deux méthodes sont possibles. Des choix judicieux de fonctions de base permettent de rendre ces deux méthodes totalement identiques [7]. Il est à noter que les procédés mathématiques des deux méthodes sont bien décrits dans l'ouvrage publié par V.Manet [7].

### 2.4.2 Méthode Numérique (LTBeamN)

Lorsque les méthodes approchées sont employées avec des fonctions de base de type « Éléments Finis », elles deviennent donc des méthodes numériques communément appelées « Méthodes des Éléments Finis » (MEF). Parmi ces méthodes numériques, on s'intéresse, dans ce travail, au logiciel de calcul (**LTBeamN**) [8].

Dans le cadre d'un projet de recherche européen sur le déversement, le Centre Technique Industriel de la Construction Métallique (CTICM) en France a développé un programme informatique, nommé (**LTBeamN**), qui permet au concepteur de calculer rapidement le moment critique de déversement. Ce logiciel permet de traiter un éventail très large de configurations des poutres au déversement (maintiens ponctuels ou répartis, au centre de gravité des sections ou en dehors, maintiens rigides ou élastiques,...) et de chargement (appliqué ou non au centre de gravité des sections). Ce logiciel a été validé avec succès par comparaison avec des résultats tirés de la littérature spécialisée [8] ou obtenus par simulations numériques réalisées par divers partenaires européens sur différents codes par éléments finis (ANSYS, FINELG, ABAQUS, ...). Le moment critique est déterminé en utilisant un processus de calcul itératif dans lequel une analyse de valeur propre linéaire est effectuée.

Le comportement de la poutre est traité en utilisant la Méthode des Éléments Finis et la discrétisation de l'élément peut varier de 100 éléments à 300 éléments.

## 2.5 Généralités sur les poutres

La théorie des poutres a aujourd'hui plusieurs siècles derrière elle. Dans cette partie on expose quelques-unes des théories de poutres les plus couramment utilisées, où on se limite au cas élastique linéaire, et en utilisant les approximations des petits déplacements/rotations et des petites déformations. Mais, pour cela, il est nécessaire de définir au préalable deux notions importantes qui seront utilisées et analysées dans tout ce qui suit : le gauchissement et la déformation transversale (distorsion) des sections.

*Définition 1* : On appelle gauchissement d'une section droite, tout déplacement dans le sens longitudinal de la poutre (hors plan de la section), autre que les mouvements rigides longitudinaux, de déplacement uniforme et de rotation de flexion.

*Définition 2* : On appelle déformation transversale d'une section droite, tout déplacement de la section dans son plan, autre que les mouvements de corps rigide (déplacement vertical ou horizontal et rotation de torsion).

### 2.5.1 Poutre d'Euler-Bernoulli

La théorie d'Euler-Bernoulli est probablement une des plus anciennes théories de poutres connues. Elle est basée sur les trois hypothèses suivantes :

- Les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation.
- Les sections planes restent planes après déformation.
- Les sections sont indéformables dans leurs plans.

Les hypothèses ci-dessus permettront de définir la cinématique de la poutre, qui définit la forme générale du déplacement de la poutre, quel que soit le chargement auquel elle sera soumise. On analyse donc l'effet de chacune de ces hypothèses sur le comportement de la poutre. Les hypothèses 2 et 3 impliquent donc que la poutre ne subira ni gauchissement ni déformation transversale. Quant à l'hypothèse 1, elle implique que la rotation de flexion de la section est proportionnelle à la dérivée de la déformée de la poutre.

L'un des aspects importants de la théorie d'Euler-Bernoulli est que les déformations de cisaillements sont nulles. Pour des poutres très élancées, la théorie d'Euler-Bernoulli est pertinente car l'effet de d'effort tranchant peut être négligé, mais pour des poutres avec un faible élancement, négliger les déformations de cisaillements mène à des erreurs non négligeables dans le calcul de la réponse de la poutre ; manquement auquel le modèle de Timoshenko tente de pallier.

### 2.5.2 Poutre de Timoshenko

La poutre de Timoshenko représente une évolution par rapport à la poutre de Bernoulli, en permettant d'obtenir une moyenne des déformations d'effort tranchant dans la section. Pour cela, on s'affranchit de l'hypothèse 1, en considérant les deux rotations de flexion comme des paramètres indépendants de la déformée. Les deux hypothèses 2 et 3 restent valides pour ce modèle. La poutre de Timoshenko a donc aussi ses limitations, mais à défaut d'une

représentation réaliste du comportement de la poutre, elle permet néanmoins de prendre en compte les déformations d'effort tranchant d'une manière approximative [9].

### 2.5.3 Poutre de Vlassov

#### *Gauchissement uniforme*

Le gauchissement des sections d'une poutre soumise à de la torsion a été mis en évidence expérimentalement par Duleau (1820) puis Saint-Venant (voir figure 2-3).

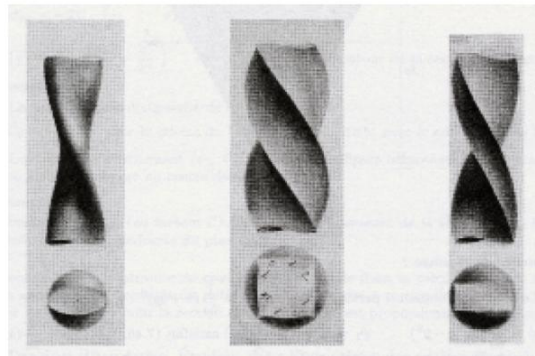


Figure 2-3 Dessin originaux de Saint Venant de torsion de barre à section elliptique [9]

On commence par le cas le plus simple où la poutre est soumise à un couple de torsion uniforme et où les sections sont libres de se gauchir. Dans ce cas, le gauchissement est uniforme et n'induit pas de changement dans les longueurs des fibres longitudinales composant la poutre.

En 1940, Vlassov a développé une théorie de torsion dans laquelle la déformation des fibres longitudinales est incluse. Cette théorie s'appelle également « torsion de déformation » ou « torsion non-uniforme ». À côté de ceci, la théorie de torsion de Saint Venant s'appelle également « torsion circulatoire » ou « torsion uniforme ».

Vlassov a proposé un modèle de poutre où le gauchissement des sections soumises à de la torsion est pris en compte. Nous illustrons ce problème, en considérant une poutre console en I ; à l'extrémité de la poutre est appliquée une force longitudinale  $4P$ , au niveau de l'extrémité d'une semelle (figure 2-4). Les excentricités de la charge par rapport au centre de gravité sont  $e_y = b/2$  et  $e_z = h/2$ .



D'après la théorie classique, ce chargement, ramené au centre, est statiquement équivalent à un effort normal égal à  $4P$  et deux moments de flexion  $M_y = 4P \times h/2$ , et  $M_z = 4P \times b/2$ , comme indiqué sur la (figure 2-4-b). Les actions longitudinales de traction ainsi que celles des deux moments de flexion sont représentés par des forces « P » appliquées au droit de chaque extrémité de semelle. Lorsque l'on considère les trois cas de chargement (figure 2-4-c), on trouve un état de chargement différent de la sollicitation initiale (figure 2-4-a). Pour retrouver le chargement initialement imposé, on doit ajouter celui qui est représenté à la (figure 2-4-d). Ce chargement est équivalent à deux moments fléchissant égaux et de signes contraires, agissant dans les deux plans des semelle de la poutre et provoquant leur flexion dans des sens opposés (figure 2-4-e), Vlassov [10] l'a appelé Bi-moment. Suite à cette double flexion, les sections transversales de la poutre subiront un gauchissement.

## 2.6 Torsion des poutres ouvertes à parois minces

Lorsqu'un élément est soumis à une torsion (Figure 2-5), il se tord selon son axe longitudinal, par rapport au centre de cisaillement de la section. Cependant, il ne se produit pas de torsion si la résultante du chargement extérieur passe par le centre de cisaillement de la section transversale. Dans des situations de calcul pratiques, il convient d'éviter la torsion en appliquant les charges de telle manière que leur résultante passe par le centre de cisaillement. Lorsqu'une force entraînant une sollicitation de torsion dans un élément est appliquée, il convient en général de diviser la sollicitation de torsion totale  $T_{Sd}$  quelconque en deux parties telles que :

$$T_{Sd} = T_{v, Sd} + T_{w, Sd}$$

où :

$T_{v, Sd}$  est le moment de torsion de St Venant ;

$T_{w, Sd}$  est le moment de torsion non uniforme.

Étant donné que la torsion de St Venant est bien détaillée dans la littérature et qu'elle est utilisée dans les pièces mécaniques (section pleine), nous nous intéressons dans ce qui suit à la torsion non uniforme qui touche principalement les sections ouvertes à parois minces.

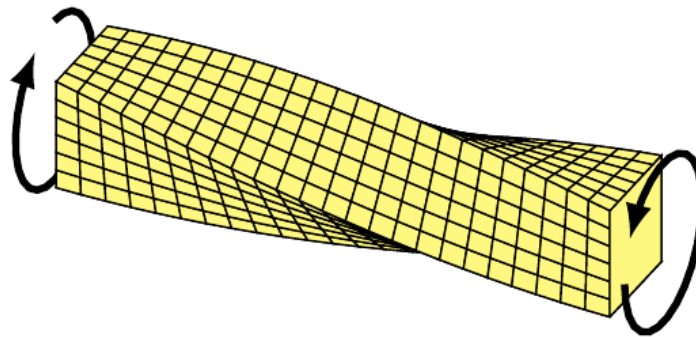


Figure 2-5 Déformation d’une poutre due à la torsion

A titre indicatif, le tableau ci-dessous montre l’effet du gauchissement dans les sections généralement utilisées dans la construction.

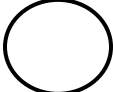

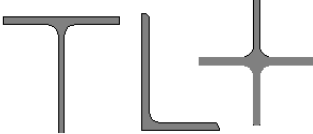
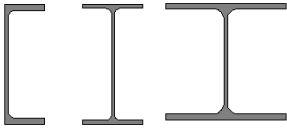

section type	Forme	torsion de st-venant	gauchissement
Sections creuses circulaires		<i>Significative</i>	<i>Pas d’effet</i>
Sections creuses rectangulaires et elliptiques		<i>Significative</i>	<i>négligeable</i>
Cornières, tés et sections cruciformes		<i>Significative</i>	<i>négligeable</i>
Sections laminées à double semelle		<i>Significative</i>	<i>Significatif</i>
Sections minces formées à froid		<i>Négligeable</i>	<i>Significatif</i>

Tableau 2-1 Importance de la torsion de St Venant et du gauchissement pour différents types de section [11]

Dans le cas de la torsion pure, le gauchissement est le même pour toutes les sections droites de la poutre et s’effectue sans qu’il y ait déformation axiale des fibres longitudinales. Le cas de torsion non uniforme se produit lorsqu’une des sections droites ne sont plus libres de se

gauchir ou si le couple de torsion varie le long de la poutre. Alors, le gauchissement variera le long de la poutre et il y aura donc tension ou compression des fibres longitudinales. De plus, l'angle  $\theta$  variera le long de la poutre.

Lorsqu'une poutre en I est soumise à un moment de torsion  $T_{sd}$ , nous pouvons écrire l'équation correspondant à cette sollicitation comme suit :

$$T_{sd} = \underbrace{GJ \frac{d\theta}{dx}}_{T_{Vsd}} - \underbrace{EI_{\omega} \frac{d^3\theta}{dx^3}}_{T_{Wsd}} \quad \text{Eq. 2-3}$$

Cette expression peut être arrangée sous la forme :

$$\frac{T_{sd}}{GJ} = \frac{d\theta}{dx} - \mu^2 \frac{d^3\theta}{dx^3} \quad \text{Eq. 2-4}$$

avec  $\mu = \sqrt{\frac{EI_{\omega}}{GJ}}$

où le paramètre  $\mu$ , qui a une unité de longueur (il varie entre 0.25m et 3.75m pour des profilés en I courants), permet d'avoir une idée sur l'effet du gauchissement par rapport à celui de la torsion uniforme.

La solution à l'équation (2-4) étant connue et sous la forme de :

$$\theta(x) = A \sinh \frac{x}{\mu} + B \cosh \frac{x}{\mu} + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F \quad \text{Eq. 2-5}$$

où A, B, C, D, E et F sont des constantes à déterminer en fonction des conditions de chargement ainsi que des conditions aux limites.

Afin d'illustrer l'influence du paramètre  $\mu$  sur la rotation  $\theta(x)$  nous allons considérer une poutre en I sur appuis en fourche sollicitée par un moment de torsion uniforme le long de la poutre (figure 2-6).

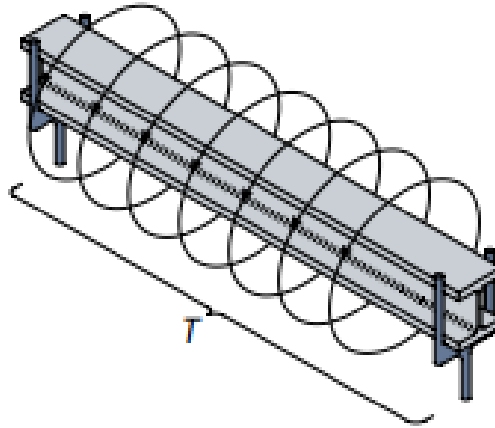


Figure 2-6 Poutre en I soumise à un moment de torsion uniforme

La solution de l'équation (2-4) devient :

$$\theta(x) = \frac{T}{GJ} \left( \frac{\mu^2}{L} \left( \frac{xL - x^2}{2\mu^2} + \cosh\left(\frac{x}{\mu}\right) - \tanh\left(\frac{L}{2\mu}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x}{\mu}\right) - 1 \right) \right) \quad \text{Eq. 2-6}$$

Nous avons tracé pour une poutre bi symétrique de longueur de 03 m, la variation de la rotation ainsi que ces dérivées pour 04 valeurs de  $\mu$  : 0.25m, 1m, 2m et 3m. Respectivement, dans les figures (2-7), (2-8), (2-9) et (2-10) :

- le tracé de  $\theta(x)$  montre la variation de la rotation le long de la poutre.
- le tracé de  $\theta'(x)$  montre la variation de torsion  $T_v$  le long de la poutre.
- le tracé de  $\theta''(x)$  montre la variation du Bi-moment, et peut être considéré comme lié à la courbure des semelles et donc proportionnel au moment de déformation dans une semelle. Pour l'autre semelle, le moment de déformation est égal et opposé.
- le graphique pour  $\theta'''(x)$  est proportionnel à la force de cisaillement du gauchissement dans une semelle. Il est donc également proportionnel au moment de torsion du gauchissement  $T_w$ .

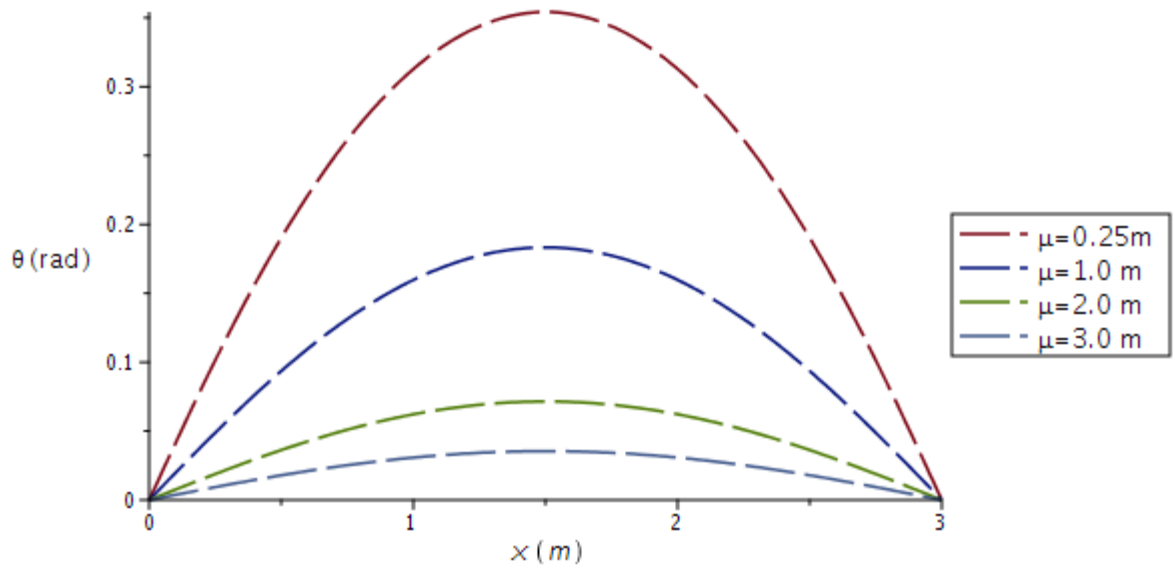


Figure 2-7 Variation de  $\theta$  le long de la poutre

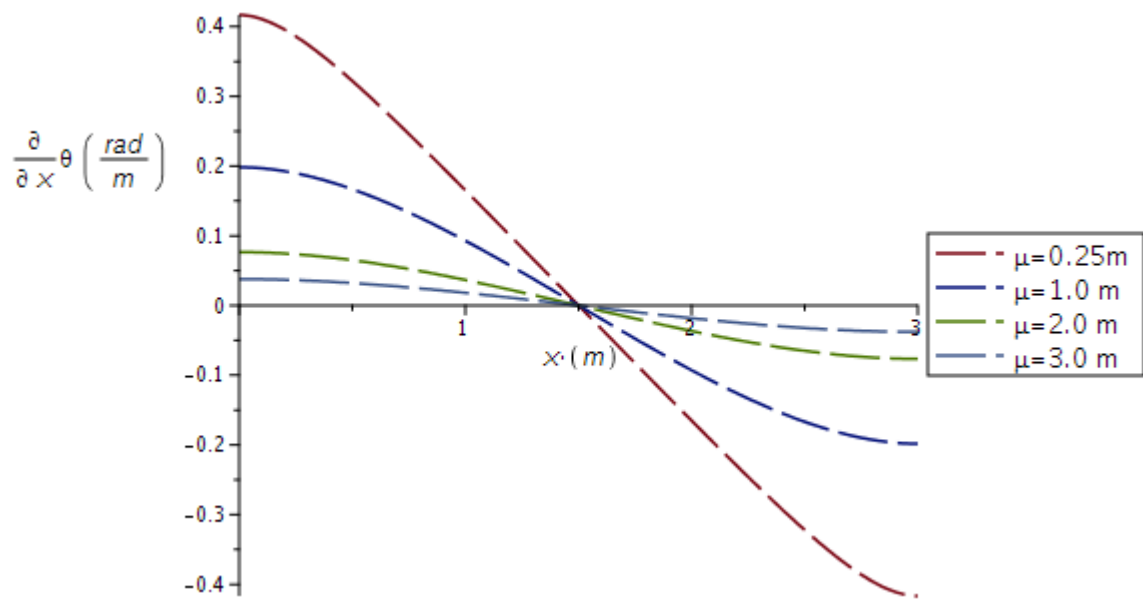


Figure 2-8 Variation de la Torsion Uniforme le long de la poutre

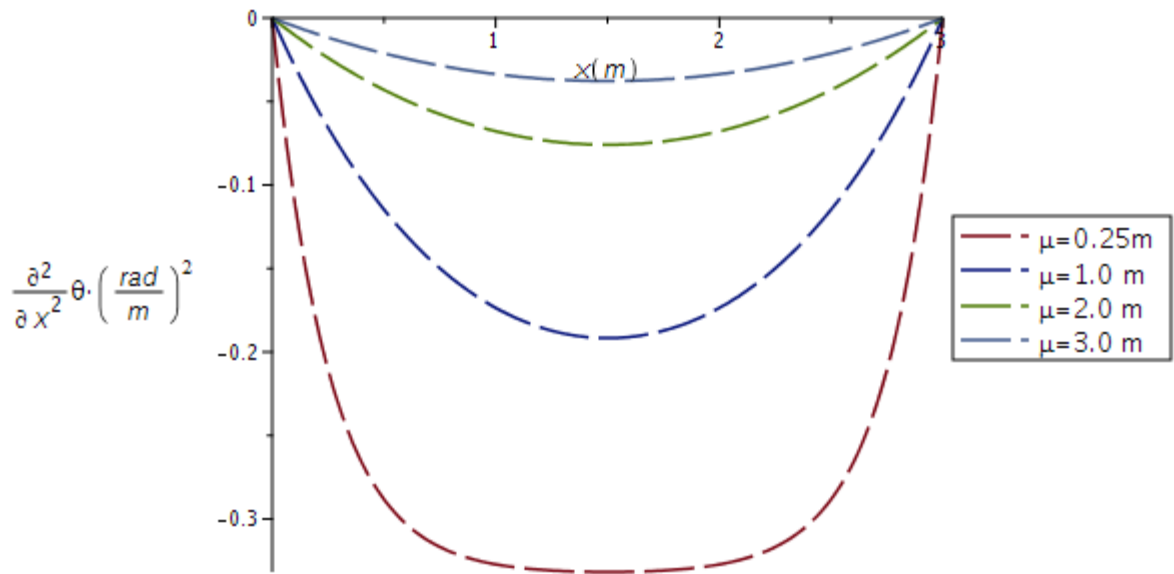


Figure 2-9 Variation du Bi-moment le long de la poutre

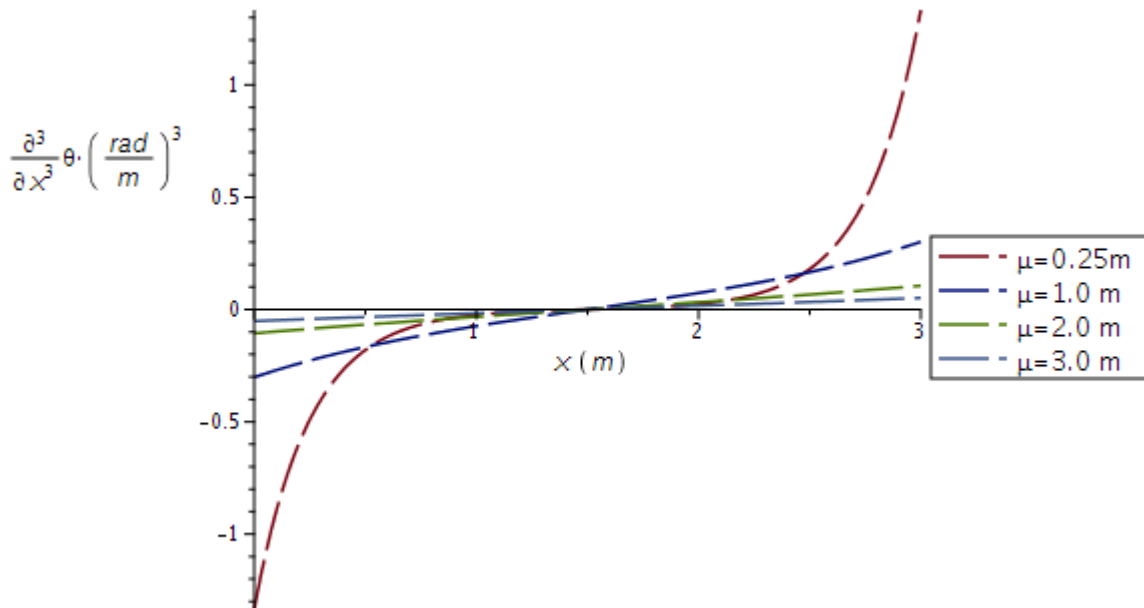


Figure 2-10 Variation du gauchissement le long de la poutre

Il apparaît que pour de petites valeurs de  $\mu$ , la torsion uniforme est prépondérante, mais pour de grandes valeurs de  $\mu$ , la contribution des deux torsions est claire. Ceci peut être clairement apprécié dans la (figure 2-10) dans laquelle nous pouvons remarquer que lorsque  $\mu$  est petit

par rapport à la longueur, le gauchissement est important aux extrémités mais s'atténue très rapidement. Néanmoins, le gauchissement a tendance à devenir linéaire le long de la poutre lorsque le paramètre  $\mu$  augmente. Enfin, la ressemblance entre le tracé de la variation du gauchissement et le diagramme de l'effort tranchant d'une poutre soumise à une charge répartie est très visible.

L'une des remarques les plus pertinentes, est que la forme du diagramme de rotation est sinusoïdale pour toutes les valeurs de  $\mu$  étudiées dans ce cas. Ceci justifiera le choix des fonctions utilisées dans la solution du problème.

### **2.7 Déversement des poutres non maintenues**

Les poutres, les solives et les fermes sont des éléments soumis à la flexion, ils ont généralement beaucoup plus de résistance et de rigidité dans leur plan de chargement que dans le plan associé à leur axe principal mineur. En absence de maintiens latéraux suffisamment rigides, ils peuvent subir une déformation par flambement latérale avant d'atteindre leur capacité de résistance en flexion. Ils sont particulièrement sensibles à ce type d'instabilité pendant la phase de construction, lorsque les pièces à assembler sont soit absentes, soit de type provisoire. Le déversement est un état limite d'utilité structurelle lorsque la déformation change principalement de la flexion dans le plan à la combinaison de flexion et de torsion. Le modèle de rupture final implique une déformation latérale et une rotation en fonction des caractéristiques spécifiques des composantes de l'élément.

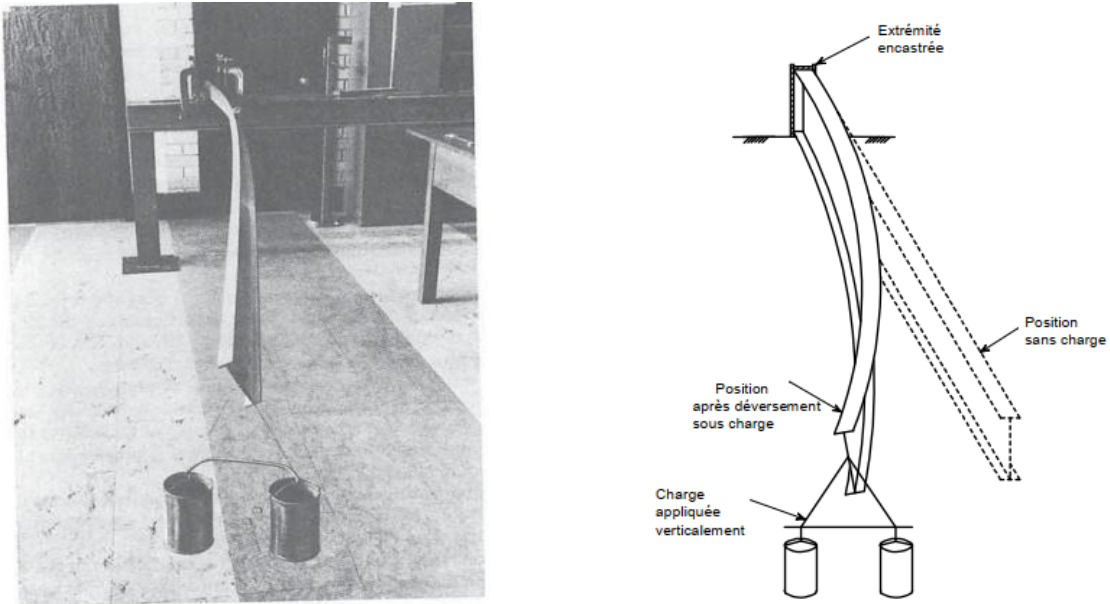


Figure 2-11 Déversement élastique des poutres en I [12]

## 2.7.1 Expression du moment critique de déversement

### 2.7.1.1 Poutre simplement appuyée soumise à un moment uniforme (poutre de référence)

Le déversement d'une poutre simplement appuyée soumise à un moment uniforme est le plus simple de tous les cas, et la solution est bien établie par S.P.Timoshenko [13]. Les extrémités de la poutre sont supposées être empêchées de déformation latérale ( $v = 0$ ) et de torsion ( $\theta = 0$ ), mais elles sont libres de se gauchir ( $v'' = 0$ ) ( $\theta'' = 0$ ).



Figure 2-12 Poutre à section constante soumise à des moments d'extrémités

Dans le chapitre flambement latéral des poutres, S.P Timoshenko [13] a traité ce cas fondamental sur la base des hypothèses suivantes :

- Poutre de section constante bi-symétrique parfaitement rectiligne et sans imperfection.

- Section indéformable.
- Appuis de type « fourche » (voir figure 2-13).
- Matériaux infiniment élastiques linéaires.
- Rigidité en flexion dans le plan de flexion beaucoup plus grande que la rigidité en flexion latérale.
- Petites déformations ( $\sin \theta = \theta$  et  $\cos \theta = 1$ ).
- $\theta$  est la rotation de la section autour de l'axe x (voir figure 2-14).

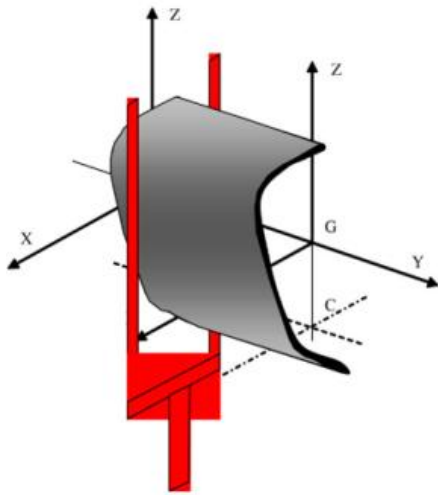


Figure 2-13 Appuis en fourche [14]

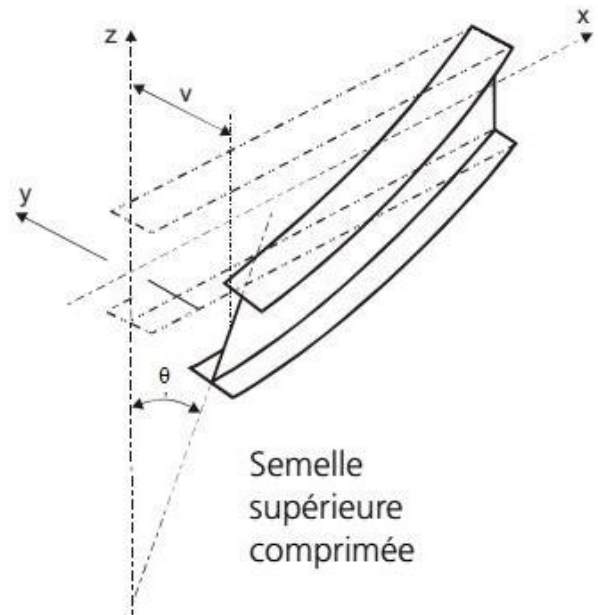


Figure 2-14 Déplacements induits par le déversement

Dans le cas ci-dessus, la solution aux équations différentielles gouvernantes données dans le chapitre 3 peut être calculée de façon exacte (voir Annexe A). Le moment critique de déversement, donné par Timoshenko et Gere [13], a pour expression :

$$M_{cr} = EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2 GJ}{EI_z \pi^2}} \quad \text{Eq.2-7}$$

Les auteurs T.V.Galambos et A.E.Surovek [15-17] propose l'écriture du moment critique sous la forme donnée en 2-8 :

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GJ} \sqrt{1 + \chi^2}$$

$$\chi = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI_\omega}{GJ}}$$
Eq.2-8

où L est la longueur de la poutre, E et G sont les modules d'élasticité et de cisaillement,  $I_z$ , J, et  $I_\omega$  sont le moment d'inertie de l'axe faible, la constante de torsion de St.-Venant, et la constante de gauchissement, respectivement, qui sont énumérés dans des manuels ou peuvent être calculés[1].  $\chi$  est appelé « Paramètre de Torsion » ou « Paramètre de Timoshenko » [18], il représente l'effet de la rigidité en torsion par gauchissement.

L'équation (2-8) peut aussi être écrite sous la forme donnée en 2-9 :

$$M_{cr} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 E \sqrt{I_z I_\omega} \sqrt{1 + \frac{1}{\chi^2}}$$
Eq.2-9

Johnston [15], propose pour une poutre bi symétrique l'expression 2-10 qui est obtenue en

prenant  $I_\omega = I_z \frac{h^2}{4}$  :

$$M_{cr} = EI_z \frac{\pi^2 h}{L^2 2} \sqrt{1 + \frac{1}{\chi^2}}$$
Eq.2-10

où h est la distance entre les centres des semelles. L'équation (2-10) est utile pour la prise en compte du comportement des éléments à parois mince avec des semelles relativement étroites par rapport à la hauteur de la section.

Par conséquent, l'équation (2-10) est utilisée dans certains cas, sans le terme sous la racine carrée, comme une approximation pratique de la résistance élastique à la stabilité au déversement des éléments minces et cela en considérant le flambement de la partie comprimée de la section.

Il est à noter que les équations ci-dessus ne reflètent pas les cas pratiques, car les conditions d'appuis, la variation du diagramme du moment ou encore le point d'application de la charge influencent considérablement la valeur du moment critique. La majorité de ces aspects sont pris en considération dans les formules proposées par la réglementation [4, 5] qui découlent des travaux de J.Clark et H.Hill [19] qui ont été développé par A. Andrade et al.[20]. L.Gardner [21] propose une expression plus générale ( Équation 2-11) qui prend en compte

les aspects cités précédemment, ainsi que la courbure dans le plan de flexion avant flambement :

$$M_{cr} = C_1 \frac{EI_z}{g(k_z L)^2} \pi^2 \left\{ + \sqrt{(C_2 e_z - C_3 \beta_z)^2 + \left( \frac{k_z}{k_w} \right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(k_z L)^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z}} - (C_2 e_z - C_3 \beta_z) \right\}$$

$$g = \sqrt{1 - \frac{I_z}{I_y}}$$

Eq.2-11

Où :

- g est le paramètre qui prend en compte la courbure dans le plan de flexion avant flambement.
- $C_1$  est le coefficient qui prend en compte la distribution du moment.
- $C_2$  est le coefficient qui prend en compte le point d'application de la charge suivant l'axe Z par rapport au centre de cisaillement.
- $C_3$  est le coefficient qui prend en compte la dissymétrie de la section par rapport à l'axe Y.
- $k_z$  et  $k_w$  sont les coefficients d'encastrement aux appuis.
- $e_z$  est la position d'application de la charge.
- $\beta_z$  est le coefficient de Wagner qui sera définie dans le chapitre 3

Afin de prendre en compte tous les aspects influençant la stabilité au déversement, l'équation 2-11 est proposée par la réglementation [4, 5] en prenant, pour se placer dans la sécurité, le paramètre « g » égal à 1. Cette formule demeure applicable pour les sections mono symétriques par rapport à leur axe de faible inertie.

## 2.7.2 Facteurs influençant la stabilité au déversement

### 2.7.2.1 Influence des conditions d'appuis

La plupart des théories présentées sont basées sur l'hypothèse que les appuis aux extrémités de la poutre sont des appuis à fourche. On prêtera donc une attention particulière à ces appuis de manière à garantir des conditions correspondant au moins à cette hypothèse.

Pour cela, on s'assurera qu'ils empêchent toute translation horizontale et toute rotation. On se situera du côté de la sécurité si l'on néglige les effets positifs d'un éventuel encastrement latéral des semelles. Cependant il est clair que dans l'équation (2-11) la valeur du moment critique de déversement est directement liée aux conditions d'appuis (hors plan de chargement) qui sont représentées par les coefficients  $k_z$  et  $k_w$ . Ces coefficients sont donnés par les différents codes existants [4, 5].

### 2.7.2.2 Influence du point d'application de la charge

Le point d'application des charges extérieures au niveau de la section droite de la poutre, peut également influencer la valeur du moment critique de déversement, suivant qu'elles créent un moment de torsion stabilisant ou déstabilisant. Or, la théorie du déversement présentée dans la plus part des travaux repose sur l'hypothèse que les charges agissent au niveau du centre de cisaillement de la poutre. On peut toutefois l'appliquer pour d'autres cas au vu des remarques ci-dessous.

- Si les charges n'agissent pas au niveau de centre de cisaillement de la poutre, mais au niveau de la semelle inférieure la contrainte de déversement est légèrement plus élevée ; on est donc du côté de la sécurité.
- Si, par contre, les charges agissent au niveau de la semelle supérieure la contrainte de déversement diminue.

Cette influence est représentée dans l'équation (2-11) par le paramètre  $(C_2 e_z)$  où  $e_z$  est la distance entre le point d'application de la charge et le centre de cisaillement, et  $C_2$  est un coefficient dépendant des conditions d'appuis et du mode de chargement.

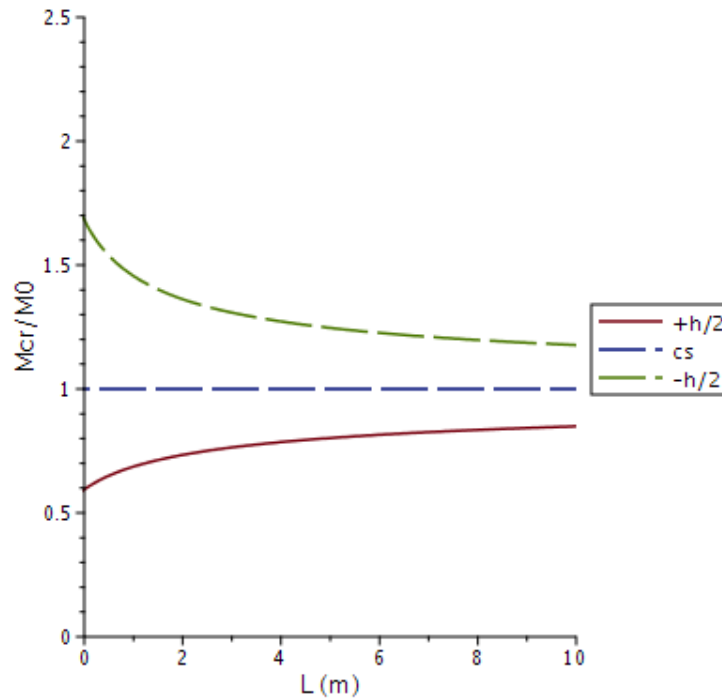


Figure 2-15 Influence du niveau d'application de la charge

### 2.7.2.3 Influence du mode de chargement

Le type de chargement exercé sur la poutre, ou, en d'autres termes, la répartition des moments fléchissant le long de la poutre influence le calcul du moment critique de déversement. Cette influence est représentée dans l'équation (2-11) par le paramètre  $C_1$ .

Pour les sections uniformes doublement symétriques, chargées au niveau du centre de cisaillement, et avec les conditions d'appuis décrites ci-dessus, la valeur de  $M_{cr}$  peut être calculée par l'équation (2-12) :

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left\{ \sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} + \left( \frac{kL}{\pi} \right)^2 \frac{GI_t}{EI_z}} \right\} \quad \text{Eq.2-12}$$

où  $C_1$  peut être déterminé à partir du tableau F.1-1 de l'EC3 [5] pour un chargement par des moments d'extrémité, et à partir du tableau F.1-2 de l'EC3 [5] pour un chargement transversal.

Le facteur  $C_1$  est utilisé pour modifier l'expression du moment critique  $M_{cr0}$  obtenu dans le cas où la poutre est sollicité par un moment constant (c'est-à-dire  $M_{cr} = C_1 M_{cr0}$ ). Ce

coefficient prend donc en compte la forme du diagramme des moments de flexion et remplit une fonction similaire à celle du facteur «m» adopté dans la norme BS 5950[22]. Il à noter que les valeurs du coefficient  $C_1$  sont calculées numériquement et présentent donc des solutions approximatives. Pour cette raison, les valeurs de ce coefficient données par différents chercheurs comme M.Brettle et D.Brown, [23], N.S.Trahair [12] ou Y.Galéa [8, 24] varient légèrement.

Les valeurs de  $C_1$ , proposées dans le tableau F.1-1 des codes [4, 5], pour un chargement par des moments d'extrémité, dont le rapport algébrique est égal à  $\psi$ , peuvent être approximées par une équation donnée dans l'annexe F de l'EC 3 [5] :

$$C_1 = 1.88 - 1.40\psi + 0.52\psi^2 \quad \text{avec : } C_1 \leq 2.7 \quad \text{Eq.2-13}$$

Il existe d'autres approximations comme celle de N.S.Trahair [12], T.V.Galambos [22], ou encore M.A. Serna et al [25] comme donnée dans l'expression 2-14 :

$$C_b = 1.75 - 1.05\psi + 0.3\psi^2 \quad \text{avec : } C_b \leq 2.3 \quad \text{Eq.2-14}$$

L'édition 2001 de l'AISC LRFD [26] incorpore, avec une très petite modification, l'expression du coefficient  $C_b$  proposée par P.Kirby et D.A.Nethercot [27] pour différentes formes de distribution du moment. En se référant à la (figure 2-16), le coefficient  $C_b$  est donné par :

$$C_b = \frac{12,5M_{Max}}{2.5M_{Max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \quad \text{Eq.2-15}$$

où  $M_{Max}$  est le moment maximum et  $M_A$ ,  $M_B$  et  $M_C$  sont les valeurs du moment à  $L/4$ ,  $L/2$  et  $3L/4$  de la longueur respectivement .Toutes les valeurs du moment dans l'équation (2-15) sont prise en valeurs absolues.

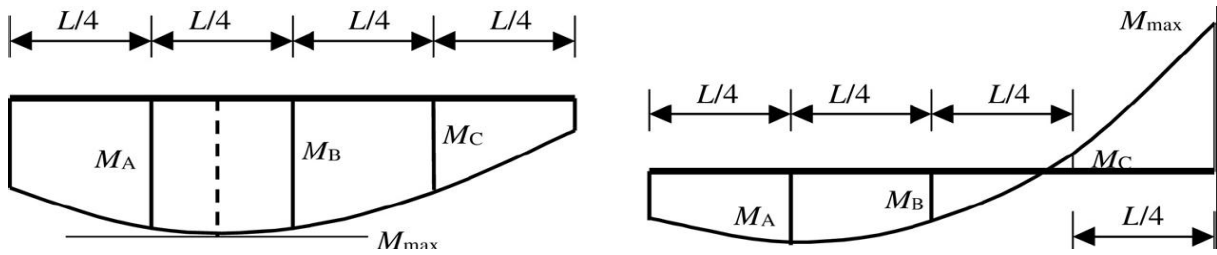


Figure 2-16 Distribution du moment [25]

Le code Britannique pour l'acier dans les bâtiments incorpore une formulation très semblable à celle de l'AISC LRFD [26]. Dans le BS 5950 [22], le coefficient équivalent du moment constant appelé  $m_{lt}$ , est l'inverse des coefficients  $C_1$  (Eq. 2-13 et 2-14) et  $C_b$  (Eq. (2-15)).

Les expressions de  $m_{lt}$  et de  $C_1$  sont données par les équations (2-16) et (2-17):

$$m_{LT} = 0.2 + \frac{0.15M_A + 0.5M_B + 0.15M_C}{M_{Max}} \quad \text{avec : } m_{LT} \geq 0.44 \quad \text{Eq.2-16}$$

$$C_1 = \frac{M_{Max}}{0.2M_{Max} + 0.15M_A + 0.5M_B + 0.15M_C} \quad \text{avec : } C_1 \leq 2.273 \quad \text{Eq.2-17}$$

En multipliant et en divisant le deuxième membre de l'équation (2-17) par 12.5, nous pouvons voir plus clairement la ressemblance entre les coefficients donnés en (2-15) et (2-17) et le de coefficient de distribution donné par l'AISC LRFD [26] :

$$C_1 = \frac{12.5M_{Max}}{2.5M_{Max} + 1.875M_A + 6.25M_B + 1.875M_C} \quad \text{Eq.2-18}$$

Il est à noter que l'AISC LRFD ne considère pas la possibilité que  $k$  diffère de  $k_w$ , de plus, l'expression de  $C_b$  pour toutes les conditions d'appuis est la même et ne dépend pas des coefficients  $k$  et  $k_w$ .











Chargement	Diagramme du moment	Valeur de $C_1$
	 $\psi = +1$	1.000
	 $\psi = +0.75$	1.141
	 $\psi = +0.5$	1.323
	 $\psi = +0.25$	1.563
	 $\psi = 0$	1.879
	 $\psi = -0.25$	2.281
	 $\psi = -0.5$	2.704
	 $\psi = -0.75$	2.927
	 $\psi = -1$	2.752

Tableau 2-2 Valeurs du coefficient  $C_1$  [5]

A la (figure 2-11), on compare les valeurs de  $C_1$  obtenues à partir des équations (2-13 et 2-14). Cette figure montre, comme prévu, que la condition de charge la plus défavorable (celle du moment constant où  $\psi = 1,0$ ) se traduit par la valeur la plus faible de  $M_{cr}$  où  $C_1 = 1$ . Lorsque le moment de droite diminue, la valeur de  $M_{cr}$  augmente, ces augmentations de  $M_{cr}$  sont associées avec les changements qui se produisent dans la forme de la déformée, qui change d'un demi-sinus symétrique pour un moment de flexion uniforme ( $\psi = 1$ ) à une demi-onde antisymétrique double pour  $\psi = -1$  [12]. Il existe un écart entre les expressions approximatives (équations 2-13 et 2-14) et les résultats plus précis du tableau 2-2. Aussi, les

équations (2-13 et 2-14) ne doivent pas être appliquées lorsque  $C_1$  est supérieur à 2,70 et 2.3 respectivement.

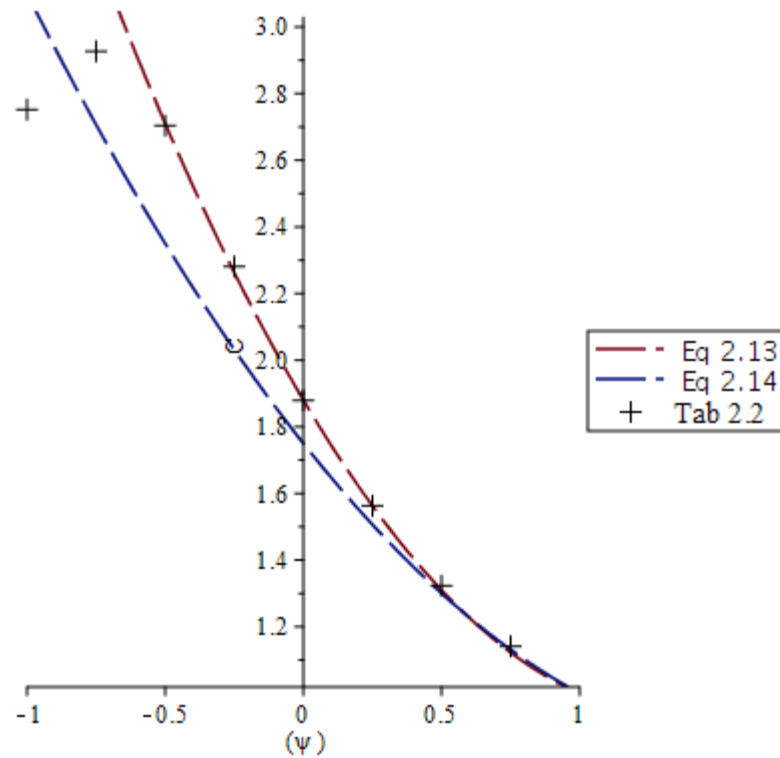


Figure 2-17 Variation du coefficient  $C_1$  en fonction du chargement

Comme présenté précédemment, le coefficient  $C_1$  (ou  $C_b$ ) ne fait pas l'unanimité entre les différentes réglementations.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce coefficient comme B.Suryoatmono et D.Ho [28] qui ont proposé un modèle en utilisant la méthode des différences finies et ont comparé les résultats obtenus à ceux donnés par l'AISC [26]. Les auteurs ont trouvé que, dans certains cas, les coefficients  $C_b$  obtenus à l'aide de l'équation de l'AISC [26] étaient inférieurs à ceux obtenus en utilisant l'approche par différences finies. Par conséquent, dans ces cas de chargement, la résistance à la flexion de la poutre n'est pas optimale. Ce thème intéresse aussi M.A.Serna [25] qui met en évidence les travaux de B.Suryoatmono [28] avant de

proposer une expression pour obtenir le coefficient  $C_1$  pour n'importe quelle distribution de moment, laquelle a été comparée avec celles proposées par les codes American et Britannique.

Les écarts des résultats obtenus par les expressions 2-13 et 2-14 comparés à ceux donnés par l'EC3 [5] et repris par le CCM 97[4] nous a mené à développer au chapitre 4 une expression du coefficient  $C_1$  simple et qui donne des résultats similaires à ceux donnés dans le tableau 2-2.

## 2.8 Déversement des poutres maintenues

Il est connu par les concepteurs que le déversement élastique, nommé aussi flambement latéral, est défini aussi comme étant le flambement de la semelle comprimée. Cette approche nous met en sécurité, néanmoins elle est loin d'être économique. Dans les constructions métalliques, le rajout d'une pièce dans un élément peut changer le comportement de celui-ci vis-à-vis des phénomènes d'instabilité : nous pouvons citer des dispositions constructives classiques comme les raidisseurs pour empêcher le voilement de l'âme, ou encore les bracons pour prémunir une traverse vis-à-vis le déversement. En d'autres termes, les dispositions constructives ont une place très importante dans le dimensionnement des structures.

Il est à savoir que le déversement des poutres, affecte principalement les éléments soumis à la flexion, néanmoins ces éléments supportent généralement d'autres composantes de structure comme les traverses qui supportent les pannes de toiture, ou même les pannes qui supportent la couverture, ces derniers peuvent être considérés comme des maintiens.

Les pannes de toiture sont généralement dotées de liernes ; ce sont des éléments métalliques constitués d'acier mécanique. Le rôle principal de ces liernes consiste à diminuer la flèche suivant l'axe de faible inertie. Par mesure de sécurité les concepteurs considèrent que les liernes n'ont aucune influence sur la stabilité au déversement sauf si ces dernières sont positionnées au droit de la semelle comprimée. De plus cette lierne (ou élément aboutissant) doit avoir une rigidité suffisante pour constituer un blocage au droit de ce point (maintien).

Il est à mentionner que lorsqu'un élément est maintenu élastiquement au milieu de sa longueur son mode de flambement dépend de la rigidité du maintien.

### 2.8.1 Maintiens en construction métallique

Les maintiens (voir figure 2-18) peuvent être divisés en quatre catégories [29], à savoir : maintien discret (ponctuelle), maintien continu, maintien latéral et maintien de rotation. La prise en compte des maintiens a fait l'objet de plusieurs recherches où divers points ont été mis en évidence, en considérant des maintiens de rotation et/ou de déplacement pouvant être discrets [29-33] ou continus [14, 18, 33-43].

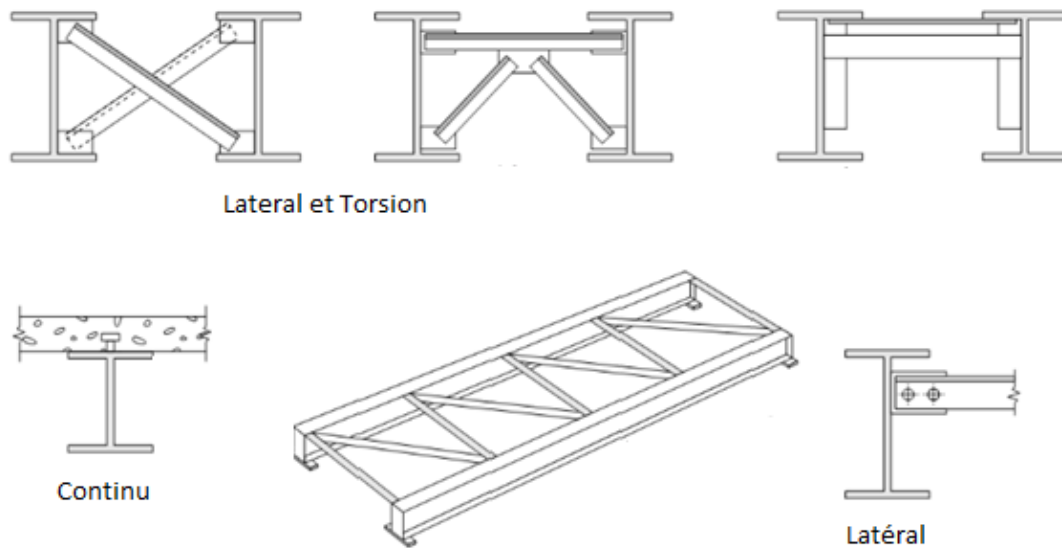


Figure 2-18 Types de maintiens

Si on définit  $k_y$  comme étant la rigidité du maintien en translation, les cas limites sont que la pièce se déformera au premier mode lorsque  $k_y$  est nul et au deuxième mode lorsque  $k_y$  est infini, mais à partir de quelle valeur de  $k_y$  la pièce se déformera en mode 2 afin de considérer le maintien comme étant rigide ou constituant un blocage ? Cette question a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs qui ont mené des études dans le domaine. S.P. Timoshenko [13] a fait un modèle d'une barre de longueur  $(3L)$  maintenue en trois positions de manière équidistante. Il trouve que la rigidité des maintiens requise pour que la barre flambe au mode 4 (cas qui constitue des maintiens rigides) est de l'ordre de  $(16,84\pi^2 EI_z / L^3)$  : cette même valeur de rigidité a été reprise par J.A. Yura [29].

L.Gardner [21], qui considère que la rigidité du maintien nécessaire pour passer du mode 1 au mode 2 est de l'ordre de  $(16\pi^2 EI_z / L^3)$ , s'est basé sur le model d'une barre soumise à un effort de compression. Nous pouvons trouver d'autres travaux dans ce domaine dans divers ouvrages [15-17, 22, 44].

Lorsque il s'agit de poutres, A.Flint [45] a été le premier auteur à présenter les résultats du flambement latéral des poutres avec maintiens élastiques intermédiaires. En négligeant les effets du gauchissement, il a présenté l'analyse d'une poutre ayant un maintien élastique latéral à mi-travée. Une relation simple entre la rigidité du maintien et l'augmentation de la stabilité a été proposée. D.A.Nethercot [46] a continué le travail de A.Flint [45], en menant une étude paramétrique à l'aide d'un modèle à éléments finis bidimensionnels. De nombreuses valeurs du coefficient « C » ont été déterminées pour différents cas de charges avec le maintien latéral appliqué à la semelle supérieure ou au centre de cisaillement de la section. F.Mc-Cane [31, 47] a proposé une formule de la rigidité du maintiens en fonction des caractéristiques de la poutre ainsi que du nombre et de la position des maintiens. Il a comparé la limite de rigidité du maintien donnée ci-avant par Gardner [21] avec les résultats analytiques de ses travaux [31] et cela dans le cas d'un moment constant. Il remarque que lorsque le maintien se trouve au droit de la semelle comprimée, la méthode donne des valeurs conservatrices. Cependant, pour des positions du maintien se rapprochant du centre de cisaillement, il existe des plages de rigidité de torsion pour lesquelles la rigidité limite du maintien par l'approche « barre » reste insuffisante pour constituer un blocage.

N.S.Trahair a proposé pour maintenir la semelle comprimée une rigidité égale à une valeur de  $(19,75\pi^2 EI_z / L^3)$  ; de ce fait, la force exercée sur l'élément de compression est suffisante pour assurer le flambement au deuxième mode [44].

Il n'existe aucune exigence de rigidité de maintien dans les codes utilisés [4, 5], sauf le fait que l'élément de maintien doit résister à un effort égal à 2% de l'effort axial de compression existant dans la semelle comprimée au droit de la section maintenue.

L'influence des maintiens intermédiaires sur les poutres soumises à une charge concentrée ou uniformément répartie a également été étudiée [29, 46], et de nombreuses valeurs des rigidités de maintien requises pour le flambement des poutres en mode 2 ont été déterminées.

### 2.8.2 Poutre maintenue discrètement au niveau d'une semelle

Un cas courant dans la construction métallique est celui où plusieurs rangées parallèles de traverses sont maintenues par des pannes au niveau de leurs semelles supérieures. En plus de leurs fonctions habituelles, les pannes travaillent à la traction ou à la compression pour transférer la charge à un support latéral rigide (par exemple, système de contreventement). En général, les maintiens ont pour rôle d'empêcher une déformation latérale importante de l'élément maintenu au niveau des points de contreventement, de sorte que la longueur de flambement effective de l'élément soit basée sur la distance longitudinale entre les maintiens. Pour jouer un tel rôle, les dispositifs de maintien exigent une résistance et une rigidité minimales, trouvées généralement dans la littérature [13, 15, 16, 21, 22, 29] et discutées précédemment.

En présence d'un maintien rigide au droit de la partie comprimée de la poutre; le moment critique de la poutre entière, revient au calcul des moments critiques de tous les segments, et de considérer leur minimum (voir figure 2-19).

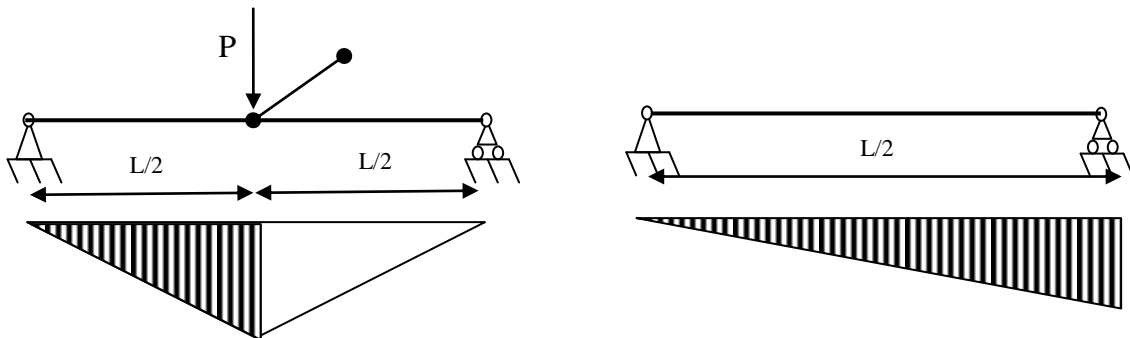


Figure 2-19 Poutre maintenue à mi-travée- chargement équivalent

Comme illustré dans la (figure 2-19), en présence de maintien, le moment critique de la poutre maintenue soumise à une charge concentrée au droit du maintien revient à calculer le moment critique d'une moitié de poutre avec  $C_1 = 1.879$  (voir tableau 2-2).

Cette méthode nommée par Salvador [12] (zéro interaction méthode), reste valable pour des cas de charges concentrées appliquées au droit du maintien et dans la partie comprimée de la section. Mais, les résultats donnés par cette méthode ne prennent en compte ni la position de

la charge, ni celle du maintien, plus encore, lorsque la distribution du moment est parabolique, cette méthode ne peut en aucun cas être applicable.

Pour cela une amélioration de la méthode précédente a été proposée par N.S.Trahair dans l'un de ses ouvrages [44], dans laquelle une estimation plus précise du moment critique de déversement peut être obtenue en estimant les effets des interactions qui se produisent entre les segments adjacents lors du déversement.

Il est à noter que lorsque le maintien de la semelle supérieure est continu, la poutre ne risque pas de se déverser pour des charges gravitaires et pour des conditions d'appuis permettant la rotation. Néanmoins, dans le cas où cette poutre est encastree (cas des poutres maitresses), un segment de la poutre se trouve dans une configuration inverse, et donc la partie comprimée est libre de se déformer, cette remarque n'est pas passée inaperçue dans la littérature et a suscité l'attention de plusieurs chercheurs.

### 2.8.3 Poutre avec maintien continu au niveau de la semelle tendue

Une expression générale du moment critique de déversement élastique d'une poutre maintenue n'est pas proposée dans les codes de calcul, néanmoins, on peut trouver dans la littérature scientifique des propositions de formulations pour le cas de charge de référence à savoir le moment constant. Ainsi, l'expression donnée à l'équation (2-19) est proposée par B.Larue et A.Khelil [14, 18] et reprise par L.Gardner [21] :

$$M_{cr0} = \frac{1}{2a} \left[ \frac{\pi^2 EI_z a^2}{L_t^2} + \frac{\pi^2 EI_w}{L_t^2} + GJ \right] \quad \text{Eq. 2-19}$$

où :

a : est la distance entre l'axe longitudinal maintenu (par exemple le centre de gravité des pannes) et le centre de cisaillement de la poutre.

L<sub>t</sub> : est la longueur du tronçon entre les maintiens en torsion des deux semelles, le long de la poutre.

D'autre part R.D.Ziemian [17] ou encore T.V.Galombos [16] proposent dans le cas de figure le plus fréquent d'une poutre maintenue au droit de la semelle tendue soumise à une charge répartie, une valeurs du coefficient  $C_1$  (noté  $C_b$  dans leurs cas) prise égale à 2,0.

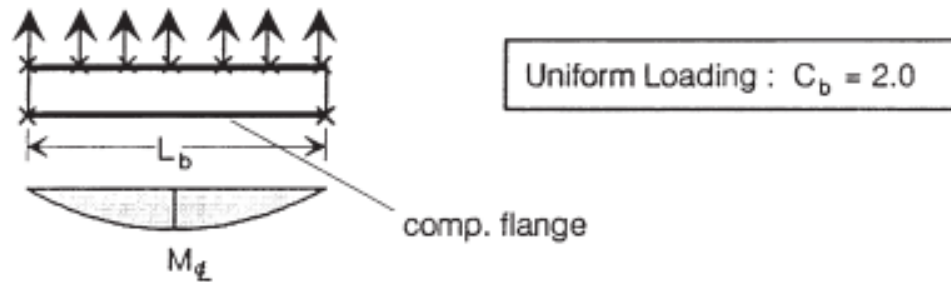


Figure 2-20 Cas d'une poutre avec maintien continu au niveau de la semelle tendue [6]

Ce cas de figure tel illustré, peut être trouvé dans plusieurs ouvrages, il est à l'origine tracé et publié par J.A.Yura en 1993 [29].

D'autres auteurs font appel à l'outil informatique en développant des programmes de calcul qui sont basés sur les méthodes énergétiques lesquelles permettent de calculer la charge critique de déversement. En 1984 N.Ings et N.S.Trahair [34] développent un programme en éléments finis et proposent des abaques avec lesquelles nous pouvons déterminer le coefficient  $C_b$  d'une panne de toiture soumise à une charge répartie et des moments d'extrémité. Ils trouvent une valeur de  $C_b=2.08$  pour le cas traité précédemment. Ces abaques permettent de déterminer le coefficient  $C_b$ , pour divers cas de charges, mais uniquement lorsque la charge est appliquée au niveau de la semelle tendue. Les cas dans lesquelles la charge est appliquée au niveau de la semelle comprimée ou au centre de cisaillement ne sont pas traités.

Plus récemment; le CTICM met à la disposition de la communauté scientifique un programme par éléments finis nommé (LTBeamN) qui permet de déterminer le moment critique de déversement pour divers cas de charges, de conditions d'extrémités et de maintiens.

## 2.9 Le déversement selon l'Eurocode 3

### 2.9.1 Principe de vérification du déversement

Il convient de vérifier une barre non maintenue latéralement et soumise à une flexion selon l'axe fort vis-à-vis du déversement de la façon suivante :

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1.0 \quad \text{Eq. 2-20}$$

où :

$M_{Ed}$  est la valeur de calcul du moment fléchissant ;

$M_{b,Rd}$  est le moment résistant de calcul au déversement.

Le moment résistant de calcul au déversement d'une poutre non maintenue latéralement est pris égale à :

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y f_y / \gamma_{M1} \quad \text{Eq. 2-21}$$

$W_y$  est le module de résistance approprié, et  $\chi_{LT}$  est le coefficient de réduction pour le déversement. Pour les barres fléchies à section transversale constante, il convient de déterminer la valeur de  $\chi_{LT}$  par l'expression :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad \text{Eq. 2-22}$$

où  $\phi_{LT} = 0,5[1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2]$  Eq. 2-23

$\alpha_{LT}$  : est le facteur d'imperfection, est prend comme valeurs ceux indiqué dans le tableau 2-3.

Courbe de déversement	a	b	c	d
Facteur d'imperfection $\alpha_{LT}$	0,21	0,34	0,49	0,76

Tableau 2-3 Valeurs recommandées pour les facteurs d'imperfection des courbes de déversement [4]

$\bar{\lambda}_{LT}$  est l'élanement réduit donnée en 2-24

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}} \quad \text{Eq. 2-24}$$

$M_{cr}$  est le moment critique pour le déversement élastique, qui est basé sur les propriétés de section transversale brute et prend en compte les conditions de chargement, la distribution réelle des moments et les maintiens latéraux.

La relation entre le coefficient de réduction  $\chi_{LT}$  et l'élancement réduit  $\bar{\lambda}_{LT}$  est présentée sous la forme de courbes appelées « courbes de flambement » (voir Figure.2-21).

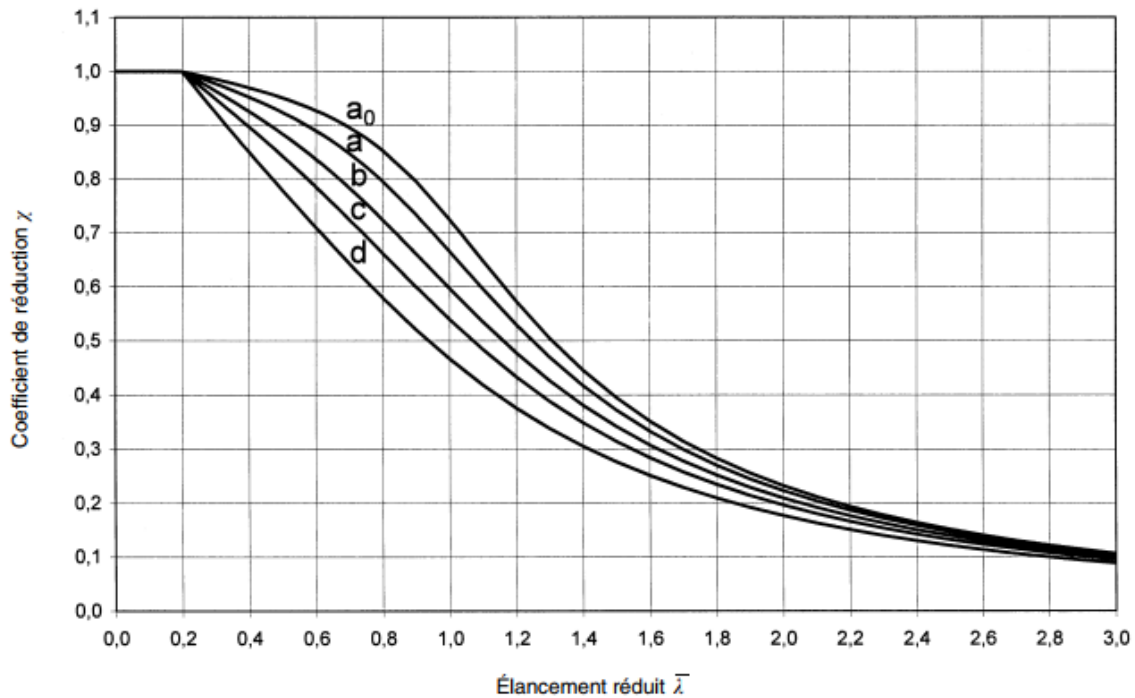


Figure 2-21 courbes de flambement [48]

### 2.9.2 Vérification du déversement des poutres maintenues

Les barres dont la semelle comprimée comporte des maintiens latéraux ponctuels ne sont pas sensibles au déversement si la longueur  $L_c$  entre ces maintiens, ou l'élancement résultant  $\bar{\lambda}_f$  de la semelle comprimée équivalente, satisfait la condition suivante :

$$\bar{\lambda}_f = \frac{K_c L_c}{i_{fz} \lambda_1} \leq \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{cRd}}{M_{yEd}} \quad \text{Eq. 2-25}$$

$K_c$  : est un facteur de correction de l'élancement prenant en compte la distribution des moments entre les maintiens, donnée dans le Tableau 6.6 de l'EN 1993-1-1 [48].

$i_{f,z}$ : est le rayon de giration par rapport à l'axe faible de la semelle comprimée équivalente composée de la semelle comprimée plus 1/3 de la partie comprimée de l'âme.

L'élançement limite  $\bar{\lambda}_{c0}$  peut être pris égal à  $\bar{\lambda}_{LT,0} + 0.1$  comme valeur sécuritaire. Dans le cas où la condition donnée en 2-25 n'est pas satisfaite, le moment résistant de calcul au déversement peut être pris égal à :

$$M_{b,Rd} = k_{fl} \chi W_y f_y / \gamma_{M1} \quad \text{Eq. 2-26}$$

- $k_{fl}$  est le facteur de modification prenant en compte le caractère plaçant du côté de la sécurité de la méthode de la semelle comprimée équivalente, pris généralement égal à 1.1
- $\chi$  est le coefficient de réduction pour la semelle comprimée équivalente déterminée avec  $\bar{\lambda}_f$

### 2.9.3 Maintiens latéraux continus

Lorsqu'une tôle à profil trapézoïdal conforme à l'EN 1993-1-3 [49] est fixée sur une poutre et si la condition (2-27) est satisfaite, la poutre peut être considérée comme maintenue latéralement dans le plan de la tôle au niveau des fixations.

$$S \geq \left( \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} + GJ + \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \frac{h^2}{4} \right) \frac{70}{h^2} \quad \text{Eq. 2-27}$$

$S$  ; est la rigidité de cisaillement (par unité de longueur de poutre) procurée par la tôle à la poutre, vis-à-vis de la déformation de celle-ci dans le plan de la tôle considérée fixée dans chaque nervure.

Si la tôle est fixée à la poutre par une nervure sur deux, il convient de remplacer  $S$  par  $0,20S$ . La vérification des éléments se fait de la même manière que celle donnée en 2.9.1, néanmoins le moment critique de référence s'écrit comme donné en 2-19.

Pour le cas général d'une barre symétrique par rapport à l'axe faible, et soumise à un moment variable :

$M_{cr} = C_m \cdot M_{cr0}$  pour les barres avec un diagramme de moment linéairement variable,

$M_{cr} = C_n \cdot M_{cr0}$  pour les barres avec un diagramme de moment non linéairement variable.

$C_m$  prend en compte la variation linéaire du moment. Sa valeur est donnée par l'expression BB.13 de l'Annexe BB de l'EN 1993-1-1 [48]. Il est recommandé que  $C_m \leq 2,7$ .

$C_n$  prend en compte la variation non linéaire du moment. Sa valeur est donnée par l'expression BB.14 de l'Annexe BB de l'EN 1993-1-1 [48]. Il est recommandé que  $C_n \leq 2,7$ .

## 2.10 Revue bibliographique

L'étude du problème de stabilité des poutres a toujours attiré l'attention des chercheurs. L.Prandtl et A.M.Michell [50, 51] ont étudié séparément, en 1899, le déversement d'une poutre à section rectangulaire. De nombreuses recherches ont été faites dans le but de décrire les équations d'équilibre des pièces élancées [19, 52, 53]. En 1921, A.Eggenschwyler [52] a montré que le centre de gravité n'est pas le seul point caractéristique de la section. S.P.Timoshenko [13] est le premier qui a tenu compte, dans ses recherches, de l'effet du gauchissement pour les profilés en I. H.Wagner [54] a étudié le flambement des profilés à section ouverte et à parois minces, en introduisant le concept de "gauchissement unitaire", de plus, il a supposé que lors du flambement, le centre de rotation coïncide avec le centre de cisaillement.

R.Kappus [53], quant à lui, a abouti à une théorie applicable à toutes les sections à parois minces, en utilisant le concept de H.Wagner, "gauchissement unitaire", et le théorème de stationnarité de l'énergie potentielle totale.

Jusqu'à ce jour des auteurs se sont distingués par leurs travaux dans le domaine des instabilités et précisément le déversement des poutres, où ils ont traité plusieurs aspects. Parmi ces auteurs, plusieurs chercheurs Algériens ont travaillé dans ce domaine. D.Kerdal [55, 56], dans les années 80, a présenté des travaux sur la stabilité au déversement des poutres ajourées. A.Khelil [18, 37] a étudié le déversement des poutres rigidement maintenues. F.Mohri, qui a édité, au début des années 2000, un article traitant du déversement des poutres en I sous chargements asymétriques [57, 58], a développé, par la suite, un modèle en éléments finis pour le calcul non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes [59, 60]. Ces travaux sont à l'origine de plusieurs autres apports dans le domaine en occurrence ceux de A.Benyamina [61]; M.Soltani [62, 63] ou plus récemment H.Achref [64]. D'autres

auteurs, comme F.Ammari [65] ou encore T.Belaid [66], se sont focalisé sur le déversement des poutres à treillis.

D'autres parts, des auteurs d'autres nationalités ont beaucoup apporté au domaine de l'instabilité des poutres comme N. S. Trahair qui a présenté la plus part de ces travaux sur les instabilités et particulièrement la stabilité au déversement des poutres. Il a commencé en 1970 par une étude théorique et expérimentale du problème d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge concentrée [67]. Parmi ses travaux les plus récents, on peut citer l'étude du déversement inélastique des poutres continues en 2019 [68] ou encore l'étude de la stabilité au déversement d'une poutre à section variable avec réduction progressive de la semelle en 2017 [69], dans laquelle il a fait une analyse par éléments finis en utilisant le programme LBTM.

Afin de situer notre travail par rapport aux avancées dans ce sujet, il nous semble intéressant de faire un petit bilan sur les principales investigations ce rapprochant du thème étudiée dans la présente thèse.

En 1984 ,N. Ings et N.S.Trahair [34] ont proposé une méthode approximative pour la détermination du moment critique de déversement des pannes de toiture en forme de U et Z maintenues latéralement pour des chargements gravitaires ou appliqués au niveau de la semelle supérieure. À l'aide d'un programme informatique, ils ont présenté des abaques qui donnent le coefficient  $C_1$  pour la détermination du moment critique de déversement élastique, ceci dit, le travail n'a pas abouti à une formule générale, mais à des étapes de calcul, pour la détermination de  $M_{cr}$ .

De la même équipe de travail, en 1997, M. A. Bradford [35, 36] a étudié à l'aide d'un model numérique, dans lequel les semelles sont maintenues en torsion, la stabilité au déversement d'une poutre mono symétrique. Il remarque que les charges de critique sont plus grandes lorsque c'est la petite semelle qui est maintenue. Une année plus tard, il étudie la stabilité au déversement des poutres avec maintien continu élastique au droit de la semelle tendue [70]. En comparant les résultats de son étude avec ceux obtenus en utilisant la méthode de calcul nommée « U Frame » proposée par le code Australien AS4100, il a conclu de cette dernière méthode était sécuritaire.

T.V.Galombos [16] a abordé le déversement des poutres maintenues latéralement en se basant sur les travaux de J.A.Yura [29] sur les maintiens en torsion, lequel a développé les différents aspects des maintiens latéraux et a proposé des méthodes de calcul de la rigidité des maintiens pour des cas courants.

B. Larue & A. Khelil[18] ont développé un modèle pour le déversement élastique des poutres en acier avec un maintien latéral rigide et continu. Deux expressions pratiques ont été proposées permettant l'obtention du moment critique de déversement pour ce cas précis. La même équipe de travail [37] a développé à partir de la cinématique une théorie générale de résolution numérique des équations différentielles gouvernantes de l'instabilité pour la stabilité au déversement des poutres maintenues au niveau de la semelle tendue. L'analyse utilise la méthode de Galerkin pour déterminer les charges critiques correspondantes aux chargements extérieurs. Ils retiennent que le maintien de la semelle tendue à une faible influence sur le moment critique de déversement.

C.T.Nguyen et al. [71] ont fait une étude du déversement des poutres en I maintenues discrètement en torsion et sous chargement de moment constant. Une formulation analytique du moment critique de déversement, qui tient compte les maintiens latéraux discrets, est proposée et comparée à des analyses par éléments finis. La comparaison montre que le modèle proposé donne des résultats satisfaisants. Dans un article complémentaire, C.T.Nguyen et al. [72] ont généralisé la solution analytique proposée dans (H.Lee et al. [30] ; C.T.Nguyen et al. [71]) pour différentes conditions de chargement. La comparaison de la formule généralisée avec des analyses par éléments finis, montre que le moment critique de déversement et la rigidité de torsion nécessaire sont en concordance. Les auteurs ont également examiné la résistance inélastique du déversement des poutres en I maintenu discrètement en torsion.

Basé sur une formulation analytique F.Mc-Cann [31] a proposé une formule de calcul du moment critique de déversement d'une poutre avec des maintiens discrets comme première étape, par la suite, il a étudié la rigidité de ces maintiens. Il a constaté que les codes de calcul sont trop conservateurs pour les cas où les maintiens sont positionnés au niveau de la semelle

comprimée de la poutre, mais non sécuritaires pour les dispositifs positionnés au centre de cisaillement [47, 73].

En utilisant la méthode des différences finies et celle des éléments finis, I.Balázs [40] a étudié une poutre bi symétrique avec maintien latéral continu au niveau de l'âme du profilé (dans la partie tendue) soumise à une charge uniformément répartie et appliquée au niveau de la semelle supérieure. En comparant les résultats de cette étude avec celle d'une poutre sans maintien, il a mis en évidence le gain en capacité de résistance vis à vis la stabilité au déversement, contrairement à ce qui a été conclu par B. Larue & A. Khelil[18].

E.Mohammadi [32] a étudié le déversement des poutres mono symétriques par rapport à leurs axes de faible inertie simplement appuyée et maintenue en torsion sous moment de flexion constant. Il a réalisé une étude analytique et une autre numérique à l'aide du programme LTBeamN. Dans ses études il s'est proposé d'étudier l'effet de la dissymétrie en faisant varier le rapport de largeur des deux semelles. Les résultats obtenus ont été comparé avec ceux trouvés par J.A.Yura [29].

Une étude expérimentale à échelle réelle et une autre basée sur la méthode des éléments finis, ont été menées par C.Mantha [74] afin d'étudier le phénomène de déversement et la résistance des systèmes de poutres bi symétriques à âme pleine disposant uniquement de barres de maintien en torsion.

W.F. Zang[75] a étudié le déversement d'une console à section bi symétrique avec un maintien latéral en déplacement ponctuel (discret) sous charge uniforme et concentrée, pour cela il a établi les équations d'énergie potentielle totale pour et propose la formule du moment critique adimensionnel par la méthode d'énergie variationnelle. La formule adimensionnelle proposée prend en compte la variation de la position de la charge; Les mêmes outils mathématiques on permit d'écrire une équation adimensionnelle du moment critique de déversement pour une poutre sur trois appuis avec maintien élastique en déplacement soumise à une charge uniformément répartie [39] ,

Une étude similaire à celle effectuée par N.Ings and N.S.Trahair [34], a été faite [76] en faisant appel à deux théories : la première traditionnelle et l'autre nommée par l'auteur « Tong and Zhang's theory ». Afin d'examiner les résultats de ces deux théories, un modèle

en éléments finis a été développé avec des éléments plaques en adoptant une technique spéciale pour interdire les déformations de distorsion. Les comparaisons et les discussions ont montré que les résultats basés sur la théorie de Tong et Zhang sont en très bon accord avec les résultats de la MEF, tandis que des différences évidentes ont pu être observées entre les résultats basés sur la théorie classique de flambement et ceux de la MEF.

J.S.Lei [42], a présenté un modèle analytique pour l'analyse de la combinaison entre le voilement de l'âme et le déversement des poutres à section en I partiellement maintenues soumises à une charge de transversale. Il a conclu que les maintiens latéraux de déplacement et de rotation appliqués à la semelle tendue d'une poutre à section en I peuvent augmenter considérablement la charge critique de la poutre, en particulier pour les poutres de grandes portées. Ceci est en accord avec les résultats de I.Balázs [40].

A aucun moment les différents auteurs n'ont pris en compte l'influence de la position de la charge et de la variation de la rigidité du maintien pour des poutres maintenues latéralement au niveau de la semelle tendue. De ce fait, nous proposons dans le cadre de ce travail d'écrire une expression analytique qui nous permettra d'évaluer le moment critique de déversement d'une poutre partiellement ou totalement maintenue latéralement avec prise en compte de l'effet de la position de la charge.

## 2.11 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en exergue les différents aspects du déversement des poutres métalliques, ceci par un historique du traitement du phénomène, en passant par l'évolution des formules du moment critique, ainsi que l'aspect réglementaire du problème ; ceci à l'aide d'une revue de littérature approfondie, permettant d'éclaircir l'origine du phénomène ainsi que sa compréhension.

Cette conclusion synthétise les observations tirées de la revue de la littérature et met en perspective les besoins en recherche avec les axes principaux de recherche de la thèse. La situation normative sur le déversement fait ressortir un certain nombre de points qui nécessitent des investigations dans les domaines suivants :

- Le coefficient  $C_1$  (ou  $C_b$ ) ne fait pas l'unanimité entre les différentes réglementations, ce paramètre joue un rôle très important dans la détermination du moment critique et donc sur la résistance au déversement de la poutre. Ce point sera étudié et détaillé dans le chapitre 4 dans lequel nous proposerons une expression du coefficient  $C_1$  simple et qui donne des résultats similaires à ceux donnés dans le tableau proposé par le code algérien.
- Les maintiens en translation jouent également un rôle non négligeable dans la résistance au déversement. Dans le cas où ils sont discrets, nous nous sommes aperçus que la rigidité requise pour le maintien d'une poutre est proposée dans la littérature sous différentes formes aboutissant à différentes valeurs. Au chapitre 5, Un développement analytique de l'expression du moment critique de déversement d'une poutre maintenue à mi travée, nous permettra d'éclaircir ce point, et aussi de faire une analyse de l'influence du mode de chargement ainsi que sa position pour trois positions du maintien.
- D'une part, le maintien continu de la semelle tendue n'a pas abouti à une formule explicite, sauf pour le cas d'une poutre soumise à un moment constant, d'autre part deux propositions du coefficient pour le cas du chargement reparti ont été trouvés sans tenir compte de la possible variation de la position de la charge. Dans le Chapitre 6, nous nous sommes fixé comme objectif l'étude d'une poutre maintenue au droit de la semelle tendue par un maintien rigide en première lieu, puis par un maintien élastique en second lieu. Une formule de l'expression du moment critique sera développée pour les deux cas, par la suite, l'effet de la position de la charge sera analysé.

Tous les développements analytiques, qui seront utilisés dans le présent travail, sont formulés sur la base d'hypothèses, et de méthodes de résolution qui feront l'objet du chapitre suivant (Chapitre 3 : étude d'un élément à parois minces).

### 3 ÉTUDE D'UN ÉLÉMENT À PAROIS MINCES

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons développer à partir de la cinématique, les déplacements ainsi que les déformations d'un point matériel, lesquels nous permettrons de formuler les potentiels énergétiques pour chaque cas de charge. A l'aide de la formulation de Lagrange nous allons mettre ces potentiels sous la forme d'équations différentielles appelées équations d'équilibres.

### 3.2 Cinématique

Pour décrire le mouvement d'un corps, on est amené à définir un certain nombre de configurations dans lesquelles il peut se trouver. On considère un élément à parois minces et à section ouverte dans un repère 3D. Les axes  $y$  et  $z$  sont les axes principaux d'inertie.

On repère le centre de torsion par ses coordonnées  $C(y_c; z_c)$ . On définit aussi sur le contour un point  $M$  par ses coordonnées  $y, z$  et  $\omega$  où  $\omega$  est la coordonnée sectorielle qui définit le gauchissement de la section en ce point.

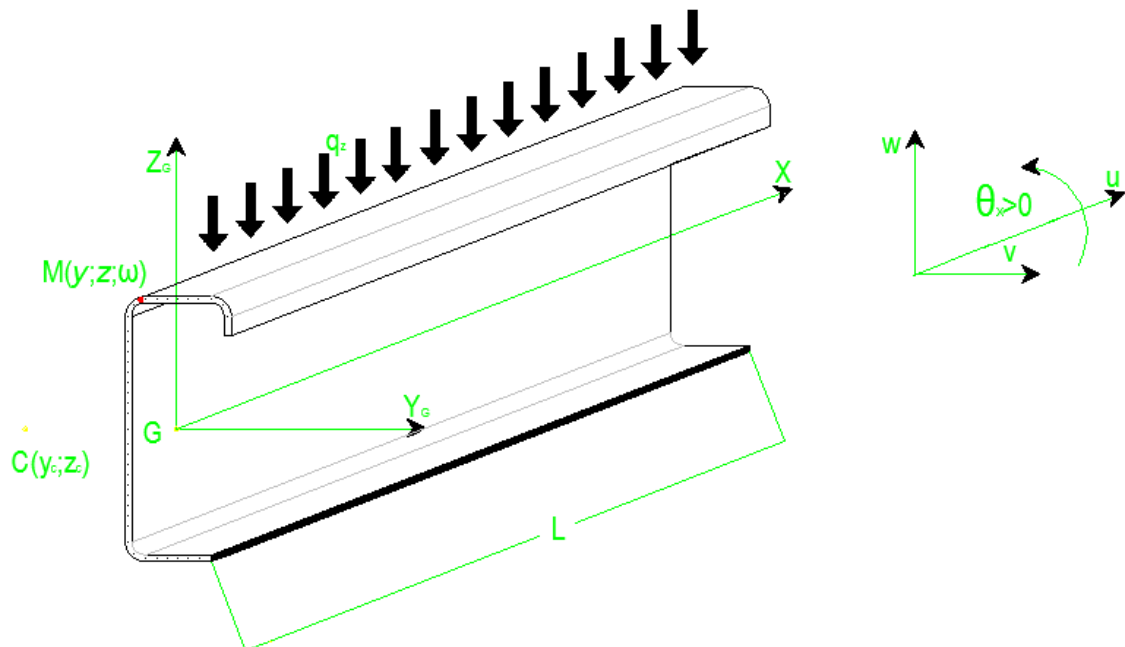


Figure 3-1 Schématisation d'un élément à parois minces dans un repère cartésien

### 3.2.1 Déplacements

Considérons une pièce longue prismatique à parois minces; un rôle important dans cette théorie (théorie des surfaces sectorielles) est joué par la surface moyenne de la paroi, c'est-à-dire, la surface passant par les milieux des épaisseurs de plaques constituant la pièce allongée en parois minces. Cette surface peut être engendrée par des droites parallèles à l'axe longitudinal de la pièce, appelées génératrices de la surface moyenne.

Supposons le point  $C(y_c; z_c)$  comme centre de la rotation de la section transversale (centre de torsion) ayant les déplacements  $u(x); v(x); w(x)$  dans le système de coordonnées  $Gyzx$  à la distance  $x$  de l'origine, notés  $u; v; w$ . En se reportant au système de coordonnées cartésiennes défini (figure 3-1) et vue la déformée de la pièce due à un état de chargement arbitraire, on a au point  $M$  les déplacements  $u_M; v_M; w_M$ , et la rotation  $\theta_x$  de la section. Le déplacement

suisant l'axe  $(O\bar{x})$  dû au gauchissement de la section sera égal à  $\omega \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$ ; où  $\omega$  est l'aire sectorielle principale du pôle  $C$ .

En utilisant le modèle de Vlassov [10] et en adoptant les hypothèses suivantes :

- Les distorsions de sections dues à l'effort tranchant sont négligées ;
- On se place dans le domaine des petites rotations  $\theta_x^2 = 0$  ;

Les déplacements peuvent être exprimés en fonction de ceux du centre de torsion  $C$  (notés  $u; v; w$  et  $\theta_x$ ) par les équations suivantes [32, 59] :

$$\begin{aligned} u_M &= u - y \frac{\partial w}{\partial x} - z \frac{\partial v}{\partial x} - \omega \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ v_M &= v - (z - z_c) \theta_x \\ w_M &= w - (y - y_c) \theta_x \end{aligned} \quad \text{Eq. 3-1}$$

### 3.2.2 Déformations

Dans le contexte de stabilité des poutres à parois minces, il est indispensable que les composants du tenseur de déformation soient divisés en une partie linéaire et un autre non linéaire (tenseur de déformation de Green).

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} \quad \text{Eq. 3-2}$$

L'écriture du système de déformations sous la forme de l'équation (3-2), a été proposée par Green-Lagrange [77].

Les déformations s'écrivent de la manière suivante [59, 60, 77] :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_M}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v_M}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_M}{\partial x} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. 3-3}$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \left( z - z_c + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \text{Eq. 3-4}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( y - y_c + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \text{Eq. 3-5}$$

En substituant les équations (3-1) dans l'équation (3-3), et après développement, nous obtenons la déformation écrite sous la forme décrite à l'équation (3-2):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \omega \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2}}^{\text{Lineaire}} \\ & + \overbrace{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + R^2 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right] + (y - y_c) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - (z - z_c) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x}}^{\text{Non-Lineaire}} \end{aligned} \quad \text{Eq3-6}$$

$$\text{Avec : } R^2 = (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \quad \text{Eq3-7}$$

L'équation (3-6) nous permet d'écrire la partie linéaire et non linéaire de la déformation comme suit :

$$\varepsilon_L = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \omega \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \quad \text{Eq. 3-8}$$

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + R^2 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right] + (y - y_c) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - (z - z_c) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \text{Eq. 3-9}$$

Dans ce développement, nous considérons les déformations semi-linéaires en fonction des déplacements. Cette approche est justifiée par le fait que les éléments métalliques composant une structure (poutres, poteaux) sont constitués de parois minces ayant un rapport t/h faible, donc dans le domaine élastique nous pouvons facilement négliger certains termes non linéaires qui sont plus petits par rapport aux autres dans les équations des déformations [78].

### 3.3 Formulation du potentiel

Afin de ne pas encombrer les équations, on va remplacer la notation  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  par  $f'$  et la notation  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$  par  $f''$ .

#### 3.3.1 Énergie

L'énergie de torsion est donnée par l'expression :

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon^2_{xx} dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta_x')^2 dx \quad \text{Eq. 3-10}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E(\varepsilon_L^2 + 2\varepsilon_L \varepsilon_{NL} + \varepsilon_{NL}^2) dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta_x')^2 dx \quad \text{Eq. 3-11}$$

Le développement de la formule de l'énergie de torsion, en considérant la contribution du terme  $\varepsilon_{NL}^2$  négligeable [65, 77, 79], nous permettra d'écrire l'énergie totale comme étant la somme de deux parties l'une linéaire et l'autre non linéaire :

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_L^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta_x')^2 dx + \int_L \int_A E \varepsilon_L \varepsilon_{NL} dA dx = U_L + U_{NL} \quad \text{Eq. 3-12}$$

$$U_L = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_L^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta_x')^2 dx \quad \text{Eq. 3-13}$$

$$U_{NL} = \int_L \int_A E \varepsilon_L \varepsilon_{NL} dA dx \quad \text{Eq. 3-14}$$

On sait que les caractéristiques géométriques de la section sont :

$$A = \int_A dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_\omega = \int_A \omega^2 dA$$

On sait, également, que les efforts internes au niveau de la section sont :

$$N = \int_A E \varepsilon_L dA = EAu'; \quad M_y = \int_A E \varepsilon_L z dA = -EI_y w''; \quad M_z = -\int_A E \varepsilon_L y dA = EI_z v''; \\ B_\omega = -\int_A E \varepsilon_L \omega dA = EI_\omega \theta_x''$$

En utilisant l'équation (3-8) dans (3-13) et les équations (3-8 et 3-9) dans l'équation (3-14), on aura :

$$U_L = \frac{1}{2} \int_L (EA(u')^2 + EI_z(v'')^2 + EI_y(w'')^2 + EI_\omega(\theta'_x)^2) dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta'_x)^2 dx. \quad \text{Eq. 3-15}$$

et :

$$U_{NL} = U_{NL}(N) + U_{NL}(M_y) + U_{NL}(M_z) + U_{NL}(B_\omega) \quad \text{Eq. 3-16}$$

avec :

$$U_{NL}(N) = \int_L N \left( \frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{I_0}{2} \theta_x'^2 + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) dx$$

$$U_{NL}(M_y) = \int_L M_y (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x) dx$$

$$U_{NL}(M_z) = - \int_L M_z (\beta_y \theta_x'^2 + w'' \theta_x) dx$$

$$U_{NL}(B_\omega) = - \int_L \beta_\omega \theta_x'^2 dx$$

Les coefficients  $\beta_y; \beta_z; \beta_\omega$  sont les constantes de WARNER et  $I_0$  est le moment d'inertie polaire par unité de surface. Ils ont pour expressions :

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z} \int_S y(y^2 + z^2) dS - y_c \quad ; \quad \beta_z = \frac{1}{2I_y} \int_S z(y^2 + z^2) dS - z_c \quad ; \quad \beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega} \int_S \omega(y^2 + z^2) dS$$

$$I_0 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_c^2 + z_c^2$$

La combinaison de  $U_L$  et  $U_{NL}$  peut être utilisée pour toutes les sections minces ouvertes.

Dans la stabilité au flambement on prend uniquement les efforts uni axiaux [59] c'est à dire :

$$N \neq 0 \text{ et } M_y = M_z = B_\omega = 0$$

donc :

$$U = U_L + U_{NL}(N)$$

Pour un flambement dû uniquement à la flexion on a :

$$M_y \neq 0, \text{ et } N = M_z = B_\omega = 0$$

donc :

$$U = U_L + U_{NL}(M_y)$$

### 3.3.2 Formulation du potentiel

Soit une poutre en acier à section transversale ouverte sollicitée avec une charge répartie  $q_z$  dans le sens négative de l'axe Z. Cette charge est appliquée au-dessus de la section au niveau de points de coordonnées  $(y_Q; z_Q)$ , comme indiqué sur la figure (3-1).

Le travail dû aux charges extérieures W et l'énergie totale U sont formulés comme suit :

$$W_q = \int \delta W_q = \int_L q_z w dx + \int_L (y_Q - y_c) q_z \theta_x dx - \int_L \frac{1}{2} (z_Q - z_c) q_z \theta_x^2 dx. \quad \text{Eq. 3-17}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x) \right] dx \quad \text{Eq. 3-18}$$

On définit le potentiel total  $\Pi$  comme étant :

$$\Pi = U - W$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x) \right] dx - \text{Eq. 3-19}$$

$$\int_L q_z w dx - \int_L (y_Q - y_c) q_z \theta_x dx + \int_L \frac{1}{2} (z_Q - z_c) q_z \theta_x^2 dx$$

Pour des sections bi-symétriques  $\beta_z = 0$  [13], et lorsque le chargement est appliqué sur l'axe de flexion, on a  $(e_y = y_Q - y_c = 0)$  (cas d'une flexion simple). Nous pouvons écrire le potentiel sous la forme de  $\Pi = \Pi_f + \Pi_b$  où  $\Pi_f$  est le potentiel de flexion simple et  $\Pi_b$  est le potentiel provoquant l'instabilité. En prenant  $(e_z = z_Q - z_c)$ , on obtient :

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int_L \left[ EI_y (w'')^2 \right] dx - \int_L q_z w dx}_{\Pi_f} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (v'' \theta_x) \right] dx + \int_L \frac{1}{2} e_z q_z \theta_x^2 dx}_{\Pi_b} \quad \text{Eq. 3-20}$$

Nous allons définir les potentiels d'une poutre bi symétrique, soumise à un chargement extérieur de flexion comme suit :

- Poutre simplement appuyée soumise à un moment d'extrémité

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z (v'')^2 + GJ(\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (v'' \theta_x') \right] dx \quad \text{Eq. 3-21}$$

- Poutre simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z (v'')^2 + GJ(\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (v'' \theta_x') \right] dx + \int \frac{1}{2} e_z q_z \theta_x^2 dx \quad \text{Eq. 3-22}$$

- Poutre simplement appuyée soumise à une charge Concentrée à mi travée

Il suffit juste de remplacer le travail extérieur d'une charge uniformément répartie

(  $\int \frac{1}{2} e_z q_z \theta_x^2 dx$  ) par (  $\frac{1}{2} e_z P_z \theta_x^2 \Big|_{x=L/2}$  ) où  $P_z$  est la charge concentrée. On obtient :

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z (v'')^2 + GJ(\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (v'' \theta_x') \right] dx + \frac{1}{2} e_z P_z \theta_x^2 \Big|_{x=L/2} \quad \text{Eq. 3-23}$$

Poutre en console soumise à un moment d'extrémité

N.S.Trahair [12] a rajouté un travail additionnel afin de prendre en compte le gauchissement de l'extrémité libre et définie le potentiel comme suit :

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z (v'')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + GJ(\theta_x')^2 + 2M_y v'' \theta_x' \right] dx + \underbrace{Mv_L' \theta_L}_{addW} \quad \text{Eq. 3-24}$$

Zhang et al [75] ont défini le potentiel, de ce cas, comme suit :

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z (v'')^2 + GJ(\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (v' \theta_x') \right] dx \quad \text{Eq. 3-25}$$

Les deux expressions mènent à des résultats similaires.

Poutre en console soumise à une charge uniformément répartie

Dans ce cas, l'effort tranchant à l'extrémité libre est nul, l'équation (3-19) est donc valable, alors que la théorie de Lu [80] mènera à une solution différente.

Poutre en console soumise à une charge Concentrée

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z (v'')^2 + GJ(\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (v'' \theta_x') \right] dx + \frac{1}{2} e_z P_z \theta_x^2 \Big|_{x=L} \quad \text{Eq. 3-26}$$

**3.4 Équations d'Équilibre**

Les équations d'équilibre sont disponibles dans la littérature [15, 17, 22, 32, 44, 65]. Dans cette partie nous allons les déterminer en utilisant l'équation d'Euler, et cela pour le cas d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie, à partir de l'équation (3-19).

**3.4.1 Équation d'Euler-Lagrange**

L'équation (ou condition) d'Euler, aussi appelée d'Euler-Lagrange, énonce, sous la forme d'une équation différentielle, une condition nécessaire d'extremum d'une fonctionnelle, (fonction de fonctions), régissant le phénomène étudié. Si le problème revient à étudier les variations d'une fonction  $g(\xi)$  de la variable  $x$  sur un intervalle  $[x_0, x_1]$ , on est généralement conduit à minimiser (ou maximiser selon le phénomène étudié) une intégrale, appelée fonctionnelle, de la forme :

$$\Pi = \int_{x_0}^{x_1} f(\xi, g(\xi), g^I(\xi), g^{II}(\xi), \dots, g^n(\xi)) dx \cdot \tag{Eq. 3-27}$$

Lorsque  $\Pi$  est extremum, les fonctions  $g^i(\xi)$  vérifient la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial g^i} \right] = 0 \tag{Eq. 3-28}$$

**3.4.2 Équations différentielles d'équilibre**

En utilisant les équations (3-19) dans l'équation (3-28), on aura les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial w^I} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial w^{II}} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w} &= -q_z \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial w^I} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial w^{II}} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(EI_y w'')] = EI_y w^{(4)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow EI_y w^{(4)} - q_z = 0 \tag{Eq. 3-29}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial v'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial v''} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial v'} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial v''} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_z v'' + M_y \theta_x] = EI_z v^{(4)} + M_y \theta_x'' \end{aligned} \right\} \Rightarrow EI_z v^{(4)} + (M_y \theta_x)'' = 0 \quad \text{Eq. 3-30}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x''} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} &= [M_y v''] + e_z q_z \theta_x \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x'} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} [GJ(\theta_x') + 2M_y(\beta_z \theta_x')] = GJ(\theta_x'') + [2M_y(\beta_z \theta_x')] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x''} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_\omega (\theta_x'')] = EI_\omega (\theta_x^{(4)}) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow EI_\omega (\theta_x^{(4)}) - [GJ(\theta_x'') + (2M_y \beta_z \theta_x')] + [M_y v''] + e_z q_z \theta_x = 0 \quad \text{Eq. 3-31}$$

L'équation (3-30) devient :

$$EI_z v'' = -(M_y \theta_x) \Rightarrow v'' = \frac{-(M_y \theta_x)}{EI_z}$$

Ce qui fait que l'équation (3-31) s'écrit donc :

$$EI_\omega \theta_x^{(4)} - (GJ - 2M_y \beta_z) \theta_x'' - 2\beta_z M_y' \theta_x' - \left( \frac{M_y^2}{EI_z} - e_z q_z \right) \theta_x = 0 \quad \text{Eq. 3-32}$$

La résolution de cette équation différentielle du 4<sup>ème</sup> ordre nous permet d'obtenir l'expression du moment critique de déversement.

Dans le cas général, l'obtention d'une solution exacte n'est pas possible, de ce fait, nous allons faire appel à des méthodes de résolution approchées.

### 3.5 Conclusion

A partir de la cinématique d'un point, nous avons développé les potentiels énergétiques d'une poutre en fonction de son chargement extérieur, ainsi que les équations d'équilibres d'une poutre soumise à une charge répartie. Les résultats obtenus permettront, à l'aide des méthodes de résolutions, d'obtenir des expressions du moment critique de déversement pour chaque cas.

## 4 DÉVERSEMENT DES POUTRES NON MAINTENUES

#### 4.1 Introduction

Comme indiqué précédemment dans le chapitre 2, la détermination du moment critique d'une poutre sur appuis en fourche soumise à deux moments d'extrémité égaux possède une solution exacte, néanmoins, lorsque le chargement change de forme, la solution exacte n'existe pas, on fait appel dans ce cas à des méthodes de résolutions numériques.

Dans ce chapitre, nous procédons à la détermination d'une expression générale du moment critique de déversement d'une poutre bi symétrique sur la base des expressions démontrées et décrites dans le chapitre précédant. L'utilisation des méthodes de résolution de Ritz et Galerkin nous permettront de déterminer les coefficients relatifs à chaque cas de charges. Par la suite, des modélisations numériques à l'aide du logiciel LTBeamN seront présentées. Les résultats obtenus seront discutés et comparés à ceux trouvés dans la littérature.

#### 4.2 Détermination de l'expression du moment critique de Déversement

Par le biais des méthodes décrites précédemment, nous allons écrire l'expression du moment critique de déversement élastique d'une poutre bi articulée et cela pour des cas de charges courants à savoir :

- Moment linéairement variable où nous allons utiliser deux méthodes de résolution.
- Charge concentrée appliquée à mi- travée où nous allons utiliser la méthode de Ritz.
- Charge répartie le long de la poutre où nous allons utiliser la méthode de Galerkin.

La résolution par des méthodes approchées nécessite la proposition d'une solution à l'équation qui satisfait les conditions aux limites.

Pour tous les cas de charges, la solution sera de type sinusoïdale du 1er ordre à savoir (  $a \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$  ). Cette solution (solution approximative) a été utilisée par plusieurs auteurs et discutée par N.S.Trahair [81] par rapport à celle prise par S.P.Timoshenko qui donnent des résultats sont très satisfaisants.

Par la suite, une comparaison des différents coefficients sera effectuée, la comparaison avec des résultats numériques sera faite sur la base d'un exemple de poutre avec différents chargements.

#### 4.2.1 Cas d'un moment linéairement variable

##### 4.2.1.1 Résolution par la méthode de Galerkin

Dans le cas d'une poutre sur appuis en fourches soumise à des moments d'extrémité, on a  $e_y = e_z = q_z = 0$ . L'équation (3-32) donnée dans le chapitre 3 devint donc :

$$EI_{\omega} \theta_x^{(4)} - (GJ - 2M_y \beta_z) \theta_x'' - 2\beta_z M_y' \theta_x' - \left(\frac{M_y^2}{EI_z}\right) \theta_x = 0 \quad \text{Eq.4-1}$$

La variation du moment suivant l'axe x suit la fonction linéaire suivante :

$$M_y(x) = M_0 \left[ (\Psi - 1) \frac{x}{l} + 1 \right] \quad \text{Eq.4-2}$$

avec :

- $M_0$  : la valeur maximale du moment à l'extrémité.
- $\Psi$  : le coefficient multiplicateur du moment ( $-1 \leq \Psi \leq 1$ ).

Soit  $\theta_x$  la solution de l'équation 4-1. La solution qui satisfait les conditions aux limites (poutre reposant sur des appuis en fourches) est :

$$\theta_x = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad \text{Eq.4-3}$$

En dérivant la solution proposée et en remplaçant  $\theta_x$  par la solution proposée (4-3) dans la formule 4-1, nous obtenons l'équation 4-4 suivante :

$$\begin{aligned} & \theta_0 \int_0^L \left( EI_{\omega} \frac{\pi^4}{L^4} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx + \theta_0 \int_0^L \left( (GJ - 2\beta_z M_y) \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx + \\ & \theta_0 \int_0^L \left( 2\beta_z M_0 \left[ \frac{(\Psi - 1)}{l} \right] \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx - \theta_0 \int_0^L \left( \frac{M_y^2}{EI_z} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq.4-4}$$

Vue la complexité de cette équation un changement de variables doit être effectué pour nous permettre de trouver la solution. Nous effectuons donc le changement qui est mentionné dans les équations (4-5) données ci-après.

$$\xi = \frac{x}{L} \rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \rightarrow \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$$

$$M_{\max} = \max_{0 \leq x \leq L} M(x)$$

$$m = \frac{M(x)}{M_{\max}} \Rightarrow M(x) = m.M_{\max}$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{M_{\max}} \frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{M_{\max}} \tag{Eq.4-5}$$

$$= \frac{dm}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dm}{d\xi} \equiv \frac{1}{L} m'$$

$$\frac{d^2m}{dx^2} = \frac{1}{M_{\max}} \frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{q(x)}{M_{\max}}$$

$$= \frac{d}{dx} \left( \frac{dm}{dx} \right) = \frac{1}{L^2} \frac{d^2m}{d\xi^2} \equiv \frac{1}{L} m''$$

Des équations précédentes, on peut écrire :

$$-\frac{q(x)}{M_{\max}} = \frac{1}{L} m'' \Rightarrow q(x) = -\frac{M_{\max}}{L} m''$$

En effectuant les changements de variables donnés ci-dessus dans l'équation 4-4 on trouve :

$$\int_0^1 \left( EI_{\omega} \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \pi \xi \right) \frac{1}{L} d\xi + \int_0^1 \left( (GJ - 2\beta_z m.M_{\max}) \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi \right) \frac{1}{L} d\xi + \int_0^1 \left( 2\beta_z \frac{1}{L} m'.M_{\max} \frac{\pi}{L} \cos \pi \xi \right) \sin \pi \xi \frac{1}{L} d\xi - \int_0^1 \left( \frac{m.M_{\max}^2}{EI_z} \sin^2 \pi \xi \right) \frac{1}{L} d\xi = 0 \tag{Eq.4-6}$$

Après une série de modifications et en posant :

$$Q_a = \int_0^1 m.^2 (\sin^2 \pi \xi) d\xi \tag{a}$$

$$Q_b = -\int_0^1 (m.) \pi \sin^2 \pi \xi d\xi \tag{b} \tag{Eq.4-7}$$

$$Q_c = \int_0^1 (m.' \cos \pi \xi) \sin \pi \xi d\xi \tag{c}$$

nous obtenons :

$$\left(\frac{Q_a}{EI_z}\right)M_{\max}^2 - 2\beta_z \frac{\pi}{L^2}(Q_b + Q_c)M_{\max} - \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{1}{2} \left[ (GJ) + EI_{\omega} \frac{\pi^2}{L^2} \right] = 0 \quad \text{Eq.4-8}$$

C'est une équation du second ordre dont la solution est :

$$M_{cr} = \frac{2\beta_z \frac{\pi}{L^2}(Q_b + Q_c) \pm \sqrt{\left(2\beta_z \frac{\pi}{L^2}(Q_b + Q_c)\right)^2 + 2\left(\frac{Q_a}{EI_z}\right) \frac{\pi^2}{L^2} \left[ (GJ) + EI_{\omega} \frac{\pi^2}{L^2} \right]}}{2\left(\frac{Q_a}{EI_z}\right)} \quad \text{Eq.4-9}$$

Sous une expression plus ordonnée, on obtient :

$$M_{cr} = \frac{1}{2\sqrt{Q_a}} \left\{ EI_z \left( 2\beta_z \frac{\pi}{L^2} \frac{Q_b + Q_c}{\sqrt{Q_a}} \right) \pm EI_z \sqrt{\left( 2\beta_z \frac{\pi}{L^2} \frac{Q_b + Q_c}{\sqrt{Q_a}} \right)^2 + 2 \frac{1}{EI_z} \frac{\pi^2}{L^2} \left[ GJ + EI_{\omega} \frac{\pi^2}{L^2} \right]} \right\} \quad \text{Eq.4-10}$$

Pour nous mettre en harmonie avec les écritures l'Eurocode 3, on pose :

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2Q_a}} \quad \text{Eq.4-11}$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{Q_b + Q_c}{\sqrt{Q_a}} \quad \text{Eq.4-12}$$

$$M_{cr} = C_1 \frac{EI_z \pi^2}{L^2} \left\{ \beta_z C_3 \pm \sqrt{\beta_z^2 C_3^2 + \left[ \frac{I_{\omega}}{I_z} + \frac{GJL^2}{EI_z \pi^2} \right]} \right\} \quad \text{Eq.4-13}$$

#### 4.2.1.2 Résolution par la méthode de Ritz

A partir du potentiel donné à l'équation 3-21, et pour une variation du moment fléchissant

telle que  $M_y(x) = M_0 \left[ (\Psi - 1) \frac{x}{l} + 1 \right]$ , les solutions adoptées, et qui satisfont les conditions

aux limites, sont :

$$v(x) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{(a)}$$

$$\theta(x) = \theta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{(b) Eq.4-14}$$

avec  $v(0) = v''(0) = 0$   
 $\theta(0) = \theta''(0) = 0$

En remplaçant les expressions du déplacement  $v(x)$  et celui de la rotation  $\theta(x)$ , et après intégration, le potentiel  $\Pi_b$  d'une poutre soumise à un moment linéairement variable s'exprime sous la forme de l'équation 4-15 ci-dessous.

$$\Pi_b = EI_z \frac{\pi^4}{4L^3} v_0^2 + \left( \frac{EI_\omega \pi^4 + GJL^2 \pi^2}{4L^3} \right) \theta_0^2 - M_0 \left[ \frac{\pi^2(\psi + 1)}{4L} \right] v_0 \theta_0 \quad \text{Eq.4-15}$$

Ce qui nous mène à la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{EI_\omega \pi^4 + GJL^2 \pi^2}{2L^3} \right) & -M_0 \left[ \frac{\pi^2(\psi + 1)}{4L} \right] \\ -M_0 \left[ \frac{\pi^2(\psi + 1)}{4L} \right] & \left[ EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{Eq.4-16}$$

La solution n'est autre l'expression du moment critique et qui a pour valeur :

$$M_0 = \frac{2}{\psi + 1} EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_z}}$$

Cette solution reste approchée, car elle est valable pour un moment constant, mais elle donne des valeurs loin de celles obtenues par l'Eurocode pour des chargements dissymétriques.

#### 4.2.2 Poutre avec charge Concentrée à mi travée traitée par la méthode de Ritz

Les mêmes étapes de résolutions nous permettent d'écrire le système d'équation pour une poutre bi articulée soumise à une charge concentrée à partir du potentiel donné à l'équation

(3-23). La variation du moment de flexion s'écrit par l'expression :  $M(x) = \frac{P_z}{2} x ; 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ .

Les fonctions adoptées pour les solutions du déplacement latéral et de la rotation sont les mêmes que celles citées précédemment, c'est-à-dire  $v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{L}$  et  $\theta(x) = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ .

La substitution des solutions et l'adoption de la théorie du minimum d'énergie potentielle totale ( $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_0} = \frac{\partial \Pi}{\partial v_0} = 0$ ) nous mène à la résolution du système d'équations (4-17) suivant :

$$\begin{bmatrix} \left[ EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} \right] & - \left[ \frac{P_z}{2} \left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ - \left[ \frac{P_z}{2} \left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) \right] & \left[ EI_\omega \frac{\pi^4}{2L^3} + GJ \frac{\pi^2}{2L} + P_z e_z \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{Eq. 4-17}$$

L'annulation du déterminant de la matrice donnée dans l'expression (4-17) nous donne la charge critique. Sachant que le moment est maximum au droit de l'application de la charge (mi-travée) nous remplaçons donc les termes  $(P_z \frac{L}{4})$  par  $M_{cr}^P$  pour obtenir l'expression du moment critique suivante :

$$M_{cr}^P = C_1 EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ [-C_2 e_z] + \sqrt{[-C_2 e_z]^2 + \left[ \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{EI_z \pi^2} \right]} \right\} \quad \text{Eq. 4-18}$$

$$\text{avec : } C_1 = \frac{1}{\left[ \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) \right]}; \quad C_2 = \frac{1}{\left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right)}$$

### 4.2.3 Poutre soumise à une charge uniforme traitée par la méthode de Galerkin

Tout en gardant la même procédure de résolution, la même solution proposée  $\theta_x = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$  et les mêmes changements de variables données dans les équations (4-5), nous procédons à la résolution de l'équation 3-32 qui devient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 EI_\omega \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \pi \xi . d\xi + \int_0^1 (GJ \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi) . d\xi - \int_0^1 (2\beta_z m . M_{\max}) \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi . d\xi \\ & + \int_0^1 2\beta_z \frac{1}{L} m' . M_{\max} \frac{\pi}{L} \cos \pi \xi \sin \pi \xi . d\xi - \int_0^1 \left( \frac{m^2 . M_{\max}^2}{EI_z} - e_z \frac{M_{\max}}{L^2} m'' \right) \sin^2 \pi \xi . d\xi = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq.4-19}$$

Après une série de transformations, et en adoptant les constantes  $Q_a$ ,  $Q_b$  et  $Q_c$  qui sont déjà données dans les équations (4-7), et en ajoutant la constante  $Q_d$ , laquelle prendra en compte l'effet de la position de la charge et dont la valeur est :

$$Q_d = \int_0^1 (m'') \sin^2 \pi \xi . d\xi \quad \text{Eq.4-20}$$

L'équation 4-19 peut s'écrire sous la forme d'une équation du second ordre comme formulé dans l'équation ci-dessous :

$$-\frac{1}{2}(EI_{\omega} \frac{\pi^4}{L^4} + (GJ \frac{\pi^2}{L^2})) - \left[ 2\beta_z \frac{\pi}{L^2} Q_c + (2\beta_z) \frac{\pi}{L^2} Q_b + e_z \frac{1}{L^2} Q_d \right] M_{\max} + \left[ \left( \frac{1}{EI_z} \right) Q_a \right] M_{\max}^2 = 0 \quad \text{Eq.4-21}$$

La solution de l'équation 4.33 est :

$$M_{cr} = \frac{\frac{1}{L^2} [2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b + e_z Q_d] \pm \frac{1}{L^2} \sqrt{[2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b + e_z Q_d]^2 + 2\pi^2 \left[ \left( \frac{1}{EI_z} \right) Q_a \right] (EI_{\omega} \pi^2 + L^2(GJ))}}{2 \left[ \left( \frac{1}{EI_z} \right) Q_a \right]} \quad \text{Eq.4-22}$$

Ou bien :

$$M_{cr} = \frac{\frac{1}{L^2} \frac{[2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b + e_z Q_d]}{\sqrt{Q_a}} \pm \frac{1}{L^2} \sqrt{\left[ \frac{[2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b + e_z Q_d]}{\sqrt{Q_a}} \right]^2 + 2\pi^2 \left[ \left( \frac{1}{EI_z} \right) \right] (EI_{\omega} \pi^2 + L^2(GJ))}}{2 \left[ \left( \frac{1}{EI_z} \right) \sqrt{Q_a} \right]} \quad \text{Eq.4-23}$$

De la même manière que précédemment, on pose :

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2Q_a}} \quad (\text{a})$$

$$C_2 = -\frac{Q_d}{\pi^2 \sqrt{2Q_a}} \quad (\text{b}) \quad \text{Eq.4-24}$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{Q_b + Q_c}{\sqrt{Q_a}} \quad (\text{c})$$

Ce qui nous donne :

$$M_{cr} = C_1 P_{cr} \left\{ -C_2 e_z + \beta_z C_3 \pm \sqrt{(-C_2 e_z + \beta_z C_3)^2 + \left( \frac{I_{\omega}}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} \right\} \quad \text{Eq.4-25}$$

### 4.3 Détermination des Coefficients

Comme présenté précédemment, le coefficient  $C_1$  (ou  $C_b$ ) ne fait pas l'unanimité entre les différentes réglementations

Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce coefficient comme B.Suryoatmono et D.Ho [28] qui ont proposé un modèle par la méthode des différences finies lequel a été comparé à l'AISC

[26], les auteurs ont trouvé que dans certains cas, les Coefficients  $C_b$  obtenus à l'aide de l'équation de l'AISC [26] sont inférieurs à ceux obtenus en utilisant l'approche par différences finies. Par conséquent, dans ces cas de chargement, la résistance à la flexion de la poutre n'est pas optimale. Ce travail intéresse, également, M.A. Serna qui met en évidence les travaux de R. Greiner et al [25] ainsi que ceux de Suryoatmono[28] avant de proposer une expression pour obtenir le coefficient  $C_1$ , pour toute distribution de moment, laquelle est comparée avec celles proposées par les codes American et Anglo-Saxon.

Comme alternative au tableau (2-2); nous proposons, pour le calcul du coefficient  $C_1$  dans le cas d'une variation linéaire du moment, la formule donnée dans l'équation (4-26). Cette formule est obtenue par l'intégration puis la simplification de l'équation (4-11) à l'aide du logiciel de résolution mathématique « Mathcad».

$$C_1 = \frac{2.221}{\sqrt{1.395(1+\psi^2)+2.145\psi}} \quad \text{Eq.4-26}$$

La figure (4-1), représente les valeurs du coefficient  $C_1$  obtenues en utilisant les équations (2-13) et (2-14) et celles données par la formule (4-26). Cette dernière formule donne des valeurs qui adoptent l'allure des valeurs proposées par l'Eurocode et qui sont données dans le tableau (2-2) et cela pour toutes les valeurs de  $\psi$ .

Cette approximation peut être utilisée dans une méthode très simple de prédiction du moment critique de déversement des segments d'une poutre chargée par des moments d'extrémités ou par des charges concentrées appliquées à travers des éléments transversaux empêchant le déplacement latéral au droit de l'application de la charge. Dans ce cas, chaque segment entre les points de charge peut être traité comme une poutre avec des moments d'extrémité inégaux [12, 16, 17], et son moment critique peut être estimé à l'aide de l'équation (4-13) et (4-26) en prenant pour L la longueur du segment. Chaque moment critique ainsi calculé correspond au déversement d'un segment particulier, et la plus petite valeur des moments critiques calculés donne une approximation prudente du moment critique réel.

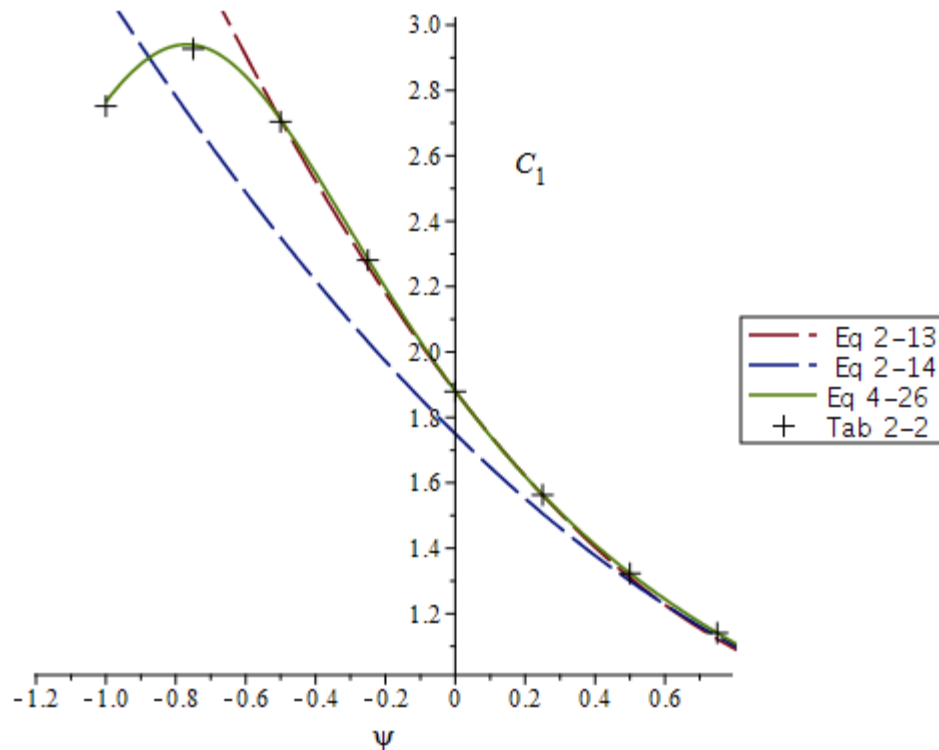


Figure 4-1 Variation du coefficient  $C_1$  en fonction du chargement

Cette simple méthode ignore toutes les interactions entre les segments. Une méthode plus précise sera développée dans le chapitre 5 dans lequel nous étudierons le déversement des poutres maintenues. Pour les autres cas de charges, le tableau (4-1) donne les valeurs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  calculés à l'aide des méthodes citées précédemment. Le coefficient  $C_3$  est calculé, seulement, à l'aide de la méthode de Galerkin.

Il est à préciser que les expressions du moment critique des cas : charge concentrée et charge répartie ; à l'aide des méthodes de Galerkin et Ritz respectivement, ont été développées et les résultats du calcul des coefficients sont présentés dans le tableau (4-1).

Nous pouvons remarquer que, dans le cas de la poutre sollicitée par un moment constant, les deux méthodes de résolution nous donnent des valeurs similaires et égales à celle proposée par l'Eurocode3. Mais, lorsque le moment est variable, les écarts trouvés entre la méthode de Ritz et celle de Galerkin pour le coefficient  $C_1$  sont de l'ordre de 4.1% et 1.6% pour le cas de charge 2 et 3 respectivement; tandis qu'ils sont de 0.5% et 1.5% pour le coefficient  $C_2$ .

Même si les sections dissymétriques ne font pas l'objet du présent travail, nous pouvons remarquer que le calcul du coefficient  $C_3$ , sur la base de la méthode de Galerkin, donne des résultats similaires à ceux proposés par l'Eurocode, sauf pour le cas d'une charge concentrée où l'écart des résultats est important. Il est à préciser qu'une valeur  $C_3 = 0.42$ , pour le cas d'une charge concentrée, a été obtenu par A.Brouki.[82] dans son travail.

Cas	$M_y(x)$	Ritz			Galerkin			EC3		
		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1	$M_0$	1.000	-	1.000	1.000	-	1.000	1.000	-	1.000
2	$\begin{cases} \frac{P}{2}x & ; 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{P}{2}(L-x) & ; \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$	1.423	0.577	-	1.366	0.554	0.406	1.365	0.553	1.730
3	$q \frac{x}{2}[L-x]$	1.150	0.466	-	1.132	0.459	0.525	1.132	0.459	0.525

Tableau 4-1 Coefficients  $C_1, C_2$  et  $C_3$

4.4 Comparaison Numérique

Dans ce paragraphe, nous avons calculé les moments critiques de déversement d'une poutre en considérant quatre portée « L » de celle-ci : 2m, 4m, 6m et 8m. La poutre a une section en I bi symétrique de type IPE300 dont les caractéristiques géométriques utilisées dans les calculs sont données dans le tableau 4-2.

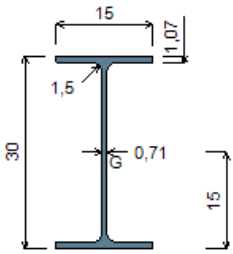
	$I_z (cm^4)$	$I_t (cm^4)$	$I_\omega (cm^6)$
	603,78	20,12	126332

Tableau 4-2 Caractéristique de l'IPE 300

Les moments critiques de déversement ont été calculés en utilisant quatre méthodes différentes. Dans un premier temps, nous avons calculé les moments critiques en utilisant la méthode préconisée par l'Eurocode3, puis nous avons déterminé ces moments en utilisant les approches analytiques développées précédemment en considérant les méthodes de résolution de Ritz et de Galerkin. Enfin, les moments critiques ont été calculés à l'aide du logiciel de calcul LTBeamN. Pour ce dernier cas, la procédure de modélisation de la poutre pour son analyse numérique est présentée à l'annexe B.

La poutre est sollicitée par les cas de charges considérés précédemment à savoir : moment constant, moment variable linéairement, charge concentrée appliquée à mi-travée et charge uniformément répartie. Les valeurs obtenues par les méthodes analytiques et numériques sont comparées à celles données par la méthode réglementaire (Eurocode3).

Les résultats de ces calculs sont donnés dans les tableaux (4-3), (4-4) et (4-5) dans lesquels les valeurs obtenues par l'Eurocode3 sont dans la colonne « EC3 », celles obtenues par l'approche utilisant la méthode de Ritz sont dans la colonne « Ritz », celles obtenues par l'approche utilisant la méthode de Galerkin sont dans la colonne « Galerkin » et enfin, les valeurs données par le logiciel de calcul sont dans la colonne « LTBeamN ».

Il est à préciser que le tableau 4-3 présente les valeurs du moment critique de déversement pour les cas de charges :

- Moment constant noté  $M_0$
- Moment variable linéairement noté  $\Psi=0.5$  et  $\Psi=0.0$

Les tableaux 4-4 et 4-5 présentent les valeurs du moment critique de déversement pour une poutre soumise à une charge concentrée et uniformément répartie respectivement et cela pour trois positions de chargement :

- Au niveau de la semelle comprimée notée  $+h/2$
- Au droit du centre de cisaillement notée CS
- Au niveau de la semelle tendue notée  $-h/2$

Cas	L(m)	Mcr (KN.m)						
		EC3	Ritz	%	Galerkin	%	LTBeamN	%
M <sub>0</sub>	2	504.97	504.97	0,00%	504.97	0,00%	505.6	-0,12%
	4	159.22	159.22	0,00%	159.22	0,00%	159.71	-0,31%
	6	90.09	90.09	0,00%	90.09	0,00%	90.43	-0,38%
	8	62.75	62.75	0,00%	62.75	0,00%	63.07	-0,51%
Ψ=0.5	2	668.08	673.30	-0,78%	668.08	0,00%	667.8	0,04%
	4	210.65	212.29	-0,78%	210.65	0,00%	210.77	-0,06%
	6	119.12	120.05	-0,78%	119.12	0,00%	119.21	-0,08%
	8	83.02	83.67	-0,78%	83.02	0,00%	83.06	-0,05%
Ψ=0.0	2	948.84	1009.9	-6,44%	948.84	0,00%	936.14	1,34%
	4	299.17	318.44	-6,44%	299.17	0,00%	293.97	1,74%
	6	169.18	180.07	-6,44%	169.18	0,00%	165.27	2,31%
	8	117.91	125.50	-6,44%	117.91	0,00%	114.53	2,87%

Tableau 4-3 Cas d'un moment variable

Cas	L(m)	Mcr (KN.m)						
		EC3	Ritz	%	Galerkin	%	LTBeamN	%
+h/2	2	420.75	438.27	-4,16%	420.71	0,01%	419.74	0,24%
	4	146.13	152.23	-4,17%	146.14	-0,01%	145.37	0,52%
	6	89.69	93.45	-4,19%	89.70	-0,01%	89.15	0,60%
	8	66.33	69.12	-4,21%	66.35	-0,03%	65.84	0,74%
Cs	2	689.29	718.58	-4,25%	689.79	-0,07%	686.44	0,41%
	4	217.33	226.57	-4,25%	217.49	-0,07%	217.46	-0,06%
	6	122.90	128.12	-4,25%	122.99	-0,07%	123.07	-0,14%
	8	85.66	89.29	-4,24%	85.72	-0,07%	85.71	-0,06%
-h/2	2	1129.21	1178.17	-4,34%	1130.97	-0,16%	1126.1	0,28%
	4	323.24	337.21	-4,32%	323.70	-0,14%	323.84	-0,19%
	6	168.41	175.66	-4,30%	168.62	-0,12%	168.83	-0,25%
	8	110.61	115.36	-4,29%	110.74	-0,12%	110.99	-0,34%

Tableau 4-4 Cas d'une charge concentrée appliquée à mi- travée

Cas	L(m)	Mcr (KN.m)						
		EC3	Ritz		Galerkin		LTBeamN	
+h/2	2	377.63	381.35	-0,99%	377.63	0,00%	378.19	-0,15%
	4	129.31	130.72	-1,09%	129.31	0,00%	129.85	-0,42%
	6	78.37	79.30	-1,19%	78.37	0,00%	78.78	-0,52%
	8	57.41	58.14	-1,27%	57.41	0,00%	57.73	-0,56%
Cs	2	571.63	580.72	-1,59%	571.63	0,00%	571.23	0,07%
	4	180.24	183.10	-1,59%	180.24	0,00%	180.76	-0,29%
	6	101.92	103.54	-1,59%	101.92	0,00%	102.27	-0,34%
	8	71.04	72.17	-1,59%	71.04	0,00%	71.29	-0,35%
-h/2	2	865.29	884.32	-2,20%	865.29	0,00%	861.16	0,48%
	4	251.22	256.47	-2,09%	251.22	0,00%	251.22	0,00%
	6	132.55	135.19	-1,99%	132.55	0,00%	132.66	-0,08%
	8	87.89	89.57	-1,91%	87.89	0,00%	87.97	-0,09%

Tableau 4-5 Cas d'une charge uniformément répartie

Dans les exemples ci-dessus, et comme première observation, on constate que les écarts entre les valeurs du moment critique obtenues à l'aide de la méthode de Galerkin présentée dans le présent travail et celles de la réglementation n'excèdent pas les 0,16%, alors que celles obtenues par la méthode de Ritz atteignent les 6% pour le cas d'un chargement dissymétrique. Comparés aux calculs numériques, les résultats analytiques sont très satisfaisants. Habituellement, les praticiens considèrent que, lorsque la poutre est sollicitée par un moment constant sur toute sa longueur, la valeur du moment critique obtenue est la plus petite possible. Cette réflexion est due au fait que les valeurs du coefficient  $C_1$  correspondant aux autres cas de chargements sont toujours supérieures à celle du cas d'un moment constant qui est égale à 1.0. La comparaison entre les résultats présentés pour un moment constant dans le Tableau 4-3, et ceux présentés pour le cas d'un effet déstabilisant dans le tableau 4-5 nous démontre qu'il existe un cas de charge plus défavorable que celui du moment constant, et qu'il est préférable de considérer le cas d'une poutre soumise à une

charge répartie appliquée au droit de la semelle comprimée comme étant le cas le plus défavorable.

#### 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence les principaux paramètres influençant la stabilité au déversement d'une poutre et particulièrement, l'effet de la variation du diagramme du moment fléchissant représenté par le coefficient  $C_1$ . L'aspect réglementaire ainsi que l'origine des formules proposées par les différents codes ont été traités. Un développement analytique rigoureux, par la méthode de Galerkin, nous a permis de retrouver les expressions du moment critique ainsi que des valeurs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  identiques à celles données par les codes de calcul [4, 5]. Nous avons proposé une formule alternative à celle proposée par le CCM 97 [4], laquelle donne des valeurs du coefficient  $C_1$  sans faire appel au tableau 2-2.

L'utilisation de cette formule constitue une méthode très simple de prédiction du moment critique de déversement d'une poutre chargée par des moments d'extrémités, ou encore des segments de poutre dont les extrémités sont soumises à des charges concentrées appliquées à travers des éléments transversaux empêchant le déplacement latérale au droit de l'application de la charge. Dans ce cas, chaque segment entre les points de charge peut être traité comme une poutre avec des moments d'extrémité inégaux, ce qui néglige toutes les interactions entre les segments. Une méthode plus précise sera développée dans le chapitre 5 dans lequel nous étudierons le déversement des poutres maintenues.

# 5 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN DISCRET

## 5.1 Introduction

Comme il a été mentionné à la fin du chapitre 4, en présence de maintiens, le moment critique de la poutre maintenue soumise à une charge extérieure concentrée au droit du maintien, revient à calculer le moment critique du segment correspondant. Cette méthode reste valable pour des cas de charges concentrées appliquées au droit des maintiens et dans la partie comprimée de la section, mais les résultats donnés par cette méthode ne prennent en compte ni la position de la charge, ni celle du maintien. De plus, lorsque la distribution du moment est parabolique, cette méthode ne peut en aucun cas être applicable.

Afin d'étudier cet aspect, nous développerons dans ce chapitre l'expression générale du moment critique de déversement, par la méthode de résolution de Ritz, d'une poutre bi articulée maintenue latéralement en un seul point, sous les mêmes conditions de chargements que ceux considérés dans le chapitre précédent. Les expressions développées seront utilisées pour la détermination de la position longitudinale optimale du maintien. Par la suite, et en considérant cette position optimale, la rigidité minimale requise pour constituer un maintien fixe sera établie en fonction du type de chargement et des positions transversales du maintien et de la charge.

Une attention particulière sera donnée au cas où le maintien est au niveau de la semelle tendue, pour lequel une formule simple permettant de déterminer le moment critique de déversement sera présentée et valorisée à l'aide d'une comparaison avec des résultats numériques.

## 5.2 Expression analytique

Afin de déterminer l'expression du moment critique de déversement d'une poutre maintenue latéralement (Fig5-1), nous allons rajouter à l'expression du potentiel donnée en à l'équation (3-21) le potentiel du maintien. Lorsque la poutre est maintenue discrètement avec un maintien en un point situé à une distance notée  $\lambda_v L$  (Fig 5-1), le potentiel représentant ce maintien s'écrit :

$$\Pi_{k_v} = \frac{1}{2} k_v [v(\lambda_v L) + a\theta(\lambda_v L)]^2 \quad \text{Eq. 5-1}$$

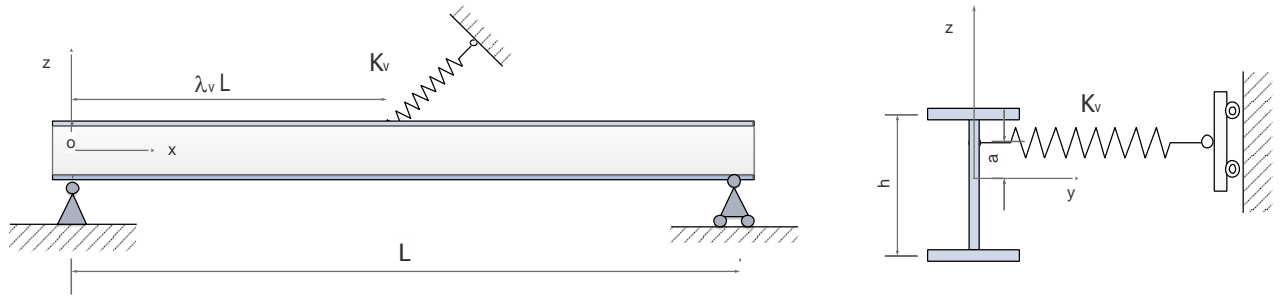


Figure 5-1 Poutre en I maintenue en un point à une distance  $\lambda_v L$

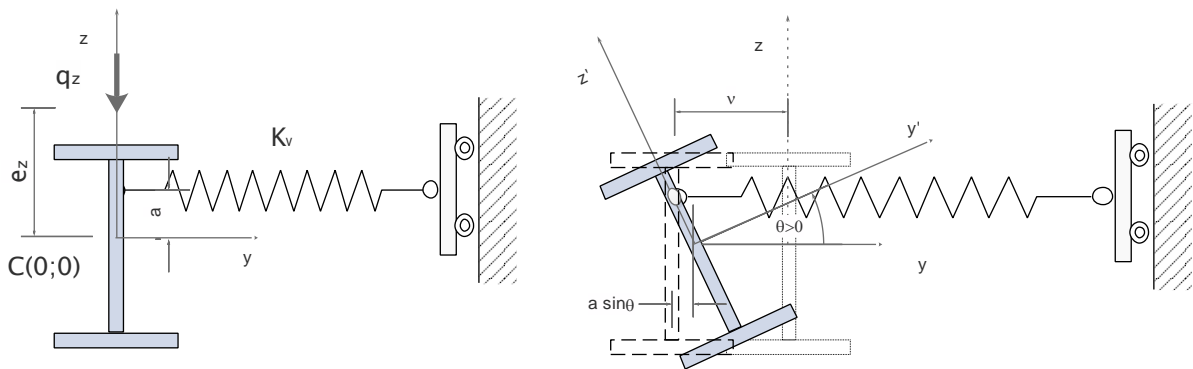


Figure 5-2 Déplacements dus au déversement

$k_v$  Représente la rigidité du maintien en translation

$\lambda_v$  : Paramètre adimensionnel qui représente la position longitudinale du point d'application du maintien en translation

$a$  : représente la position transversale du point d'application du maintien par rapport au centre de cisaillement

### 5.2.1 Cas d'un moment constant

L'expression du potentiel d'une poutre sur appuis en fourche soumise à un moment constant a déjà été traitée dans le chapitre précédent. Pour ce cas, les solutions adoptées sont des fonctions sinusoïdales respectant les conditions aux limites. L'ajout des maintiens en translation dans le potentiel revient à écrire ce dernier sous la forme :

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_{k_v} \quad \text{Eq. 5-2}$$

Les fonctions adoptées pour les solutions du déplacement latéral et de la rotation sont les mêmes que celles adoptées pour une poutre libre à savoir :  $v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{L}$  et  $\theta(x) = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ . En substituant ces fonctions dans les expressions des potentiels, on obtient :

$$\Pi_b = \frac{EI_z}{L} \frac{\pi^4}{4} \left( \frac{v_0}{L} \right)^2 + \left( \frac{EI_\omega}{L^3} \pi^2 + \frac{GJ}{L} \right) \frac{\pi^2}{4} \theta_0^2 - \pi^2 M_0 \left( \frac{v_0}{L} \right) \theta_0 \quad \text{Eq. 5-3}$$

$$\Pi_{k_v} = \frac{1}{2} k_v [v_0 \sin(\lambda_v \pi) + a \theta_0 \sin(\lambda_v \pi)]^2 \quad \text{Eq. 5-4}$$

Le potentiel général donné à l'équation (5-5) s'écrit comme étant la somme des potentiels donnés aux équations (5-3) et (5-4)

$$\Pi = \frac{EI_z}{L} \frac{\pi^4}{4} \left( \frac{v_0}{L} \right)^2 + \left( \frac{EI_\omega}{L^3} \pi^2 + \frac{GJ}{L} \right) \frac{\pi^2}{4} \theta_0^2 - \pi^2 M_0 \left( \frac{v_0}{L} \right) \theta_0 + \frac{1}{2} k_v [v_0 \sin(\lambda_v \pi) + a \theta_0 \sin(\lambda_v \pi)]^2 \quad \text{Eq. 5-5}$$

Selon la théorie du minimum d'énergie potentielle totale, on obtient :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_0} = \frac{\partial \Pi}{\partial v_0} = 0$$

Ce qui nous donne le système d'équations (5-6).

$$\begin{bmatrix} \left[ \frac{EI_z}{2L^3} \pi^4 + k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] & \left[ -k_v a \sin^2(\lambda_v \pi) + \pi^2 \frac{M_0}{2L} \right] \\ \left[ -k_v a \sin^2(\lambda_v \pi) + \pi^2 \frac{M_0}{2L} \right] & \left[ \frac{EI_\omega}{2L^3} \pi^4 + \frac{GJ}{2L} \pi^2 + k_v a^2 \sin^2(\lambda_v \pi) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{Eq.5-6}$$

La résolution du système d'équation précédent conduit à l'expression du moment critique de déversement d'une poutre sur appuis en fourche soumise à un moment constant et qui est donné par l'équation :

$$M_0 = EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ a \frac{2k_v}{EI_z \frac{\pi^4}{L^3}} \sin^2(\lambda_v \pi) + \sqrt{1 + \frac{2k_v}{EI_z \frac{\pi^4}{L^3}} \sin^2(\lambda_v \pi) \left[ \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_z} + a^2 \frac{2k_v}{EI_z \frac{\pi^4}{L^3}} \sin^2(\lambda_v \pi) \right]} \right\} \text{Eq. 5-7}$$

Il est à noter qu'en absence de rigidité ou pour des maintiens positionnés sur appuis  $\lambda_v = 0; \lambda_v = 1$ , l'équation (5-7) n'est autre que l'expression classique du moment critique.

La plus grande valeur du moment est obtenue lorsque le maintien est à mi-travée donc  $\lambda_v = 0.5$ , d'où  $(\sin^2(\lambda_v \pi) = 1)$ . L'équation 5-7 devient alors :

$$M_0 = EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ a \frac{2k_v}{EI_z \frac{\pi^4}{L^3}} + \sqrt{1 + \frac{2k_v}{EI_z \frac{\pi^4}{L^3}} \left[ \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_z} + a^2 \frac{2k_v}{EI_z \frac{\pi^4}{L^3}} \right]} \right\} \text{Eq. 5-8}$$

### 5.2.2 Cas d'un chargement uniformément réparti

Dans ce cas de figure, et en suivant les mêmes étapes de résolution que celles du cas d'un moment constant, nous allons déterminer l'expression du moment critique de déversement d'une poutre bi-articulée soumise à une charge uniforme.

L'addition du potentiel donné à l'équation (3-22) et celui du maintien donné à l'équation (5-1) nous donne :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EI_z (v'')^2 + GJ(\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (v'' \theta_x) \right] dx + \int_0^L \frac{1}{2} e_z q_z \theta_x^2 dx \\ & + \frac{1}{2} k_v [v(\lambda_v L) + a\theta(\lambda_v L)]^2 \end{aligned} \text{Eq. 5-9}$$

La variation du moment de flexion a pour expression :  $M_y(x) = q \frac{x}{2} [L - x]$ . Les fonctions adoptées pour les solutions du déplacement latéral et de la rotation sont les même que celles adoptées pour une poutre libre à savoir :  $v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{L}$  et  $\theta(x) = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

En remplaçant ces fonctions dans l'expression du potentiel, et selon la théorie du minimum d'énergie potentielle totale[59],  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_0} = \frac{\partial \Pi}{\partial v_0} = 0$ , nous obtenons le système d'équations (5-10).

$$\begin{bmatrix} \left[ EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} + k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] & \left[ -k_v a \sin^2(\lambda_v \pi) + \frac{\pi^2 + 3}{24} qL \right] \\ \left[ -k_v a \sin^2(\lambda_v \pi) + \frac{\pi^2 + 3}{24} qL \right] & \left[ EI_\omega \frac{\pi^4}{2L^3} + GJ \frac{\pi^2}{2L} - Lq \frac{e_z}{2} + k_v a^2 \sin^2(\lambda_v \pi) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = 0$$

Eq. 5-10

L'annulation du déterminant dans l'expression (5-10) nous donnera la charge critique.

Sachant que le moment est maximum à mi-travée, nous remplaçons l'expression  $\left(\frac{qL^2}{8}\right)$  par

$M_{cr}^q$ , nous obtenons alors :

$$M_{cr}^q = C_1 EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) a - C_2 \left[ 1 + 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] e_z \right] + \\ \left[ 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) a - C_2 \left[ 1 + 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] e_z \right]^2 + \\ \left[ \left[ 1 + 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] \left[ \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{EI_z \pi^2} + 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) a^2 \right] - \left( 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v a \right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad \text{Eq. 5-11}$$

avec les constantes :  $C_1 = 1.150$  et  $C_2 = 0.466$ .

### 5.2.3 Cas d'une charge Concentrée

Les mêmes étapes de résolution nous permettrons d'écrire le système d'équations pour une poutre bi articulée soumise à une charge concentrée.

L'addition du potentiel donné à l'expression (3-23) et celui du maintien donné à l'équation (5-1) nous donne :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z (v''')^2 + GJ(\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (v''\theta_x) \right] dx + \frac{1}{2} e_z P_z \theta^2 x \Big|_{x=0.5L} \text{Eq. 5-12}$$

$$+ \frac{1}{2} k_v [v(\lambda_v L) + a\theta(\lambda_v L)]^2$$

La variation du moment de flexion a pour expression :  $M(x) = \frac{P_z}{2} x$ . Les fonctions adoptées pour les solutions du déplacement latéral et de la rotation sont les mêmes que celles adoptées pour une poutre libre à savoir :  $v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{L}$  et  $\theta(x) = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

En remplaçant ces fonctions dans l'expression du potentiel, et selon la théorie du minimum d'énergie potentielle totale,  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_0} = \frac{\partial \Pi}{\partial v_0} = 0$  nous obtenons le système d'équations (5-13).

$$\begin{bmatrix} \left[ EI_z \frac{\pi^4}{2L^3} + k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] & - \left[ k_v a \sin^2(\lambda_v \pi) + \frac{P_z}{2} \left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ - \left[ k_v a \sin^2(\lambda_v \pi) + \frac{P_z}{2} \left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) \right] & \left[ EI_\omega \frac{\pi^4}{2L^3} + GJ \frac{\pi^2}{2L} + P_z e_z + k_v a^2 \sin^2(\lambda_v \pi) \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = 0 \text{Eq. 5-13}$$

L'annulation du déterminant dans l'expression (5-13) nous donnera la charge critique. Sachant que le moment est maximum au droit de l'application de la charge (mi-travée), nous remplaçons l'expression  $(P_z \frac{L}{4})$  par  $M_{cr}^P$  pour obtenir l'expression du moment critique donnée à l'équation (5-14).

$$M_{cr}^P = C_1 EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\langle \begin{array}{l} - \left\{ a \frac{2L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) - \left[ 1 + \frac{2L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] C_2 e_z \right\} \\ \left\{ a \frac{2L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) - \left[ 1 + \frac{2L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] C_2 e_z \right\}^2 \\ \pm \left\{ \left[ 1 + \frac{2L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right] \left[ \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_z} + \frac{2L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) a^2 \right] - a^2 \left( \frac{2L^3}{EI_z \pi^4} k_v \sin^2(\lambda_v \pi) \right)^2 \right\} \end{array} \right\rangle \text{Eq. 5-14}$$

$$C_1 = \frac{1}{\left[ \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) \right]}; \quad C_2 = \frac{1}{\left( \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right)}$$

### 5.3 Expression adimensionnelle du moment critique

Pour simplifier l'expression du moment critique et ne pas avoir recours à chaque fois aux caractéristiques habituelles des profilés, nous allons paramétrer les expressions des moments critiques et définir des moments adimensionnels « m » obtenus en divisant les formules initiales par l'expression  $(EI_z \frac{\pi^2 h}{L^2 2})$ . Cette dernière expression est en fait le produit de la valeur de la charge critique de flambement de la poutre par rapport à son axe faible par la valeur de la moitié de la hauteur de sa section  $(P_{cr} \times h/2)$ . A cet effet, on définit les paramètres adimensionnels suivants [31, 43, 75] :

$$\hat{a} = \frac{2a}{h} \quad \text{Paramètre prenant en compte la position du maintien.}$$

$$\gamma_v = 2 \frac{L^3}{\pi^4 EI_z} k_v \quad \text{Paramètre prenant en compte la rigidité en translation du maintien.}$$

$$\kappa = \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} \quad \text{Paramètre prenant en compte la rigidité de torsion de la poutre.}$$

Il est à noter que le paramètre  $\kappa$  n'est autre que l'inverse du paramètre de S.P.Timoshenko au carré (voir paragraphe 2.7.1.1, Eq. (2-8).

Les expressions 5-11 et 5-14 sont similaires et écrites sous une forme similaire à celle de l'expression du moment critique donnée par l'Eurocode [5]. Lorsque le maintien est à mi-travée l'expression générale s'écrit :

$$M_{cr} = C_1 EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ \left[ \frac{2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v a - C_2 \left[ 1 + 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \right] e_z}{2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v a - C_2 \left[ 1 + 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \right] e_z} \right]^2 + \left\{ \left[ 1 + 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v \right] \left[ \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{EI_z \pi^2} + 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v a^2 \right] - \left( 2 \frac{L^3}{EI_z \pi^4} k_v a \right)^2 \right\} \right\}$$

Eq. 5-15

$C_1; C_2$  sont les coefficients de prise en compte de la variation du moment et de prise en compte de la variation de la position d'application de la charge. En absence de maintien ( $k_v = 0$ ) l'expression (5-15) devient la même que celle d'une poutre non maintenue latéralement, déjà donnée dans le chapitre précédent.

En divisant l'expression donnée en (équation 5-15) par  $(EI_z \frac{\pi^2 h}{L^2 2})$ , nous pouvons écrire le moment adimensionnel sous la forme :

$$m_{cr} = C_1 \left\{ \frac{-C_2(1 + \gamma_v \sin^2(\lambda_v \pi))\alpha + \gamma_v \hat{a} + \sqrt{(-C_2(1 + \gamma_v \sin^2(\lambda_v \pi))\alpha + \gamma_v \sin^2(\lambda_v \pi)\hat{a})^2 + 1 + \kappa + \gamma_v \sin^2(\lambda_v \pi)(1 + \kappa + \hat{a}^2)}}{1 + \kappa + \gamma_v \sin^2(\lambda_v \pi)(1 + \kappa + \hat{a}^2)} \right\} \quad \text{Eq. 5-16}$$

Avec :  $\alpha = \frac{e_z}{h/2}$

Les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  ont pour valeurs 1.150 et 0.466 pour un chargement uniforme et 1.423 et 0.577 pour une charge concentrée appliquée à mi-travée. Ces résultats sont identiques à ceux donnés par N.S.Trahair [12, 15, 44] ou encore F.Mohri [59]. Selon l'Eurocode3, ces coefficients ont pour valeurs 1.132 et 0.459 pour un chargement uniforme et 1.365 et 0.553 pour une charge concentrée appliquée à mi-travée. Des résultats identiques à ceux de la réglementation ont été obtenus dans le chapitre 4 en utilisant la méthode de résolution de Galerkin.

Nous pouvons conclure que la présence de maintien n'a aucune influence sur les valeurs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  de l'expression du moment critique de déversement.

En plus des paramètres figurant dans la formule du moment critique d'une poutre libre (chapitre 4), nous retrouvant trois nouveaux paramètres dans l'équation 5-15 et qui sont : la rigidité du maintien, sa position longitudinale et sa position transversale.

L'expression adimensionnelle du moment critique de déversement d'une poutre soumise à un moment constant est donnée par :

$$m_0 = \gamma_v \sin^2(\lambda_v \pi)\hat{a} + \sqrt{(1 + \gamma_v \sin^2(\lambda_v \pi))(1 + \kappa + \hat{a}^2 \gamma_v \sin^2(\lambda_v \pi))} \quad \text{Eq. 5-17}$$

Cette expression est obtenue à partir de l'équation (5-1) en remplaçant les coefficients  $C_1$  par 1.00 et en éliminant les paramètres liés à la position de la charge.

#### 5.4 Position longitudinale optimale du maintien

Dans l'optique de déterminer la position optimale du maintien latéral en translation, nous avons tracé la courbe de variation du moment critique d'une poutre en IPE 300 de 10 m de longueur (ce qui fait que  $\kappa=6.23$ ) en fonction de la position longitudinale du maintien, caractérisée par le paramètre  $\lambda_v$ . L'étude a été faite dans le cas d'une poutre soumise à un moment constant pour trois positions transversales du maintien, à savoir :

Au niveau de la semelle comprimée :  $\hat{a} = +1$

Au niveau du centre de cisaillement :  $\hat{a} = 0$

Au niveau de la semelle tendue :  $\hat{a} = -1$

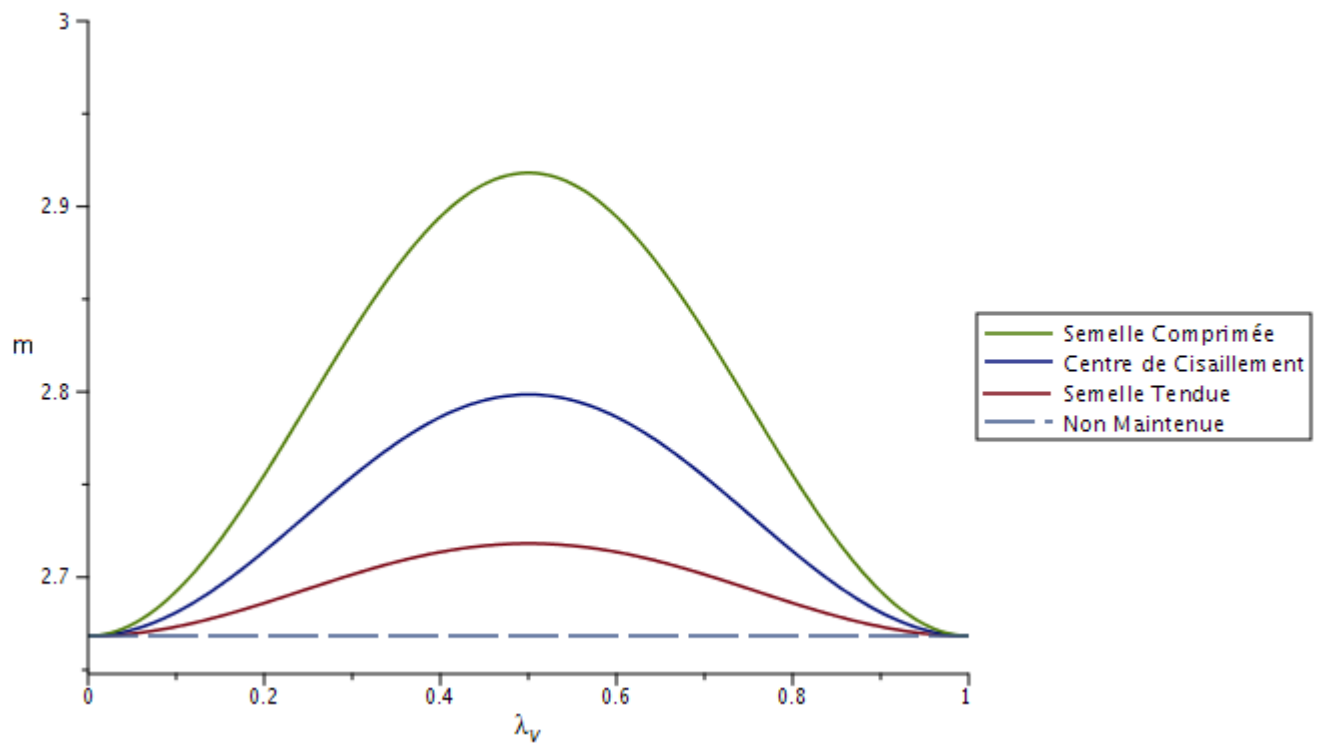


Figure 5-3 Variation de « m » en fonction de la position longitudinale du maintien

Les trois positions sont maintenues avec une même rigidité telle que :  $\gamma_v = 1$ .

Les résultats de cette étude sont représentés dans la figure (5-3) où nous avons jugé utile de rajouter le cas dans lequel la poutre est non maintenue. Il est clair et logique que le maintien à

mi-travée ( $\lambda_v=0.5$ ) est celui pour lequel la poutre présente une meilleure résistance du faite que la longueur peut être divisée par deux. Aussi, nous pouvons observer que le maintien appliqué à la semelle comprimée est celui qui présente une meilleure résistance relativement aux deux autres positions, ceci peut s'interpréter par un effet stabilisant de la rotation de la poutre.

### 5.5 Influence de la rigidité du maintien en translation

Les valeurs des moments critiques, données par les expressions développées dans le paragraphe 5.1 dans le cas d'une poutre maintenue, restent valables tant qu'elles ne dépassent pas les valeurs des moments critiques obtenues pour une moitié de poutre non maintenue.

Notons  $M^{\text{Lim}}$  le moment critique de déversement d'une poutre non maintenue de longueur  $L/2$  et  $M_0$  le moment critique d'une poutre non maintenue de mêmes caractéristiques et de longueur  $L$ . La valeur du moment critique de la poutre maintenue de mêmes caractéristiques et de longueur  $L$  est comprise entre  $M_0$  et  $M^{\text{Lim}}$ . Donc, lorsque le moment critique relatif à une valeur de rigidité donnée dépasse  $M^{\text{Lim}}$ , nous considérons, à partir de ce point, que le mode de flambement de la poutre bascule vers le mode 2 (Fig. 5-4).

Pour étudier cet aspect, nous avons considéré une poutre en IPE300 sollicitée par un moment constant et comportant un maintien en translation situé à mi-travée. Différentes valeurs la rigidité de translation  $k_v$  ont été considérées à savoir :  $k_v = 0$  (poutre non maintenue),  $k_v = 10 \text{ daN/cm}$ ,  $k_v = 100 \text{ daN/cm}$  et  $k_v = 200 \text{ daN/cm}$ .

Les courbes de variation des moments critiques en fonction de la longueur de la poutre maintenue sont représentées à la figure (5-5) où nous avons rajouté aussi la variation du moment limite  $M^{\text{Lim}}$ . Ces courbes sont tracées pour trois cas de positions du maintien :

- Au niveau de la semelle comprimée (Fig. 5-5-a)
- Au niveau du centre de cisaillement (Fig. 5-5-b)
- Au niveau de la semelle tendue (Fig. 5-5-c)

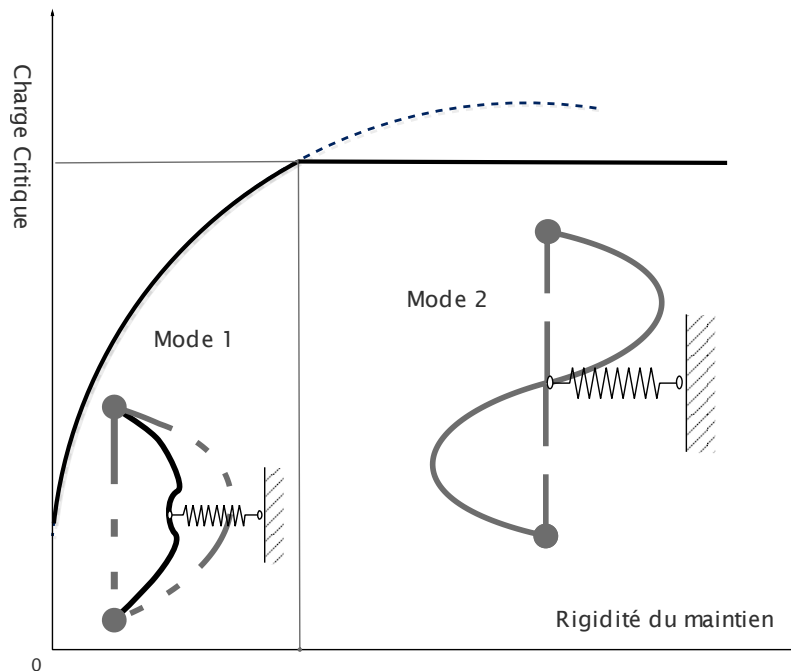


Figure 5-4 Relation typique entre charge de déversement et rigidité du maintien.

Comme première observation, nous constatons que, pour une même rigidité, la position du maintien influe considérablement sur la valeur du moment critique, ce qui confirme les observations faites auparavant. En plus, pour une rigidité  $k_v = 10 \text{ daN/cm}$  la poutre reste déformée en mode 1 pour les trois positions du maintien dans l'intervalle de longueur étudié. Lorsque le maintien est au niveau de la semelle comprimée (Fig. 5.4-a), et pour des rigidités de  $k_v = 100 \text{ daN/cm}$  et  $k_v = 200 \text{ daN/cm}$  le croisement s'effectue pour des longueurs de 9.9 m et 7.75 m respectivement, c'est-à-dire qu'à partir de ces valeurs, la poutre est considérée rigidement maintenue. Alors que si le maintien est au niveau du centre de cisaillement (Fig. 5.4-b), et pour les mêmes rigidités respectives  $k_v = 100 \text{ daN/cm}$  et  $k_v = 200 \text{ daN/cm}$ , les longueurs pour lesquelles la poutre est considérée rigidement maintenue sont de 13.50 m et 11.08 m. Enfin, dans le cas où la semelle tendue est maintenue (Fig. 5.4-c), la poutre est rigidement maintenue au-delà 20 m. Nous pourrions retenir que le point de non déformation (déplacement) ne dépend pas uniquement de la rigidité du maintien

représentée par  $k_v$ , mais aussi des caractéristiques et de la longueur de la poutre ainsi que de la position transversale du maintien.

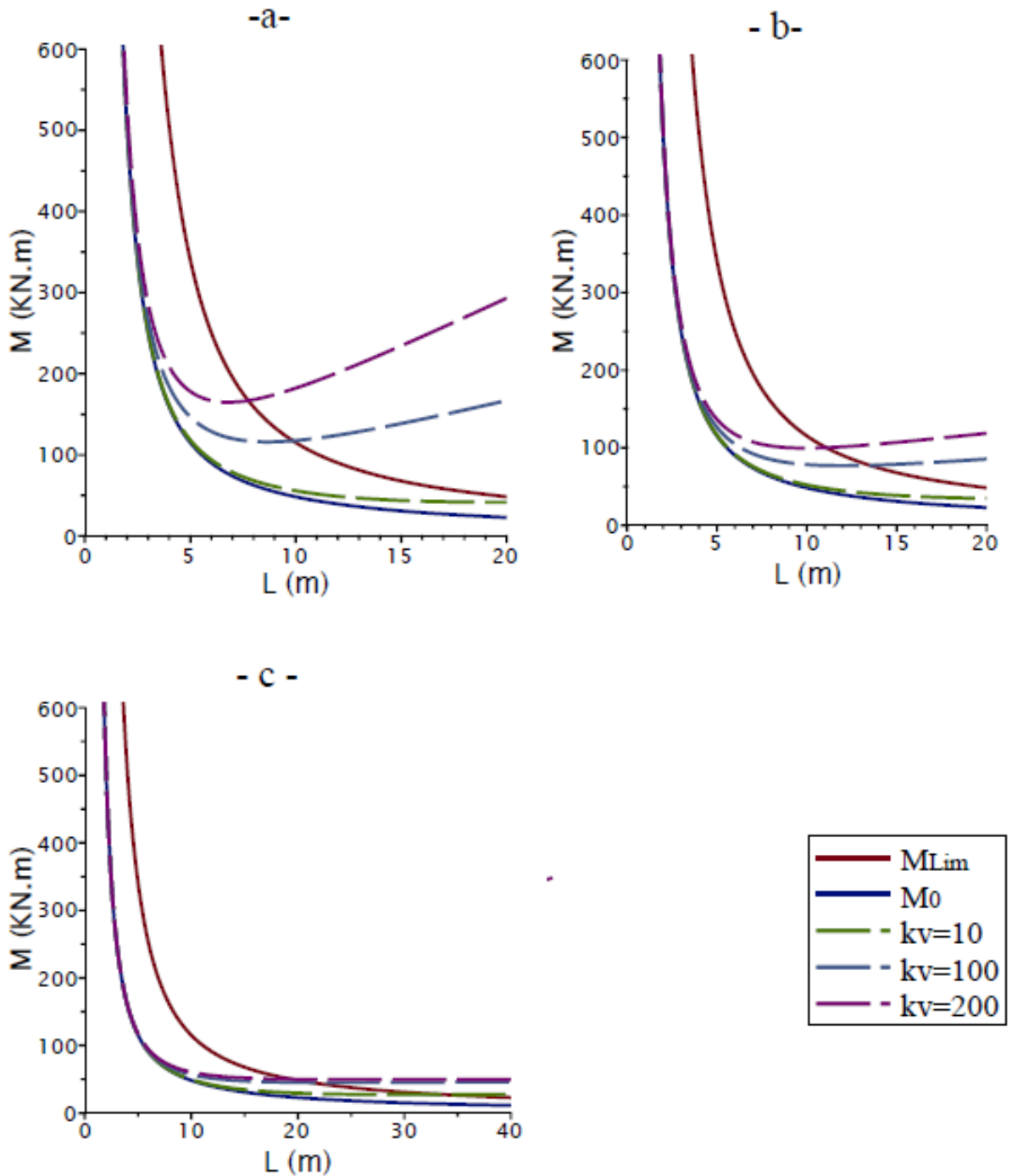


Figure 5-5 Variation de  $M_{ocr}$  en fonction de  $L$  pour différentes valeurs de  $k_v$

**5.6 Rigidité du maintien en translation**

Lorsqu’une poutre est maintenue en translation à mi-travée, l’expression du moment critique est celle définie dans l’équation 5-17.

Notons  $\bar{m}$  le moment adimensionnel d’une poutre non maintenue de longueur L/2.

$$\bar{m} = 4\sqrt{1 + \frac{\kappa}{4}} \tag{Eq. 5-18}$$

La valeur de la rigidité minimale ( $\gamma_v$ ) pour laquelle le maintien est considéré fixe, sera notée

$\bar{\gamma}_v$ .

$\bar{\gamma}_v$ , est obtenue en résolvant l’équation (5-19).

$$m_{cr} - \bar{m} = 0 \tag{Eq. 5-19}$$

La solution générale s’écrit sous la forme de l’équation (5-20) dans laquelle les valeurs des coefficients  $\beta_i$  sont données dans le tableau (5-1) ci-dessous.

$$\bar{\gamma}_v = \frac{\beta_1 + \beta_2\kappa + \beta_3\alpha\sqrt{4 + \kappa}}{\beta_4(1 + \kappa + \hat{a}^2) + (\beta_5\hat{a} - \beta_6\alpha)\sqrt{4 + \kappa}} \tag{Eq. 5-20}$$

Dont les coefficients sont représentés dans le tableau (5-1) ci-dessous :

$\beta_i$	Moment constant	Charge Concentrée	Charge Répartie
$\beta_1$	15.000	9.820	6.381
$\beta_2$	3.000	1.388	1.164
$\beta_3$	0.000	2.308	0.932
$\beta_4$	1.000	1.432	0.575
$\beta_5$	4.000	4.000	2.000
$\beta_6$	0.000	2.308	0.932

Tableau 5-1 Valeurs des coefficients  $\beta_i$

La rigidité minimale  $\bar{\gamma}_v$  dépend de la position du maintien  $\hat{a}$  et de la rigidité de torsion de la poutre  $\kappa$ . F.Mc-Cann [31] propose une formule, dans le cas d’un moment constant, laquelle prend en compte uniquement la position du maintien, et qui traduit la rigidité limite du maintien. La figure (5-6) montre une comparaison entre la formule proposée dans le présent

travail et celle donnée par F.Mc-Cann [31] avec une extension de celle-ci pour un maintien au niveau de la semelle tendue.

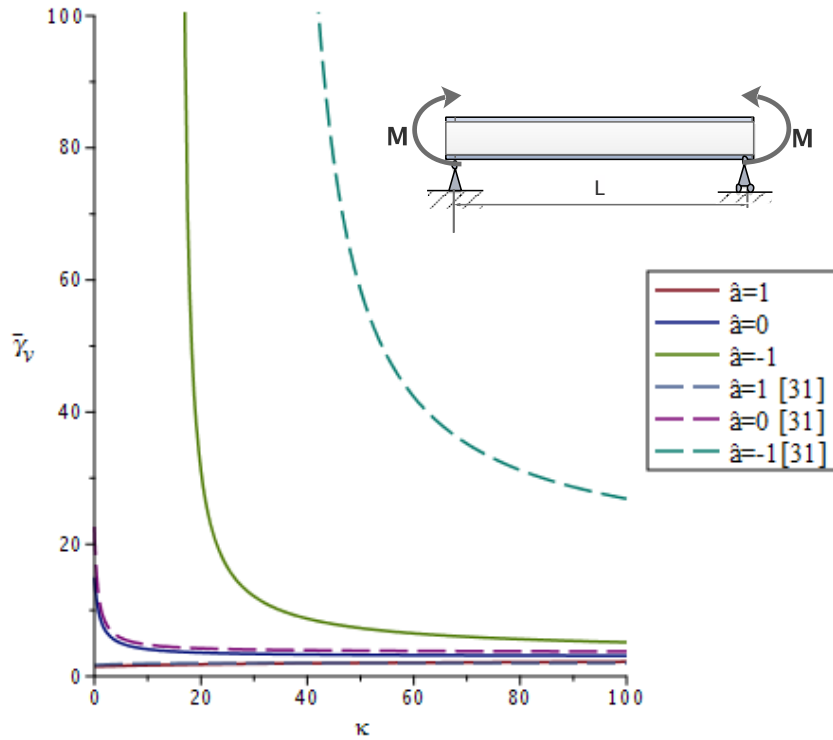


Figure 5-6 Variation  $\bar{\gamma}_v$  en fonction de  $\kappa$

L'équation 5-20 présente une bonne concordance avec la formule proposée par F.Mc-Cann [31] pour les maintiens de la partie comprimée ainsi que du centre de cisaillement, néanmoins l'extension de la formule vers un maintien de la semelle tendue donne des résultats éloignés de ceux donnés par l'équation (5-20).

En exploitant l'expression (5-20), nous avons tracé la variation de la rigidité minimale  $\bar{\gamma}_v$  en fonction de la rigidité de torsion  $\kappa$  pour des valeurs variant de 0 à 100 et cela pour trois cas de charges :

- Moment constant.
- Charge concentrée à mi-travée.
- Charge uniformément répartie.

Pour chaque cas, nous avons considéré un maintien disposé au niveau de :

- La semelle comprimée  $\hat{a} = +1$  (Cas -a-);
- Le centre de cisaillement  $\hat{a} = 0$  (Cas -b-);
- La semelle tendue  $\hat{a} = -1$  (Cas -c-);

Hormis le cas du moment constant, les cas de charges extérieures sont étudiés en considérant deux positions de la charge : au niveau du centre de cisaillement ( $\alpha=0$ ) et au niveau de la semelle tendue ( $\alpha= - 1$ ).

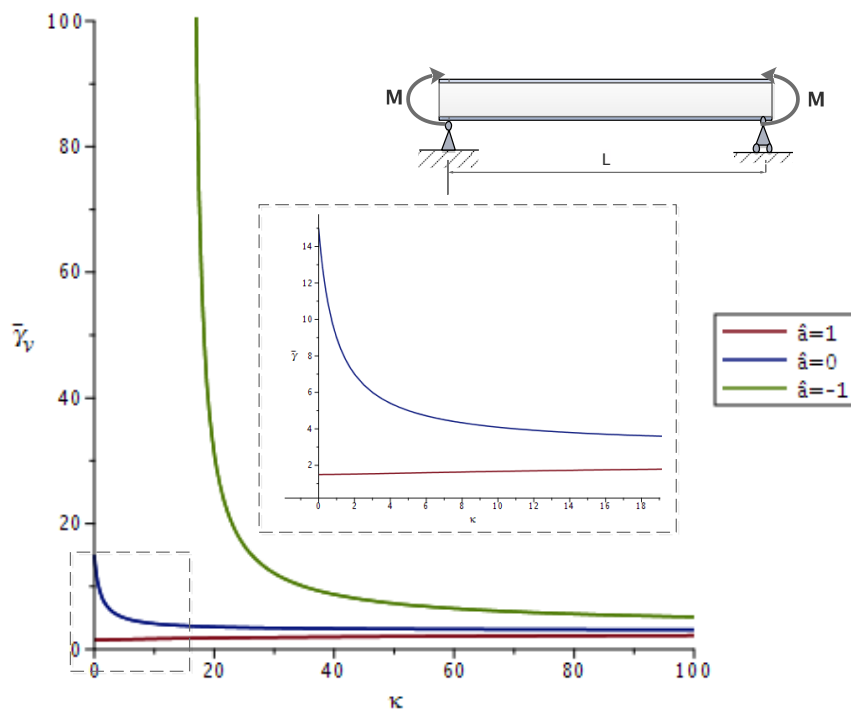


Figure 5-7 Variation de  $\bar{\gamma}_v$  en fonction de  $\kappa$  cas –Moment Constant-

Dans le cas d'un moment constant (voir fig-5-7), on observe que lorsque le maintien est au niveau de la semelle comprimée, la rigidité minimale prend une valeur initiale de  $\bar{\gamma}_v = 1.5$  et varie linéairement jusqu'à  $\bar{\gamma}_v = 3$  lorsque  $\kappa$  tend vers  $\infty$ , avec une pente presque nulle (inférieure à 0.5%). Donc nous pouvons dire que la rigidité minimale du maintien est indépendante de la rigidité de torsion  $\kappa$  dans ce cas précis, ce qui conforte les remarques de F.Mc-Cann [31] qui a assimilé la semelle comprimée à une barre soumise à la compression ce qui reste sécuritaire comparé aux résultats donnés dans la littérature.

Pour le même cas de charge et lorsque le maintien est au niveau du centre de cisaillement, la variation devient décroissante et a comme valeur initiale  $\bar{\gamma}_v = 15$ . Donc plus la rigidité de torsion  $\kappa$  augmente, moins la rigidité en translation requise pour constituer un maintien fixe est importante. Aussi, nous pouvons garder la valeur de  $\bar{\gamma}_v = 15$  comme la rigidité requise afin de constituer un blocage au niveau du centre de cisaillement.

Une attention particulière est donnée au cas du maintien de la semelle tendue, pour lequel nous constatons que pour des profilés moyens généralement utilisés dans les bâtiments, ce maintien, quelle que soit sa rigidité, ne peut quasiment pas représenter un blocage. Il est à mentionner que le cas pour lequel le maintien est considéré comme un blocage est celui d'une poutre possédant une rigidité de torsion très importante ( $\kappa \geq 15.8$ ), en plus la rigidité minimale  $\bar{\gamma}_v$  correspondante est très importante. À titre d'exemple pour  $\kappa = 16$ , la rigidité minimale est  $\bar{\gamma}_v = 565$ .

Nous pouvons déduire que lorsque le maintien est au droit de la semelle comprimée, la rigidité minimale n'est pas très grande. Cette rigidité est presque indépendante de la variation de la rigidité de torsion de la poutre. Ceci s'explique par le fait que le maintien est positionné au niveau de la naissance de l'instabilité (flambement de la partie comprimée).

Mais, lorsque le maintien est au centre de cisaillement, le flambement de la semelle comprimée peut se produire, le blocage demande une rigidité du maintien importante surtout si la poutre possède une rigidité de torsion faible, contrairement à une poutre élancée possédant une rigidité de torsion élevée.

Les résultats des études des cas de charges avec des distributions de moments variables (poutre soumise à une charge concentrée ou à une charge répartie) sont illustrés dans les figures (5-8), (5-9) et (5-10) où la position de la charge est représentée par la valeur de  $\alpha$ . Dans ces cas de charges et lorsque le maintien est au niveau de la semelle comprimée ( $\hat{a} = +1$ ) (Fig.5-8), l'influence de la position de la charge est appréciable. Lorsque la charge est appliquée au niveau du centre de cisaillement ( $\alpha=0$ ), la rigidité minimale du maintien  $\bar{\gamma}_v$  prend respectivement les valeurs initiales  $\bar{\gamma}_v = 1.24$  et  $0.90$  pour une charge concentrée et une charge répartie. Celle-ci augmente en fonction de la rigidité de torsion  $\kappa$ .

La même allure est observée lorsque la poutre est sollicitée au niveau de la semelle tendue ( $\alpha=-1$ ), avec des valeurs initiales plus faibles  $\bar{\gamma}_v = 0.33-0.64$  par rapport au cas d'un chargement au niveau du centre de cisaillement et augmentent en fonction de la rigidité de torsion. Ces écarts entre les valeurs initiales de la rigidité minimale sont dus à l'effet stabilisant de la position de la charge lorsqu'elle est appliquée au niveau de la semelle tendue.

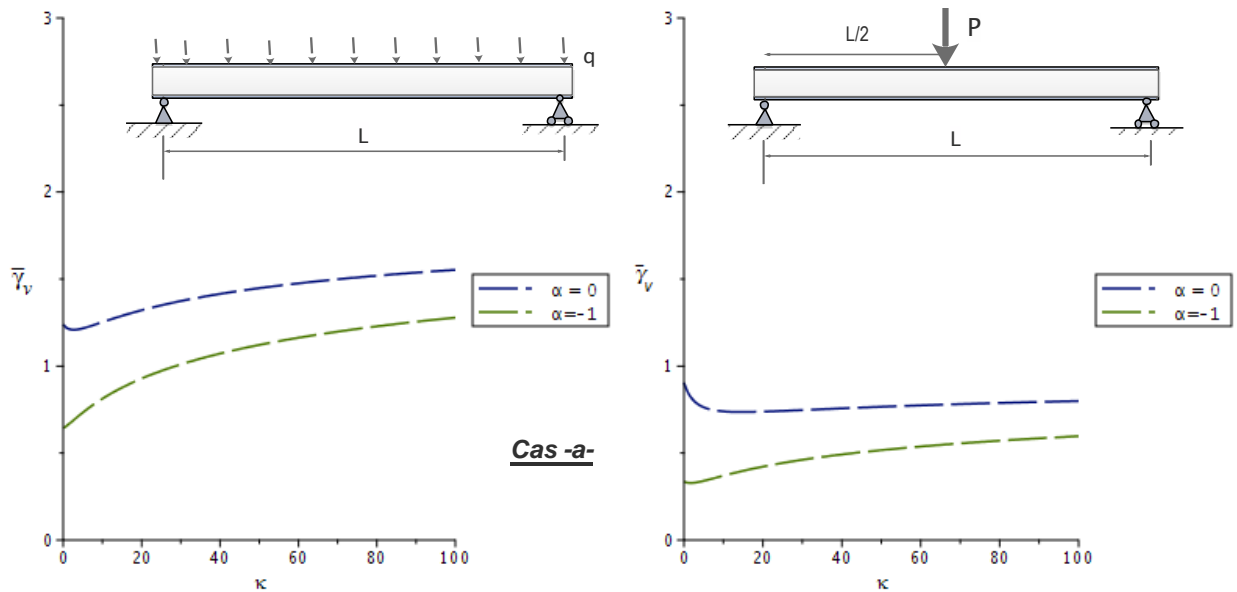


Figure 5-8 Variation de  $\bar{\gamma}_v$  en fonction de  $\kappa$   $\hat{a} = +1$

Lorsque le maintien est au niveau du centre de cisaillement ( $\hat{a} = 0$ ) (Fig.5-9), la variation de la rigidité requise devient inversement proportionnelle à la rigidité de torsion. L'effet stabilisant de la charge ( $\alpha=-1$ ) donne comme valeurs initiales  $\bar{\gamma}_v = 0.86-1.85$  pour une charge concentrée et une charge répartie respectivement, et dépend principalement de l'élanement de la poutre. Donc plus la rigidité de torsion augmente, moins la rigidité minimale requise  $\bar{\gamma}_v$  est importante. Lorsque la charge est appliqué au centre de cisaillement ( $\alpha=0$ ), l'allure du diagramme est la même que celle du cas ( $\alpha=-1$ ), et les valeurs initiales obtenues sont  $\bar{\gamma}_v = 6.90-11.09$  pour les cas de charges respectives.

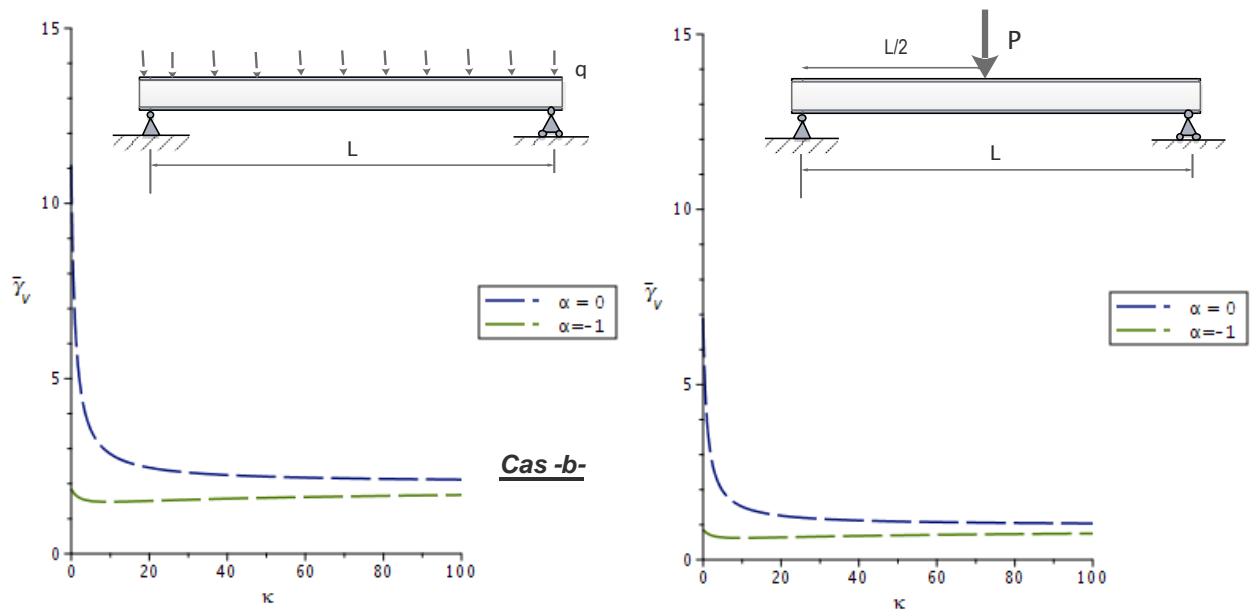


Figure 5-9 Variation de  $\bar{\gamma}_v$  en fonction de  $\kappa$  cas  $\hat{a} = 0$

Nous pouvons aussi observer que pour des valeurs de  $\kappa$  importantes (lorsque  $\kappa$  tend vers l'infini), la position de la charge n'a pas d'influence sur les valeurs de la rigidité minimale, celles-ci convergent vers les valeurs  $\bar{\gamma}_v = 0.98 - 2.00$  pour les cas de charges respectives.

Pour ces mêmes cas de charges, et lorsque le maintien est au niveau de la semelle tendue ( $\hat{a} = -1$ ) (Fig. 5-10), nous observons la même allure descendante de la courbe de variation de la rigidité minimale requise en fonction de la rigidité de torsion de la poutre. En plus, nous constatons que, par rapport au cas d'un moment constant, la position de la charge influe sur la valeur de la rigidité minimale. Les courbes de la figure (5-10) nous montrent aussi qu'il existe une plage de rigidité de torsion (selon le cas de charge) où il est impossible de fixer la poutre, quelque soit la rigidité du maintien. Ceci s'explique par le fait que la valeur du moment critique obtenue dans ce cas est toujours inférieure à celle obtenue pour une moitié de poutre.

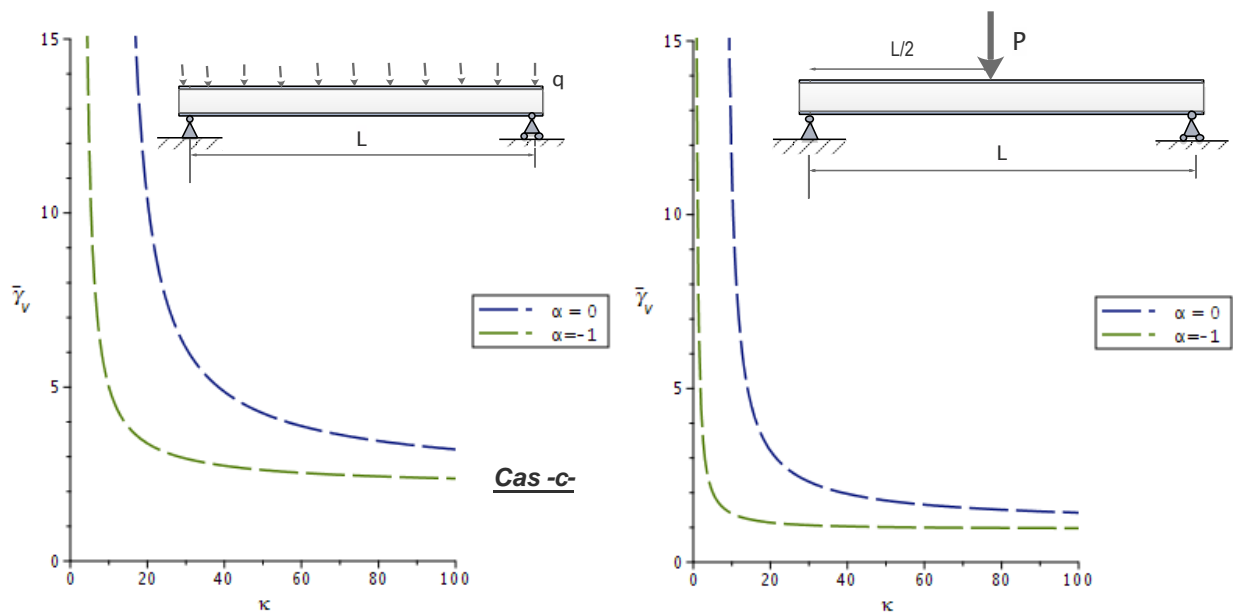


Figure 5-10 Variation de  $\bar{\gamma}_v$  en fonction de  $\kappa$  cas  $\hat{a} = -1$

Soit  $\kappa_{lim}$  les valeurs de la rigidité de torsion de la poutre au-dessous desquelles le mode d'instabilité de celle-ci se présente toujours en mode 1 (une seule demi-onde). Ces valeurs sont présentées dans le tableau 5-2 :

		$\alpha$	$\kappa_{lim}$
Moment constant	$m_0$	-	15.8
Charge concentrée	$m_{cr}^P$	0	8.8
		-1	0.8
Charge répartie	$m_{cr}^q$	0	15.6
		-1	4.0

Tableau 5-2 Valeurs de  $\kappa_{lim}$  pour un maintien de la semelle tendue

En conclusion, nous pouvons dire que pour des poutres ayant des valeurs de  $\kappa$  inférieures à celles présentées ci-dessus, le maintien de la semelle tendue ne peut en aucun cas représenter un blocage et que la poutre se déformera au premier mode uniquement.

## 5.7 Poutre maintenue au droit de la semelle tendue

### 5.7.1 Effet de la rigidité de translation du maintien sur le moment critique

Le maintien de la semelle tendue peut amener la poutre à se déformer en mode 2 pour des valeurs de  $\kappa$  supérieures à celles présentées dans le tableau 5-2.

A titre d'exemple, lorsque la poutre est soumise à un moment constant, et pour une rigidité de torsion  $\kappa = 20$ , le maintien peut être efficace et mener la poutre à se déformer en deux demi ondes, comme c'est le cas du maintien de la semelle comprimée ou celui du centre de cisaillement (figure 5-11).

La figure (5-11-a), nous montre la déformée d'un IPE 300 de 20m de longueur maintenu rigidement au droit de la semelle tendue, soumis à un moment constant, pour lequel  $M_{cr} = 48.59\text{KN.m}$ . Cette dernière valeur n'est autre que la valeur du moment critique de la même poutre de 10m de longueur sans maintien.

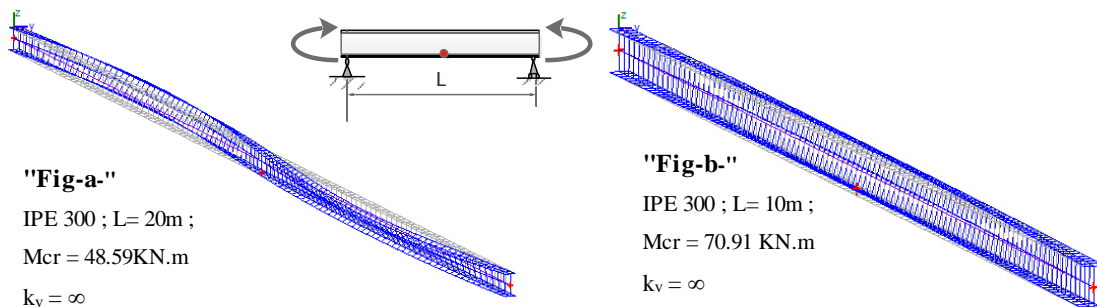


Figure 5-11 Déformation d'un IPE 300 sous moment constant maintenu au niveau de la semelle tendue.

Alors que le même profilé de 10 m maintenu rigidement au niveau de la semelle tendue reste toujours déformé en une demi-onde avec un moment critique  $M_{cr}=70.91 \text{ KN.m}$  (figure 5-11-b).

Dans le cas d'un moment constant, en prenant  $\hat{a} = -1$  dans l'équation (5-20) et en admettant que  $\bar{\gamma}_v > 0$ , nous obtenons la valeur de  $\kappa = 15.8$  comme valeur limite ( $\kappa_{lim}$ ) pour laquelle le mode de déformation passe d'une demi-onde à deux demi-ondes (voir tableau 5-2). Donc, pour les poutres ayant des rigidités de torsion telles que  $0 \leq \kappa \leq 15.8$ , le maintien au niveau de la semelle tendue ne peut en aucun cas constituer un blocage (maintien fixe), néanmoins, il

peut améliorer la stabilité vis-à-vis du déversement. Pour cela, nous allons étudier, pour le cas des poutres avec  $0 \leq \kappa \leq 15.8$ , l'effet de la rigidité du maintien latéral en translation sur la valeur du moment critique. Dans le cas d'un moment constant, et en prenant  $\hat{a} = -1$ , nous avons tracé, à la figure (5-12), les courbes de variation des valeurs du moment critique adimensionnel en fonction de  $\gamma_v$  pour plusieurs valeurs de la rigidité de torsion  $\kappa$ .

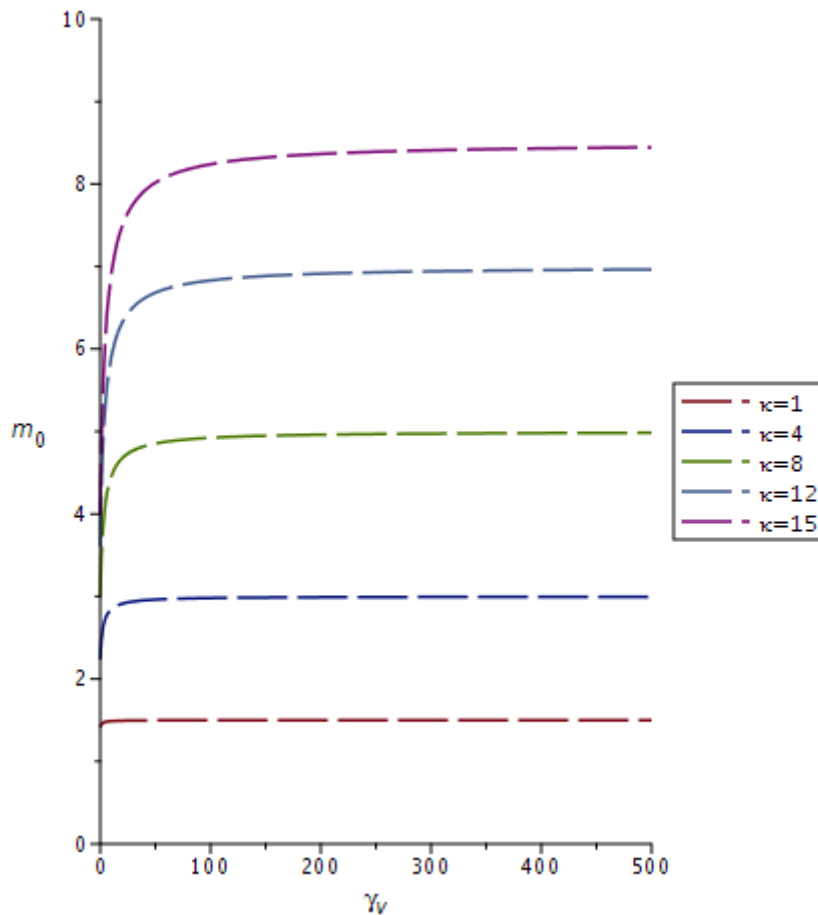


Figure 5-12 Variation du moment en fonction de  $\gamma_v$  «  $\kappa < 15.8$  »

Nous pouvons observer que pour toutes les valeurs de  $\kappa$ , le moment critique reste constant pour des valeurs de  $\gamma_v$  supérieures à 100 et il dépend uniquement de la rigidité de torsion. Cette dernière observation nous amène à considérer l'effet de la rigidité de torsion de la poutre (en restant dans le domaine où  $\kappa$  est inférieur à  $\kappa_{lim}$ ) sur la valeur du moment critique.

### 5.7.2 Effet de la rigidité de torsion de la poutre sur le moment critique

De ce qui précède, on peut déduire que la variation du moment adimensionnel tend vers une asymptote quand  $\gamma_v$  tend vers l'infini. Dans les figures (5-13), (5-14) et (5-15), nous comparons la variation du moment critique adimensionnel d'une poutre rigidement maintenue ( $\gamma_v = \infty$ ) à mi-travée au niveau de la semelle tendue et celui d'une poutre maintenue élastiquement en fonction du paramètre  $\kappa$  et cela les cas de charges respectifs suivants : un moment constant, charge concentrée et charge répartie pour les trois positions de charge

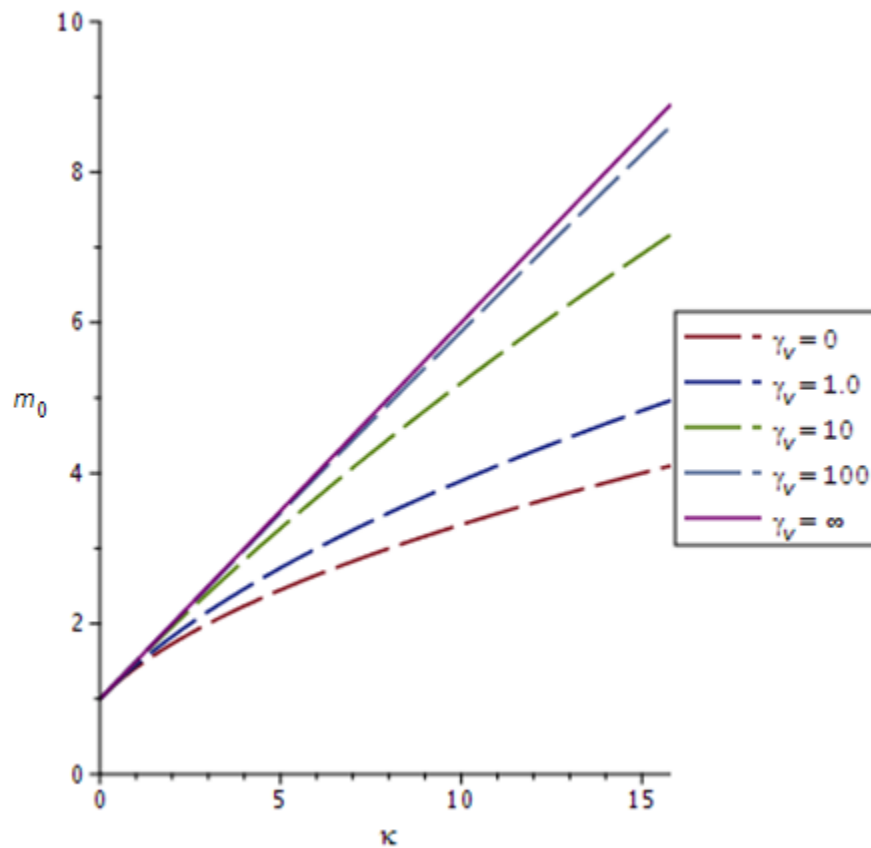


Figure 5-13 Variation du moment en fonction de  $\kappa$  «Moment Constant»

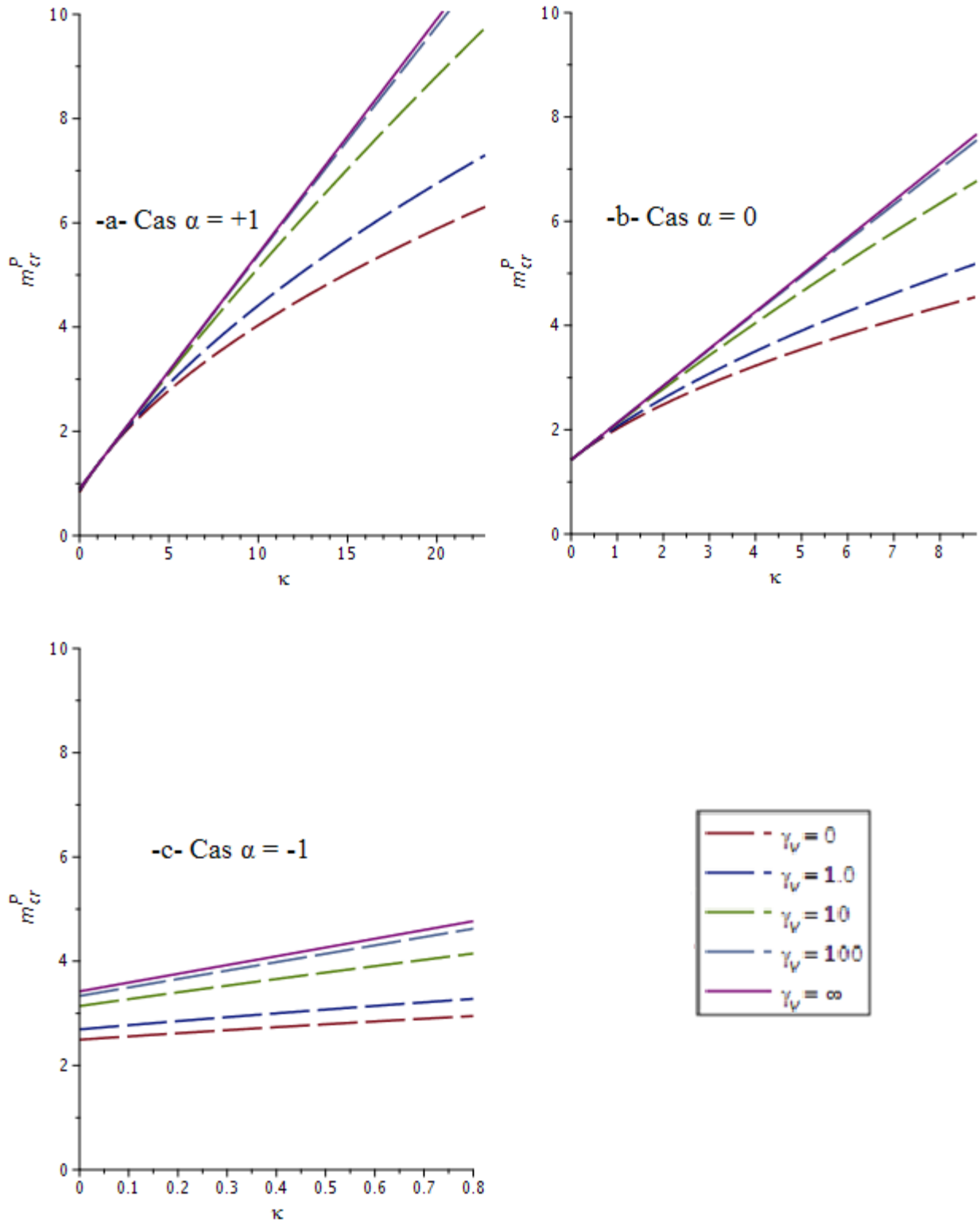


Figure 5-14 Variation du moment en fonction de  $\kappa$  «Charge Concentrée»

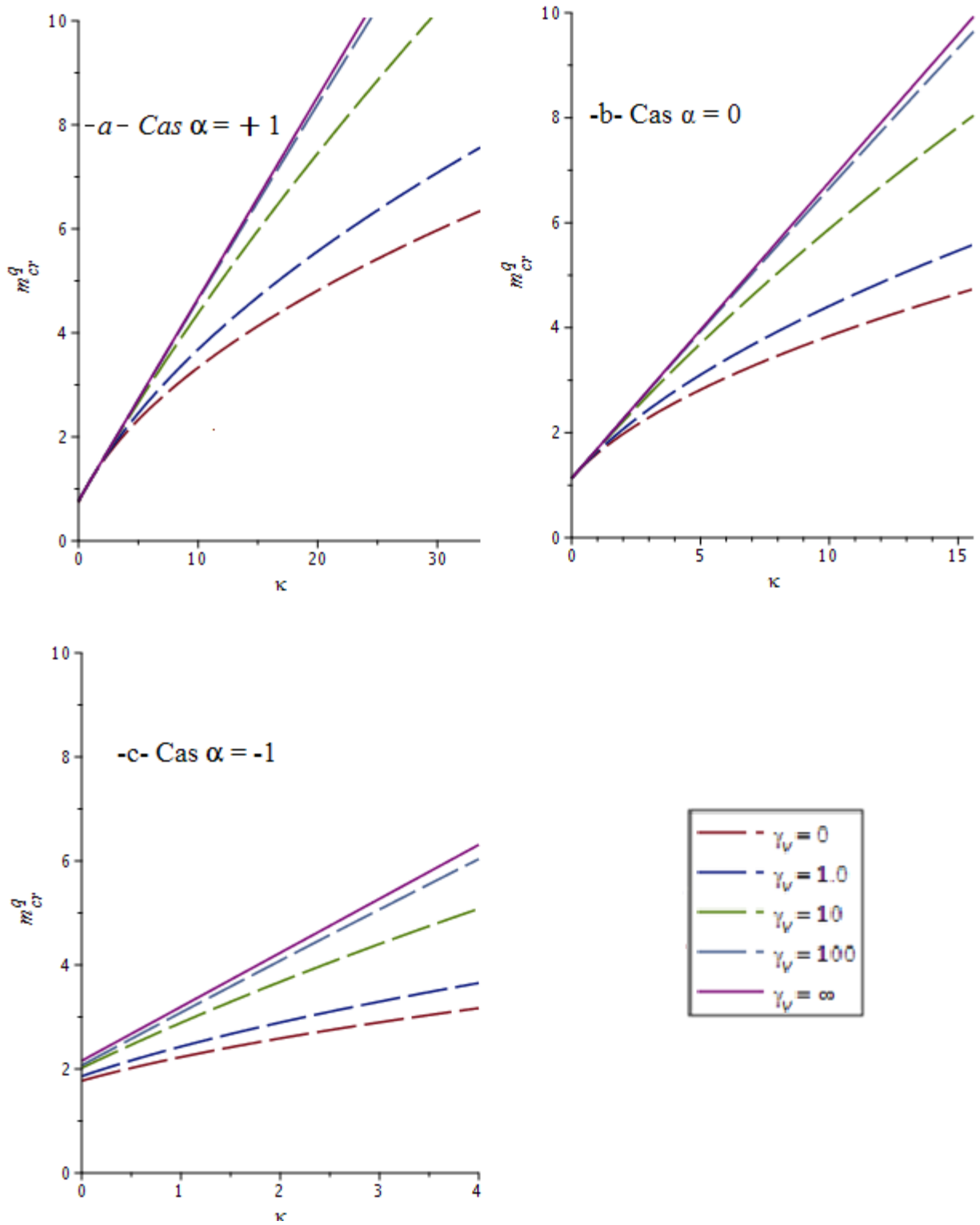


Figure 5-15 Variation du moment en fonction de  $\kappa$  «Charge Répartie»

À travers les figures (5-13) à (5-15), nous pouvons constater une variation ascendante du moment critique en fonction de  $\kappa$ . Nous constatons également que cette variation est linéaire lorsque le maintien est infiniment rigide ( $\gamma_v = \infty$ ), ce qui nous permet de proposer, pour ce cas, l'expression suivante pour le calcul du moment critique adimensionnel :

$$m_{cr} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \kappa \tag{Eq. 5-21}$$

Les coefficients  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$ , dont les valeurs sont données au tableau (5-3), dépendent de la distribution des moments ainsi que de la position transversale de la charge. On rappelle que l'expression (5-21) n'est valable que pour les rigidités de torsions inférieures aux valeurs de  $\kappa_{lim}$  données ci-dessous.

		$\kappa_{lim}$	$\alpha$	$\tilde{C}_1$	$\tilde{C}_2$
Moment Constant	$m_0$	15.8	-	1.00	0.50
		22.7	+1	0.90	0.45
Charge Concentrée	$m_{cr}^P$	8.8	0	1.42	0.71
		0.8	-1	3.36	1.68
		33.6	+1	0.78	0.39
Charge Répartie	$m_{cr}^q$	15.6	0	1.15	0.57
		4.0	-1	2.15	1.07

Tableau 5-3 Valeurs des coefficients  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$  pour  $\kappa < \kappa_{lim}$

### 5.8 Comparaison Numérique

Dans cette partie, nous avons fait une série de modélisations numériques à l'aide du logiciel LTBeamN pour des poutres bi articulées de longueurs 4m, 6m, 8m et 10m et dont les semelles tendues sont maintenues à mi travée. Nous avons choisie des poutres en IPE de sections différentes, à savoir : IPE 300, IPE 400, IPE 500 et IPE 600. Les chargements de ces

poutres sont soit des moments d'extrémité égaux ou un chargement réparti avec variation de la position transversale de la charge.

Nous avons procédé, à l'aide de ce même logiciel, à la détermination, pour les sections et les longueurs citées ci-dessus, des valeurs de  $P_{cr}$ . Les résultats de cette étude numérique sont représentés dans le tableau 5-4

Section	L(m)	$\kappa$	$P_{cr}$ (kN)	M cte	Mcr (kN m)		
					Charge répartie ( $\alpha=+1$ )	( $\alpha=0$ )	( $\alpha=-1$ )
IPE 300	4	1	782,3	167,11	129,89	189,05	339,29
	6	2,24	347,64	103,89	80,97	117,28	206,69
	8	3,99	195,54	81,5	63,7	91,77	158,05
	10	6,23	125,14	70,91	55,57	79,55	133,42
IPE 400	4	0,65	1706,9	432,91	336,39	489,81	883,73
	6	1,46	758,49	249,09	193,79	281,57	501,69
	8	2,6	426,78	184,37	143,79	208,04	364,75
	10	4,06	273,13	154,07	120,44	173,46	298,43
IPE 500	4	0,45	2771,1	815,67	632,19	924,4	1674
	6	1	1232,8	442,06	343,6	499,73	896,74
	8	1,78	693,43	310,89	242,1	351,23	622,82
	10	2,79	443,89	249,79	194,89	281,78	492,72
IPE 600	4	0,36	4392,2	1497,7	1161,7	1691,9	3084,9
	6	0,82	1951	788,62	612,56	892,03	1604,8
	8	1,45	1096,7	539,9	420,08	610,3	1087,9
	10	2,26	701,91	424,26	330,69	478,96	843,56

Tableau 5-4 Valeurs numériques du moment critique pour une poutre maintenue latéralement à mi travée au niveau de la semelle tendue

Dans le but de comparer les résultats donnés par l'expression analytique proposée à l'équation (5-21) et ceux obtenus à l'aide du logiciel, nous avons calculé la valeur numérique du moment adimensionnel en divisant le moment critique par la charge critique d'Euler multipliée par la moitié de la hauteur de la section conformément à l'équation (5-22).

$$m^{Num} = \frac{M_{cr}^{Num}}{P_{cr}^{Num} \frac{h}{2}} \tag{Eq. 5-22}$$

Les résultats obtenus sont dressés dans le tableau (5-5), pour le cas d'un moment constant, et dans le tableau (5-6), pour le cas d'une charge répartie. L'écart Δ entre les résultats analytiques et numériques est calculé sur la base de l'équation (5-23).

$$\Delta = \frac{m(Eq.5 - 21) - m^{Num}}{m(Eq.5 - 21)} \times 100 \tag{Eq. 5-23}$$

IPE	L(m)	κ	$m_0^{Num}$	Eq. (5-21)	Δ%
IPE 300	4	1	1,42	1,50	5,07%
	6	2,24	1,99	2,12	6,04%
	8	3,99	2,78	2,99	7,21%
	10	6,23	3,78	4,11	8,19%
IPE 400	4	0,65	1,26	1,32	4,30%
	6	1,46	1,64	1,73	5,09%
	8	2,6	2,16	2,30	6,09%
	10	4,06	2,82	3,03	6,93%
IPE 500	4	0,45	1,17	1,22	3,92%
	6	1	1,43	1,50	4,40%
	8	1,78	1,79	1,89	5,13%
	10	2,79	2,25	2,39	6,01%
IPE 600	4	0,36	1,14	1,18	3,64%
	6	0,82	1,35	1,41	4,47%
	8	1,45	1,64	1,72	4,87%
	10	2,26	2,01	2,13	5,40%

Tableau 5-5 Comparatif du moment critique pour une poutre maintenue latéralement à mi travée au niveau de la semelle tendue « Cas d'un moment constant »

IPE	L(m)	$\kappa$	$(\alpha=+1)$			$(\alpha=0)$			$(\alpha=-1)$		
			$m_{Num}$	Eq. (21)	$\Delta\%$	$m_{Num}$	Eq. (21)	$\Delta\%$	$m_{Num}$	Eq. (21)	$\Delta\%$
IPE 300	4	1	1,11	1,17	5,13%	1,61	1,70	5,01%	2,89	3,04	4,93%
	6	2,24	1,55	1,65	6,27%	2,25	2,40	6,08%	3,96	4,14	4,43%
	8	3,99	2,17	2,34	7,11%	3,13	3,38	7,52%	5,39	5,70	5,46%
	10	6,23	2,96	3,21	7,78%	4,24	4,65	8,82%			
IPE 400	4	0,65	0,99	1,03	4,21%	1,43	1,50	4,49%	2,59	2,73	5,08%
	6	1,46	1,28	1,35	5,14%	1,86	1,95	4,85%	3,31	3,45	4,04%
	8	2,6	1,68	1,79	6,35%	2,44	2,60	6,12%	4,27	4,46	4,35%
	10	4,06	2,2	2,36	6,91%	3,18	3,42	7,12%			
IPE 500	4	0,45	0,91	0,96	4,76%	1,33	1,38	3,92%	2,42	2,55	5,12%
	6	1	1,11	1,17	5,13%	1,62	1,70	4,42%	2,91	3,04	4,28%
	8	1,78	1,4	1,47	5,03%	2,03	2,14	4,95%	3,59	3,73	3,86%
	10	2,79	1,76	1,87	5,79%	2,54	2,71	6,15%	4,44	4,63	4,17%
IPE 600	4	0,36	0,88	0,92	4,39%	1,28	1,33	4,00%	2,34	2,47	5,28%
	6	0,82	1,05	1,10	4,53%	1,52	1,59	4,60%	2,74	2,88	4,85%
	8	1,45	1,28	1,35	4,87%	1,85	1,95	5,09%	3,31	3,44	3,79%
	10	2,26	1,57	1,66	5,50%	2,27	2,41	5,69%	4,01	4,16	3,64%

Tableau 5-6 Comparatif du moment critique pour une poutre maintenue latéralement à mi-travée au niveau de la semelle tendue « Cas charge répartie »

Dans les exemples ci-dessus, et comme principale observation, nous constatons que les écarts entre les valeurs du moment critique adimensionnel obtenues à l'aide de l'équation (5-21), proposée dans le présent travail, et celles obtenues numériquement n'excèdent pas les 8.19% pour le cas d'un moment constant et restent inférieurs à 8% pour le cas d'une charge répartie.

L'expression (5-21) donne donc des résultats qui sont très satisfaisants et peut être utilisée, en l'absence de formule réglementaire traitant ce cas, pour le calcul du moment critique de déversement.

### 5.9 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié le déversement des poutres bi symétriques maintenues latéralement, en un seul point, au niveau d'une semelle. Après avoir montré que la position optimale du maintien dans le sens longitudinal est à mi-travée, nous avons procédé à la variation de la position du maintien dans le sens transversal, et avons étudié, pour chaque position, l'effet du type de chargement ainsi que la position de la charge sur la stabilité au déversement.

Les principales conclusions qui découlent de cette étude sont :

- La position du maintien ainsi que sa rigidité n'influent pas sur les valeurs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  caractérisant l'expression du moment critique de déversement.
- La rigidité minimale requise pour un maintien afin de constituer un blocage varie en fonction de la position du maintien.
- La position du maintien la plus favorable est à mi-travée et au niveau de la semelle comprimée.
- Le maintien au droit de la semelle tendue peut constituer un blocage à partir d'une valeur limite de la rigidité de torsion.
- Une expression simple est proposée pour calculer le moment critique de déversement d'une poutre avec maintien discret au droit de la semelle tendue.

Enfin, nous pouvons conclure qu'un maintien discret positionné au droit de la semelle tendue peut apporter une amélioration à la stabilité au déversement, ce qui suscite notre intérêt pour l'étude de la stabilité d'une poutre maintenue de manière continue au niveau de la semelle tendue. Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.

**6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN  
CONTINU LE LONG DE LA SEMELLE TENDUE**

## **6.1 Introduction**

Dans le présent chapitre, nous procédons à l'étude de la stabilité au déversement d'une poutre bi symétrique maintenue de manière continue au niveau de la semelle tendue, ce maintien en translation peut être rigide ou élastique. Pour les deux cas cités, nous procéderons à la détermination de l'expression du moment critique de déversement pour les deux cas de charges suivants :

- Cas d'un moment constant.
- Cas d'une charge répartie avec prise en compte de position de la charge.

Le cas d'un maintien rigide sera traité en utilisant la méthode de Galerkin. La méthode de résolution de Ritz sera utilisée pour le cas du maintien élastique. L'influence de différents paramètres sur la stabilité au déversement, dans ces cas, sera mise en évidence. Pour chaque type de maintien, des comparatifs entre les formules proposées et les modèles numériques par éléments finis seront établis.

Enfin, une comparaison entre les résultats obtenus, pour un maintien rigide, par les différentes méthodes utilisées dans ce chapitre sera présentée.

## **6.2 Poutre Rigidement Maintenu**

### **6.2.1 Formulation de l'équation différentielle**

Soit une poutre en acier, ayant une section transversale ouverte, sollicitée avec un chargement extérieur (moment constant ou charge répartie  $q_z$  appliquée dans le sens négatif de l'axe Z).

Cette charge est appliquée au-dessus de la section comme indiqué sur la figure (6-1).

La poutre étant maintenue rigidement au droit de la semelle tendue, ce maintien n'empêche pas le déversement de la poutre.

**SEMELLE TENDUE**

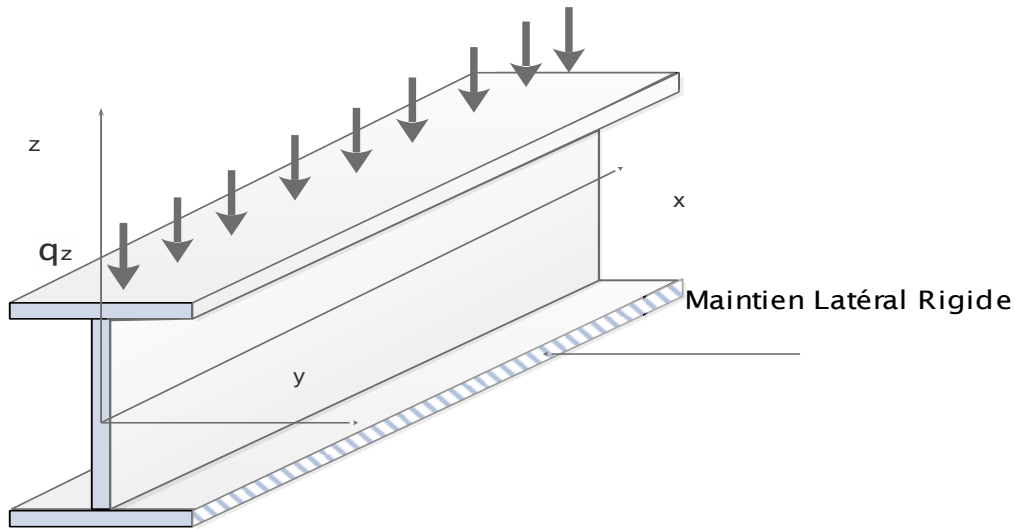


Figure 6-1 Poutre en I maintenue latéralement au niveau de la semelle tendue

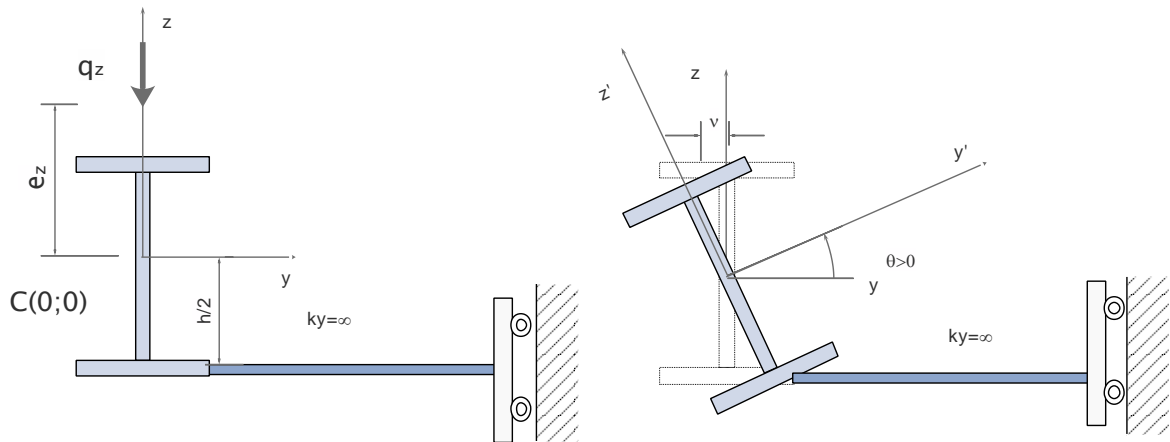


Figure 6-2 Schématisation transversale d'une poutre bi symétrique maintenue au niveau de la semelle tendue

Le travail dû aux charges extérieures  $W_{qk}$  est formulé comme suit :

$$W_{qk} = \int \delta W_q + \int \delta W_{ky} \tag{Eq. 6-1}$$

$$W_{qk} = \int_L q_z w dx + \int_L \frac{1}{2} (z_Q - z_c) q_z \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_L k_y [v + a \theta_x]^2 dx \tag{Eq. 6-2}$$

Après avoir pris  $\beta_z = 0$ , vu que le cas d'étude traite uniquement la poutre bi-symétrique, l'énergie totale U donnée à l'équation (3-18) devient :

**SEMELLE TENDUE**

$$U = \frac{1}{2} \int_L \left( EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y v'' \theta_x \right) dx \quad \text{Eq. 6-3}$$

On définit le potentiel total  $\Pi$  comme étant :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_L \left( EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y v'' \theta_x \right) dx - \int_L q_z w dx \\ & + \int_L \frac{1}{2} e_z q_z \theta_x^2 dx - \int_L \frac{1}{2} k_y [v + a \theta_x]^2 dx \end{aligned} \quad \text{Eq. 6-4}$$

Lorsque le maintien latéral est situé au niveau de la fibre extrême de la membrure tendue

( $a = -\frac{h}{2}$ ), la section tourne autour d'un axe se situant au niveau du maintien (figure 6-2).

Ceci nous mène à écrire la relation entre le déplacement latéral et la rotation comme suit :

$$v = \frac{h}{2} \theta_x \quad \text{Eq. 6-5}$$

L'écriture du potentiel  $\Pi_b$  devient :

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_L \left[ EI_z \frac{h^2}{4} (\theta_x'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y \left( \frac{h}{2} \theta_x'' \theta_x \right) + e_z q_z \theta_x^2 \right] dx \quad \text{Eq. 6-6}$$

De la même manière que la procédure suivie au chapitre 3, et en faisant appel aux équations d'Euler, on aura les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x''} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} = \frac{h}{2} M_y \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + e_z q_z \theta_x & \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x'} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [GJ \theta_x'] = GJ \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} & \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x''} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI_\omega (\theta''_x) + \frac{h^2}{4} EI_z (\theta''_x) + M_y \theta_x \frac{h}{2} \right] &= E \left[ I_\omega + \frac{I_z h^2}{4} \right] \frac{\partial^4 \theta_x}{\partial x^4} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 [M_y \theta_x]}{\partial x^2} \end{aligned} \quad \text{Eq. 6-7}$$

$$E \left[ I_\omega + \frac{I_z h^2}{4} \right] \frac{\partial^4 \theta_x}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{h}{2} \left[ M_y \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (M_y \theta_x)}{\partial x^2} \right] + e_z q_z \theta_x = 0 \quad \text{Eq. 6-8}$$

**SEMELLE TENDUE**

Le terme  $(I_\omega + \frac{I_z h^2}{4})$  représente l'inertie sectorielle de la section par rapport à l'axe de rotation imposé.

Afin de résoudre l'équation (6-8), nous allons utiliser la méthode de Galerkin en posant l'expression  $\theta_x = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ , qui satisfait les conditions aux limites (poutre reposant sur des appuis en fourches), comme solution à cette équation.

Dans l'équation (6-8), en remplaçant  $\theta_x$  et ses dérivées par l'expression proposée, nous obtenons l'équation (6-9) ci-dessous.

$$\begin{aligned} & \int_L \left( \left[ E(I_\omega + \frac{I_z h^2}{4}) \right] \frac{\pi^4}{L^4} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx + \int_L \left( GJ \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx \\ & + \int_L (e_z q_z) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} dx - \int_L \frac{h}{2} \left[ M_y \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right] \sin \frac{\pi x}{L} dx \\ & + \int_L \frac{h}{2} \left[ -M_y \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} + 2M'_y \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + M''_y \sin \frac{\pi x}{L} \right] \sin \frac{\pi x}{L} dx = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 6-9}$$

En utilisant le changement de variable donné à l'expression (4-5) et en effectuant une série de transformation, on écrit l'équation (6-9) sous la forme donnée ci-dessous :

$$\frac{1}{2} \left[ E(I_\omega + \frac{I_z h^2}{4}) \right] \frac{\pi^4}{L^2} + \frac{1}{2} GJ\pi^2 + e_z M_0 Q_c - 2M_0 \frac{h}{2} \pi^2 Q_a + 2 \frac{h}{2} M_0 \pi Q_b + \frac{h}{2} M_0 Q_c = 0 \quad \text{Eq. 6-10}$$

Les constantes  $Q_a, Q_b$  et  $Q_c$  dépendent de la variation du moment de flexion le long de la poutre. Ils ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} Q_a &= \int_0^1 m \sin^2 \pi \xi d\xi; \\ Q_b &= \int_0^1 m' \sin \pi \xi \cos \pi \xi d\xi; \\ Q_c &= \int_0^1 m'' \sin^2 \pi \xi d\xi \end{aligned} \quad \text{Eq. 6-11- (a, b, c)}$$

L'expression du moment critique, est la solution de l'équation (6-10) qui est donnée par l'expression (6-12). Les paramètres  $\xi_1$  et  $\xi_2$  donnés dans l'équation (6.13) tiennent compte

**SEMELLE TENDUE**

de l'influence de la variation du diagramme du moment et de la position de la charge respectivement.

$$\overline{M}_{cr} = \frac{h}{(\xi_1 h - \xi_2 e_z)} \frac{GJ}{h} \left[ \left[ \frac{E}{G} \frac{(I_\omega + \frac{I_z h^2}{4})}{J} \right] \frac{\pi^2}{L^2} + 1 \right] \quad \text{Eq. 6-12-}$$

$$2(Q_a - \frac{Q_b}{\pi} - \frac{Q_c}{2\pi^2}) = \xi_1; \quad \text{Eq. 6-13 (a, b)}$$

$$\frac{2.Q_c}{\pi^2} = \xi_2$$

On peut écrire l'expression du moment critique de déversement, pour une poutre rigidement maintenu au niveau de la semelle tendue, sous la forme, plus simple, suivante :

$$\overline{M}_{cr} = \overline{C}_b \frac{GJ}{h} \left[ \left[ \frac{E}{G} \frac{(I_\omega + \frac{I_z h^2}{4})}{J} \right] \frac{\pi^2}{L^2} + 1 \right] \quad \text{Eq. 6-14}$$

avec :

$$\overline{C}_b = \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2 \frac{e_z}{h})} \quad \text{Eq. 6-15}$$

**6.2.2 Calcul des valeurs du coefficient  $\overline{C}_b$**

**6.2.2.1 Moment constant le long de la poutre**

Pour un moment constant le long de la poutre, l'expression (4-5) nous donne :

$$m = \frac{M(x)}{M_{\max}} \Rightarrow m = 1 \quad \text{Eq. 6-16}$$

Les expressions (6-11 b) et (6-11 c) s'annulent donc, seule l'expression (6-11-a) reste à déterminer. Après intégration de cette dernière expression, et en remplaçant le résultat obtenu dans les équations (6-13.a) et (6-15) respectivement, nous obtenons une valeur de  $\overline{C}_b = 1.00$ , ce qui nous donne l'expression du moment critique de déversement suivante :

**SEMELLE TENDUE**

$$\overline{M}_{cr} = \frac{GJ}{h} \left[ \left[ \frac{E}{G} \frac{(I_{\omega} + \frac{I_z h^2}{4})}{J} \right] \frac{\pi^2}{L^2} + 1 \right] \quad \text{Eq. 6-17}$$

Cette expression est identique ou similaire à celles proposées dans la littérature [14, 18, 37] dans le cas d'un moment constant.

**6.2.2.2 Moment linéairement variable**

Pour un moment linéairement variable l'expression du moment sollicitant s'écrit :

$$M_y(x) = M_0 \left[ (\Psi - 1) \frac{x}{l} + 1 \right] \quad \text{Eq. 6-18}$$

L'expression (4-5) donne dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} \xi = \frac{x}{L} \rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \rightarrow \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0 \\ M_{\max} = \max_{0 \leq x \leq L} M(x) \\ m = \frac{M(x)}{M_{\max}} \Rightarrow m = (\psi - 1)\xi + 1 \\ \frac{dm}{dx} = \psi - 1 \\ \frac{d^2m}{dx^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{Eq. 6-19}$$

Le remplacement des équations (6-19) dans les équations (6-11), (6-13) et (6-15), nous donne l'expression du coefficient  $\overline{C}_b$  suivante :

$$\overline{C}_b = \frac{2}{\psi + 1} \quad \text{Eq. 6-20}$$

Nous devons limiter l'utilisation de l'équation (6-20) à des valeurs positives de  $\psi$ , puisque des valeurs négatives ne correspondent pas aux hypothèses adoptées dans cette étude (la semelle tendue est maintenue).

Le tableau (6-1) nous donne les valeurs de  $\overline{C}_b$  pour un moment linéairement variable.

**CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA  
SEMELLE TENDUE**

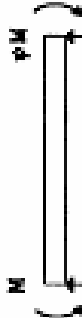





Chargement	Diagramme des moments	$\psi$	$\overline{C}_b$
		1,00	1.00
		0,75	1.14
		0,50	1.33
		0,25	1.60
		0,00	2.00

Tableau 6-1 Variation de  $\overline{C}_b$  pour un moment linéairement variable

**6.2.2.3 Charge uniformément répartie**

Pour une charge uniformément répartie le long de la poutre, le moment max étant égale à  $(qL^2/8)$  à mi travée, l'expression (4-5) donne :

$$M_y(x) = \frac{qx}{2} [L - x]; \quad m = 4\xi(1 - \xi) = 4\xi - 4\xi^2; \quad m' = 4 - 8\xi; \quad m'' = -8 \quad \text{Eq. 6-21}$$

La substitution des expressions de l'équation (6-21), dans les équations (6-11) puis (6-13) enfin (6-15), nous donne le coefficient unique du moment critique de déversement en fonction du point d'application de la charge :

$$\overline{C}_b = \frac{1}{\left(\xi_1 - \xi_2 \frac{e_z}{h}\right)} = \frac{1}{\left(0.869 + 0.811 \frac{e_z}{h}\right)} \quad \text{Eq. 6-22}$$

Sachant que le coefficient  $C_l$  donné par l'EC 3 dépend de la distribution du moment et ne fait en aucun cas intervenir la position de la charge et que cette dernière est prise en compte par le coefficient  $C_2$  qui intervient dans le calcul du moment critique, la formule proposée à l'équation (6-22) représente donc un coefficient unique. La figure (6-3), ci-dessous, nous montre la variation du coefficient  $\overline{C}_b$  en fonction du point d'application de la charge.

**SEMELLE TENDUE**

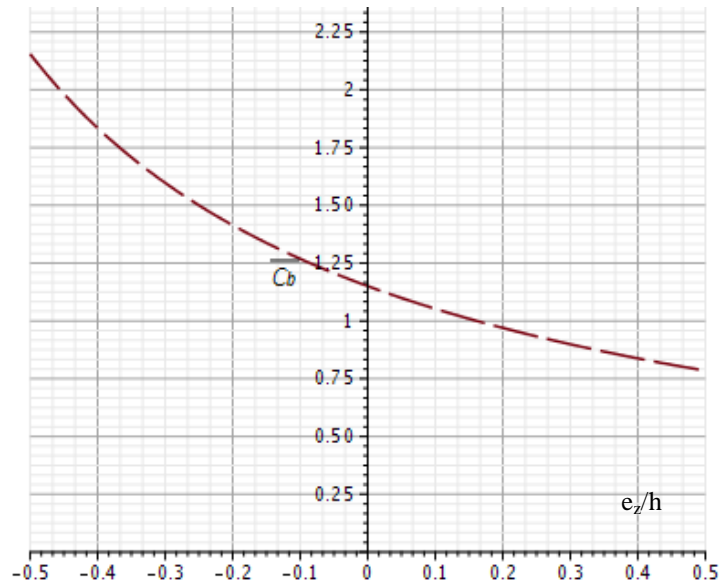


Figure 6-3 Variation du coefficient  $\bar{C}_b$  en fonction du point d'application de la charge

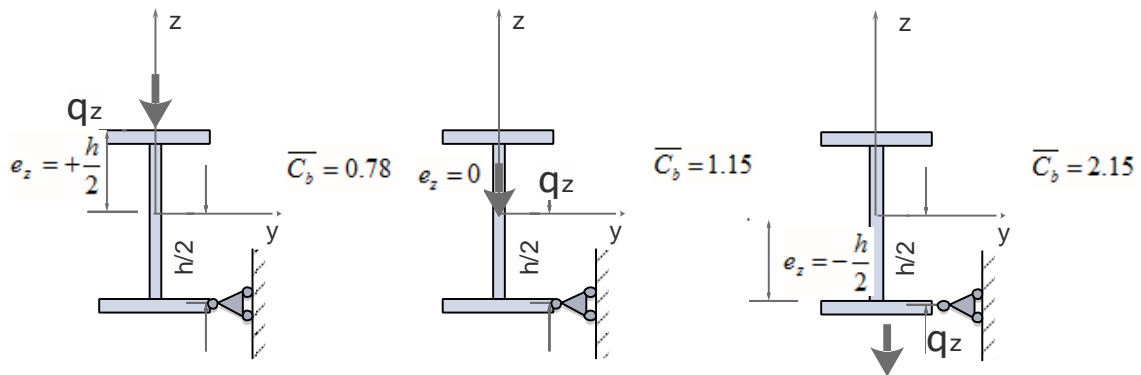


Figure 6-4 Valeurs du coefficient  $\bar{C}_b$  pour 03 points d'application de la charge

Pour une charge uniformément répartie appliquée au niveau du centre de cisaillement ( $e_z=0$ ), lorsque nous comparons la valeur du coefficient  $\bar{C}_b$  d'une poutre maintenue ( $\bar{C}_b = 1.15$ ) avec la valeur du coefficient  $C_I$  d'une poutre libre ( $C_I = 1.132$ ), nous constatons que la différence n'est pas très significative.

Dans la figure 6-4, nous remarquons qu'en faisant varier la position de la charge entre  $e_z = -h/2$  jusqu'à  $e_z = +h/2$ , le coefficient  $\bar{C}_b$  passe d'une valeur de 0.78 à une valeur de 2.15. Ceci est dû au fait que lorsque la charge est appliquée au niveau du maintien (effet stabilisant), cette

**SEMELLE TENDUE**

dernière diminue la rotation, donc elle augmente considérablement la valeur du moment critique.

**6.2.3 Comparaison Numérique**

Une série de modélisations numériques, à l'aide de LTBeamN, a été effectuée sur une poutre en IPE 300 en faisant varier sa longueur de 2m à 10m, et en considérant les trois cas de charges suivants :

- poutre soumise à un moment constant (tableau (6-2)),
- poutre soumise à un moment linéairement variable ( $\Psi = +1/2$  et  $\Psi = 0$ ) (tableau (6-3)) ;
- poutre soumise à une charge uniformément répartie avec trois positions de la charge (tableau (6-4)).

<b>L(m)</b>	<b>Eq. (6-14)</b>	<b>M<sub>0</sub>(KN.m)</b>	
		<b>Num</b>	<b>Erreur %</b>
2,00	506,16	507,00	-0,17%
3,00	254,68	255,43	-0,29%
4,00	166,66	167,37	-0,42%
5,00	125,92	126,62	-0,55%
6,00	103,79	104,48	-0,66%
8,00	81,97	82,74	-0,94%
10,00	71,60	72,28	-0,95%

Tableau 6-2 Moment critique de déversement pour un IPE 300 maintenu rigidement au niveau de la semelle tendue (moment constant)

<b>L(m)</b>	<b>M<sub>cr</sub>(KN.m)</b>					
	<b>Eq. (6-14)</b>	<b><math>\Psi = +1/2</math></b>		<b><math>\Psi = 0</math></b>		
		<b>Num</b>	<b>Erreur %</b>	<b>Eq. (6-14)</b>	<b>Num</b>	<b>Erreur %</b>
2	673,19	670,40	0,41%	1012,32	947,73	6,38%
3	338,72	337,38	0,40%	509,36	473,75	6,99%
4	221,65	220,74	0,41%	333,32	307,19	7,84%
5	167,47	166,67	0,48%	251,84	229,42	8,90%
6	138,04	137,21	0,60%	207,58	186,56	10,13%
8	109,02	107,67	1,24%	163,94	142,48	13,09%
10	95,22	93,69	1,62%	143,2	120,6	15,78%

Tableau 6-3 Moment critique de déversement pour un IPE 300 maintenu rigidement au niveau de la semelle tendue (Moment variable)

**CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA****SEMELLE TENDUE**

<b><math>M_{cr}</math>( KN.m) - <math>e_z = + h/2</math></b>			
<b>L(m)</b>	<b>Eq. (6-14)</b>	<b>Num</b>	<b>Erreur %</b>
2,00	394,80	396,30	-0,38%
3,00	198,65	199,32	-0,34%
4,00	129,99	130,40	-0,31%
5,00	98,22	98,57	-0,36%
6,00	80,96	81,21	-0,31%
8,00	63,94	63,90	0,06%
10,00	55,85	55,80	0,09%

<b><math>M_{cr}</math>(KN.m) - <math>e_z = 0</math></b>			
<b>L(m)</b>	<b>Eq. (6-14)</b>	<b>Num</b>	<b>Erreur %</b>
2,00	582,08	574,28	1,34%
3,00	292,88	289,95	1,00%
4,00	191,66	189,64	1,05%
5,00	144,81	143,10	1,18%
6,00	119,36	117,74	1,36%
8,00	94,27	92,26	2,13%
10,00	82,34	80,18	2,62%

<b><math>M_{cr}</math>( KN.m) - <math>e_z = - h/2</math></b>			
<b>L(m)</b>	<b>Eq. (6-14)</b>	<b>Num</b>	<b>Erreur %</b>
2,00	1 088,24	1 046,80	3,81%
3,00	547,56	525,26	4,07%
4,00	358,32	341,64	4,65%
5,00	270,73	255,91	5,47%
6,00	223,15	208,85	6,41%
8,00	176,24	160,34	9,02%
10,00	153,94	136,00	11,65%

Tableau 6-4 Moment critique de déversement pour un IPE 300 maintenu rigidement au niveau de la semelle tendue (Charge Répartie)

Les valeurs du moment critique calculées à l'aide de l'équation (6-14), en utilisant le coefficient unique, comparées à celles déterminées à l'aide du logiciel LTBeamN sont en excellente concordance dans le cas du moment constant présenté dans le tableau (6-2).

Pour les autres cas de charges, les résultats numériques et analytiques restent proches et les écarts entre eux ne dépassent pas les 15%. Cette différence entre les résultats numériques et analytiques est due aux écarts observés dans les valeurs des coefficients du déversement obtenus par différentes méthodes de calcul et qui peuvent atteindre les 15% [24, 83].

### 6.3 Poutre avec maintien élastique

Les étapes de détermination de l'expression du moment critique de déversement d'une poutre maintenue latéralement (Figure 6-5), sont similaires à celles établies au chapitre 5. Nous allons donc rajouter à l'expression du potentiel donnée à l'équation (3-21) le potentiel du maintien élastique continu.

Lorsqu'une poutre est maintenue sur toute sa longueur, le potentiel représentant ce maintien s'écrit sous la forme suivante :

$$\Pi_{k_c} = \frac{1}{2} \int_0^L k_c [v(x) + a\theta(x)]^2 \quad \text{Eq. 6-23}$$

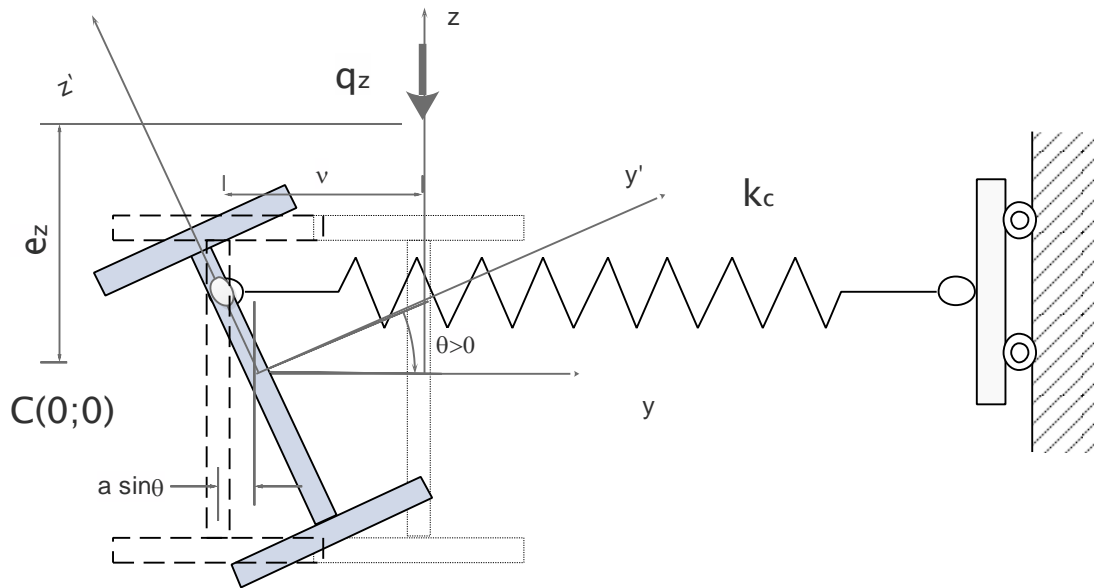


Figure 6-5 Déplacements dus au déversement

$k_c$  Représente la rigidité du maintien continu en translation.

a : Représente la position transversale du point d'application du maintien par rapport au centre de cisaillement.

L'expression du potentiel  $\Pi$  de la poutre maintenue soumise à un chargement extérieur devient  $\Pi = \Pi_b + \Pi_{k_c}$ .

### 6.3.1 Cas d'un moment constant

L'expression du potentiel d'une poutre sur appuis en fourche soumise à un moment constant a déjà été traitée dans le chapitre précédent. On rappelle que les solutions adoptées sont des fonctions sinusoïdales respectant les conditions aux limites, à savoir  $v(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{L}$  et

$$\theta(x) = \theta_0 \sin \frac{\pi x}{L} .$$

En remplaçant ces solutions dans les expressions des potentiels, on obtient :

$$\Pi_b = \frac{EI_z}{L} \frac{\pi^4}{4} \left( \frac{v_0}{L} \right)^2 + \left( \frac{EI_\omega}{L^3} \pi^2 + \frac{GJ}{L} \right) \frac{\pi^2}{4} \theta_0^2 - \pi^2 M_0 \left( \frac{v_0}{L} \right) \theta_0 \quad \text{Eq. 6-24}$$

$$\Pi_{k_c} = \frac{L}{4} k_c [v_0 + a\theta_0]^2 \quad \text{Eq. 6-25}$$

Le potentiel général donné à l'équation (6-26) s'écrit comme étant la somme des potentiels donnés aux équations (6-24) et (6-25).

$$\Pi = \frac{EI_z}{L} \frac{\pi^4}{4} \left( \frac{v_0}{L} \right)^2 + \left( \frac{EI_\omega}{L^3} \pi^2 + \frac{GJ}{L} \right) \frac{\pi^2}{4} \theta_0^2 - \pi^2 M_0 \left( \frac{v_0}{L} \right) \theta_0 + \frac{L}{4} k_c [v_0 + a\theta_0]^2 \quad \text{Eq. 6-26}$$

Selon la théorie du minimum d'énergie potentielle totale [10], on obtient :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_0} = \frac{\partial \Pi}{\partial v_0} = 0$$

Ce qui nous mène à la résolution d'un système d'équation (6-27) donné ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \left[ \frac{EI_z}{L} \frac{\pi^4}{L^4} + k_c \right] & - \left[ k_c a - \pi^2 \frac{M_0}{L^2} \right] \\ - \left[ k_c a - \pi^2 \frac{M_0}{L^2} \right] & \left[ EI_\omega \frac{\pi^4}{L^4} + GJ \frac{\pi^2}{L^2} + k_c a^2 \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{Eq. 6-27}$$

**SEMELLE TENDUE**

L'expression du moment critique de déversement d'une poutre sur appuis en fourche soumise à un moment constant donné par l'équation :

$$M_{cr}^0 = EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left[ \sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_z} + k_c \frac{L^4}{\pi^4 EI_z} \left( a^2 + \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_z} \right) + k_c \frac{L^4}{\pi^4 EI_z} a} \right] \quad \text{Eq. 6-28}$$

Il est à noter qu'en absence de rigidité, l'équation (6-28) n'est autre que l'expression classique du moment critique. En plus des paramètres habituels apparaissant dans la formule du moment critique d'une poutre libre (chapitre 4), nous retrouvant de nouveaux paramètres dans l'équation (6-28) et qui sont la rigidité du maintien, et sa position transversale.

**6.3.2 Cas d'un chargement réparti**

En adoptant l'expression (6-23) du potentiel du maintien continu et en suivant les mêmes étapes de résolution que celles adoptées au chapitre 5 pour ce cas de charge, nous obtenons l'expression du moment critique suivante :

$$M_{cr}^q = \frac{3\pi^2}{2(\pi^2+3)} EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ \left[ \frac{L^4}{EI_z \pi^4} k_c a - \frac{6}{\pi^2+3} \left[ 1 + \frac{L^4}{EI_z \pi^4} k_c \right] e_z \right] + \sqrt{\left[ \frac{L^4}{EI_z \pi^4} k_c a - \frac{6}{\pi^2+3} \left[ 1 + \frac{L^4}{EI_z \pi^4} k_c \right] e_z \right]^2 + \left\{ \left[ 1 + \frac{L^4}{EI_z \pi^4} k_c \right] \left[ \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{GJL^2}{EI_z \pi^2} + \frac{L^4}{EI_z \pi^4} k_c a^2 \right] - \left( \frac{L^4}{EI_z \pi^4} k_c a \right)^2 \right\}} \right\} \quad \text{Eq. 6-29}$$

**6.3.3 Expression adimensionnel du moment**

En se limitant au cas où le maintien est au niveau de la semelle tendue, nous définissons le moment adimensionnel « m » en divisant l'expression donnée à l'équation (6-28) par

$(EI_z \frac{\pi^2 h}{L^2} \frac{2}{2})$  et en utilisant les paramètres adimensionnels suivants :

$$\hat{a} = \frac{2a}{h} \quad \text{Paramètre prenant en compte la position du maintien (pris = -1).}$$

$$\gamma_c = \frac{L^4}{\pi^4 EI_z} k_c \quad \text{Paramètre prenant en compte la rigidité en translation du maintien continu.}$$

**SEMELLE TENDUE**

$$\kappa = \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_{\omega}} \quad \text{Paramètre prenant en compte la rigidité de torsion de la poutre.}$$

L'expression (6-28) devient :

$$m_0 = -\gamma_c + \sqrt{(1 + \kappa + \gamma_c)(1 + \gamma_c)} \quad \text{Eq. 6-30}$$

De la même façon, on obtient, à partir de l'équation (6-29), l'expression (6-31), plus générale, du moment adimensionnel où les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  dépendent du cas de charge.

$$m_{cr} = C_1 \left\{ [C_2(1 + \gamma_c)\alpha - \gamma_c] + \sqrt{[C_2(1 + \gamma_c)\alpha - \gamma_c]^2 + [1 + \kappa + \gamma_c + \gamma_c(1 + \kappa)]} \right\} \quad \text{Eq. 6-31}$$

Pour chaque cas de charge, les valeurs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  sont données dans le tableau (6-5) ci-dessous.

Cas	$C_1$	$C_2$
Moment Constant	1.000	-
Charge Uniformément Répartie	$\frac{3\pi^2}{2(\pi^2 + 3)} = 1.150$	$\frac{6}{\pi^2 + 3} = 0.466$

Tableau 6-5 Coefficients de chargement

**6.3.4 Effets de la rigidité du maintien latéral sur le moment critique**

Dans ce qui suit, nous présentons une étude paramétrique en considérant le cas d'un moment constant et celui d'un chargement uniforme avec trois positions de charge. Nous adoptons pour cette étude trois types de poutres dont, un IPE 500 de 6m, un IPE 400 de 10 m et un IPE 300 de 10m, ce qui correspond à des valeurs de rigidité adimensionnelle de torsion  $\kappa$  de 1.0, 4.06 et 6.23 respectivement. Les variations du moment critique adimensionnel sont représentées à la figure (6-6) pour des valeurs de rigidité du maintien  $\gamma_c$  variant de 0 à 100.

**CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA  
SEMELLE TENDUE**

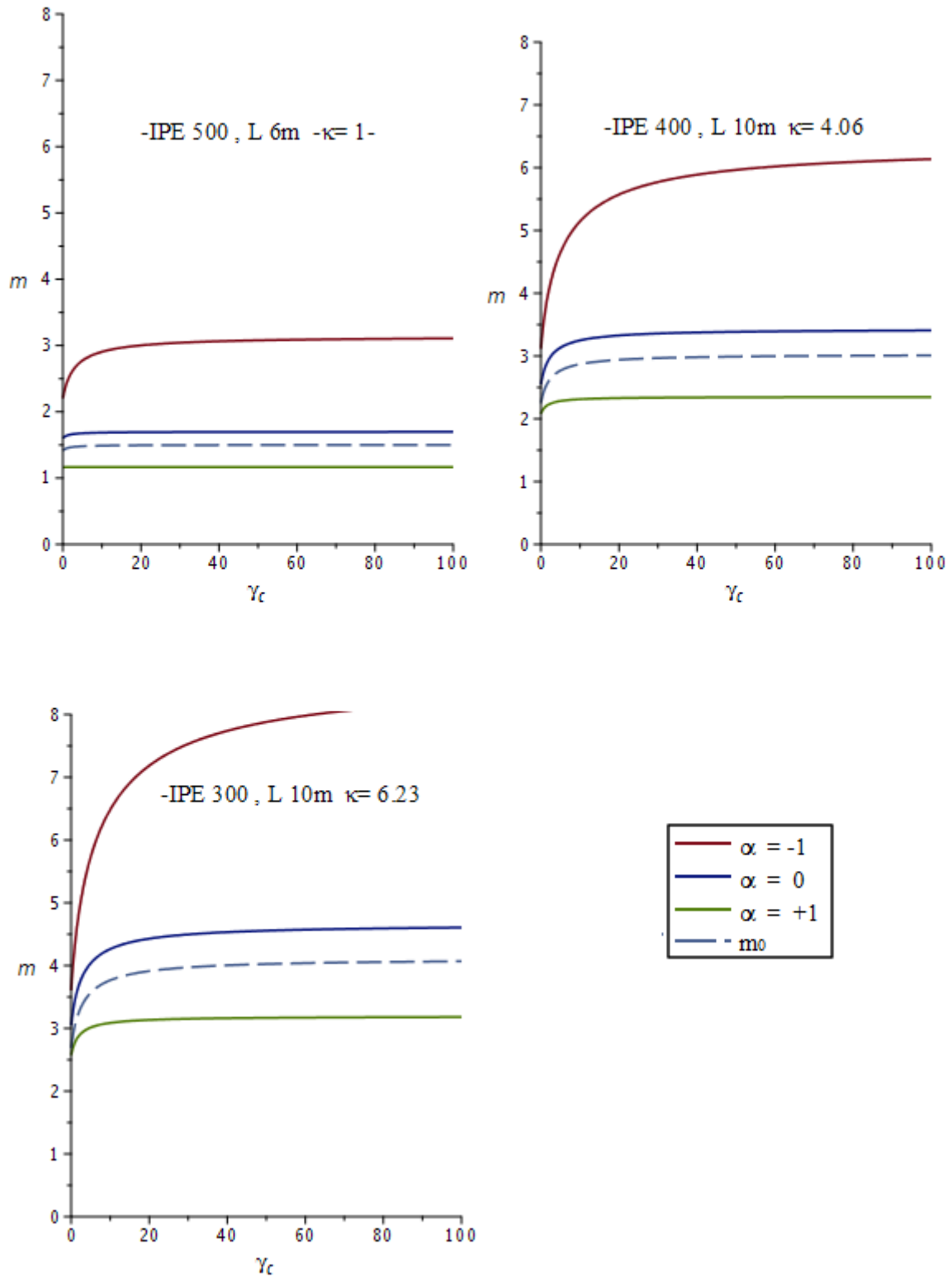


Figure 6-6 Variations du Moment critique adimensionnel en fonction de  $\gamma_c$ .

## CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA SEMELLE TENDUE

En observant la figure (6-6), nous notons que la variation du paramètre  $\kappa$  ainsi que la position de la charge influent sensiblement sur la valeur du moment critique adimensionnel, qui augmente approximativement de 3,25 à 8, pour  $\alpha = -1$ , et de 1,1 à 3, pour  $\alpha = +1$ , lorsque la rigidité du maintien est importante ( $\gamma_c = 100$ ).

De plus, nous pouvons observer pour  $\kappa = 1$  que la valeur du moment critique ne varie que pour des valeurs de  $\gamma_c$  inférieures à 20. Au-delà de cette valeur, le moment devient presque constant. En outre, nous notons, pour  $\kappa = 4.06$  et  $\kappa = 6.23$ , que le moment critique devient plus sensible aux grandes valeurs de  $\gamma_c$  pour le cas où la charge est appliquée sur la semelle tendue ( $\alpha = -1$ ).

En absence d'effet stabilisant ou déstabilisant de la charge ( $\alpha = 0$ ), nous observons que la variation du moment critique est presque identique à celle du moment critique d'un moment constant avec des valeurs initiales différentes pour chaque valeurs de  $\kappa$ .

La Figure.6-6 montre aussi que le cas le plus défavorable est donné pour le cas d'une charge appliquée au droit de la semelle comprimée et que ce cas de figure présente des valeurs du moment critique plus faibles que celles obtenues dans le cas d'un moment constant.

### **6.3.5 Effet de la rigidité de torsion sur le moment critique**

La formule du moment adimensionnel (6-30) est fonction des paramètres  $\gamma_c$  et  $\kappa$ . De ce qui précède, on peut déduire que la variation du moment en fonction de  $\kappa$  tend vers une asymptote quand  $\gamma_c$  tend vers l'infini. Dans le tableau (6-6), nous comparons la variation du moment critique pour une poutre maintenue  $\gamma_c = \infty$  et une poutre non maintenue en fonction du paramètre  $\kappa$ .

L'analyse des résultats donnés dans le tableau (6-6), nous permet d'apprécier l'apport en résistance que peut apporter le maintien de la semelle tendue, cet apport peut atteindre le double pour des poutres ayant des rigidités de torsion élevées.

**SEMELLE TENDUE**

$\kappa$	$m_0$	
	$\gamma_c = 0$	$\gamma_c = \infty$
0.00	1.000	1.000
0.10	1.049	1.050
1.00	1.414	1.499
4.00	2.236	2.990
8.00	3.000	4.961
10.00	3.317	5.939
12.00	3.606	6.913

Tableau 6-6 Variation du moment critique adimensionnel en fonction de la rigidité en torsion des poutres soumises à un moment constant

Les Figures (6-7) et (6-8) montrent les variations du moment critique adimensionnel en fonction du paramètre  $\kappa$ , pour 05 valeurs de  $\gamma_c$  à savoir; 0.0, 1.0, 1.0, 50.0 et  $\infty$  et cela pour une plage de la rigidité de torsion  $\kappa$  qui varie de 0 à 50. Comme il a été le cas pour un maintien discret, nous observons que la variation du paramètre  $\kappa$  affecte sensiblement la valeur du moment critique adimensionnel, indépendamment de la rigidité du maintien  $\gamma_c$ .

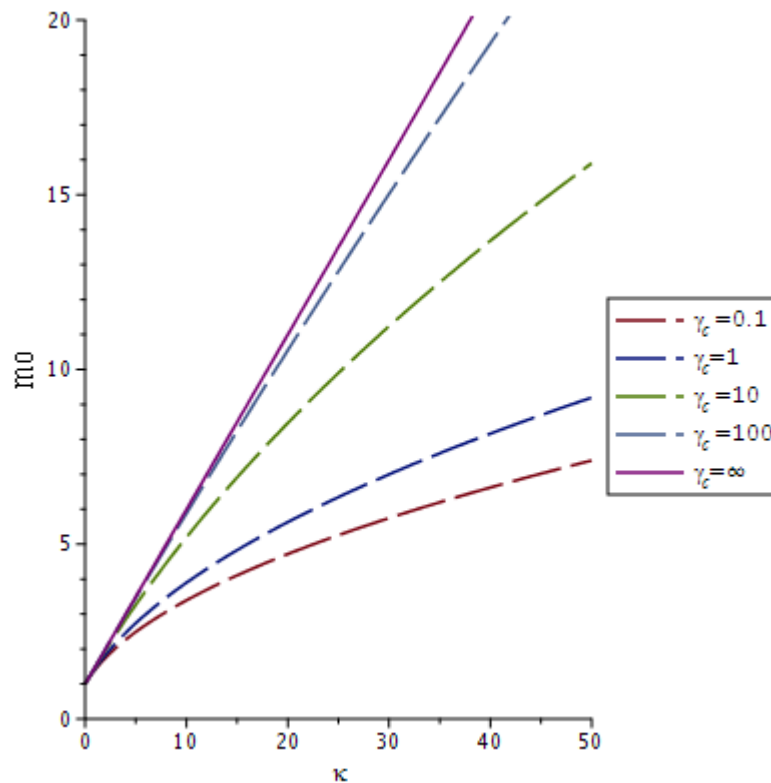


Figure 6-7 Variations du moment critique fonction de la rigidité de torsion (moment constant)

**CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA  
SEMELLE TENDUE**

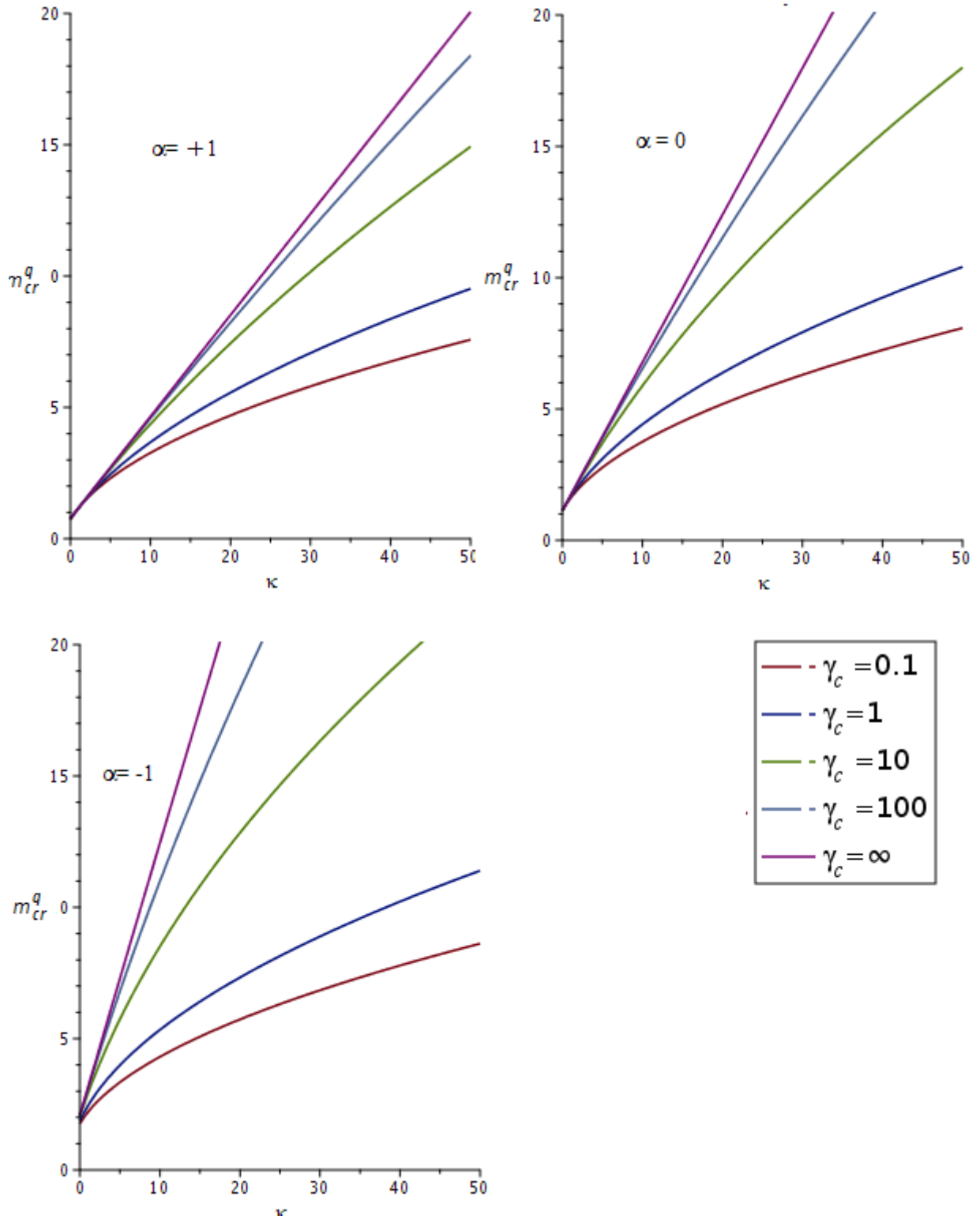


Figure 6-8 Variations du moment critique fonction de la rigidité de torsion (charge répartie)

**CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA  
SEMELLE TENDUE**

Pour les quatre cas, et lorsque  $\gamma_c = \infty$ , nous constatons que la variation du moment critique adimensionnel devient linéaire et varie uniquement en fonction du seul paramètre  $\kappa$ . Cette variation obéit à la même forme de fonction que celle donnée à l'équation (5-21) :

$$m_{cr} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \kappa \quad \text{Eq. 6-32}$$

Les coefficients  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$  dépendent de la variation du moment ainsi que de la position de la charge. Leurs valeurs sont données dans le tableau (6-7) ci-dessous.

Cas		$\tilde{C}_1$	$\tilde{C}_2$
Moment Constant		1.00	0.50
	$\alpha = +1$	0.78	0.39
Charge répartie	$\alpha = 0$	1.15	0.57
	$\alpha = -1$	2.15	1.07

Tableau 6-7 Valeurs des Coefficients  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$

Nous observons à partir des valeurs présentées dans le tableau (6-7) que pour  $\alpha = 0$  (charge uniforme appliquée au centre de cisaillement), la valeur  $\tilde{C}_1 = 1.15$  correspond à celle de  $C_1$  indiquée précédemment dans le tableau (6-5). Il en est de même pour le cas d'un moment constant ( $\tilde{C}_1 = C_1 = 1$ ).

Les coefficients obtenus sont identiques à ceux trouvés pour une poutre maintenue discrètement au niveau de la semelle tendue pour les plages de la rigidité de torsion étudiés dans le chapitre 5, ceci s'explique par le fait que le mode de déformation de la poutre avec maintien continue est le mode 1 pour toutes valeurs de  $\kappa$ .

### 6.3.6 Comparaison Numérique

Dans le but de comparer les résultats donnés par l'expression analytique proposée en (6-31) et ceux obtenus à l'aide du logiciel LTBeamN, les valeurs du moment critique adimensionnel sont calculées sur la base l'équation (6-31) puis multipliées par la charge critique d'Euler et

**CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA  
SEMELLE TENDUE**

par la moitié de la hauteur de la section ( $P_{cr} \frac{h}{2}$ ). Pour cette étude, nous considérons une poutre en IPE500 de 6 mètres de longueur ce qui fait que  $\kappa = 1.00$ . Une série de 56 modèles numériques a été effectuée afin de déterminer les valeurs du moment critique pour des poutres soumises à un moment constant et à une charge uniforme située, respectivement, sur la semelle comprimée, le centre de cisaillement et la semelle tendue. Pour chaque cas considéré numériquement, la valeur analytique du moment critique a été calculée. Les résultats de cette étude sont présentés dans les tableaux (6-8) et (6-9), où l'écart  $\Delta\%$  est calculé sur la base de l'équation (6-33).

$$\Delta = \frac{M_{cr}^{Anal} - M_{cr}^{Num}}{M_{cr}^{Anal}} \times 100 \quad \text{Eq. 6-33}$$

$\gamma_c$	Moment Constant - $M_{cr}$ (KN.m)		
	$M_{cr}^{Anal}$	$M_{cr}^{Num}$	$\Delta\%$
-	421,83	421,52	0,07%
0,1	423,52	422,94	0,14%
0,5	428,48	427,06	0,33%
1	432,35	430,25	0,49%
5	441,68	437,78	0,88%
10	444,18	439,78	0,99%
15	445,16	440,55	1,04%
25	446,01	441,22	1,07%
50	446,70	441,76	1,11%
100	447,05	442,03	1,12%
200	447,24	442,19	1,13%
500	447,35	442,27	1,13%
1000	447,38	442,29	1,14%
100000	447,42	442,34	1,14%

Tableau 6-8 Valeurs théoriques et numériques du moment critique (Moment Constant).

Les tableaux (6-8) et (6-9) montrent que la différence entre les valeurs obtenues par l'approche par éléments finis et celles obtenues par l'approche théorique est faible. La valeur maximale de cette différence est inférieure à 6%. Cela nous permet de conclure que l'approche théorique développée dans cette étude est fiable.

**CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA**

**SEMELLE TENDUE**

<b>Charge répartie - M<sub>cr</sub> (KN.m)</b>									
$\gamma_c$	$\alpha = +1$			$\alpha = 0$			$\alpha = -1$		
	$M_{cr}^{Anal}$	$M_{cr}^{Num}$	$\Delta\%$	$M_{cr}^{Anal}$	$M_{cr}^{Num}$	$\Delta\%$	$M_{cr}^{Anal}$	$M_{cr}^{Num}$	$\Delta\%$
-	344,8	343,3	0,44%	476,7	477,1	0,09%	659	662,4	0,53%
0,1	344,8	343,3	0,45%	478,6	478,3	0,07%	668,8	671,1	0,34%
0,5	344,8	343,2	0,47%	484,2	482,4	0,36%	701,2	699,2	0,29%
1	344,8	343,3	0,45%	488,6	485,8	0,56%	731,1	723,8	1,00%
5	344,9	343,5	0,38%	499,1	493,2	1,18%	832,9	805,8	3,26%
10	344,9	343,6	0,37%	501,9	495,6	1,26%	874	836,6	4,28%
15	344,9	343,7	0,35%	503,0	496,4	1,31%	893,1	850,4	4,79%
25	344,9	343,8	0,32%	504,0	497,7	1,26%	911,5	865,4	5,07%
50	344,9	344,1	0,23%	504,8	498,8	1,19%	927,8	879,1	5,25%
100	344,9	344,2	0,19%	505,2	499,6	1,10%	936,9	888,5	5,17%
200	344,9	344,5	0,12%	505,4	500,2	1,02%	941,7	894,5	5,01%
500	344,9	344,6	0,09%	505,5	500,7	0,96%	944,7	899,4	4,80%
1000	344,9	344,6	0,09%	505,5	500,9	0,93%	945,8	900,2	4,82%
100000	344,9	344,6	0,07%	505,6	501,2	0,86%	946,8	902,5	4,68%

Tableau 6-9 Valeurs théoriques et numériques du moment critique (Charge Répartie).

Les résultats ci-dessus montrent également que le maintien de la semelle tendue a une faible influence sur le moment critique lorsque la charge est appliquée sur la semelle comprimée et sur le centre de cisaillement. En revanche, lorsque la charge est appliquée au droit de la semelle maintenue (tendue) l'influence est considérable.

Comme récapitulatif, nous présentons dans le tableau (6-10) ci-dessous les valeurs du moment critique de déversement du cas étudié avec maintien continu infiniment rigide au niveau de la semelle tendue.

$M_{cr}$ IPE500 , L = 6 m ; P <sub>cr</sub> = 1232,8 KN; h= 0,5 m								
Cas		Eq. (6-32)	$\Delta\%$	Eq. (6-31)	$\Delta\%$	Eq. (6-14)	$\Delta\%$	Num
Moment Constant		462,30	4,32%	447,42	1,14%	442,09	-0,06%	442,34
Charge répartie	$\alpha = +1$	360,59	4,43%	344,87	0,07%	344,83	0,06%	344,63
	$\alpha = 0$	530,10	5,45%	505,58	0,86%	508,40	1,41%	501,23
	$\alpha = -1$	992,40	9,06%	946,78	4,68%	950,49	5,05%	902,47

Tableau 6-10 Comparaison entre les valeurs théoriques et numériques du moment critique

## **CHAPITRE 6 DÉVERSEMENT DES POUTRES AVEC MAINTIEN CONTINU LE LONG DE LA SEMELLE TENDUE**

Le tableau (6-10) représente une comparaison entre les valeurs obtenues par l'approche par éléments finis (LTBeamN) et celles obtenues par les approches théoriques développées dans le présent travail : l'approche utilisant la méthode de Galerkin (équation 6-14), celle utilisant la méthode de Ritz (équation 6-31) ou encore celle proposée à l'équation (6-32). Les écarts obtenus entre les résultats numériques et analytiques sont inférieurs à 10%. Cela nous permet de conclure que les approches théoriques développées dans cette étude sont raisonnablement fiables.

### **6.4 Conclusion**

L'étude d'une poutre maintenue de manière continue au droit de la semelle tendue a fait l'objet de ce chapitre. Nous avons étudié ce cas, en utilisant deux méthodes de résolution différentes, pour un maintien continu rigide puis un maintien continu élastique.

Les principales conclusions qui découlent de cette étude sont :

- La position de la charge influe considérablement sur les valeurs du moment critique.
- Le cas le plus défavorable est donné non pas par le cas d'un moment constant, mais par l'effet déstabilisant de la charge.
- Le maintien au droit de la semelle tendue peut apporter une amélioration de la stabilité au déversement de la poutre, cette amélioration est appréciable pour des valeurs importantes de la rigidité de torsion.

Enfin, Une expression du moment critique de déversement d'une poutre maintenue au droit de la semelle tendue a été proposée, cette dernière dépend du type de chargement représenté par des coefficients. La comparaison des différentes valeurs données par les expressions analytiques développées avec celles données par l'approche numérique par éléments finis donne des résultats satisfaisants.

## CONCLUSION

Avant de conclure, nous allons répondre de manière synthétique aux objectifs établis et initialement définis.

Après avoir défini la méthodologie adoptée dans le chapitre 1, nous avons présenté, au chapitre 2, les différents aspects ainsi des travaux de recherche relatifs au phénomène étudié. Le développement analytique a fait l'objet du chapitre 3, dans lequel, nous avons décrit à partir de la cinématique les expressions des potentiels énergétiques des poutres soumises à des cas de charges courants. Dans le chapitre 4 nous avons mis en évidence les principaux paramètres influençant la stabilité au déversement d'une poutre et principalement l'effet de la variation du diagramme du moment fléchissant représenté par le coefficient  $C_1$ . A l'aide des méthodes de résolution, nous avons écrit l'expression générale du moment critique de déversement élastique, laquelle a été déterminé à l'aide des deux méthodes. Des valeurs du coefficient  $C_1$  identiques à celles données par les codes de calcul [4, 5] ont été déterminées. Nous avons proposé une formule alternative à celle proposée par le CCM 97 [4], qui donne les valeurs du coefficient  $C_1$  pour un chargement par des moments d'extrémités.

Dans le chapitre 5, nous avons étudié le déversement des poutres bi symétriques comportant un maintien discret au niveau d'une semelle. Nous avons procédé au changement de la position du maintien dans le sens transversal et étudié, pour chaque position, l'effet de la variation du moment fléchissant ainsi que la position de la charge. Plusieurs remarques ont été faites dans ce chapitre dont les principales sont :

- La position du maintien ainsi que sa rigidité n'influencent pas les valeurs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$ .
- La valeur de la rigidité minimale, pour laquelle le maintien est considéré fixe, varie en fonction de la position du maintien.

- Le maintien au droit de la semelle tendue peut constituer un blocage à partir d'une valeur limite de la rigidité de torsion.

A l'issue de ce chapitre, deux formules ont été proposées, la première est une expression permettant de calculer la rigidité limite pour considérer le maintien fixe, la deuxième est une expression simple pour calculer le moment critique de déversement d'une poutre avec maintien discret à mi travée au droit de la semelle tendue.

Dans le 6<sup>ème</sup> chapitre, nous avons étudié le cas d'une poutre avec maintien continu au niveau de la semelle tendue. A cette fin, nous avons rajouté l'énergie d'un maintien latéral continu dans l'expression du potentiel. En faisant appel à la méthode de Galerkin, pour le cas d'un maintien rigide, et à celle de Ritz, pour le cas d'un maintien élastique, nous avons écrit l'expression du moment critique d'une poutre, avec maintien continu rigide au niveau de la semelle tendue, soumise à un moment constant ou à une charge uniformément répartie. Suite à l'analyse des différents paramètres influençant la variation du moment critique, nous avons proposé une expression du moment critique de déversement des poutres bi symétriques avec maintien latéral au niveau de la semelle tendue avec prise en compte de la position de la charge.

### **Contributions majeures**

Les contributions majeures de ce travail sont :

- La proposition d'une expression alternative à celle proposée par le CCM 97, qui donne des valeurs du coefficient  $C_1$  pour le cas d'un chargement par des moments d'extrémités.
- La proposition d'une expression permettant de déterminer la valeur de la rigidité minimale, pour laquelle le maintien est considéré fixe et cela pour toutes les positions transversales de ce maintien.
- La proposition d'une expression simplifiée pour le calcul du moment critique des poutres maintenues rigidement à mi travée dans les cas courants.

- La proposition d'une expression simplifiée pour les poutres avec maintien continu rigide au niveau de la semelle tendue dans les cas courants.

### Travaux futurs de recherche et perspectives

Les recherches menées dans le cadre de cette thèse ont dégagé un certain nombre de sujets pour lesquels des investigations seraient prometteuses au vu des intérêts de la communauté scientifique et technique. Parmi ces sujets on peut citer les thèmes donnés ci-après.

- *L'étude de l'influence des conditions d'appuis sur le moment critique de déversement élastique :*

La formule présentée par l'Eurocode 3 pour le calcul du moment critique de déversement prend en considération les conditions d'appuis à travers le coefficient de flambement «  $k_z$  » et celui du gauchissement «  $k_w$  ». Les valeurs du coefficient de flambement proposées se limitent à deux cas de figures à savoir celui d'une poutre articulée ( $k_z=1$ ) ou celui d'une poutre encastree ( $k_z=0.5$ ). L'étude de l'influence d'autres conditions d'appuis peut être faite afin de proposer une expression du moment critique de déversement élastique en fonction de la rigidité des assemblages.

- *L'étude de l'effet de la dissymétrie de la section sur la stabilité au déversement des poutres en flexion :*

Les Profils Reconstitués Soudés (PRS) sont généralement utilisés dans le but d'économiser la quantité d'acier utilisée dans la structure. La section transversale de ces derniers qui peut être constante ou variable est souvent dissymétrique.

L'effet de la dissymétrie de la section par rapport à l'axe de forte inertie, sur la stabilité au déversement des poutres, est pris en compte dans la réglementation par le biais du coefficient  $C_3$ . Dans le cadre de la présente recherche, nous avons constaté que les valeurs de ce coefficient peuvent être différentes par rapport à celles proposées par le code. De ce fait, il serait intéressant de mener une étude pour prendre en considération l'effet de la dissymétrie de la section sur le moment critique de déversement et cela en fonction du rapport des aires des semelles du profilé.

Pour les poutres en PRS, on peut introduire, aussi, l'effet de l'élançement de l'âme ainsi que celui des déformations de cisaillement dans l'étude de leur stabilité vis-à-vis du déversement.

- *L'effet des imperfections géométriques et des contraintes résiduelles sur la stabilité au déversement des poutres :*

Le moment critique de déversement permet de calculer la résistance de la poutre au déversement en prenant en considération l'effet de ses différentes imperfections conformément à la procédure donnée dans la réglementation [4,5].

L'introduction de l'effet des imperfections aux hypothèses de calcul permet d'avoir directement les valeurs du moment résistant au déversement. Ces imperfections peuvent faire l'objet d'un modèle analytique par l'introduction d'une déformée initiale qui englobe la totalité des imperfections ou d'une analyse numérique par la méthode des éléments finis dans laquelle seront introduites ces imperfections séparément.

- *Longueur critique :*

Les éléments secondaires comme, les pannes de toiture, sont disposés généralement de manière équidistante pour des simplifications de montage et de calcul. Cette distance peut varier entre 80 cm et 180 cm. Les pannes représentent des maintiens discrets pour la traverse du portique. Il serait bénéfique de mener une étude pour la détermination de la distance entre les pannes à partir de laquelle ces dernières peuvent jouer le rôle d'un maintien continu et ceci pour diverses gammes de profilés bi symétriques. Cette étude peut être complétée par une recherche sur l'évaluation de la rigidité du maintien constitué par une panne en fonction des caractéristiques géométriques de cette dernière ainsi que de son chargement.

## **Annexe A**

## RÉSOLUTION POUR LE CALCUL DU MOMENT CRITIQUE PAR LA MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LE CAS D'UN MOMENT CONSTANT

Dans la figure A.1, on considère qu'une poutre est soumise à un moment constant appliqué dans le plan XZ (plan de rigidité maximale). Si une petite déviation latérale se produit en raison de cette application de charge, nous pouvons trouver facilement les valeurs critiques des charges en formant les équations différentielles d'équilibre pour cette poutre déformée. Pour cela, il faut définir les axes de coordonnées fixes X, Y, Z comme illustré dans la figure(A.1) (S.P.Timoshenko et al. 1961).

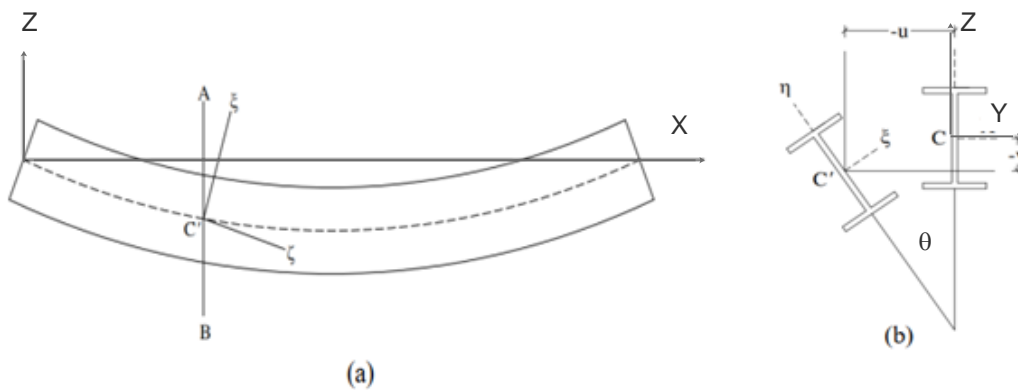


Figure A-1: Déplacements Induits par le Déversement

L'équation (3.32) devient :

$$EI_{\omega} \theta^{(4)} - (GJ - 2M_0 \beta_z) \theta'' - \left( \frac{M_0^2}{EI_z} \right) \theta = 0 \quad \text{Eq. A-1}$$

Soit :

$$C_1 = EI_{\omega} \quad ; \quad C = (GJ - 2M_0\beta_z) \quad ; \quad \alpha = \frac{C}{2C_1} \quad ; \quad \beta = \frac{M_0^2}{C_1 EI_z}$$

L'équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} - 2\alpha \frac{d^2\theta}{dx^2} - \beta\theta = 0 \quad \text{Eq. A-2}$$

La solution générale de l'équation est :

$$\theta = A_1 \sin mx + A_2 \cos mx + A_3 e^{nx} + A_4 e^{-nx}$$

$$m, n \in \mathbb{R}^+$$

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}$$

$$n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}$$

Les constantes  $A_i$ , ( $i = 1, 2, 3$  et  $4$ ) seront déterminées par les conditions aux limites de la

poutre, pour  $x=0$  et  $x=L$ , et qui sont :  $\theta = \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0$

De la condition  $x=0$ , nous concluons que  $A_2 = 0$  et  $A_3 = -A_4$  donc :

$$\theta = A_1 \sin mx - 2A_4 \operatorname{sh}nx$$

En utilisant les conditions à  $x = L$ , nous obtenons :

$$A_1 \sin mL - 2A_4 \operatorname{sh}nL = 0 \quad \text{Eq. A-3}$$

$$A_1 m^2 \sin mL - 2A_4 n^2 \operatorname{sh}nL = 0 \quad \text{Eq. A-4}$$

$$\begin{bmatrix} \sin mL & \operatorname{sh}nL \\ m^2 \sin mL & n^2 \operatorname{sh}nL \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ -2A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En annulant le déterminant de cette équation matricielle, on obtient :

$$\det \begin{bmatrix} \sin mL & \operatorname{sh}nL \\ m^2 \sin mL & n^2 \operatorname{sh}nL \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\sin mL) \cdot (n^2 \operatorname{sh}nL + m^2 \operatorname{sh}nL) = 0$$

$m$  et  $n$  sont définis positifs différents de zéro donc :

$$\sin mL = 0$$

On remplace ce résultat dans l'équation (A.4) et on aura :  $A_4 = 0$

Finalement la solution est :

$$\theta = A_1 \sin mx$$

La plus petite valeur de  $m$  qui satisfait l'équation est :  $m = \frac{\pi}{L}$

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \Rightarrow -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\alpha = \frac{C}{2C_1}; \beta = \frac{M_0^2}{C_1 EI_z}$$

donc :

$$-\frac{C}{2C_1} + \sqrt{\frac{C^2}{4C_1^2} + \frac{M_0^2}{C_1(EI_z)}} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

alors :

$$-\frac{(GJ - 2\beta_z M_0)}{2EI_\omega} + \sqrt{\frac{(GJ - 2\beta_z M_0)^2}{4(EI_\omega)^2} + \frac{M_0^2}{(EI_\omega)(EI_z)}} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme d'une équation du second ordre :

$$M_0^2 + 2(\beta_z EI_z \frac{\pi^2}{L^2})M_0 - EI_z \frac{\pi^2}{L^2} (GJ + EI_\omega \frac{\pi^2}{L^2}) = 0 \quad \text{Eq. A-5}$$

Dont la solution est :

$$M_{cr} = P_{cr} \left\{ \beta_z \pm \sqrt{\beta_z^2 + \left( \frac{L^2 GJ}{EI_z \pi^2} + \frac{EI_\omega}{EI_z} \right)} \right\} \quad \text{Eq. A-6}$$

ou bien :

$$M_{cr} = EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ \beta_z \pm \sqrt{\beta_z^2 + \left( \frac{L^2 GJ}{EI_z \pi^2} + \frac{I_\omega}{I_z} \right)} \right\} \quad \text{Eq. A-7}$$

## **Annexe B**

## MODÉLISATION PAR LE LOGICIEL LTBEAMN

### B.1 Présentation LTBeamN

Le logiciel LTBeamN traite de la stabilité élastique de poutres droites fléchies et/ou comprimées vis-à-vis du phénomène d'instabilité élastique hors-plan (déversement, flambement latéral par flexion ou flexion-torsion, flambement par torsion) en déterminant en particulier un facteur critique de chargement  $\mu_{cr}$ . L'acronyme LTBeamN vient de l'anglais "Lateral Torsional Buckling of Beams" (déversement des poutres), avec à la fin la mention "N" pour indiquer qu'ici les poutres peuvent être soumises, en plus de la flexion M, à un effort normal N. Cette mention "N" permet de distinguer cette application de sa version précédente nommée LTBeam mise à disposition depuis 2002 sur les sites du CTICM et qui, elle, ne prend pas en compte l'effort normal.

La poutre étant soumise à un chargement donné de flexion M mono-axiale (généralement dans son plan de forte inertie), le logiciel LTBeamN recherche le multiplicateur  $\mu_{cr}$  de ce chargement qui provoque la bifurcation d'équilibre par instabilité hors-plan. Le logiciel en déduit ainsi les valeurs critiques  $M_{cr}$  du moment maximal dans la poutre, valeurs généralement nécessaires dans le cadre d'une vérification de résistance de la poutre vis-à-vis du déversement. Le logiciel donne des informations sur l'allure du mode fondamental d'instabilité élastique (premier mode propre), ainsi que sur des modes propres d'ordres supérieurs si demandé.

Dans ce logiciel, la modélisation du comportement de la poutre fait appel à une technique d'éléments finis de type "barre" qui impose une discrétisation de la poutre en un certain nombre de petits éléments, c'est-à-dire ici un tronçonnage longitudinal de la poutre. Les composantes de déplacement, appelées aussi degrés de liberté, prises en compte à chaque nœud ainsi créé sont au nombre de quatre et sont essentiellement des déplacements hors-plan, soit :

le déplacement latéral ( $v$ ) ;

la rotation longitudinale de torsion ( $\theta$ );

la rotation de flexion latérale ( $v'$ );

et la déformation de gauchissement ( $\theta'$ ).

Un découplage total existe donc vis-à-vis des composantes de déplacement dans le plan (déplacement  $w$ , rotation dans le plan  $w'$  et déplacement axial  $u$ ).

La détermination du multiplicateur critique  $\mu_{cr}$  est réalisée par résolution du problème aux valeurs propres associé, exprimé à partir d'un bilan énergétique à l'instabilité, et établi dans le cadre d'une théorie linéaire de la stabilité.

## **B.2 Domaine d'application**

Le logiciel couvre les types de profils suivants :

- profils en I doublement symétriques avec ou sans renfort de jarret additionnel ;
- profils en I mono-symétriques (symétriques par rapport au plan de flexion), jusqu'au cas particulier des profils en T ;
- profils quelconques définis par leurs propriétés géométriques (inertie de torsion, inertie de gauchissement).

Dans ce logiciel, les sections sont indéformables (en particulier, pas de voilement local pris en compte, ni de distorsion dans leur plan). Par contre, la déformation de gauchissement est considérée.

Le logiciel permet de définir les conditions d'appuis dans le plan de flexion (appuis) et hors-plan (maintiens latéraux) aux extrémités et le long de la poutre.

Des maintiens latéraux ponctuels ou continus peuvent être définis le long de la poutre. Ils se situent dans le plan de flexion, au niveau ou pas du centre de cisaillement. Les conditions de maintien latéral concernent : ( $v$ ), ( $\theta$ ), ( $v'$ ), et ( $\theta'$ ).

Au droit des maintiens latéraux, chacun de ces déplacements peut être : bloqué, libre ou restreint élastiquement.

### B.3 Interface

La fenêtre principale du logiciel présente les mêmes caractéristiques et les mêmes fonctionnalités que les applications Windows habituelles, c'est à partir de là que nous pouvons introduire les différentes données du modèle.

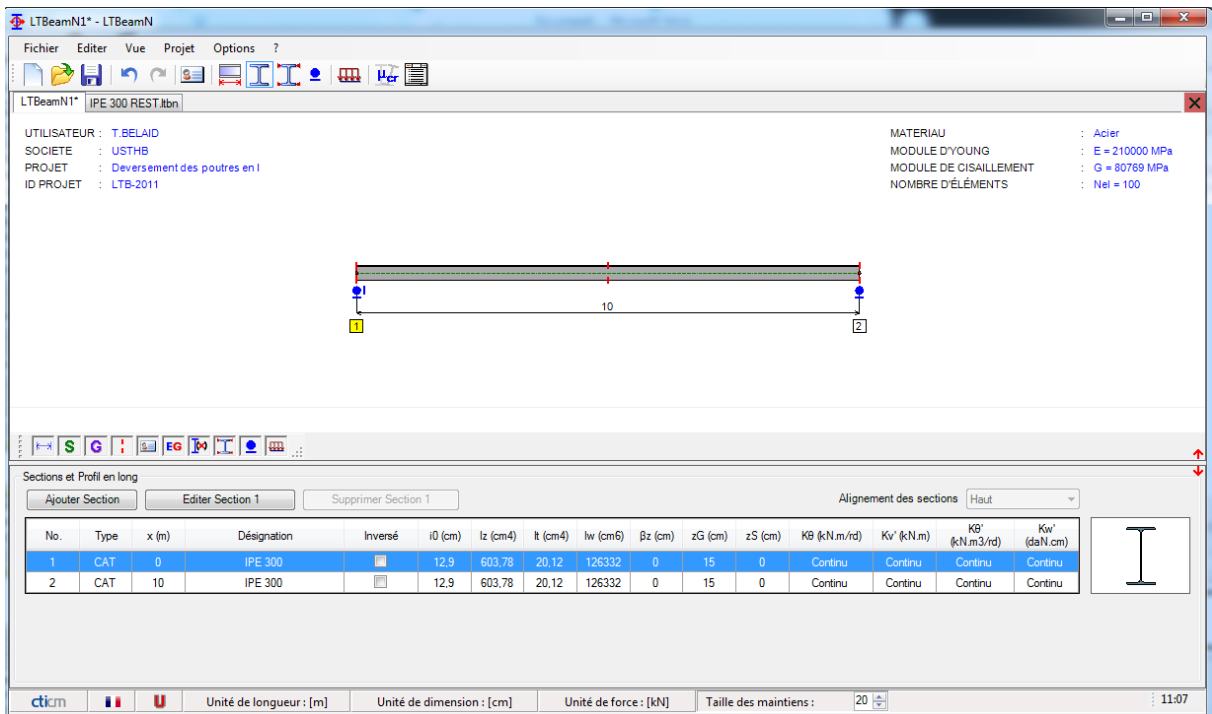


Figure B-1 Interface d'accueil LTBeamN

### B.4 Modélisation

#### B.4.1 Définition de la poutre

Le logiciel est conçu pour traiter des poutres en acier, mais d'autres matériaux peuvent être utilisés à condition d'en préciser correctement les propriétés et de s'assurer que la base théorique du logiciel leur est applicable. Les propriétés du matériau nécessaires aux calculs sont essentiellement E (Module de Young), G (Module de Cisaillement) et ν (Coefficient de poisson).

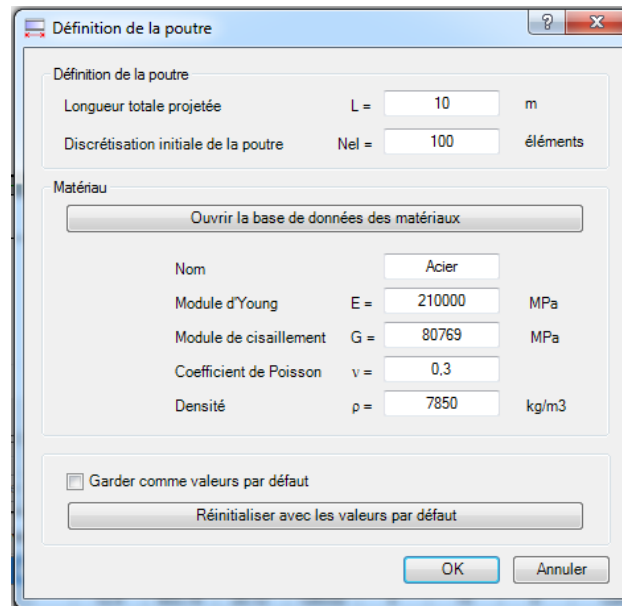


Figure B-2 Boîte de dialogue « Définition Poutre »

La boîte de dialogue montrée dans la figure (B-2) permet de définir la longueur totale projetée qui varie de 0m à 100 m, le nombre d'éléments de discrétisation initiale compris entre 100 et 300 éléments. Dans notre cas nous avons opté pour des discrétisations de 100 éléments.

#### B.4.2 Choix de la section

Les données des sections peuvent être affichées en cliquant sur le bouton situé sur la barre d'outils ou à partir du menu Projet / Sections.

Le profil en long de la poutre est affiché dans la zone graphique de la fenêtre principale. Les sections définies le long de la poutre sont numérotées de gauche à droite. Le choix de la section se fait par un double clique sur la désignation de la section. Ceci ouvrira une fenêtre dans laquelle nous pouvons choisir le profilé à étudier.

#### B.4.3 Les maintiens

Il est possible de choisir le type de maintien latéral : maintien ponctuel ou maintien continu. Le maintien continu peut s'étendre sur toute la longueur de la poutre ou sur une partie de sa longueur. Nous pouvons manipuler ceci sur la fenêtre indiquée sur la figure (B-3).

**B.4.3.1 Maintien ponctuel**

Le maintien ponctuel est défini par :

- $x$  Position horizontale (abscisse) du maintien.
- $z$  Position verticale du maintien.
- $v$  Condition de maintien en déplacement latéral (bloqué, libre ou ressort avec une rigidité à définir).
- $v'$  Condition de maintien en rotation latérale (bloquée, libre ou ressort avec une rigidité à définir).
- $\theta$  Condition de maintien en rotation de torsion (bloquée, libre ou ressort avec une rigidité à définir).
- $\theta'$  Condition de maintien en déformation de gauchissement (bloquée, libre ou ressort avec une rigidité à définir).

**B.4.3.2 Maintien continu**

Le maintien continu est défini par :

- $x_1, x_2$  Positions horizontales des extrémités gauche et droite du maintien continu, définies par rapport à une section numérotée de la barre.
- $z_1, z_2$  Positions verticales des extrémités gauche et droite du maintien continu, définies par rapport : au centre de cisaillement, au centre de gravité, à la fibre supérieure (haut) ou à la fibre inférieure (bas).
- $v$  Condition de maintien en déplacement latéral (bloqué, libre ou ressort avec une rigidité à définir).
- $v'$  Condition de maintien en rotation latérale (bloquée, libre ou ressort avec une rigidité à définir).
- $\theta$  Condition de maintien en rotation de torsion (bloquée, libre ou ressort avec une rigidité à définir).
- $\theta'$  Condition de maintien en déformation de gauchissement. Par défaut, ce maintien est libre. Cette condition n'est pas modifiable.

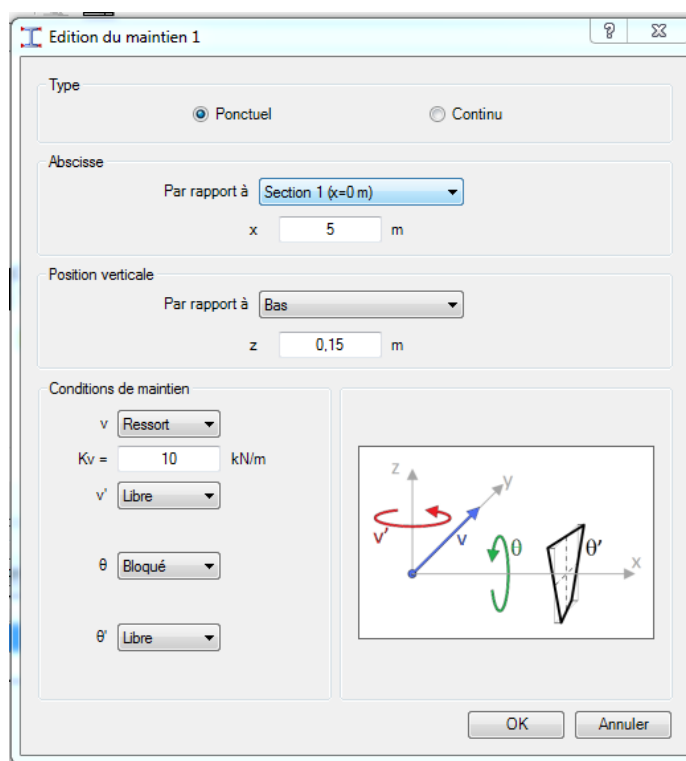


Figure B-3 Boite de dialogue « Édition du maintien »

#### B.4.4 Paramètre d'un appui

Cette boîte de dialogue permet de définir un nouvel appui ou d'éditer un appui sélectionné.

- $x$  Position horizontale de l'appui, définie par rapport à une section numérotée de la barre.
- $u$  Condition d'appui en déplacement longitudinal (bloqué, libre ou ressort avec une rigidité à définir).
- $w$  Condition d'appui en déplacement vertical (bloqué, libre ou ressort avec une rigidité à définir).
- $w'$  Condition d'appui en rotation dans le plan de flexion (bloquée, libre ou ressort avec une rigidité à définir).

#### B.4.5 Chargement

Le logiciel permet de choisir un des deux types de chargement suivants :

*Chargement externe :*

Défini explicitement à l'aide de forces, couples ou charges réparties agissant dans le plan unique de flexion et appliqués ou non au centre de cisaillement. Prenant en compte les conditions d'appuis définies dans le plan (appuis), le logiciel détermine ensuite les diagrammes de sollicitations (notamment  $M$ ) par une analyse élastique au premier ordre; en cas de compression axiale significative, une analyse au second ordre prenant en compte la déformée dans le plan peut être réalisée à la demande de l'utilisateur. Une information sur la déformée en plan est également donnée.

*Chargement interne :*

Le diagramme de moment fléchissant  $M$  est défini directement par l'utilisateur, les éventuelles charges transversales appliquées en dehors du centre de cisaillement sont aussi à définir pour prendre en compte leur effet stabilisant ou déstabilisant sur le déversement.

Nous pouvons aussi charger la poutre par les différents cas de charges, puis effectuer une analyse au cas par cas, par l'activation du cas à étudier comme indiqué sur la figure ci-dessous.

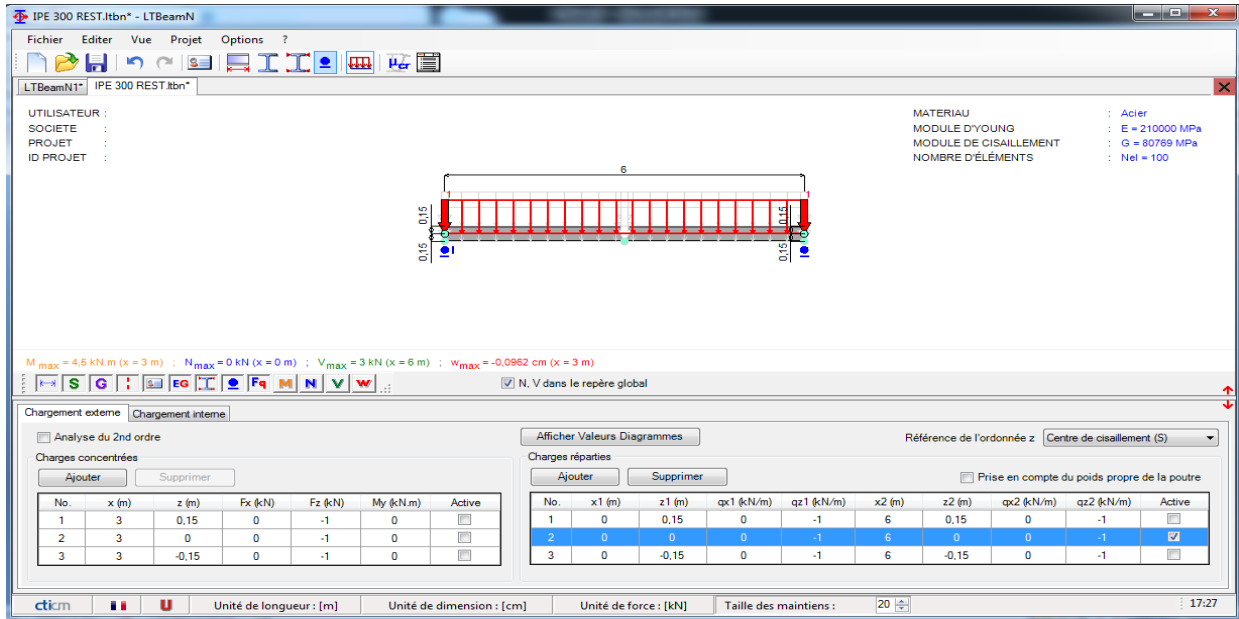


Figure B-4 Boite de dialogue « Chargement »

### B.5 Résultats

Le logiciel nous donne directement la valeur du moment critique de déversement du cas étudié et cela par le calcul du multiplicateur critique  $\mu_{cr}$  pour l'instabilité hors plan. Les valeurs critiques des sollicitations maximales sont alors données par :

$$M_{max,cr} = \mu_{cr} \cdot M_{max}$$

Nous pouvons aussi calculer simultanément plusieurs modes d'instabilité. Les résultats de calcul sont représentés sous forme de tableau dont chaque ligne correspond à un mode d'instabilité.

Mode	$\mu_{cr}$	Mmax,cr [kN.m]	x (Mmax) [m]	Nmax,cr [kN] (*)	x (Nmax) [m]
1	74,64	335,89	3	0	3
2	159,93	719,69	3	0	3
3	282,24	1270,1	3	0	3

Figure B-5 Boite de dialogue « Tableau des résultats »

En sélectionnant une ligne du tableau des modes d'instabilité, la déformée modale associée est affichée en 3D dans la zone graphique de la fenêtre principale.

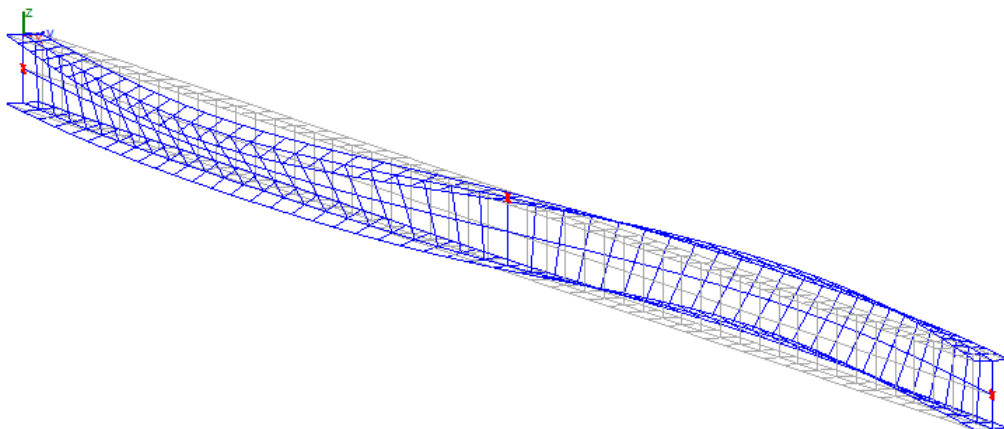


Figure B-6 Déformée de la poutre

L'allure des quatre composantes du vecteur propre associé le long de la poutre est présentée dans le dessin situé à droite du tableau des modes. Ces composantes sont :

- Le déplacement latéral ( $v$ ).
- La rotation de torsion ( $\theta$ ).
- La rotation de flexion latérale ( $v'$ ).
- La déformation de gauchissement ( $\theta'$ ).

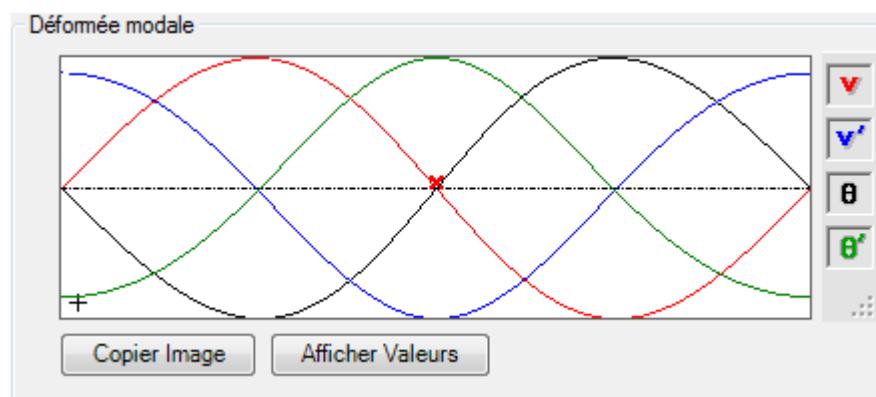


Figure B-7 Déformées modales

Le vecteur propre peut être édité numériquement en cliquant sur le bouton "Afficher Valeurs" dans le cadre "Déformée modale". Une feuille apparaît alors, affichant un tableau à 5 colonnes qui sont les composantes de déplacement du centre de cisaillement des sections définies pour chacun des nœuds de la discrétisation.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] M. A. Hirt, R. Bez, and A. Nussbaumer, *Construction métallique: notions fondamentales et méthodes de dimensionnement* vol. 10: PPUR presses polytechniques, 2006.
- [2] J. Scheer, *Failed bridges: case studies, causes and consequences*: John Wiley & Sons, 2011.
- [3] L. Zhang and G. Tong, "Flexural–torsional buckling of thin-walled beam members based on shell buckling theory," *Thin-Walled Structures*, vol. 42, pp. 1665-1687, 2004.
- [4] "DTR-BC-2.44," *Règles de Conception de Calcul des Structures Métalliques «CCM 97»*, ed: Ministère de l’habitat Algérie., 1998.
- [5] "EN 1993-1-1: Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings," ed: Comité Européen de Normalisation, 1992.
- [6] APK. *Stabilité appliquée*. Available: <http://www.mmaya.fr/Insta/amphi/index.htm>
- [7] V. Manet, "La Méthode des éléments Finis Vulgarisation des aspects mathématiques Illustration des capacités de la méthode," *DEA. Eléments finis pour l’ingénieur, ViM2, Lyon*, p. 306, 2012.
- [8] Y. Galéa, "Moment critique de déversement élastique de poutres fléchies. Présentation du logiciel LTBEAM," *Construction métallique*, vol. 40, pp. 47-76, 2003.
- [9] M. K. Ferradi, "Nouveaux modèles d’éléments finis de poutres enrichies," Université Paris-Est, 2015.
- [10] V. Vlasov, "Thin-Walled Elastic Bars (Tenkostěnné pružné pruty)," *Prague: Czechoslovak Academy of Sciences Publishing*, 1962.
- [11] H. Alastair, I. David, and M. Abdul, *Design of steel beams in torsion in accordance with Eurocodes: Steel Construction Institute: SCI*, 2011.
- [12] N. S. Trahair, *Flexural-torsional buckling of structures*: Routledge, 1993.
- [13] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of elastic stability*: McGraw-Hill 1961.
- [14] B. Larue, A. Khelil, and M. Gueury, "Evaluation of the lateral-torsional buckling of an I beam section continuously restrained along a flange by studying the buckling of an isolated equivalent profile," *Thin-walled structures*, vol. 45, pp. 77-95, 2007.
- [15] N. S. Trahair, M. Bradford, D. Nethercot, and L. Gardner, *The behaviour and design of steel structures to EC3*: CRC Press, 2007.
- [16] T. V. Galambos and A. E. Surovek, *Structural stability of steel: concepts and applications for structural engineers*: John Wiley & Sons, 2008.

- [17] R. D. Ziemian, *Guide to stability design criteria for metal structures*: John Wiley & Sons, 2010.
- [18] B. Larue, A. Khelil, and M. Gueury, "Elastic flexural–torsional buckling of steel beams with rigid and continuous lateral restraints," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 63, pp. 692-708, 2007.
- [19] J. Clark and H. Hill, "Lateral buckling of beams," *Journal of the Structural Division*, vol. 86, pp. 175-196, 1960.
- [20] A. Andrade and D. Camotim, "Lateral–torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications," *Journal of engineering mechanics*, vol. 131, pp. 586-597, 2005.
- [21] L. Gardner, *Stability of steel beams and columns in accordance with Eurocodes and the UK National Annexes*. Ascot, UK: Steel Construction Institute: SCI, 2011.
- [22] T. V. Galambos, *Guide to stability design criteria for metal structures*: John Wiley & Sons, 1998.
- [23] M. Brettle and D. Brown, "Steel Building Design: Concise Eurocodes," *SCI Publication P*, vol. 362, p. 2009, 2009.
- [24] Y. Galéa, "Déversement élastique d'une poutre à section bi-symétrique soumise à des moments d'extrémité et une charge répartie ou concentrée," *Construction métallique*, vol. 2, pp. 59-83, 2002.
- [25] M. A. Serna, A. López, I. Puente, and D. J. Yong, "Equivalent uniform moment factors for lateral–torsional buckling of steel members," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 62, pp. 566-580, 2006.
- [26] AISC-LRFD, "Manual of steel construction: Load and resistance factor design," ed: AISC Chicago, 2001.
- [27] P. Kirby and D. A. Nethercot, *Design for structural stability*: Halsted Press, 1979.
- [28] B. Suryoatmono and D. Ho, "The moment–gradient factor in lateral–torsional buckling on wide flange steel sections," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 58, pp. 1247-1264, 2002.
- [29] J. A. Yura, "Fundamentals of beam bracing," *Engineering journal-American institute of steel construction*, vol. 38, pp. 11-26, 2001.
- [30] H. Lee, C. Nguyen, J. Moon, and H. Joo, "Lateral-torsional buckling of discretely-braced i-girder," *Procedia engineering*, vol. 14, pp. 264-271, 2011.
- [31] F. McCann, L. Gardner, and M. A. Wadee, "Design of steel beams with discrete lateral restraints," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 80, pp. 82-90, 2013.
- [32] E. Mohammadi, S. S. Hosseini, and M. S. Rohanimanesh, "Elastic lateral-torsional buckling strength and torsional bracing stiffness requirement for monosymmetric I-beams," *Thin-Walled Structures*, vol. 104, pp. 116-125, 2016.
- [33] L. Zhang and G.-s. Tong, "Lateral buckling of simply supported C-and Z-section purlins with top flange horizontally restrained," *Thin-Walled Structures*, vol. 99, pp. 155-167, 2016.
- [34] N. Ings and N. Trahair, "Lateral buckling of restrained roof purlins," *Thin-Walled Structures*, vol. 2, pp. 285-306, 1984.
- [35] M. A. Bradford, "Lateral-distortional buckling of continuously restrained columns," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 42, pp. 121-139, 1997.

- [36] M. A. Bradford and H. R. Ronagh, "Generalized elastic buckling of restrained I-beams by FEM," *Journal of Structural Engineering*, vol. 123, pp. 1631-1637, 1997.
- [37] A. Khelil and B. Larue, "Simple solutions for the flexural-torsional buckling of laterally restrained I-beams," *Engineering Structures*, vol. 30, pp. 2923-2934, 2008.
- [38] Z. Vrcelj and M. A. Bradford, "Inelastic restrained distortional buckling of continuous composite T-beams," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 65, pp. 850-859, 2009.
- [39] W. F. Zhang, H. Y. Sui, Z. Wang, and J. Ji, "Buckling analysis of two-span continuous beams with lateral elastic brace under uniform load," in *Advanced Materials Research*, 2011, pp. 641-645.
- [40] I. Balázs and J. Melcher, "Lateral torsional buckling of steel thin-walled beams with lateral restraints," *International Journal of Structural and Construction Engineering*, vol. 9, pp. 730-735, 2015.
- [41] J. P. S. de Oliveira, A. F. G. Calenzani, R. H. Fakury, and W. G. Ferreira, "Elastic critical moment of continuous composite beams with a sinusoidal-web steel profile for lateral-torsional buckling," *Engineering Structures*, vol. 113, pp. 121-132, 2016.
- [42] J.-s. Lei and L.-y. Li, "Combined web distortional and lateral-torsional buckling of partially restrained I-section beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 131, pp. 107-112, 2017.
- [43] T. Belaid, F. Ammari, and R. Adman, "Influence of load position on critical lateral torsional buckling moment of laterally restrained beam at tense flange," *Asian Journal of Civil Engineering*, vol. 19, pp. 839-848, 2018.
- [44] N. Trahair, M. Bradford, D. Nethcot, and L. Gardner, "The behaviour and design of steel structures to EC3," ed: Tylor&Fracis, 2010.
- [45] A. Flint, "The stability and strength of slender beams," *Engineering*, vol. 170, p. 545, 1950.
- [46] D. A. Nethcot, "Buckling of laterally or torsionally restrained beams," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 99, 1973.
- [47] F. McCann, "Stability of beams with discrete lateral restraints," 2012.
- [48] "EN 1993-1-1: Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings," ed: Comité Européen de Normalisation, 2005.
- [49] "Eurocode 3: Design of steel structures—General rules and rules for buildings BS EN 1993-1-3: 2006," in *Eurocode 3: Design of steel structures—General rules—Supplementary rules for cold formed members and sheeting*, ed: Comité Européen de Normalisation, 2006.
- [50] A. M. Michell, "Elastic stability of long beams under transverse forces," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 48, pp. 298-309, 1899.
- [51] L. Prandtl, "Kipperscheinungen," *Ein Fall von instabilem elastischem Gleichgewicht. Inaugural Dissertation d. Phil. Fakultät, Sekt. IId. Ludwigs-Maximilians-Universität München*, 1899.
- [52] A. Eggenschwyler, "Über die Festigkeitsberechnung von Schiebetoren und ähnlichen Bauwerken," ETH Zurich, 1921.

- [53] R. Kappus, "Drillknicken zentrich gedrückter Stäbe mit offenem profil im elastischen Bereich/ Twisting failure of centrally loaded open-section columns in the elastic range" *Luftfahrtforschung* vol. 851 pp. 44–57 Translated in NACA TM 851 (1938), 1937.
- [54] H. Wagner, "Verdrehung und knickung von offenen profilen (Torsion and buckling of open sections)," in *25th Anniversary Publication, Technische Hochschule, Danzig*, p. Translated in NACA TM 807 (1936). 1929.
- [55] D. Kerdal and D. Nethercot, "Failure modes for castellated beams," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 4, pp. 295-315, 1984.
- [56] D. Kerdal, "Lateral-torsional buckling strength of castellated beams," University of Sheffield, 1982.
- [57] F. Mohri, A. Brouki, and J. Roth, "Déversement des poutres en I sous chargements asymétriques. 'Lateral buckling of I beams under asymmetric loads'," *Revue Construction Métallique*, vol. 2, pp. 43-52, 2000.
- [58] F. Mohri, L. Azrar, and M. Potier-Ferry, "Flexural–torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections," *Thin-walled structures*, vol. 39, pp. 907-938, 2001.
- [59] F. Mohri, A. Brouki, and J. Roth, "Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 59, pp. 63-90, 2003.
- [60] F. Mohri, N. Damil, and M. Potier-Ferry, "Un modèle éléments finis pour le calcul non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes," in *7e colloque national en calcul des structures*, 2005.
- [61] A. B. Benyamina, S. A. Meftah, and F. Mohri, "Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-beams," *Engineering structures*, vol. 56, pp. 1207-1219, 2013.
- [62] M. Soltani, B. Asgarian, and F. Mohri, "Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the power series method," *Journal of constructional steel research*, vol. 96, pp. 106-126, 2014.
- [63] M. Soltani, B. Asgarian, and F. Mohri, "Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams," *Thin-Walled Structures*, vol. 82, pp. 245-261, 2014.
- [64] H. Achref, M. Foudil, and B. Cherif, "Higher buckling and lateral buckling strength of unrestrained and braced thin-walled beams: Analytical, numerical and design approach applications," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 155, pp. 1-19, 2019.
- [65] F. Ammari, R. Adman, and D. Boukhalfa, "Lateral buckling stability of trussed beam with under uniformly distributed loads," *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*, vol. 5, pp. 277-285, 2013.
- [66] T. Belaid, F. Ammari, R. Adman, and D. Boukhalfa, "Stabilité au déversement des treillis en « N » sous charge uniformément répartie," presented at the CICOMM, Alger, 2018.
- [67] N. S. Trahair and S. Kitipornchai, "Elastic lateral buckling of stepped I-beams," *Journal of the Structural Division*, vol. 97, pp. 2535-2548, 1971.

- [68] N. Trahair, "Inelastic lateral buckling of continuous steel beams," *Engineering Structures*, vol. 190, pp. 238-245, 2019.
- [69] N. Trahair, "Lateral buckling of tapered members," *Engineering Structures*, vol. 151, pp. 518-526, 2017.
- [70] M. A. Bradford, "Inelastic buckling of I-beams with continuous elastic tension flange restraint," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 48, pp. 63-77, 1998.
- [71] C. T. Nguyen, J. Moon, and H.-E. Lee, "Lateral-torsional buckling of I-girders with discrete torsional bracings," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 66, pp. 170-177, 2010.
- [72] C. T. Nguyen, H.-S. Joo, J. Moon, and H.-E. Lee, "Flexural-torsional buckling strength of I-girders with discrete torsional braces under various loading conditions," *Engineering Structures*, vol. 36, pp. 337-350, 2012.
- [73] F. McCann, M. A. Wadee, and L. Gardner, "Lateral stability of imperfect discretely braced steel beams," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 139, pp. 1341-1349, 2012.
- [74] C. Mantha, X. Chen, and Y. Liu, "Lateral torsional buckling of steel twin plate girder systems with torsional braces only," *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 43, pp. 182-192, 2015.
- [75] W.-F. Zhang, Y.-C. Liu, G.-L. Hou, K.-S. Chen, J. Ji, Y. Deng, *et al.*, "Lateral-torsional buckling analysis of cantilever beam with tip lateral elastic brace under uniform and concentrated load," *International Journal of Steel Structures*, vol. 16, pp. 1161-1173, 2016.
- [76] L. Zhang and G.-S. Tong, "Lateral buckling of C-section purlins with one anti-sag bar at middle span section," *Thin-Walled Structures*, vol. 102, pp. 246-257, 2016.
- [77] F. Mohri, N. Damil, and M. Potier-Ferry, "Buckling and lateral buckling interaction in thin-walled beam-column elements with mono-symmetric cross sections," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, pp. 3526-3540, 2013.
- [78] K. El Hassania, "Etude numérique et expérimentale du comportement des poutres à parois minces et à sections ouvertes," Metz, 1998.
- [79] B. Asgarian, M. Soltani, and F. Mohri, "Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections," *Thin-walled structures*, vol. 62, pp. 96-108, 2013.
- [80] L. Zhang and G. S. Tong, "Elastic flexural-torsional buckling of thin-walled cantilevers," *Thin-walled structures*, vol. 46, pp. 27-37, 2008.
- [81] N. Trahair, "Torsion equations for lateral buckling," *Engineering Structures*, vol. 128, pp. 161-165, 2016.
- [82] A. Brouki, "Déversement des poutres à parois minces et à sections ouvertes: aspect numériques et réglementaires," Metz, 1998.
- [83] M. Braham, "Le déversement élastique des poutres en la section monosymétrique soumise à un gradient de moment de flexion," *Construction métallique*, vol. 1, pp. 17-28, 2001.