

N° D'ORDRE : 36/2016-C/MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat 3^{ème} cycle

En : MATHEMATIQUE

Spécialité : Recherche opérationnelle et mathématique discrète

Par : BOUSBAA Imad Eddine

Thème

Combinatoire des suites de Stirling généralisées

Soutenue publiquement, le 18 Juin 2016, devant le jury composé de :

M.	M. ABBAS	Prof	à l'USTHB	Président
M.	H. BELBACHIR	Prof	à l'USTHB	Directeur de thèse
M.	A. DIL	Prof	à l'Univ. Akdeniz – Turquie	Examineur
M.	F. HAMDİ	Maitre de Conférence /A	à l'USTHB	Examineur
M.	J. G. LUQUE	Prof	à l'Univ. Rouen – France	Examineur
M.	M. MIHOUBI	Prof	à l'USTHB	Examineur
M.	J. C. NOVELLI	Prof	à l'UPEM – France	Examineur
M.	H. SI KADOUR	Prof	à l'Univ. Lyon – France	Examineur

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

pour l'obtention du diplôme de

Doctorat Troisième cycle en Mathématiques

Spécialité: Recherche Opérationnelle

Présentée par

BOUSBAA Imad Eddine

Combinatoire des suites de Stirling généralisées

Thèse soutenue le 18 juin 2016 à 12:30, devant le jury composé de :

Président :	MONCEF ABBAS	USTHB - Algérie	Professeur
Directeur :	HACÈNE BELBACHIR	USTHB - Algérie	Professeur
Rapporteurs :	AYHAN DIL	Univ. Akdeniz - Turquie	Professeur
	FAYÇAL HAMDI	USTHB - Algérie	MCA
	JEAN GABRIEL LUQUE	Univ. Rouen - France	Professeur
	MILOUD MIHOUBI	USTHB - Algérie	Professeur
	JEAN-CHRISTOPHE NOVELLI	UPEM - France	Professeur
	HAMZA SI KADOUR	Univ. Lyon - France	Professeur

À la mémoire de ma grand-mère

REMERCIEMENTS

JE voudrais tout d'abord exprimer ma plus profonde gratitude à mes chers PARENTS ; pour leur soutien inconditionnel, leur patience intarissable et leur générosité sans pareille. Je vous remercie de tout mon cœur, bien que ça ne soit pas assez et que ça ne le sera jamais. Que Dieu vous garde. À mes frères : Oussama, Chakib et Samy, merci pour tout.

Je suis également très reconnaissant envers mon professeur et directeur de thèse Hacène BELBACHIR ; pour le temps conséquent qu'il m'a consacré, pour ses qualités pédagogiques et scientifiques, et pour sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés, tant sur le plan scientifique que humain. Il incarnait le rôle du second père attentionné, du grand frère bien veillant, de l'ami bon vivant et du maître sage. Je n'oublierai jamais les salons de vulgarisation des sciences qu'il a organisé, ni les voyages que nous avons fait ensemble. Je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je remercie le Professeur Moncef ABBAS de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Ma gratitude va également aux examinateurs. Je suis honoré par la présence des Professeurs Ayhan DIL, Fayçal HAMDİ, Jean Gabriel LUQUE, Miloud MIHOUBI, Jean-Christophe NOVELLI, Hamza SI KADOUR au sein de mon jury.

Bien sûr, atteindre ces objectifs n'aurait pas été possible sans l'aide et le support des membres de l'équipe CATI. En particulier, mes chers amis Moussa AHMIA, Amine BELKHİR, Athmane BENMEZAI et Hakim HARİK.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLES	vi
PRÉFACE	1
I Préliminaires	5
1 COMPTAGE ET DÉNOMBREMENT	6
1.1 DÉFINITIONS ET OUTILS DE BASE	7
1.1.1 Bijection et double comptage	7
1.1.2 Factorielle, factorielles montante et descendante	7
1.1.3 Coefficients binomiaux et multinomiaux	7
1.1.4 Arrangement, permutation, partition et partition en listes	9
1.1.5 Fonction génératrice	11
1.1.6 Ensemble partiellement ordonné (POSET)	11
1.1.7 Principe d'inclusion exclusion, formule du crible	13
1.2 DES NOMBRES REMARQUABLES	13
1.2.1 Les nombres de Stirling	13
1.2.2 Les nombres de Lah	17
1.2.3 Les nombres de Stirling s -associés	18
1.2.4 Les nombres de Whitney du réseau de Dowling	19
CONCLUSION	20
2 ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES	21
2.1 DÉFINITIONS DE BASE	22
2.1.1 Classes combinatoires	22
2.1.2 Espaces vectoriels combinatoires	22
2.2 ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES	23
2.2.1 Algèbres combinatoires	24
2.2.2 Cogèbres combinatoires	25
2.2.3 Bigèbres et algèbres de Hopf combinatoires	27
2.2.4 Produit de convolution et algèbres de Hopf	29
2.3 EXEMPLES D'ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES	30
2.3.1 Partitions et partitions en listes	30
2.3.2 Algèbre $WSym$	31
2.3.3 Algèbre $BWSym$	32
CONCLUSION	33

II	Combinatoire énumérative des suites de Stirling généralisées	34
3	LES NOMBRES r-STIRLING	35
3.1	INTRODUCTION	36
3.2	LES NOMBRES r -STIRLING DE PREMIÈRE ET DEUXIÈME ESPÈCE	36
3.2.1	Relations de récurrences	37
3.2.2	Identités combinatoires et convolutions	39
3.3	LES NOMBRES r -LAH	41
3.3.1	Relation avec les fonctions symétriques	41
3.3.2	Convolutions	43
3.3.3	Relation entre les nombres r -Lah et les nombres de Lah	44
3.3.4	Expression des r -Lah en termes des $(r \pm s)$ -Lah	45
3.4	NOMBRES r_p -STIRLING DE DEUXIÈME ESPÈCE	46
3.4.1	Formule explicite	46
3.4.2	Identité de convolution et fonction génératrice exponentielle	49
	CONCLUSION	49
4	LES NOMBRES DE LAH ASSOCIÉS ET r-STIRLING s-ASSOCIÉS	50
4.1	INTRODUCTION	51
4.2	LES NOMBRES DE LAH ASSOCIÉS	51
4.3	SOMMES MULTIPLES ET COEFFICIENTS BINOMIAUX	55
4.4	LES NOMBRES r -STIRLING s -ASSOCIÉS DES TROIS ESPÈCES	57
4.4.1	Relations de récurrence	61
4.4.2	Identités combinatoires et convolutions	63
4.4.3	Cross récurrences	67
4.4.4	Convolutions	68
4.4.5	Fonctions génératrices	68
	CONCLUSION	70
5	NOMBRES DE WHITNEY ET r-WHITNEY DE DOWLING	74
5.1	INTRODUCTION	75
5.2	NOMBRES DE WHITNEY ET r -WHITNEY TRANSLATÉS	75
5.2.1	Nombres de Whitney translatsés des deux espèces	76
5.2.2	Nombres Whitney-Lah translatsés	77
5.2.3	Nombre r -Whitney Translatsés	77
5.3	NOMBRES WHITNEY DES RÉSEAUX DE DOWLING	78
5.3.1	Nombres de Whitney de deuxième espèce	78
5.3.2	Nombres de Whitney de première espèce	82
5.3.3	Nombres de Whitney-Lah	84
5.4	NOMBRES r -WHITNEY	85
5.4.1	Interprétation combinatoire	86
5.4.2	Comptage et preuves bijectives	86
5.4.3	Fonctions symétriques et convolution	89
	CONCLUSION	89
6	APPROCHE UNIFICATRICE DES NOMBRES DE STIRLING	90
6.1	INTRODUCTION	91
6.2	INTERPRÉTATION COMBINATOIRE	92
6.3	FORMULE EXPLICITE	92
6.4	RELATIONS DE RÉCURRENCE	94
6.5	FONCTION SYMÉTRIQUE	95

6.6	CONVOLUTIONS ET IDENTITÉS COMBINATOIRES	96
6.6.1	Convolution	97
6.6.2	Preuves bijectives	98
6.7	FONCTION GÉNÉRATRICE	99
	CONCLUSION	100
III Aspects algébrique des Bosons		101
7	PROBLÈME D'ORDRE NORMAL DES BOSONS	102
7.1	INTRODUCTION	103
7.2	B-DIAGRAMMES	104
7.2.1	Définition et premiers exemples	104
7.2.2	Connexion et composition	106
7.2.3	Énumération	109
7.3	ASPECTS ALGÈBRIQUES DES B-DIAGRAMMES	110
7.3.1	Algèbre de fusion	110
7.3.2	L'algèbre des B-diagrammes	113
7.3.3	Des algèbres de B-diagrammes aux algèbres de Fusion	114
7.3.4	Application de l'ordre normal de boson	119
	CONCLUSION	120
8	ASPECTS COGÈBRIQUES DES B-DIAGRAMMES	122
8.1	INTRODUCTION	123
8.2	ASPECTS COGÈBRIQUES DES B-DIAGRAMMES	123
8.2.1	Les algèbres de Hopf des B-diagrammes	123
8.2.2	Éléments primitifs	124
8.3	DEUX SOUS-ALGÈBRES	126
8.3.1	Fonctions symétriques des mots	126
8.3.2	Fonctions symétriques bi-mots	127
	CONCLUSION	130
	CONCLUSION GÉNÉRALE	132
	BIBLIOGRAPHIE	134

LISTE DES FIGURES

1	Plan de la thèse	4
1.1	Triangle de Pascal.	8
1.2	Une 3-permutation de [8].	10
1.3	2-partition de [4].	11
1.4	Diagramme de Hasse d'un POSET.	12
1.5	Principe d'inclusion-exclusion à partir de trois ensembles.	13
2.1	Diagramme commutatif exprimant l'associativité d'une algèbre.	24
2.2	Diagramme commutatif exprimant l'unité d'une algèbre.	24
2.3	Diagramme commutatif exprimant la coassociativité d'une cogèbre.	26
2.4	Diagramme commutatif exprimant la counité d'une cogèbre.	26
2.5	Diagramme commutatif exprimant la compatibilité entre le produit et le coproduit dans une bigèbre.	28
2.6	Diagramme commutatif exprimant la compatibilité entre la co-unité et le produit dans une bigèbre.	28
2.7	Diagramme commutatif exprimant la compatibilité entre l'unité et le coproduit dans une bigèbre.	28
2.8	Diagramme commutatif exprimant la compatibilité entre l'unité et la counité dans une bigèbre.	29
2.9	Diagramme commutatif exprimant l'antipode d'une algèbre de Hopf.	30
2.10	Treillis de partitions de taille 3.	31
4.1	Convolution des nombres de Lah s -associés.	54
4.2	Relation de récurrence verticale.	54
4.3	Relation de récurrence des nombres r -Stirling s -associés.	61
4.4	Relation de convolution des nombres r -Stirling s -associé.	65
4.5	Lecture d'un nombre de la table r -Stirling s -associé à partir d'une suite d'éléments de la table $(r - p)$ -Stirling s -associés.	66
7.1	Le B-diagramme $(3, [3, 1, 2], \llbracket 1, 5 \rrbracket, \llbracket 1, 6 \rrbracket, \{(1, 6), (2, 4), (4, 5)\})$	104
7.2	Le B-diagramme $(4, [1, 3, 2, 2], \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 6, 7\}, \{(1, 6), (3, 7)\})$	105
7.3	Le sous B-diagramme $G[1, 3]$ de $G = (3, [3, 1, 2], [5], [6], \{(1, 6), (2, 4), (4, 5)\})$	106
7.4	Un exemple de composition.	108
7.5	Un exemple de composition lorsque $k = 0$	109
7.6	Un exemple de calcul dans \mathcal{B}	118
7.7	Un second exemple de calcul dans \mathcal{B}	119
7.8	Les différentes algèbres relatives aux B-diagrammes.	121
8.1	Représentation graphique de $b_{\{\{1,3\},\{2\},\{4,7,8\},\{5,6\}\}}$	126
8.2	Un exemple de produit dans \mathcal{B}_1^1	127
8.3	Le B diagramme $m_{[5,2,4,1,3,7,6]}$	128

8.4	Un exemple de produit dans \mathcal{B}_1^2	130
-----	--	-----

Liste des tables

1.1	Les nombres de Stirling de première espèce.	14
1.2	Les nombres de Stirling de deuxième espèce.	15
1.3	Triangle des nombres de Lah.	17
1.4	Nombres de Stirling associés de première espèce.	18
1.5	Nombres de Stirling associés de seconde espèce.	19
4.1	Nombres de Lah 3-associés.	52
4.2	Nombres 2-Stirling 2-associés de première espèce.	57
4.3	Nombres 2-Stirling 2-associés de seconde espèce.	58
4.4	Nombres 2-Lah 2-associés.	58
4.5	Quelques valeurs des 3-Stirling 2-associés de première espèce.	71
4.6	Quelques valeurs des 2-Stirling 3-associés de première espèce.	71
4.7	Quelques valeurs des 3-Stirling 3-associés de première espèce.	71
4.8	Quelques valeurs des 3-Stirling 2-associés de première espèce.	72
4.9	Quelques valeurs des 2-Stirling 3-associés de deuxième espèce.	72
4.10	Quelques valeurs des 3-Stirling 2-associés de deuxième espèce.	72
4.11	Quelques valeurs des 3-Lah 2-associés.	73
4.12	Quelques valeurs des 2-Lah 3-associés.	73
4.13	Quelques valeurs des 3-Lah 3-associés.	73
5.1	Nombre de Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 2$	79
5.2	Nombres de Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 3$	80
5.3	Nombres de Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 4$	81
5.4	Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 1$ et $r = 2$	86
5.5	Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 2$ et $r = 2$	86
5.6	Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 3$ et $r = 2$	88
5.7	Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 1$ et $r = 3$	88
5.8	Nombre r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 2$ et $r = 3$	88
5.9	Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 3$ et $r = 3$	89
7.1	Premières valeurs de $d_{p,q}$	110

PRÉFACE, INTRODUCTION...

LA thèse s'inscrit dans le domaine de la combinatoire et consiste en l'étude de structures discrètes qui, en général, possèdent une description simple. Sur un ensemble fini d'éléments (objets), la combinatoire traite des problèmes de dénombrements (comptages), d'énumérations (listages) et d'estimations (encadrements et asymptotisme).

Parmi les précurseurs de la combinatoire, on peut citer le mathématicien indien Bhaskara ii qui, au XII^e siècle, détermina le nombre de façons de choisir p éléments parmi n . On peut aussi citer Gersonide qui établit au début du XIV^e siècle le rapport entre le nombre d'arrangements et le nombre de combinaisons. Durant la même période, Michael Stifel proposa une approche du triangle de Pascal ; déjà bien connu chez les mathématiciens persans tels qu'al-Karaji et Omar Khayyam ainsi que chez les maghrébins tels Ibn al-Banna. À partir de 1650, Blaise Pascal (dont le nom du triangle est dérivé) commença à s'intéresser à ce triangle et parvint à donner une présentation sous forme de tableau aux coefficients binomiaux. Pierre de Fermat est un autre précurseur de l'analyse combinatoire ; en effet, il réussit avec Blaise Pascal à élaborer et développer les bases du calcul des probabilités.

CONTEXTE

Enjeux et motivations

Nous lisons parmi les problèmes de recherche posés par Graham, Knuth et Patashnik [?, p 339], une invitation à développer une théorie générale des solutions de la récurrence à deux paramètres

$$\binom{n}{k} = (\alpha n + \beta k + \gamma) \binom{n-1}{k-1} + (\alpha' n + \beta' k + \gamma') \binom{n-1}{k} + [n = k = 0]. \quad (1)$$

Cette relation regroupe un bon nombre de suites classiques, nous pouvons citer les coefficients binomiaux, les nombres de Stirling de première espèce, les nombres de Stirling de deuxième espèce, les nombres de Lah (connus aussi sous le nom de nombres de Stirling de troisième espèce), les nombres de Whitney associés au treillis de Dowling, les nombres Eulériens etc. Ainsi que des généralisations de ces dernières : les nombres r -Stirling, Stirling s -associés, r -Whitney, ...

Une façon simple de définir les nombres de Stirling est de les voir comme les coefficients apparaissant dans la somme reliant les puissances d'une variable à ses factorielles, et vice-versa. D'un point vu combinatoire, ces nombres s'associent au partitionnement d'ensembles en un nombre fixé de composantes. Ces composantes peuvent être des parts, des listes, des cycles, des parts colorées, listes colorées ou des cycles colorés.

Dans cette thèse, nous abordons l'aspect combinatoire des généralisations des suites

de Stirling qui s'identifient au cas particulier de la relation (1) pour les paramètres $[\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'] = [0, 0, 1; \alpha', \beta', \gamma']$, ou d'une manière explicite :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (\alpha'n + \beta'k + \gamma') \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + [n = k = 0]. \quad (2)$$

Objectifs et approche générale

Dans une première partie et avec une approche purement énumérative, nous étudions un certain nombre de généralisations à savoir les nombres r -Stirling des trois espèces, Stirling s -associés des trois espèces, r -Whitney des trois espèces, . . . et nous en établissons de nouvelles. Nous observerons, de ce fait, les relations combinatoires associées comme les relations de récurrences, les convolutions et fonctions génératrices. La deuxième partie, traite de la combinatoire algébrique d'un problème de physique quantique connu par le problème d'ordre normal des Bosons. Nous nous intéressons plus précisément à une variante du problème qui est en relation avec des nombres de Stirling généralisés, et nous introduisons de nouveaux objets combinatoires que nous munissons d'une structure d'algèbre de Hopf. Cela nous permettra de mettre en relief les relations entre cette algèbre et l'algèbre des fonctions symétriques sur les mots WSym et l'algèbre des fonctions symétriques sur les Bi-mots BWSym.

Plan

La thèse regroupe huit chapitres répartis sur trois parties. Dans la **première partie préliminaires**, nous présentons les notions de base. Cette partie s'étend sur deux chapitres :

Un *premier chapitre* introductif des concepts et notions de base de la combinatoire énumérative, nécessaire au développement de la deuxième partie de la thèse. Nous rappelons quelques outils et techniques de comptage combinatoire tels les combinaisons, les permutations, les arrangements, le principe d'inclusion exclusion, etc. Nous parlons également des nombres de Stirling et abordons quelques nombres remarquables liés à ces nombres ; en nous appliquant à donner des propriétés combinatoires.

Dans le *deuxième chapitre*, nous introduisons quelques notions de base de combinatoire algébrique, nous donnons des définitions de base telles une classe combinatoire, un espace vectoriel, une algèbre, une cogèbre, une bigèbre et une algèbre de Hopf. Nous évoquons deux constructions d'algèbre de Hopf connues et dont les objets sont indexés par des partitions d'ensemble et des partitions d'ensemble en listes. Ce chapitre servira au développement de la troisième partie.

La **deuxième partie**, intitulée *Combinatoire énumérative des suites de Stirling généralisées*, s'étale sur quatre chapitres et traite de l'aspect énumératif de généralisations de nombres de Stirling des deux espèces et des nombres de Lah. Cette partie est organisée comme suit :

Le *troisième chapitre* expose deux généralisations des nombres de Stirling des deux espèces et des nombres de Lah. La première est connue sous l'appellation des nombres r -Stirling de première et deuxième espèces, qui s'identifient dans la relation (2) par $[1, 0, r]$ et $[0, 1, r]$ respectivement. Notre contribution consiste à utiliser des techniques

de comptage bijectif afin de démontrer des propriétés telles des récurrences, des formes explicites et des convolutions etc. Dans la même optique et de manière analogue, nous donnons des propriétés relatives aux nombres r -Lah, qui apparaissent dans (2) pour les paramètres $[1, 1, r]$. La deuxième généralisation proposée par Mihoubi et Maamra [?] traite, quant à elle, d'une généralisation vectorielle des nombres r -Stirling de deuxième espèce uniquement, appelée r_1, \dots, r_p Stirling de deuxième espèce. Pour notre part, nous proposons de nouvelles identités combinatoires ainsi que des preuves bijectives. Aussi, nous proposons une fonction génératrice de ces nombres.

Le *quatrième chapitre* traite d'une généralisation des nombres de Stirling des deux espèces, appelée nombres de Stirling associés, proposée par Comtet [?] et étudiée sous une forme plus générale par Howard [?]. Nous définissons, en premier, *les nombres de Lah associés* analogues aux nombres de Stirling associés, et nous établissons quelques propriétés combinatoires. Puis, d'une manière naturelle, nous fournissons une formulation unificatrice des nombres r -Stirling des trois espèces et des nombres de Stirling associés.

Le *cinquième chapitre* porte sur les nombres r -Whitney des trois espèces introduits et étudiés par Cheon [?]. Nous établissons, pour la deuxième espèce, une bijection entre le nombre d'éléments d'un corang dans un réseau de Dowling et les partitions d'ensembles. De même, nous donnons une interprétation combinatoire des nombres r -Whitney de première espèce et des nombres r -Whitney-Lah. Nous montrons, moyennant une technique de comptage présentée dans le chapitre deux, que ces nombres s'écrivent sous forme de fonctions symétriques.

Dans le *sixième chapitre*, nous abordons les approches unificatrices des nombres de Stirling des trois espèces. La suite $S(n, k; \alpha, \beta, r)$ appelée "Stirling-type pair" introduite par Hsu et Shiue [?] regroupe les nombres de Stirling des trois espèces ainsi que les nombres r -Stirling des trois espèces sous une seule formulation moyennant les trois paramètres α, β et r . Récemment, Shattuck [?] a proposé une interprétation combinatoire pour le cas particulier où r est un multiple de α et de β et il établit des identités combinatoires. Pour notre part, nous proposons une autre interprétation combinatoire en utilisant les partitions d'ensembles en listes. Nous l'exploiterons pour interpréter des identités déjà établies et pour en proposer de nouvelles.

La **troisième partie** intitulée *Aspect algébrique des Bosons*, traite de l'aspect algébrique d'une application des nombres de Stirling en physique quantique, plus précisément dans le problème d'ordre normal des Bosons. Cette partie se compose de deux chapitres structurés comme suit :

Le *chapitre sept* est consacré à la définition et à la description des objets combinatoires utilisés, pour lesquels nous proposons deux constructions algébriques : algèbre B-Diagramme et algèbre de Fusion. Nous montrons que ces deux algèbres sont isomorphes. Une application de l'algèbre de B-Diagramme au problème d'ordre normal des Bosons est également donnée.

Dans le *huitième chapitre* nous définissons un coproduit des objets combinatoires B-Diagramme et montrons que ça possède une structure de cogèbre combinatoire. Par la suite, nous montrons que cette dernière et l'algèbre B-Diagramme forment une bigèbre combinatoire ; et un peu plus loin, une algèbre de Hopf combinatoire. Nous concluons en mettant en valeur les liens entre cette algèbre de Hopf et les algèbres WSym et BWSym vues dans le chapitre deux.

Afin de mieux cerner le plan, nous proposons le schéma 1. Les flèches continues représentent des généralisations tandis que la flèche discontinue représente une surjection d'ensemble.

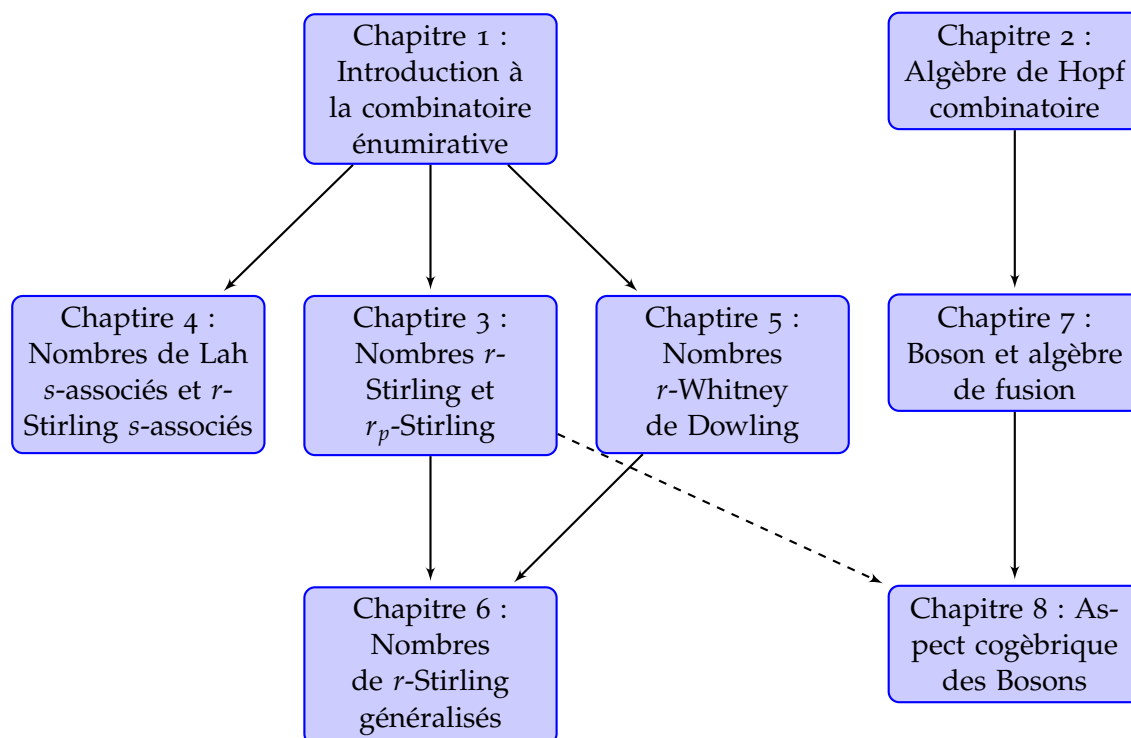


FIGURE 1 – Plan de la thèse

Cette thèse a fait l'objet de divers travaux écrits :

- Hacène Belbachir and Imad Eddine Bousbaa. Associated Lah numbers and r -Stirling numbers. *ArXiv*, arXiv :1404.5573v2(10), 2014.
- Hacène Belbachir and Imad Eddine Bousbaa. Combinatorial identities for the r -lah numbers. *ARS COMBINATORIA*, 115 :453–458, 2014.
- Hacène Belbachir and Imad Eddine Bousbaa. Convolution identities for the r -Stirling numbers. *Revision.*, 2014.
- Hacène Belbachir, Amine Belkhir, and Imad Eddine Bousbaa. Combinatorial approach of certain generalized stirling numbers. *arXiv preprint arXiv :1411.6271*, 2014.
- Hacène Belbachir, Amine Belkhir, and Imad Eddine Bousbaa. The generalized r -Lah numbers, revisited. *Submitted.*, 2014.
- Hacene Belbachir and Imad Eddine Bousbaa. Translated whitney and r -Whitney numbers : a combinatorial approach. *Journal of Integer Sequences*, 16(2) :3, 2013.
- Imad Eddine Bousbaa, Ali Chouria, and Jean-Gabriel Luque. A combinatorial hopf algebra for the boson normal ordering problem. *arXiv preprint arXiv :1512.05937*, 2015.

Première partie

Préliminaires

COMPTAGE ET DÉNOMBREMENT



SOMMAIRE

1.1	DÉFINITIONS ET OUTILS DE BASE	7
1.1.1	Bijection et double comptage	7
1.1.2	Factorielle, factorielles montante et descendante	7
1.1.3	Coefficients binomiaux et multinomiaux	7
1.1.4	Arrangement, permutation, partition et partition en listes	9
1.1.5	Fonction génératrice	11
1.1.6	Ensemble partiellement ordonné (POSET)	11
1.1.7	Principe d'inclusion exclusion, formule du crible	13
1.2	DES NOMBRES REMARQUABLES	13
1.2.1	Les nombres de Stirling	13
1.2.2	Les nombres de Lah	17
1.2.3	Les nombres de Stirling s -associés	18
1.2.4	Les nombres de Whitney du réseau de Dowling	19
	CONCLUSION	20

DANS ce chapitre, nous exposons quelques notions introductives à la combinatoire énumérative. Nous présenterons certaines suites remarquables en listant certaines de leurs propriétés combinatoires. Ces concepts et définitions sont nécessaires pour l'exposition des résultats de la deuxième partie.

1.1 DÉFINITIONS ET OUTILS DE BASE

1.1.1 Bijection et double comptage

On dit que deux ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} sont en bijection s'il existe une application f allant de l'un dans l'autre (disons de \mathcal{A} dans \mathcal{B}), telle que chaque élément de \mathcal{B} est atteint précisément une fois par f . Autrement dit, f apparie les éléments de \mathcal{A} avec ceux de \mathcal{B} . Si deux ensembles sont en bijection, alors ils ont le même nombre d'éléments (même cardinal). La *preuve bijective* est une technique de démonstration qui consiste à considérer une application bijective entre deux ensembles et à dénombrer chacun de ces ensembles, pour montrer que les expressions obtenues, correspondant à un même cardinal, sont égales.

Dans le cas particulier où l'application bijective est l'identité, cela revient à compter le nombre d'éléments d'un ensemble de deux façons différentes, pour établir une égalité entre les nombres résultants. Cette dernière méthode est appelée *double comptage*. Autrement dit, considérer un ensemble fini \mathcal{A} et le dénombrer par une méthode A, puis une méthode B. En identifiant les éléments des deux ensembles équipotents, on peut toujours se ramener à un dénombrement d'un même ensemble de différentes façons.

1.1.2 Factorielle, factorielles montante et descendante

Soient x un nombre réel et n un entier positif, la factorielle montante de x d'ordre n est définie par

$$x^{\overline{n}} = \begin{cases} x(x+1) \cdots (x+n-1) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Aussi, on appelle factorielle montante de x de coefficient α ($\alpha \in \mathbb{N}$) et d'ordre n le polynôme

$$(x|\alpha)^{\overline{n}} = \begin{cases} x(x+\alpha) \cdots (x+(n-1)\alpha) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

D'une manière équivalente, la factorielle descendante de x d'ordre n est définie par

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1) \cdots (x-n+1) & n > 0, \\ 1 & n = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

et de coefficient α par

$$(x|\alpha)^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-\alpha) \cdots (x-(n-1)\alpha) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

A noter que, pour $x = 1$ dans l'équation (1.1) ou pour $x = n$ dans (1.3), on obtient la fonction factorielle (classique)

$$1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}} = n!.$$

1.1.3 Coefficients binomiaux et multinomiaux

Ayant un groupe de n personnes (il est convenu implicitement qu'ils sont discernables), le nombre de façons de choisir un sous-groupe de k individus est compté par

le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ dont la formule explicite est donnée par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a + b)^n$ appelée relation du binôme de Newton, où a et b sont des nombres réels ou complexe

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

et satisfont une relation de récurrence d'ordre deux

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

qui se démontre combinatoirement en discutant le cas de la $n^{\text{ème}}$ personne : si elle est sélectionnée (choisie), il reste à choisir $k - 1$ autres personnes depuis les $n - 1$ personnes restantes. Ainsi, nous avons $\binom{n-1}{k-1}$ façons de le faire. Sinon, elle n'est pas sélectionnée et donc on choisit k individus parmi les $n - 1$ restants. Ce qui se fait de $\binom{n-1}{k}$ façons.

A partir de la relation de récurrence nous pouvons construire le triangle de Pascal (voir figure 1.1).

				1						
				1	1					
			1	2	1					
		1	3	3	1					
	1	4	6	4	1					
	1	5	10	10	5	1				
	1	6	15	20	15	6	1			
	1	7	21	35	35	21	7	1		
	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

FIGURE 1.1 – Triangle de Pascal.

Ce triangle satisfait plusieurs propriétés qui s'interprètent facilement avec des raisonnements combinatoires. Par exemple, on remarque que les lignes du triangle sont symétriques i.e.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

En effet, le fait choisir k personnes parmi n est équivalent à ne pas choisir $n - k$ personnes.

La convolution de Vandermonde (ou Chu-Vandermonde, ou encore binomiale),

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}, \quad (1.5)$$

se démontre elle aussi avec une preuve bijective assez sympathique : choisir k personnes parmi un groupe de n hommes et m femmes, revient à choisir un certain nombre j d'hommes et le reste $k-j$ des femmes, puis considérer toutes les situations possibles.

Plus généralement, en considérant s équipes discernables (numérotées de 1 à s), le nombre de façons de partager n personnes discernables sur s équipes, de sorte que chaque équipe i contienne k_i individus, est compté par le coefficient multinomial $\binom{n}{k_1, \dots, k_s}$ dont la forme explicite est donnée par

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_s!}$$

et nous avons

$$(a_1 + \cdots + a_s)^n = \sum_{k_1 + \cdots + k_s = n} \binom{n}{k_1, \dots, k_s} a_1^{k_1} \cdots a_s^{k_s}.$$

1.1.4 Arrangement, permutation, partition et partition en listes

Arrangement

Soit $[n] := \{1, \dots, n\}$, on appelle arrangement de k éléments, toute suite de k éléments distincts de $[n]$. Ou encore, ayant deux ensemble $[k]$ et $[n]$ ($k \leq n$), un arrangement est une injection de $[k]$ dans $[n]$.

Exemple 1.1 Soit $[6] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $(2, 6, 5, 3)$ est un arrangement de quatre éléments.
 $(1, 3, 4, 3, 2)$ n'est pas un arrangement (injection).

Propriété 1.1 Le nombre d'arrangements (d'injections) de $[k]$ dans $[n]$ est compté par la factorielle descendante

$$(n)^{\underline{k}}.$$

Lorsque $k = n$, le terme dédié est "permutation" (bijection).

Permutation

Soit $n \in \mathbb{N}$, On appelle permutation toute bijection σ de $[n]$ dans $[n]$. Une permutation σ_n peut être représentée par une forme matricielle

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ est $n!$.

Exemple 1.2 Soit la permutation σ_8

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Un élément i de $[n]$ est appelé point fixe si son image par la permutation σ est lui-même i.e. $\sigma(i) = i$. Dans l'exemple précédent, l'élément 7 est un point fixe. Aussi, une orbite de i , notée \mathcal{O}_i , est l'ensemble des images de i obtenues en appliquant successivement la permutation σ sur l'élément i , $\mathcal{O}_i = \{\sigma^p(i), p \in \mathbb{N}\}$. L'orbite de l'élément 1 dans l'exemple 1.2 est $\mathcal{O}_1 = \{1, \sigma(1) = 3, \sigma^2(1) = 4\}$. Remarquez que $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_4$. Ces éléments, $\{1, 3, 4\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(1, 3, 4)$ où chaque élément est l'image du précédent par σ (1 est l'image de 4, 3 est l'image de 1 etc.). A partir d'une orbite à p éléments, on peut constituer $(p - 1)!$ cycles.

On peut alors écrire une permutation σ comme un produit de cycles,

$$\sigma = (1, 3, 4)(2, 8, 5, 6)(7),$$

cette représentation est appelée : écriture en cycles. Nous conviendrons d'appeler k -permutation toute permutation ayant k cycles.

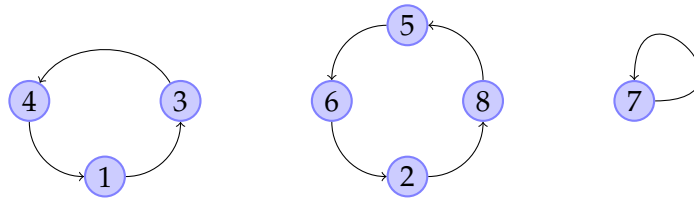


FIGURE 1.2 – Une 3-permutation de $[8]$.

Remarque 1.1 Compter le nombre d'injections de $[k]$ dans $[n]$ peut se réduire à considérer tous les sous-ensembles S de cardinalité k de $[n]$ et on a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles, puis à considérer toutes les permutations (bijections) de $[k]$ dans S et on a $k!$ permutations. D'où

$$(n)^k = \binom{n}{k} k!.$$

Partition et partition en listes

Une part P de $[n]$ est un sous-ensemble non vide de $[n]$. Une partition π de $[n]$ est une famille de parts P_1, \dots, P_k disjointes, deux à deux, telles que $\bigcup_{i=1}^k P_i = [n]$.

Exemple 1.3 Soit l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$, les partitions de $[3]$ sont

$$\{\{1\}\{2\}\{3\}\} \quad \{\{1, 2\}\{3\}\} \quad \{\{1, 3\}\{2\}\} \quad \{2, 3\}\{1\} \quad \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Une liste ℓ de $[n]$ est un sous-ensemble non vide ordonné de $[n]$. Une partition en listes \wp de $[n]$ est une famille de listes ℓ_1, \dots, ℓ_k disjointes deux à deux telles que $\bigcup_{i=1}^k \ell_i = [n]$.

Exemple 1.4 Soit l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$, les partitions en listes possibles de $[3]$ sont

$$\begin{aligned} & \{[1, 2, 3]\} \quad \{[1, 3, 2]\} \quad \{[2, 1, 3]\} \quad \{[2, 3, 1]\} \quad \{[3, 1, 2]\} \quad \{[3, 2, 1]\} \\ & \{[1, 2] | [3]\} \quad \{[2, 1] | [3]\} \quad \{[1, 3] | [2]\} \quad \{[3, 1] | [2]\} \quad \{[2, 3] | [1]\} \quad \{[3, 2] | [1]\} \\ & \quad \quad \quad \{[1] | [2] | [3]\}. \end{aligned}$$

Aussi, nous conviendrons d'appeler k -partition (respectivement k -partition en listes) toute partition de $[n]$ en k parts (respectivement k listes).

Exemple 1.5 Les 3-partitions de [4] sont :

$$\begin{array}{ccc} \{\{1,4\}\{2\}\{3\}\} & \{\{1\}\{2,4\}\{3\}\} & \{\{1\}\{2\}\{3,4\}\} \\ \{\{1,3\}\{2\}\{4\}\} & \{\{1\}\{2,3\}\{4\}\} & \{\{1,2\}\{3\}\{4\}\} \end{array}$$

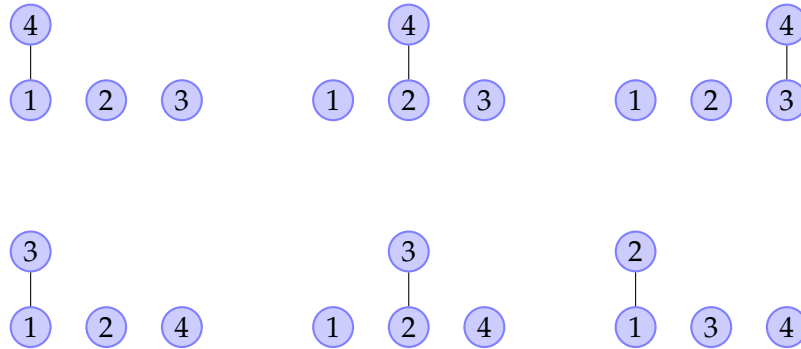


FIGURE 1.3 – 2-partition de [4].

Notez qu’une k -permutation peut être considérée comme un partitionnement de $[n]$ en k cycles.

1.1.5 Fonction génératrice

Soient $(a_n)_n$ une suite et $f_n(x)$ une fonction. On appelle fonction génératrice ou série génératrice de (associée à, représentant) la suite $(a_n)_n$ la série formelle

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n f_n(x).$$

On dit qu’une fonction génératrice est de type ordinaire (série génératrice ordinaire) si la fonction $f_n(x)$ est de la forme $f_n(x) = x^n$. De même, une fonction génératrice est dite exponentielle si la fonction $f_n(x)$ est de la forme $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Deux fonctions génératrices ordinaires (ou exponentielles) $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ($A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$) et $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ ($B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$) sont égales si et seulement si $a_n = b_n$, pour tout $n \geq 0$.

Le produit de Cauchy ou de convolution de deux séries génératrices ordinaires $A(x)$ et $B(x)$ est une série génératrice ordinaire $C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ où $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$, $n \geq 0$. De même, le produit de deux séries génératrices exponentielles, appelé produit de convolution binomial, est une série génératrice $C(x) = A(x)B(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}$ où $c_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$, $n \geq 0$.

1.1.6 Ensemble partiellement ordonné (POSET)

Nous rappelons, dans ce qui suit, les notions de base concernant les ensembles partiellement ordonnés et les treillis. Pour des notions plus précises et détaillées, le lecteur peut consulter Stanley [?]. Dans un ensemble \mathbb{E} , une relation binaire \mathfrak{R} est dite :

- **réflexive** : si pour tout $x \in \mathbb{E}$, $x \mathfrak{R} x$,
- **antisymétrique** : si pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, $x \mathfrak{R} y \wedge y \mathfrak{R} x \implies x = y$,

— **transitive** : si pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}$, $x\mathfrak{R}y \wedge y\mathfrak{R}z \implies x\mathfrak{R}z$.

Définition 1.1 Une relation d'ordre dans (ou sur) un ensemble \mathbb{E} , notée $(\mathbb{E}, \mathfrak{R})$, est une relation binaire dans \mathbb{E} réflexive, antisymétrique et transitive.

Une relation d'ordre est dite totale si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} : x\mathfrak{R}y \vee y\mathfrak{R}x,$$

dans le cas contraire, la relation d'ordre est dite partielle.

- Exemple 1.6**
- L'ensemble \mathbb{R} muni de la relation "inférieur ou égal" est une relation d'ordre totale.
 - L'ensemble \mathbb{R} muni de la relation "inférieur strictement" n'est pas une relation d'ordre car la relation n'est pas réflexive.
 - L'ensemble \mathbb{N} muni de la relation "d'inclusion" est une relation d'ordre partielle car $\{2, 5\} \not\subset \{8, 9\}$ ni $\{8, 9\} \subset \{2, 5\}$.

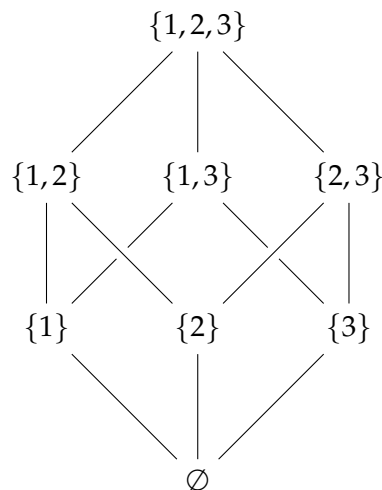


FIGURE 1.4 – Diagramme de Hasse d'un POSET.

Définition 1.2 Un treillis est un ensemble partiellement ordonné tel que chaque couple d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure

Exemple 1.7 L'ensemble de tous les sous-ensembles de $[3]$ muni de la relation d'ordre partielle "inclusion" est un treillis que l'on note P_3 . On peut représenter un treillis par un diagramme de Hasse (voir figure 2.10).

Soit Q un sous ensemble ordonné d'un treillis P . Si Q est totalement ordonné, on dit que Q est une chaîne de P que l'on représente par $x_0 \prec \dots \prec x_i$. Les éléments x_0 et x_i sont respectivement l'origine et l'extrémité de la chaîne et le nombre d'éléments est égal à sa longueur.

Soit x un élément du treillis P , le rang de x est la longueur de la plus longue chaîne dont l'origine est l'infimum de P et x est son extrémité, tandis que, l'anti-rang est la longueur de la plus petite chaîne. Le nombre de Whitney $W(P, k)$ associé à un treillis P est le nombre d'éléments de P ayant un anti-rang égal à k .

Exemple 1.8 Le nombre de Whitney associé à P_3 est $W(P_3, k) = \binom{3}{k}$.

1.1.7 Principe d'inclusion exclusion, formule du crible

Soient $[n]$ un ensemble fini, et A_1, \dots, A_n une famille de sous-ensembles de $[n]$. Le principe d'inclusion-exclusion permet d'exprimer le cardinal de la réunion finie $|\bigcup_{i=1}^n A_i|$ en fonction du cardinal de ces ensembles et de leurs intersections.

Il est attribué au mathématicien Abraham de Moivre, mais aussi désigné par formule du crible ou encore formule de Pointcaré.

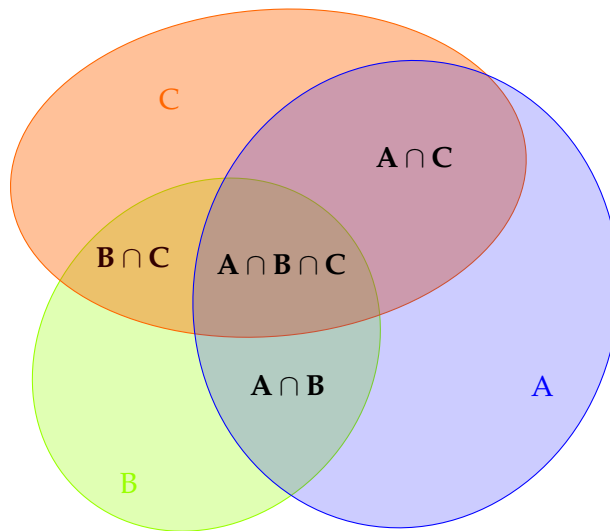


FIGURE 1.5 – Principe d'inclusion-exclusion à partir de trois ensembles.

Exemple 1.9 Soit A, B et C trois ensembles (voir Figure 1.5), nous avons

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

Théorème 1.1 Pour toute collection A_1, A_2, \dots, A_n d'ensembles finis, nous avons

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

1.2 DES NOMBRES REMARQUABLES

1.2.1 Les nombres de Stirling

Les Stirling des deux espèces furent introduits par Stirling [?] et nommés par Nielsen [?] en l'honneur de ce premier. Ces nombres se manifestent dans de nombreux problèmes de combinatoire et sont reliés à pleins d'autres nombres tels que les nombres de Bernoulli, nombres Eulérien, etc. Nous les trouvons sous différentes notations, les plus courantes sont $s(n, k)$ pour les nombres de Stirling signés et $S(n, k)$ pour la deuxième espèce. Pour notre part, nous utiliserons la notation $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ pour les nombres de Stirling de première espèce non-signés où $[\]$ représente des cycles ; Et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ pour la deuxième espèce où $\{ \}$ désigne des parts. Cette notation a été proposée par Karamata [?] et appuyée par Graham et al. [?] où ces derniers donnent un commentaire sur les notations et exposent les maints avantages de cette dernière.

Première espèce

Les nombres de Stirling de première espèce (non-signés) $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ comptent le nombre de k -permutations de $[n]$, et apparaissent comme coefficients du développement de la factorielle croissante $(x)^{\overline{n}}$

$$(x)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k, \quad (1.7)$$

notez que les nombres de Stirling de première espèce signés $s(n, k)$ sont liés au développement de la factorielle décroissante $(x)^{\underline{n}}$

$$(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k,$$

de ce fait,

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right].$$

Relations de récurrence. Les nombres de Stirling de première espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad (1.8)$$

avec $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \delta_{n,0}$, où δ est le symbole de Kronecker, et pour $n \neq 0$, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$ lorsque $k \notin [n]$. Ils satisfont aussi une relation de récurrence verticale

$$\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right] = \sum_{i=k}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right] \binom{i}{k}. \quad (1.9)$$

n k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

TABLE 1.1 – Les nombres de Stirling de première espèce.

Fonction génératrice. La fonction génératrice exponentielle des nombre de Stirling de première espèce est

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!} \ln^k(1-x), \quad (1.10)$$

et la fonction génératrice exponentielle double est

$$\sum_{n, k \geq 0} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \frac{x^n}{n!} y^k = \frac{1}{(1-x)^y}. \quad (1.11)$$

Remarquez que la relation (1.7) est une série génératrice ordinaire des nombres de Stirling de première espèce.

Formes explicites. Deux formes explicites des nombres de Stirling de première espèce :

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{1}{i_1 \dots i_k}, \quad (1.12)$$

et

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \sum_{0 \leq j \leq i \leq n-k} \frac{(-1)^{i+j}}{i!} \binom{n+i+1}{k+1} \binom{2n-k}{n+i} (i-j)^{n-k+i}. \quad (1.13)$$

Deuxième espèce

Les nombres de Stirling de deuxième espèce $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ comptent le nombre de k -partitions de $[n]$. Ils apparaissent lors de l'expression du monôme x^n dans la base des moments factoriels décroissants $(x)^{\underline{k}}$

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)^{\underline{k}}. \quad (1.14)$$

Relations de récurrence. Les nombres de Stirling de deuxième espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad (1.15)$$

avec $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{n,0}$, et pour $n \neq 0$ $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$ lorsque $k \notin [n]$.

Ils ont aussi, une relation de récurrence verticale

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (1.16)$$

n k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

TABLE 1.2 – Les nombres de Stirling de deuxième espèce.

Fonction génératrice. La série génératrice ordinaire associée aux nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n = \frac{1}{(1-x|x)^{\underline{k}}}. \quad (1.17)$$

La fonction génératrice exponentielle des nombre de Stirling de deuxième espèce est

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}, \quad (1.18)$$

et la fonction génératrice exponentielle double est

$$\sum_{n, k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} y^k = \exp(y(e^x - 1)). \quad (1.19)$$

Formes explicites. Deux formes explicites des nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{1}{i_1! \dots i_k!}, \quad (1.20)$$

et

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{k!} \binom{k}{i} i^n. \quad (1.21)$$

Propriétés combinatoires

Les nombres de Stirling de première espèce s'expriment en termes des nombre de Stirling de deuxième espèce par la relation suivante dite de Schlömilch,

$$\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right] = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \binom{n+2k}{k+i} \binom{n+k+i-1}{k+i} \left\{ \begin{matrix} k+i \\ i \end{matrix} \right\}.$$

Ils vérifient aussi les relations d'orthogonalités suivantes

$$\sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right] = \delta_{n,k},$$

synonymes des relations d'inversion suivantes :

$$a_n = \sum_k (-1)^{n-k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} a_k,$$

avec $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites données.

Les nombres de Stirling des deux espèces sont des fonctions symétriques élémentaires

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-m \end{matrix} \right] = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n} i_1 i_2 \dots i_m, \quad (1.22)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+m \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n} i_1 i_2 \dots i_m. \quad (1.23)$$

1.2.2 Les nombres de Lah

Les nombres de Lah comptent le nombre de k -partitions en listes de $[n]$. Leur nom est dû à leur premier introducteur Ivo Lah [? ?], et notés souvent par $L(n, k)$. Nous adopterons la notation $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ dite type Karmata-Knuth (équivalente aux nombres de Stirling) introduite par Petkovsek et Pisanski [? ?] représentative de listes. Les nombres de Lah $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ permettent d'exprimer la factorielle croissante en termes de factorielles décroissantes

$$(x)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] (x)^{\underline{k}}. \tag{1.24}$$

Nous pouvons déduire une relation entre les nombres de Lah et les nombres de Stirling depuis les relations (1.24), (1.7) et (1.14)

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{i=k}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right\}. \tag{1.25}$$

Relations de récurrence. Les nombres de Lah ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n+k-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right], \tag{1.26}$$

avec $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \delta_{n,0}$, et pour $n \neq 0$ $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$ lorsque $k \notin [n]$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	2	1								
3	0	6	3	1							
4	0	24	12	4	1						
5	0	120	60	20	5	1					
6	0	720	360	120	30	6	1				
7	0	5040	2520	840	210	42	7	1			
8	0	40320	20160	6720	1680	336	56	8	1		
9	0	362880	181440	60480	15120	3024	504	72	9	1	
10	0	3628800	1814400	604800	151200	30240	5040	720	90	10	1

TABLE 1.3 – Triangle des nombres de Lah.

Fonction génératrice. La série génératrice exponentielle associées aux nombres de Lah est donnée par

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k, \tag{1.27}$$

ainsi, que la fonction génératrice exponentielle double

$$\sum_{n, k \geq 0} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \frac{x^n}{n!} y^k = \exp \left(\frac{xy}{1-x} \right). \tag{1.28}$$

Forme explicite. La forme explicite des nombres de Lah est donnée par

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}. \tag{1.29}$$

1.2.3 Les nombres de Stirling s -associés

Riordan [?] s'intéressa au comptage d'une classe particulière de permutations où il considéra le nombre de k -permutations sans points fixes et le nombre de k -partitions sans singletons. Il leur associa deux suites, les nota $s_2(n, k)$ et $S_2(n, k)$, et les appela respectivement les nombres de Stirling associés de première et deuxième espèce. Comtet [?] introduisit dans un cadre plus général les nombres de Stirling s -associés de première espèce qui comptent le nombre de k -permutations de $[n]$ tel que chaque cycle contienne au moins s éléments ($s > 1$) et les nombres de Stirling s -associés de deuxième espèce qui comptent le nombre de k -partitions de $[n]$ tel que chaque part contienne au moins s éléments. Howard [?] les étudia plus en détail et établit quelques propriétés combinatoires. Nous adopterons la notation $[n]_k^{(s)}$ et $\{n\}_k^{(s)}$ pour désigner les nombres de Stirling s -associés de première et deuxième espèces respectivement.

Il est clair que pour $s = 2$, ces nombres se réduisent aux nombres de Stirling associés.

Relations de récurrence. Les nombres de Stirling s -associés des deux espèces vérifient une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(s)} = \binom{n-1}{s-1} (s-1)! \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}^{(s)} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}^{(s)}, \quad (1.30)$$

$$\left\{ n \right\}_k^{(s)} = \binom{n-1}{s-1} \left\{ n-1 \right\}_{k-1}^{(s)} + k \left\{ n-1 \right\}_k^{(s)}, \quad (1.31)$$

avec $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}^{(s)} = \left\{ n \right\}_0^{(s)} = \delta_{n,0}$, et pour $n \neq 0$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(s)} = \left\{ n \right\}_k^{(s)} = 0$ lorsque $n < 0$ ou $n > sk$.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5
2	1				
3	2				
4	6	3			
5	24	20			
6	120	130	15		
7	720	924	210		
8	5040	7308	2380	105	
9	40320	64224	2380	2520	
10	362880	623376	303660	44100	945

TABLE 1.4 – Nombres de Stirling associés de première espèce.

Fonction génératrice. Les séries génératrices exponentielles associées aux nombres de Stirling s -associés sont données par

$$\sum_{n \geq sk} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(-\ln(1-x) - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{x^i}{i} \right)^k, \quad (1.32)$$

$$\sum_{n \geq sk} \left\{ n \right\}_k^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\exp(x) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!} \right)^k. \quad (1.33)$$

Forme explicite. Les nombres de Stirling s -associés de première et deuxième espèces

ont une forme explicite donnée par,

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=n \\ i_j \geq s}} \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_k!}, \quad (1.34)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(s)} = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=n \\ i_j \geq s}} \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_k!}. \quad (1.35)$$

n k	1	2	3	4	5	6
2	1					
3	1					
4	1	3				
5	1	10				
6	1	25	15			
7	1	56	105			
8	1	119	490	105		
9	1	246	1918	1260		
10	1	501	6825	9450	945	
11	1	1012	22935	56980	17325	
12	1	2035	74316	302995	190575	10395

TABLE 1.5 – Nombres de Stirling associés de seconde espèce.

Pour $n = sk$, les relations (1.34) et (1.35) donnent

$$\left[\begin{matrix} sk \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} = \frac{(sk)!}{k! s^k} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{matrix} sk \\ k \end{matrix} \right\}^{(s)} = \frac{(sk)!}{k! (s!)^k}. \quad (1.36)$$

1.2.4 Les nombres de Whitney du réseau de Dowling

Une *partition partielle* P de $[n]$ est une famille de parts P_1, \dots, P_k disjointes deux à deux (l'union des parts n'engendre pas $[n]$ forcément). Notons par L_n le treillis associé aux partitions partielles de $[n]$ muni de l'inclusion entre les parts.

Soit G un graphe. Un *ensemble G -étiqueté* (T, α) est un ensemble T muni d'une fonction $\alpha : T \rightarrow G$. Deux ensembles G -étiquetés, (T, α) et (T, β) , sont équivalents s'il y a un élément g du groupe tel que $\beta = g\alpha$. Une classe d'équivalence est notée $[T, \alpha]$.

Une G -partition partielle de $[n]$ est un ensemble $\chi = \{[B_1, \alpha_1], \dots, [B_k, \alpha_k]\}$ des classes d'équivalences des ensembles G -étiquetés tels que B_1, \dots, B_k est une partition partielle de $[n]$. Une G -partition partielle χ est dite plus fine qu'une autre $\chi' : \chi \leq \chi'$, si

- chaque part de χ' est une union de parts de χ , et
- pour chaque part B_i incluse dans B'_j , α_i est équivalente à la restriction de α'_j au domaine B_j .

Cela donne un ordre partiel de l'ensemble de toutes les G -partitions partielles de $[n]$, appelé *réseau de Dowling* (*treillis*) noté $Q_n(G)$ introduit par Dowling [?].

Le polynôme caractéristique du treillis de Dowling $Q_n(G)$ n'est que la factorielle descendante généralisée. En effet, si L est un réseau de Dowling de rang n d'un groupe

fini G ayant α éléments, alors

$$P_L(x) = (x-1)(x-\alpha-1)\cdots(x-(n-1)\alpha-1). \quad (1.37)$$

Dowling [?] appela nombres de Whitney de première espèce $w_\alpha(n, k)$ les coefficients de x^k dans le polynôme caractéristique $P_L(x)$ et nombres de Whitney de deuxième espèce $W_\alpha(n, k)$ les nombres de Whitney du treillis de Dowling, autrement dit le nombre d'éléments d'anti-rang égal à k de L .

Les nombres de Whitney des deux espèces satisfont les relations de récurrences suivante :

$$w_\alpha(n, k) = w_\alpha(n-1, k-1) + (\alpha(n-1) + 1)w_\alpha(n-1, k), \quad (1.38)$$

$$W_\alpha(n, k) = W_\alpha(n-1, k-1) + (\alpha k + 1)W_\alpha(n-1, k). \quad (1.39)$$

Benoumhani [??] a établi la plupart des propriétés de ces nombres, à savoir fonctions génératrices, unimodalité, etc.

Les nombres de Whitney des deux espèces apparaissent dans le changement de base suivant :

$$(x+1|\alpha)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} w_\alpha(n, k) x^k, \quad (1.40)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n W_\alpha(n, k) (x-1|-\alpha)_k. \quad (1.41)$$

Remarquez que pour $\alpha = 1$, les nombres de Whitney des deux espèces se réduisent aux nombres de Stirling des deux espèces respectivement,

$$w_\alpha(n, k) = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}, \quad W_\alpha(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}. \quad (1.42)$$

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques outils combinatoires ainsi que des suites classiques. Ils seront utiles au développement de la partie deux, où les comptages bijectifs ainsi que les preuves par inclusion-exclusion seront omniprésents. Nous exposerons aussi, des fonctions génératrices ainsi que des relations de récurrence de généralisations des suites classiques vues précédemment.

ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES

2

SOMMAIRE

2.1	DÉFINITIONS DE BASE	22
2.1.1	Classes combinatoires	22
2.1.2	Espaces vectoriels combinatoires	22
2.2	ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES	23
2.2.1	Algèbres combinatoires	24
2.2.2	Cogèbres combinatoires	25
2.2.3	Bigèbres et algèbres de Hopf combinatoires	27
2.2.4	Produit de convolution et algèbres de Hopf	29
2.3	EXEMPLES D'ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES	30
2.3.1	Partitions et partitions en listes	30
2.3.2	Algèbre WSym	31
2.3.3	Algèbre BWSym	32
	CONCLUSION	33

CE chapitre traitera des concepts et définitions algébriques nécessaires à la compréhension de la troisième partie de cette thèse.

Nous rappelons les définitions de base des algèbres de Hopf combinatoires. Pour plus de détails et d'exemples d'algèbres de Hopf, voir Chase [?], Abe [?], Giraudo [?], Maurice [?]. Nous évoquerons, les algèbres de Hopf combinatoires des fonctions symétriques non commutatives, des mots WSym et des Bi-mots BWSym.

2.1 DÉFINITIONS DE BASE

2.1.1 Classes combinatoires

Définition 2.1 Une classe combinatoire est un ensemble \mathcal{C} muni d'une application taille $|\cdot|$ à valeur entière, telle que, pour tout entier n fixé, l'ensemble \mathcal{C}_n des objets de \mathcal{C} de taille n est fini. On note dans ce cas $\#\mathcal{C}_n$ le cardinal de l'ensemble \mathcal{C}_n .

D'une manière formelle, on associe une fonction génératrice ordinaire et exponentielle à une classe combinatoire \mathcal{C} que l'on notera respectivement $\mathcal{S}_\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}_\mathcal{C}^e$.

$$\mathcal{S}_\mathcal{C}(t) := \sum_{n \geq 0} \#\mathcal{C}_n t^n, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{S}_\mathcal{C}^e(t) := \sum_{n \geq 0} \#\mathcal{C}_n \frac{t^n}{n!}. \quad (2.2)$$

Nous référons au coefficient de t^u dans la série génératrice par $[t^u]\mathcal{S}_\mathcal{C}(t)$.

La classe combinatoire dite élémentaire E possède un unique élément de taille 0 noté ϵ .

Exemple 2.1 La classe combinatoire des mots sur l'alphabet $\mathcal{A} := \{a, b\}$, notée A^* , contient les suites finies d'éléments de \mathcal{A} . Ses éléments de taille inférieure à trois sont

$$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb,$$

et sa série génératrice est

$$\mathcal{S}(t) = \frac{1}{1-2t} = 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + 16t^4 + 32t^5 + \dots$$

Il est clair que pour un n fixé (taille de la suite d'éléments), on a 2^n éléments.

L'union de deux classes combinatoires \mathcal{C} et \mathcal{D} , notée $\mathcal{C} + \mathcal{D}$, est la classe combinatoire qui contient tous les objets de \mathcal{C} et de \mathcal{D} , munie de l'application taille $|\cdot|$ telle que $|x| := |x|_\mathcal{C}$ si $x \in \mathcal{C}$, et $|x| := |x|_\mathcal{D}$ sinon. Aussi, le produit de \mathcal{C} et de \mathcal{D} , noté $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ est la classe combinatoire dont les objets sont les couples (x, y) où $x \in \mathcal{C}$ et $y \in \mathcal{D}$, munie de l'application taille vérifiant $|(x, y)| := |x|_\mathcal{C} + |y|_\mathcal{D}$.

2.1.2 Espaces vectoriels combinatoires

Tout au long de ce mémoire, \mathbb{K} désigne un corps de caractéristique 0, $1_\mathbb{K}$ désigne l'élément neutre pour le produit de \mathbb{K} et $0_\mathbb{K}$ désigne l'élément neutre pour l'addition. Le terme "combinatoire" suppose implicitement que les bases sont indexées par des "objets combinatoires".

Le symbole de Kronecker dans ce contexte est défini par $\delta_{a,b} := 1_{\mathbb{K}}$ si $a = b$, et $\delta_{a,b} := 0_{\mathbb{K}}$ sinon.

Définition 2.2 Soit \mathcal{C} une classe combinatoire telle que $\#\mathcal{C}_0 = 1$. L'espace vectoriel combinatoire engendré par \mathcal{C} est l'espace vectoriel $V(\mathcal{C})$. Dans ce cas, \mathcal{C} est la classe combinatoire sous-jacente à $V(\mathcal{C})$.

Tout espace vectoriel combinatoire se décompose en une somme directe de sous-espaces vectoriels :

$$V(\mathcal{C}) := \bigoplus_{x \in \mathbb{N}} V(\mathcal{C}_x).$$

Nous dirons que V est un espace vectoriel gradué.

Le degré d'un élément $v \in V$ est le minimum des entiers n tel que v appartienne à $V_0 \oplus \dots \oplus V_n$. Les espaces vectoriels $V(\mathcal{C}_n)$ (ou tout simplement V_n) sont appelés les composantes homogènes de degré n de V . Un élément $v \in V$ est dit homogène si v est un élément d'une composante homogène.

La série de Hilbert d'un espace vectoriel combinatoire V est la série formelle

$$\mathcal{H}_V := \sum_{n \geq 0} \dim(V_n) t^n,$$

qui n'est rien d'autre que la série génératrice de la classe combinatoire sous-jacente à V .

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels combinatoires U et V est un couple $(U \otimes V, \rho)$ où $U \otimes V$ est un espace vectoriel et $\rho : U \times V \rightarrow U \otimes V$ est une application bilinéaire telle que pour toute application bilinéaire $g : U \otimes V \rightarrow W$, il existe une application linéaire $h : U \otimes V \rightarrow W$ vérifiant $g = h \circ \rho$. Une base de l'espace vectoriel $U \otimes V$ est donnée par les éléments $u \otimes v$, appelés tenseurs purs, où u (resp. v) parcourt les éléments de la base de U (resp. V). Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels gradués (resp. combinatoires) U et V est encore gradué (resp. combinatoire). La composante homogène de degré n de $U \otimes V$ est

$$(U \otimes V)_n = \bigoplus_{i+j=n} U_i \otimes V_j.$$

Nous noterons $\tau : C \otimes C \rightarrow C \otimes C$ l'application linéaire définie sur les tenseurs purs par $\tau(x \otimes y) := y \otimes x$.

2.2 ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES

Nous rappelons dans cette section les concepts généraux propres aux algèbres, cogèbres, bigèbres, et algèbres de Hopf. Ces dernières sont constituées d'un espace vectoriel sur lequel est à la fois définie une structure d'algèbre et une structure de cogèbre synonyme d'assemblage et désassemblage d'éléments. Autrement dit, le produit d'une algèbre permet d'assembler des éléments, alors que le coproduit dans une cogèbre permet plutôt de les désassembler.

2.2.1 Algèbres combinatoires

Algèbre, sous-algèbre et produit tensoriel

Définition 2.3 Une algèbre est un espace vectoriel \mathcal{A} muni de deux applications linéaires :

1. un produit $\cdot : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,
2. une unité $\eta : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$

satisfaisant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, les axiomes d'associativité et d'unité suivants :

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad (2.3)$$

$$\eta(\lambda) \cdot x = \lambda x = x \cdot \eta(\lambda). \quad (2.4)$$

Notons par $Id : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ l'application identité. Nous pouvons illustrer la condition d'associativité (2.3) par le digramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{Id \otimes \cdot} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \cdot \otimes Id \downarrow & & \downarrow \cdot \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\cdot} & \mathcal{A} \end{array}$$

FIGURE 2.1 – Diagramme commutatif exprimant l'associativité d'une algèbre.

La condition (2.4) implique que l'image de l'élément neutre de \mathbb{K} est l'élément neutre du produit $\cdot_{\mathcal{A}}$. Cela peut être illustré par le digramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{Id \otimes \eta} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{\eta \otimes Id} & \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} \\ & \searrow \cong & \downarrow \cdot & \swarrow \cong & \\ & & \mathcal{A} & & \end{array}$$

FIGURE 2.2 – Diagramme commutatif exprimant l'unité d'une algèbre.

L'algèbre $(\mathcal{A}, \cdot_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}})$ est qualifiée de :

- *graduée* si l'espace vectoriel \mathcal{A} est gradué et $x \in \mathcal{A}^{(n)}, y \in \mathcal{A}^{(m)} \Rightarrow x \cdot_{\mathcal{A}} y \in \mathcal{A}^{(n+m)}$,
- *connexe* si \mathcal{A} est gradué et $\dim \mathcal{A}^{(0)} = 1$,
- *commutative* si pour tous $x, y \in \mathcal{A}, x \cdot_{\mathcal{A}} y = y \cdot_{\mathcal{A}} x$.

Définition 2.4 Une sous-algèbre d'une algèbre $(\mathcal{A}, \cdot_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}})$ est un sous-espace vectoriel \mathcal{A}' de \mathcal{A} tel que pour tous $x, y \in \mathcal{A}'$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ nous avons,

$$x \cdot_{\mathcal{A}} y \in \mathcal{A}', \quad (2.5)$$

$$\eta_{\mathcal{A}}(\lambda) \in \mathcal{A}'. \quad (2.6)$$

Un idéal de \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel V de \mathcal{A} tel que, pour tout $x \in V$ et pour tout $y \in \mathcal{A}, x \cdot_{\mathcal{A}} y \in V$ et $y \cdot_{\mathcal{A}} x \in V$.

Le quotient de \mathcal{A} par son idéal V est l'algèbre $(\mathcal{A}/V, \cdot, \eta)$ telle que le produit \cdot et l'unité η sont définis, pour tous $x', y' \in \mathcal{A}/V$, par

$$x' \cdot y' := \tau(x \cdot_{\mathcal{A}} y), \quad (2.7)$$

$$\eta := \tau \circ \eta_{\mathcal{A}}, \quad (2.8)$$

avec $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/V$ est la projection canonique et $x, y \in \mathcal{A}$, $x' = \tau(x)$ et $y' = \tau(y)$.

Définition 2.5 Soit $(\mathcal{A}, \cdot_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, \eta_{\mathcal{B}})$ deux algèbres. Un morphisme d'algèbres est une application linéaire $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ telle que pour tous $x, y \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\phi(x \cdot_{\mathcal{A}} y) = \phi(x) \cdot_{\mathcal{B}} \phi(y), \quad (2.9)$$

$$\phi(\eta_{\mathcal{A}}(\lambda)) = \eta_{\mathcal{B}}(\lambda). \quad (2.10)$$

De plus, si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont graduées, la condition suivante s'impose

$$x \in \mathcal{A}^{(n)} \Rightarrow \phi(x) \in \mathcal{B}^{(n)}. \quad (2.11)$$

Le produit tensoriel de \mathcal{A} et \mathcal{B} est l'algèbre $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \cdot, \eta)$ telle que le produit \cdot et l'unité η sont définis, pour tous $x \otimes y, x' \otimes y' \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, par

$$(x \otimes y) \otimes (x' \otimes y') := (x \cdot_{\mathcal{A}} x') \otimes (y \cdot_{\mathcal{B}} y'), \quad (2.12)$$

$$\eta := \eta_{\mathcal{A}} \otimes \eta_{\mathcal{B}}. \quad (2.13)$$

Algèbre combinatoire

Définition 2.6 Une algèbre combinatoire est une algèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est combinatoire.

Une algèbre combinatoire $(\mathcal{A}, \cdot, \eta)$ est implicitement graduée, connexe et la dimension de ses composantes homogènes est finie, conséquence directe du fait que son espace vectoriel est combinatoire.

De plus, l'unité η a une définition unique exprimée par $\eta(1_{\mathbb{K}}) = \epsilon$ où ϵ est l'unique élément de $\mathcal{A}^{(0)}$. De ce fait, nous nous dispenserons de préciser l'unité des constructions algébriques exposées dans cette thèse.

2.2.2 Cogèbres combinatoires

Cogèbres coassociatives cunitaires

Définition 2.7 Une cogèbre coassociative cunitaire (ou cogèbre) est un espace vectoriel \mathcal{C} muni de deux applications linéaires :

1. un coproduit $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$,
2. une counité $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}$,

qui satisfont, pour tout $x \in \mathcal{C}$, les conditions de coassociativité et de counité suivantes :

$$(\Delta \otimes Id)\Delta(x) = (Id \otimes \Delta)\Delta(x), \quad (2.14)$$

$$(\theta \otimes Id)\Delta(x) = 1_{\mathbb{K}} \otimes x \quad \text{et} \quad (Id \otimes \theta)\Delta(x) = x \otimes 1_{\mathbb{K}}, \quad (2.15)$$

où $Id : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

Nous adopterons la *notation de Sweedler* pour écrire le coproduit $\Delta(x)$ d'un élément x de \mathcal{C} comme une somme de tenseurs,

$$\delta(x) = \sum x^L \otimes x^R.$$

La condition de coassociativité (2.14) peut être illustrée par le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Id \otimes \Delta} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes Id \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xrightarrow{\Delta \otimes Id} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \end{array}$$

FIGURE 2.3 – Diagramme commutatif exprimant la coassociativité d'une cogèbre.

De même, la condition de counité (2.15) peut être illustrée par le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} \otimes \mathbb{K} & \xleftarrow{Id \otimes \theta} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xrightarrow{\theta \otimes Id} & \mathbb{K} \otimes \mathcal{C} \\ & \searrow \cong & \uparrow \Delta & \swarrow \cong & \\ & & \mathcal{C} & & \end{array}$$

FIGURE 2.4 – Diagramme commutatif exprimant la counité d'une cogèbre.

La cogèbre $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \theta_{\mathcal{C}})$ est qualifiée de :

— *cograduée* si l'espace vectoriel \mathcal{C} est gradué et pour tout $x \in \mathcal{C}^{(n)}$,

$$\Delta_{\mathcal{C}}(x) \in \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{C}^{(i)} \otimes \mathcal{C}^{(j)}, \quad (2.16)$$

— *coconnexe* si \mathcal{C} est cograduée et $\dim \mathcal{C}^{(0)} = 1$,

— *cocommutative* si pour tout $x \in \mathcal{C}$, $\Delta_{\mathcal{C}}(x) = v(\Delta_{\mathcal{C}}(x))$, où v est une application linéaire définie par

$$\begin{aligned} v : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ x \otimes y &\rightarrow y \otimes x \end{aligned} \quad (2.17)$$

Un élément $x \in \mathcal{C}$ est dit *primitif* si $\Delta_{\mathcal{C}}(x) = 1_{\mathbb{K}} \otimes x + x \otimes 1_{\mathbb{K}}$.

Une *sous-cogèbre* d'une cogèbre $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \theta_{\mathcal{C}})$ est un sous-espace vectoriel \mathcal{C}' de \mathcal{C} tel que pour tout $x \in \mathcal{C}'$, $\Delta_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'$.

Un *coidéal* de \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel V de \mathcal{C} tel que, pour tout $x \in V$, $x\Delta_{\mathcal{C}}(x) \in V \otimes \mathcal{C} + \mathcal{C} \otimes V$ et $V \subseteq \text{Ker} \theta$.

Le quotient de \mathcal{C} par son idéal V est la cogèbre $(\mathcal{C}/V, \Delta, \theta)$ telle que le coproduit Δ et la counité θ sont définis, pour tout $x' \in \mathcal{C}/V$, par

$$\Delta(x') := (\tau \otimes \tau)\Delta_{\mathcal{C}}(x), \quad (2.18)$$

$$\theta(x') := \eta_{\mathcal{A}}(x), \quad (2.19)$$

avec $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/V$ est la projection canonique, avec $x \in \mathcal{C}$ tel que $\tau(x) = x'$.

Définition 2.8 Soit $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, \theta_{\mathcal{C}})$ et $(\mathcal{D}, \Delta_{\mathcal{D}}, \theta_{\mathcal{D}})$ deux cogèbres. Un morphisme de cogèbres est une application linéaire $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{C}$,

$$(\phi \otimes \phi)\Delta_{\mathcal{C}}(x) = \Delta_{\mathcal{D}}(\phi(x)), \quad (2.20)$$

$$\theta_{\mathcal{C}}(x) = \theta_{\mathcal{D}}(\phi(x)). \quad (2.21)$$

De plus, si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont cograduées, la condition suivante s'impose

$$x \in \mathcal{C}^{(n)} \Rightarrow \phi(x) \in \mathcal{D}^{(n)}. \quad (2.22)$$

Le produit tensoriel de \mathcal{C} et \mathcal{D} est la cogèbre $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}, \Delta, \theta)$ telle que le coproduit Δ et la counité θ sont définis, pour tous $x \otimes y \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$, par

$$\Delta(x \otimes y) := \sum (x^L \otimes y^L) \otimes (x^R \otimes y^R), \quad (2.23)$$

$$\theta := \theta_{\mathcal{C}} \otimes \theta_{\mathcal{D}}. \quad (2.24)$$

Cogèbre combinatoire

Définition 2.9 Une cogèbre combinatoire est une cogèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est combinatoire.

Une cogèbre combinatoire $(\mathcal{C}, \cdot, \eta)$ est implicitement cograduée, coconnexe et la dimension de ses composantes homogènes est finie, conséquence directe du fait que son espace vectoriel est combinatoire.

De plus, la counité θ a une définition unique exprimée par $\theta(x) = \sigma_{x, \epsilon}$ où ϵ est l'unique élément de $\mathcal{C}^{(0)}$. De ce fait, nous nous dispenserons de préciser la counité des cogèbres données dans la partie (III).

2.2.3 Bigèbres et algèbres de Hopf combinatoires

Bigèbres

Définition 2.10 Une bigèbre $(\mathcal{B}, \cdot, \eta, \Delta, \theta)$ est un espace vectoriel \mathcal{B} tel que :

1. $(\mathcal{B}, \cdot, \eta)$ est une algèbre,
2. $(\mathcal{B}, \Delta, \theta)$ est une cogèbre,
3. Les applications linéaires Δ et θ sont des morphismes d'algèbre, où de manière analogue, les applications \cdot et η sont des morphismes de cogèbre.

La troisième condition de la définition (2.10) est équivalente aux relations suivantes

$$\Delta(x \cdot y) = (\cdot \otimes \cdot)(Id \otimes v \otimes Id)(\Delta(x) \otimes \Delta(y)), \quad (2.25)$$

$$\theta(x \cdot y) = \theta(x)\theta(y), \quad (2.26)$$

$$\Delta(\eta(1_{\mathbb{K}})) = \eta(1_{\mathbb{K}}) \otimes \eta(1_{\mathbb{K}}), \quad (2.27)$$

$$\theta(\eta(1_{\mathbb{K}})) = 1_{\mathbb{K}}, \quad (2.28)$$

où Id est l'application identité $Id : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ et v est une application linéaire (2.17) définie par

$$v : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$$

$$x \otimes y \rightarrow y \otimes x.$$

On parle dans ce cas de compatibilité entre le produit et le coproduit. Afin de mieux interpréter la condition (2.25), nous traduisons cette dernière par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \xrightarrow{\cdot} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\
 \Delta \otimes \Delta \downarrow & & & & \uparrow \cdot \otimes \cdot \\
 \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes v \otimes \text{Id}} & & & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}
 \end{array}$$

FIGURE 2.5 – Diagramme commutatif exprimant la compatibilité entre le produit et le coproduit dans une bigèbre.

De même, nous illustrons les relations (2.26), (2.27) et (2.28) par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{B} & \\
 \cdot \nearrow & & \searrow \theta \\
 \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \xrightarrow{\theta \otimes \theta} & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}
 \end{array}$$

FIGURE 2.6 – Diagramme commutatif exprimant la compatibilité entre la co-unité et le produit dans une bigèbre.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{B} & \\
 \Delta \nwarrow & & \nearrow \eta \\
 \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \xleftarrow{\eta \otimes \eta} & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}
 \end{array}$$

FIGURE 2.7 – Diagramme commutatif exprimant la compatibilité entre l'unité et le co-produit dans une bigèbre.

La bigèbre $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, \eta_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}})$ est qualifiée de :

- *graduée* si l'algèbre $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, \eta_{\mathcal{B}})$ est graduée et la cogèbre $(\mathcal{B}, \Delta_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}})$ est co-graduée,
- *connexe* si l'algèbre $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, \eta_{\mathcal{B}})$ est connexe et la cogèbre $(\mathcal{B}, \Delta_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}})$ est co-connexe,

Une *sous-bigèbre* d'une bigèbre $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, \eta_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}})$ est un sous-espace vectoriel \mathcal{B}' de \mathcal{B} qui est à la fois une sous-algèbre et une sous-cogèbre.

Un *idéal* d'une bigèbre $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, \eta_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}})$ est un sous-espace vectoriel V de \mathcal{B} qui est à la fois un idéal de l'algèbre $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, \eta_{\mathcal{B}})$ et un co-idéal de la cogèbre $(\mathcal{B}, \Delta_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}})$. L'*idéal d'augmentation* est le sous-espace vectoriel particulier $\text{Ker}\theta_{\mathcal{B}}$ et on le note \mathcal{B}^+ .

Le quotient de \mathcal{B} par son idéal V est la bigèbre $(\mathcal{B}/V, \cdot, \eta, \Delta, \theta)$ telle que $(\mathcal{B}/V, \cdot, \eta)$ est l'algèbre quotient par l'idéal V et $(\mathcal{B}/V, \Delta, \theta)$ est la cogèbre quotient par le co-idéal V .

Définition 2.11 Soit $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, \eta_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, \theta_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{D}, \cdot_{\mathcal{D}}, \eta_{\mathcal{D}}, \Delta_{\mathcal{D}}, \theta_{\mathcal{D}})$ deux bigèbres. Un morphisme de bigèbres est une application linéaire $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ qui est à la fois un morphisme d'algèbre et un morphisme de cogèbre.

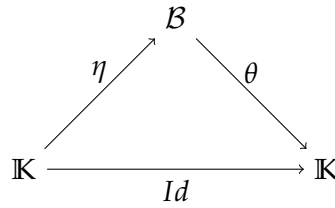


FIGURE 2.8 – Diagramme commutatif exprimant la compatibilité entre l'unité et la co-unité dans une bigèbre.

Le produit tensoriel de \mathcal{B} et \mathcal{D} est la bigèbre $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{D}, \cdot, \eta, \Delta, \theta)$ telle que $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{D}, \cdot, \eta)$ est une algèbre et $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{D}, \Delta, \theta)$ est une cogèbre.

Cogèbre combinatoire

Définition 2.12 Une bigèbre combinatoire est une bigèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est combinatoire.

Une bigèbre combinatoire $(\mathcal{B}, \cdot, \eta, \Delta, \theta)$ est implicitement graduée, connexe et la dimension de ses composantes homogènes est finie, conséquence directe du fait que son espace vectoriel soit combinatoire.

Comme l'unité d'une algèbre combinatoire ainsi que la co-unité d'une cogèbre combinatoire sont uniques, la bigèbre est entièrement définie par le produit et le coproduit $(\mathcal{B}, \cdot, \Delta)$.

2.2.4 Produit de convolution et algèbres de Hopf

Soit $(\mathcal{B}, \cdot, \eta, \Delta, \theta)$ une bigèbre et soit une algèbre $(\mathcal{E}, \star, \eta \circ \theta)$ telles que \mathcal{E} est l'espace vectoriel des applications linéaires de \mathcal{B} dans \mathcal{B} muni du produit \star défini pour tous $f, g \in \mathcal{E}$ par :

$$f \star g := \cdot \star (f \otimes g) \circ \Delta. \quad (2.29)$$

Le produit \star est appelé *produit de convolution*. \star est associatif conséquence de l'associativité de \cdot et la coassociativité de Δ .

Ainsi, $\eta \circ \theta$ de \mathcal{E} est l'élément neutre du produit de convolution.

Définition 2.13 Une algèbre de Hopf \mathcal{H} est une bigèbre $(\mathcal{H}, \cdot, \eta, \Delta, \theta)$ munie d'une application linéaire $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ appelée antipode. Cette dernière est l'inverse de l'identité $Id : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ pour le produit de convolution.

L'antipode S est l'unique application vérifiant

$$S \star Id = Id \star S = \eta \circ \theta. \quad (2.30)$$

Cette dernière peut être illustrée par le diagramme commutatif suivant :

De plus, $S \circ S$ est l'application identité. L'unicité de l'antipode implique que toute bigèbre admet au plus une algèbre de Hopf.

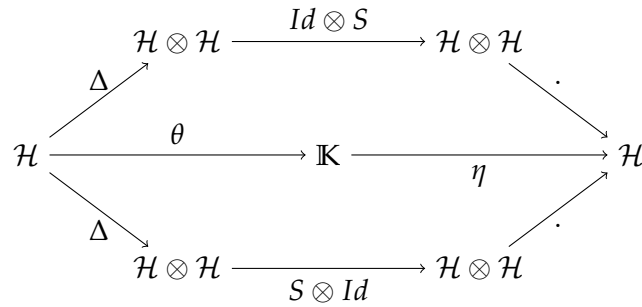


FIGURE 2.9 – Diagramme commutatif exprimant l'antipode d'une algèbre de Hopf.

Algèbres de Hopf combinatoires

Définition 2.14 Une algèbre de Hopf combinatoire est une bigèbre combinatoire.

En réalité, toute bigèbre combinatoire est une algèbre de Hopf du moment ou toute bigèbre combinatoire admet un antipode. De plus, une algèbre de Hopf combinatoire est entièrement caractérisée par la définition du produit et coproduit. De ce fait, nous ne précisons pas l'antipode des algèbres de Hopf combinatoires présentées dans cette thèse.

2.3 EXEMPLES D'ALGÈBRES DE HOPF COMBINATOIRES

Nous allons exposer, dans ce qui suit, deux algèbres de Hopf en relation avec les partitions d'ensembles et les partitions d'ensembles en listes. Avant cela, nous allons définir quelques outils algébriques afin de manipuler aisément ces objets combinatoires.

2.3.1 Partitions et partitions en listes

Nous notons \mathcal{P}_n la collection des partitions de l'ensemble de $[n]$ et \mathcal{P} l'ensemble de toutes les partitions.

Étant donné deux partitions $\mathcal{A} := \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k\}$ et $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_l\}$, nous dirons que \mathcal{A} est plus fine que \mathcal{B} , et nous notons $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, si et seulement si toute part de \mathcal{B} est une union de parts de \mathcal{A} . Autrement dit, \mathcal{A} est plus fine que \mathcal{B} lorsque pour chaque \mathcal{B}_i de \mathcal{B} , il existe $H \subset [k]$ tel que

$$\mathcal{B}_i = \bigcup_{j \in H} \mathcal{A}_j. \quad (2.31)$$

La collection \mathcal{P}_n munie de la relation d'ordre \preceq est un ensemble partiellement ordonné. Le résultat s'appelle le treillis des partitions de n .

Exemple 2.2 Le treillis des partitions en taille 3.

Le *standardisé* d'une collection \mathcal{P} d'ensembles d'entiers distincts est la partition notée $\mathbf{std}(\mathcal{P})$ obtenue en renumérotant chaque entier a apparaissant dans \mathcal{P} moyennant le nombre d'entiers dans \mathcal{P} plus petits que a (au sens strict) en démarrant de 1.

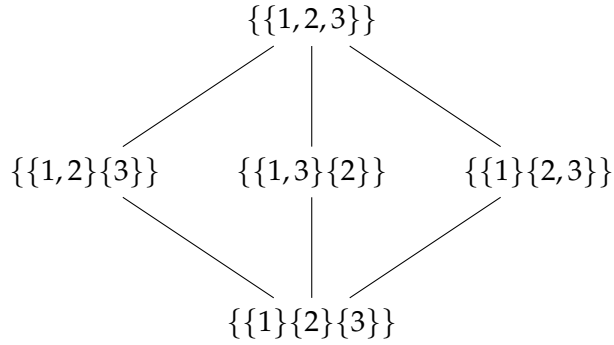


FIGURE 2.10 – Treillis de partitions de taille 3.

Exemple 2.3

$$\mathbf{std}(\{\{2,8\}, \{3,6,12\}, \{10,14,13\}\}) = \{\{1,4\}, \{2,3,6\}, \{5,8,7\}\}$$

La *concaténation* ou *union décalée* de deux partitions \mathcal{A} et \mathcal{B} est la partition notée $\mathcal{A} \uplus \mathcal{B}$ et obtenue en faisant la "concaténation" des deux ensembles tout en ajoutant (décalant) aux entiers de \mathcal{B} la taille de \mathcal{A} .

Exemple 2.4

$$\{\{1,3\}, \{2\}\} \cdot \{\{1,2,4\}, \{3,5\}\} = \{\{1,3\}, \{2\}, \{4,5,7\}, \{6,8\}\}.$$

La *restriction* de la partition π de l'ensemble $[n]$ à un sous-ensemble H de $[n]$ est notée $\mathcal{C}_{|H}$ et est définie par

$$\mathcal{C}_{|H} := \mathbf{std}(\{B \in \mathcal{C}; B \subset H\}). \quad (2.32)$$

Un *point d'arrêt* d'une partition \mathcal{C} est un entier i tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq \#\mathcal{C}, \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}_{|[i]} \cdot \mathcal{C}_{|[i+1,n]}. \end{cases}$$

Nous notons $\mathbf{B}(\mathcal{C})$ l'ensemble des points d'arrêt d'une partition \mathcal{C} .

Exemple 2.5 Soit $\mathcal{C} = \{\{1,3,4\}, \{2\}, \{5\}, \{6,8\}, \{7\}\}$, on a

$$\mathcal{C}_{|[2,7]} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

L'ensemble $\mathbf{B}(\mathcal{C}) = \{0,4,5,8\}$.

Les outils vus dans cette section s'appliquent aussi aux partitions d'ensemble en listes. Par soucis de répétition, nous nous permettrons de parler par la suite de standardisation, de concaténation et de restriction de partition en listes en omettant de les définir vu que ceux sont les mêmes définitions.

2.3.2 Algèbre WSym

L'algèbre des fonctions symétriques non commutatives NCSym est définie par Rosas et Sagan [?] connue aussi sous le nom d'algèbre des fonctions symétriques des mots

WSym (Word Symmetric Functions). Bergeron et *al.* [?] étudient quelques changements de base dans WSym, Hivert et *al.* [?] démontrent qu'elle est libre et colibre. Nous utiliserons les notations de Rosas tout en adoptant la deuxième appellation WSym.

Soit $\mathbb{K}\mathcal{P}_n$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les partitions de taille n et

$$\text{WSym} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\mathcal{P}_n. \quad (2.33)$$

Notons $\{p_\pi; \pi \in \mathcal{P}\}$ la base de WSym, appelée la base des *fonctions sommes des puissances non commutatives*. Nous munissons WSym du produit \cdot et du coproduit Δ définis par

$$p_{\pi_1} \cdot p_{\pi_2} = p_{\pi_1 \uplus \pi_2}, \quad (2.34)$$

$$\Delta(p_\pi) = \sum_{\pi = A \cup B} p_{\text{std}(A)} \otimes p_{\text{std}(B)}. \quad (2.35)$$

Exemple 2.6

$$p_{\{\{1,3\},\{2\}\}} \cdot p_{\{\{1,4\},\{2,3,5\}\}} = p_{\{\{1,3\},\{2\},\{4,7\},\{5,6,8\}\}}. \quad (2.36)$$

Soit $\pi = \{\{1,3\}\{2\}\}$, on a

$$\begin{aligned} \Delta(p_\pi) &= 1 \otimes p_\pi + p_{\{1,2\}} \otimes p_{\{1\}} \\ &\quad + p_{\{1\}} \otimes p_{\{1,2\}} + 1 \otimes p_\pi. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Remarquons que cette algèbre n'est pas commutative mais plutôt co-commutative.

2.3.3 Algèbre BWSym

L'algèbre des fonctions symétriques des mots doublement indexés (Bi-mots) notée BWSym pour "Bi-Word Symmetric Functions", est définie par Luque et *al.* [?]. Cette algèbre de Hopf est une algèbre analogue de WSym dans le sens où le produit et le coproduit sont identiques, le point de divergence est que les bases sont indexées par des partitions en listes.

Soit $\mathbb{K}\mathcal{L}_n$ le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les partitions en listes de taille n et

$$\text{BWSym} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\mathcal{L}_n. \quad (2.38)$$

Notons $\{p_\pi; \pi \in \mathcal{L}\}$ la base de BWSym. Nous munissons WSym du produit \cdot et du coproduit Δ définis respectivement par (2.34) et (2.35).

Exemple 2.7

$$p_{\{[1,3],[2]\}} \cdot p_{\{[1,6,4],[2,3,5]\}} = p_{\{[1,3],[2],[4,9,7],[5,6,8]\}}. \quad (2.39)$$

Soit $\pi = \{[1,3][2]\}$, on a

$$\Delta(p_\pi) = 1 \otimes p_\pi + p_{[1,2]} \otimes p_{[1]} \quad (2.40)$$

$$+ p_{[1]} \otimes p_{[1,2]} + 1 \otimes p_\pi. \quad (2.41)$$

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons décrit dans ce chapitre les notions de base des algèbres combinatoires de Hopf utiles aux travaux exposés dans la partie trois de cette thèse.

Deuxième partie

**Combinatoire énumérative des
suites de Stirling généralisées**

LES NOMBRES r -STIRLING

SOMMAIRE

3.1	INTRODUCTION	36
3.2	LES NOMBRES r -STIRLING DE PREMIÈRE ET DEUXIÈME ESPÈCE	36
3.2.1	Relations de récurrences	37
3.2.2	Identités combinatoires et convolutions	39
3.3	LES NOMBRES r -LAH	41
3.3.1	Relation avec les fonctions symétriques	41
3.3.2	Convolutions	43
3.3.3	Relation entre les nombres r -Lah et les nombres de Lah	44
3.3.4	Expression des r -Lah en termes des $(r \pm s)$ -Lah	45
3.4	NOMBRES r_p -STIRLING DE DEUXIÈME ESPÈCE	46
3.4.1	Formule explicite	46
3.4.2	Identité de convolution et fonction génératrice exponentielle	49
	CONCLUSION	49

Nous traitons dans ce chapitre les nombres r -Stirling des trois espèces qui, comme les nombres de Stirling classiques et associés, comptent des permutations, des partitions et des partitions en listes avec une restriction éventuelle sur les éléments. Cette restriction étant que r éléments soient dans des cycles (parts ou listes) distincts. Nous établissons d'une part, des identités combinatoires propres aux r -Stirling ainsi que des preuves bijectives pour des identités déjà connues. D'autre part, nous étudions une généralisation vectorielle des nombres r -Stirling de deuxième espèce proposée par Mihoubi et Maamra [?] et appelée nombres (r_1, \dots, r_p) -Stirling de deuxième espèce. Les résultats exposés dans ce chapitre ont fait l'objet d'un papier publié [?] et d'un autre soumis [?].

3.1 INTRODUCTION

Les nombres r -Stirling de seconde espèce apparurent dans le livre de Nielsen [?] comme différence de puissances de nombres. Suscitant un grand intérêt, les nombres r -Stirling de première et deuxième espèces firent l'objet de plusieurs travaux sous différentes appellations. Nous les retrouvons dans le papier de Carlitz [?] sous le nom de "wheighted Stirling numbers" et dans le livre de Comtet [?] sous le nom des "non-central Stirling" reprise par Koutras [?] et Charalambides et al. [?]. Dans un papier de référence (de notre point de vu), Broder [?] leur donne l'appellation "nombres r -Stirling" et établit un nombre important de propriétés telles que les fonctions génératrices ordinaires et exponentielles, les relations de récurrences triangulaires, horizontales et verticales, les relations d'orthogonalité, la relation aux fonctions symétriques et des convolutions. Nous étoffons ces propriétés, dans la section suivante, par des convolutions et des preuves bijectives.

Contrairement aux nombres r -Stirling de première et deuxième espèce, les nombres r -Lah (rarement appelés r -Stirling de troisième espèce) n'ont fait l'objet de travaux largement cités que depuis ces cinq dernières années. Ils apparurent comme cas particulier de la généralisation des nombres de Whitney du réseau de Dowling et des nombres r -Stirling dans le papier de Cheon et Jung [?] appelés nombres r -Whitney. Belbachir et Belkhir [?] et Belbachir et Bousbaa [?] ont établi quelques propriétés combinatoires telles que la forme close, les relations de récurrences triangulaires et des fonctions génératrices. Nyul et Rácz [?] étudient et regroupent, d'une manière analogue au papier de Broder [?], la majorité des propriétés combinatoires. Nous exposons dans la deuxième section des propriétés des nombres r -Lah.

Mihoubi et Maamra [?] ont défini une généralisation des nombres r -Stirling de deuxième espèce en dupliquant la restriction que les éléments d'un sous-ensemble de $[n]$ soient dans des parts différentes sur plusieurs sous-ensembles. Autrement dit, ayant une p -partition partielle de $[n]$ notée $\mathbf{r}_p = (\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_p, \text{ avec } |\mathcal{R}_i| = r_i)$; Les nombres (r_1, \dots, r_p) -Stirling de deuxième espèce, notés par $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p}$, comptent le nombre de k -partitions de $[n]$ telles que les éléments de chaque part \mathcal{R}_i sont dans des parts distinctes. Nous proposons une formule explicite en utilisant le principe d'inclusion-exclusion ainsi qu'une expression des nombres $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}$ en termes des $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_q}$ ($q \leq p$). Cette dernière, nous permettra de mettre en évidence un lien entre les nombres (r_1, \dots, r_p) -Stirling, les nombres r -Stirling et les nombres de Stirling classiques. Nous donnons aussi la fonction génératrice exponentielle correspondante.

3.2 LES NOMBRES r -STIRLING DE PREMIÈRE ET DEUXIÈME ESPÈCE

En combinatoire, les nombres r -Stirling de première espèce, notés $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$, comptent le nombre de k -permutations $[n]$ telles que les nombres $1, 2, \dots, r$ sont dans des cycles disjoints; Ou, d'une manière plus simple, le nombre de façons de placer n personnes autour de k tables telles que r personnes spécifiées ($r \leq n$) sont dans des tables distinctes. Les nombres r -Stirling de deuxième espèce, notés $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$, comptent le nombre de k -partitions de $[n]$ tels que les nombres $1, 2, \dots, r$ sont dans des parts disjointes; Ou encore, le nombre de façons de constituer k équipes depuis n joueurs tels que r joueurs spécifiés ($r \leq n$) sont dans des équipes différentes. Pour les cas $r = 0$ et $r = 1$, les nombres r -Stirling se réduisent aux nombres de Stirling classiques pour chaque espèce.

En effet, dire qu'il y a zéro ou une personne dans des tables ou des équipes différentes revient à ne rien faire vu que la restriction est vérifiée de faite, et nous écrivons $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_0 = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_1 = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_0 = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_1 = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

D'un point vu analytique, les nombres r -Stirling apparaissent comme coefficients dans les changements de base associés aux moments factoriels,

$$(x+r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r x^k,$$

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right\}_r (x)^k.$$

L'appellation "nombres de Stirling non-centrales" est dû au décalage r .

Les fonctions génératrices exponentielles des nombres r -Stirling sont

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{1-x} \right)^r \left(\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \right)^k, \quad (3.1)$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right\}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \exp(rx) (\exp(x) - 1)^k. \quad (3.2)$$

Les nombres r -Stirling de première et deuxième espèces sont des fonctions symétriques élémentaires. Nous avons

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-m \end{smallmatrix} \right]_r = \sum_{r \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n} i_1 i_2 \dots i_m, \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n+m \\ n \end{smallmatrix} \right\}_r = \sum_{r \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n} i_1 i_2 \dots i_m. \quad (3.4)$$

La relation (3.3) peut s'écrire avec les inégalités larges :

$$\left[\begin{smallmatrix} n+k \\ n \end{smallmatrix} \right]_r = \sum_{r \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} i_1 (i_2 + 1) (i_3 + 2) \dots (i_k + (k - 1)).$$

3.2.1 Relations de récurrences

La construction des triangles r -Stirling est identique à celle des triangles de Stirling classiques et à celle du triangle de Pascal. La différence réside, par rapport aux nombres de Stirling classiques, dans les valeurs initiales. Pour $n \geq r$, les nombres de Stirling de première et deuxième espèce obéissent aux relations de récurrences suivantes

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r + (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r, \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}_r + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r, \quad (3.6)$$

où $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r = \delta_{k,r}$ pour $n = r$, et $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r = 0$ pour $n < r$.

Le comptage de nos objets combinatoires se fait d'une manière simple en utilisant d'un raisonnement combinatoire similaire à celui des nombres de Stirling classiques. A titre d'exemple, pour démontrer la relation de récurrence (3.6), nous considérons le $n^{\text{ème}}$ élément et nous discutons s'il forme ou pas une part à lui seul (i.e. singleton), donc :

- si n est un singleton, il ne reste qu'à considérer $(k - 1)$ -partitions de $[n - 1]$ telles que les r premiers éléments soient dans des parts différentes, et nous avons $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r$ façons de le faire.
- dans le cas contraire, le $n^{\text{ème}}$ élément ne constitue pas un singleton. Nous considérons en premiers les k -partitions de $[n - 1]$ telles que les r premiers éléments sont des parts différentes, puis nous ajoutons ce premier aux k parts et nous avons $k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r$ façons de le faire.

Broder [?] montra d'une manière analytique que, les r -Stirling de première espèce satisfont une relation de récurrence transversale, et lui donna le nom de récurrence "croisé". Nous adopterons cette appellation pour ce type de récurrence et nous nous proposons de donner une preuve combinatoire.

Théorème 3.1 Soient n, k et r des entiers positifs, $r \leq k \leq n - 1$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{r+1} + r \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{r+1}. \quad (3.7)$$

Démonstration. Considérons l'élément $(r + 1)$ et intéressons-nous à son appartenance à des cycles contenant, ou pas, les r premiers éléments.

- S'il appartient à des cycles ne contenant pas les éléments $1, 2, \dots, r$, autrement dit, nous nous intéressons à des k -permutations de $[n]$ telles que les $(r + 1)$ premiers éléments sont dans des cycles disjoints, et nous avons $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{r+1}$ permutations possibles.
- Sinon, l'élément $(r + 1)$ est dans un cycle contenant un des r premiers éléments. Cela se fait en partant des $(k + 1)$ -permutations de $[n]$ telles que les $(r + 1)$ premiers éléments sont dans des cycles disjoints et nous avons $\left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{r+1}$ permutations, puis on ajoute le cycle contenant l'élément $(r + 1)$ à l'un des r cycles et on a r façons de le faire, ce qui donne $r \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{r+1}$ possibilités. □

De même, les nombres r -Stirling de deuxième espèce admettent une récurrence croisée. Nous en donnons une preuve combinatoire.

Théorème 3.2 Soient n, k et r des entiers positifs, tels que $r \leq k \leq n$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1} + (k - r + 1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}. \quad (3.8)$$

Démonstration. Considérons le $r^{\text{ème}}$ élément.

- Si $\{r\}$ est un singleton, il reste à considérer les $(k - 1)$ -partitions de $[n - 1]$ telles que les $(r - 1)$ premiers éléments soient dans des parts différentes. Nous avons $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1}$ partitions possibles.
- Sinon, nous considérons les k -partitions de $[n] - \{r\}$ telles que les $(r - 1)$ premiers éléments soient dans des parts différentes, où nous avons $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}$ partitions, puis on ajoute l'élément r aux parts ne contenant pas les $(r - 1)$ premiers éléments. Donc, nous avons $k - (r - 1)$ choix. Ce qui donne au total $(k - r + 1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}$ possibilités. □

3.2.2 Identités combinatoires et convolutions

Théorème 3.3 Soient n, k, r et s des entiers positifs tels que $r + s \leq k \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{i=0}^s \left[\begin{matrix} r+s \\ r+s-i \end{matrix} \right]_r \left[\begin{matrix} n \\ k+i \end{matrix} \right]_{r+s}. \quad (3.9)$$

Démonstration. Considérons s éléments autres que les r premiers, sans perte de généralité, prenons les s éléments successifs aux r premiers, soit : $r+1, \dots, r+s$. Discutons maintenant, leurs situations par rapport aux r premiers éléments. Supposons, dans un premier temps, que ces s éléments sont dans des cycles différents, i.e. nous avons étendu la restriction à $r+s$ premiers éléments. Soit i le nombre d'éléments parmi les s cités, $0 \leq i \leq s$, qui ne sont pas dans des cycles différents (ils sont dans des cycles ayant déjà un élément parmi les $r+s$ premiers). Nous considérons, au départ, les $(k+i)$ -permutations de $[n]$ telles que les $r+s$ éléments sont dans des cycles disjoints, et nous avons $\left[\begin{matrix} n \\ k+i \end{matrix} \right]_{r+s}$ permutations possibles. Puis nous réduisons le nombre de cycles de ces permutations en regroupant i cycles parmi les $r+s$ cycles contenant les $r+s$ premiers éléments entres eux. Pour ce faire, nous considérons chacun des $r+s$ cycles contenant les $r+s$ premiers éléments comme un seul bloc, et nous formons $r+s-i$ cycles depuis ces éléments là tout en nous assurant que les r premiers éléments (par analogie, les r cycles contenant les r premiers éléments) soient dans des cycles disjoints. Nous avons donc, $\left[\begin{matrix} r+s \\ r+s-i \end{matrix} \right]_r$ permutations (par analogie, $\left[\begin{matrix} r+s \\ r+s-i \end{matrix} \right]_r$ façons de regrouper les i cycles). En sommant sur toutes les valeurs possibles de i , nous obtenons le résultat. \square

Remarque 3.1 Pour $s = n - r - 1$, nous retrouvons la relation (3.5) et pour $s = 1$, nous obtenons la relation de récurrence (3.7).

Théorème 3.4 Soient n, k, r et s des entiers positifs tels que $r + s \leq k \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{i=0}^s \left[\begin{matrix} n \\ n-s+i \end{matrix} \right]_{n-s} \left[\begin{matrix} n-s \\ k-i \end{matrix} \right]_r. \quad (3.10)$$

Démonstration. Considérons les s derniers éléments, et soit i le nombre de cycles contenant seulement des éléments parmi les s considérés, i.e. il y a i cycles qui ne contiennent pas les éléments de $[n-s]$. Afin d'obtenir i cycles formés seulement d'éléments parmi s , nous considérons, dans un premier temps, les permutations de $[n]$ ayant $n-s+i$ cycles tels que les $n-s$ premiers éléments sont dans des cycles disjoints (en effet, la restriction stipulant que les $n-s$ premiers éléments soient dans des cycles disjoints assure que les i cycles restants ne contiennent pas les $n-s$ premiers éléments), et nous avons $\left[\begin{matrix} n \\ n-s+i \end{matrix} \right]_{n-s}$ permutations possibles. Maintenant, nous réduisons le nombre de cycles en regroupant les $n-s$ cycles contenant les $n-s$ premiers éléments et éventuellement des éléments parmi les s pour obtenir $k-i$ cycles au final. Pour ce faire, nous considérons ces cycles comme étant $n-s$ éléments que nous partitionnons en $k-i$ cycles tout en gardant les r premiers éléments dans des cycles disjoints. Nous avons $\left[\begin{matrix} n-s \\ k-i \end{matrix} \right]_r$ permutations possibles. La somme sur toutes les valeurs de i achève la démonstration. \square

Remarque 3.2 Notons que, pour $s = 1$, nous obtenons la relation (3.5) et pour $s = k$, nous obtenons la situation extrême suivante

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{i=r}^k \left[\begin{matrix} n \\ n-k+i \end{matrix} \right]_{n-k} \left[\begin{matrix} n-k \\ i \end{matrix} \right]_r. \quad (3.11)$$

Théorème 3.5 Soit n, k, r et s des entiers positifs, tels que $r \leq k \leq n$ et $s \leq k$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \sum_{i=0}^s \left\{ \begin{matrix} k+s-i \\ k \end{matrix} \right\}_{k-i} \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-i \end{matrix} \right\}_r. \quad (3.12)$$

Démonstration. Considérons les s derniers éléments, et soit i le nombre de parts contenant seulement des éléments parmi les s , i.e. il y a i parts qui ne contiennent pas les éléments de $[n-s]$. Tout d'abord, nous distribuons les $n-s$ premiers éléments sur $k-i$ parts de sorte que les r premiers soient dans des parts différentes. Nous avons $\left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-i \end{matrix} \right\}_r$ façons de le faire. Maintenant, nous considérons les $k-i$ parts comme étant $k-i$ blocs distinguables avec les s éléments restants, puis nous distribuons les $k-i+s$ éléments en k parts tout en gardant les $k-i$ éléments, issus de l'étape précédente, dans des parts différentes (cela nous évitera de compter les situations plus d'une fois ou de violer la restriction imposée). La somme sur toutes les valeurs de i donne le résultat. \square

Théorème 3.6 Soient n, k, r et s des entiers positifs tels que $s \leq r \leq k \leq n-1$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \sum_{i=0}^s \frac{(k-r+s-i)!}{(k-r)!} \binom{s}{i} \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-i \end{matrix} \right\}_{r-s}. \quad (3.13)$$

Démonstration. Considérons s éléments parmi les r premiers, et intéressons-nous au nombre de singletons constitués depuis ces s éléments. Soit i le nombre de singletons ($0 \leq i \leq s$). Nous avons $\binom{s}{i}$ façons de choisir les i éléments qui formeront nos i singletons, et $\left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-i \end{matrix} \right\}_{r-s}$ façons de partitionner les $n-s$ éléments en $k-i$ parts de sorte que les $r-s$ éléments soient dans des parts différentes. Pour terminer, nous affectons les $s-i$ éléments restants aux $k-i$ parts et donc, le premier élément a $k-i-(r-s)$ choix (on ne peut le mettre avec les i singletons, ni dans les $r-s$ parts contenant les $r-s$ éléments), le deuxième élément a $k-i-(r-s)-1$ choix (un de moins dû à l'insertion du premier), ainsi de suite jusqu'au dernier qui a $k-i-(r-s)-(s-i-1) = k-r+1$ choix. Au total, nous avons $(k-i-r+s)(k-i-r+s-1) \cdots (k-r+1)$ possibilités d'insertions. \square

Remarque 3.3 Pour $s = r$, nous obtenons la relation donnée par Mihoubi et Maamra [?], qui exprime les nombres r -Stirling de deuxième espèce en fonction des nombres de Stirling classiques de la même espèce.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \sum_{i=0}^r \frac{(k-i)!}{(k-r)!} \binom{r}{i} \left\{ \begin{matrix} n-r \\ k-i \end{matrix} \right\}. \quad (3.14)$$

Comme conséquence des fonctions génératrices exponentielles associées aux nombres de Stirling des deux espèces, Broder [?] dérive deux convolutions et les argumenta combinatoirement avec un double comptage. Nous donnons, dans ce qui suit, la version multinomiale.

Proposition 3.1 Soient $r, r_1, \dots, r_p, k, k_1, \dots, k_p$ et n des entiers positifs, tels que $n \geq k$ avec $k_1 + \dots + k_p = k$ et $r_1 + \dots + r_p = r$, on a

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_p} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r = \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_p = n \\ l_i \geq k_i}} \binom{n}{l_1, \dots, l_p} \left[\begin{matrix} l_1 + r_1 \\ k_1 + r_1 \end{matrix} \right]_{r_1} \cdots \left[\begin{matrix} l_p + r_p \\ k_1 + r_p \end{matrix} \right]_{r_p}, \quad (3.15)$$

et

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_p} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_p = n \\ l_i \geq k_i}} \binom{n}{l_1, \dots, l_p} \left\{ \begin{matrix} l_1 + r_1 \\ k_1 + r_1 \end{matrix} \right\}_{r_1} \cdots \left\{ \begin{matrix} l_p + r_p \\ k_1 + r_p \end{matrix} \right\}_{r_p}. \quad (3.16)$$

Nous nous contenterons de donner une démonstration pour la relation (3.15). La preuve de la deuxième relation se fait de manière similaire en manipulant les objets combinatoires adéquats (partitions en parts).

Démonstration. Le membre de gauche de l'équation peut s'interpréter comme étant le nombre de $(k+r)$ -permutations telles que les r premiers éléments sont dans des cycles distincts et les éléments des cycles sont colorés avec p couleurs de la façon suivante : chaque couleur i ($1 \leq i \leq p$) est attribuée à r_i cycles contenant chacun un élément des r premiers (avec $\sum_{i=1}^p r_i = r$) et $k-i$ autres cycles (avec $\sum_{i=1}^p k_i = k$). En effet, nous avons $\left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r$ permutations et $\binom{k}{k_1, \dots, k_p}$ façons de choisir les cycles de même couleur.

Pour le membre de droite, nous allons désigner d'abord les éléments de la même couleur puis compter le nombre de permutations. Nous choisissons, pour chaque couleur i , l_i éléments et nous avons $\binom{n}{l_1, \dots, l_p}$ façons de le faire, puis nous considérons les $(k_i + r_i)$ -permutations de $[l_i + r_i]$ telles que les r_i éléments sont dans des cycles disjoints. Nous avons $\left[\begin{matrix} l_i + r_i \\ k_i + r_i \end{matrix} \right]_{r_i}$ permutations pour chaque couleur i . La somme sur toutes les valeurs de l_i donne le résultat. \square

3.3 LES NOMBRES r -LAH

Les nombres r -Lah, noté $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$, s'interprètent comme étant le nombre de k -partitions en listes de $[n]$, telles que les r premiers éléments sont dans des listes différentes.

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r + (n+k-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r, \quad (3.17)$$

avec $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \delta_{n,k}$ pour $k = r$, et $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = 0$ pour $n < r$.

Pour $r = 0$ et $r = 1$, nous obtenons les nombres de Lah classiques.

Les nombres r -Lah ont la forme close suivante

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \binom{n-r}{k-r} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \binom{n+r-1}{k+r-1}. \quad (3.18)$$

3.3.1 Relation avec les fonctions symétriques

Rappelons-nous que les nombres r -Stirling des deux espèces, sont des fonctions symétriques élémentaires, voir (3.3) et (3.4). Nous étendons cette propriété aux nombres r -Lah.

Théorème 3.7 Soient n, k et r des entiers positifs, on a

$$\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]_r = \sum_{r \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} 2i_1(2i_2+1) \cdots (2i_k + (k-1)). \quad (3.19)$$

Démonstration. Pour distribuer $n + k$ éléments dans n listes de sorte que les r premiers éléments soient dans des listes différentes, nous procédons comme suit :

Nous mettons, temporairement, les éléments $1, 2, \dots, n$ dans n listes et discutons l'insertion des éléments restants $n + 1, \dots, n + k$ aux n listes. Pour insérer le premier élément (premier par rapport aux k éléments restants ou l'élément $n + 1$), nous distinguons deux situations :

1. S'il est affecté à une des r premières listes (contenant les r premiers éléments). Nous avons $2r$ façons de le faire i.e. avant ou après chaque élément des r listes.
2. Sinon, il est affecté à une des $n - r$ listes restantes que l'on désignera par liste l_1 ($r + 1 \leq l_1 \leq n$). Là encore, nous rencontrons deux situations (par rapport à l'élément déjà dans la liste l_1), et nous avons :
 - i. Si l'élément de la liste l_1 y reste, nous aurons 2 façons d'insérer notre élément $n + 1$ i.e. avant ou après l'élément initial de la liste l_1 .
 - ii. Sinon, l'élément de la liste l_1 migre aux listes précédentes. En d'autres termes et afin de considérer toutes les listes possibles, nous allons déplacer systématiquement les éléments mis dans les listes d'une manière temporaire au départ et dans un seul sens (de droite vers la gauche) afin d'éviter de compter les situations plusieurs fois. Donc, l'élément $n + 1$ occupera la place de l'élément initial de la liste l_1 tandis que ce dernier sera affecté au $l_1 - 1$ listes précédentes. Nous avons $2(l_1 - 1)$ façons de le faire.

Depuis i) et ii), nous avons $2l_1$ possibilités engendrées par l'insertion de l'élément $n + 1$ à la liste l_1 qui, en considérant tous les cas possibles de l_1 , donne $\sum_{r+1 \leq l_1 \leq n} 2l_1$ possibilités.

A partir des situations 1 et 2, nous aurons $2r + \sum_{r+1 \leq l_1 \leq n} 2l_1 = \sum_{r \leq l_1 \leq n} 2l_1$ façons d'insérer l'élément $n + 1$ aux n listes.

Maintenant, pour insérer le deuxième élément $n + 2$, nous considérons les éléments des listes $1, \dots, l_1$ comme étant fixes, conséquence de l'insertion de l'éléments $n + 1$ où nous avons considéré toutes les configurations possibles de ces listes. Alors, deux situations s'imposent :

1. L'élément $n + 2$ est affecté aux listes $1, \dots, l_1$, nous aurons $2l_1 + 1$ possibilités d'insertions (l_1 possibilités comme tête de liste et $l_1 + 1$ possibilités après chaque éléments).
2. Dans le cas contraire, il est affecté à une liste l_2 parmi les $n - l_1$ listes restantes ($l_1 + 1 \leq l_2 \leq n$), et de manière similaire à l'insertion précédente, nous avons deux situations :
 - i. Deux façons d'insérer l'élément $n + 2$ dans la liste l_2 .
 - ii. L'élément de la liste l_2 migre aux listes précédentes, et nous aurons $2(l_2 - 1) + 1$ choix possibles.

Cela donne $\sum_{l_1+1 \leq l_2 \leq n} (2l_2 + 1)$ possibilités.

Depuis 1 et 2 nous obtenons $\sum_{r \leq l_1 \leq n} 2l_1((2l_1 + 1) + \sum_{l_1+1 \leq l_2 \leq n} (2l_2 + 1)) = \sum_{r \leq l_1 \leq l_2 \leq n} 2l_1(2l_2 + 1)$ possibilités d'insertion des éléments $n + 1$ et $n + 2$.

Nous continuons par le même procédé pour les $k - 2$ éléments restants. Donc, pour le dernier élément $n + k$ nous considérons les éléments des listes $1, \dots, l_{k-1}$ comme étant fixes, ce qui nous donne $2l_{k-1} + k - 1$ possibilités d'insertion de notre élément à ces listes ou à une liste l_k des $n - l_{k-1}$ restantes, et nous avons $2l_k + k - 1$ possibilités

(deux possibilités d'insertion de l'élément $n + k$ avant ou après l'élément initial de la liste l_k et $2(l_k - 1) + k - 1$ lorsque ce dernier migre vers les listes précédentes). Nous aurons $\sum_{r \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_k \leq n} 2l_1(2l_2 + 1) \cdots (2l_k + (k - 1))$ possibilités.

□

3.3.2 Convolutions

Les nombres r -Lah satisfont une convolution de type Vandermonde. La prochaine relation, pour un entier s fixé, exprime les nombres r -Lah $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ en termes de $\left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-i \end{smallmatrix} \right]_r$, $i = 1, \dots, s$. Nous pouvons la voir aussi comme une relation de récurrence horizontale.

Théorème 3.8 Soient n, k, r et s des entiers positifs tels que $r \leq k \leq n$ et $r \leq n - s$, on a

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \sum_{i=0}^s \frac{(k-i+r-1)!}{(n-s+r-1)!} \binom{s}{i} \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-i \end{smallmatrix} \right]_r. \quad (3.20)$$

Remarquons que les coefficients des termes $\left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-i \end{smallmatrix} \right]_r$ sont rationnel.

Démonstration. On a $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \binom{n-r}{k-r}$, la formule de Vandermonde donne $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \binom{n-s-r}{k-i-r}$. □

Corollaire 3.1 Pour $s = 1$, nous obtenons une relation de récurrence triangulaire avec des coefficients rationnels

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = (n+r-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r + \frac{(n+r-1)}{(k+r-1)} \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r, \quad (3.21)$$

toujours, sous la restriction $r = 1$, nous obtenons la relation (5) dans [?]

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = n \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \frac{n}{k} \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]. \quad (3.22)$$

De même, pour $r = 1$ nous avons

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^s \frac{(k-i)!}{(n-s)!} \binom{s}{i} \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-i \end{smallmatrix} \right]. \quad (3.23)$$

Remarque 3.4 Pour $s = n - r$ dans (3.20), nous obtenons la forme close des nombres r -Lah donnée par (3.18).

Nous améliorons le résultat précédent dans le sens où nous exprimons la même situation avec des coefficients entiers comme suit :

Théorème 3.9 Soient s, r, k et n des entiers positifs tels que $r \leq k \leq n$ et $r \leq n - s$, on a

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \sum_{j=0}^s \frac{(n+k-j-1)!}{(n+k-s-1)!} \binom{s}{j} \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-j \end{smallmatrix} \right]_r. \quad (3.24)$$

Démonstration. Considérons les s derniers éléments et discutons le nombre de listes que nous pouvons constituer à partir de ces éléments. Soit j ($0 \leq j \leq s$) leur nombre.

Nous distribuons, en premier, les $n - s$ premiers éléments en $k - j$ listes telles que les r premiers éléments soient dans des listes différentes et nous avons $\lfloor_{k-j}^{n-s} \rfloor_r$ façons de le faire. Ensuite, nous choisissons les éléments têtes de listes des j listes, et nous avons $\binom{s}{j}$ possibilités. Il nous reste, à distribuer les $s - j$ éléments restants sur les k listes qui contiennent les $n - s + j$ éléments et nous avons pour le premier élément $n - s + k$ possibilités ($n - s + j$ possibilités après chaque élément et $k - j$ comme tête de liste des $k - j$ listes seulement), pour le second élément nous avons $n - s + k + 1$ possibilités (une possibilité ajoutée par l'insertion de l'élément précédent), etc. Le dernier élément $s - j$ a $n + k - j - 1$ possibilités. Au total nous avons $\frac{(n+k-j-1)!}{(n+k-s-1)!} \binom{s}{j} \lfloor_{k-j}^{n-s} \rfloor_r$ possibilités. La somme sur toutes les valeurs de j donne le résultat. \square

Remarque 3.5 Pour $s = 1$, nous obtenons la récurrence classique (3.17) et pour $s = n - r$, nous obtenons la forme close (3.18).

D'une manière analogue aux relations (3.15) et (3.16), nous proposons une convolution de type multinomiale des nombres r -Lah. L'identité se démontre en utilisant le même raisonnement combinatoire employé dans la preuve des deux relations citées.

Proposition 3.2 Soient $r, r_1, \dots, r_p, k, k_1, \dots, k_p$ et n des entiers positifs, tels que $n \geq k$ avec $k_1 + \dots + k_p = k$ et $r_1 + \dots + r_p = r$, on a

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_p} \lfloor_{k+r}^{n+r} \rfloor_r = \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_p = n \\ l_i \geq sk_i + (s-1)r_i}} \binom{n}{l_1, \dots, l_p} \lfloor_{k_1+r_1}^{l_1+r_1} \rfloor_{r_1} \dots \lfloor_{k_p+r_p}^{l_p+r_p} \rfloor_{r_p}. \quad (3.25)$$

3.3.3 Relation entre les nombres r -Lah et les nombres de Lah

Belbachir et Belkhir [?] montrent d'une manière combinatoire que les nombres r -Lah s'expriment en termes de nombres de Lah classiques comme suit, pour r, k et n entiers,

$$\lfloor_{k+r}^{n+r} \rfloor_r = \sum_{s=0}^{n-k} \sum_{i_1 + \dots + i_r = s} (i_1 + 1)! \dots (i_r + 1)! \binom{n}{i_1, \dots, i_r, n-s} \lfloor_{k}^{n-s} \rfloor. \quad (3.26)$$

La démonstration consiste à considérer r listes contenant les r premiers éléments et, pour chaque liste j ($1 \leq j \leq r$), un nombre i_j d'éléments. De ce fait, le comptage s'effectue en deux étapes : choisir les éléments de chaque liste puis considérer les arrangements de ces éléments en listes. Pour notre part, nous donnons une autre expression des nombres r -Lah en fonction des nombres de Lah classiques en utilisant un autre comptage.

Théorème 3.10 Soient r, k and n des entiers positifs tels que $r \leq k \leq n$, on a

$$\lfloor_{k}^n \rfloor_r = \sum_{s=0}^{n-k} (2r)^{\bar{s}} \binom{n-r}{s} \lfloor_{k-r}^{n-r-s} \rfloor. \quad (3.27)$$

Démonstration. Considérons les r listes contenant les r premiers éléments, et soit s le nombre d'éléments depuis les $n - r$ restants qui appartiennent à ces r listes. Nous avons $\binom{n-r}{s}$ façons de choisir ces s éléments, et $(2r)^{\bar{s}}$ façons de les arranger en r listes. Pour

cela, nous mettons au départ les éléments $1, \dots, r$ comme tête de liste puis nous distribuons les s éléments comme suit : le premier a $2r$ possibilités, le second $2r + 1$, ainsi de suite jusqu'au dernier qui en a $2r + s - 1$, ce qui donne au final $(2r)^{\overline{s}}$ possibilités. Pour terminer, nous distribuons les $n - r - s$ éléments restants en $k - r$ listes et nous avons $\left[\begin{smallmatrix} n-r-s \\ k-r \end{smallmatrix} \right]$ façons de le faire. En sommant sur toutes les valeurs de s nous obtenons le résultat. \square

Corollaire 3.2 *Pour $r = 1$, dans les relations (3.26) et (3.27), nous obtenons une relation de récurrence verticale pour les nombres de Lah classiques,*

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{i=0}^{n-k} (i+1)! \binom{n-1}{i} \left[\begin{smallmatrix} n-i-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]. \quad (3.28)$$

3.3.4 Expression des r -Lah en termes des $(r \pm s)$ -Lah

Nous exprimons dans ce qui suit, un élément $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ du triangle r -Lah en termes des éléments de la même ligne dans les triangles $(r + s)$ -Lah et $(r - s)$ -Lah.

Théorème 3.11 *Soient s, r, k et n des entiers positifs tels que $r \leq k \leq n$, les nombres r -Lah satisfont*

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \sum_{i=0}^s \frac{(k+i+(r+s)-1)!}{(n+(r+s)-1)!} \binom{s}{i} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k+i \end{smallmatrix} \right]_{r+s}, \quad (3.29)$$

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \frac{(k+i-r+s)!}{(n-r+s)!} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k+i \end{smallmatrix} \right]_{r-s}, \quad (r \geq s). \quad (3.30)$$

Démonstration. A partir de la relation (3.18), on a $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \binom{n-r}{k-r}$ avec la formule de Vandermonde, nous obtenons $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \binom{n-r-s}{k+i-r-s}$.

La même approche donne la seconde relation. \square

Une expression des nombres de Lah en termes des nombres s -Lah peut être déduite depuis (3.29) pour $r = 1$.

Corollaire 3.3 *Pour $s \geq 1$, on a*

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \frac{(k+i+s-1)!}{(n+s-1)!} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k+i \end{smallmatrix} \right]_s. \quad (3.31)$$

Toujours, pour $s = 1$, dans les relations (3.29) et (3.30), nous avons

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = (k+r+1) \frac{(k+r)}{(n+r)} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right]_{r+1} + \frac{(k+r)}{(n+r)} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{r+1}, \quad (3.32)$$

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{r+1} = (k-r+1) \frac{(k-r)}{(n-r)} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right]_r + \frac{(k-r)}{(n-r)} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r. \quad (3.33)$$

De plus, en utilisant la relation (3.21) dans (3.32), nous obtenons une relation de récurrence d'ordre trois avec des coefficients entiers qui, de notre point de vu, améliore les deux précédentes.

Corollaire 3.4 *On a*

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r+1} + 2(k+r) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{r+1} + (k+r+1)(k+r) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_{r+1}. \quad (3.34)$$

Une autre expression des nombres r -Lah en termes des Lah, comme un cas particulier de la relation (3.30), pour $s = r$, est donnée par

Corollaire 3.5

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \frac{(n-r)!}{n!(k-r)!} \sum_{i=0}^r (k+i)! \binom{r}{i} \left[\begin{matrix} n \\ k+i \end{matrix} \right]. \quad (3.35)$$

3.4 NOMBRES \mathbf{r}_p -STIRLING DE DEUXIÈME ESPÈCE

Les nombres (r_1, \dots, r_p) -Stirling de deuxième espèce sont une généralisation des nombres r -Stirling de deuxième espèce. Ils comptent le nombre de k -partitions de $[n]$ telles que les éléments de chaque part \mathcal{R}_i de \mathcal{R} sont dans des parts distinctes. Afin de simplifier la notation, notons le vecteur (r_1, \dots, r_p) par \mathbf{r}_p quand le contexte est clair.

Les nombres \mathbf{r}_p -Stirling de deuxième espèce satisfont la relation de récurrence suivante

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p}. \quad (3.36)$$

3.4.1 Formule explicite

Les nombres \mathbf{r}_p -Stirling de seconde espèce satisfont la formule explicite suivante.

Théorème 3.12 *Soient n et k des entiers positifs, $\rho = \#\mathcal{R}$ et $r = \max(|\mathcal{R}_i| \mid i \in [p])$, nous avons*

$$\left\{ \begin{matrix} n+\rho \\ k+r \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(k-j+r)^n}{(k-j+r)^{\underline{r}}} \prod_{i=1}^p (k-j+r)^{r_i}.$$

Nous proposons une preuve basée sur le principe d'inclusion exclusion.

Démonstration. Notons par φ l'ensemble de toutes les façons possibles de distribuer $n + \rho$ éléments en $k + r$ sous ensembles tels que les éléments de chaque part R_j ($j \in [p]$) soient dans des sous-ensembles disjoints. Supposons que les k sous-ensembles sont numérotés, les éléments du sous-ensemble R^* ($|R^*| = r$) appartiennent à r parts distinctes.

Notons à présent, par δ le sous-ensemble de φ qui ne possède pas des sous-ensembles vides, cela donne

$$|\delta| = k! \left\{ \begin{matrix} n+\rho \\ k+r \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p}.$$

Pour j ($1 \leq j \leq k$), soit A_j le sous-ensemble de k parts de φ tel que la j -ième part est vide. Ainsi

$$\delta = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k},$$

où

$$\overline{A_j} = \varphi \setminus A_j \text{ et } |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}| = |\varphi| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|.$$

En appliquant le principe d'inclusion-exclusion, on obtient

$$|\delta| = |\varphi| - \sum_{j=1}^k (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}|.$$

Nous calculons le terme général $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}|$: pour un j fixé il y a $\binom{k}{j}$ façons de sélectionner j parts vides depuis k parts, et on distribue les $n + \rho - r$ restants sur les $k - j + r$ parts. Alors, pour chaque élément de n , on a $k - j + r$ possibilités d'insertion, ce qui donne $(k - j + r)^n$ possibilités, et pour chaque sous-ensemble R_i excepté R^* ($R_i \neq R^*$), nous avons $(k - j + r)^{r_i}$ possibilités d'insertion. Ainsi

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| = \binom{k}{j} (k - j + r)^n \prod_{i=2}^p (k - j + r)^{r_i},$$

et nous obtenons

$$|\delta| = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(k - j + r_1)^n}{(k - j + r)^r} \prod_{i=1}^p (k - j + r)^{r_i}.$$

Nous divisons par $k!$ pour obtenir le résultat. □

Pour $p = 1$, nous obtenons la formule explicite des nombres r -Stirling de seconde espèce

Corollaire 3.6 *On a la forme explicite suivante*

$$\left\{ \begin{matrix} n + r \\ k + r \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k - j + r)^n. \quad (3.37)$$

Une récurrence croisée des nombres r_p -Stirling de deuxième espèce peut être établie en reprenant le même raisonnement utilisé dans la démonstration de la récurrence (3.8).

Théorème 3.13

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} = \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_{j-1}, \dots, r_p} + (k - r_j + 1) \left\{ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_{j-1}, \dots, r_p}. \quad (3.38)$$

Démonstration. Considérons un élément du sous-ensemble R_j et étudions deux situations :

1. Si c'est un singleton, nous devons partitionner les éléments restants en $(k - 1)$ parts, nous aurons donc $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_{j-1}, \dots, r_p}$ façons de le faire.
2. Autrement, nous partitionnons les éléments en k parts et nous aurons $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_{j-1}, \dots, r_p}$ possibilités, puis nous insérons notre élément dans l'une des k parts à l'exception des parts contenant un des éléments de R_j . Nous avons $(k - r_j + 1)$ façons de le faire.

□

De même, les nombres (r_1, \dots, r_p) -Stirling de seconde espèce peuvent être exprimés en termes des nombres (s_1, \dots, s_p) -Stirling de seconde espèce ($s_i \leq r_i, 0 \leq i \leq p$) de la façon suivante

Proposition 3.3 Soient s_1, \dots, s_p des entiers positifs tels que $s_1 + \dots + s_p = s$ et $s_i < r_i$ pour $i \in [p]$, nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \sum_{i_1, \dots, i_p} \prod_{j=1}^p \binom{s_j}{i_j} (k - i - (r_j - s_j))^{\binom{s_j - i_j}{s_j - i_j}} \left\{ \begin{matrix} n - s \\ k - i \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}'_p}, \quad (3.39)$$

avec $i = i_1 + \dots + i_p$ et $\mathbf{r}'_p = (r_1 - s_1, \dots, r_p - s_p)$.

Démonstration. Considérons les singletons constitués seulement des éléments du sous-ensemble S_j ($|S_j| = s_j, S_j \subset R_j, j \in [p]$) :

- Nous choisissons i_j éléments de chaque sous-ensemble S_j ($0 \leq i_j \leq s_j$) afin de former les singletons et nous avons $\binom{s_1}{i_1} \dots \binom{s_p}{i_p}$ façons de le faire.
- Pour avoir k parts, nous partitionnons les éléments restants $n - s_1 - \dots - s_p$ en $k - i_1 - \dots - i_p$ parts telles que les éléments de chaque part $R_j \setminus S_j$ ($j = 1, \dots, p$) soient dans des parts distinctes, nous avons $\left\{ \begin{matrix} n - s_1 - \dots - s_p \\ k - i_1 - \dots - i_p \end{matrix} \right\}_{r_1 - s_1, \dots, r_p - s_p}$ possibilités.
- Nous ajoutons les $s_j - i_j$ ($j = 1, \dots, p$) éléments restants de chaque sous-ensemble S_j aux $k - i$ parts, ce qui donne $(k - i - (r_1 - s_1))^{\binom{s_1 - i_1}{s_1 - i_1}}$ possibilités pour les éléments restants dans S_1 et $(k - i - (r_2 - s_2))^{\binom{s_2 - i_2}{s_2 - i_2}}$ possibilités pour les éléments restants dans S_2 et ainsi de suite jusqu'au dernier sous-ensemble S_p avec $(k - i - (r_p - s_p))^{\binom{s_p - i_p}{s_p - i_p}}$ possibilités, ainsi, nous obtenons au total $\prod_{j=1}^p (k - i - (r_j - s_j))^{\binom{s_j - i_j}{s_j - i_j}}$ possibilités.

□

La Relation (3.39) nous permet d'exprimer les nombres (r_1, \dots, r_p) -Stirling de seconde espèce en termes des nombres (r_1, \dots, r_q) -Stirling de deuxième espèce ($q < p$), des nombres r -Stirling de deuxième espèce et les nombres de Stirling de deuxième espèce.

Corollaire 3.7 Pour $(s_1, \dots, s_q, s_{q+1}, \dots, s_r) = (0, \dots, 0, r_{q+1}, \dots, r_p)$ et $\rho_q = r_{q+1} + \dots + r_p$, nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} = \sum_{i_{q+1}, \dots, i_p} \prod_{j=q+1}^p \binom{r_j}{i_j} (k - i)^{\binom{r_j - i_j}{r_j - i_j}} \left\{ \begin{matrix} n - \rho_q \\ k - i \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_q}. \quad (3.40)$$

Pour $(s_1, s_2, \dots, s_r) = (0, r_2, \dots, r_p)$ et $s = r_2 + \dots + r_p$, nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \sum_{i_2, \dots, i_p} \prod_{j=2}^p \binom{r_j}{i_j} (k - i)^{\binom{r_j - i_j}{r_j - i_j}} \left\{ \begin{matrix} n - s \\ k - i \end{matrix} \right\}_{r_1}. \quad (3.41)$$

Pour $(s_1, \dots, s_r) = (r_1, \dots, r_p)$, nous avons

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \sum_{i_1, \dots, i_p} \prod_{j=1}^p \binom{r_j}{i_j} (k - i)^{\binom{r_j - i_j}{r_j - i_j}} \left\{ \begin{matrix} n - \rho \\ k - i \end{matrix} \right\}, \quad (3.42)$$

avec $i = i_1 + \dots + i_p$.

3.4.2 Identité de convolution et fonction génératrice exponentielle

Les nombres de r_p -Stirling et les r -Stirling satisfont l'identité de convolution suivante.

Proposition 3.4 On a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p} = \sum_{j=r_1}^k \left\{ \begin{matrix} s+j \\ k \end{matrix} \right\}_j \left\{ \begin{matrix} n-s \\ j \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p}. \quad (3.43)$$

Démonstration. Considérons un sous-ensemble $S \subset N \setminus \bigcup_{j=1}^p R_j$ avec $|S| = s$ ($1 \leq s \leq n - \rho$). L'ensemble $N \setminus S$ peut être partitionné en j parts ($r_1 \leq j \leq k$) et l'on a $\left\{ \begin{matrix} n-s \\ j \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p}$ façons de le faire. Ces j parts peuvent être considérées comme j éléments (les éléments de chaque part sont considérés comme un seul élément). Il reste à partitionner les s éléments avec les j éléments en k parts telles que les j éléments soient dans des parts distinctes, on a $\left\{ \begin{matrix} s+j \\ k \end{matrix} \right\}_j$ façons de le faire. En sommant sur toutes les valeurs de j , on obtient le résultat recherché. \square

Notons que, pour $p = 1$, nous obtenons l'équation donnée dans (3.12).

La fonction génératrice exponentielle des nombres r_p -Stirling de seconde espèce peut être exprimée comme suit :

Théorème 3.14 On a

$$\sum_{n=k} \left\{ \begin{matrix} n+\rho \\ k \end{matrix} \right\}_{r_p} \frac{x^n}{n!} = \sum_{i_1, \dots, i_p} A_{r_1, \dots, r_p}^{i_1, \dots, i_p, k} \frac{1}{(k-i)!} (\exp(x) - 1)^{k-i},$$

avec $i = i_1 + \dots + i_p$ et

$$A_{r_1, \dots, r_p}^{i_1, \dots, i_p, k} = \prod_{j=1}^p \binom{r_j}{i_j} (k-i)^{\binom{r_j-i_j}{i_j}}.$$

Démonstration. De l'Identité 3.42, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=k} \left\{ \begin{matrix} n+\rho \\ k \end{matrix} \right\}_{r_p} \frac{x^n}{n!} &= \sum_n \sum_{i=i_1, \dots, i_p} A_{r_1, \dots, r_p}^{i_1, \dots, i_p, k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k-i \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{i=i_1, \dots, i_p} A_{r_1, \dots, r_p}^{i_1, \dots, i_p, k} \frac{1}{(k-i)!} (\exp(x) - 1)^{k-i}. \end{aligned}$$

\square

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre nous avons proposés quelques identités combinatoires des nombres de Stirling des trois espèces ainsi que les nombres r_p -Stirling de deuxième espèce. Une perspective de ce travail pourrait consister en la définition et l'étude des nombres r_p -Stirling de première et troisième espèces.

LES NOMBRES DE LAH ASSOCIÉS ET r -STIRLING s -ASSOCIÉS

4

SOMMAIRE

4.1	INTRODUCTION	51
4.2	LES NOMBRES DE LAH ASSOCIÉS	51
4.3	SOMMES MULTIPLES ET COEFFICIENTS BINOMIAUX	55
4.4	LES NOMBRES r -STIRLING s -ASSOCIÉS DES TROIS ESPÈCES	57
4.4.1	Relations de récurrence	61
4.4.2	Identités combinatoires et convolutions	63
4.4.3	Cross récurrences	67
4.4.4	Convolutions	68
4.4.5	Fonctions génératrices	68
	CONCLUSION	70

Nous introduisons dans ce chapitre une approche unificatrice des nombres r -Stirling et les nombres de Stirling s -associés que l'on nommera : les nombres r -Stirling s -associés. Les résultats proposés dans ce chapitre ont fait l'objet d'un papier soumis [?].

4.1 INTRODUCTION

Ahuja et Enneking [?] définissent une généralisation des nombres de Lah classiques, notés $L_k(m, n)$, d'une manière analytique par

$$L_k(m, n) = \frac{m!}{n!} \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} \binom{n+rk-1}{m}.$$

Ils les nomment les nombres de Lah associés et montrent que ces nombres admettent une relation de récurrence triangulaire et une fonction génératrice exponentielle exprimées comme suit

$$L_k(m+1, n) = (nk+m)L_k(m, n) + kL_k(m, n-1),$$

$$\left[(1-x)^{-k} - 1 \right]^n = \sum_{m=n}^{\infty} n! L_k(m, n) \frac{x^m}{m!}.$$

À en juger par la fonction génératrice et l'aspect combinatoire de ces nombres, nous pensons que l'appellation Lah associés n'est pas adéquate. En effet, en comparaison avec les nombres de Stirling associés de première et seconde espèces, la généralisation des nombres de Lah associés serait définie par un développement en série de Taylor de la fonction génératrice des nombres de Lah à partir d'un rang donné. Et/ou encore, d'un point de vu combinatoire, une restriction sur le nombre minimum d'éléments par liste. D'autre part, nous trouvons dans Sloane une définition -fidèle à la généralisation de Riordan- des nombres de Lah associés (sous cette appellation), que l'on notera $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(2)}$, comme étant le nombre de k -partitions en listes de $[n]$ de sorte que chaque liste contienne au moins deux éléments. Une forme close de ces nombres est donnée par

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(2)} = \frac{n!}{k!} \binom{n-k-1}{k-1}, \quad (4.1)$$

ainsi qu'une fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(2)} y^k \frac{x^n}{n!} = \exp \left(y \frac{x^2}{1-x} - 1 \right). \quad (4.2)$$

Nous nous proposons d'étudier les nombres de Lah s -associés, et de donner dans la prochaine section quelques propriétés combinatoires : une relation de récurrence triangulaire, des relations de convolution, une forme close et la fonction génératrice exponentielle.

Nous étudions dans la section deux des sommes multiples utiles au développement de la dernière section de ce chapitre où nous définissons une généralisation dénommée les nombres r -Stirling s -associés des trois espèces et qui, comme son nom l'indique, est une unification des deux généralisations (r -Stirling et Stirling s -associés) par la combinaison des deux restrictions connues. Nous y établissons aussi quelques propriétés combinatoires.

4.2 LES NOMBRES DE LAH ASSOCIÉS

Intéressons nous aux partitions d'ensembles en listes ayant au moins s éléments par liste. Les nombres de Lah s -associés, notés $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(s)}$, sont définis comme suit

$n \setminus k$	1	2	3	4
3	6			
4	24			
5	120			
6	720	360		
7	5040	5040		
8	40320	60480		
9	362880	725760	60480	
10	3628800	9072000	1814400	
11	39916800	119750400	39916800	
12	479 001 600	1 676 505 600	798 336 000	19 958 400
13	6 227 020 800	24 908 083 200	15 567 552 000	1 037 836 800
14	87 178 291 200	392 302 310 400	305 124 019 200	36 324 288 000

TABLE 4.1 – Nombres de Lah 3-associés.

Définition 4.1 Les nombres de Lah s -associés, notés $\lfloor_k^n \rfloor^{(s)}$, comptent le nombre de k -partitions en listes de $[n]$ telles que chaque liste contienne au moins s éléments.

Usant d'un raisonnement combinatoire, nous établissons une relation de récurrence triangulaire pour les nombres de Lah s -associés.

Théorème 4.1 Soient n, k et s des entiers positifs tels que pour $sk \leq n$, on a

$$\lfloor_k^n \rfloor^{(s)} = \binom{n-1}{s-1} s! \lfloor_{k-1}^{n-s} \rfloor^{(s)} + (n+k-1) \lfloor_k^{n-1} \rfloor^{(s)}, \quad (4.3)$$

avec $\lfloor_0^n \rfloor^{(s)} = \delta_{n,0}$ pour $k = 0$, et $\lfloor_k^n \rfloor^{(s)} = 0$ pour $n < sk$.

Démonstration. Raisonnons sur le dernier élément n :

- S'il est dans une liste contenant exactement s éléments, nous avons $\binom{n-1}{s-1}$ façons de choisir les $s-1$ autres éléments et $s!$ façons de les arranger dans une liste. Reste à considérer les $(k-1)$ -partitions en listes des $n-s$ éléments restants de sorte que chaque liste contienne au moins s éléments, nous avons $\lfloor_{k-1}^{n-s} \rfloor^{(s)}$ configurations possibles.
- Sinon, nous considérons toutes les k -partitions en listes de $[n-1]$ sous la même restriction, et nous avons $\lfloor_k^{n-1} \rfloor^{(s)}$ configurations possibles. Puis, ajouter l'élément n aux k listes et nous avons $n+k-1$ façons de le faire (k possibilités entant que tête de liste et $n-1$ possibilités après chaque élément).

□

Il est clair que pour $s = 1$ et $s = 2$, nous obtenons les nombres de Lah et les nombres de Lah associés respectivement.

Construisons pour $s = 3$, le triangle associé aux nombres de Lah 3-associés pour $n \leq 14$ (voir table (4.1)).

Le prochain résultat est une formule explicite des nombres de Lah s -associés duale aux identités (1.34) et (1.35) pour les nombres de Stirling s -associés de première et de deuxième espèces. Nous donnons deux preuves bijectives.

Théorème 4.2 Soient s, k et n des entiers positifs tels que $n \geq sk$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} = \frac{n!}{k!} \binom{n - (s-1)k - 1}{k-1}. \quad (4.4)$$

Démonstration 1. Nous voulons distribuer n éléments dans k listes de sorte que chaque liste contienne au moins s éléments. Pour ce faire, nous procédons comme suit : supposons que les listes sont numérotées de 1 à k et pour chaque liste j nous choisissons $(i_j + s)$ éléments ($0 \leq i_j$), nous avons $\binom{n}{i_1+s, i_2+s, \dots, i_k+s}$ possibilités. Puis, nous considérons toutes les permutations d'éléments pour former les listes et nous avons $(i_1 + s)! \cdots (i_k + s)!$ possibilités. Ainsi, nous obtenons $\sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n-sk} \binom{n}{i_1+s, i_2+s, \dots, i_k+s} (i_1 + s)! (i_2 + s)! \cdots (i_k + s)! = n! \binom{n-(s-1)k-1}{k-1}$, nous divisons par $k!$ pour supprimer les permutations de listes. \square

Démonstration 2. Choisissons d'abord, les k éléments comme tête de liste et nous avons $\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite, nous choisissons k groupes de $s-1$ éléments chacun dans le but d'avoir s éléments dans chaque liste. Nous avons pour la première liste, $\binom{n-k}{s-1}$ façons de sélectionner les éléments et $(s-1)!$ façons de les arranger. Aussi, pour la seconde liste, nous avons $\binom{n-k-(s-1)}{s-1} (s-1)!$ possibilités et ainsi de suite ... Pour la dernière liste, nous avons $\binom{n-k-(s-1)(k-1)}{s-1} (s-1)!$. Au total, nous avons $\binom{n-k}{s-1} \binom{n-k-(s-1)}{s-1} \cdots \binom{n-k-(s-1)(k-1)}{s-1} ((s-1)!)^k = \binom{n-k}{s-1, s-1, \dots, s-1, n-sk} ((s-1)!)^k$ possibilités.

Il reste à distribuer les $n - sk$ éléments restants et nous avons : k possibilités pour le premier élément, $k+1$ pour le second, ..., $n - (s-1)k - 1$ pour le dernier, ainsi nous avons : $k(k+1) \cdots (n - (s-1)k - 1) = \frac{(n-(s-1)k-1)!}{(k-1)!}$ possibilités. Cela donne au final $\binom{n}{k} \binom{n-k}{s-1, s-1, \dots, s-1, n-sk} \frac{((s-1)!)^k (n-(s-1)k-1)!}{(k-1)!}$ possibilités. \square

Remarque 4.1 Pour $n = sk$, nous avons

$$\left[\begin{matrix} sk \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} = \frac{(sk)!}{k!}. \quad (4.5)$$

Depuis la forme close (4.4), une relation de récurrence avec des coefficients rationnels peut être déduite comme suit :

Théorème 4.3 Les nombres de Lah s -associés satisfont la relation de récurrence suivante

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} = \frac{n!}{(n-s)!k} \left[\begin{matrix} n-s \\ k-1 \end{matrix} \right]^{(s)} + n \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]^{(s)}. \quad (4.6)$$

Démonstration. En utilisant la formule de Pascal dans (4.4), nous obtenons le résultat. \square

A noter que pour $s = 1$, nous obtenons la relation (3.22).

Les nombres de Lah s -associés admettent une formule de convolution comme suit.

Théorème 4.4 Soient n, k, s et p des entiers positifs, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^p \frac{(k-i)!}{(n-p-(s-1)i)!} \binom{p}{i} \left[\begin{matrix} n-(s-1)i-p \\ k-i \end{matrix} \right]^{(s)}. \quad (4.7)$$

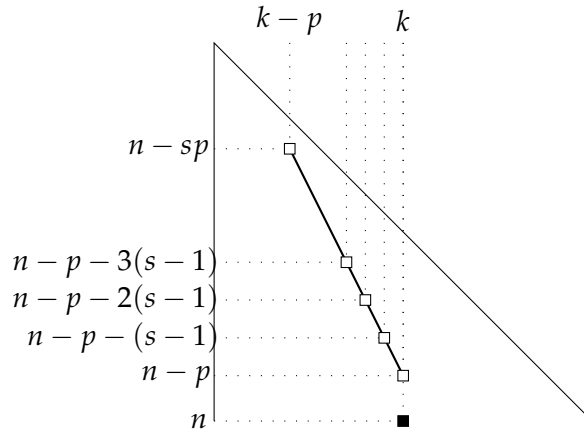


FIGURE 4.1 – Convolution des nombres de Lah s -associés.

Démonstration. En utilisant la formule explicite (3.18) et la convolution de Vandermonde, nous obtenons le résultat. □

Le cas particulier $s = 1$, donne l'identité (3.23).

Une relation de récurrence verticale est donnée comme suit.

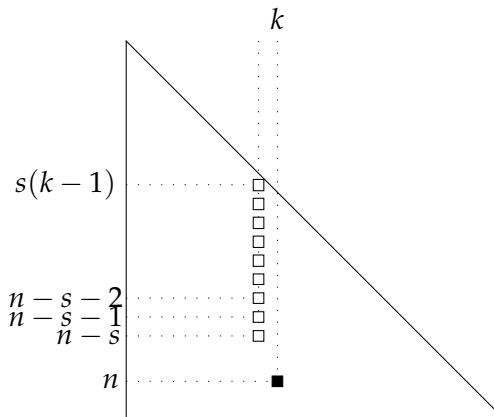


FIGURE 4.2 – Relation de récurrence verticale.

Théorème 4.5 Soient s, k et n des entiers positifs tels que $n \geq sk$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} = \sum_{i=s(k-1)}^{n-s} (n-i)! \binom{n-1}{i} \left[\begin{matrix} i \\ k-1 \end{matrix} \right]^{(s)}. \tag{4.8}$$

Démonstration. Raisonnons sur les $k - 1$ listes qui ne contiennent pas le dernier élément n et soit i le nombre d'éléments dans ces listes ($s(k - 1) \leq i \leq n - s$).

- Nous avons $\binom{n-1}{i}$ façons de les choisir et $\left[\begin{matrix} i \\ k-1 \end{matrix} \right]^{(s)}$ façons de les distribuer en $k - 1$ listes telles que chaque liste contienne au moins s éléments.
- Nous constituons la dernière liste avec les $n - i$ éléments restants, et nous avons $(n - i)!$ configurations possibles.

Nous concluons en sommant sur i . □

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Lah s -associés est donnée comme suit. Elle complète les fonctions génératrices des Stirling s -associés (1.32) et (1.33).

Théorème 4.6 Soient n, k et s des entiers positifs, on a

$$\sum_{n \geq sk} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x^s}{1-x} \right)^k. \quad (4.9)$$

Démonstration. En utilisant la forme close (4.4), avec l'identité

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+m}{m} t^n = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{m+1},$$

pour $m \in \mathbb{N}$ (voir Gould [?]), nous obtenons le résultat. \square

La fonction génératrice exponentielle double peut s'écrire comme suit

Théorème 4.7 On a

$$\sum_{n \geq sk} \sum_{k=0}^{\lfloor n/s \rfloor} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} y^k \frac{x^n}{n!} = \exp \left\{ \frac{x^s}{1-x} y \right\}. \quad (4.10)$$

Démonstration. En interchangeant l'ordre des sommations et en utilisant l'équation (4.9), nous obtenons le résultat. \square

4.3 SOMMES MULTIPLES ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

Dans cette section, nous évaluons quelques fonctions symétriques. Nous commençons par le résultat suivant.

Lemme 4.1 Soient α et β des entiers tels que $\beta \geq \alpha$. on a

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+\alpha}{\beta} z^n = \frac{z^{\beta-\alpha}}{(1-z)^{\beta+1}}. \quad (4.11)$$

Démonstration. $\sum_{n \geq 0} \binom{n+\alpha}{\beta} z^n = (\sum_{n \geq 0} \binom{n+\beta}{\beta} z^n) z^{\beta-\alpha} = \frac{z^{\beta-\alpha}}{(1-z)^{\beta+1}}$. \square

D'une manière générale, nous avons :

Théorème 4.8 Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_r, \beta, k_1, \dots, k_r$ et k des entiers tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = \alpha$, $\beta_1 + \dots + \beta_r = \beta$ et $k_1 + \dots + k_r = k$ avec $\beta_i \geq \alpha_i$. On a

$$\sum_{k_1 + \dots + k_r = k} \binom{k_1 + \alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{k_r + \alpha_r}{\beta_r} = \binom{k + \alpha + r - 1}{\beta + r - 1}. \quad (4.12)$$

Démonstration. La démonstration se fait par induction sur r . Il suffit de le démontrer pour $r = 2$. Donc

$$\sum_{k_1 + k_2 = k} \binom{k_1 + \alpha_1}{\beta_1} \binom{k_2 + \alpha_2}{\beta_2} = \binom{k + \alpha + 1}{\beta + 1}. \quad (4.13)$$

$$\text{Soit } \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + k_2 = k} \binom{k_1 + \alpha_1}{\beta_1} \binom{k_2 + \alpha_2}{\beta_2} t^n = \left(\sum_{n \geq 0} \binom{k_1 + \alpha_1}{\beta_1} t^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} \binom{k_2 + \alpha_2}{\beta_2} t^n \right)$$

$$\text{Par (4.11), on a } \frac{t^{\beta_1 - \alpha_1}}{(1-t)^{\beta_1 + 1}} \frac{t^{\beta_2 - \alpha_2}}{(1-t)^{\beta_2 + 1}} = \sum_k \binom{k + \alpha + 1}{\beta + 1} t^k. \quad \square$$

En conséquence, nous évaluons les sommes des produits du même genre.

Corollaire 4.1 Pour $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 1$, on a

$$\sum_{k_1 + \dots + k_r = n} k_1 k_2 \dots k_r = \binom{n + r - 1}{2r - 1}. \quad (4.14)$$

L'identité (4.14) peut s'interpréter comme suit : ayant un groupe de n personnes portant des numéros (de 1 à n), et on veut constituer r groupes de personnes de différentes cardinalités de sorte que les individus de même groupe aient des numéros successifs. Le côté gauche de l'équation compte le nombre de façons de choisir un représentant pour chaque groupe. En effet, pour une distribution donnée k_1, \dots, k_r (avec $k_1 + \dots + k_r = n$) nous choisissons une personne de chaque groupe ce qui se compte par $\binom{k_1}{1} \dots \binom{k_r}{1} = k_1 \dots k_r$. La somme sur toutes les distributions possibles donne le nombre total de possibilités.

Pour le côté droit, nous avons n personnes et $r - 1$ séparateurs (pour distinguer les groupes). Nous choisissons r représentants et $r - 1$ emplacements de séparateurs, ce qui se compte par $\binom{n + r - 1}{2r - 1}$ (nous alternons entre individus choisis et séparateurs en commençant par une personne).

Corollaire 4.2 Soient r, p et k des entiers positifs tels que $r \geq p$, on a

$$\sum_{k_1 + \dots + k_p + \dots + k_r = k} k_1 k_2 \dots k_p = \binom{n + r - 1}{r + p - 1}. \quad (4.15)$$

Démonstration.

$$\sum_{k_1 + \dots + k_p + \dots + k_r = k} k_1 k_2 \dots k_p = \sum_{m=0}^k \left(\sum_{k_1 + \dots + k_p = m} k_1 k_2 \dots k_p \right) \left(\sum_{k_{p+1} + \dots + k_r = k - m} 1 \right).$$

En utilisant l'identité (4.14) et $\sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_r = m} 1 = \binom{m + r - 1}{r - 1}$, nous avons

$$\sum_{k_1 + \dots + k_p + \dots + k_r = k} k_1 k_2 \dots k_p = \sum_{m=0}^k \binom{m + p - 1}{2p - 1} \binom{k - m + r - p - 1}{r - p - 1}.$$

En appliquant la relation (4.13), nous obtenons le résultat. \square

Évaluons maintenant d'une manière générale la somme de produits de k termes décalés par α .

Théorème 4.9 On a

$$\sum_{i_1 + \dots + i_k = n} (i_1 + \alpha)(i_2 + \alpha) \dots (i_k + \alpha) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n + k - 1}{n - j} \alpha^{k-j}. \quad (4.16)$$

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7
4	2					
5	12					
6	72	12				
7	480	160				
8	3600	1740	90			
9	30 240	18 648	2100			
10	282 240	207 648	35 840	840		
11	2903 040	2446 848	560 448	30 240		
12	32 659 200	30 702 240	8641 080	743 400	9450	
13	399 168 000	410 731 200	135 519 120	15 935 920	485 100	
14	5269 017 600	5852 753 280	2194 121 952	324 416 400	16 216 200	124 740

TABLE 4.2 – Nombres 2-Stirling 2-associés de première espèce.

Démonstration.

$$\sum_{i_1 + \dots + i_k = n} (i_1 + \alpha) \cdots (i_k + \alpha) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} I_{k,k-j} \alpha^j,$$

avec $I_{k,j} := \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_k = n} i_1 i_2 \cdots i_j$ et depuis (4.15), nous obtenons le résultat. \square

Le dernier résultat sera utilisé dans la section suivante pour évaluer la forme close des nombres r -Stirling s -associés.

4.4 LES NOMBRES r -STIRLING s -ASSOCIÉS DES TROIS ESPÈCES

Les nombres r -Stirling s -associés de première, deuxième et troisième espèces (ou r -Lah s -associés) notés respectivement $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)}$, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r^{(s)}$ et $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)}$ sont définis combinatoirement comme suit :

- Définition 4.2**
- $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)}$ compte le nombre de k -permutations de $[n]$ telles que les r premiers éléments sont dans des cycles différents et que chaque cycle contienne au moins s éléments.
 - $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r^{(s)}$ compte le nombre de k -partitions de $[n]$ telles que les r premiers éléments sont dans des parts différentes et que chaque part contienne au moins s éléments.
 - $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)}$ compte le nombre de k -partitions en listes de $[n]$ telles que les r premiers éléments sont dans des listes différentes et que chaque liste contienne au moins s éléments.

Nous établissons, dans ce qui suit, des formules explicites des nombres r -Stirling s -associés.

Théorème 4.10 Pour $n \geq sk$ et $k \geq r$, on a

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{m=0}^{n-sk} \binom{m+r-1}{r-1} \sum_{i_1 + \dots + i_{k-r} = n-sk-m} \frac{1}{(i_{r+1} + s) \cdots (i_k + s)}, \quad (4.17)$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n-sk} \prod_{j=1}^r ((i_j + s - 1)!)^{-1} \prod_{\ell=r+1}^k ((i_\ell + s)!)^{-1}, \quad (4.18)$$

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n-(s-1)k-1}{k+j-1} s^{r-j}. \quad (4.19)$$

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8
4	2						
5	6						
6	14	12					
7	30	80					
8	62	360	90				
9	126	1372	1050				
10	254	4788	7700	840			
11	510	15864	45612	15120			
12	1022	50880	239190	163800	9450		
13	2046	159764	1161270	1389080	242550		
14	4094	494604	5353392	10182480	3638250	124740	
15	8190	1516528	23800920	67822040	41771730	4324320	
16	16382	4619160	103096994	422534112	407246840	85765680	1891890

TABLE 4.3 – Nombres 2-Stirling 2-associés de seconde espèce.

$n \setminus k$	2	3	4	5	6
4	8				
5	72				
6	600	96			
7	5280	1920			
8	50400	29520	1440		
9	524160	428400	50400		
10	5927040	6249600	1229760	26880	
11	72576000	93985920	26490240	1451520	
12	958003200	1473292800	546134400	51408000	604800
13	13571712000	24189580800	11176704000	1536796800	46569600
14	205491686400	416731392000	231357772800	42471475200	2255299200

TABLE 4.4 – Nombres 2-Lah 2-associés.

Démonstration. Commençons par démontrer l'identité (4.18). Afin de constituer k parts depuis $[n]$ de sorte que les r premiers éléments soient dans des parts différentes et que chaque part contienne au moins s éléments, nous procédons comme suit :

- Mettons les r premiers éléments dans r parts (donc identifiables).
- Supposons que les autres parts sont identifiables (numérotées de $r + 1$ à k , donc ordonnées) et soit l_j ($1 \leq j \leq k$) le nombre d'éléments à mettre dans la part j tel que $l_j \geq s - 1$ pour $1 \leq j \leq r$ et $l_j \geq s$ pour $r + 1 \leq j \leq k$. Nous avons $\binom{n-r}{l_1, l_2, \dots, l_k}$ façons de les choisir.

En sommant sur tous les cas possibles et en divisant sur $(k - r)!$ afin de supprimer l'ordre entre les parts, nous obtenons le résultat.

Pour passer aux permutations de $[n]$ ayant k cycles sous les restrictions données, il suffit de considérer les arrangements en cycles des parts des k -partitions de $[n]$. Cela revient à multiplier l'identité (4.18), par $l_1! l_2! \cdots l_r! (l_{r+1} - 1)! \cdots (l_k - 1)!$, et nous avons :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} &= \frac{1}{(k-r)!} \sum_{l_1 + \dots + l_k = n-r} \binom{n-r}{l_1, \dots, l_k} l_1! \cdots l_r! (l_{r+1} - 1)! \cdots (l_k - 1)!, \\ &= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{m=r(s-1)}^{n-r-s(k-r)} \sum_{\substack{l_{r+1} + \dots + l_k = n-r-m \\ l_j \geq s}} \frac{1}{l_{r+1} \cdots l_k} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_r = m \\ l_j \geq s-1}} 1, \\ &= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{m=0}^{n-sk} \sum_{l_{r+1} + \dots + l_k = n-sk-m} \frac{1}{(l_{r+1} + s) \cdots (l_k + s)} \sum_{l_1 + \dots + l_r = m} 1. \end{aligned}$$

En utilisant $\sum_{i_1 + \dots + i_r = m} 1 = \binom{m+r-1}{r-1}$, nous obtenons (4.17).

De même, pour des partitions de $[n]$ en listes, nous considérons les arrangements des parts dans (4.17) et nous avons $(i_1 + 1)!(i_2 + 1)! \cdots (i_r + 1)! i_{r+1}! \cdots i_k!$ possibilités i.e.

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} &= \frac{1}{(k-r)!} \sum_{i_1 + \dots + i_k = n-r} \binom{n-r}{i_1, \dots, i_k} (i_1 + 1)! \cdots (i_r + 1)! i_{r+1}! \cdots i_k! \quad (4.20) \\ &= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{m=s(k-r)}^{n-sr} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n-r-m \\ i_j \geq s-1}} (i_1 + 1) \cdots (i_r + 1) \sum_{\substack{i_{r+1} + \dots + i_k = m \\ i_j \geq s}} 1 \\ &= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{m=0}^{n-sk} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n-sk-m \\ i_j \geq 0}} (i_1 + s) \cdots (i_r + s) \sum_{\substack{i_{r+1} + \dots + i_k = m \\ i_j \geq 0}} 1, \end{aligned}$$

depuis la relation (4.16), nous avons

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \sum_{m=0}^{n-sk} \binom{m+k-r-1}{k-r-1} \binom{n-sk-m+r-1}{r-1+j} s^{r-j},$$

par (4.13), nous obtenons l'identité (4.19). \square

A partir de la relation (4.20), nous donnons une deuxième forme explicite par rapport à (4.16) qui généralise la relation (3.18),

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_r=n-sk} (i_1+s)(i_2+s)\cdots(i_r+s). \quad (4.21)$$

De plus, pour $k = r$, nous retrouvons les relations suivantes.

Remarque 4.2 Pour $k = r$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]_r^{(s)} = (n-r)! \binom{n-r(s-1)-1}{r-1}, \quad (4.22)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_r=n-r \\ i_l \geq s-1}} \binom{n-r}{i_1, i_2, \dots, i_r}, \quad (4.23)$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]_r^{(s)} = (n-r)! \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \binom{n-(s-1)r-1}{r+i-1} s^{r-i}. \quad (4.24)$$

En extension des relations (1.36) et (4.5), les cas particuliers suivants sont facilement récupérés,

$$\left[\begin{matrix} sk \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)! s^{k'}} \quad (4.25)$$

$$\left\{ \begin{matrix} sk \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)! (s-1)!^r s^{k-r'}} \quad (4.26)$$

$$\left[\begin{matrix} sk \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)! s^r}. \quad (4.27)$$

Nous établissons ci-dessous une autre formule explicite des nombres r -Lah s -associés qui, par rapport à la relation (4.21), est plus intéressante dans le sens où elle est évaluée en utilisant une seule sommation.

Théorème 4.11 Soient n, k, r et s des entiers positifs tels que $k \geq r$ et $n \geq sk$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n+j-(s-1)k-1}{k+j-1} (s-1)^{r-j}. \quad (4.28)$$

Démonstration. Pour constituer les k listes nous mettons les r premiers éléments dans r listes puis nous choisissons $k-r$ autres éléments comme têtes de listes des $k-r$ listes restantes, et nous avons $\binom{n-r}{k-r}$ façons de le faire. Pour satisfaire la contrainte stipulant d'avoir au moins s éléments par liste, nous constituons k groupes de $s-1$ éléments depuis les $n-k$ éléments restants et nous avons $\binom{n-k}{s-1, \dots, s-1, n-sk}$ manières de le faire, et $((s-1)!)^k$ façons de les arranger. Notons que les éléments $1, \dots, r$ mis au départ dans les r listes ne sont pas forcément en têtes de listes. Donc, soit j ($0 \leq j \leq r$) le nombre d'éléments parmi r qui sont maintenus comme têtes de listes et nous aurons $\binom{r}{j}$ façons de les choisir tandis que les $r-j$ éléments restants sont ordonnés derrière un des $s-1$ éléments de leurs listes respectives et nous aurons $(s-1)^{r-j}$ possibilités. Reste

à distribuer les $n - sk$ éléments restants, et nous avons $k + j$ possibilités pour le premier élément (k possibilités à la fin de chaque liste ou avant les j éléments supposés en têtes de listes qui engendrent j possibilités). Pour le deuxième élément, nous avons $k + j + 1$ possibilités (une possibilité ajoutée par l'insertion du premier élément), ainsi de suite ... Le dernier élément a $(k + j) + (n - sk - 1) = n + j - (s - 1)k - 1$ possibilités. Cela donne $\frac{(n+j-(s-1)k-1)!}{(k+j-1)!} = (k + j) \cdots (n + j - (s - 1)k - 1)$ possibilités. En sommant sur toutes les valeurs de j et après simplification nous obtenons le résultat. \square

A noter que la forme close des nombres de Lah s -associés (4.4) est obtenue depuis (4.19) pour $r = 0$ et $r = 1$. Aussi pour $s = 1$, nous obtenons la forme close des nombres r -Lah (3.18).

En comparant les deux relations (4.19) et (4.28), nous déduisons l'égalité suivante :

$$\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n+k+j-1}{n} (s-1)^{r-j} = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n-(s-1)k-1}{k+j-1} s^{r-j}. \quad (4.29)$$

A partir de (4.21) et (4.28) nous obtenons une deuxième expression duale à la relation (4.16).

Proposition 4.1 Soient n, k, r et s des entiers, on a

$$\sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} (i_1+s)(i_2+s)\cdots(i_r+s) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n+k+j-1}{n} (s-1)^{r-j}.$$

4.4.1 Relations de récurrence

Les nombres r -Stirling s -associés des trois espèces satisfont une relation de récurrence d'ordre trois. Le terme $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$ est lu à partir de trois termes des deux triangles r -Stirling s -associés et $(r - 1)$ -Stirling s -associés (voir la figure 4.3).

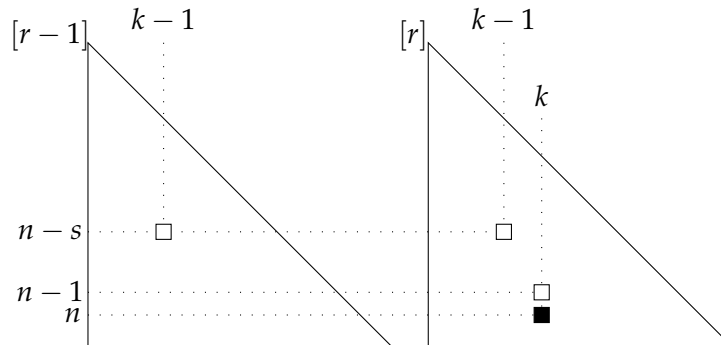


FIGURE 4.3 – Relation de récurrence des nombres r -Stirling s -associés.

La relation de récurrence des nombres r -Stirling s -associés de première espèce est donnée comme suit.

Théorème 4.12 Soient r, k, s , et n des entiers positifs tels que $n \geq sk$ et $k \geq r$, on a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(s)} &= \binom{n-r-1}{s-1} (s-1)! \begin{bmatrix} n-s \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(s)} \\ &+ r \binom{n-r-1}{s-2} (s-1)! \begin{bmatrix} n-s \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{(s)} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Démonstration. Raisonnons sur le dernier élément n et discutons s'il est ou pas dans un cycle contenant exactement s éléments :

- S'il est dans un cycle contenant s éléments autres que les r premiers, nous avons $\binom{n-r-1}{s-1}$ façons de choisir les $s-1$ éléments et $(s-1)!$ configurations de cycles possibles. Il reste à considérer les $(k-1)$ -permutations des $n-s$ éléments restants tels que les r premiers éléments sont dans des cycles différents et que chaque cycle contienne au moins s éléments. Nous avons ${}_{[k-1]}^{(s)}\{n-s\}_r$ permutations possibles. Ce qui donne $\binom{n-r-1}{s-1}(s-1)!{}_{[k-1]}^{(s)}\{n-s\}_r$ possibilités.
- Sinon, s'il est dans un cycle contenant un des r premiers éléments avec $s-2$ autres, nous avons $\binom{r}{1}$ façons de choisir un élément parmi les r premiers, $\binom{n-r-1}{s-2}$ façons de choisir les $s-2$ éléments restants afin d'avoir exactement s éléments et $(s-1)!$ configurations de cycles possibles. Il reste à considérer les $(k-1)$ -permutations des $n-s$ éléments tels que les $r-1$ premiers éléments sont dans des cycles différents et que chaque cycle contienne au moins s éléments. Nous avons ${}_{[k-1]}^{(s)}\{n-s\}_{r-1}$ permutations possibles. Ce qui donne $r\binom{n-r-1}{s-2}(s-1)!{}_{[k-1]}^{(s)}\{n-s\}_{r-1}$ possibilités.
- Sinon, nous considérons les k -permutations de $[n-1]$ sous les restrictions connues, et nous avons ${}_{[k]}^{(s)}\{n-1\}_r$ permutations possibles. Puis, nous ajoutons l'élément n aux k cycles et nous avons $n-1$ façons de le faire.

□

Pour $s=1$, nous obtenons la relation de récurrence des nombres r -Stirling de première espèce (1.8) et pour $r=1$, en utilisant la formule de Pascal, nous obtenons la relation de récurrence des nombres de Stirling s -associés de première espèce (1.30).

Les nombres r -Stirling s -associés de seconde espèce obéissent à la relation de récurrence suivante :

Théorème 4.13 Soient r, k, s , et n des entiers positifs tels que $n \geq sk$ et $k \geq r$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \binom{n-r-1}{s-1} \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r^{(s)} + r \binom{n-r-1}{s-2} \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1}^{(s)} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(s)}. \quad (4.31)$$

Démonstration. Considérons le dernier élément n et discutons s'il est ou pas dans une part contenant exactement s éléments :

- S'il est dans une part contenant exactement s éléments autres que les r premiers, nous avons $\binom{n-r-1}{s-1}$ façons de choisir les $s-1$ éléments, puis distribuer les $n-s$ éléments restants en $k-1$ parts telles que les r premiers éléments sont dans des parts différentes, et que chaque part contienne au moins s éléments. Nous avons $\{n-s\}_{[k-1]}^{(s)}$ possibilités. Ce qui donne $\binom{n-r-1}{s-1}\{n-s\}_{[k-1]}^{(s)}$ situations possibles.
- Sinon, s'il est dans une part contenant un des r premiers éléments avec $s-2$ autres, nous avons $\binom{r}{1}$ façons de choisir un élément parmi les r premiers et $\binom{n-r-1}{s-2}$ façons de choisir les $s-2$ éléments restants afin d'avoir exactement s éléments dans la part. Il reste à distribuer les $n-s$ éléments restants en $k-1$ parts telles que les $r-1$ premiers éléments soient dans des parts différentes et que chaque part contienne au moins s éléments. Nous avons $\{n-s\}_{[k-1]}^{(s)}$ distributions possibles. Ce qui donne $r\binom{n-r-1}{s-2}\{n-s\}_{[k-1]}^{(s)}$ situations possibles.

- Sinon, nous considérons les k -partitions des $[n - 1]$ sous les restrictions connues, et nous avons $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r^{(s)}$ possibilités. Puis, nous ajoutons l'élément n à l'une des k parts et nous avons k choix.

□

Pour $s = 1$, nous obtenons la relation de récurrence des nombres r -Stirling de seconde espèce (1.15) et pour $r = 1$, en utilisant la formule de Pascal, nous obtenons la relation de récurrence des nombres de Stirling s -associés de seconde espèce (1.31).

Les nombres r -Lah s -associés satisfont la relation de récurrence suivante :

Théorème 4.14 Soient r, k, s , et n des entiers positifs tels que $n \geq sk$ et $k \geq r$, on a

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)} &= \binom{n-r-1}{s-1} s! \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)} \\ &+ r \binom{n-r-1}{s-2} s! \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_{r-1}^{(s)} + (n+k-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Démonstration. Considérons le dernier élément n et discutons s'il est ou pas dans une liste contenant exactement s éléments :

- S'il est dans une liste contenant exactement s éléments autres que les r premiers, nous avons $\binom{n-r-1}{s-1}$ façons de choisir les $s - 1$ éléments et $s!$ arrangements possibles, puis distribuer les $n - s$ éléments restants dans $k - 1$ listes telles que les r premiers éléments soient dans des listes différentes et que chaque liste contienne au moins s éléments. Nous avons $\left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)}$ possibilités. Ce qui donne $\binom{n-r-1}{s-1} s! \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)}$ situations possibles.
- S'il est dans une liste contenant un des r premiers éléments avec $s - 2$ autres, nous avons $\binom{r}{1}$ façons de choisir un élément parmi les r premiers, $\binom{n-r-1}{s-2}$ façons de choisir les $s - 2$ éléments restants afin d'avoir exactement s éléments et $s!$ arrangements possibles. Il reste à distribuer les $n - s$ éléments restants dans $k - 1$ listes telles que les $r - 1$ premiers éléments soient dans des listes différentes et que chaque part contienne au moins s éléments. Nous avons $\left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_{r-1}^{(s)}$ distributions possibles. Ce qui donne $r \binom{n-r-1}{s-2} s! \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_{r-1}^{(s)}$ possibilités.
- Sinon, nous considérons toutes les k -partitions en listes de $[n - 1]$ sous les restrictions connues, et nous avons $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(s)}$ possibilités. Puis, nous ajoutons l'élément n aux k listes et nous avons $n + k - 1$ façons de le faire.

□

Pour $s = 1$, nous obtenons la relation de récurrence des nombres r -Lah (3.17); et pour $r = 1$, en utilisant la formule de Pascal, nous obtenons la relation de récurrence (4.3).

4.4.2 Identités combinatoires et convolutions

Dans cette sous-section, nous établissons quelques identités combinatoires pour les nombres r -Stirling s -associés en utilisant une approche combinatoire.

Nous exprimons dans l'identité suivante les nombres r -Stirling s -associés en termes des nombres r' -Stirling s -associés avec $r' \leq r$.

Théorème 4.15 Soient p, r, k et n des entiers positifs tels que $p \leq r \leq k$ et $n \geq sk$, on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(s)} = \sum_{i=(s-1)p}^{n-p-s(k-p)} \frac{(n-r)!}{(n-r-i)!} \binom{i-p(s-2)-1}{p-1} \begin{bmatrix} n-p-i \\ k-p \end{bmatrix}_{r-p}^{(s)}. \quad (4.33)$$

Démonstration. Considérons les p cycles contenant les éléments $1, \dots, p$ et soit i le nombre d'éléments appartenant à ces cycles ($(s-1)p \leq i \leq n-p-s(k-p)$). Nous avons $\binom{n-r}{i}$ façons de choisir les i éléments et $\begin{bmatrix} i+p \\ p \end{bmatrix}_p^{(s)}$ permutations de $i+p$ éléments ayant p cycles tels que les éléments $1, \dots, p$ sont dans des cycles différents et que chaque cycle contienne au moins s éléments. Avec les $n-p-i$ éléments restants, nous constituons les $k-p$ cycles restants de sorte que les $r-p$ éléments sont dans des cycles différents et que chaque cycle contienne s éléments. Nous avons $\begin{bmatrix} n-p-i \\ k-p \end{bmatrix}_{r-p}^{(s)}$ façons de le faire. En utilisant l'équation (4.22) et en sommant sur toutes les valeurs possibles de i , nous obtenons le résultat. \square

Pour $p = r$, nous donnons une expression des nombres r -Stirling s -associés de première espèce en termes des nombres de Stirling s -associés de première espèce.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(s)} = \sum_{i=(s-1)r}^{n-r-s(k-r)} \frac{(n-r)!}{(n-r-i)!} \binom{i-r(s-2)-1}{r-1} \begin{bmatrix} n-r-i \\ k-r \end{bmatrix}_r^{(s)}. \quad (4.34)$$

Pour $s = 1$, nous obtenons la relation [?, eq 26] établie par Broder; et pour $r = 1$ nous avons une relation de récurrence verticale pour les nombres de Stirling classiques :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(s)} = \sum_{i=s-1}^{n-s(k-1)-1} \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!} \begin{bmatrix} n-i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}^{(s)}. \quad (4.35)$$

Théorème 4.16 Soient p, r, k et n des entiers positifs tels que $p \leq r \leq k$ et $n \geq sk$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \sum_{i=p-r+s(k-p)}^{n-r-(s-1)p} \frac{(n-r)^{p(s-1)}}{((s-1)!)^p} \binom{n-p(s-1)-r}{i} \left\{ \begin{matrix} i+r-p \\ k-p \end{matrix} \right\}_{r-p}^{(s)} p^{n-p(s-1)-r-i}. \quad (4.36)$$

Démonstration. Considérons les p premiers éléments ($p \leq r$). Nous constituons p parts avec ces éléments et nous choisissons $p(s-1)$ autres éléments parmi les éléments $r+1, \dots, n$ afin d'avoir s éléments dans chaque part. Nous avons $\binom{n-r}{s-1, \dots, s-1, n-sp(s-1)-r} = \frac{(n-r)!}{((s-1)!)^p (n-p(s-1)-r)!}$ façons de le faire. Soit i le nombre d'éléments qui vont appartenir aux $k-p$ parts restantes ($(s-1)(r-p) + s(k-r) \leq i \leq n-r-(s-1)p$), nous avons $\binom{n-p(s-1)-r}{i}$ choix possibles et $\left\{ \begin{matrix} i+r-p \\ k-p \end{matrix} \right\}_{r-p}^{(s)}$ façons de les distribuer avec les $r-p$ éléments en $k-p$ parts telles que les $r-p$ éléments soient dans des parts différentes et que chaque part contienne s éléments. Maintenant, il nous reste $n-p(s-1)-r-i$ éléments à distribuer sur les p premières parts et nous avons $p^{n-p(s-1)-r-i}$ possibilités (p choix pour chaque élément). Nous concluons par sommer sur toutes les valeurs de i . \square

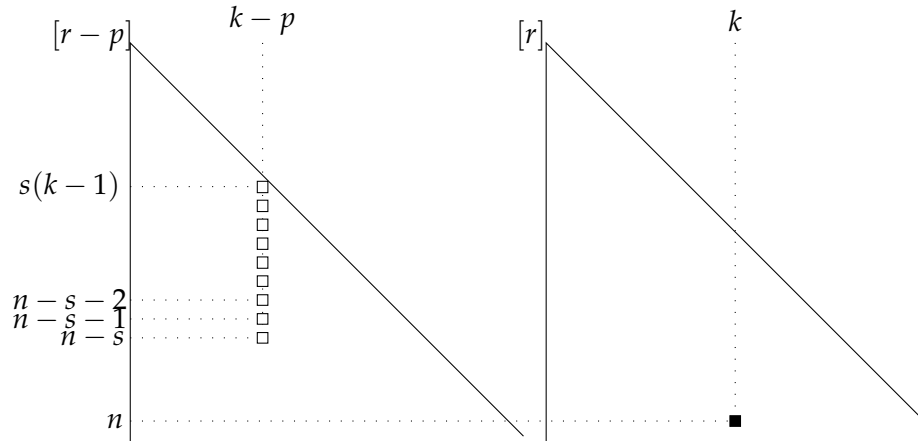


FIGURE 4.4 – Relation de convolution des nombres r -Stirling s -associé.

Pour $p = r$, nous obtenons une expression des nombres r -Stirling s -associés de seconde espèce en termes des nombres de Stirling s -associés de même espèce.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \sum_{i=s(k-r)}^{n-sr} \frac{(n-r)!}{((s-1)!)^r (n-sr)!} \binom{n-sr}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k-r \end{matrix} \right\}_r^{(s)} r^{n-sr-i}, \quad (4.37)$$

Aussi, pour $s = 1$ nous obtenons l'équation donnée par Broder [?, eq 31] et pour $r = 1$, nous obtenons une relation de récurrence verticale des nombres de Stirling s -associés classiques de deuxième espèce.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(s)} = \sum_{i=s(k-1)}^{n-s} \binom{n-1}{s-1} \binom{n-s}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k-1 \end{matrix} \right\}^{(s)}. \quad (4.38)$$

Théorème 4.17 Soient p, r, k et n des entiers positifs tels que $p \leq r \leq k$ et $n \geq sk$, on a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \sum_{i=0}^p \frac{(k-r+p-i)!}{(k-r)!} \binom{p}{i} \binom{n-r}{i(s-1)} \frac{(i(s-1))!}{((s-1)!)^i} \left\{ \begin{matrix} n-p-i(s-1) \\ k-i \end{matrix} \right\}_{r-p}^{(s)}. \quad (4.39)$$

Démonstration. Considérons les p parts contenant les p premiers éléments et soit i le nombre de parts (parmi les p parts) qui contiennent exactement s éléments ($0 \leq i \leq p$). Nous constituons d'abord les i parts. Nous avons :

- $\binom{p}{i}$ façons de choisir les i éléments parmi les p premiers.
- $\binom{n-r}{i(s-1)}$ façons de choisir les $i(s-1)$ éléments nécessaires pour avoir s éléments par part.
- $\left\{ \begin{matrix} i(s-1) \\ i \end{matrix} \right\}^{(s-1)} = \frac{(i(s-1))!}{i!((s-1)!)^i}$ (par (4.27)) façons de les distribuer en i parts de sorte que chaque part contienne $s-1$ éléments.
- $i!$ manières d'affecter les i groupes aux i éléments.

Ensuite, nous constituons les $k-i$ parts restantes depuis les $n-p-i(s-1)$ éléments de sorte que les éléments $p+1, \dots, r$ soient dans des parts différentes et que chaque part contienne au moins s éléments, et nous avons $\left\{ \begin{matrix} n-r-i(s-1) \\ k-i \end{matrix} \right\}_{r-p}^{(s)}$ configurations possibles. Pour finir, nous affectons les $p-i$ éléments restants aux $k-i-(r-p)$ parts et nous avons $\frac{(k-r+p-i)!}{(k-r)!} = (k-r+p-i)(k-r+p-i-1) \cdots (k-r+1)$ possibilités, c'est à

dire $(k - i - (r - p))$ choix pour le premier, $k - i - (r - p) - 1$ choix pour le second, \dots , $k - r + 1$ pour le dernier). Le résultat est obtenu en sommant sur les toutes les valeurs de i . \square

Pour $s = 1$ nous obtenons la relation (3.7).

Nous déduisons une expression des nombres r -Stirling s -associés de deuxième espèce en fonction des nombres de Stirling s -associés à partir de la relation (4.39), pour $p = r$, comme suit

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \sum_{i=0}^r \frac{(k-i)!}{(k-r)!} \binom{r}{i} \binom{n-r}{i(s-1)} \frac{(i(s-1))!}{((s-1)!)^i} \left\{ \begin{matrix} n-r-i(s-1) \\ k-i \end{matrix} \right\}^{(s)}. \quad (4.40)$$

Aussi, pour $r = 1$ nous obtenons une relation de récurrence pour les nombres de Stirling s -associés (1.31).

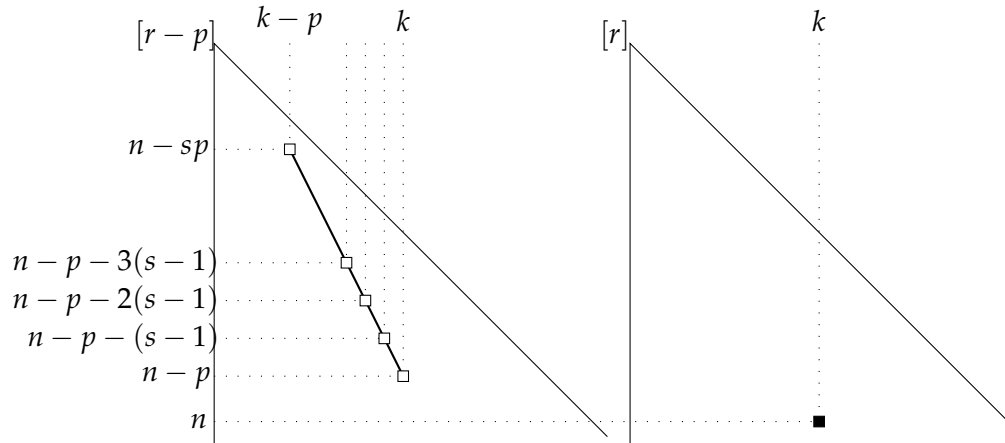


FIGURE 4.5 – Lecture d'un nombre de la table r -Stirling s -associé à partir d'une suite d'éléments de la table $(r - p)$ -Stirling s -associés.

Théorème 4.18 Soient p, r, k et n des entiers positifs tels que $p \leq r \leq k$ et $n \geq sk$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=i}^{n-sk} \frac{(n-r)!}{(n-r-j+(s-1)p)!} \binom{p}{i} \binom{p+j-1}{j-i} \left[\begin{matrix} n-sp-j \\ k-p \end{matrix} \right]_{r-p}^{(s)} s^{p-i}. \quad (4.41)$$

Démonstration. Considérons les p listes contenant les éléments $1, \dots, p$. Chacune de ces listes contient un élément des p premiers et un nombre i_j d'éléments ($i_j \geq s - 1, j \in [p]$). Soit j le nombre total de ces éléments i.e. $j = i_1 + i_2 + \dots + i_p$ avec $(s - 1)p \leq j \leq n - p - s(k - p)$. Nous avons $\binom{n-r}{i_1} \binom{n-r-i_1}{i_2} \dots \binom{n-r-i_1-i_2-\dots-i_{p-1}}{i_p} = \binom{n-r}{i_1, i_2, \dots, i_p, n-r-j}$ façons de choisir les j éléments et $(i_1 + 1)!(i_2 + 1)! \dots (i_p + 1)!$ arrangements possibles en listes. Nous constituons avec les $n - p - j$ éléments restants les $k - p$ listes restantes de sorte que les éléments $p + 1, \dots, r$ sont dans des listes différentes et que chaque liste contienne au moins s éléments, nous avons $\left[\begin{matrix} n-p-j \\ k-p \end{matrix} \right]_{r-p}^{(s)}$ distributions possibles. La somme sur toutes les valeurs possibles de j donne

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \sum_{j=(s-1)p}^{n-p-s(k-p)} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_p=j \\ i_i \geq s-1}} (i_1 + 1)! \dots (i_p + 1)! \binom{n-r}{i_1, \dots, i_p, n-r-j} \left[\begin{matrix} n-p-j \\ k-p \end{matrix} \right]_{r-p}^{(s)}.$$

La deuxième somme peut être évaluée en utilisant (4.16). Ce qui donne le résultat. \square

Pour $p = r$, nous avons une expression des nombres r -Lah s -associés en fonction des nombres de Lah s -associés

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \sum_{i=0}^r \sum_{j=i}^{n-sk} \binom{r}{i} \binom{r+j-1}{j-i} \frac{(n-r)!}{(n-j+(s-2)r)!} s^{r-i} \left[\begin{matrix} n-sr-j \\ k-r \end{matrix} \right]^{(s)}. \quad (4.42)$$

Aussi, pour $r = 1$, nous obtenons la relation (4.8), et pour $s = 1$, nous obtenons [?, eq 7].

4.4.3 Cross récurrences

Depuis les équations (4.33) et (4.41), pour $p = 1$, nous obtenons des "cross récurrences".

Corollaire 4.3 *On a*

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \sum_{i=s-1}^{n-s(k-1)-1} \frac{(n-r)!}{(n-r-i)!} \left[\begin{matrix} n-i-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{(s)}, \quad (4.43)$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \sum_{i=s-1}^{n-s(k-1)-1} (i+1) \frac{(n-r)!}{(n-r-i)!} \left[\begin{matrix} n-i-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{(s)}. \quad (4.44)$$

Pour $r = 1$, nous obtenons la relation (4.8), et pour $s = 1$, nous obtenons l'identité (3.27).

Théorème 4.19 *Soient r, k et n des entiers positifs tels que $n \geq sk$, on a*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \binom{n-r}{s-1} \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1}^{(s)} + (k-r+1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}^{(s)}. \quad (4.45)$$

Démonstration. Raisonnons sur l'élément r :

- S'il est dans une part contenant exactement s éléments, donc nous avons $\binom{n-r}{s-1}$ façons de choisir les $s-1$ éléments manquants et $\left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1}^{(s)}$ façons de distribuer les $n-s$ éléments restants dans $k-1$ parts de sorte que les éléments $1, \dots, r-1$ soient dans des parts différentes et que chaque part contienne s éléments.
- Par ailleurs, s'il est dans une part contenant plus de s éléments, nous distribuons en premier les $n-1$ éléments dans k parts de sorte que les éléments $1, \dots, r-1$ soient dans des parts différentes et que chaque part contienne s éléments, et nous avons $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}^{(s)}$ possibilités. Puis, nous ajoutons l'élément aux parts qui ne contiennent pas un élément des $r-1$ premiers et nous avons $k-(r-1)$ choix possibles.

\square

Pour $s = 1$, nous obtenons la "cross récurrence" (3.8) et pour $r = 1$ nous obtenons la relation de récurrence des nombres de Stirling s -associés de seconde espèce [?, eq 4.1].

4.4.4 Convolutions

Les nombres r -Stirling s -associés des trois espèces admettent des convolutions multinomiales.

Théorème 4.20 Soient r, k et n des entiers positifs tels que $n \geq sk$ avec $k_1 + \dots + k_p = k$ et $r_1 + \dots + r_p = r$, on a

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_p} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} = \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_p = n \\ l_i \geq sk_i + (s-1)r_i}} \binom{n}{l_1, \dots, l_p} \left[\begin{matrix} l_1+r_1 \\ k_1+r_1 \end{matrix} \right]_{r_1}^{(s)} \cdots \left[\begin{matrix} l_p+r_p \\ k_p+r_p \end{matrix} \right]_{r_p}^{(s)} \quad (4.46)$$

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_p} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(s)} = \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_p = n \\ l_i \geq sk_i + (s-1)r_i}} \binom{n}{l_1, \dots, l_p} \left\{ \begin{matrix} l_1+r_1 \\ k_1+r_1 \end{matrix} \right\}_{r_1}^{(s)} \cdots \left\{ \begin{matrix} l_p+r_p \\ k_p+r_p \end{matrix} \right\}_{r_p}^{(s)} \quad (4.47)$$

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_p} \left| \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right|_r^{(s)} = \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_p = n \\ l_i \geq sk_i + (s-1)r_i}} \binom{n}{l_1, \dots, l_p} \left| \begin{matrix} l_1+r_1 \\ k_1+r_1 \end{matrix} \right|_{r_1}^{(s)} \cdots \left| \begin{matrix} l_p+r_p \\ k_p+r_p \end{matrix} \right|_{r_p}^{(s)} \quad (4.48)$$

Démonstration. Le membre de gauche de l'équation s'interprète comme le nombre de permutations de $[n+r]$ éléments ayant $k+r$ cycles tels que les éléments $[r]$ sont dans des cycles différents et que chaque cycle contienne au moins s éléments. Les cycles de ces permutations sont colorés de la manière suivante : les cycles contenant les éléments $1, \dots, r_1$ avec k_1 autres cycles sont colorés de la même couleur 1. Les cycles contenant les éléments $r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$ avec k_2 autres cycles sont colorés de la même couleur 2, etc. Nous avons $\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(s)}$ de permutations possibles et $\binom{k}{k_1, \dots, k_p}$ façons de choisir les k_1, \dots, k_p cycles qui auront les couleurs $1, \dots, p$ respectivement. Cela est équivalent à choisir les éléments de la même couleur puis considérer toutes les permutations en cycles possibles : soit l_i ($1 \leq i \leq p$) le nombre d'éléments ayant la couleur i avec $l_i \geq sk_i$. Nous avons $\binom{n}{l_1, \dots, l_p}$ façons de les choisir et pour chaque i , $\left[\begin{matrix} l_i+r_i \\ k_i+r_i \end{matrix} \right]_{r_i}^{(s)}$ permutations possibles. Cela donne $\binom{n}{l_1, \dots, l_p} \left[\begin{matrix} l_1+r_1 \\ k_1+r_1 \end{matrix} \right]_{r_1}^{(s)} \cdots \left[\begin{matrix} l_p+r_p \\ k_p+r_p \end{matrix} \right]_{r_p}^{(s)}$ possibilités. La somme sur toutes les valeurs des l_i donne le résultat.

La démonstration des deux autres identités (4.47) et (4.48) est analogue à la preuve bijective précédente tout en manipulant les objets combinatoires adéquats. \square

Les Relations (3.15), (4.47) et (4.48) sont des extensions des résultats précédents. Pour $s = 1$, nous retrouvons (3.15), (3.16) et (3.25) respectivement.

4.4.5 Fonctions génératrices

Les nombres r -Stirling s -associés ont une fonction génératrice exponentielle qui s'écrit comme suit.

Théorème 4.21 On a

$$\sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\ln(1-x) + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{x^i}{i} \right)^k \left(\frac{x^{s-1}}{1-x} \right)^r. \quad (4.49)$$

Démonstration. A partir de l'identité (4.34), nous avons

$$\sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \sum_i \binom{i-r(s-2)-1}{r-1} x^i \sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left[\begin{matrix} n-i \\ k \end{matrix} \right]^{(s)} \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}$$

et depuis (1.27), nous obtenons

$$\sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{x^i}{i} \right)^k \sum_i \binom{i-r(s-2)-1}{r-1} x^i.$$

En utilisant (4.11), nous obtenons le résultat. \square

En conséquence du Théorème 4.21, nous donnons la fonction génératrice double des nombres r -Stirling s -associés de première espèce.

Corollaire 4.4 Les nombres de r -Stirling s -associés de première espèce satisfont

$$\sum_{n,k} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} y^k \frac{x^n}{n!} = \exp \left(y \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) - y \sum_{i=1}^{s-1} \frac{x^i}{i} \right) \left(\frac{x^{s-1}}{1-x} \right)^r. \quad (4.50)$$

Démonstration. En interchangeant l'ordre de sommation et en utilisant l'équation (4.49), nous obtenons le résultat. \square

La fonction génératrice des nombres r -Stirling s -associés de deuxième espèce est donnée par :

Théorème 4.22 On a

$$\sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\exp(x) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!} \right)^k \left(\exp(x) - \sum_{i=0}^{s-2} \frac{x^i}{i!} \right)^r. \quad (4.51)$$

Démonstration. A partir de l'identité (4.40), nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \\ & \frac{(k+r-i)!}{k!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left(\frac{x^{s-1}}{((s-1)!)} \right)^i \sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left\{ \begin{matrix} n-i(s-1) \\ k+r-i \end{matrix} \right\}^{(s)} \frac{x^{n-i(s-1)}}{(n-i(s-1))!} \end{aligned}$$

La deuxième somme est évaluée en utilisant (1.33) et donne

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \\ & \frac{1}{k!} \left(\exp(x) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!} \right)^k \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \left(\frac{x^{s-1}}{((s-1)!)} \right)^i \left(\exp(x) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!} \right)^{r-i}, \end{aligned}$$

l'application du Théorème du binome de Newton donne le résultat. \square

De même, la fonction génératrice double des nombres r -Stirling s -associés de deuxième espèce est donnée par :

Corollaire 4.5 Soient s, r, n, k des entiers, on a

$$\sum_{n,k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(s)} y^k \frac{x^n}{n!} = \exp \left(y \exp(x) - y \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\exp(x) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!} \right)^r. \quad (4.52)$$

Les nombres r -Lah s -associés ont, eux aussi, une fonction génératrice exponentielle donnée comme suit.

Théorème 4.23 On a

$$\sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x^s}{(1-x)} \right)^k \left(\frac{x^{s-1}}{(1-x)^2} (s - (s-1)x) \right)^r. \quad (4.53)$$

Démonstration. En utilisant la forme close (4.28) dans le membre de gauche, nous avons

$$\sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (s-1)^{r-j} \sum_{n \geq sk + (s-1)r} \binom{n+r+j-(s-1)(k+r)-1}{k+r+j-1} x^n,$$

la seconde somme du membre de droite, en conséquence de (4.11), donne

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq sk + (s-1)r} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (s-1)^{r-j} \frac{x^{(s-1)(k+r)+k}}{(1-x)^{k+r+j}} \\ &= \frac{1}{k!} \frac{x^{(s-1)r+sk}}{(1-x)^{k+2r}} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} ((s-1)(1-x))^{r-j}, \end{aligned}$$

l'application du Théorème du binôme de Newton donne le résultat. \square

Corollaire 4.6

$$\sum_{n \geq sk + (s-1)r} \sum_{k \geq 0} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(s)} \frac{x^n}{n!} y^k = \left[\exp \left\{ y \frac{x^s}{1-x} \right\} \right] \left[\frac{x^{s-1}}{(1-x)^2} (s - (s-1)x) \right]^r. \quad (4.54)$$

Démonstration. En interchangeant l'ordre de sommation et en utilisant l'équation (4.53), nous obtenons le résultat. \square

CONCLUSION DU CHAPITRE

Les nombres r -Stirling s -associés des trois espèces sont une généralisation des nombres de Stirling s -associés et des nombres r -Stirling qui peuvent, d'une manière analogue aux nombres r_p -Stirling, être étendu au cas vectoriel en considérant plusieurs restrictions sur la cardinalité des partitions. Dans un autre sens, une des perspectives de ce travail est d'étudier l'aspect asymptotique de ces nombres. La définition d'un p, q -analogue de nombres de r -Stirling s -associés qui regroupera le p, q -analogue des nombres de Stirling et celui des nombres de Stirling s -associés.

ANNEXE

$n \setminus k$	3	4	5	6	7
6	6				
7	72				
8	720	60			
9	7200	1320			
10	75 600	21 420	630		
11	846 720	320 544	21 840		
12	10 160 640	4753 728	519 120	7560	
13	130 636 800	72 005 760	10 795 680	378 000	
14	1796 256 000	1129 788 000	213 804 360	12 335 400	103 950
15	26 345 088 000	18 486 230 400	4191 881 760	339 255 840	7068 600

TABLE 4.5 – Quelques valeurs des 3-Stirling 2-associés de première espèce.

$n \setminus k$	2	3	4	5
6	24			
7	240			
8	2160			
9	20 160	1680		
10	201 600	36 960		
11	2177 280	616 896		
12	25 401 600	9616 320	201 600	
13	319 334 400	145 774 080	7761 600	
14	4311 014 400	2329 015 680	206 569 440	
15	62 270 208 000	39 165 984 000	4817 292 480	38 438 400
16	958 961 203 200	672 898 786 560	106 815 893 184	2287 084 800
17	15 692 092 416 000	12 080 986 444 800	2337 623 608 320	88 691 803 200

TABLE 4.6 – Quelques valeurs des 2-Stirling 3-associés de première espèce.

$n \setminus k$	3	4	5	6
9	720			
10	15 120			
11	241 920			
12	3628 800	120 960		
13	54 432 000	4536 000		
14	838 252 800	117 754 560		
15	13 412 044 800	2682 408 960	26 611 200	
16	224 172 748 800	57 916 892 160	1556 755 200	
17	3923 023 104 000	1239 100 934 400	59 390 210 880	
18	71 922 090 240 000	26 544 536 282 880	1902 484 584 000	8072 064 000
19	1380 904 132 608 000	592 364 034 662 400	56 075 567 708 160	678 053 376 000

TABLE 4.7 – Quelques valeurs des 3-Stirling 3-associés de première espèce.

$n \backslash k$	3	4	5	6	7	8
6	6					
7	36					
8	150	60				
9	540	660				
10	1806	4620	630			
11	5796	26 376	10 920			
12	18 150	134 316	114 660	7560		
13	55 980	637 020	947 520	189 000		
14	171 006	2882 220	6798 330	2772 000	103 950	
15	519 156	12 623 952	44 482 680	31 221 960	3534 300	
16	1569 750	54 031 692	273 060 216	299 459 160	68 918 850	1621 620
17	4733 820	227 425 380	1600 815 216	2578 495 920	1013 632 620	71 891 820

TABLE 4.8 – Quelques valeurs des 3-Stirling 2-associés de première espèce.

$n \backslash k$	2	3	4	5	6
6	6				
7	20				
8	50				
9	112	210			
10	238	1540			
11	492	7476			
12	1002	30 240	12 600		
13	2024	110 550	161 700		
14	4070	379 764	1286 670		
15	8164	1252 680	8168 160	1201 200	
16	16 354	4020 016	45 411 366	23 823 800	
17	32 736	12 656 826	231 591 360	281 331 050	
18	65 502	39 315 588	1112 731 620	2574 371 800	168 168 000
19	131 036	120 953 436	5122 253 136	20 176 035 880	4764 760 000
20	262 106	369 535 392	22 845 529 356	142 501 719 360	78 189 711 600

TABLE 4.9 – Quelques valeurs des 2-Stirling 3-associés de deuxième espèce.

$n \backslash k$	3	4	5	6	7
9	90				
10	630				
11	2940				
12	11 508	7560			
13	40 950	94 500			
14	137 610	734 580			
15	445 896	4569 180	831 600		
16	1410 552	24 959 220	16 216 200		
17	4390 386	125 381 256	188 558 370		
18	13 514 046	594 714 120	1701 649 950	126 126 000	
19	41 278 068	2707 865 160	13 172 479 320	3531 528 000	
20	125 405 532	11 965 834 608	92 024 532 600	57 320 062 800	
21	379 557 198	51 706 343 676	597 753 095 940	706 637 731 800	25 729 704 000

TABLE 4.10 – Quelques valeurs des 3-Stirling 2-associés de deuxième espèce.

$n \setminus k$	3	4	5	6
6	48			
7	864			
8	12 240	960		
9	166 320	31 680		
10	2298 240	735 840	20 160	
11	33 022 080	15 200 640	1048 320	
12	497 871 360	302 279 040	35 925 120	483 840
13	7903 526 400	5994 777 600	1043 280 000	36 288 000
14	132 204 441 600	120 708 403 200	28 101 427 200	1716 422 400
15	2328 905 779 200	2491 766 323 200	732 872 448 000	66 501 388 800
16	43 153 254 144 000	53 016 855 091 200	18 942 597 273 600	2325 792 268 800

TABLE 4.11 – Quelques valeurs des 3-Lah 2-associés.

$n \setminus k$	2	3	4	5
6	216			
7	2880			
8	33 120			
9	383 040	45 360		
10	4636 800	1330 560		
11	59 512 320	28 667 520		
12	812 851 200	562 464 000	16 329 600	
13	11 815 372 800	10 777 536 000	838 252 800	
14	182 499 609 600	207 886 694 400	28 979 596 800	
15	2988 969 984 000	4097 379 686 400	859 328 870 400	9340 531 200
16	51 783 904 972 800	83 168 089 804 800	23 799 673 497 600	741 015 475 200

TABLE 4.12 – Quelques valeurs des 2-Lah 3-associés.

$n \setminus k$	3	4	5	6
9	19 440			
10	544 320			
11	11 249 280			
12	212 647 680	9797 760		
13	3940 876 800	489 888 000		
14	73 766 246 400	16 525 555 200		
15	1414 970 726 400	479 001 600 000	6466 521 600	
16	28 021 593 600 000	12 989 565 388 800	504 388 684 800	
17	575 115 187 046 400	342 959 397 580 800	25 107 347 865 600	
18	12 255 524 176 896 000	9007 261 046 784 000	1030 447 401 984 000	5884 534 656 000

TABLE 4.13 – Quelques valeurs des 3-Lah 3-associés.

NOMBRES DE WHITNEY ET r -WHITNEY DE DOWLING

5

SOMMAIRE

5.1	INTRODUCTION	75
5.2	NOMBRES DE WHITNEY ET r -WHITNEY TRANSLATÉS	75
5.2.1	Nombres de Whitney translatsés des deux espèces	76
5.2.2	Nombres Whitney-Lah translatsés	77
5.2.3	Nombre r -Whitney Translatés	77
5.3	NOMBRES WHITNEY DES RÉSEAUX DE DOWLING	78
5.3.1	Nombres de Whitney de deuxième espèce	78
5.3.2	Nombres de Whitney de première espèce	82
5.3.3	Nombres de Whitney-Lah	84
5.4	NOMBRES r -WHITNEY	85
5.4.1	Interprétation combinatoire	86
5.4.2	Comptage et preuves bijectives	86
5.4.3	Fonctions symétriques et convolution	89
	CONCLUSION	89

LES Nombres de Whitney et r -Whitney des trois espèces sont des généralisations des nombres de Stirling et r -Stirling des trois espèces. Les nombres de Whitney de première, deuxième et troisième espèces sont des cas particuliers de (2) pour les paramètres $[\alpha, 0, 1]$, $[0, \alpha, 1]$ et $[\alpha, \alpha, 2]$. Nous détaillons dans ce chapitre, une interprétation combinatoire des nombres de Whitney et r -Whitney des trois espèces associés au réseau de Dowling moyennant des partitions d'ensembles avec des éléments colorés.

5.1 INTRODUCTION

Les nombres r -Whitney des trois espèces ont été introduits par Cheon et Jung, [?], comme généralisation des nombres de Whitney et des nombres r -Stirling. Ils donnent une interprétation combinatoire en fonction des réseaux de Dowling et étudient leurs propriétés algébriques. Récemment, Corcino et *al.* [?] ont publié un article traitant de l'aspect asymptotique des nombres r -Whitney de deuxième espèce. Pour plus de résultats sur les nombres de Whitney voir [? ? ? ? ? ?].

Mihoubi et Rahmani [?] proposent une expression des nombres r -Whitney en fonction des polynômes partiels r -Bell qui leur permet de donner une interprétation combinatoire en termes de partitions d'ensembles colorées.

Lors de l'étude des nombres de Whitney et r -Whitney des trois espèces associés au réseau de Dowling, et dans le but de trouver une interprétation de ces nombres, nous sommes vus dans le besoin de définir et étudier une suite de nombres intermédiaires issue d'une translation de x dans les relations (1.40) et (1.41) que l'on nommera *nombres de Whitney translatés de première et deuxième espèce* respectivement, notés $[n]_k^{(\alpha)}$ et $[n]_k^{(\alpha)}$, et défini par

$$(x|\alpha)_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(\alpha)} x^k, \quad (5.1)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(\alpha)} (x|\alpha)_k. \quad (5.2)$$

Dans la prochaine section, nous interprétons les nombres de Whitney translatés des deux espèces comme étant des permutations ou des partitions d'ensemble colorées. D'une manière analogue, nous considérons des partitions d'ensemble en listes colorées afin de définir les nombres de Whitney-Lah (troisième espèce). Nous étendons ces généralisations aux nombres r -Whitney translatés des trois espèces en ajoutant la restriction adéquate sur les éléments.

Moyennant l'approche précédente, nous donnons dans la deuxième section, une interprétation combinatoire des nombres de Whitney des trois espèces, et nous établissons quelques identités combinatoires. Nous procédons de la même manière pour les nombres r -Whitney de première et deuxième espèces et les nombres r -Whitney-Lah.

5.2 NOMBRES DE WHITNEY ET r -WHITNEY TRANSLATÉS

Avant de définir les nombres de Whitney translatés des trois espèces, nous introduisons la nature des éléments utilisés dans l'interprétation combinatoire de ces nombres. Quand deux éléments donnés se trouvent dans une même part, l'un domine l'autre impliquant une mutation de l'élément dominé de α façons (cela peut être vu comme un volume pour $\alpha \in \mathbb{R}$ ou des couleurs pour $\alpha \in \mathbb{N}$). Dans un ensemble d'éléments, ces derniers s'entre dominent menant à la mutation de tous les éléments sauf un seul que l'on nommera le dominant global. Sans perte de généralités, nous supposons que les éléments sont dans une situation ordonnée de domination i.e. le premier élément domine le second, le second domine le troisième, et ainsi de suite.

5.2.1 Nombres de Whitney translatés des deux espèces

Les nombres de Whitney translatés des deux espèces peuvent être définis comme suit :

- Définition 5.1**
- Les nombres de Whitney translatés de la première espèce, notés $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}$, comptent le nombre de permutations de n éléments ayant k cycles tels que les éléments de chaque cycle mutent de α façons sauf l'élément dominant.
 - Les nombres de Whitney de la deuxième espèce, notés $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)}$, comptent le nombre de partitions de n éléments en k parts telles que les éléments de chaque part mutent de α façons sauf l'élément dominant.

Nous désignerons par (k, α) -permutation (respectivement (k, α) -partition) de $[n]$ toute k -permutation (respectivement k -partition) de $[n]$ dont les éléments mutent de α façons sauf l'élément dominant de chaque cycle (respectivement part). Sans perte de généralité, nous considérons $\alpha \in \mathbb{N}$ et parlerons de couleurs. Pour les cas où α est dans \mathbb{R} ou \mathcal{C} , nous pouvons l'interpréter comme un poids ou un volume.

Les nombres de Whitney translatés vérifient les relations de récurrence suivantes :

Théorème 5.1 Soient α, k et n des entiers positifs tels que $k \leq n$, on a

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} + \alpha(n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}, \quad (5.3)$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)} + \alpha k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)}, \quad (5.4)$$

où $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)} = \delta_{k,0}$ et $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)} = \delta_{n,0}$.

Démonstration. En raisonnant sur le dernier élément n :

- S'il constitue un cycle à lui seul (il n'a qu'une couleur), il reste à considérer les $(k-1, \alpha)$ -permutations de $[n-1]$. Nous avons $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}$ de $(k-1, \alpha)$ -permutations possibles.
- Sinon, nous considérons les (k, α) -permutations de $[n-1]$ et nous avons $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}$ (k, α) -permutations possibles, puis nous ajoutons le $n^{\text{ème}}$ élément aux k cycles et nous avons $n-1$ choix d'insertion et α couleurs possibles. Cela donne la récurrence (5.3).

De même, nous appliquons un comptage similaire pour démontrer la deuxième relation (5.4), et nous avons

- Si le dernier élément n forme un singleton, il reste à considérer les $(k-1, \alpha)$ -partitions de $[n-1]$. Nous avons $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)}$ façons de le faire.
- Sinon, nous considérons les $(k-1, \alpha)$ -partitions de $[n-1]$ et nous avons $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)}$ façons de le faire, puis nous ajoutons le $n^{\text{ème}}$ élément aux k parts et nous avons k choix d'insertion et α couleurs possibles.

□

5.2.2 Nombres Whitney-Lah translatés

Les nombres Whitney-Lah (ou Whitney troisième espèce), notés $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}$, sont définis comme suit :

Définition 5.2 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}$ compte le nombre de partitions de $[n]$ en k listes telles que les éléments de chaque liste mutent par α façons sauf l'élément dominant de chaque liste.

Nous appellerons (k, α) -partition en liste de $[n]$ toute k -partition en liste de $[n]$ dont les éléments mutent de α façons sauf le dominant de chaque liste.

Les nombres de Whitney-Lah translatés ont une relation de récurrence triangulaire.

Théorème 5.2 Soient α, k et n des entiers positifs tels que $k \leq n$, on a

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} + \alpha(n+k-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}. \quad (5.5)$$

Démonstration. Considérons l'élément n , et discutons les situations usuelles :

- S'il constitue une liste à lui seul (il n'a qu'une couleur), il reste à considérer les $(k-1, \alpha)$ -partitions en listes de $[n-1]$. Nous avons $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}$ de $(k-1, \alpha)$ -partitions possibles.
- Sinon, nous considérons les (k, α) -partitions de $[n-1]$ et nous avons $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)}$ (k, α) -partitions possibles, puis nous ajoutons le $n^{\text{ème}}$ élément aux listes et nous avons $n+k-1$ choix d'insertion et α couleurs possibles. Cela donne la récurrence (5.5).

□

Depuis (5.1) et (5.2), nous déduisons.

Corollaire 5.1 Soient α, k et n des entiers positifs tels que $k \leq n$, on a

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} = \sum_{j=k}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} \right\}^{(\alpha)}, \quad (5.6)$$

$$(x|\alpha)_n = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{(\alpha)} (x-\alpha)_k. \quad (5.7)$$

5.2.3 Nombre r -Whitney Translatés

Les nombres de Whitney associés au réseau de Dowling des trois espèces généralisent les nombres de Stirling des trois espèces respectivement. Nous proposons d'étendre la généralisation aux nombres r -Stirling des trois espèces avec la même approche adoptée dans la section 4.4 i.e. ajouter une restriction sur les éléments.

La définition des nombres r -Whitney translatés des trois espèces peut être formulée ainsi :

Définition 5.3 les nombres r -Whitney translatés de première espèce, notés $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{(\alpha)}$, comptent le nombre de (k, α) -permutations de $[n]$ telles que les r premiers éléments sont dans des cycles différents.

les nombres r -Whitney translatsés de deuxième espèce, notés $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(\alpha)}$, comptent le nombre de (k, α) -partitions de $[n]$ telles que les r premiers éléments sont dans des parts différentes.

les nombres r -Whitney-Lah translatsés, notés $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)}$, comptent le nombre de (k, α) -partitions en listes de $[n]$ telles que les r premiers éléments sont dans des listes différentes.

Les nombres r -Whitney translatsés obéissent aux relations de récurrence suivantes

Théorème 5.3 Soient r, k, n et α des entiers positifs tels que $r \leq k \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} + \alpha(n-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)}, \quad (5.8)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(\alpha)} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r^{(\alpha)} + \alpha k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(\alpha)}, \quad (5.9)$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} + \alpha(n-1+k) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)}, \quad (5.10)$$

avec $\left[\begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(\alpha)} = \left[\begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} = \delta_{k,0}$ et $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}_r^{(\alpha)} = \left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} = \delta_{n,0}$.

Remarque 5.1 Pour $\alpha = 1$, nous obtenons les nombres r -Stirling classiques des trois espèces, respectivement.

Les nombres r -Whitney translatsés des trois espèces sont liés par la relation suivante :

Corollaire 5.2 Soient r, k et n des entiers positifs tels que $r \leq k \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} = \sum_{j=k}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(\alpha)}. \quad (5.11)$$

De plus,

$$(x+r|\alpha)_n = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} (x+r)^k, \quad (5.12)$$

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(\alpha)} (x-r|\alpha)_k, \quad (5.13)$$

$$(x+r|\alpha)_n = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(\alpha)} (x-r|\alpha)_k. \quad (5.14)$$

5.3 NOMBRES WHITNEY DES RÉSEAUX DE DOWLING

Dans cette section, nous proposons une interprétation combinatoire des nombres de Whitney des deux espèces et des nombres de Whitney-Lah. Rappelons que les nombres de Whitney de deuxième espèce s'interprètent comme étant le nombre d'éléments d'anti-rang k dans un réseau de Dowling.

5.3.1 Nombres de Whitney de deuxième espèce

Les nombres de Whitney de deuxième espèce peuvent s'interpréter en termes de partitions partielles. Nous donnons dans la sous-section suivante une interprétation

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	4	1					
3	1	13	9	1				
4	1	40	58	16	1			
5	1	121	330	170	25	1		
6	1	364	1771	1520	395	36	1	
7	1	1093	9219	12411	5075	791	49	1

TABLE 5.1 – Nombre de Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 2$.

combinatoire qu'on utilisera pour démontrer des identités déjà établies. De même, nous proposons une expression des nombres de Whitney de deuxième espèce en termes de fonctions symétriques.

... interprétation combinatoire

Une (k, α) -partition partielle de $[n]$ est une k -partition partielle de $[n]$ (voir sous-section 1.2.4) telle que les éléments mutent de α façons sauf l'élément dominant de chaque part.

Exemple 5.1 Les $(2, \alpha)$ -partitions partielles de $[4]$ sont :

— Les 2-partitions d'un sous-ensemble à deux éléments de $[4]$:

$$\begin{array}{ccc} \{\{1\}, \{2\}\} & \{\{1\}, \{3\}\} & \{\{1\}, \{4\}\} \\ \{\{2\}, \{3\}\} & \{\{2\}, \{4\}\} & \{\{3\}, \{4\}\} \end{array}$$

En considérant les α mutations des éléments, cela donne 6 configurations (il n'y pas de mutations vu que ceux sont des éléments dominants).

— Les 2-partitions d'un sous-ensemble à trois éléments de $[4]$:

$$\begin{array}{ccc} \{\{1\}, \{2, 3\}\} & \{\{1\}, \{2, 4\}\} & \{\{1\}, \{3, 4\}\} \\ \{\{2\}, \{1, 3\}\} & \{\{2\}, \{1, 4\}\} & \{\{2\}, \{3, 4\}\} \\ \{\{3\}, \{1, 2\}\} & \{\{3\}, \{1, 4\}\} & \{\{3\}, \{2, 4\}\} \\ \{\{4\}, \{1, 2\}\} & \{\{4\}, \{1, 3\}\} & \{\{4\}, \{2, 3\}\}. \end{array}$$

Cela donne 12α configurations.

— Les 2-partitions de $[4]$:

$$\begin{array}{ccc} \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\} & \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\} & \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\} \\ \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\} & \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} & \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} \\ \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} & & \end{array}$$

qui donnent $7\alpha^2$ configurations

Proposition 5.1 Les nombres de Whitney de deuxième espèce $W_\alpha(n, k)$ comptent le nombre de (k, α) -partitions partielles de $[n]$.

Depuis l'exemple précédent, $W_\alpha(4, 2) = 7\alpha^2 + 12\alpha + 6$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	5	1					
3	1	21	12	1				
4	1	85	105	22	1			
5	1	341	820	325	35	1		
6	1	1365	6081	4070	780	51	1	
7	1	5461	43 932	46 781	14 210	1596	30 375	1

TABLE 5.2 – Nombres de Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 3$.**... comptage et preuves bijectives**

La relation de récurrence des nombres de Whitney de deuxième espèce,

$$W_\alpha(n, k) = W_\alpha(n-1, k-1) + (\alpha k + 1) W_\alpha(n-1, k),$$

peut-être démontrée par un double comptage.

Considérons le $n^{\text{ème}}$ élément et discutons les trois cas suivants :

- S'il forme un singleton (il n'a qu'une couleur), il reste à considérer les $(k-1, \alpha)$ -partitions partielles de $[n-1]$. Nous avons $W_\alpha(n-1, k-1)$ façons de le faire.
- Sinon, nous considérons les (k, α) -partitions partielles de $[n-1]$ et nous avons $W_\alpha(n-1, k)$ façons de le faire. Puis, nous ajoutons l'élément n aux parts et nous avons k insertions possibles et α couleurs possibles. Cela donne $\alpha k W_\alpha(n-1, k)$ possibilités.
- Si n n'est pas dans la partition partielle alors, nous considérons les (k, α) -partitions partielles de $[n-1]$. Nous avons $W_\alpha(n-1, k)$ possibilités.

Les nombres de Whitney de deuxième espèce s'écrivent en termes des nombres de Whitney translétés comme suit.

Théorème 5.4 Soient k et n des entiers positifs tels que $k \leq n$, on a

$$W_\alpha(n, k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}^{(\alpha)}. \quad (5.15)$$

Démonstration. Pour chaque sous-ensemble ω de $[n]$ de cardinalité $|\omega| = i$ ($k \leq i \leq n$), Nous avons

- $\binom{n}{i}$ façons de choisir les éléments de ω ,
- $\left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}^{(\alpha)}$ façons de choisir (k, α) -partitions de ω .

En considérant tous les sous-ensembles possibles, nous obtenons le résultat. \square

Fonctions symétriques et convolution

Les nombres de Whitney de deuxième espèce s'expriment en termes de fonctions symétriques élémentaires qui généralisent l'identité (1.23).

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	6	1					
3	1	31	15	1				
4	1	156	166	28	1			
5	1	781	1650	530	45	1		
6	1	3906	15 631	8540	1295	66	1	
7	1	19 531	144 585	126 651	30 555	2681	67 091	1

TABLE 5.3 – Nombres de Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 4$.**Théorème 5.5**

$$W_\alpha(n+k, n) = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} (\alpha i_1 + 1)(\alpha i_2 + 1) \cdots (\alpha i_k + 1). \quad (5.16)$$

Démonstration. Posons les éléments $1, 2, \dots, n$ dans n parts et discutons les cas des éléments restants $n+1, \dots, n+k$.

Commençons par l'élément $n+1$, nous distinguons deux situations :

1. S'il ne fait pas partie de la partition partielle alors, il ne sera pas inséré, donc cela donne 1 possibilité.
2. Sinon, il est affecté à une des n parts que l'on désignera par i_1 ($1 \leq i_1 \leq n$). Là encore, nous rencontrons trois situations (par rapport à l'élément déjà dans la part i_1), et nous avons :
 - i. Si l'élément de la part i_1 y reste, nous aurons α mutations lors de l'insertion de notre élément $n+1$.
 - ii. Sinon, si l'élément de la part i_1 migre à l'une des parts précédentes. Donc, l'élément $n+1$ occupera la place de l'élément initial de la part i_1 tandis que ce dernier sera affecté à l'une des $i_1 - 1$ parts précédentes et engendrera $\alpha(i_1 - 1)$ mutations.
 - iii. Sinon, l'élément de la part i_1 ne fait pas partie de la partition partielle.

Depuis i), ii) et iii), nous avons $(1 + \alpha + \alpha(i_1 - 1))$ possibilités. En considérant tous les cas possibles de i_1 , on obtient $\sum_{1 \leq i_1 \leq n} (\alpha i_1 + 1)$ possibilités.

A partir des situations 1 et 2, nous aurons $1 + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} (\alpha i_1 + 1) = \sum_{0 \leq i_1 \leq n} (\alpha i_1 + 1)$ possibilités.

Maintenant, pour insérer le deuxième élément $n+2$, nous considérons les éléments des parts $1, \dots, i_1$ comme étant fixes. Alors, deux situations se présentent :

1. L'élément $n+2$ est affecté aux parts $1, \dots, i_1$ ou n'appartienne pas à la partition partielle, nous aurons $\alpha i_1 + 1$ possibilités.
2. Dans le cas contraire, il est affecté à une part i_2 parmi les $n - i_1$ parts restantes ($i_1 + 1 \leq i_2 \leq n$), et de manière similaire à l'insertion précédente, nous avons trois situations
 - i. α façons d'insérer l'élément $n+2$ dans la part i_2 .
 - ii. L'élément de la part i_2 migre à l'une des parts précédentes, et nous aurons $\alpha(i_2 - 1)$ choix possibles.
 - iii. L'élément de la part i_2 ne fait pas partie de la partition partielle.

Cela donne $\sum_{i_1+1 \leq i_2 \leq n} (\alpha + \alpha(i_2 - 1) + 1)$ possibilités.

Depuis 1) et 2) nous obtenons $\alpha i_1 + 1 + \sum_{i_1+1 \leq i_2 \leq n} (\alpha i_2 + 1) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq n} (\alpha i_2 + 1)$. Cela donne au total $\sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} (\alpha i_1 + 1)(\alpha i_2 + 1)$ possibilités d'insertion des éléments $n + 1$ et $n + 2$.

Nous continuons, par le même procédé, pour les $k - 2$ éléments restants. Le dernier élément $n + k$:

1. S'il ne fait pas partie de la partition partielle ou il est inséré dans les parts $1, \dots, i_{k-1}$, ce qui nous donne $(\alpha i_{k-1} + 1)$ possibilités.
2. Sinon, Il est inséré dans une part i_k des $n - i_{k-1}$ restantes, et nous avons $(\alpha i_k + 1)$ possibilités (issues des trois possibilités connues).

Nous aurons $\sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} (\alpha i_1 + 1)(\alpha i_2 + 1) \cdots (\alpha i_k + 1)$ possibilités. \square

Une convolution des nombres de Whitney peut être obtenue en reproduisant le raisonnement sur un sous-ensemble S de $[n]$ de manière analogue à celui effectué dans la démonstration de la convolution (3.12).

Théorème 5.6 Soient n et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$W_\alpha(n, k) = \sum_{i=0}^s \sum_{k-i \leq j_1 \leq \dots \leq j_{s-i} \leq k} (\alpha j_1 + 1)(\alpha j_2 + 1) \cdots (\alpha j_{s-i} + 1) W_\alpha(n - s, k - i) \quad (5.17)$$

Remarque 5.2 Pour $\alpha = 1$, nous obtenons la convolution (3.12).

5.3.2 Nombres de Whitney de première espèce

Les nombres de Whitney de première espèce apparaissent comme coefficients de x du polynôme caractéristique du réseau de Dowling $P_L(x)$. Nous proposons une interprétation combinatoire de ces nombres en termes de "permutation partielle".

... interprétation combinatoire

Soient S un sous ensemble de $[n]$, \bar{S} le complémentaire de S à $[n]$ ($S \cap \bar{S} = \emptyset$ et $S \cup \bar{S} = [n]$). σ_S et $\sigma_{\bar{S}}$ une permutation de S et \bar{S} respectivement. Une k -permutation partielle de $[n]$ est un couple $(\sigma_S, \sigma_{\bar{S}})$ tel que σ_S est une k -permutation.

Exemple 5.2 Les 2-permutations partielles de $[4]$ sont :

— Les 2-permutations partielles de $[4]$ pour $\#S = 2$:

$$\begin{array}{ccc} ((1)(2); \sigma_{\{3,4\}}) & ((1)(3); \sigma_{\{2,4\}}) & ((1)(4); \sigma_{\{2,3\}}) \\ ((2)(3); \sigma_{\{1,4\}}) & ((2)(4); \sigma_{\{1,3\}}) & ((3)(4); \sigma_{\{1,2\}}) \end{array}$$

qui donnent un total de 12 configurations.

— Les 2-permutations partielles de $[4]$ pour $\#S = 3$:

$$\begin{array}{ccc} ((1)(2,3); \sigma_{\{4\}}) & ((1)(2,4); \sigma_{\{3\}}) & ((1)(3,4); \sigma_{\{2\}}) \\ ((2)(1,3); \sigma_{\{4\}}) & ((2)(1,4); \sigma_{\{3\}}) & ((2)(3,4); \sigma_{\{1\}}) \\ ((3)(1,2); \sigma_{\{4\}}) & ((3)(1,4); \sigma_{\{2\}}) & ((3)(2,4); \sigma_{\{1\}}) \\ ((4)(1,2); \sigma_{\{3\}}) & ((4)(1,3); \sigma_{\{2\}}) & ((4)(2,3); \sigma_{\{1\}}) \end{array}$$

— Les 2-permutations partielles de $[4]$ pour $\#S = 4$:

$$\begin{array}{lll} ((1)(2,3,4);\sigma_\emptyset) & ((2)(1,3,4);\sigma_\emptyset) & ((3)(1,2,4);\sigma_\emptyset) \\ ((1)(2,4,3);\sigma_\emptyset) & ((2)(1,4,3);\sigma_\emptyset) & ((3)(1,4,2);\sigma_\emptyset) \\ ((4)(1,2,3);\sigma_\emptyset) & ((4)(1,4,2);\sigma_\emptyset) & ((1,2)(3,4);\sigma_\emptyset) \\ ((1,3)(2,4);\sigma_\emptyset) & ((1,4)(2,3);\sigma_\emptyset) & \end{array}$$

qui donnent 11 configurations.

Une (k, α) -permutation partielle de $[n]$ est une k -permutation partielle $(\sigma_S; \sigma_{\bar{S}})$ de $[n]$ dont les éléments mutent de α façons sauf l'élément dominant de chaque cycle.

Proposition 5.2 Les nombres de Whitney de première espèce $w_\alpha(n, k)$ comptent le nombre de (k, α) -permutations partielles de $[n]$.

Exemple 5.3 Depuis l'exemple 5.2, $w_\alpha(4, 2) = 11\alpha^2 + 18\alpha + 6$.

... comptage et preuves bijectives

La relation de récurrence des nombres de Whitney de première espèce,

$$w_\alpha(n, k) = w_\alpha(n-1, k-1) + (\alpha(n-1) + 1)w_\alpha(n-1, k), \quad (5.18)$$

peut se déduire par le raisonnement suivant :

Considérons le $n^{\text{ème}}$ élément et discutons sa configuration dans la partition partielle $(\sigma_S; \sigma_{\bar{S}})$.

- Si n est un singleton dans σ_S , il reste à considérer les $(k-1, \alpha)$ -permutations partielles de $[n-1]$, et nous avons $w_\alpha(n-1, k-1)$ configurations possibles.
- Si n est un singleton dans $\sigma_{\bar{S}}$, il reste à considérer les (k, α) -permutations partielles de $[n-1]$, et nous avons $w_\alpha(n-1, k)$ configurations possibles.
- Sinon, à partir des (k, α) -permutations partielles de $[n-1]$, nous avons $w_\alpha(n-1, k)$ configurations. Nous ajoutons l'élément n tout en considérant les mutations possibles, cela donne $\alpha(n-1)$ façons. Cela donne la récurrence.

Les nombres de Whitney de première espèce s'écrivent en termes des nombres de Whitney translétés de première espèce.

Théorème 5.7 Soient α, k et n des entiers tels que $k \leq n$, on a

$$w_\alpha(n, k) = \sum_{i=k}^n \left[\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right]^{(\alpha)} \binom{i}{k}. \quad (5.19)$$

Démonstration. A partir d'une (i, α) -permutation de $[n]$ ($k \leq i \leq n$), il suffit de choisir k cycles pour constituer la permutation σ_S de la permutation partielle $(\sigma_S, \sigma_{\bar{S}})$. \square

Fonctions symétriques et convolution

Les nombres de Whitney de première espèce s'expriment en termes de fonctions symétriques analogues à l'identité (5.16) qui généralisent l'identité (1.22)

Théorème 5.8 *Nous avons*

$$w_\alpha(n, k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} (\alpha i_1 + 1)(\alpha(i_2 + 1) + 1) \cdots (\alpha(i_k + (k - 1)) + 1). \quad (5.20)$$

Démonstration. La preuve se fait par un raisonnement combinatoire similaire à celui de la preuve de (5.16). \square

5.3.3 Nombres de Whitney-Lah

Cheon et Jung [?] ont introduit les nombres de Whitney-Lah $L_\alpha(n, k)$ comme troisième espèce des nombres de Whitney par,

$$L_\alpha(n, k) = \sum_{i=k}^n w_\alpha(n, i) W_\alpha(i, k), \quad (5.21)$$

analogue à la relation (1.25) qui lie les nombres de Lah aux nombres de Stirling de première et deuxième espèces. Nous proposons dans ce qui suit une interprétation combinatoire des nombre de Whitney-Lah que nous appuierons par quelques comptages combinatoires. Nous donnerons par la suite une expression des nombre de Whitney-Lah en termes de fonctions symétriques.

... interprétation combinatoire

Une WL_k^r -partition de $[n]$ est une $(k + 1)$ -partition en listes de $[n]$, $l = (l_1, \dots, l_k; l_{k+1})$ telle que les éléments insérés en tête de la liste l_{k+1} sont colorés avec r couleurs.

Une (WL_k^r, α) -partition de $[n]$ est une WL_k^r -partition de $[n]$ dont les éléments mutent de α façons sauf les éléments dominants dans les listes et les éléments déjà colorés.

Proposition 5.3 *Les nombres de Whitney-Lah $L_\alpha(n, k)$ comptent le nombre de (WL_k^2, α) -partitions de $[n]$.*

... comptage et preuves bijectives

La relation de récurrence des nombres de Whitney-Lah, pour des entiers α, k et n tels que $k \leq n$,

$$L_\alpha(n, k) = L_\alpha(n - 1, k - 1) + (\alpha(n + k - 1) + 2)L_\alpha(n - 1, k), \quad (5.22)$$

peut-être démontrée combinatoirement de la façon suivante.

Démonstration. Considérons l'élément n :

- Si n forme une liste, il reste à considérer les (WL_{k-1}, α) -partitions de $[n - 1]$, et nous avons $L_\alpha(n - 1, k - 1)$ configurations possibles.
- Si n est en tête de liste, nous considérons les (WL_k^2, α) -partitions de $[n - 1]$, et nous avons $L_\alpha(n - 1, k)$ configurations. Puis nous ajoutons l'élément n aux $k + 1$ listes, où nous avons $\alpha k + 2$ possibilités (les deux possibilités résultent de l'insertion de n à la liste $k + 1$ où il y a 2 colorations possibles).

- Sinon, il est inséré après un autre élément. Nous considérons les (WL_k^2, α) -partitions de $[n - 1]$ et donc nous avons $L_\alpha(n - 1, k)$ configurations. Puis, nous ajoutons notre éléments et nous avons $\alpha(n - 1)$ possibilités.

□

Les nombres Whitney-Lah s'expriment en termes des nombres de Whitney-Lah translatés.

Théorème 5.9 Soit α, k et n des entiers tels que $k \leq n$, on a

$$L_\alpha(n, k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left[\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right]^{(\alpha)} 2(2 + \alpha) \cdots (2 + (n - i - 1)\alpha). \quad (5.23)$$

Démonstration. Pour chaque sous-ensemble ω de $[n]$ de cardinalité $|\omega| = i$ ($k \leq i \leq n$), Nous avons

- $\binom{n}{i}$ façons de choisir les éléments de ω ,
- $\left[\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right]^{(\alpha)}$ de (k, α) -partitions en listes de ω ,
- pour les $n - i$ restants nous avons : 2 couleurs pour le premier (inséré en tête de liste). Pour le second nous avons 2 couleurs s'il est inséré en tête de liste et α mutations s'il est inséré après un autre élément etc.

En considérant tous les sous-ensembles possibles, nous obtenons le résultat.

□

Similaire aux nombres de Lah, les nombres de Whitney-Lah ont une formule explicite.

$$L_\alpha(n, k) = \binom{n}{k} (\alpha k + 2) \cdots (\alpha(n - 1) + 2). \quad (5.24)$$

Celle-ci s'interprète combinatoirement comme suit :

Choisissons au départ k éléments pour former les k premières listes, nous avons $\binom{n}{k}$ choix possibles. Discutons maintenant l'insertion du reste des éléments. Pour l'élément $k + 1$, nous avons deux possibilités : s'il est inséré dans les k premières listes, nous avons αk façons de le faire. Sinon, il est inséré dans la liste $k + 1$ et nous avons 2 possibilités de colorations. De même pour l'élément $k + 2$, nous avons 2 colorations possibles s'il est inséré en tête de la liste $k + 1$, ou $\alpha(k + 1)$ possibilités s'il est inséré après un autre élément etc.

5.4 NOMBRES r -WHITNEY

Dans cette section, nous proposons une interprétation combinatoire des nombres r -Whitney des deux espèces et des nombres de Whitney-Lah en nous basant sur les interprétations combinatoires exposées dans la section précédente. Nous donnons aussi une formulation en termes de fonctions symétriques.

5.4.1 Interprétation combinatoire

Les nombres r -Whitney des trois espèces peuvent s'interpréter comme suit :

Théorème 5.10 Les nombres r -Whitney de première espèce $w_{\alpha,r}(n, k)$ comptent le nombre de (k, α) -permutations partielles de $[n]$ telles que les éléments dominants de $\sigma_{\bar{S}}$ sont colorés avec r couleurs.

Les nombres r -Whitney de deuxième espèce, $W_{\alpha,r}(n, k)$, comptent le nombre de (k, α) -partitions partielles de $[n]$ telles que les éléments n'appartenant pas à la partition partielle sont colorés avec r couleurs.

Les nombres r -Whitney-Lah $L_{\alpha,r}(n, k)$ comptent le nombre de (WL_k^{2r}, α) -partitions de $[n]$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	4	1						
3	1	13	56	1					
4	1	40	237	61	1				
5	1	121	988	542	67	1			
6	1	364	4073	3698	944	74	1		
7	1	1093	16 656	22 563	9362	1462	82	1	
8	1	3280	67 717	129 471	78 735	19 596	2118	91	1

TABLE 5.4 – Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 1$ et $r = 2$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	5	1						
3	1	21	11	1					
4	1	85	87	19	1				
5	1	341	607	239	29	1			
6	1	1365	3983	2519	529	41	1		
7	1	5461	25 263	24135	7809	1021	55	1	
8	1	21845	157039	218343	102225	20061	1791	71	1

TABLE 5.5 – Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 2$ et $r = 2$.

5.4.2 Comptage et preuves bijectives

L'interprétation combinatoire nous permet de redémontrer les relations de récurrence comme suit.

Théorème 5.11 Soient k et n des entiers positifs tels que $k \leq n$, et soient α et r des nombres réels, on a

$$w_{\alpha,r}(n, k) = w_{\alpha,r}(n - 1, k - 1) + (\alpha(n - 1) + r)w_{\alpha,r}(n - 1, k) \quad (5.25)$$

$$W_{\alpha,r}(n, k) = W_{\alpha,r}(n - 1, k - 1) + (\alpha k + r)W_{\alpha,r}(n - 1, k), \quad (5.26)$$

$$L_{\alpha,r}(n, k) = L_{\alpha,r}(n - 1, k - 1) + (\alpha(n + k - 1) + 2r)L_{\alpha,r}(n - 1, k) \quad (5.27)$$

Démonstration. La récurrence (5.26) se démontre en raisonnant sur le $n^{\text{ème}}$ élément :

- Si n est un singleton dans σ_S , il reste à considérer les $(k-1, \alpha)$ -permutations partielles de $[n-1]$, telles que les éléments dominants de $\sigma_{\bar{S}}$ sont colorés avec r couleurs. Nous avons $w_{\alpha,r}(n-1, k-1)$ configurations possibles.
- Si n est un singleton dans $\sigma_{\bar{S}}$, donc il a r couleurs possibles. Il reste à considérer les (k, α) -permutations partielles de $[n-1]$ telles que les éléments dominants de $\sigma_{\bar{S}}$ sont colorés avec r couleurs, et nous avons $w_{\alpha,r}(n-1, k)$ configurations possibles.
- Sinon, à partir des (k, α) -permutations partielles de $[n-1]$ et nous avons $w_{\alpha,r}(n-1, k)$ configurations possibles. Nous ajoutons l'élément n tout en considérant les mutations possibles, cela donne $\alpha(n-1)$ possibilités.

De même pour la récurrence (5.26), nous considérons le $n^{\text{ème}}$ élément et discutons les trois cas suivants :

- S'il forme un singleton, il reste à considérer les $(k-1, \alpha)$ -partitions partielles de $[n-1]$ de sorte que les éléments n'appartenant pas à la partition partielle sont colorés avec r couleurs. Nous avons $W_{\alpha,r}(n-1, k-1)$ configurations.
- Sinon, s'il appartient à la partition partielle, nous avons $W_{\alpha,r}(n-1, k)$ de (k, α) -partitions partielles de $[n-1]$ telles que les éléments n'appartenant pas à la partition partielle sont colorés avec r couleurs. Et αk possibilités d'insertion aux k parts.
- Sinon, il n'appartient pas à la partition partielle, nous considérons les (k, α) -partitions partielles de $[n-1]$, et nous avons $W_{\alpha,r}(n-1, k)$ configurations. Puis, nous colorons notre éléments avec r couleurs.

La récurrence (5.27) se démontre de la même manière que (5.22). \square

Les nombres r -Whitney des trois espèces s'expriment en termes des nombres de Whitney translétés.

Théorème 5.12

$$w_{\alpha,r}(n, k) = \sum_{i=k}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{(\alpha)} \binom{i}{k} r^{i-k}, \quad (5.28)$$

$$W_{\alpha,r}(n, k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}^{(\alpha)} r^{n-i}, \quad (5.29)$$

$$L_{\alpha,r}(n, k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left[\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right]^{(\alpha)} 2r(2r + \alpha) \cdots (2r + (n-i-1)\alpha). \quad (5.30)$$

Démonstration. A partir d'une (i, α) -permutation de $[n]$ ($k \leq i \leq n$), il suffit de choisir k cycles pour constituer la permutation σ_S de la permutation partielle $(\sigma_S; \sigma_{\bar{S}})$. Quant aux $i-k$ éléments dominants dans $\sigma_{\bar{S}}$, ils sont colorés de r couleurs chacun, ce qui donne r^{i-k} . Cela donne l'identité (5.28).

Pour l'identité (5.29), nous avons

$\binom{n}{i}$ façons de choisir les éléments de la partition partielle.

$\left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}^{(\alpha)}$ (k, α) -partitions des i éléments.

r^{n-i} colorations possibles pour les $n-i$ éléments qui n'appartiennent pas à la partition partielle.

La preuve de la relation (5.30) est la même que pour la relation (5.23), il suffit de considérer $2r$ colorations au lieu de 2 colorations pour les éléments dominants.

□

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	6	1						
3	1	31	14	1					
4	1	156	143	25	1				
5	1	781	1300	418	41	1			
6	1	3906	11181	5898	1074	58	1		
7	1	19531	93354	76059	23082	2060	78	1	
8	1	97656	766363	930003	445371	58102	3620	101	1

TABLE 5.6 – Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 3$ et $r = 2$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	5	1						
3	1	21	10	1					
4	1	85	71	16	1				
5	1	341	440	167	23	1			
6	1	1365	2541	1442	328	31	1		
7	1	5461	14070	11193	3738	576	40	1	
8	1	21845	75811	81228	37359	8346	936	50	1

TABLE 5.7 – Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 1$ et $r = 3$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	6	1						
3	1	31	13	1					
4	1	156	122	22	1				
5	1	781	1010	320	33	1			
6	1	3906	7851	3890	683	46	1		
7	1	19531	58863	42861	11403	1281	61	1	
8	1	97656	431572	444612	168294	28056	2196	78	1

TABLE 5.8 – Nombre r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 2$ et $r = 3$.

Corollaire 5.3 Soient k et n des entiers positifs tels que $k \leq n$, on a

$$W_{1,r}(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r. \quad (5.31)$$

Démonstration. La membre de droite de l'égalité s'interprète comme étant le nombre de partitions en k d'un sous-ensemble de $[n]$ tel que les éléments qui n'appartiennent pas aux k parts mutent de r façons. Pour le membre de gauche, nous considérons r nouveaux éléments représentatifs des r mutations (un élément pour chaque type de

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	7	1						
3	1	43	10	1					
4	1	259	73	22	1				
5	1	1555	478	337	37	1			
6	1	9331	2989	4522	892	55	1		
7	1	55987	18298	57253	17902	1882	76	1	
8	1	335923	110881	705334	325783	51778	3478	100	1

TABLE 5.9 – Nombres r -Whitney de deuxième espèce pour $\alpha = 3$ et $r = 3$.

mutation), et convenons que les éléments qui sont dans une part avec un élément des r mutent suivant le type de mutation associée à l'élément. Nous partitionnons les $n + r$ éléments dans $k + r$ parts de sorte que les r éléments soient dans des parts différentes, cela se fait de $\binom{n+r}{k+r}_r$ façons. \square

5.4.3 Fonctions symétriques et convolution

Les nombres r -Whitney des trois espèces s'expriment aussi en termes de fonctions symétriques élémentaires.

Théorème 5.13 soient n, k et r des entiers positifs, on a

$$W_{\alpha,r}(n+k, n) = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} (\alpha i_1 + r)(\alpha i_2 + r) \cdots (\alpha i_k + r), \quad (5.32)$$

$$w_{\alpha,r}(n, k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} (\alpha i_1 + r)(\alpha(i_2 + 1) + r) \cdots (\alpha(i_k + (k-1)) + r), \quad (5.33)$$

$$L_{\alpha,r}(n, k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} (2\alpha i_1 + 2r)(\alpha(2i_2 + 1) + 2r) \cdots (\alpha(2i_k + (k-1)) + 2r). \quad (5.34)$$

A noter que les identités (5.32) et (5.33) ont été établies par Merca [?] comme une application des fonctions symétriques élémentaires et complètes.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons exposé les nombres de Whitney translatsés et les nombres Whitney de Dowling des trois espèces qui, comme les nombres de Stirling s'interprètent en termes de partitions d'ensembles. Dans un récent travail, Mangotaram [?] étudie les q -analogues des nombres de Whitney et r -Whitney. Comme perspective, nous pouvons chercher une interprétation de ces q -analogues. Aussi, l'interprétation peut servir d'un point de départ pour explorer l'aspect s -associés des nombres r -Whitney en ajoutant une restriction sur la taille des parts (cycles ou listes).

APPROCHE UNIFICATRICE DES NOMBRES DE STIRLING

6

SOMMAIRE

6.1	INTRODUCTION	91
6.2	INTERPRÉTATION COMBINATOIRE	92
6.3	FORMULE EXPLICITE	92
6.4	RELATIONS DE RÉCURRENCE	94
6.5	FONCTION SYMÉTRIQUE	95
6.6	CONVOLUTIONS ET IDENTITÉS COMBINATOIRES	96
6.6.1	Convolutions	97
6.6.2	Preuves bijectives	98
6.7	FONCTION GÉNÉRATRICE	99
	CONCLUSION	100

Ce chapitre traite des nombres r -Stirling généralisés qui regroupent les généralisations vues dans les chapitres précédents. Les résultats présentés ont fait l'objet d'un papier soumis [?].

6.1 INTRODUCTION

Une première approche analytique unificatrice des nombres de Stirling, r -Stirling, Whitney et r -Whitney des trois espèces, et bien d'autre a été proposé par Hsu et Shiue [?], qui ont proposé une paire de suites appelées "Stirling-type pair" $\{S^1(n, k), S^2(n, k)\} \equiv \{S(n, k; \alpha, \beta, r), S(n, k; \beta, \alpha, -r)\}$ définis par les relations inverses suivantes :

$$(x|\alpha)^n = \sum_{k=0}^n S^1(n, k)(x - r|\beta)^k, \quad (6.1)$$

$$(x|\beta)^n = \sum_{k=0}^n S^2(n, k)(x + r|\alpha)^k, \quad (6.2)$$

où α, β et r sont des paramètres arbitraires avec $(\alpha, \beta, r) \neq (0, 0, 0)$.

Les nombres $S(n, k; \alpha, \beta, r)$ satisfont la relation de récurrence triangulaire suivante

$$S(n + 1, k; \alpha, \beta, r) = S(n, k - 1; \alpha, \beta, r) + (\beta k - \alpha n + r)S(n, k; \alpha, \beta, r),$$

avec $S(0, 0; \alpha, \beta, r) = S(n, n; \alpha, \beta, r) = 1$ et $S(1, 0; \alpha, \beta, r) = r$. Ils établissent des propriétés combinatoires.

Nous trouvons dans le papier de Tsylova [?] une interprétation statistique des nombres $A_{\beta, \alpha}(k, n)$ qui coïncident avec le cas particulier $S(n, k; \alpha, \beta, 0)$. Motivé par cela, nous nous sommes intéressé à ce cas particulier et nous avons proposé dans [?] une interprétation combinatoire des nombres de Stirling généralisés, noté $\lfloor n \rfloor_k^{\alpha, \beta}$. La notation $\lfloor \rfloor$ est dû à l'interprétation qui se base sur des partitions d'ensembles en listes.

Récemment, Shattuck [?] a considéré une généralisation polynomiale à deux paramètres des nombres r -Lah, notée $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}(n, k; r)$, appelé nombres r -Lah généralisés et définis, pour $1 \leq k \leq n + 1$, par la relation de récurrence

$$\mathcal{G}_{\alpha, \beta}(n + 1, k; r) = \mathcal{G}_{\alpha, \beta}(n, k - 1; r) + (\alpha n + \beta k + (\alpha + \beta)r)\mathcal{G}_{\alpha, \beta}(n, k; r), \quad (6.3)$$

avec les valeurs initiales $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}(0, k; r) = \delta_{k,0}$ et $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}(n, 0; r) = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha(j + r) + \beta r)$.

Il propose deux statistiques (le nombre d'élément minimum enregistrés et le nombre d'éléments non minimum enregistrés dans une partition en liste) afin de fournir une interprétation combinatoire des nombres r -Lah généralisés et établit dans le même papier des propriétés combinatoires. Remarquons que les $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}(n, k; r)$ s'expriment en les "Stirling-type pair" :

$$\mathcal{G}_{\alpha, \beta}(n, k; r) = S(n + r, k + r; \alpha, \beta, (\alpha + \beta)r).$$

Nous exposons dans ce chapitre une interprétation combinatoire des nombres r -Lah généralisés, nous préférons les appeler r -Stirling généralisée pour le simple fait qu'ils généralisent les nombres r -Stirling des trois espèces et r -Whitney translatés des trois espèces. Nous les notons par $\lfloor n \rfloor_k^{\alpha, \beta}$, et les définissons par

$$(x + (\alpha + \beta)r|\alpha)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left\lfloor n + r \right\rfloor_{k + r}^{\alpha, \beta} (x|\beta)^k. \quad (6.4)$$

Nous proposons dans la section 6.2 une nouvelle interprétation combinatoire. Dans les sections 6.3, 6.4 et 6.5, nous proposons une formule explicite des relations de récurrence et une relation avec les fonctions symétriques respectivement. Des convolutions

et des identités combinatoires ainsi que la fonction génératrice sont données dans les sections 6.6 et 6.7.

6.2 INTERPRÉTATION COMBINATOIRE

Soit $\Omega_r(n, k)$ l'ensemble de toutes les situations possibles de distribuer l'ensemble $[n]$ en k listes ordonnées, un élément à la fois, tel que

- les r premiers éléments doivent être dans des listes distinctes,
- le premier élément mis dans la liste possède un poids de valeur égale à 1,
- on affecte un poids égal à β à l'élément inséré en tête de chaque liste,
- on affecte un poids égal à α à un élément inséré après un autre élément.

Étant donnée une distribution $\varepsilon \in \Omega_r(n, k)$, nous définissons le poids ε , noté par $w(\varepsilon)$, comme étant le produit des poids de ses éléments. Ainsi, le poids total de $\Omega_r(n, k)$ est donné par la somme des poids de toutes les partitions en listes.

Exemple 6.1 Soient $n = 4$, $k = 3$ et $r = 2$, on distribue l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ en 3 listes telles que les éléments 1 et 2 sont dans des listes différentes :

Nous insérons les éléments de $\{1, 2\}$ dans deux listes distinctes et l'on ajoute un autre élément dans la troisième liste, par exemple $\{[1][2][3]\}$, le poids de cette partition est 1. Maintenant, on ajoute le quatrième élément dans une liste, si l'on choisit de le mettre dans la première liste, il y aurait deux dispositions possibles : soit en tant que tête de liste $\{[4, 1][2][3]\}$ avec un poids $\omega(\{[4, 1][2][3]\}) = \beta$, ou bien après l'élément de tête de liste correspondant à $\{[1, 4][2][3]\}$ et $\omega(\{[1, 4][2][3]\}) = \alpha$ et ainsi de suite. Toutes les partitions de l'ensemble $\Omega_2(4, 3)$ sont

$$\begin{aligned} & \{[1, 4][2][3]\} \quad \{[4, 1][2][3]\} \quad \{[1][4, 2][3]\} \quad \{[1][2, 4][3]\} \\ & \{[1][2][4, 3]\} \quad \{[1][2][3, 4]\} \quad \{[1, 3][2][4]\} \quad \{[3, 1][2][4]\} \\ & \{[1][3, 2][4]\} \quad \{[1][2, 3][4]\} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ainsi, le poids total de $\Omega_2(4, 3)$ est $5\alpha + 5\beta$.

Ce raisonnement nous conduit au résultat suivant :

Théorème 6.1 Soient k et n des entiers positifs tels que $k \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{\varepsilon \in \Omega_r(n, k)} \omega(\varepsilon). \quad (6.6)$$

6.3 FORMULE EXPLICITE

Nous donnons dans le résultat suivant une formule explicite des nombres $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta}$. La preuve est basée sur le principe d'inclusion-exclusion.

Théorème 6.2 Soient $k, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$, tel que $k \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \frac{1}{k! \beta^{k-r}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^r (\beta(k-j) + \alpha r |\alpha|)^{\overline{n-r}}. \quad (6.7)$$

Afin de démontrer le résultat, nous allons nous intéresser à un ensemble de partitions en listes plus grand et facilement dénombrable ou les listes sont ordonnées et peuvent être vides.

Démonstration. Soit ϕ l'ensemble de toutes les façons possibles de distribuer n éléments, notés $1, 2, \dots, n$, sur k listes ordonnées (numérotées de 1 à k et pas nécessairement non-vides). Nous insérons un élément à la fois suivant les contraintes suivantes :

- les r premiers éléments sont dans des listes différentes,
- le premier élément mis dans une liste possède un poids β ,
- nous affectons un poids β à l'élément inséré en tant que tête de liste,
- nous affectons un poids α à l'élément inséré après un autre élément dans une liste donnée,

nous avons $|\phi| = k^r(k+r)^{\overline{n-r}}$, et le poids total de l'ensemble ϕ est la somme de tous les poids de toutes les distributions. Nous avons un poids total égal à

$$\beta^r k^r (\beta k + \alpha r |\alpha|)^{\overline{n-r}}.$$

Maintenant, soit Δ le sous-ensemble de ϕ qui ne possède pas de distributions comportant des listes vides. On veut calculer le poids total du sous-ensemble Δ .

Pour j ($1 \leq j \leq k$), soit A_j le sous-ensemble de ϕ tel que la $j^{\text{ième}}$ liste est vide. Alors,

$$\Delta = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k+r}},$$

avec $\overline{A_j} = \phi \setminus A_j$. En appliquant le principe d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$|\Delta| = |\phi| - \sum_{j=1}^k (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}|. \quad (6.8)$$

Calculons le terme général $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}|$:

Pour un j fixé, nous avons $\binom{k}{j}$ façons de sélectionner les j listes vides parmi les k listes. Maintenant, on distribue les n éléments dans les $k-j$ listes restantes, en commençant par la distribution des r éléments dans des listes distinctes ce qui donne le poids

$$\beta(k-j)\beta(k-j-1) \dots \beta(k-j-r+1) = \beta^r (k-j)^{\underline{r}}.$$

Pour distribuer les $n-r$ éléments restants : le premier élément possède $k-j+r$ possibilités d'être inséré avec un poids $\beta(k-j) + \alpha r$ (avec $\beta(k-j)$ comme tête de liste ou αr après les r éléments déjà insérés); le second aura un poids de $\beta(k-j) + \alpha(r+1)$ venant des $(k-j)$ possibilités de tête de liste avec un poids β ou bien après les $r+1$ éléments insérés avec un poids α ; et ainsi de suite jusqu'au dernier élément qui possède un poids de $\beta(k-j) + \alpha(n-1)$. Ainsi, le poids total de distribution des n éléments sur les $k-j$ listes est

$$(\beta(k-j) + \alpha r) \dots (\beta(k-j) + \alpha(n-r)) = (\beta(k-j) + \alpha r |\alpha|)^{\overline{n-r}}.$$

Donc,

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| = \binom{k}{j} \beta^r (k-j)^{\underline{r}} (\beta(k-j) + \alpha r |\alpha|)^{\overline{n-r}},$$

et nous obtenons

$$|\Delta| = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \beta^r (k-j)^r (\beta(k-j) + \alpha r |\alpha|)^{\overline{n-r}}.$$

On divise par $k!$ pour supprimer l'ordre entre les listes et par β^k pour donner aux k premiers éléments insérés dans les listes le poids 1. \square

Remarque 6.1 Pour $(\alpha, \beta) = (0, 1)$, nous obtenons la formule explicite des nombres r -Stirling de deuxième espèce

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^r (k-j)^{n-r}. \quad (6.9)$$

6.4 RELATIONS DE RÉCURRENCE

Dans cette section, nous utilisons notre interprétation afin de démontrer combinatoirement les relations de récurrence (triangulaire et verticale).

Les nombres $\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rfloor_r^{\alpha, \beta}$ satisfont la relation de récurrence triangulaire suivante

Théorème 6.3 Soient k et n des entiers positifs tel que $r \leq k \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} + (\alpha(n-1) + \beta k) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta}, \quad (6.10)$$

où $\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \rfloor_r^{\alpha, \beta} = 1$ et $\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \rfloor_r^{\alpha, \beta} = \prod_{j=0}^{n-r-1} (\alpha(r+j) + \beta r)$.

Démonstration. Nous comptons le poids total de distribution de l'ensemble $[n]$ en k listes tel que les r premiers éléments sont dans des listes distinctes. Conformément à la situation du dernier élément $\{n\}$, nous avons les deux situations suivantes :

- Si $\{n\}$ est un singleton (de poids 1), les $n-1$ éléments restants doivent être distribués en $k-1$ listes de poids $\lfloor \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \rfloor_r^{\alpha, \beta}$.
- Si $\{n\}$ n'est pas un singleton, l'élément n est dans l'une des k listes avec certains autres éléments. Le poids total de distribution de l'ensemble $[n-1]$ en k listes est $\lfloor \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \rfloor_r^{\alpha, \beta}$. Nous avons $n-1$ possibilités d'insérer l'élément n après un élément avec un poids α et k possibilités d'insertion de l'élément n comme tête de liste avec un poids β . Ainsi, le poids est $(\alpha(n-1) + \beta k) \lfloor \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \rfloor_r^{\alpha, \beta}$. \square

L'identité suivante exprime une relation de récurrence horizontale, nous donnons une preuve combinatoire,

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{i=k}^n (\beta k |\alpha|)^{\overline{n-i}} \left[\begin{matrix} i-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta}. \quad (6.11)$$

Démonstration. Soit $i \in [k, n]$ donné, considérons les éléments de $[i-1]$ qui ne sont pas dans la même liste que l'élément " n ". Le poids total de distribution des éléments de $[i-1]$ dans $k-1$ listes est $\lfloor \begin{smallmatrix} i-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \rfloor_r^{\alpha, \beta}$, et le poids de distribution des $[i, n-1]$ éléments restants dans k listes est $\prod_{j=i}^{n-1} (\alpha j + \beta k)$. On conclut par sommation. \square

Nous donnons dans ce qui suit une cross récurrence verticale de nombre r -Stirling généralisés.

Théorème 6.4 Soient n et k deux entiers positifs, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{i=k}^n (\alpha + \beta | \alpha)^{\overline{n-i}} \binom{n-r}{i} \left[\begin{matrix} i \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{\alpha, \beta}. \quad (6.12)$$

Démonstration. Soit i ($k-r \leq i \leq n-r$) le nombre d'éléments qui n'appartiennent pas à la liste contenant le premier élément.

- nous avons $\binom{n-r}{i}$ façons de choisir les i éléments,
- le poids de la distribution des i éléments avec les $r-1$ premiers sur $k-1$ listes tel que les $r-1$ premiers éléments sont dans des listes différentes est $\left[\begin{matrix} i \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{\alpha, \beta}$,
- le poids de la distribution des $n-r-i$ éléments restant avec l'élément 1 est $(\alpha + \beta | \alpha)^{\overline{n-i}}$.

□

6.5 FONCTION SYMÉTRIQUE

Les nombres de Stirling généralisés $\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta}$, pour un n fixé, peuvent être exprimés comme des fonctions symétriques des nombres $1, \dots, n$.

Les nombres r -Lah généralisés satisfont :

Théorème 6.5 Soient n et k des entiers positifs, on a

$$\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{r \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} \prod_{j=1}^k ((\alpha + \beta) i_j + \alpha(j-1)). \quad (6.13)$$

Démonstration. Le membre de gauche de l'équation $\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta}$ compte le poids total de distribution d'un ensemble $[n+k]$ sur n listes ordonnées non-vides. Maintenant, on montre que le membre de droite de l'équation compte la même chose :

D'abord, on constitue n listes avec les éléments de $[n]$ (un par liste ayant chacun un poids 1). Puis on évalue le poids des $[n+1, n+k]$ éléments restants.

Pour d'insérer l'élément " $n+1$ ", nous avons deux situations :

- (A1) si nous l'affectons aux r premières listes contenant un des éléments de $[r]$, on a $2r$ possibilités de l'affecter avec le poids $(\alpha + \beta)r$,
- (A2) sinon, nous l'affectons à une liste désignée i_1 ($r+1 \leq i_1 \leq n$), nous devons considérer toutes les situations possibles de l'élément se trouvant dans la liste i_1 et nous distinguons deux autres cas :
 - (i) en premier lieu, l'élément initial de la liste i_1 reste dans la liste, l'élément " $n+1$ " est inséré avant l'élément initial avec un poids β ou après avec un poids α ,
 - (ii) en second lieu, l'élément initial de la liste i_1 est déplacé vers les i_1-1 listes précédente avec un poids $(\alpha + \beta)(i_1-1)$ et nous insérons l'élément " $n+1$ " dans la liste i_1 avec un poids 1, notons que l'on déplace les éléments seulement de droite à gauche pour éviter le double comptage des situations.

Ainsi, de (i) et (ii), le poids de l'élément $n + 1$ est $(\alpha + \beta)i_1$.

De (A1) et (A2), et en sommant sur toutes les insertions possibles de l'élément " $n + 1$ ". On obtient le poids total des éléments de $[n + 1]$ comme $\sum_{r \leq i_1 \leq n} (\alpha + \beta)i_1$.

Maintenant, afin d'insérer l'élément " $n + 2$ ", on considère les éléments des listes $1, \dots, i_1$ comme étant fixés. Ceci vient en conséquence de l'insertion de l'élément précédent $n + 1$ ou nous avons considéré toutes les distributions possibles. De même, nous avons deux situations (les mêmes que précédemment) :

(B1) si l'on ajoute l'élément $n + 2$ à l'une des listes $1, \dots, i_1$, le poids est de $((\alpha + \beta)i_1 + \alpha)$,

(B2) sinon, il appartient à une liste i_2 ($i_1 + 1 \leq i_2 \leq n$), avec un poids $((\alpha + \beta)i_2 + \alpha)$ (en effet, le poids de l'élément $n + 2$ est $(\beta + \alpha)$ s'il est inséré avant ou après l'élément initial de la liste i_2 ou bien $(\alpha + \beta)(i_2 - 1) + \alpha$ s'il est inséré dans la liste i_2 quand l'élément initial de la liste i_2 est déplacé dans les listes précédentes).

Alors, de (B1) et (B2) le poids de l'élément $n + 2$ est

$$((\alpha + \beta)i_1 + \alpha) + \sum_{i_2=i_1+1}^n (\alpha + \beta)i_2 + \alpha = \sum_{i_2=i_1}^{n+r} (\alpha + \beta)i_2 + \alpha.$$

Ainsi, le poids des éléments $n + 1$ et $n + 2$ donne

$$\sum_{i_1=r}^n (\alpha + \beta)i_1 \sum_{i_2=i_1}^n ((\alpha + \beta)i_2 + \alpha) = \sum_{r \leq i_1 \leq i_2 \leq n} ((\alpha + \beta)i_1)((\alpha + \beta)i_2 + \alpha).$$

On procède de la même manière pour les $k - 2$ éléments restants. Ainsi, pour le dernier élément " $n + k$ ", on considère les éléments des listes $1, \dots, i_{k-1}$ comme étant fixés, alors le poids de l'élément $n + k$ est $(\alpha + \beta)(i_{k-1} - 1) + \alpha(k - 1)$ s'il est inséré dans ces listes ou alors, $(\alpha + \beta)i_k + \alpha(k - 1)$ s'il est inséré dans une liste i_k ($i_{k-1} + 1 \leq i_k \leq n$). Cela donne le poids total de distribution d'un ensemble $[n + k]$ sur n listes ;

$$\sum_{r \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} ((\alpha + \beta)i_1)((\alpha + \beta)i_2 + \alpha) \cdots ((\alpha + \beta)i_k + \alpha(k - 1)).$$

□

Notons que pour $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$ nous obtenons les identités (3.3), (3.3) et (3.19) respectivement.

6.6 CONVOLUTIONS ET IDENTITÉS COMBINATOIRES

Nous établissons dans la première sous-section des relations de convolution relatives aux nombres de Stirling généralisés moyennant des raisonnements combinatoires. Nous utiliserons dans la deuxième sous-section l'interprétation combinatoire des nombres r -Stirling généralisés afin de redémontrer des identités déjà établies.

6.6.1 Convolutions

Le premier résultat est une convolution de type multinomiale exprimée comme suit :

Théorème 6.6 Soient $r, r_1, \dots, r_p, k, k_1, \dots, k_p$ et n des entiers positifs, tel que $n \geq k$ avec $k_1 + \dots + k_p = k$ et $r_1 + \dots + r_p = r$, on a

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_p} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{l_1 + \dots + l_p = n} \binom{n}{l_1, \dots, l_p} \left[\begin{matrix} l_1 + r_1 \\ k_1 + r_1 \end{matrix} \right]_{r_1}^{\alpha, \beta} \dots \left[\begin{matrix} l_p + r_p \\ k_p + r_p \end{matrix} \right]_{r_p}^{\alpha, \beta}.$$

Démonstration. Le membre de gauche de l'équation s'interprète comme étant le poids des partitions en listes colorées avec p couleurs i.e. poids de distribution de $[n+r]$ éléments sur $k+r$ listes tel que les éléments de chaque r_i listes, $1 \leq i \leq p$, contenant les r_i éléments avec les éléments de k_i autres listes choisis parmi les k listes ont la même couleur i . Pour le faire, nous avons un poids de $\left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r$ relatif à la distribution des $n+r$ éléments en $k+r$ listes tel que les r premiers éléments sont dans des listes distinctes. Maintenant, il reste à choisir les k_1, \dots, k_p listes afin de colorer leurs éléments avec les p couleurs et nous avons $\binom{k}{k_1, \dots, k_p}$ façons de le faire. Pour le membre de droite, nous allons désigner d'abord les éléments de la même couleur puis compter le poids de leur distribution en listes. Donc, nous choisissons, pour chaque couleur i , l_i éléments et nous avons $\binom{n}{l_1, \dots, l_p}$ façons de le faire, puis nous partitionnons, pour chaque i , les $l_i + r_i$ éléments en $k_i + r_i$ listes tels que les r_i éléments sont dans des listes distinctes. Le poids de distribution, pour chaque i , est $\left[\begin{matrix} l_i + r_i \\ k_i + r_i \end{matrix} \right]_{r_i}$. La somme sur toutes les valeurs possibles de l_i donne le résultat. \square

Théorème 6.7 Soient r, m et k des entiers positifs, on a

$$\left[\begin{matrix} k+m \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{j=0}^s \left[\begin{matrix} k+m-s \\ k-j \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} \sum_{k-j \leq i_1 \leq \dots \leq i_{s-j} \leq k} \prod_{l=0}^{s-j-1} ((\alpha + \beta) i_{l+1} + \alpha (m - s + l)).$$

Démonstration. Considérons les s ($0 \leq s \leq m$) derniers éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k, \dots, k+m\}$, soit j ($0 \leq j \leq s$) le nombre de listes ne contenant que des éléments à partir de s . Notons que, le poids de distribution des $k+m-s$ premiers éléments en $k-j$ listes de sorte que les r premiers sont dans des listes distinctes est $\left[\begin{matrix} k+m-s \\ k-j \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta}$. Calculons maintenant le poids des s listes restantes. Nous mettons au départ, d'une manière temporaire, j éléments parmi les s dans les j listes (un élément par liste avec le poids 1) afin de distinguer les listes, puis discutons l'insertion des $s-j$ éléments restants aux k listes :

On distingue deux situations lors de l'insertion du premier élément :

- (1) Si on l'ajoute dans l'une des $k-j$ premières listes, il aura alors le poids $(\alpha + \beta)(k-j) + \alpha(m-s)$ (En fait, $(\alpha + \beta)(k-j)$ avant ou après les têtes de listes des $k-j$ listes ou bien $\alpha(m-s)$ après chaque élément).
- (2) Sinon, on l'ajoute à une liste i_1 ($k-j+1 \leq i_1 \leq k$) et nous aurons à examiner deux autres situations :
 - i) Le premier élément de la liste i_1 reste dans cette même liste alors, le poids d'insertion de l'élément est $(\alpha + \beta)$.

ii) Le premier élément est déplacé dans l'une des $i_1 - 1$ listes précédente avec un poids $(\alpha + \beta)(i_1 - 1) + \alpha(m - s)$.

Depuis (i) et (ii), nous avons

$$(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)(i_1 - 1) + \alpha(m - s) = (\alpha + \beta)i_1 - 1 + \alpha(m - s).$$

Ainsi, en sommant sur toutes les possibilités de la liste i_1 , on obtient le poids $\sum_{k-j+1 \leq i_1 \leq k} (\alpha + \beta)i_1 + \alpha(m - s)$.

De (1) et (2) nous obtenons le poids total résultant de l'insertion du premier élément

$$\sum_{k-j \leq i_1 \leq k} (\alpha + \beta)i_1 + \alpha(m - s).$$

Pour insérer le second élément, on considère les listes $1, \dots, i_1$ comme étant fixes, cela est dû à l'insertion de l'élément précédent ou nous avons considéré toutes les distributions possibles des éléments de ces listes.

Nous avons deux situations :

(1') Nous ajoutons le second éléments aux listes $1, \dots, i_1$ avec un poids $(\alpha + \beta)i_1 + \alpha(m - s + 1)$ (une possibilité ajoutée par l'insertion du premier élément).

(2') Il appartient à une liste i_2 ($i_1 + 1 \leq i_2 \leq k$), avec un poids $(\alpha + \beta)i_2 + \alpha(m - s + 1)$, ce qui donne un poids de $\sum_{i_1+1 \leq i_2 \leq n} (\alpha + \beta)i_2 + \alpha(m - s + 1)$.

Ainsi, à partir de (1') et (2') on obtient le poids

$$\sum_{k-j \leq i_1 \leq i_2 \leq n} ((\alpha + \beta)i_1 + \alpha(m - s))((\alpha + \beta)i_2 + \alpha(m - s + 1)).$$

Nous continuons de la même façon, pour les $s - j - 2$ éléments restants du sous-ensemble, ce qui donne le poids total de

$$\sum_{k-j \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{s-j} \leq k} ((\alpha + \beta)i_1 + \alpha(m - s)) \cdots ((\alpha + \beta)i_{s-j} + \alpha(m - j - 1)).$$

Ensuite, en sommant sur toutes les valeurs possibles de j on obtient le résultat. \square

Remarque 6.2 Pour $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et $(0, 1)$, nous obtenons les relations (3.10) et (3.12) respectivement. Pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, nous obtenons une convolution pour les nombres r -Lah,

$$\left[\begin{matrix} k+m \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{j=0}^s \left[\begin{matrix} k+m-s \\ k-j \end{matrix} \right]_r \sum_{k-j \leq i_1 \leq \dots \leq i_{s-j} \leq k} \prod_{l=0}^{s-j-1} (2i_{l+1} + m - s + l). \quad (6.14)$$

6.6.2 Preuves bijectives

Nous exprimons les nombres r -Stirling généralisés en termes des nombres r' -Stirling généralisés dans la relation suivante :

Théorème 6.8 Soient s, r, k et n des entiers positifs tel que $s \leq r \leq k \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{i=k-r}^{n-r} \binom{n-r}{i} \left[\begin{matrix} i+r-s \\ k-s \end{matrix} \right]_{r-s}^{\alpha, \beta} ((\alpha + \beta)s | \alpha)^{\overline{n-r-i}}. \quad (6.15)$$

Démonstration. Considérons s éléments depuis les r premiers et sans perte de généralité prenons les éléments $r - s + 1, \dots, r$. Soit i ($k - r \leq i \leq n - r$) le nombre d'éléments n'appartenant pas aux s listes contenant les s éléments désignés au départ et nous avons $\binom{n-r}{i}$ façons de les choisir. Le poids de la distribution des i éléments avec les $r - s$ éléments restants des r , désignés $1, \dots, r - s$, sur $k - s$ listes est égal à $\left[\begin{matrix} i+r-s \\ k-s \end{matrix} \right]_{r-s}^{\alpha, \beta}$. Le poids de distribution des $n - r - i$ éléments restants sur les s listes contenant les s éléments est $((\alpha + \beta)s|\alpha)^{\overline{n-r-i}}$. La somme sur toutes les valeurs de i donne le résultat. \square

Remarque 6.3 Pour $s = r$ dans (6.15), nous obtenons la relation

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{i=k-r}^{n-r} \binom{n-r}{i} \left[\begin{matrix} i \\ k-r \end{matrix} \right]^{\alpha, \beta} ((\alpha + \beta)r|\alpha)^{\overline{n-r-i}},$$

et pour $s = 1$, nous obtenons une cross récurrence verticale,

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} = \sum_{i=k-r}^{n-r} \binom{n-r}{i} \left[\begin{matrix} i+r-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{\alpha, \beta} ((\alpha + \beta)|\alpha)^{\overline{n-r-i}}. \quad (6.16)$$

6.7 FONCTION GÉNÉRATRICE

Les nombres r -Lah généralisés ont la fonction génératrice exponentielle suivante,

Théorème 6.9 Soient s, r, k et n des entiers positifs tel que $s \leq r \leq k \leq n$, on a

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (1 - \alpha x)^{-(\alpha + \beta)r/\alpha} \left(\frac{(1 - \alpha x)^{-\beta/\alpha} - 1}{\beta} \right)^k. \quad (6.17)$$

Démonstration. En multipliant les deux membres de la relation (6.7) par $\frac{x^n}{n!}$ et en sommant sur n , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{\alpha, \beta} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\beta^k (k+r)!} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^r (\beta(k+r-j) + \alpha r|\alpha)^{\overline{n}} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{\beta^k (k+r)!} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^r \sum_{n \geq 0} (\beta(k+r-j) + \alpha r|\alpha)^{\overline{n}} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{\beta^k (k+r)!} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^r (1 - \alpha x)^{-(\beta(k+r-j)/\alpha) - r} \\ &= \frac{1}{\beta^k k!} (1 - \alpha x)^{-r(\alpha + \beta)/\alpha} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k}{j} \left((1 - \alpha x)^{-\beta/\alpha} \right)^{k-j} \\ &= \frac{1}{k!} (1 - \alpha x)^{-r(\alpha + \beta)/\alpha} \left(\frac{(1 - \alpha x)^{-\beta/\alpha} - 1}{\beta} \right)^k. \end{aligned}$$

\square

Remarque 6.4 Du Théorème (6.9), on déduit la fonction génératrice double des nombres $G_{\alpha, \beta}(n, k; r)$:

$$\sum_{n, k \geq 0} G_{\alpha, \beta}(n, k; r) \frac{x^n}{n!} y^k = (1 - \alpha x)^{-(\alpha + \beta)r/\alpha} \exp \left[\frac{y}{\beta} \left((1 - \alpha x)^{-\beta/\alpha} - 1 \right) \right]. \quad (6.18)$$

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons exposé dans ce chapitre une interprétation combinatoire des nombres r -Stirling généralisés, et une expression en termes de fonctions symétriques généralisées. Depuis la Remarque 6.2, les coefficients des nombres r -Lah de l'identité (6.14),

$$\sum_{k-j \leq i_1 \leq \dots \leq i_{s-j} \leq k} \prod_{l=0}^{s-j-1} (2i_{l+1} + m - s + l),$$

qu'on peut récrire de manière abstraite de la manière suivante

$$\bar{L}(n, k, r) = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq r} (n - 2i_1 - 1)(n - 2i_2 - 2) \cdots (n - 2i_k - k),$$

qui coïncide avec les nombres de r -Lah pour les cas particulier

$$\bar{L}(2n + k, k, r) = \left[\begin{matrix} n + k \\ n \end{matrix} \right]_{n-r}.$$

Une première perspective est d'étudier la suite $\bar{L}(n, k, r)$ et proposer une interprétation combinatoire. Une autre perspective de ce chapitre est de regarder l'aspect associé des nombres r -Stirling généralisés.

Troisième partie

Aspects algébrique des Bosons

PROBLÈME D'ORDRE NORMAL DES BOSONS

7

SOMMAIRE

7.1	INTRODUCTION	103
7.2	B-DIAGRAMMES	104
7.2.1	Définition et premiers exemples	104
7.2.2	Connexion et composition	106
7.2.3	Énumération	109
7.3	ASPECTS ALGÈBRIQUES DES B-DIAGRAMMES	110
7.3.1	Algèbre de fusion	110
7.3.2	L'algèbre des B-diagrammes	113
7.3.3	Des algèbres de B-diagrammes aux algèbres de Fusion	114
7.3.4	Application de l'ordre normal de boson	119
	CONCLUSION	120

Nous traitons dans ce chapitre un problème de physique théorique : L'ordre normal des Bosons. Nous définissons deux algèbres combinatoires ainsi que quelques définitions. Les résultats exposés dans ce chapitre ont fait l'objet d'un papier soumis [?].

7.1 INTRODUCTION

Dans la théorie quantique des champs, le concept de *champ* permet la création et l'annihilation (destruction) de particules en n'importe quel point de l'espace. Comme tous système quantique, un champ quantique possède un Hamiltonien H et l'espace de Hilbert associé \mathcal{H} est engendré par les vecteurs propres de H . Dans la notation crochet, l'espace de Hilbert est engendré par les vecteurs $|n\rangle$ supposés être orthogonaux ($\langle m|n\rangle = \delta_{n,m}$). Cette représentation est habituellement appelée espace de Fock ; le vecteur $|n\rangle$ signifie qu'il y a n particules dans le système. Les opérateurs de création d'annihilation, notés respectivement par a^\dagger et a sont des opérateurs non-Hermitiens agissant sur l'espace de Fock par

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \text{ et } a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (7.1)$$

Ces opérateurs engendrent l'algèbre de Heisenberg formellement définie comme l'algèbre libre engendrée par les éléments a, a^\dagger et cautionnée par la relation

$$[a, a^\dagger] = 1 \Leftrightarrow aa^\dagger = a^\dagger a + 1. \quad (7.2)$$

Le problème d'ordre normal consiste à compter $\langle z|F(a^\dagger, a)|z\rangle$ où $F(a^\dagger, a)$ est un opérateur de l'algèbre de Heisenberg, $|z\rangle$ est un état propre de l'opérateur d'annihilation a ($a|z\rangle = z|z\rangle$), et $\langle z|a^\dagger = \langle z|z^*$. La stratégie consiste à trier les lettres de chaque terme de $F(a^\dagger, a)$ de façon à ce que toutes les lettres a^\dagger soient à gauche et toutes les lettres a en utilisant la relation (7.2) autant de fois que nécessaire.

J. Katriel [?] a été le premier à s'engager dans l'étude des aspects combinatoires du problème d'ordre normal. Il a établi l'expression d'ordre normal de $(a^\dagger a)^n$ en terme de nombres de Stirling de seconde espèce.

$$(a^\dagger a)^n = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} (a^\dagger)^n a^i. \quad (7.3)$$

D'autres travaux traitant d'autres expressions donnent naissance à des suites qui généralisent les nombres de Stirling de deuxième espèce. Par exemple, l'étude de l'expression d'ordre normal de $((a^\dagger)^r a^s)^n$ donne naturellement lieu aux nombres de Stirling généralisés $S_{r,s}(n, i)$ et aux polynômes de Bell [? ?]. Les interprétations de certains cas particuliers sont bien connues et sont associées à des nombres combinatoires [? ?]. Par exemple, pour $r = 2$ et $s = 1$, nous retrouvons les nombres de Lah $S_{2,1}(n, i) = \lfloor \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \rfloor$.

Plus généralement, Blasiak *et al.* [?] a fourni une interprétation de l'ordre normal d'une chaîne de Boson générale $(a^\dagger)^{r_n} a^{s_n} \dots (a^\dagger)^{r_1} a^{s_1}$ en termes d'objets combinatoires appelés *bugs*. Afin d'expliquer les calculs, Blasiak *et al.* [?] a construit une algèbre combinatoire de Hopf basée sur des bugs. Le lecteur intéressé par le sujet des interprétations combinatoires de l'ordre normal est invité à consulter [? ? ? ?].

Le présent chapitre est organisé comme suit : Dans la section 7.2, nous décrivons nos objets combinatoires appelés *B-diagrammes*. Ces derniers sont une base de l'algèbre des *B-Diagrammes* exposée dans la section 7.3. Nous proposons une deuxième algèbre appelé "algèbre de Fusion" et montrons par la suite que ces deux algèbres (*B-Diagrammes* et *Fusion*) sont isomorphes.

7.2 B-DIAGRAMMES

7.2.1 Définition et premiers exemples

Introduisons d'abord quelques notations. Soit $\llbracket a, b \rrbracket := \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ pour n'importe quelle paire d'entiers (a, b) avec $a \leq b$. $E = E' \uplus E''$ lorsque $E = E' \cup E''$ et $E' \cap E'' = \emptyset$.

Définition 7.1 Un B-diagramme est un quintuple $G = (n, \lambda, E^\uparrow, E^\downarrow, E)$ tel que

1. $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ avec $\lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour tout i ,
3. $E^\uparrow, E^\downarrow \subset \llbracket 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_n \rrbracket$,
4. $E \subset \{(a, b) : a \in E^\uparrow, b \in E^\downarrow, v(a) < v(b)\}$ où $v : \llbracket 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ est défini par $v(k) = i$ si $k \in \llbracket \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \rrbracket$,
5. pour tous $a \in E^\uparrow$ et $b \in E^\downarrow$, les ensembles $\{(a, c) : (a, c) \in E\}$ et $\{(c, b) : (c, b) \in E\}$ contiennent au plus un élément.

Graphiquement parlant, un B-diagramme peut être représenté par un graphe à n sommets. Le sommet i possède exactement λ_i demi-arêtes entrantes (respectivement sortantes) numérotées $\llbracket \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \rrbracket$. Les arêtes entrantes (respectivement sortantes) à une seule extrémité et qui n'appartiennent pas à E^\downarrow (respectivement E^\uparrow) sont notées par \times . Un élément de E est représenté par une arête reliant une arête sortante à une seule extrémité a d'un sommet i à une arête entrante à une seule extrémité b d'un sommet j avec $i < j$.

Exemple 7.1 Par exemple, le B-diagramme $G = (3, [3, 1, 2], \llbracket 1, 5 \rrbracket, \llbracket 1, 6 \rrbracket, \{(1, 6), (2, 4), (4, 5)\})$ est représenté dans la Figure 7.1

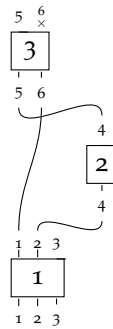


FIGURE 7.1 – Le B-diagramme $(3, [3, 1, 2], \llbracket 1, 5 \rrbracket, \llbracket 1, 6 \rrbracket, \{(1, 6), (2, 4), (4, 5)\})$.

Considérons aussi $G' = (4, [1, 3, 2, 2], \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 6, 7\}, \{(1, 6), (3, 7)\})$ qui est représenté dans la Figure 7.2.

Si $G = (n, \lambda, E^\uparrow, E^\downarrow, E)$ nous définissons alors quelques outils dans le but de manipuler plus aisément les B-diagrammes.

1. Le nombre de sommets, $|G| = n$;
2. Le nombre de demi-arêtes, $\omega(G) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$;
3. Le nombre d'arêtes, $\tau(G) = \#E$;

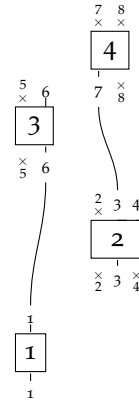


FIGURE 7.2 – Le B-diagramme $(4, [1, 3, 2, 2], \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 6, 7\}, \{(1, 6), (3, 7)\})$.

4. Le nombre de demi-arêtes sortantes (respectivement entrantes) libres, $h^\uparrow(G) = \omega(G) - \#e^\uparrow(E)$ (respectivement $h^\downarrow(G) = \omega(G) - \#e^\downarrow(E)$) où $e^\uparrow(a, b) = a$ (resp. $e^\downarrow(a, b) = b$);
5. L'ensemble des demi-arêtes sortantes (respectivement entrantes), libres et valides, $H_f^\uparrow(G) = E^\uparrow \setminus e^\uparrow(E)$ (respectivement $H_f^\downarrow(G) = E^\downarrow \setminus e^\downarrow(E)$);
6. Le nombre de demi-arêtes sortantes (respectivement entrantes), libres et valides, $h_f^\uparrow(G) = \#H_f^\uparrow(G)$ (respectivement $h_f^\downarrow(G) = \#H_f^\downarrow(G)$);
7. Le nombre de demi-arêtes, libres, coupées, $h_c(G) = h^\uparrow(G) - h_f^\uparrow(G) + h^\downarrow(G) - h_f^\downarrow(G)$,
8. Le nombre de demi-arêtes associées à un sommet i $\hat{H}(i) = \llbracket \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \rrbracket$;
9. L'ensemble des demi-arêtes sortantes (respectivement entrantes), valides associées à un sommet i , $\hat{H}_f^\uparrow(i) = E^\uparrow \cap \llbracket \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \rrbracket$ (respectivement $\hat{H}_f^\downarrow(i) = E^\downarrow \cap \llbracket \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_i \rrbracket$);
10. Nous utiliserons aussi la fonction v définie dans la Définition 7.1; cette fonction sera notée v_G en cas d'ambiguïté.

- Exemple 7.2** Considérons le B-diagramme $G = (n, \lambda, E^\uparrow, E^\downarrow, E)$ représenté dans la Figure 7.1. On a
- $|G| = 3$, $\omega(G) = 6$, et $\tau(G) = 3$.
 - On a aussi $h^\uparrow(G) = 2$, $h^\downarrow(G) = 3$, $h_f^\uparrow(G) = 2$, $h^\downarrow(G) = h_f^\downarrow(G) = 3$, et $h_c(G) = 1$ puisque $H_f^\uparrow(G) = \{3, 5\}$ et $H_f^\downarrow(G) = \{1, 2, 3\}$.
 - De plus, $\hat{H}(1) = \hat{H}_f^\uparrow(1) = \hat{H}_f^\downarrow(1) = \{1, 2, 3\}$, $\hat{H}(2) = \hat{H}_f^\uparrow(2) = \hat{H}_f^\downarrow(2) = \{4\}$, $\hat{H}(3) = \hat{H}_f^\downarrow(3) = \{5, 6\}$, et $\hat{H}_f^\uparrow(3) = \{5\}$.
 - Enfin, $v(1) = v(2) = v(3) = 1$, $v(4) = 2$, et $v(5) = v(6) = 3$.

Un exemple particulier de B-diagramme est donné par le *diagramme vide* $\varepsilon := (0, \llbracket, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$. C'est le seul diagramme de taille 0.

Définition 7.2 Soit $G = (n, \lambda, E^\uparrow, E^\downarrow, E)$ un B-diagramme. Un sous B-diagramme de G est complètement caractérisé par une séquence $1 \leq i_1 < \dots < i_{n'} \leq n$. Plus précisément, on définit le B-diagramme $G[i_1, \dots, i_{n'}] = (n', \lambda', E'^\uparrow, E'^\downarrow, E')$ par

1. $\lambda' = [\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{n'}}]$,
2. $E'^{\uparrow} = \phi \left(E^{\uparrow} \cap \bigcup_{\ell=1}^{n'} \hat{H}(i_{\ell}) \right)$ et $E'^{\downarrow} = \phi \left(E^{\downarrow} \cap \bigcup_{\ell=1}^{n'} \hat{H}(i_{\ell}) \right)$ où ϕ est la seule bijection croissante de $\bigcup_{\ell=1}^{n'} \hat{H}(i_{\ell})$ à $[[1, \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{n'}}]]$,
3. $E' = \phi \left(E \cap \bigcup_{\ell=1}^{n'} \hat{H}_f^{\uparrow}(i_{\ell}) \times \hat{H}_f^{\downarrow}(i_{\ell}) \right)$.

Soit $I = [i_1, \dots, i_{n'}]$ une séquence de sommets de G , on note par $\mathbb{C}_G I = [[1, n]] \setminus \{i_1, \dots, i_{n'}\}$ le complémentaire de I dans G .

Exemple 7.3 Soit G le B-diagramme de la Figure 7.1. On a $\hat{H}(1) = \hat{H}_f^{\uparrow}(1) = \hat{H}_f^{\downarrow}(1) = \{1, 2, 3\}$, $\hat{H}(2) = \hat{H}_f^{\uparrow}(2) = \hat{H}_f^{\downarrow}(2) = \{4\}$, $\hat{H}(3) = \hat{H}_f^{\downarrow}(3) = \{5, 6\}$, et $\hat{H}_f^{\uparrow}(3) = \{5\}$. Posons $i_1 = 1$ et $i_2 = 3$. Suivant la Définition 7.2, nous avons

1. $\lambda' = [3, 2]$,
2. ϕ envoie respectivement $1, 2, 3, 5, 6$ à $1, 2, 3, 4, 5$. Ainsi, $E'^{\uparrow} = \phi(\{1, 2, 3, 5\}) = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E'^{\downarrow} = \phi(\{1, 2, 3, 5, 6\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
3. $E' = \phi(\{(1, 6)\}) = \{(1, 5)\}$.

On en déduit que $G[1, 3] = (2, [3, 2], [4], [5], \{(1, 5)\})$ (voir la Figure 7.3).



FIGURE 7.3 – Le sous B-diagramme $G[1, 3]$ de $G = (3, [3, 1, 2], [5], [6], \{(1, 6), (2, 4), (4, 5)\})$.

7.2.2 Connexion et composition

Nous définissons la notion de connexité et de composition.

Définition 7.3 Un B-diagramme $G = (n, \lambda, E^{\uparrow}, E^{\downarrow}, E)$ est connecté si et seulement si pour chaque $1 \leq i < j \leq n$, il existe une séquence d'arêtes $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k) \in E$ satisfaisant

1. $i \in \{v(a_1), v(b_1)\}$ et $j \in \{v(a_k), v(b_k)\}$;
2. Pour chaque ℓ , $1 \leq \ell < k$ on a $v(a_{\ell}) \in \{v(a_{\ell+1}), v(b_{\ell+1})\}$ ou $v(b_{\ell}) \in \{v(a_{\ell+1}), v(b_{\ell+1})\}$.

Une composante connexe d'un B-diagramme G est une séquence $i_1 < \dots < i_{n'}$ telle que $G[i_1, \dots, i_{n'}]$ est un sous B-diagramme connexe qui est maximal dans au sens où si l'on ajoute n'importe quel sommet i dans la séquence $i_1 < \dots < i_{n'}$ on obtient une séquence $i'_1 < \dots < i'_{n'+1}$ telle que $G[i'_1, \dots, i'_{n'+1}]$ n'est pas connecté. On note par $\text{Connected}(G)$ l'ensemble des composantes connexes de G .

Exemple 7.4 Le B-diagramme de la Figure 7.1 est connecté tandis que le B-diagramme de la Figure 7.2 possède deux composantes connexes [1, 3] et [2, 4].

Une séquence $1 \leq i_1 < \dots, i_{n'} \leq n$ est *isolée* dans G si pour chaque $(a, b) \in E$ on a $v(a)$ et $v(b)$ sont tous les deux dans $\{i_1, \dots, i_{n'}\}$ ou alors, les deux sont dans $\mathbb{C}_G\{i_1, \dots, i_{n'}\}$.

Proposition 7.1 Les assertions suivantes sont équivalentes

1. I est isolé dans G ;
2. $\mathbb{C}_G I$ est isolé dans G ;
3. Il existe $j_1^1 < \dots < j_{k_1}^1, \dots, j_1^p < \dots < j_{k_p}^p$ tels que $I = \{j_1^1, \dots, j_{k_1}^1, \dots, j_1^p, \dots, j_{k_p}^p\}$ et toute séquence $[j_1^\ell, \dots, j_{k_\ell}^\ell]$ est une composante connexe de G .

Remarque 7.1 — Un B-diagramme G et le diagramme vide ε sont tous deux isolés dans G .
— Si I est une composante connexe de G alors elle est isolée dans G .

On note par $\text{Iso}(G)$ l'ensemble des séquences isolées dans G et l'on pose $\text{Split}(G) = \{(I, \mathbb{C}_G I) : I \in \text{Iso}(G)\}$.

Définition 7.4 Soient $G = (n, \lambda, E^\uparrow, E^\downarrow, E)$ et $G' = (n', \lambda', E'^\uparrow, E'^\downarrow, E')$ deux B-diagrammes. Quelque soit $k \geq 0$, toute séquence strictement croissante $a_1 < \dots < a_k$ dans $H_f^+(G)$ et tout k -uplet d'entiers distincts b_1, \dots, b_k dans $H_f^-(G')$, on définit la composition $\begin{matrix} b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \end{matrix}$ par

$$\begin{matrix} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{matrix} = G''$$

où G'' est le quintuple $(n + n', [\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n], E''^\uparrow, E''^\downarrow, E'')$ avec

1. $E''^\uparrow = E^\uparrow \cup \{i + \omega(G) : i \in E^\uparrow\}$ et $E''^\downarrow = E'^\downarrow \cup \{i + \omega(G) : i \in E'^\downarrow\}$,
2. $E'' = \{(a_\ell, b_\ell + \omega(G)) : 1 \leq \ell \leq k\} \cup E \cup \{(a + \omega(G), b + \omega(G)) : (a, b) \in E'\}$.

On peut facilement vérifier que la définition d'une composition est cohérente avec la structure de B-diagramme.

Proposition 7.2 Soient $G = (n, \lambda, E^\uparrow, E^\downarrow, E)$ et $G' = (n', \lambda', E'^\uparrow, E'^\downarrow, E')$ deux B-diagrammes. Quelque soit $k \geq 0$, toute séquence strictement croissante $a_1 < \dots < a_k$ dans $H_f^+(G)$ et tout k -uplet

d'entiers distincts b_1, \dots, b_k in $H_f^-(G')$, le quintuple $\begin{matrix} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{matrix}$ est un B-diagramme.

Exemple 7.5 La figure 7.4 illustre un exemple de composition.

Notons que le cas particulier où $k = 0$ correspond à une simple juxtaposition des B-diagrammes (voir Figure 7.5 pour un exemple illustratif). On pose $G' | G'' := \begin{matrix} G'' \\ \star \\ G' \end{matrix}$.

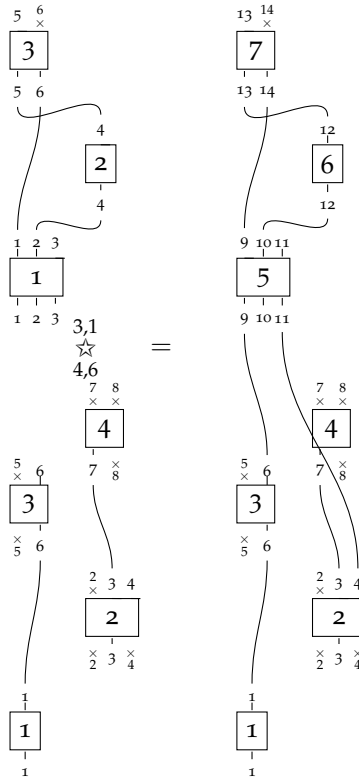


FIGURE 7.4 – Un exemple de composition.

L'opération $|$ dote l'ensemble des B-diagrammes \mathbb{B} d'une structure de monoïde dont l'unité est ε .

Définition 7.5 *Un B-diagramme G est indivisible si $G = G'|G''$ implique que $G' = G$ ou bien que $G'' = G$. Soit \mathbb{G} l'ensemble des B-diagrammes indivisibles.*

Il est facile de vérifier que les diagrammes indivisibles sont algébriquement indépendants. Il s'ensuit que

Proposition 7.3 *Le monoïde $(\mathbb{B}, |)$ est librement engendré par $\mathbb{G} : \mathbb{B} = \mathbb{G}^*$.*

Nous pouvons donner une définition récursive alternative pour les B-diagrammes en utilisant les compositions.

Lemme 7.1 *Soit $G = (n, \lambda, E^\uparrow, E^\downarrow, E)$ un B-diagramme. Soit $G = \varepsilon$ soit il existe un B-diagramme $V = (1, [p], E_v^\uparrow, E^\downarrow, E)$, un B-diagramme $\tilde{G} = (n-1, \tilde{\lambda}, \tilde{E}^\uparrow, \tilde{E}^\downarrow, \tilde{E})$ et deux séquences $1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq p$ et $1 \leq b_1, \dots, b_k \leq \omega(\tilde{G})$ distinctes satisfaisant*

$$G = \begin{matrix} \tilde{G} \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ V \end{matrix} .$$

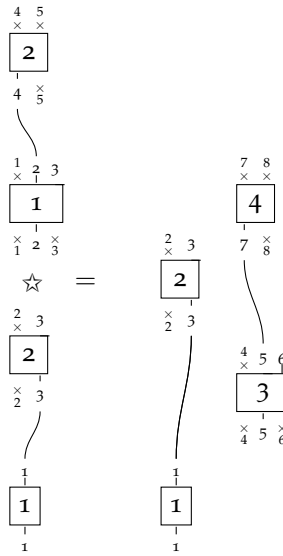


FIGURE 7.5 – Un exemple de composition lorsque $k = 0$.

Posons

$$G \star G' := \left\{ \begin{array}{c} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{array} : a_1 < \dots < a_k \in H_f^+(G); b_1, \dots, b_k \in H_f^-(G') \text{ distincts et } k \geq 0 \right\}. \quad (7.4)$$

7.2.3 Énumération

Soit $d_{p,q}$ le nombre du B-diagrammes G tels que $\omega(G) = p$ et $h_f^\uparrow(G) = q$ (voir dans la Figure 7.1 les premières valeurs de $d_{p,q}$).

A partir du Lemme 7.1, on trouve l'induction

Théorème 7.1

$$d_{p,q} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \ell! \binom{j}{\ell} \binom{q-k+\ell}{\ell} \binom{i}{j} \binom{i}{k} d_{p-i, q-k+j}, \quad (7.5)$$

avec les cas particuliers $d_{0,0} = 1$ et $d_{p,q} = 0$ si $p, q \leq 0$ et $(p, q) \neq (0, 0)$.

En effet, on obtient un diagramme avec p demi-arêtes et q demi-arêtes sortantes, libres et valides en branchant ℓ demi-arêtes entrantes d'un B-diagramme élémentaire avec i demi-arêtes, $j \leq i$ demi-arêtes entrantes libres et valides, et $k \leq i$ demi-arêtes sortantes libres et valides à un B-diagramme avec $p - i$ demi-arêtes et $q - k + j$ demi-arêtes sortantes valides et libres. Le nombre de façons de le faire est $\ell! \binom{j}{\ell} \binom{q-k+\ell}{\ell} \binom{i}{j} \binom{i}{k}$. En effet, le facteur $\ell!$ est le nombre de permutations des demi-arêtes entrantes du B-diagramme élémentaire, le facteur $\binom{j}{\ell}$ correspond au choix de ℓ demi-arêtes dans l'ensemble des j demi-arêtes valides possibles, les coefficients $\binom{q-k+\ell}{\ell}$ représentent le nombre de façons de choisir ℓ demi-arêtes sortantes dans le second B-diagramme, et les facteurs $\binom{i}{j} \binom{i}{k}$ sont

le nombre de façons de sélectionner j demi-arêtes entrantes et k demi-arêtes sortantes parmi i demi-arêtes.

$d_{p,q}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	2	2					
2	10	18	8				
3	62	154	124	32			
4	462	1426	159	760	128		
5	3982	14506	20380	13680	4336	512	
6	38646	161042	269284	229448	104032	23520	2048

TABLE 7.1 – Premières valeurs de $d_{p,q}$.

Le nombre α_p de B-diagrammes ayant exactement p demi-arêtes est donné par

$$\alpha_p = \sum_{q=0}^p d_{p,q}. \quad (7.6)$$

Les premières valeurs de α_p sont

$$1, 4, 36, 372, 4372, 57396, 828020, 12962164, 218098356, \dots$$

Exemple 7.6 Illustrons cette énumération par le comptage des B-diagrammes de taille 3. Un B-diagramme de taille 3 est

1. Soit un diagramme élémentaire de taille 3 (2^6 possibilités);
2. Ou alors, il est composé d'un diagramme élémentaire de taille 2 et un autre diagramme élémentaire de taille 1. Les deux diagrammes peuvent être juxtaposés (2^7 possibilités) ou branchés (2^6 possibilités);
3. Ou bien, il est composé de trois diagrammes élémentaires de taille 1. Les trois diagrammes peuvent être juxtaposés (2^6 possibilités), ou deux des trois diagrammes sont connectés (3×2^4 possibilités), ou alors les trois diagrammes sont connectés (2^2 possibilités);

Ainsi, on obtient $2^6 + 2^7 + 2^6 + 2^6 + 3 \times 2^4 + 2^2 = 372$ comme énoncé dans (7.6).

7.3 ASPECTS ALGÈBRIQUES DES B-DIAGRAMMES

7.3.1 Algèbre de fusion

Considérons les alphabets

$$\begin{aligned} - \mathcal{A}_{\langle \times} &= \left\{ \mathbf{v} \left\langle \binom{i_1}{j_1} \dots \binom{i_k}{j_k} : k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\rangle, \right. \\ - \mathcal{A}_{\rangle \times} &= \left\{ \mathbf{v} \right\rangle \binom{i_1}{j_1} \dots \binom{i_k}{j_k} : k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \left. \right\}, \\ - \mathcal{A}_{\times \langle} &= \left\{ \mathbf{k} \binom{i_1}{j_1} \dots \binom{i_k}{j_k} \langle : k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \end{aligned}$$

$$- \mathcal{A}_{\times} = \left\{ \mathbf{k} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix} \right\} : k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \left. \vphantom{\mathbf{k}} \right\}.$$

Pour simplifier, posons

$$\begin{aligned} - \mathcal{A}_{\langle \rangle} &= \mathcal{A}_{\times} \cup \mathcal{A}_{\times}, \\ - \mathcal{A}_{\rangle \langle} &= \mathcal{A}_{\times} \cup \mathcal{A}_{\times \langle}, \\ - \mathcal{A}_{\bullet \times} &= \mathcal{A}_{\times} \cup \mathcal{A}_{\times}, \\ - \mathcal{A}_{\times \diamond} &= \mathcal{A}_{\times \langle} \cup \mathcal{A}_{\times}, \\ - \text{et } \mathcal{A} &= \mathcal{A}_{\langle \rangle} \cup \mathcal{A}_{\rangle \langle}. \end{aligned}$$

Définition 7.6 Soit \mathcal{J}_F l'idéal de $\mathbb{C}\langle \mathcal{A} \rangle$, l'algèbre associative libre engendrée par \mathcal{A} , engendrée par les polynômes

1. $[e, f] = ef - fe$ quelques soient $e \in \mathcal{A}_{\langle \rangle}$ et $f \in \mathcal{A}$,
2. $ef - fe$ pour tous $e, f \in \mathcal{A}_{\times \diamond}$ et tous $e, f \in \mathcal{A}_{\bullet \times}$,
3. $u \mathbf{v}_{\bullet \alpha} \mathbf{v}_{\mathbf{k}_{\alpha} \langle} \mathbf{v}_{\beta} \mathbf{x} \mathbf{k}_{\beta \diamond} \mathbf{y} - u \mathbf{v}_{\bullet \alpha} \mathbf{v}_{\mathbf{v}_{\beta} \langle} \mathbf{k}_{\alpha} \mathbf{x} \mathbf{k}_{\beta \diamond} \mathbf{y} - u \mathbf{v}_{\bullet \alpha \beta} \mathbf{v}_{\mathbf{x} \mathbf{k}_{\alpha \beta \diamond} \mathbf{y}}$ pour tous $u, v, x, y \in \mathcal{A}^*$ (le monoïde libre engendré par \mathcal{A}), $\alpha = \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} i'_1 \\ j'_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i'_k \\ j'_k \end{pmatrix}$ (avec $k, k' \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k, i'_1, \dots, i'_k, j'_1, \dots, j'_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), et $\bullet, \diamond \in \{\langle, \rangle\}$.

On appelle algèbre de fusion le quotient $\mathcal{F} := \mathbb{C}\langle \mathcal{A} \rangle / \mathcal{J}$.

Remarquons que $\mathcal{A}_{\langle \rangle}$ est au centre de \mathcal{F} et que la sous-algèbre de \mathcal{F} engendrée par $\mathcal{A}_{\times \diamond}$ (resp. $\mathcal{A}_{\bullet \times}$) est commutative.

En utilisant la règle 3 de Définition 7.6, on montre par induction les résultats suivants

Lemme 7.2

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_{\alpha_1} \dots \mathbf{v}_{\alpha_n} \mathbf{k}_{\alpha_1 \langle} \dots \mathbf{k}_{\alpha_n \langle} \mathbf{v}_{\beta_1} \dots \mathbf{v}_{\beta_m} \mathbf{k}_{\beta_1 \langle} \dots \mathbf{k}_{\beta_m \langle} = \\ & \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq m \text{ distinct}}} P \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right) \mathbf{v}_{\alpha_{i_1} \beta_{i_1}} \dots \mathbf{v}_{\alpha_{i_k} \beta_{i_k}} Q \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right) \mathbf{k}_{\alpha_{i_1} \beta_{i_1} \langle} \dots \mathbf{k}_{\alpha_{i_k} \beta_{i_k} \langle} \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\text{où } P \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right) = \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_k\}} \mathbf{v}_{\beta_j} \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \mathbf{v}_{\alpha_j} \text{ et } Q \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{matrix} \right) = \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_k\}} \mathbf{k}_{\beta_j \langle} \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \mathbf{k}_{\alpha_j \langle}.$$

Démonstration. on procède par induction sur m . Si $m = 0$ alors le résultat est évident. Sinon, en appliquant plusieurs fois la règle 3 de la Définition 7.6 et puis la règle 2, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_{\alpha_1} \dots \mathbf{v}_{\alpha_n} \mathbf{k}_{\alpha_1 \langle} \dots \mathbf{k}_{\alpha_n \langle} \mathbf{v}_{\beta_1} \dots \mathbf{v}_{\beta_m} \mathbf{k}_{\beta_1 \langle} \dots \mathbf{k}_{\beta_m \langle} = \mathbf{v}_{\beta_1} \prod_{j=1}^n \mathbf{v}_{\alpha_j} \prod_{j=1}^n \mathbf{k}_{\alpha_j \langle} \prod_{j=2}^m \mathbf{v}_{\beta_j} \prod_{j=2}^m \mathbf{k}_{\beta_j \langle} \mathbf{k}_{\beta_1 \langle} \\ & + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{\alpha_i \beta_1} \prod_{j \neq i} \mathbf{v}_{\alpha_j} \prod_{j \neq i} \mathbf{k}_{\alpha_j \langle} \prod_{j=2}^m \mathbf{v}_{\beta_j} \prod_{j=2}^m \mathbf{k}_{\beta_j \langle} \mathbf{k}_{\alpha_i \beta_1 \langle}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Par conséquent, en appliquant l'hypothèse d'induction à chaque terme

$$\prod_{j=1}^n \mathbf{v}_{\alpha_j} \prod_{j=1}^n \mathbf{k}_{\alpha_j \langle} \prod_{j=2}^m \mathbf{v}_{\beta_j} \prod_{j=2}^m \mathbf{k}_{\beta_j \langle} \text{ et } \prod_{j \neq i} \mathbf{v}_{\alpha_j} \prod_{j \neq i} \mathbf{k}_{\alpha_j \langle} \prod_{j=2}^m \mathbf{v}_{\beta_j} \prod_{j=2}^m \mathbf{k}_{\beta_j \langle} \mathbf{k}_{\alpha_i \beta_1 \langle} \quad (7.9)$$

pour $1 \leq i \leq n$, et une fois de plus la règle 2 de la Définition 7.6 pour écrire chaque facteur dans l'ordre adéquat, on aboutit au résultat. \square

Bien que la Formule (7.7) semble technique, elle reste facile à comprendre. En effet, elle signifie que chacune des lettres $k_{\alpha_1 \langle \dots \rangle}, k_{\alpha_k \langle \dots \rangle}$ peut être couplée ou pas avec n'importe quelle lettre de $v_{\beta_1 \langle \dots \rangle}, \dots, v_{\beta_\ell \langle \dots \rangle}$.

Exemple 7.7 Illustrons la Formule (7.7) dans l'exemple suivant

$$\begin{aligned} & v_{\alpha_1 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_2 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_1 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_2 \langle \dots \rangle} v_{\beta_1 \langle \dots \rangle} v_{\beta_2 \langle \dots \rangle} k_{\beta_1 \langle \dots \rangle} k_{\beta_2 \langle \dots \rangle} = \\ & v_{\beta_1 \langle \dots \rangle} v_{\beta_2 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_1 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_2 \langle \dots \rangle} k_{\beta_1 \langle \dots \rangle} k_{\beta_2 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_1 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_2 \langle \dots \rangle} + v_{\beta_2 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_2 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_1 \beta_1 \langle \dots \rangle} k_{\beta_2 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_2 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_1 \beta_1 \langle \dots \rangle} \\ & + v_{\beta_2 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_1 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_2 \beta_1 \langle \dots \rangle} k_{\beta_2 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_1 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_2 \beta_1 \langle \dots \rangle} + v_{\beta_1 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_2 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_1 \beta_2 \langle \dots \rangle} k_{\beta_1 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_2 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_1 \beta_2 \langle \dots \rangle} \\ & + v_{\beta_1 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_1 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_2 \beta_2 \langle \dots \rangle} k_{\beta_1 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_1 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_2 \beta_2 \langle \dots \rangle} + v_{\alpha_1 \beta_1 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_2 \beta_2 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_1 \beta_1 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_2 \beta_2 \langle \dots \rangle} + v_{\alpha_2 \beta_1 \langle \dots \rangle} v_{\alpha_1 \beta_2 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_2 \beta_1 \langle \dots \rangle} k_{\alpha_1 \beta_2 \langle \dots \rangle} \end{aligned}$$

Définissons maintenant $\tilde{\mathcal{F}}$ comme étant un sous-espace de \mathcal{F} engendré par les éléments sous la forme $v_{\bullet_1 \alpha_1} \dots v_{\bullet_k \alpha_k} k_{\alpha_1 \diamond_1} \dots k_{\alpha_k \diamond_k}$ avec $\bullet_i, \diamond_i \in \{\langle, \rangle\}$, quelques soient $1 \leq i \leq k$ et $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 7.4 $\tilde{\mathcal{F}}$ est une sous algèbre de \mathcal{F} .

Démonstration. Il suffit de démontrer que cela est stable pour le produit. Posons $u = v_{\bullet_1 \alpha_1} \dots v_{\bullet_k \alpha_k} k_{\alpha_1 \diamond_1} \dots k_{\alpha_k \diamond_k}$ et $v = v_{\bullet'_1 \alpha'_1} \dots v_{\bullet'_{k'} \alpha'_{k'}} k_{\alpha'_1 \diamond'_1} \dots k_{\alpha'_{k'} \diamond'_{k'}}$. Soient les indices i_1, \dots, i_ℓ tels que $\diamond_{i_1} = \dots = \diamond_{i_\ell} = \langle$ et $\{j_1, \dots, j_{k-\ell}\} = \{1, \dots, k\} \setminus \{i_1, \dots, i_\ell\}$. De même, soient les indices i'_1, \dots, i'_ℓ tels que $\bullet_{i'_1} = \dots = \bullet_{i'_\ell} = \langle$ et $\{j'_1, \dots, j'_{k'-\ell}\} = \{1, \dots, k'\} \setminus \{i'_1, \dots, i'_\ell\}$. Des relations 1 et 2 de la Définition 7.6, on a

$$uv = v_{\bullet_{i_1} \alpha_{i_1}} \dots v_{\bullet_{i_\ell} \alpha_{i_\ell}} v_{\langle \alpha_{i'_1}} \dots v_{\langle \alpha_{i'_\ell}} u' v' k_{\alpha_{i'_1} \diamond_{i'_1}} \dots k_{\alpha_{i'_\ell} \diamond_{i'_\ell}} k_{\alpha_{i_1}} \dots k_{\alpha_{i_\ell}} \quad (7.10)$$

avec $u' = v_{\bullet_{j_1} \alpha_{j_1}} \dots v_{\bullet_{j_{k-\ell}} \alpha_{j_{k-\ell}}} k_{\alpha_{j_1} \langle} \dots k_{\alpha_{j_{k-\ell}} \langle}$ et $v' = v_{\alpha'_{j'_1} \langle} \dots v_{\alpha'_{j'_{k'-\ell}} \langle} k_{\alpha'_{j'_1} \diamond_{j'_1}} \dots k_{\alpha'_{j'_{k'-\ell}} \diamond_{j'_{k'-\ell}}}$.

Ainsi, on a juste à démontrer que $u', v' \in \tilde{\mathcal{F}}$ qui est une conséquence directe de l'égalité (7.7). \square

Exemple 7.8 Considérons l'élément $w_1 = v_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{1}{1} k_{\langle} \binom{1}{2} \rangle, w_2 = v_{\langle} \binom{2}{1} v_{\langle} \binom{2}{2} k_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{2}{2} \rangle \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $w = w_1 w_2$. D'abord, du point (1) de la Définition 7.6, $k_{\langle} \binom{1}{2} \rangle$ est au centre de l'algèbre \mathcal{F} . Ainsi,

$$w = v_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{2}{1} v_{\langle} \binom{2}{2} k_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{2}{2} \rangle.$$

Utilisons à présent le point (3) et calculons

$$\begin{aligned} w &= \overbrace{v_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{2}{1} v_{\langle} \binom{2}{2} k_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{2}{2} \rangle}^u \\ &= uv_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{1} xk_{\langle} \binom{2}{1} y + uv_{\langle} \binom{1}{1} \binom{2}{1} vxk_{\langle} \binom{1}{1} \binom{2}{1} y \\ &= v_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{1}{2} v_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{2}{2} k_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{2}{2} \rangle \\ &\quad + v_{\langle} \binom{1}{1} \binom{2}{1} v_{\langle} \binom{1}{2} v_{\langle} \binom{2}{2} k_{\langle} \binom{1}{1} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{2}{2} \rangle \end{aligned}$$

On utilise encore le point (3) sur les premiers termes de la dernière somme et l'on trouve

$$\begin{aligned} w &= v_{\langle} \binom{1}{1} v_{\langle} \binom{1}{2} v_{\langle} \binom{2}{1} v_{\langle} \binom{2}{2} k_{\langle} \binom{1}{1} k_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{2}{2} \rangle \\ &\quad + v_{\langle} \binom{1}{1} \binom{2}{2} v_{\langle} \binom{1}{2} v_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{2} \langle k_{\langle} \binom{1}{1} \binom{2}{2} \rangle \\ &\quad + v_{\langle} \binom{1}{1} \binom{2}{1} v_{\langle} \binom{1}{2} v_{\langle} \binom{2}{2} k_{\langle} \binom{1}{1} \binom{2}{1} k_{\langle} \binom{1}{2} k_{\langle} \binom{2}{2} \rangle \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le point (2) de la Définition 7.6, on montre $w \in \tilde{\mathcal{F}}$. En effet,

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle \\ &+ \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle \\ &+ \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ on définit $|\mathbf{b}| := \max\{i_\ell : 1 \leq \ell \leq k\}$ et $\omega(\mathbf{b}) := \max\{j_\ell : 1 \leq \ell \leq k\}$ quelque soit $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ avec $\mathbf{b} = \mathbf{v}\bullet_{(j_1)}^{(i_1)}\dots_{(j_1)}^{(i_1)}$ ou $\mathbf{b} = \mathbf{k}\langle_{(j_1)}^{(i_1)}\dots_{(j_1)}^{(i_1)}\diamond$ ($\bullet, \diamond \in \{\langle, \rangle\}$). On pose aussi, pour n'importe quel mot \mathbf{w} dans \mathcal{A}^* , $|\mathbf{w}| = \omega(\mathbf{w}) = 0$ si \mathbf{w} est le mot vide, $|\mathbf{w}| = \max\{|\mathbf{u}|, |\mathbf{b}|\}$ et $|\mathbf{w}| = \max\{\omega(\mathbf{u}), \omega(\mathbf{b})\}$ pour $\mathbf{w} = \mathbf{u}\mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$. On définit sur $\mathbb{C}\langle\mathcal{A}\rangle$ le produit décalé comme étant le seul produit associatif satisfaisant, pour chaque $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{A}^*$, $\mathbf{u} \star \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}[|\mathbf{u}|, \omega(\mathbf{u})]$, où $\mathbf{v}\bullet_{(j_1)}^{(i_1)}\dots_{(j_k)}^{(i_k)}[m, n] = \mathbf{v}\bullet_{(j_1+m)}^{(i_1+n)}\dots_{(j_k+m)}^{(i_k+n)}$, $\mathbf{k}\langle_{(j_1)}^{(i_1)}\dots_{(j_k)}^{(i_k)}\diamond[m, n] = \mathbf{k}\langle_{(j_1+m)}^{(i_1+n)}\dots_{(j_k+m)}^{(i_k+n)}\diamond$ ($\bullet, \diamond \in \{\langle, \rangle\}$), et $\mathbf{w}[n, m] = \mathbf{u}[n, m]\mathbf{b}[n, m]$ si $\mathbf{u} \in \mathcal{A}^*$ et $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$.

- Proposition 7.5**
1. Soit $P \in \mathcal{J}$. Quelque soit $Q \in \mathbb{C}\langle\mathcal{A}\rangle$ on a $P \star Q, Q \star P \in \mathcal{J}$. Par conséquent, l'opération \star est bien définie sur \mathcal{F} .
 2. Si $P, Q \in \tilde{\mathcal{F}}$ alors $P \star Q \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Ces propriétés impliquent que l'on puisse doter l'espace \mathcal{F} du produit associatif \star . Notons cette algèbre par $\hat{\mathcal{F}}$.

Exemple 7.9 On considère l'élément $w = \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle \star \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle$. On a

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle\mathbf{v}\rangle_{(3)}\mathbf{v}\rangle_{(4)}\mathbf{k}\langle_{(3)}\mathbf{k}\langle_{(4)}\rangle \\ &= \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{v}\rangle_{(3)}\mathbf{v}\rangle_{(4)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle\mathbf{k}\langle_{(3)}\mathbf{k}\langle_{(4)}\rangle \\ &+ \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{v}\rangle_{(3)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle\mathbf{k}\langle_{(3)}\mathbf{k}\langle_{(4)}\rangle \\ &+ \mathbf{v}\rangle_{(1)}\mathbf{v}\rangle_{(3)}\mathbf{v}\rangle_{(2)}\mathbf{v}\rangle_{(4)}\mathbf{k}\langle_{(1)}\mathbf{k}\langle_{(2)}\rangle\mathbf{k}\langle_{(3)}\mathbf{k}\langle_{(4)}\rangle \end{aligned}$$

7.3.2 L'algèbre des B-diagrammes

Considérons l'algèbre \mathcal{B} consistant en l'espace formellement engendré par les B-diagrammes et doté du produit \star défini par

$$G \star G' = \sum_{G'' \in G \star G'} G'' = \sum_{\substack{a_1 < \dots < a_k \in H^\uparrow(G) \\ b_1, \dots, b_k \in H^\downarrow(G'), \text{ distinct}}} \begin{array}{c} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{array}. \quad (7.11)$$

Pour simplifier, Quelques soient $1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq \omega(G)$ et $1 \leq b_1, \dots, b_k \leq \omega(G')$ distincts, on pose

$$\begin{array}{c} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{array} = \begin{cases} \begin{array}{c} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{array} & \text{si } a_1 < \dots < a_k \in H^\uparrow(G) \text{ et } b_1, \dots, b_k \in H^\downarrow(G') \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec cette notation, nous avons

$$G \star G' = \sum_{\substack{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq \omega(G) \\ 1 \leq b_1, \dots, b_k \leq \omega(G'), \text{ distinct}}} \begin{array}{c} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{array}. \quad (7.12)$$

Posons $\mathcal{B}_k = \text{span}\{G : \omega(G) = k\}$. Notons que \mathcal{B} splitte dans la somme directe $\mathcal{B} = \bigoplus_k \mathcal{B}_k$ et la dimension de chaque espace \mathcal{B}_k est finie.

Directement de la définition, on vérifie que

Proposition 7.6 (\mathcal{B}, \star) est une algèbre graduée à composant gradué de dimension fini. L'unité de cette algèbre est le B-diagramme vide ε .

Exemple 7.10 Voir les Figures 7.6 et 7.7 pour deux exemples de produits.

Remarquons que le produit est triangulaire au sens que tous les B-diagrammes différents de $G'' = G|G'$ qui apparaissent dans le produit $G \star G'$ ont strictement moins de composantes connexes que G'' . Ainsi, étant donné que $\mathcal{B} = \mathbb{C}[\mathbb{B}]$ et $\mathbb{B} = \mathbb{G}^*$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 7.7 L'algèbre \mathcal{B} est libre dans les B-diagrammes indivisibles. En d'autres termes,

$$\mathcal{B} = \mathbb{C}\langle \mathbb{G} \rangle.$$

7.3.3 Des algèbres de B-diagrammes aux algèbres de Fusion

L'objectif de cette sous-section est de démontrer que les algèbres \mathcal{B} sont isomorphes à une sous-algèbre de $\hat{\mathcal{F}}$.

Définition 7.7 Un chemin dans un B-Diagramme $G = (n, \lambda, E^\uparrow, E^\downarrow, E)$ est une séquence croissante d'entiers $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \omega(G)$ tels que $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k) \in E$, $i_1 \in H^\downarrow(G)$ et $i_k \in H^\uparrow(G)$. Notons par $\text{Chemins}(G)$ l'ensemble des chemins dans G .

Soit $p = (i_1, \dots, i_k) \in \text{Chemins}(G)$, pour simplifier, définissons

$$- p^\downarrow = i_1 \text{ et } p^\uparrow = i_k,$$

$$- \bullet_p := \begin{cases} \rangle & \text{si } i_1 \in \mathcal{H}_f^\downarrow \\ \langle & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \diamond_p = \begin{cases} \langle & \text{si } i_k \in \mathcal{H}_f^\uparrow \\ \rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

$$- \text{seq}_G(p) = \begin{pmatrix} v_G(i_1) \\ i_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} v_G(i_k) \\ i_k \end{pmatrix}.$$

Remarque 7.2 On peut vérifier facilement que

$$1. h_f^\uparrow = \#\{p \in \text{Chemins}(G) : \diamond_p = \langle\},$$

$$2. h_f^\downarrow = \#\{p \in \text{Chemins}(G) : \bullet_p = \rangle\},$$

$$3. h_c = \#\{p \in \text{Chemins}(G) : \diamond_p = \rangle\} + \#\{p \in \text{Chemins}(G) : \bullet_p = \langle\}.$$

Exemple 7.11 Considérons le B-diagramme G de la Figure 7.1. On a

$$\text{Chemins}(G) = \{(1, 6), (2, 4, 5), (3)\}.$$

Supposons que $p = (1, 6)$, on a

$$\bullet_p = \rangle, \diamond_p = \rangle, \text{ et } \text{seq}_G(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $h_f^\uparrow = 2 = \#\{(2, 4, 5), (3)\}$, $h_f^\downarrow = 3 = \#\{(1, 6), (2, 4, 5), (3)\}$, et $h_c = 1 = \#\{(1, 6)\}$.

Pour n'importe quel B-diagramme G on définit

$$\mathfrak{w}(G) := \prod_{p \in \text{Chemins}(G)} \mathfrak{v}_{\bullet_p \text{seq}_G(p)} \prod_{p \in \text{Chemins}(G)} \mathfrak{k}_{\text{seq}(p)_{G \diamond_p}} \in \hat{\mathcal{F}}. \quad (7.13)$$

Il est clair qu'un B-diagramme G est complètement caractérisé par les valeurs de $\text{seq}(p)$, \bullet_p et \diamond_p associées à chacun de ses chemins p . Alors, \mathfrak{w} est dedans. De plus, \mathfrak{w} envoie le B-diagramme vide ε à l'unité 1 de $\hat{\mathcal{F}}$.

Exemple 7.12 Si l'on considère le B-diagramme $G = (1, 6)$ de la Figure 7.1, on a

$$\mathfrak{w}(G) = \mathfrak{v}_{\rangle(1)(3)} \mathfrak{v}_{\rangle(2)(4)(3)} \mathfrak{v}_{\rangle(3)} \mathfrak{k}_{\rangle(1)(3)} \mathfrak{k}_{\rangle(2)(4)(3)} \mathfrak{k}_{\rangle(3)}.$$

Définition 7.8 On note par $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ la sous-algèbre de $\hat{\mathcal{F}}$ engendrée par les éléments $\mathfrak{w}(G)$ où G est un B-diagramme.

Lemme 7.3 L'ensemble $\{\mathfrak{w}(G) : G \text{ est un B-diagramme}\}$ est une base pour l'espace $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

Démonstration. On doit démontrer que quelques soient G_1, \dots, G_n distincts, $\sum \alpha_i \mathfrak{w}(G_i) = 0$ implique que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. On procède comme suit : on considère d'abord l'algèbre libre partiellement commutative $\mathbb{C}\langle A, \theta \rangle = \mathbb{C}\langle A \rangle / \mathcal{J}_1$ où \mathcal{J}_1 est l'idéal engendré par les polynômes des points 2 de la Définition 7.6. Notons que $\mathbb{C}\langle A, \theta \rangle = \mathbb{C}[\mathbb{M}(A, \theta)]$ est l'algèbre du monoïde libre partiellement commutatif $\mathbb{M}(A, \theta) = \mathcal{A}^* / \equiv_\theta$ où \equiv_θ est la congruence engendrée par $uefv = ufev$ pour tous $u, v \in \mathcal{A}^*$, ($e \in \mathcal{A}_{\langle \rangle}$ et $f \in \mathcal{A}$) ou $e, f \in \mathcal{A}_{|\diamond}$ ou alors $e, f \in \mathcal{A}_{\bullet|}$. Par conséquent, on définit \mathcal{J}_2 l'idéal de $\mathbb{C}\langle A, \theta \rangle$ engendré par les polynômes

$$u\mathfrak{v}_{\bullet\alpha}\mathfrak{v}\mathfrak{k}_{\alpha\langle \mathfrak{v} \rangle\beta}\mathfrak{x}\mathfrak{k}_{\beta\circ\mathfrak{y}} - u\mathfrak{v}_{\bullet\alpha}\mathfrak{v}\mathfrak{v}\rangle\beta\mathfrak{k}_{\alpha\langle \mathfrak{x} \rangle\beta\circ\mathfrak{y}} - u\mathfrak{v}_{\bullet\alpha\beta}\mathfrak{v}\mathfrak{x}\mathfrak{k}_{\alpha\beta\circ\mathfrak{y}} \quad (7.14)$$

pour tous $u, v, x, y \in \mathbb{M}(A, \theta)$, $\alpha = \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} i'_1 \\ j'_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i'_k \\ j'_k \end{pmatrix}$ (avec $k, k' \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k, i'_1, \dots, i'_k, j'_1, \dots, j'_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), et $\bullet, \diamond \in \{\langle, \rangle\}$. Observons que $\mathcal{F} = \mathbb{C}[\mathbb{M}(A, \theta)] / \mathcal{J}_2$. On définit $\tilde{\mathfrak{w}}(G) = \prod_{p \in \text{Chemins}(G)} \mathfrak{v}_{\bullet_p \text{seq}_G(p)} \prod_{p \in \text{Chemins}(G)} \mathfrak{k}_{\text{seq}(p)_{G \diamond_p}} \in \mathbb{C}\langle A, \theta \rangle$.

Soit \mathcal{W} le sous-espace engendré par les monômes $\tilde{\mathfrak{w}}(G)$. En remarquant que la fonction $\tilde{\mathfrak{w}}$ est à l'intérieur, notre énoncé est équivalent à $\mathcal{W} \cap \mathcal{J}_2 = 0$. Soit $P \in \mathcal{W} \cap \mathcal{J}_2$. On a

$$\begin{aligned} P &= Q \left(u\mathfrak{v}_{\bullet\alpha}\mathfrak{v}\mathfrak{k}_{\alpha\langle \mathfrak{v} \rangle\beta}\mathfrak{x}\mathfrak{k}_{\beta\circ\mathfrak{y}} - u\mathfrak{v}_{\bullet\alpha}\mathfrak{v}\mathfrak{v}\rangle\beta\mathfrak{k}_{\alpha\langle \mathfrak{x} \rangle\beta\circ\mathfrak{y}} - u\mathfrak{v}_{\bullet\alpha\beta}\mathfrak{v}\mathfrak{x}\mathfrak{k}_{\alpha\beta\circ\mathfrak{y}} \right) R \\ &= \sum_i \alpha_i \prod_{p \in \text{Chemins}(G_i)} \mathfrak{v}_{\bullet_p \text{seq}_{G_i}(p)} \prod_{p \in \text{Chemins}(G_i)} \mathfrak{k}_{\text{seq}(p)_{G_i \diamond_p}}. \end{aligned}$$

Étant donné que $u\mathfrak{v}_{\bullet\alpha}\mathfrak{v}\mathfrak{k}_{\alpha\langle \mathfrak{v} \rangle\beta}\mathfrak{x}\mathfrak{k}_{\beta\circ\mathfrak{y}}$ ne peuvent être écrits sous la forme $\prod_j \mathfrak{v}_{\bullet_j \alpha_j} \prod_j \mathfrak{k}_{\alpha_j \diamond_j}$, cela n'est pas possible à moins que $P = 0$ (cela est dû au facteur $\mathfrak{k}_{\alpha\langle \mathfrak{v} \rangle\beta}$). \square

Le comportement des chemins avec respect de la composition est résumé comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Chemins} \left(\begin{array}{c} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{array} \right) &= \{p \in \text{Chemins}(G) : p^\uparrow \notin \{a_1, \dots, a_k\}\} \\ &\cup \{p'[\omega(G)] : p' \in \text{Chemins}(G') : p'^\downarrow \notin \{b_1, \dots, b_k\}\} \\ &\cup \{pp'[\omega(G)] : p \in \text{Chemins}(G), p' \in \text{Chemins}(G'), p^\uparrow \in \{a_1, \dots, a_k\}, p'^\downarrow \in \{b_1, \dots, b_k\}\} \end{aligned} \quad (7.15)$$

où pp' dénote la séquence obtenue par concaténation de p et p' et $p[n]$ est la séquence obtenue à partir de p en ajoutant n à chaque élément.

Exemple 7.13 Examinons la Figure 7.4. Notons par G le B-diagramme inférieur, le premier membre de l'égalité et par G' le second membre. On a

$$\text{Chemins}(G) = \{(1,6), (2), (3,7), (4), (5), (8)\} \text{ et } \text{Chemins}(G') = \{(1,6), (2,4,5), (3)\}.$$

Ainsi,

$$\text{Chemins} \left(\begin{array}{c} G' \\ 4,6 \\ \star \\ 3,1 \\ G \end{array} \right) = \{(2), (3,7), (5), (8)\} \cup \{(10,12,13)\} \cup \{(1,6,9,14), (4,11)\}.$$

Théorème 7.2 Les algèbres \mathcal{B} et $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ sont isomorphes et un isomorphisme explicite envoie chaque B-diagramme G à $w(G)$.

Démonstration. Commençons d'abord par démontrer que w peut être étendu en un morphisme d'une algèbre. Autrement dit, on étend en premier lieu w en une fonction linéaire et on démontre que $w(G \star G') = w(G) \star w(G')$. Observons qu'à partir de (7.11), on obtient

$$w(G \star G') = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \in H_f^\uparrow(G) \\ j_1, \dots, j_k \in H_f^\downarrow(G'), \text{ distinct}}} w \left(\begin{array}{c} G' \\ j_1, \dots, j_k \\ \star \\ i_1, \dots, i_k \\ G \end{array} \right). \quad (7.16)$$

Cependant, si $G'' = \begin{array}{c} G' \\ j_1, \dots, j_k \\ \star \\ i_1, \dots, i_k \\ G \end{array}$, l'égalité (7.15) implique que

$$\begin{aligned} w(G'') &= \prod_{(*)} v_{\bullet, \text{seq}_{G''}(p)} \prod_{(**)} v_{\bullet, \text{seq}_{G''}(p')} \prod_{(***)} v_{\bullet, \text{seq}_{G''}(pp')} \\ &\times \prod_{(*)} k_{\text{seq}_{G''}(p) \circ_p} \prod_{(**)} k_{\text{seq}_{G''}(p') \circ_{p'}} \prod_{(***)} k_{\text{seq}_{G''}(pp') \circ_{p'p}} \end{aligned} \quad (7.17)$$

où les produits $\prod_{(*)}$ sont sur les chemins $p \in \text{Chemins}(G)$ tels que $p^\uparrow \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, les produits $\prod_{(**)}$ sont sur les chemins $p' \in \text{Chemins}(G')$ tels que $p'^\downarrow \notin \{j_1, \dots, j_k\}$, et les produits $\prod_{(***)}$ sont sur les paires de chemins $p \in \text{Chemins}(G)$ et $p' \in \text{Chemins}(G')$ avec $p^\uparrow = i_h$ et $p'^\downarrow = j_h$ pour un certain $1 \leq h \leq k$.

Examinons, à présent, $w(G) \star w(G')$. On a

$$\begin{aligned}
w(G) \star w(G') &= \left(\prod_{p \in \text{Chemins}(G)} \mathbf{v}_{\bullet, p \text{seq}_G(p)} \prod_{p \in \text{Chemins}(G)} \mathbf{k}_{\text{seq}_G(p) \diamond_p} \right) \\
&\star \left(\prod_{p' \in \text{Chemins}(G')} \mathbf{v}_{\bullet, p' \text{seq}_{G'}(p')} \prod_{p' \in \text{Chemins}(G')} \mathbf{k}_{\text{seq}_{G'}(p') \diamond_{p'}} \right) \\
&= \prod_{\substack{p \in \text{Chemins}(G) \\ \diamond_p = \langle}} \mathbf{v}_{\bullet, p \text{seq}_G(p)} \prod_{\substack{p' \in \text{Chemins}(G') \\ \bullet_{p'} = \langle}} \left(\mathbf{v}_{\langle \text{seq}_{G'}(p) [|G|, \omega(G)]} \right) (u \star u') \quad (7.18) \\
&\times \prod_{\substack{p \in \text{Chemins}(G) \\ \diamond_p = \rangle}} \mathbf{k}_{\text{seq}_G(p)} \prod_{\substack{p' \in \text{Chemins}(G') \\ \bullet_{p'} = \rangle}} \left(\mathbf{k}_{\text{seq}_{G'}(p') \diamond_{p'}} [|G|, \omega(G)] \right)
\end{aligned}$$

où

$$u = \prod_{\substack{p \in \text{Chemins}(G) \\ \diamond_p = \langle}} \mathbf{v}_{\bullet, p \text{seq}_G(p)} \prod_{\substack{p \in \text{Chemins}(G) \\ \diamond_p = \langle}} \mathbf{k}_{\text{seq}_G(p)} \quad \text{et} \quad u' = \prod_{\substack{p' \in \text{Chemins}(G') \\ \bullet_{p'} = \langle}} \mathbf{v}_{\text{seq}_{G'}(p')} \prod_{\substack{p' \in \text{Chemins}(G') \\ \bullet_{p'} = \langle}} \mathbf{k}_{\text{seq}_{G'}(p') \diamond_{p'}} \quad (7.19)$$

Ainsi, on applique l'Egalité (7.7) à $u \star u'$. En observant que les paires de séquences $i_1 < \dots < i_k$ et j_1, \dots, j_k dans (7.7) sont dans une correspondance "un-à-un" avec les

B-diagrammes $\begin{array}{c} j_1, \dots, j_k \\ \star \\ i_1, \dots, i_k \\ G \end{array}$, on obtient

$$\begin{aligned}
u \star u' &= \sum_{G''} \left(\prod_{G''}^{(*)'} \mathbf{v}_{\bullet, p \text{seq}_{G''}(p)} \prod_{G''}^{(**)'} \mathbf{v}_{\langle \text{seq}_{G''}(p'[\omega(G)])} \prod_{G''}^{(***)'} \mathbf{v}_{\bullet, p \text{seq}_{G''}(pp'[\omega(G)])} \right. \\
&\times \left. \prod_{G''}^{(*)'} \mathbf{k}_{\text{seq}_{G''}(p)} \prod_{G''}^{(**)'} \mathbf{k}_{\text{seq}_{G''}(p'[\omega(G)]) \diamond_{p'}} \prod_{G''}^{(***)'} \mathbf{k}_{\text{seq}_{G''}(pp'[\omega(G)]) \diamond_{p'}} \right), \quad (7.20)
\end{aligned}$$

où la somme est sur le B-diagramme $G'' = \begin{array}{c} G' \\ \star \\ i_1, \dots, i_k \\ G \end{array}$ avec $i_1 < \dots < i_k \in H_f^\uparrow(G)$ et

$j_1, \dots, j_k \in H_f^\downarrow(G)$ distincts, les produits $\prod_{G''}^{(*)'}$ sont sur les chemins $p \in \text{Chemins}(G)$ tels que $p^\uparrow \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ et $\diamond_p = \langle$, les produits $\prod_{G''}^{(**)'}$ sont sur les chemins $p' \in \text{Chemins}(G')$ tels que $p'^\downarrow \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ et $\bullet_{p'} = \rangle$, et les produits $\prod_{G''}^{(***)'}$ sont sur les paires de chemins $p \in \text{Chemins}(G)$ et $p' \in \text{Chemins}(G')$ avec $p^\uparrow = i_h$ et $p'^\downarrow = j_h$ pour un certain $1 \leq h \leq k$. Notons que pour un G'' donné, les chemins qui n'apparaissent pas dans le produit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(G'') &= \prod_{G''}^{(*)'} \mathbf{v}_{\bullet, p \text{seq}_{G''}(p)} \prod_{G''}^{(**)'} \mathbf{v}_{\langle \text{seq}_{G''}(p'[\omega(G)])} \prod_{G''}^{(***)'} \mathbf{v}_{\bullet, p \text{seq}_{G''}(pp'[\omega(G)])} \times \\
&\times \prod_{G''}^{(*)'} \mathbf{k}_{\text{seq}_{G''}(p)} \prod_{G''}^{(**)'} \mathbf{k}_{\text{seq}_{G''}(p'[\omega(G)]) \diamond_{p'}} \prod_{G''}^{(***)'} \mathbf{k}_{\text{seq}_{G''}(pp'[\omega(G)]) \diamond_{p'}} \quad (7.21)
\end{aligned}$$

sont exactement les chemins p de G tels que $\diamond_p = \rangle$ et le chemin $p'[\omega(G)]$ où $p' \in$

$\text{Chemins}(G')$ et $\bullet_{p'} = \langle \cdot$. Par conséquent, en comparant (7.21) à (7.17), on obtient

$$\begin{aligned} w(G'') &= \prod_{\substack{p \in \text{Chemins}(G) \\ p \uparrow = \bullet}} \mathbf{v}_{\bullet, p \text{ seq}_G(p)} \prod_{\substack{p' \in \text{Chemins}(G') \\ \bullet_{p'} = \langle}} \left(\mathbf{v}_{\langle \text{seq}_{G'}(p') || G |, \omega(G)} \right) \mathcal{P}(G'') \\ &\times \prod_{\substack{p \in \text{Chemins}(G) \\ \diamond p = \bullet}} \mathbf{k}_{\text{seq}_G(p)} \prod_{\substack{p' \in \text{Chemins}(G') \\ \bullet_{p'} = \langle}} \left(\mathbf{k}_{\text{seq}_{G'}(p') \bullet_{p'}} || G |, \omega(G) \right). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Alors, (7.18) devient

$$w(G) \star w(G') = \sum_{G''} w(G'')$$

où la somme est sur le B-diagramme $G'' = \begin{matrix} j_1, \dots, j_k \\ \star \\ i_1, \dots, i_k \\ G \end{matrix}$ avec $i_1 < \dots < i_k \in H_f^\uparrow(G)$ et $j_1, \dots, j_k \in H_f^\downarrow(G)$ distincts. En d'autres termes,

$$w(G) \star w(G') = w(G \star G').$$

Le Lemme 7.3 nous permet de conclure. □

Exemple 7.14 Comparons les calculs de la Figure 7.6 avec l'exemple 7.9.

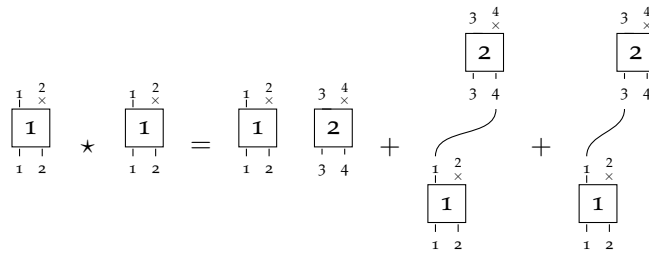


FIGURE 7.6 – Un exemple de calcul dans \mathcal{B} .

Comparons également la Figure 7.7 à

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{v}_{\langle (1)} \mathbf{v}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (1)} \mathbf{k}_{\langle (2)} \right)^{\star 2} &= \mathbf{v}_{\langle (1)} \mathbf{v}_{\langle (2)} \mathbf{v}_{\langle (3)} \mathbf{v}_{\langle (4)} \mathbf{k}_{\langle (1)} \mathbf{k}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (3)} \mathbf{k}_{\langle (4)} \langle \\ &+ \mathbf{v}_{\langle (1)} \mathbf{v}_{\langle (3)} \mathbf{v}_{\langle (2)} \mathbf{v}_{\langle (4)} \mathbf{k}_{\langle (1)} \mathbf{k}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (3)} \mathbf{k}_{\langle (4)} \langle + \mathbf{v}_{\langle (1)} \mathbf{v}_{\langle (2)} \mathbf{v}_{\langle (3)} \mathbf{v}_{\langle (4)} \mathbf{k}_{\langle (1)} \mathbf{k}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (3)} \mathbf{k}_{\langle (4)} \langle \\ &+ \mathbf{v}_{\langle (1)} \mathbf{v}_{\langle (2)} \mathbf{v}_{\langle (3)} \mathbf{v}_{\langle (4)} \mathbf{k}_{\langle (1)} \mathbf{k}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (3)} \mathbf{k}_{\langle (4)} \langle + \mathbf{v}_{\langle (1)} \mathbf{v}_{\langle (2)} \mathbf{v}_{\langle (3)} \mathbf{k}_{\langle (1)} \mathbf{k}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (3)} \mathbf{k}_{\langle (4)} \langle \\ &+ \mathbf{v}_{\langle (1)} \mathbf{v}_{\langle (3)} \mathbf{v}_{\langle (2)} \mathbf{v}_{\langle (4)} \mathbf{k}_{\langle (1)} \mathbf{k}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (3)} \mathbf{k}_{\langle (4)} \langle + \mathbf{v}_{\langle (1)} \mathbf{v}_{\langle (4)} \mathbf{v}_{\langle (3)} \mathbf{v}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (1)} \mathbf{k}_{\langle (2)} \mathbf{k}_{\langle (3)} \mathbf{k}_{\langle (4)} \langle \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

Corollaire 7.1 *L'algèbre \mathcal{B} est associative.*

Alternativement, ce résultat peut être montré de façon combinatoire. D'abord, on étend de façon bi-linéaire la composition $\begin{matrix} b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \end{matrix}$. Ainsi, on observe

$$\begin{matrix} G' \\ \star \\ \beta_1, \dots, \beta_p \\ \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ G \end{matrix} \star G'' = \sum_G \begin{matrix} G' \star G'' \\ \star \\ b_1, \dots, b_k \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{matrix}, \quad (7.23)$$

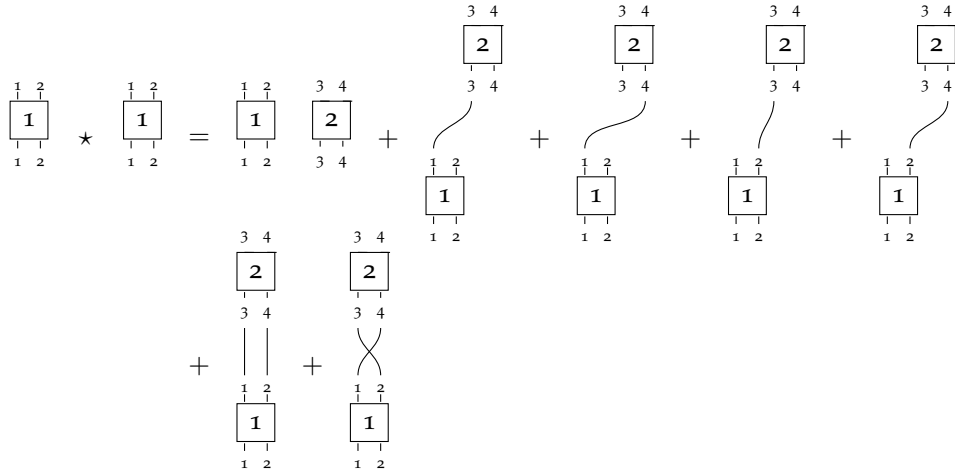


FIGURE 7.7 – Un second exemple de calcul dans \mathcal{B} .

où la somme est sur les séquences $1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq \omega(G)$ et les séquences d'éléments distincts $1 \leq b_1, \dots, b_k \leq \omega(G') + \omega(G'')$ tels qu'il existe $1 \leq i_1 < \dots < i_p$ tels que $a_{i_1} = \alpha_1, b_{i_1} = \beta_1, \dots, a_{i_p} = \alpha_p, b_{i_p} = \beta_p$.

D'après (7.12) on obtient,

$$\begin{aligned}
 (G \star G') \star G'' &= \sum_{\substack{1 \leq a_1 < \dots < a_p \leq \omega(G) \\ 1 \leq b_1, \dots, b_p \leq \omega(G') \text{ distinct}}} \begin{matrix} G' \\ \beta_1, \dots, \beta_p \\ \star \\ \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ G \end{matrix} \star G'' \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq \omega(G) \\ 1 \leq b_1, \dots, b_k \leq \omega(G') + \omega(G'') \text{ distinct}}} \begin{matrix} G' \star G'' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{matrix} \\
 &= G \star (G' \star G'').
 \end{aligned}$$

7.3.4 Application de l'ordre normal de boson

L'algèbre de Heisenberg-Weyl peut être définie comme un quotient $\mathcal{HW} = \mathbb{C}\langle\{a, a^\dagger\}\rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{HW}}$, où $\mathcal{J}_{\mathcal{HW}}$ est l'idéal engendré par $aa^\dagger - a^\dagger a - 1$. L'algèbre \mathcal{HW} est classiquement relative au problème d'ordre normal des Bosons. On considère une algèbre légèrement différente \mathcal{H} qui est obtenue en ajoutant un élément central e à \mathcal{HW} . On va voir que e peut naturellement être interprété combinatoirement. En effet, définissons la fonction $\mathfrak{p} : \mathcal{A} \rightarrow \{a, a^\dagger, e\}$ envoyant chaque élément de $\mathcal{A}_{\setminus \times}$ à a^\dagger , chaque élément de $\mathcal{A}_{\times \setminus \langle}$ à a , et chaque élément de $\mathcal{A}_{\langle \setminus \rangle}$ à e . La fonction \mathfrak{p} peut être étendue en fonctions linéaires $\tilde{\mathfrak{p}} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{H}$, $\hat{\mathfrak{p}} : \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{H}$, et $\mathfrak{p}_{\mathcal{H}} : \mathcal{F}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}$. On définit aussi la fonction linéaire $\mathfrak{p}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$ par

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{B}}(G) = \left(a^\dagger \right)^{\#\{p \in \text{Chemins}(G) : \diamond_p = \setminus\}} a^{\#\{p \in \text{Chemins}(G) : \bullet_p = \langle\}} e^{\#\{p \in \text{Chemins}(G) : \bullet_p = \langle\} + \#\{p \in \text{Chemins}(G) : \diamond_p = \setminus\}}. \tag{7.24}$$

De façon analogue, de la Remarque 7.2, on a

$$\mathfrak{p}_B(G) = \left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^{h_f^\downarrow(G)} \mathfrak{a}^{h_f^\uparrow(G)} \mathfrak{e}^{h_c(G)}. \quad (7.25)$$

Exemple 7.15 Si G est le B-diagramme de la Figure 7.1, on a

$$\mathfrak{p}_B(G) = \left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^3 \mathfrak{a}^2 \mathfrak{a}.$$

De (7.24) on peut vérifier facilement que \mathfrak{p}_B se factorise par \mathcal{F}_H . Plus précisément,

$$\mathfrak{p}_B = \mathfrak{p}_H \circ \mathfrak{w}. \quad (7.26)$$

De plus, on a

Proposition 7.8 Les fonctions $\tilde{\mathfrak{p}}$, $\hat{\mathfrak{p}}$, \mathfrak{p}_H , et $\mathfrak{p}_B(G)$ sont des morphismes d'algèbres.

Démonstration. Le fait que $\tilde{\mathfrak{p}}$, $\hat{\mathfrak{p}}$, et \mathfrak{p}_H soient des morphismes vient directement de leurs définitions. La fonction $\mathfrak{p}_B(G)$ est un morphisme d'algèbres car c'est la composition de deux morphismes d'algèbres (voir Formule (7.26)). \square

On vérifie facilement la formule de multiplication

$$\left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^m \mathfrak{a}^n \mathfrak{e}^q \cdot \left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^r \mathfrak{a}^s \mathfrak{e}^t = \sum_{i=0}^{\min\{n,r\}} i! \binom{q}{i} \binom{r}{i} \left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^{m+r-i} \mathfrak{a}^{n+s-i} \mathfrak{e}^{q+t}. \quad (7.27)$$

Cette formule possède l'interprétation combinatoire suivante. Considérons deux B-diagrammes G et G' , il y a $i! \binom{h_f^\uparrow(G)}{i} \binom{h_f^\uparrow(G')}{i}$ façons de composer G avec G' et obtenir un B-diagramme G'' tel que $h_f^\downarrow(G'') = h_f^\downarrow(G) + h_f^\downarrow(G') - i$, $h_f^\uparrow(G'') = h_f^\uparrow(G) + h_f^\uparrow(G') - i$, et $h_c(G'') = h_c(G) + h_c(G')$.

Exemple 7.16 On peut identifier la Figure 7.7 à

$$\left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^2 \mathfrak{a}^2 \cdot \left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^2 \mathfrak{a}^2 = \left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^4 \mathfrak{a}^4 + 4 \left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^3 \mathfrak{a}^3 + 2 \left(\mathfrak{a}^\dagger\right)^2 \mathfrak{a}^2.$$

Un récapitulatif des relations entre les algèbres définies dans cette sous-section est présenté dans la Figure 7.8 où la flèche entrecoupée indique que l'on a remplacé le produit dans $\tilde{\mathcal{F}}$ par un produit décalé.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous avons proposés, dans ce chapitre,

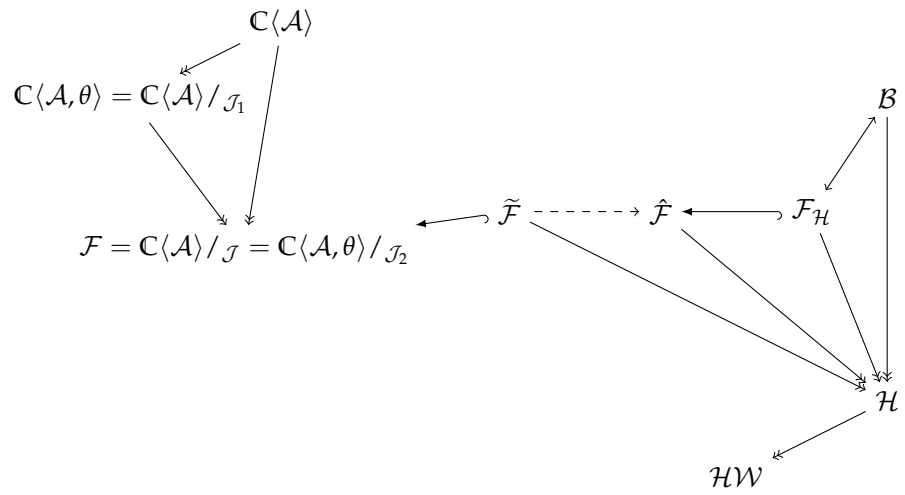


FIGURE 7.8 – Les différentes algèbres relatives aux B-diagrammes.

ASPECTS COGÉBRIQUES DES B-DIAGRAMMES

SOMMAIRE	
8.1	INTRODUCTION 123
8.2	ASPECTS COGÉBRIQUES DES B-DIAGRAMMES 123
8.2.1	Les algèbres de Hopf des B-diagrammes 123
8.2.2	Éléments primitifs 124
8.3	DEUX SOUS-ALGÈBRES 126
8.3.1	Fonctions symétriques des mots 126
8.3.2	Fonctions symétriques bi-mots 127
	CONCLUSION 130

CE chapitre traitera de l'aspect cogébrique des B-Diagrammes. nous identifions deux sous-algèbres de Hopf combinatoire ainsi que des suites connues.

8.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons exposé l'algèbre des B-Diagrammes ou nous avons défini la manière d'assembler nos objets combinatoires (B-Diagrammes). Dans ce chapitre, nous étudions l'aspect cogébrique des B-Diagrammes, autrement dit, nous allons définir la façon de désassembler nos objets (coproduit). Nous montrons par la suite que ça a une structure d'algèbre de Hopf combinatoire et identifions deux sous-algèbres de Hopf combinatoires.

8.2 ASPECTS COGÉBRIQUES DES B-DIAGRAMMES

8.2.1 Les algèbres de Hopf des B-diagrammes

On définit la fonction linéaire $\Delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ en posant

$$\Delta(G) = \sum_{I \in \text{Iso}(G)} G[I] \otimes G[\mathbb{C}I]. \quad (8.1)$$

De façon analogue, de la Proposition 7.1, on a

$$\Delta(G) = \sum_{\mathcal{I} \subset \text{Connected}(G)} G \left[\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I \right] \otimes G \left[\mathbb{C}_G \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I \right]. \quad (8.2)$$

Pour simplifier davantage, posons

$$G\langle I \rangle = \begin{cases} G[I] & \text{si } I \in \text{Iso}(G), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette notation, on a

$$\Delta(G) = \sum_{I \uplus J = \llbracket 1, |G| \rrbracket} G\langle I \rangle \otimes G\langle J \rangle. \quad (8.3)$$

On définit aussi $\epsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ comme étant la projection vers \mathcal{B}_0 . Il est clair que, Δ est un produit co-associatif, co-comutatif et ϵ est sa co-unité. Alors,

Proposition 8.1 $(\mathcal{B}, \Delta, \epsilon)$ est une cogèbre connexe graduée co-commutative.

Démonstration. Étant donné que $\dim \mathcal{B}_0 = 1$, nous devons seulement vérifier que Δ est gradué. C'est à dire que $\Delta(\mathcal{B}_k) \subset \bigoplus_{i+j=k} \mathcal{B}_i \otimes \mathcal{B}_j$. Cela découle directement de la définition de Δ . \square

Étant donné que \mathcal{B} est une cogèbre connexe et une algèbre à dimension finie graduée, si c'est une bigèbre alors c'est une algèbre de Hopf. Par conséquent, on doit seulement démontrer que Δ est un morphisme d'algèbre.

Démontrons que pour chaque paire (G, G') de B-diagrammes on a $\Delta(G \star G') = \Delta(G) \star \Delta(G')$. On commence par l'égalité

$$\Delta(G \star G') = \sum_{I \uplus J = \llbracket 1, |G| + |G'| \rrbracket} G \star G'\langle I \rangle \otimes G \star G'\langle J \rangle.$$

Chaque I apparaissant dans les splits de la somme en deux ensembles $(I \cap \llbracket 1, |G| \rrbracket) \uplus (I \cap \llbracket |G| + 1, |G| + |G'| \rrbracket)$. C'est aussi le cas pour les ensembles J . Ainsi,

$$\Delta(G \star G') = \sum_{\substack{I \uplus J = \llbracket 1, |G| \rrbracket \\ I' \uplus J' = \llbracket |G| + 1, |G| + |G'| \rrbracket}} (G \star G') \langle I \cup I' \rangle \otimes (G \star G') \langle J \cup J' \rangle.$$

En appliquant (7.12), on obtient

$$\Delta(G \star G') = \sum_{\substack{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq \omega(G) \\ 1 \leq b_1, \dots, b_k \leq \omega(G) \text{ distinct}}} \sum_{\substack{I \uplus J = \llbracket 1, |G| \rrbracket \\ I' \uplus J' = \llbracket |G| + 1, |G| + |G'| \rrbracket}} \begin{pmatrix} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{pmatrix} \langle I \cup I' \rangle \otimes \begin{pmatrix} G' \\ b_1, \dots, b_k \\ \star \\ a_1, \dots, a_k \\ G \end{pmatrix} \langle J \cup J' \rangle.$$

Notons que les éléments de I et J définissent deux sous-diagrammes complémentaires de G et les éléments de I' et J' définissent deux sous-diagrammes complémentaires de G . Ainsi,

$$\Delta(G \star G') = \sum_{\substack{I \uplus J = \llbracket 1, |G| \rrbracket \\ I' \uplus J' = \llbracket 1, |G'| \rrbracket}} \sum_{\substack{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq \omega(G) \\ 1 \leq b_1, \dots, b_k \leq \omega(G) \text{ distinct}}} \begin{pmatrix} G' \langle I' \rangle \\ [b_1, \dots, b_k]^{I'} \\ \star \\ [a_1, \dots, a_k]^I \\ G \langle I \rangle \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} G' \langle J' \rangle \\ [b_1', \dots, b_k']^{J'} \\ \star \\ [a_1, \dots, a_k]^J \\ G \langle J \rangle \end{pmatrix},$$

Enfin, on calcule

$$\begin{aligned} \Delta(G \star G') &= \sum_{\substack{I \uplus J = \llbracket 1, |G| \rrbracket \\ I' \uplus J' = \llbracket 1, |G'| \rrbracket}} (G \langle I \rangle \star G' \langle I' \rangle) \otimes (G \langle J \rangle \star G' \langle J' \rangle) \\ &= \left(\sum_{I \uplus J = \llbracket 1, |G| \rrbracket} G \langle I \rangle \otimes G \langle J \rangle \right) \star \left(\sum_{I' \uplus J' = \llbracket 1, |G'| \rrbracket} G' \langle I' \rangle \otimes G' \langle J' \rangle \right) \\ &= \Delta(G) \star \Delta(G') \end{aligned}$$

Nous pouvons résumer l'analyse par \mathcal{B} est une bi-algèbre graduée à composant gradué de dimension finie. Ainsi,

Théorème 8.1 $(\mathcal{B}, \star, \Delta)$ est une algèbre de Hopf graduée.

8.2.2 Éléments primitifs

Il est bien connu que les éléments primitifs munis du produit de crochet $[P, Q] = P \star Q - Q \star P$ est une algèbre de Lie. Le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore [?] affirme que chaque algèbre de Hopf graduée, connexe, et co-commutative est isomorphe à l'enveloppe universelle de l'algèbre de Lie des ses éléments primitifs. Il est clair que c'est le cas pour \mathcal{B} . Plus précisément, \mathcal{B} est une algèbre de Hopf qui est graduée par le nombre de semi-arêtes des diagrammes et les dimensions de ses composants gradués sont finies.

Étant donné que \mathcal{B} est libre dans les diagrammes indivisibles, les dimensions des composants gradués de l'espace $\text{Prim}(\mathcal{B})$ des éléments primitifs sont nécessairement les mêmes que ceux de l'algèbre libre de Lie $\mathcal{L}(\mathbb{G})$ engendrée par les éléments indivisibles.

Rappelons, à présent, quelques faits concernant l'idempotent Eulérien. Le produit de convolution est classiquement défini sur $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ par $f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ où

μ dénote la fonction linéaire de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ vers \mathcal{B} envoyant $P \otimes Q$ à $P \star Q$. L'idempotent Eulérien est définie par (voir e.g., [?])

$$\pi_1 := \log_*(Id) = \sum_{k>0} \frac{(-1)^k}{k} (Id - \zeta)^{*k} \tag{8.4}$$

où ζ dénote l'unité de l'algèbre de convolution, qui est la projection dans l'espace engendré par le diagramme vide ε . Remarquons que $(Id - \zeta)^{*k}$ envoie à 0 n'importe quel diagramme qui peut être écrit comme $G_1 | \dots | G_k$ avec chaque $G_i \neq \varepsilon$, π_1 envoie chaque diagramme à une combinaison linéaire finie de diagrammes appartenant à $\text{Prim}(\mathcal{B})$.

Exemple 8.1 Examinons l'exemple suivant

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \times \\ \boxed{3} \\ | \\ 5 \quad 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{1} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 3 \quad 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \xrightarrow{\pi_1} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \times \\ \boxed{3} \\ | \\ 5 \quad 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{1} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 3 \quad 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 3 \quad 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{1} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \times \\ \boxed{3} \\ | \\ 5 \quad 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{3} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \times \\ \boxed{3} \\ | \\ 5 \quad 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{1} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 3 \quad 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} + C$$

En posant $\hat{\Delta} = \Delta - Id \otimes \varepsilon - \varepsilon \otimes Id$, nous observons les trois B-diagrammes présents sur la formule ci-dessus ont la même image par $\hat{\Delta}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 3 \quad 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{1} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \otimes \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{1} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \times \\ \boxed{1} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \otimes \begin{array}{c} \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \times \\ \boxed{3} \\ | \\ 5 \quad 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \times \\ \boxed{2} \\ | \\ 3 \quad 4 \end{array} \end{array}$$

Ainsi, $\pi_1(B)$ est primitive.

A noter que $\pi_1(G)$, où G est un B -diagramme indivisible, montre que $\pi_1(G) = G + \dots$, où \dots représentent une combinaison linéaire de B -diagrammes non indivisibles. Puisque les B -diagrammes indivisibles sont algébriquement indépendants, cela montre que $\text{Prim}(\mathcal{B})$ contient une sous-algèbre qui est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. Par conséquent, étant donné que les dimensions des composants gradués de $\text{Prim}(\mathcal{B})$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, on déduit le résultat suivant.

Théorème 8.2 *L'algèbre de Lie des éléments primitifs de \mathcal{B} est isomorphe à l'algèbre libre de Lie engendrée par les diagrammes indivisibles. En effet, $\text{Prim}(\mathcal{B})$ est librement engendrée comme une algèbre de Lie par $\{\pi_1(G) : G \in \mathcal{G}\}$.*

8.3 DEUX SOUS-ALGÈBRES

8.3.1 Fonctions symétriques des mots

Rappelons que l'algèbre des fonctions symétriques de mots WSym est décrite comme l'espace engendré par les éléments M_π , où π est une partition d'ensemble, et est muni du produit

$$M_\pi M_{\pi'} = \sum_{\pi \cup \pi' \preceq \pi'' \preceq \{\{1, \dots, n\}, \{n+1, \dots, n'+1\}\}} M_{\pi''}, \quad (8.5)$$

si $\pi \vDash n$ and $\pi' \vDash n'$, et le co-produit

$$\Delta(M_\pi) = \sum_{\pi = e \uplus f} M_{\text{std}(e)} \otimes M_{\text{std}(f)}. \quad (8.6)$$

Le résultat suivant est bien connu, et est une conséquence facile de (8.5).

Proposition 8.2 *L'algèbre WSym est librement engendrée comme algèbre par*

$$\{M_\pi : \pi \text{ is an indivisible set partition}\}.$$

A chaque partition d'ensemble $\pi \vDash n$, on associe un B-diagramme $b_\pi = (n, [1, \dots, 1], \llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket, E_\pi)$ où E_π est l'ensemble des paires (i, j) telles que $i, j \in e \in \pi$, et $j = \{\min(\ell) \in e : i < \ell\}$. Graphiquement, le composant de π correspond aux sous-B-diagrammes connexes de b_π .

Exemple 8.2 Considérons dans la Figure 8.1, la représentation graphique de

$$b_{\{\{1,3\}, \{2\}, \{4,7,8\}, \{5,6\}\}} = (8, [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \llbracket 1, 8 \rrbracket, \llbracket 1, 8 \rrbracket, \{(1, 3), (4, 7), (7, 8), (5, 6)\}).$$

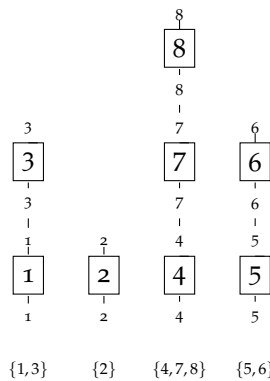


FIGURE 8.1 – Représentation graphique de $b_{\{\{1,3\}, \{2\}, \{4,7,8\}, \{5,6\}\}}$

Il est clair que, l'espace \mathcal{B}_1^1 engendré par les éléments b_π est stable par produit et Δ envoie \mathcal{B}_1^1 à $\mathcal{B}_1^1 \otimes \mathcal{B}_1^1$. Alors, \mathcal{B}_1^1 est une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{B} . Plus précisément, on peut vérifier facilement que

$$b_\pi \star b_{\pi'} = \sum_{\pi \cup \pi' \preceq \pi'' \preceq \{\{1, \dots, n\}, \{n+1, \dots, n'+1\}\}} b_{\pi''} \quad (8.7)$$

si $\pi \vDash n$ et $\pi' \vDash n'$, et

$$\Delta(b_\pi) = \sum_{\pi=e \uplus f} b_{\text{std}(e)} \otimes b_{\text{std}(f)}. \tag{8.8}$$

En remarquant que π est indivisible si et seulement si le B-diagramme b_π est indivisible, on déduit que \mathcal{B}_1^1 est la sous-algèbre libre de \mathcal{B} engendrée par l'ensemble $\{b_\pi : \pi \text{ est une partition d'ensemble indivisible}\}$. Ainsi, en comparant (8.7) à (8.5) et (8.7) à (8.6), la Proposition 8.2 implique le résultat suivant.

Théorème 8.3 *La sous-algèbre \mathcal{B}_1^1 générée par $\{b_\pi : \pi \text{ est une partition d'ensemble indivisible}\}$ est une algèbre de Hopf isomorphe à WSym.*

Exemple 8.3 A titre d'exemple, comparons

$$\begin{aligned} M_{\{\{1,3\},\{2\}\}} M_{\{\{1\},\{2\}\}} &= M_{\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}} + M_{\{\{1,3\},\{2,4\},\{5\}\}} + M_{\{\{1,3,4\},\{2\},\{5\}\}} \\ &+ M_{\{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}} + M_{\{\{1,3,5\},\{2\},\{4\}\}} \\ &+ M_{\{\{1,3,4\},\{2,5\}\}} + M_{\{\{1,3,5\},\{2,4\}\}}. \end{aligned}$$

au produit représenté dans la Figure 8.2.

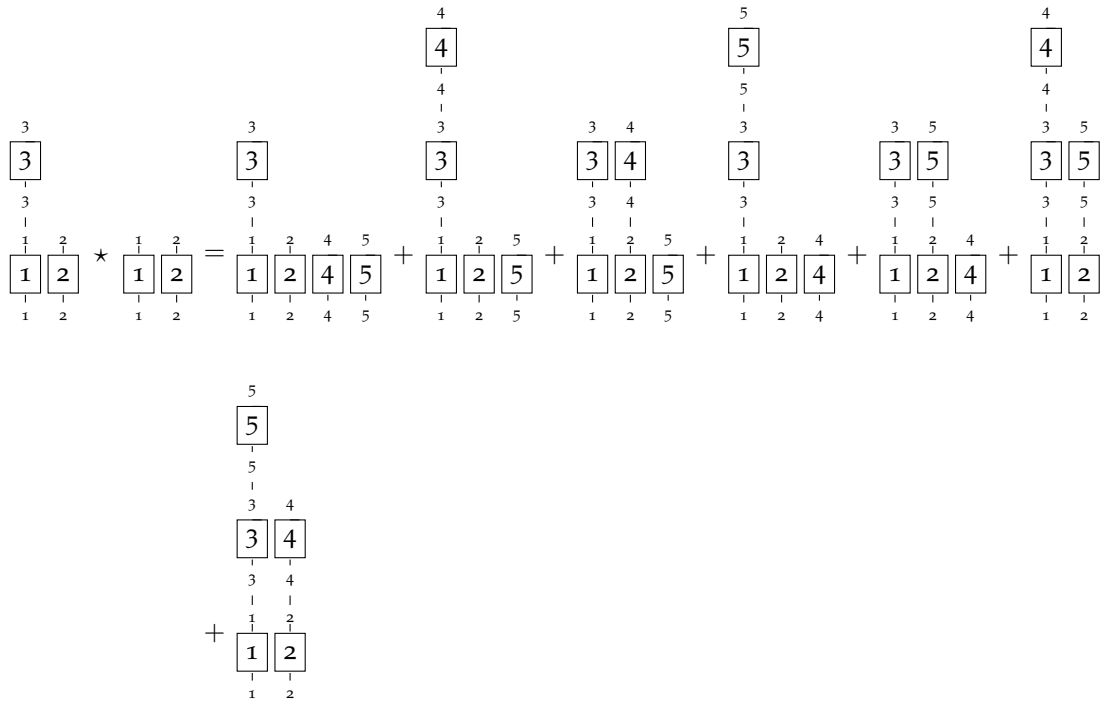


FIGURE 8.2 – Un exemple de produit dans \mathcal{B}_1^1 .

8.3.2 Fonctions symétriques bi-mots

De même, rappelons que l'algèbre de Hopf BWSym est librement engendrée par l'ensemble $\{\Phi^\Pi : \Pi \vDash n, n \geq 0\}$ où Π est une partition d'ensemble en listes de $[n]$ noté $\Pi \vDash n$. Nous dirons que Π est *indivisible* si $\Pi = \Pi' \dot{\cup} \Pi''$, pour certaines partitions d'ensemble dans des listes Π', Π'' , implique, soit, que $\Pi' = \Pi$ ou bien, que $\Pi'' = \Pi$. Le produit est défini par

$$\Phi^\Pi \Phi^{\Pi'} = \Phi^{\Pi \dot{\cup} \Pi'} \tag{8.9}$$

ou $\Pi \hat{\cup} \Pi' = \Pi \cup \Pi'[n]$. Et le co-produit

$$\Delta(\Phi^\Pi) = \sum_{\Pi = E \uplus F} \Phi^{\text{std}(E)} \otimes \Phi^{\text{std}(F)}, \tag{8.10}$$

avec $\text{std}(E) = \{[\phi(i_1), \dots, \phi(i_k)] : [i_1, \dots, i_k] \in e\}$ où ϕ est la bijection croissante unique de $\cup_{[\alpha_1, \dots, \alpha_p] \in E} \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ à $[[1, \sum_{[\alpha_1, \dots, \alpha_p] \in E} p]]$.

La propriété suivante découle directement de (8.9).

Proposition 8.3 *BWSym est librement engendrée autant qu'algèbre par l'ensemble $\{\Phi^\Pi : \Pi \text{ is indivisible}\}$.*

Soit \mathcal{B}_1^2 le sous-espace de \mathcal{B} engendré par l'ensemble \mathcal{G}_1^2 de B-diagrammes sous la forme

$$(n, [2, \dots, 2], [[1, 2n]], \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}, E).$$

En remarquant que \mathcal{G}_1^2 est exactement l'ensemble des diagrammes dont chaque sommet possède deux demi-arêtes sortantes valides, une demi-arête entrante valide et une demi-arête entrante coupée, l'espace \mathcal{B}_1^2 est stable pour le produit \star et Δ envoie \mathcal{B}_1^2 à $\mathcal{B}_1^2 \otimes \mathcal{B}_1^2$. Autrement dit, \mathcal{B}_1^2 est une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{B} .

Décrivons une correspondance graduée bijective entre les partitions d'ensemble en listes et les B-diagrammes de \mathcal{G}_1^2 . On associe d'abord à chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un B-diagramme connexe $m_\sigma = (n, [2, \dots, 2], [[1, 2n]], \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}, E_\sigma)$ où $(2i - 1, 2j - 1) \in E_\sigma$ si et seulement si $i < j$ et $j = \min\{k : \alpha_i < \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(i)\}$ où $\alpha_i = \sup\{\sigma^{-1}(k) : k < i, \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(i)\}$ et $(2i, 2j - 1) \in E_\sigma$ si et seulement si $i < j$ et $j = \min\{k : \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(k) < \beta_i\}$ où $\beta_i = \inf\{\sigma^{-1}(k) : k < i, \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(i)\}$.

Exemple 8.4 Considérons la permutation $\sigma = [5, 2, 4, 1, 3, 7, 6]$. On a $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_5 = -\infty, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 2, \alpha_6 = \alpha_7 = 5, \beta_1 = \beta_3 = \beta_6 = +\infty, \beta_2 = \beta_4 = 4, \beta_5 = 2, \text{ et } \beta_7 = 7$. Ainsi, $m_\sigma = (7, [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2], [[1, 14]], \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}, \{(1, 3), (2, 5), (3, 9), (4, 7), (6, 11), (11, 13)\})$. Voir la Figure 8.3 pour une représentation graphique.

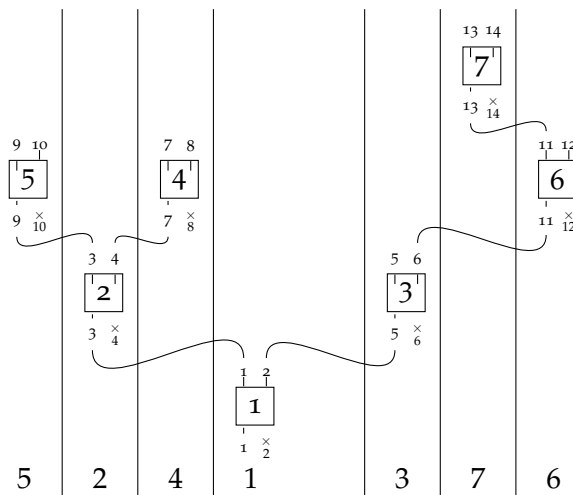


FIGURE 8.3 – Le B diagramme $m_{[5,2,4,1,3,7,6]}$

Notons que tout B-diagramme connexe G dans \mathcal{G}_1^2 satisfait $h_f^\uparrow(G) = |G| + 1$, on construit $n + 1$ B-diagrammes différents en ajoutant un, et exactement un, sommet à

G. Un raisonnement rapide par induction sur le nombre de sommets montre que l'ensemble des B-diagrammes connexes dans \mathcal{G}_1^2 avec n sommets est exactement l'ensemble des B-diagrammes m_σ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et la correspondance $\sigma \longrightarrow m_\sigma$ est bijective.

On étend la construction aux partitions d'ensemble en listes comme suit : A chaque séquence d'entiers $I = [i_1, \dots, i_n]$ de n entiers distincts, on associe la permutation $\text{std}(I)$ obtenue en remplaçant chaque j_k par k dans I pour tout k où $j_1 < \dots < j_n$ et $\{j_1, \dots, j_n\} = \{i_1, \dots, i_n\}$. Pour chaque partition d'ensemble en listes $\Pi = \{L_1, \dots, L_k\}$, on associe le B-diagramme unique m_Π in \mathcal{G}_1^2 avec k composantes connexes obtenues en remplaçant les entiers ℓ dans chaque $m_{\text{std}(L_t)}$ par j_ℓ^t dans L_t où $L_t = [i_1^t, \dots, i_{n_t}^t]$, $j_1^t < \dots < j_{n_t}^t$ et $\{i_1^t, \dots, i_{n_t}^t\} = \{j_1^t < \dots < j_{n_t}^t\}$. Ainsi, $\mathcal{G}_1^2 = \{m_\Pi : \Pi \text{ est une partition d'ensemble en listes}\}$ et la correspondance $\Pi \longrightarrow m_\Pi$ est bijective. De plus, par construction, Π est indivisible si et seulement si m_Π est indivisible.

De l'analyse ci-dessus, on déduit que l'algèbre \mathcal{B}_1^2 a la même dimension graduée que BWSym et qu'elle est librement engendrée en tant qu'algèbre par l'ensemble

$$\{m_\Pi : \Pi \text{ est une partition indivisible d'ensemble en listes}\}.$$

Notons aussi que, (7.11) nous permet d'interpréter le produit $m_\Pi \star m_{\Pi'}$ en termes de partitions d'ensemble en listes. Soient $\Pi = [L_1, \dots, L_k] \vDash n$ et $\Pi' = [L'_1, \dots, L'_{k'}] \vDash n'$ deux partitions d'ensemble en listes. On a

$$m_\Pi \star m_{\Pi'} = m_{\Pi \uplus \Pi'} + \sum m_{\Pi''} \quad (8.11)$$

où la somme est sur les partitions d'ensemble en une liste $\Pi'' = [L''_1, \dots, L''_{k''}] \vDash n + n'$ telle que chaque L''_i est

1. Soit une liste L_j ,
2. ou bien, un liste $[j_1 + n, \dots, j_\ell + n]$ avec $[j_1, \dots, j_\ell] \in \Pi'$,
3. ou alors, une liste $[i_1, \dots, i_{p_1}, j_1^1 + n, \dots, j_{\ell_1}^1 + n, i_{p_1} + 1, \dots, i_{p_2}, j_1^2 + n, \dots, j_{\ell_2}^2 + n, \dots, i_{p_{t-1}} + 1, \dots, i_{p_t}, j_1^t + n, \dots, j_{\ell_t}^t + n, i_{p_t} + 1, \dots, i_{p_{t+1}}]$ où $t > 1$, $p_1 < p_2 < \dots < p_{t+1}$, $[i_1, \dots, i_{p_{t+1}}] \in \Pi$, et pour chaque $1 \leq s \leq t$, $[j_1^s, \dots, j_{\ell_s}^s] \in \Pi''$.

Exemple 8.5 Par exemple, comparons

$$\begin{aligned} m_{\{[3,1],[2]\}} m_{\{[1,2]\}} &= m_{\{[3,1],[2],[4,5]\}} + m_{\{[3,1],[2,4,5]\}} + m_{\{[3,1],[4,5,2]\}} \\ &\quad + m_{\{[3,1,4,5],[2]\}} + m_{\{[3,4,5,1],[2]\}} + m_{\{[4,5,3,1],[2]\}}. \end{aligned}$$

au produit représenté dans la Figure 8.4.

On en déduit le résultat suivant

Théorème 8.4 Les algèbres de Hopf BWSym et \mathcal{B}_1^2 sont isomorphes.

Démonstration. De l'analyse ci-dessus et de la Proposition 8.3, les algèbres BWSym et \mathcal{B}_1^2 sont isomorphes. Un isomorphisme explicite η envoie Φ^Π à m_Π pour chaque partition d'ensemble non-divisible en listes Π . Il reste à prouver que c'est un morphisme de cogèbre. En remarquant que les listes d'une partition d'ensemble en listes Π correspondent aux composantes connexes de m_Π , on montre que l'égalité (8.2) implique que

$$(\eta \otimes \eta)(\Delta(\Phi^\Pi)) = (\eta \otimes \eta)(\Phi^\Pi \otimes \epsilon + \epsilon \otimes \Phi^\Pi) = m_\Pi \otimes \epsilon + \epsilon \otimes m_\Pi = \Delta(m_\Pi) \quad (8.12)$$

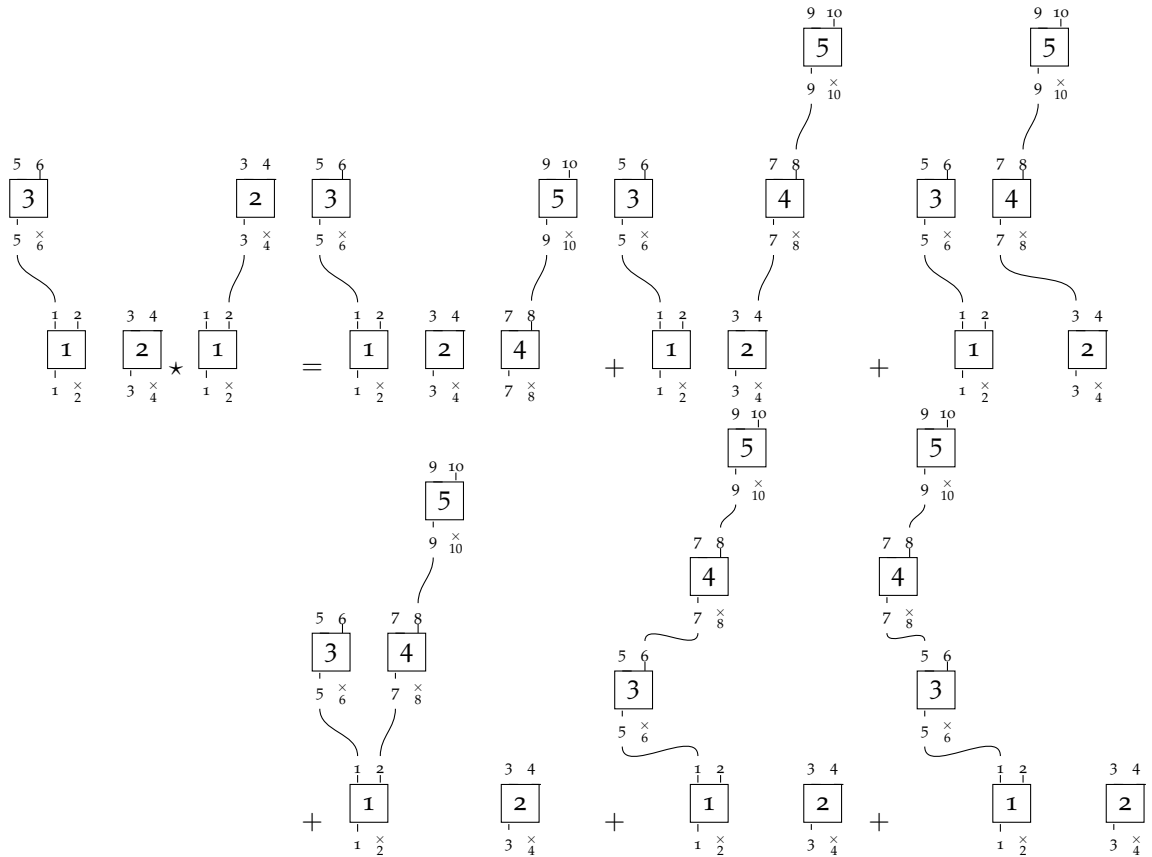


FIGURE 8.4 – Un exemple de produit dans \mathcal{B}_1^2 .

pour chaque partition non divisible Π . Alors, puisque $\eta \otimes \eta : \text{BWSym} \otimes \text{BWSym} \rightarrow \mathcal{B}_1^2 \otimes \mathcal{B}_1^2$ est un morphisme d'algèbres, l'égalité $(\eta \otimes \eta)(\Delta(\Phi^{\Pi_1} \dots \Phi^{\Pi_k})) = \Delta(m_{\Pi_1} \star \dots \star m_{\Pi_k})$ est vérifiée pour chaque k -tuples (Π_1, \dots, Π_k) de partitions d'ensemble non-divisibles en listes. Cela prouve que η est un morphisme de bigèbre et implique ce que l'on a établi. \square

CONCLUSION DU CHAPITRE

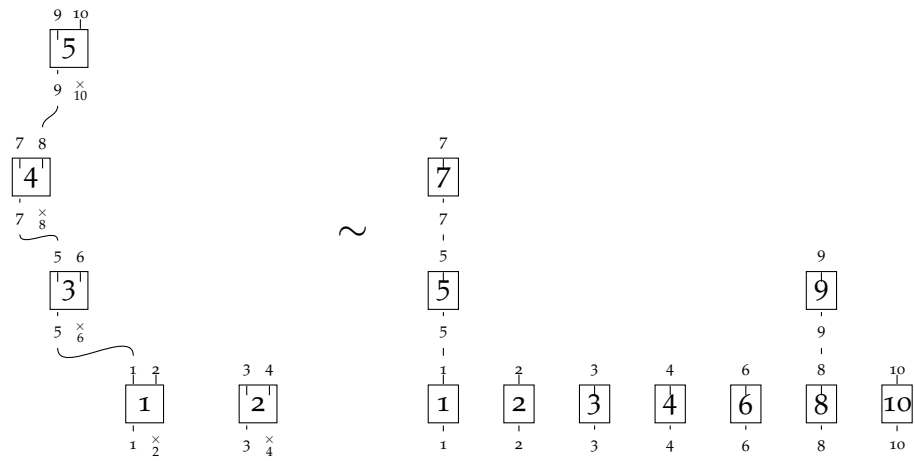
Nous avons décrit une algèbre de Hopf combinatoire qui donne une représentation sous forme de B-Diagrammes des calculs impliqués dans l'ordre normal des bosons. Nous avons donné dans la section 8.3 deux exemples de sous-algèbres associées à des objets combinatoires. Cette construction peut être généralisée à une famille d'algèbres de Hopf combinatoires générées par des partitions colorées [?]. Certaines propriétés combinatoires de ces objets peuvent être déduites par de simples manipulations. Par exemple, le nombre de partitions d'un ensemble en listes de n est égal au nombre de partitions d'un ensemble en $2n$ telles que chaque part contienne au plus un nombre pair et, dans ce cas, ce nombre est le minimum de la part. Cela vient du morphisme $\mathcal{B}_1^2 \rightarrow \mathcal{B}_1^1$ envoyant l'élément



à



combiné aux interprétations en termes de partitions d'ensembles et de partitions d'ensembles en listes décrites dans la section 8.3. Par exemple, le morphisme explicite envoie $\{[4, 5, 3, 1], [2]\}$ à $\{\{1, 5, 7\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{8, 9\}, \{10\}\}$. Cela vient de la correspondance



En appliquant cette stratégie à diverses sous-algèbres, nous obtenons des interprétations de quelques généralisations des polynômes de Bell, tel que r -Bell [?] ou (r_1, \dots, r_p) -Bell [?], en termes de B -Diagrammes.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Tout le long de cette thèse, nous avons étudié des propriétés combinatoires des généralisations des suites de Stirling qui s'identifient à des cas particuliers de la relation de récurrence,

$$\left| \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right| + (\alpha n + \beta k + \gamma) \left| \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right|. \quad (8.13)$$

Nous avons proposé dans le chapitre trois de nouvelles identités combinatoires pour les nombres r -Stirling de première, deuxième et troisième (nombres r -Lah) espèces, en se basant sur l'interprétation combinatoires de ces suites. De même pour les nombres r_p -Stirling de deuxième espèce $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r_1, \dots, r_p}$, qui comptent les k -partitions de $[n]$ tels que les éléments de chacun des sous-ensembles : $\{1, \dots, r_1\}, \{r_1 + 1, \dots, r_2\}, \dots, \{r_{p-1} + 1, \dots, r_p\}$ sont dans des parts distinctes, nous avons exprimé une relation qui permet l'expression d'un éléments du triangle r_1, \dots, r_p -Stirling en termes des éléments du triangle r'_1, \dots, r'_p -Stirling avec $r_i \leq r'_i$. Une question intéressante qu'on peut poser : qu'en est-il des partitions d'ensembles en cycles et en listes? En effet, si on définit les nombres r_1, \dots, r_p -Stirling de première espèce comme étant le nombre de k -permutations de $[n]$ tels que les éléments de chacun des sous-ensembles : $\{1, \dots, r_1\}, \{r_1 + 1, \dots, r_2\}, \dots, \{r_{p-1} + 1, \dots, r_p\}$ sont dans des cycles distincts et les nombres r_1, \dots, r_p -Lah comme étant le nombre de k -partitions en listes de $[n]$ tels que les éléments de chacun des sous-ensembles : $\{1, \dots, r_1\}, \{r_1 + 1, \dots, r_2\}, \dots, \{r_{p-1} + 1, \dots, r_p\}$ sont dans des listes distinctes, il serait intéressant d'étudier leurs propriétés combinatoires.

Nous avons, dans le chapitre quatre, lié les nombres r -Stirling des trois espèce aux nombres de Stirling s -associés, en proposant une formulation unificatrice des deux généralisations. toujours, dans la même perspective, nous pensons qu'il est opportun d'étudier le cas r_1, \dots, r_p -Stirling s_1, \dots, s_k -associés qui n'est qu'une généralisation des nombres r_1, \dots, r_p -Stirling en ajoutant des cardinalités minimales des k -partitions de $[n]$.

Dans le cinquième chapitre, nous avons traité des nombres de Whitney des réseaux de Dowling qui généralisent les nombres de Stirling des trois espèces. En premier, nous avons défini les nombres de Whitney translatés des trois espèces où nous avons donné un sens aux paramètres α et β de la relation de récurrence 8.13. Cela nous a permis de donner une nouvelle interprétation combinatoire des nombres de Whitney des trois espèces et des nombres r -Whitney des trois espèces. Une continuation de ce travail serait d'introduire l'aspect s -associés de ces nombres.

Les interprétations combinatoires données dans les chapitres précédents nous ont permis d'interpréter les nombres $\left| \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right|$ de la relation 8.13. Dans le sixième chapitre, nous avons étudié les nombres de Stirling généralisés qui comptent le poids des k -partitions en listes de $[n]$. En outre, nous avons proposé une formule explicite et une expression en termes de fonction symétriques.

Afin d'interpréter des coefficients apparaissant dans le problème d'ordre normal des Bosons, nous avons proposé, dans les chapitres sept et huit, une algèbre de Hopf combinatoire des B-Diagrammes. Une des perspectives, est l'étude de l'aspect p, q -analogue des B-Diagrammes.

BIBLIOGRAPHIE

- [] Eiichi Abe. *Hopf algebras*, volume 74. Cambridge University Press, 2004.
- [] J. C. Ahuja and E. A. Enneking. Concavity property and a recurrence relation for associated Lah numbers. *Fibonacci Quart.*, 17(2) :158–161, 1979.
- [] Hacene Belbachir and Amine Belkhir. Cross recurrence relations for r-lah numbers. *Ars Combinatoria*, 110 :199–203, 2013.
- [] Hacène Belbachir and Imad Eddine Bousbaa. Associated Lah numbers and r -Stirling numbers. *ArXiv*, arXiv :1404.5573v2(10), 2014.
- [] Hacene Belbachir and Imad Eddine Bousbaa. Combinatorial identities for the r-lah numbers. *ARS COMBINATORIA*, 115 :453–458, 2014.
- [] Hacène Belbachir and Imad Eddine Bousbaa. Convolution identities for the r -Stirling numbers. *Revision.*, 2014.
- [] Hacène Belbachir, Amine Belkhir, and Imad Eddine Bousbaa. Combinatorial approach of certain generalized stirling numbers. *arXiv preprint arXiv :1411.6271*, 2014.
- [] Imad Eddine Bousbaa, Ali Chouria, and Jean-Gabriel Luque. A combinatorial hopf algebra for the boson normal ordering problem. *arXiv preprint arXiv :1512.05937*, 2015.
- [] Moussa Benoumhani. On Whitney numbers of Dowling lattices. *Discrete Math.*, 159(1-3) :13–33, 1996.
- [] Moussa Benoumhani. On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices. *Adv. in Appl. Math.*, 19(1) :106–116, 1997.
- [] Moussa Benoumhani. Log-concavity of Whitney numbers of Dowling lattices. *Adv. in Appl. Math.*, 22(2) :186–189, 1999.
- [] Pawel Blasiak, Andrzej Horzela, Karol A Penson, Allan I Solomon, and Gerard HE Duchamp. Combinatorics and boson normal ordering : A gentle introduction. *American Journal of Physics*, 75(7) :639–646, 2007.
- [] Pawel Blasiak. Combinatorics of boson normal ordering and some applications. *arXiv preprint quant-ph/0507206*, 2005.
- [] Pawel Blasiak. Combinatorial route to algebra : The art of composition & decomposition. *arXiv preprint arXiv :1008.4685*, 2010.
- [] P Blasiak, KA Penson, and AI Solomon. The boson normal ordering problem and generalized bell numbers. *Annals of Combinatorics*, 7(2) :127–139, 2003.

- [] Pawel Blasiak, Karol A Penson, and Allan I Solomon. The general boson normal ordering problem. *Physics Letters A*, 309(3) :198–205, 2003.
- [] Andrei Z Broder. The r -Stirling numbers. *Discrete Mathematics*, 49(3) :241–259, 1984.
- [] Nantel Bergeron, Christophe Reutenauer, Mercedes Rosas, and Mike Zabrocki. Invariants and coinvariants of the symmetric group in noncommuting variables. *arXiv preprint math/0502082*, 2005.
- [] L Carlitz. Weighted stirling numbers of the 1st and 2nd kind. 1. *Fibonacci Quarterly*, 18(2) :147–162, 1980.
- [] Cristina B Corcino, Roberto B Corcino, and Nestor Acala. Asymptotic estimates for r -whitney numbers of the second kind. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014.
- [] Pietro Codara, Ottavio M DâAntona, and Pavol Hell. A simple combinatorial interpretation of certain generalized bell and stirling numbers. *Discrete Mathematics*, 318 :53–57, 2014.
- [] Charalambos A Charalambides. *Enumerative combinatorics*. CRC Press, 2002.
- [] Gi-Sang Cheon and Ji-Hwan Jung. r -whitney numbers of dowling lattices. *Discrete Mathematics*, 312(15) :2337–2348, 2012.
- [] Louis Comtet. *Advanced Combinatorics : The art of finite and infinite expansions*. Springer Science & Business Media, 1974.
- [] Stephen U Chase and Moss E Sweedler. *Hopf algebras and Galois theory*. Springer, 1969.
- [] T. A. Dowling. A class of geometric lattices based on finite groups. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 14 :61–86, 1973.
- [] Samuele Giraud. *Combinatoire algébrique des arbres*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2011.
- [] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science.
- [] Henry W. Gould. *Combinatorial identities*. Henry W. Gould, Morgantown, W.Va., 1972. A standardized set of tables listing 500 binomial coefficient summations.
- [] Florent Hivert, Jean-Christophe Novelli, and Jean-Yves Thibon. Commutative combinatorial hopf algebras. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 28(1) :65–95, 2008.
- [] FT Howard. Associated stirling numbers. *Fibonacci Quart*, 18(4) :303–315, 1980.
- [] Leetsch C Hsu and Peter Jau-Shyong Shiue. A unified approach to generalized stirling numbers. *Advances in Applied Mathematics*, 20(3) :366–384, 1998.

- [] Jovan Karamata. Theoremes sur la sommabilite exponentielle et d'autres sommabilites s'y rattachant. 1935.
- [] J Katriel. Combinatorial aspects of boson algebra. *Lettere Al Nuovo Cimento (1971-1985)*, 10(13) :565-567, 1974.
- [] Markos Koutras. Non-central stirling numbers and some applications. *Discrete Mathematics*, 42(1) :73-89, 1982.
- [] Ivo Lah. *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*. 1954.
- [] Ivo Lah. Eine neue art von zahlen, ihre eigenschaften und anwendung in der mathematischen statistik. *Mitteilungsbl. Math. Statist*, 7 :203-212, 1955.
- [] Jean-Gabriel Luque, Ali Chouria, Jean-Paul Bultel, and Olivier Mallet. Word symmetric functions and the redfield-pólya. *arXiv preprint arXiv :1302.5815*, 2013.
- [] Toufik Mansour. *Combinatorics of set partitions*. CRC Press, 2012.
- [] Rémi Maurice. *Algèbres de Hopf combinatoires*. PhD thesis, université Paris-Est, 2013.
- [] MA Méndez, P Blasiak, and KA Penson. Combinatorial approach to generalized bell and stirling numbers and boson normal ordering problem. *Journal of mathematical physics*, 46(8) :083511, 2005.
- [] Mircea Merca. A note on the r-whitney numbers of dowling lattices. *Comptes Rendus Mathématique*, 351(17) :649-655, 2013.
- [] Mircea Merca. A new connection between r-whitney numbers and bernoulli polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 25(12) :937-942, 2014.
- [] Istvan Mezo. The r-bell numbers. *arXiv preprint arXiv :0909.4417*, 2009.
- [] István Mezo. A kind of eulerian numbers connected to whitney numbers of dowling lattices. *Discrete Mathematics*, 328 :88-95, 2014.
- [] Mahid M Mangontarum and Jacob Katriel. On q-boson operators and q-analogues of the r-whitney and r-dowling numbers. *Journal of Integer Sequences*, 18(2) :3, 2015.
- [] John W Milnor and John C Moore. On the structure of hopf algebras. *Annals of Mathematics*, pages 211-264, 1965.
- [] Miloud Mihoubi and Mohammed Said Maamra. The (r_1, \dots, r_p) -Stirling numbers of the second kind. *Integers*, 12(5) :1047-1059, 2012.
- [] S-M Ma, TOUFIK Mansour, and Matthias Schork. Normal ordering problem and the extensions of the stirling grammar. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 21(2) :242-255, 2014.
- [] Miloud Mihoubi and Mourad Rahmani. The partial r-bell polynomials. *arXiv preprint arXiv :1308.0863*, 2013.

- [] Toufik Mansour and Matthias Schork. On the normal ordering of multi-mode boson operators. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 15(1) :77–88, 2008.
- [] Miloud Mihoubi and Meriem Tiachachat. Some applications of the r-whitney numbers. *Comptes Rendus Mathématique*, 352(12) :965–969, 2014.
- [] Niels Nielsen. *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Teubner, 1906.
- [] Gábor Nyul and Gabriella Rácz. The r-lah numbers. *Discrete Mathematics*, 2014.
- [] Marko Petkovsek and Tomaz Pisanski. Combinatorial interpretation of unsigned stirling and lah numbers. 2002.
- [] Mourad Rahmani. Some results on whitney numbers of dowling lattices. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 20(1) :11–27, 2014.
- [] Christophe Reutenauer. Free lie algebras. Technical report, 2001.
- [] John Riordan. *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Corporation, 2012. Reprint of the 1958 original [Wiley, New York ; MR0096594 (20#3077)].
- [] Mercedes Rosas and Bruce Sagan. Symmetric functions in noncommuting variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(1) :215–232, 2006.
- [] Mark Shattuck. Generalized r-lah numbers. *arXiv preprint arXiv :1412.8721*, 2014.
- [] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.
- [] James Stirling. Methodus differentialis, london, 1730. *English translation, The Differential Method*, 1749.
- [] E. G. Tsylova. The asymptotic behavior of generalized Stirling numbers. In *Combinatorial-algebraic methods in applied mathematics*, pages 143–154. Gorcprime kov. Gos. Univ., Gorki, 1985.