

N° d'ORDRE : 47/2012-M/ELN

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA**  
**RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI**  
**BOUMEDIENE**  
**FACULTE D'ELECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE**



**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER.**

**EN : Electronique.**

**Spécialité : Instrumentation.**

**Par : Ait Amer Mohamed Amine.**

**Thème**

**Contribution de la transformée en  
ondelette discrète dans le prétraitement  
du signal encéphalographie EEG**

**Soutenu le:24 /06/2012, devant le jury composé de :**

<b>Mr BOUDRAA Bachir</b>	<b>Professeur</b>	<b>USTHB</b>	<b>Président</b>
<b>Mme KEDIR-TALHA Malika Djahida</b>	<b>Docteur</b>	<b>USTHB</b>	<b>Directeur de Thèse</b>
<b>Mr TEFAHI Houcine</b>	<b>Professeur</b>	<b>USTHB</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr MEKAOUI Slimane</b>	<b>Docteur</b>	<b>USTHB</b>	<b>Examineur</b>



## *Dédicace*

*Je dédie ce travail,*

*À mes chers parents, qui m'ont permis de devenir ce que je  
suis aujourd'hui*

*À mes grand-parents*

*À mes frères et mes sœurs*

*À toute ma famille*

*À mes amis*

*À tous ceux qui me sont chers*

*En espérant avoir répondu à leurs souhaits de me voir  
réussir.*

## *Remerciements*

*Je tiens à remercier en premier lieu Allah le tout puissant pour m`avoir donné la force et la patience de réaliser ce travail ainsi que mes parents.*

*Je tiens à remercier en particulier ma promotrice M<sup>eme</sup> M.TALHA pour sa disponibilité, son soutien et son aide au cours de mon travail.*

*Je remercie les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.*

*Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce travail de près ou de loin et qui méritent d'y trouver leur nom.*

## Notations

**EEG** : Electroencéphalogramme.

**CWT** : Continu Wavelet Transform ; Transformée en Ondelette Continue.

**DWT** : Discret Wavelet Transform ; Transformée en Ondelette Discrète.

**LWT** : Lifting Wavelet transform ;

**EQM** : Erreur Quadratique Moyenne.

**RIF** : Réponse Impulsionnelle Finie.

**$\tau_c$**  : Taux de compression.

**PR** : Performance de reconstitution.

**KPPV** : K plus proche voisin.

## Liste des tableaux

Tableau 1.1 : bandes de fréquences du signal EEG

Tableau 1.2 Numérotation des électrodes

Tableau 3.1 : matrice de confusion

Tableau 4.1 : liste des ondelettes biorthogonales utilisées.

Tableau 4.2 : erreur de reconstitution minimum obtenu par LWT

Tableau 4.3 : erreur de reconstitution minimum obtenu par DWT

Tableau 4.4 : erreur de reconstitution minimum obtenue par LWT

Tableau 4.5 : erreur de reconstitution minimum obtenue par DWT

Tableau 4.6 : Taux de compression max pour une décomposition par DWT.

Tableau 4.7 : Taux de compression max pour une décomposition par LWT.

Tableau 4.8 : Performance de reconstitution max pou une décomposition par DWT.

Tableau 4.9 : Performance de reconstitution max pou une décomposition par LWT.

Tableau 4.10 : les performances moyennes optimales pour la compression.

Tableau 4.11 : Résultats pour l'EEG sujet sain.

Tableau 4.12 : Résultats pour l'EEG sujet sain.

Tableau 4.13: Les bandes de fréquences des différents niveaux de décompositions

Tableau 4.14. : Liste des ondelettes utilisées pour la classification.

Tableau 4.15 : taux de classification maximum.

Tableau 4.17 : matrice de confusion

Tableau 4.16 : Distribution des signaux tests et d'apprentissage.

## Liste des figures

Figure 1.1 Le cerveau humain [1].

Figure 1.2 : Neurone biologique [1].

Figure 1.3 : Activité électrique du neurone [2].

Figure 1.4 : exemple d'enregistrement EEG.

Figure 1.5 : Enregistrement EEG [2].

Figure 1.6 : Ondes alpha  $\alpha$ .

Figure 1.7 : Ondes mu  $\mu$ .

Figure 1.8 : Ondes bêta  $\beta$ .

Figure 1.9 : Ondes thêta  $\theta$ .

Figure 1.10 : Ondes delta  $\delta$ .

Figure 1.11 : Casque d'électrodes conventionnelles.

Figure 1.12 : Electrodes aiguilles.

Figure 1.13 : électrodes cupules

Figure 1.14 Emplacement des électrodes d'E.E.G. (système international) Crâne vu de

Figure 1.15 : Système d'acquisition.

Figure 2.1 Un signal et son spectre de Fourier [2]

Figure 2.2 : Exemple d'ondelette – l'ondelette de Morlet

Figure 2.3 : Comparaison entre la transformée de Fourier et la transformée en ondelettes [2].

Figure 2.4 : Décomposition à l'aide d'un banc de filtre.

Figure 2.5 : Décomposition et reconstitution à l'aide d'un banc de filtre.

Figure 2.6 : Ondelette Biorthogonal bior2.2.

Figure 2.7 : Schéma d'une implémentation en banc de filtres d'une transformation en ondelettes.

Figure 2.8 : exemple d'une ondelette Biorthogonal liftée.

Figure 2.9 : Décomposition et reconstitution par lifting d'ondelette.

Figure 3.1 : Algorithme de compression

Figure 3.2 : Caractéristique entrée sortie du seuillage dur.

Figure 3.3 : Caractéristique entrée sortie du seuillage doux.

Figure 4.12: Schéma général de la méthode de classification

Figure 4.1 : Erreur de reconstitution en fonction des ondelettes biorthogonales

Figure 4.2 : Erreur de reconstitution en fonction des ondelettes biorthogonales liftées.

Figure 4.3 : tracés des temps de décomposition par la LWT et la DWT.

Figure 4.3 : Evolution du taux de compression en fonction des ondelettes utilisées.

Figure 4.4 : Evolution de la performance de reconstitution en fonction des ondelettes

Figure 4.5 : Evolution du taux de compression moyen et écart type d'un ensemble de signaux EEG normaux et épileptique.

Figure 4.6 : Evolution de la performance de reconstitution moyen et écart type d'un ensemble de signaux EEG normaux et épileptique.

Figure 4.7 : Signal EEG sujet sain original avec le signal compressé.

Figure 4.8 : Signal EEG sujet sain original avec le signal compressé.

Figure 4.12: Schéma général de la méthode de classification

Figure 4.13 : Extraction des caractéristiques d'un signal EEG par ondelette.

Figure 4.14: Les coefficients de détails du signal EEG d'un sujet épileptique.

Figure 4.15 : distribution de la variance des coefficients de détails (DWT) pour 5

Figure 4.16 : distribution de la variance des coefficients de détails (LWT) pour 5

Figure 4.17: représentation des valeurs propres pour les deux bases de données

Figure 4.18 : projection sur les axes ACP de la base des variances  
a : décomposition par DWT, b : par LWT.

Figure 4.20: Schéma de classification.

Figure 21 : Taux de classification des deux générations d'ondelettes.

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : le signal électroencéphalogramme.</b>	
1.1. Introduction .....	3
1.2. Le cerveau .....	3
1.2.1. Structure du cerveau .....	4
1.2.2. Le neurone biologique.....	4
1.2.2.1. Structure des neurones .....	4
1.2.2.2. Fonction des neurones .....	5
1.3. Activité électrique .....	5
1.4. Enregistrement de l'EEG .....	7
1.5. Bandes de fréquences .....	8
1.5.1. Les principaux rythmes EEG.....	9
1.5.1.1. Le rythme alpha ( $\alpha$ ) .....	9
1.5.1.2. Le rythme mu ( $\mu$ ) .....	10
1.5.1.3. Le rythme bêta ( $\beta$ ) .....	10
1.5.1.4. Le rythme thêta ( $\theta$ ) .....	11
1.5.1.5. Le rythme delta ( $\delta$ ) .....	12
1.6. Méthodologie d'enregistrement .....	12
1.6.1. Les capteurs.....	13
1.6.1.1. Electrodes conventionnelles.....	13
1.6.1.2 Electrodes aiguilles.....	13
1.6.1.3 Electrodes cupules.....	14
1.6.2 Les chaînes d'amplification.....	14
1.6.3 Les filtres.....	15
1.6.3.1. Filtre passe-haut.....	15
1.6.3.2. Filtre passe-bas.....	15
1.6.4. Le système d'inscription.....	15
1.6.5. Les montages.....	15
1.6.5.1. Le montage monopolaire.....	16
1.6.5.2. Le montage bipolaire.....	16
1.6.5.3. L'électrode de terre.....	16
1.6.6. Emplacement des électrodes.....	17
1.6.7. L'enregistrement numérique.....	18

1.7. Conclusion .....	19
<b>Chapitre 2 : les ondelettes.</b>	
2.1 Introduction .....	20
2.2 État de l'art.....	20
2.3 Représentation de Fourier.....	20
2.3.1 La transformée de Fourier à fenêtre.....	22
2.4 Les ondelettes.....	22
2.4.1. Les différents types de transformées en ondelettes.....	23
2.4.2. La transformée en ondelette continue CWT.....	24
2.4.2.1 Condition de reconstitution du signal.....	25
2.4.3 La transformée en ondelette discrètes (DWT).....	26
2.4.3.1. L'analyse multirésolution .....	27
2.4.3.2. Ondelettes orthogonales .....	28
2.4.3.3. Ondelettes biorthogonales .....	29
2.5 Les ondelettes de seconde générations.....	31
2.5 .1. Description générale de la transformée en ondelettes version lifting.....	31
2.5.2. Lifting primaire .....	32
2.5.3. Lifting dual .....	33
2.5.4. Factorisation des filtres.....	34
2.6. Conclusion .....	35
<b>Chapitre 3 : Applications.</b>	
3.1. Compression du signal EEG par ondelettes.....	36
3.1.1. Introduction .....	36
3.1.2. La compression .....	37
3.1.3. Principe de la compression par ondelettes.....	37
3.1.3.1. La décomposition.....	37
3.1.3.2. Le seuillage.....	37
3.1.3.3. Types de seuillage .....	38
➤ Seuillage dur .....	38
➤ Seuillage doux .....	39
➤ Seuillage statique : .....	39
➤ Seuillage dynamique : .....	39

3.1.4. Evaluation de la compression .....	39
a) Taux de compression .....	40
b) Performance de la reconstitution .....	40
3.2. Classification des signaux EEG .....	40
3.2.1. Introduction .....	40
3.2.2 Classification .....	41
3.2.3. Chaîne de classification du signal EEG .....	41
3.2.4. Analyse par composante principale .....	42
3.2.4.1. Matrice d'apprentissage .....	42
3.2.4.2. Valeurs propres .....	43
3.2.4.3. Normalisation des données.....	43
3.2.4.4. Calcul de covariances et de corrélations.....	43
3.2.4.5. Critère d'inertie.....	44
3.2.4.6. Projection.....	44
3.2.4.7. Diagonalisation.....	45
3.2.5. Classification par K plus proche voisin (KPPV) .....	45
3.2.6. Performance de la classification.....	46
3.2.6.1. Taux de classification .....	46
3.2.7. Matrice de confusion.....	46
3.3. Conclusion.....	47

## **Chapitre 4 : Tests et résultats.**

4.1. Introduction.....	48
4.2. Compression du signal EEG.....	48
4.2.1. Choix de l'ondelette pour la compression du signal EEG.....	49
4.2.1.1. Enregistrement sur sujets sains .....	49
a) Résultats obtenus avec l'ondelette LWT.....	49
b) Résultats obtenus avec l'ondelette DWT .....	49
4.2.1.2. Enregistrement sur sujets épileptiques .....	50
a) Résultats obtenus avec l'ondelette LWT.....	50
b) Résultats obtenus avec l'ondelette DWT .....	50
4.2.2. Temps de calcul.....	52
4.2.3. Compression du signal EEG par ondelette.....	53

4.2.4. Résultats de la compression .....	58
4.3. Classification du signal EEG .....	60
4.3.1 Extraction des paramètres caractéristiques.....	60
4.3.2. Choix du niveau de décomposition .....	61
4.3.3. Calcul de la variance.....	62
4.3.4. La classification par KPPV.....	65
4.3.4.1. Application.....	65
4.3.5. Résultats de la classification.....	67
4.4. Conclusion.....	68
<b>Conclusion générale</b> .....	<b>69</b>

## **Références bibliographiques**

## **Annexe**

# INTRODUCTION

## GÉNÉRALE

## **Introduction générale**

L'électro-encéphalographie (EEG) est une méthode d'exploration cérébrale qui mesure l'activité électrique du cerveau, par des électrodes placées sur le cuir chevelu, souvent représentée sous la forme d'un tracé appelé électro-encéphalogramme. L'EEG est un examen indolore et non-invasif qui renseigne sur l'activité neurophysiologique du cerveau au cours du temps et en particulier du cortex cérébral soit dans un but de diagnostic en neurologie, soit dans la recherche en neurosciences cognitives.

Depuis sa découverte par Hans Berger, de nombreuses recherches ont porté sur la façon d'extraire automatiquement des informations utiles sur le cerveau moyennant les caractéristiques pertinentes des signaux EEG. De nombreuses applications nécessitent l'acquisition, le stockage et le traitement automatique de l'EEG au cours d'une période de temps prolongée. Par exemple, 24 heures de suivi d'un multi-canal EEG est nécessaire pour les patients épileptiques.

La grande quantité de données impliquées dans la collecte d'informations EEG, nécessite plus de mémoire pour le stockage et une bande passante élevée pour la transmission. La compression sans perte de l'EEG est indispensable en raison de la nécessité pour la récupération exacte des données à des fins de diagnostic. Ces applications font appel aux techniques d'analyse du traitement du signal EEG. Souvent, ces techniques ne peuvent être étudiées telles quelles et doivent subir une étape de transformation nécessaire à l'augmentation de l'efficacité du traitement. Cette étape de transformation permet de représenter le signal à traiter d'une manière plus adaptée au traitement envisagé, elle consistera à extraire l'information importante pour les applications de reconnaissance de forme, ou à représenter l'information de manière plus compacte, propice à la compression.

Ces dix dernières années, une technique d'analyse du signal, la transformée en ondelette a acquis de par ses qualités intrinsèques, des caractéristiques intéressantes dans de nombreux domaines du traitement du signal en particulier le signal électroencéphalogramme (EEG).

Associée à l'analyse multirésolution, elle permet l'étude des signaux (EEG) à différentes échelles.

Notre travail se base sur l'application de deux techniques utilisant les ondelettes. La première étant la transformée en ondelette discrète (DWT) et la seconde, la transformée en ondelette liftée (LWT). Deux applications seront mises au point : la compression et le diagnostic. Une étude comparative entre la DWT et LWT permettra d'apprécier les performances des deux techniques.

Nous aborderons dans le premier chapitre une description des signaux électro-encéphalographiques EEG. En partant de leurs origines anatomiques et physiologiques, nous donnerons les caractéristiques et les paramètres de ces signaux ainsi que la méthode de leur acquisition.

Dans le deuxième chapitre nous présenterons la transformée en ondelette et les deux techniques associées, voir la transformée en ondelette discrète DWT et la transformée en ondelette liftée LWT.

Le troisième chapitre portera sur les applications des deux techniques de la transformée en ondelettes en vue d'une compression ou d'une classification.

Enfin dans le quatrième et dernier chapitre, nous exposerons les résultats obtenus dans les deux applications avec interprétations en se basant sur une étude comparative entre la DWT et LWT.

# CHAPITRE I

## LE SIGNAL EEG

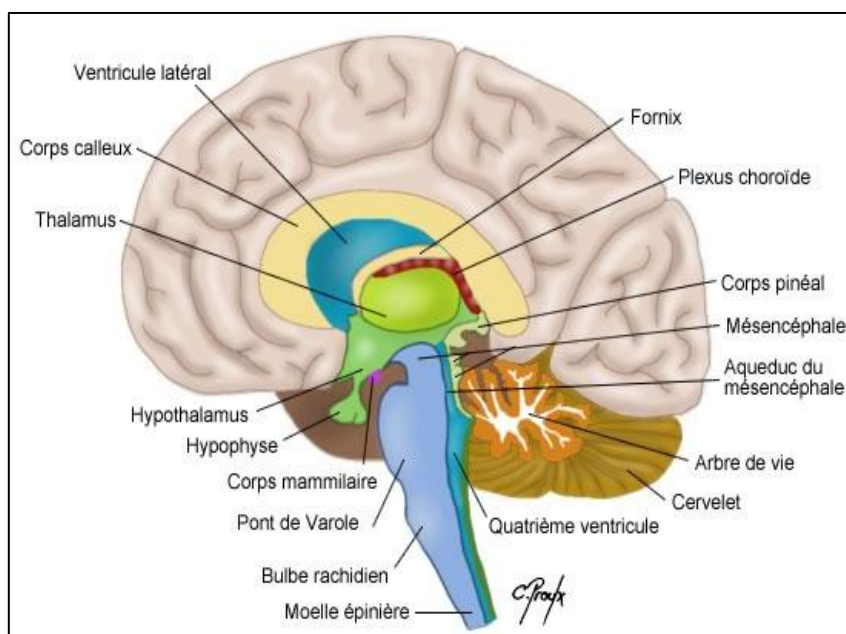
## 1.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons le signal électroencéphalogramme (EEG), ses origines et les techniques adoptées pour l'obtention de son tracé. La connaissance des caractéristiques temporelles et fréquentielles du EEG nous permettra de justifier le choix de la transformée en ondelette en vue de sa compression ou sa classification.

## 1.2. Le cerveau

Situé dans la boîte crânienne, le cerveau (figure 1.1) est le siège des fonctions supérieures (fonctions cognitives, sens, réponses nerveuses) et végétatives. C'est un organe essentiel qui assure la régulation de toutes les fonctions vitales. Le cerveau reçoit des informations provenant de l'ensemble du corps humain via des nerfs afférents, les intègre et les analyse puis répond en émettant de nouveaux signaux qui redescendent vers les parties du corps concernées par les nerfs efférents.

Le cerveau est ainsi responsable du rythme cardiaque et respiratoire, des fonctions qui pour nous sont imperceptibles. Mais il est aussi impliqué dans la prise de décision, dans la motricité du corps, le comportement, la mémoire, la conscience. Le cerveau a été cartographié et certaines zones semblent associées à des fonctions précises (aire de la parole...), alors que les fonctions plus complexes (la mémoire, la conscience) semblent être beaucoup plus réparties.



**Figure 1.1 Le cerveau humain [53].**

### **1.2.1 Structure du cerveau**

Le cerveau humain comporte environ 100 milliards de neurones et possède un poids moyen de 1.300 à 1.400 grammes. Il contient également des cellules gliales et des astrocytes. Il baigne dans le liquide céphalo-rachidien. Il est composé de deux hémisphères, droit et gauche, connectés entre eux par le corps calleux composé de substance blanche (axones gainés de myéline). Divisés en lobes, les hémisphères sont les parties les plus développées chez les mammifères [1]. Il est divisé en plusieurs parties, en fonction de leur origine embryonnaire :

- le télencéphale, la partie supérieure, composé du cortex cérébral et du striatum ;
- le diencephale qui contient le thalamus et l'hypothalamus (glandes endocrines) ;
- le mésencéphale ;
- le cervelet (coordination motrice et apprentissage des mouvements routiniers) ;
- le pont de Varole ;
- le bulbe rachidien (contrôle des mouvements réflexes et végétatifs : respiration, modulation du rythme cardiaque, régulation des muscles lisses artériels) qui communique avec la moelle épinière.

Le cortex cérébral constitue la couche externe du cerveau et comporte la majorité des neurones (substance grise). Les méninges sont des enveloppes protectrices (dure-mère, arachnoïde et pie-mère) entre le cortex et l'os du crâne. Le cortex cérébral est subdivisé en cinq lobes cérébraux en fonction de leur position :

- le lobe frontal (motricité, mémoire, raisonnement) ;
- le lobe pariétal (toucher) ;
- le lobe temporal (ouïe, odorat) ;
- le lobe occipital (vision) ;
- le lobe limbique.

### **1.2.2. Le neurone biologique**

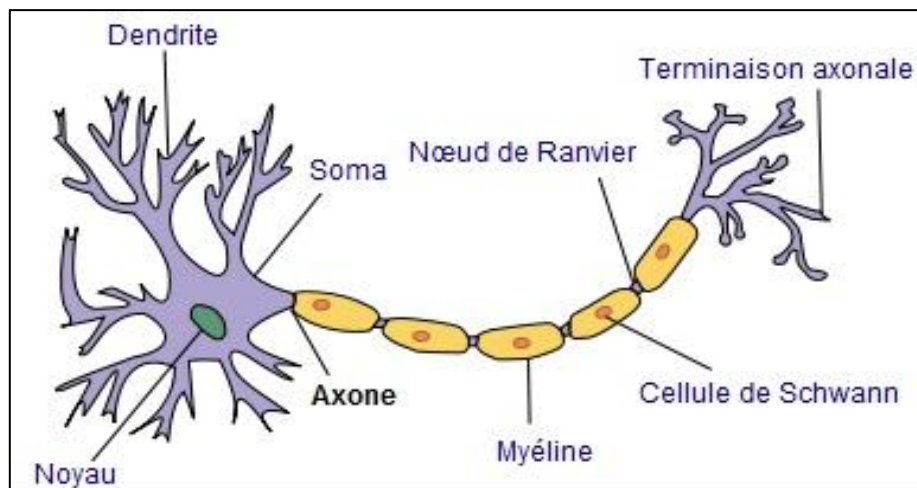
Un neurone est une cellule du système nerveux spécialisée dans la communication et le traitement d'informations.

#### **1.2.2.1. Structure des neurones**

Chaque neurone (figure 1.2) est composé :

- d'un corps cellulaire ou péricaryon comportant le noyau ;
- de très nombreuses ramifications de type dendritiques (d'où proviennent les informations) ;
- et d'un axone (par où sont diffusées les informations) dont la longueur peut atteindre 1 mètre pour seulement 1 à 15 micromètres de diamètre. Il est entouré par des cellules de Schwann (séparées par les nœuds de Ranvier) qui confèrent une gaine de myéline protectrice tout le long de l'axone.

Axones et dendrites de neurones différents entrent en contact et transmettent l'information de cellule à cellule via des structures spécialisées : les synapses.



**Figure 1.2 : Neurone biologique [45].**

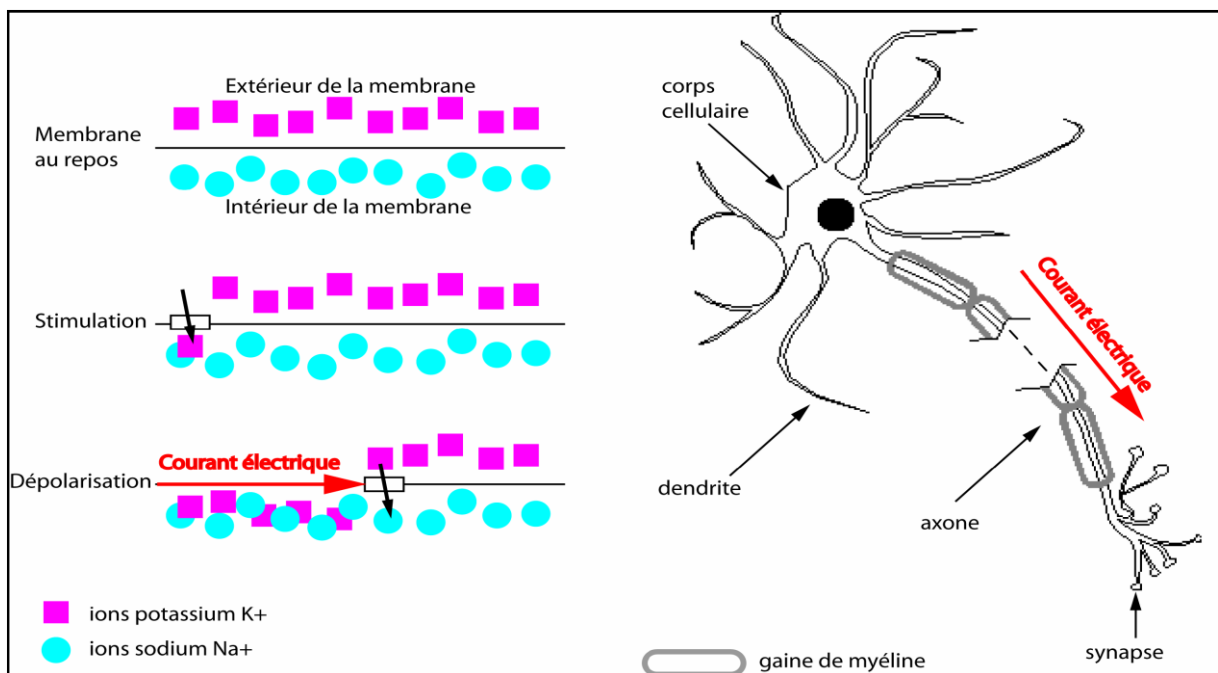
### 1.2.2.2. Fonction des neurones

Les neurones ont pour rôle de faire circuler les informations entre l'environnement et l'organisme, ou au sein de l'organisme. Un neurone est une cellule excitable, c'est-à-dire qu'un stimulus peut entraîner la formation dans la cellule d'un signal bioélectrique ou influx nerveux, qui pourra être transmis à d'autres neurones ou à d'autres tissus pour les activer (des muscles, des glandes sécrétrices...). Les neurones sont au nombre de 100 milliards dans le cerveau humain et sont donc capables de créer un réseau incroyablement complexe, avec parfois plus de 100.000 synapses par neurone.

### 1.3.1. Activité électrique

Au repos, les ions sodium ( $\text{Na}^+$ ) sont plus concentrés à l'intérieur de la membrane du

neurone, alors que les ions potassium ( $K^+$ ) sont plus concentrés à l'extérieur. Les neurones échangent des influx nerveux véhiculés par la dépolarisation de leur membrane (Figure 1.3). Lors d'une stimulation de la membrane, les ions sodium traversent celle-ci à l'emplacement de la stimulation, puis cette réaction se propage le long de la membrane, ce qui crée le potentiel d'action (la décharge électrique enregistrée lors de la dépolarisation du neurone). Ces échanges d'ions chargés électriquement, produisent un courant électrique qui peut être capté si une électrode est placée à l'extérieur du neurone. Si plusieurs neurones sont dans le voisinage de l'électrode, cette dernière enregistre l'ensemble des activités de ces neurones. L'enregistrement extracellulaire est l'électroencéphalogramme EEG.



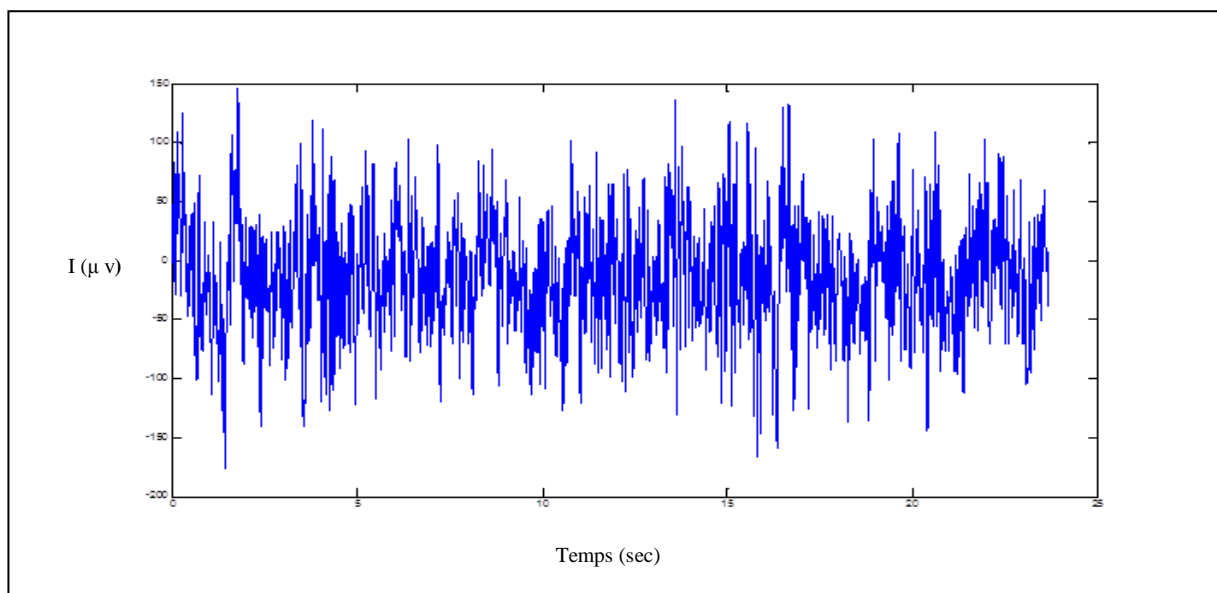
**Figure 1.3 : Activité électrique du neurone [1].**

À gauche, c'est le mécanisme de la dépolarisation; à droite c'est la propagation du courant électrique (ou potentiel d'action) dans le neurone. Lorsqu'un stimulus (par exemple par l'arrivée d'un neurotransmetteur) provoque l'apport d'ions de sodium dans la membrane, une activité électrique se propage le long de l'axone. Les gaines isolantes de myéline permettent d'accélérer la circulation de la dépolarisation. Seuls les nœuds entre ces parties isolées (les nœuds de Ranvier, figure 1.2) se dépolarisent. Après la phase de dépolarisation, suit une phase de repolarisation de la membrane (les ions potassium sortent de la membrane). Enfin,

les ions retournent à leurs positions de départ : l'action des pompes à sodium/potassium replace les ions potassium à l'extérieur et les ions sodium à l'intérieur de la membrane.

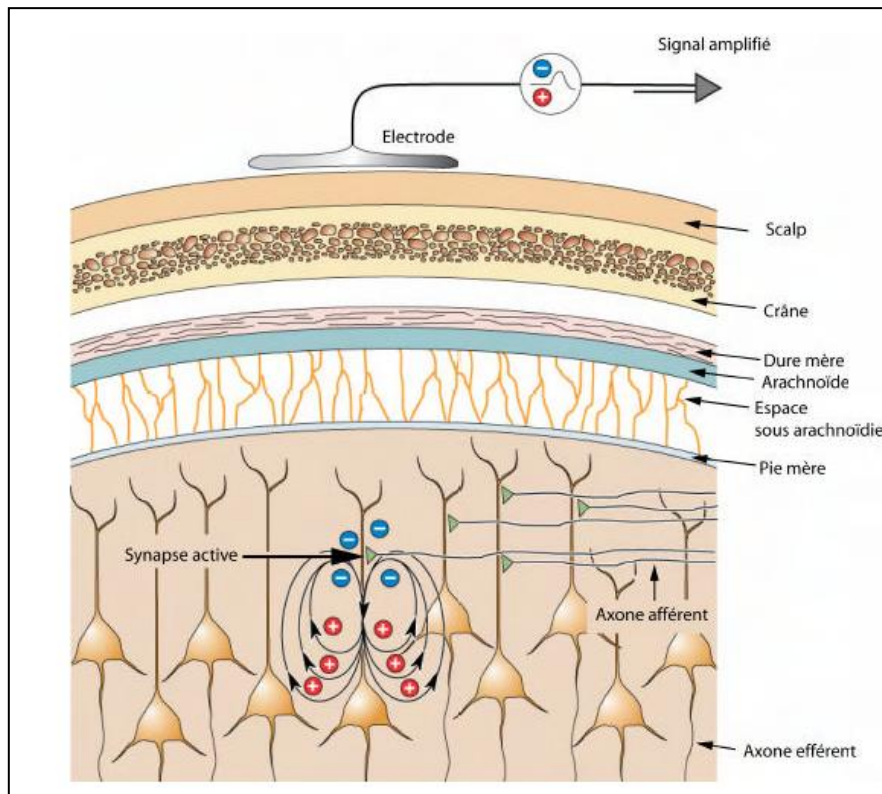
#### 1.4. Enregistrement de l'EEG :

Le principe de l'EEG est de recueillir des signaux électriques en surface, au niveau du scalp, par des électrodes de taille importante (diamètre de l'ordre du centimètre). Ces signaux doivent donc traverser une grande épaisseur d'os et de tissus divers. La tension engendrée par les cellules cérébrales et enregistrée par l'EEG est extrêmement faible (figure 1.4) : le crâne est un très mauvais conducteur d'électricité, ce qui rend difficile la transmission des signaux électriques vers le cuir chevelu.



**Figure 1.4 : exemple d'enregistrement EEG.**

L'alignement des cellules est la condition pour que leur activité puisse être enregistrée : les cellules qui ne sont pas alignées annulent mutuellement leurs signaux. Par exemple, les cellules pyramidales du cortex sont organisées de façon verticale (en colonnes parallèles): leurs potentiels peuvent donc se sommer (Figure 1.5). Les cellules de l'amygdale, par contre, sont mal alignées les unes par rapport aux autres. De plus, les électrodes de surface captent principalement les courants perpendiculaires au scalp. Les replis du néocortex dans de nombreuses directions ne produisent donc pas tous des courants détectables en surface [1]. L'activité EEG correspond donc essentiellement à l'activité post synaptique des cellules pyramidales corticales alignées perpendiculairement au scalp, avec une résolution spatiale de l'ordre du centimètre.



**Figure 1.5 : Enregistrement EEG [2].**

L'activité électrique des neurones est enregistrée par une électrode placée sur le scalp. Si les neurones sont orientés parallèlement, comme c'est le cas pour les cellules pyramidales du cortex représentées ici (en colonnes verticales parallèles), les courants de la population de neurones peuvent se sommer ; sinon les cellules annulent mutuellement leurs signaux.

### **1.5. Bandes de fréquences :**

L'activité rythmique EEG est usuellement subdivisée en bandes de fréquences : delta (la plus basse), thêta, alpha, beta et gamma (la plus haute). Cette classification était originellement fondée sur la corrélation d'enregistrements EEG de chacune de ces bandes avec un état comportemental distinct. Il n'existe cependant pas actuellement de consensus au sujet des limites précises données à ces bandes ; nous avons utilisé, pour le présent travail, les intervalles indiqués dans le Tableau 1.1. [2][3][4][5].

Bandes de fréquence	Pour les signaux EEG
delta	< 4Hz
thêta	3.5 à 7.5 Hz
alpha	7.5 à 12.5 Hz
mu	8 à 12 Hz
beta	12.5 à 25 Hz
gamma	40 Hz

**Tableau 1.1 : bandes de fréquences du signal EEG**

### 1.5.1. Les principaux rythmes EEG.

Un rythme cérébral désigne une oscillation électromagnétique dans une bande de fréquences donnée résultant de l'activité électrique cohérente d'un grand nombre de neurones du cerveau telle que l'on peut observer en électroencéphalographie (EEG). Ces ondes sont de très faible amplitude de l'ordre du microvolt (chez l'être humain) et ne suivent pas toujours une sinusoïde régulière.

Les caractéristiques des rythmes cérébraux dépendent de l'état psychologique et, le cas échéant, pathologique de la personne chez qui on les enregistre. Ainsi, l'enregistrement de l'activité rythmique cérébrale permet d'étudier les phases du sommeil ou de caractériser des maladies neurologiques, telles que l'épilepsie et l'apnée [annexe A].

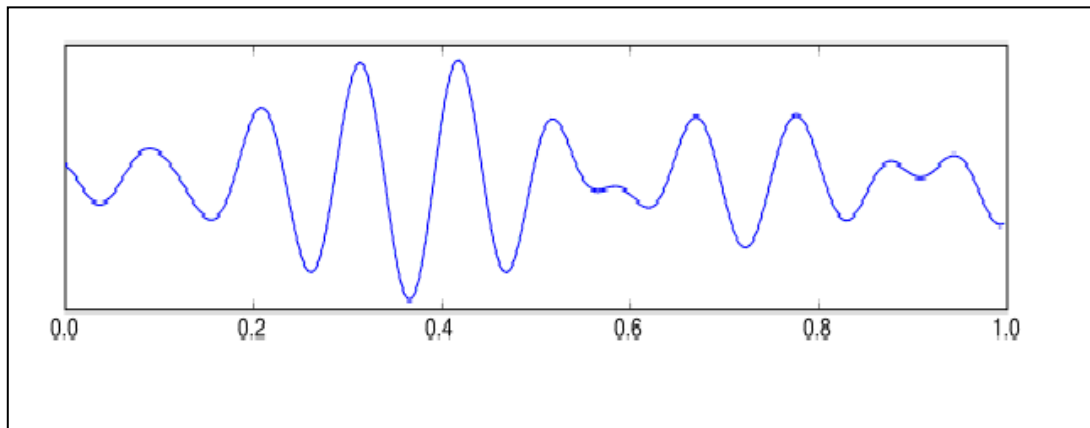
Les principaux rythmes de l'EEG sont :

#### 1.5.1.1. Le rythme alpha ( $\alpha$ ) :

- Fréquence : de 7,5 à 12,5 Hz ou cycles /s.
- Amplitude : de 20 à 50  $\mu$ v.
- Aspect : ondes sinusoïdales régulières formant le plus souvent des fuseaux, en général synchrones à droite et à gauche.
- Symétrique en fréquence, mais l'amplitude et la longueur des fuseaux varient souvent suivant la dominance hémisphérique.
- Situation : dérivations occipitales, mais extension fréquente aux aires pariétales et même frontales.
- Circonstances d'apparition : c'est le rythme dit "de repos"; il survient quand le sujet est allongé, les yeux fermés à l'abri de toute stimulation sensorielle, sans toutefois s'endormir. Ce rythme est labile : il disparaît à l'ouverture des yeux, caractéristique appelée « réaction d'arrêt visuelle ». Une réaction comparable (blocage du rythme alpha) s'observe aussi lors

d'un effort d'attention (calcul mental) ou d'une réaction émotive.

- Ce rythme est observé dès l'âge de 7-8 ans. Il devient prédominant vers 15 ans.



**Figure 1.6 : Ondes alpha ( $\alpha$ ).**

#### **1.5.1.2. Le rythme mu ( $\mu$ ) :**

- Fréquence : dans la bande alpha (8 à 12 Hz ou c/s).

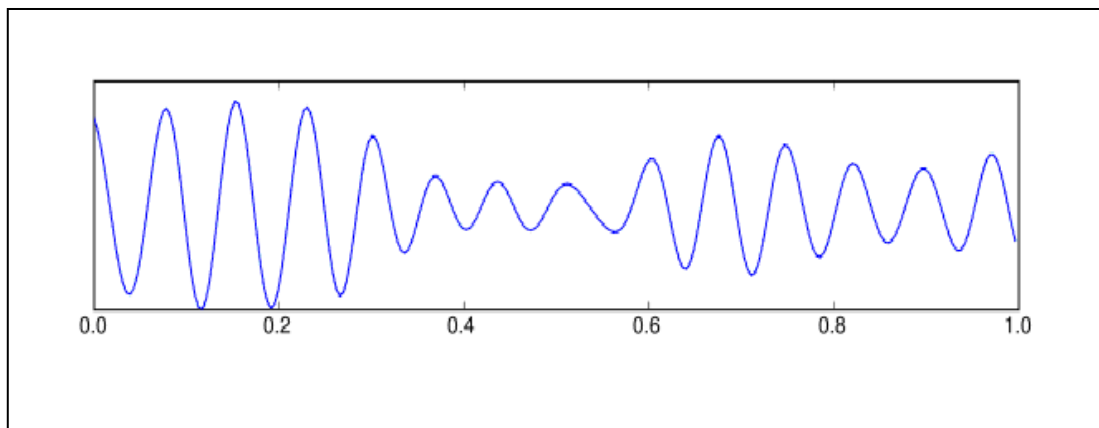
- Amplitude : souvent supérieure au rythme alpha.

- Localisation : rolandique.

- Morphologie : survient en bouffée, aspect en "arceaux".

- Réactivité : il apparaît quand le sujet éprouve le besoin de bouger mais respecte les consignes d'immobilité de l'examen, et il se bloque pendant le mouvement.

- Rarement observé mais rythme normal.

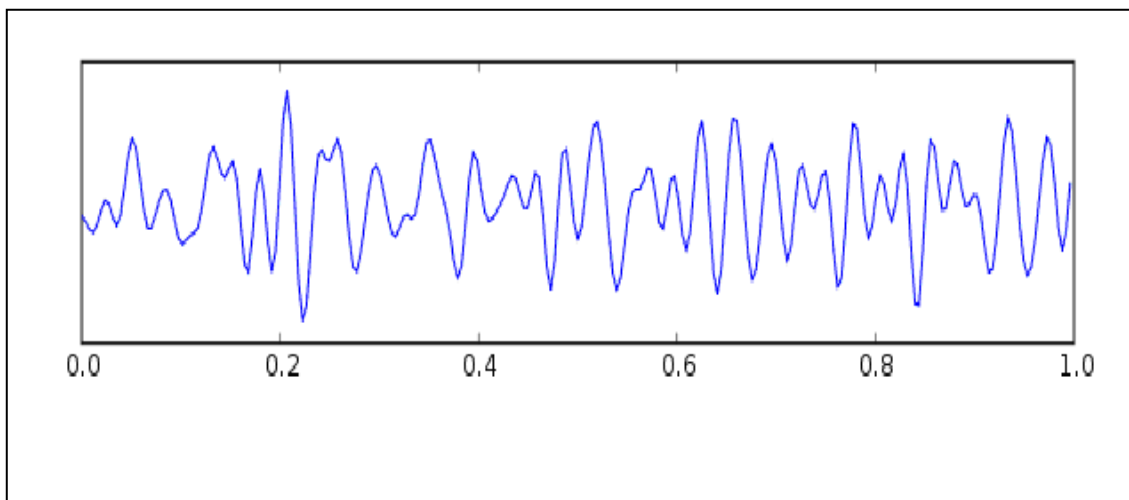


**Figure 1.7 : Ondes mu ( $\mu$ ).**

#### **1.5.1.3. Le rythme bêta ( $\beta$ ) :**

- Fréquence : 13 à 25 Hz.

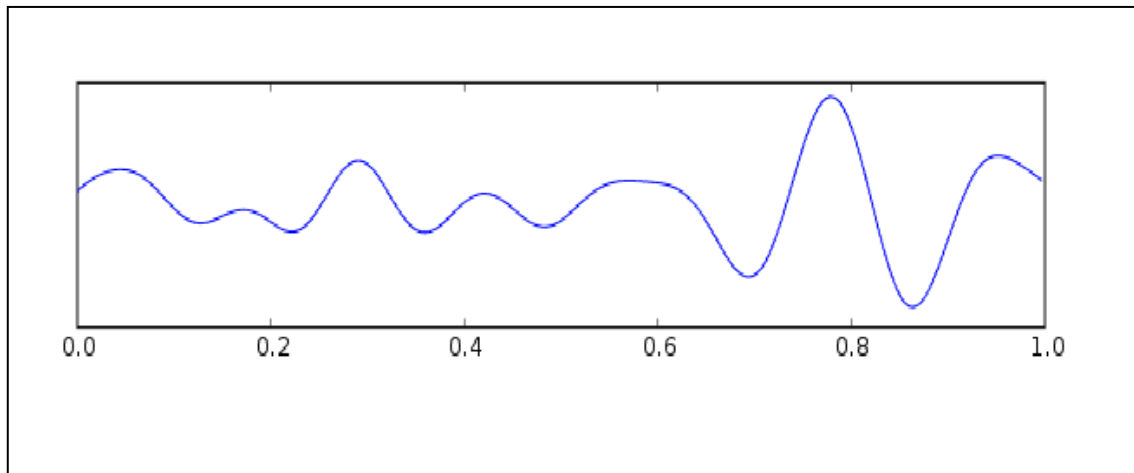
- Amplitude : 5 à 10  $\mu\text{V}$ .
- Aspect : ondes sinusoïdales très peu amples, irrégulières, difficiles à visualiser, et difficilement discernables de l'électromyogramme (EMG).
- Situation : régions frontales essentiellement, et régions rolandiques.
- Circonstances d'apparition : rythme de l'adulte au repos et éveillé, il peut être bloqué lors de l'exécution volontaire d'un mouvement.
- Il apparaît vers l'âge de 15 ans, à l'adolescence.



**Figure 1.8 : Ondes bêta ( $\beta$ ).**

#### **1.5.1.4. Le rythme thêta ( $\theta$ ) :**

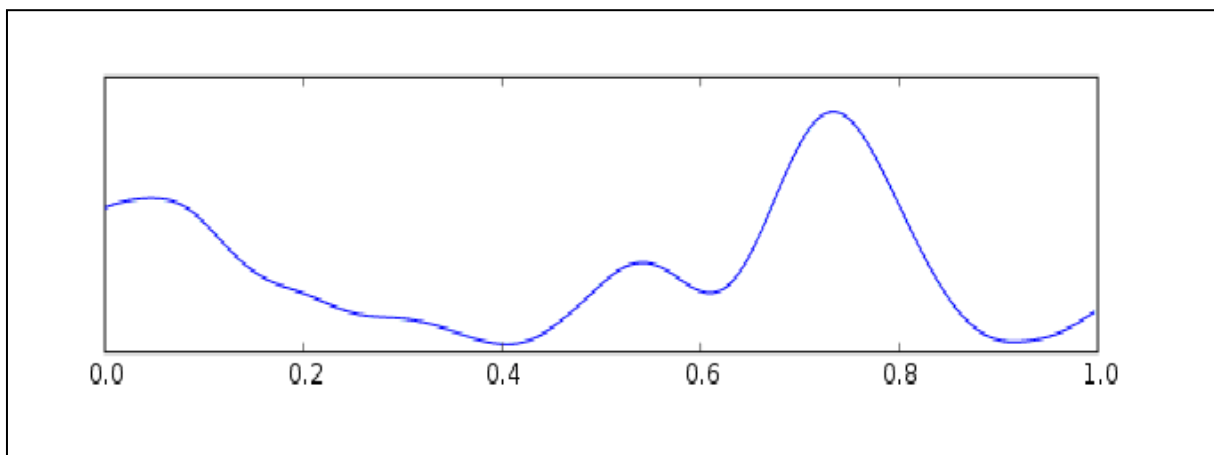
- Fréquence : 4 à 7 Hz.
- Amplitude : 50  $\mu\text{V}$ .
- Aspect : ondes sinusoïdales assez amples, il survient en général par bouffées fusiformes, brèves et bilatérales.
- Situation : régions temporales.
- Circonstances d'apparition : normalement présent, mais peu abondant, il est souvent masqué par le rythme alpha.
- Abondant chez l'enfant.



**Figure 1.9 : Ondes thêta ( $\theta$ ).**

#### **1.5.1.5. Le rythme delta ( $\delta$ ) :**

- Fréquence :  $< 4$  Hz.
- Amplitude grande mais très variable.
- Aspect variable : on distingue classiquement les ondes delta monomorphes lentes et régulières, et les ondes delta polymorphes plus irrégulières, plus lentes et moins amples.
- Circonstances d'apparition : il n'est jamais présent chez l'adulte éveillé au repos, mais on le rencontre pendant le sommeil lent et profond.



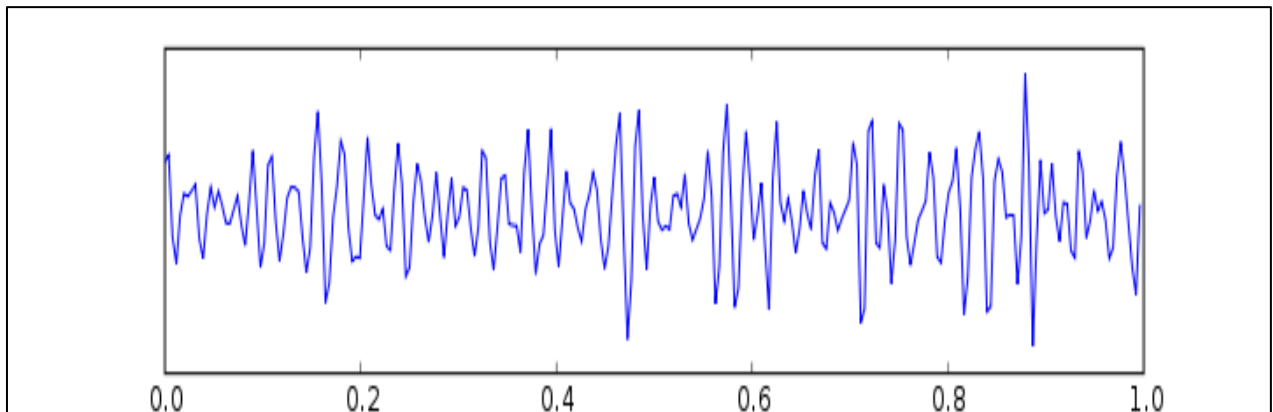
**Figure 1.10 : Ondes delta ( $\delta$ ).**

#### **1.5.1.6. Le rythme gamma ( $\gamma$ ) :**

Fréquence : 35 jusqu'à 120 Hz

- Amplitude : souvent supérieure au rythme bêta.
- Localisation : rolandique.

- Morphologie : lors du sommeil paradoxal, ou lors de perceptions spécifiques, voire d'activités cognitives particulières (par exemple, l'insight s'accompagne d'un brusque changement de 20 à 40 hertz, comme la perception d'une odeur familière).
- Réactivité : On le rencontre souvent au réveil lorsque l'attention est portée sur un stimulus particulier.
- Rarement observé.



**Figure 1.11 : Ondes gamma ( $\gamma$ ).**

## **1.6. Méthodologie d'enregistrement**

Nous décrivons la méthode conventionnelle d'enregistrement d'un électro-encéphalogramme,

### **1.6.1. Les capteurs**

#### **1.6.1.1. Electrodes conventionnelles**

Les électrodes de type Grey-Walter sont constituées d'une tige d'argent, recouverte d'un tampon de tissu imbibé d'une solution saline. Elles sont montées sur un support stabilisateur qui leur permet de tenir droites sur le scalp et sont maintenues par un petit crochet qui vient s'agripper sur une des lanières du casque (figure 1.11). Le casque est une sorte de filet, fait de lanières de caoutchouc entrecroisées, que l'on fixe sur la tête du sujet et qui sert à maintenir en place les électrodes. Il est indispensable d'effectuer un décapage soigneux du cuir chevelu avec de l'éther puis d'appliquer une pâte salée aux endroits où seront posées les électrodes.

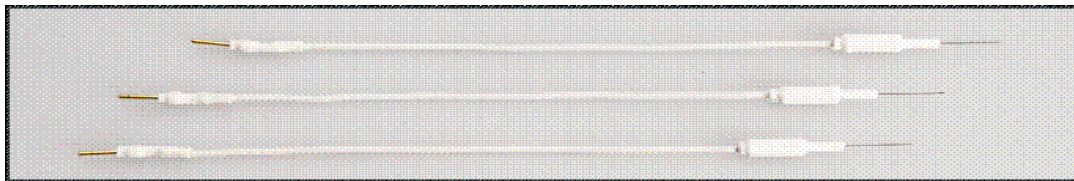
Ces électrodes restent les plus largement utilisées dans les conditions courantes.



**Figure 1.11 : Casque d'électrodes conventionnelles.**

### 1.6.1.2 Electrodes aiguilles

Leurs extrémités sont piquées dans l'épaisseur du scalp (aiguilles sous-cutanées à usage unique). Au prix d'une petite douleur, ces électrodes (figure 1.12) offrent un contact électrique de bonne qualité et une résistance peau/ électrode pratiquement constante. Leur usage s'impose lorsqu'il est impératif de recueillir l'EEG dans des conditions techniques optimales, par exemple pour l'évaluation des comas profonds.



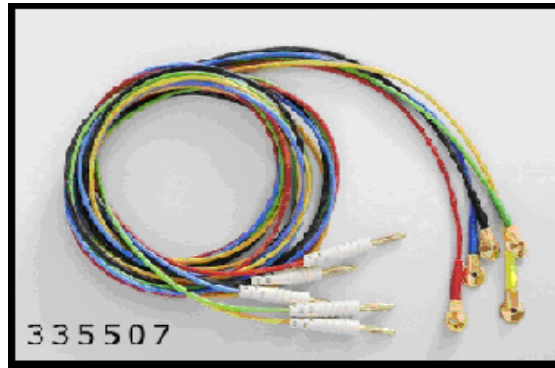
**Figure 1.12 : Electrodes aiguilles.**

### 1.6.1.3 Electrodes cupules

Ces électrodes (figure 1.13) sont remplies de pâte conductrice et sont collées sur le scalp (soit par effet adhésif propre de la pâte, soit par l'intermédiaire de collodion imprégnant un morceau de gaze chirurgicale placée au dessus de l'électrode).

Ces électrodes sont reliées à l'appareil d'enregistrement au moyen de simples fils isolés. Dans tous les cas, il est nécessaire de s'assurer de la continuité électrique et de la bonne qualité de l'interface électrochimique (électrode – électrolyte – peau). Pour ce faire, on mesure l'impédance des électrodes. Cette mesure est faite, selon les appareils, par rapport à une électrode de référence (électrode dite de terre) ou par rapport à l'ensemble des autres électrodes disposées à la surface du scalp.

Ces électrodes sont utilisées pour les enregistrements prolongés (par exemple en télémétrie ou au cours du sommeil).



**Figure 1.13 : électrodes cupules**

### **1.6.2 Les chaînes d'amplification**

La relative faiblesse des tensions à enregistrer, de l'ordre du microvolt ( $\mu\text{V}$ ), et leur basse fréquence, nécessitent un dispositif d'amplification sélective ayant un gain élevé. Le gain est le rapport du signal de sortie au signal d'entrée (il peut être exprimé en dB).

A chaque amplificateur correspond un système d'inscription, qui transmet à une plume les variations de potentiel qu'il reçoit, de sorte que celles-ci se trouvent traduites sur le papier d'enregistrement en déflexions de la plume proportionnelles au voltage. La sensibilité est le rapport du signal d'entrée en microvolts ( $\mu\text{V}$ ) à la déflexion de la plume mesurée en millimètres. Il est important de connaître la sensibilité à laquelle l'enregistrement est effectué (calibrage). Par convention, les amplificateurs EEG sont construits de telle façon que lorsque le potentiel de la première électrode est négatif par rapport à celui de la seconde, la plume dévie vers le haut.

### **1.6.3 Les filtres**

Les potentiels générés par le cerveau varient au cours du temps et forment des rythmes. Les rythmes cérébraux sont caractérisés par des fréquences comprises entre 0,5 à 80 voire 100 cycles par seconde (Hz) environ mais, dans la pratique courante, on se contente d'enregistrer les fréquences comprises entre 0,5 et 40 Hz. Pour éliminer des activités électriques parasites, on utilise deux types de filtres :

#### **1.6.3.1. Filtre passe-haut**

On utilise ces filtres pour ôter la composante continue ou pour atténuer la composante alternative de basse fréquence. Sur la calibration, la constante de temps correspond au temps que met la plume pour revenir au tiers de sa déviation initiale, lorsqu'une tension constante est appliquée à l'appareil.

### **1.6.3.2. Filtre passe-bas**

Il permet d'éliminer les variations rapides de potentiel qui ne sont pas d'origine électroencéphalographique.

### **1.6.4. Le système d'inscription**

La plume transcrit sur le papier les variations de potentiel en fonction du temps. L'échelle de temps utilisée a pour unité la seconde. Tout appareil dispose de plusieurs vitesses de déroulement du papier. La vitesse habituellement utilisée est de 15 mm par seconde. Le papier d'enregistrement présente des graduations verticales : 2 traits gras sont espacés de 15 mm, ce qui correspond donc à une seconde. 2 traits fins délimitent 2/10 èmes de seconde.

Le mouvement de la plume se fait perpendiculairement au sens de déroulement du papier.

L'étalonnage de l'appareil est réglable. En principe, ce réglage est établi (par calibrage) en sorte qu'une déflexion de la plume de 5 mm corresponde à une variation de potentiel de 50  $\mu\text{V}$ . Un circuit autonome délivre sur demande un niveau de tension calibrée de 50  $\mu\text{V}$  permettant d'effectuer l'étalonnage.

### **1.6.5. Les montages**

On appelle « montage » la combinaison qui fait correspondre à deux électrodes un amplificateur et un système d'inscription, c'est à dire une voie (ou dérivation).

#### **1.6.5.1. Le montage monopolaire**

Chaque couple d'électrodes est constitué d'une électrode du scalp "active" et d'une référence.

Problème du choix de la référence : sur le plan théorique, la méthode monopolaire consiste à enregistrer le potentiel "absolu" d'un point du scalp, c'est à dire la différence entre le potentiel du point étudié et le potentiel nul. Le potentiel nul est celui d'un point à l'infini ou par approximation situé loin du point enregistré. La référence la plus satisfaisante serait donc une électrode extra-céphalique, par exemple de type sterno-épineuse, mais en pratique elle n'est utilisable que dans un cas sur cinq en raison des artefacts électro cardiographiques.

Certains auteurs préfèrent choisir une électrode céphalique, sur le menton ou le nez, ou encore un couple d'électrodes placées sur chaque mastoïde ou aux deux lobes des oreilles (dans ce cas on relie entre elles les deux électrodes) mais l'inconvénient est une diffusion de l'activité électrique à partir des régions cérébrales voisines.

Il est possible d'employer aussi une référence électronique obtenue en liant plusieurs électrodes et donnant ainsi un potentiel moyen qui sert de référence. Cet artifice dit référence

moyenne de Wilson, constitué par l'ensemble des électrodes reliées entre elles au travers d'une résistance élevée, est souvent utilisé bien qu'ayant l'inconvénient de privilégier, parfois l'activité d'un capteur prédominant (recueillant un signal de grande amplitude).

### **1.6.5.2. Le montage bipolaire**

On distingue les montages :

- Longitudinaux supérieur et inférieur qui suivent les électrodes de proche en proche d'avant en arrière.
- Transversaux antérieur, moyen et postérieur qui les suivent de droite à gauche
- En éventail qui conservent toujours une même électrode (temporale) et l'apparient successivement avec chacune des électrodes placées sur une ligne longitudinale.
- Standards qui décrivent une sorte de zigzag associant de façon synthétique les montages longitudinaux et en éventail simplifiés.

### **1.6.5.3. L'électrode de terre**

L'électrode de terre est placée de préférence à distance du scalp, mais lorsqu'elle se trouve au niveau du poignet, les enregistrements obtenus sont fréquemment parasités par des activités électrocardiographiques, ce qui rend parfois nécessaire l'utilisation d'une terre collée sur le front. Cette dernière solution devrait cependant être évitée car elle présente l'inconvénient d'imposer un potentiel à proximité des sources d'activités électriques cérébrales. Une bonne solution est la mise en place d'une terre sur l'épaule.

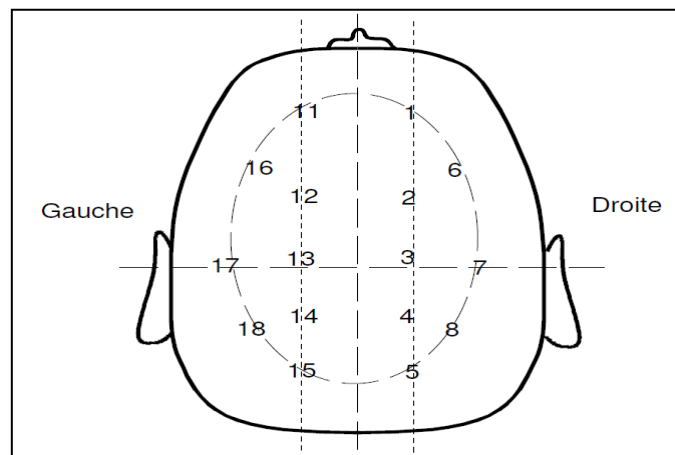
### **1.6.6. Emplacement des électrodes**

Depuis 1957, le système le plus couramment utilisé pour l'emplacement des électrodes, est le système 10-20 : La ligne de départ de ce système est celle qui réunit le nasion et l'inion en passant par le vertex [annexe B]. Cette ligne est divisée en 6 parties : 10% de la longueur sont portés au-dessus du nasion pour former le plan frontal et 10% au-dessus de l'inion pour le plan occipital; le reste est divisé en 4 parties égales représentant chacune 20% de la longueur totale [6]. On peut retenir comme repères pour les 8 électrodes actives minimales à placer (figure 1.14) :

- Les électrodes frontales droite (1) et gauche (11) sont situées à 1 cm en avant de l'insertion des cheveux et à 4 cm de la ligne médiane.

- Les électrodes centrales (rolandiques) droite (3) et gauche (13) sont placées dans le prolongement des lobes des oreilles et à 4 cm de la ligne médiane.
- Les électrodes occipitales droites (5) et gauches (15) se trouvent à 2 cm au-dessus de la protubérance occipitale et à 4 cm de la ligne médiane.
- Les électrodes temporales droites (7) et gauches (17) se trouvent à mi-distance des électrodes centrales et des sommets des lobes de l'oreille.

Il est très important que les électrodes soient disposées de façon symétrique. Le tableau 1.2 résume la numérotation des électrodes.



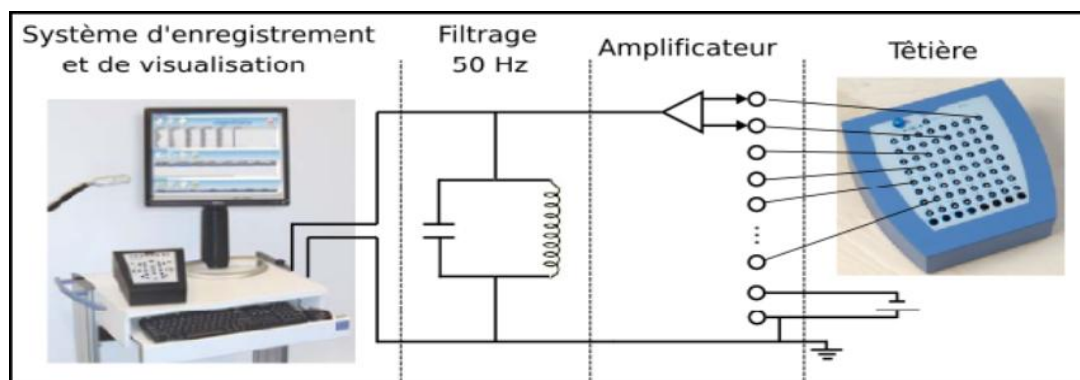
**Figure 1.14 Emplacement des électrodes d'E.E.G. (système international) Crâne vu de dessus**

Topographie	Côté Gauche	Côté Droit
Frontale	11	1
Fronto-pariétale	12	2
Pariétale	13	3
Pariéto-occipitale	14	4
Occipitale	15	5
Fronto-temporale	16	6
Temporale	17	7
Temporo-occipitale	18	8

**Tableau 1.2 Numérotation des électrodes**

### 1.6.7. L'enregistrement numérique

Depuis plusieurs années, les appareils traditionnels à plumes (dits analogiques) sont remplacés par des appareils numériques construits sur une base d'ordinateur (figure 1.15). Le principe est le même mais le signal (variation d'amplitude en fonction du temps) est enregistré après conversion analogique / numérique (A/N) sous forme d'une suite de chiffres. La conversion A/N consiste à mesurer, à intervalles réguliers choisis en fonction de la fréquence maximale du signal à enregistrer, l'amplitude du signal analogique. Elle est assurée en temps réel par un convertisseur analogique - numérique pour chacun des signaux recueillis par les électrodes. L'électroencéphalogramme est ensuite affiché sur un écran graphique et éventuellement imprimé. Un des avantages principaux de cette méthode est de pouvoir calculer le résultat (montage) de n'importe quelle combinaison d'électrodes. De plus, on peut appliquer aux signaux recueillis des techniques de traitement du signal plus sophistiquées depuis, le filtrage numérique jusqu'au calcul du spectre des fréquences. On peut ainsi comparer objectivement les caractéristiques des EEG provenant de populations d'individus différents, ou quantifier les variations de l'électrogenèse cérébrale lors des variations de l'attention, lors du sommeil, lors d'épreuves dynamiques [7].



**Figure 1.15 : Système d'acquisition.**

### 1.7. Conclusion :

Nous avons présenté, dans ce chapitre, les notions générales sur le cerveau et le signal électroencéphalogramme, dans ce qui suit nous présenterons l'outil mathématique qui va nous permettre d'analyser le signal EEG en vue d'une compression ou d'une classification.

# CHAPITRE II

## LES ONDELETTES

## 2.1 Introduction

Les électroencéphalogrammes (EEG) sont des signaux physiologiques non stationnaires. Pour les exploiter, est nécessaire une représentation adéquate des composantes temporelles et fréquentielles du signal. Dans ce chapitre, nous évoquerons des méthodes de représentations de ces composantes, telle que la représentation fréquentielle de Fourier, puis la transformée conjointes temps-fréquence : la transformée en ondelettes.

## 2.2 État de l'art

La transformée en ondelette (TO) est apparue en traitement du signal au début des années 1980 pour l'analyse des signaux non stationnaires et a été formalisée plus tard par Grossmann et Morlet (1984) et Goupillaud [8]. C'est au sein de ces dernières communautés que des développements théoriques ont eu lieu ces dernières années. Des avancées significatives ont notamment été faites par Meyer[9], Mallat [10], Daubechies [11], Chui [12], Wornell [13] et Holschneider [14]. Ces avancées ont alors influencé d'autres domaines de recherche, dont en particulier, des applications pour la compression d'image (Dr N.Thi Hoàng Lan) [15], détection des motifs pour le signal EEG (Hector Mesa [16], Abry et al[17]). Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes intéressés au traitement des signaux électroencéphalogrammes (EEG) par l'application de deux techniques d'implémentation : la transforme en ondelette classique (par banc de filtres) dite DWT et la transformée liftée LWT.

## 2.3 Représentation de Fourier

Si  $x(t)$  est une fonction du temps  $t$ , absolument intégrable sur  $(-\infty, +\infty)$ , la transformée de Fourier de  $x(t)$ , notée  $X(w)$ , fonction de la pulsation  $w$  (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ), est donnée par :

$$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

Cette transformée est inversible par :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{j\omega t} d w \quad (2.2)$$

En appliquant cette transformée à une fonction, on passe du domaine temporel au domaine des fréquences (voir Figure 2.1), puisque la pulsation  $w$  est liée à la fréquence  $f$  par la relation :  $w = 2\pi f$ .

D'après l'égalité Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

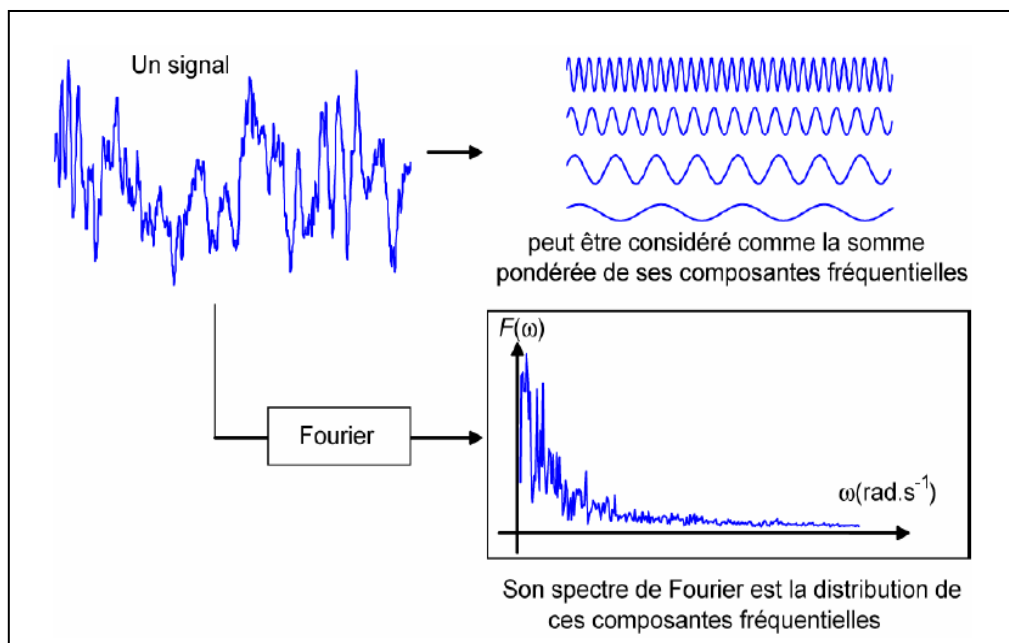
$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.3)$$

L'énergie E est conservée : l'énergie de la représentation fréquentielle est égale à l'énergie de la représentation temporelle.

Les signaux que nous traitons sont des signaux échantillonnés, dont nous voudrions connaître les composantes fréquentielles. Désignons par  $f_e$  la fréquence d'échantillonnage, et supposons que l'on cherche à obtenir des informations fréquentielles jusqu'à la fréquence maximale du signal  $f_m$ . Si la fréquence d'échantillonnage respecte la condition :

$$f_e > 2 f_m \quad (2.4)$$

alors on peut calculer la transformée de Fourier de la fonction à partir des valeurs échantillonnées de x [18].



**Figure 2.1 Un signal et son spectre de Fourier [2]**

La transformée de Fourier fait passer le signal de l'espace temporel à l'espace des pulsations :  $f(t) \rightarrow F(\omega)$ . Elle indique la répartition de l'énergie E selon les fréquences ( $f = \omega / 2\pi$ ) qui constituent le signal (équation 2.3).

Comme le montre l'équation (2.1), la transformée de Fourier résulte d'une intégration en temps de  $(-\infty, +\infty)$ , donc fournit une analyse fréquentielle d'un signal de durée infinie. Lorsque l'on s'intéresse aux variations, au cours du temps, des caractéristiques fréquentielles d'un signal, la transformée de Fourier ne peut pas fournir de manière simple, les informations

recherchées. L'analyse de Fourier, malgré l'introduction et le succès de la transformée de Fourier rapide (FFT), est peu adaptée à l'étude des signaux non-stationnaires. Pour leur étude, il faudra donc employer une autre méthode d'analyse qui tienne compte de l'information temporelle du signal.

### 2.3.1 La transformée de Fourier fenêtrée

Pour pallier le manque d'information sur le temps de la transformée de Fourier, une nouvelle méthode d'analyse est donc introduite : elle utilise une « fenêtrage glissante ». Cette méthode, pouvant être adaptée aux signaux non-stationnaires, est très proche de l'analyse spectrale : on définit une fenêtrage qui sera utilisée comme masque sur le signal, et dans laquelle on considère que le signal est localement stationnaire, puis on décale cette fenêtrage le long du signal afin de l'analyser entièrement. Gabor reprendra cette méthode dans les années 40 : sa fenêtrage est représentée par une fonction gaussienne  $g(t)$  [19] :

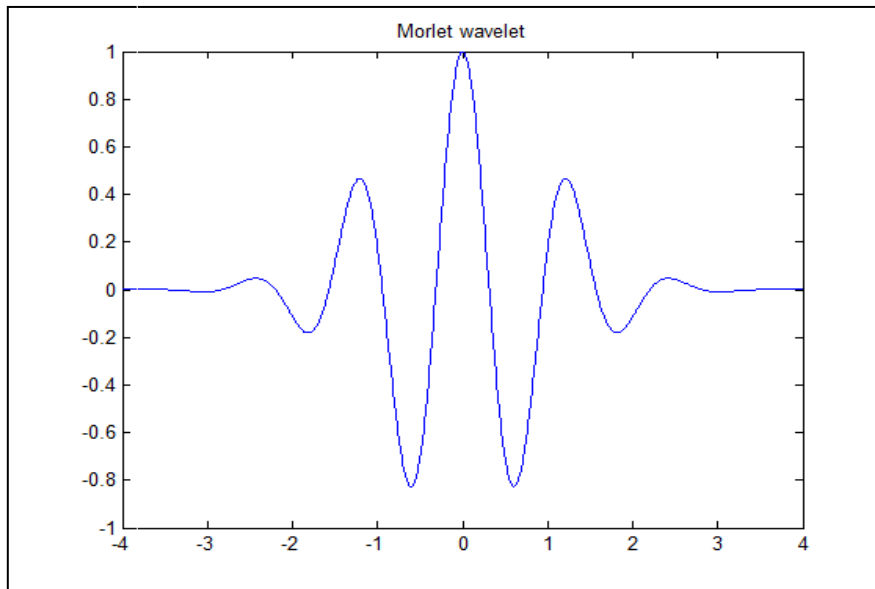
$$g_{a,b}(t) = e^{iat}g(t - b) \quad a, b \in R \quad (2.5)$$

Où  $a$  représente le facteur d'échelle, et  $b$  le facteur de translation.

On constate que le membre  $g(t - b)$  de l'équation (2.5) ci-dessus est indépendant de  $a$ , ce qui signifie que l'enveloppe de la fenêtrage glissante sera constante : on aura donc une résolution fixe sur toute la durée du signal. Ainsi, l'étude d'un signal avec la transformée de Gabor permet d'obtenir à la fois une information sur le temps et sur la fréquence, mais la résolution d'analyse est fixée par le choix de la taille de l'enveloppe [20] : si la fenêtrage est trop petite, les basses fréquences n'y seront pas contenues, et si la fenêtrage est trop grande, l'information sur les hautes fréquences est noyée dans l'information concernant la totalité de l'intervalle contenu dans la fenêtrage.

### 2.4 Les ondelettes

L'outil mathématique, appelé transformée en ondelettes ne présente pas les inconvénients de la transformée de Fourier et de la transformée de Fourier fenêtrée, mentionnés dans le paragraphe précédent. La transformée en ondelettes fournit une représentation d'un signal dans le plan temps-fréquence. Elle correspond à l'idée intuitive d'une fonction représentant une oscillation (figure 2.2), d'où son nom.



**Figure 2.2 : Exemple d'ondelette – l'ondelette de Morlet**

La transformée en ondelette remplace la fonction harmonique de la transformée de Fourier par une famille de fonctions déduites de translation et de dilatation d'une même fonction, cette fonction est appelée ondelette mère  $\Psi$ , fonction de fenêtrage oscillante, de dimension finie [20], définie par :

$$\Psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (2.6)$$

Où  $1/\sqrt{s}$  est un facteur de normalisation,  $\tau$  est le facteur de translation et  $s$  est le facteur de dilatation. La dilatation change l'étendue temporelle de l'ondelette ( $s > 1$  augmente son étendue temporelle et  $s < 1$  la réduit), tandis que la translation localise l'ondelette dans le temps.

#### **2.4.1. Les différents types de transformées en ondelettes**

Il existe de nombreuses méthodes permettant d'effectuer la transformée en ondelettes, chacune se différenciant des autres soit par le type de la fonction de base employée, soit par la méthode d'implantation de la transformée. En fonction du type de traitement que l'on voudra effectuer, on pourra employer l'une des méthodes suivantes :

**Translations et dilatations dyadiques d'une fonction** : ce sont les ondelettes classiques. Elles sont naturellement reliées à l'analyse multirésolution et au codage en sous-bandes.

**Les paquets d'ondelettes** : extension des ondelettes classiques, ils reposent sur des fonctions de base ayant une meilleure localisation fréquentielle au prix d'une transformée légèrement plus lourde.

**Les bases trigonométriques locales** : l'idée principale est de travailler avec des sinus et des cosinus définis sur des intervalles finis combinés avec une méthode simple mais très puissante, permettant de joindre les fonctions de base à leurs extrémités.

**Les ondelettes multiples** : l'idée n'est plus d'utiliser une fonction fixe que l'on va translater et dilater mais plutôt un nombre fini de fonctions. Cette méthode permet d'obtenir des combinaisons de propriétés utiles qui seraient impossibles avec les ondelettes classiques.

**Le lifting d'ondelette** : on abandonne ici complètement l'idée de translation et de dilatation. Cela fournit une grande flexibilité dans la construction d'ondelettes adaptées à des échantillons irréguliers ou variés.

Parmi toutes ces méthodes, la première, la plus classique, reste l'une des plus répandues. Cette méthode correspond à la transformée en ondelettes que nous avons décrite précédemment. La transformée en ondelettes par dilatation et translation dyadiques est également la méthode la plus souvent implantée matériellement puisqu'elle est basée sur les techniques de filtrage numérique. L'une des raisons de ce succès vient des travaux de Mallat [10] sur la transformée en ondelettes et les bancs de filtres.

#### 2.4.2 La transformée en ondelette continue CWT

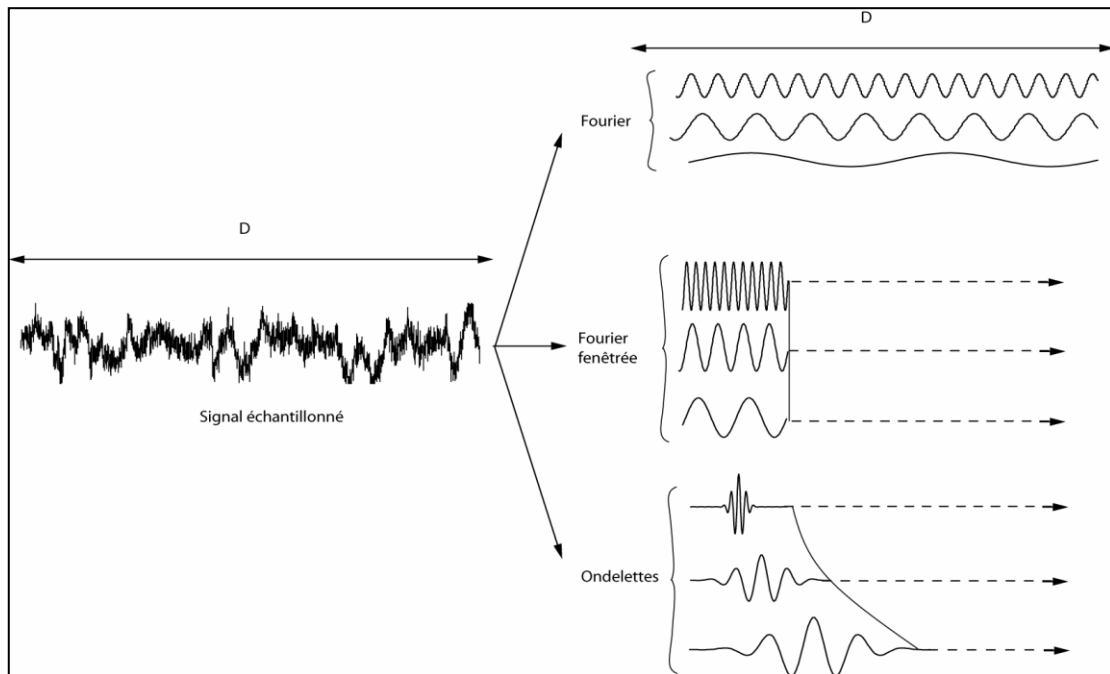
La transformée en ondelette continue  $W_x(s, \tau)$  de  $x(t)$  est alors une fonction des deux variables  $s$  et  $\tau$  définie par le produit scalaire :

$$CWT_x^\Psi(\tau, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi_{\tau, s}^*(t) dt \quad (2.7)$$

Où  $\Psi^*$  est la fonction complexe conjuguée de  $\Psi_{\tau, s}$ . L'équation (2.7) permet de comparer la transformée en ondelettes à la transformée de Fourier (Figure 2.3) : pour effectuer une

transformée de Fourier d'un signal, on multiplie le signal par l'exponentielle complexe, une fonction d'étendue temporelle infinie et fréquentielle nulle ; en revanche, dans le cas d'une transformée en ondelettes, on multiplie le signal par une fonction d'étendues temporelle et fréquentielle finies. Tout comme pour la transformée de Fourier – égalité de Bessel (2.3) – la transformée en ondelette conserve l'énergie :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |CWT_x^\psi(\tau, s)|^2 d\tau \frac{ds}{s^2} \quad (2.8)$$



**Figure 2.3 : Comparaison entre la transformée de Fourier et la transformée en ondelettes [1].**

La transformée de Fourier considère le signal dans son intégralité (toute sa durée, D sur la figure 2.3), alors que la transformée de Fourier fenêtrée s'intéresse à des fenêtres limitées dans le temps. La transformée en ondelettes utilise des fenêtres adaptées en dimension en dilatant les fonctions d'ondelettes. Les transformées fenêtrées et celles en ondelettes traduisent leurs fonctions de base pour analyser toute la durée du signal (translation représentée par les flèches en pointillés).

#### 2.4.2.1 Condition de reconstitution du signal

Le signal  $x$  peut être reconstitué à partir de la formule suivante :

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \iint_{\mathbb{R}} CWT_x^\psi(\tau, s) \Psi_{\tau, s}(t) d\tau \frac{ds}{s^2} \quad (2.9)$$

Pour que la fonction  $\Psi(t)$  soit une ondelette, elle doit satisfaire la condition d'admissibilité, qui garantit la conservation de l'énergie lors de la transformation (c'est-à-dire qu'aucune information n'est perdue lors de la transformation, donc qu'il est possible de reconstruire la fonction  $x$  à partir de sa transformée). Cette condition s'exprime par :

$$C_{\Psi}(\omega) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\hat{\Psi}(a\omega)|^2}{a} da \quad (2.10)$$

$$0 < C_{\Psi} < \infty, \quad (2.11)$$

Pour tous  $\omega \in \mathbb{R}$ . La condition (2.11) est appelée la condition d'admissibilité et toutes les  $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$ , ou  $L_2(\mathbb{R})$  désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$  [21], qui remplissent cette condition sont appelées ondelettes admissibles [22].

Cette relation se ramène le plus souvent à la condition exprimée par l'équation :

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad (2.12)$$

Qui indique que la fonction ondelette doit être à moyenne nulle.

L'inversion de la transformée en ondelette (2.9) est seulement réalisée par les ondelettes admissibles.

### 2.4.3 La transformée en ondelette discrètes (DWT)

Contrairement à la transformée continue, dans laquelle l'ondelette est dilatée et translatée de manière continue, la transformée en ondelettes discrète translate et dilate l'ondelette selon des valeurs discrètes [20] [23].

Ces coefficients  $s$  et  $\tau$  seront discrétisés de la manière suivante : Les pas de variation des paramètres de translation en temps  $\tau$  et en dilatation (fréquence)  $s$  dépendent l'un de l'autre, et sont définis par :

$$s = s_0^i \text{ et } \tau = k \cdot \tau_0 s_0^i \text{ avec } s_0 > 1 \text{ et } \tau_0 > 0 \quad i, k \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

Les ondelettes sont construites de la même façon que pour la transformée continue, par :

$$\Psi_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{s_0^m}} \Psi\left(\frac{1}{s_0^m} t - n\tau_0\right) \quad (2.14)$$

On utilise alors ces ondelettes pour calculer les coefficients de la transformée par des produits scalaires discrets :

$$DWT_x^{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{s_0^i}} \int x(t) \Psi\left(\frac{1}{s_0^i} t - k\tau_0\right) dt. \quad (2.15)$$

### 2.4.3.1. L'analyse multirésolution

Une autre manière de décrire la transformée en ondelettes est de dire qu'elle consiste à obtenir une approximation d'un signal  $x(t)$  par projection de celui-ci sur l'espace d'approximation  $V_j$  grâce à un opérateur  $A_j$  [10] [20] [23]. Cette approximation faisant perdre une partie de l'information. La reconstruction du signal nécessite d'associer à l'opérateur  $A_j$  un opérateur  $D_j$  en projetant le même signal sur l'espace de détail  $W_j$  tel que

$$A_{j+1} x = A_j x + D_j x. \quad (2.16)$$

Les espaces d'approximations et de détails sont construits respectivement à partir des fonctions de base  $\phi(x)$  et  $\Psi(x)$ .

Mallat a montré que les coefficients d'ondelettes définis par la relation  $DWT_x^\Psi = \langle x, \Psi_{a,b} \rangle$  peuvent être calculés à partir d'une transformée pyramidale mise en œuvre à l'aide de filtres numériques, récursifs ou non [10]. Le principe de la transformée pyramidale consiste en la décomposition du signal à analyser à l'aide d'une paire de filtres conjugués en quadratures. L'un de ces filtres fournira les coefficients d'ondelettes (ou détails), le second les coefficients d'approximation. L'approximation est elle-même à son tour décomposée par une seconde paire de filtres, l'ensemble constituant une pyramide de filtres [annexe C].

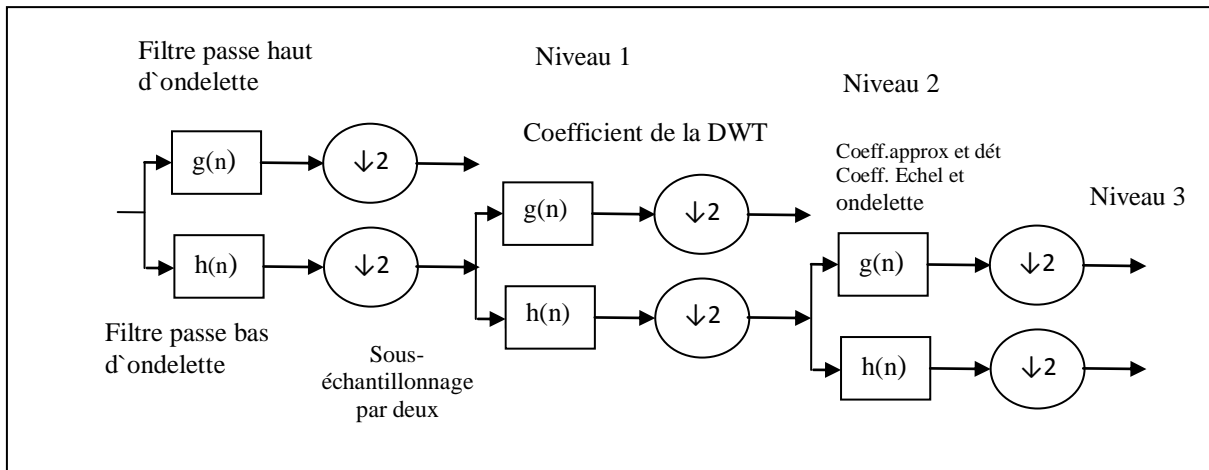
On utilise pour cela une paire de filtres ( $h$  et  $g$ ) miroirs conjugués à réponse impulsionnelle finie (RIF). Le filtre  $h$  est de type passe bas et  $g$  est un passe haut [24].

Ce qui permet d'obtenir la fonction d'échelle suivante

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n[n] \phi(2t - n) \quad (2.17)$$

La fonction d'ondelette correspondante aura pour expression :

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n[n] \phi(2t - n) \quad (2.18)$$



**Figure 2.4 : Décomposition à l'aide d'un banc de filtres.**

La résolution en sortie de chaque paire (ou banc) de filtres étant deux fois inférieure à la résolution d'entrée, on parle d'analyse multirésolution.

### 2.4.3.2. Ondelettes orthogonales

L'analyse multirésolution orthogonale est une analyse multirésolution dans laquelle les espaces d'ondelettes (détails)  $W_j$  sont définis comme le complément orthogonal de l'espace des échelles (approximation)  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  [25]. En conséquence, les espaces  $W_j$  avec  $j \in \mathbb{Z}$ , sont tous mutuellement orthogonaux.

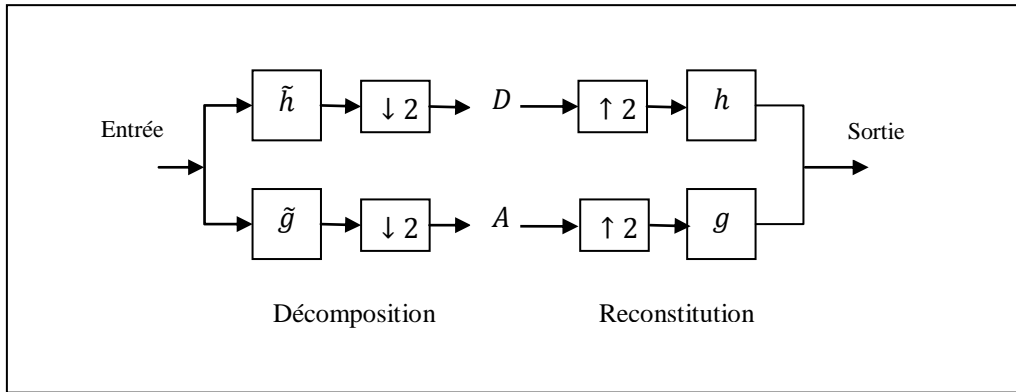
Une condition suffisante pour qu'une analyse multirésolution soit orthogonale est :

$$W_j \perp V_j \quad \text{ou} \quad \langle \Psi, \phi(-l) \rangle = 0 \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.19)$$

Y. Meyer a montré que pour  $s = 2$  et  $\tau_0 = 1$  dans l'expression de l'équation (2.14) les fonctions d'échelles  $\phi_{m,n}(x)$  constituent une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Les ondelettes sont dites ondelettes orthogonales et s'écrivent alors

$$\psi_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi \left( \frac{1}{2^m} t - n \right) \quad (2.20)$$

Le principe de cet algorithme pour les ondelettes orthogonales est présenté par la figure 2.5 [25].



**Figure 2.5 : Décomposition et reconstitution à l'aide d'un banc de filtres.**

Soit  $x_0(n)$  un signal échantillonné correspondant au signal d'origine à la résolution zéro. Ce signal est décomposé sur plusieurs niveaux de résolutions en deux bandes de fréquences (passe-haut et passe bas) de la manière suivante, où  $a_m$  représente l'approximation et  $d_m$  les détails :

$$a_m(n) = \sum_k h(2n - k) a_{m-1}(k) \text{ et } d_m(n) = \sum_k g(2n - k) a_{m-1}(k) \quad (2.21)$$

Ces filtres sont liés par la relation suivante

$$g(n) = (-1)^n h(1 - n) \quad (2.22)$$

$a_m(n)$  est une approximation de  $a_{m-1}(n)$  à la résolution  $2^{-m}$ . Les coefficients  $d_m(n)$  représentent l'information perdue lorsque l'on passe de  $s$  à la résolution  $2^{-m+1}$  à une approximation à la résolution plus grossière  $2^{-m}$ . Les coefficients en sortie de chacun des filtres sont sous-échantillonnés avec un facteur 2 afin de respecter le théorème de Shannon.

La reconstruction est obtenue de la manière suivante :

$$a_{m-1}(n) = \sum_k h(2n - k) a_m(k) + \sum_k g(2n - k) a_m(k) \quad (2.23)$$

### 2.4.3.3. Ondelettes biorthogonales

Nous avons vu les avantages que présentait la transformée en ondelettes orthogonale pour le traitement du signal. Cependant, il n'existe pas de filtres RIF orthonormaux, à phase linéaire, qui assurent la reconstruction exacte, à l'exception de ceux correspondant à la base de Haar. Cependant, l'utilisation de bases biorthogonales permet la construction de filtres associés à des ondelettes possédant un haut degré de régularité.

Les bases d'ondelettes biorthogonales sont une généralisation des bases d'ondelettes orthogonales.

Dans le cas bi-orthogonal, on utilise deux ondelettes mères  $(\psi(x), \tilde{\psi}(x))$  et pour construire les bases d'ondelettes  $(\psi_{\tau,s}, \tilde{\psi}_{\tau,s})$ . On utilisera le même principe pour construire les fonctions d'échelles  $\phi_{\tau,s}$  et  $\tilde{\phi}_{\tau,s}$ .

Ainsi, l'analyse multirésolution utilisant ces bases biorthogonales définit les espaces de détail  $(W_m, \tilde{W}_m)$ , et d'approximation  $V_m$  et  $\tilde{V}_m$  répondant à la propriété suivante [20] [26]

$$W_m \perp \tilde{V}_m \quad \text{et} \quad \tilde{W}_m \perp V_m \quad (2.24)$$

Ainsi, l'ondelette utilisée pour l'analyse  $\psi(x)$  est orthogonale à la fonction d'échelle  $\tilde{\phi}(x)$  utilisée pour la synthèse, et la fonction d'échelle utilisée pour l'analyse  $\phi(x)$  est orthogonale à l'ondelette  $\tilde{\psi}(x)$  utilisée pour la synthèse, d'où le nom de bi-orthogonalité. Par contre, et contrairement au cas orthogonal, les ondelettes et les fonctions d'échelle associées ne sont pas orthogonales.

Dans le cas bi-orthogonal, l'analyse est effectuée de la même manière que dans le cas orthogonal [25] :

$$a_m(n) = \sum_k h(2n - k) a_{m-1}(k) \quad \text{et} \quad d_m(n) = \sum_k g(2n - k) a_{m-1}(k) \quad (2.25)$$

Par contre, la reconstruction est assurée par les filtres conjugués, soit

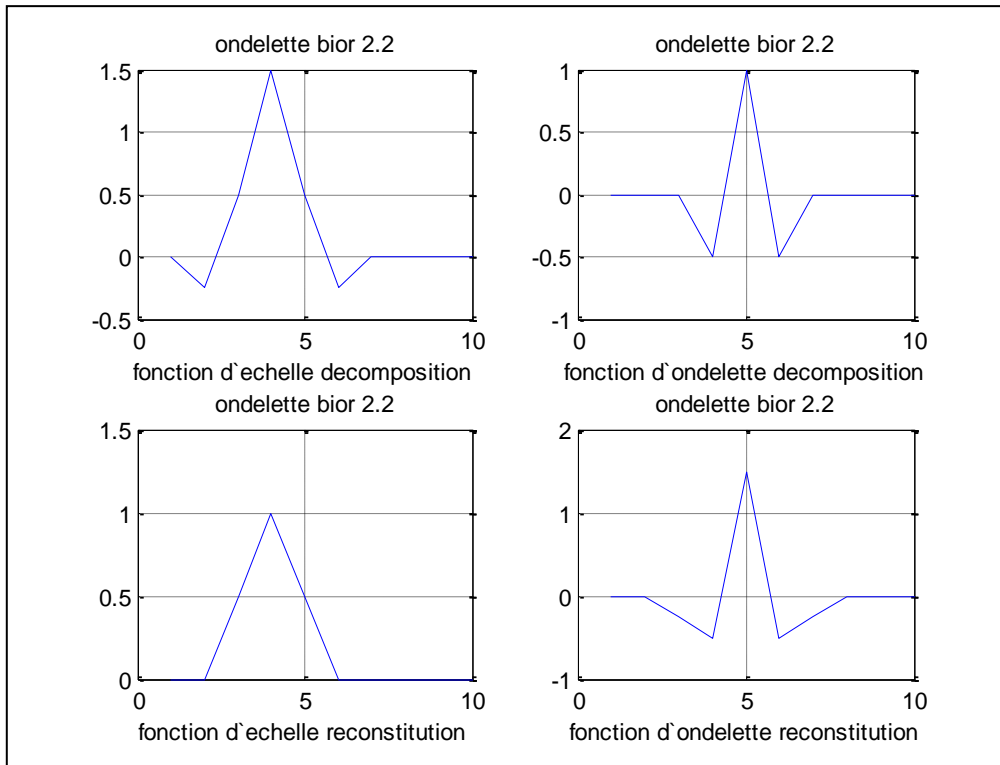
$$a_{m-1}(n) = \sum_k \tilde{h}(2n - k) a_m(k) + \sum_k \tilde{g}(2n - k) a_m(k) \quad (2.26)$$

La relation imposée entre les filtres étant :

$$\tilde{g} = -1^n h(1 - n) \quad \text{et} \quad g(n) = -1^n \tilde{h}(1 - n) \quad (2.27)$$

Dans le cas bi-orthogonal, la conception des filtres est plus aisée puisqu'il est permis aux filtres d'analyse de ne pas être orthogonaux entre eux.

La figure 2.6 présente un exemple d'une ondelette biorthogonale bior2.2 avec les représentations des fonctions d'ondelettes et d'échelle de décomposition et de reconstitution.



**Figure 2.6 : Ondelette Biorthogonal bior2.2.**

## 2.5 Les ondelettes de seconde génération

Le concept de lifting peut être introduit de deux manières différentes. La première consiste à construire une transformée en ondelettes à partir de la transformée de Haar (annexe D), alors que la seconde se concentre sur la capacité d'améliorer une transformée en ondelette en y ajoutant des propriétés adéquates.

Le lifting d'ondelette a été introduit en 1994 par Wim Sweldens [27]. Cette méthode d'implantation de la transformée en ondelettes s'affranchit totalement de la notion de dilatation et de translation.

### 2.5.1. Description générale de la transformée en ondelettes version lifting

L'opération de lifting en ondelettes peut-être vue comme la transformation réalisée par le banc de filtres, mais en intervertissant les phases de filtrage et de sous-échantillonnage par l'ajout progressif des fonctions de bases. On limite ainsi le nombre d'opérations à effectuer de 50% par rapport à celui de la DWT [27] [28] [29].

On désignera ici par  $D$  les coefficients de détails et par  $A$  les coefficients d'approximations obtenus par la transformation LWT qui sont identiques à ceux de la DWT.

Pour une ondelette particulière (c.à.d. un couple de filtres  $(h, g)$  ou  $(\tilde{h}, \tilde{g})$  dans l'implémentation par banc de filtres)

On utilisera :

- les ondelettes paresseuses (*lazy wavelets*) qui servent à séparer un vecteur en composantes paires et impaires,
- ainsi qu'une matrice polyphasée qui permet de travailler sélectivement sur les composantes paires ou impaires du signal.

On va factoriser la matrice polyphasée et introduire alors deux opérations :

- une opération de prédiction (*predict*) qui prédit les échantillons de rang pair à partir des échantillons de rang impair ;
- une opération de mise à jour (*update*) qui permet de conserver sur une partie du signal qui est la valeur moyenne de l'ensemble du signal [30] [31] [32].

La reconstruction du signal s'effectue par sur-échantillonnage par insertion de zéros [ $\uparrow 2$ ] et le passage par les filtres de synthèse  $[h]$  et  $[g]$  (figure 2.5), puis par une simple addition afin d'obtenir le signal reconstitué.

Les filtres doivent satisfaire les formules suivantes :

- $\mathbf{h}(z)\tilde{\mathbf{h}}(z^{-1}) + \mathbf{g}(z)\tilde{\mathbf{g}}(z^{-1}) = \mathbf{2}$
- $\mathbf{h}(z)\tilde{\mathbf{h}}(-z^{-1}) + \mathbf{g}(z)\tilde{\mathbf{g}}(-z^{-1}) = \mathbf{0}$

On a besoin de construire la matrice polyphase  $\tilde{\mathbf{P}}$ . On utilise la formule suivante de décomposition polyphase sur les filtres précédents :

$$x(z) = x_e(z^2) + z^{-1}x_o(z^2) \quad (2.28)$$

Où  $x_e$  désigne les échantillons pairs (*even*) et  $x_o$  les échantillons impairs (*odd*) du signal d'entrée.

$$\tilde{\mathbf{P}}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z) & \tilde{h}_o(z) \\ \tilde{g}_e(z) & \tilde{g}_o(z) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

### 2.5 .2.1. Lifting primaire

L'élévation primaire (*primary lifting*) est aussi appelée mise à jour (update). Le lifting à proprement dit consiste à modifier le filtre  $g$  en gardant la complémentarité avec  $h$  à l'aide de la formule :

$$g_{new}(z) = g(z) + h(z)s(z^2) \quad (2.30)$$

Où  $s(z)$  est un polynôme de Laurent.

La matrice polyphasée devient alors :

$$P_{new}(z) = P(z) \begin{pmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

De la même façon pour  $\tilde{h}$ ,

$$\tilde{h}_{new}(z) = \tilde{h}(z) + \tilde{g}(z)\tilde{s}(z^2) \quad (2.32)$$

Où  $\tilde{s}(z)$  est un polynôme de Laurent.

Dès lors,

$$\tilde{P}_{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{s}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{P}(z) \quad (2.33)$$

### 2.5 .2.2. Lifting dual

L'élévation duale (*lifting dual*) est aussi appelée prédiction. Les formules précédentes modifient la sous-bande passe-bas à l'aide de la sous-bande passe-haut. Le lifting dual consiste en l'opération inverse : modifier la sous-bande passe-haut à l'aide de la sous-bande passe-bas.

$$h_{new}(z) = h(z) + g(z)t(z^2) \quad (2.34)$$

$$P_{new}(z) = P(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

et

$$\tilde{g}_{new}(z) = \tilde{g}(z) + \tilde{h}(z)\tilde{t}(z^2) \quad (2.36)$$

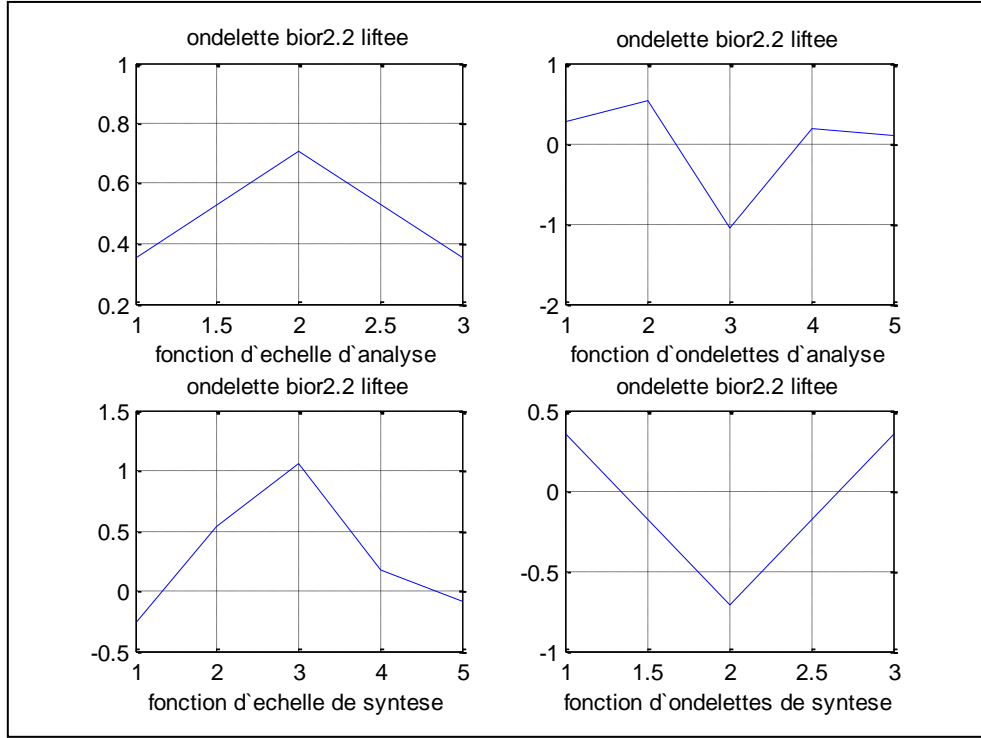
$$\tilde{P}_{new}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{t}(z) & 1 \end{pmatrix} \tilde{P}(z) \quad (2.37)$$

Où  $t$  est un polynôme de Laurent.

On a ainsi élevé (*lifté*) le niveau de complexité (modification) de la transformation en ondelettes. On a de plus, pour avoir une transformation inversible :

$$t(z) = -\tilde{t}(z) \quad \text{et} \quad s(z) = -\tilde{s}(z) \quad (2.38)$$

La figure 2.8 présente la version liftée de l'ondelette bior2.2 représentée précédemment



**Figure 2.8 : exemple d'une ondelette Biorthogonale liftée.**

### 2.5.3. Factorisation des filtres

A cette étape on réalise l'opération de factorisation des filtres

$$\tilde{g}_{new}(z) = \tilde{g}(z) + \tilde{h}(z)\tilde{t}(z^2) \text{ en } \tilde{g}(z) = \tilde{h}(z)\tilde{t}(z^2) + \tilde{g}_{new}(z) \quad (2.39)$$

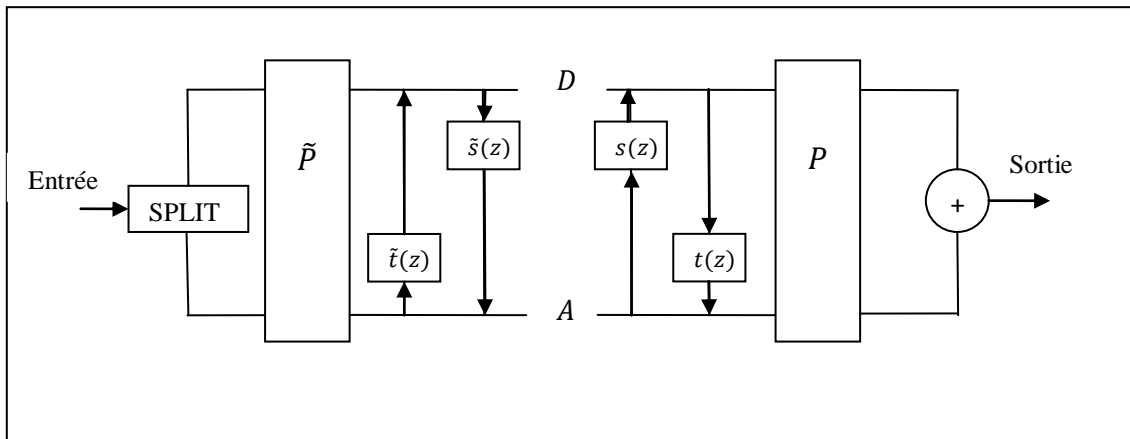
Qui se traduit par :

$$\tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{t}(z) & 1 \end{pmatrix} \tilde{P}_{new}(z) \quad (2.40)$$

En itérant cet exemple, on peut arriver à obtenir une matrice polyphasée qui est de la forme [33]

$$P(z) = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^m \begin{pmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux constantes (différentes de zéro). Ainsi la figure 2.9 résume l'ensemble des étapes de cette technique de lifting.



**Figure 2.9 : Décomposition et reconstitution par lifting d'ondelettes.**

## 2.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons détaillé le formalisme des deux techniques retenues pour le traitement des signaux EEG. Le troisième chapitre présentera les deux applications retenues pour l'exploitation de la transformée en ondelette.

# CHAPITRE III

## APPLICATIONS

### **3.1. Compression du signal EEG par ondelettes**

#### **3.1.1. Introduction**

La compression du signal gagne en importance dans le domaine du génie biomédical, en raison des applications potentielles en télémédecine. Cette technique a pour but de traiter de grandes informations. Pour le traitement des signaux EEG, différents canaux sont enregistrés pendant plusieurs heures, ce qui entraîne une forte demande de capacité de stockage. Cette situation exige l'utilisation de systèmes efficaces de compression de données. Les chercheurs dans ce domaine se sont focalisés sur plusieurs méthodes de compression, en particulier par modélisation polynomiale [34] où l'idée est de représenter le signal biomédical par un polynôme de degré  $N$ .

D'autres méthodes temporelles telles que la modélisation par réseaux de neurones et fonctions radiales [35] ont contribué à la compression de ce type de signaux. Dans ce cas le signal biomédical est modélisé par une combinaison linéaire de signaux élémentaires de formes Gaussiennes. Ainsi le signal est représenté par un nombre de  $N$  gaussiennes avec  $N$  amplitudes,  $N$  moyennes et  $N$  écarts types soit un nombre de  $3N$  paramètres représentant le signal.

Les transformées temps-fréquences ont été largement exploitées pour la compression du signal biomédical en général et l'EEG en particulier [34] [36].

La transformée en ondelette discrète DWT est une transformée très adaptée et très efficace pour le traitement des signaux EEG [37] [38]. Une nouvelle génération d'ondelette dite ondelette liftée a intéressé les chercheurs dans le domaine du génie biomédical : c'est la transformée d'ondelette liftée LWT. Hector Mesa [16] fut un des chercheurs qui a introduit la LWT après Sweldens [28], il a créé une ondelette liftée plus proche de la forme du signal EEG, ce qui lui a permis de détecter les pathologies encéphaliques.

La recherche de nouvelles techniques se poursuit afin d'atteindre une efficacité de compression plus élevée, tout en préservant les informations de diagnostic dans le signal EEG reconstruit. Ce travail met en évidence une haute performance en utilisant la compression sans perte des signaux EEG par transformée en ondelettes.

L'objectif de cette application est de développer un algorithme efficace pour la compression du signal EEG en exploitant l'ondelette discrète DWT et sa version liftée LWT. Dans une première phase de cette application, les signaux EEG sont décomposés par ondelettes DWT et LWT. Les coefficients de la décomposition sont seuillés et les valeurs absolues en dessous

d'un certain seuil sont supprimées. Le signal EEG comprimé peut être récupéré par un processus inverse.

### **3.1.2. La compression**

La compression est l'opération de manipulation d'un ensemble de données par codage spécifique, dont le but est d'optimiser un espace de stockage initial. Il existe deux types de compression :

- Compression sans perte :

La compression est dite sans perte lorsqu'il n'y a aucune perte de données sur l'information d'origine après le cycle de compression-reconstitution.

- Compression avec perte :

Avec un algorithme de compression avec pertes, la suite de bits obtenus après les opérations de compression et de décompression est différente de l'originale, mais l'information reste sensiblement la même. Ce type de compression ne s'applique qu'aux données « perceptibles », en général sonores ou visuelles, qui peuvent subir une modification, parfois importante, sans que cela soit perceptible par un humain. Cependant, elle possède un fort taux de compression [39].

La compression basée sur la transformée en ondelettes est une méthode de second type, elle consiste à concentrer l'énergie du signal autour des coefficients de celle-ci.

### **3.1.3. Principe de la compression par ondelettes**

La méthode de compression du signal EEG (figure 3.1) est réalisée en deux phases : la décomposition par ondelettes puis le seuillage.

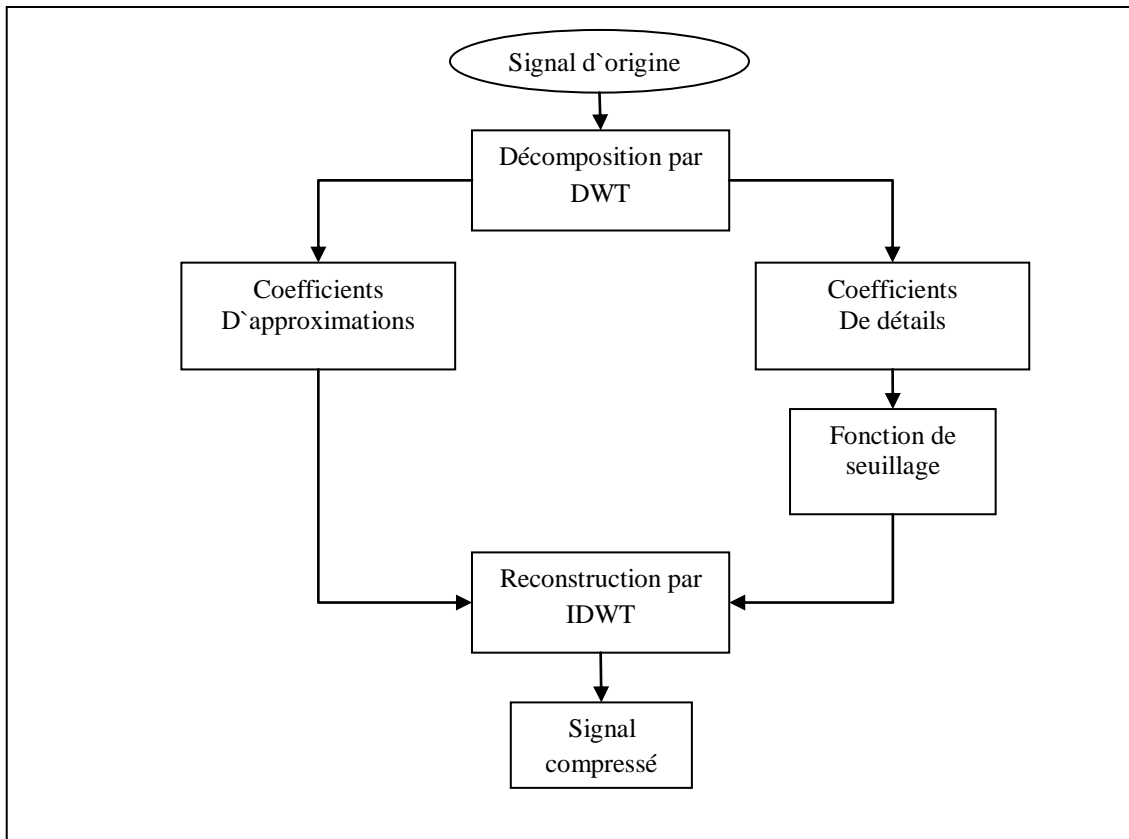
#### **3.1.3.1. La décomposition**

La décomposition par ondelettes consiste à décomposer le signal d'entrée EEG en coefficients d'approximations et de détails comme nous l'avons présenté au chapitre précédent.

#### **3.1.3.2. Le seuillage**

Une fois le signal EEG décomposé, on procédera à la compression du signal, ce qui signifie mettre à zéro les coefficients que l'on considérera négligeable (c'est-à-dire dont la valeur absolue est en-dessous d'un certain seuil), puis on reconstitue de nouveau le signal à partir des coefficients d'ondelette seuillés [40].

La figure (3.1) décrit l'algorithme de compression par seuillage des coefficients de détails.



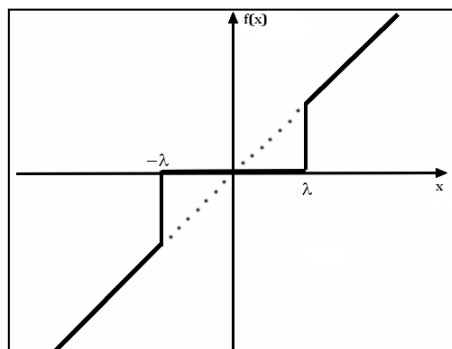
**Figure 3.1 : Algorithme de compression**

### 3.1.3.3. Types de seuillage :

#### ➤ Seuillage dur

Cette méthode consiste à remplacer par des zéros tous les coefficients dont la valeur absolue est inférieure à un niveau de seuil  $\lambda$  fixé à l'avance; évidemment, certains détails du signal seront perdus [41].

$$\begin{cases} |x| < \lambda \Rightarrow f(x) = 0 \\ |x| \geq \lambda \Rightarrow f(x) = x \end{cases} \quad (3.1)$$

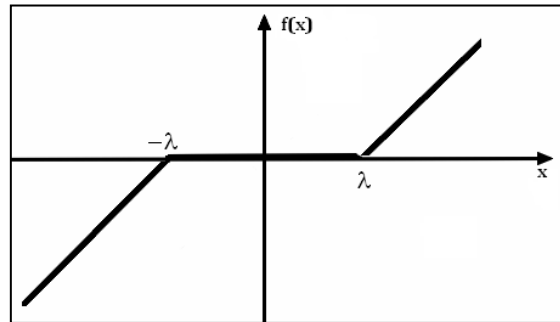


**Figure3.2 : Caractéristique entrée sortie du seuillage dur.**

➤ **Seuillage doux**

Le niveau de seuil  $\lambda$  est fixé expérimentalement. Tous les coefficients dont la valeur absolue est inférieure à  $\lambda$  sont remplacés par zéro et les autres coefficients seront atténués par la valeur du seuil [42].

$$\begin{cases} |x| < \lambda \Rightarrow f(x) = 0 \\ |x| \geq \lambda \Rightarrow f(x) = x - s \end{cases} \quad (3.2)$$



**Figure 3.3 : Caractéristique entrée sortie du seuillage doux.**

Il y a deux manières d'application de ces deux types de seuillage :

➤ **Seuillage statique :**

Il est basé sur l'application d'un seuil fixe pour tous les niveaux de décomposition. On l'appelle aussi seuillage global.

➤ **Seuillage dynamique :**

Dans ce type de seuillage, le seuil varie itérativement d'un niveau de décomposition à un autre. On l'appelle aussi seuillage local.

Le seuillage dynamique doux est déconseillé dans la compression, mais plus adapté au débruitage car il intervient en modifiant les valeurs des coefficients.

Dans notre application nous nous intéressons au seuillage statique dur. Car, en vue d'une reconstitution, il nous faut garder les valeurs des coefficients significatifs intacts.

Notons que les choix du seuil et du niveau de décomposition  $N$  restent expérimental.

**3.1.5.1 Evaluation de la compression :**

Trois critères sont généralement retenus pour l'évaluation des algorithmes de compression : le taux de compression, la performance de reconstitution et la charge de calcul induite par la méthode [43].

### c) Taux de compression :

Le taux de compression est une comparaison du volume de données compressées et celui des données initiales. Quantitativement, on le représente par le rapport entre le nombre d'échantillons utilisés pour représenter le signal original et le nombre d'échantillons nécessaires pour représenter le signal compressé.

$$\tau_c = \frac{\text{nbre de coeff null}}{\text{nbre de coeff initial}} * 100 \quad (3.3)$$

La compression apporte un gain en volume de données dont la formule est la suivante :

$$G = \frac{\text{nbre de coeff final}}{\text{nbre de coeff initial}} * 100 \quad (3.4)$$

$$G = 100 - \tau_c$$

### d) Performance de reconstitution :

Le premier critère d'évaluation du signal EEG reconstruit après compression est l'inspection visuelle. Le neurologue qui est le principal utilisateur des électroencéphalogrammes apprécie visuellement le signal EEG lors d'un diagnostic. Cette validation visuelle du signal compressé et reconstruit est donc soumise à beaucoup de subjectivité. Il existe tout de même des formules théoriques de calcul des distorsions du signal reconstruit.

La méthode la plus utilisée traduit le pourcentage de l'erreur relative normalisée en énergie. Donc, la performance de reconstitution (PR) s'exprime par :

$$PR = \frac{\|EEGr\|^2}{\|EEGo\|^2} \times 100 \quad (3.5)$$

Tel que :

EEGr : le signal reconstitué après compression et EEGo : le signal original.

Après la compression nous entamerons la seconde application qui est la classification.

## 3.2. Classification des signaux EEG

### 3.2.1. Introduction

L'utilisation de signaux EEG en tant que vecteur de communication entre homme et machine constitue l'un des défis actuels de la recherche en théorie du signal. L'interprétation des signaux EEG par rapport à des paramètres caractéristiques de l'activité électrique du cerveau, constitue l'élément principal d'un tel système de communication.

Comme pour la compression, l'aide au diagnostic est une des applications des plus importantes du domaine du génie biomédical. L'exploitation de l'ondelette pour ce type d'applications a fait l'objet de plusieurs sujets de recherche. Les plus récentes [44] [45] [46] [47] [48] ont atteint des performances de classifications très importantes en combinant la DWT avec l'analyse par composante indépendantes ACI et la classification par SVM (support vecteur machine). Les performances de la LWT dans ce domaine restent non explorées. Dans cette phase de notre travail, nous visons à exploiter la LWT au même titre que la DWT dans le domaine du diagnostic et montrer son apport.

Dans le but de réaliser cet objectif, nous avons choisi de combiner la LWT et la DWT aux méthodes de réduction d'espace et de classification les plus simples respectivement l'ACP et les KPPV. La meilleure implémentation entre la DWT et la LWT est celle qui donnera les meilleures performances de classification, pour la même banque de données d'apprentissage et le même classificateur.

### **3.2.2 Classification**

La classification automatique consiste à regrouper divers objets (les individus) en sous-ensembles d'objets (les classes), en se basant sur des données statistiques. Elle peut être :

- supervisée : les classes sont connues à priori, elles ont en général une sémantique associée
- non-supervisée : les classes sont fondées sur la structure des objets, la sémantique associée aux classes est plus difficile à déterminer [49].

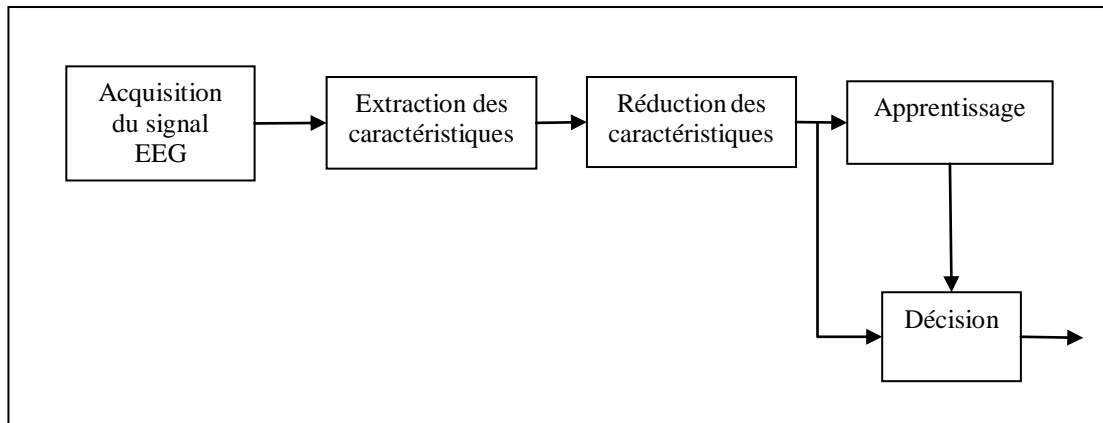
### **3.2.3. Chaîne de classification du signal EEG**

Notre classification est basée sur la connaissance à priori du nombre de classes, qui est de deux : signaux normaux et signaux pathologique (épileptiques).

Le schéma général de notre chaîne de classification est donné dans la figure 4.12

Les étapes de classification d'un EEG quelconque consiste à lui appliquer les étapes suivante

- le signal acquis est décomposé par ondelettes (DWT et LWT) en cinq niveaux de décomposition ; l'extraction des paramètres consiste à calculer les variances des coefficients des cinq premiers niveaux [48].
- La transition d'un espace de cinq paramètres caractéristiques du signal EEG à celui de deux se fait grâce à la matrice de transition (ACP) [50].



**Figure 4.12: Schéma général de la méthode de classification**

- Enfin le calcul de la distance d'un autre signal EEG par rapport aux différents autres signaux de la base de données permettra de l'attribuer à la classe la plus proche.

### 3.2.4. Analyse par composante principale

Une des difficultés inhérentes à la statistique multivariée est le problème de visualisation de données à nombreuses variables.

L'analyse en composantes principales est une méthode quantitative rigoureuse pour la réalisation de cette simplification. Ce procédé génère un nouvel ensemble de variables, appelées composantes principales. Chaque composante principale est une combinaison linéaire des variables d'origine. Toutes les composantes principales sont orthogonales les unes aux autres, de sorte qu'il n'y a pas d'informations redondantes. La composante principale forme une base orthogonale de l'espace des données [50].

#### 3.2.4.1. Matrice d'apprentissage

On applique une ACP sur un ensemble de  $N$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  connues à partir d'un échantillon de  $K$  réalisations conjointes de ces variables. Cet échantillon de ces  $N$  variables aléatoires peut être structuré dans une matrice  $M$  à  $K$  lignes et  $N$  colonnes.

$$M = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{K,1} & \cdots & X_{K,N} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Chaque variable aléatoire  $X_n = (X_{1,n}, \dots, X_{K,n})$  a une moyenne  $\bar{X}_n$  et un écart type  $\sigma_{X_n}$ .

### 3.2.4.2. Valeurs propres

Si les réalisations (les éléments de la matrice  $M$ ) sont à probabilités égales alors chaque réalisation (un élément  $X_{i,j}$  de la matrice) à la même importance  $1/n$  dans le calcul des caractéristiques de l'échantillon. On peut aussi appliquer un poids  $p_i$  différent à chaque réalisation conjointe des variables (cas des échantillons redressés, des données regroupées). Ces poids, qui sont des nombres positifs de somme un, sont représentés par une matrice diagonale  $D$  de taille  $K$ :

$$D = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & P_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & P_K \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Dans le cas le plus usuel de poids égaux,  $D = \frac{1}{K} I$  où  $I$  est la matrice identité.

### 3.2.4.3. Normalisation des données

Le vecteur  $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_N)$  est le centre de gravité du nuage de points, on le note souvent  $g$ . On a  $g = M^T D_1$  où l'indice 1 désigne le vecteur de  $\mathbb{R}^K$  dont toutes les composantes sont égales à 1.

La matrice  $M$  est généralement centrée sur le centre de gravité :

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} X_{1,1} - \bar{X}_1 & \dots & X_{1,N} - \bar{X}_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{K,1} - \bar{X}_1 & \dots & X_{K,N} - \bar{X}_N \end{bmatrix} = M - 1g^T \quad (3.8)$$

Elle peut être aussi réduite :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \frac{X_{1,1} - \bar{X}_1}{\sigma(X_1)} & \dots & \frac{X_{1,N} - \bar{X}_N}{\sigma(X_N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{X_{K,1} - \bar{X}_1}{\sigma(X_1)} & \dots & \frac{X_{K,N} - \bar{X}_N}{\sigma(X_N)} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Le choix de réduire ou non le nuage de points i.e. les  $K$  réalisations de la variable aléatoire  $(X_1, \dots, X_N)$  est un choix de modèle :

Si on ne réduit pas le nuage : une variable à forte variance va tirer tout l'effet de l'ACP à elle.

Si on réduit le nuage : une variable qui n'est qu'un bruit va se retrouver avec une variance apparente égale à une variable informative.

### 3.2.4.4. Calcul de covariances et de corrélations

Une fois la matrice  $M$  transformée en  $\bar{M}$  ou  $\tilde{M}$ , il suffit de la multiplier par sa transposée pour obtenir :

La matrice de variance-covariance des  $X_1, \dots, X_N$ . Si  $M$  n'est pas réduite :

$$\text{Covariance} = 1/K \cdot \bar{M}^T \cdot \bar{M} . \quad (3.10)$$

La matrice de corrélation des  $X_1, \dots, X_N$  si  $M$  est réduite :

$$\text{Corrélations} = 1/K \cdot \tilde{M}^T \cdot \tilde{M} . \quad (3.11)$$

Ces deux matrices sont carrées (de taille  $N$ ), symétriques et réelles. Elles sont donc diagonalisables dans une base orthonormée.

De façon plus générale, la matrice de variance-covariance s'écrit :

$$V = MDM^T - gg^T = \bar{M} \cdot D \cdot \bar{M}^T . \quad (3.12)$$

Si l'on note  $D_{1/s}$  la matrice diagonale des inverses des écarts-types:

$$D_{1/s} = \begin{bmatrix} 1/s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/s_N \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Et  $D_{1/s^2}$  la matrice diagonale des inverses des variances, alors on a:

$$\tilde{M} = \bar{M} \cdot D_{1/s} \quad (3.14)$$

La matrice des coefficients de corrélation linéaire entre les  $N$  variables prises deux à deux, notée  $R$ , s'écrit :

$$R = \tilde{M} \cdot D \cdot \tilde{M}^T \quad (3.15)$$

### 3.2.4.5. Critère d'inertie

Chaque  $X_n$  est donc remplacé par  $X_n - \bar{X}_n$  ou  $(X_n - \bar{X}_n) / \sigma(X_n)$  . Nous utiliserons donc la matrice  $M$  pour noter  $\bar{M}$  ou  $\tilde{M}$  suivant le cas.

Le principe de l'ACP est de trouver un axe  $u$ , issu d'une combinaison linéaire des  $X_n$ , tel que la variance du nuage autour de cet axe soit maximale.

Un critère couramment utilisé est la variance de l'échantillon (on veut maximiser la variance expliquée par le vecteur  $u$ ). Pour les physiciens, cela a plutôt le sens de maximiser l'inertie expliquée par  $u$  (c'est-à-dire minimiser l'inertie du nuage autour de  $u$ ).

### 3.2.4.6. Projection

Finalement, nous cherchons le vecteur  $u$  tel que la projection du nuage sur  $u$  ait une variance maximale. La projection de l'échantillon des  $X$  sur  $u$  s'écrit :

$$\pi_u(M) = M \cdot u \quad (3.16)$$

La variance empirique de  $\pi_u(M)$  vaut donc :

$$\pi_u(M)^T \cdot 1/K \cdot \pi_u(M) = u^T \cdot \underbrace{M^T \cdot 1/K \cdot M}_C \cdot u \quad (3.17)$$

Où  $c$  est la matrice de covariance.

Comme nous l'avons vu plus haut,  $c$  est diagonalisable dans une base orthonormée, notons  $P$  le changement de base associé et  $\Delta$  la matrice diagonale formée de son spectre :

$$\pi_u(M)^T \cdot \frac{1}{K} \cdot \pi_u(M) = u^T P^T \Delta P u = (P u)^T \Delta \underbrace{(P u)}_u \quad (3.18)$$

Après cette réécriture, nous cherchons le vecteur unitaire  $v$  qui maximise  $v^T \Delta v$ , où  $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  est diagonale (rangeons les valeurs de la diagonale de  $\Delta$  en ordre décroissant). On peut rapidement vérifier qu'il suffit de prendre le premier vecteur unitaire ; on a alors :

$$u^T \cdot \Delta \cdot u = \lambda_1 \quad (3.19)$$

Plus formellement, on démontre ce résultat en maximisant la variance empirique des données projetées sur  $u$  sous la contrainte que  $u$  soit de norme 1 (par un Multiplicateur de Lagrange  $\alpha$ )

$$L(u, \alpha) = u^T \cdot C \cdot u - \alpha (u^T u - 1) \quad (3.20)$$

On obtient ainsi les deux résultats suivants:

1.  $u$  est vecteur propre de  $C$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$ .
2.  $u$  est de norme 1.

La valeur propre  $\lambda_1$  est la variance empirique sur le premier axe de l'ACP.

On continue la recherche du deuxième axe de projection  $w$  sur le même principe en imposant qu'il soit orthogonal à  $u$ .

### 3.2.4.7. Diagonalisation

La diagonalisation de la matrice de corrélation (ou de covariance si on se place dans un modèle non réduit), nous a permis d'écrire que le vecteur qui explique le plus d'inertie du nuage est le premier vecteur propre. De même le deuxième vecteur qui explique la plus grande part de l'inertie restante est le deuxième vecteur propre, etc.

Nous avons vu en outre que la variance expliquée par le  $k$ -ième vecteur propre vaut  $\lambda_k$ .

Finalement, la question de l'ACP se ramène à un problème de diagonalisation de la matrice de corrélation.

### 3.2.5. Classification par K plus proche voisin (KPPV)

La méthode du plus proche voisin se caractérise par sa capacité à traiter localement les données. Elle consiste à examiner les éléments, dont la classe est connue, proches de l'élément dont on veut déterminer la classe.

La règle du plus proche voisin, PPV, compte sur l'existence d'un ensemble test. Soit  $X^n = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}$  l'ensemble d'apprentissage formé de  $n$  vecteurs indépendants, où chaque événement est représenté par un vecteur paramétrique  $x_j$ .

La classe de chaque élément de l'ensemble d'apprentissage est connue, elle sera désignée pour l'élément  $x_j$  par  $\omega(x_j)$ . L'événement à classer, représenté par un vecteur paramétrique  $x$ , est affecté à la classe correspondant au voisin le plus proche des éléments de l'ensemble d'apprentissage. La règle dite de KPPV est simplement la suivante :

$$\hat{\omega}(x) = \omega(x_{ppv}) \quad \text{Si} \quad d(x, x_{ppv}) = \min_{j=1, \dots, n} d(x, x_{ppv}) \quad (3.22)$$

Où  $x_{ppv}$  est l'échantillon le plus proche de  $x$ , et  $\hat{\omega}(x)$  est la classe d'affectation estimée de  $x$ . La règle du KPPV classifie  $x$  selon sa classe d'affectation estimée  $\hat{\omega}(x)$  [51].

La notion du "plus proche", en termes de distances les plus petites, laisse un certain choix pour la détermination de la distance. Dans notre travail, la distance euclidienne sera utilisée. Dans le cas des  $K$  plus proches voisins, pour chaque vecteur  $x$  à classer, on recherche les  $K$  plus proches voisins dans l'échantillon d'apprentissage, et  $x$  est affecté au groupe majoritaire.

### 3.2.6. Performance de la classification

Afin de pouvoir évaluer la méthode de classification, nous définissons les mesures statistiques suivantes :

#### 3.2.6.1. Taux de classification :

Nous définissons le taux de classification  $T_c$  comme suit :

$$T_c = \frac{\text{nombre d'échantillons bien classés}}{\text{nombre total d'échantillons}} \times 100 \quad (3.23)$$

### 3.2.7. Matrice de confusion

La matrice de confusion, est un outil servant à mesurer la qualité d'un système de classification. Chaque colonne de la matrice représente le nombre d'occurrences d'une classe estimée, tandis que chaque ligne représente le nombre d'occurrences d'une classe réelle (ou de référence). Les données utilisées pour chacun de ces groupes doivent être différentes. Un des intérêts de la matrice de confusion est qu'elle montre rapidement si le système parvient à classer correctement.

	Cas normal	Cas épileptique
Cas normal	TP	FP
Cas épileptique	FN	TN

**Tableau 3.1 : matrice de confusion**

TP: True Positif.

FP: False Postif.

FN : False Negatif.

TN: True Negatif.

À partir de la matrice de confusion on définit les performances de classification:

$$\text{sensitivité} = TPR = \frac{TP}{TP+FN} * 100\% \quad (3.24)$$

$$\text{spécificité} = TNR = \frac{TN}{TN+FP} * 100\% \quad (3.25)$$

TPR : True Positif Ratio

TNR: True Négatif Ratio

La spécificité est en statistique et en épidémiologie, la capacité d'un test ou d'un examen de diagnostic à donner un résultat négatif lorsque la maladie (ou la condition) n'est pas présente. Elle s'oppose à la sensibilité, qui est la capacité d'un test ou d'un examen à donner un résultat positif lorsque la maladie est présente.

### 3.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux types d'applications dans le but d'exploiter les transformées en ondelettes DWT et LWT à titre comparatif, sur les signaux EEG normaux et épileptiques.

Nous présenterons dans le chapitre suivant nos résultats et nos interprétations concernant les applications de compression et de classification.

# CHAPITRE IV

## TESTS ET RÉSULTATS

#### 4.1. Introduction

Pour les deux applications étudiées dans ce mémoire nous avons établi une étude comparative entre les ondelettes discrètes (DWT) et liftée (LWT). Il faut noter que les types ondelettes DWT et LWT utilisées dans ces applications, sont les ondelettes orthogonales et biorthogonales car elles permettent la reconstitution du signal avec le minimum d'erreur [52].

#### 4.2. Compression du signal EEG

Dans cette application nous avons réalisé un programme à l'aide du logiciel Matlab 7.5 avec lequel nous avons effectué la compression par ondelettes biorthogonales DWT et LWT pour différents signaux EEG, dont les étapes sont les suivantes :

1. chargement du signal EEG.
2. décomposition du signal à plusieurs niveaux.
3. fixation de la valeur du seuil en fonction de la valeur max des coefficients d'ondelettes.
4. compression du signal EEG à base d'ondelettes biorthogonales à chaque niveau de décomposition.
5. reconstitution du signal à partir des coefficients seuillés.

Dans la suite, nous allons interpréter les différents résultats obtenus par l'application de cet algorithme sur différents signaux EEG (pathologiques et normaux) en faisant référence à des estimations de taux de compression et de performance de reconstitution.

Nous avons affecté à chaque ondelette utilisée un numéro, comme le montre le tableau 4.1, afin de faciliter l'étude statistique.

N <sup>0</sup>	ondelettes	N <sup>0</sup>	ondelettes	N <sup>0</sup>	ondelettes	N <sup>0</sup>	ondelettes
1	bior1.5	8	bior3.5	15	rbio1.5	22	rbio3.3
2	bior2.2	9	bior3.7	16	bior1.3	23	rbio3.5
3	bior2.4	10	bior3.9	17	rbio2.2	24	rbio3.7
4	bior2.6	11	bior4.4	18	rbio2.4	25	rbio3.9
5	bior2.8	12	bior5.5	19	rbio2.6	26	rbio4.4
6	bior3.1	13	bior6.8	20	rbio2.8	27	rbio5.5
7	bior3.3	14	rbio1.3	21	rbio3.1	28	rbio6.8

**Tableau 4.1 : liste des ondelettes biorthogonales utilisées.**

Il faut noter que chaque ondelette DWT présente une version d'ondelette liftée LWT.

#### 4.2.1. Choix de l'ondelette pour la compression du signal EEG

Afin de choisir l'ondelette la plus adaptée à la compression du signal EEG, nous avons conçu un programme pour décomposer le signal EEG par les ondelettes biorthogonales version LWT et DWT, nous avons comparé les résultats par le calcul de l'erreur quadratique moyenne (EQM). L'expression de cette erreur est donnée par :

$$EQM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (eeg_i - eegr_i)^2$$

Où  $eeg_i$  : représente le signal original et  $eegr_i$  : représente le signal reconstitué.

Dans ce qui suit nous allons appliquer une décomposition par ondelettes DWT du tableau 4.1 et leur version LWT sur des signaux EEG d'un sujet sain et un autre épileptique de la base de données Physiobank pour un nombre de 4097 échantillons et une fréquence d'échantillonnage  $F_e$  égale à 173,61 Hz.

##### 4.2.1.1. Enregistrement sur sujets sains

Les tableaux 4.2 et 4.3 présentent les erreurs minimales obtenues parmi les 28 ondelettes du tableau 4.1 pour chaque niveau de décomposition, sur trois signaux EEG de sujets sains (Z001, Z050 et Z025).

###### a) Résultats obtenus avec l'ondelette LWT

signal sujet sain Z001			signal sujet sain Z050			signal sujet sain Z025		
erreur min	ondelette	niveau	erreur min	ondelette	niveau	erreur min	ondelette	niveau
0.0071e-28	bior3.7	1	0.0007e-27	bior3.9	1	0.0151e-28	bior3.9	1
0.0769e-28	bior3.7	2	0.0071e-27	bior3.9	2	0.1016e-28	bior3.9	2
0.3181e-28	bior2.6	3	0.0361e-27	bior3.5	3	0.4105e-28	bior2.2	3
0.4731e-28	bior2.2	4	0.0598e-27	bior2.4	4	0.5897e-28	bior2.2	4
0.5506e-28	bior2.2	5	0.0728e-27	bior2.2	5	0.8134e-28	bior2.2	5
0.6152e-28	bior2.2	6	0.0942e-27	bior2.2	6	0.9826e-28	bior2.2	6

**Tableau 4.2 : erreur de reconstitution minimale obtenue par LWT**

###### b) Résultats obtenus avec l'ondelette DWT

signal sujet saine Z001			signal sujet sain Z050			signal sujet sain Z025		
erreur min	ondelette	niveau	erreur min	ondelette	niveau	erreur min	ondelette	niveau
0.0403e-27	bior2.4	1	0.0056e-26	bior2.4	1	0.0526e-27	bior2.4	1
0.0897e-27	bior2.4	2	0.0129e-26	bior2.4	2	0.1317e-27	bior2.4	2
0.1851e-27	bior2.4	3	0.0222e-26	bior2.4	3	0.2438e-27	bior2.6	3
0.2789e-27	bior2.4	4	0.0361e-26	bior2.4	4	0.3736e-27	bior2.6	4
0.3624e-27	bior2.6	5	0.0427e-26	bior2.4	5	0.4949e-27	bior2.6	5

0.4467e-27	bior2.4	6	0.0560e-26	bior2.4	6	0.7247e-27	bior2.4	6
------------	---------	---	------------	---------	---	------------	---------	---

**Tableau 4.3 : erreur de reconstitution minimale obtenue par DWT**

Les résultats des deux tableaux 4.2 et 4.3 montrent l'avantage de la LWT par rapport à la DWT pour l'ensemble des trois signaux sains, choisis aléatoirement dans une banque de données EEG. En effet pour le même signal Z001 par exemple (tableau 4.2 et 4.3) l'erreur de reconstitution est de l'ordre de  $10^{-28}$  pour la LWT et de  $10^{-27}$  pour la DWT pour tous les niveaux de décompositions.

#### 4.2.1.2. Enregistrement sur sujets épileptiques :

De même les tableaux 4.4 et 4.5 présentent les erreurs minimales pour chaque niveau de décomposition par l'application de la transformée en ondelettes LWT et DWT sur des signaux épileptiques (N001, N050 et N025).

##### a) Résultats obtenus avec l'ondelette LWT

signal épileptique N001			signal épileptique N050			signal épileptique N025		
erreur min	ondelette	niveau	erreur min	ondelette	niveau	erreur min	ondelette	niveau
0.0008e-27	bior3.9	1	0.0004e-26	bior3.9	1	0.0009e-27	bior3.1	1
0.0074e-27	bior3.3	2	0.0026e-26	bior3.7	2	0.0047e-27	bior3.9	2
0.0245e-27	bior3.1	3	0.0105e-26	bior3.5	3	0.0125e-27	bior3.1	3
0.0517e-27	bior3.1	4	0.0197e-26	bior3.5	4	0.0357e-27	bior3.1	4
0.0897e-27	bior2.2	5	0.0256e-26	bior2.4	5	0.0692e-27	bior2.2	5
0.1125e-27	bior2.4	6	0.0313e-26	bior2.4	6	0.0814e-27	bior2.2	6
0.2852e-27	bior3.1	7	0.0451e-26	bior1.3	7	0.1937e-27	bior3.1	7

**Tableau 4.4 : erreur de reconstitution minimum obtenue par LWT**

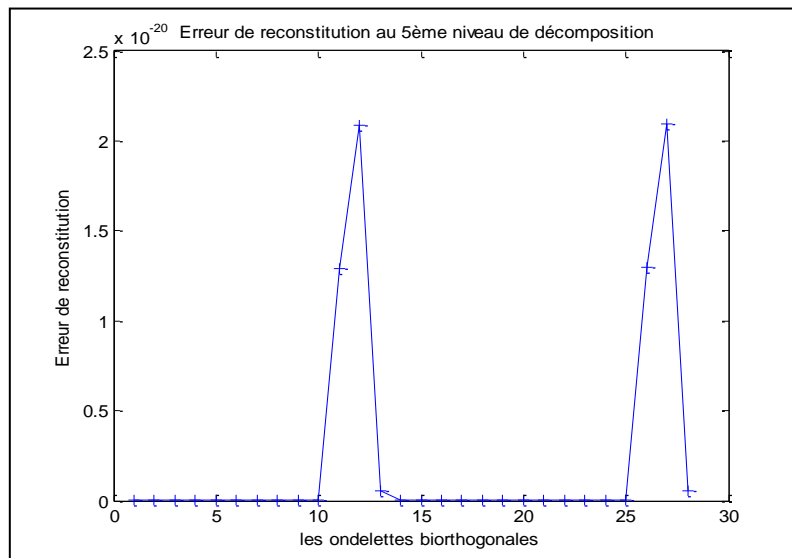
##### b) Résultats obtenus avec l'ondelette DWT

DWT signal épileptique N001			DWT signal épileptique N050			DWT signal épileptique N025		
erreur min	ondelette	niveau	erreur min	ondelette	niveau	erreur min	ondelette	niveau
0.0053e-26	bior2.4	1	0.0017e-25	bior2.4	1	0.0039e-26	bior2.4	1
0.0130e-26	bior2.4	2	0.0043e-25	bior2.4	2	0.0097e-26	bior2.4	2
0.0254e-26	bior2.4	3	0.0089e-25	bior2.6	3	0.0208e-26	bior2.4	3
0.0424e-26	bior2.4	4	0.0128e-25	bior2.6	4	0.0359e-26	bior2.4	4
0.0673e-26	bior2.6	5	0.0194e-25	bior2.4	5	0.0491e-26	bior2.6	5
0.0841e-26	bior2.4	6	0.0252e-25	bior2.6	6	0.0612e-26	bior2.4	6
0.6898e-26	bior3.1	7	0.0672e-25	bior1.3	7	0.4913e-26	bior3.1	7

**Tableau 4.5 : erreur de reconstitution minimum obtenue par DWT**

Les tableaux 4.4 et 4.5 montrent les mêmes résultats que précédemment, c'est à dire que pour les deux types de signaux EEG (sain et épileptique), l'erreur de reconstitution augmente en fonction du niveau de décomposition et cela pour les deux implémentations, mais la différence se trouve dans la valeur de cette erreur qui est nettement plus importante dans le cas de la DWT.

Les figures 4.1 et 4.2 montrent l'évolution de l'erreur de reconstitution au cinquième niveau de décomposition en fonction des ondelettes du tableau 4.1.

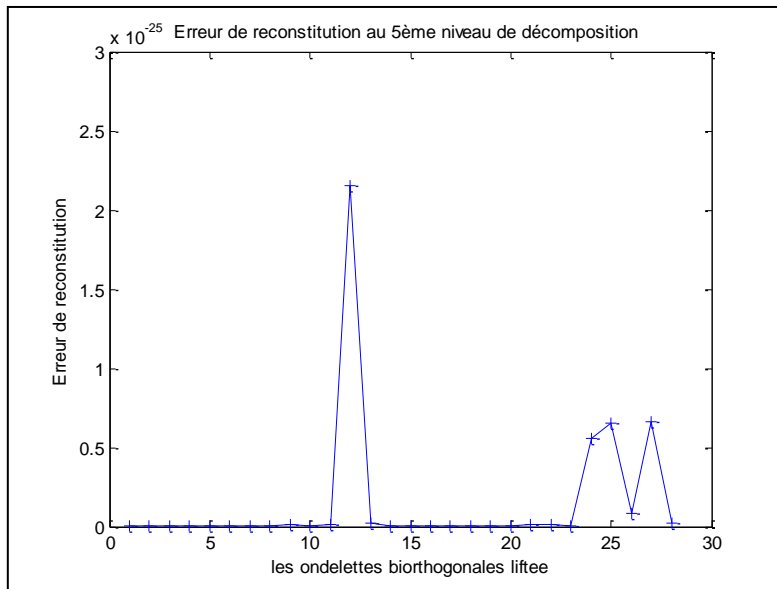


**Figure 4.1 : Erreur de reconstitution en fonction des ondelettes biorthogonales**

La figure 4.1 montre l'évolution de l'erreur (EQM) obtenue pour cinq niveaux de décomposition en fonction des ondelettes DWT du tableau 4.1. L'erreur est maximale pour la douzième et la vingt septième ondelette correspondantes respectivement à la bior5.5 et rbio5.5.

Nous avons appliqué le même procédé pour les ondelettes du tableau 4.1 version liftées LWT, les résultats obtenus sont représentés sur la figure 4.2

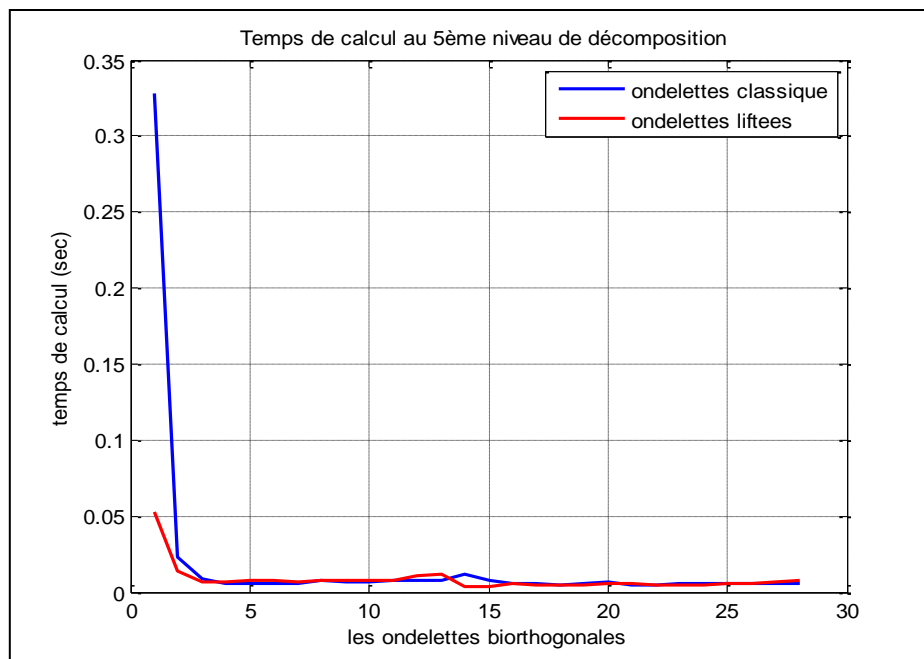
D'après les figures 4.1 et 4.2, on observe que l'erreur (EQM) est nettement plus importante pour la décomposition par DWT, elle atteint une valeur maximum pour la douzième ondelette correspondante à la bior5.5 DWT de l'ordre de  $2 \times 10^{-20}$  (figure 4.1) et une valeur maximum pour la même ondelette bior5.5 de  $2 \times 10^{-25}$  dans le cas de la LWT (figure 4.2).



**Figure 4.2 : Erreur de reconstitution en fonction des ondelettes biorthogonales liftées.**

#### 4.2.2. Temps de calcul

Dans cette application nous avons appliqué la décomposition d'un signal EEG sujet sain par des ondelettes DWT et les même ondelettes version liftées LWT, les résultats obtenus sont représentés sur la figure 4.3 :



**Figure 4.3 : tracés des temps de décomposition par la LWT et la DWT.**

D'après la figure 4.3 le temps de décomposition par les ondelettes biorthogonales discrètes (DWT) et leur version liftées (LWT) est presque le même pour l'ensemble des ondelettes, à l'exception de la première ondelette du tableau 4.1 la bior1.5 où le temps de calcul de la LWT est inférieur au temps de la décomposition de DWT. Ainsi la programmation par Matlab ne permet pas de voir l'apport principal de l'ondelette LWT par rapport à celui de la DWT dans ce type d'application.

#### 4.2.3. Compression du signal EEG par ondelette

Afin de réaliser un choix sur l'ondelette la plus adaptée à ce type de signaux EEG et pour une application de compression, nous avons fait une étude comparative sur les ondelettes discrètes DWT et les ondelettes liftées LWT. Les résultats de la compression du signal EEG d'un sujet sain dont le nombre d'échantillons est de 4097 et la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  de 173,61Hz, sont résumés dans les figures et tableaux suivants :

Les tableaux 4.6 et 4.7 présentent le taux de compression maximum pour chaque niveau de décomposition et pour chaque valeur du seuil par l'application de la compression par ondelettes DWT et liftées respectivement sur un signal EEG de sujet sain.

taux de compression max par DWT parmi les 28 ondelettes utilisées								
	seuil 5%	ondelette	seuil 10%	ondelette	seuil 15%	ondelette	seuil 20%	ondelette
niveau 1	50.0974	rbio1.5	50.2925	rbio1.3	50.2925	rbio1.3	50.2925	rbio1.3
niveau 2	63.0180	bior3.1	70.6728	bior3.1	74.0633	bior3.3	74.7928	bior3.1
niveau 3	64.3762	bior3.1	73.5973	bior5.5	79.5785	bior5.5	82.0494	bior5.5
niveau 4	64.3762	bior3.1	73.5973	bior5.5	79.5785	bior5.5	82.0494	bior5.5
niveau 5	64.8491	bior3.1	75.2711	bior5.5	82.5982	bior5.5	85.9243	bior5.5

**Tableau 4.6 : Taux de compression maximum pour une décomposition par DWT.**

Ainsi d'après le tableau 4.6, par exemple pour un niveau 1 et un seuil de 5% parmi l'ensemble des vingt huit ondelettes utilisées, c'est la rbio1.5 qui donne le meilleur score de 50,0974% de taux de compression, mais pour le même seuil, le meilleur taux de compression est réalisé au niveau cinq avec la bior3.1 avec un score de 64,8491%.

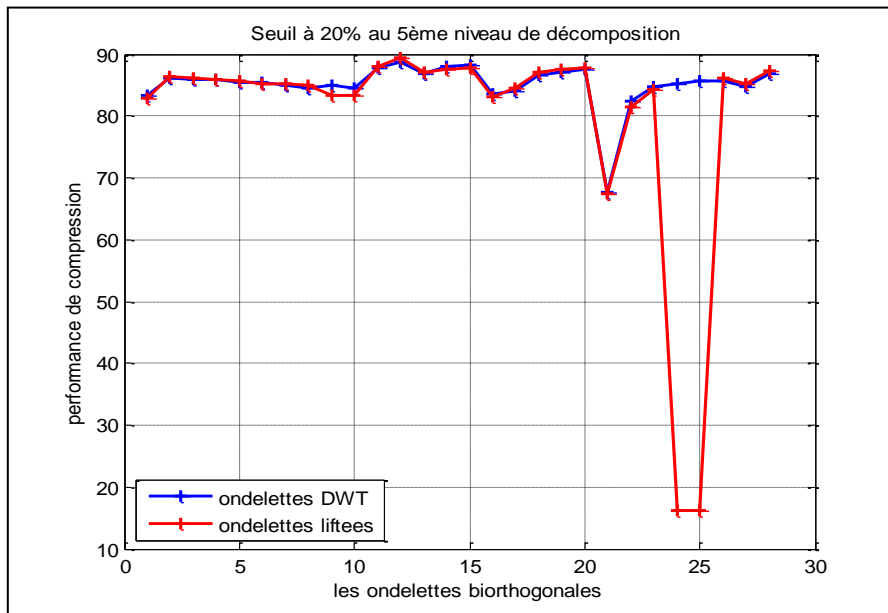
Il est à noter qu'un seuil plus important (de 20% par exemple) donne forcément des résultats plus importants que celui de 5%. Le tableau 4.6 montre que pour le niveau cinq et le seuil de 20% la bior5.5 permet d'atteindre 85,9243% de taux de compression.

taux de compression max par LWT parmi les 28 ondelettes utilisées								
	seuil 5%	ondelette	seuil 10%	ondelette	seuil 15%	ondelette	seuil 20%	ondelette
niveau 1	56.4559	rbio1.5	62.1674	bior5.5	67.7325	bior5.5	72.6141	rbio3.5
niveau 2	64.2177	bior3.1	74.4691	bior3.1	79.4972	bior5.5	83.1096	bior5.5
niveau 3	64.9256	bior3.1	75.5431	bior3.1	81.5719	bior5.5	85.1355	bior5.5
niveau 4	64.8279	bior3.1	75.3234	bior3.1	82.0356	bior5.5	85.8189	bior5.5
niveau 5	64.7791	bior3.1	75.2502	bior3.1	82.1089	bior5.5	85.9409	bior5.5

**Tableau 4.7 : Taux de compression maximum pour une décomposition par LWT.**

Le tableau 4.7 donne la meilleure compression de 85,9409% obtenue au cinquième niveau avec un seuil de 20% par la bior5.5. Les tableaux 4.6 et 4.7 nous permettent de conclure que le tableau 4.7 donne la meilleure compression de 85,9409% obtenue au cinquième niveau avec un seuil de 20% par la bior5.5. Les tableaux 4.6 et 4.7 nous permettent de conclure que les résultats sont presque équivalents en performance de compression pour la DWT et LWT. Ils montrent aussi que les meilleurs scores de compression peuvent être atteints avec un seuil de 20% par la DWT et LWT de l'ondelette bior5.5.

Pour plus de détail la figure 4.3 montre l'évolution de la performance de compression sur l'ensemble des ondelettes du tableau 4.1 et confirme le meilleur taux par la douzième ondelette (bior5.5) pour la DWT et LWT.



**Figure 4.3 : Evolution du taux de compression en fonction des ondelettes LWT et DWT au cinquième niveau de décomposition avec un seuil de 20%.**

Dans les tableaux 4.8 et 4.9 nous présentons les performances de reconstitution maximum pour chaque niveau de décomposition et pour chaque valeur du seuil en appliquant les deux générations d'ondelettes (DWT et LWT).

	performance de reconstitution max par DWT parmi les 28 ondelettes utilisées							
	seuil 5%	ondelette	seuil 10%	ondelette	seuil 15%	ondelette	seuil 20%	ondelette
niveau 1	99.8815	bior3.9	99.8815	bior3.9	99.8710	bior3.9	99.8710	bior3.9
niveau 2	99.8157	rbio3.1	99.2828	bior3.9	98.5608	bior3.9	98.3125	bior3.3
niveau 3	99.8441	rbio3.1	99.4128	bior3.5	98.7680	bior3.3	98.3208	bior3.3
niveau 4	99.8765	bior3.1	99.5251	bior3.1	98.9915	bior3.1	98.4550	bior3.1
niveau 5	99.9115	bior3.1	99.6607	bior3.1	99.2757	bior3.1	98.8822	bior3.1

**Tableau 4.8 : Performance de reconstitution maximum pour la DWT.**

D'après le tableau 4.8 la meilleure performance de reconstitution est atteinte avec un taux de 99,9115% au niveau cinq avec un seuil de 5% par l'ondelette DWT bior3.1.

Il est à noter que les meilleures performances de reconstitutions sont obtenues au cinquième niveau pour un seuil de 5% soit un taux de 99,9991% pour l'ondelette LWT rbio5.5 (tableau 4.9).

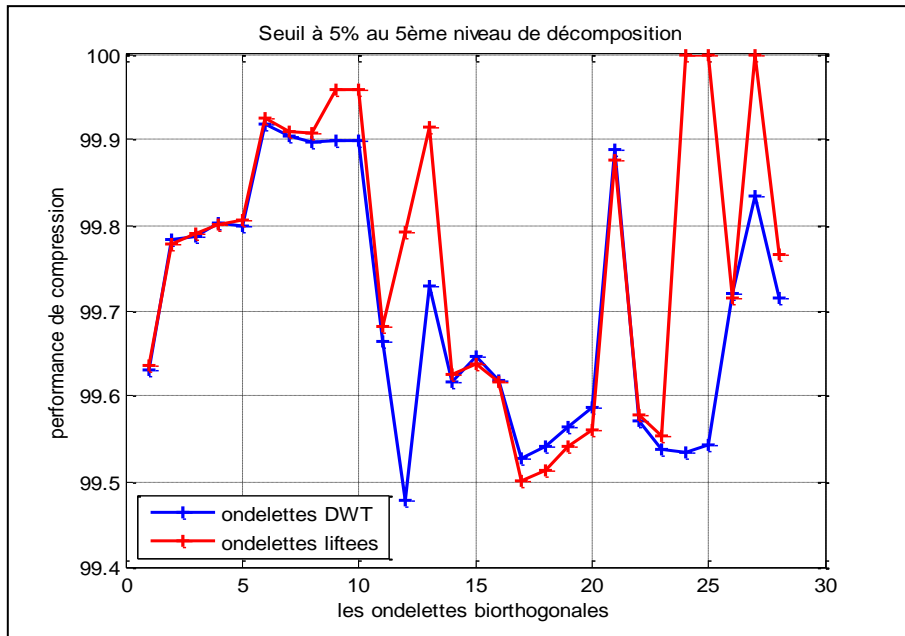
	performance de reconstitution max par LWT parmi les 28 ondelettes utilisées							
	seuil 5%	ondelette	seuil 10%	ondelette	seuil 15%	ondelette	seuil 20%	ondelette
niveau 1	99.9739	rbio3.7	99.8079	rbio3.9	99.3630	rbio3.9	98.5494	rbio3.9
niveau 2	99.9904	rbio3.9	99.9310	rbio3.9	99.7558	rbio3.7	99.4544	rbio3.7
niveau 3	99.9943	rbio3.9	99.9611	rbio3.9	99.8686	rbio3.9	99.6914	rbio3.7
niveau 4	99.9958	rbio3.9	99.9721	rbio3.9	99.9046	rbio3.9	99.7770	rbio3.9
niveau 5	99.9991	rbio5.5	99.9972	rbio5.5	99.9937	rbio5.5	99.9893	rbio5.5

**Tableau 4.9 : Performance de reconstitution maximum pour la LWT**

La figure 4.4 montre l'évolution des performances de reconstitution en fonction des ondelettes DWT et LWT du tableau 4.1, pour une valeur du seuil de 5 % au cinquième niveau de décomposition.

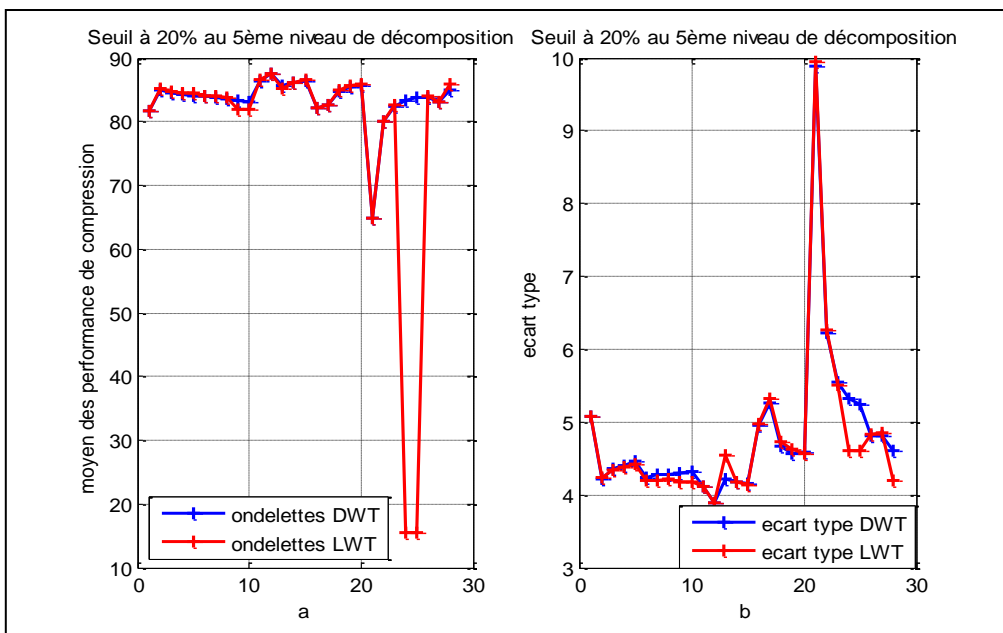
Ces résultats montrent l'apport des ondelettes biorthogonales (DWT ou LWT). Pour des taux de compression importants, nous atteignons des performances de reconstitution importantes.

En effet pour la douzième ondelette bior5.5 LWT, nous obtenons un taux de compression max de 85,9409 % (tableau 4.7) pour une performance de reconstitution de 99,6010%. Dans le cas de la DWT, avec la bior5.5 nous obtenons un taux de compression max de 85.9243% (tableau 4.6) pour une performance de reconstitution de 99,6096%.



**Figure 4.4 : Evolution de la performance de reconstitution en fonction des ondelettes utilisées au cinquième niveau de décomposition avec un seuil de 5%.**

La meilleure performance de reconstitution PR de 99.9115 % (tableau 4.8) est obtenue avec la DWT bior3.1 (sixième ondelette) et un taux de compression de 81.3766%. Par contre le meilleur PR est de 99.9991% (tableau 4.9) dans le cas de la rbio5.5 liftée avec un taux de compression 81.9868%.

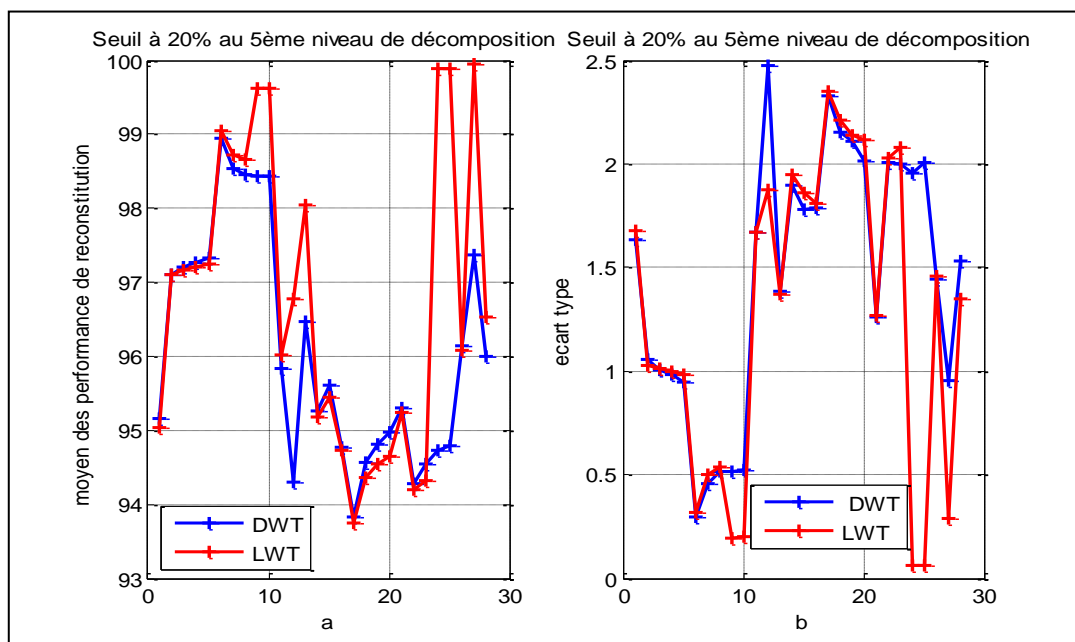


**Figure 4.5 : Evolution du taux de compression moyenne et écart type d'un ensemble de signaux EEG normaux et épileptique.**

D'après nos résultats les performances de compression sont presque équivalentes pour les deux générations d'ondelettes (DWT ou LWT). Pour justifier ces résultats, une étude statistique est menée.

La figure 4.5 (a) représente l'évolution du taux de compression moyen en termes statistiques pour un ensemble de deux cent signaux EEG (100 sujets sains et 100 sujets épileptiques) en fonction des ondelettes DWT et LWT du tableau 4.1, pour le cinquième niveau de décomposition et un seuil de 20% ainsi que l'évolution de l'écart type de l'ensemble des taux de compression à droite (figure 4.5 b).

La figure 4.6 (a) représente l'évolution de la performance de reconstitution moyenne pour le même ensemble de signaux en fonction des ondelettes DWT et LWT du tableau 4.1, pour le cinquième niveau de décomposition et un seuil de 20% ainsi que l'évolution de l'écart type de l'ensemble des performances de reconstitution à droite (figure 4.6 b).



**Figure 4.6 : Evolution de la performance de reconstitution moyenne et écart type d'un ensemble de signaux EEG normaux et épileptique.**

L'application de la compression par ondelettes (DWT et LWT) à l'ensemble des signaux EEG donne les mêmes résultats que ceux trouvés précédemment pour un seul signal.

D'après la figure 4.5 (a), pour le cinquième niveau de décomposition et pour un seuil de 20% nous obtenons un maximum de taux de compression moyen statistiquement parlant de 87.6287% avec un écart type de 3.8953 pour un PR moyen de 94.3030% avec un écart type de 2.4708 par la douzième ondelette DWT (bior5.5) et pour la même ondelette version LWT

nous obtenons un maximum de taux de compression moyen de 87.6561% avec un écart type de 3.8962 pour un PR moyen de 96.7759% avec un écart type de 1.8785.

La meilleure performance de reconstitution moyenne PR (figure 4.6 a) de 98.9543% avec un écart type de 0.2986 (figure 4.6 b) est obtenue pour un taux de compression de 84.0934% avec un écart type de 4.2294 par l'application de la sixième ondelette DWT bior3.1. Dans le cas de la vingt septième ondelette LWT rbior5.5, on obtient une meilleure performance de reconstitution moyenne PR de 99.9465% (figure 4.6 a) avec un écart type de 0.2918 (figure 4.6 b) pour un taux de compression de 83.1585% avec un écart type de 4.8484.

D'après les figures 4.5 et 4.6, notre étude statistique favorise l'ondelettes LWT rbior5.5 qui donne les meilleures performances de compression.

Les résultats de cette étude sont résumés dans le tableau 4.10.

ondelette LWT	seuil	niveau	PR	écart type	Tc	écart type
rbio5.5	20%	5	99.9465%	0.2918	83.1585%	4.8484

**Tableau 4.10 : les performances moyennes optimales pour la compression.**

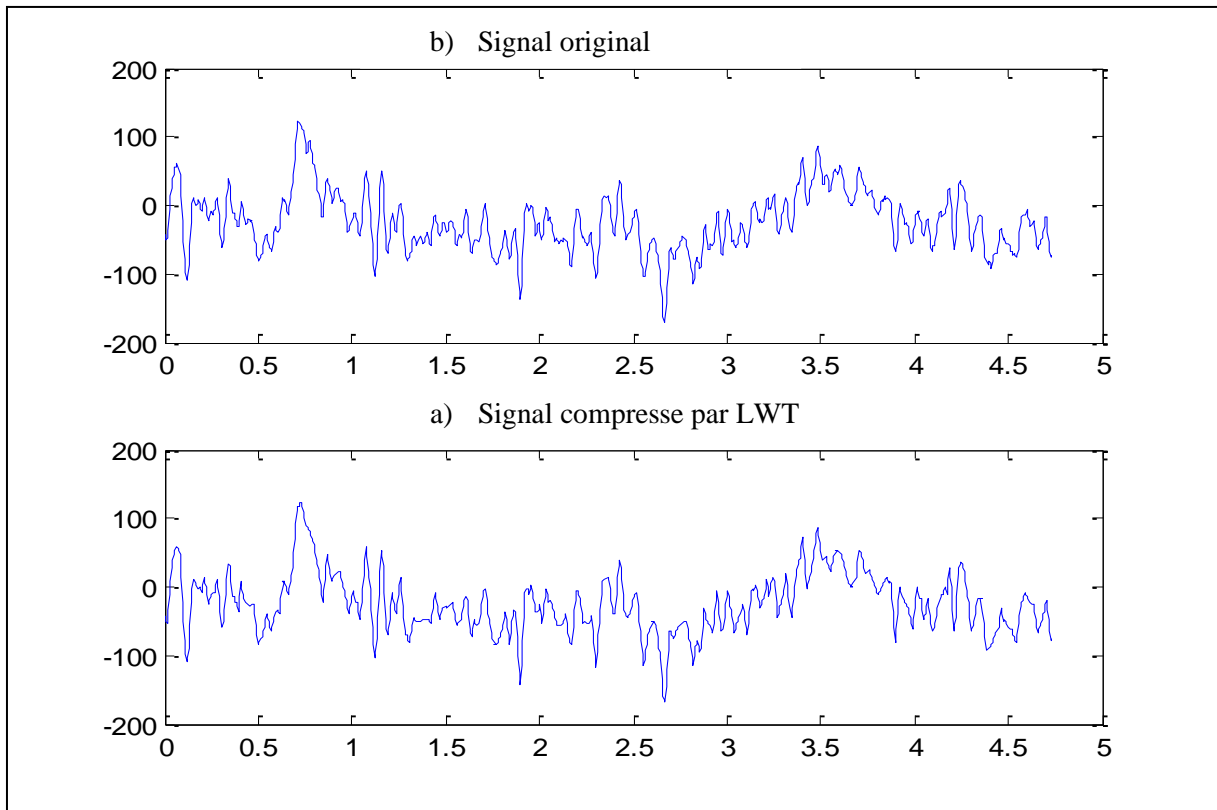
#### 4.2.4. Résultats de la compression :

L'algorithme que nous avons élaboré, a été testé sur des signaux réels (sains et pathologiques) choisis aléatoirement de la base de données [Physiobank]. Sur la figure (4.7 a) nous avons représenté une fenêtre de ce signal. La figure (4.7 b) représente le signal reconstitué après la compression par l'ondelette LWT rbio5.5. Les résultats de la compression sont représentés sur le tableau 4.11.

Ondelette analysante	Niveau de décomposition	Seuil(%)	Tc(%)	PR(%)
rbio5.5 LWT	5	20	83.1585%	99.9465%

**Tableau 4.11 : Résultats pour l'EEG sujet sain.**

L'application de notre algorithme sur 4097 échantillons de l'EEG d'un sujet sain nous a donné un taux de compression de 83.1585% avec une performance de reconstitution de 99.9465% comme le montre le tableau 4.11.



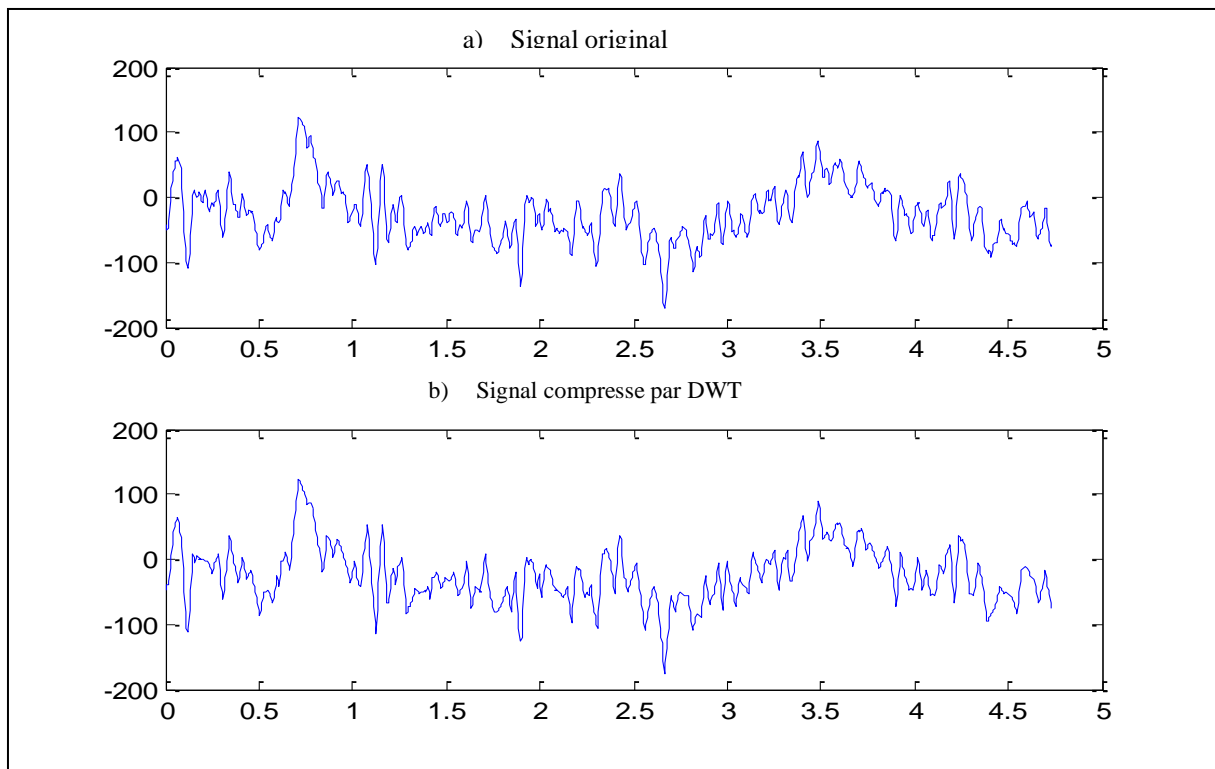
**Figure 4.7 : Signal EEG sujet sain original avec le signal compressé.**

Pour avoir une idée sur l'apport de l'ondelette LWT par rapport à la DWT, ce même signal a été décomposé par DWT rbio5.5, les résultats sont les suivants.

Ondelette analysante	Niveau de décomposition	Seuil(%)	Tc(%)	PR(%)
rbio5.5 DWT	5	20	83.0028	97.3668

**Tableau 4.12 : Résultats pour l'EEG sujet sain.**

La figure 4.8 (a) représente le signal de la figure 4.7 (a) avec sa version reconstituée après compression par l'ondelette DWT rbio5.5 (figure 4.8 b).



**Figure 4.8 : Signal EEG sujet sain original avec le signal compressé.**

Les reconstitutions soumises à l’avis du médecin neurologue ont été approuvées dans le sens où le signal garde l’information d’origine normal ou pathologique quelque soit l’ondelette utilisée (DWT ou LWT).

### **4.3. Classification du signal EEG**

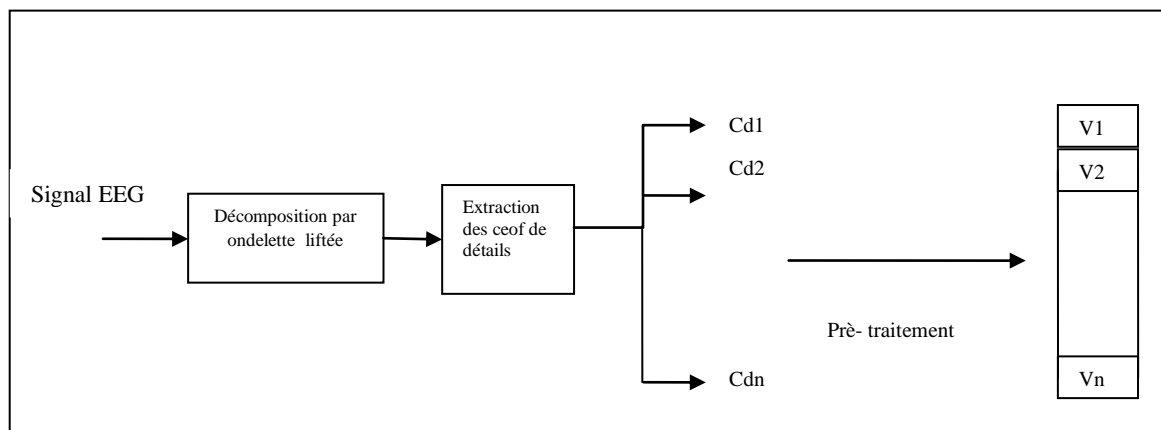
La classification des signaux EEG normaux et pathologiques doit passer par les étapes suivantes :

#### **4.3.1 Extraction des paramètres caractéristiques**

Les techniques d'extraction de caractéristiques les plus récentes exploitent simultanément dans les domaines temporels et fréquentiels [44] [45] [46] [47]. Dans notre cas on s’intéresse à l’apport de la transformée en ondelettes dans le domaine de la détection de pathologie encéphalique.

La variance des coefficients de détails des 5 premiers niveaux de décompositions sont des paramètres pertinents pour le cas de la DWT [48].

Le but de notre application est de montrer que ces paramètres extraits de l’ondelette LWT peuvent apporter un plus à la classification des signaux EEG. Pour cela l’extraction des coefficients de détails se fera par ondelettes DWT et LWT à titre comparatif.



**Figure 4.13 : Extraction des caractéristiques d'un signal EEG par ondelettes.**

#### 4.3.2. Choix du niveau de décomposition :

Les signaux EEG de la banque de données, qui va servir à l'apprentissage pour la détection de la pathologie (épilepsie), sont tous échantillonnés à la même fréquence d'échantillonnage  $F_e=173.61\text{Hz}$ . Ainsi les filtres FIR, utilisés par la DWT seront dans les bandes de fréquences suivantes :

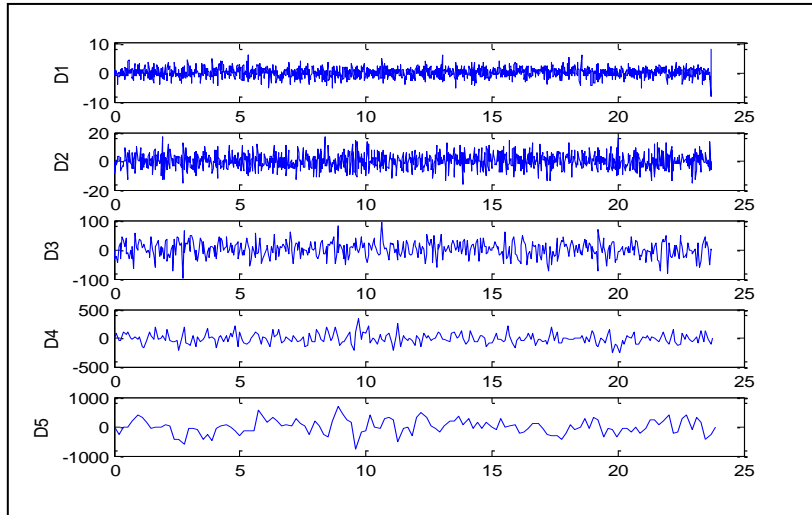
Coefficients de détails	Bandes de fréquence(Hz)
D1	43.4–86.8
D2	21.7–43.4
D3	10.8–21.7
D4	5.4–10.8
D5	2.7–5.4

**Tableau 4.13: Les bandes de fréquences des différents niveaux de décompositions**

Connaissant la bande fréquentielle des différentes ondes constituant la signal EEG  $\alpha$  (1–4 Hz),  $\beta$  (4–8 Hz),  $\delta$  (8–13 Hz) et  $\theta$  (13–30 Hz), la correspondance parait évidente entre les bandes de fréquence des coefficients des différents niveaux avec la gamme fréquentielle de ces ondes. Ainsi :

- ✓ D5 contient l'information sur l'onde  $\alpha$  ,
- ✓ D4 contient l'information sur l'onde  $\beta$
- ✓ D3 contient l'information sur l'onde  $\delta$  et  $\theta$
- ✓ D2 contient l'information sur l'onde  $\theta$

La figure 4.14 représentent les coefficients de détails d'un signal EEG d'un cas épileptique sur une durée de 25 secondes.



**Figure 4.14: Les coefficients de détails du signal EEG d'un sujet épileptique.**

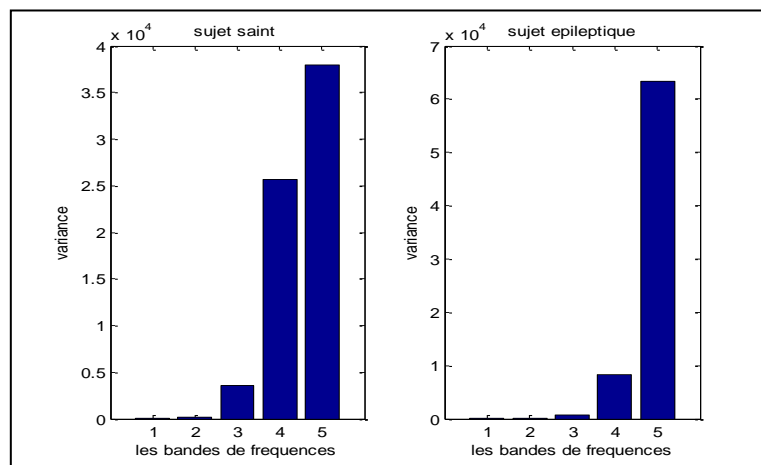
### 4.3.3. Calcul de la variance:

Après la décomposition par ondelette du signal EEG, nous allons calculer la variance des coefficients de détails.

Pour un signal  $x$  de taille  $N$  de moyenne  $x_m$ , on définit la variance d'énergie par:

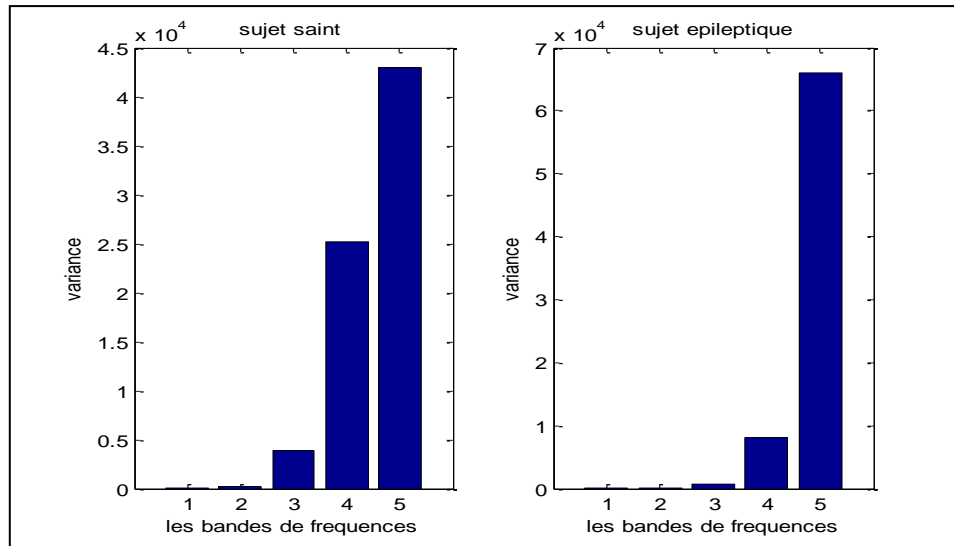
$$\text{Var} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|x_i - x_m\|^2$$

D'après la figure 4.15, la distribution de l'énergie sur cinq (05) premiers niveaux de décompositions présentent plus de 90% de l'énergie totale du signal, ce qui justifie la limitation de la décomposition aux cinq premiers niveaux, pour chacune des deux classes.



**Figure 4.15 : distribution de la variance des coefficients de détails (DWT) pour 5 niveaux.**

D'après les figure 4.15 et 4.16 nous constatons une forte dominance de la variance des coefficients de détails du niveau D4 d'un sujet sain par rapport à celle du D4 du sujet épileptique quelque soit l'ondelette mise en jeu DWT ou LWT.



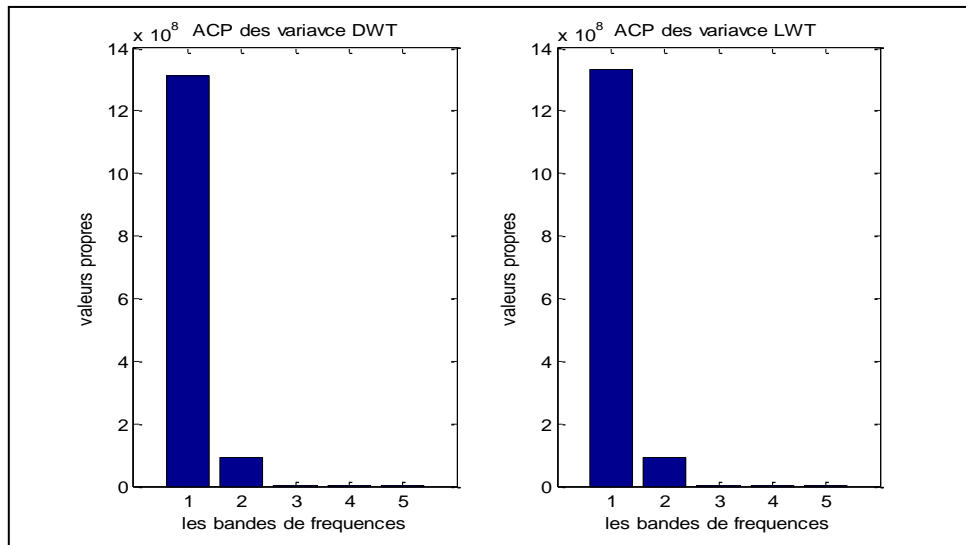
**Figure 4.16 : distribution de la variance des coefficients de détails (LWT) pour 5 niveaux.**

Cette remarque confirme le choix de la variance des cinq premiers niveaux de décomposition comme paramètre pertinent pour la caractérisation du signal EEG.

Une étude statistique sur l'ensemble de la banque d'apprentissage montre la même observation pour la DWT et la LWT.

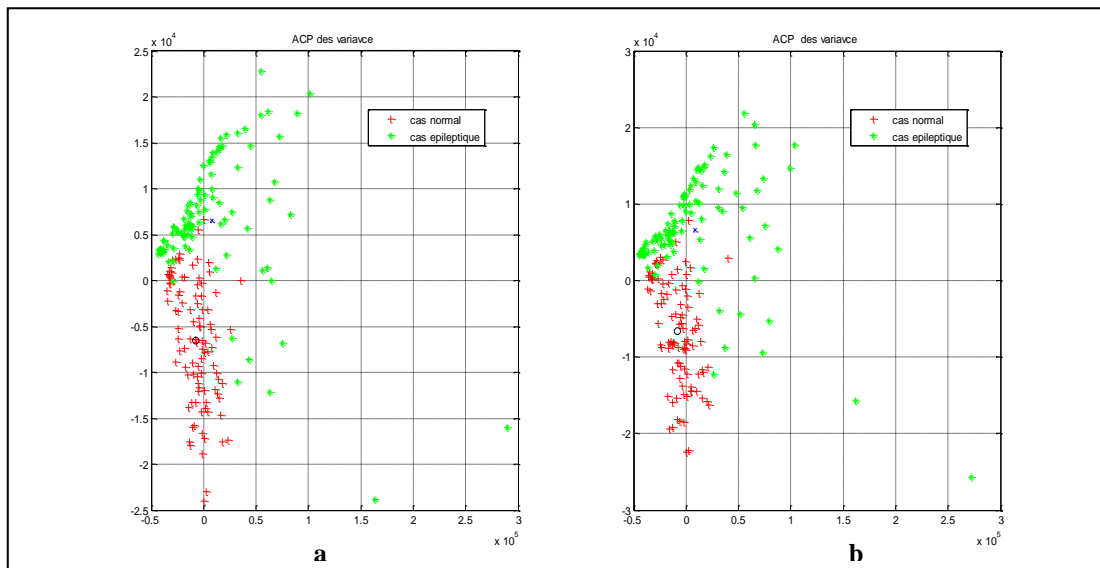
Après l'application de la transformée en ondelette DWT et LWT et le calcul de la variance des coefficients de détails, le signal EEG sera représenté par un vecteur de dimension 5.

Afin de réduire l'espace des paramètres, nous avons eu recours à la méthode de l'analyse en composantes principales [50]. L'application de l'ACP, n'est autre qu'un changement d'espace où l'on peut choisir les axes de projection, pour garder les plus pertinents. A partir de la distribution des valeurs propres (variance) de la matrice contenant les signaux à classer, (figure 4.17) on peut remarquer que la majorité de la variance des vecteurs caractéristiques de ces signaux est concentrée sur les deux premiers axes.



**Figure 4.17: représentation des valeurs propres pour les deux bases de données.**

Donc nous proposons de réduire la dimension des vecteurs caractéristiques à deux dimensions. Dans notre application, la visualisation de l'espace de projection est donnée par la figure 4.18.



**Figure 4.18 : projection sur les axes ACP de la base des variances  
a : décomposition par DWT, b : par LWT.**

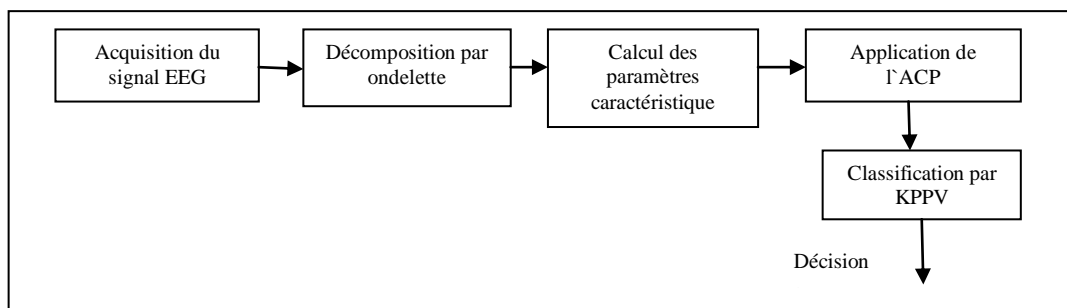
La projection de nos données sur les principaux axes de l'ACP permet d'observer deux régions distinctes représentant les deux classes à séparer. L'application de l'ACP nous a permis de distinguer les deux classes. La méthode de classification par la règle des K plus proche voisin, nous permettra de prendre la décision d'attribuer un signal EEG dans sa classe d'appartenance.

#### 4.3.4. La classification par KPPV:

Les étapes de classification d'un EEG quelconque consiste à lui appliquer les étapes suivantes :

- le signal acquis est décomposé par ondelettes (DWT et LWT) en cinq niveaux de décomposition ; l'extraction des paramètres consiste à calculer les variances des coefficients des cinq premiers niveaux.
- La transition d'un espace de cinq paramètres caractéristiques du signal EEG à deux, se fait grâce la matrice de transition (ACP)
- Enfin le calcul de la distance d'un autre signal EEG par rapport aux autres différents signaux de la base de données permettra de l'attribuer à la classe la plus proche.

La figure (4.20) décrit la démarche de classification automatique



**Figure 4.20: Schéma de classification.**

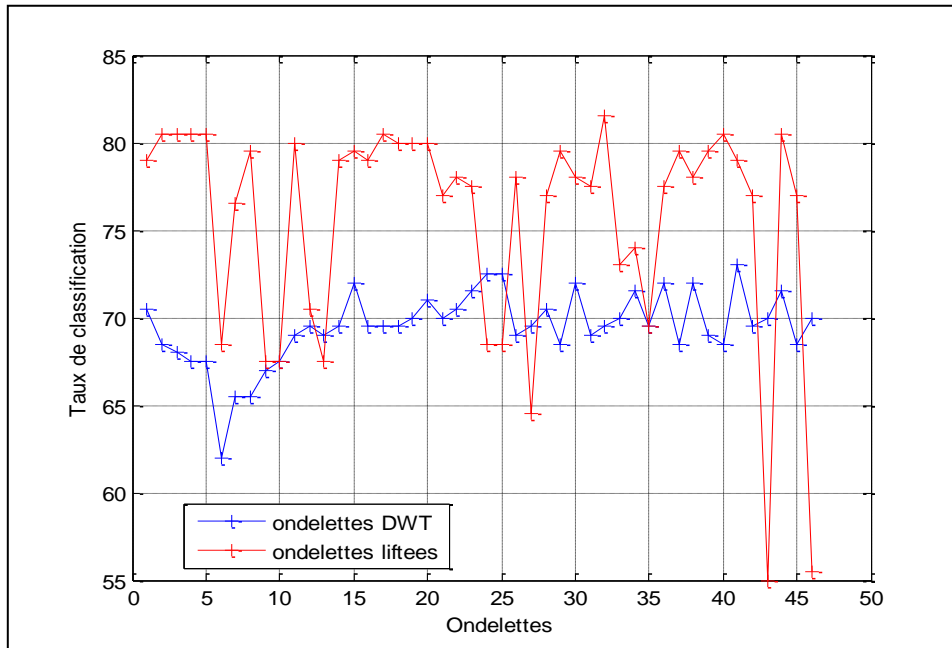
##### 4.3.4.1. Application

Dans cette application nous avons conçu un algorithme qui décompose les signaux EEG de la base de données par ondelettes DWT et LWT, calcule les paramètres de variance et applique l'analyse par composantes principales pour chaque signal. Les 46 ondelettes utilisées sont issues du logiciel MATLAB 7.5 (tableau 4.14).

N <sup>0</sup>	ondelettes	N <sup>0</sup>	ondelettes	N <sup>0</sup>	ondelettes	N <sup>0</sup>	ondelettes	N <sup>0</sup>	ondelettes	N <sup>0</sup>	ondelettes
1	bior1.5	9	bior3.7	17	rbio2.2	25	rbio3.9	33	sym6	41	db5
2	bior2.2	10	bior3.9	18	rbio2.4	26	rbio4.4	34	sym7	42	db6
3	bior2.4	11	bior4.4	19	rbio2.6	27	rbio5.5	35	sym8	43	db7
4	bior2.6	12	bior5.5	20	rbio2.8	28	rbio6.8	36	sym5	44	db8
5	bior2.8	13	bior6.8	21	rbio3.1	29	Haar	37	db1	45	coif1
6	bior3.1	14	rbio1.3	22	rbio3.3	30	sym2	38	db2	46	coif2
7	bior3.3	15	rbio1.5	23	rbio3.5	31	sym3	39	db3		
8	bior3.5	16	bior1.3	24	rbio3.7	32	sym4	40	db4		

**Tableau 4.14. : Liste des ondelettes utilisées pour la classification.**

Les taux de classification obtenus pour les deux générations d'ondelettes du tableau sont représentés dans la figure 21.



**Figure 21 : Taux de classification des deux générations d'ondelettes.**

Les résultats obtenus montrent l'évolution du taux de classification en fonction des ondelettes DWT et LWT du tableau 4.14. On observe un meilleur taux de classification pour les ondelettes liftées par rapport aux ondelettes DWT. Le tableau 4.15 présente les taux de classification maximum obtenus par les 46 ondelettes du tableau 4.4, où on observe un taux de classification maximal pour l'ondelette DWT db5 qui atteint les 73 %, et 81,5 % pour l'ondelette liftée sym4. Donc notre choix porte sur la décomposition du signal EEG par les ondelettes LWT sym4.

Ondelettes DWT	Taux de classification
db5	73.0000 %
ondelettes LWT	Taux de classification
sym4	81.5000 %

**Tab 4.15 : taux de classification maximum.**

#### 4.3.5. Résultats de la classification:

Nous avons testé notre méthode sur le logiciel MATLAB 7.5, en utilisant les signaux EEG de la banque de données disponible. La distribution des données des signaux EEG utilisés est donnée dans le tableau 4.16 :

	Apprentissage	Test	Total
Cas normale	50	50	100
Cas épileptique	50	50	100
Total	100	100	200

**Tab4.16 : Distribution des signaux tests et d'apprentissage.**

Le résultat final de notre méthode appliquée est représenté sur le tableau suivant:

	Cas normal	Cas épileptique
Cas normal	95	5
Cas épileptique	32	68

**Tab 4.17 : matrice de confusion**

La qualité de notre système de classification est résumée par la matrice de confusion du tableau 4.17.

$$Tc = \frac{95 + 68}{200} * 100$$

$$Tc = 81,5 \%$$

et donc un taux d'erreur  $T_e$  de 18,5 %.

$$\text{sensitivité} = TPR = \frac{95}{95 + 32} * 100\%$$

$$TPR = 74,8 \%$$

$$\text{spécificité} = TNR = \frac{68}{68 + 5} * 100\%$$

$$TNR = 93,15 \%$$

Notre objectif de dégager la meilleure performance de classification entre la DWT et la LWT pour le même classificateur et la même base de données est atteint.

#### **4.4. Conclusion**

Ce chapitre nous a permis d'évaluer les performances des deux techniques de la transformée en ondelette (DWT et LWT) que nous avons appliquées pour la compression et la classification des signaux EEG. Les résultats obtenus montrent que les performances de compression et de reconstitution sont presque équivalentes pour les deux techniques appliquées (DWT et LWT) à la compression des signaux EEG, l'étude statistique sur un ensemble de 200 signaux sains et épileptiques confirme ces résultats. Le choix de l'ondelette la mieux adaptée à la forme du signal EEG permet d'augmenter le taux de compression et garantir une bonne reconstitution. L'élévation du niveau de décomposition et la fixation du seuil permet d'augmenter le taux de compression en gardant une bonne performance de reconstitution. Notre étude nous a permis de choisir la LWT *rbio5.5* comme outil de compression des signaux encéphaliques avec un taux de compression de 83% et un taux de reconstitution de 99%.

Pour la deuxième application, nous avons proposé une méthode de détection automatique des anomalies encéphaliques sur la base d'une banque d'apprentissage de 100 signaux normaux et 100 autres épileptiques. L'ensemble de ces signaux ont été décomposés par les deux générations d'ondelettes DWT et LWT afin d'en extraire les paramètres les plus pertinents de ce type de signaux. Pour dégager la technique d'ondelette la mieux adaptée pour la détection d'anomalie, nous avons réalisé une étude comparative en se basant sur la même banque de donnée et les mêmes méthodes d'implémentation du classificateur, soient l'ACP pour la réduction de l'espace de mesure et la KPPV pour la classification. Dans cette application c'est la LWT *sym4* qui est retenue car les performances de classification atteignent un taux de 81,5%. Ces résultats restent relatifs à la banque de donnée choisie et les méthodes de classifications utilisées.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

## **Conclusion générale**

Dans ce mémoire nous avons présenté deux techniques moyennant la transformée en ondelettes (DWT et LWT) que nous avons appliqué pour le traitement des signaux électroencéphalographiques (EEG).

Afin de valider le choix de la transformée en ondelette comme outil de traitement pour notre travail, nous avons abordé les notions de la transformée de Fourier ainsi que sa limitation et le passage de Fourier aux ondelettes.

Par la suite, nous avons introduit les aspects théoriques et fondamentaux des ondelettes ainsi que les deux techniques dérivées : la DWT et LWT.

L'utilisation du filtrage en sous-bandes (DWT) reste la méthode la plus souvent employée dans la littérature, et conserve l'avantage d'être bien maîtrisée. Le lifting d'ondelette est quant à lui beaucoup moins répandu puisque la technique date du milieu des années 90. Cependant, ses nombreux avantages algorithmiques lui ont valu une reconnaissance grandissante.

Deux applications ont été proposées, la compression et la classification des signaux EEG. Pour chacune des deux types d'applications, nous avons établi une étude comparative entre les deux techniques de la transformée en ondelette DWT et LWT, afin de justifier le choix de l'ondelette la mieux adaptée à ces types de signaux.

Pour la compression, la méthode proposée est la décomposition par ondelette DWT et LWT, suivie par une étape de seuillage, les résultats obtenus sont presque équivalents pour les deux techniques utilisées. Après une étude statistique sur un ensemble de 200 signaux EEG, normaux et pathologiques, c'est la rbio5.5 liftée qui a été retenue pour ses performances de compression.

Pour la deuxième application, nous avons proposé une méthode de détection automatique des anomalies encéphaliques sur la base d'une banque d'apprentissage de 100 signaux normaux et 100 autres épileptiques. L'ensemble de ces signaux a été décomposé par les deux générations d'ondelettes DWT et LWT afin d'extraire les paramètres pertinents de ce type de signaux. Afin de dégager la technique d'ondelette la mieux adaptée pour la détection d'anomalie, nous avons réalisé une étude comparative en ce basant sur la même banque de donnée et les mêmes méthodes d'implémentation du classificateur, soient l'ACP pour la réduction de l'espace de mesure et la KPPV pour la classification. Cette application favorise la LWT sym4 pour ses performances de classification avec un taux important relativement à la simplicité du classificateur implémenté.

En perspectives, nous proposons l'application de détection automatique d'anomalie moyennant la LWT combinée aux méthodes réduction d'espace ACI et le classificateur SVM. On prédit un résultat indéniablement compétitif en performance de classification mais surtout comme application en temps réel, vu l'apport de la LWT sur le plan temps de calcul. Ainsi une implémentation en langage machine, aura des impacts très intéressants pour un système de monitoring des signaux encéphaliques tel que la surveillance de crise d'épilepsie.

Sur le plan compression, l'équivalence des résultats trouvés favorise toujours la LWT comme outil de compression par rapport à la DWT. Le temps alloué à l'implémentation de la liftée par rapport à l'ondelette classique, renforce encore plus notre choix.

**RÉFÉRENCES**

**BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] J. Dauwels, J. Vialatte, C. Latchoumane, J. Jeong, A. Cichocki : EEG Synchrony Analysis for Early Diagnosis of Alzheimer's Disease: A Study with Several Synchrony Measures and EEG Data Sets. Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE EMBS1:2224-7, 2009.
- [2] D. O. WALTER et W. R. ADEY : Analysis of brain-wave generators as multiple statistical time series. IEEE Trans Biomed Eng, 12:8–13, Jan 1965.
- [3] D. O. WALTER : Spectral analysis for electroencephalograms : mathematical determination of neurophysiological relationships from records of limited duration. Exp. Neurol., 8:155–181, 1963.
- [4] O. DAVID et K. J. FRISTON : A neural mass model for meg/eeg : coupling and neuronal dynamics. Neuroimage, 20(3):1743–1755, Nov 2003.
- [5] J. P. LACHAUX, E. RODRIGUEZ, J. MARTINERIE et F. J. VARELA : Measuring phase synchrony in brain signals. Hum Brain Mapp, 8(4):194–208, 1999.
- [6] A. Campagne : Méthodes de neuroimagerie. Laboratoire de Psychologie et Neurocognition, CNRS UMR 5105, Université Pierre Mendès France, Grenoble.
- [7] G. Florence : Acquisition et optimisation du logiciel neuroscan d'électroencéphalographie dans un protocole expérimental précis. CNRS (centre nationale de la recherche scientifique UMR 7593).
- [8] P. **Goupillaud**, A. **Grossmann**, and J. **Morlet** : Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis, Geoexploration , vol. 23, p85, 1984.
- [9] Y. Meyer : Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées, Rend. Sem. Mat. univers. Polytecn. Torino Vol.45, 1987.
- [10] S. G. Mallat : A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(7), 1989.
- [11] I. Daubechies : Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Comm. Pure Applied Math, XLI(41):909--996, 1988.
- [12] C. K. Chui : Wavelet Analysis and Its Applications, vol. 1, An Introduction to Wavelets, Academic, San Diego, Calif, 1992.
- [13] G. W. Wornell : Signal Processing With Fractals: A Wavelet-Based Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J, 1995.
- [14] M. Holschneider : Localization properties of wavelet transforms, J. Math. Phys, 34(7), 3227–3244, 1993.

- [15] N.Thi Hoàng Lan : Étude de la méthode de la transformation en ondelette et l'application à la compression des images, 2005.
- [16] H. Mesa : Adapted wavelets for pattern detection. In A. Sanfeliu and M. Lazo Cortez, editors, CIARP, volume 3773 of Lecture Notes in Computer Science, pages 933–944. Springer, 2005.
- [17] P. Abry and A. Aldroubi : Designing multiresolution analysis-type wavelets and their fast algorithm, *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2(2):135–159, 1995.
- [18] H. Guo, G. A. Sitton and C. S. Burrus : The Quick Discrete Fourier Transform. *Proc. IEEE Conf. Acoust. Speech and Sig. Processing (ICASSP)* 3, 445–448, 1994.
- [19] H. V. Sorensen, D. L. Jones, M. T. Heideman, and C. S. Burrus : Real-valued fast Fourier transform algorithms. *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Processing ASSP-35*, 849–863 1987.
- [20] J.C. Goswami et A.K. Chan : *Fundamentals of Wavelets : Theory, Algorithms, and Applications*. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley Interscience, ISBN 0-471-19748-3, 1999.
- [21] G. Ross : *Analyse et geometrie, method hilbertiennes*. Dunod, Paris, 2002.
- [22] M. Jansen, P. Oonincx : *Second generation wavelets and applications*, Springer-Verlag London Limited, 2005.
- [23] A. Cohen : *Ondelettes et Traitement Numérique du Signal*. Masson, ISBN 2-225-83954-9, 1992.
- [24] G. Binet : *Filtres à réponse impulsionnelle finie*. Université de Caen UFR de Science. 2007.
- [25] G. Strang et T. Nguyen : *Wavelets and Filter Banks* . Wellesley-Cambridge Press, ISBN 0-9614088-7-1, 1996.
- [26] J. C. Goswami et A. K. Chan : *Fundamentals of Wavelets : Theory, Algorithms, and Applications*. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley Interscience. ISBN 0-471-19748-3, 1999.
- [27] W. Sweldens : The Lifting Scheme : A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions. In A. F. Laine et M. Unser, editors, *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*, pages 68–79. *Proc. SPIE* 2569, 1995.
- [28] W. Sweldens : Wavelets and the lifting scheme : A 5 minute tour. *Z. Angew. Math. Mech.*, 76 (Suppl. 2) :41–44, 1996.

- [29] W. Sweldens et P. Schröder : Building your own wavelets at home. In *Wavelets in Computer Graphics*, pages 15–87. ACM SIGGRAPH Course notes, 1996.
- [30] W. Sweldens : The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(2) : 511–546, 1997.
- [31] I. Daubechies et W. Sweldens : Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps. *J.Fourier Anal. Appl.*, 4(3):245–267, 1998.
- [32] W. Sweldens : The lifting scheme : A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 3(2) :186–200, 1996.
- [33] W. Sweldens : The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(2) :511–546, 1997.
- [34] L. Sanhadji and F. Wendluig: Epileptic transient detection : wavelet and time frequency approachés, *Neurophysiol. clin*, 32, pp. 175-192, 2002.
- [35] R. Dubois, P. Maison-blanche, B. Quenet, and G. Dreyfus : Automatic ECG Wave Extraction in Long-term Recordings using Gaussian mesa Function Models and Nonlinear Probability Estimators. Vol. 88, no 3, pp. 217-233, 2007
- [36] O.Rosso and A.Figiola : Analysis of wavelet-filtred tonic-clonic electroencephalogram recordings. *Med. Biol. Eng. Comput*, 42, 516-123, , 2004.
- [37] D. Gopikrishna and A.Makur : High Performance Scheme for EEG compression using multichannel Model High Performance Computing. 2552, 443-451, 2002.
- [38] N.Mogens and Ernest Nlaudou Kamavu Vuako : Optimal wavelets for biomedical signal compression. *Med-Bio-Eng-Comput-44* ; 561-568, 2006.
- [39] M. Antonini : Transformée en Ondelettes et Compression Numérique des Images. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 1991.
- [40] G.Strang, T. Nguyen : *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [41] D. L. Donoho : De-noising by soft-thresholding. *IEEE, Trans. on Inf. Theory*, 41, 3, pp. 613-627, 1995.
- [42] R.A. DeVore,; B. Jawerth, B.J. Lucier : Image compression through wavelet transform coding. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol. 38, No 2, pp. 719-746, 1992.
- [43] J. Carette : *Les ondelettes et la compression d’images*. Département d’informatique et de mathématique Université du Québec à Chicoutimi, 2000.
- [44] A.B.GEVA, D.H. KEREM : Forecasting Generalized Epileptic Seizures from the EEG Signal by Wavelet Analysis and Dynamic Unsupervised Fuzzy Clustering. *IEEE Transactions on Biomedical engineering*, Vol. 45, No.10, 1205-1216, 1999.

- [45] Z.ZHANG, H.KAWABATA, Z-Q. LIU : Electroencephalogram analysis using fast wavelet transform, *Computers in Biology and Medicine*. 31, 429-440, 2001.
- [46] R.QUIAN QUIROGA, H.GARCIA : Single-trial event-related potentials with wavelet denoising, *Clinical Neurophysiology*, 114, 376–390, 2003.
- [47] S.D.CRANSTOUN : Time-frequency spectral estimation of multichannel EEG using the auto-SLEX method. *IEEE Transactions on Biomedical engineering*, VOL.49, NO.9, 988-996, 2002.
- [48] A. Subasi, M. Ismail Gursoy : EEG signal classification using PCA, ICA, LDA and support vector machines, 2010.
- [49] M. Chendeb : Détection et classification des signaux non stationnaires par utilisation des ondelettes. Application aux signaux électromyographiques utérins, 2006.
- [50] G. Govaert : Analyse des données. Hermes Lavoisier, Paris, 2003.
- [51] F. Mattia, T. Toan et M. Davidson : An analytical, numerical, and experimental study of backscattering from multi-scale soil surfaces. Volume 36, N° 1 : 119-135. 2001.
- [52] A. Bousbia-Salah, M.A. Ait-Ameur, M.Talha-Kedir : Biorthogonal Wavelet for Lossless Compression of EEG signals. 2011.

#### **Sites internet**

- [53] [www.futura-sente.com](http://www.futura-sente.com).

# ANNEXE

## **Annexe A : Etats Pathologiques**

### **L'épilepsie :**

L'épilepsie est une maladie chronique caractérisée par la répétition de manifestations cliniques paroxystiques. Ces crises se traduisent par une modification brutale de la conscience et du comportement du malade. Elles sont la conséquence d'un dysfonctionnement cérébral généralisé ou localisé dû à une décharge électrique anormale. L'épilepsie peut être d'origine génétique ou lésionnelle. Toutes les lésions cérébrales, tumeurs, dysplasie, infections,... peuvent provoquer des crises d'épilepsie.

### **L'apnée :**

L'apnée obstructive du sommeil est un trouble respiratoire sérieux qui interrompt le sommeil. Elle cause de courts arrêts respiratoires pendant que la personne dort. Ces pauses de la respiration – appelées **apnées** – durent entre 10 et 30 secondes, parfois plus longtemps. Les personnes qui souffrent de l'apnée obstructive du sommeil peuvent cesser de respirer des dizaines ou des centaines de fois à chaque nuit. Si cette apnée n'est pas traitée, elle peut entraîner des problèmes de santé majeurs, des accidents, et le décès prématuré.

## Annexe B : Positionnement des électrodes

### Système de placement :

Les électrodes sont disposées selon le système standard international 10-20 de placement des électrodes. Dans ce système, les points de référence sont le nasion (haut du nez) et l'inion (point saillant à la base arrière du crâne).

À partir de ces points, le périmètre du crâne est calculé. La localisation des électrodes est déterminée par des intervalles de 10% et 20% de ce périmètre.

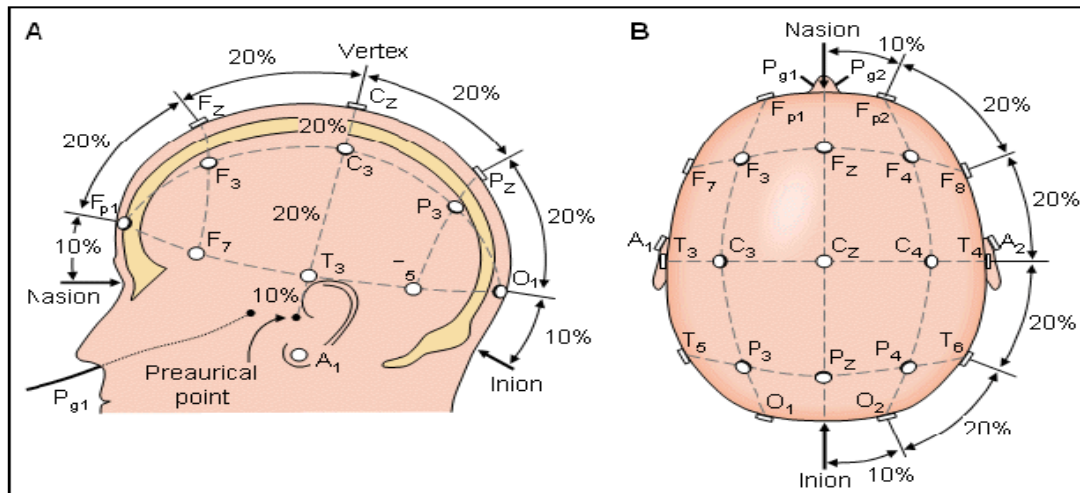


Figure I.18 : Système de placement des électrodes.

Aujourd'hui avec l'amélioration des électrodes et les technologies d'enregistrement, le nombre d'électrodes peut considérablement être augmenté pour atteindre parfois 64, 128 voire 256 (EEG à "haute résolution –EEGHR"), mais toutes découlent du système 10-20.

Chaque zone de localisation d'une électrode est identifiée par une lettre et un chiffre. La lettre précise la région:

- \_ **F** : frontal;
- \_ **T** : temporale;
- \_ **C** : centrale;
- \_ **P** : pariétal;
- \_ **O** : occipital.

Les chiffres pairs font référence à l'hémisphère droit et les chiffres impairs à l'hémisphère gauche. Le Z fait référence aux électrodes placées sur la ligne centrale.

### Montage des électrodes :

Le montage est la combinaison qui fait correspondre à deux électrodes un amplificateur et une voie.

➤ **Le montage monopolaire:**

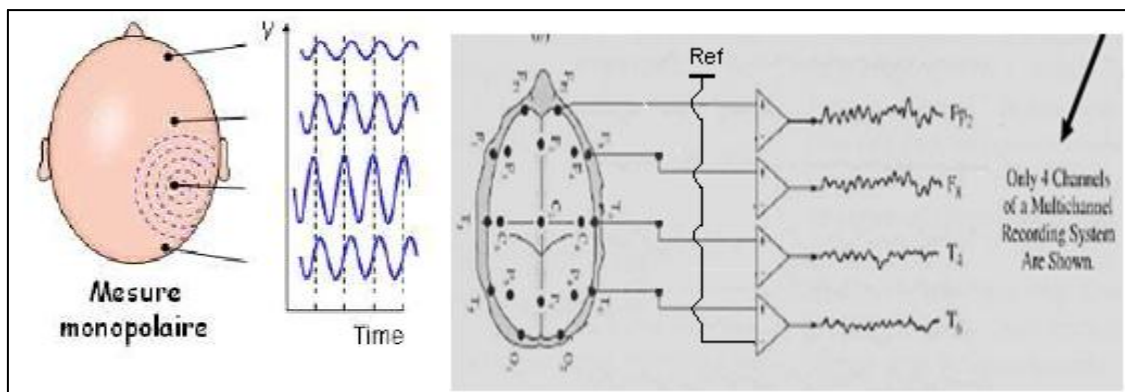
Dans le cas d'un montage mono-polaire, chaque couple d'électrodes est constitué d'une électrode du scalp active et d'une référence.

Afin d'obtenir les meilleurs résultats possibles, le choix de l'électrode de référence est important. En effet, sur le plan théorique, la méthode mono-polaire consiste à enregistrer le potentiel absolu d'un point du scalp, c'est à dire la différence entre le potentiel du point étudié et le potentiel nul.

Le potentiel nul est celui d'un point à l'infini ou par approximation situé loin du point enregistré.

La référence la plus satisfaisante serait donc une électrode extra-céphalique, mais en pratique, elle présente de nombreux artefacts électrocardiographiques. Une autre solution est de choisir une électrode céphalique, sur le menton ou le nez, ou encore un couple d'électrodes placées sur chaque mastoïde ou aux deux lobes des oreilles.

L'électrode de terre est nécessaire pour servir de masse au système, elle est disposée généralement sur le nez.



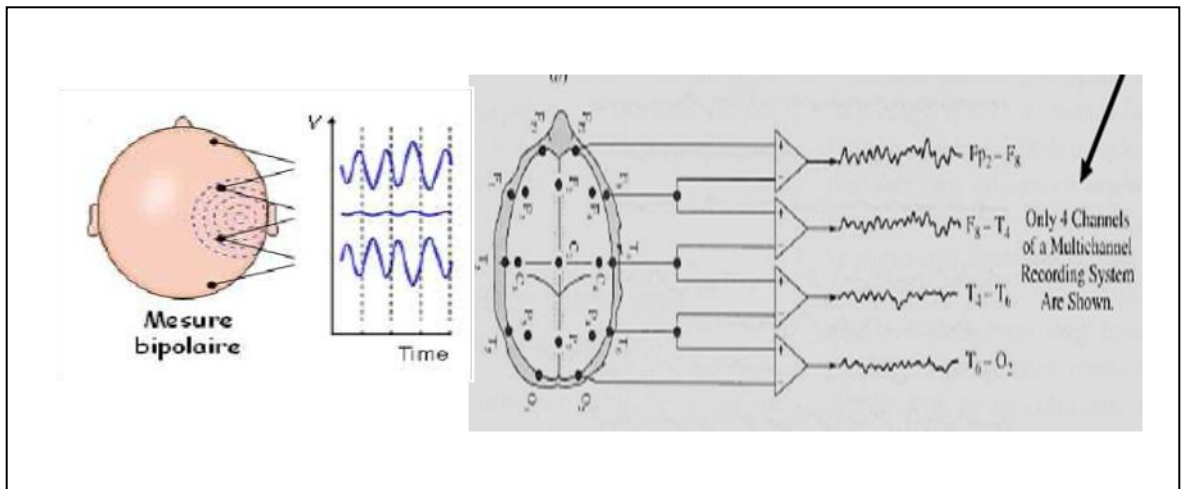
**Figure I.19 : Chaque électrode référencée à l'électrode de référence**

➤ **Le montage bipolaire :**

On distingue les montages :

- Longitudinaux supérieur et inférieur qui suivent les électrodes de proche en proche d'avant en arrière.
- Transversaux antérieur, moyen et postérieur qui les suivent de droite à gauche.
- En éventail qui conservent toujours une même électrode temporale et l'apparient successivement avec chacune des électrodes placées sur une ligne longitudinale.

- Standards qui décrit une sorte de zigzag associant de façon synthétique les montages longitudinaux et en éventail simplifiés.



**Figure I.20 : 2 électrodes référencées l'une à l'autre.**

## Annexe C :

### Les filtres miroirs conjugués :

Ils sont caractérisés par l'utilisation de filtre  $h$  vérifiant :

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2$$

où  $h(\omega)$  est un polynôme trigonométrique.

Le déphasage de  $\pi$  revient à changer de signe d'un coefficient sur deux. On cherche de plus à fixer à  $\pi$  le nombre de zéros du transfert de  $h$  en  $\pi$  dans le but d'annuler des moments de l'ondelette.

Afin de calculer  $|\hat{h}(\omega)|^2$  on utilise le théorème de factorisation spectrale :

### Théorème de Riesz :

Soit  $A$  un polynôme trigonométrique positif invariant sous l'action de  $\omega \rightarrow -\omega$ .  $A$  est nécessairement de la forme :

$$A(\omega) = \sum_{m=0}^M a_m \cos(m\omega) \text{ avec } a_m \in \mathbb{R}$$

Alors il existe un polynôme trigonométrique  $B$  d'ordre  $M$ , c-à-d :

$$B(\omega) = \sum_{m=0}^M b_m e^{m\omega} \text{ avec } b_m \in \mathbb{R}$$

$$\text{tel que } |B(\omega)|^2 = A(\omega)$$

Cela permet de trouver  $h$ .

### Les filtres RIF :

Le filtre  $h$  détermine entièrement la fonction d'échelle et la plupart de ses propriétés (nullité des moments, support, régularité et symétrie). En particulier, la fonction d'échelle est à support compact ssi  $h$  a un nombre finie de coefficients nuls. On dit alors que  $h$  est un filtre RIF : à réponse impulsionnelle finie (FIR filter : finite impulse response).

### Condition imposée au filtre RIF pour assurer la reconstitution du signal :

Considérons le cas d'un filtrage d'un signal  $x(t)$  par un filtre  $h(t)$ . Il est représenté dans le domaine temporel par le produit de convolution suivant :

$$y(t) = h(t) \otimes x(t)$$

soit dans le domaine fréquentiel :

$$Y(e^{j\omega T_s}) = H(e^{j\omega T_s})X(e^{j\omega T_s}) \text{ avec } H(e^{j\omega T_s}) = A(e^{j\omega T_s})e^{j\varphi(f)}$$

$$Y_{n=T_s} = \int_{-1/2T_s}^{+1/2T_s} A(e^{j\omega T_s})e^{j\varphi(f)}X(e^{j\omega T_s})e^{j2\pi f n T_s} df$$

Pour un filtrage au voisinage d'une fréquence  $\eta$ , la phase peut être approximée par un développement limité au premier ordre :

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi(\eta) + 2\pi(f - \eta) \cdot \left. \frac{d\varphi}{df} \right|_{f=\eta} \Rightarrow y_n \\ &= T_s e^{j\varphi(\eta)} \int_{-1/2T_s}^{+1/2T_s} A(e^{j\omega t})X(e^{j\omega t})e^{-j2\pi(f-\eta)\tau(\eta)}e^{j2\pi f n T_s} df \end{aligned}$$

Le filtre introduit donc un retard :

$$\tau(\eta) = \left. \frac{d\varphi}{df} \right|_{f=\eta}$$

avec  $\tau$  le temps de groupe (ou retard de groupe) pour les fréquences voisines de  $\eta$ .

Le signal  $x(t)$  a un spectre constitué de plusieurs fréquences (comme dans le cas de notre étude), les différents groupes de fréquences seront transmis (décomposé) avec des retards différents.

Cela entraînera une distorsion lors de la reconstitution de  $y_n$ .

Pour palier cet inconvénient, le temps de groupes  $\tau$  doit être indépendant de la fréquence, soit satisfaire la condition :

$$\tau(\eta) = \left. \frac{d\varphi}{df} \right|_{f=n} = cste \Rightarrow \varphi(f) = \varphi_0 - 2\pi f\tau.$$

Cela signifie qu'on doit avoir une phase linéaire.

**a. Condition d'obtention d'une phase linéaire :**

La phase linéaire peut être obtenue si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

**\_ Le filtre est à phase linéaire,**

**\_ les coefficients  $h_n$  du filtre sont réels.**

Les coefficients du filtre ont pour expression :

$$h_n = T_s e^{j\varphi_0} \int_{-1/2T_s}^{+1/2T_s} A(e^{j\omega T_s}) e^{-j2\pi f t} e^{j2\pi f n T_s} df$$

où  $A(e^{j\omega T_s})$  est le module de  $H(e^{j\omega T_s})$  (le module est de type réel).

Si on exprime  $h(t+\tau)$ , les coefficients s'écrivent :

$$h_{n+\frac{\tau}{T_s}} = T_s e^{j\varphi_0} \int_{-1/2T_s}^{+1/2T_s} A(e^{j\omega T_s}) e^{j2\pi f n T_s} df$$

=

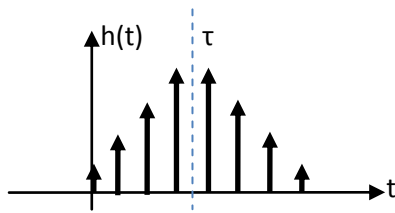
$$T_s e^{j\varphi_0} \left[ e^{j\varphi_0} \int_{-1/2T_s}^{+1/2T_s} A(e^{j\omega T_s}) \cos(2\pi f n T_s) df \right] + jT_s \left[ e^{j\varphi_0} \int_{-1/2T_s}^{+1/2T_s} A(e^{j\omega T_s}) \sin(2\pi f n T_s) df \right]$$

La phase linéaire  $\Phi(f) = \Phi_0 - 2\pi f\tau$  s'obtient en pratique en considérant deux cas particuliers en prenant  $\Phi_0=0$  et  $\Phi_0=-\frac{\pi}{2}$

**Premier cas :  $\Phi_0=0$  :**

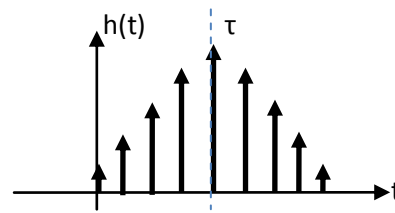
$A(e^{j\omega T_s})$  étant réel, pour que  $h(t+\tau)$  le soit aussi, le second terme de la formule précédente doit s'annuler et le premier terme doit être pair par rapport à  $t : h(t+\tau)$ .

On en déduit que les échantillons de la réponse impulsionnelle sont réels et symétriques par rapport à  $\tau/T_s$ , la réponse impulsionnelle est réelle et paire. Cela est obtenu dans les deux cas de figure suivants :



Nombre pair d'échantillons

$$N=8 ; \tau=T_s(N-1)/2$$



Nombre impair d'échantillons

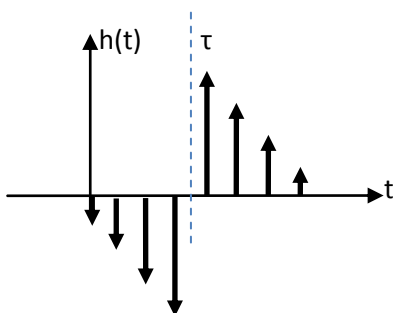
$$N=9 ; \tau=T_s(N-1)/2$$

**Deuxième cas :**  $\Phi_0=\pi/2$  :

Sachant que  $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$  et  $A(e^{j\omega T_s})$  est réel, pour que  $h(t+\tau)$  le soit également, le premier terme de la formule doit s'annuler et le second terme doit être impair par rapport à  $t$  :

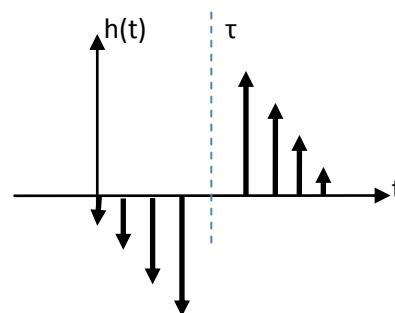
$$h(t+\tau)=h(-t+\tau)$$

Les échantillons de la réponse impulsionnelle sont donc réels et antisymétrique par rapport à  $\tau/T_s$  : la réponse impulsionnelle est réelle et impair. Cela est obtenu dans les deux cas de figure suivants :



Nombre pair d'échantillons

$$N=8 ; \tau=T_s(N-1)/2$$



Nombre impair d'échantillons

$$N=9 ; \tau=T_s(N-1)/2 ; h_0=0$$

Pour les deux cas particuliers étudiés, la parité ou l'imparité confère une symétrie pair ou impair à la réponse impulsionnelle, ce qui permis en pratique de réduire de moitié le nombre de coefficients stockés en mémoire. Cela est intéressant puisque ces filtres RIF peuvent avoir plusieurs centaine de coefficients.

## Annexe D

### Principe

L'idée de base du lifting d'ondelette est très simple. La fonction de départ est une ondelette basique, nommée lazy wavelet, qui possède les caractéristiques d'une ondelette, mais dont le principal rôle consiste uniquement à séparer le signal d'entrée en deux sous-signaux, on peut donc la considérer comme un sous-échantillonnage du signal d'entrée. Ensuite, le lifting d'ondelette construit progressivement une nouvelle ondelette possédant de meilleures caractéristiques en rajoutant de nouvelles fonctions de bases. C'est ce principe d'ajout progressif des fonctions qui vaut son nom au lifting d'ondelette.

Considérons la fonction  $f(t)$  dont la distance d'échantillonnage est de 1 : les échantillons sont alors régulièrement espacés. Les échantillons originaux sont notés  $\lambda_{0,k} = f(k)$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Nous voulons décorréliser ce signal, ou, en d'autres termes, représenter ce signal avec un nombre d'échantillons moins élevé. La méthode la plus simple est de sous-échantillonner le signal et de ne conserver que les échantillons d'indice pair :

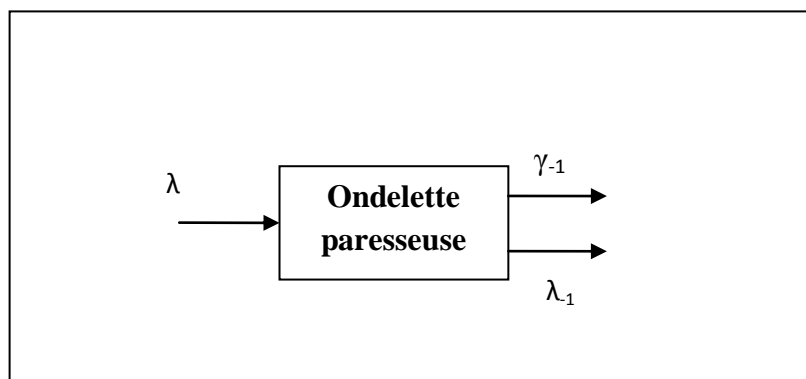
$$\lambda_{-1,k} = \lambda_{0,2k} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

Ce sous-échantillonnage amenant une perte d'information, nous désirons connaître l'information nécessaire à la reconstruction du signal. On peut considérer que l'information perdue est contenue dans les coefficients d'indice impair :

$$\gamma_{-1,k} = \lambda_{0,2k+1} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

Cette manière de procéder correspond à l'ondelette lazy wavelet citée plus haut : celle-ci ne fait donc rien d'autre que séparer le signal à analyser en deux sous-signaux :

Afin d'améliorer la méthode permettant de retrouver le signal d'origine  $\lambda_{0,k}$  à partir de sa transformée  $\lambda_{-1,k}$ , on peut prédire l'échantillon impair  $\lambda_{0,2k+1}$  à partir de ses voisins d'indice pair  $\lambda_{-1,k}$ .



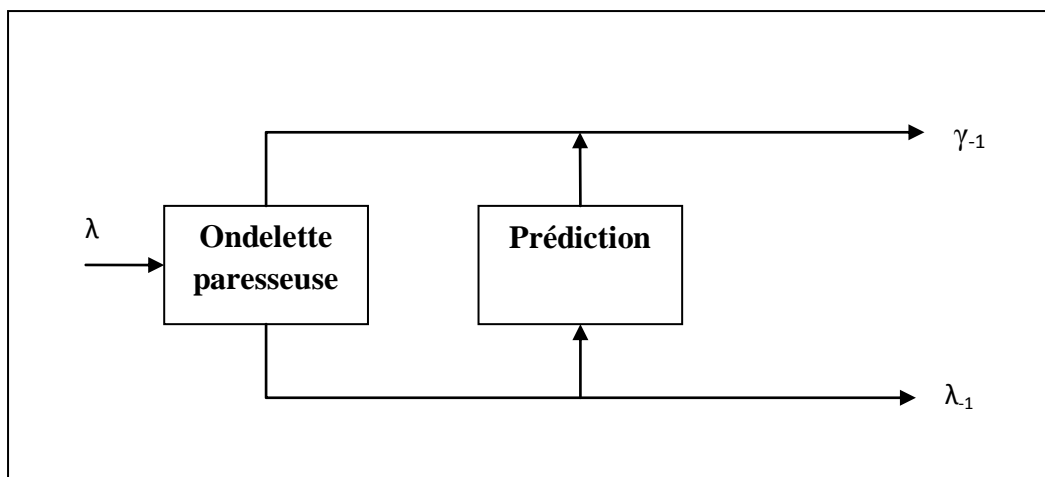
**FIG. 2.5: Ondelette paresseuse**

Le coefficient d'ondelette  $\gamma_{-1,k}$  codera la différence entre la valeur réelle de l'échantillon et sa valeur prédite :

$$\gamma_{-1,k} = \lambda_{0,2k+1} - 1/2(\lambda_{-1,k} + \lambda_{-1,k+1}) \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, si le signal est corrélé, la majorité des coefficients d'ondelettes seront très petits. En seuillant ces coefficients, on pourra éventuellement représenter le signal de manière plus compacte, en perdant un minimum d'information.

On a donc rajouté une fonction de prédiction qui vient améliorer l'ondelette mise en œuvre ici



**FIG. 2.6 Ondelette paresseuse et prédiction**

Cependant, les  $\lambda_{-1,k}$  obtenus ne nous satisfont pas pour la raison suivante : si le signal d'entrée est composé de  $2n + 1$  échantillons  $\{\lambda_{0,k} \mid 0 \leq k \leq 2^n\}$ , et que l'on applique cette procédure  $n$  fois, nous obtiendrons les coefficients d'ondelettes  $\{\gamma_{j,k} \mid -n \leq j \leq -1, 0 \leq k \leq 2^{n+1}\}$ , ainsi que deux coefficients  $\lambda_{-n,0}$  et  $\lambda_{-n,1}$  correspondant au premier ( $\lambda_{-n,0} = \lambda_{0,0}$ ) et au dernier ( $\lambda_{-n,1} = \lambda_{0,2n}$ ) échantillons originaux, ce qui introduit un aliasing considérable.

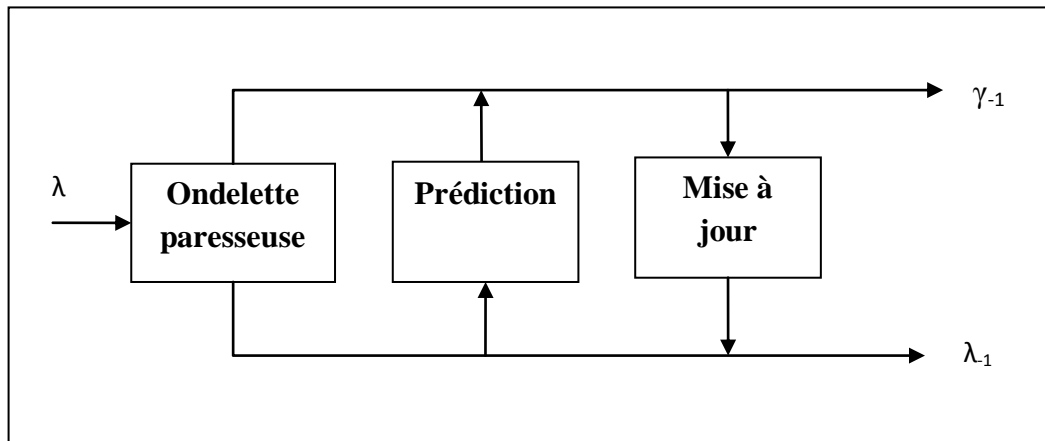
Il serait préférable que la valeur moyenne des  $\lambda_{j,k}$  soit la même à toutes les résolutions :

$$\sum_k \lambda_{-1,k} = \frac{1}{2} \sum_k \lambda_{0,k}$$

Ceci pourra être obtenu en rajoutant une nouvelle phase à la construction de l'ondelette, qui consistera à mettre à jour les  $\lambda_{-1,k}$  à l'aide des coefficients d'ondelettes  $\gamma_{-1,k}$  précédemment calculés :

$$\lambda_{-1,k} = \lambda_{-1,k} + 1/4(\gamma_{-1,k-1} + \gamma_{-1,k}) \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

La transformée en ondelette ainsi implémentée consiste alors en deux étapes en plus de la phase de séparation du signal d'entrée :



**FIG. 2.7: Ondelette paresseuse, prédiction et mise à jour**

En partant de l'ondelette la plus simple qui soit, on a donc construit une ondelette élaborée par ajout successifs de fonctions de bases.