

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES INGÉNIEURS  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

# ***THÈSE DE MAGISTÈRE***

Option construction  
**THÈME**

**ANALYSE NON LINÉAIRE DES PLAQUES MINCES ET  
MOYENNEMENT ÉPAISSES PAR LA MÉTHODE DES  
ÉLÉMENTS FINIS**

Étudiée par Mme

HAFIDI MERIEM épouse OUMOUSA

Présentée et soutenue devant le jury composé de :

BADARI . K	Professeur	[U.B]	Président
CHELGHOU .A	Professeur	[U.S.T.H.B]	Directeur de thèse
KHERCHI .F	Maître de conférence	[U.ST.H.B]	Examineur
CHEMROUK .M	Maître de Conférence	[U.S.T.H.B]	Examineur
NOUR .A	Maître de Conférence	[U.B]	Examineur
KAHLED .O	Charge de Cour	[U.ST.H.B]	Invité

Année 2001

## REMERCIEMENTS

*Avant tout, je tiens à remercier « DIEU » qui a bien voulu me prêter santé ,  
volonté et courage afin de pouvoir terminer ce que j'ai entrepris et contribuer par  
mon modeste travail a un domaine qui est aussi vaste que complexe .*

*C'est aussi pour moi un grand privilège d'avoir mener cette recherche sous la  
direction du docteur A..CHELGHOUM professeur à [L'U.S.T.H.B] et dont la  
confiance qu'il m'a toujours témoigné n'a d'égal que les orientations qu'il n'a cessé  
de me prodiguer.*

*Mes remerciements sont adressés également à mesdames et messieurs les  
membres du jury qui ont daigné répondre à l'invitation et dont la critique ne saurait  
qu'enrichir un peu plus ce travail.*

*Je tiens aussi à remercier vivement monsieur NOUR du [C.G.S] pour les  
conseils et la disponibilité dont il a fait preuve ainsi qu'a monsieur M. BENSAAD  
pour son aide et son efficacité.*

*Ces remerciements ne sauraient ce terminer qu'avec la gratitude et la  
reconnaissance de l'étudiant envers ses professeurs, aussi, qu'ils voient là tous, mes  
sincères remerciements et ma profonde gratitude, en citant particulièrement  
messieurs BAGHDADI .et BACCOUCHE qui ont su être un exemple pour tous ,ainsi  
que monsieur HAFIDI père et doyen de l'université et dont la réputation ne peut  
qu'égal le nombre de générations qu'il a formé.*

## *Dédicaces,*

*Je crois que tout ce que je pourrai dire ne saurait combler ne serait ce qu'un instant l'immense gratitude et affection pour ceux qui ont su me chérir m'élever et me forger a ce que je suis aujourd'hui, et sans qui, ce travail n'aurai jamais pu voir le jour . Je leur dédie à eux, mes parents.*

*Je le dédie aussi à l'époux et ami qui a su être là, par sa présence son soutien et sa compréhension dans des moments difficiles, à celui qui a su m'encourager par son dynamisme et sa confiance en moi et sans qui, ce travail n'aurai jamais pu se terminer.*

*A ma sœur pour son aide ,à mon frère pour son sourire,*

*A tous les fleurons de leur foyer*

*A toute ma famille et ma belle-famille*

*A la mémoire de mon beau-père.*

# SOMMAIRE

## CHAPITRE (I) INTRODUCTION

## CHAPITRE (II) SOLIDES DÉFORMABLES

II.1) Introduction.....	5
II.2) Théorie des contraintes.....	5
II.2.1) Tenseur des contraintes.....	5
II.2.2) Équation d'équilibre local .....	5
II.3) Théorie des déformations.....	6
II.3.1) Composante de la déformation .....	7
II.3.2) Interprétation géométrique des déformations .....	8
II.4) Relations contrainte – déformation.....	10
II.5) Théorie de l'élasticité.....	10
II.5.1) Introduction.....	10
II.5.2) Équation fondamentale de l'élasticité.....	11
II.5.3) Principe de superposition.....	11.

## CHAPITRE (III) THÉORIES DES PLAQUES

III.1)- Généralités.....	12
III.2)- Approche analytique.....	13
III.2.1) Fondement de la Théorie des plaques.....	13
III.2.2) Comportement général des plaques.....	13
III.2.3) Hypothèses de base .....	14
III.2.4) Déplacements et déformations.....	14
III.2.5) Contraintes et efforts résultants.....	17
III.2.6) Équation d'équilibre.....	18
III.2.7) Équation de la surface fléchie.....	22
Résumé et conclusion.....	30

III.3 ) Approche énergétique.....	31
III.3.1) Introduction.....	31
III.3.2) Définition.....	31
III.3.3) Application de la méthode énergétique à la flexion des plaques. .....	33
Résumé et conclusion.....	36
III. 4) Approche numérique.....	37
III.4.0) Introduction.....	37
III.4.1) Méthode des différences finies.....	37
III.4.2) Méthode des éléments finis.....	38
Résumé et conclusion.....	55

## **CHAPITRE (IV) THÉORIES DES GRANDES DÉFORMATIONS**

IV.1) Généralités.....	57
IV.1.1) Introduction au non linéaire.....	57
IV.1.2) Non linéarité géométrique.....	57
IV.1.3) Non linéarité matérielle.....	58
IV.2) Approche analytique.....	59
IV.2.1) Introduction.....	59
IV.2.2) Comportement général des plaques avec grande Déformation... .....	59
IV.2.3) Principe de base.....	60
IV.2.4) Hypothèses fondamentales.....	60
IV.2.5) Plaque à grande déformation.....	63
IV.2.6) approche équilibre.....	63
IV.2.7) <i>Approche énergétique</i> .....	67
Résumé et conclusion.....	68

## **CHAPITRE (V) TRAITEMENT NUMÉRIQUE DE LA NON-LINÉARITÉ**

V.1) Introduction .....	70
V.2) Le problème non linéaire .....	70
V.3) Classement du problème non linéaire.....	70
V.4) Formulations de base des techniques de résolution.....	71
V.4.1) Méthode incrémentale (ou pas à pas).....	73

V.4.2) Méthode itérative.....	75
V.4.3) Méthode mixte.....	76
V.5) Développement numérique.....	81
V.5.1) Évaluation de la rigidité .....	81
V.6) Problème de non-linéarité matériel.....	82
V.6.1) Comportement non-linéaire élastique.....	82
V.6.2) Comportement élasto-plastique.....	83
V.7) Problème de non-linéarité géométrique .....	87
V.7.1) Procédure incrémentale .....	87
V.7.2) Méthode itérative .....	89
V.8) Problème de non-linéarité géométrique et matériel .....	89
Résumé et comparaison.....	90

## **CHAPITRE (VI) ANALYSE DE LA NON LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE DES PLAQUES PAR LA M.E.F**

VI.1) Introduction.....	92
VI.2) Cinématique et Cinétique.....	93
VI.2.1) Description du mouvement.....	93
VI.3) Déplacement dans les plaques .....	94
VI.3.1) Déformations.....	95
VI.3.2) Contraintes .....	96
<b>VI-A).</b> Analyse de la non - linéarité géométrique avec prise en compte des hypothèses de von Karman [H.NL.1].....	96
VI-A.1) Équations des travaux virtuels de Lagrange.....	97
VI-A.2) Relations constitutives.....	100
VI-A.3) Variation de la déformation.....	101
VI-A.4) Formulation par éléments finis de l'équation d'équilibre.....	102
VI-A.5) Solution de l'équation non linéaire d'équilibre.....	107
VI-A.6) La matrice de rigidité tangente.....	108
VI-A.7) Le chargement nodal équivalent des contraintes internes....	111
<b>VI-B)</b> Analyse de la non - linéarité géométrique avec prise en compte de la distorsion des déplacements u et v : [H.NL. 2].....	111

VI- B.1) Équation des travaux virtuels de Lagrange .....	113
VI-B.2) Relation Contrainte-Déformation.....	115
VI-B.3) La variation de déformation .....	116
VI-B.4) Formulation par éléments finis de l'équation d'équilibre .....	117
VI-B.5) Solution de l'équation d'équilibre non linéaire .....	120
VI-B.6) La matrice de rigidité tangente .....	120
VI-B.7) Formulation de la matrice non-linéaire $K_L^2$ .....	122
VI- B.8) Formulation de la matrice Géométrique $K_\sigma^2$ .....	123
VI-B.9) La charge nodale équivalente due aux contraintes internes .....	123
VI-B.10) Intégration numérique.....	124
VI-B.11) Calcul des contraintes .....	124
VI-B-12) Calcul des contraintes aux nœuds- Technique de lissage.....	125

## **CHAPITRE (VII) VALIDATION DU MODÈLE NUMÉRIQUE**

VII.1) Introduction.....	130
VII.2) Structure globale du programme informatique.....	130
VII.2.1) Pré – processeur.....	131
VII.2.2) Processeur.....	131
VII.2.3) Post – processeur.....	132
VII.3) Applications.....	132
VII.4) Validation du problème non – linéaire.....	132
VII.5) Validation numérique de la première non-linéarité [H.NL.1] .....	133
VII.6) Validation numérique de la deuxième non-linéarité [H.NL.2].....	152

## **CONCLUSIONS & PERSPECTIVES.....158**

### **SYMBOLES**

### **TABLE DES FIGURES**

### **RÉFÉRENCES**

**ANNEXE A : Formation de la matrice Géométrique  $K\sigma_1$**

**ANNEXE B : Formation de la matrice Géométrique  $K\sigma_2$**

**ANNEXE C : Calcul de l'équation des travaux virtuels de Lagrange**

**ANNEXE D : Organigrammes principaux du logiciel**

**ANNEXE E : Tableaux (Contrainte, Déplacement)**

# TABLE DES FIGURES

## CHAPITRE (II) : SOLIDES DEFORMABLES

Figure(II.1): Représentation des contraintes sur un élément différentiel.....	6
Figure.(II.2): Élément déformé.....	8
Figure (II.3) : Projection de l'élément déformé sur les plan (X-Y) et (X-Z).....	9
Figure(II.4) : Élément distordu .....	9

## CHAPITRE (III) : THÉORIES DES PLAQUES

Figure (III.1) : plaque : repère global et local.....	14
Figure (III.2) : Comportement général des plaques.....	15
Figure (III.3) : Plaques :déplacements.....	15
Figure (III.4) : Efforts:orientations et définitions.....	17
Figure (III.5) : Equilibre d'un element dx dy .....	19
Figure (III.6) : Flexion avec cisaillement.....	23
Figure. (III.7) : élément différentiel de la plaque en équilibre.....	26
Figure.(III.8) : Élément de plaque isoparamétrique quadratique.....	46
<i>Figure.(III.9) : Mécanisme de l'élément Q4 seul et assemblé.....</i>	<i>50</i>
Figure.(III.10) : Classification des quadrilatères isoparamétriques avec cisaillement transverse.....	54

## CHAPITRE (IV) :THÉORIES DES GRANDES DÉFORMATIONS

Figure (IV.1) : Situation de non linéarité géométrique.....	57
Figure (IV.2) : Courbes schématisant les différents comportements du Matériaux .....	58

## CHAPITRE (V) : TRAITEMENT NUMERIQUE DE LA NON LINEARITE

Figure. (V-1) : Courbes non linéaires.....	72
Figure. (V-2) : Méthode de base.....	74
Figure (V-3) : Méthode incrémentale :Méthode de Runge-Kutta.....	78
Figure (V-4) : Méthodes iteratives de bases.....	79

Figure (V-5) : Méthode mixte.....	79
Figure (V-6) : Méthode de la déformation initial.....	84
Figure (V-7) : Déplacement fini d'un élément treillis.....	86

**CHAPITRE (VI) : ANALYSE DE LA NON LINEARITE GEOMETRIQUE DES PLAQUES PAR LA M.E.F**

Figure (VI-1): Description du mouvement d'un solide.....	94
--	----

**Figure.(VI-2)**

<b>Déformations.....</b>	<b>95</b>
--------------------------	-----------

Figure.(VI-3) : Traction des bords.....	100
---	-----

Figure.(VI-4) : Élément plaque de Mindlin.....	104
--	-----

Figure (VI-5) : Extrapolation linéaire.....	127
---	-----

Figure (VI-6) : Extrapolation bidimensionnel.....	128
---	-----

Figure (VI-7) : (a) Contraintes en forme d'histogramme.....	129
---	-----

. (b) Lissage des contraintes.....	129
------------------------------------	-----

**CHAPITRE (VII) : VALIDATION DU MODÈLE NUMÉRIQUE**

Graphe (VII.1) : Étude de convergence.- <i>plaque carrée encastée</i> .....	134
---	-----

Graphe (VII-2) : Étude de convergence - <i>plaque simplement appuyée</i> -.....	135
---	-----

Graphe (VII-3) : plaque carrée encastre.....	142
--	-----

Graphe (VII-4) : plaque carrée simplement appuyée.....	143
--	-----

Graphe (VII-5) : plaque biase encastée.....	145
---	-----

Graphe (VII-6) : plaque circulaire encastre.....	147
--	-----

Graphe (VII-7) : plaque circulaire encastre.....	148
--	-----

Graphe (VII-8) : plaque elliptique encastée.....	149
--	-----

*CHAPITRE I*

**INTRODUCTION**

## **INTRODUCTION**

A travers une perspective du passé, il apparaît clairement que ce qui fait la particularité de l'Homme, est son insatiable soif de connaissances. Ceci se traduit clairement, dans son acharnement irréversible à comprendre les choses qui l'entourent. pour mieux les apprivoiser.

Enfin, dans sa quête effrénée de connaissances et d'évolution, il passe d'un temps révolu ou l'on croyait que la terre était plate et limitée, à un monde où la conquête des espaces est une réalité de tous les jours. Pour en arriver là, toutes les sciences, aussi diverses soient-elles, se sont rapprochées pour adhérer au même idéal qui est "pour un meilleur avenir de l'Homme".

Ainsi, parmi toutes ces sciences, l'ingénierie occupe une place de choix. En effet, puisque l'évolution d'un pays se mesure à toutes ses réalisations techniques et matérielles. Cependant, l'évolution de ce domaine, nécessite impérativement la maîtrise parfaite de tous les éléments de base qui le constitue, et tout particulièrement celui des plaques et des coques. On remarque que ces dernières sont très largement utilisées particulièrement dans l'industrie lourde et légère, dans les structures civiles et industrielles dans l'aéronautique, l'aéronaval, l'aérospatial ainsi que bien d'autres applications.

L'analyse des éléments de bases, et particulièrement celui des plaques, est généralement divisée en plusieurs catégories. Celles-ci dépendent principalement des actions internes et externes agissant sur la structure. Elles se classent comme suit :

\* **plaque rigide** : est l'exemple d'une plaque soumise à des efforts de flexions et de torsion et où l'analyse est généralement assimilée à celle des poutres.

\* **plaque membranaire** : Est l'exemple d'une plaque mince soumise à des efforts axiaux situés dans le plan moyen.

\* **plaque flexionnelle** : est une plaque soumise à des efforts combinés de flexion et de membrane

\* **plaque épaisse** est l'exemple d'une plaque dont l'étude est conduite par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

De manière générale toutes les théories de structures font une nette distinction dans leur analyse, entre le comportement à petites déformations et celui à grands déplacements. Par conséquent, la théorie des plaques instaure la même distinction entre les deux comportements. Tel que l'un varie dans le domaine linéaire et l'autre dans le domaine non linéaire.

Enfin, malgré la complexité de ce dernier nous nous proposons ici d'explorer attentivement ce domaine, pour l'intérêt pratique dont il fait l'objet

## OBJECTIF DE LA THÈSE

L'objectif de cette recherche est donc, de développer une nouvelle approche numérique pour : *L'analyse non linéaire des plaques minces et moyennement épaisses par la méthode des éléments finis*

Ainsi, une analyse approfondie est réalisée d'abord dans le domaine linéaire ou toutes les approches "traditionnelles" sont développées comme support aux méthodes plus récentes. Ensuite, l'analyse non linéaire est présentée d'une manière complémentaire mais non dissociés du domaine linéaire.

Enfin, on arrive à l'essence même de cette recherche, qui est l'analyse de la non-linéarité géométrique par la méthode des éléments finis.

Dans ce même cadre et pour assurer une coordination des idées développées précédemment, nous nous sommes proposés d'organiser ce travail en plusieurs chapitres dont le résumé est comme suit :

**Le chapitre II** traite essentiellement des notions d'élasticité et de déformation des solides nécessaires à la compréhension de tous les développements présentes ultérieurement.

**Le chapitre III** concerne la théorie des plaques et des différentes approches utilisées dans la formulation de l'équation d'équilibre ainsi que les résolutions analytiques et numériques usuelles.

**Le chapitre IV** introduit la notion de non-linéarité et développe la théorie des grandes déformations ou il apparaît clairement que les résolutions analytiques sont limitées et qu'une solution numérique s'impose.

**Le chapitre V** développe la notion du traitement numérique de la non-linéarité en exposant les différents procédés utilisés.

**Le chapitre VI** analyse la non-linéarité géométrique des plaques par la méthode des éléments finis et développe un modèle numérique approprié.

**Le chapitre VII** a pour but de valider les performances numériques de ce même modèle en programmant un logiciel de calcul adapté. L'utilisation de celui-ci est valable pour plusieurs types d'éléments et applicable à des plaques de formes diverses.

Pour une plus grande compréhension du sujet il serait opportun de définir brièvement certains mots clés et tout particulièrement ce qui se rapporte à la non linéarité

## **Le problème non linéaire**

Dans le cas général, *tous les phénomènes de mécanique des solides présentent des non-linéarités aussi bien géométrique que matériel.* Cependant, pour des raisons pratiques ou des commodités d'applications elles utilisent des formulations linéaires afin de simplifier la résolution du problème posé.

D'autres part, *l'utilisation de la formulation non linéaire va nous permettre, en tant qu'analyste, de converger vers une solution plus réaliste du problème et donc d'approcher de plus près le comportement de la structure analysée. La solution ainsi trouvée va nous permettre de prévoir les déformations et les contraintes limites.*

Parmi les cas pratiques on peut citer : le comportement des structures a grande déformation, le flambement des poutres, des plaques et des coques ainsi que tous les problèmes de déformation des sols et de mécanique des roches.

Dans la méthode des déplacements, la non-linéarité se présente sous deux (2) formes bien distinctes

\* la première est la *non-linéarité physique ou matériel* qui est engendrée par les lois de la non-linéarité constitutive.

\* La deuxième est la *non linéarité géométrique* qui dérive des changements différentiels dans la géométrie du corps déformé.

## **Classement du problème non linéaire**

En se basant sur les sources de la non-linéarité on peut classer le problème en trois (3) catégories :

- La première fait intervenir la non-linéarité matérielle.
- La deuxième fait intervenir uniquement la non-linéarité géométrique.
- La troisième catégorie est engendrée par l'intervention simultanée de la non-linéarité matérielle et géométrique.

La première catégorie est facile à prévoir car elle englobe tous les problèmes dont les contraintes ne sont pas linéairement proportionnelles aux déformations. Ces dernières ainsi que les déplacements sont considérés petits par hypothèse (*petit indique toujours des changements infinitésimaux dans la géométrie du corps et ou la distorsion de l'élément différentiel est négligée*). On précise simplement que les déplacements correspondent aux changements de géométrie du solide alors que les déformations se rapportent à l'allongement interne de celui-ci.

Ce type de non-linéarité englobe en son sein plusieurs cas d'importance considérable, comme *l'élastoplasticité des structures*.

D'autre part, bien que les équations linéaires (contrainte-déformation) soient supposées appartenir à *la seconde catégorie*, les problèmes induits par la non-linéarité géométrique prennent naissance dans la relation non linéaire (déformation-déplacement). En d'autres termes, cette catégorie englobe tous les cas de grands déplacements et déformations. De plus, on remarque l'existence d'une importante sous-classe qui matérialise l'effet des petites déformations et grands déplacements c'est le cas du *flambement élastique des structures*.

Enfin, *la troisième catégorie* et non la moindre, combine la première et la deuxième théorie induite par la non-linéarité constitutive ainsi que la théorie de grandes déformations comme par exemple le caoutchouc.

### **Résolution du problème non linéaire**

*En général, tous les phénomènes de non-linéarité aussi bien géométrique que matériel sont traités numériquement d'une manière relativement simple malgré leur complexité ; Et ce, en fragmentant le domaine non linéaire en plusieurs sous domaines linéaires où la résolution est plus conviviale. L'avantage de cette technique permet une convergence vers une solution plus réaliste du problème, et donc d'approcher de plus près le comportement de la structure étudiée.*

Le développement de cette technique de base a donné naissance à plusieurs méthodes basées sur le même principe et classées selon leurs modes d'application en plusieurs catégories :

*Méthode incrémentale*

*Méthode itérative*

*Méthode mixte*

Dans le cadre de ce travail nous avons développé les trois méthodes en précisant les principes d'application fondamentaux de chacune d'elles et les différents algorithmes de résolution.

*CHAPITRE II*

**SOLIDES  
DÉFORMABLES**

## II Solides déformables

### II.1) Introduction

Depuis toujours on sait qu'un corps solide soumis à l'action de force extérieure subit des déformations ou des déplacements relatifs. Si les déformations sont petites, ne dépassant pas une certaine valeur limites, après enlèvement des forces extérieures elles disparaissent. On dit que le corps est *parfaitement élastique*. De cette hypothèse toute la théorie de l'élasticité a été développée et utilisée depuis longtemps dans le calcul des structures et tout particulièrement dans celle des plaques.

### II.2) Théorie des contraintes :

#### II.2.1) Tenseur des contraintes :

L'équilibre d'un parallélépipède rectangle infinitésimal découpé en un milieu continu est représenté analytiquement par une matrice appelée *Tenseur de contrainte* qui à pour objectif de définir la contrainte en un point quelconque M (x, y, z) telle que

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

avec

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad ; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad ; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (\text{II.2})$$

(d'après la loi de "Cauchy")

#### II.2.2) Équation d'équilibre local :

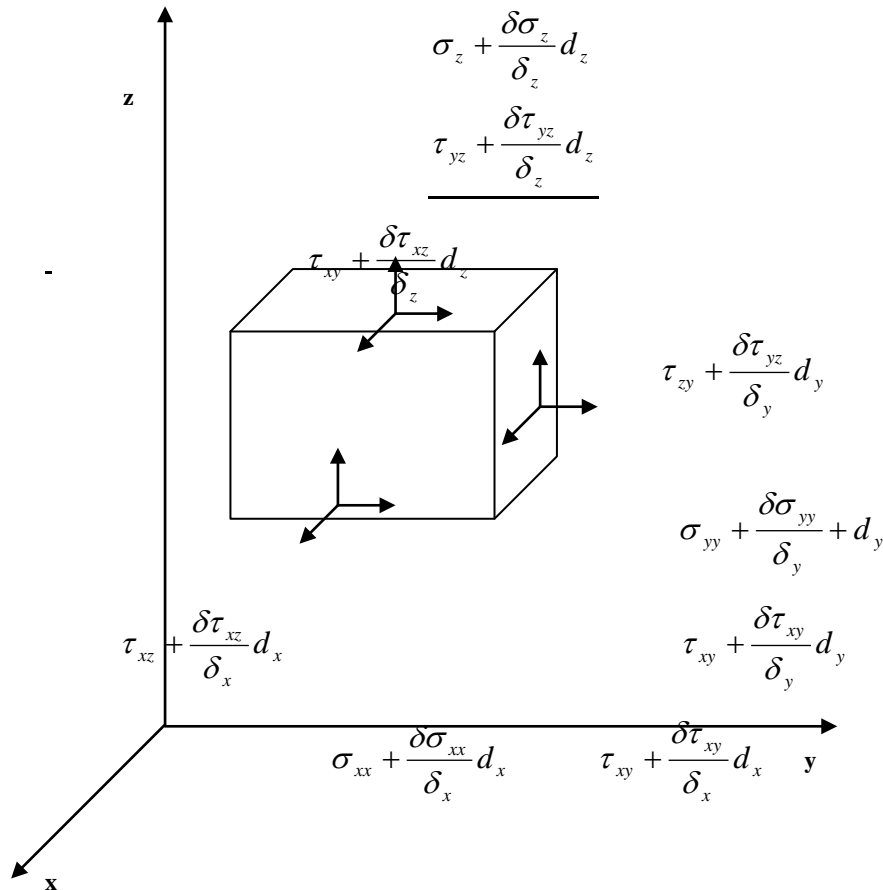
Un corps est dit en équilibre si, sous l'action des forces extérieures, il est au repos. Il existe en général deux (02) types de forces extérieures :

- Les forces réparties sur la surface du corps (Force de surface).
- Les forces réparties sur tout le volume du solide (Forces de volumes ou forces massiques).

Pour étudier l'équilibre, considérons un petit élément  $d_x, d_y, d_z$  Fig(II.1), cet élément est soumis, en plus de la distribution des contraintes, à une force de volume composante  $F_v_x, F_v_y, F_v_z$ . Après développement, on obtient les équations différentielles d'équilibre en tout point du solide :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_{vx} = \rho \gamma_x \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_{vy} = \rho \gamma_y \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_{vz} = \rho \gamma_z \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

où  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  désignent les composants du vecteur accélération.



**FIGURE(II.1):Représentation des contraintes sur un élément différentiel**

### II.3) Théorie des déformations :

On dit qu'un corps est déformé lorsqu'il y a changement des positions relatives des points du corps. En effet, on suppose que le corps considéré soit appuyé de sorte qu'aucun déplacement de ses particules ne sera possible sans déformation du corps lui-même avec  $u, v, w$  désignent le déplacement du point  $M$  à l'intérieur du solide c'est à dire :

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

En général les composantes qui définissent l'état complet des déformations sont les suivantes :

- *déformation en extension* (déformation directe)
- *déformation en distorsion* (déformation angulaire)

### II.3.1) Composante de la déformation :

#### a) *Extension* :

La variante de la longueur d'un segment élémentaire quelconque est facilement calculable et nous donne après développement dans les 3 plans :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Tels que les premiers termes de ces égalités définissent les *petites déformations* tandis que la totalité de l'expression définit la théorie des *grandes déformations*.

#### b) *Distorsion* :

Considérons deux segments de droite; après déformation, la déviation totale est appelée déformation de cisaillement et désignée par :

$\gamma_{xy}$  dans le plan  $x - y$

$\gamma_{yz}$  dans le plan  $y - z$

$\gamma_{xz}$  dans le plan  $x - z$

Ainsi pour des déplacements infiniment petits mais assez importants pour ne pas être négligés

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

On obtient ainsi la *tenseur de déformation*

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \text{sym} & & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

### II.3.2) Interprétation géométrique des déformations :

Considérons l'élément tridimensionnel  $d_x, d_y, d_z$ , après déformation figure. (II.2)

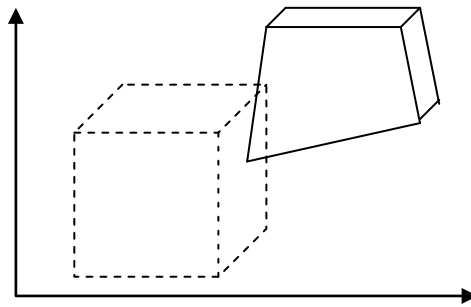
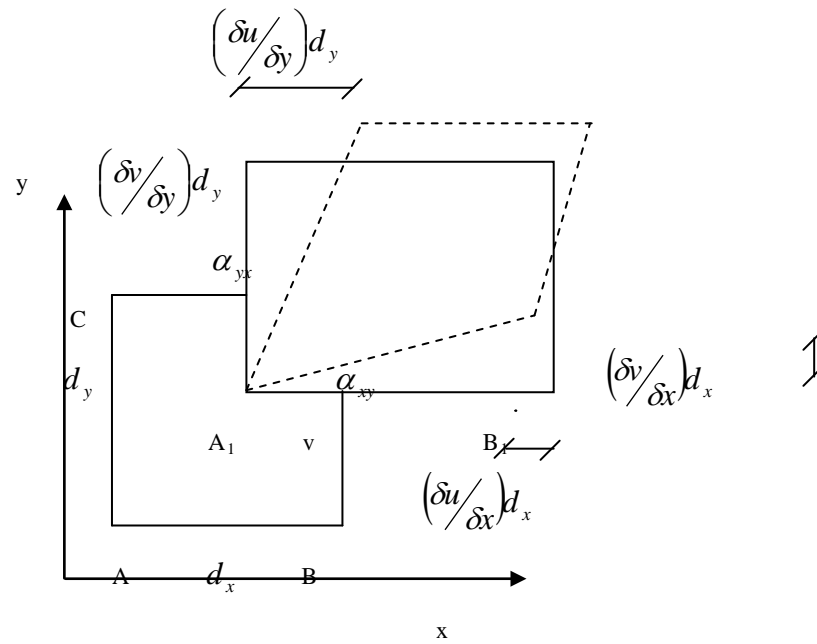


FIGURE. (II.2) : Élément déformé

#### a) Extension :

Pour définir l'extension on considère le petit élément de fig. (II.2) dont la projection sur le plan (x-y) et (x-z) sont représenté en fig. (II.3a) et figure. (II.3b)





FIGURE(II.4): Élément distordu

## II.4) Relations contrainte – déformation :

Dans les paragraphes précédents, on a développé certaines notions *statiques*(théorie de la contrainte) et *cinématiques* (théorie de déformation) qui sont nécessaires pour un développement théorique du comportement physique des corps d'une façon générale et des corps solides élastiques plus particulièrement. Mais, en réalité, la résolution de la plupart des problèmes de structure nécessite l'utilisation des lois de comportement du matériau . dans beaucoup de cas il suffit de faire l'hypothèse d'un comportement *élastique linéaire* ou quelque fois d'un *comportement élastique parfaitement plastique*.

## II.5) Théorie de l'élasticité :

### II.5.1) Introduction :

Soit un corps continu élastique isotrope soumis à des forces de volume données. On doit chercher dans tout le corps le champ de contraintes,  $\sigma_{ij}$ , les déplacements,  $U_i$  et les déformations  $\varepsilon_{ij}$ . Ce problème peut se résoudre de deux manière :

- Soit en recherchant d'abord le champ des contraintes  $\sigma_{ij}$ , puis en déduisant, par la loi de HOOKE le champ des déformations, et les déplacements par intégration des relations  $\left( \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$

- Soit en recherchant d'abord le champ des déplacements  $u_i$ , puis le champ de déformation et le champ de contrainte par la loi de HOOKE.

Dans le premier cas, on résout le problème en intégrant les équations de BELTRAMI – MICHELL; dans le second, on le résout en intégrant l'équation fondamentale de l'élasticité de NAVIER.

### II.5.2) Équation fondamentale de l'élasticité :

Si on remplace dans les équations d'équilibre les contraintes par leurs expressions en fonction des déformations lesquelles sont exprimées dans le tenseur  $\varepsilon_{ij}$  en fonction des déplacements on trouve l'équation :

$$G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{G}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + F_i = 0 \quad (\text{II.9})$$

### II.5.3) Principe de superposition :

L'effet d'une force peut être considéré dans les deux groupes suivants :

**Effet mécaniques** : Réactions R, effets internes M, N, T, contraintes  $\sigma_{ij}$ .

**Effet géométriques** : déformations  $\varepsilon_{ij}$ , déplacement, et rotation.

Le principe de superposition des effets est une conséquence à la fois de la linéarité de la loi de HOOKE; il s'énonce comme suit :

L'effet sur une structure linéairement élastique par plusieurs forces agissantes simultanément est égal à la somme des effets produit par chacune des forces agissant séparément.

**Remarque :**

Il est important de remarquer que le principe de superposition n'est valable que si l'on néglige l'effet des déformations de la structure sur le mode d'action des forces, c'est à dire si on évalue l'action des forces en utilisant la structure non déformée (théorie du premier ordre).

Dans le cas où on doit tenir compte de l'effet du changement de géométrie de la structure sous le mode d'action des forces, le principe est inapplicable.

## *CHAPITRE III*

# THÉORIE DES PLAQUES

**III.1** - Généralités

**III.2** - Approche Analytique

**III.3** - Approche Énergétique

**III.4** - Approche Numérique

## III.1 GÉNÉRALITÉS

Pour introduire le comportement d'un élément quelconque, il faudrait d'abord définir ce même élément qui est au sein d'une large gamme de solides tout aussi bien définis. Ainsi les structures utilisées peuvent être réparties en quatre classes :

- Les corps pleins ;
- Les plaques et enveloppes du type voûte et coque ;
- Les pièces allongées pleines du type arc et poutre ;
- Les pièces allongées à parois minces.

Dans la première classe se trouvent les pièces massives dont les dimensions sont du même ordre de grandeur dans toutes les directions. La détermination des tensions et des déformations fait l'objet de la Théorie de l'élasticité.

La deuxième classe est constituée par des voiles minces dont deux des trois dimensions dans l'espace sont du même ordre de grandeur, la troisième est petite par rapport aux deux autres. Les exemples les plus simples sont les plaques et dalles minces de forme quelconque. Des méthodes de calcul spécial ont été mises au point à partir de la méthode de la Théorie de l'élasticité.

Dans la troisième classe, se trouvent les arcs et les poutres dont l'étude fait l'objet de la Théorie des poutres.

Enfin, la quatrième classe est constituée par les corps présentant des dimensions différentes dans chacune des directions.

Une plaque est donc un élément de la 2<sup>ème</sup> classe, elle sera définie comme un solide élastique limité par deux plans parallèles distants d'une épaisseur  $e$ , Celle-ci est supposée petite par rapport aux autres dimensions, et comporte un plan de symétrie au milieu appelé plan moyen ( $S_m$ ). Par convention, ce dernier sera défini dans le plan (xy) et (oz) correspondant à l'axe transversal définissant l'épaisseur. Cette même plaque aura des comportements différents selon que l'épaisseur soit petite ou non et que le matériau constituant soit homogène, isotrope, anisotrope, orthotrope ou non. L'introduction de conditions aux limites définit d'une manière précise le comportement flexionnel ou membranaire de cette plaque.

## III.2 Approche analytique

### Introduction :

Dans cette partie, il sera traité brièvement le comportement général des plaques dans un domaine aussi bien linéaire que non et où l'on pourra apprécier les différentes propriétés flexionnelles d'une plaque qui dépend en grande partie de son épaisseur et de sa déformation. C'est ainsi que l'on distingue 3 comportements qui dépendent particulièrement de paramètres dimensionnels et flexionnels :

1. Plaques minces à petite déformation ;
2. Plaques minces à grande déformation ;
3. Plaque épaisse ;

L'évolution de leur comportement dans un domaine linéaire ou non linéaire sera liée directement à l'apparition de déformations importantes pouvant engendrer des efforts de cisaillement assez considérables pour ne pas être négligés et pour lesquels certaines hypothèses ou simplifications ne peuvent être admises.

### III.2.1) Fondement de la Théorie des plaques

L'étude de la Théorie classique des plaques est basée essentiellement sur la Théorie de l'élasticité et plus particulièrement sur *l'élasticité plane* (puisque l'on néglige les contraintes  $\sigma_z$  perpendiculaire au plan moyen de la plaque) où le développement mathématique allié au concept physique et géométrique donne une approche assez satisfaisante sur le comportement de la plaque.

### III.2.2) Comportement général des plaques

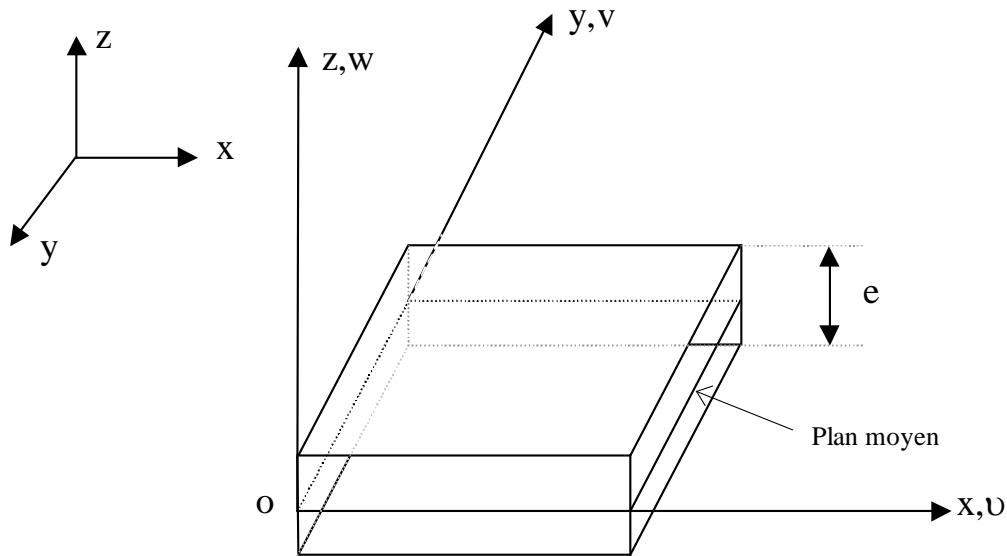
Généralement, dans le domaine des plaques, on peut distinguer 2 comportements différents :

- l'un flexionnel < chargement transversal >
- l'autre membranaire < chargement dans le plan >

Ces deux chargements peuvent être appliqués simultanément, mais dans tous les cas, leurs effets seront découplés et étudiés individuellement dans le but de superposer leurs effets respectifs dans l'état de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_M + \boldsymbol{\varepsilon}_F$ . Il est nécessaire donc de définir clairement le cadre dans lequel évoluent les variantes du problème.

### III.2.3) Hypothèses de base

Les plaques sont des structures tridimensionnelles dont une dimension, l'épaisseur  $e$ , est très inférieure aux autres. L'hypothèse de base est donc que dans cette direction, la déformation longitudinale, c'est-à-dire la variation de l'épaisseur, est nulle (la contrainte plane est négligée), Cela se traduit communément par  $\sigma_{zz} = 0$  dans un système d'axes local lié à la plaque, tel que représenté ci-dessous. Pour des raisons d'interprétation physique, c'est dans ce système que sont généralement calculés tous les déplacements, déformations et contraintes. [Fig III..1].



**Figure(III.1) : plaque : repère global et local**

Les plaques sont classées en 2 catégories :

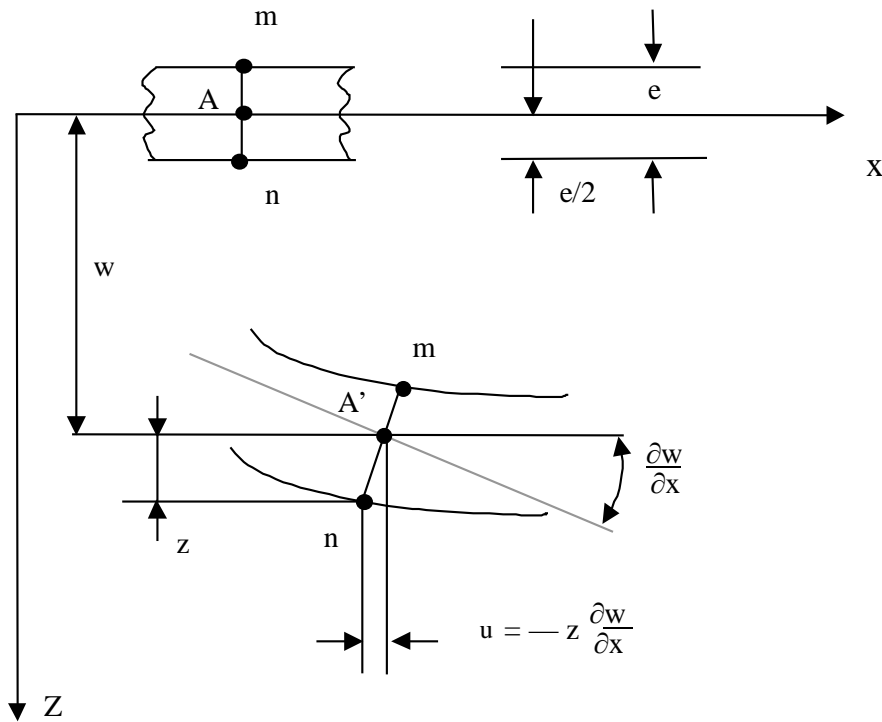
- Les plaques épaisses  $\frac{1}{20} < \frac{e}{L} < \frac{1}{4}$
- Les plaques minces  $\frac{e}{L} < \frac{1}{20}$

### III.2.4 Déplacements et déformations

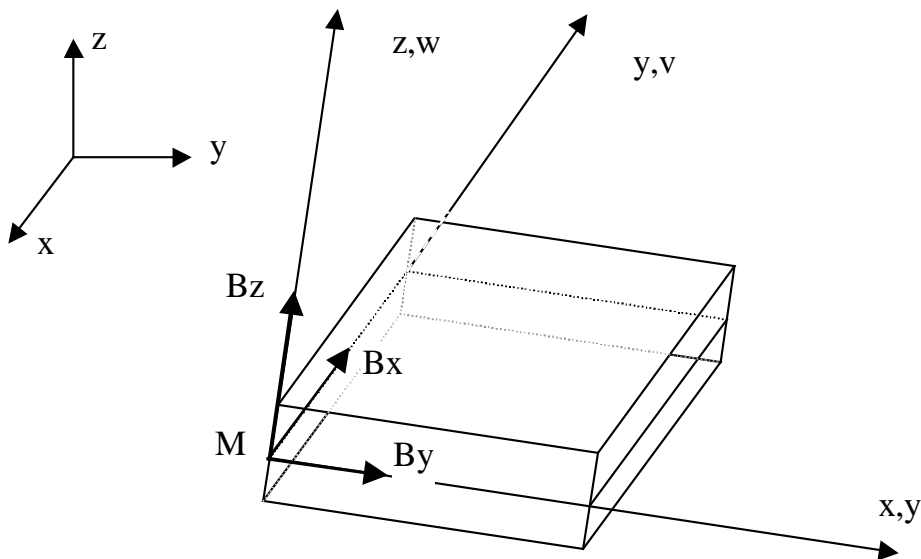
Dans la Théorie des plaques homogènes, la référence est la surface moyenne ( $S_m$ ). En tout point de cette surface et dans les axes absolus, les 3 déplacements et les 3 rotations usuels sont notés :  $U_x, U_y, U_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z$ . Dans les axes locaux, ils deviennent  $U, V, W, \beta_x, \beta_y, \beta_z$ . [fig. III..2]

La flèche  $w$  est une fonction de  $x$  et  $y$  seulement :  $W = W(x, y)$  et les rotations sont celles de la normale aux plans de la plaque. La rotation  $\beta_z$  dans le plan de la plaque est négligée, ce qui se comprend facilement étant donné la différence de rigidité [Fig. III.1].

La section droite est supposée rester droite après déformation, dans le système local. Cela se traduit par l'hypothèse que le déplacement total résulte de la superposition du déplacement du point correspondant à  $Z = 0$  et d'un déplacement de flexion, soit :



**Figure (III.2) : Comportement général des plaques.**



**Figure (III.3) : Plaques : déplacements**

$$\begin{cases} U(x, y, z) = U(x, y, 0) + Z\beta \\ V(x, y, z) = V(x, y, 0) + Z\beta(x, y) \\ W(x, y, z) = W(x, y, 0) \end{cases}$$

Ces déplacements conduisent aux équations :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + Z \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + Z \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + Z \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + Z \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_z = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour un cisaillement non nul :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{cases} \quad (2.2)$$

Le vecteur  $\{\varepsilon\}$  se divise en 2 parties, l'une **indépendante de Z** qui traduit les déformations de membranes  $\{\varepsilon_m\}$

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle \quad (2.3)$$

L'autre dépendante de Z qui représente les déformations de flexion :

$$\langle \chi \rangle = \left\langle \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \frac{\partial \beta_y}{\partial y}, \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right\rangle \quad (2.4)$$

avec :  $\langle \varepsilon_F \rangle = Z \langle \chi \rangle$

$\langle \chi \rangle$  : Vecteur de Courbures

La déformation de cisaillement transversal s'écrit :

$$\langle \varepsilon_c \rangle = \langle \partial w / \partial x + \beta_x, \partial w / \partial y + \beta_y \rangle \quad (2.5)$$

**Remarques importantes :**

En ce qui concerne le cisaillement, il y a 2 théories :

- La Théorie de Kirchhoff qui suppose le cisaillement nul

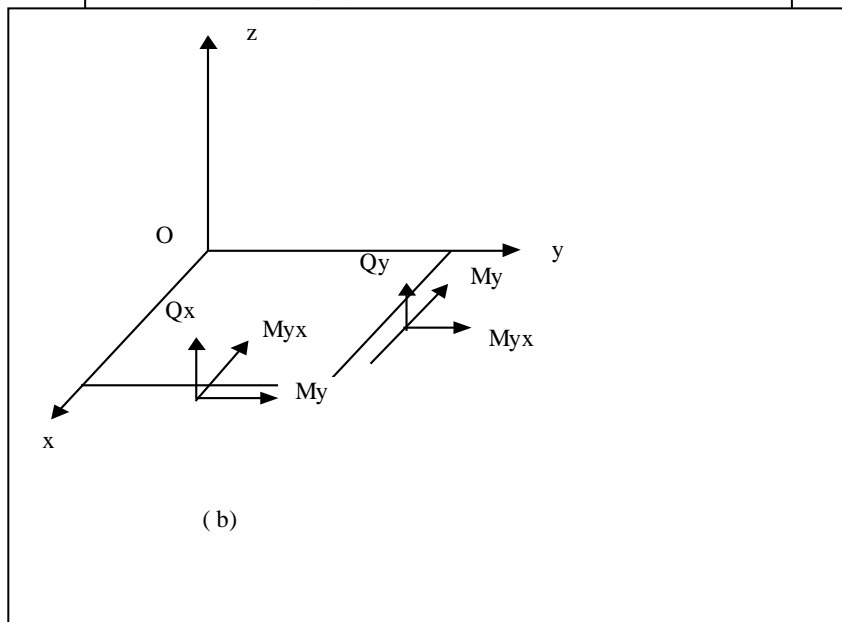
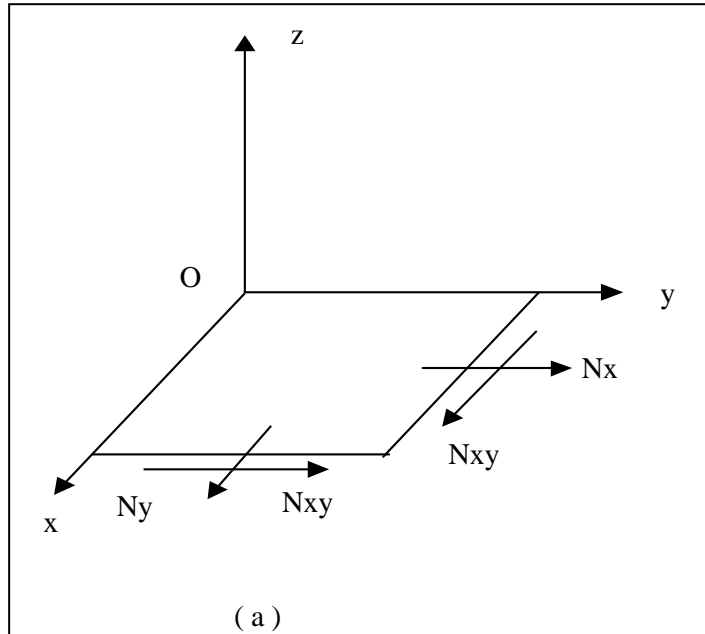
$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x = 0 \Rightarrow \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y = 0 \Rightarrow \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.6)$$

Soit :  $\langle \varepsilon_F \rangle = Z \langle -\partial^2 w / \partial x^2, -\partial^2 w / \partial y^2, -2\partial^2 w / \partial x \partial y \rangle$

– La Théorie de Mindlin qui ne néglige pas cet effort, ceci n'est valable théoriquement que pour les plaques épaisses ; mais physiquement, cela reste très controversé. (C'est ce qui fera l'objet de notre analyse).

### III.2.5) Contraintes et efforts résultants

Il est courant d'envisager dans le plan moyen de la plaque, les efforts plutôt que les contraintes ; cela conduit à distinguer :



– Les efforts de membrane {N} tels que :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (2.8)$$

– Les efforts résultant de flexion, ou moments des contraintes :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (2.9)$$

- Les efforts tranchants, intégrale des composants de cisaillement :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz \quad (2.10)$$

- Les forces extérieures sont, elles aussi, intégrées dans la direction de l'épaisseur :

- Force de volume : 
$$\{F_v\} = \begin{Bmatrix} F_{vx} \\ F_{vy} \\ F_{vxy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \begin{pmatrix} f_{vx} \\ f_{vy} \\ f_{vxy} \end{pmatrix} dz \quad (2.11)$$

- Force de surface : 
$$\{N_s\} = \begin{Bmatrix} N_{sx} \\ N_{sy} \\ Q_s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \begin{pmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_{sz} \end{pmatrix} dz \quad (2.12)$$

$$\{M_s\} = \begin{Bmatrix} M_{sx} \\ M_{sy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \begin{pmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \end{pmatrix} z dz \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} M_{st} &= L M_{sx} + m M_{sy} & M_{sn} &= -m M_{sx} + L M_{sy} \\ N_{st} &= L N_{sx} + m N_{sy} & N_{sn} &= -m N_{sx} + L N_{sy} \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec : 
$$\begin{aligned} L &= \cos \theta \\ m &= \sin \theta \end{aligned} \quad \theta : \text{angle entre l'axe des } x \text{ et la normale } \mathbf{n}$$

### III.2.6 Équation d'équilibre

En général, les efforts internes d'un point à un autre de la plaque chargée sont déterminés par les conditions d'équilibre Statique ou Dynamique. Ainsi, pour déterminer l'effort de cisaillement, par exemple  $Q_x$ ,  $Q_y$  agissant sur la surface normale aux directions  $x$  et  $y$ , il est impossible d'utiliser la loi de Hook car les sollicitations ne sont pas liées directement aux déformations. Il faut donc utiliser les équations différentielles d'équilibre qui s'écrivent de plusieurs manières, selon que sont considérés *l'équilibre local* en terme de contraintes, d'efforts ou de déplacement, ou *l'équilibre global* par la Théorie des travaux virtuels.

#### a) Équilibre local :

##### a.1). Équations en terme de contraintes :

Ces équations sont celles de l'élasticité, qui s'écrivent :

$$\{Fv\} - \rho\{\gamma\} + \text{div} \sigma = 0 \quad (2.15)$$

En composante :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_{vi} = \rho \gamma_i \quad (2.16)$$

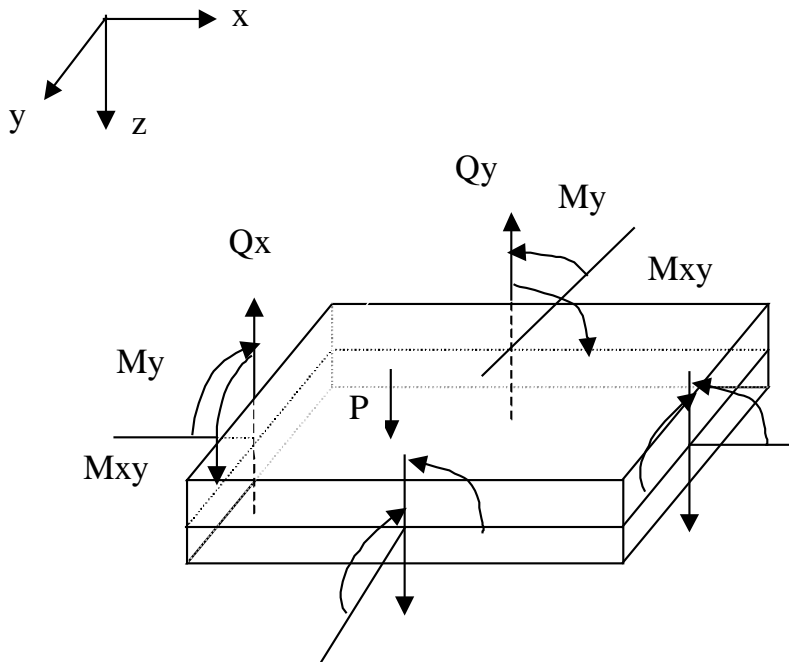
$\{\gamma\}$  Vecteur accélération

$\{Fv\}$  Vecteur des forces de volume

$\{\sigma\}$  Tenseur de contrainte

**a.2). Équation en terme d'efforts :**

Ces équations s'obtiennent à partir de l'équilibre d'un élément différentiel  $dx dy$  sous un état général de contrainte. On suppose que le poids propre n'affecte pas l'exactitude des résultats :



**Figure (III.5) : Equilibre d'un élément  $dx dy$**

— Equilibre par rapport au plan moyen

- Pour le cisaillement :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - F_{vz} = 0 \quad (2.17)$$

- Pour le moment (suivant  $oy$  par exemple)

$$\begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

- Pour les forces de membranes :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - F_{vx} = 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - F_{vy} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Par exemple sur  $ox$  :

$$[N(x+dx) - N_x(x)] dy + [N_{xy}(x+dy) - N_{xy}(x)] dx + F_{vx} dx dy = 0$$

Donc en éliminant  $Q_x, Q_y$  de (2.17) il vient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - F_{vz} = 0 \quad (2.20)$$

### a.3). Equation d'équilibre en terme de déplacement :

La Matrice de Coefficients élastiques dans le cas d'un matériau homogène, isotrope est noté  $[D]$ . Une intégration entre  $(-e/2, +e/2)$  des contraintes membranaires donne :

Des forces :

$$\{N\} = [E_m] \{\varepsilon_m\} \quad (2.21)$$

Des Moments :

$$\{M\} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} [D] (z \{\varepsilon_m\} + z^2 \{\chi\}) dz \quad (2.22)$$

$$\{M\} = [E_f] \{\chi\} \quad (2.22)$$

avec :

$$[E_m] = \frac{Ee}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.21a)$$

$$[E_f] = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.21b)$$

Dans ces intégrations, les contraintes sont supposées constantes dans l'épaisseur, c'est-à-dire indépendantes de  $z$ . Pour le cisaillement, la question est plus complexe car cet effet n'est pas constant dans l'épaisseur. La R.D.M. donne pour un matériau homogène classique une variation parabolique. En retenant cette hypothèse, la détermination de la fonction  $f(z)$  s'effectue à partir des conditions aux limites, c'est-à-dire :

$$\sigma_{xz} = 0 \quad \text{pour} \quad Z = +\frac{e}{2} \quad (\text{respect. } \sigma_{yz} = 0 \quad \text{pour } Z = -\frac{e}{2})$$

$$\text{d'où } Q_{x \text{ ou } y} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} f(z) \left[ \sigma_{xz \text{ ou } yz} \right]_z dz = 0$$

Dans ces conditions, la fonction  $f(z)$  doit vérifier :

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} f(z) dz = 1 \quad , \quad f\left(\pm \frac{e}{2}\right) = 0,$$

Ce qui donne :

$$f(z) = \frac{z}{2e} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{e^2} \right)$$

Il est donc possible d'écrire l'énergie de déformation due à la déformation de cisaillement :

$$U_c = \frac{1}{2} \{ \sigma_c \} [E_c]^{-1} \{ \sigma_c \} \quad (2.23)$$

avec :

$$[E_c] = \frac{5}{6} Ge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23a)$$

En utilisant les relations (2.21) dans (2.19) et (2.22) dans (2.19) on a :

$$Em \left[ (1-\nu)\Delta u + (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + F_{vx} = 0$$

$$Em \left[ (1-\nu)\Delta v + (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] + F_{vy} = 0$$

$$D_f \left[ (1-\nu)\Delta \beta_x + (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \right) \right] - GeK \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) = 0 \quad (2.24)$$

$$E_f \left[ (1-\nu)\Delta \beta_y + (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} \right) \right] - GeK \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) = 0$$

$$GeK \left( \Delta w + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + F_{vz} = 0$$

Sur la surface où les déplacements et les forces sont imposés. On a les équations d'équilibre du type déplacement en utilisant (2.14) dans (2.21) et (2.22) :

$$\begin{aligned}
 Em \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) L + \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m \right] &= N_{xx}^0 \\
 Em \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) L + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) m \right] &= N_{yy}^0 \\
 E_f \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) L + \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) m \right] &= M_{xx}^0 \\
 E_f \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) L + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) m \right] &= M_{yy}^0 \\
 Ghk \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) L + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) m \right] &= Q_s^0
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Avec :  $Dm = \frac{Ee}{2(1-\nu^2)}$  raideur membranaire

$D_f = D = \frac{e^2}{6} Dm$  raideur flexionnelle

**Remarque :** On remarque que la raideur de flexion est beaucoup plus petite que la raideur membranaire, ce qui justifie que l'effet de la flexion est prédominant par rapport à l'effet de membrane.

### III.2.7) Équation de la surface fléchie :

Après avoir déterminé les différentes équations d'équilibre, il devient évident de déterminer l'équation qui régit la déformation de la plaque, et pour cela, il faut distinguer deux types d'approche et qui sont basées sur :

- La théorie de Hencky–Mindlin ;
- La théorie de Kirchhoff–Love.

Ces théories sont basées sur des hypothèses simplificatrices qui vont permettre de lier les déplacements aux contraintes à travers la loi de Hook et enfin les déplacements aux efforts extérieurs en utilisant les équations d'équilibre étudiées précédemment.

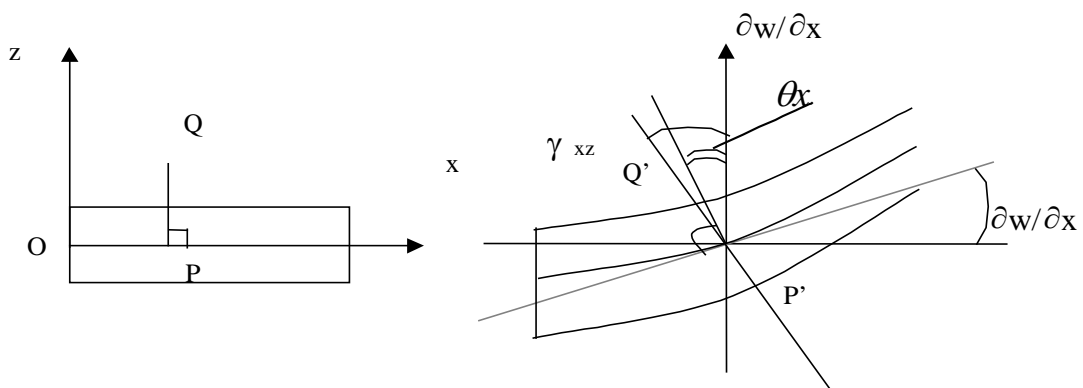
#### III.2.7.1- Théorie de Hencky–Mindlin–Plaque épaisse.

Dans le cas des plaques épaisses, le problème est considéré comme un problème à 3 dimensions de l'élasticité linéaire. Par conséquent, l'analyse de la contrainte se complique et jusqu'à présent, le problème n'a été résolu que pour quelques cas particuliers. Cependant, pour les plaques relativement épaisses, Mindlin a apporté une simplification de manière à rendre le problème plus convivial.

### III.2.7.1.a)- Hypothèses fondamentales

Ces hypothèses sont valables pour le cas de petites déformations :

- 1) Il n'y a pas de déformation dans le plan moyen de la plaque. Ce plan reste neutre pendant la flexion (petite déformation).
- 2) Les contraintes normales suivant une direction transversale à la plaque peuvent être négligées ( $\sigma_z \neq 0$ )
- 3) Les points de la plaque situés initialement sur une normale au plan reste linéaire mais pas forcément normale après déformation, c'est-à-dire que les contraintes de cisaillement ne sont pas négligées.



**Figure (III.6) : Flexion avec cisaillement**

Si on pose 
$$\begin{cases} \beta_x = -\theta_x \\ \beta_y = -\theta_y \end{cases}$$

Ce schéma se traduit en écrivant :

$$\begin{cases} \beta_x = \gamma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\varepsilon_{zy} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y = \gamma_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\varepsilon_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

En terme de déformation :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{cases} \quad (2.26)$$

### III.2.7.1.b)- Déplacement, déformation et contraintes :

Le déplacement dans le plan moyen n'est plus gouverné par les rotations  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$

. Le mouvement dépend uniquement de  $B_x$ ,  $B_y$  d'où :

$$\begin{cases} U = Z \cdot B_x(x, y) \\ V = Z \cdot B_y(x, y) \\ W = w(x, y) \end{cases} \quad (2.27)$$

Les déformations varient linéairement à travers l'épaisseur de la plaque et sont données par :

La déformations de flexion :

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{matrix} \right\} = Z \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{matrix} \right\} \quad (2.28)$$

La déformations de cisaillement vaut :

$$\left\{ \varepsilon_f \right\} = \left\{ \begin{matrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix} \right\} \quad (2.29)$$

- L'état des contraintes en tout point de la plaque correspond à **un état de contrainte plane** ( $\sigma_z = 0$ ), et pour un matériau homogène isotrope, on a :

- Pour les contraintes :

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\} = \frac{2E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{matrix} \right\} \quad (2.30)$$

$$\text{Et } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{array} \right\} = \frac{E}{2(1+\nu)} \bullet \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial y} + \beta y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta x \end{array} \right\} \quad (2.31)$$

Pour les efforts internes :

– Déflexion :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = D_f \left( \frac{\partial \beta x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta y}{\partial y} \right) \\ M_y = D_f \left( \nu \frac{\partial \beta x}{\partial x} + \frac{\partial \beta y}{\partial y} \right) \\ M_{xy} = D_f \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left( \frac{\partial \beta x}{\partial y} + \frac{\partial \beta y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (2.32)$$

– Cisaillement :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x = K.G.e \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \beta x \right) \\ Q_y = K.G.e \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \beta y \right) \end{array} \right. \quad (2.33)$$

## Plaque épaisse

### III.2.7.2. Equation de la surface fléchie.

#### Cas 1 : Chargement transversal (Comportement flexionnel) :

Lorsque la plaque est chargée transversalement, on obtient les relations d'équilibre (2.17) et (2.16) que nous reformuleront en fonction des déplacements à travers les équations (2.21), (2.22) et (2.23).

$$\begin{aligned} E_f \left[ \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \beta x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta x}{\partial x^2} + \left( \frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \beta y}{\partial x \partial y} \right] &= K.G.e \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \beta x \right) \\ E_f \left[ \left( \frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \beta x}{\partial x \partial y} + \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \beta y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta y}{\partial y^2} \right] &= K.G.e \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \beta y \right) \quad (2.34) \\ K.G.e \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \beta x}{\partial x} + \frac{\partial \beta y}{\partial y} \right] &= -P \end{aligned}$$

Donc, il est possible d'éliminer les fonctions  $\beta x$  et  $\beta y$  des équations ci-dessus au prix de substitutions fastidieuses mais rigoureuses pour aboutir à :

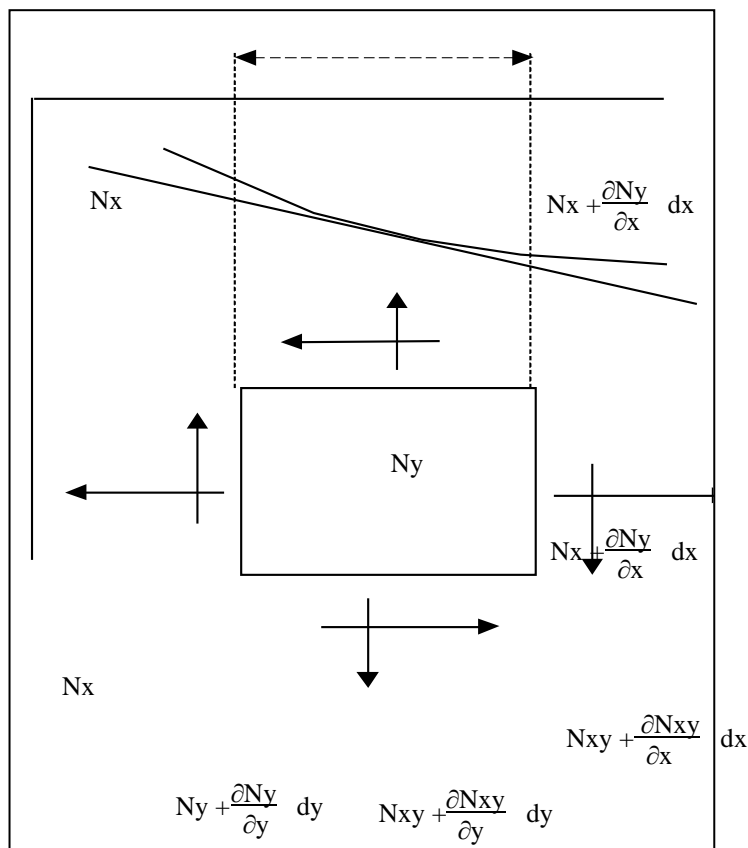
$$D \nabla^4 w + \frac{D}{KGe} \nabla^2 w = P$$

chargé dans son plan et en état d'équilibre :

$$\nabla^4 + \frac{1}{KGe} \nabla^2 w = \frac{P}{D} \quad (2.35)$$

**Cas 2 : Chargement dans le plan (comportement membranaire) :**

L'analyse sera faite de la même manière que précédemment à la différence près 1et que les équations d'équilibre seront obtenues à partir d'un élément différentiel



**Figure. (III.7) : élément différentiel de la plaque en équilibre**

Nous obtenons après projection sur les axes de référence :

Dans le sens ox :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.36)$$

Dans le sens oy :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.37)$$

Dans le sens oz :

On tient compte des petits angles entre les forces  $N_x$  et  $N_y$  ainsi que la pente de la flèche dans la direction  $y$  et  $x$ , on aura : (2.38)

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \\ N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \\ N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \\ N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \end{array} \right. \quad (2.38)$$

En substituant (2.36) et (2.37) dans (2.38) et en les injectant dans (2.35) on obtient l'équation :

$$\nabla^4 w + \frac{1}{KGe} \nabla^2 w = \frac{1}{D} \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.39)$$

### Cas 3 : Combinaison de chargements transversales et axiales :

Pour ce cas de figure, il suffit d'additionner les 2 effets l'un à l'autre et ce en rajoutant le terme de la charge transversale ( $q$ ) aux second membre de l'équation ci-dessus :

$$\nabla^4 w + \frac{1}{KGe} \nabla^2 w = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.40)$$

## Plaques minces

### III.2.7.3. Théorie de Kirchhoff- love

Dans l'étude des plaques minces à petites flèches, on introduit certaines hypothèses et limitations, qui ne portent pas seulement sur la plaque elle même  $\left( \frac{e}{L} < \frac{1}{20} \right)$  et le matériau dont elle est constituée mais aussi sur le comportement de la plaque chargée. Ainsi, on se sert de la théorie de Kirchhoff définie par les hypothèses suivantes :

#### III.2.7.3.a)- Hypothèses de bases :

Pour un matériau parfaitement élastique homogène et isotrope et dans le cas de petite flèche on a :

1) Les sections initialement planes et normales à la surface fléchie restent planes et normales à cette même surface après déformation. Ceci revient à négliger le cisaillement transverse  $\Rightarrow \Upsilon_{xz} = \Upsilon_{yz} = 0$ .

2) La plaque est incompressible dans le sens perpendiculaire au feuillet moyen ( $\epsilon_z = 0$ ), on néglige donc les tensions normales et perpendiculaires à ce feuillet (hypothèses de contraintes planes  $\sigma_z = 0$ ).

3) Il n'y a pas de déformation dans le plan moyen de la plaque avant, pendant et après déformation (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de force de cisaillement horizontale ni de forces normales agissant sur le côté de l'élément et  $\Rightarrow dT$  et  $dN$  sont nuls).

### III.2.7.3.b)- Déplacement, déformation et contrainte :

A partir de l'hypothèse (1) c'est-à-dire  $\Upsilon_{xz} = \Upsilon_{yz} = 0$ , on a :  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$

où :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta x = 0 \Rightarrow \beta x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta y = 0 \Rightarrow \beta y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.41)$$

En substituant ces résultats dans les équations (2.3), (2.4) et (2.5), on a :

- Pour la flexion :  $\langle \epsilon_f \rangle = Z \langle \chi \rangle$

Ou 
$$\langle \chi \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\rangle$$

- Pour la déformation de membranes :

$$\langle \epsilon_m \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle$$

- Pour les déformations de cisaillement :

$$\langle \epsilon_c \rangle = 0$$

Pour un état de contrainte et déformation plan ( $\sigma_z = 0$  et  $\epsilon_z = 0$ ) on a :

#### **Les contraintes intérieures :**

- *Les contraintes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} Z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} Z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{xy} = -2G \cdot Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{E}{1+\nu} Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

- *Les moments et efforts tranchants :*

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = -D_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = (1-\nu) \cdot D_f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (2.43.)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{array} \right. \quad (2.44.)$$

### III.2.7.4. Equation de la surface fléchie

#### *Chargement transversal :*

En substituant les relations (2.43) et (2.44) dans les équations d'équilibre (2.17) et (2.18) ou dans la relation (2.20), on aboutit à la et non moins célèbre équation de Sophie - Germain plus connue sous l'équation de Lagrange :

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \\ \nabla^4 w = \frac{P}{D} \end{array}} \quad (2.45)$$

#### *Chargement dans le plan (axial) :*

L'approche et le développement est le même que celui du cas 2 des plaques épaisses à la différence près que l'équation qui régit la flexion de la plaque est différente on a donc l'équation générale après substitution :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left[ 0 + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

Remplaçant  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  par leur expression on aura :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.46)$$

**Combinaison de charges dans le plan et de charges transversales :**

Dans ce cas et comme précédemment, il nous suffit simplement d'ajouter la charge transversale au second membre de l'équation et on aura :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.47)$$

**III.2.8. Résumé et conclusion :**

L'étude de la Méthode classique des plaques, est basée essentiellement sur la Théorie de l'élasticité dont le développement aboutit à un modèle mathématique cohérent et qui décrit avec une précision assez satisfaisante le comportement physique actuel de la plaque. C'est ainsi que la flexion des plaques est établie en utilisant de simples hypothèses basées sur les propriétés du matériau (linéaire, élastique, homogène, isotrope, etc.) et le comportement physique de la plaque. Bien que celles-ci soient nombreuses, les erreurs qui en résultent sont dues généralement à l'ordre de magnitude considéré. Le modèle de la flexion de la plaque est exprimé mathématiquement par une équation différentielle aux dérivées partielles et dont la solution rigoureuse est obtenue seulement dans certains cas particuliers simples. Les principales méthodes de résolution mathématique utilisées sont celles de Navier (double série de Fourier) et de Levy (série simple de Fourier) dont la convergence dépendra pour la première méthode de la continuité de la fonction de chargement. L'applicabilité de ces deux méthodes (Navier, Levy) peut s'étendre considérablement en utilisant la technique de superposition (c'est-à-dire l'addition de la solution homogène de l'équation différentielle à la solution particulière).

En conclusion, nous pouvons résumer ce paragraphe par certaines remarques illustrant les avantages et les inconvénients des méthodes classiques de la théorie des plaques. Le mérite de ces méthodes est donc :

- 1) La clarté du Modèle Mathématique
- 2) L'application de solutions mathématiques rigoureuses du fait qu'elles

Constituent une source importante de la théorie fondamentale pour presque toutes les méthodes approximatives et numériques.

Cependant elle constitue une méthode où le nombre de solutions exactes reste très limité ou encore très encombrant à l'utilisation voire impossible pour certains problèmes d'une importance considérable.

### III.3 Approche Énergétique

#### III.3.1) Introduction

Après une brève étude sur l'approche analytique des plaques, qui nous a permis par ailleurs de synthétiser nos connaissances et de les enrichir, nous nous intéressons maintenant à une approche toute aussi intéressante que performante; Nous passons donc des *méthodes d'équilibres* et d'analyses des contraintes, *écrite de manière locale*, à des *méthodes plus global* et qui font appel aux *principes variationnels*; Ces méthodes consistent à minimiser l'énergie totale accumulée dans le solide élastique.

#### III.3.2) Définition

Avant d'énoncer le principe de cette méthode, il convient de définir clairement les parties énergétiques qui rentrent en jeu.

##### III.3.2.1) Théorème du travail virtuel

Le solide V, déformé, est en équilibre sous l'action des forces extérieures. A la déformation normale, il est ajouté une déformation due à un chargement *virtuel*  $\{\delta U\}$ . Ce champ virtuel, fonction continue des coordonnées, est considéré comme infinitésimal et *il n'affecte pas l'équilibre dû au champ vrai*. Ceci s'exprime sous la forme suivante :

$$\int_v \sigma \delta \varepsilon d_v = \int_v f_v \delta u d_v + \int_s f_s \delta u ds = \delta U_d \quad (3.1)$$

où le premier membre est le travail virtuel des forces intérieures dues aux contraintes; Le second membre le travail virtuel des forces extérieures.

**Remarque :** Ce théorème ne fait pas intervenir explicitement le comportement du matériau.

##### III.3.2.2) Stationnarité de l'énergie potentielle

Dans le chapitre précédent, la fonction densité d'énergie de déformation **W** a été définie comme suit :

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$$

Si on l'injecte dans la relation (3.1) on obtient :

$$\delta \int_v W d_v = \delta \left( \int_s \langle f_s \rangle \{u\} ds + \int_v \langle f_v \rangle \{u\} d_v \right) = \delta U_d \quad (3.2)$$

ou  $U$  d'énergie de déformation totale.

Pour arriver en fin au théorème des travaux virtuel qui prend forme

$$\partial U_d - \partial T_{ext} = \partial \pi_t = 0 \quad (3.3)$$

et qui s'énonce :

En état d'équilibre, l'énergie potentielle totale  $\pi_t$  est stationnaire. c'est à dire :

*Le thème de travail virtuel et la stationnarité de l'énergie sont 2 formes strictement équivalentes de l'écriture de l'équilibre.*

**Remarque :** Pour que l'équilibre soit stable, il faut que la différence en énergie soit positive.  $\partial U_d - T_{ext} > 0$  ou  $\partial \Pi_t > 0$

### III.3.2.3) Travail virtuel complémentaire

Par définition, le travail virtuel complémentaire produit par l'état virtuel de contrainte  $\delta \sigma$  et dans l'état de déformation [E] est égal au travail complémentaire effectué par les forces virtuelles extérieurs. Cette approche est, en contrainte, l'équivalente de la précédente en déplacement, telle que :

$$\delta T_{extc} = \int_v \langle u \rangle \{ \delta f_v \} d_v + \int_s \langle u \rangle \{ \delta f_s \} d_s \quad (3.4)$$

avec le minimum de l'énergie complémentaire

$$\delta \pi_c = \delta (u_{dc} - T_{extc}) = 0 \quad (3.5)$$

avec :

$$\delta U_{dc} = \int_v \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} d_v$$

### III.3.2.4) Fonctionnelle de Reïssner

*Les deux principes vus ci-dessus sont ceux qui sont les plus utilisés en mécanique des structures. Le premier privilégie une approche déplacements, alors que le second privilégie une approche contrainte. Il est possible de conjuguer ces 2 approches dans le principe Reïssner.* Dans ce cas, il existe à la fois des déplacements virtuels et des contraintes virtuelles- la fonctionnelle associée s'écrit :

$$\pi_R = \int_v \langle \sigma \rangle \{ \varepsilon \} d_v - \pi_c + T_{ext} \quad (3.6)$$

Elle est stationnaire (et non minimum) à l'équilibre. Pour l'utiliser, il est indispensable de travailler avec les deux champs  $\{u\}$  et  $\{\sigma\}$ . Cette fonctionnelle est utilisée dans certaines études de plaques ; elle est associée à des éléments finis dits hybrides.

### III.3.2.5) Solutions approchées des formulations variationnelles

L'idée de base de ces méthodes est de représenter la solution par une combinaison linéaire finie de fonctions connues, les coefficients multiplicateurs étant déterminés pour la meilleure solution. Les coefficients sont ajustés de manière à minimiser l'écart entre la solution exacte et approchée. Parmi toutes les méthodes nous nous intéressons tout particulièrement : à la méthode de Ritz, qui servira à la résolution de certains problèmes de plaques.

### III.3.2.6) Méthode de Ritz

La méthode de Ritz consiste à minimiser la fonctionnelle  $\pi$  autant de fois qu'il y a d'inconnues.(6) :

$$\begin{cases} \delta\pi / \delta a_m = 0 \\ \dots \\ \delta\pi / \delta a_n = 0 \end{cases}$$

### III.3.3) Application de la méthode énergétique à la flexion des plaques

Cette méthode nous permet de résoudre toutes sortes de problèmes et s'avère efficace pour la résolution de système de forme irrégulière, de changement non uniforme, de section variable ainsi que de matériaux anisotropes.

#### III.3.3.1) Plaques à épaisseur constante avec petite déformation

Pour un solide élastique à 3 dimensions, l'énergie de déformation (potentiel) s'exprime par la relation :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_v \{ \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} \} dv \quad (3.7)$$

Dans le cas des plaques à épaisseur constante :

La contrainte normale au plan moyen est nulle d'où :

$$* \sigma_z = 0$$

$$* \int_v \sigma_{xz} \gamma_{xz} dv \quad \text{négligeable}$$

$$* \int_v \sigma_{yz} \gamma_{yz} dv \text{ négligeable}$$

Ces deux dernières conditions traduisent la non influence des efforts tranchants sur les flèches.

$$U_d = \frac{1}{2} \int_s \left\{ \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \left\{ \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} \right\} dz \right\} ds \quad (3.8)$$

avec pour un matériau isotrope homogène

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = G \varepsilon_{xy} \end{cases}$$

il en résulte :

$$U_d = \int_s \left\{ \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^2 \right] dz \right\} ds \quad (3.9)$$

pour des plaques à épaisseur constante en terme de flèches :

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \Delta \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.10)$$

pour une charge répartie  $q dx dy$  positionnée par W on a :

$$T_{ext} = - \iint \omega q dx dy$$

d'où l'énergie totale du système en terme de *variationnelles*

$$\pi = \iint \left( \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu^2) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right) - qw \right) dx dy \quad (3.11)$$

$$\text{avec :} \quad \pi = U_d - T_{ext} \quad (3.12)$$

Le problème de la flexion des plaques consiste alors à trouver les fonctions W (x, y) qui satisfait aux conditions aux limites du problème et qui rend  $\pi$  minimale. On obtient assez facilement une solution approchée en choisissant une déformée du type

$$w = a_1 \phi_1(x, y) + \dots + a_n \phi_n(x, y)$$

avec :  $\phi(x, y)$  : Représente la surface fléchie de la plaque.

On obtient après intégration une fonction du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients inconnus, Ces coefficients sont alors choisis de manière à ce que l'intégrale  $\pi$  soit minimum.

$$\begin{cases} \delta \frac{\pi}{\delta a_1} = 0 \\ \delta \frac{\pi}{\delta a_n} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

C'est un système à N équations linéaires et à N inconnues ( $a_1, \dots, a_n$ ).

### III.3.3.2) Énergie de déformation, énergie totale.

Les contraintes et déformations sont séparées en terme de membrane, flexion et cisaillement, respectivement désignées par les indices m, f, c il s'ensuit que

$$U_d = U_{dm} + U_{df} + U_{dc} \quad (3.14)$$

La forme générale de  $U_d$  est :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_v \langle \sigma \rangle \{ \varepsilon \} dv = \frac{1}{2} \int_v \langle \sigma_{m+f} \sigma_c \rangle \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_m + z\kappa \\ \varepsilon_c \end{matrix} \right\} dv \quad (3.15)$$

Après intégration dans la direction  $O_z$  les différentes composantes de  $U_d$  apparaissent clairement

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{sm} \langle N \rangle \{ \varepsilon_m \} + \langle M \rangle \{ \chi \} + \langle Q \rangle \{ \varepsilon_c \} ds \quad (3.16)$$

Une autre expression se déduit de (2.2.1) et (2.2.2)

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{sm} \left[ \langle \varepsilon_m \rangle [\Delta_m] \{ \varepsilon_m \} + \langle \chi \rangle [\Delta_f] \{ \chi \} + \langle \varepsilon_c \rangle [\Delta_c] \{ \varepsilon_c \} \right] ds \quad (3.17)$$

**Remarque :** Le couplage flexion – membrane est généralement nul puisque l'intégrale sur  $(-\frac{e}{2}, \frac{e}{2})$  des termes en z est nulle. Les exceptions à ce couplage sont fournies par les plaques stratifiées non – symétrique par rapport au plan  $z=0$ .

En terme de déplacements, les différents termes de l'énergie de déformation s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 U_m &= \frac{1}{2} \int_{sm} D_m \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] ds \\
 U_F &= \frac{1}{2} \int_{sm} D_f \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 \right] ds \\
 U_c &= \frac{1}{2} \int_{sm} G.e.k \left[ \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] ds
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Le potentiel des forces extérieures vaut :

$$T_{ext} = \int_v \langle u \rangle \{ F \} dv \tag{3.19}$$

ou, en séparant les différents effets

$$\int_{sm} \langle u \rangle \{ F_v \} ds + \int_{sm} \left\langle \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} N_{sx} \\ N_{sy} \\ Q_s \end{matrix} \right\} + \left\langle \begin{matrix} \beta_x & \beta_y \end{matrix} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} M_{sx} \\ M_{sy} \end{matrix} \right\} ds
 \tag{3.20}$$

Les conditions de stationnarité de la fonction énergie totale s'expriment par l'équation générale

$$\delta(U_d - T_{ext}) = 0 \tag{3.21}$$

et conduisant aux mêmes équations que celle donnée par le théorème du travail virtuel (3.3)

### Résumé et conclusion

Dans ce chapitre il a été développé brièvement les méthodes énergétiques les plus utilisées en Mécanique des structures et tout particulièrement pour les plaques où les principes fondamentaux ont été énoncés clairement à travers les formules et les équations déduites, Ainsi l'on constate par exemple que le premier théorème privilégie une approche *déplacement* le second privilégie une approche contrainte alors que le théorème de Reïssner démontre que l'on peut conjuguer ces 2 approches.

Enfin, a la lumière de cette étude, il apparaît clairement que les méthodes énergétiques restent des approches très efficaces à *la résolution* de toutes les situations ou il y a *irrégularité de forme ou de chargement*. Ces méthodes ne sont applicables que dans le cadre de leur hypothèse ou le comportement de la plaque reste toujours linéairement élastique.

Cependant, le choix de la flèche reste très important, car il n'est pas arbitraire et doit non seulement satisfaire aux conditions aux limites, mais aussi représente le plus réellement possible le comportement de la surface fléchie de la plaque, ce qui ne peut être toujours réalisable. De ce choix, dépendra l'exactitude de la solution.

## III. 4 Approches Numériques

### Introduction

L'étude des problèmes d'élasticité revient généralement à la résolution d'un système d'équation aux dérivées partielles avec des conditions données sur le contour. Bien souvent il est difficile d'obtenir une solution analytique exacte de ces équations. Afin de surmonter cet handicap, on doit donc recourir à des méthodes numériques approchées, découverts au début de notre siècle. Parmi les méthodes applicables aux plaques on a :

- 1) *La méthode des bandes finies*
- 2) *La méthode des éléments aux frontières*
- 3) *La méthode des différences finies*
- 4) *La méthode des éléments finis*

Ces derniers consistent à converger dans l'espace et dans le temps vers la solution exacte.,

On précise que l'une des méthodes de base des plus importante est la méthode des différences finies dont le principe est relaté ci dessous :

### III.4.1 - Méthode des différences finies

Cette méthode consiste à remplacer les équations différentielles de la plaque par des équations aux différences finies. Les inconnues sont les valeurs prises par la fonction en un certain nombre de points convenablement choisis et le problème revient donc à résoudre un système d'équation linéaire.

En général la structure de la méthode des différences finies reste très puissante dans la résolution manuelle des problèmes, *L'amélioration des résultats est obtenue à partir de l'extension de la série de Taylor*, qui est utilisée généralement pour résoudre les équations différentielles en tous points et pour chaque expression de différence finie. Une attention particulière est tournée vers :

- La représentation des forces
- Les conditions aux limites du problème.

Effectivement, une quelconque erreur dans la formulation des conditions aux limites réduit considérablement l'exactitude obtenue en gain dans les développements précédents. Il est important de remarquer que bien que ces méthodes améliorées demandent d'avantage de travail, elles ont prouvé qu'elles étaient plus économiques que les méthodes ordinaires.

### III.4.2 - Méthode des éléments finis

L'arrivée révolutionnaire de l'informatique sur le marché mondial et la percée fulgurante qu'il comptabilisera dans tout les domaines, va favoriser le développement et l'évolution rapide d'une méthode qui connaîtra elle aussi le succès et la généralisation pour sa performance, sa rapidité et son économie.

La méthode des éléments finis est donc apparue suite à l'incapacité des méthodes matricielles à résoudre certains problèmes ayant des géométrie aussi divers que complexes, pour lesquelles on ne possède pas de solution analytique (plaques, coques,...etc.). Cette méthode est *basée sur les techniques d'approximations* dont le principe de base est de remplacer la résolution d'un problème continu à nombre infini d'inconnues par celle d'un problème à un nombre fini d'inconnu : Les coordonnées généralisé définissent la "meilleure" approximation en minimisant un critère, soit une énergie potentielle, soit une d'erreur ou encore en exprimant les conditions d'orthogonalités de l'erreur avec des fonctions de pondération données. On a donc la classification des méthodes d'approximation suivante :

- *Méthode universelle* : utilisée pour les formulations locales du problème [Méthode Galerkin, méthode moindre carré, collocation par point]
- *Méthode variationnelle* : utilisée pour les formulations variationnelle ou globale [Méthode de Ritz, méthode Kantorovitch...]

L'extension de ces méthodes variationnelles va permettre l'analyse des structures complexe par la Méthode des Éléments Finis (M.E.F).

#### III.4.2.1) Principe de base de la M.E.F

Nous avons dit que la M.E.F permettait de ramener les problèmes de milieu continu à des problèmes discrets de nombre finis d'inconnus qui sont déterminés par application de critères énergétiques. Ces paramètres sont de nature différente selon la méthode employée. On peut distinguer deux classes de méthodes matricielles :

- *La méthode des forces* : Dans laquelle les paramètres inconnus sont les contraintes et les forces résultantes dans l'élément.
- *La méthode des déplacements* : Dans laquelle les paramètres inconnus sont les déplacements aux nœuds.

L'utilisation de techniques matricielles sont amenées successivement à s'intéresser à deux niveaux de formations :

- La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini
- La formulation globale au niveau de la structure.

#### III.4.2.2) Fondement de la M.E.F

- 1- Le domaine  $D$  est discretisé en sous domaines  $D_e$ , de dimension finie, ou éléments finis, de telle manière qu'il n'y ait ni trous entre éléments, ni recouvrements des éléments. Il est aussi souhaitable qu'il y ait le moins d'erreurs possibles dans la représentation de la frontière de  $D$ . Le résultat de cette discretisation constitue *le maillage des éléments finis*.

- 2- Dans chaque sous domaine **De**, la fonction **F** qu'il faut calculer est approchée de manière *nodale*. Cette terminologie est employée pour définir une approximation, complètement caractérisée par les valeurs que prend **F** en un certain nombre de points ou nœuds de l'élément fini **De**.

L'approximation est supposée nulle dans tous les autres éléments dont la réunion constitue **D**. Les approximations dans chacun des éléments sont construites de telle sorte que l'approximation globale soit partout continue.

### III.4.2.3) Discrétisation du Domaine

Il s'agit de découper le domaine initial en un certain nombre d'éléments de taille finie (d'où le nom de la méthode). Généralement, pour un domaine donné, ces éléments ont la même forme géométrique : Triangle, Rectangle .... Ce n'est pas une obligation mais une commodité ou une contrainte dictée par des considérations de continuité. Evidemment ces éléments sont de types différents si le domaine à discrétiser est une ligne, une surface ou un volume.

### III.4.2.4) Approximation nodale

A l'intérieur de chaque élément, la fonction recherchée est approximée *nodalement*. Pour construire cette approximation nodale, il faut choisir des fonctions de base. Dans la

MEF ce sont des polynômes du type : par exemple : 
$$U = \sum_{i=1}^1 a_i x^{(i-1)}$$

Pour obtenir la forme *nodale* de ces approximations polynomiales, il faut exprimer les coefficients  $a_i$  en fonction des valeurs du déplacement  $U$  ; ainsi on peut écrire ou formuler

$$\{U\}_e = [\phi]\{a\}_e \tag{4.1}$$

$[\phi]$  : Matrice de fonction base de l'approximation.

$\{a\}_e$  : Vecteur de coordonnées généralisé de l'élément.

Cette relation définie, elle ne peut résoudre le problème global car les coordonnées généralisées varient d'un élément à un autre, il est donc nécessaire d'adopter de nouvelles variables physiques permettant d'assurer la compatibilité des déplacements et d'exprimer les conditions d'équilibres aux nœuds.. on peut alors exprimer l'approximation du champ de déplacement sous forme :

$$\{U\}_e = [A]\{q\}_e \tag{4.2}$$

$[A]$  : Matrice d'interpolation dans les éléments sont des coordonnées dans l'espace.

$\{q\}_e$  : Vecteur de déplacement nodal qui regroupe les déplacements aux nœuds et éventuellement leur dérivée.

### III.4.2.5) Propriétés des éléments de type déplacement

Il y a des propriétés à vérifier qui sont nécessaire au niveau de l'élément afin d'obtenir de bonnes solutions au niveau de la structure complète comme :

- \*La complétude
- \*La compatibilité
- \*La convergence

On distingue aussi deux types d'éléments :

- \*Les élément finis conformes
- \*Les élément finis non conformes .

### III.4.2.6) Assemblage

Dans la plupart des cas l'approximation par élément fini génère donc un champ continu, dont la valeur en tout point dépend des valeurs aux nœuds d'approximation de l'EF considéré. Les règles d'assemblage peuvent différer selon les problèmes traités, mais le plus souvent, il s'agit de superposer la contribution de chaque élément.

### III.4.2.7) Formulation matricielle de l'équilibre statique

#### 4.7.1) Relations matricielles de l'élasticité

Il est maintenant possible avec tout ce qui précède de formuler un problème d'élasticité (statique) sous une forme directement utilisable par la M.E.F.

Le problème considéré fait tout d'abord abstraction d'éventuels effets thermiques.

Les différentes équations, variables, ... etc. sont mises sous forme matricielle ou vectorielle pour pouvoir programmer facilement. C'est ainsi que les *déformations et contraintes* sont respectivement représenté par des *vecteur lignes* :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \rangle \quad (4.3)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz} \rangle \quad (4.4)$$

et le travail virtuel par unité de volume des forces internes ou contraintes qui devient :

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \langle \sigma \rangle \delta \{ \varepsilon \} \quad (4.5)$$

- Dans le cas d'un matériau linéaire, élastique cette relation représente la variation de la densité d'énergie de déformation.

$$U_d = \frac{1}{2} \langle \sigma \rangle \{ \varepsilon \} \quad (4.6)$$

- Les relations contraintes déformation ont la forme

$$\{ \sigma \} = [C] \{ \varepsilon \} \quad (4.7)$$

[C] : Matrice des coefficients caractéristiques du matériau, symétrique, dépendant de E et  $\nu$  ou de  $\lambda$  et  $\mu$ .

- Les relations déformation déplacement ont la forme :

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ U \} \quad (4.8)$$

[B] : Opérateur différentiel matriciel. Les relations d'équilibre deviennent alors :

$$[B]^T \{ \sigma \} + \{ f \} = 0 \quad (4.9)$$

### Soit par exemple pour un problème à 2 dimensions

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

En utilisant les relations précédentes et par substitution, le théorème des travaux virtuels peut prendre les différentes formes suivantes :

$$\begin{aligned} \int_v \langle \sigma \rangle \{ \delta \varepsilon \} dv &= \int_v \langle f \rangle \{ \delta u \} dv + \int_s \langle t \rangle \{ \delta u \} ds \\ \int_v \langle \varepsilon \rangle [c] \{ \delta \varepsilon \} dv &= \int_v \langle f \rangle \{ \delta u \} dv + \int_s \langle t \rangle \{ \delta u \} ds \\ \int_v \langle \sigma \rangle [c]^{-1} \{ \delta \sigma \} dv &= \int_v \langle f \rangle \{ \delta u \} dv + \int_s \langle t \rangle \{ \delta u \} ds \end{aligned} \quad (4.11)$$

ou enfin

$$\int_v \langle u \rangle [B]^T [c] [B] \{ \delta u \} dv = \int_v \langle f \rangle \{ \delta u \} dv + \int_s \langle t \rangle \{ \delta u \} ds \quad (4.12)$$

Le travail des contraintes apparaît donc comme une forme bilinéaire symétrique des déplacements. C'est sous cette forme intégrale que le problème est résolu par la méthode des éléments finis dit *aux déplacements*. D'autres méthodes existent développées à partir d'une formulation en terme de contraintes ou en terme de contraintes et de déplacement dite *méthode hybride*.

### 4.7.2) Formulation Isoparamétrique

L'efficacité d'une méthode sera toujours conditionnée par le nombre d'éléments utilisés (temps de calcul) ainsi que la convergence de sa solution. Par ailleurs une modélisation correcte exige une bonne présentation des bords courbes; avec des éléments à bords droits il faut des maillages fins donc de nombreux éléments.

Le concept d'isoparamétrie permet à la fois de systématiser l'utilisation des variables réduite, et de générer des éléments finis à bords courbes; il est donc très avantageux pour certaines discrétisations.

### 4.7.3) Le concept d'isoparamétrie

Un élément est dit isoparamétrique, lorsque les fonctions géométriques sont identiques aux fonctions du champs de déplacement c'est à dire lorsque les nœuds géométriques se confondent avec les nœuds d'interpolation des déplacements.

$$\bar{N}(\zeta, \eta, \varphi) = N(\zeta, \eta, \varphi)$$

Si l'approximation des coordonnées fait intervenir des fonctions  $N_j$  d'un ordre supérieur à celle des déplacements, l'élément est dit *superparamétrique*, alors que dans le cas inverse, il est *subparamétriques*.

- Les éléments isoparamétriques les plus connus en deux dimension :
  - Le rectangle à 4 nœuds (Q4)
  - Le quadrilatère à 8 nœuds (Q8)
  - Le triangle à 3 nœuds

On définit par ailleurs les termes *espace vrai* et *espace parent* tel que l'un représente l'élément aux coordonnées  $(x_i, y_i)_{i=1}$  tans que l'autre représente l'élément aux coordonnées  $(\xi \quad \eta)$  variant entre :  $(-1, 1)$  pour chaque sommets.

### 4.7.4) Dérivation et intégration

En mécanique, 2 opérations sont faites, l'une pour passer des déplacements aux déformations, l'autre pour calculer le travail virtuel. Dans le cas d'un élément

isoparamétrique ou les fonctions appartiennent à l'espace parent il faut effectuer une dérivation en chaîne ce qui n'est pas toujours facile. C'est ainsi qu'apparaît le *Jacobien* :

**a) Dérivation en trois dimensions (3D) :**

Le passage d'un repère à un autre est conditionné par une matrice appelée *Jacobien*.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

**b) Intégration**

L'intégration intervient généralement pour calculer les coefficients de la matrice raideur. Une intégration en x, y, z devient une intégrale  $\zeta, \eta, \xi$  illustré comme suit :

$$I = \int_{ve} F(x, y, z) dv_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} H(\zeta, \eta, \xi) \det|J| d\zeta d\eta d\xi \quad (4.14)$$

qui numériquement s'exprime avec la méthode d'intégration de GAUSS sous la forme :

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p H(\zeta_i, \eta_j, \xi_k) W_i W_j W_k \det|J| \quad (4.15)$$

ou n, m, p représente le nombre de points d'intégration de Gauss

$W_i, W_j, W_k$  représente les coefficients de pondération

$\zeta_i, \eta_j, \xi_k$  désigne les coordonnées des points d'intégration

**Remarque :**

La formulation isoparamétrique est aujourd'hui très largement utilisé pour les qualités qu'elle présente spécialement au plan numérique, puisque toutes les opérations

s'effectuent dans le domaine parent. Sauf pour certains cas particuliers : éléments axisymétrique, élément pour simuler le comportement au fond de fissures, élément frontière ou contact.

### III.4.2.8) Analyse des plaques par la M.E.F :

L'étude des éléments plaques en flexion et de coques s'avère très importante pour l'analyse de nombreux types de structures. C'est à ce titre que l'on s'intéressera particulièrement à l'analyse des plaques en flexion en rappelant les différentes théories des plaques, et leurs domaines de validité. Ensuite nous présenterons les différentes classes d'éléments de plaques :

- \* Plaques minces sans effet de cisaillement qui évoluent généralement dans le domaine linéaire.

- \* Plaques minces et épaisses avec prise en compte de l'effet du cisaillement transverse et dont le comportement tend à montrer des non linéarité géométriques ou matérielles. Ou encore tout simplement, dans le domaine linéaire la prise en compte du cisaillement aussi minime soit-il.

#### 4.8.1) Classification

- \* Les éléments de plaque en flexion peuvent être classés en trois catégories :
- \* Les éléments basés sur la théorie de KIRCHOFF (sans effet de cisaillement).
- \* Les éléments basés sur la théorie de HENCKY-MINDLIN (avec effet de cisaillement).
- \* Les éléments obtenus à partir d'éléments isoparamétriques de volume.

Les plaques sous l'effet membranaire peuvent être étudiés par deux types d'éléments :

- \* élément isoparamétrique triangle à 3, 6, 9 nœuds
- \* élément isoparamétrique quadrilatère à 4, 8, 12 nœuds à bords droit, paraboliques ou cubiques. Il est possible de trouver des éléments qui comportent des nœuds intérieurs supplémentaires pour ce qui concerne l'approximation nodale en déplacement (par exemple le quadrilatère à 9 nœuds).

#### 4.8.2) Éléments basés sur la théorie de KIRCHHOFF

La formulation de cet élément ne nécessite pas que l'approximation de la composante transverse du déplacement ainsi que la rotation telle que :

$$\begin{cases} \beta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad (4.16)$$

de la même manière que l'énergie de déformation qui se déduit se décompose en énergie de membrane et de flexion. Cette dernière ne fait plus intervenir les rotations  $\beta_x, \beta_y$  et/ou leurs dérivées mais seulement la déflection  $w$ .

Pour un matériau homogène et isotrope puisque  $\frac{\delta w}{\delta x} = -\beta_x$  et  $\frac{\delta w}{\delta y} = -\beta_y$ ,

$$U_f = \frac{1}{2} \int_{sm} Df \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds \quad (4.17)$$

La présence des dérivées secondes en  $x$  et  $y$  sous le signe  $\int$  oblige à une continuité  $C1$ , or celle-ci est difficile ou impossible à réaliser, à la fois pour les

dérivées en  $x$  et pour celle en  $y$ . C'est la raison pour laquelle il y a eu tant d'efforts entrepris pour trouver des éléments finis de plaques acceptables.

Ainsi plusieurs développements ont été élaborés dans le but d'approcher la solution exacte avec un minimum d'erreurs, ceci donc a donné naissance à 2 types d'éléments de plaque en flexion :

- \* Triangulaire (9 d.d.l)
- \* quadrilatère (12 d.d.l)

On distingue 2 catégories principales dans lesquelles évoluent ces éléments :

- \* Les triangles et rectangles non conforme : leur développement peut être complet ou incomplet mais dans tous les cas la convergence est problématique ou encore leur utilisation limitée.

- \* Triangle et quadrilatère conforme : plusieurs autres comme ZIENKIEWICZ, CLOUGH et TOUCHER ont développé un triangle conforme en se basant respectivement sur la connexion du champ de déplacement (de manière à rendre linéaire la variation de la pente interface) et la formulation par sous domaine (subdivision en 3 triangle complet).

Néanmoins la conformité ainsi obtenue se paie par un manque de précision ou une excessive rigidité.

Fort heureusement l'approche de l'élément quadrilatère conforme de FRAEJS de VEUBEKE (avec des nœuds additionnels d'interface et la subdivision en 4 triangle de ce même élément) présente le meilleur compromis :

Simplicité – précision que peut offrir un élément de plaque en flexion de KIRCHHOFF

### 4.8.3) Éléments basés sur la théorie de HENCKEY -MINDLIN :

En effet les éléments basés sur la théorie de HENCKEY – MIDLIN sont les mieux adaptés dans le cas des plaques d'épaisseurs modérées. Leurs formulations est basée sur une approximation de 3 variantes indépendantes  $w, \beta_x, \beta_y$  la condition de compatibilité inter élément ne nécessite qu'une continuité  $C_0$ .

Cependant et jusqu'à un passé récent, ce type d'élément ne pouvait être utilisé pour la modélisation de plaque mince à cause de la dégradation numérique dénommé «Verrouillage» ou «Shear locking» qui se conçoit aisément puisque les termes de flexion varient comme  $e^3$ , alors que ceux de cisaillement varient comme  $e$  et qu'il y a, par hypothèse de construction, indépendance des 2 effets; Il s'agit donc ici de verrouillage par cisaillement., l'apparition donc de 2 méthodes qui permettent l'utilisation de ces éléments, pour des problèmes de plaque mince n'étaient que la bien venues; l'une de ces méthodes est fondé sur la prise en compte d'hypothèses de KIRCHOFF discrétisé, l'autre méthode est basée sur l'intégration réduite dont l'approche est basée sur une formulation d'éléments isoparamétriques de volume permettant d'obtenir des résultats satisfaisant dans le cas des plaques minces et ou d'épaisseurs modérés ainsi que dans le cas de coque courbe.

#### 4.8.4) Formulation de l'élément plaque

L'élément fini isoparamétrique a huit nœuds de type «SERINDIP», s'adapte parfaitement aux hypothèses de la théorie de HENCKY – MINDLIN cela est dû principalement aux qualités qu'il présente. (1) Ces frontières contiennent 3 nœuds ce qui va lui permettre de simuler aussi bien la frontière droite que courbe. (2) Élément isoparamétrique (même interpolation géométrique – déplacement). (3) du fait que la convergence est fonction de la taille des éléments et du degré du polynôme choisi, il est préférable d'adopter un champ de déplacement linéaire.

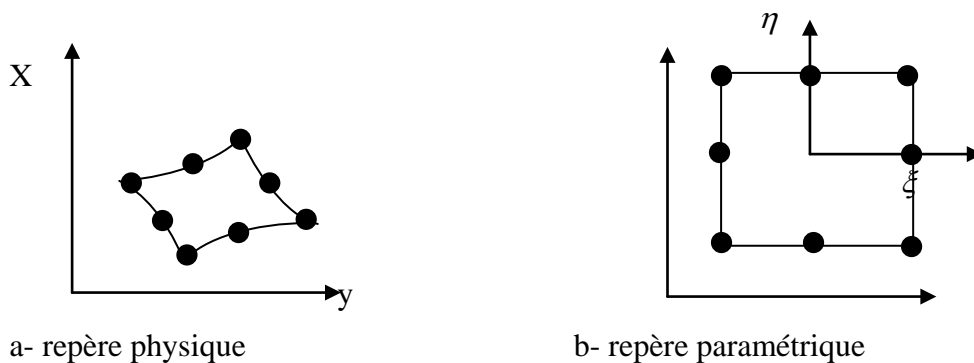


Figure. (III.8) Élément de plaque isoparamétrique quadratique

Soit les approximations de  $\omega, \beta_x, \beta_y$

$$\begin{cases} \omega = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta, \eta) \omega_i = |N| \{ \overline{\omega} \} \\ \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta, \eta) \beta_{xi} = |N| \{ \overline{\beta_x} \} \\ \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta, \eta) \beta_{yi} = |N| \{ \overline{\beta_y} \} \end{cases} \quad (4.18)$$

telle que :

$\omega$  : déplacement transversal du feuillet moyen

$\beta_x, \beta_y$  : Rotation des normales autour de x, y

\* Au nœuds principaux :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \zeta\zeta_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\zeta\zeta_i + \eta\eta_i - 1) \quad i= 1, 3, 5, 7$$

\* Au nœuds d'interfaces :

$$N_i = \frac{1}{2}\zeta_i^2(1 + \zeta\zeta_i)(1 - \eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i^2(1 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2) \quad i= 2, 4, 6, 8$$

**Remarque :**

La matrice Jacobiënne [J] pour le calcul de la matrice de rigidité, Masse

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \frac{\delta x}{\delta \zeta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\delta N_i}{\delta \zeta} x_i \quad \text{et} \quad \frac{\delta x}{\delta \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\delta N_i}{\delta \eta} x_i$$

$$\frac{\delta y}{\delta \zeta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\delta N_i}{\delta \zeta} y_i \quad \text{et} \quad \frac{\delta y}{\delta \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\delta N_i}{\delta \eta} y_i$$

On obtient aussi la matrice de déformation

**a) Flexion :**

$$\varepsilon_F = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{Fx} \\ \varepsilon_{Fy} \\ \varepsilon_{Fxy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial\beta_x/\partial x \\ \partial\beta_y/\partial y \\ \frac{\partial\beta_x}{\partial y} + \frac{\partial\beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\{\varepsilon_F\} = [A_f] \{u\} \quad (4.20)$$

**b) Cisaillement :**

$$\varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cxz} \\ \varepsilon_{cyz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \partial\omega/\partial x \\ \beta_y + \partial\omega/\partial y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 1 & 0 \\ \partial/\partial y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\{\varepsilon_c\} = [A_c] \{u\} \quad (4.22)$$

### 8.5) L'énergie de formation de la plaque

Elle est calculée pour l'effet membrane nulle et le phénomène de flexion et cisaillement sont couplés (TH - MINDLIN) d'où :

$$U_d = U_{dF} + U_{dc} \quad (4.23)$$

**a - Flexion :**

Avec ces développements les relations entre le vecteur des courbes et celui des rotations prennent la forme :

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \partial\beta_x/\partial x \\ \partial\beta_y/\partial y \\ \partial\beta_x/\partial y + \partial\beta_y/\partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Cette expression matriciellement est résumé par :

$$\{\chi\} = [H_c] \{\bar{\beta}\} \quad (4.25)$$

et  $U_{dF}$  s'écrit finalement

$$[U_{dF}] = \frac{1}{2} \langle \bar{\beta} \rangle \int_{sm} [H_f]^T [D_f] [H_f] ds \langle \bar{\beta} \rangle \quad (4.26)$$

La matrice raideur  $[K_f]$  de la plaque pour ce qui concerne les courbures est donc :

$$[K_f] = \int_{sm} [H_f]^T [D_f] [H_f] ds = \int_{-1-1}^{+1+1} [H_f]^T [D_f] [H_f] \det|J| d\zeta d\eta \quad (4.27)$$

**b – Cisaillement :**

D'après (4.21) et (4.22)

$$\{\varepsilon_c\} = [H_c] \{u\} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\{\varepsilon_c\} = |N| \{\bar{\beta}\} + [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \omega_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \omega_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial |N|}{\partial \zeta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial |N|}{\partial \eta} \end{bmatrix} \langle \bar{\omega} \rangle$$

Finalement en regroupant les valeurs nodales dans un seul vecteur  $3 \times n$  composantes :

$$\{\varepsilon_c\} = [H_c] \{\bar{d}\} \quad (4.29)$$

$$\langle \bar{d} \rangle = \langle \bar{\omega} \quad \bar{\beta}_x \quad \bar{\beta}_y \rangle$$

Il s'ensuit que l'énergie de déformation due au cisaillement à la forme générale

$$U_{dc} = \left\langle \bar{d} \right\rangle \int_{sm} [H_c]^T [D_c] [H_c] ds \left\langle \bar{d} \right\rangle \quad (4.30)$$

La matrice raideur associée étant :

$$[K_c] = \int_{sm} [H_c]^T [D_c] [H_c] ds = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [H_c]^T [D_c] [H_c] \det|J| d\zeta d\eta \quad (4.31)$$

Tous les éléments construits à partir des développements précédents, deviennent trop rigides quand l'épaisseur diminue, cela se conçoit aisément par le phénomène de «Verrouillages» par le cisaillement . Ceci peut être évité grâce à l'intégration numérique qui conduit à l'apparition de mode de singularité ou mécanisme de [K], correspondant à des déplacements apparemment sans énergie, rendue possible par l'intégration réduite. Pour un élément, le nombre M de mécanisme est égal à :

$$M = Nxn - Q - pq$$

N : nombre de nœuds

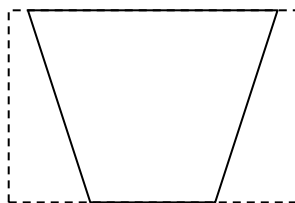
n : nombre de ddl

Q : nombre de modes de corps rigide

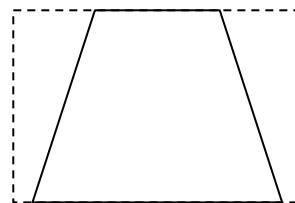
p : le nombre de points de GAUSS

q : le rang de la matrice des constantes élastiques

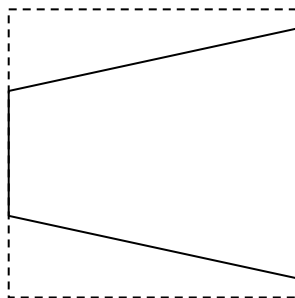
Q4.



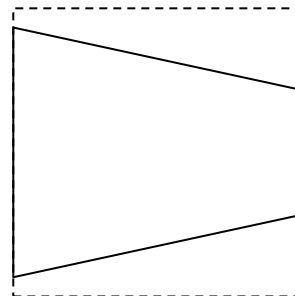
ou



Q4 assemblé



ou



Q4 assemblé, propagation d'un mécanisme

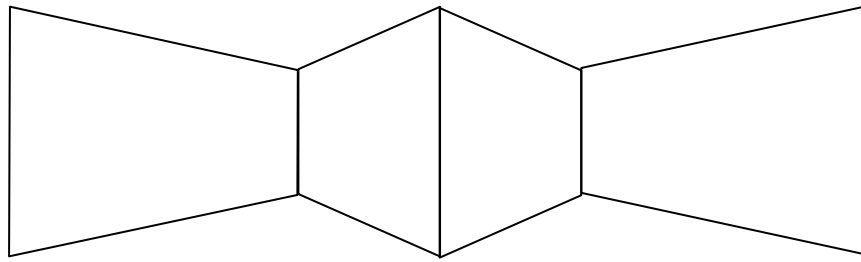


Figure. (III.9) : Mécanisme de l'élément Q4 seul et assemblé

L'élément Q8 à variation parabolique est souvent utilisé; il présente lui aussi un mécanisme qui peut ne peut pas se propager quand on assemble d'autres éléments. Cette élément peut donner des résultats médiocres dans certains cas de flexion de plaques. HUGHES a donc proposé une solution mixte :

Pour les rotations (9 nœuds) famille de LAGRANGE

Pour les déplacements transversales W (8 nœuds) famille de SERENDIP

Il s'agit de l'élément hétérosis intégré avec 3x3 point pour la flexion et 2x2 points pour le cisaillement. Cet élément donne de bon résultats il est un peu lourd d'emploi et passe le patch test pour les rectangles et des parallélogrammes; il ne présente pas de mécanismes, c'est un excellent élément.

#### 4.8.6) Amélioration du comportement au cisaillement :

D'autres tentatives ont été enregistrées pour améliorer le comportement au cisaillement ou encore à contraindre le cisaillement de manière discrète ou ponctuelle de tels éléments ont été développés par J.L. BATOZ (14), le plus connu est le triangle à 3 nœuds ou D.K.T (Discrète KIRCHOFF théorie ou triangle)

a – Élément D.K.T. Triangle à 3 nœuds :

Dans ce triangle, l'hypothèse sur le cisaillement conduit à ne pas définir le déplacement W que sur le bord de l'élément; où la variation de la déflexion, long d'un côté, est supposée cubique, la variation de la pente doit être quadratique pour que l'hypothèse de comportement sur le cisaillement, puissent être faites. Cet élément est très bon, précis, sans doute le meilleur de tous les éléments triangulaire, cependant, il y a un inconvénient qui est de ne pas pouvoir établir des forces nodales cohérentes avec les fonctions quand on a affaire à une pression, puisque le déplacement n'est défini que sur le bord.

b – Élément D.K.Q, quadrangle à 4 nœuds :

J.L. BATOZ a proposé quand à lui un élément quadrangle fondé sur les mêmes idées; les rotations sont quadratiques et le déplacement cubique, défini seulement sur les bords. Malheureusement, cet élément donne des résultats un peu moins bons que le précédent.

#### 4.8.7) Intégration numérique :

Le calcul des  $K_{ij}$  de la matrice de rigidité et les composantes  $F_i$  des vecteurs chargements par les techniques d'intégrations explicite est généralement fastidieux car on est face à des intégrations de fractions d'ordre élevé.

Le recours à des techniques d'intégrations numérique est nécessaire et pratique.

$$\text{Soit à intégrer : } I = \int_{-1}^{+1} F(\zeta) d\nu$$

Le calcul de cette intégral en trois dimensions par la quadrature de GAUSS donne :

à trois dimensions

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\zeta, \eta, \xi) d\zeta d\eta d\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_i \omega_j \omega_k F(\zeta_i, \eta_i, \xi_i)$$

$n$  : points d'intégrations.

$\omega_i, \omega_j, \omega_k$  : coefficient de pondération des points d'intégrations.

$\zeta_i, \eta_i, \xi_i$  : coordonnées des points d'intégrations.

#### 4.8.8) Intégration réduite et sélective :

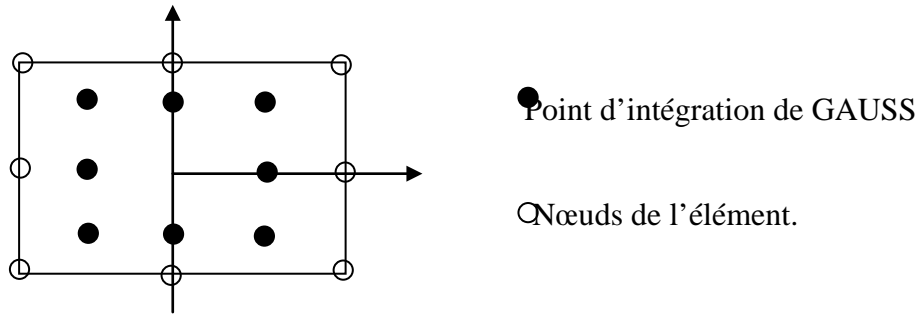
*a – Intégration réduite :*

Le traitement conventionnel des plaques minces basé sur les hypothèses de KIRCHOFF, définit les déplacements généraux en fonction du déplacement latéral de la surface moyenne, Ainsi de grandes difficultés apparaissent quand à la satisfaction de la continuité des pentes aux interfaces et l'inhabilité de telles formulations à prendre en compte le cisaillement transverse.

Afin de dépasser de tels obstacles, on abandonne l'hypothèse des sections normales en prescrivant indépendamment les déplacements de la surface moyenne et les rotations de la normale, cependant de telle hypothèses vont engendrer d'autres difficultés qui se matérialisent dans la surestimation de la rigidité due au cisaillement. Forte heureusement l'apparition d'une nouvelle technique va permettre l'évolution rapide des choses vers une solution pratique et performante. Ainsi l'on a découvert que la convergence de la matrice de rigidité s'améliore considérablement lorsqu'au cours du calcul numérique de cette dernière l'on choisi un ordre d'intégration juste inférieur à celui strictement nécessaire pour l'intégrer exactement.

Cette technique dite «Intégration réduite» s'avère particulièrement favorable aux éléments de degré plus élevé (linéaire, parabolique, cubique...); physiquement elle réduit considérablement la «rigidité parasite» due à la prise en compte du cisaillement transverse connu sous le nom de «Verrouillage» ou «Shear locking» avec de tels éléments on assure la convergence même dans le cas de petites épaisseurs.

Pour exemple, on prendra l'estimation exacte de la matrice de rigidité de l'élément plaque quadratique à huit nœuds que l'on intègre sur (3x3) point de GAUSS avec la recommandation d'intégrer sur (2x2) point de GAUSS pour les raisons citées ci-dessus



**Remarque :**

Pour expliquer le phénomène du «Shear locking» on prend l'exemple potentielle peut se mettre sous la forme suivante :

$$U_d = (U_{dF} + U_{dc}) - d^T F = U_1 + \alpha U_2 \tag{4.32}$$

avec :  $u_1 = u_{dF} - d^T F$

$u_{dF}$  énergie de déformation flexionnelle

$u_{dc}$  énergie de déformation en cisaillement

$\alpha(\lambda)$  paramètre dépendant de l'allongement ( $\lambda = \frac{L}{e}$  pour une plaque)

En minimisant l'énergie potentielle totale on est conduit au système d'équation d'équilibre :

$$[K_q] = [K_F + \alpha K_c] u = F$$

Dans le cas des plaques minces ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), si la matrice  $[K_c]$  est non singulière, on obtient la solution triviale ( $d \rightarrow 0$ ) qui correspond au phénomène de «verrouillage» déjà mentionné. L'intégration réduite de la matrice  $[K_c]$  est une des méthodes permettant d'introduire des singularités supplémentaires dans cette matrice et donc d'obtenir un comportement satisfaisant pour les problèmes de plaques minces.

Néanmoins cette méthode présente l'inconvénient éventuel de voir des singularités additionnelles dans la matrice de rigidité globale correspondant à des mécanismes artificiels différents des modes rigides exacte. Comme dans l'exemple du Quadrangle Q4 déjà vu (III.4.2.8.5-b).

***b – Intégration sélective :***

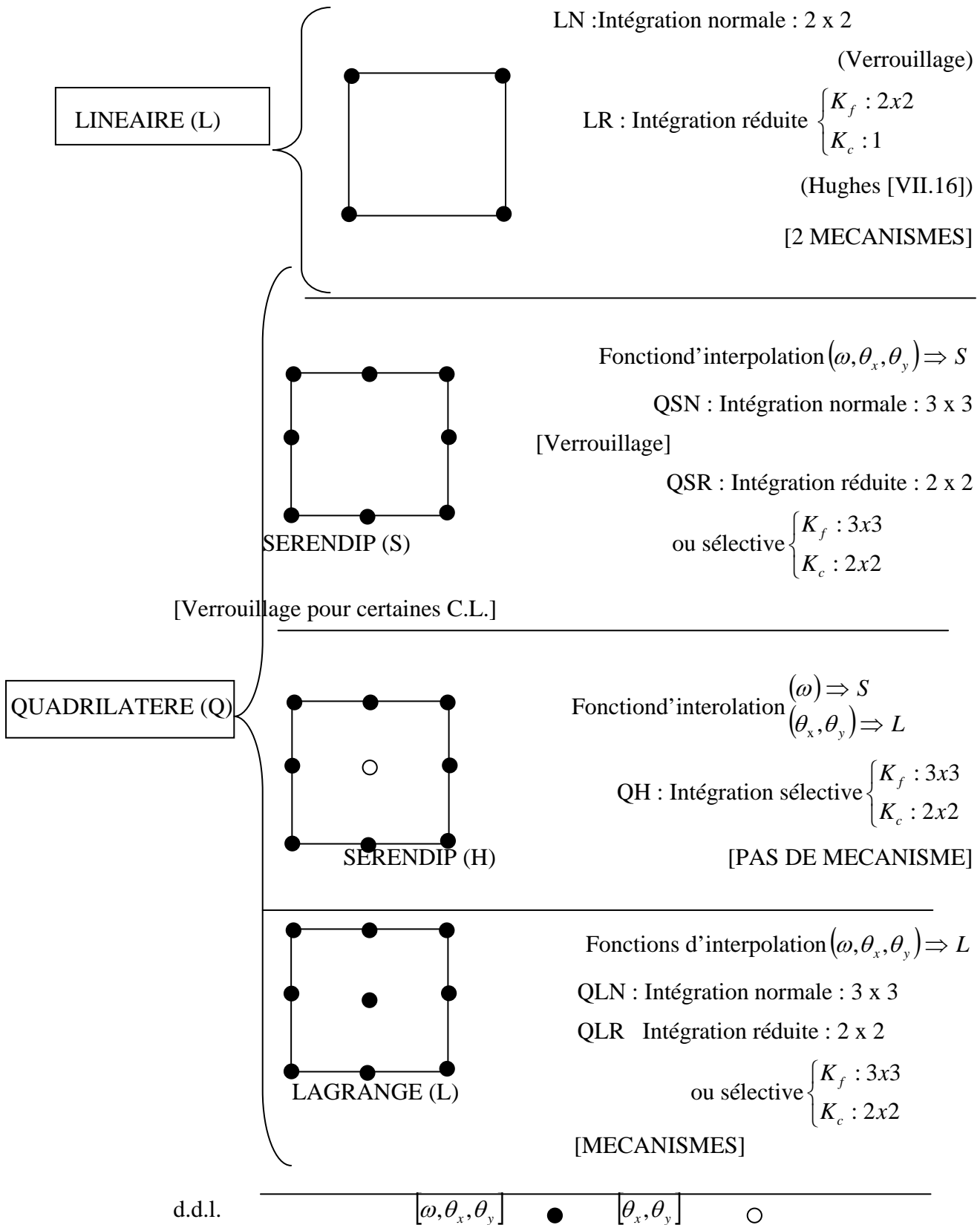
On peut aussi remédier au problème du blocage par cisaillement transverse en utilisant l'intégration sélective, seulement cela n'est possible que si les phénomènes de flexions et de cisaillement sont découplés, dans ce cas là on intègre sur (3x3) point la contribution de flexion et sur (2x2) point la contribution de cisaillement, cette technique donne de très bon résultats mais pas du tout économique.

**4.8.9) Élément de plaque avec intégration réduite :**

Les quadrilatère isoparamétrique les plus usuels de plaques avec cisaillement transverse peuvent être classé selon leurs formulations et leurs performances vis-à-vis du verrouillage.

Le schéma de la figure (III.4.4) va donc définir chaque élément d'une façon claire et précise selon les critères cités ci-dessus

**figure. (III.10) : Classification des quadrilatères isoparamétriques avec cisaillement transverse**



### **Résumé et conclusion :**

*La méthode des éléments finis est une méthode très utilisée et dont le principe général est de ramener le problème continu à un problème discret de nombre fini d'inconnu telle que l'énergie totale de déformation de la plaque est égale à l'énergie totale des éléments discrétisés* tout en assurant une convergence monotone ou non vers la solution exacte ou la conformité de l'élément devient un critère de convergence.

L'étude a porté aussi, sur la M.E.F appliqué aux plaques en flexion ou l'on a explicitement développé les différentes catégories ou elles évoluent, en précisant les avantages et les inconvénients de chacune d'elle.

C'est ainsi que l'on développe les éléments basés sur la théorie de KIRCHOFF (sans effet de cisaillement) qui nécessite la continuité  $C_1$  du déplacement transverse. Cette condition ne peut être satisfaite que pour des éléments sophistiqués et d'ordre élevé. En principe, cet élément est le mieux adapté à la modélisation des plaques minces.

Dans le même ordre d'idée on a défini les éléments basés sur la théorie de HENKY – MINDLIN avec prise en compte du cisaillement transverse et qui sont les mieux adaptés dans le cas des plaques à épaisseur modérée.

Cependant, cet élément ne pouvait être utilisé pour la modélisation de plaques minces jusqu'à ce que cet obstacle soit contourné par le développement de 2 méthodes différentes qui sont *l'hypothèse de KIRCHHOFF discrétisée et l'intégration réduite*.

Et enfin pour terminer, *les éléments isoparamétriques de volume* et dont le principe est de spécialiser l'élément au cas des plaques en imposant certaines simplifications ou modifications inspirées par leurs hypothèses.

Cependant comme toutes les autres méthodes, elle présente des avantages et des inconvénients aussi bien sur le plan technique que économique. Cette méthode présente donc l'inconvénient de

- (1) Elle ne peut être utilisée que par des éléments de rigidité testé et disponibles telles que les solutions obtenues doivent converger vers une solution exacte.
- (2) Pour une précision plus importante, il faut utiliser un nombre d'éléments considérables qui posent le problème de la capacité de stockage ainsi que le nombre d'équations à résoudre.
- (3) Cette méthode n'est pas utilisable à la main et nécessite donc la disponibilité obligatoire d'un matériel de calcul automatique (Micro – Ordinateur).

En conclusion, la méthode des éléments finis est un outil d'analyse puissant et convivial et qui appelé à un avenir fleurissant :

Elle consiste a amélioré sensiblement la prévision du comportement statique et dynamique des structures et tout particulièrement celle des plaques qui ne se limite plus aux domaines du génie – civil mais aussi à celui de l'aérospatial et l'aéronaval. Son emploi est en outre facilité par le développement de pré et post processeur de plus en plus performants.

*CHAPITRE IV*

**THÉORIES DES  
GRANDES  
DÉFORMATIONS**

- IV.1**    **Généralité**
- IV.2**    **Approche analytique**

## IV.1. GÉNÉRALITÉS

### IV.1.1) Introduction au non linéaire

Comme beaucoup de négation, le terme non linéaire recouvre un domaine immense; il exprime tout comportement «qui dévie d'une ligne droite». Cependant en mécanique des solides, les non linéarités prennent leurs sources dans la cinématique des corps déformables ainsi que dans les lois de comportement des matériaux. On utilise souvent les adjectifs «Géométrique» et «Matériel» pour qualifier ces formes respectives de non linéarités. En général, ces non linéarités n'apparaissent que quand les déformations deviennent trop grandes pour que leurs influences sur la configuration de référence ainsi que sur la réponse du matériau ne peuvent être négligées (l'effet de grande rotation et l'apparition de déformations permanentes).

D'habitude, les structures allongées, flexibles sont plus sujets au non linéarités géométriques tandis que les solides ramassés, rigide le sont beaucoup plus par la non linéarité matérielle.

### IV.1.2) non-linéarité géométrique

La non linéarité géométrique apparaît lorsque les déplacements (déformations) sont assez importants pour influencer sur le cheminement de la force appliquée ou sur la contrainte de résistance de la structure considérée. D'où l'intérêt porté au phénomène de flambement qui incombe à ces mêmes structures aussi bien dans le domaine linéaire que non linéaire. En général le but essentiel de l'analyse non linéaire est d'établir une relation entre les forces appliquées et les déplacements résultants. Dans le cas de la non linéarité géométrique ces structures sont plutôt flexibles et allongées. Fig. (IV.1)



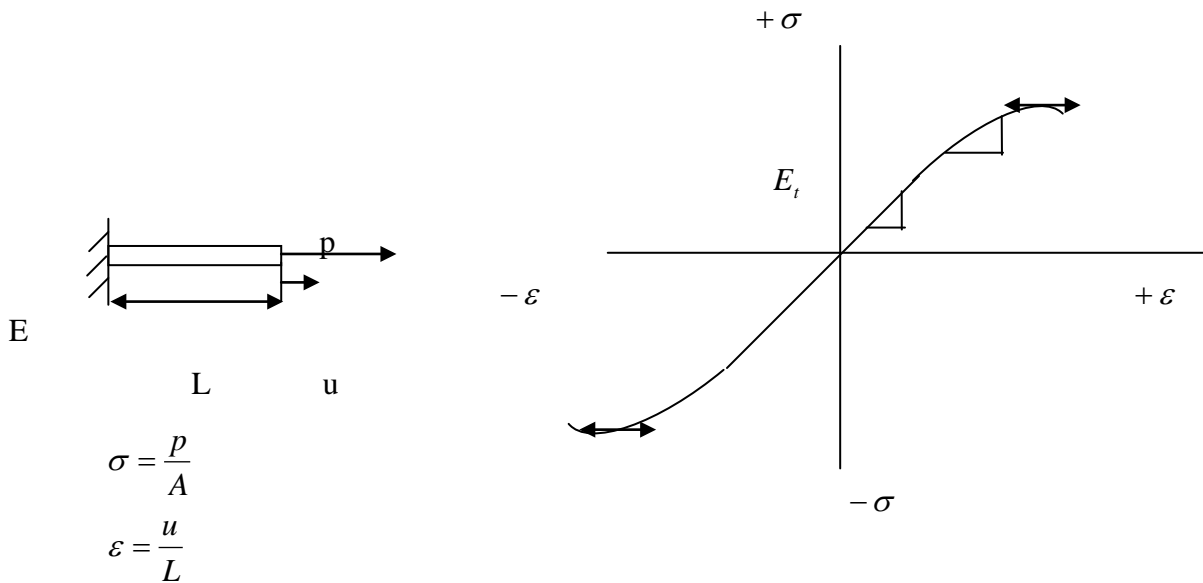
(a) Colonne élastique

(b) membrane flexible

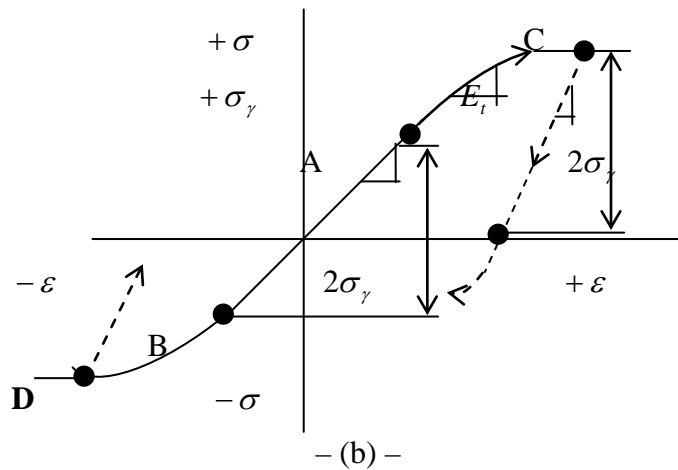
**Figure(IV.1) : Situation de non linéarité géométrique**

### IV.1.3) non-linéarité matérielle

Pour comprendre le phénomène de la non linéarité matérielle il faut impérativement s'intéresser au comportement du matériau de la structure sollicitée. Ainsi l'on va définir les différents comportements existant et leur domaine d'application. En premier lieu, on insiste sur l'action plastique ou le comportement du matériau dans la fig.(IV.2) est caractérisé par une ligne droite défini par son module d'élasticité  $E$ ; et la courbe dont la pente est défini par son module tangent  $E_t$  telle que :  $E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$



(a)– : Matériau non linéaire élastique



(b)– : Matériau élasto-plastique

**Figure (IV.2) Courbes schématisant les différents comportements du matériaux**

Cette figure montre un comportement de non linéarité élastique qui signifie le déchargement de tous les efforts. Contrairement à l'action élasto-plastique où le comportement élastique est valable jusqu'au point A (traction) et en B (compression). L'action plastique apparaît pour des contraintes plane plus importante. Le déchargement se fait pour toutes les contraintes  $|\sigma| < \sigma_y$  ou C et D démarque l'apparition de déformations permanentes.

$\sigma_y$  est toujours déterminée à partir du module tangente  $E_t$  en traction.

En résumé la principale différence entre la non linéarité élastique et élasto-plastique réside dans le comportement du matériau pendant son chargement et déchargement;. En effet le graphe de l'élasticité non linéaire reste linéaire (sans déformations résiduelles) après déchargement alors que pour le matériau élasto-plastique le cheminement de l'effort après déchargement dévie de sa trajectoire initiale.

## IV.2 Approche Analytique

### IV.2.1) Introduction

Dans ce qui précède nous avons largement développé la théorie de la flexion des plaques en précisant les différentes approches utilisées pour exprimer le comportement des plaques et en particulier celui des plaques minces a petite déformation tel que  $w \ll e$ . Nous nous proposons maintenant de déduire les équations d'équilibre d'une plaque fortement courbée.

### IV.2.2) Comportement général des plaques avec grande déformation

Il est nécessaire dans cette partie de distinguer entre la déformation des surfaces 'développable' et 'non développable' car de cette notion va dépendre le comportement 'linéaire' et 'non linéaire' de la plaque.

#### a) *surface développable* :

Quand nous disons jusqu'à présent déformation de la plaque mince, nous supposons toujours la *plaque plane* à l'état non déformé. Or, les déformations des *plaques qui sont courbes à l'état naturel* (on les appelle *enveloppes*) ont des propriétés foncièrement différentes des déformations des plaques planes.

La traction qui accompagne la flexion d'une plaque plane est un effet du second ordre par rapport au déplacement de flexion. Ceci s'exprime par exemple, dans le fait que le tenseur de déformation (II.7) définissant une telle traction est quadratique en  $w$ . Mais il en va tout autrement dans le cas de la déformation des enveloppes : la traction est ici un effet du premier ordre et joue en conséquence un rôle majeur même si la flexion est faible. Cette propriété est évidente si l'on considère l'exemple le plus simple de la traction uniforme d'une enveloppe sphérique. Ainsi si l'on considère l'allongement relatif  $\left[ \frac{2\pi w}{2\pi R} = \frac{w}{R} \right]$ , le tenseur de déformation est proportionnel à la première puissance de

w. Cet effet s'annule lorsque  $R \rightarrow \infty$ , c'est à dire lorsque la courbure tend vers zéro, ce qui prouve que c'est là une propriété spécifique liée à la courbure de l'enveloppe.

On a dans certain cas un type particulier de flexion d'enveloppe, sans aucune traction. Dans ce cas, toutes les hypothèses de KIRCHOFF sont applicables, et les formules classiques sont valides; c'est le cas par exemple, le cas d'un cylindre ou d'un cône où le caractère linéaire de la flexion des plaques est préservé. A l'exception particulière de la flexion d'une plaque en surface cylindre qui se comporte comme une poutre sur 2 appuis et dont le caractère linéaire n'est pas affecté pour de petit déplacement. Dans le cas contraire (pour de grands déplacements) la non linéarité pourrait apparaître au niveau des appuis de cette même plaque.

#### **b) surface non développable :**

En ce qui concerne les surfaces non développables, la flexion d'une plaque est accompagnée de déformations dans le plan moyen mais le calcul montre que les contraintes résultantes sont petites par rapport à l'épaisseur si les flèches ne sont pas petites en cas ou des contraintes supplémentaire doivent être prisent en considération en résolvant l'équation aux dérivées partielles des plaques. Dans ce cas, nous obtenons des équations non linéaire.

### **IV.2.3) Principe de base**

Dans l'étude du cas général la flexion d'une plaque est habituellement accompagnée d'un allongement. Si la flexion est faible, on pourra ignorer cet allongement. Mais si elle est importante, force sera de la prendre en considération; il est donc bien évident *qu'aucune «surface neutre» ne pourra exister dans une plaque fortement déformée*. L'allongement général de la flexion est une particularité spécifique des plaques, les distinguant des barres minces, qui peuvent être fortement courbées sans allongement. Cette propriété des plaques est de nature purement géométrique. Envisageons, par exemple, une plaque plane circulaire déformée en calotte sphérique. Si la déformation n'affecte pas la longueur de la circonférence, le diamètre doit s'allonger. Mais si le diamètre reste le même, la circonférence devra se contracter.

L'énergie (3.16) calculée au §3, qu'il est loisible d'appeler *énergie de flexion pure*, ne représentant que la partie de l'énergie totale due à la non uniformité de la traction et de la compression dans l'épaisseur de la plaque en l'absence d'allongement général quel qu'il soit. Outre cette énergie, l'énergie totale contient encore la partie due précisément à cet allongement général; on pourra l'appeler énergie d'allongement.

Nous *déduisons* au préalable *l'expression du tenseur de déformation déterminant la traction de la plaque* (considéré comme surface) soumis simultanément à une flexion et à une traction dans son plan.

#### IV.2.4) Hypothèses fondamentales

Pour déterminer le tenseur de déformation qui régit le comportement d'une plaque en flexion il faut passer par les hypothèses de 'VON KARMAN' appliquées au tenseur de déformation de 'GREEN' qui après simplification va faciliter la maniabilité des équations différentielles tout en gardant une *certaine exactitude* des résultats.

#### • Hypothèses de VON KARMAN :

Pour une loi de comportement élastique linéaire du matériau. Les hypothèses s'énoncent :

1- La plaque est mince et élancée, son épaisseur  $e$  est très petite devant ses dimensions transversales.

2- L'amplitude de la flèche  $w$  est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la plaque, mais petite comparée aux dimensions transversales.

3- La pente de la déformée est petite :  $\frac{\delta w}{\delta x} \ll 1 \quad \frac{\delta w}{\delta y} \ll 1$

4- Les composantes du déplacement  $u$  et  $v$  dans le plan moyen sont infinitésimales. Les termes non linéaires des expressions de déformations en fonction des contraintes dépendent seulement des  $\frac{\delta w}{\delta x}$  et  $\frac{\delta w}{\delta y}$

5- Les composantes du tenseur de déformation sont petites.

6- Les contraintes normales agissant sur les facettes parallèles au plan moyen ne sont pas prises en compte.

7- Les déformations des fibres parallèles à une même direction contenue dans le plan moyen varient linéairement suivant la normale au plan moyen dans l'épaisseur de la plaque.

8- Les forces extérieures de contact ou volumiques sont rapportées sur le plan moyen de la plaque.

• **Le tenseur de déformation de GREEN**

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
 \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\
 \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right]
 \end{array} \right. \quad \text{(IV.1a)}$$

En composante i, j, k toutes les formules précédentes se rassemblent en une seule :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + S_{mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right] \quad \text{(IV.1b)}$$

Nous choisissons de développer l'étude en variable de Lagrange en coordonnées carésiennes. Le plan (x, y) coïncide avec le plan théorique médian de la plaque idéale non déformée, avant chargement, l'axe des z est perpendiculaire à ce plan et son orientation est choisie de manière à obtenir un système d'axes direct.

Compte tenu des hypothèses faites, en variable de Lagrange, le tenseur de déformation de GREEN s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w^0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad \text{(IV.1c)}$$

On suppose que la plaque n'a pas de déformée initial  $\rightarrow w_0 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w \partial w}{\partial x \partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad \text{(IV.2)}$$

#### IV.2.5) Plaque à grande déformation :

Dans l'étude précédente des plaques à petite déformation on a vu que la déformation du plan moyen est négligée dans le cas où les flèches sont petites par rapport à l'épaisseur ( $w < e$ ) cependant dans le cas où la flèche n'est plus petite par rapport à celle de l'épaisseur ( $w > e$ ) mais reste petite par rapport aux autres dimensions. L'analyse du problème sera élargie de façon à inclure la déformation du plan moyen de la plaque. La raison principale à cet état est le fait que les efforts de cisaillement engendrés à l'intérieur de cette dernière sont assez importants pour ne pas être négligés.

## IV.2.6) approche équilibre

### IV.2.6.1) Équations générales des plaques fortement courbée

Dans le cas du développement des grandes flèches des plaques on utilise l'équation (III.2.47) calculée en considérant un élément de plaque en équilibre sous l'action d'un système d'efforts combinés a la différence près que les forces  $N_x, N_y, et N_{xy}$  dépendent non seulement des forces extérieures appliqués dans le plan (x, y) mais aussi de la déformation du plan moyen de la plaque due à la flexion. Le développement se fait donc en suivant le même chemin que pour les petites déformation sauf que nous nous retrouvons avec 4 inconnus et 3 équations, ce qui nous amène a utilisé un artifice mathématique pour résoudre les équations non linéaire que nous obtenons.

Les équations d'équilibre d'un élément dx dy dans le plan sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{(IV.3)}$$

La 3<sup>ème</sup> équation s'obtient en considérant la déformation de la surface moyenne pendant la flexion.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad \text{(IV.4)}$$

On peut donc avoir les équations suivantes après dérivations

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{(IV.5)}$$

La loi de Hooke nous permet d'écrire

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{Ee}(N_x - \nu N_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{Ee}(N_y - \nu N_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{N_{xy}}{Ge} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

On obtient donc la 3<sup>ème</sup> équation en fonction de  $N_x$ ,  $N_y$ , et  $N_{xy}$ .

Pour simplifier considérablement le problème on suppose une fonction de contrainte qui satisfait aux conditions d'équilibres.

$$\begin{cases} N_x = e \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ N_y = e \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ N_{xy} = e \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

$\phi$  : fonction de contrainte

En substituant (IV.7) dans (IV.6) on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

En insérant (IV.8) dans (IV.5) on a :

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (\text{IV.9})$$

C'est donc la première équation non linéaire à résoudre.

Pour la seconde il faut simplement remplacer les équations (IV.7) dans la grande équation qui régit le comportement de la plaque sous l'action combiné de forces latérales et transversales (IV.1).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad \text{(IV.10)}$$

Par substitution on obtient

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{e}{D} \left[ \frac{q}{e} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad \text{(IV.11)}$$

Les équations (IV.9) et (IV.11) sont les équations différentielles qui gouvernent le comportement des plaques à grandes déformations.

#### IV.2.6.2) Résolution du système d'équations

La résolution du problème revient donc à résoudre automatiquement les équations (IV.9) et (IV.11) qui doivent satisfaire obligatoirement aux conditions de contours. Ainsi l'on peut déterminer  $\phi$  et  $\omega$  qui nous permettent de déduire les contraintes dans la surface moyenne de la plaque en appliquant les équations (IV.7) et à partir de la flèche  $\omega$  on obtient facilement les contraintes de flexion et cisaillement en utilisant les formules du cas des plaques faiblement fléchie (2.30),(2.31),(2.32)et(2.33)du chapitre[III.2]

Dans l'étude des plaques, la résolution de ce type de problème de non linéarité est en réalité une tâche difficile à accomplir c'est pour cette raison que plusieurs méthodes ont vu le jour pour pallier essentiellement à cette difficulté.

Parmi les méthodes les plus importantes pour résoudre le problème de la non linéarité des plaques nous avons :

- Intégration de l'équation différentielle.
- Méthodes variationnelles.
- Méthodes des différences finies.
- Méthodes des éléments finies.
- Intégration numérique.

La solution exacte des équations de VON KARMEN est extrêmement encombrante et utilisable que pour certain cas bien particulier. Enfin, pour résumer la solution des plaques en grandes déformations est basées sur les méthodes approximatif comme les

méthodes variationnelles ou la technique des éléments finis. Ces méthodes associées à des conditions aux limites définissent les variantes du problème aussi bien dans le domaine linéaire que non linéaire et donne de très bon résultats, ce problème sera examiner dans les chapitres à venir

### IV.2.6.3) Plaque mince à grandes déformations :

Dans le cas de plaques minces dont la flèche fait plusieurs fois leurs épaisseur, on négligent la résistance de la plaque à la flexion, c'est à dire que la rigidité flexionnelle est nulle ( $D = 0$ ) et le problème se ramène à la recherche de flèche d'une membrane flexible.

Les équations (IV.9) et (IV.11) deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \frac{q}{e} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

H. HENCKEY a étudié une résolution numérique de ce système d'équation par la méthode des différences finis (16).

## IV.2.7) Approche énergétique

Dans ce qui précède nous avons largement développé les différentes méthodes énergétiques et particulièrement celle des plaques dans le cas de petites déformations ou le plan moyen ne subit aucun allongement. Cependant cette approche ne reflète pas le véritable comportement de la plaque.

C'est pourquoi pour l'étude de grandes déformations, on distingue deux (2) formes de comportement :

- *Membranaire* (chargement dans le plan)
- *Flexionnel* (chargement transversal)

ou on prendra en considération l'effet de déformation du plan moyen dans l'énergie de déformation de chacun de ces deux cas.

### IV.2.7.1) Plaque relativement épaisse à grande déformation

Pour résoudre ce type de problème, on utilise la méthode de l'énergie telle que l'énergie totale de déformation  $U$ , de la plaque s'obtient en ajoutant l'énergie due à la déformation de la surface moyenne à l'énergie de flexion

$$U_d = U_{dm} + U_{dF} \quad \text{(IV.13)}$$

telle que l'énergie  $U_{dF}$  est l'énergie de déformation de flexion pour de petite déformation et dont l'influence des contraintes de cisaillement est négligé dans l'équation

$$\Delta \Delta \omega = \frac{q}{\Delta}$$

$$U_{dF} = \frac{1}{2} \Delta \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} dx dy \quad \text{(IV.14)}$$

pour déterminer l'énergie de déformation membraner  $U_{dm}$  on a :

$$U_{dm} = \frac{1}{2} \iint (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad \text{(IV.15)}$$

ou par substitution

$$U_{dm} = \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \iint \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_{xy}^2 \right] dx dy \quad \text{(IV.16)}$$

en substituant une fois encore (IV.4) dans (IV.16) on a :

$$U_{dm} = \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \iint \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 \right. \\ \left. + 2\nu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1-\nu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{v}{\partial x} \right\} dx dy \quad \text{(IV.17)}$$

### Résolution : <sup>(20,21,23)</sup>

Pour calculer la solution approchée de ce type de problème; on se donne  $u, v, w$  respectant les conditions aux limites et dont les paramètres seront déterminés à partir de l'équation des travaux virtuels qui donne pour un chargement uniforme  $q$  :

$$\delta U_d - \delta \iint q \omega dx dy = 0 \quad \text{pour n'importe qu'elle valeurs de } u, v, w$$

### IV.2.7.2) Plaque mince à grande déformation :

Dans le cas général des plaques très minces dont les flèches font plusieurs fois l'épaisseur, on néglige la résistance à la flexion comme nous l'avons précédemment précisé ou ( $D = 0$ ) et ou le problème se ramène à l'étude d'une membrane flexible dont les équations (IV.12) régissent le comportement.

La méthode de l'énergie présente un autre moyen d'arriver à une solution approchée du problème. Ainsi le travail de déformation d'une membrane due uniquement à la tension de la surface moyenne, est donnée par l'expression (IV.17) déjà présente telle que :

$$U_d = U_{dm} + U_{dF}$$

Si la plaque est une membrane flexible

alors :  $D = 0$

d'ou  $U_{dF} = 0$

donc :  $U_d = U_{dm}$  (IV.18)

### Résumé et conclusion

Dans la partie précédente nous nous sommes intéressé tout particulièrement à l'analyse linéaire des plaques où nous avons commencé par développer certaines notions d'élasticité comme base essentielle à la compréhension de cette même analyse. Ensuite nous avons exploré le comportement d'un élément différentiel de plaque fléchie sous différents chargements ainsi que toutes les méthodes de résolution probable, en passant par des approches mathématique dite « classique » à des méthodes plus récentes qui constituent des outils de résolution très performant dite « numérique ».

Cette approche linéaire représente un chemin incontournable à la compréhension de l'analyse non linéaire des plaques en grandes déformations et qui élargie son développement de façon à inclure les déformations du plan moyen

Ainsi nous commençons par formuler l'équation d'équilibre fondamentale des plaques fortement courbées en utilisant deux approches :

*La première dite « d'équilibre »* ; développe un système d'équation pour un élément différentiel en équilibre en considérant les déformations du plan moyen qui sont régis par les hypothèses de **Von Karman** appliqués au tenseur de déformation de **Green**

*La seconde approche dite « énergétique »* développe en terme variationnelle une fonctionnelle  $\pi$  pour laquelle l'énergie de déformation totale  $U_d$  s'obtient en ajoutant l'énergie membranaire  $U_m$  précédemment négligé à l'énergie de flexion  $U_f$ . *L'état d'équilibre est représenté ici par la stationnarité de l'énergie total soit  $\delta\pi = 0$ .*

Enfin ,la résolution du système d'équation comportemental est effectuée par plusieurs auteurs dont les plus connus sont **Timoshenko** ,**Kirchhoff** ou encore **Levy** (10) qui résolvent analytiquement les équations de **Von Karman** .et plus récemment , d'autres auteurs comme **Murray** (23) ,**Bergan** (24) et **Wood** (25) qui eux résolvent numériquement le problème .

En conclusion,dans l'étude des plaques ,la résolution de ce type de non linéarité est en réalité une tâche très difficile à accomplir et où la solution exacte des équations de **Von KARMAN** est extrêmement encombrante et utilisable que pour certains cas bien particulier voir impossible pour certains problèmes d'une importance considérable .

C'est pour cette raison que plusieurs méthodes ont vus le jour afin de pallier a cette difficulté et en particulier les méthodes variationnelles et les méthodes numériques

Cependant cette approche analytique présente le mérite de :

- \* De formuler le problème sous forme d'un modèle mathématique claire
- \* De résoudre ce même problème en utilisant des solutions mathématiques rigoureuses
- \* Elle présente l'avantage d'être une source importante a la théorie fondamentale pour presque toutes les méthodes approximatives et numériques.

*CHAPITRE V*

**TRAITEMENT  
NUMÉRIQUE DE LA  
NON LINÉARITÉ**

## V. Traitement numérique de la non-linéarité

### V.1) Introduction

Dans le cas général, *tous les phénomènes de mécanique des solides présentent des non-linéarités aussi bien géométrique que matériel*. Cependant, pour des raisons pratiques ou des commodités d'applications elles utilisent des formulations linéaires afin de simplifier la résolution du problème posé.

D'autres part, *l'utilisation de la formulation non linéaire va nous permettre, en tant qu'analyste, de converger vers une solution plus réaliste du problème et donc d'approcher de plus près le comportement de la structure analysée. La solution ainsi trouvée va nous permettre de prévoir les déformations et les contraintes limites*.

Parmi les cas pratiques on peut citer : le comportement des structures a grande déformation, le flambement des poutres, des plaques et des coques ainsi que tous les problèmes de déformation des sols et de mécanique des roches.

### V.2) Le problème non linéaire

Dans la méthode des déplacements, la non-linéarité se présente sous deux formes bien distinctes

\* la première est *la non-linéarité physique ou matériel* qui est engendrée par les lois de la non-linéarité constitutive.

\* La deuxième est *la non linéarité géométrique* qui dérive des changements différentiels dans la géométrie du corps déformé.

### V.3) Classement du problème non linéaire

En se basant sur les sources de la non-linéarité on peut classer le problème en trois catégories :

- La première fait intervenir la non-linéarité matérielle.
- La deuxième fait intervenir uniquement la non-linéarité géométrique.
- La troisième catégorie est engendrée par l'intervention simultanée de la non-linéarité matérielle et géométrique.

La première catégorie est facile à prévoir car elle englobe tous les problèmes dont les contraintes ne sont pas linéairement proportionnelles aux déformations. Ces dernières ainsi que les déplacements sont considérés petits par hypothèse (*petit indique toujours des*

*changements infinitésimaux dans la géométrie du corps et ou la distorsion de l'élément différentiel est négligée*). On précise simplement que les déplacements correspondent aux changements de géométrie du solide alors que les déformations se rapportent à l'allongement interne de celui-ci.

Ce type de non-linéarité englobe en son sein plusieurs cas d'importance considérable, comme *l'élastoplasticité des structures*.

D'autre part, bien que les équations linéaires (contrainte-déformation) sont supposées appartenir à *la seconde catégorie*, les problèmes induits par la non-linéarité géométrique prennent naissance dans la relation non linéaire (déformation-déplacement). En d'autres termes, cette catégorie englobe tous les cas de grands déplacements et déformations. De plus, on remarque l'existence d'une importante sous-classe qui matérialise l'effet des petites déformations et grands déplacements c'est le cas du *flambement élastique des structures*.

Enfin, *la troisième catégorie* et non la moindre, combine la première et la deuxième théorie induite par la non-linéarité constitutive ainsi que la théorie de grandes déformations comme par exemple le caoutchouc.

Dans le cas général, *tous les phénomènes de mécaniques des solides présentent des non-linéarités aussi bien géométrique que matériel*. Cependant, pour des raisons pratiques, ou des commodités d'applications la plus part d'entre elles utilisent des formulations de linéaires afin de simplifier la résolution du problème de l'ingénieur.

D'autres part, *l'utilisation de la formulation non-linéaire va nous permettre en tant qu'analyste de converger vers une solution plus réaliste du problème et donc de pouvoir approcher de plus près le comportement de la structure étudiée dans le but éventuelle de prévoir ses déformations ses contraintes limites*. Parmi les situations pratique de cette catégorie; le comportement de structures en grande déformation, les déformations de flambement des poutres, des plaques et des coques ainsi que tous les problèmes de sols et de mécaniques de roches.

#### **V.4) Formulations de base des techniques de résolution :**

La solution du problème non linéaire par la méthode des éléments finis est toujours abordée par l'une des 3 méthodes de base suivantes :

- *Méthode incrémental*
- *Méthode itérative*
- *Méthode mixte*

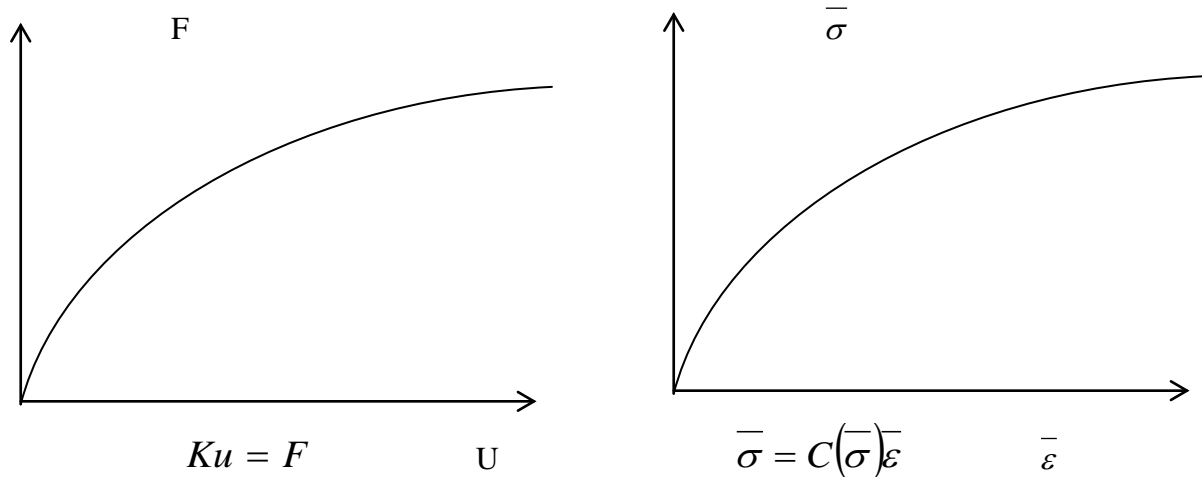
Dans ce paragraphe nous présenterons le principe fondamental de chacune d'elle en posant comme simplification l'équation d'équilibre non linéaire pour un élément unique :

$$[k]\{u\} = \{F\} \quad (\text{V-1})$$

La non-linéarité apparaît dans la matrice de rigidité [k] à travers une fonction non linéaire du comportement du matériau  $[c(\sigma)]$  où les paramètres de celui ci ne sont plus constants :

$$[k] = [k(\{u\}, \{F\})] \quad (\text{V-2})$$

La relation non linéaire entre  $\{F\}$  et  $\{u\}$  est présentée dans la figure (a). La figure (b) présente la courbe (contrainte – déformations) de l'effet  $\{f\}$  et le déplacement  $\{u\}$  de la figure (a). C'est donc sur cette base que l'on détermine les variables de la matrice  $[c(\sigma)]$  de l'analyse non linéaire



(a) - Courbe force – déplacements

(b)- Courbes contraintes - déformations

**Figure. (V-1) : Courbes non linéaires**

En général les non-linéarités apparaissent dans la formulation du problème physique pour deux raisons :

- Les paramètres physiques supposés indépendants de  $u_n$  dans un modèle linéaire, tels que le module de Young, les coefficients de conductivités et de viscosités deviennent des fonctions de  $u_n$ .

- Des termes non linéaires par rapport aux inconnus du problème apparaissent dans les équations aux dérivées partielles, comme par exemple dans les équations de Navier – Stokes.

$$u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} + \dots \quad (\text{V-3})$$

ou les éléments avec grandes déformations

$$\epsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 + \dots \quad (\text{V-4})$$

la formulation discrétisée de l'énergie potentiel par éléments finis, pour des problèmes non linéaires s'écrit :

$$W = \langle \delta u_n \rangle ([k(u_n)] \{u_n\} - \{f\}) = 0 \quad (\text{V-5})$$

avec :

$$\{R(u)\} = \{f\} - [k(u_n)]\{u_n\} = 0 \quad (\text{V-6a})$$

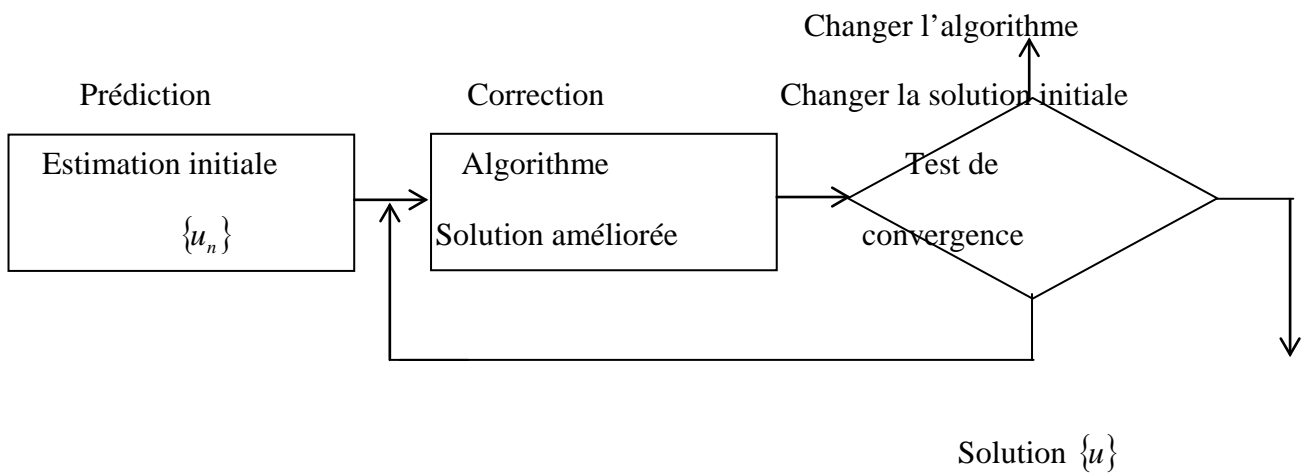
et

$$[k(u_n)]\{u_n\} = \{f\} \quad (\text{V-6b})$$

ou  $\{R(u)\}$  exprime le résidu qui matérialise la convergence vers la solution exacte .pour résoudre ce même système non linéaire (V.6b) le résidu doit s'approcher du zéro pour un vecteur déplacement proche de la solution exacte.

La recherche du vecteur  $\{u\}$  se fait d'une manière itérative comme suit :

**Diagramme**



ou l'algorithme de résolution dépend essentiellement du type de non-linéarité et du choix d'incrément. Ainsi pour un problème de plasticité par exemple l'équation (V.6b) devient :

$$[k(u)]\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (\text{V-7})$$

Enfin, pour mieux comprendre ce phénomène et le maîtriser, il faut impérativement développer chaque méthode de résolution en expliquant la formulation de base de chacune d'elle.

#### V.4.1) Méthode incrémentale (ou pas à pas)

La méthode incrémentale consiste à subdiviser l'effort appliqué en plusieurs petits efforts partiels appelés : *incrément*. Celui-ci est utilisé pour chaque itération dans une équation linéaire où la solution obtenue est un incrément de déplacement  $\{\Delta u\}$ .

L'accumulation de ces derniers nous donne le déplacement total  $\{u\}$  qui correspond à la dernière étape d'incrément. On précise que le processus d'itération est répété jusqu'à ce que le chargement  $[F]$  soit atteint.

De manière générale, le procédé d'incrémentation se résume donc à approximer le problème non linéaire en une série de problèmes linéaires faciles à résoudre.

Pour écrire les équations de la méthode incrémentale on considère l'état de référence du corps avec un chargement et une déformation initiale  $\{f_0\}$  et  $\{U_0\}$ , il suffit de diviser la charge totale en 'M' incrément tel que :

$$\{f_t\} = \{f_0\} + \sum_{j=1}^m \{\Delta f_j\} \quad (\text{V-8a})$$

L'ième incrément est noté :

$$\{f_i\} = \{f_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta f_j\} \quad (\text{V-8b})$$

avec :

$$\{f_m\} = \{f_t\}$$

et

$\Delta$  est l'incrément infinitésimal.

Nous adoptons une relation similaire pour les déplacements qui s'écrit au i<sup>ème</sup> pas comme suit :

$$\{u_i\} = \{u_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta u_j\} \quad (\text{V-9})$$

Pour calculer l'incrément de déplacement on fixe la matrice de rigidité évaluée pour l'incrément précédent telle que :

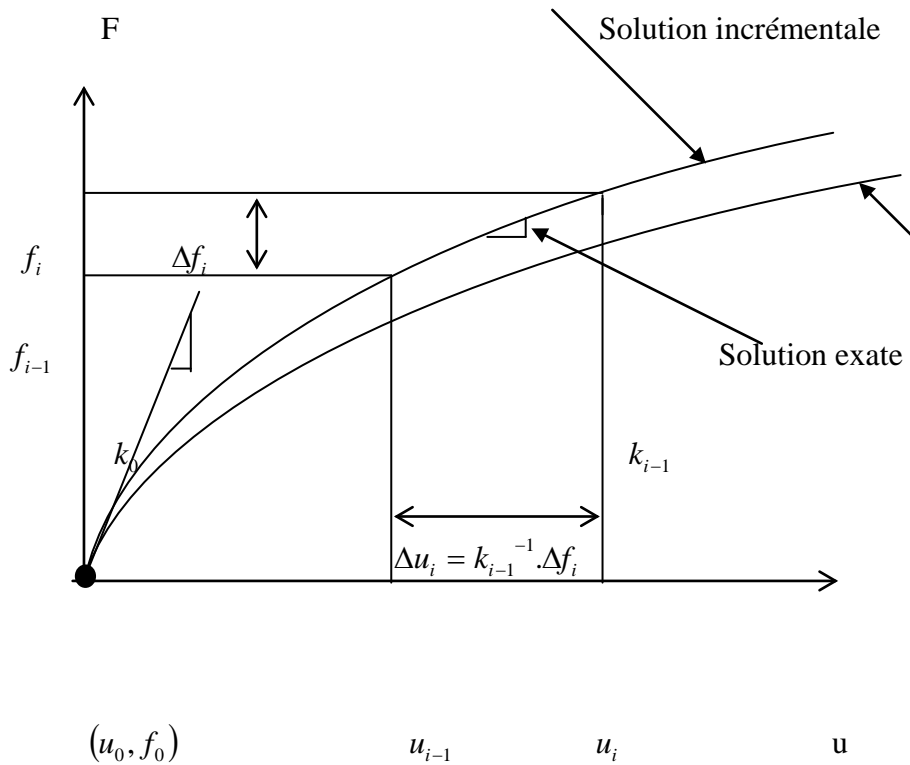
$$[k_{i-1}]\{\Delta u_i\} = \{\Delta f_i\} \quad i = 1, \dots, M \quad (\text{V-10.a})$$

où

$$[k_{i-1}] = [k_{i-1}(\{u_{i-1}\}, \{f_{i-1}\})] \quad (\text{V-10.b})$$

$[k_0]$  est la matrice de rigidité initiale.

L'équation (V-10) donne la base de l'équation incrémentale et les équations (V-8) et (V-9) sont des relations auxiliaires importante. La démarche incrémentale est schématisée dans la figure (V-2)



**Figure. (V-2) : Méthode de base**

En général, dans la méthode incrémentale le module tangente est utilisé pour déterminer  $[c(\sigma)]$  et la matrice de rigidité  $[k]$  de l'équation (V-10). Celle-ci est souvent assimilée à la *Méthode tangente*.

D'autre part la précision de cette méthode est améliorée par la prise en compte d'incréments de charge plus petit; et particulièrement la moitié de celui ci. Cependant, le calcul de la matrice de rigidité incrémentale est effectuée deux (2) fois plus que la méthode de base.

Ainsi la précision de ce procédé est améliorée au prix de calcul d'efforts additionnels

Fort heureusement, la méthode de Runge – Kutta va modifier le problème en utilisant le calcul de ces efforts additionnels pour une précision plus importante. Ainsi l'analyse s'effectuera pour chaque pas de charge comme suit :

- En premier : le demi-incrément  $\{\Delta f_i\}/2$  est appliqué et le déplacement incrémental induit  $\{\Delta u_{i-1/2}\}$  est calculé par :

$$[k_{i-1}]\{\Delta u_{i-1/2}^*\} = \{\Delta f_i\}/2 \quad \text{(V-11a)}$$

tel que le déplacement du milieu de l'incrément est évalué par :

$$\{u^*_{i-1/2}\} = \{u_{i-1}\} + \{\Delta u^*_{i-1/2}\} \quad (\text{V-11b})$$

ce qui nous permet donc de calculer la matrice de rigidité correspondante à  $\{u^*_{i-1/2}\}$ ,  $\{f_{i-1/2}\}$  et de l'utiliser enfin pour tous les points à l'intérieur de l'incrément considéré .

$$[k_{i-1/2}]\{\Delta u_i\} = \{\Delta f_i\} \quad (\text{V-11c})$$

Effectivement, l'approximation de la matrice de rigidité au milieu du  $i^{\text{ème}}$  incrément se rapproche plus de la rigidité moyenne de ce dernier et donc va améliorer sensiblement les résultats obtenus.

La méthode de Runge – Kutta est illustrée clairement dans la figure [V.3]. Dans cette même figure une comparaison des différentes méthodes est effectuée en utilisant des artifices pour lesquelles ces méthodes ont les mêmes résultats  $\{f_{i-1}\}$   $\{u_{i-1}\}$  et où la différence entre ces méthodes est exagérée volontairement pour une clarté maximum.

### V.4.2) Méthode itérative

La méthode itérative est une suite calculée dans laquelle la structure est entièrement chargée pour chaque pas d'itération et où la matrice de rigidité est constante en chacune d'elle. Après chaque itération, la portion de la charge totale n'est pas équilibrée mais utilisée dans l'itération suivante et où l'incrément de déplacement est additionné au déplacement général. Ce processus est répété autant de fois qu'il faut pour converger vers la solution exacte et pour lequel la norme d'approximation atteint un degrés acceptable.

Cette méthode consiste donc à construire une suite de solutions  $\{u_0\}, \dots, \{u_i\}$  calculées à partir de  $\{u_{i-1}\}$  en résolvant le système linéaire :

$$[k(u_{i-1})]\{u_i\} = \{f\} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{V-12})$$

ce qui peut s'écrire sous forme incrémentale en introduisant le résidu  $\{R_i\}$  :

$$\{R_i\} = \{R(u_{i-1})\} = \{f\} - [k(u_{i-1})]\{u_{i-1}\} \quad (\text{V-13.a})$$

et

$$[k(u_{i-1})]\{\Delta u_i\} = \{R_i\} \dots \quad (\text{V-13.b})$$

avec

$$\{u_i\} = \{u_{i-1}\} + \{\Delta u_i\} \dots \quad (\text{V-14})$$

Par suite, la matrice de rigidité élémentaire est calculée pour le vecteur connu  $\{u_i\}$ , Puis après assemblage dans la grande matrice  $[k(u_i)]$  vient la solution du système linéaire (V-13) par des méthodes matricielles connues.

Dans le cas probable où le problème de non linéarité engendre un chargement et un déplacement initial  $\{f_0, u_0\}$  le déplacement à la  $i$ ème itération s'écrit :

$$\{u_i\} = \{u_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta u_j\} \quad (\text{V-15})$$

Cette procédure est répétée jusqu'à ce que l'incrément de déplacement ainsi que le chargement résiduelle  $\{R_i\}$  deviennent nuls ou presque. Pour ceci il est nécessaire de déterminer la matrice  $k(u_i)$ . Ainsi l'une des méthodes les plus utilisées est celle de la matrice tangente  $k_i$  calculée à la fin d'une précédente itération. Autrement dit celle qui correspond à la courbe (F,U) calculée au point  $\{u_{i-1}\}, \{F_{i-1}\}$ .

D'autre part, il existe une autre approche appelée *méthode itérative modifiée* qui est tout aussi efficace et pour laquelle la rigidité est constante en chaque itération. Dans ce cas l'existence d'une rigidité initial  $K_0$  est nécessaire. Cependant bien que cette méthode nécessite un plus grand nombre d'itération il existe un gain d'économie substantiel qui réside dans le fait qu'il n'est pas obligatoire de calculer la rigidité pour chaque cycle.

Les méthodes itératives de bases sont schématisées sur la figure (V-4)

### V.4.3) Méthode mixte

Cette méthode est une combinaison des deux démarches incrémentale et itérative comme le précise le schéma de la fig. (V.5).

On remarque que la charge est appliquée par incrément où chaque cycle d'incrément constitue un problème non linéaire pour lequel la résolution s'effectue en plusieurs itérations ceci s'écrit :

$$[k(u_i)]\{u_i\} = \lambda_i \{f_0\} \quad \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda$$

La solution initiale utilisée pour calculer  $U_i$  est la solution  $U_{i-1}$  obtenue à l'étape précédente. Chaque étape constitue (comme nous l'avons précisés) un problème non linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itération(s) par l'une des méthodes de Newton – Raphston ou de Newton – Raphston modifiée.

Pour un incrément de charge donné les itérations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{R(U_{i-1})\} &= \lambda_{i-1} \{f_0\} - [K(U_{i-1})]\{U_{i-1}\} \\ [K_i(U_{i-1})]\{\Delta U_i\} &= \{R(U_{i-1})\} + (\lambda_i - \lambda_{i-1})\{f_0\} \\ \{U_i\} &= \{U_{i-1}\} + \{\Delta U_i\} \end{aligned}$$

**Remarque :** Pour chaque une des méthodes utilisés les norme de convergence est calculée comme suit :

**a – la norme maximum :**

$$\|n\| = \text{Max}|\Delta U_j| \quad \text{où} \quad \|m\| = \text{Max}|R_j|$$

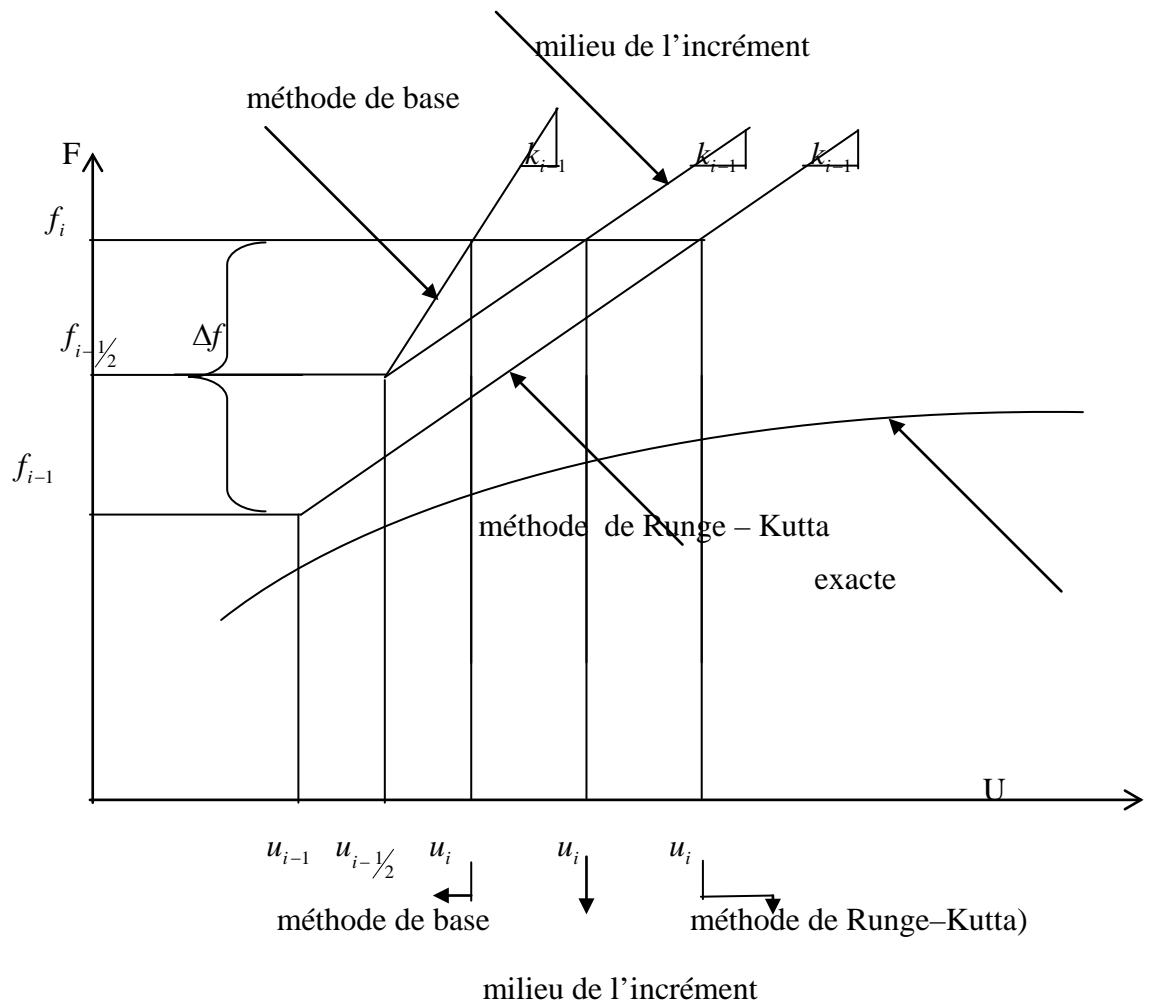
**b – la norme des moindres carrés :**

$$\|n\| = \sqrt{\langle \Delta U_j \rangle \{ \Delta U_j \}} \quad \text{où} \quad \|m\| = \sqrt{\langle R_j \rangle \{ R_j \}}$$

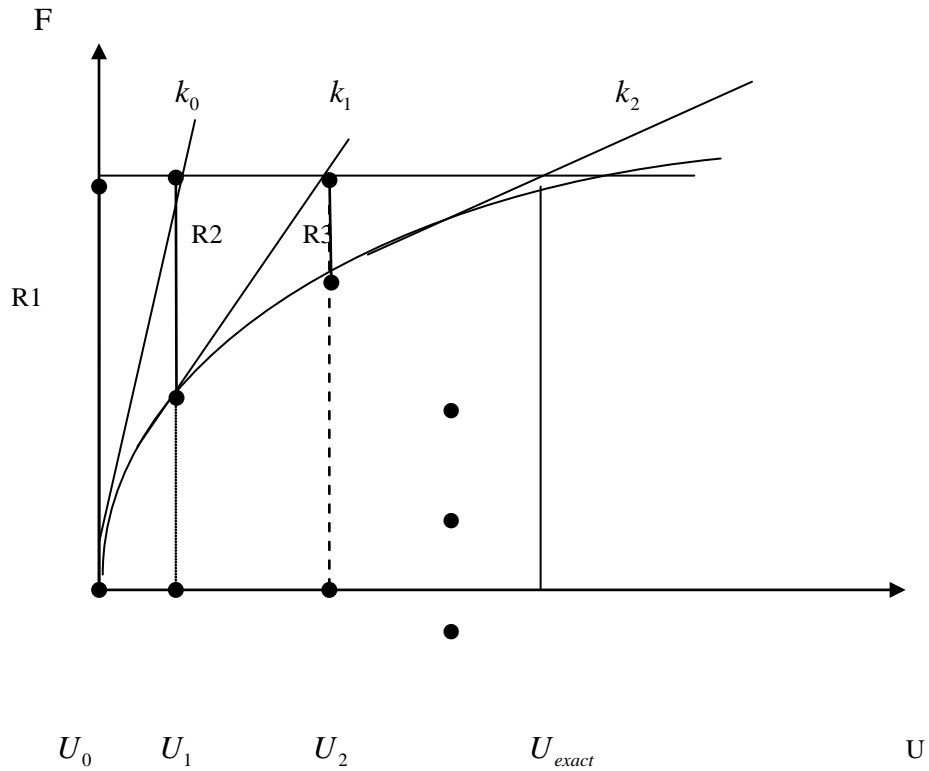
ou encore :

$$\begin{aligned} \|n\| &= \sqrt{\langle \Delta U_j \rangle \{ \Delta U_j \}} \\ &= \sqrt{\langle U_j \rangle \{ U_j \}} \end{aligned}$$

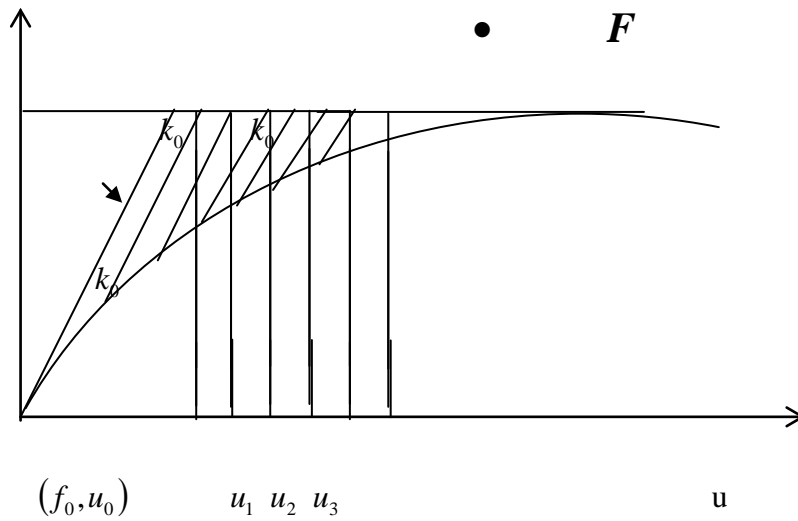
Les courbes relatives a chaque méthode sont schématisées dans les figures suivantes :



**Figure (V-3) :Méthode incrémentale :Méthode de Runge-Kutta**

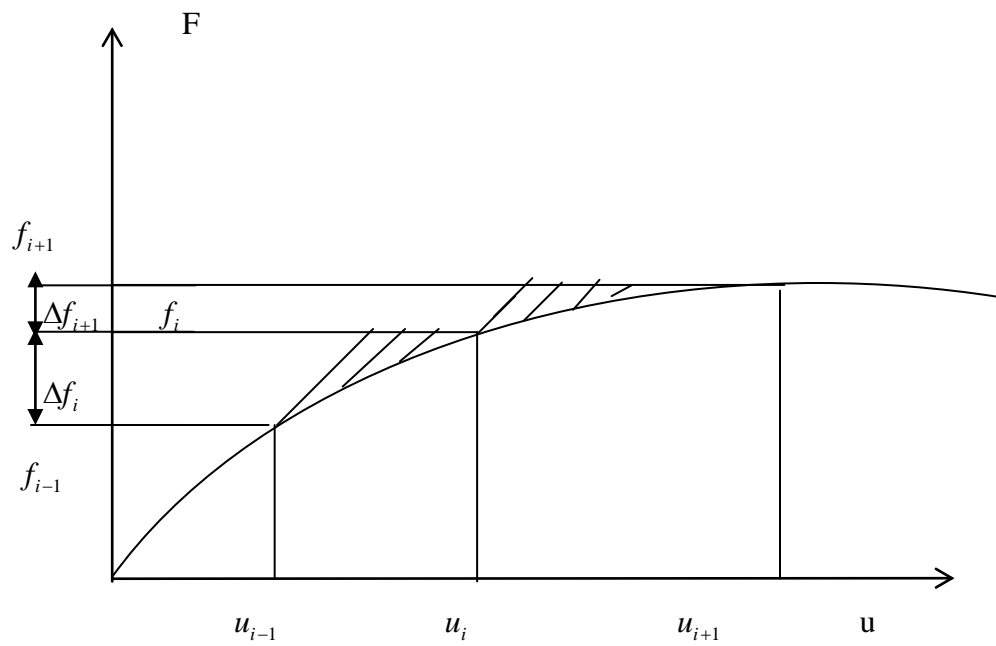


(V.4a) : approche tangente – méthode de newton raphston



(V-4b) Approche Modifiées - Méthode de Newton–Raphston  
Modifiées

**Figure (V-4) Méthodes itératives de bases**



**Figure. (V-5) : Méthode mixte**

L'Algorithme correspondant à chaque méthode est le suivant :

Algorithme de la méthode itérative

- Calculer une solution approchée  $\{u_0\}$ , éventuellement nulle
- Construire  $\{f\}$  par assemblage des vecteurs élémentaires  $\{f\}$

- $i = 1, 2, \dots$  (pour chaque itération)

pour chaque élément

- Extraire les vecteurs  $\{u_{i-1}\}$  de  $\{U_{i-1}\}$
- calculer  $[k(u_{i-1})]$  élémentaire
- calculer le résidu élémentaire  $\{r\}$

$$\{r\} = \{f\} - [k]\{u_{i-1}\}$$

- Assembler comme pour un problème linéaire

$[k]$  dans  $[K]$

$\{r\}$  dans  $\{R\}$

- Résoudre comme dans un problème linéaire

$$[K]\{\Delta u_i\} = \{R_i\}$$

- Construire la nouvelle estimation de la nouvelle solution

$$\{U_i\} = \{U_{i-1}\} + \omega\{\Delta U_i\}$$

- Calculer la norme  $\|n\|$  de  $\{\Delta U_{i-1}\}$  ou  $\|m\|$  de  $\{R_i\}$

La convergence est testée à chaque itération  $i$  par  $\|n\| < \varepsilon$

Algorithme de la méthode mixte

Choix de  $\omega$ , et  $\Delta\lambda$

$$\lambda = 0$$

Pas de la solution j :  $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$

\* Prédications :  $\{U_i^0\} = \{U_{i-1}\}$  ou extrapolation de  $\{U_{i-1}\}, \{U_{i-2}\}, \dots$

\*  $i = 0$

\* itérations :  $i = i + 1$

- Pour chaque éléments :

Calcul et assemblage du résidu

$$\{R(\lambda, f_0, U_{i-1})\}$$

Calcul et assemblage de  $[K_i(U_{i-1})]$

Résolution de  $[K_i]\{\Delta U\} = \{R\}$

- Calcul de  $\{U\}$  :  $\{U_i\} = \{U_{i-1}\} + \omega\{\Delta U\}$

- Calcul des normes relatives  $\|n\|$  de  $\{\Delta U\}$

- Test de convergence

Impression éventuelle du niveau j de sollicitation

*Résolution du problème non linéaire par la méthode  
de Newton – Raphston*

### V.5) Développement numérique

Pour pouvoir résoudre le problème de non-linéarité par l'une des méthodes exposées précédemment, il est impératif de poser les équations sous forme matricielle et se de manière à les rendre plus maniable est donc plus facile à utiliser ; D'où la nécessité d'évaluer la matrice de rigidité.

#### V.5.1) Évaluation de la rigidité

Dans le cas général et pour chaque étape de résolution que se soit pour la méthode itérative ou incrémentale, le calcul de la matrice de rigidité est obligatoire. L'évaluation de celle-ci dépend essentiellement de la valeur courante des paramètres du matériau [C]. Cela

est valable dans le cas du comportement élastique isotrope ou l'on a besoin de deux (2) paramètres tel que le module E et le coefficient  $\nu$  lesquelles sont en fonctions de l'état de contrainte a l'intérieur de l'élément fini. *Le module tangent et le module sécant sont des valeurs utilise dans des approches communes pour le calcul du comportement constitutif de la non-linéarité Matériel.*

Si on utilise la représentation de la fonction de la loie constitutive, on doit faire attention a assurer au comportement réel une simulation cohérente ; La plus part des résultats incohérents sont généralement obtenus a partir de simulation irréaliste des propriétés du matériau, tel le module tangent (ou sécant) qui est calculé essentiellement sur la base de la 1er dérivée de la courbe simulée.

Une fois que les incréments de déplacement sont obtenus l'évaluation des incréments de déformation et de contrainte est possible en utilisant les équations appropriées de déformation-déplacement et les loies courantes de contrainte-déformation. Ceci se traduit par exemple dans le cas de petits déplacements et petites déformations, la forme incrémentale de l'équation déformation-déplacement et l'équation contrainte-déformation est :

$$\{\Delta \varepsilon_i\} = [B]^* \{\Delta u_i\} \quad (\text{V-16})$$

$$\{\Delta \sigma_i\} = [C(\{\Delta \sigma_{i-1}\})]^* \{\Delta \varepsilon_i\} \quad (\text{V-17})$$

pour des petits déplacements, les contraintes et les déformations peuvent être cumulées, tel que pour la fin de la ième étapes :

$$\{\varepsilon_i\} = \{\varepsilon_i\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta \varepsilon_j\} \quad (\text{V-18})$$

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_0\} + \sum_{j=1}^i \{\Delta \sigma_j\} \quad (\text{V-19})$$

Où  $\{\varepsilon_0\}$  et  $\{\sigma_0\}$  sont respectivement les déformations et les contraintes initial de l'état de chargement  $\{f_0\}$ .

Une fois que le couple  $(\{\sigma_i\}, \{\varepsilon_i\})$  correspondant a la ième étape est calculé on peut faire entrer la loie constitutive donnée par la courbe du test uniaxial , la courbe du test triaxial ou la courbe de contrainte-déformation équivalente afin de calculer le module approprié.

## V.6) Problème de non-linéarité matérielle

Nous allons parler maintenant de toute les méthodes d'analyse non linéaire utilisées pour la 1<sup>er</sup> catégorie de non-linéarité. On se limitera seulement au comportement élastique et élasto-plastique ou les deux méthodes incrémentales et itératives sont utilisées.

Enfin, après avoir traité brièvement la non-linéarité élastique, nous développerons les quatre méthodes utilisées pour la résolution dans le cas du comportement élasto-plastique.

### V.6.1) Comportement non-linéaire élastique

La méthode de résolution la plus adaptée aux problèmes élastiques est la méthode *incrémentale* qui utilise le concept de la rigidité tangente. Cependant, la *méthode itérative*, est employée occasionnellement en utilisant le concept de la rigidité sécante.

La matrice de rigidité dans l'analyse non linéaire est toujours calculée à partir de la relation suivante :

$$K = \iiint_v [B]^T * [C(\sigma)] * [B] * dv \quad (\text{V-20})$$

où la matrice  $[c(\sigma)]$  est variable pour chaque étape de la méthode.

### V.6.2) Comportement élasto-plastique

#### V.6.2.1) Méthode incrémentale

Cette méthode est considérée comme la technique la plus appropriée à l'application des lois courantes de la plasticité (10-16) ou l'essentielle de cette approche est donnée par les équations (8) et (10) du 5<sup>ème</sup> chapitre.

*En appliquant l'approche incrémentale aux lois constitutives de l'élasto-plastique, on peut exprimer les termes de l'incrément finis telle que :*

$$\{\Delta\sigma\} = [C^{ep}] * \{\Delta\varepsilon\} \quad (\text{V-21})$$

Où la matrice  $[C^{EP}]$  est variable pour chaque incrément de charge. Une fois  $[C^{EP}]$  obtenue on peut envisager le calcul de la matrice de rigidité

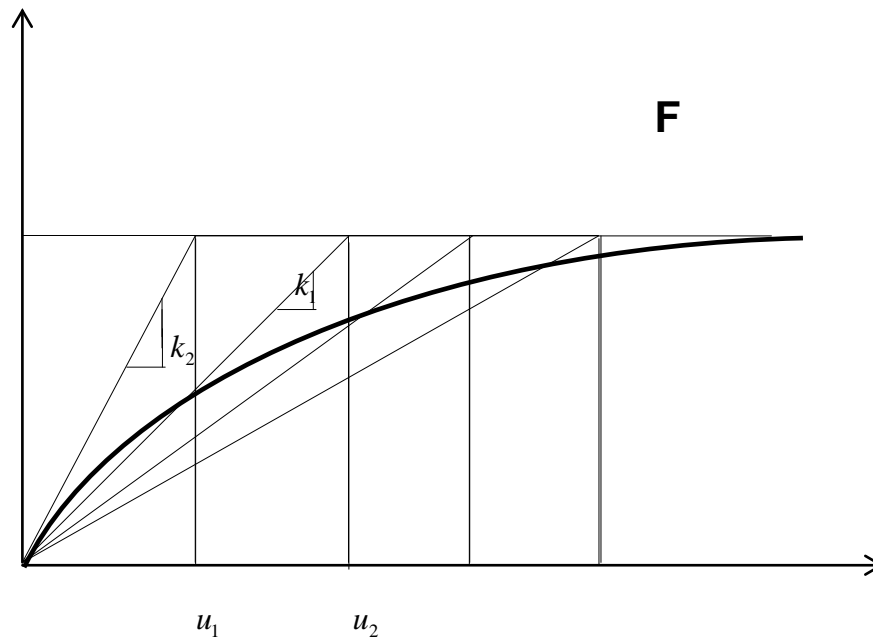
$$[K] = \iiint_v [B]^T * [C^{EP}] * [B] * dv \quad (\text{V-22})$$

#### V.6.2.2) Méthode itérative

La méthode itérative est utilisée dans le cas des *déformations plastique* où l'*approximation bilinéaire de la relation contrainte-déformation* est employée.

La représentation du procédé itérative est montrée sur la figure [V.2] et où l'on remarque la modification de la rigidité pour chaque pas et dans la base du module sécant. La charge totale est appliquée pour chaque itération.

$$[K] * \{u_i\} = \{F\} \quad (\text{V-23})$$



**Figure(V-6) : Procédure itérative pour un comportement élasto-plastique**

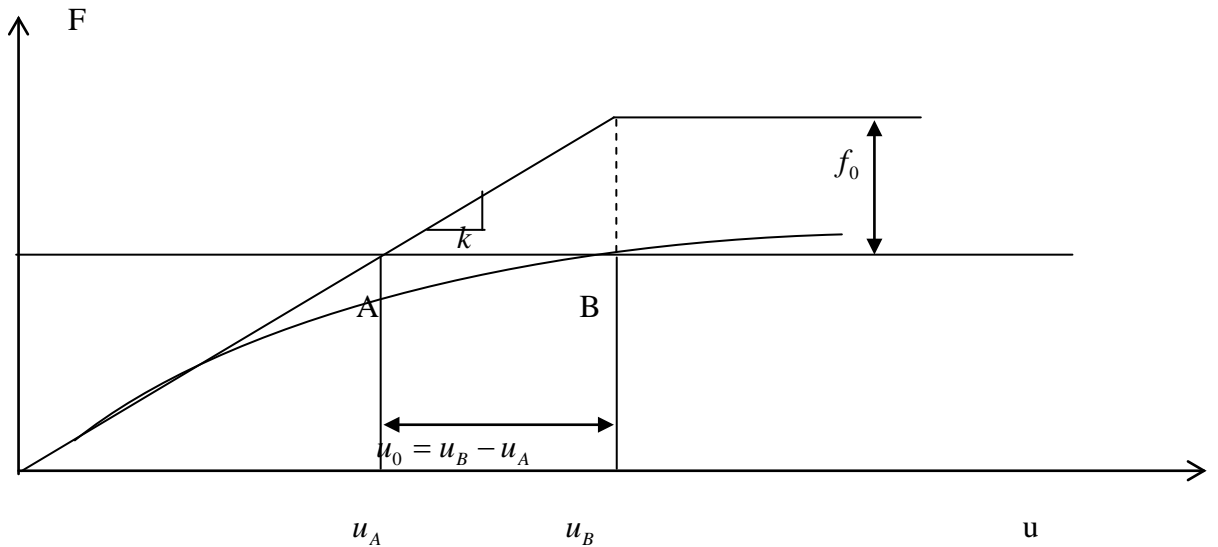
Bien que la relation non-linéaire élasto-plastique soit utilisée pour le calcul du module sécant à chaque itération, il est important de signaler que la rigidité  $[K_i]$  est utilisée comme si elle décrivait un corps linéaire élastique. C'est à dire qu'à chaque pas, l'étude est considérée équivalente à l'analyse d'un corps élastique sous un chargement bien défini. Le calcul du module sécant s'effectue aussi comme pour des constantes élastiques.

L'un des inconvénients de cette méthode, réside dans le fait que les premières applications induisent, sous un chargement complet, un état de contrainte-déformation assez éloigné de la courbe actuelle contrainte-déformation. Pour éviter cette possibilité la méthode mixte peut être envisageable.

### V.6.2.3) Méthode de la déformation initiale

Les deux procédés itératifs et incrémentaux, dans le cas du comportement élasto-plastique, vont nécessiter à chaque étape de leurs applications respective de recalculer la matrice de rigidité. Afin de palier à cet inconvénient une méthode ingénieuse a été conçue pour simplifier le calcul et obtenir un gain de temps considérable (16-19)

*L'idée de base donc de la méthode de déformation initiale se rapproche du concept de la charge additionnelle décrite dans les paragraphes précédent . La figure [V-3] montre le principe de base de la méthode.*



**Figure (V.6) : méthode de la déformation initial.**

Ainsi la résolution du problème d'un corps de rigidité  $[K]$  sous le chargement  $\{F\}$  s'effectue pour un déplacement correspondant au point A

.D'autre part, l'état d'équilibre correct sur la courbe non-lineaire correspondant au chargement  $\{F\}$  est le point B telle que la différence entre le déplacement réel  $\{u_B\}$  et le déplacement calculé  $\{u_A\}$  est le déplacement  $\{u_0\}$  ou. La déformation initiale  $\{\varepsilon_0\}$  correspondant a  $\{u_0\}$  peut être calculer à partir de la relation suivante :

$$\{\varepsilon_0\} = [B] \{u_0\} \quad (\text{V-24})$$

De cette manière la correction de charge  $\{f_0\}$  est trouve dans l'équation :

$$\{f_0\} = \iiint_v [B]^T [C] \{\varepsilon_0\} dv \quad (\text{V-25})$$

Ce chargement représente l'effort de compensation nécessaire a la déformation initial et a la correction du déplacement du point (A) au point (B) (17-18).

Lorsque la méthode de la deformation initial est applique à l'analyse du comportement plastique, la déformation plastique  $\{\varepsilon^p\}$  est assimilée à la déformation initiale.  $\{\varepsilon^0\}$

La deformation élastique  $\{\varepsilon^e\}$  est exprimée comme la différence entre la déformation totale  $\{\varepsilon\}$  et la de formation plastique  $\{\varepsilon^p\}$  d'où

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon^E\} = [C] * (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^p\}) \quad (\text{V-26})$$

L'équation de l'équilibre final est la même que l'équation :

$$[K] \{d\} = \{f\} + \{f_0\} \quad (\text{V-27})$$

A la différence que le vecteur charge  $\{f_0\}$  résulte de la déformation plastique.

#### V.6.2.4) Méthode de la contrainte initiale

Dans le cas d'une convergence plastique parfaite ou de grande déformation on remarque que la méthode de déformation initiale n'est plus applicable. Ainsi pour surmonter cette difficulté une autre approche a été formulée qui n'est autre que la méthode de contrainte initiale (21)

Celle-ci apparaît plus appropriée dans le cas d'un comportement plastique ou pour chaque incrément de déformation il existe une contrainte unique

La méthode des contraintes initiale est basée sur la méthode mixte où la matrice de rigidité se modifie a chaque incrément et reste fixe l'intérieur de l'incrément pour chaque itération .

Le procédé itératif est donné pour le ième incrément par :

$$[K]\{\Delta u_i^{(i)}\} = \{\Delta f_i\} + \{\Delta f_{0,i}^{(j)}\} \quad j=0,1,\dots \quad (\text{V-28a})$$

Où

$$\{f_{0,i}^{(j)}\} = \{0\} \quad (\text{V-28b})$$

L'indice(  $i$ ) dénote l'incrément de charge et ( $j$ ) dénote le cycle de l'itération a l'intérieur de l'incrément. Pour  $j=0$ , on applique  $\{\Delta f_i\}$  et on calcul l'incrément de déplacement  $\{\Delta u_i^{(j)}\}$ , de déformation  $\{\Delta \varepsilon_i^{(j)}\}$  et la contrainte élastique  $\{\Delta \sigma_i^{(j)}\}$

ZIENKIWICZ (21) utilise l'approche de la contrainte initial est calculé a partir des relations générales Elasto-Plastique et contrainte-déformation

$$\{\Delta \sigma_{ci}\} = [C^{ep}]\{\Delta \varepsilon_i^{(j)}\} \quad (\text{V-29})$$

Où  $[C^{EP}]$  est déterminé a partir des méthodes de base de Mohr-Coulomb ou du critère de Von mises

Ce processus est répété jusqu'à ce que la convergence soit obtenue généralement en trois ou quatre s cycle d'itération

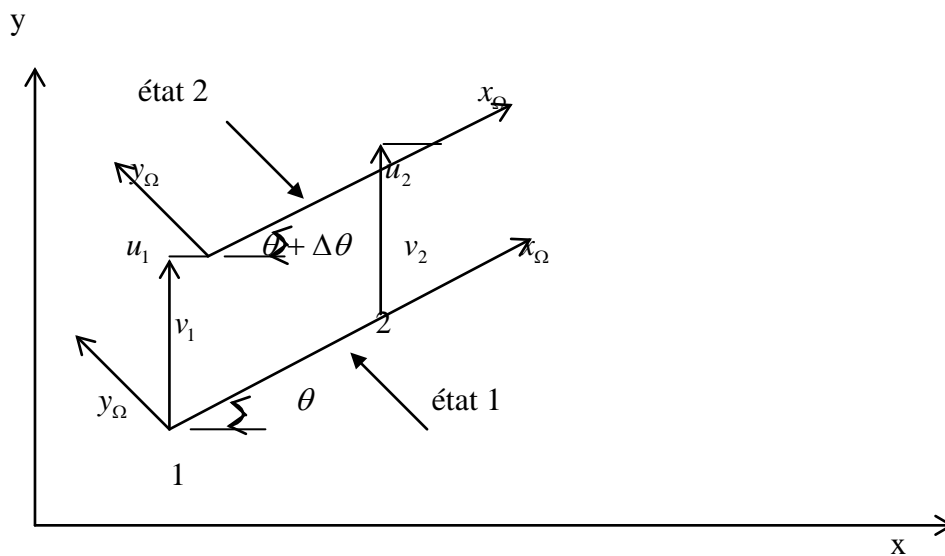
### V.7) Problème de non-linéarité géométrique

Dans les paragraphe précédent on a développé la théorie de la non-linéarité matérielle et on a parlé de la restriction faite a de petit déplacements et déformation. Ce qui

n'est évidemment pas le cas de la non-linéarité géométrique ou de large déplacement sont admis mais toujours dans le cas de petite déformation

*Comme d'habitude, la résolution du problème non-linéaire réside dans la subdivision de celui-ci en plusieurs sous domaines linéaire plus facile a résoudre.*

Le chargement de géométrie induit par l'effort de grand déplacement nous oblige a prendre en considération certaine longueur et de ne pas les négligée. Comme dans le cas de l'élément plan de la figure[(V-9)] ou le chargement de géométrie non négligeable est  $\Delta\theta$  qui est une fonction des déplacements nodaux  $U_1, U_2$  et  $V_1, V_2$  elle représente le chargement de direction des coordonnées local du système



**Figure(V-7) : Déplacement fini d'un élément treillis**

En général le vecteur deplacement, la matrice de rigidité et le vecteur chargement sont exprimé dans le système local et peuvent être exprimé dans le système global par des matrices de passages adéquate telle que :

$$\{U_g\} = [T]^T \{U_l\} \quad (V-30)$$

$$[k_g] = [T]^T \cdot [K_L] \cdot [T] \quad (V-31)$$

Dans le cas de grand déplacement les directions cosinus dans la matrices de passage deviennent des fonctions de l'état de déplacement initial.

C'est ainsi que la non-linéarité est introduite symboliquement dans nos équations d'équilibre par

$$[T] = [T(\{U\})] \quad (V-32)$$

Dans le cas de petite déformation la matrice de rigidité dans le système local  $[K_l]$  est linéaire et elle n'est pas en fonction du déplacement. Ceci reste valable pour tous les états de déformations. Cependant la matrice de rigidité dans l'axe global  $[K_G]$  varie avec les états de déplacements a cause de la non-linéarité des équations de transformation (V-31)

Les méthodes les plus souvent utilisé pour les non-linéarité géométrique sont généralement les méthodes itératives, incrémentales et mixtes.

### V.7.1) Procédure incrémental

Pour un incrément de charge  $\{\Delta f\}$  l'équation (V-34) peut-être utilisé pour exprimer les changements dans le vecteur charge tel que

$$\{f_g\} + \{\Delta f_g\} = ([T]^T + [\Delta T]^T)\{f_l\} + \{\Delta f_l\} \quad (\text{V-33a})$$

Ici  $\{f_g\}, \{f_l\}$  et  $[T]$  définissent le chargement et la transformation au début de chaque incrément.

En exécutant les matrices de multiplication on obtient

$$\{f_g\} + \{\Delta f_g\} = [T]^T \{f_l\} + [T]^T \{\Delta f_l\} + [\Delta T]^T \{f_l\} + [\Delta T]^T \{\Delta f_l\} \quad (\text{V-33b})$$

Le dernier terme du coté droit de l'égalité est d'un ordre supérieur est peut donc être supprimer pour un incrément assez petit

En retranchant l'équation (V-22) de l'équation (V-24a) on obtient

$$\{\Delta f_g\} = [T]^T \{\Delta f_l\} + [\Delta T]^T \{f_l\} \quad (\text{V-34a})$$

Le premier terme du coté droit de l'égalité exprime généralement le vecteur global de charge. On peut substituer l'équation incrémental standard on obtient

$$\{\Delta f_g\} = [K_g] \{\Delta U_g\} + [\Delta T]^T \{f_l\} \quad (\text{V-34b})$$

Le second terme a droite représente l'effet du changement de géométrie dans l'équation d'équilibre global de l'élément on peut réécrire le terme comme suit :

$$[\Delta T]^T \{f_l\} = \sum_{i=1}^n f_{l_i} \{dT\}_i \quad (\text{V-35})$$

Où  $\{dT\}_i$  est la ième colonne de  $[\Delta T]^T$  par analogie a la forme différentielle on a

$$\{dT\}_i = \frac{\partial \{T\}_i}{\partial \{u_g\}} \{du_g\} \quad (\text{V-36})$$

On peut écrire le ième incrément de la colonne comme

$$\begin{aligned}
 \{\Delta T\}_i &= \frac{\partial \{T\}_i}{\partial \{u_g\}} \{\Delta u_g\} \\
 &= \left[ \frac{\partial \{T\}_i}{\partial u_{g_1}} \quad \frac{\partial \{T\}_i}{\partial u_{g_2}} \quad \dots \quad \frac{\partial \{T\}_i}{\partial u_{g_n}} \right] \cdot \{\Delta u_g\} \\
 &= [G_i] \{\Delta u_g\}
 \end{aligned} \tag{V-37}$$

Ou chaque matrice  $[G_i]$  est symétrique

Ainsi l'équation (V-25b) devient

$$[K_g] \{\Delta u_g\} + \left( \sum_{i=1}^n f_{li} [G_i] \right) \{\Delta u_g\} = \{\Delta f_g\} \tag{V-38}$$

On définit le terme entre parenthèses comme *la matrice de rigidité géométrique*

; donc l'on peut réécrire l'équation (V-38) comme :

$$([K] + [K_g]) \{\Delta u\} = \{\Delta Q\} \tag{V-39a}$$

$$[K_g] = \sum_{i=1}^n f_{li} [G_i] \tag{V-39b}$$

La forme incrémentale de l'équation (V-39a) est :

$$([K] + [K_g]_{i-1}) \{\Delta u_i\} = \{\Delta f_i\} \tag{V-40}$$

Et où l'indice (i-1) indique la matrice de rigidité évaluée pour un état de déplacement au début de l'incrément.

Il est aussi claire que la méthode incrémentale dans le cas de grand déplacement nécessite de plus grand effort que celle de la non-linéarité matériel. Pour la simple raison que le calcul s'effectue sur deux (2) matrices de rigidité au lieu d'une. Cependant ceci peut être minimisé en considérant  $[K_l]$  invariant et le changement s'opère seulement sur la partie atteinte par la non-linéarité. L'équation (V-40) peut être volontiers changé en introduisant l'effet de la déformation initiale(22)

$$([K] + [K_g]_{i-1}) \{\Delta u_i\} = \{\Delta f_i\} + \{\Delta f_{0,i-1}\} \tag{V-41}$$

L'équation (V-41) représente la contribution du chargement dans la matrice de rigidité géométrique a travers le terme  $\{f_l\}$  qui définit la charge au début de chaque incrément. Par conséquent la matrice de rigidité est aussi connue comme *la matrice de contrainte initiale* de plus l'utilisation de la charge dans  $[K_g]$  nous permet de formulé le problème classique de stabilité.

Si l'on pouvait factoriser le terme de la magnitude de charge en dehors de  $[K_g]$  : par exemple, le problème de mode propre de flambement peut être obtenue en considérant l'incrément sans chargement extérieur :

$$([K] + \lambda [K_g]) \{\Delta u\} = 0 \quad (\text{V-42a})$$

Et où la solution trivial est seulement si :

$$[K] + \lambda [K_g] = 0 \quad (\text{V-42b})$$

### V.7.2) Méthode itérative

Le procédé itératif dans le cas de grand déplacement est relativement simple ; Il consiste à appliquer la charge total et révisé à chaque cycle d'itération le déplacement résultant jusqu'à la convergence des coordonnées de points nodaux à cette nouvelle position .A chacune de ces position correspondra un chargement et une rigidité.

Ainsi à chaque étape les caractéristiques de l'élément sont revus et l'analyse linéaire amélioré.

Pour de petites déformations les équations de ce procédé peuvent être écrit comme suit :

$$[K_{i-1}] \{u_i\} = \{f_{i-1}\} \quad (\text{V-43a})$$

$$\{f_{i-1}\} = [T_{i-1}]^T \{f_i\} \quad (\text{V-43b})$$

$$[K_{i-1}] = [T_{i-1}]^T [K_i] [T_{i-1}] \quad (\text{V-43c})$$

Ce processus est répété jusqu'à la convergence

Cependant malgré la rapidité de la méthode les inconvénients de celle ci sont prépondérant. Ainsi les résultats sont obtenues uniquement pour le chargement total où l'on peut appliquer un seul vecteur charge à la fois.

### V.8) Problème de non-linéarité géométrique et matérielle

A ce jours le traitement de ce genre de non-linéarité est toujours en cours de développement et d'amélioration c'est ainsi que le traitement par élément finis des problèmes de deformation finis a été introduit par plusieurs chercheurs dont ODEN (4), BEKER(23), YAGHMAI (24), et d'autre (4). Une analyse complète de ce type de problème est au-delà du but que nous nous somme fixé dans cette étude c'est pour cela que nous nous contenterons simplement de poser la forme générale de l'équation incrémentale (4) :

$$([K] + [K_g] + [K_h] + [K_r])\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (\text{V-44})$$

$[K]$	matrice de rigidité élastique
$[K_g]$	matrice de rigidité géométrique
$[K_h]$	matrice des déplacements initiaux
$[K_r]$	matrice de correction de charge

Le développement mathématique général des procédures de base incrémentales et itératives sont données par ODEN(4) ainsi que d'autres auteurs à travers la longue liste de référence si après.

### **Résumé et comparaison :**

*En général, tous les phénomènes de non-linéarité aussi bien géométriques que matérielles sont traitées numériquement d'une manière relativement simple malgré leurs complexités; et ce en fragmentant le domaine non linéaire en plusieurs sous domaines linéaires où la résolution est plus conviviale. L'avantage évident de cette technique va nous permettre en tant qu'analystes, de converger vers une solution plus réaliste du problème et donc de pouvoir approcher de plus près le comportement de la structure étudiée. Le développement de cette technique de base a donné jour à plusieurs méthodes basées sur le même principe et classées selon leurs modes d'applications en plusieurs catégories :*

- a – Méthode incrémentale
- b – Méthode itérative
- c – Méthode mixte
- d – Méthode d'accélération
- e – Méthode de longueur d'Arc

Pour notre part nous avons développées les trois premières méthodes en précisant les principes d'applications fondamentales de chacune d'elles et les différents algorithmes de résolution

Pour terminer cette analyse, il est intéressant de passer à une comparaison approfondis de ces procédés et de faire ressortir les principaux avantages et inconvénients de chacune d'elles.

Ainsi, le principal *avantage de la méthode incrémental* est qu'elle est applicable à tous types de comportement non linéaire ; ceci est dû théoriquement au fait que la méthode d'incrémentation pas à pas est souvent utilisée dans l'analyse des éléments finis. Cette technique présente aussi d'autres avantages comme la représentation relativement complète du comportement (charge – déformation) qui est obtenu grâce à la description de l'état de déformation pour chaque état de charge intermédiaire.

Cependant, cette méthode présente toujours l'inconvénient d'une part du (time – consuming) par rapport aux méthodes itératives ; et d'autre part à la difficulté de savoir à l'avance qu'elle est l'incrément de charge nécessaire pour obtenir une bonne approximation de la solution exacte.

Aussi, à moins d'avoir une solution exacte ou expérimental du problème il peut être difficile de juger l'exactitude du résultat.

Pour toutes ces raisons, on utilise la méthode mixte qui n'est rien d'autre qu'un consensus des deux méthodes incrémental et itérative.

La méthode itérative est rapide et plus facile a utilisé que la méthode incrémental ceci est du au fait que l'analyse s'effectue seulement pour quelques cas de charge. On trouve qu'ils sont utilisées pour des *matériaux bi – modulaires* (c'est à dire ont des propriétés élastiques différentes en compression et en traction[7]), la combinaison de celle-ci avec *l'approche de la rigidité sécante* va nous permettre d'analyser le comportement de matériaux mous pour lesquelles la technique incrémentale à échouée. Cependant, l'un des inconvénients de la méthode itérative est qu'elle ne donne aucune assurance sur la convergence vers la solution exacte. [8,6], d'une part et d'autres part, elle n'est applicable pour aucun des cas suivant ; problème dynamique, problèmes des systèmes non conservatifs (sauf pour les pseudo – conservatifs comme dans le cas des déformations plastiques [6,8]).Ainsi que toutes les structures ou les déplacements, déformations, et contraintes ne sont pas déterminées pour la charge totale appliquée ; à la différence de la méthode mixte et incrémental.

En fin, la méthode itérative requière ou demande des estimations initiales dans plusieurs situations [4] et spécialement pour des méthodes ou la première estimation est exigée.

***CHAPITRE VI***

**ANALYSE DU  
COMPORTEMENT  
GÉOMÉTRIQUE NON  
LINÉAIRE DES  
PLAQUES**

*- Méthode des éléments finis -*

## *Analyse du comportement non-linéaire géométrique des plaques par éléments finis*

(VI)

### VI-1) Introduction

En général, l'analyse linéaire des plaques est formulée par l'une des deux théories qui sont celle de KIRCHHOFF [1] ou de MINDLIN [2].

Dans la première, *les formulations de cisaillement sont négligées telle que la normale à la surface moyenne est supposée resté normale après déformation*. Cependant, ceci se traduit dans la contexte d'éléments finis par une formulation non-conforme où une continuité C1 est utilisée.

Dans la seconde théorie, celle de Mindlin, *les formulations de cisaillement sont autorisées, à savoir que la normale reste droite après déformation mais pas nécessairement normale à la surface moyenne* où seulement une continuité C0 est formulée. Cette dernière hypothèse n'a de réalité physique que pour les plaques épaisses, mais reste très efficace pour les plaques minces ou à épaisseur variable .

Néanmoins, pour les plaques la réduction de cette *intégration conduit à l'apparition de modes de singularité ou mécanisme correspondant à des déplacements apparemment sans énergie*, rendus possible par l'intégration réduite d'élément. [Q<sub>8</sub>]. Cet élément, à variation parabolique, est souvent utilisé; car il présente aussi un mécanisme qui ne se propage pas quand on assemble plusieurs éléments. Cependant il peut donner des résultats médiocres dans certains cas de flexion de plaques. Une solution mixte a été proposée par HUGHS : elle consiste à utiliser une famille de Lagrange pour les rotations (9 nœuds) et une famille de Serendip pour les déplacements W (8 nœuds) :

il s'agit de l'élément Hétérosis intégré avec 3 x 3 points pour la flexion et 2 x 2 points pour le cisaillement.

En général l'analyse de la non-linéarité géométrique des plaques mince suit le même développement que celui de l'analyse linéaire. Ceci se traduit d'une part dans l'application des hypothèses de **kirchhoff** aux plaques minces, et d'autre part, dans l'application des hypothèses de **Von Karman** aux équations de **Green** (*déformation-déplacement*).

Ainsi Nous nous proposons dans cette recherche d'analyser une plaque mince en utilisant :

- *Premièrement, les hypothèses de **Mindlin** qui prennent en compte le cisaillement transverse négligé par **kirchhoff**.*
- *Deuxièmement, de comparer les résultats de la formulation de **Von Karman** qui néglige les distorsions  $u$  et  $v$  dans les directions  $x$  et  $y$  [H.NL.1] a celle, qui ne les néglige pas [H.NL.2] !*

Ce qui va nous permettre d'estimer le taux en pourcentage d'erreur entre les deux hypothèses et d'apprécier si cette négligence est justifié ou pas.

## VI-2 Cinématique et Cinétique

Une des caractéristiques importantes des structures à comportement non-linéaire est que la configuration déformée engendrée par les grands déplacements (grandes rotations) peut être très éloignée de la configuration initiale. Ainsi deux formulations lagrangiennes sont habituellement utilisées (dans le cas des solides) :

- 1- La déformation lagrangienne actualisée (DLA)
- 2- La description lagrangienne totale (DLT)

La DLT est plus souvent difficile à mettre en œuvre que la DLA, dans certains cas, et peut être moins précise que celle-ci lorsque la configuration est très éloignée de la configuration initiale.

Nous rappelons, dans ce paragraphe, quelques notions de base des milieux continus.

### VI-2.1) Description du mouvement

On assimile un corps solide à une infinité de point matériel juxtaposé appelé «Particule». Chaque particule a une position repérée par ses coordonnées dans un référentiel quelconque. L'ensemble des positions des particules constitue, à un instant donné, une configuration du corps. Lorsque le corps subit de grands déplacements et de grande rotation, le mouvement du corps 'est' : l'évolution de cette configuration dans l'espace et dans le temps.

Le mouvement du corps peut se représenter des deux manières :

*a- Par une description lagrangienne (ou matérielle), le trajet de la particule est suivi à partir d'une configuration de référence (initiale ou actualisée)*

*b- Par une description Eulerienne (ou spatiale) où la particule est examinée en un point géométrique fixé (mécanique des fluides).*

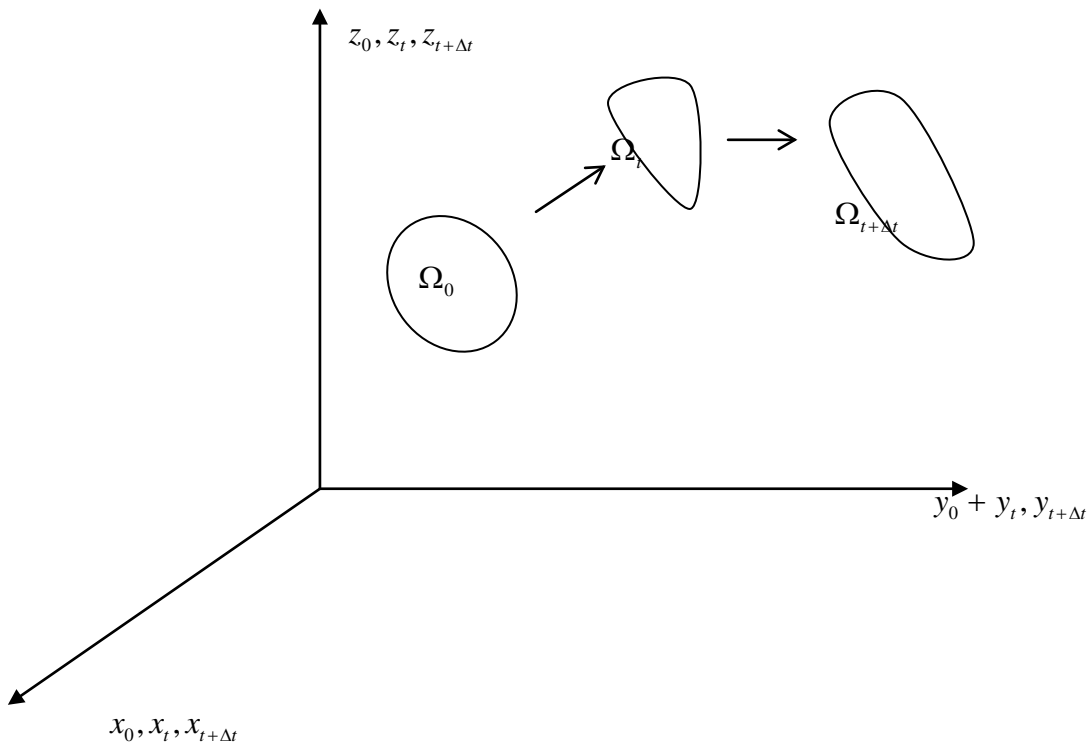
*La description lagrangienne est bien adaptée à l'analyse des solides et nous l'avons évidemment choisi.*

En description lagrangienne, deux types de configuration de référence en équilibre sont souvent utilisées comme nous l'avons déjà précisé.

- La configuration initiale  $\Omega_0$  du corps à l'instant  $t=0$
- La configuration courante ou actuelle  $\Omega_t$  du corps à l'instant  $t$ .

Si  $\Omega_{t+\Delta t}$  désigne la configuration du solide à l'instant  $t + \Delta t$ , appelée configuration incrémentée, les deux descriptions usuelles des mouvements s'appellent

- La description lagrangienne totale (DLT) qui prend  $\Omega_0$  comme référence
- La description lagrangienne actualisée (DLA) qui prend  $\Omega_t$  comme référence.



**Figure (VI-1) : Description du mouvement d'un solide**

$\Omega_0$  est la configuration initiale (non déformée et non contrainte.)

$\Omega_t$  est la configuration déformée ou actuelle

$\Omega_{t+\Delta t}$  est la configuration incrémentée à rechercher.

*A la lumière de ce que nous avons vu. Appliquons donc la description lagrangienne sur un solide particulier qui est une plaque en flexion et dont les déplacements sont bien définis.*

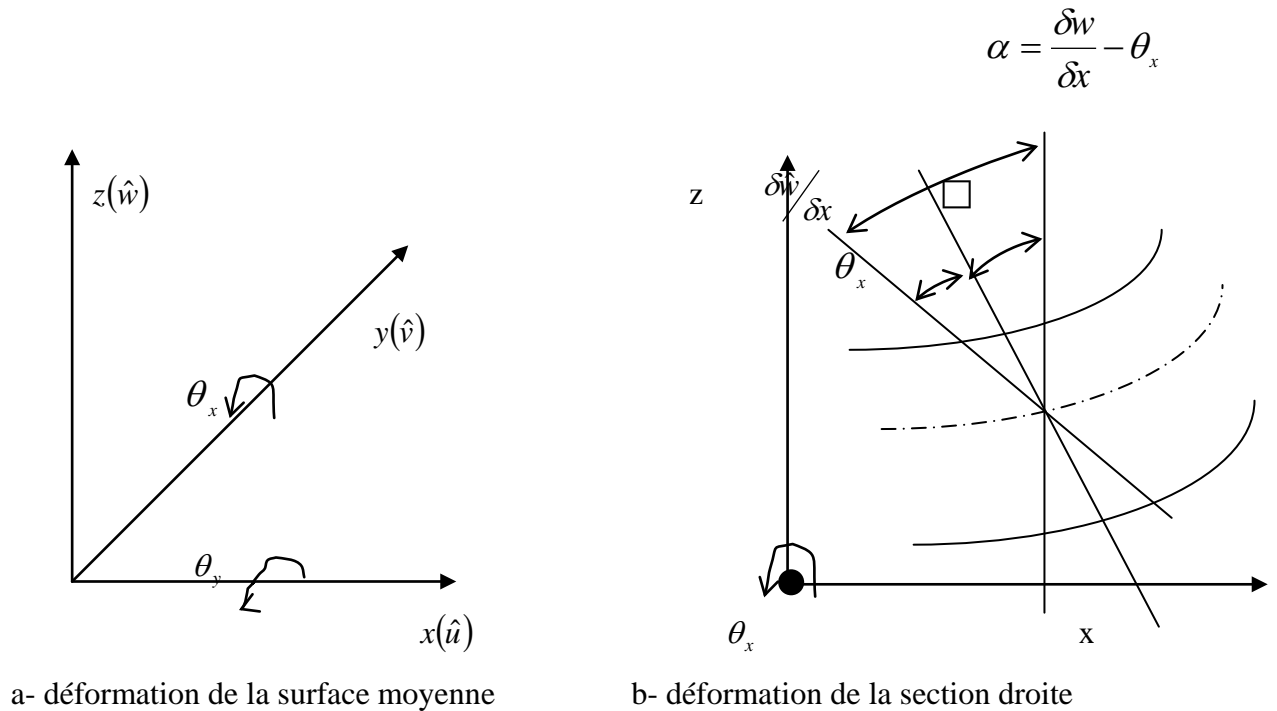
### VI-3) Déplacement dans les plaques :

Dans la théorie de Mindlin les déplacements  $u = (u, v, w)^t$  sont exprimés par rapport à la surface moyenne  $[s_m]$  ou  $(z=0)$  et sont notés  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$  pour les déplacements et  $\theta_x, \theta_y$  pour les rotations Fig. [VI.2]

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \hat{u}(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) = \hat{v}(x, y) - z\theta_{yx}(x, y) \\ w(x, y, z) = \hat{w}(x, y) \end{cases} \quad \text{(VI-1)}$$

Telle que les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont celle de la normal à la surface moyenne dans les plans  $(x, z)$  et  $(y, z)$  respectivement. Les normales ne sont pas nécessairement normales à la surface moyenne après déformation, ce qui par conséquent va permettre les déformations de cisaillement

Fig. [VI.2.b] :



**Figure. [IV.2] : Déformations**

#### VI-3.1) Déformations

Dans le cas de Mindlin les déformations sont données en fonction des déplacements à travers le vecteur déformation de Green :

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{cases} = \begin{cases} u, x + \frac{1}{2}(u, x)^2 + \frac{1}{2}(v, x)^2 + \frac{1}{2}(w, x)^2 \\ u, y + \frac{1}{2}(u, y)^2 + \frac{1}{2}(v, y)^2 + \frac{1}{2}(w, y)^2 \\ u, y + v, x + u, xv, y + v, xw, y + w, xw, y \\ u, z + w, x + u, xv, z + v, xw, z + w, xw, z \\ v, z + w, y + u, yv, z + v, yw, z + wy, wz \end{cases} \quad (\text{VI-2})$$

### VI-3.2) Contraintes

Les contraintes de Piola – Kirchhoff associées aux valeurs de Green sont :

$$\sigma = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}] \quad (\text{VI-3})$$

### VI-A). Analyse de la non - linéarité avec prise en compte des hypothèses de von Karman :

#### [H.NL.1]

L'introduction des *hypothèses de Von Karman* [13] implique que les dérivées ou les distortions de  $u$  et  $v$  en  $x$  et  $y$  sont négligeables et que le déplacement transversal  $w$  est indépendant de  $z$ . Ce qui nous permet donc de réécrire les équations de Green en termes de déformation de la surface moyenne telle que  $\varepsilon$  s'écrit :

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_m^0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} z\varepsilon_f^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{cases} + \begin{cases} \varepsilon_m^2 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{A-1a})$$

ou les déformations linéaires du plan moyen sont :

\* *Déformation membranaire*

$$\varepsilon_m^0 = \begin{cases} \hat{u}, x \\ \hat{v}, y \\ \hat{u}, y + \hat{v}, x \end{cases} \quad (\text{A-1b})$$

\* *déformation flexionnelle*

$$\varepsilon_f^0 = \left\{ \begin{array}{l} \theta_x, x \\ \theta_y, y \\ \theta_{x,x} + \theta_{x,y} \end{array} \right\} \quad (\text{A-1c})$$

\* déformation de cisaillement

$$\varepsilon_s^0 = \left\{ \begin{array}{l} \hat{w}, x - \theta_x \\ \hat{w}, y - \theta_y \end{array} \right\} \quad (\text{A-1d})$$

\* et enfin, *les composantes non linéaires des déformations membranes*

$$\varepsilon_s^0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{w}, x)^2 \\ \frac{1}{2}(\hat{w}, y)^2 \\ (\hat{w}, x\hat{w}, y) \end{array} \right\} \quad (\text{A-1e})$$

Les équations (A.1) représentent donc le vecteur de déformation total.

### VI-A.1) Équations des travaux virtuels de Lagrange :

En considérant les hypothèses de petit déplacement et de chargement conservatif, on peut exprimer l'équilibre d'un élément quelconque dans le système de coordonnées de Lagrange par l'équation suivante :

$$\int_v d\varepsilon^t \sigma dv = \int_v \rho du^t q dv + \int_A du^t \rho dA \quad (\text{A-2})$$

ou

v représente un volume indéformable

$\sigma$  le vecteur contrainte de Piola - Kirchhoff

$d\varepsilon$  le vecteur de déformation de Green due au déplacement virtuel  $du$

$\rho$  la densité massique

q la force de volume par unité de masse

p la force de surface

Dans le cas des plaques la formulation des équations des travaux virtuels peut s'écrire en terme d'intégrale de surface et à travers l'épaisseur «t»

### VI-A.1.1) Application du travail virtuel interne

Le travail virtuel interne d'un élément de plaque  $dw_i$  peut s'exprimer comme nous l'avons déjà précisé en fonction d'une intégrale de surface à travers la surface de la plaque et son épaisseur «e»

$$dw_i = \int_v d\varepsilon^t \sigma dv = \int_A \int_{-e/2}^{+e/2} (d\varepsilon_x \sigma_x + d\varepsilon_y \sigma_y + d\varepsilon_{xy} \sigma_{x\varepsilon} + d\varepsilon_{xz} \sigma_{xz} + d\varepsilon_{yz} \sigma_{yz}) dz dA \quad (\text{A-3})$$

En substituant les expressions de déformations de l'équation (1..A) dans l'équation (3) et en intégrant à travers l'épaisseur «e» on peut réécrire  $dw_i$  en fonction d'un intégral de surface seulement :

$$dw_i = \int_A d\hat{\varepsilon}^t \hat{\sigma} da \quad (\text{A-4})$$

et où la valeur des contraintes résultantes  $\hat{\sigma}$  sont

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_s \end{Bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

\* les composantes membranaires

$$\hat{\sigma}_m = [N_x, N_y, N_{xy}]^t = \left[ \int_{-p/2}^{p/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \right]^t \quad (\text{A-6a})$$

\* les composantes de la contrainte de flexion

$$\hat{\sigma}_f = [M_x, M_y, M_{xy}]^t = \left[ \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \right]^t \quad (\text{A-6b})$$

\* les composantes de la contrainte de cisaillement

$$\hat{\sigma}_s = [Q_x, Q_y]^t = \left[ \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{zy}) dz \right]^t \quad (\text{A-6c})$$

Compte tenu des déformations infinitésimales et finies, le vecteur global  $\{\varepsilon\}$  peut se décomposer en deux parties, une partie linéaire et une partie non linéaire :

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m \\ \hat{\varepsilon}_f \\ \hat{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} = \hat{\varepsilon}^0 + \hat{\varepsilon}^L \quad (\text{A-7a})$$

où les composantes linéaires de  $\hat{\varepsilon}^0$  sont :

$$\hat{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m^0 \\ \hat{\varepsilon}_f^0 \\ \hat{\varepsilon}_s^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-7b})$$

et les composants non linéaires de  $\hat{\varepsilon}^L$  sont :

$$\hat{\varepsilon}_L = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m^L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-7c})$$

### VI-A.1.2 ) Application du travail virtuel extérieur

Le travail virtuel extérieur d'un élément de plaque  $dw_{ex}$  représente l'énergie de déformation totale due à tous les efforts extérieurs qui le sollicite. Ainsi la seconde intégrale de l'équation (A-2) représente le travail externe dû aux forces de volumes qui s'écrit :

$$dw_{ex}^{fv} = \int_{A-e/2}^{e/2} \int \rho (du_{qx} + dv_y + dw_z) dz dA \quad (\text{A-8})$$

L'intégration explicite à travers l'épaisseur « t » permet de réécrire l'équation (VI-A-8) soit :

$$dw_{ex}^{fv} = \int_A d\hat{u}^t \hat{q} dA \quad (\text{A-9a})$$

où les déplacements de la surface moyenne  $\hat{u}$  sont :

$$\hat{U} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \theta_x, \theta_y]^T \quad (\text{A-9b})$$

et la force de volume global  $\hat{q}$  est :

$$\begin{aligned} \hat{q} &= [\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z, M_x, M_y]^T \\ &= \left[ \int_{-e/2}^{+e/2} \rho (q_x, q_y, q_z, -q_{xz}, -q_{yz}) dz \right]^T \end{aligned} \quad (\text{A-9c})$$

si la force de volume est constante à travers l'épaisseur  $\hat{q}$  devient simplement :

$$\hat{q} = [\rho q_x t, \rho q_y t, \rho q_z t, 0, 0]^T$$

et ou  $\rho q_{x,y,z}$  est la force de volume par unité de surface dans la direction x, y, z. Enfin le troisième intégral de l'équation (VI-A.2) qui représente le travail externe des surfaces peut être divisé en deux intégrales l'une sur la surface de la plaque ( $A_s$ ) et l'autre sur son extrémité ( $A_e$ ) fig. [VI.3] soit :

$$dw_{ex}^{fs} = \int_{A_s} du^t pdu + \int_{pe} du^t pedAe \quad (\text{A-10a})$$

ou la traction des bords  $p_e$  est donnée en terme de traction local  $p_n, p_t$  et  $p_z$  tel que :

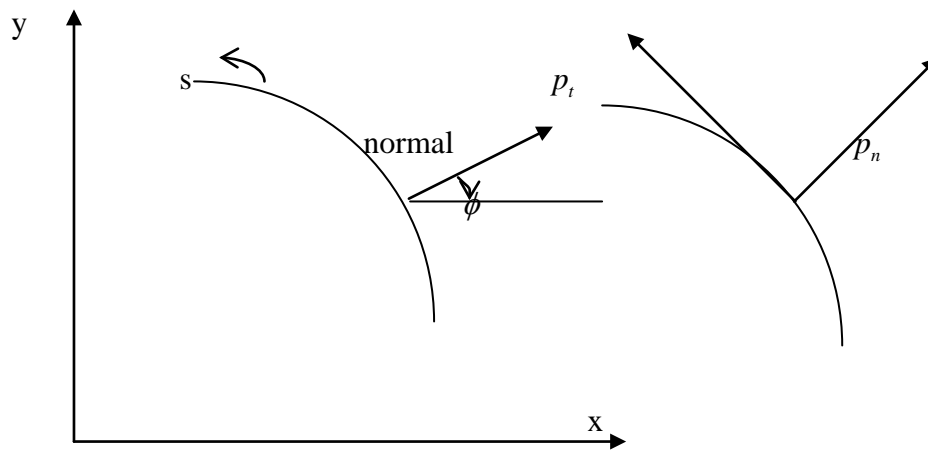
$$p_e = \begin{Bmatrix} p_{xe} \\ p_{ye} \\ p_{ze} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & +c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_n \\ p_t \\ p_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A-10b})$$

et traction sur la surface  $z = \pm e/2$  est

$$p_- = [p_x, p_y, p_z]^T \quad (\text{A-10c})$$

avec

$$c = \cos\phi \text{ et } s = \sin\phi$$



**Figure. [VI-3] : Traction des bords**

La substitution de  $u, v,$  et  $w$  de l'équation [VI.1] dans l'équation [10.a] et l'intégration sur l'épaisseur « $e$ » nous permet d'écrire le travail extérieur en terme de deux intégrales l'une de surface et l'autre curviligne c'est à dire :

$$dw_{ex}^{fs} = \int_{As} d\hat{u}^T \hat{\rho} da + \int_s d\hat{u}^T \rho e ds \quad (\text{A-11a})$$

où 
$$\hat{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z, \overline{M}_x, \overline{M}_y]^T \quad (\text{A-11b})$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_e &= [\hat{\rho}_x^e, \hat{\rho}_y^e, \hat{\rho}_z^e, \hat{M}_x^e, M_y^e]^T \\ &= \left[ \int_{-e/2}^{e/2} (\rho_x^e, \rho_y^e, \rho_z^e, -\rho_x^e z, -\rho_y^e z) dz \right]^T \end{aligned} \quad (\text{A-11c})$$

### VI-A.1.3) Travail virtuel total

Tous les développements qui ont été formulés ci-dessus vont nous permettre d'écrire le travail virtuel de l'équation [VI-2] en terme du déplacements de la «Surface moyenne» c'est à dire :

$$\dots\dots\dots \int_A d\hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} da = \int_A d\hat{u}^T \hat{q} da + \int_{As} d\hat{u}^T \hat{\rho} dda + \int_{ss} d\hat{u}^T \hat{\rho}_e \sigma ds \quad (\text{A-12})$$

### VI-A.2) Relations constitutives :

Pour un matériaux homogène, élastique et isotrope, la contrainte de l'équation (3) peut être reliev aux déformations de Green (2) par la relation suivante :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (\text{A-13a})$$

ou  $D$  est la matrice constitutive du matériau

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A-13.b})$$

La substitution de  $\varepsilon$  de l'équation (2) et l'intégration à travers l'épaisseur "e" va permettre de réécrire la contrainte résultante  $\hat{\sigma}$  de l'équation (A-5) en terme de déplacement dérivé ou déformation généralisée  $\hat{\varepsilon}$  de l'équation (A-7) tel que :

$$\hat{\sigma} = \hat{\Delta} \varepsilon \quad (\text{A-14a})$$

$$\text{où} \quad \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}_m & 0 & 0 \\ 0 & \hat{D}_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m \\ \hat{\varepsilon}_f \\ \hat{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} \quad (\text{A-14b})$$

$$\text{tel que } D_m = \frac{Et}{1-\nu^2} \bar{D} ; \hat{D}_f = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \bar{D} ; \hat{D}_s = \frac{Ge}{\alpha} I_2 \quad (\text{A-14c})$$

$$\text{avec } \bar{D} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} ; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A-14d})$$

Ou □ est le fac  
uniforme des contraintes de cisaillement .

### VI-A.3) Variation de la déformation :

Après avoir discrétisé les équations des travaux virtuels, il est nécessaire de considérer la variation de déformation  $d\hat{\varepsilon}$  qui n'est rien d'autre que la somme de la variation linéaire et non linéaire des déformations généralisées telle que :

$$d\hat{\varepsilon} = d\hat{\varepsilon}^0 + d\hat{\varepsilon}^L \quad (\text{A-15})$$

Comme  $\hat{\varepsilon}^0$  est une fonction linéaire de  $\hat{u}$  alors :

$$d\hat{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \partial, x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial, y & 0 & 0 & 0 \\ \partial, y & \partial, x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial, x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial, y \\ 0 & 0 & 0 & -\partial, y & -\partial, x \\ 0 & 0 & \partial, x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial, y & 0 & -1 \end{bmatrix} d \left\{ \begin{array}{l} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\} \quad (\text{A-16})$$

d'un autre côté si on suppose la variation de u et v par rapport à x et y nulle, et que l'on prend en considération seulement les variations du déplacement transverse w, alors on peut exprimer le vecteur de déformation non linéaire  $\hat{\varepsilon}_m^L$  en fonction de deux matrices  $A_\theta$  et  $\theta$  soit :

$$\hat{\varepsilon}_m^L = A_\theta \theta \quad (\text{A-17a})$$

$$\text{avec : } A_\theta = \begin{bmatrix} \hat{w}, x & 0 \\ 0 & \hat{w}, y \\ \hat{w}, y & \hat{w}, x \end{bmatrix} \quad (\text{A-17b})$$

$$\text{et } \theta = [\hat{w}, x \quad \hat{w}, y]^T \quad (\text{A-17c})$$

(qui représente le vecteur gradient déplacement)

Donc la variation des composantes non linéaires des déformations membraner est obtenue à partir de l'équation (A-1e) et des équations (A-17) en terme de gradient  $d\theta$  soit :

$$d\varepsilon_m^L = A_\theta d\theta \quad (\text{A-18a})$$

où

$$d\theta = d[\hat{w}, x \quad \hat{w}, y]^T \quad (\text{A-18b})$$

#### VI-A.4) Formulation par éléments finis de l'équation d'équilibre

L'application du théorème des travaux virtuels nous permet d'exprimer l'équilibre d'un élément ou la stationnarité de son énergie de déformation tel que le premier membre est le travail virtuel des forces intérieures et le second membre est le travail virtuel des forces extérieures soit :

$$d\hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} dA = \int_A d\hat{u}^T \hat{q} dA + \int_{As} d\hat{u}^T \hat{\rho} ds + \int_s d\hat{u}^T \rho_e ds \quad (\text{A-19})$$

Il s'agit donc maintenant discrétiser cette équation dans le cadre des éléments finis en exprimant celle-ci en fonction des déplacements nodaux.

Soit le déplacement  $\hat{u}$  à l'intérieur de l'élément est donné en fonction de n déplacement discret tel que :

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n [N_i I_5] \delta_i \quad (\text{A-20a})$$

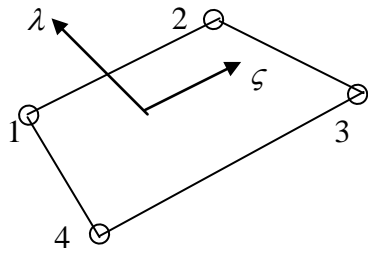
$N_i$  est la fonction de forme de l'élément choisi fig. [VI-4] et

$I_5$  est la matrice identité [5 x 5]

$\delta_i$  déplacement nodal

avec :

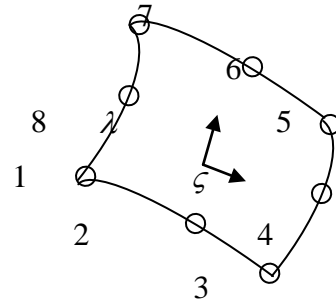
$$\delta_i = [\hat{u}_i, \hat{v}_i, \hat{w}_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T$$



LINEAIRE [LN]

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \zeta_0) + (1 + \eta_0)$$

$$\zeta_0 = \zeta \zeta_i \quad \eta_0 = \eta \eta_i$$



SERENDIP [QS]

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \zeta_0)(1 + \eta_0)(\eta_0 + \zeta_0 - 1)$$

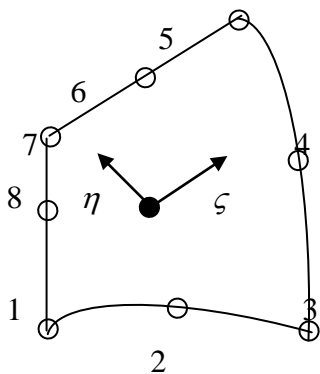
$$i = 1, 3, 5, 7$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)$$

$$i = 2, 6$$

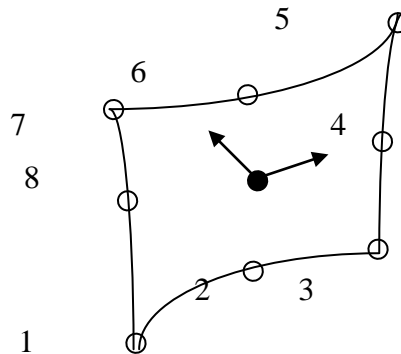
$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \zeta_0)(1 + \eta)$$

$$i = 4, 8$$



LAGRANGIEN [QL]

$$[Q_s] + \text{Fonction bulle } N_g = (1 - \zeta^2)(1 - \eta^2)$$



HETEROSIS (QH)

$$[QL] + (w_g = 0)$$

**Figure. (VI-4) : Élément plaque de Mindlin**

L'équation (VI-20a) peut être écrite comme suit :

$$\hat{u} = N\delta$$

(A-20b)

$$\text{où} \quad \delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \cdot \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (\text{A-20c})$$

Le déplacement virtuel dû est donc écrit en terme de déplacement nodal virtuel et  $\delta$  de l'équation (A-20c) tel que :

$$d\hat{u} = Nd\delta \quad (\text{A-21a})$$

$$\text{où} \quad d\delta = d \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (\text{A-21b})$$

de la même façon on peut réécrire le gradient de déplacement  $\theta$  de l'équation [A-17c] en terme de déplacement nodal

$$\theta = G\delta \quad (\text{A-22a})$$

où

$$G = [G_1, G_1, \dots, G_n] \quad (\text{A-22b})$$

avec

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-22c})$$

et donc le gradient virtuel de l'équation (A-18b) peut se reformuler comme suit :

$$d\theta = Gd\delta \quad (\text{A-23})$$

Le vecteur déformation de Green généralisé  $\hat{\varepsilon}$  de l'équation (A-7a) est donné en terme de déplacement nodal tel que :

$$\hat{\varepsilon} = \left[ B_0 + \frac{1}{2} B_L(\delta) \right]^\delta \quad (\text{A-24})$$

telle que  $B_0$  est la matrice de transformation qui donne les déformations linéaires  $\varepsilon_m^0, \varepsilon_f^0, \varepsilon_s^0$  et  $B_L$  la matrice de transformation non linéaire qui dépend de  $\delta$  et exprime les déformations non linéaires  $\varepsilon_m^L$  est elle même quadratique et dépendant de  $\delta$ .

#### VI-A.4.1) Formation de $B_0$ et $B_L$

A ce stade de l'étude on doit obligatoirement formulé  $B_0$  et  $B_L$  qui sont rien d'autres que la forme matricielle des déformations  $\hat{\varepsilon}_0$  et  $\hat{\varepsilon}_m^L$ .

Ainsi la matrice  $B_0$  est écrite en terme de sous matrice  $B_{0i}$  telle que :

$$B_0 = [B_{01}, B_{02}, \dots, B_{0n}] \quad (\text{A-25a})$$

avec

$$B_{0i} = \begin{bmatrix} B_{0i}^m & 0 \\ 0 & B_{0i}^f \\ 0 & B_{0i}^s \end{bmatrix} \quad (\text{A-25b})$$

Et où les composants de chaque matrice sont :

\* Membranaire

$$B_{0i}^m = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (\text{A-25c})$$

\* Flexionnelle :

$$B_{0i}^f = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (\text{A-25d})$$

\* cisaillement

$$B_{0i}^s = \begin{bmatrix} N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (\text{A-25e})$$

Et la matrice  $B_L$  est écrite en terme de sous matrice aussi  $B_{Li}$  soit :

$$B_L = [B_{L1}, \dots, B_{Ln}] \quad (\text{A-25f})$$

avec

$$B_{Li} = \begin{bmatrix} A_\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G_i \quad (\text{A-25g})$$

#### VI-A.4.2) Formation du gradient de déformation $d\hat{\varepsilon}$ :

En substituant les équations (A-21a) et (A-25) dans (A-16) et (A-18a) respectivement on a la variation de la déformation en terme de déplacement virtuel nodal et  $d\delta$  telle que :

$$d\hat{\varepsilon} = Bd\delta \quad (\text{A-26a})$$

et où

$$B = B_0 + B_L(\delta) \quad (\text{A-26b})$$

### VI-A.4.3) Discrétisation de l'équation des travaux virtuels :

Le travail virtuel de l'équation (A-12) est discrétisé pour un élément quelconque en substituant l'équation (A-21a) et (A-26a) pour  $d\hat{\varepsilon}$  et  $d\hat{\varepsilon}$  respectivement et on a :

$$d\delta^T \left[ \int_A B^T \hat{\sigma} da - R \right] = 0 \quad (\text{A-27a})$$

où la force nodale équivalente R due aux forces de volume et de surface est :

$$R = \int_A N^T \hat{q} da + \int_{A_s} N^T \hat{\rho} da + \int_s N^T \rho_e ds \quad (\text{A-27b})$$

### VI-A.4.4) Formulation de l'équation d'équilibre :

Si on considère que le déplacement virtuel  $d\delta$  est quelconque, on peut donc exprimer l'équation d'équilibre non linéaire d'un élément comme suit :

$$\psi(\delta) = \int_A B^T \hat{\sigma} da - R = 0 \quad (\text{A-28})$$

### VI - A.5 ) Solution de l'équation non linéaire d'équilibre

Les résolutions du système non linéaire de l'équation [A-28], c'est chercher le vecteur déplacement  $\delta$  qui rend le résidu  $\psi(\delta)$  aussi proche que possible du zéro. La solution exacte rend le résidu nul.

La recherche de la solution  $\delta$  se fait de manière itérative pour la majorité des algorithmes de résolution (comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre précédent).

Le choix porté sur une méthode de résolution dépend essentiellement sur plusieurs facteurs dont :

- la précision et la rapidité de convergence.
- Le risque de divergence.
- l'existence d'une ou plusieurs solutions ... etc.

À noter qu'il n'existe pas de méthode générale valable pour tous les cas. Cependant, le procédé de résolution doit s'adapter à une classe de problème donnée (stationnaire, non stationnaire... etc.)

Les méthodes de base les plus connus sont les suivantes :

- procédé de substitution
- procédé de Newton – Raphston
- procédé incrémental.

Notre choix a été porté ici pour ce type de non linéarité sur la méthode de *Newton-Raphston* qui est par expérience la plus utilisée.

### **VI-A.5.1) Méthode de Newton–Raphston :**

Cette méthode consiste à résoudre une série d'équation linéaire jusqu'à convergence de la solution  $\delta$ .

Ainsi, supposons que l'estimation du déplacement initial  $\delta_i$  pour un déplacement total, donne une force résiduelle  $\psi(\delta_i) \neq 0$  alors pour améliorer la valeur  $\delta_{i+1}$  on développe le résidu  $\psi(\delta_{i+1})$  en série de Taylor au voisinage de  $\delta_i$  tels que :

$$\psi(\delta_{i+1}) = \psi(\delta_i) + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \delta}(\delta_i) \right] \Delta \delta_i + \dots = 0 \quad (\text{A-29a})$$

D'où en négligeant les termes d'ordre inférieur à 1 on a :

$$-\left[ \frac{\partial \psi(\delta_i)}{\partial \delta} \right] \Delta \delta_i = \psi(\delta_i) \quad (\text{A-29b})$$

où  $[K_T]$  est définit comme la matrice de rigidité tangente évaluée pour  $\delta_i$  et donnée par :

$$[K_T] = \left[ \frac{\partial \psi(\delta_i)}{\partial \delta} \right] \quad (\text{A-30})$$

L'équation (A-29) est l'équation linéaire d'équilibre incrémentale qui donne l'approximation linéarisée de la relation entre la force résiduelle et l'incrément de déplacement  $\Delta \delta_i$ . Et ou l'amélioration de la solution est telle que :

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \Delta \delta_i \quad (\text{A-31})$$

Ainsi, l'équation (A-29) et (A-31) représentent la solution de Newton–Raphston pour l'équation non linéaire (A-28) et ou  $\psi(\delta_i)$  et  $\Delta \delta_i$  sont les mesures de la convergence de la solution.

Le changement R est toujours appliqué à chaque incrément de déplacement pour améliorer la stabilité numérique et pour obtenir des résultats intermédiaires.

**Remarque :**

Tandis que pour la méthode de Newton – Raphston le calcul de (N – R) et l’inversion de  $[K_T]$  est systématique. Pour la méthode de Newton–Raphston modifiée (KT<sub>2</sub>), la matrice de rigidité tangente  $[K_T]$  est assemblée et décomposée une seule fois.

L’utilisation de l’une ou l’autre, dépend du type de non linéarité; telle que pour les problèmes fortement non linéaires la méthode de Newton–Raphston est plus souvent utilisée car elle converge en général plus rapidement.

**VI - A.6) La matrice de rigidité tangente**

La matrice tangente globale  $[K_T]$  est obtenue en pratique par assemblage des matrices élémentaires tangentes  $[K_T]$ . Elle est donnée par l’équation (A-30) qui s’écrit tels que :

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \delta_i} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \delta_i} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \delta_m} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \delta_i} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \delta_i} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \delta_m} \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial \delta_i} & \frac{\partial \psi_m}{\partial \delta_i} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} \quad (\text{A-32})$$

où m est le nombre de degré de liberté par élément.

Le résidu  $\psi(\delta)$  de l’équation (A-28) peut être étendu comme suit :

$$\psi(\delta) = \int_A \left\{ \begin{array}{c} \sum_{K=1}^8 B_{K1} \sigma_K \\ \sum_{K=1}^8 B_{K2} \sigma_K \\ \vdots \\ \sum_{K=1}^8 B_{Km} \sigma_K \end{array} \right\} da - R = 0 \quad (\text{A-33})$$

avec  $\sigma_K$  étant une composante de la contrainte résultante  $\hat{\sigma}$  qui s’écrit pour des raisons de commodité :

$$\hat{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_8]^T \quad (\text{A-34})$$

La dérivée de l’expression  $\psi_i$  par rapport aux variables nodales  $\delta_j$  nous donne un terme  $K_{Tij}$  de la matrice globale  $[K_T]$  soit :

$$K_{Tij} = \frac{\partial \psi}{\partial \delta_j} = \int_A \left[ \sum_{K=1}^8 B_{Ki} \frac{\partial \sigma_K}{\partial \delta_j} + \sum_{K=1}^8 \sigma_{Ki} \frac{\partial B_K}{\partial \delta_j} \right] da \quad (\text{A-35})$$

et où  $\left( \frac{\partial R_i}{\partial \delta_j} \right) = 0$  pour un chargement conservatif.

Le développement de la matrice tangente nous permet d'écrire  $K_T$  comme suit (Voir Annexe A) :

$$K_T = \int_A B \hat{\Delta} B da + \int_A G^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} G da \quad (\text{A-36})$$

La substitution de B,  $\hat{D}$  et G de l'équation (A-27b), (A-14b) et (A-22b) respectivement donne :

$$K_T = K_0 + K_L + K_\sigma \quad (\text{A-37a})$$

- où la matrice de rigidité linéaire élastique  $K_0$  est :

$$K_0 = \int_A B_0^T \hat{\Delta} B_0 da \quad (\text{A-37b})$$

- la matrice des déplacements initiaux  $K_L$  qui est quadratiquement dépendante du déplacement  $\delta$  est :

$$K_L = \int_A B_0^T \hat{D} B_L da + \int_A B_L^T \hat{D} B_0 da + \int_A B_L^T \hat{D} B_L da \quad (\text{A-37c})$$

- la matrice des contraintes initiales  $K_\sigma$  est (Voir Annexe A)

$$K_\sigma = \int_A G^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} G da \quad (\text{A-37d})$$

### VI-A.6.1) Formulation de la matrice linéaire élastique $[K_0]$

Pour un calcul efficace, il est nécessaire de considérer la variation des submatrices nodales contenues dans l'équation (A-37a) qui permet d'éviter la multiplication des termes nuls.

L'utilisation de l'équation (A-25c) pour formuler la submatrice  $B_{0i}$  permet aux termes de la matrice linéaire  $K_{0ij}$  d'être exprimée en fonction des termes de l'effet membranaire, flexionnel, et de cisaillement soit :

$$K_{0ij} = \int_A \begin{bmatrix} (B_{0j}^m)^T \hat{D}_m (B_{0j}^m)^T & 0 \\ 0 & (B_{0i}^f)^T \hat{D}_f (B_{0j}^f)^T + (B_{0i}^s)^T \hat{D}_s (B_{0j}^s)^T \end{bmatrix} \quad (\text{A-38})$$

ou  $i, j = 1 \text{ à } n$

### VI-A.6.2) Formulation de la matrice non-linéaire $[K_L]$

En utilisant les équations (A-25c) et (A-25h) dans l'équation (A-37c), on obtient la matrice des déplacements initiaux  $K_{Lij}$  soit :

$$K_{Lij} = \int_A \begin{bmatrix} 0 & (B_{0i}^m)^T \hat{D}_m (B_{Lj}^m) \\ (\hat{B}_{Li}^m)^T \hat{D}_m (B_{0j}^m) & (\hat{B}_{Li}^m)^T \hat{D}_m (\hat{B}_{Li}^m) \end{bmatrix} da \quad (\text{A-39a})$$

dans laquelle :

$$\hat{B}_{Li}^m = A_\theta G_i^f \quad (\text{A-39b})$$

et  $G_i^f$  est :

$$G_i^f = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-39c})$$

### VI-A.6.3) Formulation de la matrice géométrique $[K_\sigma]$

La prédominance des termes nuls dans la submatrice  $G_i$  de l'équation (A-22c), indique que la matrice nodale des contraintes initiales  $K_{\sigma lj}$  est beaucoup mieux calculée en utilisant les termes non nuls seulement à la position (3x3) dans la matrice 5x5 telle que :

$$(K_{\sigma ij})_{3 \times 3} = \int_A [N_{i,x} N_x N_{j,x} + N_{i,y} N_y N_{j,y} + N_{xy} (N_{i,x} N_{j,y} + N_{i,y} N_{j,x})] da \quad (\text{A-40})$$

VI-A.7) Le chargement nodal équivalent dû aux contraintes internes :

Pour évaluer le vecteur nodal résiduel  $\psi(\delta)$  de l'équation (A-28) on doit calculer la force nodale équivalente due aux contraintes internes résultantes  $\hat{\sigma}$  qui s'écrit pour un nœud donné (i) comme suit :

$$P_i = \int_A \left\{ \begin{array}{l} (B_{0i}^m)^T \hat{\sigma}_m \\ (\hat{B}_{Li}^m)^T \hat{\sigma}_m + (\hat{B}_{Li}^f)^T \hat{\sigma}_f + (\hat{B}_{Li}^s)^T \hat{\sigma}_s \end{array} \right\} da \quad (\text{A-41})$$

## VI-B. Analyse de la non - linéarité avec prise en compte de la distorsion des déplacements u et v :

[H.NL. 2]

Dans le cas des petites déformations, on néglige généralement l'effet de la flexion membranaire. *Cependant dans la cas de grands déplacements et comme nous l'avons déjà vu dans l'approche analytique ainsi que l'approche numérique des plaques, l'énergie de déformation membranaire n'est plus négligeable* .Ainsi donc, il devient nécessaire de prendre en compte cette déformation et voir le degré de son influence sur la déformation de la plaque et sur l'effort de cisaillement transverse qui est induit par cette déflexion supplémentaire.

Dans le même ordre d'idée on va se proposer d'étudier *l'influence de la distorsion de u et v en x et y dans le plan moyen; et ce contrairement aux hypothèses de Von Karman que nous avons déjà développé et qui néglige leurs effets*.

*Pour pouvoir traiter ce problème par la méthode des éléments finis, il faut impérativement poser l'équation d'équilibre non linéaire en premier lieu à l'instar de toutes les autres approches, et en second lieu discrétiser cette même équation pour enfin pouvoir la traiter numériquement en la résolvant par l'une des méthodes de résolution non linéaire que nous avons déjà vu dans les chapitres précédents*.

Ainsi, le développement de cette approche est comme la précédente basée essentiellement sur le vecteur de déformation de **Green** développé pour les plaques en formulation de **Mindlin** qui s'écrit comme suit :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{cases} u, x + \frac{1}{2}(u, x)^2 + \frac{1}{2}(v, x)^2 + \frac{1}{2}(w, x)^2 \\ v, y + \frac{1}{2}(u, y)^2 + \frac{1}{2}(v, y)^2 + \frac{1}{2}(w, y)^2 \\ u, y + v, x + u, x u, y + v, x v, y + w, x w, y \\ w, x + u, z + u, x u, z + v, x v, z + w, x w, z \\ w, y + v, z + u, y u, z + v, y v, z + w, y w, z \end{cases} \quad \text{(B-1a)}$$

On développe le vecteur déformation en fonction du déplacement du plan moyen  $\hat{U} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \theta_x, \theta_y)$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \hat{U}, x - z\theta_{x,x} + \left[ \frac{1}{2}(\hat{u}, x)^2 + \frac{1}{2}(\hat{v}, x)^2 + \frac{1}{2}(\hat{w}, x)^2 \right] - z[\hat{u}, x \theta_{x,x} + \hat{v}, x \theta_{y,x}] + \frac{1}{2}z^2[(\theta_{x,x})^2 + (\theta_{y,x})^2] \\
 \varepsilon_y &= \hat{v}, y - z\theta_{y,y} + \left[ \frac{1}{2}(\hat{u}, y)^2 + \frac{1}{2}(\hat{v}, y)^2 + \frac{1}{2}(\hat{w}, y)^2 \right] - z[\hat{u}, y \theta_{x,y} + \hat{v}, y \theta_{y,y}] + \frac{1}{2}z^2[(\theta_{x,y})^2 + (\theta_{y,y})^2] \\
 \gamma_{xy} &= \hat{u}, y + \hat{v}, x - z[\theta_{x,y} + \theta_{y,x}] + [\hat{u}, x \hat{u}, y + \hat{v}, x \hat{v}, y + \hat{w}, x \hat{w}, y] - z[\hat{u}, y \theta_{x,x} + \hat{u}, x \theta_{x,y} + \hat{v}, y \theta_{y,x} + \hat{v}, x \theta_{y,y}] \\
 &\quad + z^2[\theta_{x,x} \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \theta_{y,y}] \\
 \gamma_{xz} &= \hat{w}, x - \theta_x - (\hat{u}, x \theta_x + \hat{v}, x \theta_y) + z[\theta_{x,x} \theta_x + \theta_{x,x} \theta_y] \\
 \gamma_{yz} &= \hat{w}, y - \theta_y - (\hat{u}, y \theta_x + \hat{v}, y \theta_y) + z[\theta_{x,y} \theta_y + \theta_{y,y} \theta_y]
 \end{aligned}$$

**(B-1b)**

Si on pose

$$\varepsilon_m^0 = \begin{cases} \hat{u}, x \\ \hat{v}, y \\ \hat{u}, y + \hat{v}, x \end{cases} ; \varepsilon_f^0 = - \begin{cases} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{cases} ; \varepsilon_m^0 = \begin{cases} w, x - \theta_x \\ w, y - \theta_y \end{cases} \quad \text{(B-1c)}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{m_1}^L &= + \begin{cases} \frac{1}{2}[(\hat{u}, x)^2 + (\hat{v}, x)^2 + (\hat{w}, x)^2] \\ \frac{1}{2}[(\hat{u}, y)^2 + (\hat{v}, y)^2 + (\hat{w}, y)^2] \\ (\hat{w}, x \hat{w}, y) + \hat{u}, x \hat{u}, y + \hat{v}, x \hat{v}, y \end{cases} \\
 \varepsilon_{m_{12}}^L &= + \begin{cases} \hat{u}, x \theta_{x,x} + \hat{v}, x \theta_{y,x} \\ \hat{u}, y \theta_{x,y} + \hat{v}, y \theta_{y,y} \\ \hat{u}, y \theta_{x,x} + \hat{u}, x \theta_{x,y} + \hat{v}, y \theta_{y,x} + \hat{v}, x \theta_{y,y} \end{cases} \\
 \varepsilon_{m_{31}}^L &= + \begin{cases} \frac{1}{2}[(\theta_{x,x})^2 + (\theta_{y,x})^2] \\ \frac{1}{2}[(\theta_{x,y})^2 + (\theta_{y,y})^2] \\ \theta_{x,y} \theta_{x,x} + \theta_{y,x} \theta_{y,y} \end{cases} \quad \text{(B-1d)} \\
 \varepsilon_{s_1}^L &= - \begin{cases} \hat{u}, x \theta_x + \hat{v}, x \theta_y \\ \hat{u}, y \theta_x + \hat{v}, y \theta_y \end{cases} \\
 \varepsilon_{s_2}^L &= + \begin{cases} \theta_{x,x} \theta_x + \theta_{y,x} \theta_y \\ \theta_{x,x} \theta_y + \theta_{x,y} \theta_y \end{cases}
 \end{aligned}$$

 alors on peut réécrire  $\varepsilon$  sous forme suivante :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m^0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z\varepsilon_f^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{m1}^L \\ \varepsilon_{s1}^L \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{m2}^L \\ \varepsilon_{s2}^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z^2\varepsilon_{m3}^L \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B-2})$$

**Les contraintes :**

Sont toujours celles de Piola–Kirchhoff associées aux déformations de Green :

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{zy}]^T \quad (\text{B-3})$$

## VI - B.1) Équation des travaux virtuels de Lagrange

Une des manières de déterminer l'équation d'équilibre non linéaire est d'utiliser le théorème de travaux virtuels de Lagrange qui est formulé en terme continu dans le *système de coordonnées Lagrangien* accompagné de l'*hypothèse de petites déformations et de charge conservative* [14].

$$\int_V d\varepsilon^T \sigma dv = \int_V \rho du^T q dv + \int_a du^T \rho da \quad (\text{B-4})$$

où

$v$  est un volume indéformable.

$\sigma$  la contrainte de Piola–Kirchhoff.

$d\varepsilon$  la déformation virtuelle de Green due aux déplacements virtuels  $d_u$ .

$\rho$  la densité massique.

$q$  force de volume par unité de masse.

$P$  force de surface agissant sur une surface indéformable  $a$ .

Le travail des forces internes  $dw_i$  peut s'écrire en intégral sur la surface  $A$  et l'épaisseur  $t$  tels que :

$$dw_i = \int_{A-t/2}^{t/2} (d\varepsilon_x \sigma_x + d\varepsilon_y \sigma_y + d\gamma_{xy} \sigma_{xy} + d\gamma_{xz} \sigma_{xz} + d\delta_{yz} \sigma_{yz}) dz da \quad (\text{B-5})$$

En substituant l'expression de déformation  $\varepsilon$  de l'équation (B-2) dans l'équation (B-5) et en intégrant à travers l'épaisseur « e » on obtient :

$$\int_a^{\int_{-e/2}^{+e/2}} d\varepsilon^T \sigma dv = \int_a^{\int_{-e/2}^{+e/2}} \left[ \begin{Bmatrix} \varepsilon_m^0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T + \begin{Bmatrix} z\varepsilon_f^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix}^T + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{m1}^L \\ \varepsilon_{s1}^L \end{Bmatrix}^T + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{m2}^L \\ \varepsilon_{s2}^L \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{m3}^L \\ 0 \end{Bmatrix} \right] - \sigma dz da \quad (\text{B-6a})$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a d\varepsilon_m^0 \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}) dz da + \int_a d\varepsilon_f^0 \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}) z dz da \\
 &+ \int_a d\varepsilon_{m1}^L \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}) dz da + \int_a d\varepsilon_{m2}^L \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}) dz da \\
 &+ \int_a d\varepsilon_{m3}^L \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}) z^2 dz da + \int_a d\varepsilon_s^0 \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_{xz} \sigma_{yz}) dz \\
 &+ \int_a d\varepsilon_{s13}^L \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_{xz} \sigma_{yz}) dz da + \int_a d\varepsilon_{s23}^L \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_{xz} \sigma_{yz}) z dz da
 \end{aligned} \tag{B-6b}$$

après intégration sur l'épaisseur 'e' on obtient (voir annexe C) :

$$\begin{aligned}
 dW_i &= \int_a d\varepsilon_m^0 \hat{\sigma}_m da + \int_a d\varepsilon_f^0 \hat{\sigma}_f da + \int_a d\varepsilon_{m1}^L \hat{\sigma}_m da + \int_a d\varepsilon_{m2}^L \hat{\sigma}_f da + \int_a d\varepsilon_s^0 \hat{\sigma}_s da + \int_a d\varepsilon_{s1} \hat{\sigma}_s da \\
 &+ t/2 \int_a d\varepsilon_{m3} \hat{\sigma}_f da + t/2 \int_a d\varepsilon_{s2} \hat{\sigma}_s da
 \end{aligned} \tag{B-6c}$$

telles que :

$$\hat{\sigma}_m = [N_x \ N_y \ N_{xy}]^T = \left[ \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}) dz \right]^T \tag{B-7a}$$

$$\hat{\sigma}_f = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T = \left[ \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}) z dz \right]^T \tag{B-7b}$$

$$\hat{\sigma}_s = [Q_x \ Q_y]^T = \left[ \int_{-e/2}^{+e/2} (\sigma_{xz} \sigma_{yz}) dz \right]^T \tag{B-7c}$$

Ceci donc nous permet d'écrire le vecteur de déformation généralisé  $\hat{\varepsilon}$  correspondant aux vecteurs contraintes  $\hat{\sigma}$  de l'équation déduite :

$$dW_i = \int_A d\hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} da = R \tag{B-8}$$

tels que :

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\sigma}_{fm} \\ \hat{\sigma}_s \end{Bmatrix} \tag{B-9}$$

et :

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m \\ \hat{\varepsilon}_{fm} \\ \hat{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} = \hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_L \tag{B-10}$$

où les composantes linéaires de  $\hat{\varepsilon}_0$  sont :

$$\hat{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m^0 \\ \varepsilon_f^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B-11a})$$

et les composantes non linéaires de  $\hat{\varepsilon}^L$  sont :

$$\hat{\varepsilon}_L = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{m1}^L \\ \varepsilon_{m2}^L \\ \varepsilon_{s1}^L \end{Bmatrix} + e/2 \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{m3}^L \\ \varepsilon_{s2}^L \end{Bmatrix} \quad (\text{B-11b})$$

Si on pose :

$$\begin{cases} \varepsilon_m^L = \varepsilon_m^L \\ \varepsilon_f^L = \varepsilon_f^L + e/2 \varepsilon_{m3}^L \\ \varepsilon_s^L = \varepsilon_s^L + e/2 \varepsilon_{s2}^L \end{cases}$$

alors :

$$\hat{\varepsilon}_L = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m^L \\ \hat{\varepsilon}_m^L \\ \hat{\varepsilon}_s^{fL} \end{Bmatrix} \quad (\text{B-11c})$$

## VI-B.2) Relation Contrainte-Déformation :

Pour un matériaux linéaire élastique homogène avec la contrainte plane ( $\sigma_z = 0$ ) les contraintes de l'équation (B-3) liées aux déformations de Green .

$$\sigma = D\varepsilon \quad (\text{B-12a})$$

En substituant  $\varepsilon$  par les équations (B-2) et en intégrant à travers l'épaisseur  $t$ , on obtient un vecteur contrainte généralisé  $\hat{\sigma}$  exprimer en fonction de la déformation généralisée  $\hat{\varepsilon}$  :

$$\hat{\sigma} = \hat{D}\hat{\varepsilon} \quad (\text{B-12b})$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}_m & 0 & 0 \\ 0 & \hat{D}_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m \\ \hat{\varepsilon}_{ff} \\ \hat{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} \quad (\text{B-12c})$$

et ou  $\hat{D}_m, \hat{D}_f, \hat{D}_s$  sont les matrices d'élasticité membranaire, flexionnelle et de cisaillement (respectivement).

### VI-B.3) La variation de déformation

Dans l'équation (B-12), on a défini le vecteur contrainte généralisé. Il nous reste donc à définir la variation de déformation due aux déplacements virtuels  $d\hat{u}$  pour nous permettre enfin de discrétiser l'équation des travaux virtuels .

Ainsi par définition la déformation  $\hat{\varepsilon}$  s'écrit::

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}_L \tag{B-13}$$

On peut donc écrire la variation  $d\hat{\varepsilon}$  comme suit :

$$d\hat{\varepsilon} = d\hat{\varepsilon}_0 + d\hat{\varepsilon}_L \tag{B-14}$$

avec pour la partie linéaire :

$$d\hat{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \partial_{,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{,y} & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{,y} & \partial_{,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_{,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_{,y} \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_{,y} & -\partial_{,x} \\ 0 & 0 & \partial_{,x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{,y} & 0 & -1 \end{bmatrix} d \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \tag{B-15a}$$

Et pour la partie non linéaire on a :

$$d\hat{\varepsilon}_L = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_m^L \\ d\varepsilon_f^L \\ d\varepsilon_s^L \end{Bmatrix} \tag{B-15b}$$

Pour pouvoir traiter ce problème il faut impérativement mettre la formulation non linéaire sous forme matricielle de telle manière a pouvoir la traiter numériquement .

**a) déformation membranaire**

$$\varepsilon_m^L = 1/2A\theta = 1/2 \begin{bmatrix} u,x & 0 & v,x & 0 & w,x & 0 \\ 0 & u,y & 0 & v,y & 0 & w,y \\ u,y & u,x & v,y & v,x & w,y & w,x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u,x \\ u,y \\ v,x \\ v,y \\ w,x \\ w,y \end{Bmatrix} \quad (\text{B-16})$$

**16)**

**b) deformation de flexion**

$$\begin{aligned} \varepsilon_f^L &= \varepsilon_{m2}^L + e/2\varepsilon_{m3}^L = 1/2[H1]\{q\} + 1/2[H2]\{q\} \\ &= -1/2 \begin{bmatrix} 2u,x & 0 & 2v,x & 0 \\ 0 & 2u,y & 0 & 2v,y \\ 2u,y & 2u,x & 2v,y & 2v,x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,x} \\ \theta_{y,y} \end{Bmatrix} + e/4 \begin{bmatrix} \theta_{x,x} & 0 & \theta_{y,x} & 0 \\ 0 & \theta_{x,y} & 0 & \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} & \theta_{x,x} & \theta_{y,y} & \theta_{y,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,x} \\ \theta_{y,y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

**c) deformation de cisaillement**

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^L &= \varepsilon_{s1}^L + e/2\varepsilon_{s2}^L = 1/2[W1]\{X\} + 1/2[W2]\{X\} \\ &= -1/2 \begin{bmatrix} 2u,x & 2v,x \\ 2u,y & 2v,y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + e/2 \begin{bmatrix} \theta_{x,x} & \theta_{y,x} \\ \theta_{y,y} & \theta_{y,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-18})$$

Si les gradients de déplacements en fonction de  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \theta_x$  et  $\theta_y$  s'écrivent

Comme suit:

$$\begin{aligned} \theta &= [\hat{u},x \ \hat{u},y \ \hat{v},x \ \hat{v},y \ \hat{w},x \ \hat{w},y]^T \\ q &= [\theta_{x,x} \ \theta_{x,y} \ \theta_{y,x} \ \theta_{y,y}]^T \\ X &= [\theta_x \ \theta_y]^T \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

Alors la variation des composantes non linéaires s'exprime en fonction des gradients virtuels  $d\theta, dq$  et  $dX$  pour la variation non linéaire du cisaillement

### VI-B.4) Formulation par éléments finis de l'équation d'équilibre

La formulation du déplacement  $\hat{u}$  est toujours exprimée en fonction du déplacement nodal  $\delta$  tels que :

$$\hat{u} = \sum_i^n [N_i I_5] \delta_i \quad (\text{B-20})$$

ou :

$N_i$  est la fonction de forme

$I_5$  est la matrice identité 5x5

$\delta_i$  est le déplacement nodal qui s'écrit :

$$\delta_i = [\hat{u}_i, \hat{v}_i, \hat{w}_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T \quad (\text{B-21})$$

l'équation (B-20) peut s'écrire plus simplement

$$\hat{u} = N\delta \quad (\text{B-22})$$

où

$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (\text{B-23})$$

Le déplacement virtuel  $d\hat{u}$  est exprimé en fonction du déplacement nodal virtuel telle que :

$$d\hat{u} = N d\delta \quad \text{où} \quad d\delta = d \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (\text{B-24})$$

Après avoir formulé le déplacement  $\hat{u}$  en fonction du déplacement nodal  $\delta$  on peut donc maintenant reformer le gradient de déplacement  $\theta, q$  en fonction du déplacement nodal  $\delta$  et de la dérivée des fonctions de forme tel que pour :

**\* l'état membranaire**

$$\{\theta\} = [G1]\{\delta\} + [G2]\{\delta\} = [G]\{\delta\} \quad (\text{B-25})$$

avec

$$\begin{aligned}
 [G] &= \begin{bmatrix} N_{ix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [G1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [G2] &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B-26}$$

le gradient de déplacement de l'équation (B-15) s'écrit en terme de gradient virtuel en fonction des déplacements nodaux telle que pour:

**\* l'effet membranaire :**

$$d\{\theta\} = [G]d\{\delta\} \tag{B-27}$$

**\*L'effet de flexion :**

$$\{q\} = [L]\{\delta\} \tag{B-28}$$

avec

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} \end{bmatrix} \tag{B-29}$$

le gradient du déplacement de l'équation (B-15c) s'écrit en fonction du gradient virtuel des déplacement nodaux :

$$d\{q\} = [L]d\{\delta\} \tag{B-30}$$

***l'effet de cisaillement :***

$$\{X\} = [K]\{\delta\} \tag{B-31}$$

avec

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Ni & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ni \end{bmatrix} \quad (\text{B-32})$$

le gradient du déplacement de l'équation (B-19) s'écrit en fonction du gradient virtuel des déplacements nodaux :

$$d\{X\} = [K]d\{\delta\} \quad (\text{B-33})$$

A partir de là, on peut exprimer le vecteur de déformation généralisé  $\hat{\varepsilon}$  en terme de déplacement nodal  $\delta$  soit :

$$\hat{\varepsilon} = [B_0 + 1/2B_L(\delta)] \delta \quad (\text{B-34})$$

et où  $B_0$  est la matrice de déformation linéaire et  $B_L$  est la matrice de déformation non linéaire qui dépend toujours de  $\delta$ .

La matrice constante  $B_0$  est écrite ou formulée en fonction de *submatrice* :

$$B_0 = [B_{01}, B_{02}, \dots, B_{0n}]$$

et

$$B_{0i} = \begin{bmatrix} B_{0i}^m & 0 \\ 0 & B_{0i}^f \\ 0 & B_{0i}^s \end{bmatrix} \quad (\text{B-35a})$$

les composantes des matrices linéaires  $B_{0i}^m, B_{0i}^f, B_{0i}^s$  sont données dans les équations (A-26) de la même façon, la matrice de déformation non linéaire est donnée en fonction de submatrices soit :

$$B_L = [B_{L1}, B_{L2}, \dots, B_L, \dots]$$

et où

$$B_{Li} = \begin{bmatrix} A_\theta & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i \\ L_i \\ K_i \end{bmatrix} \quad (\text{B-36})$$

En substituant (B-20) et (B-27, 30, 33) dans (B-15), la variation de la déformation en terme de déplacement virtuel nodal  $d\delta$  est obtenue et écrite comme suit :

$$d\hat{\varepsilon} = B d\delta \quad (\text{B-37})$$

avec

$$B = B_0 + B_L(\delta) \quad (\text{B-38})$$

Le développement du terme de la déformation virtuelle  $d\hat{\varepsilon}$  en fonction du déplacement nodal  $d\delta$  nous amène directement à la formulation du travail virtuel de l'équation (B-8) ou on y substitue les équations (B-20) et (B-36) dans  $d\hat{u}$  et  $d\hat{\varepsilon}$  respectivement, soit :

$$d\delta^T \left[ \int_A B^T \hat{\sigma} da - R \right] = 0 \quad (\text{B-39})$$

avec  $R$  est la force nodale équivalente.

$$R = \int_A N^T \hat{q} da + \int_{As} N^T \hat{\rho} da + \int_s N^T \rho_e ds \quad (\text{B-40})$$

Ainsi on peut enfin formuler l'équation d'équilibre non linéaire d'un élément quelconque tels que :

$$\psi(\delta) = \int_A B^T \hat{\sigma} da - R = 0 \quad (\text{B-41})$$

Pour un déplacement virtuel  $d\delta$  quelconque.

**Remarque :**

L'équation (B-41) a un double rôle; elle peut représenter l'équilibre de chaque élément d'une structure, ou sous forme assemblée, l'équation d'équilibre totale. C'est une équation non linéaire en  $\delta$  puisque  $\sigma$  et  $B$  sont linéaire et quadratique en  $\delta$  respectivement.

**VI-B.5) Solution de l'équation d'équilibre non linéaire :**

Comme il a été précisé précédemment la résolution de l'équation (B-41), c'est chercher le vecteur déplacement  $\delta$  qui rend le résidu  $\psi(\delta)$  aussi proche que possible du zéro; la solution exacte rend le résidu nul. Notre choix a été porté comme pour le cas précédent sur la méthode de Newton–Raphston qui conjugue précision et rapidité pour ce type de non linéarité.

**VI-B.6) La matrice de rigidité tangente :**

La matrice tangente globale  $K_T$  est obtenue en pratique par assemblage des matrices élémentaires tangentes. Elle est donnée par l'équation (A-30) soit :

$$K_T = \left[ \frac{\partial \psi(\delta_i)}{\partial \delta} \right] \quad (\text{B-42a})$$

où de manière plus développée comme l'équation (A-32).

La dérivée de l'expression  $\psi_i$  par rapport aux variables nodales  $\delta_j$  nous donne un terme  $K_{Tij}$  de la matrice globale  $K_T$  soit (A-32) :

$$K_{Tij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \delta_j} = \int_A \left[ \sum_{K=1}^8 B_{Ki} \frac{\partial \sigma_K}{\partial \delta_j} + \sum_{K=1}^8 \sigma_K \frac{\partial B_{Ki}}{\partial \delta_j} \right] da \quad (\text{B-42b})$$

et ou pour un chargement conservatif.

$$\left( \frac{\partial R_i}{\partial \delta_j} \right) = 0$$

Le développement de la matrice tangente nous permet d'écrire  $K_T$  comme Suit (voir annexe B) :

$$K_T = \int_A B \hat{D} B da + \int_A G^T \hat{N} G da - 2 \int_A G_2^T \hat{M} L - 2 \int_A G_2^T \hat{V} K + t/2 \int_A L^T \hat{M} L da + t \int_A L^T \hat{V} K da \quad (\text{B-42c})$$

La substitution des équations (B-38), (B-12) et (B-26), (B-29) et (B-31) dans  $\hat{B}$ ,  $\hat{D}$  et  $G$ ,  $L$ ,  $K$  respectivement donne :

$$K_T = K_0 + K_{L2} + K_{\sigma 2} \quad (\text{B-43})$$

\*ou la matrice de rigidité élastique linéaire  $K_0$  est :

$$K_0 = \int_A B_0^T \hat{D} B_0 da \quad (\text{B-44a})$$

\*La matrice des déplacements initiaux  $K_L$

$$K_{L2} = \int_A \hat{B}_0 \hat{D} \hat{B}_L da + \int_A B_L^T \hat{D} B_0 da + \int_A B_L^T \hat{D} B_L da \quad (\text{B-44b})$$

\*La matrice des contraintes initiales (Voir Annexe B)

$$K_{\sigma 2} = \int_A G^T \hat{N} G da - 2 \int_A G_2^T \hat{M} L - 2 \int_A G_2^T \hat{V} K + t/2 \int_A L^T \hat{M} L da + t \int_A L^T \hat{V} K B da \quad (\text{B-44c})$$

Pour la matrice de rigidité  $K_0$  la formulation est la même que le paragraphe (A-6-1) où le terme de la matrice  $K_{0ij}$  est donné dans l'équation (A-38) reste la formulation de la matrice  $K_{\sigma 2ij}$  et le terme de la matrice  $K_{L2ij}$  dont le développement est le suivant :

### VI-B.7) Formulation de la matrice non-linéaire $K_L^2$

Pour pouvoir exprimer les termes  $K_{Lij}$  de la matrice des déplacements initiaux d'une manière simple et explicite il est plus avantageux de décomposer la matrice de transformation non linéaire  $B_L$  en plusieurs sous matrices  $\hat{B}_{Li}$  dont les termes ne sont pas nuls.

Ainsi  $BL(\delta)$  est exprimée en fonction de deux matrices; l'une est la matrice de dérivation de fonction de forme et l'autre est une matrice liée aux déplacements  $\hat{u}$ . On peut donc écrire ce qui va suivre :

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^0 + \hat{\varepsilon}^L = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m^0 \\ \hat{\varepsilon}_f^0 \\ \hat{\varepsilon}_s^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m^L \\ \hat{\varepsilon}_f^L \\ \hat{\varepsilon}_s^L \end{Bmatrix} = [B_0 + 1/2B_L] \delta \quad (\text{B-45})$$

$$\text{avec :} \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_m^0 & 0 \\ 0 & B_f^0 \\ 0 & B_s^0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-46a})$$

et

$$B_L = \begin{bmatrix} B_{p2}^L & B_{p1}^L \\ B_{f2}^L & B_{f1}^L \\ B_{s2}^L & B_{s1}^L \end{bmatrix} \quad (\text{B-46b})$$

et dont la formulation de chacune d'elle s'écrit :

$$* B_M^L = [B_{p2}^L \quad B_{p1}^L] = A_\theta G \quad (\text{B-47})$$

$$* B_F^L = [B_{f2}^L \quad B_{f1}^L] = H L_i^f \quad (\text{B-48})$$

$$* B_S^L = [B_{s1}^L \quad B_{s2}^L] = W K_i \quad (\text{B-49})$$

à partir de cette notation qui simplifie la problématique numérique, on peut développer la matrice  $K_{2L}$  et voir ses termes constitutifs avec plus de clarté.

$$K_{2L} = \int_A B_0^T D B_L da + \int_A B_L^T D B_0 da + \int_A B_L^T D B_L da \quad (\text{B-50})$$

$$K_{2L} = K_{ML} + K_{LM} + K_{LL} \quad (\text{B-51})$$

avec

$$K_{ML} = \int_A B_m^{0T} D_m B_m^L da + \int_A B_f^{0T} D_f B_f^L da + \int_A B_s^{0T} D_s B_s^L da \quad (\text{B-52a})$$

$$K_{LM} = \int_A B_m^{LT} D_m B_m^0 da + \int_A B_f^{LT} D_f B_f^0 da + \int_A B_s^{LT} D_s B_s^0 da \quad (\text{B-52b})$$

$$K_{LL} = \int_A B_m^{LT} D_m B_m^L da + \int_A B_f^{LT} D_f B_f^L da + \int_A B_s^{LT} D_s B_s^L da \quad (\text{B-52c})$$

On remarque que si on annule les termes de la deuxième non linéarité, on retrouve la matrice non linéaire  $K_{L0}$  de la première hypothèse, c'est à dire si :

$$\begin{aligned}
 B_{p2}^L &= 0 \\
 B_f^L &= 0 \quad \text{alors} \quad K_L^2 = K_L^1 \\
 B_s^L &= 0
 \end{aligned}$$

### VI - B.8) Formulation de la matrice Géométrique $K_\sigma^2$

La prédominance des termes nuls dans les submatrices  $g^1, g^2$  de l'équation (B-26) indique que la matrice nodale des contraintes initiales  $K_{\sigma ij}$  est beaucoup mieux calculée en utilisant les termes non nuls. Ainsi on peut réécrire le terme  $K_{\sigma ij}$  en certaines positions de la matrice (5x5) soit :

$$(K_{\sigma ij})_{1 \times 1} = (K_{\sigma ij})_{2 \times 2} = (K_{\sigma ij})_{3 \times 3} = \int_A [N_{i,x} N_x N_{j,x} + N_{i,y} N_y N_{j,y} + N_{xy} (N_{i,x} N_{j,y} + N_{i,y} N_{j,x})] da \quad \text{(B-53a)}$$

$$\begin{aligned}
 (K_{\sigma ij})_{1 \times 4} &= (K_{\sigma ij})_{2 \times 5} = -2 \int_a [N_{j,x} M_x N_{i,x} + N_{j,y} M_y N_{i,y} + M_{xy} (N_{j,x} N_{i,y} + N_{j,y} N_{i,x})] da \\
 (K_{\sigma ij})_{4 \times 4} &= (K_{\sigma ij})_{5 \times 5} = t / 2 \int_a [N_{j,x} M_x N_{i,x} + N_{j,y} M_y N_{i,y} + M_{xy} (N_{j,x} N_{i,y} + N_{j,y} N_{i,x})] da
 \end{aligned} \quad \text{(B-53b)}$$

$$\begin{aligned}
 (K_{\sigma ij})_{1 \times 4} &= (K_{\sigma ij})_{2 \times 5} = -2 \int_a [N_{j,x} Q_x N_{i,x} + N_{j,y} Q_y N_{i,y}] da \\
 (K_{\sigma ij})_{4 \times 4} &= (K_{\sigma ij})_{5 \times 5} = t \int_a [N_{j,x} Q_x N_{i,x} + N_{j,y} Q_y N_{i,y}] da
 \end{aligned} \quad \text{(B-53c)}$$

VI-B.9) La charge nodale équivalente due aux contraintes internes :

Comme nous l'avons déjà dit, pour évaluer le vecteur nodal résiduel  $\psi(\delta)$  de l'équation d'équilibre, on doit calculer la force nodale équivalente due aux contraintes internes  $\hat{\sigma}$  qui s'écrit pour un nœud donné (i) comme suit :

$$P_i = \int_A B^T \hat{\sigma} da \quad \text{(B-54)}$$

Si on substitue les équations (B-29) et (B-11) dans  $B$  et  $\hat{\sigma}$  on obtient :

$$P_i = \int \left\{ \begin{aligned} &B_m^{0T} \hat{\sigma}_m + B_{p2}^{LT} \\ &B_{p1}^{LT} \hat{\sigma}_m + B_f^{0T} \sigma_f + B_f^{LT} \sigma_f + B_s^{0T} \hat{\sigma}_s + B_s^{LT} \sigma_s \end{aligned} \right\} da \quad \text{(B-55)}$$

On remarque toujours que si on annule les termes de deuxième non linéarité ( $B_{p2}^L = B_f^L = B_s^L = 0$ ) on obtient le même vecteur de charge nodale que précédemment, c'est à dire  $P_{0i} = P_i$

### VI-B.10) Intégration numérique

L'intégration de l'équation d'équilibre non linéaire, ainsi que toutes les matrices de rigidité est évaluée en utilisant l'intégration numérique et où l'ordre d'intégration est précisé dans le tableau ci-dessous :

	$LN$	$Q_s$	$Q_L$	$Q_H$
<b>• Me</b>	2x2	2x2	3x3	3x3
<b>mbr</b>	2x2	2x2	3x3	3x3
<b>ane</b>	1x1	2x2	2x2	2x2
Flexion				
Cisaillement				

L'intégration est sélective selon que la fonction à intégrer a un comportement de membrane ( $\hat{D}_m, \hat{\sigma}_m$ ) de flexion ( $\sigma_f, D_f$ ) ou de cisaillement ( $\hat{D}_s, \sigma_s$ )

### VI-B.11) Calcul des contraintes :

Le calcul des contraintes s'effectue sur la base de l'égalité suivante :

$$\sigma = D\varepsilon$$

où

$$\hat{\sigma} = \hat{D}\hat{\varepsilon}$$

c'est à dire

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}_m & 0 & 0 \\ 0 & \hat{D}_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_m \\ \hat{\varepsilon}_f \\ \hat{\varepsilon}_s \end{Bmatrix}$$

Et ce pour chaque élément étudié. On remarque que l'ordre d'intégration est le même que celui utilisé pour la matrice tangente. Tableau suivant

	$LN$	$Q_s$	$Q_L$	$Q_H$
Membrane	Bi-linéaire	Bi-linéaire	Bi-quadratique	Bi-quadratique
Flexionnel	Bi-linéaire	Bi-linéaire	Bi-quadratique	Bi-quadratique
Cisaillement	Constant	Bi-linéaire	Bi-linéaire	Bi-linéaire

\* La contrainte de flexion pour  $z = \frac{e}{2}$

$$(\sigma_f)_{\max} = \frac{6M_f}{e^2} \quad (\text{B-56})$$

\* La contrainte membraner

$$(\sigma_m)_{\max} = \frac{N_m}{e} \quad (\text{B-57})$$

\* La contrainte de cisaillement

$$\sigma_s = 6 \frac{Q_y}{n^3} \left( \frac{n^2}{u} - z^2 \right)$$

pour

$$z = \frac{e}{2} \rightarrow \sigma_s = 0 \quad (\text{B-58})$$

$$z = 0 \rightarrow (\sigma_s)_{\max} = \frac{3Q}{2e}$$

La contrainte maximum :

$$(\sigma)_{\max} = (\sigma_f)_{\max} + (\sigma_m)_{\max} \quad (\text{B-59})$$

Le calcul de la contrainte s'effectue au bord ou au centre de la plaque étudiée.

### VI-B-12) Calcul des contraintes aux nœuds- Technique de lissage

La continuité des contraintes aux interfaces des éléments n'étant pas requise pour la convergence, on se trouve alors confronté au problème d'interprétation des quantités qui ont une distribution en forme d'histogramme (voir fig.(VI-7a)), ceci est du essentiellement aux fonctions d'interpolation qui ont un mauvais comportement à proximité des interfaces de l'élément.

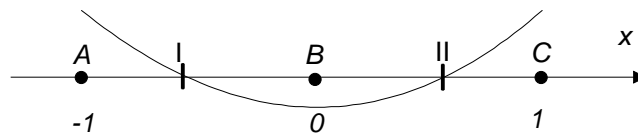
Pour remédier ce problème *Hinton* et *Campbell* ont introduit une technique dite de *Homogénéisation local des contraintes* où *local smothing*. Cette technique de lissage (voir fig.(VI-3b)) est une simple extrapolation bilinéaire, linéaire des contraintes des points de *Gauss* aux nœuds.

Telque la contrainte extrapolée soit égale a :

$$\sigma^* = N_\sigma \bar{\sigma} \tag{B-60}$$

$N_\sigma$  est la fonction de forme des contraintes aux points de gauss

Considérons, en premier lieu, la situation à une dimension



**figure(VI-5) : Extrapolation linéaire**

L'extrapolation des contraintes des deux points de *Gauss* ( I et II ) est donné par l'expression suivante :

$$\sigma = \frac{1}{2} [1 - S, 1 + S] \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{Bmatrix} \tag{B-61}$$

$$S = \frac{\xi}{P} ; \text{ avec :}$$

$$S = -1 \text{ pour } \xi = -P$$

$$S = 1 \text{ pour } \xi = P$$

$$S = 0 \text{ pour } \xi = 0$$

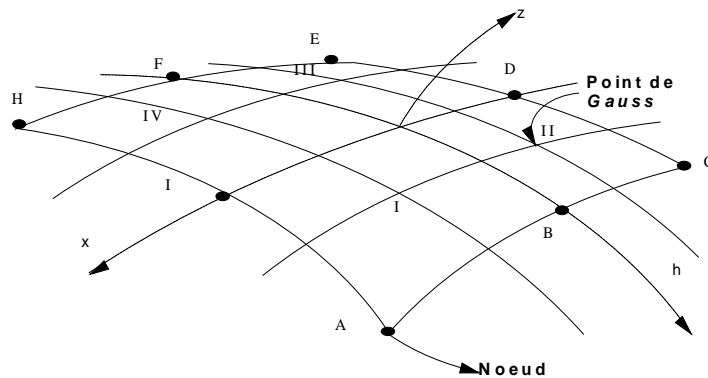
$P, -P$  sont les coordonnées unidimensionnel des points de *Gauss* ( I et II ),  $P = \frac{1}{\sqrt{3}}$

On calcul les contraintes aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ( les nœuds), en remplaçant leurs coordonnées dans (B-61), on obtient la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Par analogie, on peut étendre ce calcul pour le cas bidimensionnel, et plus spécialement à l'élément à huit nœuds pour 2x2 points de *Gauss* ( voir fig.(VI.7)); on aura la matrice suivante :

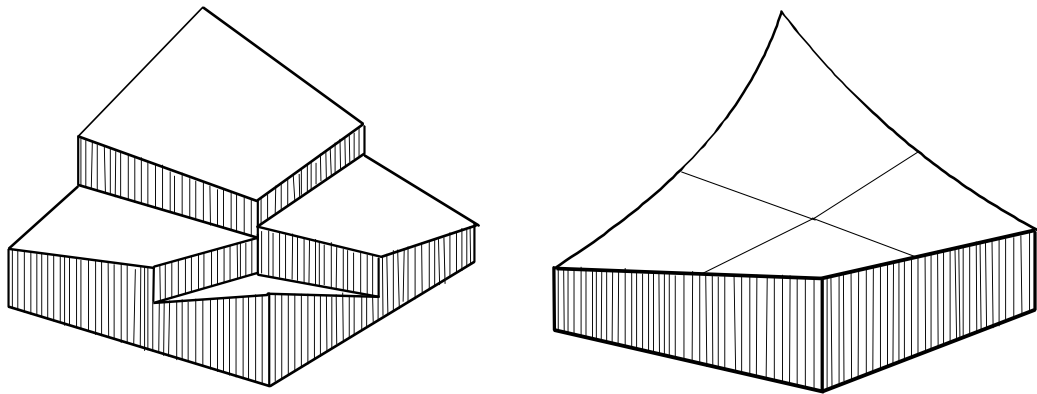
$$\begin{Bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \\ \sigma_D \\ \sigma_E \\ \sigma_F \\ \sigma_G \\ \sigma_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{1 - \sqrt{3}} & \frac{2}{1 + \sqrt{3}} & \frac{2}{1 + \sqrt{3}} & \frac{2}{1 - \sqrt{3}} \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{1 + \sqrt{3}} & \frac{2}{1 - \sqrt{3}} & \frac{2}{1 - \sqrt{3}} & \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{1 + \sqrt{3}} & \frac{2}{1 - \sqrt{3}} & \frac{2}{1 + \sqrt{3}} & \frac{2}{1 - \sqrt{3}} \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \\ \sigma_{IV} \end{Bmatrix}$$



**figure(VI-6) : Extrapolation bidimensionnel**

**Remarque**

Chaque contrainte calculée aux nœuds représente une seul composante du vecteur contrainte.



(a)

(b)

**figure(VI-7) : (a) Contraintes en forme d'histogramme  
 . (b) Lissage des contraintes**

Enfin on calculera la moyenne des contraintes aux nœuds de frontière lors de l'assemblage en utilisant la relation suivante :

$$\sigma_M = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i}{n}$$

$n$  est le nombre d'élément qui partagent le nœud  $i$

$\sigma_i$  est la contrainte calculée pour chaque nœud  $i$  de chaque élément

*CHAPITRE VII*

**VALIDATION DU  
MODÈLE NUMÉRIQUE**

## VII Validation du modèle numérique

### VII.1) INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés tout particulièrement à l'analyse de la non-linéarité géométrique où nous avons formulés le problème pour deux hypothèses.

- La première hypothèse [H.NL.1] est celle de **Von karman** qui néglige les distorsions de U et V dans les directions X et Y

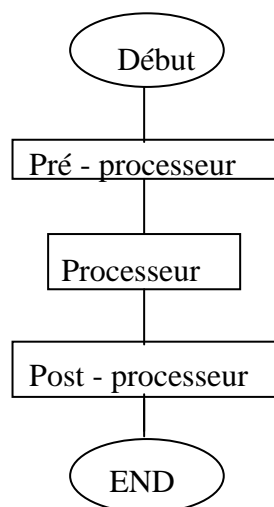
- La seconde [H.NL.2], et qui fait l'objet de notre étude, ne néglige pas les effets de cette distorsion. On a donc commencé par poser clairement les équations formulées pour ces hypothèses, d'abord sous forme analytique puis sous forme matricielle. Et ceci dans le but de traiter numériquement ce problème

A cet effet un logiciel est développé sur la base de ces formulations pour prévoir les déplacements et les contraintes d'une plaque mince soumise à des chargements statiques importants.

Le déroulement de ce programme va nous permettre d'obtenir un nombre important de résultat que l'on pourra exploiter, en tant que chercheur, suivant une logique bien établit et déterminé par la présente recherche.

### VII.2) Structure globale du programme informatique

Ce logiciel est conçu sur la base d'un sous programme de résolution linéaire et développé en Fortran visual workbench (1993) dans la logique d'une structure globale de programme simplifié dont l'organigramme est le suivant :



**Structure Globale du Programme**

## VII.2.1) Pré - processeur

### VII.2.1.1) Préparation du fichier de données

La préparation du fichier de données pour une structure ayant un maillage grossier, peut se réaliser manuellement. Cependant pour des raisons de convergence et de précision on raffine au fur et à mesure le maillage ce qui rend la tâche de plus en plus difficile. Ceci est dû principalement à l'introduction manuelle des tables de coordonnées, de connectivités des épaisseurs des nœuds et des conditions aux limites pour une centaine d'éléments et des milliers de nœuds ce qui ne peut généralement pas échapper à l'erreur humaine et exige un temps considérable. Pour cela, il est indispensable d'utiliser un pré - processeur, qui nous permet de préparer l'essentiel du fichier de données. Cela nous a été possible en ayant recours à une génération automatique de ces différentes tables en se basant sur la technique de l'élément isoparamétrique.

### VII.2.2) Processeur

Le processeur est l'objectif de ce logiciel, il consiste à

- Faire saisir le type de non-linearité que l'on veut exécuter
- Le type de résolution choisi (méthode de Newton-Raphson et Newton-Raphson modifiée)
- Lecture des différentes données relatives à la forme aux chargements et aux conditions d'appuis

Ensuite vient le traitement de ces données pour chaque itération, sous forme d'une succession de sous programmes aussi importants les uns que les autres mais dont l'essentiel est, :

- Le calcul des contraintes internes  $\sigma_M, \sigma_F, \sigma_C$  nécessaires à la formation de la matrice géométrique  $k_\sigma$
- Le calcul de la matrice tangente  $k_T = k_0 + k_L + k_\sigma$  qui représente la rigidité globale de la structure
- Le calcul du vecteur contrainte interne  $p(i)$  déterminant pour le calcul du résidu  $res(i)$
- Résolution du problème linéaire  $RES(i) = Kt(i).X(i)$
- calcul de la convergence  $\|\eta\| \leq \varepsilon$

On remarque que la résolution du système non-linéaire s'effectue par une des deux méthodes itératives précédente de telle sorte que l'itération est renouvelée systématiquement jusqu'à ce que la convergence soit satisfaisante.

### VII.2.3) Post - processeur

Une fois le programme déroulé, un nombre impressionnant de résultats sont obtenus. Le dépouillement manuel de ces derniers, représente un travail laborieux. Ainsi, le développement d'un post - processeur s'impose qui une fois les calculs terminés traiterait les résultats et afficherait ceux sélectionnés préalablement par l'utilisateur sous forme de tableaux ou de graphiques. Dans l'ordre de cette étude, on s'est limité à l'affichage de certaines valeurs maximales de déplacements, et de contraintes utilisées dans l'étude comparative dont il est question.

### VII.3) Applications:

Le programme informatique développé est validé en considérant des exemples simples trouvés dans la littérature. Les résultats du programme seront comparés aux solutions analytiques, numériques et expérimentales des différents auteurs.

### VII.4) Validation du problème non - linéaire :

Comme pour le cas linéaire, on va considérer des exemples "standard" étudiés par plusieurs auteurs comme *Murray, Bergan et Wood* qui vérifient la formulation non - linéaire géométriques des plaques.

La solution analytique des plaques minces est donnée par **Timoshenko** ou encore par *Levy* qui résout les équations de *Von Karman* par les 'doubles séries de *Fourier*' et dont la solution est donnée avec une possibilité d'erreur d'environ 2 %.

Pour toutes les applications étudiées; les déplacements, les contraintes et le chargement sont donnés sans dimensions tel que :

- Le déplacement central  $W = \tilde{w}(0,0) / t$
- Le chargement :
  - a) uniformément distribue  $Q = (qa^4) / Et^4$
  - b) chargement ponctuel  $p = (qa^2) / Et^4$
- La contrainte de la fibre externe  $z = \frac{t}{2} \quad \sigma_{i(x,y)} = \sigma_{(x,y)} \frac{a^2}{Et^2}$

avec :

$a$  dimension de la plaque

$q$  chargement uniformément réparti

$p$  chargement concentré

$\sigma_{(x,y)}$  contrainte maximum de la fibre externe

Pour tous les exemples étudiés, les résultats obtenus sont vérifiés par le critère de convergence  $\|n\| \leq \varepsilon$

telle que :

$$\|n\| = \frac{\sqrt{\langle \Delta u_i \rangle \{ \Delta u_i \}}}{\sqrt{\langle u_i \rangle \{ u_i \}}} . 100\%$$

et :  $\varepsilon$  est la tolérance en [%]

Cependant, la résolution du système non - linéaire va s'effectuer en premier lieu par les deux méthodes itératives qui sont celle de Newton - Raphston et Newton - Raphston modifié. Pour enfin terminer sur celle qui présentera le plus de performance en terme de convergence et de rapidité.

#### VII.5) Validation numérique de la première non-linéarité géométrique [H.NL.1]

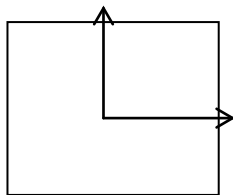
*La validation du programme élaboré par la non - linéarité géométrique passe impérativement comme nous l'avons dit précédemment par la comparaison des résultats du programme avec des solutions analytique trouvés dans la littérature. Portant sur des exemples différents en termes de formes, chargés et de conditions d'appuis.*

Nous allons donc commencer avec une application simple d'une plaque carré chargée uniformément en utilisant plusieurs types d'éléments finis ( $Q_s, Q_L, Q_H$ ) dans le but :

- \* Premièrement de valider le programme
- \* Deuxièmement de déterminer la modélisation la plus appropriée aux autres exemples.
- \* En suite, vient le choix de la méthode de résolution qui sera déterminer pour le même exemple test et dont les résultats sont transcrits clairement sous forme de tableaux.
- \* Enfin, pour terminer, on analyse la performance de chaque élément finis étudié et programmé vis-à-vis des déplacements et des contraintes dans le cadre de plusieurs applications.

#### **Application n°1 :**

La première application du non-linéaire aura pour but l'étude de convergence du maillage d'une plaque carrée chargé uniformément avec les caractéristiques suivantes :



$$a = 300in$$

$$t = 3in$$

$$E = 0.310^8 pb / in$$

$$\nu = 0.316$$

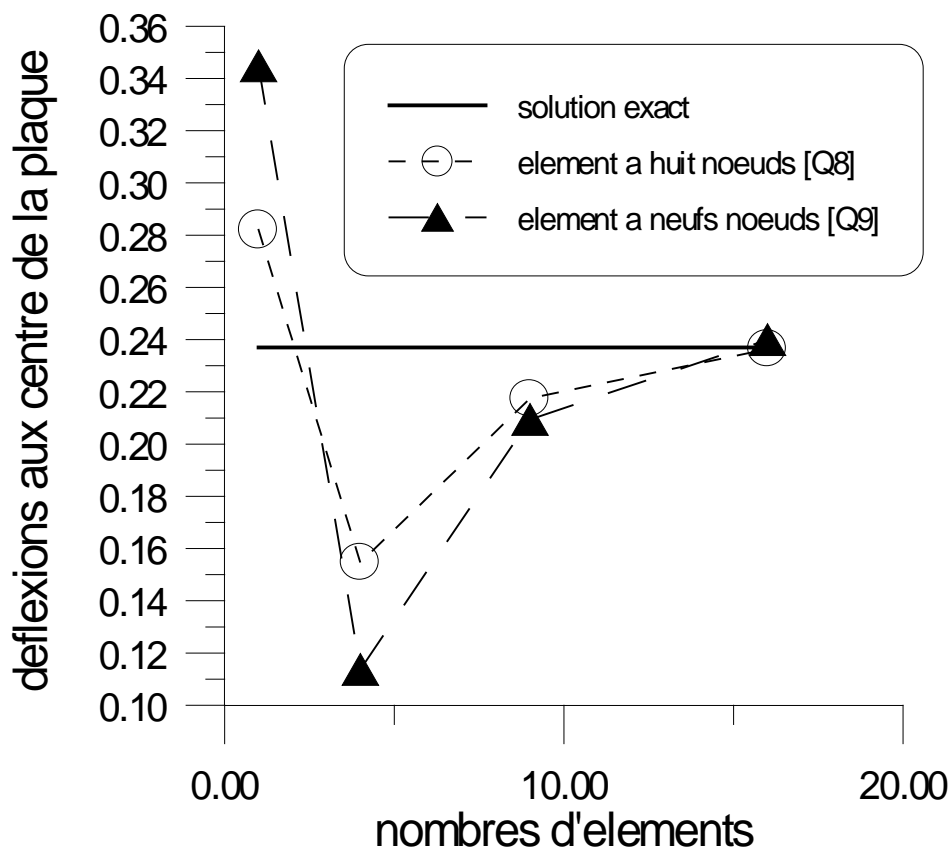
La modélisation s'effectue à l'aide d'un élément isoparamétrique à 8 nœuds de la famille Srendip  $[Q_s]$  et d'un élément à 9 nœuds de la famille de Lagrange  $[Q_L]$ . L'étude portera sur le (1/4) de la plaque vue la symétrie du problème considéré. Les conditions aux limites varient selon les conditions d'appuis.

a) plaque carré encastré :

Cet exemple est valable pour un chargement uniformément réparti sans dimensions  $Q = 17.79$  soit  $q = 5.33 Pb$ ; la solution exacte est donnée par 'Levy' qui résout le problème des équations de 'Von Karman' par les doubles 'série de fourrier'. Les conditions aux limites sont celle d'un appui encastré soit :  $u = v = w = \theta_x = \theta_y = 0$

Nombre d'éléments	Type d'élément	
	$Q_s$	$Q_L$
1x1	0.282	0.3449
2x2	0.1546	0.1137
3x3	0.2175	0.2094
4x4	0.2363	0.240
<b>Solution Exact</b>	0.237	

**Graphe et tableau (VII.1) : Étude de convergence.-plaque carrée encastrée**



***b)- Plaque carré simplement appuyée :***

C'est toujours la même application avec les mêmes caractéristiques ce à la différence près que les conditions aux limites sont celle d'un appuis simple, et le chargement est :  $Q = 9.16$ .

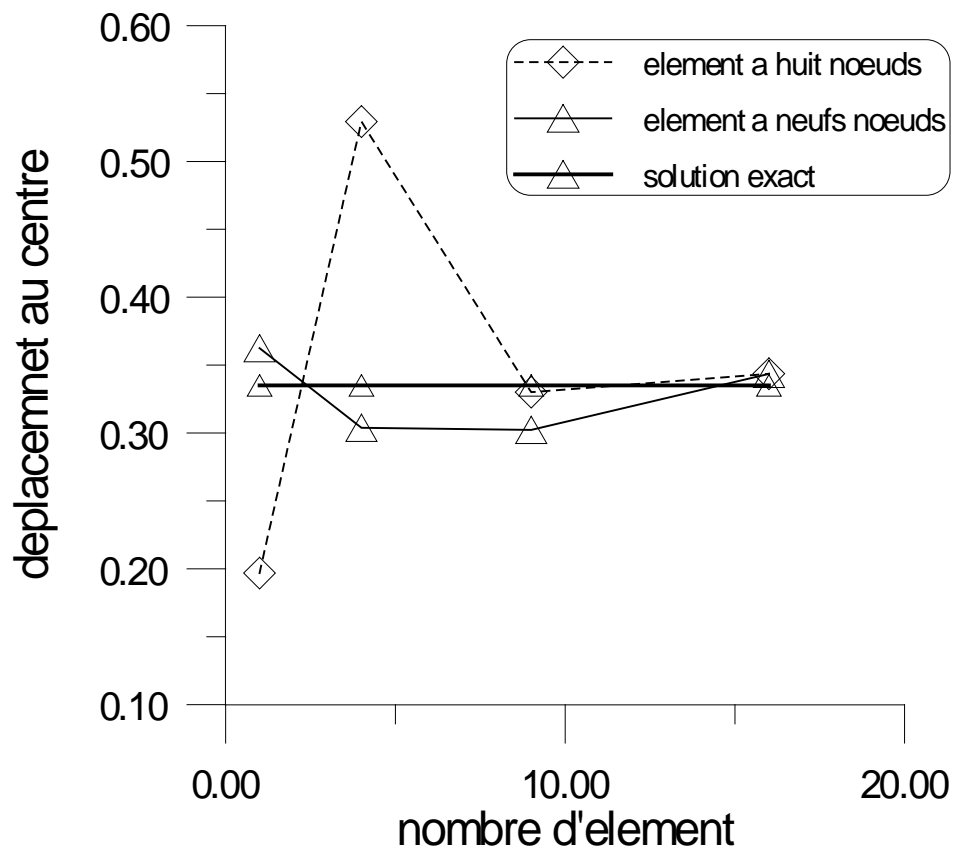
$$x = \pm a/2, u = v = w = \theta_y = 0 \quad \text{et } \theta_x \text{ libre}$$

$$y = \pm a/2, u = v = w = \theta_x = 0 \quad \text{et } \theta_y \text{ libre}$$

Les résultats obtenues sont comparées à la solution exacte de 'Rushton' qui résout le problème par l'approche des différences finies.

Nombre d'éléments	Type d'élément	
	$Q_s$	$Q_L$
1x1	0.1969	0.3624
2x2	0.5293	0.3038
3x3	0.330	0.3022
4x4	0.3436	0.3435
Solution Exact	0.335	

**Graphe et Tableau (VII-2) : Étude de convergence - plaque simplement appuyée-**



### Remarque et conclusion :

A la lumière de cet exemple présenté par une plaque carré encastré et simplement appuyée, il apparaît clairement, que les résultats du programme et ceux de la solution analytique sont concordants à 0.3% près pour le maillage (4x4) et ce en faisant varier les paramètres (charge - condition d'appui).

Donc, pour le reste des applications, un maillage (4x4) sera utilisé étant donné les résultats obtenus, pour les deux types d'éléments.

### *Application n°2:*

L'application actuelle a pour but de comparer, comme nous l'avons déjà dit, deux (2) méthodes de résolution du système non - linéaire en utilisant plusieurs cas de chargement ainsi que plusieurs types d'éléments finis :

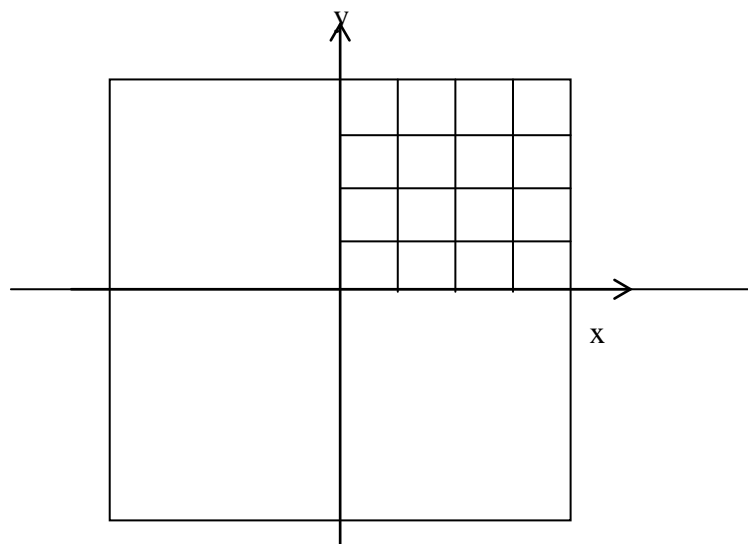
- l'élément linéaire à 4 nœuds noté  $[Q_4]$  ou  $[LN]$
- l'élément quadratique à 8 nœuds noté  $[Q_8]$  ou  $[Q_s]$
- l'élément quadratique à 9 nœuds noté  $[Q_9]$  ou  $[Q_L]$
- l'élément quadratique à 9 nœuds noté  $[Q_H]$

La comparaison portera essentiellement sur le déplacement au centre de la plaque  $W_\varepsilon$ , la convergence de ce dernier ainsi que le nombre d'itérations qui détermine le temps d'exécution et la rapidité de la méthode.

On précise que le taux d'erreur admis est  $\varepsilon = 1\%$

#### a) Plaque carré encastrée :

Pour tous les cas exécutés, la modélisation s'effectue sur le quart de la plaque et ou le maillage est affiné à [4x4] éléments comme nous l'avons conclu précédemment.[Voir tableau (VII.3) et (VII.4)]



***b) Plaque carrée simplement appuyée :***

Ici, la formulation de Mindlin est comparée aux résultats obtenus par 'Rushton' dans le cas des plaques minces. (Toujours dans le même cadre d'application).

Les résultats obtenus dans le cadre de la comparaison sont transcrits dans le Tableaux(VII.5),et(VII.6).

***Remarques et comparaisons***

A travers les résultats obtenus dans le cas de la plaque carrée appliquée pour deux méthodes et pour plusieurs types d'éléments, on constate aisément que :

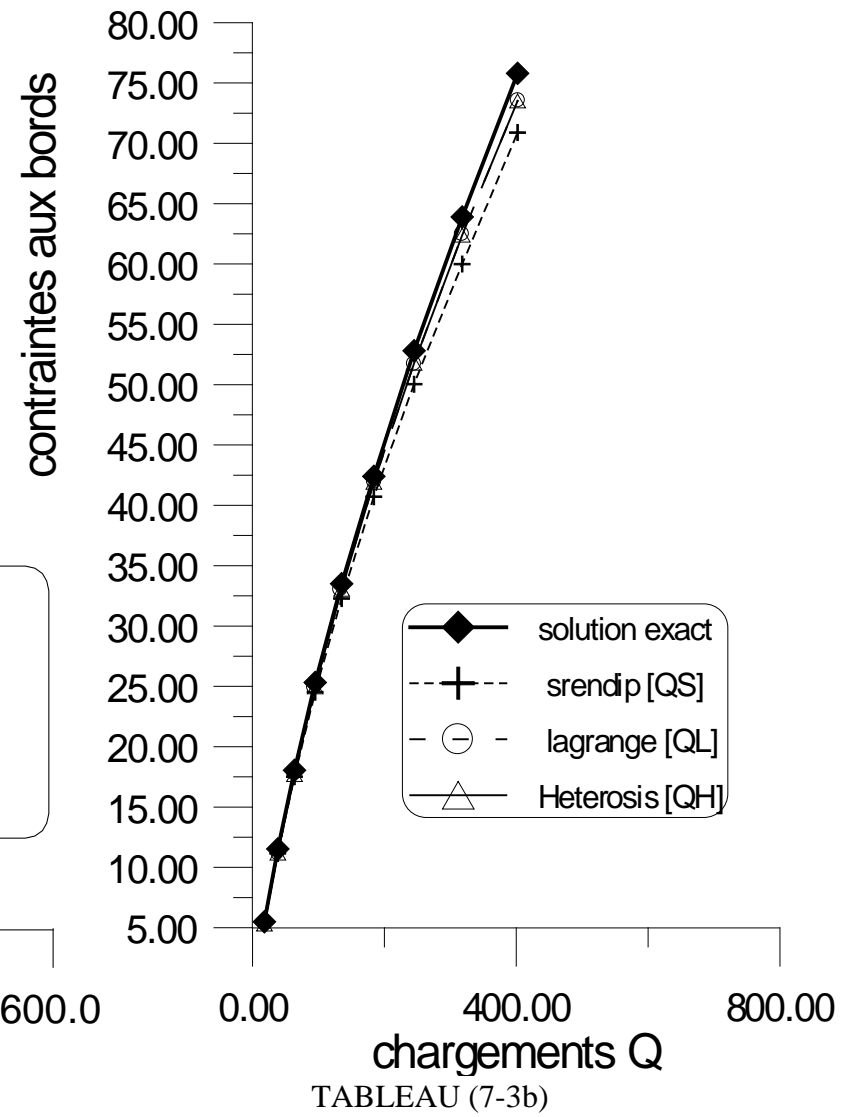
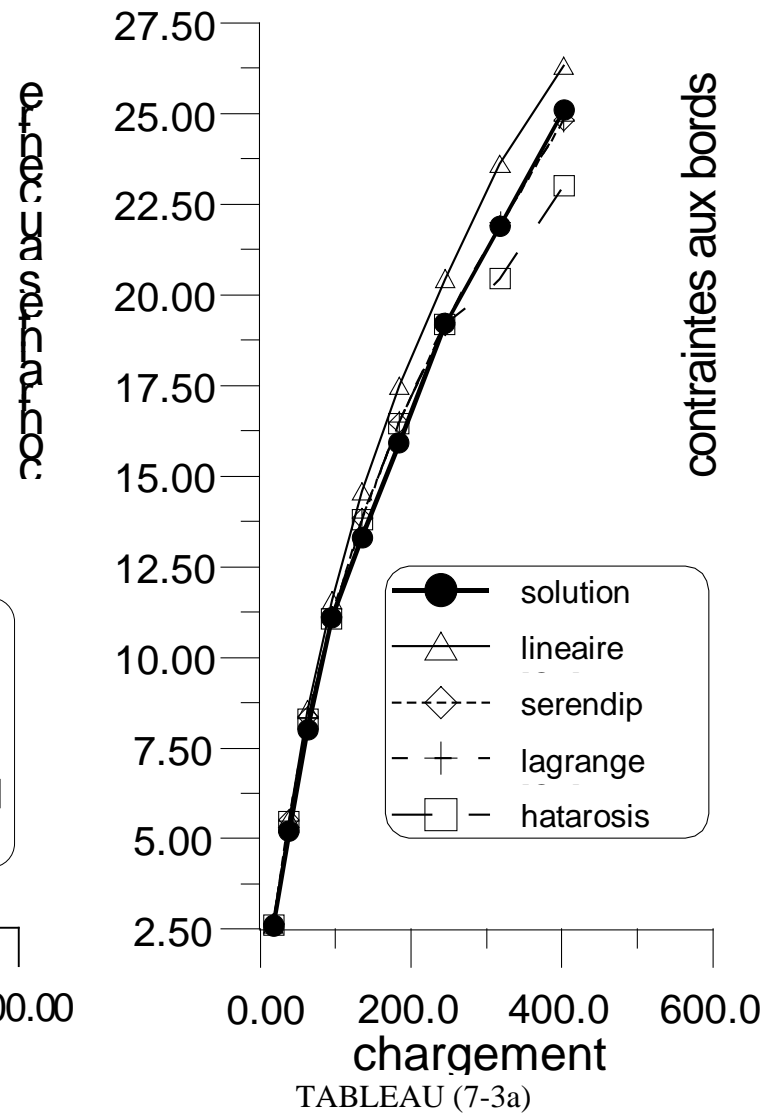
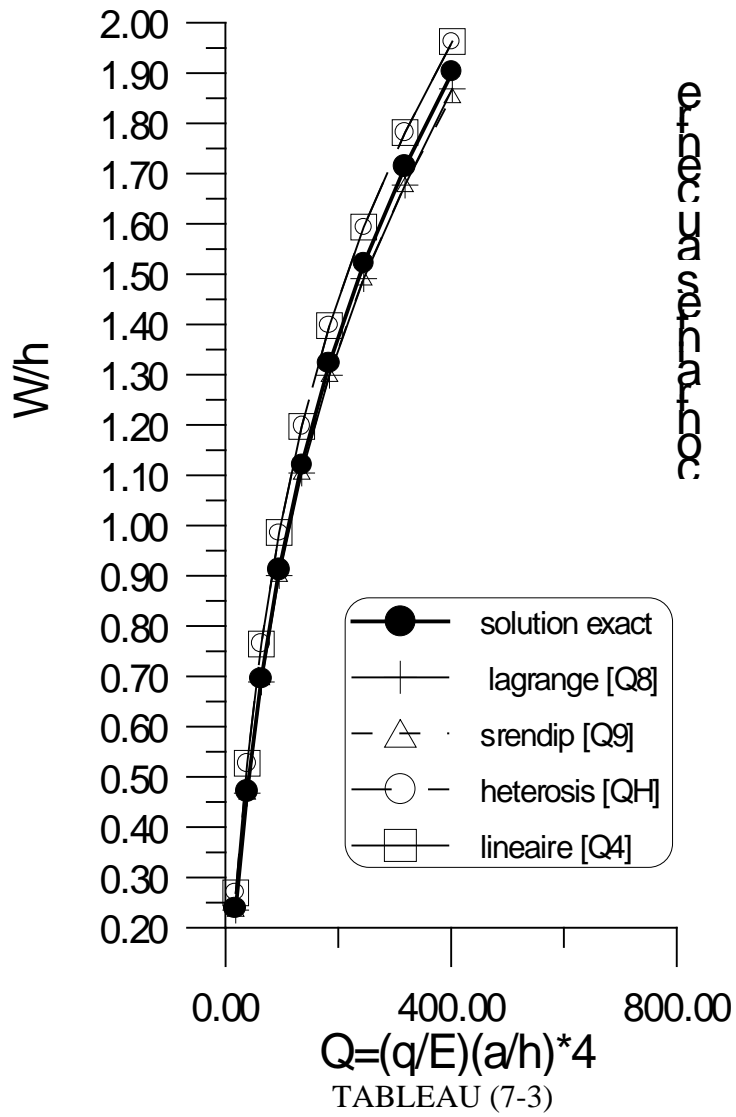
L'élément à 8 nœuds de la famille Serendip  $[Q_s]$  donne des résultats comparables en taux d'erreur avec les éléments à 9 nœuds  $[Q_L, Q_H]$  et ce contrairement à l'élément linéaire  $[Q_4]$  qui a un taux d'erreur important, mais acceptable d'environ 8% par rapport aux autres.

Vient maintenant la comparaison entre les deux méthodes qui est basée essentiellement sur le déplacement, la convergence et le nombre d'itération. Ainsi, on remarque facilement que :

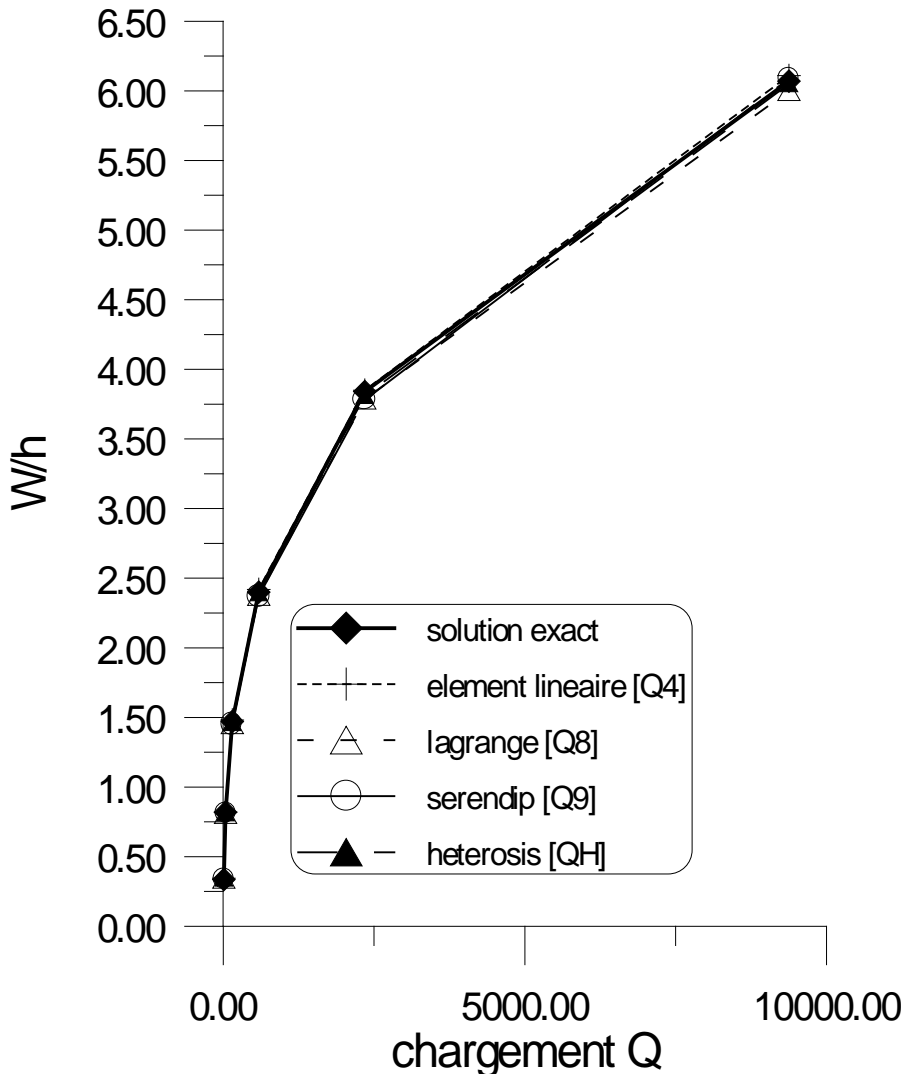
Pour la méthode de Newton - Raphston modifiée, le calcul de  $K_T$  une seule fois au cours de la deuxième itération, rend le temps d'exécution plus rapide. Mais augmente, le nombre d'incrémentations. Tandis que la méthode de Newton - Raphston calcule  $K_T$  pour chaque itération mais en diminue sensiblement le nombre.

*En conclusion, on peut dire que la méthode de Newton - Raphston converge beaucoup plus vite que la méthode de Newton - Raphston modifiée, bien que les déplacements soient comparables ou presque identiques. Donc, le choix est rapidement fait en sélectionnant la première méthode pour tout le reste des applications.*

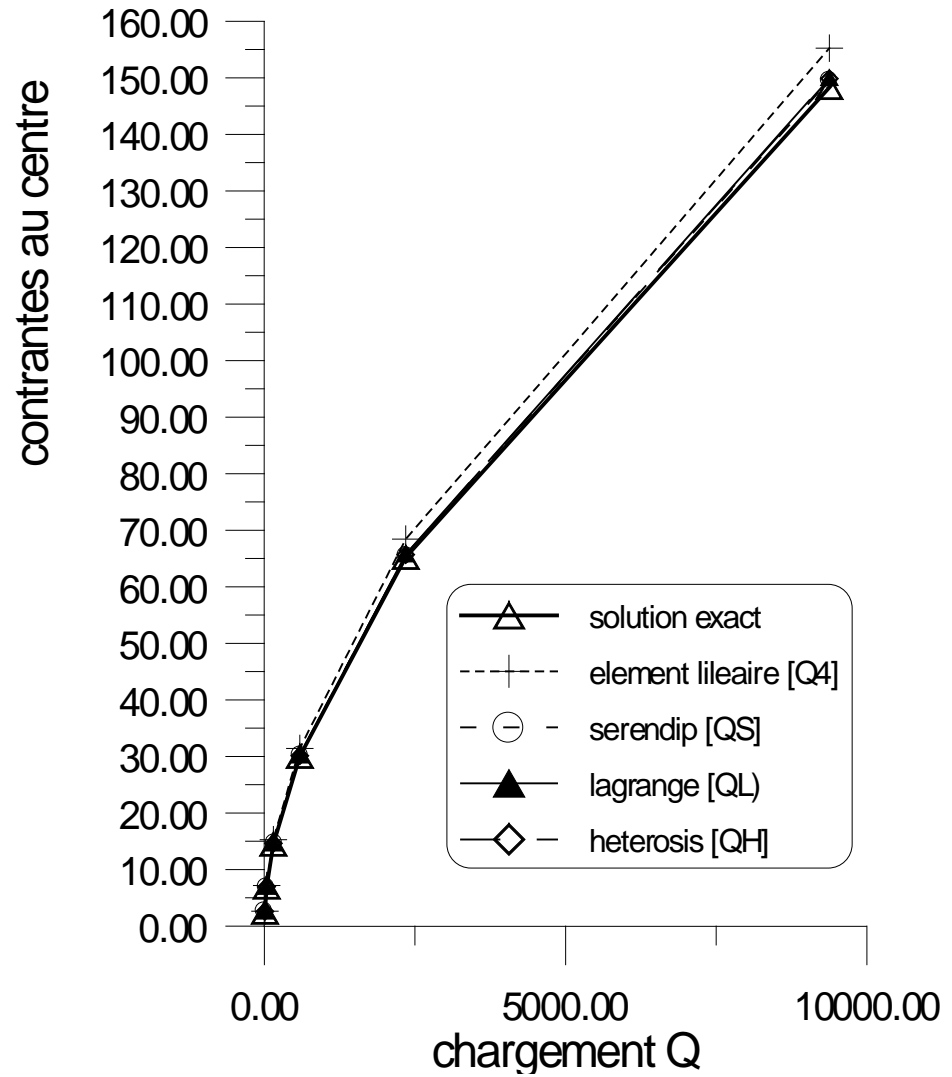
Pour une meilleure appréciation des résultats, on présentera les contraintes et les déplacements sous forme de courbes représentées dans la figure [VII.3] et [VII.4] ou les résultats des différents types d'éléments sont comparés à la solution exacte :



GRAPHE [VII-3] : PLAQUE CARRÉE ENCASTRE



TABEAU (7-5)



TABEAU (7-5a)

GRAPHE [VII-4] : PLAQUE CARRÉE SIMPLEMENT APPUYÉE

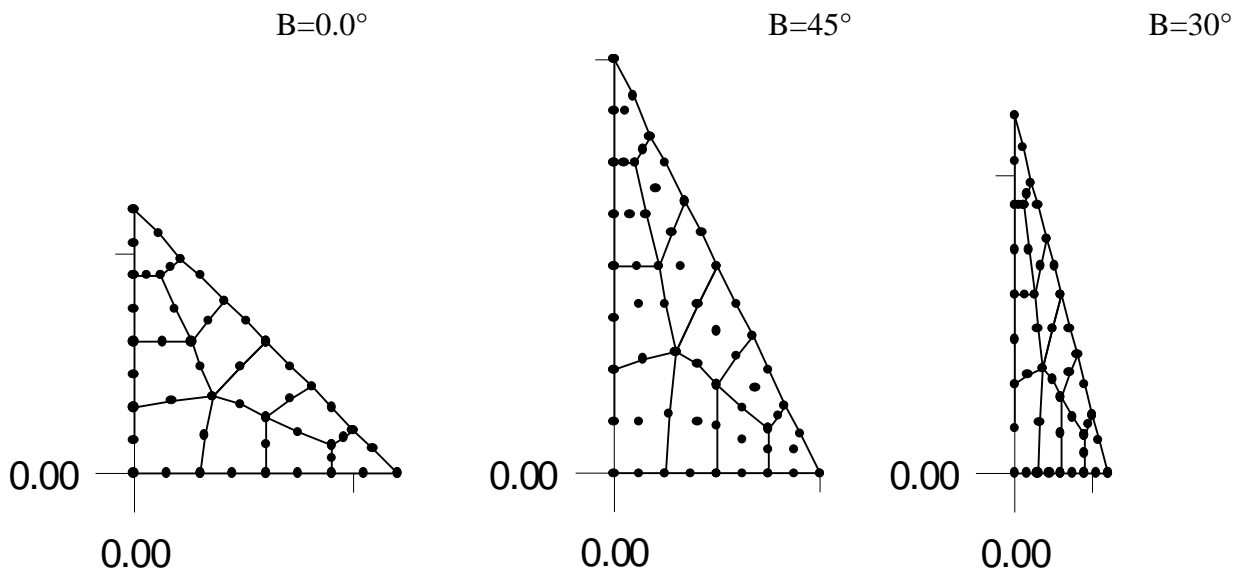
**Application N°3 :**

Pour cet exemple, nous allons explorer la capacité de l'élément finis choisis en mode de distorsion à travers l'analyse d'une plaque biaise encastree et chargée uniformément.

**a) Plaque biaise encastree :**

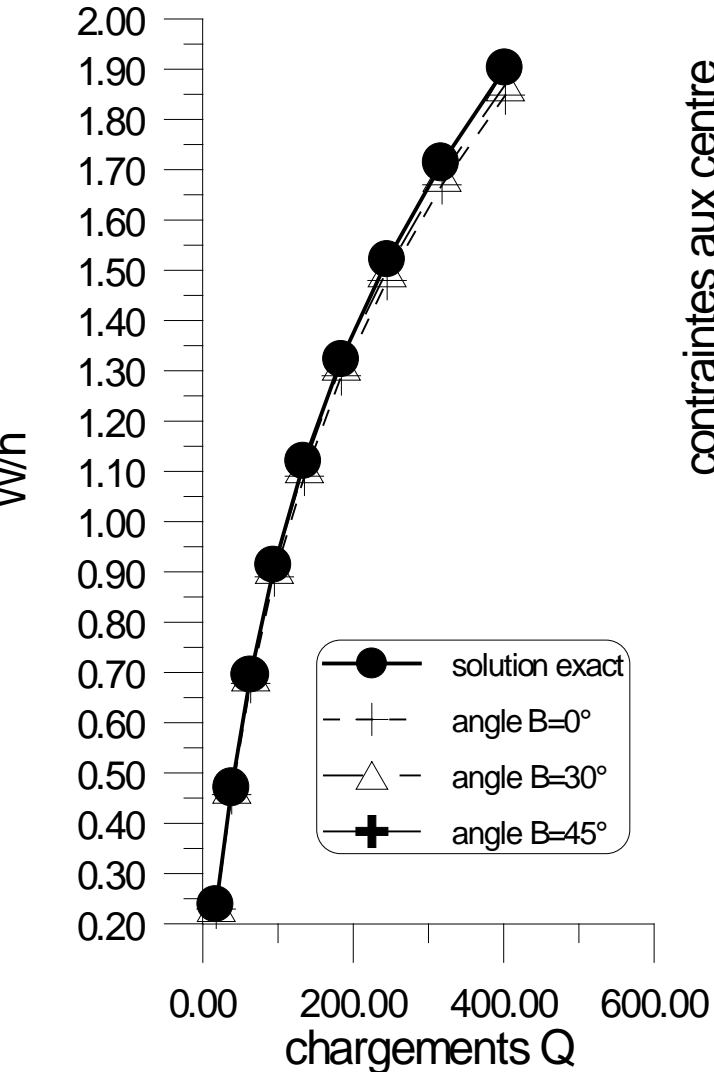
Pour cette application, l'angle de distorsion  $\beta$  prendra trois valeurs [ $\beta = 0^\circ, \beta = 45^\circ, \beta = 30^\circ$ ] pour lesquelles la plaque sera analysée Graphe (VII-5).

Le maillage est effectué à l'aide de l'élément Lagrangien  $[Q_L]$  à 9 nœuds est comparé à la solution de *Levy*.

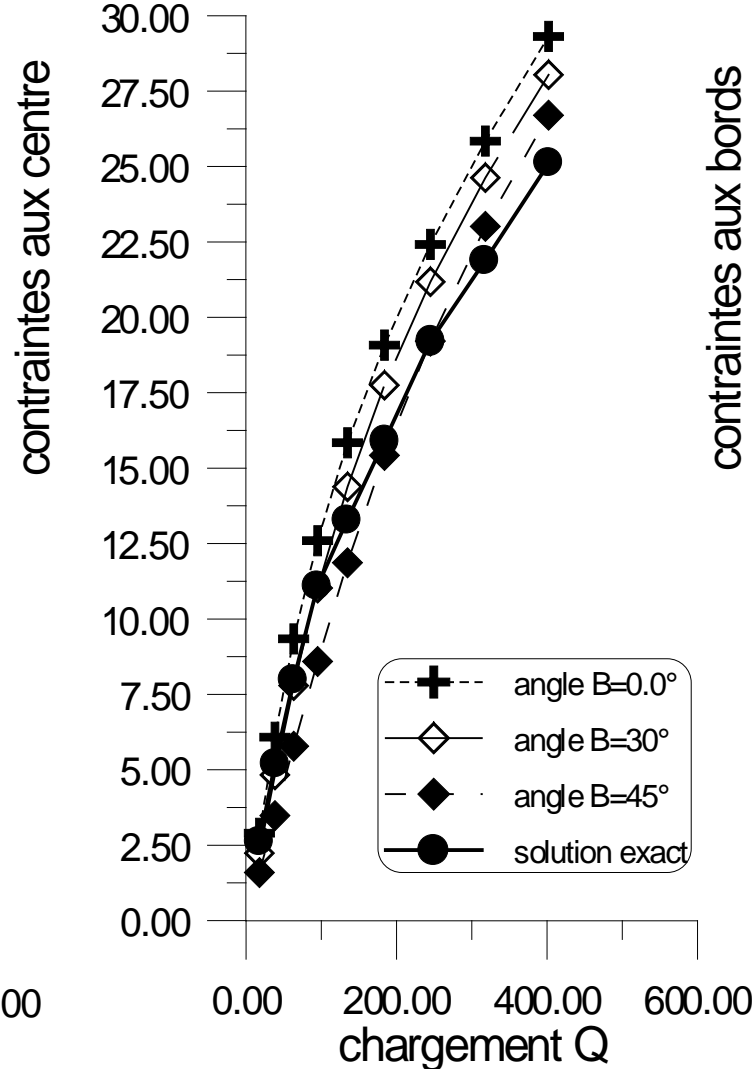
**Remarques :**

Après avoir exploré le graphe (VII-5) on constate que dans le cas des plaques biaises, la capacité de l'élément en mode de distorsion est mise à l'épreuve, et l'on remarque que :

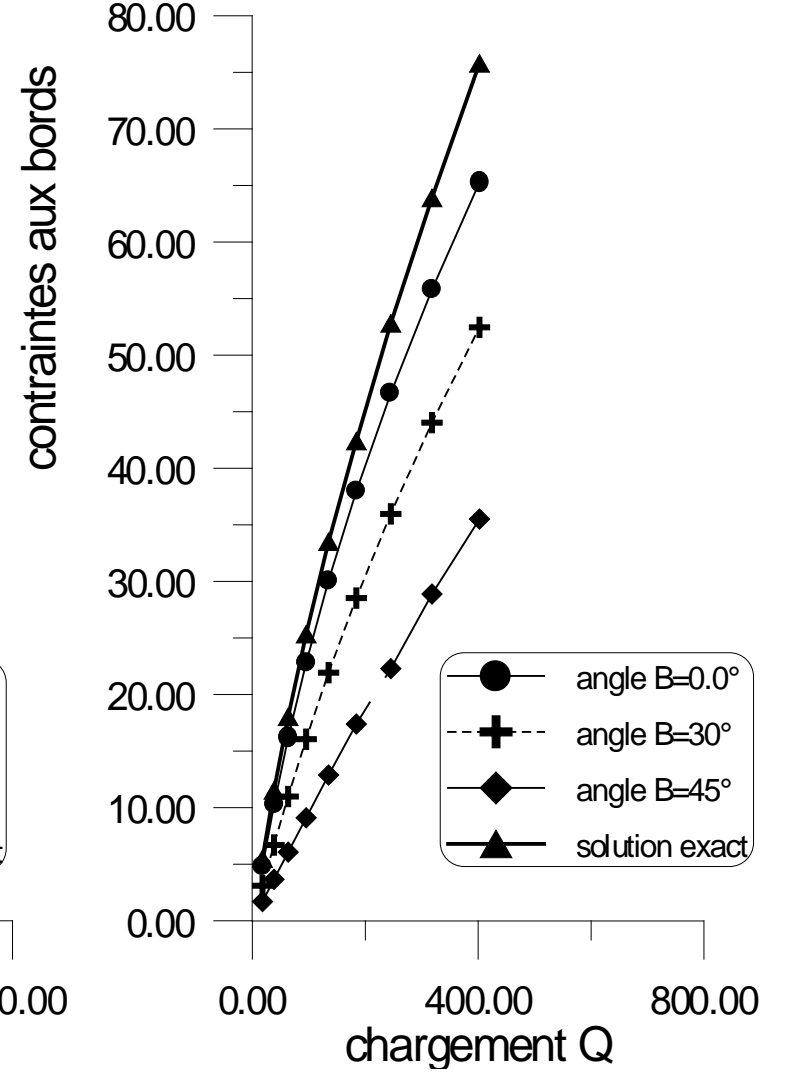
- pour le cas où l'angle de distorsion [ $\beta = 0$ ], les résultats obtenus sont comparables aux résultats calculés de la plaque carrée encastree. Cependant, la distorsion de l'élément conduit à une dégradation visible de la contrainte.
- Pour les deux autres cas ( $\beta = 30^\circ$  et  $\beta = 45^\circ$ ), la dégradation du déplacement ainsi que la contrainte est évidente, ce qui prouve que le choix de l'élément à 9 nœuds n'est pas approprié et qu'il faut impérativement un autre élément.



TABEAU (7-7a)



TABEAU (7-7b)



TABEAU (7-7c)

GRAPHE [7-5] : PLAQUE BAISE ENCASTRE

### ***Application n°4 :***

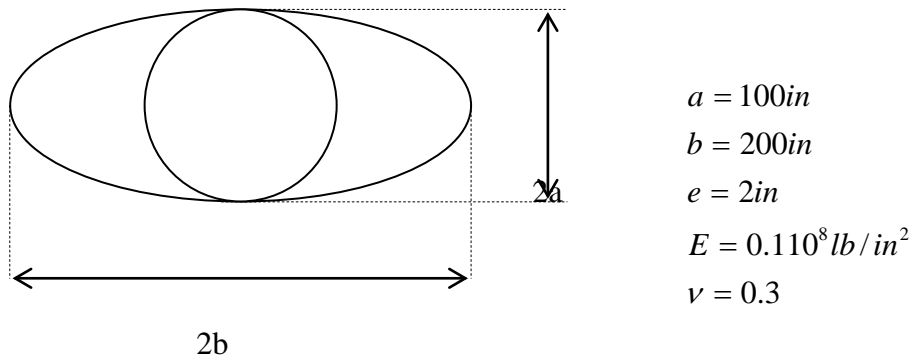
Ici, la performance des trois familles d'éléments  $[Q_s, Q_L, Q_H]$  est comparée avec la solution analytique de Kirchhoff dans le cas de charge uniformément répartie [19] et concentré [20]. Pour la représentation des bords courbes et plus particulièrement pour une forme circulaire et elliptique

#### ***a) Plaque circulaire encastrée :***

Pour cet exemple, on considère une plaque circulaire encastrée soumise :

- \* A une charge concentrée (P) au milieu de la plaque
- \* A un chargement uniformément réparti (Q)

avec une convergence imposée de 0.1%



Les résultats obtenus sont schématisés dans les courbes de la figure [VII.6]et[VII.7].

#### ***b) - Plaque elliptique encastrée :***

Enfin, pour terminer, on prend le cas d'une plaque elliptique encastrée soumise à une charge uniforme avec une tolérance imposée de 0.1%. Les propriétés géométriques et matérielles sont données ci-dessus et les valeurs numériques des contraintes et des déplacements sont lus dans le graphe de la figure [VII.8]

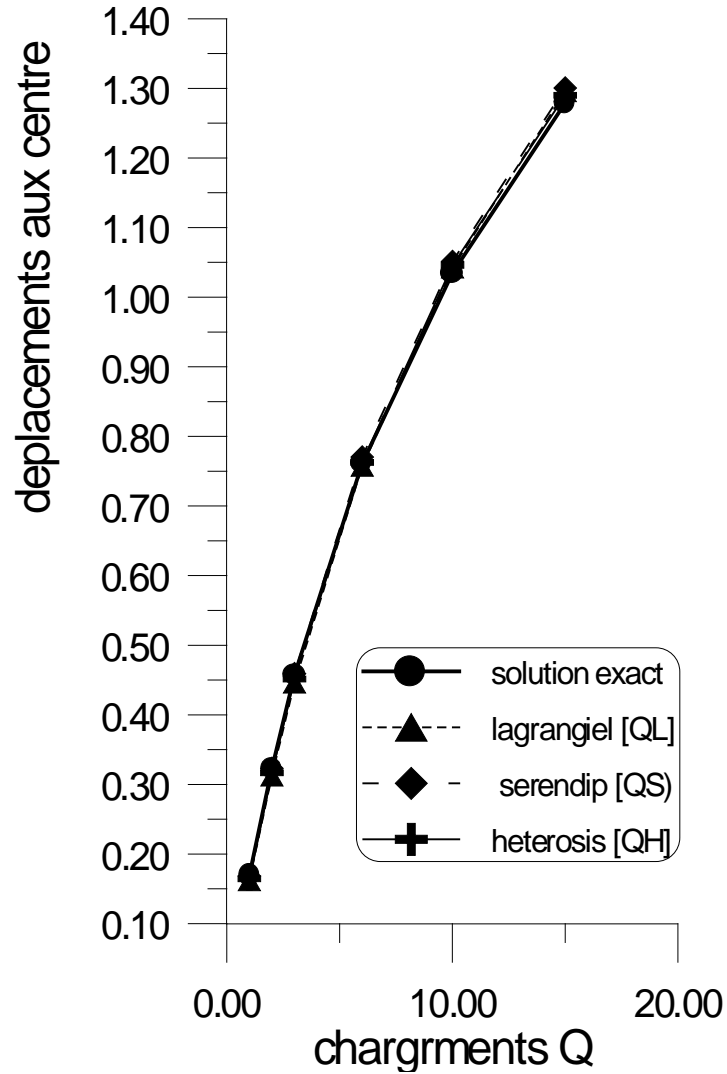


TABLEAU (7-7)

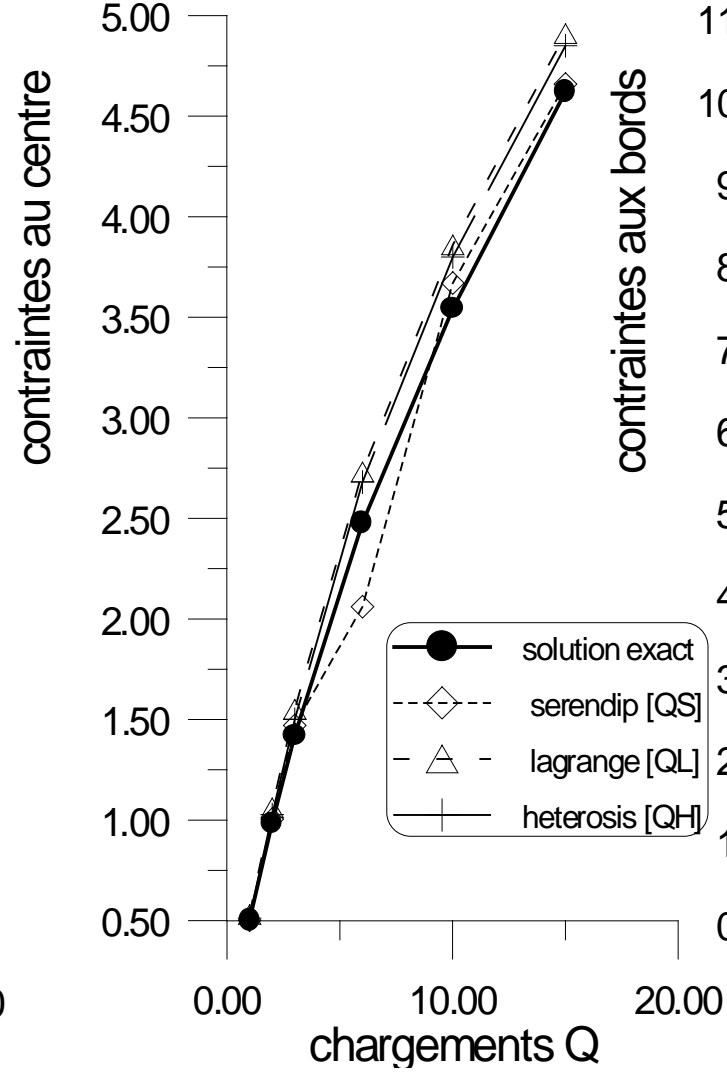


TABLEAU (7-7a)

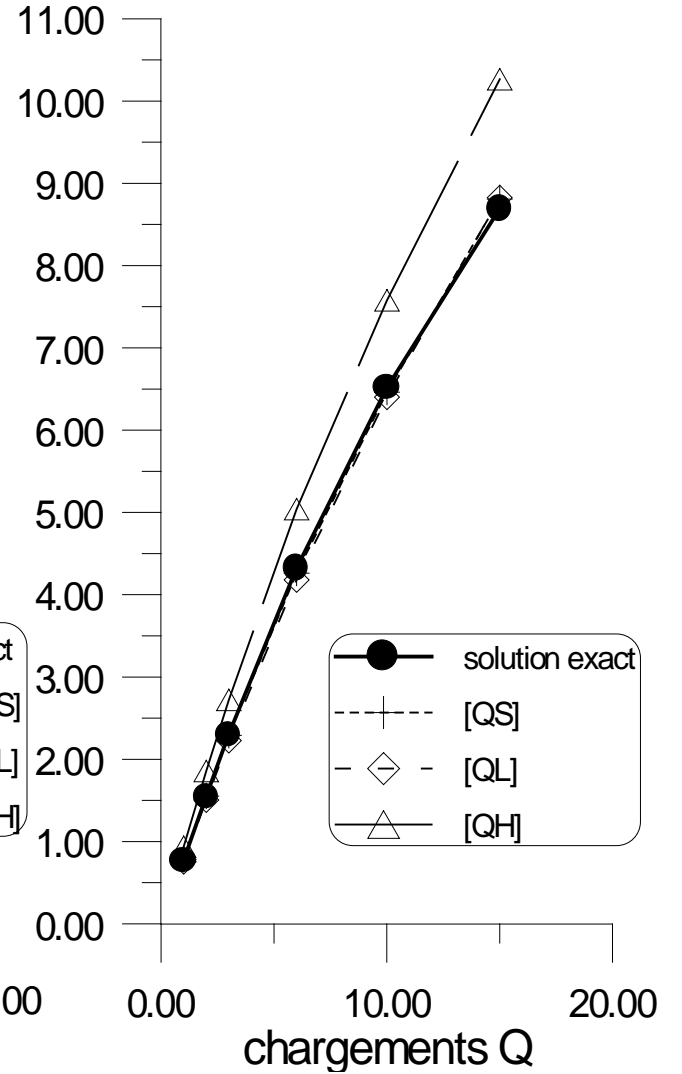


TABLEAU (7-7b)

GRAPHE [7-6] : PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTRE

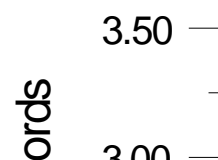
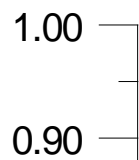


TABLEAU (7-8a)



TABLEAU (7-8b)

FIGURE [VII-7] : PLAQUE CIRCULAIRE ENCASTRE

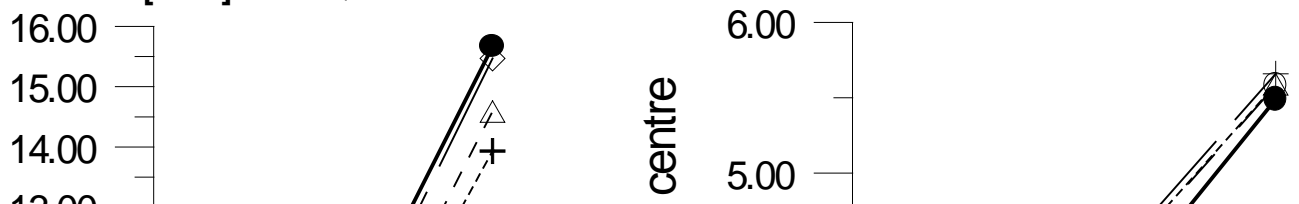


TABLEAU (7-9a)

TABLEAU (7-9b)

TABLEAU (7-9c)

**GRAPHE [7-8] : PLAQUE ELLIPTIQUE ENCASTRÉE**

**Remarques et comparaisons:**

Dans le cas de la plaque circulaire encastrée, on remarque que les résultats obtenus par les trois éléments ( $Q_s, Q_L, Q_H$ ) sont comparables sur le plan contrainte déplacement; car il est difficile de distinguer clairement la tendance comportementale de chacun puisque pour certains cas de chargement un élément donnera de bon résultats par rapport à un autre, tandis que, pour d'autres cas de chargement, ce dernier va donner des résultats meilleurs que le premier.

Dans le cas de la plaque elliptique encastrée, ici encore, les valeurs obtenues sont comparables pour les trois éléments. Cependant, les éléments  $Q_s$  et  $Q_L$  donnent de meilleurs résultats que l'élément Hetérosis qui présente certaines irrégularités aux bords de la plaque.

**Résumé et Conclusion :**

Dans cette partie, nous avons présenté l'analyse de non - linéarité géométrique des plaques en utilisant la formulation de **Mindlin** par éléments finis dans le cas des hypothèses de **Von Karman**.

Comme éléments d'analyse et de validation, nous avons utilisé plusieurs types d'éléments finis dans le cadre de formes diverses (carrées, biaises, circulaires, elliptiques), ainsi que deux méthodes de résolutions non - linéaires, dans les buts évident :

- premièrement de comparer la formulation de Mindlin par éléments finis à la formulation de Kirchhoff pour les plaques minces.
- deuxièmement de conclure sur la méthode de résolution la plus économique.
- troisièmement de déduire l'élément finis le plus performant.

Pour pouvoir enfin analyser la deuxième non - linéarité en utilisant la meilleure méthode de résolution ainsi que le meilleur élément finis.

Vient donc la phase du déroulement du logiciel qui va nous permettre d'obtenir les résultats nécessaires à la validation du programme ainsi qu'à la comparaison dont il est question.

Au terme de l'exécution numérique, nous obtenons plusieurs valeurs relatives à la contrainte et aux déplacements que nous transcrivons dans des tableaux et que nous schématisons dans des courbes.

Tout ceci nous permet de conclure que :

- 1- La formulation de Mindlin dans le contexte de géométrie non - linéaire est une solution acceptable dans le cas des plaques minces de la formulation de 'Kirchhoff'.
- 2- La méthode de résolution la plus appropriée est celle de Newton - Raphston.

3- Enfin, à la lumière de la comparaison entre élément finis isoparamétrique linéaire  $[Q_4]$  et de ce des familles de 'Serendip'  $[Q_s]$  de 'Lagrange'  $[Q_L]$  et 'Hetérosis'  $[Q_H]$ , avec les résultats analytique obtenus dans le cas des plaques minces; il apparaît clairement que les éléments quadratiques sont plus souvent performant que l'élément linéaire  $[Q_4]$  et que les éléments à 8 et 9 nœuds ( $Q_s, Q_L, Q_H$ ) donnent des résultats comparables à [0.1%] près.

Nous remarquons ainsi que l'irrégularité du comportement de chaque élément vis-à-vis de certains cas de chargements de formes ou de conditions d'appuis, nous mènes à penser que les trois 'Q family' ( $Q_s, Q_L, Q_H$ ) présente les mêmes avantages et les mêmes inconvénients et donc, qu'il n'y a pas d'éléments plus performant qu'un autre. Ce qui va nous permettre d'aborder notre deuxième partie d'analyse non - linéaire par éléments finis en utilisant l'un des trois éléments sans préférence particulière.

Néanmoins, le choix de l'élément quadratique à 9 nœuds de la famille de Lagrange  $[Q_L]$  présente une solution médiane avec la certitude d'approcher la solution exacte à 0.1% près.

## VII.6 Validation numérique de la deuxième non - linéarité géométrique [H.NL. 2]

A ce niveau de l'analyse, l'élaboration du programme de calcul est basée principalement sur la théorie déjà développée dans le chapitre précédent et où l'influence de la distorsion  $u$  et  $v$  en  $x$  et  $y$  est prise en compte, contrairement aux hypothèses de '**Von Karman**'. Les résultats sont donnés en terme numérique sous forme de tableaux et de courbes comme nous l'avons déjà vu.

Au terme de cette étude, il ne nous reste plus qu'à concrétiser tous les développements matriciels précédemment effectués sous forme numérique à travers des tableaux et des courbes. Ceci pour pouvoir évaluer, enfin, en terme de pourcentage [%] le taux d'erreur existant entre les deux approches. L'une [H.NL.1] de '**Von Karman**' qui néglige par hypothèse les dérivées de  $u$  et  $v$  en  $x$  et  $y$  et l'autre [H.NL.2] plus complète qui prend la formulation intégrale du tenseur de déformation de "**Green**" en considérant physiquement d'autre degré de liberté.

Ainsi, pour pouvoir apprécier la différence entre les deux méthodes, il faut impérativement l'appliquer en faisant varier les paramètres : (charge , forme et conditions d'appuis) dans le but évident d'explorer toutes les possibilités ou presque afin d'arriver à conclure sur une hypothèse générale.

### Application n°1

#### *a) - plaque carrée encadrée :*

Pour ce cas, on considère les mêmes caractéristiques géométriques et matérielles que l'application précédente.

Les résultats obtenus sont posés sous formes de tableaux et de courbes et ou la comparaison entre les deux hypothèses est basée essentiellement sur le même taux de convergence  $\|n\| \leq \varepsilon$

**Plaque carrée encastrée - Déplacement du centre  $w_c$** 

Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
17.79	0.237	0.2409 <0.56>	0.2412 <0.56>	0.125
38.3	0.471	0.4766 <0.104>	0.4773 <0.102>	0.147
63.4	0.695	0.6956 <0.153>	0.7009 <0.0748>	0.186
95	0.912	0.9117 <0.153>	0.9136 <0.748>	0.208
134.9	1.121	1.1156 <0.02>	1.1181 <0.24>	0.224
184	1.323	1.3105 <0.143>	1.3135 <0.958>	0.23
245	1.521	1.5026 <0.001>	1.5061 <0.6895>	0.233
318	1.714	1.689 <0.06>	1.6925 <0.273>	0.208
402	1.902	1.866 <0.818>	1.8700 <0.285>	0.22

 $\cong 0.2\%$ 
**Plaque carrée encastrée - contrainte aux bords  $\sigma(a/2, 0)$** 

Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
17.79	5.48	5.321	5.33	0.17
38.3	11.52	11.67	11.71	0.34
63.4	18.03	17.28	17.367	0.5
95	25.32	24.15	24.31	0.66
134.9	33.5	31.68	31.97	0.915
184	42.4	40.40	40.86	1.14
245	52.8	49.44	50.11	1.355
318	63.9	59.05	59.97	0.9
402	75.8	68.98	70.18	1.74

 $\cong 0.75\%$ 
**Plaque carrée encastrée - contrainte au centre  $\sigma(a, 0)$** 

Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
17.79	2.6	2.562	2.563	0.04
38.3	5.2	5.33	5.331	0.02
63.4	8.0	8.114	8.116	0.024
95	11.1	10.85	10.851	0.02
134.9	13.1	13.55	13.56	0.02
184	15.9	16.21	16.23	0.02
245	19.2	18.947	18.98	0.2
318	21.9	21.72	21.77	0.23
402	25.1	24.52	24.58	0.25

 $\cong 0.094\%$

**b) - plaque carrée simplement appuyée :**

C'est toujours la même plaque à la différence près que les chargements et les conditions d'appuis sont différents.

Les résultats obtenus sont comparés à celles de "Rushton" qui résout le problème par la méthode des différences finies et où la comparaison entre les deux hypothèses est basée principalement sur le même taux de convergence  $\|n\|$

**Plaque carrée simplement appuyée - flèche au centre w**

Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
9.16	0.335	0.3434 <0.6>	0.3437 <0.4>	0.17
36.6	0.818	0.8090 <0.19>	0.8097 <0.7>	0.08
146.5	1.45	1.4533 <0.003>	1.4537 <0.35>	0.0227
586	2.40	2.374 <0.004>	2.3717 <0.4>	0.13
2344	3.83	3.7851 <0.002>	3.79 <0.1>	0.13
9377	6.07	6.009 <0.46>	6.017 <0.5>	0.133

$\cong 0.11\%$

**Plaque carrée simplement appuyée - contrainte au centre  $\sigma(0, 0)$** 

Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
9.16	2.46	2.5961	2.5974	0.01
36.6	6.90	6.9804	6.9842	0.02
146.5	4.5	14.728	14.731	0.1
586	30.0	30.408	30.394	0.2
2344	65.2	66.031	66.31	0.2
9377	148.3	150.60	150.88	0.3

$\cong 0.1\%$

**Remarque et conclusion :**

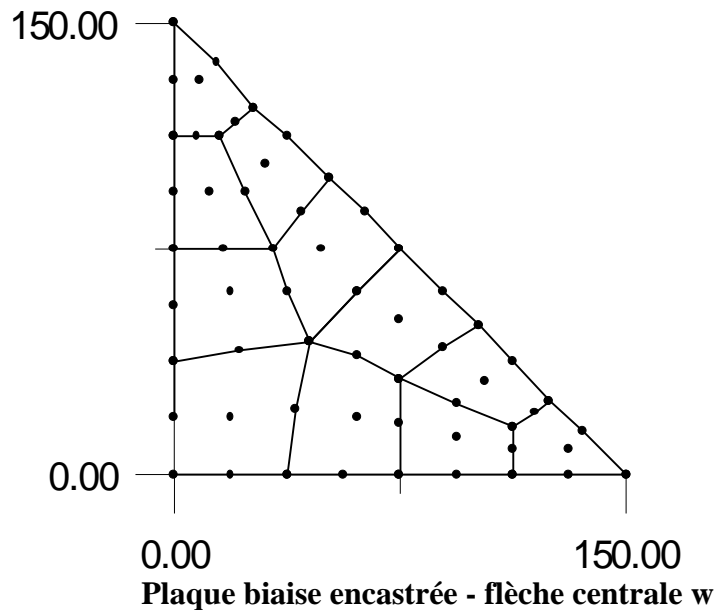
L'analyse de la plaque carrée qui est modélisée par un élément finis quadratique de Lagrange  $[Q_L]$  à 9 nœuds, nous donne des valeurs numériques au centre et aux bords de la plaque où l'on remarque aisément que les deux approches donnent des résultats presque identiques à 0.5% près aussi bien pour les déplacements que pour les contraintes.

On note également que le taux d'erreur à une variation proportionnelle au chargement où il augmente légèrement pour chaque accroissement de charge indépendamment des conditions d'appuis.

## Application n°2 :

### - Plaque biaisée encastrée :

Pour cet exemple, on considère les mêmes caractéristiques géométriques et matérielles que le précédent, sauf que la comparaison portera sur le cas où l'angle de distorsion ( $\beta = 0$ )



Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
17.79	0.237	0.2369	0.23759	0.3
38.3	0.471	0.4701	0.4725	0.5
63.4	0.695	0.6923	0.69678	0.65
95	0.912	0.9043	0.91098	0.74
134.9	1.121	1.1086	1.1172	0.78
184	1.323	1.3041	1.3143	0.8
245	1.521	1.4968	1.5084	0.77
318	1.714	1.6835	1.6962	0.75
402	1.902	1.8613	1.8747	0.72

$\cong 0.7\%$

### Remarque et conclusion

Précédemment, nous avons testé la stabilité à la distorsion des éléments finis, mis en comparaison afin de déterminer la performance de chacun à ce genre de comportement et nous avons déduit que le maillage par éléments carrés linéaires et quadratiques ne convenait pas sauf pour le cas limite où la distorsion de la plaque est nulle ( $\beta = 0$ ).

Ce qui nous mène à faire comparaître cet exemple dans le cas précis de la comparaison des deux approches antérieurement développées. Afin d'évaluer numériquement en pourcentage [%] le taux d'erreur qui peut exister entre les deux.

Pour ceci, seuls les valeurs relatives aux déplacements sont transcrits.

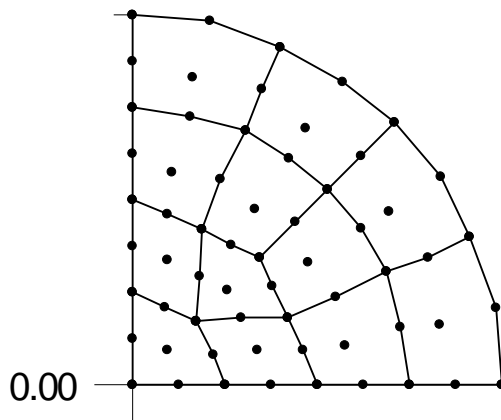
Ainsi, à la lumière des résultats obtenus, on remarque facilement comme pour le cas de la plaque carré que la variation du taux d'erreur est négligeable et que sa valeur est proportionnelle au chargement appliqué.

### Application n°3 :

#### a) - Plaque circulaire encastree :

Pour la plaque circulaire encastree, on considère 2 cas de charges :

- chargement uniforme Q
- chargement concentré P



Plaque circulaire  $[Q_u]$  - déplacement central w

Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
1	0.169	0.16889	0.16899	0.06
2	0.323	0.3242	0.32462	0.1
3	0.457	0.46058	0.46121	0.14
6	0.761	0.7718	0.7733	0.19
10	1.035	1.0528	1.0550	0.21
15	1.279	1.3018	1.3046	0.21

$\cong 0.16$

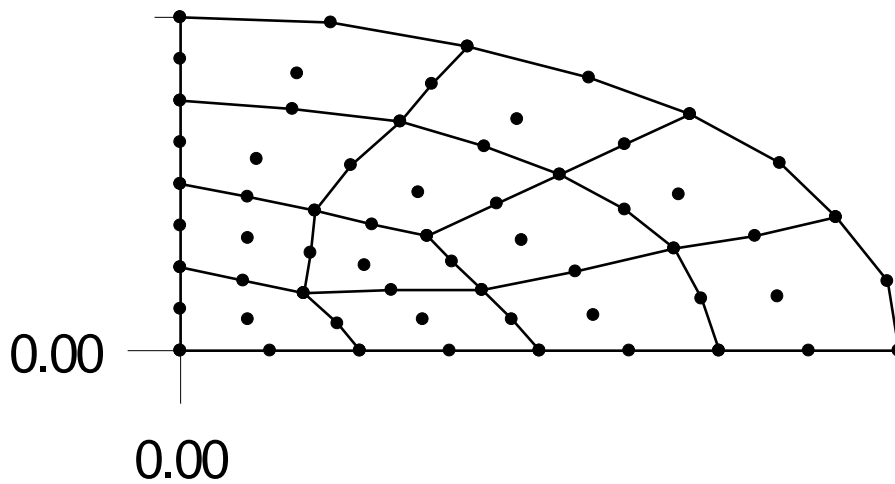
**Plaque circulaire  $[P_u]$  - flèche centrale w**

Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
1	0.2130	0.21883	0.21861	0.1
2	0.4052	0.41568	0.41498	0.17
3	0.5705	0.58448	0.58322	0.25
6	0.7123	0.72894	0.72713	0.25
10	0.8354	0.8544	0.85208	0.27
15	0.9442	0.96528	0.96246	0.29

≅ 0.216

**b) - Plaque elliptique encadrée :**

Enfin, pour terminer, on prend comme exemple final, le cas d'une plaque elliptique encadrée dont les propriétés géométriques et matérielles sont données précédemment et le chargement appliqué est uniforme.



**Plaque elliptique - flèche centrale w**

Charge Q	Solution Exacte	Type d'approche		Pourcentage d'erreur [%]
		H.NL. 1	H.NL. 2	
1	0.344	0.3491	0.34911	0.003
2	0.600	0.6082	0.60833	0.021
3	0.789	0.79829	0.79849	0.025
6	1.163	1.1745	1.1748	0.0255
10	1.490	1.4930	1.4931	0.007
15	1.790	1.7755	1.7753	0.013

≅ 0.01

**Remarque et conclusion :**

Pour terminer, le cas d'une plaque circulaire et elliptique sont analysé dans le but évident d'évaluer une dégradation éventuelle des résultats dans le cas particulier d'une frontière courbe. Pour ceci, on fait varier la valeur et la nature du chargement afin d'élargir notre champs d'analyse et de compréhension.

Enfin, l'exécution et le déroulement du programme qui traite les données relatives au chargement, à la forme et aux conditions d'appuis dans ce cas précis ce cet exemple, nous donne des résultats divers mais néanmoins précis qui nous permet une fois de plus de conclure comme pour tous les cas précédents : que l'erreur entre les deux approches est négligeable et proportionnelle au chargement indépendamment de la forme et des conditions d'appuis de la plaque analysée

**Conclusions & Perspectives**

Au cours de cette étude, nous avons présenté l'analyse de la non linéarité géométrique en utilisant la formulation de Mindlin par éléments finis dans le cas des plaques minces et moyennement épaisses avec  $\left[ \frac{e}{L} \leq \frac{1}{20} \right]$

Cette analyse a été développée *pour deux hypothèses complémentaires, celle de 'Von Karman' qui néglige les distorsions de  $u$  et  $v$  en  $x$  et  $y$  et celle qui ne les néglige pas. Ce qui correspond à l'objectif principal de notre étude.*

Au terme donc de cette recherche il ne nous reste plus qu'à développer la partie la plus importante de notre analyse qui est l'exploitation des résultats obtenus.

Ainsi, pour valider la formulation que nous avons développé antérieurement, il est impératif de comparer les résultats obtenus par le programme aux résultats exacts donnés par plusieurs auteurs traitant du même problème (murray [8],Bergan [9] levy [28] et Wood [10])

Le cheminement de l'analyse suivra donc plusieurs démarches exprimé ici par trois (3) étapes principales:

1. La première étape, va statuer sur la formulation de Mindlin pour les plaques minces
2. La deuxième étape, portera surtout sur le choix des outils d'analyse tel que:
  - La méthode de résolution la plus économique.
  - L'élément le plus performant parmi les trois " Q family " [ $Q_S, Q_L, Q_H$ ].
3. La troisième étape portera sur l'essentiel de notre analyse qui est
  - la validation du modèle numérique pour la théorie développées.
    - la comparaison entre les deux approches en terme de pourcentage d'erreur.
  - La méthode idéal à l'utilisation

Pour plus de rigueur nous nous sommes imposés l'examen de plusieurs types d'applications où les propriétés géométriques et matérielles sont différentes selon l'exemple étudié telle que :

- a) plaque carré
- b) plaque biaisé.
- c) plaque circulaire.
- d) plaque elliptique.

On précise que pour toutes ces applications les déplacements, les contraintes et le chargement sont donnés sans dimension .

Le déroulement du logiciel pour toutes ces applications nous a permis d'obtenir un nombre impressionnant de résultats dont l'exploitation sous forme de courbes et de graphes simplifie l'interprétation

Ainsi, l'exploitation de ces résultats est menée suivant les trois étapes que nous nous sommes imposés plus haut Ce qui nous permet de conclure sur tous les points que nous avons soulevés précédemment :

1.1 La formulation de Mindlin pour les plaques épaisses dans le contexte de la géométrie non - linéaire est une solution acceptable dans le cas des plaques minces de la formulation de "Kirchhoff".

2.1 La méthode de résolution la plus appropriée est celle de "Newton - Raphston".

2.2 A la lumière de la comparaison entre élément fini isoparamétrique linéaire  $[Q_4]$  et les trois "Q - family" de Lagrange  $[Q_L]$  de serendip  $[Q_s]$  et l'élément 'hiérarchisé'  $[Q_H]$  avec les résultats analytiques obtenus, il apparaît clairement que :

- 1)- Les éléments quadratiques sont plus souvent performant que l'élément linéaire  $[Q]$
- 2)- Les éléments à 8 et 9 nœuds ( $Q_s, Q_L, Q_H$ ) donnent des résultats comparables au plus identique.
- 3)- L'irrégularité de comportement de chaque élément vis-à-vis de certains cas de charge, de forme et de condition d'appui, nous mène à penser que les trois "Q - family"  $[Q_s, Q_L, Q_H]$  présentent les mêmes avantages et les même inconvénients. Ce qui nous permet de conclure qu'il n'y a pas d'élément plus performant qu'un autre ; Sauf peut être pour l'élément Hétérois  $[Q_H]$  qui présente pour certain cas de forme géométrique une précision relative, mais négligeable par rapport aux autres .On précise ,ependant, que son utilisation reste un peut lourde a l'emploi.

Ceci nous permet donc d'aborder notre troisième étape en utilisant certains outils d'analyse déduits directement de la précédente et où le type de résolution et l'élément de maillage utilisé est choisie directement sur la base d'une comparaison déjà effectuée.. *Ainsi, la méthode de résolution est celle de " Newton - Raphston" par déduction et le choix de l'élément est arbitraire puisqu'il n'y a pas d'élément présentant une performance particulière. Néanmoins, l'élément Lagrangien  $[Q_L]$  à 9 nœuds est choisit comme une solution médiane.*

Ainsi, l'analyse par éléments finis de la deuxième approche de non linéarité géométrique [H.NL.2] est effectuée sur la base d'un développement matriciel largement exposé dans le chapitre précédent et dont certains paramètres sont déterminés plus haut .

Dans le même ordre d'idée et dans le but d'élargir notre champs de comparaison, nous nous sommes imposées l'examen de plusieurs applications dont les propriétés géométriques et matérielles sont différentes. Ceci au même titre que la première approche.

Finalement, une fois le logiciel déroulé pour tous les exemples, on constate à la lumière des valeurs numériques obtenues que :

3.1 Le modèle numérique développé est belle et bien validé et étayait par des valeurs exactes obtenues pour plusieurs cas de charge, de forme, et de conditions d'appuis.

3.2 l'analyse numérique entre les deux méthodes nous permet après examen minutieux de toutes les valeurs obtenues pour toutes les applications de constater que :

- 1)- L'erreur entre les deux approches est négligeable et proportionnelle au chargement [indépendamment de la forme et des conditions d'appuis]
- 2)- L'approche développée par la deuxième non - linéarité génère des matrices de rigidité beaucoup plus importantes que pour la première méthode, ce qui est onéreux du point de vue stockage, conduisant ainsi à une augmentation du temps machine.

3)- On remarque ainsi qu'au niveau de la résolution par la méthode de Newton - Raphston, le nombre d'itération nécessaire à la convergence de la deuxième approche est pratiquement le double de la première ce qui augmente encore le temps d'exécution.

3.3- Pour terminer, on arrive à la conclusion qui est l'essence même de notre analyse pour dire que :

- 1)- la méthode de la première non - linéarité est beaucoup plus intéressante à l'application que la deuxième approche aussi bien au niveau des valeurs numériques obtenues considérées très proche des valeurs exactes que sur le coût d'exécution en temps machine.
- 2)- L'hypothèse qui néglige les termes de distorsions en x et y est enfin justifiée numériquement, ce qui prouve d'autres part :
- 3)- La puissance du modèle numérique développé, par rapport ,au modèle mathématique formulé a partir des équations de l'élasticité pour même problème.
- 4)- D'autre part, les résultats obtenus à travers l'analogie, *confirment définitivement* l'hypothèse de " Von Karman" pour les plaques minces et moyennement épaisses  $\left[ \frac{t}{L} \leq \frac{1}{20} \right]$ .

### • *Recommandations*

Dans cette présente recherche, on s'est intéressé particulièrement à la non linéarité géométrique des plaques minces et moyennement épaisses, où nous avons développés un logiciel traitant du même problème . Il serait ,donc, opportun d'augmenter ce même logiciel en complétant cette étude par d'autres approches aussi intéressantes que diverses :

1- Étendre le traitement aux plaques épaisses spécialement dans le cas de charges très élevées et où on considère le problème de l'élasticité tridimensionnel.

2- Etudier le problème avec comme variante la nature du matériau et particulièrement si on considère une plaque composite formée d'un empilement de minces couches de matériaux orthotropes et d'orientation quelconque avec la simplification de les considérés comme la superposition de plaque mince homogène et orthotrope où seul le couplage des effets de membranes et de flexion dans la matrice d'élasticité, fait la différence avec les plaques homogènes.

3- Augmenter l'analyse de la non - linéarité géométrique à l'analyse de la non - linéarité matérielle, en considérant le matériau comme élastique - parfaitement plastique.

4- Considérer l'aspect dynamique en résolvant le système non linéaire d'équation différentielle :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$$

où

M est la matrice Masse

C est la matrice d'amortissement

K est la matrice de rigidité globale

F(t) est le chargement évoluant avec le temps comme par exemple le chargement thermique

# RÉFÉRENCES

## Références (II)

- [1]- MASSONNET CH. – “ Résistance des métaux “ – vol. II, 2<sup>ème</sup> édition, G. THONE, A. DUNOD, Paris 197
- [2]- MARCAL P. V. , et KING. I. P. , – int. J. mech. Sci. , vol. 9, pp. 143 – 155 (1967).
- [3]- S. TIMOSHENKO et J. N. GOODIER “ Théorie de l'élasticité “ Mac Graw Hill (1961).
- [4]- L. LANDAU et E. LIFCHITZ “ Théorie de l'élasticité “ ed. MIR (1967).
- [5]- A. E. H. LOVE “ A treatise on mathematical theory of elasticity “ 4 édition DOVER (1927).
- [6]- SALOMON “ élasticité linéaire “ MASSON Company.
- [7]- C. T. WANG “ Applied elasticity “ Mc Graw Hill (1953).
- [8]- W. A. NASH “ Theory and problems of strength of materials “ 2 ed. Mc Graw Hill (1977).
- [9]- MEGNOUNIF et M. DJAFOUR “ Elasticité générale “. O.P.U (1994).
- [10]- ATKIN R. J. , FOX N. , “ An introduction to the theory of elasticity “ LONGMAN (1980).

## Références (III.2)

- [1]- S. TIMOSHENKO et S. WOINOWSKY – KRIEGER “ Théorie des plaques et coques “ édition Dunod. Paris. 1968.
- [2]- R. SZILARD “ Theory and analysis of plates, classical and numerical methods “ prentice hall 1974.
- [3]- A. C. UGURAL “ Stresses in plates and shells “ Mc Graw Hill 1984.
- [4]- J. COURBON. “ Résistance des matériaux “ Dunod.
- [5]- CARRIER. G. F. , and SHAW. F. S. , “ Some problems on the banding of thin plates “ proc. Symp. App. Math. , (1950). 125 – 128.
- [6]- CONWAY. H. D. , “ Banding of rectangular plates subjected to uniformity distributed load and to tensile or compressive forces in the plane of the plate “ J. app. Mech. 17 (1950), 99 – 100.
- [7]- PETTERSSON .O. , “ Plates subjected to compression or tension and to simultaneous transverse load “ J. app. Mech. 25 (1954), 78 – 82.
- [8]- FRANKLIN. P. , “ An introduction to Fourier and Laplace transformation “ Dover publication, inc. New York 1958.

- [9]- GALLAGHER. R. H. , “ Analysis of plate and shell structure on application of finite element method in civil engineering “ Nashville, Tenn. , pp. 155 – 206, 1969.
- [10]- CHURCHIL. R. V. , “ Fourier series and boundary value problems “ Mac Graw – hill 1941.
- [11]- Serge LAROZE, “ Résistance des matériaux “ T. 1 EYROLLS et MASSON 1984.
- [12]- William A. NASH “ Résistance des matériaux “ T. 2 Mac Graw – hill. 1972.
- [13]- Ph. TROMPETTE “ Mécanique des structures par la méthode des éléments finis “ édition MASSON Paris. 92
- [14]- J. F. IMBERT. “ Analyse des structures par éléments finis “ CEPARDUS 1984.
- [15]- A. J. FRIKER, “ A simple method for including shear deformation in thin plate elements “ int. J. for num. Meth. in Engineering. Vol. 23. 1355 – 1366 (1986).
- [16]- B. M. IRONSAND. A. RAZZAQUE, “ Introduction of shear deformation into a thin plate displacement formulation “ AIAA J. 11. (10), 1438 – 1479 (1973).
- [17]- P. G. BERGAN and X. WANG, “ Quadrilateral plate bending elements with
- [18]- shear deformation “ compt. struct. 19, 25 – 34 (1984)

### **Références (III.3)**

- [1]- RITZ. W. , Oeuvres complètes, Gauthier Villars, Paris 1913.
- [2]- J. F. IMBERT “ Analyse des structures par éléments finis “ ed. CEPADUS (1984).
- [3]- L. ROCKEY, W. GRIFFITHS, R. EVANS, D. NETHERCOT “ Introduction à la méthode des éléments finis “ ed. EYROLLS (1979).
- [4]- CHANDRAKANT S. DESAI and John F. ABEL, “ Introduction to the finite element method. A numerical method for engineering analysis “ v. N. R. Company 1972.
- [5]- A. C. UGURAL “ stresses in plates and shells “ Mac Graw Hill 1981.
- [6]- ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR. “ La méthode des éléments finis “. Mac Graw Hill 1991.
- [7]- HOFF. H. J. j. “ the analysis of structures based on the minimal principals and principe of virtual displacement “ John WILEY and sons, inc. , New York, 1956.
- [8]- GALERKIA. B. G., “ series – solutions of some cases of equilibrium of elastic beams and plates “ VESTNIK. (1915) – 819 – 903.
- [9]- LANZOCS. C., “ the variational principals of mechanics “ university of Toronto, Press Toronto, 1964.
- [10]- LEISSA, A. W. et AL. , “ A comparison of approximate methods for the solution of plates bending problems “ , J. , AIAA, 7, n° 5. (1969). 920 – 927.
- [11]- R. H. GALLAGHER “ Introduction aux éléments finis “ Editions PLURALIS 1976.
- [12]- R. SZILARD “ Theory and analysis of plates, classical and numerical methods “ prentice Hall 1974.
- [13]- E. REISSNER “ On mixed variational theorem and on shear deformable plate theory “ int. J. of num. Meth. In Engineering. Vol. 23, pp. 193 – 198 (1986).

## References (III.4)

- [1]- Rudolph SZILARD “ theory and analysis of plates, classical and numerical method “ prentice Hall 1974
- [2]- A.C UGURAL “ stresses in plates and shells “ Mc crawhill 1981
- [3]- J.F IMBERT “ Analyse des structures par élément finis “ Cepadus edition 1984
- [4]- G.TOUZOUT et G.DATT “ une présentation de la méthode des éléments finis “ Maloine Hall 1976
- [5]- L.ROCKEY, W.GRIFFITHS, R.EVANS, D.NETHERCOT “ Introduction à la méthode des éléments finis “ Edition EYROLLS 1979
- [6]- E.ROISSNER “ The effect of transverse shear deformation on the bending of classic plates” J.APP.MECH 12 PP .A69- A77 1945
- [7]- A.W CLAGH , J.L TOCHE “ finits element differens “ matrice for analysis of plate bending “ matrix methode in structural mechanics . AFFDL TR-66-80 ? NOV 1965 PP 515-545
- [8]- G.SANDER – “ Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques” – université de Liège, collection publique n° 15, 1969.
- [9]- O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR, J.M. TOO “ Reduced integrations technique in general analysis of plats and shells “ int. J. Num. Meth. Eng, vol 3, 275 – 290 – 1971
- [10]- S. AHMAD, B. MIRONIS, O.C. ZIENKIEWICZ – “ Analysis of thick and thin shell structures by finite elements”. Int. Meth. Eng, Vol 2, 419 – 451, 1970.
- [11]- F. STUART DAWSEY, RAY. W. CLOUCH – “ Improved numerical integration of thick shell finite elements “ int. J. Num – Meth. Eng. – Vol 3 575 – 586 1971.
- [12]- K. J. BATH et E. L. WILSON “ numerical methodes in finite element analysis “ prentice Hall 1976.  
- R. D. COOK “ Méthode de calcul numérique en élasticité “
- [13]- ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR – “ La méthode des éléments finis ” – Mc GRAW. Hill 1991.
- [14]- BATOZ J. L – “ An explicit formulation for an efficient triangulaire plate banding element “. Int. J. Num. Eng.18 1077 – 1089 (1982).

## Références (IV)

- 1- R. Szilard, “ theory and analysis of plate “ prentice Hall 1974.
- 2- S. P. Timoshenko and S. Woinowsky – krieger, “ théorie des plaques et coques “ Dunod 1968.
- 3- S. Loyy, “ square plate with clamped edges under normal pression producing large deflexion “ NACA, tech. , note 847 (1942).
- 4- K. R. Rushton. “ large deflexion of plates with initial curvature “. , int. J. mech. Sci. 12, 1037 – 1051 (1970).

- 5- N. A. Weil and N. M. Newmark, “ large deflexion of electrical plates “. J. app. Mechanic. 23. 21 – 26 (1956).
- 6- R. Schmidt, “ large deflexion of a clamped circular plate. “ A. S. C. E 94 (EM6). 1603 – 6 (1968).
- 7- R. D. Mindlin, “ influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates “ J. app. Mech. 18. 31 – 38 (1951).
- 8- D. J. Dame and O. L. Roufaeil, “ buckling of rectangular Mindlin plates “ Comput. Struct. 15. , 461 – 471 (1982).
- 9- G. J. Hancock, “ non linear analysis of thin section in compression. “ J. struct. Div. , ASCE 107, 455 – 471 (1981).
- 10- S. Leyy. “ bending of rectangular plates with large deflexions. “ NACA, Report n° 737 (1942).
- 11- K. Federhoffer; Osterr. “ flexion des plaques annulaires à grandes flèches “. Ing. Arch. , vol. 1, p. 21. (1946).
- 12- S. Timoshenko et J. N. Goodier, “ théorie de l'élasticité “, 2<sup>ème</sup> éd. , (1961) p. 26.
- 13- TH. Von Karman. “ encyclopædia der mathematics scheme wissens chaften “. vol. IV. P. 349 – (1910).
- 14- E. Koppe, Z. Aueu “ méthode générale d'élasticité non linéaire appliquée à la flexion des plaques “ math. mech. , vol. 36, p. 455 – (1965).
- 15- A. Foppl, « vorlesungen über technische mechanik » vol.5 . p. 132 – (1907).
- 16- H. Hencky, Z. Aueu “ résolution numérique du système non linéaire par la méthode des différences finies “ math. mech. , vol.1, (1921), p.81 et 423.
- 17- Aucust et Ludwing Föppel “ drang und zwang “ vol.1, p. 226, 1924
- 18- Y. C. Fung, “ foundation of solid mechanics “. Prentice Hall (1965).
- 19- L. Landau et E. Lifchitz “ théorie de l'élasticité “ ed. Mir (1967).
- 20- Chien Wei – Zang et Yeh Kai – Yuaw proc. ninth. intern. Congr. App. Mech. Bruxelles, 1957, vol. 6 p. 403
- 21- Aze Syed Yusuff “ les grandes flèches des plaques rectangulaire légèrement incurvées, soumise à une compression aux bords “ J. app. Mech. Vol. 19. p.
- 22- S. Way : Proc. Fifth. Inten. Congr. App. Mech. Cambridge, Mass. , (1998)

## Références (V)

- [1]- Bathz, K.J. and Dvorkin, E. N. “ on the automatic solution of non linear finite element equations “ comp. struct. Vol. 17, n° 5 – 6 pp. 871 – 879 (1983).
- [2]- Bellini, P. X. and Chulya, A “ an improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of non linear finite element equations. “ comp. struct. Vol. 26, n° 1 – 2, pp. 99 – 110, 1987.
- [3]- Bergan, P. G. “ solution algorithms for non linear structural problems “ compt. struct. Vol. 12, pp. 497 – 509, 1980.
- [4]- Bergan, P. G. , Holand, I. and Soreide, T. H. “ use of current stiffness parameter in solution of non linear problems. Energy methods in finite element analysis “ Edits. Glowinski, R. , Rodin, E. y. and zienkiewicz, O. C. John Wiley and sons.

- [5]- Bergan, P. G. Automated incremental – iterative solution schemes. “ numerical methods for non linear problems “, vol. 1, proc. Int. Conf. swanson 2 – 5 (1980).
- [6]- Bergan, P. G. et al “ solution techniques for non linear finite element problems “ int. Jal. of num. Meth. in Eng. , vol. 12, pp. 1677 – 1696, 1978.
- [7]- Crisfield M. A. “ accelerating and dauping the modified Newton – Raphston method “ compt. and struct. Vol. 18, n° 3, pp. 395 – 407, 1984.
- [8]- Gadala, M. S. and Oravas, G. A. “ numerical solution of non linear problems of continue; servey of formulation methods and solution techniques “ comp. and struct; vol. 19; n° 5 pp. 865 – 877, 1984.
- [9]- Matthies. C. and Connor. J. “ the solution of non linear finite element equation “ int. Jnt. of num. Meth. in eng. , vol. 14, pp. 1613 – 1626 – 1979.
- [10]- Mon. DKAR. D. P. and Powell. G. H. “ evaluation of solution schemes for non linear structures. “ comp. and structures.
- [11]- Oden. J. T. “ numerical formulation of non linear elasticity problems “ Jnl. Eng. str. Div. Asce, vol. 99, pp. 235 – 255 (1967).
- [12]- Crisfield. M. A. “ incremental – iterative solution procedures for non linear structural analysis “ numerical methods for non linear problems, vol. 1, proc. of the int. conf. , (1980).
- [13]- Crisfield. M. A. “ the automatics non linear analysis of stiffened plates and shallow shells using finite elements. “ proc. inst. of civ. Eng. , part 2. 1980.
- [14]- Crisfield. M. A. “ solution procedure for non linear structure analysis recent advances in non linear computational mechanic, pp. 1 – 39. 4k, 1982.
- [15]- Padovan, J. and Moscarello. R. “ locally bound constrained Newton – Raphston algorithms “ comp. and struct. , vol. 23, n° 2, pp. 181 – 197, 1986.
- [16]- Riks. E. “ the application of Newton – Raphston ’s method to the problem of elastic stability “ Jal. app. Mech. Vol. 39, pp. 1060 – 1066, 1972.
- [17]- Argyris . J. H. “ continue and discontinue “ first conf. gives a road survey of the devell. of matrix meth. including linear and non linear analysis, and small and large deflection theories.
- [18]- Beker, E. B. “ a numerical solution of a class of a problem of finite elastic deformation “ U. C. B. 1966.
- [19]- Yaghmai. S. “ incremental analysis of large deformation in mechanics of solids “ U. C. B. 1968.
- [20]- JR. Tillerson, JA. Striclin., W. E. Haisler “ numerical methods for the solution of non linear problems in structural analysis “.
- [21]- Mordechai. S. “ numerical solution of constrained non linear algebraic equations “ int. J. for num. Meth. in engng. Vol. 23, pp. 1455 – 1481 (1986).
- [22]- Padovan. J. and Mascarella R.” Locally bound constrained Newton – Raphston solution algorithms “ comp. struct. Vol. 23. n° 2; pp. 181 – 197. (1986).

## Références (VI)

- [1]- O.C. Zienkiewicz «the finite element method.» MC. Graw – Hill, New York (1978).
- [2]- E.Henton, A. Razzaque, O.C. Zienkiewicz and J.D. Davies, “ A simple finite element solution for plates of homogeneous sandwich and Cellular constitution” proc – inst. – civ – Eng. pp – 43 – 65. (1975).
- [3]- T.J.R Hughes, M. Cohen and M. Haroun, “ reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates” Nuclear Engng Design 46, 203 – 222 (1978).
- [4]- T.J.R Hughes, R.L. Taylor and W Kanoknukulchai, “A simple and efficient finite element for plate bending” int. J. Num. Meth. Engng 11(10) 1529 – 43 (1977).
- [5]- E.D.L. pugh, E. Hinton and O.C. Zienkiewicz, “ A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration “ int. J. Num. Meth. Engng 12, 1059 – 79 (1978).
- [6]- E. Hinton and N. Bicanic, “ A comparison of Lagrangien and serendipity Mindlin plate elements for free vibration “. Comput. Struct. 10(3). 483 – 493 (1979).
- [7]- T.J.R. Hughes and M. Cohen, “ the hiterosis finite element for plate bending “. Comput. Struct. 9(5). 445 – 450 (1978).
- [8]- D.W. Murray and E.L. Wilson, “ finite element large deflection analysis of plates”. A.S.C.E. 95 (EM1), 143 – 165 (1969).
- [9]- F.G. Bergen and W. Clough. “ Large deflection analysis of plates and shallow shells using the finite element method.” Int. J. Num. Meth. Engng 5, 543 – 556 (1973).
- [10]- R.D. Wood, “ the application of finite element methods to geometrically non linear structural analysis“ University of Wales (1973).
- [11]- R.D. Wood and C. Zienkiewicz “ geometrically non linear finite element analysis of beam, frames, arches and axisymmetric shells ” compt. Struct. 725 – 35 (1977).
- [12]- N.A. Weil and N.M. Newmark, “ large deflections of elliptical plates ” J. App. Mech. 23, 21 – 26 (1956).
- [13]- Y.C. Fung, “ foundation of solid mechanics ” Prenties Hall (1965).
- [14]- A. Piece, “ geometrically non linear analysis of Mindlin plates by finite element method. ” University of Wales, Swansea (1978).
- [15]- Chica, C.Y. , “ non linear analysis of plates “, M.C. Graw. Hill pub. New York, Ny. , 1980.
- [16]- Harrison, D. , Ward, T.J.W, and Whitman, JR, “ finite element analysis of plates with non linear properties “, comp. Meth. In applied mechanics and engineering, vol. 34, (1982), pp. 1019 – 1034.
- [17]- Hughes, T.J.R, and Cohen M. , “ the hiterosis finite element for plates bending “. Comp. And Struct. , vol. 9, pp. 445 – 450 (1978).
- [18]- A. Pica, “ finite element analysis of geometrically non linear plate behaviour using a Mindlin formulation”. Compt. And struct. , vol. 11, 1980 pp. 203 – 215.
- [19]- Cheung, M.S. , Wenchang. Li “ a modified finite strip method for geometrically non linear analysis of plates “. compt. and struct. Vol. 33 pp. 1031 – 1035 (1989).
- [20]- Sabir, A. B. “ a finite element iterative solution procedure for the large deflection geometrically non linear behaviour of structure ” proc. 4<sup>th</sup> conf. on large engineering sys. Pp. 157 – 164 (1982).

- [21]- D. Harrison, T.J.W. Ward and JR. Whitman “ finite element analysis of plates with non linear properties “ *compt. meth. in app. Mech. And Engineering* pp. 1019 – 1034 (1982).
- [22]- Webster, R. L. , “ on the static analysis of structure with strong geometric non linearity “ *compt. and struct.* Vol. 11, 1980, pp. 137 – 145.
- [23]- Ryu, Y. S. , and Arora. J. S. “ methods of non linear structural analysis by finite element techniques “ college of engineering, the university of Iowa, (1984).
- [24]- Lei Xiao – Yan, Huang Mao – Kuang, Wang Xiuxi. “geometrically non linear analysis of a reissner type plate by the boundry element finite ”. *comp. and struct.* Vol. 37, pp. 911 – 916 (1990).
- [25]- Libresar. L. , Stein. M. “ a geometrically non linear theory of transversely isotropic laminated composite plates and its use in the post buckling analysis “. *Thin – walled struct.* Vol. 11, pp. 177 – 201 (1991).
- [26]- Dutta. S. , Bererjee, B. “ governing equations for non linear analysis of sandwich plates a new approach “, *int. J. of non linear mechanics* vol. 26, pp. 313 – 318 (1991).
- [27]- M. Kolli and K. Drandrashekhara “ non linear static and dynamic analysis of stiffened terminated plates “ , *int. J. non linear mechanics* vol. 32, N° 1, pp. 89 – 101 (1997).

## Annexe A

### Formation de la matrice Géométrique $K_{\sigma_1}$ [H. NL. 1]

En substituant l'équation (6A-35) dans (6A-32) et en considérant :

$$\psi(\delta) = \int \left\{ \begin{array}{l} \sum_{K=1}^8 B_{K1} \sigma_K \\ \sum_{K=1}^8 B_{K2} \sigma_K \\ \sum_{K=1}^8 B_{Km} \sigma_K \end{array} \right\} - R$$

on obtient après dérivation

$$K_T = \int_A [B^T N(\hat{\sigma}) + M(\hat{\sigma})B] da \quad A1$$

où

$$N(\hat{\sigma}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta_i} & \dots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial \delta_m} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \delta_i} & \dots & \frac{\partial \sigma_2}{\partial \delta_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \sigma_8}{\partial \delta_i} & \dots & \frac{\partial \sigma_8}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} \quad A2$$

et

$$M(\hat{\sigma}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \delta_i} & \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \delta_i} & \dots & \sigma_8 \frac{\partial}{\partial \delta_i} \\ \vdots & & & \\ \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \delta_m} & \dots & \dots & \sigma_8 \frac{\partial}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} \quad A3$$

par ailleurs on a l'équation qui donne la contrainte  $\hat{\sigma}$  en fonction de  $\hat{\varepsilon}$  soit :

$$\hat{\sigma} = \hat{D} \hat{\varepsilon} \quad \text{A4}$$

la variation de la contrainte s'écrit donc :

$$d\hat{\sigma} = \hat{D} d\hat{\varepsilon} \quad \text{A5}$$

et en substituant (6A-26a) on obtient :

$$d\hat{\sigma} = \hat{D} B d\hat{\varepsilon} \quad \text{A6}$$

on en déduit donc que

$$N(\hat{\sigma}) = \hat{D} B \quad \text{A7}$$

En substituant (6A-26) et (A7) dans (A1) on obtient

$$K_T = \int_A B^T \hat{D} B da + \int_{Aa} M(\hat{\sigma}) \left[ B_0 + \begin{bmatrix} A_\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G \right] da \quad \text{A8}$$

Si on considère que  $B_0$  est une constante et ne dépend pas de  $\delta$  on aura seulement les dérivées de  $BL(\delta)$  qui ne sont pas nulles, soit

$$M(\hat{\sigma})B da = \int_A \begin{bmatrix} \sigma_1 \frac{\partial(\hat{w}, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_3 \frac{\partial(\hat{w}, y)}{\partial \delta_1} & \sigma_2 \frac{\partial(\hat{w}, y)}{\partial \delta_1} + \sigma_3 \frac{\partial(\hat{w}, x)}{\partial \delta_1} \\ \sigma_1 \frac{\partial(\hat{w}, x)}{\partial \delta_2} + \sigma_3 \frac{\partial(\hat{w}, y)}{\partial \delta_2} & \sigma_2 \frac{\partial(\hat{w}, y)}{\partial \delta_2} + \sigma_3 \frac{\partial(\hat{w}, x)}{\partial \delta_2} \\ \vdots & \\ \sigma_1 \frac{\partial(\hat{w}, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_3 \frac{\partial(\hat{w}, y)}{\partial \delta_m} & \sigma_2 \frac{\partial(\hat{w}, y)}{\partial \delta_m} + \sigma_3 \frac{\partial(\hat{w}, x)}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} G da \quad \text{A9}$$

On remarque que les termes différentiels en  $\delta_i$  dans l'équation A9 sont des coefficients de la matrice  $G$  de l'équation (6A-23) tel que :

$$\begin{aligned} \partial \left( \frac{\hat{w}, x}{\partial \delta_i} \right) &= G_{1_i} \\ \partial \left( \frac{\hat{w}, y}{\partial \delta_i} \right) &= G_{2_i} \end{aligned} \quad \text{A10}$$

Par conséquent, on peut réécrire l'équation (A8) comme l'équation (6A-36) soit :

$$K_T = \int_A B \hat{\Delta} B da + \int_a G^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} G da \quad \text{A11}$$

et où la matrice des contraintes est :

$$K_{\sigma_1} = \int_a G^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} G da$$

A12

## Annexe B

### Formation de la matrice géométrique $K_{\sigma_2}$ [H. NL. 2]

En utilisant la même démarche que dans l'annexe A, on obtient :

$$K_T = \int_A B^T \hat{\Delta} B da + \int M(\sigma) B da \quad \text{B1}$$

On substitue l'équation (6A-23) dans (B1) on a :

$$K_T = \int_A B^T \hat{\Delta} B da + \int_A M(\hat{\sigma}) \left[ B_0 + \begin{bmatrix} A_\theta & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i \\ L_i \\ K_i \end{bmatrix} \right] da \quad \text{B2}$$

où

$$K_{\sigma_2} = \int_A M(\hat{\sigma}) B da = \int_A \begin{bmatrix} M(\hat{\sigma})A_\theta & 0 & 0 \\ 0 & M(\hat{\sigma})H & 0 \\ 0 & 0 & M(\hat{\sigma})w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i \\ L_i \\ K_i \end{bmatrix} da \quad \text{B3}$$

avec

$$\int_A M(\hat{\sigma}) A_\theta G da = \int_A \begin{bmatrix} \sigma_1 \frac{\partial (\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_1} & \sigma_2 \frac{\partial (\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_1} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_1 \frac{\partial (\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_m} & \sigma_2 \frac{\partial (\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_m} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_m} \\ \sigma_1 \frac{\partial (\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_1} & \sigma_2 \frac{\partial (\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_1} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_1 \frac{\partial (\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_m} & \sigma_2 \frac{\partial (\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_m} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_m} \\ \sigma_1 \frac{\partial (\hat{w}_1, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{w}_1, y)}{\partial \delta_1} & \sigma_2 \frac{\partial (\hat{w}_1, y)}{\partial \delta_1} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{w}_1, x)}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_1 \frac{\partial (\hat{w}_1, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{w}_1, y)}{\partial \delta_m} & \sigma_2 \frac{\partial (\hat{w}_1, y)}{\partial \delta_m} + \sigma_3 \frac{\partial (\hat{w}_1, x)}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} \quad \text{B4}$$

Par ailleurs, les termes différentiels sont les coefficients de la matrice  $G$  :

$$\frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_i} = G_{1,j} \quad ; \quad \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_i} = g^2_{2,j} = G_{2,j} \quad \text{B5}$$

$$\frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_i} = g^2_{3,j} = G_{3,j} \quad ; \quad \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_i} = g^2_{4,j} = G_{4,j} \quad \text{B6}$$

$$\frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_i} = g^2_{5,j} = G_{5,j} \quad ; \quad \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_i} = g^2_{6,j} = G_{6,j} \quad \text{B7}$$

Si on pose

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} = N_0 \quad \text{B8}$$

et

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} N_0 & 0 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0 \end{bmatrix} \quad \text{B9}$$

On a par substitution (B5), (B6), (B7) et (B9) dans (B4) l'équation suivante :

$$\int M(\sigma) A_\theta G \, da = \int_A G^T \hat{N} G \, da \quad \text{B10}$$

De la même façon, on développe l'intégrale suivante :

$$\int_A M(\sigma) H L \, da = \int_A M(\sigma) H_1 L \, da + \int_A M(\sigma) H_2 L \, da$$

avec

$$\int_A M(\sigma) H_1 L da = -2 \int_A \begin{bmatrix} \sigma_4 \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_1} & \sigma_5 \frac{\partial(\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_1} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_4 \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_m} & \sigma_5 \frac{\partial(\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_m} \\ \sigma_5 \frac{\partial(\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_1} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_1} & \sigma_4 \frac{\partial(\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_5 \frac{\partial(\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_m} & \sigma_4 \frac{\partial(\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} L da$$

et

$$\int_A M(\sigma) H_2 L da = t/2 \int_A \begin{bmatrix} \sigma_4 \frac{\partial(\theta_{1x}, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{1x}, y)}{\partial \delta_1} & \sigma_5 \frac{\partial(\theta_{1x}, y)}{\partial \delta_1} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{1x}, x)}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_4 \frac{\partial(\theta_{1x}, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{1x}, y)}{\partial \delta_m} & \sigma_5 \frac{\partial(\theta_{1x}, y)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{1x}, x)}{\partial \delta_m} \\ \sigma_5 \frac{\partial(\theta_{1y}, y)}{\partial \delta_1} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{1y}, x)}{\partial \delta_1} & \sigma_4 \frac{\partial(\theta_{1y}, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{1y}, y)}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_5 \frac{\partial(\theta_{1y}, y)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{1y}, x)}{\partial \delta_m} & \sigma_4 \frac{\partial(\theta_{1y}, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{1y}, y)}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} L da \quad (B11)$$

Si on pose

$$\begin{bmatrix} \sigma_4 & \sigma_6 \\ \sigma_6 & \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} = M_0 \quad (B12)$$

et

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M_0 \end{bmatrix} \quad (B13)$$

Si on substitue (B5), (B6) et (B13) dans (B11) on obtient l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int_a M(\sigma) H L_i da &= \int_A M(\sigma) H_1 L_i da + \int_A M(\sigma) H_2 L_i da \\ &= -2 \int_A G_2^T \hat{M} L da + t/2 \int_a L^T \hat{M} L da \end{aligned} \quad (B14)$$

et pour terminer l'intégral final soit :

$$\int_A M(\sigma) W K_i da = \int_A M(\sigma) W_1 K_i da + \int_A M(\sigma) W_2 K_i da$$

avec

$$\int_A M(\sigma) W K_i da = -2 \int_A \begin{bmatrix} \sigma_7 \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_8 \frac{\partial(\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_1} & \sigma_7 \frac{\partial(\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_1} + \sigma_8 \frac{\partial(\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_7 \frac{\partial(\hat{u}_1, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\hat{u}_1, y)}{\partial \delta_m} & \sigma_7 \frac{\partial(\hat{v}_1, x)}{\partial \delta_m} + \sigma_8 \frac{\partial(\hat{v}_1, y)}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} K da$$

et

$$\int_A M(\sigma) W_2 K_i da = t \int_A \begin{bmatrix} \sigma_7 \frac{\partial(\theta_{x_1, x})}{\partial \delta_1} + \sigma_8 \frac{\partial(\theta_{x_1, y})}{\partial \delta_1} & \sigma_7 \frac{\partial(\theta_{y_1, x})}{\partial \delta_1} + \sigma_8 \frac{\partial(\theta_{y_1, y})}{\partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_7 \frac{\partial(\theta_{x_1, x})}{\partial \delta_m} + \sigma_6 \frac{\partial(\theta_{x_1, y})}{\partial \delta_m} & \sigma_7 \frac{\partial(\theta_{y_1, x})}{\partial \delta_m} + \sigma_8 \frac{\partial(\theta_{y_1, y})}{\partial \delta_m} \end{bmatrix} K da$$

(B15)

Si on pose

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma_7 \end{Bmatrix} = V_0 \quad \hat{V} = \begin{bmatrix} V_0 & 0 \\ 0 & V_0 \end{bmatrix} \quad \text{B16}$$

et on considère les termes par substitution de (B5), (B6) et (B16) dans (B15) on écrit :

$$\int_a M(\sigma) W K da = -2 \int_a G_2^T \hat{V} K da + t \int_a L^T \hat{V} K da \quad \text{B17}$$

A la lumière de ce développement on peut réécrire  $K_{\sigma_2}$  en terme matriciel simplifié en substituant (B10), (B14) et (B17) dans (B3) soit :

$$K_{\sigma_2} = \int_a G^T \hat{N} G da - 2 \int_a G_2^T \hat{M} L da + t/2 \int_a L^T \hat{M} L da - 2 \int_a G_2^T \hat{V} K da + t \int_a L^T \hat{V} K da$$

ce qui termine, donc, la formulation de  $K_{\sigma_2}$

## NOTATIONS

### Chapitre. (II)

Symbols	Signification
$[\sigma]$	Tenseur de contrainte
$[\varepsilon]$	Tenseur de déformation
$[c]$	Tenseur des contraintes élastiques du matériau
$\{\sigma\}$	Vecteur des composantes des contraintes $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$
$\{\varepsilon\}$	Vecteur des composantes $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz})$
$W$	Densité d'énergie de déformation
$E$	Module d'élasticité de Young
$\nu$	Coefficient de poisson ou de contrainte latérale
$\nabla$	L'opérateur laplacien plan
$\phi$	Fonction de contrainte

### Chapitre.(III.2)

Symbole	Signification
$e$	Epaisseur
$u, v, w, \beta_x, \beta_{xy}$	Déplacements et rotation dans les axes locaux

$\langle \chi \rangle$	Vecteur de courbures
$\varepsilon_m$	Déformation membranaire
$\varepsilon_f$	Déformation de flexion
$\varepsilon_c$	Déformation de cisaillement
$f_v, f_s$	Force de volume et de surface
$\{N\}$	Les efforts de membranes $\langle N_x, N_y, N_{xy} \rangle$
$\{M\}$	Les efforts de flexions et de torsion $\langle M_x, M_y, M_{xy} \rangle$
$\{Q\}$	Les efforts de cisaillement $\langle Q_x, Q_y \rangle$
$\{\gamma\}$	Vecteur accélération
$E_m$	Matrice d'élasticité membranaire
$E_f$	Matrice d'élasticité flexionnelle
$E_c$	Matrice d'élasticité de cisaillement
$D_m$	Raideur membranaire
$D_f$	Raideur flexionnelle
$E$	Raideur de Young
$\nu$	Coefficient de poisson
$G$	Module de coulomb ou de glissement
$k$	Constante de cisaillement

### Chapitre.(III.3)

Symbole	Signification
$\sigma$	Vecteur contrainte
$f_s, f_v$	Force de surface et de volume
$\delta u$	Déplacement virtuel
$W$	Fonction densité d'énergie
$u_d$	Énergie de déformation
$text$	Travail extérieur
$\pi_t$	Énergie potentiel total
$\delta u_d$	Travail virtuel

$\delta u_{dc}$	Travail virtuel complémentaire
$\pi_c$	Énergie potentiel complémentaire
$\pi_R$	Énergie potentiel de la fonction associée de Reissner.
$W(x,y)$	Déplacement transversal
$\phi(x,y)$	Surface fléchie de la plaque
$u_m$	Énergie de déformation membranaire
$u_f$	Énergie de déformation flexionnelle
$u_c$	Énergie de déformation de cisaillement
$\partial, \delta, d$	Symboles de dérivations

#### Chapitre (III.4)

<b>Symboles</b>	<b>Significations</b>
$\{u\}_e$	Vecteur du déplacement élémentaire
$\{a_e\}$	Vecteur des coordonnées généralisé
$[A], [H_c], [H_f]$	Matrice d'interpolation
$[q_e]$	Vecteur du déplacement nodal
$\langle \sigma \rangle$	Vecteur contrainte transposé
$\langle \varepsilon \rangle$	Vecteur deformation transposé
$[B]$	Opérateur différentiel de matrice
$[C]$	Mat. Des coeef. Caractrtq. Du matériau
$J, J^{-1}$	Jacobien, inverse
$n, m, p$	Point d'intégration de gauss
$w_i, w_j, w_k$	Coefficient de pondération
$W$	Déplacement transverse
$B_x, B_y$	Rotation des normales autour de Ox, Oy
$\{B\}, \{d\}$	Vecteur déplacement
$[K_f]$	Matrice de rigidité de flexion

$[K_c]$ 

Matrice de rigidité de cisaillement

**Chapitre.(IV)**

<b>Symbole</b>	<b>Signification</b>
$e$	Epaisseur de la plaque
$q$	Charge uniforme
$P$	Pression
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$	Composante normal de la contrainte
$\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{yz}$	Composante normal de la contrainte de cisaillement
$u, v, w$	Composante du déplacement
$\varepsilon$	Allongement unitaire
$E$	Module de Young
$G$	Module d'élasticité de cisaillement
$\nu$	Coefficient de poisson
$M_x, M_y$	Moment de flexion
$M_{xy}$	Moment de torsion
$Q_x, Q_y$	Effort tranchant
$N_x, N_y$	Force axiale
$N_{xy}$	Force de cisaillement
$\phi$	Fonction de contrainte

**Chapitre.(V)**

<b>Symbole</b>	<b>Signification</b>
$\{u\}$	Vecteur déplacement
$\{f\}$	Vecteur force extérieure
$[K]$	Matrice de rigidité

$\{R\}$	Vecteur résiduel
$\{f_0\}$	Chargement initial
$\{u_0\}$	Déplacement initial
$\{\Delta f\}$	Incrément de charge
$\{\Delta u\}$	Incrément de déplacement
$[K_T]$	Matrice tangente

## Chapitre (VI)

Symboles	Significations
$u$	Vecteur déplacement
$\hat{u}$	Vecteur déplacement par rapport au plan moyen
$\varepsilon$	Vecteur déformation
$\sigma$	Vecteur contrainte
$\partial$	Symbole de dérivation partielle
$V$	Volume indéformable
$\rho$	La densité massique
$e$	L'épaisseur de la plaque
$W_i$	Energie de déformation notée dans le chapitre III par $u_d$
$\hat{\varepsilon}$	Vecteur déformation global
$\hat{\varepsilon}^0$	Vecteur déformation linéaire
$\hat{\varepsilon}^L$	Vecteur déformation non linéaire
$dW_i$	Travail interne
$dW_{exi}$	Travail externe
$\hat{q}$	Force de volume globale
$[c]$	La matrice constitutive du matériaux
$\hat{D}$	Matrice d'élasticité globale
$N$	Fonction d'interpolation
$\delta_i, \delta$	Déplacement nodal, global
$B_0(\varepsilon_0)$	Matrice de transformation linéaire

$B_L(\varepsilon_L)$	Matrice de transformation non linéaire
$R$	Force nodal équivalente due aux forces extérieurs
$\psi(\delta)$	Vecteur résiduel
$\Delta\delta_i$	La variation du déplacement nodal $\delta_i$
$K_T$	La matrice tangente
$K_0$	Matrice de rigidité linéaire
$K_L$	Matrice de rigidité non linéaire
$K_\sigma$	Matrice de contrainte initiale ou (géométrique)
$p_i$	Charge nodale équivalente due aux forces internes
$G, L, K$	Matrice de transformation