

N° d'ordre : 29/2014 – M/MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
en Mathématiques

Spécialité : Modélisation Mathématique et Numérique

Présenté par

ZAATER Wahiba

THEME

**STABILISATION DE L'EQUATION DES ONDES
SEMI LINEAIRE
AVEC DES TERMES MEMOIRES**

Soutenu publiquement le: 28/06/2014 devant le jury composé de :

Mr. Amor KESSAB	Professeur à U.S.T.H.B/FMT	Président
Mr. Ammar KHEMMOUD	Maitre de Conférence/ A à U.S.T.H.B/FMT	Directeur de thèse
Mr. Arezki TOUZALINE	Professeur à U.S.T.H.B/FMT	Examineur
Mlle. Tounsia BEZZEKRI	Maitre de Conférence/ A à U.S.T.H.B/FMT	Examinatrice

Table des matières

1	<u>Introduction:</u>	1
	Introduction	1
1.1	<u>Notes historiques</u>	3
1.1.1	<u>La notion de stabilisation:</u>	3
1.1.2	<u>Stabilisation frontiere d'un exemple modele:</u>	3
1.2	<u>Stabilisation de l'équation des ondes:</u>	4
1.2.1	<u>Stabilisation interne:</u>	5
1.2.2	<u>Stabilisation frontière:</u>	5
1.2.3	<u>Stabilisation faible:</u>	6
1.2.4	<u>Stabilisation forte:</u>	6
1.2.5	<u>Stabilisation uniforme:</u>	6
1.2.6	<u>Stabilisation exponentielle:</u>	6
1.3	<u>But du travail:</u>	14
2	<u>Rappels sur les espaces fonctionnels:</u>	19
2.1	<u>Espace de Hilbert:</u>	19
2.2	<u>Espace de Lebegue $L^p(\Omega)$:</u>	20
2.3	<u>Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$:</u>	21

2.4	<u>Espaces des distributions:</u>	22
2.5	<u>Trace d'une fonction:</u>	23
2.6	<u>Injections et inégalités:</u>	24
2.6.1	<u>Injections compacts:</u>	24
2.6.2	<u>Théorème d'injection de Sobolev:</u>	24
2.6.3	<u>Inégalités de Sobolev, Hölder, Poincaré et Young:</u>	24
2.7	<u>Quelques criteres de convergence:</u>	26
2.7.1	<u>Convergence forte:</u>	26
2.7.2	<u>Convergence faible:</u>	27
2.7.3	<u>Convergence presque partout:</u>	27
2.7.4	<u>Convergence faible*:</u>	27
2.8	<u>Espaces de fonctions à valeurs vectorielles:</u>	28
2.8.1	Approximation de Galerkin	29
I	<u>Equation des ondes semi linéaire</u>	31
3	<u>Introduction:</u>	32
4	<u>Formulation du problème:</u>	37
5	<u>Existance et unicite de la solution:</u>	39
5.1	<u>Le probleme avec terme mémoire:</u>	39
5.2	<u>Le probleme sans terme mémoire:</u>	39
6	<u>Stabilisation</u>	42
6.1	<u>Le cas semi linéaire sans terme mémoire</u>	42

6.1.1	<u>Insuffisance du feedback naturel</u>	42
6.2	<u>Le cas semi linéaire avec un terme mémoire</u>	44
6.2.1	<u>Le problème avec un terme mémoire et sans feedback naturel:</u>	44
6.2.2	<u>Le problème avec feedback naturel:</u>	56
7	<u>Conclusion</u>	62

REMERCIEMENTS:

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus particuliers à Monsieur **Ammar KHEMMOUDJ**, qui a accepté de diriger ce mémoire, pour son aide et ces précieux conseils qui m'ont guidé tout au long de ce travail.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à Mr **Amor KESSAB** de m'avoir donné l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également Messieurs **Tounsia BENZEKRI** et **Arezki TOUZALINE**, d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

Je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

J'adresse aussi mes vifs remerciements à ma mère et mon père pour le soutien affectif et matériel qu'ils m'ont apporté tout au long de mon existence. Enfin, je ne saurais terminer cette liste sans adresser un remerciement particulier à mes meilleurs amis, Aziza et Yasmina, pour leurs qualités humaines.

Chapitre 1

Introduction:

Un problème d'équations aux dérivées partielles consiste à se donner, en plus des équations proprement dites, soit des conditions initiales soit des conditions aux limites soit les deux, à voir si une solution existe, si elle est unique, si elle dépend régulièrement des données et chercher des algorithmes de calcul. Nous parlons alors, suivant les différentes situations de problème de Cauchy bien posé ou de problème de contrôle.

Un exemple type est le suivant, on met un gateau dans un four, on se donne une température initiale et on chauffe durant un temps T , au bout de ce temps le gateau sera probablement soit pas assez cuit, soit brulé. Le problème de contrôle consiste à "se débrouiller pour faire ce qu'il faut afin d'obtenir un "bon gateau" ".

Historiquement les problèmes de contrôles sont d'abord apparus dans des systèmes d'équations différentielles ordinaires; il s'agissait par exemple de déterminer des trajectoires de missiles ou de satellites (Pontryagine (1961)). Mais très vite d'autres mathématiciens (J. L. Lions et A. B. Balakrishnan principalement) ont développé une théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles (paraboliques) et ceci pour plusieurs raisons :

(i) l'analyse faite par J. L. Lions et G. Stampacchia des inéquations variationnelles fournissait un très bon cadre fonctionnel pour une telle approche.

(ii) Des exemples pratiques se sont présentés; B. Bardos pense que l'un des premiers exemples se trouve étudié dans le cadre d'un contrat entre L'INRIA(1) et L'IRSID(2); (il s'agissait de contrôler la forme de la surface libre séparant les phases liquides et solides d'un métal dans un haut fourneau).

(iii) Dès que le nombre de degré de liberté est important (et c'est ce qui se passe dans le guidage d'un satellite) le traitement numérique du système discret ressemble à celui d'un système continu. Ainsi des progrès dans la compréhension et le traitement des systèmes continus s'avèrent être utiles pour l'approche des problèmes discrets à grand nombre de degrés de liberté.

Pour des problèmes continus nous parlerons de contrôle distribué. Tant à cause des outils mathématiques que des problèmes pratiques posés, les premiers exemples continus étaient avant tout des problèmes essentiellement paraboliques(l'exemple du gâteau). Nous en trouvons une description assez exhaustive dans le livre de J. L. Lions.

Plus récemment sont apparus des problèmes de nature hyperbolique. il s'agit d'empêcher par exemple les vibrations dans de grandes structures flexibles des robots ou des antennes de véhicules spatiaux. Et c'est ce second type de problèmes qui est à l'origine des développements les plus importants de la théorie. La NASA a participé à l'organisation d'un "workshop" (Blacksburg 1984) où ont été définis des problèmes pratiques d'utilité courante. Nous en trouverons une description dans l'article de L. X. Taylor et A. B. Balakrishnan.

1.1 Notes historiques

1.1.1 La notion de stabilisation:

De façon générale, lorsqu'une dynamique évoluant dans le temps est régie par une équation de la forme :

$$\frac{du}{dt} = Au$$

où $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow H$ est une fonction de la variable t (représentant le temps) à valeurs dans un espace de Hilbert H et A un opérateur de domaine $D(A)$ dans H et quand on note $E(u, t)$ l'énergie associée, la problématique de la stabilisation consiste à trouver des fonctions F qui feront tendre l'énergie $E(u, t)$ des solutions de l'équation :

$$\frac{du}{dt} = Au + F(u)$$

vers zéro quand le temps tend vers l'infini. On dira dans ce cas que la fonction F assure une stabilisation du système. En introduisant la fonction F on exerce un contrôle qui assure une décroissance vers zéro de l'énergie. La fonction F est alors appelé un *contrôle* puisqu'il permet de contrôler l'issue de l'énergie dans le temps. On distinguera différentes stabilisations :

stabilisation interne ou frontière, stabilisation forte ou exponentielle, etc...

1.1.2 Stabilisation frontière d'un exemple modele:

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont la frontière est $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe C^2 . on désigne par ν le champ unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω , et par ∂_ν l'opérateur de dérivation dans cette direction.

On appelle stabilisation frontière de l'équation des ondes dans Ω , avec une condition de newmann non homogène considérées respectivement sur Γ_0 et Γ_1 , ou (Γ_0, Γ_1) est une partition de Γ , la donnée d'un opérateur (appelé opérateur de feedback frontière)

$$F : V \times H \rightarrow K$$

ou V, H, K sont des espaces de fonctions ou de distributions, tels que l'énergie associée à la solution du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu u = F(u, u_t) & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u(0, x) = u^0, \quad u_t(0, x) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

décroisse de manière exponentielle quand $t \rightarrow +\infty$, et ceci pour tous u_0, u_1 pris dans des espaces convenables.

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \quad \forall t \geq 0.$$

ou C et β sont des constantes positives. β est appelé taux de décroissance de l'énergie.

Définition 1.1.1 *On définit aussi la notion d'opérateur de feedback interne*

$$G : \tilde{V} \times \tilde{H} \rightarrow \tilde{K}$$

(ou $\tilde{V}, \tilde{H}, \tilde{K}$ sont des espaces de fonctions ou de distributions), ensuite on s'intéresse au comportement asymptotique de l'énergie associée au problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = G(u, u_t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu u = F(u, u_t) & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u(0, x) = u^0, \quad u_t(0, x) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

1.2 Stabilisation de l'équation des ondes:

Soient Ω un ouvert borné de R^n dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est de classe C^2 . Soit ν la normale unitaire à Γ extérieure à Ω et ∂_ν l'opérateur de dérivation dans la direction normale. On considère pour (u^0, u^1) appartenant à des espaces convenables, le problème de l'équation des ondes donné par :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } [0, +\infty] \times \Omega \\ u(0, x) = u^0, \quad \partial_t u(0, x) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

1.2.1 Stabilisation interne:

La stabilisation interne consiste à trouver un contrôle $F : V \times W \rightarrow K$ (où V, W et K sont des espaces fonctionnels) tels que l'énergie associée à la solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t) - \Delta u(t) + F(u, \partial_t u)(t) = 0 & \text{dans } [0, +\infty] \times \Omega \\ u(0, x) = u^0, \quad \partial_t u(0, x) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

décroisse vers 0 quand t tend vers l'infini. Le contrôle $\omega = F(u, \partial_t u)$ est alors dit *interne*.

Remarque 1.2.1 *Le contrôle $F(u, \partial_t u)$ qui dépend de la fonction d'état s'appelle feedback ou encore amortisseur.*

1.2.2 Stabilisation frontière:

Soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de la frontière $\partial\Omega = \Gamma$. On considère pour (u^0, u^1) appartenant à un espace fonctionnel convenable, le problème de l'équation des ondes suivant

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } [0, +\infty] \times \Omega \\ u(0, x) = u^0, \quad \partial_t u(0, x) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.2.1)$$

La stabilisation frontière du problème (1.1) consiste à se donner un opérateur appelé *contrôle frontière*

$$G : V_{\partial\Omega} \times W_{\partial\Omega} \rightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})$$

(où $V_{\partial\Omega}$ et $W_{\partial\Omega}$ sont des espaces fonctionnels) tels que l'énergie associée à la solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0 \\ \partial_\nu u = G(u, \partial_t u) & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1 \\ u(0, x) = u^0, \quad \partial_t u(0, x) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

décroisse vers zéro quand t tend vers l'infini.

1.2.3 Stabilisation faible:

La stabilisation est dite faible (asymptotiquement), si $(u(t), \partial_t u(t))$ converge faiblement vers $(0, 0)$ dans un certain espace de Hilbert

1.2.4 Stabilisation forte:

La stabilisation est dite forte si pour toute condition initiale (u^0, u^1) l'énergie $E(t, u)$ associée au système décroît vers zéro au cours du temps, c'est à dire

$$E(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

1.2.5 Stabilisation uniforme:

La stabilisation est dite uniforme, si sous des conditions appropriées, imposées aux termes nonlinéaires, l'énergie du système décroît vers zéro avec un taux uniforme. C'est à dire, s'il existe une fonction scalaire $S(t)$, qui dépend de l'énergie initiale $E(0)$, telle que

$$S(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

et

$$E(t) \leq S(t), \quad \forall t \geq T_0.$$

Remarque 1.2.2 - *Si la fonction S est explicite, on parle alors du taux de décroissance de l'énergie .*

- On remarquera que la stabilité exponentielle entraîne nécessairement la stabilité forte mais la réciproque est fausse.

1.2.6 Stabilisation exponentielle:

La stabilisation est dite exponentielle lorsqu'il existe deux constantes positives C et ω telles que l'énergie $E(u, t)$ du système vérifie l'inégalité :

$$E(u, t) \leq C \cdot e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0$$

Cette section a pour but de rappeler les travaux principaux sur la décroissance exponentielle de l'énergie d'un système gouverné par des équations aux dérivées partielles (appelé système distribué) .

Cette notion a pris, sous l'influence des travaux de D. L. Russell (cf. [28]) le nom de stabilisation frontiere ou interne exponentielle.

on a vu ci-dessus que les problèmes de stabilisation exponentielle, que l'on peut se poser pour les systèmes évolutifs, consiste à trouver un opérateur de feedback frontiere ou interne de sorte que l'énergie du système décroisse en exponentielle. On va rappeler, d'une manière breve les différentes phases qu'à connues la notion de stabilisation exponentielle, sans vraiment rentrer dans les détails, ou prétendre que cet aperçu historique soit exhaustif.

LES TRAVAUX DE C. S. MORAWETZ

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation des ondes dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$, C. Wilcox (cf. [32]) a réussi à montrer que l'énergie, locale, décroît de maniere exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Sous les hypothèses plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961 C. S. Morawetz (cf. [25]) a montré que l'énergie locale, décroît comme l'inverse du temps.

En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips (cf. [17]) ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation des ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, extérieur à un domaine étoilé, décroît de maniere exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

LES TRAVAUX DE G. CHEN ET DE J. LAGNESE

En se basant sur les travaux de C. S. Morawetz (cf. [25] et [29]) sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur. D. L. Russell a conjecturé, en 1974, un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné.

Enoncé de la conjecture (cf. [29]).

soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, s'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, extérieur à $\overline{\Omega}$ tel que le bord de Ω , noté Γ , admette une partition vérifiant la condition

géométrique suivante:

$$m(x) \cdot \nu(x) \leq 0, \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_0.$$

Où :

1. $\nu(x)$ désigne la normale unitaire extérieure à Ω .
2. $m(x) = x - x_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$.

alors il existe deux constantes, C et ω positives telles que l'énergie associée au système évolutif

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \alpha(x) \partial_\nu u + u_t = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u^0, \quad u_t(x, 0) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$, et $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, $\forall x \in \Gamma_1$, vérifie l'inégalité suivante:

$$E(t) \leq C \exp(-\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

En 1977, J. P. Quin et D. L. Russell (cf. [27]) sont parvenus à montrer, sous les hypothèses de la conjecture de Russel, l'inégalité

$$E(t) \leq \frac{C(E(0))}{1+t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.2.3)$$

mais malheureusement, ils n'ont pas réussi à montrer que $C(E(0))$ vérifie

$$C(E(0)) \leq k.E(0). \quad (1.2.4)$$

ou k est une constante qui ne dépend ni de $E(0)$ ni de temps.

Il est intéressant de savoir qu'à partir de (1.2.3) et (1.2.4) on peut déduire la décroissance exponentielle de $E(t)$ par une simple application des propriétés des semi-groupes (cf. [17]).

Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen (cf.[5]), en partant des hypothèses suivantes:

il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que:

$$\begin{aligned} m(x) \cdot \nu(x) &\leq 0, \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_0. \\ m(x) \cdot \nu(x) &\geq \gamma > 0, \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_1. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

1. $\nu(x)$ désigne le champ unitaire normal extérieur à Ω .
2. $m(x) = x - x_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$

Ensuite, en adaptant les techniques, en particulier la technique des multiplicateurs, utilisées par C. S. Morawetz, W. A. Strauss et J. U. Ralston, dans les domaines extérieurs, G. Chen (cf. [6]) a pu alléger les hypothèses (4), ces résultats ont été améliorés par J. Lagnese (cf. [13]), en 1983, sous l'hypothèse:

il existe un champ de vecteur $h \in (C^2(\overline{\Omega}))^n$ tel que:

$$\begin{cases} h(x) \cdot \nu(x) \leq 0, & \text{pour tout } x \in \Gamma_0. \\ h(x) \cdot \nu(x) \geq \gamma > 0, & \text{pour tout } x \in \Gamma_1. \\ \text{la matrice } \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right) \text{ est uniformément définie positive sur } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

LES TRAVAUX DE I. LASIECKA ET R. TRIGGIANI

En 1987, utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani (cf. [16]) ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord Γ .

Ils font appel à un opérateur de feedback frontière donnée par:

$$F(u, u_t) = -b \frac{\partial}{\partial \nu}(Gu_t), \quad \text{sur } \Gamma$$

ou $b \in L^\infty(\Gamma)$, $b(x) \geq b_0 > 0$, pour tout $x \in \Gamma$, et G est l'inverse de l'isomorphisme suivant :

$$(-\Delta) : H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

qu'on note $G = (-\Delta)^{-1}$.

Dans tous les travaux, dans un domaine borné, cités ci-dessus l'inégalité

$$E(t) \leq C \exp(-\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

a été obtenue, à partir d'une estimation sur $\int_0^\infty E(t)dt$, en utilisant un résultat du à R.Datko (cf.[7]), et A.Pazy (cf.[26]), malheureusement ce théorème prouve l'existence des constantes C et ω sans donner des estimations explicites.

On remarque que lorsque la frontière Γ est régulière, la condition (4) exige que

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset. \quad (1.2.6)$$

donc si $\Gamma_0 \neq \emptyset$. les résultats obtenus par Chen, ou Lagnese, ne peuvent être appliqués aux domaines ayant un bord connexe.

LES TRAVAUX DE V. KOMORNIK ET E. ZUAZUA

En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition (4) de G. Chen en la remplaçant par

$$m(x) \cdot \nu(x) > 0, \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_1.$$

donc permettant, en principe, de généraliser les résultats de Chen et Lagnese aux domaines à bords réguliers et connexes, mais au prix de remplacer la condition aux limites, du problème (1), sur $\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$ par

$$\partial_\nu u = -m \cdot \nu u_t, \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+.$$

Si $\Gamma = \partial\Omega$ satisfait à la condition (5), alors pour tout $n \geq 2$, la méthode de Komornik et Zuazua (cf. [11]) donne, d'une manière simple des estimations explicites pour C et ω en fonction de la géométrie de Ω et x_0 .

Leur procédé devient inapplicable dans le cas général ou

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \emptyset \quad (1.2.7)$$

car dans ce cas la régularité des solutions n'est plus suffisante pour justifier l'application de la méthode des multiplicateurs.

Cependant, la même année (1987), P. Grisvard est parvenu à montrer (cf. [8]) que, au moins pour $n \leq 3$, l'identité fondamentale, sur laquelle est basée la technique des multiplicateurs de Komornik et Zuazua, devient une inégalité qui est suffisante pour mener les calculs à bout et obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie, avec des estimations explicites pour C et ω .

Le cas $n \geq 4$, sans l'hypothèse (5) reste ouvert; à moins que l'inégalité de Grisvard ne puisse être prouvée dans ce cas; alors le procédé de stabilisation de komornik et Zuazua peut être appliqué avec efficacité.

$$F(u, u_t) = -m.\nu u_t \quad (1.2.8)$$

la technique des multiplicateurs a permis d'obtenir des estimations sur C et ω , dans le but d'améliorer le taux de décroissance ω , certains auteurs ont proposé l'opérateur

$$F(u, u_t) = -bm.\nu u_t \quad (1.2.9)$$

où b est une fonction, définie sur Γ_1 à choisir convenablement.

En effet, dans certain cas, il a été possible d'améliorer légèrement le taux de décroissance ω , cependant, J. Lion a signalé (cf.[21] page 47) que D. H. Wagner a montré (formellement) que même lorsque $b \rightarrow +\infty$, le taux $\omega(b)$, obtenu à partir du feedback(8) ne croît pas indéfiniment.

est robuste grâce à la présence du terme $\alpha m.\nu \times u_t$; d'autre part le fait que $\alpha > 0$ exclut l'existence de solution stationnaire non triviale.

En 1978, Russel insista bien (cf. [28]) sur le fait que l'hypothèse (4) suffit à elle seule pour obtenir la stabilisation du système (1) et que toute autre hypothèse sur h constitue une restriction géométrique inutile; en effet par exemple la condition (4) exclut les domaines à bord connexes.

J. Lagnese a remarqué que l'utilisation d'un feedback de la forme

$$F(u, u_t) = -m.\nu \tilde{F}[u_t, u], \quad (1.2.10)$$

sur le bord permet d'enlever, au moins formellement, l'hypothèse (5) dans certains problèmes de stabilisation de système élastodynamiques ou de plaques vibrantes.

LES TRAVAUX DE J. L. LIONS

En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables.

Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle optimal et la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni d'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

1.3 But du travail:

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^3 . Soient Γ_0 et Γ_1 des sous-ensembles fermés, non vides et disjoints de Γ avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. On note par ∇_Γ le gradient tangential sur Γ , par Δ_Γ l'opérateur de Laplace sur Γ et par ∂_ν la dérivée normale où ν représente la normale unitaire extérieure de Γ . Cette partie est consacré à l'étude de la stabilisation des solutions du problème de Cauchy-Ventcel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + f_1(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma v + f_2(v) + a v_t + b \int_0^t h(t-s) \Delta_\Gamma v(s) ds = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (1.3.1)$$

où a et b sont des constantes positives et les fonctions f_1 et f_2 vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}) \text{ et il existe des constantes } c_1, c_2 > 0, p > 1, (n-2)p \leq n \text{ telle que} \\ |f_1(s_1) - f_1(s_2)| \leq c_1(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}) |s_1 - s_2|, \\ |f_2(s_1) - f_2(s_2)| \leq c_2(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}) |s_1 - s_2|, \text{ pour tout } s_1, s_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Lorsque $a = b = 0$, et sans termes non linéaires le problème ci-dessus a été étudié la première fois par Lemrabet [LE2] et plus tard par Lemrabet et Teniou [LE4]. Le modèle décrit les vibration d'un corps élastique mince recouvert d'une couche rigide sur sa frontière. Dans [LE4] ils ont prouvé des résultats d'existence et de régularité pour le cas linéaire. Quand $a = b = 0$ le problème ci-dessus a été étudié par Khemmoudj et Medjden [KH2]. Dans ce travail les auteurs prouvent la stabilité exponentielle en considérant un feedback $a(x)u_t$ linéaire localisée agissant dans la première équation, suivant les idées présentées par Zuazua dans [ZUA1] combinées avec de nouveaux outils. Plus récemment, les résultats précédents ont été prolongés par Cavalcanti, Khemmoudj et Medjden [CA1] en considérant les opérateurs linéaires A et

A_T , selon la variable spatiale x , au lieu de $-\Delta$ et Δ_Γ , respectivement, et, en outre, complété par une dissipation non-linéaire et localisée $a(x)g(u_t)$ agissant dans la première équation. Ceci a été fait en combinant de nouvelles estimations d'énergie combinées avec des méthodes de géométrie Riemannienne dues à Lasiecka, Triggiani et Yao, voir, par exemple, [YAO, L-T-Y1, L-T-Y1].

Il est important de mentionner que la stabilité pour l'équation d'ondes

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (1.3.2)$$

a été étudiée par plusieurs auteurs. Quand le feedback dépend de la vitesse d'une manière linéaire Zuazua [ZUA1] a montré que l'énergie relative de cette équation décroît exponentiellement si la région de dissipation contient un voisinage de la frontière Γ ou, au moins, contient un voisinage ω de la partie particulière donnée par $\{x \in \Gamma : (x-x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$. Dans la même direction, mais quand $f = 0$, il est important de mentionner le résultat de Bardos, Lebeau et Rauch [BLR1], basé sur l'analyse microlocale, qui assure une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une décroissance exponentielle, c'est-à-dire, la région de décroissance satisfait la condition bien connue du contrôle géométrique. L'exemple classique d'un sous-ensemble ouvert ω vérifiant cette condition est quand ω est un voisinage de la frontière. Ensuite, considérant encore $f = 0$, Nakao [NA1, NA2] a amélioré les résultats de Zuazua [ZUA1] traitant d'abord le cas d'une équation dégénérée linéaire, puis le cas de $g(x, u_t)$ (ici, encore, $f = 0$ a été considéré) supposant, comme d'habitude, que la fonction g a une croissance polynômiale près de l'origine. Martinez [MAR] a amélioré les résultats mentionnés ci-dessus pour l'équation d'ondes linéaire sujette à une dissipation non-linéaire $g(x, u_t)$, évitant la croissance polynômiale de la fonction $g(x, s)$ près zéro. Sa démonstration est basée sur la technique de multiplicateur par morceaux, développée par Liu [LIU], combinée avec des inégalités intégrales non-linéaires pour prouver que l'énergie du système décroît vers zéro avec une évaluation précise du taux de décroissance si la région de dissipation vérifie quelques conditions géométriques. Récemment, et considérant toujours $f = 0$, Alabau-Boussouira [ALA] a ame-

lioré les résultats dus à Martinez [MAR] en montrant des taux optimaux de décroissance d'énergie en considérant l'équation d'ondes suivante avec un amortissement faible non-locale temporelle et une faible dissipation interne .

$$\begin{cases} u_{tt} + a u_t + f_1(u) = \Delta u - \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds, & \text{dans } \Omega \times R_+ \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times R_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.3.3)$$

lorsque Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales et la fonction de relaxation $h(t)$ satisfait quelques conditions.

Ce genre de problèmes apparait naturellement dans la visco-élasticité et dans d'autres domaines, voir [RE3] par exemple. La limite intégrale exprime le fait que l'effort à l'instant dépend non seulement de la valeur actuelle, mais de l'histoire passée et des contraintes que le matériau a subi. Le problème linéaire et quelques unes de ses versions non linéaires ont été étudiés par beaucoup d'auteurs, voir [CA0], [ENG], [FAB], [HRU], [RE3] et également les références dans [FAB], [RE3]. Pour les problèmes semblables avec noyau singulier intégrable et non-intégrables , nous référons le lecteur à [HAN], [HR1], [HR2], [HR3], [HR3], [LON], [MIL], [PRU] par exemple. Lorsque on à, la régularité et les résultats de comportement asymptotiques ont été établis des taux de convergence ont été également obtenus. Il a été démontré que les solutions tendent exponentiellement vers zéro (polynomialement) si le noyau h décroît exponentiellement vers zéro (polynomialement) (même lorsque $a = 0$). Cependant, dans tous les travaux précédents l'hypothèse suivante sur le noyau non négatif est supposée

$$h'(t) \leq -\gamma h(t), \forall t \geq 0,$$

où γ est une constante positive.

En outre, on cite également le travail de Cavalcanti et Oquendo [CA2], qui a montré des taux de décroissance exponentiels et polynômial pour l'équation d'ondes non-linéaire partiellement viscoélastique sujette à une dissipation

frictionnelle non-linéaire et localisée donnée par ,

$$u_{tt} - \kappa_0 \Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)h(t-s)\nabla u(s)] + f(u) + b(x)g(u_t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

lorsque a, b sont des fonctions non négatives, $a \in C^1(\overline{\Omega})$, $b \in L^\infty(\Omega)$, sous l'hypothèse

$$a(x) + b(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.3.4)$$

Nous observons que l'hypothèse (1.3.4) donne de larges possibilités de choix des fonctions $a(x)$ et $b(x)$, et le cas le plus intéressant se produit quand on a des mécanismes de dissipations simultanés et complémentaires.

Une question naturelle se pose dans le contexte de l'équation d'ondes semi linéaire avec des condition aux limites dynamiques et un terme mémoire (??): Est-il possible de stabiliser le système en considérant un feedback et un terme mémoire sur une partie du bord?

Il est aussi important de mentionner le travail de Hamadache [HAM] sur la stabilité de l'équation d'ondes avec des conditions aux limites de Ventcel et des termes mémoires, où elle a prouvé que les solutions tendent vers zéro d'une façon exponentielle à condition que le noyau $h(t)$ décroît également exponentiellement vers zéro. C'est à dire qu'elle a supposé les hypothèses suivantes sur le noyau:

(H_1) $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction- C^2 décroissante ,

(H_2) Il existe des constantes positives ξ, ξ', ξ'' telles que

$$\begin{cases} -\xi' h(t) \leq h'(t) \leq -\xi h(t) & \text{pour tout } t \geq 0, \\ 0 \leq h''(t) \leq \xi'' h(t) & \text{pour tout } t \geq 0, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Le but principal de cet travail est de montrer que les solutions tendent exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini dans le cas où

$$\begin{cases} h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \text{ à condition que} \\ [h'(t) + \gamma h(t)] e^{\alpha t} & \text{dans } L^1(0, \infty) \text{ pour certains } \alpha, \gamma > 0. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Il est clair alors que nous permettons à $h'(t)$ de prendre des valeurs négatives. C'est-à-dire, le noyau $h(t)$ peut osciller. On rappelle que les premiers auteurs

qui ont étudié les noyaux oscillant pour le problème (1.3.3) sont N. E. Tatar et autres. [TAT]. Dans [TAT]., les auteurs ont prouvé que les solutions de (1.3.3) tendent exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini.

Remarque 1.3.1 *Dans notre travail ses hypothèses et les conditions aux limites sont différentes de celle de Hamadache.*

L'hypothèse que nous imposons à $h(t)$ n'est pas nécessaire pour la preuve de l'existence, l'unicité ou la dépendance continue de la solution. Dans notre travail, nous nous concentrerons sur le comportement asymptotique de la solution du problème.

Il est important aussi de mentionner d'autres travaux en liaison avec le sujet, comme, par exemple: Bey, Hemmina et Lohèac [LOH], Hemmina [HE1], [HE2], et les références de dans .

Chapitre 2

Rappels sur les espaces fonctionnels:

On n'a pas l'intention de présenter ici la théorie d'analyse fonctionnelle en toute généralité. On va tout simplement introduire les notions de base, suffisantes pour la compréhension de notre problème, en renvoyant à la bibliographie pour les démonstrations de ces notions de base .

Dans tout la suite, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ .

2.1 Espace de Hilbert:

Définition 2.1.1 Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive ,ie

$$(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in H \quad \text{et} \quad (u, u) > 0 \quad \text{si} \quad u \neq 0.$$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2} (v, v)^{1/2}$$

Définition 2.1.2 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme

$$\|u\|_H = (u, u)^{1/2}.$$

Remarque 2.1.1 Soit V, H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ de norme respectives $|\cdot|_V$, $|\cdot|_H$ tels que :

$$V \subset H \text{ et } V \text{ dense dans } H.$$

En identifiant H à son dual, on obtient :

$$V \subset H = H' \subset V',$$

où les injections canoniques sont continues et denses.

2.2 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$:

Définition 2.2.1 On désigne par L^1 l'ensemble des fonctions intégrables sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, dans lequel on identifie deux fonctions qui se coïncident p.p (c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle).

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

on définit

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Définition 2.2.2 Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Définition 2.2.3 On notera par $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable, et } \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$.
muni de la norme $\|f\| = \inf \{C \mid |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}, p = \infty$.

Définition 2.2.4 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace L_p^{loc} par l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \in L^p(\Omega')$, pour tout $\Omega' \subset \Omega$ et dont la fermeture est compacte dans Ω .

Proposition 2.2.1 *Soit (u_n) une suite bornée dans $L^q(\Omega)$, on suppose que (u_n) converge vers u dans $L_p^{loc}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q$, alors on a $u_n \in L^q(\Omega)$ et $u_n \rightarrow u$ dans $L^q(\Omega)$.*

2.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$:

On appelle support d'une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ le plus petit fermé K en dehors duquel la fonction φ est nulle presque partout, on note $K = \text{supp}\varphi$. Une fonction φ est dite à support compact dans Ω si son support est un compact contenu dans Ω .

* On désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω .

* On désigne par $D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

On définit l'opérateur de dérivation

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Définition 2.3.1 *On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega), \quad D^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad |\alpha| \leq m\}.$$

muni de la norme

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}; \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{L^\infty(\Omega)} \quad p = \infty$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Pour $p = 2$; on note

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Définition 2.3.2 H^m est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{m, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

et la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_{m, \Omega} = (u, u)_{m, \Omega}^{1/2}.$$

pour $m = 1$

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{1, \Omega} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u', v')_{L^2(\Omega)}.$$

la norme associe :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)}$$

Définition 2.3.3 Soit $1 \leq p \leq \infty$, $W_\Gamma^{m,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

2.4 Espaces des distributions:

Définition 2.4.1 On appelle (D) L'espace vectoriel des fonctions complexes φ de n variables et à support compact.

Définition 2.4.2 On appelle (D_k) le sous-espace de (D) formé des fonctions φ ayant leur support dans le compact K de $\mathbb{R}^n$. Nous allons mettre sur (D_k) une topologie induite par (C_k) . On dira que des fonctions $\varphi_j \in (D_k)$, si les fonctions φ_j convergent vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}^n$, ainsi que chacune de leurs dérivées. Autrement dit, pour chaque système fixée d'entiers $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$, les dérivées

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n}}{(\partial x_1)^{p_1}(\partial x_2)^{p_1}\dots(\partial x_n)^{p_1}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

convergent vers 0 uniformément par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$. Cette topologie est par la la famille des semi-normes N_p :

$$N_p(\varphi) = \sup |D^p(x)|, \quad \text{ou } p = (p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Définition 2.4.3 Une distribution T est alors une forme linéaire sur (D) , dont la restriction à chaque (D_k) , K compact de $\mathbb{R}^n$, est continue.

2.5 Trace d'une fonction:

Lorsque v est une fonction de $L^2(\Omega)$, on ne peut pas considérer la restriction de la fonction à un ensemble de mesure nulle car les fonctions de L^2 sont justement définies à un ensemble de mesure nulle près. Nous allons montrer dans cette partie qu'il n'est pas nécessaire que la fonction ait un représentant continu pour que l'on puisse considérer sa restriction à Γ . C'est ce que nous appellerons la trace de la fonction sur le bord du domaine.

Définition 2.5.1 Soit v une fonction de $H^m(\Omega)$ pour $m=1$ ou 2 , v n'est pas nécessairement continue sur Ω (sauf en dimension 1) ni sur $\bar{\Omega}$.

On définit les traces de v sur la frontière Γ par l'application linéaire continue, appelée trace

$$\begin{aligned}\gamma_0: H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ v &\longmapsto v|_{\Gamma}\end{aligned}$$

Cette application est surjective.

donc $H_0^1(\Omega)$ est le noyau de γ_0 . C'est-à-dire

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v = 0\}.$$

Définition 2.5.2 H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1

Définition 2.5.3 On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

On définit aussi l'application trace

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: H^2(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ v &\longmapsto \nabla v \cdot \nu\end{aligned}$$

Cette application est linéaire, continue et surjective.

Théorème 2.5.1 H_0^2 est le noyau de γ_1

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega); \gamma_0 v = 0, \gamma_1 v = 0\}.$$

Définition 2.5.4 On désigne par $H^{-2}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^2(\Omega)$

2.6 Injections et inégalités:

2.6.1 Injections compacts:

Théorème 2.6.1 (*de compacité de Rellich-Kondrachov*) Soit Ω un domaine régulier borné, L'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. En conséquence, toutes les suites faiblement convergentes dans $H^1(\Omega)$ convergent fortement dans $L^2(\Omega)$.

Nous définirons l'espace $L^p(0, T; X)$ dans la section (2.8.1), page (28).

2.6.2 Théorème d'injection de Sobolev:

Théorème 2.6.2 Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, 1 \leq p \leq \infty, \forall u \in H^1(\Omega)$$

2.6.3 Inégalités de Sobolev, Hölder, Poincaré et Young:

Théorème 2.6.3 (*Inégalité de Sobolev*)

Soient $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est bornée et $1 \leq p \leq N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \text{ avec injection continue.}$$

Théorème 2.6.4 (*Inégalité de Hölder*)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, et $1 \leq p' \leq \infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Remarque 2.6.1 (*Inégalité de Hölder généralisée*)

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder: soient $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ des fonctions réelles telles que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}.$$

Théorème 2.6.5 (*Inégalités de Poincaré*)

Il existe une constante C (dépendant de Ω) telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_\Gamma^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_\Gamma^2(\Omega)$$

Théorème 2.6.6 (*Inégalité de Young*)

Pour tout réel positif a et b et pour tout ε strictement positif on a:

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2,$$

Lemme de Gronwall:

Nous rapelons ici le lemme classique de Gronwall qui on a utilisé pour établir des inégalité.

Lemme 2.6.1 Soient u, v deux fonctions intégrables positives sur $[0, \infty)$, et M une constante positive telles que

$$u(t) \leq M + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad \forall t \geq 0$$

Alors on a

$$u(t) \leq M \exp \int_0^t v(s)ds, \quad \forall t \geq 0$$

Remarque 2.6.2 le lemme (2.6.1) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par u la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer u sous la forme

$$u(t) \leq M + \int_0^t v(s)u(s)ds, \forall t \geq 0$$

avec une certaine fonction $v \geq 0$. L'application du lemme (2.6.1) donne immédiatement la nullité de u .

Formules de Green:

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des edp. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Pour tout $u \in C^2(\Omega)$ et $v \in C^1(\Omega)$ on a la formule de Green suivante:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \Gamma - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx.$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ (dérivée normale de u).

Par conséquent on a

$$\int_{\Omega} u \nabla v - v \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \Gamma.$$

2.7 Quelques criteres de convergence:

On regroupe ici les résultats qui nous permettront de manipuler les différentes notions de convergence des suites dans les espaces $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq \infty$, et $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

2.7.1 Convergence forte:

Définition 2.7.1 Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que u_n converge (fortement) vers u dans L^p si $u_n \in L^q$ et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

on note $u_n \rightarrow u$.

2.7.2 Convergence faible:

Définition 2.7.2 On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$ converge faiblement dans L^p vers une fonction u si $u \in L^p(\Omega)$, telle que

$$\forall v \in L^q(\Omega), \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n v dx = \int_{\Omega} u v dx$$

et on note $u_n \rightharpoonup u$. avec $L^q(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $L^p(\Omega)$.

2.7.3 Convergence presque partout:

Le lemme suivant nous donne un lien entre la convergence presque partout et la convergence faible dans les espaces $L^p(\Omega)$, pour $1 < p < \infty$.

Lemme 2.7.1 Soient $1 < p < \infty$ et $(u_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ convergeant presque partout dans Ω vers u . Alors, $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$.

2.7.4 Convergence faible*:

Définition 2.7.3 On dit que u_n converge faible* vers u dans L^∞ , et on note $u_n \rightharpoonup^* u$ si $u_n \in L^1$ et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_n(x) - u(x)) \Phi(x) dx = 0 \quad \forall \Phi \in L^1(\Omega).$$

1. La limite (forte ou faible) d'une suite de fonction est toujours unique.
2. Dans le cas $p = 1$, le symbole $*$ est posé pour montrer que la définition de convergence faible dans L^1 n'est pas entièrement la même que dans les espaces L^p , pour $1 \leq p < \infty$ En effet, le dual de L^1 est strictement plus grand que L^1 .
3. La convergence forte dans L^p , implique la convergence faible dans L^p , pour $1 \leq p < \infty$

2.8 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles:

Remarque 2.8.1 *Les espaces de fonctions à valeurs vectorielles sont adaptés à l'étude de problèmes d'évolution où les fonctions définies sur un interval de temps et à valeur dans un espace de Banach réel. Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs vectorielle.*

Soit $1 < T < \infty$, et $(X, \|\cdot\|_X)$ désigne un espace de Banach .

On définit les espaces suivants:

$$\mathcal{C}([0, T]; X) = \{u \in [0, T] \rightarrow X \text{ continue}\}.$$

et

$$L^p(0, T; X) = \{u \in (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable; } \int_0^T \|u(t)\|^p dt < \infty\} \quad 1 \leq p < \infty.$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

et

$$L^\infty(0, T; X) = \{u \in (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable; } \exists C > 0 \quad \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p.}\}.$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{C > 0; \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p.}\}.$$

Remarque 2.8.2 *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach et $\mathcal{C}([0, T]; X)$ est dense dans $L^p(0, T; X)$.*

Si $1 \leq p \leq \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0, T; X)$ est réflexif.

On désigne par $\mathcal{D}'([0, T]; X)$ l'espace des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans X , défini par

$$\mathcal{D}'([0, T]; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}([0, T]); X),$$

où, de façon générale $\mathcal{L}(Y; X)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de

$Y \longrightarrow X$, si $Y = X$ on note $\mathcal{L}(X)$.

A une fonction $f \in L^p(0, T; X)$ correspond une distribution $\tilde{f}$ sur $]0, T[$ à valeurs dans X , définie par

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

(ce qui définit bien une application $\varphi \longrightarrow \tilde{f}(\varphi)$ linéaire continue de $\mathcal{D}(]0, T[) \longrightarrow X$). L'application $f \longrightarrow \tilde{f}$ est une injection; on identifiera f et $\tilde{f}$. En outre si $f \longrightarrow 0$ dans $L^p(0, T; X)$ alors $\tilde{f} \longrightarrow 0$ dans $D'([0, T[; X)$, c'est-à-dire $\tilde{f}(\varphi) \longrightarrow 0$. On a alors

$$L^p(0, T; X) \subset D'([0, T[; X).$$

Pour $f \in D'([0, T[; X)$, on définit $d^k f / dt^k = f^{(k)}$ par

$$f^{(k)}(\varphi) = (-1)^k f(\varphi^{(k)}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

ce qui définit $f^{(k)} \in D'([0, T[; X)$. En outre l'application $f \longrightarrow f^{(k)}$ est linéaire continue de $D'([0, T[; X)$ dans lui-même.

Soient X et Y deux espaces de Banach avec $X \subset Y$. Soit $v \in L^p(0, T; X)$; alors $dv/dt \in D'([0, T[; X)$ donc, en particulier (puisque $D'([0, T[; X) \subset D'([0, T[; Y)$) : $dv/dt \in D'([0, T[; Y)$.

Supposons alors que

$$dv/dt \in L^q(0, T; X) \quad (1 \leq q \leq \infty).$$

Alors la fonction v est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0, T] \longrightarrow Y$. alors

$$v \in L^2(0, T; V), \quad dv/dt \in L^2(0, T; V').$$

On montre alors que, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la fonction $t \longrightarrow v(t)$ est continue de $[0, T] \longrightarrow H$.

2.8.1 Approximation de Galerkin

Dans ce travail on utilise la méthode de Galerkin,

Définition 2.8.1 Soit V un espace de Hilbert et $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finies vérifiant:

(i) $\forall m, V_m \subset V$

(ii) $V_m \longrightarrow V$ quand $m \longrightarrow \infty$ au sens suivant:

Il existe V un sous espace dense de V tel que pour tout $v \in V$ on peut trouver une suite $(v_m), m \in \mathbb{N}$ vérifiant:

Pour tout $v_m \in V_m$ et $v_m \longrightarrow v$ dans V quand $m \longrightarrow \infty$.

L'espace V_m s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre m ($m \neq \dim V_m$)

Schéma de la méthode

Soit (P) le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution, on suppose que la solution de (P) est unique.

Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin, il convient de définir le problème approché P_m dans l'espace V_m ayant une unique solution u_m .

Le schéma possède 5 étapes:

Etape1: On définit la solution u_m du problème P_m .

Etape2: On établit des estimations sur u_m dites estimations a priori.

Etape3: En utilisant les résultats de compacité faible de la boule unité dans un espace de Hilbert, en pouvant extraire une sous suite $(u_{mk})_{k \in \mathbb{N}}$ de (u_m) qui converge vers une limite notée u .

Etape4: On montre que u est solution du problème P donc la solution cherchée d'après l'unicité.

Etape5: On montre que (u_{mk}) converge fortement vers u dans un espace de Hilbert donné.

Partie I

Equation des ondes semi linéaire

Chapitre 3

Introduction.

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^3 . Soient Γ_0 et Γ_1 des sous-ensembles fermés, non vides et disjoints de Γ avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. On note par ∇_Γ le gradient tangential sur Γ , par Δ_Γ l'opérateur de Laplace sur Γ et par ∂_ν la dérivée normale où ν représente la normale unitaire extérieure de Γ . Cette partie est consacré à l'étude de la stabilisation des solutions du problème de Cauchy-Ventcel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + f_1(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma v + f_2(v) + a v_t + b \int_0^t h(t-s) \Delta_\Gamma v(s) ds = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (3.0.1)$$

où a et b sont des constantes positives et les fonctions f_1 et f_2 vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}) \text{ et ils existes des constantes } c_1, c_2 > 0, p > 1, (n-2)p \leq n \text{ telle que} \\ |f_1(s_1) - f_1(s_2)| \leq c_1(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}) |s_1 - s_2|, \\ |f_2(s_1) - f_2(s_2)| \leq c_2(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}) |s_1 - s_2|, \text{ pour tout } s_1, s_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Lorsque $a = b = 0$, et sans termes non linéaires le problème ci-dessus a été étudié la première fois par Lemrabet [LE2] et plus tard par Lemrabet et

Teniou [LE4]. Le modèle décrit les vibration d'un corps élastique mince recouvert d'une couche rigide sur sa frontière. Dans [LE4] ils ont prouvé des résultats d'existence et de régularité pour le cas linéaire. Quand $a = b = 0$ le problème ci-dessus a été étudié par Khemmoudj et Medjden [KH2]. Dans ce travail les auteurs prouvent la stabilité exponentielle en considérant un feedback $a(x)u_t$ linéaire localisée agissant dans la première équation, suivant les idées présentées par Zuazua dans [ZUA1] combinées avec de nouveaux outils. Plus récemment, les résultats précédents ont été prolongés par Cavalcanti, Khemmoudj et Medjden [CA1] en considérant les opérateurs linéaires A et A_T , selon la variable spatiale x , au lieu de $-\Delta$ et Δ_Γ , respectivement, et, en outre, complété par une dissipation non-linéaire et localisée $a(x)g(u_t)$ agissant dans la première équation. Ceci a été fait en combinant de nouvelles estimations d'énergie combinées avec des méthodes de géométrie Riemannienne dues à Lasiecka, Triggiani et Yao, voir, par exemple, [YAO, L-T-Y1, L-T-Y1].

Il est important de mentionner que la stabilité pour l'équation d'ondes

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (3.0.2)$$

a été étudiée par plusieurs auteurs. Quand le feedback dépend de la vitesse d'une manière linéaire Zuazua [ZUA1] a montré que l'énergie relative de cette équation décroît exponentiellement si la région de dissipation contient un voisinage de la frontière Γ ou, au moins, contient un voisinage ω de la partie particulière donnée par $\{x \in \Gamma : (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$. Dans la même direction, mais quand $f = 0$, il est important de mentionner le résultat de Bardos, Lebeau et Rauch [BLR1], basé sur l'analyse microlocale, qui assure une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une décroissance exponentielle, c'est-à-dire, la région de décroissance satisfait la condition bien connue du contrôle géométrique. L'exemple classique d'un sous-ensemble ouvert ω vérifiant cette condition est quand ω est un voisinage de la frontière. Ensuite, considérant encore $f = 0$, Nakao [NA1, NA2] a amélioré les résultats de Zuazua [ZUA1] traitant d'abord le cas d'une équation dégénérée linéaire, puis le cas de $g(x, u_t)$ (ici, encore, $f = 0$ a été considéré) supposant,

comme d'habitude, que la fonction g a une croissance polynômiale près de l'origine. Martinez [MAR] a amélioré les résultats mentionnés ci-dessus pour l'équation d'ondes linéaire sujette à une dissipation non-linéaire $g(x, u_t)$, évitant la croissance polynômiale de la fonction $g(x, s)$ près zéro. Sa démonstration est basée sur la technique de multiplicateur par morceaux, développée par Liu [LIU], combinée avec des inégalités intégrales non-linéaires pour prouver que l'énergie du système décroît vers zéro avec une évaluation précise du taux de décroissance si la région de dissipation vérifie quelques conditions géométriques. Récemment, et considérant toujours $f = 0$, Alabau-Boussoira [ALA] a amélioré les résultats dus à Martinez [MAR] en montrant des taux optimaux de décroissance d'énergie en considérant l'équation d'ondes suivante avec un amortissement faible non-locale temporelle et une faible dissipation interne .

$$\begin{cases} u_{tt} + a u_t + f_1(u) = \Delta u - \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.0.3)$$

lorsque Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales et la fonction de relaxation $h(t)$ satisfait quelques conditions.

Ce genre de problèmes apparaît naturellement dans la visco-élasticité et dans d'autres domaines, voir [RE3] par exemple. La limite intégrale exprime le fait que l'effort à l'instant dépend non seulement de la valeur actuelle, mais de l'histoire passée et des contraintes que le matériau a subi. Le problème linéaire et quelques unes de ses versions non linéaires ont été étudiés par beaucoup d'auteurs, voir [CA0], [ENG], [FAB], [HRU], [RE3] et également les références dans [FAB], [RE3]. Pour les problèmes semblables avec noyau singulier intégrable et non-intégrables , nous référons le lecteur à [HAN], [HR1], [HR2], [HR3], [HR3], [LON], [MIL], [PRU] par exemple. Lorsque on a, la régularité et les résultats de comportement asymptotiques ont été établis des taux de convergence ont été également obtenus. Il a été démontré

que les solutions tendent exponentiellement vers zéro (polynomialement) si le noyau h décroît exponentiellement vers zéro (polynomialement) (même lorsque $a = 0$). Cependant, dans tous les travaux précédents l'hypothèse suivante sur le noyau non négatif est supposée

$$h'(t) \leq -\gamma h(t), \forall t \geq 0,$$

où γ est une constante positive.

En outre, on cite également le travail de Cavalcanti et Oquendo [CA2], qui a montré des taux de décroissance exponentiels et polynômial pour l'équation d'ondes non-linéaire partiellement viscoélastique sujette à une dissipation frictionnelle non-linéaire et localisée donnée par ,

$$u_{tt} - \kappa_0 \Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)h(t-s)\nabla u(s)] + f(u) + b(x)g(u_t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

lorsque a, b sont des fonctions non négatives, $a \in C^1(\overline{\Omega})$, $b \in L^\infty(\Omega)$, sous l'hypothèse

$$a(x) + b(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.0.4)$$

Nous observons que l'hypothèse (1.3.4) donne de larges possibilités de choix des fonctions $a(x)$ et $b(x)$, et le cas le plus intéressant se produit quand on a des mécanismes de dissipations simultanés et complémentaires.

Une question naturelle se pose dans le contexte de l'équation d'ondes semi linéaire avec des condition aux limites dynamiques et un terme mémoire (??): Est-il possible de stabiliser le système en considérant un feedback et un terme mémoire sur une partie du bord?

Il est aussi important de mentionner le travail de Hamadache [HAM] sur la stabilité de l'équation d'ondes avec des conditions aux limites de Ventcel et des termes mémoires, où elle a prouvé que les solutions tendent vers zéro d'une façon exponentielle à condition que le noyau $h(t)$ décroît également exponentiellement vers zéro. C'est à dire qu'elle a supposé les hypothèses suivantes sur le noyau:

$$(H_1) \quad h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ est une fonction-}C^2 \text{ décroissante ,}$$

(H₂) Il existe des constantes positives ξ, ξ', ξ'' telles que

$$\begin{cases} -\xi' h(t) \leq h'(t) \leq -\xi h(t) & \text{pour tout } t \geq 0, \\ 0 \leq h''(t) \leq \xi'' h(t) & \text{pour tout } t \geq 0, \end{cases} \quad (3.0.5)$$

Le but principal de cet travail est de montrer que les solutions tendent exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini dans le cas où

$$\begin{cases} h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \text{ à condition que} \\ [h'(t) + \gamma h(t)] e^{\alpha t} & \text{dans } L^1(0, \infty) \text{ pour certains } \alpha, \gamma > 0. \end{cases} \quad (3.0.6)$$

Il est clair alors que nous permettons à $h'(t)$ de prendre des valeurs négatives. C'est-à-dire, le noyau $h(t)$ peut osciller. On rappelle que les premiers auteurs qui ont étudié les noyaux oscillant pour le problème (3.0.3) sont N. E. Tatar et autres. [TAT]. Dans [TAT]., les auteurs ont prouvé que les solutions de (1.3.3) tendent exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini.

Remarque 3.0.3 *Dans notre travail ses hypothèses et les conditions aux limites sont différentes de celle de Hamadache.*

L'hypothèse que nous imposons à $h(t)$ n'est pas nécessaire pour la preuve de l'existence, l'unicité ou la dépendance continue de la solution. Dans notre travail, nous nous concentrerons sur le comportement asymptotique de la solution du problème.

Il est important aussi de mentionner d'autres travaux en liaison avec le sujet, comme, par exemple: Bey, Hemmina et Lohéac [LOH], Hemmina [HE1], [HE2], et les références de dans .

Ce chapitre se compose de quatre parties :

Dans une première étape on commence par donner la position du problème et l'introduction de quelques notations.

Dans la deuxième partie on montre que le feedback naturel est insuffisant pour faire décroître l'énergie d'une manière exponentielle.

Dans la troisième partie on montre qu'une dissipation par un terme mémoire est suffisante pour faire décroître l'énergie d'une manière exponentielle.

La dernière partie est consacrée à la démonstration de la décroissance exponentielle de l'énergie en imposant deux dissipations sur le bord: l'une avec le feedback naturel et l'autre avec un terme mémoire.

Chapitre 4

Formulation du problème:

Soit Ω un sous-ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$), de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^3 , et avec les deux $\Gamma_i, i = 0, 1$, étant fermé, disjoignent et non vide. En cet article, nous étudions les propriétés de stabilité des fonctions $[u(x, t), u_t(x, t)]$ et $[v(x, t), v_t(x, t)]$ qui sont solutions du système couplé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + f_1(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma v + f_2(v) + av_t + b \int_0^t h(t-s) \Delta_\Gamma v(s) ds = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (4.0.1)$$

avec a et b des constantes positives et le noyau h vérifie les conditions suivantes :

(H_1) $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction- C^2 ,

(H_2) Il existe des constantes positives ξ, ξ', ξ'' telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\xi' h(t) \leq h'(t) \leq -\xi h(t) \text{ pour tout } t \geq 0, \\ 0 \leq h''(t) \leq \xi'' h(t) \text{ pour tout } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (4.0.2)$$

Le système couplé est une version (avec un feedback linéaire) du modèle de Cauchy-Ventcel obtenu par Lemrabet [LE1] qui décrit les vibrations asymptotiques d'un corps élastique avec une couche mince rigide sur sa frontière. (Voir également [KH1], [LE2] et [LE3]).

Dans la suite on notera par $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $\Sigma_i = \Gamma_i \times]0, T[$, $i = 0, 1$.

On définit les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{aligned} H_{\Gamma_0}^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) / , u|_{\Gamma_0} = 0\} , \\ \mathbb{V} &= \{z = (u, v) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H^1(\Gamma) / , u_{\Gamma} = v\} , \\ \mathbb{H} &= L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma). \end{aligned}$$

Munis des normes canoniques

$$|z|_{\mathbb{H}}^2 = |u|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_{L^2(\Gamma)}^2 ,$$

$$\|z\|_{\mathbb{V}}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Gamma)}^2 ,$$

$\mathbb{V}$ et $\mathbb{H}$ sont deux espaces de Hilbert et $\mathbb{V}$ est dense dans $\mathbb{H}$ avec injection continue.

On définit l'opérateur $\mathbb{A}$ par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} & -\Delta_{\Gamma} \end{pmatrix} ,$$

et le domain de $\mathbb{A}$ par

$$D_{\mathbb{A}} = \{(u, v) \in \mathbb{V}, \mathbb{A}(u, v) \in \mathbb{H}\} .$$

Remarque 4.0.4 Lorsque Ω de classe C^2 , $D_{\mathbb{A}} = H^2(\Omega) \times H^2(\Gamma)$ (voir [LE2].)

Chapitre 5

Existence et unicite de la solution.

5.1 Le probleme avec terme mémoire:

Basé sur la méthode de Faedo-Galerkin, il est possible de prouver l'existence d'une solution faible au problème (4.0.1). Puisque l'analyse est tout à fait standard, nous énonçons sans preuve le théorème suivant

Théorème 5.1.1 (i) *Pour tout conditions initiale $\{u^0, v^0, u^1, v^1\} \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$, il existe une solution faible unique de (4.0.1) dans la classe*

$$(u, v) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}). \quad (5.1.1)$$

(ii) *En outre, si $\{u^0, u^1, v^0, v^1\} \in \{H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)\} \times \{H^2(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_1)\}$, alors la solution à la régularité suivante*

$$(u, v, u_t, v_t, u_{tt}, v_{tt}) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{H}). \quad (5.1.2)$$

5.2 Le probleme sans terme mémoire:

Nous observons que le problème (4.0.1), sans terme mémoire, peut être écrit sous la forme suivante

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = \mathcal{G}(u_t) + \mathcal{R}(u), \quad (5.2.1)$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\mathbb{A} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

est un opérateur monotone maximal et $\mathcal{R}(\cdot)$ représente une perturbation localement Lipschitz. Ainsi, en utilisant des arguments standard de semi groupe nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.2.1 (i) *Sous les conditions ci-dessus, $\{u^0, v^0, u^1, v^1\} \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$, le probleme (5.2.1) est bien posé dans l'espace $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$ i.e. pour toute données initiale $\{u^0, v^0, u^1, v^1\} \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$, ils existes une unique solution faible de (4.0.1) dans la classe*

$$(u, v) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}). \quad (5.2.3)$$

(ii) *En outre, les limites de vitesse de la solution ont la régularité suivante :*

$$(u_t, v_t) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \times L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_1)), \quad (5.2.4)$$

(par conséquent, $v_t \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_1))$ d'après (H3)(iii)).

D'autre part , si $\{u^0, u^1, v^0, v^1\} \in \{H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)\} \times \{H^2(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_1)\}$ et $\mathcal{R}$ est une fonction globalement Lipschitz , alors la solution a la régularité suivante

$$(u, v) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \\ \times L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Gamma) \cap W^{1,\infty}(\Gamma)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma)).$$

Supposer que (u, v) est la solution faible globale du problème (4.0.1) , nous définissent la fonctionnelle de l'énergie correspondante par:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} [|u_t|^2 + |\nabla u|^2] dx + \int_{\Gamma_1} [|v_t|^2 + |\nabla_{\Gamma} v|^2] d\Gamma \right\} \\ + \int_{\Omega} F_1(u) dx + \int_{\Gamma_1} F_2(v) d\Gamma \quad (5.2.5)$$

avec

$$F_1(z) = \int_0^z f_1(s) ds, \quad F_2(z) = \int_0^z f_2(s) ds$$

Dans tout la suite, on travaille avec des solutions régulières et par des arguments standard de densité, la décroissance exponentiel est vérifiée pour les solutions faibles.

Lemme 5.2.1 *Une différentiation de $E(t)$ par rapport à t donne*

$$\frac{dE(t)}{dt} = -a \int_{\Gamma_1} v_t^2 d\Gamma + b \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v_t(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma. \quad (5.2.6)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{\Omega} (u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t) dx + \int_{\Omega} u_t f_1(u) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} (v_t v_{tt} + \nabla_{\Gamma} v_t \nabla_{\Gamma} v) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} v_t f_2(v) d\Gamma \end{aligned}$$

En utilisant la 1^{ere} équation du problème (4.0.1) on obtient

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} (u_t \Delta u + \nabla u \nabla u_t) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} (v_t v_{tt} + \nabla_{\Gamma} v_t \nabla_{\Gamma} v) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} v_t f_2(v) d\Gamma \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned} &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t d\Gamma + \int_{\Gamma_1} v_t f_2(v) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} (v_t v_{tt} + \nabla_{\Gamma} v_t \nabla_{\Gamma} v) d\Gamma \end{aligned}$$

En utilisant la 2^{eme} équation du problème (4.0.1) on obtient

$$\begin{aligned} &= \int_{\Gamma_1} \left(-v_{tt} + \Delta_{\Gamma} v - ag(v_t) - b \int_0^t h(t-s) \Delta_{\Gamma} v(s) ds \right) u_t d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} (v_t v_{tt} + \nabla_{\Gamma} v_t \nabla_{\Gamma} v) d\Gamma \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green

$$= -a \int_{\Gamma_1} v_t^2 d\Gamma + b \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v_t(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma.$$

■

Chapitre 6

Stabilisation

6.1 Le cas semi linéaire sans terme mémoire

6.1.1 Insuffisance du feedback naturel

Dans cette section, nous considérons le cas $a = 1$ et $b = 0$ C'est à dire nous étudions le problème (3.0.1) sans terme mémoire:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + f_1(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma v + v_t + f_2(v) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (6.1.1)$$

où

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 < x^2 + y^2 < 2\}; \\ \Gamma_0 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = 1\}; \\ \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = 2\}. \end{aligned}$$

Ici, notre but est de montrer qu'une dissipation frictionnelle (ou un feedback naturel) v_t n'est pas assez fort, par l'intermédiaire du processus de transmis-

sion ($u|_{\Gamma} = v$), pour assurer la stabilité exponentielle du système dans le cas de l'équation d'ondes avec des conditions de Ventcel.

Nous considérons l'opérateur $-A + \mathcal{R}$ ou A est définis par (5.2.2) et $\mathcal{R} \in L(\mathcal{X})$ est donné par

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} u \\ \xi \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\eta \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{X} = \{(u, \xi, v, \eta) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1) / u|_{\Gamma_1} = v\}.$$

Théorème 6.1.1 *$-A + \mathcal{R}$ produit un semigroupe de contraction T (en X) qui n'est pas exponentiellement stable*

Preuve : Nous considérons l'opérateur $-A + G$ défini sur $D(A)$.

Il n'est pas difficile de voir que A est biaisent-adjoint et que $-A + G$ produit un semigroupe de contraction T en X . T n'est pas exponentiellement stable puisque sa restriction à l'espace des fonctions radialement symétriques n'est pas exponentiellement stable. Soit avec plus de précision

$$\mathbf{X}_{rad} = \{(u, \xi, v, \eta) \in H_L^1(1, 2) \times L^2(1, 2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} / u|_{\Gamma_1} = v\},$$

où

$$H_1^1(1, 2) = \{\varphi \in H^1(1, 2) / \varphi(1) = 0\}.$$

L'espace X_{rad} peut être vu, en identifiant radialement des fonctions symétriques avec des fonctions d'une variable et des fonctions constantes avec des nombres réels, comme sous-espace de X . On le voit facilement que X est invariable pour T , c.-a.-d. que les solutions avec des données initiales radialement symétriques seront toujours radialement symétriques. D'ailleurs, il est facile de vérifier que le générateur de la restriction T_{rad} de T à X_{rad} est de la forme $A_{rad} + G$, avec A_{rad} anti-adjoint. (afin d'avoir la forme précise de A_{rad} il suffit d'écrire le Laplacien utilisant les coordonnées polaires.). La restriction de G

à X_{rad} est de rang 1, ainsi c'est un opérateur compact. En Conséquence, le générateur de T_{rad} est la somme des opérateurs biaiser-adjoint et compact . Selon le résultat classique (voir, par exemple, le lemme 3.1 dans [RAO]) le semigroupe T et, par conséquent, sa prolongation T ne sont pas exponentiellement stable. ■

6.2 Le cas semi linéaire avec un terme mémoire

6.2.1 Le problème avec un terme mémoire et sans feedback naturel:

Dans cette section nous considérons le cas $a = 0$, $b = 1$. C'est nous étudient le problème (3.0.1) sans dissipation frictionnelle v_t .

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + f_1(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma v + f_2(v) + \int_0^t h(t-s) \Delta_\Gamma v(s) ds = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (6.2.1)$$

où, nous supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ vérifiant

$$(H_3) \quad (A_1) \quad \int_0^\infty h(s) ds < 1;$$

$$(A_2) \quad h'(t) + \gamma h(t) \geq 0;$$

$$(A_3) \quad e^{\alpha t} [h'(t) + \gamma h(t)] \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ où } \alpha, \gamma > 0 \text{ sont des constantes positives.}$$

Cette situation est moins favorable que le cas avec la dessipation frictionnelle puisque nous nous sommes contenté seulement avec le terme mémoire. Nous pouvons prouver que ce seule terme mémoire est suffisant pour produire une dissipation faible ce qui peut conduire le système au repos d'une façon exponentielle, c.-à-d. qu'il est possible de prouver un résultat de décroissance exponentiel sans dissipation frontière

On note par l , $\bar{l}$, $\bar{l}_\alpha$, $\bar{h}$ et $\bar{h}_\alpha$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} l(t) &= h'(t) + \gamma h(t), \\ \bar{l} &= \int_0^\infty l(s) ds, \\ \bar{l}_\alpha &= \int_0^\infty l_\alpha(s) ds = \int_0^\infty l(s) e^{\alpha s} ds, \\ \bar{h} &= \int_0^\infty h(s) ds, \\ \bar{h}_\alpha &= \int_0^\infty e^{\alpha s} h(s) ds. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Posons

$$(h * \nabla_\Gamma v)(t) = \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_\Gamma v(t) - \nabla_\Gamma v(s)|^2 ds d\Gamma,$$

il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h * \nabla_\Gamma v)(t) &= - \int_{\Gamma_1} \nabla_\Gamma v_t \int_0^t h(t-s) \nabla_\Gamma v(s) ds d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} (h' * \nabla_\Gamma v)(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_\Omega |\nabla_\Gamma v|^2 d\Gamma \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} h(t) \int_\Omega |\nabla_\Gamma v|^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

ensuite, définissant

$$\begin{aligned} e(t) &:= \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma + \int_\Omega F(u) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_\Gamma v|^2 d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} (h * \nabla_\Gamma v)(t) + \int_{\Gamma_1} G(v) d\Gamma, \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

nous obtenons à partir de (6.2.1), (6.2.3) et (6.2.4),

$$\frac{de(t)}{dt} = -\frac{1}{2} h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_\Gamma v|^2 dx + \frac{1}{2} (h' * \nabla_\Gamma v)(t). \tag{6.2.5}$$

Dans les travaux précédents on suppose que $h'(t) \leq 0$ et $h(t) \geq 0$. Par conséquent de (6.2.5) nous voyons que $\frac{de(t)}{dt} \leq 0$. Ceci implique que $e(t) \leq e(0)$ pour tout $t \geq 0$. Dans notre cas nous n'affirmons pas que $h'(t) \leq 0$. En fait, nous permettons à la fonction $h(t)$ d'osciller.

Pour prouver notre résultat nous présentons les fonctionels auxiliaires suivants

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} u_t u dx + \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma \quad (6.2.6)$$

et

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \int_{\Gamma_1} \int_0^t L_{\alpha}(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(t) - \nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\ &=: (L_{\alpha} * \nabla_{\Gamma} v)(t) \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

où

$$\begin{aligned} L_{\alpha}(t) &= e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} l_{\alpha}(s) ds \\ &= e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} l(s) e^{\alpha s} ds \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

et α est comme dans (A_3) . De plus, nous considérons le fonctionnel

$$\begin{aligned} V(t) &= e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Psi(t) \\ &\quad - \eta \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\ &\quad + 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

pour quelques constantes positives ε et η à être déterminé par la suite.. En employant la première et la seconde équations du problème (6.2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} u_{tt} u dx + \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} v_{tt} v d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma - \int_{\Omega_1} f_1(u) u dx - \int_{\Gamma_1} f_2(v) v d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma; \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Clairement

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds \right)^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_0^t h(t-s) ds \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma. \end{aligned}$$

Lemme 6.2.1 *Supposons que (u, v) est une solution régulière comme définie dans le théorème 5.2.1. Puis il existent les constantes positives ε_0 , η_0 , ξ_1 et ξ_2 telle que*

$$\xi_1 E(t) + \frac{1}{2} (h * \nabla_\Gamma v)(t) \leq V(t) \leq \xi_2 [E(t) + \Psi(t) + (h * \nabla_\Gamma v)(t)] \quad (6.2.11)$$

Pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $0 < \eta < \eta_0$.

Preuve : On commence par montrer l'inégalité gauche dans (6.2.11). Pour la fonctionnelle $\Phi(t)$, on prend

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_\Omega u_t u dx + \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{c_p}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v|^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{c_p}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} (c_p + c_e) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

où c_p est la constante de Poincaré et c_e est la constante d'injection de $H_{\Gamma_0}^1 \hookrightarrow L^2(\Gamma)$

En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^t L_\alpha(s) ds = \int_0^t e^{-\alpha s} \int_s^\infty l(r) e^{\alpha r} dr ds \\ &= \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha s} \int_s^\infty l(r) e^{\alpha r} dr \right]_0^t \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-\alpha s} \left(\int_s^\infty l(r) e^{\alpha r} dr \right)' ds \\ &= -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \int_t^\infty l(r) e^{\alpha r} dr \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty l(r) e^{\alpha r} dr - \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty l(r) dr \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^\infty l(r) e^{\alpha r} dr \right) = \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha} < +\infty \quad (\text{since } l > 0), \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

on estime alors le terme $\int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma$ de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & \leq \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) [\nabla_{\Gamma} v(s) - \nabla_{\Gamma} v(t) + \nabla_{\Gamma} v(t)] ds d\Gamma \\
 & \leq \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) [\nabla_{\Gamma} v(s) - \nabla_{\Gamma} v(t)] ds d\Gamma \\
 & \leq \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\sigma + \zeta_1 \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & + \frac{1}{4\zeta_1} \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \left[\int_{\Gamma_1} \int_0^t L_{\alpha}(t-s) [\nabla_{\Gamma} v(s) - \nabla_{\Gamma} v(t)]^2 ds d\Gamma \right] \\
 & \leq \left(\zeta_1 + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{4\zeta_1} \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \Psi(t)
 \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

où $\zeta_1 > 0$ est une constante positive.

Par conséquent,

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \leq \left(\zeta_1 + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{4\zeta_1} \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \Psi(t) \tag{6.2.15}$$

A partir de (6.2.12) et (6.2.15) on déduit de (6.2.9) que

$$\begin{aligned}
 V(t) \geq & e(t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} (c_p + c_e) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
 & - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \left(2\eta\zeta_1 + 3\eta \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & + \eta \left(1 - \frac{\bar{l}_{\alpha}}{2\alpha\zeta_1} \right) \Psi(t).
 \end{aligned}$$

En utilisant la définition (6.2.4) de $e(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
 V(t) \geq & \frac{1-\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (1 - \varepsilon (c_p + c_e)) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} F(u) dx \\
 & + \frac{1-\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma + (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 & + \left[\frac{1}{2} (1 - \bar{h}) - 2\eta\zeta_1 - 3\eta \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & + \eta \left(1 - \frac{\bar{l}_{\alpha}}{2\alpha\zeta_1} \right) \Psi(t) + \int_{\Gamma_1} G(v) d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

Il est clair qu'en choisissant $\zeta_1 = \bar{l}_{\alpha}/\alpha$, $\eta < \frac{\alpha(1-\bar{h})}{10\bar{l}_{\alpha}}$, $\varepsilon < \min \{1, 1/(c_p + c_e)\}$, on déduit que

$$V(t) \geq \xi_1 E(t) + \frac{1}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t)$$

où $\xi_1 > 0$ une constante positive .

D'autre part, en tenant compte de (6.2.12) et (6.2.15) (en prenant $\zeta_1 = 1/2$) dans (6.2.9), on obtient

$$\begin{aligned} V(t) \leq & \frac{1+\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (1 + \varepsilon (c_p + c_e)) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} F(u) dx \\ & + \frac{1+\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma + \left[1 + \bar{h} + \eta + 3\eta \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) + \eta \left(1 + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \Psi(t) + \int_{\Gamma_1} G(v) d\Gamma. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$V(t) \leq \xi_2 [E(t) + \Psi(t) + (h * \nabla_{\Gamma} v)(t)].$$

où $\xi_2 > 0$ une constante positive .

Ceci achève la démonstration. ■

On introduit maintenant une nouvelle fonctionnelle $W(t)$ en posant

$$W(t) = V(t) + \lambda \Gamma(t) + \mu \Theta(t), \quad (6.2.17)$$

où

$$\Gamma(t) = \int_{\Gamma_1} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma, \quad (6.2.18)$$

$$H_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds, \quad (6.2.19)$$

avec

$$\Theta(t) = \int_t^{\infty} e^{-\alpha(t-s)} \left[\int_{\Omega} |u_t(s)|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |v_t(s)|^2 d\Gamma \right] ds, \quad (6.2.20)$$

Lemme 6.2.2 *Supposons que (u, v) est la solution régulière donnée par le Théorème 5.2.1. Alors, il existe des constantes positives ε_0 , η_0 , ξ_3 et ξ_4 telles que*

$$\xi_3 E(t) + \frac{1}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) \leq W(t) \leq \xi_4 [E(t) + \Psi(t) + (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) + \Gamma(t) + \Theta(t)]. \quad (6.2.21)$$

où $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $0 < \eta < \eta_0$.

Preuve : A partir du lemme 6.2.1 on voit que

$$V(t) + \lambda \Gamma(t) + \mu \Theta(t) \leq \xi_2 [E(t) + \Psi(t) + (h * \nabla_{\Gamma} v)(t)] + \lambda \Gamma(t) + \mu \Theta(t).$$

ceci implique que

$$W(t) \leq \xi_4 [E(t) + \Psi(t) + (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) + \Gamma(t) + \Theta(t)].$$

où $\xi_4 > 0$ est une constante positive.

Pour l'autre inégalité, on prend

$$\begin{aligned} V(t) + \lambda \Gamma(t) + \mu \Theta(t) &\geq \xi_1 E(t) + \frac{1}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) + \lambda \Gamma(t) + \mu \Theta(t) \\ &\geq \xi_1 E(t) + \frac{1}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t). \end{aligned}$$

ceci donne

$$W(t) \geq \xi_1 E(t) + \frac{1}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t),$$

où $\xi_1 > 0$ est une constante positive.

Ceci achève la preuve. ■

Théorème 6.2.1 *Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) sont vérifiées. Alors l'énergie du problème (6.2.1) décroît vers zéro exponentiellement ; c'est-à-dire, ils existe les constantes positives C et $\beta > 0$ telles que*

$$E(t) \leq C e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Preuve : Une dérivation de $\Gamma(t)$, $\Theta(t)$, et $\Psi(t)$ donne

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = -\alpha \Gamma(t) - \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma + \overline{h_{\alpha}} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma; \quad (6.2.22)$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \alpha \Theta(t); \quad (6.2.23)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt}(t) &= -\alpha \Psi(t) - (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) + 2 \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \cdot \nabla_{\Gamma} v_t(t) d\Gamma \\ &\quad - 2 \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v_t(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma. \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

On observe que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v_t(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 = & \frac{d}{dt} \left[\int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \right] \\
 & - L_{\alpha}(0) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & + \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

En utilisant (6.2.24) et (6.2.25) on voit que

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[\Psi(t) - \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \right. \\
 & \left. + 2 \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \right] \\
 = & -\alpha \Psi(t) - (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) + 2L_{\alpha}(0) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - L_{\alpha}(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - 2\alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - 2 \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{6.2.26}$$

Maintenant une dérivation de $V(t)$ (voir (6.2.9)) par rapport au temps donne

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(t)}{dt} = & -\frac{1}{2} h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} (h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 & + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\
 & - \epsilon \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma - \eta L_{\alpha}(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - \eta (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \alpha \eta \Psi(t) + 2\eta L_{\alpha}(0) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - 2\eta \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma,
 \end{aligned} \tag{6.2.27}$$

Tenant compte de (6.2.5), (??) et de (6.2.22)- (6.2.27), on obtient à partir de (6.2.17)

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt}(t) &= \frac{dV}{dt}(t) + \lambda \frac{d\Gamma}{dt}(t) + \mu \frac{d\Theta}{dt}(t) \\
 &= -\frac{1}{2}h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}(h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 &\quad + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\
 &\quad - (\varepsilon - 2\eta L_{\alpha}(0) - \eta L_{\alpha}(t)) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 &\quad + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma - \eta(l * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 &\quad - \alpha \eta \Psi(t) - 2\eta \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 &\quad - 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 &\quad - \alpha \lambda \Gamma(t) - \lambda \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\
 &\quad - \mu \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \mu \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \alpha \mu \Theta(t) + \lambda \bar{h}_{\alpha} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{6.2.28}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \frac{dW(t)}{dt} &\leq -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (\mu - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\
 &\quad - (\varepsilon - 2\eta L_{\alpha}(0) - \eta L_{\alpha}(t) - \lambda \bar{h}_{\alpha}) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 &\quad + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 &\quad + \frac{1}{2}(h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \alpha \eta \Psi(t) - \alpha \lambda \Gamma(t) - \alpha \mu \Theta(t) \\
 &\quad - \eta(l * \nabla_{\Gamma} v)(t) - 2\eta \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 &\quad - 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 &\quad - \lambda \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{6.2.29}$$

On note qu'à partir de (6.2.3) et (6.2.8) on a $L_{\alpha}(0) = \int_0^{\infty} l(s) \exp(\alpha s) ds = \bar{l}_{\alpha}$.

D'autre part, en utilisons l'estimation (6.2.6) et des estimations similaires dans le membre de droite de la relation (6.2.29), c'est à dire

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds dt &\leq \left(\delta_2 + \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 &\quad + \frac{\bar{h}}{4\delta_2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) (h * \nabla_{\Gamma} v)(t);
 \end{aligned} \tag{6.2.30}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds dt &\leq \left(\delta_1 + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 &\quad + \frac{1}{4\delta_1} \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \Psi(t);
 \end{aligned} \tag{6.2.31}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds dt &\leq \left(\delta_3 + \int_0^t l(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{4\delta_3} \left(\int_0^t l(s) ds \right) (l * \nabla_{\Gamma} v)(t); \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

où δ_1 , δ_2 , et δ_3 sont des constantes positives.

L'insertion de (6.2.8)-(??) dans (6.2.29), donne .

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &\leq -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (\mu - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \quad (6.2.33) \\ &\quad - [\varepsilon - \lambda \bar{h}_{\alpha} - \varepsilon (\delta_2 + \bar{h}) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_{\alpha} - 2\eta\delta_3] \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} (h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \alpha\eta \left(1 - \frac{1}{2\delta_1} \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \Psi(t) \\ &\quad - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) \\ &\quad - \eta \left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3} \right) (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\ &\quad - \left[\lambda - \frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2} \right] \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma. \end{aligned}$$

Ici on as employé le fait que $\bar{l} = \int_0^{+\infty} l(s) ds \leq \int_0^{+\infty} l(s) e^{\alpha s} ds = \bar{l}_{\alpha}$.

Comme $h'(t) = l(t) - \gamma h(t)$, on déduire de (6.2.33) que

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &\leq -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (\mu - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\ &\quad - [\varepsilon - \lambda \bar{h}_{\alpha} - \varepsilon (\delta_2 + \bar{h}) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_{\alpha} - 2\eta\delta_3] \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\ &\quad - \alpha\eta \left(1 - \frac{1}{2\delta_1} \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \Psi(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \left[\eta \left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3} \right) - \frac{1}{2} \right] (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\ &\quad - \left[\lambda - \frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2} \right] \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma. \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
 \frac{dW(t)}{dt} \leq & -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (\mu - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \quad (6.2.34) \\
 & - [\varepsilon - \lambda \bar{h}_{\alpha} - \varepsilon (\delta_2 + \bar{h}) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_{\alpha} - 2\eta\delta_3] \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \alpha\eta \left(1 - \frac{1}{2\delta_1} \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha}\right) \Psi(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) \\
 & - \frac{\gamma}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \left[\eta \left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3}\right) - \frac{1}{2} \right] (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 & - \left[\lambda - \frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2} \right] \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Finalement, en choisissant $\delta_1 = \bar{l}_{\alpha}/\alpha$, $\delta_2 = (1 + 3\bar{h})/2$, $\delta_3 = \bar{l}$ et $\eta = 1$, on obtient de (6.2.34) que

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt}(t) \leq & -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (\mu - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \quad (6.2.35) \\
 & - \left[\frac{\varepsilon}{2} (1 - \bar{h}) - \lambda \bar{h}_{\alpha} - 8\bar{l}_{\alpha} - 2\bar{l} \right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) - \frac{\alpha}{2} \Psi(t) + \frac{\gamma}{2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 & - \left[\lambda - \frac{\varepsilon\bar{h}}{2(1 + 3\bar{h})} \right] \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Ajoutons et retranchons $\gamma(h * \nabla_{\Gamma} v)(t)$ au membre de droite de (6.2.35), ensuite utilisant la majoration

$$\begin{aligned}
 (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) &= \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(t) - \nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\
 &\leq 2 \int_0^t h(s) ds \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 d\Gamma \\
 &\quad + 2 \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\
 &\leq 2 \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds + 2 \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{dW(t)}{dt} \leq & -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (\mu - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\
 & - \left[\frac{\varepsilon}{2} (1 - \bar{h}) - \lambda \bar{h}_{\alpha} - 8\bar{l}_{\alpha} - 2\bar{l} - 2\gamma \right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \alpha \lambda \Gamma(t) - \alpha \mu \Theta(t) - \frac{\alpha}{2} \Psi(t) - \frac{1}{2} \gamma (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 & - \left[\lambda - \frac{\varepsilon \bar{h}}{2(1 + 3\bar{h})} - 2\gamma \right] \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma,
 \end{aligned}$$

En choisissant

$$\begin{aligned}
 \mu &= 1, \\
 0 &< \varepsilon < 1, \\
 \frac{\varepsilon \bar{h}}{2(1 + 3\bar{h})} &< \lambda < \frac{\varepsilon(1 - \bar{h})}{2\bar{h}_{\alpha}}, \\
 4\bar{l}_{\alpha} + \bar{l} &< \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon(1 - \bar{h})}{2} - \lambda \bar{h}_{\alpha} \right],
 \end{aligned}$$

de plus, on prenant γ assez petit de sorte que les coefficients entre parenthèses soient positifs. Par conséquent, il existe une constante positive $C_1 > 0$ telle que

$$\frac{dW}{dt}(t) \leq -C_1 [E(t) + \Psi(t) + (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) + \Gamma(t) + \Theta(t)]$$

De l'inégalité droite dans le lemme (6.2.2) on trouve

$$\frac{dW}{dt}(t) \leq \frac{-C_1}{\xi_4} W(t) = -\beta W(t).$$

Il est clair que $W(0) = V(0) > 0$. D'où

$$W(t) \leq W(0)e^{-\beta t}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

A partir du Lemme (6.2.2), on a

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\xi_3} e^{-\beta t}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

L'autre inégalité du lemme (6.2.2) donne

$$E(t) \leq C e^{-\beta t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

avec

$$C = \frac{W(0)}{\xi_3}.$$

Ceci achève la preuve.. ■

6.2.2 Le problème avec feedback naturel:

Dans cette partie on consider le cas $a = 1, b = 1$. C'est à dire on étudie le problème (3.0.1) avec le feedback frontière v_t .

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + f_1(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma v + f_2(v) + v_t + \int_0^t h(t-s) \Delta_\Gamma v(s) ds = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (6.2.1)$$

Dans cette partie on traite le problème avec un terme mémoire et un feedback frontière . On montre également le terme mémoire et le feedback sont assez forts pour conduire le système au repos d'une façon exponentielle. On a le résultat principal suivant:

Théorème 6.2.2 *Supposons que les hypothèses (A1) – (A3) sont vérifiées. Alors l'énergie de (6.2.1) décroît exponentiellement vers zéro, c.-à-d., il existe des constantes positives C and $\beta > 0$ telles que*

$$E(t) \leq C e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Preuve : De la même manière que (6.2.5), avec $a = 0$), on a

$$\frac{de(t)}{dt} = - \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_\Gamma v|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} (h' * \nabla_\Gamma v)(t); \quad (6.2.2)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1} |\nabla_\Gamma v|^2 d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \nabla_\Gamma v \int_0^t h(t-s) \nabla_\Gamma v(s) ds d\Gamma; . \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Par conséquent, à partir de (6.2.26), (6.2.2) et (6.2.3) on voit que

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(t)}{dt} = & - \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} (h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 & + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \varepsilon \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - \eta (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \alpha \eta \Psi(t) + 2\eta L_{\alpha}(0) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \eta L_{\alpha}(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma - 2\eta \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma,
 \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Maintenant substituons (6.2.22), (6.2.23) et (6.2.4) dans la dérivée de $W(t)$ (voir (6.2.17)) on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt}(t) = & \frac{dV(t)}{dt} + \lambda \frac{d\Gamma(t)}{dt} + \mu \frac{d\Theta(t)}{dt} \\
 = & - \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} (h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 & + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \varepsilon \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - \eta (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \alpha \eta \Psi(t) + 2\eta L_{\alpha}(0) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \eta L_{\alpha}(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma - 2\eta \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - \alpha \lambda \Gamma(t) - \lambda \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma + \lambda \overline{h_{\alpha}} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \mu \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \mu \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \alpha \mu \Theta(t).
 \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt}(t) \leq & -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (1 + \mu - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \quad (6.2.6) \\
 & - (\varepsilon - 2\eta L_{\alpha}(0) + \eta L_{\alpha}(t) - \lambda \overline{h_{\alpha}}) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma \\
 & + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - 2\eta \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - \lambda \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\
 & - \eta(l * \nabla_{\Gamma} v)(t) + \frac{1}{2}(h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \alpha \eta \Psi(t) - \alpha \lambda \Gamma(t) - \alpha \mu \Theta(t).
 \end{aligned}$$

D'après (6.2.6) on a

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt}(t) \leq & -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (\mu + 1 - \varepsilon) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \quad (6.2.7) \\
 & - (\varepsilon - 2\eta L_{\alpha}(0) + \eta L_{\alpha}(t) - \lambda \overline{h_{\alpha}}) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & + \frac{1}{2}(h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \alpha \eta \Psi(t) - \alpha \lambda \Gamma(t) - \alpha \mu \Theta(t) \\
 & - \lambda \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\
 & + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - 2\eta \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\
 & - \eta(l * \nabla_{\Gamma} v)(t) - 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma.
 \end{aligned}$$

On utilise les mêmes estimations

$$\varepsilon \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma \leq \frac{\varepsilon}{4\nu} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma + \varepsilon \nu c_e \int_{\Omega} |\nabla u| dx; \quad (6.2.8)$$

où c_e est la constante d'injection de $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) [\nabla_{\Gamma} v(s) - \nabla_{\Gamma} v(t) + \nabla_{\Gamma} v(t)] ds d\Gamma \\ &\leq \left(\zeta_1 + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{1}{4\zeta_1} \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \Psi(t), \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma \leq \zeta_2 \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma + \frac{\bar{h}}{4\zeta_2} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t), \quad (6.2.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} v(t) \int_0^t l(t-s) \nabla_{\Gamma} v(s) ds d\Gamma &\leq \left(\zeta_3 + \int_0^t l(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\ &\quad + \frac{\bar{l}}{4\zeta_3} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t), \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

pour $\zeta_1 > 0$, $\zeta_2 > 0$, $\zeta_3 > 0$ et $\nu > 0$ sont des constantes positives qui seront déterminé plus tard. ■

D'après ces estimation et les relations (6.2.9)-(6.2.11), on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &\leq -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon(1 - \nu c_e) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - \left(\mu + 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{1}{4\nu} \right) \right) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\ &\quad - \left(\frac{\varepsilon}{2} - \lambda \bar{h}_{\alpha} - 10\eta \bar{l}_{\alpha} \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\ &\quad - \left(\lambda - \frac{\varepsilon \bar{h}}{2} \right) \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\ &\quad - \eta (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) + \frac{1}{2} (h' * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\ &\quad - \frac{\alpha \eta}{2} \Psi(t) - \alpha \lambda \Gamma(t) - \alpha \mu \Theta(t). \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Ajoutons et retranchant $\gamma(h * \nabla_{\Gamma} v)(t)$ au membre de droite de (6.2.12), et en employant l'estimation

$$\begin{aligned} (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) &= \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(t) - \nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\ &\leq 2 \int_0^t h(s) ds \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 d\Gamma \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma \\ &\leq 2 \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma, \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

prenant $\nu = 1/2c_e$ dans (6.2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt}(t) \leq & -(\mu - \varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
 & - \left(\mu + 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{c_e}{2} \right) \right) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma \\
 & - \left(\frac{\varepsilon}{2} - \lambda \bar{h}_{\alpha} - 10\eta \bar{l}_{\alpha} - 2\gamma \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} v|^2 d\Gamma \\
 & - \frac{\alpha\eta}{2} \Psi(t) - \alpha\lambda \Gamma(t) - \alpha\mu \Theta(t) - \gamma(h * \nabla_{\Gamma} v)(t) \\
 & - \frac{\eta}{2} (l * \nabla_{\Gamma} v)(t) - \left[\lambda - \frac{\varepsilon \bar{h}}{2} - 2\gamma \right] \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_{\Gamma} v(s)|^2 ds d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

où

$$\begin{aligned}
 0 & < \varepsilon < \min\{1, 2/(1 + c_e/2)\} \\
 \frac{\varepsilon \bar{h}}{2} & < \lambda < \frac{\varepsilon}{2\bar{h}_{\alpha}}, \\
 0 & < \eta < \frac{\varepsilon - 2\lambda \bar{h}_{\alpha}}{20\bar{l}_{\alpha}}, \\
 \mu & = 1.
 \end{aligned}$$

Pour finire en choisissant γ assez petit de sorte que les coefficients entre parenthèses soient positifs. Par conséquent, il existe une constante positive $C_2 > 0$ telle que

$$\frac{dW}{dt}(t) \leq -C_2 [E(t) + \Psi(t) + (h * \nabla_{\Gamma} v)(t) + \Gamma(t) + \Theta(t)]$$

D'après l'inégalité droite dans le Lemme 6.2.2, on trouve

$$\frac{dW}{dt}(t) \leq \frac{-C_2}{\xi_4} W(t) = -\beta W(t).$$

Il est clair que, $W(0) = V(0) > 0$. Par conséquent

$$W(t) \leq W(0)e^{-\beta t}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

A partir du Lemme 6.2.2, on a

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\xi_3} e^{-\beta t}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

L'autre inégalité dans le lemme 6.2.2 donne

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

où $C = \frac{W(0)}{\xi_3}$.

•

Chapitre 7

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence, l'unicité et la décroissance exponentielle de l'énergie associée à un problème viscoélastique.

- Le terme mémoire est présents sur une partie de la frontière du domaine Ω ,
- La fonction de relaxation utilisée est positive et oscillante,
- Les conditions aux limites sont évolutives sur une partie du bord,
- Dans la 1^{er} partie on a montrer que le feedback naturel n'assure pas une dissipation suffisante de l'énergie pour permettre sa décroissance exponentielle,
- Dans la 2^{eme} partie on a montrer que l'énergie du système décroît exponentiellement vers zéro, pour vu que le noyau h du terme mémoire soit positive et décroît vers zéro en oscillant.

Perspectives

Il serait souhaitable d'étudier

1. Le même problème avec des semi linéarités à l'intérieur du domaine et sur le bord avec des noyaux fortement définis positifs.
2. le problème des plaques viscoélastiques combiné avec l'équation de la chaleur avec des noyaux fortement définis positifs.
3. le problème de Petrovsky avec des noyaux fortement définis positifs.
4. le problème thermoélastique avec des noyaux fortement définis positifs.

Bibliographie

- [ALA] F. Alabau-Boussouira, Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, *Appl. Math. Optim.* 51(1), (2005), 61-105.
- [BLR1] Bardos C, Lebeau G, Rauch J. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1992, 30(5):1024–1065.
- [BLR2] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, Control and stabilisation de l'équation des ondes, Appendix II in J. L. Lions *contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, Collection RMA, Vol. 8, Masson, Paris, 1988.
- [LOH] R. Bey, A. Heminna and J. P. Lohéac, Boundary stabilization of the linear elastodynamic system by a Lyapunov -type method, *Revista Matemática Complutense* 16(2), (2003), 417-441.
- [CA0] M. M. Cavalcanti, M. Aassila and J. A. Soriano, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, *SIAM J. Control Opt.*, 38 (5) (2000), 1581-1602.
- [CA1] M. M. Cavalcanti, A. Khemmoudj and M. Medjden, Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients and dynamic boundary condition, *J. Math. Anal. Appl*, Volume 328, Issue 2, p. p. 900-930., 2007

- [CA2] M. M. Cavalcanti and H. P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. *SIAM J. Control Optim.* 42 (2003), no. 4, 1310–1324.
- [CA3] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and I. Lasiecka, Well posedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction, *Journal of Differential Equations*, 236, (2007), 407-459.
- [DEH] Dehman B, Lebeau G, Zuazua E. Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation[J]. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Série 4*, 2003, 36(4):525–551.
- [DOC] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [ENG] H. Engler, Weak solutions of a class of quasilinear hyperbolic integrodifferential equations describing viscoelastic materials, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 113 (1991), 1-38.
- [FAB] M. Fabrizio and A. Morro, "Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity", *SIAM Stud. Appl. Math.*, Philadelphia 1992.
- [GER] Gerard P. Oscillation and concentration effects in semilinear dispersive wave equation[J]. *J Funct Anal*, 1996, 41(1):60–98.
- [HAM] Hamadache Salima, Stabilisation exponentielle de l'équation des ondes avec des conditions au bord de type Ventcel, Thèse de Majister, USTHB, alger, (2006).
- [HAN] K. B. Hannsgen and R. L. Wheeler, Behavior of the solutions of a Volterra equation as a parameter tends to infinity, *J. Integral Eqs.*, 7 (1984), 229-237.

- [HE1] A. Hemmina, Stabilization frontière de problèmes de Ventcel. (Boundary stabilization of Ventcel problems), ESAIM, Control Optim. Calc. Var. 5, (2000), 591-622.
- [HE2] A. Hemmina, Exact controllability of the linear elasticity system with evolutive Ventcel conditions , Port. Math. 58(3), (2001), 271-315.
- [HRU] W. J. Hrusa, Global existence and asymptotic stability for a nonlinear hyperbolic Volterra equation with large initial data, SIAM J. Math. Anal., 16 (1985), 110-134.
- [HR1] W. J. Hrusa and M. Renardy, On wave propagation in linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math., 43 (1985), 237-254. J. Math. Anal., 16 (1985), 110-134.
- [HR2] W. J. Hrusa and M. Renardy, On wave propagation in linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math., 43 (1985), 237-254.
- [HR3] W. J. Hrusa and M. Renardy, On a class of quasilinear partial integrodifferential equations with singular kernels, J. Diff. Eqs., 64 (1986), 195-220.
- [HR4] W. J. Hrusa and M. Renardy, A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 257-269.
- [KEL] Properties of elliptic boundary value problems, in Mathematical Foundations of the finite Elements Methods. Academic Press, New York (1972), Chapter 3.
- [KH1] A. Khemmoudj, Decay estimates for semilinear Cauchy-Ventcel problem, Publication de l'institut de Mathématiques, U.S.T.H.B., 1994.

- [KH2] A. Khemmoudj and M. Medjden, Exponential Decay for the Semi-linear Damped Cauchy-Ventcel Problem, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 22(2)(2004), 97-116.
- [LE1] K. Lemrabet, Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier, *CRAS Paris*, t.300, Série I, n° 15, 1985, 531-534.
- [LE2] K. Lemrabet, Etude de divers Problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, Thèse, USTHB, Alger, (1987).
- [LE3] K. Lemrabet et D. E. Teniou, Controlabilité exacte pour l'équation des ondes avec conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel, Publication de l'institut de Mathématiques, U.S.T.H.B
- [LE4] K. Lemrabet and D. E. Teniou, Un problème d'évolution de type Ventcel. (an evolution problem of Ventcel type), *Rev. Maghréb. Math.* 1(1), (1992), 15-29.
- [LA-TA] I. Lasiecka and D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semi-linear wave equation with nonlinear boundary damping, *Differential and integral Equations*, 6 (1993), 507-533.
- [LA-TRI] I. Lasiecka and R. Triggiani, Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions, *Appl. Math. Optim.*, 25 (1992), 189-124
- [L-T-Y1] I. Lasiecka, R. Triggiani, and P. F. Yao, Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Application* 30 (1) (1997), 111-122. *Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysts.*

- [L-T-Y2] I. Lasiecka, R. Triggiani, and P. F. Yao, Inverse/Observability Estimates for Second-Ordre Hyperbolic Equations with Variable Coefficients. *J. Math. Anal. Appl.* 235 (1999), no. 1, 13-57.
- [LI1] J. L. Lions, *Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, tome 1, Masson, 1988.
- [LI2] J. L. Lions, *Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, tome 2, Masson, 1988.
- [LI3] Lions J L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires[M]. Paris: Dunod, 1969 (in French).
- [LI4] [7] Lions J L. Controlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués[M]. Tome 1, in: *RMA, Vol 8*, Paris: Masson, 1988 (in French).
- [LIU] K. Liu, Localy distributed control and damping for conservative systems. *SIAM J. Control and Optimization* 35(5) (1997), 1574-1590.
- [LON] S. O. Londen, An existence result for a Volterra equation in a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 235 (1978), 285-304.
- [MAR] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping. *Rev. Mat. Complutense* 12(1) (1999), 251-283.
- [MIL] J. Milota, J. Nečas and V. Šverák, On weak solutions to a viscoelasticity model, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 31 No 3 (1990), 557-565.
- [NA1] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation. *Math. Ann.*, 305 (1996), 403-417.

-
- [NA2] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with local degenerate dissipation. *Israel J. of Maths.* 95 (1996), 25-42.
- [PAT] V. Pata and A. Zucchi, Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 11 (2001) 505-529.
- [PRU] J. Prüss, "Evolutionary Integral Equations and Applications", Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [RAO] B. Rao, Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control, *SIAM J. Control Optim.*, 36, (1998), pp. 148-163.
- [RAU] [4] Rauch J, Taylor M. Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains[J]. *Indiana University Mathematical Journal*, 1974, 24(1):79–86.
- [RE1] M. Renardy, Some remarks on the propagation and non-propagation of discontinuities in linearly viscoelastic liquids, *Rheol. Acta*, 21 (1982), 251-254.
- [RE2] M. Renardy, Coercive estimates and existence of solutions for a model of one-dimensional viscoelasticity with a nonintegrable memory function, *J. Integral Eqs. Appl.*, 1 (1988), 7-16.
- [RE3] M. Renardy, W. J. Hrusa and J. A. Nohel, "Mathematical Problems in Viscoelasticity", in *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics* No. 35, John Wiley and Sons, New York 1987.
- [SH-YU] Shugen Chai and Yuxia Guo, Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory, *Diff. and Integral Equations*, Volume 17, Num. 5-6, June 2004, pp. 669-680.
- [SIM] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, *Ann. Mat. Pura Appli.* (4) CXLVI (1987), 65-96.

- [TAT] N. E. Tatar, M. Medjden, Asymptotic behavior for viscoelastic problem with not necessarily decreasing kernel, *Applied Mathematics and Computation*, 167 (2005) 1221-1235.
- [TIE] Q. Tieu, Asymptotic behavior of a class of abstract integrodifferential equations and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 233 (1999), 130-147.
- [YAO] P. F. Yao, On the observability inequality for exact controllability of wave equations with variable coefficients, *SIAM J. Contro. Optim.*, 37 (1999), 1568-1599.
- [YOU] Y. You, Energy decay and exact controllability for Petrovsky equation in a bounded domain, *Advances in Appl. Math.*, 11 (1990), 372-388.
- [ZUA1] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, *Commun. Partial Differential Equations* 15(2), (1990), 205-235.
- [ZUA2] [5] Zuazua E. Exact controllability for the semilinear wave equation[J]. *J Math Pures Appl*, 1990, 69(1):33–55.

UNIVERSITÉ DES SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



Résumé du mémoire de magister en Mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles

Sujet

**STABILISATION DE L'EQUATION DES ONDES
SEMI LINÉAIRE
AVEC DES TERMES MEMOIRES**

Présenté par:

:

ZAATER Wahiba

Résumé : L'objectif de ce mémoire est l'étude de la stabilisation exponentielle de l'équation des ondes semi linéaire et avec des conditions au bord de type Ventcel et des termes mémoires.

Notre travail est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité, la régularité des solutions et à la stabilisation exponentielle de l'équation des ondes semi linéaire où le noyau h est considéré comme un noyau positif et oscillant.

Mots clefs : Equation des ondes, Stabilisation, Conditions de type Ventcel, Terme mémoire.