

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
Faculté de Mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT D'ÉTAT
EN: MATHÉMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par

Madame BENFERHAT – CHERCHEM LEÏLA

VARIATIONS SUR LA MESURE DE MAHLER DE POLYNÔMES DE DEUX VARIABLES

Soutenue publiquement le 19 Décembre 2010 devant le jury composé de :

Mr Kamel BETINA	Professeur à l'USTHB	Président
Mr Benali BENZAGHOU	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
Mme Marie José BERTIN	Professeur à l'Université Paris 06	Co-Directrice de thèse
Mme Odile LECACHEUX	Professeur à l'Université Paris 06	Examinatrice
Mr Nouressadat TOUAFEK	Maître de conférences Université de Jijel	Examineur

Table des matières

Introduction	1
1 Mesure de Mahler et expression intégrale des séries L de Dirichlet	19
1.1 Introduction	19
1.2 Rappels et notations	20
1.2.1 Mesure de Mahler, fonction hypergéométrique et série L de Dirichlet	20
1.2.2 Equations différentielles de Picard-Fuchs	23
1.3 Théorèmes et preuves	31
2 Etude des sept surfaces elliptiques de Boyd et leur classification	65
2.1 Introduction.	65
2.2 Rappels	65
2.2.1 Courbes elliptiques	66
2.2.2 Surfaces elliptiques rationnelles	68
2.2.3 Ramification	74
2.2.4 $SL_2(\mathbb{Z})$, $PSL_2(\mathbb{Z})$, sous groupes de congruence et courbes modulaires	74
2.2.5 Surfaces elliptiques modulaires	77
2.3 Etude des sept familles de Boyd	78
2.4 Etude de la modularité des surfaces de Boyd	86
3 Monodromie d'une surface elliptique	93
3.1 Introduction	93

3.2	Rappels et notations	94
3.2.1	Monodromie d'une équation différentielle	95
3.2.2	Monodromie d'une surface elliptique	97
3.2.3	Sous-groupes de congruence.	100
3.3	Exemples	102
4	Mesure de Mahler et series d'Eisenstein -Kronecker	107
4.1	Introduction.	107
4.2	Rappels et notations	107
4.2.1	Séries d'Eisenstein, polylogarithmes	107
4.2.2	Formes modulaires	112
4.3	Mesure de Mahler des polynômes P_k de la famille (2.3) et séries d'Eisenstein-Kronecker	113
5	Identités entre mesures de Mahler	127
5.1	Introduction	127
5.2	Rappels et notations	127
5.2.1	Le groupe $K_2(E)$	128
5.2.2	Polygone de Newton	129
5.2.3	Le régulateur elliptique	130
5.2.4	Le dilogarithme elliptique	132
5.3	Théorème principal	134
6	Annexe	137
6.1	Introduction	137
6.2	Rappels	137
6.2.1	Equivalence des quartiques et des cubiques	139
6.3	Remarque	141

Introduction

La mesure de Mahler d'un polynôme de plusieurs variables a été introduite en 1962 par Mahler pour donner une preuve simple de l'inégalité de Gel'fond-Mahler mesurant la taille des facteurs d'un polynôme.

Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ un polynôme de Laurent en n variables. Sa mesure de Mahler logarithmique est, par définition,

$$m(P) := \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \frac{1}{x_1}, \dots, x_n, \frac{1}{x_n})| \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n},$$

où

$$\mathbb{T}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; |x_1| = \dots = |x_n| = 1\},$$

le tore de dimension n et sa mesure de Mahler

$$M(P) = \exp(m(P))$$

est la moyenne géométrique de $|P|$ sur \mathbb{T}^n .

Si $n = 1$ et $P = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_d \neq 0$,

$$m(P) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log |P(x)| \frac{dx}{x}.$$

Si P est unitaire, en appliquant la formule de Jensen à $m(P)$, on trouve

$$M(P) = \prod_{P(\alpha)=0} \max(|\alpha|, 1) := \Delta(P).$$

$\Delta(P)$ est la quantité considérée par Lehmer (1933) dans son fameux article [19], où il pose sa célèbre question :

existe-t-il des polynômes P unitaires et irréductibles, cyclotomiques, vérifiant

$$\Delta(P) < 1.1762\dots?$$

où $1.1762\dots$ est l'unique racine > 1 du polynôme réciproque de Lehmer de degré 10

$$X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1.$$

La mesure de Mahler a un lien avec le problème de Lehmer grâce à un remarquable résultat de Boyd (1981) [5], à savoir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M(P(x, x^n)) = M(P(x, y)), \quad P \in \mathbb{Z}[x, y]$$

lorsqu'on a effectivement une suite infinie de mesures distinctes.

A cette époque les plus petites mesures connues étaient

$$\begin{aligned} m((x+1)y^2 + (x^2+x+1)y + x(x+1)) &= 1,25542\dots, \\ m(y^2 + (x^2+x+1)y + x^2) &= 1,28573\dots \end{aligned}$$

Une vingtaine d'années plus tard, la mesure de Mahler de polynômes de deux variables suscita un nouveau regain d'intérêt grâce à une conjecture de Deninger [36]

$$m\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + 1\right) = L'(E, 0) = \frac{15}{4\pi^2} L(\chi, 2)$$

où $L(E, s)$ est la fonction L associée à la courbe E de conducteur 15 et d'équa-

tion affine $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + 1 = 0$.

La mesure de Mahler logarithmique de certains polynômes de plusieurs variables peut s'exprimer soit à l'aide de polylogarithmes, voir par exemple [11], [47], [23], soit à l'aide de valeurs spéciales de fonctions L [17], [4], [18], via les conjectures de Beilinson. C'est Deninger [46] qui conjectura le premier ce lien. Puis Boyd et Rodriguez-Villegas ont expérimenté de nombreux exemples et proposé des conjectures.

Dans un article, Berndt et Zaharescu [2] donnent une preuve de la formule originale de Ramanujan reliant un quotient de fonctions éta à la valeur d'une série de Dirichlet pour $s = 2$. Un autre article [1] donne des exemples de ce type. Soit $0 < q < 1$, alors

$$q^{\frac{1}{9}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{\chi_{-3}(n)n} = \exp(-C_3 - \frac{1}{9} \int_q^1 \frac{f^9(-t)}{f^3(-t^3)} \frac{dt}{t})$$

avec

$$C_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2) = L'(\chi_{-3}, -1) := d_3.$$

L'intégrande est essentiellement une série d'Eisenstein de poids 3 pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(3)$.

Dans des articles récents sur la mesure de Mahler, des formules de ce type sont obtenues par différentes méthodes. Dans Bertin [3], la mesure de Mahler est obtenue par intégration entre q et 1 de la forme modulaire $L(q) + 8L(q^2)$ de niveau 6, où $L(q) = \sum_{n \geq 1} (\sum_{d|n} \chi(d)d^2)q^n$. Dans [24], on trouve la formule

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 (K - \frac{\pi}{2}) \frac{dk}{k} = \log 2 - d_4,$$

où

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$d_4 := \frac{4^{3/2}}{4\pi} L(\chi_{-4}, 2) = L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{2G}{\pi},$$

et G est la constante de Catalan

$$G = L(\chi_{-4}, 2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Enfin, La mesure de Mahler intervient également en théorie ergodique car, d'après un théorème de Lind, Schmidt et Ward (1990), $m(P(x_1, \dots, x_n))$ mesure l'entropie d'une certaine \mathbb{Z} -action sur le tore $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}^n}$.

Rappelons la terminologie de Boyd pour caractériser les formules que peuvent vérifier les mesures de Mahler de polynômes de deux variables. Soit P un polynôme de deux variables, on dit que $m(P)$ vérifie une formule du type C , D ou E s'il existe un nombre rationnel r et un entier algébrique c tels que $m(P) = r \log |c|$, $m(P) = rL'(\chi_{-f}, -1)$ ou $m(P) = rL'(E, 0)$ respectivement, avec L' dérivée de la série L de Dirichlet ou dérivée de la série L associée à la jacobienne E de la courbe $P(x, y) = 0$. Boyd a considéré les familles de polynômes de la forme : $P_k(x, y) = A(x)y^2 + B_k(x)y + C(x)$, où $B_k(x)$ dépend linéairement du paramètre k et a conjecturé que $m(P_k)$ vérifie une formule du type E ou D si et seulement si P_k vérifie les conditions (A) et (G) suivantes :

La condition (A) : Toutes les faces de P_k sont de mesure logarithmique nulle.

La condition (G) :

1. Pour tout x de module égal à un, P_k admet exactement un zéro $y_1(x)$ de module strictement supérieur à 1.
2. Le discriminant $D(x) = B_k(x)^2 - 4A(x)C(x)$ admet exactement deux zéros de module inférieur à 1.

Pour tester sa conjecture, Boyd a utilisé les sept familles de courbes de genre 1 définies par des polynômes réciproques [4] comme suit, nous utiliserons ses notations

- (1.3) $y^2 + y(x^2 + lx + 1) + x^2 = 0$
- (2.3) $y^2(x + 1) + y(x^2 + lx + 1) + x^2 + x = 0$
- (3.1) $y^2(x^2 + x + 1) + lyx + x^2 + x + 1 = 0$
- (3.3) $y^2(x^2 + x + 1) + y(x^2 + (l + 1)x + 1) + x^2 + x + 1 = 0$
- (3s.1) $y^2(x + 1)^2 + lyx + (x + 1)^2 = 0$
- (3s.3) $y^2(x + 1)^2 + y(x^2 + (l + 2)x + 1) + (x + 1)^2 = 0$
- (3s.3s) $y^2(x + 1)^2 + y(2x^2 + (l + 4)x + 2) + (x + 1)^2 = 0$

Cette thèse est composée de 6 chapitres.

Dans le chapitre 1, en utilisant la mesure de Mahler et à l'aide des familles de Boyd on prouvera la conjecture de Boyd suivante

$$m(-16) = m(y^2(x + 1)^2 + y(2x^2 - 12x + 2) + (x + 1)^2) = \frac{8G}{\pi},$$

et on établira plusieurs formules semblables aux précédentes :

$$L'(\chi_{-8}, -1) = 2 \log(\sqrt{2} + 1) + \log 2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2 - k^2}} dk,$$

$$L'(\chi_{-8}, -1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{u^2 + 1}{2}}\right) du,$$

$$L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{3}{4\pi} \int_0^1 K\left(\frac{u^2 + 3}{4}\right) du,$$

$$L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{3}{4} \log(3) - \frac{3}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4 - 3k^2}} dk,$$

$$L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} \int_0^1 K\left(\frac{3t^2 + 1}{4}\right) dt,$$

$$10L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{-12}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 3\log(2 + \sqrt{3}).$$

En calculant la dérivée de la mesure de Mahler de ces polynômes, on montrera également qu'on peut obtenir certaines solutions explicites, au voisinage des singularités, de l'équation différentielle de Picard-Fuchs de la famille.

Ces résultats ont fait l'objet des trois publications [12], [13] et [14].

On démontrera donc les résultats suivants concernant les familles (3s.3s), (3.1), (3s.1) et (3s.3). Les familles modulaires (1.3) et (2.3) ont été étudiées de manière globale par Villegas et Bertin.

On utilisera la notation $m(P_l) = m(l)$.

Théorème 0.1 *Considérons la famille (3s.3s)*

$$P_l(x, y) = x^2(y + 1)^2 + x(2y^2 + (l + 4)y + 2) + (y + 1)^2.$$

1. Si l est un réel, $l < -16$,

$$m'(l) = \frac{2}{\pi l} K \left(\sqrt{\frac{-16}{l}} \right)$$

est une solution de l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à la famille $P_l(x, y)$ au voisinage de $-\infty$ et

$$m(l) = -\frac{4}{\pi} \int_0^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k} dk - 2\log l + m(-16)$$

$$\text{où } k = \sqrt{\frac{-16}{l}}.$$

2.

$$m(-16) = m(y^2(x + 1)^2 + y(2x^2 - 12x + 2) + (x + 1)^2) = \frac{8G}{\pi}, \quad (1)$$

où

$$G = L(\chi_{-4}, 2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots,$$

désigne la constante de Catalan.

3. Si l est un réel, $-16 < l < 0$,

$$m'(l) = \frac{1}{\pi\sqrt{2l}} K \left(\sqrt{\frac{-l}{16}} \right).$$

L'égalité (1) avait été conjecturée expérimentalement par Boyd [6] et, à un facteur rationnel près, pouvait se déduire des conjectures de Vandervelde [23].

Théorème 0.2 *Considérons la famille (3.1)*

$$P_l(x, y) = y^2(x^2 + x + 1) + lxy + x^2 + x + 1.$$

1. Si l est un réel, $l > 6$,

$$m'(l) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{k}{\sqrt{(k^2 + 1) + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}} K,$$

où

$$k = \frac{8l}{l^2 + 12 + \sqrt{144 - 40l^2 + l^4}}$$

est une solution au voisinage de $+\infty$ de l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à la famille $P_l(x, y) = 0$ et

$$m(l) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^k \left(K - \frac{\pi}{2} \right) h(k) dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^k \left(h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k} \right) dk - \log k + m(6).$$

avec

$$h(k) = \sqrt{\frac{(k^2 + 1) + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^4 - k^2 + 1}} \left(\frac{k^2 - 1}{k} \right).$$

$$2. m(6) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 (K - \frac{\pi}{2})h(k)dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k})dk + \log 4,$$

3. Si l est un réel, $0 < l < 2$,

$$m'(l) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{k}{\sqrt{(1+k^2) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}} K,$$

où

$$k = \frac{8l}{l^2 + 12 + \sqrt{144 - 40l^2 + l^4}}$$

et

$$h(k) = \sqrt{\frac{(k^2 + 1) + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^4 - k^2 + 1}} \left(\frac{k^2 - 1}{k}\right).$$

4.

$$m(2) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K \sqrt{\frac{(k^2 + 1) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^4 - k^2 + 1}} \frac{1 - k^2}{k} dk.$$

Corollaire 0.3 D'après Boyd [6], les valeurs explicites de $m(6)$ et $m(2)$ étant à 50 décimales près

$$6m(6) \stackrel{?}{=} L'(\chi_{-24}, -1)$$

$$3m(2) \stackrel{?}{=} L'(\chi_{-8}, -1),$$

on a

$$L'(\chi_{-24}, -1) \stackrel{?}{=} 6 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 (K - \frac{\pi}{2})h(k)dk + \frac{6}{\sqrt{2}} \int_0^1 (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k})dk + 6 \log 4$$

$$L'(\chi_{-8}, -1) \stackrel{?}{=} \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K \sqrt{\frac{(k^2 + 1) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^4 - k^2 + 1}} \frac{1 - k^2}{k} dk,$$

où le signe $\stackrel{?}{=}$ signifie que le résultat n'est pas prouvé mais seulement vérifié par l'ordinateur à 50 décimales près.

Théorème 0.4 *Considérons la famille (3s.1)*

$$P_l(x, y) = y^2(x + 1)^2 + 2lxy + (x + 1)^2.$$

1. *Si l est un réel, $l > 4$,*

$$m'(l) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l(l+4)}} K \left(\sqrt{\frac{8}{l+4}} \right)$$

est une solution de l'équation différentielle associée à la famille (3s.1) au voisinage de $+\infty$.

$$2. m(l) = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk - \log \left(\frac{\sqrt{l+4} - \sqrt{l}}{\sqrt{l+4} + \sqrt{l}} \right) + \log 2, \text{ où } k = \sqrt{\frac{8}{l+4}}.$$

$$3. m(4) = 2 \log(\sqrt{2} + 1) + \log 2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk.$$

4. *Si l est un réel, $0 < l < 4$,*

$$m'(l) = \frac{1}{2\sqrt{2l}} F \left(\frac{l+4}{8} \right).$$

5.

$$m(4) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K \left(\sqrt{\frac{u^2+1}{2}} \right) du.$$

Corollaire 0.5

$$L'(\chi_{-8}, -1) = 2 \log(\sqrt{2} + 1) + \log 2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk,$$

et

$$L'(\chi_{-8}, -1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{u^2+1}{2}}\right) du.$$

Théorème 0.6 *Considérons la famille (3s.3).*

1. *Si l est un réel, $l > 4$,*

$$m'(l) = \frac{2}{\pi\sqrt{l^2 + 12l}} K\left(\frac{16}{l + 12}\right)$$

est une solution de l'équation différentielle associée à la famille (3s.3) au voisinage de $+\infty$ et

$$m(l) = -\frac{8}{\pi} \int_0^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4 - 3k^2}} dk + \log 3 + 2 \log \left(\frac{6}{\sqrt{3}(\sqrt{l + 12} + \sqrt{l})} \right)$$

2.

$$m(4) = 2 \log(3) - \frac{8}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4 - 3k^2}} dk.$$

3. *Si l est un réel, $l < -12$,*

$$m'(l) = -\frac{2}{\pi\sqrt{l^2 - 4l}} K\left(\frac{16}{4 - l}\right)$$

est une solution de l'équation différentielle associée à la famille (3s.3) au voisinage de $-\infty$ et

$$m(l) = -\frac{8}{\pi} \int_k^1 \frac{K(k^2) - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4 - k^2}} dk + 2 \log \frac{\sqrt{4 - l} + \sqrt{-l}}{2}$$

4.

$$m(-12) = \frac{-8}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4 - k^2}} dk + 2 \log(2 + \sqrt{3}).$$

5. Si l est un réel, $0 < l < 4$,

$$m'(l) = \frac{1}{2\pi\sqrt{l}} K\left(\frac{l+12}{16}\right).$$

6.

$$m(4) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 K\left(\frac{u^2+3}{4}\right) du.$$

7. Si l est un réel, $-12 < l < 0$,

$$m'(l) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-l}} K\left(\frac{4-l}{16}\right).$$

8.

$$m(-12) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \int_0^1 K\left(\frac{3t^2+1}{4}\right) dt.$$

Corollaire 0.7

$$L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{3}{4\pi} \int_0^1 K\left(\frac{u^2+3}{4}\right) du.$$

$$L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{3}{4} \log(3) - \frac{3}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk.$$

$$L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} \int_0^1 K\left(\frac{3t^2+1}{4}\right) dt.$$

$$10L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{-12}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 3\log(2 + \sqrt{3}).$$

Dans le chapitre 2 de cette thèse, on étudiera d'une part les sept surfaces elliptiques rationnelles définies par Boyd en explicitant pour chacune d'elles une forme de Weierstrass, le discriminant, la fonction J , la torsion, les fibres singulières et l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à chacune des surfaces ainsi que le schéma de Riemann. D'autre part, on montrera que les

familles (1.3), (2.3) et (3s.3s) sont modulaires et que les familles (3s.1), (3s.3), (3.3) et (3.1) ne le sont pas.

On a les résultats suivants

Pour la famille **(3.1)** :

$$Z_t : (x^2 + x + 1)y^2 + txy + x^2 + x + 1 = 0,$$

$$Y^2 = X^3 + 16(t^2 - 12)^2X - 64(t^2 + 12)(t^4 - 48t^2 + 144),$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4096t^4(t-6)(t-2)(t+2)(t+6), \\ J(t) &= \frac{(t^2-12)^6}{t^4(t^2-36)(t^2-4)}, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} I_4 & I_4 & I_1 & I_1 & I_1 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & \infty & 2 & -2 & 6 & -6 \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^6 - 100t^4 + 1296t^2 - 1728}{t(t^2 - 36)(t^2 - 4)(t^2 - 12)} + y \frac{288 - 20t^2 + t^4}{(t^2 - 4)(t^2 - 36)(t^2 - 12)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -6 & 6 & 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille **(1.3)** :

$$Z_t : y^2 + (x^2 + tx + 1)y + x^2 = 0,$$

$$Y^2 = X^3 + (256 - 256t^2 + 16t^4)X - 64(t^2 - 8)(t^4 - 16t^2 - 8),$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4096t^2(t^2 - 16), \\ J(t) &= \frac{(16 - 16t^2 + t^4)^3}{t^2(t^2 - 16)}, \\ &\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} I_2 & I_1 & I_1 & I_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & 4 & -4 & \infty \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^2 - 16}{t(t^2 - 16)} + y \frac{1}{t(t^2 - 16)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille (2.3) :

$$Z_t : (x + 1)y^2 + (x^2 + tx + 1)y + x^2 + x = 0.$$

$$Y^2 = X^3 + (16t(t^3 - 24t + 48)X - 64(t^4 - 24t^2 + 72t - 72))$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4096(t - 6)(t + 3)^2(t + 2)^3, \\ J(t) &= \frac{t^3(t^3 - 24t - 48)^3}{(t - 6)(t + 3)^2(t + 2)^3}, \\ &\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} I_1 & I_2 & I_3 & I_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 6 & -3 & -2 & \infty \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^2 + 2t - 24}{(t - 3)(t - 2)(t + 6)} + y \frac{t}{(t - 3)(t - 2)(t + 6)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille **(3.3)** :

$$Z_k : (x^2 + x + 1)y^2 + (x^2 + (t + 1)x + 1)y + x^2 + x + 1 = 0.$$

$$Y^2 = X^3 + (16t^4 + 64t^3 - 416t^2 + 576t + 1296)X + -64(t^2 + 2t + 9)(t^4 + 4t^3 - 50t^2 + 36t + 81)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4096t^4(t + 9)(t + 1)(t - 3)^2, \\ J(t) &= \frac{(81 + 36t - 26t^2 + 4t^3 + t^4)^3}{t^4(t + 9)(t + 1)(t - 3)^2}, \\ &\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} I_4 & I_4 & I_2 & I_1 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & \infty & 3 & -1 & -9 \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^4 + 26t^4 + 42t^2 - 126t - 81}{t(t + 9)(t + 1)(t - 3)(t + 3)} + y \frac{t^3 + 7t^2 + 21t - 9}{t(t + 9)(t + 3)(t - 3)(t + 1)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -3 & -9 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille **(3s.1)** :

$$Z_k : (x + 1)^2 y^2 + txy + (x + 1)^2 = 0,$$

$$Y^2 = X^3 + 16t^2(t^2 - 48)X - 64t^4(t^2 - 72),$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4096t^6(t^2 - 64), \\ J(t) &= \frac{(t^2 - 48)^3}{t^2 - 64}, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} I_0^* & I_4 & I_1 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & \infty & 8 & -8 \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^2 - 64}{t(t^2 - 64)} + y \frac{t^2 + 16}{t^2(t^2 - 64)^2} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 & \infty \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille **(3s.3)** :

$$Z_t : (x + 1)^2 y^2 + (x^2 + (t + 2)x + 1)y + (x + 1)^2 = 0,$$

$$Y^2 = X^3 + (16t^2(t^2 + 8t - 32)X - 64t^3(t + 4)(t^2 + 8t - 56)),$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4096t^6(t + 12)(t - 4), \\ J(t) &= \frac{(t^2 + 8t - 32)^3}{(t - 4)(t + 12)}, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} I_0^* & I_4 & I_1 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & \infty & 4 & -12 \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^2 + 16t - 48}{t(t - 4)(t + 12)} + y \frac{t^2 + 2t + 12}{t^2(t - 4)(t + 12)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & \infty \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille **(3s.3s)** :

$$Z_t : y^2(x+1)^2 + y(2x^2 + (t+4)x + 2) + (x+1)^2 = 0,$$

$$Y^2 = X^3 + (16t^2(t^2 + 16t + 16)X - 64t^3(t+8)(t^2 + 16t - 8)),$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4096t^7(t+16), \\ J(t) &= \frac{(t^2 + 16t + 16)^3}{t(t+16)}, \\ &\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} I_1^* & I_4 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \infty & -16 \end{array},$$

$$y'' + y' \frac{3t+32}{t(t+16)} + y \frac{t+4}{t^2(t+16)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -16 & \infty \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 0.8 *Les surfaces elliptiques (3s.1) et (3s.3) ayant de la 2-torsion ne sont pas modulaires.*

Théorème 0.9 *La surface (1.3) ayant de la 4-torsion et la surface (2.3) ayant de la 6-torsion sont modulaires.*

Théorème 0.10 *On a*

1. *La surface (3.3) est une réalisation du 5-uplet $[4, 4, 2, 1, 1]$. Elle est obtenue à partir de la réalisation modulaire de Beauville $[4, 4, 2, 2]$ ou bien $[8, 2, 1, 1]$ par une permutation de monodromie supplémentaire. Ceci a pour effet d'introduire une singularité apparente dans l'équation de Picard-Fuchs de la surface. La surface n'est pas modulaire.*

2. *La surface (3.1) est une réalisation du 6-uplet $[4, 4, 1, 1, 1, 1]$. Elle est obtenue à partir de la réalisation modulaire de Beauville $[4, 4, 2, 2]$ ou bien $[8, 2, 1, 1]$ par deux permutations de monodromie supplémentaires. Ceci a pour effet d'introduire deux singularités apparentes dans l'équation de Picard-Fuchs de la surface. La surface n'est pas modulaire.*

Dans le chapitre 3, on rappellera les définitions de monodromie d'une équation différentielle ordinaire et celle d'une surface elliptique ainsi que les 33 classes de conjugaison de sous groupes de congruence de genre zéro de $PSL_2(\mathbb{Z})$ [39]. Comme application nous calculerons le groupe de monodromie de la surface (3s.3s) et celui de la surface elliptique dont l'équation différentielle est l'équation hypergéométrique du quart de période.

Dans le chapitre 4, On obtiendra une belle formule en exprimant la mesure de Mahler des polynômes P_k de la famille (2.3) en fonction des séries d'Eisenstein-Kronecker. Nous établirons donc le résultat suivant :

Soit χ le caractère de Dirichlet χ_{-3} réel impair de conducteur 3 tel que

$$\begin{aligned}\chi_{-3}(n) &= 0 \text{ si } n \equiv 0(3), \\ \chi_{-3}(n) &= 1 \text{ si } n \equiv 1(3), \\ \chi_{-3}(n) &= -1 \text{ si } n \equiv 2(3).\end{aligned}$$

Soit \mathcal{F} un domaine fondamental du groupe de congruence $\Gamma_1(6)$ et K le domaine correspondant du plan complexe en bijection avec \mathcal{F} , défini par les k

vérifiant

$$\begin{aligned} \tau &\in \mathcal{F} \\ \frac{1}{3-k} &= t(\tau) \\ t(\tau) &= \frac{\eta(6\tau)^8 \eta(\tau)^4}{\eta(3\tau)^4 \eta(2\tau)^8} = q - 4q^2 + 10q^3 - 20q^4 + 39q^5 + \dots \quad (q = e^{2\pi i\tau}). \end{aligned}$$

Théorème 0.11 *Pour $k \in K$ et n'appartenant pas à l'ensemble des valeurs complexes pour lesquelles P_k s'annule sur le tore \mathbb{T}^2 , on a l'égalité :*

$$m(P_k) = \Re \left(-2i\pi\tau + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) \frac{e^{2i\pi n\tau}}{n} + 8 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) \frac{e^{4i\pi n\tau}}{2n} \right)$$

Théorème 0.12 *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, on a*

$$\begin{aligned} m(k) &= \Re \left(\frac{9\sqrt{3}\Im\tau}{4\pi^2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\chi(n)}{(3m\tau + n)^2 (3m\bar{\tau} + n)} \right) \\ &\quad + 8\Re \left(\frac{9\sqrt{3}\Im\tau}{4\pi^2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\chi(n)}{(6m\tau + n)^2 (6m\bar{\tau} + n)} \right). \end{aligned}$$

Dans le chapitre 5, on donnera le lien qui existe entre le régulateur elliptique et la mesure de Mahler et on établira une égalité de mesures de Mahler entre les deux surfaces elliptiques rationnelles de Boyd (1.3) et (3s.3s) comme suit

Théorème 0.13 *Pour $k \in \mathbb{R}$, on a la relation*

$$2m(y^2 + y(x^2 + kx + 1) + x^2) = m((X + 1)^2(Y + 1)^2 - k^2XY)$$

Ce résultat a fait l'objet d'une publication [14].

Enfin dans le chapitre 6, nous expliquerons les changements de variables utilisés dans le chapitre 1 pour obtenir les expressions intégrales.

Chapitre 1

Mesure de Mahler et expression intégrale des séries L de Dirichlet

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudierons la mesure de Mahler de quatre familles de polynômes de deux variables, réciproques, dépendant d'un paramètre l et définissant des courbes de genre un, sauf pour les valeurs "singulières" du paramètre l .

Les polynômes définissant ces familles sont des polynômes tempérés (i.e. les polynômes des faces de leurs polygones de Newton n'ont pour racines que des racines de l'unité). En outre, pour l assez grand, ils ne s'annulent pas sur le tore $\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} / |x| = |y| = 1\}$.

Ces familles ont été définies par Boyd [6] pour tester les conjectures reliant la mesure de Mahler d'un polynôme à la série L de la Jacobienne de la courbe de genre 1.

En calculant la dérivée de la mesure de Mahler de ces polynômes, on mon-

trera qu'on peut obtenir d'une part certaines solutions explicites, au voisinage des singularités, de l'équation différentielle de Picard-Fuchs de la famille et, d'autre part, exprimer certaines séries de Dirichlet $L(\chi, 2)$ comme intégrales de fonctions liées à la fonction hypergéométrique $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; z\right)$.

1.2 Rappels et notations

1.2.1 Mesure de Mahler, fonction hypergéométrique et série L de Dirichlet

Si P est un polynôme de Laurent en n variables, $P \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$, et si

$$\mathbb{T}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; |x_1| = \dots = |x_n| = 1\}$$

désigne le tore à n dimensions, on définit la mesure de Mahler logarithmique $m(P)$ par

$$m(P) := \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1})| \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n}$$

et la mesure de Mahler $M(P)$ par

$$M(P) := \exp(m(P)).$$

Formule de Jensen

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque unité vérifiant $f(0) \neq 0$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ désignent les zéros de $f(z)$ dans $\{z, |z| \leq 1\}$ comptés avec leurs multiplicités alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\exp(i\theta))| d\theta = \log |f(0)| - \sum_{j=1}^t \log |\alpha_j|.$$

1.2. RAPPELS ET NOTATIONS

Si $n = 1$ et $P(x) = a_0 \prod_{j=1}^d (x - \alpha_j)$, en appliquant la formule précédente, on obtient

$$\int_0^1 \log |P(\exp(2i\pi t))| dt = \log |a_0| + \log \prod_{j=1}^d \max(|\alpha_j|, 1),$$

i.e.

$$M(P) = |a_0| \prod_{j=1}^d \max(|\alpha_j|, 1).$$

Définition 1.1 *Un polynôme $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est dit réciproque si*

$$\frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)}$$

est un monôme de la forme $x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$.

Définition 1.2 *La fonction définie par*

$$F(a, b, c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)(1, n)} z^n, \quad (1.1)$$

où

$$(a, n) = a(a+1) \cdots (a+n-1)$$

et $c \neq 0, -1, -2, \dots$, est appelée fonction hypergéométrique.

Cette fonction est symétrique en a et b , i.e. $F(a, b, c; z) = F(b, a, c; z)$, elle est solution de l'équation différentielle de Gauss ou équation hypergéométrique

$$z(1-z)y'' + (c - (a+b+1)z)y' - aby = 0$$

La série 1.1 est absolument convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$. Pour $|z| = 1$, elle converge absolument si $\Re(c - a - b) > 0$.

Si $|z| < 1$ et $\Re(c) > 0$, $\Re(b) > 0$. Nous avons

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt,$$

où la fonction Γ est définie pour $\Re(z) > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Pour $|z| > 1$ la fonction $F(a, b; c; z)$ peut être définie par prolongement analytique.

Dans le cas où $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = 1$, on a la fonction hypergéométrique

$$F(z) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; z\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 z^2 + \dots$$

Elle vérifie

$$K(k) = \frac{\pi}{2} F(k^2),$$

où

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx,$$

K étant une période de la fonction elliptique de Jacobi.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur f , i.e) un homomorphisme de groupes $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ qui peut être prolongé en une application $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi(\bar{x}) & \text{si } (x, f) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1.3 la série L de Dirichlet associée à un caractère de Dirichlet χ

1.2. RAPPELS ET NOTATIONS

est définie par

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

$L(\chi, s)$ converge absolument pour $s > 1$.

On rappelle la relation, déduite de l'équation fonctionnelle de la série L de Dirichlet,

$$L'(\chi_{-f}, -1) = \frac{f^{3/2}}{4\pi} L(\chi_{-f}, 2)$$

où $\chi_{-f}(n) = \begin{pmatrix} -f \\ n \end{pmatrix}$ désigne le caractère de Dirichlet réel impair de conducteur f .

1.2.2 Equations différentielles de Picard-Fuchs

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations différentielles du second ordre

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \frac{du}{dx} + q(x) u = 0 \quad (1.2)$$

où p et q sont dans $\mathbb{C}(x)$.

Si $p(x)$ et $q(x)$ sont analytiques en $x = x_0$, alors x_0 est appelé point ordinaire de l'équation différentielle.

Définition 1.4 *Un point $x = x_0$ est appelé point singulier de l'équation 1.2 si p ou q a un pôle en x_0 . Le point à l'infini est appelé point singulier de 1.2 si après un changement de variable de x en $t = \frac{1}{x}$ l'équation obtenue*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left\{ \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right) \right\} \frac{du}{dx} + \frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right) u = 0$$

a une singularité en $t = 0$.

Définition 1.5 Si $x = x_0$ est un point singulier de 1.2 et $(x - x_0)p(x)$, $(x - x_0)^2q(x)$ sont analytiques en $x = x_0$, alors $x = x_0$ est appelé point singulier régulier. Si $x = x_0$ n'est ni un point singulier ni un point singulier régulier on dit que c'est un point singulier irrégulier.

Théorème 1.6 (Cauchy) Si $x = x_0$ est un point non singulier de l'équation 1.2, alors il existe deux solutions holomorphes linéairement indépendantes de 1.2 au voisinage de x_0 .

Définition 1.7 On dit qu'un point x_0 est une singularité apparente de 1.2 si x_0 est une singularité de 1.2 et si l'équation 1.2 admet deux solutions holomorphes linéairement indépendantes au voisinage de x_0 .

Soit $x_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. L'équation caractéristique de l'équation différentielle 1.2 en x_0 est donnée par

$$s(s-1) + p_0s + q_0 = 0, \quad (1.3)$$

où

$$p_0 = (x - x_0)p(x)|_{x=x_0} \text{ et } q_0 = (x - x_0)^2q(x)|_{x=x_0} \quad \text{si } x_0 \neq \infty,$$

et

$$p_0 = 2 - \frac{1}{t}p\left(\frac{1}{t}\right)\Big|_{t=0} \text{ et } q_0 = \frac{1}{t^2}q\left(\frac{1}{t}\right)\Big|_{t=0} \quad \text{si } x_0 = \infty .$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont appelées exposants locaux en x_0 de l'équation différentielle.

Définition 1.8 L'équation 1.2 est dite équation différentielle de Picard-Fuchs si toutes les singularités dans $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sont singulières régulières.

Le tableau des points singuliers et des exposants locaux est appelé schéma de

1.2. RAPPELS ET NOTATIONS

Riemann et est noté

$$\begin{pmatrix} x = x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} = \infty \\ s_1^{(1)} & \cdots & s_1^{(m)} & s_1^{(m+1)} \\ s_2^{(1)} & \cdots & s_2^{(m)} & s_2^{(m+1)} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.9 *La somme des exposants locaux de l'équation 1.2 dépend seulement du nombre de points singuliers*

$$\sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i=1}^2 s_i^{(j)} = m - 1,$$

cette relation est appelée relation de Fuchs.

1.2.2.1 Méthode de Frobenius [26].

Cette méthode nous donne localement les solutions de l'équation différentielle de Picard-Fuchs 1.2. Nous nous placerons au voisinage de 0.

Considérons l'opérateur différentiel L suivant

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + xp^*(x) \frac{d}{dx} + q^*(x),$$

où p^* et q^* sont des fonctions holomorphes au voisinage de 0 définies par les développements

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j \quad \text{et} \quad q^*(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j.$$

On pose

$$u = x^s \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

et

$$f(s) = s(s - 1) + sp_0 + q_0.$$

L'équation différentielle $L(u) = 0$ est équivalente aux relations

$$f(s + n)c_n + R_n = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

où

$$R_n = \sum_{i+j=n, i \neq n} \{(i + s)c_i p_j + c_i q_j\}, \quad n > 0 \text{ et } R_0 = 0,$$

s étant un paramètre et les coefficients $c_n = c_n(s)$ ($c_0 = 1$) sont déterminés par l'équation 1.4 pour $n = 1, 2, \dots$.

On pose

$$u(s, x) = x^s \sum_{i \geq 0} c_i(s) x^i.$$

Soient s_1 et s_2 les solutions de $f(s) = 0$, notées de sorte que $\Re(s_1) \leq \Re(s_2)$.

1. Si $s_2 - s_1 \neq 0, 1, 2, \dots$ ou si $s_2 - s_1 = m \neq 0$ et $R_m = 0$ alors la singularité est dite non logarithmique et les solutions sont données par

$$\begin{pmatrix} u(s_1, x) \\ u(s_2, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{s_1} & 0 \\ 0 & x^{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j \geq 0} c_j(s_1) x^j \\ \sum_{j \geq 0} c_j(s_2) x^j \end{pmatrix}.$$

2. Si $s_2 = s_1$, alors les solutions sont données par

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial}{\partial s} u(s, x) \right|_{s=s_2} \\ u(s_2, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{s_2} & x^{s_2} \log x \\ 0 & x^{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j \geq 0} c'_j(s_2) x^j \\ \sum_{j \geq 0} c_j(s_2) x^j \end{pmatrix}.$$

1.2. RAPPELS ET NOTATIONS

3. Si $s_2 - s_1 = m \neq 0$ et $R_m \neq 0$, alors les deux solutions sont données par

$$\begin{pmatrix} R_m u^* - f'(s_2) \frac{\partial}{\partial s} u(s, x) \Big|_{s=s_2} \\ u(s_2, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{s_1} & x^{s_1} \log x \\ 0 & x^{s_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_m \sum_{j \geq 0} c_j(s_1) x^j - f'(s_2) x^{s_2-s_1} \sum_{j \geq 0} c'_j(s_2) x^j \\ \sum_{j \geq 0} c_j(s_2) x^j \end{pmatrix},$$

où

$$u^* = x^{s_1} \sum_{j \geq 0} c_j(s_1) x^j,$$

et les $c'_j(s)$ pour $j < m$, sont déterminés par l'équation 1.4 avec $c_0 = 1$ et c_m est arbitrairement fixé; les $c'_j(s)$ pour $j > m$ sont également déterminés par l'équation 1.4.

1.2.2.2 Méthodes pour calculer l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à une famille de courbes elliptiques.

Pour plus de détails sur les courbes elliptiques voir le chapitre 2.

Etant donnée une famille de courbes elliptiques sous la forme de Weierstrass

$$E_t : y^2 = 4x^3 + b_2(t)x^2 + b_4(t)x + b_6(t), \quad b_i(t) \in \mathbb{C}(t).$$

Soit

$$w_t = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 + b_2(t)x^2 + b_4(t)x + b_6(t)}}$$

l'unique forme différentielle holomorphe sur E_t .

Une période est une fonction de la forme

$$I(t) = \int_{\gamma_t} w_t,$$

où $\gamma_t \in H_1(E_t, \mathbb{Z})$, le premier groupe d'homologie de E_t .

L'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à la famille est l'équation différentielle satisfaite par les périodes.

Il y a plusieurs méthodes pour déterminer l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à une famille de courbes elliptiques.

Première méthode. La première méthode consiste à utiliser le résultat suivant

Théorème 1.10 (Boughzala [10]) *Soit E_l une famille de courbes de genre 1 donnée par*

$$y^2 = A(l)x^4 + B(l)x^2 + C(l),$$

avec $A, B, C \in \mathbb{C}[l]$ tel que $AC \neq 0$. On suppose que $B^2 - 4AC \neq 0$.

Les périodes de la courbes E_l vérifient alors une équation différentielle

$$\Omega'' + P\Omega' + Q\Omega = 0,$$

où

$$P = \frac{(d_1 d_2 d_3)' d_2 - d_1 d_3 d_2'}{d_1 d_2 d_3}, \quad Q = \frac{2(d_1 d_3)'' d_2 - 2d_2' (d_1 d_3) - d_1' d_2' d_3'}{16d_1 d_2 d_3},$$

$$d_1 = B^2 - 4AC, \quad d_2 = ABC' - AB'C \quad \text{et} \quad d_3 = AC \quad \text{et} \quad ()' = \frac{d}{dt}().$$

Deuxième méthode. La deuxième méthode consiste à mettre la famille de courbes sous la forme de Weierstrass

$$y^2 = 4x^3 - g_2(l)x - g_3(l),$$

où

$$g_2(l) \in \mathbb{C}(l) \quad \text{et} \quad g_3(l) \in \mathbb{C}(l).$$

1.2. RAPPELS ET NOTATIONS

On définit λ et J par les formules

$$g_2 = \frac{27J-1}{J-1} \frac{1}{\lambda^4}$$

et

$$g_3 = \frac{27J-1}{J-1} \frac{1}{\lambda^6},$$

avec

$$\lambda^2 = \frac{g_2}{g_3}$$

et

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{g_2^3}{\Delta} \text{ où } \Delta = g_2^3 - 27g_3^2,$$

ensuite on applique le résultat de Stiller suivant

Théorème 1.11 (Stiller [43]) *Il existe une fonction algébrique λ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vérifiant $\lambda^2 \in \mathbb{C}(t)$ et $\lambda^2 = \frac{g_2}{g_3}$ telle que*

$$f''' + Pf' + Qf = 0,$$

où

$$P = \frac{\left(\frac{dJ}{dx}\right)^2 - J\left(\frac{d^2J}{dx^2}\right)}{J\left(\frac{dJ}{dx}\right)} - \frac{d}{dx} \ln \lambda^2$$

et

$$Q = \frac{\left(\frac{dJ}{dx}\right)^2 \left[\frac{31}{144}J - \frac{1}{36}\right]}{J^2(J-1)} - \left[\frac{\left(\frac{dJ}{dx}\right)^2 - J\left(\frac{d^2J}{dx^2}\right)}{J\left(\frac{dJ}{dx}\right)} \right] \frac{d}{dx} \times \ln \lambda$$

$$+ \left[\frac{-\frac{d^2\lambda}{dx^2}}{\lambda} \right] + 2 \left[\frac{\frac{d\lambda}{dx}}{\lambda} \right]^2.$$

Cette équation différentielle est appelée équation différentielle de Picard-Fuchs associée à la famille de courbes elliptiques.

Troisième méthode. La troisième méthode consiste à utiliser une approche de Griffiths [52].

Soit U le disque unité et soit une famille de courbes elliptiques au-dessus de U définie par

$$E_u : y^2 = 4x^3 - g_2(u)x - g_3(u)$$

où $g_2(u)$ et $g_3(u)$ sont holomorphes dans U avec $g_2^3(u) - 27g_3^2(u) \neq 0$. Soit $u_0 \in U$, la cohomologie $H^1(E_{u_0}, \mathbb{C})$ de la courbe E_{u_0} peut être identifiée au \mathbb{C} -espace vectoriel des différentielles de première et deuxième espèce sur E_{u_0} modulo les différentielles exactes. Cet espace admet comme base $\frac{dx}{y}$ et $\frac{xdx}{y}$.

Les deux périodes

$$f_1(u) = \int_{\gamma} \frac{dx}{y}, \quad f_2(u) = \int_{\gamma} \frac{xdx}{y}$$

sont solutions du système différentiel suivant

$$\frac{d}{du} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dD}{12} & \frac{3\delta}{2D} \\ \frac{-g_2\delta}{8D} & \frac{1}{12} \frac{du}{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

où

$$D = g_2^3(u) - 27g_3^2(u)$$

et

$$\delta = 3g_3(u) \frac{dg_2(u)}{du} - 2g_2(u) \frac{dg_3(u)}{du}.$$

1.3 Théorèmes et preuves

Dans ce qui suit, on utilisera la notation $m(P_l) = m(l)$.

Théorème 1.12 ([14]) *Considérons la famille (3s.3s)*

$$P_l(x, y) = x^2(y + 1)^2 + x(2y^2 + (l + 4)y + 2) + (y + 1)^2.$$

1. Si l est un réel, $l < -16$,

$$m'(l) = \frac{2}{\pi l} K \left(\sqrt{\frac{-16}{l}} \right)$$

est une solution de l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à la famille $P_l(x, y)$ au voisinage de $-\infty$ et

$$m(l) = -\frac{4}{\pi} \int_0^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k} dk - 2 \log l + m(-16)$$

$$\text{où } k = \sqrt{\frac{-16}{l}}.$$

2. On a

$$m(-16) = m(y^2(x + 1)^2 + y(2x^2 - 12x + 2) + (x + 1)^2) = \frac{8G}{\pi},$$

où

$$G = L(\chi_{-4}, 2) = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots,$$

désigne la constante de Catalan.

3. Si l est un réel, $-16 < l < 0$,

$$m'(l) = \frac{1}{\pi \sqrt{2l}} K \left(\sqrt{\frac{-l}{16}} \right).$$

Preuve : Soit

$$P_l(x, y) = x^2(y + 1)^2 + x(2y^2 + (l + 4)y + 2) + (y + 1)^2.$$

La mesure de Mahler de P_l est donnée par

$$m(l) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{T^2} \log |P_l(x, y)| \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

On a

$$m(l) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{T^2} \log |x^2(y + \frac{1}{y} + 2) + x(2(y + \frac{1}{y}) + (4 + l)) + (y + \frac{1}{y} + 2)| \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

On pose $y = e^{is}$, d'où

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(s) ds,$$

avec

$$f(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log |P_{l,s}(x)| \frac{dx}{x}$$

et

$$P_{l,s}(x) = x^2(2 \cos s + 2) + x(4 \cos s + 4 + l) + (2 \cos s + 2).$$

Le discriminant Δ de $P_{l,s}$ est égal à $l(l + 8 + 8 \cos s)$; par suite, en utilisant la formule de Jensen, on a

- si $\Delta > 0$,

$$f(s) = \log |(2 \cos s + 2) \max(|X_1|, |X_2|)|,$$

où X_1, X_2 sont les racines de $P_{l,s}(x)$.

- Si $\Delta \leq 0$,

$$f(s) = \log |2 \cos s + 2|.$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

1. Si $l < -16$, alors $\Delta > 0$, d'où

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| \frac{1}{2} \left(4 \cos s + 4 + l + \sqrt{\Delta} \right) \right| ds.$$

En dérivant par rapport à l , on obtient

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{ds}{\sqrt{l(l + 8 \cos s + 8)}}.$$

Posant $X = \cos \frac{s}{2}$, il vient

$$m'(l) = \frac{2}{\pi l} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-X^2} \sqrt{1 - \frac{-16}{l} X^2}} dX,$$

et si $k^2 = \frac{-16}{l}$ on obtient

$$m'(l) = \frac{2}{\pi l} K \left(\sqrt{\frac{-16}{l}} \right).$$

Soit l un nombre complexe et A l'ensemble des l pour lesquels $P_l(x, y)$ s'annule sur le tore $T^2 = \{(x, y), |x| = |y| = 1\}$.

Pour $l \notin A$, $\log P_l(x, y)$ est une fonction analytique de l et si l'on définit

$$\tilde{m}(P_l) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|x|=1} \int_{|y|=1} \log P_l(x, y) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y},$$

alors

$$m(P_l) = \Re(\tilde{m}(P_l))$$

et

$$\frac{d\tilde{m}(P_l)}{dl} = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{T^2} \frac{P'_l(x, y)}{P_l(x, y)} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

Pour la famille précédente, on obtient

$$\frac{d\tilde{m}(P_l)}{dl} = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{T^2} \frac{-2}{\left(xy + \frac{1}{xy}\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + 2\left(\frac{1}{x} + x\right) + 2\left(y + \frac{1}{y}\right) + (4+l)} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

D'après le théorème des résidus de Poincaré, $\frac{d\tilde{m}(P_l)}{dl}$ est une période de la courbe $P_l(x, y) = 0$.

On sait que les périodes des différentielles de première espèce sur la surface de Riemann compacte associée à la courbe $P_l(x, y) = 0$ vérifient une équation différentielle linéaire du second degré donnée par la connexion de Gauss-Manin et appelée équation de Picard-Fuchs

$$\Omega'' + P\Omega' + Q\Omega = 0,$$

où P et Q sont des fractions rationnelles en l .

On détermine l'équation vérifiée par $m'(l)$ en utilisant le théorème de Stiller ou en appliquant le théorème de Boughzala qui permet d'obtenir directement l'équation de Picard-Fuchs associée à une quartique réciproque sans passer par son modèle de Weierstrass.

On obtient donc pour la famille (3s.3s) l'équation différentielle

$$g'' + \frac{3l + 32}{l(l + 16)}g' + \frac{l + 4}{l^2(l + 16)}g = 0.$$

D'après la méthode de Frobenius [26], cette équation différentielle admet, au voisinage de l'infini, une solution logarithmique et une solution développable en série entière. On vérifie facilement que la famille de polynômes ne s'annule pas sur le tore pour $l < -16$. Comme $m'(l) =$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

$\frac{2}{\pi l} K \left(\sqrt{\frac{-16}{l}} \right)$ est développable en série entière au voisinage de l'infini

alors $m'(l) = \frac{2}{\pi l} K \left(\sqrt{\frac{-16}{l}} \right)$ est la solution régulière de l'équation différentielle au voisinage de $-\infty$.

Si $l < -16$ et en posant $k^2 = \frac{-16}{l}$, on a

$$m'(l) dl = \frac{-4}{\pi} \frac{K}{k} dk.$$

En intégrant entre l et -16

$$\int_l^{-16} m'(l) dl = -\frac{4}{\pi} \int_k^1 \frac{K}{k} dk = -\frac{4}{\pi} \int_k^1 \frac{K - \pi/2}{k} dk - 2 \int_k^1 \frac{1}{k} dk,$$

on obtient

$$m(-16) - m(l) = -\frac{4}{\pi} \int_k^1 \frac{K - \pi/2}{k} dk + 2 \log k.$$

Par conséquent

$$m(l) = -\frac{4}{\pi} \int_k^1 \frac{K - \pi/2}{k} dk + 2 \log k + m(-16).$$

2. Pour $l < -16$, $m(l) \sim \log(-l)$ et si $l \rightarrow -\infty$, on a

$$m(-16) = 4 \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k} dk + \log 2 \right].$$

Puisque, d'après [6], on a

$$\frac{2G}{\pi} = \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k} dk,$$

on obtient

$$m(-16) = \frac{8G}{\pi}.$$

On peut également intégrer entre -16 et 0 et utiliser l'égalité

$$\frac{4}{\pi} \int_0^1 K = \frac{8G}{\pi},$$

pour obtenir le résultat précédent.

3. Si $-16 < l < 0$, on pose $a = \arccos\left(\frac{-l-8}{8}\right)$; alors si $a < s < \pi$, $\Delta > 0$ et si $0 < s < a$, $\Delta < 0$. D'où

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a \log |2 \cos s + 2| ds + \int_a^\pi \log \left| \frac{1}{2} (4 \cos s + 4 + l + \sqrt{\Delta}) \right| ds \right].$$

En dérivant par rapport à l , on obtient

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_a^\pi \frac{ds}{\sqrt{l(l+8 \cos s+8)}}.$$

Posant $k^2 = \frac{l}{-16}$ et $X = \frac{1}{\cos \frac{s}{2}}$, alors

$$m'(l) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-l}} \int_\alpha^{+\infty} \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)}\sqrt{(1-k^2X^2)}},$$

où $\alpha = \sqrt{\frac{-16}{l}}$, donc

$$m'(l) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\sqrt{l}} K \left(\sqrt{\frac{l}{-16}} \right).$$

□

Théorème 1.13 *Considérons la famille (3.1)*

$$P_l(x, y) = y^2(x^2 + x + 1) + lxy + x^2 + x + 1.$$

1. *Si l est un réel, $l > 6$,*

$$m'(l) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{k}{\sqrt{(k^2 + 1) + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}} K,$$

où

$$k = \frac{8l}{l^2 + 12 + \sqrt{144 - 40l^2 + l^4}}$$

est une solution au voisinage de $+\infty$ de l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à la famille $P_l(x, y) = 0$ et

$$m(l) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^k (K - \frac{\pi}{2}) h(k) dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^k (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k}) dk - \log k + m(6).$$

avec

$$h(k) = \sqrt{\frac{(k^2 + 1) + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^4 - k^2 + 1}} \left(\frac{k^2 - 1}{k} \right).$$

2. $m(6) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 (K - \frac{\pi}{2}) h(k) dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k}) dk + \log 4,$

3. *Si l est un réel, $0 < l < 2$,*

$$m'(l) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{k}{\sqrt{(1 + k^2) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}} K,$$

où

$$k = \frac{8l}{l^2 + 12 + \sqrt{144 - 40l^2 + l^4}}$$

et

$$h(k) = \sqrt{\frac{(k^2 + 1) + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^4 - k^2 + 1}} \left(\frac{k^2 - 1}{k} \right).$$

4.

$$m(2) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K \sqrt{\frac{(k^2 + 1) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^4 - k^2 + 1}} \frac{1 - k^2}{k} dk.$$

Preuve : Soit

$$P_l(x, y) = x^2(y^2 + 1) + x(y^2 + ly + 1) + y^2 + 1.$$

Par définition,

$$m(l) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|y|=1} \int_{|x|=1} \log \left| \left(y + \frac{1}{y} \right) x^2 + \left(y + \frac{1}{y} + y \right) x + \left(y + \frac{1}{y} \right) \right| \frac{dx dy}{x y}.$$

Posant $y = e^{is}$, on obtient

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log |P_{l,s}(x)| \frac{dx}{x} \right) ds,$$

avec

$$f(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log |P_{l,s}(x)| \frac{dx}{x}$$

et

$$P_{l,s}(x) = (2 \cos s)x^2 + (2 \cos s + l)x + 2 \cos s.$$

Le discriminant de $P_{l,s}$ est $D_l(s) = (l - 2 \cos s)(l + 6 \cos s)$.

1. Si $l > 6$, $D_l(s) > 0$ et $P_{l,s}(x)$ admet deux racines

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-(2 \cos s + l) + \sqrt{D_l(s)}}{2(2 \cos s)}, \\ X_2 &= \frac{-(2 \cos s + l) - \sqrt{D_l(s)}}{2(2 \cos s)}, \end{aligned}$$

avec

$$|X_1| > 1 > |X_2|.$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

Par application de la formule de Jensen, il vient

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| \frac{-(2 \cos s + l) - \sqrt{D_l(s)}}{2} \right| ds.$$

D'où, en dérivant par rapport à l

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{(l - 2 \cos s)(l + 6 \cos s)}} ds.$$

En posant $\cos s = t$, on obtient

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t - 1)(t + 1)(2t - l)(6t + l)}}.$$

Etant donnée la courbe définie par

$$y^2 = (t - 1)(t + 1)(2t - l)(6t + l).$$

On va exprimer m' en fonction des formes canoniques des intégrales elliptiques. On applique donc au polynôme

$$Q = (t - 1)(t + 1)(2t - l)(6t + l),$$

une transformation homographique pour le mettre sous la forme standard de Jacobi

$$Y^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2),$$

où k est convenablement choisi.

Si e_1, e_2, e_3 et e_4 sont les zéros de Q et si s_1, s_2, s_3 et s_4 ceux de $(1 - X^2)(1 - k^2 X^2)$, on doit déterminer une homographie notée $g = \left[\frac{ab}{cd} \right]$ qui envoie les s_i sur les e_i et puisque le birapport est invariant par l'homographie,

on aura

$$\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_2 - e_3)(e_4 - e_1)} = \frac{(s_1 - s_2)(s_3 - s_4)}{(s_2 - s_3)(s_4 - s_1)}.$$

On peut donc déterminer la valeur de k en fonction de l .

Selon le choix des images respectives des e_i dans l'ensemble $\{1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\}$ des s_i , il existe 6 birapports et pour chaque birapport 4 homographies possibles.

Pour choisir l'homographie, on doit donc fixer les s_i sachant qu'ils valent $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ et que le module de Jacobi k doit être compris entre 0 et 1. Le choix des s_i dépend des valeurs de l .

Soit donc

$$\begin{aligned} y^2 &= (t-1)(t+1)(2t-l)(6t+l) \\ &= 12(t-1)(t+1)\left(t - \frac{l}{2}\right)\left(t + \frac{l}{6}\right). \end{aligned}$$

On pose $t = \frac{aX+b}{cX+d}$ avec $ad-bc=1$; par suite

$$t - e_i = \frac{X - s_i}{(cX+d)(cs_i+d)},$$

d'où

$$y^2 = 12 \prod_{i=1}^4 (t - e_i) = 12 \frac{(1-X^2)(1-k^2X^2)}{(cX+d)^4(d^2-c^2)(d^2k^2-c^2)}.$$

On pose $y = \frac{y_1}{(cx+d)^2}$ et on a

$$y_1^2 = 12 \frac{(1-X^2)(1-k^2X^2)}{(d^2-c^2)(d^2k^2-c^2)},$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

d'où

$$m'(l) = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \int_{\frac{c-a}{d+b}}^{\frac{b-d}{a+c}} \frac{\sqrt{(d^2 - c^2)(d^2 k^2 - c^2)}}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - k^2 X^2)}} dX. \quad (1.5)$$

On pose $e_1 = 1, e_2 = -1, e_3 = \frac{l}{2}$ et $e_4 = -\frac{l}{6}, s_1 = 1, s_2 = -1, s_3 = \frac{1}{k}$ et $s_4 = -\frac{1}{k}$. En calculant les 6 birapports pour chacune des familles $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, on obtient

$r = \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_2 - e_3)(e_4 - e_1)} = \frac{16l}{(l+2)(l+6)} \in]0, 1[$	$r' = \frac{(s_1 - s_2)(s_3 - s_4)}{(s_2 - s_3)(s_4 - s_1)} = \frac{4k}{(k+1)^2} \in]0, 1[$
$r_1 = 1 - r = \frac{l^2 - 8l + 12}{(l+2)(l+6)} \in]0, 1[$	$r'_1 = 1 - r' = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \in]0, 1[$
$r_2 = \frac{1}{r_1} \in]1, +\infty[$	$r'_2 = \frac{1}{r'_1} \in]1, +\infty[$
$r_3 = 1 - r_2 = \frac{-16l}{l^2 - 8l + 12} \in]-\infty, 0[$	$r'_3 = 1 - r'_2 = \frac{-4k}{(k-1)^2} \in]-\infty, 0[$
$r_4 = \frac{1}{r_3} \in]-\infty, 0[$	$r'_4 = \frac{1}{r'_3} \in]-\infty, 1[$
$r_5 = 1 - r_4 = \frac{l^2 + 8l + 12}{16l} \in]1, +\infty[$	$r'_5 = 1 - r'_4 = \frac{(k+1)^2}{4k} \in]1, +\infty[$

On choisit $r_3 = r'_3$, d'où

$$l = \frac{2(k^2 + 1 + \sqrt{k^4 - k^2 + 1})}{k}$$

avec

$$k = \frac{l^2 + 12 - \sqrt{144 - 40l^2 + l^4}}{8l}.$$

En résolvant les équations

$$\frac{l}{2} = \frac{a\frac{1}{k} + b}{c\frac{1}{k} + d}; \quad -\frac{l}{2} = \frac{a(-\frac{1}{k}) + b}{c(-\frac{1}{k}) + d}; \quad -1 = \frac{-a + b}{-c + d}; \quad 1 = \frac{a + b}{c + d},$$

on a

$$\sqrt{(d^2 - c^2)(d^2k^2 - c^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(k^2 + 1) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}.$$

D'où, d'après 1.5

$$\begin{aligned} m'(l) &= \frac{1}{\pi\sqrt{6}} \sqrt{(k^2 + 1) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - k^2X^2)}} \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{6}} \sqrt{(k^2 + 1) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}} K. \end{aligned}$$

La courbe définie par $P_l(x, y) = 0$ est birationnellement équivalente à la courbe

$$Y^2 = A(l)X^4 + B(l)X^2 + C(l),$$

où

$$A(l) = l^2 + 4l - 12, B(l) = -2l^2 - 24, C(l) = l^2 - 4l - 12.$$

En effet, partant de $x^2(y^2 + 1) + x(y^2 + ly + 1) + y^2 + 1 = 0$, et complétant le carré, on obtient

$$Z^2 = (y^2 + ly + 1)^2 - 4(y^2 + 1)^2 = D_l(y)$$

avec

$$Z = 2x(y^2 + 1) + (y^2 + ly + 1).$$

Posant $y = \frac{X + 1}{X - 1}$ et $Y = (X - 1)^2 Z$, on obtient

$$Y^2 = A(l)X^4 + B(l)X^2 + C(l).$$

Donc d'après le théorème de Stiller, l'équation de Picard-Fuchs associée

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

à cette famille de polynômes est

$$g'' + \frac{3l^6 - 100l^4 + 1296l^2 - 1728}{l(l-6)(l-2)(l+2)(l+6)(l^2-12)}g' + \frac{288 - 20l^2 + l^4}{(l-6)(l-2)(l+2)(l+6)(l^2-12)}g = 0.$$

D'après la méthode de Frobenius, cette équation différentielle admet au voisinage de $+\infty$ deux solutions de la forme $lf_1(l)$ et $f_2(l)$, où $f_1(l)$ et $f_2(l)$ sont développables en séries entières au voisinage de $+\infty$. D'autre part

$$m'(l) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=1} \frac{dy}{Z},$$

avec $Z = 2x(y^2 + 1) + (y^2 + ly + 1)$.

D'où $m'(l)$ est une période de la courbe définie par la relation $Z^2 = D_l(y)$.

Comme $Z = 2x(y^2 + 1) + (y^2 + ly + 1)$ alors $x = \frac{Z - (y^2 + ly + 1)}{2(y^2 + 1)}$.

On a alors $\mathbb{C}(Z, y) = \mathbb{C}(x, y)$, donc $m'(l)$ est une période de la famille. Or $m'(l)$ est développable en série entière au voisinage de $+\infty$, c'est donc la solution régulière de l'équation différentielle associée à la famille (3.1).

On a

$$l = \frac{2}{k}(k^2 + 1 + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}) \quad \text{et} \quad k = \frac{l^2 + 12 - \sqrt{144 - 40l^2 + l^4}}{8l}$$

d'où

$$dl = \frac{2(k^2 + 1 + \sqrt{k^4 - k^2 + 1})(k^2 - 1)}{k^2 \sqrt{k^4 - k^2 + 1}} dk,$$

alors

$$m'(l)dl = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-X^2)(1-k^2X^2)}} h(k) dk$$

avec

$$h(k) = \sqrt{\frac{(k^2 + 1) + \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k^4 - k^2 + 1}} \frac{k^2 - 1}{k}.$$

En intégrant entre 6 et l on aura

$$\int_6^l m'(l) dl = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_6^k K h(k) dk.$$

Par suite

$$m(l) - m(6) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^k (K - \frac{\pi}{2}) h(k) dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^k (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k}) dk - \int_1^k \frac{1}{k} dk.$$

d'où

$$m(l) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^k (K - \frac{\pi}{2}) h(k) dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^k (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k}) dk - \log k + m(6).$$

2. D'après 1.,

$$m(l) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^k (K - \frac{\pi}{2}) h(k) dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^k (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k}) dk - \log k + m(6).$$

Comme $k = \frac{l^2 + 12 - \sqrt{144 - 40l^2 + l^4}}{8l}$ alors quand l tend vers l'infini, $\log k \sim \log 4 - \log l$ et $m(l) \sim \log l$.

On obtient donc, par passage à la limite

$$m(6) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 (K - \frac{\pi}{2}) h(k) dk + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k}) dk + \log 4.$$

3. Si $0 < l < 2$, on a

-Si $s \leq \arccos(\frac{l}{2})$ ou $s \geq \arccos(-\frac{l}{6})$ alors

$$D_l(s) = (l - 2 \cos s)(l + 6 \cos s) \leq 0.$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

Par conséquent

$$f(s) = \log |2 \cos s|.$$

-Si $s > \arccos(\frac{l}{2})$ ou $s < \arccos(-\frac{l}{6})$ alors $D_l(s) > 0$ et $P_{l,s}(x)$ admet deux racines

$$X_1 = \frac{-(2 \cos s + l) + \sqrt{D_l(s)}}{2(2 \cos s)}$$

et

$$X_2 = \frac{-(2 \cos s + l) - \sqrt{D_l(s)}}{2(2 \cos s)},$$

avec

$$|X_1| > 1 > |X_2|.$$

En posant $\alpha = \arccos(\frac{l}{2})$ et $\beta = \arccos(-\frac{l}{6})$ et par application de la formule de Jensen, il vient

$$\begin{aligned} m(l) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \log |2 \cos s| ds + \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} \log(-(2 \cos s + l) + \sqrt{D_l(s)}) ds \\ &\quad + \int_\beta^\pi \log |2 \cos s| ds. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à l , on a

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{(l - 2 \cos s)(l + 6 \cos s)}} ds.$$

Posant $X = 2 \cos s$, on obtient

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{l}{3}}^l \frac{1}{\sqrt{(X - 2)(X + 2)(X - l)(3X + l)}} dX.$$

Considérons la courbe définie par

$$Y^2 = (X - 2)(X + 2)(X - l)(3X + l).$$

Par la même méthode utilisée précédemment, on pose

$$e_1 = l, e_2 = -\frac{l}{3}, e_3 = 2, e_4 = -2$$

et

$$s_1 = 1, s_2 = -1, s_3 = \frac{1}{k}, s_4 = -\frac{1}{k}.$$

En gardant les mêmes notations et en calculant les birapports $r, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ et $r', r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, r'_5$, on choisira $r = r'$ et par conséquent

$$l = \frac{2(k^2 + 1 - \sqrt{k^4 - k^2 + 1})}{k},$$

avec

$$k = \frac{l^2 + 12 - \sqrt{144 - 40l^2 + l^4}}{8l}$$

et

$$(d^2 - c^2)(d^2 k^2 - c^2) = \frac{3}{8} \frac{k^2}{(1 + k^2) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}},$$

d'où

$$\begin{aligned} m'(l) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{k}{\sqrt{(1 + k^2) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - k^2 X^2)}} dk \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{k}{\sqrt{(1 + k^2) - \sqrt{k^4 - k^2 + 1}}} K. \end{aligned}$$

4. Pour $0 < l < 2$, on a d'après 3.

$$l = \frac{2(k^2 + 1 - \sqrt{k^4 - k^2 + 1})}{k} \quad \text{et} \quad dl = -2 \frac{(k^2 - 1)(k^2 + 1 - \sqrt{k^4 - k^2 + 1})}{k^2 \sqrt{k^4 - k^2 + 1}} dk,$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

d'où

$$\int_0^2 m'(l)dl = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{1-k^2}{k} \sqrt{\frac{(k^2+1) - \sqrt{k^4-k^2+1}}{k^4-k^2+1}} K dk.$$

Comme $m(0) = 0$, il vient

$$m(2) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{1-k^2}{k} \sqrt{\frac{(k^2+1) - \sqrt{k^4-k^2+1}}{k^4-k^2+1}} K dk.$$

□

D'après Boyd [6], les valeurs explicites de $m(6)$ et $m(2)$ étant à 50 décimales près

$$6m(6) \stackrel{?}{=} L'(\chi_{-24}, -1)$$

$$3m(2) \stackrel{?}{=} L'(\chi_{-8}, -1),$$

on en déduit que

Corollaire 1.14

$$L'(\chi_{-24}, -1) \stackrel{?}{=} 6 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 (K - \frac{\pi}{2}) h(k) dk + \frac{6}{\sqrt{2}} \int_0^1 (h(k) + \frac{\sqrt{2}}{k}) dk + 6 \log 4$$

et

$$L'(\chi_{-8}, -1) \stackrel{?}{=} \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K \sqrt{\frac{(k^2+1) - \sqrt{k^4-k^2+1}}{k^4-k^2+1}} \frac{1-k^2}{k} dk.$$

Où le signe $\stackrel{?}{=}$ signifie que le résultat n'est pas prouvé mais seulement vérifié par l'ordinateur à 50 décimales près.

Théorème 1.15 ([12]) *Considérons la famille (3s.1)*

$$P_l(x, y) = y^2(x+1)^2 + 2lxy + (x+1)^2.$$

1. Si l est un réel, $l > 4$,

$$m'(l) = \frac{1}{\sqrt{l(l+4)}} F\left(\frac{8}{l+4}\right)$$

est une solution de l'équation différentielle associée à la famille (3s.1) au voisinage de $+\infty$.

$$2. m(l) = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk - \log\left(\frac{\sqrt{l+4} - \sqrt{l}}{\sqrt{l+4} + \sqrt{l}}\right) + \log 2, \text{ où } k = \sqrt{\frac{8}{l+4}}.$$

$$3. m(4) = 2\log(\sqrt{2} + 1) + \log 2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk.$$

4. Si l est un réel, $0 < l < 4$,

$$m'(l) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{l}} F\left(\frac{l+4}{8}\right).$$

5. On a

$$m(4) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{u^2+1}{2}}\right) du.$$

Preuve : La courbe d'équation

$$y^2(x+1)^2 + 2lxy + (x+1)^2 = 0$$

est birationnellement équivalente à la courbe définie par

$$Y^2 = A(l)X^4 + B(l)X^2 + C(l),$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

où $A(l) = l^2 - 16$, $B(l) = -2l^2$ et $C(l) = l^2$.

L'équation différentielle de Picard-Fuchs associée est

$$g'' + \frac{3l^2 - 16}{(l-4)(l+4)l}g' + \frac{4 + l^2}{l^2(l-4)(l+4)}g = 0.$$

Au voisinage de l'infini, l'équation différentielle admet une solution logarithmique et une solution de la forme $Tf(T)$ avec $T = \frac{1}{l}$, $f(T)$ étant développable en série entière au voisinage de 0. On montre facilement que les polynômes P_l de la famille ne s'annulent pas sur le tore pour $l > 4$.

En calculant la mesure de Mahler logarithmique de P_l , on obtient

$$m(l) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|x|=1} \int_{|y|=1} \log \left| \left(y + \frac{1}{y}\right)x^2 + 2\left(y + l + \frac{1}{y}\right)x + y + \frac{1}{y} \right| \frac{dx dy}{x y}.$$

Posant $y = e^{is}$; on a

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(s) ds$$

avec

$$f(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log \left| (2 \cos s)x^2 + 2(2 \cos s + l)x + 2 \cos s \right| \frac{dx}{x}.$$

et

$$P_{l,s}(x) = (2 \cos s)x^2 + 2(2 \cos s + l)x + 2 \cos s.$$

Le discriminant Δ' de $P_{l,s}$ est égal à $l(4 \cos s + l)$.

1. Pour $l > 4$, $\Delta' > 0$ et par application de la formule de Jensen, il vient

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| (2 \cos s + l) + \sqrt{4l \cos s + l^2} \right| ds.$$

En dérivant par rapport à l , on a

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{l^2 + 4l \cos s}} ds.$$

Posant $X = \sin \frac{s}{2}$, on obtient

$$m'(l) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dX}{\sqrt{l(l+4)(1-X^2)(1-\frac{8}{l+4}X^2)}}$$

et si $k^2 = \frac{8}{l+4}$, il vient

$$m'(l) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l(l+4)}} K \left(\sqrt{\frac{8}{l+4}} \right) = \frac{1}{\sqrt{l(l+4)}} F \left(\frac{8}{l+4} \right).$$

On pose $\frac{1}{l} = T$ et on a $m'(l) = Tf(T)$ avec $f(T)$ développable en série entière au voisinage de 0.

D'où $m'(l)$ est la solution régulière au voisinage de $+\infty$ de l'équation différentielle associée à la famille (3s.1).

2. Comme $k^2 = \frac{8}{l+4}$ on a $dl = -\frac{16}{k^3} dk$. D'après 1.,

$$m'(l)dl = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{k\sqrt{2-k^2}} K dk.$$

En intégrant entre l et s , on a

$$\int_l^s m'(l)dl = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_k^{s'} \frac{1}{k\sqrt{(2-k^2)}} K dk \text{ avec } s' = \frac{8}{s+4};$$

d'où

$$m(s) - m(l) = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_k^{s'} \frac{K - \pi/2}{k\sqrt{(2-k^2)}} dk - 2\sqrt{2} \int_k^{s'} \frac{1}{k\sqrt{(2-k^2)}} dk$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

et

$$2\sqrt{2} \int_{s'}^k \frac{1}{k\sqrt{2-k^2}} dk = \log \left(\frac{\sqrt{l+4} - \sqrt{l}}{\sqrt{l+4} + \sqrt{l}} \right) + 2 \log \left(\sqrt{s+4} + \sqrt{s} \right) - 2 \log 2.$$

Quand $s \rightarrow +\infty$, $m(s) \sim \log 2s$ et $2 \log \left(\sqrt{s+4} + \sqrt{s} \right) \sim 2 \log 2 + \log s$, par conséquent

$$m(l) = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk - \log \left(\frac{\sqrt{l+4} - \sqrt{l}}{\sqrt{l+4} + \sqrt{l}} \right) + \log 2.$$

3. D'après 2.,

$$m'(l)dl = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{k\sqrt{2-k^2}} K dk.$$

En intégrant entre 4 et l , on a

$$\int_4^l m'(l)dl = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_1^{\sqrt{\frac{8}{l+4}}} \frac{K}{\sqrt{2-k^2}k} dk,$$

d'où

$$m(l) - m(4) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_{\sqrt{\frac{8}{l+4}}}^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk + 2\sqrt{2} \int_{\sqrt{\frac{8}{l+4}}}^1 \frac{1}{\sqrt{2-k^2}k} dk.$$

En posant $t = \sqrt{2-k^2}$, il vient

$$2\sqrt{2} \int_{\sqrt{\frac{8}{l+4}}}^1 \frac{1}{\sqrt{2-k^2}k} dk = \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 2 \log \left(\sqrt{l+4} + \sqrt{l} \right) - 2 \log 2.$$

Donc pour l assez grand, on a $m(l) \sim \log(2l)$ et

$$m(4) = 2 \log(\sqrt{2} + 1) + \log 2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk.$$

On peut également déduire $m(4)$ de la formule obtenue dans 2..

4. Si $0 < l < 4$, on pose $\alpha(l) = \arccos(-\frac{l}{4})$. Par suite $\Delta' > 0$ si $s < \alpha(l)$ et $\Delta' \leq 0$ si $s \geq \alpha(l)$.

Par application de la formule de Jensen, on a

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha(l)} \log |2 \cos s + l + \sqrt{\Delta'}| ds + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha(l)}^{\pi} \log |2 \cos s| ds.$$

Posant $y(s, l) = \log |2 \cos s + l + \sqrt{4l \cos s + l^2}|$ et dérivant par rapport à l , on obtient

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \alpha'(l) y(\alpha(l), l) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha(l)} \frac{y'(s, l)}{y(s, l)} ds - \frac{1}{\pi} \alpha'(l) \log |2 \cos(\alpha(l))|.$$

C'est-à-dire

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha(l)} \frac{1}{\sqrt{l^2 + 4l \cos s}} ds.$$

Posant $X = \frac{1}{\sin \frac{s}{2}}$, il vient

$$m'(l) = \frac{-1}{\pi \sqrt{2} \sqrt{l}} \int_{+\infty}^{\sqrt{\frac{8}{l+4}}} \frac{dX}{\sqrt{(X^2 - 1)} \sqrt{(\frac{l+4}{8} X^2 - 1)}},$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

et, si $k^2 = \frac{l+4}{8}$, on a

$$m'(l) = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{2}\pi} K \left(\sqrt{\frac{l+4}{8}} \right).$$

5. D'après 3.,

$$m'(l) = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{2}\pi} K \left(\sqrt{\frac{l+4}{8}} \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\sqrt{2k^2-1}} K.$$

D'où en intégrant entre 0 et 4

$$\int_0^4 m'(l) dl = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{K}{\sqrt{2k^2-1}} k dk.$$

Posons $u = \sqrt{2k^2-1}$ et comme $m(0) = 0$, il vient

$$m(4) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K \left(\sqrt{\frac{u^2+1}{2}} \right) du.$$

□

Corollaire 1.16

$$L'(\chi_{-8}, -1) = 2 \log(\sqrt{2} + 1) + \log 2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk.$$

et

$$L'(\chi_{-8}, -1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K \left(\sqrt{\frac{u^2+1}{2}} \right) du.$$

Preuve : D'après Boyd [6], on a $m(4) = L'(\chi_{-8}, -1)$.

D'où

$$L'(\chi_{-8}, -1) = 2 \log(\sqrt{2} + 1) + \log 2 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{2-k^2}} dk$$

et

$$L'(\chi_{-8}, -1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{u^2+1}{2}}\right) du.$$

□

Théorème 1.17 ([13]) *Considérons la famille (3s.3).*

$$P_l(x, y) = y^2(x+1)^2 + y(x^2 + (l+2)x + 1) + (x+1)^2.$$

1. Si l est un réel, $l > 4$,

$$m'(l) = \frac{2}{\pi\sqrt{l^2+12l}} K\left(\sqrt{\frac{16}{l+12}}\right)$$

est une solution de l'équation différentielle associée à la famille (3s.3) au voisinage de $+\infty$ et

$$m(l) = -\frac{8}{\pi} \int_0^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk + \log 3 + 2 \log \left(\frac{6}{\sqrt{3}(\sqrt{l+12} + \sqrt{l})} \right).$$

2. $m(4) = 2 \log(3) - \frac{8}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk.$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

3. Si l est un réel, $l < -12$,

$$m'(l) = -\frac{2}{\pi\sqrt{l^2 - 4l}} K\left(\sqrt{\frac{16}{4-l}}\right)$$

est une solution de l'équation différentielle de Picard Fuchs associée à la famille (3s.3) au voisinage de $-\infty$ et

$$m(l) = -\frac{8}{\pi} \int_k^1 \frac{K(k^2) - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 2 \log \frac{\sqrt{4-l} + \sqrt{-l}}{2}.$$

4. $m(-12) = \frac{-8}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 2 \log(2 + \sqrt{3}).$

5. Si l est un réel, $0 < l < 4$,

$$m'(l) = \frac{1}{2\pi\sqrt{l}} K\left(\sqrt{\frac{l+12}{16}}\right).$$

6. $m(4) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{u^2+3}{4}}\right) du.$

7. Si l est un réel, $-12 < l < 0$,

$$m'(l) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-l}} K\left(\sqrt{\frac{4-l}{16}}\right).$$

8. $m(-12) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{3t^2+1}{4}}\right) dt.$

Preuve : Soit

$$P_l(x, y) = x^2(y^2 + y + 1) + x(2y^2 + (l+2)y + 2) + (y^2 + y + 1).$$

La forme de Weierstrass [10] est donnée par

$$y^2 = x^2 + (l^2 + 4l)x^2 + 16l^2x.$$

L'équation de Picard-Fuchs [10] associée est

$$g'' + \frac{-48 + 16l + 3l^2}{l(l+12)(l-4)}g' + \frac{l^2 + 2l + 12}{l^2(l+12)(l-4)}g = 0.$$

Au voisinage de l'infini, l'équation admet une solution logarithmique et une solution développable en série entière.

On vérifie que la famille de polynômes ne s'annule pas sur le tore pour $l > 4$ et $l < -12$. En calculant la mesure de Mahler logarithmique de P_l , on obtient

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(s) ds,$$

avec

$$f(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log |x^2(2\cos s + 1) + x(4\cos s + l + 2) + (2\cos s + 1)| \frac{dx}{x}$$

et

$$P_{l,s}(x) = x^2(2\cos s + 1) + x(4\cos s + l + 2) + (2\cos s + 1).$$

Le discriminant de $P_{l,s}(x)$ est $\Delta = l(l + 8\cos s + 4)$.

1. Si $l > 4$ alors $\Delta > 0$, d'où par application de la formule de Jensen

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |4\cos s + l + 2 + \sqrt{\Delta}| ds.$$

En dérivant, on a

$$m'(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{ds}{\sqrt{l(l + 8\cos s + 4)}}.$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

Posant $X = \sin \frac{s}{2}$ et $k^2 = \frac{16}{l+12}$, on obtient

$$m'(l) = \frac{2}{\pi\sqrt{l^2+12l}} K \left(\sqrt{\frac{16}{l+12}} \right).$$

Comme $m'(l)$ est développable en série entière au voisinage de $+\infty$, c'est donc la solution régulière de l'équation différentielle associée à la famille (3s.3) au voisinage de $+\infty$.

2. D'après 1., en intégrant $m'(l)$ entre l et s on a

$$\int_l^s m'(l) dl = \frac{8}{\pi} \int_{s'}^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk + 4 \int_{s'}^k \frac{1}{k\sqrt{4-3k^2}} dk \text{ avec } s' = \sqrt{\frac{16}{s+12}},$$

d'où

$$m(s) - m(l) = \frac{8}{\pi} \int_{s'}^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk + 2\alpha_l(s),$$

avec

$$\alpha_l(s) = \log \sqrt{s} + \log \frac{\sqrt{1+\frac{12}{s}}}{4} + \log \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4 - \frac{48}{s+12}} \right) - \log \frac{\sqrt{l+12} + \sqrt{l}}{2\sqrt{3}}.$$

Quand $s \rightarrow +\infty$, $m(s) \sim \log s$, donc

$$m(l) = -\frac{8}{\pi} \int_0^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk + \log 3 + 2 \log \frac{\sqrt{l+12} + \sqrt{l}}{2\sqrt{3}}.$$

3. D'après 2., en posant $l = 4$, on a

$$m(4) = 2 \log 3 - \frac{8}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk.$$

4. Si $l < -12$ alors $\Delta > 0$, donc

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| - (4 \cos s + l + 2) + \sqrt{\Delta} \right| ds.$$

D'où

$$m'(l) = \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \frac{ds}{\sqrt{l(l + 8 \cos s + 4)}}.$$

Posant $X = \cos \frac{s}{2}$, il vient

$$m'(l) = \frac{-2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 - 4l}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{1 - X^2} \left(1 - \frac{16}{4-l} X^2\right)}.$$

Posant $k^2 = \frac{16}{4-l}$, on a

$$m'(l) = \frac{-2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 - 4l}} K \left(\sqrt{\frac{16}{4-l}} \right).$$

Comme $m'(l)$ est développable en série entière au voisinage de $-\infty$, c'est donc la solution régulière de l'équation différentielle de Picard Fuchs associée à la famille (3s.3).

5. D'après 4., on a $k^2 = \frac{16}{4-l}$ donc $dl = \frac{32}{k^3} dk$. Par conséquent

$$m'(l) dl = \frac{-8}{\pi} \frac{1}{k\sqrt{4-k^2}} K dk.$$

En intégrant entre s et l , on a

$$\int_s^l m'(l) dl = \frac{-8}{\pi} \int_{s'}^k \frac{K}{k\sqrt{4-k^2}} dk \text{ avec } s' = \frac{4}{\sqrt{4-s}},$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

d'où

$$m(l) - m(s) = \frac{-8}{\pi} \int_{s'}^k \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk - 4 \int_{s'}^k \frac{1}{k\sqrt{4-k^2}} dk.$$

On montre que

$$\int_{s'}^k \frac{1}{k\sqrt{4-k^2}} dk = -\frac{1}{2} \int_{\frac{2}{s'}}^{\frac{2}{k}} \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} dv$$

et

$$\int_{\frac{2}{s'}}^{\frac{2}{k}} \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} dv = \log \left(\frac{2}{k} + \sqrt{\frac{4}{k^2} - 1} \right) - \log \left(\frac{2}{s'} + \sqrt{\frac{4}{s'^2} - 1} \right).$$

Quand $s \rightarrow -\infty$, $s' \rightarrow 0$ et $m(s) \sim \log(-s)$, d'où

$$m(l) = -\frac{8}{\pi} \int_0^k \frac{K(k^2) - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 2 \log \frac{\sqrt{4-l} + \sqrt{-l}}{2}$$

6. Pour $l < -12$, On a

$$m(l) = -\frac{8}{\pi} \int_k^1 \frac{K(k^2) - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 2 \log \frac{\sqrt{4-l} + \sqrt{-l}}{2}.$$

D'où

$$m(-12) = \frac{-8}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 2 \log (2 + \sqrt{3}).$$

7. Si $0 < l < 4$, on pose $a = \arccos \left(\frac{-4-l}{8} \right)$; alors $\Delta > 0$ si $0 < s < a$ et $\Delta \leq 0$, si $a \leq s < \pi$.

Par conséquent

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a \log |4 \cos s + l + 2 + \sqrt{\Delta}| ds + \int_a^\pi \log |2 \cos s + 1| ds \right].$$

En dérivant, on aura

$$m'(l) = \frac{1}{\pi\sqrt{l}} \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(l + 8 \cos s + 4)}}.$$

Posant $X = \frac{1}{\sin \frac{s}{2}}$, il vient

$$m'(l) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{l}} \int_{+\infty}^{\sqrt{\frac{16}{l+12}}} \frac{dX}{\sqrt{(X^2-1)} \sqrt{\left(\frac{l+12}{16}X^2-1\right)}},$$

et si $k^2 = \frac{l+12}{16}$,

$$m'(l) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{l}} \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)} \sqrt{(1-k^2X^2)}}.$$

C'est à dire

$$m'(l) = \frac{1}{2\pi\sqrt{l}} K \left(\sqrt{\frac{l+12}{16}} \right).$$

8. Pour $0 < l < 4$, on a $k^2 = \frac{l+12}{16}$ donc $dl = 32kdk$, d'où

$$m'(l) dl = \frac{1}{2\pi\sqrt{l}} 32kKdk.$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

En intégrant entre 0 et 4, on obtient

$$\int_0^4 m'(l) dl = \frac{8}{\pi} \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{K}{\sqrt{4k^2 - 3}} k dk.$$

On pose $u = \sqrt{4k^2 - 3}$, d'où

$$m(4) - m(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 K \left(\sqrt{\frac{u^2+3}{4}} \right) du.$$

Comme $m(0) = 0$, donc

$$m(4) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 K \left(\sqrt{\frac{u^2+3}{4}} \right) du$$

9. Si $-12 < l < 0$, on pose $a = \arccos \left(-\frac{4+l}{8} \right)$; alors $\Delta > 0$ si $a < s < \pi$ et $\Delta \leq 0$, si $0 < s \leq a$.

D'où

$$m(l) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^a \log |2 \cos s + 1| ds + \int_a^\pi \log \left| -4 \cos s - l - 2 + \sqrt{\Delta} \right| ds \right].$$

En dérivant, on obtient

$$m'(l) = \frac{-1}{\pi} \int_a^\pi \frac{ds}{\sqrt{l(l + 8 \cos s + 4)}}$$

Posant $X = \frac{1}{\cos \frac{s}{2}}$, on a

$$m'(l) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-l}} \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2) \left(1 - \frac{4-l}{16} X^2 \right)}},$$

et si $k^2 = \frac{4-l}{16}$, il vient

$$m'(l) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-l}} K \left(\sqrt{\frac{4-l}{16}} \right).$$

10. Pour $-12 < l < 0$, on a $k^2 = \frac{4-l}{16}$ et $dl = -32kdk$.

En intégrant entre -12 et 0 , on obtient

$$\int_{-12}^0 m'(l) dl = \frac{-8}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{K k}{\sqrt{4k^2-1}} dk.$$

On pose $u = \sqrt{4k^2-1}$, et on a

$$\int_{-12}^0 m'(l) dl = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} K \left(\sqrt{\frac{u^2+1}{4}} \right) du.$$

Posant $u = \sqrt{3}t$, il vient

$$\int_{-12}^0 m'(l) dl = \frac{-2\sqrt{3}}{\pi} \int_0^1 K \left(\sqrt{\frac{3t^2+1}{4}} \right) dt.$$

Comme $m(0) = 0$ alors

$$m(-12) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \int_0^1 K \left(\sqrt{\frac{3t^2+1}{4}} \right) dt.$$

□

Corollaire 1.18

$$L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{3}{4\pi} \int_0^1 K \left(\sqrt{\frac{u^2+3}{4}} \right) du.$$

1.3. THÉORÈMES ET PREUVES

$$L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{3}{4} \log(3) - \frac{3}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk.$$

$$L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{3t^2+1}{4}}\right) dt.$$

$$10L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{-12}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 3\log(2 + \sqrt{3}).$$

Preuve : D'après Touafek [59], les valeurs explicites de $m(4)$ et $m(-12)$ étant

$$m(4) = \frac{8}{3} L'(\chi_{-4}, -1)$$

et

$$m(-12) = \frac{20}{3} L'(\chi_{-3}, -1).$$

On a alors

$$L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{3}{4\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{u^2+3}{4}}\right) du.$$

$$L'(\chi_{-4}, -1) = \frac{3}{4} \log(3) - \frac{3}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-3k^2}} dk.$$

$$L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} \int_0^1 K\left(\sqrt{\frac{3t^2+1}{4}}\right) dt.$$

$$10L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{-12}{\pi} \int_0^1 \frac{K - \frac{\pi}{2}}{k\sqrt{4-k^2}} dk + 3\log(2 + \sqrt{3}).$$

□

CHAPITRE 1. MESURE DE MAHLER ET EXPRESSION INTÉGRALE DES
SÉRIES
L DE DIRICHLET

Chapitre 2

Etude des sept surfaces elliptiques de Boyd et leur classification

2.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous donnerons une forme de Weierstrass, le discriminant, la fonction $J(t)$, la torsion sur \mathbb{Q} , les fibres singulières, l'équation différentielle de Picard Fuchs et le schéma de Riemann associés pour chacune des surfaces elliptiques rationnelles définies par Boyd [6]. Les calculs ont été effectués avec MAPLE-Apecs et la nature des fibres singulières a été déduite en utilisant l'algorithme de Tate. Nous classifions également ces sept familles en identifiant celles qui sont modulaires.

2.2 Rappels

Pour plus de détails se référer à J. H. Silvermann [21], [22], Kodaira [42], Shioda [51] et Schütt-Shioda [25].

2.2.1 Courbes elliptiques

Soit K l'un des corps suivants : un corps de nombres, le corps des nombres réels, le corps des nombres complexes, un corps local, un corps fini ou un corps de fonctions sur l'un des corps cités précédemment.

Définition 2.1 *Une courbe elliptique E est une courbe projective lisse de genre 1 avec un point $O \in E(K)$.*

Une propriété importante des courbes elliptiques est que pour tout corps K' , $K' \supseteq K$, l'ensemble des points K' -rationnels $E(K')$ forme un groupe dont l'élément neutre est O . Si on considère le cas $K = \mathbb{C}$ alors on aura la description analytique suivante :

Description analytique : Toute courbe elliptique complexe est un tore. Il existe un réseau

$$\Lambda \subset \mathbb{C} \text{ de rang 2 tel que } E \cong \mathbb{C}/\Lambda.$$

Alors la composition dans le groupe est induite par addition dans \mathbb{C} , et l'élément neutre est la classe d'équivalence de l'origine. On peut toujours considérer le cas où

$$\Lambda = \Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, \quad \Im(\tau) > 0.$$

On notera la courbe elliptique correspondante

$$E_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau.$$

Deux tores sont isomorphes si et seulement si les réseaux correspondants sont homothétiques.

Description algébrique : Une courbe elliptique E a un modèle de cubique lisse dans \mathbb{P}^2 . le zéro du groupe sera un point quelconque O de $E(K)$ et non un point d'inflexion. D'après le théorème de Bezout, toute droite l intersecte une cubique dans \mathbb{P}^2 en trois points P, Q, R , éventuellement multiples.

2.2. RAPPELS

On définit donc une loi de groupe d'élément neutre O .

Définition 2.2 *Trois points alignés P, Q, R sur une courbe elliptique $E \subset \mathbb{P}^2$ vérifient*

$$P + Q + R = O.$$

Donc $P + Q$ relativement à l'origine sera le troisième point d'intersection de la droite OR avec E .

Equation de Weierstrass : Soit une courbe elliptique $E \subset \mathbb{P}^2$, on peut toujours effectuer une transformation linéaire qui permet de prendre $[0, 1, 0]$ comme origine O et le vecteur tangent à E en O la droite $l = \{z = 0\}$. Dans la carte affine $z = 1$, l'équation de E prend la forme généralisée de Weierstrass

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

Si la caractéristique de K est différente de 2 ou 3, alors on peut transformer E sous la forme de Weierstrass courte

$$E : y^2 = x^3 + a_4x + a_6 \tag{2.1}$$

Définition 2.3 *Soit E une courbe elliptique sur K sous forme de Weierstrass 2.1. Le discriminant de E est défini par*

$$\Delta = -16(4a_4^3 + 27a_6^2)$$

Lemme 2.4 *Une cubique E est lisse si et seulement si $\Delta \neq 0$.*

Définition 2.5 *Soit E une courbe elliptique sur K sous la forme de Weierstrass 2.1. Le J -invariant de E est défini par*

$$J = -1728 \frac{(4a_4)^3}{\Delta}$$

Soient E, E' deux courbes elliptiques sous la forme de Weierstrass 2.1. Si $E \cong E'$, alors $J = J'$. La réciproque est vraie si de plus a_4/a'_4 est une puissance quatrième et a_6/a'_6 est une puissance sixième dans K , en particulier si K est algébriquement clos.

Soit E une courbe elliptique définie sur K et soit K' un corps contenant K . Alors $E(K)$ est un sous-groupe de $E(K')$.

Définition 2.6 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in E(K')$. On dit que P est un point de n -division de E si

$$nP = \underbrace{P \oplus P \oplus \cdots \oplus P}_{n \text{ fois}} = O$$

Théorème 2.7 (Mordell-Weil) Soit E une courbe elliptique sur un corps de nombres K . Alors $E(K)$ est un groupe de type fini :

$$E(K) \cong E(K)_{\text{tor}} \oplus \mathbb{Z}^r$$

où r est appelé le rang sur K de E et $E(K)_{\text{tor}}$ désigne le sous-groupe de torsion fini de $E(K)$.

Lorsque E décrit l'ensemble des courbes elliptiques sur \mathbb{Q} , un théorème de Mazur montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de groupes de torsion possibles ; par contre on ignore si r est borné.

2.2.2 Surfaces elliptiques rationnelles

Soit C une courbe définie sur un corps K algébriquement clos. Une surface elliptique X au dessus de C est une variété de dimension 2 munie d'un morphisme $\pi : X \rightarrow C$ et un ensemble Σ fini de points de C tels que si $t \notin \Sigma$ alors la fibre $X_t = \pi^{-1}(t)$ est une courbe lisse de genre 1. Si $t \in \Sigma$, X_t est appelée fibre spéciale. Une section globale σ est un morphisme $\sigma : C \rightarrow X$ tel que $\pi \circ \sigma$ est l'application identité de C . Etant donnée une surface elliptique X , il existe deux invariants importants associés à $\pi : X \rightarrow C$. Un invariant appelé invariant

2.2. RAPPELS

fonctionnel, qui est une fonction rationnelle appelée également la J -fonction de la surface elliptique $\pi : X \rightarrow C$; un autre appelé invariant homologique déterminé par la représentation de monodromie $\rho : \pi_1(C - \Sigma) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$.

Soient $\pi_1 : X_1 \rightarrow C$ et $\pi_2 : X_2 \rightarrow C$ deux surfaces elliptiques sur la même courbe C . On dit qu'elles sont birationnellement équivalentes en tant que surfaces elliptiques sur C s'il existe une application birationnelle $f : X_1 \rightarrow X_2$ avec $\pi_1 = \pi_2 \circ f$.

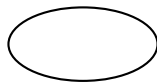
Dans le cas où C est égale à $\mathbb{P}^1(K)$, les surfaces elliptiques sont dites rationnelles. On se restreindra à $K = \mathbb{C}$, \mathbb{C} étant le corps des nombre complexes.

D'après K. Kodaira, on considérera que les surfaces sont minimales i.e. ne contenant pas de courbes rationnelles avec une self-intersection -1 .

Etant donné une surface elliptique $\pi_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, son modèle minimal compact lisse \mathfrak{X} est unique à isomorphisme près, appelé le modèle de Néron de X . Deux surfaces elliptiques birationnellement équivalentes ont le même modèle de Néron. K. Kodaira [42] et A. Néron [41] ont indépendamment donné une classification de tous les types de fibres spéciales de surfaces elliptiques minimales compactes lisses. Nous utiliserons dans ce qui suit les symboles de Kodaira [42] des fibres spéciales. J. Tate a développé un algorithme pour la détermination des fibres spéciales du modèle de Néron d'une surface elliptique donné sous forme d'une équation de Weierstrass [53].

Les types de fibres sont : I_n ($n \geq 0$), II , III , IV , I_n^* ($n \geq 0$), IV^* , III^* et II^* .

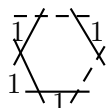
1. I_0 est une courbe non singulière de genre 1.



2. I_1 est une courbe rationnelle avec un noeud.



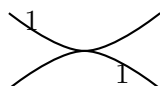
3. I_n désigne n courbes rationnelles arrangées de façon à former un polygone à n côtés.



4. II est une courbe rationnelle avec un point de rebroussement.



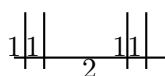
5. III désigne deux courbes non singulières rationnelles tangentes en un point.



6. IV désigne 3 courbes rationnelles non singulières se coupant en un point.



7. I_0^* est une courbe rationnelle non singulière de multiplicité 2 avec 4 courbes non singulières rationnelles de multiplicité 1 rattachées à la courbe.



Le type de fibre est donné par la table suivante

	$Ord_a(a_4(t))$	$Ord_a(a_6(t))$	$Ord_a(\Delta)$	type de fibre
(0)	arbitraire	arbitraire	0	régulier
(1)	0	0	b	$I_b (b \geq 1)$
(2)	≥ 2	≥ 3	$b + 6$	$I_b^* (b \geq 0)$
(3)	≥ 1	1	2	II
(4)	≥ 2	2	4	IV
(5)	≥ 3	4	8	IV*
(6)	≥ 4	5	10	II*
(7)	1	≥ 2	3	III
(8)	3	≥ 5	9	III*
(9)	≥ 4	≥ 6	≥ 12	réduit à (0) – (8)

Le groupe de Néron-Severi d'une surface elliptique, notée, $NS(X)$, est le groupe des diviseurs de X modulo une équivalence algébrique. Il est contenu dans le deuxième groupe de cohomologie $H^2(X, \mathbb{Z})$ de X , et son rang, noté $\rho(X)$, est appelé nombre de Picard de X . Une surface elliptique sur un corps K peut également être vue comme une courbe elliptique au dessus du corps de fonctions de $\mathbb{P}^1(K)$ noté $K(\mathbb{P}^1) = K(x)$. Si la J -fonction de X n'est pas constante, en utilisant le théorème de Mordell-Weil, les sections globales de la surface elliptique forment un groupe abélien de type fini. Ce groupe est appelé le groupe de Mordell-Weil de X , noté $MW(X)$. Le rang de $MW(X)$ est appelé rang de Mordell-Weil de X , qu'on notera dans la suite r . D'après T.Shioda, le groupe de Néron-Severi d'une surface elliptique $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est engendré par son groupe de Mordell-Weil et par les composantes irréductibles des fibres [51]. Il a obtenu la formule de Shioda-Tate

$$\rho(X) = 2 + r + \sum_{t \in \Sigma} (m_t - 1)$$

2.2. RAPPELS

où m_t est le nombre de composantes irréductibles de la fibre $X_t = \pi^{-1}(t)$ pour $t \in \Sigma$. En utilisant les notations de Kodaira, si X_t est de type I_b , alors $m_t = b$, et si X_t est de type I_b^* , $m_t = 5 + b$.

Nous allons considérer maintenant les invariants numériques d'une surface elliptique minimale compacte lisse X . On pourra toujours considérer que la J -fonction de X n'est pas constante. Soit g le genre de la courbe de base C , p_g le genre géométrique de X , et c_2 le genre arithmétique de X appelé la caractéristique d'Euler de X . K. Kodaira [42] a donné une formule pour calculer c_2 comme suit

$$\begin{aligned} c_2 &= 12(p_g - g + 1) \\ &= d + 6 \sum_{b \geq 0} \nu(I_b^*) + 2\nu(II) + 10\nu(II^*) + 3\nu(III) \\ &\quad + 9\nu(III^*) + 4\nu(IV) + 8\nu(IV^*), \end{aligned}$$

où d est le degré de la fonction J , et $\nu(\cdot)$ représente le nombre de fibres spéciales de X du type indiqué dans (\cdot) . Dans le cas des surfaces elliptiques rationnelles, les caractéristiques d'Euler des fibres X_a , $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de types $(I_n \ n \geq 0, II, III, IV, I_n^* \ (n \geq 0), IV^*, III^*, II^* \text{ resp.})$ sont les nombres $(n, 2, 3, 4, n+6, 3, 4, 6 \text{ resp.})$ et la caractéristique d'Euler de la surface elliptique est égale à la somme des caractéristiques d'Euler des fibres singulières.

Définition 2.8 *Une surface elliptique sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est dite stable si elle admet au plus des points doubles ordinaires. On dira qu'elle est semi-stable si les fibres singulières sont de type I_n .*

D'après Beauville [27], une surface elliptique semi-stable possède au moins quatre fibres singulières.

Soit X une surface elliptique sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, d'après la théorie de Lefschetz-Hodge on a

$$\rho(X) \leq h^{1,1},$$

où $h^{1,1}$ désigne le nombre de Hodge qui est égal à la $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \Omega_X^1)$.

2.2.3 Ramification

Soit C une courbe projective non singulière dans \mathbb{P}^2 définie par un polynôme homogène $P(x, y, z)$ de degré $d > 1$. En appliquant une transformation projective adéquate, on pourra supposer que $[0, 1, 0] \notin C$. Alors on a une application bien définie $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ donnée par $\phi[x, y, z] = [x, z]$.

Définition 2.9 *L'indice de ramification $v_\phi[a, b, c]$ de ϕ au point $[a, b, c] \in C$ est l'ordre du zéro du polynôme $P(a, y, c)$ par rapport à y en $y = b$. Le point $[a, b, c]$ est appelé point de ramification de ϕ si $v_\phi[a, b, c] > 1$.*

Théorème 2.10 (Nori [35]) *Une surface elliptique X sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec un invariant fonctionnel J non constant vérifie $\rho(X) = h^{1,1}$ et $r = 0$ si et seulement si J est ramifiée au dessus de $0, 1$ et ∞ avec $e_P = 1, 2$ ou 3 si $J(P) = 0$, $e_p = 1$ ou 2 si $J(P) = 1$ et X ne contient aucune fibre singulière de type I_0^*, II, III et IV .*

2.2.4 $SL_2(\mathbb{Z})$, $PSL_2(\mathbb{Z})$, sous groupes de congruence et courbes modulaires

On désigne par \mathbb{H} le demi-plan de Poincaré défini par $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$, $SL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1 et $PSL_2(\mathbb{Z})$ le groupe $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$.

Le groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$ est le groupe modulaire des transformations homographiques.

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1$$

Il est noté $\Gamma(1)$ et engendré par les images des deux matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. RAPPELS

L'ensemble

$$D = \left\{ z, |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

est un domaine fondamental de $\Gamma(1)$, c'est à dire

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $g \in \Gamma(1)$ tel que $g.z \in D$.
2. Si z et z' sont congrus mod $\Gamma(1)$ alors soit $|\Re(z)| = \frac{1}{2}$ et $z = z' \pm 1$, soit $|z| = 1$ et $z' = -1/z$.
3. Le stabilisateur $\mathbf{I}(z) = \{g; g.z = z\}$ de tout élément est l'identité sauf si $z = i$ (alors $\mathbf{I}(i) = \langle S \rangle$), $z = j = \exp(2i\pi/3)$ ($\mathbf{I}(j) = \langle ST \rangle$) et $z = -j$ ($\mathbf{I}(-j) = \langle TS \rangle$).

Le sous groupe de congruence principal de niveau m , $m > 0$, de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est défini par

$$\Gamma(m) = \{A \in PSL_2(\mathbb{Z}), A \equiv \pm I \pmod{m}\} / \{\pm I\}.$$

Un sous groupe de congruence de niveau m du groupe modulaire est un sous groupe contenant $\Gamma(m)$ avec m entier positif et ne contenant pas $\Gamma(n)$ pour $n < m$.

Les indices de ces sous groupes modulaires dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ sont donnés par

$$[PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(2)] = 6, \quad [PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(2)] = 3$$

et

$$\mu(m) := [PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(m)] = \frac{m^3}{2} \prod_{\substack{p/m \\ P \text{ prime}}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad m \geq 3,$$

$$\mu_1(m) := [PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(m)] = \frac{m^2}{2} \prod_{\substack{p/m \\ P \text{ prime}}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad m \geq 3,$$

$$\mu_0(m) := [PSL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(m)] = m \prod_{\substack{p/m \\ P \text{ prime}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad m \geq 1,$$

où

$$\Gamma_0(m) = \left\{ A \in SL_2(\mathbb{Z}), A \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{m} \right\}$$

et

$$\Gamma_1(m) = \left\{ A \in SL_2(\mathbb{Z}), A \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{m} \right\}$$

Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$ ou $PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $-I \notin \Gamma$, Γ agit librement sur \mathbb{H} . L'ensemble des orbites $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ est une surface de Riemann complexe de dimension 1. La surface $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ peut être compactifiée en adjoignant les classes d'équivalence obtenues en faisant agir Γ sur $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, appelées cusps de Γ . La surface compactifiée $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ notée C_Γ est appelée courbe modulaire associée à Γ . Les singularités des surfaces compactifiées sont les cusps et les points elliptiques qui sont les points fixes des éléments de torsion de Γ .

Soit ν un cusp de $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$, le stabilisateur de ν est un sous-groupe cyclique de Γ engendré par une matrice N conjuguée à $\pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un entier positif b . L'entier b est appelé largeur du cusp ν . Le cusp ν est dit de première espèce si N est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de deuxième espèce sinon.

Un sous-groupe d'indice fini Γ de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est dit sans torsion s'il ne contient aucun élément de torsion et on dit qu'il est de genre zéro si la courbe modulaire associée C_Γ est de genre zéro.

Soit $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ un sous groupe discret tel que $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ soit compact (i.e. un groupe Fuchsien de première espèce) et de genre 0.

Définition 2.11 *Une fonction $f(\tau)$ sur le demi plan de poincaré \mathbb{H} est dite automorphe pour Γ si*

1. $f(\gamma\tau) = f(\tau)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall \tau \in \mathbb{H}$.
2. $f(\tau)$ est méromorphe en tout cusp de Γ .

Définition 2.12 *Une fonction automorphe univaluée pour un groupe fuchsien de genre 0 est appelée Hauptmodul.*

2.2.5 Surfaces elliptiques modulaires

Définition 2.13 *Soit Γ un sous groupe de congruence tel que $-I \notin \Gamma$.*

Une surface elliptique modulaire X_Γ associée à un sous-groupe Γ d'indice fini dans $SL_2(\mathbb{Z})$ est une surface elliptique algébrique non singulière sur la courbe modulaire $C_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{H}^$.*

Pour un sous-groupe Γ sans torsion d'indice fini dans $SL_2(\mathbb{Z})$, la caractéristique d'Euler de X_Γ est donnée par [51],

$$c_2 = \mu + 6t_2,$$

où $\mu = [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma \cup -\Gamma]$, et t_2 est le nombre de cusps de Γ de seconde espèce. Les fibres spéciales d'une telle surface X_Γ sont de type I_b pour les cusps de largeur b de première espèce ou de type I_b^* pour les cusps de largeur b de seconde espèce. Soit $S_3(\Gamma)$ l'espace des formes paraboliques de poids 3 pour Γ . Alors

$$\dim S_3(\Gamma) = p_g(X_\Gamma).$$

L'invariant fonctionnel associé à la surface X_Γ est noté J_Γ et est défini par

$$J_\Gamma : X_\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$$

est l'application naturelle.

D'après les définitions de Kodaira [42], dans le cas où la fibre est de genre 0, il existe un Hauptmodul $t(\tau)$ avec $J_\Gamma(t(\tau)) = J(\tau)$, où $J(\tau)$ est la fonction J usuelle.

Théorème 2.14 (Nori [35]) *Soit X une surface elliptique complexe munie*

d'une J -fonction non constante telle que X admet une section globale. supposons que X vérifie les conditions suivantes :

1. X n'admet aucune fibre du type II^* ou III^* .
2. Le nombre de Hodge $h^{1,1}$ de X est égal au nombre de Picard $\rho(X)$.
3. Le rang de Mordell-Weil $r(X) = 0$.
Alors X est une surface elliptique modulaire associée à un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Théorème 2.15 (Beauville [27]) Soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une surface elliptique semi-stable avec quatre fibres singulières. Alors f est isomorphe à une surface elliptique modulaire associée à l'un des six groupes de congruence Γ .

$\left(\begin{array}{l} \text{Le groupe } \Gamma \\ \Gamma(3) \\ \Gamma_0^0(4) \cap \Gamma(2) \\ \Gamma_0^0(5) \\ \Gamma_0^0(6) \\ \Gamma_0(8) \cap \Gamma_0^0(4) \\ \Gamma_0(9) \cap \Gamma_0^0(3) \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{Equation de la surface} \\ X^3 + Y^3 + Z^3 + tXYZ \\ X(X^2 + Z^2 + 2ZY) + tZ(X^2 - Y^2) = 0 \\ X(X - Z)(Y - Z) + tZY(X - Y) = 0 \\ (X + Y)(Y + Z)(Z + X) + tXYZ = 0 \\ (X + Y)(XY - Z^2) + tXYZ = 0 \\ X^2Y + Y^2Z + Z^2X + tXYZ = 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Fibres singulières} \\ [3, 3, 3, 3] \\ [4, 4, 2, 2] \\ [5, 5, 1, 1] \\ [6, 3, 2, 1] \\ [8, 2, 1, 1] \\ [9, 1, 1, 1] \end{array} \right)$
---	---	--

2.3 Étude des sept familles de Boyd

Pour plus de détails, se référer à l'article de Boyd [6].

Dans cette partie, nous considérons des familles de polynômes de la forme

$$P(x, y) = P_t(x, y) = A(x)y^2 + B_t(x)y + C(x),$$

où $B_t(x)$ dépend linéairement du paramètre t .

On note la courbe $\{P_t(x, y) = 0\}$ par Z_t . En posant $Y = 2A(x)y + B_t(x)$, on

2.3. ETUDE DES SEPT FAMILLES DE BOYD

voit que Z_t est birationnellement équivalente à l'équation hyperelliptique :

$$Y^2 = D_t(x) = (B_t(x))^2 - 4A(x)C(x).$$

Dans cette partie, on prend

$$B_t(x) = B(x) + tx,$$

Alors

$$P(x, y) = P_t(x, y) = A(x)y^2 + (B(x) + tx)y + C(x),$$

où les degrés de $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ sont égaux à au plus 2. En particulier $\deg(D_t) \leq 4$, et donc Z_t est génériquement de genre 1.

Si E_t est la courbe

$$y^2 = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

alors sa jacobienne est donnée par

$$y^2 = g(x) = x^3 + cx^2 + (bd - 4ae)x - (4ace - b^2e - ad^2),$$

et si $f(x)$ est un polynôme réciproque, alors

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$$

et c'est le cas si $P(x, y)$ l'est, donc

$$g(x) = x^3 + cx^2 + (b^2 - 4a^2)x + (2ab^2 - 4a^2c)$$

Nous désignons les surfaces selon les notations de Boyd.

- (1.3) $y^2 + (x^2 + tx + 1)y + x^2 = 0$
- (3.1) $(x^2 + x + 1)y^2 + txy + x^2 + x + 1 = 0$

- (2.3) $(x + 1)y^2 + (x^2 + tx + 1)y + x^2 + x = 0$
- (3.3) $(x^2 + x + 1)y^2 + (x^2 + (t + 1)x + 1)y + x^2 + x + 1 = 0$
- (3s.1) $(x + 1)^2y^2 + txy + (x + 1)^2 = 0$
- (3s.3) $(x + 1)^2y^2 + (x^2 + (t + 2)x + 1)y + (x + 1)^2 = 0$
- (3s.3s) $(x + 1)^2y^2 + (2x^2 + (t + 4)x + 2)y + (x + 1)^2 = 0$.

Pour la famille **(3.1)** :

$$Z_t : (x^2 + x + 1)y^2 + txy + x^2 + x + 1 = 0.$$

Z_t est birationnellement équivalente à la quartique

$$Y^2 = -4x^4 - 8x^3 + (t^2 - 12)x^2 - 8x - 4;$$

d'où la forme de Weierstrass

$$y^2 = x^3 + (t^2 + 12)x^2 + 16t^2x.$$

En utilisant MAPLE-Apecs, on obtient la forme de Weierstrass suivante

$$Y^2 = X^3 + 16(t^2 - 12)^2X - 64(t^2 + 12)(t^4 - 48t^2 + 144).$$

Le discriminant, la fonction $J(t)$ et la torsion calculés en utilisant MAPLE-Apecs sont donnés par

$$\begin{aligned} \Delta &= 4096t^4(t - 6)(t - 2)(t + 2)(t + 6), \\ J(t) &= \frac{(t^2 - 12)^6}{t^4(t^2 - 36)(t^2 - 4)}, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.3. ETUDE DES SEPT FAMILLES DE BOYD

Les fibres singulières déduites en utilisant l'algorithme de Tate sont données par

$$\begin{array}{cccccc} I_4 & I_4 & I_1 & I_1 & I_1 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \infty & 2 & -2 & 6 & -6 \end{array}.$$

L'équation différentielle de Picard-Fuchs associée, calculée en utilisant la méthode de Stiller citée au chapitre 1 est donnée par

$$\begin{aligned} y'' + y' \frac{3t^6 - 100t^4 + 1296t^2 - 1728}{t(t^2 - 36)(t^2 - 4)(t^2 - 12)} \\ + y \frac{288 - 20t^2 + t^4}{(t^2 - 4)(t^2 - 36)(t^2 - 12)} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le schéma de Riemann de l'équation 2.2 est donné par

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -6 & 6 & 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les mêmes étapes pour les autres familles, on obtient les résultats suivants

Pour la famille (1.3) :

$$Z_t : y^2 + (x^2 + tx + 1)y + x^2 = 0,$$

$$Y^2 = x^4 + 2tx^3 + (t^2 - 2)x^2 + 2tx + 1,$$

$$y^2 = x^3 + (l^2 - 2)x^2 + (4l^2 - 4)x + 4l^2 + 8,$$

$$Y^2 = X^3 + (256 - 256t^2 + 16t^4)X - 64(t^2 - 8)(t^4 - 16t^2 - 8).$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4096t^2(t^2 - 16), \\ J(t) &= \frac{(16 - 16t^2 + t^4)^3}{t^2(t^2 - 16)}, \\ &\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}I_2 & I_1 & I_1 & I_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & 4 & -4 & \infty\end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^2 - 16}{t(t^2 - 16)} + y \frac{1}{t(t^2 - 16)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille (2.3) :

$$Z_t : (x + 1)y^2 + (x^2 + tx + 1)y + x^2 + x = 0,$$

$$Y^2 = x^4 + (2k - 4)x^3 + (k^2 - 6)x^2 + (2k - 4)x + 1,$$

$$y^2 = x^3 + (l^2 - 12)x^2 + 16(3 - l)x$$

$$Y^2 = X^3 + (16t(t^3 - 24t + 48)X - 64(t^4 - 24t^2 + 72t - 72))$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4096(t - 6)(t + 3)^2(t + 2)^3, \\ J(t) &= \frac{t^3(t^3 - 24t - 48)^3}{(t - 6)(t + 3)^2(t + 2)^3}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}I_1 & I_2 & I_3 & I_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 6 & -3 & -2 & \infty\end{array}$$

2.3. ETUDE DES SEPT FAMILLES DE BOYD

$$y'' + y' \frac{3t^2 + 2t - 24}{(t-3)(t-2)(t+6)} + y \frac{t}{(t-3)(t-2)(t+6)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille $\boxed{(3.3)}$:

$$Z_k : (x^2 + x + 1)y^2 + (x^2 + (t+1)x + 1)y + x^2 + x + 1 = 0,$$

$$Y^2 = -3x^4 + (2t-6)x^3 + (k^2 + 2t-9)x^2 + (2t-6)x - 3,$$

$$y^2 = x^3 + (t^2 + 2t + 9)x^2 + 16t^2x,$$

$$Y^2 = X^3 + (16t^4 + 64t^3 - 416t^2 + 576t + 1296)X + -64(t^2 + 2t + 9)(t^4 + 4t^3 - 50t^2 + 36t + 81),$$

$$\Delta = 4096t^4(t+9)(t+1)(t-3)^2,$$

$$J(t) = \frac{(81 + 36t - 26t^2 + 4t^3 + t^4)^3}{t^4(t+9)(t+1)(t-3)^2},$$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

$$\begin{array}{ccccc} I_4 & I_4 & I_2 & I_1 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & \infty & 3 & -1 & -9 \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^4 + 26t^4 + 42t^2 - 126t - 81}{t(t+9)(t+1)(t-3)(t+3)} + y \frac{t^3 + 7t^2 + 21t - 9}{t(t+9)(t+3)(t-3)(t+1)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -3 & -9 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille **(3s.1)** :

$$Z_k : (x+1)^2 y^2 + txy + (x+1)^2 = 0,$$

$$Y^2 = -4x^4 - 16x^3 + (t^2 - 24)x^2 - 16x - 4,$$

$$y^2 = x^3 + t^2 x^2 + 16t^2 x,$$

$$Y^2 = X^3 + 16t^2(t^2 - 48)X - 64t^4(t^2 - 72),$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4096t^6(t^2 - 64), \\ J(t) &= \frac{(t^2 - 48)^3}{t^2 - 64}, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} I_0^* & I_4 & I_1 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & \infty & 8 & -8 \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^2 - 64}{t(t^2 - 64)} + y \frac{t^2 + 16}{t^2(t^2 - 64)^2} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 & \infty \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille **(3s.3)** :

$$Z_t : (x+1)^2 y^2 + (x^2 + (t+2)x + 1)y + (x+1)^2 = 0,$$

$$Y^2 = -3X^4 + (2t - 12)X^3 + (t^2 + 4t - 18)X^2 + (2t - 12)X - 3,$$

$$y^2 = x^3 + (t^2 + 4t)x^2 + 16t^2 x,$$

2.3. ETUDE DES SEPT FAMILLES DE BOYD

$$Y^2 = X^3 + (16t^2(t^2 + 8t - 32)X - 64t^3(t + 4)(t^2 + 8t - 56),$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4096t^6(t + 12)(t - 4), \\ J(t) &= \frac{(t^2 + 8t - 32)^3}{(t - 4)(t + 12)}, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} I_0^* & I_4 & I_1 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow, \\ 0 & \infty & 4 & -12 \end{array}$$

$$y'' + y' \frac{3t^2 + 16t - 48}{t(t - 4)(t + 12)} + y \frac{t^2 + 2t + 12}{t^2(t - 4)(t + 12)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & \infty \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la famille $\boxed{\mathbf{(3s.3s)}}$:

$$Z_t : y^2(x + 1)^2 + y(2x^2 + (t + 4)x + 2) + (x + 1)^2 = 0,$$

$$Y^2 = 4kX^3 + k(k + 8)X^2 + 4kX,$$

$$y^2 = x^3 + (t^2 + 8t)x^2 + 16t^2x,$$

$$Y^2 = X^3 + (16t^2(t^2 + 16t + 16)X - 64t^3(t + 8)(t^2 + 16t - 8),$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4096t^7(t + 16), \\ J(t) &= \frac{(t^2 + 16t + 16)^3}{t(t + 16)}, \\ &\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} I_1^* & I_4 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \infty & -16 \end{array},$$

$$y'' + y' \frac{3t + 32}{t(t + 16)} + y \frac{t + 4}{t^2(t + 16)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -16 & \infty \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Étude de la modularité des surfaces de Boyd

On appellera réalisation du 4-uplet $[4, 4, 2, 2]$, une surface elliptique rationnelle dont les fibres singulières sont du type I_4, I_4, I_2, I_2 .

Pour les preuves des théorèmes suivants, on utilisera le résultat de Nori [35] et le logiciel PARI pour calculer la ramification.

Théorème 2.16 *Les surfaces elliptiques (3s.1) et (3s.3) ayant de la 2-torsion ne sont pas modulaires.*

Preuve : Les deux surfaces elliptiques (3s.1) et (3s.3) ne sont pas modulaires car elles contiennent toutes les deux des fibres de type I_0^* .

□

Théorème 2.17 *La surface (1.3) ayant de la 4-torsion et la surface (2.3) ayant de la 6-torsion sont modulaires.*

Preuve : Les deux surfaces elliptiques (1.3) et (2.3) sont modulaires. Ce sont d'autres réalisations de Beauville [27] $[8, 2, 1, 1]$ et $[6, 3, 2, 1]$ respectivement.

Pour la surface (1.3).

On note P le polynôme à deux variables en k et J

$$P = k^2(k^2 - 16)J - (16 - 16k^2 + k^4)^3.$$

2.4. ETUDE DE LA MODULARITÉ DES SURFACES DE BOYD

En utilisant le logiciel Pari on aura

$$poldisc(P, k) = 2^{56}(J - 1728)^6 J^8.$$

Donc J est ramifiée au dessus de 0, 1728 et ∞ .

Comme

$$P(0, k) = -(k^4 - 16k^2 + 16)^3,$$

alors l'indice de ramification au dessus de $J = 0$ est 3, 3, 3, 3,

et comme

$$P(1728, k) = -(k^2 - 8)^2(k^4 - 16k^2 - 8)^2,$$

alors l'indice de ramification au dessus de $J = 1728$ est 2, 2, 2, 2, 2, 2. Au dessus de l'infini, on a les fibres I_2, I_1, I_1 et I_8 .

Pour la surface (2.3).

$$P = (k - 6)(k + 3)^2(k + 2)^3 J - k^3(k^3 - 24k - 48)^3,$$

et

$$poldisc(P, k) = -2^{44}3^{21}(J - 1728)^6 J^8.$$

On a

$$P(0, k) = -k^3(k^3 - 24k + 48)^3$$

et

$$P(1728, k) = -(k^2 - 12)^2(k^4 - 24k^2 - 72)^2.$$

L'indice de ramification au dessus de $J = 0$ est 3, 3, 3, 3. Au dessus de $J = 1728$, l'indice de ramification est 2, 2, 2, 2, 2, 2. Au dessus de l'infini, on a les fibres I_1, I_2, I_3 et I_6 .

Donc d'après le théorème de Nori ces deux surfaces sont modulaires.

□

Théorème 2.18 *On a*

1. La surface (3.3) est une réalisation du 5-uplet $[4, 4, 2, 1, 1]$. Elle est obtenue à partir de la réalisation modulaire de Beauville $[4, 4, 2, 2]$ ou bien $[8, 2, 1, 1]$ par une permutation de monodromie supplémentaire. Ceci a pour effet d'introduire une singularité apparente dans l'équation de Picard-Fuchs de la surface. La surface n'est pas modulaire.
2. La surface (3.1) est une réalisation du 6-uplet $[4, 4, 1, 1, 1, 1]$. Elle est obtenue à partir de la réalisation modulaire de Beauville $[4, 4, 2, 2]$ ou bien $[8, 2, 1, 1]$ par deux permutations de monodromie supplémentaires. Ceci a pour effet d'introduire deux singularités apparentes dans l'équation de Picard-Fuchs de la surface. La surface n'est pas modulaire.

Preuve : Pour la surface (3.3).

On note P le polynôme à deux variables en k et J

$$P = 4096k^4(k+9)(k+1)(k-3)^2J - (81 + 36k - 26k^2 + 4k^3 + k^4)^3.$$

En utilisant le logiciel Pari on aura

$$poldisc(P, k) = (J - 1728)^6 J^8 (3J - 2048).$$

Donc J est ramifiée au dessus de $0, 1728, \infty$ et $\frac{2048}{3}$. Ce dernier point de ramification correspond à $k = -3$. Alors -3 est une singularité apparente dans l'équation de Picard-Fuchs.

Le lien avec $\Gamma_0^0(4) \cap \Gamma(2)$ est donné par la relation

$$k^2t - 2k(2 - t + 2t^2) + 9t = 0$$

Le lien avec $\Gamma_0(8) \cap \Gamma_0^0(4)$ est exprimé par la relation

$$t^2k - (k+1)(k+9).$$

Pour la surface (3.1).

2.4. ETUDE DE LA MODULARITÉ DES SURFACES DE BOYD

En considérant le polynôme

$$P = k^4(k^2 - 36)(k^2 - 4)J - (k^2 - 12)^6.$$

$$poldisc(P, k) = (J - 1728)^6 J^{10}.$$

On a

$$P(0, k) = (k^2 - 12)^6$$

et

$$P(1728, k) = (k^2 + 12)^2(k^4 - 48k^2 + 144)^2.$$

Donc la ramification est au dessus de 0, 1728 et ∞ et au dessus de 0, l'indice de ramification est 6 et pas 1, 2 ou 3 comme énoncé dans le théorème de Nori. Donc une telle surface n'est pas modulaire. L'extra ramification est au dessus de $J = 0$. D'où $k = 2\sqrt{3}$ et $k = -2\sqrt{3}$ sont deux singularités apparentes dans l'équation différentielle de Picard-Fuchs.

La surface (3.1) est obtenue de la surface modulaire de Beauville [4, 4, 2, 2] de la manière suivante.

En partant de l'équation de Beauville

$$X(X^2 + Z^2 + 2ZY) + tZ(X^2 - Y^2) = 0,$$

par l'isomorphisme $X = x + y$, $Y = x - y$, $Z = z$, on aura

$$(x + y)^3 + 2z(x^2 - y^2) + z^2(x + y) + 4txyz = 0,$$

soit

$$z^2(x + 1) + 2z(x^2 + 2tx - 1) + (x + 1)^3 = 0,$$

Si y est la variable d'homogénéisation. En complétant le carré et en utilisant la

méthode de Cassels, on obtient l'équation de Weierstrass

$$U^2 = X_1^3 + (t^2 - 2)X_1^2 - (t^2 - 1)X_1$$

avec un discriminant Δ et l'invariant fonctionnel J

$$\Delta = 16t^4(t^2 - 1)^2, \quad J = 256 \frac{(t^4 - t^2 + 1)^3}{t^4(t^2 - 1)^2}$$

L'invariant fonctionnel de la surface (3.1) est

$$J_{3,1} = \frac{(k^2 - 12)^6}{k^4(k^2 - 36)(k^2 - 4)}$$

donc J et $J_{3,1}$ se transforment l'une en l'autre par

$$k^2t - 4k(t^2 + 1) + 12t = 0.$$

Cette relation exprime le lien entre la surface (3.1) et la surface modulaire associée au sous groupe de congruence modulaire $\Gamma_0^0(4) \cap \Gamma(2)$.

□

Théorème 2.19 *La surface (3s.3s) satisfait les relations $h^{1,1} = \rho(X)$ et $r = 0$. C'est une surface elliptique modulaire pour le groupe de congruence $\Gamma^0(4)$. C'est la surface elliptique rationnelle extrémale X_{141} dans les notations de Miranda [34]. Dans ce cas le Hauptmodul est*

$$k^2 = -\frac{16}{l}$$

est le module de Jacobi.

Preuve : On applique le théorème de Nori. Si

$$P = l(l + 16)J - (l^2 + 16l + 16)^3.$$

On aura

$$poldisc(P, l) = (J - 1728)^3 J^4,$$

comme

$$P(1728, l) = (l + 8)^2 (l^2 + 16l - 8)^2,$$

l'indice de ramification au dessus de $J = 1728$ est 2, 2, 2. Comme

$$P(0, l) = (l^2 + 16l + 16)^3,$$

l'indice de ramification au dessus de $J = 0$ est 3, 3. Au dessus de $J = \infty$ on a les fibres I_1 , I_4 et I_1^* . Alors $h^{1,1} = \rho(X)$ et $r = 0$ donc la surface est modulaire et on montrera dans le chapitre suivant que son groupe de monodromie est $\Gamma^0(4)$.

□

Remarque 2.1 *On a*

1. *Les deux surfaces non modulaires (3s.1) et (3s.3) avec toutes les deux une fibre I_0^* sont des twists de la surface elliptique modulaire (3s.3s). En effectuant un changement de variable $l \rightarrow l + 4$, on aura le même J et la même équation de Picard-Fuchs projective.*
2. *La surface (3.3) n'est pas modulaire donc nous n'avons pas trouvé de formule intéressante cependant il y a seulement une singularité apparente.*
3. *Pour la surface (3.1), nous avons trouvé une belle formule car les points de l'extra ramification sont au dessus de J .*

CHAPITRE 2. ÉTUDE DES SEPT SURFACES ELLIPTIQUES DE BOYD ET
LEUR CLASSIFICATION

Chapitre 3

Monodromie d'une surface elliptique

3.1 Introduction

Une variété de Calabi-Yau est une variété complexe compacte avec un faisceau canonique trivial.

Soit M_z une famille de variétés de Calabi-Yau de dimension n paramétrée par une variable complexe $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et ω_z l'unique (à un scalaire près) n -forme différentielle holomorphe sur M_z . Alors d'après la théorie des connexions de Gauss-Manin, les périodes $\int_{\gamma_z} \omega_z$ satisfont certaines équations différentielles linéaires, appelées équations différentielles de Picard-Fuchs, où les γ_z sont des r -cycles sur M_z .

Quand $n = 1$, les familles de variétés de Calabi-Yau de dimension 1 sont des familles de courbes elliptiques. Un exemple classique d'équations différentielles de Picard-Fuchs est

$$z^2(1-z)y'' + (z-2z^2)y' - \frac{z}{4}y = 0 \quad (3.1)$$

associée à la famille de courbes elliptiques $E_t : y^2 = x(x-1)(x-t)$, et satisfaites

par les périodes

$$f(z) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}.$$

Nous savons que pour les familles de courbes elliptiques, les groupes de monodromie sont souvent des sous groupes de $SL(2, \mathbb{R})$. Par exemple le groupe de monodromie de l'équation différentielle 3.1 est le groupe $\Gamma(2)$ engendré par les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Si on suppose que $y_0(z) = 1 + \dots$ est l'unique solution holomorphe en $z = 0$ et $y_1(z) = y_0(z) \log z + g(z)$ la solution logarithmique. On pose $\tau = c \frac{y_1(z)}{y_0(z)}$ où c est une variable complexe bien choisi. Alors z , en tant que fonction de τ devient une fonction modulaire et $y_0(z(\tau))$ devient une forme modulaire de poids 1 dans le cas des équations différentielles d'ordre 2. Par exemple, un résultat classique dû à Jacobi :

$$\theta_3^2 = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4} \right),$$

où

$$\theta_2(\tau) = q^{1/8} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2}, \theta_3(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2}, q = e^{2\pi i \tau},$$

ou réciproquement, la forme modulaire $y(\tau) = \theta_3^2$, comme fonction de $z(\tau) = \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4}$ satisfait l'équation 3.1. ${}_2F_1$ désigne la fonction hypergéométrique de Gauss.

3.2 Rappels et notations

Pour plus de détails se référer à Yao-Han Chen, Yifan Yang et Noriko Yui [48], Miranda [34] et Sebbar [39].

3.2.1 Monodromie d'une équation différentielle

Pour les définitions se référer au chapitre 1. Dans cette partie, on s'intéresse à la monodromie des équations différentielles de Picard-Fuchs.

Soit

$$r_n(z)u^{(n)} + r_{n-1}(z)u^{(n-1)} + \cdots + r_1(z)u' + r_0(z) = 0, \quad r_i \in \mathbb{C}(z) \quad (3.2)$$

une équation différentielle à points singuliers réguliers, z_0 un point singulier et S l'espace des solutions au voisinage de z_0 . Alors le prolongement analytique le long d'une courbe γ contenant z_0 donne lieu à un automorphisme de S appelé monodromie.

Si on choisit une base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de S , alors on a une représentation matricielle de la monodromie.

Supposons que f_i devient $a_{i1}f_1 + \cdots + a_{in}f_n$ après avoir accompli un tour γ , c.à.d

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

alors la représentation matricielle de la monodromie le long de γ relative à la base $\{f_i\}$ est la matrice (a_{ij}) . Le groupe de telles matrices est appelé le groupe de monodromie de la base $\{f_i\}$ de l'équation différentielle. Si on choisit deux bases distinctes, on obtient deux représentations matricielles distinctes pour la même monodromie. Cependant, ces deux dernières sont liées par conjugaison par la matrice de changement de base. Donc, le groupe de monodromie est défini à conjugaison près.

Soit z_0 un point singulier régulier de l'équation différentielle [3.2](#).

- 1 Si l'équation indicelle en z_0 a n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ pour tout $i \neq j$, alors, la base de Frobenius des solutions est

donnée par

$$y_j(z) = (z - z_0)^{\lambda_j} f_j(z), \quad j = 1, \dots, n,$$

où les $f_j(z)$ sont holomorphes au voisinage de z_0 . Il est facile de voir que la matrice de monodromie dans la base $\{y_j\}$ est

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i \lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{2\pi i \lambda_n} \end{pmatrix}$$

2 Si l'équation indiciale en z_0 admet des racines $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, avec des multiplicités e_1, \dots, e_k , où $e_1 + \dots + e_k = n$ et $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ pour tout $i \neq j$. Alors pour chaque λ_j , il y a e_j solutions linéairement indépendantes,

$$y_{j,0} = (z - z_0)^{\lambda_j} f_{j,0}$$

$$y_{j,1} = y_{j,0} \log(z - z_0) + (z - z_0)^{\lambda_j} f_{j,1}$$

$$y_{j,2} = \frac{1}{2} y_{j,0} \log^2(z - z_0) + (z - z_0)^{\lambda_j} f_{j,1} \log(z - z_j) + (z - z_0)^{\lambda_j} f_{j,2}$$

⋮

$$y_{j,e_j-1} = (z - z_0)^{\lambda_j} \sum_{h=0}^{e_j-1} \frac{1}{h!} f_{j,e_j-1-h} \log^h(z - z_0)$$

où les $f_{j,h}$, $0 \leq h \leq e_j - 1$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de $z = z_0$ et satisfaisant $f_{j,0}(z_0) = 1$ et $f_{j,h}(z_0) = 0$ pour $h > 0$. Comme $f_{j,h}$ est holomorphe au voisinage de z_0 , le prolongement analytique le long d'une courbe fermée contenant z_0 ne change pas $f_{j,h}$ et pour les autres facteurs, en faisant le prolongement dans le sens contraire des aiguilles

3.2. RAPPELS ET NOTATIONS

d'une montre, on aura

$$(z - z_0)^{\lambda_j} \mapsto e^{2\pi i \lambda_j} (z - z_0)^{\lambda_j}$$

et

$$\log(z - z_0) \mapsto \log(z - z_0) + 2\pi i.$$

Donc, la matrice de monodromie dans la base $y_{j,h}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} y_{j,0} \\ y_{j,1} \\ \vdots \\ y_{j,e_j-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_j & 0 & \cdots & 0 \\ 2\pi i w_j & w_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(2\pi i)^{e_j-1}}{(e_j-1)!} w_j & \frac{(2\pi i)^{e_j-2}}{(e_j-2)!} w_j & \cdots & w_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{j,0} \\ y_{j,1} \\ \vdots \\ y_{j,e_j-1} \end{pmatrix}$$

où $w_j = e^{2\pi i \lambda_j}$.

- 3** Si l'équation indiciale en z_0 a des racines distinctes λ_i, λ_j telles que $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$, il y a plusieurs méthodes pour calculer la matrice de monodromie relative à la base de Frobenius, mais dans tous les cas, la matrice admet la même forme précédente.

3.2.2 Monodromie d'une surface elliptique

3.2.2.1 Monodromie locale.

Soit $\pi : X \rightarrow C$ une surface elliptique sur un disque C de \mathbb{C} , telle que la fibre singulière soit au-dessus de 0. Si on fixe $c \neq 0$, on a une fibre non singulière $X_c = \pi^{-1}(c)$.

Soit $H_1(X_c, \mathbb{Z})$ son premier groupe d'homologie qui est un groupe abélien de dimension 2.

Soit γ un chemin fermé sur C autour de l'origine dans la direction positive (sens contraire des aiguilles d'une montre), d'origine et d'extrémité c . Les éléments de $H_1(X_t, \mathbb{Z})$ sont continûment transformés quand t se transforme le

long du chemin γ . On peut donc identifier $H_1(X_t, \mathbb{Z})$ avec $H_1(X_c, \mathbb{Z})$. On aura donc un automorphisme de $H_1(X_c, \mathbb{Z})$. Cet automorphisme est indépendant du choix de γ (il dépend seulement de la classe d'homotopie de γ), par conséquent on aura un élément bien défini de $Aut_{\mathbb{Z}}(H_1(X_c, \mathbb{Z}))$ appelé monodromie locale au voisinage de 0. Il est indépendant de c pour c assez proche de 0.

Si on choisit une 1-forme holomorphe ω sur X_c , alors l'intégration de ω le long des éléments de $H_1(X_c, \mathbb{Z})$ donne lieu à un isomorphisme entre $H_1(X_c, \mathbb{Z})$ et le réseau de périodes Λ_c . On peut donc voir la monodromie locale comme un automorphisme de ce réseau. En particulier, si (r_1, r_2) est une base de Λ_c , l'orientation des r_i est préservée par prolongement analytique le long de γ donc la monodromie locale doit avoir un déterminant égal à 1.

Si on fixe une base de $H_1(X_c, \mathbb{Z})$, on peut voir la monodromie locale comme un élément de $SL(2, \mathbb{Z})$ et si on ne fixe pas de base, alors on a naturellement une classe de conjugaison d'éléments de $SL(2, \mathbb{Z})$.

La monodromie locale dépend seulement du type de fibre comme on le voit dans le tableau suivant :

<i>Type de fibre</i>	<i>monodromie locale</i>	<i>Type de fibre</i>	<i>monodromie locale</i>
I_N	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	I_N^*	$\begin{pmatrix} -1 & -N \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
II	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	IV^*	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
III	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	III^*	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
IV	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	II^*	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 3.1 *Le germe de la fibre $\pi^{-1}(c)$ d'une surface elliptique avec une section $\pi : X \rightarrow C$ est déterminé par $J(c)$, $\text{mult}_c(J)$ et la monodromie locale.*

3.2.2.2 Monodromie globale.

Soit $\pi : X \rightarrow C$, une surface elliptique et S l'ensemble des points $c \in C$ tels que $\pi^{-1}(c)$ soit une fibre singulière.

On a la monodromie globale $G : \pi_1(C \setminus S) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ (après avoir choisi un point de base et une base pour $H_1(X_c, \mathbb{Z})$, appelée invariant homologique de la surface elliptique au-dessus de C).

Soit $J : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ une application non constante et S un sous ensemble fini de C contenant

$J^{-1}(\{0, 1, \infty\})$, alors $J : C \setminus S \rightarrow \mathbb{C} - \{0, 1\}$ est bien définie et induit une application

$J_* : \pi_1(C \setminus S) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \{0, 1\})$. En composant avec l'application naturelle $\alpha : \pi_1(\mathbb{C} - \{0, 1\}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z})$ on obtient une application notée $J_* : \pi_1(C \setminus S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z})$. Le groupe $PSL(2, \mathbb{Z})$ est le groupe modulaire des transformations projectives

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1.$$

On dit que G appartient à J si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \text{monodromie globale} & \\ \pi_1(C - 0) & \longrightarrow & SL(2, \mathbb{Z}) \\ & \searrow & \downarrow \\ & J_* & PSL(2, \mathbb{Z}) \end{array}$$

où l'application verticale est l'application quotient naturelle.

Proposition 3.2 *Soit $\pi : X \rightarrow C$ une surface elliptique ne contenant pas de fibres multiples, soit $S \subset C$ un sous ensemble fini tel que $J^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \subseteq S$ et π lisse au dehors de S . Alors l'invariant homologique G appartient à J .*

Proposition 3.3 *Soit $J : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ une application non constante et $G :$*

$\pi_1(C - S) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ une représentation appartenant à J , alors il existe une unique fibration de Weierstrass $X(J, G)$ avec une application J et un invariant homologique G .

Théorème 3.4 Soit C une courbe et E/C une surface elliptique avec un invariant fonctionnel J non ramifié au dessus de $0, 1, \infty$. Alors le groupe de monodromie global $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ est $SL_2(\mathbb{Z})$.

3.2.3 Sous-groupes de congruence.

Soit $PSL_2(\mathbb{Z})$ le groupe modulaire agissant sur le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} . Soit Γ un sous groupe de $PSL_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini μ . On suppose que $A \neq I_2$, $A \in \Gamma$. Alors A admet un point fixe dans \mathbb{H} si $|tr(A)| = 0$ (resp.1), dans ce cas A est d'ordre 2 (resp.3); une telle transformation est dite elliptique et un point fixe est un point fixe elliptique. Si $|tr(A)| = 2$, A a un seul point fixe dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et A est d'ordre infini; la transformation est dite parabolique et le point fixe est une pointe. Les transformations hyperboliques correspondent à $|tr(A)| > 2$.

Soit g le genre du groupe Γ , qui est défini comme étant le genre de la surface de Riemann compacte $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$, et ν_k ($k = 2, 3$) le nombre de points fixes elliptiques non équivalents d'ordre k (ceux fixés par une transformation d'ordre k) et soit h le nombre de pointes non équivalentes, alors, la formule de Riemann-Hurwitz donne

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{h}{2}.$$

Le quadruplet (g, h, ν_2, ν_3) est appelé signature du sous-groupe Γ . Si $g = \nu_2 + \nu_3 = 0$, Γ est canoniquement engendré par l'ensemble des éléments paraboliques P_1, \dots, P_h avec la relation $P_1 \cdots P_h = 1$. Dans ce cas la formule précédente devient

$$\mu = 6(h - 2).$$

3.2. RAPPELS ET NOTATIONS

Il est montré dans Sebbar [39] qu'il existe exactement 33 classes de conjugaison de sous groupes de congruence de genre 0 de $PSL_2(\mathbb{Z})$ contenant des éléments non elliptiques :

Les groupes de congruence principaux $\Gamma(n)$ pour $n = 2, 3, 4, 5$.

Les sous groupes de congruence $\Gamma_0(n)$ pour $n = 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18$.

Les sous groupes de congruence $\Gamma_1(n)$ pour $n = 5, 7, 8, 9, 10, 12$.

Les intersections $\Gamma_0(4) \cap \Gamma(2)$, $\Gamma_0(3) \cap \Gamma(2)$, $\Gamma_0(8) \cap \Gamma(2)$, $\Gamma_0(2) \cap \Gamma(3)$, $\Gamma_1(8) \cap \Gamma(2)$, $\Gamma_0(16) \cap \Gamma_1(8)$ et $\Gamma_0(25) \cap \Gamma(5)$.

Les sous groupes de congruence

$$\Gamma(m; m/d, \varepsilon, \chi) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 + \frac{m}{\varepsilon\chi}\alpha & d\beta \\ \frac{m}{\chi}\gamma & 1 + \frac{m}{\varepsilon\chi}\delta \end{pmatrix}, \gamma \equiv \alpha \pmod{\chi(m)} \right\},$$

où le quadruplet $(m, d, \varepsilon, \chi)$ prend les valeurs

$$(8, 2, 1, 2), (12, 2, 1, 2), (16, 1, 2, 2), (27, 1, 3, 3), (8, 4, 1, 2), \\ (12, 2, 1, 2), (16, 2, 2, 2), (24, 1, 2, 2), (32, 1, 4, 2).$$

Ces groupes de congruence ont été étudiés par Larcher [54]. Les indices possibles pour ces 33 groupes dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ sont 6, 12, 24, 36, 48 et 60.

D'après ce qui précède, comme $\Gamma(2)$ et $\Gamma^0(4)$ (conjugué de $\Gamma_0(4)$ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$) sont d'indices 6 dans $PSL_2(\mathbb{Z})$, chacun des deux est engendré par deux transformations paraboliques.

Le groupe $\Gamma(2)$ est engendré par les transformations

$$z \rightarrow z + 2; \quad z \rightarrow \frac{z}{-2z + 1}$$

dont les matrices associées sont

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe $\Gamma^0(4) = A^{-1}\Gamma(2)A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est engendré par les transformations

$$z \rightarrow z + 4; z \rightarrow \frac{z}{-z + 1}$$

dont les matrices associées sont

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Exemples

- Pour la famille 3s.3s

$$y^2(x+1)^2 + y(2x^2 + (t+4)x + 2) + (x+1)^2 = 0,$$

$$J(t) = \frac{(t^2 + 16t + 16)^3}{t(t+16)},$$

l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée

$$y'' + y' \frac{3t+32}{t(t+16)} + y \frac{t+4}{t^2(t+16)} = 0.$$

et les fibres singulières au voisinage des singularités $0, -16$ et ∞ sont

$$\begin{array}{ccc} I_1^* & I_4 & I_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \infty & -16 \end{array}$$

D'après ce qui précède, les matrices de monodromie locale au voisinage des singularités $0, -16, \infty$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. EXEMPLES

Le groupe de monodromie globale M de la surface modulaire (3s.3s) est engendré par les transformations projectives

$$z \rightarrow \frac{z}{-z+1}; z \rightarrow \frac{17z+16^2}{-z-15} \text{ et } z \rightarrow z+4$$

dont les matrices correspondantes M_0, M_{-16} et M_∞ respectivement sont

$$\begin{aligned} M_0 &= N \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} N^{-1}, N \in SL_2(\mathbb{Z}), \\ M_{-16} &= P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, P \in SL_2(\mathbb{Z}), \\ M_\infty &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet, 0 est un point fixe pour M_0 donc si $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ avec $xu - zy = 1$ alors

$$M_0 = N \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} N^{-1} = \begin{pmatrix} xz - 1 & -x^2 \\ z^2 & -xz - 1 \end{pmatrix}$$

Comme M_0 doit fixer 0, $M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $x = 0$ et $-zy = 1$, soit $z = \pm 1$. Finalement

$$M_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par la même méthode,

$$M_{-16} = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + 16z^2 & 16^2 z^2 \\ -z^2 & 1 - 16z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16^2 \\ -1 & -15 \end{pmatrix},$$

et comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 17 & 16^2 \\ -1 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4,$$

donc la transformation associée à M_{-16} s'exprime en fonction des deux autres transformations d'où le groupe de monodromie globale M est engendré uniquement par les M_0 et M_∞ i.e. $M = \Gamma^0(4)$.

- Pour la surface elliptique

$$y^2 = x(x-1)(x-t)$$

$$J(t) = \frac{4}{27} \frac{1-t+t^2}{t^2(1-t)^2}$$

L'équation différentielle de Picard Fuchs associée est

$$t(1-t)y'' + (1-2t)y' - \frac{y}{4} = 0$$

Les fibres singulières au voisinage des singularités 0,1 et ∞ sont de types I_2^* , I_2 et I_2 respectivement.

Cette surface elliptique est modulaire pour le groupe de congruence $\Gamma(2)$.

En effet le groupe de monodromie globale M' est engendré par la transformation $z \rightarrow z + 2$ dont la matrice associée est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et une autre transformation dont la matrice associée est $A = P \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in SL_2(\mathbb{Z})$ et qui fixe 0. Alors si $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ avec $xu - yz = 1$ on

3.3. EXEMPLES

aura

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2xz & 2x^2 \\ -2z^2 & 1 + 2zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $M' = \Gamma(2)$.

Chapitre 4

Mesure de Mahler et series d'Eisenstein -Kronecker

4.1 Introduction.

Le lien entre la mesure de Mahler de familles de polynômes associés à des courbes de genre 1 et les conjectures de Bloch et beilinson pour les courbes elliptiques est maintenant bien établi. On peut consulter par exemple les articles de Boyd et Rodriguz-Villegas [6], [24]. Dans ce chapitre, on exprimera la mesure de Mahler logarithmique des polynômes P_k de la famille (2.3) comme la partie réelle d'une série d'Eisenstein-Kronecker.

4.2 Rappels et notations

4.2.1 Séries d'Eisenstein, polylogarithmes

Etant donné un réseau Λ de \mathbb{C} , on pose pour $m \geq 3$

$$G_m(\Lambda) := \sum'_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^m} = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^m}.$$

Remarque 4.1 $G_m(\Lambda) = 0$ si m est impair.

G_{2k} est appelée la série d'Eisenstein d'indice $2k$.

4.2.1.1 Propriétés modulaires des séries d'Eisenstein

On sait que les fonctions elliptiques de réseau Λ sont attachées à la cubique

$$Y^2 = 4X^3 - g_4X - g_6,$$

où $g_4 = g_4(\Lambda) = 60G_4(\Lambda)$, $g_6 = g_6(\Lambda) = 140G_6(\Lambda)$ avec

$$\begin{cases} \Delta(\Lambda) = g_4(\Lambda)^3 - 27g_6(\Lambda)^2 \\ j(\Delta) = 1728 \frac{g_4(\Lambda)^3}{\Delta(\Lambda)}. \end{cases}$$

Lorsque l'on fait une homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{C}^*$ sur le réseau Λ , on obtient les relations d'homogénéité

$$\begin{cases} G_{2k}(\alpha\Lambda) = \alpha^{-2k}G_{2k}(\Lambda) \\ \Delta(\alpha\Lambda) = \alpha^{-12}\Delta(\Lambda) \\ j(\alpha\Lambda) = j(\Lambda). \end{cases}$$

Ces relations nous permettent de nous ramener à un réseau du type

$$\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z},$$

avec $\tau \in \mathbb{H}$, le demi plan de Poincaré. Les véritables séries d'Eisenstein seront les fonctions $\tau \rightarrow G_{2k}(\Lambda_\tau)$.

Définition 4.1 On posera pour $k \geq 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{2k}(\tau) = \alpha^{-2k} G_{2k}(\Lambda_\tau) \\ \Delta(\tau) = \alpha^{-12} \Delta(\Lambda_\tau) \\ j(\tau) = j(\Lambda_\tau). \end{array} \right\}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Proposition 4.2 Si \mathbb{H} désigne le demi plan de poincaré. Alors

1. Les fonctions G_{2k} , Δ et j sont des fonctions holomorphes sur \mathbb{H} de période 1.
2. Ces fonctions vérifient les équation fonctionnelles

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{2k}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} G_{2k}(\tau) \\ \Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{12} \Delta(\tau) \\ j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j(\tau), \end{array} \right.$$

pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 4.3 1. Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur le demi plan de poincaré \mathbb{H} , holomorphe, périodique de période 1, et possédant une limite uniforme a_0 lorsque $\Im\tau$ tend vers $+\infty$. Alors f admet un q -développement du type

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2i\pi\tau}.$$

2. Si $k \geq 2$, on a

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n,$$

où

$$\sigma_h(n) = \sum_{\substack{d>0 \\ d \text{ divise } n}} d^h \text{ et } \zeta(2k) = \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m^{2k}}.$$

Définition 4.4 Les nombres de Bernoulli B_m ($m \geq 1$) sont définis par le développement en série

$$\frac{1}{e^t - 1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!}$$

et on pose $B_0 = 1$ et B_1, B_2, \dots sont donnés par

$$1 + 2B_1 = 0$$

$$1 + 3B_1 + 3B_2 = 0$$

$$1 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0$$

...

Définition 4.5 On définit les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ par la formule

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

Remarque 4.2 Si on définit $E_{2k}(\tau)$ par

$$G_{2k}(\tau) = \frac{2(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} E_{2k}(\tau),$$

on voit facilement, à l'aide de l'expression de $\zeta(2k)$ en fonction de π^{2k} et des nombres de Bernoulli que $E_{2k}(\tau) \in \mathbb{Q}[[q]]$.

Définition 4.6 On a les développements en série des premières formes d'Eisenstein

$$E_4(\tau) = \frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + 126q^5 + 252q^6 + \dots$$

$$E_6(\tau) = -\frac{1}{504} + q + 33q^2 + 244q^3 + 1057q^4 + \dots$$

...

Définition 4.7 *Le k -ième polylogarithme est la fonction définie par*

$$Li_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}, \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Par prolongement analytique, cette fonction peut-être définie sur $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$.

Pour étendre les polylogarithmes à tout le plan complexe, Zagier a proposé la définition suivante des polylogarithmes

$$\hat{\mathcal{L}}_k(x) = \hat{\mathcal{R}}_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^j B_j}{j!} (\log |x|)^j Li_{k-j}(x) \right),$$

où B_j désigne le j -ième nombre de Bernouilli et $\hat{\mathcal{R}}_k$ signifie \Re ou \Im suivant que k est impair ou pair.

Cette fonction est alors univaluée, analytique réelle dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ et continue dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Elle vérifie les équations fonctionnelles suivantes :

1. $\hat{\mathcal{L}}_k\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{k-1} \hat{\mathcal{L}}_k(x).$
2. $\hat{\mathcal{L}}_k(\bar{x}) = (-1)^{k-1} \hat{\mathcal{L}}_k(x)$

Pour $k = 2$, on obtient le dilogarithme de Bloch et Wigner

$$D(x) := \Im Li_2(x) + \log |x| \arg(1 - x).$$

On a les formules suivantes

1. $Li_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$
2. $Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
3. $q \frac{d}{dq}(Li_2(q^d)) = dLi_1(q^d)$
4. $dLi_2(x) = Li_1(x) \frac{dx}{x} = -\log(1-x) \frac{dx}{x}$
5. $\Im \frac{dx}{x} = d \arg(x)$
6. $\Re \frac{dx}{x} = d \log|x|$

4.2.2 Formes modulaires

Soit Γ un sous groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ contenant le sous groupe de congruence $\Gamma(N)$.

Définition 4.8 Une fonction méromorphe $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée une forme modulaire méromorphe de poids k relativement à Γ si

1. Condition de modularité : pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ et pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, on a

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

2. Condition de méromorphie aux pointes : pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, la fonction $(c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ admet un développement suivant les puissances de $q^{\frac{1}{N}}$, convergeant dans $C = \{q \in \mathbb{C}; 0 < |q| < 1\}$, qui n'admet qu'un nombre fini de termes d'exposants strictement négatifs.

Définition 4.9 On appelle forme modulaire une forme modulaire méromorphe qui est holomorphe partout, y compris à l'infini.

Définition 4.10 On appelle forme parabolique (cusp-form) une forme modulaire qui s'annule aux pointes.

Définition 4.11 *On appelle fonction modulaire une forme modulaire méromorphe de poids zéro.*

Soit Γ un sous groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$, on note par $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{S}_k(\Gamma)$) l'espace vectoriel complexe des formes (respectivement formes paraboliques) de poids k relativement à Γ .

4.3 Mesure de Mahler des polynômes P_k de la famille (2.3) et séries d'Eisenstein-Kronecker

On rappelle la famille de polynômes (2.3) déjà vue au chapitre 2.

$$P_k(x, y) = y^2(x + 1) + y(x^2 + kx + 1) + x^2 + x.$$

Soit χ le caractère de Dirichlet χ_{-3} réel impair de conducteur 3 tel que

$$\begin{aligned}\chi_{-3}(n) &= 0 \text{ si } n \equiv 0(3), \\ \chi_{-3}(n) &= 1 \text{ si } n \equiv 1(3), \\ \chi_{-3}(n) &= -1 \text{ si } n \equiv 2(3).\end{aligned}$$

Soit \mathcal{F} un domaine fondamental du groupe de congruence $\Gamma_1(6)$ et K le domaine correspondant du plan complexe en bijection avec \mathcal{F} , défini par les k vérifiant

$$\begin{aligned}\tau &\in \mathcal{F} \\ \frac{1}{3-k} &= t(\tau) \\ t(\tau) &= \frac{\eta(6\tau)^8 \eta(\tau)^4}{\eta(3\tau)^4 \eta(2\tau)^8} = q - 4q^2 + 10q^3 - 20q^4 + 39q^5 + \dots,\end{aligned}$$

où $\eta(\tau)$ désigne la fonction de Dedekind

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \pi(1 - q^n) \quad \text{avec } q = e^{2i\pi\tau}.$$

Théorème 4.12 *Pour $k \in K$ et n'appartenant pas à l'ensemble des valeurs complexes pour lesquelles P_k s'annule sur le tore \mathbb{T}^2 , on a l'égalité :*

$$m(P_k) = \Re \left(-2i\pi\tau + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) \frac{e^{2i\pi n\tau}}{n} + 8 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) \frac{e^{4i\pi n\tau}}{2n} \right),$$

où $m(P_k)$ désigne la mesure de Mahler logarithmique de P_k .

Preuve : Posons $m(P_k) = m(k)$. Pour les k précédemment définis, on a l'égalité

$$m(k) = \Re(\tilde{m}(k)),$$

où la fonction holomorphe de k

$$\tilde{m}(k) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \ln \left((k-3) + \frac{(x+y+1)(xy+y+x)}{xy} \right) \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

et a pour dérivée par rapport à k ,

$$\tilde{m}'(k) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{(k-3) + \frac{(x+y+1)(xy+y+x)}{xy}} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}.$$

D'après le théorème des résidus de Poincaré, $\tilde{m}'(k)$ est une période de la courbe elliptique associée au polynôme P_k donc solution de l'équation différentielle de Picard-Fuchs associée à la famille de courbes définie par tous les P_k .

4.3. MESURE DE MAHLER DES POLYNÔMES P_k DE LA FAMILLE (2.3) ET SÉRIES D'EISENSTEIN-KRONECKER

D'après Verrill [56], la surface elliptique modulaire

$$(x + y + z)(xy + yz + xz) = \frac{1}{t}xyz$$

associée au groupe de congruence $\Gamma = \Gamma_1(6)$ admet pour équation de Picard-Fuchs au voisinage de 0 l'équation différentielle suivante

$$t(t-1)(9t-1)f'' + (27t^2 - 20t + 1)f' + 3(3t-1)f = 0. \quad (4.1)$$

Or cette surface est isomorphe à la surface définie par la famille (2.3),

$$(x + y + z)(xy + y + x) = -(k-3)xy.$$

En faisant le changement de variable $k-3 = -\frac{1}{t}$, on voit ainsi que

$$\tilde{m}'(k) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{t}{-1 + \frac{(x+y+1)(xy+y+x)}{xy}} \frac{dx dy}{x y}. \quad (4.2)$$

est solution de l'équation différentielle 4.1 au voisinage de $t = 0$.

Or d'après Verrill [56], l'équation différentielle 4.1 admet une solution $f \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ pour $\Gamma = \Gamma_1(6)$ de la forme

$$f = \frac{\eta(2\tau)^6 \eta(3\tau)}{(\eta(\tau))^3 \eta(6\tau)^2} = 1 + 3q + 3q^2 + 3q^3 + 3q^4 + \dots,$$

Le paramètre $t \in \mathcal{M}_0(\Gamma)$ s'écrit

$$t = \frac{\eta(2\tau)^8 \eta(\tau)^4}{\eta(3\tau)^4 \eta(2\tau)^8} = q - 4q^2 + 10q^3 - 20q^4 + 39q^5 + \dots$$

Ce qui permet d'exprimer f en fonction de t .

D'après Verrill [56], $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ avec $a_n = \sum_{p+q+r=n} \left(\frac{n!}{p!q!r!}\right)^2$.

Par identification, après développement en série de 4.2 par rapport à t , on trouve

$$\tilde{m}'(k) = -tf.$$

d'où

$$d\tilde{m} = -f \frac{dt}{t} = -f \frac{t'(q)dq}{t}.$$

D'après Verrill [55] $f(t) \frac{q \frac{dt}{dq}}{t}$ est une forme modulaire holomorphe de niveau 6. Considérons alors la série d'Eisenstein $L(q) \in \mathcal{M}_3(\Gamma_1(3))$

$$L(q) = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) q^n = q - 3q^2 + q^3 + 13q^4 + \dots$$

Alors $L(q) + L(q^2) \in \mathcal{M}_3(\Gamma)$ est une forme modulaire holomorphe de niveau 6. En calculant ensuite suffisamment de termes dans leur q -développement on peut montrer l'égalité

$$-f(t) \frac{q \frac{dt}{dq}}{t} = -1 + L(q) + 8L(q^2),$$

donc

$$d\tilde{m} = \left(-\frac{1}{q} + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) q^{n-1} + 8 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) q^{2n-1} \right) dq.$$

Après intégration entre k et $+\infty$, correspondant à une intégration entre q et ∞ .

$$\tilde{m}(k) = -\log q + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) \frac{q^n}{n} + 8 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d) d^2 \right) \frac{q^{2n}}{2n},$$

4.3. MESURE DE MAHLER DES POLYNÔMES P_k DE LA FAMILLE (2.3) ET SÉRIES D'EISENSTEIN-KRONECKER

avec $q = e^{2i\pi\tau}$. D'où

$$\tilde{m}(k) = -2i\pi\tau + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d)d^2 \right) \frac{e^{2i\pi n\tau}}{n} + 8 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d)d^2 \right) \frac{e^{4i\pi n\tau}}{2n}$$

et par conséquent

$$m(k) = \Re \left(-2i\pi\tau + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d)d^2 \right) \frac{e^{2i\pi n\tau}}{n} + 8 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d/n} \chi(d)d^2 \right) \frac{e^{4i\pi n\tau}}{2n} \right).$$

□

Théorème 4.13 *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, on a*

$$\begin{aligned} m(k) &= \Re \left(\frac{9\sqrt{3}\Im\tau}{4\pi^2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\chi(n)}{(3m\tau + n)^2(3m\bar{\tau} + n)} \right) \\ &+ 8\Re \left(\frac{9\sqrt{3}\Im\tau}{4\pi^2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\chi(n)}{(6m\tau + n)^2(6m\bar{\tau} + n)} \right). \end{aligned}$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \tilde{m}(k) &= -2i\pi\tau + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 1(3)}} d^2 \right) \frac{e^{2i\pi n\tau}}{n} + 8 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 1(3)}} d^2 \right) \frac{e^{4i\pi n\tau}}{2n} \\ &- \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 2(3)}} d^2 \right) \frac{e^{2i\pi n\tau}}{n} - 8 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 2(3)}} d^2 \right) \frac{e^{4i\pi n\tau}}{2n}. \end{aligned}$$

On pose donc

$$\tilde{m}(k) = -2i\pi\tau + f(\tau) + 8g(\tau),$$

où

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 1(3)}} d^2 \right) \frac{q^n}{n} - \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 2(3)}} d^2 \right) \frac{q^n}{n}$$

et

$$g(\tau) = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 1(3)}} d^2 \right) \frac{q^{2n}}{2n} - \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 2(3)}} d^2 \right) \frac{q^{2n}}{2n} = \frac{1}{2}f(2\tau)$$

Posant alors $n = dn'$, il vient

$$\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 1(3)}} d^2 \right) \frac{q^n}{n} = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ d \equiv 1(3)}} d Li_1(q^d).$$

Grâce à la formule

$$q \frac{d}{dq} (Li_2(q^d)) = d Li_1(q^d),$$

on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 1(3)}} d^2 \right) \frac{q^n}{n} = q \frac{d}{dq} \sum_{d \geq 0} Li_2(q^{3d+1}).$$

Posons

$$L_j(x) = \sum_{d \geq 0} (Li_2(q^{3d+j}x)), \quad 1 \leq j \leq 2,$$

et

$$H_1(x) = L_1(x) - L_2\left(\frac{1}{x}\right).$$

4.3. MESURE DE MAHLER DES POLYNÔMES P_k DE LA FAMILLE (2.3) ET SÉRIES D'EISENSTEIN-KRONECKER

On a

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} H_1(1)$$

Lemme 4.14 *On pose*

$$f_1(x) = a \log^3 x + b \log^2 x + c \log x.$$

Pour

$$a = \frac{-1}{18 \log q}, \quad b = \frac{\log q + 2i\pi}{12 \log q} \quad \text{et} \quad c = \frac{-3 \log^2 q + 6i\pi \log q - 4\pi^2}{36 \log q},$$

alors la fonction $H_1(x) + f_1(x)$ est invariante par l'application $x \rightarrow q^3 x$.

Preuve : *En effet, on a $H_1(q^3 x) - H_1(x) = \frac{(2i\pi)^2}{2} B_2\left(\frac{\log qx}{2i\pi}\right)$ avec $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, d'où*

$$H_1(q^3 x) - H_1(x) = \frac{1}{2} \log^2 x + \log x [\log q - i\pi] + \frac{1}{2} \log^2 q - i\pi \log q - \frac{\pi^2}{3}.$$

On a

$$H_1(q^3 x) - H_1(x) = f_1(x) - f_1(q^3 x),$$

et

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_1(q^3 x) &= \log^2 x [-9a \log q] + \log x [-27a \log^2 q - 6b \log q] \\ &\quad + [-27a \log^3 q - 9b \log^2 q - 3c \log q], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} -9a \log q &= \frac{1}{2} \\ -27a \log^2 q - 6b \log q &= \log q - i\pi \\ -27a \log^3 q - 9b \log^2 q - 3c \log q &= \frac{1}{2} \log^2 q - i\pi \log q - \frac{\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

en résolvant l'équation, on a

$$\begin{aligned} a &= \frac{-1}{18 \log q}, \\ b &= \frac{\log q + 2i\pi}{12 \log q}, \\ c &= \frac{-3 \log^2 q + 6i\pi \log q - 4\pi^2}{36 \log q}. \end{aligned}$$

□

On va maintenant développer en série de Fourier de la variable ξ la fonction $H_1(e^{2i\pi\tau\xi}) + f_1(e^{2i\pi\tau\xi})$, qui est invariante par le changement $\xi \rightarrow \xi + 3$, sur l'intervalle $[-1, 2]$.

On pose $x = e^{2i\pi\tau\xi}$, alors

$$\begin{aligned} f_1(e^{2i\pi\tau\xi}) &= \frac{2}{9}\pi^2\tau^2\xi^3 + \left(-\frac{1}{3}\pi^2\tau - \frac{1}{3}\pi^2\tau^2\right)\xi^2 + \left(\frac{1}{3}\pi^2\tau + \frac{1}{9}\pi^2 - \frac{1}{3}\pi^2\tau^2\right)\xi \\ &= f_1(e^{2i\pi\tau\xi}) = \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{2}{9}\pi^2\tau^2, \beta = \left(-\frac{1}{3}\pi^2\tau - \frac{1}{3}\pi^2\tau^2\right), \gamma = \frac{1}{3}\pi^2\tau + \frac{1}{9}\pi^2 - \frac{1}{3}\pi^2\tau^2.$$

4.3. MESURE DE MAHLER DES POLYNÔMES P_k DE LA FAMILLE (2.3) ET SÉRIES D'EISENSTEIN-KRONECKER

Lemme 4.15 *On a*

$$\int_{-1}^2 \xi^3 e^{\frac{-2i\pi n}{3}} d\xi = \left(-\frac{3^3}{2\pi i n} + \frac{3^4}{4\pi^2 n^2} + \frac{3^5}{4\pi^3 n^3 i}\right) e^{\frac{2i\pi n}{3}}, \quad n \neq 0$$

$$\int_{-1}^2 \xi^3 d\xi = \frac{15}{4},$$

$$\int_{-1}^2 \xi^2 e^{\frac{-2i\pi n}{3}} d\xi = \left(-\frac{3^2}{2\pi n i} + \frac{3^3}{2\pi^2 n^2}\right) e^{\frac{2i\pi n}{3}}, \quad n \neq 0$$

$$\int_{-1}^2 \xi^2 d\xi = 3,$$

$$\int_{-1}^2 \xi e^{\frac{-2i\pi n}{3}} d\xi = -\frac{3^2}{2i\pi n} e^{\frac{2i\pi n}{3}}, \quad n \neq 0$$

et

$$\int_{-1}^2 \xi d\xi = \frac{3}{2}.$$

Par conséquent

$$f_1(1) = \sum_{n \neq 0} C_n + C_0,$$

où

$$C_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 (\alpha \xi^3 + \beta \xi^2 + \gamma \xi) e^{\frac{-2i\pi \xi n}{3}} d\xi$$

et

$$C_0 = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 (\alpha \xi^3 + \beta \xi^2 + \gamma \xi) d\xi.$$

Donc

$$\begin{aligned} 3f_1(1) &= \alpha \sum_{n \neq 0} \int_{-1}^2 \xi^3 e^{\frac{-2i\pi \xi n}{3}} d\xi + \beta \sum_{n \neq 0} \int_{-1}^2 \xi^2 e^{\frac{-2i\pi \xi n}{3}} d\xi + \\ &\quad \gamma \sum_{n \neq 0} \int_{-1}^2 \xi e^{\frac{-2i\pi \xi n}{3}} d\xi + \alpha \int_{-1}^2 \xi^3 d\xi + \beta \int_{-1}^2 \xi^2 d\xi + \gamma \int_{-1}^2 \xi d\xi. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à τ , on a

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\tau} (3f_1(1)) = -\frac{9}{4i\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{\frac{2i\pi n}{3}}}{n^2} - \frac{27\tau}{2\pi^2} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{\frac{2i\pi n}{3}}}{n^3} + i\left(\frac{\pi\tau}{6} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Donc

$$3\Re\left(\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\tau} f_1(1)\right) = \Im\left(\frac{27\tau}{2\pi^2}\right) \sum_{n \neq 0} \frac{\sin \frac{2\pi n}{3}}{n^3} - \frac{\pi}{6} \Im\tau.$$

On a

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\sin \frac{2\pi n}{3}}{n^3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^2}.$$

D'après Knapp [18]

$$L(\chi, 3) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^2} = \frac{4\pi^3}{3^4\sqrt{3}},$$

par conséquent,

$$\Im\left(\frac{27\tau}{2\pi^2}\right) \sum_{n \neq 0} \frac{\sin \frac{2\pi n}{3}}{n^3} = \frac{\pi}{6} \Im\tau,$$

d'où

$$3\Re\left(\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\tau} f_1(1)\right) = 0.$$

Il nous reste à évaluer le développement en série de Fourier de $H_1(e^{2i\pi\tau\xi})$.

On pose $H(\xi) = H_1(e^{2i\pi\tau\xi})$, d'où

$$H(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-\frac{2i\pi n}{3}}$$

4.3. MESURE DE MAHLER DES POLYNÔMES P_k DE LA FAMILLE (2.3) ET SÉRIES D'EISENSTEIN-KRONECKER

et

$$C_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 H(\xi) e^{-\frac{2i\pi n\xi}{3}} d\xi.$$

On a

$$H(\xi) = H_1(e^{2i\pi\tau\xi}) = [L_1(e^{2i\pi\tau\xi}) - L_2(e^{-2i\pi\tau\xi})]$$

donc

$$C_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 L_1(e^{2i\pi\tau\xi}) e^{-\frac{2i\pi n\xi}{3}} d\xi - \frac{1}{3} \int_{-1}^2 L_2(e^{-2i\pi\tau\xi}) e^{-\frac{2i\pi n\xi}{3}} d\xi.$$

Lemme 4.16

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^2 L_1(e^{2i\pi\tau\xi}) e^{-\frac{2i\pi n\xi}{3}} d\xi = - \sum_{m \geq 1} \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{m^2} \frac{e^{-\frac{2i\pi n}{3}}}{(3m\tau - n)}$$

et

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^2 L_2(e^{-2i\pi\tau\xi}) e^{-\frac{2i\pi n\xi}{3}} d\xi = - \sum_{m \geq 1} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{m^2} \frac{e^{-\frac{2i\pi n}{3}}}{(3m\tau + n)}.$$

Preuve : En effet, par définition

$$L_1(e^{2i\pi\tau\xi}) = \sum_{d \geq 0} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{2i\pi\tau(3d+1)m} e^{2i\pi\tau\xi m}}{m^2}$$

On a

$$L_1(e^{2i\pi\tau\xi}) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} \sum_{d \geq 0} e^{2i\pi\tau m(3d+1+\xi)}.$$

Il faut donc calculer

$$I_d = \int_{-1}^2 e^{2i\pi\tau m(3d+1+\xi)} e^{\frac{-2i\pi n\xi}{3}} d\xi.$$

A l'aide du changement de variables $\xi' = \xi + 3d + 1$,

$$I_d = e^{\frac{2i\pi n}{3}} \int_{3d}^{3(d+1)} e^{2i\pi(m\tau - \frac{n}{3})\xi'} d\xi'$$

$$\int_{-1}^2 L_1(e^{2i\pi\tau\xi}) e^{\frac{-2i\pi n\xi}{3}} d\xi = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} e^{\frac{2i\pi n}{3}} \int_0^{+\infty} e^{2i\pi(m\tau - \frac{n}{3})\xi'} d\xi',$$

d'où

$$\int_{-1}^2 L_1(e^{2i\pi\tau\xi}) e^{\frac{-2i\pi n\xi}{3}} d\xi = -3 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{m^2} \frac{e^{\frac{2i\pi n}{3}}}{(3m\tau - n)}.$$

En utilisant le changement de variables $\xi' = 3d + 2 - \xi$, on obtient

$$\int_{-1}^2 L_2(e^{-2i\pi\tau\xi}) e^{\frac{-2i\pi n\xi}{3}} d\xi = -3 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{m^2} \frac{e^{\frac{2i\pi n}{3}}}{(3m\tau + n)}.$$

Il résulte alors des calculs précédents les égalités suivantes

$$H_1(1) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \neq 0} \left(\sum_{m \geq 1} \frac{e^{\frac{2i\pi n}{3}}}{m^2} \left(\frac{1}{3m\tau - n} - \frac{1}{3m\tau + n} \right) \right)$$

4.3. MESURE DE MAHLER DES POLYNÔMES P_k DE LA FAMILLE (2.3) ET SÉRIES D'EISENSTEIN-KRONECKER

et

$$\Re\left(\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} H_1(1)\right) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \frac{3}{m} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \Re\left(\frac{1}{(3m\tau + n)^2}\right) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \frac{3}{m} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \Im\left(\frac{1}{(3m\tau + n)^2}\right).$$

Par un simple calcul, on montre

$$\sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \frac{3}{m} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \Re\left(\frac{1}{(3m\tau + n)^2}\right) = 0$$

et

$$\frac{1}{m} \left(\frac{1}{(3m\tau + n)^2}\right) = -6\Im\tau \Re\left(\frac{1}{(3m\tau + n)^2(3m\bar{\tau} + n)}\right).$$

On obtient finalement

$$\Re\left(\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} H_1(1)\right) = \Re\left(\frac{3^2\Im\tau}{2\pi^2} \sum_{m \neq 0, n \neq 0} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{(3m\tau + n)^2(3m\bar{\tau} + n)}\right).$$

□

D'après ce qui précède

$$m(k) = \Re(-2i\pi\tau + f(\tau) + 8g(\tau)),$$

avec

$$\Re(f(\tau)) = \Re\left(\frac{3^2\Im\tau}{2\pi^2} \sum_{m \neq 0, n \neq 0} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{(3m\tau + n)^2(3m\bar{\tau} + n)}\right)$$

et

$$\Re(g(\tau)) = \frac{1}{2}\Re(f(2\tau)) = \Re\left(\frac{3^2\Im\tau}{2\pi^2} \sum_{m \neq 0, n \neq 0} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{(6m\tau + n)^2(6m\bar{\tau} + n)}\right).$$

i.e.

$$\Re(f(\tau)) = \Re\left(\frac{3^2\sqrt{3}\Im\tau}{4\pi^2} \sum_{m \neq 0, n \neq 0} \frac{\chi(n)}{(3m\tau + n)^2(3m\bar{\tau} + n)}\right)$$

et

$$\Re(g(\tau)) = \Re\left(\frac{3^2\sqrt{3}\Im\tau}{4\pi^2} \sum_{m \neq 0, n \neq 0} \frac{\chi(n)}{(6m\tau + n)^2(6m\bar{\tau} + n)}\right).$$

Enfin,

$$m(k) = 2\pi\Im(\tau) + \Re(f(\tau)) + 8\Re(g(\tau)).$$

En calculant le terme de la somme double correspondant à $m = 0$, on aura

$$\frac{3^4\sqrt{3}\Im(\tau)}{2\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^3} = 2\pi\Im(\tau),$$

donc

$$\begin{aligned} m(k) &= \Re\left(\frac{3^2\sqrt{3}\Im\tau}{4\pi^2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\chi(n)}{(3m\tau + n)^2(3m\bar{\tau} + n)}\right) \\ &+ 8\Re\left(\frac{3^2\sqrt{3}\Im\tau}{4\pi^2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\chi(n)}{(6m\tau + n)^2(6m\bar{\tau} + n)}\right). \end{aligned}$$

□

Chapitre 5

Identités entre mesures de Mahler

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnerons le lien qui existe entre la mesure de Mahler et le régulateur elliptique et en enchaînant sur les mêmes idées que Rodriguez-Villegas [38], nous établirons l'égalité de mesures de Mahler suivante entre les surfaces (3s.3s) et (1.3)

$$2m(y^2 + y(x^2 + kx + 1) + x^2) = m((X + 1)^2(Y + 1)^2 - k^2XY),$$

pour $k \in \mathbb{R}$.

5.2 Rappels et notations

Pour plus de détails se référer à Rodriguez-Villegas [38], [37].

5.2.1 Le groupe $K_2(E)$

Définition 5.1 Soit F un corps. Un symbole de Steinberg sur F à valeurs dans un groupe abélien G est une application

$$\{ , \} : F^* \times F^* \rightarrow G$$

vérifiant

1. $\{u_1u_2, v\} = \{u_1, v\} + \{u_2, v\} \quad \forall u_1, u_2, v \in F^*$.
2. $\{u, v\}^{-1} = \{v, u\} \quad \forall u, v \in F^*$.
3. $\{u, 1 - u\} = 1 \quad \forall u \in F^*$.

Théorème 5.2 (Matsumoto) Soit F un corps. Alors $K_2(F)$, le deuxième groupe de K -théorie de F , est le groupe engendré par les symboles de Steinberg $\{u, v\}$, $u, v \in F^*$.

Proposition 5.3 On a la bijection suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{homomorphismes} \\ K_2(F) \rightarrow G \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{symboles sur } F \\ \text{à valeurs dans } G \end{array} \right\}.$$

Par exemple, si v désigne une valuation discrète sur un corps F , d'anneau de valuation A , ayant un unique idéal maximal $\mathcal{M} \subset A$ et de corps résiduel $k = A/\mathcal{M}$, le symbole modéré de Tate est défini par

$$(x, y)_v \equiv (-1)^{v(x)v(y)} \frac{x^{v(y)}}{y^{v(x)}} \pmod{\mathcal{M}}.$$

Si $v(x) = v(y) = 0$, ce symbole est dit trivial.

Soit E une courbe elliptique définie sur \mathbb{Q} et $\mathbb{Q}(E)$ son corps de fonctions rationnelles. Pour $P \in E(\overline{\mathbb{Q}})$, on peut associer une valuation v_P sur $\mathbb{Q}(E)$ de

corps résiduel noté $\mathbb{Q}(P)$ et on définit l'homomorphisme

$$\lambda_P : K_2(\mathbb{Q}(E)) \rightarrow \mathbb{Q}(P)^*,$$

par $\lambda_P(\{x, y\}) = (x, y)_{v_P}$. D'où la suite exacte définissant $K_2(E)$ modulo la torsion comme le noyau de l'homomorphisme $\lambda = \bigcup_P \lambda_P$

$$0 \rightarrow K_2(E) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow K_2(\mathbb{Q}(E)) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\lambda} \bigcup_{P \in E(\overline{\mathbb{Q}})} \mathbb{Q}(P)^* \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \dots$$

Définition 5.4 *Le groupe $K_2(E)$ est défini modulo la torsion par l'isomorphisme*

$$K_2(E) \simeq \text{Ker} \lambda = \bigcap_P \text{Ker} \lambda_P \subset K_2(\mathbb{Q}(E)).$$

Donc un élément $\{x, y\} \in K_2(\mathbb{Q}(E)) \otimes \mathbb{Q}$ peut être vu comme un élément de $K_2(E) \otimes \mathbb{Q}$ à chaque fois que $(x, y)_{v_P} = 1$ pour tout $P \in E(\overline{\mathbb{Q}})$.

5.2.2 Polygone de Newton

Soit $P = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} a_{ij} x^i y^j$ un polynôme de Laurent, $P \in \mathbb{C}[x^\pm, y^\pm]$. Soit $\Delta(P)$ le polygone de Newton de P , qui représente l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^2 des points (i, j) satisfaisant $a_{ij} \neq 0$. On note τ une face de ce polygone et on écrit $\tau < \Delta$. On choisit une orientation de la face autour de $\Delta(P)$ et on numérote les points consécutifs du réseau d'entiers situés sur la face par $\tau(0), \tau(1), \dots$. Alors pour chaque face du polygone on peut associer un polynôme d'une variable $P_\tau(t)$

$$P_\tau(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} t^k \in \mathbb{C}[t],$$

appelé polynôme de la face.

Définition 5.5 *Le polynôme P est dit tempéré si les racines du polynôme $\prod_{\tau < \Delta} P_\tau$ sont des racines de l'unité.*

Remarque 5.1 *Si les P_τ sont unitaires avec des coefficients entiers, d'après le théorème de Kronecker, P tempéré est équivalent à dire que la mesure de Mahler logarithmique $m(P_\tau) = 0$ pour tout $\tau < \Delta$.*

Théorème 5.6 [37] *Si P est un polynôme de Laurent, $P \in \mathbb{Q}[x^\pm, y^\pm]$, définissant une courbe lisse \mathcal{C} de \mathbb{P}^2 , on a l'équivalence*

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \{x, y\}^N \in K_2(\mathcal{C})$$

$$\Updownarrow$$

P est tempéré

Toutes les familles de polynômes considérées sont tempérées, donc satisfont la trivialité des symboles modérés.

5.2.3 Le régulateur elliptique

Soit E une courbe elliptique et $\mathbb{Q}(E)$ son corps de fonctions.

Définition 5.7 *Si f et $g \in \mathbb{Q}(E)^*$. On définit la 1-forme différentielle de sur $E \setminus S$, où $S \subset E$ désigne l'ensemble des zéros et des pôles de f et g*

$$\eta(f, g) = \log |f| d \arg g - \log |g| d \arg f.$$

La forme satisfait les propriétés suivantes

1. $\eta(f, g) = -\eta(g, f)$
2. $\eta(f_1 f_2, g) = \eta(f_1, g) + \eta(f_2, g)$, $f_1, f_2, g \in \mathbb{Q}(E)^*$.

Définition 5.8 *L'application régulateur r d'une courbe elliptique E est définie par*

$$\begin{aligned} r : K_2(E) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \{f, g\} & \\ \text{tel que } \{f, g\}^N \in K_2(E), N \in \mathbb{N} &\mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \eta(f, g) \end{aligned}$$

où γ est un chemin bien orienté ne passant pas par les zéros et les pôles de f et g et engendrant le sous groupe $H_1(E, \mathbb{Z})^-$ de $H_1(E, \mathbb{Z})$ des cycles sur lesquels la conjugaison complexe agit par -1 , i.e. associés aux périodes imaginaires pures. Comme $\{f, g\} \in K_2(E)$, l'intégrale dépend seulement de la classe d'homologie de γ [37].

5.2.3.1 Mesure de Mahler et régulateur

Le lien entre la mesure de Mahler et le régulateur d'une courbe définie par un polynôme de deux variables est donné comme suit, on va supposer que

$$P(x, y) = (y - y_1(x))(y - y_2(x)) \in \mathbb{Z}[x, y]$$

avec

$$|y_1(x)y_2(x)| = 1, |y_1(x)| < 1 \text{ et } |y_2(x)| > 1 \forall x \in \mathbb{C} \text{ tel que } |x| = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{T^2} \log |(y - y_1(x))(y - y_2(x))| \frac{dx dy}{x y} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log |y_1(x)| \frac{dx}{x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log |y_2(x)| \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

grâce à la formule de Jensen.

On note

$$\sigma_1 = \{(x, y_1(x)) \in E(\mathbb{C}) / |x| = 1\},$$

orienté par x parcourant le cercle unité dans le sens direct.

Si σ_1 engendre $H_1(E, \mathbb{Z})^-$ et si $\{x, y\}^N \in K_2(E) \otimes \mathbb{Q}$, alors

$$m(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} \eta(x, y) = \pm r(\{x, y\}),$$

en effet,

$$\begin{aligned} r(\{x, y\}) &= \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} \eta(x, y) \\ &= \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} \log |y| d \arg x \\ &= \pm \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma_1} \log |y_2(x)| \frac{dx}{x} \\ &= \pm m(P). \end{aligned}$$

5.2.4 Le dilogarithme elliptique

Soit E une courbe elliptique définie sur \mathbb{C} . On a deux représentations de $E(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} E(\mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathbb{C}^*}{q^{\mathbb{Z}}} \\ (\mathcal{P}(u), \mathcal{P}'(u)) &\longmapsto u \pmod{\Lambda} \longmapsto z = e^{2i\pi u} \end{aligned}$$

où \mathcal{P} est la fonction \mathcal{P} de weierstrass, Λ le réseau $\{\tau, 1\}$, $\tau \in \mathcal{H}$ et $q = e^{2i\pi\tau}$.

Définition 5.9 *Le dilogarithme elliptique D^E est défini par*

$$D^E(P) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D(q^n z),$$

où D désigne le dilogarithme de Bloch et Wigner défini par

$$D(z) = \Im(Li_2(z)) + \log |z| \arg(1 - z),$$

5.2. RAPPELS ET NOTATIONS

avec $\arg(1 - z) \in [-\pi, \pi]$, et où

$$\begin{aligned} Li_2(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}, |z| < 1, \\ Li_2(z) &= - \int_0^z \log(1 - u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Le dilogarithme elliptique admet une autre représentation en terme de série d'Eisenstein-Kronecker

$$D^E(P) = \frac{(\Im(\tau))^2}{\pi} \Re \left(\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{\exp(2i\pi(n\xi - m\eta))}{(m\tau + n)^2(m\bar{\tau} + n)} \right)$$

avec $z = e^{2i\pi u}$, $u = \xi\tau + \eta$.

Théorème 5.10 *Le dilogarithme elliptique étendu par linéarité aux diviseurs de $E(\mathbb{C})$ est défini par*

$$D^E((f)) = \sum_i n_i D^E(P_i),$$

$$si (f) = \sum_i n_i [P_i].$$

De plus si $\{f, g\} \in K_2(E)$, on a la relation

$$r(\{f, g\}) = D^E((f) \diamond (g)),$$

où l'application losange est définie par

$$(f) \diamond (g) = \sum_{m, n} a_n b_m cl((P_n - Q_m))$$

si $(f) = \sum_n a_n P_n$ et $(g) = \sum_m b_m Q_m$ et cl désigne la classe modulo la relation d'équivalence $cl(-P) = cl(P)$. En particulier

$$r(\{f, 1 - f\}) = D^E((f) \diamond (1 - f)) = 0.$$

5.3 Théorème principal

Le résultat suivant provient des observations faites sur les tables de Boyd [6] et Rodriguez-Villegas donnant la mesure de Mahler des polynômes

$$y^2 + y(x^2 + kx + 1) + x^2$$

où k ou k^2 est un entier et les tables de Touafek [57] donnant la mesure de Mahler des polynômes

$$(X + 1)^2(Y + 1)^2 + lXY$$

où l ou l^2 est un entier.

Théorème 5.11 ([14]) *Pour $k \in \mathbb{R}$, on a la relation*

$$2m(y^2 + y(x^2 + kx + 1) + x^2) = m((X + 1)^2(Y + 1)^2 - k^2XY)$$

Preuve : Soit S_1 la surface elliptique rationnelle correspondant à la famille (1.3) définie par

$$(S_1) \quad y^2 + y(x^2 + kx + 1) + x^2 = 0$$

avec un invariant fonctionnel \mathcal{J}_{S_1}

$$\mathcal{J}_{S_1} = \frac{(k^4 - 16k^2 + 16)^3}{k^2(k^2 - 16)}$$

5.3. THÉORÈME PRINCIPAL

et S_2 la surface elliptique rationnelle correspondant à la famille (3s.3s) définie par

$$(S_2) \quad (X + 1)^2(Y + 1)^2 + lXY = 0$$

avec un invariant \mathcal{J}_{S_2}

$$\mathcal{J}_{S_2} = \frac{(l^2 + 16l + 16)^3}{l(l + 16)}.$$

La surface S_2 est une surface elliptique modulaire avec des fibres singulières de types I_1^* , I_1 et I_4 au dessus de $0, -16$ et ∞ respectivement. Si on effectue le changement $l = -k^2$ [34], on obtient la surface (1.3) qui est également une surface elliptique rationnelle, qu'on notera \tilde{S}_2 , avec des fibres singulières I_2, I_1, I_1 et I_8 au dessus de $0, 4, -4$ et ∞ respectivement. D'après le chapitre 4, \tilde{S}_2 est modulaire et on a

$$\mathcal{J}_{\tilde{S}_2} = \frac{(k^4 + 16k^2 + 16)^3}{k^2(k^2 - 16)} = \mathcal{J}_{S_1}$$

Comme les deux surfaces S_1 et \tilde{S}_2 ont le même invariant \mathcal{J} et la même monodromie, elles sont donc isomorphes [43]. On peut déterminer l'isomorphisme

$$x = -\frac{(X + 1)(Y + 1)}{k}$$

et

$$y = Y.$$

On désigne par m_k (resp. m_{k^2}) la mesure de Mahler des polynômes de deux variables

$P_k = y^2 + y(x^2 + kx + 1) + x^2$, (resp. $Q_k = (X + 1)^2(Y + 1)^2 - k^2XY$). Comme les deux polynômes sont tempérés leurs mesures de Mahler sont liées à leurs régulateurs correspondants.

$$m_k = \frac{1}{2}r(\{x, y\}_k) \tag{5.1}$$

$$m_{k^2} = \frac{1}{2}r(\{X, Y\}_{k^2}) \quad (5.2)$$

Les formules 5.1 et 5.2 sont prouvées dans [60] et [57] respectivement. En utilisant l'application losange on déduit que

$$\begin{aligned} (x) \diamond (y) &= - \left(\frac{(X+1)(Y+1)}{k} \right) \diamond (Y) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(X+1)^2(Y+1)^2}{k^2} \right) \diamond (Y) \\ &= \frac{1}{2}(XY) \diamond (Y) \\ &= \frac{1}{2}(X) \diamond (Y) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} r(\{x, y\}_k) &= \frac{1}{2}r(\{X, Y\}_{k^2}) \\ 2m_k &= m_{k^2} \end{aligned}$$

□

Chapitre 6

Annexe

6.1 Introduction

Dans cette partie, nous expliquerons les changements de variables utilisés au chapitre 1 pour obtenir les expressions intégrales. Nous commencerons par donner un rappel de certaines notions. Pour plus de détails, on pourra consulter [\[61\]](#) .

6.2 Rappels

Un automorphisme d'une variété analytique \mathcal{M} est une application bijective analytique de \mathcal{M} sur lui même. Le groupe des automorphismes de \mathcal{M} est noté $\Gamma(\mathcal{M})$.

Lorsque $\mathcal{M} = \mathbb{P}^1$, $\Gamma(\mathcal{M})$ est l'ensemble des transformations de Möbius :

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ et } ad - bc \neq 0$$

On peut choisir les nombres a, b, c, d , sans restreindre à la généralité, de sorte que $ad - bc = 1$. On associe donc à tout automorphisme une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients complexes de déterminant égal à 1.

En remarquant que la transformation $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ est inchangée si on remplace

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

par $-A$, on obtient l'isomorphisme

$$\Gamma(\mathbb{P}^1) \simeq PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}.$$

On vérifie que $\Gamma(\mathbb{P}^1) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ respecte les opérations et que $\Gamma(\mathbb{P}^1)$ est engendré par :

- 1) Les translations $z \mapsto z + a$.
- 2) Les homothéties $z \mapsto bz$.
- 3) L'inversion $z \mapsto \frac{-1}{z}$.

Un élément de $\Gamma(\mathbb{P}^1)$ envoie trois points distincts sur trois autres points distincts. Par exemple,

$$z \mapsto \left(\frac{(b-a)}{(c-b)} \right) \times \left(\frac{(c-z)}{(z-a)} \right)$$

envoie a, b, c sur $\infty, 1, 0$ si l'un des points est à l'infini.

L'unique automorphisme $z \mapsto w$ qui envoie z_1, z_2, z_3 sur w_1, w_2, w_3 peut être exprimé par

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \frac{z_3 - z}{z - z_1} \longrightarrow \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3} \frac{w_3 - w}{w - w_1}$$

Cet automorphisme envoie le point z_4 sur w_4 si et seulement si les points z et les points w ont le même birapport.

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1} = \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3} \frac{w_3 - w_4}{w_4 - w_1}$$

et si l'un des points est à l'infini.

6.2. RAPPELS

On vérifie que $\Gamma(\mathbb{P}^1)$ préserve le birapport.

Le birapport est transformé sous l'action du groupe symétrique S_4 . Il est invariant par le sous-groupe

$$K = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par suite, pour "comprendre" l'action, on peut prendre $z_4 = +\infty$ et étudier l'action de $\frac{S_4}{K} \simeq S_3$ sur le rapport réduit $x = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$. Cela est illustré par la table

$$\begin{array}{cccccc} (123) & (321) & (132) & (231) & (312) & (213) \\ x & \frac{1}{x} & 1-x & \frac{1}{1-x} & \frac{x-1}{x} & \frac{x}{x-1}, \end{array}$$

pour $x \neq 0, 1, \infty$.

Les transformations $x \mapsto x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}$ forment le groupe des birapports anharmoniques, noté \mathfrak{H} qui est isomorphe à S_3 .

Les birapports harmoniques ont lieu lorsque deux birapports anharmoniques de x coïncident.

6.2.1 Equivalence des quartiques et des cubiques

L'équation d'une quartique est donnée par

$$y^2 = (x - e_0)(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

où les e_i , $0 \leq i \leq 3$, sont des racines distinctes.

On peut la réduire à une cubique

$$y^2 = (x - e'_1)(x - e'_2)(x - e'_3)$$

en utilisant les substitutions

$$x \rightarrow e_0 + (x - a)^{-1}$$

et

$$y \rightarrow by(x - a)^{-2}$$

avec

$$b^2 = \frac{1}{4}(e_0 - e_1)(e_0 - e_2)(e_2 - e_3)$$

En choisissant

$$a = -\frac{1}{3}[(e_1 - e_0)^{-1} + (e_2 - e_0)^{-1} + (e_3 - e_0)^{-1}]$$

on obtient de nouvelles racines

$$e'_i = a + (e_i - e_0)^{-1}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

vérifiant

$$e'_1 + e'_2 + e'_3 = 0$$

On peut également transformer une cubique en une quartique, ce qui identifie la quartique non singulière au tore.

La réduction de la quartique à la forme jacobienne

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$$

avec $k^2 \neq 0, 1$ est effectuée en utilisant la substitution

$$x \rightarrow \frac{ax + b}{cx + d}, \quad y \rightarrow \frac{y}{(cx + d)^2}$$

6.3. REMARQUE

Les nouvelles racines sont

$$e'_i = (de_i - a)(-ce_i + a)^{-1}$$

et peuvent être associées à $1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ par un choix de $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $ad - bc = 1$ et k peut être choisi tel que

$$\frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3} \frac{e_3 - e_4}{e_4 - e_1} = \frac{4k}{(1+k)^2}$$

6.3 Remarque

Nous remarquons dans le chapitre 1 que les changements de variables utilisés pour obtenir les expressions intégrales pour les familles

$$(3s.3s) \quad y^2(x+1)^2 + y(2x^2 + (l+4)x + 2) + (x+1)^2 = 0$$

$$(3.1) \quad y^2(x^2 + x + 1) + l y x + x^2 + x + 1 = 0$$

$$(3s.1) \quad y^2(x+1)^2 + l y x + (x+1)^2 = 0$$

$$(3s.3) \quad y^2(x+1)^2 + y(x^2 + (l+2)x + 1) + (x+1)^2 = 0$$

sont parmi ceux qui laissent la fonction J invariante, ce qui correspond aux racines de $J(l) - J(T)$ qui représentent le groupe des birapports anharmoniques.

- Pour la famille (3s.3s)

$$\begin{aligned} J(l) - J(T) = & \{(T+l+16)(l-T)\{(16l+l^2)T^4 \\ & + (512l+32l^2)T^3 + (4864l+560l^2 \\ & + 32l^3+l^4)T^2 + (12288l+4864l^2 \\ & + 512l^3+16l^4)T - 4096\}\} / \{(l+16)(T+16)Tl\} \end{aligned}$$

- Pour la famille (3.1)

$$\begin{aligned}
 J(l) - J(T) &= \{(Tl + 12)(T + l)(l - T)(Tl - 12) \\
 &\quad \{(l^2 - 4)T^4 + (144 - 40l^2 + l^4)T^2 - 4l^4 + 144l^2) \\
 &\quad ((-36l^2 + l^4)T^4 + (-36l^4 - 5184 + 1440l^2)T^2 \\
 &\quad - (5184l^2 - 20736))\} / \\
 &\quad \{(l + 6)(l + 2)(l - 2)(l - 6)(T + 6)(T + 2)(T - 2)(T - 6)T^4l^4\}
 \end{aligned}$$

- Pour la famille (3s.1)

$$\begin{aligned}
 J(l) - J(T) &= \{(T + l)(l - T)((l^2 - 64)T^4 \\
 &\quad + (9216 - 208l^2 + l^4)T^2 - 64l^4 + 9216l^2 - 331776)\} / \\
 &\quad \{(l + 8)(l - 8)(T + 8)(T - 8)\}
 \end{aligned}$$

- Pour la famille (3s.3)

$$\begin{aligned}
 J(l) - J(T) &= (T + l + 8)(l - T) \{(-48 + 8l + l^2)T^4 \\
 &\quad - 16l^2 + 16l^3 + l^4)T^2 + (36864 - 9216l \\
 &\quad - 640l^2 + 128l^3 + 8l^4)T + (-48l^4 - 768l^3 \\
 &\quad + 1536l^2 + 36864l - 114688)\} / \\
 &\quad \{(l - 4)(l + 12)(T - 4)(T + 12)\}
 \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] S.Ahlgren, B.C Berndt, A.J. Yee, A. Zaharescu, Integrals of Eisenstein series and derivatives of L-fonctions, *Int. Math. Res. Not.* 2002, n° 32, p.1723-1738.
- [2] B.C. Berndt et A. Zaharescu, An integral of Dedekind eta-functions in Ramanujan's lost notebook, *J.Reine Angew. Math.*, 551 (2002), p.33-39.
- [3] M.J. Bertin, Une mesure de Mahler explicite, *C.R.Acad.Sci.Paris*, t.333, Série I, p.1-3,2001.
- [4] J.Borwein and P.Borwein, *Pi and AGM, A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, J.Wiley and Sons, New York, 1986.
- [5] D.W.Boyd, Kronecker's Theorem and Lehmer's Problem for Polynomials in several Variables, *J. Number Theory* 13 (1981), 116-121.
- [6] D.W.Boyd, Mahler's Measure and Special Values of L-functions *Experimental Mathematics* 7, (1998), p.37-82.
- [7] D.W. Boyd, Speculations concerning the Range of Mahler's Measure, *Canad. Math. Bull.* 24 (1981), 453-469.
- [8] D. W. Boyd, Reciprocal polynomials having small measure, *Math. Comp.* 35, (1980), 1361-1377.

- [9] D. W. Boyd, Reciprocal polynomials having small measure II, *Math. Comp.* 53, (1989), 355-357.
- [10] S.Boughzala, *Mesure de Mahler de polynômes de deux variables*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, (Décembre 2000).
- [11] W.Fulton, *Algebraic Topology. A first course*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.
- [12] L.Benferhat, Mahler Measure and Integrals of Hypergeometric Functions, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, Volume 12, Number 1, 2008, Pages 49-59.
- [13] L.Benferhat, Integral Expression of Dirichlet L-series, *International Journal of Algebra*, (4) (1) (2010), Pages 277-289.
- [14] L.Benferhat, Mahler Measure and Modular Elliptic Surfaces, *Quaestiones Mathematicae* 33(2010), 1-13.
- [15] P.A.Griffiths and J.Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure and applied mathematics, Wiley-Interscience, New York 1978.
- [16] E.Hille, *Analytic Function Theory*, vol.II, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y. , 1977.
- [17] H.Mc Kean and V.Moll, *Elliptic curves, Function Theory, Geometry, Arithmetic*, Cambridge University Press, 1997.
- [18] A.W.Knapp, *Elliptic curves*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1992.
- [19] D. H. Lehmer, Factorization of certain cyclotomic functions, *Ann. of Math.* (2) 34 (1933), 461-479.
- [20] R.Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, Amer.Math.Soc,1995.

- [21] J.H.Silverman, The arithmetic of elliptic curves, Graduate Texts in Math., Springer, New York, 1986.
- [22] J.H.Silverman, Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.
- [23] S. Vandervelde, The Mahler Measure of Parametrizable Polynomials, preprint <http://www.mandelbrot.org/parampolys.pdf>
- [24] F.Rodriguez-Villegas, Modular Mahler Measures, preprint (1996).
- [25] M. Schutt And T. Shioda, Elliptic Surfaces, arXiv : 0907.0298v1 [math.AG], 2 Jul 2009.
- [26] M.Yoshida, Fuchsian Differential Equations, Aspects of Mathematics, A Publication of the Max-Planck-Institut,Vieweg,1987.
- [27] A. Beauville, Les familles stables de courbes elliptiques sur P^1 admettant quatre fibres singulières, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 294, (1982), 657-660.
- [28] D.W. Boyd & F. Rodriguez-Villegas, Mahler's measure and the dilogarithm I Canad. J. Math. **54** (2002), n0. 3, 468-492.
- [29] D.W. Boyd, F. Rodriguez-Villegas & N.M. Dunfield, Mahler's measure and the dilogarithm II arxiv.org/list/math.NT/0308041, 37 p.
- [30] C. Deninger, Deligne periods of mixed motives, K -theory and the entropy of certain Z^n -actions, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), n° .2, 259-281.
- [31] M. Lalin, Some examples of Mahler measures as multiple polylogarithms, J. Number Theory, **103** (2003), n° .1, 85-108.
- [32] J. McKay & Abdellah Sebbar, Arithmetic semistable elliptic surfaces, Proceedings on Moonshine and related topics (Montréal, QC, 1999), CRM Proc. Lecture Notes, **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001), 119-130.

- [33] V. Maillot, Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **80** (2000), 129p.
- [34] R. Miranda, The basic theory of elliptic surfaces, Dottorato di ricerca in matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, 1989.
- [35] M. Nori, On certain elliptic surfaces with maximal Picard number, Topology 24(2)(1985), 175-186.
- [36] C. Deninger, Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain \mathbb{Z}^n -actions, J Amer. Math. Soc. 10 (2) (1997), 259-281.
- [37] F. Rodriguez-Villegas, Modular Mahler Measures, preprint (1996).
- [38] F. Rodriguez-Villegas, Modular Mahler measures I, Topics in Number Theory (S.D. Ahlgren, G.E. Andrews & K. Ono, ed.), Kluwer, Dordrecht (1999), 17-48.
- [39] Abdellah Sebbar, Classification of torsion-free genus zero congruence groups, Proc. of the Amer. Math. Soc., **129**, n°9, 2517-2527.
- [40] H. Shiga, On $K3$ modular functions, Sugaku Expositions 1 (1988), n° .2, 195-217.
- [41] A. Neron, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 21 (1964), 128.
- [42] K. Kodaira. On compact analytic surfaces I-III, Ann. of Math. 71 (1960), 111-152; 77 (1963), 563-626; 78 (1963), 1-40.
- [43] P. Stiller, Special values of Dirichlet series, monodromy, and periods of automorphic forms. Mem. Math. Soc. 49 (299)(1984), 1-130.
- [44] C. J. Smyth, On measures of polynomials in several variables, Bull. Austral. Math. Soc 23 (1) (1981), 49-63.

- [45] S.Ahlgren, B.C Berndt, A.J. Yee, A. Zaharescu, Integrals of Eisenstein series and derivatives of L-fonctions, Int. Math. Res. Not. 2002, n° 32, p.1723-1738.
- [46] P.F.Byrd et M.D.Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer-Verlag,1954.
- [47] J.W.S Cassels, Lectures on elliptic curves, Cambridge University Press, 1992.
- [48] Yao-Han, Yifan Yang, and Noriko Yui, Monodromy of Picard-fuchs Differential Equations for Calabi-Yau Threefolds, arXiv : math. AG/0605675v3 15 Jan 2007.
- [49] J.Dieudonné, Abrégé d'Histoire des Sciences, Chapitre VII Fonctions elliptiques et intégrales elliptiques. Hermann.
[http ://www.mandelbrot.org/parampolys](http://www.mandelbrot.org/parampolys).
- [50] M-J. Bertin, Mahler's measure and L-series of $K3$ hypersurfaces, to appear in Poceedings of the 2003 Banff workshop on Calabi-Yau Varieties and Mirror Symmetry.
- [51] T.Shioda, On elliptic modular surfaces, J. Math. Soc. Japan, 24(1972), 20-59.
- [52] T.Sasai, Monodromy Representations of Homology of Certain Elliptic Surfaces, J.Math.Soc.Japan, Vol.26, No.2, 296-305 (1974).
- [53] J. Tate, Algorithmme for determining the type of a singular fiber in an elliptic pincil. In : Modular functions of one variable, IV (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), Lecture Notes in Math. 476, Springer, Berlin, 1975, 33-52.
- [54] Larcher, H. The cusp amplitudes of the congruence subgroups of classical modular group. II. Illinois J. Math. 28 (1984), 312-338. MR 85i ;11034.

- [55] H. A. Verrill, Some congruences related to modular forms, Max-Planck-institut für Mathematik preprint 1999 (26).
- [56] H. A. Verrill, Picard-Fuchs equations of some families of elliptic curves. Proceedings on Monshine and related topics (Montreal, QC, 1999), CRM Pro.Lecture Notes, 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [57] N.Touafek, Mesure de Mahler et Régulateur Elliptique : Quelques Nouvelles Relations Exotiques, Thèse de Doctorat, Université de Constantine, Algeria, 2008.
- [58] N.Touafek, unpublished result.
- [59] N. Touafek, Mahler's measure : proof of two conjectured formulae, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 16 (2009), 127-136.
- [60] M.J.Bertin, Mesure de Mahler et Régulateur Elliptique : Preuve de Deux Relations Exotiques, Centre de Recherche Mathématiques, CRM Proceedings and Lecture Notes, Volume 36, 2004.
- [61] Henry McKean & Victor Moll, Elliptic curves, Cambridge University Press.
- [62] J.Milnor, Introduction to algebraic K-theory, Annals of Mathematical Studies, vol.72, Princeton Univ.Press, Princeton, N.J., 1971.