

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE-ALGER



FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES

THÈSE

Présentée par

Mohand Ouamar HERNANE

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT D'ÉTAT EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres.

Sujet :

**MÉTHODES ASYMPTOTIQUES EN ANALYSE
ET THÉORIE DES NOMBRES**

Soutenue publiquement le 10 mai 2005.

Devant le jury composé de :

M. Benali	BENZAGHOU	Professeur	(U.S.T.H-B)	Président
M. Jean-Louis	NICOLAS	Professeur Emérite	(Université Lyon 1)	Directeur de thèse
M. Mohamed	ZITOUNI	Professeur	(U.S.T.H-B)	Examinateur
M. Michel	BALAZARD	Maitre de conférence	(Université Bordeaux 1)	Examinateur
M. Marc	DELEGLISE	Maitre de Conférence	(Université Lyon 1)	Examinateur

Remerciements

Je suis heureux de pouvoir exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean-louis NICOLAS de l'Université Claude Bernard LYON 1, pour m'avoir fourni le sujet de cette thèse et pour avoir patiemment dirigé durant des années, cette thèse avec sa précieuse aide scientifique, ses encouragements et son soutien moral sans réserve qui ont énormément contribué à l'aboutissement de cette recherche

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur Mohamed ZITOUNI, pour ses encouragements, ses conseils et son soutien scientifique, notamment en dirigeant notre groupe de travail et en organisant le séminaire hebdomadaire du Département d'Algèbre et de Théorie des Nombres de l'U.S.T.H.B. et pour avoir accepté de m'honorer en acceptant d'être membre du jury de cette thèse

J'apprécie au plus haut point, l'honneur que me fait Monsieur le Professeur Benali BENZAGHOU, en acceptant de consacrer son temps pour lire cette thèse et d'en présider le jury au vu de la surcharge de travail due à ses fonctions.

Je remercie infiniment Monsieur le Professeur Marc DELEGLISE, de l'Université Claude Bernard Lyon 1, pour sa gentillesse sa disponibilité et pour les connaissances en Maple que je lui dois et pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie infiniment Monsieur Michel BALAZARD, Professeur à l'Université de Bordeaux 1, pour s'être intéressé à ce travail et pour avoir bien voulu être membre du Jury.

Enfin je remercie toute personne physique ou morale qui directement ou indirectement a contribué à l'aboutissement de cette thèse. En particulier l'Institut Girard Désagues qui lors de mes différents séjours a mis les conditions favorables à ma disposition, Que Madame Monique Gaffier trouve ici mes sincères remerciements pour sa gentillesse.

Notations

Dans toute la suite $f(x) \sim g(x)$ signifie que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Nous désignerons par :

\log , le logarithme Népérien.

p_k le k -ième nombre premier tel que $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$

p un nombre premier.

$\pi(x)$ la fonction arithmétique qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x , on a :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

L'approximation de la fonction arithmétique π est le logarithme intégral :

$$\text{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right),$$

on a $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$.

$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$, désignant la fonction de Chebyshev, on a $\theta(x) \sim x$.

$\tau(n)$, la fonction de factorisation classique, qui compte le nombre de diviseurs de l'entier n , on a :

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

$\omega(n)$, la fonction qui compte le nombre de facteurs premiers de l'entier n .

$\Omega(n)$, nombre de facteurs premiers de l'entier n , comptés avec multiplicité.

$\mu(n)$, la fonction de Möbius.

$\zeta(s)$, la fonction Zéta de Riemann.

$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$, l'ensemble des nombres premiers.

$P(s) = \zeta_{\mathcal{P}}(s)$, pour $\Re s > 1$, appelée la *fonction ζ des nombres premiers*, on a :

$$P(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots, \quad \Re s > 1.$$

$v_p(n)$: la valuation p -adique de l'entier n (exposant de p dans la décomposition en produit de nombres premiers de l'entier n).

$[x]$: partie entière du nombre réel x .

Table des matières

Introduction	1
1 Localisation de zéros de familles de trinômes	7
1.1 Introduction	7
1.2 Solutions approchées : $z^{n+1} - (n+1)z + n = 0$	9
1.3 Solutions approchées : $z^{n+1} - az + a - 1 = 0$	12
1.4 Le théorème des fonctions implicites	15
1.5 Les zéros négatifs de G_n et H_n	19
1.6 Une série hypergéométrique	20
2 Grandes valeurs du nombre de factorisation d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers	23
2.1 Introduction	23
2.1.1 Diverses fonctions de factorisation	23
2.1.2 La fonction $\mathbf{h} = \mathbf{f}_p$	24
2.1.3 Grandes valeurs des fonctions de factorisation	25
2.1.4 Grandes valeurs de la fonction \mathbf{h}	26
2.1.5 Notations et remerciements	26
2.2 Approximation de $\log \mathbf{h}(\mathbf{n})$ par \mathbf{F}	27
2.3 Étude de λ et $\lambda_{\mathbf{k}}$	28
2.4 Un problème d'optimisation	32
2.5 Grandes valeurs de la fonction \mathbf{h}	34
2.6 Propriétés des nombres \mathbf{h} -champions	38
2.6.1 Encadrement de $\omega(\mathbf{N})$	38
2.6.2 Factorisation de \mathbf{N} : petits facteurs premiers	39
2.6.3 Factorisation de \mathbf{N} : grands facteurs premiers	41
2.6.4 Estimation de $\mathbf{Q}(\mathbf{X})$	43
2.6.5 Table des nombres \mathbf{h} -champions	46
2.7 Problèmes ouverts	46
3 Estimation des différences $\lambda - \lambda_k$ et $a - a_k$	48
3.1 Estimation de la différence $\lambda - \lambda_{\mathbf{k}}$	49
3.2 Estimation de la différence $\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}$	54

TABLE DES MATIÈRES

4	Calculs numériques.	57
4.1	Programmes du chapitre 1	58
4.1.1	Programme trinôme1	58
4.1.2	Programme trinôme2	61
4.1.3	Programme minimumdeA.	65
4.1.4	Programme Newton	66
4.2	Programmes du chapitre 2	67
4.2.1	Programme fonction $h(n)$	67
4.2.2	Programme champion	70
4.3	Table des λ_k et a_k	72
4.4	Tables des nombres h -champions	73
	Conclusion	79
	Bibliographie	80

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de deux problèmes indépendants, cependant les méthodes et techniques utilisées pour les deux problèmes sont similaires. Les méthodes asymptotiques en analyse et en théorie des nombres ainsi que certaines propriétés des fonctions arithmétiques et des résultats sur les nombres premiers sont les outils largement utilisés. Cette thèse est divisée en deux parties. La première traite un problème de localisation des zéros de deux familles de trinômes, c'est l'objet du chapitre 1. La seconde partie est constituée de deux chapitres, elle est consacrée au problème des grandes valeurs du nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers. Et d'un quatrième chapitre pour les annexes. Les deux premiers chapitres de cette thèse ont fait l'objet de deux publications ([24] et [26]).

Dans le premier chapitre, nous étudions la répartition des arguments des zéros de polynômes dans le plan complexe ce qui est d'un grand intérêt dans certains problèmes de physique, notamment en théorie du signal et dans les problèmes liés à la stabilité des solutions de certains problèmes de physique([42]).

Dans ([36]), en résolvant un problème provenant de la théorie du signal, les auteurs ont abouti à l'équation :

$$z + z^2 + \dots + z^n = n \quad \text{avec} \quad n \geq 1. \quad (0.0.1)$$

qui a une racine triviale $z = 1$; en multipliant (0.0.1) par $z - 1$, on obtient le trinôme

$$f(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n = 0. \quad (0.0.2)$$

Ce trinôme admet $z = 1$ comme racine double. Les résultats obtenus dans ([36]) sont les suivants :

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n = 1$, les racines de (0.0.1), les valeurs absolues $|z_k|$ satisfont.

$$\frac{n}{n-1} \leq |z_k| \leq (2n)^{1/n}, \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n \quad (0.0.3)$$

et

$$\left| \arg z_k - \frac{2k\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (0.0.4)$$

Ces résultats s'obtiennent grâce au théorème classique de Cauchy (cf. [38]), ainsi qu'au théorème d'Eneström-Keakeya (cf. [38]), ces résultats sont améliorés dans ([39]) par J.-L. Nicolas et A. Schinzel.

Dans notre thèse, nous considérons cette famille infinie de trinômes ainsi que deux autres familles de trinômes qui proviennent des polynômes caractéristiques des suites de Fibonacci $G_n(z)$ et $H_n(z)$, (cf. [10] et [29]) :

$$G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1, \quad \text{et} \quad H_n(z) = \varphi z^{n+1} - (\varphi - 1)z^n - 1 \quad (0.0.5)$$

INTRODUCTION

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Soit a un nombre réel, on pose :

$$f_{n,a}(z) = z^{n+1} - az^n + a - 1; \quad (0.0.6)$$

Ce trinôme est lié au trinôme $G_n(z)$ par

$$G_n(z) = z^{n+1} f_{n,\varphi}(1/z). \quad (0.0.7)$$

La relation (0.0.7), montre donc que G_n est le polynôme réciproque de $f_{n,\varphi}(z)$. Chacune de ces trois familles de trinômes admet $z = 1$ comme racine réelle triviale. En 1991, K. Dilcher a dans ([10]), montré que les $n+1$ racines de G_n sont simples, dont deux sont réelles positives, $z = 1$ et $x_{1,n}$; les $n-1$ autres racines sont de modules inférieurs à 1 et sont équidistribuées dans chacun des secteurs S_k , définis par :

$$(S_k) \quad \left| \arg z - \frac{2k\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (0.0.8)$$

Un encadrement de la racine réelle positive de G_n a été également obtenu :

$$\varphi^2(1 - \varphi^{-2n}) \leq x_{1,n} \leq \varphi^2(1 - \varphi^{-2n-1}).$$

Par contre H_n admet une racine réelle positive $z = 1$ et les n autres racines sont dans chacun des secteurs S'_k définis par :

$$(S'_k) \quad \left| \arg z - \frac{(2k+1)\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (0.0.9)$$

Suivant la parité de l'entier n , K. Dilcher a montré que G_n ou H_n admet une racine réelle négative $x_{2,n}$. Si n est pair c'est le trinôme G_n qui admet une racine réelle négative située dans le secteur $S_{n/2}$. Lorsque n est impair H_n admet une racine réelle négative qui se trouve dans le secteur $S'_{(n-1)/2}$. Il obtient pour n assez grand l'estimation :

$$x_{2,n} = -1 + (1 + o(1)) \frac{\log 5}{2n}.$$

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous apportons des précisions et des améliorations aux résultats cités plus haut concernant les trois familles de trinômes considérées. Nous améliorons la constante $A = 10^{40}$ du théorème 2 de [39]. Nous démontrons un résultat plus général pour le trinôme (0.0.6). Puis nous étudions le cas particulier $a = \varphi$.

Pour cela nous utilisons les trois méthodes suivantes :

Méthode des solutions approchées : Cette méthode consiste à trouver une solution approchée de l'équation considérée. Puis à l'aide de la formule de Taylor et du principe du maximum, nous montrons qu'il existe un zéro voisin de la solution approchée. A partir de la solution approchée, nous montrons qu'il existe une solution de l'équation. Nous appliquons cette méthode à la famille de trinômes (0.0.6).

En tenant compte de ce que les arguments des zéros de ce trinôme sont à peu près équidistribués et de modules proches de 1, (cf. [39]), on pose

$$z = r_k \exp \left(\frac{2ik\pi}{n+1} + i\psi_k \right).$$

INTRODUCTION

dans $f_{n,a}(z)$. En séparant dans l'expression obtenue les parties réelles et imaginaires puis en additionnant les carrés de celles-ci et en substituant $\psi_k = 0$ et $r_k = 1$, nous obtenons :

$$r_k^{2(n+1)} = 1 + 4a(a-1) \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}.$$

d'où l'on déduit la valeur de r_k donnée par (1.3.24) du théorème 1. Nous calculons ψ_k en substituant $r_k = 0$, dans la partie imaginaire de $f_{n,a} \left(r_k \exp \left(\frac{2ik\pi}{n+1} + i\psi_k \right) \right)$.

Cette méthode nous a permis de démontrer les théorèmes 1 et 2 du chapitre 1.

Méthode de Delange (méthode des fonctions implicites) : Cette méthode utilise essentiellement le théorème des fonctions implicites analytiques, dans sa version effective. Ce théorème est rappelé dans la proposition 2. Nous l'appliquons au trinôme (0.0.2). Dans l'équation $f(z) = 0$, on pose $z = \exp(xy)$ et $n = 1/x$. Après transformation de l'expression obtenue, nous aboutissons à la fonction implicite $F(x, y) = 0$. avec

$$F(x, y) = g(y) - g(-xy) \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}. \quad (0.0.10)$$

La fonction $F(x, y)$ est analytique dans \mathbb{C}^2 . On applique la proposition 1, avec $x_0 = 0$ et $y_0 = b$, puisque l'on a

$$F(0, b) = 0$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, b) \neq 0.$$

où b est une racine complexe non nulle de l'équation $\exp(t) - t - 1 = 0$. Ce qui nous permet d'en déduire qu'il existe une série entière

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$$

de rayon de convergence $R > 0$ et telle que $F(x, y(x)) = 0$. L'analyticité de la fonction $z(x) = \exp(xy(x))$ pour $|x| < R$; implique la valeur

$$z(x) = \exp(xy(x)) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m \quad (0.0.11)$$

et comme $x = 1/n$, $z(1/n)$ est bien racine de $f(z) = 0$. A l'aide du théorème des résidus, lorsque $b = 2.08 \dots + 7.46 \dots i$ est la racine de plus petit module de l'équation $\exp(z) = 1 + z$, on montre que l'on a $|c_m| \leq 1.4 \times 25^m$. Pour calculer les coefficients c_m , de la série (0.0.11), on pose

$$y(x) = b + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m$$

où les coefficients d_m sont indéterminés. Nous calculons les valeurs

$$\exp(y(x)) = \exp \left(b + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m \right)$$

INTRODUCTION

et $\exp(-xy(x))$. Puis nous identifions pour évaluer les coefficients d_m en écrivant :

$$F(x, y(x)) = 0$$

et en utilisant (0.0.10). Les coefficients c_m se calculent ensuite grâce à la relation (0.0.11). Nous appliquons aussi cette méthode pour démontrer le théorème 4, du chapitre 1, où nous donnons un développement en série entière suivant les puissances de $1/n$ pour le zéro négatif $x_{2,n}$ de H_n dans le cas n impair. Lorsque n est pair, à l'aide des mêmes calculs on obtient le développement en série du zéro $x_{2,n}$ de G_n , suivant :

$$x_{2,n} = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m}{n^m}$$

où \tilde{c}_m est obtenu en remplaçant dans c_m , $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$. La troisième méthode est la

Méthode de développement en série hypergéométrique : Cette méthode permet dans le cas des équations de la forme

$$y^N + xy^P - 1 = 0, \quad \text{telle que } y(0) = 1 \quad (0.0.12)$$

de déterminer un développement en série hypergéométrique des racines. Nous utilisons pour cela un résultat dû à G. Belardinelli (cf. [2]).

Elle nous a permis d'obtenir pour la racine positive $x_{1,n}$ de l'équation $G_n(z) = 0$ un développement en série hypergéométrique qui converge très rapidement ; on obtient

$$x_{1,n} = \varphi^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\varphi^{(2n+1)k}} \binom{(n+1)k-2}{k-1} \right) \quad (0.0.13)$$

ce résultat est démontré dans le théorème 5 du chapitre 1, il est nettement meilleur que l'estimation

$$\varphi^2(1 - \varphi^{-2n}) \leq x_{1,n} \leq \varphi^2(1 - \varphi^{-2n-1}) \quad (0.0.14)$$

obtenue par K. Dilcher dans [10].

Pour cela, on transforme l'équation $G_n(z) = 0$ sous la forme (0.0.12) En tenant compte de la relation : $\varphi - 1 = 1/\varphi$, (puisque $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$), on pose $z = \varphi^2 y$ et $y = 1/Y$, on obtient

$$Y - \frac{1}{\varphi^{2n+1}} Y^{n+1} - 1 = 0. \quad (0.0.15)$$

On applique la proposition 2, avec $N = 1$, $P = n + 1$, $\mu = -1$ et $x = -1/\varphi^{2n+1}$

Dans le second chapitre, nous nous sommes intéressés au problème suivant : Etant donné un entier n , le nombre de diviseurs de n est

$$\tau_r(n) = \sum_{d|n} 1 \quad (0.0.16)$$

INTRODUCTION

c'est aussi le nombre de solutions de l'équation diophantienne $n = x_1 x_2$ en entiers positifs x_1 et x_2 . Pour $r \geq 2$, le nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$x_1 x_2 \dots x_r = n \quad (0.0.17)$$

est $\tau_r(n)$, c'est aussi le nombre de décompositions de l'entier n en produit de r entiers positifs, il est donné par la formule

$$\tau_r(n) = \sum_{d|n} \tau_{r-1}(d). \quad (0.0.18)$$

En 1926, Oppenheim a (cf. [41]) étudié le problème du nombre de factorisations d'un entier n en un produit non ordonné d'entiers positifs. Autrement dit le nombre de solutions non ordonnées en entiers positifs de l'équation diophantienne (0.0.17); on désignera la fonction d'Oppenheim par $\widehat{f}_O(n)$. Plus tard, en 1931, Kalmár a dans ([31], (cf. aussi [32]), étudié le même problème du nombre de solutions de l'équation (0.0.17) pour tout r , mais avec la restriction que chaque facteur x_i doit vérifier $x_i \geq 2$ et en tenant compte de l'ordre des facteurs. Elle est désignée par $\widehat{f}_K(n)$ dans l'introduction du chapitre 2, de cette thèse. Ainsi $\widehat{f}_K(n)$ est le nombre de factorisations de l'entier n en un produit ordonné d'entiers positifs non égaux à 1. On notera le lien existant entre les trois fonctions citées plus haut et la fonction ζ de Riemann par les relations données dans ce chapitre 2.

Soit $\mathcal{A} \subset \{2, 3, 4, \dots\}$; dans [28] et [15] (cf. aussi [34] et [35]), E. Hille et P. Erdős ont généralisé la fonction de Kalmár en définissant la fonction $f_{\mathcal{A}}(n)$ qui compte le nombre de solutions de (0.0.17) pour tout r , avec la condition que chaque x_i doit vérifier $x_i \in \mathcal{A}$. La fonction de Kalmár apparaît ainsi comme la restriction de $f_{\mathcal{A}}(n)$ à l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, autrement dit on a $\widehat{f}_K(n) = f_{\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}(n)$.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés en partant de la généralisation de E. Hille et de P. Erdős, à l'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$, l'ensemble des nombres premiers. Nous considérons la fonction $f_{\mathcal{P}}(n)$, que nous désignerons par $h(n)$ et qui est donc le nombre de solutions de (0.0.17) en nombres premiers x_1, x_2, \dots, x_r . Si $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$, le nombre $h(n)$ de solutions de l'équation (0.0.17) est égal au coefficient multinomial

$$h(n) = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}; \quad (0.0.19)$$

$h(n)$ est aussi le nombre de factorisations de l'entier n en produit ordonné de facteurs premiers.

On s'intéresse précisément aux grandes valeurs de la fonction h , c'est l'objet du problème d'optimisation en nombres entiers suivant

$$\begin{cases} n \leq X \\ \max h(n). \end{cases} \quad (0.0.20)$$

Pour k assez grand le problème (0.0.20) est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \dots + x_k \log p_k \leq \log X \\ \max \log \left(\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \right) \end{cases} \quad (0.0.21)$$

INTRODUCTION

où les inconnues x_i sont des entiers positifs ou nuls et p_k désigne le k -ième nombre premier. Grâce à la formule de Stirling, nous approximations $\log h(n)$ par la fonction

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \log(x_1 + x_2 + \dots + x_k) - \sum_{i=1}^k x_i \log x_i, \quad (0.0.22)$$

puis nous résolvons le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \dots + x_k \log p_k \leq \log X \\ \max F(x_1, x_2, \dots, x_k). \end{cases} \quad (0.0.23)$$

Au paragraphe 4, nous montrons à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, que le problème (0.0.23) a une solution simple $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$, qui permet de majorer $h(n)$. Au paragraphe 5, nous construisons des nombres $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ maximisant $h(n)$ en choisissant une valeur de k convenable et pour l'entier α_i , la partie entière de x_i^* .

Le paragraphe 6 est consacré à l'étude d'une classe de nombres N maximisant $h(n)$, nous appelons un tel nombre nombre h -champion. Un entier N est dit h -champion si et seulement si pour tout $M < N$ on a $h(M) < h(N)$. Nous montrons que le nombre $\omega(N)$ de facteurs premiers d'un nombre h -champion satisfait $\omega(N) \sim \lambda a^{1/\lambda} \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}$ et que le nombre $\Omega(N)$ de facteurs premiers de N comptés avec multiplicité, satisfait $\Omega(N) \sim 2^\lambda a \log N$, où $a = 0.577\dots$ est une constante définie au paragraphe 3 où nous démontrons deux résultats techniques, qui nous ont été utiles pour démontrer les propositions 4, 5 et 6 ainsi que les théorèmes 1 et 2.

Nous déterminons un encadrement (assez grossier) pour le nombre $Q(X)$ de nombres h -champions $N \leq X$.

Le paragraphe 7 présente une liste de problèmes ouverts.

Le troisième chapitre de cette thèse est consacré à des estimations effectives des différences $\lambda - \lambda_k$ et $a - a_k$. Nous déterminons et précisons dans ce chapitre, par des méthodes purement techniques d'approximation, les constantes intervenant dans les estimations données par les propositions 2 et 3 (cf. paragraphe 3) du chapitre 2.

Enfin le quatrième et dernier chapitre, nous donnons quelques procédures Maple, qui nous avons utilisées pour calculer les coefficients des développements en série entière ainsi que les constantes intervenant dans les résultats exposés aux chapitres 1 et 2. Nous donnons également une table des nombres h -champions.

Chapitre 1

Localisation de zéros de familles de trinômes

Résumé

Posons $f_{n,a}(z) = z^{n+1} - az + a - 1$ où a est un nombre réel, $G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1$ et $H_n(z) = \varphi z^{n+1} - (\varphi - 1)z^n - 1$ où $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Au moyen de trois méthodes différentes, nous donnons des estimations explicites de certaines racines de ces trois familles de trinômes.

1.1 Introduction

Soit n un entier positif, et a un nombre réel. Posons

$$f_{n,a}(z) = z^{n+1} - az + a - 1. \quad (1.1.1)$$

La localisation des racines du trinôme $f_{n,n+1}(z)$ est étudiée dans l'article [39] (cf. aussi [27], [36] et [11]) où il est démontré que ce polynôme admet $z = 1$ comme racine double et également $n - 1$ racines simples notées z_1, z_2, \dots, z_{n-1} et vérifiant $z_{n-k} = \bar{z}_k$,

$$\frac{n}{n-1} \leq |z_k| \leq (2n)^{1/n} \quad \text{et} \quad \frac{2k\pi}{n} \leq \arg z_k \leq \frac{(2k+1)\pi}{n+1}, \quad 1 \leq k \leq \frac{n}{2}. \quad (1.1.2)$$

Dans l'article [10] (cf. aussi [29]), deux autres familles de trinômes sont considérées

$$G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1 \quad (1.1.3)$$

et

$$H_n(z) = \varphi z^{n+1} - (\varphi - 1)z^n - 1 \quad (1.1.4)$$

où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Notons le lien avec la famille précédente :

on a $G_n(z) = z^{n+1}f_{n,\varphi}(1/z)$ et G_n est donc le polynôme réciproque de $f_{n,\varphi}$.

Il est démontré dans [10] que G_n admet $n + 1$ racines simples ; deux sont réelles positives, $z = 1$ et une racine supérieure à 1 notée $x_{1,n}$; toutes les autres sont à l'intérieur du disque unité. Enfin, il y a une racine dans chacun des secteurs

$$|z| < 1 \quad \text{et} \quad \left| \arg z - \frac{2k\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

1.1. INTRODUCTION

Notons que, lorsque n est pair, la racine située dans le secteur indexé par $k = n/2$ est réelle négative ; nous la désignerons par $x_{2,n}$.

Des résultats semblables sont obtenus pour la famille de trinômes (1.1.4). Il y a une seule racine réelle positive $z = 1$, et une racine dans chacun des secteurs

$$|z| < 1 \quad \text{et} \quad \left| \arg z - \frac{(2k+1)\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Lorsque n est impair, la racine située dans le secteur indexé par $k = \frac{n-1}{2}$ est réelle négative ; nous la désignerons par $x_{2,n}$, sans confusion possible avec la racine de G_n à cause de la parité de n .

Dans cet article, nous nous proposons d'apporter des précisions sur les racines de ces trinômes, et ceci par trois méthodes.

La première méthode est celle des solutions approchées : il s'agit de trouver une solution approchée de l'équation, puis, à l'aide de théorèmes classiques en analyse complexe (essentiellement la formule de Taylor et le principe du maximum), prouver qu'il existe un zéro qui en soit proche. Cette méthode est utilisée dans [16], et elle a servi à démontrer le théorème 2 de [39]. Dans le paragraphe 2 ci-dessous, nous améliorons ce théorème 2 de [39], et dans le paragraphe 3, nous appliquons la méthode des solutions approchées au trinôme (1.1.1). Voici comment, sur la suggestion de A. Schinzel, nous trouvons la solution approchée dans ce cas. On part du principe que les arguments des racines sont à peu près équidistribués, et que leurs modules sont voisins de 1 ; on fait dans (1.1.1) le changement de variables $z = r_k \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1} + i\psi_k\right)$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient

$$r_k^{n+1} \cos((n+1)\psi_k) = ar_k \cos\left(\frac{2k\pi}{n+1} + \psi_k\right) + a - 1 \quad (1.1.5)$$

et

$$r_k^{n+1} \sin((n+1)\psi_k) = ar_k \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1} + \psi_k\right). \quad (1.1.6)$$

En ajoutant les carrés de (1.1.5) et (1.1.6), il vient

$$r_k^{2(n+1)} = a^2 r_k^2 - 2a(a-1)r_k \cos\left(\frac{2k\pi}{n+1} + \psi_k\right) + (a-1)^2. \quad (1.1.7)$$

Dans le membre de droite de (1.1.7), on substitue $\psi_k = 0$ et $r_k = 1$. Cela donne

$$r_k^{2(n+1)} = a^2 - 2a(a-1) \cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) + (a-1)^2 = 1 + 4a(a-1) \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}$$

d'où l'on déduit la valeur de r_k donnée par (1.3.24) ci-dessous. Ensuite, dans (1.1.6), on substitue $r_k = 1$, on assimile $\sin\left(\frac{2k\pi}{n+1} + \psi_k\right)$ à $\frac{2k\pi}{n+1}$ et $\sin((n+1)\psi_k)$ à $(n+1)\psi_k$, et cela fournit la valeur de ψ_k donnée dans (1.3.25).

La deuxième méthode utilise le théorème des fonctions implicites analytiques. Dans [39], le théorème 4 donne pour $|z_1|$ et $\arg z_1$ (où z_1 est la racine de $f_{n,n+1}$ définie par (1.1.2)) un développement limité suivant les puissances de $1/n$. H. Delange a observé que l'on pouvait, de façon à la fois plus élégante et plus précise, obtenir pour z_1 un développement en série entière par rapport à $1/n$, en utilisant le théorème des fonctions implicites. De plus, T. Fack

1.2. SOLUTIONS APPROCHÉES : $z^{n+1} - (n+1)z + n = 0$

nous a signalé une version explicite du théorème des fonctions implicites utilisant le rectangle de sécurité de l'équation différentielle associée. Tout ceci est développé dans le paragraphe 4. Dans [10], on donne pour le zéro réel négatif $x_{2,n}$ de H_n ou G_n l'estimation

$$x_{2,n} = -1 + (1 + o(1)) \frac{\log 5}{2n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.1.8)$$

La méthode du théorème des fonctions implicites analytiques donne pour $x_{2,n}$ (en distinguant les cas n impair et n pair) un développement en série entière suivant les puissances de $1/n$ et convergent pour n assez grand. Ceci fera l'objet du paragraphe 5.

La troisième méthode donne un développement en série hypergéométrique des racines d'un trinôme. Elle sera exposée dans le paragraphe 6, où la proposition 2 reprend la formulation de Belardinelli (cf. [2]) pour la racine de l'équation $y^N + xy^P - 1 = 0$ telle que $y(0) = 1$. La référence [2] nous a été communiquée par P. Barrucand. G. Belardinelli donne deux démonstrations de son résultat ; l'une utilise la transformée de Mellin, tandis que l'autre utilise le théorème d'inversion de Lagrange. Nous en donnerons, à l'aide de la formule d'inversion de Lagrange, une preuve courte qui nous a été fournie par J. Zeng. Dans l'article [10], on donne pour $x_{1,n}$, le zéro positif différent de 1 de $G_n(z)$, l'estimation

$$\varphi^2(1 - \varphi^{-2n}) \leq x_{1,n} \leq \varphi^2(1 - \varphi^{-2n-1}).$$

Dans le théorème 5, nous améliorons nettement cette estimation en donnant pour $x_{1,n}$ un développement en série hypergéométrique très rapidement convergent.

Nous avons plaisir à remercier chaleureusement les mathématiciens qui nous ont aidé dans l'élaboration de cet article et que nous avons cité ou que nous citerons en précisant la nature de leur aide : P. Barrucand, H. Delange, J.-P. Demailly, B. Salvy, A. Schinzel, T. Fack, J. Zeng, ainsi que K. Dilcher et K.B. Stolarsky pour nous avoir communiqué leurs articles.

1.2 Solutions approchées : $z^{n+1} - (n+1)z + n = 0$

J.-L. Nicolas et A. Schinzel montrent dans [39] (cf. aussi [27]) que le théorème 1 ci-dessous est vérifié pour la constante $A = 10^{40}$. Dans ce qui suit, nous abaissons sensiblement cette constante.

Théorème 1. *Il existe une constante absolue $A \geq 1$ ($A = 14$ convient) avec la propriété : pour tout $n \geq 2A$ et pour tout entier k vérifiant $A \leq k \leq n - A$, si l'on pose*

$$r_k = \left(2(n+1) \sin \left(\frac{4k+1}{4n+2} \pi \right) \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{et} \quad \rho = 3 \frac{r_k - 1}{r_k^n - 1}, \quad (1.2.9)$$

alors

(i) $r_k > 1$ et $\rho \leq 3/n$.

(ii) L'équation $f(z) = f_{n,n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n = 0$ admet une racine z_k satisfaisant à l'inégalité

$$|z_k - x_k| \leq \rho \quad \text{avec} \quad x_k = r_k \exp \left(i\pi \frac{4k+1}{2n+1} \right). \quad (1.2.10)$$

1.2. SOLUTIONS APPROCHÉES : $z^{n+1} - (n+1)z + n = 0$

Démonstration du théorème 1 (i). Pour tout k vérifiant $A \leq k \leq n+1-A$, on a $\frac{4k+1}{4n+2}\pi \in [0, \pi]$; donc, en utilisant l'inégalité $\sin(\pi t) \geq 2 \min(t, 1-t)$ valable pour $0 \leq t \leq 1$, on a

$$r_k^{n+1} = 2(n+1) \sin\left(\frac{4k+1}{4n+2}\pi\right) \geq \frac{4n+4}{4n+2} (4 \min(k, n-k) + 1) > 4A + 1. \quad (1.2.11)$$

Comme $A \geq 1$, il en résulte que $r_k > 1$ et puisque $n \geq 2A$

$$r_k^n > (4A+1)^{\frac{n}{n+1}} \geq R(A) \quad \text{avec} \quad R(A) = (4A+1)^{\frac{2A}{2A+1}}. \quad (1.2.12)$$

Notons que la fonction $t \mapsto R(t)$ est croissante pour $t > 0$. Grâce à l'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géométriques, on obtient la majoration

$$\rho = 3 \frac{r_k - 1}{r_k^n - 1} = \frac{3}{1 + r_k + \dots + r_k^{n-1}} \leq \frac{3}{nr_k^{(n-1)/2}} \leq \frac{3}{n}. \quad (1.2.13)$$

Mais on peut majorer ρ encore mieux. En utilisant l'inégalité $t - 1 \leq t \log t$, valable pour tout $t \geq 1$, et (1.2.12), il vient :

$$\rho \leq \frac{3r_k \log r_k}{r_k^n - 1} = \frac{3r_k}{n} w(r_k^n) \leq \frac{3r_k}{n} w(R(A)) \quad (1.2.14)$$

en posant

$$w(t) = \frac{\log t}{t - 1} \quad (1.2.15)$$

et en notant que $w(t)$ est une fonction décroissante en t pour $t > 1$.

Lemme 1. Avec les notations du théorème 1, on a

- (i) $|f(x_k)| \leq (n+1)(r_k - 1) + 1$
- (ii) $|f'(x_k)| \geq (n+1)(r_k^n - 1) = \frac{3}{\rho}(n+1)(r_k - 1)$
- (iii) Pour $j \geq 2$, $|f^{(j)}(x_k)| = j! \binom{n+1}{j} r_k^{n+1-j}$.

Démonstration. Le lemme 1 est démontré dans [39], p. 169.

Lemme 2. Avec les notations du théorème 1, on a

$$S = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{|f^{(j)}(x_k)|}{j!} \rho^j \leq \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{2A}\right) \exp\left(\frac{\log(4A+2)}{2A+1}\right) \frac{y(R(A))}{1 - w(R(A))}$$

où $R(A)$ et $w(t)$ sont définis par (1.2.12) et (1.2.15) et

$$y(x) = \frac{x \log^2 x}{(x-1)^2} = \left(\frac{\log(\sqrt{x})}{\sinh(\log \sqrt{x})}\right)^2 \quad (1.2.16)$$

est une fonction décroissante de x pour $x \geq 1$.

Démonstration du lemme 2. La fonction $t \mapsto \sinh t/t$ est analytique et les coefficients dans son développement de Mac Laurin sont positifs. Elle est donc croissante pour $t \geq 0$, et cela entraîne la décroissance de $y(x)$ pour $x \geq 1$.

1.2. SOLUTIONS APPROCHÉES : $z^{n+1} - (n+1)z + n = 0$

En utilisant le lemme 1, il vient

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} \rho^j r_k^{n+1-j} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \left(1 + \frac{n-1}{3} \frac{\rho}{r_k} + \frac{(n-1)(n-2)}{3 \cdot 4} \left(\frac{\rho}{r_k} \right)^2 + \dots \right) \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{n}{3} \frac{\rho}{r_k}} \leq \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \frac{1}{1 - w(R(A))} \end{aligned}$$

en utilisant (1.2.14). On observe ensuite que $\frac{n+1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2A}$ (puisque $n \geq 2A$) et cela donne

$$S \leq \frac{n^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2A} \right) \rho^2 r_k^{n-1} \frac{1}{1 - w(R(A))}. \quad (1.2.17)$$

Il reste à majorer $\rho^2 r_k^{n-1}$. Par (1.2.14), (1.2.16) et (1.2.12), on a

$$\rho^2 r_k^{n-1} \leq \frac{9r_k^{n+1} \log^2 r_k}{(r_k^n - 1)^2} = \frac{9r_k}{n^2} y(r_k^n) \leq \frac{9r_k}{n^2} y(R(A)). \quad (1.2.18)$$

Enfin, par (1.2.9),

$$r_k \leq (2(n+1))^{\frac{1}{n+1}} = \exp\left(\frac{\log(2n+2)}{n+1}\right) \leq \exp\left(\frac{\log(4A+2)}{2A+1}\right) \quad (1.2.19)$$

puisque $n \geq 2A$ et que la fonction $t \mapsto \frac{\log(2t+2)}{t+1}$ est décroissante pour $t \geq \frac{\epsilon}{2} - 1$. Le lemme 2 découle alors de (1.2.17), (1.2.18) et (1.2.19).

Démonstration du théorème 1 (ii). Supposons que f ne s'annule pas dans le disque de centre x_k et de rayon ρ ; on pourrait appliquer dans ce disque le principe du maximum à la fonction $1/f$: il existerait z , avec $|z - x_k| = \rho$ tel que $|\frac{1}{f(x_k)}| \leq |\frac{1}{f(z)}|$. Pour démontrer (ii), nous allons montrer que pour tout z , tel que $|z - x_k| = \rho$, on a

$$|f(z)| > |f(x_k)|. \quad (1.2.20)$$

La formule de Taylor s'écrit :

$$f(z) = f(x_k) + (z - x_k) f'(x_k) + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_k)}{j!} (z - x_k)^j$$

et par suite on a

$$|f(z)| \geq |f'(x_k)|\rho - |f(x_k)| - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{|f^{(j)}(x_k)|}{j!} \rho^j. \quad (1.2.21)$$

Le lemme 1 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |f'(x_k)|\rho - 2|f(x_k)| &\geq 3(n+1)(r_k - 1) - 2(n+1)(r_k - 1) - 2 \\ &= (n+1)(r_k - 1) - 2 \\ &\geq (n+1) \log r_k - 2 = \log r_k^{n+1} - 2 \\ &\geq \log(4A+1) - 2 \end{aligned}$$

1.3. SOLUTIONS APPROCHÉES : $z^{n+1} - az + a - 1 = 0$

par (1.2.11). De (1.2.21) et du lemme 2, on déduit alors

$$\begin{aligned} |f(z)| - |f(x_k)| &\geq |f'(x_k)|\rho - 2|f(x_k)| - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{|f^{(j)}(x_k)|}{j!} \rho^j \\ &\geq \log(4A+1) - 2 - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{2A}\right) \exp\left(\frac{\log(4A+2)}{2A+1}\right) \frac{y(R(A))}{1-w(R(A))}. \end{aligned}$$

Mais le membre de droite de cette inégalité est une fonction croissante de A , pour $A \geq 1$, car R est croissante, et y et w sont décroissantes, ainsi que les fonctions $1 + \frac{1}{2A}$ et $\frac{\log(4A+2)}{2A+1}$. Pour $A = 14$, il vaut $0.1769 > 0$, cela prouve (1.2.20) et achève la preuve du théorème 1.

Remarque. Les calculs numériques effectués pour $n \leq 200$ montrent que (1.2.10) est vérifiée pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$. Le théorème 1 est donc vraisemblablement exact pour tout k , $0 \leq k \leq n$, mais nous n'avons pas réussi à le prouver sans la restriction $A \leq k \leq n - A$. Dans la définition de ρ dans (1.2.9), le 3 est arbitraire (il doit cependant être supérieur à 2). En l'augmentant, on pourrait abaisser la valeur de A dans le théorème 1. Pour les petites valeurs de k , le théorème 3 exposé dans le paragraphe 4 fournira une meilleure approximation des racines.

1.3 Solutions approchées : $z^{n+1} - az + a - 1 = 0$

Théorème 2. Soit a un nombre réel, $a \geq 1$. Pour $n \geq 1$, on définit l'équation trinôme

$$f(z) = f_{n,a}(z) = z^{n+1} - az + a - 1 = 0. \quad (1.3.22)$$

Pour $1 \leq k \leq n+1$, on pose

$$x_k = r_k \exp\left(i \left(\frac{2k\pi}{n+1} + \psi_k\right)\right) \quad (1.3.23)$$

avec

$$r_k = \left(1 + 4a(a-1) \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}} \quad (1.3.24)$$

et

$$\psi_k = \frac{2k\pi a}{(n+1)^2}. \quad (1.3.25)$$

Soient trois nombres réels α, β, γ , vérifiant $0 < \beta \leq \gamma, \alpha > 0$ et

$$\alpha(1-\beta) \geq \gamma(84\gamma + 13\beta + 44\beta\gamma) + \alpha^2 e^\alpha (1/2 + 10\gamma^2). \quad (1.3.26)$$

On suppose que

$$n \geq 9, \quad \frac{a}{n+1} \leq \beta \quad \text{et} \quad 1 \leq k \leq \gamma \frac{n+1}{a}. \quad (1.3.27)$$

Alors, l'équation (1.3.22) admet une racine dans le disque de centre x_k et de rayon $\rho = \alpha/(n+1)$.

Dans (1.3.26), on peut prendre par exemple $\alpha = 0.7, \beta = 0.1, \gamma = 0.02$.

Lorsque $a = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, k = 1$ et $n \geq 99$, on peut prendre $\alpha = \frac{300}{(n+1)^2}, \beta = \gamma = \frac{\varphi}{n+1}$.

1.3. SOLUTIONS APPROCHÉES : $z^{n+1} - az + a - 1 = 0$

Démonstration. Montrons d'abord ce dernier point. Lorsque $a = \varphi$ et $n \geq 99$, on a

$$\alpha = \frac{300}{(n+1)^2} \leq \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{100} \quad \text{et} \quad \beta = \gamma = \frac{\varphi}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{100}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \alpha(1-\beta) &\geq \alpha \left(1 - \frac{2}{100}\right) = \frac{294}{(n+1)^2} \\ \gamma(84\gamma + 13\beta + 44\beta\gamma) &= \beta^2(84 + 13 + 44\beta) \leq \beta^2 \left(97 + \frac{88}{100}\right) \\ &\leq 98 \frac{\varphi^2}{(n+1)^2} \leq \frac{257}{(n+1)^2} \\ \alpha^2 e^{\alpha(1/2 + 10\gamma^2)} &\leq \frac{300}{(n+1)^2} \frac{3}{100} e^{3/100} \left(\frac{1}{2} + 10 \frac{4}{10000}\right) \leq \frac{5}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve (1.3.26).

Ensuite, nous suivrons le même plan que dans la démonstration du théorème 1 : avant d'appliquer la formule de Taylor, il nous faut majorer $|f(x_k)|$, minorer $|f'(x_k)|$ et majorer le terme de reste.

En appliquant à (1.3.24) l'inégalité $(1+t)^\lambda \leq 1 + \lambda t$, valable pour $t \geq 0$ et $0 \leq \lambda \leq 1$ et l'inégalité $\sin t \leq t$ valable pour $t \geq 0$, on obtient

$$1 \leq r_k^{n+1} \leq 1 + \frac{2a(a-1)\pi^2 k^2}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad 1 \leq r_k \leq 1 + \frac{2a(a-1)\pi^2 k^2}{(n+1)^3}. \quad (1.3.28)$$

Nous utiliserons aussi l'inégalité bien connue des probabilistes (cf. [18], p. 512)

$$|e^{it} - 1 - it| \leq \frac{t^2}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.3.29)$$

qui peut se démontrer en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral : en posant $w(t) = e^{it}$, on a

$$|e^{it} - 1 - it| = \left| \int_0^t (t-u)w''(u)du \right| \leq \int_0^t (t-u)|w''(u)|du = \int_0^t (t-u)du = \frac{t^2}{2}.$$

Il vient ensuite par (1.3.22), (1.3.23), (1.3.24) et (1.3.25)

$$\begin{aligned} f(x_k) &= r_k^{n+1} e^{(n+1)\psi_k i} - a r_k e^{\frac{2i\pi k}{n+1} + i\psi_k} + a - 1 \\ &= \left(e^{(n+1)\psi_k i} - 1 - i(n+1)\psi_k \right) - a \left(e^{\frac{2i\pi k}{n+1} + i\psi_k} - 1 - \frac{2i\pi k}{n+1} - i\psi_k \right) \\ &\quad - ia\psi_k + (r_k^{n+1} - 1) e^{(n+1)\psi_k i} - a(r_k - 1) e^{\frac{2i\pi k}{n+1} + i\psi_k}. \end{aligned}$$

En utilisant deux fois la majoration (1.3.29), on obtient

$$|f(x_k)| \leq \frac{(n+1)^2 \psi_k^2}{2} + \frac{a}{2} \left(\frac{2\pi k}{n+1} + \psi_k \right)^2 + a\psi_k + (r_k^{n+1} - 1) + a(r_k - 1),$$

1.3. SOLUTIONS APPROCHÉES : $z^{n+1} - az + a - 1 = 0$

et par (1.3.25) et (1.3.28), il suit

$$|f(x_k)| \leq \frac{2k^2\pi^2 a^2}{(n+1)^2} + \frac{2a\pi^2 k^2}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^2 + \frac{2a^2 k \pi}{(n+1)^2} \\ + \frac{2a(a-1)k^2\pi^2}{(n+1)^2} + \frac{2a^2(a-1)k^2\pi^2}{(n+1)^3}.$$

Après réduction des termes semblables, le membre de droite ci-dessus s'écrit

$$\frac{2a^2 k^2 \pi^2}{(n+1)^2} \left(2 + \frac{a}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{k\pi}\right). \quad (1.3.30)$$

En tenant compte de l'hypothèse $n \geq 9$, on majore $\frac{1}{n+1}$ par $\frac{1}{10}$, π^2 par 10 et 2π par 6.5, et l'on obtient

$$|f(x_k)| \leq \frac{a^2 k^2}{(n+1)^2} \left(42 + 22 \frac{a}{n+1}\right) + 6.5 \frac{a^2 k}{(n+1)^2}. \quad (1.3.31)$$

Compte tenu des hypothèses (1.3.27), on en déduit

$$|f(x_k)| \leq \gamma^2(42 + 22\beta) + 6.5\beta\gamma = \gamma(42\gamma + 22\beta\gamma + 6.5\beta). \quad (1.3.32)$$

Minorons maintenant la dérivée : on a, par (1.3.22), (1.3.23) et (1.3.24)

$$|f'(x_k)| = |(n+1)x_k^n - a| \geq (n+1)|x_k^n| - a = (n+1)r_k^n - a \geq n+1-a,$$

et sous les hypothèses (1.3.27), on a

$$|f'(x_k)| \geq (n+1)\left(1 - \frac{a}{n+1}\right) \geq (n+1)(1-\beta). \quad (1.3.33)$$

Enfin, soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z - x_k| = \rho = \alpha/(n+1)$, Il vient

$$\int_{x_k}^z (z-t)f''(t)dt = n(n+1) \int_{x_k}^z t^{n-1}(z-t)dt.$$

Par le changement de variables $t = x_k + u(z - x_k)$, cette intégrale devient

$$\int_{x_k}^z (z-t)f''(t)dt = n(n+1) \int_0^1 (x_k + u(z-x_k))^{n-1} (1-u)(z-x_k)^2 du$$

et on peut écrire

$$\left| \int_{x_k}^z (z-t)f''(t)dt \right| \leq n(n+1)\rho^2(r_k + \rho)^{n-1} \int_0^1 (1-u)du \\ = \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 (r_k + \rho)^{n-1} \\ \leq \frac{(n+1)^2}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \left(1 + \frac{\rho}{r_k}\right)^{n-1} \\ \leq \frac{(n+1)^2}{2} \rho^2 r_k^{n+1} (1+\rho)^{n+1}.$$

1.4. LE THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

Comme $\rho = \alpha/(n + 1)$, on a, par (1.3.28)

$$\left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right| \leq \frac{\alpha^2}{2} \exp(\alpha) \left(1 + \frac{2a^2 k^2 \pi^2}{(n + 1)^2} \right) \quad (1.3.34)$$

et compte tenu des hypothèses (1.3.27),

$$\left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right| \leq \frac{\alpha^2}{2} \exp(\alpha) (1 + 20\gamma^2). \quad (1.3.35)$$

Supposons que f ne s'annule pas dans le disque de centre x_k et de rayon ρ ; on pourrait appliquer dans ce disque le principe du maximum à la fonction $1/f$: il existerait z , avec $|z - x_k| = \rho$ tel que $|\frac{1}{f(x_k)}| \leq |\frac{1}{f(z)}|$. Pour démontrer le théorème 2, nous allons montrer que pour tout z , tel que $|z - x_k| = \rho$, on a

$$|f(z)| > |f(x_k)|. \quad (1.3.36)$$

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$f(z) = f(x_k) + (z - x_k) f'(x_k) + \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt$$

d'où

$$|f(z)| \geq |(z - x_k) f'(x_k)| - |f(x_k)| - \left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right|.$$

L'inégalité (1.3.36) résultera donc de

$$|(z - x_k) f'(x_k)| = \rho |f'(x_k)| > 2 |f(x_k)| + \left| \int_{x_k}^z (z - t) f''(t) dt \right|. \quad (1.3.37)$$

Par (1.3.33), $\rho |f'(x_k)| > \alpha(1 - \beta)$, et (1.3.37) résulte de (1.3.32), (1.3.35) et (1.3.26).

1.4 Le théorème des fonctions implicites

On trouvera un énoncé du théorème des fonctions implicites analytiques dans [3], 7.8. Nous présentons ci-dessous une version effective, communiquée par T. Fack.

Proposition 1. *Soit $F(x, y)$ une fonction de deux variables complexes, analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ contenant le rectangle \mathcal{R}*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(x_0, y_0, s, r) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, |x - x_0| \leq s, |y - y_0| \leq r\}.$$

On suppose que $F(x_0, y_0) = 0$, que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ pour tout point $(x, y) \in \mathcal{R}$ et que, de plus, le rectangle \mathcal{R} est un rectangle de sécurité pour la fonction $G(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, c'est-à-dire

$$|x - x_0| \leq s \quad \text{et} \quad |y - y_0| \leq r \quad \implies \quad |G(x, y)| < M = r/s.$$

Alors, il existe une fonction $y = y(x)$ définie dans le disque $|x - x_0| \leq s$ telle que $F(x, y(x)) = 0$ et $y(x_0) = y_0$. Dans ce disque, cette fonction est analytique et vérifie $|y(x) - y_0| \leq r$.

1.4. LE THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

Démonstration. On sait que l'équation différentielle $y' = G(x, y)$ admet une solution $y(x)$ analytique dans le disque $|x - x_0| \leq s$ vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $|y(x) - y_0| \leq r$ (cf. par exemple [9], p. 124 qui traite le cas réel, mais, comme nous l'a confirmé J.-P. Demailly, le cas complexe se traiterait de la même façon). La fonction de x , $F(x, y(x))$ a pour dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) = 0$, elle est donc constante et vaut $F(x_0, y_0) = 0$. \square

Lemme 3. *L'équation complexe $e^z = 1 + z$ admet la racine $z_0 = 0$ et pour chaque valeur de l'entier $k \geq 1$, admet pour racine le nombre $z_k = x_k + iy_k$ avec $2k\pi < y_k < 2k\pi + \pi/2$ et $x_k > 1$ et son conjugué \bar{z}_k . Ce sont les seules racines de cette équation. On a*

$$z_1 \approx 2.08 + 7.46i, \quad z_2 \approx 2.66 + 13.88i, \quad z_3 \approx 3.02 + 20.22i.$$

Démonstration. On pose $z = x + iy$. La seule racine réelle est $z = 0$, et si z est racine, \bar{z} est aussi racine. On peut donc supposer $y > 0$. De plus, la relation

$$e^x(\cos y + i \sin y) = 1 + x + iy$$

montre que si z est racine, y n'est pas un multiple de π et $x \neq -1$. En comparant les modules et les arguments, on obtient

$$e^x = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \tag{1.4.38}$$

et

$$1 + x = y \cotg y. \tag{1.4.39}$$

En éliminant x , on obtient

$$H(y) := y \cotg y - 1 - \log y + \log |\sin y| = 0.$$

La dérivée vaut

$$H'(y) = -\frac{(y \cotg y - 1)^2 + y^2}{y} < 0.$$

Sur chaque intervalle ouvert $]k\pi, (k+1)\pi[$, la fonction H est continue et décroissante. On a $\lim_{y \rightarrow 0} H(y) = 0$ et il n'y a donc pas de racines dans l'intervalle $]0, \pi[$. On suppose $y > \pi$. La relation (1.4.38) implique $e^{2x} \geq y^2 > \pi^2$ et donc $x > 1$. Sur les intervalles $]2k\pi - \pi/2, 2k\pi[$, $\cotg y < 0$, ce qui est impossible par (1.4.39). Enfin, on a $\lim_{y \rightarrow 2k\pi, y > 2k\pi} H(y) = +\infty$ et $H(2k\pi + \pi/2) < 0$ et cela achève la preuve du lemme 3. \square

Théorème 3. *Soit $f(z) = f_{n, n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$, et soit b une racine complexe non nulle de l'équation $e^t = 1 + t$. Il existe des coefficients complexes c_m , $m = 1, 2, \dots$, tels que, pour n suffisamment grand, la série $1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m n^{-m}$ soit convergente de somme S_n , et S_n est racine de l'équation $f(z) = 0$. On a*

$$c_1 = b, \quad c_2 = \frac{b(b-1)}{2}, \quad c_3 = \frac{b(4b^2 - 11b + 9)}{24}, \quad c_4 = \frac{b(2b^3 - 10b^2 + 21b - 15)}{48},$$

$$c_5 = \frac{b(48b^4 - 362b^3 + 1330b^2 - 2445b + 1575)}{5760}$$

De plus, lorsque $b = 2.08\dots + i7.46\dots$, les coefficients c_m sont majorés en module par 1.4×25^m .

1.4. LE THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

Démonstration. Dans l'équation $f(z) = 0$, faisons les changements de variables $z = \exp(xy)$ et $n = 1/x$. On obtient :

$$e^y e^{xy} - \left(\frac{1}{x} + 1\right) e^{xy} + \frac{1}{x} = 0$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{e^y - 1}{y} - 1 = \frac{e^{-xy} - 1}{-xy} - 1$$

ou encore $F(x, y) = 0$ avec

$$F(x, y) = g(y) - g(-xy) \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}. \quad (1.4.40)$$

La fonction $F(x, y)$ est analytique dans \mathbb{C}^2 . On a $F(0, b) = 0$ et comme

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = g'(y) + xg'(-xy) = \frac{(y-1)e^y + 1}{y^2} + x \frac{1 - (xy+1)e^{-xy}}{x^2 y^2}, \quad (1.4.41)$$

on a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, b) = \frac{(b-1)e^b + 1}{b^2} = \frac{(b-1)(b+1) + 1}{b^2} = 1 \neq 0. \quad (1.4.42)$$

Avec les notations de la proposition 1, il existe donc un rectangle $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}(0, b, s_1, r)$ dans lequel la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ ne s'annule pas. La fonction $G(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)/\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ est majorée en module dans \mathcal{R}_1 par, disons, M et en posant $s = \min(s_1, r/M)$, le rectangle $\mathcal{R} = \mathcal{R}(0, b, s, r)$ est un rectangle de sécurité pour la fonction G . On peut donc appliquer la proposition 1 ci-dessus, et il existe une série entière

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$$

de rayon de convergence $R \geq s$ et telle que $F(x, y(x)) = 0$. La fonction $z(x) = \exp(xy(x))$ est analytique pour $|x| \leq s$; elle peut donc s'écrire

$$z(x) = \exp(xy(x)) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m \quad (1.4.43)$$

et comme $x = 1/n$, $S_n = z(1/n)$ est bien racine de $f(z) = 0$.

Montrons que le rectangle $\mathcal{R} = \mathcal{R}(0, b, s = 1/25, r = 3/5)$ est de sécurité pour la fonction G , autrement dit montrons que dans ce rectangle, on a $|G(x, y)| < M = 20$. Observons d'abord que, pour $t \in \mathbb{C}$, $|t| \leq t_0$, on a

$$|g'(t)| = \left| \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \dots \right| \leq \frac{|t|}{2} + \frac{|t|^2}{6} + \dots \leq \frac{t_0}{2} + \frac{t_0^2}{6} + \dots = g'(t_0). \quad (1.4.44)$$

Il s'ensuit que, pour $(x, y) \in \mathcal{R}$, on a

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| = |y g'(-xy)| \leq (|b| + r) g'(s(|b| + r)) \leq 5.24. \quad (1.4.45)$$

1.4. LE THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

Nous devons ensuite minorer $|\frac{\partial F}{\partial y}|$ donné par (1.4.41). Il vient

$$|g'(y)| = \left| \frac{(y-1)e^y + 1}{y^2} \right| \geq \frac{|y-1|e^{\Re y} - 1}{(|b|+r)^2} \geq \frac{(|b-1|-r)e^{\Re b-r} - 1}{(|b|+r)^2} \geq 0.427 \quad (1.4.46)$$

et il s'ensuit que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| \geq |g'(y)| - |xg'(-xy)| \geq |g'(y)| - sg'(s(|b|+r)) \quad (1.4.47)$$

et par (1.4.46), on a

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| \geq 0.427 - sg'(s(|b|+r)) \geq 0.427 - 0.026 \geq 0.4. \quad (1.4.48)$$

Finalement, de (1.4.45) et de (1.4.48) on a $|G(x, y)| < 5.24/0.4 < 13.02 < r/s = 15$.

Le point $(x, y(x))$ appartient à ce rectangle de sécurité \mathcal{R} , et l'on a donc, pour $|x| \leq 0.04$, $|y(x)| \leq |b| + r = 8.35$. Par (1.4.43), $|z(x)| \leq e^{s(|b|+r)} \leq 1.4$, et par le théorème des résidus, on a

$$|c_m| = \left| \int_{|x|=s} \frac{z(x)}{x^{m+1}} dx \right| \leq 1.4/s^m = 1.4 \times 25^m. \quad \square \quad (1.4.49)$$

Le calcul des coefficients c_m a été fait à l'aide de MAPLE jusqu'à $m = 15$. La méthode employée est la suivante : on écrit

$$y(x) = b + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m$$

avec des coefficients indéterminés. On calcule

$$e^{y(x)} = e^b \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m \right) = (1+b) \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m \right),$$

puis $e^{-xy(x)}$ avec les coefficients indéterminés d_m , et on identifie pour évaluer les d_m . On calcule enfin les c_m par (1.4.43). Cette méthode permet de démontrer par récurrence que c_m est un polynôme en b de degré m où b se met en facteur. Un algorithme de calcul plus rapide utilisant la méthode de Newton a été programmé par B. Salvy et a permis d'atteindre $m = 32$. La majoration de $|c_m|$ donnée dans (1.4.49) n'est sans doute pas très bonne. Le calcul numérique approché des c_m jusqu'à $m = 100$ laissent penser que le rayon de convergence est voisin de $1/2$. Lorsque l'on remplace la racine b par la racine z_k de l'équation $e^z = 1 + z$ (cf. lemme 3), le rayon de convergence est proche de $\frac{1}{k+1}$.

1.5 Les zéros négatifs de G_n et H_n

Soit n impair. K. Dilcher a prouvé dans [10] que le polynôme

$$H_n(z) = \varphi z^{n+1} - (\varphi - 1)z^n - 1 \quad (1.5.50)$$

où $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or, avait un zéro réel négatif $x_{2,n}$. Nous allons montrer

Théorème 4. *Il existe des coefficients réels $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$ tels que l'on ait, pour n impair assez grand,*

$$x_{2,n} = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{n^m}.$$

Soit $b = -\frac{\log 5}{2} = -0.805\dots$. On a

$$c_1 = -b, \quad c_2 = -\frac{b^2}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{5}}{10}, \quad c_3 = -\frac{b^3}{6} + \frac{b^2\sqrt{5}}{10} + \frac{3b^2}{5} - \frac{3b}{10} - \frac{b\sqrt{5}}{10},$$

et les coefficients c_m vérifient $|c_m| \leq \frac{5}{4} \left(\frac{11}{2}\right)^m$.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites analytiques démontré dans le paragraphe 4. On fait d'abord dans (1.5.50) le changement de variables $z = -w$. Comme n est impair, l'équation $H_n(z) = 0$ devient

$$\varphi w^{n+1} + (\varphi - 1)w^n - 1 = 0. \quad (1.5.51)$$

Ensuite, on pose, comme au paragraphe 4, $n = 1/x$ et $w = e^{xy}$. On obtient

$$F(x, y) = \varphi e^{xy} + (\varphi - 1) - e^{-y} = 0. \quad (1.5.52)$$

On a $F(0, b) = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \varphi x e^{xy} + e^{-y} \quad (1.5.53)$$

et donc $\frac{\partial F}{\partial y}(0, b) = e^{-b} = \sqrt{5}$. On peut donc appliquer la proposition 1, et il existe des coefficients d_m tels que la série $y(x) = b + \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m$ vérifie $F(x, y(x)) = 0$.

On pose $G(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. Montrons que le rectangle $\mathcal{R} = \mathcal{R}(0, b, s = 2/11, r = 1/3)$ est de sécurité pour l'équation différentielle $y' = G(x, y)$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \varphi y e^{xy} \quad (1.5.54)$$

et, pour $|x| \leq s$ et $|y - b| \leq r$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| \leq (|b| + r) \varphi e^{s(|b|+r)} \leq 2.26 \quad (1.5.55)$$

et, par (1.5.53),

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| \geq |e^{-y}| - |x| \varphi e^{|xy|} \geq e^{-b-r} - \varphi s e^{s(|b|+r)} \geq 1.24. \quad (1.5.56)$$

1.6. UNE SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE

On vérifie que $\frac{2.26}{1.24} < \frac{11}{6}$ ce qui assure que \mathcal{R} est bien un rectangle de sécurité. Dans \mathcal{R} , on a $|y(x)| \leq |b| + r$, et $|z| = |w| \leq e^{|xy|} \leq e^{s(|b|+r)} \leq 5/4$, et l'on conclut comme en (1.4.49). \square

Les calculs numériques de c_m et d_m laissent prévoir un rayon de convergence voisin de 1 (on a $\sqrt[m]{|c_m|} = 1.08 \dots$ pour $m = 125$ et les entiers voisins). L'algorithme de calcul de c_m et d_m permet, comme dans le paragraphe 4, de montrer que c_m et d_m sont des polynômes en b de degré m à coefficients dans $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

La valeur de b a été obtenue comme la racine réelle de $e^{-b} = \sqrt{5}$. Si l'on prend pour b une racine complexe, $b = -\frac{\log 5}{2} + 2ik\pi$, on obtiendra le développement en série d'une autre racine de $H_n(z)$.

Soit maintenant n pair. K. Dilcher a aussi prouvé dans [10] que le polynôme

$$G_n(z) = (\varphi - 1)z^{n+1} - \varphi z^n + 1 \quad (1.5.57)$$

a une racine réelle négative également notée $x_{2,n}$. Le changement de variables $z = -w$ conduit à l'équation

$$(\varphi - 1)w^{n+1} + \varphi w^n - 1 = 0 \quad (1.5.58)$$

qui est, au signe près, la conjuguée de (1.5.51), obtenue en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans (1.5.51). Le même calcul que précédemment fournit alors le développement en série

$$x_{2,n} = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m}{n^m}.$$

où \tilde{c}_m est obtenu en remplaçant dans c_m le radical $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, ce qui peut se prouver par l'algorithme de calcul des c_m .

1.6 Une série hypergéométrique

On désignera par $[x^k]y(x)$ le coefficient de x^k dans la série entière $y(x)$. En vue de démontrer la proposition 2, nous commençons par deux lemmes.

Lemme 4 (Formule d'inversion de Lagrange, cf. [23], 1.9). *Soit $U(x)$ une série entière avec $U(0) \neq 0$. Posons $W(x) = x/U(x)$. Soit $f(x)$ une série entière ; alors la relation $W(f(x)) = x$ équivaut à $f(x) = xU(f(x))$ et l'on a pour $n, k \in \mathbb{N}$*

$$n[x^n]f(x)^k = k[x^{n-k}]U(x)^n.$$

En particulier, pour $k = 1$ on a

$$[x^n]f(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]U(x)^n.$$

Lemme 5 (cf. le lemme 2 de [53]). *Soit une série entière $U(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} U_n x^n$ et $V(x)$ une série entière vérifiant $V(x) = U(xV(x))$. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$; si $U_n(t) = [x^n]U(x)^t$ et $V_n(t) = [x^n]V(x)^t$, alors*

$$V_n(t) = \frac{t}{t+n} U_n(t+n).$$

1.6. UNE SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE

Démonstration. Posons $W(x) = x/U(x)$ et $f(x) = xV(x)$. Il vient alors $W(xV(x)) = x$. D'après la formule d'inversion de Lagrange (lemme 4), on a pour $n, k \in \mathbb{N}$

$$[x^n](x^k V^k(x)) = \frac{k}{n} [x^{n-k}] U(x)^n,$$

soit

$$V_n(k) = [x^{n+k}](x^k V^k(x)) = \frac{k}{n+k} [x^n] U(x)^{n+k} = \frac{k}{n+k} U_n(n+k).$$

Comme $U_n(t)$ et $V_n(t)$ sont tous deux des polynômes en t de degré $\leq n$, ceci établit l'égalité pour tout nombre réel t . \square

Proposition 2. Soit N et P deux nombres réels positifs, et μ un nombre réel. On pose $Q = N - P$. Le rayon de convergence de la série entière

$$y_\mu(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\mu}{\mu + Pk} \binom{(\mu + Pk)/N}{k} x^k \quad (1.6.59)$$

vaut

$$R = \frac{N}{(P^P |Q|^Q)^{1/N}} \quad (1.6.60)$$

avec la convention $0^0 = 1$. De plus, pour $|x| < R$, on a $y_\mu(x) = (y_1(x))^\mu$ et $y(x) = y_1(x)$ vérifie l'équation

$$y^N + xy^P - 1 = 0. \quad (1.6.61)$$

Démonstration. La proposition 2 se trouve dans [2]. Notons que dans [52], 7.32, le cas $N = 1$ et $P = 2$ est traité comme exemple. La démonstration ci-dessous est due à J. Zeng.

Lorsque $N = P > 0$, l'équation (1.6.61) devient $y = (1 + X)^{-1/N}$ et l'on retrouve pour y^μ la formule du binôme avec un rayon de convergence égal à 1. Lorsque $N \neq P$, la valeur de R s'obtient par la formule classique de Hadamard $1/R = \limsup ([x^k] y^\mu(x))^{1/k}$ que l'on évalue à l'aide de la formule de Stirling.

D'après le théorème des fonctions implicites analytiques, il existe une série entière $y(x)$ solution de (1.6.61) avec $y(0) = 1$. On pose $U(x) = (1 - x)^{P/N}$ et $V(x) = y^P$ vérifie $V(x) = (1 - xV(x))^{P/N}$. Comme

$$U_k(t) = [x^k] U(x)^t = [x^k] (1 - x)^{Pt/N} = (-1)^k \binom{Pt/N}{k},$$

le lemme 5 implique

$$[x^k] y^\mu = [x^k] V(x)^{\mu/P} = (-1)^k \frac{\mu}{\mu + Pk} \binom{(\mu + Pk)/N}{k},$$

ce qui prouve (1.6.59).

Théorème 5. Soit $x_{1,n}$ la racine positive et différente de 1 du trinôme G_n défini par (1.1.3). On a le développement en série, convergent pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} x_{1,n} &= \varphi^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \varphi^{(2n+1)k}} \binom{(n+1)k-2}{k-1} \right) \\ &= \varphi^2 - \frac{1}{\varphi^{2n-1}} - \frac{n}{\varphi^{4n}} - \frac{n(3n+1)}{2\varphi^{6n+1}} - \dots \end{aligned}$$

1.6. UNE SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE

Démonstration. L'équation $G_n(z) = 0$ s'écrit aussi

$$\frac{1}{\varphi} z^{n+1} - \varphi z^n + 1 = 0.$$

En effectuant les changements de variables $z = \varphi^2 y$ et $y = 1/Y$, on obtient

$$y^{n+1} - y^n + \frac{1}{\varphi^{2n+1}} = 0 \tag{1.6.62}$$

et

$$Y - \frac{1}{\varphi^{2n+1}} Y^{n+1} - 1 = 0. \tag{1.6.63}$$

On applique à l'équation (1.6.63) la proposition 2, avec $N = 1$, $P = n + 1$, $\mu = -1$ et $x = -1/\varphi^{2n+1}$, et la formule (1.6.59) donne le développement annoncé pour $x_{1,n}$ en remarquant que $z = \varphi^2 Y^{-1}$ et que

$$\binom{(n+1)k-1}{k} = \frac{(n+1)k-1}{k} \binom{(n+1)k-2}{k-1}.$$

Par (1.6.60), le rayon de convergence vérifie

$$R = R_n = \frac{1}{(n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{1}{e(n+1)}. \tag{1.6.64}$$

L'étude de la fonction $t \mapsto \varphi^{2t+1} - e(t+1)$ montre qu'elle est positive pour $t \geq 3/2$, ce qui entraîne, par (1.6.64), $\frac{1}{\varphi^{2n+1}} < R_n$ pour $n \geq 2$ et pour $n = 1$, on a, par (1.6.64), $R_1 = 1/4 > 1/\varphi^3 = 0.236\dots$, ce qui achève la preuve du théorème 5.

Chapitre 2

Grandes valeurs du nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers

Abstract. Among various functions used to count the factorizations of an integer n , we consider here the number of ways of writing n as an ordered product of primes, which, if $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, is equal to the multinomial coefficient $h(n) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}$. The function $P(s) = \sum_{p \text{ prime}} p^{-s}$, sometimes called the *prime zeta function*, plays an important role in the study of the function h . We denote by $\lambda = 1.399433\dots$ the real number defined by $P(\lambda) = 1$. The mean value of the function h satisfies $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} h(n) \sim -\frac{1}{\lambda P'(\lambda)} x^{\lambda-1}$.

In this paper, we study how large $h(n)$ can be. We prove that there exists a constant $C_1 > 0$ such that, for all $n \geq 3$, $\log h(n) \leq \lambda \log n - C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}$ holds. We also prove that there exists a constant C_2 such that, for all $n \geq 3$, there exists $m \leq n$ satisfying $\log h(m) \geq \lambda \log n - C_2 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}$. Let us call h -champion an integer N such that $M < N$ implies $h(M) < h(N)$. S. Ramanujan has called *highly composite* a τ -champion number, where $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ is the number of divisors of n . We give several results about the number of prime factors of an h -champion number N , about the exponents in the standard factorization into primes of such an N and about the number $Q(X)$ of h -champion numbers $N \leq X$. At the end of the paper, several open problems are listed.

2.1 Introduction

2.1.1 Diverses fonctions de factorisation

La fonction de factorisation la plus classique est le nombre de diviseurs de l'entier n :

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \tag{2.1.1}$$

qui est aussi le nombre de solutions de l'équation diophantienne $x_1 x_2 = n$ en entiers positifs x_1 et x_2 .

2.1. INTRODUCTION

Pour $r \geq 2$, le nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$x_1 x_2 \dots x_r = n \quad (2.1.2)$$

est $\tau_r(n)$, le nombre de décomposition de n en produit de r facteurs. On a $\tau_2(n) = \tau(n)$, et la série génératrice vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{n^s} = (\zeta(s))^r \quad (2.1.3)$$

où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ est la fonction de Riemann.

La fonction de Kalmár (cf. [31], [32], [30] et [17]) $\widehat{f}_K(n)$ compte le nombre de solutions de (2.1.2) pour tout r , mais avec la restriction que chaque facteur x_i doit vérifier $x_i \geq 2$. Ainsi, $\widehat{f}_K(12) = 8$ et les 8 factorisations de 12 sont : $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. La fonction de Kalmár satisfait $\widehat{f}_K(n) = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \widehat{f}_K\left(\frac{n}{d}\right)$ pour $n \geq 2$ avec $\widehat{f}_K(1) = 1$ et sa série génératrice est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_K(n)}{n^s} = \frac{1}{2 - \zeta(s)}. \quad (2.1.4)$$

Elle est reliée à la fonction τ_r par la formule

$$\widehat{f}_K(n) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{2^r} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

La fonction d'Oppenheim (cf. [41], [4] et [29]), $\widehat{f}_O(n)$, a la même définition que celle de Kalmár, mais, cette fois, l'ordre ne compte pas : les trois factorisations de 12 : $3 \cdot 2 \cdot 2$, $2 \cdot 3 \cdot 2$ et $2 \cdot 2 \cdot 3$ ne comptent que pour une. Ainsi, 12 n'a plus que 4 factorisations d'Oppenheim : $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ et $\widehat{f}_O(12) = 4$. Elle a pour série génératrice (cf. [37])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_O(n)}{n^s} = \prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^s}\right)^{-1}. \quad (2.1.5)$$

Soit $\mathcal{A} \subset \{2, 3, 4, \dots\}$; dans [28] et [15] (cf. aussi [34] et [35]), E. Hille et P. Erdős ont généralisé la fonction de Kalmár en définissant la fonction $f_{\mathcal{A}}(n)$ qui compte le nombre de solutions de (2.1.2) pour tout r , avec la restriction que chaque x_i doit vérifier $x_i \in \mathcal{A}$. La fonction de Kalmár apparaît ainsi comme $\widehat{f}_K(n) = f_{\mathbb{N} \setminus \{0,1\}}(n)$. La formule (2.1.4) se généralise sous certaines conditions :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\mathcal{A}}(n)}{n^s} = \frac{1}{1 - \zeta_{\mathcal{A}}(s)} \quad \text{avec} \quad \zeta_{\mathcal{A}}(s) = \sum_{n \in \mathcal{A}} \frac{1}{n^s}. \quad (2.1.6)$$

2.1.2 La fonction $h = f_{\mathcal{P}}$

Soit $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. Dans cet article, nous nous intéresserons essentiellement à la fonction $f_{\mathcal{P}}(n)$, que nous appellerons $h(n)$ et qui est donc le nombre de solutions de (2.1.2) en nombres premiers x_1, x_2, \dots, x_r . Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. La seule possibilité d'écrire n sous la forme (2.1.2) avec x_1, x_2, \dots, x_r premiers est de prendre $r = \Omega(n)$ et de choisir α_i variables x_i

2.1. INTRODUCTION

égales à q_1 , α_2 égales à q_2, \dots, α_k égales à q_k . Le nombre de façons de faire ces choix est le coefficient multinomial (cf. [7], p. 38) et l'on a donc

$$h(n) = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \quad (2.1.7)$$

pour $n \geq 2$ et $h(1) = 1$. Nous définissons

$$P(s) = \zeta_{\mathcal{P}}(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots, \quad \Re s > 1 \quad (2.1.8)$$

La fonction P est quelquefois appelée la *fonction ζ des nombres premiers* (cf. [45], p. 69). La série génératrice de $h(n)$ est, d'après (2.1.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{1}{1 - P(s)}, \quad \Re s > \lambda \quad (2.1.9)$$

où λ est défini par

$$P(\lambda) = 1, \quad \lambda = 1.399433 \dots, \quad (2.1.10)$$

et l'on a

$$h(n) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p|n} h\left(\frac{n}{p}\right) \quad \text{pour } n \geq 2. \quad (2.1.11)$$

Il résulte de (2.1.9) que

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \frac{-1}{\lambda P'(\lambda)} x^\lambda (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.1.12)$$

cf. [35], où est aussi étudié l'ordre normal des fonctions $\widehat{f}_K, \widehat{f}_O$ et h .

2.1.3 Grandes valeurs des fonctions de factorisation

S. Ramanujan fût le premier, dans [43], à étudier de façon extensive les grandes valeurs de la fonction τ définie par (2.1.1). Pour cela, il a introduit les nombres *hautement composés* (un nombre N est dit hautement composé si $M < N \implies \tau(M) < \tau(N)$) et donné de nombreuses propriétés de ces nombres.

Diverses généralisations des idées de S. Ramanujan ont été développées (cf. [40]), essentiellement en remplaçant la fonction τ par une autre fonction arithmétique. Les grandes valeurs de τ_r , définie par (2.1.3), sont étudiées dans [12].

Les grandes valeurs de la fonction d'Oppenheim sont étudiées dans [4] et [33]. Quant à la fonction de Kalmár, à la fin de [15], pp. 992–993, P. Erdős dit qu'il sait démontrer qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 , $0 < c_1 < c_2 < 1$, telles que, pour une suite infinie de valeurs de n , on ait

$$\widehat{f}_K(n) > \frac{n^\rho}{e^{(\log n)^{c_1}}} \quad (2.1.13)$$

(où $\rho = 1.728647 \dots$ est défini par $\zeta(\rho) = 2$) et que, pour tout $n > n_0$,

$$\widehat{f}_K(n) < \frac{n^\rho}{e^{(\log n)^{c_2}}}. \quad (2.1.14)$$

Les grandes valeurs de la fonction de Kalmár ont été précisées par R. Evans (cf. [17], Th. 6 et 7).

2.1.4 Grandes valeurs de la fonction h

Nous nous proposons dans cet article d'étudier les grandes valeurs de la fonction h définie par (2.1.7), autrement dit, de résoudre le problème d'optimisation en nombres entiers

$$\begin{cases} n \leq X \\ \max h(n). \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Soit $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_k$ le k -ième nombre premier. Par (2.1.7), le problème (2.1.15) est, pour k assez grand, équivalent à

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \dots + x_k \log p_k \leq \log X \\ \max \log \left(\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \right) \end{cases} \quad (2.1.16)$$

où les inconnues x_i sont des entiers positifs ou nuls. Grâce à la formule de Stirling, nous remplaçons dans (2.1.16) la fonction à optimiser par une fonction plus grande, $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$, définie en (2.2.19) ci-dessous. Le problème

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \dots + x_k \log p_k \leq \log X \\ \max F(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{cases} \quad (2.1.17)$$

a une solution simple, $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$, donnée au §4, qui permet de majorer $h(n)$. Pour une valeur de k convenable, en choisissant pour α_i un entier voisin de x_i^* , on construit des nombres entiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec une grande valeur de $h(n)$.

Au paragraphe 6, nous étudierons les propriétés des nombres h -champion. Un nombre N est dit h -champion si

$$M < N \implies h(M) < h(N). \quad (2.1.18)$$

Nous montrons que le nombre $\omega(N)$ de facteurs premiers d'un nombre h -champion satisfait $\omega(N) \sim \lambda a^{1/\lambda} \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}$ et que $\Omega(N)$, le nombre de facteurs premiers comptés avec multiplicité, satisfait $\Omega(N) \sim 2^\lambda a \log N$, où a est une constante définie au paragraphe 3. Nous donnons enfin un encadrement (assez grossier) pour $Q(X)$, le nombre de nombres $N \leq X$ qui sont h -champions.

Le paragraphe 7 présente une liste de problèmes ouverts.

2.1.5 Notations et remerciements

Nous noterons $[t]$ la partie entière du nombre réel t . Dans tout l'article, on désigne par p_k le k -ième nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3$, etc...) et par q_1, q_2, \dots, q_k des nombres premiers quelconques. La décomposition en facteurs premiers d'un entier générique n sera notée $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, $q_1 < q_2 < \dots < q_k$. On désigne par $v_p(n)$ la valuation p -adique de n et par $\omega(n)$ (resp. $\Omega(n)$) le nombre de facteurs premiers (resp. comptés avec multiplicité) de n . Enfin, N désignera toujours un nombre h -champion.

Une partie des travaux exposés dans cet article a été développée par le deuxième auteur lors d'un séjour à l'Université du Witwatersrand de Johannesburg en avril 1992. Nous avons donc plaisir à remercier A. et J. Knopfmacher, et R. Warlimont pour les discussions et échanges sur ce sujet ainsi que P. Erdős, très intéressé par les grandes valeurs de la fonction h . Nous avons plaisir également à remercier M. Deléglise pour son aide, notamment dans la construction de la table des nombres h -champion, L. Rifford pour ses remarques sur les problèmes d'optimisation et l'arbitre qui nous a signalé une erreur dans le développement asymptotique (2.3.40).

2.2 Approximation de $\log h(\mathbf{n})$ par \mathbf{F}

Proposition 1. Soit la décomposition en facteurs premiers de $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$ et $h(n)$ défini par (2.1.7). Soit x_1, x_2, \dots, x_k des nombres réels positifs ou nuls; on pose

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \log(x_1 + x_2 + \dots + x_k) - \sum_{i=1}^k x_i \log x_i \quad (2.2.19)$$

avec la convention $t \log t = 0$ si $t = 0$. Alors, pour tout $n \geq 2$, on a

$$(i) \quad \log h(n) \leq F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) - \frac{k-1}{3} \leq F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

$$(ii) \quad \log h(n) \geq F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) - k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \log \alpha_i.$$

Démonstration. Nous utiliserons la formule valable pour tout $m \geq 1$

$$m^m \exp(-m) \sqrt{2\pi m} \leq m! \leq e m^m \exp(-m) \sqrt{m}. \quad (2.2.20)$$

La formule (2.2.20) se déduit de la formule de Stirling classique (cf. [1], 6.1.38), valable pour $m \geq 1$

$$m! = m^m \exp(-m) \sqrt{2\pi m} \exp\left(\frac{\theta}{12m}\right) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1 \quad (2.2.21)$$

car, pour $m \geq 2$, $\sqrt{2\pi} \exp(1/24) = 2.61 \dots < e$, et pour $m = 1$, la majoration dans (2.2.20) est évidente.

Majoration. Lorsque $k = 1$, on a $h(n) = 1$, $F(\alpha_1) = 0$ et (i) est vérifiée. Nous pouvons donc supposer $k \geq 2$.

En utilisant (2.1.7), (2.2.20) et (2.2.19), il vient

$$h(n) \leq \exp(F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)) \frac{e \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}}. \quad (2.2.22)$$

Mais, $\alpha_i \geq 1$, et

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \leq k \leq 2^{k-1}$$

et (2.2.22) entraîne, car $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} h(n) \exp(-F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)) &\leq e 2^{\frac{k-1}{2}} (2\pi)^{-k/2} = \frac{e}{\sqrt{2}} \frac{\pi^{\frac{1-k}{3}}}{\pi^{\frac{k+2}{6}}} \\ &\leq \frac{e}{\sqrt{2}\pi^{2/3}} \pi^{\frac{1-k}{3}} \leq e^{\frac{1-k}{3}} \end{aligned}$$

ce qui prouve (i).

Minoration. Par (2.1.7), (2.2.20) et (2.2.19), il vient

$$h(n) \exp(-F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)) \geq \frac{\sqrt{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)}}{e^k \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}} \geq \frac{1}{e^k \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}}$$

ce qui prouve (ii). \square

2.3. ÉTUDE DE λ ET λ_k

2.3 Étude de λ et λ_k

Soit $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_k$ le k -ième nombre premier. Pour $k \geq 1$, on pose :

$$P_k(s) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j^s}. \quad (2.3.23)$$

Pour chaque k fixé, la fonction $P_k(s)$ décroît de k à 0 lorsque s varie de 0 à $+\infty$; elle admet donc une fonction réciproque $P_k^{-1}(y)$ définie pour $0 < y \leq k$. On pose

$$\lambda_k = P_k^{-1}(1), \quad \text{autrement dit} \quad P_k(\lambda_k) = 1. \quad (2.3.24)$$

La série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s}$ converge normalement pour $s \geq s_0 > 1$ et donc la suite des sommes partielles $(P_k(s))_{k \geq 1}$ converge uniformément vers $P(s)$ pour $s \geq s_0 > 1$; par les méthodes habituelles de l'analyse, il est facile de montrer

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots < \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda. \quad (2.3.25)$$

On a

$k =$	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
$\lambda_k =$	0	0.788	1.033	1.147	1.201	1.304	1.384	1.396	1.398

La valeur numérique de λ donnée en (2.1.10) peut être calculée avec précision à l'aide de la formule ([45], p. 70)

$$P(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \log \zeta(ms) \quad (2.3.26)$$

par les méthodes indiquées dans [6].

Proposition 2. Soit $k \geq 1$, λ_k défini par (2.3.24) et λ par (2.1.10). Lorsque $k \rightarrow \infty$, on a

$$\lambda - \lambda_k \sim \frac{1}{-(\lambda - 1)P'(\lambda)k^{\lambda-1}(\log k)^\lambda} = \frac{1.44617\dots}{k^{\lambda-1}(\log k)^\lambda} \quad (2.3.27)$$

Démonstration. Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x . Le théorème des nombres premiers (cf. [14], Th. 4.7) donne

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + R(x) \quad (2.3.28)$$

où le logarithme intégral Li est défini en [1], p. 228 et

$$R(x) = \mathcal{O}_\nu \left(\frac{x}{(\log x)^\nu} \right) \quad (2.3.29)$$

où ν est un nombre réel fixé supérieur à 1. Cela entraîne pour le k -ième nombre premier p_k

$$p_k \sim k \log k \quad \text{et} \quad \log p_k \sim \log k \quad \text{lorsque} \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.3.30)$$

Introduisons l'exponentielle intégrale (cf. [1], p. 228)

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > 0, \quad (2.3.31)$$

2.3. ÉTUDE DE λ ET λ_k

dont le développement asymptotique est

$$E_1(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} + \dots \right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.3.32)$$

Considérons d'abord la quantité $P(s) - P_k(s)$; en utilisant l'intégrale de Stieltjes, (2.3.28), (2.3.31), (2.3.32) et (2.3.29), il vient pour $s \geq s_0 > 1$

$$\begin{aligned} P(s) - P_k(s) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s} = \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d[\pi(t)]}{t^s} \\ &= \int_{p_k}^{\infty} \frac{dt}{t^s \log t} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d[R(t)]}{t^s} \\ &= E_1((s-1) \log p_k) - \frac{R(p_k^+)}{(p_k^+)^s} + \int_{p_k}^{\infty} \frac{sR(t)}{t^{s+1}} dt \\ &= E_1((s-1) \log p_k) + \frac{\mathcal{O}_{\nu, s_0}(1)}{p_k^{s-1} (\log k)^\nu}. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

De même, on a pour $s \geq s_0 > 1$

$$\begin{aligned} P'_k(s) - P'(s) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\log p_j}{p_j^s} = \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d[\pi(t)] \log t}{t^s} \\ &= \int_{p_k}^{\infty} \frac{dt}{t^s} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d[R(t)] \log t}{t^s} \\ &= \frac{1}{(s-1)p_k^{s-1}} + \frac{\mathcal{O}_{\nu, s_0}(1)}{p_k^{s-1} (\log k)^{\nu-1}}. \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Par la formule de Taylor, on a

$$P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)P'_k(\lambda) + \frac{(\lambda_k - \lambda)^2}{2} M' \quad (2.3.35)$$

avec $M' = P''_k(\xi)$ et $\lambda_k < \xi < \lambda$. On a donc, pour $k \geq 3$

$$0.182\dots = \frac{(\log 2)^2}{2^\lambda} = P''_1(\lambda) < M' < P''(\lambda_3) = 926.56\dots \quad (2.3.36)$$

De (2.1.10) et (2.3.24), on déduit $P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda) = P(\lambda) - P_k(\lambda)$ et (2.3.33) et (2.3.34) (en prenant $s = \lambda$) donnent avec (2.3.35)

$$\begin{aligned} (\lambda_k - \lambda) \left[P'(\lambda) + \frac{1}{(\lambda-1)p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1} (\log k)^{\nu-1}} + \frac{\lambda_k - \lambda}{2} M' \right] \\ = E_1((\lambda-1) \log p_k) + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1} (\log k)^\nu}. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, par (2.3.25), $\lambda_k - \lambda \rightarrow 0$ et (2.3.37), (2.3.32) et (2.3.30) entraînent

$$-(\lambda - \lambda_k)P'(\lambda) \sim E_1((\lambda-1) \log p_k) \sim \frac{1}{(\lambda-1)k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda},$$

2.3. ÉTUDE DE λ ET λ_k

ce qui prouve (2.3.27). \square

Remarque 1. Compte tenu de (2.3.27), (2.3.37) donne le résultat plus précis

$$\lambda - \lambda_k = \frac{E_1((\lambda - 1) \log p_k)}{-P'(\lambda)} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda+\nu-1}} \quad (2.3.38)$$

pour tout $\nu > 1$. En utilisant le développement asymptotique de Cipolla (cf. [13])

$$p_k \sim \text{Li}^{-1}(k) = k \left(L_1 + L_2 - 1 + \frac{L_2 - 2}{L_1} + \mathcal{O}\left(\frac{L_2^2}{L_1^2}\right) \right) \quad (2.3.39)$$

avec $L_1 = \log k$ et $L_2 = \log \log k$, on déduit de (2.3.32) et (2.3.38)

$$\lambda - \lambda_k = \frac{-1}{(\lambda - 1)P'(\lambda)k^{\lambda-1}(L_1)^\lambda} \left(1 - \frac{\lambda L_2 + \frac{\lambda(2-\lambda)}{\lambda-1}}{L_1} + \mathcal{O}\left(\frac{L_2^2}{L_1^2}\right) \right). \quad (2.3.40)$$

En utilisant les inégalités (cf. [47], p. 69 et [13]) :

$$k(\log k + \log \log k - 1) \leq p_k \leq k(\log k + \log \log k), \quad k \geq 6, \quad (2.3.41)$$

on peut obtenir un encadrement effectif de $\lambda - \lambda_k$ (cf. [27]).

Proposition 3. Soit $k \geq 1$, λ , λ_k , P et P_k définis par (2.1.10), (2.3.24), (2.1.8) et (2.3.23). On définit a et a_k par

$$a = \frac{-1}{P'(\lambda)} = 0.5776486 \dots \quad \text{et} \quad a_k = \frac{-1}{P'_k(\lambda_k)}. \quad (2.3.42)$$

On a

$$a_1 > a_2 > \dots > a_k > \dots > a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad (2.3.43)$$

et lorsque $k \rightarrow \infty$

$$a_k - a \sim \frac{1}{(\lambda - 1)(P'(\lambda))^2(k \log k)^{\lambda-1}} = \frac{0.835378 \dots}{(k \log k)^{\lambda-1}}. \quad (2.3.44)$$

Démonstration. On a

$k =$	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
$a_k =$	1.443	1.158	1.003	0.920	0.869	0.759	0.629	0.595	0.584

En remarquant par (2.3.23) et (2.3.24) que l'on a

$$\lambda_{k+1} = P_k^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} \right), \quad (2.3.45)$$

il vient par le théorème des accroissements finis

$$\begin{aligned} P'_{k+1}(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k) &= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} + P'_k(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k) \\ &= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} + P'_k \circ P_k^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} \right) - P'_k \circ P_k^{-1}(1) \\ &= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} \frac{P''_k(P_k^{-1}(\eta_k))}{P'_k(P_k^{-1}(\eta_k))} \end{aligned}$$

2.3. ÉTUDE DE λ ET λ_k

avec $1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}} < \eta_k < 1$. En posant $\rho_k = P_k^{-1}(\eta_k)$, on a par (2.3.24) et (2.3.45) $\lambda_k < \rho_k < \lambda_{k+1}$ et

$$\begin{aligned} P'_{k+1}(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k) &= \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}(-P'_k(\rho_k))} (\log p_{k+1} P'_k(\rho_k) + P''_k(\rho_k)) \\ &= \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}(-P'_k(\rho_k))} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\log^2 p_j}{p_j^{\rho_k}} - \frac{\log p_j \log p_{k+1}}{p_j^{\rho_k}} \right) < 0 \end{aligned}$$

et par (2.3.42) cela démontre $a_{k+1} < a_k$. Comme $P'_k(s)$ tend uniformément vers $P'(s)$ pour $1 < s_0 \leq s$, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, ce qui achève la preuve de (2.3.43).

Pour démontrer (2.3.44), on utilise la formule de Taylor, comme en (2.3.35)

$$P'_k(\lambda_k) - P'_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda) P''_k(\lambda) + \frac{(\lambda_k - \lambda)^2}{2} M'' \quad (2.3.46)$$

avec, pour $k \geq 3$, $|M''| < |P'''(\lambda_3)|$. Ensuite, on a, comme en (2.3.34)

$$P''(\lambda) - P''_k(\lambda) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\log^2 p_j}{p_j^\lambda} = \frac{(\lambda - 1) \log p_k + 1}{(\lambda - 1)^2 p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1} (\log k)^{\nu-2}}. \quad (2.3.47)$$

Il vient alors, par (2.3.46), (2.3.47), (2.3.34) et (2.3.27)

$$\begin{aligned} P'_k(\lambda_k) - P'(\lambda) &= P'_k(\lambda_k) - P'_k(\lambda) + P'_k(\lambda) - P'(\lambda) \\ &= (\lambda_k - \lambda) \left[P''(\lambda) - \frac{(\lambda - 1) \log p_k + 1}{(\lambda - 1)^2 p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1} (\log k)^{\nu-2}} + \frac{\lambda_k - \lambda}{2} M'' \right] \\ &\quad + \frac{1}{(\lambda - 1) p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1} (\log k)^{\nu-1}} \\ &= (\lambda_k - \lambda) P''(\lambda) + \frac{1}{(\lambda - 1) p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1} (\log k)^{\nu-1}}. \end{aligned}$$

Par la formule de Taylor appliquée à la fonction $t \mapsto -1/t$, on a

$$\begin{aligned} a_k - a &= \frac{-1}{P'_k(\lambda_k)} - \frac{-1}{P'(\lambda)} = \frac{P'_k(\lambda_k) - P'(\lambda)}{P'(\lambda)^2} + \mathcal{O}(P'_k(\lambda_k) - P'(\lambda))^2 \\ &= \frac{(\lambda_k - \lambda) P''(\lambda)}{P'(\lambda)^2} + \frac{1}{(\lambda - 1) p_k^{\lambda-1} P'(\lambda)^2} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{k^{\lambda-1} (\log k)^{\lambda+\nu-2}} \quad (2.3.48) \end{aligned}$$

et comme, par (2.3.27), le premier terme de (2.3.48) est négligeable devant le second, on obtient (2.3.44) à l'aide de (2.3.30). \square

2.4 Un problème d'optimisation

Lemme 1. *La fonction F définie par (2.2.19) est concave dans \mathbb{R}_+^k .*

Démonstration. En posant $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ et $S = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$, il résulte de (2.2.19), pour $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{*k}$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = \log \frac{S}{x_i}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\underline{x}) = \frac{1}{S} - \frac{1}{x_i}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}) = \frac{1}{S} \quad (2.4.49)$$

de telle sorte que la forme quadratique des dérivées secondes de F s'écrit

$$F''(\underline{x}) \cdot (h_1, h_2, \dots, h_k) = \frac{1}{S} \left(\sum_{i=1}^k h_i \right)^2 - \sum_{i=1}^k \frac{h_i^2}{x_i}. \quad (2.4.50)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^k h_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k \sqrt{x_i} \frac{h_i}{\sqrt{x_i}} \right)^2 \leq S \sum_{i=1}^k \frac{h_i^2}{x_i},$$

et il en résulte, par (2.4.50), que F est concave dans \mathbb{R}_+^k . \square

Soit $k \geq 2$, p_k le k -ième nombre premier et A un nombre réel positif. On considère le domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{R}_+^k$ défini par $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, \dots , $x_k \geq 0$ et

$$x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \dots + x_k \log p_k \leq A. \quad (2.4.51)$$

Soit F définie par (2.2.19). Comme la fonction F est croissante par rapport à chaque variable, le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \underline{x} \in \mathcal{D}(A) \\ \max F(\underline{x}) \end{cases} \quad (2.4.52)$$

a la même solution que le problème

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \dots + x_k \log p_k = A \\ \max F(x_1, x_2, \dots, x_k). \end{cases} \quad (2.4.53)$$

Proposition 4. *La solution du problème (2.4.53) (ou du problème équivalent (2.4.52))*

est donnée par

$$x_i^* = \frac{a_k A}{p_i^{\lambda_k}} \quad (2.4.54)$$

où λ_k et a_k sont définis par (2.3.24) et (2.3.42), et satisfait

$$F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = \lambda_k A. \quad (2.4.55)$$

Démonstration. Utilisons les multiplicateurs de Lagrange ; une solution de (2.4.53), $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ satisfait pour $1 \leq i \leq k$

$$\frac{1}{\log p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = \frac{\log(x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^*) - \log x_i^*}{\log p_i} = \lambda_k, \quad (2.4.56)$$

2.4. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

d'où l'on tire

$$x_i^* = \frac{x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^*}{p_i^{\lambda_k}}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.4.57)$$

En ajoutant $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ donnés par (2.4.57), on trouve pour λ_k la valeur donnée en (2.3.24). La solution $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ satisfait la contrainte, autrement dit

$$x_1^* \log 2 + x_2^* \log 3 + \dots + x_k^* \log p_k = A. \quad (2.4.58)$$

On a ensuite avec (2.3.23)

$$A = \sum_{i=1}^k x_i^* \log p_i = -(x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^*) P'_k(\lambda_k)$$

d'où par (2.3.42)

$$x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^* = -\frac{A}{P'_k(\lambda_k)} = a_k A \quad (2.4.59)$$

et par (2.4.57), on obtient (2.4.54) ; en multipliant (2.4.56) par $x_i^* \log p_i$ et en ajoutant, on obtient (2.4.55) à l'aide de (2.4.58). \square

Proposition 5. *Soit $k \geq 2$, $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{D}(A)$ (défini par (2.4.51)), $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ définis par (2.4.54) et F définie par (2.2.19). Alors on a*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_k) &\leq F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) - \frac{1}{2A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \log p_i |x_i - x_i^*| \right)^2 \\ &\leq F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\log p_i)^2}{2A \log p_k} (x_i - x_i^*)^2. \end{aligned} \quad (2.4.60)$$

Démonstration. Définissons $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ par

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_{k-1} = x_{k-1}, \quad \sum_{i=1}^k y_i \log p_i = A. \quad (2.4.61)$$

Comme $\underline{x} \in \mathcal{D}(A)$, par (2.4.51), on a $x_k \leq y_k$ et la croissance de F par rapport à chacune des variables entraîne

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq F(y_1, y_2, \dots, y_k). \quad (2.4.62)$$

Posons $h_i = y_i - x_i^*$; on a par (2.4.61) et (2.4.58)

$$\sum_{i=1}^k h_i \log p_i = \sum_{i=1}^k y_i \log p_i - \sum_{i=1}^k x_i^* \log p_i = A - A = 0. \quad (2.4.63)$$

Appliquons la formule de Taylor à la fonction F entre les points \underline{y} et \underline{x}^* :

$$F(\underline{y}) - F(\underline{x}^*) = \sum_{i=1}^k h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) + \frac{1}{2} F''(\underline{\xi}) \cdot (\underline{h}) \quad (2.4.64)$$

2.5. GRANDES VALEURS DE LA FONCTION \mathbf{h}

où $\underline{\xi} = \theta \underline{y} + (1 - \theta) \underline{x}^*$ et $0 < \theta < 1$. Par (2.4.56) et (2.4.63), il suit

$$\sum_{i=1}^k h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = \lambda_k \sum_{i=1}^k h_i \log p_i = 0. \quad (2.4.65)$$

Il vient ensuite, par (2.4.63) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^k h_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k h_i \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k} \right) \right)^2 \leq (\xi_1 + \dots + \xi_k) \sum_{i=1}^k \frac{h_i^2}{\xi_i} \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k} \right)^2.$$

Mais, pour $t = \frac{\log p_i}{\log p_k}$, on a $0 < t \leq 1$ et $(1 - t)^2 \leq 1 - t$; par (2.4.50), il suit

$$F''(\underline{\xi}) \cdot (\underline{h}) \leq \sum_{i=1}^k \frac{h_i^2}{\xi_i} \left(\left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k} \right)^2 - 1 \right) \leq - \sum_{i=1}^k \frac{\log p_i}{\log p_k} \frac{h_i^2}{\xi_i}.$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme

$$\left(\sum_{i=1}^k |h_i| \log p_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k \sqrt{\xi_i \log p_i} \frac{|h_i| \sqrt{\log p_i}}{\sqrt{\xi_i}} \right)^2 \leq A \sum_{i=1}^k \frac{h_i^2 \log p_i}{\xi_i},$$

(car, par (2.4.61) et (2.4.58), $\sum_{i=1}^k \xi_i \log p_i = A$) on obtient

$$F''(\underline{\xi}) \cdot (\underline{h}) \leq - \frac{1}{A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^k |h_i| \log p_i \right)^2 \leq - \frac{1}{A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |h_i| \log p_i \right)^2$$

ce qui, avec (2.4.62), (2.4.64), (2.4.65) et (2.4.61), complète la preuve de la proposition 5. \square

2.5 Grandes valeurs de la fonction \mathbf{h}

Théorème 1. *Soit n un entier, $n \geq 3$, et $k = \omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n . Alors on a*

$$(i) \quad \log h(n) \leq \lambda_k \log n - \frac{k-1}{3} \leq \lambda \log n - C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}$$

où λ_k et λ sont définis en (2.3.24) et (2.1.10). D'autre part, pour $n \geq 3$, il existe $m \leq n$ tel que

$$(ii) \quad \log h(m) \geq \lambda \log n - C_2 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}.$$

Les constantes positives C_1 et C_2 sont absolues.

Démonstration de (i). Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$. On pose $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \leq n$. Par (2.1.7), on a $h(N) = h(n)$, et $\alpha_1 \log 2 + \alpha_2 \log 3 + \dots + \alpha_k \log p_k = \log N$. Par la proposition 4 avec $A = \log N$, il vient

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \leq \lambda_k \log N$$

2.5. GRANDES VALEURS DE LA FONCTION h

tandis que, par la proposition 1 (i), on obtient

$$\log h(n) = \log h(N) \leq \lambda_k \log N - \frac{k-1}{3} \leq \lambda_k \log n - \frac{k-1}{3}.$$

Il reste à prouver

$$(\lambda - \lambda_k) \log n + \frac{k-1}{3} \geq C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}. \quad (2.5.66)$$

Supposons $C_1 \leq 0.135$. On s'assure que (2.5.66) est vérifiée pour $3 \leq n \leq 15$. On supposera donc que $n \geq 16 > e^e$, ce qui implique $\log \log n > 1$. On observe que (2.5.66) est vérifiée pour $k = 1$ (car $\lambda_1 = 0$) et pour tout $n \geq 16$. On suppose donc que $k \geq 2$. Par la proposition 2, il existe une constante positive γ_1 telle que l'on ait $\lambda - \lambda_k \geq \frac{\gamma_1}{k^{\lambda-1}(\log k)^\lambda}$ (vraisemblablement, $\gamma_1 = (\lambda - \lambda_2)2^{\lambda-1}(\log 2)^\lambda = 0.48\dots$). Si $k \leq \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n} < \log n$, on a

$$\lambda - \lambda_k \geq \frac{\gamma_1}{\left(\frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}\right)^{\lambda-1} (\log \log n)^\lambda} = \frac{\gamma_1 (\log n)^{1/\lambda-1}}{\log \log n}, \quad (2.5.67)$$

tandis que, pour $k > \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}$, on a $\frac{k-1}{3} \geq \frac{k}{6} > \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{6 \log \log n}$ ce qui, avec (2.5.67) prouve (2.5.66) et (i) en choisissant $C_1 = \min(\gamma_1, 0.135)$.

Remarque 2. On peut prouver la relation $\log h(n) \leq \lambda_k \log n$ par une autre méthode en démontrant, pour k fixé, $h(n) \leq n^{\lambda_k}$ pour tous les nombres n ayant au plus k facteurs premiers, et ceci par récurrence sur n . Comme $h(1) = 1$, la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie jusqu'à $n-1$, avec $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_j^{\alpha_j}$ et $j \leq k$. Par (2.1.11), l'hypothèse de récurrence et (2.3.24), il vient

$$h(n) = \sum_{i=1}^j h\left(\frac{n}{q_i}\right) \leq \sum_{i=1}^j \left(\frac{n}{q_i}\right)^{\lambda_k} \leq n^{\lambda_k} \sum_{i=1}^j \frac{1}{p_i^{\lambda_k}} = n^{\lambda_k}.$$

Lemme 2. Soit k un entier positif; on range les 2^k diviseurs de $n = p_1 p_2 \dots p_k$ par ordre croissant : $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{2^k} = n$. Alors, pour tout i , $1 \leq i \leq 2^k - 1$, on a $d_{i+1} \leq 2d_i$.

Démonstration. Considérons $d_i \neq n$; si d_i est impair, $2d_i$ est un diviseur de n , donc $d_{i+1} \leq 2d_i$; sinon, soit $p_j \geq 3$ le plus petit nombre premier ne divisant pas d_i ; $d_i p_j / p_{j-1}$ est un diviseur de n plus grand que d_i , par conséquent, $d_{i+1} \leq d_i p_j / p_{j-1}$. Mais, par le postulat de Bertrand (cf. [21], Th. 418), $p_j < 2p_{j-1}$, ce qui achève la preuve du lemme 2. \square

Démonstration du théorème 1, (ii) : choix de k . On applique la proposition 4 avec $A = \log n$ et

$$k = \left\lceil \kappa \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n} \right\rceil \quad (2.5.68)$$

où κ est une constante positive satisfaisant

$$\kappa < \lambda a^{1/\lambda} = 0.945\dots \quad (2.5.69)$$

et a est défini en (2.3.42). On a alors par (2.4.54) et (2.4.58)

$$x_i^* = \frac{a_k \log n}{p_i^{\lambda_k}}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.5.70)$$

2.5. GRANDES VALEURS DE LA FONCTION \mathbf{h}

et

$$\sum_{i=1}^k x_i^* \log p_i = \log n. \quad (2.5.71)$$

Par (2.5.70), (2.3.25), (2.3.43), (2.3.30), (2.5.68) et (2.5.69), on a, lorsque $n \rightarrow \infty$

$$x_1^* > x_2^* > \dots > x_k^* = \frac{a_k \log n}{p_k^{\lambda_k}} \geq \frac{a \log n}{p_k^\lambda} \sim \frac{a \log n}{(k \log k)^\lambda} \sim \frac{\lambda^\lambda a}{\kappa^\lambda} > 1. \quad (2.5.72)$$

Par (2.4.55), il vient

$$F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = \lambda_k \log n = \lambda \log n - (\lambda - \lambda_k) \log n \quad (2.5.73)$$

tandis que, par la proposition 2 et (2.5.68), lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$\lambda - \lambda_k \sim \frac{1}{-(\lambda - 1)P'(\lambda)k^{\lambda-1}(\log k)^\lambda} \sim \frac{\lambda^\lambda(\log n)^{1/\lambda-1}}{-(\lambda - 1)P'(\lambda)\kappa^{\lambda-1} \log \log n}. \quad (2.5.74)$$

Par (2.4.59) et (2.3.43), on a, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^* = a_k \log n \sim a \log n. \quad (2.5.75)$$

Nous aurons aussi besoin d'une estimation de $\sum_{i=1}^k \log x_i^*$. En notant $\Theta(t) = \sum_{p \leq t} \log p$ la fonction de Chebichev, on a par (2.5.70),

$$\sum_{i=1}^k \log x_i^* = \sum_{i=1}^k \log(a_k \log n) - \lambda_k \log p_i = k \log(a_k \log n) - \lambda_k \Theta(p_k). \quad (2.5.76)$$

Mais, par le théorème des nombres premiers (cf. [14], Th. 4.7) et (2.3.39), on a

$$\Theta(p_k) = p_k + \frac{\mathcal{O}(p_k)}{(\log p_k)^2} = k(\log k + \log \log k - 1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty$$

et (2.5.76) devient avec (2.5.68)

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log x_i^* = \log a_k + \log \log n - \lambda_k \left(\frac{1}{\lambda} \log \log n + \log \frac{\kappa}{e\lambda} + o(1) \right). \quad (2.5.77)$$

Par (2.3.43), $\log a_k = \log a + o(1)$ et par (2.5.74) et (2.5.69), (2.5.77) donne, pour n assez grand

$$\sum_{i=1}^k \log x_i^* \sim k \log \frac{(e\lambda)^\lambda a}{\kappa^\lambda} > \lambda k. \quad (2.5.78)$$

Construction de \mathbf{m} . k étant défini par (2.5.68) et x_i^* par (2.5.70), on pose $m_0 = \prod_{i=1}^k p_i^{\lfloor x_i^* \rfloor}$. Par (2.5.71), on a $\frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k} = \prod_{i=1}^k p_i^{x_i^* - 1} < m_0 \leq \prod_{i=1}^k p_i^{x_i^*} = n$. Soit d le plus grand diviseur de $p_1 p_2 \dots p_k$ satisfaisant $d \leq n/m_0$. Par le lemme 2, on a $d > n/2m_0$. On écrit $d = \prod_{i=1}^k p_i^{\varepsilon_i}$, avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, et l'on pose $m = m_0 d$. On a donc

$$n/2 < m = m_0 d \leq n, \quad (2.5.79)$$

2.5. GRANDES VALEURS DE LA FONCTION h

$$m = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} \quad (2.5.80)$$

avec

$$\alpha_i = [x_i^*] + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \quad (2.5.81)$$

et, par (2.5.79), (2.5.71) et (2.5.80), il vient

$$-\log 2 < \log \frac{m}{n} = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - x_i^*) \log p_i \leq 0. \quad (2.5.82)$$

De plus, par (2.5.81) et (2.5.72), on a

$$1 \leq [x_i^*] \leq \alpha_i \leq 1 + [x_i^*] \leq 1 + x_i^* \leq 2x_i^*, \quad 1 \leq i \leq k \quad (2.5.83)$$

et

$$|\alpha_i - x_i^*| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (2.5.84)$$

Fin de la démonstration du théorème 1 (ii). Appliquons la formule de Taylor ; il vient, par (2.4.50)

$$F(\underline{\alpha}) = F(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^k (\alpha_i - x_i^*) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) + \frac{\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i - x_i^*\right)^2}{2(\xi_1 + \dots + \xi_k)} - \sum_{i=1}^k \frac{(\alpha_i - x_i^*)^2}{2\xi_i} \quad (2.5.85)$$

avec, pour $1 \leq i \leq k$, $\xi_i = \theta \alpha_i + (1 - \theta)x_i^*$ et $0 < \theta < 1$. On a donc, par (2.5.83)

$$\xi_i \geq \theta [x_i^*] + (1 - \theta) [x_i^*] = [x_i^*] \geq 1. \quad (2.5.86)$$

Par (2.4.56), (2.5.82) et (2.3.25), le deuxième terme du membre de droite de (2.5.85) satisfait

$$\sum_{i=1}^k (\alpha_i - x_i^*) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = \lambda_k \log \frac{m}{n} \geq -\lambda_k \log 2 \geq -\lambda \log 2,$$

le troisième terme est positif et, par (2.5.84) et (2.5.86), le quatrième vérifie $\sum_{i=1}^k \frac{(\alpha_i - x_i^*)^2}{2\xi_i} \leq \frac{k}{2}$. Ainsi, (2.5.85) entraîne

$$F(\underline{\alpha}) \geq F(\underline{x}^*) - \lambda \log 2 - \frac{k}{2}. \quad (2.5.87)$$

Maintenant, par la proposition 1 (ii) et (2.5.80), il vient

$$\log h(m) \geq F(\alpha_1, \dots, \alpha_k) - k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \log \alpha_i$$

qui, par (2.5.87) et (2.5.83), donne

$$\log h(m) \geq F(x_1^*, \dots, x_k^*) - \lambda \log 2 - \frac{3k}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \log(2x_i^*).$$

Par (2.5.73), (2.5.74) et (2.5.78), il en découle $\log h(m) \geq \lambda \log n - \mathcal{O}(k)$, ce qui, par (2.5.68) achève la preuve du théorème 1. \square

2.6 Propriétés des nombres **h**-champions

Comme la fonction h ne dépend, par (2.1.7), que des exposants dans la décomposition en facteurs premiers de n , il est clair qu'un nombre h -champion défini par (2.1.18) s'écrit

$$N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{avec } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 1 \quad \text{et } k = \omega(N). \quad (2.6.88)$$

Par ailleurs, il résulte du théorème 1 (ii) que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h(n) = +\infty$$

et donc, il existe une infinité de nombres h -champions. Si N_i désigne le i -ème nombre h -champion ($N_1 = 1$, $N_2 = 6$, $N_3 = 12$, etc..., cf. [8]) on a, pour $i \geq 1$,

$$N_i \leq n < N_{i+1} \implies h(n) \leq h(N_i). \quad (2.6.89)$$

Par (2.1.7), $\omega(n) = 1$ implique $h(n) = 1$; mais $h(6) = 2$, et donc, pour $i \geq 2$, on a $\omega(N_i) \geq 2$, ce qui entraîne, par (2.1.7), $h(2N_i) > h(N_i)$. Il en résulte que

$$N_{i+1} \leq 2N_i, \quad i \geq 2. \quad (2.6.90)$$

2.6.1 Encadrement de $\omega(N)$

Proposition 6. *Soit $N \neq 1$ un nombre h -champion. Alors on a*

$$(i) \quad \log h(N) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}$$

où λ est défini en (2.1.10) et C_2 est la constante définie dans le théorème 1. De plus, il existe trois constantes positives C_3 , C_4 et N_0 telles que, pour $N \geq N_0$, on ait

$$(ii) \quad C_3 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N} \leq \omega(N) \leq C_4 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}.$$

Démonstration de (i). Appliquons le théorème 1 (ii). Il existe $m \leq N$ avec $\log h(m) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}$. Mais, par (2.1.18), on a $h(N) \geq h(m)$, ce qui prouve (i).

Démonstration de (ii). Posons $k = \omega(N)$. Par le théorème 1 (i), on a

$$\log h(N) \leq \lambda \log N - (\lambda - \lambda_k) \log N - \frac{k-1}{3}. \quad (2.6.91)$$

En comparant avec (i), il vient

$$(\lambda - \lambda_k) \log N \leq C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}$$

qui, avec la proposition 2, donne

$$k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda \gtrsim \frac{(\log N)^{1-1/\lambda} \log \log N}{-C_2(\lambda-1)P'(\lambda)}. \quad (2.6.92)$$

2.6. PROPRIÉTÉS DES NOMBRES **h**-CHAMPIONS

Mais la fonction $y = f(t) = t^{\lambda-1}(\log t)^\lambda$ est croissante pour $t \geq 1$, sa fonction réciproque $f^{-1}(y)$ satisfait, lorsque $y \rightarrow \infty$

$$f^{-1}(y) \sim (\lambda - 1)^{\frac{1}{\lambda-1}} \left(\frac{y}{(\log y)^\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda-1}}$$

et ainsi, en choisissant $C_3 < \left(\frac{\lambda^\lambda}{-C_2(\lambda-1)P'(\lambda)} \right)^{\frac{1}{\lambda-1}}$, (2.6.92) démontre la minoration de (ii).

En comparant (2.6.91) et (i), il vient

$$\frac{k-1}{3} \leq C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}$$

ce qui implique la majoration de (ii). \square

2.6.2 Factorisation de N : petits facteurs premiers

Théorème 2. *Soit N un nombre h -champion dont la décomposition en facteurs premiers est donnée par (2.6.88). On définit λ et a par (2.1.10) et (2.3.42). Lorsque $N \rightarrow \infty$, on a*

$$(i) \quad \alpha_i = v_{p_i}(N) = \frac{a}{p_i^\lambda} \log N + \mathcal{O} \left(\frac{(\log N)^c}{\log p_i} \right), \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

$$(ii) \quad \Omega(N) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = a \log N + \mathcal{O}((\log N)^c)$$

où

$$c = (1 + 1/\lambda)/2 = 0.857 \dots \quad (2.6.93)$$

Démonstration de (i). Par la proposition 6 (i) et (2.3.25), on a , avec $k = \omega(N)$:

$$\log h(N) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N} \geq \lambda_k \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}. \quad (2.6.94)$$

Maintenant, par la proposition 5, avec $A = \log N$, $k = \omega(N)$ et x_i^* défini par (2.4.54), on a, par (2.4.55), $F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = \lambda_k \log N$ et

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \leq \lambda_k \log N - \frac{1}{2 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \log p_i |\alpha_i - x_i^*| \right)^2. \quad (2.6.95)$$

Par la proposition 1 (i), (2.6.94) et (2.6.95), on obtient

$$\frac{1}{2 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \log p_i |\alpha_i - x_i^*| \right)^2 \leq C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}. \quad (2.6.96)$$

Par la propositions 6 (ii), on a $\omega(N) \asymp \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}$ ce qui entraîne par (2.3.30), lorsque $N \rightarrow \infty$,

$$\log p_k \sim \log(k \log k) \sim \log k \sim \frac{1}{\lambda} \log \log N. \quad (2.6.97)$$

2.6. PROPRIÉTÉS DES NOMBRES **h**-CHAMPIONS

De (2.6.96) et (2.6.97), on déduit

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i = \mathcal{O}((\log N)^c) \quad (2.6.98)$$

où c est donné en (2.6.93). Pour démontrer (i), on remarque que, par (2.4.54), (2.6.98) entraîne, pour $1 \leq i \leq k-1$,

$$\alpha_i - \frac{a_k}{p_i^{\lambda_k}} \log N = \mathcal{O}\left(\frac{(\log N)^c}{\log p_i}\right). \quad (2.6.99)$$

Ensuite, par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \mapsto p_i^{-t}$, les propositions 2, 3 et 6 (ii) ainsi que (2.6.97), on a pour $1 \leq i \leq k$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_k}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{a}{p_i^\lambda} \right| &= \left| \left(\frac{1}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{1}{p_i^\lambda} \right) a_k + (a_k - a) \frac{1}{p_i^\lambda} \right| \\ &\leq \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} (\lambda - \lambda_k) a_k + \frac{(a_k - a)}{p_i^\lambda} \leq (\lambda - \lambda_k) a_k \log p_k + (a_k - a) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{\lambda-1} (\log k)^{\lambda-1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log N)^{1-1/\lambda}}\right). \end{aligned} \quad (2.6.100)$$

Finalement, (2.6.99) et (2.6.100) entraînent (i), car, par (2.6.97), $\log p_i \leq \log p_k = \mathcal{O}(\log \log N)$ et $1/\lambda < c$.

Démonstration de (ii). On remarque d'abord que, par (2.4.59) et (2.4.58), on a $\sum_{i=1}^k x_i^* = a_k \log N$ et $\sum_{i=1}^k x_i^* \log p_i = \log N$, ce qui, par (2.6.88) et (2.6.98), entraîne

$$\begin{aligned} |\Omega(N) - a_k \log N| &= \left| \sum_{i=1}^k (\alpha_i - x_i^*) \right| = \left| \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_i - x_i^*) \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \leq \sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \frac{\log p_i}{\log 2} = \mathcal{O}((\log N)^c). \end{aligned} \quad (2.6.101)$$

Ensuite, par les propositions 3 et 6 (ii), on a, comme en (2.6.100)

$$a_k - a = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{\lambda-1} (\log k)^{\lambda-1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log N)^{1-1/\lambda}}\right)$$

qui, avec (2.6.101), achève la preuve du théorème 2. \square

2.6.3 Factorisation de N : grands facteurs premiers

Théorème 3. *Soit N un nombre h -champion dont la décomposition en facteurs premiers est donnée par (2.6.88). Alors, pour N assez grand, on a*

$$\alpha_k = 1. \quad (2.6.102)$$

De plus, si P_j désigne le plus grand nombre premier tel que P_j^j divise N (d'après (2.6.88), $P_1 = p_k$), alors, pour j fixé, $j \geq 1$, on a, lorsque $N \rightarrow \infty$,

$$P_j \sim \left(\frac{a \log N}{j} \right)^{1/\lambda} \sim j^{-1/\lambda} P_1 \quad (2.6.103)$$

où λ et a sont définis par (2.1.10) et (2.3.42) ($a^{1/\lambda} = 0.676\dots$, $2^{-1/\lambda} = 0.609\dots$, $3^{-1/\lambda} = 0.456\dots$, etc...). Il en résulte que

$$k = \omega(N) \sim \lambda a^{1/\lambda} \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N} = 0.945\dots \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}. \quad (2.6.104)$$

Démonstration. Par la proposition 6 (ii), $k = \omega(N)$ tend vers l'infini avec N et par (2.3.30), on a pour N assez grand

$$M \stackrel{\text{def}}{=} N \frac{p_{k+1} p_{k+2}}{2 p_k p_{k-1}} < N,$$

ce qui implique, par (2.1.7) et (2.1.18)

$$h(M) = \frac{\alpha_1 \alpha_{k-1} \alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} h(N) < h(N). \quad (2.6.105)$$

Appliquons maintenant le théorème 2 : lorsque $N \rightarrow \infty$, on a $\frac{\Omega(N)}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1} \sim 2^\lambda = 2.63\dots$ et donc,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k < 3\alpha_1 \quad (2.6.106)$$

pour N assez grand. Il résulte de (2.6.88), (2.6.105) et (2.6.106) que

$$1 \leq \alpha_k^2 \leq \alpha_k \alpha_{k-1} < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1} < 3,$$

ce qui prouve (2.6.102).

Remarque 3. D'après la table numérique (cf. [8]), il semble que les seuls nombres h -champions pour lesquels $\alpha_k \geq 2$ soient

N	N	$h(N)$
3 175 200	$2^5 3^4 5^2 7^2$	540 540
6 350 400	$2^6 3^4 5^2 7^2$	1 261 260
12 700 800	$2^7 3^4 5^2 7^2$	2 702 700
19 051 200	$2^6 3^5 5^2 7^2$	3 783 780
38 102 400	$2^7 3^5 5^2 7^2$	8 648 640

2.6. PROPRIÉTÉS DES NOMBRES **h**-CHAMPIONS

Démontrons maintenant (2.6.103). Fixons j ; on désigne par $i = i(j)$ le rang du nombre premier P_j , autrement dit,

$$P_j = p_i = p_{i(j)} \quad (2.6.107)$$

et, par la définition de P_j , on déduit de (2.6.88)

$$\alpha_i \geq j \quad \text{et} \quad \alpha_{i+1} \leq j - 1. \quad (2.6.108)$$

Il résulte du théorème 2 (i) que $i = i(j)$ et donc aussi p_i tendent vers l'infini avec N et, par le théorème des nombres premiers, p_{i+1}/p_i tend vers 1. Le nombre $\frac{\log 3}{\log 2}$ étant irrationnel, si l'on ordonne les nombres de la forme $2^u 3^v$ (u, v entiers, $u, v \geq 0$) en une suite croissante $(x_n)_{n \geq 1}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ (cf. [49]). En conséquence, à tout ε , $0 < \varepsilon < 1$, on peut associer N_ε tel que, pour $N \geq N_\varepsilon$, il existe des entiers u, v, u', v' satisfaisant

$$(1 - \varepsilon)p_i < 2^u 3^v < p_i < p_{i+1} < 2^{u'} 3^{v'} < p_{i+1}(1 + \varepsilon) < p_i(1 + 2\varepsilon). \quad (2.6.109)$$

Comme $i \leq k$, de (2.6.109) et (2.6.97) on déduit

$$u, v, u', v' = \mathcal{O}(\log \log N). \quad (2.6.110)$$

On considère alors les deux nombres

$$M = \frac{N 2^u 3^v}{p_i} < N \quad \text{et} \quad M' = \frac{N p_{i+1}}{2^{u'} 3^{v'}} < N. \quad (2.6.111)$$

Par (2.1.18), (2.1.7) et (2.6.108), il vient en posant $\Omega = \Omega(N)$

$$\begin{aligned} 1 > \frac{h(M)}{h(N)} &= \frac{\alpha_i(\Omega + 1) \dots (\Omega + u + v - 1)}{(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_1 + u)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_2 + v)} \\ &\geq \frac{j \Omega^{u+v-1}}{(\alpha_1 + u)^u (\alpha_2 + v)^v}. \end{aligned} \quad (2.6.112)$$

Par (2.6.110) et le théorème 2, on a

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + u)^u &= \alpha_1^u \exp(u \log(1 + \frac{u}{\alpha_1})) \leq \alpha_1^u \exp\left(\frac{u^2}{\alpha_1}\right) \\ &= \left(\frac{a \log N}{2^\lambda}\right)^u \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{u}{(\log N)^{1-c}}\right)\right) \sim \left(\frac{a \log N}{2^\lambda}\right)^u \end{aligned}$$

et, similairement, $(\alpha_2 + v)^v \sim \left(\frac{a \log N}{3^\lambda}\right)^v$ et $\Omega^{u+v-1} \sim (a \log N)^{u+v-1}$. La relation (2.6.112) entraîne alors $1 \gtrsim \frac{j(2^u 3^v)^\lambda}{a \log N}$, c'est-à-dire $2^u 3^v \lesssim \left(\frac{a \log N}{j}\right)^{1/\lambda}$, ce qui, avec (2.6.109) donne

$$P_j = p_i \lesssim \frac{1}{1 - \varepsilon} \left(\frac{a \log N}{j}\right)^{1/\lambda}. \quad (2.6.113)$$

On procède de même pour M' défini en (2.6.111) : on a

$$\begin{aligned} 1 > \frac{h(M')}{h(N)} &= \frac{(\alpha_1 - u' + 1) \dots (\alpha_1 + 1) \alpha_1 (\alpha_2 - v' + 1) \dots (\alpha_2 + 1) \alpha_2}{(1 + \alpha_{i+1}) \Omega (\Omega - 1) \dots (\Omega - u' - v' + 2)} \\ &\geq \frac{(\alpha_1 - u')^{u'} (\alpha_2 - v')^{v'}}{j \Omega^{u'+v'-1}} \sim \frac{a \log N}{j (2^{u'} 3^{v'})^\lambda} \end{aligned}$$

2.6. PROPRIÉTÉS DES NOMBRES **h**-CHAMPIONS

qui, avec (2.6.109) donne

$$P_j = p_i \gtrsim \frac{1}{1 + 2\varepsilon} \left(\frac{a \log N}{j} \right)^{1/\lambda}. \quad (2.6.114)$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, (2.6.113) et (2.6.114) prouvent (2.6.103). En utilisant (2.3.30), on a $k \sim \frac{p_k}{\log p_k} = \frac{P_1}{\log P_1}$ et ainsi, (2.6.104) découle de (2.6.103) avec $j = 1$. \square

Remarque 4. Le résultat (2.6.103) du théorème 3 peut s'exprimer en d'autres termes : pour chaque j fixé, la proportion $\frac{\pi(P_j) - \pi(P_{j+1})}{\pi(P_1)}$ d'exposants exactement égaux à j dans la décomposition en facteurs premiers d'un nombre h -champion satisfait

$$\frac{\pi(P_j) - \pi(P_{j+1})}{\pi(P_1)} \sim \frac{1}{j^{1/\lambda}} - \frac{1}{(j+1)^{1/\lambda}} = \int_j^{j+1} \frac{dt}{\lambda t^{1+1/\lambda}}.$$

Pour les nombres *highly factorable*, qui sont les champions pour la fonction d'Oppenheim, la conjecture énoncée dans [4] et prouvée dans [33] donne pour cette proportion la valeur asymptotique $1/(j(j+1)) = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = \int_j^{j+1} \frac{dt}{t^2}$.

Si l'on remplace dans (2.6.111) p_i et p_{i+1} par des produits de nombres premiers consécutifs, en utilisant le résultat de [49] et le théorème des nombres premiers dans des petits intervalles, il est possible d'améliorer (2.6.103) en $P_j = \left(\frac{a \log N}{j} \right)^{1/\lambda} \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{(\log N)^\beta} \right)$ avec $\beta > 0$.

2.6.4 Estimation de $Q(X)$

Soit $Q(X)$ le nombre de nombres h -champions inférieurs à X . Il résulte de (2.6.90) que $Q(X) \gg \log X$. D'autre part, les nombres h -champions sont de la forme (2.6.88), et, par [19] ou [44], on a

$$Q(X) \leq \exp \left((1 + o(1)) \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\log X}{\log \log X}} \right).$$

A l'aide des résultats précédents, nous pouvons montrer

Proposition 7. *Il existe un nombre réel positif δ ($\delta = 0.059$ convient) tel que, pour X assez grand*

$$(i) \quad Q(X) \geq (\log X)^{1+\delta}.$$

Pour X assez grand, on a

$$(ii) \quad \log Q(X) = \mathcal{O} \left((\log X)^{c/2} \right).$$

où c a été défini en (2.6.93).

Démonstration. Soit N un nombre h -champion assez grand. Nous allons montrer que le nombre h -champion N' suivant N satisfait

$$N' \leq N \left(1 + \frac{2\eta \log \log N}{(\log N)^\eta} \right) \quad (2.6.115)$$

2.6. PROPRIÉTÉS DES NOMBRES **h**-CHAMPIONS

où η est un nombre réel positif à préciser. En effet, par le théorème des nombres premiers, entre $(\log N)^\eta$ et $2(\log N)^\eta$, il y a un nombre de nombres premiers équivalent à $\frac{(\log N)^\eta}{\eta \log \log N}$ et donc, si N est assez grand, il existe deux nombres premiers consécutifs p_r et p_{r+1} satisfaisant

$$(\log N)^\eta \leq p_r < p_r + 2 \leq p_{r+1} < 2(\log N)^\eta \quad (2.6.116)$$

et

$$p_r < p_r + 2 \leq p_{r+1} \leq p_r + 2\eta \log \log N. \quad (2.6.117)$$

Par le théorème des accroissements finis et (2.6.116), on a

$$p_r^{-\lambda} - p_{r+1}^{-\lambda} \geq \lambda \frac{p_{r+1} - p_r}{p_{r+1}^{\lambda+1}} \geq \frac{2\lambda}{(2(\log N)^\eta)^{\lambda+1}} = \frac{\lambda 2^{-\lambda}}{(\log N)^{\eta(\lambda+1)}} \quad (2.6.118)$$

et, si l'on choisit

$$\eta < \frac{1-c}{\lambda+1} = \frac{\lambda-1}{2\lambda(\lambda+1)} = 0.0594\dots, \quad (2.6.119)$$

il résulte de (2.6.118) et du théorème 2 (i) que, dans (2.6.88), on a

$$\alpha_r - \alpha_{r+1} \geq 2^{-\lambda} a \lambda (\log N)^{1-\eta(\lambda+1)} + \mathcal{O}(\log N)^c \geq 2 \quad (2.6.120)$$

pour N assez grand.

Considérons le nombre

$$M = \frac{p_{r+1}}{p_r} N > N.$$

Par (2.1.7) et (2.6.120), on a

$$h(M) = \frac{\alpha_r}{\alpha_{r+1} + 1} h(N) > h(N)$$

et, par (2.6.89), (2.6.117) et (2.6.116), le nombre h -champion N' suivant N vérifie

$$N < N' \leq M \leq N \left(\frac{p_r + 2\eta \log \log N}{p_r} \right) \leq N \left(1 + \frac{2\eta \log \log N}{(\log N)^\eta} \right) \quad (2.6.121)$$

ce qui établit (2.6.115).

Soit N_i le i -ème nombre h -champion. Pour prouver (i), écrivons les nombres h -champions entre $\sqrt{X}/2$ et X :

$$N_u < \frac{\sqrt{X}}{2} \leq N_{u+1} < N_{u+2} < \dots < N_{u+v} < X \leq N_{u+v+1}.$$

En choisissant $\delta < \eta$, par (2.6.121), on aura pour X assez grand

$$\frac{N_{u+i+1}}{N_{u+i}} \leq 1 + \frac{2\eta \log \log(\sqrt{X}/2)}{(\log(\sqrt{X}/2))^\eta} \leq 1 + \frac{1}{2} (\log X)^{-\delta}, \quad 1 \leq i \leq v$$

et, par (2.6.90), $\frac{X}{\sqrt{X}} < \frac{N_{u+v+1}}{2N_u} \leq \frac{N_{u+v+1}}{N_{u+1}} \leq (1 + \frac{1}{2} (\log X)^{-\delta})^v$ qui donne $Q(X) \geq v \geq \frac{\frac{1}{2} \log X}{\log(1 + \frac{1}{2} (\log X)^{-\delta})} \geq (\log X)^{1+\delta}$ et démontre (i).

Avant de démontrer (ii), établissons le lemme suivant

2.6. PROPRIÉTÉS DES NOMBRES **h**-CHAMPIONS

Lemme 3. *Le nombre de solutions $\nu(n, k)$ de l'inéquation diophantienne*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n, \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0, \quad \text{et } x_i \in \mathbb{N} \quad (2.6.122)$$

satisfait pour tout k

$$\nu(n, k) = \mathcal{O} \left(\exp \left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}} \right) \right). \quad (2.6.123)$$

Démonstration. Le nombre de solutions de l'équation diophantienne $x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0$, est le nombre de partitions de m en au plus k parts (cf. [7], p. 105) et est majoré par $p(m)$, le nombre total de partitions de m . Comme $p(m)$ est une fonction croissante de m , le nombre $\nu(n, k)$ de solutions de (2.6.122) satisfait $\nu(n, k) - 1 \leq p(1) + p(2) + \dots + p(n) \leq np(n)$ et (2.6.123) résulte de la formule classique de Hardy et Ramanujan (cf. [20]) $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp \left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}} \right)$. \square

Démonstration de la proposition 7 (ii). Soit X assez grand et N un nombre h -champion inférieur à X . On pose $A = \log N$; pour $1 \leq i \leq k$, on définit x_i^* par (2.4.54) et α_i par (2.6.88).

Soit J un nombre entier, $J \geq 3$; on a, par (2.3.25), $\lambda_J \geq \lambda_3 > 1$. On s'intéresse à la somme

$$T_J = T_J(N) = \sum_{i=J+1}^k \alpha_i. \quad (2.6.124)$$

Si $J \geq k$, on a $T_J = 0$ et si $J < k$, on a par (2.6.98), (2.6.97), (2.6.102) et (2.4.54)

$$\begin{aligned} T_J &\leq \sum_{i=J+1}^{k-1} \alpha_i \log p_i + \alpha_k \log p_k \\ &\leq \sum_{i=J+1}^{k-1} x_i^* \log p_i + \mathcal{O}((\log N)^c) \\ &= a_k \log N \sum_{i=J+1}^{k-1} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} + \mathcal{O}((\log N)^c). \end{aligned} \quad (2.6.125)$$

Maintenant, on a par (2.3.25), (2.3.23), (2.1.8), (2.3.34) et la proposition 2

$$\sum_{i=J+1}^{k-1} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} \leq \sum_{i=J+1}^{\infty} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_J}} = P'_J(\lambda_J) - P'(\lambda_J) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{J^{\lambda_J-1}} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{J^{\lambda-1}} \right)$$

et (2.6.125) entraîne

$$T_J = \mathcal{O} \left(\frac{\log N}{J^{\lambda-1}} \right) + \mathcal{O}((\log N)^c). \quad (2.6.126)$$

Fixons

$$J = \lfloor (\log X)^\gamma \rfloor$$

avec, par (2.6.93) et (2.1.10),

$$\gamma = \frac{1-c}{\lambda-1} = \frac{1}{2\lambda} = 0.357\dots \quad (2.6.127)$$

2.7. PROBLÈMES OUVERTS

Pour chaque nombre h -champion $N \leq X$, la somme $T_J(N)$ satisfait par (2.6.126)

$$T_J(N) = \alpha_{J+1} + \alpha_{J+2} + \dots + \alpha_k = \mathcal{O}((\log X)^c)$$

et, par le lemme 3, le nombre de choix possibles pour $\alpha_{J+1}, \alpha_{J+2}, \dots, \alpha_k$ est

$$\exp(\mathcal{O}((\log X)^{c/2})). \quad (2.6.128)$$

Ensuite, par (2.6.88) et le théorème 2 (i), en notant que $\frac{a}{2^\lambda} < 0.219 < \frac{1}{2}$, on a

$$\alpha_J \leq \alpha_{J-1} \leq \dots \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \frac{\log X}{2}$$

et le nombre de choix possibles pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_J$ est majoré par

$$\left(1 + \frac{\log X}{2}\right)^J \leq (\log X)^{(\log X)^\gamma} = \exp((\log X)^\gamma \log \log X). \quad (2.6.129)$$

On déduit alors de (2.6.128) et (2.6.129) que $Q(X) \leq \exp((\log X)^\gamma \log \log X + \mathcal{O}((\log X)^{c/2}))$ et comme, par (2.6.127), on a $\gamma < c/2$, cela prouve (ii). \square

2.6.5 Table des nombres h -champions

La méthode utilisée par M. Deléglise pour construire la table des nombres h -champions (cf. [8]) consiste à déterminer par backtracking tous les nombres entiers de la forme (2.6.88) et inférieurs à une borne donnée X . Ensuite, à l'aide de la fonction h , les non champions sont éliminés par (2.1.18). A l'aide de MAPLE, pour $X = \prod_{i=1}^{22} p_i = 3.2 \cdot 10^{30}$, ont été trouvés 814236 nombres de la forme (2.6.88) et, parmi eux, 785 nombres h -champions ; le plus grand est $N_{785} = 2^{24} \cdot 3^{14} \cdot 5^6 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.

2.7 Problèmes ouverts

1. Existe-t-il une constante C telle que, lorsque le nombre h -champion N tend vers l'infini, on ait

$$\log h(N) = \lambda \log N - (C + o(1)) \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N} ? \quad (2.7.130)$$

Par la proposition 6 (i) et le théorème 1 (i), on a $C_1 \leq C \leq C_2$.

2. Est il possible de montrer que tous les nombres h -champion dont les exposants dans la décomposition en facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à 2 sont les cinq nombres tabulés dans la remarque 3 ? La démonstration de (2.6.102) est effective, mais le calcul d'une borne pour sa validité serait pénible.

3. Dans son article [43], S. Ramanujan appelle *superior highly composite* un nombre N pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $M \geq 1$ on ait $\frac{\tau(M)}{M^\varepsilon} \leq \frac{\tau(N)}{N^\varepsilon}$, où $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n . Nous n'avons pas réussi à généraliser cette notion à la fonction h . En fait, pour $\rho < \lambda$, il résulte de la proposition 6 (i) que $\overline{\lim}(\log h(n) - \rho \log n) = +\infty$ tandis que pour $\rho \geq \lambda$, par le théorème 1 (i), la fonction $\log h(n) - \rho \log n$ atteint son maximum en $n = 1$. On peut définir un nombre h -superchampion N s'il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $M \geq 1$ on ait

$$\log h(M) - \rho \log^2 M \leq \log h(N) - \rho \log^2 N. \quad (2.7.131)$$

2.7. PROBLÈMES OUVERTS

Il est facile de voir qu'un tel nombre N est h -champion, mais ses propriétés sont moins simples que celles des nombres *superior highly composite* de Ramanujan.

4. Nous avons montré (proposition 7) que $Q(X) \geq (\log X)^{1+\delta}$ pour X assez grand. Existe-t-il une constante $\gamma > 0$ telle que $Q(X) \leq (\log X)^\gamma$? Pour $X \leq 10^{30}$, la quantité $\frac{\log Q(X)}{\log \log X}$ n'excède pas 1.573 tandis que, si l'on admet que le théorème 2 (i) est vraie pour $c = 0$, la proposition 7 (i) donnerait $Q(X) \geq (\log X)^{1.41}$.

5. Nous avons donné en 6.5 un algorithme de calcul des nombres h -champion. Peut on l'améliorer? En particulier, peut on donner une forme effective au théorème 2 de façon à restreindre les nombres candidats à un sous-ensemble de l'ensemble des nombres satisfaisant (2.6.88)?

Chapitre 3

Estimation des différences $\lambda - \lambda_k$ et $a - a_k$

Nous nous proposons dans ce chapitre de préciser les résultats du paragraphe 3.2.3 du chapitre 2, (dont nous gardons les notations) et en particulier de démontrer les propositions 1 et 2 qui fournissent des majorations effectives de $\lambda - \lambda_k$ et $a_k - a$.

Soit $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_k$ le k -ième nombre premier. Pour $k \geq 1$, on pose :

$$P(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s} \quad \text{et} \quad P_k(s) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j^s}, \quad \text{où} \quad \Re(s) > 1 \quad (3.0.1)$$

Pour chaque k fixé, la fonction $P_k(s)$ décroît de k à 0 lorsque s varie de 0 à $+\infty$; elle admet donc une fonction réciproque $P_k^{-1}(y)$ définie pour $0 < y \leq k$. De même $P(s)$ est décroissante pour $s > 1$ et admet une fonction réciproque $P^{-1}(y)$ définie pour $y > 0$. On pose

$$\lambda_k = P_k^{-1}(1) \text{ et } \lambda = P^{-1}(1) \quad \text{ce qui équivaut à} \quad P_k(\lambda_k) = 1 \text{ et } P(\lambda) = 1. \quad (3.0.2)$$

La série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s}$ converge normalement pour $s \geq s_0 > 1$ et donc la suite des sommes partielles

$(P_k(s))_{k \geq 1}$ converge uniformément vers $P(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s}$ pour $s \geq s_0 > 1$; par les méthodes habituelles de l'analyse, nous obtenons

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots < \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda. \quad (3.0.3)$$

On a

$k =$	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
$\lambda_k =$	0	0.788	1.033	1.147	1.201	1.304	1.384	1.396	1.398

La valeur numérique de λ donnée en (2.1.10) peut être calculée avec précision à l'aide de la formule ([45], p. 70)

$$P(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \log \zeta(ms) \quad (3.0.4)$$

par les méthodes indiquées dans [6].

3.1 Estimation de la différence $\lambda - \lambda_k$

Proposition 1. *La différence $\lambda - \lambda_k$ dépend de l'entier k .*

(1) *Pour $k \geq 2$,*

$$\lambda - \lambda_k \leq \frac{C_3}{k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda} \quad \text{avec} \quad C_3 = 2.64 \quad (3.1.5)$$

(2) *Pour $k \geq 6$,*

$$\lambda - \lambda_k \geq \frac{C_4}{k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda} \quad \text{avec} \quad C_4 = 0.074 \quad (3.1.6)$$

(3) *Lorsque $k \rightarrow \infty$, $\lambda_k \rightarrow \lambda$ et*

$$\lambda - \lambda_k \sim \frac{C_5}{k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda} \quad \text{avec} \quad C_5 = 1.44\dots \quad (3.1.7)$$

Démonstration de la proposition 1. On utilisera le lemme préliminaire suivant :

Lemme P. *Soient $\eta > 1, \mu \geq 0$ et $k \geq 0$. Pour $x > 1$, on a :*

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{dt}{t^\eta (\log t)^\mu} &= \frac{1}{x^{\eta-1} (\log x)^\mu} \left[\frac{1}{\eta-1} - \frac{\mu}{(\eta-1) \log x} + \frac{\mu(\mu+1)}{(\eta-1)^2 (\log x)^2} + \dots \right. \\ &+ \left. \frac{(-1)^k \mu(\mu+1) \dots (\mu+k-1)}{(\eta-1)^k (\log x)^k} + \frac{(-1)^{k+1} \mu(\mu+1) \dots (\mu+k)}{(\eta-1)^{k+1}} \int_x^\infty \frac{dt}{t^\eta (\log t)^{\mu+k+1}} \right]. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme P. Le lemme P se démontre par une intégration par parties itérée.

Démonstration de (1). Les relations (3.0.1) impliquent

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_j^\lambda}. \quad (3.1.8)$$

En utilisant l'inégalité $p_j > j \log j$, pour $j \geq 1$ (cf. [47]), on obtient :

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^\lambda (\log j)^\lambda}. \quad (3.1.9)$$

Comme $j > k$, alors

$$\begin{aligned} P(\lambda) - P_k(\lambda) &\leq \frac{1}{(\log k)^\lambda} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^\lambda} \leq \frac{1}{(\log k)^\lambda} \int_k^\infty \frac{dt}{t^\lambda} \\ &\leq \frac{1}{(\lambda-1) k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

D'autre part, on sait que pour $j \geq 6$, (cf. [47]) :

3.1. ESTIMATION DE LA DIFFÉRENCE $\lambda - \lambda_k$

$$p_j \leq j (\log j + \log \log j) = j \log j \left(1 + \frac{\log \log j}{\log j} \right). \quad (3.1.11)$$

De (3.1.8) et (3.1.11), on déduit pour $k \geq 6$

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) \geq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{(j \log j)^\lambda \left(1 + \frac{\log \log j}{\log j} \right)^\lambda}. \quad (3.1.12)$$

Comme pour $t \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{\log t}{t}$ est positive et majorée par $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, l'inégalité 3.1.11) devient

$$p_j \leq \frac{3}{2} j \log j. \quad (3.1.13)$$

Les relations (3.1.8) et (3.1.13) permettent alors d'obtenir

$$\begin{aligned} P(\lambda) - P_k(\lambda) &\geq \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^\lambda \frac{1}{(j \log j)^\lambda} \geq \sum_{j=k+1}^{k^2} \left(\frac{2}{3} \right)^\lambda \frac{1}{(j \log j)^\lambda} \\ &\geq \left(\frac{2}{3} \right)^\lambda \frac{1}{(\log k^2)^\lambda} \sum_{j=k+1}^{k^2} \frac{1}{j^\lambda} \\ &\geq \left(\frac{2}{3} \right)^\lambda \frac{1}{2^\lambda (\log k)^\lambda} \int_{k+1}^{k^2} \frac{dt}{t^\lambda} \\ &= \frac{1}{3^\lambda} \frac{1}{(\lambda - 1) (\log k)^\lambda} \left(\frac{1}{(k+1)^{\lambda-1}} - \frac{1}{(k^2)^{\lambda-1}} \right). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Comme pour $k \geq k_0$, on a $k^2 \geq k_0 k$ et $\frac{k+1}{k} \leq \frac{k_0+1}{k_0}$, (3.1.14) devient alors

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) \geq \frac{1}{(\lambda - 1) k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda} \left[\frac{1}{3^\lambda} \left(\left(\frac{k_0}{k_0+1} \right)^{\lambda-1} - \frac{1}{k_0^{\lambda-1}} \right) \right]. \quad (3.1.15)$$

Pour $k_0 = 6$, la quantité entre crochet vaut : 0.097054954, d'où, en choisissant $C_0 = 0.097$, on obtient

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) \geq \frac{C_0}{(\lambda - 1) k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda}. \quad (3.1.16)$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à $P_k(s)$ sur l'intervalle $[\lambda_k, \lambda]$, implique qu'il existe $\xi_k \in]\lambda_k, \lambda[$, tel que

$$P_k(\lambda) - P_k(\lambda_k) = (\lambda - \lambda_k) P'_k(\xi_k). \quad (3.1.17)$$

Le premier membre de (3.1.16) se transforme en

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) = P(\lambda) - P_k(\lambda_k) + P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda). \quad (3.1.18)$$

De (3.0.2) et (3.1.18), il vient :

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) = P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda). \quad (3.1.19)$$

3.1. ESTIMATION DE LA DIFFÉRENCE $\lambda - \lambda_k$

Les relations (3.1.17) et (3.1.19) permettent d'obtenir alors

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) = -(\lambda - \lambda_k) P'_k(\xi_k). \quad (3.1.20)$$

Et puisque $\lambda_k < \xi_k < \lambda$, alors

$$-P'_k(\lambda) = \sum_{i=1}^k \frac{\log p_i}{p_i^\lambda} \leq -P'_k(\xi_k) = \sum_{i=1}^k \frac{\log p_i}{p_i^{\xi_k}} \leq \sum_{i=1}^k \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} = -P'_k(\lambda_k). \quad (3.1.21)$$

Comme la suite $(\lambda_k)_k$ est croissante et que la fonction $f(s) = -P'_k(s)$ est décroissante (puisque $f'(s) = -\sum_{i=1}^k \frac{(\log p_i)^2}{p_i^s} < 0$), alors pour $k \geq 6$, on a

$$-P'_k(\lambda_k) \leq -P'_k(\lambda_6) = 3.278472120019. \quad (3.1.22)$$

Le membre à droite de (3.1.21) est donc majoré par la constante $C_1 = 3.28$ de plus pour $k \geq k_0 = 6$, on a

$$-P'_k(\lambda) \geq -P'_6(\lambda) = 0.9496222428. \quad (3.1.23)$$

Le membre à gauche de (3.1.21) est donc minoré par $C_2 = 0.949$. Enfin, des inégalités (3.1.21), (3.1.22) et (3.1.23), on déduit que

$$C_2 \leq -P'_k(\xi_k) \leq C_1 \quad (3.1.24)$$

Multiplions, (3.1.24) par $(\lambda - \lambda_k)$, il vient

$$(\lambda - \lambda_k) C_2 \leq -(\lambda - \lambda_k) P'_k(\xi_k) \leq (\lambda - \lambda_k) C_1. \quad (3.1.25)$$

De (3.1.20) et (3.1.25), on obtient

$$C_2 (\lambda - \lambda_k) \leq P(\lambda) - P_k(\lambda) \leq C_1 (\lambda - \lambda_k). \quad (3.1.26)$$

Grâce à (3.1.10) et (3.1.26), on en déduit

$$\lambda - \lambda_k \leq \frac{C}{k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda} \quad \text{car} \quad C = \frac{1}{(\lambda-1) C_2} = 2.632 \dots \quad (3.1.27)$$

ce qui prouve (1) de la proposition 1.

Démonstration de 2. Les inégalités (3.1.16) et (3.1.26) impliquent,

$$\lambda - \lambda_k \geq \frac{C'}{k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda} \quad \text{car} \quad C' = \frac{C_0}{(\lambda-1) C_1} = 0.074 \quad (3.1.28)$$

Ce qui prouve (2) de la proposition 1.

Démonstration de 3. Ce point a été démontré dans la proposition 2 du chapitre 2. Nous donnons ici une autre preuve. Grâce au lemme P, pour $\eta = \mu = \lambda$ et $k = 1$, on obtient l'inégalité valable pour tout $x > 1$:

$$\int_x^\infty \frac{dt}{(t \log t)^\lambda} \geq \frac{1}{(\lambda-1) x^{\lambda-1} (\log x)^\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\log x}\right). \quad (3.1.29)$$

3.1. ESTIMATION DE LA DIFFÉRENCE $\lambda - \lambda_k$

La fonction $t \mapsto \frac{\log \log t}{\log t}$ est décroissante pour $t \geq e^e = 15.15\dots$. Pour $k \geq 15$ et $j \geq k+1$, on peut minorer le second membre de l'inégalité (3.1.12), par :

$$\begin{aligned} P(\lambda) - P_k(\lambda) &\geq \frac{1}{\left(1 + \frac{\log \log(k+1)}{\log(k+1)}\right)^\lambda} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{(j \log j)^\lambda} \\ &\geq \frac{1}{\left(1 + \frac{\log \log(k+1)}{\log(k+1)}\right)^\lambda} \int_{k+1}^{\infty} \frac{dt}{(t \log t)^\lambda}. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Avec (3.1.29) et (3.1.30), on obtient :

$$\begin{aligned} &P(\lambda) - P_k(\lambda) \quad (3.1.31) \\ &\geq \frac{1}{(\lambda-1)(k+1)^{\lambda-1}(\log(k+1))^\lambda} \frac{1}{\left(1 + \frac{\log \log(k+1)}{\log(k+1)}\right)^\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\log(k+1)}\right) \\ &\geq \frac{1}{(\lambda-1)(k+1)^{\lambda-1}(\log(k+1))^\lambda} \left[\left(1 - \lambda \frac{\log \log(k+1)}{\log(k+1)}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\log(k+1)}\right) \right]. \end{aligned}$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, la quantité entre crochet à droite dans (3.1.31) tend vers 1, d'où l'on a

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) \gtrsim \frac{1}{(\lambda-1)k^{\lambda-1}(\log k)^\lambda}. \quad (3.1.32)$$

Ecrivons comme dans (3.1.18) la relation

$$P'_k(\xi_k) - P'(\lambda) = P'_k(\xi_k) - P'(\xi_k) + P'(\xi_k) - P'(\lambda). \quad (3.1.33)$$

Lorsque $k \rightarrow +\infty$, $\xi_k \rightarrow \lambda$, et comme la fonction $P'(s)$ est continue pour $s > 1$, alors

$$P'(\xi_k) \rightarrow P'(\lambda). \quad (3.1.34)$$

D'autre part, (3.1.8), implique

$$P'_k(\xi_k) - P'(\xi_k) = - \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{\log p_j}{p_j^{\xi_k}} \quad (3.1.35)$$

et, comme $\lambda_k < \xi_k < \lambda$, (3.1.35) peut être majorée en module par

$$|P'_k(\xi_k) - P'(\xi_k)| \leq \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{\log p_j}{p_j^{\lambda_k}} \leq \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{\log p_j}{p_j^{\lambda_{k_0}}} \quad (3.1.36)$$

pour $k \geq k_0 \geq 3$ (de telle sorte que $\lambda_{k_0} > 1$). La série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\log p_j}{p_j^{\lambda_{k_0}}}$ est convergente, et son

reste d'ordre k , $\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{\log p_j}{p_j^{\lambda_{k_0}}}$ tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$; il résulte donc de (3.1.36) que

3.1. ESTIMATION DE LA DIFFÉRENCE $\lambda - \lambda_k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (P'_k(\xi_k) - P'(\xi_k)) = 0. \quad (3.1.37)$$

De (3.1.33), (3.1.34) et (3.1.37), on déduit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P'_k(\xi_k) = P'(\lambda). \quad (3.1.38)$$

Par suite les relations (3.1.20) et (3.1.38), impliquent

$$P(\lambda) - P_k(\lambda) = -(\lambda - \lambda_k) P'(\xi_k) = -(\lambda - \lambda_k) P'(\lambda). \quad (3.1.39)$$

Les relations (3.1.32) et (3.1.39), entraînent alors

$$-(\lambda - \lambda_k) P'(\lambda) \gtrsim \frac{1}{(\lambda - 1) k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda}. \quad (3.1.40)$$

Grâce à (3.1.10) et (3.1.39), on obtient :

$$-(\lambda - \lambda_k) P'(\lambda) \lesssim \frac{1}{k^{\lambda-1} (\lambda - 1) (\log k)^\lambda}. \quad (3.1.41)$$

Enfin les inégalités (3.1.40) et (3.1.41) permettent d'obtenir le résultat

$$\lambda - \lambda_k \sim \frac{C_5}{k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda}. \quad (3.1.42)$$

où

$$C_5 = \frac{-1}{(\lambda - 1) P'(\lambda)} = 1.446726952 \dots$$

Ce qui achève la preuve de (3), ainsi que la démonstration de la proposition 1. \square

3.2 Estimation de la différence $\mathbf{a} - \mathbf{a}_k$

Proposition 2. Soient $k \geq 1$, λ , λ_k , P et P_k définis par (2.1.10), (2.3.24), (2.1.8) et (2.3.23).

On définit a et a_k par

$$a = \frac{-1}{P'(\lambda)} = 0.5776486\dots \quad \text{et} \quad a_k = \frac{-1}{P'_k(\lambda_k)}. \quad (3.2.43)$$

Pour tout $k \geq 100$ on a

$$a_k - a \leq \frac{C}{(k \log k)^{\lambda-1}} \quad \text{avec} \quad C = 4.13$$

Démonstration de la proposition 2.

Par (3.2.43), on a

$$\frac{1}{a} = -P'(\lambda) = \sum_{p \geq 2} \frac{\log p}{p^\lambda} \quad (3.2.44)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k} &= \sum_{p \leq p_k} \frac{\log p}{p^{\lambda_k}} = \sum_{p \geq 2} \frac{\log p}{p^{\lambda_k}} - \sum_{p \geq p_{k+1}} \frac{\log p}{p^{\lambda_k}} \\ &= -P'(\lambda_k) - \sum_{p \geq p_{k+1}} \frac{\log p}{p^{\lambda_k}}. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

De (3.2.44) et (3.2.45), on déduit que

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} = -P'(\lambda) + P'(\lambda_k) + \sum_{p \geq p_{k+1}} \frac{\log p}{p^{\lambda_k}}. \quad (3.2.46)$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $P'(x)$ sur l'intervalle $[\lambda_k, \lambda]$, implique qu'il existe $\xi \in]\lambda_k, \lambda[$, tel que

$$P'(\lambda) - P'(\lambda_k) = (\lambda - \lambda_k)P''(\xi).$$

En reportant dans 3.2.46, on obtient

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} = -(\lambda - \lambda_k)P''(\xi) + \sum_{p \geq p_{k+1}} \frac{\log p}{p^{\lambda_k}} \quad (3.2.47)$$

où $\lambda_k < \xi < \lambda$. La proposition 1, implique alors

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} \leq \frac{-C_4 P''(\xi)}{k^{\lambda-1} (\log k)^\lambda} + \sum_{p \geq p_{k+1}} \frac{\log p}{p^{\lambda_k}} \quad \text{avec} \quad C_4 = 0.074. \quad (3.2.48)$$

Posons

$$S = \sum_{p \geq p_{k+1}} \frac{\log p}{p^{\lambda_k}} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\log p_j}{p_j^{\lambda_k}} \quad (3.2.49)$$

3.2. ESTIMATION DE LA DIFFÉRENCE $\mathbf{a} - \mathbf{a}_k$

le deuxième terme dans (3.2.48).

La fonction $f(x) = \frac{\log x}{x^{\lambda_k}}$, est décroissante pour $x \geq \exp(\frac{1}{\lambda_k}) \geq \exp(\frac{1}{\lambda_{100}}) = 2.059 \dots \geq 2.043$. L'inégalité $p_j \geq j \log j$, pour $j \geq 1$ et la décroissance de la fonction f , impliquent que pour $j \geq 100$, on a

$$\frac{\log p_j}{p_j^{\lambda_k}} \leq \frac{\log(j \log j)}{(j \log j)^{\lambda_k}} \leq \frac{2 \log j}{(j \log j)^{\lambda_k}} = \frac{2}{j^{\lambda_k} (\log j)^{\lambda_k - 1}}. \quad (3.2.50)$$

Les relations (3.2.49) et (3.2.50) entraînent alors

$$S \leq 2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^{\lambda_k} (\log j)^{\lambda_k - 1}}. \quad (3.2.51)$$

Comme $j > k$, on déduit que

$$S \leq \frac{2}{(\log k)^{\lambda_k - 1}} \int_k^{\infty} \frac{dt}{t^{\lambda_k}} = \frac{2}{(\lambda_k - 1) k^{\lambda_k - 1} (\log k)^{\lambda_k - 1}} \quad (3.2.52)$$

$$S \leq \frac{2}{\lambda_k - 1} \frac{1}{(k \log k)^{\lambda_k - 1}} \quad (3.2.53)$$

Comme on a :

$$\frac{1}{(k \log k)^{\lambda_k - 1}} = \frac{1}{(k \log k)^{\lambda - 1}} \frac{1}{(k \log k)^{\lambda_k - \lambda}}$$

et que

$$\frac{1}{(k \log k)^{\lambda_k - \lambda}} = (k \log k)^{\lambda - \lambda_k} \leq k^{2(\lambda - \lambda_k)} = \exp[2(\lambda - \lambda_k) \log k].$$

La proposition 1, entraîne alors

$$\frac{1}{(k \log k)^{(\lambda_k - \lambda)}} \leq \exp\left(\frac{2C_3 \log k}{k^{\lambda - 1} (\log k)^{\lambda}}\right) = \exp\left(\frac{2C_3}{(k \log k)^{\lambda - 1}}\right).$$

Or pour $k \geq 100$, on a

$$\exp\left(\frac{2C_3}{(k \log k)^{\lambda - 1}}\right) = 1.576 \dots \leq 2$$

donc

$$\frac{1}{(k \log k)^{\lambda_k - 1}} \leq \frac{2}{(k \log k)^{\lambda - 1}} \quad \text{pour } k \geq 100. \quad (3.2.54)$$

Les inégalités (3.2.53) et (3.2.54) impliquent

$$S \leq \frac{4}{\lambda_k - 1} \frac{1}{(k \log k)^{\lambda - 1}}. \quad (3.2.55)$$

De (3.2.48), (3.2.49) et (3.2.55) on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} &\leq \frac{-C_4 P''(\xi)}{k^{\lambda - 1} (\log k)^{\lambda}} + \frac{4}{\lambda_k - 1} \frac{1}{(k \log k)^{\lambda - 1}} \\ &= \left[\frac{-C_4 P''(\xi)}{\log k} + \frac{4}{\lambda_k - 1} \right] \frac{1}{(k \log k)^{\lambda - 1}}. \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

3.2. ESTIMATION DE LA DIFFÉRENCE $\mathbf{a} - \mathbf{a}_k$

Le premier terme entre crochet est négatif (puisque $P''(\xi)$ est positif), donc

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} \leq \left(\frac{4}{\lambda_k - 1} \right) \frac{1}{(k \log k)^{\lambda-1}}. \quad (3.2.57)$$

La suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ étant croissante, pour tout $k \geq 100$, on a $\lambda_k \geq \lambda_{100} = 1.384\dots$; il s'en suit que

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} \leq \frac{C'}{(k \log k)^{\lambda-1}} \quad \text{avec} \quad C' = 10.417. \quad (3.2.58)$$

D'autre part on a

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a}{aa_k}. \quad (3.2.59)$$

Les relations (3.2.58) et (3.2.59) entraînent alors

$$a_k - a \leq \frac{aa_k C'}{(k \log k)^{\lambda-1}}. \quad (3.2.60)$$

Par (2.3.43), la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est décroissante et converge vers a , donc pour tout $k \geq 100$, on a $a_k \leq a_{100} = 0.629\dots$, d'où l'on déduit que

$$a_k - a \leq \frac{C}{(k \log k)^{\lambda-1}} \quad \text{avec} \quad C = 4.13 \geq a_{100}^2 C' = 4.121\dots \quad (3.2.61)$$

ce qui achève la preuve de la proposition 2. \square

Chapitre 4

Calculs numériques.

Dans ce qui suit nous présentons les procédures et programmes Maple qui nous ont permis de vérifier les résultats théoriques donnés dans les chapitres 1 et 2 ainsi que le calcul explicite des constantes du chapitre 3 de cette thèse.

Dans la première section, nous donnons les programmes que nous avons utilisés pour calculer les racines du trinôme

$$f_{n,a}(z) = z^{n+1} - az + a - 1,$$

qui sont situées dans le demi-plan supérieur avec leurs modules et leur arguments, le développement asymptotique des zéros de l'équation

$$f_{n,n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n = 0,$$

le développement en série des racines de l'équation de Belardinelli

$$y^p + xy^p + 1 = 0,$$

ainsi que les développements en série de la racine réelle négative $x_{2,n}$ du trinôme H_n ou de G_n et de la racine réelle positive $x_{1,n}$ différente de 1 de G_n , à l'aide de la méthode de Delange qui utilise le théorème des fonctions implicites analytiques.

Un programme permettant de montrer que la valeur minimale de la constante A du théorème 1 (cf. chapitre 1, p.10), $A = 4$ est donné par la procédure `minimumdeA`.

La deuxième section est consacrée essentiellement au chapitre 2, nous donnons un programme qui calcule les nombres h -champions et nous dressons six tables de nombres h -champions extraites des 785 nombres inférieurs à $6 \cdot 10^{30}$, ainsi qu'une table des valeurs des suites $(\lambda_k)_k$ et $(a_k)_k$ pour $1 \leq k \leq 10^6$.

4.1 Programmes du chapitre 1

4.1.1 Programme trinôme1

Ce programme calcule les coefficients du développement en série convergent de la racine réelle négative $x_{2,n}$ de H_n ou de G_n suivant la parité de l'entier n , par la procédure delange. La procédure delange1, applique la méthode de Delange au trinôme $f_{n,n+1}(z)$. La procédure delange2, calcule le développement en série donné au théorème 3, (chapitre 1).

Programme :

```

coefm :=proc(l,lexp,m) local i :
#calcule le mieme coeff de exp(l) où l[0]=0, et où les premiers coeff sont dans lexp.
coefm :=proc(l,lexp,m)
# calcule le mieme coeff de exp(l) ou l[0]=0, ;
# et ou les premiers coeff sont dans lexp.;
local i;
| normal(sum(i * l[i + 1] * lexp[m - i + 1], i = 1..m)/m)
end;

expp :=proc(l,mmax) local m, lexp
#calcule exp(l) ou l[0]=0.
| lexp :=[1]
| for m from 1 to mmax do
| | lexp :=[op(lexp), coefm(l,lexp,m)] :
| od;
end;

delange :=proc(mmax,dom,b) local l,lmoins,lxy,lexy,m,lemy,c,s :
#calcule le dev en serie de la racine x_{2,n} de H_n ou G_n.
# Faire dom=phi ou 1/phi et b=-log(5)/2.
| lmoins :=[0] :
| lemy :=[1] :
| lxy :=[0,b] :
| lexy :=[1,b] :
| for m from 1 to mmax do
| | lmoins :=[op(lmoins),-c[m]] :
| | lemy :=[op(lemy),coefm(lmoins,lemy,m)] :
| | s :=solve(sqrt(5)*lemy[m+1]=dom*lexy[m+1],c[m]) :
| | c[m] :=expand(s) :
| | lxy :=[op(lxy),c[m]] :
| | lexy :=[op(lexy),coefm(lxy,lexy,m+1)]
| od;
| l :=map(proc(x) -x end, lmoins) :
| l :=eval(l) :
| [l,lexy]
end;

```

4.1. PROGRAMMES DU CHAPITRE 1

```

evab :=proc(l,x) local S,n
| S :=evalf(l[1]) :
| for n from 2 to nops(l) do
| | S :=evalf(S+l[n]*x^(n-1));
| | print(S) :
| od;
end;

delange1 :=proc(mmax,b)
local l,lxy,exy,lmxy,lemxy, lexy, lexyprov,m,leyprov,ey,c,s
# cette procedure applique la methode de Delange a f_{n,n+1}
# et b racine de exp(b)=b+1.
| l :=[0] :
| leyprov :=[1] :
| ey :=[1+b] :
| lxy :=[0,b] :
| exy :=[1,b] :
| lmxy :=[0,-b] :
| lexyprov :=[1,b] :
| lemxy :=[1,-b] :
| for m from 1 to mmax do
| | l :=[op(l),c[m]] :
| | leyprov :=[op(leyprov),coefm(l,leyprov,m)] :
| | ey :=[op(ey),(1+b)*coefm(l,leyprov,m)] :
| | lmxy :=[op(lmxy),-c[m]] :
| | lxy :=[op(lxy),c[m]] :
| | lemxy :=[op(lemxy),coefm(lmxy,lemxy,m+1)] :
| | exy :=[op(exy),coefm(lxy,exy,m+1)] :
| | s :=solve(-ey[m+1]=lemxy[m+2],c[m]) :
| | c[m] :=expand(s) :
| | l :=eval(l) :
| | leyprov :=eval(leyprov) :
| | ey :=eval(ey) :
| | lmxy :=eval(lmxy) :
| | lemxy :=eval(lemxy) :
| | exy :=eval(exy) :
| od;
| l :
end;

delange2 :=proc(nmax,b)
local liste1,liste2,liste3,i;
# calcule le développement du théorème 3 z=exp(xy(x))
# ou y(x) est donne par la procédure delange 1 (ou salvy);
| liste1 :=delange1(nmax,b);
| liste2 :=[0,b,op(2..nops(liste1),liste1)];
| liste3 :=expp(liste2,nmax)
end;

```

4.1. PROGRAMMES DU CHAPITRE 1

```

racine := proc(app) local aa,eps,ea ;
| aa := app;;
| eps := 1.;
| while  $10^{-Digits+2} < abs(eps)$  do
| | ea := evalc(exp(aa)); eps := evalc((ea-1. -aa)/(ea-1. )); aa := aa-eps
| | od;
end;

rayon :=proc(app,nmax) local ind,aa,l
| aa :=racine(app) :
| l :=delangel(nmax,aa) :
| for ind from 2 to nops(l) do
| | print('n=',ind, abs(l[ind])^(1./(ind-1))) :
| | od;
end;

Fx5 :=proc(b,phi,s,r) local B,Br
| Br :=abs(b)+r;
| Br*phi*exp(s*Br)
end;

Fy5 :=proc(b,phi,s,r) local Br
| Br :=abs(b)+r;
| exp(-Re(b)-r)-phi*s*exp(s*Br) :
end;

rect5 :=proc(b,phi,s,r) local M
| M :=Fx5(b,phi,s,r)/Fy5(b,phi,s,r);
| print('s=',s,'r=',r,r/M) :
end;

```

4.1. PROGRAMMES DU CHAPITRE 1

4.1.2 Programme trinôme2

Ce programme calcule les racines du trinôme $f_{n,n+1}(z) = z^{n+1} - az + a - 1$, (où a est le nombre d'or), qui sont dans le demi-plan supérieur avec leurs module et leurs arguments et calcule le développement en série des racines de l'équation de Belardinelli $y^N + xy^P + 1 = 0$ où N et P sont deux nombres réels positifs, ainsi que les racines approchées données par le théorème 1, de l'équation $f(z) = f_{n,n+1}(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n = 0$.

Programme

```
# La fonction pr(n) ci-dessous écrit les racines du pôleynome f qui sont
# dans le demi-plan supérieur avec leurs modules et leurs arguments.
# a := (1 + sqrt(5))/2
f :=proc(n,a) z^(n+1) - a*z + 1/a end;

q :=proc(k,n)
| evalf((2*n+a^(-4-2/n))/(2*n+a^(-2-1/n)*cos(2*Pi*k/(n+1))))
end;

psi :=proc(k,n) local aa
| aa :=arcsin(sin(2.*Pi*k/(n+1))/q(k,n)^n) :aa :=evalf(aa) :
| if evalf(cos(aa) * (a^(1+1/n) * q(k,n) * cos(2.*k*Pi/(n+1)) - 1/a)) > 0 then
| | aa/(n+1) else evalf((Pi-aa)/(n+1))
| fi
end;

pr :=proc(n,a)
local A,comp,i,k,k1,l,labs,larg,arg :
| A :=fsolve(f(n,a),z,complex) : l := [] : labs := [] : larg := [] : comp := 0 : for i from 1 to
n+1 do
| | arg :=argument(A[i]) :
| | if arg > 0 then
| | | comp :=comp+1 :
| | | l :=[op(l),comp] :
| | | labs :=[op(labs),abs(A[i])] :
| | | larg :=[op(larg),arg] :
| | fi
| od;
| print(l,labs,larg) :
| l :=sort(l,proc(a,b) evalb(op(a,larg) <= op(b,larg)) end) :
| print('l trie=',l) :
| for k from 1 to nops(l) do
| | k1 :=op(k,l) :
| | print('k=',k,op(k1,labs),
| | evalf(a^1/n*q(k,n),op(k1,larg),evalf(2*Pi*k/(n+1)+psi(k,n))))
| od;
end;
```

4.1. PROGRAMMES DU CHAPITRE 1

```

#Equation de Belardinelli
eq :=proc(n,p) y^n+x*y^p+1=0 end;

ser :=proc(mu,n,p,x,eps) local k,S,terme :
#developpement de Belardinelli
| S :=0. : k :=1 : terme :=1. :
| while abs(terme) > eps do
| | terme :=evalf((-1)^k/k*binomial((p*k+mu)/n-1,k-1)*x^k) : S :=S+terme :
| | k :=k+1 :
| od;
| S :=evalf(1+mu*S/n) :
end;

racasy :=proc(nmax)
local i,logz,pol,nlogz,expz,polexp,n1z,supolexp,
eq,so,sono,eps,ea :
global a,aa,z :
# Calcul du polynome f(z) := z^(n+1)-(n+1)*z+n
# en fonction de a racine de exp(a)=1+a
# aa est une valeur numerique approchee de a
| z :=1+a*t+sum(a[i]*t^i,i=2..nmax) :
| logz :=taylor(log(z),t=0,nmax+1) :
| pol :=convert(logz,polynomial) :
| nlogz :=collect((1/t+1)*pol,t) :
| expz :=taylor(exp(nlogz),t=0,nmax) :
| polexp :=convert(expz,polynomial) :
| n1z :=collect((1/t+1)*z-1/t,t) :
| supolexp :=subs(exp(a)=1+a,polexp) :
| eq :=collect(supolexp-n1z,t) :
| for i from 2 to nmax do
| | so :=solve(coeff(eq,t,i-1),a[i]) :
| | sono :=normal(so) :
| | print('i=',i,'a[i]='',sono) :
| | eq :=subs(a[i]=sono,eq) :
| | a[i] :=sono :
| od;
| aa :=2.+7.46*I : eps :=1. : while abs(eps) > 10^(-Digits + 2) do
| | ea :=evalc(exp(aa));
| | eps :=evalc((ea-1.-aa)/(ea-1.));
| | aa :=aa - eps :
| od;
| print('aa=',aa) :
end;

```

4.1. PROGRAMMES DU CHAPITRE 1

```

racasyverif :=proc(kmax,n)
local i,logz,pol,nlogz,expz,polexp,n1z,supolexp,
eq,so,sono,eps, ea,a0,a,aa,t,z, zc,zce,f,ff,err,eps,rac,j,k :
# Calcul du polynome f(z) := z^(n+1)-(n+1)*z+n
# en fonction de a racine de exp(a)=1+a
# aa est une valeur numerique approchee de a,
# n est le parametre de l'equation
# kmax est l'ordre du dev limite.

z :=1+a0*t+sum(a[i]*t^i,i=2..kmax);
logz :=taylor(log(z),t=0,kmax+1);
pol :=convert(logz,polynom);
nlogz :=collect((1/t+1)*pol,t);
expz :=taylor(exp(nlogz),t=0,kmax);
polexp :=convert(expz,polynom);
n1z :=collect((1/t+1)*z-1/t,t);
supolexp :=subs(exp(a0)=1+a0,polexp);
eq :=collect(supolexp-n1z,t);
for i from 2 to kmax do
| so :=solve(coeff(eq,t,i-1),a[i]);
| sono :=normal(so);
| print('i=',i,'a[i]=',sono);
| eq :=subs(a[i]=sono,eq);
| a[i] :=sono;
od;
aa :=2.+7.46*I; eps :=1.;
while abs(eps) > 10^(-Digits+2) do
| ea :=evalc(exp(aa)) : eps :=evalc((ea-1.-aa)/(ea-1.));
| aa :=aa - eps
od;
print('aa=',aa);
for k from 1 to kmax do
| z :=expand(1+a0*t+sum(a[j]*t^j,j=2..k));
| zc :=subs(t=1/n,a0=aa,z);
| zce :=evalc(zc);
| f :=x^(n+1)-(n+1)*x+n;
| ff :=diff(f,x);
| err :=evalc(subs(x=zce,f));
| eps :=1. : rac :=zce;
| while abs(eps) > 10^(-Digits+2) do
| | eps :=evalc(subs(x=rac,f)/subs(x=rac,ff));
| | rac :=rac-eps
| od;
| print('n=',n,'k=',k,'racine=',rac,'diff=',rac-zce)
od;
end;

```

4.1. PROGRAMMES DU CHAPITRE 1

```

# les 4 procédures ci-dessous permettent de calculer
# la constante A = 14 du théorème 1 (chapitre 1).
w :=proc(t) log(t)/(t-1) end;
y :=proc(x) x*(log(x))^2/(x-1)^2 end;
R :=proc(A) (4*A+1)^(2*A/(2*A+1)) end;
ff :=proc(A) local A1,A2,A3,A4
  A1 :=log(4*A+1)-2;
  A2 :=4.5*(1+1/2/A)*y(R(A));
  A3 :=log(4*A+2)/(2*A+1);
  A3 :=exp(A3);
  A4 :=1-w(R(A));
  evalf(A1-A2*A3/A4);
end;
abc :=proc(alpha,beta,gamma)
  evalf(alpha*(1-beta)-gamma*(84*gamma+13*beta+44*beta*gamma)
  -alpha^2*exp(alpha)*(5+10*gamma^2)) :
end;
g :=proc(t) if t=0 then 0 else (exp(t)-1-t)/t fi end;
g1 :=proc(t) if t=0 then 0 else ((t-1)*exp(t)+1)/t^2 : fi : end;
cylsecu :=proc(b,s,r) local A,B,B1,C,G1,Fy,M;
  B :=evalf(abs(b));
  A :=B+r;
  G1 :=g1(s*(A));
  B1 :=(A)*G1;
  C :=((abs(b-1)-r)*exp(Re(b)-r)-1)/A^2;
  Fy :=C-s*G1;
  M :=evalf(B1/Fy);
  [M,r/M];
end;

racine :=proc(app) local aa,eps,ea;
#A partir d'une valeur approchée complexe
# calcul de la racine de l'équation exp(z)=1+z.
  aa := app;
  eps := 1.;
  while 10^(-Digits+2) < abs(eps) do
    ea := evalc(exp(aa));
    eps := evalc((ea-1.-aa)/(ea-1.));
    aa := aa-eps
  od;
end;

```

4.1. PROGRAMMES DU CHAPITRE 1

4.1.3 Programme minimumdeA.

Ce programme évalue les racines approchées z_k de l'équation $f_{n,n+1}(z) = 0$, calcule ses racines z_k , calcule r_k et ρ et fait le test $|z_k - x_k| < \rho$, puis calcule la constante A du théorème 1 et montre que la valeur $A = 4$ est minimale et qu'on ne peut pas faire mieux.

Programme

```

f :=proc(n,z) z^(n+1)-(n+1)*z+n end;
r :=proc(k,n)
evalf((2*(n+1)*sin((4*k+1)*Pi/(4*n+2)))^(1/(n+1))) end;
ro :=proc(k,n) evalf(3*(r(k,n)-1)/(r(k,n)^n-1)) end;
xk :=proc(k,n) evalf( r(k,n)*exp(I*Pi*(4*k+1)/(2*n+1))) end;

test :=proc(n)
local u,j,k,rho,z, com,li,lis,mi,kmax,rr,rh :
#ce prog calcule la quantité |z_k-x_k|/(rho/3) du theoreme 1.
  li :=fsolve(f(n,z),z,complex);
  maxk :=0 :kmax :=-1;
  for k from 0 to n/2 do
    rr :=r(k,n);
    u :=xk(k,n);
    rh :=(rr-1)/(rr^n-1);
    for j from 1 to n+1 do
      if abs(li[j] - u)/rh < 3. then
        | mi := (abs(li[j] - u))/rh
      fi
    od;
    print('n=',n, 'k=',k,mi);
    if mi > maxk then
      | maxk :=mi :kmax :=k
    fi
  od;
  print('n=',n, 'Max=',maxk, 'kmax=',kmax)
end;

# les 4 procedures ci-dessous montrent que l'on ne peut pas
# prouver mieux que A=4 dans le théorème 1.
w :=proc(t) log(t)/(t-1) end;
y :=proc(x) x*(log(x))^2/(x-1)^2 end;
R :=proc(A) evalf((4*A+1)*Pi/2) end;
ff :=proc(A) local A1,A2,A3,A4
  A1 :=log(4*A+1)-2+evalf(Pi/2);
  A2 :=4.5*y(R(A));
  A3 :=log(4*A+2)/(2*A+1);
  A3 :=exp(A3);
  A4 :=1-w(R(A));
  evalf(A1-A2/A4);
end;

```

4.1. PROGRAMMES DU CHAPITRE 1

4.1.4 Programme Newton

Ce programme calcule à l'aide de la méthode de Newton, les coefficients du développement en série convergent des racines du trinôme $f(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$.

```

# Programme Newton
g :=(exp(t)-1-t)/t;
eq :=subs(t=Y,g)-subs(t=-x*Y,g);
net :=proc(s,z) subs(O(1)=0,map(normal,series(s,z))) bf end :
calcgdg :=proc(Y,z,k)
local expy,unsurexpy,zosurY,logexpy,c0,c1,val,s,y;
  s :=series(Y,z,3);
  c0 :=subs(exp(b)=1+b,exp(coeff(s,z,0)));
  val :=op(2,s);
  zosurY :=1/op(1,s);
  y :=Y-coeff(s,z,0);
  s :=series(y,z,2);
  c1 :=coeff(s,z,1);
  expy :=1+c1*z;
  unsurexpy :=1/expy;
  Order :=2;
  for i to k do
    unsurexpy :=net(unsurexpy*(2-unsurexpy*expy),z); Order :=2*Order-1;
    unsurexpy :=net(unsurexpy*(2-unsurexpy*expy),z);
    logexpy :=net(Int(diff(expy,z)*unsurexpy,z),z); expy :=net(expy*(y+1-logexpy),z);
    zosurY :=net(zosurY*(2-zosurY*Y/z^val),z)
  od;
  net((c0*expy-1-Y)*zosurY/z^val,z), net((c0*expy*(Y-1)+1)*zosurY*zosurY/z^(2*val),z)
end;
Order :=2 : y :=b-b*x/2 : invden :=1+(b/2-1)*x;
for itonbiter do
  print(i);
  gdg :=calcgdg(y,x,i);
  gxdgx :=calcgdg(-x*y,x,i);
  Order :=2*Order-1;
  invden :=net(invden*(2-invden*(gdg[2]+x*gxdgx[2])),x);
  y :=net(y-(gdg[1]-gxdgx[1])*invden,x);
od;
y;

```

4.2 Programmes du chapitre 2

4.2.1 Programme fonction $h(n)$

Ce programme calcule la suite des nombres réels $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ ainsi que la valeur de λ définies par :
 $P_k(\lambda_k) = 1$ et $P(\lambda) = 1$ où $P_k(s) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j^s}$ et $P(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s}$
 On calcule λ avec précision à l'aide de la formule (cf. [45], p. 70) :

$$P(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \log \zeta(ms),$$

en utilisant les méthodes indiquées dans (cf. [6]).

```

P :=proc(s,mmax) local m,S
# P(s)est la somme pour p premier de 1/p^s
# P(s) est aussi egale a somme(mu(m)/m*log(zeta(m*s)), m=1..infini)
# pour avoir une valeur de P(s) avec k chiffres, choisir mmax =3*k
# Par exemple, pour calculer P(1.4) avec 10 décimales faire P(1.4,30);
  S :=0;
  for m from 1 to mmax do
    | S :=S+evalf(numtheory[mobius](m)/m*log(Zeta(m*s)))
  od;
end;

# Les procédures Pprime et P1 calculent P'(s), P2 calcule P''(s)
# en choisissant mmax comme pour P(s)
Pprime :=proc(s,mmax) local a,b,k;
  | a :=evalf(sum(numtheory[mobius](k)*Zeta(1,k*s)/Zeta(k*s), k=1..mmax))
end;

P1 :=proc(s,mmax) local ss;
  evalf(subs(ss=s,diff(P(ss,mmax),ss)))end;
P2 :=proc(s,mmax) local ss;
  evalf(subs(ss=s,diff(P(ss,mmax),ss,ss))) end;

Q :=proc(s,k) local S,j,p
# Q(s,k) est la somme des inverses des puissances s-ieme des k
# premiers nombres premiers (notée P_k(s) dans l'article)
  S :=0.;p :=1;;
  for j from 1 to k do
    | p :=nextprime(p);
    | S :=S+evalf(1/p^s);
  od;
  S
end;

```

4.2. PROGRAMMES DU CHAPITRE 2

```

Q1 :=proc(s,k) local S,j,p
# Q1(s,k) vaut P_k'(s)
  S :=0.;p :=1;
  for j from 1 to k do
    | p :=nextprime(p); S :=S+evalf(-log(p)/p^s);
  od;
  S;
end;
# La fonction f sert a calculer lambda_k
f :=proc(x,k) evalf(x-(Q(x,k)-1)/Q1(x,k)) end;
#calcul de lambda_k
lambdak :=proc(k,impr) local x,i :
# calcule la valeur de lambda_k par la methode de Newton
# impr est une variable booleenne d'impression
# impr=false, on n'ecrit rien; impr=true, on ecrit le resultat.
  x :=1.4 :
  for i from 1 to 10 do
    | x :=evalf(f(x,k));
    | if impr then print(i,x)fi
  od;
  if impr then print('k=',k,'lambda_k=',x) fi;
  x
end;

# La fonction ff sert a calculer lambda
ff :=proc(x,mmax) x-(P(x,mmax)-1)/P1(x,mmax); end;
#calcul de lambda
lambda :=proc(mmax,impr) local x,i;
# calcule la valeur de lambda par la methode de Newton;
# choisir mmax=3 fois le nombre de chiffres desires, comme pour P(s)
# impr est une variable booleenne d'impression
# impr=false, on n'ecrit rien; impr=true, on ecrit les éésultats partiels
  x :=1.4;
  for i from 1 to 10 do
    | x :=evalf(ff(x,mmax));
    | if impr then print(i,x)fi
  od;
  if impr then print('lambda=',x)fi;
  x;
end;

ak :=proc(k,impr) local lamk,P1l,aak;
# calcule a_k tel que defini dans notre article a_k=-1/P'(lamda_k)
  lamk :=lambdak(k,impr); P1l :=Q1(lamk,k);
  aak :=evalf(-1/P1l);
  if impr then print('k=',k,'lambda_k=',lamk,'a_k=',aak) fi;
  aak;
end;

```

4.2. PROGRAMMES DU CHAPITRE 2

```
asyk :=proc(kmax,t,z) local Y,Z,ZZ,k,ord ;
# cette proc calcule en t=log(x) et z=loglog(x)
# le dev asy de Li(x)^-1 donne en (3.17) de notre article
# a l'ordre 2^kmax-2; le reste est en 2^kmax-1;
  Y :=t+log(t); for k from 1 to kmax do
    Y :=asympt(Y-(Ei(Y)-exp(t))*Y/exp(Y),t,2^k+1);
    Y :=convert(Y,polynom); #print(Y);
  od;
  Y :=asympt(exp(Y-t),t,2^kmax);
  Y :=convert(Y,polynom);
  Z :=subs(log(t)=z,Y);
  ZZ :=collect(Z,[t,z])
end;
```

4.2.2 Programme champion

Ce programme détermine les nombres h -champions. Il donne pour chaque nombre h -champion N trouvé, la suite de ses exposants intervenant dans sa factorisation en produit de nombres premiers et calcule la valeur de $h(N)$ où h est donnée par la formule du coefficient multinomial $h(N) = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}$, pour $n \geq 2$ et $h(1) = 1$, lorsque $N = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$.

La méthode utilisée est la méthode de M. Deléglise (cf. [8]), elle consiste à déterminer par "back-traking" tous les nombres de la forme $N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 1$ et $k = \Omega(N)$ (cf. 2.6.88) est inférieur à une borne donnée X , ensuite à l'aide de la fonction h on élimine les nombres qui ne sont pas champions à l'aide de la définition suivante N est un nombre h -champion si pour tout M , $M < N$ implique $h(M) < h(N)$. Pour $X = \prod_{i=1}^{22} p_i = 3.2 \cdot 10^{30}$, on trouve 814236 nombres de la forme (2.6.88) et, parmi eux, seuls 785 nombres sont h -champions; le plus grand est $N_{785} = 2^{24} \cdot 3^{14} \cdot 5^6 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.

Programme

```

init := proc(K) local k,pk;
global P,KMAX,NMAX,tab,tabexp,a,v;
  tab := table();
  tabexp := table();
  KMAX := K;
  P := array(0..K);
  pk := 1;
  P[0] := 1;
  for k from 1 to K do
    pk := pk * ithprime(k);
    P[k] := pk
  od;
  NMAX := P[K];
  v := vector(K,0);
  a := vector(K,0)
end;

traite := proc(k,n) local j,s,total;
global a,v,tab,tabexp
  s := 0; total := 0;
  for j from k to 1 by -1 do
    s := s + a[j];
    total := total+s;
    v[j] := s
  od;
  tab[n] := combinat[multinomial](total,v['j']$j'=1..k);
  tabexp[n] := eval([v['j']$j'=1..k]);
  print('k=' ,k,'n=' ,n,'tab[n]=' , tab[n],'tabexp[n]=' ,tabexp[n])
end;

```

4.2. PROGRAMMES DU CHAPITRE 2

```

backt := proc(k,N) local n; global a
| n := N;
| while n < NMAX do
|   | if a[k] > 0 then
|     | traite(k,n);
|     | print('k=',k,'n=',n,'a=',a)
|   | fi
|   | print('****k=',k,'n=',n,'a=',a);
|   | if k < KMAX and n * P[k+1] ≤ NMAX then
|     | a[k+1] := 0; backt(k+1,n)
|   | fi
|   | n := n * P[k];
|   | a[k] := a[k]+1
| od;
end;

champ := proc(k)
| local n,y,inds,record,liste2,z,ti;
| global a,tab,cnte,resu;
| resu := table();
| ti := time();
| init(k);
| a := vector(k,0);
| backt(1,1);
| print('temps 1ere partie=',time()-ti);ti := time();
| inds := sort(map(x → op(x), [indices(tab)]));
| record := 0; cnte := 0; liste2 := [];
| print('nombre d'elements=',nops(inds));
| for n from 1 to nops(inds) do
|   | y := tab[inds[n]];
|   | if y > record then
|     | record := y;
|     | cnte := cnte+1;
|     | z := eval(tabexp[inds[n]]);
|     | if z[nops(z)] > 1 then liste2 := [op(liste2),[inds[n],z]] fi;
|     | print(cnte,inds[n],eval(tabexp[inds[n]]), y);
|     | resu[cnte] := [inds[n],z,y];
|   | fi
| od;
| print(liste2);print('temps tri=',time()-ti);
end;

```

4.3. TABLE DES λ_k ET a_k

4.3 Table des λ_k et a_k

Les calculs numériques montrent effectivement que la suite des nombres réels $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ est croissante et convergente de limite $\lambda = 1.399\dots$, tandis que la suite des nombres réels $(a_k)_{k \geq 1}$ est décroissante et tend vers $a = 0.577$.

Dans ce qui suit nous donnons quelques valeurs de ces deux suites. Ces valeurs sont regroupées dans la table suivante :

k	λ_k	a_k	k	λ_k	a_k
1	0.000000000	1.4426950410	400	1.393011254	0.6043501019
2	0.787884911	1.1577157340	500	1.393817759	0.6017733053
3	1.032812266	1.0026586190	600	1.394396042	0.5998610551
4	1.147338412	0.9199384156	700	1.394832801	0.5983750562
5	1.200772803	0.8687693152	800	1.395177697	0.5971736984
6	1.238008660	0.8329544543	900	1.395459303	0.5961731904
7	1.261759902	0.8073711729	1000	1.395693772	0.5953252445
8	1.280631858	0.7870100677	1200	1.396064516	0.5939543439
9	1.294379142	0.7711148983	1400	1.396347823	0.5928799980
10	1.304009451	0.7588531258	1600	1.396571819	0.5920117931
20	1.347710190	0.6972891872	1800	1.396754969	0.5912887733
30	1.362395287	0.6727679268	2000	1.396908555	0.5906728024
40	1.369643257	0.6592992451	3000	1.397416460	0.5885628110
50	1.374168099	0.6503367296	4000	1.397709957	0.5872838432
60	1.377297517	0.6438268495	5000	1.397906263	0.5863989977
70	1.379584325	0.6388697231	6000	1.398049049	0.5857384064
80	1.381332992	0.6349425576	7000	1.398158764	0.5852199309
90	1.382735573	0.6317046386	8000	1.398246344	0.5847986519
100	1.383896771	0.6289627385	9000	1.398318339	0.5844469683
120	1.385668861	0.6246333999	10000	1.398378893	0.5841472052
140	1.387005031	0.6212593933	12000	1.398475545	0.5836605466
160	1.388038628	0.6185677085	14000	1.398550038	0.5832780503
180	1.388870226	0.6163463782	16000	1.398609639	0.5829668855
200	1.389560905	0.6144624351	18000	1.398658701	0.5827070356
220	1.390141790	0.6128463638	20000	1.398700011	0.5824855562
240	1.390633205	0.6114524942	30000	1.398838678	0.5817214791
260	1.391065414	0.6102096649	40000	1.398920251	0.5812548778
280	1.391445188	0.6091020460	50000	1.398975463	0.5809305396
300	1.391778152	0.6081164746	60000	1.399015966	0.5806876469
320	1.392075955	0.6072242424	70000	1.399047306	0.5804965451
360	1.392587467	0.6056666973	80000	1.399072484	0.5803408560
380	1.392808905	0.6049819218	90000	1.399093272	0.5802107090
390	1.392911549	0.6046618352	100000	1.399110816	0.5800996484

TAB. 4.1 – λ_k et a_k

4.4 Tables des nombres h -champions

Pour $X = \prod_{i=1}^{22} p_i = 3 \cdot 2 \cdot 10^{30}$, on trouve 785 nombres h -champions ; le plus grand est $N_{785} = 2^{24} \cdot 3^{14} \cdot 5^6 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.

Dans ce qui suit, nous avons choisis 202 nombres h -champions qui seront répartis dans les six tables suivantes :

k	Nombre champion N_k	Exposants de N_k	$h(N_k)$
1	2	{1}	1
2	6	{1,1}	2
3	12	{2,1}	3
4	24	{3,1}	4
5	30	{1,1,1}	6
6	60	{2,1,1}	12
7	120	{3,1,1}	20
8	180	{2,2,1}	30
9	360	{3,2,1}	60
10	720	{4,2,1}	105
11	840	{3,1,1,1}	120
12	1080	{3,3,1}	140
13	1260	{2,2,1,1}	180
14	1680	{4,1,1,1}	210
15	2160	{4,3,1}	280
16	2520	{3,2,1,1}	420
17	4320	{5,3,1}	504
18	5040	{4,2,1,1}	840
19	7560	{3,3,1,1}	1120
20	10080	{5,2,1,1}	1512
21	12600	{3,2,2,1}	1680
22	15120	{4,3,1,1}	2520
23	25200	{4,2,1,1}	3780
24	30240	{5,3,1,1}	5040
25	45360	{4,4,1,1}	6300
26	50400	{5,2,2,1}	7560
27	60480	{6,3,1,1}	9240
28	75600	{4,3,2,1}	12600
29	90720	{5,4,1,1}	13860
30	110880	{5,2,1,1,1}	15120

TAB. 4.2 – Nombres h -champions de N_1 à N_{30}

4.4. TABLES DES NOMBRES h -CHAMPIONS

k	Nombre champion N_k	Exposants de N_k	$h(N_k)$
100	2514758400	{8,6,2,2,1}	1047566520
101	2594592000	{8,4,3,1,1,1}	1102701600
102	2794176000	{9,4,3,2,1}	1163962800
103	3113510400	{9,5,2,1,1,1}	1396755360
104	3592512000	{9,6,3,1,1}	1551950400
105	3632428800	{8,4,2,2,1,1}	1654052400
106	3891888000	{7,5,3,1,1,1}	1764322560
107	4191264000	{8,5,3,2,1}	2095133040
108	5029516800	{9,6,2,2,1}	2327925600
109	5448643200	{7,5,2,2,1,1}	2646483840
110	6227020800	{10,5,2,1,1,1}	2793510720
111	7185024000	{10,6,3,1,1}	3259095840
112	7264857600	{9,4,2,2,1,1}	3491888400
113	7783776000	{8,5,3,1,1,1}	4190266080
114	8382528000	{9,5,3,2,1}	4655851200
115	10059033600	{10,6,2,2,1}	4888643760
116	10897286400	{8,5,2,2,1,1}	6285399120
117	12573792000	{8,6,3,2,1}	6983776800
118	15567552000	{9,5,3,1,1,1}	9311702400
119	16765056000	{10,5,3,2,1}	9777287520
120	18162144000	{8,4,3,2,1,1}	10475665200
200	155613249792000	{11,6,3,3,1,1,1}	389787862464000
201	156920924160000	{14,7,4,2,1,1,1}	419236121304000
202	164766970368000	{12,8,3,3,1,1}	438511345272000
203	166728481920000	{10,7,4,2,1,1,1}	459392837904000
204	183074411520000	{13,6,4,3,1,1}	472242987216000
205	196151155200000	{12,7,5,2,1,1}	526213614326400
206	200074178304000	{11,8,3,2,1,1,1}	563800301064000
207	222304642560000	{12,6,4,2,1,1,1}	657767017908000
208	235381386240000	{13,8,4,2,1,1}	733663212282000
209	266765571072000	{13,7,3,2,1,1,1}	809559406656000
210	274611617280000	{12,7,4,3,1,1}	877022690544000

TAB. 4.3 – Nombres h -champions de N_{100} à N_{120} et de N_{200} à N_{210}

4.4. TABLES DES NOMBRES h -CHAMPIONS

k	Nombre champion N_k	Exposants de N_k	$h(N_k)$
211	329533940736000	{13,8,3,3,1,1}	978217616376000
212	333456963840000	{11,7,4,2,1,1,1}	1127600602128000
213	392302310400000	{13,7,5,2,1,1}	1173861139651200
214	400148356608000	{12,8,3,2,1,1,1}	1315534035816000
215	444609285120000	{13,6,4,2,1,1}	1416728961648000
216	466839749376000	{11,7,3,3,1,1,1}	1503467469504000
217	470762772480000	{14,8,4,2,1,1}	1572135454890000
218	533531142144000	{14,7,3,2,1,1,1}	1676944485216000
219	549223234560000	{13,7,4,3,1,1}	1956435232752000
220	647298812160000	{11,8,4,2,2,1}	1973301053724000
221	659067881472000	{14,8,3,3,1,1}	2096180606520000
222	666913927680000	{12,7,4,2,1,1,1}	2631068071632000
223	800296713216000	{13,8,3,2,1,1,1}	2934652849128000
224	823834851840000	{12,8,4,3,1,1}	3179207253222000
225	933679498752000	{12,7,3,3,1,1,1}	3508090762176000
226	1000370891520000	{11,8,4,2,1,1,1}	3946602107448000
227	1098446469120000	{14,7,4,3,1,1}	4192361213040000
228	1176906931200000	{13,8,5,2,1,1}	4401979273692000
229	1267136462592000	{11,7,3,2,1,1,1,1}	4510402408512000
230	1294597624320000	{12,8,4,2,2,1}	4768810879833000
231	1333827855360000	{13,7,4,2,1,1,1}	5869305698256000
232	1556132497920000	{12,6,4,3,1,1,1}	6139158833808000
233	1600593426432000	{14,8,3,2,1,1,1}	6288541819560000
234	1647669703680000	{13,8,4,3,1,1}	7336632122820000
235	1867358997504000	{13,7,3,3,1,1,1}	7825740931008000
236	2000741783040000	{12,8,4,2,1,1,1}	9537621759666000
237	2334198746880000	{11,7,4,3,1,1,1}	10524272286528000
238	2471504555520000	{12,9,4,3,1,1}	10597357510740000
239	2589195248640000	{13,8,4,2,2,1}	11004948184230000
240	2667655710720000	{14,7,4,2,1,1,1}	11004948184230000

TAB. 4.4 – Nombres h -champions de N_{211} à N_{240}

4.4. TABLES DES NOMBRES h -CHAMPIONS

k	Nombre champion N_k	Exposants de N_k	$h(N_k)$
380	47897758285977600000	{14,10,5,3,1,1,1,1}	1633169526373921536000
381	54740295183974400000	{17,10,5,2,1,1,1,1}	1688409083883627705600
382	55460562225868800000	{15,10,5,3,2,1,1}	2014242415861169894400
383	58541704571750400000	{14,8,5,3,2,1,1,1}	2041461907967401920000
384	63863777714636800000	{16,9,5,3,1,1,1,1}	2517803019826462368000
385	70250045486100480000	{15,9,4,3,2,1,1,1}	2721949210623202560000
386	73947416301158400000	{17,9,5,3,2,1,1}	2814015139806046176000
387	86271985684684800000	{16,8,5,4,2,1,1}	2832528397304770164000
388	87812556857625600000	{13,9,5,3,2,1,1,1}	3175607412393736320000
389	92434270376448000000	{15,9,6,3,2,1,1}	3357070693101949824000
390	95795516571955200000	{15,10,5,3,1,1,1,1}	4028484831722339788800
391	105375068229150720000	{14,10,4,3,2,1,1,1}	4082923815934803840000
392	110921124451737600000	{16,10,5,3,2,1,1}	4783825737670278499200
393	117083409134500800000	{15,8,5,3,2,1,1,1}	4899508579121764608000
394	127727355429273600000	{17,9,5,3,1,1,1,1}	5628030279612092352000
395	140500090972200960000	{16,9,4,3,2,1,1,1}	6294507549566155920000
396	159659194286592000000	{15,9,6,3,1,1,1,1}	6714141386203899648000
397	166381686677606400000	{15,11,5,3,2,1,1}	6958291982065859635200
398	175625113715251200000	{14,9,5,3,2,1,1,1}	8165847631869607680000
399	191591033143910400000	{16,10,5,3,1,1,1,1}	9567651475340556998400
400	210750136458301440000	{15,10,4,3,2,1,1,1}	1007121207930584947200
480	36530023652772249600000	{18,9,6,5,3,2,2,1,1}	4999566898388742039360000
481	37935024562494259200000	{17,12,5,3,2,1,1,1}	5726776629063468154176000
482	42150027291660288000000	{18,10,6,3,2,1,1,1}	6999393657744238855104000
483	48472531385409331200000	{16,10,5,3,2,1,1,1,1}	7462768150765634458752000
484	49175031840270336000000	{17,9,6,4,2,1,1,1}	7499350347583115059040000
485	50580032749992345600000	{19,11,5,3,2,1,1,1}	8640399826306285285248000
486	54795035479158374400000	{17,10,5,3,2,2,1,1}	8999220417099735670848000
487	59010038208324403200000	{18,10,5,4,2,1,1,1}	10499090486616358282656000
488	63225040937490432000000	{17,11,6,3,2,1,1,1}	11453553258126936308352000
489	73762547760405504000000	{16,10,6,4,2,1,1,1}	12748895590891292200368000
490	75870049124988518400000	{18,12,5,3,2,1,1,1}	13680633058318285034976000
491	82192553218737561600000	{16,11,5,3,2,2,1,1}	13907886099154136945856000
492	84300054583320576000000	{19,10,6,3,2,1,1,1}	15840733014894856366288000
493	88515057312486604800000	{17,11,5,4,2,1,1,1}	17180329887190404462528000
494	96945062770818662400000	{17,10,5,3,2,1,1,1,1}	17998440834199471341696000
495	101160065499984691200000	{20,11,5,3,2,1,1,1}	19008879617873827627545600
496	109590070958316748800000	{18,10,5,3,2,2,1,1}	20998180973232716565312000
497	118020076416648806400000	{19,10,5,4,2,1,1,1}	23761099522342284534432000
498	12645008187498086400000	{18,11,6,3,2,1,1,1}	27361266116636570069952000
499	145417594156227993600000	{16,11,5,3,2,1,1,1,1}	27815772198308273891712000
500	147525095520811008000000	{17,10,6,4,2,1,1,1}	31497271459849074847968000

TAB. 4.5 – Nombres h -champions de N_{380} à N_{400} et de N_{480} à N_{500}

4.4. TABLES DES NOMBRES h -CHAMPIONS

k	Nombre champion N_k	Exposants de N_k	$h(N_k)$
600	$52350333896242077696 \times 10^6$	{19,13,6,3,2,1,1,1,1}	$3951653628254155320264768 \times 10^3$
601	$529320042728669896704 \times 10^5$	{18,11,5,4,2,2,1,1,1}	$4063148018320530655387872 \times 10^4$
602	$5310903438749196288 \times 10^7$	{20,12,7,4,2,1,1,1}	$44032711857689159282950272 \times 10^3$
603	$5753478725311629312 \times 10^7$	{18,11,7,4,2,2,1,1}	$4450114496255819289234336 \times 10^4$
604	$59178638317491044352 \times 10^6$	{20,13,6,3,2,2,1,1}	$47419843539049863843177216 \times 10^3$
605	$61075389545615757312 \times 10^6$	{18,12,6,4,2,1,1,1,1}	$5191800245631789170773392 \times 10^4$
606	$63730841264990355456 \times 10^6$	{21,13,6,4,2,1,1,1}	$55323150795558174483706752 \times 10^3$
607	$69041744703739551744 \times 10^6$	{19,12,6,4,2,2,1,1}	$6421437145913002395430248 \times 10^4$
608	$75617148961238556672 \times 10^6$	{19,11,6,3,2,2,1,1,1}	$6558063468166470531503232 \times 10^4$
609	$7966355158123794432 \times 10^7$	{19,13,7,4,2,1,1,1}	$6774263362721409120453888 \times 10^4$
610	$81433852727487676416 \times 10^6$	{20,11,6,4,2,1,1,1,1}	$77057245750956028745162976 \times 10^3$
611	$92055659604986068992 \times 10^6$	{21,11,6,4,2,2,1,1}	$88065423715378318565900544 \times 10^3$
612	$10179231590935959552 \times 10^7$	{18,11,7,4,2,1,1,1,1}	$8900228992511638578468672 \times 10^4$
613	$103562617055609327616 \times 10^6$	{18,13,6,4,2,2,1,1}	$9385177367103618885628824 \times 10^4$
614	$104700667792484155392 \times 10^6$	{20,13,6,3,2,1,1,1,1}	$94839687078099727686354432 \times 10^3$
615	$1058640085457339793408 \times 10^5$	{19,11,5,4,2,2,1,1,1}	$9837095202249705797254848 \times 10^4$
616	$10621806877498392576 \times 10^7$	{21,12,7,4,2,1,1,1}	$102742994334608038326883968 \times 10^3$
617	$113425723441857835008 \times 10^6$	{18,12,6,3,2,2,1,1,1}	$10383600491263578341546784 \times 10^4$
618	$11506957450623258624 \times 10^7$	{19,11,7,4,2,2,1,1}	$11008177964422289820737568 \times 10^4$
619	$118357276634982088704 \times 10^6$	{21,13,6,3,2,2,1,1}	$110646301591116348967413504 \times 10^3$
620	$122150779091231514624 \times 10^6$	{19,12,6,4,2,1,1,1,1}	$12842874291826004790860496 \times 10^4$
690	$5799506555114122346496 \times 10^6$	{21,13,6,5,2,2,1,1}	$1410740345286733449334522176 \times 10^4$
691	$5863237396379112701952 \times 10^6$	{23,13,6,4,2,1,1,1,1}	$144977268685593160801176192 \times 10^5$
692	$621375702333655965696 \times 10^7$	{20,14,7,4,2,2,1,1}	$151150751280721441000127376 \times 10^5$
693	$6351840512744038760448 \times 10^6$	{21,12,6,4,2,2,1,1,1}	$179800240085564067072046944 \times 10^5$
694	$732904674547389087744 \times 10^7$	{21,13,7,4,2,1,1,1,1}	$201534335040961921333503168 \times 10^5$
695	$793980064093004845056 \times 10^7$	{19,12,7,4,2,2,1,1,1}	$2157602881026768804864563328 \times 10^4$
696	$828500936444874620928 \times 10^7$	{22,13,7,4,2,2,1,1}	$238176941412045907030503744 \times 10^5$
697	$9527760769116058140672 \times 10^6$	{20,13,6,4,2,2,1,1,1}	$290446541676680416039460448 \times 10^5$
698	$1058640085457339793408 \times 10^7$	{21,11,7,4,2,2,1,1,1}	$308228983003824114980651904 \times 10^5$
699	$11599013110228244692992 \times 10^6$	{22,13,6,5,2,2,1,1}	$3334477179768642698427052416 \times 10^4$
700	$1242751404667311931392 \times 10^7$	{21,14,7,4,2,2,1,1}	$374278050790357853905077312 \times 10^5$

TAB. 4.6 – Nombres h -champions de N_{600} à N_{620} et de N_{690} à N_{700}

4.4. TABLES DES NOMBRES h -CHAMPIONS

k	Nombre champion N_k	Exposants de N_k	$h(N_k)$
750	$3175920256372019380224 \times 10^8$	$\{22, 12, 8, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$20512989079112453743002134952 \times 10^5$
751	$33347162691906203492352 \times 10^7$	$\{20, 13, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$220075493864730418096185459456 \times 10^4$
752	$342999387688178093064192 \times 10^6$	$\{22, 15, 6, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$227220802107091795307100571776 \times 10^4$
753	$34797039330684734078976 \times 10^7$	$\{23, 14, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$23286603942652264736441984064 \times 10^5$
754	$38111043076464232562688 \times 10^7$	$\{23, 13, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$29637495927011973300926161536 \times 10^5$
755	$44462883589208271323136 \times 10^7$	$\{22, 12, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$328207825265799259888034159232 \times 10^4$
756	$457332516917570790752256 \times 10^6$	$\{24, 14, 6, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$3395963074970121940731122676 \times 10^6$
757	$4763880384558029070336 \times 10^8$	$\{21, 13, 8, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$34714289210805690949695920688 \times 10^5$
758	$50814724101952310083584 \times 10^7$	$\{25, 12, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$353180159796892681836036758304 \times 10^4$
759	$52195558996027101118464 \times 10^7$	$\{22, 15, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$357061260454001392625443755648 \times 10^4$
760	$52402684230138319773696 \times 10^7$	$\{20, 13, 7, 4, 3, 2, 1, 1, 1\}$	$36679248977455069682697576576 \times 10^5$
761	$533554603070499255877632 \times 10^6$	$\{23, 13, 6, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$414924942978167626212966261504 \times 10^4$
762	$57166564614696348844032 \times 10^7$	$\{22, 14, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$48690171880091098994378693952 \times 10^5$
763	$66694325383812406984704 \times 10^7$	$\{21, 13, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$555428627372891055195134731008 \times 10^4$
764	$76222086152928465125376 \times 10^7$	$\{24, 13, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$6791926149940243881462245352 \times 10^6$
765	$800331904605748883816448 \times 10^6$	$\{22, 14, 6, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$681662406321275385921301715328 \times 10^4$
766	$838442947682213116379136 \times 10^6$	$\{23, 13, 6, 4, 3, 2, 1, 1, 1\}$	$69154157163027937702161043584 \times 10^5$
767	$85749846922044523266048 \times 10^7$	$\{21, 15, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$714122520908002785250887511296 \times 10^4$
768	$88925767178416542646272 \times 10^7$	$\{23, 12, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$770574894102311305824080199936 \times 10^4$
769	$9527760769116058140672 \times 10^8$	$\{22, 13, 8, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$85207800790159423240162714416 \times 10^5$
770	$104391117992054202236928 \times 10^7$	$\{23, 15, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$869366547192351216827167405056 \times 10^4$
771	$104805368460276639547392 \times 10^7$	$\{21, 13, 7, 4, 3, 2, 1, 1, 1\}$	$92571437895481842532522455168 \times 10^5$
772	$1067109206140998511755264 \times 10^6$	$\{24, 13, 6, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$95086966099163414340471434928 \times 10^5$
773	$114333129229392697688064 \times 10^7$	$\{23, 14, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$11643301971326132368220992032 \times 10^6$
774	$133388650767624813969408 \times 10^7$	$\{22, 13, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$1363324812642550771842603430656 \times 10^4$
775	$152444172305856930250752 \times 10^7$	$\{25, 13, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$1521391457586614629447542958848 \times 10^4$
776	$1600663809211497767632896 \times 10^6$	$\{23, 14, 6, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$163006227598565853155093888448 \times 10^5$
777	$171499693844089046532096 \times 10^7$	$\{22, 15, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$178530630227000696312721877824 \times 10^5$
778	$19055521538232116281344 \times 10^8$	$\{23, 13, 8, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$20375778449820731644386736056 \times 10^6$
779	$200082976151437220954112 \times 10^7$	$\{21, 14, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$2142367562724008355752662533888 \times 10^4$
780	$209610736920553279094784 \times 10^7$	$\{22, 13, 7, 4, 3, 2, 1, 1, 1\}$	$227220802107091795307100571776 \times 10^5$
781	$228666258458785395376128 \times 10^7$	$\{24, 14, 7, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$27167704599760975525848981408 \times 10^6$
782	$266777301535249627938816 \times 10^7$	$\{23, 13, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$326012455197131706310187776896 \times 10^5$
783	$28583282307348174422016 \times 10^8$	$\{22, 14, 8, 4, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$33474493167562630558635352092 \times 10^6$
784	$314416105380829918642176 \times 10^7$	$\{21, 14, 7, 4, 3, 2, 1, 1, 1\}$	$357061260454001392625443755648 \times 10^5$
785	$3201327618422995535265792 \times 10^6$	$\{24, 14, 6, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$	$380347864396653657361885739712 \times 10^5$

TAB. 4.7 – Nombres h -champions de N_{750} à N_{785}

Conclusion

Certes en apparence du moins nous nous sommes intéressés à deux problèmes distincts; le premier ayant trait à des localisations de zéros de polynômes (problèmes provenant de la théorie du signal et des polynômes caractéristiques des suites de Fibonacci) et le second à un problème de factorisation (problème classique de théorie des nombres).

Toutefois, nous avons estimé que l'on pouvait faire de ces deux parties une thèse car les méthodes et techniques utilisées sont identiques; comme on pourra le remarquer, ces techniques sont essentiellement des développements asymptotiques. Ceci étant un raffinement de localisation de racines de polynômes ainsi que quelques résultats sur les nombres champions ont été obtenus.

En fin de ce travail nous avons inclus quelques tables de constantes d'effectivité et de nombres champions. Par ailleurs un certain nombre de questions ouvertes ont été signalées.

Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN. Handbook of Mathematical Functions, Dover Pub., New-York, 1965.
- [2] G. BELARDINELLI. Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales. *Mémorial des Sciences Math.*, n°145, 1960.
- [3] L. BIEBERBACH. Lehrbuch der Funktionentheorie, vol. 1, Elemente der Funktionentheorie, B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1930.
- [4] E. R. CANFIELD, P. ERDŐS, C. POMERANCE. On a Problem of Oppenheim concerning “Factorisatio Numerorum”, *J. Number Theory*, 17, (1983), 1–28.
- [5] G. CHOQUET. Cours d’analyse, tome II, Topologie, Masson, Paris, 1973.
- [6] H. COHEN. High precision computation of Hardy-Littlewood constants, prepublication, <http://www.math.u-bordeaux.fr/~cohen/>.
- [7] L. COMTET. Analyse Combinatoire, tome I, Presses Universitaires de France, 1970.
- [8] M. DELÉGLISE. Table des nombres h -champions, <http://euler.univ-lyon1.fr/home/deleglise/champion.ps>
- [9] J.-P. DEMAILLY. Analyse numérique et équations différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, 1991.
- [10] K. DILCHER. Zeros of certain cyclotomy-generated polynomials, *Fibonacci Quart.*, 29, 1991, 150-156.
- [11] K. DILCHER, J. D. NULTON and K. B. STOLARSKI. The zeros of a certain family of trinomials, *Glasgow Math. J.*, 34, 1992, 55-74.
- [12] J.-L. DURAS, J.-L. NICOLAS et G. ROBIN. Grandes valeurs de la fonction $d_k(n)$, in J. Urbanowicz, K. Győry, H. Iwaniec, editor, *Number Theory in Progress, Proceedings de la conférence de Zakopane, Pologne, 1997*, Walter de Gruyter, 1997, 743–770.
- [13] P. DUSSART. The k^{th} prime is greater than $k(\log k + \log \log k - 1)$ for $k \geq 2$, *Math. Comp.*, 68, (1999), 411–415.
- [14] W. J. ELLISON et M. MENDÈS-FRANCE. Les nombres premiers, Publications de l’Institut de mathématique de l’université de Nancago, IX, Hermann, Paris, 1975.
- [15] P. ERDŐS. On some asymptotic formulas in the theory of the “factorisatio numerorum”, *Ann. of Math.*, 42, (1941), 989–993; corrections to two of my papers, *Ann. of Math.*, 44, (1943), 647–651.
- [16] P. ERDŐS and P. TURÁN. On the distribution of the roots of polynomials, *Annals of Math.* 51, 1950, 105-119.
- [17] R. EVANS. An asymptotic formula for extended Eulerian numbers, *Duke Math. J.*, 41, (1974), 161–175.
- [18] W. FELLER. An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II, 2nd edition, J. Wiley and Sons, 1971.
- [19] G. H. HARDY and S. RAMANUJAN. Asymptotic formulæ for the distribution of integers of various types, *Proc. London Math. Soc.* (2),16,(1917), 112–132 and Collected Papers of S. Ramanujan, Cambridge University Press, 245–261.

BIBLIOGRAPHIE

- [20] G. H. HARDY and S. RAMANUJAN. Asymptotic formulæ in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.* (2), 17, (1918), 75–115 and Collected Papers of S. Ramanujan, Cambridge University Press, 276–309.
- [21] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT. An introduction to the theory of numbers, 4th edition, Oxford at the Clarendon Press, 1964.
- [22] V. C. HARRIS and M. V. SUBBARAO. On Product Partitions of Integers, *Canad. Math. Bull.*, 34, (1991), 474–479.
- [23] P. HENRICI. Applied and computational complex analysis, vol. 1, Power series — integration — conformal mappings — location of zeros, J. Wiley and Sons, 1974.
- [24] M.-O. HERNANE et J.-L. NICOLAS. Grandes valeurs du nombre de factorisation d’un entier en produit ordonné de facteurs premiers, à paraître in *The Ramanujan Journal*
- [25] M.-O. HERNANE. Localisation des zéros de polynômes intervenant en théorie du signal, Thèse de Magister, Université d’Alger, 1989.
- [26] M.-O. HERNANE et J.-L. NICOLAS. Localisation des zéros de famille de trinômes, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. Vol. VIII, n°3, 1999, pp. 471-490.
- [27] M.-O. HERNANE. Thèse de doctorat d’Etat de l’Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène (Alger), ce document.
- [28] E. HILLE. A Problem in “Factorisatio Numerorum”, *Acta Arith.* 2, (1937), 134–144.
- [29] A. F. HORADAM and A. G. SHANNON. Cyclotomy-generated Polynomials of Fibonacci Type, In *Fibonacci Numbers and Their Applications*, 81-97, edited by A.N. Philippou et al., Dordrecht : D. Reidel, 1986.
- [30] S. IKEHARA. On Kalmár’s problem in “ Factorisatio Numerorum”, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, 21, (1939), 208–219; II, 23, (1941), 767–774.
- [31] L. KALMÁR. A “Factorisatio Numerorum” problémájáról, *Mathematikai és Fizikai Lapok*, 38, (1931), 1–15.
- [32] L. KALMÁR. Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen(Erste Mitteilung), *Acta Litterarum ac Scientiarum, Sseged*, 5, (1931), 95–107.
- [33] J. K. KIM. On Highly Factorable Numbers, *J. Number Theory*, 72, (1998), 76–91.
- [34] A. KNOPFMACHER, J. KNOPFMACHER, and R. WARLIMONT. “Factorisatio Numerorum” in arithmetical semigroups, *Acta Arith.* 61, (1992), 327–336.
- [35] A. KNOPFMACHER, J. KNOPFMACHER, and R. WARLIMONT. Ordered Factorizations for Integers and Arithmetical Semigroups, *Advances in Number Theory* (Kingston, Ontario, 1991), 151-165, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1993.
- [36] J.-L. LACOUME, C. HANNA et J.-L. NICOLAS. Etalonnage de l’analyse spectrale par la méthode du modèle autorégressif. *Annales de Télécommunications*, 36,1981, 579-584.
- [37] P. A. MACMAHON. Dirichlet’s series and the theory of partitions, *Proc. London Math. Soc.*, (2), 22, (1923), 404-411.
- [38] M. MARDEN. Geometry of polynomials, *Amer. Math. Soc.*, 1966, Mathematical surveys. Number 3.
- [39] J.-L. NICOLAS et A. SCHINZEL. Localisation de zéros de polynômes intervenant en théorie du signal. In *Cinquante ans de polynômes*, ed. M. Langevin et M. Waldschmidt, Lecture Notes in Math., n°1415, Springer Verlag, 1990, 167-179.
- [40] J.-L. NICOLAS. On highly composite numbers, Ramanujan revisited, edited by G. E. Andrews, R. A. Askey, B. C. Berndt, K. G. Ramanathan, R. A. Rankin, Academic Press, 1988, 216-244.
- [41] A. OPPENHEIM. On an arithmetic function, *J. London Math.*, 1, (1926), 205–211; II, 2, (1927), 123-130.
- [42] L. S. PONTIAGIN. A course in ordinary differential equations, pp. 59–60. International Monographs on Advanced Mathematics and Physics. 1967.

BIBLIOGRAPHIE

- [43] S. RAMANUJAN. Highly composite numbers, *Proc. London Math. Soc.* Serie 2, 14, (1915), 347–409. Collected papers, Cambridge University Press, 1927, 78–128.
- [44] RICHMOND. Asymptotic Results for Partitions (I) and the Distribution of certain Integers, *J. Number Theory*, 8, (1976), 372–389.
- [45] H. RIESEL. Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, Birkhäuser, 1985.
- [46] G. ROBIN. Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le k -ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(N)$, nombre de diviseurs premiers de N , *Acta Arithmetica*, 42, (1983), 367–389.
- [47] J. B. ROSSER and L. SCHOENFELD. Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers, *Illinois. J. Math*, 6, (1962), 64–94.
- [48] G. SZEKERES and P. TURÁN. Über das zweite Hauptproblem der “Factorisatio Numerorum”, *Acta Litt. Sc. Szeged*, 6, (1933), 143–154.
- [49] R. TIJDEMAN. On the maximal distance between integers composed of small primes. *Compositio Math.*, 28, (1974), 159–162.
- [50] R. WARLIMONT. Factorisatio Numerorum with Constraints, *Journal of Number Theory*, 45, (1993), 186–199.
- [51] D. V. WIDDER. Advanced Calculus, second edition, Prentice-Hall, 1961.
- [52] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON. A course of modern analysis, 4th ed., Cambridge at the University Press, 1935.
- [53] J. ZENG. Multinomial convolution polynomials, *Discret Math.*, 160, 1996, 219–228.