

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE « HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE PHYSIQUE



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de docteur

En : PHYSIQUE

Spécialité : Electronique Quantique

Par : HARFOUCHE Ali

Intitulée :

**ETUDE DES MODES TRANSVERSES D'UNE CAVITE LASER COMPRENANT
UN MIROIR INTERFEROMETRIQUE**

Soutenue publiquement le 26/02/2013, devant le jury composé de :

Mr. H. DJELOUAH	Professeur à L'USTHB	Président
Mr. K. AÏT-AMEUR	Professeur, Univ. Caen/France	Directeur de thèse
Mr. L. SIMOHAMED	Professeur à l'EMP (Bordj El Bahri)	Examineur
Mr. A. KELLOU	Professeur à L'USTHB	Examineur
Mr. O. ZIANE	Professeur à L'USTHB	Examineur
Mr. N.E. DEMAGH	Maître de conférences (A), Univ. Sétif1	Examineur
Mr. T. KERDJA	Maître de Recherche (A) au CDTA	Membre invité

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE.....	4
CHAPITRE I. INFLUENCE DES EFFETS TRANSVERSES SUR LA MESURE DE LA LONGUEUR DE COHERENCE D'UN FAISCEAU LASER A L'AIDE D'UN INTERFEROMETRE A DEUX ONDES.	
I.1. Introduction.....	7
I.2. Approximation onde plane.....	8
I.2.1. Visibilité V des franges d'interférence dans le cas monochromatique.....	9
I.2.2. Visibilité V_{NM} des franges d'interférence dans le cas non monochromatique.....	9
I.3. Cas d'un faisceau Gaussien monochromatique.....	10
I.3.1. Calcul de la transmission T_G de l'interféromètre de Michelson.....	11
I.3.2. Visibilité V_G des franges d'interférence.....	12
I.3.3. Influence de la divergence angulaire θ_0 du faisceau incident sur la visibilité V_G ...	12
I.3.4. Résultats.....	12
I.3.5. Analyse des résultats et interprétation.....	15
I.4. Cas d'un faisceau Gaussien non monochromatique.....	15
I.4.1. Calcul de la transmission $T_{G_{NM}}$ de l'interféromètre de Michelson.....	16
I.4.2. Visibilité $V_{G_{NM}}$ des franges d'interférence.....	17
I.4.3. Résultats.....	17
I.4.4. Etude de la largeur spectrale apparente du faisceau incident.....	20
I.4.5. Etude de la largeur spectrale apparente en fonction de la divergence du faisceau incident à largeur spectrale constante	20
I.4.6. Etude de la largeur spectrale apparente en fonction de la largeur spectrale du faisceau incident à divergence angulaire constante.....	21
I.4.7. Interprétation des résultats et conclusion.....	23
I.5. Cas d'un faisceau Laguerre-Gauss symétrique, d'ordre p, monochromatique.....	23
I.5.1. Calcul de la transmission $T_{G_{p0}}$ de l'interféromètre de Michelson.....	25
I.5.2. Visibilité $V_{G_{p0}}$ des franges d'interférence.....	26
I.5.3. Etude de la largeur spectrale apparente en fonction de l'ordre p du faisceau incident	29

I.6 Influence de la superposition incohérente de modes transverses LG_{p0} sur la longueur de cohérence.....	32
I.6.1. Calcul de la transmission T de l'interféromètre de Michelson.....	32
I.6.2. Calcul de la longueur de cohérence d'une superposition incohérente de modes transverses LG_{p0} incident.....	33
I.7. Conclusion du chapitre I.....	34
Bibliographie du chapitre I.....	36
 CHAPITRE II. MISE EN FORME INTRA-CAVITE D'UN FAISCEAU LASER PAR METHODE INTERFEROMETRIQUE	
II.1. Introduction.....	38
II.2. Approximation.1.....	40
II.3. Approximation.2.....	42
II.3.1. Le coefficient de réflexion R_p du miroir de Michelson.....	43
II.3.2. Effet du miroir de Michelson sur la hiérarchie de la divergence d'un faisceau LG_{p0} incident.....	51
II.3.3. Caractérisation des modes transverses propres d'une cavité à deux miroirs.....	53
II.3.4. Modes propres de la cavité passive non diaphragmée.....	53
II.3.5. Modes propres de la cavité passive diaphragmée.....	56
II.3.6. Calcul de l'opérateur aller – retour	56
II.3.7. Le facteur de propagation M^2	60
II.3.8. Résultats.....	60
II.3.9. Analyse et interprétation des résultats.....	68
II.4 Approximation.3.....	70
II.4.1. Caractérisation des modes transverses d'une cavité comportant un diaphragme et un miroir de Michelson.....	70
II.4.2. Calcul de l'opérateur aller-retour.....	71
II.5 Résultats.....	79
II.5.1. Conclusion.....	86
II.6 Conclusion du chapitre II.....	88
Bibliographie du chapitre II.....	89

INTRODUCTION GENERALE

Les méthodes interférométriques, basées sur l'utilisation des interféromètres à deux ondes ou à ondes multiples, sont largement utilisées dans la caractérisation des faisceaux laser. Nous citons en particulier la mesure de la longueur d'onde et de la longueur de cohérence. Habituellement, les modèles théoriques, utilisés dans ce but, sont construits sur l'approximation onde plane du faisceau laser incident sur l'interféromètre. Cependant, deux études récentes, portant sur la réponse, respectivement en termes de transmission (rapport des puissances transmise et incidente) et de réflectivité (rapport des puissances réfléchie et incidente), de l'interféromètre de Michelson, éclairé par un faisceau laser Laguerre-Gauss d'ordre p , ont montré que cette approximation est de validité limitée. En effet, il est montré, dans la première étude, que la transmission de l'interféromètre de Michelson est très sensible aux propriétés transverses d'un faisceau Gaussien monochromatique. Ces propriétés transverses révèlent une erreur systématique importante dans la mesure de la longueur de cohérence du faisceau laser sous étude. L'objectif de notre travail, dans cette première partie, est la généralisation de l'étude de ces effets transverses associés à un faisceau Laguerre-Gauss d'ordre p quelconque. Notons que les effets transverses dans ce cas sont étroitement liés à l'ordre p dont dépendent les caractéristiques spatiales du faisceau : le profil radial de l'intensité, la divergence, la largeur et le déphasage de Gouy. Dans la seconde étude, il est montré que la réflectivité de l'interféromètre de Michelson est elle aussi sensible aux propriétés transverses du faisceau incident. Il en est déduit que l'interféromètre révèle un pouvoir discriminatoire, selon l'ordre p du faisceau incident, sur cette réflectivité. Guidés par l'intérêt croissant que suscite la mise en forme, par différentes techniques, d'un faisceau laser sous la forme d'un faisceau Laguerre-Gauss d'ordre p élevé mais unique, nous proposons, dans cette deuxième partie, un modèle de résonateur laser où l'interféromètre de Michelson constituera un élément essentiel pour atteindre cet objectif.

Le présent manuscrit est divisé en deux chapitres.

Le premier chapitre porte sur l'étude détaillée de l'influence des effets transverses sur la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau laser par méthode interférométrique. Nous abordons cette partie par la présentation des résultats portant sur la visibilité des franges d'interférence dans le cas d'une onde plane incidente sur l'interféromètre de Michelson ; le résultat obtenu et qui nous servira de référence est que dans le cas non monochromatique, la visibilité des franges d'interférence est une fonction décroissante de la différence entre les longueurs des deux bras de l'interféromètre ; la mesure de la profondeur du champ d'interférence nous permet d'en déduire la longueur de cohérence du faisceau sous étude. Nous aborderons par la suite le cas d'un faisceau Gaussien incident sur l'interféromètre où il sera mis en évidence la notion de largeur spectrale apparente, associée à ce faisceau, et qui fera l'objet de notre étude dans trois cas différents; dans le premier cas, nous étudierons la réponse de l'interféromètre lorsqu'il est éclairé par un faisceau Gaussien monochromatique; dans le deuxième cas, l'étude est reconduite avec un faisceau Gaussien non monochromatique incident sur l'interféromètre. Nous terminons, note étude, par le cas où le faisceau incident est défini par un mode Laguerre-Gauss d'ordre p (LG_{p0}), unique dans un premier temps, et par un mélange incohérent de modes (LG_{p0}), dans un second temps.

Le second chapitre porte sur la mise en forme intra-cavité d'un faisceau laser par méthode interférométrique. Nous considérons le cas d'une cavité à trois miroirs comprenant un interféromètre de Michelson. Nous présentons, à ce sujet, trois niveaux d'approximation dans la modélisation de la réflectivité du miroir de Michelson.

Dans la première approximation, la réflectivité du miroir de Michelson est définie par un rapport d'intensité ; il sera mis en évidence l'importance de l'utilisation d'une cavité de type Vernier-Michelson dans la sélection des modes longitudinaux.

Dans la deuxième approximation, le miroir de Michelson est assimilé à un miroir plan, d'une cavité classique plan-concave dont les modes propres sont définis par les fonctions de Laguerre-Gauss symétriques qui constituent une base orthonormée complète. Le champ résonnant de la cavité est obtenu à partir de sa décomposition sur cette base. Il faut noter que dans ce modèle, compte tenu des effets transverses, la réflectivité du miroir de Michelson dépend de l'ordre p de chacun des modes constituant la base considérée.

La troisième approximation, quant à elle, constitue la base du modèle original que nous proposons pour la mise en forme d'un faisceau laser sous forme d'un faisceau Laguerre-Gauss d'ordre supérieur mais unique. Il sera montré que le mode fondamental, le mode qui atteint le premier le seuil d'oscillation, peut être un mode du type Laguerre-Gauss d'ordre p (LG_{p0}), lequel ordre p peut être contrôlé par un déplacement microscopique de l'un des miroirs de l'interféromètre. Cette nouvelle technique interférométrique de mise en forme, intra-cavité, d'un faisceau laser présente quelques avantages sur toutes les autres techniques habituelles ; ces dernières consistent en l'insertion à l'intérieur de la cavité d'un masque d'amplitude ou de phase dont le coût reste élevé et la manipulation relativement ardue. Les avantages de la technique que nous proposons se résument dans la souplesse de l'ajustement de l'ordre du mode transverse et du faible coût de sa réalisation. Notons qu'à notre connaissance, nous proposons la première modélisation de ce type de cavité à trois miroirs qui permet la détermination de son mode fondamental, en utilisant une méthode de décomposition modale. Il est à noter, dans le cadre de cette troisième approximation, qu'aucune hypothèse particulière n'est émise sur la réflectivité du miroir de Michelson.

Pour terminer, nous tenons à signaler que les techniques de mise en forme d'un faisceau laser, sous la forme d'un faisceau LG_{p0} d'ordre $p \geq 1$, par l'introduction d'un masque d'amplitude ou de phase, ont fait l'objet d'études réalisées par A. Hasnaoui. Les techniques proposées dans ces études, ajoutées à celle que nous proposons dans ce présent travail et pour les mêmes objectifs, entrent dans le cadre du Projet National de Recherche (PNR) (2011-2012) domicilié au Centre de Développement des Techniques Avancées (CDTA) dont l'intitulé est: 'Optimisation du rendement opto-énergétique d'un laser par les techniques de l'optique adaptative'.

CHAPITRE I :

**INFLUENCE DES EFFETS TRANSVERSES SUR LA MESURE DE LA LONGUEUR
DE COHERENCE A L'AIDE D'UN INTERFEROMETRE A DEUX ONDES.**

I.1 Introduction.

En technologie des lasers, les interféromètres de Michelson et de Fabry-Pérot sont souvent utilisés pour l'analyse des spectres des fréquences, l'accord de fréquence ainsi que dans la caractérisation des cavités optiques. Leur description dans l'approximation ondes planes est simple mais, dans certaines conditions, conduit à des résultats erronés au regard de la nature réelle des faisceaux lasers. Ces derniers se caractérisent par des propriétés géométriques intrinsèques, en particulier une extension transversale finie, une divergence angulaire naturelle et une courbure du front d'onde, qui peuvent induire des effets significatifs sur les objectifs recherchés.

A ce sujet, il a été montré [I.1-I.3] que la réflectivité ainsi que la transmission de ces interféromètres dépendent aussi bien du déphasage induit par la propagation, mais aussi du profil transverse et de la distance de Rayleigh associés à un faisceau Laguerre-Gauss, d'ordre p , incident. Par ailleurs, les interféromètres à deux ondes sont largement utilisés pour la mesure de la longueur de cohérence [I.4], dans l'étude des lasers multi modes [I.5], dans les mesures précises de la longueur d'onde d'une lumière laser [I.6-I.8] et de déplacements microscopiques [I.9]. Il ressort donc que l'utilisation d'un interféromètre à deux ondes s'impose naturellement pour l'étude des effets transverses caractéristiques d'un faisceau Gaussien dans la mesure de sa longueur de cohérence.

Parmi les propriétés d'un rayonnement, la notion de cohérence est celle qui distingue un rayonnement laser de toute autre source de lumière. Cependant, nous nous devons de relativiser cette propriété au regard de l'étendue des valeurs de la longueur de cohérence qui peut couvrir la gamme allant de quelques centaines de microns, pour un laser à excimères [I.10, I.11], à quelques milliers de kilomètres pour un laser monomode stable [I.12], utilisé en métrologie. La notion de cohérence peut être définie par la faculté d'un rayonnement d'interférer avec lui-même, après une durée déterminée, nous faisons référence à la notion de cohérence temporelle ; quand le phénomène d'interférence résulte de deux rayonnements issus de la même source mais émis de deux points différents de cette dernière, il est question de la notion de cohérence spatiale.

Dans ce qui suit, nous allons étudier théoriquement la réponse d'un interféromètre de Michelson éclairé par un faisceau Gaussien, dans un premier temps, et un faisceau Laguerre-Gauss symétrique d'ordre p , dans un second temps. La mesure de la cohérence temporelle d'un faisceau laser, objet principal de notre étude, est basée sur l'utilisation d'un interféromètre de Michelson avec des longueurs de bras variables.

Le but essentiel de notre étude consiste à montrer que les effets transverses doivent être pris en compte lors de la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau incident sur un interféromètre de Michelson ou sur tout interféromètre à deux ondes. Dans le cas contraire, cela pourrait conduire à des erreurs de mesure qui peuvent être importantes.

Nous entamons notre travail par un bref rappel sur le principe de la mesure de la longueur de cohérence, basée sur l'utilisation d'un interféromètre à deux ondes dans l'approximation onde plane et dans le cas d'un faisceau Gaussien monochromatique [I.13]. Nous étendrons notre

étude au cas d'un faisceau Gaussien non monochromatique. Dans ces deux cas, il sera démontré que la visibilité des franges d'interférence est fortement affectée par les caractéristiques géométriques transverses des faisceaux interférant. En conséquence, il sera mis en évidence l'importance de la prise en compte de ces propriétés transverses dans l'objectif assigné par notre étude. Nous terminerons ce premier chapitre en considérant l'influence de l'ordre p d'un faisceau Laguerre-Gauss symétrique (LG_{p0}) sur la mesure de sa longueur de cohérence et enfin pour le même objectif l'étude de l'influence d'un mélange incohérent de modes LG_{p0} .

I.2 Approximation onde plane.

Dans une expérience utilisant un interféromètre à deux ondes, la mesure de la longueur de cohérence est basée sur l'observation de la variation de l'intensité du faisceau transmis par cet interféromètre en fonction du retard optique entre les deux faisceaux interférant.

Considérons un interféromètre de Michelson, (Fig. I.1) ci-dessous, éclairé par une onde plane d'intensité I_0 et définie par son nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$. La lame séparatrice (BS) divise l'onde incidente en deux faisceaux qui vont parcourir des chemins optiques différents à l'intérieur de l'interféromètre avant d'être transmis par ce dernier avec une différence de marche $\Delta = 2(D_2 - D_1)$, où D_1 et D_2 sont les longueurs des deux bras de l'interféromètre. A la sortie de ce dernier, l'onde transmise, résultant de la recombinaison de ces deux faisceaux, est définie par son intensité I_t , donnée par la relation :

$$I_t(\Delta) = (I_0/2) [1 + \cos(k\Delta)] \quad (I.1)$$

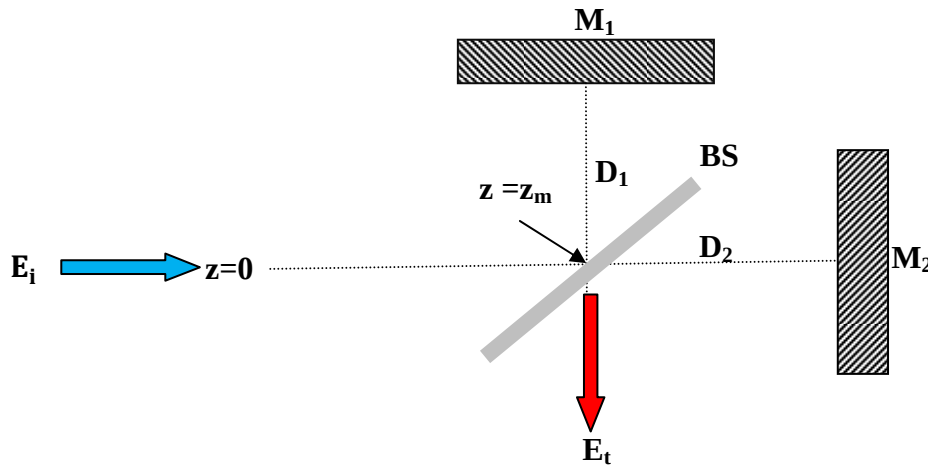


Figure. I.1 : Schéma synoptique de l'interféromètre de Michelson. Les miroirs M_1 et M_2 sont supposés parfaitement réfléchissants et la lame séparatrice (BS) transmet et réfléchit de manière égale le faisceau incident.

I.2.1 Visibilité V des franges d'interférence dans le cas monochromatique

L'image d'interférence est caractérisée par la visibilité V, définie par :

$$V = [I_{\text{tmax}} - I_{\text{tmin}}] / [I_{\text{tmax}} + I_{\text{tmin}}] , \quad (\text{I.2})$$

où I_{tmax} (I_{tmin}) est la valeur maximum (minimum) prise par I_t donnée par l'équation (I.1)

La variation de la visibilité V en fonction de la différence de marche Δ est caractéristique de la distribution spectrale de l'onde incidente : pour une onde monochromatique, nous avons $V=1$ quelque soit la valeur de Δ et dans le cas contraire, V décroît avec la variation croissante de Δ . Dans ce qui suit, nous allons nous inspirer des résultats obtenus dans [I.13] pour étudier l'évolution de la visibilité V_{NM} en fonction de Δ dans le cas où le faisceau incident sur l'interféromètre de Michelson n'est pas monochromatique.

I.2.2 Visibilité V_{NM} des franges d'interférence dans le cas non monochromatique

Dans le cas où le faisceau incident est défini par une distribution spectrale gaussienne, centrée en ν_0 et caractérisée par une largeur à mi-hauteur $\delta\nu$; l'expression donnant la visibilité des franges d'interférence en fonction de la différence de marche Δ et de la largeur spectrale $\delta\nu$ s'écrit (**Annexe. I.1**) :

$$V_{\text{NM}}(\Delta) = \exp \left\{ - \left[(\pi \delta\nu \Delta) / (2c_0 \sqrt{\ln 2}) \right]^2 \right\} , \quad (\text{I.3})$$

où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide.

L'évolution de la visibilité V_{NM} en fonction de Δ , pour les cas monochromatique et non monochromatique, est donnée sur la figure. I.2 ci-dessous.

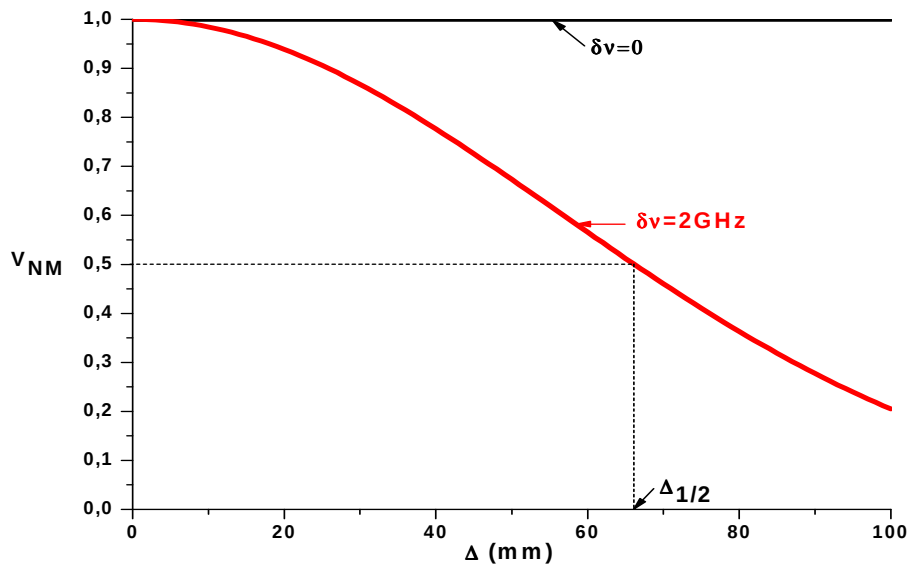


Figure. I.2: Variation de la visibilité des franges d'interférence en fonction de la différence des chemins optiques Δ pour une onde plane monochromatique $\delta\nu = 0$ ou ayant une largeur spectrale $\delta\nu = 2 \text{ GHz}$ (cas non monochromatique). Nous présentons aussi la grandeur $\Delta_{1/2}$ pour laquelle la visibilité $V_{\text{NM}}=1/2$.

La longueur de cohérence ($l_c = c_0/\delta\nu$) est déduite de l'équation (I.3), pour la valeur de la différence de marche $\Delta_{1/2}$ correspondant à $V_{NM} = 1/2$, par la relation :

$$l_c = \pi \Delta_{1/2} / 2 \ln 2 \quad (I.4)$$

Nous pouvons, à travers l'étude ci-dessus, mettre l'accent sur le fait que si expérimentalement on observait une décroissance de la visibilité avec l'accroissement de la différence de marche Δ , entre les deux faisceaux interférant, on conclurait alors que l'onde incidente n'est pas monochromatique et sa largeur spectrale $\delta\nu$ peut être calculée à partir de la valeur de la longueur de cohérence l_c obtenue à partir de l'équation (I.4) ci-dessus.

Dans la suite de notre étude, il sera mis en évidence que lorsque l'onde incidente est un faisceau Gaussien monochromatique, alors nous pouvons, sous certaines conditions, trouver que la visibilité des franges d'interférence décroît lorsque Δ croît, au lieu du résultat attendu $V=1$ caractéristique d'une onde monochromatique ! En conséquence, on pourrait déduire, de façon erronée, que l'onde incidente n'est pas monochromatique. D'une manière plus générale, les effets transverses peuvent être la source d'une erreur systématique dans la détermination de la longueur de cohérence d'un faisceau laser à l'aide d'une expérience utilisant un interféromètre de Michelson. Nous allons, dans ce qui suit, étudier la réponse de l'interféromètre de Michelson éclairé par un faisceau laser Gaussien.

I.3 Cas d'un faisceau Gaussien monochromatique

Dans cette partie, nous supposons que le faisceau laser Gaussien monochromatique incident a son point de pincement localisé au point $z = 0$, comme il est montré sur la figure. I.1, ci-dessus. Nous partons de l'hypothèse d'un système de coordonnées cylindriques (ρ, z) ; à l'entrée de l'interféromètre, le champ électrique, associé au faisceau Gaussien incident, est donné par l'expression :

$$E_i(\rho, z_m) = E_0 \cdot \frac{w_0}{w(z_m)} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\rho}{w(z_m)} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[-i \left(k \cdot z_m - \Phi(z_m) + \frac{k\rho^2}{2R(z_m)} \right) \right], \quad (I.5)$$

où w et R représentent respectivement la « largeur » du faisceau Gaussien et son rayon de courbure. Ces deux grandeurs ainsi que le déphasage de Gouy Φ dépendent de la coordonnée longitudinale z et ils sont définis par les formules habituelles :

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \text{ et } \Phi(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right), \quad (I.6)$$

où $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$ est la distance de Rayleigh, avec respectivement w_0 et λ le rayon du point de pincement et la longueur d'onde du faisceau Gaussien incident, défini par une divergence angulaire, en champ lointain, $\theta_0 = \lambda / (\pi w_0)$.

Le faisceau à la sortie de l'interféromètre résulte de la superposition de deux faisceaux ; le premier ayant parcouru la distance $z_1 = z_m + 2D_1$ et le second ayant, quant à lui, parcouru la distance $z_2 = z_m + 2D_2$. A la sortie de l'interféromètre, ces deux faisceaux sont caractérisés par des paramètres géométriques et de phase distincts :

$$w_i = w(z_i); R_i = R(z_i); \Phi_i = \Phi(z_i) \text{ et } \varphi_i = kz_i \text{ avec } i = 1, 2. \quad (\text{I.7})$$

Le faisceau incident sur l'interféromètre de Michelson étant complètement défini, nous allons étudier la réponse de l'interféromètre, en termes de transmission, par rapport à ce faisceau.

I.3.1 Calcul de la transmission T_G de l'interféromètre de Michelson

La distribution transverse $E_t(\rho)$ du champ électrique transmis par l'interféromètre est obtenue à partir de la relation [Annexe. I.0] :

$$E_t(\rho) = \frac{1}{2} [E_i(\rho, z_1) + E_i(\rho, z_2)] \quad (\text{I.8})$$

Au regard de la non uniformité de l'intensité du faisceau incident sur l'interféromètre, il est préférable d'exprimer la transmission T_G de ce dernier en termes de rapport de puissances au lieu du rapport d'intensités habituel utilisé dans l'hypothèse d'une onde plane.

Nous pouvons donc écrire : $T_G = P_t/P_i$, où P_t et P_i représentent respectivement la puissance du faisceau transmis par l'interféromètre et celle du faisceau incident sur ce dernier.

La puissance P transportée par un faisceau de symétrie cylindrique, défini par une distribution de champ $E(\rho, z)$, est donnée par :

$$P = 2\pi \int_0^\infty E \cdot E^* \rho d\rho, \quad (\text{I.9})$$

où $*$ dénote le complexe conjugué.

En appliquant l'équation (I.9) aux champs incident et transmis [Annexe I.1], nous obtenons leur puissance associée :

$$P_i = \pi \cdot w_0^2 \cdot E_0^2 / 2, \quad (\text{I.10})$$

et

$$P_t = \pi \cdot w_0^2 \cdot E_0^2 / 2 [1/2 + [a \cdot \cos(b) - c \cdot \sin(b)] / w_1 \cdot w_2 \cdot (a^2 + b^2)]. \quad (\text{I.11})$$

Nous en déduisons l'expression donnant de la transmission T_G :

$$T_G = [1/2 + [a \cdot \cos(b) - c \cdot \sin(b)] / w_1 \cdot w_2 \cdot (a^2 + b^2)] \quad (\text{I.12})$$

Les grandeurs caractéristiques a , b , et c , intervenant dans l'équation (I.12) et qui dépendent des propriétés géométriques des deux faisceaux interférant, sont données par les relations :

$$a = 1/w_1^2 + 1/w_2^2, b = (\varphi_2 - \varphi_1) - (\Phi_2 - \Phi_1) \text{ et } c = (k/2)[1/R_2 - 1/R_1]. \quad (\text{I.13})$$

La connaissance de la transmission T_G de l'interféromètre de Michelson nous permet d'en déduire l'expression de la visibilité des franges résultant de l'interférence de deux faisceaux Gaussiens monochromatiques définis par des chemins optiques différents.

I.3.2 Visibilité V_G des franges d'interférence

Par analogie au cas d'une onde plane, nous pouvons définir la visibilité V_G des franges d'interférence, dans le cas d'un faisceau Gaussien, par la relation :

$$V_G = [(T_G)_{\max} - (T_G)_{\min}] / [(T_G)_{\max} + (T_G)_{\min}] \quad (I.14)$$

L'étude de V_G en fonction de la différence de marche Δ exige la connaissance des extremums de la fonction T_G , ci-dessus, en fonction de ce même paramètre. Sachant que les grandeurs a , b , c et w_2 dépendent des caractéristiques géométriques du faisceau incident, une étude de l'évolution de ces grandeurs en fonction de la différence de marche Δ [Annexe I.1], nous permet d'aboutir à l'expression suivante de V_G :

$$V_G = 2 / w_1 w_2 \sqrt{a^2 + c^2} \quad (I.15)$$

I.3.3 Influence de la divergence angulaire θ_0 du faisceau incident sur la visibilité V_G

Le calcul numérique de la visibilité V_G en fonction de la différence de marche $\Delta = 2(D_2 - D_1)$ a été accompli dans les conditions suivantes : $\lambda_1 = 810$ nm (longueur d'onde du faisceau incident), D_2 variable, $D_1 = 200$ mm (maintenue fixe) et $z_m = 300$ mm. Le paramètre d'étude étant la divergence angulaire θ_0 du faisceau incident. Notons que, sauf précision de notre part, ces conditions sont maintenues tout le long de ce premier chapitre.

I.3.4 Résultats

Nous présentons sur la figure. I.3, ci-dessous, la variation de la visibilité V_G en fonction de la différence de marche Δ entre les deux faisceaux transmis par l'interféromètre de Michelson pour différentes valeurs de la divergence angulaire θ_0 du faisceau incident.

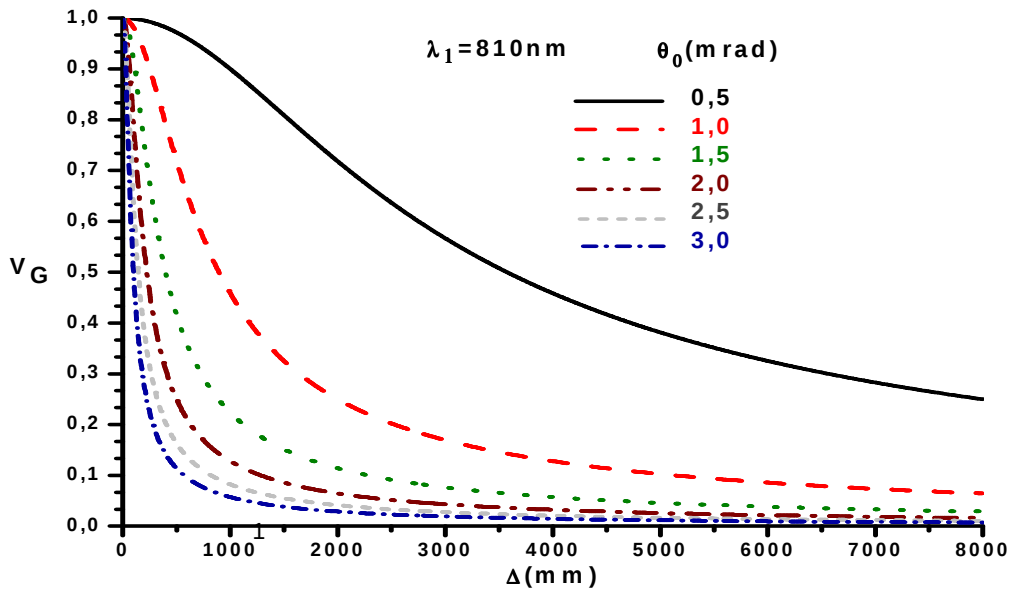


Figure. I.3: Evolution de la visibilité des franges d'interférence d'un faisceau Gaussien transmis par un interféromètre de Michelson en fonction de la différence de marche Δ ; le paramètre d'étude étant la divergence angulaire θ_0 de ce faisceau.

Analyse et commentaires : En première analyse, nous observons que pour une différence de marche $\Delta=0$, la visibilité des franges est maximum ($V_G=1$) et ce quelque soit la valeur de la divergence du faisceau incident. Ceci est bien conforme à ce qui est attendu au regard de l'équation (I.15), ci-dessus, liant la visibilité du faisceau Gaussien transmis à ses caractéristiques géométriques. En effet, pour $\Delta=0$, les deux faisceaux transmis par le miroir de Michelson sont identiques en tous points de vue, en particulier leur dimension transversale, leur rayon de courbure et leurs déphasages de Gouy et celui dû à la propagation. De ce fait et en particulier, nous avons $w_1 = w_2$ et $R_1 = R_2$. En conséquence, il est aisé de vérifier que $V_G=1$; ce dernier résultat traduit l'absence des effets transverses responsables de la diminution de la visibilité des franges d'interférence.

Par ailleurs, nous observons que lorsque Δ augmente, les caractéristiques géométriques des faisceaux impliqués deviennent différentes et nous observons une diminution de la visibilité des franges d'interférence ; cette diminution est plus prononcée quand la divergence du faisceau incident augmente. Nous avons en apparence, en raison des effets transverses, les caractéristiques d'un faisceau incident non monochromatique pour lequel nous pouvons définir une largeur de bande spectrale apparente $\delta\nu = c_0/l_c$ où l_c est définie ci-dessus.

Pour mieux mettre en relief l'influence de la divergence angulaire θ_0 du faisceau incident sur la visibilité V_G , nous présentons sur le tableau 1, ci-dessous, les résultats obtenus pour les valeurs de la différence de marche $\Delta_{1/2}$, pour lesquelles la valeur de la visibilité $V_G=0.5$, pour différentes valeurs de cette divergence. Dès lors que les valeurs de $\Delta_{1/2}$ sont connues, nous en déduisons celles correspondant à la largeur $\delta\nu$ de la bande spectrale apparente associée au faisceau incident.

Tableau 1

θ_0 (mrad)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\Delta_{1/2}(\text{mm})$	89312.0	22828.0	9920.0	5580.0	3572.0	2841.0	1822.6	1394.0	1102.0
$\delta\nu(\text{GHz})$	0.0015	0.0059	0.0133	0.0240	0.0370	0.0530	0.0730	0.0950	0.1200
θ_0 (mrad)	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$\Delta_{1/2}(\text{mm})$	893.0	738.0	620.0	528.0	455.6	397.0	349.0	309.0	275.6
$\delta\nu(\text{GHz})$	0.15	0.18	0.21	0.25	0.29	0.33	0.38	0.43	0.48
θ_0 (mrad)	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
$\Delta_{1/2}(\text{mm})$	247.4	223.2	202.4	184.4	169.0	155.0	143.0	132.0	122.4
$\delta\nu(\text{GHz})$	0.535	0.590	0.654	0.720	0.784	0.854	0.930	1.003	1.081
θ_0 (mrad)	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	
$\Delta_{1/2}(\text{mm})$	114.0	106.0	99.0	93.0	87.0	82.0	77.0	73.0	
$\delta\nu(\text{GHz})$	1.163	1.246	1.334	1.426	1.518	1.614	1.714	1.818	

Suite aux résultats obtenus et consignés dans le tableau 1, résultats qui reflètent les observations faites ci-dessus, nous présentons sur les figures. I.4a et I.4b, ci-dessous, les

courbes donnant la variation de cette largeur de bande spectrale apparente $\delta\nu$ en fonction de la divergence θ_0 (fig. I.4a) et du carré de cette même divergence (fig. I.4b) du faisceau incident. Pour mettre en évidence l'influence de la valeur de la longueur d'onde du faisceau incident sur la largeur spectrale apparente, nous avons complété l'étude réalisée pour la valeur de la longueur du faisceau incident $\lambda_1=810\text{nm}$ par une deuxième valeur $\lambda_2=1060\text{nm}$.

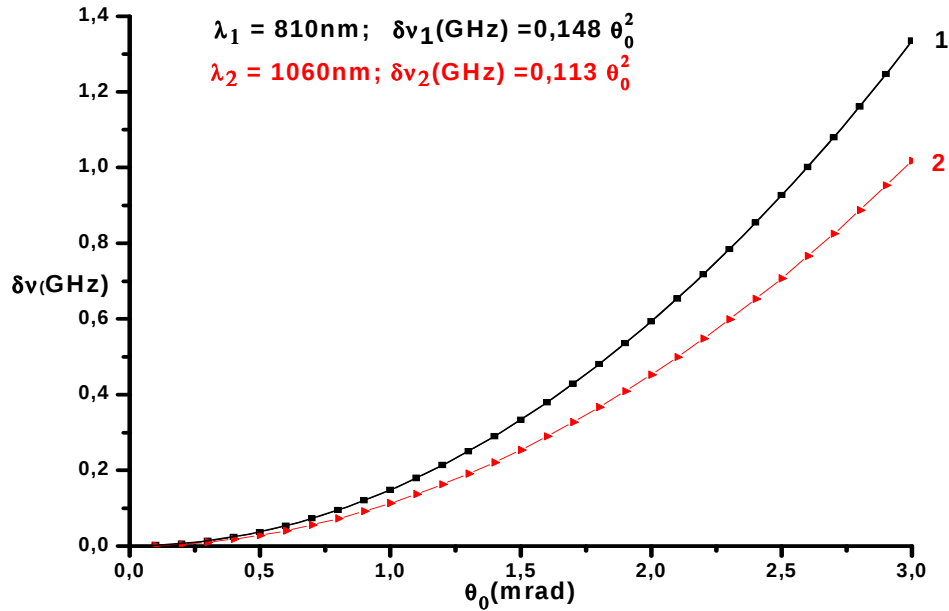


Figure. I.4a: Evolution de la variation de la largeur de la bande spectrale apparente en fonction de divergence angulaire du faisceau Gaussien incident ; le paramètre d'étude étant la longueur d'onde du faisceau incident.

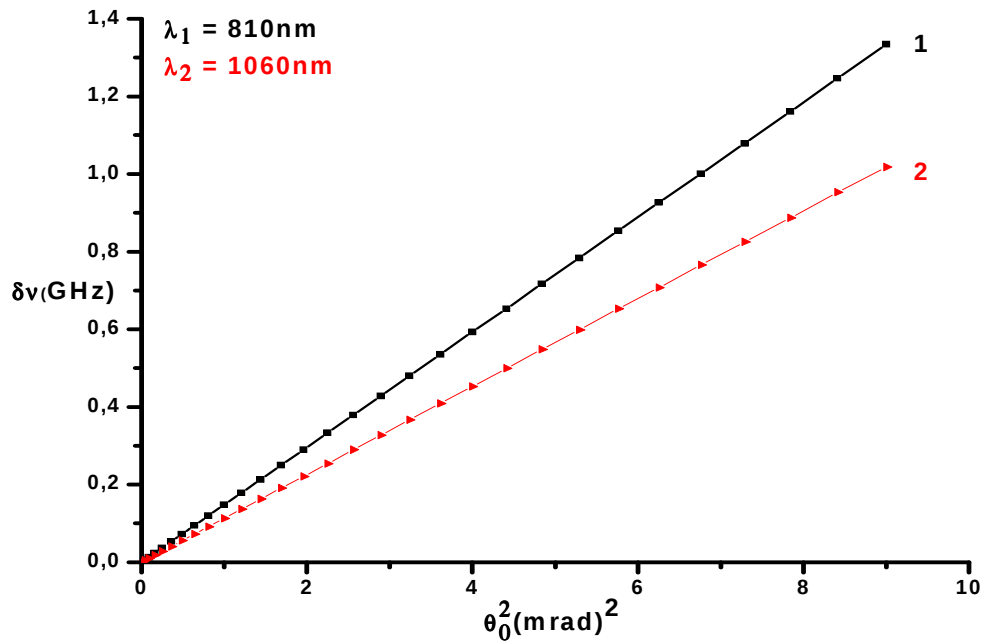


Figure. I.4b: Evolution de largeur de la bande spectrale apparente en fonction du carré de la divergence angulaire du faisceau Gaussien incident; le paramètre d'étude étant la longueur d'onde du faisceau incident.

I.3.5 Analyse des résultats et interprétation

Il ressort du tracé des courbes donnant l'évolution de la largeur de la bande spectrale apparente, en fonction de la divergence du faisceau Gaussien incident (fig. I.4a) et en fonction du carré de cette même divergence (fig. I.4b), les observations suivantes :

- i. Bien que le faisceau Gaussien incident soit monochromatique, la visibilité des franges d'interférence diminue avec l'accroissement de la différence de marche Δ . Il en résulte que l'onde incidente apparaît comme non monochromatique et de ce fait elle révèle une largeur de bande spectrale apparente non nulle.
- ii. Dans le cas d'une bonne collimation du faisceau incident, $\theta_0 = 0$, alors $\delta\nu = 0$ et nous retrouvons la valeur réelle de la largeur de la bande spectrale de notre faisceau source monochromatique.
- iii. De la figure. I.4a, nous relevons que la valeur de la largeur de bande spectrale apparente varie selon une loi quadratique en fonction de la divergence du faisceau incident : $\delta\nu = C\theta_0^2$. Cette loi de variation est confirmée par la courbe représentée sur la figure. I.4b qui donne l'évolution de cette largeur de bande spectrale en fonction du carré de la divergence angulaire du faisceau incident. Il ressort aussi la dépendance de la constante C vis à vis de la longueur d'onde du faisceau incident; cette dépendance est montrée à travers les valeurs obtenues de C (fig. I.4a) pour les deux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 du faisceau incident.

Nous pouvons conclure cette étude en mettant en relief l'existence d'une source d'erreur systématique dans la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau Gaussien à l'aide d'un dispositif expérimental impliquant un interféromètre à deux ondes. Nous avons aussi montré que les propriétés transverses d'un faisceau Gaussien peuvent induire des variations significatives de la visibilité des franges d'interférence avec la variation de la différence de marche entre les deux faisceaux transmis par l'interféromètre. Cet effet est observé particulièrement dans le cas d'une mauvaise collimation du faisceau Gaussien monochromatique sous étude. Il ressort donc que la prise en compte des effets transverses, caractéristiques d'un faisceau Gaussien, est impérative dans des expériences destinées à la mesure de sa longueur de cohérence.

Nous allons dans ce qui suit nous intéresser à la réponse de l'interféromètre de Michelson éclairé par un faisceau Gaussien non monochromatique. En plus de l'influence de la divergence angulaire de ce faisceau, nous allons étudier celle de sa largeur spectrale sur les effets induits par les propriétés transverses des faisceaux interférant à la sortie de l'interféromètre.

I.4 Cas d'un faisceau Gaussien non monochromatique

Dans cette partie, il sera question de l'étude théorique de l'effet d'une mauvaise collimation d'un faisceau Gaussien non monochromatique sur la mesure de la largeur de sa bande spectrale apparente. Notre modèle théorique est basé sur l'hypothèse où le faisceau source est

caractérisé par une distribution spectrale des fréquences de forme Gaussienne, centrée en ν_0 et définie par une largeur à mi-hauteur $\delta\nu_{\text{inc}} \ll \nu_0$, dont l'expression est donnée par la relation :

$$J(\nu) = J_0 \cdot \exp\{-4\ln 2[(\nu - \nu_0)/\delta\nu_{\text{inc}}]^2\} \quad (\text{I.16})$$

L'intensité émise dans l'intervalle de fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ est égale à $dI = J(\nu) d\nu$ et l'intensité totale est donnée par $I_0 = \int_0^\infty J(\nu) d\nu$.

I.4.1 Calcul de la transmission TG_{NM} de l'interféromètre de Michelson

L'expression de la transmission TG_{NM} de l'interféromètre de Michelson, dans le cas d'un faisceau Gaussien non monochromatique, peut être obtenue à partir du résultat correspondant au cas monochromatique (équation I.11) étendu à tout le spectre fréquentiel de l'onde source, définie par sa largeur à mi-hauteur $\delta\nu_{\text{inc}}$. Les calculs détaillés [Annexe I.2] aboutissent à l'expression suivante de TG_{NM} :

$$\begin{aligned} TG_{\text{NM}} = \frac{1}{2} + A \left\{ \cos(\Delta\Phi) \int_0^\infty \frac{\cos(x\nu) \exp(-\beta(\nu - \nu_0)^2) d\nu}{a^2 + y^2 \nu^2} + \sin(\Delta\Phi) \int_0^\infty \frac{\sin(x\nu) \exp(-\beta(\nu - \nu_0)^2) d\nu}{a^2 + y^2 \nu^2} \right\} \\ - B \left\{ \cos(\Delta\Phi) \int_0^\infty \frac{\sin(x\nu) \exp(-\beta(\nu - \nu_0)^2) d\nu}{a^2 + y^2 \nu^2} - \sin(\Delta\Phi) \int_0^\infty \frac{\cos(x\nu) \exp(-\beta(\nu - \nu_0)^2) d\nu}{a^2 + y^2 \nu^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

où les grandeurs intervenant dans l'expression de TG_{NM} , ci-dessus, sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} x = \frac{2\pi\Delta}{c_0}, \beta = \frac{4\ln 2}{(\delta\nu_{\text{inc}})^2}, \Delta\Phi = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), y = \frac{\pi}{c_0} \left[\frac{1}{R(z_2)} - \frac{1}{R(z_1)} \right], \\ A = (a/w_1 w_2 I_0) \text{ et } B = (2y/w_1 w_2 I_0) \text{ où } I_0 = J_0 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Rappelons que les grandeurs a , $\Phi(z_i)$ et $R(z_i)$ sont les mêmes que celles définies à partir des équations (I.6) et (I.7) ci-dessus.

Une étude détaillée [Annexe I.2] de l'expression donnant TG_{NM} (équation I.17), et tenant compte du fait que $\delta\nu_{\text{inc}} \ll \nu_0$, nous permet de réécrire cette expression sous une nouvelle forme :

$$TG_{\text{NM}} = \frac{1}{2} + (1/aw_1 w_2 I_0) [I_1 \cos(x\nu_0 - \Delta\Phi) - I_2 \sin(x\nu_0 - \Delta\Phi)], \quad (\text{I.19})$$

où I_1 et I_2 sont des équations intégrales dont les expressions sont données par :

$$I_1 = (\delta\nu_{\text{inc}}/(1 + (y/a)^2 \nu_0^2)) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x \cdot u \cdot \delta\nu_{\text{inc}}) \exp(-\gamma \cdot u^2) du, \quad (\text{I.20})$$

$$I_2 = \left(\delta\nu_{\text{inc}} \cdot \left(\frac{y}{a} \right) \nu_0 / (1 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 \nu_0^2) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x \cdot u \cdot \delta\nu_{\text{inc}}) \exp(-\gamma \cdot u^2) du, \quad (\text{I.21})$$

où $\gamma = 4\ln 2$ et $u = (\nu - \nu_0)/\delta\nu_{\text{inc}}$.

La transmission $T_{G_{NM}}$ étant définie, nous allons en déduire la visibilité des franges d'interférence qui en résulte.

I.4.2 Visibilité $V_{G_{NM}}$ des franges d'interférence

De la même manière que ci-dessus, nous définissons la visibilité $V_{G_{MN}}$, associée aux franges résultant de l'interférence de deux faisceaux Gaussien non monochromatiques transmis par l'interféromètre, par la relation :

$$V_{G_{NM}} = [(T_{G_{NM}})_{\max} - (T_{G_{NM}})_{\min}] / [(T_{G_{NM}})_{\max} + (T_{G_{NM}})_{\min}] \quad (I.22)$$

En tenant compte de l'étude faite sur l'évolution de la transmission de l'interféromètre $T_{G_{MN}}$ en fonction de la différence de marche Δ [Annexe. I.2], nous obtenons la nouvelle expression de cette transmission :

$$V_{G_{NM}} = (2/aw_1w_2)\sqrt{(I_1^2 + I_2^2)/I_0^2}, \quad (I.23)$$

où I_0 , I_1 , I_2 , w_1 et w_2 ont été définies ci-dessus.

Contrairement au cas monochromatique, notre faisceau incident est caractérisé par deux paramètres pertinents, à savoir : sa divergence angulaire θ_0 et sa largeur spectrale que nous avons notée δv_{inc} afin de la distinguer de sa largeur spectrale apparente δv .

Notre étude a porté sur l'évolution de la visibilité $V_{G_{NM}}$ en fonction de la différence de marche entre les deux faisceaux se recombinaut à la sortie de l'interféromètre, avec comme paramètres d'étude la divergence angulaire θ_0 et la largeur de la bande spectrale δv_{inc} du faisceau incident.

I.4.3 Résultats

En premier lieu, nous présentons sur les figures. I.5a, I.5b et I.5c ci-dessous les courbes donnant la variation de la visibilité $V_{G_{NM}}$ en fonction de la différence de marche Δ . Pour mettre en relief l'influence de chacun des paramètres d'intérêt, dans chaque cas de figure, nous avons fixé la valeur de la divergence θ_0 du faisceau incident tout en variant la valeur de sa largeur spectrale δv_{inc} .

En second lieu, pour connaître l'influence de ces mêmes paramètres sur la largeur spectrale apparente du faisceau laser transmis par l'interféromètre, nous avons été amenés à faire une étude séparée de l'influence de chacun de ces paramètres sur la largeur spectrale apparente.

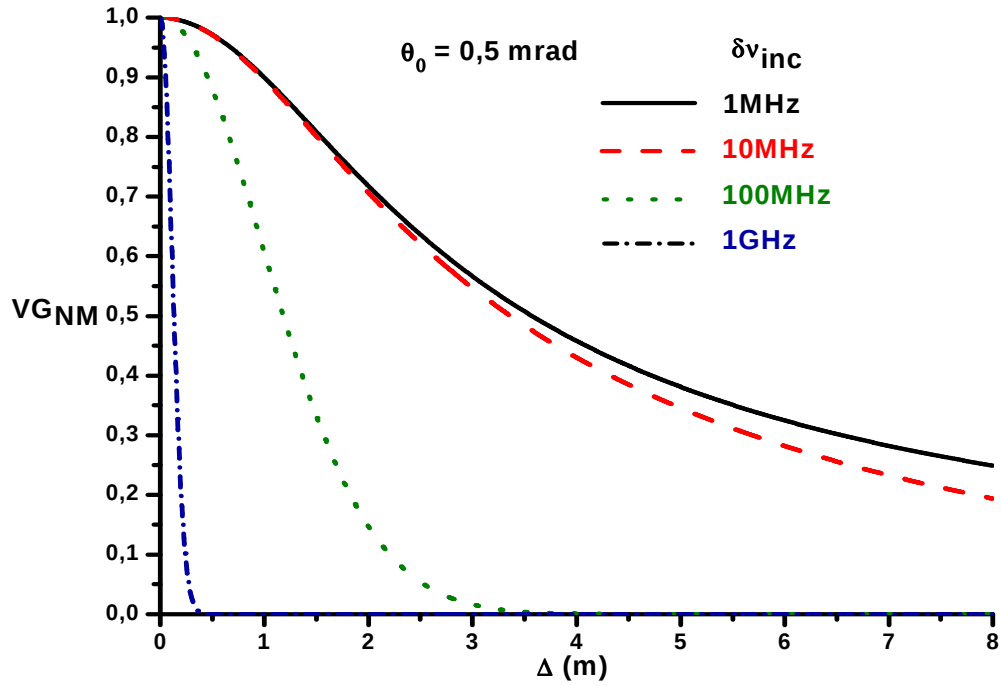


Figure. I.5a: Courbes donnant l'évolution de la visibilité $V_{G_{NM}}$ d'un faisceau Gaussien non monochromatique en fonction de la différence de marche Δ . Les paramètres d'étude sont la divergence ($\theta_0 = 0,5 \text{ mrad}$) du faisceau incident et la largeur de sa bande spectrale $\delta\nu_{inc}$.

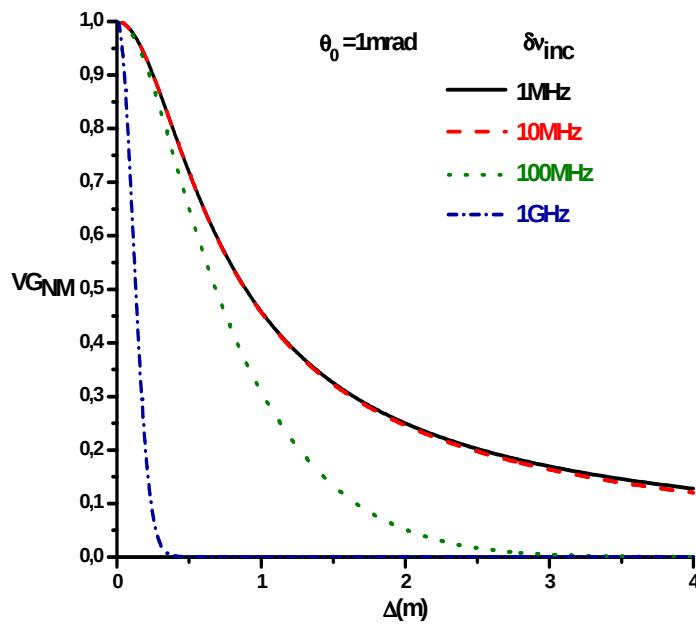


Figure. I.5b: Courbes donnant l'évolution de la visibilité $V_{G_{NM}}$ d'un faisceau Gaussien non monochromatique en fonction de la différence de marche Δ . Les paramètres d'étude sont la divergence angulaire ($\theta_0 = 1 \text{ mrad}$) du faisceau incident et la largeur de sa bande spectrale $\delta\nu_{inc}$.

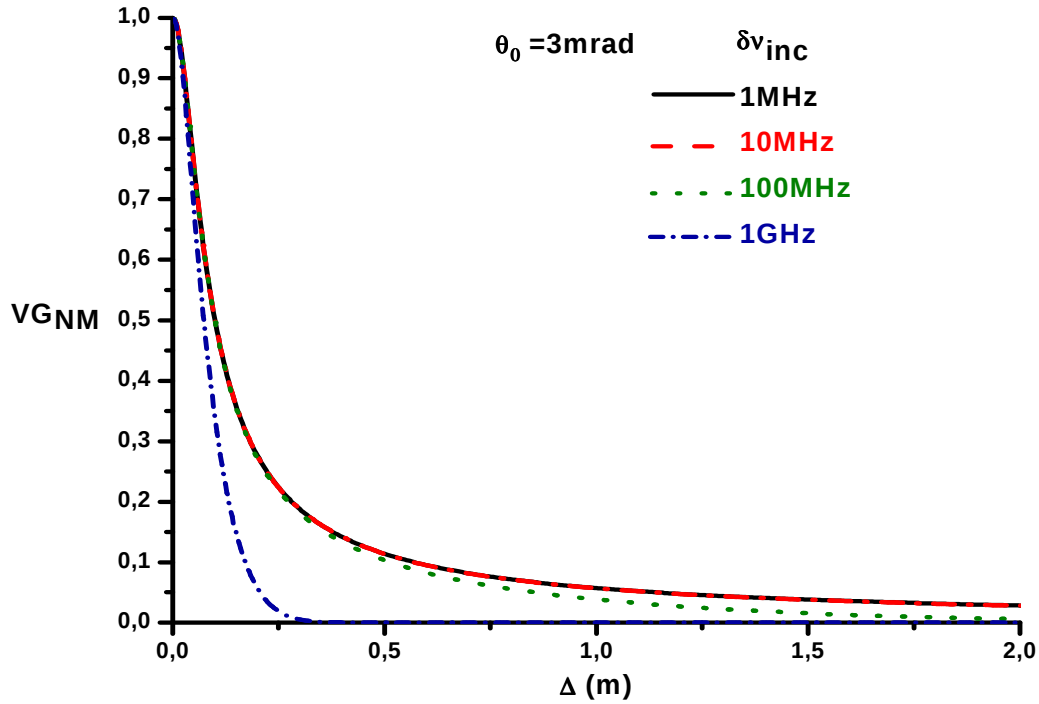


Figure. I.5c: Courbes donnant l'évolution de la visibilité V_{GNM} d'un faisceau Gaussien non monochromatique en fonction de la différence de marche Δ . Les paramètres d'étude sont la divergence ($\theta_0 = 3 \text{ mrad}$) du faisceau incident et la largeur de sa bande spectrale δv_{inc} .

Commentaires : De l'analyse des courbes présentées sur les trois figures. I.5a, I.5b, et I.5c, il ressort les observations suivantes :

- i. Pour une valeur donnée de la divergence θ_0 du faisceau incident, la visibilité V_{GNM} est une fonction décroissante de la largeur spectrale δv_{inc} du faisceau incident et ceci est bien conforme à nos connaissances sur ce sujet; la longueur de cohérence est inversement proportionnelle à la largeur spectrale du faisceau incident.
- ii. Pour une valeur donnée de la largeur spectrale du faisceau incident, cette même visibilité est une fonction décroissante de la divergence de ce faisceau et cet aspect nous l'avons déjà montré ci-dessus.

A travers cette analyse succincte sur l'influence et de la divergence angulaire θ_0 et de la largeur spectrale δv_{inc} du faisceau incident sur la visibilité des franges d'interférence, il nous a apparu naturel d'étudier séparément l'influence de chacun de ces deux paramètres sur la visibilité des franges et par conséquent sur la longueur de cohérence du faisceau sous étude, à partir de laquelle nous en déduisons l'influence de ces paramètres sur la largeur spectrale apparente de ce faisceau.

Nous présentons sur le tableau 2 ci-dessous les résultats obtenus pour la largeur spectrale apparente en fonction de ces paramètres; pour une valeur donnée de la largeur spectrale δv_{inc} du faisceau incident, nous étudions la variation de sa largeur spectrale apparente δv en fonction de la divergence angulaire θ_0 du faisceau incident.

Tableau 2

	$\delta v_{inc}=1\text{MHz}$	$\delta v_{inc}=10\text{MHz}$	$\delta v_{inc}=100\text{MHz}$	$\delta v_{inc}=1\text{GHz}$	$\delta v_{inc}=10\text{GHz}$
$\theta_0(\text{mrad})$	$\delta v(\text{GHz})$	$\delta v(\text{GHz})$	$\delta v(\text{GHz})$	$\delta v(\text{GHz})$	$\delta v(\text{GHz})$
0.5	0.037	0.039	0.112	1.000	10.030
1	0.148	0.148	0.193	1.021	10.030
1.5	0.333	0.333	0.358	1.099	10.030
2	0.592	0.592	0.607	1.255	10.030
2.5	0.925	0.925	0.934	1.494	10.030
3	1.331	1.331	1.339	1.813	10.180

Nous réservons l'analyse et l'interprétation des résultats obtenus et rassemblés dans le tableau 2, ci-dessus, dès lors que nous aurons étudié séparément l'influence des deux paramètres d'intérêt, la divergence angulaire θ_0 et la largeur spectrale δv_{inc} du faisceau incident, sur la largeur spectrale apparente δv du faisceau transmis par l'interféromètre.

I.4.4 Etude de la largeur spectrale apparente du faisceau incident

Comme indiqué ci-dessus, nous avons étudié séparément l'influence des deux paramètres θ_0 et δv_{inc} sur la largeur spectrale apparente δv du faisceau transmis par l'interféromètre de Michelson. Pour ce faire, nous avons étendu les valeurs de cette divergence de 0.1 à 3mrad et nous avons complété les valeurs de δv_{inc} , indiquées dans le tableau 2, par des valeurs intermédiaires.

I.4.5 Etude de la largeur spectrale apparente en fonction de la divergence du faisceau incident à largeur spectrale constante

Nous présentons sur la figure. I.6, ci-dessous, la variation de la largeur spectrale apparente d'un faisceau gaussien non monochromatique, transmis par l'interféromètre de Michelson, en fonction de la divergence angulaire θ_0 du faisceau incident, avec comme paramètre d'étude la largeur spectrale δv_{inc} de ce faisceau.

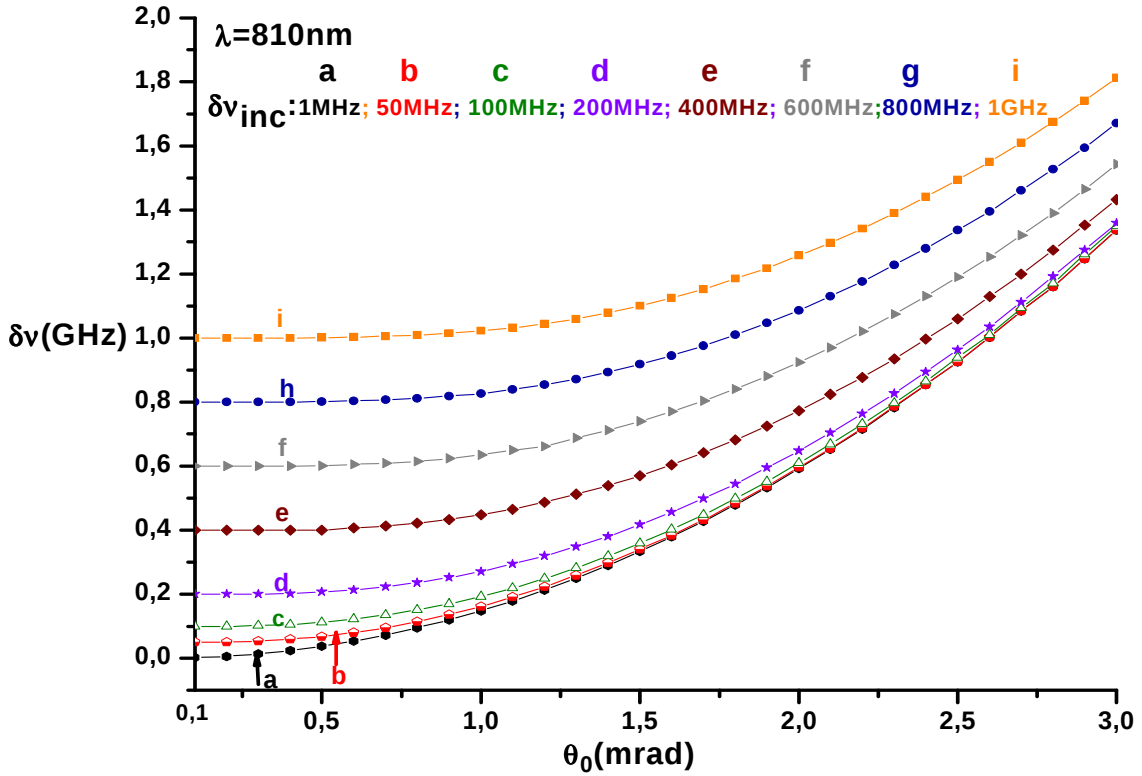


Figure. I.6: Courbes donnant l'évolution de la largeur spectrale apparente du faisceau transmis par l'interféromètre de Michelson en fonction de la divergence θ_0 du faisceau incident de largeur spectrale δv_{inc} .

Commentaires : Les courbes de la figure. I.6, ci-dessus, révèlent les observations suivantes :

- i. Pour une bonne collimation du faisceau incident, valeur relativement faible de sa divergence angulaire θ_0 , nous retrouvons les résultats correspondant à l'approximation onde plane du faisceau incident. En effet, nous obtenons dans ce cas : $\delta v = \delta v_{inc}$.
- ii. A contrario, pour une mauvaise collimation, nous relevons une différence entre ces deux largeurs spectrales, laquelle différence est d'autant plus grande que la valeur de la divergence du faisceau incident est relativement élevée.

Ces deux observations confirment, si besoin est, la nécessité d'une bonne collimation d'un faisceau non monochromatique dans la mesure de sa longueur de cohérence à l'aide d'un interféromètre à deux ondes.

I.4.6 Etude de la largeur spectrale apparente en fonction de la largeur de spectrale du faisceau incident à divergence angulaire constante

Nous présentons sur la figure. I.7, ci-dessous, la variation de la largeur spectrale apparente d'un faisceau gaussien non monochromatique, transmis par l'interféromètre de Michelson, en fonction de la largeur spectrale δv_{inc} du faisceau incident avec comme paramètre d'étude la divergence angulaire θ_0 de ce faisceau.

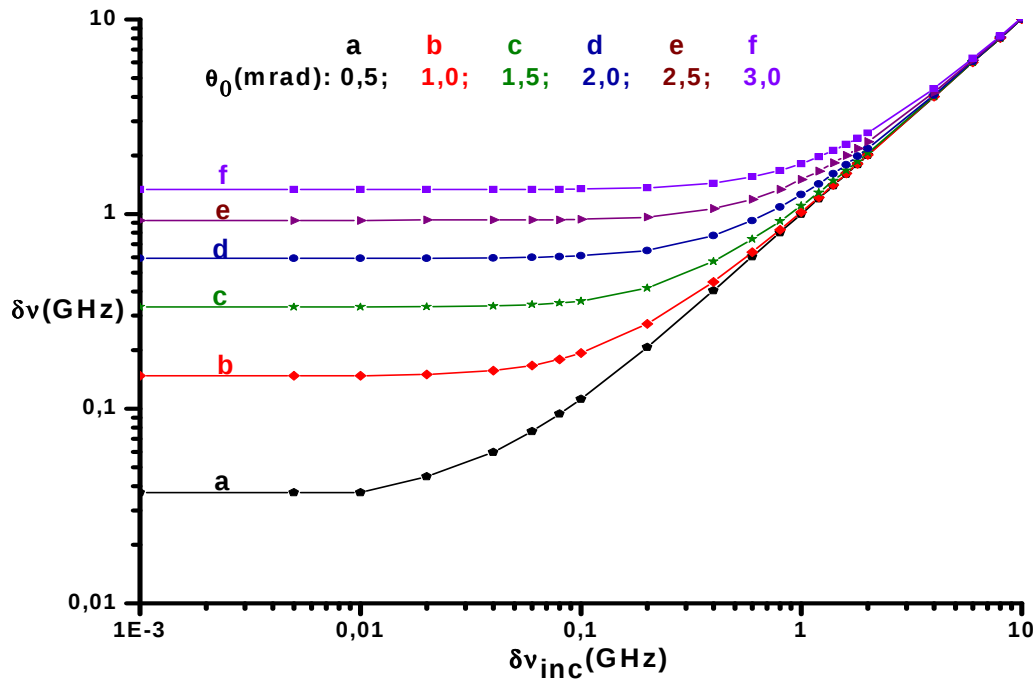


Figure. I.7: Courbes donnant l'évolution de la largeur spectrale apparente du faisceau transmis en fonction de la largeur spectrale du faisceau incident à divergence angulaire θ_0 constante.

Commentaires : Chacune des courbes représentées sur la figure. I.7, ci-dessus, présente la particularité suivante :

- i. Pour une valeur donnée de la divergence angulaire θ_0 du faisceau incident, chaque courbe met en évidence trois différentes phases de variation de largeur spectrale apparente δv en fonction de la largeur spectrale δv_{inc} ; chacune de ces phases correspond à une plage distincte de variation de la largeur spectrale δv_{inc} du faisceau incident.
- ii. Dans le premier intervalle, correspondant aux valeurs relativement faibles de δv_{inc} , la valeur de largeur spectrale apparente δv est constante. Une comparaison des valeurs obtenues de δv dans le cas monochromatique, voir tableau 1 ci-dessus, et celles que nous obtenons à partir de la figure. I.7, révèle une parfaite coïncidence. En se rappelant que la distribution spectrale des fréquences, associée au faisceau incident, centrée en ν_0 et définie par une largeur à mi-hauteur δv_{inc} telle que $\delta v_{inc} \ll \nu_0$, avec $\nu_0 \approx 3.6 \cdot 10^5$ GHz correspondant à la longueur d'onde $\lambda=810$ nm du faisceau incident, nous pouvons conclure que dans cet intervalle, le faisceau incident apparaît comme quasi monochromatique et les effets de la divergence du faisceau incident sur la largeur spectrale apparente ne peuvent qu'être identiques à ceux obtenus dans le cas monochromatique étudié ci-dessus.
- iii. Dans le deuxième intervalle, correspondant aux valeurs intermédiaires de δv_{inc} , nous observons une influence conjuguée de largeur spectrale du faisceau incident et de sa divergence angulaire sur la largeur spectrale apparente ; cette influence se traduit par

une croissance de la largeur spectrale apparente en fonction de ces deux paramètres. En conclusion, il ressort que la largeur apparente est affectée aussi bien par les effets transverses du faisceau incident que par son degré de cohérence.

- iv. Le troisième et dernier intervalle, quant à lui, correspond à une phase où nous obtenons $\delta v = \delta v_{inc}$. Ce résultat est caractéristique du modèle onde plane où les effets transverses sont absents; ce dernier résultat fera l'objet d'un commentaire ci-dessous.

I.4.7 Interprétation des résultats et conclusion

Une comparaison entre les observations faites ci-dessus et les résultats obtenus et présentés dans le tableau 1, ci-dessus, nous permet de faire la synthèse suivante :

L'erreur systématique, due aux effets transverses, que l'on commet dans la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau Gaussien de largeur spectrale δv_{inc} , à l'aide d'un dispositif utilisant un interféromètre de Michelson, croît rapidement avec sa divergence angulaire θ_0 . Par ailleurs, nous relevons, à partir des résultats présentés dans les tableaux 1 et 2, que pour $0 \leq \delta v_{inc} \leq 10\text{MHz}$, la valeur de largeur spectrale mesurée δv est à peu près identique, mais complètement différente de la largeur spectrale δv_{inc} . D'un point de vue pratique cela signifie que si on a recours à un interféromètre de Michelson pour mesurer la largeur spectrale d'un faisceau laser Gaussien, il est impératif d'assurer une bonne collimation de ce dernier, autrement l'erreur systématique qui en découle serait très importante. Nous observons, par ailleurs, que l'influence d'une mauvaise collimation se réduit quand δv_{inc} devient supérieure à 1GHz. Nous pouvons expliquer simplement ce résultat en notant que la longueur de cohérence d'un faisceau laser est inversement proportionnelle à largeur de sa bande spectrale. En effet, pour $\delta v_{inc} = 10\text{GHz}$, nous obtenons une longueur de cohérence $l_c = 3\text{cm}$; pour une différence de marche $\Delta \leq l_c$, les deux faisceaux Gaussiens interférant à la sortie de l'interféromètre possèdent des paramètres géométriques quasi-identiques pour lesquels les effets transverses ne peuvent se manifester. En conséquence la réponse de l'interféromètre correspond au cas d'une onde plane où $\delta v \approx \delta v_{inc}$. Nous concluons ce paragraphe en mettant, encore une fois, l'accent sur l'importance d'une bonne collimation d'un faisceau laser Gaussien pour réduire l'erreur systématique que l'on peut commettre dans la mesure de sa largeur spectrale à l'aide d'une expérience impliquant un interféromètre de Michelson ou tout autre interféromètre à deux ondes.

I.5 Cas d'un faisceau Laguerre-Gauss symétrique d'ordre p monochromatique

Récemment, il a été démontré [I.2] que la réponse d'un interféromètre de Michelson, en termes de réflexion, éclairé par un faisceau Laguerre-Gauss symétrique d'ordre p (LG_{p0}) monochromatique, dépend non seulement de l'ordre p du faisceau incident, mais aussi du rapport $r = Z_R/(D_2 - D_1)$, où Z_R est la distance de Rayleigh, associée au faisceau incident, et D_1 et D_2 représentent les longueurs des deux bras de l'interféromètre. En effet, il a été trouvé que pour $r \gg 1$, la réponse de l'interféromètre ne dépend pas de l'ordre p du faisceau incident; la réponse de l'interféromètre dans ce cas est identique à celle obtenue quand il est

éclairé par une onde plane, dans le cas anti-résonant, où les effets transverses sont inexistantes. Cependant, pour $r < 5$, la réponse de l'interféromètre est très sensible à l'ordre p du faisceau incident et dans ce cas les effets transverses se manifestent et, par voie de conséquence, doivent être pris en compte. La question que nous nous posons est de savoir quelles sont les conséquences de ces effets transverses dans la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau laser défini par un mode transverse LG_{p0} ?

Dans une première partie, nous allons nous intéresser à la réponse de l'interféromètre de Michelson par rapport à un faisceau laser associé à un mode transverse symétrique d'ordre p . Pour cela, nous allons définir les caractéristiques fondamentales de ce type de faisceau.

L'amplitude du champ électrique, associé à un mode transverse symétrique LG_{p0} incident sur l'interféromètre de Michelson, au point, $z = z_m$, est donnée par la relation :

$$E_i = E_0 \frac{w_0}{w(z_m)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_m)} \right) \exp \left[- \left(\frac{\rho}{w(z_m)} \right)^2 \right] \exp \left\{ -i \left[kz_m - (2p+1)\Phi(z_m) + \frac{k\rho^2}{2R(z_m)} \right] \right\} \quad (I.24)$$

où w est « la largeur » du faisceau Gaussien et $L_p \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_m)} \right)$ représente le polynôme de Laguerre d'ordre p . En introduisant la variable réduite $x = 2\rho^2/w^2$, les polynômes de Laguerre vérifient les relations données dans le tableau 3, ci-dessous.

Tableau 3

P	Mode	$L_p(x)$
0	TEM_{00}	1
1	TEM_{10}	$1-x$
2	TEM_{20}	x^2-4x+2
3	TEM_{30}	$-x^3+9x^2-18x+9$

Le profil de l'intensité, caractéristique des modes transverses d'ordre p , présente un lobe central principal entouré de p anneaux concentriques, comme il est indiqué sur la figure. I.8, ci-dessous.

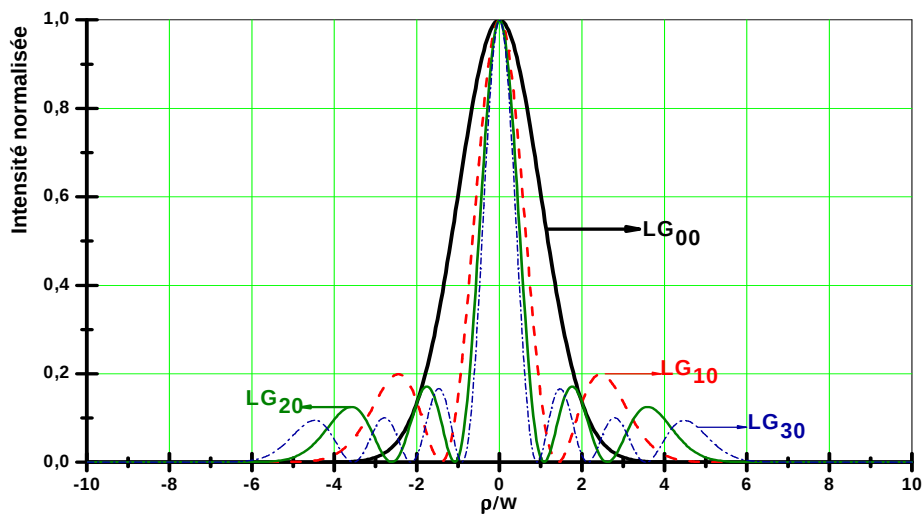


Figure. I.8: Distribution radiale de l'intensité normalisée par rapport à l'intensité $I(\rho=0)$ des quatre premiers faisceaux Laguerre-Gauss symétriques.

Commentaires : Il est important de noter que la « largeur » w du faisceau, définie dans l'équation (I.24), n'a de sens physique que pour le mode fondamental LG_{00} où le faisceau laser possède un profil d'intensité Gaussien, précisément de « largeur » w . La figure. I.8, ci-dessus, nous montre que le profil radial de l'intensité d'un faisceau LG_{p0} d'ordre supérieur s'étend en largeur à partir de son axe de propagation. Cette expansion en largeur du faisceau est en rapport avec l'ordre p correspondant. Pour tenir compte de cet élargissement en fonction de l'ordre p , nous pouvons définir le « rayon » w_p du faisceau LG_{p0} en utilisant le moment d'ordre 2 de la distribution de l'intensité du mode considéré [I.14]; la relation donnant w_p , en fonction du rayon w_G du faisceau gaussien et de l'ordre p du mode considéré, s'écrit:

$$w_p = w_G \sqrt{2p + 1} \quad (I.25)$$

L'expansion latérale d'un faisceau LG_{p0} peut être aussi décrite par une divergence angulaire θ_p , en champ lointain, supérieure à la divergence θ_0 correspondant au faisceau Gaussien associé [I.14] et dont la relation est donnée par :

$$\theta_p = \theta_0 \sqrt{2p + 1} \quad (I.26)$$

Par ailleurs, chaque mode LG_{p0} est caractérisé par un facteur de propagation M^2 du faisceau, appelé aussi facteur de qualité du faisceau, donné par la relation [I.15] :

$$M^2 = 2p + 1 \quad (I.27)$$

Maintenant que notre faisceau LG_{p0} est caractérisé par ses paramètres intrinsèques, nous allons étudier la transmission de l'interféromètre de Michelson lorsque ce dernier est éclairé par ce type de faisceau.

I.5.1 Calcul de la transmission TG_{p0} de l'interféromètre de Michelson

Le calcul de la transmission TG_{p0} de l'interféromètre de Michelson, éclairé par un faisceau par un faisceau Laguerre-Gauss symétrique d'ordre p , s'effectue de la même manière que ci-dessus ; il suffira de remplacer l'expression de l'équation (I.24) du champ incident dans l'équation (I.8) pour en déduire le champ transmis par l'interféromètre et par voie de conséquence, selon le même procédé habituel, celle de la transmission recherchée.

En posant $X_1 = \frac{2\rho^2}{w_1^2}$, $X_2 = \frac{2\rho^2}{w_2^2}$, $\Delta = 2(D_2 - D_1)$, $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ et $\Delta\Phi_R = \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$, les calculs détaillés [Annexe I.4] aboutissent au résultat donnant l'expression suivante de la transmission TG_{p0} :

$$TG_{p0} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p(X_1) L_p(X_2) \exp(-a\rho^2) \cdot \cos[k\Delta - (2p + 1)\Delta\Phi - \Delta\Phi_R] \rho d\rho \right\} \quad (I.28)$$

En posant:

$$\psi = k\Delta - (2p + 1)\Delta\Phi \text{ et } b = (\pi/\lambda)(1/R_1 - 1/R_2), \quad (I.29)$$

nous pouvons réécrire l'équation (I.28) sous la forme :

$$TG_{p0} = 1/2 + (2/w_1 w_2) [\cos(\psi) \cdot I_{1p} + \sin(\psi) \cdot I_{2p}] , \quad (I.30)$$

où I_{1p} et I_{2p} sont des intégrales dépendant de l'ordre p du faisceau considéré et dont les expressions sont données par :

$$I_{1p} = \int_0^\infty L_p(X_1) L_p(X_2) \exp(-a\rho^2) \cdot \cos(b\rho^2) \rho d\rho , \quad (I.31)$$

et

$$I_{2p} = \int_0^\infty L_p(X_1) L_p(X_2) \exp(-a\rho^2) \cdot \sin(b\rho^2) \rho d\rho . \quad (I.32)$$

L'étude de la transmission TG_{p0} en fonction de la différence de marche $\Delta=2(D_2-D_1)$ montre **[Annexe I.4]** l'existence de deux extrémums de la fonction $TG_{p0}(\Delta)$:

$$(TG_{p0})_{\max} = 1/2 + (2/w_1 w_2) [I_{1p}^2 + I_{2p}^2]^{1/2} \quad (I.33)$$

et

$$(TG_{p0})_{\min} = 1/2 - (2/w_1 w_2) [I_{1p}^2 + I_{2p}^2]^{1/2} \quad (I.34)$$

Ces extrémums nous permettent de calculer l'expression de la visibilité des franges résultant de l'interférence entre deux faisceaux TEM_{p0} à la sortie de notre interféromètre.

I.5.2 Visibilité VG_{p0} des franges d'interférence

La visibilité des franges d'interférence, dans ce cas, est définie par la relation suivante :

$$VG_{p0} = [(TG_{p0})_{\max} - (TG_{p0})_{\min}] / [(TG_{p0})_{\max} + (TG_{p0})_{\min}] \quad (I.35)$$

En tenant compte de (I.33) et (I.34), l'équation (I.35) se développe sous la forme suivante :

$$VG_{p0} = (4/w_1 w_2) [I_{1p}^2 + I_{2p}^2]^{1/2} \quad (I.36)$$

Les courbes donnant l'évolution de la visibilité VG_{p0} en fonction de la différence de marche Δ , entre les deux faisceaux interférant, et avec l'ordre p du faisceau LG_{p0} , incident sur l'interféromètre, comme paramètre d'étude, sont présentées sur la figure. I 9 ci-dessous. Cette étude a été réalisée pour la longueur d'onde $\lambda=810$ nm du faisceau incident défini par une divergence angulaire $\theta_0=0.5$ mrad.

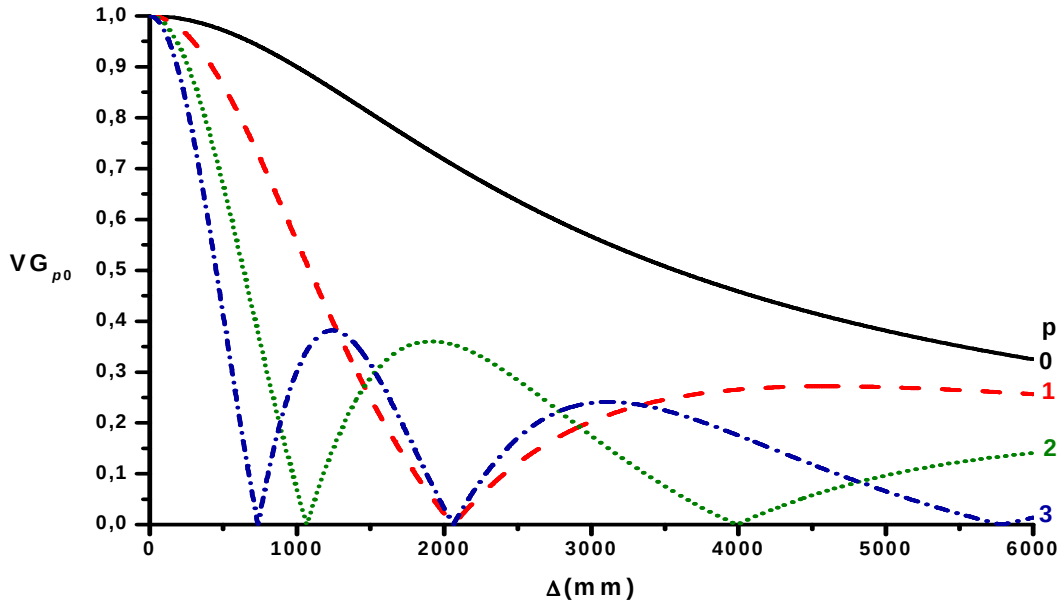


Figure. I.9: Evolution de la visibilité VG_{p0} en fonction de la différence de marche Δ ; le paramètre d'étude étant l'ordre p du faisceau LG_{p0} incident sur l'interféromètre.

Commentaires : Les courbes de la figure. I.9, ci-dessus, nous amènent aux observations suivantes:

- i. Elles montrent clairement que la visibilité des franges d'interférence varie en fonction de la différence de marche Δ et ceci bien que notre faisceau incident soit monochromatique. Il en découle que le faisceau sous étude présente une largeur spectrale apparente qui peut être évaluée selon le procédé habituel.
- ii. Ces mêmes courbes mettent en évidence l'influence importante de l'ordre p sur la visibilité des franges d'interférence et par conséquent sur la longueur de cohérence du faisceau LG_{p0} incident ; cette dernière observation est conforme à nos attentes au regard du rôle que joue la divergence θ_p du faisceau incident sur les effets transverses responsables des variations observées de la visibilité des franges d'interférence.
- iii. Nous observons que pour $p > 0$, l'évolution de la visibilité, contrairement à celle obtenue pour $p = 0$, n'est pas une fonction continue et décroissante de la variable Δ ; elle présente des zéros pour des valeurs particulières de la différence de marche Δ .

Pour cette dernière observation, nous notons la coïncidence de ces valeurs de Δ avec celles pour lesquelles la transmission TG_{p0} présente un plateau où elle perd son caractère oscillatoire pour atteindre une valeur constante égale à $1/2$. Les figures. I.9a, b, c et d, ci-dessous, illustrent cette observation. L'existence de ces plateaux de transmission, pour ces valeurs particulières de Δ , explique donc les zéros de la fonction visibilité pour ces valeurs mêmes valeurs de Δ . Il est à noter que les singularités observées, à travers l'évolution de la visibilité en fonction de la différence de marche Δ , ne constituent en aucun cas une difficulté pour la détermination de la longueur de cohérence du faisceau LG_{p0} sous étude.

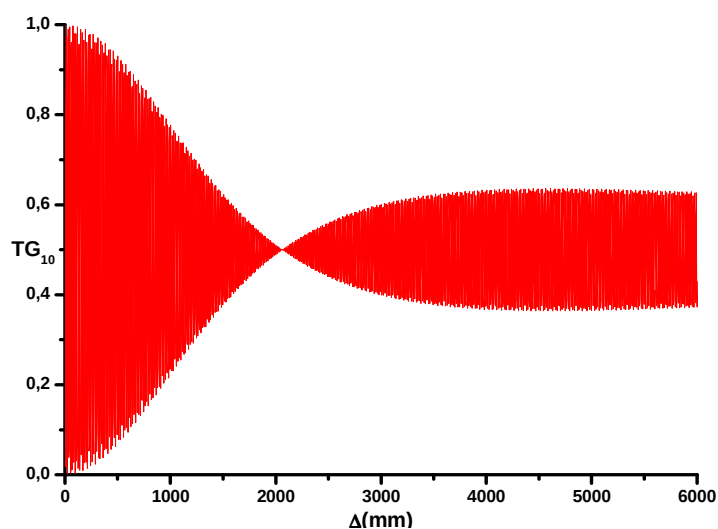


Figure. I.9a: Evolution de la transmission TG_{10} du mode LG_{10} en fonction de la différence de marche Δ .

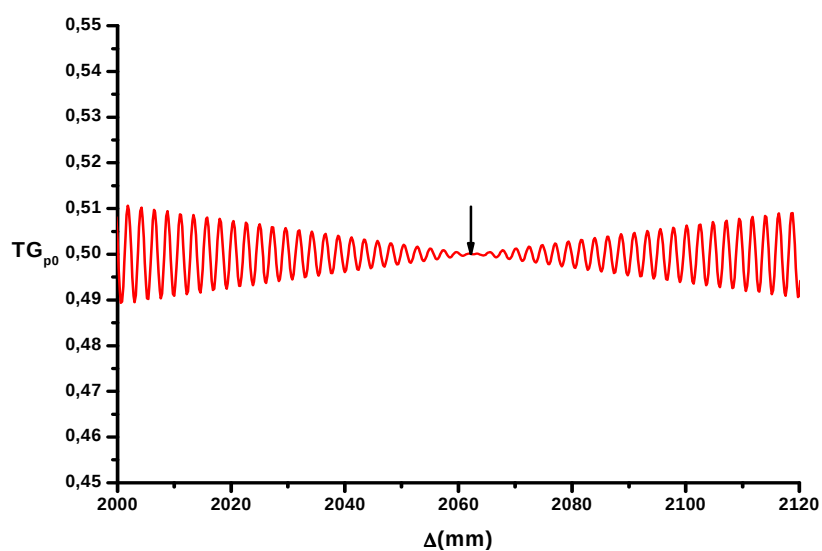


Figure. I.9b: Zoom de la figure. I.9.a ci-dessus où la transmission TG_{10} perd son caractère oscillatoire et présente un plateau (indiqué par une flèche) au voisinage de $\Delta = 2060$ mm.

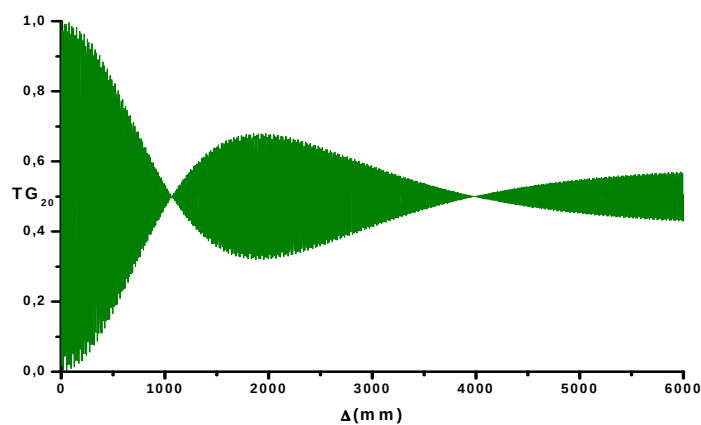


Figure. I.9c: Evolution de la transmission TG_{20} du mode LG_{20} en fonction de la différence de marche Δ .

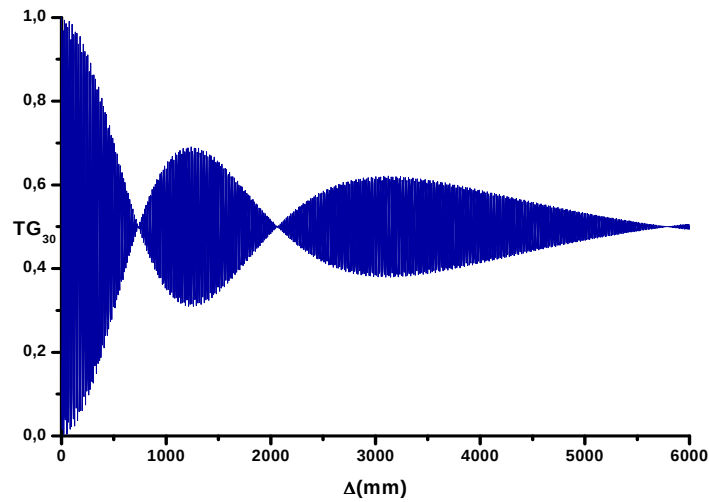


Figure. I.9d: Evolution de la transmission TG_{30} du mode LG_{30} en fonction de la différence de marche Δ .

Commentaires: Comme nous l'avons déjà souligné ci-dessus, pour les valeurs de l'ordre $p > 0$, nous observons effectivement les coïncidences de l'apparition de plateaux de la fonction TG_{p0} avec les zéros de la visibilité VG_{p0} et ce pour les mêmes valeurs de la différence de marche Δ entre les deux faisceaux interférant. Le fait remarquable est que le nombre de zéros observés coïncide avec celui des polynômes de Laguerre correspondant à l'ordre p du faisceau incident, sans pourtant expliquer ce phénomène.

Nous allons dans ce qui suit étudier l'influence de l'ordre p du faisceau Δ , incident sur l'interféromètre de Michelson, sur sa largeur spectrale apparente.

I.5.3 Etude de la largeur spectrale apparente du faisceau en fonction de l'ordre p du faisceau incident.

Cette étude a été réalisée dans les conditions suivantes : nous avons considéré arbitrairement deux valeurs de la divergence angulaire θ_0 du faisceau Gaussien, associé au faisceau LG_{p0} incident sur l'interféromètre: $\theta_{01} = 1\text{mrad}$ et $\theta_{02} = 2\text{mrad}$; pour chacune de ces deux valeurs, nous avons étudié l'évolution de la largeur spectrale apparente en fonction de l'ordre p , associé au faisceau incident, et ce pour deux valeurs distinctes de la longueur d'onde de ce faisceau : $\lambda_1 = 810\text{nm}$ et $\lambda_2 = 1060\text{nm}$. Nous présentons sur les figures. I. 10a et I.10b, ci-dessous, les courbes représentatives de cette étude.

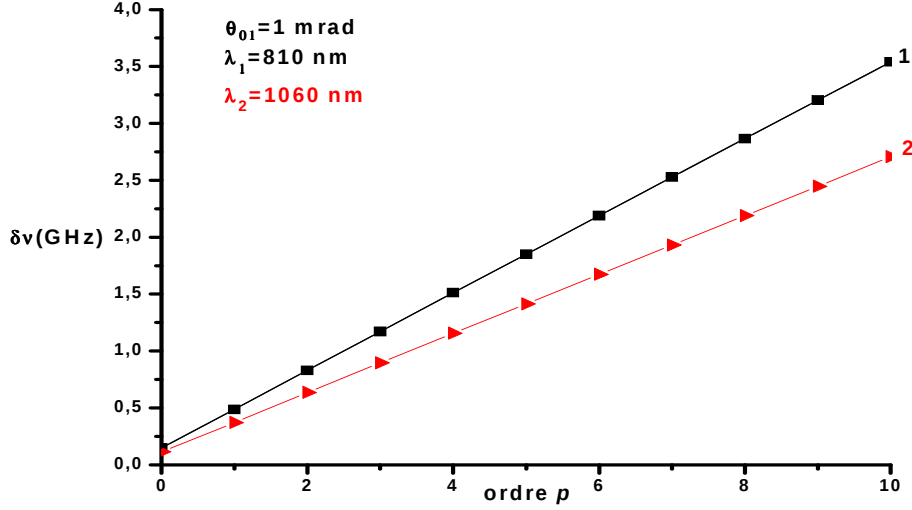


Figure. I.10a: Courbes donnant l'évolution de la largeur spectrale apparente d'un faisceau LG_{p0} en fonction de l'ordre p correspondant et ce pour la valeur de $\theta_{01} = 1$ mrad. Les courbes 1 et 2 correspondent respectivement aux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 du faisceau incident.

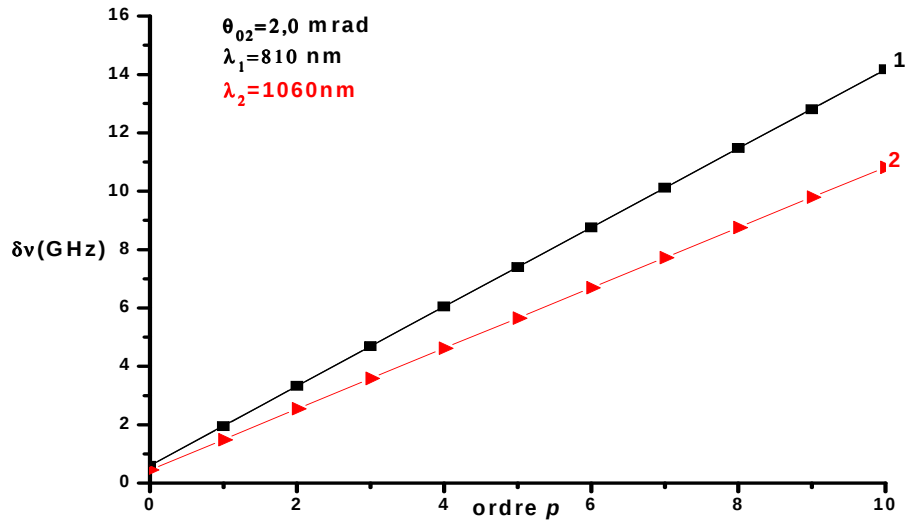


Figure. I.10b: Courbes donnant l'évolution de la largeur spectrale apparente d'un faisceau LG_{p0} en fonction de l'ordre p correspondant et ce pour la valeur de $\theta_{02} = 2$ mrad. Les courbes 1 et 2 correspondent respectivement aux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 du faisceau incident.

I.6.3 Résultats et interprétation

Les courbes 1 et 2, dans les deux cas de figures ci-dessus, montrent clairement la dépendance de la largeur spectrale apparente vis-à-vis de la valeur de la divergence angulaire θ_0 du faisceau Gaussien associé au faisceau LG_{p0} , incident sur l'interféromètre, et de la longueur d'onde de ce dernier.

La loi de variation, obtenue, de la largeur spectrale apparente en fonction de l'ordre p du faisceau incident peut être écrite sous la forme :

$$\delta\nu(\text{GHz}) = A + Bp, \quad (\text{I.37})$$

où p représente l'ordre du faisceau incident et A et B sont des constantes qui dépendent à la fois de la valeur de la divergence angulaire θ_0 du faisceau Gaussien associé au mode LG_{p0} considéré et de la longueur d'onde de ce dernier. Les résultats que nous obtenons pour les constantes A et B , à partir des courbes 1 et 2 représentées sur les figures. I.10a et I.10b, ci-dessus, montrent que pour une longueur d'onde donnée du faisceau incident, nous obtenons :

$$A_{02}/A_{01} = B_{02}/B_{01} = \theta_{02}^2/\theta_{01}^2 \quad (I.38)$$

Nous en déduisons, pour chacune des longueurs d'ondes considérées λ_1 et λ_2 , les lois de variations de la largeur spectrale apparente, mettant en relief la divergence θ_0 du faisceau Gaussien associé au faisceau LG_{p0} incident sur l'interféromètre :

$$\delta v_1(\text{GHz}) = C_1 \theta_0^2, \text{ avec } C_1 = 0.1475 + 0,3419 p, \quad (I.39)$$

$$\delta v_2(\text{GHz}) = C_2 \theta_0^2, \text{ avec } C_2 = 0,1128 + 0,2613 p, \quad (I.40)$$

où les indices 1 et 2 réfèrent aux longueurs d'ondes considérées.

A travers les équations (I.39) et (I.40), nous pouvons traduire de deux manières différentes la loi générale $\delta v(\text{GHz}) = C \theta_0^2$:

- i. Pour une valeur donnée de l'ordre p du faisceau incident, nous obtenons une loi de variation quadratique de la largeur spectrale apparente en fonction de la divergence angulaire θ_0 du faisceau Gaussien associé. Cette loi, nous l'avons déjà rencontrée dans le cas d'un faisceau Gaussien monochromatique. Pour nous assurer de la validité de cette loi tout à fait générale et traduite ci-dessus dans deux cas particuliers, correspondant aux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 , nous allons considérer le cas d'un faisceau Gaussien monochromatique ($p=0$) de longueur d'onde $\lambda_1=810$ nm. Il est aisé de vérifier que les valeurs obtenues de la largeur spectrale apparente en fonction de la divergence θ_0 coïncident avec une très bonne précision avec celles obtenues et présentées dans le tableau 1, ci-dessus, dans le cas d'un faisceau Gaussien monochromatique de longueur d'onde λ_1 .
- ii. Pour une valeur donnée de la divergence θ_0 , du faisceau Gaussien associé au mode LG_{p0} incident sur l'interféromètre, la valeur de la largeur spectrale apparente varie linéairement en fonction de l'ordre p du faisceau incident ; il ressort donc que la valeur de largeur spectrale apparente d'un faisceau LG_{p0} est proportionnelle à l'ordre p de ce dernier.

Ces deux aspects de la même loi mettent en relief l'importante influence que jouent, pour une longueur d'onde donnée d'un faisceau LG_{p0} incident sur l'interféromètre de Michelson, son ordre p ainsi que la divergence θ_0 du faisceau Gaussien associé.

L'influence de l'ordre p sur la largeur spectrale apparente suggère un cas intéressant où le faisceau incident sous analyse est constitué d'un mélange incohérent de modes transverses LG_{p0} . Nous consacrons le dernier paragraphe de ce premier chapitre à l'étude de ce cas.

Avant cela, la remarque suivante s'impose : à partir de l'équation (I.40) ci-dessus donnant la variation de la largeur spectrale apparente d'un faisceau LG_{p0} en fonction de la divergence angulaire θ_0 du faisceau Gaussien associé, il ressort que pour la valeur $\theta_0=0.5$ mrad, nous obtenons $\delta\nu = 28$ MHz pour $p = 0$ et $\delta\nu = 224$ MHz pour $p = 3$. Il ressort que chaque mode transverse, selon son ordre dans la hiérarchie, révèle une « fréquence » propre. A partir de cet exemple, nous pouvons envisager le cas d'un mélange incohérent de modes transverses.

I.6 Influence de la superposition incohérente de différents modes transverses LG_{p0} sur la longueur de cohérence.

Dans ce dernier paragraphe, nous allons étudier la réponse de l'interféromètre de Michelson dans le cas où le faisceau incident est multi modes ; c'est à dire constitué d'un mélange incohérent de modes transverse LG_{p0} que nous avons caractérisés individuellement au paragraphe précédent et dont résultat le plus important, pour la suite de notre étude, est qu'un mode transverse LG_{p0} révèle une largeur spectrale apparente distincte selon l'ordre du mode considéré. Il est aussi important de se rappeler que si le faisceau incident sur l'interféromètre de Michelson est un mode transverse unique, alors ce faisceau est spatialement cohérent ; tous les points de sa section transversale vérifient une relation de phases bien définie et ce quelque soit la dimension transversale du faisceau considéré. Sachant que la cohérence spatiale réfère à la possible interférence entre deux points du même plan transversal d'une source de lumière, il nous semble naturel de nous poser la question sur la cohérence spatiale d'un faisceau laser constitué de la superposition de plusieurs modes transverses. Dans un résonateur laser non dégénéré, les fréquences propres associées aux modes spatiaux sont différentes [I.16]. Il en résulte que si chaque mode transverse est complètement cohérent, l'ensemble est mutuellement incohérent; cela est dû au fait que les fréquences des modes sont différents.

Le mélange de modes transverses LG_{p0} est caractérisé par les coefficients C_p des puissances normalisées correspondant aux différents différentes valeurs de l'ordre p . Le faisceau multi modes résultant est caractérisé par un facteur de propagation M^2 donné par la somme pondérée sur l'ensemble des modes constituants [I.17, I.18]

$$M^2 = \sum_p C_p (2p + 1) \quad (I.41)$$

où les coefficients C_p vérifient la condition de normalisation $\sum_{p=1}^N C_p = 1$.

I.6.1 Calcul de la transmission T de l'interféromètre de Michelson

Nous assimilons, dans ce cas, le faisceau incident sur l'interféromètre de Michelson à un mélange incohérent de N modes LG_{p0} ; le champ électrique incident associé à chaque mode est noté E_{p0i} et est donné par l'équation (I.24); le champ électrique transmis à la sortie de l'interféromètre est donné par:

$$E_{p0t} = \frac{1}{2} [E_{p0i}(\rho, z_1) + E_{p0i}(\rho, z_2)] \quad (I.42)$$

La transmission T de l'interféromètre de Michelson est obtenue à partir du rapport $T=P_t/P_i$ où P_t (P_i) est la puissance transmise (incidente) :

$$T = \sum_{p=0}^N \int_0^\infty |E_{p0t}|^2 \rho d\rho / \sum_{p=0}^N \int_0^\infty |E_{p0i}|^2 \rho d\rho \quad (I.43)$$

Par définition, les coefficients normalisés C_p s'écrivent comme suit:

$$C_p = \int_0^\infty |E_{p0i}|^2 \rho d\rho / \sum_{p=0}^N \int_0^\infty |E_{p0i}|^2 \rho d\rho \quad (I.44)$$

Sachant que la transmission T_{p0} de l'interféromètre de Michelson associée à un mode LG_{p0} unique est donnée par:

$$T_{p0} = \int_0^\infty |E_{p0t}|^2 \rho d\rho / \int_0^\infty |E_{p0i}|^2 \rho d\rho , \quad (I.45)$$

Nous obtenons finalement la transmission T de l'interféromètre de Michelson éclairé par un mélange de N modes transverses:

$$T = \sum_{p=0}^N C_p T_{p0} \quad (I.46)$$

I.6.2 Calcul de la longueur de cohérence d'une superposition incohérente de modes transverses LG_{p0} .

Les calculs de la largeur spectrale apparente $\delta\nu$ ont été faits pour un mélange des quatre premiers modes LG_{p0} où on a considéré quatre combinaisons différentes des coefficients de pondération C_p . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4 ci-dessous.

Tableau 4

C_0	C_1	C_2	C_3	M^2	$\delta\nu$ (GHz)
0.40	0.25	0.20	0.15	3.20	0.624
0.30	0.27	0.23	0.20	3.66	0.788
0.25	0.25	0.25	0.25	4.00	1.504
0.20	0.30	0.25	0.25	4.10	1.067

Commentaires : Comme il était attendu, nous trouvons que la valeur de la largeur spectrale $\delta\nu$ augmente, et par voie de conséquence la valeur de la longueur de cohérence apparente diminue, avec la croissance du facteur de propagation M^2 du faisceau incident. De plus, il ressort que la largeur spectrale apparente $\delta\nu$ dépend plus de la pondération des modes constituant le mélange que de la valeur M^2 comme le montre les des deux dernières lignes du tableau 4. En effet, nous trouvons que pour des valeurs très proches de M^2 (4.0 et 4.10), il correspond deux valeurs différentes de $\delta\nu$ (1.5 GHz et 1.067 GHz).

Remarque : Dans notre étude, Les calculs numériques des intégrales I_1 , I_2 , I_{1p} et I_{2p} ont été faits à l'aide d'un programme FORTRAN 77, en double précision, basé sur la sous-routine d'intégration DQ2DAG de IMSL. Le compilateur utilisé est de la compagnie ABSOFT.

I.7 Conclusion du chapitre I

Dans ce premier chapitre, notre travail a été consacré à l'étude d'une source d'erreurs systématiques importantes que l'on peut commettre dans la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau laser en utilisant un interféromètre de Michelson. Nous avons étudié théoriquement l'influence d'une mauvaise collimation du faisceau incident sur la précision de la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau laser. Dans un travail précédent [I.13] que nous avons repris et complété, il a été démontré que la mauvaise collimation d'un faisceau Gaussien monochromatique, incident sur l'interféromètre de Michelson, se traduit par une variation de la visibilité des franges d'interférence comme si le faisceau incident était non monochromatique. En fait, nous mesurons une largeur spectrale apparente $\delta\nu$, bien que la largeur spectrale du faisceau incident est nulle ($\delta\nu_{\text{inc}}=0$), qui croît de manière quadratique avec la divergence angulaire du faisceau incident ($\delta\nu = C\theta_0^2$). Par ailleurs, nous avons montré que nous rencontrons la même source d'erreurs systématiques dans la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau Gaussien non monochromatique ($\delta\nu_{\text{inc}} \neq 0$) incident sur l'interféromètre de Michelson. Dans ce cas, nous avons trouvé que les effets transverses, responsables des mesures erronées de la longueur de cohérence, se manifestent quand $\delta\nu_{\text{inc}}$ est inférieure à environ 1 GHz. Au delà de cette limite, la longueur de cohérence du faisceau incident $l_c = c_0/\delta\nu_{\text{inc}}$ est suffisamment courte, en comparaison à la longueur de Rayleigh associée à ce faisceau, de telle sorte que pour une différence de marche de l'ordre ou inférieure à l_c , les deux faisceaux interférant à la sortie de l'interféromètre sont quasi identiques rendant ainsi les effets transverses inopérants. Dans cette situation, la réponse de l'interféromètre de Michelson correspond au cas d'une onde plane en adéquation avec le résultat que nous obtenons ($\delta\nu \approx \delta\nu_{\text{inc}}$).

Par ailleurs, nous avons étudié l'influence de l'ordre p d'un mode transverse LG_{p0} monochromatique, incident sur l'interféromètre de Michelson, sur la mesure de sa longueur de cohérence. Dans ce cas aussi, nous mettons en évidence l'effet d'une mauvaise collimation, à travers la divergence angulaire dépendant de l'ordre p du mode considéré, dans la mesure de cette longueur de cohérence ; une loi d'échelle, donnant la variation de cette dernière en fonction de la divergence angulaire θ_0 du faisceau Gaussien associé au mode considéré, a été obtenue ($\delta\nu = C_p\theta_0^2$), où la constante de proportionnalité C_p dépend linéairement de l'ordre p du faisceau incident.

Nous avons consacré la dernière partie de ce premier chapitre à l'étude de l'influence de la pondération de différents modes transverses du faisceau incident sur la précision de la mesure de sa longueur de cohérence. Pour cela, nous avons considéré le cas où le faisceau incident est défini par un mélange incohérent, quasi monochromatique, de modes transverses LG_{p0} . Nous avons trouvé que la largeur spectrale mesurée ou apparente $\delta\nu$ croît avec le facteur de propagation M^2 du faisceau incident ; plus précisément la largeur spectrale apparente dépend plus du contenu du mélange des modes transverses que du facteur de qualité du faisceau M^2 .

Les résultats obtenus sont très importants sur le plan pratique ; ils mettent en évidence les soins nécessaires à prendre pour une meilleure collimation du faisceau incident, autrement les mesures de la longueur de cohérence d'un faisceau laser, ou de toute autre source de lumière en général, seraient entachées d'erreurs qui sont loin d'être négligeables. Nous citons à titre d'exemple les conséquences d'une mauvaise collimation, par effets transverses interposés, sur la spectroscopie par transformée de Fourier **[I.19]** à l'aide d'un interféromètre à deux ondes. Dans le cas où la lumière à caractériser, par des mesures de la longueur de cohérence, est initialement injectée dans une fibre optique le choix de cette dernière, une fibre mono mode ou multi modes, revêt une importance particulière. En effet l'injection d'une lumière dans une fibre optique multi modes conduit la projection de cette lumière sur la base du système de modes transverses propre à cette fibre. En conséquence le faisceau à la sortie de la fibre, qui constituera le faisceau incident sur l'interféromètre de Michelson, résulte nécessairement de la superposition d'un nombre plus ou moins élevés de modes spatiaux. Dans ce cas la valeur du facteur de propagation M^2 pourrait être si élevée que les effets associés à une mauvaise collimation pourraient se manifester, ce qui conduirait à des mesures erronées de la longueur de cohérence.

Il est à noter que cette première partie de notre travail a fait l'objet d'une publication **[I.20]**.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

- [I.1]** K. Aït-Ameur, J.M0d. Opt. **43**, 99 (1996).
- [I.2]** K. Aït-Ameur, Appl. Opt. **36**, 1860 (1997).
- [I.3]** K. Battou, K. Aït-Ameur, Opt.Communic. **183**, 189 (2000).
- [I.4]** M. Born, E. Wolf, Principle of Optics, Pergamon, Oxford, 1980, p.316.
- [I.5]** M.L. Juntilla, B. Stahlberg, Appl.Opt. **29**, 3510 (1990).
- [I.6]** F.V. Kowalsky, R.T. Hawkins, A. L. Schalow, J.Opt.Soc.Am. **66**, 965 (1976).
- [I.7]** F.V. Kowalsky, R.E. Teets, W. Demtröder, A.L. Schalow, J.Opt.Soc.Am. **68**, 1611 (1978).
- [I.8]** J.L. Hall, S.A. Lee, Appl.Phys.Lett. **29**, 367 (1976).
- [I.9]** P.J. Rodrego, M. Lim, C. Saloma, Appl.Opt. **40**, 506 (2001).
- [I.10]** S. Kawata, I. Hikima, Y. Ichihara, S. Watanabe, Appl.Opt. **31**, 387 (1992).
- [I.11]** T. Kajava, A. Hakola, H. Elfström, J. Simonen, P. Pääkkönen, J. Turunen, Opt.Communic. **268**, 289 (2006).
- [I.12]** J. Hald, L. Nielsen, P. Varming, J.E. Pedersen, Opt.Express. **19**, 2052 (2011).
- [I.13]** K. Aït-Ameur, F. Sanchez Opt. Commun.**233**, 39 (2004).
- [I.14]** R. Menzel, Photonics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001 (Chap.6).
- [I.15]** A. E. Siegman, Proc. SPIE. **1224**, 2 (1990).
- [I.16]** H. Kogelnik. T. Li, Appl. Opt. **5**, 1150 (1966).
- [I.17]** A. Cutolo. L. Zeni, Opt. Commun. **89**, 223 (1992).
- [I.18]** A.E. Siegman, S.W. Townsend, IEEE J. Quatum Electron. **29**, 1212 (1993).
- [I.19]** E. Sarkissian, K.W. Bowman, Appl.Opt. **42**, 1122 (2003).
- [I.20]** A. Harfouche, K. Aït-Ameur, Opt.Communic. **284**, 5348 (2011).

CHAPITRE II :
MISE EN FORME INTRA-CAVITE D'UN FAISCEAU LASER PAR METHODE
INTERFEROMETRIQUE.

II.1 Introduction

Pour l'intérêt qu'ils présentent sur le plan pratique et dans divers domaines d'applications, les faisceaux lasers, de plus en plus grandes puissance et intensité, constituent depuis longtemps un but à atteindre. Durant les dernières décades, cet objectif a conduit plusieurs équipes de recherche, dans le domaine des technologies des lasers, à focaliser leurs efforts sur la réalisation de résonateurs capables de faire osciller un mode fondamental de forme Gaussienne et à diffraction limitée ; c'est-à-dire de facteur de propagation du faisceau $M^2=1$. Ceci est parfaitement compréhensible, sachant que parmi les différents modes transverses possibles, seul un faisceau parfaitement Gaussien permet l'obtention d'une plus grande brillance pour un niveau de puissance donné.

Cependant, de nos jours l'attention est focalisée sur l'exploration de nouvelles voies qui conduisent à forcer une cavité laser à osciller sur un mode transverse d'ordre supérieur mais unique. Les avantages pratiques qui en découlent sont très importants. Nous en citons quelques exemples : l'amélioration de la puissance extraite [II.1, II.2], à travers l'augmentation du volume du mode fondamental, en forçant une cavité laser à osciller sur un mode Laguerre-Gauss LG_{pl} (d'ordres radial et azimutal respectivement p et l) ; l'obtention d'un petit volume focal [II.3] quand un faisceau Laguerre-Gauss LG_{p0} symétrique est mis en forme par un élément optique diffractif (EOD) adéquat puis focalisé. Cette dernière propriété de super-résolution trouve son intérêt dans plusieurs domaines d'applications (fluorescence microscopique non linéaire, « prototypage » laser 3-D, pinces optiques, lithographie...) qui sont guidés par l'obtention de taches focales de volumes correspondants de plus en plus réduits conduisant à une meilleure résolution spatiale.

Le moyen habituel utilisé pour forcer le mode fondamental d'une cavité laser à être un mode transverse unique d'ordre supérieur est de faire appel au phénomène de diffraction. En effet, l'introduction à l'intérieur de la cavité d'un masque de phase [II.1, II.2, II.4] ou d'un masque d'amplitude [II.5-II.8] peut imposer un ou plusieurs zéros d'intensité du mode désiré de telle manière que le mode TEM_{00} fondamental d'un laser (celui qui atteint le premier le seuil d'oscillation) soit un mode LG_{p0} .

Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes intéressés à forcer le mode fondamental d'une cavité laser sous forme d'un mode LG_{p0} , autrement que par l'utilisation des effets de la diffraction; nous utilisons dans ce but les effets transverses, caractéristiques de ces modes, que l'on observe à l'aide d'un interféromètre de Michelson. Par effets transverses, nous entendons que l'interféromètre de Michelson utilisé comme un miroir (miroir de Michelson) est caractérisé par une réflectivité qui dépend de l'ordre p du faisceau incident. En effet, nous montrerons que ces effets transverses sont étroitement liés à la différence (D_2-D_1) macroscopique, entre les longueurs des deux bras de l'interféromètre, comparée à la distance de Rayleigh du faisceau incident. Nous montrerons, en outre, qu'une variation microscopique de la différence de marche (D_2-D_1) à l'aide d'un dispositif piézo-électrique (PZT), supportant l'un des deux miroirs de l'interféromètre, permet le contrôle de l'ordre p du mode oscillant. Cette manière de procéder est radicalement différente de la méthode diffractive habituelle, pour le contrôle de l'ordre d'un mode transverse, qui pour forcer un laser à osciller sur un

mode d'ordre p différent exige au moins le changement du masque de phase ou d'amplitude et de réaligner ensuite la cavité laser. La méthode que nous proposons offre un double avantage sur les plans pratique et économique.

Par ailleurs, quand la différence de marche macroscopique (D_2-D_1) est proche de zéro, alors les propriétés transverses du miroir de Michelson disparaissent, ceci transforme notre montage en une cavité de type Vernier-Michelson qui permet seulement le contrôle de la fréquence du mode fondamental Gaussien en ajustant finement la différence de marche microscopique (D_2-D_1) [II.9]. Dans cet esprit, l'idée de coupler une longue cavité laser (cavité principale), caractérisée par un spectre fréquentiel étendu, à une cavité plus courte (cavité secondaire), caractérisée par un plus grand intervalle spectral libre (ISL), dans le but d'obtenir un mode longitudinal unique, est ancienne et des expériences montées dans ce but ont été décrites dans les années soixante [II.10, II.11] ; les différents types de montages utilisés à cet effet sont regroupées dans la référence [II.12].

Pour la modélisation d'une cavité laser formée par un système de trois miroirs, il existe un moyen qui consiste à réduire ce système à une cavité classique à deux miroirs. Pour ce faire, nous disposons de trois degrés d'approximation pour caractériser le miroir équivalent (Miroir de Michelson ou MM) en termes de réflexion par rapport au faisceau incident.

Approximation.1. Dans ce cas, le MM est caractérisé par sa réflectivité, calculée à partir d'un rapport d'intensités et ce dans l'hypothèse d'une onde plane. Cette première approximation fera l'objet du paragraphe II.2 ci-dessous.

Approximation.2. A ce niveau, le MM est caractérisé par sa réflectivité, calculée à partir d'un rapport de puissances en tenant compte de la distribution spatiale de l'intensité du faisceau LG_{p0} incident. Dans ce cas, nous pouvons considérer la réflectivité effective comme une valeur moyenne, dans l'étendue spatiale des faisceaux incident et réfléchi, de la réflectivité du MM. Nous réservons le traitement de cette seconde approximation au paragraphe II.3 ci-dessous.

Approximation.3. Dans ce dernier cas, il sera tenu compte des variations transverses de la réflexion du MM lorsque ce dernier est éclairé par un faisceau LG_{p0} . Le paragraphe II.4, ci-dessous, sera consacré à cette dernière approche où nous déterminerons le mode fondamental d'une cavité à trois miroirs en tenant compte, de manière indirecte de la dépendance de la réponse du MM, en termes de réflexion, de la nature du profil radial du faisceau incident.

Avant de développer les différents points inscrits ci-dessus, nous tenons à faire remarquer que la sélection d'un mode transverse particulier sur la base des effets transverses inhérents à un miroir interférométrique n'a pas fait l'objet d'un travail antérieur. Nous sommes partis sur la base d'importantes observations expérimentales publiées par P.W. Smith [II.10] en 1965 et qui n'ont été suivies, à nos jours, d'aucune explication. L'expérience faite par P.W. Smith a été conduite à l'aide d'un résonateur Fox-Smith, qui ressemble à la cavité de la figure. II.1 ci-dessous, à la différence d'une rotation de 90° de la lame séparatrice, fréquemment utilisé pour la sélection d'un mode longitudinal unique. Dans son article P.W. Smith rapporte : « quand on varie lentement la longueur D_2+D_1 , le faisceau laser à la sortie de la cavité change d'un mode

transverse fondamental à un autre mode transverse d'ordre supérieur pour revenir dans un ordre décroissant au mode transverse fondamental correspondant à une nouvelle résonance longitudinale ». Bien que le miroir interférométrique utilisé, dans les travaux cités en [II.10], s'apparente à un dispositif à interférences multiples, contrairement au miroir de Michelson utilisé dans le cadre de notre étude, nous sommes convaincus que notre travail offre une démonstration sur la puissance des effets transverses, inhérents à des dispositifs interférométriques, pour le contrôle de l'ordre du mode transverse oscillant dans un laser.

II.2 Approximation.1.

Dans le cadre de cette première approximation, nous allons caractériser le miroir de Michelson par son coefficient de réflexion équivalent, défini par un rapport d'intensités, dans l'hypothèse d'une onde plane incidente sur le MM. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas où ce miroir constitue une composante d'une cavité de type Vernier-Michelson, utilisée fréquemment dans la sélection des modes longitudinaux. Nous présentons sur la figure. II.1, ci-dessous, le schéma de ce type de cavité.

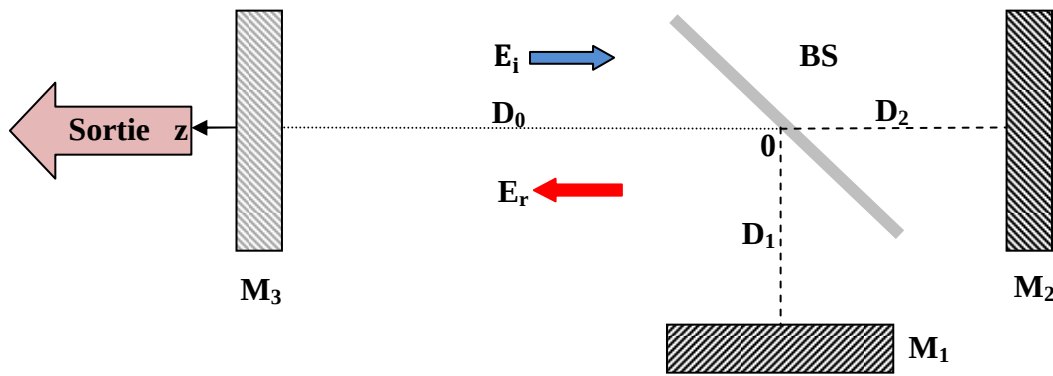


Figure. II.1: Schéma synoptique d'une cavité Vernier-Michelson. La lame séparatrice (BS) permet l'obtention de deux cavités résonnantes de longueur optique respective D_0+D_1 et D_0+D_2 qui partagent en commun le segment séparant la lame séparatrice (BS) et le miroir de sortie M_3 .

L'expression du champ électrique $E_i(z)$, associé à l'onde plane incidente sur le miroir de Michelson, est donnée par :

$$E_i(z) = E_0 \exp(-ikz), \quad (\text{II.1})$$

où z est la position longitudinale dont l'origine est localisée au niveau de la lame séparatrice (BS). Dans l'hypothèse où la réflectivité des miroirs M_1 et M_2 est prise égale à l'unité et où la lame séparatrice divise l'onde incidente en des proportions K et $(1-K)$ en intensité, le champ électrique $E_r(z)$, associé à l'onde réfléchie par le miroir de Michelson, a pour expression (Annexe. I.0) :

$$E_r(0) = KE_i(2D_1) - (1 - K)E_i(2D_2) \quad (\text{II.2})$$

Le coefficient de réflexion équivalent du miroir de Michelson (MM) étant défini en termes de rapport d'intensités (intensité réfléchie / intensité incidente), son expression est donnée par :

$$R_{eq} = |E_r|^2 / |E_i|^2 \quad (II.3)$$

En tenant compte des équations (II.1) et (II.2), nous obtenons pour $K=1/2$:

$$R_{eq} = [1 - \cos(\varphi)]/2, \quad (II.4)$$

avec $\varphi = 4\pi\Delta'/\lambda$, où $\Delta' = D_2 - D_1$ est la différence entre les longueurs des bras du miroir de Michelson et λ la longueur d'onde du faisceau incident.

Remarque : nous notons $\Delta' = D_2 - D_1$ pour la distinguer de $\Delta = 2(D_2 - D_1)$ du chapitre I.

A titre de référence, il est utile de rappeler que la réflectivité du MM est égale à zéro dans le cas résonant ($\Delta' = n\lambda/2$) et vaut l'unité dans le cas anti-résonant ($\Delta' = (2n + 1)\lambda/4$).

La description du miroir de Michelson en termes d'ondes planes constitue une alternative intéressante dans la sélection des modes longitudinaux de la cavité. En effet, dans le cas d'une cavité de type Vernier-Michelson, nous avons, en fait, à faire à deux cavités de longueur optique respective $D_0 + D_1$ et $D_0 + D_2$, chacune définie par son propre spectre fréquentiel de modes longitudinaux et où chaque spectre est caractérisé par son propre intervalle spectral libre (ISL) : $\Delta\nu_j = c_0/2(D_0 + D_j)$, avec $j = 1, 2$. Les deux spectres, chacun propre à une cavité, se recombinent à la sortie du Miroir de Michelson et le produit de cette recombinaison résulte en un nouveau spectre modulé en fréquence, suite au déphasage φ entre les deux faisceaux interférant. L'intervalle spectral libre résultant est donné par [II.9]:

$$\Delta\nu = c_0/2|D_1 - D_2| \quad (II.5)$$

Il ressort, à travers cette brève étude, que la modulation de l'intervalle spectral libre peut être obtenue en agissant uniquement sur la différence entre les longueurs des bras de l'interféromètre ; ceci nous permet aussi bien le choix de la fréquence des modes longitudinaux que le nombre de ces derniers. Il faut noter que la description du miroir de Michelson en termes d'ondes planes est satisfaisante quand la différence macroscopique entre les longueurs de ses bras est proche de zéro. Dans ce cas nous pouvons forcer la sélection d'un mode longitudinal unique [II.9-II.12].

Il est important aussi de noter que dans les études portant sur la sélection des modes longitudinaux d'une cavité utilisant un interféromètre de Michelson, le choix de la différence des longueurs des bras de l'interféromètre est très limité pour satisfaire l'approximation ondes planes. Que se passe-t-il dans le cas où pour chaque mode longitudinal, il correspond plusieurs modes transverses caractérisés par des profils d'intensité différents? La réponse à cette interrogation peut être résumée comme suit : Plus la différence (D_2-D_1), entre les longueurs des bras de l'interféromètre, devient importante, plus les caractéristiques géométriques des deux faisceaux, interférant à la sortie de l'interféromètre, deviennent différentes et les effets induits ne peuvent être décrits à l'aide de cette première approximation. Dans le paragraphe suivant, nous allons nous intéresser à caractériser le miroir de Michelson, par son coefficient de réflexion équivalent, lorsqu'il est éclairé par un mode transverse d'ordre p .

II.3 Approximation.2

Nous voulons déterminer le mode fondamental TEM_{00} (le mode ayant subi le minimum de pertes) d'une cavité du type de celle qui est représentée par la figure. II.2, ci-dessous, en utilisant la méthode de décomposition du champ résonnant dans la base orthonormée complète des fonctions de Laguerre-Gauss. Nous rappelons que cette méthode a déjà été utilisée dans le cas d'une cavité à deux miroirs, dans deux types de configuration : une première configuration où un seul miroir est diaphragmé et une seconde configuration où les deux miroirs sont diaphragmés [II.13]. Cette méthode peut être adaptée au cas de la figure. II.2 en réduisant cette cavité à trois miroirs à celle à deux miroirs, présentée par la figure. II.3, ci-dessous.

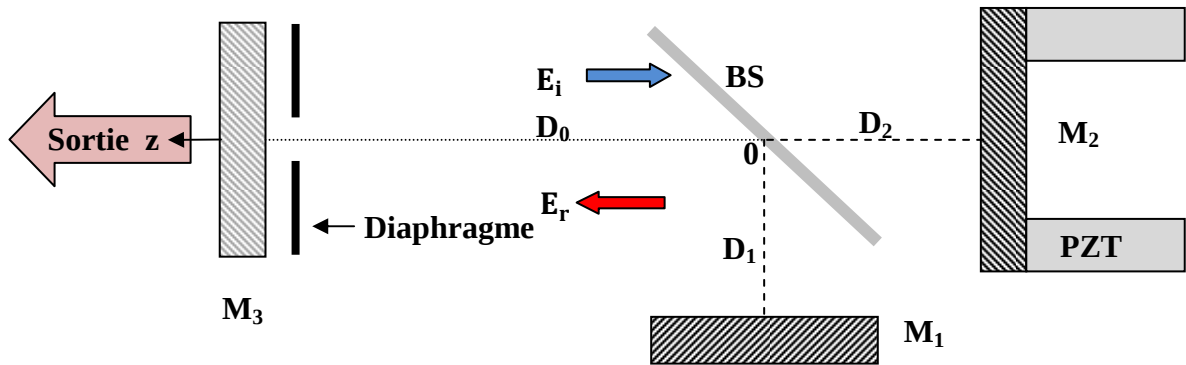


Figure. II.2: Schéma synoptique d'une cavité laser contenant un miroir de Michelson.

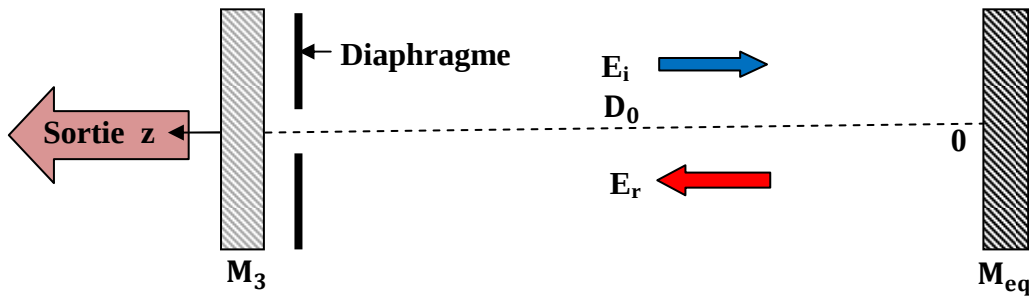


Figure. II.3 : Schéma synoptique d'une cavité laser « à deux miroirs » où le miroir de Michelson est remplacé par « un miroir plan » équivalent (M_{eq}).

Le résonateur laser, associé à la cavité de la figure. II.3, ci-dessus, est constitué de deux éléments essentiels qui président à l'oscillation des modes transverses LG_{p0} :

- i. Le miroir équivalent M_{eq} est caractérisé par un coefficient de réflexion qui dépend de l'ordre p du mode considéré et qui contrôle l'amplitude de chaque fonction Laguerre-Gauss, correspondant à ce mode, de la base utilisée pour la décomposition du champ résonnant.
- ii. Le diaphragme est caractérisé par un paramètre de troncature du faisceau qui sera défini ci-dessous. Dans le but de bien comprendre les effets du diaphragme sur la nature transverse du mode fondamental TEM_{00} dans le cas d'une cavité à trois miroirs,

nous devons aussi savoir si le miroir de Michelson de la figure. II.4, ci-dessous, a une quelconque influence sur la hiérarchie de la divergence angulaire des modes LG_{p0} qui forment la base de décomposition du champ résonnant. Ce point est très important dans la mesure où à la troncature du diaphragme, il correspond des pertes qui augmentent avec la divergence d'un mode donné.

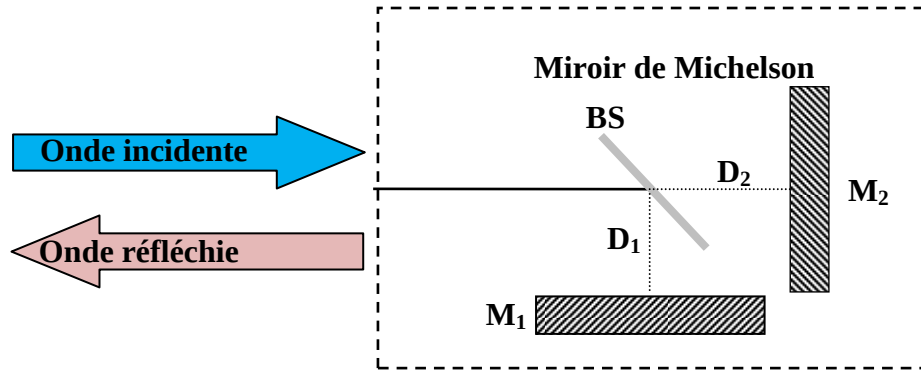


Figure. II.4: Schéma du miroir de Michelson. Les facteurs de réflexion des miroirs M_1 et M_2 sont égaux à l'unité et la lame séparatrice divise l'intensité de l'onde incidente en deux proportions K et $(1-K)$.

Nous pouvons résumer la problématique de notre étude comme suit : Il existe deux mécanismes de sélection de modes transverses dans le cas d'une cavité à trois miroirs (figure. II.2). Le premier est le coefficient de réflexion du miroir de Michelson qui peut être maximum pour une valeur donnée de l'ordre p . Le second est associé aux pertes dues à la troncature du diaphragme qui est fortement liée à la hiérarchie de la divergence associée aux modes LG_{p0} , laquelle peut favoriser l'oscillation d'un autre mode. Il est par conséquent important de savoir si ces deux mécanismes agissent dans le même sens ou alors ils sont en compétition.

Dans ce qui suit, nous allons examiner chacun de ces deux mécanismes dans la détermination du mode fondamental de la cavité présentée sur la figure. II.3 où le miroir M_3 sera remplacé par un miroir concave de rayon R_c .

II.3.1 Le coefficient de réflexion équivalent R_p du miroir de Michelson

Nous allons caractériser le coefficient de réflexion équivalent du miroir de Michelson, en tenant compte de la distribution de l'intensité du faisceau LG_{p0} incident, par un rapport de puissances. L'onde incidente sur le miroir de Michelson est un faisceau Laguerre-Gauss symétrique (LG_{p0} d'ordre radial p et azimutal $l=0$) et dont le champ électrique associé est donné par :

$$E_i(\rho, z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left[- \left(\frac{\rho}{W(z)} \right)^2 \right] \exp \left\{ -i \left[kz - (2p + 1)\Phi(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)} \right] \right\}, \quad (\text{II.6})$$

où toutes les grandeurs intervenant dans cette dernière équation ont déjà été définies dans le paragraphe I.5 du chapitre I.

Avant de procéder au calcul du coefficient de réflexion équivalent du miroir de Michelson, nous allons donner un aperçu sur l'aspect caractéristique du front d'onde d'un faisceau LG_{p0} pour comprendre quelques propriétés transverses du miroir de Michelson. Le front d'onde correspondant à l'ordre le plus bas (LG_{00}) est uniforme et de signe constant. Nous notons à partir de l'équation (II.6) que le front d'onde n'est plus uniforme pour $p > 1$; plus p augmente, le polynôme de Laguerre L_p change p fois de signe et le front d'onde d'un faisceau Laguerre-Gauss symétrique (LG_{p0}) apparaît sous forme d'anneaux concentriques alternativement en opposition de phase.

Une autre remarque importante, que nous avons déjà relevée au paragraphe I.5, est que la « largeur » w du faisceau de l'équation (II.6) n'a de sens physique que pour le mode fondamental LG_{00} pour lequel le faisceau incident est défini par un profil Gaussien de son intensité. L'expansion latérale d'un faisceau LG_{p0} d'ordre supérieur se traduit par un profil d'intensité qui s'étend en largeur à partir de l'axe de propagation; cette expansion est en rapport avec l'ordre p . En conséquence, notre faisceau LG_{p0} sera défini par une « largeur » $w_p = w_G \sqrt{2p + 1}$ et une divergence angulaire, en champ lointain, $\theta_p = \theta_0 \sqrt{2p + 1}$ (voir chapitre I.), où θ_0 et w_G représentent respectivement la divergence angulaire et la « largeur » du beam-waist du faisceau Gaussien associé.

Pour le calcul du coefficient de réflexion du miroir de Michelson, nous partons de l'hypothèse où le faisceau incident est défini par son point de pincement (beam-waist) localisé à l'entrée de l'interféromètre, à la position de la lame séparatrice, qui constitue l'origine de la coordonnée longitudinale ($z=0$). En tenant compte de la dépendance de la coordonnée radiale ρ du champ incident, l'expression du champ réfléchi par le miroir de Michelson est donnée par :

$$E_r(\rho) = KE_i(\rho, 2D_1) - (1 - K)E_i(\rho, 2D_2), \quad (\text{II.7})$$

Au regard de la dépendance de l'amplitude du champ incident de la coordonnée radiale, la caractérisation du miroir de Michelson par un facteur de réflexion défini en termes de rapport d'amplitudes des champs (champ réfléchi et champ incident) est mathématiquement impossible pour $p > 1$ en raison des zéros des polynômes de Laguerre. Pour cela, nous sommes amenés à caractériser le miroir de Michelson par un coefficient de réflexion équivalent R_p (réflectivité), défini en termes de rapport de puissances : $R_p = P_r/P_i$ où $P_r(P_i)$ est la puissance du faisceau réfléchi (incident). La puissance contenue dans un faisceau, caractérisé par une distribution de champ $E(\rho)$, est donnée par l'équation (I.9). Après calculs (**Annexe. II.1**), nous obtenons l'expression donnant le coefficient de réflexion (réflectivité) du miroir de Michelson éclairé par un faisceau Laguerre-Gauss symétrique d'ordre p :

$$R_p = A - B \int_0^\infty F(\rho) \rho d\rho, \quad (\text{II.8})$$

où

$$A = K^2 + (1 - K)^2, \quad (\text{II.9})$$

$$B = 8K(1 - K)/w_1 w_2, \text{ avec } w_i = w(2D_i), \quad (\text{II .10})$$

$$F(\rho) = L_p(2\rho^2/w_1^2)L_p(2\rho^2/w_2^2)\exp[-(\rho^2/w_1^2 + \rho^2/w_2^2)]\cos(\varphi), \quad (\text{II .11})$$

où

$$\varphi = 2k\Delta - (2p + 1)[\Phi(2D_2) - \Phi(2D_1)] + (k\rho^2/2)[1/R_2 - 1/R_1], \quad (\text{II .12})$$

avec

$$R_i = R(2D_i) \quad (\text{II .13})$$

La variation de R_p en fonction du rapport sans dimension Z_R/Δ' , où $Z_R = \pi w_0^2/\lambda$ est la distance de Rayleigh du faisceau Gaussien associé et $\Delta' = (D_2 - D_1)$, est montrée sur la figure. II.5, ci-dessous. Dans cette étude, la valeur de la distance de Rayleigh a été maintenue fixe en imposant la valeur du point de pincement du faisceau Gaussien, associé au faisceau LG_{p0} , à $W_0 = 160\mu\text{m}$; nous avons fait varier la valeur de Δ' , la différence entre les bras du miroir de Michelson, en maintenant D_1 fixe et en variant la valeur de D_2 . Enfin nous avons imposé la valeur du déphasage $2k\Delta'$ à π , correspondant à la valeur de référence pour laquelle le coefficient de réflexion du miroir de Michelson est égal à l'unité dans le cas d'une onde plane.

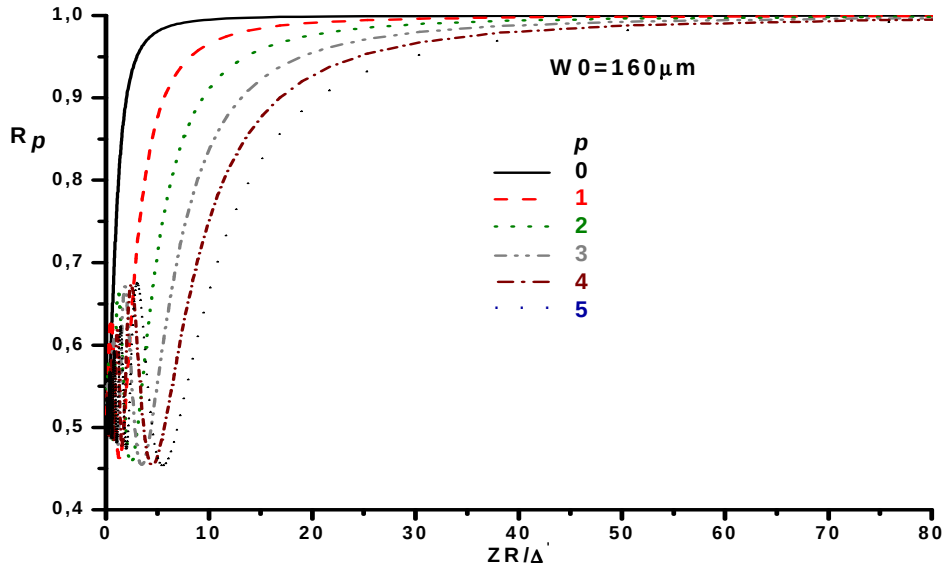


Figure. II.5: Variations de la réflectivité R_p du miroir de Michelson en fonction du rapport Z_R/Δ' , où $\Delta' = D_2 - D_1$ avec $D_1 = 30\text{mm}$ et D_2 variable. Le faisceau Laguerre-Gauss symétrique d'ordre p est caractérisé par le rayon de son point de pincement $W_0 = 160\mu\text{m}$ et par sa longueur d'onde $\lambda = 1.06\mu\text{m}$.

L'analyse des courbes donnant la réponse, en termes de réflectivité, du miroir de Michelson, éclairé par un faisceau LG_{p0} , amène aux observations suivantes :

- i. Pour $Z_R \gg \Delta'$, R_p tend vers l'unité qui correspond à la valeur de référence du coefficient de réflexion équivalent pour un miroir de Michelson dans le cas anti-résonant. Cela veut dire que la description du miroir de Michelson dans l'approximation onde plane reste valable pour un faisceau LG_{p0} ; en d'autres termes

dès lors que la valeur de la distance de Rayleigh est très élevée comparativement à la valeur de Δ' , les effets transverses sont inexistant.

- ii. Pour des valeurs intermédiaires du rapport Z_R/Δ' , une hiérarchie de la réflectivité est établie : $R_0 > R_1 > R_2 > \dots$ de sorte que le miroir interférométrique contribue à la sélection du mode résonnant et qui ne pourrait être dans ce cas que le mode LG_{00} .
- iii. Quand le rapport Z_R/Δ' est inférieur à 5, nous observons une perturbation de la hiérarchie de la réflectivité du miroir de Michelson ; c'est la signature des effets transverses. Par ailleurs, nous observons aussi que la réflectivité du miroir de Michelson présente p minimums et p maximums dont l'origine sera discutée par la suite.

Pour mieux mettre en évidence la perturbation observée dans la hiérarchie de la réflectivité du miroir de Michelson, voir la figure. II.5 ci-dessus, nous présentons sur la figure II.6, ci-dessous, les variations du coefficient de réflexion équivalent R_p en fonction du rapport Δ'/Z_R qui est l'inverse de celui considéré ci-dessus.

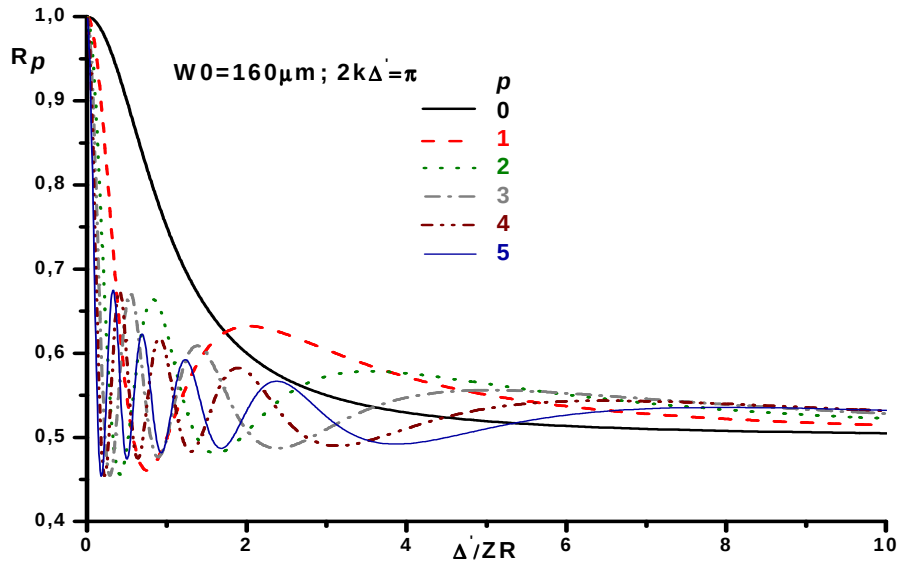


Figure. II.6: Variations de la réflectivité R_p du miroir de Michelson en fonction du rapport Δ'/Z_R , où $\Delta' = D_2 - D_1$ avec $D_1 = 30\text{mm}$ et D_2 variable. Le faisceau Laguerre-Gauss symétrique d'ordre p est caractérisé par le rayon de son point de pincement $W_0 = 160\mu\text{m}$ et par sa longueur d'onde $\lambda = 1.06\mu\text{m}$.

La figure. II.6 met bien en évidence la perturbation de la réflectivité du miroir de Michelson en fonction de l'ordre p du faisceau incident. En effet, nous observons pour $\frac{\Delta'}{Z_R} \geq 2$, la discrimination des modes n'obéit plus à la hiérarchie où $R_0 > R_1 > R_2 > \dots$. Il ressort donc que ce pouvoir discriminatoire du miroir de Michelson en termes de réflectivité selon l'ordre p du faisceau incident pourrait être exploité judicieusement pour forcer une cavité laser à osciller sur un mode LG_{p0} d'ordre supérieur.

Revenons maintenant sur le caractère oscillatoire du coefficient de réflexion du miroir de Michelson pour $p > 0$. Avant d'aborder ce point, il nous semble important de faire la distinction entre les notions de valeurs microscopique et macroscopique de la différence $\Delta' = D_2 - D_1$ entre les longueurs des bras de l'interféromètre. La valeur macroscopique de Δ' représente la valeur

nette de la différence $D_2 - D_1$ qui doit être comparée à la distance de Rayleigh du faisceau incident afin de savoir si les faisceaux réfléchis interférant sont transversalement différents (Δ' de l'ordre de Z_R) et auquel cas les effets transverses induits devraient apparaître, ou alors ils sont transversalement identiques ($Z_R \gg \Delta'$) et dans ce cas le comportement du miroir de Michelson est identique à celui observé dans le cas d'une onde plane. La valeur microscopique de Δ' , quant à elle, est une quantité de l'ordre de la longueur d'onde du faisceau incident pour laquelle il correspond un déphasage microscopique égal à la détermination principale du déphasage macroscopique $2k\Delta'$; à savoir la valeur appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

D'un point de vue pratique, la différence macroscopique de Δ' pourrait être contrôlée à l'aide d'un dispositif permettant une translation mécanique de plusieurs centimètres d'un des miroirs de l'interféromètre de Michelson ; tandis que la différence microscopique devrait être contrôlée par un montage piézoélectrique (PZT), sur lequel est monté l'un des miroirs, permettant un contrôle fin du déphasage $2k\Delta'$.

Il est important de rappeler que chaque point des courbes présentées sur les figures. II.5 et II.6 ci-dessus, la valeur du déphasage microscopique associé à $2k\Delta'$ a été fixée à π , valeur de référence pour laquelle la réflectivité du miroir de Michelson est égale à l'unité dans le cas où il est éclairé par une onde plane. Par ailleurs, nous savons que tout interféromètre transforme une évolution de déphasage, associé à un changement de Δ' , en une variation d'intensité du faisceau réfléchi. En conséquence, on pourrait être tentés d'interpréter les oscillations du coefficient de réflexion R_p par les variations de l'argument ϕ , de la fonction cosinus donnée par l'équation (II.12), suite à la variation de Δ' à travers celle de D_2 . Cependant il existe une autre raison pour laquelle la réflectivité du miroir de Michelson devrait changer avec la variation de Δ' . En effet, l'expansion des deux faisceaux, issus du faisceau principal, à l'intérieur de l'interféromètre se traduit par une variation du terme d'amplitude $(w_1 w_2)^{-1}$ apparaissant dans l'équation (II.10). En résumé, nous avons à évaluer qui des deux effets : l'effet de phase (argument ϕ) ou l'effet d'amplitude est responsable de l'oscillation de la réflectivité que l'on observe sur les figures. II.5 et II.6, ci-dessus. A cette fin, nous avons déterminé, en utilisant l'équation (II.8), les variations de R_p en fonction du rapport Z_R/Δ' , représentées sur la figure. II.7 ci-dessous, obtenues dans les conditions suivantes :

- a)** Tous les paramètres caractérisant la réflectivité, à savoir le terme d'amplitude et les termes de phase, sont pris en compte ; l'évolution de R_p en fonction de Z_R/Δ' est donnée par la courbe 1.
- b)** L'étude ci-dessus a été reprise en supprimant le terme de phase dû à la courbure des faisceaux interférant ; les résultats de cette étude sont donnés par la courbe 2.
- c)** Dans cette étude, tous les termes, sauf celui correspondant au déphasage de Gouy, ont été considérés ; la courbe 3 décrit l'évolution de R_p dans ce cas.
- d)** Enfin, les termes de phase dus à la courbure et celui de Gouy ont été omis ; la courbe 4 illustre la variation de R_p en fonction Z_R/Δ' dans ces conditions.

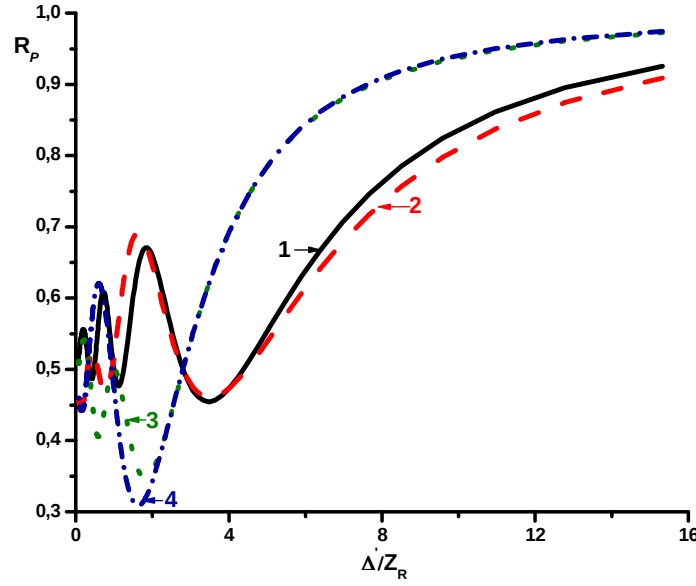


Figure. II.7: Variations de la réflectivité R_p du miroir de Michelson en fonction du rapport Z_R/Δ' . Les courbes 1, 2, 3 et 4 illustrent respectivement ces variations dans les conditions a, b, c et d ci-dessus.

Avant de procéder à l'analyse des résultats obtenus ci-dessus, nous allons compléter notre étude en maintenant le terme d'amplitude constant. Nous présentons sur la figure. II.8, ci-dessous, les résultats correspondants à cette étude dans différentes situations.

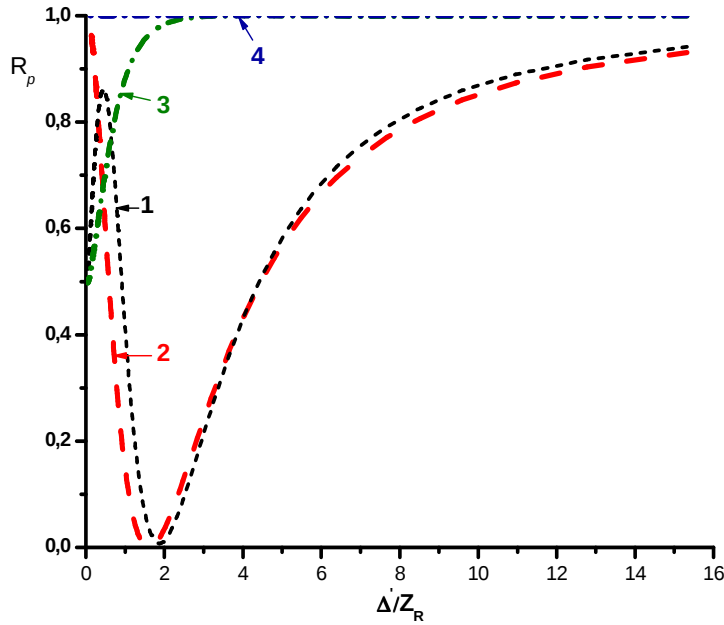


Figure. II.8: Variations de la réflectivité R_p du miroir de Michelson en fonction du rapport Z_R/Δ' . Dans cette étude le terme d'amplitude a été maintenu constant et les courbes ci-dessus correspondent aux situations suivantes : courbe1, tous les termes de phase sont considérés ; courbe2, seul le terme de déphasage dû à la courbure des faisceaux interférant a été supprimé ; la courbe 3 représente le cas où le déphasage de Gouy a été omis et enfin, la courbe 4 correspond à la situation où tous les termes de phase ont été simultanément omis.

Les résultats obtenus à travers les figures. II.7 et II.8 ci-dessus suggèrent les commentaires suivants :

- i. En tenant compte des résultats de la figure. II.8, les oscillations observées de R_p , sur la figure. II.7, sont dues principalement à l'extension latérale, à l'intérieur du miroir de Michelson, des deux faisceaux interférant. En effet, en tenant compte de la structure radiale du champ électrique associé à un mode LG_{p0} (pour rappel ce champ est formé d'anneaux concentriques alternativement en opposition de phase), nous pouvons donc attribuer une valeur minimum pour R_p lors de la superposition de deux anneaux de polarités opposées, et une valeur maximum de R_p lors de la superposition de deux anneaux de même polarité.
- ii. La croissance régulière de R_p vers l'unité est, quant à elle, due à un effet de phase.

Nous allons dans ce qui suit étudier les variations de R_p en fonction du déphasage microscopique pour une valeur donnée du rapport Z_R/Δ' . Notons que le déphasage microscopique est supposé varier dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, à l'aide du dispositif PZT sur lequel est monté un des miroirs de l'interféromètre de Michelson. Les résultats obtenus pour $Z_R/\Delta' = 10$ sont montrés sur la figure. II.9 ci-dessous.

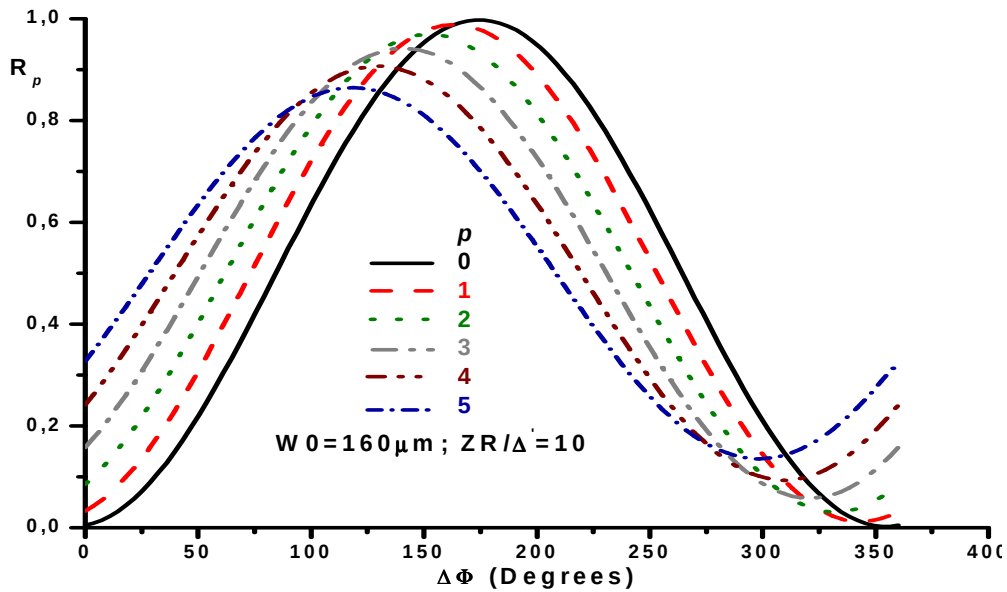


Figure. II.9: Courbes donnant l'évolution de la réflectivité du miroir de Michelson pour un faisceau LG_{p0} incident en fonction du déphasage microscopique et pour $Z_R/\Delta' = 10$.

La conclusion à laquelle on aboutit est que le déphasage microscopique est capable d'inverser la hiérarchie de la réflectivité des modes LG_{p0} . Nous montrons ainsi qu'il est possible, par un contrôle microscopique du déplacement de l'un des miroirs de l'interféromètre à l'aide par exemple d'une céramique piézoélectrique, de contrôler l'oscillation du mode désiré. Les variations de R_p , pour une valeur donnée du déphasage microscopique, en fonction de l'ordre p ne sont pas aussi régulières que celles que suggère la figure. II.9. A titre d'exemple, nous

présentons sur les figures. II .10 et II.11 ci-dessous les variations de R_p pour les valeurs 3 et 1 du rapport Z_R/Δ' .

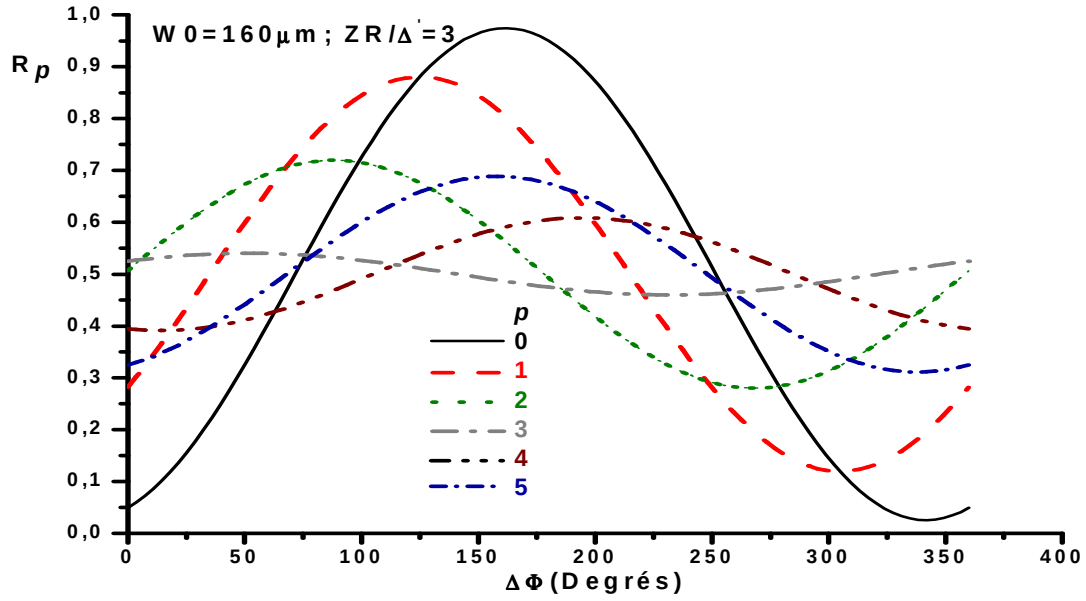


Figure. II.10 : Courbes donnant l'évolution de la réflectivité du MM pour un faisceau LG_{p0} incident en fonction du déphasage microscopique et pour $Z_R/\Delta' = 3$.

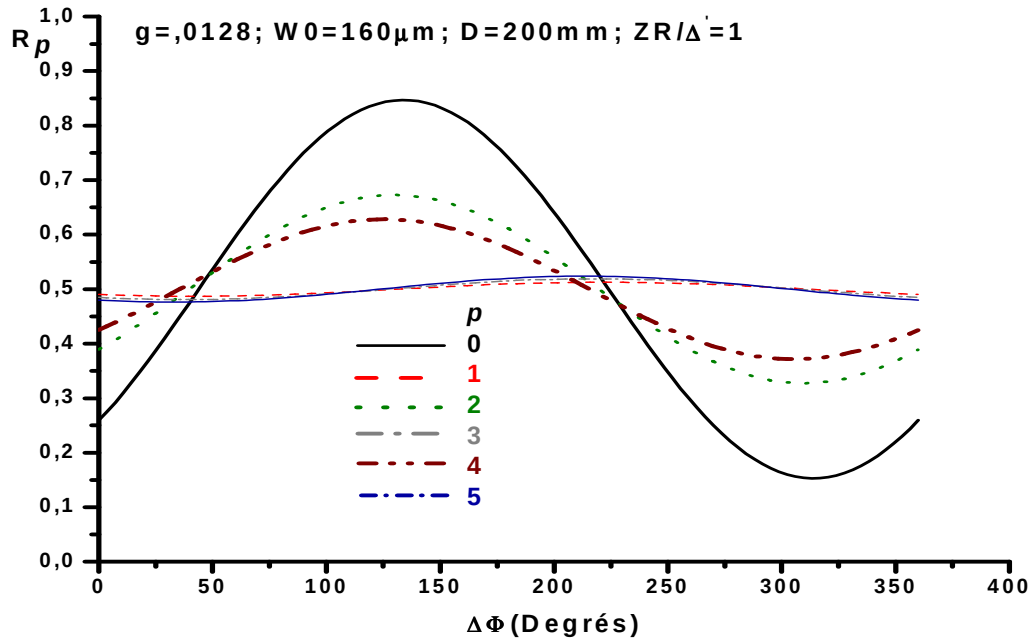


Figure. II.11: Courbes donnant l'évolution de la réflectivité R_p du MM pour un faisceau LG_{p0} incident en fonction du déphasage microscopique et pour $Z_R/\Delta' = 1$.

Nous relevons bien, à travers les figures. II.10 et II.11, la perturbation de la hiérarchie de la réflectivité en fonction du déphasage microscopique et que pour une valeur donnée du déphasage microscopique, la variation R_p en fonction de l'ordre p n'est pas aussi régulière

que celle observée sur la figure. II.9. Le miroir de Michelson ayant été caractérisé par sa réflectivité en réponse à un faisceau LG_{p0} incident, nous allons dans ce qui suit étudier l'influence de ce miroir sur la hiérarchie de la divergence de ce type de faisceau.

II.3.2 Effet du Miroir de Michelson sur la hiérarchie de la divergence d'un faisceau LG_{p0} incident

Considérons un faisceau LG_{p0} incident sur le miroir de Michelson de la figure. II.4, ci-dessus. Nous voulons déterminer la distribution de l'intensité correspondant au champ réfléchi défini par l'équation II.2 et ce en champ lointain. L'intensité correspondant au champ réfléchi est donnée par :

$$I_{pr}(\rho, z) = |E_r(\rho, z)|^2 \quad (II.14)$$

La quantité qui nous intéresse est la divergence angulaire θ_{pr} du faisceau réfléchi par le miroir de Michelson et ce dans le cas où le faisceau incident est un faisceau LG_{p0} (**Annexe. II.2**):

$$\theta_{pr} = w_{pr}/z, \quad (II.15)$$

où w_{pr} est la largeur effective du faisceau réfléchi et qui est déterminée à partir du moment d'ordre 2 de la distribution radiale de l'intensité en un plan situé à la position z de l'axe propagation et dont l'expression est donnée par :

$$w_{pr}^2 = 2 \int_0^\infty I_{pr}(\rho, z) \rho^3 d\rho / \int_0^\infty I_{pr}(\rho, z) \rho d\rho \quad (II.16)$$

Nous présentons les résultats obtenus de l'étude la variation de θ_{pr} en fonction du déphasage microscopique sur la figure. II.12, ci-dessous, pour $z=30m$ et $Z_R/\Delta' = 10$.

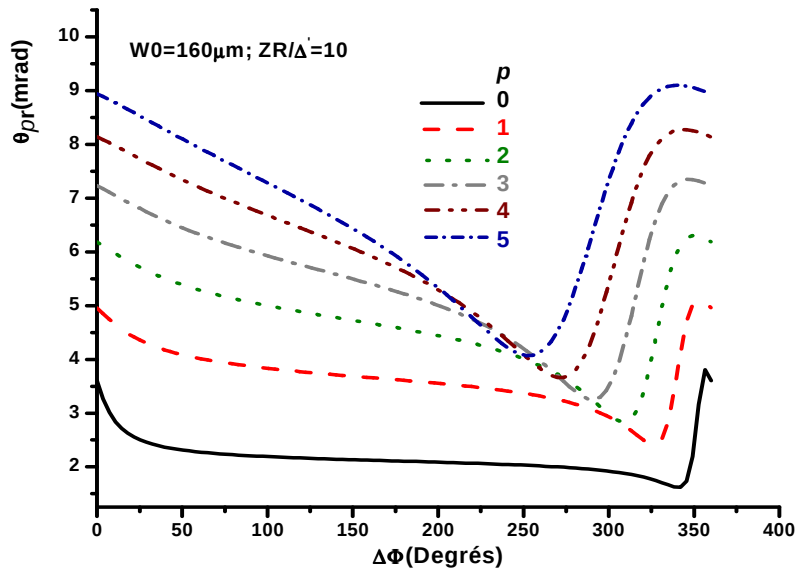


Figure. II.12: Courbes donnant l'évolution de la divergence θ_{pr} , en champ lointain, d'un faisceau LG_{p0} réfléchi par le MM et ce en fonction du déphasage microscopique avec $Z_R/\Delta'=10$ et pour un faisceau incident défini par son beam-waist $w_0=160\mu\text{m}$.

Nous observons sur la figure. II.12 que pour un déphasage microscopique inférieur à 125° , le miroir de Michelson ne perturbe pas la hiérarchie de la divergence θ_{pr} ; elle est identique à celle du faisceau incident ($\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 \dots$). Cela signifie que la troncature du faisceau et donc les pertes augmentent avec l'ordre p , comme il est le cas pour une cavité à deux miroirs contenant un diaphragme sélectif. En conséquence, si nous voulons que le mode fondamental TEM_{00} de la cavité, montrée sur la figure. II.1, soit un mode LG_{p0} avec $p > 0$, nous avons besoin que R_p soit nécessairement maximum pour cette valeur particulière de l'ordre du mode. Nous notons aussi que pour un déphasage microscopique de l'ordre de 240° plusieurs modes de différents ordres, réfléchis par le miroir de Michelson, ont la même divergence ; cette forme de dégénérescence se traduit par la perturbation de la hiérarchie des pertes dues à la troncature du diaphragme. Les résultats, d'une étude similaire que ci-dessus, obtenus pour $Z_R/\Delta' = 3$ et 1 sont données sur la figure. II.13 et II.14 ci-dessous.

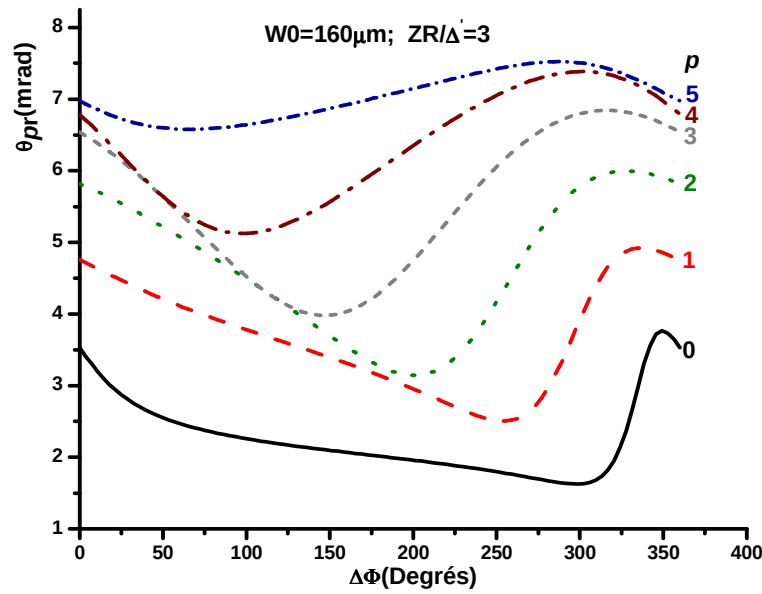


Figure. II.13: même étude que ci-dessus avec $Z_R/\Delta' = 3$.

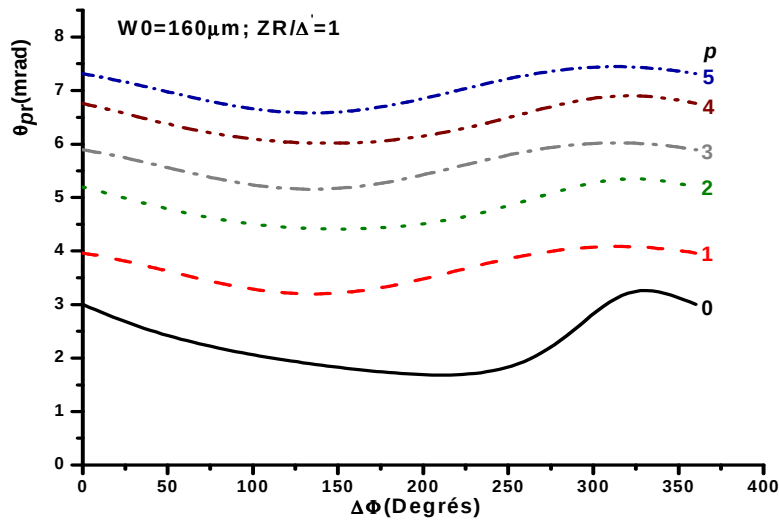


Figure. II.14: même étude que ci-dessus avec $Z_R/\Delta' = 1$

Nous relevons dans le cas de la figure. II.13 que la hiérarchie de la divergence θ_{pr} est perturbée uniquement pour des valeurs particulières du déphasage microscopique et que dans le cas de la figure. II.14, cette hiérarchie est respectée quelque soit la valeur du déphasage microscopique.

Notre miroir de Michelson étant caractérisé par sa réflectivité et par les effets qu'il induit dans la perturbation de la hiérarchie de la divergence du faisceau incident, nous allons nous en servir pour former une cavité du type plan concave où il sera représenté par un miroir plan équivalent. Nous allons, dans ce qui suit, caractériser les modes transverses propres à ce type de cavité.

II.3.3 Caractérisation des modes transverses propres d'une cavité à deux miroirs

La cavité montrée sur la figure II.15, ci-dessous, est une cavité en ligne composée d'un miroir plan (MM : miroir équivalent du miroir de Michelson de réflectivité R_{p0}) faisant face à un miroir concave M_c , de coefficient de réflexion en amplitude r_c . Cette cavité dite plan-concave est dissymétrique et est d'usage assez courant dans le cas des lasers commerciaux. Le(s) mode(s) qui s'installe(nt) dans le laser correspond (ent) à une distribution de champ qui se reproduit après un aller retour, à un facteur d'amplitude et de phase près. Le facteur d'amplitude fixera les pertes et donc le gain minimum du milieu actif pour que l'oscillation laser ait lieu ; le facteur de phase, quant à lui, contribue à fixer sa fréquence. Dans le cas de notre travail, nous nous intéresserons aux cas où les modes de la cavité active sont peu différents de ceux de la cavité passive. Nous calculons donc le champ résonnant dans une cavité passive à l'aide d'une méthode basée sur sa décomposition dans la base orthonormée complète des fonctions Laguerre-Gauss.

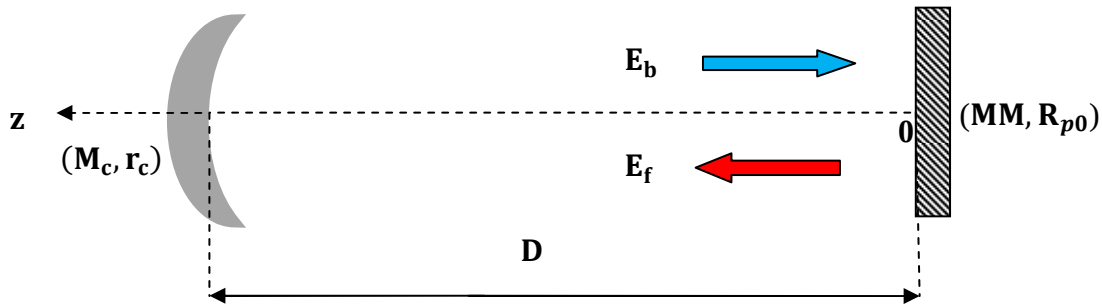


Figure. II.15: Schéma d'une cavité "plan-concave": MM est le miroir de Michelson et M_c le miroir concave.

II.3.4 Modes propres de la cavité passive non diaphragmée

Il s'agit de trouver les distributions du champ, à l'intérieur de la cavité passive de la figure. II.15, ci-dessus, susceptibles de s'auto-reproduire et donc de constituer les modes propres de cette cavité. Le champ recherché devra à la fois obéir aux équations de Maxwell et aux

conditions aux limites imposées par les surfaces réfléchissantes des miroirs. Le champ électrique, harmonique de pulsation ω , obéit à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \vec{E} + (\omega^2/c_0^2)\vec{E} = 0 \quad (\text{II.17})$$

On cherchera comme solution à cette équation, une onde se propageant essentiellement le long de l'axe z parallèle à celui de la cavité. On prendra le champ électrique sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{C} \exp i(kz - \omega t), \quad (\text{II.18})$$

avec $k = \omega/c_0$ est le nombre d'onde.

Si on se limite à une onde TEM polarisée suivant la direction x , alors l'amplitude complexe $\vec{E}$ s'écrit $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$. La solution recherchée est de la forme $E_x = \psi(x, y, z)$ qui conduit, compte tenu de l'équation (II.2.17), à l'équation de propagation suivante :

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\psi + 2ik \partial\psi/\partial z = 0 \quad (\text{II.19})$$

L'approximation paraxiale [14], utilisée par Kogelnik [15], consiste à considérer que la variation longitudinale de ψ est petite devant sa variation transversale. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par les approximations suivantes :

$$|\partial^2\psi/\partial z^2| \ll 2k|\partial\psi/\partial z| \text{ ou } |\partial^2\psi/\partial x^2| \text{ ou } |\partial^2\psi/\partial y^2|, \quad (\text{II.20})$$

et de ce fait l'équation de propagation (II.19) se simplifie et prend la forme :

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\psi + 2ik \partial\psi/\partial z = 0 \quad (\text{II.21})$$

Cette équation, connue sous le nom d'équation d'onde paraxiale, admet comme solution le faisceau Gaussien [II.15] dont le champ électrique a pour expression :

$$E(\rho, z, t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left\{ i[kz - \Phi(z)] - \rho^2 \left[\frac{1}{w^2(z)} - \frac{ik}{2R(z)} \right] \right\} \exp(-i\omega t), \quad (\text{II.22})$$

Le faisceau Gaussien est aussi appelé mode fondamental (ou LG_{00}) de la cavité non diaphragmée, par référence aux modes transverses supérieurs que l'on abordera par la suite ; ρ est la coordonnée radiale ($\rho^2 = x^2 + y^2$). Les paramètres du faisceau Gaussien ont été déjà définis au chapitre I, nous allons dans la suite de ce travail nous intéresser à une cavité plan-concave dont les caractéristiques géométriques sont contenues dans le paramètre g qui s'écrit :

$$g = (1 - D/R_c), \quad (\text{II.23})$$

où D et R_c représentent respectivement la longueur de la cavité et le rayon de courbure du miroir concave (M_c). Le résonateur est maintenu dans la zone de stabilité ($0 < g < 1$) en faisant varier R_c à D constant. Compte tenu du fait que les miroirs constituent des surfaces d'égale phase, le beam-waist du faisceau Gaussien est situé sur le miroir plan et sa dimension w_0 est donnée par [II.15] :

$$w_0^2 = (\lambda D/\pi) \sqrt{g/(1-g)} \quad (\text{II.24})$$

Notons que le faisceau Gaussien n'est pas la seule solution de l'équation d'onde paraxiale. Dans le cadre de la symétrie de cylindrique, le résonateur non diaphragmé admet comme modes propres l'ensemble des fonctions Laguerre-Gauss. Ces modes transverses dits supérieurs sont dénombrés par l'entier p et sont représentés par les fonctions $G_p(\rho, z)$:

$$G_p(\rho, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{w(z)} L_p(x) \exp[-i(2p+1)\Phi(z)] \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \exp\left(i\frac{k\rho^2}{2R(z)}\right). \quad (\text{II.25})$$

Les paramètres $w(z)$, $R(z)$ et $\Phi(z)$ sont ceux du faisceau Gaussien, la variable réduite x dépend de la coordonnée longitudinale z : $x = 2\rho^2/w^2(z)$ et $L_p(x)$ est le polynôme de Laguerre d'ordre p .

On remarquera que les différents modes Laguerre-Gauss sont caractérisés par le même rayon de courbure du front d'onde, mais par un déphasage $(2p+1)\Phi(z)$ différent. Ce dernier point indique que la fréquence de résonance des différents modes transverses est différente. On notera que les fonctions $G_p(\rho, z)$ sont solutions de l'équation d'onde paraxiale et que $p=0$ correspond au faisceau Gaussien. Les modes transverses supérieurs correspondent aux valeurs de $p \geq 1$.

Les fonctions $G_p(\rho, z)$ constituent une base orthonormée; elles vérifient, dans le plan transverse (ρ, φ) , la relation d'orthogonalité:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_p(\rho, z) G_q^*(\rho, z) \rho d\rho d\varphi = \delta_{pq} \quad (\text{II.26})$$

La propriété essentielle qui nous intéresse est que ces fonctions $G_p(\rho, z)$ constituent une base orthonormée complexe et complète ; toute fonction $u(\rho, z)$ peut être développée en série infinie sur cette base :

$$u(\rho, z) = \sum_p C_p(z) G_p(\rho, z) \quad (\text{II.27})$$

L'inversion de la relation (II.27) permet d'obtenir les coefficients $C_p(z)$, si l'on connaît la fonction $u(\rho, z)$. Compte tenu de l'orthogonalité des fonctions $G_p(\rho, z)$, on obtient :

$$C_p(z) = 2\pi \int_0^\infty u(\rho, z) G_p^*(\rho, z) \rho d\rho \quad (\text{II.28})$$

Dans le cas où la fonction $u(\rho, z)$ satisfait l'équation d'onde paraxiale, alors les coefficients C_p du développement sont indépendants de la coordonnée longitudinale z . Le champ résonnant dans une cavité est dans cette catégorie de fonction, par conséquent le principal avantage à l'utilisation des modes propres de Laguerre-Gauss comme base complète devient évident. En effet, une fois les coefficients C_p calculés numériquement (en tenant compte de toutes les conditions aux limites), on est en mesure de déterminer la distribution du champ en n'importe quel point intérieur ou extérieur du résonateur. Dans ce qui suit, nous allons adopter la méthode de décomposition du champ résonnant sur la base des fonctions Laguerre-Gauss pour caractériser les modes propres d'une cavité plan-concave passive où le miroir concave est diaphragmé.

II.3.5 Modes propres de la cavité passive diaphragmée

Le calcul du champ résonnant est obtenu à partir de sa décomposition en deux composantes progressives : une onde aller (E_f) qui se propage dans la direction longitudinale $z>0$ et une onde retour (E_b) se propageant dans le sens opposé, comme il est illustré sur la Figure. II.16, ci-dessous, où la position de la lame séparatrice (B-S) définit l'origine $z=0$ de la coordonnée longitudinale et où l'axe de la cavité définit l'origine de la coordonnée transversale ρ . Le calcul numérique du champ résonnant utilise la décomposition de ce dernier sur la base des fonctions propres de la cavité non diaphragmée. L'hypothèse sur une symétrie axiale (symétrie de révolution) de la cavité nous amène à travailler avec des faisceaux ayant cette même symétrie. La base orthonormée des fonctions propres de la cavité est donc formée par les fonctions de Laguerre-Gauss qui sont définies par :

$$G_{fp}(\rho, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w(z)^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w(z)^2} \right) \exp \left\{ +i \left[\frac{k\rho^2}{2R(z)} - (2p+1)\Phi(z) \right] \right\}, \quad (\text{II.29})$$

$$G_{bp}(\rho, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w(z)^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w(z)^2} \right) \exp \left\{ -i \left[\frac{k\rho^2}{2R(z)} - (2p+1)\Phi(z) \right] \right\}. \quad (\text{II.30})$$

où les indices f et b indiquent que les grandeurs concernent respectivement les ondes aller et retour ; respectivement forward et backward en Anglais.

II.3.6 Calcul de l'opérateur aller-retour

En nous inspirant du modèle de la cavité à deux miroirs, nous allons procéder au calcul de l'expression de l'opérateur aller-retour correspondant à notre cavité à « trois » miroirs.

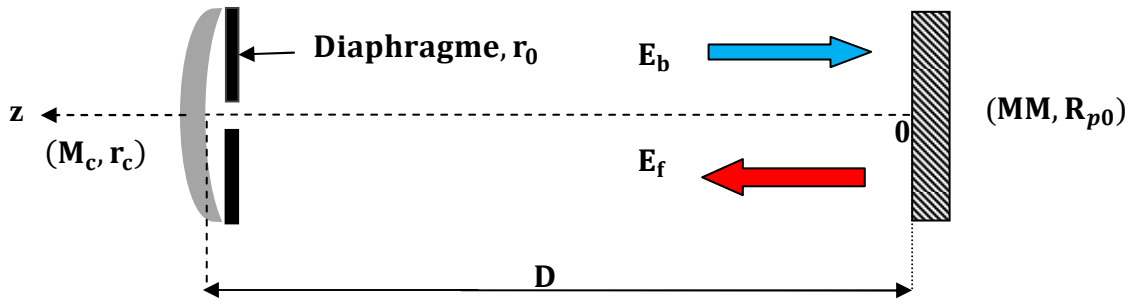


Figure. II.16: Schéma d'une cavité à deux miroirs: MM est le miroir de Michelson et M_c le miroir concave diaphragmé.

Les expressions des champs aller et retour, développés dans la base des fonctions Laguerre-Gauss, sont données par :

$$E_f(\rho, z) = \exp[i(kz - \omega t)] \sum_p f_p G_{fp}(\rho, z) \quad (\text{II.31})$$

et

$$E_b(\rho, z) = \exp[i(k(2D - z) - \omega t)] \sum_p b_p G_{bp}(\rho, z) \quad (\text{II.32})$$

Nous supposons le cas d'un champ électrique de polarisation rectiligne et nous considérons uniquement les solutions stationnaires pour lesquelles $t=0$.

Les équations (II.31) et (II.32) deviennent dans ce cas :

$$E_f(\rho, z) = \exp(ikz) \sum_p f_p G_{fp}(\rho, z) \quad (\text{II.33})$$

et

$$E_b(\rho, z) = \exp[ik(2D - z)] \sum_p b_p G_{bp}(\rho, z). \quad (\text{II.34})$$

La continuité du champ au point $z=D$, position du miroir concave diaphragmé, impose :

$$E_b(\rho, D) = r_c \cdot E_f(\rho, D) \text{ pour } \rho \leq r_0 \quad (\text{II.35})$$

et

$$E_b(\rho, D) = 0 \text{ pour } \rho > r_0, \quad (\text{II.36})$$

r_c et r_0 sont respectivement le coefficient de réflexion en amplitude du miroir concave M_c et le rayon de l'ouverture du diaphragme.

En tenant compte des équations (II.33) et (II.34), L'équation (II.35) peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_p b_p G_{bp}(\rho, D) = r_c \sum_p f_p G_{fp}(\rho, D) \quad (\text{II.37})$$

Procédons maintenant à l'inversion de cette dernière équation, en la multipliant par le complexe conjugué $G_{bm}^*(\rho, D)$ et en l'intégrant sur toute la section transversale, de symétrie circulaire, du faisceau considéré ; nous obtenons ainsi :

$$\sum_p b_p \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{bp}(\rho, D) \cdot G_{bm}^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\varphi = r_c \sum_p f_p \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} G_{fp}(\rho, D) \cdot G_{bm}^*(\rho, D) \rho d\rho \quad (\text{II.38})$$

Les propriétés d'orthogonalité des fonctions Laguerre-Gauss impliquent que :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{bp}(\rho, D) \cdot G_{bm}^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\varphi = \delta_{pm}, \quad (\text{II.40})$$

δ_{pm} étant le symbole de Kronecker.

Nous en déduisons, en explicitant les fonctions de Laguerre-Gauss intervenant dans le deuxième membre de l'équation (II.38) et en posant $x = \frac{2\rho^2}{w^2(D)}$:

$$b_m = \frac{4r_c}{w^2(D)} \sum_p f_p \int_0^{r_0} L_p(x) L_m(x) \exp(-x) \exp\left[\frac{k\rho^2}{R_c(D)} - 2(p+m+1)\Phi(D)\right] \rho d\rho \quad (\text{II.41})$$

Nous obtenons ainsi la relation entre les coefficients du développement du champ retour en fonction de ceux du champ aller. Notons que nous avons considéré le miroir concave comme

une surface d'égale phase, et de ce fait le terme de phase $\exp\left(i \frac{k\rho^2}{R_c(D)}\right)$ vaut l'unité qui est sa valeur sur l'axe de la cavité qui constitue l'origine de la coordonnée radiale ρ .

En posant : $Y_c = \frac{r_0}{w(D)}$ (le paramètre de troncature du diaphragme), nous pouvons réécrire l'équation (II.41) sous la forme :

$$b_m = r_c \cdot \exp[-i2\Phi(D)] \sum_p f_p \cdot \exp[-i2(p+m) \cdot \Phi(D)] \cdot C_{pm}, \quad (\text{II.42})$$

où $C_{pm} = \int_0^{2Y_c^2} L_p(x) \cdot L_m(x) \cdot \exp(-x) dx$ définit l'intégrale de recouvrement des faisceaux aller et retour au niveau du miroir concave diaphragmé.

La séquence suivante nous permettra de trouver la relation entre les coefficients (f'_p) du champ aller et ceux du champ retour, donnés par l'équation (II.42), après un aller-retour.

Ecrivons l'équation de continuité de ces champs au niveau du miroir MM, situé à l'origine des coordonnées ($z=0$). Nous avons :

$$E_f(\rho, 0) = r_{p0} E_b(\rho, 0), \quad (\text{II.43})$$

avec $r_{p0} = \sqrt{R_{p0}}$; R_{p0} représente la réflectivité du MM par rapport au mode LG_{p0} incident.

En développant ces champs sur la base des fonctions propres de la cavité au point $z=0$, nous obtenons :

$$\sum_p f'_p G_{fp}(\rho, 0) = \exp(i2kD) \cdot \sum_p r_{p0} \cdot b_p \cdot G_{bp}(\rho, 0) \quad (\text{II.44})$$

De la même manière que ci-dessus, nous allons procéder à l'inversion de cette dernière équation. Ce faisant, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \sum_p f'_p \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{fp}(\rho, 0) \cdot G_{fm}^*(\rho, 0) \rho d\rho \cdot d\varphi = \\ \exp(i2kD) \sum_p r_{p0} b_p \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} G_{bp}(\rho, 0) \cdot G_{fm}^*(\rho, 0) \rho d\rho \cdot d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Avec les mêmes considérations (orthogonalité des fonctions Laguerre-Gauss), nous obtenons :

$$f'_m = r_{m0} \cdot b_m \exp(i2kD) \quad (\text{II.46})$$

En remplaçant b_m par son expression donnée par l'équation (II.42), ci-dessus, nous obtenons :

$$f'_m = r_c \cdot r_{m0} \exp[i2(kD - \Phi(D))] \sum_p \exp[-i2(p+m) \cdot \Phi(D)] \cdot C_{pm} \cdot f_p \quad (\text{II.47})$$

La permutation des indices p et m nous permettent de réécrire l'équation (II.47) sous la forme :

$$f'_p = r_c \cdot r_{p0} \exp[i2(kD - \Phi(D))] \sum_m \exp[-i2(p+m) \cdot \Phi(D)] \cdot C_{pm} \cdot f_m \quad (\text{II.48})$$

Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme condensée :

$$f'_p = \sum_m M_{pm} \cdot f_m , \quad (\text{II.49})$$

où M_{pm} définit l'opérateur aller-retour et dont l'expression est donnée par :

$$M_{pm} = r_c \cdot r_{p0} \exp[i2(kD - \Phi(D))]. \exp[-i2(p + m) \cdot \Phi(D)]. C_{pm} \quad (\text{II.50})$$

Remarque : la construction de l'opérateur aller-retour a été faite à l'aide des coefficients du champ aller, il en résulte que le vecteur propre $\vec{u}$ de la matrice aller-retour, tel que $M\vec{u} = \Gamma\vec{u}$ correspond aux coefficients du champ aller.

L'opérateur aller-retour M contient les informations sur la réflexion sur les miroirs et sur les modulations de l'amplitude et de la phase du faisceau par le diaphragme. Par définition de la condition de résonance, la relation $f'_p = \Gamma f_p$ est valable quelque soit p après un aller-retour. Cela veut dire que les modes propres de la cavité diaphragmée sont représentés par les vecteurs propres de la matrice M , et chacun d'eux est caractérisé par une valeur propre complexe Γ , telle que :

$$M\vec{u} = \Gamma\vec{u} \quad (\text{II.51})$$

Le vecteur propre de M ayant la plus grande valeur propre $|\Gamma_{FM}|$ est par définition le mode fondamental de la cavité dont la perte de puissance (L_{FM}) pour un aller-retour est donnée par :

$$L_{FM} = 1 - |\Gamma_{FM}|^2 \quad (\text{II.52})$$

Pour pouvoir caractériser le champ résonnant à sa sortie de la cavité, il est nécessaire de connaître son développement dans la base des fonctions propres considérées. A cette fin, nous allons calculer les coefficients du développement de ce champ à la sortie de la cavité du coté du miroir concave. Les équations de continuité du champ (en $z=D$) sont données par :

$$E_s(\rho, D) = \tau E_i(\rho, D) \text{ pour } \rho \leq r_0 \quad (\text{II.53})$$

et

$$E_s(\rho, D) = 0 \text{ pour } \rho > r_0 \quad (\text{II.54})$$

Les indices s et i réfèrent à sortie et intérieur respectivement et τ représente le facteur de transmission en amplitude du miroir concave.

Le développement des champs E_s et E_i dans la base considérée, nous donne:

$$\sum_p f_{sp} G_{fp}(\rho, D) = \tau \sum_p f_{ip} G_{fp}(\rho, D) \quad (\text{II.55})$$

En multipliant (II.55) par le complexe conjugué $G_{fm}^*(\rho, D)$ et en intégrant sur toute la section transversale, nous aboutissons à :

$$\sum_p f_{sp} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{fp}(\rho, D) \cdot G_{fm}^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\varphi = \tau \sum_p f_{ip} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} G_{fp}(\rho, D) \cdot G_{fm}^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\varphi$$

(II.56)

En tenant compte de l'orthogonalité des fonctions propres de la base, nous pouvons réécrire (II.56) sous la forme :

$$f_{sm} = \tau \sum_p f_{ip} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} G_{fp}(\rho, D) \cdot G_{fm}^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\varphi \quad (II.57)$$

En explicitant par leur expression les fonctions propres intervenant dans (II.57), nous obtenons finalement :

$$f_{sm} = \tau \sum_p f_{ip} C_{pm} \cdot \exp[-i2(p - m) \cdot \Phi(D)] , \quad (II.58)$$

où C_{pm} est l'intégrale de recouvrement, définie ci-dessus, et τ a pour expression :

$$\tau = \sqrt{1 - r_c^2} \quad (II.59)$$

La connaissance, à l'aide de (II.58), des coefficients du champ à la sortie de la cavité, nous permet de déterminer complètement ce champ.

II.3.7 Le facteur de propagation M^2

Dans le but de déterminer l'ordre p du mode fondamental oscillant, nous calculons systématiquement le facteur de propagation M_{out}^2 à la sortie de la cavité à partir des coefficients donnés par l'équation (II.58). L'expression donnant M_{out}^2 s'écrit **[II.16]** :

$$M_{out}^2 = \left[\left\{ \sum_p (2p + 1) |D_p|^2 \right\}^2 - 4 \left\{ \sum_p \sum_q p (D_p^* D_q)^r \delta_{p,q+1} \right\}^2 \right]^{1/2}, \quad (II.60)$$

où les coefficients D_p sont explicités dans **l'annexe II.2**.

La valeur de M_{out}^2 , obtenue à partir de (II.60), doit être comparée à celle du facteur de propagation M^2 d'un mode LG_{p0} pur et dont l'expression est donnée par **[II.17]** :

$$M^2 = 2p + 1 \quad (II.61)$$

II.3.8 Résultats

Dans notre étude, le calcul numérique du champ résonnant a été réalisé par son développement sur une base de quatre vingt (80) fonctions Laguerre-Gauss symétriques. Les calculs numériques de l'intégrale de recouvrement C_{pm} , de la réflectivité R_{p0} du MM ont été faits à l'aide d'un programme FORTRAN 77, en double précision, basé sur la sous-routine d'intégration DQ2DAG de IMSL. Le calcul numérique des vecteurs propres et des valeurs propres de la matrice complexe M a été fait à l'aide de la routine double précision DEVCCG. Le compilateur utilisé est de la compagnie ABSOFT.

Les figures. II.17a à II.19a, ci-dessous, nous donnent l'évolution du facteur de qualité M_{out}^2 du mode résonnant, à la sortie du résonateur, en fonction du déphasage microscopique et avec comme paramètres d'étude : le paramètre de troncature Y_c du diaphragme et le rapport Z_R/Δ' .

Notre étude a été menée dans les conditions suivantes : $D=200\text{mm}$, $D_1=30\text{mm}$, $g=0.128$ et avec les valeurs de D_2 : 105.26mm , 55.44mm et 37.52mm , correspondant aux trois valeurs du rapport sans dimensions Z_R/Δ' pour lequel on a choisi, afin de comparaison, les mêmes valeurs que ci-dessus: 1, 3 et 10. Pour chaque valeur de Z_R/Δ' , avec $Z_R = 76,66\text{mm}$ correspondant à la valeur du beam-waist $w_0 = 160\mu\text{m}$ du faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 1.06\mu\text{m}$, nous avons considéré différentes valeurs du paramètre de troncature du diaphragme Y_c . Notons aussi que pour chaque cas nous présentons l'évolution des pertes du mode fondamental (figures. II.17b à II.19b) ainsi que le profil radial de l'intensité du mode résonnant, pour des valeurs particulières du déphasage microscopique (figures. II.17c à II.19c). Pour les courbes représentant le profil radial de l'intensité du mode résonnant, que l'on compare au profil théorique (Th) du mode correspondant, nous considérons uniquement les cas où les pertes du mode fondamental ne sont pas élevées.

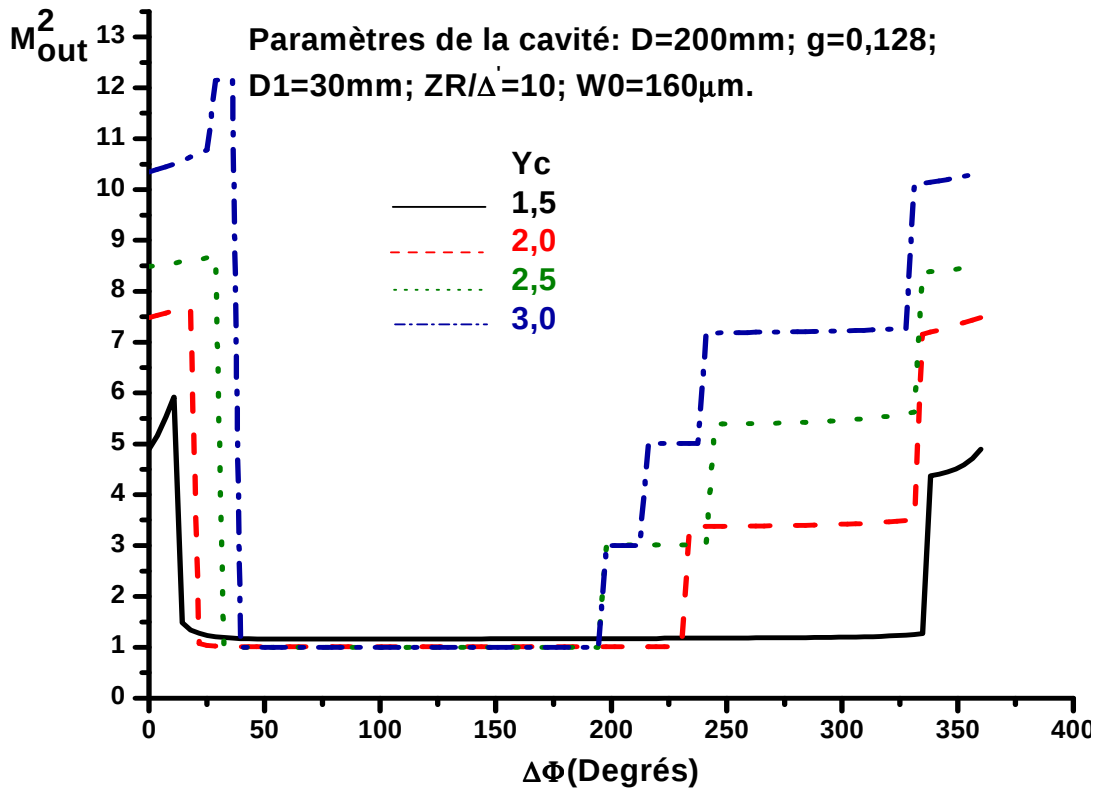


Figure. II.17a: Evolution du facteur de qualité M_{out}^2 d'un faisceau LGp_0 , à la sortie de la cavité, en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta'=10$; le paramètre d'étude étant la troncature Y_c du diaphragme.

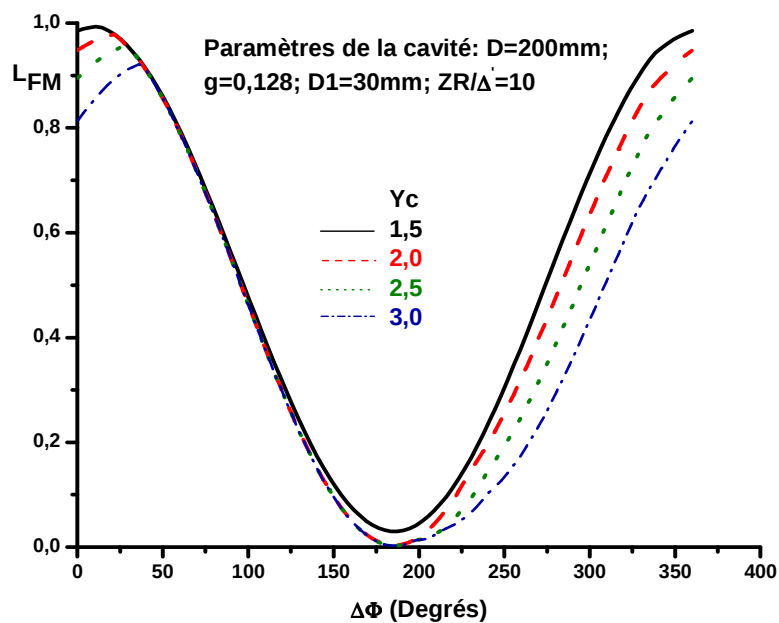


Figure. II.17b: Evolution des pertes du mode fondamental (L_{FM}) en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta'=10$; le paramètre d'étude étant la troncature Y_c du diaphragme.

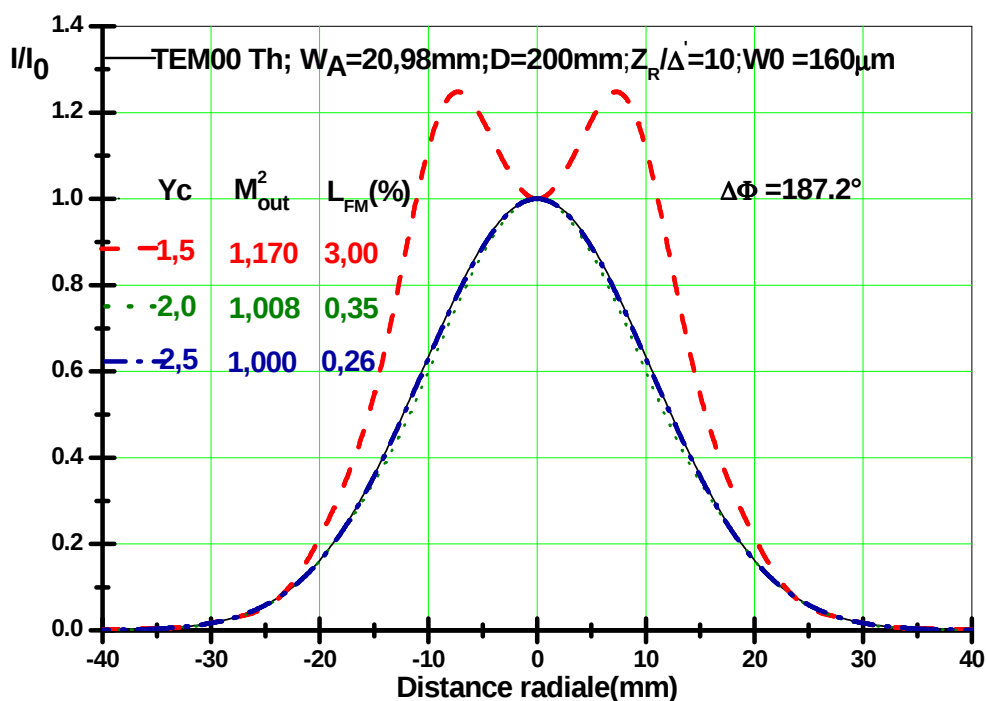


Figure. II.17c1: Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM00, à une distance $ZA=10,0$ m où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$, pour la valeur $\Delta\Phi = 187.2^\circ$ du déphasage microscopique.

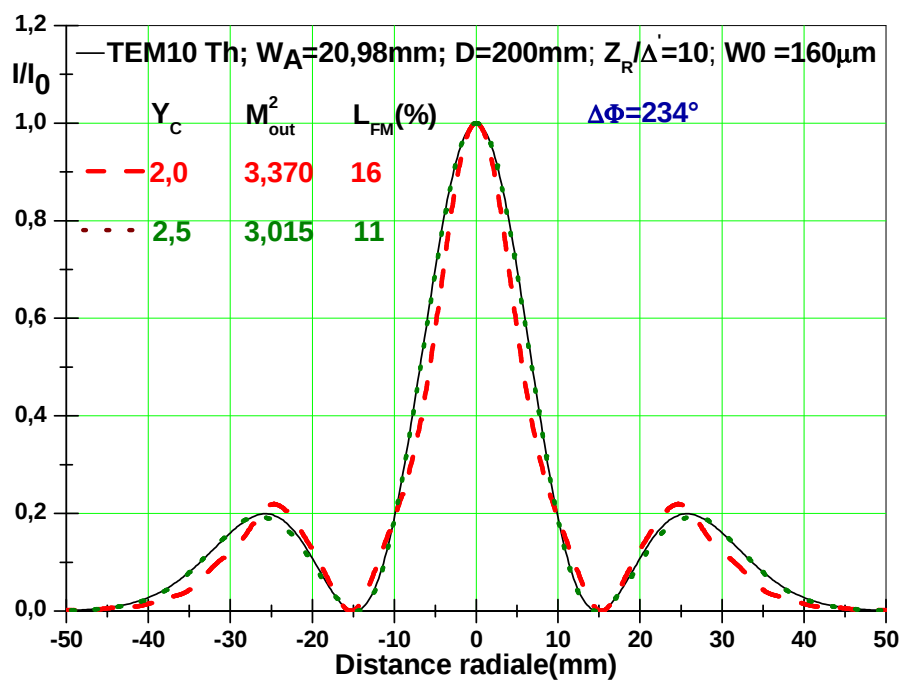


Figure. II.17c2: Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM10, à une distance $ZA=10,0\text{m}$ où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$, pour la valeur $\Delta\Phi = 234^\circ$ du déphasage microscopique.

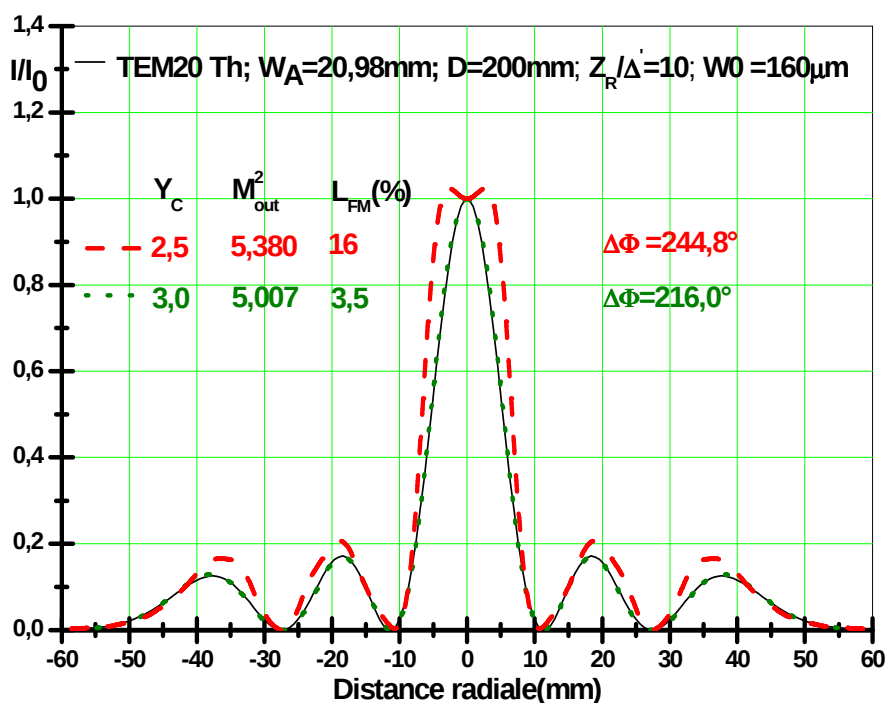


Figure. II.17c3: Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM20, à une distance $ZA=10,0\text{m}$ où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$, pour deux valeurs distinctes du déphasage microscopique.

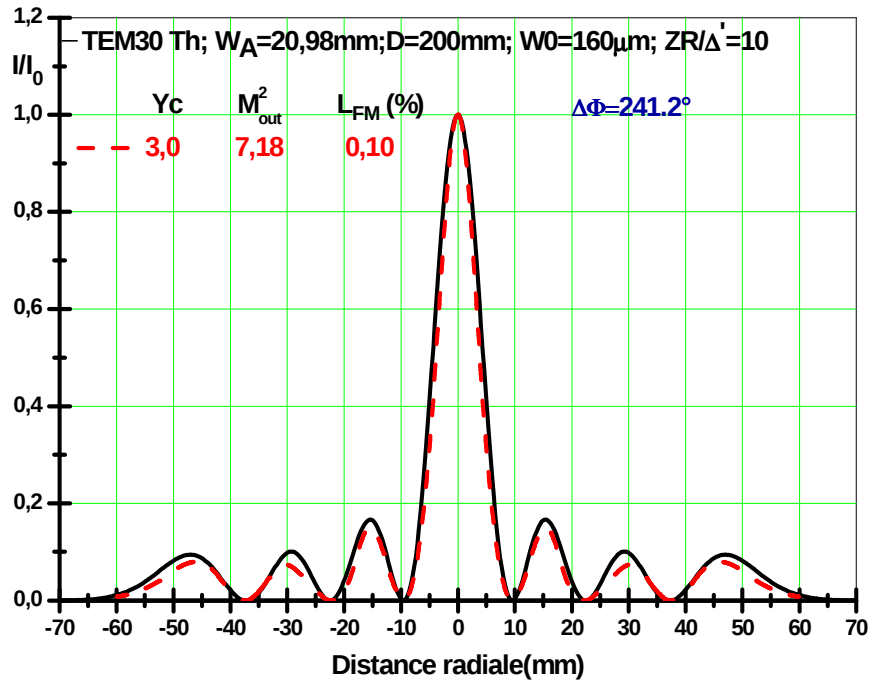


Figure. II.17c4: Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM30, à une distance $Z_A=10,0\text{m}$ où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$, pour la valeur $\Delta\Phi = 241.2^\circ$ du déphasage microscopique.

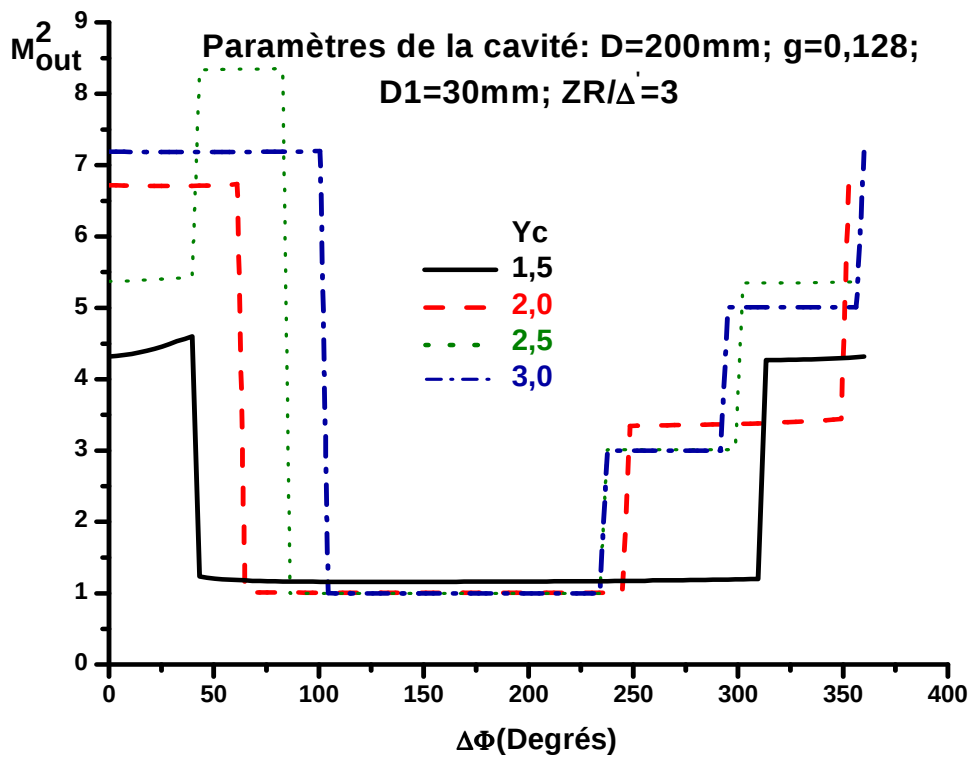


Figure. II.18a: Evolution du facteur de qualité M_{out}^2 d'un faisceau LG_{p0} , à la sortie de la cavité, en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta'=3$; le paramètre d'étude étant la troncature Y_c du diaphragme.

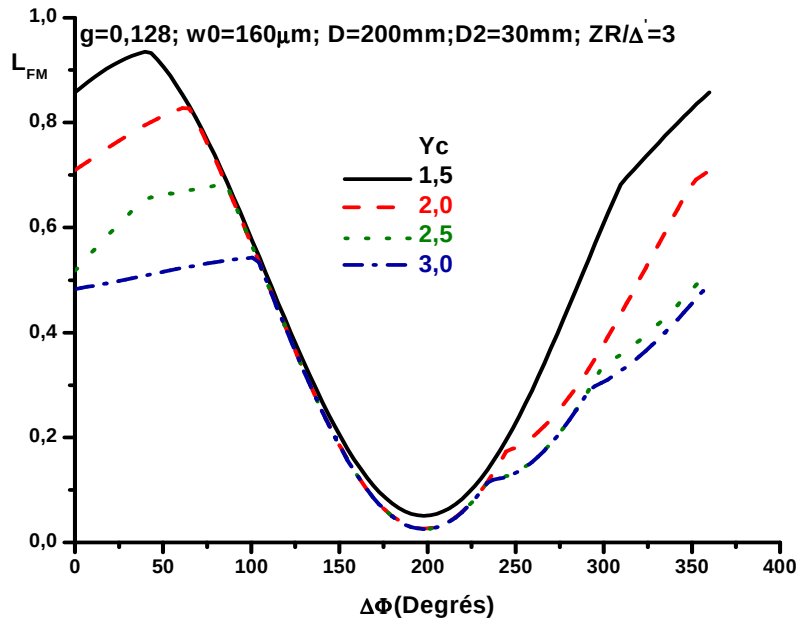


Figure. II.18b: Evolution des pertes du mode fondamental (L_{FM}) en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta'=3$; le paramètre d'étude étant la troncature Y_c du diaphragme.

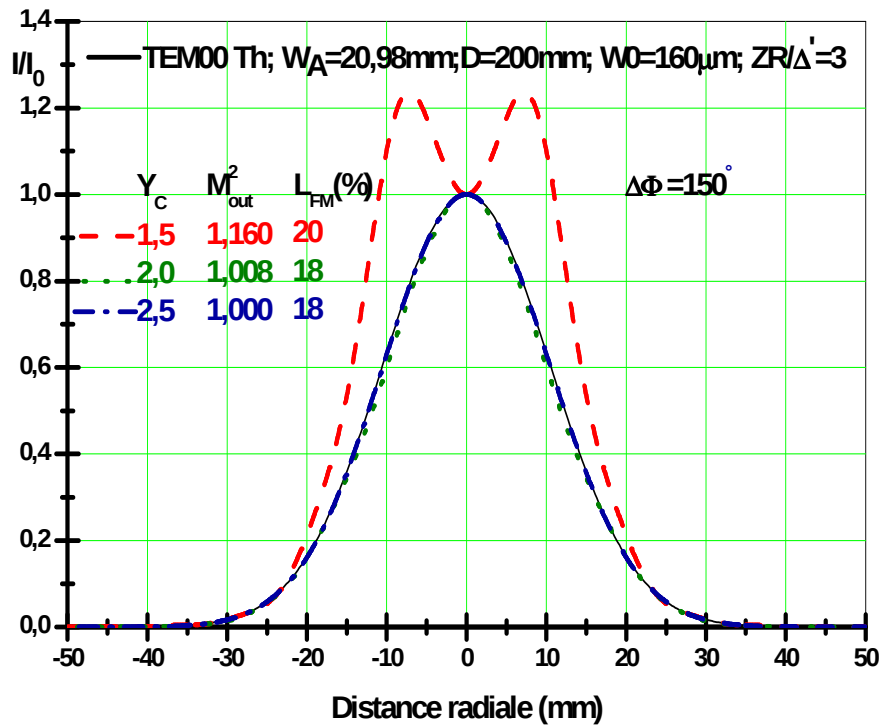


Figure. II.18c1: Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM00, à une distance $ZA=10,0m$ où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$, pour la valeur $\Delta\Phi = 150^\circ$ du déphasage microscopique.

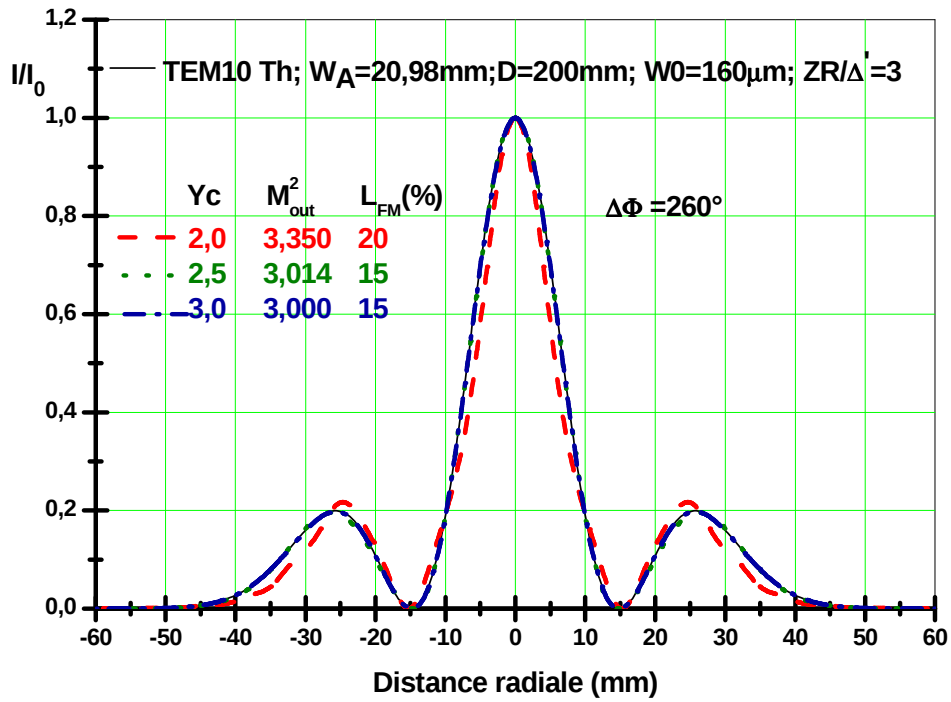


Figure. II.18c2: Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM10, à une distance $ZA=10,0m$ où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$, pour la valeur $\Delta\Phi = 260^\circ$ du déphasage microscopique.

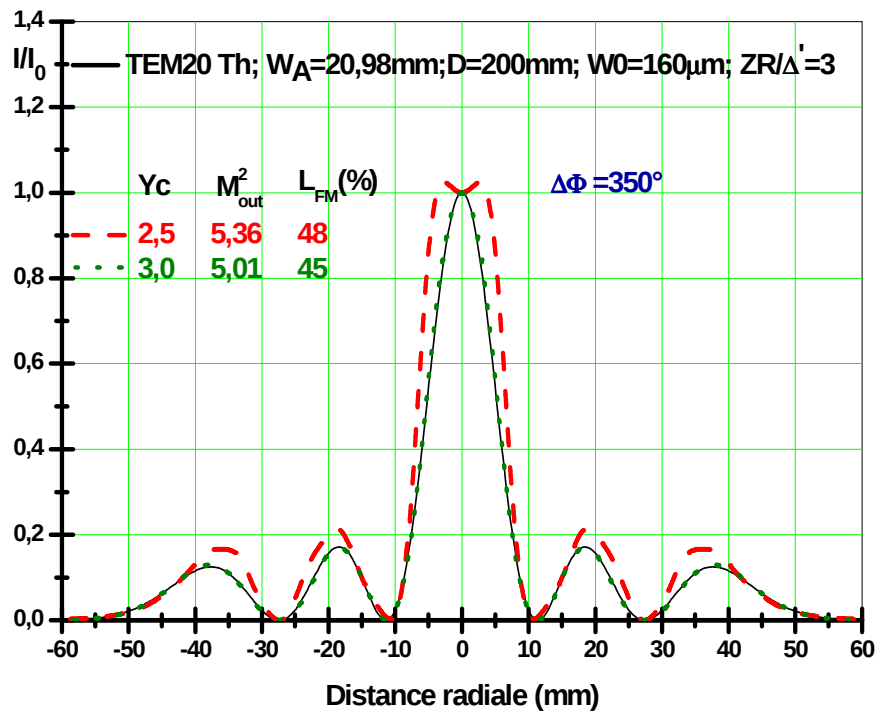


Figure. II.18c3: Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM20, à une distance $ZA=10,0m$ où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$, pour la valeur $\Delta\Phi = 350^\circ$ du déphasage microscopique.

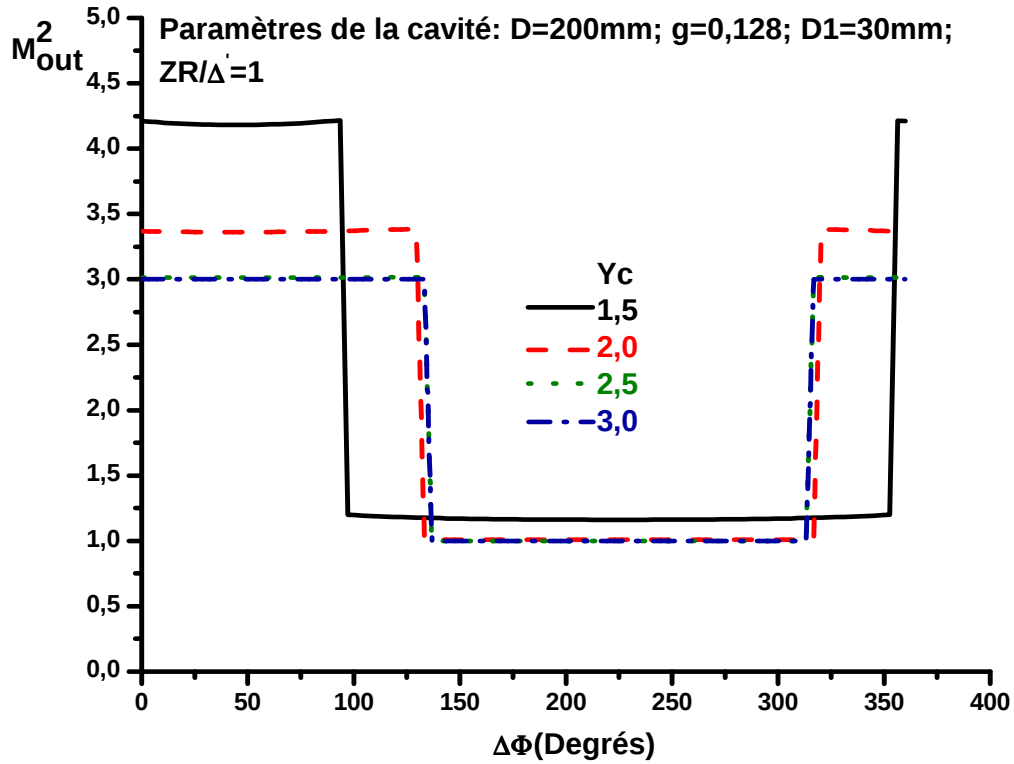


Figure. II.19a: Evolution du facteur de qualité M_{out}^2 d'un faisceau LGp0, à la sortie de la cavité, en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta'=1$; le paramètre d'étude étant la troncature Y_c du diaphragme.

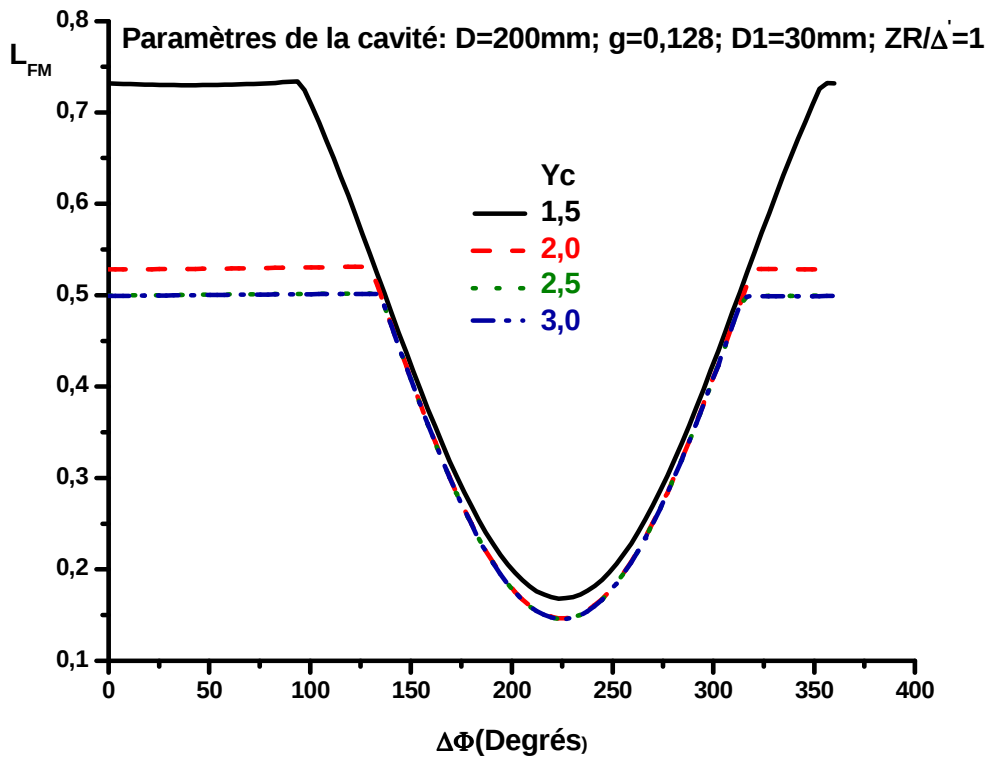


Figure. II.19b: Evolution des pertes du mode fondamental (L_{FM}) en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta'=1$; le paramètre d'étude étant la troncature Y_c du diaphragme.

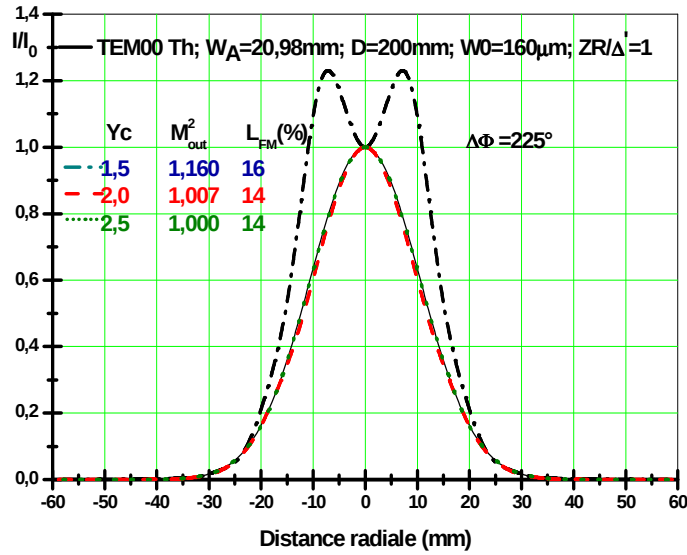


Figure. II.19c1 : Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM00 à une distance $ZA=10,0m$ où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$ et pour la valeur du déphasage microscopique $\Delta\Phi = 225^\circ$.

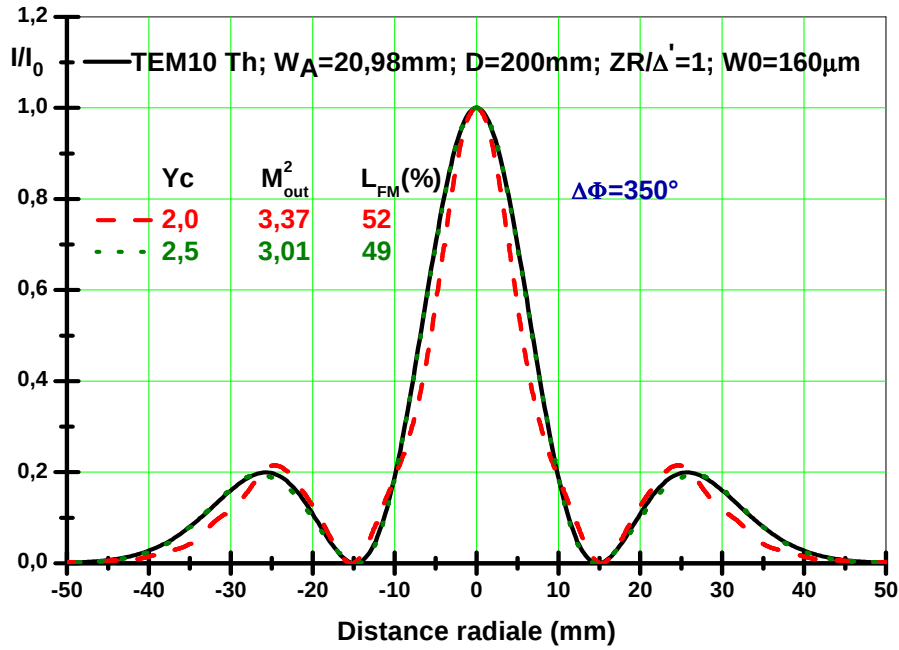


Figure. II.19c2: Profil de l'intensité radiale du mode fondamental TEM10 à une distance $ZA=10,0m$ où le faisceau Gaussien non perturbé est défini par sa largeur $2W_A$ et pour la valeur $\Delta\Phi = 350^\circ$ du déphasage microscopique .

II.3.9 Analyse et interprétation des résultats

Une analyse des courbes représentant l'évolution de la réflectivité d'un mode LG_{p0} en fonction du déphasage microscopique (figures. II.9 à II.11 ci-dessus), d'une part, et celles donnant l'évolution du facteur de propagation M_{out}^2 du mode résonnant en fonction du même déphasage microscopique (figures. II.17b à II.19b), d'autre part, révèle les observations suivantes :

- i. Pour une valeur donnée du paramètre Z_R/Δ' , il existe une parfaite concordance entre ces deux familles de courbes : le niveau des pertes du mode fondamental varie en sens inverse à celui de la variation de la réflectivité du miroir de Michelson par rapport à ce mode.
- ii. Nous relevons le rôle important que joue le paramètre de troncature du diaphragme dans la sélection du mode fondamental, mais aussi dans la détermination du nombre de modes susceptibles d'osciller ; plus grande est la valeur du paramètre de troncature du diaphragme (plus grande est l'ouverture du diaphragme), plus important est le nombre de modes que l'on peut forcer à osciller, bien entendu chacun d'eux correspondant à une plage du déphasage microscopique bien définie.
- iii. En corrélation avec l'observation ci-dessus et pour une grande ouverture du diaphragme, notre modèle rend bien compte des observations expérimentales faites par P.W. Smith **[II.10]** et qui, à notre connaissance, n'ont fait l'objet d'aucune explication. Notons aussi l'absence de diaphragme dans la cavité laser utilisée par P.W. Smith dans son expérience. Nous associons, en ce qui nous concerne, la variation microscopique de la somme (D_1+D_2) des longueurs des bras de l'interféromètre utilisé par P.W. Smith à la variation du déphasage microscopique considéré dans le cadre de notre modèle théorique.
- iv. Pour une ouverture adéquate du diaphragme, le profil de l'intensité radial du mode fondamental TEM_{p0} de la cavité correspond à celui d'un mode Laguerre-Gauss LG_{p0} pur; il suffit de comparer les valeurs obtenues du facteur de propagation de M_{out}^2 à celles correspondant au facteur de propagation $M^2 = 2p + 1$ caractérisant un mode LG_{p0} pur pour étayer notre observation. Par ailleurs, nous observons que le niveau de perte diminue quand le mode résonnant se rapproche d'un mode LG_{p0} . Il est à noter aussi que le niveau de perte du mode résonnant croît avec l'ordre p de ce mode et qu'il est plus important pour les valeurs décroissantes du rapport Z_R/Δ' .

Nous pouvons conclure ce paragraphe comme suit: la réflectivité R_p du miroir de Michelson dépend fortement de l'ordre p du faisceau incident. Cette propriété rend possible que le mode fondamental de la cavité montrée sur la figure. II.2 soit un mode LG_{p0} d'ordre supérieur. En outre, nous avons suggéré un moyen simple pour contrôler le mode résonnant souhaité en ajustant le déphasage microscopique à travers la différence de potentiel appliquée au dispositif piézoélectrique supportant l'un des miroirs de l'interféromètre de Michelson. Cependant, pouvons-nous réellement déterminer le mode d'une cavité à trois miroirs de la figure. II.2, uniquement en introduisant une réflectivité effective R_p , pour chaque mode de la base Laguerre-Gauss, dans la modélisation d'une cavité classique à deux miroirs de la figure. II.3 ? La réponse à cette question comprend deux volets :

- i. Cette modélisation peut aider à expliquer les observations faites P.W. Smith **[II.10]** dans ses travaux cités au début du chapitre II.
- ii. Cette même modélisation reste insuffisante, en ce sens que nous considérons une réflectivité effective, du miroir de Michelson, qui est une grandeur moyennée sur toute la dimension transversale du mode LG_{p0} résonnant et de ce fait elle ne tient pas

compte des modifications spatiales, dues à l'effet de divergence, des modes LG_{p0} réfléchis par le MM.

En conséquence, une modélisation adéquate s'impose ; elle doit tenir compte de tous les effets transverses d'un faisceau réfléchi par un miroir de Michelson (MM), principalement la dépendance de la réflectivité du MM de l'ordre du mode, mais aussi des modifications spatiales de ce dernier. Le nouveau modèle que nous proposons à cet effet fera l'objet de l'approximation.3, ci-dessous.

II.4 Approximation.3

Dans le cas où la valeur de la distance de Rayleigh Z_R , du faisceau incident sur le MM, est de l'ordre ou inférieure à différence de marche macroscopique $\Delta' = D_1 - D_2$, nous pouvons nous attendre à ce que le faisceau réfléchi soit plus large que le faisceau incident et peut être caractérisé par un profil transverse d'intensité différent suite au phénomène d'interférence. Le profil radial du faisceau réfléchi se traduit nécessairement par une dépendance de la coordonnée radiale du facteur de réflexion du MM (rapport de l'amplitude du champ incident à celle du champ réfléchi). Malheureusement, comme nous l'avons déjà souligné au paragraphe II.3.1, nous ne pouvons caractériser le MM par une « distribution transverse » du facteur de réflexion du moment que ce dernier est défini à partir du rapport de deux quantités qui présentent des zéros (les zéros des polynômes de Laguerre). Toute la difficulté dans le modèle que nous proposons est donc de tenir compte de la dépendance radiale du facteur de réflexion du MM. Il est important de souligner qu'à notre connaissance, il n'existe aucun travail publié portant sur la détermination des modes transverses d'une cavité laser, de la figure. II.2, contenant un miroir interférométrique. La détermination du champ résonnant est faite à partir de sa décomposition sur la base orthonormée des fonctions propres de la cavité. Par ailleurs, pour établir la capacité du déphasage microscopique à contrôler l'ordre p du mode transverse TEM_{p0} constituant le mode fondamental de la cavité, nous allons caractériser le faisceau de sortie par son facteur de propagation M_{out}^2 , donné par l'équation (II.60), ci-dessus, qui sera systématiquement comparé au facteur de propagation d'un mode LG_{p0} pur.

II.4.1 Caractérisation des modes transverses d'une cavité comportant un diaphragme et un miroir de Michelson

Avant de procéder au calcul du champ résonnant de la cavité, nous tenons à attirer l'attention sur les remarques importantes suivantes : Il y a une possibilité d'oscillation laser avec la cavité de la figure. II.20, ci-dessous, qu'il faudra absolument éviter. Nous devons prémunir la cavité de la présence de deux faisceaux laser, partageant le même milieu amplificateur, dont leur beam-waist est localisé respectivement au niveau des miroirs M_1 et M_2 et qui entretiennent leur oscillation dans deux résonateurs de longueur $(D_0 + D_1)$ et $(D_0 + D_2)$ respectivement, comme il est le cas dans une cavité de type Vernier-Michelson (paragraphe. II.1). La conséquence de cette situation serait la présence dans la cavité de deux fréquences optiques différentes. Dans ce cas, les propriétés transverses du miroir de Michelson que nous voulons utiliser ne sont plus opérantes pour la raison simple : les faisceaux interférant à la sortie du MM seraient incohérents. Pour résoudre cette difficulté, nous avons fait un choix de

supposer que la sous-cavité ($M_2 - M_3$) est stable tandis que la cavité ($M_1 - BS - M_3$) est instable. Nous pouvons résumer ce choix par les conditions géométriques suivantes :

$$0 < g_2 < 1 \text{ et } g_1 < 0, \quad (\text{II.62})$$

$$g_2 = [1 - (D_0 + D_2)/R_c] \quad (\text{II.63})$$

et

$$g_1 = [1 - (D_0 + D_1)/R_c] \quad (\text{II.64})$$

où R_c est le rayon de courbure du miroir M_3 diaphragmé par une ouverture circulaire de rayon r_0 .

En résumé, nous notons que quand les conditions (II.62) sont remplies, alors les deux ondes interférant à la sortie du miroir de Michelson sont cohérentes et les effets transverses décrits au paragraphe. II.3 peuvent être envisagés.

Il nous paraît utile de commenter les notations, TEM_{p0} et LG_{p0} , adoptées pour définir les modes transverses de notre cavité.

En premier lieu, LG_{p0} réfère à une famille particulière de modes propres symétriques qui en se propageant conservent leur profil transverse d'intensité à l'exception d'un facteur d'échelle correspondant à leur expansion latérale.

En seconde lieu, TEM_{p0} désigne des modes transverses résonnants de la cavité, supposée de symétrie cylindrique, et hiérarchisés par un ordre croissant de pertes de telle manière que le mode TEM_{00} soit le mode dit fondamental de la cavité, en d'autres termes: le mode ayant le plus faible niveau de pertes. Dans une cavité classique à deux miroirs, de symétrie cylindrique et raisonnablement diaphragmée, les modes TEM_{p0} peuvent être approximés par les modes LG_{p0} . Dans ce cas le mode fondamental TEM_{00} est de forme Gaussienne.

Pour des cavités plus complexes, contenant un masque d'amplitude ou de phase, le mode fondamental TEM_{00} de la cavité laser peut être mis en forme en un mode transverse d'ordre supérieur qui peut avoir une ressemblance avec un mode LG_{p0} pour $p \geq 1$.

La cavité que nous considérons, dans cette partie de notre étude, est concernée par la distinction entre modes TEM_{p0} et LG_{p0} car nous voulons précisément forcer le mode fondamental TEM_{00} de notre cavité, contenant un miroir interférométrique induisant des effets transverses, d'avoir la forme d'un mode LG_{p0} pour $p \geq 1$.

II.4.2 Calcul de l'opérateur aller-retour

La cavité objet de notre étude est représentée par la figure. II.20, ci-dessous. Cette dernière illustre les deux cavités citées ci-dessus: la cavité (M_2-M_3) stable de longueur D_0+D_2 et la cavité (M_1-BS-M_3) instable de longueur D_0+D_1 . Sur cette figure, nous présentons le champ électrique retour (E_b) résultant de la réflexion du champ aller (E_f) sur le miroir M_3 diaphragmé. Le champ E_b se scinde en deux parties E_{b1} et E_{b2} , suite à sa réflexion et à sa transmission par la lame séparatrice (BS). Ces deux derniers champs vont être réfléchis respectivement par les miroirs M_1 et M_2 pour donner naissance aux champs E_{f1} et E_{f2} . Ces derniers constitueront, le premier après réflexion par la lame séparatrice et le second après transmission par cette dernière, le nouveau champ aller qui, après avoir parcouru la distance

D_0 , est transmis par le miroir M_3 pour donner naissance au champ résonnant à la sortie de notre cavité à trois miroirs.

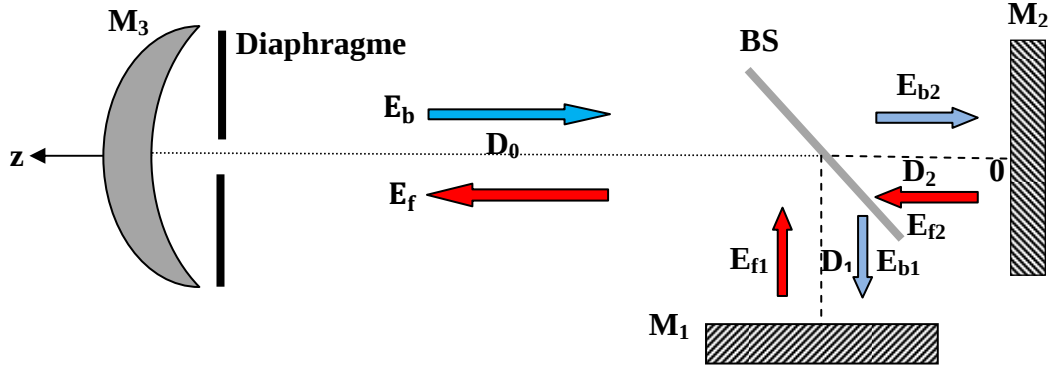


Figure. II.20: Schéma illustrant un résonateur laser incluant un miroir de Michelson permettant le contrôle de l'ordre d'un mode transverse d'ordre supérieur.

Dans une première étape, nous allons déterminer la relation liant les coefficients, indépendants des coordonnées axiale et radiale (ρ, z) , de développement du champ retour (E_b), dans la base des fonctions Laguerre-Gauss, en fonction de ceux du champ aller (E_f) dans cette même base. Cette relation, nous allons la déterminer au point d'abscisse $z = D$, où $D = D_0 + D_2$, qui représente la position du miroir concave M_3 diaphragmé par rapport à l'origine $z=0$; origine qui correspond à la position du miroir M_2 sur l'axe Oz ; D représente aussi la longueur de la cavité stable. Les expressions de développement des champs E_f (champ aller) et E_b (champ retour), dans la base des fonctions Laguerre-Gauss, s'écrivent en toute généralité et en un point z quelconque appartenant à l'intervalle $[D_2, D]$:

$$E_f(\rho, z) = \exp [ik(z - D_2)] \cdot \sum_p f_p G_{fp}(\rho, z), \quad (\text{II.65})$$

pour le champ aller, et

$$E_b(\rho, z) = \exp [ik[2D_0 - (z - D_2)]] \cdot \sum_p b_p G_{bp}(\rho, z), \quad (\text{II.66})$$

pour le champ retour.

Les fonctions Laguerre-Gauss, correspondant aux champs ci-dessus, sont données par :

$$G_{fp}(\rho, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{W(z)} \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{W(z)^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{\rho^2}{W(z)^2} \right) \cdot \exp i \left[\frac{k\rho^2}{2R(z)} - (2p + 1) \cdot \Phi(z) \right] \quad (\text{II.67})$$

$$G_{bp}(\rho, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{W(z)} \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{W(z)^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{\rho^2}{W(z)^2} \right) \cdot \exp -i \left[\frac{k\rho^2}{2R(z)} - (2p + 1) \cdot \Phi(z) \right] \quad (\text{II.68})$$

Au point $z=D$, nous avons les relations suivantes :

$$E_b(\rho, D) = r_c \cdot E_f(\rho, D), \text{ pour } \rho \leq r_0 \quad (\text{II.69})$$

et

$$E_b(\rho, D) = 0, \text{ pour } \rho > r_0. \quad (\text{II.70})$$

où r_c est le coefficient de réflexion en amplitude du miroir concave (M_3) et r_0 le rayon de l'ouverture du diaphragme que l'on suppose placé en contact du miroir concave.

Pour établir la relation entre les coefficients de développement des champs aller et retour, nous allons procéder à l'inversion de l'équation (II.69) ci-dessus. En tenant compte des équations (II.67) et (II.68) ci-dessus et après simplification, l'équation (II.69) peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_p b_p G_{bp}(\rho, D) = r_c \sum_p f_p G_{fp}(\rho, D) \quad (\text{II.71})$$

En multipliant (II.71) par le complexe conjugué $G_{bm}^*(\rho, D)$ et en intégrant sur toute la section « transverse » cylindrique, nous obtenons :

$$\sum_p b_p \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{bp}(\rho, D) G_{bm}^*(\rho, D) d\theta \rho d\rho = r_c \sum_p f_p \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{fp}(\rho, D) G_{bm}^*(\rho, D) d\theta \rho d\rho \quad (\text{II.72})$$

Les propriétés d'orthogonalités des fonctions de Laguerre-Gauss nous permettent d'écrire :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{bp}(\rho, D) G_{bm}^*(\rho, D) d\theta \rho d\rho = \delta_{pm}, \quad (\text{II.73})$$

où δ_{pm} est le symbole de Kronecker.

En tenant compte de (II.73), l'équation (II.72) devient :

$$b_m = r_c \sum_p f_p \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{fp}(\rho, D) G_{bm}^*(\rho, D) d\theta \rho d\rho \quad (\text{II.74})$$

En explicitant le produit $G_{fp}(\rho, D) G_{bm}^*(\rho, D)$ et en posant : $x = \frac{2\rho^2}{w^2(D)}$ et $Y_c = \frac{r_0}{w(D)}$, ce dernier étant défini comme le paramètre de troncature du faisceau par le diaphragme, et en considérant le miroir concave comme une surface d'égale phase où le facteur de phase $\exp\left(\frac{ik\rho^2}{R(D)}\right) = 1$, nous obtenons :

$$b_m = r_c \cdot \exp[-2i\Phi(D)] \sum_p f_p \exp[-2i(p+m) \cdot \Phi(D)] \int_0^{2Y_c^2} L_p(x) \cdot L_m(x) \cdot \exp(-x) dx \quad (\text{II.75})$$

Soit C_{pm} l'intégrale de recouvrement des champs aller et retour, au niveau du miroir concave diaphragmé, définie par :

$$C_{pm} = \int_0^{2Y_c^2} L_p(x) \cdot L_m(x) \cdot \exp(-x) dx \quad (\text{II.76})$$

L'équation (II.75) prendra alors la forme :

$$b_m = r_c \cdot \exp[-2i\Phi(D)] \sum_p f_p \exp[-2i(p+m) \cdot \Phi(D)] \cdot C_{pm} \quad (\text{II.77})$$

Cette dernière équation constitue la relation entre les coefficients de développement du champ retour et ceux du champ aller.

La prochaine étape consiste à trouver la relation entre les coefficients des champs réfléchis par les miroirs M_1 et M_2 et ceux du champ retour donnés par (II.77).

Dans un premier temps, nous allons nous occuper des coefficients de développement des champs réfléchis et transmis par la lame séparatrice et trouver leur expression en fonction des coefficients du champ retour, définis par l'équation (II.77) ci-dessus.

Au point d'abscisse $z = D_2$, position de la lame séparatrice par rapport à l'origine 0, le champ retour se scinde en deux faisceaux ; l'un réfléchis et l'autre transmis par cette lame séparatrice. A quelques facteurs de phase près, dus principalement aux réflexions sur la lame séparatrice et sur les miroirs M_1 et M_2 et qui seront pris en compte par la suite, les coefficients associés aux développements de ces deux faisceaux s'expriment d'une manière simple en fonction de ceux du champ retour.

Les deux composantes E_{1b} et E_{2b} issues du champ retour E_b , par réflexion et transmission de la lame séparatrice, ont pour expression respective :

$$E_{1b}(\rho, D_2) = \sqrt{K} \cdot E_b(\rho, D_2) \text{ et } E_{2b} = \sqrt{1 - K} \cdot E_b(\rho, D_2) \quad (\text{II.78})$$

K et $1-K$ représentent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission (en intensité) de la lame séparatrice.

Soient b_{1p} et b_{2p} les coefficients de développement des champs E_{1b} et E_{2b} dans la même base de développement du champ E_b dont ils sont issus. Les relations liant ces derniers coefficients, en fonction de ceux du champ E_b , sont alors données par :

$$b_{1p} = \sqrt{K} b_p \text{ et } b_{2p} = \sqrt{1 - K} b_p \quad (\text{II.79})$$

Les deux faisceaux E_{1b} et E_{2b} , à partir du point de leur génération, vont chacun d'eux et respectivement parcourir une distance D_1 et D_2 avant d'être réfléchis respectivement sur les miroirs M_1 et M_2 .

Remarque : Nous avons émis l'hypothèse que la cavité $(D_0 + D_1)$ est instable, cela implique $D_1 > D_2$. Comme le miroir M_2 est situé à l'origine $z=0$, il est clair que nous attribuons, de façon imagée, une abscisse négative correspondant à la position du miroir M_1 par rapport à cette même origine. Soit donc $z = -z_0$ la position du miroir M_1 par rapport à notre origine. Nous pouvons aussi exprimer D_1 en fonction de z_0 : $D_1 = D_2 + z_0$

Soient E_{f1} et E_{f2} les faisceaux issus de la réflexion des champs E_{1b} et E_{2b} , respectivement par les miroirs M_1 et M_2 . Nous pouvons écrire en $z = -z_0$:

$$E_{1f}(\rho, -z_0) = r_1 E_{1b}(\rho, -z_0) = r_1 \sqrt{K} \cdot E_b(\rho, -z_0), \quad (\text{II.80})$$

où r_1 représente le coefficient de réflexion en amplitude du miroir M_1 .

Sachant que pour une position z quelconque, les développements des champs E_{f1} et E_b , dans la base des fonctions Laguerre-Gauss, ont pour expressions :

$$E_{1f}(\rho, z) = \exp[ik(z + z_0)] \cdot \sum_p f_{1p} G_{fp}(\rho, z) \quad (\text{II.81})$$

et

$$E_b(\rho, z) = \exp[ik[2D_0 - (z - D_2)]] \cdot \sum_p b_p G_{bp}(\rho, z) \quad (\text{II.82})$$

L'équation (II.80) peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_p f_{1p} G_{fp}(\rho, -z_0) = r_1 \sqrt{K} \exp[ik(2D_0 + D_1)] \cdot \sum_p b_p G_{bp}(\rho, -z_0) \quad (\text{II.83})$$

Afin de trouver la relation entre les coefficients f_{1p} de développement du champ réfléchi par le miroir M_1 et ceux b_p du champ retour, nous allons procéder, de la même manière que ci-dessus, à l'inversion de l'équation (II.83). En multipliant cette dernière par le complexe conjugué $G_{fm}^*(\rho, -z_0)$ et en intégrant cette équation sur toute la section transversale cylindrique, nous obtenons :

$$\sum_p f_{1p} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{fp}(\rho, -z_0) \cdot G_{fm}^*(\rho, -z_0) d\theta \rho d\rho = r_1 \sqrt{K} \exp[ik(2D_0 + D_1)] \cdot \sum_p b_p \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{bp}(\rho, -z_0) \cdot G_{fm}^*(\rho, -z_0) d\theta \rho d\rho \quad (\text{II.84})$$

En tenant compte des propriétés d'orthogonalité des fonctions Laguerre-Gauss, nous en déduisons :

$$f_{1m} = 2\pi r_1 \sqrt{K} \exp[ik(2D_0 + D_1)] \sum_p b_p \int_0^\infty G_{bp}(\rho, -z_0) \cdot G_{fm}^*(\rho, -z_0) \rho d\rho \quad (\text{II.85})$$

En explicitant le produit $G_{bp}(\rho, -z_0) \cdot G_{fm}^*(\rho, -z_0)$ et en tenant compte du fait que

$w(-z_0) = w(z_0)$, $R(-z_0) = -R(z_0)$ et $\Phi(-z_0) = -\Phi(z_0)$, d'une part, et en posant

$y = \frac{2\rho^2}{W^2(z_0)}$, d'autre part, nous obtenons :

$$f_{1m} = A \cdot \sum_p b_p \exp[-2i(p + m)\Phi(z_0)] \cdot \int_0^\infty L_p(y) L_m(y) \exp(-Qy) dy , \quad (\text{II.86})$$

avec

$$A = r_1 \sqrt{K} \exp[ik(2D_0 + D_1)] \exp(-2i\Phi(z_0)) \text{ et } Q = 1 - i \frac{kW^2(z_0)}{2R(z_0)} \quad (\text{II.87})$$

Soit I_{pm} l'intégrale de recouvrement des champs incident et réfléchi, au niveau du miroir M_1 , définie par :

$$I_{pm} = \int_0^\infty L_p(y) L_m(y) \exp(-Qy) dy \quad (\text{II.88})$$

Nous pouvons réécrire l'équation (II.86) sous la forme :

$$f_{1m} = A. \sum_p b_p \exp[-2i(p + m)\Phi(z_0)] \cdot I_{pm} \quad (\text{II.89})$$

Dans l'étape suivante, nous allons chercher la relation entre les coefficients f_{2p} de développement du champ réfléchi par le miroir M_2 et ceux b_p du champ retour.

Au point $z=0$, position du miroir M_2 , nous pouvons écrire :

$$E_{2f}(\rho, 0) = r_2 E_{2b}(\rho, 0) = r_2 \sqrt{1 - K} \cdot E_b(\rho, 0), \quad (\text{II.90})$$

où r_2 est le coefficient de réflexion en amplitude du miroir M_2 .

Sachant que

$$E_{2f}(\rho, z) = \exp(ikz) \cdot \sum_p f_{2p} G_{fp}(\rho, z) \quad (\text{II.91})$$

et

$$E_b(\rho, z) = \exp[ik(2D_0 - (z - D_2))] \cdot \sum_p b_p G_{bp}(\rho, z), \quad (\text{II.92})$$

l'équation (II.90) s'écrit :

$$\sum_p f_{2p} G_{fp}(\rho, 0) = r_2 \sqrt{1 - K} \exp[ik(D + D_0)] \cdot \sum_p b_p G_{bp}(\rho, 0) \quad (\text{II.93})$$

En inversant cette dernière

équation, selon la même procédure que ci-dessus, nous obtenons :

$$f_{2m} = r_2 \sqrt{1 - K} \exp[ik(D + D_0)] b_m \quad (\text{II.94})$$

Notre ultime étape, pour un aller-retour complet, est de trouver la relation entre les coefficients du champ émergent de l'interféromètre et ceux des champs réfléchis par les miroirs M_1 et M_2 .

Au point $z = D_2$, qui correspond à la position de la lame séparatrice sur l'axe Oz , nous pouvons écrire :

$$E_f(\rho, D_2) = \sqrt{K} E_{1f}(\rho, D_1) - \sqrt{1 - K} E_{2f}(\rho, D_2) \quad (\text{II.95})$$

En tenant compte de (II.65), (II.81) et (II.87), nous obtenons :

$$\sum_p f'_p G_{fp}(\rho, D_2) = \sqrt{K} \exp(ikD_1) \sum_p f_{1p} G_{fp}(\rho, D_1) - \sqrt{1 - K} \exp(ikD_2) \sum_p f_{2p} G_{fp}(\rho, D_2) \quad (\text{II.96})$$

ou encore :

$$\sum_p f'_p G_{fp}(\rho, D_2) = \sqrt{K} \exp[ikD_1] \sum_p f_{1p} G_{fp}(\rho, D_1) - \sqrt{1 - K} \exp[ikD_2] \sum_p f_{2p} G_{fp}(\rho, D_2) \quad (\text{II.97})$$

En multipliant (II.93) par le complexe conjugué $G_{fm}^*(\rho, D_2)$ et en intégrant sur toute la section transversale, nous obtenons :

$$f'_m = 2\pi\sqrt{K} \exp[ikD_1] \sum_p f_{1p} \int_0^\infty G_{fp}(\rho, D_1) G_{fm}^*(\rho, D_2) \rho d\rho - \sqrt{1-K} \exp[ikD_2] \quad (\text{II.98})$$

En explicitant le produit $G_{fp}(\rho, D_1) G_{fm}^*(\rho, D_2)$ et en posant :

$$w_1 = w(D_1), w_2 = w(D_2), R_1 = R(D_1), R_2 = R(D_2), \alpha = \frac{2}{w_1^2}, \beta = \frac{2}{w_2^2}, \Phi_1 = \Phi(D_1), \\ \Phi_2 = \Phi(D_2), \Delta' = D_1 - D_2 \text{ et } u = \rho^2, \quad (\text{II.99})$$

nous pouvons réécrire (II.98) sous la forme :

$$f'_m = \sqrt{K} \exp[ikD_1] \sum_p f_{1p} \exp[i(2m+1)\Phi_2 - (2p+1)\Phi_1] \cdot J_{pm} - \sqrt{1-K} \exp[ikD_2] \cdot f_{2m}, \quad (\text{II.100})$$

avec

$$J_{pm} = \frac{2}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p(\alpha u) L_m(\beta u) \exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2} u\right) \exp\left[i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) u\right] du \quad (\text{II.101})$$

En tenant compte des équations (II.86) et (II.90) qui nous donnent les expressions des coefficients de développement des champs réfléchis par les miroirs M_1 et M_2 en fonction de ceux du champ retour, l'équation (II.97) peut être réécrite sous la forme :

$$f'_m = [B \sum_p \{ \sum_n b_n \exp(-2i(n+m)\Phi(z_0)) \cdot I_{nm} \} \exp[i(2m+1)\Phi_2 - (2p+1)\Phi_1] \cdot J_{pm} \\ - r_2(1-K) \exp(2ikD) b_m] \quad (\text{II.102})$$

avec

$$B = r_1 \cdot K \cdot \exp[2ik(D_0 + D_1) \cdot \exp[-2i\Phi(z_0)]] \quad (\text{II.103})$$

En tenant compte de (II.77) qui nous donne la relation entre les coefficients de développement du champ retour en fonction de ceux du champ aller, nous obtenons alors :

$$f'_m = [C \cdot \sum_p \sum_n \sum_q f_q \exp[-2i(q+n) \cdot \Phi(D)] \cdot C_{qn} \cdot P(m, n, p) - S(m)], \quad (\text{II.104})$$

avec

$$P(m, n, p) = \exp[-2i(n+m)\Phi(z_0)] \cdot I_{nm} \cdot \exp[i(2m+1)\Phi_2 - (2p+1)\Phi_1] \cdot J_{pm} \quad (\text{II.105})$$

et

$$S(m) = D^* \cdot \sum_q f_q \exp[-2i(q+m) \cdot \Phi(D)] \cdot C_{qm}, \quad (\text{II.106})$$

où

$$C = B \cdot r_c \cdot \exp[-2i\Phi(D)] \text{ et } D^* = r_c \cdot r_2(K) \exp(2ikD) \cdot \exp[-2i\Phi(D)]. \quad (\text{II.107})$$

En procédant à la permutation entre les indices m et p, l'équation (II.101) devient :

$$f'_p = [C. \sum_m \sum_n \sum_q f_q \exp[-2i(q+n). \Phi(D)] . C_{qn}. P(p, n, m) - S(p)], \quad (II.108)$$

avec

$$P(p, n, m) = \exp[-2i(n+p)\Phi(z_0)]. I_{np}. \exp i[(2m+1)\Phi_2 - (2m+1)\Phi_1]. J_{mp} \quad (II.109)$$

et

$$S(p) = D^*. \sum_q f_q \exp[-2i(q+p). \Phi(D)] . C_{qp} . \quad (II.110)$$

L'équation (II.105), ci-dessus, peut s'écrire sous forme condensée :

$$f'_p = \sum_q M_{pq}. f_q \quad (II.111)$$

Avec M_{pq} qui représente la matrice aller retour et dont l'expression est donnée par :

$$M_{pq} = C. \sum_m \sum_n \exp[-2i(q+n). \Phi(D)] . C_{qn}. P(p, n, m) - S(p) \quad (II.112)$$

En tenant compte des équations (II.107), (II.109) et (II.110), ci-dessus, nous pouvons réécrire (II.109) sous sa nouvelle forme :

$$\begin{aligned} M_{pq} = & \exp 2i(kD - \Phi(D)) \{ K. r_c. r_1 \exp i[2k\Delta - 2\Phi(z_0) - 2q\Phi(D) + (2p+1)\Phi_2]. \\ & . \sum_m \sum_n \exp i[-2n\Phi(D) - 2(n+m)\Phi(z_0) - (2m+1)\Phi_1] C_{qn}. I_{nm}. J_{mp} - r_c. r_2 (1 - K). \\ & . \exp[-2i(p+q). \Phi(D)] . C_{qp} \} \end{aligned} \quad (II.113)$$

Pour pouvoir caractériser le mode résonnant à sa sortie de la cavité, il est nécessaire de connaître son développement dans la base des fonctions propres de la cavité. A cette fin, nous allons calculer les coefficients du développement de ce champ dans cette base et à la sortie de la cavité. Pour cela, écrivons l'équation de continuité du champ à la sortie de la cavité au point $z=D$, nous avons :

$$E_s(\rho, D) = \tau . E_i(\rho, D) \text{ pour } \rho \leq r_0 \quad (II.114)$$

et

$$E_s(\rho, D) = 0 \text{ pour } \rho > r_0 \quad (II.115)$$

Les indices i et s réfèrent à intérieur et extérieur respectivement et τ est le facteur de transmission du miroir concave.

En développant les champs E_i et E_s , de l'équation (II.114), ci-dessus, dans la base des fonctions propres de la cavité, nous obtenons :

$$\sum_p f_{sp} G_{fp}(\rho, D) = \tau. \sum_p f_{ip} G_{fp}(\rho, D) \quad (II.116)$$

En multipliant (II.116) par le complexe conjugué $G_{fm}^*(\rho, D)$ et en intégrant sur toute la section transversale, nous aboutissons à :

$$\sum_p f_{sp} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_{fp}(\rho, D) \cdot G_{fm}^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\Phi = \tau \cdot \sum_p f_{ip} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} G_{fp}(\rho, D) \cdot G_{fm}^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\Phi \quad (\text{II.117})$$

En tenant compte de l'orthogonalité des fonctions propres de notre base, nous pouvons réécrire (II.117) sous la forme :

$$f_{sm} = \tau \cdot \sum_p f_{ip} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} G_{fp}(\rho, D) \cdot G_{fm}^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\Phi \quad (\text{II.118})$$

En explicitant par leur expression les fonctions propres intervenant dans (II.118), nous obtenons finalement :

$$f_{sm} = \tau \sum_p f_{ip} C_{pm} \exp[-2i(p - m)\Phi(D)], \quad (\text{II.119})$$

où C_{pm} représente l'intégrale de recouvrement que nous avons déjà définie ci-dessus.

La connaissance, à l'aide de (II.119), des coefficients de développement du champ à la sortie de la cavité, nous permet de déterminer complètement ce dernier.

Nous allons considérer la même base de quatre vingt fonctions Laguerre-Gauss, que ci-dessus, et nous allons dans ce qui suit présenter les résultats obtenus portant sur l'étude du facteur de propagation M_{out}^2 à la sortie de la cavité (voir paragraphe II.3.7), le niveau des pertes du mode résonnant ainsi que le profil de l'intensité radiale de ce dernier en fonction de deux paramètres :

- i. Le premier, lié au miroir de Michelson, est le déphasage microscopique pour une valeur donnée du rapport Z_R/Δ' . Notons que chaque valeur de ce rapport correspond à une valeur bien définie de la longueur D_1 de l'un des deux bras de l'interféromètre.
- ii. Le second, lié au diaphragme, définit la troncature du faisceau et est donné par le rapport sans dimension $Y_c = r_0/w(D)$, défini ci-dessus.

Notre étude a été faite en considérant les paramètres géométriques suivants de la cavité stable (M3, M2) : sa longueur optique $D = D_0 + D_2$, avec $D_0 = 200\text{mm}$ et $D_2 = 30\text{mm}$ et son paramètre $g_2 = 0.1$, qui correspond à la valeur $w_0 \approx 160 \mu\text{m}$ du beam-waist du faisceau Gaussien. Notons par ailleurs que le faisceau LG_{p0} , incident sur l'interféromètre de Michelson est supposé monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$.

II.5 Résultats

Les résultats obtenus et portant sur la variation de M_{out}^2 en fonction du déphasage microscopique sont présentés sur les figures. II.21a, II.22a et II.23a ci-dessous. Ces dernières correspondent à trois valeurs distinctes du paramètre sans dimension Z_R/Δ' ; respectivement 10, 3 et 1. Afin de comparaison, ces trois valeurs du rapport Z_R/Δ' ont été choisies identiques

à celles utilisées dans le cadre de l'approximation 2, ci-dessus, à la seule différence que c'est la distance D_1 qui est variable ; nous avons choisi trois valeurs de cette dernière : 105.26mm, 55.44mm et 37.52mm, correspondant dans l'ordre aux trois valeurs de Z_R/Δ' fixées avec $Z_R = 76,66\text{mm}$. Pour chacune des ces valeurs, nous présentons la courbe donnant les pertes des modes résonnants; les résultats obtenus sont présentés dans l'ordre sur les figures. II.21b, II.22b et II.23b, ci-dessous. Nous terminons notre étude par la présentation, pour chacune des valeurs choisies de Z_R/Δ' , le profil radial de l'intensité des modes résonnants; les résultats obtenus sont donnés par les figures. II.21c, II.22c et II.23c, ci-dessous.

a) Résultats obtenus pour $Z_R/\Delta' = 10$

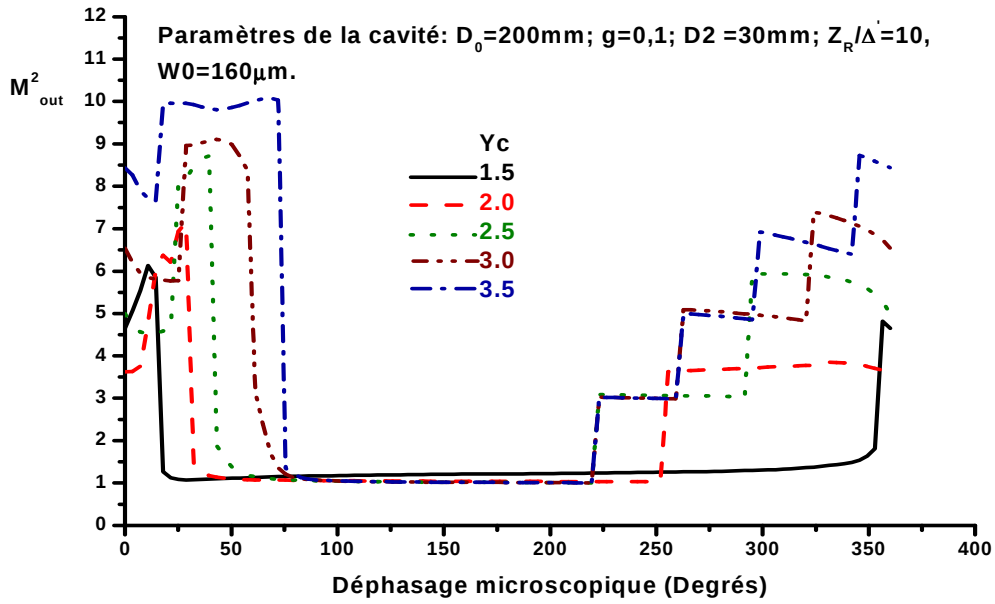


Figure. II.21a: Variation du facteur de propagation M^2_{out} en fonction du déphasage microscopique pour différentes valeurs du paramètre de troncature Y_c et pour $Z_R/\Delta' = 10$.

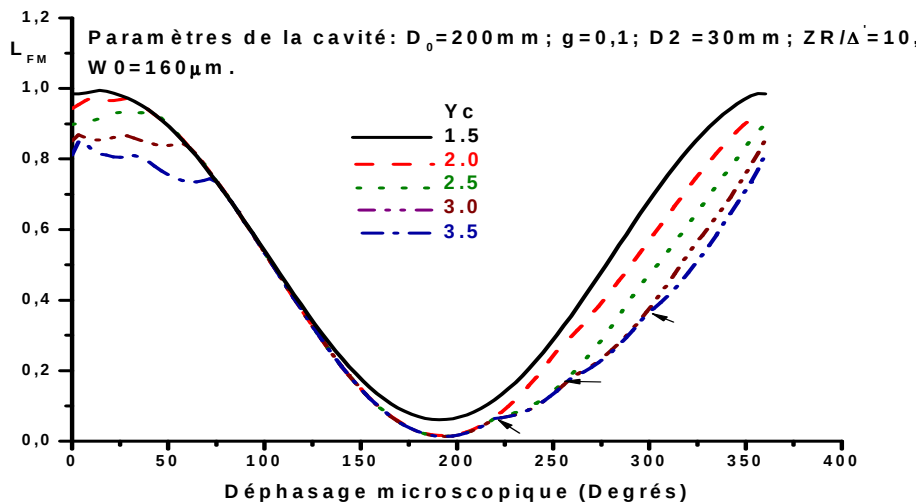


Figure. II.21b: Variation des pertes du mode fondamental en fonction du déphasage microscopique pour différentes valeurs du paramètre de troncature Y_c et pour $Z_R/\Delta' = 10$. Les flèches indiquent les valeurs du déphasage microscopique pour lesquelles le mode résonnant passe d'un ordre à un ordre immédiatement supérieur.

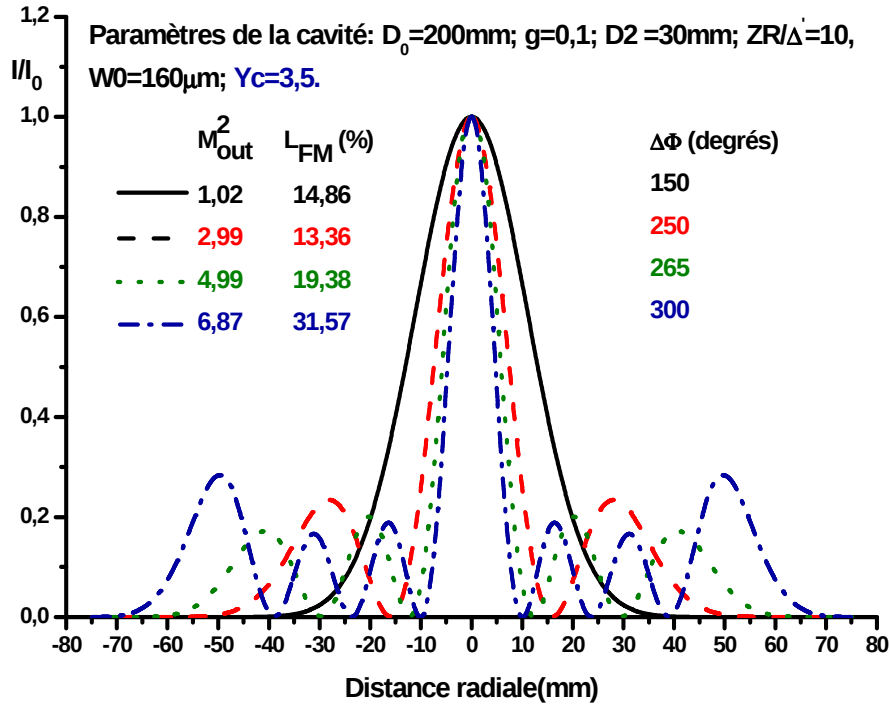


Figure. II.21c: Profil radial de l'intensité des modes résonnants en fonction du déphasage microscopique, obtenus pour $Z_R/\Delta' = 10$ et pour la valeur du paramètre de troncature $Y_c = 3.5$.

Commentaires: L'analyse des figures. II.21a, b et c, ci-dessus et correspondant à $Z_R/\Delta' = 10$, représentant respectivement l'évolution du facteur de propagation M_{out}^2 en fonction du déphasage microscopique, le niveau de pertes L_{FM} en fonction de ce même déphasage microscopique et enfin le profil radial de l'intensité normalisée des modes résonnants, nous conduit aux observations suivantes:

- Pour une ouverture donnée du diaphragme (pour une valeur donnée du paramètre de troncature Y_c), il existe une parfaite concordance entre la hiérarchie de la "stimulation" du mode fondamental de la cavité et le niveau de pertes correspondant.
- Le nombre de modes d'ordres élevés, susceptibles d'être excités en fonction du déphasage microscopique, augmente avec l'ouverture du diaphragme. Ce résultat est important dans la mesure où il nous permet de contrôler l'ordre du mode désiré en changeant uniquement la valeur du déphasage microscopique pour une ouverture donnée du diaphragme.

En corrélation avec la dernière observation ci-dessus, et pour la valeur 3.5 du paramètre de troncature Y_c , nous pouvons sélectionner successivement les modes fondamentaux TEM_{00} , TEM_{10} , TEM_{20} , et TEM_{30} , en ajustant uniquement la valeur du déphasage microscopique. La valeur du facteur de propagation M_{out}^2 correspondant à ces modes est très proche de celle du mode LG_{p0} du même ordre, à l'exception du mode TEM_{30} , pour lequel l'influence des effets transverses semblent plus perceptibles. Le profil radial de l'intensité normalisée des modes sélectionnés met en relief les observations faites ci-dessus. Notons par ailleurs que le niveau de pertes augmente avec l'ordre du mode résonnant.

b) Résultats obtenus pour $Z_R/\Delta' = 3$

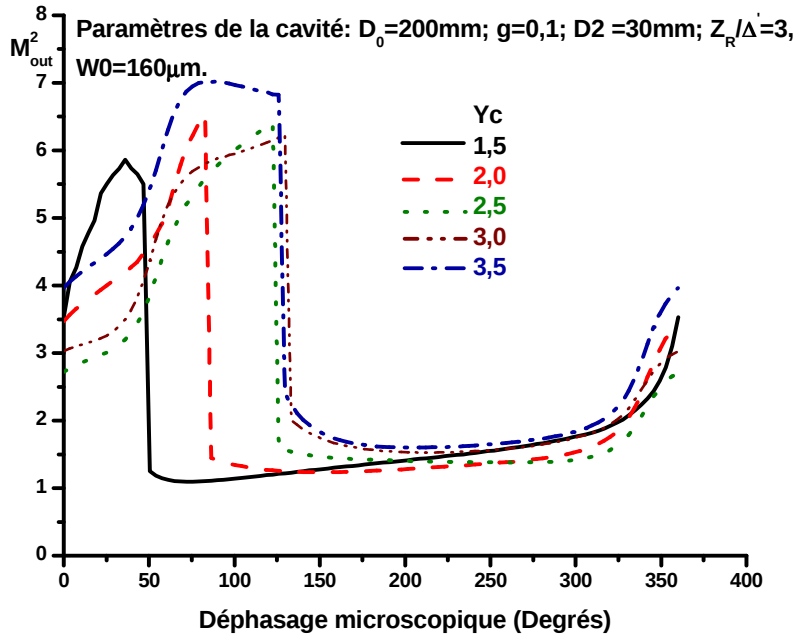


Figure. II.22a: Variation du facteur de propagation M_{out}^2 en fonction du déphasage microscopique pour différentes valeurs du paramètre de troncature Y_c et pour $Z_R/\Delta' = 3$.

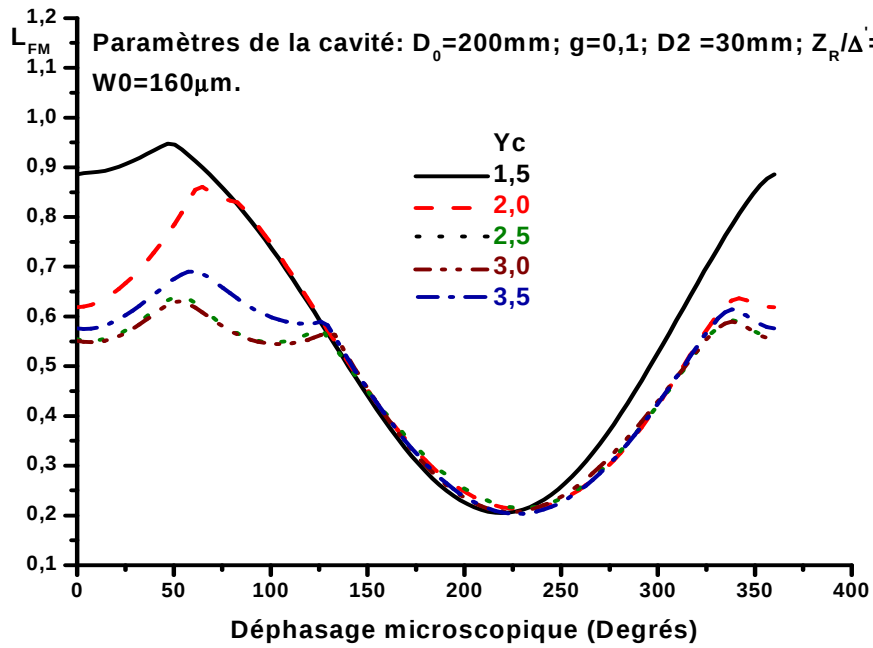


Figure. II.22b : Variation des pertes du mode fondamental en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta' = 3$ et pour différentes valeurs du paramètre de troncature Y_c .

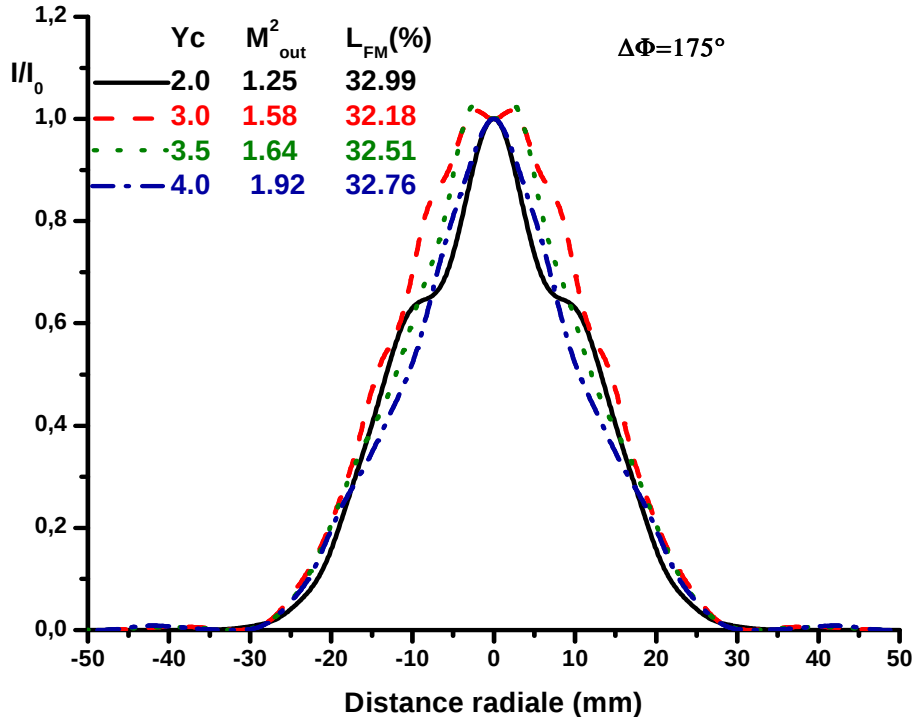


Figure. II.22c1: Profil radial de l'intensité du mode résonnant en fonction du paramètre de troncature Y_c du diaphragme pour la valeur $\Delta\Phi = 175^\circ$ du déphasage microscopique et pour $Z_R/\Delta' = 3$.

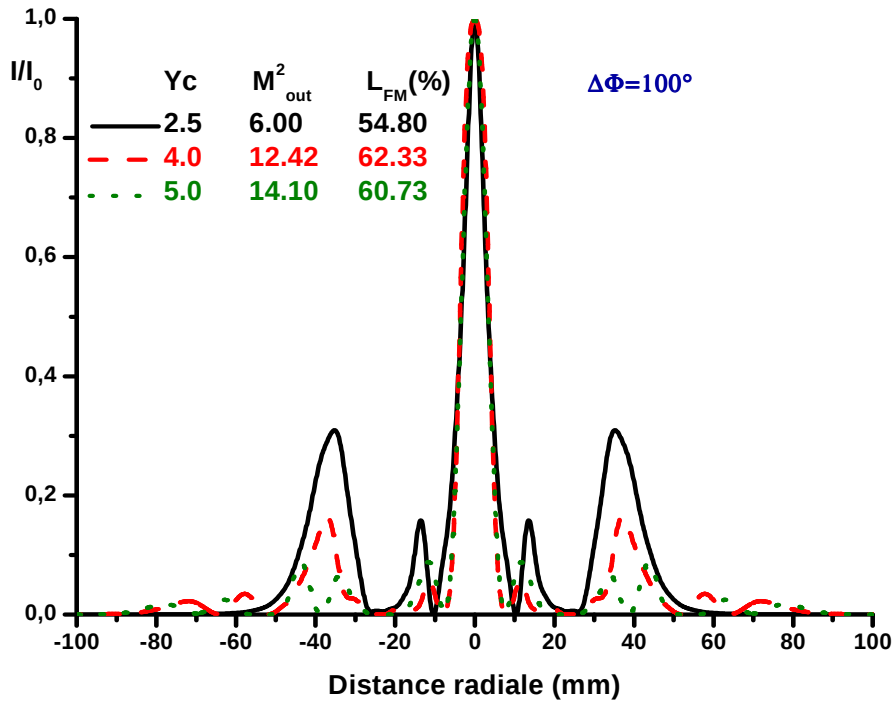


Figure. II.22c2: Profil radial de l'intensité des modes résonnants en fonction du paramètre de troncature Y_c du diaphragme pour la valeur $\Delta\Phi = 100^\circ$ du déphasage microscopique et pour $Z_R/\Delta' = 3$.

Commentaires: Une comparaison des résultats obtenus avec ceux correspondant à $Z_R/\Delta' = 10$, nous amène aux constats suivants:

- i. De toute évidence, la souplesse dans le contrôle de l'ordre du mode désiré n'apparaît pas à travers l'évolution du facteur de propagation du faisceau en fonction du déphasage microscopique.
- ii. Le plateau correspondant à l'évolution de M_{out}^2 dans l'intervalle $[150^\circ-300^\circ]$ suggère l'oscillation du même mode et ce quelque soit l'ouverture du diaphragme. Cependant le profil radial de l'intensité du mode résonnant dans cet intervalle ne s'apparente pas à un mode du type LG_{p0} pur (figure. II.22c1).
- iii. Il existe une possibilité de forcer la cavité à faire osciller un mode ayant la forme d'un mode LG_{p0} avec $p > 1$, mais avec un niveau élevé de pertes (figure. II.22c2).

c) Résultats obtenus pour $Z_R/\Delta' = 1$

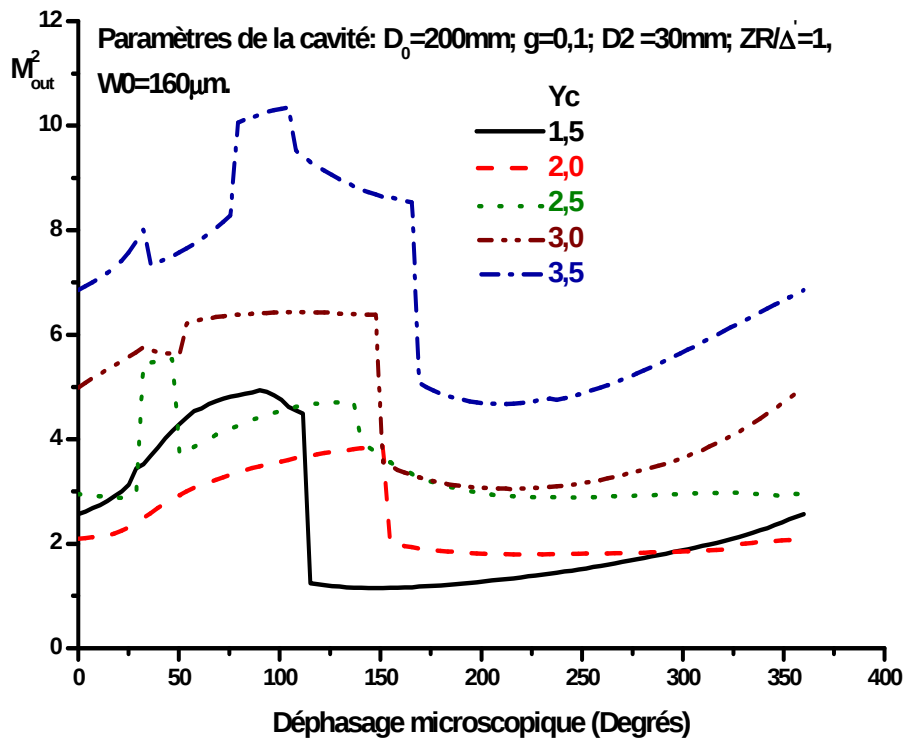


Figure II.23a: Variation du facteur de propagation M_{out}^2 en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta' = 1$ et pour différentes valeurs du paramètre de troncature Y_c .

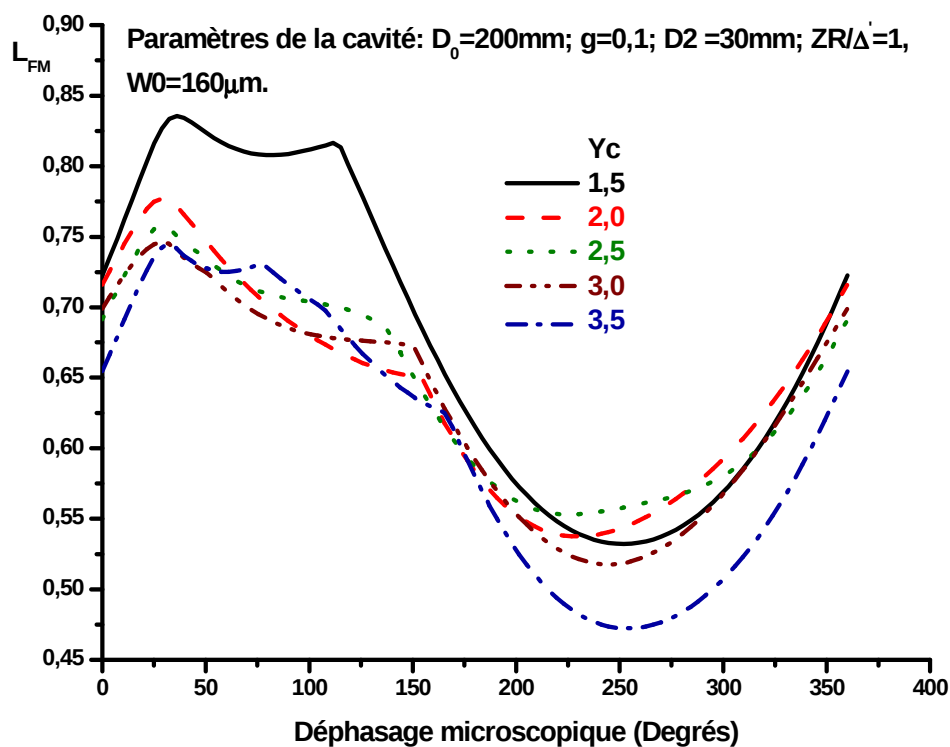


Figure. II.23b: Variation des pertes du mode fondamental en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta' = 1$ et pour différentes valeurs du paramètre de troncature Y_c .

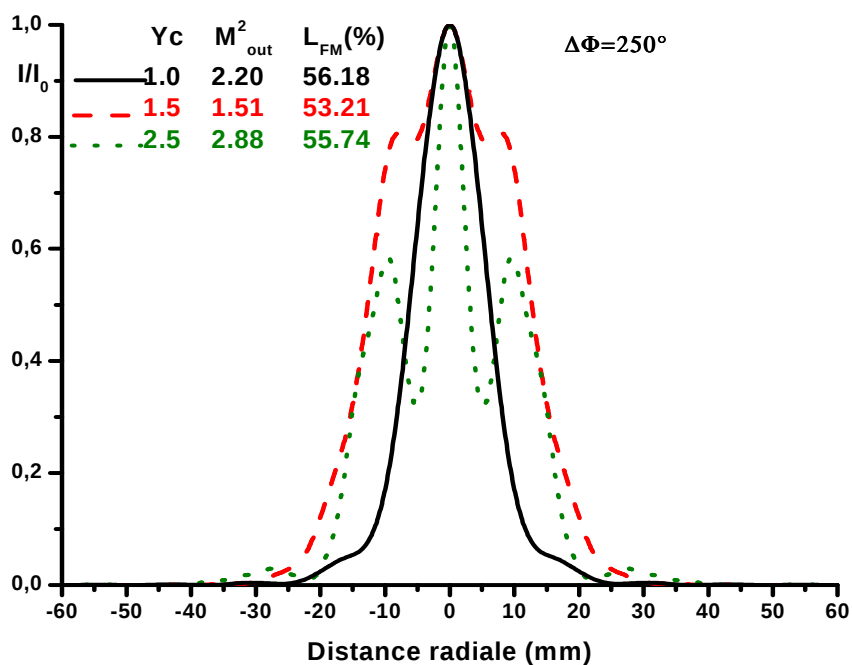


Figure. II.23c1: Profil radial de l'intensité des modes résonnants en fonction du paramètre de troncature Y_c du diaphragme pour la valeur $\Delta\Phi = 250^\circ$ du déphasage microscopique et pour $Z_R/\Delta' = 1$.

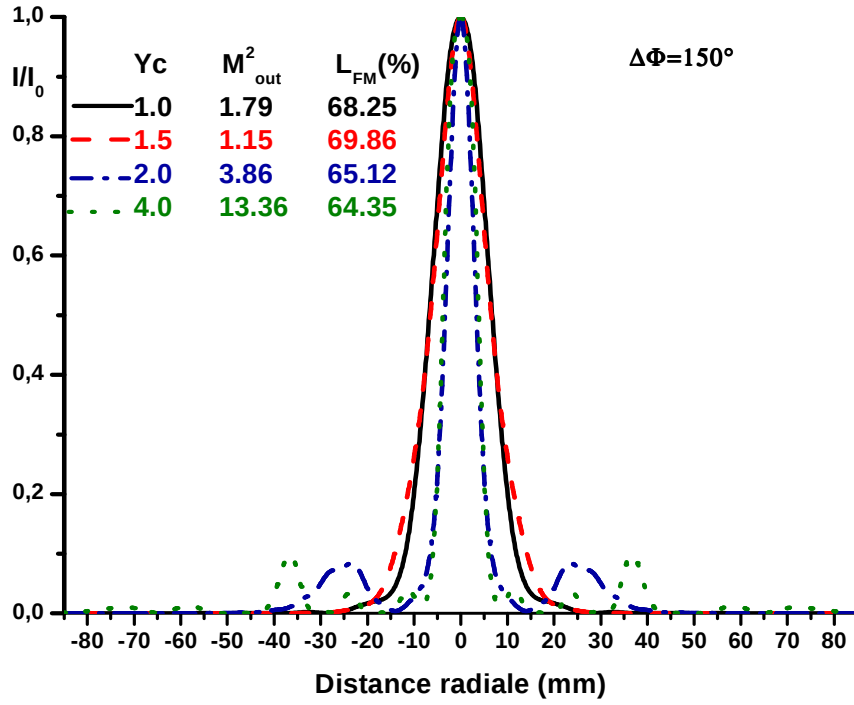


Figure. II.23c2: Profil radial de l'intensité des modes résonnants en fonction du paramètre de troncature Y_c du diaphragme pour la valeur $\Delta\Phi = 150^\circ$ du déphasage microscopique et pour $Z_R/\Delta' = 1$.

Commentaires: En plus des observations faites pour les résultats obtenus pour $Z_R/\Delta' = 3$, nous relevons le niveau de pertes élevé des modes résonnants de la cavité. Par ailleurs, nous notons, à travers les profils d'intensité des modes résonnants (figures. II.23c1 et c2), les constats suivants:

- i. Les profils des modes résonnants, d'ordre relativement bas, ne correspondent pas à ceux des modes LG_{p0} purs (figure. II.23c1).
- ii. Il existe une possibilité de forcer la cavité à osciller sur des modes qui présentent une ressemblance avec les modes LG_{p0} , avec $p > 1$, mais avec des niveaux élevés de pertes (figure. II.23c2).

II.5.1. Conclusion

Nous observons effectivement que, pour une valeur relativement élevée du paramètre Z_R/Δ' , la variation du déphasage microscopique se traduit par des sauts de l'ordre du mode fondamental de la cavité de la figure. II.20. Nous observons aussi que pour un déphasage microscopique donné, l'ordre du mode est très sensible au paramètre de troncature Y_c du faisceau. Ces observations constituent un résultat important par lequel il est démontré la possibilité de forcer le mode fondamental d'une cavité laser sous la forme d'un mode LG_{p0} avec $p \geq 1$, sans introduire ni masque de phase ni masque d'amplitude, mais en ajustant de manière microscopique la position d'un miroir à l'aide d'un support piézoélectrique par exemple. Du point de vue mode transverse, nous avons démontré qu'une cavité laser contenant un miroir de Michelson offre une propriété d'agilité dans le contrôle de l'ordre du mode ; cette propriété aurait des incidences pratiques utiles. Il ressort clairement que

l'utilisation d'un miroir interférométrique dans une cavité laser offre, en plus d'une souplesse et d'une flexibilité, l'avantage d'un coût relativement peu élevé en comparaison avec la méthode utilisant des masques de phase ou d'amplitude pour les mêmes objectifs, à savoir forcer le mode fondamental d'une cavité sous la forme d'un mode d'ordre supérieur unique.

Il est important de noter la réduction de la flexibilité et de la souplesse du miroir de Michelson, dans le contrôle de l'ordre du mode transverse du mode fondamental, pour des valeurs plus faibles du rapport Z_R/Δ' . Cet effet est illustré par les figures. II.22a et II.23a, ci-dessous, qui donne la variation de M_{out}^2 en fonction du déphasage microscopique pour $Z_R/\Delta' = 3$ et 1. Cependant, nous observons la possibilité de forcer notre cavité à faire osciller des modes proches des modes LG_{p0} d'ordres supérieurs, mais caractérisés par des niveaux élevés de pertes. Pour la bonne exploitation de ces derniers résultats, nous suggérons l'introduction d'un amplificateur dans chacun des bras de l'interféromètre et pour justifier notre approximation sur la monochromaticité du mode résonnant, nous proposons l'introduction dans notre cavité d'un étalon Fabry-Pérot, comme il est indiqué sur la figure. II.24, ci-dessous.

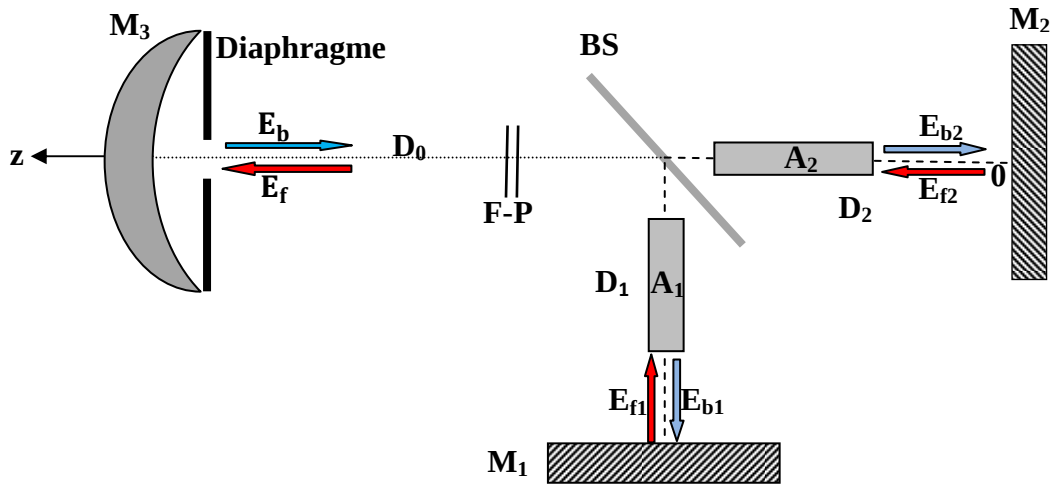


Figure. II.24: Nous reproduisons sur cette figure une version de la cavité de la figure. II.20, ci-dessus, où on a introduit deux milieux amplificateurs A_1 et A_2 , pour compenser les pertes des modes de la forme LG_{p0} d'ordre supérieur, et un étalon Fabry-Pérot (F-P) pour la sélection du mode longitudinal résonnant monochromatique.

II.6 Conclusion du chapitre II

Nous avons considéré le mode fondamental d'une cavité à trois miroirs basée sur l'utilisation d'un miroir interférométrique de la forme d'un miroir de Michelson. Il a été démontré que le déphasage microscopique du miroir de Michelson pouvait être varié à l'aide d'un dispositif piézoélectrique supportant un des deux miroirs de l'interféromètre de Michelson, permettant ainsi la possibilité d'obtenir un mode fondamental de la cavité sous la forme d'un mode LG_{p0} avec $p \geq 1$, à condition que la différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre est de l'ordre du dixième de la distance de Rayleigh du faisceau incident sur le MM. Nous avons démontré qu'un miroir de Michelson est capable d'ajuster le mode transverse du mode fondamental comme si l'on avait introduit un masque de phase ou d'amplitude dans le résonateur, mais avec les avantages cités ci-dessus : flexibilité, souplesse et moindre coût. A notre connaissance, nous sommes les premiers à proposer une modélisation d'une cavité à trois miroirs permettant la détermination de son mode fondamental. Habituellement, la mise en forme est obtenue à l'aide d'éléments optiques diffractifs. Nous avons démontré que l'utilisation intra-cavité d'un miroir de Michelson rend possible, avec des avantages spécifiques, la mise en forme interférométrique d'un faisceau laser.

Notons par ailleurs que cette deuxième partie de notre travail a été soumise pour publication **[II.18]**.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

- [II.1] A.A. Ishaaya, N. Davidson, G. Machavariani, E. Friesem, “Efficient selection of high Laguerre Gaussian modes in a Q-switched ND:YAG laser”, IEEE J. Quantum Electron. **39**, 74-82 (2003).
- [II.2] G. Machavariani, Effects of phase errors on high order mode selection with intra-cavity phase element, Appl. Opt. **43**, 6328-6333 (2004).
- [II.3] A. Hasnaoui, A. Bencheikh, M. Fromager, E. Cagniot, K. Aït-Ameur, “Creation of a sharper focus by using a rectified TEM_{p0} beam”, Opt. commun. **284**, 1331-1334 (2011) and, Erratum Opt. Commun. **284**, 4107 (2011).
- [II.4] E. Cagniot, M. Fromager, T. Godin, N. Passilly, K. Aït-Ameur “Transverse super-resolution technique involving rectified Laguerre Gaussian LG_{p0} beams”, J. Opt. Soc. Am. **A28**, 1709-1715 (2011).
- [II.5] W. W. Rigrod, Isolation of axi-symmetrical optical-resonator modes, Appl. Phys. Lett. **2**, 51-53 (1963).
- [II.6] K. M; Abramsky, H.J. Baker, A.D Colley, R.R. Hall, single-mode selection using coherent imaging within a slab waveguide CO₂ laser, Appl. Phys. Lett. **60**, 2469-2471 (1992).
- [II.7] A. Hasnaoui, K. Aït-Ameur, Properties of a laser cavity containing an absorbing ring, Appl. Opt. **49**, 4034-4043 (2010).
- [II.8] M. Ciofini, A. Labate, R. Meucci, P. Y. Wang, Experimental evidence of selection and stabilization of spatial patterns in a CO₂ laser by means of spatial perturbations, Opt. Commun. **154**, 307-312 (1998).
- [II.9] D. Sabourdy, V. Kermene, A. Desfarges-Berthelemot, M. Vampouille, A. Barthélémy “coherent combining of two Nd: YAG lasers in a Vernier-Michelson- type cavity”, Appl. Phys. **B 75**, 503-507 (2002).
- [II.10] P.W. Smith, Stabilized single frequency output from a long laser cavity, IEEE J. of Quantum Electron. **QE-1**, 343-348 (1965).
- [II.11] M. DiDomenico, Characteristics of a single-frequency Michelson-type He-Ne Gas laser, IEEE J. of Quantum Electron. **QE-2**, 311-322 (1966).
- [II.12] P.W. Smith, Single frequency laser, in *Lasers: a series of Advances*, Vol. 4, A.K. Levine and A.J. De Maria, (Dekker eds. New-York, 1976), chap.2.
- [II.13] E. Cagnot, Z. Derrar-Kaddour, M. Fromager and Aït-Ameur, Improving both transverse mode discrimination and diffraction losses in plano-concave cavity, Opt. Commun. **281**, 4449-4454 (2008).
- [II.14] M. Born and E. Wolf Principles of optics 6ème edition, Pergamon press, 1959.

- [II.15]** K. Kogelnik and T. Li, Laser beams and resonators. Appl. Opt. **Vol 5**, 1550-1567 (1966).
- [II.16]** S. Vicalvi, R. Borghi, M. Santarsiero and F.R. Gori, Shape-invariance error for axially symmetric light beams. IEEE J. of Quantum Electron. **QE-34**, 2109-2116 (1998).
- [II.17]** A. E. Siegman, Proc. SPIE, **1224**, 2 (1990)

CONCLUSION GENERALE

Dans la première partie de notre travail, nous avons étudié théoriquement l'influence d'une mauvaise collimation du faisceau incident sur la précision de la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau laser. Nous avons démontré que la mauvaise collimation d'un faisceau Gaussien monochromatique, incident sur l'interféromètre de Michelson, se traduit par une variation de la visibilité des franges d'interférence comme si le faisceau incident était non monochromatique. En fait, nous mesurons une largeur spectrale apparente $\delta\nu$, bien que la largeur spectrale du faisceau incident est nulle ($\delta\nu_{\text{inc}}=0$), qui croît de manière quadratique avec la divergence angulaire du faisceau incident ($\delta\nu = C\theta_0^2$). Par ailleurs, nous avons montré que nous rencontrons la même source d'erreurs systématiques dans la mesure de la longueur de cohérence d'un faisceau Gaussien non monochromatique ($\delta\nu_{\text{inc}} \neq 0$) incident sur l'interféromètre de Michelson. Dans ce cas, nous avons trouvé que les effets transverses, responsables des mesures erronées de la longueur de cohérence à l'aide d'un interféromètre de Michelson, se manifestent quand $\delta\nu_{\text{inc}}$ est inférieure à environ 1 GHz. Au delà de cette limite, la longueur de cohérence du faisceau incident est suffisamment courte, en comparaison avec la longueur de Rayleigh associée à ce faisceau, et pour une différence de marche de l'ordre ou inférieure à la longueur de cohérence, les deux faisceaux interférant à la sortie de l'interféromètre sont quasi identiques rendant ainsi les effets transverses inopérants. Dans cette situation, la réponse de l'interféromètre de Michelson correspond au cas d'une onde plane. Par ailleurs, nous avons étudié l'influence de l'ordre p d'un mode transverse LG_{p0} monochromatique, incident sur l'interféromètre de Michelson, sur la mesure de sa longueur de cohérence. Dans ce cas aussi, nous avons mis en évidence l'effet d'une mauvaise collimation, à travers la divergence angulaire dépendant de l'ordre du mode considéré, dans la mesure de cette longueur de cohérence ; une loi d'échelle a été obtenue ($\delta\nu = C_p \theta_0^2$), donnant la variation de la largeur spectrale apparente en fonction de la divergence angulaire θ_0 , du faisceau Gaussien associé au mode considéré, où la constante de proportionnalité C_p dépend linéairement de l'ordre p du faisceau incident. Par ailleurs, nous avons étudié l'influence de la composition en différents modes transverses du faisceau incident sur la précision de la mesure de sa longueur de cohérence ; nous avons trouvé que la largeur spectrale mesurée ou apparente $\delta\nu$ croît avec le facteur de propagation M^2 du faisceau incident ; plus précisément la largeur spectrale apparente dépend plus du contenu du mélange des modes transverses que de M^2 .

Les résultats obtenus sont très importants sur le plan pratique ; ils mettent en évidence les soins nécessaires à prendre pour une meilleure collimation du faisceau incident, autrement les mesures de la longueur de cohérence d'un faisceau laser, ou de toute autre source de lumière en général, seraient entachées d'erreurs qui sont loin d'être négligeables. Dans le cas où la lumière à caractériser, par des mesures de la longueur de cohérence, est initialement injectée dans une fibre optique le choix de cette dernière, une fibre mono mode ou multi modes, revêt une importance particulière. En effet l'injection d'une lumière dans une fibre optique multi modes conduit la projection de cette lumière sur la base du système de modes transverses

propre à cette fibre. En conséquence le faisceau à la sortie de la fibre, qui constituera le faisceau incident sur l'interféromètre de Michelson, résulte nécessairement de la superposition d'un nombre plus ou moins élevés de modes spatiaux. Dans ce cas la valeur du facteur de propagation M^2 pourrait être si élevée que les effets associés à une mauvaise collimation pourraient se manifester ce qui conduirait à des mesures erronées de la longueur de cohérence.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous avons montré que la réflectivité R_p du miroir de Michelson dépend fortement de l'ordre p du faisceau incident. Cette propriété rend possible que le mode fondamental de la cavité à trois miroirs (le MM inclus) soit un mode LG_{p0} d'ordre supérieur. En outre, nous avons suggéré un moyen simple pour contrôler le mode résonnant souhaité en ajustant le déphasage microscopique à l'aide d'un dispositif piézoélectrique supportant l'un des miroirs de l'interféromètre de Michelson. Il est à noter que notre modélisation portant sur la réduction de notre cavité à trois miroirs à celle à deux miroirs plans, où l'un des deux miroirs est approximé par un MM de réflectivité R_p , ne peut rendre compte des effets transverses qui constituent les fondements de notre objectif, à savoir la mise en forme intra-cavité d'un faisceau laser. Cependant, cette approche rend bien compte des observations faites P.W. Smith dans ses travaux.

Pour pallier aux insuffisances relevées dans l'approche ci-dessus, nous avons considéré le mode fondamental d'une cavité à trois miroirs où l'on tient compte de manière indirecte des propriétés spatiales du mode résonnant sur le facteur de réflexion de l'interféromètre de Michelson. Nous avons montré que la variation du déphasage microscopique, entre les deux faisceaux interférant à la sortie de l'interféromètre, permet la possibilité d'obtenir un mode fondamental de la cavité sous la forme d'un mode LG_{p0} avec $p \geq 1$, à condition que la différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre est de l'ordre du dixième de la distance de Rayleigh du faisceau incident sur le MM. Nous avons donc montré qu'un miroir de Michelson est capable d'ajuster le mode transverse du mode fondamental comme si l'on avait introduit un masque de phase ou d'amplitude dans le résonateur, mais avec les avantages de flexibilité, de souplesse et de moindre coût. Nous avons ainsi démontré que l'utilisation intra-cavité d'un miroir de Michelson rend possible, avec des avantages spécifiques, la mise en forme interférométrique d'un faisceau laser. A notre connaissance, nous sommes les premiers à proposer une modélisation d'une cavité à trois miroirs permettant la détermination de son mode fondamental.

ANNEXES

Annexe I.0

Nous allons dans cette partie procéder au calcul des champs transmis et réfléchi par l'interféromètre de Michelson éclairé par une onde plane de la forme :

$$E_i = E_0 \exp(-ikz) \quad (\text{AI.0.1})$$

L'onde incidente E_i sur le MM, figure (AI.0) ci-dessous, est divisée en deux ondes par le BS situé à l'origine de l'axe oz : la première réfléchie E_1 par le BS et la seconde E_2 transmise par ce dernier. Soient D_1 et D_2 les longueurs des deux bras du MM.

Nous allons introduire deux déphasages Φ_r et Φ_t correspondant à la réflexion et la transmission du BS respectivement ; le BS est aussi défini par ses coefficients de réflexion et de transmission en intensité, respectivement K et $1-K$.

L'onde E_1 réfléchie par le BS va parcourir le chemin optique D_1 où elle va être réfléchie par le miroir M_1 , de coefficient de réflexion en amplitude r_1 , pour donner naissance à l'onde E_3 dont l'expression au niveau du BS s'écrit :

$$E_3 = r_1 \sqrt{K} E_0 \exp[i(\pi + \Phi_r - 2kD_1)] \quad (\text{AI.0.2})$$

où le déphasage égal à π est celui que subit l'onde E_1 lors de sa réflexion sur le miroir M_1 . Notons que l'onde E_2 réfléchie par le miroir M_2 subit ce même déphasage.

Au niveau du BS, l'onde E_3 se scinde à son tour en deux ondes : la première E_5 réfléchie par le BS et la seconde E_7 transmise par ce dernier, et dont les expressions sont données par :

$$E_5 = r_1 K E_0 \exp[i(\pi + 2\Phi_r - 2kD_1)] \quad (\text{AI.0.3})$$

et

$$E_7 = r_1 \sqrt{K(1-K)} E_0 \exp[i(\pi + \Phi_r + \Phi_t - 2kD_1)] \quad (\text{AI.0.4})$$

La même démarche nous permet d'écrire l'expression de l'onde E_4 issue de la réflexion de l'onde incidente E_2 par le miroir M_2 , de coefficient de réflexion en amplitude r_2 :

$$E_4 = r_2 \sqrt{1-K} E_0 \exp[i(\pi + \Phi_t - 2kD_2)] \quad (\text{AI.0.5})$$

Au niveau du BS l'onde E_4 se scinde en deux ondes : la première E_6 transmise par le BS et la seconde E_8 réfléchie par ce dernier, et dont les expressions sont données par :

$$E_6 = r_2 (1-K) E_0 \exp[i(\pi + 2\Phi_t - 2kD_2)] \quad (\text{AI.0.6})$$

et

$$E_8 = r_2 \sqrt{K(1-K)} E_0 \exp[i(\pi + \Phi_r + \Phi_t - 2kD_2)] \quad (\text{AI.0.7})$$

Les ondes réfléchie et transmise par le BS ont pour expression respective :

$$E_R = E_5 + E_6 \quad (\text{AI.0.8})$$

et

$$E_T = E_7 + E_8 \quad (\text{AI.0.9})$$

En remplaçant E_5 et E_6 par leur expression respective à partir des équations (AI.0.3) et (AI.0.6) ci-dessus, dans l'équation (AI.0.8), d'une part, et en remplaçant E_7 et E_8 par leur expression respective à partir des équations (AI.0.4) et (AI.0.7) dans l'équation (AI.0.9), nous obtenons :

$$E_R = r_1 K E_0 \exp[i(\pi + 2\Phi_r - 2kD_1)] + r_2 (1 - K) E_0 \exp[i(\pi + 2\Phi_t - 2kD_2)] \quad (\text{AI.0.10})$$

et

$$E_T = r_1 \sqrt{K(1 - K)} E_0 \exp[i(\pi + \Phi_r + \Phi_t - 2kD_1)] + r_2 \sqrt{K(1 - K)} E_0 \exp[i(\pi + \Phi_r + \Phi_t - 2kD_2)] \quad (\text{AI.0.11})$$

En considérant notre système sans pertes ($r_1 = r_2 = 1$) et en supposant que $K = 1/2$, les équations (AI.0.10) et (AI.0.11) peuvent être écrites sous leur nouvelle forme :

$$E_R = -(E_0/2) \{ \exp[i(2\Phi_r - 2kD_1)] - \exp[i(2\Phi_t - 2kD_2)] \} \quad (\text{AI.0.12})$$

et

$$E_T = -(E_0/2) \{ \exp[i(\Phi_r + \Phi_t - 2kD_1)] + \exp[i(\Phi_r + \Phi_t - 2kD_2)] \} \quad (\text{AI.0.13})$$

Notre système étant sans pertes, la conservation de l'énergie nous impose :

$$|E_i|^2 = |E_R|^2 + |E_T|^2 \quad (\text{AI.0.14})$$

Cette dernière équation se traduit par la condition :

$$\cos[2(\Phi_r - \Phi_t) + 2k(D_2 - D_1)] + \cos[2k(D_2 - D_1)] = 0 \quad (\text{AI.0.15})$$

Soit $\Delta = 2(D_2 - D_1)$ la différence de marche entre les ondes réfléchies (transmises) par le MM. En considérant le cas résonnant ; i.e. $\Delta = n\lambda$, la condition (AI.0.14) devient :

$$\cos[2(\Phi_r - \Phi_t)] + 1 = 0 \quad (\text{AI.0.16})$$

En considérant le cas où la transmission du BS n'introduit aucun déphasage, i.e. $\Phi_t = 0$, alors nous obtenons la solution $\Phi_r = \pi/2$, c'est-à-dire que la réflexion de l'onde incidente sur le BS se traduit par un déphasage de $\pi/2$ et les équations (AI.0.11) et (AI.0.12) deviennent :

$$E_R = (1/2)[E_i(2D_1) - E_i(2D_2)] \quad (\text{AI.0.17})$$

et

$$E_T = -(i/2)[E_i(2D_2) + E_i(2D_1)] \quad (\text{AI.0.18})$$

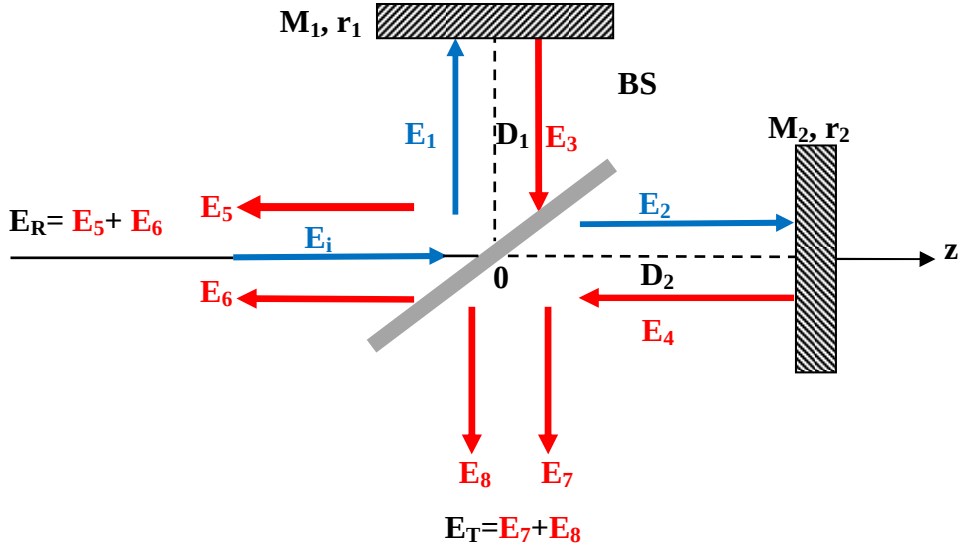


Figure. A.I.0 : Représentation du schéma de l'interféromètre de Michelson permettant le calcul des champs réfléchi et transmis par ce dernier.

Annexe I.1 Calcul de la visibilité des franges d'interférence dans le cas d'une onde plane non monochromatique.

L'onde plane incidente sur l'interféromètre de Michelson est caractérisée par sa distribution spectrale de l'intensité $J(\nu)$; son intensité dans l'intervalle des fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ s'écrit $dI = J(\nu)d\nu$. En utilisant l'équation (1), son intensité à la sortie de l'interféromètre de Michelson est donnée par :

$$dI = (J(\nu)d\nu/2)[1 + \cos(k\Delta)] , \quad (\text{AI.1.1})$$

où $k = 2\pi\nu/c_0$ est le module du vecteur d'onde et Δ la différence de marche entre les deux faisceaux interférant à la sortie de l'interféromètre.

L'intensité totale à la sortie de l'interféromètre est obtenue en intégrant (AI.1.1) sur toute la distribution spectrale du faisceau incident :

$$I(\Delta) = \int_0^\infty (J(\nu)/2) [1 + \cos(k\Delta)] d\nu \quad (\text{AI.1.2})$$

Dans l'hypothèse d'une onde incidente définie par une distribution spectrale de forme Gaussienne, centrée en ν_0 et de largeur à mi-hauteur $\delta\nu$, l'expression de cette dernière est donnée par :

$$J(\nu) = J_0 \exp\{-4\ln 2[(\nu - \nu_0)/\delta\nu]^2\} \quad (\text{AI.1.3})$$

Avec l'hypothèse $(\nu_0/\delta\nu) \gg 1$, l'intégrale de l'équation (AI.1.2) peut être étendue à l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

En procédant au changement de variable,

$u = 2\sqrt{\ln 2}(v - v_0)/\delta v$ et en posant $\alpha = \pi\delta v/c_0\sqrt{\ln 2}$, l'équation (AI.1.2) prend la forme :

$$I(\Delta) = (J_0\delta v/4\sqrt{\ln 2})\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2)\cos[(k + \alpha u)\Delta] du\right\} \quad (\text{AI.1.4})$$

Sachant que:

$$\cos[(k + \alpha u)\Delta] = \cos(k\Delta)\cos(\alpha.\Delta.u) - \sin(k\Delta)\sin(\alpha.\Delta.u), \quad (\text{AI.1.5})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi} \quad (\text{AI.1.6})$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2)\cos(au) du = \sqrt{\pi}\exp(-a^2/4) \quad (\text{AI.1.7})$$

l'équation (AI.1.4) devient :

$$I(\Delta) = (I_0/2)\{1 + \exp[-(\alpha\Delta/2)^2]\cos(k\Delta)\}, \quad (\text{AI.1.8})$$

où

$$I_0 = (J_0\delta v/2)\sqrt{\pi/\ln 2}. \quad (\text{AI.1.9})$$

Sachant que $-1 \leq \cos(k\Delta) \leq +1$, nous obtenons le résultat de la visibilité V_{NM} des franges d'interférence :

$$V_{\text{NM}} = [I_{\text{max}} - I_{\text{min}}]/[I_{\text{max}} + I_{\text{min}}] = \exp\left[-(\pi\delta v\Delta/2c_0\sqrt{\ln 2})^2\right] \quad (\text{AI.1.10})$$

Annexe I.2. Calcul de la transmission T_G de l'interféromètre de Michelson éclairé par un faisceau Gaussien monochromatique.

La transmission de l'interféromètre de Michelson lorsque le faisceau incident est Gaussien et monochromatique est définie par un rapport de puissances ; celle du faisceau transmis à celle du faisceau incident: $T_G = P_t/P_i$.

La puissance du faisceau transmis s'écrit :

$$P_t = 2\pi \cdot \int_0^\infty E_t \cdot E_t^* \rho d\rho, \quad (\text{AI.2.1})$$

où l'expression du champ transmis E_t en fonction de la coordonnée radiale (transversale) est donnée par :

$$E_t(\rho) = \sqrt{K(1-K)} \cdot [E_i(\rho, z_1) + E_i(\rho, z_2)], \quad (\text{AI.2.2})$$

où K et $(1 - K)$ représentent respectivement les coefficient de réflexion et de transmission en intensité de la lame séparatrice (beam splitter) et $E_i(\rho, z_i)$ le champ incident au point d'abscisse z_i et dont l'expression est donnée par :

$$E_i(\rho, z_i) = E_0 \cdot \frac{w_0}{w(z_i)} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\rho}{w(z_i)} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[-i \left(k \cdot z_i - \Phi(z_i) + \frac{k\rho^2}{2R(z_i)} \right) \right], \quad (\text{AI.2.3})$$

où

$$z_i = z_m + 2D_i; \quad i=1,2. \quad (\text{AI.2.4})$$

En appliquant (A.I.1) à (A.I.2), pour la valeur de $K=0.5$, nous obtenons,

$$P_t = \frac{\pi}{2} (E_0 w_0)^2 [(1/w_1^2)I_1 + (1/w_2^2)I_2 + (2/w_1 w_2)I_3], \quad (\text{AI.2.5})$$

où

$$I_1 = \int_0^\infty \exp \left(-2 \left(\frac{\rho}{w_1} \right)^2 \right) \rho d\rho, \quad I_2 = \int_0^\infty \exp \left(-2 \left(\frac{\rho}{w_2} \right)^2 \right) \rho d\rho \quad (\text{AI.2.6})$$

et

$$I_3 = \int_0^\infty \exp(-a\rho^2) \cos(b + c\rho^2) \rho d\rho, \quad (\text{AI.2.7})$$

avec

$$a = \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2}, \quad b = (\varphi_2 - \varphi_1) - (\Phi_2 - \Phi_1) \quad \text{et} \quad c = \frac{k}{2} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]. \quad (\text{AI.2.8})$$

De la même manière, en appliquant (AI.2.1) à (AI.2.3) à l'entrée de l'interféromètre au point $z = z_m$, nous obtenons la puissance du faisceau incident,

$$P_i = \pi(w_0 E_0)^2 / 2. \quad (\text{AI.2.9})$$

A partir des équations (AI.2.4) et (AI.2.7), nous en déduisons l'équation donnant la transmission T_G de l'interféromètre de Michelson,

$$T_G = (1/w_1^2)I_1 + (1/w_2^2)I_2 + (2/w_1 w_2)I_3 \quad (\text{AI.2.10})$$

En posant $x = 2\rho^2/w_i^2$ et donc $dx = 4\rho d\rho/w_i^2$, nous obtenons

$$(1/w_1^2)I_1 = (1/w_2^2)I_2 = 1/4 \quad (\text{AI.2.11})$$

et

$$(2/w_1 w_2)I_3 = (2/w_1 w_2) \left[\cos(b) \int_0^\infty \cos(c\rho^2) \exp(-a\rho^2) \rho d\rho - \sin(b) \int_0^\infty \sin(c\rho^2) \exp(-a\rho^2) \rho d\rho \right] \quad (\text{AI.2.12})$$

En posant $y = \rho^2$ et donc $dy = 2\rho d\rho$, et en tenant compte de (A.I.2.9), nous pouvons écrire (A.I.2.10) sous la forme:

$$T_G = 1/2 + 1/w_1 w_2 [\cos(b) \int_0^\infty \cos(cy) \exp(-ay) dy - \sin(b) \int_0^\infty \sin(cy) \exp(-ay) dy] . \quad (\text{A.I.2.13})$$

L'intégration par parties des sommes intervenant dans (A.I.2.13) nous donne

$$\int_0^\infty \cos(cy) \exp(-ay) dy = a/a^2 + c^2 \quad (\text{A.I.2.14})$$

et

$$\int_0^\infty \sin(cy) \exp(-ay) dy = c/a^2 + c^2 \quad (\text{A.I.2.15})$$

Ces derniers résultats nous permettent de réécrire l'expression de T_G ci-dessus sous sa nouvelle forme:

$$T_G = 1/2 + (a \cos(b) - c \sin(b))/w_1 w_2 (a^2 + c^2). \quad (\text{A.I.2.16})$$

Notre variable d'étude étant la différence de marche entre les deux faisceaux interférant à la sortie de l'interféromètre de Michelson, nous allons dans ce qui suit étudier l'évolution de toutes les grandeurs intervenant dans (A.I.2.16) en fonction de cette variable, avec comme paramètre la divergence angulaire du faisceau incident sur l'interféromètre de Michelson.

Les figures AI.2. (1, 2, 3 et 4) ci-dessous traduisent cette étude.

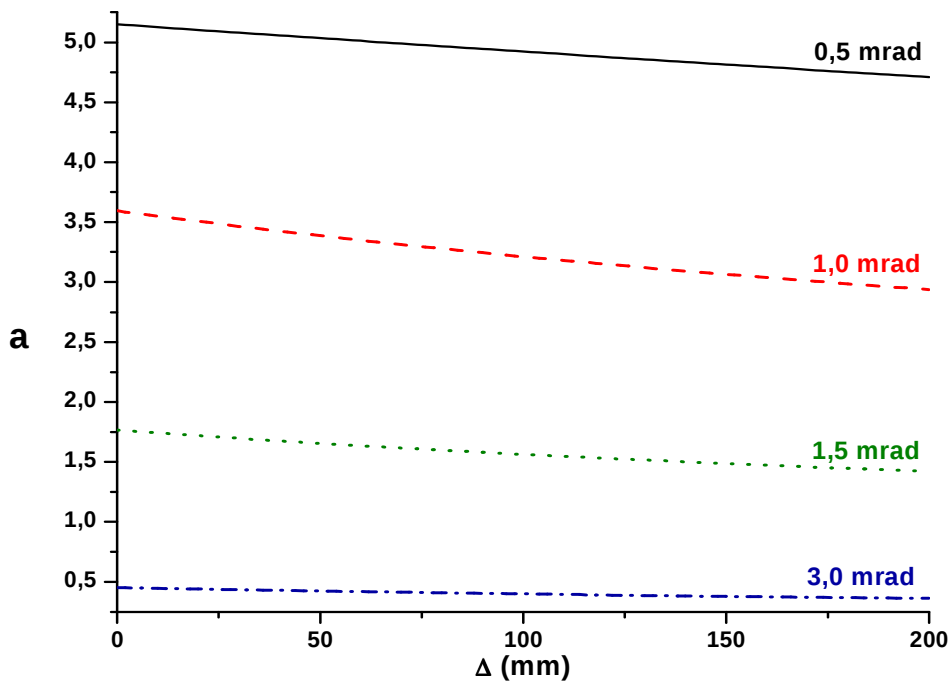


Figure. AI.2.1 : Evolution de la grandeur a en fonction de la différence de marche Δ , le paramètre d'étude étant la divergence du faisceau incident.

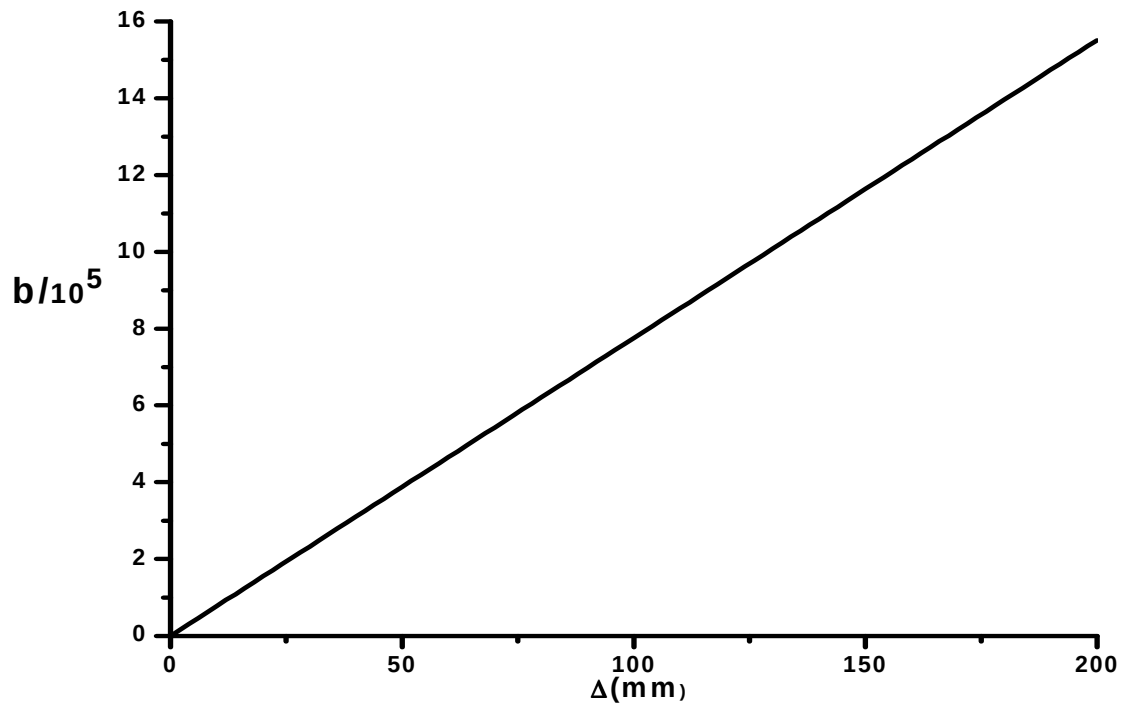


Figure. AI.2.2 : Evolution de la grandeur b en fonction de la différence de marche Δ , le paramètre d'étude étant la divergence du faisceau incident.

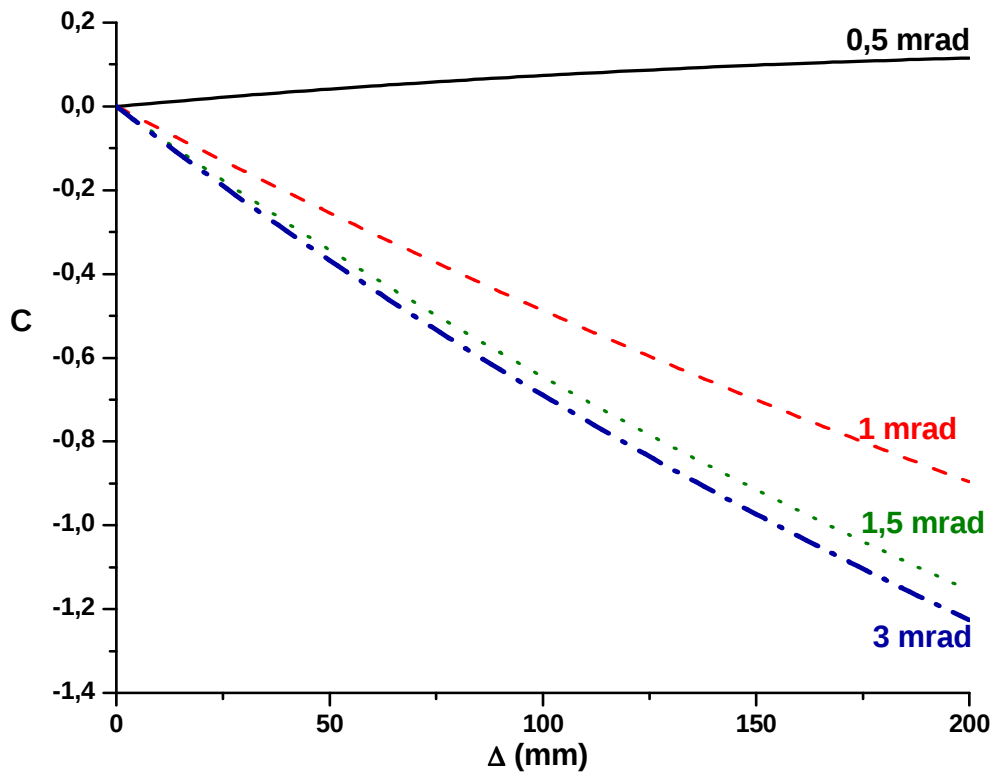


Figure. AI.2.3: Evolution de la grandeur c en fonction de la différence de marche Δ , le paramètre d'étude étant la divergence du faisceau incident.

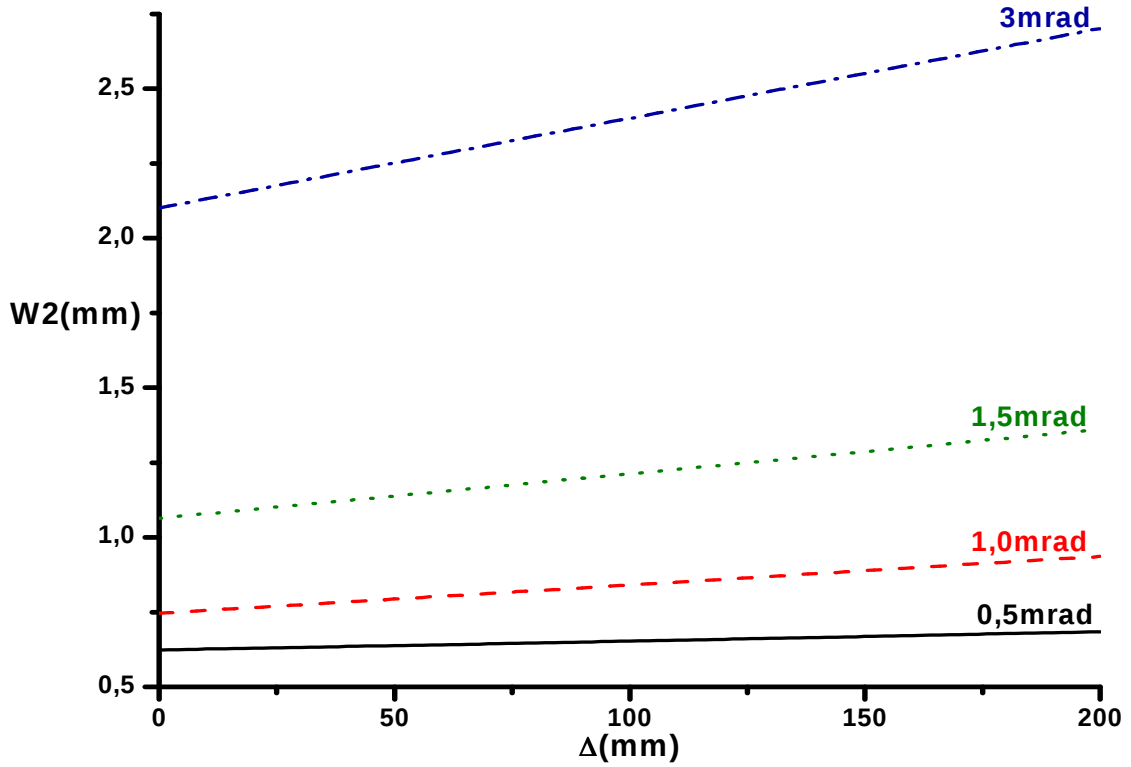


Figure. AI.2.4: Evolution de la grandeur w_2 en fonction de la différence de marche Δ , le paramètre d'étude étant la divergence du faisceau incident.

Commentaires : Il ressort, à travers les figures.AI. (1, 2, 3, et 4) ci-dessus, que les valeurs des quantités a , b , c et w_2 varient en fonction de la différence de marche Δ . Cependant, nous notons que la grandeur b est nettement plus sensible à cette variation.

En conséquence, l'étude la fonction $f(b) = a \cdot \cos(b) - c \cdot \sin(b)$, dans (A.I.13), en fonction de la différence de marche Δ , montre que celle-ci présente un extrémum pour la valeur $b_0 = -\text{Arctg}(c/a)$ pour lequel elle atteint une valeur maximum $y_{\max} = +\sqrt{a^2 + c^2}$ et une valeur minimum $y_{\min} = -\sqrt{a^2 + c^2}$.

Nous en déduisons les expressions suivantes des extrémums de la transmission T_G :

$$(T_G)_{\max} = (1/2)\{1 + 2/w_1 w_2 \sqrt{a^2 + c^2}\} \quad (\text{AI.2.14})$$

et

$$(T_G)_{\min} = (1/2)\{1 - 2/w_1 w_2 \sqrt{a^2 + c^2}\} \quad (\text{AI.2.15})$$

Les équations (AI.2.14) et (AI.2.15) nous permettent, à l'aide de l'équation qui définit la visibilité V_G des franges d'interférence, d'écrire la nouvelle expression de cette visibilité :

$$V_G = 2/w_1 w_2 \sqrt{a^2 + c^2} \quad (\text{AI.2.16})$$

Annexe I.3 Calcul de la transmission TG_{NM} de l'interféromètre de Michelson éclairé par un faisceau Gaussien non monochromatique.

Le faisceau sous étude, incident sur l'interféromètre de Michelson, est caractérisé par deux distributions Gaussiennes. La première concerne son champ électrique $E_i(\rho, z)$ et la seconde a trait à la distribution spectrale de son intensité $J(\nu)$ et qui sont données par :

$$E_i(\rho) = E_0 \cdot \frac{w_0}{w(z_m)} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\rho}{w(z_m)}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-i\left(k \cdot z_m - \Phi(z_m) + \frac{k\rho^2}{2R(z_m)}\right)\right], \quad (AI.3.1)$$

et
$$J(\nu) = J_0 \cdot \exp\{-4\ln 2[(\nu - \nu_0)/\delta\nu]^2\}. \quad (AI.3.2)$$

Si nous supposons que la transmission de la lame séparatrice est de 50%, alors la distribution du champ transmis à la sortie de l'interféromètre de Michelson est donnée par :

$$E_t(\rho) = (1/2)[E_i(\rho, z_1) + E_i(\rho, z_2)] \quad (AI.3.3)$$

L'intensité émise dans l'intervalle des fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ est égale à $dI = J(\nu)d\nu$ et l'intensité totale est donnée par $I_0 = \int_0^\infty J(\nu)d\nu$.

L'expression de la transmission TG_{NM} de l'interféromètre est déduite de celle obtenue dans le cas d'un faisceau Gaussien monochromatique étendue à tout le spectre des fréquences défini par une largeur spectrale $\delta\nu_{inc}$. Ce faisant, nous obtenons l'expression TG_{NM} :

$$TG_{NM} = 1/2 + \left[\int_0^\infty J(\nu)d\nu \int_0^\infty (1/w_1 w_2) \exp(-a\rho^2) \cos(b + c\rho^2) \rho d\rho \right] / \int_0^\infty J(\nu)d\nu \quad (AI.3.4)$$

En notant que les quantités a , b et c sont celles que nous avons définies dans le cas d'un faisceau Gaussien monochromatique :

$$a = 1/w_1^2 + 1/w_2^2, b = (\varphi_2 - \varphi_1) - (\Phi_2 - \Phi_1) \text{ et } c = (k/2)[1/R_2 - 1/R_1], \quad (AI.3.5)$$

où

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = k \cdot \Delta = (2\pi/\lambda) \cdot \Delta = (2\pi/c_0) \nu \cdot \Delta \quad (AI.3.6)$$

et en intégrant (AI.3.4) sur la dimension radiale ρ , nous obtenons :

$$TG_{NM} = 1/2 + \left[\int_0^\infty (1/w_1 w_2) [(a \cos b - c \sin b)/(a^2 + c^2)] J(\nu) d\nu \right] / \int_0^\infty J(\nu) d\nu \quad (AI.3.5)$$

En posant

$b = x\nu - \Delta\Phi$, $c = y\nu$ avec $x = 2\pi\Delta/c_0$, $y = (\pi/c_0)(1/R_2 - 1/R_1)$ où c_0 représente la vitesse de la lumière dans le vide, nous pouvons réécrire l'expression de TG_{NM} ci-dessus sous la forme :

$$TG_{NM} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\int_0^\infty J(\nu) d\nu} \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^2 + y^2 \nu^2} \right) \left\{ \frac{a}{w_1 w_2} \cos(x\nu - \Delta\Phi) - \frac{y}{w_1 w_2} \sin(x\nu - \Delta\Phi) \right\} J(\nu) d\nu \quad (AI.3.6)$$

En remplaçant $J(v)$ par son expression ci-dessus, en tenant compte de la très faible dépendance du terme $1/aw_1w_2$ en fonction de la fréquence et en procédant aux changements de variables $u = (v - v_0)/\delta v$, $\alpha = xv_0 - \Delta\Phi$ et en posant $\beta = 4\ln 2$, nous obtenons la nouvelle expression de (AI.2.6) :

$$TG_{NM} = 1/2 + (1/aw_1w_2I_0)[\cos\alpha \delta v. (S_1 + S_2) + \sin\alpha \delta v. (S_3 - S_4)] , \quad (AI.3.7)$$

où

$$I_0 = \delta v \int_A^B \exp(-\beta u^2) du \quad (AI.3.8)$$

et les S_i ont pour expression respective :

$$S_1 = \int_A^B \{\cos(xu\delta v) \exp(-\beta u^2) du / [1 + (y/a)^2 (u + v_0/\delta v)^2 \delta v^2]\}, \quad (AI.3.9)$$

$$S_2 = \int_A^B \{(y/a) \sin(xu\delta v) \exp(-\beta u^2) (u + v_0/\delta v) \delta v du / [1 + (y/a)^2 (u + v_0/\delta v)^2 \delta v^2]\}, \quad (AI.3.10)$$

$$S_3 = \int_A^B \{(y/a) \cos(xu\delta v) \exp(-\beta u^2) (u + v_0/\delta v) \delta v du / [1 + (y/a)^2 (u + v_0/\delta v)^2 \delta v^2]\} \quad (AI.3.11)$$

et

$$S_4 = \int_A^B \{(y/a) \sin(xu\delta v) \exp(-\beta u^2) du / [1 + (y/a)^2 (u + v_0/\delta v)^2 \delta v^2]\}, \quad (AI.3.12)$$

où l'intervalle d'intégration $[A, B]$ doit couvrir toute l'étendue du spectre fréquentiel de la distribution considérée :

$$[A, B] = [(v_1 - v_0)/\delta v; (v_2 + v_0)/\delta v] \quad (AI.3.13)$$

avec

$$v_1 = v_0 - N\delta v/2 \text{ et } v_2 = v_0 + N\delta v/2 \quad (AI.3.14)$$

Dans le cas de notre travail et au regard de la convergence rapide des intégrales mises en jeu, ci-dessus, nous avons choisi la valeur $N=6$ de telle sorte que $[A, B] = [-3; +3]$.

Par ailleurs, l'expression du rapport y/a s'écrit :

$$\frac{y}{a} = \left(\frac{\pi\theta^2}{c_0} \right) \frac{\frac{z_2}{1 + \left[z_2 \left(\frac{\pi\theta^2}{c_0} \right) (u\delta v + v_0) \right]^2} - \frac{z_1}{1 + \left[z_1 \left(\frac{\pi\theta^2}{c_0} \right) (u\delta v + v_0) \right]^2}}{\frac{1}{1 + \left[z_2 \left(\frac{\pi\theta^2}{c_0} \right) (u\delta v + v_0) \right]^2} + \frac{1}{1 + \left[z_1 \left(\frac{\pi\theta^2}{c_0} \right) (u\delta v + v_0) \right]^2}}, \quad (AI.3.15)$$

avec l'hypothèse considérée $\delta v/v_0 \ll 1$, (AI.3.15) prend la forme :

$$\left(\frac{y}{a}\right)_0 = \left(\frac{\pi\theta^2}{c_0}\right) \frac{\frac{z_2}{1+\left[z_2\left(\frac{\pi\theta^2}{c_0}\right)v_0\right]^2} - \frac{z_1}{1+\left[z_1\left(\frac{\pi\theta^2}{c_0}\right)v_0\right]^2}}{\frac{1}{1+\left[z_2\left(\frac{\pi\theta^2}{c_0}\right)v_0\right]^2} + \frac{1}{1+\left[z_1\left(\frac{\pi\theta^2}{c_0}\right)v_0\right]^2}}. \quad (\text{AI.3.16})$$

Avec ces considérations, et en tenant compte que les intégrales de la forme

$\int_{-3}^{+3} \sin(xu\delta v) \exp(-\beta u^2) du$ sont identiquement nulles, nous pouvons réécrire (AI.3.7) sous la forme :

$$TG_{NM} = 1/2 + \left((1/aw_1w_2I_0)\right)[\cos\alpha I_1 - \sin\alpha I_2], \quad (\text{AI.3.17})$$

où

$$I_1 = (\delta v/1 + (y/a)_0^2 v_0^2) \int_{-3}^{+3} \cos(xu\delta v) \exp(-\beta u^2) du \quad (\text{AI.3.18})$$

et

$$I_2 = (v_0 \delta v(y/a)_0/1 + (y/a)_0^2 v_0^2) \int_{-3}^{+3} \sin(xu\delta v) \exp(-\beta u^2) du \quad \text{AI.3.19}$$

L'étude de TG_{NM} , dans (AI.3.17), en fonction de la différence de marche Δ montre que le terme α est le plus sensible à ce paramètre et de ce fait la fonction $TG_{NM}(\alpha)$ admet un extrémum pour la valeur α_0 vérifiant la relation :

$$\tan(\alpha_0) = -I_2/I_1 \quad (\text{AI.3.19})$$

Nous en déduisons :

$$\sin(\alpha_0) = \pm I_2/\sqrt{I_1^2 + I_2^2} \text{ et } \cos(\alpha_0) = \pm I_1/\sqrt{I_1^2 + I_2^2} \quad (\text{AI.3.20})$$

Ces derniers résultats nous permettent d'aboutir aux extrémums de TG_{NM} :

$$(TG_{NM})_{\max} = 1/2 + (1/aw_1w_2I_0) \left[(I_1^2 + I_2^2)/\sqrt{I_1^2 + I_2^2} \right] \quad (\text{AI.3.21})$$

et

$$(TG_{NM})_{\min} = 1/2 - (1/aw_1w_2I_0) \left[(I_1^2 + I_2^2)/\sqrt{I_1^2 + I_2^2} \right] \quad (\text{AI.3.22})$$

En considérant la définition de la visibilité des franges donnée par (I.22) et en considérant les résultats obtenus ci-dessus pour $(TG_{NM})_{\max}$ et $(TG_{NM})_{\min}$, nous aboutissons à la relation donnant VG_{NM} :

$$VG_{NM} = (2/aw_1w_2) \sqrt{(I_1^2 + I_2^2)/I_0^2} \quad (\text{AI.3.22})$$

Annexe I.4 Calcul de la transmission TG_{p0} de l'interféromètre de Michelson éclairé par un faisceau Laguerre-Gauss LG_{p0} monochromatique.

En nous inspirant de la figure. I.1 où l'entrée de l'interféromètre est en $z = z_m$, le champ incident a pour expression :

$$E_{p0}^i = E_0 \frac{w_0}{w(z_m)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_m)} \right) \exp \left[- \left(\frac{\rho}{w(z_m)} \right)^2 \right] \exp \left\{ -i \left[kz_m - (2p + 1)\Phi(z_m) + \frac{k\rho^2}{2R(z_m)} \right] \right\} \quad (\text{AI.4.1})$$

Le champ transmis à la sortie de l'interféromètre est composé de deux faisceaux E_1 et E_2 ayant parcouru, depuis $z = 0$, la distance $z_1 = z_m + 2D1$ et $z_2 = z_m + 2D2$ respectivement. Le champ transmis a pour expression :

$$E_{p0}^t = \sqrt{K(1-K)} [r_1 E_{1p0}^i(\rho, z_1) + r_2 E_{2p0}^i(\rho, z_2)] , \quad (\text{AI.4.2})$$

où $\sqrt{K}$ et $\sqrt{1-K}$ représentent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la lame séparatrice et r_1 et r_2 sont les coefficients de réflexion en amplitude des miroirs M_1 et M_2 de l'interféromètre de Michelson.

En considérant le cas particulier où $r_1 = r_2 = 1$, la nouvelle expression de (AI.4.2) s'écrit :

$$E_{p0}^t = \sqrt{K(1-K)} [E_{1p0}^i(\rho, z_1) + E_{2p0}^i(\rho, z_2)] \quad (\text{AI.4.3})$$

La puissance contenue dans le faisceau transmis a pour expression :

$$P^t = 2\pi \int_0^\infty E_{p0}^t \cdot E_{p0}^{t*} \rho d\rho , \quad (\text{AI.4.4})$$

Le développement du produit $E_{p0}^t \cdot E_{p0}^{t*}$ nous donne :

$$E_{p0}^t \cdot E_{p0}^{t*} = K(1-K) \left(E_{1p0}^i(\rho, z_1) + E_{2p0}^i(\rho, z_2) \right) \cdot \left(E_{1p0}^{i*}(\rho, z_1) + E_{2p0}^{i*}(\rho, z_2) \right) , \quad (\text{AI.4.5})$$

où

$$E_{jp0}^{i*} = E_0 \frac{w_0}{w(z_j)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_j)} \right) \exp \left[- \left(\frac{\rho}{w(z_j)} \right)^2 \right] \exp \left\{ +i \left[kz_j - (2p + 1)\Phi(z_j) + \frac{k\rho^2}{2R(z_j)} \right] \right\} \quad (\text{AI.4.6})$$

En remplaçant E_{jp0}^i et E_{jp0}^{i*} ($j=1,2$) par leur expression dans (AI.4.5), nous obtenons:

$$E_{p0}^t \cdot E_{p0}^{t*} = K(1-K) [E_{1p0}^i \cdot E_{1p0}^{i*} + E_{1p0}^i E_{2p0}^{i*} + E_{2p0}^i E_{1p0}^{i*} + E_{2p0}^i E_{2p0}^{i*}] \quad (\text{AI.4.7})$$

En posant $w_j = w(z_j)$, $\Phi_j = \Phi(z_j)$ et $R_j = R(z_j)$, nous pouvons expliciter les termes de la somme de l'équation (AI.4.7) :

$$E_{1p0}^i \cdot E_{1p0}^{i*} = E_0^2 (w_0^2/w_1^2) L_p^2 (2\rho^2/w_1^2) \exp(-2\rho^2/w_1^2), \quad (\text{AI.4.8})$$

$$E_{2p0}^i \cdot E_{2p0}^{i*} = E_0^2 (w_0^2/w_2^2) L_p^2 (2\rho^2/w_2^2) \exp(-2\rho^2/w_2^2), \quad (\text{AI.4.9})$$

$$E_{1p0}^i E_{2p0}^{i*} = E_0^2 \left(\frac{w_0^2}{w_1 w_2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(- \left[\frac{\rho^2}{w_1^2} + \frac{\rho^2}{w_2^2} \right] \right) \exp \left[i \left\{ k(z_2 - z_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right\} \right], \quad (\text{AI.4.10})$$

et

$$E_{2p0}^i E_{1p0}^{i*} = E_0^2 \left(\frac{w_0^2}{w_1 w_2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(- \left[\frac{\rho^2}{w_1^2} + \frac{\rho^2}{w_2^2} \right] \right) \exp \left[-i \left\{ k(z_2 - z_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right\} \right] \quad (\text{AI.4.11})$$

En effectuant la somme des deux derniers termes, nous obtenons :

$$2E_0^2 \left(\frac{w_0^2}{w_1 w_2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(- \left[\frac{\rho^2}{w_1^2} + \frac{\rho^2}{w_2^2} \right] \right) \cos \left[k(z_2 - z_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \quad (\text{AI.4.12})$$

avec les données ci-dessus, pouvons écrire la nouvelle expression de la puissance du faisceau transmis :

$$\begin{aligned} P^t &= 2\pi K(1-K) \{ E_0^2 (w_0^2/w_1^2) \int_0^\infty L_p^2(2\rho^2/w_1^2) \exp(-2\rho^2/w_1^2) \rho d\rho + \dots \\ &\dots + E_0^2 (w_0^2/w_2^2) \int_0^\infty L_p^2(2\rho^2/w_2^2) \exp(-2\rho^2/w_2^2) \rho d\rho + \dots \\ &\dots + 2E_0^2 \left(\frac{w_0^2}{w_1 w_2} \right) \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(- \left[\frac{\rho^2}{w_1^2} + \frac{\rho^2}{w_2^2} \right] \right) \cos \left[k(z_2 - z_1) \right. \\ &\quad \left. - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \rho d\rho \} \end{aligned} \quad (\text{AI.4.13})$$

Sachant que les polynômes de Laguerre constituent une base orthonormée, alors ils vérifient la condition :

$$\int_0^\infty L_p(x) \cdot L_m(x) \exp(-x) dx = \delta_{pm} \quad (\text{AI.4.14})$$

En posant de façon générale : $x = 2\rho^2/w^2$, soit $\rho d\rho = (w^2/4)dx$, l'expression de P^t devient :

$$P^t = 2\pi K(1-K) E_0^2 w_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(- \left[\frac{\rho^2}{w_1^2} + \frac{\rho^2}{w_2^2} \right] \right) \cos \left[k(z_2 - z_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \rho d\rho \right]. \quad (\text{AI.4.15})$$

En tenant compte de la puissance transportée par le faisceau incident :

$$P^i = \pi E_0^2 w_0^2 / 2, \quad (\text{AI.4.16})$$

nous définissons la transmission de l'interféromètre de Michelson éclairé par un faisceau Laguerre- Gauss TEM_{p0} , par : $TG_{p0} = P^t/P^i$

En utilisant les expressions de P^t et de P^i ci-dessus, nous obtenons finalement :

$$TG_{p0} = K(1 - K) \left[2 + \frac{8}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(- \left[\frac{\rho^2}{w_1^2} + \frac{\rho^2}{w_2^2} \right] \right) \cos \left[k(z_2 - z_1) - (2p + 1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \rho d\rho \right], \quad (AI.4.17)$$

Dans le cas où $K=0.5$, l'équation ci-dessus prend sa forme finale:

$$TG_{p0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(- \left[\frac{\rho^2}{w_1^2} + \frac{\rho^2}{w_2^2} \right] \right) \cos \left[k(z_2 - z_1) - (2p + 1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \rho d\rho, \quad (AI.4.18)$$

où la différence des chemins optiques $z_2 - z_1$, entre les deux faisceaux interférant, est donnée par : $z_2 - z_1 = 2(D_2 - D_1)$.

Remarque: l'étude de la transmission TG_{p0} en fonction de la différence de marche Δ nécessite la connaissance des paramètres les plus sensibles à cette variable et donc les plus influents sur son évolution. Comme nous l'avons déjà montré ci-dessus, la largeur w_2 , du faisceau Gaussien associé au deuxième faisceau interférant, varie lentement en fonction de Δ ; la largeur w_1 du premier demeurant fixe. Il nous reste à étudier l'évolution des autres paramètres, à savoir le déphasage $2k\Delta$ dû à la propagation, le déphasage $\Delta\Phi_G = (2p + 1)(\Phi_2 - \Phi_1)$ résultant de la différence des déphasages de Gouy associés aux deux faisceaux interférant et enfin le facteur $b = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ qui module la différence entre les déphasages dus à la courbure des deux faisceaux interférant. Il est à noter que seul le terme $\Delta\Phi_G$ dépend de l'ordre p du faisceau LG_{p0} incident sur l'interféromètre. Nous présentons sur les figures. I.4.1, I.4.2 et I.4.3, ci-dessous, l'évolution de ces paramètres en fonction de la différence de marche Δ .

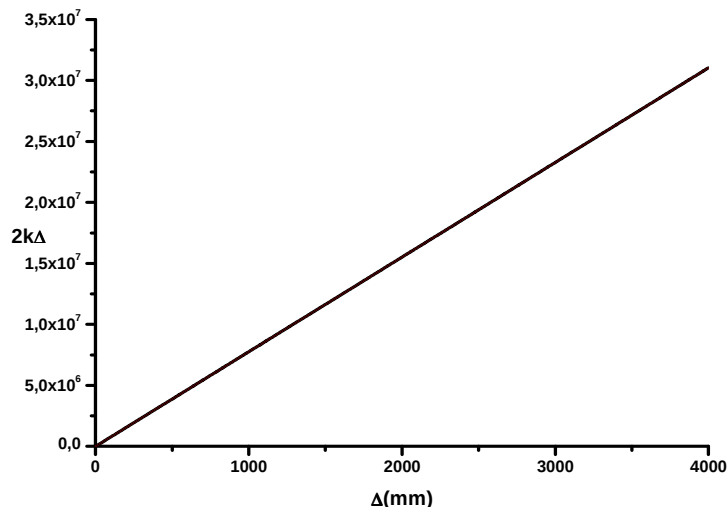


Figure. I.4.1: Evolution du déphasage dû à la propagation en fonction de la différence de marche Δ .

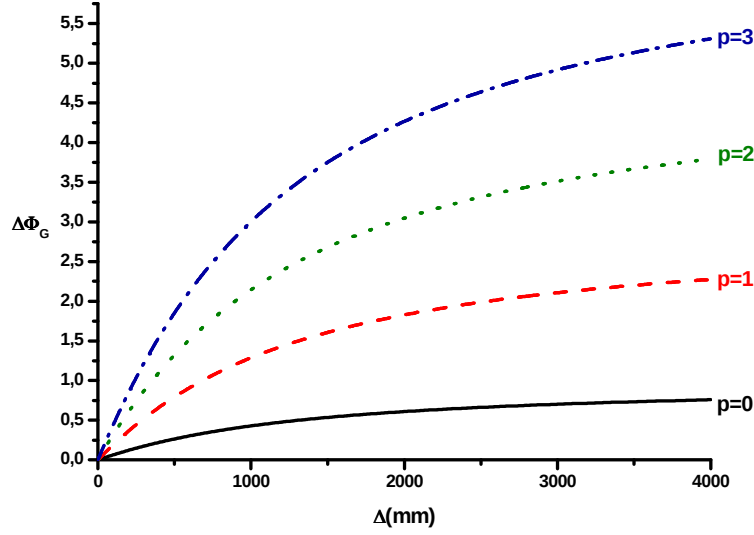


Figure. I.4.2: Evolution de la différence des déphasages de Gouy entre les deux faisceaux interférant en fonction de la différence de marche Δ .

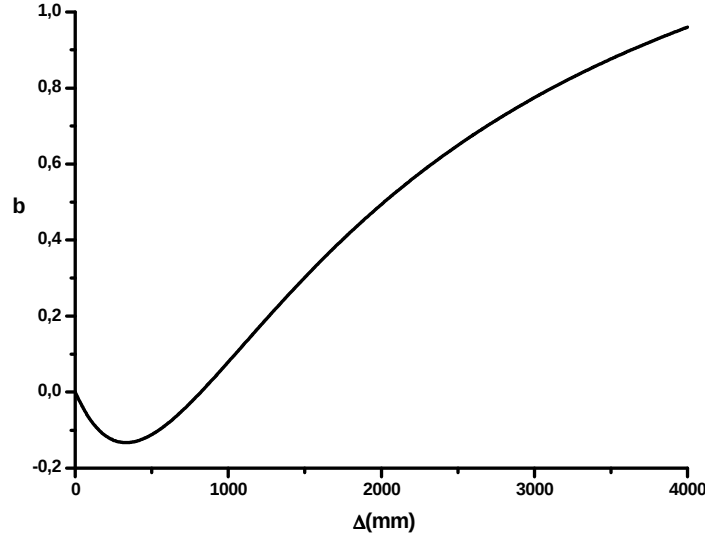


Figure. I.4.3: Evolution du facteur de courbure en fonction de la différence de marche Δ .

Commentaires: Il ressort clairement à travers les figures ci-dessus que le terme de déphasage dû à la propagation est de loin le plus sensible à la différence de marche Δ . Ce résultat sera exploité dans la détermination des extremums de la fonction TG_{p0} en fonction de la différence de marche Δ .

En posant :

$$\psi = 2k\Delta - (2p + 1)(\Phi_2 - \Phi_1) \quad (\text{AI.4.19})$$

L'équation (AI.4.18) devient:

$$TG_{p0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p\left(\frac{2\rho^2}{w_1^2}\right) L_p\left(\frac{2\rho^2}{w_2^2}\right) \exp\left(-\left[\frac{\rho^2}{w_1^2} + \frac{\rho^2}{w_2^2}\right]\right) \cos[\psi - b\rho^2] \rho d\rho, \quad (\text{AI.4.20})$$

ou encore:

$$TG_{p0} = 1/2 + (2/w_1 w_2) [\cos(\psi) \cdot I_{1p} + \sin(\psi) \cdot I_{2p}] , \quad (AI.4.21)$$

où I_{1p} et I_{2p} sont des intégrales dépendant de l'ordre p du faisceau considéré et dont les expressions sont données par :

$$I_{1p} = \int_0^8 L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp(-a\rho^2) \cdot \cos(b\rho^2) \rho d\rho , \quad (AI.4.22)$$

et

$$I_{2p} = \int_0^8 L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp(-a\rho^2) \cdot \sin(b\rho^2) \rho d\rho \quad (AI.4.23)$$

La différenciation de (AI.4.21) par rapport à Δ conduit à:

$$\frac{d(TG_{p0})}{d\Delta} = (4k/w_1 w_2) [-\sin(\psi) I_{1p} + \cos(\psi) I_{2p}] \quad (AI.4.24)$$

L'équation (AI.4.24) s'annule pour:

$$\tan(\psi_0) = I_{2p}/I_{1p} , \quad (AI.4.25)$$

ou encore:

$$\cos(\psi_0) = \pm I_{1p} / \sqrt{(I_{1p}^2 + I_{2p}^2)} \quad (AI.4.26)$$

et

$$\sin(\psi_0) = \pm I_{2p} / \sqrt{(I_{1p}^2 + I_{2p}^2)} \quad (AI.4.27)$$

Ces deux dernières équations nous permettent d'aboutir aux extrémums donnés par les équations (I.33) et (I.34) du chapitre I.

Pour terminer, nous présentons, à titre d'illustration, sur la figure. I.4.4, ci dessous, la courbe donnant la transmission TG_{00} , donnée par l'équation (I. 4.20), pour $p=0$, en fonction de Δ . Les courbes donnant la transmission TG_{p0} , en fonction de Δ , pour $p>0$ ont déjà été présentées au paragraphe I.6.2 du chapitre I.

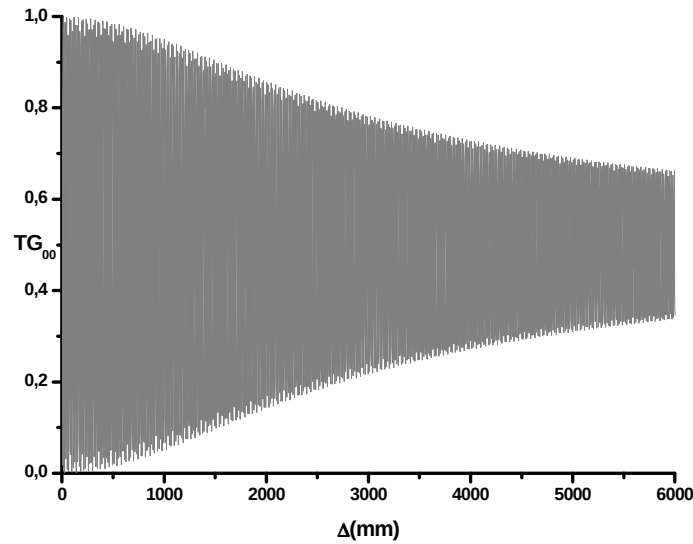


Figure. I.4.4: Evolution de la transmission du mode LG_{00} , en fonction de la différence de marche Δ .

Commentaires: Il est à noter le caractère fortement oscillatoire de la fonction transmission et sa décroissance en fonction de la différence de marche Δ .

En pratique, c'est à partir des valeurs des extrêmes de la fonction transmission pour lesquelles la visibilité diminue de moitié que nous déterminons la longueur de cohérence du faisceau incident sur l'interféromètre. La figure. I.4.5, déduite de la figure précédente dans l'intervalle de Δ couvrant le domaine: 3500mm-3800mm, met clairement en évidence le caractère oscillatoire de la fonction transmission et montre les valeurs des extrêmes de cette fonction qui nous permettent d'en déduire la longueur de cohérence du faisceau laser sous étude.

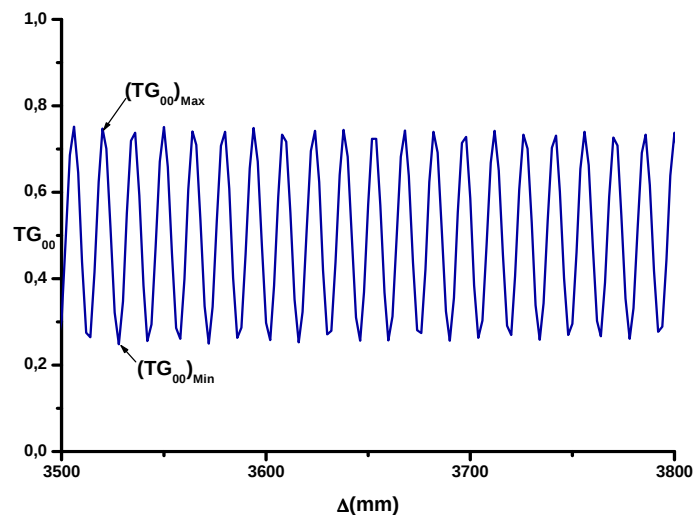


Figure. I.4.5: Evolution de la transmission du mode LG_{00} , en fonction de la différence de marche Δ . $(TG_{00})_{\max}$ et $(TG_{00})_{\min}$ représentent les valeurs des extrêmes de la transmission permettant de déterminer la longueur de cohérence du faisceau incident.

ANNEXE II.1 Coefficient de réflexion (réflectivité) R_p du miroir de Michelson éclairé par un faisceau Laguerre-Gauss LG_{p0} monochromatique

En nous inspirant de la figure. II.4 où nous supposons que l'entrée de l'interféromètre est localisée au point $z = z_m$, l'expression du champ incident s'écrit :

$$E_{p0}^i = E_0 \frac{w_0}{w(z_m)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_m)} \right) \exp \left[- \left(\frac{\rho}{w(z_m)} \right)^2 \right] \exp \left\{ -i \left[kz_m - (2p+1)\Phi(z_m) + \frac{k\rho^2}{2R(z_m)} \right] \right\} \quad (\text{AII.1.1})$$

Le champ réfléchi au niveau du beam splitter se compose de deux faisceaux de Laguerre-Gauss E_1 et E_2 ayant parcouru les distances $z_1 = z_m + 2D_1$ et $z_2 = z_m + 2D_2$ respectivement depuis l'origine $z = 0$.

L'expression donnant le champ réfléchi est donnée par :

$$E_{p0}^r = K. E_{p0}^i(\rho, z_1) - (1-K)E_{p0}^i(\rho, z_2) = K. E_1 - (1-K)E_2 \quad (\text{AII.1.2})$$

La puissance contenue dans le faisceau réfléchi a pour expression :

$$P^r = 2\pi \int_0^\infty (E_{p0}^r) \cdot (E_{p0}^r)^* \rho d\rho \quad (\text{AII.1.3})$$

Le développement du produit $(E_{p0}^r) \cdot (E_{p0}^r)^*$ s'écrit :

$$(E_{p0}^r) \cdot (E_{p0}^r)^* = \{KE_1 - (1-K)E_2\} \{KE_1^* - (1-K)E_2^*\} = K^2 E_1 E_1^* + (1-K)^2 E_2 E_2^* - K(1-K)[E_1 E_2^* + E_1^* E_2], \quad (\text{AII.1.4})$$

où :

$$E_1 E_1^* = E_0^2 \left[\frac{w_0}{w(z_1)} \right]^2 L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_1)} \right) \exp \left[- \frac{2\rho^2}{w^2(z_1)} \right] = E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{w_1^2} \cdot L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \exp \left[- \frac{2\rho^2}{w_1^2} \right], \quad (\text{AII.1.5})$$

$$E_2 E_2^* = E_0^2 \left[\frac{w_0}{w(z_2)} \right]^2 L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_2)} \right) \exp \left[- \frac{2\rho^2}{w^2(z_2)} \right] = E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{w_2^2} \cdot L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left[- \frac{2\rho^2}{w_2^2} \right], \quad (\text{AII.1.6})$$

$$E_1 E_2^* = E_0^2 \frac{w_0^2}{w(z_1)w(z_2)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_1)} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z_2)} \right) \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{1}{w^2(z_1)} + \frac{1}{w^2(z_2)} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ i \left[k(z_2 - z_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \right\}, \quad (\text{AII.1.7})$$

ou encore :

$$E_1 E_2^* = E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{w_1 w_2} \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \cdot \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ i \left[k(z_2 - z_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \right\} \quad (\text{AII.1.8})$$

et

$$E_1^* E_2 = E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{w_1 w_2} \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \cdot \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ -i \left[k(z_2 - z_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \right\} \quad (\text{AII.1.9})$$

La somme de (AII.1.8) et de (AII.1.9) nous donne :

$$E_1 E_2^* + E_1^* E_2 = 2 \cdot E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{w_1 w_2} \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \cdot \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right] \right\} \cdot \cos \left[k(z_2 - z_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \quad (\text{AII.1.10})$$

Sachant que la puissance du faisceau incident est :

$$P^i = \pi \cdot E_0^2 w_0^2 / 2, \quad (\text{AII.1.11})$$

Le coefficient de réflexion du miroir de Michelson étant défini par le rapport $R_p = \frac{P^r}{P^i}$, en posant $z_2 - z_1 = 2(D_2 - D_1)$, nous obtenons alors :

$$R_p = \frac{4K^2}{w_1^2} \int_0^\infty L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \exp \left[-\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right] \rho d\rho + \frac{4(1-K)^2}{w_2^2} \int_0^\infty L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left[-\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right] \rho d\rho - \frac{8K(1-K)}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \cdot \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right] \right\} \cos \left[2k(D_2 - D_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \rho d\rho \quad (\text{AII.1.12})$$

En opérant le changement de variable :

$x = 2\rho^2/w^2$, ce qui nous donne $\rho d\rho = w^2/4 dx$, l'équation (AII.1.12) peut être réécrite sous la forme :

$$R_p = K^2 \int_0^\infty L_p^2(x) \exp[-x] dx + (1-K)^2 \int_0^\infty L_p^2(x) \exp[-x] dx - \frac{8K(1-K)}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \cdot L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \cdot \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right] \right\} \cos \left[2k(D_2 - D_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \rho d\rho \quad (\text{AII.1.13})$$

En tenant compte de la propriété d'orthogonalité des polynômes de Laguerre :

$\int_0^\infty L_p(x) \cdot L_m(x) \cdot \exp(-x) dx = \delta_{pm}$, δ_{pm} étant le symbole de Kronecker, il vient alors :

$$\int_0^\infty L_p^2(x) \exp[-x] dx = 1 \quad (\text{AII.1.14})$$

En vertu de l'équation (AII.1.14), l'équation (AII.1.13) prend la forme :

$$R_p = K^2 + (1-K)^2 - \frac{8K(1-K)}{w_1 w_2} \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right] \right\} \cos \left[2k(D_2 - D_1) - (2p+1)(\Phi_2 - \Phi_1) + \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \rho d\rho \quad (\text{AII.1.15})$$

Annexe. II.2 Etude de la divergence, en simple passage et en champ lointain, d'un faisceau Laguerre-Gauss d'ordre p (LG_{p0}) réfléchi par un miroir de Michelson

Nous allons dans ce qui suit étudier un faisceau Laguerre-Gauss réfléchi par le miroir de Michelson en simple passage, c'est à dire en l'absence de cavité, et en champ lointain.

L'expression du champ réfléchi par le MM est la superposition des deux faisceaux émergeant de ce dernier, après avoir parcouru des distances différentes ($2D_1$ et $2D_2$).

Cette expression s'écrit :

$$E_{p0}^r(\rho, 2D_1) = K E_{p0}^I(r, 2D_1) - (1 - K)E_{p0}^I(r, 2D_2), \quad (\text{A.II.2.1})$$

avec

$$E_{p0}^I(\rho, z) = \frac{E_0 w_0}{w(z)} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp \left\{ -i[2kz - (2p + 1)\Phi(z)] + \frac{k\rho^2}{2R(z)} \right\} \quad (\text{A.II.2.2})$$

En remplaçant (A.II.2.2) dans (A.II.2.1) et en posant $z_1 = z + 2D_1$, $z_2 = z + 2D_2$; l'entrée de l'interféromètre est prise à $z=0$, nous obtenons :

$$E_{p0}^r(\rho, z) = K \frac{E_0 w_0}{w_1} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w_1^2} \right) \exp \left\{ -i[2kD_1 - (2p + 1)\Phi_1] + \frac{k\rho^2}{2R_1} \right\} - \\ (1 - K) \frac{E_0 w_0}{w_2} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left\{ -i[2kD_2 - (2p + 1)\Phi_2] + \frac{k\rho^2}{2R_2} \right\} \quad (\text{A.II.2.3})$$

L'intensité du faisceau réfléchi par le MM est donnée par :

$$I_{pr}(\rho, z) = E_{p0}^r(\rho, z) \cdot E_{p0}^{*r}(\rho, z) \quad (\text{A.II.2.4})$$

Tout calcul fait, nous obtenons :

$$I_{pr}(\rho, z) = K^2 \frac{E_0^2 w_0^2}{w_1^2} L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \exp \left(-\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) + (1 - K)^2 \frac{E_0^2 w_0^2}{w_2^2} L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(-\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) - \\ 2K(1 - K) \frac{E_0^2 w_0^2}{w_1 w_2} L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left[-\left(\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right) \rho^2 \right] \cos(b_p - c\rho^2), \quad (\text{A.II.2.5})$$

avec

$$b_p = (2p + 1)(\Phi_2 - \Phi_1) - 2k(D_2 - D_1) \text{ et } c = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (\text{A.II.2.6})$$

Le calcul, en champ lointain, de la largeur, w_{pr} , du faisceau réfléchi est obtenue à partir du moment d'ordre 2 de la distribution de l'intensité $I_{pr}(\rho, z)$:

$$w_{pr}^2 = 2 \int_0^\infty I_{pr}(\rho, z) \rho^3 d\rho / \int_0^\infty I_{pr}(\rho, z) \rho d\rho \quad (\text{A.II.2.7})$$

En remplaçant l'expression de $I_{pr}(\rho, z)$, obtenue à partir de (A.II.4.5) dans (A.II.4.7), il vient :

$$w_{pr}^2 = 2 \frac{\left(\frac{K}{w_1}\right)^2 I_1 + \left(\frac{1-K}{w_2}\right)^2 I_2 - \frac{2K(1-K)}{w_1 w_2} I_3}{\left(\frac{K}{w_1}\right)^2 I_4 + \left(\frac{1-K}{w_2}\right)^2 I_5 - \frac{2K(1-K)}{w_1 w_2} I_6}, \quad (\text{A.II.2.8})$$

avec

$$I_1 = \int_0^\infty L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \exp \left(-\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \rho^3 d\rho, \quad (\text{A.II.2.9})$$

$$I_2 = \int_0^\infty L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(-\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \rho^3 d\rho, \quad (\text{A.II.2.10})$$

$$I_3 = \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left[-\left(\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right) \rho^2 \right] \cos(b_p - c\rho^2) \rho^3 d\rho, \quad (\text{A.II.2.11})$$

$$I_4 = \int_0^\infty L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \exp \left(-\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) \rho d\rho, \quad (\text{A.II.2.12})$$

$$I_5 = \int_0^\infty L_p^2 \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left(-\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \rho d\rho, \quad (\text{A.II.2.13})$$

$$I_6 = \int_0^\infty L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_1^2} \right) L_p \left(\frac{2\rho^2}{w_2^2} \right) \exp \left[-\left(\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right) \rho^2 \right] \cos(b_p - c\rho^2) \rho d\rho, \quad (\text{A.II.2.14})$$

Dans notre étude, Les calculs numériques des intégrales I_1 à I_6 ont été faits à l'aide d'un programme FORTRAN 77, en double précision, basé sur la sous-routine DQ2DAG de IMSL. Le compilateur utilisé est de la compagnie ABSOFT.

En faisant varier le déphasage microscopique, associé à une variation microscopique de la différence de marche Δ entre les deux faisceaux réfléchis par la MM et interférant à la sortie de ce dernier, nous en déduisons l'évolution de la largeur effective w_{pr} , du faisceau réfléchi, en fonction de ce paramètre et par voie de conséquence celle de la divergence du faisceau en champ lointain (nous avons considéré pour cela une distance $z=30\text{m}$ du MM) définie par : $\theta_{pr} = w_{pr}/z$; p représentant l'ordre du faisceau réfléchi.

ANNEXE. II.3 Calcul du facteur de propagation M^2

Le calcul du facteur de propagation du faisceau transmis par un diaphragme est basé sur la décomposition du champ diffracté dans la base de 80 fonctions Laguerre –Gauss qui sont utilisées comme une base orthonormée de fonctions propres dans le calcul du champ résonnant dans des cavités diaphragmées.

L'origine de la coordonnée axiale est définie par la position du MM. Les fonctions Laguerre-Gauss constituant la base orthonormée ont pour expression :

$$G_p(\rho, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} L_p(x) \exp(-x/2) \exp \left\{ +i \left[\frac{k\rho^2}{2R_c(z)} - (2p+1)\Phi(z) \right] \right\}, \quad (\text{A.II.3.1})$$

où la variable réduite X a pour expression : $x = \frac{2\rho^2}{w(z)^2}$ et $k = 2\pi/\lambda$.

La fonction d'ordre inférieur ($p=0$) correspond au faisceau Gaussien.

Une propriété intéressante des fonctions Laguerre-Gauss est qu'elles sont orthogonales et vérifient donc la relation :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_p(\rho, D) \cdot G_m^*(\rho, D) \rho d\rho \cdot d\phi = \delta_{pm}/2\pi, \quad (\text{A.II.3.2})$$

où δ_{pm} est le symbole de Kronecker.

Les amplitudes des champs complexes incident et diffracté sont exprimées sous de combinaisons linéaires des fonctions de la base considérée :

$$E_{in}(\rho, z) = \sum_p A_p G_p(\rho, z), \quad (\text{A.II.3.3})$$

$$E_d(\rho, z) = \sum_p D_p G_p(\rho, z), \quad (\text{A.II.3.4})$$

Le but de notre calcul est de déterminer les coefficients A_p et D_p , indépendants des coordonnées ρ et z , qui sont reliés entre eux par la condition aux limites imposées par l'ouverture circulaire constituant le diaphragme situé en $z=D$; cette condition aux limites se traduit par :

$$E_d(\rho, D) = \tau \cdot E_{in}(\rho, D), \quad (\text{A.II.3.5})$$

où τ est le coefficient de transmission du diaphragme. Les coefficients A_p peuvent être calculés à partir de l'inversion de l'équation (A.II.2.3) selon les étapes suivantes :

Au point $z=D$, l'équation (A.II.2.3) nous donne :

$$E_{inc}(\rho, D) = \sum_p A_p G_p(\rho, D) \quad (\text{A.II.3.6})$$

L'équation (A.II.2.6) est multipliée par $G_m^*(\rho, D)$ puis intégrée sur la surface circulaire de rayon r_0 de l'ouverture du diaphragme ; nous obtenons finalement :

$$A_m = 2\pi \int_0^{r_0} E_{in}(\rho, D) G_m^*(\rho, D) \rho d\rho, \quad (\text{A.II.3.7})$$

De la même manière, nous calculons les coefficients de développement du champ diffracté et nous obtenons:

$$D_m = \sum_p A_p C_{pm}, \quad (\text{A.II.3.8})$$

où

$$C_{pm} = \int_0^{2Y_c^2} \exp(-X) L_p(X) L_m(X) dX, \quad (\text{A.II.3.9})$$

où

$Y_c = r_0/w(D)$ est le paramètre de troncature du diaphragme ; les éléments matriciels C_{pm} caractérisent donc les propriétés diffractives du diaphragme.

Finalement le facteur de propagation du faisceau M_{out}^2 du faisceau émergeant du diaphragme s'exprime comme suit [16] :

$$M_{\text{out}}^2 = \left[\left\{ \sum_p (2p+1) |D_p|^2 \right\}^2 - 4 \left\{ \sum_p \sum_q p (D_p^* D_q)^r \delta_{p,q+1} \right\}^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{A.II.3.10})$$

où l'indice r réfère à la partie réelle de la quantité considérée et $(*)$ dénote le complexe conjugué.

Notons que l'équation (A.II.3.10) s'applique dans le cas d'une superposition cohérente de modes Laguerre-Gauss (LG_{p0}). Une superposition incohérente de modes LG_{p0} se produit quand une cavité laser stable oscille simultanément sur plusieurs modes LG_{p0} de fréquences différentes. Dans ce cas le facteur de propagation du faisceau se réduit à :

$$M_{\text{out}}^2 = \sum_p (2p+1) |D_p|^2 \quad (\text{A.II.3.11})$$

Nous devons noter aussi que les coefficients D_p sont normalisés de telle sorte que:

$$\sum_p |D_p|^2 = 1. \quad (\text{A.II.3.12})$$