

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIEN »

FACULTE DE PHYSIQUE



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de doctorat d'état

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par : MEZIANI Bachir

SUJET

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES INTERACTIONS
COUCHE LIMITE – ECOULEMENT EXTERIEUR
ET FLUIDE – STRUCTURE**

Soutenue le 26/ 12/ 2007, devant le jury composé de :

Mr- A. SALEM, Professeur, USTHB.
Mr- M. AMAUCHE, Professeur, Univ. BEJAIA.
Mr- A. BENDIB, Professeur, USTHB.
Mr- A. BOUABDELLAH, Professeur, USTHB.
Mr- A. OUIBRAHIM, Professeur, Univ. TIZI-OUZOU.
Mr- D. TENIOU, Professeur, Fac. Maths/USTHB.
Mr- M. DEBIANE, Maître de Conférences, USTHB.

Président
Directeur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

A mes défunts parents
A ma femme Ouerdia
A mes enfants Malika et Yanis

AVANT – PROPOS

Cette thèse a vu le jour sous la direction de Monsieur Mustapha AMAOUCHE, Professeur à l'université de Béjaia. Je lui exprime toute ma gratitude de m'avoir accueilli dans son équipe et son Laboratoire et je suis reconnaissant envers lui pour tous ses conseils, ses idées et sa disponibilité et la passion qu'il m'a transmise pour faire de la recherche sans oublier le suivi qu'il a fait pour ce travail durant toutes ces années.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur SALEM Abdelaziz, Professeur à l'USTHB, en acceptant de présider ce Jury. J'ai aussi vivement apprécié la considération que m'ont témoignée Messieurs BENDIB Abderrezak, BOUABDELLAH Ahcen et TENIOU Djamel, Professeurs à L'USTHB, qui ont bien voulu y participer. Quelques uns ont contribué à ma formation et cette thèse n'est qu'un des hommages que je leur rends.

Toute ma gratitude à Monsieur DEBIANE Mohamed, Maître de conférences à l'USTHB, qui m'a constamment soutenu dans mon travail et qui, malgré ses différentes préoccupations, m'a accordé son temps pour discuter et avancer.

Je suis très content d'avoir Monsieur OUIBRAHIM Ahmed, Professeur à l'Université de TIZI OUZOU, qui a accepté, malgré ses charges multiples, de faire partie de ce jury.

Je tiens aussi à remercier mon épouse Ouerdia pour sa patience malgré les innombrables moments difficiles passés.

Je ne manquerai pas de remercier tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique et du département de physique.

Enfin mes pensées vont à ma famille qui m'a toujours soutenue. Cette thèse est dédiée aussi à mes défunts parents.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

PARTIE I

INTERACTION COUCHE LIMITE –ÉCOULEMENT EXTERIEUR

CHAPITRE I- INTRODUCTION ET EQUATIONS DE CONVECTION MIXTE

I.1-MODES DE TRANSFERT DE CHALEUR

I.2 - LA COUCHE LIMITE

I.3-EQUATIONS DE CONVECTION MIXTE

I.4-DIFFERENTS REGIMES DE CONVECTION

I.4.1-CONVECTION FORCEE DOMINANTE

I.4.2-CONVECTION NATURELLE DOMINANTE

I.4.2.1-REGIME NORMAL

I.4.2.2-REGIME DE COUCHE LIMITE

I.5-EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE EN CONVECTION MIXTE

I.6- POSITION DU PROBLEME

CHAPITRE II- CONVECTION MIXTE DANS LA ZONE PROXIMALE

II.1 –INTRODUCTION

II.1.1-CAS SYMETRIQUE

II.1.2-CAS DISSYMETRIQUE

II.2- COUCHE LIMITE EN CONVECTION MIXTE AUTOUR

D’UN CYLINDRE HORIZONTAL

II.3 – EQUATIONS DU PROBLEME

II.4 – ÉCOULEMENT DE STAGNATION

II.4.1 –PROBLEME D’ORDRE ZERO

II.4.2 –PROBLEME D’ORDRE UN

II.5 –RESULTATS ET DISCUSSION

II.5.1- POSITION DU POINT DE STAGNATION

II.5.2- LIGNES DE COURANT

II.5.3- VITESSE LONGITUDINALE

II.5.4-TEMPERATURE

II.6-CONCLUSION

CHAPITRE III- EQUATIONS DE LA CONVECTION MIXTE DANS LA ZONE DISTALE

III.1-INTRODUCTION

III.2-METHODE VARIATIONNELLE

III.3- RESULTATS DE L'INTERACTION COUCHE LIMITE-

ECOULEMENT EXTERIEUR

III.3.1-EPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE

III.3.2-VITESSE LONGITUDINALE

III.3.3-TEMPERATURES

III.4-CONCLUSION

PARTIE II

INTERACTION ENTRE DEUX FLUIDES SUPERPOSES

ET UNE PAROI VIBRANTE

CHAPITRE IV- INTRODUCTION ET BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE V- FORMULATION DU PROBLEME D'INTERACTION ENTRE DEUX FLUIDES PARFAITS SUPERPOSES ET UNE PAROI DEFORMABLE DANS UN RESERVOIR RECTANGULAIRE

V.1- INTRODUCTION

V.2- FORMULATION DU PROBLEME

V.2.1-EQUATIONS DES MOUVEMENTS DES DEUX FLUIDES

V.2.2-EQUATIONS DU MOUVEMENT DE LA PAROI DEFORMABLE

V.2.3-REPRESENTATION FORMELLE DES POTENTIELS DES VITESSES

V.2.4-REPRESENTATION DES DEPLACEMENTS DE LA PAROI

V.2.5-RELATION DE DISPERSION POUR DEUX FLUIDES

V.2.6-EXPRESSIONS DES ELEVATIONS DES INTERFACES

V.3-RESOLUTION DES EQUATIONS D'INTERACTION FLUIDES-POUTRE

V.3.1- DETERMINATION DE A_1 et A_k EN FONCTION DE γ_n

V.3.2- DETERMINATION DE γ_n EN FONCTION DE A_1 et A_k

V.4- CONCLUSION

CHAPITRE VI - APPLICATION AU PROBLEME D'INTERACTION ENTRE UN FLUIDE ET UNE PAROI VIBRANTE –VALIDATION

VI.1-INTRODUCTION

VI.2-EQUATIONS DU PROBLEME

VI.3 –RELATION DE DISPERSION POUR LE FLUIDE

VI.4 -EXPRESSIONS DE L'ELEVATION DE LA SURFACE LIBRE

VI.5 – CALCUL DES FREQUENCES PROPRES DE LA PAROI

VI.6 – CALCUL DES FREQUENCES PROPRES DU FLUIDE

VI.7 –COUPLAGE FLUIDE -PAROI

VI.8 –RESULTATS DE L'INTERACTION ENTRE UN FLUIDE ET LA PAROI

VI.8.1 –FREQUENCES SECHES DE LA PAROI

VI.8.2 –FREQUENCES PROPRES DU FLUIDE

VI.8.3 –FREQUENCES PROPRES DE L'INTERACTION FLUIDE-PAROI

VI.8.4–INFLUENCE DE LA TENSION SUPERFICIELLE

VI.8.5–ANALYSE DES MODES POUR UN TAUX DE REMPLISSAGE FIXE

VI.8.6–INFLUENCE DU FLUIDE SUR L'INTERACTION

VI.8.7–INFLUENCE DE LA STRUCTURE SUR L'INTERACTION

VI.9–CONCLUSION

CHAPITRE VII- INTERACTION ENTRE DEUX FLUIDES PARFAITS SUPERPOSES ET UNE PAROI VIBRANTE

VII.1-INTRODUCTION

VII.2-ETUDE DES FREQUENCES PROPRES DES FLUIDES

VII.3-ETUDE DES FREQUENCES DU COUPLAGE

VII.4-ANALYSE DES MODES DU COUPLAGE

VII.5-CONCLUSION

CONCLUSION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les processus naturels et industriels sont, pour la plupart, les résultats d'interactions entre deux ou plusieurs phénomènes physiques propres. Ces phénomènes peuvent faire partie du même domaine physique comme l'interaction entre deux phénomènes thermiques ou de domaines différents comme l'interaction thermomagnétique ou fluide-structure. L'étude de ces processus nécessite une connaissance préalable des lois qui régissent les phénomènes physiques en interaction. Une fois les lois régissant ces derniers établies, l'étude des interactions entre ces phénomènes est abordée par des moyens appropriés qui tiennent compte du type d'interaction, par l'intermédiaire des lois qui la gouvernent, et des liens qui existent avec les phénomènes de base.

Dans ce travail, nous présenterons deux problèmes physiques liés à deux types d'interactions différentes. Le premier est lié à l'interaction entre la convection naturelle et la convection forcée. La convection naturelle se développe du bas vers le haut (du haut vers le bas) quand un fluide est chauffé (refroidi) et l'écoulement résultant transporte l'énergie. La convection forcée est le résultat d'un écoulement imposé. Le problème est traité dans le cas d'un cylindre horizontal, infini et chauffé, soumis à un écoulement extérieur oblique. Le chauffage induit un écoulement de convection naturelle qui prend naissance au du point le plus bas du cylindre et qui se développe autour de ce dernier. L'écoulement extérieur arrive obliquement sur le cylindre et interagit avec l'écoulement de convection naturelle. Une zone de recirculation, due à l'interaction entre les courants, ascendant et descendant, apparaît ; elle dépend des directions et des amplitudes des deux écoulements. Les méthodes classiques utilisées appliquées à ce problème rencontrent des difficultés de convergence. Dans la première partie de ce mémoire, nous présentons une nouvelle alternative qui permet sa résolution. Sa description est précédée de quelques rappels sur les différents mécanismes de transfert thermique. Dans le chapitre I, les modes de transfert de la chaleur sont définis et les différentes convections thermiques sont présentées avec les équations qui les gouvernent. Ces convections sont définies par rapport à l'effet prépondérant dans le transfert thermique. La notion de couche limite est introduite succinctement et les équations qui la régissent dans le cas de la convection mixte sont données. Dans le chapitre II, nous avons passé en revue les travaux réalisés sur le problème de la convection mixte autour d'un cylindre. Les équations de notre problème sont posées et la démarche de résolution y est détaillée. Après avoir recensé les difficultés présentes dans cette interaction, le problème est divisé en deux parties : la zone proximale et la zone distale. La difficulté dans la première zone est de trouver le point de départ de l'écoulement. Un changement d'échelle est opéré en utilisant le principe de la

moindre dégénérescence et le problème est résolu en utilisant un développement asymptotique basé sur la fonction de courant et la température et utilisant un paramètre qui caractérise l'effet de l'écoulement extérieur par rapport à l'effet des forces d'Archimède. La séquence obtenue des problèmes, pour chaque ordre, est résolue par une méthode de tir (Rung Kutta) et la solution complète est reconstruite à partir des solutions obtenues pour chaque ordre. La position du point de stagnation dans le cas de notre problème est retrouvée et les conditions du démarrage des calculs dans la zone distale sont fixées. Les profils des vitesses et des températures près de la paroi sont donnés. Dans la zone distale, nous sommes confrontés au problème de recirculation à cause de l'interaction entre l'écoulement ascendant qui prend naissance au bas du cylindre et l'écoulement extérieur descendant, ce qui crée un gradient de pression défavorable et les méthodes d'intégration numérique directe divergent. Une nouvelle méthode qui nous permet de résoudre le problème dans la zone distale est présentée dans le chapitre III. Cette méthode itérative, qui tient compte du caractère elliptique des équations, est basée sur une minimisation de fonctionnelles. Elle est construite sur la courbe de vitesse horizontale nulle qui délimite deux zones et elle utilise comme paramètres de contrôle les résultats des calculs dans la zone proximale et les conditions aux limites aux frontières extérieures. Les différentes épaisseurs de couche limite sont calculées ainsi que les profils des vitesses et des températures.

Le deuxième problème présenté est celui de l'interaction entre deux fluides parfaits superposés et la paroi élastique d'un réservoir contenant ces deux fluides. Il s'agit d'un problème d'interaction fluide structure qui est lié à deux domaines physiques différents. Le mouvement de la paroi est régi par la dynamique des structures et le mouvement des fluides est régi par la dynamique des fluides. De nouveaux phénomènes dus à l'interaction entre les deux domaines apparaissent auxquels on associe une nouvelle discipline appelée interaction fluide structure (I.F.S). Elle étudie les interactions entre une structure fixe ou mobile, rigide ou déformable, et un fluide liquide ou gazeux, compressible ou incompressible, visqueux ou non visqueux s'écoulant autour, face ou à l'intérieur d'elle. L'aspect spécifique de ce domaine est de décrire comment le mouvement de la structure modifie le mouvement du fluide et comment l'écoulement du fluide influe, par l'intermédiaire des efforts qu'il applique, sur la structure. Nous nous sommes intéressés aux cas des fluides parfaits incompressibles contenus dans une structure déformable. L'étude est faite dans le domaine des petits mouvements où les équations sont linéaires, les amplitudes des vibrations restent faibles et les vitesses des fluides restent limitées. Dans le chapitre IV, nous présentons les différents travaux réalisés dans cette discipline. Cette revue bibliographique est constituée de deux parties. Dans la

première, nous avons recensé les travaux réalisés sur le ballotement (en anglais sloshing), c'est-à-dire le mouvement propre des fluides contenus dans un réservoir. La connaissance des fréquences et des modes propres de ballotement jouent un rôle important dans les processus industriels où les fréquences de contrôle des systèmes sont fixées afin d'éviter les risques d'endommagement ou des catastrophes. Les travaux sur le couplage entre un fluide et la structure qui le contient constituent la deuxième partie de la bibliographie. La structure peut prendre plusieurs formes et le fluide qu'elle contient peut la remplir partiellement ou complètement. Le fluide et la structure sont, chacun, caractérisés par un mouvement propre. Le mouvement résultant de l'interaction est une combinaison des modes structure et des modes ballotement. Les résultats les plus importants ainsi que les méthodes, analytique ou numérique, adoptées sont mentionnées. Au chapitre V, nous avons développé un modèle permettant la résolution du problème d'interaction entre deux fluides parfaits superposés et la paroi vibrante d'un réservoir. Le système d'équations régissant le mouvement des deux fluides et les équations gouvernant le mouvement de la paroi sont établis. Les termes représentatifs de l'interaction sont mis en évidence. Les potentiels des vitesses et le déplacement de la paroi sont développés en séries infinies en fonctions des modes propres. Un produit scalaire est mis au point pour vérifier l'orthogonalité des modes propres associés aux potentiels des vitesses. Les potentiels des vitesses introduits dans les différentes équations cinématiques et dynamiques, à l'interface entre les deux fluides et à la surface libre, donnent une nouvelle relation de dispersion. L'introduction des potentiels et du déplacement de la paroi dans les équations régissant l'interaction, en utilisant le nouveau produit scalaire, aboutit à un système algébrique. Sa résolution permet d'obtenir les fréquences et les modes propres du couplage. Le chapitre VI est consacré à la validation de ce modèle. Nous avons dérivé le système d'équations régissant l'interaction entre un seul fluide et la paroi vibrante du système d'équations complet donné au chapitre V. Le produit scalaire assurant l'orthogonalité des modes du potentiel des vitesses est retrouvé et la relation de dispersion dans le cas d'un fluide est vérifiée. Les fréquences de ballotement et les fréquences du couplage, dans le cas de gravité pure et dans le cas gravito-capillaire, sont calculées en utilisant le modèle à deux fluides réduit et ces résultats sont comparés à ceux donnés dans la littérature. L'application de ce modèle pour deux fluides superposés en interaction avec la paroi vibrante d'un réservoir est présentée au chapitre VII. Nous avons étudié les deux familles de fréquences de ballotement en fonction du rapport des masses volumiques des deux fluides. Le phénomène du couplage est abordé en calculant les fréquences du couplage et en classant les modes du couplage en modes structure et mode de ballotement. Les fréquences du couplage sont

comparées aux deux familles de fréquences de ballottement et les mouvements de l'interface et de la surface libre sont analysés.

Une conclusion générale recense les motivations, les résultats trouvés et les perspectives pour chacun des problèmes traités.

PARTIE I
INTERACTION COUCHE LIMITE –ÉCOULEMENT EXTERIEUR

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET EQUATIONS DE LA CONVECTION MIXTE

I-INTRODUCTION :

I.1-MODES DE TRANSFERT DE CHALEUR

Le transfert de chaleur peut être défini comme la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de température. Ce transfert de chaleur est régi par une combinaison de plusieurs lois physiques indépendantes. La littérature reconnaît généralement trois modes de transmission de la chaleur : La conduction, le rayonnement et la convection. Seuls les deux premiers sont des modes de transfert de chaleur conformes à la définition, puisque les processus de ces mécanismes sont les seuls qui dépendent simplement de l'existence d'un gradient de température. La convection n'est pas conforme à la définition du transfert de chaleur, car elle dépend aussi, pour sa réalisation, du mécanisme de transport de quantité de mouvement. Mais comme la convection accomplit également un transfert d'énergie des régions à haute température vers les régions à basse température, le terme 'transmission de chaleur par convection' est devenu classique.

La conduction est un phénomène au moyen duquel la chaleur s'écoule à l'intérieur d'un milieu d'une région à haute température vers une autre à basse température, ou entre différents milieux mis en contact. La chaleur se propage par contact direct des molécules sans déplacement appréciable des molécules.

Le rayonnement est le mécanisme par lequel la chaleur se transmet d'un corps à haute température vers un autre à basse température, lorsque ces corps sont séparés dans l'espace ou lorsqu'un vide existe entre eux. Le terme rayonnement est généralement appliqué à toutes sortes de phénomènes d'onde électromagnétique, mais dans la transmission de chaleur les seuls phénomènes qui ont de l'intérêt sont ceux qui résultent d'une différence de température et qui peuvent transporter de l'énergie à travers un milieu transparent ou à travers l'espace. L'énergie transmise de cette manière est désignée par la chaleur rayonnée.

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz.

Le transfert de chaleur par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. La chaleur ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules fluides. Ensuite les particules

fluides vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement concerne le fluide et l'énergie. Cette dernière est, à présent, emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. Ce processus n'est pas conforme à la définition de la transmission de la chaleur, car son mécanisme ne dépend pas simplement d'une différence de température. Cependant, l'effet réel est un transport d'énergie et comme il s'effectue suivant la direction du gradient de température, il est aussi classé comme mode de transmission de la chaleur désigné par écoulement de chaleur par convection.

On distingue trois types de convection dans le cas d'un fluide :

La convection forcée se produit quand le mouvement du fluide est imposé par une intervention extérieure au système ; c'est le cas des échangeurs industriels et des radiateurs des automobiles. Deux fluides en mouvement échangent alors de l'énergie à travers une paroi dont la température diffère des leurs. Comme les vitesses d'écoulements peuvent atteindre des valeurs très élevées, le transfert d'énergie par convection forcée est souvent très efficace.

La convection naturelle apparaît spontanément, sous certaines conditions, dans un fluide au sein duquel existe un gradient de température imposé en général par le milieu extérieur. La convection naturelle est en général beaucoup moins efficace que la convection forcée. On est souvent obligé de se limiter à un transfert par convection naturelle, dans de nombreuses applications, pour des raisons de fiabilité technique ou de coût économique. On utilise alors des ailettes qui augmentent la surface d'échange entre le fluide et le système.

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents quand les vitesses d'écoulement dues aux deux types de convections considérées séparément sont du même ordre de grandeur.

Dans les différents types de convections, il est nécessaire de déterminer si le processus est stationnaire ou variable. Lorsque le flux de chaleur dans un système ne varie pas avec le temps, la température en chaque point reste la même et les conditions du régime permanent prédominent. Dans le cas du régime permanent, le flux de chaleur entrant en n'importe quel point du système doit être exactement égal au flux de chaleur sortant de sorte qu'il n'y a pas de variation d'énergie interne. La plupart des problèmes techniques de transmission de chaleur se rapportent aux systèmes en régime permanent. Ainsi l'écoulement de la chaleur à partir des produits de combustion vers l'eau des tubes d'une chaudière, le refroidissement par l'air environnant d'une ampoule électrique et la transmission de chaleur dans un échangeur thermique constituent des exemples. L'écoulement de chaleur dans un système est transitoire lorsque les températures en différents points du système varient avec le temps. Comme une

variation de température indique une variation d'énergie interne, on en conclut que l'accumulation de l'énergie est une partie intégrante de l'écoulement de chaleur en régime variable. Ces problèmes sont plus complexes que ceux en régime permanent et souvent ils sont résolus par des méthodes approchées. Ces problèmes se présentent au cours des périodes de chauffage des fours, des chaudières et des turbines, dans les phénomènes de retrait des pièces de fonderie. Un cas particulier de l'écoulement de chaleur en régime variable se présente lorsqu'un système est soumis aux variations cycliques de température du milieu environnant. Les problèmes de ce type rentrent dans la classification de la transmission de chaleur en régime quasi permanent ou périodique. Comme exemple de ce type de transmission, l'écoulement de chaleur à travers les parois d'un cylindre d'un moteur alternatif lorsque la température des gaz qui s'y trouvent varie périodiquement.

Comme le transfert de chaleur par convection est très intimement lié au mouvement du fluide, il est nécessaire de connaître le mécanisme de l'écoulement du fluide avant d'examiner celui de l'écoulement de la chaleur. Un des plus importants aspects de l'étude hydrodynamique est d'établir si le mouvement du fluide est laminaire ou turbulent. Dans un écoulement laminaire, le fluide s'écoule par couches, chaque particule de fluide suit une ligne unie et continue. Les particules fluides dans chaque couche restent dans un ordre régulier sans passer les unes sur les autres. A l'opposé de ce mouvement ordonné de l'écoulement laminaire, quand la vitesse croît, le type d'écoulement change totalement, à partir d'une vitesse critique, qui dépend de la nature du fluide et de la géométrie, les mouvements deviennent tourbillonnaires, de caractère aléatoire et favorise le brassage. Ce régime est dit turbulent. La trajectoire de toute particule individuelle est irrégulière, mais sur une base statistique le mouvement global de l'ensemble des particules fluides est régulier.

L'analyse d'un problème de convection mixte qui passe par la connaissance, des champs de vitesse et de température, est un problème complexe. Il est généralement tridimensionnel mais il peut se ramener à une formulation bidimensionnelle dans certains cas d'écoulements externes.

La frontière du domaine d'étude permet de distinguer deux catégories de problèmes, externes et internes.

Dans le cas d'un problème externe, l'écoulement se fait à l'extérieur d'un domaine, borné ou non, sans limite à distance finie, comme une plaque, un cylindre ou une sphère. Dans cette situation, on applique les méthodes de calcul de la couche limite, de nature asymptotique, en dehors des zones de décollement. Pour ce faire, on fait un choix qui permet de favoriser dans la formulation l'un des modes de convection, naturelle ou forcé, ce qui fait

apparaître un petit paramètre dans les équations. Les solutions dans ce cas sont de type perturbations singulières des équations de Navier-Stokes. Les méthodes asymptotiques sont utilisées pour une analyse locale où le petit paramètre apparaît comme variable. Un traitement numérique est appliqué pour l'analyse des équations globales et les résultats de l'analyse locale sont utilisés comme condition de départ.

Les problèmes internes désignent les problèmes à l'intérieur d'un domaine borné au moins dans une direction, comme les écoulements dans les conduites. Dans ce cas le traitement du problème est complètement numérique.

Quelque soit la forme d'échange convectif et la nature du domaine, il est possible de classer les problèmes d'après la géométrie des frontières et la disposition de ces dernières par rapport à la direction des forces qui donnent naissance au mouvement. Un problème de convection n'est complètement déterminé que si l'on précise l'orientation, pour une géométrie et des conditions aux limites données, des frontières par rapport à la direction de la gravité. Ce paramètre permet d'établir l'une des classifications des problèmes en l'occurrence dans le cas de la convection naturelle.

En convection mixte où l'on considère les forces d'origine thermique et les forces motrices extérieures, on complète le classement de ces problèmes en tenant compte de la direction relative de ces forces. Ce paramètre peut conditionner la structure des écoulements et fait apparaître quelques difficultés dans le traitement de ces problèmes. L'apparition d'une zone de recirculation, au voisinage du point de stagnation, dans le cas de la convection mixte bidimensionnelle est liée à ce paramètre.

1.2 - LA COUCHE LIMITE

Lorsqu'un fluide s'écoule le long d'une surface, indépendamment de la nature de l'écoulement, les particules à proximité de la surface sont ralenties par des forces de viscosité. Les particules fluides adjacentes à la surface y adhèrent et ont une vitesse nulle par rapport à la paroi. Les autres particules fluides s'efforçant de glisser sur les premières sont ralenties par suite de l'interaction entre le mouvement accéléré et retardé du fluide, phénomène qui donne naissance aux forces de cisaillement.

Les effets des forces de viscosité qui prennent naissance à la paroi s'étendent dans la masse du fluide mais, à une faible distance de la paroi, la vitesse des particules fluides atteint celle de l'écoulement libre non perturbé. La région interne dans laquelle sont localisées les variations notables de la vitesse est appelée *couche limite hydrodynamique*. L'épaisseur de cette couche est définie comme étant la distance comptée à partir de la paroi telle que la vitesse locale atteint 99% de la vitesse du fluide loin de la paroi.

La couche limite thermique est due au phénomène de diffusion de l'enthalpie. Le champ de température du fluide est perturbé par la présence de la paroi, qui impose des conditions thermiques extrêmement diverses à l'interface paroi-fluide. On appelle *couche limite thermique* la zone du fluide comprise entre la paroi et le lieu des points dont l'écart de température avec la paroi, compté dans la direction normale à l'interface, est égal 99% de l'écart de température entre la partie du fluide non perturbé et la paroi.

La notion de la couche limite a été introduite par **PRANDTL [1904]**. En première approximation, la couche limite divise le champ d'écoulement autour d'un corps en deux parties : une mince couche enveloppant la surface du corps où le gradient de vitesse est grand et où les forces de viscosité sont importantes, et la région à l'extérieur de cette couche où les effets de la viscosité sont négligeables.

Le profil des vitesses à l'intérieur de la couche limite dépend de la nature de l'écoulement. Au départ de la couche limite, seules les particules fluides situées au voisinage immédiat de la paroi sont ralenties, le reste du fluide s'écoulant à la vitesse du courant libre non perturbé loin de l'interface. L'écoulement progressant, les forces de cisaillement ralentissent de plus en plus son mouvement et l'épaisseur de la couche limite augmente. L'écoulement à l'intérieur cette couche reste laminaire seulement sur une certaine distance et devient ensuite turbulent si le parcours est suffisamment long. On ne connaît pas assez le mécanisme de transition pour prédire avec précision quand celle-ci aura lieu, mais le phénomène conduisant à l'accroissement de la perturbation dans une couche limite laminaire peut être décrit **SCHLICHTING [1955]**. Il existe toujours des petites perturbations dans un fluide en écoulement, mais aussi longtemps que les forces de viscosité restent importantes elles empêchent leur accroissement. Cependant, comme l'épaisseur de la couche limite laminaire augmente, le rapport des forces de viscosité aux forces d'inertie décroît pour éventuellement atteindre un stade où les perturbations ne peuvent que croître avec le temps. La couche limite devient alors instable et la transition entre l'écoulement laminaire et turbulent est atteinte. La distance entre le début de la couche limite et le point de transition est appelé longueur critique. Cette distance est liée au nombre de Reynolds. Ce point dépend du contour de la surface, de sa rugosité, de la turbulence propre du courant libre et aussi du transfert thermique.

Lorsque le contour de la surface, sur lequel s'écoule le fluide, est de forme quelconque, l'écoulement de couche limite est, qualitativement, le même que dans le cas d'une plaque plane. Toutefois, le profil du corps devient important lors de la détermination du point où la couche limite décolle de la surface. Ce phénomène est dû au fait que l'énergie

cinétique du fluide dans la couche limite est dissipée sous forme de viscosité. Lorsque la vitesse du courant fluide augmente, la pression exercée sur les surfaces diminue dans le sens de l'écoulement et les forces à la frontière de la couche limite s'opposent au ralentissement du fluide dû aux frottements à la paroi. Par contre lorsque la vitesse de fluide diminue dans le sens de l'écoulement, la pression ainsi que les forces de cisaillement ont tendance à ralentir l'écoulement du fluide. Il se produit alors, dans la couche limite, un écoulement dans le sens opposé au courant principal dès que l'énergie cinétique du fluide cesse de vaincre l'augmentation de pression.

Les premiers travaux sur la couche limite ont été faits par **BLASIUS [1908]** et **HIEMENZ [1911]** dans le cas d'un écoulement sur un plan infini. Les méthodes développées par ces auteurs ne s'appliquent pas car dans le cas d'un écoulement plan, le gradient de pression s'annule ; par contre il apparaît dans le cas des autres géométries. Par conséquent, il est nécessaire dans ces cas de se servir de la pression de l'écoulement potentiel, ou de mesurer la pression, ou bien de supposer certaines conditions pour la vitesse en dehors de la couche limite. Les équations de la couche limites sont alors résolues en faisant un développement en séries doubles, alors les équations aux dérivées partielles sont réduites à un système d'équations, **BLASIUS [1908]**, **HIEMENZ [1911]**, **FALKNER et SKAN [1930]**, **HOWARTH [1938]** et **BAIRSTOW [1939]** ou intégrées pas à pas **BAIRSTOW [1925]**, **GREEN [1930]** et **GOLDSTEIN [1930]**. Dans le cas d'un cylindre, **DOENHOFF [1935]** et **MILIKAN [1936]** ont appliqué la méthode de **KARMAN [1934]** pour calculer la pression. D'autres travaux ont été faits ultérieurement pour améliorer les travaux précédents et répondre aux questions posées.

1.3-EQUATIONS DE CONVECTION MIXTE:

Les écoulements de convection mixte sont décrits par les équations de Navier Stokes auxquelles on joint l'équation de continuité. Ces équations sont déduites des principes classiques de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la masse totale du fluide. En régime stationnaire elles s'écrivent:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla} p - \rho g \vec{J} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} \quad (1.2)$$

$$\rho C_p (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) \quad (1.3)$$

On ne tient pas compte, dans l'équation de l'énergie, de la production ou la destruction de la chaleur et on néglige la fonction de Rayleigh qui rend compte des dissipations visqueuses irréversibles. On néglige aussi la dérivée particulaire de la pression.

On associe à ces équations deux types de conditions aux limites, dynamique et thermique, qui permettent d'assurer la fermeture du problème.

En désignant par $\partial\Omega = \partial\Omega_s \cup \partial\Omega_\infty$ la frontière du domaine où $\partial\Omega_s$ représente la partie solide et $\partial\Omega_\infty$ celle qui est rejetée à l'infini, on peut poser les conditions aux limites comme suit :

a- Conditions aux limites dynamiques :

$$\vec{V} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega_s \quad (1.4)$$

Cette condition résulte de la notion d'adhérence de l'écoulement à la paroi. Ceci suppose que l'on fait abstraction des problèmes de soufflage ou d'aspiration.

$$\vec{V} = \vec{V}_\infty \text{ sur } \partial\Omega_\infty \quad (1.5)$$

Où $\vec{V}_\infty$ est la vitesse de l'écoulement loin de la paroi supposée connue.

b- Conditions aux limites thermiques :

Sur $\partial\Omega_s$, les conditions sur la température peuvent être complexes et de différentes natures. Elles dépendent de la manière dont est fournie la chaleur. On peut imposer une température constante ou variable à la paroi (Condition de Dirichlet), ou un flux de chaleur (condition de Neumann) local ou global. Dans notre cas, on considère que la température est connue et on écrit.

$$T = T_p \text{ donné sur } \partial\Omega_s. \quad (1.6)$$

Sur $\partial\Omega_\infty$, on admet que la température est celle du milieu extérieur d'où :

$$T = T_\infty \text{ sur } \partial\Omega_\infty \quad (1.7)$$

Dans les problèmes de convection mixte, le terme de pesanteur joue un rôle essentiel et, en utilisant l'approximation de Boussinesq, il s'écrit :

$$\rho g = \rho_0 g (1 - \beta(T - T_0)) \quad (1.8)$$

Les équations générales, applicables à une multitude de problèmes, peuvent être analysées d'une manière plus précise. Ceci est possible en introduisant un nombre de paramètres finis, qui sont liés aux grandeurs physiques gouvernant le problème. Ces paramètres sont déduits de l'adimensionnalisation des équations 1.1-1.8, en introduisant des variables de référence.

On se donne comme échelles fondamentales de référence une dimension caractéristique des longueurs L_0 , une vitesse V_0 et un écart de température ΔT caractéristique du problème. Dans le cas des fluides dilatables, on prend T_0 comme température de référence et $P_0 = \rho_0 V_0^2$ comme unité de pression où $\rho_0 = \rho(T_0)$ désigne l'unité de masse volumique.

Si la température du fluide est connue à l'infini, on pose $T_0 = T_\infty$, ce qui rend la condition thermique à l'infini homogène. Si la condition sur la température à la paroi est de type Dirichlet, on prend $\Delta T = T_p - T_\infty$.

Le choix de la vitesse de référence dépend du terme source qui caractérise la convection. Dans le cas d'une convection mixte dominée par les termes de l'écoulement extérieur, on choisit comme référence des vitesses celle de l'écoulement lointain. Dans le cas contraire, quand la convection est dominée par les termes d'inertie et de poussée d'Archimède, on n'a pas une vitesse de référence propre. On choisit alors une unité de vitesse qui attribuerait le même ordre de grandeur aux termes d'inertie et de poussée d'Archimède pour l'étude des problèmes de couche limite.

En introduisant ces grandeurs de référence dans les équations 1.1-1.7, en tenant compte de l'approximation de Boussinesq (1.8), on obtient le système d'équations adimensionnelles suivant :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.9)$$

$$\rho(\vec{\nabla} \vec{V}) \cdot \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \varepsilon_1 \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\sigma}) + \varepsilon_2 \beta \theta \vec{J} \quad (1.10)$$

$$\rho \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{V} = \frac{\varepsilon_1}{\text{Pr}} \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} \theta) \quad (1.11)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{V} = \varepsilon_3 \frac{\vec{V}_\infty}{|\vec{V}_\infty|} \text{ et } \theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\infty \quad (1.12)$$

$$\vec{V} = \vec{0} \text{ et } \theta = 1 \text{ sur } \partial\Omega_s \quad (1.13)$$

où :

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T} \text{ et } P \text{ sont respectivement la température et la pression réduites.}$$

$\text{Pr} = \frac{\mu}{\rho \lambda}$ est le nombre de Prandtl, qui représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement et la diffusion thermique.

Les paramètres ε_1 , ε_2 et ε_3 sont donnés par :

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{\rho_0 V_0 L_0} ; \quad \varepsilon_2 = \frac{g \beta_0 L_0 \Delta T}{V_0^2} ; \quad \varepsilon_3 = \frac{V_\infty}{V_0}$$

I.4-DIFFERENTS REGIMES DE CONVECTION

I.4.1-CONVECTION FORCEE DOMINANTE

Dans le cas d'une convection forcée dominante, la vitesse de l'écoulement extérieur est connue. On pose alors $V_0 = V_\infty$ et, dans ce cas, les paramètres ε_1 , ε_2 et ε_3 s'écrivent :

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{\rho_0 V_\infty L_0} = \frac{1}{\text{Re}} ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho_0^2 g \beta_0 L_0^3 \Delta T}{\mu^2} \frac{\mu^2}{\rho_0^2 V_\infty^2 L_0^2} = \frac{Gr}{\text{Re}^2} ; \quad \varepsilon_3 = \frac{V_\infty}{V_\infty} = 1$$

Et les équations (1.9-13) deviennent :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.14)$$

$$\rho (\vec{\nabla} \vec{V}) \cdot \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\text{Re}} \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\sigma}) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \beta \theta \vec{J} \quad (1.15)$$

$$\rho \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{V} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} \theta) \quad (1.16)$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{V}_\infty}{|\vec{V}_\infty|} \quad \text{et} \quad \theta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_\infty \quad (1.17)$$

$$\vec{V} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \theta = 1 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_s \quad (1.18)$$

I.4.2-CONVECTION NATURELLE DOMINANTE :

I.4.2.1-REGIME NORMALE :

Dans le cas où les effets thermiques se superposent à ceux dus aux forces de viscosité, on pose $V_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0 L_0}$ et les paramètres ε_1 , ε_2 et ε_3 deviennent :

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{\rho_0 L_0} \frac{\rho_0 L_0}{\mu} = 1 ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho_0^2 g \beta_0 L_0^3 \Delta T}{\mu_0^2} = Gr ; \quad \varepsilon_3 = \frac{\rho_0 L_0 V_\infty}{\mu_0} = \text{Re}$$

Les équations (1.10-13) s'écrivent alors:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.19)$$

$$\rho (\vec{\nabla} \vec{V}) \cdot \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\sigma}) + Gr \cdot \beta \theta \vec{J} \quad (1.20)$$

$$\rho \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{V} = \frac{1}{\text{Pr}} \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} \theta) \quad (1.21)$$

$$\vec{V} = \text{Re} \frac{\vec{V}_\infty}{|\vec{V}_\infty|} \text{ et } \theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\infty \quad (1.22)$$

$$\vec{V} = \vec{0} \text{ et } \theta = 1 \text{ sur } \partial\Omega_s \quad (1.23)$$

1.4.2.2-REGIME DE COUCHE LIMITE :

Dans le cas d'une couche limite, la vitesse de référence est : $V_0 = (g\beta_0 L_0 \Delta T)^{1/2}$, ce qui donne lieu à :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\mu}{\rho_0 (g\beta_0 L_0 \Delta T)^{1/2} L_0} = \frac{1}{Gr^{1/2}} ; & \varepsilon_2 &= \frac{g\beta_0 L_0 \Delta T}{V_0^2} = \frac{g\beta_0 L_0 \Delta T}{g\beta_0 L_0 \Delta T} = 1 ; \\ \varepsilon_3 &= \frac{V_\infty}{V_0} = \frac{V_\infty}{(g\beta_0 L_0 \Delta T)^{1/2}} = \frac{V_\infty L_0 \rho_0}{\mu} \frac{V_\infty}{\rho_0 (g\beta_0 L_0 \Delta T)^{1/2} L_0} = \frac{\text{Re}}{Gr^{1/2}} \end{aligned}$$

Les équations (1.9)-(1.13) s'écrivent alors :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.24)$$

$$\rho (\vec{\nabla} \vec{V}) \cdot \vec{V} = -\vec{\nabla} p + Gr^{-\frac{1}{2}} \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\sigma}) + \beta \theta \vec{J} \quad (1.25)$$

$$\rho \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{V} = \frac{1}{Gr^{1/2} \text{Pr}} \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} \theta) \quad (1.26)$$

$$\vec{V} = \text{Re} Gr^{-\frac{1}{2}} \frac{\vec{V}_\infty}{|\vec{V}_\infty|} \text{ et } \theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\infty \quad (1.27)$$

$$\vec{V} = \vec{0} \text{ et } \theta = 1 \text{ sur } \partial\Omega_s \quad (1.28)$$

Ici :

- $\text{Re} = \frac{V_\infty L_0 \rho_0}{\mu}$ est le nombre de Reynolds qui représente le rapport entre les forces

d'inertie, dues à l'écoulement extérieur, et les forces visqueuses.

- $Gr = \frac{\rho^2 g \beta_0 L_0 \Delta T L^2}{\mu^2}$ est le nombre de Grashof qui désigne le rapport entre les

forces d'inertie, dues à la poussée d'Archimède, et les forces visqueuses.

L'importance relative de la poussée d'Archimède par rapport aux forces motrices extérieures est mesurée par le groupement $Gr \text{Re}^{-2}$, appelé nombre de Richardson et qui permet de définir les domaines de prépondérance des convections, forcée et naturelle. Quand les deux forces ont la même importance, on est dans le cas de la convection mixte. Ces trois nombres sont fondamentaux dans l'étude de la convection mixte en régime de couche limite.

D'autres paramètres ont aussi un rôle important, en particulier:

- Les orientations, par rapport à la géométrie de l'obstacle, de l'écoulement extérieur $\vec{V}_\infty$ et du vecteur $\vec{J}$ qui représente la pesanteur.
- Les variations des paramètres physiques du problème, μ , ρ et λ , en fonction de la température. Cependant, l'influence de ces variations est supposée négligeable dans certaines conditions.

1.5- EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE EN CONVECTION MIXTE

Compte tenu des approximations classiques de Prandtl, et en introduisant la fonction de courant Ψ , les équations générales (1.1-3) s'écrivent, en tenant compte de l'approximation de Boussinesq, sous la forme :

$$\Psi_n \Psi_{sn} - \Psi_s \Psi_{nn} - \nu \Psi_{nnn} = u_e \frac{du_e}{ds} + g\beta_m J_s \theta \quad (1.29)$$

$$\Psi_n \theta_s - \Psi_s \theta_n = \frac{\nu}{Pr} \theta_{nn} \quad (1.30)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$n = 0 \quad \Psi = \Psi_n = 0 \quad \theta = \theta_p(s) \quad (1.31)$$

$$n \rightarrow \infty \quad \Psi_s = u_e(s) \quad \theta = 0 \quad (1.32)$$

Les solutions de ce type de problèmes sont classées selon deux catégories :

a- les solutions affines : Une solution affine d'une équation aux dérivées partielles est une solution invariante par le groupe de transformations liées au changement d'échelles des grandeurs intervenant dans le problème physique considéré. Dans la théorie de la couche limite, ces solutions constituent le point de départ de la recherche d'une solution complète sous forme de développement en séries de Blasius. Dans le cas de la convection mixte, l'existence de solutions affines est subordonnée à une distribution imposée de température à la paroi, qui confère aux termes sources des ordres de grandeur équivalents. La connaissance de cette solution affine au voisinage de l'origine permet ensuite de calculer de proche en proche la solution loin de l'origine.

b- Autres types de solutions :

Si la vitesse de l'écoulement potentiel $u_e(s)$ et le produit $J_s \theta_p$ sont des fonctions linéaires de l'abscisse curviligne s , les équations de la couche limite admettent des solutions

exactes pour Ψ et θ dépendant linéairement de s (AMAUCHE [1986], COUSTEIX [1988]).

1.6- POSITION DU PROBLEME

On considère un cylindre horizontal de section circulaire et de longueur infinie pour ignorer les effets des bords. Le cylindre est chauffé et est soumis à un écoulement extérieur oblique. Le chauffage induit une convection naturelle qui prend naissance à partir du point le plus bas du cylindre. L'écoulement extérieur introduit une convection forcée qui prend naissance à partir du point d'arrêt de l'écoulement extérieur sur la surface du cylindre. Le résultat de la coexistence des deux effets est un problème de convection mixte. On exposera une méthode de résolution de ce problème dans le cas d'une convection naturelle dominante où l'écoulement extérieur est considéré comme une perturbation de l'écoulement issu des forces d'Archimède. Le domaine d'étude est alors divisé en deux zones.

Dans la zone proximale, le système est réduit à un système d'équations de la couche limite de convection mixte. Le problème est résolu par une méthode de perturbation dont le paramètre caractérise l'effet de l'écoulement extérieur par rapport à l'écoulement de la convection naturelle. Cette partie est traitée dans le chapitre II

Dans la zone distale où l'écoulement de la couche limite interagit avec l'écoulement extérieur, les effets de l'écoulement dus aux forces d'Archimède et de l'écoulement extérieur sont de même ordre mais de directions opposées. Une méthode d'intégration directe des équations du problème dans cette zone diverge. Pour résoudre ce problème, nous avons développé une méthode itérative, développée dans le chapitre III, et basée sur la minimisation d'une fonctionnelle. Cette méthode utilise les résultats de la zone proximale pour son initialisation.

CHAPITRE II

CONVECTION MIXTE DANS LA ZONE PROXIMALE

II.1 –INTREODUCTION

Dans l'analyse précédente, trois paramètres fondamentaux (Re , Gr , Pr) qui régissent les écoulements de convection mixte, ont été mis en évidence. On a relevé l'importance des effets de deux paramètres géométriques et de trois paramètres physiques. On s'intéressera à l'influence de ces différents paramètres dans le cas d'une convection mixte autour d'une géométrie cylindrique. On examinera le cas symétrique où la vitesse de l'écoulement extérieur est verticale et le cas asymétrique où la vitesse de l'écoulement extérieur possède une direction quelconque, tout en restant dans le plan de la section droite.

II.1.1-CAS SYMETRIQUE : Lorsque la vitesse de l'écoulement extérieur est verticale, la convection mixte est uniformément favorable ou défavorable. Elle est favorable si l'écoulement extérieur est ascendant, la température de paroi du cylindre étant supérieure à celle du milieu extérieur ou quand il est descendant le cylindre étant plus froid que le milieu extérieur. Elle est défavorable pour un écoulement extérieur ascendant (descendant) et une température à la surface du cylindre inférieure (supérieure) à celle du milieu extérieur. Les régimes d'écoulement possibles dépendent des nombres de **Grashof** et de **Prandtl** qui influent sur les nombres de Reynolds critiques caractérisant les transitions entre les divers régimes d'écoulement.

Plusieurs méthodes, analytiques, numériques et expérimentales, ont été développées pour résoudre ce problème. Des méthodes analytiques, basées sur le développement des champs de vitesse et de température en séries de puissance de la variable angulaire, sont proposées par **JOSH & SUKATME [1971]**. Ils ont utilisé le fait que l'écoulement se développe, dans la zone dissipative, à partir d'un point d'arrêt de l'écoulement potentiel. **SPARROW et LEE [1976]** ont fait une étude similaire en tenant compte de l'influence de la séparation sur le développement de l'écoulement potentiel. Ils ont introduit des fonctions appropriées pour généraliser le problème. Une méthode des développements asymptotiques raccordés a été développée par **WOOD [1972]** afin d'étudier l'influence des effets d'Archimède sur la structure de l'écoulement en convection mixte, en se basant sur les travaux expérimentaux de **COLLIS et WILIAMS [1959]**. Ces derniers expliquent que le mécanisme de transfert est du type convection forcée quand $Re > Gr^{1/3}$ pour des Reynolds faibles et le travail de **GEBHART et PERA [1970]** qui a corrigé ce critère pour tenir compte du nombre de Prandtl, Le paramètre de perturbation utilisé est la rapport $Gr^{1/3} / Re$. Le

champ de l'écoulement est partagé en trois zones différentes: visqueuse, irrotationnelle et de sillage. Cependant ; l'étude a essentiellement porté sur l'écoulement de la zone de sillage et son interaction avec le reste du domaine.

L'usage du transfert thermique à partir des fils horizontaux sous l'effet combiné des convections, naturelle et forcée, a été étudié par **BARELKO et SHITESSEL [1974]**. Ils ont montré que, dans le cas d'une convection mixte défavorable, le coefficient de transfert thermique $Nu(Re)_{Ra=cte}$ passe par un minimum et il existe une région où les conditions du transfert thermique sont oscillantes.

Quand un des types de convection, naturelle ou forcée, peut être considéré comme une perturbation de l'autre, une solution analytique est proposée **NAKAI et OKAZAKI [1975]**. Le coefficient d'échange est donné sous forme d'une fonction en puissances du paramètre $Pr.Re^3 / Nu.Gr$.

Les solutions numériques proposées sont nombreuses et variées. En utilisant les équations transformées de la couche limite, **MERKIN [1977]** propose une solution dans le cas d'une convection mixte favorable ou défavorable. Dans le premier cas, il montre que le décollement est retardé et peut être supprimé quand la poussée d'Archimède est suffisamment grande. Dans le second, le point de séparation se rapproche du point d'arrêt amont et au-delà d'une certaine valeur du paramètre de la convection mixte, l'écoulement de couche limite cesse d'exister. **NAZAR et al [2004]** ont fait une étude similaire pour un flux de chaleur constant et pour différentes valeurs du paramètre de convection mixte. Pour de faibles nombres de Reynolds et pour des ordres de grandeur des convections naturelle et forcée comparables, la structure de l'écoulement devient complexe. Le problème est résolu numériquement en utilisant les équations globales. **JAIN et LOHAR [1979]** ont étudié la convection mixte instationnaire pour des *Reynolds* moyens. Ils ont mis en évidence l'influence de la convection naturelle sur le nombre de *Strouhal* caractéristique du mécanisme séquentiel des allées tourbillonnaires. **INGHAM et MERKIN [1981]** ont étudié la convection mixte instationnaire sur un cylindre horizontal, isotherme, dans un écoulement vertical ascendant. Des solutions numériques des équations de la couche limite ont été obtenues sur toute la longueur du cylindre en utilisant une méthode de développement en séries tronquées. **SUNDEN [1983] et BADR [1984]** ont résolu les équations complètes en projetant la solution, dans la direction azimutale, sur une base de Fourier incomplète. Le transfert thermique par convection mixte lorsque le flux de chaleur est uniforme a été analysé par **AHMED et QURESHI [1992]** en résolvant numériquement les équations de Navier-

Stokes et de l'énergie. Ils ont montré que le coefficient de transfert thermique est plus important que dans le cas d'une température uniforme. **BASSAM [1999]** a étudié numériquement l'influence sur le transfert thermique des nombre de Reynolds et de Grashof, de la poussée d'Archimède et de l'angle d'attaque de l'écoulement libre.

Des études expérimentales ont été également réalisées pour déterminer les lois d'échange thermique. C'est la relation entre le nombre de Nusselt, local ou global, et les différents paramètres régissant le problème qui est recherchée. **WAN DER HEGGE ZIJNEN [1956]** a proposé une loi qui lie le nombre de Nusselt global aux nombres de Nusselt des convections, naturelle et forcée, mais elle représente imparfaitement les résultats expérimentaux. Une expression d'ordre 2, en puissance du paramètre de la convection mixte, Gr/Re^2 , est présentée par **OOSTHUIZEN et MADAN [1970]**. Un raffinement de cette loi portée à l'ordre 3 a été proposé par **SUNDEN [1983]** pour le cas d'une température de paroi constante. **JACKSON et YEN [1971]** ont établi une relation dans la gamme $10^2 < Re < 3.10^3$ et $25.10^3 < Gr < 3.10^5$ qui s'accorde bien avec la corrélation de **OOSTHUIZEN et MADAN [1970]**. **FAND & KESWANI [1973]** ont étendu la validité du paramètre Gr/Re^2 et ils ont délimité quatre zones dans lesquelles les mécanismes de transfert par convection mixte diffèrent.

II.1.2-CAS DISSYMETRIQUE : Lorsque l'écoulement non perturbé présente une inclinaison par rapport à la verticale, il n'y a aucune symétrie dans le problème. Dans ce cas, le gradient de pression externes et les forces de volume n'ont pas la même origine. Les forces de volume le font à partir du point le plus bas du cylindre (plus haut) pour un cylindre chauffé (refroidi). Par ailleurs, l'origine des forces de pression coïncide avec le point d'impact de l'écoulement externe avec le cylindre. Dans ce cas de figure, il existe des régions où l'action des forces de pression et des forces de volume sont antagonistes. Cet antagonisme fait naître, entre les deux points de naissance des deux forces, une zone de stagnation où le sens de la vitesse, tout près de la paroi, dépend de l'importance relative des deux effets sur le mouvement.

Les premiers qui ont étudié ce problème sont **SHARMA et SUKHATME [1969]**. Quand l'écoulement lointain est horizontal, ils proposent des critères de transition de la convection naturelle vers la convection mixte et de la convection mixte vers la convection forcée. **HATTON et al [1970]** ont utilisé une loi d'échange inspirée par **COLLIS et WILLIAM [1959]** pour la convection forcée et qui tient compte de l'inclinaison de l'écoulement extérieur. **OOSTHUIZEN et MADAN [1971]** proposent des corrélations

graphiques pour différentes inclinaisons. Ils montrent que les effets de la poussée d'Archimède améliorent les échanges dans le cas d'une convection mixte favorable. Lorsqu'elle est défavorable, le taux de transfert diminue tant que le paramètre de la convection mixte reste inférieur à une certaine valeur critique au-delà de laquelle il augmente pour tendre vers celui de la convection naturelle.

Les études numériques consacrées à la convection mixte dissymétrique restent très limitées. **BADR [1983]** est le premier à proposer un travail dans le cas d'un écoulement horizontal qu'il a étendu (**[BADR 1985]**) au cas d'un écoulement externe ayant une inclinaison quelconque. La méthode utilisée est celle développée par **[BADR 1984]** pour le problème de la convection naturelle autour d'un cylindre horizontal dans le cas d'écoulements parallèles et opposés. Le même auteur **[BADR 1994]** a présenté une étude numérique de la convection mixte laminaire autour d'un cylindre de section elliptique placé dans un écoulement uniforme. Ce travail est focalisé sur les effets des nombres de Reynolds et de Grashof et sur le processus de transfert thermique. **KAMINSKI [1995]** a effectué une analyse numérique et expérimentale des effets combinés de la convection et du rayonnement sur un écoulement laminaire autour d'un cylindre. Il a utilisé la méthode des éléments finis dans le cas des faibles nombres de Reynolds.

L'un des premiers travaux sur la résolution des équations de la couche limite autour d'un cylindre horizontal a été effectué par **HOWARTH [1938]**. Il a développé une méthode pour résoudre les équations de la couche limite dans les régions où l'écoulement est retardé. Il remplace la distribution des vitesses au bord de la couche limite par un polygone d'un nombre fini de côtés et impose à l'intégrale du moment d'être continue à chaque sommet. **MEKSYN [1948]** réduit le problème de la couche limite à la résolution d'une équation différentielle non linéaire dont il donne la solution dans le cas d'un cylindre circulaire.

Le comportement d'une couche limite au point de stagnation dans le cas où la vitesse externe subit un changement dépendant du temps entre deux états stables a été étudié par **CEBECI et al [1979]**. Ils ont montré que le changement des conditions externes se manifeste par une nouvelle couche qui croît sous la couche limite originale. Ils ont utilisé la méthode de **KELLER [1974]** en traitant la couche limite comme une double structure.

La structure de l'écoulement au point de stagnation d'un cylindre horizontal, en présence d'une faible vorticité transversale dans l'écoulement externe, a été étudiée par **DHANAK et STUART [1995]**. Ils ont montré que cette vorticité est soutenue dans la zone de stagnation, ce qui provoque des structures en remous contrarotatifs dans la couche limite.

II.2- COUCHE LIMITE EN CONVECTION MIXTE AUTOUR D'UN CYLINDRE HORIZONTAL:

Dans ce travail, on s'intéresse au cas de l'écoulement autour d'un cylindre horizontal chauffé et soumis à un écoulement extérieur oblique. Le problème de la couche limite, au sens classique, est mal posé à cause de la courbure du cylindre. En effet, la dissymétrie du problème de convection mixte ($\alpha \neq 0$) ne permet plus l'établissement d'une donnée initiale comme dans le cas du problème symétrique. La position du point de stagnation et la courbe de stagnation le long de laquelle la composante longitudinale de vitesse est nulle deviennent des inconnues. On est conduit aux difficultés liées à la perte d'un problème aux valeurs initiales. Ceci est dû à l'interaction des écoulements ascendant et descendant, qui résultent des poussées d'Archimède et du gradient de pression de l'écoulement externe. Cette interaction induit une région de recirculation, située entre les points de stagnation des convections naturelle et forcée, où les sources des écoulements sont opposées. Ce qui fait que ce problème est fondamentalement différent de la configuration symétrique où l'écoulement extérieur est vertical ascendant. Dans le cas où les nombres de Reynolds et de Grashof sont grands, l'écoulement de convection mixte autour d'un cylindre horizontal chauffé est gouverné par les équations de couche limite dont la solution dépend de la structure de l'écoulement dans le voisinage du point de stagnation. Ce dernier est situé quelque part entre le point le plus bas du cylindre chauffé et le point d'arrêt de l'écoulement potentiel. Proche de ce point la structure de l'écoulement ressemble à celle d'un écoulement de séparation. Ceci est dû au fait que les forces d'Archimède agissent comme un gradient de pression adverse. Des lors, ni la position du point de stagnation, ni les conditions caractérisant le démarrage de la couche limite ne sont connues a priori, il n'est alors pas possible d'étudier la zone de stagnation indépendamment du reste de l'écoulement. Cette interaction est causée par le changement de la direction de l'écoulement. Sur le plan mathématique, cette difficulté se transforme en un couplage des différentes fonctions lorsqu'on représente l'écoulement en séries de Blasius, **AMAUCHE [1991]**. Afin de contourner ces difficultés sans perdre le caractère de couche limite, un modèle approprié qui prend en considération la nature elliptique du problème est nécessaire. Il est alors possible de recouvrir les conditions de Cauchy associées au démarrage de la couche limite quand les forces d'Archimède sont suffisamment faibles par rapport aux forces de gradient de pression externes. C'est le cas d'une convection mixte où la convection forcée est prépondérante. Ce cas a été traité par **AMAUCHE et NOUAR [1993]**. Le cas d'une convection mixte où la convection naturelle est dominante est présenté dans ce travail. La perturbation de la convection naturelle dépend de l'ordre de grandeur du paramètre

caractéristique $Re.Gr^{-1/2}$ qui découle d'un choix fait pour que les forces d'inertie soient du même ordre de grandeur que les forces d'Archimède dans les équations générales.

L'écoulement de stagnation a été étudié en utilisant un développement asymptotique raccordé par **VAN DYKE [1975]** et **COUSTEIX [1988]**. Le domaine de l'écoulement est subdivisé en deux zones, proximale et distale. La solution est donnée sous forme semi analytique dans la première zone. Cette solution est ensuite utilisée pour démarrer les calculs dans la deuxième.

Dans la deuxième zone, la coexistence de deux écoulements, ascendant et descendant (région de convection mixte opposée) par conséquence la méthode d'intégration directe des équations de la couche limite diverge. Pour résoudre ce problème, une méthode itérative a été développée. L'intégration des équations de la couche limite est faite de part et d'autre de la courbe le long de laquelle la composante longitudinale de la vitesse est nulle. En supposant, en accord avec notre approche un écoulement de couche limite en convection naturelle faiblement perturbée, l'épaisseur de la couche limite est la fonction définie le long de cette ligne. On suppose alors, en première approximation, que l'écoulement externe est toujours un écoulement potentiel autour d'une géométrie cylindrique.

II.3 – EQUATIONS DU PROBLEME : En considérant les effets combinés des forces d'origine thermique, des forces de gradient de pression et de l'écoulement extérieur autour d'un cylindre circulaire horizontal et chauffé, un écoulement de couche limite prend naissance à partir d'un point de stagnation dont la position est inconnue. Ce point est situé entre les points de stagnation de la convection naturelle est le point d'arrêt de l'écoulement externe. L'écoulement est supposé stationnaire et bidimensionnel. La direction de l'écoulement extérieur par rapport à la verticale est déterminée par l'angle α (voir Figure 2.1). En tenant compte de l'approximation de Boussinesq, les équations adimensionnelles régissant l'écoulement de couche limite autour du cylindre sont donnée par :

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.1)$$

$$u u_x + v u_y - u_{yy} - T \sin x = u_e \frac{du_e}{dx} \quad (2.2)$$

$$Pr(u T_x + v T_y) - T_{yy} = 0 \quad (2.3)$$

Ces équations doivent satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$u(x,0) = v(x,0) = 0, \quad T(x,0) = 1 \quad (2.4)$$

$$u(x,\infty) = u_e(x), \quad T(x,\infty) = 0 \quad (2.5)$$

En introduisant la fonction de courant $\Psi(x, y)$ définie par $(u, v) = (\Psi_y, -\Psi_x)$, Les équations (2.1-3) s'écrivent sous la forme :

$$L\Psi_y - \Psi_{yyy} - T \sin x = u_e \frac{du_e}{dx} \quad (2.6)$$

$$\text{Pr}.LT - T_{yy} = 0 \quad (2.7)$$

et les conditions aux limites (2.4-2.5) prennent les formes :

$$\Psi(x, 0) = \Psi_y(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = 1 \quad (2.8)$$

$$\Psi_y(x, \infty) = u_e(x), \quad T(x, \infty) = 0 \quad (2.9)$$

où :

$L = \Psi_y \partial_x - \Psi_x \partial_y$ est l'opérateur d'advection.

La source de l'écoulement est essentiellement d'origine thermique, ce qui signifie que la couche limite est de l'ordre de $\text{Re}.Gr^{-1/4}$. A cause de la prépondérance de la convection naturelle, les facteurs d'échelles sont liés au nombre de Grashof, $Gr = g\beta(T_p - T_\infty)R^3/\nu^2$, où g , β , ν , R , T_p et T_∞ représentent l'accélération gravitationnelle, le coefficient de dilatation thermique, la viscosité cinématique, le rayon du cylindre, la température de la paroi et la température à l'infini, respectivement.

Pour que les variables adimensionnelles soient de l'ordre de l'unité au niveau de la couche limite, la coordonnée radiale y , mesurée à partir de la paroi du cylindre est divisée par $R.Gr^{-1/4}$: la fonction de courant Ψ est réduite par $\nu.Gr^{1/4}$, les vitesses, angulaire u et radiale v , par $\nu.Gr^{1/2}/R$ et $\nu.Gr^{1/4}/R$ respectivement. La fonction u_e qui représente la vitesse adimensionnelle de l'écoulement potentiel autour du cylindre s'écrit : $u_e(x) = \text{Re}.Gr^{-1/2}.\sin(x - \alpha)$. x est la coordonnée longitudinale dont l'origine est le point de stagnation de la convection naturelle (le point le plus bas du cylindre chauffé). $\text{Re} = 2u_\infty R/\nu$ définit le nombre de Reynolds, u_∞ la vitesse de l'écoulement extérieur et T la température adimensionnelle, reliée à la température dimensionnelle T^* par la relation $T = (T^* - T_\infty^*)/(T_p^* - T_\infty^*)$.

Les paramètres qui gouvernent ce problème sont :

- l'inclinaison α et le paramètre $\varepsilon = \text{Re}.Gr^{-1/2}$ qui caractérisent la direction et l'effet de l'écoulement extérieur par rapport aux effets d'Archimède respectivement.

- Le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\gamma$ où γ désigne le coefficient de diffusivité thermique.

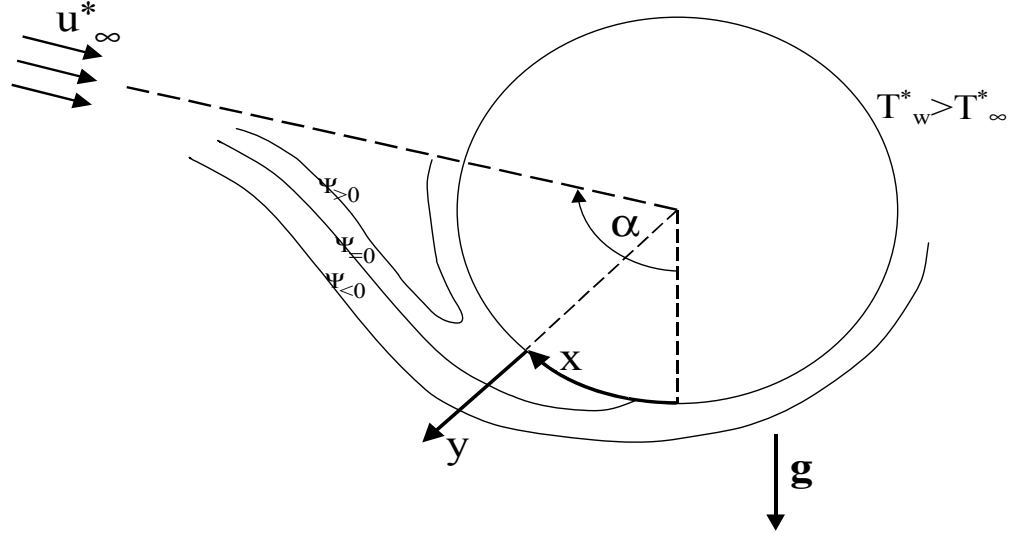


Figure 2.1- Schéma du Problème

II.4 – ECOULEMENT DE STAGNATION : Pour résoudre le système d'équations (2.6-9) dans la zone de stagnation, on suppose que l'amplitude de la convection forcée est très petite pour utiliser un développement asymptotique en ε . Dans ce cas, le point de stagnation de la couche limite est proche de celui de la convection naturelle. Cependant, un développement direct est fondamentalement incapable de décrire l'écoulement dans cette région. Sachant que les effets de l'écoulement externe sont importants au voisinage immédiat du point de stagnation, lorsque la valeur de la coordonnée longitudinale x est faible, quoique la valeur de ε soit faible, un développement régulier n'est pas commode. Ceci est dû au facteur d'échelle adopté dans les équations qui n'est pas approprié dans la région de stagnation. Une normalisation qui tient compte de l'importance relative de la convection forcée et du caractère de convection mixte de l'écoulement dans cette zone est adoptée. Cette normalisation permet de construire un développement qui approxime d'une manière adéquate la solution dans le voisinage du point de stagnation. En tenant compte de la structure de cet écoulement, des variables locales correctes sont trouvées en utilisant le principe de la moindre dégénérescence. On adopte alors le changement de variables suivant :

$$x = \varepsilon \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad \Psi = \varepsilon \tilde{\Psi}, \quad T = \tilde{T} \quad (2.10)$$

Dans la région interne, les équations (2.6-9) s'écrivent :

$$\tilde{L}\tilde{\Psi}_y - \tilde{\Psi}_{yyy} - \tilde{T}\tilde{x} = -\varepsilon \sin\alpha \cdot \cos\alpha + O(\varepsilon^2) \quad (2.11)$$

$$\text{Pr} \cdot \tilde{L}\tilde{T} - \tilde{T}_{yy} = 0 \quad (2.12)$$

où $\tilde{L} = \tilde{\Psi}_y \partial_{\tilde{x}} - \tilde{\Psi}_{\tilde{x}} \partial_y$ est l'opérateur d'advection.

Auxquelles on associe les conditions aux limites :

$$\tilde{\Psi}(\tilde{x}, 0) = \tilde{\Psi}_y(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{T}(\tilde{x}, 0) = 1 \quad (2.13)$$

$$\tilde{\Psi}_y(\tilde{x}, \infty) = -\sin\alpha + \varepsilon \cdot \tilde{x} \cos\alpha + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{T}(\tilde{x}, \infty) = 0 \quad (2.14)$$

On exprime la solution $(\tilde{\Psi}, \tilde{T})$ sous forme de séries en puissance de ε .

$$(\tilde{\Psi}, \tilde{T}) = (\tilde{\Psi}_0, \tilde{T}_0) + \varepsilon(\tilde{\Psi}_1, \tilde{T}_1) + O(\varepsilon^2) \quad (2.15)$$

En introduisant cette forme de solution dans les équations (2.11-14), on obtient une séquence de problèmes suivants.

II.4.1 –PROBLEME D'ORDRE ZERO

Le problème d'ordre zéro est donné par :

$$\tilde{L}_0 \tilde{\Psi}_{0y} - \tilde{\Psi}_{0yyy} - \tilde{T}_0 \tilde{x} = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{Pr} \cdot \tilde{L}_0 \tilde{T}_0 - \tilde{T}_{0yy} = 0 \quad (2.17)$$

où $\tilde{L}_0 = \tilde{\Psi}_{0y} \partial_{\tilde{x}} - \tilde{\Psi}_{0\tilde{x}} \partial_y$ est obtenu en substituant $\tilde{\Psi}_0$ à $\tilde{\Psi}$ dans $\tilde{L}$

On leur associe les conditions aux limites :

$$\tilde{\Psi}_0(\tilde{x}, 0) = \tilde{\Psi}_{0y}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{T}_0(\tilde{x}, 0) = 1 \quad (2.18)$$

$$\tilde{\Psi}_{0y}(\tilde{x}, \infty) = -\sin\alpha, \quad \tilde{T}_0(\tilde{x}, \infty) = 0 \quad (2.19)$$

A l'ordre zéro, les effets de l'écoulement extérieur interviennent par l'intermédiaire de la condition à la limite sur la vitesse longitudinale loin de la paroi, ce qui fait que ce problème est celui d'une convection mixte. Sa solution est plus correcte, pour des x faibles, que la solution d'ordre zéro obtenue à partir d'un développement direct des équations originales sans changement de variables. Le problème (2.16-19) admet une solution exacte qui s'écrit sous la forme.

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0(\tilde{x}, y) &= \tilde{x} F_1(y) - \sin\alpha \cdot F_0(y) \\ \tilde{T}_0(\tilde{x}, y) &= G_0(y) \end{aligned} \quad (2.20)$$

où F_1 , G_0 et F_0 vérifient les deux systèmes d'équations différentielles suivants :

$$\begin{aligned} F_1''' + F_1 F_1'' - F_1'^2 + G_0 &= 0 \\ G_0'' + \text{Pr} \cdot F_1 G_0' &= 0 \\ F_1(0) = F_1'(0) = F_1'(\infty) = G_0(\infty) = 0, \quad G_0(0) &= 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

et

$$\begin{aligned} F_0''' + F_1 F_0'' - F_1' F_0' &= 0 \\ F_0(0) = F_0'(0) = 0, \quad F_0(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Les systèmes (2.21) et (2.22) sont résolus en utilisant la méthode de tir corrigé associée à la méthode de Runge-Kutta.

II.4.2 – PROBLEME D'ORDRE UN

Le problème d'ordre un est donné par :

$$\tilde{L}_0 \tilde{\Psi}_{1y} - \tilde{\Psi}_{1yyy} + \tilde{L}_1 \tilde{\Psi}_{0y} - \tilde{T}_1 \tilde{x} = -\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.23)$$

$$\text{Pr}(\tilde{L}_0 \tilde{T}_1 + \tilde{L}_1 \tilde{T}_0) - \tilde{T}_{1yy} = 0 \quad (2.24)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\tilde{\Psi}_1(\tilde{x}, 0) = \tilde{\Psi}_{1y}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{T}_1(\tilde{x}, 0) = 0 \quad (2.25)$$

$$\tilde{\Psi}_1(\tilde{x}, \infty) = \tilde{x} \cos \alpha, \quad \tilde{T}_1(\tilde{x}, \infty) = 0 \quad (2.26)$$

Il est facile de vérifier que la solution du problème ci-dessus ressemble à celui du problème d'ordre zéro. Il s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(\tilde{x}, y) &= (\tilde{x} \tilde{F}_1(y) - \sin \alpha \tilde{F}_0(y)) \cos \alpha \\ \tilde{T}_1(\tilde{x}, y) &= \cos \alpha \tilde{G}_1(y) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_0$ et $\tilde{G}_1$ sont des fonctions de la coordonnée radiale qui vérifient les deux systèmes d'équations différentielles suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1''' + F_1 \tilde{F}_1'' - 2F_1' \tilde{F}_1' + F_1'' \tilde{F}_1 + \tilde{G}_1 &= 0 \\ \tilde{G}_1'' + \text{Pr}(\tilde{F}_1 \tilde{G}_1' + \tilde{F}_1' \tilde{G}_0) &= 0 \\ \tilde{F}_1(0) = \tilde{F}_1'(0) = \tilde{G}_1(0) = \tilde{G}_1(\infty) = 0, \quad \tilde{F}_1'(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

et

$$\tilde{F}_0''' + F_1 \tilde{F}_0'' - F_1' \tilde{F}_0' = F_0' \tilde{F}_1' - F_0'' \tilde{F}_1 - 1 \quad (29a)$$

$$\tilde{F}_0(0) = \tilde{F}_0'(0) = \tilde{F}_0'(\infty) = 0 \quad (29b)$$

On remarque que la solution interne du premier ordre est identiquement nulle dans le cas d'une convection mixte transversale ($\alpha = \pi/2$).

En additionnant les solutions, d'ordres zéro et un, on obtient une solution, autour du point de stagnation qui s'écrit, en utilisant les variables internes, sous la forme.

$$\tilde{\Psi}(\tilde{x}, y) = \tilde{x}(F_1 + \varepsilon \cos \alpha \tilde{F}_1) - \sin \alpha (F_0 + \varepsilon \cos \alpha \tilde{F}_0) + O(\varepsilon^2) \quad (2.30)$$

$$T(\tilde{x}, y) = G_0 + \varepsilon \cos \alpha \tilde{G}_1 + O(\varepsilon^2) \quad (2.31)$$

II.5 – RESULTATS ET DISCUSSION

II.5.1- POSITION DU POINT DE STAGNATION :

La position du point de stagnation correspond au point où le frottement pariétal est nul. Ce point est donnée par :

$$\Psi_{yy}(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x = x_s \quad (2.32)$$

où x_s représente la coordonnée longitudinale du point de stagnation.

En remplaçant $\Psi(x, y)$ par la relation donnée par (2.30), on obtient

$$x_s = \varepsilon \tilde{x}_s = \varepsilon \sin \alpha \frac{F_0''(0) + \varepsilon \cos \alpha \tilde{F}_0''(0)}{F_1''(0) + \varepsilon \cos \alpha \tilde{F}_1''(0)} + O(\varepsilon^3) \quad (2.33)$$

Ce résultat nous montre que la position du point de stagnation en convection mixte dépend de ε qui caractérise l'importance de la convection forcée par rapport à la convection naturelle et de la direction de l'écoulement extérieur par rapport à la verticale. L'étude de la position x_s en fonction de la direction de l'écoulement extérieur α , pour quelques valeurs de ε , est représentée sur la Figure 2.2. On remarque que le maximum n'est pas atteint pour $\alpha = \pi/2$ pour ε fixe. Ce maximum est à $\alpha = \pi/2$ dans le cas limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

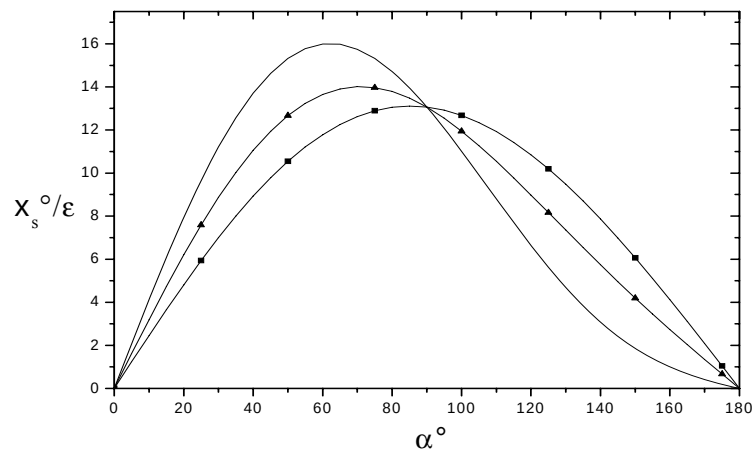


FIGURE 2.2 : Position du point de stagnation en fonction de α pour différentes valeurs de ε

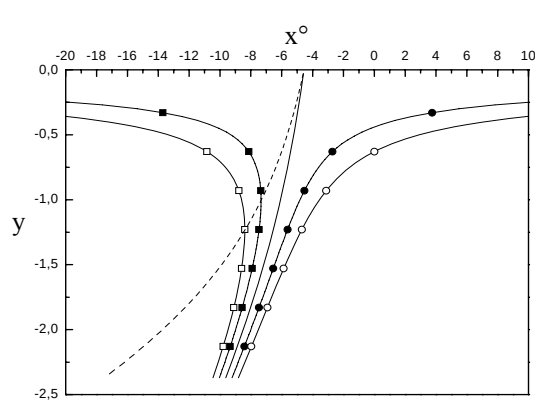
(—■—) $\varepsilon = 0.01$, (—▲—) $\varepsilon = 0.05$, (—●—) $\varepsilon = 0.1$

Les différents paramètres qui influent sur l'écoulement dans la zone de stagnation sont systématiquement étudiés. Les lignes de courant donne une vue générale de l'écoulement dans la zone proximale. La coordonné radiale et l'arc le long de cylindre sont divisé par $Re.Gr^{-1/4}$. Les coordonnées x et y sont dilatées par le facteur $Gr^{1/4}$ de sorte que la coordonnée y soit de l'ordre unité et la coordonnée x devienne suffisamment grande pour la tracer sur une ligne droite. La structure de l'écoulement s'apparente à celle de l'écoulement observé au point de séparation **DORREPAAL [1986]**. L'écoulement inverse apparaît au point de stagnation d'abscisse x_s ou les forces d'Archimède sont exactement égales aux forces dues à l'écoulement extérieur. Au voisinage de la paroi, le sens de l'écoulement est imposé par les forces d'Archimède pour $x > x_s$ ou par les effets de l'écoulement extérieur pour $x < x_s$. La ligne $\Psi = 0$ est équivalente à la ligne de séparation des couches limites. La ligne $u = 0$ délimite deux régions, l'une étant dominée par la convection forcée et l'autre par la convection naturelle. Proche de la paroi, l'écoulement est ascendant car il est régi par la convection naturelle et les effets de la convection forcée sont plus importants loin de la paroi. Ainsi, la courbe $u = 0$ présente une configuration tournée vers les lignes de courant internes.

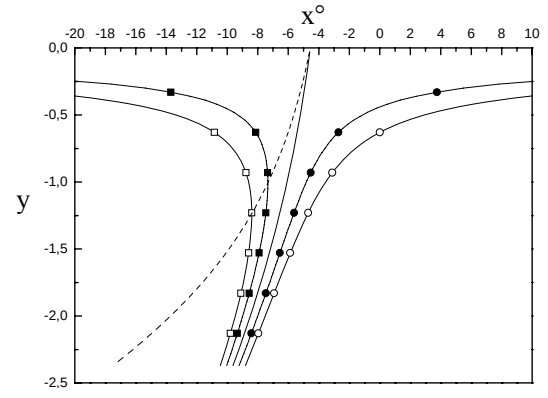
II.5.2- LIGNES DE COURANT:

Sur les figures (2.3.a - 2.3.e), on représente les lignes du courant pour différents angles α qui caractérisent la direction de l'écoulement extérieur par rapport à la verticale en maintenant ε constant. Les lignes de courant sont parfaitement symétriques par rapport celle qui correspond à $\Psi = 0$. Cette dernière prend naissance au point le plus bas du cylindre, dans le cas d'une convection mixte symétrique et favorable (Figure 2.3.a). La courbe $u = 0$ se superpose avec la courbe $\Psi = 0$.

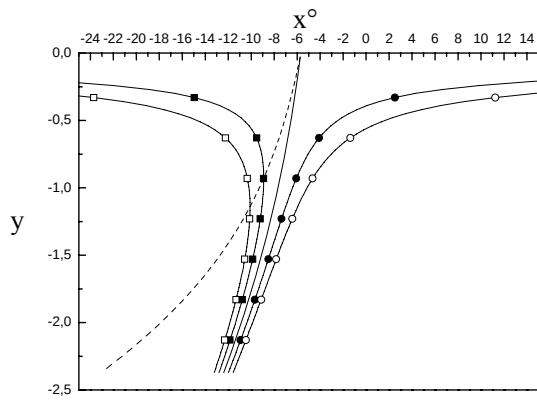
Lorsque la direction de l'écoulement extérieur augmente, le point de stagnation ne coïncide plus avec celui de la convection naturelle et les lignes de courant ne sont plus symétriques par rapport à la ligne de courant nulle. Le point de stagnation se situe alors entre celui de la convection naturelle et le point d'arrêt de l'écoulement extérieur. Une zone de renversement de l'écoulement apparaît alors entre ces deux points. Cette zone se rétrécit (Figure 2.3.b-2.3.d) et s'élargit ensuite (Figure 2.3.d-2.3.e).



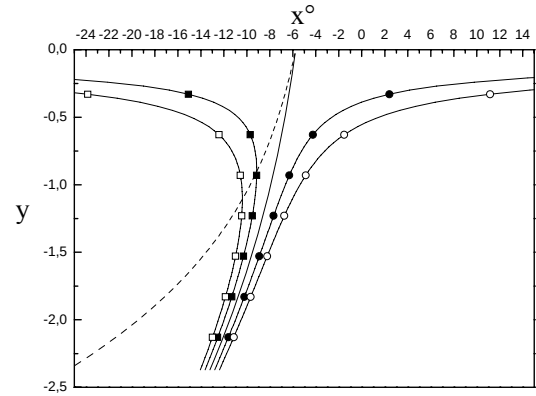
(a)



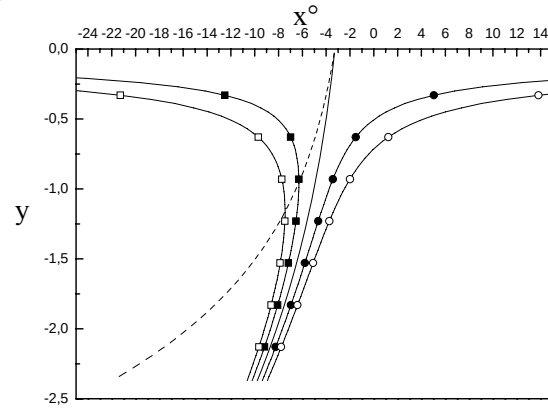
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURE 2.3 : Lignes de courant dans la zone proximale pour $\alpha = \pi/2$

a- $\varepsilon = 0.01$, **b-** $\varepsilon = 0.05$, **c-** $\varepsilon = 0.10$, **d-** $\varepsilon = 0.15$ et **e-** $\varepsilon = 0.20$

($\circ$ — $\circ$) $\Psi = -0.025$; ($\bullet$ — $\bullet$) $\Psi = -0.05$; (—) $\Psi = 0$; ($\blacksquare$ — $\blacksquare$) $\Psi = 0.025$; ($\square$ — $\square$) $\Psi = 0.05$; (---) $u = 0$

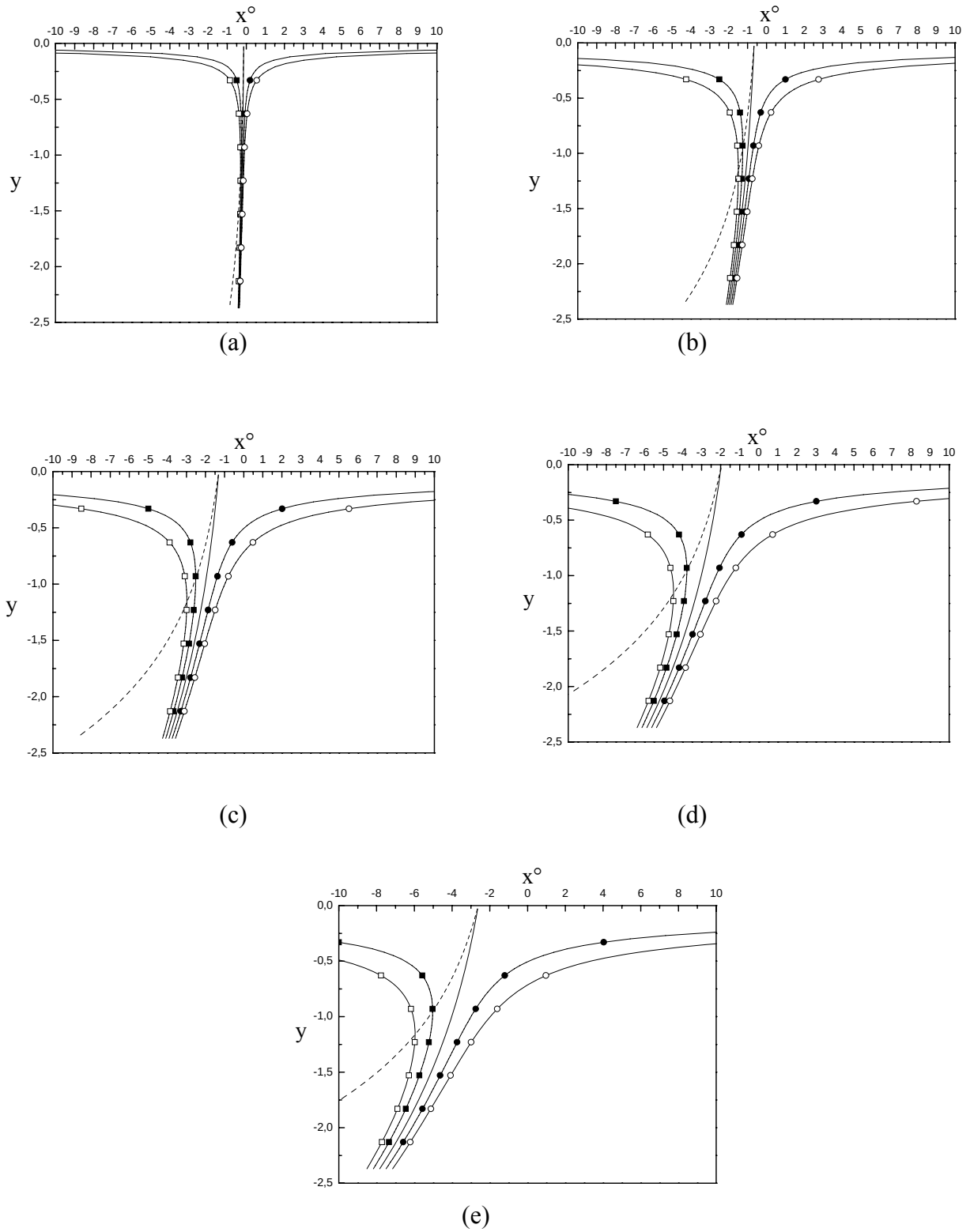


FIGURE 2.4 : Lignes de courant dans la zone proximale pour $\varepsilon = 0.25$

a- $\alpha = 0$, **b-** $\alpha = \pi/6$, **c-** $\alpha = \pi/4$, **d-** $\alpha = \pi/3$ et **e-** $\alpha = \pi/2$

(—○—) $\Psi = -0.025$; (—●—) $\Psi = -0.05$; (—) $\Psi = 0$; (—■—) $\Psi = 0.025$; (—□—) $\Psi = 0.05$; (---) $u = 0$

L'étude de la configuration de l'écoulement en fonction de l'importance de l'écoulement extérieur est illustrée par les graphes (2.4.a – 2.4.e). Le point de stagnation n'est pas fixé quand on donne une valeur à l'angle α . Il augmente avec l'amplitude de l'écoulement extérieur et les lignes de courant deviennent de plus en plus asymétriques quand on augmente le paramètre ε . L'évolution de la courbe $u=0$ avec ε montre bien l'effet de l'écoulement extérieur sur la structure de l'écoulement. En effet, la région dominée par la convection naturelle diminue au profit de la convection forcée et la zone de recirculation se rétrécit. Ceci s'explique par le fait que le point de stagnation s'éloigne de la position de celui de la convection naturelle et se rapproche du point d'arrêt de l'écoulement potentiel.

II.5.3- VITESSE LONGITUDINALE :

Nous avons aussi étudié l'évolution de la composante longitudinale de vitesse dans la zone de stagnation. L'évolution de cette composante en $x = 0$ pour différentes valeurs de α et ε fixé, est représentée dans la Figure 2.5. Nous constatons qu'au voisinage de la paroi l'amplitude de la vitesse est plus faible pour un angle α grand. Cette tendance s'inverse quand on s'éloigne de la paroi. Pour un angle α faible, l'écoulement extérieur s'ajoute à l'écoulement de la convection naturelle et la vitesse résultante est plus grande. Cependant, quand la valeur de α augmente, l'écoulement extérieur s'oppose à celui de la convection naturelle et la vitesse résultante est plus faible.

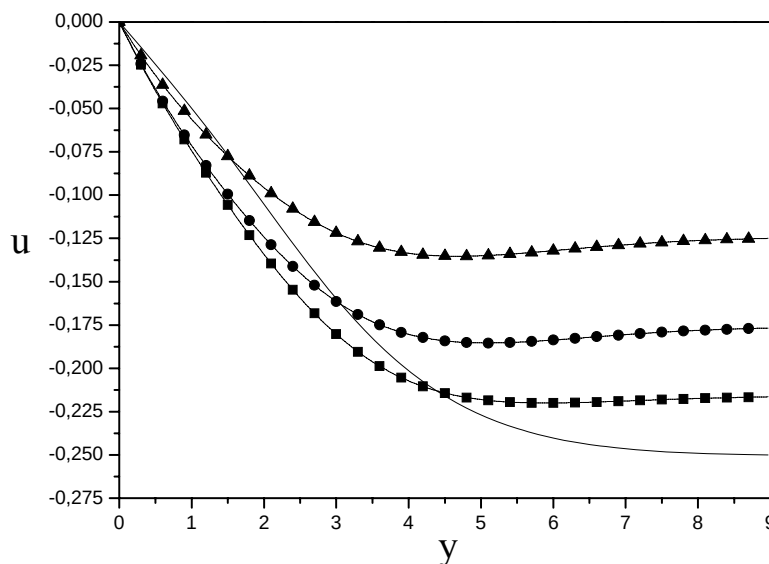


FIGURE 2.5: La composante de la vitesse longitudinale u pour différents α pour $\varepsilon = 0.25$

(—▲—) $\alpha = \pi/6$; (—●—) $\alpha = \pi/4$; (—■—) $\alpha = \pi/3$; (—) $\alpha = \pi/2$

L'étude de l'évolution de la composante longitudinale de la vitesse en fonction de ε (Figure 2.6), pour un angle α fixé, montre que l'amplitude augmente quand l'effet de l'écoulement extérieur croît.

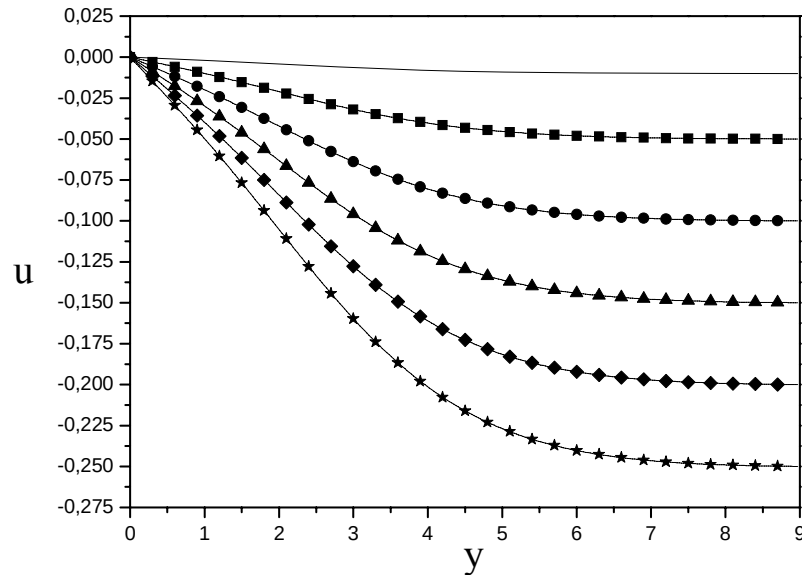
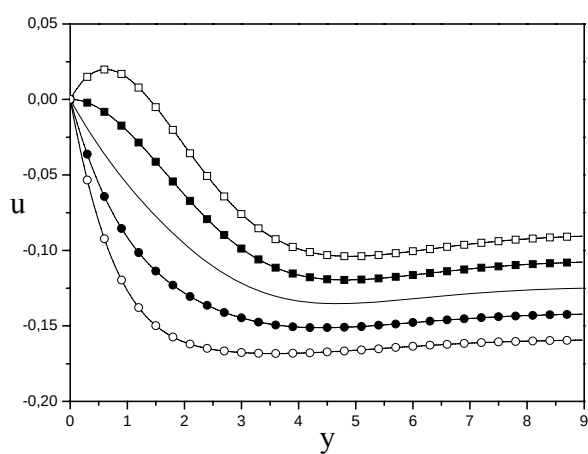
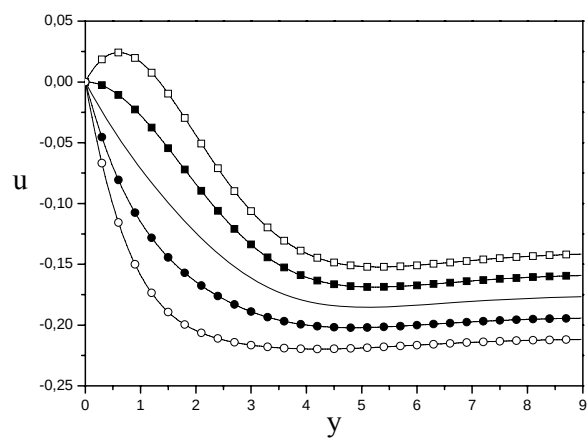


FIGURE 2.6 : La composante de la vitesse longitudinale u pour différents ε pour $\alpha = \pi/2$
 (—) $\varepsilon = 0.01$; (—■—) $\varepsilon = 0.05$; (—●—) $\varepsilon = 0.1$; (—▲—) $\varepsilon = 0.15$; (—◆—) $\varepsilon = 0.2$, (—*—) $\varepsilon = 0.25$

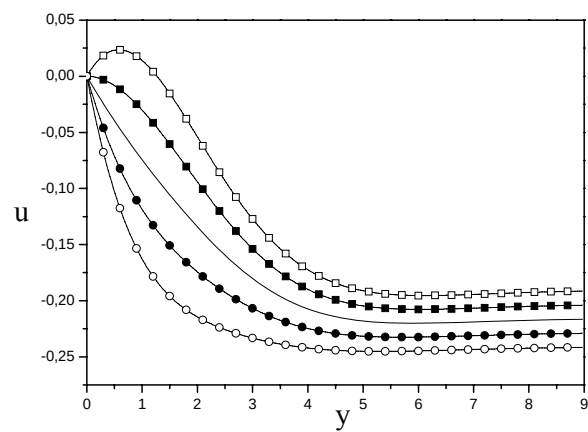
Nous avons tracé dans les Figures 2.7.a – 2.7.d les profils de la vitesse angulaire en fonction de la coordonnée normale pour différentes abscisses en changeant la direction de l'écoulement extérieur. Nous avons noté que pour des x faibles, la direction de l'écoulement est imposée par l'écoulement extérieur et quand x augmente, la convection naturelle devient de plus en plus signifiante au détriment de la convection forcée. Pour cette raison, on obtient des vitesses positives dans le voisinage de la paroi pour $x > x_s$. L'asymétrie présente entre les profils des vitesses, pour des abscisses positives et négatives, illustre l'importance de la convection forcée qui perturbe la convection naturelle dans la zone de stagnation. On note aussi que les vitesses tendent vers un caractère uniforme plus rapidement dans le cas où la direction de l'écoulement extérieur est transversale ; soit $\alpha = \pi/2$.



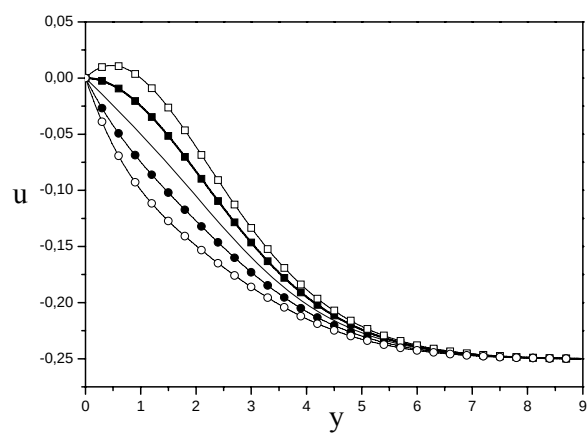
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 2.7 : Profils des vitesses au voisinage du point de stagnation pour

a- $\alpha = \pi/6$, **b-** $\alpha = \pi/4$, **c-** $\alpha = \pi/3$, **d-** $\alpha = \pi/2$,

($\text{---}\circ\text{---}$) $x = -2x_s$; ($\text{---}\bullet\text{---}$) $x = -x_s$; (---) $x = 0$; ($\text{---}\blacksquare\text{---}$) $x = x_s$; ($\text{---}\square\text{---}$) $x = 2x_s$

II.5.4-TEMPERATURE : La variation de la température dans la zone proximale ne dépend pas de la coordonnée longitudinale mais elle dépend de la direction et de l'importance de l'écoulement extérieur. L'influence de l'écoulement extérieur est de premier ordre. L'évolution de la température en fonction de la coordonnée radiale reste pratiquement constante (Figure 2.8.a). L'influence de la direction de l'écoulement extérieur existe mais reste faible. Nous constatons que la température augmente légèrement quand la direction de l'écoulement extérieur s'écarte de la verticale (Figure 2.8.b). Elle tend plus rapidement vers la température extérieure dans le cas symétrique que dans le cas asymétrique.

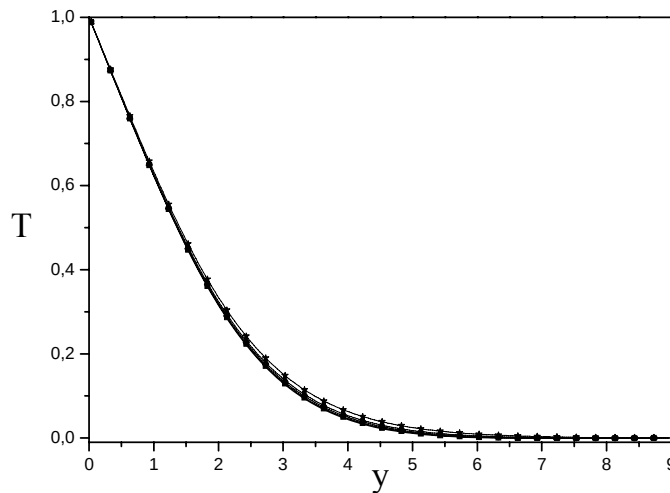


FIGURE 2.8.a : Profils des températures dans la zone proximale pour différents α et $\varepsilon = 0.25$

(—) $\alpha = 0$; (—■—) $\alpha = \pi/6$; (—●—) $\alpha = \pi/4$; (—▲—) $\alpha = \pi/3$; (—*—) $\alpha = \pi/2$

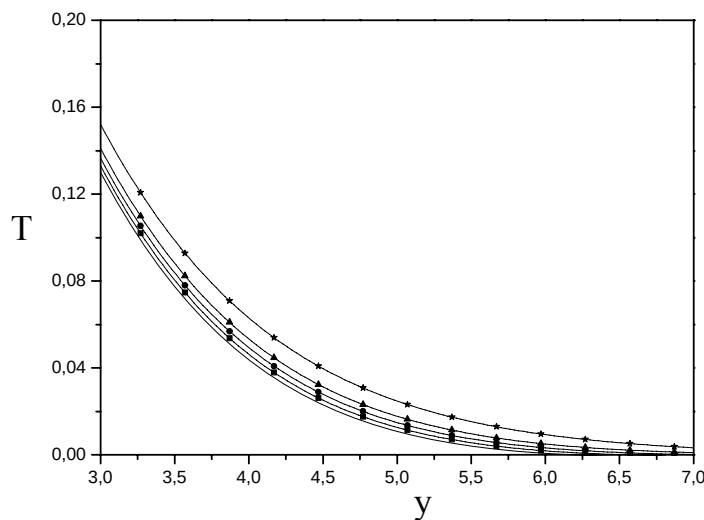


FIGURE 2.8.b: Agrandissement des profils des températures dans la zone proximale pour différents α et $\varepsilon = 0.25$

(—) $\alpha = 0$; (—■—) $\alpha = \pi/6$; (—●—) $\alpha = \pi/4$; (—▲—) $\alpha = \pi/3$; (—*—) $\alpha = \pi/2$

II.6-CONCLUSION

En faisant les approximations de couche limite, les équations régissant le problème dans la zone proximale sont résolues en utilisant une méthode de perturbation. Cette méthode nous permet de calculer la position du point de stagnation, l'évolution des lignes de courant et les comportements de la vitesse longitudinale et de la température. Nous avons étudié, aussi, l'influence de l'angle d'inclinaison de l'écoulement extérieur et son importance sur les différentes variables du problème dans cette zone. Les résultats trouvés dans ce chapitre seront utilisés dans le chapitre suivant, comme données et paramètre de contrôle du schéma numérique développé à partir d'une formulation variationnelle.

CHAPITRE III

EQUATION DE LA CONVECTION MIXTE DANS LA ZONE DISTALE.

INTERACTION COUCHE LIMITE - ECOULEMENT EXTERIEUR

III.1-INTRODUCTION : A l'extérieur de la zone de stagnation, le problème de la convection mixte autour d'un cylindre horizontal chauffé et soumis à un écoulement externe est donné par le système d'équations (2.1-2.5). La résolution numérique directe de ce système d'équations, complété par les conditions de Cauchy obtenues par un raccordement asymptotique des solutions, interne et externe, pose des difficultés liées à l'absence de convergence dans le domaine de la convection mixte défavorable. Cette difficulté est le résultat de l'interaction entre les écoulements, ascendant et descendant. L'écoulement ascendant, près de la paroi du cylindre, provient des forces d'Archimède et l'écoulement extérieur est descendant, loin de la paroi. Cette difficulté est aussi l'une des singularités rencontrées dans la résolution des équations de la couche limite au voisinage du point de séparation. Il est connu que cette séparation est reliée physiquement à l'action d'un gradient de pression défavorable sur la couche limite.

Si la pression n'est pas spécifiée, avec une autre condition de fermeture par exemple, ou avec une condition aux limites interactive et non visqueuse, des solutions régulières, avec écoulement inversé, sont obtenues par plusieurs auteurs.

Quand on considère une distribution de vitesse qui décroît linéairement en dehors de la couche limite, une singularité se produit dans la résolution des équations de la couche limite laminaire. Toutes les fois qu'elle se produit, les équations de couche limite cessent d'être valides près de la séparation du côté ascendant, et également derrière la séparation du côté descendant. **GOLDSTEIN [1948]** Propose une formule qui favorise le calcul de la couche limite laminaire proche de la position de séparation. Le travail suggère que les singularités puissent surgir dans la solution des équations paraboliques non linéaires dues à leur non linéarité.

Les singularités associées à la séparation de la couche limite ont été étudiées par **BROWN [1965]**. Il montre que dans le cas d'un gradient de pression défavorable, la couche limite autour d'un cylindre est sensible au profil de vitesse à l'origine. Une méthode basée sur un développement asymptotique des coordonnées, supposée valable tant que la distance par rapport au point de séparation tend vers zéro a été développée par **MESSITER et ENLOW [1973]**. Ils ont remplacé l'hypothèse d'un gradient de pression défavorable par celle d'un gradient de pression nul immédiatement en aval de la séparation, et ils ont montré, par

conséquent, qu'une solution ascendante semblable à celle de **GOLDSTEIN** peut être construite sans contradiction apparente.

CATHERAL et MANGLER [1966] ont proposé une méthode pour obtenir des solutions régulières des équations de la couche limite au voisinage du point singulier. Ils ont intégré les équations de la couche limite à travers le point de frottement nul d'une manière non singulière en supposant la pression comme une fonction inconnue qui sera déterminée comme une partie de la solution. Cependant, avec cette approche couplée, les équations ne sont plus paraboliques puisqu'une influence ascendante est possible par l'intermédiaire d'une condition aux limites inconnue. **RATNANATHER et DANIELS [1995]** ont proposé une solution des équations de la couche limite thermique avec un écoulement contenant une région exhibant un important écoulement inverse. La méthode numérique proposée est subdivisée pour tenir compte de l'influence ascendante sur le système parabolique. Une méthode numérique efficace a été proposée par **KOROLEV [2000]** pour résoudre le problème de l'interaction entre une couche limite et un écoulement extérieur, avec des conditions aux limites périodiques et en incluant le cas d'une région où l'écoulement est inversé.

III.2-METHODE VARIATIONNELLE : Pour tenir compte du caractère elliptique des équations régissant le problème dans la région de convection mixte défavorable, lieu d'interaction entre la convection naturelle et la convection forcée, et pour éviter la divergence du schéma numérique, une procédure itérative, décrite ci-après, est utilisée pour résoudre les équations de la convection mixte dans la région externe à la zone de stagnation. On définit dans un premier temps une courbe libre $y = Y(x)$ le long de laquelle la composante longitudinale de la vitesse u est nulle et de chaque côté de laquelle u garde le même signe : $Sgn(u) = Sgn(Y - y)$.

Dans la région proche de la paroi, ($0 < y < Y$), les équations régissant la couche limite (2.1-2.5) sont résolues numériquement en utilisant un schéma aux différences finies implicite, de second ordre (**CARNAHAN [1969]**). L'intégration numérique est obtenue en augmentant x à partir d'une position spécifique du domaine interne, en l'occurrence la position de stagnation x_s jusqu'à la position $x = \alpha$. Le problème est résolu globalement sans procédure de développement et la solution est alors valable aussi dans la zone proximale. La solution est alors calculée dans le domaine interne sans tenir compte du reste de l'écoulement. Pour cette raison, la solution dans le domaine externe est initialisée, par continuité, en utilisant la

solution au point de stagnation. Ce type de raccordement est évidemment conforme aux étapes du développement asymptotique classique.

Dans la région externe ($Y < y < \infty$) le problème est résolu en faisant une décrémentation sur x de la position $x = \alpha$ jusqu'au point de stagnation où la solution résultante doit être compatible avec la solution proximale. Les valeurs initiales correspondantes sont calculées en faisant un développement de perturbation locale en fonction de ε . A l'ordre zéro, l'écoulement est gouverné par la convection naturelle et la solution correspondante tend asymptotiquement vers zéro pour des distances, de la paroi, assez grandes. Pour $y > \delta_n(x)$, $\delta_n(x)$ est l'épaisseur de la couche limite locale en convection naturelle. A l'ordre un et à l'extérieur de la couche limite de la convection naturelle, il est facile de satisfaire : $u_1(x, y) = u_e(x)$ et $T_1(x, y) = 0$. En prenant $x = \alpha$ et en négligeant les termes d'ordre deux, on a alors :

$$\begin{aligned} u(\alpha, y) = T(\alpha, y) = \frac{\partial T}{\partial x}(\alpha, y) = 0 \\ \text{et} \quad \text{pour } y > \delta_n(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, y) = \varepsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cependant, la résolution de ces deux problèmes requiert la connaissance de la température $T(x, Y(x))$ le long de la courbe libre, qu'on notera $\theta(x)$. On considère les variables indépendantes u , v et T comme des fonctionnelles de Y et de θ . La dépendance en Y et θ de ces fonctionnelles n'est pas explicite dans le sens où elle est réalisée par la résolution de deux problèmes aux valeurs initiales. On note que les variables u , v et T calculées sont continues le long de la courbe $(x, Y(x))$. Cette propriété assure la continuité de leurs dérivées tangentielles et aussi de la dérivée normale de la variable v pour rester en accord avec l'équation de conservation de la masse. On doit alors assurer la continuité des dérivées normales de u et T pour que la fermeture du problème soit assurée. A la place des conditions précédentes, il est équivalent et plus convenable d'exprimer les conditions de fermeture en termes de dérivées radiales de u et T comme suit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{Y(x)} = \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{Y(x)} = 0 \quad (3.2)$$

où $[f]$ exprime le saut de la fonction f le long de la courbe $y = Y(x)$.

Pour satisfaire ces deux conditions, on utilise un processus itératif pour calculer un ensemble de fonctions Y_n et θ_n qui doivent converger vers un état d'équilibre (Y, θ) . Afin

d'éviter un nombre important d'itérations, les fonctions Y_n et θ_n sont raccordées en utilisant le problème variationnel et le problème aux valeurs initiales qui sont définis à partir des problèmes à résoudre de part et d'autre de la courbe libre $y = Y(x)$.

Quand l'état d'équilibre est atteint alors un changement infinitésimal :

$$\begin{aligned} Y_n(x) &\rightarrow Y_{n+1}(x) = Y_n(x) + e\delta Y_n(x) \\ \theta_n(x) &\rightarrow \theta_{n+1}(x) = \theta_n(x) + e\delta \theta_n(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Qui n'altère pas les deux point limites fixes ($\delta Y(\alpha) = \delta Y(x_s) = \delta \theta(\alpha) = \delta \theta(x_s) = 0$), ne doit pas avoir d'effet sur les fonctionnelles

$$J_1(Y, \theta) = \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{Y(x)} \quad \text{et} \quad J_2(Y, \theta) = \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{Y(x)} \quad (3.4)$$

$$\text{D'où :} \quad \delta J_1 = \delta J_2 = 0 \quad (3.5)$$

Le problème revient alors à la recherche des extrema des fonctionnelles J_1 et J_2 .

On utilise un calcul variationnel classique pour déterminer les séquences précédentes au voisinage de la transformation identité. On suppose qu'un faible changement dans Y et θ apporte une petite variation dans la solution (u, T) ; on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + e\delta u_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + e\delta \theta_n \end{aligned} \quad (3.6)$$

où (u_n, T_n) est le vecteur solution correspondant aux conditions :

$$u_n(x, Y_n(x)) = 0, \quad T_n(x, Y_n(x)) = \theta_n(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

On note aussi que les variations δu_n et δT_n vérifient les conditions aux limites, homogènes, suivantes :

$$\delta u_n(x, 0) = \delta u_n(x, \infty) = 0, \quad \delta T_n(x, 0) = \delta T_n(x, \infty) = 0 \quad (3.8)$$

Ainsi, en tout point de l'écoulement on peut avancer que les variations $\delta u_n(x, y)$ et $\delta T_n(x, y)$, qui proviennent uniquement de la déformation de la courbe libre et de la variation de sa température, sont dues aux variations aux limites.

En faisant le changement de notation:

$$U = u_n(x, Y_n), \quad \delta U = \delta u_n(x, Y_n) \quad (3.9)$$

$$\tau = T_n(x, Y_n), \quad \delta \tau = \delta T_n(x, Y_n) \quad (3.10)$$

$$u(x, y) = \tilde{u}(U, \tau), \quad T(x, y) = \tilde{T}(U, \tau) \quad (3.11)$$

On peut alors écrire:

$$\delta u_n(x, y) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} \delta U + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \delta \tau \quad (3.12)$$

$$\delta T_n(x, y) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} \delta U + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \delta \tau \quad (3.13)$$

Où $\partial \tilde{u} / \partial U$, $\partial \tilde{u} / \partial \tau$, $\partial \tilde{T} / \partial U$ et $\partial \tilde{T} / \partial \tau$ indiquent des dérivées fonctionnelles qui seront calculées par la suite en utilisant les définitions formelles :

$$\delta U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} = \left. \frac{d}{de} \right|_{e=0} \tilde{u}(U + e \delta U, \tau) \quad (3.14)$$

$$\delta \tau \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \left. \frac{d}{de} \right|_{e=0} \tilde{u}(U, \tau + e \delta \tau) \quad (3.15)$$

$$\delta U \frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} = \left. \frac{d}{de} \right|_{e=0} \tilde{T}(U + e \delta U, \tau) \quad (3.16)$$

$$\delta \tau \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = \left. \frac{d}{de} \right|_{e=0} \tilde{T}(U, \tau + e \delta \tau) \quad (3.17)$$

En posant $\delta U = \delta \tau = 1$ dans les expressions (3.14 -3.17), on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} = \left. \frac{d}{de} \right|_{e=0} \tilde{u}(U + e, \tau), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \left. \frac{d}{de} \right|_{e=0} \tilde{u}(U, \tau + e) \quad (3.18)$$

et

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} = \left. \frac{d}{de} \right|_{e=0} \tilde{T}(U + e, \tau), \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = \left. \frac{d}{de} \right|_{e=0} \tilde{T}(U, \tau + e) \quad (3.19)$$

Ces dérivées fonctionnelles sont calculées dans l'écoulement en résolvant deux problèmes variationnels appropriés de chaque coté de la courbe $y = Y_n(x)$.

Les équations gouvernantes sont obtenues en effectuant des dérivations variationnelles des équations (2.1-2.3) par rapport aux fonctions U et τ . Ainsi :

a- En dérivant par rapport à U , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} \right)_n + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial U} \right)_n = 0 \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + u_n \frac{\partial}{\partial x} + v_n \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} \right)_n + \frac{\partial u_n}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial U} \right)_n = \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} \right)_n \sin x \quad (3.21)$$

$$\left(u_n \frac{\partial}{\partial x} + v_n \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} \right)_n + \frac{\partial T_n}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} \right)_n + \frac{\partial T_n}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial U} \right)_n = 0 \quad (3.22)$$

Les conditions initiales et aux limites correspondantes, qui peuvent se déduire des équations (3.18-3.19) s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} = 0 \quad \text{à} \quad y = Y_n \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} = 0 \quad \text{à} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y \rightarrow \infty \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} \right) = 0 \quad \text{à} \quad x = x_s \quad \text{et} \quad x = \alpha \quad (3.25)$$

b- En dérivant par rapport à τ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right)_n + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} \right)_n = 0 \quad (3.26)$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + u_n \frac{\partial}{\partial x} + v_n \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right)_n + \frac{\partial u_n}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} \right)_n = \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \right)_n \text{Sinx} \quad (3.27)$$

$$\left(u_n \frac{\partial}{\partial x} + v_n \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \right)_n + \frac{\partial T_n}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right)_n + \frac{\partial T_n}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} \right)_n = 0 \quad (3.28)$$

Ces équations sont soumises aux conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = 1 \quad \text{pour} \quad y = Y_n \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{à} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

et aux conditions initiales homogènes:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \right) = 0 \quad \text{à} \quad x = x_s \quad \text{et} \quad x = \alpha \quad (3.31)$$

Les équations (3.20-3.22) et (3.26-3.28), avec leurs conditions aux limites et initiales respectives, sont résolues numériquement en utilisant un schéma aux différences finies de second ordre. Une fois que les dérivées des fonctionnelles sont calculées, on retourne aux expressions (3.12-3.13) qui doivent être utilisées ensemble avec les conditions (3.2) pour clarifier la procédure itérative.

On doit, en premier lieu, exprimer les variation $\delta u_n(x, y)$ et $\delta T_n(x, y)$ en fonction de $\delta \theta$ et δY au lieu de δU et $\delta \tau$. Pour cela, on rappelle que $u_n(x, Y_n) = 0$ et $u_{n+1}(x, Y_{n+1}) = 0$. En utilisant un développement de Taylor en ne tenant compte que des termes principaux, on obtient, à partir de (3.3), (3.6) et (3.9) :

$$\delta U = -\frac{\partial u_n}{\partial y} \delta Y \quad (3.32)$$

De la même manière, à partir de $T_n(x, Y_n) = \theta_n$ et $T_{n+1}(x, Y_{n+1}) = \theta_{n+1}$, on obtient :

$$\delta \tau = \delta \theta - \frac{\partial T_n}{\partial y} \delta Y \quad (3.33)$$

Les expressions (3.12) et (3.13) deviennent alors:

$$\delta u_n(x, y) = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right)_n \delta \theta - \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} \right)_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right)_n \frac{\partial T_n}{\partial y} \right\} \delta Y \quad (3.34)$$

$$\delta T_n(x, y) = \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \right)_n \delta \theta - \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} \right)_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \right)_n \frac{\partial T_n}{\partial y} \right\} \delta Y \quad (3.35)$$

En transformant (3.2) en tenant compte de (3.3) et (3.6), on obtient

$$\left[\frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \delta Y + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_n) \right]_{Y_n(x)} = 0 \quad (3.36)$$

$$\left[\frac{\partial T_n}{\partial y} + \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} \delta Y + \frac{\partial}{\partial y} (\delta T_n) \right]_{Y_n(x)} = 0 \quad (3.37)$$

En se servant des formes linéaires (3.34), (3.35), les contraintes (3.36) et (3.37) s'écrivent :

$$\left[\frac{\partial T_n}{\partial y} \right]_{Y_n} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \right)_n \right]_{Y_n(x)} \delta \theta + \left[\frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial U} \right)_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} \right)_n \frac{\partial T_n}{\partial y} \right\} \right]_{Y_n(x)} \delta Y = 0 \quad (3.38)$$

$$\left[\frac{\partial u_n}{\partial y} \right]_{Y_n} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right)_n \right]_{Y_n(x)} \delta \theta + \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial U} \right)_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} \right)_n \frac{\partial T_n}{\partial y} \right\} \right]_{Y_n(x)} \delta Y = 0 \quad (3.39)$$

Ces deux relations permettent de calculer les incréments $\delta \theta$ et δY à chaque étape de la procédure itérative. L'organigramme du procédé itératif, utilisé pour résoudre le problème externe, est le suivant :

- I- La procédure commence par un choix de l'approximation initiale de la courbe libre $y = Y_0(x)$. Une ligne droite reliant le point de stagnation $(x_s, 0)$ et le point $(\alpha, \delta_n(\alpha))$ servira à cet effet. Le long de cette courbe, une distribution linéaire de température $\theta(x) = (x - \alpha)/(x_s - \alpha)$ est donnée. La solution interne est utilisée pour démarrer l'intégration numérique.
- II- Résolutions des équations (2.6)-(2.9) par l'incrémentation de x de x_s jusqu'à α d'abord et par décrémentation de x de α jusqu'à x_s ensuite.
- III- On reprend l'étape (II) pour résoudre les équations (3.20)-(3.22) et (3.26)-(3.28)
- IV- On calcule les incréments $\delta\theta(x)$ et $\delta Y(x)$ en utilisant (3.38) et (3.39) et les nouvelles estimations de $Y(x)$ et $\theta(x)$ en utilisant (3.3).
- V- Retourner à l'étape (II) et répéter la procédure jusqu'à ce que les conditions de saut $[\partial u / \partial y]_{Y(x)}$ et $[\partial T / \partial y]_{Y(x)}$ deviennent suffisamment faibles.

III.3- RESULTATS DE L'INTERACTION COUCHE LIMITE- ECOULEMENT EXTERIEUR

A l'extérieur de la zone de stagnation, une méthode itérative, basée sur des fonctions variationnelles, est utilisée pour résoudre séparément le problème complet (2.6-2.9) de part et d'autre de la courbe le long de laquelle $u = 0$. Cette procédure est associée avec un schéma aux différences finies de second ordre classique. L'efficacité numérique de cet algorithme, en termes de stabilité et de convergence, est remarquable. L'état d'équilibre est atteint après quelques itérations (dix (10) itérations suffisent pour un test de tolérance de 10^{-3}). La consistance de cette méthode est illustrée par le fait que la condition initiale du problème de la couche limitée dans la région $0 < y < Y(x)$ est retrouvée, à l'ordre $O(\varepsilon^2)$, comme résultat du calcul dans la région $Y(x) < y < \infty$.

III.3.1-EPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE.

Le calcul de l'état d'équilibre correspondant à la courbe le long de laquelle la vitesse horizontale u est nulle, est réalisé. On a représenté sur la figure 3.1 la courbe initiale $y = Y_0(x)$ et la courbe $y = Y(x)$ où l'état d'équilibre est atteint. On y a également tracé les courbes des épaisseurs des couches limites pour les convections, naturelle, mixtes symétrique et asymétrique. On rappelle que l'épaisseur de la couche limite est la distance à la paroi à

laquelle la différence $u - u_e$ tends vers zéro avec une tolérance de 10^{-2} . Cette définition est choisie en accord avec la précision $O(\varepsilon^2)$ des calculs précédents. Une définition plus précise n'aura pas d'effets significatifs sur les calculs numériques. On remarque que l'épaisseur de la couche limite dans la cas de la convection naturelle est, d'une part, plus grande que celle du cas de la convection mixte symétrique et, d'autre part, elle est plus faible que celle de la convection mixte asymétrique. Ces différences sont de l'ordre de ε .

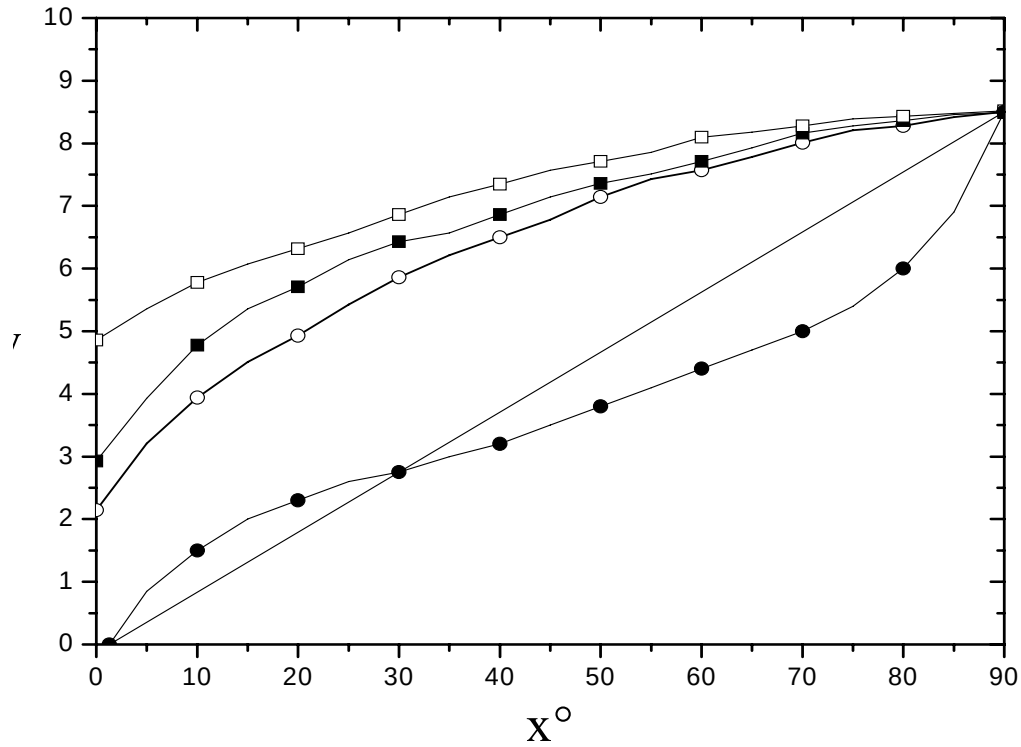


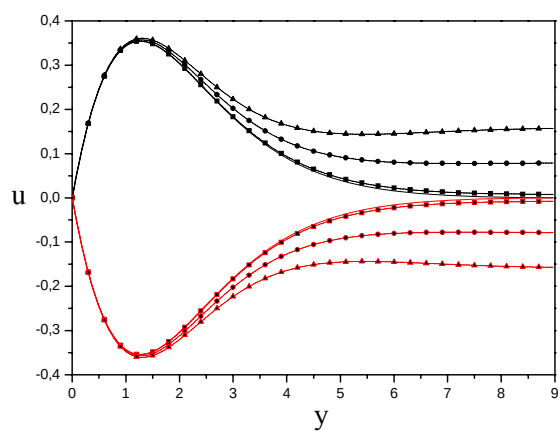
FIGURE 3.1 : Ligne $u = 0$: (—○—) Approximation initiale $Y_0(x)$; (—●—) Position d'équilibre $Y(x)$;
Epaisseur de la couche limite : (—○—) convection symétrique ; (—■—) Convection naturelle ;
(—□—) convection asymétrique

III.3.2-VITESSE LONGITUDINALE

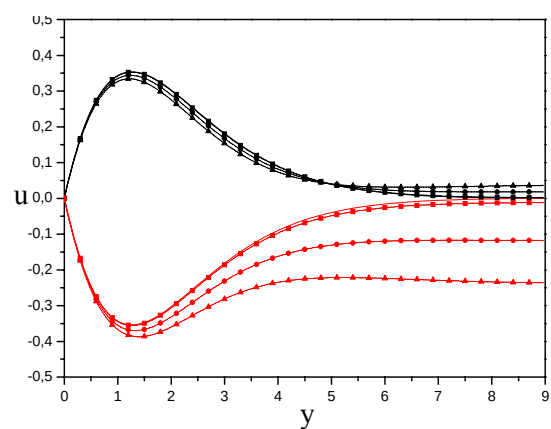
Comme dans le cas de la région proximale, on présente les profils des vitesses à $x = \pm\pi/4$ pour différentes directions de l'écoulement extérieur et pour différentes valeurs du paramètre ε .

Quand on change la direction de l'écoulement extérieur (Figure 3.2.a-3.2.e), on peut souligner les conclusions suivantes :

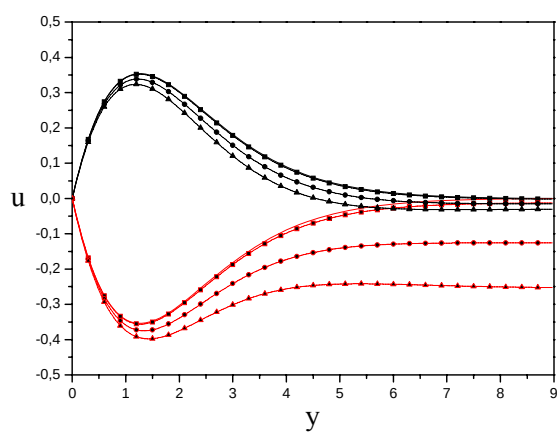
L'épaisseur de la couche limite est plus grande dans le cas de la convection naturelle que dans le cas de la convection mixte symétrique. Ceci est vérifié car la pente des courbes des vitesses s'annule plus rapidement dans le cas de la convection mixte symétrique.



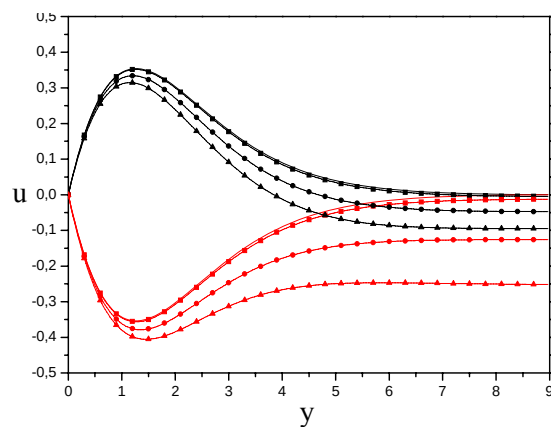
(a)



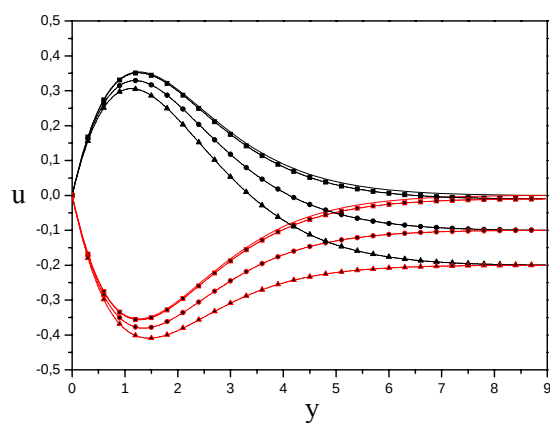
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURE 3.2 : Profil de vitesse à $x = \pm\pi/4$ pour différents ε
a- $\alpha = 0$, **b-** $\alpha = \pi/6$, **c-** $\alpha = \pi/4$, **d-** $\alpha = \pi/3$, **e-** $\alpha = \pi/2$
 (—) $\varepsilon = 0$; (—■—) $\varepsilon = 0.01$; (—●—) $\varepsilon = 0.1$; (—▲—) $\varepsilon = 0.2$

Dans le cas d'une convection mixte symétrique (Figure 3.2.a), les vitesses longitudinales restent symétriques et l'influence de l'écoulement extérieur se manifeste loin de la paroi. Dans le cas d'une convection mixte asymétrique, le maximum de la vitesse diminue dans la zone positive et augmente dans la zone négative quand l'amplitude de l'écoulement extérieur augmente (Figure 3.2.b-3.2.e).

L'influence de la direction de l'écoulement extérieur est montrée sur les figures (3.2) et (3.3). Quand la convection mixte est faiblement asymétrique (direction de l'écoulement extérieur faible), on constate que les vitesses diminuent en augmentant l'amplitude de l'écoulement extérieur dans la zone proche de la paroi ; ce phénomène s'inverse quand on s'en éloigne (Figure 3.2.b). Dans ce cas, l'écoulement extérieur s'oppose à l'écoulement de convection naturelle dans la zone proche et s'ajoute à ce dernier dans la zone lointaine. Dans le cas d'une convection mixte fortement asymétrique, l'écoulement extérieur s'oppose toujours à l'écoulement de convection naturelle et l'amplitude des vitesses reste toujours inférieure à l'amplitude des vitesses dans le cas de la convection mixte symétrique (Figure 3.3).

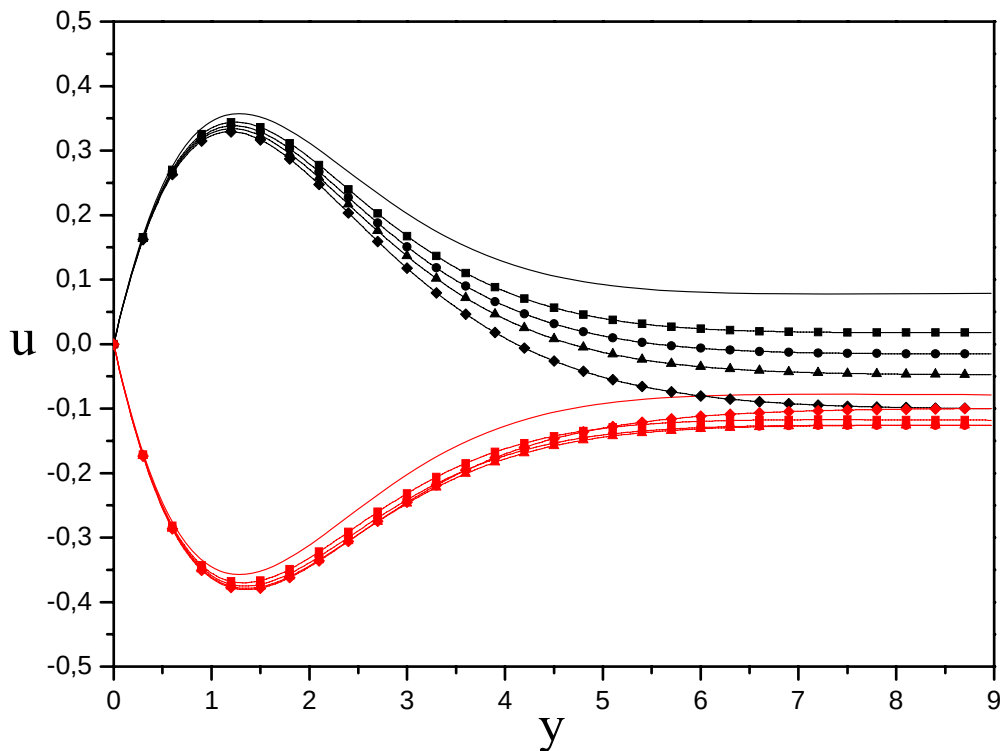


FIGURE 3.3 : Profil de vitesse à $x = \pm\pi/4$ pour $\varepsilon = 0.1$ et différents α
 (—) $\alpha = 0$; (—■—) $\alpha = \pi/6$; (—●—) $\alpha = \pi/4$; (—▲—) $\alpha = \pi/3$; (—◆—) $\alpha = \pi/2$

III.3.3-TEMPERATURES

Comme dans le cas de la zone proximale, la variation de la température ne dépend pas de la coordonnée longitudinale. Les influences, de la direction de l'écoulement extérieur et de son importance sur la température, sont montrées dans les figures 3.4.

Quand l'amplitude de l'écoulement extérieur augmente, les courbes de température restent inchangées pour des convections mixtes fortement asymétriques (figure 3.4.c et 3.4.d). Cette influence se manifeste dans le cas d'une convection mixte symétrique (Figure 3.4.a) ou faiblement asymétrique (Figure 3.4.b) mais reste faible.

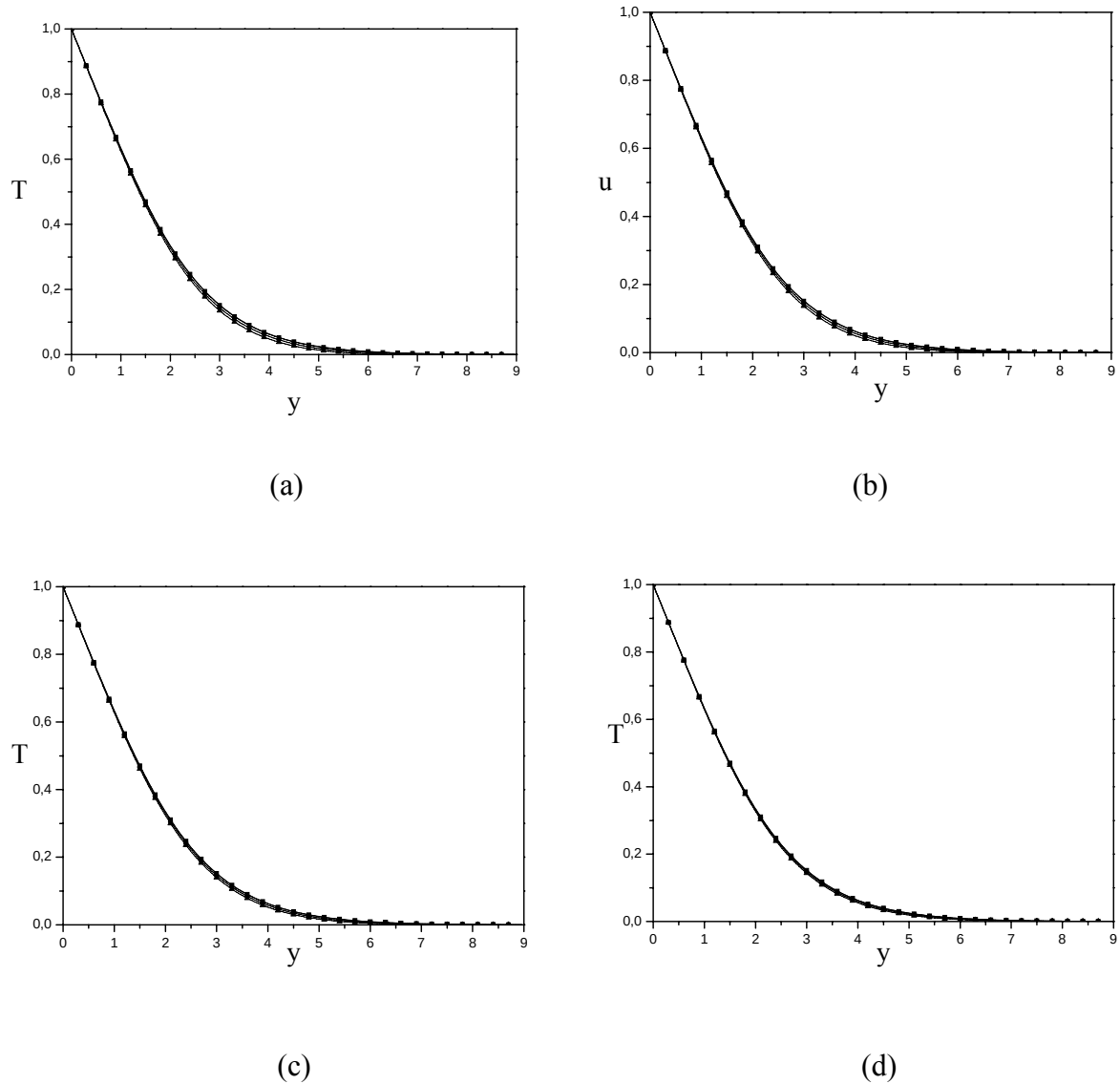


FIGURE 3.4: Profil des températures à $x = \pm\pi/4$ pour différents ε
a- $\alpha = 0$, **b-** $\alpha = \pi/6$, **c-** $\alpha = \pi/4$, **d-** $\alpha = \pi/3$
 (—) $\varepsilon = 0$; (—■—) $\varepsilon = 0.01$; (—●—) $\varepsilon = 0.1$; (—▲—) $\varepsilon = 0.2$

III.4-CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons développé une formulation variationnelle couplée avec une méthode aux différences finies qui permet de résoudre le problème de la convection mixte, asymétrique, dans la zone distale. Nous avons surmonté le problème de la divergence dans le domaine de la convection mixte défavorable en partageant la zone en deux. La frontière entre ces deux zones est donnée par la ligne de vitesse horizontale nulle. Nous intégrons dans le sens ascendant, en utilisant les résultats de la zone proximale pour démarrer les calculs et les conditions aux limites extérieures pour vérifier les calculs. Nous intégrons dans le sens descendant en utilisant les conditions aux limites externes pour démarrer les calculs et les résultats de la zone proximale pour les valider. Nous avons montré l'évolution de l'épaisseur de la couche limite dans les différents cas de la convection mixte et nous avons étudié l'évolution des vitesses et des températures dans plusieurs configurations et l'influence de la direction et de l'importance de l'écoulement extérieur sur ces grandeurs caractéristiques.

PARTIE II
INTERACTION ENTRE DEUX FLUIDES SUPERPOSES
ET UNE PAROI VIBRANTE

CHAPITRE IV
INTERACTION FLUIDE STRUCTURE
INTRODUCTION GENERALE ET BIBLIOGRAPHIE

L'étude des interactions fluides-structures (**I.F.S**) concerne la description des mouvements couplés entre structures et fluides qu'elles contiennent ou dans lesquels elles sont immergées. Une structure peut se déformer ou se mouvoir sous l'action des forces exercées par le liquide, et le mouvement de ce dernier est à son tour affecté par le déplacement de la (ou des) paroi(s). Parce que ces composants communiquent dynamiquement, une analyse de la réponse du système doit considérer les deux simultanément. De telles études ont pour objectif la détermination de la façon dont le fluide modifie le comportement de la structure et inversement comment la structure influe sur le mouvement du fluide. Le couplage fluide-structure étudie les interactions entre une structure fixe ou mobile, rigide ou déformable, et un fluide liquide ou gazeux, compressible ou incompressible, visqueux ou non visqueux s'écoulant autour d'elle, ou qu'elle contient. On parle de deux phénomènes couplés lorsque l'évolution de l'un est liée à celle de l'autre. Les problèmes d'interactions fluide-structure se situent à la frontière entre la dynamique des structures et la dynamique des fluides, ce qui implique que ce domaine emprunte aux deux disciplines. Il existe différents problèmes d'I.F.S qui recouvrent un domaine physique vaste aux applications industrielles multiples. En aérodynamique, on peut citer l'effet du vent sur les véhicules aériens (avions, fusées, missiles...), les ponts ou sur les grandes constructions (phénomènes aéroélastiques), les écoulements autour de corps immergés comme les sous-marins et les coques de bateaux, de digues dans un port ou de piles de ponts (phénomènes hydroélastiques). Ces phénomènes peuvent être aussi provoqués par les vibrations propres au fonctionnement d'installations industrielles, de réservoirs ou des lignes de transfert de fluides comme ils peuvent être dus à des effets inertiels ou à des phénomènes naturels tels que les séismes. En hémodynamique, l'interaction fluide-structure apparaît là aussi de façon incontournable lors de l'écoulement du sang dans les vaisseaux ou au niveau de la pompe cardiaque.

La difficulté rencontrée dans l'étude des phénomènes d'interaction fluide-structure est de définir une entrée au problème. Ainsi, pour résoudre le problème de la structure, il faut connaître le chargement du fluide sur cette dernière, c'est-à-dire la pression exercée par le fluide alors qu'elle est une inconnue du problème global. Pour analyser le mouvement du fluide, il faut connaître les conditions aux frontières, en particulier, les conditions

cinématiques et dynamiques sur les interfaces fluide–structure qui sont, elle aussi, des inconnues du problème global. Les problèmes d’interaction fluide–structure sont alors considérés globalement et la résolution est faite en tenant compte des deux domaines. L’autre difficulté rencontrée dans leur modélisation est liée aux effets qu’il faut prendre en compte dans celle des deux éléments, ces effets sont nombreux et variés. Dans le fluide, on peut prendre en compte ou négliger la viscosité, la tension superficielle, la présence d’une surface libre, la compressibilité et, dans le cas de deux fluides, de la miscibilité. La structure peut être représentée par une membrane, une poutre, une plaque, une coque ou par un solide déformable. Sur le plan dynamique, on peut considérer les faibles ou les grands déformations de la structure et, enfin, sur le plan géométrique, on peut examiner les géométries carrées, cylindriques, sphériques ou autres.

La complexité du problème étudié dépend du nombre d’effets, de la nature du (des) fluide(s), du type de la structure, de sa géométrie et du type du mouvement considéré. En plus de toutes ces contraintes, il faut aussi considérer la position du fluide par rapport à la structure. On conçoit bien la complexité que peut revêtir le problème en prenant en compte tous ces effets dans un modèle et en sachant que les équations qui le régissent sont, en outre, non-linéaires.

Ce chapitre est consacré aux travaux publiés sur le thème qui nous intéresse. Cette revue est constituée de deux parties : la première concerne les études sur le ballottement (Sloshing) des fluides et la seconde celles de l’interaction entre un fluide et une structure. On se limitera aux cas où le fluide est contenu dans la structure (réservoir contenant un fluide).

Le ballottement d’un fluide dans un réservoir est caractérisé par des fréquences propres qui sont liées au mouvement propre du fluide sans interaction avec la structure. Le phénomène du ballottement est important dans plusieurs domaines de l’industrie. La connaissance des fréquences propres du fluide en contact avec une structure solide déformable permet de prévoir les risques d’endommagement et d’éviter les catastrophes industrielles, écologiques et les pertes humaines. Chaque partie rend compte des travaux antérieurs en présente les modèles développés et les principaux résultats acquis.

Les premiers travaux consacrés au mouvement de la surface libre dans un réservoir ont été réalisés par **POISSON [1828]** et **RAYLEIGH [1876]** et sont présentés par **LAMB [1945]**. Le ballottement associé au mouvement de translation et de rotation d’un réservoir de section rectangulaire a été étudié par **GRAHAM [1951]** en lui associant un pendule équivalent. **KACHIGAN [1955]** a fait une étude dans le même sens sur un réservoir cylindrique en translation et **LORELL [1956]** pour le cas de la translation et de la rotation

d'un réservoir cylindrique. L'analogie avec le pendule est reprise pour étudier le mouvement d'un fluide dans un réservoir de forme quelconque, mais les résultats obtenus sont complexes. Une méthode basée sur une formulation en termes d'énergie cinétique et potentielle du fluide en mouvement est proposée par **MILES [1958]**. Ces deux énergies sont incorporées dans une analyse dynamique plus générale basée sur le Lagrangien du système incluant même le réservoir. Cette démarche lui a permis d'utiliser uniquement les conditions aux frontières cinématiques, la condition dynamique liée à la constance de la pression à la surface libre du fluide étant une conséquence des équations de Lagrange. Il aboutit à une équation aux fréquences qui est résolue pour plusieurs configurations afin d'élucider l'apport des différents paramètres gouvernant le problème.

Dans le cadre des études sur les véhicules spatiaux, plusieurs nouveaux problèmes liés à leur technologie sont mis en évidence. Leurs formes étant allongées, leurs fréquences de rotation sont faibles et leurs diamètres étant grands, les fréquences propres du fluide sont petites. Ainsi, ces tendances limitent le choix des fréquences de contrôle. Des problèmes aigus résultent de ce regroupement compact des fréquences en raison de l'interaction entre la structure, le ballonnement du fluide et les fréquences de contrôle. Des considérations de performances nécessitent des engins avec des fréquences de structure faibles. Par conséquent, les effets des vibrations élastiques de la structure du véhicule, du ballonnement du fluide et du système de contrôle deviennent plus critiques en raison des basses fréquences et du faible amortissement global. Bien que les fréquences du sloshing soient proches de celle du contrôle, les effets du ballonnement du fluide sur la stabilité peuvent être maîtrisés plus facilement que ceux de la structure élastique, à condition de choisir correctement les phases. Parmi tous les problèmes cités ci-dessus, celui du ballonnement du fluide dû aux vibrations de torsion est traité par **BAUER [1963a et b]**.

Les modes normaux d'oscillation d'un fluide incompressible dans un réservoir ouvert, dont une partie de la paroi supposée flexible est modélisée par une membrane, ont été étudiés par **SHULKES [1990]**. Il a d'abord analysé la décroissance des fréquences propres d'un fluide non visqueux quand une partie de la paroi rigide du réservoir est remplacée par une membrane. Le problème des oscillations d'un liquide visqueux dans un réservoir flexible est alors étudié numériquement en utilisant la technique des éléments finis. Il a observé deux types de fréquences propres : les modes liés aux oscillations de la surface libre et les modes liés aux vibrations de la structure. La dépendance des deux modes à l'égard du nombre de Bond (rapport des forces de gravité sur les forces de tension superficielle) et du nombre de Reynolds a été étudiée.

Une nouvelle méthode de l'étude des vibrations induites par le débordement d'un fluide dans un déversoir a été développée par **LU et al [1997]**. La technique de séparation des potentiels et la transformée de Laplace y sont utilisées pour résoudre l'équation de l'écoulement potentiel et celle qui régit le système couplé. Un modèle a également été développé pour décrire le débordement d'un réservoir descendant. Les résultats analytiques montrent une bonne concordance avec ceux calculés numériquement. Le mécanisme des vibrations induites par le débordement est clarifié et des mesures pour supprimer ou alléger de telles vibrations sont également proposées.

Les vibrations non linéaires d'une structure rectangulaire, couplées avec le ballonnement de l'eau qu'elle contient, sont étudiées théoriquement et expérimentalement par **IKEDA et NAKAGAWA [1997]**. Le réservoir est attaché à une structure pour supprimer les vibrations horizontales de la structure provoquées par une excitation sinusoïdale. Dans l'analyse théorique les équations modales du sloshing sont présentées et ils considèrent comme unique source de non-linéarité l'inertie du liquide qui est due à une grande amplitude du ballonnement. En outre, les solutions pour les oscillations harmoniques de la structure et la surface de l'eau sont déterminées, et l'analyse de leur stabilité effectuée. Les courbes de résonance obtenues changent en passant d'un ressort de type mou à un ressort de type dur tel que la profondeur de l'eau diminue. Ces courbes montrent également qu'une oscillation super-harmonique avec une oscillation sub-harmonique survient à la fréquence d'accord quand l'amplitude de l'excitation est grande. C'est un genre d'oscillations non linéaires forcées dues à la non-linéarité de la force introduite par le liquide. L'aspect de cette oscillation réduit l'efficacité de la suppression des vibrations en employant le réservoir d'eau.

FALTINSEN et al [2000,2001] ont présenté un système modal dimensionnel infini et discret décrivant le ballonnement non linéaire d'un fluide incompressible avec écoulement irrotationnel. Ce fluide occupe partiellement un réservoir effectuant un mouvement tridimensionnel arbitraire. Le réservoir a des parois verticales près de la surface libre et la réflexion des vagues est supprimée. La dérivation du système est basée sur le principe variationnel de **BATEMAN [1944]-LUKE [1967]**. Le mouvement de la surface et le potentiel des vitesses sont développés en utilisant les séries de Fourier généralisées. Le système modal dimensionnel infini obtenu fait intervenir un couplage entre les coordonnées généralisées, dépendantes du temps, qui décrivent la surface libre et le potentiel des vitesses. Le procédé n'est limité par aucun ordre de petite dimension. La structure multidimensionnelle générale de l'équation est approximée pour analyser le ballonnement dans un réservoir rectangulaire de profondeur finie. Les valeurs des fréquences obtenues sont conformes aux

solutions de 5^{ème} ordre proposées par **WATERHOUSE [1994]** La théorie est validée par de nouveaux résultats expérimentaux. Elle montre que les transitions et le battement non linéaire associé sont importants. Une première variation des périodes d'excitation est plus importante que les conditions initiales. La théorie n'est pas valide lorsque la profondeur de l'eau est faible ou quand l'eau est en contact avec le plafond de réservoir. Des expressions alternatives pour les charges hydrodynamiques sont présentées. Le procédé facilite les simulations d'un système couplé de type véhicule- fluide.

Les effets non linéaires des ondes stationnaires dans un réservoir fixe et excité verticalement sont étudiés numériquement par **FRANDSEN & BORTHWICK [2003]**. Leur modèle qui est non linéaire simule les ondes bidimensionnelles dans les régions stables et instables d'un écoulement à surface libre. Des solutions numériques des équations régissant l'écoulement potentiel sont obtenues en utilisant un schéma aux différences finies sur une grille à pas adaptatifs. Une σ -transformation dans la direction verticale qui s'étend de la surface plate et la surface libre est appliquée pour remplacer le domaine physique extérieur libre et mobile par un domaine numérique fixe. Une grille linéaire horizontale est également appliquée de sorte que le domaine numérique résultant soit rectangulaire, et se compose de cellules carrées unitaires. Dans le domaine des petites amplitudes, leurs résultats sont en bon accord avec ceux donnés par la théorie des petites perturbations d'ordre 2. Pour les ondes de plus grande cambrures oscillant dans le réservoir verticalement excité, la surface libre révèle un comportement non linéaire. La résonance paramétrique est apparaît dans les zones d'instabilité, car les grandes amplitudes se déclenche rapidement, même pour des petites amplitudes excitatrices. Dans ce cas, les prévisions diffèrent considérablement des solutions prédites par la théorie des petites perturbations, ce qui démontre l'importance des effets non linéaires.

Les effets du ballotement dans réservoir excité verticalement en dehors de la région instable montrent le comportement d'un ballotement libre dans un réservoir fixe quand le paramètre d'excitation est faible. On enregistre un comportement périodique conforme à ce qui est prédit par la solution à faibles amplitudes. À mesure que l'excitation augmente, ce caractère disparaît progressivement pour donner lieu à des formes irrégulières y compris dans le cas des ondes de faibles amplitudes. Les effets non linéaires compliquent le comportement du liquide en le rendant presque imprédictible. Cependant, dans des régions stables, les solutions restent finies à tout moment. Les mouvements verticaux produisent des effets considérables dans les régions instables, où la résonance paramétrique a lieu. Dans ces

régions, les excitations minuscules peuvent causer la croissance de petites perturbations initiales, si l'excitation agit sur le réservoir pendant un temps suffisamment long.

FALTINSEN et al [2003] ont construit un système modal asymptotique pour modéliser le ballonnement non linéaire dans un réservoir rectangulaire. Le système couple, d'une façon non linéaire, neuf fonctions modales décrivant l'évolution en temps des modes normaux. Ils supposent que les deux premiers modes sont dominants. Le système est équivalent au modèle présenté par **FALTINSEN et al [2000]** pour le cas bidimensionnel. Il est validé pour un ballonnement résonnant dans un bassin à base carrée. La différence réside dans la profondeur du fluide mais le comportement avec une profondeur qui décroît aux valeurs intermédiaires est également discuté. La partie théorique se concentre sur les solutions périodiques du système modal (état du mouvement de l'onde stationnaire) pour une excitation longitudinale (le long de la paroi) et diagonale (dans le plan diagonal vertical). Trois types de solutions sont établies pour chaque cas :

1- ondes stationnaires résonantes planes / diagonales pour des excitations longitudinale / diagonales ;

2- ondes tourbillonnaires se déplaçant le long des parois du réservoir dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire ;

3- ondes stationnaires résonantes couplées, en phase avec les plus bas modes.

La contribution des modes plus élevés et l'influence de la profondeur du liquide sont étudiées en détail. L'étude a révélé des zones où les régimes stationnaires instables existent et où il y a deux solutions périodiques stables ou plus avec des amplitudes semblable. De nouveaux résultats expérimentaux sont présentés et montrent généralement un bon accord avec les données théoriques concernant les ballonnements stationnaires. Les régimes de ballonnement tridimensionnels démontrent une contribution significative des modes les plus élevés dans l'état d'équilibre et les écoulements transitoires.

L'approche modale de troisième ordre utilisée par **FALTINSEN et TIMOKHA [2001]** a été modifiée pour étudier le sloshing tridimensionnel dans un bassin de base rectangulaire. Les hypothèses adoptées sont : fluide incompressible, écoulement irrotationnel, pas de réflexion des ondes et pas d'impact de toit. La surface libre est perpendiculaire aux parois verticales du bassin. En outre, le forcing externe, latéral et angulaire, est suffisamment petit. Leur approche modale aboutit à un système dimensionnel composé d'un nombre infini d'équations différentielles ordinaires couplant les fonctions modales, non linéaires et dépendantes du temps. Ce système décrit l'évolution temporelle des modes normaux de la surface libre correspondants. La non linéarité est de type polynomiale est conforme à la

théorie de troisième ordre de **ZAKHAROV [1968]**. La théorie modale adaptative peut expliquer l'amplification d'un nombre infini de modes normaux.

Les grandes amplitudes du sloshing ont été également étudiées numériquement par **CHO et LEE [2004]**. Ils ont utilisé une méthode d'éléments finis non linéaires, basée sur le potentiel des vitesses, pour la simulation précise des grandes amplitudes du sloshing d'un liquide dans un réservoir bidimensionnel cloisonné et soumis à une excitation forcée horizontale. Les effets de la paroi sur le ballotement non-linéaire du liquide sont examinés. La surface libre est décrite par une différentiation temporelle du terme convectif dans la condition cinématique avec l'aide de la méthode prédicteur-correcteur d'ordre quatre. La vitesse d'écoulement est interpolée du potentiel de vitesse en utilisant la méthode des moindres carrés de second ordre. Le maillage d'éléments finis est réalisé avec une approche semi-Lagrangienne combinée avec la correction de la hauteur de la surface libre, afin de maintenir la régularité du maillage et de garder le volume du liquide inchangé. L'étude des caractéristiques hydrodynamiques a été effectuée en changeant la taille de l'installation et la largeur d'ouverture des parois. Comparé à un bassin sans cloison, le ballotement du liquide dans le réservoir cloisonné montre la différence entre le sloshing du liquide et l'écoulement dû aux pressions hydrodynamiques au-dessus et au-dessous de la cloison. Tandis que le mouvement du liquide et la variation de pression dynamique au-dessus de la cloison sont actifs, ceux ayant lieu au niveau sont considérablement passifs. D'autre part, la surface libre montre des fluctuations très complexes, tout en étant nettement influencée par la largeur d'ouverture de cloison, de sorte que les profils sinusoïdaux traditionnels ne semblent pas plus longs.

Les interactions entre un fluide et les structures, de formes géométriques diverses, qui les contiennent ont fait l'objet de plusieurs travaux. Les structures et les fluides sont caractérisés par des fréquences et des modes propres. L'interaction entre les deux éléments est associée à des fréquences et des modes différents des précédentes. Pour obtenir la réponse des structures soumises au chargement dynamique d'un fluide, **GUPTA et HUTCHINSON [1988]** ont utilisé des principes variationnels pour obtenir des fonctionnelles qui décrivent les oscillations couplées d'un corps élastique avec un liquide. Ces formules permettent d'estimer les fréquences et les modes propres du couplage pour un réservoir cylindrique à base circulaire, partiellement remplis d'un liquide qui oscille de façon asymétrique. Les vibrations libres et forcées, non linéaires, d'un bassin cylindrique en contact avec un fluide au repos ont été étudiées par **AMABILI et al [1998]**. Le problème est décrit par un système d'équations différentielles en utilisant des formes modales avec trois degrés de liberté pour plusieurs

configurations. On y montre que le caractère non linéaire des vibrations de la structure est accentué par la présence du fluide. L'influence de la viscosité sur le comportement du couplage, dans le cas d'une gravité nulle, est étudié par **BAUER et KOMATSU [1998]**. Les effets de la viscosité du liquide, de la flexibilité du réservoir et de l'épaisseur de la couche liquide ont été déterminés pour des lignes de contact en glissement libre ou ancrées. Quand la flexibilité du réservoir augmente, les fréquences et les amplitudes de vibrations du fluide diminuent et une plus grande partie du fluide est en mouvement. Il apparaît aussi dans ces systèmes un mouvement apériodique, qui n'existe pas dans le cas des fluides non visqueux, et qui dépend essentiellement de la viscosité et de l'épaisseur du fluide. Les fréquences du ballonnement du liquide se sont avérées plus grandes pour des lignes de contact ancrées que pour des lignes de contact libre. Par ailleurs, les fréquences de couplage diminuent quand la flexibilité augmente et quand l'épaisseur du fluide diminue. Dans tous les cas, les fréquences, du ballonnement et du couplage, sont plus faibles que celles obtenues dans le cas des fluides non visqueux.

Les vibrations libres d'un réservoir hermétique, simplement soutenu à sa base, ont été étudiées par **AMABILI [2000]**. Le réservoir est composé d'une coquille cylindrique reliée à ses extrémités à deux plaques circulaires identiques. La méthode du ressort analogique est utilisée pour résoudre le système en utilisant des sous-structures. L'étude a été réalisée pour les deux cas où le réservoir est vide ou rempli d'un fluide non visqueux et incompressible. La conservation du volume liquide est appliquée. L'interaction entre les plaques et la coquille par l'intermédiaire du fluide est considérée et des expressions exactes pour le potentiel des vitesses dans le liquide sont utilisées. L'effet de la flexibilité des joints entre les plaques et la coquille est considérée. Des résultats pour une coquille remplie d'un fluide et simplement soutenue, fermée par des extrémités rigides sont également obtenus et comparés à ceux d'une coquille ouverte classique. Les modes normaux du réservoir sont en grande partie affectés par la présence d'un fluide dense à l'intérieur. En fait, pour des modes inférieurs, la pression du liquide sur la surface mouillée est en phase avec l'accélération structurale. Ainsi le fluide apparaît comme une masse ajoutée. Cependant, pour des modes symétriques, la conservation du volume de fluide joue un rôle important, de sorte que les modes de plaque sans cercles nodaux ne sont plus possibles. Les modes dominants de la coquille et de la plaque sont encore reconnaissables pour les premiers modes. L'effet de la flexibilité des liens communs à la coquille et les plaques peut être très grand. Par ailleurs, la gamme complète de flexibilité est étudiée. Le cas spécial d'une coquille flexible, remplie et fermée rigidement aux extrémités affiche des fréquences propres plus grandes que ceux de la même coquille remplie par le

même liquide avec des extrémités ouvertes. En fait, les contraintes au mouvement du liquide augmentent la masse ajoutée du fluide contenu.

Si la surface d'un liquide visqueux est complètement couverte par une structure élastique, les fréquences hydroélastiques sont décalées vers des valeurs plus grandes que celles obtenues avec une surface libre non couverte. **BAUER et CHIBA [2000]** ont constaté que la viscosité diminue les fréquences d'oscillation par rapport aux fréquences couplées du liquide sans friction et qu'un nouveau phénomène apparaît, exhibant pour certaines hauteurs du liquide uniquement un mouvement apériodique. Avec l'augmentation des nombres des modes, angulaire et radial, ce phénomène apériodique diminue. Des modes plus élevés montrent une plus grande atténuation. Une augmentation de la tension de la membrane diminue la région apériodique, alors qu'une augmentation de la masse de la membrane l'augmente. L'étude a aussi montré que :

- l'augmentation du nombre de modes implique une diminution de la région apériodique pour des rapports hauteur de liquide / rayon du réservoir faibles ;
- la diminution du rapport hauteur de liquide / rayon du réservoir augmente l'amplitude d'atténuation et affaiblit la fréquence d'oscillation. Des modes plus élevés subissent une atténuation plus forte et disparaissent avec le temps ;
- une augmentation du paramètre de tension de la membrane diminue la région apériodique considérablement et une augmentation du paramètre de pesanteur augmente la région apériodique ; cette augmentation est plus prononcée pour les modes inférieurs ;
- une augmentation du paramètre de masse augmente la région apériodique, et dans la région d'oscillations amorties les fréquences des oscillations augmentent quand l'atténuation s'affaiblit.

La réponse d'un réservoir cylindrique partiellement rempli et soumis à une excitation horizontale dans la direction transversale a été étudiée par **PAPASPYROU et al [2004]**. Ils ont développé un modèle mathématique bidimensionnel pour décrire les effets du ballottement dans des réservoirs rigides. Le potentiel de vitesse est exprimé sous forme de série, où chaque terme est le produit d'une fonction du temps et d'une fonction spatiale associée. Dans cette configuration géométrique les fonctions spatiales ne sont pas orthogonales et le problème n'est pas séparable. Le système d'équations différentielles linéaires obtenu est résolu numériquement. Les fréquences du sloshing d'un cylindre horizontal à moitié plein ont été calculées, et une solution semi analytique est obtenue pour une excitation harmonique. Ils ont aussi étudié les effets de la déformation des parois du réservoir en supposant que celle du cylindre est de type poutre. En développant une

formulation couplée, la réponse dynamique d'un réservoir déformable à moitié plein est obtenue pour une contrainte sismique. Il est apparu que la déformation des parois peut avoir un effet considérable sur toute la force sismique, tandis que l'influence de la déformation des parois sur le sloshing est plutôt insignifiante.

Les vibrations non-linéaires des réservoirs cylindriques, à bases circulaires, vides ou remplis de fluide, maintenues aux deux extrémités et soumis à une force excitatrice harmonique radiale, ont été considérées par **KARAGIOZIS et al [2005]**. Ils ont développé deux modèles théoriques différents. Dans le premier, une forme standard des équations non-linéaires pour des réservoirs peu profonds est employée et dans le second, les équations du mouvement sont dérivées d'une approche variationnelle qui permet d'inclure des ressorts de contraintes aux extrémités de réservoir et de tenir compte des termes d'inertie. Dans la première méthode, les fonctions propres de la poutre encastree sont employées pour décrire les variations axiales de la déformation du réservoir. Elles satisfont automatiquement les conditions aux limites menant à un développement à sept degrés de liberté pour la solution. Dans le deuxième modèle, des ressorts de rotation sont utilisés aux extrémités du réservoir ; ils reproduisent une extrémité fixe s'ils sont assez grands.

Le mouvement d'un cylindre flexible, d'axe central extensible et soumis à un écoulement axial a été étudié par **MODARRES-SADEGHI et al [2005]**. Deux équations non-linéaires, couplées, décrivent ses mouvements et impliquent des déplacements longitudinaux et transversaux qui sont obtenus en utilisant le principe de Hamilton. Les équations résultantes sont correctes au troisième ordre, et le déplacement transversal du cylindre est du premier ordre. Les résultats sont présentés sous formes de diagrammes de bifurcation avec la vitesse d'écoulement comme variable indépendante, soutenue par des graphes des plans de phase. Ces résultats prouvent que le système perd la stabilité par l'intermédiaire d'une bifurcation supercritique et développe une divergence. L'existence des instabilités post-divergence du cylindre a été prouvée et est en accord qualitatif avec l'observation. En outre, l'effet de certains des paramètres principaux affectant les vitesses critiques d'écoulement et l'amplitude des mouvements résultants ont été explorés. Ils ont constaté que le système perd la stabilité par une bifurcation de type fourche menant à la divergence. Un nouvel équilibre intervient avec l'augmentation de la vitesse mais une autre instabilité menant au flottement apparaît par une bifurcation de Hopf. Avec l'accroissement des vitesses d'écoulements la dynamique devient plus complexe, et des solutions quasi-périodiques et chaotiques ont été obtenues.

Les vibrations couplées, non linéaires, d'une structure élastique en interaction avec un liquide dans un réservoir cylindrique ont fait l'objet d'une étude réalisée par **IKEDA et SHIN [2005]**. Le comportement de la surface liquide est régi par une équation de Mathieu parce que la structure est soumise à une excitation verticale et sinusoïdale. Des équations modales décrivant le ballotement du liquide et régissant les mouvements couplés, sont dérivées quand la fréquence propre de la structure est égale à deux fois à la fréquence propre d'un mode antisymétrique du sloshing. Ils ont déterminé les courbes théoriques de résonance et ils ont étudié l'influence des différents paramètres sur ces courbes quand la fréquence d'excitation est choisie comme paramètre de contrôle.

Les travaux consacrés à la géométrie rectangulaire restent très limités.. Une approche analytique, de l'interaction entre un liquide et la paroi élastique d'un réservoir rectangulaire contenant ce liquide avec une surface libre, est développée par **CHAI et al [1996]**. Les effets de la gravité sont pris en considération et la paroi latérale élastique du récipient est considérée comme une membrane verticale ou un système masse-ressort. Une solution linéaire explicite, basée sur la théorie potentielle, a été obtenue pour l'interaction entre une structure élastique et un liquide avec une surface libre contenu dans un réservoir. Les fréquences et les modes propres du système couplé ont été donnés explicitement. Les effets des paramètres de système sur les fréquences couplées ont été discutés dans deux cas : une paroi latérale élastique, modélisée par un système de masse-ressort ou par une poutre.

Dans le cas d'une paroi latérale du type poutre, la solution est obtenue en décomposant la forme de mode en deux fonctions inconnues: une pour la partie libre et une autre pour la partie immergée. La variation des fréquences couplées avec la profondeur du liquide a été présentée et comparée aux fréquences du ballotement du liquide et aux fréquences propres de la poutre indépendante. Les principaux résultats de ce travail concernent la mise en évidence de l'existence de deux types de modes propres :

- le mode de type ballotement caractérisé par des fréquences couplées proches des fréquences propres non-couplées du fluide et l'effet du mouvement de la structure est faible ;
- le mode de type structure dont la forme propre est similaire à celle du mode sec de structure le plus proche.

Dans le cas d'un système de masse-ressort, la masse ajoutée a été obtenue en général. Elle peut être positive, comme dans la définition classique, ou peut devenir nulle ou négative dans le cas d'un domaine liquide fini avec une surface libre et en tenant compte des effets de la gravité.

Cheung et Zhou [2000] ont considéré le cas d'une plaque mince soudée au fond rigide d'un réservoir rectangulaire rempli d'un fluide dont les effets de la surface libre sont négligés. La méthode des résidus pondérés de Ritz a été utilisée pour étudier les caractéristiques des vibrations de la plaque. Les effets des rapports des hauteurs du liquide et de la plaque et l'influence de la densité sur les fréquences normales du système sont étudiés en détail. Les résultats prouvent que la méthode est également applicable à une plaque rectangulaire horizontale de dimensions infinies supportant un fluide en remplaçant ce dernier par un autre ayant les mêmes propriétés mais avec des dimensions horizontales finies et une plus grande hauteur.

Entreprendre une analyse par éléments finis dynamiques d'un réservoir contenant un fluide exige la modélisation du fluide et du réservoir ensemble ou d'ajuster la masse des murs et de la base du réservoir pour tenir compte de la présence du fluide. Ce dernier exige généralement des éléments solides spéciaux pour modéliser le fluide. Ces derniers ne sont pas disponibles dans toutes les bibliothèques des logiciels d'éléments finis. **BARTLETT et al [2001]** ont détaillé un ensemble de propriétés pour l'élément de structure solide qui permet de modéliser exactement l'eau dans un réservoir. Deux réservoirs en acier rectangulaires entièrement soudés, construits de plaques de différentes épaisseurs, ont été partiellement remplis avec de l'eau et sont dynamiquement excités. Un excellent accord a été trouvé entre les mesures dynamiques prises sur la base des réservoirs et les prévisions d'un modèle d'élément finis dans lequel le fluide est modélisé en utilisant les éléments de structure solide et l'ensemble de leurs propriétés.

Dans la pratique, on cherche une manière efficace de modéliser le fluide dans un réservoir pour que l'analyse dynamique ajuste correctement la masse des murs et de la base du navire contenant le fluide. Cette tâche est loin d'être aisée car les formes des modes de vibration pour les parois d'un réservoir partiellement rempli dépendent de la profondeur du fluide dans le réservoir. **BARTLETT et al [2001]** ont développé une formulation pour déterminer la masse à ajouter à la base d'un réservoir rectangulaire partiellement rempli. Les mesures suggèrent que la fréquence fondamentale de vibration soit une fonction du niveau du fluide dans le réservoir, de l'épaisseur de la base et à un moindre degré, de la densité du fluide. Une formulation basée sur le principe de la masse ajoutée a été conçue pour déterminer la quantité de la masse à ajouter aux embases dans un modèle d'éléments finis du réservoir contenant le fluide.

Dans l'analyse numérique du comportement des grands réservoirs de stockage des liquides, le traitement des matrices de grandes tailles devient difficile à cause de l'interaction

entre deux milieux, fluide et structure, différents. Afin de surmonter un tel problème, il est classique de couper le système dynamique en deux régions à problème séparées en utilisant la technique de la masse ajoutée. En général, le comportement propre du liquide intérieur est caractérisé par le mode du sloshing tandis que la structure par le mode de bulging et les deux modes montrent un couplage faible. Basé sur ce couplage faible, la déformation de la structure due au mode du sloshing et la fluctuation de la surface libre du liquide due au mode bulging ont été négligées dans le calcul classique de masse ajoutée. **CHO et SONG [2001]** ont amélioré le modèle de l'interaction classique en incluant ces deux effets. Ils ont reconsidéré les modèles simplifiés antérieurs en prenant en compte l'influence de la déformation de structure sur le mouvement du ballottement et celle du sloshing de la surface libre sur des vibrations de la structure. Pour l'amélioration du modèle du bulging, ils ont inclus le sloshing de la surface libre liquide dans le calcul de la masse ajoutée, et pour le modèle fin du ballottement, ils ont développé une formulation numérique d'éléments finis comprenant la déformation de la structure. Il est apparu que les deux modèles propres sont dépendants sur le plan fréquentiel. Afin d'étudier l'effet additionnel de la déformation de la structure sur le mode du sloshing d'un réservoir rigide classique, ils ont effectué la première fois l'analyse qualitative de la formulation numérique de raffinement et ils ont obtenu une relation montrant une variation relative dans la masse ajoutée qui contient trois paramètres de contrôle : le module de Young, la densité du liquide et l'épaisseur de la structure. Par les expériences paramétriques pour la variation quantitative des fréquences propres du ballottement, la différence relative dans les fréquences propres entre les modèles classiques et de raffinement est proportionnelle au ramollissement relatif des structures. D'autre part, une telle variation devient remarquable à mesure que la fréquence propre augmente. Avec un procédé numérique de raffinement des matrices de masse ajoutée, Ils ont analysé les variations en fréquence de la masse ajoutée totale ainsi que les distributions spatiales des composantes des masses ajoutées modales. Pour une structure couvrant partiellement la surface libre du liquide dans un récipient rectangulaire bidimensionnel de largeur infinie, les fréquences couplées inférieures augmentent avec l'aire de la structure, produisant ainsi un mouvement du liquide calme en bas. **BAUER et EIDEL [2004]** ont constaté également que les fréquences du couplage restent toujours au-dessous des celles du cas où la surface est couverte par un toit rigide. Quand l'obstruction extérieure est rigide les fréquences propres du liquide augmentent avec l'augmentation du secteur couvert.

CHAPITRE V
FORMULATION DU PROBLEME D'INTERACTION ENTRE DEUX FLUIDES
PARFAITS SUPERPOSES ET UNE PAROI DEFORMABLE DANS UN RESERVOIR
RECTANGULAIRE

V.1- INTRODUCTION

L'interaction entre deux fluides parfaits, incompressibles, superposés et confinés dans un réservoir parallélépipédique avec une des parois verticales supposée flexible est un prolongement naturel des travaux réalisés sur l'interaction fluide-structure dans un bassin avec parois déformables. Le but de ce travail est la caractérisation des effets additionnels apportés par la présence du second fluide. Nous citerons comme applications industrielles de ce modèle les moteurs développés avec des réservoirs à deux carburants et les condensateurs des systèmes thermodynamiques à deux fluides. Nous avons développé un modèle mathématique, basé sur les équations qui régissent le mouvement des fluides et de la paroi. Avant d'appliquer ce modèle au cas des deux fluides superposés en interaction avec une paroi déformable, nous avons d'abord validé le modèle dans le cas d'un seul fluide.

V.2- FORMULATION DU PROBLEME

Le problème d'interaction entre deux fluides parfaits, incompressibles et une paroi verticale dans un réservoir est schématisé sur la figure (5.1). Le réservoir, de forme parallélépipédique, de longueur L , a des dimensions transversales suffisamment grandes pour considérer tout mouvement bidimensionnel. La paroi verticale vibrante est située à $x = 0$. Elle est considérée comme une poutre encastrée à ses deux extrémités. Les autres parois du réservoir sont supposées rigides. Les deux fluides sont caractérisés par leur masses volumiques, ρ_1 et ρ_2 et leurs hauteurs sont h_1 et h_2 , respectivement. La hauteur totale du réservoir est représentée par H . Nous utilisons pour l'étude un système de coordonnées cartésiennes. L'origine des coordonnées est placée au point de rencontre de la paroi déformable avec la surface de contact des deux fluides à l'équilibre. L'axe $\overrightarrow{Oy}$ est vertical, ascendant, et l'axe $\overrightarrow{Ox}$ est parallèle au fond du réservoir. $\xi_1(x,t)$ et $\xi_2(x,t)$ désignent les élévations des surfaces libres des fluides 1 et 2 respectivement et $\eta(y,t)$ représente la déformation de la poutre.

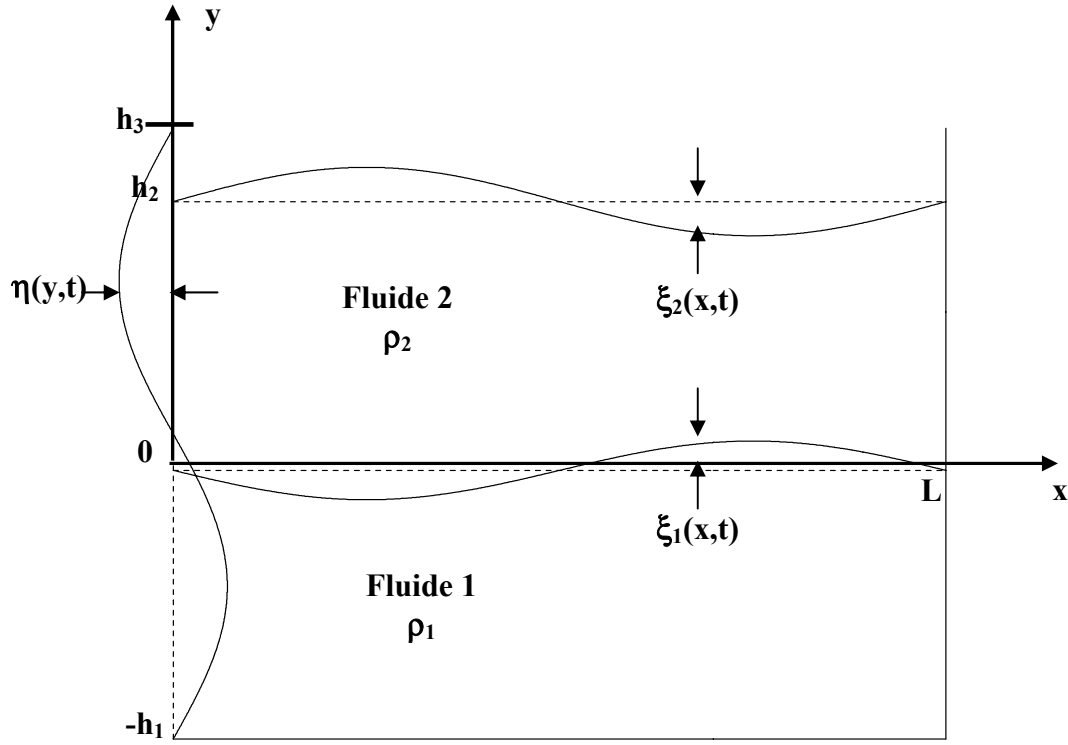


Figure 5.1 : Schéma du problème

V.2.1-EQUATIONS DU MOUVEMENT DES DEUX FLUIDES

Nous supposons que les deux fluides sont parfaits et incompressibles. Le déplacement de la paroi élastique est supposé faible comparé à la longueur du réservoir. On admettra également que les oscillations des fluides sont suffisamment petites pour négliger les termes non-linéaires des équations. Nous avons choisi d'adimensionnaliser les équations en utilisant comme longueur de référence celle du réservoir, L , et comme temps de référence $\sqrt{L/g}$. Dans ces conditions, le problème hydrodynamique est gouverné par les équations d'Euler linéarisées bidimensionnelles :

Pour les domaines fluides 1 et 2, les équations de conservation de la masse s'écrivent :

$$\Phi_{1xx} + \Phi_{1yy} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5.1)$$

$$\Phi_{2xx} + \Phi_{2yy} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq h_2 \quad (5.2)$$

Les conditions aux limites associées à ces équations sont de deux types, cinématique et dynamique. Les conditions cinématiques caractérisent la continuité des vitesses normales aux interfaces fluide/fluide et fluide/parois. Elles s'écrivent :

$$\Phi_{1y} = 0 \quad y = -h_1 \quad (5.3)$$

$$\Phi_{1y} = \Phi_{2y} = \xi_{1t} \quad y = 0 \quad (5.4)$$

$$\Phi_{2y} = \xi_{2t} \quad y = h_2 \quad (5.5)$$

$$\Phi_{1x} = \Phi_{2x} = 0 \quad x = 1 \quad (5.6)$$

$$\Phi_{1x} = \eta_t \quad x = 0 \quad \text{et} \quad -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5.7)$$

$$\Phi_{2x} = \eta_t \quad x = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq h_2 \quad (5.8)$$

Les conditions dynamiques, traduisent la continuité des pressions entre deux milieux, soit :

$$\Phi_{1t} + \xi_1 - \sigma_1 \xi_{1xx} = \rho \Phi_{2t} + \rho \xi_1 \quad y = 0 \quad (5.9)$$

$$\Phi_{2t} + \xi_2 - \sigma_2 \xi_{2xx} = 0 \quad y = h_2 \quad (5.10)$$

$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ représente le rapport des masses volumiques entre les deux fluides.

$\sigma_1 = \frac{\tau_1}{\rho_1 g L^2}$ et $\sigma_2 = \frac{\tau_2}{\rho_2 g L^2}$ sont les tensions superficielles adimensionnelles des fluides 1 et 2 respectivement.

En combinant les équations (5.9) et (5.4), on obtient :

$$\Phi_{1tt} - \rho \Phi_{2tt} + (1 - \rho) \Phi_{1y} - \sigma_1 \Phi_{1yxx} = 0 \quad y = 0 \quad (5.11)$$

Une opération analogue effectuée sur (5.10) et (5.5) donne lieu à :

$$\Phi_{2tt} + \Phi_{2y} - \sigma_2 \Phi_{2yxx} = 0 \quad y = h_2 \quad (5.12)$$

V.2.2-EQUATIONS DU MOUVEMENT DE LA PAROI DEFORMABLE.

Le mouvement de la paroi déformable du réservoir est modélisé en utilisant une loi de comportement linéaire élastique d'une poutre soumise à une charge latérale dans le cadre de la cinématique de Bernoulli.

Dans le cas d'un mouvement de faible amplitude, les équations de vibration transverse d'une poutre (TIMOSHENKO et al 1974) sont données par :

- Pour la partie immergée :

$$B_s \eta_{tt} + \eta_{yyyy} \eta_y = B_F \Phi_{1t} \Big|_{x=0} \quad -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5.13)$$

$$B_s \eta_{tt} + \eta_{yyyy} = \rho B_F \Phi_{2t} \Big|_{x=0} \quad 0 \leq y \leq h_2 \quad (5.14)$$

- Pour la partie sèche :

$$B_s \eta_{tt} + \eta_{yyyy} = 0 \quad h_2 \leq y \leq h_3 \quad (5.15)$$

où

$$B_s = \frac{\rho_s A g H^3}{E.I} \quad \text{et} \quad B_F = \frac{\rho_1 g H^4}{E.I}$$

B_s caractérise la poutre et donne les fréquences propres sèches adimensionnelles. ρ_s est la masse volumique, A l'aire de la section transversale et $E.I$ la raideur en flexion de la poutre.

B_F caractérise l'intensité du couplage avec le fluide. Les seconds membres des équations (5.14) et (5.15) représente la pression exercée par les fluides 1 et 2 sur la poutre. Plus leurs masses volumiques sont importantes, plus les forces de pression qu'ils exercent sont grandes.

La poutre est fixée aux extrémités inférieure et supérieure, ce qui se traduit par les conditions aux limites:

$$\eta(-h_1, t) = \eta_y(-h_1, t) = 0 \quad (5.16)$$

$$\eta(h_3, t) = \eta_y(h_3, t) = 0 \quad (5.17)$$

Le système (5.1)-(5.17) est couplé. Nous allons chercher des solutions harmoniques dans le temps en construisant des solutions analytiques pour les deux fluides et la paroi. Nous chercherons également une relation de dispersion pour les deux fluides qui nous permettra de calculer les fréquences propres des deux fluides superposés.

Pour la poutre, la solution peut se présenter sous forme de deux fonctions, l'une pour la partie mouillée et l'autre pour la partie sèche (CHAI et al [1996]). Les deux fonctions sont alors raccordées par les conditions de continuité au point de contact de la surface libre et de la paroi. Nous avons choisi de représenter la solution sous forme d'une seule fonction dont les coefficients varient entre la partie mouillée et la sèche.

V.2.3-REPRESENTATION FORMELLE DES POTENTIELES DES VITESSES

Les conditions (5.7) et (5.8) permettent de chercher des potentiels des vitesses sous les formes :

$$\Phi_1(x, y, t) = \varphi_1(x, y) \omega \sin(\omega t) \quad (5.18)$$

$$\Phi_2(x, y, t) = \varphi_2(x, y) \omega \sin(\omega t) \quad (5.19)$$

En tenant compte des conditions aux limites (5.3)-(5.6), $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$ s'écrivent :

$$\varphi_1(x, y) = \sum_l A_l \varphi_{1l}(y) \frac{\cos(l(x-1))}{\sin(l)} + \sum_k A_k \varphi_{1k}(y) \frac{\cosh(k(x-1))}{\sinh(k)} \quad (5.20)$$

$$\varphi_2(x, y) = \sum_l A_l \varphi_{2l}(y) \frac{\cos(l(x-1))}{\sin(l)} + \sum_k A_k \varphi_{2k}(y) \frac{\cosh(k(x-1))}{\sinh(k)} \quad (5.21)$$

où

$$\varphi_{1l}(y) = \cosh(l(y + h_1)), \quad \varphi_{1k}(y) = \cos(k(y + h_1))$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_{2l}(y) &= [\sinh(lh_1)\sinh(ly) + B_l \cosh(lh_1)\cosh(ly)] \\ \varphi_{2k}(x, y) &= [-\sin(kh_1)\sin(ky) + B_k \cos(kh_1)\cos(ky)] \end{aligned}$$

V.2.4-REPRESENTATION DES DEPLACEMENTS DE LA PAROI

Nous étudions les mouvements harmoniques du système. On note $E_n(y)$ les formes propres de la poutre et les déplacements correspondants sont donnés par :

$$\eta(y, t) = -\sum \gamma_n E_n(y) \cos(\omega t) \quad (5.22)$$

$$E_n(y) = \cos(P_n(y + h_1)) - \cosh(P_n(y + h_1)) - A_n (\sin(P_n(y + h_1)) - \sinh(P_n(y + h_1))) \quad (5.23)$$

En tenant compte des conditions (5.16) et (5.17), A_n s'écrit :

$$A_n = \frac{\sinh(P_n H) + \sin(P_n H)}{\cosh(P_n H) - \cos(P_n H)} \quad (5.24)$$

où $H = h_1 + h_3$ représente la hauteur de la poutre. P_n et $E_n(y)$ sont les valeurs et fonctions propres et γ_n représentent les coefficients de normalisations des modes propres de la poutre.

V.2.5-RELATION DE DISPERSION POUR DEUX FLUIDES

Les fréquences propres d'oscillations des deux fluides sont données par la relation de dispersion. Cette relation est déduites à partir des conditions dynamiques aux interfaces entre les deux liquides et à la surface libre du fluide supérieur.

En introduisant l'expression (5.19) de Φ_2 dans la condition (5.12), nous obtenons

$$\omega^2 \{B_l + \tanh(lh_1)\tanh(lh_2)\} = l(1 + \sigma_2 l^2) \{\tanh(lh_1) + B_l \tanh(lh_2)\} \quad (5.25)$$

et

$$\omega^2 \{B_k - \tan(kh_1)\tan(kh_2)\} = -k(1 - \sigma_2 k^2) \{\tan(kh_1) + B_k \tan(kh_2)\} \quad (5.26)$$

En en remplaçant Φ_1 et Φ_2 dans la relation (5.11), il vient :

$$\omega^2(1 - \rho B_1) = \{ (1 - \rho) + \sigma_1 l^2 \} l \cdot \tanh(lh_1) \quad (5.27)$$

et

$$\omega^2(1 - \rho B_k) = -\{ (1 - \rho) - \sigma_1 k^2 \} k \cdot \tan(kh_1) \quad (5.28)$$

L'élimination de B_1 et B_k dans les expressions (5.25)-(5.27) et (5.26)-(5.28) donne lieu à :

$$\begin{aligned} & \omega^2 \left\{ 1 - \frac{l \cdot \tanh(lh_1)}{\omega^2} (1 - \rho + \sigma_1 l^2) + \rho \cdot \tanh(lh_1) \cdot \tanh(lh_2) \right\} \\ & - l(1 + \sigma_2 l^2) \left\{ \rho \cdot \tanh(lh_1) + \tanh(lh_2) \left[1 - \frac{l \cdot \tanh(lh_1)}{\omega^2} (1 - \rho + \sigma_1 l^2) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} & \omega^2 \left\{ 1 + \frac{k \cdot \tan(kh_1)}{\omega^2} (1 - \rho - \sigma_1 k^2) - \rho \cdot \tan(kh_1) \cdot \tan(kh_2) \right\} \\ & + k(1 - \sigma_2 k^2) \left\{ \rho \cdot \tan(kh_1) + \tan(kh_2) \left[1 + \frac{k \cdot \tan(kh_1)}{\omega^2} (1 - \rho - \sigma_1 k^2) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

La résolution des équations (5.29) et (5.30) permet d'obtenir les fréquences des oscillations propres des deux fluides (fréquences de ballottement).

V.2.6-EXPRESSIONS DES ELEVATIONS DES INTERFACES

Les élévations de l'interface entre les deux fluides, $\xi_1(x, t)$, et de la surface libre du fluide supérieur, $\xi_2(x, t)$, sont déduites des équations (5.4) et (5.5) :

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= -\varphi_{1y} \cos(\omega t) \Big|_{y=0} \\ &= - \left\{ \sum_l A_l \frac{l \cdot \sinh(lh_1)}{\sin(l)} \cos(l(x-1)) - \sum_k A_k \frac{k \cdot \sin(lh_1)}{\sinh(k)} \cosh(k(x-1)) \right\} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \xi_2(x, t) &= -\varphi_{2y} \cos(\omega t) \Big|_{y=h_2} \\ &= - \left\{ \sum_l A_l \frac{l \cdot (\sinh(lh_1) \cosh(lh_2) + B_l \cosh(lh_1) \sinh(lh_2))}{\sin(l)} \cos(l(x-1)) \right. \\ & \quad \left. - \sum_k A_k \frac{k \cdot (\sin(kh_1) \cos(kh_2) + B_k \cos(kh_1) \sin(kh_2))}{\sinh(k)} \cosh(k(x-1)) \right\} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.32)$$

V.3-RESOLUTION DES EQUATIONS D'INTERACTION FLUIDES-POUTRE

La résolution des équations du couplage entre les deux fluides et la paroi nous permet d'avoir les fréquences propres et les modes propres du couplage. En introduisant les relations des potentiels et du déplacement de la paroi dans les équations de ce couplage, nous construirons un système algébrique linéaire. La résolution de ce dernier nous donnera les fréquences et les modes propres du couplage. L'exploitation de la condition cinématique, qui traduit la continuité de la vitesse transversale entre les fluides et la paroi, aboutit à un système exprimant les inconnues A_1 et A_k en fonction de γ_n en utilisant le produit scalaire des fonctions E_n qui définissent le mouvement de la poutre et le produit scalaire reliant les potentiels des deux fluides. La condition dynamique, qui traduit la continuité de la pression à la surface de contact entre les deux fluides et la paroi, nous donne une relation exprimant γ_n en fonction de A_1 et A_k .

V.3.1- DETERMINATION DE A_1 et A_k EN FONCTION DE γ_n

La condition cinématique en $x=0$ est donnée par les équations (5.7), pour $-h_1 \leq y \leq 0$, et (5.8) pour $0 \leq y \leq h_2$. En remplaçant $\Phi_1(x, y, t)$, $\Phi_2(x, y, t)$ et $\eta(y, t)$ par les expressions (5.18), (5.19) et (5.22), nous obtenons:

$$\sum_n \gamma_n E_n(y) = \sum_l 1.A_l \cdot \varphi_{1l}(y) - \sum_k k.A_k \cdot \varphi_{1k}(y) \quad \text{pour } -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5.33)$$

$$\sum_n \gamma_n E_n(y) = \sum_l 1.A_l \cdot \varphi_{2l}(y) - \sum_k k.A_k \cdot \varphi_{2k}(y) \quad \text{pour } 0 \leq y \leq h_2 \quad (5.34)$$

En utilisant le produit scalaire (**Annexe I**) une fois avec φ_l et une autre fois avec φ_k , nous obtenons les deux relations suivantes :

$$1.J_1.A_1 = \sum_n J(1, n)\gamma_n \quad (5.35)$$

$$k.J_k.A_k = \sum_n J(k, n)\gamma_n \quad (5.36)$$

où :

$$J_1 = \int_{-h_1}^0 \varphi_{1l}^2(y).dy + \sigma_1 \cdot \varphi_{1ly}^2(0) + \rho \left\{ \int_0^{h_2} \varphi_{2l}^2(y).dy + \sigma_2 \cdot \varphi_{2ly}^2(h_2) \right\} \quad (5.37)$$

$$J_k = \int_{-h_1}^0 \varphi_{1k}^2(y).dy + \sigma_1 \cdot \varphi_{1ky}^2(0) + \rho \left\{ \int_0^{h_2} \varphi_{2k}^2(y).dy + \sigma_2 \cdot \varphi_{2ky}^2(h_2) \right\} \quad (5.38)$$

$$J(l, n) = \int_{-h_1}^0 \varphi_{1l}(y) \cdot E_n(y) \cdot dy + \sigma_1 \cdot \varphi_{1ly}(0) \cdot E_{ny}(0) + \rho \left\{ \int_0^{h_2} \varphi_{2l}(y) \cdot E_n(y) \cdot dy + \sigma_2 \cdot \varphi_{2ly}(h_2) \cdot E_{ny}(h_2) \right\} \quad (5.39)$$

$$J(k, n) = - \int_{-h_1}^0 \varphi_{1k}(y) \cdot E_n(y) \cdot dy + \sigma_1 \cdot \varphi_{1ky}(0) \cdot E_{ny}(0) + \rho \left\{ \int_0^{h_2} \varphi_{2k}(y) \cdot E_n(y) \cdot dy + \sigma_2 \cdot \varphi_{2ky}(h_2) \cdot E_{ny}(h_2) \right\} \quad (5.40)$$

Les deux équations algébriques (5.35) et (5.36) peuvent s'écrire sous forme :

$$\{A_l\} = [ARG]_{l \times n} \{\gamma_n\} \quad (5.41)$$

$$\{A_k\} = [AIG]_{k \times n} \{\gamma_n\} \quad (5.42)$$

V.3.2- DETERMINATION DE γ_n EN FONCTION DE A_l ET A_k

La condition dynamique en $x=0$ est donnée par les équations (5.13), pour $-h_1 \leq y \leq 0$, (5.14) pour $0 \leq y \leq h_2$ et par (5.15) pour $h_2 \leq y \leq h_3$. En remplaçant $\Phi_1(x, y, t)$, $\Phi_2(x, y, t)$ et $\eta(y, t)$ par les expressions (5.18), (5.19) et (5.22), nous obtenons les égalités suivantes :

$$\sum_n (B^4 - P_n^4) E_n(y) \gamma_n = G \left\{ \sum_l A_l \cdot \text{Cotg}(l) \cdot \varphi_{1l}(y) + \sum_k A_k \cdot \text{Coth}(k) \cdot \varphi_{1k}(y) \right\} \text{ pour } -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5.43)$$

$$\sum_n (B^4 - P_n^4) E_n(y) \gamma_n = \rho G \left\{ \sum_l A_l \cdot \text{Cotg}(l) \cdot \varphi_{2l}(y) + \sum_k A_k \cdot \text{Coth}(k) \cdot \varphi_{2k}(y) \right\} \text{ pour } 0 \leq y \leq h_2 \quad (5.44)$$

$$\sum_n (B^4 - P_n^4) E_n(y) \gamma_n = 0 \quad \text{pour } h_2 \leq y \leq h_3 \quad (5.45)$$

L'utilisation de la propriété d'orthogonalité des fonctions $E_n(y)$, donne lieu à :

$$(B^4 - P_n^4) H \cdot \gamma_n = \sum_l J(n, l) \cdot A_l + \sum_k J(n, k) \cdot A_k \quad (5.46)$$

où

$$J(n, l) = G \cdot \text{Cotg}(l) \cdot \left[\int_{-h_1}^0 E_n(y) \cdot \varphi_{1l}(y) \cdot dy + \rho \int_0^{h_2} E_n(y) \cdot \varphi_{2l}(y) \cdot dy \right] \quad (5.47)$$

$$J(n, k) = G \cdot \text{Coth}(k) \cdot \left[\int_{-h_1}^0 E_n(y) \cdot \varphi_{1k}(y) \cdot dy + \rho \int_0^{h_2} E_n(y) \cdot \varphi_{2k}(y) \cdot dy \right] \quad (5.48)$$

$$H = \int_{-h_1}^{h_3} E_n^2(y) \cdot dy \quad (5.49)$$

avec $B^4 = B_s \omega^2$, $G = B_f \cdot \omega^2$

Remarquons que la relation (5.46) peut se mettre sous la forme :

$$\{\gamma_n\} = [AGR]_{n \times l} \{A_l\} + [AGI]_{n \times k} \{A_k\} \quad (5.50)$$

En remplaçant $\{A_l\}$ et $\{A_k\}$ dans (5.50) par les relations (5.41) et (5.42), nous obtenons le système algébrique:

$$[A]_{n \times n} \{\gamma_n\} = 0 \quad (5.51)$$

où

$$[A]_{n \times n} = [AGR]_{n \times 1} * [ARG]_{1 \times n} + [AGI]_{n \times k} * [AIG]_{k \times n} - [1] \quad (5.52)$$

Pour que ce système algébrique admette des solutions non triviales, il faut que la matrice A soit singulière. Les paramètres du système couplé étant fixés, cette matrice ne dépend que de la pulsation adimensionnelle ω . Les valeurs propres du système sont alors donnés par l'équation caractéristique :

$$\det([A]) = 0 \quad (5.53)$$

Pour chaque valeur propre trouvée, on calcule celles de γ , A_l et A_k correspondants, ce qui nous donne la forme propre du mode considéré. Nous noterons que celle-ci correspond à une forme de poutre, à celle de l'interface, à celle de la surface libre et aux potentiels des vitesses des deux fluides. L'amplitude relative de ceux-ci dépend du mode considéré.

V.4- CONCLUSION

Nous avons développé une approche théorique pour résoudre le problème d'interaction entre deux fluides parfaits superposés avec surface libre et la paroi d'un réservoir rectangulaire contenant ces deux fluides. Nous avons mis au point un produit scalaire adéquat qui permet de trouver la relation de dispersion pour les deux fluides. L'introduction des formes des potentiels et la forme de la paroi dans les conditions aux limites, cinématiques et dynamique, aboutit à un système algébrique et la résolution de ce système nous donne les fréquences du couplage.

Avant d'appliquer la méthode, présentée ci-dessus, nous allons au préalable la vérifier en comparant nos résultats avec ceux disponibles dans la littérature.

CHAPITRE VI

APPLICATION AU PROBLEME D'INTERACTION ENTRE UN FLUIDE ET UNE PAROI VIBRANTE –VALIDATION

VI.1-INTRODUCTION

Le problème de l'interaction entre un fluide parfait et la paroi vibrante d'un réservoir rectangulaire a été étudié par **CHAI et al [1996]** dans le cas de la gravité pure et par **DEBIANE [2005]** dans le cas gravito-capillaire. Ces deux travaux ont été choisis comme références pour valider le modèle que nous avons décrit dans le chapitre précédent. Pour ce faire, nous avons comparé leurs résultats avec ceux obtenus en reformulant le problème à partir des équations (5.1)-(5.17) pour un réservoir qui ne contient qu'un seul fluide, la méthode de résolution restant la même. Ce nouveau modèle est schématisé par la figure 5.2.

VI.2-EQUATIONS DU PROBLEME

Les équations qui régissent le problème de l'interaction entre le fluide et la paroi vibrante sont obtenues en éliminant le fluide 2 dans le réservoir. En conséquence, le potentiel des vitesses adimensionnel satisfait l'équation de Laplace:

$$\Phi_{1xx} + \Phi_{1yy} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1, -h_1 \leq y \leq 0 \quad (6.1)$$

qui sera résolue, avec les conditions aux limites cinématiques:

$$\Phi_{1y} = 0 \quad \text{à } y = -h_1 \quad (6.2)$$

$$\Phi_{1y} = \xi_{1t} \quad \text{à } y = 0 \quad (6.3)$$

$$\Phi_{1x} = 0 \quad \text{à } x = 1 \quad (6.4)$$

$$\Phi_{1x} = \eta_t \quad \text{à } x = 0 \quad (6.5)$$

Et la condition dynamique

$$\Phi_{1t} + \xi_1 - \sigma_1 \xi_{1xx} = 0 \quad \text{à } y = 0 \quad (6.6)$$

La deuxième conditions dynamique à $x = 0$ est donnée par l'équation du mouvement de la poutre à la hauteur : $-h_1 \leq y \leq 0$.

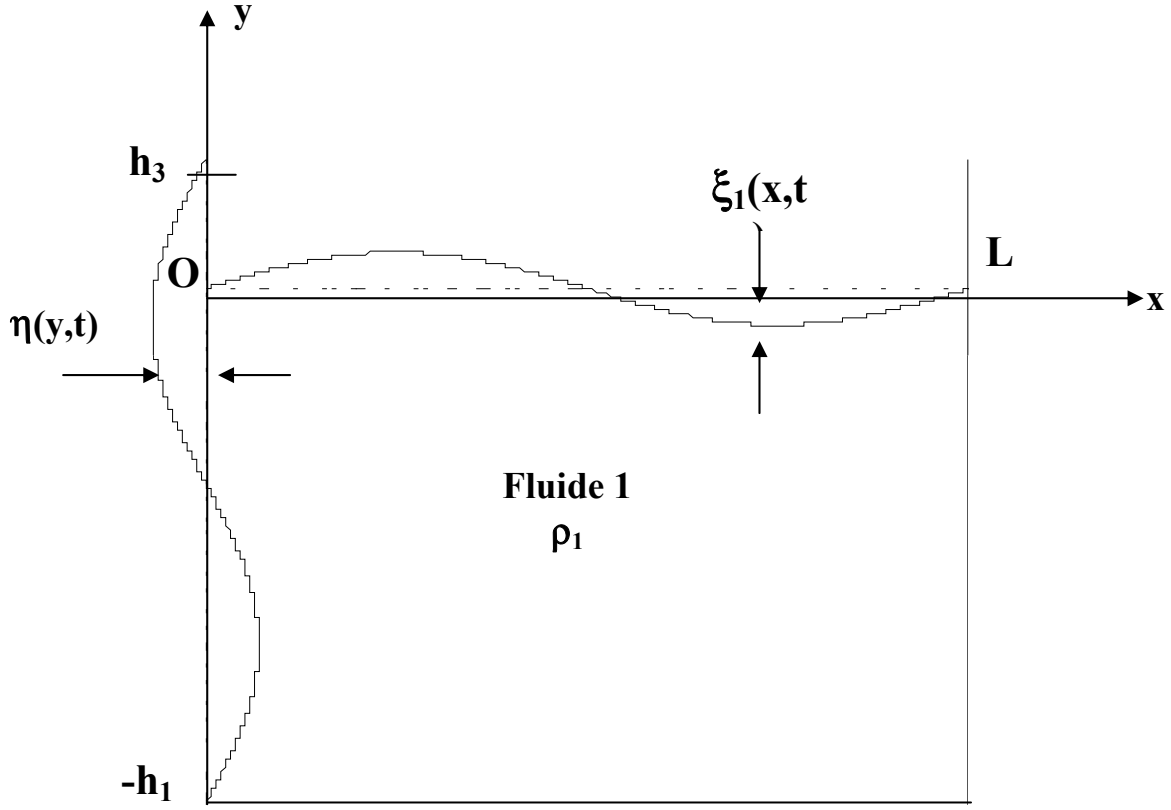


Figure 6.1 : Schéma du problème pour un fluide

En éliminant ξ_1 et ses dérivées dans l'équation (6.3), nous obtenons :

$$\Phi_{1tt} + \Phi_{1y} - \sigma_1 \Phi_{1yxx} = 0 \quad \text{à} \quad y = 0 \quad (6.7)$$

Ces équations sont complétées par l'équation des vibrations transverses de la poutre:

Pour la partie immergée :

$$B_s \eta_{tt} + \eta_{yyyy} \eta_y = B_F \Phi_{1t} \Big|_{x=0} \quad -h_1 \leq y \leq 0 \quad (6.8)$$

- Pour la partie sèche :

$$B_s \eta_{tt} + \eta_{yyyy} = 0 \quad 0 \leq y \leq h_3 \quad (6.9)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\eta(-h_1, t) = \eta_y(-h_1, t) = 0 \quad (6.10)$$

$$\eta(h_3, t) = \eta_y(h_3, t) = 0 \quad (6.11)$$

Les déplacements de la paroi sont donnés par (5.22) et le potentiel des vitesses s'écrit :

$$\Phi_1(x, y, t) = \varphi_1(x, y) \omega \sin(\omega t) \quad (6.12)$$

avec

$$\varphi_1(x, y) = A_0 \varphi_{10}(y) \frac{\cos(l(x-1))}{\sin(l)} + \sum_k A_k \varphi_{1k}(y) \frac{\cosh(k(x-1))}{\sinh(k)} \quad (6.13)$$

Où

$$\varphi_{10}(y) = \cosh(l(y + h_1)) \text{ et } \varphi_{1k}(y) = \cos(k(y + h_1)).$$

VI.3 – RELATION DE DISPERSION POUR LE FLUIDE

La relation de dispersion pour un fluide, qui nous permet de calculer les pulsations propres du fluide appelées pulsations du ballonnement ou sloshing, est obtenue de deux manières. La première consiste à éliminer les paramètres liés au deuxième fluide dans la relation de dispersion (5.29)-(5.30), soit :

$$\omega^2 = l(1 + \sigma_1 l^2) \tanh(l h_1) \quad (6.14)$$

$$\omega^2 = -k(1 - \sigma_1 k^2) \tan(k h_1) \quad (6.15)$$

Ces deux relations peuvent être obtenues en remplaçant dans (6.7) Φ_1 et ses dérivées par leurs valeurs. Ce premier résultat montre que nous pouvons calculer les pulsations propres d'un fluide à partir des formules de dispersion générales en annulant les paramètres liés au fluide ignoré.

VI.4 - EXPRESSIONS DE L'ELEVATION DE LA SURFACE LIBRE

L'élévation de la surface libre $\xi_1(x, t)$ est déduite de l'équation (6.3) et s'écrit :

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= -\varphi_{1y} \cos(\omega t) \Big|_{y=0} \\ &= -\left\{ A_0 \frac{l \sinh(l h_1)}{\sin(l)} \cos(l(x-1)) - \sum_k A_k \frac{k \sin(l h_1)}{\sinh(k)} \cosh(k(x-1)) \right\} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

VI.5 – CALCUL DES FREQUENCES PROPRES DE LA PAROI

Les fréquences propres de la paroi sont calculées en remplaçant $\eta(y, t)$ par son expression (5.22) dans les relations (6.10) et (6.11), nous obtenons alors :

$$\cos(P_n H) \cosh(P_n H) = -1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.17)$$

La résolution de cette équation nous donne les fréquences propres P_n auxquels correspondent les modes propres $E_n(y)$

VI.6 – CALCUL DES FREQUENCES PROPRES DU FLUIDE

Pour calculer les fréquences propres du fluide, la paroi vibrante est remplacée par une autre rigide. La condition (6.5) sera alors remplacée par :

$$\Phi_{1x} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0 \quad (6.18)$$

Le potentiel des vitesses (6.13) s'écrit alors :

$$\varphi_1(x,y) = A_0 \cosh(l(y+h_1)) \frac{\cos(l(x-1))}{\sin(l)} \quad \text{où} \quad l = m\pi \quad (6.19)$$

En introduisant dans la relation de dispersion (6.7) l'expression du potentiel des vitesses et en tenant compte de (6.19), nous obtenons :

$$\omega^2 = m\pi \cdot (1 + \sigma_1 m^2 \pi^2) \tanh(m\pi \cdot h_1), \quad m = 0, 1, \dots \quad (6.20)$$

La résolution de cette équation nous donne les fréquences propres du fluide.

VI.7 – COUPLAGE FLUIDE -PAROI

Le système algébrique régissant le mouvement du couplage paroi fluide est obtenu en exploitant les relations du couplage cinématique et dynamique entre le fluide et la paroi (6.5), (6.8) et (6.9) et en exploitant les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres de la poutre à partir du système algébrique global (5.33)-(5.42) et (5.43) –(5.50)

La condition cinématique (6.5) s'écrit, en remplaçant $\eta(x,t)$ et $\Phi(x,y,t)$ par les expressions (5.22) et (6.12) :

$$\sum_n \gamma_n E_n(y) = 1 \cdot A_0 \cdot \varphi_{10}(y) - \sum_k k \cdot A_k \cdot \varphi_{1k}(y) \quad \text{pour} \quad -h_1 \leq y \leq 0 \quad (6.21)$$

L'utilisation du produit scalaire démontré dans l'annexe I ; une fois avec φ_{10} et une autre fois avec φ_k , donne lieu à :

$$1 \cdot J_{10} \cdot A_0 = \sum_n J_0(l,n) \gamma_n \quad (6.22)$$

$$k \cdot J_{1k} \cdot A_k = \sum_n J_1(k,n) \gamma_n \quad (6.23)$$

où :

$$J_{10} = \int_{-h_1}^0 \varphi_{10}^2(y) \cdot dy + \sigma_1 \cdot \varphi_{10y}^2(0) \quad (6.24)$$

$$J_{1k} = \int_{-h_1}^0 \varphi_{1k}^2(y) \cdot dy + \sigma_1 \cdot \varphi_{1ky}^2(0) \quad (6.25)$$

$$J_0(l, n) = \int_{-h_1}^0 \varphi_{10}(y) \cdot E_n(y) \cdot dy + \sigma_1 \cdot \varphi_{10y}(0) \cdot E_{ny}(0) \quad (6.26)$$

$$J_1(k, n) = - \int_{-h_1}^0 \varphi_{1k}(y) \cdot E_n(y) \cdot dy + \sigma_1 \cdot \varphi_{1ky}(0) \cdot E_{ny}(0) \quad (6.27)$$

Les deux équations algébriques (6.22) et (6.23) peuvent s'écrire sous forme :

$$A_0 = \langle ARG \rangle_{1 \times n} \{ \gamma_n \} \quad (6.28)$$

$$\{ A_k \} = [AIG]_{k \times n} \{ \gamma_n \} \quad (6.29)$$

La condition dynamique à $x = 0$ est donnée par l'équation (6.8) pour $-h_1 \leq y \leq 0$ et par (6.9) pour $0 \leq y \leq h_3$. En remplaçant $\eta(y, t)$ et $\Phi_1(x, y, t)$ par les expressions (5.22) et (6.12), nous obtenons les deux expressions suivantes :

$$\sum_n (B^4 - P_n^4) E_n(y) \gamma_n = G \left\{ A_0 \cdot \text{Cotg}(l) \cdot \varphi_{10}(y) + \sum_k A_k \cdot \text{Coth}(k) \cdot \varphi_{1k}(y) \right\} \text{ pour } -h_1 \leq y \leq 0 \quad (6.30)$$

$$\sum_n (B^4 - P_n^4) E_n(y) \gamma_n = 0 \quad \text{pour } 0 \leq y \leq h_3 \quad (6.31)$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions $E_n(y)$, nous obtenons la relation suivante :

$$(B^4 - P_n^4) H \cdot \gamma_n = J_0(n, 1) \cdot A_0 + \sum_k J_1(n, k) \cdot A_k \quad (6.32)$$

où

$$J_0(n, 1) = G \cdot \text{Cotg}(l) \cdot \int_{-h_1}^0 E_n(y) \cdot \varphi_{10}(y) \cdot dy \quad (6.33)$$

$$J_1(n, k) = G \cdot \text{Coth}(k) \cdot \int_{-h_1}^0 E_n(y) \cdot \varphi_{1k}(y) \cdot dy \quad (6.34)$$

$$H = \int_{-h_1}^{h_3} E_n^2(y) \cdot dy \quad (6.35)$$

La relation (6.32) s'écrit alors sous la forme :

$$\{ \gamma_n \} = \{ AGR \}_{n \times 1} \cdot A_0 + [AGI]_{n \times k} \{ A_k \} \quad (6.36)$$

En remplaçant A_0 et $\{ A_k \}$ par les expressions (6.28) et (6.29), nous obtenons le système algébrique qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$[A_l]_{n \times n} \{ \gamma_n \} = 0 \quad (6.37)$$

où

$$[A]_{n \times n} = \{ AGR \}_{n \times 1} * \langle ARG \rangle_{1 \times n} + [AGI]_{n \times k} * [AIG]_{k \times n} - [I] \quad (6.38)$$

Le système (6.37) admet des solutions non nulles si la matrice A_1 est singulière. Cette matrice ne dépend que de la pulsation adimensionnelle ω . Les valeurs propres du système sont données par l'équation caractéristique :

$$\det([A_1]) = 0 \quad (6.39)$$

Cette dernière nous permet d'obtenir les valeurs propres du système couplé, nous calculons les valeurs des γ_n , A_0 et A_k correspondantes, ce qui nous donne la forme propre du mode considéré. Nous noterons que celle-ci correspond à une forme de la paroi, au potentiel des vitesses du fluide et à la forme de la surface libre du fluide. L'amplitude relative de ceux-ci dépend du mode considéré.

VI.8 –RESULTATS DE L'INTERACTION ENTRE UN FLUIDE ET LA PAROI :

Les expériences numériques sont réalisées dans le cas du réservoir considéré par **BAUER [1968]**, **CHAI et al [1996]** et **DEBIANE [2005]**. Les caractéristiques du réservoir sont :

Longueur : $L = 1.2192 \text{ m}$, Hauteur : $H^* = 1.524 \text{ m}$, Epaisseur : $e = 1.5 \text{ mm}$

Masse volumique de la paroi : $\rho_s = 2689 \text{ Kg/m}^3$

Masse volumique du fluide : $\rho_1 = 1041 \text{ Kg/m}^3$

Module d'Young : $E = 0.6895 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Les paramètres adimensionnels correspondants sont alors:

$$B_s = 3.582, B_f = 1109, H = \frac{H^*}{L} = 1.25$$

VI.8.1 –FREQUENCES SECHES DE LA PAROI :

Les valeurs propres de la poutre sont données par les racines de l'équation (6.17) et les pulsations propres correspondantes sont données par la relation :

$$\omega_s(n) = \frac{P_n^2}{\sqrt{B_s}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.40)$$

Sur le tableau suivant, nous donnons les dix premières pulsations propres de la poutre :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_{Sn}	7.5657	20.8550	40.8842	67.5837	100.9584	141.0080	187.7325	241.1320	301.2064	367.9557

VI.8.2 –FREQUENCES PROPRES DU FLUIDE :

Les fréquences propres du fluide sont les fréquences de ballotement. Ces fréquences dépendent du volume du fluide dans le bassin, via sa hauteur, et du coefficient de capillarité. Elles sont déterminées à partir de la relation (6.20) et s'écrivent :

$$\omega_F(m) = \sqrt{(m\pi + \sigma_1(m\pi)^3) \tanh(m\pi.h_1)} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.41)$$

En l'absence de la tension superficielle, on obtient :

$$\omega_F(m) = \sqrt{m\pi \cdot \tanh(m\pi.h_1)} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.42)$$

VI.8.3 –FREQUENCES PROPRES DE L'INTERACTION FLUIDE-PAROÏ :

Les fréquences propres de l'interaction fluide/paroi sont données par l'équation caractéristique issue de la relation (6.39). Le degré de cette équation dépend du nombre de termes dans le développement en série du potentiel des vitesses et du déplacement de la paroi. Dix termes sont utilisés pour représenter le déplacement de la paroi et trente termes pour représenter le potentiel des vitesses. L'augmentation du nombre de termes de l'un ou l'autre des développements n'engendre pas de variations significatives dans les résultats.

La figure 6.2 montre, pour le cas d'une tension superficielle nulle, l'évolution des vingt premières fréquences du couplage fluide- paroi en fonction du taux de remplissage, h_1/H , du réservoir. Il reproduit parfaitement les résultats obtenus par CHAI et al [1996] et DEBIANE [2005]. Nous avons représenté sur le même graphe les pulsations propres du ballotement qui sont calculées à partir de la relation (6.42).

La figure 6.3 montre l'évolution des fréquences du couplage pour le même problème en tenant compte de la tension superficielle du fluide. Le paramètre de capillarité est $\sigma_1 = 0.001$. Nous montrons sur le même graphe les pulsations propres du ballotement du fluide données par la relation (6.41) en considérant le même coefficient de capillarité.

L'analyse des figures (6.2) et (6.3) montre que les pulsations du système couplé fluide paroi vibrante peuvent être considérées comme des pulsations propres modifiées d'un système libre. Les caractéristiques vibratoires du système en interaction font apparaître deux types de modes propres. Le premier est de type ballotement et il survient pour des faibles taux de remplissage où l'effet du mouvement de la paroi est faible. Le deuxième mode est de type structure étant donné que le mode propre correspondant est similaire au mode sec de la structure. Ces modes apparaissent quand le taux de remplissage augmente car le fluide a une surface de contact plus grande avec la paroi et l'effet de la déformation de cette dernière sur le fluide progresse. Les pulsations correspondants à ces modes sont différentes des pulsations propres du fluide. Ces fréquences de couplage présentent des décroissances brusques alternées avec des paliers proches des pulsations propres du fluide du niveau inférieur. La

transition entre deux niveaux correspond à un mode de couplage de type structure dont les profils sont différents des modes du ballonnement.

Par ailleurs, les fréquences propres d'une structure en contact avec un fluide sont plus faibles que celles de la structure sèche. Ceci s'explique par la masse ajoutée qui a la propriété de diminuer les fréquences propres d'une structure élastique dès qu'elle est immergée dans un fluide, **CONCA et al [1994]**. Pour de faibles taux de remplissage, il apparaît un mode de couplage proche du premier mode de la paroi sèche, repéré par ω_{s1} . Le volume du liquide dans le réservoir n'est pas important et la surface de contact reste faible d'où une masse ajoutée faible. Lorsque le taux de remplissage augmente, la surface de contact évolue et la masse ajoutée influe de plus en plus sur la poutre. Les modes de types structure localisés dans les décroissances brusques correspondent à des fréquences décroissantes. L'amplitude relative du mouvement de la paroi par rapport au mouvement de la surface du fluide croît avec le taux de remplissage (**GUPTA et HUTCHINSON [1988]**).

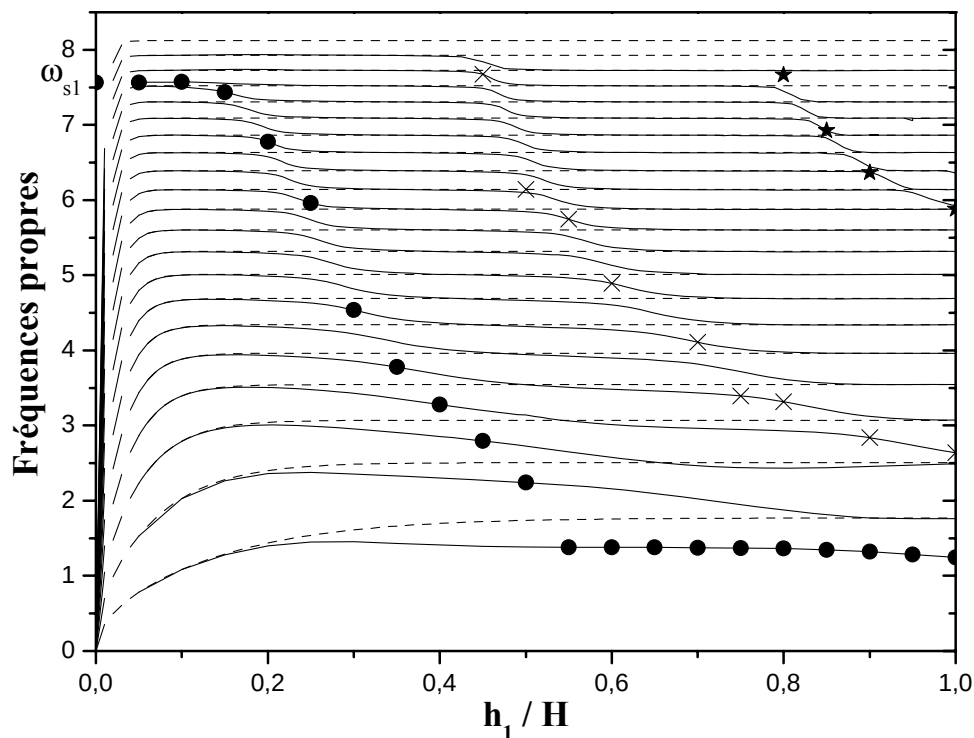


FIGURE 6.2 : Fréquences du couplage adimensionnelles (—) et fréquences du ballonnement (.....) en fonction du taux de remplissage h_1/H dans le cas de la gravité pure
(•, x, *) 1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème} fréquence structure

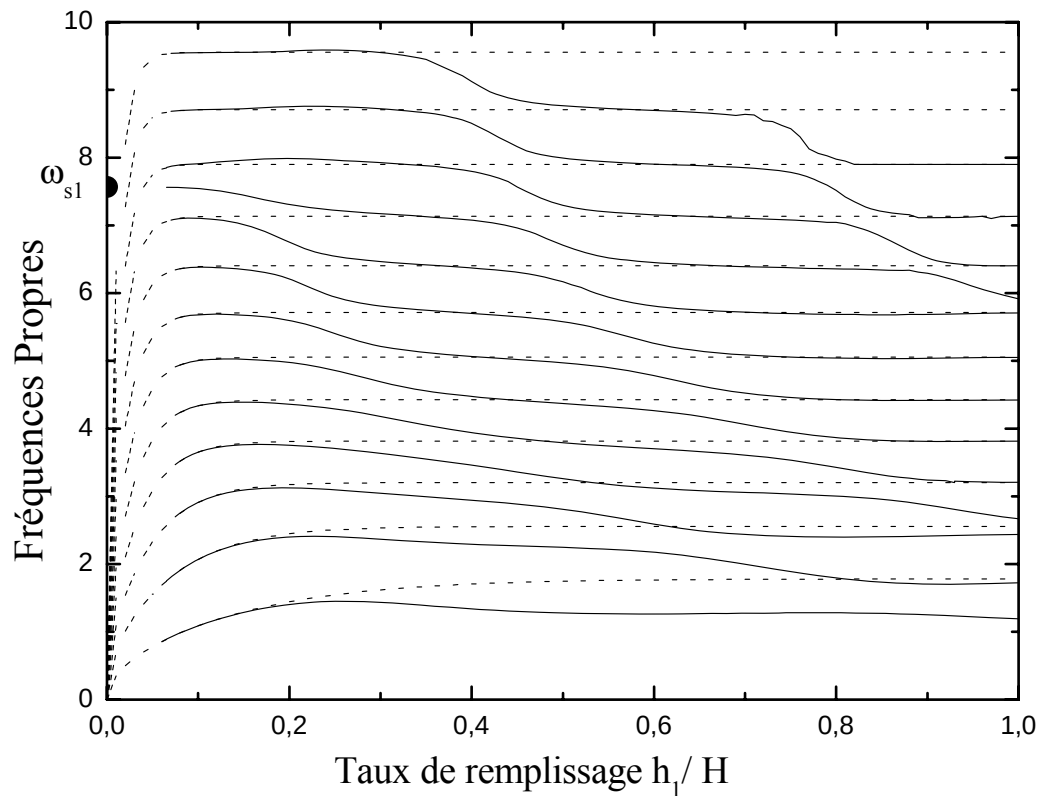


FIGURE 6.3 : Fréquences du couplage adimensionnelles (—) et fréquences du ballonnement (.....) en fonction du taux de remplissage h_1/H pour $\sigma_1 = 0.001$

VI.8.4—INFLUENCE DE LA TENSION SUPERFICIELLE

Les fréquences du couplage fluide structure augmente en présence de la tension superficielle. La figure (6.4) qui représente ces pulsations du couplage avec ou sans tension superficielle montre bien ce phénomène. Les écarts entre ces pulsations sont similaires aux écarts observés dans les pulsations du ballonnement. Nous remarquons aussi que les décrochages des grandes pulsations sont de plus en plus importants à cause de l'influence grandissante du mouvement de la paroi. L'introduction de la tension superficielle suggère de tenir compte des effets de l'intersection de l'interface avec les parois solides. Quand la ligne de contact est libre, l'interface est perpendiculaire aux parois. Dans le cas réel, l'angle de contact subit une variation du type hystérésis lorsque la tension superficielle n'est pas nulle, ce qui engendre des dissipations et influence les pulsations du couplage.

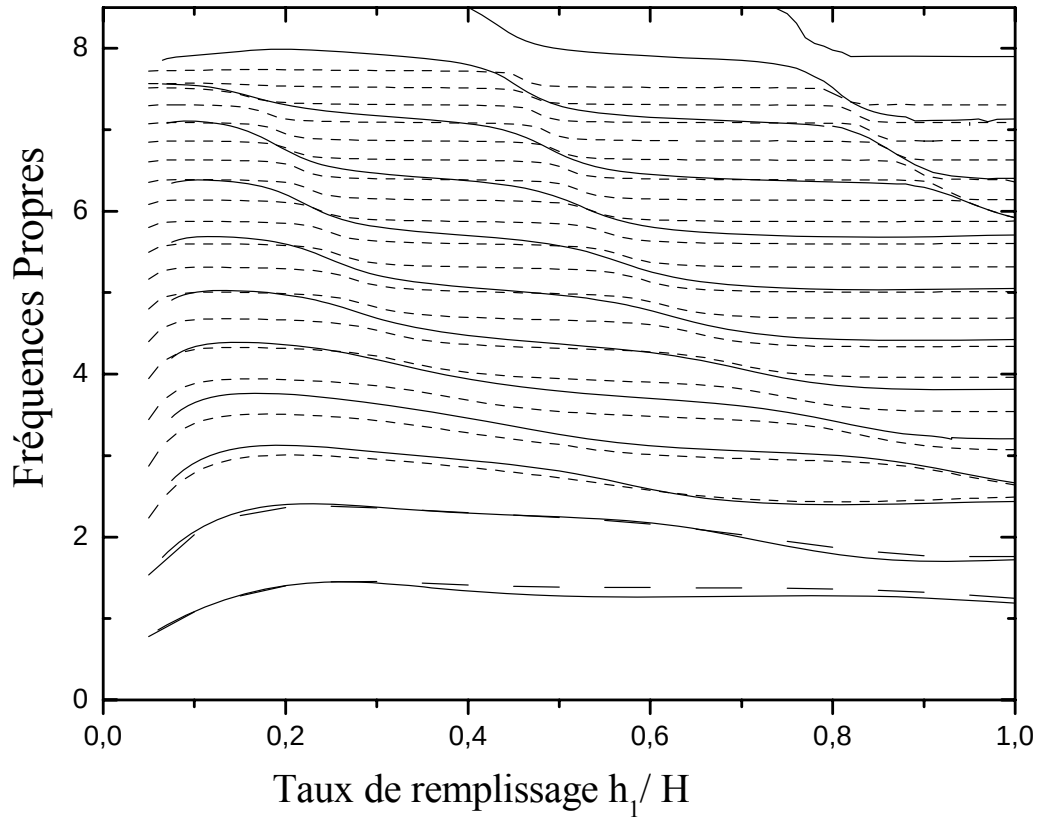


FIGURE 6.4 : Fréquences du couplage adimensionnelles en fonction du taux de remplissage h_1/H :
 (.....) gravité pure (——) gravité capillarité pour $\sigma_1 = 0.001$

VI.8.5–ANALYSE DES MODES POUR UN TAUX DE REMPLISSAGE FIXE

La répartition des modes du couplage en deux groupes distincts, modes de ballotement et modes de structure, et l'influence de la tension superficielle sont clarifiés en étudiant le rapport de la surface libre à celle de la paroi mobile qui est défini par :

$$\mu = \frac{\max(\eta(y, t))}{\max(\xi_1(x, t))}$$

Ce rapport est donné pour un taux de remplissage fixe $h_1/H = 0.6$.

Les graphes (6.5) et (6.6) représentent la variation de μ avec le mode dans les cas gravitaire et gravito-capillaire. Dans les deux graphes, le premier mode représente le plus grand ratio. Ce ratio diminue et passe par un minimum au quatrième mode dans les deux graphes et atteint un maximum au neuvième mode dans le cas gravitaire et au septième mode dans le cas gravito-capillaire.

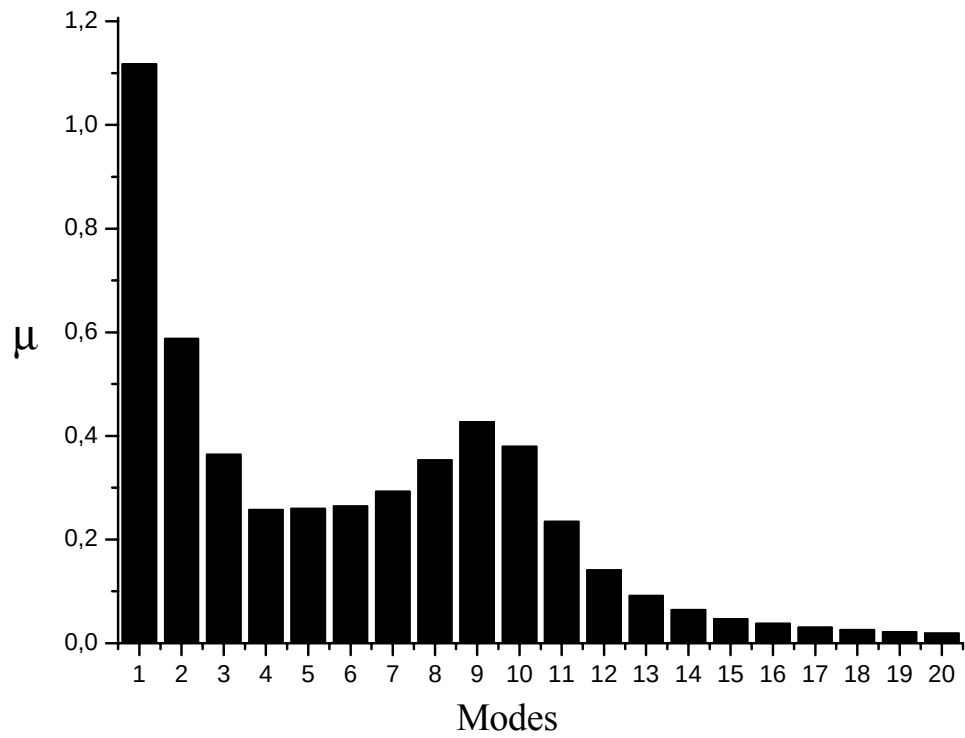


FIGURE 6.5 : Evolution du rapport d'amplitudes en fonction des modes pour $h_1/H = 0.6$
Gravité pure

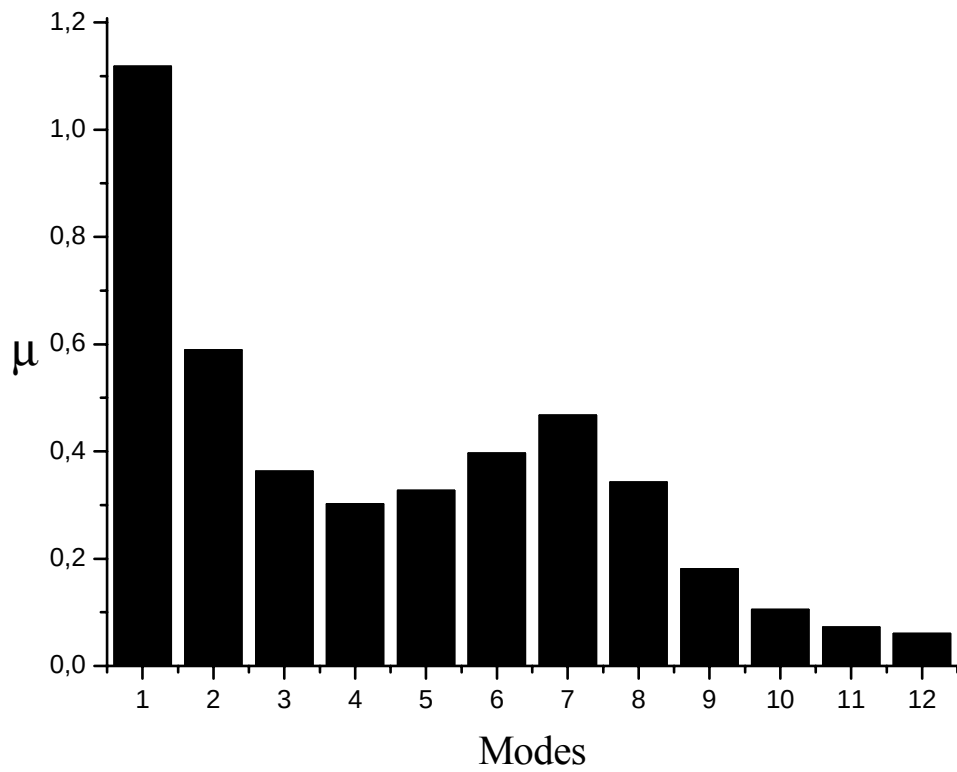


FIGURE 6.6 : Evolution du rapport d'amplitudes en fonction des modes pour $h_1/H = 0.6$
Gravité capillarité pour $\sigma_1 = 0.001$

Le premier mode, dont le rapport d'amplitude est de 1.12, est de type structure et est montré sur la figure (6.7.a) dans le cas gravitaire et (6.8.a) pour le gravito-capillaire. La fréquence du couplage est plus petite que la fréquence sèche de la poutre.

Le quatrième mode est présenté sur la figure (6.7.b) dans le cas gravitaire et (6.8.b) pour le gravito-capillaire. Le rapport d'amplitude est de 0.31, ce qui veut dire que l'amplitude du mouvement de la surface libre est trois fois plus importante que celle de la paroi. Ce mode est du type ballonnement et sa fréquence est plus proche de la fréquence propre du fluide.

Le deuxième maximum local diffère entre le cas gravitaire et le cas gravito-capillaire. Il correspond au neuvième mode dans le premier cas (Figure 6.7.c) et au septième mode dans le deuxième cas (Figure 6.8.c). Dans le cas gravitaire, ce maximum est de 0.42 et il est de 0.47 dans le cas gravito-capillaire. Dans les deux cas le mode est situé entre deux modes de ballonnement et il est considéré de type structure. Le mouvement de la poutre est relativement grand. L'amplitude de la surface libre est maximale au voisinage de la paroi rigide et présente un nœud du côté de la poutre. Le ratio μ est plus grand dans le cas gravito-capillaire et se présente à un mode plus proche ; ceci est dû au fait que la tension superficielle influe sur le mouvement de la surface libre.

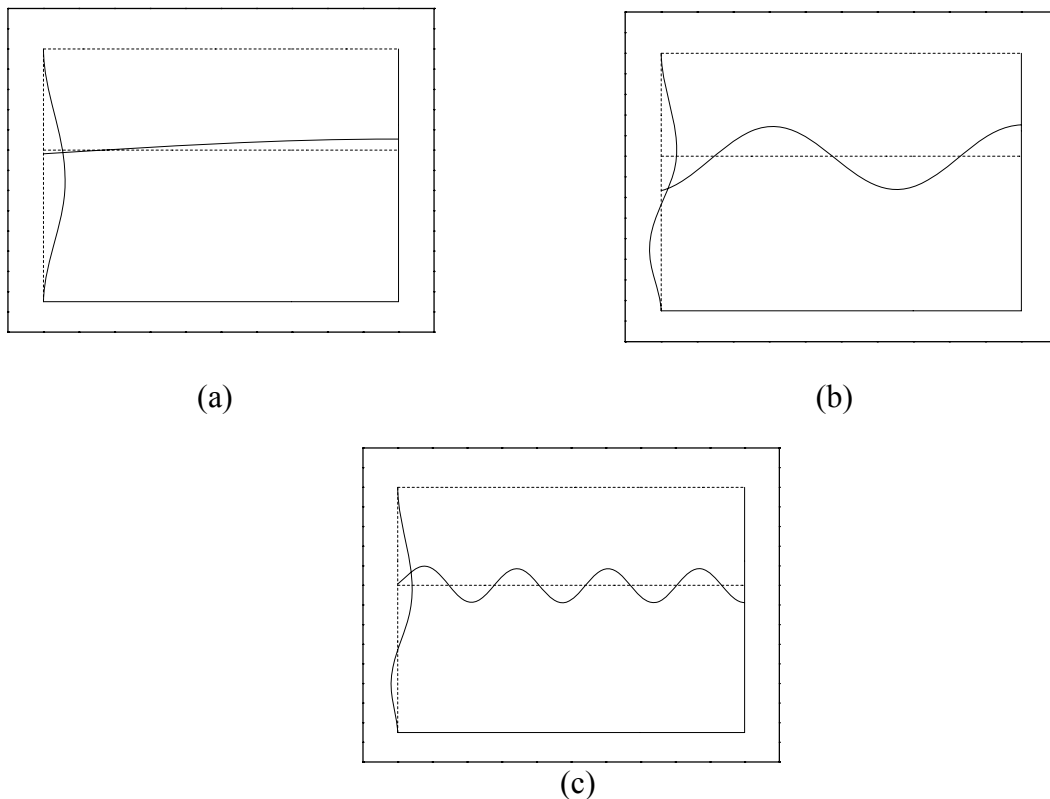


Figure 6.7 : Les modes de couplage dans le cas gravitaire
(a)- Le premier mode ; (b)-Le quatrième mode ; (c)-Le neuvième mode

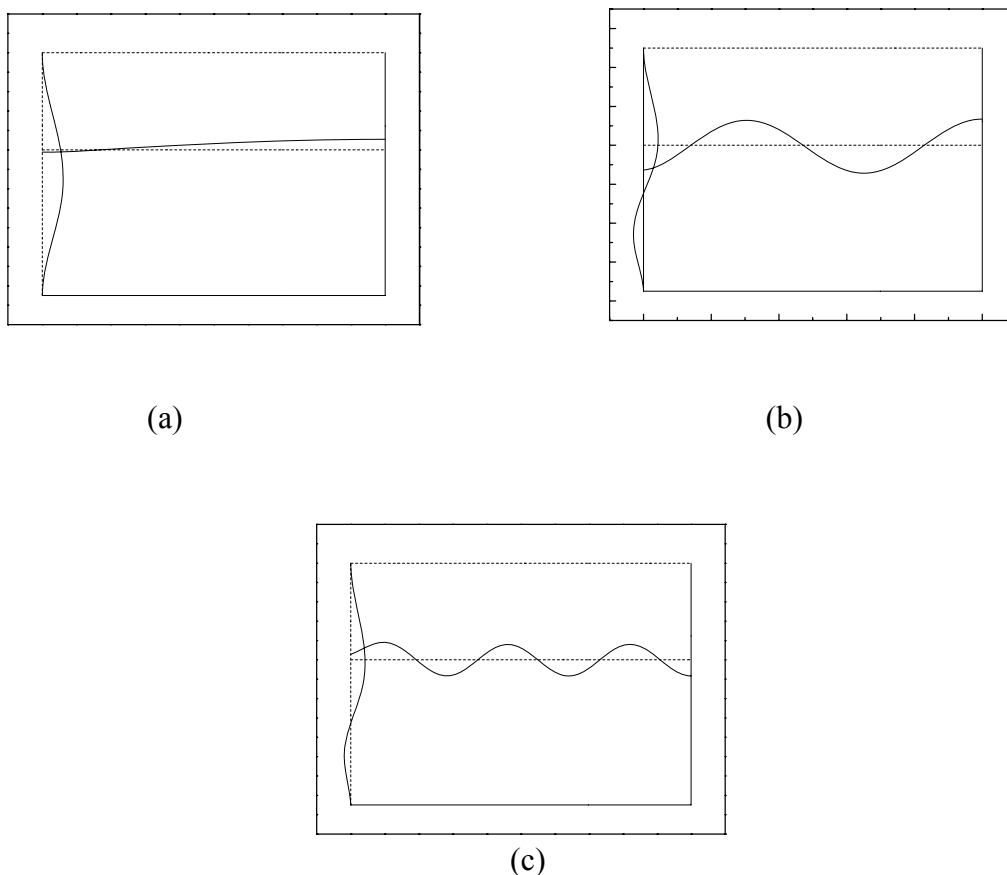


Figure 6.8 : Les modes de couplage dans le cas gravito-capillaire
(a)-Le premier mode ; (b)- Le quatrième mode ; (c)- Le septième mode

VI.8.6–INFLUENCE DU FLUIDE SUR L’INTERACTION:

L’influence de la masse volumique du fluide sur les fréquences du couplage est représentée sur la figure (6.9). Nous remarquons que la première fréquence du couplage diminue de la même manière quand nous augmentons la masse volumique du fluide quelle que soit la nature de la paroi vibrante. Cette fréquence décroît en passant par des paliers qui correspondent aux modes structures que nous avons décrits ci-dessus. Pour des faibles masses volumiques, cette fréquence est proche de la fréquence propre de la structure sèche. Quand la masse volumique augmente, cette fréquence s’approche de la fréquence du ballonnement du liquide.

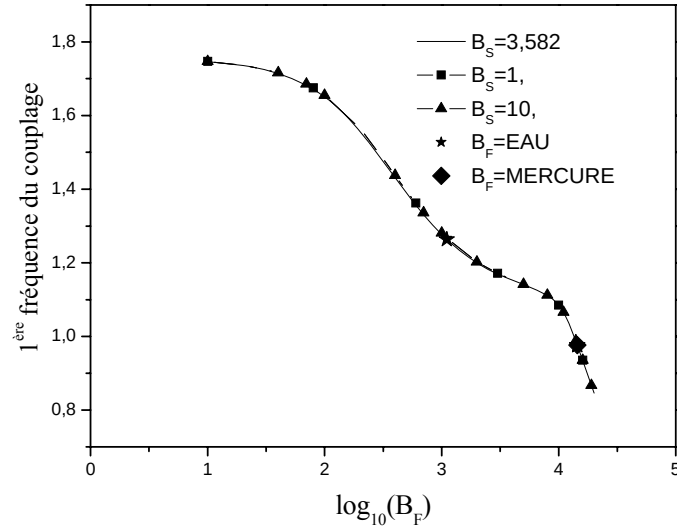


Figure 6.9 : Première fréquence du couplage en fonction de la masse volumique du fluide
Pour différents types de structures

(—) $B_S = 3.582$; (—■—) $B_S = 1$; (—▲—) $B_S = 10$. ★ : $\omega_C(1)$

VI.8.7—INFLUENCE DE LA STRUCTURE SUR L'INTERACTION:

L'évolution de la première fréquence du couplage en fonction de la nature de la structure est représentée sur la figure (6.10). La valeur de cette fréquence est plus importante pour des structures légères, pour des fluides légers. Au-delà d'une certaine valeur de la masse volumique du fluide, cette fréquence décroît et sa décroissance est plus rapide pour des structures légères.

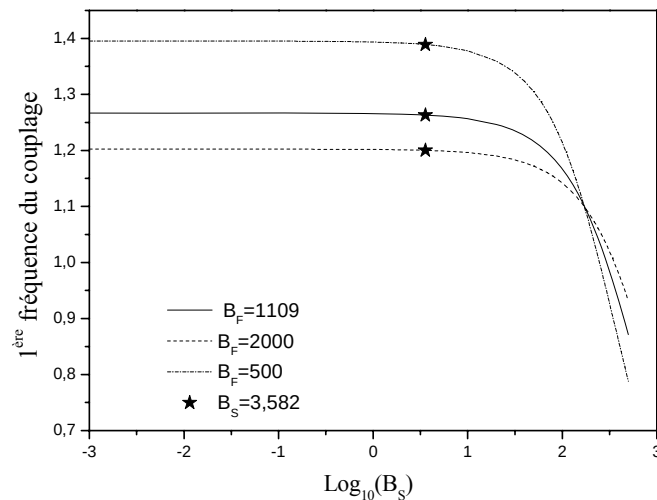


Figure 5.11 : Première fréquence du couplage en fonction de la masse volumique de la structure
Pour différents fluides

(—) $B_F = 1109$; (—▲—) $B_F = 2000$; (—■—) $B_F = 500$; ★ : $\omega_C(1)$

VI.9–CONCLUSION : L'application du modèle global de deux fluides en interaction avec une paroi vibrante au cas d'un fluide en interaction avec une paroi similaire donne des résultats conformes à ceux donnés dans la littérature. Nous avons exposé un modèle qui tient compte du mouvement global de la paroi alors que les modèles antérieurs considèrent une partie immergée et une autre partie sèche, basé sur les modes propres de la paroi. Nous avons aussi montré l'effet de la gravité et expliqué l'effet de stabilisation de la capillarité en analysant les rapports d'amplitude dans le cas de la gravité pure et de la gravité capillarité. Nous avons enfin montré les variations des fréquences du couplage pour différents fluides et pour différentes structures avec les mêmes aspects géométriques.

Le modèle proposé dans le chapitre V est validé dans le chapitre présent. Nous allons exposer, dans le chapitre VII, les résultats trouvés dans le cas de deux fluides parfaits qui interagissent avec une paroi vibrante dans un réservoir rectangulaire.

CHAPITRE VII
INTERACTION ENTRE DEUX FLUIDES PARFAITS SUPERPOSES
ET UNE PAROI VIBRANTE

VII.1-INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré aux résultats obtenus dans le cas de l'interaction entre deux fluides parfaits superposés et la paroi vibrante d'un réservoir rectangulaire qui les contient. Remarquons que les fréquences et les modes propres de la paroi vibrante sont les mêmes que ceux calculés dans le chapitre VI. Les fréquences du ballonnement et les fréquences du couplage sont modifiées par la présence de deuxième fluide. Nous présenterons le calcul des fréquences propres des deux fluides et ensuite le calcul des fréquences propres du couplage.

VII.2-ETUDE DE FREQUENCES PROPRES DES FLUIDES

Le mouvement propre des deux fluides est caractérisé par des fréquences et des modes propres différents de ceux du couplage. Ces fréquences sont calculées à partir de la relation de dispersion obtenue en remplaçant la paroi vibrante du réservoir par une paroi fixe. Les potentiels des vitesses vérifient les équations de conservation de la masse :

$$\Phi_{1xx} + \Phi_{1yy} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, -h_1 \leq y \leq 0 \quad (7.1)$$

$$\Phi_{2xx} + \Phi_{2yy} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq h_2 \quad (7.2)$$

qui sont associées aux conditions cinématiques :

$$\Phi_{1y} = 0 \quad y = -h_1 \quad (7.3)$$

$$\Phi_{1y} = \Phi_{2y} = \xi_{1t} \quad y = 0 \quad (7.4)$$

$$\Phi_{2y} = \xi_{2t} \quad y = h_2 \quad (7.5)$$

$$\Phi_{1x} = \Phi_{2x} = 0 \quad x = 1 \quad (7.6)$$

$$\Phi_{1x} = 0 \quad x = 0 \text{ et } -h_1 \leq y \leq 0 \quad (7.7)$$

$$\Phi_{2x} = 0 \quad x = 0 \text{ et } 0 \leq y \leq h_2 \quad (7.8)$$

et aux conditions dynamiques

$$\Phi_{1t} + \xi_1 - \sigma_1 \xi_{1xx} = \rho \Phi_{2t} + \rho \xi_1 \quad y = 0 \quad (7.9)$$

$$\Phi_{2t} + \xi_2 - \sigma_2 \xi_{2xx} = 0 \quad y = h_2 \quad (7.10)$$

ρ , σ_1 et σ_2 représentent le rapport des masses volumiques entre les deux fluides et les tensions superficielles adimensionnelles des fluides 1 et 2 respectivement

En combinant les équations (7.9) et (7.4), il vient:

$$\Phi_{1tt} - \rho\Phi_{2tt} + (1-\rho)\Phi_{1y} - \sigma_1\Phi_{1yxx} = 0 \quad y=0 \quad (7.11)$$

De la même façon on obtient, en utilisant les équations (7.5) et (7.10):

$$\Phi_{2tt} + \Phi_{2y} - \sigma_2\Phi_{2yxx} = 0 \quad y=h_2 \quad (7.12)$$

Les potentiels des vitesses vérifiant les équations (7.1) et (7.2) et les conditions aux limites, cinématiques (7.3) et (7.6) sont recherchés sous les formes :

$$\Phi_1(x, y, t) = \varphi_1(x, y)\omega\sin(\omega t) \quad (7.13)$$

$$\Phi_2(x, y, t) = \varphi_2(x, y)\omega\sin(\omega t) \quad (7.14)$$

Où

$$\varphi_1(x, y) = \sum_l A_l \cosh(l(y + h_1)) \frac{\cos(l(x - 1))}{\sin(l)} \quad (7.15)$$

$$\varphi_2(x, y) = \sum_l A_l [\sinh(lh_1) \sinh(ly) + B_l \cosh(lh_1) \cosh(ly)] \frac{\cos(l(x - 1))}{\sin(l)} \quad (7.16)$$

Les conditions cinématiques (7.7) et (7.8) impose d'avoir:

$$l = n\pi \quad \text{où } n=0, 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

En remplaçant Φ_2 dans la relation (7.12), on obtient :

$$\omega^2 \{B_l + \tanh(lh_1) \tanh(lh_2)\} = l(1 + \sigma_2 l^2) \{ \tanh(lh_1) + B_l \tanh(lh_2) \} \quad (7.18)$$

En procédant de la même façon avec Φ_1 et Φ_2 dans la relation (7.11), il vient:

$$\omega^2 (1 - \rho B_l) = \{(1 - \rho) + \sigma_1 l^2\} \tanh(lh_1) \quad (7.19)$$

L'élimination de B_l dans les expressions (7.18) et (7.19) donne lieu à la relation de dispersion:

$$(1 + \rho T_{1n} \cdot T_{2n}) \omega^4 - n\pi \left\{ T_{1n} (1 - \rho + \sigma_1 n^2 \pi^2) + (1 + \sigma_2 n^2 \pi^2) (\rho T_{1n} + T_{2n}) \right\} \omega^2 + n^2 \pi^2 (1 + \sigma_2 n^2 \pi^2) (1 - \rho + \sigma_1 n^2 \pi^2) T_{1n} T_{2n} = 0 \quad (7.20)$$

où

$$T_{1n} = \tanh(n\pi h_1) \quad \text{et} \quad T_{2n} = \tanh(n\pi h_2)$$

Pour chaque configuration des paramètres $\rho, \sigma_1, \sigma_2, h_1, h_2$, l'équation (7.20) admet deux solutions :

$$\omega_{s1}^2(n) = \frac{n\pi \left\{ T_{1n} (1+n^2\pi^2 [\sigma_1 + \rho\sigma_2]) + T_{2n} (1+n^2\pi^2\sigma_2) \right\} - \sqrt{\Delta_n}}{2(1+\rho T_{1n} T_{2n})} \quad (7.21 .a)$$

$$\omega_{s2}^2(n) = \frac{n\pi \left\{ T_{1n} (1+n^2\pi^2 [\sigma_1 + \rho\sigma_2]) + T_{2n} (1+n^2\pi^2\sigma_2) \right\} + \sqrt{\Delta_n}}{2(1+\rho T_{1n} T_{2n})} \quad (7.21 .b)$$

où

$$\Delta_n = n^2\pi^2 \left\{ T_{1n} (1+n^2\pi^2 [\sigma_1 + \rho\sigma_2]) + T_{2n} (1+n^2\pi^2\sigma_2) \right\}^2 - 4n^2\pi^2 T_{1n} T_{2n} (1+\rho T_{1n} T_{2n}) (1+n^2\pi^2\sigma_2) (1-\rho+n^2\pi^2\sigma_1)$$

Elles représentent les fréquences propres des ballottements des deux fluides dans un bassin rectangulaire rigide. Elles sont toujours réelles positives comme dans tous les cas des systèmes conservatifs.

Pour la gravité pure, ces deux expressions se réduisent à :

$$\omega_{s1}^2(n) = \frac{n\pi (T_{1n} + T_{2n}) - n\pi \sqrt{(T_{1n} + T_{2n})^2 - 4T_{1n} T_{2n} (1+\rho T_{1n} T_{2n}) (1-\rho)}}{2(1+\rho T_{1n} T_{2n})} \quad (7.22 .a)$$

$$\omega_{s2}^2(n) = \frac{n\pi (T_{1n} + T_{2n}) + n\pi \sqrt{(T_{1n} + T_{2n})^2 - 4T_{1n} T_{2n} (1+\rho T_{1n} T_{2n}) (1-\rho)}}{2(1+\rho T_{1n} T_{2n})} \quad (7.22 .b)$$

Remarquons que les fréquences propres de ballottement pour un seul fluide se déduisent des relations (7.21) en posant $h_1=0$, soit :

$$\omega^2(n) = n\pi (1+n^2\pi^2\sigma_2) T_{2n} \quad (7.23)$$

Ce résultat est identique à la relation (6.41).

Nous nous proposons d'étudier les variations de ces fréquences propres en fonction de la densité relatives des deux fluides pour différentes hauteurs h_1 et h_2 . Pour ce faire, nous avons introduit une hauteur cumulée $H_f = h_1 + h_2$ où $h_1 = 0.1H_f$ et $h_2 = 0.9H_f$, H_f variant entre 0 et H qui représente la hauteur adimensionnelle du réservoir.

Les figures (7.1.a)-(7.1.f) montrent les évolutions des dix premières fréquences de ballottement pour différentes valeurs de la densité relative, $\rho = \rho_2/\rho_1$ qui varie de 0.01 à 0.9. Lorsque la densité relative est faible, figure (7.1.a-b), les fréquences se chevauchent ; en augmentant sa valeur, les courbes de $\omega_{s1}(n)$ se resserrent vers le bas alors que celles de $\omega_{s2}(n)$ gardent pratiquement le même aspect.

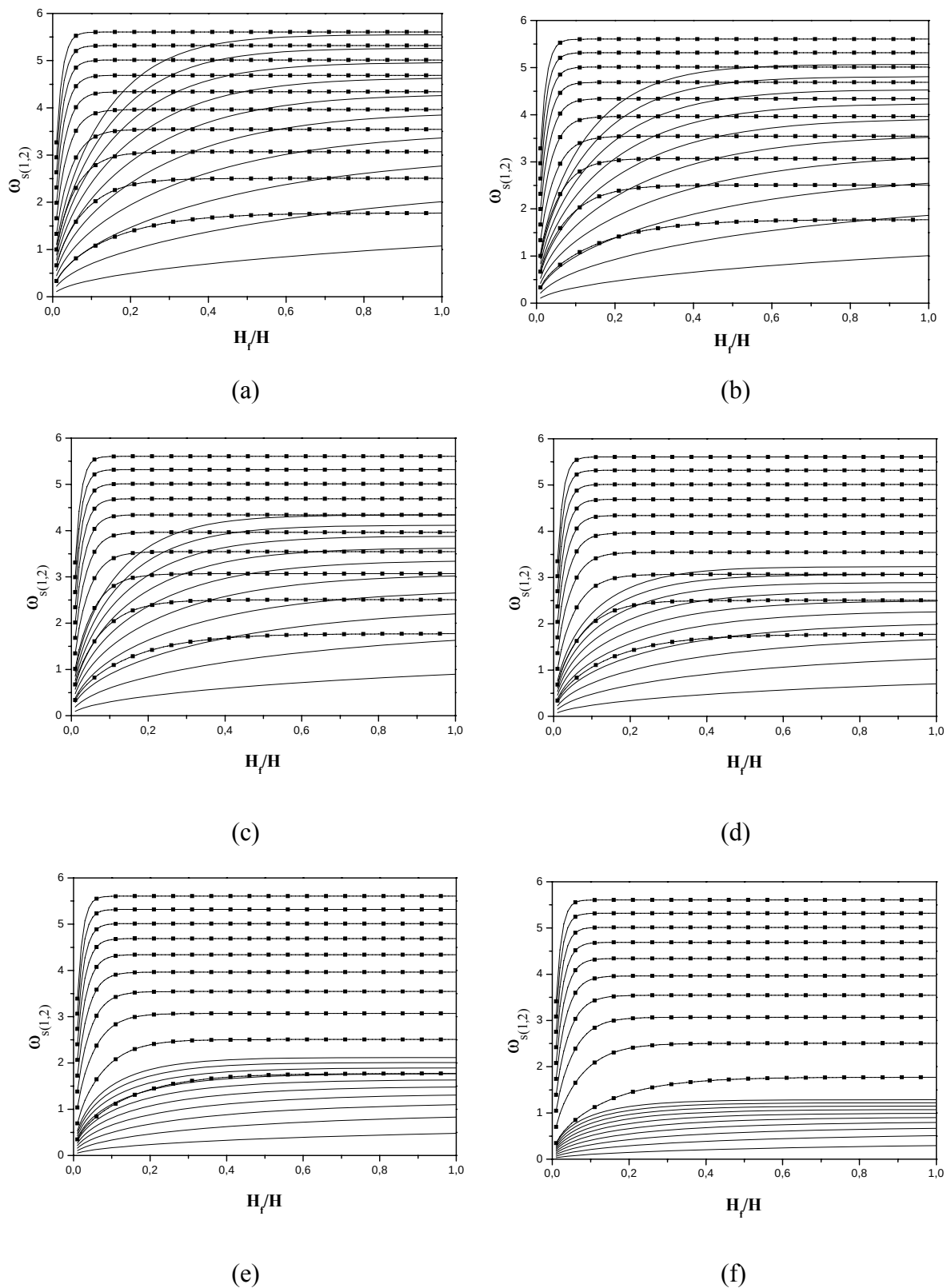


FIGURE 7.1 : Evolutions des deux groupes de fréquences de ballotement $\omega_{s1}(n)$ (—) et $\omega_{s2}(n)$ (—■—) pour différentes valeurs de la densité relative
(a)- $\rho=0.01$, (b)- $\rho=0.10$, (c)- $\rho=0.25$, (d)- $\rho=0.50$, (e)- $\rho=0.75$, (f)- $\rho=0.90$

La figure (7.2.a), montre l'évolution de la première fréquence de ballottement $\omega_{s1}(10)$ et sur la figure (7.2.b) celle de la deuxième fréquence en fonction de ρ . Avec l'accroissement de ρ , on enregistre une diminution rapide des valeurs de $\omega_{s1}(10)$ jusqu'à son annulation en $\rho=1$, alors que $\omega_{s2}(10)$ augmente pour des hauteurs faibles et se stabilise à la valeur prise pour $\rho=1$.

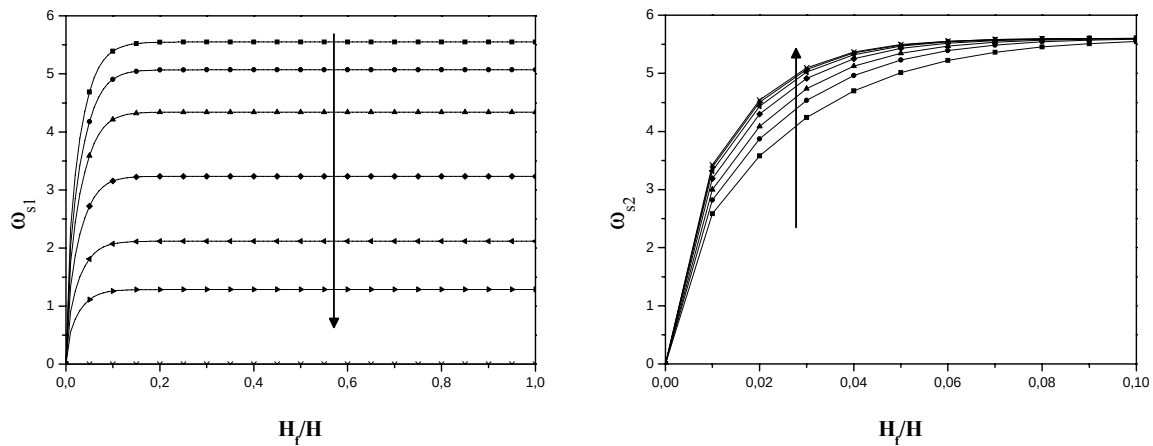


FIGURE 7.2 : Evolutions des fréquences de ballottement en fonction de ρ

(a)- $\omega_{s1}(10)$ (b)- $\omega_{s2}(10)$

(—■—) $\rho=0.01$, (—●—) $\rho=0.10$, (—▲—) $\rho=0.25$,
(—◆—) $\rho=0.50$, (—◀—) $\rho=0.75$, (—▶—) $\rho=0.90$, (—x—) $\rho=1$

VII.3-ETUDE DE FREQUENCES DU COUPLAGE

Les fréquences de couplage dans le cas de l'interaction entre deux fluides parfaits superposés et la paroi vibrante d'un réservoir rectangulaire sont données par l'équation caractéristique obtenue à partir du calcul du déterminant du système algébrique (5.53). Cette équation dépend des nombres de modes de la plaque et des potentiels des vitesses. Dans tous les cas seuls dix modes ont été utilisés car l'augmentation de ce nombre n'engendre pas de variation significative dans les résultats. Les fréquences du couplage dépendent aussi des hauteurs des deux fluides et de leurs densités. Nous avons considéré l'eau et le mercure dont les densités sont $\rho_e=1000 \text{ Kg/m}^3$ et $\rho_{\text{Hg}}=13550 \text{ Kg/m}^3$ respectivement, ce qui donne une densité relative $\rho=0.0738$. Les hauteurs des deux fluides sont celles adoptées dans le cas du

ballotement. Leur valeur cumulée, H_f , varie entre 0 et H . Par ailleurs, le calcul des fréquences a été effectué par une méthode itérative, basée sur une incrémentation en fréquence, avec un test sur le déterminant.

La figure (7.3) montre les évolutions des dix premières fréquences couplées en fonction du taux de remplissage du réservoir, H_f/H , obtenues en l'absence de la tension superficielle. Les courbes en pointillés représentent les variations des fréquences de ballotement du premier groupe. Les fréquences du couplage sont apparentées à ce dernier et aucune fréquence du couplage n'est associée aux fréquences du ballotement du second groupe. Le calcul de ces fréquences est très onéreux en termes de temps, car elles sont très condensées et nous étions contraints d'utiliser un pas de fréquence très faible pour les capturer. Une deuxième difficulté se présente aux fréquences de décrochage (trait plein sur le graphe) qui sont associées aux modes structure comme dans le cas d'un seul fluide. Ces points de décrochage nécessitent une attention particulière car aucune donnée préalable n'est disponible pour les localiser.

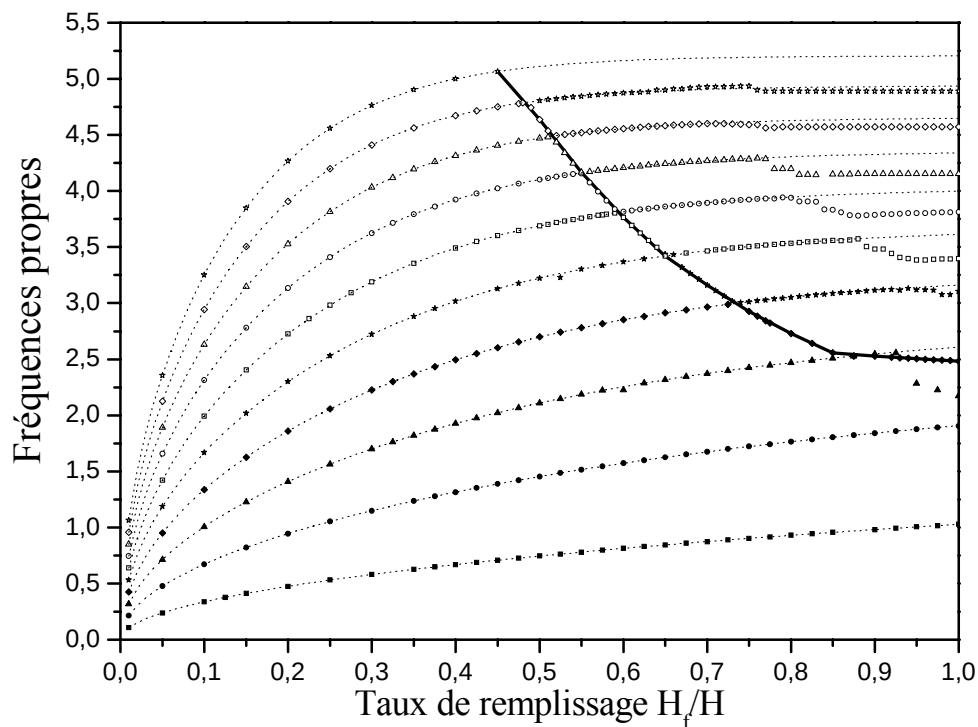


FIGURE 7.3 : Fréquences du couplage adimensionnelles et premières fréquences du ballotement (.....) en fonction du taux de remplissage H_f/H dans le cas de la gravité pure

Comme les fréquences de couplage sont apparentées au premier groupe de celles du ballotement et suite aux résultats présentées sur leur évolution en fonction de la densité relative, nous pouvons affirmer que les fréquences du couplage suivent le même comportement. Quand la densité relative augmente les fréquences du couplage diminuent. Les figures (7.4.a)-(7.4.c) illustrent ce phénomène pour trois valeurs de ce paramètre. Dans le cas d'un seul fluide, les fréquences du ballotement sont indépendantes de la densité et les fréquences du couplage les suivent. Nous avons observé l'influence de la structure sur ces fréquences de couplage qui consiste au basculement des fréquences d'un ordre à un ordre inférieur.

Dans le cas des deux fluides, le phénomène est différent. Nous pouvons agir sur la structure des fréquences du couplage en changeant la valeur de la densité relative des fluides en présence et ainsi retarder l'effet de la structure sur ces fréquences. Cet effet est apparent sur les figures précédentes. Dans les figures (7.4.b) et (7.4.c), l'influence de la structure est absente sur les fréquences du couplage et ces dernières ont exactement le même comportement que les fréquences du ballotement correspondantes. Sur la figure (7.4.a), l'influence de la structure apparaît nettement, pour des taux de remplissage grands. Cet effet se manifeste, à partir de la deuxième fréquence de couplage, par des décrochages qui se déplacent vers la gauche pour les fréquences supérieures.

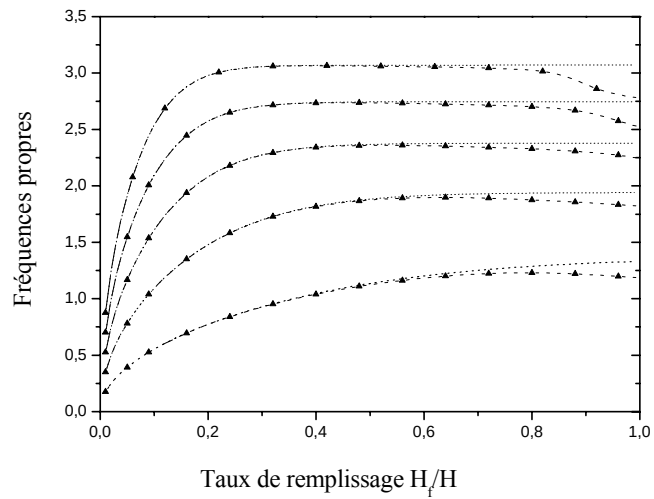
VII.4-ANALYSE DES MODES DU COUPLAGE

Comme dans le cas de l'interaction entre un seul fluide et une paroi, les modes du couplage sont de deux types : les modes de structure et ceux de ballotement. Dans ce deuxième cas, il existe deux sous espèces qui sont affiliées à l'interface entre les deux fluides et à la surface libre. Pour analyser ces modes, nous avons défini deux rapports. Le premier, noté μ_1 , est le rapport entre la déformation maximale de paroi et l'élévation maximale entre celle de l'interface et celle de la surface libre $\eta(y,t)$. Le deuxième, noté μ_2 , donne le rapport entre l'élévation maximale de l'interface $\xi_1(x,t)$ et l'élévation maximale de la surface libre $\xi_2(x,t)$. Mathématiquement, ils sont donnés par :

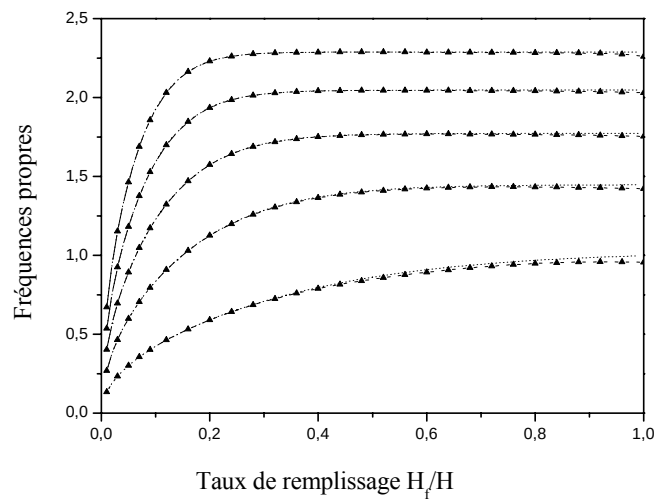
$$\mu_1 = \frac{\max(\eta(y,t))}{\max(\xi_1(x,t), \xi_2(x,t))}$$

$$\mu_2 = \frac{\max(\xi_1(x,t))}{\max(\xi_2(x,t))}$$

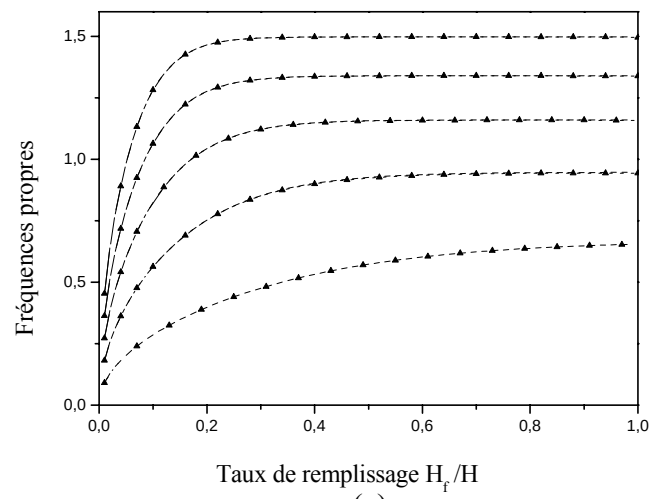
Ces rapports sont calculés pour des taux de remplissage fixes. Afin de pouvoir faire une



(a)



(b)



(c)

FIGURE 7.4 : Evolution des fréquences du couplage (—▲—) apparentées au premier groupe de fréquences du ballotement (.....) pour différentes valeurs de la densité relative ρ

(a)- $\rho=0.25$, (b)- $\rho=0.50$, (c)- $\rho=0.75$

analyse exhaustive, nous avons représentés graphiquement μ_1 et μ_2 pour deux valeurs :

$$\frac{H_f}{H}=0.6 \text{ et } \frac{H_f}{H}=0.8.$$

Les figures (7.5.a-b) représentent les variations de μ_1 et μ_2 avec les modes pour $H_f/H = 0.6$. Tous les autres modes sont de type ballonnement en dehors du sixième qui est de type structure. Le mode structure correspond au décrochage sur la figure (7.3) entre la sixième et la cinquième fréquence du ballonnement pour le taux de remplissage cité ci-dessus. La figure (7.5.b) nous indique quelle est imposée par la surface libre. Il apparaît également que le mouvement de l'interface entre les deux fluides est plus important que le mouvement de la surface libre pour tous les modes de ballonnement.

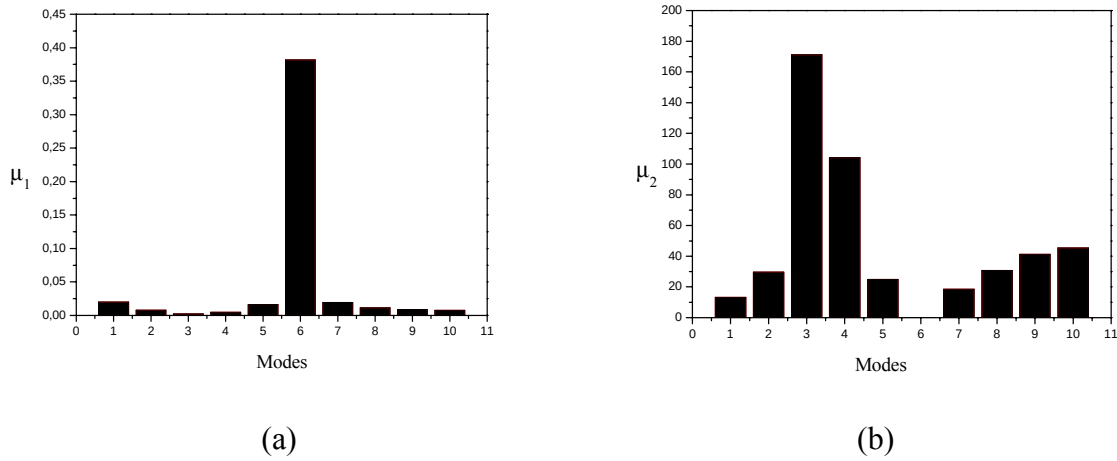


FIGURE 7.5 : Evolution du rapport d'amplitude en fonction des modes pour $H_f/H = 0.6$

(a)-paroi/(interface, surface libre) , (b)-interface/surface libre

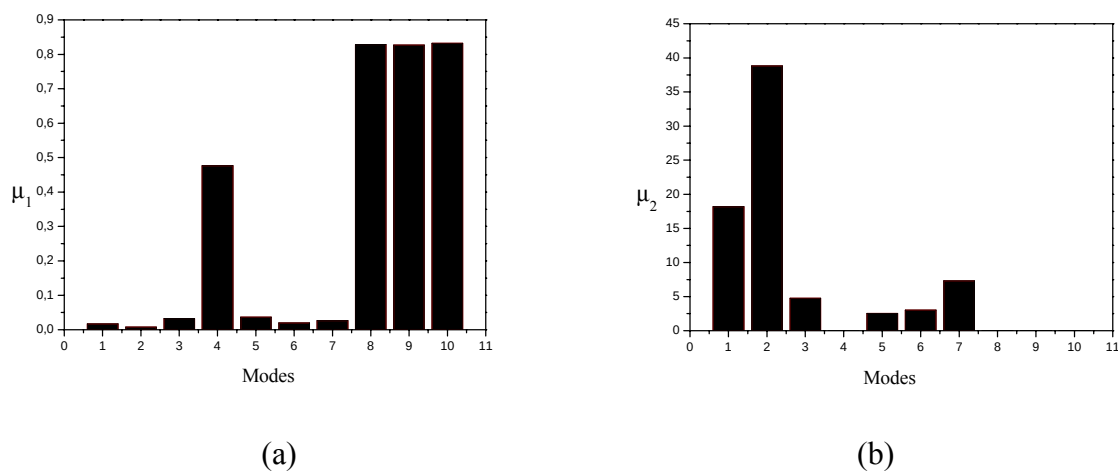


FIGURE 7.6 : Evolution du rapport d'amplitude en fonction des modes pour $H_f/H = 0.8$

(a)-paroi/ (interface, surface libre) , (b)-interface/surface libre

Les figures (7.6.a-b) représentent les variations de μ_1 et μ_2 avec les modes pour $H_f/H = 0.8$. Les modes 4, 8, 9 et 10 sont de type structure. Le mode 4 correspond au premier mode structure alors que les 8, 9 et 10 correspondent au deuxième.

Sur les graphes précédents, nous pouvons remarquer qu'à chaque fois que le rapport interface surface libre est maximum, le rapport paroi interface ou surface libre est minimum, cela est montré clairement dans le cas du troisième mode sur les figures (7.5) et le deuxième mode sur les figures (7.6). Nous pouvons aussi remarquer l'inverse dans le cas des modes structures. Les minima de μ_1 correspondent aux maxima de μ_2 .

Sur le plan énergétique, nous pouvons interpréter ces graphes par un transfert d'énergie entre la paroi et l'interface entre les deux fluides. Dans le cas d'un mode ballonnement, le maximum d'énergie est emmagasiné dans le fluide inférieur ; ceci explique pourquoi le mouvement de l'interface est toujours plus important que le mouvement de la surface libre. Quand nous passons d'un mode de ballonnement supérieur à un mode inférieur, la transition se fait en passant par un mode structure et dans ce cas l'énergie est quasi-complètement transférée à la paroi avant de repasser dans le fluide pour le mode de ballonnement inférieur.

Un test numérique, non présenté ici, nous a montré que les fréquences du couplage ont le même comportement quand le système est considéré avec ou sans surface libre.

VII.5-CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons exposé les résultats de l'interaction entre deux fluides parfaits superposés et la paroi vibrante du réservoir rectangulaire qui les contient. L'étude du mouvement propre des deux fluides montre qu'il existe deux familles de fréquences de ballonnement. La première dépend fortement du rapport des masses volumiques entre les deux fluides. Ces fréquences diminuent quand le rapport des masses volumique augment. La deuxième famille est sensible au rapport des masses volumiques pour des faibles taux de remplissage. Dans ce cas, la valeur des fréquences augmente quant le rapport des masses volumiques augmente. Pour de grands taux de remplissage, elle est égale à la valeur de la fréquence correspondante dans le cas d'un seul fluide.

Les fréquences propres du couplage sont toujours apparentées aux fréquences de ballonnement de la première famille, ce qui explique leur dépendance au rapport des masses volumiques. Ce résultat est important car nous pouvons agir sur les fréquences du couplage dans un système en changeant la nature d'un des fluides en présence.

Les modes structures apparaissent comme dans le cas de l'interaction entre un seul fluide. L'influence de la structure sur les fréquences du couplage dépend aussi du rapport des

masses volumiques et la première fréquence de la structure apparaît de plus en plus tardivement quand le rapport des masses volumique augmente.

L'étude du rapport des amplitudes de l'interface entre les deux fluides et de la surface libre nous montre que pour tous les modes de ballotement dans les fréquences du couplage, le mouvement de l'interface est plus important que le mouvement de la surface libre. Ceci est expliqué par le fait que l'énergie du système passe du fluide le plus dense à la paroi et revient à ce dernier sans passer par le fluide le moins dense. L'apparition tardive des modes structure quand le rapport des masses volumiques augmente est due au fait que le fluide le plus dense transfère lentement l'énergie du système à la paroi.

L'influence des tensions superficielles n'est pas traitée ici car leurs effets sont déjà exposés dans le cas de l'interaction entre un seul fluide et la paroi.

Nous envisageons de faire une étude purement énergétique pour approfondir cette étude.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons présenté deux problèmes d'interaction. Le premier concerne l'interaction entre une couche limite de convection naturelle et l'écoulement extérieur imposé. Ce travail a été développé sur une géométrie précise, en l'occurrence un cylindre horizontal infini. Une étude exhaustive des différents travaux réalisés sur le problème est exposée. Les difficultés de ce problème ont été contournées en partageant d'abord l'espace du problème en deux zones, zone proximale et zone distale, et en utilisant des méthodes adéquates pour la résolution du problème posé dans chaque zone. 1)- Dans la zone proximale, une méthode de changement d'échelle associée à un développement asymptotique nous ont permis de retrouver la position du point de stagnation dans le cas d'une convection mixte défavorable et aussi de suivre l'évolution des paramètres physiques du problème, à savoir, la vitesse et la température, dans la zone proche de la paroi du cylindre. 2)- Dans la zone distale, une nouvelle méthode itérative, basée sur des fonctionnelles, est donnée. Cette méthode utilise comme condition de départ les résultats donnés dans la zone proximale, ce qui constitue un raccordement entre les deux zones. Elle est basée sur le calcul de l'épaisseur de la couche limite qui est faite par un balayage ascendant et un autre balayage descendant afin de situer la ligne correspondante à la vitesse transversale nulle. La méthode est testée dans le cas de la convection naturelle et de la convection mixte symétrique. L'épaisseur de la couche limite dans le cas de la convection mixte dissymétrique est donnée. Les profils des vitesses et des températures ont été donnés et les effets de l'amplitude et de l'orientation, de l'écoulement extérieur par rapport à la verticale, ont été détaillés.

La suite de ce travail est le traitement du problème avec d'autres conditions aux limites comme une température à la paroi qui dépend de la position. La formulation du problème en termes d'équations globales qui font intervenir les épaisseurs de couches limites dynamique et thermique est une autre méthode qui sera développée.

L'interaction entre deux fluides parfaits superposés et la paroi vibrante d'un réservoir constitue le deuxième travail, présenté dans cette thèse dans le cadre des interactions. Nous avons construit une solution basée sur le développement en séries infinies des potentiels des vitesses et du déplacement de la paroi. Les différents modes sont orthogonalisés en utilisant un nouveau produit scalaire démontré dans ce travail. Nous avons trouvé une relation de dispersion qui dépend des hauteurs de chacun des deux fluides et du rapport de leurs masses volumique dont découlent deux familles de fréquences propres de ballonnement. Ces deux familles ont été analysées et nous avons montré que les valeurs des fréquences de la première famille diminuent quand le rapport des masses volumiques augmente. Par contre les valeurs

des fréquences de la seconde famille restent pratiquement constantes et sont équivalentes aux valeurs correspondantes dans le cas d'un seul fluide.

L'étude de l'interaction entre les deux fluides et la paroi déformable est basée sur l'équation cinématique qui relie les vitesses des deux fluides et la vitesse de la paroi d'une part et sur la relation dynamique qui relie l'équation du mouvement de la paroi et le chargement des deux fluides. Un système algébrique est obtenu après intégration des potentiels de vitesse et du déplacement de la paroi et en considérant le nouveau produit scalaire. Le système algébrique est résolu par une méthode numérique itérative. Le modèle est d'abord testé dans le cas d'un fluide et les résultats trouvés corroborent parfaitement les résultats donnés dans la littérature. Dans le cas des deux fluides, les fréquences du couplage calculées sont apparentées aux fréquences de la première famille dans le cas du ballotement. Plus on augmente le rapport des masses volumiques, plus le calcul de ces fréquences devient difficile car l'écart entre deux courbes de fréquences successives devient faible. Dans le cas d'un fluide, les fréquences du couplage suivent les fréquences de ballotement qui sont indépendantes des caractéristiques du fluide, ce qui rend le contrôle des fréquences du couplage d'un fluide délicat dans les processus industriels. Dans le cas de deux fluides superposés, nous pouvons influencer sur les fréquences du couplage en changeant le rapport des masses volumique. Ce résultat est important car il donne une solution qui nous permet le contrôle des fréquences dans l'engineering. Les différents modes du couplage ont été classés en modes structure et modes de ballotement. Les modes structure correspondent aux déplacements, de la paroi, supérieurs à ceux de l'interface entre les deux fluide et de la surface libre et les modes ballotement correspondent à l'inverse de ce phénomène. Dans le cas des modes de ballotement, nous avons constaté que le déplacement de la surface libre est nettement plus faible que le déplacement de l'interface entre les deux fluides. Ce qui explique le fait que les fréquences du couplage restent pratiquement inchangées quand la surface libre est remplacée par une paroi fixe. L'une des perspectives de ce travail est la construction d'un hamiltonien pour le système pour procéder à une étude énergétique complète afin d'expliquer les transferts énergétiques entre les fluides et la paroi.

ANNEXE I

PROPRIETE D'ORTHOGONALITES DES FONCTIONS PROPRES DES FLUIDES

Pour avoir le produit scalaire vérifié par les deux potentiels, des fluides 1 et 2, nous allons procéder comme suit

Soit :

$$\varphi_{1m} = \text{Cosh}(k_m (y + h_1))$$

$$\varphi_{2m} = \text{Sinh}(k_m h_1) \cdot \text{Sinh}(k_m y) + B_{k_m} \cdot \text{Cosh}(k_m h_1) \cdot \text{Cosh}(k_m y)$$

Les modes k_m des fluides 1 et 2

Sachant que :

$$\varphi_{myy} = k_m^2 \varphi_m$$

On a alors :

$$(k_m^2 - k_n^2) \int_{-h_1}^0 \varphi_{1m} \cdot \varphi_{1n} \cdot dy = \int_{-h_1}^0 (\varphi_{1n} \varphi_{1nyy} - \varphi_{1m} \varphi_{1myy}) \cdot dy = [\varphi_{1n} \cdot \varphi_{1my} - \varphi_{1m} \cdot \varphi_{1ny}]_{-h_1}^0$$

Comme $\varphi_{1y}(y = -h_1) = 0$, on a alors :

$$(k_m^2 - k_n^2) \int_{-h_1}^0 \varphi_{1m} \cdot \varphi_{1n} \cdot dy = \varphi_{1n}(0) \cdot \varphi_{1my}(0) - \varphi_{1m}(0) \cdot \varphi_{1ny}(0) \quad (1)$$

De la même manière, nous avons :

$$\rho(k_m^2 - k_n^2) \int_0^{h_2} \varphi_{2m} \cdot \varphi_{2n} \cdot dy = \rho [\varphi_{2n}(h_2) \cdot \varphi_{2my}(h_2) - \varphi_{2m}(h_2) \cdot \varphi_{2ny}(h_2)] - \rho [\varphi_{2n}(0) \cdot \varphi_{2my}(0) - \varphi_{2m}(0) \cdot \varphi_{2ny}(0)] \quad (2)$$

La condition dynamique à $y = h_2$ s'écrit :

$$\omega^2 \varphi_{2m}(h_2) = (1 + \sigma_2 k_m^2) \varphi_{2my}(h_2)$$

d'où

$$\rho [\varphi_{2n}(h_2) \cdot \varphi_{2ny}(h_2) - \varphi_{2m}(h_2) \cdot \varphi_{2ny}(h_2)] = \frac{\rho}{\omega^2} \sigma_2 (k_n^2 - k_m^2) \varphi_{2my}(h_2) \cdot \varphi_{2ny}(h_2) \quad (3)$$

En additionnant (1) et (2) en tenant compte de (3), nous obtenons :

$$(k_m^2 - k_n^2) \left\{ \int_{-h_1}^0 \varphi_{1m} \cdot \varphi_{1n} \cdot dy + \rho \int_0^{h_2} \varphi_{2m} \cdot \varphi_{2n} \cdot dy \right\} = \frac{\rho}{\omega^2} \sigma_2 (k_n^2 - k_m^2) \varphi_{2my}(h_2) \cdot \varphi_{2ny}(h_2) + \varphi_{2my}(0) \{ \varphi_{1n}(0) - \rho \varphi_{2n}(0) \} - \varphi_{2ny}(0) \{ \varphi_{1m}(0) - \rho \varphi_{2m}(0) \} \quad (4)$$

La condition dynamique en $y = 0$ s'écrit :

$$\omega^2 (\varphi_{1m}(0) - \rho \varphi_{2m}(0)) = (1 - \rho) \varphi_{1my}(0) + \sigma_1 k_m^2 \varphi_{1my}(0)$$

Nous aurons alors :

$$\varphi_{2my}(0) \{ \varphi_{1n}(0) - \rho \varphi_{2n}(0) \} - \varphi_{2ny}(0) \{ \varphi_{1m}(0) - \rho \varphi_{2m}(0) \} = \frac{\sigma_1}{\omega^2} (k_n^2 - k_m^2) \varphi_{2my}(0) \varphi_{2ny}(0)$$

La relation (4) devient :

$$\omega^2 \left\{ \int_{-h_1}^0 \varphi_{1m}(y) \varphi_{1n}(y) dy + \rho \int_0^{h_2} \varphi_{2m}(y) \varphi_{2n}(y) dy \right\} = 0 \quad m \neq n \quad (5)$$

$$+ \rho \sigma_2 \varphi_{2my}(h_2) \varphi_{2ny}(h_2) + \sigma_1 \varphi_{1my}(0) \varphi_{1ny}(0)$$

Ce produit scalaire est la généralisation du produit scalaire du cas d'un fluide à surface libre. Il est utilisé pour calculer les fréquences propres du couplage entre les deux fluides et la paroi déformable.

REFERENCES

PARTIE I

- [1]- **AHMAD R. A. & QURESHIT Z. H., (1992)**; Laminar mixed convection from a uniform heat flux horizontal cylinder in a cross flow, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. **6**, N° **2**, pp. 277.
- [2]- **AMAOUCHE M., (1986)** ; Contribution à l'étude de la convection mixte, Thèse Doctorat, Université de Poitiers, France.
- [3]- **AMAOUCHE M., (1991)**; On some mixed convection flows described by exact solutions of Prandtl equations, *Eur. J. of Mech. B/Fluids*, Vol. **10** N° **3**, pp. 295-312.
- [4]- **AMAOUCHE M. & NOUAR C., (1993)**; Calcul au second ordre d'une couche limite de convection mixte, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. **36** N° **10**, pp. 2702-2706.
- [5]- **BADR H. M., (1983)**; A theoretical study of laminar mixed convection from a horizontal cylinder in a cross flow stream, , *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. **26** N° **5**, pp. 639-653.
- [6]- **BADR H., (1984)**; Laminar combined convection from a horizontal cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. **27**, pp. 15-27.
- [7]- **BADR H. M., (1985)**; On the effect of flow direction on mixed convection from a horizontal cylinder, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. **5**, pp. 1-12.
- [8]- **BAIRSTOW L., (1925)**; *J. Roy. Aero. Soc.* **29**, 3.
- [9]- **BAIRSTOW L., (1939)**; *Applied Aerodynamics*, 2nd edition, London, Green and Co.
- [10]- **BARELKO V.V. & SHTESSEL E. A., (1974)**; Heat transfer from a horizontal cylinder under mixed convection conditions, *J. ENG. Physics & Thermophysics*, Vol. **26**, N° **6**, pp. 672-674.
- [11]- **BASSAM A. K. A. H., (1999)**; Laminar mixed convection correlations for an isothermal cylinder in cross flow at different angles of attack, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. **42**, pp. 1383-1388.
- [12]- **BLASIUS H., (1908)**; Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.* **56(1)**, 1-37.
- [13]- **BROWN S. N., (1965)**; Singularities associated with separating boundary layer, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Serie A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. **257**, N° **1084**, pp. 409-444.

- [14]- **CARNAHAN B., (1969)**; Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, Inc.
- [15]- **CATHERAL D. & MANGLER K. W., (1966)**; The integration of the two dimensional laminar boundary layer equations past the point of vanishing skin friction, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **26** part. **1**, pp. 163-182.
- [16]- **CEBECI T., STEWARTSON K. & WILLIAMS P. G., (1979)**; On the response of the stagnation boundary layer to a change in external velocity, SIAM, Journal on Applied Mathematics, Vol. **36** N° **2**, pp. 190-199.
- [17]- **COLLIS D. C. & WILLIAMS M. J., (1959)**; Two dimensional convection from heated wires at low Reynolds numbers, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **6** , pp.357-384.
- [18]- **COUSTEIX J., (1988)**; Aerodynamique, Couche limite Laminaire, Cepadues Editions.
- [19]- **DHANAK M. R. & STUART J. T., (1995)**; Distortion of the stagnation point flow due to cross-stream vorticity in the external flow, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Serie A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. **352**, pp. 443-452.
- [20]- **DOENHOFF V., (1935)**; N.A.C.A. Tech. Note, N° 544.
- [21]- **DORREPAAL J. M., (1986)**; An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation-point flow in two dimensions, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **161**, pp. 141-147.
- [22]- **FALKNER V. M. & SKAN S. W., (1930)**; Rep. Memor. Aero. Res. Comm. London N° 1314.
- [23]- **FAND R. M. & KESWANI K. K., (1973)**; Combined natural and forced convection heat transfer from horizontal cylinders to water, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. **16**, pp. 1175-1191.
- [24]- **GEBHART B. & PERA L., (1970)**; Mixed convection from long horizontal cylinder, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **45** N°**1**, pp.49-64.
- [25]- **GREEN J. J., (1930)**; Rep. Memor. Aero. Res. Co., London, N° 1313
- [26]- **GOLDSTEIN S., (1930)**; concerning some solutions of the boundary layer equation in hydrodynamics., Proc. Camb. Phil. Soc. **26**, 1.
- [27]- **GOLDSTEIN S., (1948)**; On laminar boundary layer flow near a position of separation, Quartly Journal Of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **1**, pp. 43-69.

- [28]- **HATTON A. P., JAMES D. D. & SWIRE H. W., (1970)**; Combined forced and natural convection with low speed air flow over horizontal cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **42** N°1, pp. 17-31.
- [29]- **HIEMENZ K., (1911)**; *Dinglers J.* **326**, 321.
- [30]- **HOWARTH L., (1938)**; On the solution of the laminar boundary layer equations, *Proceeding of the Royal Society of London, Serie A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. **164**, N° **919**, pp. 547-579.
- [31]- **INGHAM D.B. & MERKIN J.H., (1981)**; Unsteady mixed convection from an isothermal circular cylinder, *Acta Mechanica*, Vol. **38**, N° **1-2**, pp. 55-69.
- [32]- **JAIN P.C. & LOHAR B. L., (1979)**; Unsteady mixed convection heat transfer from a horizontal circular cylinder, *Journal of Heat Transfer*, Vol. **101**, pp. 126-131.
- [33]- **JACKSON T. W. & YEN H. H., (1971)**; Combining forced and free convective equations to represent combined heat transfer coefficients for a horizontal cylinder, *Journal of Heat Transfer*, Vol. **93**, pp. 247-248.
- [34]- **JOSHI N. D. & SUKATME S. P., (1971)**; An analysis of combined free and forced convection heat transfer from a horizontal circular cylinder to a transverse flow, *Journal of Heat Transfer*, Vol. **93**, pp. 441-448.
- [35]- **KAMINSKI D. A., FU X. D. & JENSEN M. K., (1995)**; Numerical and experimental analysis of combined convective and radiative heat transfer in laminar flow over a circular cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. **38** N° **17**, pp. 3161-3169.
- [36]- **KARMAN Th., (1934)**; N.A.C.A. Tech. Rep., N° 504.
- [37]- **KOROLEV G., (2000)**; A direct method for constructing periodic boundary layer solutions, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Serie A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. **358**, pp. 3129-3141.
- [38]- **KELLER H. B., (1974)**; Accurate difference methods for nonlinear two-boundary value problems, *SIAM, Journal Of Numerical Analysis*, Vol. **11**, pp. 305-320.
- [39]- **MEKSYN D., (1948)**; The laminar boundary layer, I. Motion of an elliptic and circular cylinder, *Proceeding of the Royal Society of London, Serie A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. **192**, N° **1031**, pp. 545-567.
- [40]- **MERKIN J. H., (1977)**; Mixed convection from a horizontal circular cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. **20**, pp. 73-76.

- [41]- **MESSITER A. F. & ENLOW R. L., (1973)**; A model for laminar boundary layer flow near a separation point, SIAM, Journal on Applied Mathematics, Vol. **25** N° **4**, pp. 655-670.
- [42]- **MILIKAN C. B., (1936)**; J. Aero. Sci. **3**, 91.
- [43]- **NAZAR R., AMIN N. & POP I., (2004)**; Mixed convection boundary layer flow from a horizontal circular cylinder with a constant surface heat flux, Heat and Mass Transfer, Vol. **40**, pp. 219-227.
- [44]- **NAKAI S. & OKAZAKI T., (1975)**; Heat transfer from a horizontal circular wire at small Reynolds and Grashof numbers-II, mixed convection, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. **18**, pp. 397-413.
- [45]- **OOSTHUIZEN P. H. & MADAN S., (1971)**; The effect of flow direction on combined convective heat transfer from cylinder to air, Journal of Heat Transfer, Vol. **93**, pp. 240-242.
- [46]- **PRANDTL L., (1904)**; Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Proceedings 3rd International Mathematical Congress, Heidelberg, pp. 484-491.
- [47]- **RATNANATHER & DANIELS, (1995)**; Solution of the thermal boundary layer equations in regions of flow reversal, SIAM, Journal on Applied Mathematics, Vol. **55** N° **1**, pp. 192-204.
- [48]- **SCHLICHTING H., (1955)**; Boundary layer theory, 2^{ed}, New York; McGraw Hill.
- [49]- **SHARMA G. K. & SUKHATME S. P., (1969)**; Combined free and forced heat transfer from a heated tube to a transverse air stream, Journal of Heat Transfer, Vol. **91**, pp. 457-459.
- [50]- **SPARROW E. M. & LEE L., (1976)**; Analysis of mixed convection about a horizontal cylinder, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. **19**, pp. 229-231.
- [51]- **SUNDEN B., (1983)**; Influence of buoyancy forces and thermal conductivity on flow field and heat transfer of circular cylinders at small Reynolds number, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. **26** N° **9**, pp. 1329-1338.
- [52]- **VAN DER HEGGE ZIJNEN B. G., (1979)**; Modified correlation formulae for the heat transfer by natural and by forced convection from horizontal cylinders, App. Sci. Res. **A6**, pp. 129.
- [53]- **VAN DYKE M., (1975)**; Perturbation Methods in Fluid Mechanics, The Parabolics Press, Stanford California.

- [54]- **WOOD W. W., (1972)**; Free and forced convection from fine hot wires, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **55** N°3, pp. 419-438.

PARTIE II

- [55]- **AMABILI M., (2000)**; Vibrations of fluid-filled hermetic cans, J. of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 235-255.
- [56]- **AMABILI M., PELLICANO F. & PAIDOUSSIS M. P., (1998)**; Nonlinear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid, J. of Fluids and Structures, Vol. 12, pp. 883-918.
- [57]- **BARTLETT S., WINTON M. & CLAUSEN P. D., (2001)**; An added mass theory for the base plate in a partially filled rectangular tank for use with FEA, J. Sound and Vibration, Vol. 246, N° 2, pp. 211-223.
- [58]- **BATEMAN H., (1944)**; Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Dover.
- [59]- **BAUER H. F., (1963 a)**; Theory of liquid Sloshing in compartmented Cylindrical Tanks Due to Bending Excitation, AIAA Journal, Vol. **1**, N° 7, pp. 1590-1596.
- [60]- **BAUER H. F., (1963 b)**; Liquid Sloshing in a Cylindrical Quarter Tank, AIAA Journal, Vol. **1**, N° 11, pp. 2601-2605.
- [61]- **BAUER H. F., HSU T. M., WANG J. T. S., (1968)** ; Interaction of a sloshing liquid with elastic containers, ASME J. Basic Eng., **90(3)**, 373-377.
- [62]- **BAUER H. F. & EIDEL W., (2004)**; Hydroelastic vibrations in a two-dimensional rectangular container filled with frictionless liquid and partly elastically covered free surface, J. of Fluids and Structures, Vol. 19, pp. 209-220.
- [63]- **BAUER H.F & CHIBA M., (2000)**; Hydroelastic viscous oscillations in a circular cylindrical container with an elastic cover, J. of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 917-936.
- [64]- **BAUER H. F. & KOMATSU K., (1998)**; Vibration of a hydroelastic system consisting of a sector shell and viscous liquid in zero gravity, J. of Fluids and Structures, Vol. 12, pp. 367-385.
- [65]- **CHAI X. J., GENEVAUX J. M. & BRANCHER J. P., (1996)**; Fluid-solid interaction in a rectangular container, Eur. J. Mech. B/Fluids, Vol. 15, N° 6, pp. 865-883.

- [66]- **CHEUNG Y.K & ZHOU D., (2000)**; Coupled vibratory characteristics of a rectangular container bottom plate, J. of Fluid and Structures, Vol. 14, pp. 339-357.
- [67]- **CHO J. R. & LEE H. W., (2004)**; Numerical study on liquid sloshing in baffled tank by nonlinear finite element method, Comput. Methods Appl. Mech. Engerg. Vol. 193, pp. 2581-2598.
- [68]- **CHO J. R. & SONG J. M., (2001)**; Assessment of classical numerical models for the separate fluid-structure modal analysis, J. of Sound and Vibration, Vol. 239 N° 5, pp. 995-1012.
- [69]- **CONCA C., PLANCHARD J., THOMAS B., VANNINATHAN M., (1994)**; Problèmes mathématiques en couplage fluide-structure, application aux faisceaux tubulaires, Collection de la direction des études et recherche d'électricité de France, Editions Eyrolles, Paris.
- [70]- **DEBIANE M., (2005)** ; Contribution a l'étude des ondes de surface, Doctorat d'état es-science, Energétique et Mécanique des Fluides, Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne, Alger, Algérie.
- [71]- **FALTINSEN O. M., ROGNEBAKKE O. F., LUKOVSKY I. A. & TIMOKHA A. N., (2000)**; Multidimensional modal analysis of non linear sloshing in a rectangular tank with finite water depth, J. Fluid Mech., Vol. 407, pp.201-234.
- [72]- **FALTINSEN O. D., ROGNEBAKKE O. F., TIMOKHA A. N., (2003)**; Resonant Three – Dimensional nonlinear Sloshing in a Square-Base Basin, Journal of Fluid Mechanics, Vol.478, pp. 1-42.
- [73]- **FALTINSEN O. M., & TIMOKHA A. N., (2001)**; An adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank, J. Fluid Mech. Vol.432, pp.167-200.
- [74]- **FRANDSEN J.B. & BORTHWICK A G. L., (2003)**; Simulation of Sloshing Motions in Fixed and Vertically Excited Containers Using a 2-D inviscid σ -Transformed Finite Difference Solver, Journal of Fluids and Structures, Vol. 18, pp. 197-214.
- [75]- **GRAHAM E. W., (1951)**; The Characteristics of Fuel Motion Which affect Airplane Dynamics, Douglas Aircraft Company, Santa Monica, California, Report SM 14212.
- [76]- **GUPTA R. K. & HUTCHINSON G. L., (1988)**; Free vibration analysis of liquid storage tanks, J. sound and Vibration, Vol. 122, N° 3, pp. 491-506.
- [77]- **IKEDA T. & NAKAGAWA N., (1997)**; Non-linear vibrations of a structure caused by water sloshing in a rectangular tank, Journal of Sound and Vibrations, Vol. 201, N° 1, pp.23-41.

- [78]- **IKEDA T. & SHIN M., (2005)**; Autoparametric resonances in a structure/fluid interaction system carrying a cylindrical liquid tank, J. of Sound and Vibration, Vol. 285, pp. 517-546.
- [79]- **KACHIGAN K., (1955)**; Forced Oscillations of a Fluid in a Cylindrical Tank, Convair Report ZU-7-046, San Diego, California.
- [80]- **KARAGIOZIS K. N., AMABILI M., PAIDOUSSIS M. P., MISRA A. K., (2005)**; Nonlinear vibrations of fluid-filled clamped circular cylindrical shells, J. of Fluids and Structures, Vol. 21, pp. 579-595.
- [81]- **LAMB H., (1945)**; Hydrodynamics, , Dover Publications, New York, N. Y., 6th edition, section 191 and 157.
- [82]- **LORELL J., (1956)**; Forces Produced by fuel Oscillations, Jet Propulsion Laboratory, Progress Report 20-149.
- [83]- **LU D., TAKIZAWA A. & KONDO S., (1997)**; Overflow induced vibration of a weir coupled with sloshing in a downstream tank, J. Fluids and Structures, Vol. 11, pp. 367-393.
- [84]- **LUKE, J. C., (1967)**; A Variational principal for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., N°27, PP. 395-397.
- [85]- **MILES J. W., (1958)**; Los Angles, California, Journal Of Applied Mechanics, **A-12**, pp. 277-283.
- [86]- **MODARRES-SADEGHI Y., PAIDOUSSIS M. P., SEMLER C., (2005)**; A nonlinear model for an extensible slender flexible cylinder subjected to axial flow, J. of Fluids and Structures, Vol. 21, pp. 609-627.
- [87]- **PAPASPYROU S., KARAMANOS S. A. & VALOUGEORGIS D., (2004)**; Response of half-full horizontal cylinders under transverse excitation, J. of Fluids and Structures, Vol. 19, pp. 985-1003.
- [88]- **POISSON S. D., (1831)**; Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides, Journal de l'école Polytechnique, 13, Cahier 20, pp. 1-174.
- [89]- **RAYLEIGH L., (1876)**; On waves, Phil. Mag. Vol.5 N°1, pp. 257-279.
- [90]- **SHULKES R. M. S. M., (1990)**; Fluid Oscillations in an Open, Flexible Container, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 24, pp. 237-259.
- [91]- **TIMOSHENKO S., YOUNG D. H. & WEAVER W. Jr, (1974)**; Vibration Problems in Engineering, Fourth Edition, John Wiley & Sons.

- [92]- **WATERHOUSE D.D., (1994);** Resonant sloshing near a critical depth, J. Fluid Mech., Vol. 281, pp.313-318.
- [93]- **ZAKHAROV V. E., (1968);** Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. Zh.Prikl. Mekh. Fiz. 9, 86-94 (English transl.: J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2, 190).