

N° d'ordre : 16/2022-D/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour l'obtention du **grade de Docteur**

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : **Ryma OULD MOHAMED**

Titre

**Propriétés combinatoires des cubes de Fibonacci
et de Lucas et généralisations.**

Soutenue publiquement le : 25/05/2022, devant le jury composé de :

M. E. A. CHERGUI	Professeur	à l'USTHB	Président
H. BELBACHIR	Professeur	à l'USTHB	Directeur de thèse
K. AMROUCHE	Maître de Conférence/A	à l'Université d'Alger 3	Examineur
A. BELKHIR	Maître de Conférence/A	à l'USTHB	Examineur
M. BESSEDIK	Maître de Conférence/A	à l'ESI	Examineur
M. CHELLALI	Professeur	à l'Université de Blida 1	Examineur
S. ABBAD	Maître de Conférence/B	à l'Université de Blida 1	Invitée

Remerciements

Je remercie en premier mes parents pour tout ce qu'ils m'ont appris pour toute l'aide, les encouragements et le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années et sans qui ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je remercie également tous les membres de ma famille : mes sœurs Meriem, Amina, Khadidja Aziza, mon frère Hamza, mes enfants et mon mari, qui ont été ma source d'inspiration et de motivation.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse Professeur Hacène BELBACHIR, je lui en sais gré d'avoir accepté de diriger cette thèse, je le remercie vivement pour tout le temps précieux qu'il m'a accordé pour tout le savoir qu'il a partagé avec moi durant ces années ce qui m'a permis de m'initier à la combinatoire et d'aboutir à ce travail.

Je remercie le Professeur M. E. A CHERGUI de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également les membres du jury, Mr K. AMROUCHE, Mme M. BESSEDIK, Mr A. BELKHIR, le Professeur M. CHELLALI et Mlle S. ABBAD pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail en acceptant de l'examiner.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes : mes sœurs Khadidja et Aziza, mes chères amies L. ZERFA et S. ABBAD et bien évidemment mon époux M. N. CHEBAIKI., pour l'aide qu'ils m'ont apportée, entre autres la lecture de ce document.

Je n'oublie pas de remercier les enseignants de la faculté des mathématiques de l'université de l'U.S.T.H.B. pour tout leur savoir qu'ils ont partagé avec nous et de nous avoir inculqué l'amour des mathématiques et de la recherche scientifique.

Enfin, je témoigne mes profonds remerciements à toutes les personnes que je n'ai pas citées, mais qui se reconnaîtront, pour leur aide et leur soutien.

À vous MAMA et PAPA,
À mes garçons et ma fille adorés,
À mon époux,
À mes sœurs et à mon frère,
À mes neveux et nièces.

Résumé

Propriétés combinatoires des cubes de Fibonacci et de Lucas et généralisations

Le cube de Fibonacci est un sous-graphe de l'hypercube Q_n , engendré par les mots binaires qui ne contiennent pas deux 1 consécutifs. Il est introduit au début des années 90 comme un nouveau modèle de réseau d'interconnexion, et ce n'est qu'au début des années 2000 qu'on leurs trouvent également des applications en Chimie Théorique. Depuis leurs introduction, ils ont inspiré bon nombre de travaux de recherche, leurs caractéristiques ont ainsi permis de mettre en évidence des relations combinatoires intéressantes. Par la suite, d'autres structures furent proposées, parmi lesquels les cubes de Fibonacci généralisés que nous nommons cubes s -bonacci inspirés de la suite de Fibonacci généralisée d'ordre s également connue sous le nom de suite s -bonacci. Le cube s -bonacci est alors défini comme un sous-graphe de l'hypercube, engendré par les mots binaires ne contenant pas s 1 consécutifs. Le cas $s = 2$ correspond au cube de Fibonacci et $s = 3$ au cube Tribonacci.

Cette thèse est consacrée à l'étude de ces graphes, plus précisément nous étudions certaines de leurs propriétés structurelles et énumératives. Dans un premier, nous nous intéressons au cube Tribonacci, où nous mettons en évidence des relations de récurrences et des formules explicites sur le nombre de sommets et le nombre d'arêtes, ou encore le nombre de sous-graphes du cube Tribonacci qui sont isomorphes à l'hypercube de dimension k . Nous nous intéressons également à la distance de ces sous-graphes par rapport au sommet 0^n . En second lieu nous généralisons les résultats obtenus dans le cas des cubes Tribonacci aux cubes s -bonacci. Nous mettons en évidence la relation existant entre le cube de Fibonacci et le cube Tribonacci. Nous élaborons une bijection entre l'ensemble des codes de Zeckendorf pour les Lucas et l'ensemble des sommets du cube de Lucas.

Mots clés : hypercube; cube de Fibonacci; cube de Lucas; cube s -bonacci; cube polynomial.

Table des matières

Liste des figures	9
Liste des tableaux	10
Liste des symboles	11
Introduction générale	12
1 Quelques notions de graphes et de propriétés combinatoires	17
1.1 Introduction	17
1.2 Notions sur les graphes	17
1.2.1 Stable, clique et couplage dans un graphe	18
1.2.2 Sous-graphes	19
1.2.3 Chaîne, cycle et connexité	20
1.2.4 Graphes particuliers	21
1.2.5 Isomorphisme de graphes	22
1.2.6 Matrice d'adjacence	22
1.2.7 Produit cartésien de graphes	23
1.2.8 Métrique dans les graphes	23
1.3 Combinatoire énumérative	27
1.3.1 Coefficient binomial	28
1.3.2 Coefficient bi ^s nomial	29
1.3.3 Suite de Fibonacci	30
1.3.4 Suite de Lucas	31
1.3.5 Suite Tribonacci	31
1.3.6 Suite <i>s</i> -bonacci	34
1.3.7 Représentation d'un entier par les nombres de Fibonacci et de Lucas	34
1.3.8 Représentation d'un entier par les nombres <i>s</i> -bonacci	35

1.4	Conclusion	37
2	Cube de Fibonacci et généralisation	38
2.1	Introduction	38
2.2	Hypercubes	38
2.2.1	Caractérisation des sous-graphes isomorphes à l'hypercube . .	41
2.3	Cube de Fibonacci	43
2.3.1	Structure récursive	43
2.3.2	Caractérisation par le graphe simplexe	45
2.3.3	Plongement du cube de Fibonacci dans l'hypercube	46
2.3.4	Propriétés du cube de Fibonacci	47
2.3.5	Cube de Fibonacci en Chimie Théorique	48
2.4	Cube de Lucas	50
2.4.1	Caractérisation de Λ_n par le graphe simplexe	51
2.4.2	Plongement du cube de Lucas dans l'hypercube	52
2.4.3	Propriétés des cubes de Lucas	52
2.5	Code de Zeckendorf et mot de Lucas	54
2.6	Généralisation du cube de Fibonacci	55
2.6.1	Cube s -bonacci	56
2.6.2	Cube de Fibonacci étendu	58
2.6.3	(p, r) -Cube de Fibonacci	59
2.6.4	Cube de Fibonacci généralisé	60
2.7	Conclusion	60
3	Propriétés énumératives et cube polynomiale du cube Tribonacci	61
3.1	Introduction	61
3.2	Structure de $\Gamma_n^{(3)}$	62
3.3	Propriétés énumératives	63
3.4	Cube polynomial	67
3.5	Coefficients du cube polynomial	69
3.6	Cube de Fibonacci comme sous-graphe du cube Tribonacci	70
3.6.1	Cube polynomial	71
3.7	Conclusion	73
4	Le q-cube polynomial du cube Tribonacci	74
4.1	Introduction	74
4.2	Préliminaires	74

4.3	q -cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$	77
4.4	Propriétés des coefficients $c_{n,k}(q)$	80
4.4.1	Fonction génératrice de $c_{n,k}(q)$	83
4.5	Conclusion	88
5	Cube polynomial du cube s-bonacci	89
5.1	Introduction	89
5.2	Propriétés combinatoires sur le nombre de sommets et d'arêtes	89
5.3	Cube polynomial du cube s -bonacci	94
5.4	Conclusion	98
	Conclusion	99
	Bibliographie	108

Table des figures

1.1	Graphe simple non orienté.	18
1.2	Stable, couplage.	19
1.3	Sous-graphe, graphe engendré, graphe partiel.	19
1.4	Graphe complémentaire de P_5	21
1.5	Graphes isomorphes au cube.	22
1.6	Produit cartésien de graphes.	24
1.7	Décomposition en couches à partir du sommet a d'un graphe de diamètre 3 et de rayon 2.	25
1.8	Distance entre sous-graphes.	26
1.9	Grille $2 \times n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$	31
2.1	Représentations des Hypercubes Q_n , pour $n \leq 5$	40
2.2	Sous-graphes de Q_3 et Q_5	42
2.3	Sous-graphe de Q_4 : $Q_4[I(0010, 1000)]$	43
2.4	Cubes de Fibonacci.	44
2.5	(a) : P_5 , (b) : \bar{P}_5 , (c) : graphe simplexe de \bar{P}_5	45
2.6	Plongement de Γ_n dans Q_n pour $n = 2, 3, 4, 5$	46
2.7	Chaines hexagonales.	48
2.8	Fibonacci.	48
2.9	Structures kékulé du phénanthrène.	49
2.10	Graphe résonance du phénanthrène.	50
2.11	Représentation de Λ_n pour $n \leq 6$, les sommets qui ne correspondent pas au code de Lucas sont soulignés et représentés en gras.	51
2.12	Construction de Λ_5 à partir de C_5	52
2.13	Plongement de Λ_n dans Q_n pour $n = 2, 3, 4, 5$	53
2.14	Les cubes s -bonacci, pour $n = 4$, $s = 2, 3, 4$	57
2.15	Cube de Fibonacci étendu Γ_n^1 pour $n = 3, 4, 5, 6$	58
2.16	(2, 1) –cube de Fibonacci de dimension $n = 0, \dots, 6$	59

3.1	Représentation des cinq premiers cubes Tribonacci.	62
3.2	Décomposition de $\Gamma_n^{(3)}$	64
3.3	Les cubes Tribonacci, les sous-graphes en rouge correspondent aux cubes de Fibonacci.	70
4.1	Distance level representation of $\Gamma_n^{(3)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	76
5.1	Construction d'hypercubes de dimension $k + 1$, $k + 2$ et $k + 3$ à partir d'un sous-graphe $H \cong Q_K$ dans $\Gamma_{n-i}^{(s)}$	95

Liste des tableaux

1.1	Le triangle de Pascal, pour $n, k \leq 7$	28
1.2	Le triangle des coefficients bitrinomiaux, $\binom{n}{k}_2$, $n, k \leq 7$	29
1.3	Les nombres de Fibonacci F_n , $0 \leq n \leq 14$	30
1.4	Les nombres de Lucas L_n , $0 \leq n \leq 14$	31
1.5	Les nombres Tribonacci T_n , $0 \leq n \leq 14$	32
1.6	Le triangle Tribonacci, $n, k \leq 10$	32
1.7	Les 11 premiers nombres s -bonacci, $4 \leq s \leq 8$	34
1.8	Codes s -bonacci des entiers $0 \leq N \leq 14$ pour $s = 2, 3, 4$	36
2.1	Code de Lucas des 20 premiers entiers.	54
3.1	Valeurs de la séquence $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $n = 0, \dots, 12$	71
4.1	Les coefficients $c_{n,k}(q)$ du q -cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$	81

Liste des Symboles

\mathbb{N}	Ensemble des nombres naturels
$V(G)$	Ensemble de sommets du graphe G
$E(G)$	Ensemble d'arêtes du graphe G
$S(G)$	Ensemble de cycles de longueur 4 dans le graphe G
\overline{G}	Graphe complémentaire de G
K_n	Graphe complet à n sommets
$G[A]$	Graphe engendré par l'ensemble des sommets A
$G \cong H$	G est isomorphe à H
$G \square H$	Produit cartésien de G et H
$d(u, v)$	Distance entre u et v
$H(u, v)$	Distance de Hamming entre u et v
Q_n	Hypercube de dimension n
Γ_n	Cube de Fibonacci de dimension n
Λ_n	Cube de Lucas de dimension n
$\Gamma_n^{(s)}$	Cube s -bonacci de dimension n
$\kappa(G)$	Graphe simplexe de G
$\binom{n}{k}$	Coefficient binomial
$\binom{n}{k}_s$	Coefficient bi ^s nomial
F_n	$n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci
L_n	$n^{\text{ème}}$ nombre de Lucas
T_n	$n^{\text{ème}}$ nombre Tribonacci
$F_n^{(s)}$	$n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci généralisé d'ordre s

Introduction générale

Les réseaux d'interconnexion jouent un rôle central dans notre monde moderne, où la communication et l'échange de données sont omniprésents. Ces réseaux sont utilisés pour relier un large éventail de dispositifs, tels que les ordinateurs, les serveurs, les dispositifs mobiles, et même les objets connectés, dans le but de permettre un transfert efficace d'informations et de ressources. La conception de ces réseaux est une tâche complexe, car elle implique de prendre en compte de nombreux facteurs, tels que la capacité, la latence, la fiabilité, la redondance, et bien d'autres. C'est dans ce cadre que la théorie des graphes intervient, elle fournit des outils mathématiques puissants pour modéliser et pour étudier la topologie de ces réseaux, optimiser leur conception, résoudre des problèmes de routage, minimiser les collisions de données, et bien plus encore. Les composants du réseau sont représentés par des sommets et les liens physiques par des arêtes, la fonction d'incidence traduit quant à elle la manière dont les composants du réseau sont interconnectés. Un graphe représentant un réseau d'interconnexion est appelé structure topologique du réseau.

L'une des structures topologiques les plus populaires est l'hypercube dû à ses nombreuses caractéristiques qui font qu'il soit considéré comme un modèle fondamental dans l'architecture des réseaux d'interconnexion. L'hypercube de dimension n , noté Q_n , est défini par l'ensemble des mots binaires de longueur n , et deux sommets sont voisins s'ils diffèrent en un seul bit. L'hypercube est construit récursivement à partir de deux copies de Q_{n-1} , il permet ainsi une expansion facile des réseaux existants. L'inconvénient majeur d'une telle structure est que le nombre de sommets (2^n sommets) et le nombre d'arêtes ($n2^{n-1}$ arêtes) croît exponentiellement au fur et à mesure que n augmente, ce qui en limite l'usage dans certains cas.

Dans les années 90, Hsu [35] introduit un nouveau modèle de réseau d'interconnexion appelé cube de Fibonacci et le définit comme un sous-graphe de l'hypercube induit par l'ensemble des mots binaires ne contenant pas deux 1 consécutifs. Le cube de

Fibonacci de dimension n est noté Γ_n , il possède un nombre réduit de sommets et d'arêtes par rapport à l'hypercube, tout en conservant certaines propriétés structurales et combinatoires.

Le cube de Fibonacci doit son nom à la fameuse suite de Fibonacci, de nombreux liens le lient à cette suite, à commencer par le nombre de sommets qui est égal à F_{n+2} , où F_n désigne le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci, de plus le nombre d'arêtes et de cycles de longueur 4 s'exprime comme produit de convolution des termes de cette suite. Bien d'autres relations sont obtenues, Klavžar en survole les principales d'entre elles dans [42].

Bien que initialement le cube de Fibonacci soit conçu comme structure topologique, Klavžar et Žigert [43] montrent en 2005, qu'il a également des applications en chimie théorique. Ses différentes applications ont suscité de nombreux travaux de recherche qui ont permis de mettre en évidence des propriétés structurales et combinatoires intéressantes.

La première généralisation du cube de Fibonacci a été proposée par Liu et Hsu [50], en 1992. Ils considèrent les sous-graphes de l'hypercube induits par l'ensemble des mots binaires contenant au plus $(s - 1)$ 1 consécutifs qu'ils nomment cubes de Fibonacci généralisés d'ordre s , $s \geq 2$. Depuis 2012, le terme cubes de Fibonacci généralisés désigne une classe de sous-graphes de l'hypercube induit par l'ensemble des mots binaires ne contenant pas la sous-séquence binaire f , ils sont notés $Q_n(f)$. Les cubes de Fibonacci généralisés d'ordre s sont étroitement liées à la suite multibonacci également connue sous le nom de suite s -bonacci, par conséquent afin de mieux les distinguer nous donnons une nouvelle appellation à ces graphes qui est : cubes s -bonacci. Le cube 2-bonacci correspond au cube de Fibonacci et le cube 3-bonacci est appelé cube Tribonacci.

D'autres généralisations sont proposées, comme par exemple le cube de Lucas introduit en 2001 par Munarini et al. [55], qui est le graphe obtenu à partir du cube de Fibonacci en supprimant les sommets qui commencent et se terminent à la fois par 1.

La détermination du nombre de sous-graphes qui sont isomorphes à un hypercubes dans un graphe revêt une importance particulière dans certains domaines tels que la génétique, dans les études des mutations fantômes [7], ou encore la chimie théorique, dans l'étude de la stabilité des molécules [79, 80]. En 2003, Brešar et al. [17]

introduisent un polynôme qui compte le nombre de sous-graphe isomorphes à un hypercube de dimension k dans un graphe G , ce polynôme est appelé cube polynomial de G .

En 2012, Klavžar et Mollard [44] étudient le cube polynomial du cube de Fibonacci et du cube de Lucas, ils parviennent notamment à exprimer le nombre de ces hypercubes comme produits de nombre de Fibonacci, dans le cas des cubes de Fibonacci, et comme produits de nombre de Fibonacci et de nombre de Lucas dans, le cas des cubes de Lucas. En 2017, Saygı et Eğecioglu [63] proposent un q -analogue du cube polynomial du cube de Fibonacci. Ce dernier énumère les hypercubes de dimensions k a distance d du sommet $0 \cdots 0$ dans le cube de Fibonacci.

L'objectif de cette thèse est l'étude des propriétés, énumératives et combinatoires des cubes de Fibonacci, cubes de Lucas, cubes Tribonacci et les cubes s -bonacci. Nous explorons leurs structures récursives en vue d'exprimer le nombre d'arêtes de ces graphes ainsi que le nombre de sommets contenant i 1, par des formules de récurrences. Nous étudions également le cube polynomial du cube s -bonacci, en premier pour $s = 3$, puis nous généralisons au cas $s \geq 4$. Les résultats que nous obtenons généralisent ceux obtenus auparavant pour les cube de Fibonacci. Nous mettons également en vue la corrélation qui existe entre le cube de Fibonacci et le cube Tribonacci.

La thèse est répartie sur six chapitres comme suit :

Chapitre 1

Nous consacrons ce chapitre aux rappels et notions de bases dans le cadre des besoins théoriques relatifs à cette thèse. Nous rappelons dans la première partie quelques concepts relatifs aux graphes. Dans la seconde partie nous rappelons quelques propriétés combinatoires relatives aux suites de Fibonacci, suites de Lucas, suites de Tribonacci et les suites s -bonacci ainsi qu'aux coefficients binomiaux et bi^snomiaux.

Chapitre 2

Le second chapitre est principalement dédié aux cubes de Fibonacci et aux cubes de Lucas. Dans un premier temps, nous rappelons la définition et les propriétés de

l'hypercube. Nous introduisons par la suite les cubes de Fibonacci et les cubes de Lucas, nous donnons les différentes approches et propriétés que vérifient ces graphes.

L'ensemble de sommets ne contenant pas deux 1 consécutifs correspond aux codes de Zeckendorf qui représentent les nombres $\{0, 1, \dots, F_{n+2} - 1\}$ par les nombres de Fibonacci. L'ensemble des sommets du cube de Lucas ne correspond pas aux codes de Zeckendorf pour Lucas qui représentent des entiers par des nombres de Lucas. Nous déterminons une bijection entre ces deux ensembles.

Nous effectuons dans la dernière partie de ce chapitre un bref aperçu sur les généralisations du cube de Fibonacci existant dans la littérature, en mettant plus l'accent sur le cube s -bonacci noté $\Gamma_n^{(s)}$ où nous présentons sa décomposition fondamentale qui consiste à construire récursivement $\Gamma_n^{(s)}$ à partir de $\Gamma_{n-1}^{(s)}, \dots, \Gamma_{n-s}^{(s)}$.

Chapitre 3

Ce chapitre est consacré au cube Tribonacci pour lequel nous déterminons le nombre de sommets d'un certain poids et le nombre d'arêtes. Nous considérons également le nombre d'hypercubes de dimension k contenus dans le cube Tribonacci, le polynôme qui les dénombre est appelé cube polynomial et est noté $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$. Le polynôme $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$ s'obtient par une relation de récurrence, sa fonction génératrice ainsi qu'une formule explicite sont déterminées.

Dans la dernière partie de ce chapitre nous mettons en évidence la relation entre le cube polynomial du cube de Fibonacci $C(\Gamma_n, x)$ et le cube polynomial du cube Tribonacci $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$.

Chapitre 4

Saygi et Egecioglu, [63, 64], ont défini un q -analogue pour le cube polynomial du cube de Fibonacci et du cube de Lucas appelé q -cube polynomial, qui en plus de compter le nombre d'hypercubes de dimension k , nous informent également sur leur distance par rapport au sommet 0^n .

Nous déterminons le q -cube polynomial du cube Tribonacci, un polynôme bivarié noté $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)$, $n \geq 0$, ainsi que sa fonction génératrice. Nous présentons également, le nombre d'hypercubes de dimension k dans $\Gamma_n^{(3)}$ à distance d du sommet 0^n , noté $c_{n,k}(q)$, qui est lui-même un polynôme en q , et nous montrons que ces derniers

peuvent être obtenus en dérivant k fois le polynôme $c_{n,0}(q)$ qui compte le nombre de sommets à distance d du sommet 0^n . Nous achevons ce chapitre en présentant la formule explicite de la fonction génératrice des coefficients $\{c_{n,k}(q)\}_{k \geq 0}$.

Chapitre 5

Dans ce chapitre nous généralisons les résultats obtenus dans [14] et présentés dans le chapitre 3. Nous déterminons ainsi le nombre d'arêtes du cube s -bonacci en termes de produit de convolution de nombre s -bonacci. Nous montrons que le nombre de sommets de poids w et le nombre d'hypercubes de dimension k s'expriment quant à eux en termes de coefficients binomiaux.

Nous achevons ce chapitre en montrant que le polynôme $C(\Gamma_n^s, x)$ qui compte le nombre d'hypercubes de dimension k vérifie une relation de récurrence d'ordre s et nous déterminons sa fonction génératrice ainsi qu'une formule explicite.

Liste des contributions scientifiques

- H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, Enumerative properties and cube polynomials of Tribonacci cubes, *Discrete Mathematics* 343 (8) (2020) 111922.
- S. Abbad, H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, Lucas cube vs Zeckendorf's Lucas code, *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics* 3 (2) (2021) 47–50.
- H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, q -cube polynomial of Tribonacci cube, soumis.
- H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, Cube polynomial of s -bonacci cube, soumis.
- H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, On some properties of Tribonacci cube, soumis.

Chapitre 1

Quelques notions de graphes et de propriétés combinatoires

1.1 Introduction

Le thème abordé dans cette thèse relève de l'énumération dans les graphes. A cet effet, ce chapitre est scindé en deux parties, nous consacrons la première partie à des rappels et des définitions sur la théorie des graphes, nous explorons dans la seconde partie quelques concepts de l'algèbre énumérative. Nous nous sommes inspirés des ouvrages [16, 22, 23, 26, 47, 73] dans la rédaction de l'intégralité de ce chapitre.

1.2 Notions sur les graphes

Un graphe G est défini par un ensemble fini V d'éléments appelés sommets, un ensemble d'arêtes E et une fonction d'incidence qui associe à chaque arête $e \in E$ deux sommets appelés extrémités de e . On note un graphe par $G = (V, E)$. Le nombre de sommets est appelé ordre du graphe et le nombre d'arêtes est appelé la taille du graphe. La notation $V(G)$ et $E(G)$ est également utilisée pour désigner respectivement l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes du graphe G , elle est cependant omise si toute fois aucune confusion n'est à craindre.

Deux sommets $u, v \in V$ sont adjacents ou voisins s'ils sont les extrémités d'au moins une même arête e , on dit alors que e est incidente à u et à v et on note $e = uv$. Deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité en commun.

Plusieurs liaisons peuvent exister entre deux sommets $u, v \in V$, l'arête uv est alors dite arête multiple. Le graphe G est alors dit multigraphe. Il n'est pas exclu qu'une arête $e \in E$ ait les mêmes extrémités $e = uu$, l'arête e est dans ce cas appelée une boucle. Un graphe simple est un graphe qui ne contient ni arêtes multiples ni boucle.

Le degré d'un sommet u , noté $d(u)$, est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. Si le degré d'un sommet u est nul, alors u est un sommet isolé, s'il est égal à 1, alors u est un sommet pendent.

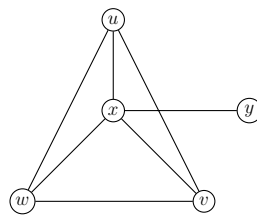
 G_1

FIGURE 1.1 – Graphe simple non orienté.

Précisons que pour certain problème, le sens d'orientation de la liaison entre les sommets u et v joue un rôle important. L'arête uv est alors muni de flèche et le graphe est dans ce cas dit orienté.

1.2.1 Stable, clique et couplage dans un graphe

Considérons un graphe $G = (V, E)$ sans boucle.

Définition 1.1. Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ est appelé stable de G , si tous les sommets sont deux à deux non adjacents. Si tous les sommets sont deux à deux adjacents, alors S est appelé clique de G .

L'ensemble de sommets $\{u, x, w\}$ du graphe illustré par la Figure 1.1 est une clique maximum. L'ensemble de sommets $\{a, c, f, h, i, k\}$ du graphe de La Figure 1.2 est un stable maximum .

Définition 1.2. Un sous-ensemble d'arêtes M dans G est un couplage si pour toute paire d'arêtes $e, e' \in M$, e et e' ne sont pas adjacentes.

Un sommet u est dit saturé par le couplage M si u est une extrémité d'une arête $e \in M$, dans le cas contraire, on dit que u est non saturé. Si tous les sommets de G sont saturés par M , alors M est dit couplage parfait.

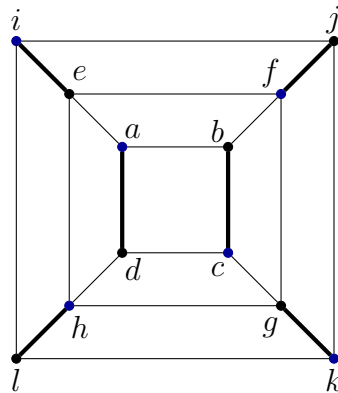


FIGURE 1.2 – Stable, couplage.

Dans le graphe de la Figure 1.2 les arêtes représentées en gras forment un couplage parfait.

1.2.2 Sous-graphes

Un graphe se définit par un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes. Dans cette optique, nous pouvons identifier trois approches différentes pour définir un sous-graphe. Nous examinerons ces diverses définitions dans cette partie.

Définition 1.3. Un sous-graphe de $G = (V, E)$, est un graphe $G' = (V', E')$ où $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.

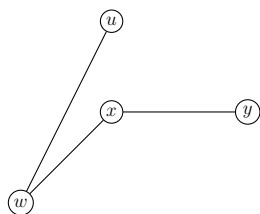
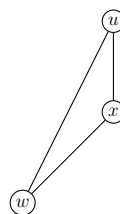
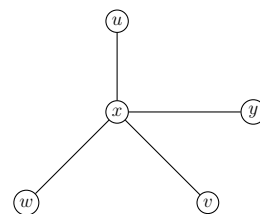
sous-graphe de G_1 graphe engendré par
 $\{u, w, x\}$ graphe partiel de G_1

FIGURE 1.3 – Sous-graphe, graphe engendré, graphe partiel.

Définition 1.4. Un sous-graphe de $G = (V, E)$ induit ou engendré par l'ensemble $V' \subseteq V$ est un graphe ayant pour ensemble de sommets V' et pour ensemble d'arêtes E' où :

$$E' = \{uv \in E \text{ tel que } u, v \in V'\}.$$

Un sous-graphe de G induit par l'ensemble V' est noté $G[V']$.

Définition 1.5. Un graphe partiel du graphe $G = (V, E)$ est un graphe $G' = (V, E')$, où $E' \subset E$.

En d'autres termes, G' est obtenu à partir de G en supprimant les arêtes de l'ensemble $E \setminus E'$.

La Figure 1.3 illustre les différentes approches utilisées pour définir un sous-graphes de G_1 .

1.2.3 Chaîne, cycle et connexité

Une chaîne reliant deux sommets u et v dans un graphe est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $P = v_1 e_1 v_2 \cdots v_{n-1} e_{n-1} v_n$, où $v_1 = u, v_n = v$ et pour tout $1 \leq i < n$ les sommets v_i, v_{i+1} sont les extrémités de e_i . Les sommets $\{v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ sont appelés sommets internes de P . La longueur de P est égale au nombre d'arêtes reliant ses sommets. Si le graphe est simple, P peut être identifiée uniquement par les sommets qu'elle parcourt, on écrira alors $P = v_1 v_2 v_3 \cdots v_n$, avec $v_1 = u, v_n = v$. Une chaîne est dite simple si elle ne passe pas deux fois par une même arête. Si elle ne passe pas deux fois par un même sommet, elle est dite élémentaire. Une chaîne élémentaire à n sommets est souvent notée P_n .

Un cycle est une chaîne simple fermée (ses extrémités se confondent). Un cycle élémentaire, c'est-à-dire qui n'emprunte pas deux fois le même sommet, est noté C_n , où n est le nombre de ses sommets. La longueur d'un cycle est égale au nombre de ses arêtes. La longueur du plus petit cycle contenu dans G est appelé maille de G et est notée $g(G)$.

On appelle corde une arête qui relie deux sommets non consécutifs d'une chaîne ou d'un cycle.

Définition 1.6. Un graphe $G = (V, E)$ est connexe si et seulement si pour toute paire de sommets u, v il existe au moins une chaîne reliant u à v .

Si G n'est pas connexe, alors G est l'union disjointe de sous-graphes connexes appelés composantes connexes de G .

Remarque 1.1. Dans la suite du document tous les graphes traités sont des graphes non orienté, finis, simples et connexes.

Chaîne et cycle hamiltoniens

Dans un graphe $G = (V, E)$, une chaîne hamiltonienne est une chaîne élémentaire qui passe par tous les sommets. Un cycle hamiltonien est un cycle élémentaire qui passe par tous les sommets de G . Un graphe G est dit hamiltonien s'il contient un cycle hamiltonien.

1.2.4 Graphes particuliers

Nous citons dans cette partie quelques graphes particuliers principalement ceux qui seront utilisés dans cette thèse.

Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire de $G = (V, E)$, noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par l'ensemble de sommets V et l'ensemble d'arêtes :

$$\overline{E} = \{uv : u, v \in V, u \neq v \text{ et } uv \notin E\}$$

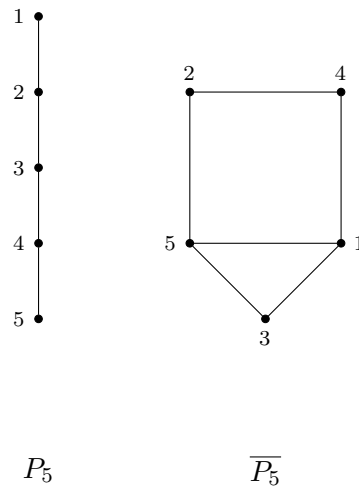


FIGURE 1.4 – Graphe complémentaire de P_5 .

Graphe complet

Un graphe complet à n sommets, noté K_n , est un graphe dont tous les sommets sont deux à deux adjacents. Une clique d'un graphe G engendre un sous-graphe complet de G . Le graphe $(V, E \cup \overline{E})$ est un graphe complet.

Graphe biparti

Un graphe biparti est un graphe dont l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints non vides, $V = X \cup Y$, où X et Y sont tous les deux des stables.

Graphe régulier

Un graphe est k -régulier si tous ses sommets ont le même degré

$$\forall u \in V, d(u) = k.$$

Si $k = 3$, on dit que le graphe est cubique.

1.2.5 Isomorphisme de graphes

Un même graphe peut avoir différentes représentations, comme l'illustre la Figure 1.5. La question que l'on pourrait se poser est : "sous quelles conditions peut-on dire que deux graphes G et H sont structurellement identiques?". L'isomorphisme de graphes permet de répondre à cette question en déterminant une correspondance entre l'ensemble des sommets de G et de H de sorte que la relation d'adjacence soit préservée.

Définition 1.7. Un isomorphisme entre $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ est une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que $uv \in E_1$ si et seulement si $f(u)f(v) \in E_2$. On dit que G_1 est isomorphe à G_2 si une telle bijection existe et on écrit $G_1 \cong G_2$.

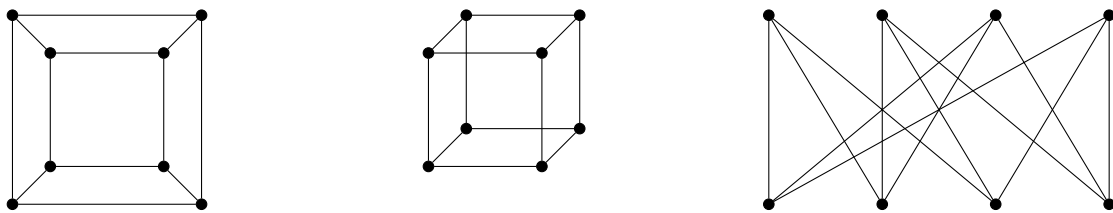


FIGURE 1.5 – Graphes isomorphes au cube.

1.2.6 Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence est une technique parmi d'autres pour représenter un graphe $G = (V, E)$. Elle permet entre autres, de mettre en évidence la relation d'adjacence entre les sommets de G . Afin de faciliter la représentation matricielle de G , nous

attribuons sans perte de généralité, à chaque sommet du graphe une étiquette de l'ensemble suivant : $L = \{1, \dots, |V|\}$.

Définition 1.8. La matrice d'adjacence associée au graphe G est une matrice carrée, notée A , de taille $n \times n$, telle que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2.7 Produit cartésien de graphes

Le produit cartésien de graphe revêt une importance capitale dans la conception de réseaux d'interconnexion, il permet de construire un graphe de taille supérieur à partir de graphes de plus petite taille. Cette méthode de construction possède des avantages, elle permet entre autre de conserver de nombreuses propriétés de ces graphes, telles que la régularité, l'hamiltonicité, et bien d'autres.

Définition 1.9. Le produit cartésien de deux graphes G et H , noté $G \square H$, est le graphe défini par l'ensemble des sommets $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ et l'ensemble des arêtes $E(G \square H)$ est l'ensemble de toutes les paires de sommets $[(u_1, u_2), (v_1, v_2)]$, avec $u_1, v_1 \in V_1$ et $u_2, v_2 \in V_2$, tels que

- $u_1 = v_1$ et $u_2 v_2 \in E_2$ ou
- $u_2 = v_2$ et $u_1 v_1 \in E_1$.

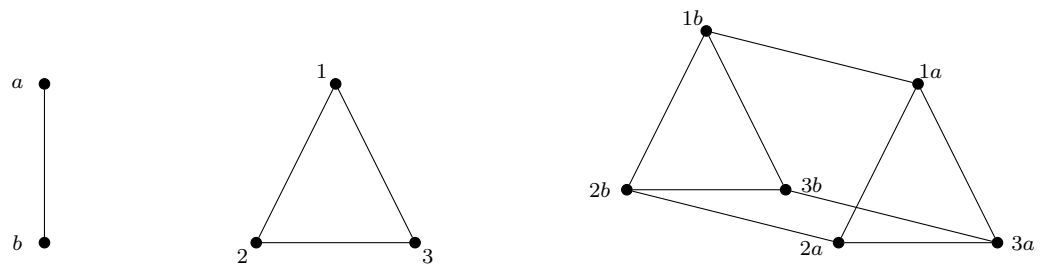
Exemple 1.1. Le prisme est obtenu par produit cartésien de K_2 et K_3 . Le produit cartésien de K_2 et de C_4 , donne lieu au cube. Quant au produit cartésien de P_3 et P_5 permet d'obtenir une grille 3×5 . Voir la Figure 1.6.

Remarque 1.2.

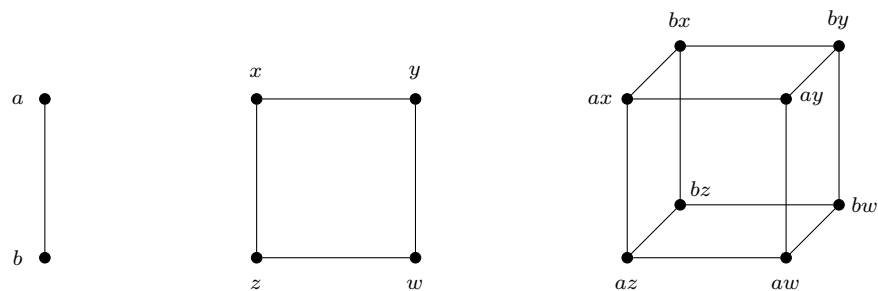
Une grille $n \times m$ est un graphe d'ordre nm obtenue par produit cartésien de deux chaînes élémentaires P_n et P_m .

1.2.8 Métrique dans les graphes

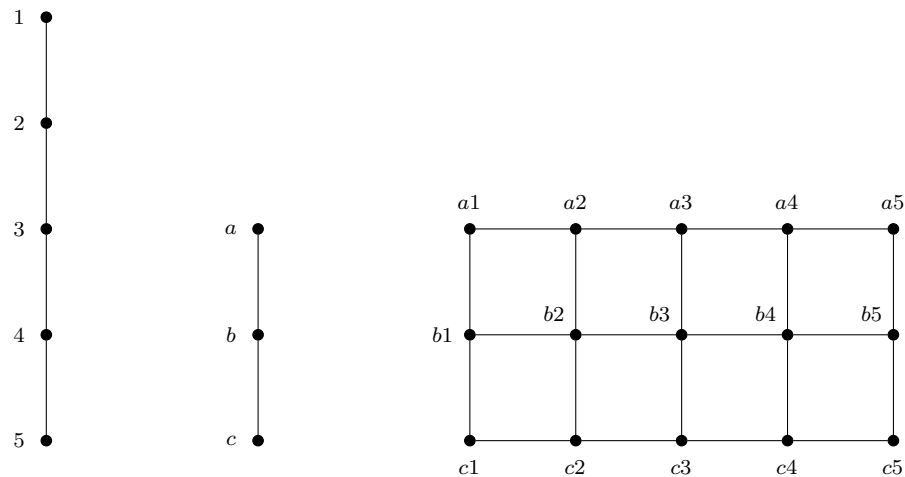
Une chaîne géodésique reliant deux sommets u, v de G est une plus courte chaîne de u à v . La distance entre deux sommets quelconques d'un graphe, est la longueur



Le prisme : $K_3 \square K_2$.



Le cube : $C_4 \square K_2$.



Grille 3×5 : $P_3 \square P_5$.

FIGURE 1.6 – Produit cartésien de graphes.

d'une chaîne géodésique qui les relie. La fonction distance est quant à elle définie comme suit :

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(u, v) \longmapsto d(u, v).$$

Où pour tout $u, v, w \in V$ la fonction d satisfait les axiomes suivants :

1. $d(u, v) \geq 0$, l'égalité est atteinte si et seulement si u et v se confondent ($u = v$).

2. $d(u, v) = d(v, u)$.
3. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (l'inégalité triangulaire).

L'excentricité d'un sommet v , notée $e(v)$, est la distance maximum entre v et tout autre sommet de G

$$\forall v \in V, \quad e(v) = \max \{d(u, v), u \in V\}.$$

Le rayon d'un graphe, noté $r(G)$, est la valeur minimum de l'excentricité de ses sommets

$$r(G) = \min \{e(v), v \in V\}.$$

Le diamètre d'un graphe G que l'on note $D(G)$ est la plus grande distance reliant deux sommets quelconques de G , ce qui correspond à la valeur maximum de l'excentricité des sommets de G .

$$D(G) = \max \{d(u, v), (u, v) \in V \times V\} = \max \{e(v), v \in V\}$$

Un sommet v de G dont l'excentricité est égale au diamètre $e(v) = D(G)$, est dit sommet périphérique. Le sous-graphe engendré par les sommets périphériques de G est appelé périphérie de G .

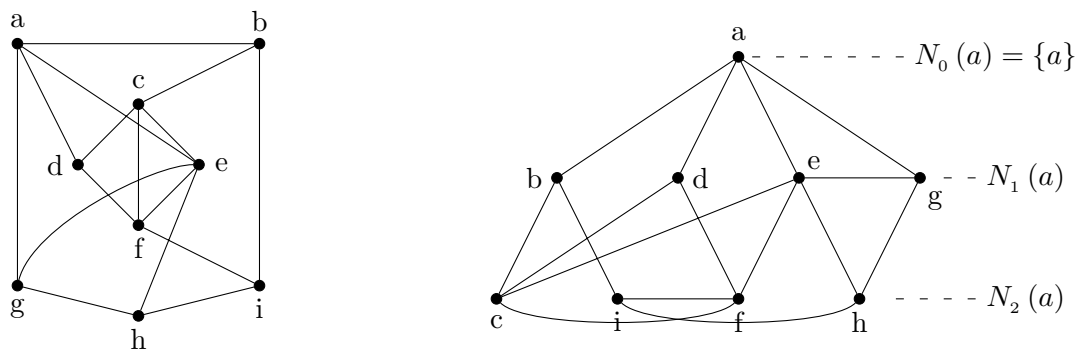


FIGURE 1.7 – Décomposition en couches à partir du sommet a d'un graphe de diamètre 3 et de rayon 2.

On définit l'ensemble $N_i(v)$ comme étant l'ensemble de tous les sommets à distance i de v .

$$N_i(v) = \{u \in V, d(u, v) = i\} \quad \forall i = 0, \dots, e(v).$$

Pour tout sommet $v \in V$ la séquence : $N_0(v), N_1(v), \dots, N_{e(v)}(v)$ définit une partition de l'ensemble des sommets V dite décomposition en niveaux (ou en couches). L'ensemble $N_i(v)$ est appelé $i^{\text{ème}}$ niveau et il contient des sommets qui sont à distance égale de v , voir la Figure 1.7.

Définition 1.10. La distance entre deux sous-graphes H et H' d'un graphe G est définie comme étant la plus petite distance entre deux sommets $u \in V(H)$ et $v \in V(H')$,

$$d(H, H') = \min \{d(u, v) \mid u \in V(H) \text{ et } v \in V(H')\}$$

Exemple 1.2. La distance entre les deux sous-graphes H et H' du graphe de la Figure 1.8 est donnée par les deux sommets a, b et est égale à $d(H, H') = 3$.

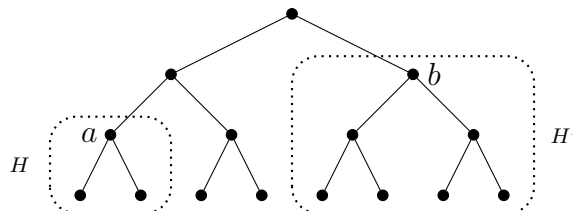


FIGURE 1.8 – Distance entre sous-graphes.

Sous-graphe isométrique et plongement isométrique

Soit H un sous-graphe induit de G . On rappelle que pour toute paire de sommets $u, v \in V$, $d_G(u, v) \leq d_H(u, v)$, où $d_G(u, v)$ et $d_H(u, v)$ désignent respectivement la distance entre u et v dans G et dans H .

Définition 1.11. Un sous-graphe $H = (V(H), E(H))$ de G est dit isométrique si :

$$\forall u, v \in V(H), \quad d_H(u, v) = d_G(u, v).$$

Définition 1.12. Un graphe H admet un plongement isométrique dans G s'il existe une application $\Phi : V(H) \rightarrow V(G)$ telle que pour toute paire de sommets $u, v \in V(H)$ on a

$$d_H(u, v) = d_G(\Phi(u), \Phi(v)).$$

Fonction intervalle

L'intervalle $I(u, v)$ entre une paire de sommets (u, v) de G est un sous-ensemble de sommets qui appartiennent aux chaînes géodésiques reliant u et v .

Définition 1.13. La fonction intervalle, notée I_G , est une application définie par :

$$\begin{aligned} I &: V \times V \longrightarrow \mathcal{P}(V) \\ (u, v) &\longmapsto I(u, v) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \{w \in V, \text{ } w \text{ appartient à une chaîne géodésique reliant } u \text{ et } v\} \\ &= \{w \in V, \text{ tel que : } d(u, v) = d(u, w) + d(w, v)\}. \end{aligned}$$

Soulignons que si le graphe G muni d'une fonction intervalle I n'est pas connexe alors il existe des intervalles vides, et inversement.

Proposition 1.1 [54]. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, muni d'une fonction intervalle I . On a alors pour tout $u, v, w, z \in V(G)$:*

1. $u, v \in I(u, v)$.
2. $I(u, v) = I(v, u)$.
3. Si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \subseteq I(u, v)$.
4. Si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \cap I(w, v) = \{w\}$.
5. Si $w \in I(u, v)$ et $z \in I(u, w)$, alors $w \in I(z, v)$.

Distance de Hamming

L'ensemble des entiers naturels $\{1, \dots, n\}$ est noté $[n]$.

Définition 1.14. La distance de Hamming entre deux mots binaires $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, $\beta = \beta_1 \cdots \beta_n$, notée $H(\alpha, \beta)$, est égale au nombre de bits où ils diffèrent :

$$H(\alpha, \beta) = |\{i \in [n] \mid \alpha_i \neq \beta_i\}|.$$

1.3 Combinatoire énumérative

Nous abordons dans cette section quelques définitions et propriétés de l'algèbre énumérative. Nous mettons d'abord en lumière les coefficients binomiaux ainsi que les coefficients binomiaux généralisés. Nous explorerons par la suite des propriétés de plusieurs suites récurrentes, notamment la suite de Fibonacci, la suite de Lucas, la suite Tribonacci et la suite s -bonacci. Nous concluons cette partie en examinant la représentation d'un entier à l'aide des suites précédemment mentionnées.

1.3.1 Coefficient binomial

Le coefficient binomial est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n il est noté $\binom{n}{k}$ et représente également le $k^{\text{ème}}$ coefficient de x^k dans le développement suivant

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Avec la convention $\binom{n}{0} = 1$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\binom{n}{k} = 0$ pour $n, k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ ou $n < k$.

Les coefficients binomiaux sont les éléments du Triangle de Pascal, voir la Table 1.1, ils satisfont l'identité suivante dite identité de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, n, k \geq 1.$$

Tableau 1.1 – Le triangle de Pascal, pour $n, k \leq 7$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Les coefficients binomiaux satisfont aux récurrences suivantes :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}; \quad n, k \geq 1,$$

et

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k}; \quad n, k \geq 0.$$

1.3.2 Coefficient bi^snomial

Pour $s \geq 1$, $n \geq 0$ deux entiers et $k = 0, 1, \dots, sn$, le coefficient bi^snomial, noté $\binom{n}{k}_s$, est défini comme étant le $k^{\text{ème}}$ coefficient de la fonction génératrice suivante

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^s)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}_s x^k, \quad (1.1)$$

avec $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$ le coefficient binomial usuel et $\binom{n}{k}_s = 0$ pour tout $k > ns$ ou $k \leq 0$. Le coefficient $\binom{n}{k}_s$ correspond au nombre de différentes manières de répartir k balles dans n urnes où chaque urne peut contenir au plus s balles, voir [9, 10] pour plus de propriétés les concernant.

Le coefficient $\binom{n}{k}_s$ satisfait les relations suivantes :

- $\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_s = k} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-1}}{j_s}$,
- $\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k-j}_{s-1}$, (relation de récurrence diagonale).
- $\binom{n}{k}_s = \binom{n-1}{k}_s + \binom{n-1}{k-1}_s + \dots + \binom{n-1}{k-s}_s$, (relation de récurrence longitudinale).
- $\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn-k}_s$, (relation de symétrie).

De manière analogue aux coefficients binomiaux, les coefficients bi^snomiaux peuvent être arrangés dans un tableau connu sous le nom de s -triangle de Pascal [8] dont les éléments peuvent être obtenus par la relation de récurrence longitudinale cités précédemment.

Tableau 1.2 – Le triangle des coefficients *bitrinomiaux*, $\binom{n}{k}_2$, $n, k \leq 7$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	3	2	1	0	0	0
3	1	3	6	7	6	3	1	0
4	1	4	10	16	19	16	10	4
5	1	5	15	30	45	51	45	30
6	1	6	21	50	90	126	141	126
7	1	7	28	77	161	266	357	393

1.3.3 Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci doit son nom au célèbre mathématicien Leonardo Fibonacci, elle a inspiré bon nombre de travaux dans de nombreuses branches des mathématiques. La suite de Fibonacci, notée F_n , est donnée par la relation qui suit

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (1.2)$$

avec les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

Tableau 1.3 – Les nombres de Fibonacci F_n , $0 \leq n \leq 14$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Les nombres de Fibonacci sont également obtenus par la somme des éléments des diagonales ascendantes dans le triangle de Pascal, voir le Tableau 1.1. De plus, le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci vérifie l'identité combinatoire suivante [47]

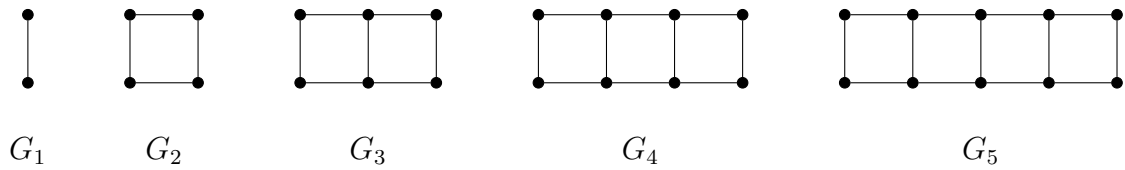
$$F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-i-1}{i}.$$

D'autres identités impliquant les nombres de Fibonacci existent en littérature, l'ouvrage suivant [47] englobe quelques une d'entre elles.

La fonction génératrice de $\{F_n\}_{n \geq 0}$ est donnée par

$$f(y) = \sum_{n \geq 0} F_n y^n = \frac{y}{1 - y - y^2}. \quad (1.3)$$

Les applications de la suite de Fibonacci sont diverses et variées et touchent différents domaines, y compris la physique [61], la biologie, ou encore la cryptographie et le codage [68], voir également [25, 47]. En théorie des graphes par exemple, le $n + 1^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci compte le nombre de couplages parfaits dans le graphe grille $2 \times n$, noté G_n , illustré par la Figure 1.9, où $G_1 \cong K_1$ et $G_2 \cong C_4$, voir [30, Chapitre 11].

FIGURE 1.9 – Grille $2 \times n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

1.3.4 Suite de Lucas

La suite de Lucas fut étudiée par le mathématicien Édouard Lucas au XIXe siècle, elle est donnée par la relation suivante :

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (1.4)$$

avec $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$. La suite de Lucas et la suite de Fibonacci sont liées par la relation suivante :

$$L_{n+1} = F_n + F_{n+2}, \quad n \geq 0.$$

De plus, L_n vérifie

$$L_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}.$$

Tableau 1.4 – Les nombres de Lucas L_n , $0 \leq n \leq 14$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843

Sa fonction génératrice est donnée par :

$$g(y) = \sum_{n \geq 0} L_n y^n = \frac{2-y}{1-y-y^2}. \quad (1.5)$$

1.3.5 Suite Tribonacci

La suite Tribonacci est une suite récurrente d'ordre 3 définie par la relation suivante

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n, \quad n \geq 0 \quad (1.6)$$

avec $T_0 = 0$ et $T_1 = T_2 = 1$. Le Tableau 1.5 résume les valeurs des 15 premiers termes de la suite Tribonacci.

Tableau 1.5 – Les nombres Tribonacci T_n , $0 \leq n \leq 14$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T_n	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1705

Il est bien connu [65] que la fonction génératrice de la séquence (1.6) est

$$T(y) = \sum_{n \geq 0} T_n y^n = \frac{y}{1 - y - y^2 - y^3}.$$

Alladi et Hogatt [2] ont introduit le triangle Tribonacci en 1977, tel qu'il est décrit dans le Tableau 1.6 et dont les éléments $t_{n,k}$ sont construits de la sorte

$$t_{n,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < k \text{ ou } n < 0 \text{ ou } k < 0, \\ 1, & \text{si } k = 0 \text{ ou } n = k, \\ t_{n-1,k} + t_{n-1,k-1} + t_{n-2,k-1}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on somme les éléments des diagonales ascendantes du triangle tribonacci on

Tableau 1.6 – Le triangle Tribonacci, $n, k \leq 10$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	0	0	0	0	0	0
3	1	5	5	1	0	0	0	0	0
4	1	7	13	7	1	0	0	0	0
5	1	9	25	25	9	1	0	0	0
6	1	11	41	63	41	11	1	0	0
7	1	13	61	129	129	61	13	1	0
8	1	15	85	231	321	231	85	15	1

obtient les nombres Tribonacci [2]

$$T_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} T_{n-i,i}.$$

Ce qui permet d'obtenir l'identité suivante [48]

$$T_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^i \binom{n-i-j}{i} \binom{i}{j}.$$

Le triangle Tribonacci n'est pas l'unique triangle à partir duquel on peut obtenir la

séquence des nombres Tribonacci. En effet, par somme des éléments des diagonales ascendantes du triangle *bitrinomial* du Tableau 1.2 on obtient aussi les nombres Tribonacci. D'autres triangles sont suggérés dans [49].

Un q -analogue est une expression mathématique qui dépend d'un paramètre q et qui généralise un théorème, une identité ou une expression bien connue. Tel que, lorsque $q \rightarrow 1$, on retrouve le résultat original.

Nous introduisons le q -analogue de la séquence des nombres Tribonacci (1.6), de la sorte $T_0(q) = 0$, $T_1(q) = T_2(q) = 1$ et

$$T_{n+3}(q) = T_{n+2}(q) + qT_{n+1}(q) + q^2T_n(q), \quad n \geq 0. \quad (1.7)$$

Le q -analogue de la suite Tribonacci ainsi défini correspond aux polynômes tricobsthal [62]. Pour $q = 1$ on obtient la séquence (1.6). Les $n \geq 3$ premières valeurs de (1.7) sont

$$\begin{aligned} T_3(q) &= 1 + q, \\ T_4(q) &= 1 + 2q + q^2, \\ T_5(q) &= 1 + 3q + 3q^2, \\ T_6(q) &= 1 + 4q + 6q^2 + 2q^3, \\ T_7(q) &= 1 + 5q + 10q^2 + 7q^3 + q^4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Soit $T(q, y)$ la fonction génératrice de la séquence précédente. Il est simple de vérifier que $T(q, y)$ est donnée par

$$T(q, y) = \sum_{n \geq 0} T_n(q) y^n = \frac{y}{1 - y - qy^2 - q^2y^3}. \quad (1.8)$$

Nous verrons au Chapitre 4, comment le q -analogue de la suite $\{T_n\}_{n \geq 0}$ ainsi défini traduit la relation entre le sommet de poids nul et le reste des sommets dans le cube Tribonacci.

1.3.6 Suite s -bonacci

La suite de Fibonacci généralisée d'ordre s , également appelée suite s -bonacci ou encore suite multibonacci, est définie pour tout $s \geq 2$ par :

$$F_n^{(s)} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq 0, \\ 1, & \text{si } n = 1, \\ F_{n-1}^{(s)} + F_{n-2}^{(s)} + \cdots + F_{n-s}^{(s)}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où pour tout $n = 2, \dots, k-1$, $F_n^{(s)} = 2^{n-2}$ et pour $n = 2-k, 3-k, \dots, 0$, $F_n^{(s)} = 0$, [59].

En fixant $s = 2$ on obtient la suite de Fibonacci définie précédemment et $s = 3$ correspond à la suite Tribonacci T_n , voir le Tableau 1.7.

Tableau 1.7 – Les 11 premiers nombres s -bonacci, $4 \leq s \leq 8$.

$n \setminus s$	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	4
5	8	8	8	8	8
6	15	16	16	16	16
7	29	31	32	32	32
8	56	61	63	64	64
9	108	120	125	127	128
10	208	236	248	253	256

La fonction génératrice de la suite $\{F_n^{(s)}\}_{n \geq 0}$ est donnée par

$$f^{(s)}(y) = \frac{y}{1 - \sum_{i=0}^{s-1} y^i} \quad (1.9)$$

1.3.7 Représentation d'un entier par les nombres de Fibonacci et de Lucas

Édouard Zeckendorf a établi dans [76] un théorème qui permet de représenter tout entier naturel non nul comme somme finie de nombres de Fibonacci ou de Lucas.

Théorème 1.1. *Pour tout entier $N \geq 0$, N admet une représentation unique de la forme suivante :*

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i F_{i+2},$$

où $\alpha_i \in \{0, 1\}$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$ et $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n-2$.

Le mot binaire $\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$ est appelé code de Zeckendorf pour Fibonacci ou simplement code de Fibonacci. La condition $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ interdit la présence de deux nombres de Fibonacci consécutifs, c'est cette condition et le fait de commencer la suite à partir de F_2 qui garantit l'unicité d'une telle représentation.

Le nombre 86 par exemple s'obtient en sommant les nombres F_{10} , F_8 , F_6 et F_3 . Le nombre 86 peut être obtenu autrement, en effet :

$$86 = 55 + 21 + 5 + 3 + 2,$$

ou encore

$$86 = 34 + 21 + 13 + 8 + 5 + 3 + 2,$$

ces deux représentations contiennent cependant deux nombres de Fibonacci consécutifs.

Théorème 1.2. *Tout entier $N \geq 0$ admet une représentation unique de la forme suivante :*

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_i L_i,$$

où $b_i \in \{0, 1\}$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $b_i b_{i+1} = 0$ pour $0 \leq i \leq n-2$ et $b_0 b_2 = 0$.

Le mot binaire $b_0 \dots b_{n-1}$ est appelé code de Zeckendorf pour Lucas ou code de Lucas. Pour une preuve détaillée du Théorème 1.1 et du Théorème 1.2 voir [18, 19]. La condition $b_i b_{i+1} = 0$ empêche d'utiliser deux nombres de Lucas consécutifs, la seconde condition quant à elle reflète la particularité de la suite de Lucas. Ces deux conditions garantissent l'unicité d'une telle représentation.

Prenons encore une fois l'exemple du nombre 86, en respectant les conditions du Théorème 1.2 86 peut s'écrire de manière unique comme somme des nombres de Lucas suivant : L_9 , L_4 et L_2 .

1.3.8 Représentation d'un entier par les nombres s -bonacci

Le théorème généralisé de Zeckendorf [20] stipule que tout entier naturel N peut être exprimé en terme de nombres s -bonacci. Soit $F_{n+2}^{(s)}$ le plus petit nombre s -bonacci

tel que $N < F_{n+2}^{(s)}$, on a alors

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i F_{i+2}^{(s)}, \tag{1.10}$$

où $\beta_i \in \{0, 1\}$, $0 \leq i \leq n - 1$ et $\beta_i \beta_{i+1} \cdots \beta_{i+k-1} = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n - k$. Le mot binaire $\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}$ est appelé code de Zeckendorf pour s -bonacci ou code s -bonacci. Les cas $s = 2$ et $s = 3$ correspondent respectivement au code de Fibonacci et code Tribonacci, voir le Tableau 1.8.

L'algorithme suivant permet d'obtenir une représentation unique de l'entier N par les nombres s -bonacci. Soit $F_n^{(s)}$ le plus petit nombre s -bonacci tel que $N < F_{n+2}^{(s)}$,

- Étape 1 : Posons $N' := N$ et pour tout $i = 0, \dots, n - 1$, $\beta_i := 0$, aller à l'étape 2.
- Étape 2 : Choisir le plus grand nombre s -bonacci $F_j^{(s)}$ tel que $N' \geq F_j^{(s)}$, aller à l'étape 3.
- Étape 3 : $\beta_j := 1$, $N' := N' - F_j^{(s)}$, aller à l'étape 4.
- Étape 4 : Si $N' \neq 0$ aller à l'étape 2, sinon Terminer.

Tableau 1.8 – Codes s -bonacci des entiers $0 \leq N \leq 14$ pour $s = 2, 3, 4$.

n	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	$F_2^{(4)}$	$F_3^{(4)}$	$F_4^{(4)}$	$F_5^{(4)}$
0	0						0					0			
1	1						1					1			
2	0	1					0	1				0	1		
3	0	0	1				1	1				1	1		
4	1	0	1				0	0	1			0	0	1	
5	0	0	0	1			1	0	1			1	0	1	
6	1	0	0	1			0	1	1			0	1	1	
7	0	1	0	1			0	0	0	1		1	1	1	
8	0	0	0	0	1		1	0	0	1		0	0	0	1
9	1	0	0	0	1		0	1	0	1		1	0	0	1
10	0	1	0	0	1		1	1	0	1		0	1	0	1
11	0	0	1	0	1		0	0	1	1		1	1	0	1
12	1	0	1	0	1		1	0	1	1		0	0	1	1
13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
14	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
15	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1

1.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de revisiter certains concepts fondamentaux de la théorie des graphes et de la combinatoire énumérative. Nous avons exploré diverses notions telles que les graphes, les sous-graphes, la connexité, l'isomorphisme, le produits cartésien, ainsi que les coefficients binomiaux et les suites de Fibonacci, les suites de Lucas et les suites multibonacci. Ces concepts et leur maîtrise sont essentielles pour aborder des sujets plus avancés dans les chapitres à venir.

Chapitre 2

Cube de Fibonacci et généralisation

2.1 Introduction

Le cube de Fibonacci et le cube de Lucas sont des sous-graphes particuliers de l'hypercube, inspirés, comme leurs noms l'indiquent, des célèbres suites de Fibonacci et de Lucas. Leurs caractéristiques structurelles mettent en évidence des identités combinatoires et énumératives qui se manifestent le plus souvent à travers les nombres de Fibonacci et de Lucas.

Nous commençons par rappeler les définitions et les propriétés relatives aux hypercubes. Ensuite, nous présentons en détail les cubes de Fibonacci et de Lucas, en explorant quelques-unes de leurs propriétés fondamentales ainsi que leurs applications spécifiques. Dans la quatrième section, nous établissons une bijection entre l'ensemble des sommets du cube de Lucas et les codes de Zeckendorf représentant les entiers par les nombres de Lucas. Enfin, nous concluons le chapitre en examinant quelques généralisations du cube de Fibonacci.

2.2 Hypercubes

L'hypercube de dimension n , ou le n -cube noté Q_n , est le graphe dont l'ensemble des sommets est formé par les n -uplets d'éléments binaires et deux sommets u et v sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent en une seule composante, autrement dit si $H(u, v) = 1$. L'hypercube de dimension n admet 2^n sommets et $n \cdot 2^{n-1}$ arêtes.

Une des particularités de l'hypercube est qu'il peut être obtenu par produit cartésien.

Propriété 2.1. *Pour tout $n \geq 1$, Q_n est le produit cartésien de Q_{n-1} et K_2 ,*

$$Q_n = Q_{n-1} \square K_2. \quad (2.1)$$

Avec Q_0 un graphe à un sommet correspondant au mot vide λ .

Plus précisément, on obtient Q_n à partir de deux copies de Q_{n-1} , les sommets de la première copie sont préfixés par 1 et ceux de la seconde copies par 0. Chaque sommet est alors relié à la copie qui lui correspond par une arête. En conséquence, les deux copies sont reliées par un couplage parfait, voir la Figure 2.1.

La relation (2.1) de la définition qui précède peut être étendue de la sorte

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n-2} \square K_2 \square K_2 \\ &= \underbrace{K_2 \square K_2 \cdots \square K_2}_{n \text{ fois}}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $m \geq 1$, on a

$$Q_{n+m} = Q_n \square Q_m.$$

Soit $G = (V, E)$ un graphe, si G admet un plongement isométrique dans un hypercube, alors G est appelé cube partiel. Un sommet $x \in V$ est dit médian de $u, v, w \in V$, si $x \in I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)$. Le graphe G est dit médian si chaque triplet $u, v, w \in V$ admet un unique médian.

L'hypercube de dimension n est n -régulier de diamètre et de rayon n sa maille est égale à 4 et pour toute paire de sommets u, v de Q_n il existe $d(u, v)!$ chaînes géodésiques qui les relient [32]. Q_n est Hamiltonien, plus exactement, il admet $2^{n-3}n!$ cycles hamiltonien distincts [66]. De plus, Q_n est un graphe médian, voir également [34] pour plus de propriétés sur l'hypercube.

Les propriétés structurelles et topologiques de l'hypercube font qu'il est considéré comme un outil puissant et fondamental dans la modélisation et la conception de réseaux d'interconnexion et de machines parallèles. Un sommet de Q_n correspond à un processeur et une arête un lien (câble) entre deux processeurs. Un des avantages d'une telle architecture est que pour augmenter la performance d'un réseau, il suffit

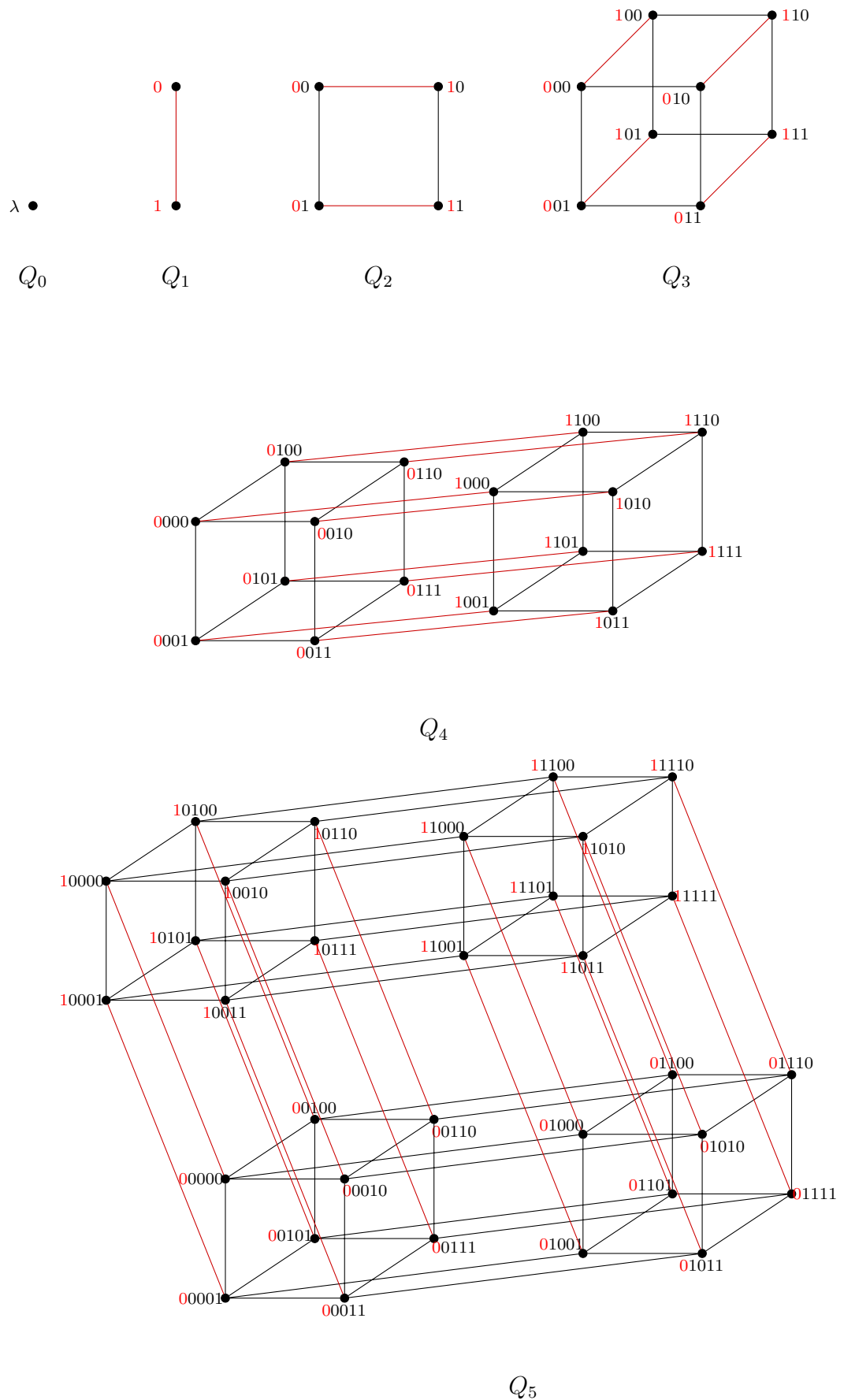


FIGURE 2.1 – Représentations des Hypercubes Q_n , pour $n \leq 5$.

de dupliquer la structure déjà existante en reliant chaque processeur à la copie qui lui correspond. Cette opération est cependant coûteuse, puisque le nombre de processeurs augmente exponentiellement. Des sous-structures de l'hypercube ont alors été proposées afin de pallier à ce problème, parmi eux le cube de Fibonacci, voir [39, 66].

2.2.1 Caractérisation des sous-graphes isomorphes à l'hypercube

Nous abordons dans cette partie, les propriétés relatives aux sous-graphes de Q_n qui sont eux même des hypercubes. Le poids d'un sommet u de Q_n , est égal au nombre de 1 dans le mot binaire qui lui correspond.

Proposition 2.1 [41]. *Pour tout sous-graphe H de Q_n isomorphe à Q_k , il existe une paire unique de sommets de poids minimum noté $b(H)$ et de poids maximum noté $t(H)$. De plus, $b(H)$ et $t(H)$ sont à distance k .*

$b(H)$ et $t(H)$ sont respectivement appelés sommet inférieur et sommet supérieur de H , ils permettent de distinguer H parmi tous les autres sous-graphes de Q_n isomorphes à Q_k . Le graphe H_2 de la Figure 2.2 est un sous-graphe de Q_5 isomorphe à Q_3 . Les sommets de poids minimum et de poids maximum de H_2 sont respectivement 00001 et 11101. Notons que, le sommet 11101 est également le sommet supérieur de H_3 .

Soit H un sous-graphe de Q_n , avec $H \cong Q_k$. On définit le support de H , comme un sous-ensemble d'indices des positions $\{1, \dots, n\}$ où les sommets de H diffèrent :

$$\text{supp}(H) = \{i | \exists u, v \in V(H), u_i \neq v_i\}.$$

Les graphes H_1 et H_3 de la Figure 2.2, sont respectivement des sous-graphes de Q_3 et Q_5 . Avec $H_1 \cong Q_2$ et $H_3 \cong Q_3$. Les supports de ces sous-graphes correspondent aux positions des bits représentées en rouge dans la Figure 2.2 : $\text{supp}(H_1) = \{1, 2\}$, $\text{supp}(H_2) = \{1, 2, 3\}$ et $\text{supp}(H_3) = \{1, 2, 5, \}$.

Proposition 2.2 [52]. *Si H est un sous-graphe de Q_n isomorphe à Q_k , alors on a :*

(a) $|\text{supp}(H)| = k$;

(b) si $i \notin |\text{supp}(H)|$, alors $\forall u \in V(H), u_i = b_i(H) = t_i(H)$;

(c) si $i \in |\text{supp}(H)|$, alors $b(H)_i = 0$ et $t(H)_i = 1$;

(d) $V(H) = \{u = u_1 \cdots u_n \mid \forall i \notin \text{supp}(H), u_i = b(H)_i\}$.

Où $b_i(H)$, $t_i(H)$ désignent respectivement la $i^{\text{ème}}$ composante du mot binaire $b(H)$, $t(H)$.

La proposition 2.2 nous indique que les sommets d'un sous-graphe de Q_n isomorphe à Q_k diffèrent en exactement k positions.

Les Propositions précédentes fournissent un moyen d'énumérer tous les hypercubes dans un sous-graphes de Q_n .

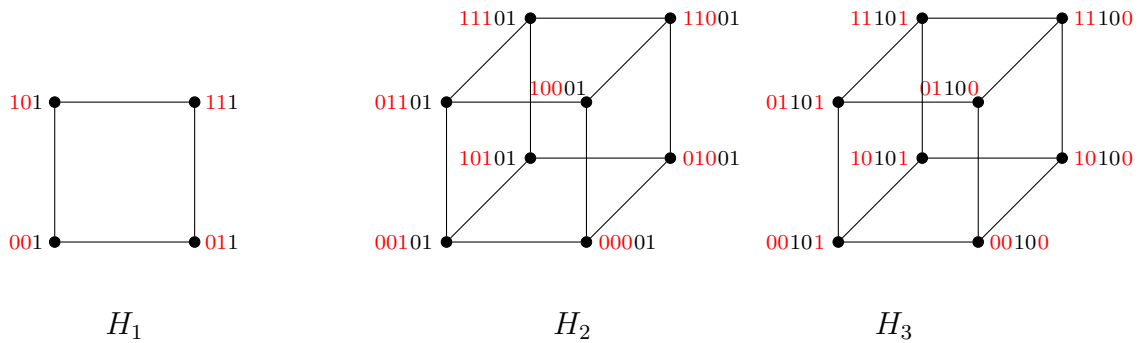


FIGURE 2.2 – Sous-graphes de Q_3 et Q_5

Dans [41], Klavžar détermine le nombre de k -cubes dans l'hypercube de dimension n en utilisant trois approches différentes, ce qui le conduit à établir des interprétations par la théorie des graphes de certaines identités combinatoires connues. Notamment, il montre que $\binom{n}{k}2^{n-k}$ compte le nombre de sous graphes de Q_n isomorphes à Q_k , $0 \leq k \leq n$. Notons ce nombre par $\alpha_k(Q_n)$. Il montre également que

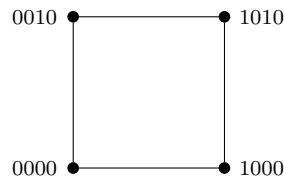
$$\alpha_k(Q_n) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}.$$

En effet, d'après la Proposition 2.1 chaque k -cube de Q_n se distingue par deux sommets : sommet inférieur et sommet supérieur. Chaque sommet de poids i peut être le sommet supérieur de $\binom{i}{k}$ sous-graphes isomorphes à Q_k , et le nombre sommets de poids i est égal à $\binom{n}{i}$, $i \geq k$.

Considérons à présent, deux sommets $u = u_1 \cdots u_n$ et $v = v_1 \cdots v_n$ de Q_n , pour lesquels on définit l'ensemble d'indices de positions $I_{uv} = \{i_1, \dots, i_k\}$ où u et v diffèrent, avec $k = d(u, v)$. Notons que tout sommet $w = w_1 \cdots w_n$ qui appartient à une chaîne géodésique reliant u et v a la particularité suivante : pour tout $i \notin I_{uv}$,

$w_i = u_i = v_i$. Autrement dit, w , u et v possèdent $n - k$ bits identiques, voir la Figure 2.3. De là découle le résultat suivant.

Proposition 2.3 [38]. *Soit Q_n un hypercube. Pour toutes paire de sommets u, v de Q_n , le sous-graphe induit par l'ensemble de sommets $I(u, v)$ est un hypercube de dimension $d(u, v)$.*



H_4

FIGURE 2.3 – Sous-graphe de Q_4 : $Q_4[I(0010, 1000)]$.

2.3 Cube de Fibonacci

Le cube de Fibonacci est introduit en 1993 par Hsu [35], comme un nouveau modèle de réseau d'interconnexion. Le cube de Fibonacci est un sous-graphe de Q_n induit par l'ensemble des mots binaires de longueurs n ne contenant pas deux 1 consécutifs. Il possède des propriétés structurelles, topologiques et combinatoires aussi intéressantes que celles de l'hypercube. Les sept premiers cubes de Fibonacci sont représentés dans la Figure 2.4.

2.3.1 Structure réursive

Un mot de Fibonacci de longueur n est un mot binaire $b_1 \cdots b_n$ tel que $b_i b_{i+1} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, i.e. $b_1 \cdots b_n$ ne contient pas deux 1 consécutifs. Posons \mathbb{F}_n l'ensemble de tous les mots de Fibonacci de longueurs n , \mathbb{F}_n correspond à l'ensemble des codes de Zeckendorf représentant les entiers $\{0, 1, \dots, F_{n+2} - 1\}$ par des nombres de Fibonacci, voir la Section 1.3.7. Le cube de Fibonacci, noté Γ_n , est le graphe défini par l'ensemble des sommets \mathbb{F}_n et deux sommets sont voisins si et seulement si leur distance de Hamming est égale à 1, en d'autres termes, Γ_n est obtenu à partir de Q_n après suppression de tous les sommets contenant deux 1 consécutifs.

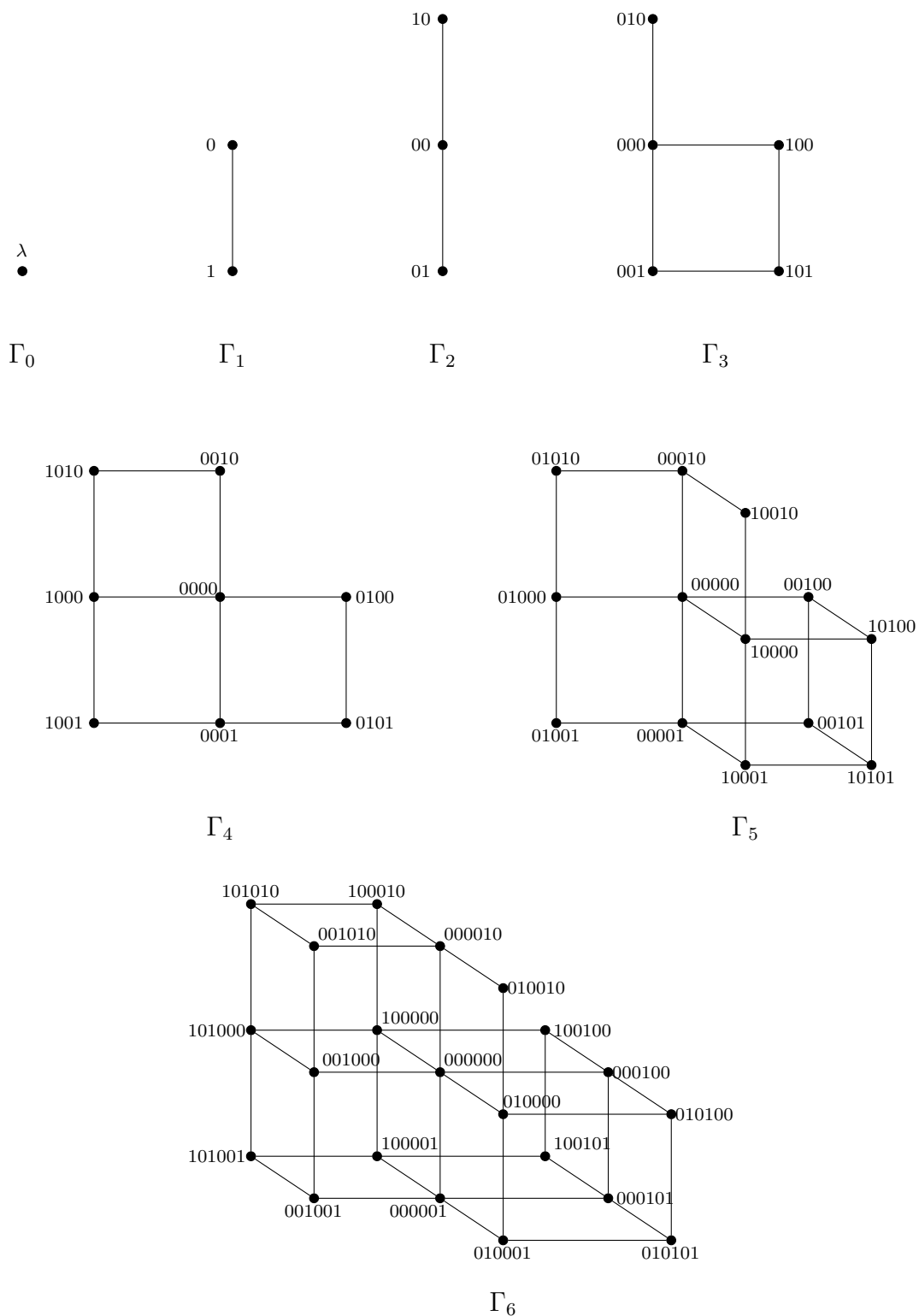


FIGURE 2.4 – Cubes de Fibonacci.

Γ_n peut être construit à partir de Γ_{n-1} et Γ_{n-2} , en rajoutant 0 au début (ou 0 à la fin) de chaque sommet de Γ_{n-1} et 10 au début (ou 01 à la fin) de chaque sommet de

Γ_{n-2} , on écrit alors

$$\Gamma_n = 0\Gamma_{n-1} + 10\Gamma_{n-2}$$

ou encore [56]

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1}0 + \Gamma_{n-2}01$$

Cette procédure est appelée décomposition fondamentale du cube de Fibonacci.

2.3.2 Caractérisation par le graphe simplexe

Le graphe simplexe d'un graphe G noté $\kappa(G)$ est introduit par Bandelt et van de Vel [6], qui le définissent comme le graphe dont l'ensemble des sommets représente l'ensemble de toutes les cliques de G y compris la clique vide et deux cliques sont adjacentes si et seulement si elles diffèrent en un seul sommet, voir la Figure 2.5.

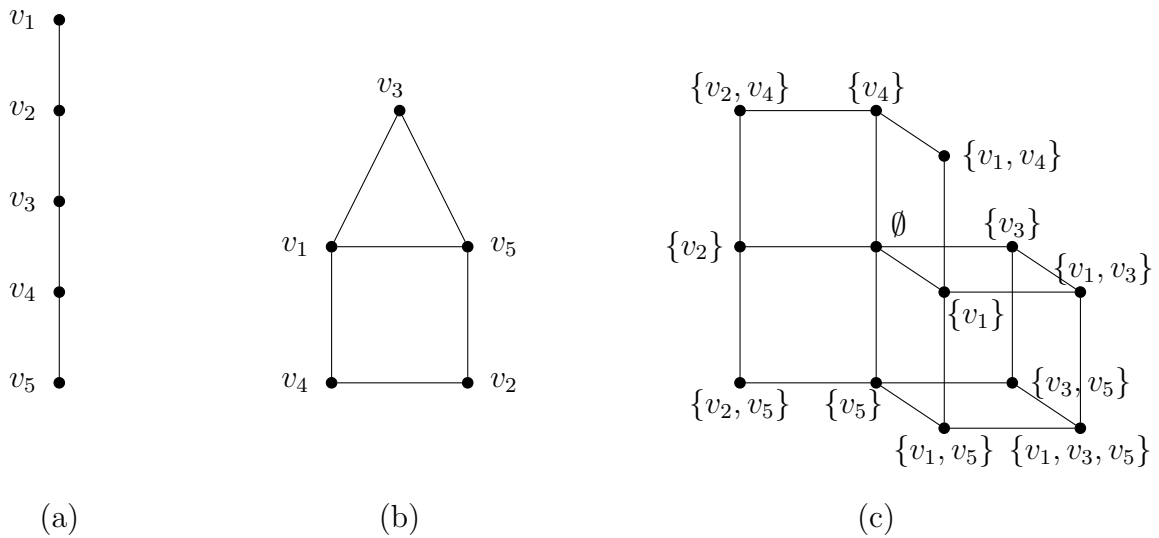


FIGURE 2.5 – (a) : P_5 , (b) : \bar{P}_5 , (c) : graphe simplexe de \bar{P}_5 .

Soit $P_n = v_1 \dots v_n$ une chaîne sans corde. Cabello et al. [21] montrent que pour tout $n \geq 1$, Γ_n est isomorphe au graphe simplexe de \bar{P}_n (le complémentaire de P_n). En effet, pour chaque clique C on définit un vecteur caractéristique $X(C)$ de longueur n dont la $i^{\text{ème}}$ composante est donnée par

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \in C, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$X(C)$ ne contient pas deux 1 consécutifs (car $v_i v_{i+1} \notin E(\bar{P}_n)$, $i = 1, \dots, n - 1$), par conséquent, l'ensemble des cliques de \bar{P}_n est en bijection avec l'ensemble des mots

binaires ne contenant pas deux 1 consécutifs, un exemple pour $n = 5$ est illustré dans la Figure 2.5.

Remarque 2.1. Un stable dans G est une clique dans \overline{G} , ainsi de manière analogue Γ_n est isomorphe au graphe dont l'ensemble des sommets est représenté par l'ensemble de tous les stables de P_n et où deux sommets sont voisins s'ils diffèrent en un seul sommet.

2.3.3 Plongement du cube de Fibonacci dans l'hypercube

Ilić et al. montrent dans [36], que le cube de Fibonacci est un cube partiel. En effet, on a $\forall u, v \in V(\Gamma_n), d_{\Gamma_n}(u, v) = d_{Q_n}(u, v)$. Γ_n admet donc un plongement isométrique dans Q_n , comme l'illustre la Figure 2.6, les cubes de Fibonacci sont représentés en bleu.

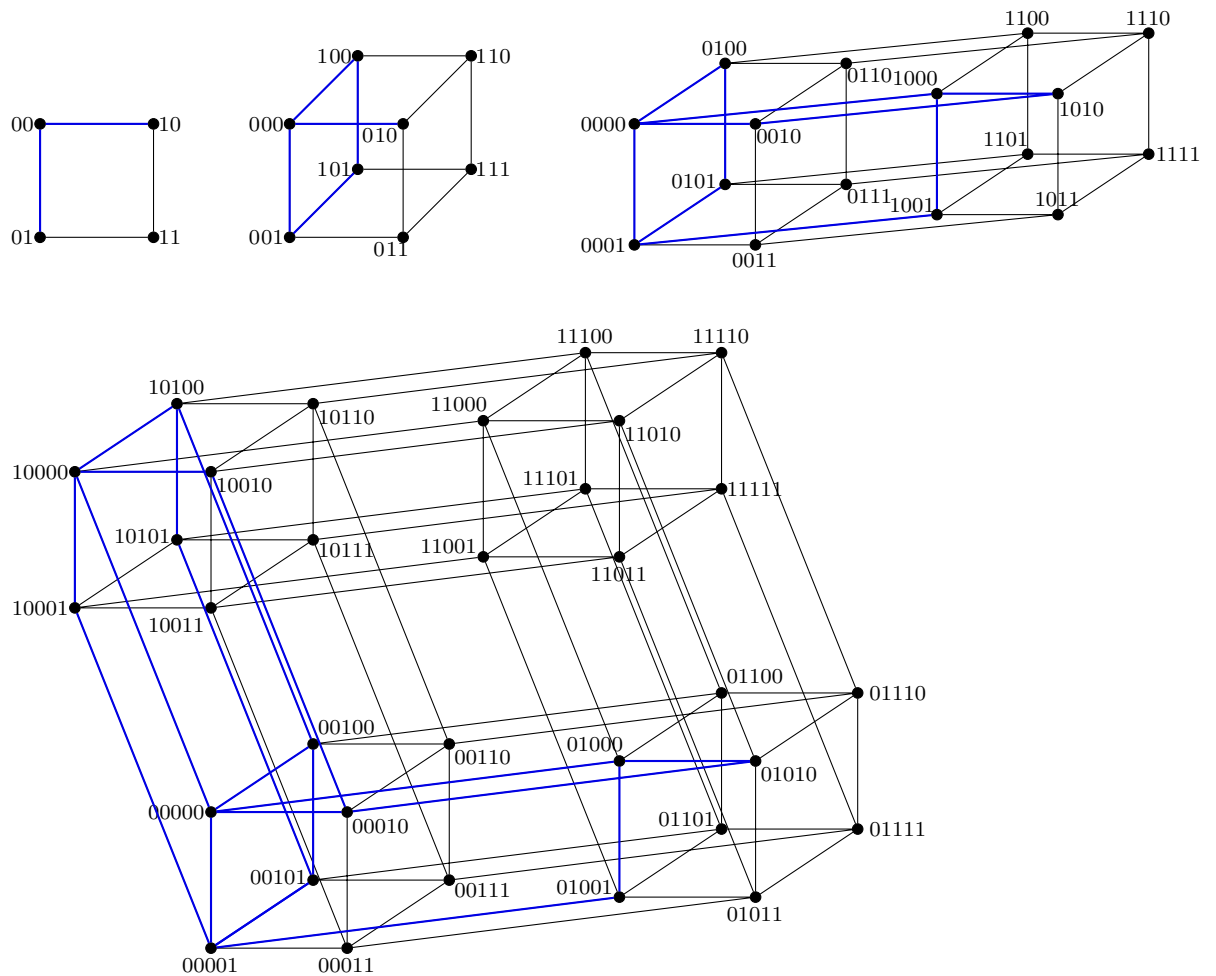


FIGURE 2.6 – Plongement de Γ_n dans Q_n pour $n = 2, 3, 4, 5$.

2.3.4 Propriétés du cube de Fibonacci

Depuis leurs introduction, les cubes de Fibonacci ont été largement étudiés, leur application dans le domaine de l'informatique en tant que modèle de réseaux d'interconnexion et dans le domaine de la chimie théorique (voir la Section 2.3.5) ont inspiré de nombreux travaux qui ont permis de mettre en évidence des propriétés structurelles, combinatoires ou encore topologique, en particulier sur la connectivité, les algorithmes de reconnaissance, la tolérance aux pannes, et bien d'autres. Pour plus de détails voir les références suivantes : [3, 17, 33, 46, 57, 58, 71].

Hsu [35], montre que le diamètre du cube de Fibonacci de dimension n est égale à n , Munarini et Salvi [56] déterminent le rayon de Γ_n qui est égal à $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. L'hamiltonicité du cube de Fibonacci est étudié en 1993 par Cong et al. dans [24], ils démontrent notamment que tous les cubes de Fibonacci contiennent une chaîne hamiltonienne. Zelina établit dans [77] qu'il n'y a que les cubes de Fibonacci d'ordre paire qui contiennent un cycle hamiltonien, plus précisément, pour $n = 3k + 1$ où $k \geq 1$. Autres propriétés des cubes de Fibonacci et que se sont des graphes médians [40] et qu'ils peuvent être reconnus en temps polynomial [71].

Posons $S(\Gamma_n)$ l'ensemble des cycles de longueur 4 du cube de Fibonacci de dimension n . La décomposition fondamentale du cube de Fibonacci permet d'obtenir des relations de récurrences notamment sur le nombre d'arêtes et sur le nombre de cycles de longueurs 4 qui sont données par

$$|E(\Gamma_n)| = |E(\Gamma_{n-1})| + |E(\Gamma_{n-2})| + F_n, \quad n \geq 2$$

et

$$|S(\Gamma_n)| = |S(\Gamma_{n-1})| + |S(\Gamma_{n-2})| + |E(\Gamma_{n-2})|, \quad n \geq 2.$$

Klavžar établit les résultats suivants qui expriment le nombre d'arêtes et de cycles de longueurs 4 dans le cube de Fibonacci en termes de nombre de Fibonacci.

Proposition 2.4 [40]. *Pour tout $n \geq 1$*

$$|E(\Gamma_n)| = \sum_{i=1}^n F_i F_{n-i+1}.$$

Et pour tout $n \geq 3$

$$|S(\Gamma_n)| = \sum_{i=1}^{n-2} F_i |E(\Gamma_{n-i-1})|.$$

Le nombre de sommets de poids $w \leq n$ dans Γ_n est déterminé par Mollard [52], il est obtenu par l'expression $\binom{n-w-1}{w}$.

2.3.5 Cube de Fibonacci en Chimie Théorique

Une chaîne hexagonale H_n à n hexagones est un graphe défini récursivement comme suit. Si $n = 1$, alors H_1 est un hexagone i.e. un cycle à six sommets. Pour $n \geq 2$, H_n est obtenu à partir d'une chaîne hexagonale H_{n-1} avec $n - 1$ hexagones en reliant le $n^{\text{ème}}$ hexagone le long d'une arête e du $(n - 1)^{\text{ème}}$ hexagone, où les sommets de e sont de degré 2 dans la chaîne hexagonale H_{n-1} [43], voir la Figure 2.7.

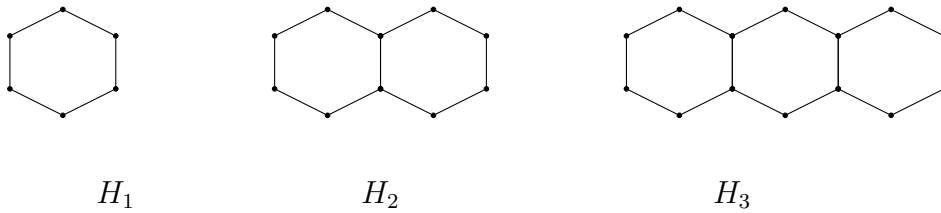


FIGURE 2.7 – Chaines hexagonales.

Remarque 2.2. Un hexagone r d'une chaîne hexagonale qui est adjacent à deux autres hexagones est appelé hexagone intérieur. Un hexagone intérieur contient deux sommets de degré 2. Si ses deux sommets sont adjacents, on dit que r est relié angulairement.

Un fibonacene est une chaîne hexagonale où tous ses hexagones, à l'exception des deux terminaux, sont reliés angulairement. Pour plus de détails sur les concepts de chimie théorique, veuillez consulter les références [5, 70]. La chaîne hexagonale illustrée dans la Figure 2.8 est relié angulairement, ce qui en fait un fibonacene. En revanche, la chaîne H_3 de la Figure 2.7 ne l'est pas.

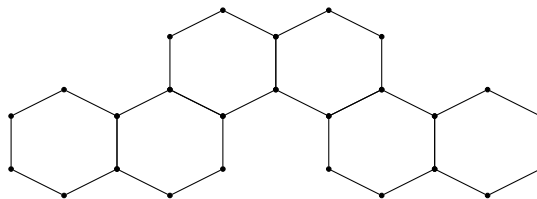


FIGURE 2.8 – Fibonacene.

Remarque 2.3. Les fibonaccenes sont les graphes moléculaires (appelés structures Kékulé) d'une famille d'hydrocarbures aromatiques polycycliques : les benzénoïde de formule chimique $C_{4n+2}H_{2n+4}$ avec $n \geq 1$. Les sommets représentent les atomes de carbones et les arêtes représentent les liaisons entre ces atomes. Les liaisons doubles entre les atomes de carbone sont indiquées par des arêtes doubles. La détermination de toutes les configurations possibles de ces liaisons (toutes les structures Kékulé), correspond à la recherche de tous les couplages parfaits dans le graphe moléculaire (structure Kékulé). Un exemple est le phénanthrène, illustré par la Figure 2.9.

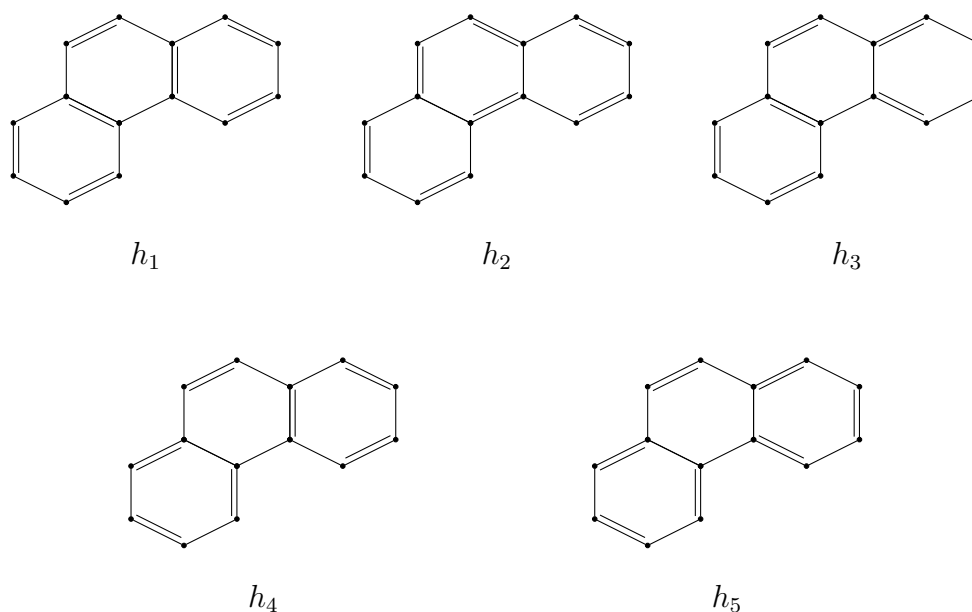


FIGURE 2.9 – Structures kékulé du phénanthrène.

Considérons un graphe G biparti planaire. Le graphe résonance de G noté $R(G)$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble de tous les couplages parfaits de G et deux sommets sont voisins si et seulement si leur différence symétrique est un hexagone de G . Les graphes résonance jouent un rôle important en chimie théorique car ils reflètent la stabilité des molécules.

Klavžar et Žigert [43] établissent une bijection entre l'ensemble des sommets du cube de Fibonacci est l'ensemble des sommets du graphe résonance d'un fibonaccene.

Théorème 2.1 [43]. *Soit G un fibonaccene à n hexagones. Le graphe résonance de G est isomorphe au cube de Fibonacci Γ_n .*

Nous pouvons clairement voir que le graphe résonance du phénanthrène, illustré par la Figure 2.10, correspond bien au cube de Fibonacci Γ_3 .

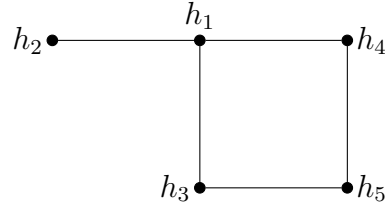


FIGURE 2.10 – Graphe résonance du phénanthrène.

2.4 Cube de Lucas

Le cube de Lucas Λ_n , $n \geq 1$, est introduit en 2001 par Munarini et al. [55], il est défini comme un sous-graphe du cube de Fibonacci engendré par l'ensemble des mots binaires qui ne contiennent pas deux 1 consécutifs de manière circulaire, c'est-à-dire qui ne commencent pas et ne se terminent pas à la fois par un 1. Un mot de Fibonacci $b_1 \cdots b_n$ qui vérifie la condition $b_1 b_n = 0$ est appelé mot de Lucas. Les six premiers cube de Lucas sont représentés dans la Figure 2.11.

Le cube de Lucas et le cube de Fibonacci sont étroitement liés, de ce fait ils sont souvent étudiés conjointement. Le cube de Lucas admet une décomposition en deux sous-graphes isomorphes à Γ_{n-1} et Γ_{n-3} engendrés respectivement par les sommets qui commencent par 0 et les sommets qui commencent par 1 et se terminent par 0, on écrit

$$\Lambda_n = 0\Gamma_{n-1} + 10\Gamma_{n-3}0, n \geq 3. \quad (2.2)$$

Le processus de construction du cube de Lucas à partir du cube de Fibonacci est appelé décomposition fondamentale du cube de Lucas. Le nombre de sommets de Λ_n est égal au $n^{\text{ème}}$ nombre de Lucas L_n . En effet, de (2.2), on a pour tout $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} |V(\Lambda_n)| &= F_{n+1} + F_{n-1} \\ &= L_n. \end{aligned}$$

Avec $|V(\Lambda_1)| = 1$ et $|V(\Lambda_n)| = 3$.

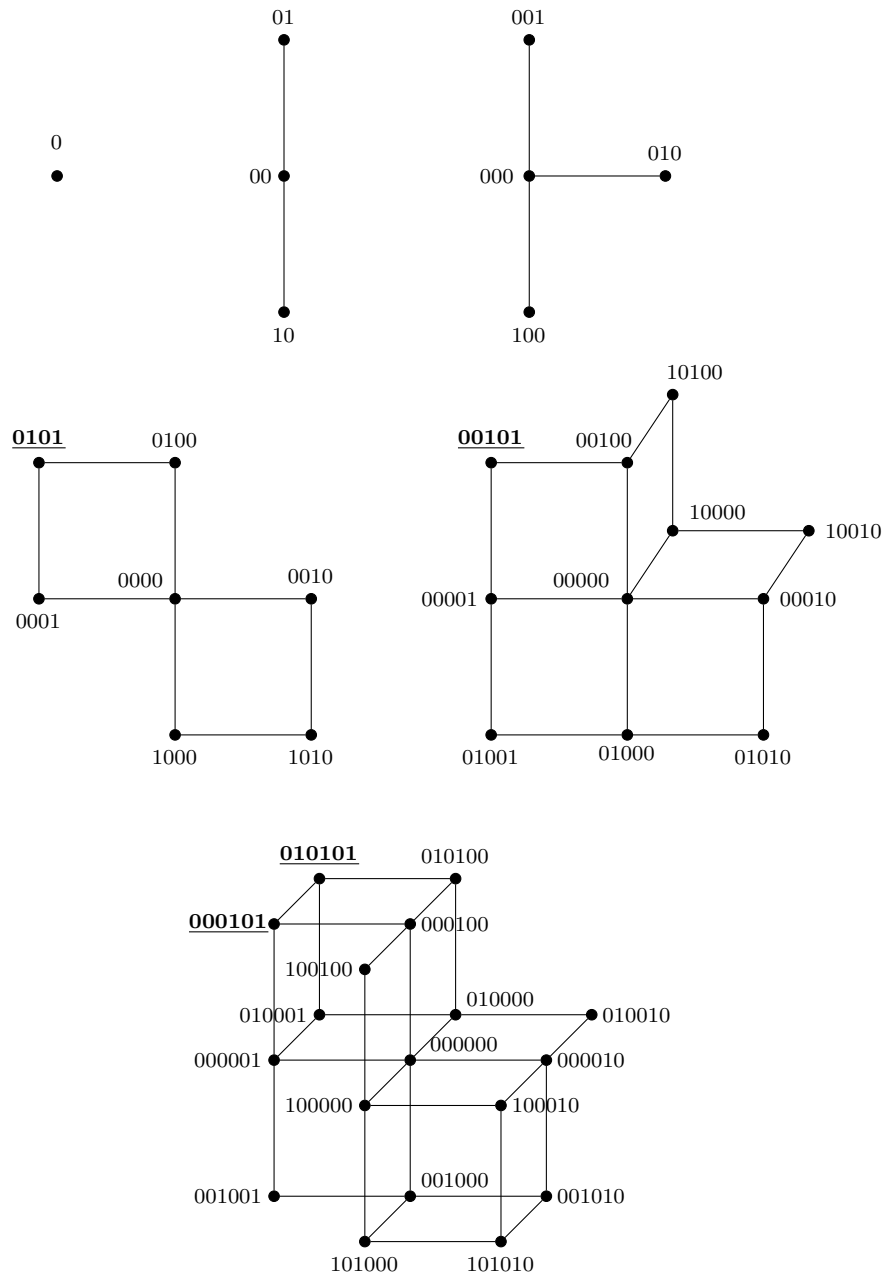


FIGURE 2.11 – Représentation de Λ_n pour $n \leq 6$, les sommets qui ne correspondent pas au code de Lucas sont soulignés et représentés en gras.

2.4.1 Caractérisation de Λ_n par le graphe simplexe

Tout comme le cube de Fibonacci, le cube de Lucas se définit par un graphe simplexe. Plus précisément, $\Lambda_n \cong \kappa(\overline{C_n})$, pour tout $n \geq 2$, où C_n est un cycle sans corde.

Plus encore, soit le graphe dont l'ensemble des sommets est constitué de tous les stables de C_n , incluant le stable vide, et où deux sommets sont adjacents si les stables

correspondants diffèrent exactement en un seul sommet. Ce graphe ainsi défini est isomorphe au cube de Lucas Λ_n . Un exemple, pour $n = 5$, est illustré par la Figure 2.12.

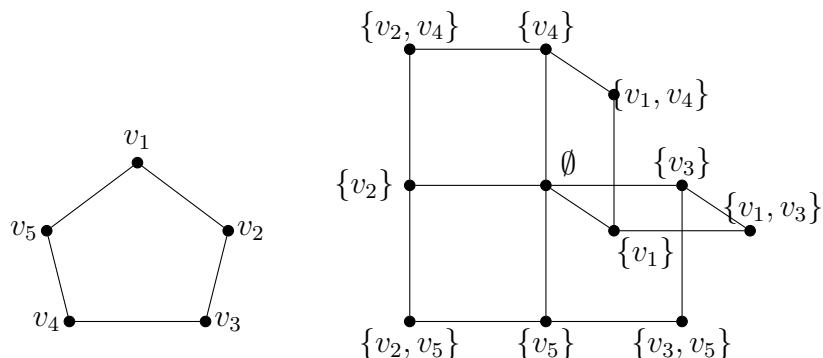


FIGURE 2.12 – Construction de Λ_5 à partir de C_5 .

2.4.2 Plongement du cube de Lucas dans l'hypercube

Ilić et Klavžar [37] montrent que le cube de Lucas est un sous-graphe isométrique de l'hypercube. Nous illustrons le plongement des six premiers cubes de Lucas dans l'hypercube de même dimension dans la Figure 2.13, les cubes de Lucas sont représentés en bleu.

2.4.3 Propriétés des cubes de Lucas

Le cube de Lucas présente de nombreuses propriétés aussi intéressantes que le cube de Fibonacci. Klavžar [40] a montré que le cube de Lucas est un graphe médian, tandis que Taranenko [69] a développé un algorithme polynomial permettant de reconnaître si un graphe est un cube de Lucas. Cependant, Munarini et al. [55] ont démontré que le cube de Lucas n'est cependant pas hamiltonien.

Tout comme le cube de Fibonacci, le cube de Lucas trouve des applications en chimie théorique. Zigert et Berlic ont montré dans [81] que le cube de Lucas est le graphe résonance d'une famille de graphe apparenté à la classe des fibonaccenes non cyclique, également appelée "cyclic polyphenanthrene".

Le nombre d'arêtes du cube de Lucas s'obtient par la formule de récurrence suivante :

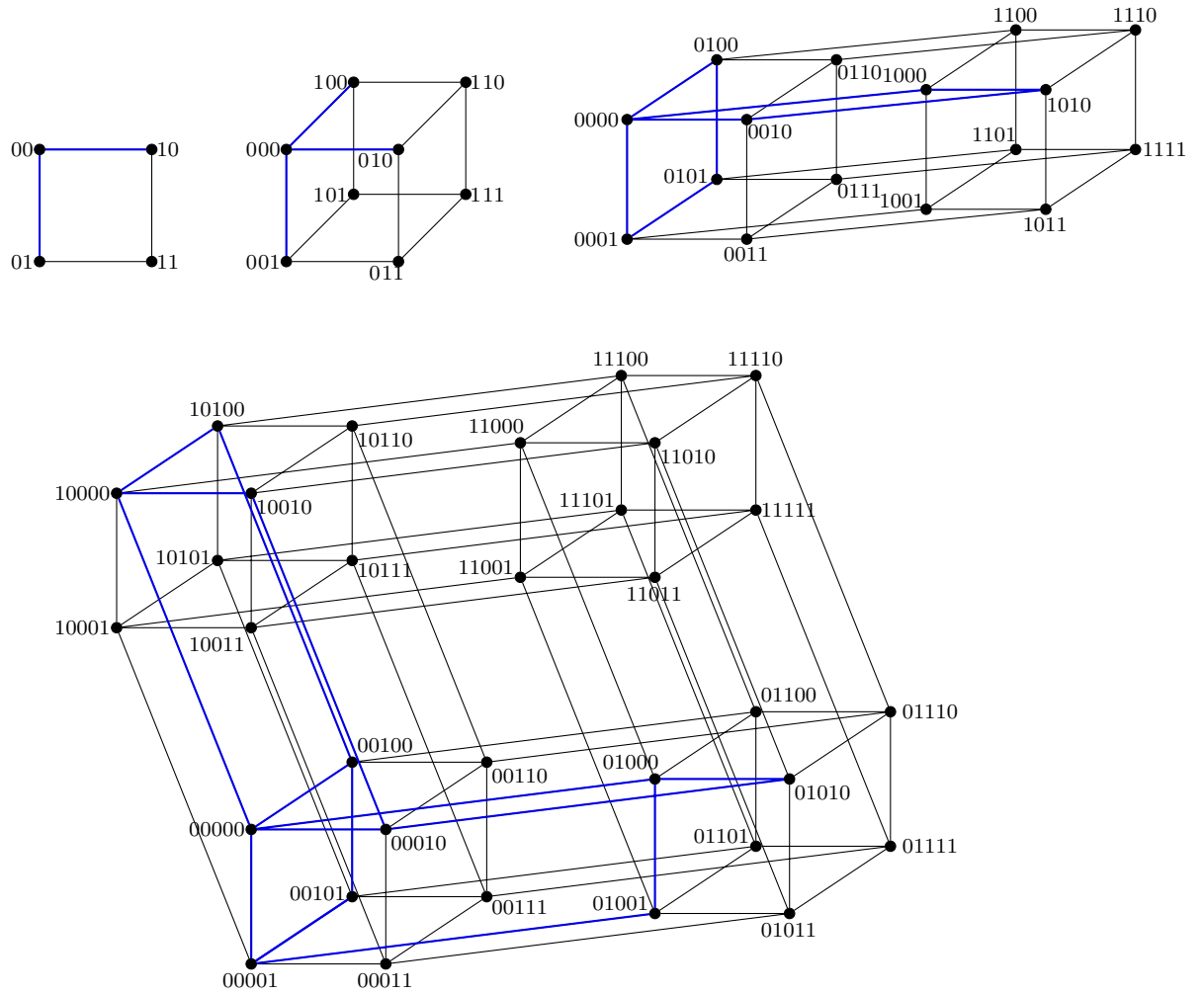


FIGURE 2.13 – Plongement de Λ_n dans Q_n pour $n = 2, 3, 4, 5$.

$|E(\Lambda_1)| = 1$ et pour tout $n \geq 2$,

$$|E(\Lambda_n)| = |E(\Gamma_{n-1})| + |E(\Gamma_{n-3})| + F_{n-1}.$$

Le nombre de cycle de longueur 4 est donné par, $|S(\Lambda_1)| = 0$ et

$$|S(\Lambda_n)| = |S(\Gamma_{n-1})| + |S(\Gamma_{n-3})| + |E(\Gamma_{n-3})|, \quad n \geq 2.$$

Où $E(\Lambda_n)$ désigne l'ensemble d'arêtes dans Λ_n et $S(\Lambda_n)$ désigne l'ensemble de cycles de longueur 4.

Proposition 2.5 [40]. *Pour tout $n \geq 2$, on a*

$$|E(\Lambda_n)| = \sum_{i=1}^{n-1} F_i L_{n-i-1}.$$

Pour tout $n \geq 5$,

$$|S(\Lambda_n)| = \sum_{i=0}^{n-4} L_i |E(\Gamma_{n-i-3})|.$$

2.5 Code de Zeckendorf et mot de Lucas

En comparant entre l'ensemble des sommets du cube de Lucas, également appelé ensemble des mots de Lucas, et celui de l'ensemble des codes de Lucas, vu au chapitre précédent, nous constatons que certains mot de Lucas ne correspondent à aucun codes de Lucas et inversement, voir le Tableau 2.1 et la Figure 2.11, à l'instar du cube de Fibonacci où l'ensemble des sommets du cube de Fibonacci est en bijection avec les codes de Fibonacci.

Ceci nous a motivé à élaborer une bijection entre l'ensemble des sommets du cube de Lucas et l'ensemble des codes de Lucas. Rappelons que pour obtenir un code de Lucas de longueur n il suffit d'ajouter des 0 à gauche, le code binaire ainsi obtenu est lu de gauche à droite.

Entier	Code de Lucas	Entier	Code de Lucas
1	10	11	100000
2	01	12	100010
3	100	13	100001
4	1000	14	100100
5	1010	15	101000
6	1001	16	101010
7	10000	17	101001
8	10010	18	1000000
9	10001	19	1000010
10	10100	20	1000001

Tableau 2.1 – Code de Lucas des 20 premiers entiers.

Posons pour tout $n \geq 0$:

\mathbb{F}_n : L'ensemble des codes de Fibonacci de longueur n ;

\mathcal{L}_n : L'ensemble des codes de Lucas de longueur n ;

\mathcal{C}_n : L'ensemble des sommets du cube de Lucas de longueur n ;

$\mathcal{A}_n = \{\alpha_{n-1}0; \alpha_n \in \mathbb{F}_n\}$: l'ensemble des codes de Fibonacci qui se termine par 0.

Théorème 2.2 [1]. *Pour tout entier $n \geq 0$, la fonction $f : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$ est définie pour $\beta_n \in \mathcal{A}_n$, par*

$$f(x_n) = \begin{cases} 10\beta_{n-4}01 & \text{pour } x_n \text{ de la forme } 0\beta_{n-4}101, \\ x_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

est bijective.

Preuve. Montrons que f est bien définie et bijective. Pour montrer qu'elle est bien définie il suffit d'observer que $f(x_n)$ est dans \mathcal{L}_n pour tout $x_n \in \mathcal{C}_n$.

A présent, nous montrons que f est injective. Soit x_n et y_n deux sommets du cube de Lucas de dimension n , tel que $f(x_n) = f(y_n)$.

Si $x_n \neq 0\beta_{n-4}101$ et $y_n \neq 0\alpha_{n-4}101$, alors $f(x_n) = f(y_n)$ implique que $x_n = y_n$.

Si $x_n = 0\beta_{n-4}101$ et $y_n = 0\alpha_{n-4}101$, alors $f(x_n) = f(y_n)$ implique $10\beta_{n-4}01 = 10\alpha_{n-4}01$, ce qui donne $\beta_{n-4} = \alpha_{n-4}$ et ainsi $x_n = y_n$.

Si $x_n = 0\beta_{n-4}101$ et $y_n \neq 0\alpha_{n-4}101$, alors $f(x_n) = f(y_n)$ donne $10\beta_{n-4}01 = y_n$ ce qui contredit $y_n \in \mathcal{C}_n$. Par conséquent, f est injective.

Enfin, nous montrons que f est surjective. Soit $y_n \in \mathcal{L}_n$ un code de Lucas de longueur n . Alors y_n est un code de Fibonacci de longueur n et $y_n \neq \alpha_{n-3}101$, $\alpha_{n-3} \in \mathcal{A}_{n-3}$. Nous affirmons que $\mathcal{L}_n = \mathbb{F}_n \setminus \{\alpha_{n-3}101, \alpha_{n-3} \in \mathcal{A}_{n-3}\}$, avec $|\mathbb{F}_n| = F_{n+2}$ et $|\mathcal{A}_n| = F_{n+1}$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n| &= |\mathbb{F}_n| - |\{\alpha_{n-3}101, \alpha_{n-3} \in \mathcal{A}_{n-3}\}| \\ &= F_{n+2} - F_{n-2} \\ &= L_n. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

2.6 Généralisation du cube de Fibonacci

Au début des années 90, Liu et Hsu [50] ont introduit la première généralisation du cube de Fibonacci. Ils considèrent un sous-graphe de Q_n auquel on supprime tous les sommets contenant s 1 consécutifs. Le graphe ainsi obtenu est appelé cube de Fibonacci d'ordre s . Depuis lors, plusieurs autres généralisations ont été proposées.

Dans ce qui suit, nous évoquons quelques-une de ces généralisations. Pour une liste de références complémentaire, veuillez consulter [27, 28, 29, 36, 37, 45, 50, 53, 72, 75].

Posons B_n l'ensemble des mots binaires de longueur n , pour tout $n \geq 1$, avec $B_0 = \{\lambda\}$, λ désigne le mot vide.

2.6.1 Cube s -bonacci

On appelle mot s -bonacci un mot binaire qui ne contient pas s 1 consécutifs. Posons $\mathcal{F}_n^{(s)}$ l'ensemble des mots s -bonacci de longueur n , $n \geq 0$, $s \geq 2$, où $\mathcal{F}_0^{(s)} = B_0$. L'ensemble $\mathcal{F}_n^{(s)}$ correspond à l'ensemble des codes de Zeckendorf représentant les entiers $\{0, 1, \dots, F_{n+2}^{(s)} - 1\}$ par la suite s -bonacci.

Le cube s -bonacci de dimension n , noté $\Gamma_n^{(s)}$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est égal à l'ensemble $\mathcal{F}_n^{(s)}$ et deux sommets sont adjacents si et seulement si leur distance de Hamming est égale à 1. En d'autres termes, $\Gamma_n^{(s)}$ est un sous-graphe de Q_n engendré par les mots binaires ne contenant pas s 1 consécutifs. L'ensemble des sommets de $\Gamma_n^{(s)}$ est noté $V_n^{(s)}$ avec $|V_n^{(s)}| = F_{n+2}^{(s)}$, et l'ensemble des arêtes est noté $E_n^{(s)}$. La Figure 2.14, montre la structure de $\Gamma_4^{(s)}$, pour $s = 2, 3, 4$.

Structure récursive

La concaténation de deux mots binaires α, β est notée $\alpha\beta$. En particulier, 1^s est le mot binaire obtenu en concaténant s fois 1. Soit A un ensemble de mots binaires, $\alpha A = \{\alpha u | u \in A\}$. L'ensemble des sommets $V_n^{(s)}$, $s \geq 2$, $n \geq 0$, peut être partitionné en s sous-ensembles $A_{n,i}^{(s)}$, contenant les sommets qui commencent par i 1 consécutifs, avec $i = 0, \dots, s - 1$. Pour tout $n \geq s \geq 2$, $A_{n,i}^{(s)}$ est défini de la sorte

$$\begin{aligned} A_{n,i}^{(s)} &= \{1^i 0 \alpha, \alpha \in \mathcal{F}_{n-i-1}^{(s)}\} \\ &= \begin{cases} 0 \left(\bigcup_{i=0}^{s-1} A_{n-1,i}^{(s)} \right), & \text{pour } i = 0, \\ 1^i A_{n-i,0}^{(s)}, & \text{pour } 1 \leq i \leq s - 1, \end{cases} \end{aligned}$$

et pour tout $0 \leq n \leq s - 1$,

$$A_{n,i}^{(s)} = \begin{cases} B_0, & \text{si } n = i = 0, \\ 0B_{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \text{ et } i = 0, \\ 1^n B_0, & \text{si } n = i \neq 0, \\ 1^i 0 B_{n-i-1}, & \text{si } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq i \leq n - 1, \\ \emptyset, & \text{si } i \geq n + 1. \end{cases}$$

Le cube s -bonacci de dimension n contient des copies isomorphes à $\Gamma_{n-i-1}^{(s)}$, engendrées chacune par l'ensemble $A_{n,i}^{(s)}$, pour tout $0 \leq i \leq s - 1$, qui sont reliés entre

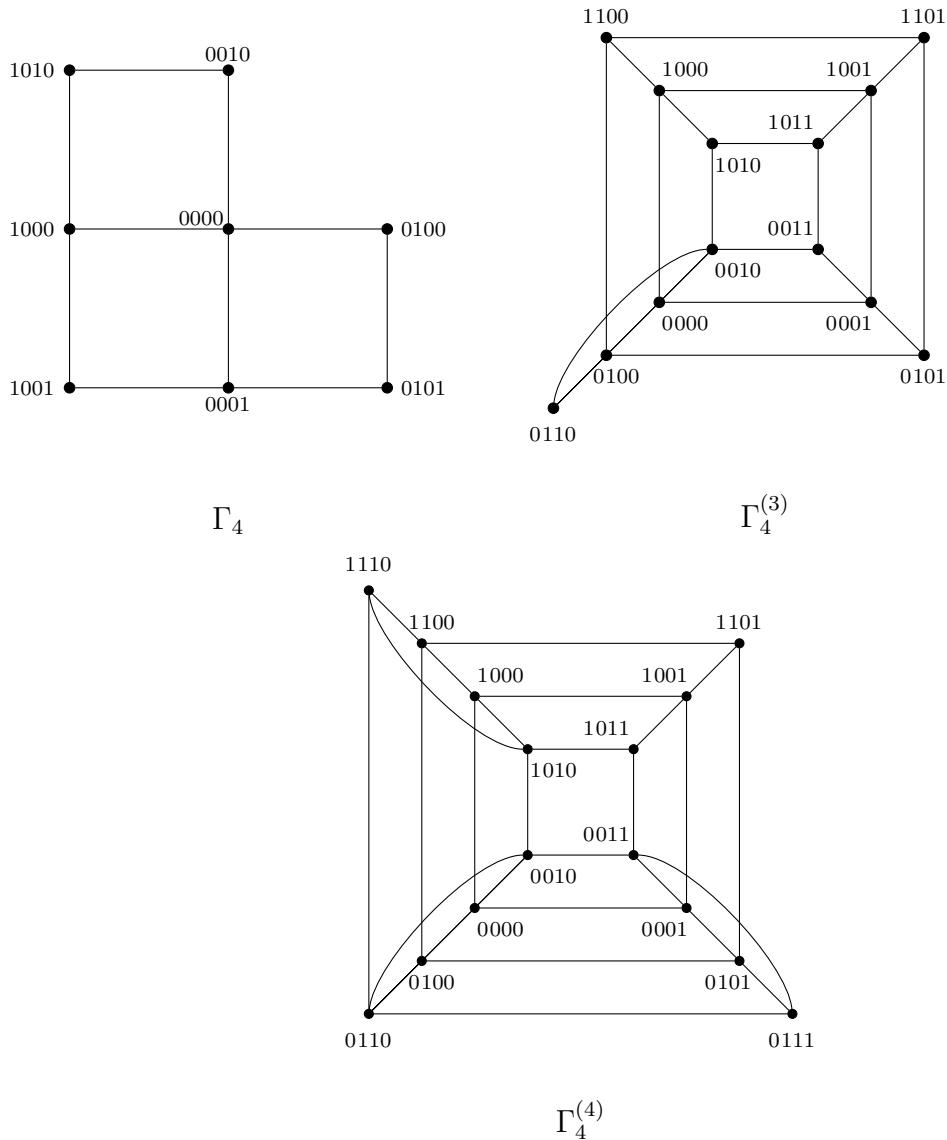


FIGURE 2.14 – Les cubes s -bonacci, pour $n = 4$, $s = 2, 3, 4$.

elles par un couplage parfait.

Proposition 2.6 [51]. *Tout sommet de $\Gamma_{n-i}^{(s)}$ est adjacent à un unique sommets de $\Gamma_{n-j}^{(s)}$, $1 \leq j < i \leq s$.*

Lieu et al. [51] montrent que pour tout $s \geq 2, n \geq 1$, $\Gamma_n^{(s)}$ contient une chaîne hamiltonienne. Ils montrent également que si $F_{n+2}^{(s)}$ est paire, alors $\Gamma_n^{(s)}$ admet un cycle hamiltonien, pour tout $n, s \geq 2$. Sinon, $\Gamma_n^{(s)}$ admet un cycle hamiltonien de longueur $F_{n+2}^{(s)} - 1$.

Remarque 2.4. Le cube s -bonacci est également connu dans la littérature sous le nom de cube de Fibonacci généralisé d'ordre s . Il est défini à partir de la suite

de Fibonacci généralisée présentée dans le Chapitre 1. Pour distinguer le cube de Fibonacci généralisé d'ordre s des autres généralisations, nous avons choisi de le nommer : cube s -bonacci, en référence à la suite s -bonacci.

2.6.2 Cube de Fibonacci étendu

En 1997, Wu [75] propose une nouvelle version plus élargie du cube de Fibonacci, appelée cube de Fibonacci étendu (Extended Fibonacci cube). A l'encontre des cubes de Fibonacci dont uniquement 1/3 d'entre eux sont hamiltoniens, les cubes de Fibonacci étendu sont tous hamiltoniens. Rappelons que l'hamiltonicité d'un graphe joue un rôle crucial dans le choix de ce dernier comme structure topologique dans l'architecture des réseaux informatiques, puisqu'elle permet d'optimiser la connectivité, le routage, la performance ou encore la robustesse des réseaux informatiques, voir [4, 31, 78]. Les cubes de Fibonacci étendu conservent certaines des propriétés du Cube de Fibonacci et ils émulent efficacement des algorithmes d'hypercube .

Le cube de Fibonacci étendu est noté Γ_n^i , $0 \leq i \leq n$, il est défini de la sorte :

Définition 2.1. On appelle $i^{\text{ème}}$ cube de Fibonacci étendu, $i \leq n$, le sous-graphe de Q_n induit par l'ensemble des sommets $V_n^i = V(\Gamma_n^i)$ défini par :

$$V_{n+2}^i = 0V_{n+1}^i + 10V_n^i,$$

avec $V_i^i = B_i$ et $V_{i+1}^i = B_{i+1}$.

Nous pouvons constater que $\Gamma_i^i \cong Q_i$, $\Gamma_{i+1}^i \cong Q_{i+1}$ et $\Gamma_n^0 \cong \Gamma_n$, voir Figure 2.15.

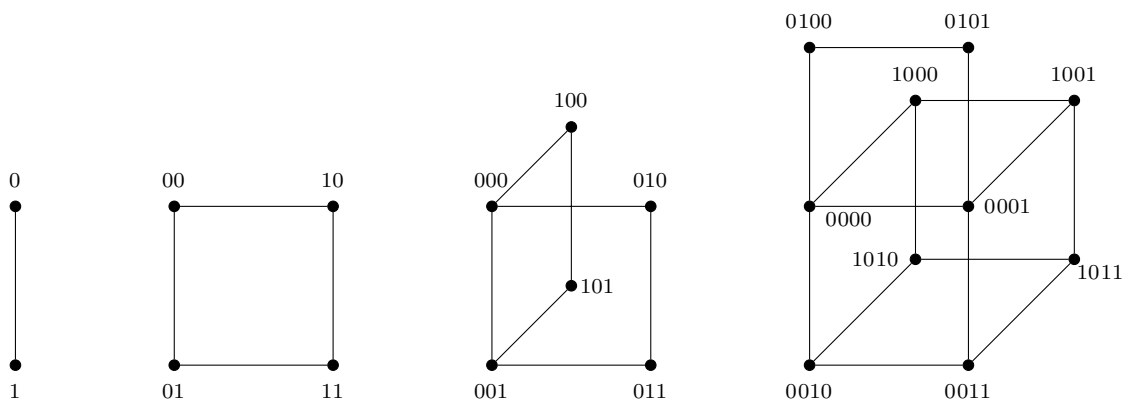


FIGURE 2.15 – Cube de Fibonacci étendu Γ_n^1 pour $n = 3, 4, 5, 6$.

Whitehead et Salvi [74] montrent que Γ_n^i est le produit cartésien du cube de Fibonacci Γ_{n-i} et de l'hypercube Q_i . Une des propriétés du produit cartésien de graphe

est que si G et H possèdent une chaîne hamiltonienne alors le graphe obtenu par produit cartésien de G et H contient un cycle hamiltonien [38]. Comme le cube de Fibonacci et l'hypercube possèdent tout deux une chaîne hamiltonienne il s'en suit que $\Gamma_n^{(i)}$ est hamiltonien. Le cube de Fibonacci étendu est également un graphe médian [40].

2.6.3 (p, r) -Cube de Fibonacci

Une autre généralisation plus élargie et qui englobe les cubes de Fibonacci, est celle proposée par Egiazarian et Astola dans [29], appelée (p, r) -cube de Fibonacci. Le (p, r) -cube de Fibonacci, noté $\Gamma_n^{(p,r)}$, $p, r \leq n$, est le graphe induit par l'ensemble des mots binaires de longueur n qui contiennent au plus $r - 1$ consécutifs et au moins p zéros entre deux séquences contenant au plus $r - 1$. Notons que $\Gamma_n^{(1,n)}$ correspond à l'hypercube de dimension n , $\Gamma_n^{(1,1)}$ correspond au cube de Fibonacci et $\Gamma_n^{(1,s-1)}$ correspond au cube s -bonacci. Un exemple est illustré par la Figure 3.1, pour $p = 2, r = 1$ et $n = 0, \dots, 6$.

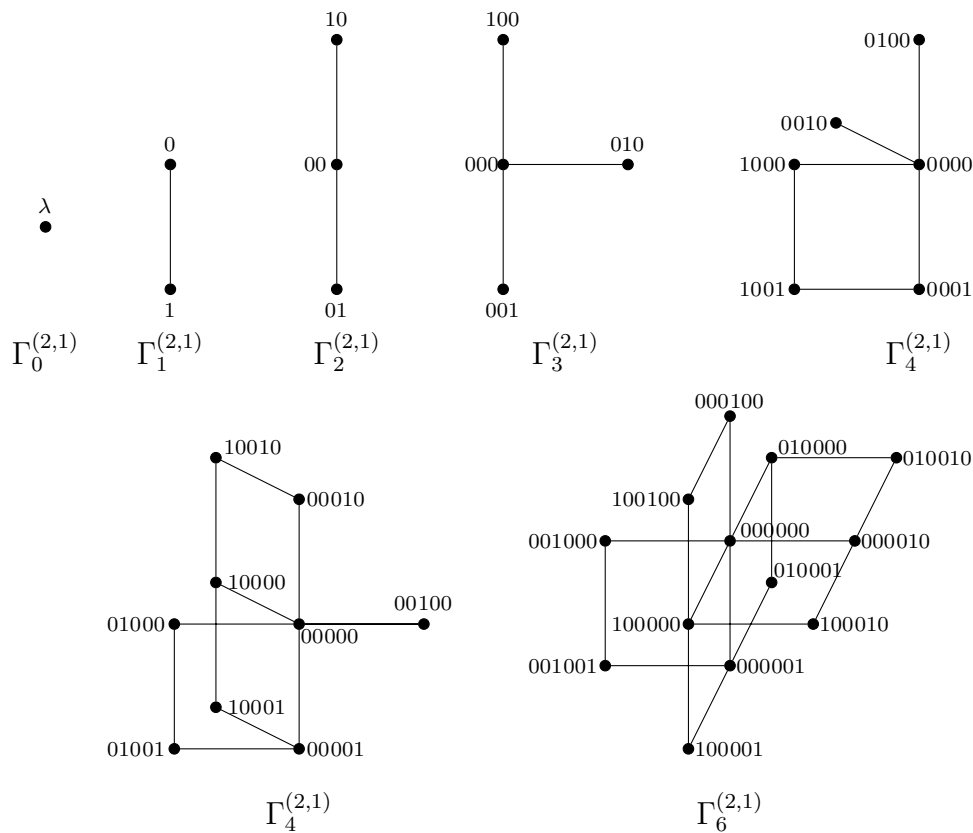


FIGURE 2.16 – $(2, 1)$ -cube de Fibonacci de dimension $n = 0, \dots, 6$.

2.6.4 Cube de Fibonacci généralisé

Le cube de Fibonacci généralisé proposé par Klavžar et *al.* dans [36], est un sous-graphe de Q_n induit par les sommets qui ne contiennent pas le mot binaire f comme sous séquence, on le note $Q_n(f)$. Ainsi le cube s -bonacci de dimension n est le cube de Fibonacci généralisé $Q_n(1^s)$.

2.7 Conclusion

Ce chapitre a exploré les structures, les propriétés et les diverses caractérisations du cube de Fibonacci et du cube de Lucas. Ces graphes sont des sous-structures particulières de l'hypercube. Initialement introduits comme modèles topologiques pour l'architecture des réseaux d'interconnexion, ils ont ensuite trouvé des applications en chimie théorique.

Nous avons présenté la bijection entre l'ensemble des sommets du cube de Lucas et les codes de Zeckendorf, qui représentent des entiers par des nombres de Lucas.

Enfin, le chapitre s'est conclu sur plusieurs généralisations du cube de Fibonacci, en mettant l'accent sur les cubes s -bonacci, qui seront étudiés dans les prochains chapitres.

Chapitre 3

Propriétés énumératives et cube polynomiale du cube Tribonacci

3.1 Introduction

Nous considérons dans ce chapitre les cubes 3-bonacci, autrement dit, les sous-graphes de Q_n engendrés par l'ensemble des sommets qui ne contiennent pas trois 1 consécutifs. Rappelons que la suite de Fibonacci d'ordre 3 est connu sous le nom de suite Tribonacci (1.6) vue au Chapitre 1. De ce fait, nous nommons les cube 3-bonacci par cubes Tribonacci.

Soit G un graphe, notons par $c_k(G)$ le nombre de sous-graphes dans G isomorphes au k -cube. Le cube polynomiale de G , noté $C(G, x)$, est introduit au début des années 2000 par Brešar et al. [17]. Le cube polynomiale de G est un polynôme de comptage, dans lequel le coefficient de x^k est le nombre de k -cubes dans G ,

$$C(G, x) := \sum_{k \geq 0} c_k(G) x^k.$$

L'énumération des hypercubes dans un graphe s'avère important aussi bien en génétique humaine [7] qu'en chimie théorique [43]. En 2012, Klavžar et Mollard ont déterminé le cube polynomiale du cube de Fibonacci et du cube de Lucas. Pour plus d'informations sur le cube polynomiale voir les références [15, 45, 60, 79].

À l'instar du cube de Fibonacci, le cube Tribonacci de dimension n admet une structure récursive, étant donné qu'il peut être construit à partir des cubes Tribonacci de

dimensions inférieures. Il en résulte de cela des propriétés combinatoires attrayantes que nous nous proposons de détailler dans le présent chapitre. Nous déterminons plus particulièrement, le nombre de sommets d'un certain poids, le nombre d'arêtes et le cube polynomiale du cube Tribonacci.

3.2 Structure de $\Gamma_n^{(3)}$

Le cube Tribonacci de dimension n , noté $\Gamma_n^{(3)}$, est un sous-graphe isométrique de l'hypercube Q_n engendré par l'ensemble des mots binaires de longueurs n contenant au plus deux 1 consécutifs. La Figure 3.1 illustre quelques un de ces cubes.

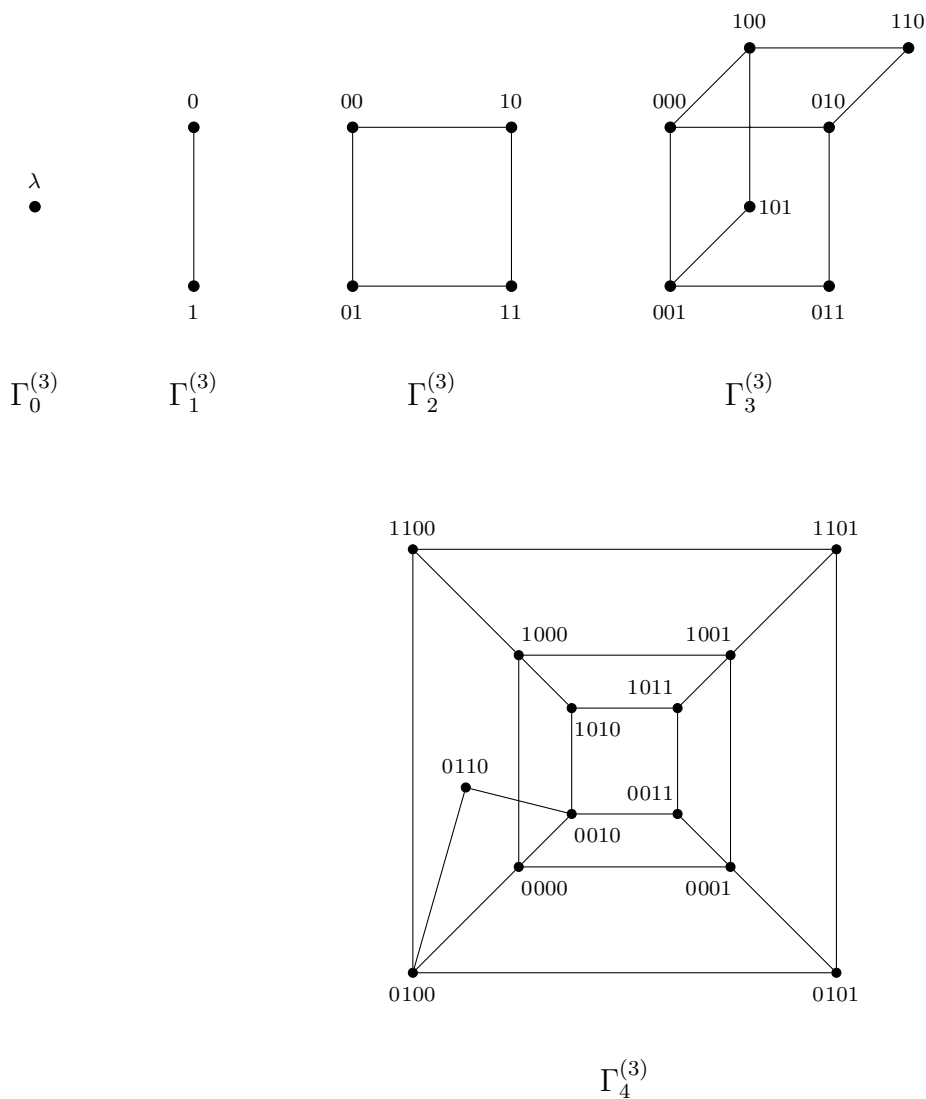


FIGURE 3.1 – Représentation des cinq premiers cubes Tribonacci.

On définit un mot Tribonacci de longueur n comme un mot binaire $\alpha_n = a_1 \cdots a_n$

avec $a_{i-1}a_i a_{i+1} = 0$, pour $2 \leq i \leq n-1$. Autrement dit, α_n ne contient pas trois 1 consécutifs. Posons $\mathcal{T}_n = \{a_1 \cdots a_n \mid a_{i-1}a_i a_{i+1} = 0, 2 \leq i \leq n-1\}$ l'ensemble des mots Tribonacci de longueurs n , y compris le mot vide λ . Il n'est pas difficile de vérifier que $|\mathcal{T}_n| = T_{n+2}$.

Le cube Tribonacci de dimension n est le graphe dont l'ensemble des sommets est \mathcal{T}_n et où deux sommets sont adjacents si et seulement si leur distance de Hamming est égale à 1.

L'ensemble \mathcal{T}_n peut être partitionner en trois ensembles A_n, B_n et C_n qui contiennent tous les sommets qui commencent par 110, 10 et 0, respectivement. Les ensembles A_n, B_n et C_n sont définis récursivement de la sorte

$$\begin{cases} A_n = 11C_{n-2}, \\ B_n = 1C_{n-1}, \\ C_n = 0A_{n-1} \cup 0B_{n-1} \cup 0C_{n-1}, \end{cases}$$

avec $A_0 = A_1 = B_0 = \emptyset, C_0 = \{\lambda\}, C_1 = \{0\}, B_1 = \{1\}$.

Le cube Tribonacci se décompose ainsi en trois sous-graphes $\Gamma_{n-3}^{(3)}, \Gamma_{n-2}^{(3)}$ et $\Gamma_{n-1}^{(3)}$ engendrés respectivement par les ensembles A_n, B_n et C_n . D'après la Proposition 2.6, chaque sommet de $\Gamma_{n-j}^{(3)}$ est adjacent à un unique sommet dans $\Gamma_{n-i}^{(3)}$ pour tout $3 \geq j > i \geq 1$, comme l'illustre la Figure 3.2. Plus exactement, chaque sommet 101α dans $\Gamma_{n-2}^{(3)}$ possède un unique voisin; le sommet 001α dans $\Gamma_{n-1}^{(3)}$, avec $\alpha \in B_{n-3} \cup C_{n-3}$. Chaque sommet 10α dans $\Gamma_{n-2}^{(3)}$ possède un unique voisin; le sommet 00α dans $\Gamma_{n-1}^{(3)}$, $\alpha \in C_{n-2}$. De ce fait, les arêtes qui relient $10\Gamma_{n-2}^{(3)}$ et $00\Gamma_{n-2}^{(3)}$ forment un couplage parfait. Chaque sommet dans $110\Gamma_{n-3}^{(3)}$ possède un unique voisin à la fois dans $\Gamma_{n-1}^{(3)}$ et $\Gamma_{n-2}^{(3)}$: le sommet 01α respectivement 10α , $\alpha \in C_{n-2}$. Il en résulte de même un couplage parfait, le premier se situe entre $010\Gamma_{n-3}^{(3)}$ et $110\Gamma_{n-3}^{(3)}$ et le second se situe entre $100\Gamma_{n-3}^{(3)}$ et $110\Gamma_{n-3}^{(3)}$.

3.3 Propriétés énumératives

Nous présentons dans cette section quelques propriétés énumératives et combinatoires sur le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'un certain poids dans le cube Tribonacci.

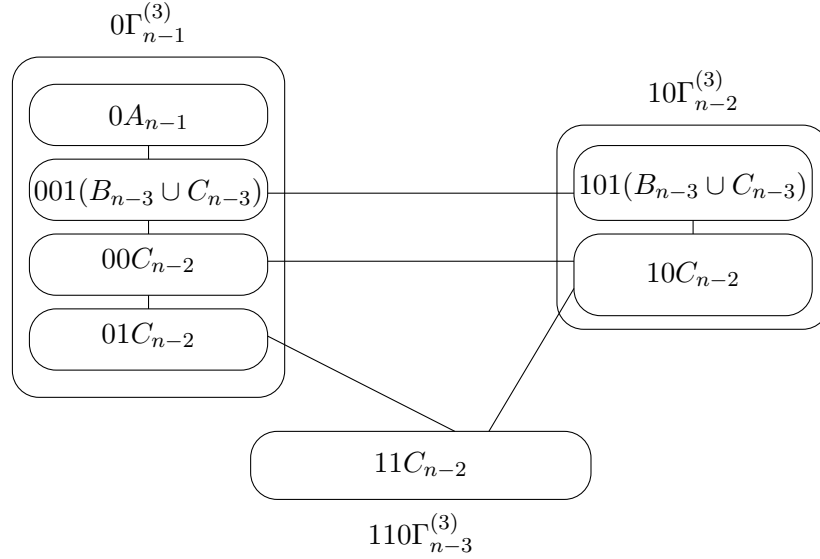


FIGURE 3.2 – Décomposition de $\Gamma_n^{(3)}$.

A partir de la décomposition du cube Tribonacci $\Gamma_n^{(3)}$, on peut obtenir le nombre d'arête par une relation de récurrence donnée ci-dessous

$$\left|E(\Gamma_n^{(3)})\right| = \left|E(\Gamma_{n-1}^{(3)})\right| + \left|E(\Gamma_{n-2}^{(3)})\right| + \left|E(\Gamma_{n-3}^{(3)})\right| + T_n + 2T_{n-1}, n \geq 3, \quad (3.1)$$

avec $\left|E(\Gamma_0^{(3)})\right| = 0$, $\left|E(\Gamma_1^{(3)})\right| = 1$ et $\left|E(\Gamma_2^{(3)})\right| = 4$.

Nous présentons ci-après la fonction génératrice de la séquence (3.1).

Proposition 3.1 [14]. *La fonction génératrice du nombre d'arêtes dans $\Gamma_n^{(3)}$ est donnée par*

$$\sum_{n \geq 0} \left|E(\Gamma_n^{(3)})\right| y^n = \frac{y + 2y^2}{(1 - y - y^2 - y^3)^2}. \quad (3.2)$$

Preuve. Dans [65], il est établi que la fonction génératrice de la séquence (1.6) est

$$T(y) = \sum_{n \geq 0} T_n y^n = \frac{y}{1 - y - y^2 - y^3}.$$

Notons la fonction génératrice de la séquence $\left|E(\Gamma_n^{(3)})\right|$ par $E(y)$. De la relation (3.1), on a

$$\begin{aligned} E(y) &= \sum_{n \geq 0} \left|E(\Gamma_n^{(3)})\right| y^n \\ &= y + 4y^2 + \sum_{n \geq 3} \left|E(\Gamma_n^{(3)})\right| y^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (y + y^2 + y^3) \sum_{n \geq 0} |E(\Gamma_n^{(3)})| y^n + (1 + 2y) \sum_{n \geq 0} T_n y^n \\
 &= (y + y^2 + y^3)E(y) + (1 + 2y)T(y).
 \end{aligned}$$

□

Nous montrons que le nombre d'arêtes du cube Tribonacci s'obtient par produit de convolution de nombres Tribonacci.

Théorème 3.1 [14]. *soit $n \geq 0$ un entier naturel. Le nombre d'arêtes dans $\Gamma_n^{(3)}$ est donné par*

$$|E(\Gamma_n^{(3)})| = \sum_{k=0}^n T_k(T_{n-k+1} + 2T_{n-k}).$$

Preuve. On a

$$E(y) = y^{-1}(1 + 2y)T^2(y),$$

où

$$T^2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n T_k T_{n-k} y^n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 E(y) &= (y^{-1} + 2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n T_k T_{n-k} y^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n T_k T_{n-k} y^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n T_k T_{n-k} y^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} T_k T_{n-k+1} y^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n T_k T_{n-k} y^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n T_k (T_{n-k+1} + 2T_{n-k}) y^n.
 \end{aligned}$$

□

Posons S_n^w l'ensemble de tous les sommets de $\Gamma_n^{(3)}$ ayant un poids w . Le nombre de ces sommets est donné par la relation de récurrence suivante.

Lemme 3.1 [14]. *Pour $n \geq 3$ et $2 \leq w \leq \lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor$ on a*

$$|S_n^w| = |S_{n-1}^w| + |S_{n-2}^{w-1}| + |S_{n-3}^{w-2}|, \tag{3.3}$$

où

$$\begin{aligned}
 |S_n^0| &= |S_2^2| = 1, \quad n \geq 0, \\
 |S_n^1| &= n, \quad n \geq 0, \\
 |S_n^w| &= 0, \quad n \geq 0, w > \lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor.
 \end{aligned}$$

Preuve. Un sommet de poids maximum peut être obtenu en concaténant p fois le mot 110, où $p = \lfloor n/3 \rfloor$ et en terminant par 1^{n-3p} . Ainsi, le poids maximum d'un mot Tribonacci est égal à $\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor$. La preuve de (3.3) découle directement de la décomposition de $\Gamma_n^{(3)}$, et les conditions initiales peuvent être déduites à partir de la Figure 3.1. \square

Nous présentons maintenant une formule explicite pour le nombre de sommets de poids w .

Théorème 3.2 [14]. *Le nombre de sommets de poids w dans $\Gamma_n^{(3)}$ est*

$$|S_n^w| = \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w+1}{j} \binom{j}{w-j}. \quad (3.4)$$

Preuve. Pour $n \geq 0$, $w > \lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor$, nous avons $w - j > j$ par conséquent

$$\sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w+1}{j} \binom{j}{w-j} = 0.$$

La preuve du théorème se fait par récurrence sur n . De l'équation (3.3) et par un simple calcul, nous pouvons vérifier que (3.4) est vraie pour $n = 0, 1, 2$. Supposons à présent que (3.4) est vraie pour toutes les valeurs de $p \leq n - 1$ et montrons que c'est vraie pour $p = n$. En utilisant l'équation (3.3) et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} |S_n^w| &= \sum_{j=0}^{n-w} \binom{n-w}{j} \binom{j}{w-j} + \sum_{j=0}^{n-w} \binom{n-w}{j} \binom{j}{w-j-1} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-w} \binom{n-w}{j} \binom{j}{w-j-2} \\ &= \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w}{j} \left[\binom{j}{w-j} + \binom{j}{w-j-1} + \binom{j}{w-j-2} \right], \end{aligned}$$

en utilisant l'identité de Pascal

$$\begin{aligned} |S_n^w| &= \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w}{j} \left[\binom{j}{w-j} + \binom{j+1}{w-j-1} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w}{j} \binom{j}{w-j} + \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w}{j-1} \binom{j}{w-j-1}, \end{aligned}$$

comme

$$\sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w}{j} \binom{j+1}{w-j-1} = \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w}{j-1} \binom{j}{w-j},$$

en utilisant l'identité de Pascal encore une fois

$$\begin{aligned} |S_n^w| &= \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{j}{w-j} \left[\binom{n-w}{j} + \binom{n-w}{j-1} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{j}{w-j} \binom{n-w+1}{j}. \end{aligned}$$

□

3.4 Cube polynomial

Dans cette section, nous étendons les résultats sur le cube polynomial du cube de Fibonacci, obtenu en [44], au cube Tribonacci. Rappelons que $c_0(\Gamma_n^{(3)}) = T_{n+2}$, $c_1(\Gamma_n^{(3)}) = |E(\Gamma_n^{(3)})|$ et $c_2(\Gamma_n^{(3)})$ est le nombre de cycles de longueur 4 dans $\Gamma_n^{(3)}$. Il est bien connu que le cube polynomial de Q_n pour $n \geq 0$ est $C(Q_n, x) = (2+x)^n$ [17]. Notons le cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$ par $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$, les sept premiers d'entres eux sont listés ci-dessous :

$$\begin{aligned} C(\Gamma_0^{(3)}, x) &= 1, \\ C(\Gamma_1^{(3)}, x) &= 2 + x, \\ C(\Gamma_2^{(3)}, x) &= 4 + 4x + x^2, \\ C(\Gamma_3^{(3)}, x) &= 7 + 9x + 3x^2, \\ C(\Gamma_4^{(3)}, x) &= 13 + 22x + 12x^2 + 2x^3, \\ C(\Gamma_5^{(3)}, x) &= 24 + 50x + 37x^2 + 11x^3 + x^4, \\ C(\Gamma_6^{(3)}, x) &= 44 + 108x + 99x^2 + 40x^3 + 6x^4. \end{aligned}$$

Lemme 3.2 [14]. *Pour tout $n \geq 3$, le cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x) = C(\Gamma_{n-1}^{(3)}, x) + (1+x)C(\Gamma_{n-2}^{(3)}, x) + (1+x)^2C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x),$$

avec $C(\Gamma_n^{(3)}, x) = (2+x)^n, 0 \leq n \leq 2$.

Preuve. Pour $n \leq 2$, $\Gamma_n^{(3)}$ est isomorphe à Q_n , d'où $C(\Gamma_n^{(3)}, x) = C(Q_n, x)$. Pour

$n \geq 3$, un sous-graphe isomorphe à Q_k dans $\Gamma_{n-1}^{(3)}$, $\Gamma_{n-2}^{(3)}$ et $\Gamma_{n-3}^{(3)}$ est toujours de dimension k dans $\Gamma_n^{(3)}$. Le nombre de ces hypercubes est obtenu par $C(\Gamma_{n-1}^{(3)}, x) + C(\Gamma_{n-2}^{(3)}, x) + C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x)$.

Le sous-graphe $10\Gamma_{n-2}^{(3)}$ engendré par l'ensemble B_n possède une copie dans $0\Gamma_{n-1}^{(3)}$ ces deux derniers sont reliés entre eux par un couplage parfait, ainsi un sous-graphe isomorphe à Q_k dans $\Gamma_{n-2}^{(3)}$ est de dimension $k+1$ dans $\Gamma_n^{(3)}$. Ces derniers sont donnés par $x C(\Gamma_{n-2}^{(3)}, x)$.

De même, le sous-graphe $110\Gamma_{n-1}^{(3)}$ engendré par A_n possède une copie dans $0\Gamma_{n-1}^{(3)}$, alors un hypercube de dimension k dans $\Gamma_{n-3}^{(3)}$ est de dimension $k+1$ dans $\Gamma_n^{(3)}$. De manière similaire, le sous-graphe $110\Gamma_{n-1}^{(3)}$ engendré par A_n possède une autre copie dans $10\Gamma_{n-2}^{(3)}$, dans ce cas le nombre de sous-graphes isomorphes à Q_k est donné par $2x C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x)$. De plus, rappelons que le sous-graphe $100\Gamma_{n-3}^{(3)}$ possède une copie dans $0\Gamma_{n-1}^{(3)}$, voir la Figure 3.2. Alors, un hypercube de dimension k dans $\Gamma_{n-3}^{(3)}$ est de dimension $k+2$ dans $\Gamma_n^{(3)}$, ceci est exprimé par $x^2 C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x)$. \square

Le théorème suivant établit la fonction génératrice du polynôme $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$ pour tout $n \geq 0$.

Théorème 3.3 [14]. *La fonction génératrice du cube polynomial $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$ est*

$$\sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n^{(3)}, x) y^n = \frac{1 + (1+x)y + (1+x)^2 y^2}{1 - y - (1+x)y^2 - (1+x)^2 y^3}.$$

Preuve. Notons la fonction génératrice de la séquence $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$ par $f(x, y)$. Par le Lemme 3.2, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n^{(3)}, x) y^n \\ &= \sum_{n=0}^2 C(\Gamma_n^{(3)}, x) y^n + \sum_{n \geq 3} C(\Gamma_n^{(3)}, x) y^n \\ &= y f(x, y) + (1+x)y^2 f(x, y) + (1+x)^2 y^3 f(x, y) + 1 \\ &\quad + (1+x) \left[\sum_{n=1}^2 (2+x)^{n-1} y^n - y^2 \right]. \end{aligned}$$

\square

La formule explicite du cube polynomial du cube Tribonacci est donnée par le théorème ci-dessous.

Théorème 3.4 [14]. *Pour tout $n \geq 0$, $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$ est un polynôme de degré $\left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor$*

exprimé par :

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n-k+1}{j} \binom{j}{k-j} \binom{k}{i} x^i.$$

Preuve. Du Théorème 3.3, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n^{(3)}, x) y^n &= \frac{1 + (1+x)y + (1+x)^2 y^2}{1 - y - (1+x)y^2 - (1+x)^2 y^3} \\ &= \sum_{a \geq 0} y^a (1 + (1+x)y + (1+x)^2 y^2)^{a+1} \\ &= \sum_{a \geq 0} y^a \sum_{j=0}^{a+1} \binom{a+1}{j} (1+x)^j y^j (1 + (1+x)y)^j \\ &= \sum_{a \geq 0} \sum_{j=0}^{a+1} \binom{a+1}{j} (1+x)^j y^{a+j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (1+x)^i y^i \\ &= \sum_{a \geq 0} \sum_{j=0}^{a+1} \sum_{i=0}^j \binom{a+1}{j} \binom{j}{i} (1+x)^{i+j} y^{a+i+j}, \quad i+j = k \\ &= \sum_{a \geq 0} \sum_{j=0}^{a+1} \sum_{k=0}^{2j} \binom{a+1}{j} \binom{j}{k-j} (1+x)^k y^{a+k}, \quad a+k = n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n-k+1}{j} \binom{j}{k-j} (1+x)^k y^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n-k+1}{j} \binom{j}{k-j} y^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n-k+1}{j} \binom{j}{k-j} \binom{k}{i} x^i y^n. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n-k+1}{j} \binom{j}{k-j} \binom{k}{i} x^i.$$

□

3.5 Coefficients du cube polynomial

Nous déterminons à présent la formule explicite des coefficients $c_k(\Gamma_n^3)$ pour tout $n, k \geq 0$.

Corollaire 3.1 [14]. *Pour tout $n \geq 0$, le nombre d'hypercubes de dimension $k \geq 0$ dans $\Gamma_n^{(3)}$ est*

$$c_k(\Gamma_n^{(3)}) = \sum_{w=k}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-w+1} \binom{n-w+1}{j} \binom{j}{w-j} \binom{w}{k}.$$

Preuve. Soit H un hypercube de dimension k dans $\Gamma_n^{(3)}$. H est caractérisé par un unique couple de sommets, le sommet de poids maximum et le sommet de poids minimum, voir [38, 52]. Considérons à présent, le sommet u dans H de poids maximum w , alors u est le sommet de poids maximum de $\binom{w}{k}$ hypercubes de dimension k , du Théorème 3.2 nous obtenons le résultat ci-dessus. \square

3.6 Cube de Fibonacci comme sous-graphe du cube Tribonacci

Tout sommet du cube de Fibonacci Γ_n est également un sommet du cube Tribonacci $\Gamma_n^{(3)}$, par conséquent Γ_n est un sous-graphe de $\Gamma_n^{(3)}$, comme l'illustre la Figure 3.3. Ceci nous amène à considérer la relation qui pourrait exister entre ces deux structures. Nous montrons dans ce qui suit que le cube polynomiale du cube Tribonacci peut être exprimé en termes du cube polynomiale du cube de Fibonacci.

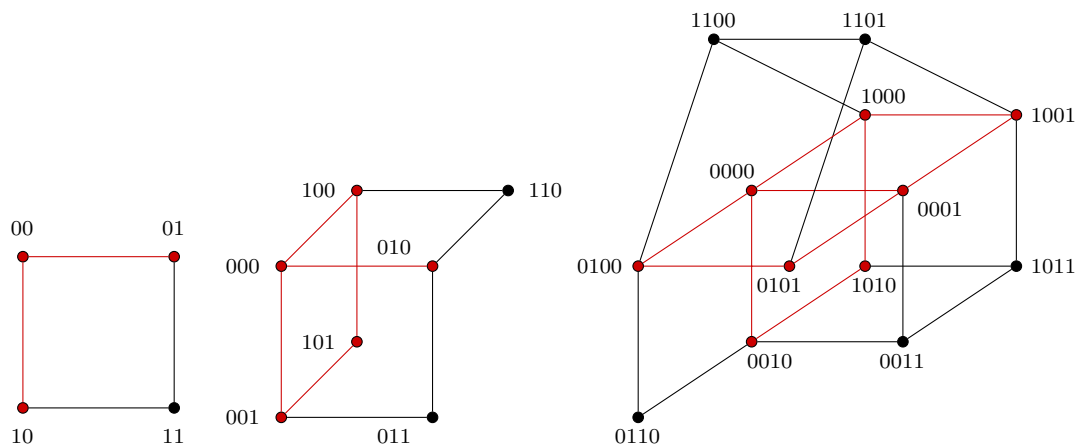


FIGURE 3.3 – Les cubes Tribonacci, les sous-graphes en rouge correspondent aux cubes de Fibonacci.

La suite de Fibonacci F_n et la suite Tribonacci T_n sont liées par la relation suivante

$$\begin{cases} T_n = F_n, & 0 \leq n \leq 3, \\ T_n = F_n + a_n, & n \geq 4, \end{cases}$$

où a_n est la suite A000100 dans [67]. La séquence $\{a_n\}_{n \geq 0}$ mesure la différence entre le nombre Tribonacci T_n et le nombre de Fibonacci F_n ,

$$a_n = T_n - F_n, n \geq 0. \tag{3.5}$$

Les premières valeurs de la suite a_n sont résumées dans le Tableau 3.1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_n	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
a_n	0	0	0	0	1	2	5	11	23	47	94	185	360

Tableau 3.1 – Valeurs de la séquence $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $n = 0, \dots, 12$.

3.6.1 Cube polynomial

Posons \mathcal{M}_n l'ensemble des sommets de longueur n ayant exactement deux 1 consécutifs. L'ensemble des sommets du cube de Fibonacci et l'ensemble \mathcal{M}_n forment une partition de l'ensemble des sommets du cube Tribonacci, $V(\Gamma_n^{(3)}) = V(\Gamma_n) \cup \mathcal{M}_n$ pour tout $n \geq 0$, où $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \emptyset$ et $|\mathcal{M}_n| = a_{n+2}$.

La suite a_n compte le nombre de mots binaires de longueurs n qui contiennent deux 1 consécutifs.

Le cube polynomial du cube de Fibonacci est déterminé dans [44], par la relation de récurrence suivante : $C(\Gamma_0, x) = 1$, $C(\Gamma_1, x) = 2 + x$ et

$$C(\Gamma_n, x) = C(\Gamma_{n-1}, x) + (1 + x)C(\Gamma_{n-2}, x), \quad n \geq 3.$$

Les sept premiers d'entre eux sont

$$\begin{aligned}
 C(\Gamma_0, x) &= 1, \\
 C(\Gamma_1, x) &= 2 + x, \\
 C(\Gamma_2, x) &= 3 + 2x, \\
 C(\Gamma_3, x) &= 5 + 5x + x^2, \\
 C(\Gamma_4, x) &= 8 + 10x + 3x^2, \\
 C(\Gamma_5, x) &= 13 + 20x + 9x^2 + x^3, \\
 C(\Gamma_6, x) &= 21 + 38x + 22x^2 + 4x^3.
 \end{aligned}$$

Il est intéressant de souligner la relation entre le cube polynomiale du cube de Fibonacci et le cube Tribonacci. Par exemple, nous pouvons observer que pour les six premiers $C(\Gamma_0^{(3)}, x)$, on a

$$\begin{aligned}
 C(\Gamma_0^{(3)}, x) &= 1 = C(\Gamma_0, x) \\
 C(\Gamma_1^{(3)}, x) &= 2 + x = C(\Gamma_1, x) \\
 C(\Gamma_2^{(3)}, x) &= 4 + 4x + x^2 = C(\Gamma_2, x) + (1 + x)^2 \\
 C(\Gamma_3^{(3)}, x) &= 7 + 9x + 3x^2 = C(\Gamma_3, x) + 2(1 + x)^2 \\
 C(\Gamma_4^{(3)}, x) &= 13 + 22x + 12x^2 + 2x^3 = C(\Gamma_4, x) + (5 + 2x)(1 + x)^2 \\
 C(\Gamma_5^{(3)}, x) &= 24 + 50x + 37x^2 + 11x^3 + x^4 = C(\Gamma_5, x) + (11 + 8x + x^2)(1 + x)^2.
 \end{aligned}$$

Considérons le polynôme $P_n(x)$ donné par la relation de récurrence suivante :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (1 + x)P_{n-2}(x) + (1 + x)^2 C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x), n \geq 3$$

avec $P_0(x) = P_1(x) = 0$ et $P_2(x) = (1 + x)^2$.

Théorème 3.5 [12]. *Pour $n \geq 0$, le cube polynomiale de $\Gamma_n^{(3)}$ est égal à*

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x) = C(\Gamma_n, x) + P_n(x). \tag{3.6}$$

Preuve. Par récurrence sur n . Pour $n = 0, 1, 2$ et on a bien $C(\Gamma_n^{(3)}, x) = C(\Gamma_n, x) + P_n(x)$. Soit $n \geq 3$ supposons que (3.6) est vraie à l'ordre $n - 1$ et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n . D'après le Lemme 3.2 on a

$$\begin{aligned}
 C(\Gamma_n^{(3)}, x) &= C(\Gamma_{n-1}^{(3)}, x) + (1 + x)C(\Gamma_{n-2}^{(3)}, x) + (1 + x)^2 C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x) \\
 &= C(\Gamma_{n-1}, x) + P_{n-1}(x) + (1 + x)[C(\Gamma_{n-2}, x) + P_{n-2}(x)] \\
 &\quad + (1 + x)^2 C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= C(\Gamma_{n-1}, x) + (1+x)C(\Gamma_{n-2}, x) + P_{n-1}(x) + (1+x)P_{n-2}(x) \\
 &\quad + (1+x)^2 C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x) \\
 &= C(\Gamma_n, x) + P_n(x).
 \end{aligned}$$

□

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré le cube 3-bonacci, également connu sous le nom de cube Tribonacci. Nous avons étudié les propriétés combinatoires découlant de sa structure récursive, en dérivant des formules de récurrence et des expressions explicites pour le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, ainsi que le nombre de sommets d'un certain poids. Nous avons également examiné le nombre d'hypercubes de dimensions k , qui sont les coefficients d'un polynôme appelé cube polynomial du cube Tribonacci. Nous avons établi une fonction génératrice et formulé une expression explicite pour ce polynôme.

Nous nous sommes également penchés sur la relation entre le cube de Fibonacci et le cube Tribonacci, notant que le cube de Fibonacci est un sous-graphe du cube Tribonacci. En particulier, nous avons exprimé le cube polynomial du cube Tribonacci en fonction de celui du cube de Fibonacci.

Chapitre 4

Le q -cube polynomial du cube Tribonacci

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous généralisons, le cube polynomial du cube Tribonacci, $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$, étudié au Chapitre 3, en considérant un q -analogue de ce polynôme. Ce q -analogue permet de compter le nombre d'hypercubes de dimension k dans $\Gamma_n^{(3)}$ et nous informe sur leur distance par rapport au sommet de poids nul $0^n = \underbrace{0 \dots 0}_n$.

Saygi and Egecioğlu ont introduit ce q -analogue en 2017, qu'ils appellent q -cube polynomial. Ils ont déterminé le q -cube polynomial pour le cube de Fibonacci et le cube de Lucas dans [63, 64].

4.2 Préliminaires

Rappelons que $\Gamma_n^{(3)}$ est un graphe isométrique de Q_n , voir la Section 3.2. Par conséquent pour chaque paire de sommets (u, v) dans $\Gamma_n^{(3)}$ la distance entre u et v est égale à leur distance de Hamming $H(u, v)$. Plus particulièrement, la distance entre le sommet 0^n et n'importe quel autre sommet u de $\Gamma_n^{(3)}$ est égale au poids du sommet u , en effet

$$d(0^n, u) = H(0^n, u) = w(u), \quad u \in V(\Gamma_n^{(3)}).$$

On définit le $i^{\text{ème}}$ niveaux de $\Gamma_n^{(3)}$, noté $L_{n,i}$, comme l'ensemble des sommets à distance

i de 0^n , c'est-à-dire

$$L_{n,i} = N_i(0^n) = \{u \in \mathcal{T}_n \mid w(u) = i\}, \quad i \in \{0, \dots, \lfloor 2(n+1)/3 \rfloor\}.$$

D'après le Théorème 3.2, on a

$$|L_{n,i}| = \sum_{j=0}^{n-i+1} \binom{n-i+1}{j} \binom{j}{i-j}.$$

Les ensembles $L_{n,0}, L_{n,1}, \dots, L_{n, \lfloor 2(n+1)/3 \rfloor}$ forment une partition de l'ensemble des sommets de $\Gamma_n^{(3)}$,

$$\begin{cases} L_{n,i} \cap L_{n,j} = \emptyset, & i \neq j, \quad i, j \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor\right\}, \\ \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} L_{n,i} = V(\Gamma_n^{(3)}). \end{cases}$$

Le graphe obtenu par représentation de $\Gamma_n^{(3)}$ en niveaux est appelé décomposition en niveaux de $\Gamma_n^{(3)}$, et est noté \mathcal{H}_n . La décomposition fondamentale du cube Tribonacci nous permet de constater que \mathcal{H}_n peut être obtenu récursivement à partir de \mathcal{H}_{n-1} , \mathcal{H}_{n-2} et \mathcal{H}_{n-3} comme le montre la Figure 4.1.

Soit v un sommet de poids i dans \mathcal{H}_{n-j} , $j = 1, 2, 3$. Le poids du sommet v augmente de $j - 1$ dans \mathcal{H}_n , alors $v \in L_{n,i+j-1}$. Soit u l'unique voisin de v dans \mathcal{H}_{n-l} , $3 \geq j > l \geq 1$, par conséquent $u \in L_{n,i+l-2}$.

Exemple 4.1. Le graphe \mathcal{H}_3 de la Figure 4.1, représente la décomposition en niveaux de $\Gamma_3^{(3)}$. Il contient 3 niveaux : $L_{3,0} = \{000\}$, $L_{3,1} = \{001, 010, 100\}$ et $L_{3,2} = \{011, 110, 101\}$.

Le sommet 10 appartient à $L_{2,1}$ dans \mathcal{H}_2 , le sommet 10 correspond au sommet 1010 dans \mathcal{H}_4 il appartient à $L_{4,2}$ son unique voisin dans \mathcal{H}_3 est le sommet 0010, où $0010 \in L_{4,1}$.

Comme $\Gamma_n^{(3)}$ est un sous-graphe de Q_n , d'après Proposition 2.1, tout sous-graphe isomorphe à Q_k dans $\Gamma_n^{(3)}$ est caractérisé par un couple unique de sommets, le sommet de poids maximum et le sommet de poids minimum, notés respectivement $b(H)$ et $t(H)$.

D'après la Définition 1.10, la distance entre un sous-graphe $H \cong Q_k$ de $\Gamma_n^{(3)}$ et le sommet 0^n est déterminée par le poids de $b(H)$, c'est-à-dire $d(0^n, b(H)) = w(b(H))$, car $b(H)$ est le sommet de poids minimum dans H , ce qui en fait le plus proche en termes de distance du sommet 0^n . On dit que H est à distance i de 0^n si $b(H) \in L_{n,i}$.

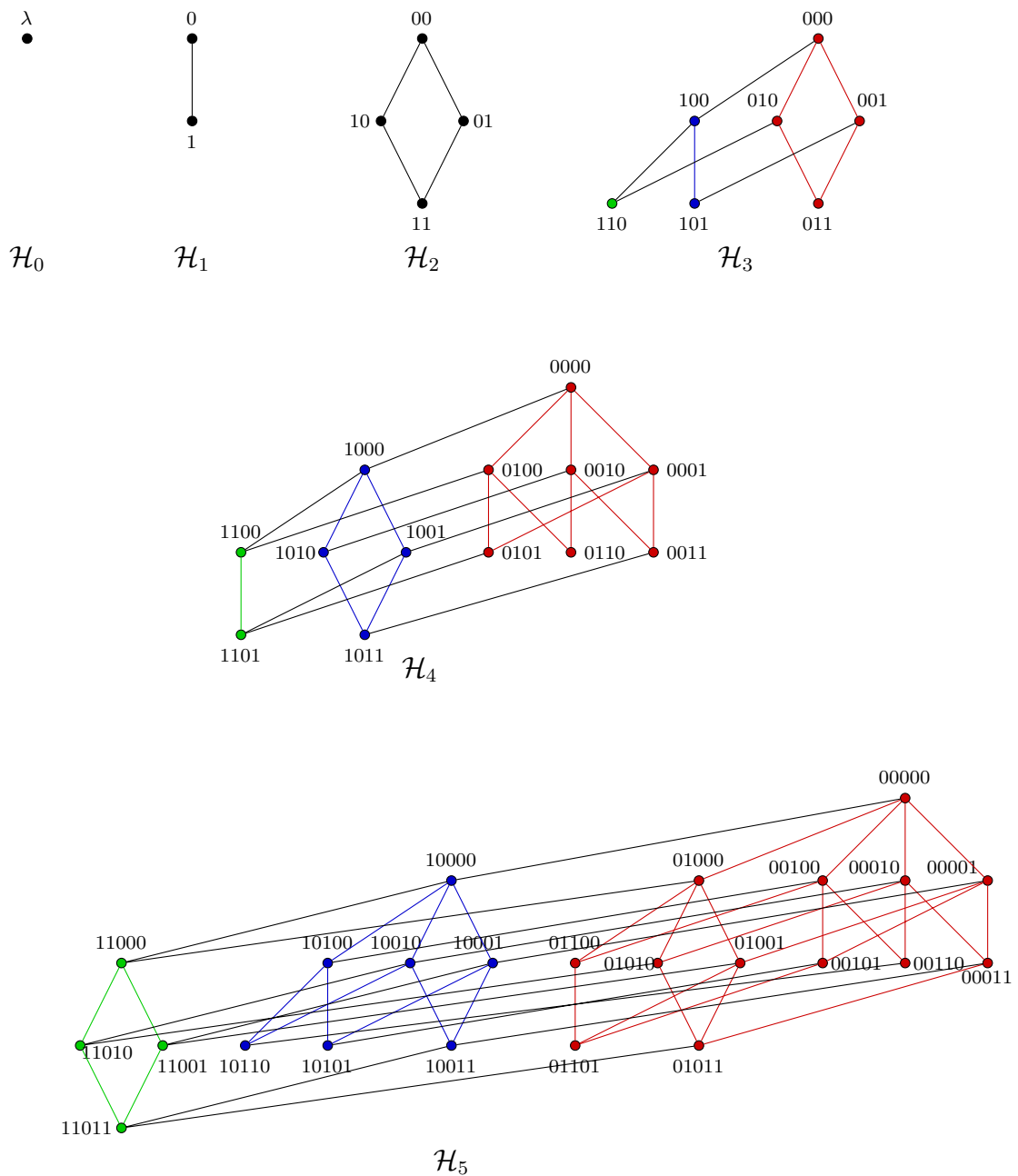


FIGURE 4.1 – Distance level representation of $\Gamma_n^{(3)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

On désigne le nombre de k -cubes à une distance d de 0^n dans $\Gamma_n^{(3)}$ par $c_{n,k}(q)$. Alors, $c_{n,0}(q)$ est le polynôme qui compte le nombre de sommets à distance d de 0^n dans

$\Gamma_n^{(3)}$. D'après le Théorème 3.2, il est obtenu de la sorte

$$\begin{aligned} c_{n,0}(q) &= \sum_{d \geq 0} |L_{n,d}| q^d \\ &= \sum_{d=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-d+1} \binom{n-d+1}{j} \binom{j}{d-j} q^d. \end{aligned}$$

Soit $(x)_n$ le factoriel décroissant

$$(x)_n = \prod_{i=0}^n (x-i) = \begin{cases} x(x-1) \cdots (x-n+1), & n \geq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

4.3 q -cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$

Le cube polynomial du cube Tribonacci $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$ étudié dans [14] et présenté dans le Chapitre 3, est un polynôme qui compte le nombre d'hypercubes de dimension k dans $\Gamma_n^{(3)}$, il est obtenu récursivement par la relation suivante :

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x) = \begin{cases} (2+x)^n, & 0 \leq n \leq 2, \\ C(\Gamma_{n-1}^{(3)}, x) + (1+x)C(\Gamma_{n-2}^{(3)}, x) + (1+x)^2 C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x), & n \geq 3. \end{cases}$$

Nous nous intéressons dans cette section à la distance de ces cubes par rapport au sommet 0^n dans $\Gamma_n^{(3)}$. Nous considérons pour cela un q -analogue du polynôme précédent appelé q -cube polynomial du cube Tribonacci et notés $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)$. Les termes de $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)$ sont de la forme $a_j q^i x^k$ et s'interprètent de la sorte : le coefficient a_j est le nombre de k -cubes à distance i du sommet 0^n .

Prenons l'exemple de $\Gamma_3^{(3)}$, représentée en niveau dans la Figure 4.1. On observe qu'on a $|L_{3,i}|$ sommets à distance i du sommet 000 , $0 \leq i \leq 2$, ils sont dénombrés par

$$\sum_{i=0}^2 |L_{3,i}| q^i = 1 + 3q + 3q^2.$$

De plus on a 3 arêtes à distance 0 et 6 arêtes à distance 1 du sommet 000 ce qui en fait au total $(3 + 6q) x^2$. Enfin, on a 3 cycles de longueurs 4 tous à distance 0 du sommet 000 . En résumé

$$C(\Gamma_3^{(3)}, x; q) = 1 + 3q + 3q^2 + (3 + 6q) x + 3x^2.$$

Les six premiers polynômes $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)$ sont donnés ci-dessous

$$\begin{aligned}
C(\Gamma_0^{(3)}, x; q) &= 1, \\
C(\Gamma_1^{(3)}, x; q) &= 1 + q + x, \\
C(\Gamma_2^{(3)}, x; q) &= 1 + 2q + q^2 + (2 + 2q)x + x^2, \\
C(\Gamma_3^{(3)}, x; q) &= 1 + 3q + 3q^2 + (3 + 6q)x + 3x^2, \\
C(\Gamma_4^{(3)}, x; q) &= 1 + 4q + 6q^2 + 2q^3 + (4 + 12q + 6q^2)x + (6 + 6q)x^2 + 2x^3, \\
C(\Gamma_5^{(3)}, x; q) &= 1 + 5q + 10q^2 + 7q^3 + q^4 + (5 + 20q + 21q^2 + 4q^3)x \\
&\quad + (10 + 21q + 6q^2)x^2 + (7 + 4q)x^3 + x^4.
\end{aligned}$$

Le q -cube polynomial de l'hypercube est déterminé par Saygı et Egecioglu dans [63], il est égal à

$$C(Q_n, x; q) = (1 + q + x)^n.$$

Le lemme suivant fournit une formule de récurrence pour le polynôme $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)$.

Lemme 4.1 [13]. *Pour tout entier $n \geq 3$, le q -cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$ satisfait la relation de récurrence qui suit :*

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) = C(\Gamma_{n-1}^{(3)}, x; q) + (q + x)C(\Gamma_{n-2}^{(3)}, x; q) + (q + x)^2C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x; q),$$

avec $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) = (1 + q + x)^n$, $n \leq 2$.

Preuve. Comme $\Gamma_n^{(3)} \cong Q_n$ pour $n \leq 2$, on a bien $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) = (1 + q + x)^n$. Montrons que pour $n \geq 3$, on a

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) = C(\Gamma_{n-1}^{(3)}, x; q) + (q + x)C(\Gamma_{n-2}^{(3)}, x; q) + (q + x)^2C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x; q).$$

On rappelle en premier que la distance entre un sous-graphe $H \cong Q_k$ de $\Gamma_n^{(3)}$ et 0^n est déterminée par le poids de $b(H)$. Considérons à présent \mathcal{H}_n la décomposition en niveaux de $\Gamma_n^{(3)}$. Soit H_j un sous-graphe de \mathcal{H}_{n-j} , $j = 1, 2, 3$, isomorphe à Q_k , tel que $w(b(H_j)) = i$. Pour $j = 2, 3$ le sous-graphe H_j admet $j - 1$ copies isomorphes dans \mathcal{H}_{n-l} , que l'on note H_l^j , $1 \leq l < j$. On a alors les cas suivant :

1. Pour tout $j = 1, 2, 3$, H_j est un hypercube de dimension k dans \mathcal{H}_n et sa distance du sommet 0^n augmente de $j - 1$. Le nombre de tels hypercubes est donné par

$$\sum_{1 \leq j \leq 3} q^{j-1} C(\Gamma_{n-j}^{(3)}, x; q).$$

2. Pour tout $1 \leq l < j \leq 3$, H_j et H_l^j sont joints par un couplage parfait, ce qui donne lieu à un hypercube de dimension $k + 1$ dans \mathcal{H}_n , que l'on note H . H est à distance $i + j - 2$ du sommet 0^n dans \mathcal{H}_n . En effet, on a $b(H) = b(H_l^j)$ ($b(H_l^j)$ est l'unique voisin de $b(H_j)$ dans \mathcal{H}_{n-l}), d'où $w(b(H)) = i + j - 2$ (voir la Section 4.2). Ces hypercubes sont énumérés par

$$\sum_{2 \leq j \leq 3} (j - 1) q^{j-2} x C(\Gamma_{n-j}^{(3)}, x; q).$$

3. Pour $j = 3$, H_3 est joint à H_1^3 et à H_2^3 par un couplage parfait. De plus, H_2^3 possède une copie isomorphe, disons H_1^2 , dans \mathcal{H}_{n-1} . Celle-ci est reliée à H_1^3 par un couplage parfait. Il en résulte donc un hypercube de dimension $k + 2$ de sommet inférieur $b(H_1^2)$. Comme $w(b(H_1^2)) = i$, alors cet hypercube est à distance i du sommet 0^n . Le nombre de tels hypercubes est donné par

$$x^2 C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x; q).$$

D'où on a

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) = C(\Gamma_{n-1}^{(3)}, x; q) + (q + x) C(\Gamma_{n-2}^{(3)}, x; q) + (q + x)^2 C(\Gamma_{n-3}^{(3)}, x; q), \quad n \geq 3. \quad \square$$

Posons $F(x, q, y)$ la fonction génératrice du polynôme $\{C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)\}_{n \geq 0}$.

Théorème 4.1 [13]. *La fonction génératrice du q -cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$ est donnée par :*

$$F(x, q, y) = \frac{1 + (q + x)y + (q + x)^2 y^2}{1 - y - (q + x)y^2 - (q + x)^2 y^3}.$$

Preuve. Du Lemme 4.1, on a

$$\begin{aligned} F(x, q, y) &= \sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) y^n \\ &= 1 + C(\Gamma_1^{(3)}, x; q) y + C(\Gamma_2^{(3)}, x; q) y^2 + \sum_{n \geq 3} C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) y^n \\ &= y F(x, q, y) + (q + x) y^2 F(x, q, y) + (q + x)^2 y^3 F(x, q, y) + 1 \\ &\quad + (C(\Gamma_1^{(3)}, x; q) - 1) y + (C(\Gamma_2^{(3)}, x; q) - C(\Gamma_1^{(3)}, x; q) - (q + x)) y^2, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Nous donnons maintenant une formule explicite pour le polynôme q -cube des cubes Tribonacci.

Théorème 4.2 [13]. *Le q -cube polynomiale de $\Gamma_n^{(3)}$ satisfait la forme explicite suivante :*

$$C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \rfloor} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n-k+1}{j} \binom{j}{k-j} (q+x)^k.$$

Preuve. De [45, Corollaire 3.6], on a

$$\begin{aligned} C(\Gamma_n^{(3)}, x; q) &= c_{n,0}(q+x) \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n-k+1}{j} \binom{j}{k-j} (q+x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor 2(n+1)/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n-k+1}{j} \binom{j}{k-j} (q+x)^k. \end{aligned}$$

□

4.4 Propriétés des coefficients $c_{n,k}(q)$

Nous nous intéressons dans cette section aux coefficients $c_{n,k}(q)$ du q -cube polynomial du cube Tribonacci, où $c_{n,k}(q)$ est un polynôme en q qui compte le nombre d'hypercubes à une distance donnée du sommet 0^n . Nous montrons que $c_{n,k}(q)$ est exprimé en termes de la $k^{\text{ème}}$ dérivée du nombre de sommets $c_{n,0}(q)$ à distance d du sommet 0^n .

D'après la décomposition fondamentale et la représentation en niveaux de $\Gamma_n^{(3)}$, on a les formules de récurrence suivante :

- Le nombre de sommets à distance d du sommet 0^n est donné par

$$c_{n,0}(q) = \begin{cases} c_{n-1,0}(q) + qc_{n-2,0}(q) + q^2c_{n-3,0}(q), & \text{pour } n \geq 3 \\ (1+q)^n, & \text{pour } n \leq 2 \end{cases}$$

Ainsi pour $n \geq 0$, on a

$$c_{n,0}(q) = T_{n+2}(q). \quad (4.1)$$

- Le nombre d'arêtes à distance d du sommet 0^n est donné par la relation de récurrence suivante : pour tout $n \geq 3$,

$$c_{n,1}(q) = c_{n-1,1}(q) + qc_{n-2,1}(q) + q^2c_{n-3,1}(q) + c_{n-2,0}(q) + 2qc_{n-3,0}(q), \quad (4.2)$$

Tableau 4.1 – Les coefficients $c_{n,k}(q)$ du q -cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	$1+q$	1	0	0	0
2	$1+2q+q^2$	$2+2q$	1	0	0
3	$1+3q+3q^2$	$3+6q$	3	0	0
4	$1+4q+6q^2+2q^3$	$4+12q+6q^2$	$6+6q$	2	0
5	$1+5q+10q^2+7q^3+q^4$	$5+20q+21q^2+4q^3$	$10+21q+6q^2$	$7+4q$	1
6	$1+6q+15q^2+16q^3+6q^4$	$6+30q+48q^2+24q^3$	$15+48q+36q^2$	$16+24q$	6
7	$1+7q+21q^2+30q^3+19q^4+3q^5$	$7+42q+90q^2+76q^3+15q^4$	$21+90q+114q^2+30q^3$	$30+76q+30q^2$	$19+15q$

avec $c_{0,1}(q) = 0$, $c_{n,1}(q) = 1$ et $c_{2,1}(q) = 2 + 2q$.

- D'après le Lemme 4.1, pour tout $n \geq 3$ et $k \geq 2$, on a

$$c_{n,k}(q) = c_{n-1,k}(q) + qc_{n-2,k}(q) + q^2c_{n-3,k}(q) + c_{n-2,k-1}(q) + 2qc_{n-3,k-1}(q) + c_{n-3,k-2}(q), \quad (4.3)$$

avec $c_{n,k}(q) = 0$, $n \leq 2$, $k \geq 2$, $n \neq k$ et $c_{2,2}(q) = 1$, $c_{n,0}(q) = T_{n+2}(q)$ et $c_{n,1}(q)$ est donné par la relation (4.2).

Le Tableau 4.1 satisfait la récurrence (4.3).

Corollaire 4.1 [13]. *Pour tout $n, k \geq 0$ le nombre de k -cubes à distance d du sommet 0^n dans $\Gamma_n^{(3)}$ est égal à*

$$c_{n,k}(q) = \sum_{d=k}^{\lfloor 2(n+1)/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{n-d+1} \binom{n-d+1}{j} \binom{j}{d-j} \binom{d}{k} q^{d-k}.$$

Preuve. Soit H un sous-graphe de $\Gamma_n^{(3)}$ isomorphe à Q_k , les sommets de H possèdent $n-k$ bits fixés et k qui varient, (voir la Proposition 2.2). Supposons que $w(t(H)) = d$ (i.e. $d(0^n, t(H)) = d$), nous savons que $d(t(H), b(H)) = k$ ainsi H est à distance $d-k$ de 0^n . Du Corollaire 3.1, le nombre de k -cubes dans $\Gamma_n^{(3)}$ à une certaine distance de 0^n est alors donné par

$$c_{n,k}(q) = \sum_{d=k}^{\lfloor 2(n+1)/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{n-d+1} \binom{n-d+1}{j} \binom{j}{d-j} \binom{d}{k} q^{d-k}.$$

□

On remarque du Tableau 4.1 que les coefficients $c_{n,k}(q)$ satisfont :

$$c'_{2,0}(q) = c_{2,1}(q),$$

$$\begin{aligned}
c'_{2,1}(q) &= 2c_{2,2}(q), \\
c'_{3,0}(q) &= c_{3,1}(q), \\
c'_{3,1}(q) &= 2c_{3,2}(q), \\
&\vdots \\
c'_{7,1}(q) &= 2c_{7,2}(q), \\
c'_{7,2}(q) &= 3c_{7,3}(q), \\
c'_{7,3}(q) &= 4c_{7,4}(q), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

de manière générale, pour $n \geq 0$, $k \geq 1$, le coefficient $c_{n,k}(q)$ du q -cube polynomial de $\Gamma_n^{(3)}$ satisfait la relation suivante :

$$c'_{n,k-1}(q) = kc_{n,k}(q).$$

$c'_{n,k}(q)$ est la dérivée de $c_{n,k}(q)$ par rapport à q .

Théorème 4.3 [13]. *Pour tout $n \geq 0$, $k \geq 1$ le coefficient $c_{n,k}(q)$ peut être obtenu à partir de $c_{n,0}(q)$ de la sorte*

$$c_{n,k}(q) = \frac{1}{k!} c_{n,0}^{(k)}(q), \quad (4.4)$$

où $c_{n,0}^{(k)}(q)$ est la $k^{\text{ème}}$ dérivée de $c_{n,0}(q)$.

Preuve. Du Corollaire 4.1, nous avons

$$\begin{aligned}
c_{n,0}^{(k)}(q) &= \frac{d^k}{dq^k} \sum_{d=0}^{\lfloor 2(n+1)/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{n-d+1} \binom{n-d+1}{j} \binom{j}{d-j} q^d \\
&= \sum_{d=0}^{\lfloor 2(n+1)/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{n-d+1} \binom{n-d+1}{j} \binom{j}{d-j} \frac{d^k}{dq^k} q^d \\
&= \sum_{d=0}^{\lfloor 2(n+1)/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{n-d+1} \binom{n-d+1}{j} \binom{j}{d-j} (d)_k q^{d-k} \\
&= k! \sum_{d=k}^{\lfloor 2(n+1)/3 \rfloor} \sum_{j=0}^{n-d+1} \binom{n-d+1}{j} \binom{j}{d-j} \binom{d}{k} q^{d-k} \\
&= k! c_{n,k}(q), \quad n \geq 0, k \geq 1.
\end{aligned}$$

□

Le théorème précédent nous amène à formuler une relation de récurrence qui exprime la $k^{\text{ème}}$ dérivée de la séquence (1.7).

Corollaire 4.2 [13]. *Pour $n \geq 0$ et $k \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned} T_{n+3}^{(k)}(q) &= T_{n+2}^{(k)}(q) + qT_{n+1}^{(k)}(q) + q^2T_n^{(k)}(q) + k \left[T_{n+1}^{(k-1)}(q) + 2qT_n^{(k-1)}(q) \right] \\ &\quad + k(k-1)T_n^{(k-2)}(q). \end{aligned}$$

Où $T_{n+3}^{(k)}(q)$ est $k^{\text{ème}}$ dérivée de $T_{n+3}(q)$.

Preuve. À partir des équations (4.1), (4.3) et (4.4) nous avons pour tout $n \geq 0, k \geq 2$

$$\begin{aligned} T_{n+3}^{(k)}(q) &= c_{n+1,0}^{(k)}(q) \\ &= k!c_{n+1,k}(q) \\ &= k! \left[c_{n,k}(q) + qc_{n-1,k}(q) + q^2c_{n-2,k}(q) + c_{n-1,k-1}(q) \right. \\ &\quad \left. + 2qc_{n-2,k-1}(q) + c_{n-2,k-2}(q) \right], \quad n \geq 0, k \geq 2 \\ &= c_{n,0}^{(k)}(q) + qc_{n-1,0}^{(k)}(q) + q^2c_{n-2,0}^{(k)}(q) + k \left[c_{n-1,0}^{(k-1)}(q) + 2qc_{n-2,0}^{(k-1)}(q) \right] \\ &\quad + k(k-1)c_{n-2,0}^{(k-2)}(q), \quad n \geq 0, k \geq 2 \\ &= T_{n+2}^{(k)}(q) + qT_{n+1}^{(k)}(q) + q^2T_n^{(k)}(q) + k \left[T_{n+1}^{(k-1)}(q) + 2qT_n^{(k-1)}(q) \right] \\ &\quad + k(k-1)T_n^{(k-2)}(q), \quad n \geq 0, k \geq 2. \end{aligned}$$

□

4.4.1 Fonction génératrice de $c_{n,k}(q)$

Dans ce qui suit, nous fournissons une relation de récurrence et une formule explicite pour la fonction génératrice de la séquence $\{c_{n,k}(q)\}_{k \geq 0}$ définie par

$$f_k(q, y) = \sum_{n \geq 0} c_{n,k}(q)y^n. \quad (4.5)$$

Proposition 4.1 [13]. *Pour $k \geq 3$, $f_k(q, y)$ peut être obtenue par une relation de récurrence donnée ci-dessous :*

$$f_k(q, y) = \frac{y^2(1+2qy)}{(1-y-qqy^2-q^2y^3)}f_{k-1}(q, y) + \frac{y^3}{(1-y-qqy^2-q^2y^3)}f_{k-2}(q, y),$$

avec

$$f_0(q, y) = \frac{1+qy+q^2y^2}{1-y-qqy^2-q^2y^3}, \quad f_1(q, y) = \frac{y(1+2qy)}{(1-y-qqy^2-q^2y^3)^2}$$

$$\text{et } f_2(q, y) = \frac{y^2 (1 + 3qy^2 + 3q^2y^3)}{(1 - y - qy^2 - q^2y^3)^3}$$

Preuve. A partir des équations (4.5) et (4.3), et pour tout $k \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} f_k(q, y) &= \sum_{n \geq 0} c_{n,k}(q) y^n \\ &= \sum_{n \geq 3} c_{n,k}(q) y^n \\ &= y \sum_{n \geq 2} c_{n,k}(q) y^n + qy^2 \sum_{n \geq 1} c_{n,k}(q) y^n + q^2 y^3 \sum_{n \geq 0} c_{n,k}(q) y^n \\ &\quad + y^2 \sum_{n \geq 1} c_{n,k-1}(q) y^n + 2qy^3 \sum_{n \geq 0} c_{n,k-1}(q) y^n + y^3 \sum_{n \geq 0} c_{n,k-2}(q) y^n \\ &= (y + qy^2 + q^2y^3) f_k(q, y) + y^2 (1 + 2qy) f_{k-1}(q, y) + y^3 f_{k-2}(q, y), \end{aligned}$$

le résultat s'ensuit. □

Nous donnons l'expression de $f_k(q, y)$ pour $k = 3, 4, 5$, dans la liste ci-dessous

$$\begin{aligned} f_3(q, y) &= \frac{y^4 (2 + (4q - 1)y + 6q^2y^3 + 4q^3y^4)}{(1 - y - qy^2 - q^2y^3)^4}, \\ f_4(q, y) &= \frac{y^5 (1 + y + (10q - 1)y^2 + (10q^2 - 5q)y^3 + 10q^3y^5 + 5q^4y^6)}{(1 - y - qy^2 - q^2y^3)^5}, \\ f_5(q, y) &= \frac{y^7 (3 + (6q - 2)y + 6qy^2 + (30q^2 - 6q)y^3 + (20q^3 - 15q^2)y^4 + 15q^4y^6 + 6q^5y^7)}{(1 - y - qy^2 - q^2y^3)^6}. \end{aligned}$$

La Proposition 4.1 nous permet de définir une nouvelle relation de récurrence pour les coefficients $c_{n,k}(q)$, qui s'expriment en fonction du q -analogue de la suite Tribonacci (1.7).

Théorème 4.4 [13]. *Pour tout $n \geq 3$, $k \geq 3$ le coefficient $c_{n,k}(q)$ est égal à*

$$c_{n,k}(q) = \sum_{i=0}^{n-2} T_i(q) (c_{n-i-1,k-1}(q) + 2qc_{n-i-2,k-1}(q) + c_{n-i-2,k-2}(q)).$$

Preuve. De la Proposition 4.1, on a

$$\begin{aligned} f_k(q, y) &= (y + 2qy^2) T(q, y) f_{k-1}(q, y) + y^3 T(q, y) f_{k-2}(q, y) \\ &= (y + 2qy^2) \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n T_i(q) c_{n-i,k-1}(q) y^n + y^3 \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n T_i(q) c_{n-i,k-2}(q) y^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n T_i(q) c_{n-i,k-1}(q) y^{n+1} + 2q \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n T_i(q) c_{n-i,k-1}(q) y^{n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n T_i(q) c_{n-i, k-2}(q) y^{n+3} \\
= & \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} T_i(q) c_{n-i-1, k-1}(q) y^n + 2q \sum_{n \geq 2} \sum_{i=0}^{n-2} T_i(q) c_{n-i-2, k-1}(q) y^n \\
& + \sum_{n \geq 2} \sum_{i=0}^{n-2} T_i(q) c_{n-i-2, k-2}(q) y^n \\
= & \sum_{n \geq 2} T_{n-1}(q) c_{0, k-1}(q) y^n + \sum_{n \geq 2} \sum_{i=0}^{n-2} T_i(q) (c_{n-i-1, k-1}(q) + 2q c_{n-i-2, k-1}(q) \\
& + c_{n-i-2, k-2}(q)) y^n
\end{aligned}$$

comme $c_{0, k}(q) = c_{1, k}(q) = 0$ pour $k \geq 3$, alors

$$\begin{aligned}
f_k(q, y) & = \sum_{n \geq 2} c_{n, k}(q) y^n \\
& = \sum_{n \geq 2} \sum_{i=0}^{n-2} T_i(q) (c_{n-i-1, k-1}(q) + 2q c_{n-i-2, k-1}(q) + c_{n-i-2, k-2}(q)) y^n
\end{aligned}$$

d'où

$$c_{n, k}(q) = \sum_{i=0}^{n-2} T_i(q) (c_{n-i-1, k-1}(q) + 2q c_{n-i-2, k-1}(q) + c_{n-i-2, k-2}(q)).$$

□

Nous présentons deux nouveaux résultats qui vont nous permettre d'avoir une expression explicite de $f_k(q, y)$.

Lemme 4.2 [13]. *Pour $k \geq 1$ la fonction génératrice de la séquence $\{c_{n, k}(q)\}_{k \geq 0}$ satisfait la relation suivante :*

$$f_k(q, y) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f_0(q, y)}{\partial q^k}, \quad (4.6)$$

où $\frac{\partial^k f}{\partial q^k}$ est la $k^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f par rapport à q .

Preuve. De l'Équation (4.5) et du Théorème (4.3), on a

$$f_k(q, y) = \sum_{n \geq 0} c_{n, k}(q) y^n = \frac{1}{k!} \sum_{n \geq 0} c_{n, 0}^{(k)}(q) y^n = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dq^k} \sum_{n \geq 0} c_{n, 0}(q) y^n = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f_0(q, y)}{\partial q^k}.$$

□

La fonction génératrice $f_0(q, y)$ est la fonction composée de $g(q, y) = \frac{q}{1-yq}$ et $h(q, y) = 1 + qy + q^2y^2$,

$$f_0(q, y) = g(h(q, y), y).$$

Les $k^{\text{ème}}$ dérivées par rapport à q des fonctions $g(q, y)$ et $h(q, y)$ sont

$$\frac{\partial^k}{\partial q^k} g(q, y) = \frac{k!y^{k-1}}{(1-yq)^{k+1}}, \quad k \geq 1$$

et

$$\frac{\partial^k}{\partial q^k} h(q, y) = \begin{cases} y(1+2qy), & \text{pour } k = 1. \\ 2y^2, & \text{pour } k = 2. \\ 0, & \text{pour } k \geq 3. \end{cases}$$

Lemme 4.3 [13]. *Pour $k \geq 1$, la $k^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction $f_0(q, y)$ par rapport à q s'exprime de la sorte*

$$\frac{\partial^k}{\partial q^k} f_0(q, y) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (k)_i \binom{k-i}{k-2i} y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial q^{k-i}} g(h(q, y), y). \quad (4.7)$$

Preuve. Par récurrence sur k . Pour $k = 1$ l'équation (4.7) est vraie, en effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} f_0(q, y) &= \frac{y(1+2qy)}{(1-y-qqy^2-q^2y^3)^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \frac{\partial}{\partial q} g(h(q, y), y). \end{aligned}$$

Supposons à présent que (4.7) est vraie à l'ordre $p \leq k$, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $p = k + 1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1}}{\partial q^{k+1}} f_0(q, y) &= \frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (k)_i \binom{k-i}{k-2i} y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial q^{k-i}} g(h(q, y), y) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (k)_i \binom{k-i}{k-2i} (k-2i) 2y^{2i+2} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i-1} \frac{\partial^{k-i}}{\partial q^{k-i}} g(h(q, y), y) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (k)_i \binom{k-i}{k-2i} y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i+1} \frac{\partial^{k-i+1}}{\partial q^{k-i+1}} g(h(q, y), y) \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} (k)_{i-1} \binom{k-i+1}{k-2i+2} (k-2i+2) 2y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i+1} \\ &\quad \frac{\partial^{k-i+1}}{\partial q^{k-i+1}} g(h(q, y), y) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} (k)_i \binom{k-i}{k-2i} y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i+1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^{k-i+1}}{\partial q^{k-i+1}} g(h(q, y), y)$$

puisque

$$(k)_i = \frac{k!}{(k-i)!},$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1}}{\partial q^{k+1}} f_0(q, y) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i+1} \frac{\partial^{k-i+1}}{\partial q^{k-i+1}} g(h(q, y), y) \left[(k)_{i-1} \binom{k-i+1}{k-2i+2} \right. \\ &\quad \left. 2(k-2i+2) + (k)_i \binom{k-i}{k-2i} \right] + \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial q^{k+1}} g(h(q, y), y) \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i+1} \frac{\partial^{k-i+1}}{\partial q^{k-i+1}} g(h(q, y), y) \frac{(k+1)!}{(k-2i+1)!i!} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial q^{k+1}} g(h(q, y), y) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (k+1)_i \binom{k-i+1}{k-2i+1} y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q, y) \right)^{k-2i+1} \frac{\partial^{k-i+1}}{\partial q^{k-i+1}} g(h(q, y), y). \end{aligned}$$

□

Nous pouvons à présent exprimer la fonction génératrice de la séquence $c_{n,k}(q)$.

Théorème 4.5 [13]. *Pour $k \geq 0$, la fonction génératrice $f_k(q, y)$ est donnée par :*

$$f_k(q, y) = \frac{y^{k-1}}{(1-y-qq^2-q^2y^3)^{k+1}} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} (a(q, y))^{k-2i} (b(q, y))^i \right].$$

Avec $a(q, y) = y(1+2qy)$ et $b(q, y) = y(1-y-qq^2-q^2y^3)$.

Preuve. En vertu du Lemme 4.2 et du Lemme 4.3, nous avons

$$\begin{aligned} f_k(q, y) &= \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial q^k} f_0(q, y) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (k)_i \binom{k-i}{k-2i} y^{2i} \left(\frac{\partial}{\partial q} h(q) \right)^{k-2i} \frac{\partial^{k-i}}{\partial q^{k-i}} g(h(q, y), y) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{y^{2i}}{(k-2i)!i!} \frac{y^{k-2i} (1+2qy)^{k-2i} (k-i)! y^{k-i-1}}{(1-y-qq^2-q^2y^3)^{k-i+1}} \\ &= \frac{y^k \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} y^{k-i-1} (1+2qy)^{k-2i} (1-y-qq^2-q^2y^3)^i}{(1-y-qq^2-q^2y^3)^{k+1}}. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.1. En posant $q = 1$ dans l'expression de $f_k(q, y)$, on obtient la fonction génératrice des nombres de k -cubes dans $\Gamma_n^{(3)}$, vue au Chapitre ??,

$$f_k(y) = \frac{y^{k-1}}{(1 - y - y^2 - y^3)^{k+1}} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} y^{k-i} (1+2y)^{k-2i} (1-y-y^2-y^3)^i \right].$$

4.5 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons présenter de nouveaux résultats concernant les cubes Tribonacci. Ces avancées découlent de l'introduction d'un q -analogue du cube polynomial du cube Tribonacci, permettant non seulement de compter les hypercubes de dimension k , mais également d'évaluer leur distance par rapport au sommet de poids nul. Nous avons développé de nouvelles récurrences et formulé de nouvelles expressions pour le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, ainsi que pour le nombre d'hypercubes dans le cube Tribonacci.

Chapitre 5

Cube polynomial du cube s -bonacci

5.1 Introduction

Nous considérons dans ce chapitre les cubes s -bonacci, nous montrons quelques propriétés satisfaites par ces graphes. Les résultats obtenus révèlent les liens entre ces graphes, les nombres s -bonacci et les coefficients binomiaux. Nous montrons par exemple que le nombre d'arêtes dans le cube s -bonacci est exprimé comme produit de convolution de la suite s -bonacci, ou encore que le nombre de sommets de poids w et le nombre d'hypercubes de dimension k s'expriment en fonction des coefficients binomiaux.

5.2 Propriétés combinatoires sur le nombre de sommets et d'arêtes

Nous rappelons que pour tout $2 \leq s \leq n$, le cube s -bonacci $\Gamma_n^{(s)}$ est construit récursivement à partir de $\Gamma_{n-1}^{(s)}$, $\Gamma_{n-2}^{(s)}$, ..., $\Gamma_{n-s}^{(s)}$ de la sorte :

$$\Gamma_n^{(s)} = 0\Gamma_{n-1}^{(s)} + 10\Gamma_{n-2}^{(s)} + \dots + 1^{s-1}0\Gamma_{n-s}^{(s)}, \quad s \leq n.$$

La décomposition ci-dessus est appelée décomposition fondamentale de $\Gamma_n^{(s)}$. Cette dernière permet de dériver des relations de récurrences, entre autres sur le nombre

d'arêtes dans $\Gamma_n^{(s)}$ qui est donné par la relation suivante :

$$\left| E_n^{(s)} \right| = \sum_{i=1}^s \left| E_{n-i}^{(s)} \right| + \sum_{i=1}^{s-1} i \left| V_{n-i-1}^{(s)} \right|, \quad n \geq s \quad (5.1)$$

avec $\left| E_n^{(s)} \right| = n2^{n-1}$ pour tout $0 \leq n \leq s-1$.

La fonction génératrice de la séquence $\left| E_n^{(s)} \right|$, $n \geq 0$, est donnée par le lemme suivant.

Lemme 5.1 [11]. *La fonction génératrice du nombre d'arêtes dans $\Gamma_n^{(s)}$ est donnée par :*

$$\sum_{n \geq 0} \left| E_n^{(s)} \right| y^n = \frac{\sum_{i=1}^{s-1} i y^i}{(1 - \sum_{i=1}^s y^i)^2}.$$

Preuve. D'après la relation de récurrence (5.1), on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left| E_n^{(s)} \right| y^n &= \sum_{n=0}^{s-1} \left| E_n^{(s)} \right| y^n + \sum_{n \geq s} \left| E_n^{(s)} \right| y^n \\ &= \sum_{n=0}^{s-1} \left| E_n^{(s)} \right| y^n + \sum_{n \geq s} \sum_{i=1}^s \left| E_{n-i}^{(s)} \right| y^n + \sum_{n \geq s} \sum_{i=1}^{s-1} i F_{n-i+1}^{(s)} y^n \\ &= \sum_{i=1}^s y^i \sum_{n \geq 0} \left| E_n^{(s)} \right| y^n + \sum_{i=1}^{s-1} i y^{i-1} \sum_{n \geq 0} F_n^{(s)} y^n + \sum_{n=1}^{s-1} \left| E_n^{(s)} \right| y^n \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{n=0}^{s-i-1} \left| E_n^{(s)} \right| y^{n+i} - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{n=0}^{s-i} i F_n^{(s)} y^{n+i-1} \\ &= \sum_{i=1}^s y^i \sum_{n \geq 0} \left| E_n^{(s)} \right| y^n + \sum_{i=1}^{s-1} i y^{i-1} \times \frac{y}{1 - \sum_{i=1}^s y^{i-1}} + \sum_{n=1}^{s-1} \left| E_n^{(s)} \right| y^n \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{n=i}^{s-1} \left| E_{n-i}^{(s)} \right| y^n - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{n=i-1}^{s-1} i F_{n-i+1}^{(s)} y^n \\ &= \sum_{i=1}^s y^i \sum_{n \geq 0} \left| E_n^{(s)} \right| y^n + \frac{\sum_{i=1}^{s-1} i y^i}{1 - \sum_{i=1}^s y^{i-1}} + \sum_{n=1}^{s-1} \left| E_n^{(s)} \right| y^n \\ &\quad - \sum_{n=1}^{s-1} \sum_{i=1}^n \left| E_{n-i}^{(s)} \right| y^n - \sum_{n=1}^{s-1} \sum_{i=1}^n i F_{n-i+1}^{(s)} y^n \end{aligned}$$

Montrons à présent que

$$\sum_{n=1}^{s-1} \left| E_n^{(s)} \right| y^n - \sum_{n=1}^{s-1} \sum_{i=1}^n \left| E_{n-i}^{(s)} \right| y^n - \sum_{n=1}^{s-1} \sum_{i=1}^n i F_{n-i+1}^{(s)} y^n = 0.$$

D'après les conditions initiales de la suite s -bonacci définie au Chapitre 1 et de la

réurrence (5.1), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{s-1} \left[|E_n^{(s)}| - \sum_{i=1}^n (|E_{n-i}^{(s)}| + iF_{n-i+1}^{(s)}) \right] y^n &= \sum_{n=2}^{s-1} \left[n2^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} ((n-i)2^{n-i-1} + i2^{n-i-1}) \right. \\
&\quad \left. - n \right] y^n \\
&= \sum_{n=2}^{s-1} \left[n2^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} n2^{n-i-1} - n \right] y^n \\
&= \sum_{n=2}^{s-1} \left[n2^{n-1} - n2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i} - n \right] y^n \\
&= \sum_{n=2}^{s-1} \left[n2^{n-1} - n2^{n-1} \frac{(2^{n-1} - 1)}{2^{n-1}} - n \right] y^n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\sum_{n \geq 0} |E_n^{(s)}| y^n = \frac{\sum_{i=1}^{s-1} iy^i}{(1 - \sum_{i=1}^s y^i)^2}.$$

□

On est à présent en mesure d'exprimer le nombre d'arêtes dans $\Gamma_n^{(s)}$ comme produit de convolution des nombres s -bonacci.

Théorème 5.1 [11]. *Le nombre d'arêtes dans $\Gamma_n^{(s)}$ est donné par la formule suivante :*

$$|E_n^{(s)}| = \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{s-1} iF_j^{(s)} F_{n-j-i+2}^{(s)}, \quad n \geq 0, s \geq 2. \quad (5.2)$$

Preuve. D'après le Lemme 5.1

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} |E_n^{(s)}| y^n &= \left(\frac{y}{1 - \sum_{i=1}^s y^i} \right)^2 y^{-1} \sum_{i=1}^{s-1} iy^{i-1} \\
&= (f^{(s)}(y))^2 y^{-1} \sum_{i=1}^{s-1} iy^{i-1}.
\end{aligned}$$

Où $(f^{(s)}(y))^2$ est le produit de convolution des nombres s -bonacci et est égal à

$$(f^{(s)}(y))^2 = \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n F_i^{(s)} F_{n-i}^{(s)} y^n.$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} |E_n^{(s)}| y^n &= \sum_{n \geq 1} \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{s-1} i F_j^{(s)} F_{n-j}^{(s)} y^{n+i-2} \\
&= \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{n \geq 1} \sum_{j=0}^n i F_j^{(s)} F_{n-j}^{(s)} y^{n+i-2} \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{j=0}^n F_j^{(s)} F_{n-j}^{(s)} y^{n-1} + \sum_{n \geq 1} \sum_{j=0}^n 2 F_j^{(s)} F_{n-j}^{(s)} y^n \\
&\quad + \sum_{i=3}^{s-1} \sum_{n \geq 1} \sum_{j=0}^n i F_j^{(s)} F_{n-j}^{(s)} y^{n+i-2}, \quad s \geq 4 \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n F_j^{(s)} F_{n-j+1}^{(s)} y^n + \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n 2 F_j^{(s)} F_{n-j}^{(s)} y^n \\
&\quad + \sum_{i=3}^{s-1} \sum_{n \geq i-1} \sum_{j=0}^{n-i+2} i F_j^{(s)} F_{n-j-i+2}^{(s)} y^n, \quad s \geq 4
\end{aligned}$$

comme $F_{n-j-i+2}^{(s)} = 0$ pour tout $n - i + 3 \leq j \leq n$ et pour tout $0 \leq n \leq i - 2$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} |E_n^{(s)}| y^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n F_j^{(s)} F_{n-j+1}^{(s)} y^n + \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n 2 F_j^{(s)} F_{n-j}^{(s)} y^n \\
&\quad + \sum_{i=3}^{s-1} \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n i F_j^{(s)} F_{n-j-i+2}^{(s)} y^n, \quad s \geq 4 \\
&= \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n i F_j^{(s)} F_{n-j-i+2}^{(s)} y^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=0}^n i F_j^{(s)} F_{n-j-i+2}^{(s)} y^n
\end{aligned}$$

par identification

$$|E_n^{(s)}| = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=0}^n i F_j^{(s)} F_{n-j-i+2}^{(s)}.$$

□

En fixant $s = 2$ dans la formule (5.2) on obtient le nombre d'arête dans le cube de Fibonacci déterminé dans [44]

$$\begin{aligned}
|E_n^{(2)}| &= \sum_{j=0}^n F_j^{(2)} F_{n-j+1}^{(2)}, \quad n \geq 0 \\
&= \sum_{j=0}^n F_j F_{n-j+1}, \quad n \geq 0.
\end{aligned}$$

En fixant $s = 3$ dans la même formule on obtient le nombre d'arêtes dans le cube Tribonacci déterminé au Chapitre 3.

Soit $S_{n,w}^{(s)}$ le nombre de sommets de poids w dans $\Gamma_n^{(s)}$.

Proposition 5.1 [11]. *Le nombre de sommets de poids w dans $\Gamma_n^{(s)}$ vérifie la formule de récurrence suivante :*

$$|S_{n,w}^{(s)}| = \sum_{i=1}^s |S_{n-i,w-i+1}^{(s)}|, \quad n \geq s, s-1 \leq w \leq \lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor, \quad (5.3)$$

avec

$$|S_{n,w}^{(s)}| = \begin{cases} 0, & \text{si } (n \geq 0 \text{ et } w \geq \lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor), \\ 0, & \text{si } (n < s-1 \text{ et } w \geq s-1), \\ 1, & \text{si } n = w = s-1, \\ \binom{n}{w}, & \text{si } n \geq 0 \text{ et } 0 \leq w < s-1, \end{cases}$$

Preuve. Un mot s -bonacci de longueur n et de poids maximum peut être de la forme $\alpha = (1^{s-1}0)^p 1^{n-sp}$ où $p = \lfloor n/s \rfloor$, ainsi $w(\alpha) = \lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor$. La preuve de (5.3) découle directement de la décomposition fondamentale de $\Gamma_n^{(s)}$. \square

Nous déterminons à présent le nombre de sommets de poids w dans $\Gamma_n^{(s)}$.

Théorème 5.2 [11]. *Le nombre de sommets de poids w dans $\Gamma_n^{(s)}$ est égal à*

$$|S_{n,w}^{(s)}| = \binom{n-w+1}{w}_{s-1}, \quad n \geq 0, s \geq 2.$$

Preuve. Un mot s -bonacci de longueur n et de poids w peut être décomposé en $q+1$ blocs de 1 séparés par des zéros de la sorte

$$1^{s_0} 0 1^{s_1} 0 \dots 1^{s_{q-1}} 0 1^{s_q}, \quad (5.4)$$

où $q = n - w$, $\sum_{i=0}^q s_i = w$ et $0 \leq s_i \leq s-1$, $i = 0, 1, \dots, q$.

Alors le nombre de sommets de poids w dans $\Gamma_n^{(s)}$ est égal au nombre de solutions de l'équation $\sum_{i=0}^q s_i = w$ avec $0 \leq s_i \leq s-1$. Ce qui revient à déterminer "le nombre de façons de distribuer w balles sur $q+1$ urnes de capacités au plus $s-1$ ", d'où

$$\begin{aligned} |S_{n,w}^{(s)}| &= \binom{q+1}{w}_{s-1} \\ &= \binom{n-w+1}{w}_{s-1}. \end{aligned}$$

□

5.3 Cube polynomial du cube s -bonacci

Nous considérons dans cette partie le cube polynomial du cube s -bonacci noté $C(\Gamma_n^{(s)}, x)$. Nous montrons que ce dernier vérifie une relation de récurrence d'ordre s , nous déterminons également sa formule explicite. Rappelons que $C(\Gamma_n^{(2)}, x)$ est le cube polynomial du cube de Fibonacci [44], dont les premiers polynômes sont :

$$\begin{aligned} C(\Gamma_0, x) &= 1, \\ C(\Gamma_1, x) &= 2 + x, \\ C(\Gamma_2, x) &= 3 + 2x, \\ C(\Gamma_3, x) &= 5 + 5x + x^2, \\ C(\Gamma_4, x) &= 8 + 10x + 3x^2, \\ C(\Gamma_5, x) &= 13 + 20x + 9x^2 + x^3, \\ C(\Gamma_6, x) &= 21 + 38x + 22x^2 + 4x^3. \end{aligned}$$

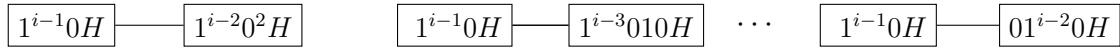
Le cas $s = 3$ correspond au cube polynomial du cube Tribonacci présenté au Chapitre 3 et dont les premiers polynômes sont :

$$\begin{aligned} C(\Gamma_0^{(3)}, x) &= 1, \\ C(\Gamma_1^{(3)}, x) &= 2 + x, \\ C(\Gamma_2^{(3)}, x) &= 4 + 4x + x^2, \\ C(\Gamma_3^{(3)}, x) &= 7 + 9x + 3x^2, \\ C(\Gamma_4^{(3)}, x) &= 13 + 22x + 12x^2 + 2x^3, \\ C(\Gamma_5^{(3)}, x) &= 24 + 50x + 37x^2 + 11x^3 + x^4, \\ C(\Gamma_6^{(3)}, x) &= 44 + 108x + 99x^2 + 40x^3 + 6x^4. \end{aligned}$$

Les sept premiers polynômes de $C(\Gamma_n^{(4)}, x)$ sont :

$$\begin{aligned} C(\Gamma_0^{(4)}, x) &= 1, \\ C(\Gamma_1^{(4)}, x) &= 2 + x, \\ C(\Gamma_2^{(4)}, x) &= 4 + 4x + x^2, \\ C(\Gamma_3^{(4)}, x) &= 8 + 12x + 6x^2 + x^3, \\ C(\Gamma_4^{(4)}, x) &= 15 + 28x + 18x^2 + 4x^3, \\ C(\Gamma_5^{(4)}, x) &= 29 + 67x + 58x^2 + 22x^3 + 3x^4, \end{aligned}$$

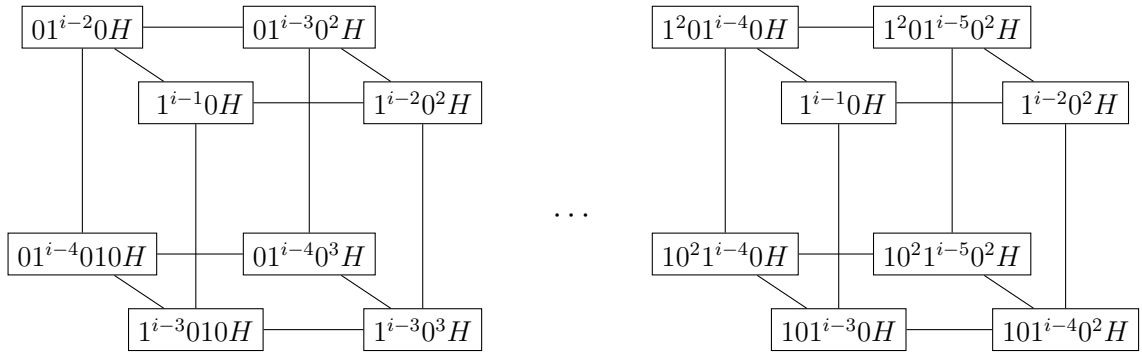
$$C(\Gamma_6^{(4)}, x) = 56 + 154x + 167x^2 + 88x^3 + 22x^4 + 2x^5.$$



Hypercubes de dimension $k + 1$



Hypercubes de dimension $k + 2$



Hypercubes de dimension $k + 3$

FIGURE 5.1 – Construction d’hypercubes de dimension $k + 1$, $k + 2$ et $k + 3$ à partir d’un sous-graphe $H \cong Q_K$ dans $\Gamma_{n-i}^{(s)}$.

Théorème 5.3 [11]. *Pour tout $n \geq s$, le cube polynomial du cube s -bonacci est donné par la relation de récurrence suivante :*

$$C(\Gamma_n^{(s)}, x) = \sum_{i=1}^s C(\Gamma_{n-i}^{(s)}, x)(1+x)^{i-1}, \tag{5.5}$$

avec $C(\Gamma_n^{(s)}, x) = (2+x)^n, 0 \leq n \leq s-1$.

Preuve. Par définition $\Gamma_n^{(s)} \cong Q_n$ pour tout $n \leq s-1$, d’où $C(\Gamma_n^{(s)}, x) = (2+x)^n$. Supposons que $n \geq s$ et sans perte de généralité considérons un sous-graphe H

isomorphe à Q_k dans $\Gamma_{n-i}^{(s)}$, $i \in \{1, \dots, s\}$. Chaque sommet de H est préfixé par $1^{i-1}0$ dans $\Gamma_n^{(s)}$, on écrira simplement $1^{i-1}0H$. D'après la Proposition 2.6, $1^{i-1}0H$ possède $i-1$ copies $1^{i-2}00H$, $1^{i-3}000H$, \dots , $01^{i-2}0H$ dans $\Gamma_{n-i+1}^{(s)}$, $\Gamma_{n-i+2}^{(s)}$, \dots , $\Gamma_{n-1}^{(s)}$ auxquels il est relié par un couplage parfait. Rappelons que tous les sommets de $1^{i-1}0H$ possèdent $n-k$ positions fixes et k qui varient (d'après la Proposition 2.2). Pour construire un hypercube de dimension $k+1$ à partir de H on choisit 1 copies parmi les $i-1$ copies de H , on a ainsi $\binom{i-1}{1}$ possibilités.

De manière générale, pour construire un hypercube de dimension $k+m$, $0 \leq m \leq i-1$, on choisit m copies parmi les $i-1$ copies de $1^{i-1}0H$, on a ainsi $\binom{i-1}{m}$ possibilités, voir la Figure 5.1. Ces hypercubes sont énumérés par

$$\sum_{m=0}^{i-1} \binom{i-1}{m} x^m C(\Gamma_{n-i}^{(s)}, x) = (1+x)^{i-1} C(\Gamma_{n-i}^{(s)}, x).$$

Ainsi le nombre d'hypercubes de dimension k dans $C(\Gamma_{n-i}^{(s)}, x)$ est dénombré par

$$C(\Gamma_n^{(s)}, x) = \sum_{i=1}^s (1+x)^{i-1} C(\Gamma_{n-i}^{(s)}, x).$$

□

Soit $F_s(x, y) = \sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n^{(s)}, x) y^n$ la fonction génératrice de la séquence $C(\Gamma_n^{(s)}, x)$,

Théorème 5.4 [11]. *La fonction génératrice de $C(\Gamma_n^{(s)}, x)$ est donné par*

$$F_s(x, y) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{s-1} (1+x)^i y^i}{1 - \sum_{i=1}^s (1+x)^{i-1} y^i}.$$

Preuve. Du Théorème 5.3, on a :

$$\begin{aligned} F_k(x, y) &= \sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n^{(s)}, x) y^n \\ &= \sum_{n=0}^{s-1} C(\Gamma_n^{(s)}, x) y^n + \sum_{n \geq s} C(\Gamma_n^{(s)}, x) y^n \\ &= \sum_{n=0}^{s-1} (2+x)^n y^n + \sum_{i=1}^s (1+x)^{i-1} \sum_{n \geq s} C(\Gamma_{n-i}^{(s)}, x) y^n \\ &= \sum_{n=0}^{s-1} (2+x)^n y^n + \sum_{i=1}^s (1+x)^{i-1} y^i \sum_{n \geq s-i} C(\Gamma_n^{(s)}, x) y^n, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(1 - \sum_{i=1}^s (1+x)^{i-1} y^i\right) F_s(x, y) &= \sum_{n=0}^{s-1} (2+x)^n y^n - \sum_{i=1}^{s-1} (1+x)^{i-1} y^i \sum_{n=0}^{s-i-1} C(\Gamma_n^{(s)}, x) y^n \\
&= \sum_{n=0}^{s-1} (2+x)^n y^n - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{n=i}^{s-1} (1+x)^{i-1} (2+x)^{n-i} y^n \\
&= \sum_{n=0}^{s-1} (2+x)^n y^n - \sum_{n=1}^{s-1} \sum_{i=1}^n (1+x)^{i-1} (2+x)^{n-i} y^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{s-1} \left[(2+x)^n - \sum_{i=1}^n (1+x)^{i-1} (2+x)^{n-i} \right] y^n
\end{aligned}$$

comme $(2+x)^n - \sum_{i=1}^n (1+x)^{i-1} (2+x)^{n-i} = (1+x)^n$ on obtient le résultat voulu. \square

Le théorème ci-dessous donne une formule explicite du cube polynomial du cube s -bonacci.

Théorème 5.5 [11]. *Le polynôme $C(\Gamma_n^{(s)}, x)$ est donné par la formule suivante :*

$$C(\Gamma_n^{(s)}, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor} \binom{n-k+1}{k}_{s-1} (1+x)^k, \quad n \geq 0.$$

Preuve. D'après le Théorème 5.4 on a

$$\begin{aligned}
F_k(x, y) &= \sum_{n \geq 0} C(\Gamma_n^{(s)}, x) y^n \\
&= \frac{1 + \sum_{i=1}^{s-1} (1+x)^i y^i}{1 - \sum_{i=1}^s (1+x)^{i-1} y^i} \\
&= \sum_{n \geq 0} \left(1 + (1+x)y + (1+x)^2 y^2 + \dots + (1+x)^{s-1} y^{s-1}\right)^{n+1} y^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \binom{n+1}{k}_{s-1} y^{n+k} (1+x)^k \\
&= \sum_{n, k \geq 0} \binom{n-k+1}{k}_{s-1} y^n (1+x)^k \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor} \binom{n-k+1}{k}_{s-1} y^n (1+x)^k
\end{aligned}$$

par conséquent on a

$$C(\Gamma_n^{(s)}, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor} \binom{n-k+1}{k}_{s-1} (1+x)^k.$$

□

Nous déterminons à présent une expression des coefficients $c_{n,k}^{(s)}$.

Corollaire 5.1 [11]. *Pour tout $n \geq 0$, $s \geq 2$, le nombre d'hypercubes isomorphes à Q_k dans $\Gamma_n^{(s)}$ est :*

$$c_{n,k}^{(s)} = \sum_{i=k}^{\lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor} \binom{n-i+1}{i}_{s-1} \binom{i}{k} x^k.$$

Preuve. Notons que pour tout sous-graphe H isomorphe à Q_k tel que $w(t(H)) = i \geq k$. $t(H)$ est le sommet de poids maximum de $\binom{i}{k}$ hypercubes, ainsi le nombre d'hypercubes de dimension k est :

$$\sum_{i=k}^{\lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor} \binom{n-i+1}{i}_{s-1} \binom{i}{k} x^k.$$

□

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés combinatoires du cube s -bonacci, en mettant en lumière les relations de récurrence et les formules concernant le nombre d'arêtes, les sommets d'un certain poids et le cube polynomial. Les résultats obtenus généralisent efficacement les travaux existants sur les cubes de Fibonacci et Tribonacci présents dans la littérature, [14, 44, 52].

Conclusion

L'intérêt de cette thèse s'est porté sur des classes de sous-graphes particuliers de l'hypercube, à savoir le cube de Fibonacci et ses généralisations. Le cube de Fibonacci étant le graphe obtenu à partir de l'hypercube après suppression des sommets contenant deux 1 consécutifs. Nous avons exhiber la structure récursive de ces graphes et nous avons mis en exergue leurs propriétés combinatoires et énumératives.

La thèse est constituée de six chapitres. Le premier introduit des notions de graphes et d'algèbre énumérative utilisées le long de cette thèse. La première partie du second chapitre est principalement consacrée au cube de Fibonacci et au cube de Lucas où sont présentés leur structure, les différentes approches, définitions et propriétés énumératives les concernant.

Depuis l'introduction du cube de Fibonacci de nombreuses généralisations ont été proposées afin de combler pour certain, des limitations, du cube de Fibonacci, comme celle qui concerne l'existence de cycle hamiltonien par exemple. Quelques généralisations sont présentées dans la dernière partie du Chapitre 2. Nous avons cependant mis l'accent sur les cubes de Fibonacci généralisés d'ordre s , qui sont les sous-graphes de l'hypercube obtenus après suppression de tous les sommets contenant s 1 consécutifs. Le nombre de sommets de ces graphes est égal à $F_{n+2}^{(s)}$, où $F_n^{(s)}$ est le $n^{\text{ème}}$ nombre s -bonacci. Afin de bien les distingés des autres généralisations, nous avons choisi de les nommer cubes s -bonacci, où $s = 2$ correspond au cube de Fibonacci et $s = 3$ correspond au cube Tribonacci.

Durant la préparation de cette thèse nous avons constater que l'ensemble des sommets du cube de Lucas contrairement au cube de Fibonacci, ne correspond pas à l'ensemble des codes de Zeckendorf qui représentent des entiers par les nombres de Lucas. Toutefois, nous établissons dans la Section 2.5, une bijection entre ces deux ensembles.

Nous avons considéré dans un premier temps le cube Tribonacci, pour lequel nous avons déterminé le nombre de ses arêtes par une relation de récurrence, puis comme produit de nombres Tribonacci donné par la formule suivante :

$$|E(\Gamma_n^{(3)})| = \sum_{k=0}^n T_k(T_{n-k+1} + 2T_{n-k}), n \geq 0.$$

Les sous-graphes du cube Tribonacci isomorphes au k -cube sont dénombrés par un polynôme, appelé cube polynomial. Nous avons déterminé une relation de récurrence, une formule explicite ainsi que sa fonction génératrice. D'autres résultats sont également obtenus, notamment sur le nombre de sommets de poids w ou encore sur les coefficients du polynôme $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$.

Nous avons également exploité le fait que le cube de Fibonacci soit un sous-graphe du cube Tribonacci, ce qui nous a permis d'exprimer le cube polynomial du cube Tribonacci en fonction du cube polynomial du cube de Fibonacci. L'ensemble de ces résultats font l'objet du Chapitre 3.

Dans le Chapitre 4, nous avons considéré un q -analogue du polynôme $C(\Gamma_n^{(3)}, x)$, noté $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)$, où $C(\Gamma_n^{(3)}, x; 1) = C(\Gamma_n^{(3)}, x)$. Ce polynôme compte le nombre d'hyper-cubes de dimension k dans le cube Tribonacci à distance d du sommet 0^n . Sa fonction génératrice ainsi qu'une formule explicite sont présentées dans la Section 4.3.

Notre intérêt s'est également porté sur le $k^{\text{ème}}$ coefficient du polynôme $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)$ noté $c_{n,k}(q)$. $c_{n,k}(q)$ est un polynôme en q où $c_{n,0}(q)$ représente le nombre de sommets à une certaine distance du sommet 0^n . Nous avons montré que le $k^{\text{ème}}$ coefficient du polynôme $C(\Gamma_n^{(3)}, x; q)$ s'obtient en dérivant k fois le coefficient $c_{n,0}(q)$. De plus,

$$c_{n,k}(q) = \sum_{i=0}^{n-2} T_i(q) (c_{n-i-1,k-1}(q) + 2qc_{n-i-2,k-1}(q) + c_{n-i-2,k-2}(q)), n, k \geq 3.$$

$T_i(q)$ est un q -analogue de la suite Tribonacci.

Enfin, nous achevons cette thèse par le Chapitre 5. Les travaux réalisés sur les cubes s -bonacci nous ont permis de faire ressortir les liens entre ces graphes, la suite s -bonacci et les coefficients binomiaux, définis au Chapitre 1. Le nombre d'arêtes

s'exprime comme somme de produit de nombre s -bonacci :

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{s-1} i F_j^{(s)} F_{n-j-i+2}^{(s)}, \quad n \geq 0, s \geq 2.$$

Ce résultat généralise bien les résultats obtenus préalablement dans le cas du cube de Fibonacci en fixant $s = 2$, [44]. Pour $s = 3$ nous retrouvons la même formule sur le nombre d'arêtes pour le cube Tribonacci. Le nombre de sommets de poids w est quant à lui égal à :

$$\binom{n-w+1}{w}_{s-1}.$$

$\binom{n}{k}_s$ désigne le coefficient binomial. En posant $s = 2$, on obtient le nombre de sommets de poids w dans le cube de Fibonacci, [52]. Et pour $s = 3$, on obtient le nombre de sommets de poids w dans le cube Tribonacci, [14].

La formule explicite du cube polynomial du cube s -bonacci est égale à :

$$C(\Gamma_n^{(s)}, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (s-1)(n+1)/s \rfloor} \binom{n-k+1}{k}_{s-1} (1+x)^k, \quad n \geq 0.$$

Ce dernier résultat généralise également les résultats obtenus dans [44] et [14] dans le cas des cubes de Fibonacci ($s = 2$) et dans le cas du cube Tribonacci ($s=3$).

Comme perspective, nous suggérons les points suivants :

- Déterminer le q -analogue du polynôme $C(\Gamma_n^{(s)}, x)$.
- Existe-t-il des applications en chimie théorique pour le cube Tribonacci et le cube s -bonacci pour $s \geq 4$?
- Pour $s \geq 4$, existe-t-il un algorithme de reconnaissance du cube s -bonacci qui s'exécute en temps polynomial ?

Bibliographie

- [1] S. Abbad, H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, Lucas Cube vs Zeckendorf's Lucas Code, *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics* 3 (2) (2021) 47–50.
- [2] K. Alladi, V. Hoggatt Jr, On Tribonacci numbers and related functions, *Fibonacci Quart* 15 (1) (1977) 42–45.
- [3] J. Azarija, S. Klavžar, J. Lee, Y. Rho, Connectivity of Fibonacci cubes, Lucas cubes, and generalized cubes, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 17 (2015) 79–88.
- [4] Y. Bae, C. Youn, I. Chung, Application of the hamiltonian circuit latin square to the parallel routing algorithm on 2-circulant networks, in : *Computational and Information Science : First International Symposium, CIS 2004, Shanghai, China, December 16-18, 2004. Proceedings 1*, Springer, 2005, pp. 219–224.
- [5] A. Balaban, Chemical graphs. I. symmetry and enumeration of fibonacenes (unbranched catacondensed benzenoids isoarithmic with helicenes and zigzag catafusenes), *MATCH Commun. Math. Chem* 24 (1989) 29–38.
- [6] H.-J. Bandelt, M. van De Vel, Embedding topological median algebras in products of dendrons, *Proceedings of the London Mathematical Society* 3 (3) (1989) 439–453.
- [7] H.-J. Bandelt, L. Quintana-Murci, A. Salas, V. Macaulay, The fingerprint of phantom mutations in mitochondrial dna data, *The American Journal of Human Genetics* 71 (5) (2002) 1150–1160.
- [8] A. Bazeniari, M. Ahmia, H. Belbachir, Connection between binomial coefficients and their analogs and symmetric functions, *Turkish Journal of Mathematics* 42 (3) (2018) 807–818.

-
- [9] H. Belbachir, A. Benmezai, A q -analogue for binomial coefficients and generalized Fibonacci sequences, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352 (3) (2014) 167–171.
- [10] H. Belbachir, S. Bouroubi, A. Kheladi, Connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution, *Annales Mathematicae et Informaticae* 35 (2008) 21–30.
- [11] H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, Cube polynomial of s -bonacci cube, soumis.
- [12] H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, On some properties of Tribonacci cube, soumis.
- [13] H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, q -cube polynomial of Tribonacci cube, soumis.
- [14] H. Belbachir, R. Ould-Mohamed, Enumerative properties and cube polynomials of Tribonacci cubes, *Discrete Mathematics* 343 (8) (2020) 111922.
- [15] M. Berlic, N. Tratnik, P. Z. Pleteršek, Equivalence of zhang-zhang polynomial and cube polynomial for spherical benzenoid systems, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem* 73 (2015) 443–456.
- [16] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, Vol. 290, Macmillan London, 1976.
- [17] B. Brešar, S. Klavžar, R. Škrekovski, The cube polynomial and its derivatives : the case of median graphs, *Electron. J. Comb.* 10 (2003) #R3 11 pp.
- [18] J. Brown Jr, Zenckendorf’s theorem and some applications, *Fibonacci Quarterly* 2 (1964) 163–168.
- [19] J. L. Brown Jr, Unique representation of integers as sums of distinct Lucas numbers, *Fibonacci Quarterly* 7 (3) (1969) 243–252.
- [20] P. S. Bruckman, The generalized zeckendorf theorems, *Fibonacci Quart.* 27 (4) (1989) 338–347.
- [21] S. Cabello, D. Eppstein, S. Klavžar, The Fibonacci dimension of a graph, *The Electronic Journal of Combinatorics* 35 (2011) P55–P55.
- [22] L. Comtet, *Analyse combinatoire*, Puf, Vol. 1, 1970.
- [23] L. Comtet, *Advanced Combinatorics : The art of finite and infinite expansions*, Springer Science & Business Media, 2012.

- [24] B. Cong, S.-Q. Zheng, S. Sharma, On simulations of linear arrays, rings and 2d meshes on Fibonacci cube networks, in : [1993] Proceedings Seventh International Parallel Processing Symposium, IEEE, 1993, pp. 748–751.
- [25] L. Debnath, A short history of the Fibonacci and golden numbers with their applications, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 42 (3) (2011) 337–367.
- [26] M. M. Deza, M. Laurent, R. Weismantel, *Geometry of cuts and metrics*, Vol. 2, Springer, 1997.
- [27] Ö. Egecioglu, V. Iršič, Fibonacci-run graphs i : Basic properties, *Discrete Applied Mathematics* 295 (2021) 70–84.
- [28] Ö. Egecioglu, E. Saygi, Z. Saygi, k-Fibonacci cubes : A family of subgraphs of fibonacci cubes, *International Journal of Foundations of Computer Science* 31 (05) (2020) 639–661.
- [29] K. Egiazarian, J. Astola, On generalized Fibonacci cubes and unitary transforms, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* 8 (1997) 371–377.
- [30] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, *Recurrence sequences*, Vol. 104, American Mathematical Society Providence, RI, 2003.
- [31] R. Feldmann, J. Hromkovic, S. Madhavapeddy, B. Monien, P. Mysliwicz, Optimal algorithms for dissemination of information in generalized communication modes, in : PARLE'92 Parallel Architectures and Languages Europe : 4th International PARLE Conference Paris, France, June 15–18, 1992 Proceedings 4, Springer, 1992, pp. 113–130.
- [32] S. FOLDES, A characterization of hypercubes, *Discrete Mathematics* 17 (1977) 155–159.
- [33] P. Gregor, Recursive fault-tolerance of Fibonacci cube in hypercubes, *Discrete Math.* 306 (2006) 1327–1341.
- [34] P. Gregor, Subgraphs of hypercubes-embeddings with restrictions or prescriptions (2006).

-
- [35] W.-J. Hsu, Fibonacci cubes a new interconnection topology, *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* 4 (1993) 3–12.
- [36] A. Ilić, S. Klavžar, Y. Rho, Generalized Fibonacci cubes, *Discrete Math.* 312 (2012) 2–11.
- [37] A. Ilić, S. Klavžar, Y. Rho, Generalized Lucas cubes, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* (2012) 82–94.
- [38] W. Imrich, S. Klavžar, *Product graphs : Structure and recognition*, Wiley, NewYork, 2000.
- [39] H. Katseff, Incomplete hypercube, *IEEE Trans. Comput.* C-37 (5) (May 1988) 604–608.
- [40] S. Klavžar, On median nature and enumerative properties of Fibonacci-like cubes, *Discrete Math.* 299 (2005) 145–153.
- [41] S. Klavžar, Counting hypercubes in hypercubes, *Discrete Math.* 306 (2006) 2964–2967.
- [42] S. Klavžar, Structures of Fibonacci cubes : a survey, *J. Comb. Optim.* 25 (2013) 505–522.
- [43] S. Klavžar, P. Žigert, Fibonacci cubes are the resonance graphs of fibonaccenes, *Fibonacci Quart.* 43 (3) (2005) 269–276.
- [44] S. Klavžar, M. Mollard, Cube polynomial of Fibonacci and Lucas cube, *Acta Appl. Math.* 117 (2012) 93–105.
- [45] S. Klavžar, M. Mollard, Daisy cubes and distance cube polynomial, *European Journal of Combinatorics* 80 (2019) 214–223.
- [46] S. Klavžar, Y. Rho, On the Wiener index of generalized Fibonacci cubes and Lucas cubes, *Discrete Appl. Math.* 187 (2015) 155–160.
- [47] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 1*, John Wiley & Sons, 2017.
- [48] K. Kuhapatanakul, Some connections between a generalized Tribonacci triangle and a generalized Fibonacci sequence, *Fibonacci Quart* 50 (2012) 44–50.

- [49] K. Kuhapatanakul, L. Sukruan, n -Tribonacci triangles and applications, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 45 (7) (2014) 1068–1075.
- [50] J. Liu, W.-J. Hsu, Distributed algorithms for shortest-path, deadlock-free routing and broadcasting in a class of interconnection topologies, *Proceedings of the International Parallel Processing Symposium* (1992) 589–596.
- [51] J. Liu, W.-J. Hsu, M. J. Chung, Generalized Fibonacci cubes are mostly hamiltonian, *J. Graph Theory* 18 (1994) 817–829.
- [52] M. Mollard, Maximal hypercubes in Fibonacci and Lucas cubes, *Discrete Appl. Math.* 160 (2012) 2479–2483.
- [53] F. P. MUGA II, et al., A k -ary generalization of the Fibonacci cubes, *Southeast Asian Bull. Math* 38 (5) (2014) 683–692.
- [54] H. M. Mulder, *The interval function of a graph*, Centrum Voor Wiskunde en Informatica, 1980.
- [55] E. Munarini, C. P. Cippo, N. Z. salvi, On the Lucas cubes, *The Fibonacci Quarterly* 39 (1) (2001) 12–21.
- [56] E. Munarini, N. Z. Salvi, Structural and enumerative properties of the Fibonacci cubes, *Discrete Mathematics* 255 (1-3) (2002) 317–324.
- [57] D. Offner, Some turán type results on the hypercube, *Discrete Math.* 309 (9) (2009) 2905–2912.
- [58] L. Ou, H. Zhang, Fibonacci (p, r) -cubes which are median graphs, *Discrete Appl. Math.* 161 (2013) 441–444.
- [59] A. Pethő, On the k -generalized Fibonacci numbers with negative indices, arXiv preprint arXiv :2008.10899.
- [60] P. Ž. Pleteršek, Equivalence of the generalized zhang-zhang polynomial and the generalized cube polynomial, arXiv preprint arXiv :1612.02986.
- [61] V. Pletser, Fibonacci numbers and the golden ratio in biology, physics, astrophysics, chemistry and technology : a non-exhaustive review. arxiv : 1712.2117064 (2017).

- [62] B. Rybłowicz, A. Tereszkievicz, Generalized tricobsthal and generalized Tribonacci polynomials, *Applied Mathematics and Computation* 325 (2018) 297–308.
- [63] E. Saygı, Ö. Eğecioglu, q-cube enumerator polynomial of Fibonacci cubes, *Discrete Appl. Math.* 226 (2017) 127–137.
- [64] E. Saygı, Ö. Eğecioglu, q-counting hypercubes in Lucas cubes, *Turk. J. Math.* 42 (1) (2018) 190–203.
- [65] A. Scott, T. Delaney, V. E. Hoggatt, Jr, The Tribonacci sequence, *Fibonacci Quart.* 15.3 (1977) 193–200.
- [66] A. Sen, A. Sengupta, S. Bandyopadhyay, On some topological properties of hypercube, incomplete hypercube and supercube, in : [1993] *Proceedings Seventh International Parallel Processing Symposium*, IEEE, 1993, pp. 636–642.
- [67] N. J. A. Sloane, The on-line encyclopedia of integer sequences.
URL [.https://oeis.org](https://oeis.org)
- [68] D. V. Sundaram, J. C. Maxwell, Secured communication through Fibonacci numbers and unicode symbols, *International Journal of Scientific & Engineering Research* 3 (4) (2012) 490–494.
- [69] A. Taranenko, A new characterization and a recognition algorithm of Lucas cubes, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 15 (Graph Theory)(2013).
- [70] N. Trinajstic, *Chemical graph theory*, Vol. I,II, CRC press, 1983.
- [71] A. Vesel, Linear recognition and embedding of Fibonacci cubes, *Algorithmica* 71 (4) (2015) 1021–1034.
- [72] A. Vesel, Cube-complements of generalized fibonacci cubes, *Discrete Mathematics* 342 (4) (2019) 1139–1146.
- [73] D. B. West, et al., *Introduction to graph theory*, Vol. 2, Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
- [74] C. Whitehead, N. Z. Salvi, Observability of the extended Fibonacci cubes, *Discrete mathematics* 266 (1-3) (2003) 431–440.

-
- [75] J. Wu, Extended Fibonacci cubes, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems* 8 (12) (1997) 1203–1210.
- [76] E. Zeckendorf, Représentations des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bulletin de La Society Royale des Sciences de Liege* (1972) 179–182.
- [77] I. Zelina, Hamiltonian paths and cycles in Fibonacci cubes, *Carpathian Journal of Mathematics* (2008) 149–155.
- [78] I. Zelina, A survey on cycles embeddings in Fibonacci and extended Fibonacci cubes, *CREATIVE MATH. and INF* 17 (3) (2008) 548–554.
- [79] H. Zhang, W.-C. Shiu, P.-K. Sun, A relation between Clar covering polynomial and cube polynomial, *arXiv preprint arXiv :1210.5322*.
- [80] H. Zhang, F. Zhang, The clar covering polynomial of hexagonal systems i, *Discrete applied mathematics* 69 (1-2) (1996) 147–167.
- [81] P. Zigert, M. Berlic, Lucas cubes and resonance graphs of cyclic polyphenantrenes, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem* 68 (1) (2012) 77–90.