MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA **RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا

THESE

présentée par

Salim KHELIFA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES EN MATHEMATIQUES

OPTION : ANALYSE FONCTIONNELLE

Sujet de thèse

Equations aux Dérivées Partielles et méthode décornpositionnelle d'Adomian

Soutenue le 30 **Septembre 2002** devant la Commission d'examen composée de :

MM. D. TENIOU	**Pr. U.S.T.H.B.**	Président
N. BENOUAR	**Pr. U.S.T.H.B.**	Directeur de thèse
R BEBBOUCEU	**Pr. U.S.T.H.B.**	Examinateurs
K. BETINA	**Pr. U.S.T.H.B.**	
Y. CHERRUAULT	Pr. **U.** PARIS **VI**	
A. KHELLADI	**Pr. U.S.T.H.B**	
MS. MOULAY	**Pr. U.S.T.H.B.**	

Remerciements

Je remercie vivement le Professeur **N. BENOUAR** pour son amitié et son aide, morale et matérielle, dont j'ai bénéficiée tout au long de cette épreuve.

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements et ma profonde reconnaissance au Professeur **Y. CHERRUAULT** qui m'a chaleureusement accueilli dans son laboratoire, qui m'a suivi et guidé dans mes travaux de recherche. Ses précieux conseils et ses aides multiformes m'ont permis de mener à bien ce travail.

Que mon ami le Professeur **S. GUELLAL,** trouve ici l'expression de toute ma gratitude et ma reconnaissance pour son aide toute particulière, et surtout pour m'avoir recommandé auprès du Professeur **Y. CHERRUAULT**.

Je tiens également à remercier le Professeur **D. TENIOU** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse, et les professeurs **R BEBBOUCHI, K. BETINA, A. KHELLADI, M.S. MOULAY** pour avoir bien voulu me faire l'honneur de siéger dans ce jury.

Je n'oublierai pas de remercier tous mes amis et collègues du laboratoire **L.A.M.N.E.D.P.** pour leur aide efficace et déterminante pour le succès de cette entreprise.

Je remercie enfin tous les chercheurs du **MEDIMAT** et de façon plus particulière Madame **A. CHERRUAULT** dont la gentillesse et le dévouement sont sans égal.

Je ne pourrai oublier de remercier mon oncle le docteur **O. OULD-ROUIS** sans qui cette thèse aurait eu du mal à voir le jour. Que mon oncle, son épouse et ses enfants soient assurés de toute ma reconnaissance et de toute ma gratitude.

Une pensée profonde et toute ma reconnaissance à mes proches (parents et amis) et particulièrement à mon épouse.

PLAN DE THESE

Introduction

Un des problèmes fondamentaux en analyse fonctionnelle est celui de la résolution des équations fonctionnelles :

$$Au = f \tag{0.1}$$

où A est un opérateur, f une donnée et u l'inconnue du problème à chercher dans un espace de solutions admissibles, donnant heu parfois à des contraintes pouvant se traduire par des conditions initiales ou (et) aux limites.

Suivant la nature (linéaire ou non linéaire) et le type (algébrique, différentiel, intégral, aux dérivées partielles, intégro-différentiel, etc...) de l'opérateur A, des méthodes de résolution et des techniques d'approximation ont été mises au point (sachant qu'il existe un certain nombre d'opérateurs pour lesquels rien n'a encore été fait). Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode d'échelonnement, la méthode du point fixe et des approximations successives, la méthode variationnelle, la méthode de Galerkin, la théorie des semi groupes, la méthode de la résolvante etc.... Ainsi, à tout type d'opérateur correpond une ou plusieurs méthodes de résolution mais en aucune manière il n'existerait, à priori, une méthode unique applicable à l'ensemble des types d'équations fonctionnelles.Par ailleurs, il faut souligner que la nature de l'opérateur A joue un rôle très important dans le choix de la méthode de résolution, et que les problèmes non linéaires sont très difficiles à résoudre. La résolution numérique des problèmes non linéaires reste jusqu'à nos jours, une tâche ardue voire impossible à mettre en oeuvre. Ce qui expliquerait que la plupart des techniques d'approximation restent basées sur la linéarisation de l'opérateur et sur la diicrétisation. Nous remarquons, à ce propos, que la linéarisation d'un opérateur, en général, a pour effet d'occulter certaines propriétés essentielles aux phénomènes naturels.

Ainsi sommes nous amené à nous pencher sur la problématique suivante

Différents types d'opérateurs

↕

Méthode "unique" de résolution "efficace" dam le cas linéaire et dans le cas non linéaire

Nous pensons que la méthode décompositionnelle d'Adomian, présentée et utilisée dans cette thèse, peut dans une large mesure répondre favorablement à cette attente. En effet, cette nouvelle méthode présente un double intérêt : le premier est qu'elle permet la résolution et l'approximation d'équations de différents types : algébrique, differentiel, intégral, aux dérivées partielles, intégro-différentiel, etc...; le second intérêt est qu'elle fait partie des méthodes d'approximation pour lesquelles le phénomène de non linéarité n'engendre aucune difficulté d'application. Parallélement à cela, la méthode décompositionnelle d'Adomian fait appel au calcul formel; le développe ment de l'outil informatique (matériel et logiciel) permet aujourd'hui sa mise en oeuvre avec une très grande efficacité. Cette méthode a été initiée et mise au point par G. Adomian (université d'Athens - U.S.A.) au début des années 80, de manière empirique ([13],[4],[10]). G. Adomian en collaboration avec d'autres scientifiques, a procédé à de nombreuses applications de la méthode ([5],[6],[11],[12],[7]) passant des équations algébriques aux équations différentielles ainsi qu'à des équations aux dérivées partielles et aux systèmes stochastiques. Cependant chaque problème subissait un traitement propre correspondant à ses particularités. Il n'existait pas alors de théorie globale ni de cadre fonctionnel clair et encore moins de fondements mathématiques pour cette méthode. Tantôt des artifices lies à la forme particulière de l'équation étaient utilises afin de simplifier les calculs, tantôt les contraintes de la solution étaient choisies simples et faciles à prendre en compte pour l'application de la méthode. Il a fallu attendre la fin des années 80 pour que Y. Cherruault (université de PARIS VI) s'y intéresse et établisse des bases rigoureuses généralisant ainsi cette technique ([19], [24], [25]). Il fut le premier scientifique à établir un résultat de convergence pour la méthode décompositionnelle d'Adomian ainsi qu'un cadre fonctionnel adéquat. Sous sa direction et avec ses collaborateurs du laboratoire MEDIMAT de nombreux travaux et publications ont été réalisés ([2], [3], [30] ,[31], [37], [46] et bien d'autres encore). C'est ainsi, qu'en 1995 un de ses disciples, K. Abbaoui, présenta sa thèse de doctorat dans laquelle il développa les fondements mathématiques de cette méthode avec application à certains problèmes issus de la biologie et de la médecine ([1]). Aujourd'hui encore les chercheurs du MEDIMAT continuent à oeuvrer pour développer la méthode décompositionnelle d' Adomian afin d'apporter des réponses aux nombreux problèmes restant encore posés, et d'élargir les classes d'équations auxquelles cette méthode s'applique sans difficulté technique.

Dans le présent travail, outre quelques travaux apportant une amélioration relative aux fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian, nous nous sommes attachés à son application à différents problèmes. C'est ainsi, qu'en théorie des micro-laser, nous avons pu confirmer avec succès des résultats expérimentaux. De plus, l'efficacité de cette méthode nous a permis de résoudre des équations aux dérivées partielles du premier ordre, et d'approcher leur solution.

Le travail que nous présentons dans œtte thèse se compose de quatre chapitres outre le présent paragraphe intitule " Introduction ".

Le chapitre 1, intitulé " Données bibliographiques ", rappelle certains résultats d'analyse fonctionnelle, plus particulièrement sur le calcul différentiel dans les espaces de Banach. Nous donnons également des rappels d'analyse combinatoire sur les nombres de Stirling de seconde espèce, les polynômes de Bell ainsi que les deux formes de l'identité d' Abel. Enfin, nous exposons la méthode décompositionnelle d' Adomian, les principaux résultats connus à ce jour ainsi que l'étude de quelques cas particuliers.

Les résultats de recherche que nous avons obtenus seront présentés dans les chapitres 2, 3 et 4.

Le chapitre 2 est intitule : " Majoration en norme des polynômes d'Adomian ". Après une brève introduction, nous démontrons un résultat original sur les polynômes de Bell qui, d'une part, nous conduit à une nouvelle majoration en norme des polynômes d'Adomian et, d'autre part, nous permet d'affiner l'erreur de troncature de la méthode décompositionnelle d' Adomian. A la fin de ce chapitre, nous présentons une nouvelle démonstration sur le calcul de la somme des nombres d' Abbaoui-Cherruault qui est à la base de tous les résultats de ce chapitre. Ces derniers ont été publiés dans la revue internationale Kybernetes (voir [32]).

Le chapitre 3 intitulé : " Application aux micro-lasers "est consacré à l'application de la méthode décompositionnelle d' Adomian à une équation différentielle du second ordre, sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, issue de la théorie des micro-lasers. En effet, après une introduction nous permettant de situer le problème, nous procédons à l'application de cette méthode afin de déterminer le premier mode laser qui correspond à une fonction pro pre de ce problème. Cette étude a été proposée par le professeur François Sanchez de l'université d'Angers, et les résultats obtenus ont fait l'objet d'une publication soumise à la revue Kybernetes (voir [35]).

Dans le chapitre 4 intitule : " Nouvelle approche de résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre ", nous proposons une nouvelle id& d'approximation des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Celle-ci repose sur l'utilisation de la méthode décompositionnelle d' Adomian associant les courbes o-denses. Cette notion sera définie et développée en introduction du chapitre et, dans laquelle sera située le problème auquel nous nous intéressons. Nous développons successivement l'étude des cas linéaire, quasi linéaire et non linéaire avec des applications numériques. Il faut souligner que les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet de deux publications (voir [33],[34]).

Enfm, dans le paragraphe intitulé : " Conclusion et perspectives " nous récapitulons l'ensemble des résultats que nous avons obtenus ainsi que les éléments qui restent à développer. Ce paragraphe se veut une mise au point sur ce qui a été réaliié mais aussi sur ce qui reste à faire par rapport à cette méthode.

CHAPITRE 1

Données bibliographiques

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle :

Soient E et F deux espaces de **Banach** réels, N une application de E dans F et u_0 un élément de E. On suppose que N est définie dans un voisinage de u_0 noté $\mathcal{V}(u_0)$.

Définition 1.1.1 :
On dit que l'application N est différentiable au point u_0 si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) N est continue au point u_0.

(ii) Il existe une application linéaire continue $A : E \to F$ telle que :

$$\|N(u) - N(u_0) - A.(u - u_0)\|_F = o(\|u - u_0\|_E)$$

Remarque 1.1.1 :
On peut dire aussi et de manière équivalente que :

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|N(u_0 + h) - N(u_0) - A.(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

Remarque 1.1.2 :
1) L'application linéaire continue A, si elle existe, est unique et $A \in L(E, F)$.
2) L'application linéaire continue A, si elle existe, est appel& dérivée de N au point u_0 et sera notée : $A = N'(u_0)$.

Définition 1.1.2 :
Soit G un ouvert non vide de E. On dit que l'application N est différentiable dans G si N est différentiable en tout point de G.

Remarque 1.1.3 :
On remarque que l'on a ainsi défini une nouvelle application :

$$N' : F \to \mathcal{L}(E, F)$$

$$u \longmapsto N'(u)$$

on peut alors s'intéresser à sa continuité, ou encore à sa différentiabilité.

Définition 1.1.3 :

Soit G un ouvert non vide de E. On dit que l'application N est continuement différentiable dans G ou encore de classe C^1, si :

(i) l'application N est différentiable dans G

(ii) l'application dérivée : N' est continue dans G.

Définition 1.1.4 :

On dit que l'application N est deux fois différentiable au point u_0 si l'application N', définie dans $\mathcal{V}(u_0)$, est différentiable au point u_0. Dans ce cas on note par $N''(u_0)$ la dérivée de N' au point u_0. De plus :

$$N''(u_0) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$$

Remarque 1.1.4 :

Au vu de la **définition** 1.1.1, l'application N' est dérivable au point u_0 si

(i) l'application N' est définie dans un voisinage ouvert de u_0.

(ii) Il existe une application linéaire continue $A^{(2)} : E \to L(E, F)$ telle que :

$$\left\|N'(u) - N'(u_0) - A^{(2)}.(u - u_0)\right\|_{\mathcal{L}(E,F)} = o(\|u - u_0\|_E)$$

On notera alors :

$$N''(u_0) = A^{(2)}$$

Remarque 1.1.5 :

Si on désigne par :

$$\mathcal{L}(E \times E, F) = \{ \text{ applications bilinéaires continues de } E \times E \to F\}$$

on peut définir une isométrie naturelle entre les espaces : $L(E, L(E, F))$ et $L(E \times E, F))$ (voir [25]). On notera désormais $\mathcal{L}_2(E, F)$.

Théorème 1.1.1 :
Si l'application N est deux fois différentiable au point u_0, alors la dérivée seconde $N''(u_0)$ est une application bilinéaire continue symétrique :

$$N''(u_0)(h,k) = N''(u_0)(k,h) \qquad \forall (h,k) \in E \times E$$

Définition 1.1.5 :
Soit G un ouvert non vide de E. On dit que l'application N est deux fois différentiable dans G si l'application N est deux fois différentiable en tout point de G. Ainsi une nouvelle application est définie :

$$N'' : G \to \mathcal{L}_2(E, F)$$

$$u \longmapsto N''(u)$$

appelée "dérivée seconde" de N et dont on peut étudier la continuité et la différentiabilité.

Remarque 1.1.6 ;
De manière équivalente, on peut diie que l'application N est deux fois différentiable dans G si :
(i) l'application N est différentiable dans G
(ii) l'application N' est différentiable dans G.

Définition 1.1.6 :
Soit G un ouvert non vide de E. On dit que l'application N est de classe C^2 dans G si :
(i) l'application N est deux fois différentiable dans G
(ii) l'application dérivée seconde N'' est continue dans G.

Remarque 1.1.7 :
De manière équivalente, on peut dire que l'application N est de classe C^2 dans G si l'application N' est de classe C^1 dans G.

Remarque **1.1.8** :

Dans le cas où l'application "dérivée seconde" de N supposes opérer de G dans $\mathcal{L}_2(E, F)$ est elle même différentiable au point u_0 ($u_0 \in G$) alors sa dérivée au point u_0 qu'on notera : $N'''(u_0)$ ou encore $N^{(3)}(u_0)$ représente la dérivée troisième de l'application N au point u_0, avec :

$$N^{(3)}(u_0) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_2(E, F))$$

comme $L(E, \mathcal{L}_2(E, F))$ est isométrique à $C(E \times E \times E, F)$ et qu'on désignera par $\mathcal{L}_3(E, F)$, alors :

$$N^{(3)}(u_0) \in \mathcal{L}_3(E, F)$$

$L(E \times E \times E, F) = \{$ applications trilinéaires continues de $E \times E \times E \to F\}$

Notation 1.1.1 :

L'espace de Banach des applications n-linéaires continues sur :

$$E \times E \times \cdots \times E \to F$$

qu'on désigne généralement par $L(E \times E \times \cdots \times E, F)$ sera noté : $\mathcal{L}_n(E, F)$.

Remarque **1.1.9 :**

On désire généraliser cette notion de "dérivation" à un ordre supérieur, pour cela on procédera par recurence sur n et l'on suppose que celle ci a pu être définie jusqu'à l'ordre $n-1$;

Définition 1.1.7 :

On dit que l'application N est n fois différentiable au point u_0 s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}(u_0)$, tel que ;

(i) l'application N est $(n-1)$ fois différentiable dans Y(%).

(ii) l'application $N^{(n-1)}$ définie dans $\mathcal{V}(u_0)$ à valeurs dans $\mathcal{L}_{n-1}(E, F)$, est différentiable au point u_0.

Dans ce cas on note par $N^{(n)}(u_0)$ la dérivée de $N^{(n-1)}$ au point u_0. De plus

$$N^{(n)}(u_0) \in \mathcal{L}_n(E, F)$$

Remarque 1.1.10 :

Au vu de la définition 1.1.1, l'application $N^{(n-1)}$ est dérivable au point u_0 si :

(i) l'application $N^{(n-1)}$ est définie dans un voisiige ouvert de u_0.

(ii) Il existe une application linéaire $A^{(n)} : E \rightarrow \mathcal{L}_{n-1}(E, F)$ telle que :

$$\left\| N^{(n-1)}(u) - N^{(n-1)}(u_0) - A^{(n)}.(u - u_0) \right\|_{\mathcal{L}_{n-1}(E,F)} = o(\|u - u_0\|_E)$$

On notera alors :

$$N^{(n)}(u_0) = A^{(n)}$$

Théorème 1.1.2 :

Si l'application N est n fois différentiable au point u_0, dors la dérivée n$^{\text{ième}}$ $N^{(n)}(u_0)$ est une application n-linéaire continue symétrique :

$$N^{(n)}(u_0)(h_1, h_2, \cdots, h_n) = N^{(n)}(u_0)(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \cdots, h_{\sigma(n)}) \qquad \forall \sigma \in \Sigma_n$$

où Σ_n est l'ensemble des permutations sur $\{1, 2, \cdots, n\}$,
et $(h_1, h_2, \cdots, h_n) \in E^n$.

Définition 1.1.8 :

Soit G un ouvert non vide de E. On dit que l'application N est a fois différentiable dans G si l'application N est n fois différentiable en tout point de G.

Définition 1.1.9 :

Soit G un ouvert non vide de E. On dit que l'application N est de classe $\mathcal{C}^n$ dans G si :

(i) l'application N est n fois différentiable dans G

(ii) l'application dérivée n$^{\text{ième}}$ $N^{(n)}$ est continue dans G.

Définition 1.1.10 :

Soit G un ouvert non vide de E. On dit que l'application N est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans G, si l'application N est de classe $\mathcal{C}^n$ dans G pour tout n.

Remarque **1.1.11** :

Pour des raisons d'homogénéité on convient de poser :

$$N^{(0)}(u) = N(u)$$

et on dira que l'application N est de classe $\mathcal{C}^0$ dans G si l'application N est continue dans G.

Remarque **1.1.12** :

Dans le cas où l'espace de E considéré, est un produit d'espaces de Banach, plus exactament $E = E_0 \times E_0 \times a\text{--} \times E_0$, toutes les définitions, remarques et résultats évoqués plus haut restent valables puisque E est un espace de Banach muni de la topologie produit :

$$\|(u_1, u_2, \cdots, u_p)\|_E = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|_{E_0}$$

seulement il y a quelques particularités qu'il est utile de développer. Soit N une application de E dans E :

pour $U = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ on associe $N(U) = (N_1(U), N_2(U), \cdots, N_p(U))$.

Définition 1.1.11 :

Soit $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$. On dit que l'application N_j est différentiable au point U_0 si :

(i) l'application N_j est définie dans un voisiige ouvert de U_0 .

(ii) Il existe une application linéaire continue $A_j : E \to E_0$ telle que :

$$\|N_j(U) - N_j(U_0) - A_j.(U - U_0)\|_{E_0} = o(\|U - U_0\|_E)$$

De plus :

$$N_j'(U_0) = A_j$$

Proposition **1.1.1** :

L'application N est différentiable au point U_0 si et seulement si l'application N_j est différentiable au point U_0, pour tout j , $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$. De plus :

$$N'(U_0) = (N_1'(U_0), N_2'(U_0), \cdots, N_p'(U_0))$$

Proposition 1.1.2 :

Soit G un ouvert non vide de E. Alors l'application N est différentiable dans G si et seulement si l'application N_j est différentiable dans G pour tout j, $j \in \{1,2,\cdots,p\}$.

Définition 1.1.12 :

Soit $j \in \{1,2,\cdots,p\}$. On suppose que l'application N_j est différentiable au point U_0. Alors on définit "la dérivée partielle" de N_j par rapport à u_k au point U_0 comme étant l'unique application linéaire continue de E_0 dans E_0

$$\frac{\partial N_j}{\partial u_k}(U_0) \in \mathcal{L}(E_0, E_0) \; ; \; \left\| N_j(U_0 + h.\overrightarrow{e_k}) - N_j(U_0) - \frac{\partial N_j}{\partial u_k}(U_0)(h) \right\|_{E_0} = o(\|h\|_{E_0})$$

Proposition 1.1.3 :

Soit $j \in \{1,2,\cdots,p\}$. On suppose que l'application N_j est différentiable au point U_0. Alors :

$$N_j'(U_0).(h_1,h_2,\cdots,h_p) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial N_j}{\partial u_k}(U_0).(h_k)$$

Proposition 1.1.4 :

L'application N est n fois différentiable au point U_0 si et seulement si l'application N_j est n fois différentiable au point U_0, pour tout j, $j \in \{1,2,\cdots, p\}$. De plus :

$$N^{(n)}(U_0) = \left(N_1^{(n)}(U_0), N_2^{(n)}(U_0), \cdots, N_p^{(n)}(U_0)\right)$$

Proposition 1.1.5 :

Soit G un ouvert non vide de E. Alors l'application N est n fois différentiable dans G si et seulement si l'application N_j est n fois différentiable dans G pour tout j, $j \in \{1,2,\cdots,p\}$.

Définition 1.1.13 :

Soit $j \in \{1,2,\cdots, p\}$. On suppose que l'application N_j est n fois différentiable au point U_0, et que l'on a pu définir "les dérivées partielles d'ordre $(n-1)$" de l'application N_j dans un voisinage ouvert de U_0 notées :

$$N^{(n-1)}_{j,k_1 \cdot k_{n-1}}(U_0) = \frac{\partial^{n-1} N_j}{\partial u_{k_1} \cdot \partial u_{k_{n-1}}}(U_0) \quad , \quad k_i \in \{1,2,\cdots,p\}$$

On appelle dé-rivée partielle d'ordre n de l'application N_j par rapport à $u_{k_1},\cdots,u_{k_{n-1}},u_k$ au point U_0, l'unique application n-**linéaire** continue de E_0 dans $\mathcal{L}_{n-1}(E_0, E_0)$, notée :

$$\frac{\partial^n N_j}{\partial u_k \partial u_{k_1} \cdot \partial u_{k_{n-1}}}(U_0) \in \mathcal{L}_n(E_0, E_0)$$

telle que :

$$\lim_{\|h\|_{E_0} \to 0} \frac{\left\| N^{(n-1)}_{j,k_1 \cdot k_{n-1}}(U_0 + h.\overrightarrow{e_k}) - N^{(n-1)}_{j,k_1 \cdot k_{n-1}}(U_0) - \frac{\partial^n N_j}{\partial u_k \partial u_{k_1} \cdot \partial u_{k_{n-1}}}(U_0)(h) \right\|_{E_0}}{\|h\|_{E_0}} = 0$$

Proposition 1.1.6 :

Soit $j \in \{1,2,\cdots, p\}$. On suppose que l'application N_j est n fois différentiable au point Us. Alors :

$$N_j^{(n)}(U_0).(H_1,\cdots,H_n) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n=1}^{p} \frac{\partial^n N_j}{\partial u_{k_1} \cdots \partial u_{k_n}}(U_0).\left(h^{(1)}_{k_1},\cdots,h^{(n)}_{k_n}\right)$$

où :

$$H_k = (h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \cdots, h_p^{(k)}) \ , \ H_k \in E \ , \ \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}$$

Remarque 1.1.13 :

Toutes les définitions, remarques et résultats relatifs **à** ce paragraphe intitulé **"Rappels d'analyse** fonctionnelle" ont **été** extraits de l'ouvrage de H. **Car**tan **[18].** Toutes les démonstrations des résultats énonces s'y trouvent.

1.2 Rappels d'analyse combinatoire :

Notation 1.2.1 :
On adoptera les notations suivantes :
pour $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

$$|n.k| = k_1 + 2.k_2 + \cdots + n.k_n$$

$$k! = (k_1!).(k_2!)...(k_n!)$$

$$x^k = (x_1)^{k_1}.(x_2)^{k_2}...(x_n)^{k_n}$$

Définition 1.2.1 :
Le nombre $S(n, k)$ de k-partitions d'un ensemble N à n éléments s'appelle nombre de Stirling de seconde espèce.

Remarque 1.2.2 :
Ainsi au vu de cette définition on peut affirmer que :

$$S(n,k) > 0 \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad S(n,k) = 0 \text{ si } 1 \leqslant n < k$$

On convient par ailleurs que :

$$S(0,0) = 1 \quad \text{et} \quad S(0,k) = 0 \text{ si } k \geqslant 1$$

Théorème 1.2.1 :
Le nombre de **Stirling** de seconde espèce $S(n, k)$ vaut :

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \, (k - i)^n$$

où C_q^i est la combinaison de i éléments dans un ensemble de q éléments.

Théorème 1.2.2 :
Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ ont pour Fonction Génératrice " verticale" :

$$\Phi_k(t) = \sum_{n\geqslant k} S(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(\exp(t)-1)^k \quad , \quad k \geqslant 0$$

Théorème 1.2.3 :
Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ ont pour Fonction Génératrice "horizontale" :

$$x^n = \sum_{p=0}^{n} S(n,p)\cdot[x]_p$$

où $[x]_0 = 1$ et $[x]_p = x(x-1)(x-2)(\cdots)(x-p+1)$.

Théorème 1.2.4 :
Nous avons la formule exacte suivante :

$$S(n,k) = \sum_{|p|=n-k} 1^{p_1}.2^{p_2}.3^{p_3}\ldots k^{p_k}$$

où $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k)$ et $|p| = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k$.

Exemple 1.2.1 :

$$S(5,2) = 1^3.2^0 + 1^2.2^1 + 1^1.2^2 + 1^0.2^3 = 15$$

Définition 1.2.2 :
Les polynômes de Bell partiels sont les polynômes $B_{n,k} = B_{n,k}(x_1, \cdots, x_n)$, de la suite infinie d'indéterminés $x_1, x_2, x_3, \ldots$, définis par le développement en série formelle double :

$$\Phi(t,u) = \exp\left(u.\sum_{m\geqslant 1} x_m \frac{t^m}{m!}\right) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} u^k \cdot B_{n,k}(x_1,\cdots,x_n)\right)$$

Définition 1.2.3 :
Les polynômes de Bell partiels $B_{n,k} = B_{n,k}(x_1, \cdots, x_n)$ sont définis de manière équivalente par le développement en série formelle simple :

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{m\geqslant 1} x_m \frac{t^m}{m!}\right)^k = \sum_{n\geqslant k} B_{n,k}(x_1,\cdots,x_n)\cdot\frac{t^n}{n!} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Définition 1.2.4 :
Les polynômes de Bell complets $Y_n = Y_n(x_1, \cdots, x_n)$ sont définis par :

$$\Phi(t,1) = \exp\left(\sum_{m\geqslant 1} x_m \frac{t^m}{m!}\right) = 1 + \sum_{n\geqslant k} Y_n(x_1,\cdots,x_n)\cdot\frac{t^n}{n!}\,,$$

ou encore :

$$Y_n(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(x_1,\cdots,x_n) \qquad \text{et} \qquad Y_0 = 1\,.$$

Théorème 1.2.5 :
Les polynômes de Bell partiels sont des polynômes à coefficients entiers, homogènes de degré k et ont pour expression :

$$B_{m,p}(x_1,\cdots,x_m) = \sum_{\substack{|m.k|=m \\ |k|=p}} \frac{m!}{k!}\cdot\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{x_m}{m!}\right)^{k_m}\,.$$

Théorème 1.2.6 :
Nous avons les identités :

$$B_{n,k}(1,1,\cdots,1) = S(n,k)\,,$$

$$B_{n,k}(1!,2!,\cdots,n!) = \frac{n!}{k!}\cdot C_{n-1}^{k-1}\,.$$

Théorème 1.2.7 :
Nous avons les relations recurentes suivantes :

$$k.B_{n,k}(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=k-1}^{n-1} C_n^j(x_{n-j})\cdot B_{j,k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ ,$$

$$B_{n,k}(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=0}^{k} C_n^j(x_1)^j\cdot B_{n-j,k-j}(0,x_2,\cdots,x_n)\ ,$$

$$B_{n,k}(\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n})=\frac{n!}{(k+n)!}\,B_{n+k,k}(0,x_2,\cdots,x_n)\ .$$

Remarque 1.2.3 :
Afin de compléter cotte série de rappels nous devons parler des deux formes de l'identité d'Abel.

Théorème 1.2.3 **:**
Pour tous x,y et z réels ainsi que pour tout entier m, nous avons la relation dite première forme de l'identité d'Abel :

$$(x+y)^m=\sum_{q=0}^{m} C_m^q\cdot x\cdot(x-q.z)^{q-1}(y+q.z)^{m-q}\ .$$

Théorème 1.2.9 **:**
Pour tous x,y et a réels ainsi que pour tout entier m, nous avons la relation dite seconde forme de l'identité d'Abel :

$$(x+y)^m=\sum_{q=0}^{m} C_m^q\cdot x\cdot((x-m.z)+q.z)^{m-q-1}((y+m.z)-q.z)^q\ .$$

Remarque **1.2.4** :
Toutes les définitions, remarques et résultats relatifs à ce paragraphe intitule "Rappels d'analyse combinatoire" ont été extraits des ouvrages de **L.** Comtet [26] et [27]. Toutes les démonstrations des résultats énoncés s'y trouvent.

1.3 Présentation de la méthode décompositionnelle d'Adomian :

La méthode décompositioanelle d'Adomian, comme il a été précisé ci haut, est une méthode de résolution de problèmes de différents types : algébrique, différentiel, intégral, aux dérivées partielles, intégro-différentiel, etc..., qu'ils soient linéaires ou non linéaires (consulter [22],[23]). Le principe de base de cette méthode est simple et en même temps naturel (du moins intuitivement) et il est particulièrement adapté au cas non linéaire. Avant tout, il faut signaler que son application à un problème donné impose à ce dernier d'être présente sous une forme particulière appelée forme canonique d'Adomian. Apres quoi, on décompose la fonction inconnue du problème sous forme de série dont les termes peuvent être calculés de manière récursive. On décompose aussi l'opérateur non linéaire (ou non) du problème sous forme de série de polynômes particuliers appelés polynômes d'Adomian, qui peuvent être déterminés de manière récurrente à partir de l'expression de l'opérateur. Comme on le remarquera à travers la description de la méthode, aucune linéarisation ni aucune discrétisation ne seront opérées sur le terme non linéaire de l'équation fonctionnelle à traiter.

Soit à résoudre l'équation fonctionnelle :

$$u - N(u) = f \tag{1.1}$$

où N est un opérateur de classe C^{∞} défini de E dans E , et f un élément de E (E un espace de Banach). Le principe de la méthode décompositonnelle est d'écrire aussi bien l'inconnue u que l'opérateur N sous la forme d'une série infinie :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \qquad \text{et} \qquad N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$$

u_n étant des éléments appartenant à E, et les A_n sont des polynômes en $u_0, u_1, u_2, \cdots$ appelés : polynômes d'Adomian associés à l'opérateur N, et obtenus par la relation :

$$N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i A_i\left(u_0, u_1, \cdots, u_i, \cdots\right)$$

ou encore :

$$n!A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i\right)\right]_{|\lambda=0}$$

où. λ est un paramètre réel introduit par convenance.

Par cette dernière identité on remarque qu'en fait A_n ne dépend que de $u_0, u_1, \cdots, u_n$, car la somme infinie peut être réduite à la somme des $n + 1$

premiers termes. On revient alors à l'équation fonctionnelle de départ (1.1), et on remplace u et N par leur expression respective :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1} + \cdots = f + A_0(u_0) + \cdots + A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n) + \cdots$$

Cette dernière identité est satisfaite en posant :

$$\begin{cases} u_0 = f \\ u_1 = A_0(u_0) \\ \vdots \\ u_{n+1} = A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n) \\ \vdots \end{cases} \tag{1.2}$$

En fait c'est le seul choix qui permet de définir les u_k sans ambiguité, de façon explicite et unique. Il est clair alors qu'on peut calculer les éléments u_k de façon récursive, et ainsi la solution exacte de l'équation (1.1) est égale à :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

et où les u_k sont données par (1.2).
L'originalité de la méthode décompositionnelle d'Adomian , en comparaison avec les méthodes classiques de résolution, basées généralement sur la linéarisation du terme non linéaire et sur la discrétisation de l'équation, réside dans le fait qu'en décomposant l'opérateur non linéaire en série polynômiale son caractère non linéaire est entiérement préservé. Même s'il y a approximation de la solution (car nous sommes obligé de tronquer la série solution) la non linéarité de l'équation fonctionnelle est entièrement prise en compte puisqu'il n'y a pas d'approximation effectuée sur l'équation fonctionnelle. Il est à remarquer par ailleurs (voir [22], [23]) que l'utilisation de la méthode décompositionnelle d' Adomian permet de ramener un problème de contrôle optimal à un problème d'optimisation classique. En effet, soit à résoudre le problème de contrôle optimal général :

$$\min_{(u_1, \cdots, u_m)} \int_0^T G((x_1, \cdots, x_m), (u_1, \cdots, u_m), t)\, dt \tag{1.3}$$

où la fonction G est différentiable et $T > 0$ *fixé.* Les vecteurs :

$$X(t) = (x_1(t), \cdots, x_m(t)) \qquad \text{et} \qquad U(t) = (u_1(t), \cdots, u_m(t))$$

sont liés par la contrainte :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = F\left(X(t), U(t)\right) \\ \qquad X(0) = \overrightarrow{\alpha} \end{cases} \tag{1.4}$$

En utilisant la méthode **décompositionnelle d'Adomian,** pour la résolution du système diiérentiel (1.4) on obtient :

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j^{(i)}\left(u_1(t), \cdots, u_m(t)\right) \qquad , \qquad \text{vi} \in \{1, \cdots, m\}$$

où les $Y_j^{(i)}$ sont explicitement dépendants de $u_1, \cdots, u_m$. Dans la pratique on prend :

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{N_i} Y_j^{(i)}\left(u_1(t), \ldots, u_m(t)\right) \qquad , \qquad \text{Vi} \in \{1, \cdots, m\}$$

Après quoi, on remplace l'expression des x_i dans (1.3) :

$$\min_{(u_1, \cdots, u_m)} \int_0^T G\left(\left(\sum_{j=0}^{N_1} Y_j^{(1)}\left(U(t)\right), \cdots, \sum_{j=0}^{N_m} Y_j^{(m)}\left(U(t)\right)\right), U(t), t\right) dt$$

qui est un **problème** d'optimisation classique car la fonctionnelle à minimiser dépend explicitement de $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

1.4 Principaux résultats de la **méthode d'Adomian** :

On considère l'équation fonctionnelle (1.1) :

$$u - N(u) = f$$

où N est un opérateur nonlinéaire d'un espace de Banach E dans lui même, f un **élément** donné de E, et u l'inconnue de l'équation. On définit les polynômes d' Adomian associes **à** l'opérateur N par la relation :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\right]_{|\lambda=0} \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème 1.4.1 :

Les **polynômes d'Adomian** sont **donnés** par les **formules** :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{p_1+\cdots+p_k=n} N^{(k)}(u_0).(u_{p_1}, \cdots, u_{p_k}) \right) \quad , \ \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

Théorème 1.4.2 :

Les polynômes **d'Adomian** peuvent être donnés aussi par les **formules** :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n) = \displaystyle\sum_{|n.k|=n} \frac{1}{k!} N^{(|k|)}(u_0).(u_{1_{[k_1]}}, \cdots, u_{n_{[k_n]}}) \quad , \ \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

où :

$$u_{i_{[k_i]}} = \underbrace{(u_i, u_i, \cdots, u_i)}_{k_i \text{ fois}} \qquad \text{et} \qquad k = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{N}^n$$

Théorème 1.4.3 :

On suppose que l'opérateur N est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage ouvert de u_0 et qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\left\| N^{(k)}(u_0) \right\|_{\mathcal{L}_k(E,E)} \leqslant M \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Alors **les** polynômes **d'Adomian associés à** N existent. De plus :

$$\left\| A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n) \right\|_E \leqslant \exp(n+1).M^{n+1} , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème 1.4.4 :

Sous les hypothèses du **théorème** précédent et si :

$$M < \exp(-1)$$

alors la série **décompositionnelle** $\sum_{n \geqslant 0} A_n$ est absolument convergente.

De plus :

$$\|\delta_k\|_E = \|\varphi_k - u\|_E \leqslant (1 - M\exp(1))^{-1}.\exp(k+1).M^{k+1}$$

où $\varphi_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$, u = $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et les u_i sont données par (1.2).

Remarque 1.4.1 :
Tous les résultats énnoncés dans le présent paragraphe sont démontrés dans la thèse de doctorat de K. Abbaoui [1]

Remarque 1.4.2 :
Si le u_0 choisi n'assure pas la convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian on a potentiellement la possibilité de faire un autre choix qui permettrait eventuellement d'assurer la convergence de la méthode. On se souvient que dans le système (1.2), on avait fait le choix :

$$u_0 = f$$

on aurait très bien pu choisir :

$$\begin{cases} u_0 = g \\ u_1 = A_0(u_0) + f - g \\ u_2 = A_1(u_0, u_1) \\ \vdots \end{cases}$$

et l'élément g $\in E$ serait choisi de manière à ce que les hypothèses du théorème 1.4.3 et du théorème 1.4.4 soient vérifiées.

1.5 Etude de quelques cas particuliers :

Dans ce qui suit, nous allons traiter quelques cas d'équations mathématiques selon le shéma proposé, et ce afin de montrer la facilité d'application de la méthode d'Adomian. Sans restreindre les classes d'équations auxquelles la méthode peut être appliquée, nous proposons les trois cas suivants :

A) Cas d'une équation différentielle :

Soit à résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(t_0) = \alpha_0 \,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Son écriture sous la forme canonique d'Adomian est donnée par la relation

$$u(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s)).ds \,.$$

En utilisant la notation opérationnelle suivante :

$$\mathbf{L}^{-1}(g) = \int_{t_0}^{t} g(s).ds \qquad \text{et} \qquad N(u) = \mathbf{L}^{-1}(f(u))$$

le problème (1.5) peut être écrit sous la forme équivalente suivante :

$$u - N(u) = \alpha_0. \tag{1.6}$$

Dans ce cas précis on prendra pour E l'espace défini par :

$$E = C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau]) \quad , \quad \tau \in \mathbb{R}_+^* \,.$$

En choisissant $u_0(t) = \alpha_0$, on peut écrire :

$$N^{(n)}(u_0)(h_1, h_2, \cdots, h_n)(t) = \int_{t_0}^{t} f^{(n)}(u_0(s)).h_1(s).h_2(s)\cdots h_n(s).ds$$

Exemple 1.5.1 :

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = (u(t))^2 + (1 - t^2) \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

dont la solution exacte est égale à $u(t) = t$.
On applique la méthode d'Adomian à ce problème non linéaire conformément **à ce qui a été développé plus haut. L'écriture de (1.7) sous la forme canonique d'Adomian** est donnée par :

$$u(t) - N(u) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \tag{1.8}$$

où l'opérateur N est défini par :

$$N(u) = \int_0^t (u(s))^2 ds\,.$$

On peut alors procéder au calcul des polynômes d'Adomian associé à (1.8), ainsi que les fonctions $u_i(t)$ qui sont les termes de la série décompositionnelle, en prennant :

$$u_0(t) = t - (0.33333)t^3 \qquad \text{et} \qquad \tau = \frac{1}{2}\,.$$

on obtient les fonctions suivantes :

$$u_1(t) = (0.33333)t^3 - (0.13333)t^5 + (0.01587)t^7$$
$$u_2(t) = (0.13333)t^5 - (0.06984)t^7 + (0.01340)t^9 - (0.00048)t^{11}$$
$$u_3(t) = (0.05397)t^7 - (0.03527)t^9 + (0.00924)t^{11} - (0.00099)t^{13} + (0.00005)t^{15}$$

Ainsi la série tronquée de quatre termes prise comme solution approchée est égale à :

$$u_*(t) = \sum_{i=0}^{3} u_i(t) = t - (0.02287)t^9 + (0.00876)t^{11} - (0.00099)t^{13} + (0.00005)t^{15}$$

ce qui donne une erreur de :

$$\varepsilon = \sup_{t\in[-0.5,0.5]} |u_*(t) - u(t)| \leqslant 4.5 * 10^{-5}$$

B) Cas d'un **système d'équations** différentielles :

Soit à résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U'(t) = F\,(U(t)) \\ U(t_0) = \overrightarrow{\alpha_0} \end{cases} \qquad (1.9)$$

$$U(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t)) \quad , \quad F(U) = (f_1(U), f_2(U), \cdots, f_p(U))\,.$$

Le problème (1.9) peut être écrit sous la forme équivalente suivante :

$$U(t) = \overrightarrow{\alpha_0} + \int_{t_0}^{t} F(U(s)).ds \;,$$

En utilisant la notation opérationnelle suivante :

$$\mathbf{L}^{-1}(g) = \int_{t_0}^{t} g(s).ds \quad , \qquad N_j(U) = \mathbf{L}^{-1}\left(f_j(U)\right)$$

$$N(U) = (N_1(U), N_2(U), \cdots, N_p(U))$$

l'écriture du problème (1.9) sous la forme canonique d'Adomian est donnée par la relation :

$$U - N(U) = \overrightarrow{\alpha_0}. \tag{1.10}$$

Dans ce cas précis on prendra pour E l'espace défini par :

$$E = \left(C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau])\right)^p \quad , \tau \in \mathbb{R}_+^* \; ,$$

En prenant $U_0(t) = \overrightarrow{\alpha_0}$, on peut écrire :

$$\frac{\partial N_j}{\partial u_k}(U_0).h_k(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f_j}{\partial u_k}(U_0(s)).h_k(s).ds$$

$$\frac{\partial^n N_j}{\partial u_{k_1} \cdot \partial u_{k_n}}(U_0)(h_1, \cdots, h_n)(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^n f_j}{\partial u_{k_1} \cdot \partial u_{k_n}}(U_0(s)).h_1(s). \cdots .h_n(s).ds \; .$$

A partir de là, en utilisant ce qui a été vu plus haut, on peut déterminer $N_j^{(n)}(U_0)$ et $N^{(n)}(U_0)$.

Exemple **1.5.2** :

On considère le système différentiel d'ordre 1 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = \sqrt{1 - (u_1(t))^2} \\ u_2'(t) = -2.u_1(t) + u_2(t) \end{array} \right. \\ u_1(0) = 0 \ , \ u_2(0) = 2. \end{array} \right. \tag{1.11}$$

On remarque que la solution exacte de ce système est égale à :

$$u_1(t) = \sin(t) \qquad \text{et} \qquad u_2(t) = \exp(t) + \cos(t) + \sin(t)$$

On applique la méthode d'Adomian à ce problème non linéaire conformément à ce qui a été développé plus haut. L'expression du système différentiel (1.11) sous la forme canonique d'Adomian est donnée par :

$$(u_1(t), u_2(t)) - N(u_1(t), u_2(t)) = (0, 2) \; , \tag{1.12}$$

où l'opérateur N est défini par :

$$N\left(u_1(t), u_2(t)\right) = \left(\int_0^t \sqrt{1-(u_1(s))^2}ds\ ,\ \int_0^t \left(-2.u_1(s)+u_2(s)\right)ds\right).$$

On peut alors procéder au calcul des polynômes d'**Adomian** associé à (1.12), ainsi que les fonctions $\overrightarrow{u_i}(t)$ qui sont les termes de la série décompositionnelle, en prennant :

$$\overrightarrow{u_0}(t) = (0,2)\ .$$

On obtient les fonctions vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{u_1}(t) = (t,\ 2t)$

$\overrightarrow{u_2}(t) = (0,0)$

$\overrightarrow{u_3}(t) = \left(-\frac{t^3}{6}, 0\right)$

$\overrightarrow{u_4}(t) = \left(0, \frac{2.t^4}{24}\right)$

Ainsi la série tronquée de cinq termes prise comme solution approchée est égale à :

$$\overrightarrow{u_*}(t) = \sum_{i=0}^{4} \overrightarrow{u_i}(t) = \left(t - \frac{t^3}{6}\ ,\ 2 + 2.t + \frac{2.t^4}{24}\right),$$

on remarque alors, que $\overrightarrow{u_*}(t)$ correspond exactement à la série tronquée d'ordre 4 du développement en série entière de la solution exacte. Pour ce qui est de l'erreur d'approximation, elle est égale au reste d'ordre 4 du développement en série entière.

C) Cas d'une équation **intégrale** :

Soit à résoudre l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \int_a^b K(t,x).G(u(x)).dx + f(t) \tag{1.13}$$

où K, G et f sont des fonctions continues. Ce problème se présente déjà sous la forme canonique, puisque si on désigne par :

$$N(u)(t) = \int_a^b K(t,x).G(u(x)).dx$$

alors l'équation (1.13) s'écrit sous la forme :

$$u - N(u) = f \, .$$

Dans ce cas précis on prendra comme espace de **Banach** de référence, l'espace E **défini par :**

$$E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$$

En choisissant $u_0(t)$ = f(t), on peut écrire :

$$N^{(n)}(u_0)(h_1, h_2, \cdots, h_n)(t) = \int_a^b K(t,x).G^{(n)}(u_0(x)).h_1(x).h_2(x).\ldots.h_n(x).dx$$

Exemple **1.5.3 :**

On considère l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \int_0^1 (t-x).(u(x))^2.dx + \frac{2}{3}t + \frac{1}{4} \qquad (1.14)$$

dont la solution exacte est : $u(t)$ = t.

On applique la méthode **d'Adomian à** ce **problème** non linéaire et ce **conformément à** ce qui a été vu plus haut. L'expression de **l'équation** (1.14) se présente déja à la forme canonique, on peut procéder **directement** au calcul des polynômes **d'Adomian.** Conjointement **à** cela, on détermine les **fonctions** $u_i(t)$ représentant les termes de la série **décompositionnelle** en partant de :

$$u_0(t) = \frac{2}{3}t + \frac{1}{4} \, .$$

On obtient les fonctions suivantes :

$$u_1(t) = (0.377315).t - (0.25347)$$

$$u_2(t) = -(0.033676).t - (0.012643)$$

$$u_3(t) = -(0.0220718).t + (0.0216614)$$

$$u_4(t) = (0.00012544).t - (0.0014335)$$

Ainsi la **série** tronquée de cinq termes prise comme solution approchée est égale à :

$$u_*(t) = \sum_{i=0}^{4} u_i(t) = (0.988359).t + (0.0041149)$$

ce qui donne une erreur de :

$$\varepsilon = \sup_{t\in[0,1]} |u_*(t) - u(t)| \leqslant 1.6 * 10^{-2}$$

Remarque **1.5.1** :

Ce paragraphe intitulé "Etude de quelques cas particuliers" est extrait du mémoire de D.E.A. de S. Nugier & H. Benhadda [39].

CHAPITRE 2

Majoration en norme des polynômes d'Adomian

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication

- **S. KHELIFA & Y. CHERRUAULT** : «New results for the Adomian method.» Kybernetes ; Vol.29 ; n°3 ; pp 332-354; 2000.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'améliorer certains résultats obtenus et démontrés par K. Abbaoui dans sa thèse de doctorat [1]. De façon plus précise nous nous sommes attachés à affiner la majoration en norme des polynômes d'Adomian. Ceci aura pour effet une amélioration de l'erreur de troncature inhérente à l'application de la méthode d'Adomian. Nous commençons par démontrer une nouvelle identité pour les polynômes de Bell, étape indispensable pour l'obtention des résultats escomptes.

2.2 Nouvelle identité pour les polynômes de Bell :

Au cours d'une étude bibhographique proposée par le professeur Yves Cherruault, un problème concernant les polynômes de Bell fut soulevé. Différents ouvrages ont été consultes pour sa résolution, notamment [26], [27], [17], [28], [40] et [41] mais en vain. C'est ce qui nous a amené à démontrer un résultat pour les polynômes de Bell qui s'est avéré être nouveau et que nous allons présenter ci dessous. Ce résultat sera exploité plus tard.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de donner une démonstration du théorème suivant :

Théorème 2.2.1 :
Le polynôme de Bell partiel $B_{m,p}(1^0, 2^1, 3^2, \dots, m^{m-1})$ vérifie l'égalité :

$$B_{m,p}(1^0, 2^1, 3^2, \cdots, m^{m-1}) = C_{m-1}^{m-p}\, m^{m-p} \;;\; \forall m \text{ et } \forall p \,, p \leqslant m \qquad (2.1)$$

où C_q^i est le nombre de combinaisons de i éléments dans un ensemble de q éléments.

Démonstration :
Pour prouver ce théorème nous procédons à une démonstration par récurrence. On vérifie tout d'abord que la relation (2.1) est vraie pour n = 1 et p = 1. En effet :

-En posant $n = 1$ et p = 1 :

$$B_{1,1}(1^0, 2^1, 3^2, \dots, n^{n-1}) = 1 = C_0^0 1^0$$

l'identité (2.1) est vraie.

-Ensuite on pose n = 2 et $p = 1, 2$, ainsi on obtient :

$$B_{2,1}(1^0, 2^1, 3^2, \cdots, n^{n-1}) = \frac{2!}{0!1!}\left(\frac{2}{2!}\right)^1 = C_1^1 2^1$$

$$B_{2,2}(1^0, 2^1, 3^2, \cdots, n^{n-1}) = \frac{2!}{2!0!}\left(\frac{2}{2!}\right)^0 = C_1^0 2^0$$

ce qui prouve que la relation (2.1) est encore vraie dans ce cas.

$\star$- A présent on suppose que l'identité (2.1) est vraie pour tout $s \leqslant n-1$ et pour tout $p \in \{1, 2, \cdots, s\}$, c'est à dire :

$$B_{s,p}(1^0, 2^1, 3^2, \cdots, s^{s-1}) = C_{s-1}^{s-p}\, s^{s-p}\,.$$

Afin de montrer la véracité de l'identité (2.1) pour s = n et $p \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on procède aussi par récurrence sur p :

- Si on pose p = 1 on obtient :

$$B_{n,1}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \frac{n!}{1!n!} n^{n-1} = C_{n-1}^{n-1} n^{n-1}$$

l'identité (2.1) est vérifiée.

- Mais pour $p = 2$, on remarque que l'expression de $B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1})$ dépend de la parité de n. Aiii nous considérons les deux cas n pair et n impair séparément :

(i) Si n est impair, on a :

$$B_{n,2}(1^0, 2^1, 3^2, \cdots, n^{n-1}) = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{j!(n-j)!}\, j^{j-1}(n-j)^{n-j-1}$$

on remarque alors qu'en procédant au changement d'indice k = n $-$ j, nous aurons :

$$\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{j!(n-j)!}\, j^{j-1}(n-j)^{n-j-1} = \sum_{k=n-1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{n!}{(n-k)!k!}\,(n-k)^{n-k-1}\, k^{k-1}$$

ce qui se traduit aussi par :

$$\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{j!(n-j)!}\, j^{j-1}(n-j)^{n-j-1} = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!}\, j^{j-1}(n-j)^{n-j-1}$$

ainsi on peut écrire que :

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} j^{j-1}(n-j)^{n-j-1}$$

ou encore en posant $q = j - 1$:

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \sum_{q=0}^{n-2} \frac{n!}{(q+1)!(n-q-1)!}(q+1)^q(n-1-q)^{n-2-q}$$

en écrivant $n! = n.(n-1)!$, et en simplifiant par $(q+1)$ chaque terme de la somme précédente, on aura :

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = n.\left(\sum_{q=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{q!(n-q-1)!}(q+1)^{q-1}(n-1-q)^{n-2-q}\right)$$

qui s'écrit également sous la forme :

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = n.\left(\sum_{q=0}^{n-2} C_{n-1}^q (q+1)^{q-1}((n-1)-q)^{(n-2)-q}\right)$$

Mais en constatant que :

$$C_{n-1}^q = C_{n-2}^q + C_{n-2}^{q-1} \quad , \quad q \geqslant 1$$

alors nous avons :

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = n.\Delta_1 + n.\Delta_2$$

où A, et A, sont donnés par :

$$A, = \sum_{q=0}^{n-2} C_{n-2}^q (q+1)^{q-1}((n-1)-q)^{(n-2)-q} \, ,$$

et

$$\Delta_2 = \sum_{q=1}^{n-2} C_{n-2}^{q-1}(q+1)^{q-1}((n-1)-q)^{(n-2)-q} \, .$$

En utilisant la **première** forme de l'identité d'Abel (**théorème** 1.2.8) :

$$(x+y)^m = \sum_{q=0}^{m} C_m^q \cdot x \cdot (x - q.z)^{q-1}(y + q.z)^{m-q}$$

et en substituant x, y, z et m par :

$$x = 1 \quad , \quad y = n - 1 \quad , \quad z = -1 \quad \text{et} \quad m = n - 2$$

il devient clair que :

$$\Delta_1 = (1 + n - 1)^{n-2}.$$

Dans Δ_2, on remplace q par $(i + 1)$, on obtient alors :

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^{n-3} C_{n-2}^{i}(i+2)^{i}.((n-2)-i)^{(n-3)-i}.$$

Si l'on tient compte de l'égalité suivante :

$$C_{n-2}^{i}\,((n-2)-i)^{(n-3)-i} = (n-2).C_{n-3}^{i}((n-2)-i)^{(n-3)-i-1}$$

alors Δ_2 peut être exprimé comme suit :

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^{n-3}(n-2).C_{n-3}^{i}(i+2)^{i}.((n-2)-i)^{(n-3)-i-1}$$

En utilisant à présent la seconde forme de l'identité d'Abel (**théorème** 1.2.8) :

$$(x + y)^m = \sum_{q=0}^{m} C_m^q \cdot z \cdot ((x - m.z) + q.z)^{m-q-1}((y + m.z) - q.z)^q$$

et en remplaçant x, y, z et m par les valeurs suivantes :

$$x = 1 \quad , \quad y = n - 1 \quad , \quad z = -1 \quad \text{et} \quad m = n - 3,$$

il devient clair que :

$$\Delta_2 = (n-2).(1 + n - 1)^{n-3}.$$

En utilisant les valeurs obtenues pour Δ_1 et Δ_2 dans l'égalité :

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = n.\Delta_1 + n.\Delta_2$$

nous aurons :

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = n.(n)^{n-2} + n.(n-2)(n)^{n-3}$$

qui à son tour peut être réduite à la forme appropriée suivante :

$$B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = (n-1).(n)^{n-2} = C_{n-1}^{n-2}(n)^{n-2}.$$

Ce qui prouve que l'identité (2.1) est **vérifiée** dans le cas n impair et $p = 2$.

(ii) Si n est pair, on a :

$$B_{n,2}(1^0, 21, \cdots, n^{n-1}) = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} j^{j-1}(n-j)^{n-j-1} + \frac{n!}{2!\ (\frac{n}{2}!)^2} \left(\frac{n}{2}\right)^{n-2}$$

on remarque qu'avec un simple changement d'indice $k = n - j$, on a :

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} j^{j-1}(n-j)^{n-j-1} = \sum_{k=n-1}^{\frac{n}{2}+1} \frac{n!}{(n-k)!k!} (n-k)^{n-k-1} k^{k-1} ,$$

qui se traduit aussi **par** :

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} j^{j-1}(n-j)^{n-j-1} = \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} j^{j-1}(n-j)^{n-j-1} .$$

D'où, on obtient pour $B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots)$ l'égalité suivante :

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} j^{j-1}(n-j)^{n-j-1} + \frac{n!}{(\frac{n}{2}!)^2} \left(\frac{n}{2}\right)^{n-2}$$

qui s'écrit également sous la forme :

$$2.B_{n,2}(1^0, 21, \cdots, n^{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} j^{j-1}(n-j)^{n-j-1}$$

A partir d'ici, tout se **passe** exactement comme pour le **cas** où n est impair. n suivant un raisonnement analogue, on peut **réaliser** les mêmes opérations que précédemment et prouver que :

$$2.B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = 2.(n-1).(n)^{n-2}$$

qui s'écrit aussi sous la forme :

$$B_{n,2}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = C_{n-1}^{n-2}(n)^{n-2}$$

et on déduit que l'identité **(2.1)**, objet de notre démonstration, est vérifiée **dans le cas n pair et $p = 2$.**

A présent, on suppose que pour tout p , $3 \leqslant p < n$:

$$B_{n,s}(1^0, 2^1, 3^2, \cdots, n^{n-1}) = C_{n-1}^{n-s}(n)^{n-s} \text{ ; vs } \in \{1, \cdots, p-1)$$

On doit montrer que cette identité reste encore vraie pour $s = p$. Pour la suite de notre démonstration, nous utilisons l'identité **(théorème 1.2.7)** :

$$p.B_{n,p}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = \sum_{m=p-1}^{n-1} C_n^m(x_{n-m}).B_{m,p-1}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) . \tag{2.2}$$

Pour les besoins de notre démonstration, nous utilisons l'égalité *(2.2)* dans le cas particulier où $x_i = i^{i-1}$, cela nous permet d'écrire :

$$p.B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \sum_{m=p-1}^{n-1} C_n^m(n-m)^{n-m-1}.B_{m,p-1}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) .$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence ci dessus, on a :

$$B_{m,p-1}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = C_{m-1}^{m-p-1}(m)^{m-p-1} .$$

Le changement d'indices suivant :

$$q = m - p - 1 \ , \quad I_q = n - q - p + 1 \text{ et } J_q = q + p - 1$$

nous permet d'écrire l'identité suivante :

$$p.B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \sum_{q=0}^{n-p} C_n^{q+p-1} C_{q+p-2}^{q} (I_q)^{n-q-p}(J_q)^q ,$$

qui peut être transformée comme suit :

$$p.B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \sum_{q=0}^{n-p} \frac{n!}{(J_q)(q!)(I_q!)((p-2)!)} (I_q)^{n-q-p}(J_q)^q ,$$

et après simplification nous obtenons :

$$p.B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \left(\frac{n!}{(p-2)!(n-p+1)!}\right).\Phi ,$$

où Φ est donnée par l'expression :

$$\Phi = \left(\sum_{q=0}^{n-p} \frac{(n-p+1)!}{(n-p+1-q)!q!} (I_q)^{n-q-p}(J_q)^{q-1}\right) .$$

D'où nous pouvons écrire que :

$$p.B_{n,p}(1^0, \cdots, n^{n-1}) = \left(\frac{n!}{(p-2)!(n-p+1)!}\right) \left(\sum_{q=0}^{n-p} C_{n-p+1}^{q} (I_q)^{n-q-p} (J_q)^{q-1}\right) . \tag{2.3}$$

Mais compte tenu du fait que :

$$C_{n-p+1}^{q} = C_{n-p}^{q} + C_{n-p}^{q-1} \ , \ q \geqslant 1 \quad ;$$

cela implique que l'égalité (2.3) prend la forme suivante :

$$p.B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \left(\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}\right) (\Omega_1 + \Omega_2) \tag{2.4}$$

où Ω_1 et Ω_2 sont **données** par les expressions :

$$\Omega_1 = \sum_{q=0}^{n-p} (p-1) C_{n-p}^{q} ((n-p+1) - q)^{n-p-q} ((p-1) + q)^{q-1} ,$$

et $$\Omega_2 = \sum_{q=1}^{n-p} (p-1) C_{n-p}^{q-1} ((n-p+1) - q)^{n-p-q} ((p-1) + q)^{q-1} .$$

En utilisant la première forme de l'identité d'Abel, et dans laquelle nous **remplaçons** x,y,z et m par :

$$x = p-1 \ , \ y = n-p+1 \ , \ z = -1 \ \text{ et } \ m = n-p ,$$

nous obtenons une forme **très** simple pour Ω_1 soit :

$$\Omega_1 = (n)^{n-p} .$$

Il nous reste alors **à** évaluer le terme Ω_2. En reprenant l'expression :

$$\Omega_2 = \sum_{q=1}^{n-p} (p-1) C_{n-p}^{q-1} ((n-p+1) - q)^{n-p-q} ((p-1) + q)^{q-1} ,$$

et en remplaçant q par $(i + 1)$, on peut écrire Ω_2 sous la forme suivante :

$$\Omega_2 = \sum_{i=0}^{n-p-1} (p-1) C_{n-p}^{i} ((n-p) - i)^{n-p-i-1} (p+i)^{i}$$

En tenant compte du fait que :

$$C_{n-p}^{i} ((n-p) - i)^{n-p-i-1} = (n-p).C_{n-p-1}^{i} ((n-p) - i)^{n-p-i-2}$$

nous pouvons alors donner une nouvelle expression pour Ω_2, soit :

$$\Omega_2 = (n - p)(p - 1)\left(\sum_{i=0}^{n-p-1} C_{n-p-1}^{i}\big((n-p)-i\big)^{(n-p-1)-i-1}(p+i)^{i}\right)$$

En utilisant à présent la seconde forme de l'identité d'Abel, et dans laquelle nous remplaçons x,y,z et m par :

$$x = 1 \ , \quad y = n-1 \ , \quad z = -1 \quad \text{et} \quad m = n-p-1,$$

nous obtenons une expression plus simple pour Ω_2, soit :

$$\Omega_2 = (n-p)(p-1).(n)^{n-p-1}.$$

En utilisant les expressions obtenues pour Ω_1 et Ω_2 dans l'égalité (2.4), nous aurons :

$$p.B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \left(\frac{n!}{((p-1)!(n-p+1)}\right).\Psi$$

où Ψ est donnée par :

$$\Psi = \left((n)^{n-p} + (n-p)(p-1).(n)^{n-p-1}\right)$$

il vient alors :

$$p.B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \left(\frac{(n-1)!(n)^{n-p}}{(p-1)!(n-p)!}\right)\left(\frac{n+(n-p)(p-1)}{n-p+1}\right)$$

qui peut être écrit comme suit :

$$p.B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = \left(\frac{(n-1)!(n)^{n-p}}{(p-1)!(n-p)!}\right).p$$

et finalement :

$$B_{n,p}(1^0, 2^1, \cdots, n^{n-1}) = C_{n-1}^{n-p}(n)^{n-p}$$

et ainsi l'identité (2.1) est prouvée.

En conclusion, on a pu établir et prouver une nouvelle identité pour les polynômes de Bell, ce qui constitue une modeste contribution dans la théorie de ces polynômes et va nous permettre de démontrer un nouveau théorème de convergence pour la méthode décompositionnelle d'Adomian. A noter que les polynômes de Bell sont un cas particulier des polynômes d' Adomian.

2.3 Nouvelle majoration en norme pour les polynômes d'Adomian :

Etant donnée l'équation fonctionnelle de départ (1.1), soit :

$$u = N(u) + f$$

ou N est un opérateur de E dans E , f un élément de E (E un espace de Banach) et u l'inconnue du problème.
A cet opérateur N on associe des polynômes d'Adomian, leur expression ayant été mentionnée au chapitre 1, paragraphe 4, on se propose d'améliorer l'estimation du théorème 1.4.3 :

Théorème 2.3.1 :
On suppose que l'opérateur N est de classe C^∞ dans un voisinage ouvert de u_0 et qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\left\|N^{(k)}(u_0)\right\|_{\mathcal{L}_k(E,E)} \leqslant M \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Alors les polynômes d'Adomian associés à N vérifient l'inégalité :

$$\|A_n(u_0, u_1, \cdots, u_n)\|_E \leqslant \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1} \, , \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

Démonstration :

Pour prouver ce théorème nous procèdons à une démonstration par récurrence. Vérifions tout d'abord que la relation (2.5) est vraie pourn = 0. En effet :

- En posant $n = 0$:

$$A_0(u_0) = N(u_0) \quad \Longrightarrow \quad \|A_0(u_0)\| \leqslant M$$

l'inégalité (2.5) est vérifiée.

- Ensuite on pose $n = 1$:

$$A_1(u_0, u_1) = N'(u_0) .(u_1) \qquad \text{et} \qquad u_1 = A_0(u_0)$$

$$\|A_1\|_E \leqslant \|N'(u_0)\|_{\mathcal{L}(E,E)} \|u_1\|_E \leqslant M^2$$

ce qui prouve que l'inégalité (2.5) est vérifiée dans ce cas.

- Maintenant on suppose que la relation (2.5) est vraie jusqu'à l'ordre $n = p-1$, c'est à dire :

$$\|A_n(u_0,u_1,\cdots,u_n)\|_E \leqslant \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}M^{n+1}\ , \quad \forall n \leqslant p-1\ ,$$

montrons que cette inégalité reste vraie pour n = p. Au vu du théorème 1.4.2 :

$$A_p(u_0,u_1,\cdots,u_p) = \sum_{|p.k|=p} \frac{1}{k!} N^{(|k|)}\,(u_0)\,.(u_{1_{[k_1]}},u_{2_{[k_2]}},\cdots,u_{p_{[k_p]}})$$

où :

$$u_{i_{[k_i]}} = \underbrace{(u_i,u_i,\ \cdots\ ,u_i)}_{k_i\ \text{fois}} \qquad \text{et} \qquad k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in\mathbb{N}^n$$

D'où nous pouvons déduire l'estimation :

$$\|A_p(u_0,u_1,\cdots,u_p)\|_E \leqslant \sum_{|p.k|=p} \frac{1}{k!}\left\|N^{(|k|)}\,(u_0)\right\|_{\mathcal{L}_{|k|}(E,E)}\cdot\left(\prod_{j=1}^{p}\left\|u_{j_{[k_j]}}\right\|_{E^{k_j}}\right)\ ,$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\|A_p(u_0,u_1,\cdots,u_p)\|_E \leqslant \sum_{|p.k|=p} \frac{1}{k!}M.\,\|u_1\|_E^{k_1}\cdot\|u_2\|_E^{k_2}\cdots\|u_p\|_E^{k_p}\ .$$

En utilisant la définition des u_i et l'hypothèse de récurrence, à savoir :

$$u_i = A_{i-1}(u_0,u_1,\cdots,u_{i-1}) \quad \text{et} \quad \|A_{i-1}(\ldots)\|_E \leqslant \frac{i^{i-1}}{i!}M^i \quad , \forall i\leqslant p\,;$$

nous obtenons facilement l'estimation :

$$\|A_p(u_0,\cdots,u_p)\|_E \leqslant \sum_{|p.k|=p}\frac{1}{k!}M.\left(\frac{1^0}{1!}M\right)^{k_1}\left(\frac{2^1}{2!}M^2\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{p^{p-1}}{p!}M^p\right)^{k_p}$$

de laquelle découle immédiatement l'inégdité :

$$\|A_p(u_0,\ldots,u_p)\|_E \leqslant \sum_{|p.k|=p}\frac{1}{k!}M.M^{k_1+2k_2+\cdots+pk_p}\left(\frac{1^0}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{p^{p-1}}{p!}\right)^{k_p}\ ,$$

soit :

$$\|A_p(u_0,\cdots,u_p)\|_E \leqslant M.M^p\left(\sum_{|p.k|=p}\frac{1}{k!}\left(\frac{1^0}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{2^1}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{p^{p-1}}{p!}\right)^{k_p}\right)\ .$$

Afin de simplifier l'écriture du membre de doite de la dernière inégalité, évaluons A dont l'expression est donné par :

$$\Delta = \left(\sum_{|p.k|=p} \frac{1}{k!} \left(\frac{1^0}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{2^1}{2!}\right)^{k_2} \left(\frac{3^2}{3!}\right)^{k_3} \cdots \left(\frac{p^{p-1}}{p!}\right)^{k_p} \right)$$

ou bien encore :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{\substack{|p.k|=p \\ |k|=j}} \frac{1}{k!} \left(\frac{1^0}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{2^1}{2!}\right)^{k_2} \left(\frac{3^2}{3!}\right)^{k_3} \cdots \left(\frac{p^{p-1}}{p!}\right)^{k_p} \right) .$$

D'après la définition des polynômes de Bell, d'une part, nous avons :

$$\Delta = \frac{1}{p!} \left(\sum_{j=1}^{p} B_{p,j}(1^0, 2^1, 3^2, 4^3, \cdots) \right) ,$$

en vertu du théorème 2.2.1, d'autre part, nous pouvons affirmer que :

$$\Delta = \frac{1}{p!} \left(\sum_{j=1}^{p} C_{p-1}^{p-j} (p)^{p-j} \right) .$$

En remplaçant l'indice j par (k + 1) nous aurons :

$$\Delta = \frac{1}{p!} \left(\sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^{(p-1)-k} (p)^{(p-1)-k} .1^k \right) = \frac{1}{p!}(p+1)^{p-1} ,$$

que nous pouvons écrire aussi :

$$\Delta = \frac{(p+1)^p}{(p+1)!} .$$

D'oh nous obtenons :

$$\|A_p(u_0, \cdots, u_p)\|_E \leqslant M^{p+1}.\Delta ,$$

et par suite :

$$\|A_p(u_0, \cdots, u_p)\|_E \leqslant \frac{(p+1)^p}{(p+1)!} M^{p+1} ,$$

ce qui achève la preuve de ce théorème.

Remarque **2.3.1** :

Si l'on compare le **théorème** 1.4.3 avec le **théorème** que nous venons de prouver, on peut se rendre compte qu'effectivement on a une amélioration sensible, au vu du lemme suivant :

Lemme **2.3.1** :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'inégalité :

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} < (\exp(1))^{n+1} .$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors nous avons :

$$(\exp(1))^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{1!} + \frac{(n+1)^2}{2!} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n!} + \dots ,$$

d'où l'on peut déduire que :

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \leq \frac{(n+1)^n}{n!} = \left[(\exp(1))^{n+1} - \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{+\infty} \frac{(n+1)^k}{k!} \right) \right] .$$

Autrement dit :

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} < (\exp(1))^{n+1} ,$$

ce qui prouve l'inégalité du présent lemme.

Remarque **2.3.2** :

Bien qu'ayant **amélioré** l'estimation des polynômes **d'Adomian**, on ne peut établir **un** meilleur résultat de convergence pour la méthode **décompositionnelle d'Adomian** que celui du **théorème** 1.4.4 :

Théorème 2.3.2 :

On suppose que l'opérateur N est de classe C^∞ dans un voisinage ouvert de u_0, qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\left\| N^{(k)}(u_0) \right\|_{\mathcal{L}_k(E,E)} \leqslant M , \; \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad M < \exp(-1)$$

alors la **série** solution de l'équation (1.1) converge absolument.

Démonstration :

La solution de l'équation (1.1) s'écrit sous la forme :

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

où les u_k sont donnés par l'expression :

$$u_k = A_{k-1}(u_0, \cdots, u_{k-1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

En vertu du théorème 2.3.1, nous pouvons écrire :

$$\|u_k\|_E = \|A_{k-1}(u_0, \cdots, u_{k-1})\|_E \leqslant \frac{k^{(k-1)}}{k!} M^k$$

mais en vertu du lemme 2.3.1, nous avons l'inégalité :

$$\frac{k^{(k-1)}}{k!} < (\exp(1))^k ,$$

d'oh nous déduisons l'estimation pour les u_k :

$$\|u_k\|_E < (M.\exp(1))^k ,$$

ce qui nous permet d'écrire que :

$$\sum_{k \geqslant 0} \|u_k\|_E < \sum_{k \geqslant 0} (M.\exp(1))^k .$$

Comme par hypothèse :

$$(M.\exp(1)) < 1 ,$$

en utilisant le théorème de comparaison des séries à termes positifs, nous pouvons affirmer que la série solution converge absolument.

Lemma 2.3.2 :

Pour tout couple de nombres entiers naturels (n, p), tel que $p \leqslant n$ nous avons l'inégalité :

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} \leqslant \frac{(p+1)^p}{(p+1)!} (\exp(1))^{n-p+1} .$$

Démonstration :

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire la double égalité suivante :

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{(n+2)^n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n .$$

Et en utilisant l'inégalité donnée par :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \exp(1) ,$$

nous pouvons écrire que :

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} \leqslant \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\exp(1) .$$

En répétant le même raisonnement, nous pouvons obtenir l'inégalité :

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \leqslant \frac{(n)^{n-1}}{(n)!}\exp(1) ,$$

ou encore :

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} \leqslant \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\exp(1) \leqslant \frac{(n)^{n-1}}{(n)!}(\exp(1))^2 .$$

Ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} \leqslant \frac{(p+1)^p}{(p+1)!}(\exp(1))^{n-p+1} , \text{ pour tout } p \leqslant n .$$

Théorème 2.3.3 **:**

Sous les mêmes **hypothèses** que celles du **théorème précédent,** on peut **affirmer** que l'erreur de troncature est majorée par :

$$\| (u-\varphi_k)\|_E \leqslant \frac{(k+1)^k}{(k+1)!}\frac{M^{k+1}}{(1-M.\exp(1))} , \ \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{2.6}$$

Démonstration :

On rappelle que :

$$u = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j \quad , \quad \varphi_k = \sum_{j=0}^{k} u_j \quad , \quad (u-\varphi_k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} u_j$$

Pour la norme de $(u - \varphi_k)$, nous avons les estimations :

$$\|(u-\varphi_k)\|_E \leqslant \sum_{j=k+1}^{+\infty} \|u_j\|_E \leqslant \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(j)^{j-1}}{j!} M^j ,$$

c'est à dire :

$$\|(u - \varphi_k)\|_E \leqslant \frac{(k+1)^k}{(k+1)!} M^{k+1} + \frac{(k+2)^{k+1}}{(k+2)!} M^{k+2} + \dots \tag{2.7}$$

L'utilisation du lemme 2.3.2 nous permet d'avoir :

$$\frac{(p+1)^p}{(p+1)!} M^{p+1} \leqslant \frac{(k+1)^k}{(k+1)!} M^{k+1} . (M. \exp(1))^{p-k} . \tag{2.8}$$

Des deux inégalités (2.7) et (2.8) nous obtenons :

$$\|(u-\varphi_k)\|_E \leqslant \frac{(k+1)^k}{(k+1)!} M^{k+1} . \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (M.\exp(1))^j \right) .$$

Ainsi, nous pouvons affirmer que :

$$\|(u-\varphi_k)\|_E \leqslant \frac{(k+1)^k \qquad M^{k+1}}{(k+1)! \, (1 - M.\exp(1))} .$$

Ce qui achève la démonstration de ce théorème.

Remarque 2.3.3 :

Si l'on compare cette dernière estimation avec celle prouvée en [1] et rappelée au **théorème 1.4.4** à savoir :

$$\|u - \varphi_k\|_E \leqslant \frac{(M. \exp(1))^{k+1}}{(1 - M. \exp(1))}$$

on remarque que l'on a réussi à affiner l'erreur de troncature et donc à améliorer la précision de l'approximation.

Remarque 2.3.4 :

En pratique, on ne peut **pas** calculer tous les termes de la série solution, on est obligé de la tronquer et l'inégalité (2.6) du **théorème** 2.3.3 permet **d'arrêter** les calculs une fois la **précision** désirée obtenue :
De **façon précise,** pour un ε donné, $\varepsilon > 0$, on détermine le premier entier $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\frac{(k_0+1)^{k_0}}{(k_0+1)!} M^{k_0+1} \leqslant \varepsilon.(1 - M.\exp(1))$$

et l'on prendra comme solution approchée la fonction :

$$u = \varphi_{k_0} = \sum_{j=0}^{k_0} u_j$$

Remarque 2.3.5 :

Il faut souliiner que la nouvelle majoration en norme des polynômes d' **Adomian (théorème 2.3.1)** a été inspirée lors de la reprise de la démonstration concernant la somme des nombres **d'Abbaoui-Cherruault** que nous avons largement **simplifiée.** Nous la présentons ci après.

2.4 A propos des nombres **d'Abbaoui-Cherruault** :

Définition 2.4.1 :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^n$, on définit les nombres d' Abbaoui-Cherruault par : ([1])

$$C_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{n!}{(k_1!)(k_2!)\cdots(k_n!)} \cdot \frac{1}{(1!)^{k_1}\cdots(n!)^{k_n}} \cdot \frac{1}{(n+1-|k|)!}$$

Remarque 2.4.1 :

Dans cette section, nous nous proposons de donner une nouvelle **démonstration** du théorème suivant :

Théorème 2.4.1 :

Les nombres **d'Abbaoui-Cherruault** vérifient la relation suivante :

$$\sum_{|n.k|=n} C_{k_1, \ldots, k_n} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}$$

Démonstration :

En effet, si l'on pose :

$$\Theta = \sum_{|n.k|=n} \frac{n!}{(k_1!)(k_2!)\cdots(k_n!)} \frac{1}{(1!)^{k_1}\cdots(n!)^{k_n}} \frac{1}{(n+1-|k|)!},$$

alors, il est clair que :

$$\Theta = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\substack{|n.k|=n \\ |k|=p}} \frac{n!}{(k_1!)(k_2!)\cdots(k_n!)} \frac{1}{(1!)^{k_1}\cdots(n!)^{k_n}} \right) \frac{1}{(n+1-p)!}.$$

Tenant compte de la définition des polynômes de Bell (section 1.2) :

$$\Theta = \sum_{p=1}^{n} B_{n,p}(1,1,1,\ldots) \frac{1}{(n+1-p)!}.$$

D'après le théorème 1.2.6 nous avons :

$$B_{n,p}(1,1,1,\ldots) = S(n,p)$$

où les $S(n,p)$ sont les nombres de **Stirling** de deuxième espèce. Par suite nous pouvons écrire Θ sons la forme suivante :

$$\Theta = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+1-p)!} S(n,p)$$

Si on se réfère au **théorème 1.2.3,** il nous apparait que les $S(n,p)$ ont pow fonction génératrice "horizontale" l'expression suivante :

$$x^n = \sum_{p=0}^{n} S(n,p)[x]_p, \tag{2.9}$$

où $[x]_0 = 1$ et $[x]_p = x(x-1)(x-2)(\cdots)(x-p+1)$.

Nous pouvons donc vérifier que si nous remplaçons x par 0 dans la formule (2.9), nous obtenons :

$$S(n,0) = 0 \ .$$

Si de plus nous remplaçons x par n + 1 dans la formule (2.9), nous aurons :

$$(n+1)^n = \sum_{p=1}^{n} S(n,p)(n+1)(n)(\cdots)(n+2-p) \ .$$

Ce qui peut être également écrit sous la forme :

$$(n+1)^n = \sum_{p=1}^{n} S(n,p)\frac{(n+1)!}{((n+1)-p)!} \ .$$

D'oh, nous déduisons que :

$$\Theta = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \quad \text{et} \quad \sum_{|n.k|=n} C_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \ .$$

Ce qui achève la démonstration de ce théorème.

Remarque 2.4.2 :

Cette démonstration est nettement plus simple que celle donnée en [1].

CHAPITRE 3

Application aux micro-lasers

Les résultats de ce chapitre ont été soumis à la revue Kybernetes

- **S. KHELIFA, Y. CHERRUAULT, F. SANCHEZ & S. GUELLAL** : «Determination of eigenmodes in microchip lasers by Adomian decomposition method.» à paraître dans Kybernetes ; Vol. 32 ; n° 7/8 ; 2003.

3.1 Introduction :

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à la résolution d'une équation différentielle complexe à une dimension d'espace, issue de la théorie des micro-lasers (voir [43],[44]) :

$$\frac{d^2}{dx^2}\xi(x) - A.\xi(x) + p.f(x).N(\xi(x)) = 0 \quad , \; x \in \mathbb{R} \; , \; \xi(x) \in \mathbb{C} \; , \qquad (3.1)$$

$$\text{avec} \quad A = (\delta_C - \delta_L) + i * \frac{T}{2} \qquad \text{et} \qquad N(\xi) = \frac{\delta_L + i}{1 + (\delta_L)^2 + \|\xi\|^2}\,\xi$$

ξ : la distribution du champ électrique
p : le paramètre de pompage
f : la fonction profil de la pompe à faisceaux
δ_C : la fréquence longitudinale du mode-cavité
δ_L : la fréquence du champ laser
T : le coefficient de transmission de sortie du miroir

Les inconnues de l'équation (3.1) sont $\xi(x)$, p et δ_L. Les solutions physique ment admissibles sont appelées ' solutions confinées' et satisfont aux conditions :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \xi(x) = 0_{\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \|\xi(x)\|^2 \, dx < +\infty \, .$$

En fait, les solutions physiquement admissibles du problème précédent sont les fonctions propres de l'équation (3.1). Quand le terme non linéaire est négligé (i.e. on prend N(0)) 1eur existence est assurée non seulement si p est supérieur à une certaine constante notée p_{th} (valeur du paramètre de pompage au seuil laser) mais aussi si la fonction f est égale à (cf [43],[44]) :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{2\,|x|}{a}\right) \; , \; f(x) = \left(1 + \frac{|x|}{a}\right)^{-2} \; , \quad f(x) = \mathrm{sech}^2\left(\frac{2x}{a}\right)$$

(a est la largeur géométrique normalisée de la pompe)

Il apparait alors des fonctions propres impaires et des fonctions propres paires caractérisées par :

$\xi(0) = 0_{\mathbb{C}}$ pour les modes impairs
$\xi'(0) = 0_{\mathbb{C}}$ pour les modes pairs

Notons au passage que la fonction propre fondamentale correspond au premier mode propre pair. La solution $\xi(x)$ de l'équation (3.1) n'est pas aisée à déterminer, à cause de la présence du terme non linéaire $N(\xi)$. Les physiciens ont proposé une approche (voir [36],[43],[44]) basée sur la linéarisation du terme N(J) , ce qui conduit à la résolution de l'équation :

$$\frac{d^2}{dx^2}\xi(x) + (p.B.f(x). - A).\xi(x) = 0 \quad , x \in \mathbb{R} \, , \xi(x) \in \mathbb{C} \, , \qquad (3.2)$$

$$\text{avec} \quad B = \frac{\delta_L + i}{1 + (\delta_L)^2} \quad \text{et} \quad A = (\delta_C - \delta_L) + i * \frac{T}{2} \, ,$$

sous les mêmes conditions :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \xi(x) = 0_{\mathbb{C}} \, , \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \|\xi(x)\|^2 \, dx < +\infty \, .$$

L'idée de cette approximation est basée sur le fait qu'avant l'apparition du mode propre fondamental, ξ est égale à zero, et le terme $N(\xi)$ peut être remplacé par le terme linéaire :

$$\frac{\delta_L + i}{1 + (\delta_L)^2} \, \xi(x) \, .$$

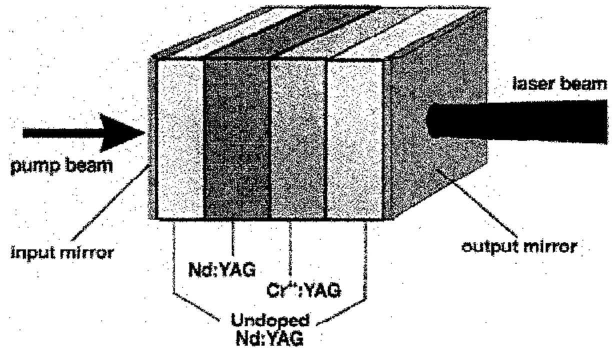
Dans ce qui va suivre, nous souhaitons apporter une réponse au problème suivant : peut-on déterminer la fonction propre fondamentale de l'équation (3.1) (i.e. avec prise en compte du terme non linéaire) en utilisant la méthode décompositionnelle d'Adomian ?

Avant d'essayer de répondre à cette question, rappelons sommairement ce qu'est un micro-laser.

Un micro-laser est composé d'une cavité résonnante contenant un milieu amplificateur et d'une source externe de puissance. La cavité résonnante est une plaque mince d'un milieu amplificateur avec des miroirs formés de multicouches de diélectriques déposés directement sur les deux faces de la cavité. La longueur de la cavité résonnante n'excède pas les 100 μm, ce qui explique l'utilisation du terme micro-laser. La source externe de puissance est généralement constitué d'une diode laser présentant un certain profil transverse.

Le principe de fonctionnement d'un micro-laser est basé sur la génération d'une inversion de population positive par un faisceau de pompage au dessus du seuil d'oscillation. Le milieu devient alors amplifkateur. L'émission spontanée est ensuite amplifiée par de multiples allers-retours liés aux réflexions sur les miroirs de la cavité. Cela permet de générer un faisceau laser.

Les paramètres de la cavité résonnante et de la diode laser sont ajustés de manière à obtenir des modes confinés.



Représentation schématique d'un micro-laser (in **Nanolase Technical Bulletin, March 2000).**

3.2 Détermination du mode fondamental :

On considère **l'équation** (3.1) :

$$\frac{d^2}{dx^2}\xi(x) - A.\xi(x) + p.f(x).N(\xi(x)) = 0 \quad , \ x \in \mathbb{R} \ , \ \xi(x) \in \mathbb{C}$$

on désire déterminer une approximation de la fonction propre fondamentale en utilisant la méthode **décompositionnelle d' Adomian** et en tenant compte des conditions :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \xi(x) = 0_{\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \|\xi(x)\|^2 \, dx < +\infty \, .$$

En réalité il est **très difficile** (voire même **impossible**) de le **faire directement.** Heureusement, les **expériences** physiques ont prouvé que :

$$3 \ X_0 > 0 \ \text{tel que} \ \xi(x) = 0_{\mathbb{C}} \ , \ \forall x, |x| \geqslant \mathbf{X0}$$

l'idée serait **alors** de remplacer la relation :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \xi(x) = 0_{\mathbb{C}}$$

par les conditions :

$$\xi(-X_0) = 0_{\mathbb{C}} \ \text{et} \ \xi(X_0) = 0_{\mathbb{C}} \ .$$

Par voie de conséquence la condition $\xi \in L^2(\mathbb{R})$ sera automatiquement vérifiée, puisque ξ est une fonction continue à support compact. En fait pour la fonction propre fondamentale de l'équation (3.1) on peut prendre $X_0 = 60$. Ainsi, avec les nouvelles conditions on aura à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\xi(x) - A.\xi(x) + p.f(x).N(\xi(x)) = 0 \ , \ x \in [-60,60] \ , \ \xi(x) \in \mathbb{C} \\ \xi(-60) = 0_{\mathbb{C}} \quad , \quad \xi(60) = 0_{\mathbb{C}} \end{cases} \tag{3-3}$$

On désire déterminer une approximation de la fonction propre fondamentale du problème (3.3) en utilisant la méthode décompositionnelle d'Adomian. Comme d'habitude, on doit écrire ce problème sous la forme canonique d'Adomian. Par ailleurs on désirerait utiliser les mêmes techniques que celles contenues dans [47] :

$$\int_{-60}^{t} \frac{d^2}{dx^2}\xi(s)ds = A.\int_{-60}^{t} \xi(s)ds - p.\int_{-60}^{t} f(s).N(\xi(s))ds$$

alors :

$$\frac{d}{dx}\xi(t) = A.\int_{-60}^{t} \xi(s)ds - p.\int_{-60}^{t} f(s).N(\xi(s))ds + c$$

après une seconde integration en t on aura :

$$\int_{-60}^{x} \frac{d}{dx}\xi(t)dt = \int_{-60}^{x}\int_{-60}^{t} [A.\xi(s) - p.f(s).N(\xi(s))]\, dsdt + C.\int_{-60}^{x} 1dt$$

ou encore :

$$\xi(x) = \int_{-60}^{x}\int_{-60}^{t} [A.\xi(s) - p.f(s).N(\xi(s))]\, dsdt + C.(x + 60).$$

Si on pose :

$$\mathbf{L}_2^{-1}(\cdots) = \int_{-60}^{x}\int_{-60}^{t}(\cdots)dsdt$$

$$\xi(x) = U(x) + i * V(x) \qquad \text{et} \qquad C = \alpha + i * \beta$$

On sépare la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient :

$$\begin{cases} U(x) = \alpha.(x + 60) + \mathbf{L}_2^{-1}\left((\delta_C - \delta_L).U(s) - ;V(s) - p.f(s).F(U(s), V(s))\right) \\ V(x) = \beta.(x + 60) + \mathbf{L}_2^{-1}\left((\delta_C - \delta_L).V(s) + \frac{T}{2}U(s) - p.f(s).G(U(s), V(s))\right) \end{cases} \tag{3.4}$$

où :

$$F(u,v) = \frac{\delta_L.u - v}{1+(\delta_L)^2+(u)^2+(v)^2}\ ,\ G(u,v) = \frac{\delta_L.v + u}{1+(\delta_L)^2+(u)^2+(v)^2}.$$

Ainsi nous avons ramené l'équation (3.1) à la forme canonique d'**Adomian** (3.4), et nous pouvons maintenant appliquer la méthode décompositionnelle d'**Adomian**. **Soit** :

$$U(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j(x) \quad , \quad V(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j(x)$$

$$F(U(s),V(s)) = \sum_{j=0}^{+\infty} A_j(\cdots)\ , \quad G(U(s),V(s)) = \sum_{j=0}^{+\infty} B_j(\cdots)$$

le système (3.4) peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sum_{j\geq 0} u_j(x) = \alpha.(x+60) + \mathbf{L}_2^{-1}\left((\delta_C-\delta_L).\sum_{j=0}^{+\infty} u_j(s) - \frac{T}{2}\sum_{j=0}^{+\infty} v_j(s)\right) \\ \qquad -\mathbf{L}_2^{-1}\left(p.f(s).\sum_{j=0}^{+\infty} A_j(\cdots)\right), \\ \\ \sum_{j\geq 0} v_j(x) = \beta.(x+60) + \mathbf{L}_2^{-1}\left((\delta_C-\delta_L).\sum_{j=0}^{+\infty} v_j(s) + \frac{T}{2}\sum_{j=0}^{+\infty} u_j(s)\right) \\ \qquad -\mathbf{L}_2^{-1}\left(p.f(s).\sum_{j=0}^{+\infty} B_j(\cdots)\right), \end{cases}$$

$A_j(\cdots)$ (resp. $B_j(\cdots)$) sont les polynômes d' **Adomian** associés à la fonction non linéaire $F(u,v)$ (resp. $G(u,v)$) et définis comme dans le paragraphe §1.4. **Ainsi si on pose $\xi_j = (u_j, v_j)$, on obtient** :

$$\begin{cases} A_0(\xi_0) = F(u_0, v_0) \\ A_n(\xi_0,\cdots,\xi_n) = \sum_{|np+nq|=n} \frac{(u_1)^{p_1}}{p_1!}\cdots\frac{(u_n)^{p_n}}{p_n!}\frac{(v_1)^{q_1}}{q_1!}\cdots\frac{(v_n)^{q_n}}{q_n!}\frac{\partial^{|p|+|q|}F}{\partial u^{|p|}\partial v^{|q|}}(u_0,v_0) \end{cases}$$

et de manière analogue on obtient aussi :

$$\begin{cases} B_0(\xi_0) = G(u_0, v_0) \\ B_n(\xi_0,\cdots,\xi_n) = \sum_{|np+nq|=n} \frac{(u_1)^{p_1}}{p_1!}\cdots\frac{(u_n)^{p_n}}{p_n!}\frac{(v_1)^{q_1}}{q_1!}\cdots\frac{(v_n)^{q_n}}{q_n!}\frac{\partial^{|p|+|q|}G}{\partial u^{|p|}\partial v^{|q|}}(u_0,v_0) \end{cases}$$

On fait le choix suivant :

$$\begin{cases} u_0(x) = 0 \\ w^*(x) = 0 \end{cases}$$

d'où pour u_1 et v_1 on aura les expressions suivantes :

$$\begin{cases} u_1(x) = \alpha.(x+60) + \mathbf{L}_2^{-1}\left((\delta_C-\delta_L).u_0(s)-\dfrac{T}{2}v_0(s)-p.f(s).A_0(\xi_0)\right), \\ v_1(x) = \beta.(x+60) + \mathbf{L}_2^{-1}\left((\delta_C-\delta_L).v_0(s)+\dfrac{T}{2}u_0(s)-p.f(s).B_0(\xi_0)\right). \end{cases}$$

Et d'une manière générale pour $n \geqslant 1$, on aura :

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = \mathbf{L}_2^{-1}\left((\delta_C-\delta_L).u_n(s)-\dfrac{T}{2}v_n(s)-p.f(s).A_n(\xi_0,\cdots,\xi_n(s))\right), \\ v_{n+1}(x) = \mathbf{L}_2^{-1}\left((\delta_C-\delta_L).v_n(s)+\dfrac{T}{2}u_n(s)-p.f(s).B_n(\xi_0,\cdots,\xi_n(s))\right). \end{cases}$$

En se referant à [43] on peut fixer : $\delta_C = 0$ et $T = 0.02$. Et du fait que $u_j(x)$, et $v_j(x)$ dépendent de : x, $\alpha, \beta, p, \delta_L$, alors on doit écrire :

$$u_j(x,\alpha,\beta,p,\delta_L) \qquad \text{et} \qquad v_j(x,\alpha,\beta,p,\delta_L)\ , \quad \forall j \geqslant 0$$

où. les inconnues α, β, p, δ_L seront déterminées en résolvant un système algèbrique non linéaire de quatre équations :

$$\begin{cases} U(60,\alpha,\beta,p,\delta_L) = 0 \\ V(60,\alpha,\beta,p,\delta_L) = 0 \\ \dfrac{d}{dx}U(0,\alpha,\beta,p,\delta_L) = 0 \\ \dfrac{d}{dx}V(0,\alpha,\beta,p,\delta_L) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

correspondant aux conditions : $\xi(60) = 0_\mathbb{C}$ et $\xi'(0) = 0_\mathbb{C}$.

Pratiquement, au lieu de considérer $U(x, \alpha, \beta, p, \delta_L)$ (resp. $V(x, \alpha, \beta, p, \delta_L)$), on considère $U_4(x, \alpha, \beta, p, \delta_L)$ (resp. $V_4(x, \alpha, \beta, p, \delta_L)$) la série **d'Adomian** tronquée et composée de 5 termes, à savoir :

$$\begin{cases} U_4(60, \alpha, \beta, p, \delta_L) = \sum_{j=0}^{4} u_j(x) \\ V_4(60, \alpha, \beta, p, \delta_L) = \sum_{j=0}^{4} v_j(x) \end{cases}$$

Ainsi le système (3.5) devient :

$$\begin{cases} U_4(60, \alpha, \beta, p, \delta_L) = 0 \\ V_4(60, \alpha, \beta, p, \delta_L) = 0 \\ \frac{d}{dx} U_4(0, \alpha, \beta, p, \delta_L) = 0 \\ \frac{d}{dx} V_4(0, \alpha, \beta, p, \delta_L) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Pour **résoudre** par la **méthode** décompositionnelle **d'Adomian** le précédent système, on doit d'abord le mettre sous la forme canonique. Pour cela on pose:

$$\begin{cases} F_1(X, Y, Z, W) = 10^{-6}. [X - \frac{1}{2} U_4(60, X, Y, Z, W)] \\ F_2(X, Y, Z, W) = 10^{-4}. [Y - \frac{1}{2} V_4(60, X, Y, Z, W)] \\ F_3(X, Y, Z, W) = 10^{-3}. [Z - \frac{1}{4} U_4'(0, X, Y, Z, W)] \\ F_4(X, Y, Z, W) = 10^{-2}. [W - \frac{1}{4} V_4'(0, X, Y, Z, W)] \end{cases}$$

Ce choix pour la définition de F_1, F_2, F_3 et F_4 est guidé par les conditions de convergence de la méthode décompositionnelle **d'Adomian** (voir §1.4). Par suite le système (3.6) est équivalent au système non linéaire :

$$\begin{cases} X = F_1(X, Y, Z, W) \\ Y = F_2(X, Y, Z, W) \\ Z = F_3(X, Y, Z, W) \\ W = F_4(X, Y, Z, W) \end{cases}$$

On peut maitenant appliquer la méthode décompositionnelle d' Adomian. D'où X, Y, Z et W peuvent être écrits sous forme de séries, comme suit :

$$X = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \quad , \quad Y = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \quad , \quad Z = \sum_{i=0}^{+\infty} z_i \quad , \quad W = \sum_{i=0}^{+\infty} w_i$$

Ce qui nous permet d'écrire également :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathcal{A}_i^{(1)}(\ldots) \\ \sum_{i=0}^{+\infty} y_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathcal{A}_i^{(2)}(\ldots) \\ \sum_{i=0}^{+\infty} z_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathcal{A}_i^{(3)}(\ldots) \\ \sum_{i=0}^{+\infty} w_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathcal{A}_i^{(4)}(\ldots) \end{cases}$$

Les $\mathcal{A}_i^{(m)}(\ldots)$ sont les polynômes d'Adomian associés à la fonction non linéaire $F_m(X, Y, Z, W)$ et définis par (voir §1.4) :

$$\left| \begin{array}{lcl} & \mathcal{A}_0^{(m)}(\gamma_0) = & F_m(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ \mathcal{A}_n^{(m)}(\gamma_0, \cdots, \gamma_n) & = & \displaystyle\sum_{|nk+nl+np+nq|=n} \frac{(x)^k}{k!} \frac{(y)^l}{l!} \frac{(z)^p}{p!} \frac{(w)^q}{q!} \frac{\partial^{|k|+|l|+|p|+|q|} F_m}{\partial X^{|k|} \partial Y^{|l|} \partial Z^{|p|} \partial W^{|q|}}(\gamma_0) \end{array} \right.$$

avec :

$$\gamma_j = (x_j, y_j, z_j, w_j) \quad , \quad \forall j \in \{0, 1, \cdots, n\}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \quad , \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \quad , \quad w = (w_1, \ldots, w_n)$$

On fixe (x_0, y_0, z_0, w_0) constant et l'on fait le choix suivant :

$$\begin{cases} x_1 = -x_0 + \mathcal{A}_0^{(1)}(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ y_1 = -y_0 + \mathcal{A}_0^{(2)}(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ z_1 = -z_0 + \mathcal{A}_0^{(3)}(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ w_1 = -w_0 + \mathcal{A}_0^{(4)}(x_0, y_0, z_0, w_0) \end{cases}$$

ce qui nous permet d'avoir pour γ_2 :

$$\begin{cases} x_2 = \mathcal{A}_1^{(1)}\left((x_0, y_0, z_0, w_0), (x_1, y_1, z_1, w_1)\right) \\ y_2 = \mathcal{A}_1^{(2)}\left((x_0, y_0, z_0, w_0), (x_1, y_1, z_1, w_1)\right) \\ z_2 = \mathcal{A}_1^{(3)}\left((x_0, y_0, z_0, w_0), (x_1, y_1, z_1, w_1)\right) \\ w_2 = \mathcal{A}_1^{(4)}\left((x_0, y_0, z_0, w_0), (x_1, y_1, z_1, w_1)\right) \end{cases}$$

et d'une manière générale γ_{n+1} pour n $\geqslant 2$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mathcal{A}_n^{(1)}\left((x_0, y_0, z_0, w_0), \ldots, (x_n, y_n, z_n, w_n)\right) \\ y_{n+1} = \mathcal{A}_n^{(2)}\left((x_0, y_0, z_0, w_0), \ldots, (x_n, y_n, z_n, w_n)\right) \\ z_{n+1} = \mathcal{A}_n^{(3)}\left((x_0, y_0, z_0, w_0), \ldots, (x_n, y_n, z_n, w_n)\right) \\ w_{n+1} = \mathcal{A}_n^{(4)}\left((x_0, y_0, z_0, w_0), \ldots, (x_n, y_n, z_n, w_n)\right) \end{cases}$$

Suite à cela on détermine (X_N, Y_N, Z_N, W_N) la série d'Adomian tronquée composée de N + 1 termes :

$$X_N = \sum_{i=0}^{N} x_i \quad , \quad Y_N = \sum_{i=0}^{N} y_i \quad , \quad Z_N = \sum_{i=0}^{N} z_i \quad , \quad W_N = \sum_{i=0}^{N} w_i$$

On retourne à présent au problème (3.3), et on considère la fonction $\xi_4(x)$ définie par :

$$\xi_4(x) = U_4(x, X_N, Y_N, Z_N, W_N) + i \cdot V_4(x, X_N, Y_N, Z_N, W_N)$$

qui représente une approximation de $\xi(x)$ solution fondamentale du problème (3.3). Une simulation numérique a été réalisée avec $f_1(x) = \exp\ (-0.1 * |x|)$ et N = 4 . On peut trouver en figure 1 l'esquisse du graphe de $\Pi(x)$ sur l'intervalle $[0, 55]$, où $\Pi(x)$ est définie par :

$$\Pi(x) = \frac{|\xi_4(x)|^2}{|\xi_4(0)|^2}$$

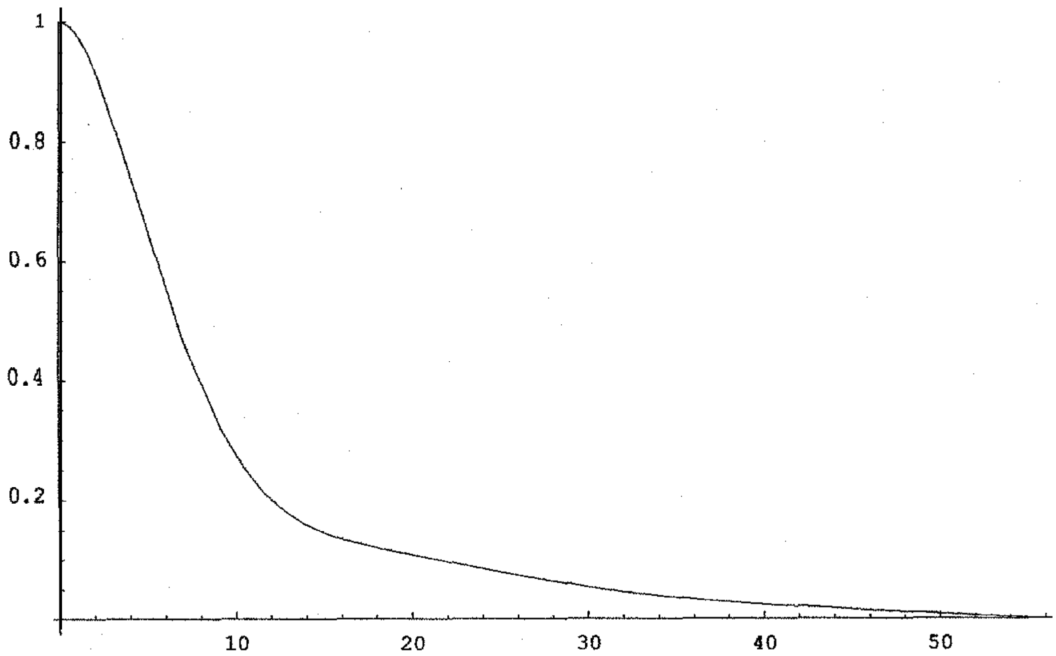


Figure 1

Sur l'axe des abscisses la variable est $x \in [0, 55]$, et l'axe des ordonnées correspond à $\Pi(x)$.

En conclusion, **on peut affirmer que les résultats obtenus corroborent ceux décrits dans [43] mais il reste quelques problèmes à résoudre, telle la détermination de $\xi(0)$, ou encore la détermination de l'expression de la puissance laser comme fonction croissante du paramètre de pompage.**

CHAPITRE 4

Nouvelle approche pour la résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de deux publications

- **S. KHELIFA & Y. CHERRUAULT** : «Approximation of the solution for a class of first order p.d.e. by Adomian method.» Kybernetes ; Vol.3 1 ; n°3/4 ; pp. 577-595 ; 2002.

- **S. KHELIFA & Y. CHERRUAULT** : «The decomposition method for solving first order partial differential equation.» Kybernetes ; Vol.31 ; n°6 ; pp. 844-871 ; 2002.

4.1 Introduction :

Initialement, on s'est intéressé au problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = F\left(t, x, u(t,x)\right) \;\; ; \;\; t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \;\; ; \;\; x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

et notre but fut de déterminer une approximation de la solution de ce problème par application de la méthode décompositionnelle d' Adomian. Une idée a émergé : l'utilisation de courbes o-denses. Cela permettrait de "densifier" l'ensemble $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$ par une courbe o-dense, et prendre la "restriction" de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre intervenant dans le problème (4.1) à la courbe précédente. Alors notre souhait serait que le nouveau problème à traiter soit un problème de Cauchy associé à une équation differentielle. Ainsi l'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian fournirait une excellente approximation pour la solution du second problème, et par conséquent de (4.1).

Par la suite, il s'est avéré que l'on pouvait même généraliser la technique aux équations aux dérivées partielles du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} F\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = 0 \\ u(\sigma) = u_0(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \mathcal{C}_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

où $(x, y) \in \Omega$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}_0$ est une courbe régulière de Ω.

Dans ce chapitre, on traitera le **cas linéaire, suivi du cas quasi linéaire** et enfin le cas non linéaire. Mais avant tout rappelons sommairement ce qu'est une courbe a-dense.

L'idée essentielle qui préside à la définition des courbes o-denses dans $\mathbb{R}^n$, consiste à exprimer les n variables à l'aide d'une seule variable. En d'autres termes il s'agit de "remplir" l'espace $\mathbb{R}^n$ ou plus précisément un compact de $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une courbe (voir [38] ,[42],[48]). Initialement, ces courbes ont été intoduites pour la résolution de problèmes d'optimisation locale et globale, qui ont fortement interéssé les chercheurs du laboratoire **MEDJMAT** et en **premier lieu Y, Cherruault, qui a le grand mérite d'avoir initié, avec A. Guillez**, les fondements de la méthode d'optimisation globale **ALIENOR** (voir [20],[22]).

Définition **4.1.1** :

Soit S un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, et α un réel positif. On dit que S est a-dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\forall P \in \mathbb{R}^n, \exists P_* \in S \quad \text{tel que} \quad \|P - P_*\| \leqslant \alpha$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exemples :

1) La spirale d'Archimède définie par :

$$r = a.\theta \ , \ \theta \geqslant 0 \ ,$$

est πa-dense dans $\mathbb{R}^2$.

2) La courbe définie par :

$$y = \begin{cases} \frac{1}{a}(x - 2ka) \ ; \ 2ka \leqslant x \leqslant (2k+1)a \ ; \ k = 0, \ldots, m \\ -\frac{1}{a}(x - 2ka) \ ; (2k-1)a \leqslant x \leqslant 2ka \ ; k = 1, \ldots, m \end{cases}$$

$$\text{où } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } a = (2m+1)^{-1}$$

est u-dense dans le carré $[0,1] \times [0,1]$.

Remarque **4.1.2 :**

Une application possible pour ces courbes cv-denses est le calcul approché d'intégrales multiples. On peut se ramener au calcul d'intégrales simples sur $\mathbb{R}$ en densifiant le domaine d'intégration inclu dans $\mathbb{R}^n$ par une courbe a-dense (voir [14],[15]). Par ailleurs, comme on l'a fait remarquer précédemment, une des principales applications des courbes o-denses est l'optimisation globale. De façon plus précise si l'on s'intéresse à la recherche d'un extrema global d'une fonction de n variables sur un compact de $\mathbb{R}^n$ (ou bien sur $\mathbb{R}^n$), l'utilisation de ces courbes transforme un probleme d'optimisation multivariables en un problème de recherche d'extrema d'une fonction d'une seule variable sur un compact de $\mathbb{R}$ (ou bien sur R).

En effet, étant donné le probleme d'optimisation :

$$\min_{X \in D} f(x_1, \cdots, x_n) \quad , \quad D \subset \mathbb{R}^n \ , \tag{4.3}$$

où f est une fonction continue. Alors la transformation Alienor définie par:

$$h : I_D \to D$$
$$\theta \longmapsto h(\theta) = (h_1(\theta), \cdots, h_n(\theta))$$

oh h est une transformation a-dense, c'est à dire que l'ensemble $h(I_D)$ est une courbe a-dense dans D, nous permet de ramener le problème (4.3) au problème de minimisation univariable :

$$\min_{\theta \in I_D} f^\star(\theta) \text{ avec } f'(0) = f(h_1(\theta), \cdots, h_n(\theta)) \text{ et } I_D \subset \mathbb{R} .$$

Pour plus de détails, on pourra consulter [21],[22],[23].

4.2 Etude du cas linéaire :

On considère le problème (4.1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{au}{\partial x} = F(t, x, u(t,x)) \quad ; \quad t > 0 , \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \; ; \; x \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

Ce dernier admet une unique solution locale (voir [29]) dès que le couple $(u_0$, F) est dans $C^1(\mathbb{R})$ x $C^1(\mathbb{R}^3)$. On cherche donc à déterminer $u(t,x)$ sous la forme u (t(s), $x(s)$), et où le sous ensemble C défini par :

$$c = \{Y \in \mathbb{R}^2 \; ; \; Y = (t(s), x(s)) \; , \; s \in [0, s_0]\} ,$$

constitue une courbe a-dense dans $[0,$ *A]* x $\mathbb{R}$. Ainsi en notant :

$$z(s) = u(t(s), x(s))$$

On obtient **alors** :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{d\;t}{ds} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = F(u(t,x)) . \end{cases}$$

Par identification, **il** est naturel de poser :

$$\frac{dt}{ds} = 1 \; ; \; \frac{dx}{ds} = -1 \text{ et } \frac{dz}{ds} = F(z)$$

avec comme condition initiale :

$$t(0) = 0 \; ; \; x(0) = a \text{ et } \; z(0) = u_0(a)$$

qui correspond à la technique de résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre par la méthode des caractéristiques. L'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian pour le calcul de la solution $z(s)$ du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = F(z) \quad , \quad s > 0 \\ \quad z(0) = u_0(a) \end{cases} \tag{4.4}$$

doit alors fournir une approximation de la solution de (4.1) par les séries tronquées d'Adomian.

Remarque 4.2.1 :
Les branches obtenues sont des droites puisque :

$$\{t(s) = s \; , \quad x(s) = -s + a\} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -t + a$$

De plus on montre aisément que l'ensemble :

$S_* = \{(w, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = -w + ma \; , \; m \in \mathbb{Z} \; , \; w > 0\}$

est a-dense dans $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$, où $a > 0$.

Théorème 4.2.1 :
On suppose que (u_0, F) est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Alors l'unique solution du problème (4.1) peut être obtenue en résolvant le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = 1 \; ; \quad t(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{ds} = -1 \; ; \quad x(0) = a \end{cases} \\ \dfrac{dz_a}{ds} = F(z_a) \quad ; \quad z_a(0) = u_0(a) \; , \; a \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.5}$$

et inversement.

Démonstration :

(i) Soit $u(t,x)$ l'unique solution de (4.1), on pose alors :

$$t(s) = s \quad ; \quad x(s) = -s + a \quad ; z_a(s) = u(s, -s+a) \, .$$

On vérifie alors facilement que les deux premières équations de (4.5) sont vérifiées :

$$\frac{dt}{ds} = 1 \; ; \; t(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{ds} = -1; \; x(0) = a.$$

Une simple substitution nous permet de vérifier la troisième équation. En effet :

$$\frac{dz_a}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{du}{\partial t} - \frac{du}{\partial x} = F\left(u(s, -s+a)\right)$$

Par suite : $\dfrac{dz_a}{ds} = F(z_a)$ et $z_a(0) = u(0,a) = u_0(a)$.

(ii) Soit $(t(s), x(s), z_a(s))$ l'unique solution de (4.5). Il est clair que :

$$t(s,a) = s \quad ; \quad x(s,a) = -s + a \, ,$$

ce qui nous permet d'écrire de façon équivalente :

$$s(t,x) = t \quad ; \quad a(t,x) = t + x \, .$$

On désigne par $v(s,a) = z_a(s)$ et l'on pose $u(t,x) = v(s(t,x), a(t,x))$.
Par conséquent, on obtient :

$$u(0,x) = v(0,x) = z_x(0) = u_0(x) \, .$$

Et une simple substitution de ces valeurs nous dorme l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - F(u) = \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} - F(v) \, ,$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - F(u) = \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial a} + \left(\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - F(v) \, ,$$

et enfin :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - F(u) = (1-1)\frac{\partial v}{\partial a} + (1-0)\frac{\partial v}{\partial s} - F(v) = \frac{\partial v}{\partial s} - F(v) \, ,$$

qui, après simplification mène à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - F(u) = \frac{dz_a}{ds} - F(z_a) = 0 \, .$$

Conséquence 4.2.1 :

Ainsi, on a ramené la résolution du problème (4.1) à la résolution du problème (4.4) sur les droites d'équation $x = -t + a$.
En intégrant le problème (4.4), on obtient :

$$z(s) = u_0(a) + \int_0^s F(z(w))\,dw ,$$

et en utilisant la notation opérationnelle suivante :

$$\mathbf{L}^{-1}(g) = \int_0^s g(w).dw \qquad \text{et} \qquad N(z) = \mathbf{L}^{-1}(F(z)) .$$

L'écriture de (4.4) sous la forme canonique d'**Adomian** est donnée par :

$$z(s) = u_0(a) + N(z)(s)$$

on peut alors, dès à présent, mettre en application la méthode décompositionnelle d'**Adomian** afin de calculer la solution z(s). A partir de la forme canonique précédente, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k(s) = u_0(a) + \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(v_0, v_1, \dots, v_k) ,$$

d'où nous obtenons la formule récurente suivante :

$$\begin{cases} v_0(s) = u_0(a) \\ v_{n+1}(s) = A_n(v_0, v_1, \cdots, v_n) \end{cases} ,$$

où les A_n sont les polynômes d'**Adomian** associes à l'opérateur N (voir §1.4).
Les polynômes A_n , sont donnés par :

$$\begin{cases} A_0(v_0) = N(v_0) \\ A_n(v_0, v_1, \cdots, v_n) = \sum_{|np|=n} \frac{1}{p!} N^{(|p|)}(v_0).(v_{1_{[p_1]}}, \cdots, v_{n_{[p_n]}}) \ , \ \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

On rappelle toutefois que :

$$N^{(|p|)}(v_0) \cdot (v_{1_{[p_1]}}, \cdots, v_{n_{[p_n]}})(s) = \int_0^s F^{(|p|)}(v_0) \cdot (v_1)^{p_1} \dots (v_n)^{p_n} dw .$$

Notation 4.2.1 :

Pour tout a dans $\mathbb{R}$, on désignera par :

$$E_p = \mathcal{C}^p\left([-\tau_a, +\tau_a], \mathbb{R}\right), \; p = 0,1 .$$

Théorème 4.2.2 :

On suppose que les hypothèses du **théorème** 4.2.1 sont **vérifiés,** que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage ouvert de u_0, et qu'il existe une constante M_a tel que :

$$\left\|D^{(n)}F(v_0)\right\|_{\mathcal{L}_n(E_1,E_0)} \leqslant M_a < \exp(-1) \quad ,\forall n \in \mathbb{N} ;$$

alors la **série** décompositionnelle **d'Adomian** de terme **général** $v_k(s)$ associée an problème (4.4) converge vers $z_a(s)$ unique solution de (4.4).

De plus si on note $\varphi_k(s) = \sum_{j=0}^{k} v_j(s)$ nous avons :

$$\|z_a(s) - \varphi_k(s)\|_{L^\infty(0,\tau_a)} \leqslant \frac{(k+1)^k \qquad M_a^{k+1}}{(k+1)!\,(1 - M_a.\exp(1))} \; , \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration :

La **démonstration** de ce théorème est basée sur les résultats obtenus dans les **théorème** 4.2.1, **théorème** 2.3.2 et théorème 2.3.3.

Remarque 4.2.2 :

Si l'on veut calculer la valeur approchée de la solution $u(t, x)$ en un point $M(x_M, y_M)$, on commence par déterminer la branche de la courbe e-dense S_* **à laquelle** appartient le point M, ce qui nous donnera $a_M = y_M + x_M$, et par application de la méthode **d'** Adomian simple ou bien avec recollement, on sera en mesure de fournir une approximation de la solution.

Décrivons briévement la méthode **d'Adomian** avec recollement pour les équations différentielles. Etant donné le **problème** :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = f\left(x(t), t\right) \\ \quad x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.6}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (4.6) admet une unique solution locale dès que f est de classe C^1. De plus sous certaines conditions sur f (voir le **théorème 2.3.2**), on peut appliquer la méthode décompositionnelle d'Adomian qui permet de construire une série absolument convergente sur l'intervalle $[0, T_1]$. Si cet intervalle $[0, T_1]$ est strictement inclu dans l'intervalle maximal d'existence de la solution du problème (4.6) alors on peut penser à l'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian pour déterminer la fonction $x^{(1)}(t)$ solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{dx^{(1)}}{dt}(t) = f\left(x^{(1)}(t), t\right) \\ x^{(1)}(T_1) = X_{N_0}(T_1) \end{cases} \tag{4.7}$$

où $X_{N_0}(t)$ est la série tronquée d'Adomian d'ordre Na associée au problème (4.6). En supposant que f vérifie encore une fois les conditions de convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian pour le problème (4.7), on peut construire une série d'Adomian convergente sur l'intervalle $[T_1, T_2]$. On compare encore une fois l'intervalle $[0, T_2]$ avec l'intervalle maximal d'existence de la solution du problème (4.6); dans le cas d'une inclusion sticte du premier dans le second on refait exactement le même cheminement que précédement en considérant et en résolvant par la méthode d'Adomian le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{dx^{(2)}}{dt}(t) = f\left(x^{(2)}(t), t\right) \\ x^{(2)}(T_2) = X^{(1)}_{N_1}(T_2) \end{cases}$$

où $X^{(1)}_{N_1}(t)$ est la série tronquée d'Adomian d'ordre N_1 associée au problème (4.7). Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne une approximation de la solution du problème (4.6) sur l'intervalle maximal $[0, T]$ où l'on a existence et unicité de cette solution. Cet algorithme a été développé dans [16] et qu'on pourra consulter pour plus de détail.

Remarque 4.2.3 :

Une seconde possibilité nous est offerte par cette procédure, à savoir celle qui consiste à calculer la solution approchée de $u(t, x)$ sur une branche de la courbe e-dense. S_*.

Remarque 4.2.4 :

On peut aussi, donner une approximation de la solution $u(t, x)$. En effet, il suffit de procéder comme dans la démonstration de la proposition 4.2.1 c'est à dire considérer a comme la seconde variable dans z,(s) , s étant la première, on note par $v(s,a) = z_a(s)$; sachant que :

$$\begin{cases} t = s \\ x = -s + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = t \\ a = t + x \end{cases},$$

par suite, on peut écrire :

$$u(t, x) = v(t, t + x).$$

Première application :

On considère la fonction test $u(t,x) = \exp\left[t^2 + x\right]$ qui est solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = (2t - 1)u \; ; \; t > 0 \, , \\ u(0,x) = \exp\left[x\right] \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \, . \end{cases}$$

On détermine alors par la méthode décompositionnelle d' Adomian la solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = (2s - 1).z \, , \; s > 0 \\ z(0) = \exp\left[a\right] \; , \; a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemple 1 :

Considerons, par exemple, le point M(3.5, -3.5) , l'équation de la droite à laquelle il appartient est : $x = -t$ (c'est à dire a = 0). On détermine alors la série tronquée d'Adomian à l'ordre 11 correspondant à a = 0, et notée $z_0^{11}(s)$. Les essais numériques ont prouvé que la fonction précédente ne converge que localement, et donc si l'on désire avoir une bonne approximation de $u(M)$ il est nécessaire de fane appel au recollement (voir [16]). En effet, la solution obtenue par recollements successifs, notée $\widetilde{z}_0^{11}$ (s) , au point s_M = 3.5, fourni une remarquable approximation :

$$\frac{\left|u(M) - \widetilde{z}_0^{11}(s_M)\right|}{\widetilde{z}_0^{11}(s_M)} = \frac{\left|\exp(\frac{35}{4}) - \widetilde{z}_0^{11}(3.5)\right|}{\widetilde{z}_0^{11}(3.5)} < 1\,85 * 10^{-6}.$$

Exemple 2 :

A présent, on prend $a = 2$, et l'on considère la fonction erreur $\varepsilon_2(s)$ définie par:

$$\varepsilon_2(s) = \exp\left[s^2 - s + 2\right] - z_2^{11}(s)$$

où $z_2^{11}(s)$ est la série tronquée d'Adomian à l'ordre 11 correspondante à a = 2. Les essais numériques ont prouvé que la fonction $\varepsilon_2(s)$ est nulle sur $[0, 2]$; la figure 2 en est l'illustration.

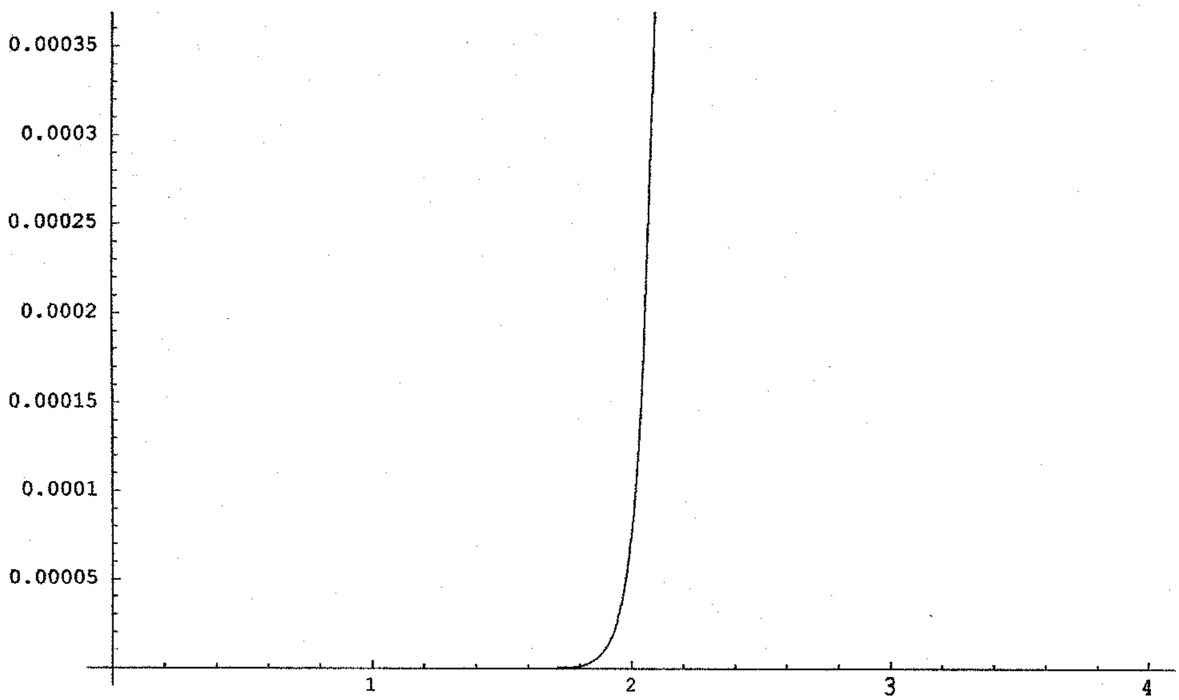


Figure 2

Dans ce cas sur l'axe des abscisses la variable est s, s $\in [0, 4]$, et l'axe des ordonnées correspond à $\varepsilon_2(s)$.

Exemple 3 :

En se plaçant dans les conditions de la remarque 4.2.4, on peut **calculer z_a^{11} (s), qu'on notera $v_{11}(s,$ a), et par là même déterminer une approximation**

de $u(t,x)$ au voisinage de $t = 0$, à savoir :

$$u_{11}(t,x) = v_{11}(t, t + x)$$

Les essais numériques ont prouvé que la fonction $\delta(t,x)$ définie par :

$$\delta(t,x) = u(t,x) - u_{11}(t,x)$$

est nulle sur $[0,2] \times [A, B]$ avec A et B quelconques; la figure 3 en est l'illustration :

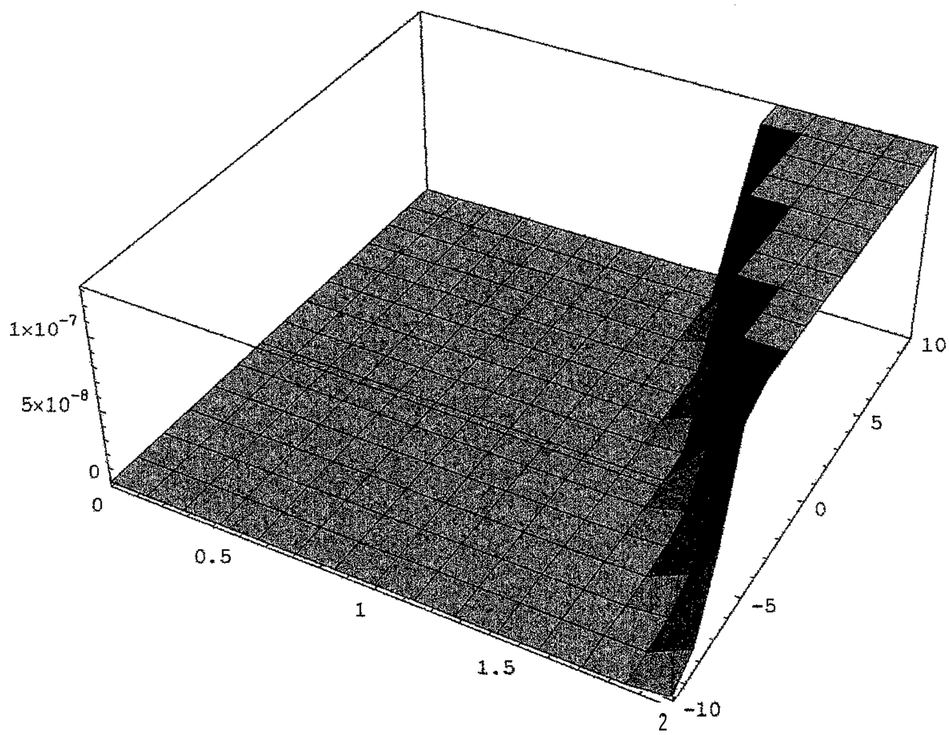


Figure 3

Dans ce cas l'axe des abscisses correspond à la variable t, $t \in [0,2]$. Sur l'axe des ordonnées la variable est x, $x \in [-10, 10]$, et l'axe des z correspond à $\delta(t,x)$.

Deuxième <u>application :</u>

Dans ce qui suit, on s'intéresse au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u}{1+u} + g(t,x) \ ; \ t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \ ; \ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. , \qquad (4.8)$$

les branches de la courbe a-dense S_*, étant définies par $x(s) = -s + m.a$, $m \in \mathbb{Z}$ et $t(s) = s$. Le problème (4.8) se ramène alors à la résolution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{z}{1+z} + g(s, -s+a) \quad , \quad s > 0 \\ z(0) = u_0(a) \,. \end{cases}$$

Des essais numériques ont été réalisés en prenant pour g et u_0 les fonctions définies par :

$$g(t,x) = \exp(t-x) \qquad \text{et} \qquad u_0(x) = 1$$

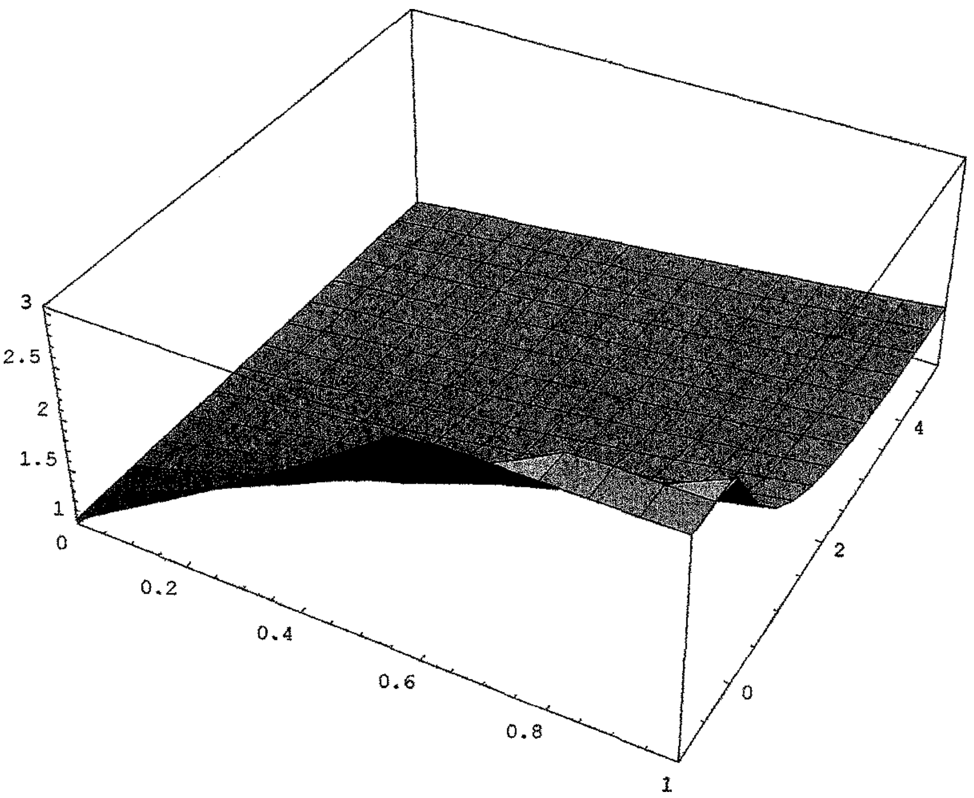


Figure 4

Sur l'axe des abscisses la variable est t, $t \in [0,1]$, sur l'axe des ordonnées la variable est x, $x \in [-1,5]$, et l'axe des z correspond à $u_6(t,x)$. En fait la figure 4 donne la représentation du graphe de la fonction $u_6(t, x)$ dans le domaine $[0,1] \times [-1,5]$. La fonction $u_6(t,x)$ étant la série tronquée d'Adomian d'ordre 6, solution du problème (4.8), avec les données précisées ci dessus.

Troisième application :

A **présent,** on considère le problème précédent (4.8) auquel on a associé d'autres conditions aux limites, **à** savoir :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u}{1+u} + g(t,x) \ ; \ t > 0 \ , \ x < 5 \\ u(0,x) = u_0(x) \ ; \ x < 5 \\ u(t,5) = v_0(t) \ ; \ t > 0 \end{cases}$$

Les branches de la courbe a-dense dans ce cas, sont données par :

$t(s) = s$; $x(s) = -s + a$; $s > 0$ pour $a \leqslant 5$,

$t(s) = s + a - 5$; $x(s) = -s + 5$; $s > 0$ pour $a > 5$.

Alors pour a $\leqslant 5$, on résout **par** la méthode **d' Adomian** le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{\varphi}{1+\varphi} + g(s, -s+a) \ , \ s > 0 \\ \varphi(0) = u_0(a) \end{cases},$$

et pour a > 5 , on résout par la méthode **d'Adomian** le **problème** :

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{\psi}{1+\psi} + g(s+a-5, -s+5) \ , \ s > 0 \\ \psi(0) = v_0(a-5) \end{cases}$$

Une simulation **numérique** a été **réalisée** en prenant :

$$g(t,x) = 2t - x \ , \ u_0(x) = 2. \left(\frac{x}{5}\right)^2 \ , \ \text{et} \ v_0(t) = 2$$

Les résultats sont illustrés par la figure 5. On trouvera en effet le tracé du graphe de $u_9(t,x)$, sur le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ **défini** par :

$$D = [0,2.5] \times [-1,2.5] \cup [0,2.5] \times [2.5,5] \cup [2.5,4] \times [2.5,5]$$

$u_9(t,x)$, série tronquée **d'Adomian** d'ordre 9, est une approximation de la solution du **problème** :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u}{1+u} + 2.t - x \ ; \ t > 0 \\ u(0,x) = (0.08)x^2 \ ; \ x < 5 \\ u(t,5) = 2 \ ; \ t > 0 \end{cases}$$

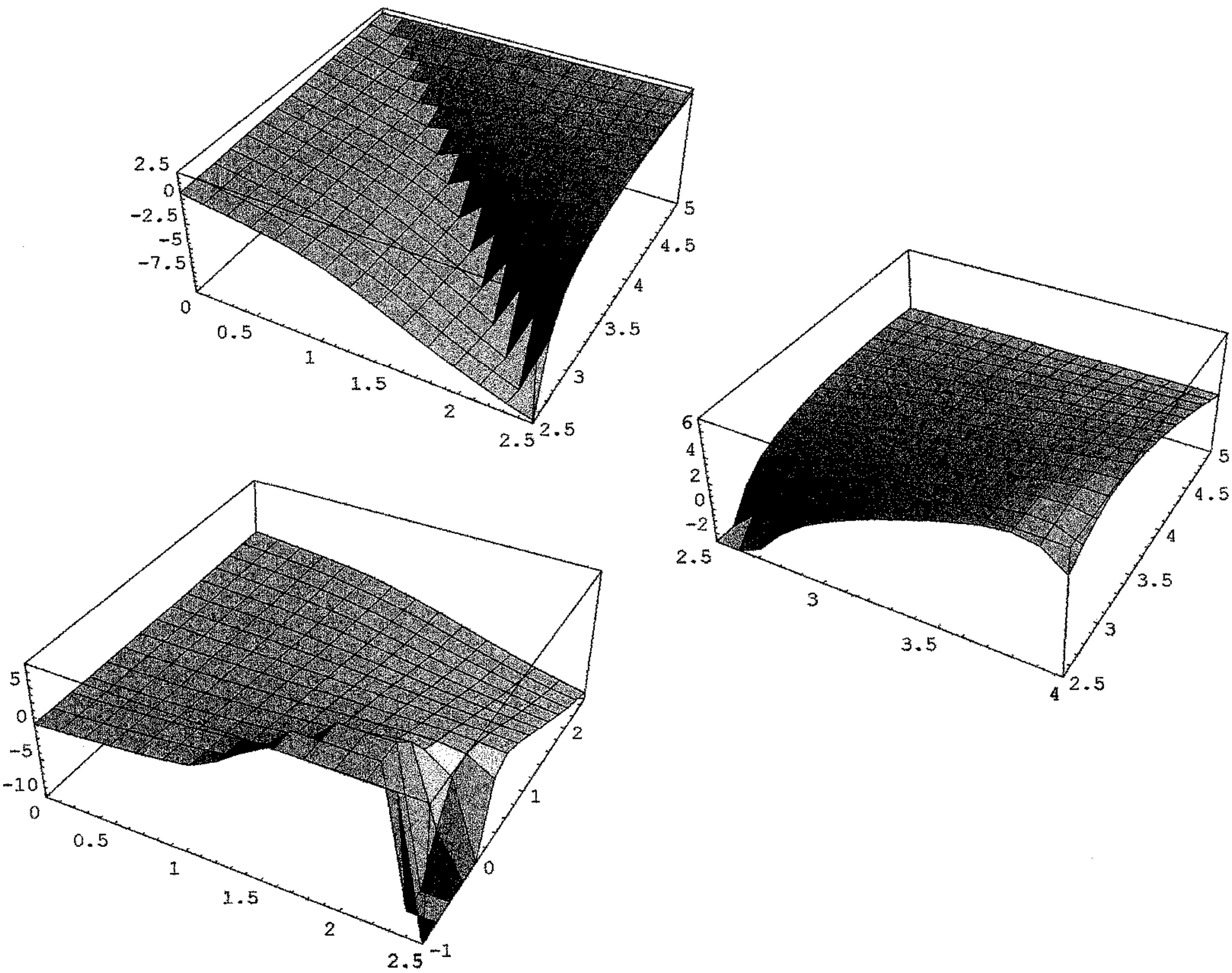


Figure 5

Comme précédemment, l'axe des abscisses correspond à la variable t et sur l'axe des ordonnées la variable est x. On rappelle que la figure 5 représente le graphe de la fonction $u_9(t, x)$ sur le domaine D.

Remarque 4.2.6 :

Tout ce qui vient d'être fait pour le problème (4.1) peut se généraliser à une équation aux dérivées partielles linéaire quelconque. En effet, soit Ω un ouvert du plan et $\mathcal{C}_0$ une courbe régulière incluse dans Ω. Considérons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = G\left(x,y,u(x,y)\right) \\ \mathrm{u(u)} = u_0(\sigma) \quad \text{sur } \mathcal{C}_0 \end{cases} \quad . \tag{4.9}$$

On paramétrise $\mathcal{C}_0$ comme suit :

$$\mathcal{C}_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = x_0(s) \text{ et } y = y_0(s)\,,\ s \in [0,\ 1]\right\} .$$

Par un raisonnement analogue à celui fait ci dessus, on détermine les branches d'une combe o-dense par résolution, pour certaines valeurs du paramètre s, les systèmes correspondants :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_s}{dt} = a\left(x_s(t), y_s(t)\right) \quad ; \quad x_s(0) = x_0(s) \\ \dfrac{dy_s}{dt} = b\left(x_s(t), y_s(t)\right) \quad ; \quad y_s(0) = y_0(s) \end{cases} .$$

Une fois cette opération achevée, on résout par la méthode décompositionnelle le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{dz_s}{dt} = G\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t)\right) \\ z_s(0) = u_0(x_0(s), y_0(s)) \end{cases} . \tag{4.10}$$

Remarque 4.2.7 :

Sous les hypothèses suivantes :

i) Les fonctions a, b (resp. G) sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω (resp. Ω x W).

ii) Les fonctions a, b sont telles que : $|a| + |b| \neq 0$

iii) Les fonctions a, b sont telles que :

$$a(x_0(s), y_0(s)).y_0'(s) - b(x_0(s), y_0(s)).x_0'(s) \neq 0\,, \quad \forall s \in [0,1]$$

le problème (4.9), admet une unique solution locale (voir [29]).

Théorème 4.2.3 :
Sous les hypothèses de la remarque 4.2.7, l'unique solution locale du problème (4.9) est obtenue à partir de l'unique solution du système différentiel (4.11), et inversement :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{dx_s}{dt} = a\left(x_s(t), y_s(t)\right) & ; \quad x_s(0) = x_0(s) \\ \dfrac{dy_s}{dt} = b\left(x_s(t), y_s(t)\right) & ; \quad y_s(0) = y_0(s) \end{cases} \\ \dfrac{dz_s}{dt} = G\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t)\right) \quad ; \quad z_s(0) = u_0(x_0(s), y_0(s)) \end{cases} \tag{4.11}$$

Démonstration :

A- Soit $u(x, y)$ la solution de (4.9), on pose alors :

$$z_s(t) = u\ (x_s(t), y_s(t))$$

où le couple $(x_s(t), y_s(t))$ est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_s}{dt} = a\left(x_s(t), y_s(t)\right) & ; \quad x_s(0) = x_0(s) \\ \dfrac{dy_s}{dt} = b\ (x_s(t), y_s(t)) & ; \quad y_s(0) = y_0(s) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\frac{dz_s}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx_s}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy_s}{dt} = a(x_s, y_s)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x_s, y_s)\frac{\partial u}{\partial x} = G\left(x_s, y_s, u(x_s, y_s)\right)$$

d'où :

$$\frac{dz_s}{dt} = G\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t)\right))$$

De plus :

$$z_s(0) = u(x_s(0), y_s(0)) = u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(x_0(s), y_0(s)).$$

B- Soit $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$ la solution de (4.11), on note alors :

$$v(t, s) = z_s(t)\ .$$

Mais d'après la condition (iii) de la remarque 4.2.7, on a :

$$a(x_0(s), y_0(s)).y_0'(s) - b(x_0(s), y_0(s)).x_0'(s) \neq 0\ , \quad \forall s \in [0, 1]\ ,$$

on peut écrire localement :

$$\begin{cases} x = x(t,s) \\ y = y(t,s) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = t(x,y) \\ s = s(x,y) \end{cases}$$

Posons alors : $u(x,y) = v\,(t(x,y), s(x,y))$. **Ainsi :**

(*) - En premier lieu, montrons que :

$$u(\sigma) = u_0(\sigma) \quad \text{sur } C_0 .$$

Pour $(x,y) \in C_0$, il existe $s \in [0,1]$ tel que l'on ait :

$$x = x_0(s) \text{ et } y = y_0(s) ,$$

et par conséquent, on peut écrire :

$$u(x,y) = u(x_0(s), y_0(s)) = u(x_s(0), y_s(0)) = v\,(0,s) = z_s(0) .$$

Soit encore :

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(x_0(s), y_0(s)) .$$

(**) - En second lieu, montrons que :

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = G\,(x, y, u(x,y)) ,$$

pour **cela,** évaluons l'expression :

$$A(x,y) = a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - G\,(x, y, u(x,y)) .$$

Elle peut **être** écrite sous la forme suivante :

$$A(x,y) = a(x,y)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right) + b(x,y)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right) - G\,(x,y,v) ,$$

de laquelle on obtient facilement l'égalité :

$$A(x,y) = \left(a(x,y)\frac{\partial s}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial s} + \left(a(x,y)\frac{\partial t}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial t} - G\,(x,y,v) .$$

Mais par construction, on **remarque** que :

$$a(x,y) = a\,(x(t,s), y(t,s)) = \frac{\partial x}{\partial t}(t,s) \quad , \quad b(x,y) = b\,(x(t,s), y(t,s)) = \frac{\partial y}{\partial t}(t,s) .$$

Par suite :

$$A(x,y)=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial s}+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial t}-G\left(x,y,u\right) ,$$

qui s'écrit également :

$$A(x,y)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial s}+\left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial t}-G\left(x,y,v\right) .$$

Tenant compte du fait que :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)=\frac{\partial s}{\partial t}=0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)=\frac{\partial t}{\partial t}=1 ,$$

car s et t sont des variables indépendantes. Alors on obtient finalement :

$$A(x,y)=\frac{\partial v}{\partial t}-G\left(x,y,v\right)=\frac{dz_s}{dt}-G\left(x_s(t),y_s(t),z_s(t)\right)=0 ,$$

ou bien encore :

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=G\left(x,y,u(x,y)\right)$$

Définition 4.2.1 :

Les courbes intégrales définies par $(x_s(t),y_s(t),z_s(t))$ et solution de (4.11) sont appellées courbes **caractéristiques** de l'équation aux dérivées partielles (4.9).

Notation 4.2.1 :

Pour tout s dans l'intervalle $[0,1]$, on désignera par :

$$E_p=\mathcal{C}^p\left([-\tau_a,+\tau_a],\mathbb{R}\right) \quad , p=0,\ 1,$$

et on note par $v_0(s)=u_0(x_0(s),y_0(s))$.

Théorème 4.2.4 :
On suppose que les hypothèses de la remarque 4.2.7 sont vérifiées, que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage ouvert de u_0, et qu'il existe une constante M_s tel que :

$$\left\|D^{(n)}G(v_0)\right\|_{\mathcal{L}_n(E_1,E_0)} \leqslant M_s < \exp(-1) \quad ,\forall n \in \mathbb{N} ;$$

alors la série décompositionnelle d'Adomian associée au problème (4.10) converge vers $z_s(t)$ unique solution de (4.10). De plus cette solution vérifie l'estimation suivante :

$$\|z_s - \varphi_k\|_{L^\infty(0,T_s)} \leqslant \frac{(k+1)^{"} \qquad M_s^{k+1}}{(k+1)!\ (1 - M_s.\exp(1))}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

où φ_k désigne la tronquée de la série décompositionnelle à l'ordre k. Ses éléments étant obtenus par la méthode d'Adomian exactement comme dans la conséquence 4.2.1.

Démonstration :
La démonstration de ce théorème est basée sur les résultats obtenus dans les théorème 4.2.3, théorème 2.3.2 et théorème 2.3.3.

Remarque 4.2.8 :
On peut, sans aucune difficulté, généraliser les résultats précédents à une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre à coefficients variables dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on considère le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = G\left(x_1,\cdots,x_n,u(x_1,\cdots,x_n)\right) \\ u(\sigma) = u_0(\sigma) \quad \text{sur } \Gamma_* \end{array}\right. ,$$

en suivant exactement un raisonnement analogue que celui qui a été développé ci dessus.

4.3 Etude du cas quasi linéaire :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}_0$ une courbe régulière incluse dans Ω, et u_0 une fonction définie sur $\mathcal{C}_0$, on considère le **problème** :

$$\begin{cases} A\left(x,y,u(x,y)\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+B\left(x,y,u(x,y)\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}=C\left(x,y,u(x,y)\right), \\ u(\sigma)=u_0(\sigma) \qquad \forall\sigma\in\mathcal{C}_0 . \end{cases} \tag{4.12}$$

Supposons que la courbe $\mathcal{C}_0$ est paramétrée par :

$$\text{Co} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = x_0(s) \text{ et } y = y_0(s)\ ,\ s\in[0,1]\right\} .$$

On pose alors :

$$z_0(s) = u_0\left(x_0(s),y_0(s)\right) \quad , \ \forall s \in [0,1] \ .$$

<u>Remarque 4.3.1 :</u>

Si les trois hypothèses suivantes :

1- Les fonctions A, B, et C sont continuement **différentiables** sur Ω x R.

2- Les fonctions A et B sont telles que $|A| + |B| \neq 0$ sur $\Omega \times \mathbb{R}$.

3- Les fonctions A et B **vérifient** la relation :

$$A\left(x_0(s),y_0(s),z_0(s)\right).y_0'(s)-B\left(x_0(s),y_0(s),z_0(s)\right).x_0'(s)\neq 0 \quad \forall s\in[0,1]$$

sont satisfaites, alors le problème (4.12) admet une unique solution locale **définie** dans un voisinage de Ca (voir [29]).

<u>Théorème 4.3.1 :</u>

Sous les mêmes hypothèses que celles de la remarque 4.3.1, l'unique solution locale du problème (4.12) peut être obtenue par résolution du système différentiel (4.13) suivant, et **inversement** :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_s}{dt}=A\left(x_s(t),y_s(t),z_s(t)\right) & ; \ x_s(0) = x_0(s) \\ \dfrac{dy_s}{dt}=B\left(x_s(t),y_s(t),z_s(t)\right) & ; \ y_s(0) = y_0(s) \\ \dfrac{dz_s}{dt}=C\left(x_s(t),y_s(t),z_s(t)\right) & ; \ z_s(0) = z_0(s) \end{cases} \tag{4.13}$$

Démonstration :

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes essentielles :

Etape 1 : Soit $u(x, y)$ l'unique solution du problème (4.12). Rappelons que la courbe Ca est paramétrée par :

$$\mathcal{C}_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = x_0(s) \text{ et } y = y_0(s) \text{ , } s \in [0,\ 1]\right\}$$

On considère alors, pour tout s fixé dans [0, 1], le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A\left(X(t), Y(t), u\left(X(t), Y(t)\right)\right) & ;\ X(0) = x_0(s) \\ \dfrac{dY}{dt} = B\left(X(t), Y(t), u\left(X(t), Y(t)\right)\right) & ;\ Y(0) = y_0(s) \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution locale, en vertu des hypothèses imposées. On pose :

$$Z(t) = u\left(X(t), Y(t)\right).$$

Nous allons vérifier que le vecteur (X(t) , Y(t) , Z(t)) est solution du problème (4.13). En effet, par contruction on vérifie facilement que :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A\left(X(t), Y(t), Z(t)\right) & ;\ X(0) = x_0(s) \\ \dfrac{dY}{dt} = B\left(X(t), Y(t), Z(t)\right) & ;\ Y(0) = y_0(s)\ , \end{cases}$$

il reste à prouver que la fonction Z(t) vérifie l'équation suivante :

$$\frac{dZ}{dt} = C\left(X(t), Y(t), Z(t)\right) \quad ;\ Z(0) = z_0(s)$$

Or nous avons :

$$Z(t) = u\left(X(t), Y(t)\right),$$

et par suite :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dY}{dt}\ .$$

D'où on peut écrire :

$$\frac{dZ}{dt} = A\left(X(t), Y(t), Z(t)\right)\frac{\partial u}{\partial x} + B\left(X(t), Y(t), Z(t)\right)\frac{\partial u}{\partial y}\ ,$$

soit encore :

$$\frac{dZ}{dt} = C\left(X(t), Y(t), u\left(X(t), Y(t)\right)\right) = C\left(X(t), Y(t), Z(t)\right)\ ,$$

et finalement on obtient :

$$\frac{dZ}{dt} = C\left(X(t), Y(t), Z(t)\right).$$

Par ailleurs, il est clair que :

$$Z(0) = u\left(X(0), Y(0)\right) = u\left(x_0(s), y_0(s)\right) = u_0\left(x_0(s), y_0(s)\right) = z_0(s).$$

Etape 2 : Soit $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$ l'unique solution du problème (4.13). Tenant compte de la propriété de dépendance continue de la solution (d'un système differentiel du premier ordre) par rapport aux conditions initiales et au paramètre, on peut conclure que les fonctions :

$$x = x_s(t) = x(s, t) \quad , \quad y = y_s(t) = y(s,t) \quad , \text{ et } \quad z = z_s(t) = z(s,t)$$

sont continuement differentiables sur $[0, 1] \times [-\delta, \delta]$. L'hypothèse 3 de la **remarque 4.3.1,** nous permet d'affirmer que :

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s,t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = s(x, y) \\ t = t(x,y) \end{cases}.$$

On pose alors :

$$u(x, y) = z\left(s(x, y), t(x, y)\right). \tag{4.14}$$

Montrons que $u(x, y)$ ainsi définie est solution du problème (4.12).

i) Evaluons la fonction $D(x, y)$ donnée par l'expression suivante :

$$D(x,y) = A\left(x, y, u(x,y)\right)\frac{\partial u}{\partial x} + B\left(x, y, u(x,y)\right)\frac{\partial u}{\partial y} - C\left(x, y, u(x,y)\right).$$

En utilisant (4.14) on peut affirmer que :

$$D(x,y) = A(s,t)\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right) + B(s,t)\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right) - C(s,t),$$

cettedernière égalité peut être écrite sous la forme suivante :

$$D(x,y) = \left(A(s,t)\frac{\partial s}{\partial x} + B(s,t)\frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial s} + \left(A(s,t)\frac{\partial t}{\partial x} + B(s,t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial t} - C(s,t)$$

Tenant compte du fait que :

$$\begin{cases} A(s, t) = A\left(x(s, t), y(s,t), z(s,t)\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}x(s,t) \\ \qquad\qquad\qquad \text{et} \\ B(s, t) = B\left(x(s, t), y(s,t), z(s,t)\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}y(s,t) \end{cases}$$

Alors la fonction $D(x, y)$ prend la forme :

$$D(x,y) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial s} + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial t} - C(s,t)\,,$$

de laquelle on déduit la suivante :

$$D(x,y) = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial s} + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t} - C(s,t) \qquad (4.15)$$

Par ailleurs, sachant que : :

$$s = s(x,y) = s\left(x(s,t), y(s,t)\right) \quad , \quad t = t(x,y) = t\left(x(s,t), y(s,t)\right) \quad ,$$

il en résulte que :

$$\begin{aligned} ds &= \left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) dt \\ dt &= \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) dt\,. \end{aligned}$$

Les variables s et t étant indépendantes, il vient dors :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = 1 \qquad (4.16)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = 0\,. \qquad (4.17)$$

Des égalités (4.15), (4.16) et (4.17) on obtient :

$$D(x, y) = \frac{\partial z}{\partial t} - C(s, t)\,.$$

Ainsi pour chaque s fixé dans $[0,1]$ on aura :

$$D(x,y) = \frac{dz_s}{dt} - C\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t)\right) = 0\,,$$

de laquelle on peut déduire que :

$$A\left(x,y,u(x,y)\right)\frac{\partial u}{\partial x} + B\left(x,y,u(x,y)\right)\frac{\partial u}{\partial y} = C\left(x,y,u(x,y)\right)\,.$$

ii) Il nous reste à prouver que :

$$u(a) = u_0(\sigma)\,,\ \forall u \in \mathcal{C}_0\,.$$

Puisque :

$$Co = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = x_0(s) \text{ et } y = y_0(s)\ ,\ s \in [0,1]\}\ ,$$

il suffit de calculer $u\,(x_0(s), y_0(s))$ pour chaque s fixé dans $[0,1]$. Par construction nous avons l'égalité :

$$u\,(x_0(s), y_0(s)) = z\,(s(x_0(s), y_0(s)), t(x_0(s), y_0(s)))\ ,$$

et :

$$s\,(x_0(s),\ y_0(s)) = s\ ,\quad t\,(x_0(s), y_0(s)) = 0\ ,\quad \forall (s,t) \in [0,1] \times [-\delta, \delta]\ .$$

D'où nous déduisons les égalités suivantes :

$$u\,(x_0(s), y_0(s)) = z(s,0) = z_s(0) = z_0(s) = u_0\,(x_0(s), y_0(s))\ .$$

Enfin, on conclut que :

$$u(\sigma) = u_0(\sigma), \qquad \forall \sigma \in C_0\ .$$

Définition 4.3.1 :

Les courbes intégrales définies par $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$ solution de (4.13) sont appellées courbes **caractéristiques** de l'équation aux dérivées partielles figurant dans le problème (4.12).

Conséquence 4.3.1 :

En se basant sur le **théorème** 4.3.1, pour déterminer la solution du problème (4.12), à savoir u, il suffit de résoudre pour chaque s fixé dans [0, 1] le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= A\,(x_s(t), y_s(t), z_s(t)) \quad ; \quad x_s(0) = x_0(s)\ , \\ \frac{dy_s}{dt} &= B\,(x_s(t), y_s(t), z_s(t)) \quad ; \quad y_s(0) = y_0(s)\ , \\ \frac{dz_s}{dt} &= C\,(x_s(t), y_s(t), z_s(t)) \quad ; \quad z_s(0) = z_0(s)\ , \end{aligned} \right. \tag{4.18}$$

et de prendre $u\,(x_s(t),\, y_s(t)) = z_s(t)$ qui constituera la solution de (4.12) restreinte à la courbe $(x_s(t),\, y_s(t))$. Ainsi et afin de calculer $z_s(t)$, on fait appel à la méthode décompositionnelle d'Adomian qui s'adapte parfaitement à la situation. Cela nous permettra de construire une excellente approximation de $z_s(t)$.

En adoptant les notations suivantes :

$$\omega_s(t) = (x_s(t), y_s(t), z_s(t)) \quad , \quad \omega_0(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s))$$
$$\text{et } F(x,y,z) = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z)) \; ,$$

le problème (4.18) s'exprime, pour chaque s fixé, sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega_s}{dt} = F(\omega_s) \\ \omega_s(0) = \omega_0(s) \end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\omega_s(t) = \int_0^t F(\omega_s(\tau))d\tau + \omega_0(s) \, .$$

L'utilisation des notations opérationnelles suivantes :

$$\mathbf{L}^{-1}(g) = \int_0^t g(\tau).d\tau \quad \text{et} \qquad N(\omega) = \mathbf{L}^{-1}\,(F(\omega))$$

nous permettent l'écriture du problème (4.18) sous la forme canonique d' Adomian, à savoir :

$$\omega_s(t) = N(\omega_s)(t) + \omega_0(s) \, .$$

On suppose que l'opérateur N est indéfiniment différentiable dans un voisinage $\mathcal{V}(\omega_0(s))$ de $\omega_0(s)$ (ce qui équivaut à supposer que la fonction vectorielle F est indéfiniment diiérentiable). On est à présent en mesure d'appliquer la méthode décompositionnelle d'Adomian, afin d'approcher la solution $z_s(t)$ qui n'est autre que $u\,(x_s(t),\, y_s(t))$, ce qui implique la construction d'une suite vectorielle tel qu'il a été établi dans le paragraphe 1.3.

Pour s fixé dans $[0, 1]$, on définit $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n+1)}, \ldots$, de manière récurrente selon le schéma suivant :

$$\begin{cases} X^{(0)}(t) = \omega_0(s) \\ X^{(m)}(t) = (x^{(m)}(t), y^{(m)}(t),\, z^{(m)}(t)) \, , \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} x^{(m)}(t) = A_{m-1}\left(X^{(0)}(t), X^{(1)}(t), \cdots, X^{(m-1)}(t)\right), \\ y^{(m)}(t) = B_{m-1}\left(X^{(0)}(t), X^{(1)}(t), \cdots, X^{(m-1)}(t)\right), \\ z^{(m)}(t) = C_{m-1}\left(X^{(0)}(t), X^{(1)}(t), \ldots, X^{(m-1)}(t)\right), \end{cases}$$

avec A,, , B_n et C_n **définis comme suit :**

$$\begin{cases} A_0\left(X^{(0)}(t)\right) = \int_0^t A\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \\ A_n\left(X^{(0)}(t), \cdots, X^{(n)}(t)\right) = \int_0^t \sum_{|n.i|+|nj|+|nk|=n} G_n(\tau).A^{(i,j,k)}\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \end{cases},$$

$$\begin{cases} B_0\left(X^{(0)}(t)\right) = \int_0^t B\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \\ B_n\left(X^{(0)}(t), \cdots, X^{(n)}(t)\right) = \int_0^t \sum_{|n.i|+|n.j|+|n.k|=n} G_n(\tau).B^{(i,j,k)}\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \end{cases},$$

et

$$\begin{cases} C_0\left(X^{(0)}(t)\right) = \int_0^t C\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \\ C_n\left(X^{(0)}(t), \cdots, X^{(n)}(t)\right) = \int_0^t \sum_{|n.i|+|n.j|+|n.k|=n} G_n(\tau).C^{(i,j,k)}\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau . \end{cases}$$

La fonction G_n est donnée par l'expression :

$$G_n(\tau) = \left(\prod_{p=1}^{n} \frac{(x^{(p)}(\tau))^{i_p}}{i_p!}\right)\left(\prod_{p=1}^{n} \frac{(y^{(p)}(\tau))^{j_p}}{j_p!}\right)\left(\prod_{p=1}^{n} \frac{(z^{(p)}(\tau))^{k_p}}{k_p!}\right),$$

ainsi que :

$$\Psi^{(i,j,k)}\left(X^{(0)}(\tau)\right) = \frac{\partial^{|i|+|j|+|k|}\Psi}{\partial x^{|i|}\partial y^{|j|}\partial z^{|k|}}\left(X^{(0)}(\tau)\right),$$

oh $\Psi = A, B$ ou C .

Il est clan que si la série vectorielle $\sum_{k=0}^{+\infty} X^{(k)}(t)$ converge, la fonction $\Phi_p(t)$ donnée par :

$$\Phi_p(t) = \sum_{k=0}^{p} z^{(k)}(t) ,$$

converge vers $z_s(t)$, représentant la restriction de u à la courbe $(x_s(t)$, y.(t)). De plus, la famille de courbes S définie par :

$$s = \{(x_s(t), y_s(t)) \in \mathbb{R}^2 ; t \in [-\delta, \delta] ; \quad s = k.\alpha ; \quad k = 0, \cdots, K_0\} ; K_0 = [\frac{1}{\alpha}]$$

est α-dense dans le voisinage $\mathcal{V}_*$ (Co) de Co, et le calcul de $z_{k.\alpha}(t)$ pour $k = 0, \cdots, K_0$, donnera une approximation de $u(x$, y) sur $\mathcal{V}_*$ $(\mathcal{C}_0)$.

Théorème 4.3.2 :
Sous les mêmes hypothèses que celles de la remarque 4.3.1, et en supposant en outre que la fonction F est indéfiniment différentiable dans un voisinage $\mathcal{V}$ $(\omega_0(s))$ et vérifie l'estimation :

$$\|D^{(k)}F\ (\omega_0(s))\| \leqslant M < \exp(-1) \quad , \forall k \in \mathbb{N} ,$$

alors la série décompositionnelle d'Adomian associée au problème (4.13) converge. De plus il existe T_* tel que :

$$\|z_s - \Phi_p\|_{L^\infty(0,T_*)} \leqslant \frac{(p+1)^p \qquad M^{p+1}}{(p+1)!\ (1 - M.\exp(1))} \ , \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration :
La démonstration de ce théorème est basée sur les résultats obtenus dans les théorème 4.3.1, théorème 2.3.2 et théorème 2.3.3. Par ailleurs dans notre cas $T_* = 1$; mais si la constante M n'est pas strictement inférieure à $\exp(-1)$, on peut choisir T_* tel que :

$$T_*.M < \exp(-1) ,$$

ce qui permet d'avoir des résultats analogues.

4.4 Etude du cas non linéaire :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}_0$ une courbe régulière incluse dans Ω, u_0 une fonction définie sur $\mathcal{C}_0$, et F une fonction régulière définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^3$. Revenons à l'étude du problème (4.2) :

$$\begin{cases} F\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = 0 \,, \\ u(\sigma) = u_0(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \mathcal{C}_0 \,. \end{cases}$$

On suppose dans toute la suite que la courbe $\mathcal{C}_0$ est paramétrée par :

$$\mathcal{C}_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = x_0(s) \text{ et } y = y_0(s) \,,\ s \in [0, 1]\right\} .$$

On pose alors :

$$z_0(s) = u_0\left(x_0(s), y_0(s)\right) \quad , \quad \forall s \in [0,1] \,.$$

Sous les quatre conditions suivantes :

1- La fonction $F(x, y, z, \zeta, \eta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^3$.

2- La fonction $F(x, y, z, \zeta, \eta)$ est telle que $\left|\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\right| + \left|\dfrac{\partial F}{\partial \eta}\right| \neq 0$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^3$.

3- Il existe deux fonctions $\zeta_0(s)$ et $\eta_0(s)$ continuement dérivables sur [0, 1] telles que :

$$\begin{cases} F\left(x_0(s), y_0(s), z_0(s), \zeta_0(s), \eta_0(s)\right) = 0 \,, & \forall s \in [0, 1] \\ z_0'(s) = \zeta_0(s).x_0'(s) + \eta_0(s).y_0'(s) \,, & \forall s \in [0, 1] \end{cases}$$

4- Les fonctions $\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \eta}$ vérifient la relation :

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}(x_0, y_0, z_0, \zeta_0, \eta_0).y_0'(s) - \frac{\partial F}{\partial \eta}(x_0, y_0, z_0, \zeta_0, \eta_0).x_0'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [0, 1] \,,$$

le problème (4.2) admet une unique solution locale définie dans un voisinage de $\mathcal{C}_0$ (voir [29]), tel que :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0(s), y_0(s)\right) = \zeta_0(s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0(s), y_0(s)\right) = \eta_0(s) \,.$$

Théorème 4.4.1 :
Si les hypothèses l-4 ci dessus sont **vérifiées**, alors l'unique solution locale du problème (4.2) peut être obtenue en résolvant le système différentiel (4.19), et inversement :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{dx_s}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) \quad ; \quad x_s(0) = x_0(s) \\
\dfrac{dy_s}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \eta}\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) \quad ; \quad y_s(0) = y_0(s) \\
\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{dz_s}{dt} = \zeta_s(t).\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) + \eta_s(t).\dfrac{\partial F}{\partial \eta}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) \\
\qquad z_s(0) = z_0(s)
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{d\zeta_s}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) - \zeta_s(t).\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) \\
\qquad \zeta_s(0) = \zeta_0(s)
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{d\eta_s}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) - \eta_s(t).\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) \\
\qquad \eta_s(0) = \eta_0(s)
\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{4.19}$$

Démonstration :
La preuve de ce théorème se fait en deux étapes essentielles :

Etape 1 : Soit $u(x, y)$ l'unique solution du problème (4.2). Rappelons que la courbe $\mathcal{C}_0$ est **paramétrée** par :

$$Co = ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 2 = x_0(s) \text{ et } y = y_0(s)\ ,\ s \in [0, 1]\} .$$

On considère alors, pour tout s fixé **dans** [0, 1], le système **différentiel** :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\left(X(t), Y(t), u\left(X(t), Y(t)\right), \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(X(t), Y(t)\right), \dfrac{\partial u}{\partial y}\left(X(t), Y(t)\right)\right) \\
\dfrac{dY}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \eta}\left(X(t), Y(t), u\left(X(t), Y(t)\right), \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(X(t), Y(t)\right), \dfrac{\partial u}{\partial y}\left(X(t), Y(t)\right)\right) \\
\qquad X(0) = x_0(s) \quad ; \quad Y(0) = y_0(s)
\end{array}\right.$$

Ce système admet une unique solution, en vertu des hypothèses imposées. Posons :

$$Z(t) = u\left(X(t), Y(t)\right), \Phi(t) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(X(t), Y(t)\right), \ \Psi(t) = \frac{\partial u}{\partial y}\left(X(t), Y(t)\right),$$

et vérifions que la fonction vectorielle :

$$(X(t), Y(t), Z(t), \Phi(t), \Psi(t)),$$

est solution du système différentiel (4.19).
Par construction nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}(X(t), Y(t), Z(t), \Phi(t), \Psi(t))) \quad ; \quad X(0) = x_0(s) \\ \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \eta}(X(t), Y(t), Z(t), \Phi(t), \Psi(t))) \quad ; \quad Y(0) = y_0(s) \end{cases}$$

De plus on a :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dY}{dt}$$

Par conséquent :

$$\frac{dZ}{dt} = \Phi(t).\frac{\partial F}{\partial \zeta}(X(t), \cdots, \Psi(t))) + \Psi(t).\frac{\partial F}{\partial \eta}(X(t), \cdots, \Psi(t)))$$

Mais nous avons :

$$Z(0) = u\,(X(0), Y(0)) = u\,(x_0(s), y_0(s)) = u_0\,(x_0(s), y_0(s)) = z_0(s)$$

et par suite :

$$\begin{cases} \dfrac{dZ}{dt} = \Phi(t).\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}(X(t), \cdots, \Psi(t))) + \Psi(t).\dfrac{\partial F}{\partial \eta}(X(t), \cdots, \Psi(t))) \\ Z(0) = z_0(s) \end{cases}$$

Pour les fonctions $\Phi(t)$ et Q(t) , nous avons :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dY}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dY}{dt},$$

ou encore :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \eta} \quad \text{et} \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \eta}. \tag{4.20}$$

Rappelons que u est l'unique solution du **problème** (4.2) :

$$F\,(x, y, Z(x, y), \Phi(x, y), \Psi(x, \text{Y})) = 0,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$dF = O.$$

Or dF est donné par l'expression :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dZ + \frac{\partial F}{\partial \zeta}d\Phi + \frac{\partial F}{\partial \eta}d\Psi$$

Par ailleurs, dZ, $d\Phi$ et $d\Psi$ sont donnés par :

$$\left\{\begin{aligned} dZ &= \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\ , \\ d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dy\ , \\ d\Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\ . \end{aligned}\right.$$

Cela implique :

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\Phi + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\Psi + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)dy$$

Le fait que x et y sont des variables indépendantes et que dF est nul nous permet d'affirmer que :

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\Phi + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0\ , \\ &\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\Psi + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0\ . \end{aligned}\right.$$

La définition de Φ et Ψ, et le fait que la solution u de (4.2) est deux fois continuement différentiable, entrainent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\ .$$

Par conséquent :

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\Phi + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0\ , \\ &\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\Psi + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0\ . \end{aligned}\right.$$

d'où on déduit les égalités suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\Phi \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z}\Psi \end{aligned}\right. \tag{4.21}$$

Des égalités (4.20) et (4.21) on déduit que :

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial \eta}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial z}\Phi \\ \dfrac{d\Psi}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial \eta}\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = -\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial z}\Psi \end{cases}$$

De plus on a :

$$\begin{cases} \Phi(0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(X(0), Y(0)) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0(s), y_0(s)) = \zeta_0(s) \\ \Psi(0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(X(t), Y(t)) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0(s), y_0(s)) = \eta_0(s) \end{cases}$$

Ainsi Φ et Ψ sont solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(X(t), \cdots, \Psi(t))) - \Phi(t).\dfrac{\partial F}{\partial z}(X(t), \cdots, \Psi(t))) \\ \dfrac{d\Psi}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}(X(t), \cdots, \Psi(t))) - \Psi(t).\dfrac{\partial F}{\partial z}(X(t), \cdots, \Psi(t))) \\ \Phi(0) = \zeta_0(s) \quad , \quad \Psi(0) = \eta_0(s) \end{cases} \tag{4.22}$$

Etape 2 : Soit $(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t))$ l'unique solution du problème (4.19). D'après les théorèmes de dépendance continue de la solution (d'un système differentiel du premier ordre) par rapport aux conditions initiales et au paramètre, on peut affirmer que les fonctions :

$$x = x_s(t) = x(s, t), \; y = y_s(t) = y(s, t), \; z = z_s(t) = z(s, t)$$
$$\zeta = \zeta_s(t) = \zeta(s, t), \; \eta = \eta_s(t) = \eta(s, t)$$

sont deux fois continuement différentiables sur $[0, 1] \times [-\delta, \delta]$.
L'hypothèse 4 permet d'affirmer que localement, on a l'équivalence :

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ Y = y(s, t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = s(x, Y) \\ t = t(x, Y) \end{cases}$$

On pose alors :

$$u(x, Y) = z(s(x, Y), t(x, Y)).$$

Il s'agit donc de montrer que la fonction $u(x, y)$ ainsi définie est solution du problème (4.2).

A- Dans un premier temps, montrons que la fonction F vérifie :

$$F(x(s,t), y(s,t), z(s,t), \zeta(s,t), \eta(s,t)) = 0 \quad , \quad \forall s \text{ et } \forall t. \tag{4.23}$$

Par construction, on remarque que, pour chaque s fixé dans [0, 1] on a :

$$\frac{dF}{dt}\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) = 0$$

En effet pour chaque s fixé :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx_s}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy_s}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz_s}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{d\zeta_s}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{d\eta_s}{dt} .$$

Puisque par hypothèse le vecteur $(x_s(t),\ y_s(t),\ z_s(t),\ \zeta_s(t),\ \eta_s(t))$ est solution de (4.19), il vient alors :

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} \;=\; & \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \eta\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial \eta} + \\ & -\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial F}{\partial x} - \zeta\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial F}{\partial y} - \eta\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial F}{\partial z} .\end{aligned}$$

Ainsi pour chaque s fixé, nous avons :

$$\frac{dF}{dt}\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) = 0 .$$

En on déduit alors que, pour tout s fixé dans [0, 1], la fonction F est constante, d'où on a :

$$F\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) = F\left(x_s(0), y_s(0), z_s(0), \zeta_s(0), \eta_s(0)\right) = C_s .$$

L'hypothèse 3 nous permet d'écrire :

$$F\left(x_s(0), y_s(0), z_s(0), \zeta_s(0), \eta_s(0)\right) = F\left(x_0(s), y_0(s), z_0(s), \zeta_0(s), \eta_0(s)\right) = 0 .$$

Par conséquent, pour tout s fixé dans [0, 1], nous avons :

$$F\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) = 0 \quad , \ \forall s \in [0,1] ,$$

ou encore :

$$F\left(x(s,t), y(s,t), z(s,t), \zeta(s,t), \eta(s,t)\right) = 0 , \quad \forall s \text{ et } \forall t .$$

B- Nous allons maintenant montrer que :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_s(t), y_s(t)\right) = \zeta_s(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}\left(x_s(t), y_s(t)\right) = \eta_s(t)$$

Par construction et en vertu de l'hypothèse 4, l'unique solution du système **linéaire** algébrique régulier (4.24) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial s} \end{cases} \tag{4.24}$$

pour (s,t) fixé dans $[0,1]\times[-\delta,\delta]$, n'est autre que le vecteur $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(s,t), \dfrac{\partial u}{\partial y}(s,t)\right)$.

Par conséquent il suffit de montrer que le vecteur $(\zeta(s,t), \eta(s,t))$ est une solution du système (4.24). Pour cela on définit les fonctions suivantes :

$$U = \frac{\partial z}{\partial t} - \zeta\frac{\partial x}{\partial t} - \eta\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{et} \quad V = \frac{\partial z}{\partial s} - \zeta\frac{\partial x}{\partial s} - \eta\frac{\partial y}{\partial s}\,. \tag{4.25}$$

1- Montrons que $V = 0$. Pour cela il suffit de montrer que V est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = -V.\dfrac{\partial F}{\partial z} \\ V(0) = 0 \end{cases},$$

s étant fixé dans $[0, 1]$.

En effet :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial s} - \zeta\frac{\partial x}{\partial s} - \eta\frac{\partial y}{\partial s}\right),$$

que l'on peut écrire comme suit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \zeta.\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s} - \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} - \eta.\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s}\,. \tag{4.26}$$

En vertu du théorème de **Schwartz** on a :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}\,.$$

et en particulier :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\zeta.\frac{\partial x}{\partial t} + \eta.\frac{\partial y}{\partial t}\right),$$

d'où on a :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s} = \frac{\partial \zeta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \zeta.\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} + \eta.\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}\,, \tag{4.27}$$

ainsi des égalités (4.26) et **(4.27)**, on **déduit** :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} \; \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \zeta.\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} - \eta.\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t},$$

autrement dit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}\right) . \qquad (4.28)$$

Par ailleurs et au vu de l'identité (4.23) on peut **affirmer** que :

$$\frac{\partial F}{\partial s}\left(x(s,t), y(s,t), z(s,t), \zeta(s,t), \eta(s,t)\right) = 0 \quad , \quad \forall s \text{ et } \forall t ,$$

c'est **à** dire :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s} = 0 .$$

D'où :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = -\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial s}\right) ,$$

Par suite la relation (4.28) s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}\right) ,$$

ou encore :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial s} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} .$$

De la seconde définition **dans** (4.25) :

$$V = \frac{\partial z}{\partial s} - \zeta\frac{\partial x}{\partial s} - \eta\frac{\partial y}{\partial s} ,$$

on peut écrire de manière équivalente :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = V + \zeta\frac{\partial x}{\partial s} + \eta\frac{\partial y}{\partial s} ,$$

ce qui **entraine** l'égalité :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial s} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial z}\left(V + \zeta\frac{\partial x}{\partial s} + \eta\frac{\partial y}{\partial s}\right) ,$$

de laquelle on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta.\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial s} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta.\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial z}.V \,. \tag{4.29}$$

En utilisant le fait que $(x_s(t),\ y_s(t),\ z_s(t),\ \zeta_s(t),\ \eta_s(t))$ est solution de (4.19), alorsona:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta.\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta.\frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0 \,.$$

d'où en remplacant dans l'équation (4.29), on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V.\frac{\partial F}{\partial z} \,.$$

De plus, par hypothèse on a :

$$z_0'(s) = \zeta_0(s).x_0'(s) + \eta_0(s).y_0'(s) \quad , \quad \forall s \in [0,1] \,,$$

ainsi pour chaque s fixé, il vient que :

$$\frac{\partial z}{\partial s}(s,0) = \zeta(s,0).\frac{\partial x}{\partial s}(s,0) + \eta(s,0).\frac{\partial y}{\partial s}(s,0),$$

d'où on déduit pour $V(s,\ 0)$ l'égalité :

$$V(s,0) = \frac{\partial z}{\partial s}(s,0) - \zeta(s,0).\frac{\partial x}{\partial s}(s,0) + \eta(s,0).\frac{\partial y}{\partial s}(s,0) = 0.$$

Enfin pour chaque s fixé dans $[0,1]$, V est solution du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = -V.\dfrac{\partial F}{\partial z} \\ V(0) = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est la solution triviale $V(t) = 0$, et :

$$V(s,t) = 0 \ ; \ \forall s, \forall t \,.$$

2- Montrons que $U = 0$. En effet l'égalité suivante :

$$\frac{au}{as} = \frac{\partial}{as}\left(\frac{\partial z}{\partial t} - \zeta\frac{\partial x}{\partial t} - \eta\frac{\partial y}{\partial t}\right) \,,$$

obtenue à partir de la définition de U dans (4.25), nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} - \zeta.\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \eta.\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \,, \tag{4.30}$$

L'identité (4.28) et le fait que $V(s, t) = 0$, nous permettent d'écrire :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}\right) . \tag{4.31}$$

A partir des égalités (4.30) et (4.31), on peut affirmer que :

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} - \zeta . \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \eta . \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} .$$

En utilisant le théorème de Schwartz, on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} - \zeta . \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} - \eta . \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} .$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Donc, pour chaque t fixé dans [-6, δ] , la fonction U est constante, doù :

$$U(s) = C_t , \quad \text{vs} \in [0, 1] .$$

Mais d'après la relation :

$$\frac{dz_s}{dt}(t) = \zeta_s(t).\frac{dx_s}{dt}(t) + \eta_s(t).\frac{dy_s}{dt}(t) \quad , \quad \text{vs} \in [0, 1] ,$$

et en particulier pour s = 0, on a :

$$U(0,t) = \frac{\partial z}{\partial t}(0,t) - \zeta(0,t).\frac{\partial x}{\partial t}(0,t) + \eta(0,t).\frac{\partial y}{\partial t}(0,t) = 0 ,$$

D'où on déduit que :

$$C_t = 0 \text{ et } U(s, t) = 0 \quad \forall s, \forall t .$$

En conséquence, le vecteur $(\zeta(s, t), \eta(s, t))$ est effectivement solution de (4.24), **et ainsi :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(s,t), \frac{\partial u}{\partial y}(s,t)\right) = (\zeta(s,t), \eta(s,t)) .$$

En utilisant la relation (4.23) et l'identité précédente, il vient alors :

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = 0 \quad , \quad \forall (x,y) \in \mathcal{V}_*(\mathcal{C}_0)$$

où $\mathcal{V}_*(\mathcal{C}_0)$ est un voisinage de $\mathcal{C}_0$. De plus :

$$u\left(x_0(s), y_0(s)\right) = u\left(x(s,0), y(s,0)\right) = z(s,0) = z_0(s) = u_0\left(x_0(s), y_0(s)\right)$$

$$u(\sigma) = u_0(\sigma), \qquad \forall \sigma \in \mathcal{C}_0$$

et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x_0(s), y_0(s)\right) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(x(s,0), y(s,0)\right) = \zeta(s,0) = \zeta_0(s) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\left(x_0(s), y_0(s)\right) = \dfrac{\partial u}{\partial y}\left(x(s,0), y(s,0)\right) = \eta(s,0) = \eta_0(s) \end{cases}$$

<u>Définition 4.4.1 :</u>
Les courbes définies par $(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t))$ solutions de (4.19) sont appelées bandes bicaractéristiques de l'équation aux dérivées partielles figurant dans le problème (4.2).

<u>Conséquence 4.4.1 :</u>
D'après le théorème 4.4.1, pour déterminer la solution du problème (4.2), à savoir u, il suffit de résoudre pour chaque s fixé dans l'intervalle [0, 1] le système différentiel, du premier ordre, suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_s}{dt} = f_1\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) & , \; x_s(0) = x_0(s)\,, \\ \dfrac{dy_s}{dt} = f_2\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) & , \; y_s(0) = y_0(s)\,, \\ \dfrac{dz_s}{dt} = f_3\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) & , \; z_s(0) = z_0(s)\,, \\ \dfrac{d\zeta_s}{dt} = f_4\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) & , \; \zeta_s(0) = \zeta_0(s)\,, \\ \dfrac{d\eta_s}{dt} = f_5\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) & , \; \eta_s(0) = \eta_0(s)\,, \end{cases}$$

où les fonctions f_i , $i \in \{1,2,3,4,5\}$, sont données par :

$$\begin{cases} f_1\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) = \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) \\ f_2\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) = \dfrac{\partial F}{\partial \eta}\left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) \\ f_3\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) = \zeta_s(t).\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) + \eta_s(t).\dfrac{\partial F}{\partial \eta}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) \\ f_4\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) - \zeta_s(t).\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) \\ f_5\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) = -\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) - \eta_s(t).\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(x_s(t), \cdots, \eta_s(t)\right) \end{cases}$$

et de prendre $u\left(x_s(t), y_s(t)\right) = z_s(t)$ qui constituera la solution de (4.2) restreinte à la courbe $(x_s(t), y_s(t))$. A'msi et afin de calculer $z_s(t)$, on fait appel à la méthode décompositionnelle **d'Adomian** qui nous permettra de construire une excellente approximation de $z_s(t)$.

Dans toute la suite on utilisera les notations suivantes :

$$\Psi(x, y, z, \zeta, \eta) = \left(f_1(x, \cdots, \eta), f_2(x, \cdots, \eta), f_3(x, \cdots, \eta), f_4(x, \cdots, \eta), f_5(x, \cdots, \eta)\right),$$

$$\omega_s(t) = \left(x_s(t), y_s(t), z_s(t), \zeta_s(t), \eta_s(t)\right) \ , \ \omega_0(s) = \left(x_0(s), y_0(s), z_0(s), \zeta_0(s), \eta_0(s)\right) \ .$$

On aura donc à apliquer la méthode décompositionnelle **d'Adomian** au système différentiel suivant (pour chaque s fixé) :

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega_s}{dt} = \Psi(\omega_s) \\ \omega_s(0) = \omega_0(s) \end{cases} , \qquad (4.32)$$

ce qui **est** équivalent à :

$$\omega_s(t) = \int_0^t \Psi(\omega_s(\tau))d\tau + \omega_0(s) \ .$$

En utilisant les notations opérationnelles suivantes :

$$\mathbf{L}^{-1}(g) = \int_0^t g(\tau).d\tau \qquad \text{et} \qquad N(\omega) = \mathbf{L}^{-1}\left(Q(w)\right)$$

l'écriture du **système** différentiel (4.32) sous la forme canonique **d'Adomian**, est **donnée** par :

$$\omega_s(t) = N(\omega_s)(t) + \omega_0(s) \ .$$

$$\begin{cases} D_0\left(X^{(0)}(t)\right) = \displaystyle\int_0^t f_4\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \\ D_n\left(X^{(0)}(t), \cdots, X^{(n)}(t)\right) = \displaystyle\int_0^t \sum_{|n.i|+|n.j|+|n.k|+|n.l|+|n.q|=n} G_n(\tau).f_4^{(i,j,k,l,q)}\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \end{cases},$$

$$\begin{cases} E_0\left(X^{(0)}(t)\right) = \displaystyle\int_0^t f_5\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \\ E_n\left(X^{(0)}(t), \cdots, X^{(n)}(t)\right) = \displaystyle\int_0^t \sum_{|n.i|+|n.j|+|n.k|+|n.l|+|n.q|=n} G_n(\tau).f_5^{(i,j,k,l,q)}\left(X^{(0)}(\tau)\right) d\tau \end{cases}.$$

La fonction G_n est donnée par :

$$G_n(\tau) = g_n^{(L)}(\tau).\left(\prod_{p=1}^{n} \frac{(z^{(p)}(\tau))^{k_p}}{k_p!}\right).g_n^{(R)}(\tau),$$

avec :

$$g_n^{(L)}(\tau) = \left(\prod_{p=1}^{n} \frac{(x^{(p)}(\tau))^{i_p}}{i_p!}\right)\left(\prod_{p=1}^{n} \frac{(y^{(p)}(\tau))^{j_p}}{j_p!}\right),$$

$$g_n^{(R)}(\tau) = \left(\prod_{p=1}^{n} \frac{(\zeta^{(p)}(\tau))^{l_p}}{l_p!}\right)\left(\prod_{p=1}^{n} \frac{(\eta^{(p)}(\tau))^{q_p}}{q_p!}\right).$$

Les fonctions $f_m^{(i,j,k,l,q)}$ sont données par :

$$f_m^{(i,j,k,l,q)}\left(X^{(0)}(\tau)\right) = \frac{\partial^{|i|+|j|+|k|+|l|+|q|} f_m}{\partial x^{|i|}\partial y^{|j|}\partial z^{|k|}\partial \zeta^{|l|}\partial \eta^{|q|}}\left(X^{(0)}(\tau)\right) \quad ; \quad m = 1, \cdots, 5 .$$

Il est clair que si la série vectorielle $\sum_{k=0}^{+\infty} X^{(k)}(t)$ converge, alors la fonction $\Phi_p(t)$ définie par :

$$\Phi_p(t) = \sum_{k=0}^{p} z^{(k)}(t)$$

converge vers $z_s(t)$, représentant la restriction de u à la courbe $(x_s(t),\ y_s(t))$. De plus, la famille de courbes S donnée par :

$$S = \left\{(x_s(t), y_s(t)) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \in [-\delta, \delta] \ ; \ s = k.\alpha \ ; \ k = 0, \cdots, K_0\right\} \ ; \ K_0 = [\frac{1}{\alpha}]$$

est a-dense dans le voisinage $\mathcal{V}_*(\mathcal{C}_0)$ de Co, et le calcul de $z_{k.\alpha}(t)$ pour $k = 0, \cdots, K_0$, donnera uue approximation de $u(x, y)$ sur $\mathcal{V}_*(\mathcal{C}_0)$.

Théorème 4.4.2 :

Sous les mêmes hypothèses que celles du **théorème 4.4.1**, et en supposant en outre que la fonction Ψ est indéfiniment différentiable dans un voisinage $\mathcal{V}(\omega_0(s))$ avec :

$$\left\|D^{(k)}\Psi\ (\omega_0(s))\right\| \leqslant M < \exp(-1) \quad , \forall k \in \mathbb{N}$$

alors la série décompositionnelle d'**Adomian** associée au problème (4.19) converge. De plus il existe T_* tel que :

$$\|z_s - \Phi_p\|_{L^\infty(0,T_*)} \leqslant \frac{(p+1)^p}{(p+1)!} \frac{M^{p+1}}{(1 - M.\exp(1))} \ , \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Démonstration :

La démonstration de ce théorème est basée sur les résultats obtenus dans les **théorème** 4.4.1, **théorème** 2.3.2 et théorème 2.3.3. Par ailleurs dans notre cas $T_* = 1$. Mais si la constante M n'est pas strictement inférieure à $\exp(-1)$, on peut choisir T_* tel que :

$$T_*.M < \exp(-1) \ ,$$

ce qui permet d'avoir des résultats analogues.

Résultats **Numériques** :

On considère la fonction test $u(x, y) = \exp(x) . \sin(y)$ solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} u.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \exp(2x) \\ u(\sigma) = u_0(\sigma) \quad , \quad \forall \sigma \in \mathcal{C}_0 \ , \end{array}\right. \tag{4.33}$$

où :

$$\mathcal{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } y = x \ , 0 \leqslant x \leqslant 1\} \ ,$$

et :

$$u_0(x) = \exp(x) . \sin(x) \ , \forall x \in [0, 1].$$

Dans ce cas on a :

$$F(x, y, z, \zeta, \eta) = z \cdot \zeta + \eta^2 - \exp(2x).$$

D'après le théorème 4.4.1, la résolution du problème (4.33) peut être ramenée à la résolution du système différentiel (4.34) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_s}{dt} = z_s(t)\ ,\ \ x_s(0) = s \quad ; \quad \dfrac{dy_s}{dt} = 2 \cdot \eta_s(t)\ ,\ \ y_s(0) = s \\ \dfrac{dz_s}{dt} = z_s(t) \cdot \zeta_s(t) + 2 \cdot (\eta_s(t))^2 \quad , \quad z_s(0) = \exp(s)\ .\ \sin(s) \\ \dfrac{d\zeta_s}{dt} = 2 \cdot \exp(2x_s(t)) - (\zeta_s(t))^2 \quad , \quad \zeta_s(0) = \exp(s) \cdot \sin(s) \\ \qquad \dfrac{d\eta_s}{dt} = -\zeta_s(t) \cdot \eta_s(t) \quad , \quad \eta_s(0) = \exp(s) \cdot \cos(s) \end{array}\right. . \quad (4.34)$$

Ainsi on **résout** le **problème** (4.34) en utilisant la méthode décompositionnelle **d'Adomian,** suivant le **schéma** propos& dans la **conséquence** 4.4.1. On peut alors **construire** la **série** tronquée **d'Adomian** constituée de **7** termes à savoir $Z_6(s,$ t), et une fonction erreur :

$$\varepsilon(s,t) = u\left(x_s(t), y_s(t)\right) - Z_6(s,t)\ .$$

Les **essais numériques** ont **prouvé** que la fonction $\varepsilon(s,t)$ est **égale à zéro** dans le **domaine** [0, **1**] x $[0, 0.25]$. La figure **6** en **est** l'illustration puisqu'elle **représente** le graphe de la fonction E(s, t) sur **le** domaine $[0, 1]$ x $[0, 0.25]$.

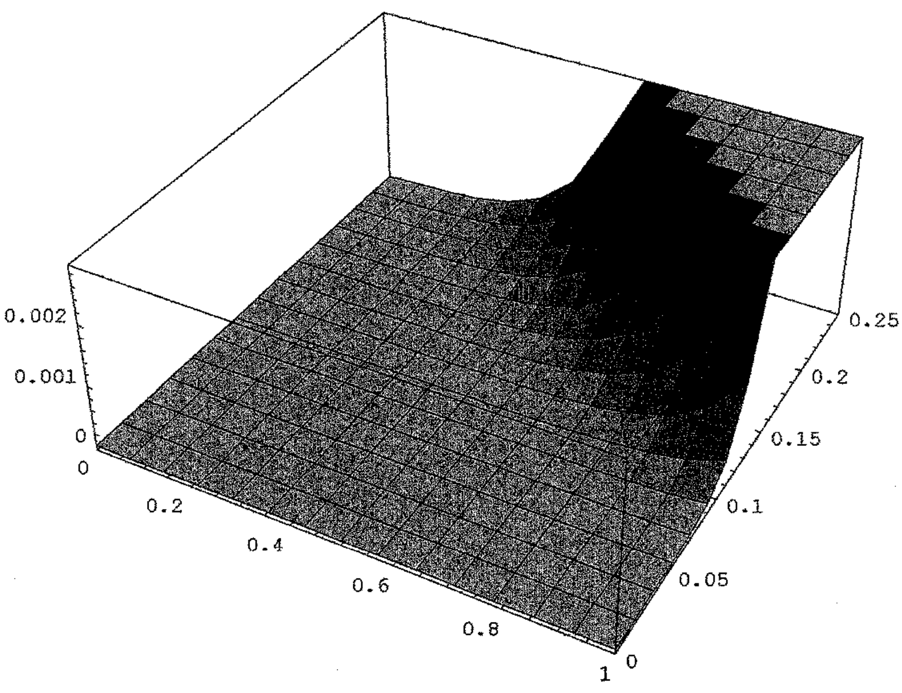


Figure **6**

Sur l'axe des abscisses la variable **est** s, $s \in [0,1]$, sur l'axe des **ordonnées** la variable est $t, t \in [0, 0.25]$, et l'axe des z **correspond** à $\varepsilon(t, x)$.

Remarque 4.4.1 :

On peut généraliser, sans aucune difficulté, les résultats précédents au cas d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre sur $\mathbb{R}^n$, n $\geqslant$ 3. Etant donnés Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Γ_0 une hypersurface régulière dans Ω, G une fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et u_0 une fonction définie sur Γ_0, on considère le problème :

$$\left\{\begin{array}{c} G\left(x_1,\cdots,x_n,u(x_1,\cdots,x_n),\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_n)\right)=0 \\ u(\sigma)=u_0(\sigma) \qquad \forall\sigma\in\Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.35}$$

On suppose, de plus, que l'hypersurface Γ_0 est paramétrée par :

$$\Gamma_0=\{(x_1,\cdot\,.\,.\,,\ x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i=x_{0,i}(s_1,\,.\,.\,.\,,\ s_{n-1})\ ,\quad s\in[0,1]^{n-1}\}\ .$$

On définit alors :

$$z_0(s)=u_0\left(x_{0,1}(s),\cdots,x_{0,n}(s)\right) \qquad \text{vs}\in[0,1]^{n-1}\ .$$

Sous certaines conditions comparables à celles de la théorème 4.4.1, qui assurent l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.35), (voir [29]) on peut aisément montrer, comme dans la théorème 4.4.1, que pour trouver u solution de (4.35) il suffit de résoudre pour chaque s fixé dans [0, $1]^{n-1}$ le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_{1,s}}{dt}=\dfrac{\partial G}{\partial\zeta_1}\left(x_{1,s}(t),\ldots,x_{n,s}(t),z_s(t),\zeta_{1,s}(t),\ldots,\zeta_{n,s}(t)\right) \\ x_{1,s}(0)=x_{0,1}(s) \end{array}\right. \\
\qquad\vdots \\
\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_{n,s}}{dt}=\dfrac{\partial G}{\partial\zeta_n}\left(x_{1,s}(t),\ldots,x_{n,s}(t),z_s(t),\zeta_{1,s}(t),\ldots,\zeta_{n,s}(t)\right) \\ x_{n,s}(0)=x_{0,n}(s) \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dz_s}{dt}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\zeta_{i,s}(t).\dfrac{\partial G}{\partial\zeta_{i}}\left(x_{1,s}(t),\ldots,x_{n,s}(t),z_s(t),\zeta_{1,s}(t),\ldots,\zeta_{n,s}(t)\right) \\ z_s(0)=z_0(s) \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\zeta_{1,s}}{dt}=-\dfrac{\partial G}{\partial x_1}\left(x_{1,s}(t),\ldots,\zeta_{n,s}(t)\right)-\zeta_{1,s}(t).\dfrac{\partial G}{\partial z}\left(x_{1,s}(t),\ldots,\zeta_{n,s}(t)\right) \\ \zeta_{1,s}(0)=\zeta_{0,1}(s) \end{array}\right. \\
\qquad\vdots \\
\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\zeta_{n,s}}{dt}=-\dfrac{\partial G}{\partial x_n}\left(x_{1,s}(t),\ldots,\zeta_{n,s}(t)\right)-\zeta_{n,s}(t).\dfrac{\partial G}{\partial z}\left(x_{1,s}(t),\ldots,\zeta_{n,s}(t)\right) \\ \zeta_{n,s}(0)=\zeta_{0,n}(s) \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

A partir de là, on peut faire appel à la méthode d' Adominn pour construire une approximation de la solution de (4.35), exactement comme cela a été fait dans la **conséquence** 4.4.1.

Remarque 4.4.2 :

Ce travail apporte une nouvelle vision pour l'approximation de la solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre. En effet les techniques classiques sont basées sur la **linéarisation** et la discretisation du problème à résoudre. La performance de la technique déwmpositionnelle d' **Adomian** (associée aux courbes α-denses) est intéressante car elle entraine des améliorations consistantes. Les plus importantes étant : la rapidité de la convergence et la haute qualité de l'approximant. Une seule conclusion s'impose : l'application de la méthode décompositionnelle d'Adomian en association avec les wurbes a-denses est parfaitement adaptée à la résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre quel qu'en soit le type.

Conclusion et perspectives

Les résultats obtenus ne représentent certes qu'un apport modeste dans le monde du savoir. Cependant, nous avons réussi à donna une méthode plus simple pour le calcul de la somme des nombres d'Abbaoui-Cherruault, puis nous avons prouvé une nouvelle identité pour les polynômes de Bell, ce qui nous a ouvert une voie pour améliorer la majoration en norme des polynômes d'Adomian et par conséquent de l'erreur de troncature de la méthode décompositiomrelle d'Adomian. Le problème issu de la théorie des micro-lasers traité au chapitre 3 en guise d'application nous a permis de confirmer l'efficacité de cette méthode sur des exemples concrets. Jamais auparavant ce problème n'avait pu être résolu sous sa forme d'origine et sans modifications. Enfin les équations aux dérivées partielles du premier ordre ne constituent plus une source de problèmes pour leur approximation. Leur traitement par l'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian en association avec les courbes a-denses permet aujourd'hui de les résoudre avec une remarquable précision.

Il ressort de tout ce qui a été décrit dans cette thèse, que l'application de la méthode décompositionnelle d'Adomian à la résolution d'un problème (quel qu'en soit le type) nécessite son écriture sous la forme canonique d'Adomian. La recherche d'une forme canonique devient donc, une tache primordiale et un prélude nécessaire à la mise en application de la méthode d'Adomian. D'ailleurs, une étude détaillée a été consacrée à ce sujet (voir [45]). Du fait que la forme canonique n'est généralement pas unique, un problème de choix s'impose ce qui n'est pas toujours simple surtout si l'on désire obtenir la forme la mieux adaptée au calcul. A notre avis, pouvoir mettre en oeuvre directement la méthode décompositionnelle d' Adomian sans avoir à passer par la forme canonique simplifierait significativement son application, permettrait un gain de temps de calcul et améliorerait probablement les performances de la méthode.

Le problème de la résolution des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à 1, en utilisant la méthode décompositionnelle reste partiellement ouvert. En effet, la présence de conditions initiales et aux limites pose un sérieux problème du fait qu'il est diicile de les intégrer facilement et de façon naturelle dans la forme canonique sauf dans quelques cas particuliers (voir [8],[9]).

On peut aussi citer un troisième problème ouvert : la généralisation de la méthode décompositionnelle d' Adomian au cas complexe. Actuellement la méthode décompositionnelle d'Adomian n'est applicable que pour les équations fontionnelles réelles (l'espace de Banach E est réel). La généralisation des formules de calcul des polynômes d' Adomian, les théorèmes de convergence et l'estimation de l'erreur dans le cas d'un espace de Banach complexe constituent les difficultés principales de ce dernier problème.

Références bibliographiques

[1] K. ABBAOUI : " Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application à la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine." Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, 1995.

[2] K. ABBAOUI & Y. CHERRUAULT : " Convergence of Adomian's method applied to nonlinear equations." Math. Comput. Model. ; Vol. 20 ; n°9 ; pp 69-73 ; 1994.

[3] K. ABBAOUI, Y. CHERRUAULT & M. N'DOUR : " The decomposition method applied to differential systems." Kybernetes ; Vol. 24 ; n°8 ; pp 32-40 ; 1995.

[4] G. ADOMIAN : " Stochastic systems." Academic Press ; 1983.

[5] G. ADOMIAN : " A new approach to the heat equation : an application of the decomposition method." J. Math. Ana. Appl. ; Vol. 113 ; n°1 ; pp 202209 ; 1986.

[6] G. ADOMIAN : " Nonlinear stochastic operator equations." Academic Press ; 1986.

[7] G. ADOMIAN : " An adaptation of decomposition method for asymptotic solutions." Math Comp. Simulation ; Vol. 30 ; n°4 ; pp 325329 ; 1988.

[8] G. ADOMIAN : " Nonlinear stochastic systems : theory and applications to physics." Kluwer Academic Publishers ; 1989.

[9] G. ADOMIAN : " Solving frontier problems of physics : the decomposition method." Kluwer Academic Publishers ; 1994.

[10] G. ADOMIAN & R. RACH : " On the solution of algebraic equation by decomposition method." J. Math. Ana. Appl. ; Vol. 105 ; n°1 ; pp 141-166 ; 1985.

[Il] G. ADOMIAN & R. RACH : " On composite nonlinearities and the decomposition method." J. Math. Ana. Appl. ; Vol. 113 ; n°2 ; pp 504509 ; 1986.

[12] G. ADOMIAN & R. RACH : " Algebraic computation and the decomposition method." Kybernetes ; Vol. 15 ; n°1 ; pp 33-37 ; 1986.

[13] G. ADOMIAN & L.H. SIBUL : " On the control of stochastic systems." J. Math. Ana. Appl. ; Vol. 83 ; n°2 ; pp 611-621 ; 1981

[14] A. BENABIDALLAH, Y. CBERRUAULT & Y. TOURBIER : " Approximation of multiple integrals by simple integrals." Kybernetes ; Vol. 30 ; n°9/10 ; pp 1223-1239 ; 2001.

[15] A. BENABIDALLAH, Y. CHERRUAULT & G. MORA : " Approximation of multiple integrals by length of a-dense curves." à paraitre dans Kybernetes.

[16] M. BENABIDALLAH : " Application de la méthode d'Adomian pour l'approximation de la solution globale pour une classe d'équations différentielles." Thèse de Magister de l'U.S.T.H.B. ; 2000.

[17] C. BERGE : " Principes de combinatoire." Dunod ; 1968.

[18] H. CARTAN : " Calcul différentiel." Collection "Méthodes" ; Hermann Paris ; 1971.

[19] Y. CHERRUAULT : " Convergence of decomposition method." Kybernetes ; Vol. 18 ; n°2 ; pp 31-38 ; 1989.

[20] Y. CHERRUAULT : " New deterministic methods for global optimisation and applications to biomedicine." International Journal of Biomedical Computing ; 27 ; pp. 215-229 ; 1991.

[21] Y. CHERRUAULT : " Global optimization in biology and medicine." Mathematical Computing Modelling ; Vol 20 ; n°6 ; pp. 119132 ; 1994.

[22] Y. CHERRUAULT : " Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant." Presses Universitaires de France ; P.U.F. ; 1998.

[23] Y. CHERRUAULT : " Optimisation : méthodes locales et globales." Presses Universitaires de France ; P.U.F. ; 1999.

[24] Y. CHERRUAULT & G. ADOMIAN : " Decomposition method : A new proof of convergence." Math. Comput. Model. ; Vol. 18 ; n°12 ; pp 105106 ; 1993.

[25] Y. CHERRUAULT, G. SACCOMANDI & B. SOME : " New results for convergence of Adomian's method applied to integral equations." Math. Comput. Model. ; Vol. 16 ; n°2 ; pp 8593 ; 1992.

[26] L. COMTET : " Analyse combinatoire." Tome 1 - Collection SUP - Presses Universitaires de France ; P.U.F. ; 1970.

[27] L. COMTET : " Analyse combinatoire." Tome 2 - Collection SUP - Presses Universitaires de France ; P.U.F. ; 1970,

[28] L. COMTET : " Advanced combinatorics." D. Reidel ; 1974.

[29] R. COURANT & D. HILBERT : " Methods of mathematical physics." Vol. II ; Interscience (John Wiley & Sons) ; 1962.

[30] L. GABET : " The theoritical foundation of the Adomian method." Comput. Math. App. ; Vol. 27 ; n°12 ; pp 41-52 ; 1994.

[31] S. GUELLAL & Y. CHERRUAULT : " Application of decomposition method to identify the distributed parameters of an elliptical equation." Math. Comput. Model. ; Vol. 21 ; n°4 ; pp 51-55 ; 1995.

[32] S. KHELIFA & Y. CHERRUAULT : "New results for the Adomian method." Kybernetes ; Vol. 29 ; n°3/4 ; pp 332354 ; 2000.

[33] S. KHELIFA & Y. CHERRUAULT : "Approximation of the solution for a class of first order p.d.e. by Adomian method." Kybernetes ; Vol. 31 ; n°3/4 ; pp 577-595 ; 2002.

[34] S. KHELIFA & Y. CHERRUAULT : "The decomposition method for solving first order partial diierential equation." Kybemetes ; Vol. 31 ; n°6 ; pp 844-871 ; 2002.

[35] S. KHELIFA, Y. CHERRUAULT, F. SANCHEZ & S. GUELLAL : "Determination of eigenmodes in microchip lasers by Adomian decomposition method." à paraitre dans Kybernetes ; Vol. 32 ; n°7/8 ; 2003.

[36] S. LONGHI : " Theory of transverse modes in end pumped microchip lasers." J. Opt. Soc. Am. B. ; Vol. 11 ; n°6 ; pp 10981107 ; 1994.

[37] T. MAVOUNGOU & Y. CHERRUAULT : " Convergence of Adomian's method and applications to nonlinear partial differential equations." Kybernetes ; Vol. 21 ; n°6 ; pp 13-25 ; 1992.

[38] G. MORA & Y. CHERRUAULT : " Characterization and generation of o-dense curves." Computers Math. Applic. ; Vol. 33 ; n°9 ; pp 83-91 ; 1997.

[39] S. NUGIER & H. BENHADDA : " Projet d'applications de la méthode d'Adomian." Mémoire de D.E.A. de Statistiques de l'Université de Paris VI, 1993.

[40] J. RIORDAN : " An introduction to combinatorial analysis." Wiley ; 1958.

[41] J. RIORDAN : " Combinatorid identities." Wiley ; 1968.

[42] H. SAGAN : " Space filling curves." Springer-Verlag ; 1994.

[43] F. SANCHEZ & A. CHARDON : " Transverse modes in microchip lasers." J. Opt. Soc. Am. B. ; Vol. 13 ; n°12 ; 2869-2871 ; 1996.

[44] F. SANCHEZ & A. CHARDON : " Pump size optimisation in microchip lasers." Optics Comm. ; 136 ; 405-409 ; 1997.

[45] V. SENG : " Recherche de formes canoniques d' Adomian pour la résolution d'équations fonctionnelles non linéaires par la méthode décompositionnelle." Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, 1997.

[46] V. SENG, K. ABBAOUI & Y. CHERRUAULT : " Adomian's polynomials for nonlinear operators." Math. Comput. Model. ; Vol. 24 ; n°1 ; pp 59-65 ; 1996.

[47] A.-M. WAZWAZ : " Approximate solutions to boundary value problems of higher order by the modified decomposition method.", Computers and mathematics with applications ; Vol. 40 ; pp. 679-691 ; 2000.

[48] A. ZIADI & Y. CHERRUAULT : " Generation of o-dense curves in a cube of $\mathbb{R}^n$." Kybernetes ; Vol. 27 ; n°4 ; pp 416-425 ; 1998.