

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Magister en Mathématiques

Spécialité : ANALYSE (Equations aux Dérivées Partielles)

Par Mr : YUCEF MOHAMMED

Sujet :

JONCTION DE PLAQUES THERMOÉLASTIQUES

Soutenu publiquement le 15/01/2005, devant le jury composé de :

Mr D.E. TENIOU	Professeur (U.S.T.H.B)	Président.
Mr K. LEMRABET	Professeur (U.S.T.H.B)	Directeur de thèse.
Mr A. MOKRANE	Professeur (E.N.S) Kouba	Examineur.
Mr M. MORSLI	Professeur (Université T.O)	Examineur.
Mr A. HEMINNA	Maître de conférences (U.S.T.H.B)	Examineur.

Table des matières

Introduction générale	iii
1 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle	1
1.1 L'espace $L^p(a, b; X)$, $p \in [1, +\infty]$	1
1.2 Distributions vectorielles	2
1.3 Convergence faible et convergence faible*	4
1.4 Inégalité de Poincaré et formule de Green	5
1.4.1 Inégalité de Poincaré	6
1.4.2 Formule de Green	6
1.5 Un théorème de traces	6
2 Éléments d'élasticité et modèles de plaques	8
2.1 Notations	8
2.2 Lois de comportement	9
2.3 Modèle tridimensionnel de plaques thermoélastiques	10
3 Éléments de géométrie différentielle dans \mathbb{R}^2	13
3.1 Abscisse curviligne	13
3.2 Étude géométrique locale d'une courbe paramétrée	14
3.2.1 Courbure et rayon de courbure	14
3.2.2 Courbure algébrique, rayon de courbure algébrique et formules de Frenet	15
4 Modélisation asymptotique d'un problème de transmission raide dans un domaine régulier de \mathbb{R}^2	17
4.1 Problème de transmission raide	17
4.2 Formulation faible du problème (P_0) :	21
4.2.1 Conditions sur les données	21
4.2.2 Les espaces fonctionnels	21
4.3 Passage aux coordonnées locales	26
4.3.1 Dérivation sur Ω_-^ε	27
4.3.2 Intégration sur Ω_-^ε	27

4.4	Changement d'échelle	28
4.4.1	Changement d'échelle sur les fonctions	29
4.4.2	Changement d'échelle pour γ_T , γ_S et γ_N	30
4.4.3	Espaces fonctionnels sur Ω	30
4.5	Formulation variationnelle du problème (P_1) sur le domaine fixe Ω	30
4.6	Estimation à priori	32
4.7	Conséquence des estimations à priori	37
4.8	Passage à la limite et problème de Ventcel	46
4.9	Formulation forte du problème de Ventcel	50

Introduction générale

Jonction de plaques thermoélastiques

On justifie par les méthodes asymptotiques les conditions de type Ventcel pour un problème de thermoélasticité.

On considère une plaque mince d'épaisseur $2h$ (h petit devant les autres dimensions) et de surface moyenne Ω_+ . Ω_+ est un ouvert de R^2 régulier, de frontière $\partial\Omega_+ = \Sigma \cup \Gamma_+$. On suppose que sur la partie latérale est fixée une coque mince cylindrique d'épaisseur ε et de hauteur $2h$. La coque mince est alors $\bar{\Omega}_-^\varepsilon \times [-h, h]$ avec Ω_-^ε un ouvert de R^2 . On fait l'hypothèse que le module de Young E , la densité ρ , la conductivité thermique k dans Ω_-^ε sont raides en puissance de $\frac{1}{\varepsilon}$; c'est à dire que la coque mince est un raidisseur de conductivité infiniment grande sur le bord de la plaque mince. Dans la suite, h sera petit devant ε pour la justification du modèle de plaques, on fera ensuite tendre ε vers zéro. On pose $\partial\Omega_-^\varepsilon = \Sigma \cup \Sigma_-^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$ et $\Omega^\varepsilon = \Omega_+ \cup \bar{\Sigma} \cup \Omega_-^\varepsilon$.

On désigne par $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ et $g \in L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ les densités de volume, on suppose que la partie du bord $(\Gamma_+ \cup \Gamma_-^\varepsilon) \times [-h, h]$ est encadrée. On note par w le déplacement transversal (flexion) et θ la distribution de la chaleur dans la structure donnée.

On considère le modèle de thermoélasticité pour cette structure (*cf* [4]) :

$$(P) \begin{cases} \rho[I - \Delta]w'' + D\Delta^2 w + \lambda\Delta\theta & = f & \text{sur } \Omega^\varepsilon \times (0, T) \\ \rho\theta' - k\Delta\theta + \alpha\theta - \lambda\Delta w' & = g & \text{sur } \Omega^\varepsilon \times (0, T) \end{cases}$$

avec

les conditions aux limites :

encastrement et température fixée sur $(\Gamma_+ \cup \Gamma_-^\varepsilon) \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

bord libre sur $\Sigma_-^\varepsilon \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + T(w) - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} &= 0 \\ M(w) &= 0 \\ k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \lambda \frac{\partial w'}{\partial \nu} &= 0 \end{aligned}$$

transmission sur $\Sigma \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} [w] &= 0 \\ \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] &= 0 \\ [\theta] &= 0 \\ \left[\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + T(w) - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} \right] &= 0 \\ [M(w)] &= 0 \\ \left[k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \lambda \frac{\partial w'}{\partial \nu} \right] &= 0 \end{aligned}$$

et les conditions initiales sur $\Omega \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} w(0) &= w_0 \\ w'(0) &= w_1 \\ \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned}$$

où $[]$ désigne le saut à travers Σ et le signe $'$ désigne la dérivée par rapport à t .

Les coefficients ρ , k , E et σ qui sont respectivement la densité, la conductivité thermique, le module de Young et le module de Poisson donnés par :

$$\rho = \begin{cases} \rho_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{\rho_-}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases} \quad \sigma = \begin{cases} \sigma_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \sigma_- & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} k_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{k_-}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases} \quad E = \begin{cases} E_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{E_-}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases}$$

λ est le facteur de couplage du système d'élasticité et de l'équation de la chaleur défini par :

$$\lambda = \frac{1}{2}D$$

où

$$D = \frac{E}{1 - \sigma^2}$$

Le coefficient α est défini par

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases}$$

Les opérateurs M et T sont définis par :

$$M(w) = D \left(\Delta w + (1 - \sigma) \left(2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right)$$

$$T(w) = D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left((\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \right]$$

où s est l'abscisse curviligne et $\nu(s)$ la normale extérieure à Σ en s .

Le modèle considéré est le modèle de transmission raide de thermoélasticité, il peut être formulé de façon variationnelle. On montre grâce à la méthode de Faedo-Galerkin (*cf* [1], [2] et [9]) qu'il admet une solution faible. On utilise le système de coordonnées locales dans Ω_-^ε . On désigne par $R(s)$ le rayon de courbure de Σ en s et par $\tau(s)$ le vecteur unitaire tangent à Σ en s . On procède ensuite par changement d'échelle (*cf* [6]) dans l'épaisseur de Ω_-^ε pour se ramener à une forme définie sur un ouvert fixe et dont la dépendance en ε est explicite. On désigne par φ^ε l'image de φ , et on pose (après changement d'échelle) :

$$\gamma_T^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = \frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial \varphi_-^\varepsilon}{\partial s} \right) - \frac{1}{\varepsilon (R(s) - \varepsilon z)} \frac{\partial \varphi_-^\varepsilon}{\partial z}$$

$$\gamma_S^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial \varphi_-^\varepsilon}{\partial s} \right)$$

$$\gamma_N^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = \frac{\partial^2 \varphi_-^\varepsilon}{\partial z^2}$$

Estimations à priori

On montre qu'il existe une constante positive C indépendante de ε telle que :

$$\begin{aligned} \|w_+^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega_+))} &\leq C, \quad \|w_-^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega_-))} \leq C, \\ \|(w_-^\varepsilon)'\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega_+))} &\leq C, \quad \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_+))} \leq C, \\ \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} &\leq C, \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z} \right)' \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} \leq C, \\ \|\gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} &\leq C, \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon} \gamma_S^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} \leq C, \\ \left\| \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} &\leq C, \quad \int_0^T \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \leq C, \end{aligned}$$

$$\int_0^T \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C, \int_0^T \|\nabla\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \leq C,$$

$$\int_0^T \left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\theta_-^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C, \int_0^T \left\| \frac{\partial\theta_-^\varepsilon}{\partial s} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C.$$

Ces estimations se déduisent de la formulation faible du problème (P) sur laquelle on a effectuée d'abord un changement de variables et d'échelle, on applique ensuite les techniques classiques de l'inégalité de l'énergie.

Ces estimations serviront par la suite à contrôler le comportement de la solution par rapport au paramètre ε et justifier le passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Passage à la limite et modèle de Ventcel

On suppose que :

$$\left(f_+^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 f_-^\varepsilon dz \right) \text{ converge faiblement vers } (f_+, f^*) \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_+) \times L^2(\Sigma))$$

$$\left(g_+^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 g_-^\varepsilon dz \right) \text{ converge faiblement vers } (g_+, g^*) \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_+) \times L^2(\Sigma)).$$

$$\left(w_{o+}^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 w_{o-}^\varepsilon dz \right) \text{ converge faiblement vers } (w_{o+}, w_{o+} | \Sigma) \text{ dans } H^2(\Omega_+) \times H_o^2(\Sigma)$$

$$\left(w_{1+}^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 w_{1-}^\varepsilon dz \right) \text{ converge faiblement vers } (w_{1+}, w_{1+} | \Sigma) \text{ dans } H^2(\Omega_+) \times H_o^2(\Sigma).$$

$$\left(\theta_{o+}^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 \theta_{o-}^\varepsilon dz \right) \text{ converge faiblement vers } (\theta_{o+}, \theta_{o+} | \Sigma) \text{ dans } L^2(\Omega_+) \times L^2(\Sigma).$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \partial_z w_{1-}^\varepsilon dz \text{ converge vers } w_2 \text{ faiblement dans } L^2(\Sigma).$$

Alors la suite $(w_+^\varepsilon, \theta_+^\varepsilon)$ converge vers l'unique solution faible (w_+, θ_+) du problème de Cauchy-Ventcel suivant :

$$\begin{cases} \rho_+ (I - \Delta) w_+'' + D_+ \Delta^2 w_+ + \lambda_+ \Delta \theta & = f_+ \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T) \\ \rho_+ \theta_+' - k_+ \Delta \theta_+ + \theta_+ - \lambda_+ \Delta w_+' & = g_+ \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T) \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

- encastrement et température fixée sur $\Gamma_+ \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

- conditions de Ventcel sur $\Sigma \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} \rho_+ \partial_t^2 \partial_\nu w_+ + \rho_- \partial_t^2 (w_+ - \partial_s^2 w_+) + T_+ (w_+) + P(w_+) + \lambda_- \partial_s^2 \theta_+ - \lambda_+ \partial_\nu \theta_+ &= f^* \\ \lambda_+ \partial_t \partial_\nu w_+ - \lambda_- \partial_t \partial_s^2 w_+ + \rho_- \partial_t \theta_+ + k_+ \partial_\nu \theta_+ - k_- \partial_s^2 \theta_+ + \theta_+ &= g^* \\ \rho_- \partial_t^2 \partial_\nu w_+ + M_+ (w_+) + Q(w_+) - \lambda_- \partial_\nu \theta_+ &= 0 \end{aligned}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} w_+(0) &= w_o \text{ dans } \Omega_+ \\ w_+'(0) &= w_1 \text{ dans } \Omega_+ \\ \partial_t \partial_\nu w_+(0) &= w_2 \text{ sur } \Sigma \\ \theta_+(0) &= \theta_o \text{ dans } \Omega_+ \end{aligned}$$

les opérateurs P , Q , T_+ et M_+ sont définis par

$$\begin{aligned} P(w) &= E_- \left[\partial_s^2 \gamma_T(w) + \frac{2}{1 + \sigma_-} \cdot \partial_s \left(\frac{1}{R(s)} \gamma_s(w) \right) \right] \\ Q(w) &= E_- \left[\frac{2}{1 + \sigma_-} \partial_s \left(\frac{1}{R(s)} \gamma_s(w) \right) - \frac{1}{R(s)} \gamma_T(w) \right] \\ T_+(w) &= D_+ \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \sigma_+) \frac{\partial}{\partial s} \left[(\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right] \\ M_+(w) &= D_+ \left[\Delta w + (1 - \sigma_+) \left(2 \nu_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned}$$

où

$$\gamma_T(w_+) = \frac{\partial^2 w_+}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w_+}{\partial \nu}$$
$$\gamma_S(w_+) = - \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial w_+}{\partial \nu} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_+}{\partial s} \right)$$

Ce type de conditions aux limites n'est pas classique, il traduit l'effet du raidisseur sur le déplacement et la propagation de la chaleur dans le corps élastique (*cf* [7], [8] et [9]).

Le plan de travail suivi dans l'étude de ce problème est le suivant :

Au chapitre I, on rappelle quelques éléments d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés par la suite.

Au chapitre II, on donne un aperçu des notions d'élasticité .

Au chapitre III, on rappelle des notions de géométrie différentielle intrinsèque nécessaires pour l'étude des coques minces.

Au chapitre IV, on justifie par des techniques asymptotiques un modèle de Ventcel pour l'étude de la jonction d'une plaque thermoélastique avec un raidisseur infiniment conducteur sur le bord.

Chapitre 1

Quelques éléments d'analyse fonctionnelle

Le problème que nous traitons dépend du temps, nous allons rappeler quelques résultats sur les distributions à valeurs vectorielles (cf [2])

1.1 L'espace $L^p(a, b; X)$, $p \in [1, +\infty]$

Définition 1.1 Soit X un espace de Banach, p un élément de $[1, +\infty]$, $]a, b[$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X , et on note $L^p(a, b; X)$ l'espace des (classes de) fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f :]a, b[& \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$$

mesurables telles que :

1. Si $1 \leq p < +\infty$: $\left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_p < +\infty$.
2. Si $p = +\infty$: $\sup_{t \in]a, b[} \text{ess} \|f(t)\|_X = \|f\|_\infty < +\infty$.

Propriétés

1. L'espace $L^p(a, b; X)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$.

2. Si l'espace X est de plus réflexif alors le dual de $L^p(a, b; X)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^q(a, b; X')$ pour $1 < p < +\infty$ et q vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
3. Si X et Y désignent deux espaces de Banach, X inclus dans Y avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(a, b; X)$ dans $L^p(a, b; Y)$.
4. Si Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^n alors on a l'équivalence algébrique et topologique entre les espaces $L^p(a, b; L^p(\Omega))$ et $L^p((a, b) \times \Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

On introduit alors les distributions vectorielles :

1.2 Distributions vectorielles

Définition 1.2 Soit $]0, T[$ un intervalle de \mathbb{R} et X un espace vectoriel normé

On appelle espace de distribution sur $]0, T[$ à valeurs dans X et on le note $D'(0, T; X)$ l'espace des applications linéaires continues de $D(]0, T[)$ dans X .

Pour tout f de $D'(0, T; X)$ et tout φ de $D(]0, T[)$ la valeur de f en φ notée $\langle f, \varphi \rangle$ appartient à X .

Propriétés

1. Dérivation :

Soit f un élément de $D'(0, T; X)$; la dérivée de f notée f' la distribution définie par :

$$\begin{aligned} f' : D(]0, T[) &\rightarrow X \\ \varphi &\longmapsto \langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle. \end{aligned}$$

2. Distribution régulière :

Soit maintenant $L^1_{loc}(0, T; X)$, l'espace des (classes de) fonctions f telles que : pour tout compact $K \subset]0, T[$, $\chi_K f \in L^1(0, T; X)$, où χ_K désigne la fonction caractéristique du compact K .

Si f appartient à $L^1_{loc}(0, T; X)$, on peut lui associer une distribution dite distribution régulière associée à f , encore notée f et définie par :

$$\begin{aligned} f : D(]0, T[) &\rightarrow X \\ \varphi &\longmapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

appartient à $L^p(0, T; X) \subset L^1_{loc}(0, T; X)$.

Proposition 1.1 *Les fonctions $u, v \in L^1_{loc}(0, T; X)$ définissent la même distribution si et seulement si u et v sont scalairement presque partout égales i.e si X' désigne le dual de X ;*

$\forall f \in X' : \text{les fonctions } t \mapsto \langle f, u(t) \rangle_{X' \times X} \text{ et } t \mapsto \langle f, v(t) \rangle_{X' \times X} \text{ sont p.p égales.}$

Notation :

Soient V et W deux espaces de Banach avec

$$V \hookrightarrow W$$

l'injection de V dans W étant continue et à image dense. On note pour p élément de $[1, +\infty]$:

$$W_p(0, T; V, W) = \{f \in L^p(0, T; V) / f' \in L^p(0, T; W)\}.$$

$W_p(0, T; V, W)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|^2 = \|f\|_{L^p(0, T; V)}^2 + \|f'\|_{L^p(0, T; W)}^2.$$

L'intérêt d'appartenir à un tel espace est d'avoir des propriétés de régularité, plus précisément :

Proposition 1.2 *Soient V et H deux espaces de Hilbert séparables, V inclus dans H avec injection continue et densité, le dual de V est noté V' ; alors on a l'injection canonique continue des espaces suivants :*

$$W_2(0, T; V, V') \hookrightarrow C([0, T]; H)$$

où $C([0, T]; H)$ est l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H .

Remarque 1.1 *Les propositions 1 et 2 permettent de définir $f(0)$ et $f(T)$.*

Notons par $D(\mathbb{R}; V)$ l'espace de fonctions C^∞ définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans V et à support compact.

Proposition 1.3 *Soit $D([0, T]; V)$ l'espace des restrictions à $[0, T]$ des fonctions de $D(\mathbb{R}; V)$ alors*

$$D([0, T]; V) \text{ est dense dans } W_2(0, T; V, V')$$

Proposition 1.4 *Soit V un espace de Hilbert séparable et V' son dual, pour tout f de $W_2(0, T; V, V')$ et tout $v \in V$ on a :*

$$\langle f'(\cdot), v \rangle = \frac{d}{dt} \langle f(\cdot), v \rangle \quad \text{dans } D'([0, T])$$

1.3 Convergence faible et convergence faible*

Soit X un espace de Banach, X' son dual.

Définition 1.3 (Convergence faible) On dit qu'une suite (x_n) de X converge faiblement dans X vers x si l'on a :

$$\langle x', x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x', x \rangle \quad \forall x' \in X'.$$

Proposition 1.5 Soit X un espace de Banach réflexif.

(x_n) une suite bornée dans X , alors il est possible d'extraire de (x_n) une sous suite (x'_n) qui converge faiblement dans X .

Définition 1.4 (Convergence faible*) Soit X un espace normé et X' son dual.

On dit qu'une suite $(x'_n) \subset X'$ converge faiblement* vers $x' \in X'$ si

$$\langle x'_n, x \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x', x \rangle \quad \forall x \in X.$$

Remarque 1.2 Soit V un espace de Banach séparable, réflexif et V' son dual.

Soit (f_n) une suite d'éléments de $L^\infty(0, T; V')$.

Dire que $f_n \rightarrow f$ dans $L^\infty(0, T; V')$ faiblement* signifie que :

$$\int_0^T \langle f_n(t), g(t) \rangle dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt \quad \forall g \in L^1(0, T; V).$$

Proposition 1.6 Soit X un espace normé séparable et (x'_n) une suite bornée dans X' , alors il est possible d'extraire de (x'_n) une sous suite (x'_m) telle que $x'_m \rightarrow x' (\in X')$ dans X' muni de la topologie faible*.

Proposition 1.7 Soit X un espace de Banach réflexif.

Soit (x_n) une suite d'éléments de X telle que :

- (i) $\|x_n\| \leq C < +\infty \quad \forall n$ (C une constante).
- (ii) l'ensemble des points d'accumulation de (x_n) pour la topologie faible est réduit à $\{x\}$

alors la suite (x_n) converge vers x dans X faible.

Proposition 1.8 Soit X un espace de Banach séparable, (x'_n) une suite d'éléments de X' , on suppose :

- (i) $\|x'_n\| \leq C < +\infty \quad \forall n$ (C une constante).
(ii) l'ensemble des points d'accumulation de (x'_n) pour la topologie faible $*$ est réduit à $\{x'\}$
Alors (x'_n) converge vers x' dans X' faible $*$.

Lemme 1 (de Gronwall) Soit T un réel positif, c une constante positive f et g deux fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} f \in L^\infty(0, T), & f(t) \geq 0 \quad p.p.t \\ g \in L^1(0, T), & g(t) \geq 0 \quad p.p.t \end{cases}$$

et

$$f(t) \leq \int_0^t g(s)f(s)ds + c \quad p.p.t \quad (1-1)$$

Alors f vérifie :

$$f(t) \leq c \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)$$

Lemme 2 Soient deux espaces de Hilbert V et H , V' le dual de V tels que

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

avec des injections continues et denses.

Alors, pour tout $u \in L^2(0, T; V)$ tel que $u' \in L^2(0, T; V')$ on a :

$$\|u\|_H^2 \in W^{1,1}([0, T]) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} (\|u\|_H^2) = 2 \langle u, u' \rangle_{V, V'}$$

où

$$W^{1,1}([0, T]) = \{\varphi \in L^1([0, T]) / \partial_t \varphi \in L^1([0, T])\}$$

1.4 Inégalité de Poincaré et formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et Γ une partie de sa frontière telle que $mes(\Gamma) > 0$.

1.4.1 Inégalité de Poincaré

Il existe une constante positive C (dépendant seulement du diamètre de Ω) telle que pour tout w dans $H^1(\Omega)$ tel que $w = 0$ sur Γ :

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

1.4.2 Formule de Green

Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

et $u, v \in W_2(0, T; V, V')$ alors (cf [2])

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t) \rangle_{V' \times V} dt + \int_a^b \langle v'(t), u(t) \rangle_{V' \times V} dt = (u(b), v(b)) - (u(a), v(a))$$

où $(,)$ est le produit scalaire dans H , soient alors

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t) \rangle_{V' \times V} dt + \int_a^b \langle v'(t), u(t) \rangle_{V' \times V} dt = (u(b), v(b)) - (u(a), v(a))$$

1.5 Un théorème de traces

Définition 1.5 Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière régulière Σ .

On pose

$$E(\Omega) = \{\varphi \in H^2(\Omega), \Delta^2 \varphi \in L^2(\Omega)\}.$$

$E(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_{E(\Omega)}^2 = \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\Delta^2 \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

est un espace de Hilbert.

Posons pour $w \in H^2(\Omega)$

$$M(w) = D \left(\Delta w + (1 - \sigma)(2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \right)$$

$$T(w) = D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left((\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \right]$$

$$B(w, \varphi) = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] d\Omega$$

Théoreme 1.1 (cf [8])

Nous avons :

1. $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $E(\Omega)$
2. L'application $w \mapsto (M(w) ; T(w))$ définie sur $D(\bar{\Omega})$ se prolonge en une application linéaire continue de $E(\Omega)$ dans le dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \times H^{\frac{3}{2}}(\Sigma)$.

Nous avons de plus

$$\int_{\Omega} \Delta^2 w \varphi d\Omega - B(w, \varphi) = \langle M(w) , \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \rangle_{(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^* \times H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} - \langle T(w) , \varphi \rangle_{(H^{\frac{3}{2}}(\Sigma))^* \times H^{\frac{3}{2}}(\Sigma)}$$

Chapitre 2

Eléments d'élasticité et modèles de plaques

2.1 Notations

On considère une plaque de surface moyenne Ω (ouvert borné de \mathbb{R}^2 , de frontière régulière $\Gamma_0 \cup \Gamma$ avec $mes(\Gamma) > 0$) et d'épaisseur $2h$ (h petit devant les autres dimensions).

On suppose que la plaque est soumise à des forces de volumes de densités $f = (f_i)$, $1 \leq i \leq 3$

$$f_i : \Omega \times [-h, h] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sous l'effet de ces forces, la plaque se déforme.

On note par $u(M, t)$ le vecteur déplacement au point M de $\bar{\Omega}$ à l'instant t , $u = (u_i)_{1 \leq i \leq 3}$

$$u_i : \Omega \times [-h, h] \longrightarrow \mathbb{R}$$

On suppose que pour tout $t \in]0, T[$ cette plaque est encadrée sur la partie du bord $\Gamma_0 \times]-h, h[$, ce qui correspond à l'idée que cette partie est d'une façon ou d'une autre fixée à un support rigide.

On considère donc des champs de déplacements compatibles avec cette condition d'attache ($u_i = 0$ sur $\Gamma_0 \times]-h, h[$).

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le déplacement et la vitesse de la plaque sont donnés.

On désigne par $\sigma = (\sigma_{ij})$ le tenseur des contraintes, Il s'agit d'un tenseur symétrique 3×3 qui mesure les efforts internes s'exerçant dans la plaque du fait de sa déformation et $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ le tenseur des déformations (*cf* [5])

2.2 Lois de comportement

Dans ce qui suit, on utilise la convention de sommation sur les indices répétés.

Un comportement thermoélastique caractérise un milieu pour lequel la dissipation intrinsèque est toujours identiquement nulle (caractéristique des milieux élastiques), mais la dissipation thermique est en général différente de zéro.

Les variables thermodynamiques naturelles sont ici le tenseur des déformations et la température T .

On se situe dans l'hypothèse des petites perturbations, ce qui implique en particulier que l'on puisse remplacer le tenseur des déformations par sa partie linéaire de composantes

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

On suppose que T est mesurée à partir d'une température uniforme T_0 .

On pose alors

$$\theta = T - T_0$$

Cette quantité étant aussi supposée petite.

La loi de comportement s'exprime par une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations, dans le cas où la plaque considérée est homogène et isotrope la loi de comportement prend la forme :

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \varepsilon_{ij}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) - 3K \alpha \theta \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

(λ est le coefficient de Lamé et K est le module de rigidité à la compression).
ou bien

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{ij}(u) - \frac{\mu}{E} \sigma_{kk}(u) \delta_{ij} + \alpha \theta \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

L'interprétation des coefficients sera donnée plus loin.

2.3 Modèle tridimensionnel de plaques thermoélastiques

La plaque vérifie les équations 3D :

loi de comportement :

$$\varepsilon_{ij}(u) - \alpha\theta\delta_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij}(u) - \frac{\mu}{E}\sigma_{kk}(u)\delta_{ij} \quad \text{dans } \Omega \times [-h, h]$$

l'équation du mouvement :

$$\rho\partial_t^2 u_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} + f_i \quad \text{dans } \Omega \times [-h, h]$$

l'équation d'estimation de l'énergie :

$$\beta\partial_t\theta = \frac{k}{T_0}\partial_{jj}\theta - \frac{E\alpha}{1-2\mu}\varepsilon_{ij}(\partial_t u) \quad \text{dans } \Omega \times [-h, h]$$

où

E est le module de Young.

α est le coefficient de dilatation thermique, indépendant de θ (hypothèse des petites perturbations).

T_0 est une température de référence supposée connue.

θ est l'écart, par rapport à T_0 , de la température à l'intérieur de la plaque.

μ est le coefficient de Poisson.

ρ est la densité de masse.

f_i désignent les composantes de la densité de forces volumiques.

β est le coefficient de chaleur spécifique.

k est le coefficient de conductivité de la chaleur.

u est le champ de déplacement.

Conditions aux bord :

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= 0 & \text{sur } \Omega \times \{-h, h\} \\ k\frac{\partial\theta}{\partial x_3} + \gamma(\theta - \theta^l) &= q^l & \text{sur } \Omega \times \{-h, h\} \\ \theta &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times [-h, h] \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times [-h, h] \end{aligned}$$

où

$\gamma \geq 0$ est un coefficient donné.

$\theta^l \quad l = 1, 2$ sont deux températures supposées connues.

q^l $l = 1, 2$ est la composante verticale du flux de chaleur sur $\Omega \times \{-h, h\}$ supposée connu.

ν est le vecteur normal extérieur à la plaque en un point de sa surface.

Conditions initiales :

$$u(0) = u_0$$

$$\partial_t u(0) = u_1$$

$$\theta(0) = \theta_0$$

Remarque 2.1 *La condition aux limites*

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \nu_3 + \gamma (\theta - \theta^l) = q^l \quad \text{sur } \Omega \times \{-h, h\}$$

est une condition aux limites de flux, couramment utilisée pour traduire les échanges de chaleurs.

Les caractéristiques géométriques de la plaque mince autorisent des simplifications dans le modèle tridimensionnel et permettent ainsi de le ramener à un modèle bidimensionnel formulé sur la surface moyenne de cette plaque.

On note par w le déplacement transversal (flexion) et f et g les forces de volume exercées sur la plaque. On suppose, pour simplifier, que les forces de surfaces sont nulles.

Le modèle linéaire de thermoélasticité est alors donné par :

$$\begin{aligned} \rho[I - \Delta]w'' + D\Delta^2 w + \lambda\Delta\theta &= f & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ \rho\theta' - k\Delta\theta + \theta - \lambda\Delta w' &= g & \text{sur } \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites :

encastrement sur $\Gamma_0 \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

bord libre $\Gamma \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + T(w) - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} &= 0 \\ M(w) &= 0 \\ k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \lambda \frac{\partial w'}{\partial \nu} &= 0 \end{aligned}$$

conditions initiales :

$$\begin{aligned} w(0) &= w_0 & \text{sur } \Omega \\ w'(0) &= w_1 & \text{sur } \Omega \\ \theta(0) &= \theta_0 & \text{sur } \Omega \end{aligned}$$

Le signe ' désigne la dérivée par rapport à t . Les coefficients ρ , k sont respectivement la densité de masse et la conductivité thermique, le coefficient λ est donné par

$$\lambda = \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \frac{E}{1 - \mu^2}$$

où E est le module de Young et μ est le module de Poisson. Les opérateurs de traces M et T sont définis par :

$$M(w) = D \left(\Delta w + (1 - \mu)(2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \right)$$

$$T(w) = D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left((\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \right].$$

où

$\nu = (\nu_1, \nu_2)$ étant la normale extérieure à Γ et $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$.

Chapitre 3

Eléments de géométrie différentielle dans \mathbb{R}^2

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques éléments de géométrie différentielle (*cf* [3])

3.1 Abscisse curviligne

Définition 3.1 Soit Σ une courbe de \mathbb{R}^2 de classe C^2 et (I, M) une représentation paramétrique de Σ ($I \subset \mathbb{R}$). Pour tout $t \in I$, le nombre réel

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|M(\zeta)\| d\zeta$$

est appelé *abscisse curviligne* du point $m = M(t)$ avec $m_0 = M(t_0)$ pour origine.

Remarque 3.1 1) L'application $s : I \longrightarrow s(I)$ est un homéomorphisme de classe C^1

2) L'abscisse curviligne s mesure la longueur de la courbe Σ du point m_0 au point m et elle est indépendante de la paramétrisation choisie.

3) L'application P définie de $s(I)$ dans Σ par $P = M \circ s^{-1}$ est un reparamétrage de Σ par l'abscisse curviligne s .

Proposition 3.1 *Soit Σ une courbe paramétrée de classe C^2 . Le reparamétrage $P = M \circ s^{-1}$ est un C^2 paramétrage et on a :*

$$\left\| \frac{dP}{ds} \right\| = 1$$

3.2 Etude géométrique locale d'une courbe paramétrée

3.2.1 Courbure et rayon de courbure

Soit (Σ, M) une courbe paramétrée de classe C^2 et P un reparamétrage de Σ par une abscisse curviligne s .

Définition 3.2 *La courbe Σ est dite birégulière au point $m = M(t)$ si $M'(t)$ et $M''(t)$ sont linéairement indépendants.*

Définition 3.3 *On appelle courbure au point m le nombre réel, noté $\rho(s)$*

$$\rho(s) = \left\| \frac{d^2 P}{ds^2} \right\|$$

Si Σ est birégulière au point m , on appelle rayon de courbure en m l'inverse de la courbure en m .

Le rayon de courbure se note :

$$r(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$

Remarque 3.2 *La courbure ne dépend pas de la paramétrisation choisie.*

3.2.2 Courbure algébrique, rayon de courbure algébrique et formules de Frenet

Soit (Σ, M) une courbe paramétrée de classe C^2 et birégulière en tout point $P(s)$ (P désignant toujours le reparamétrage de Σ par une abscisse curviligne s).

On pose :

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{dP}{ds}$$

$\boldsymbol{\tau}(s)$ est donc un vecteur unitaire tangent à Σ au point $P(s) = M \circ s^{-1}(s)$.

On désigne par $\boldsymbol{\nu}(s)$ le vecteur se déduisant de $\boldsymbol{\tau}(s)$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

a) Courbure algébrique

En dérivant le produit scalaire $\|\boldsymbol{\tau}(s)\|^2 = 1$ on obtient :

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0 \quad (3-1)$$

Il existe alors une fonction $\rho_1(s) : s(I) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \rho_1(s)\boldsymbol{\nu}(s) \quad (3-2)$$

Par comparaison avec la définition de la courbure on déduit que :

$$\rho(s) = |\rho_1(s)| \quad (3-3)$$

Définition 3.4 La fonction ρ_1 est appelée courbure algébrique de Σ .

b) Rayon de courbure algébrique

On appelle rayon de courbure algébrique le nombre réel

$$R(s) = \frac{1}{\rho_1(s)}$$

c) Formules de Frenet

En dérivant la relation $\tau(s)\nu(s) = 0$ on obtient :

$$\frac{d\tau}{ds}\nu(s) + \tau(s)\frac{d\nu}{ds}(s) = 0$$

En tenant compte de (3.2) on tire alors :

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{ds}(s) &= \frac{1}{R(s)}\nu(s) \\ \frac{d\nu}{ds}(s) &= -\frac{1}{R(s)}\tau(s)\end{aligned}$$

Ces formules sont appelées formules de Frenet.

Chapitre 4

Modélisation asymptotique d'un problème de transmission raide dans un domaine régulier de \mathbb{R}^2

Introduction

Dans ce chapitre, on justifie par des techniques asymptotiques un modèle d'évolution linéaire pour une plaque mince thermoélastique avec un raidisseur infiniment conducteur sur le bord. En partant d'un problème de transmission raide dépendant d'un petit paramètre ε (ε étant l'épaisseur du raidisseur), on aboutit par passage à la limite à un modèle avec conditions aux limites de type Ventcel. Ces conditions modélisent l'effet du raidisseur sur la plaque mince.

4.1 Problème de transmission raide

On modélise ici un problème de thermoélasticité pour une plaque mince avec un raidisseur sur son bord.

Soit Ω_+ un ouvert borné de \mathbb{R}^2 représentant la plaque de bord régulier

$$\partial\Omega_+ = \bar{\Sigma} \cup \bar{\Gamma}_+$$

où Σ est une partie ouverte, connexe et de mesure non nulle.

Soit s une abscisse curviligne sur Σ ; on note $\boldsymbol{\nu}(s)$ la normale extérieure et $\boldsymbol{\tau}(s)$ le vecteur unitaire tangent à Σ en s de telle sorte que $(\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s))$ soit

4. Modélisation asymptotique d'un problème de transmission raide dans un domaine régulier de \mathbb{R}^2 18

direct.

On considère l'ouvert Ω_-^ε de \mathbb{R}^2 défini par :

$$\Omega_-^\varepsilon = \{M(s, z) ; s \in \Sigma ; 0 < z < \varepsilon\}$$

où $M(s, z)$ est le point de coordonnées $(0, z)$ dans le repère local $(s, \boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s))$ et $\varepsilon > 0$ est un paramètre destiné à tendre vers zéro.

On pose :

$$\partial\Omega_-^\varepsilon = \Sigma \cup \Sigma_-^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$$

où

$$\Sigma_-^\varepsilon = \{M(s, \varepsilon) ; s \in \Sigma\} \text{ et } \Gamma_-^\varepsilon = \partial\Omega_-^\varepsilon \setminus (\Sigma \cup \Sigma_-^\varepsilon).$$

On note $R(s)$ le rayon de courbure de Σ en s et on fait l'hypothèse dite des coques minces :

$$\varepsilon \max \left\{ \frac{1}{|R(s)|} ; s \in \Sigma \right\} < 1$$

de sorte que la correspondance :

$$\begin{aligned} \Sigma \times]0, \varepsilon[&\rightarrow \Omega_-^\varepsilon \\ (s, z) &\rightarrow M(s, z) \end{aligned}$$

soit bijective.

On pose alors

$$\Omega^\varepsilon = \Omega_+ \cup \bar{\Sigma} \cup \Omega_-^\varepsilon$$

Les propriétés physiques des différents milieux constituant les domaines Ω_+ et Ω_-^ε sont décrites à partir des constantes ρ , k , E et σ qui sont respectivement la densité, la conductivité thermique, le module de Young et le module de Poisson.

On fait l'hypothèse que le module de Young, la densité et la conductivité thermique sont discontinues et raides en puissance $\frac{1}{\varepsilon}$ dans Ω_-^ε c'est à dire que la coque mince $\Omega_-^\varepsilon \times]-h, h[$ est un raidisseur sur le bord de la plaque infiniment conducteur de la chaleur, on suppose aussi que le coefficient de Poisson est indépendant de ε :

$$\rho = \begin{cases} \rho_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{\rho_-}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases} \quad \sigma = \begin{cases} \sigma_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \sigma_- & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} k_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{k_-}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases} \quad E = \begin{cases} E_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{E_-}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases}$$

Le système de la thermoélasticité pour la plaque mince de surface moyenne Ω^ε est un système de deux équations liant la flexion w et la température θ .

$$(P_0) \begin{cases} \rho[I - \Delta]w'' + D\Delta^2 w + \lambda\Delta\theta = f & \text{sur } \Omega^\varepsilon \times (0, T) \\ \rho\theta' - k\Delta\theta + \alpha\theta - \lambda\Delta w' = g & \text{sur } \Omega^\varepsilon \times (0, T) \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + T(w) - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} &= 0 & \text{sur } \Sigma_-^\varepsilon \times (0, T) \\ M(w) &= 0 & \text{sur } \Sigma_-^\varepsilon \times (0, T) \\ k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \lambda \frac{\partial w'}{\partial \nu} &= 0 & \text{sur } \Sigma_-^\varepsilon \times (0, T) \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 & \text{sur } (\Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_+) \times (0, T) \\ \theta &= 0 & \text{sur } (\Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_+) \times (0, T) \end{aligned}$$

et les conditions de transmission sur $\Sigma \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} \left[\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + T(w) - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} \right] &= 0 \\ \left[k \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \lambda \frac{\partial w'}{\partial \nu} \right] &= 0 \\ [M(w)] &= 0 \\ \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] &= 0 \\ [w] &= 0 \\ [\theta] &= 0 \end{aligned}$$

et les conditions initiales sur $\Omega^\varepsilon \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} w(0) &= w_0 \\ w'(0) &= w_1 \\ \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned}$$

λ est le facteur de couplage de l'équation d'élasticité et de l'équation de la chaleur défini par :

$$\lambda = \frac{1}{2} D$$

où

$$D = \frac{E}{1 - \sigma^2}$$

et le coefficient α est donné par

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \end{cases}$$

Les opérateurs de traces M et T sont définis par :

$$M(w) = D \left(\Delta w + (1 - \sigma)(2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \right)$$

$$T(w) = D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left((\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \right]$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ désigne la dérivée normale.

$\nu(s)$ la normale extérieure à Σ en s de composantes ν_1 et ν_2 .

4.2 Formulation faible du problème (P_0) :

4.2.1 Conditions sur les données

On suppose que les densités de forces de volumes :

$$f \text{ et } g \text{ sont dans } L^1(0, T ; L^2(\Omega^\varepsilon))$$

et que les données initiales

$$w_0, w_1 \text{ et } \theta_0 \text{ sont respectivement dans } W(\Omega^\varepsilon), V(\Omega^\varepsilon) \text{ et } L^2(\Omega^\varepsilon)$$

4.2.2 Les espaces fonctionnels

On considère les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} W(\Omega^\varepsilon) & : = \left\{ w \in H^2(\Omega^\varepsilon) ; w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_-^\varepsilon \right\}, \\ V(\Omega^\varepsilon) & : = \left\{ w \in H^1(\Omega^\varepsilon) ; w = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_-^\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

On munit ces espaces respectivement des normes :

$$\|\cdot\|_{H^2(\Omega^\varepsilon)} \text{ et } \|\cdot\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} .$$

On note par

$$(w, \varphi)_\Omega = \int_\Omega w \varphi d\Omega \quad \text{le produit scalaire dans } L^2(\Omega).$$

$$a(w, \varphi) = \int_\Omega \nabla w \nabla \varphi d\Omega,$$

$$\begin{aligned} b(w, \varphi) = D \int_\Omega & \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] d\Omega \end{aligned}$$

$$L(\varphi, \psi) = \int_\Omega (f\varphi + g\psi) d\Omega$$

La formulation variationnelle du Problème (P_0) s'écrit alors :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} w \in L^\infty(0, T; W(\Omega^\varepsilon)) \quad w' \in L^\infty(0, T; V(\Omega^\varepsilon)) \\ \theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)) \cap L^2(0, T; V(\Omega^\varepsilon)) \\ \frac{d}{dt} \{ \rho(w', \varphi)_{\Omega^\varepsilon} + \rho a(w', \varphi) + \rho(\theta, \psi)_{\Omega^\varepsilon} + \lambda a(w, \psi) \} \\ + k a(\theta, \psi) + b(w, \varphi) - \lambda a(\theta, \varphi) + \alpha(\theta, \psi)_{\Omega^\varepsilon} = L(\varphi, \psi) \\ \forall (\varphi, \psi) \in W(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \\ w(0) = w_0 \\ w'(0) = w_1 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{array} \right.$$

$\frac{d}{dt}$ est prise au sens des distributions i.e $D'([0, T[)$.

Remarque 4.1 Chacune des formes $(\theta, \psi)_{\Omega^\varepsilon}$, $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ et $L(\varphi, \psi)$ est somme d'une forme définie sur Ω_+ et d'une autre forme définie sur Ω_-^ε . Ainsi on a

$$(\cdot, \cdot)_{\Omega^\varepsilon} = (\cdot, \cdot)_{\Omega_+} + (\cdot, \cdot)_{\Omega_-^\varepsilon}, a(\cdot, \cdot) = a_+(\cdot, \cdot) + a_-(\cdot, \cdot), b(\cdot, \cdot) = b_+(\cdot, \cdot) + b_-(\cdot, \cdot) \text{ et } L(\cdot, \cdot) = L_+(\cdot, \cdot) + L_-(\cdot, \cdot).$$

avec

$$a_+(w, \varphi) = \int_{\Omega_+} \nabla w \nabla \varphi d\Omega_+.$$

$$a_-(w, \varphi) = \int_{\Omega_-^\varepsilon} \nabla w \nabla \varphi d\Omega_-^\varepsilon.$$

$$b_+(w_+, \varphi_+) = D_+ \int_{\Omega_+} \left[\left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial x^2} + \sigma_+ \frac{\partial^2 w_+}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + 2(1 - \sigma_+) \frac{\partial^2 w_+}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial y^2} + \sigma_+ \frac{\partial^2 w_+}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial y^2} \right] d\Omega_+$$

$$b_-(w_-, \varphi_-) = \frac{D_-}{\varepsilon} \int_{\Omega_-^\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial^2 w_-}{\partial x^2} + \sigma_- \frac{\partial^2 w_-}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x^2} + 2(1 - \sigma_-) \frac{\partial^2 w_-}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w_-}{\partial y^2} + \sigma_- \frac{\partial^2 w_-}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial y^2} \right] d\Omega_-^\varepsilon$$

$$L_+(\varphi_+, \psi_+) = \int_{\Omega_+} (f_+ \varphi_+ + g_+ \psi_+) d\Omega_+$$

$$L_-(\varphi_-, \psi_-) = \int_{\Omega_-^\varepsilon} (f_- \varphi_- + g_- \psi_-) d\Omega_-^\varepsilon.$$

Théoreme 4.1 (d'existence et d'unicité)

Le problème variationnel (P_1) admet une unique solution.

Preuve. Les espaces

$$W(\Omega^\varepsilon) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega^\varepsilon) ; \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_-^\varepsilon \right\}$$

$$V(\Omega^\varepsilon) := \{ \psi \in H^1(\Omega^\varepsilon) ; \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_-^\varepsilon \}$$

étant de Hilbert séparables.

Soit $\{\varphi_i\}$ (resp. $\{\psi_i\}$) une base de $W(\Omega^\varepsilon)$ (resp. $V(\Omega^\varepsilon)$).

Pour avoir l'existence d'une solution faible on utilise la méthode de Faedo-Galerkin .

On introduit alors la solution approchée :

$$w_m(., t) = \sum_{i=1}^m h_{im}(t) \cdot \varphi_i(.)$$

$$\theta_m(., t) = \sum_{i=1}^m k_{im}(t) \cdot \psi_i(.)$$

définie comme solution du problème :

$$(P_m^*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \{ \rho(w_m', \varphi_i)_{\Omega^\varepsilon} + \rho a(w_m', \varphi_i) \} + b(w_m, \varphi_i) - \lambda a(\theta_m, \varphi_i) = (f, \varphi_i)_{\Omega^\varepsilon} \quad (1) \\ \frac{d}{dt} \{ \rho(\theta_m, \psi_i)_{\Omega^\varepsilon} + \lambda a(w_m, \psi_i) \} + k a(\theta_m, \psi_i) + \alpha(\theta_m, \psi_i)_{\Omega^\varepsilon} = (g, \varphi_i)_{\Omega^\varepsilon} \quad (2) \\ w_m(0) = w_{0m} \\ w_m'(0) = w_{1m} \\ \theta_m(0) = \theta_{0m} \end{array} \right. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m$$

avec

$$w_{lm} = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega^\varepsilon} w_l \varphi_i \right) \varphi_i \quad l = 0, 1 \quad \theta_{0m} = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega^\varepsilon} \theta_0 \psi_i \right) \psi_i$$

et

$$(w, \varphi)_{\Omega^\varepsilon} = \int_{\Omega^\varepsilon} w \varphi d\Omega^\varepsilon$$

$$a(w, \varphi) = \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla w \nabla \varphi d\Omega^\varepsilon$$

$$b(w, \varphi) = D \int_{\Omega^\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] d\Omega^\varepsilon$$

On multiplie l'équation (1) par h_{im}^1 et l'équation (2) par k_{im} , on intègre de 0 à t puis on somme sur i , on obtient l'égalité de l'énergie :

$$E(t) + k \int_0^t a(\theta_m(s), \theta_m(s)) ds + \alpha \int_0^t (\theta_m(s), \theta_m(s))_{\Omega^\varepsilon} ds = E(0) + \int_0^t L(w_m'(s), \theta_m(s)) ds \quad (3)$$

où

$$2.E(t) = \rho \left(\|w_m'(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + a(w_m'(t), w_m'(t)) \right) + b(w_m(t), w_m(t)) \quad \forall t \in [0, T]$$

Ceci, implique grâce à l'inégalité de Cauchy-Shwarz, lemme de Gronwall et les hypothèses sur les données :

$$w_0 \in W(\Omega^\varepsilon), \quad w_1 \in V(\Omega^\varepsilon), \quad \theta_0 \in L^2(\Omega^\varepsilon),$$

$$f \text{ et } g \text{ sont dans } L^1(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$$

que

$$\|w_m(t)\|_{W(\Omega^\varepsilon)} \leq C \quad (4)$$

$$\|w_m'(t)\|_{V(\Omega^\varepsilon)} \leq C \quad (5)$$

$$\|\theta_m(t)\|_{V(\Omega^\varepsilon)} \leq C \quad (6)$$

$$\|\nabla w'_m(t)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C \quad (7)$$

$$\int_0^T \|\nabla \theta_m\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 d\tau \leq C \quad (8)$$

$$\int_0^T \|\theta_m\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 d\tau \leq C \quad (9)$$

où C est une constante positive indépendante de m .

Il existe donc une sous suite de la solution approchée qu'on note aussi (w_m, θ_m) et des fonctions w et θ telles que

$$w_m \longrightarrow w \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; W(\Omega^\varepsilon)) \quad (10)$$

$$w'_m \longrightarrow w' \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; V(\Omega^\varepsilon)) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \theta_m \longrightarrow \theta \quad & \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)) \quad (12) \\ & \text{et faiblement dans } L^2(0, T; V(\Omega^\varepsilon)) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que (w, θ) ainsi construite est solution du problème (P^*)

Soit $\varphi \in D(]0, T[)$ et $\psi \in D(]0, T[)$ on a pour $1 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{d}{dt} \{ \rho(w'_m, \varphi_i)_{\Omega^\varepsilon} \varphi + \rho a(w'_m, \varphi_i) \varphi \} ds \\ & + \int_0^T b(w_m, \varphi_i) \varphi ds - \lambda \int_0^T a(\theta_m, \varphi_i) \varphi ds = \int_0^T (f, \varphi_i)_{\Omega^\varepsilon} \varphi ds \\ & \int_0^T \frac{d}{dt} \{ \rho(\theta_m, \psi_i)_{\Omega^\varepsilon} \psi + \lambda a(w_m, \psi_i) \psi \} ds \\ & + k \int_0^T a(\theta_m, \psi_i) \psi ds + \alpha \int_0^T (\theta_m, \psi_i)_{\Omega^\varepsilon} \psi ds = \int_0^T (g, \varphi_i)_{\Omega^\varepsilon} \psi ds \end{aligned}$$

En considérant dans les équations précédentes les intégrales par rapport à t comme dualité au sens D' , D on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{ \rho(w_m, \varphi_i)_{\Omega^\varepsilon} \varphi'' + \rho a(w_m, \varphi_i) \varphi' \} ds \\ & + \int_0^T b(w_m, \varphi_i) \varphi ds - \lambda \int_0^T a(\theta_m, \varphi_i) \varphi ds = \int_0^T (f, \varphi_i) \varphi ds \\ & \int_0^T \{ \rho(\theta_m, \psi_i)_{\Omega^\varepsilon} \psi' + \lambda a(w_m, \psi_i) \psi \} ds \\ & + k \int_0^T a(\theta_m, \psi_i) \psi ds + \alpha \int_0^T (\theta_m, \psi_i)_{\Omega^\varepsilon} \psi ds = \int_0^T (g, \psi_i)_{\Omega^\varepsilon} \psi ds \end{aligned}$$

Ces égalités sont valables pour tout $1 \leq i \leq m$, elles sont donc vraies pour toute combinaison linéaire des $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$.

Par densité et par passage à la limite faible (10), (11) et (12) impliquent que (w, θ) est bien solution faible du problème (P^*) .

Pour l'unicité, on suppose

$$f = g = w_0 = w_1 = \theta_0 = 0$$

l'égalité (3) implique que :

$$E(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

par suite

$$w = \theta = 0 \quad \text{sur } \Omega^\varepsilon$$

d'où le résultat. ■

4.3 Passage aux coordonnées locales

Soit ν la normale extérieure à Σ et τ le vecteur tangent à Σ de telle sorte que (ν, τ) soit direct en chaque point de Σ .

On note par s l'abscisse curviligne.

On pose alors

$$\boldsymbol{\nu}(s) = (\nu_1(s), \nu_2(s))$$

et donc

$$\boldsymbol{\tau}(s) = (-\nu_2(s), \nu_1(s))$$

D'après les formules de Frenet on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\nu_1(s) = -\frac{1}{R(s)}\nu_2(s) \\ \frac{d}{ds}\nu_2(s) = \frac{1}{R(s)}\nu_1(s) \end{cases}$$

où $R(s)$ est la courbure de Σ en s .

4.3.1 Dérivation sur Ω_-^ε

On désigne par $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ les dérivées par rapport aux coordonnées cartésiennes et $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ les dérivées par rapport aux coordonnées locales, alors on a :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R(s)-z}{R(s)}\nu_2(s) & -\frac{R(s)-z}{R(s)}\nu_1(s) \\ \nu_1(s) & \nu_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R(s)}{R(s)-z}\nu_2(s) & \nu_1(s) \\ -\frac{R(s)}{R(s)-z}\nu_1(s) & \nu_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

4.3.2 Intégration sur Ω_-^ε

Si f est une fonction scalaire définie sur Ω_-^ε alors :

$$\int_{\Omega_-^\varepsilon} f(M) d\Omega_-^\varepsilon = \int_{\Sigma} \int_0^\varepsilon f(s, z) \frac{R(s)-z}{R(s)} ds dz$$

Pour $\varphi \in W(\Omega^\varepsilon)$ on pose :

$$\gamma_T(\varphi) = \frac{R(s)}{R(s) - z} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R(s)}{R(s) - z} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) - \frac{1}{R(s) - z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\gamma_S(\varphi) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R(s)}{R(s) - z} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)$$

$$\gamma_N(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

On pose aussi :

$$(w, \varphi)_{\Omega_\varepsilon} = \int_0^\varepsilon \int_\Sigma w \varphi \frac{R(s) - z}{R(s)} ds dz$$

$$a_-(w_-, \varphi_-) = \int_0^\varepsilon \int_\Sigma \left\{ \left(\frac{R(s) - z}{R(s)} \right)^{-2} \frac{\partial w_-}{\partial s} \frac{\partial \varphi_-}{\partial s} + \frac{\partial w_-}{\partial z} \frac{\partial \varphi_-}{\partial z} \right\} \frac{R(s) - z}{R(s)} ds dz,$$

$$b_-(w_-, \varphi_-) = \frac{D_-}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_\Sigma [(\gamma_T(w_-) + \sigma_- \gamma_N(w_-)) \gamma_T(\varphi_-) + 2(1 - \sigma_-) \gamma_S(w_-) \gamma_S(\varphi_-) + (\gamma_N(w_-) + \sigma_- \gamma_T(w_-)) \gamma_N(\varphi_-)] \frac{R(s) - z}{R(s)} ds dz,$$

$$L_-(\varphi_-, \psi_-) = \int_0^\varepsilon \int_\Sigma (f_- \varphi_- + g_- \psi_-) \frac{R(s) - z}{R(s)} ds dz,$$

4.4 Changement d'échelle

La solution du problème (P_1) dépend avec Ω^ε du paramètre ε , on ne peut pas alors contrôler la solution lorsqu'on fait un passage à la limite.

On va faire un changement d'échelle le long de l'épaisseur de la coque mince Ω_ε pour se ramener à une formulation sur un domaine fixe lorsque ε varie.

L'idée donc est de dilater l'ouvert Ω_ε d'un rapport $\frac{1}{\varepsilon}$. On considère alors le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \phi^\varepsilon : \Omega_- = \Sigma \times]0, 1[&\rightarrow \Sigma \times]0, \varepsilon[\\ (s, z) &\rightarrow (s, \varepsilon z) \end{aligned}$$

On pose alors

$$\Omega = \Omega_- \cup \Sigma \cup \Omega_+$$

et on considère la transformation

$$T^\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega^\varepsilon$$

telle que

$$T^\varepsilon = \begin{cases} Id & \text{sur } \Omega_+ \\ \phi^\varepsilon & \text{sur } \Omega_- \end{cases}$$

On identifie Σ avec $\Sigma \times \{0\}$ et on pose

$$\Sigma_- = \Sigma \times \{1\} \text{ et } \Gamma_- = \partial\Omega_- \setminus (\Sigma \cup \Sigma_-)$$

Ω_-^ε , Σ_-^ε et Γ_-^ε sont alors les images respectives de Ω_- , Σ_- et Γ_- par l'application T^ε .

4.4.1 Changement d'échelle sur les fonctions

La transformation T^ε fait correspondre à chaque fonction φ_- définie sur Ω_-^ε la fonction φ_-^ε définie sur Ω_- par :

$$\varphi_-^\varepsilon(s, z) = \varphi_-(T^\varepsilon(s, z))$$

et à chaque fonction φ_- définie sur $\Omega_-^\varepsilon \times (0, T)$ la fonction φ_-^ε définie sur $\Omega_- \times (0, T)$ par :

$$\varphi_-^\varepsilon(t, s, z) = \varphi_-(t, T^\varepsilon(s, z))$$

4.4.2 Changement d'échelle pour γ_T , γ_S et γ_N

Soit φ_-^ε l'image de φ_- (restriction de φ à Ω_-) par l'application T^ε .

Les images de γ_T , γ_S et γ_N par le changement d'échelle sont respectivement γ_T^ε , γ_S^ε et γ_N^ε telles que :

$$\gamma_T^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = \frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial \varphi_-^\varepsilon}{\partial s} \right) - \frac{1}{\varepsilon (R(s) - \varepsilon z)} \frac{\partial \varphi_-^\varepsilon}{\partial z}$$

$$\gamma_S^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial \varphi_-^\varepsilon}{\partial s} \right)$$

$$\gamma_N^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = \frac{\partial^2 \varphi_-^\varepsilon}{\partial z^2}$$

4.4.3 Espaces fonctionnels sur Ω

En effectuant le changement d'échelle précédent sur $W(\Omega^\varepsilon)$ et sur $V(\Omega^\varepsilon)$, leurs images respectives seront :

$$W^\varepsilon(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} (\varphi_+^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon) \in H^2(\Omega_+) \times H^2(\Omega_-) ; \varphi_+^\varepsilon = \varphi_-^\varepsilon, \frac{\partial \varphi_+^\varepsilon}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_-^\varepsilon}{\partial z} \text{ sur } \Sigma \\ \text{et } \varphi_+^\varepsilon = \frac{\partial \varphi_+^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_+ ; \varphi_-^\varepsilon = \frac{\partial \varphi_-^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_- \end{array} \right\}$$

$$V^\varepsilon(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} (\psi_+^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon) \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-) ; \psi_+^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \\ \psi_-^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_- \text{ et } \psi_+^\varepsilon = \psi_-^\varepsilon \text{ sur } \Sigma \end{array} \right\}$$

4.5 Formulation variationnelle du problème (P_1) sur le domaine fixe Ω

Pour $w^\varepsilon \in L^\infty(0, T ; W^\varepsilon(\Omega))$, $\theta^\varepsilon \in L^\infty(0, T ; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T ; V^\varepsilon(\Omega))$
 $\varphi^\varepsilon \in W^\varepsilon(\Omega)$ et $\psi^\varepsilon \in V^\varepsilon(\Omega)$ on pose :

$$(w_+^\varepsilon, \varphi_+^\varepsilon)_{\Omega_+} = \int_{\Omega_+} w_+^\varepsilon \varphi_+^\varepsilon d\Omega_+$$

$$(w_-, \varphi_-)_{\Omega_-} = \int_0^1 \int_{\Sigma} w_- \varphi_- \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} ds dz$$

$$a_+(w_+, \varphi_+) = \int_{\Omega_+} \nabla w_+ \nabla \varphi_+ d\Omega_+$$

$$a_-^\varepsilon(w_-, \varphi_-) = \int_0^1 \int_{\Sigma} \left[\left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right)^{-2} \frac{\partial w_-}{\partial s} \frac{\partial \varphi_-}{\partial s} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial w_-}{\partial z} \frac{\partial \varphi_-}{\partial z} \right] \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} ds dz,$$

$$b_+(w_+, \varphi_+) = D_+ \int_{\Omega_+} \left[\left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial x^2} + \sigma_+ \frac{\partial^2 w_+}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + 2(1 - \sigma_+) \frac{\partial^2 w_+}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial y^2} + \sigma_+ \frac{\partial^2 w_+}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial y^2} \right] d\Omega_+$$

$$b_-(w_-, \varphi_-) = D_- \int_0^1 \int_{\Sigma} \left[\left(\gamma_T^\varepsilon(w_-) + \frac{\sigma_-}{\varepsilon^2} \gamma_N^\varepsilon(w_-) \right) \gamma_T^\varepsilon(\varphi_-) + 2(1 - \sigma_-) \frac{\gamma_S^\varepsilon(w_-)}{\varepsilon} \frac{\gamma_S^\varepsilon(\varphi_-)}{\varepsilon} + \left(\frac{\gamma_N^\varepsilon(w_-)}{\varepsilon^2} + \sigma_- \gamma_T^\varepsilon(w_-) \right) \frac{\gamma_N^\varepsilon(\varphi_-)}{\varepsilon^2} \right] \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} ds dz,$$

$$L_+(\varphi_+, \psi_+) = \int_{\Omega_+} (f_+^\varepsilon \varphi_+ + g_+^\varepsilon \psi_+) d\Omega_+.$$

$$L_-^\varepsilon(\varphi_-, \psi_-) = \varepsilon \int_0^1 \int_{\Sigma} (f_-^\varepsilon \varphi_- + g_-^\varepsilon \psi_-) \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} ds dz.$$

Le problème (P_1) s'écrit :

$$(P^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} w^\varepsilon \in L^\infty(0, T; W^\varepsilon(\Omega)) \quad (w^\varepsilon)' \in L^\infty(0, T; V^\varepsilon(\Omega)) \\ \theta^\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V^\varepsilon(\Omega)) \\ \frac{d}{dt} \left\{ \rho_+ \left((w_+^\varepsilon)', \varphi_+^\varepsilon \right)_{\Omega_+} + \rho_+ a_+ \left((w_+^\varepsilon)', \varphi_+^\varepsilon \right) + \rho_+ (\theta_+^\varepsilon, \psi_+^\varepsilon)_{\Omega_+} + \lambda_+ a_+ (w_+^\varepsilon, \psi_+^\varepsilon) \right\} \\ + \frac{d}{dt} \left\{ \rho_- \left((w_-^\varepsilon)', \varphi_-^\varepsilon \right)_{\Omega_-} + \rho_- a_- \left((w_-^\varepsilon)', \varphi_-^\varepsilon \right) + \rho_- (\theta_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon)_{\Omega_-} + \lambda_- a_- (w_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon) \right\} \\ + k_+ a_+ (\theta_+^\varepsilon, \psi_+^\varepsilon) + k_- a_- (\theta_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon) + b_+ (w_+^\varepsilon, \varphi_+^\varepsilon) + b_- (w_-^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon) - \lambda_+ a_+ (\theta_+^\varepsilon, \varphi_+^\varepsilon) \\ - \lambda_- a_- (\theta_-^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon) + (\theta_+^\varepsilon, \psi_+^\varepsilon)_{\Omega_+} + (\theta_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon)_{\Omega_-} = L_+(\varphi_+^\varepsilon, \psi_+^\varepsilon) + L_-(\varphi_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon) \quad (4-1) \\ \forall (\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in W^\varepsilon(\Omega) \times V^\varepsilon(\Omega) \\ w_+^\varepsilon(0) = w_{0+}^\varepsilon, \quad (w_+^\varepsilon)'(0) = w_{1+}^\varepsilon, \quad \theta_+^\varepsilon(0) = \theta_{0+}^\varepsilon \quad (4-2) \\ w_-^\varepsilon(0) = w_{0-}^\varepsilon, \quad (w_-^\varepsilon)'(0) = w_{1-}^\varepsilon, \quad \theta_-^\varepsilon(0) = \theta_{0-}^\varepsilon \quad (4-3) \end{array} \right.$$

Par le changement d'échelle; le problème (P_1) est équivalent au problème (P^ε) .

4.6 Estimation à priori

Pour obtenir le modèle limite, on établit d'abord des estimations à priori sur la solution du problème (P^ε)

On note par E l'énergie du problème (P^ε) :

$$\begin{aligned} 2.E(t) &= \rho_+ \left(\|(w_+^\varepsilon)'(t)\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|\theta_+^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + a_+ \left((w_+^\varepsilon)', (w_+^\varepsilon)' \right) \right) + \\ &\quad \rho_- \left(\|(w_-^\varepsilon)'(t)\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\theta_-^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + a_- \left((w_-^\varepsilon)', (w_-^\varepsilon)' \right) \right) + \\ &\quad b_+(w_+^\varepsilon, w_+^\varepsilon) + b_-(w_-^\varepsilon, w_-^\varepsilon). \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

où $(w^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est la solution du problème (P^ε) .

Proposition 4.1 *Sous les hypothèses suivantes :*

- (i) $E(0)$ est bornée par rapport à ε .
- (ii) $f_+^\varepsilon, g_+^\varepsilon$ sont bornées par rapport à ε dans $L^1(0, T; L^2(\Omega_+))$
- (iii) $f_-^\varepsilon, g_-^\varepsilon$ sont bornées par rapport à ε dans $L^1(0, T; L^2(\Omega_-))$

Il existe alors une constante C indépendante de ε telle que :

$$\|w_+^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega_+))} \leq C \quad (4-4)$$

$$\|w_-^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega_-))} \leq C \quad (4-5)$$

$$\|(w_+^\varepsilon)'\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega_+))} \leq C \quad (4-6)$$

$$\|(w_-^\varepsilon)'\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega_-))} \leq C \quad (4-7)$$

$$\|\theta_+^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_+))} \leq C \quad (4-8)$$

$$\|\theta_-^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} \leq C \quad (4-9)$$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z} \right)' \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} \leq C \quad (4-10)$$

$$\|\gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} \leq C \quad (4-11)$$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \gamma_S^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} \leq C \quad (4-12)$$

$$\left\| \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} \leq C \quad (4-13)$$

$$\int_0^T \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \leq C \quad (4-14)$$

$$\int_0^T \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C \quad (4-15)$$

$$\int_0^T \|\nabla \theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \leq C \quad (4-16)$$

$$\int_0^T \left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C \quad (4-17)$$

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial s} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C \quad (4-18)$$

Preuve. En posant dans la formulation faible (4-1)

$\varphi = w'$ et $\psi = \theta$ (φ et ψ régulières), intégrant ensuite de 0 à t :

$$\begin{aligned}
 & E(t) + k_+ \int_0^t \|\nabla \theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \\
 & + k_- \int_0^t \int_\Sigma \int_0^1 \left[\left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds d\tau \\
 & + \int_0^t \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau + \int_0^t \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \\
 = & E(0) + \int_0^t \int_{\Omega_+} (f_+^\varepsilon(w_+^\varepsilon)' + g_+^\varepsilon \theta_+^\varepsilon) d\Omega_+ \\
 & + \varepsilon \int_0^t \int_\Sigma \int_0^1 (f_-^\varepsilon(w_-^\varepsilon)' + g_-^\varepsilon \theta_-^\varepsilon) \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds d\tau
 \end{aligned}$$

D'une part et grâce à l'inégalité de Cauchy-Shwarz

$$\begin{aligned}
 & E(t) + k_+ \int_0^t \|\nabla \theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \\
 & + k_- \int_0^t \int_\Sigma \int_0^1 \left[\left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds d\tau \\
 & + \int_0^t \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau + \int_0^t \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq E(0) + \int_0^t \left(\|f_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)} \left\| (w_+^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_+)} + \|g_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)} \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)} \right) d\tau + \\
 &\quad + \int_0^t \left(\|\varepsilon f_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)} \left\| (w_-^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_-)} + \|\varepsilon g_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)} \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)} \right) d\tau \\
 &\leq E(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\|f_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \left\| (w_+^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|g_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \|\varepsilon f_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \left\| (w_-^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\varepsilon g_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 \right) d\tau \\
 &\leq C + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\left\| (w_+^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \left\| (w_-^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 \right) d\tau
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 &E(t) + \int_0^t \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau + \int_0^t \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau + k_+ \int_0^t \|\nabla \theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \\
 &+ k_- \int_0^t \int_\Sigma \int_0^1 \left[\left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \right)^2 \left(\frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds d\tau \\
 &\geq \frac{1}{2} \rho_+ \left(\left\| (w_+^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 \right) + \frac{1}{2} \rho_- \left(\left\| (w_-^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 \right)
 \end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall aux fonctions :

$$t \longmapsto \left(\left\| (w_+^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 \right) + \left(\left\| (w_-^\varepsilon)' \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 \right)$$

$$t \longmapsto \frac{2}{\min(\rho_+, \rho_-)}$$

Il existe donc une constante C indépendante de ε telle que

$$\left\| (w_+^\varepsilon)' \right\|_{L^\infty(0,T; H^1(\Omega_+))} \leq C$$

$$\left\| (w_-^\varepsilon)' \right\|_{L^\infty(0,T; H^1(\Omega_-))} \leq C$$

$$\|\theta_+^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega_+))} \leq C$$

$$\|\theta_-^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega_-))} \leq C$$

D'où

$$\begin{aligned} & E(t) + \int_0^t \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau + \int_0^t \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau + k_+ \int_0^t \|\nabla\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \\ & + k_- \int_0^t \int_\Sigma \int_0^1 \left[\left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \right)^2 \left(\frac{\partial\theta_-^\varepsilon}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial\theta_-^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds d\tau \leq C \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\int_0^T \|\nabla\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \leq C$$

$$\int_0^T \left\| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\theta_-^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C$$

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial\theta_-^\varepsilon}{\partial s} \right\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C$$

$$\int_0^T \|\theta_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_+)}^2 d\tau \leq C$$

$$\int_0^T \|\theta_-^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_-)}^2 d\tau \leq C$$

$$E(t) \leq C$$

Par suite

$$b_+(w_+^\varepsilon, w_+^\varepsilon) \leq C \quad \text{et} \quad b_-(w_-^\varepsilon, w_-^\varepsilon) \leq C$$

et

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z} \right)' \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_-))} \leq C$$

d'où les majorations (4-11), (4-12) et (4-13).

Grâce à l'inégalité de Poincaré on a :

$$\|w_+^\varepsilon\|_{H^2(\Omega_+)}^2 \leq b_+(w_+^\varepsilon, w_+^\varepsilon) \leq E(t) \leq C$$

$$\|w_-^\varepsilon\|_{H^2(\Omega_-)}^2 \leq b_-(w_-^\varepsilon, w_-^\varepsilon) \leq E(t) \leq C$$

il existe donc une constante indépendante de ε telle que

$$\|w_+^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T; H^2(\Omega_+))} \leq C$$

$$\|w_-^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T; H^2(\Omega_-))} \leq C$$

Ce qui achève la démonstration. ■

4.7 Conséquence des estimations à priori

On déduit à partir des estimations à priori l'existence d'une sous suite notée aussi $(w^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ telle que :

$$(w_\pm^\varepsilon) \text{ converge faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega_\pm))$$

$$\left((w_\pm^\varepsilon)' \right) \text{ converge faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega_\pm))$$

$$(\theta_\pm^\varepsilon) \text{ converge faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\pm))$$

$$\text{et converge faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega_\pm))$$

On définit les espaces :

$$W(\Omega_+) = \left\{ \begin{array}{l} w \in H^2(\Omega_+); \quad w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \quad w|_{\Sigma} \in H_0^2(\Sigma), \\ \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Sigma} \in H_0^1(\Sigma) \end{array} \right\}$$

$$V(\Omega_+) = \{w \in H^1(\Omega_+); \quad w = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \quad w|_{\Sigma} \in H_0^1(\Sigma)\}$$

Proposition 4.2 Notons w_{\pm} (resp θ_{\pm}) la limite de la suite (w_{\pm}^{ε}) (resp $(\theta_{\pm}^{\varepsilon})$) nous avons

1. (a) $w_-(s, z, t) = w_+(s, 0, t) \quad \forall (s, z, t) \in \Omega_- \times (0, T)$
 (b) $\theta_-(s, z, t) = \theta_+(s, 0, t) \quad \forall (s, z, t) \in \Omega_- \times (0, T)$
2. (a) $\theta_+ \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_+)) \cap L^2(0, T; V(\Omega_+))$
 (b) $w_+ \in L^\infty(0, T; W(\Omega_+))$
 (c) $(w_+)' \in L^\infty(0, T; V(\Omega_+))$
 (d) $(\frac{\partial w_+}{\partial \nu})' \in L^\infty(0, T; L^2(\Sigma))$

Preuve.

1. (a) L'estimation (4-13) implique que

$$\gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_-))$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, mais au sens des distributions

$$\gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \rightarrow \frac{\partial^2 w_-}{\partial z^2}$$

donc $\frac{\partial^2 w_-}{\partial z^2} = 0$ ou bien $\frac{\partial w_-}{\partial z}(s, z, t) = \frac{\partial w_-}{\partial z}(s, 0, t)$ mais

$$w_-(s, z, t) = w_-(s, 0, t) + \int_0^z \frac{\partial w_-}{\partial z}(s, \tau, t) d\tau$$

par suite

$$w_-(s, z, t) = w_-(s, 0, t) + z \frac{\partial w_-}{\partial z}(s, 0, t) \quad (4-19)$$

Un passage à la limite dans la condition de transmission

$$w_+^\varepsilon(s, 0, t) = w_-^\varepsilon(s, 0, t)$$

et le fait que

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} w_+^\varepsilon(s, 0, t) = \frac{\partial}{\partial z} w_-^\varepsilon(s, 0, t)$$

montrent après passage à la limite dans (4-19) que

$$w_-(s, z, t) = w_+(s, 0, t) \quad \forall (s, z, t) \in \Omega_- \times (0, T)$$

(b) l'estimation (4-17) montre que

$$\frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial z} \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_-)) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0$$

et au sens des distributions

$$\frac{\partial \theta_-^\varepsilon}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial \theta_-}{\partial z}$$

donc

$$\frac{\partial \theta_-}{\partial z} = 0$$

ou bien

$$\theta_-(s, z, t) = \theta_-(s, 0, t)$$

et un passage à la limite dans la condition de transmission

$$\theta_-^\varepsilon(s, 0, t) = \theta_+^\varepsilon(s, 0, t)$$

montre que

$$\theta_-(s, z, t) = \theta_+(s, 0, t) \quad \forall (s, z, t) \in \Omega_- \times (0, T)$$

2. (a) Nous avons déjà

$$\theta_+ \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_+)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega_+))$$

un passage à la limite dans la condition d'encastrement

$$\theta_+^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \times (0, T)$$

donne

$$\theta_+ = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \times (0, T)$$

D'une part, nous avons $\theta_- \in H^1(\Omega_-)$ et comme $\theta_+ |_{\Sigma \times (0, T)} = \theta_-$
alors

$$\theta_+ |_{\Sigma \times (0, T)} \in L^2(0, T; H^1(\Sigma))$$

D'autre part, le point (b) de 1. implique que

$$\frac{\partial \theta_+}{\partial s} |_{\Sigma \times (0, T)} \in L^2(0, T; L^2(\Sigma))$$

et comme $\frac{\partial \theta_-}{\partial z} = 0$ alors

$$\theta_+ |_{\Sigma \times (0, T)} \in L^2(0, T; H_0^1(\Sigma))$$

par conséquent

$$\theta_+ \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_+)) \cap L^2(0, T; V(\Omega_+))$$

(b) Comme $w_- \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega_-))$ et

$$w_- = \frac{\partial w_-}{\partial s} = 0 \text{ sur } \Gamma_- \times (0, T)$$

on en déduit que

$$w_+ \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Sigma)).$$

La condition de transmission

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z}(s, 0, t) = \frac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial \nu}(s, 0, t)$$

permet d'écrire

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z}(s, z, t) = \frac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial z}(s, 0, t) + \varepsilon \int_0^z \frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon)(s, \tau, t) d\tau$$

et donc la suite $\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z} \right)$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_-))$

grâce à l'estimation (4-13).

Les estimations à priori (4-11) et (4-12) impliquent que la suite $\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z}\right)$ est bornée dans $L^\infty(0, T ; H^1(\Omega_-))$ admet donc une sous suite convergente faiblement* vers u_- dans $L^\infty(0, T ; H^1(\Omega_-))$.

Nous avons

$$w_-^\varepsilon(s, z, t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_- \times (0, T)$$

et donc

$$\frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z}(s, z, t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_- \times (0, T)$$

et par passage à la limite on aura aussi :

$$u_- = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_- \times (0, T)$$

L'estimation à priori (4-13) entraîne que

$$\frac{1}{\varepsilon} \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

et au sens des distributions

$$\frac{1}{\varepsilon} \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \rightarrow \frac{\partial u_-}{\partial z}$$

d'où

$$\frac{\partial u_-}{\partial z}(s, z, t) = 0$$

On en déduit alors que

$$u_-(s, z, t) = u_-(s, 0, t) \quad \text{pour} \quad s \in \Sigma, z \in]0, 1[\quad \text{et} \quad t \in (0, T)$$

La condition de transmission

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z}(s, 0, t) = \frac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial \nu}(s, 0, t)$$

donne par passage à la limite

$$u_-(s, 0, t) = \frac{\partial w_+}{\partial \nu}(s, 0, t) \quad \text{pour} \quad s \in \Sigma \quad \text{et} \quad t \in (0, T)$$

on aura alors

$$\frac{\partial w_+}{\partial \nu} \in H_0^1(\Sigma).$$

4. Modélisation asymptotique d'un problème de transmission raide dans un domaine régulier de \mathbb{R}^2 **42**

(c) $((w_{\pm}^{\varepsilon})')$ converge vers w'_{\pm} dans $L^{\infty}(0, T ; H^1(\Omega_{\pm}))$ faible étoile ; comme de plus

$$w_-(s, z, t) = w_-(s, 0, t) = w_+(s, 0, t) = w_+ |_{\Sigma \times (0, T)}$$

alors

$$w'_-(s, 0, t) = w'_+(s, 0, t)$$

et la restriction de w'_+ à $\Sigma \times]0, T[$ appartient à $L^{\infty}(0, T ; H_0^1(\Sigma))$.

Par ailleurs

$$w'_+ = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+ \times (0, T)$$

car

$$(w_+^{\varepsilon})' = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+ \times (0, T)$$

par conséquent

$$w'_+ \in L^{\infty}(0, T ; V(\Omega_+))$$

Le point (d) se déduit de la condition de transmission

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_-^{\varepsilon}}{\partial z}(s, 0, t) = \frac{\partial w_+^{\varepsilon}}{\partial z}(s, 0, t) \quad \text{sur } \Sigma \times (0, T)$$

et les estimations (4-10) – (4-13).

■

Enfin les conditions de transmission et les estimations à priori impliquent :

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_-^{\varepsilon}}{\partial z} \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz \longrightarrow \frac{\partial w_+}{\partial \nu} \quad \text{faiblement* dans } L^{\infty}(0, T ; H_0^1(\Sigma))$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial w_-^{\varepsilon}}{\partial z} \right)' \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz \longrightarrow \left(\frac{\partial w_+}{\partial \nu} \right)' \quad \text{faiblement* dans } L^{\infty}(0, T ; L^2(\Sigma))$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta_-^{\varepsilon}}{\partial z} dz \longrightarrow \frac{\partial \theta_+}{\partial \nu} \quad \text{faiblement* dans } L^{\infty}(0, T ; L^2(\Sigma))$$

Proposition 4.3 *Posons :*

$$\gamma_T(w_+) = \frac{\partial^2 w_+}{\partial s^2} - \frac{1}{R(s)} \frac{\partial w_+}{\partial \nu}$$

$$\gamma_S(w_+) = -\frac{\partial^2 w_+}{\partial s \partial \nu} - \frac{1}{R(s)} \frac{\partial w_+}{\partial s}$$

Nous avons :

$$\int_0^1 \gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz \rightarrow \gamma_T(w_+) \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (4-20)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \gamma_S^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz \rightarrow \gamma_S(w_+) \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (4-21)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz \rightarrow -\sigma_- \gamma_T(w_+) \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (4-22)$$

Preuve.

1. L'estimation (4-11) montre que

$$\int_0^1 \gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz$$

est bornée indépendamment de ε dans $L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma))$, admet donc une sous suite convergente faiblement* dans cet espace, les conditions de transmission permettent d'écrire :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_-^\varepsilon}{\partial z}(s, z, t) = \frac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial \nu}(s, t) + \varepsilon \int_0^z \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 w_-^\varepsilon}{\partial z^2}(s, \tau, t) d\tau$$

$$w_-^\varepsilon(s, z, t) = w_+^\varepsilon(s, 0, t) + \varepsilon z \frac{\partial w_+^\varepsilon}{\partial \nu}(s, t) + \varepsilon^2 \int_0^z \int_0^\xi \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 w_-^\varepsilon}{\partial z^2}(s, \zeta, t) d\zeta d\xi,$$

un passage à la limite au sens des distributions montre alors que :

$$\int_0^1 \gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz \rightarrow \gamma_T(w_+) \quad \text{faiblement}^* \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma))$$

2. De même grâce à l'estimation à priori (4-12) on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \gamma_S^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz \quad \text{bornée dans } L^2(\Sigma)$$

et un passage à la limite au sens des distributions montre que

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \gamma_S^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz \rightarrow \gamma_S(w_+) \quad \text{faiblement}^* \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)),$$

3. Prenons dans (4-1) pour fonctions tests

$$\varphi^\varepsilon = \begin{cases} \varphi_+^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \varphi_-^\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^2 z^2 u(s) & \text{dans } \Omega_- \end{cases}$$

$$\psi^\varepsilon = \begin{cases} \psi_+ = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \psi_-^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_- \end{cases}$$

où u est une fonction assez régulière indépendante de z , intégrons ensuite de 0 à T :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \rho_- \frac{d}{dt} \left[((w_-^\varepsilon)^\dagger, \varphi_-^\varepsilon)_{\Omega_-} + a_-^\varepsilon ((w_-^\varepsilon)^\dagger, \varphi_-^\varepsilon) \right] dt + \int_0^T b_-^\varepsilon (w_-^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon) dt \\ & - \lambda_- \int_0^T a_-^\varepsilon (\theta_-^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon) dt = \int_0^T L_-^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon, 0) dt \end{aligned} \quad (4-23)$$

Nous avons :

$$\int_0^T \rho_- \frac{d}{dt} \left[((w_-^\varepsilon)^\dagger, \varphi_-^\varepsilon)_{\Omega_-} + a_-^\varepsilon ((w_-^\varepsilon)^\dagger, \varphi_-^\varepsilon) \right] dt \rightarrow 0$$

$$\int_0^T a_-^\varepsilon(\theta_-^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon) dt \longrightarrow 0$$

de plus :

$$\gamma_T^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{z^2}{2} \right) - \frac{\varepsilon}{R(s) - \varepsilon z} z u(s)$$

$$\gamma_s^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{z^2}{2} \right)$$

$$\gamma_N^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) = \varepsilon^2 u(s)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T b_-^\varepsilon(w_-^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon) dt &= D_- \int_0^T \int_\Sigma \int_0^1 \left[\left(\gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) + \frac{\sigma_-}{\varepsilon^2} \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right) \gamma_T^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. 2(1 - \sigma_-) \frac{\gamma_s^\varepsilon(w_-^\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\gamma_s^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon)}{\varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \sigma_- \gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right) \frac{\gamma_N^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon)}{\varepsilon^2} \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right] dz ds dt \end{aligned}$$

mais

$$\left(\gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) + \sigma_- \frac{\gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \text{ est une suite bornée dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Omega_-))$$

$$\gamma_T^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Omega_-)) \text{ fortement}$$

donc

$$\int_0^T \int_\Sigma \int_0^1 \left(\gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) + \frac{\sigma_-}{\varepsilon^2} \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right) \gamma_T^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds dt \longrightarrow 0$$

de même

$$\int_0^T \int_\Sigma \int_0^1 \frac{\gamma_s^\varepsilon(w_-^\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\gamma_s^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds dt \longrightarrow 0$$

puisque

$$\frac{1}{\varepsilon} \gamma_s^\varepsilon(\varphi_-^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_-)) \text{ fortement}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \gamma_s^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_-))$$

Enfin en multipliant l'équation (4-23) par ε^2 , un passage à la limite donne alors :

$$\int_0^T \int_\Sigma u(s) \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) + \sigma_- \gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right) \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz \right) ds dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

donc

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) + \sigma_- \gamma_T^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \right) \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz \longrightarrow 0 \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Sigma))$$

d'où

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \gamma_N^\varepsilon(w_-^\varepsilon) \left(\frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} \right) dz \rightarrow -\sigma_- \gamma_T(w_+) \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Sigma))$$

■

4.8 Passage à la limite et problème de Ventcel

On montre dans ce paragraphe que l'action asymptotique (quand $\varepsilon \rightarrow 0$) du raidisseur Ω_-^ε sur la plaque Ω_+ se modélise par des conditions aux limites évolutives sur la partie Σ du bord de Ω_+ . En effet, les formes $a_-^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ et $(\cdot, \cdot)_{\Omega_-^\varepsilon}$ associées à Ω_-^ε se comportent à la limite comme des formes $a_\Sigma(\cdot, \cdot)$ (ou $a_\Sigma^1(\cdot, \cdot)$) et $(\cdot, \cdot)_\Sigma$ qui se traduisent par des conditions aux limites de Ventcel, faisant intervenir des dérivées tangentielles sur le bord Σ .

Proposition 4.4 *On suppose que*

- 1 – $\left(f_+^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 f_-^\varepsilon dz \right)$ converge faiblement vers (f_+, f^*) dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_+) \times L^2(\Sigma))$
- 2 – $\left(g_+^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 g_-^\varepsilon dz \right)$ converge faiblement vers (g_+, g^*) dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_+) \times L^2(\Sigma))$
- 3 – $\left(w_{o+}^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 w_{o-}^\varepsilon dz \right)$ converge faiblement vers $(w_{o+}, w_{o+} | \Sigma)$ dans $H^2(\Omega_+) \times H_o^2(\Sigma)$
- 4 – $\left(w_{1+}^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 w_{1-}^\varepsilon dz \right)$ converge faiblement vers $(w_{1+}, w_{1+} | \Sigma)$ dans $H^2(\Omega_+) \times H_o^2(\Sigma)$
- 5 – $\left(\theta_{o+}^\varepsilon, \varepsilon \int_0^1 \theta_{o-}^\varepsilon dz \right)$ converge faiblement vers $(\theta_{o+}, \theta_{o+} | \Sigma)$ dans $L^2(\Omega_+) \times L^2(\Sigma)$
- 6 – $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \partial_z w_{1-}^\varepsilon dz$ converge vers w_2 faiblement dans $L^2(\Sigma)$

Alors la suite $(w_+^\varepsilon, \theta_+^\varepsilon)$ converge vers l'unique solution faible (w_+, θ_+) du problème de Cauchy-Ventcel suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l}
 w_+ \in L^\infty(0, T; W(\Omega_+)) \quad (w_+)' \in L^\infty(0, T; V(\Omega_+)) \\
 (\partial_\nu w_+)' \in L^\infty(0, T; L^2(\Sigma)) \quad \theta_+ \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_+)) \cap L^2(0, T; V(\Omega_+)) \\
 \frac{d}{dt} \left[\rho_+ (w_+', \varphi)_{\Omega_+} + \rho_+ a_+ (w_+', \varphi) + \rho_+ (\theta_+, \psi)_{\Omega_+} + \lambda_+ a_+ (w_+, \psi) \right] \\
 + \frac{d}{dt} \left[\rho_- (w_+', \varphi)_\Sigma + \rho_- a_\Sigma (w_+', \varphi) + \rho_- (\theta_+, \psi)_\Sigma + \lambda_- a_\Sigma^1 (w_+, \psi) \right] + \\
 + b_+ (w_+, \varphi) + b_\Sigma (w_+, \varphi) + k_+ a_+ (\theta_+, \psi) + k_- a_\Sigma^1 (\theta_+, \psi) + \\
 + (\theta_+, \psi)_{\Omega_+} + (\theta_+, \psi)_\Sigma - \lambda_+ a_+ (\theta_+, \varphi) - \lambda_- a_\Sigma (\theta_+, \varphi) \\
 = L_+ (\varphi, \psi) + L_\Sigma (\varphi, \psi) \quad (4-24) \\
 w_+(0) = w_{o+} \quad \text{sur } \Omega_+ \quad (4-25) \\
 w_+'(0) = w_{1+} \quad \text{sur } \Omega_+ \quad (4-26) \\
 (\partial_\nu w_+)'(0) = w_2 \quad \text{sur } \Sigma \quad (4-27) \\
 \theta_+(0) = \theta_{o+} \quad \text{sur } \Omega_+ \quad (4-28)
 \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} (w, \varphi)_\Sigma &= \int_\Sigma w \varphi ds \\ a_\Sigma^1(w, \varphi) &= \int_\Sigma \partial_s w \cdot \partial_s \varphi ds \\ a_\Sigma(w, \varphi) &= \int_\Sigma [\partial_s w \cdot \partial_s \varphi + \partial_\nu w \cdot \partial_\nu \varphi] ds \\ b_\Sigma(w, \varphi) &= E_- \int_\Sigma \left[\gamma_T(w) \cdot \gamma_T(\varphi) + \frac{2}{1 + \sigma_-} \cdot \gamma_s(w) \cdot \gamma_s(\varphi) \right] ds \\ L_\Sigma(\varphi, \psi) &= \int_\Sigma [\varphi f^* + \psi g^*] ds. \end{aligned}$$

Preuve. 1) Soit $\varphi_+ \in W(\Omega_+)$ et $\psi_+ \in V(\Omega_+)$ régulières,
En prenant dans (4-24) comme fonctions tests :

$$\varphi^\varepsilon = \begin{cases} \varphi_+^\varepsilon = \varphi_+ & \text{sur } \Omega_+ \\ \varphi_-^\varepsilon = \varphi_+(s, 0) + \varepsilon z \partial_\nu \varphi_+(s, 0) & \text{sur } \Omega_- \end{cases}$$

et

$$\psi^\varepsilon = \begin{cases} \psi_+^\varepsilon = \psi_+ & \text{sur } \Omega_+ \\ \psi_-^\varepsilon = \psi_+ | \Sigma & \text{sur } \Omega_- \end{cases}$$

On aura :

(a)

$$\begin{aligned} L_+(\varphi_+^\varepsilon, \psi_+^\varepsilon) &= \int_{\Omega_+} f_+^\varepsilon \varphi_+^\varepsilon + g_+^\varepsilon \psi_+^\varepsilon d\Omega_+ \\ &= \int_{\Omega_+} f_+^\varepsilon \varphi_+ + g_+^\varepsilon \psi_+ d\Omega_+ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_+} f_+ \varphi_+ + g_+ \psi_+ d\Omega_+ \end{aligned}$$

dans $D'([0, T])$

$$\begin{aligned}
 L_-^\varepsilon (\varphi_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon) &= \varepsilon \int_{\Sigma} \int_0^1 f_-^\varepsilon \varphi_-^\varepsilon + g_-^\varepsilon \psi_-^\varepsilon d \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds \\
 &= \varepsilon \int_{\Sigma} \int_0^1 f_-^\varepsilon (\varphi_+(s, 0) + \varepsilon z \partial_\nu \varphi_+(s, 0)) + g_-^\varepsilon \psi_+ |_{\Sigma} \frac{R(s) - \varepsilon z}{R(s)} dz ds \\
 &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} f^* \varphi_+ + g^* \psi_+ ds
 \end{aligned}$$

dans $D']0, T[$

(b)

$$\gamma_T^\varepsilon (\varphi_-^\varepsilon) = \frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \gamma_T (\varphi_+) + \varepsilon z \frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \gamma_s (\varphi_+) \right)$$

$$\gamma_s^\varepsilon (\varphi_-^\varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{R(s)}{R(s) - \varepsilon z} \right)^2 \gamma_s (\varphi_+)$$

$$\gamma_N^\varepsilon (\varphi_-^\varepsilon) = 0.$$

où

$$\gamma_T(\varphi_+) = \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial s^2} - \frac{1}{R(s)} \frac{\partial \varphi_+}{\partial \nu}$$

$$\gamma_s(\varphi_+) = -\frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial s \partial \nu} - \frac{1}{R(s)} \frac{\partial \varphi_+}{\partial s}$$

On vérifie grâce à la proposition 4.3 que :

$$b_-^\varepsilon (w_-^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} b_\Sigma (w_+, \varphi_+) \quad \text{dans } D']0, T[$$

$$b_+ (w_+^\varepsilon, \varphi_+^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} b_+ (w_+, \varphi_+) \quad \text{dans } D']0, T[$$

(c) On vérifie aussi que :

$$\left((w_-^\varepsilon)', \varphi_-^\varepsilon \right)_{\Omega_-} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left((w_+)', \varphi_+ \right)_\Sigma$$

$$a_-^\varepsilon \left((w_-^\varepsilon)', \varphi_-^\varepsilon \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_\Sigma \left((w_+)', \varphi_+ \right)$$

$$\left(\theta_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon \right)_{\Omega_-} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\theta_+, \psi_+ \right)_\Sigma$$

$$a_-^\varepsilon \left(w_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_\Sigma^1 \left(w_+, \psi_+ \right)$$

$$a_-^\varepsilon \left(\theta_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_\Sigma^1 \left(\theta_+, \psi_+ \right)$$

$$\left(\theta_-^\varepsilon, \psi_-^\varepsilon \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\theta_+, \psi_+ \right)_\Sigma$$

$$a_-^\varepsilon \left(\theta_-^\varepsilon, \varphi_-^\varepsilon \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_\Sigma \left(\theta_+, \varphi_+ \right)$$

2) Le problème (P) admet une unique solution. Pour le voir il suffit d'appliquer la méthode de Faedo-Galerkin.

3) Les hypothèses de la proposition 4.4 et l'unicité de la solution du problème (P) ainsi que la proposition 4.2 impliquent que toute la suite $(w_+^\varepsilon, \theta_+^\varepsilon)$ converge vers (w_+, θ_+) .

4) Un passage à la limite dans (4-2) et (4-3) donne alors les conditions initiales (4-25) – (4-28). ■

4.9 Formulation forte du problème de Ventcel

Proposition 4.5 (w_+, θ_+) est solution du problème aux limites d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \rho_+ (I - \Delta) w_+'' + D_+ \Delta^2 w_+ + \lambda_+ \Delta \theta_+ = f_+ & \text{dans } \Omega_+ \times (0, T) \\ \rho_+ \theta_+' - k_+ \Delta \theta_+ + \theta_+ - \lambda_+ \Delta w_+' = g_+ & \text{dans } \Omega_+ \times (0, T) \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

encastrement et température fixée sur $\Gamma_+ \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} w_+ &= 0 \\ \partial_\nu w_+ &= 0 \\ \theta_+ &= 0 \end{aligned}$$

conditions de Ventcel sur $\Sigma \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} \rho_+ \partial_t^2 \partial_\nu w_+ + \rho_- \partial_t^2 (w_+ - \partial_s^2 w_+) + T_+(w_+) + P(w_+) + \lambda_- \partial_s^2 \theta_+ - \lambda_+ \partial_\nu \theta_+ &= f^* \\ \lambda_+ \partial_t \partial_\nu w_+ - \lambda_- \partial_t \partial_s^2 w_+ + \rho_- \partial_t \theta_+ + k_+ \partial_\nu \theta_+ - k_- \partial_s^2 \theta_+ + \theta_+ &= g^* \\ \rho_- \partial_t^2 \partial_\nu w_+ + M_+(w_+) + Q(w_+) - \lambda_- \partial_\nu \theta_+ &= 0 \end{aligned}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} w_+(0) &= w_o \quad \text{dans } \Omega_+ \\ w_+'(0) &= w_1 \quad \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_t \partial_\nu w_+(0) &= w_2 \quad \text{sur } \Sigma \\ \theta_+(0) &= \theta_o \quad \text{dans } \Omega_+ \end{aligned}$$

où les opérateurs P , Q , T_+ et M_+ sont définis par

$$\begin{aligned} P(w) &= E_- \left[\partial_s^2 \gamma_T(w) + \frac{2}{1 + \sigma_-} \cdot \partial_s \left(\frac{1}{R(s)} \gamma_s(w) \right) \right] \\ Q(w) &= E_- \left[\frac{2}{1 + \sigma_-} \partial_s (\gamma_s(w)) - \frac{1}{R(s)} \gamma_T(w) \right] \\ T_+(w) &= D_+ \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \sigma_+) \frac{\partial}{\partial s} \left[(\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right] \\ M_+(w) &= D_+ \left[\Delta w + (1 - \sigma_+) \left(2 \nu_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Preuve. 1) Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} b_+(w_+, \varphi) &= D_+ \int_{\Omega_+} \Delta^2 w_+ \varphi d\Omega_+ - \int_{\Sigma} M_+(w_+) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds \\ &\quad + \int_{\Sigma} T_+(w_+) \varphi ds \end{aligned}$$

$$b_{\Sigma}(w_+, \varphi) = E_- \left[\int_{\Sigma} \left[\partial_s^2 \gamma_T(w_+) + \frac{2}{1 + \sigma_-} \cdot \partial_s \left(\frac{1}{R(s)} \gamma_s(w_+) \right) \right] \varphi ds \right. \\ \left. + \int_{\Sigma} \left[\frac{2}{1 + \sigma_-} \partial_s \left(\frac{1}{R(s)} \gamma_s(w_+) \right) - \frac{1}{R(s)} \gamma_T(w_+) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds \right]$$

$$a_+(w_+, \varphi) = - \int_{\Omega_+} \Delta w_+ \varphi d\Omega_+ + \int_{\Sigma} \frac{\partial w_+}{\partial \nu} \varphi ds$$

$$a_{\Sigma}(w_+, \varphi) = - \int_{\Sigma} \partial_s^2 w_+ \varphi ds + \int_{\Sigma} \frac{\partial w_+}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds$$

$$a_{\Sigma}^1(w_+, \psi) = - \int_{\Sigma} \partial_s^2 w_+ \psi ds$$

2) En prenant $\varphi = 0$ dans (4-24), une intégration au sens des distributions donne alors l'équation :

$$\rho_+ (I - \Delta) w_+^i + D_+ \Delta^2 w_+ + \lambda_+ \Delta \theta_+ = f_+$$

3) En prenant $\psi = 0$ dans (4-24), une intégration au sens des distributions donne alors l'équation :

$$\rho_+ \theta_+^i - k_+ \Delta \theta_+ + \theta_+ - \lambda_+ \Delta w_+^i = g_+$$

■

Bibliographie

- [1] N. Boudrahem, Comportement asymptotique et contrôlabilité exacte partielle d'un problème de thermoélasticité. Thèse de Magister, U.S.T.H.B, 1995.
- [2] R. Dautray et J.L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, vol 8. Masson, Paris, 1988
- [3] Y. Kerbrat et J.M. Braemer, Géométrie des courbes et des surfaces. Hermann, Paris, 1976.
- [4] J.E. Lagnese et J.L. Lions, Modelling, Analysis and Control of Thin Plates. Masson, Paris, 1988.
- [5] L. Landau et E. Lifchitz, Théorie de l'élasticité. Editions Mir, Moscou, 1967.
- [6] H. Ledret, Problèmes variationnels dans les multi-domaines ; modélisation et applications. Masson, Paris, 1991.
- [7] K. Lemrabet et D.E. Teniou, Vibration d'une plaque mince avec raidisseur sur le bord. Maghreb. Math. Rev., vol 2, n°1, Juin 1992.
- [8] K. Lemrabet, Etude de divers problèmes aux limites de ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers. Thèse de Doctorat d'état, U.S.T.H.B, 1987.
- [9] A. Youyou, Modélisation asymptotique des vibrations d'un corps élastique avec raidisseur sur le bord et étude du modèle mathématiques. Thèse de Magister, U.S.T.H.B, 1992.