

N d'ordre : 26/2013-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTE DES MATHEMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister  
en Mathématiques

Spécialité : Modélisation Mathématiques et analyse Numérique

Par

ALLACHE AMEL

Thème

Global Carleman Estimates for Weak Solution of  
Elliptic Nonhomogenous Dirichlet Problems

Soutenu publiquement le 25/06/2013 devant le jury composé de :

Mr.	D. Teniou	Professeur à l'U.S.T.H.B	Président
Mme.	O. Zair	Professeure à l'U.S.T.H.B	Directrice de Mémoire
Mr.	A. Heminna	Professeur à l'U.S.T.H.B	Examineur
Mr.	T. Aliziane	Maitre de conférences à l'U.S.T.H.B	Examineur

# Remerciement

Je tiens dans un premier lieu à remercier énormément Mme Ouahiba Zair, ma directrice de thèse, de n'avoir ménagé aucun effort pour me guider durant ces années de travail ainsi que pour son aide précieuse et ses conseils. Je lui exprime ma gratitude pour sa grande disponibilité, sa compréhension et ses encouragements qu'elle m'a apporté.

Je tiens à présenter mes vifs remerciement à Mr Tarik Aliziane, pour l'attention qu'il a apporté à ce travail, pour son aide ainsi que son assistance.

L'occasion se présente pour remercier mes enseignants avant d'être mes membres de jury en l'occurrence Mr Djamel Eddine. Teniou, Mr Ammar. Heminna et Mr Tarik. Aliziane pour les efforts qu'ils ont fourni durant le cycle de DES ainsi que durant l'année théorique. Je leur exprime aussi ma gratitude d'avoir accepté de juger mon travail.

Enfin, un grand merci pour tous ceux qui m'ont supporté.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Outils Mathématiques</b>	<b>9</b>
1.1 Notations . . . . .	9
1.2 Rappels sur les espaces fonctionnels . . . . .	10
1.2.1 Les espaces $L^p$ . . . . .	10
1.2.2 Espace de Hilbert . . . . .	11
1.2.3 Les espaces $L^p(0, T; \chi)$ . . . . .	12
1.2.4 Les espaces de Sobolev . . . . .	13
1.2.5 Opérateur de traces, espaces de traces . . . . .	14
1.3 L'opérateur adjoint . . . . .	14
1.4 Opérateurs pseudodifférentiels . . . . .	15
1.4.1 La représentation de l'intégrale de Fourier et classes du symbole . . . . .	15
1.4.2 L'adjoint d'un opérateur pseudodifférentiel . . . . .	17
1.4.3 La famille des opérateurs pseudodifférentiels Mollifiers de Friedrich . . . . .	18
1.4.4 Inégalité de Garding . . . . .	19
1.5 Rappel sur quelques inégalités fondamentales . . . . .	19
1.5.1 Inégalité de Poincaré . . . . .	19
1.5.2 Inégalités fondamentales . . . . .	20
1.6 Intégration par parties . . . . .	20
1.7 Ensembles convexes et fonctions convexes . . . . .	21
1.7.1 Ensembles convexes . . . . .	21

1.7.2	Fonctionnelles convexes . . . . .	21
1.7.3	Fonctionnelles coercives . . . . .	21
1.7.4	Minimisation d'une Fonctionnelle . . . . .	22
1.8	Les équations elliptiques . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Inégalité de Carleman globale pour les problèmes elliptiques non homogènes</b>	<b>24</b>
2.1	Existence et Régularité de la solution faible . . . . .	25
2.1.1	Existence et unicité de la solution faible . . . . .	25
2.1.2	La régularité de la solution faible . . . . .	27
2.2	Estimation de Carleman . . . . .	28
2.2.1	Théorème principal . . . . .	31
2.2.2	Preuve du théorème principal . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Inégalité de Carleman globale dans le cas homogène</b>	<b>69</b>
3.1	Théorème principal . . . . .	69
3.2	Preuve du théorème 3.1 . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Application de l'estimation de Carleman globale</b>	<b>76</b>
4.1	Pour un système de Navier Stokes linéarisé . . . . .	77
4.1.1	Une nouvelle inégalité de Carleman . . . . .	79
4.2	Pour un système de Stokes . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>92</b>

# Introduction

## Historique

En 1939, T. Carleman introduisit des inégalités d'énergie à poids exponentiels dans le but de démontrer un résultat d'unicité pour des équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques à coefficients réguliers en deux dimensions voir [23]. Ce type d'inégalités que l'on nomme inégalités de Carleman, a été généralisé et systématisé par L. Hörmander et d'autres auteurs pour de larges classes d'opérateurs différentiels en dimension quelconque (voir [24] chapitre 8 et [25]; voir aussi [26]). Depuis, l'utilisation de ces inégalités a largement dépassé leur application originelle. Elles donnent non seulement des résultats quantitatifs de prolongement unique mais elles sont aussi utilisées pour l'étude des problèmes inverses ainsi qu'en théorie de contrôle.

On distingue deux types :

Les inégalités de Carleman locale qui s'appliquent à des fonctions dont le support est un ouvert qui est inclus strictement dans  $\Omega$ .

Les inégalités de Carleman globales permettent de traiter des fonctions qui vérifient uniquement des conditions de Dirichlet homogènes ou non homogènes au bord. Généralement ces inégalités de Carleman globales diffèrent des inégalités locales par un terme d'observation.

Dans ce mémoire on prouve une inégalité de Carleman globale pour les solutions faibles des problèmes elliptiques du type Dirichlet, l'étude est portée sur l'article intitulé " Global Carleman Estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems " de Oleg Yu. Imanuvilov et Jean-Pierre Puel.

L'étude s'effectue dans un premier temps sur un problème elliptique général avec second membre dans  $H^{-1}(\Omega)$ , où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  $g$  donnée au bord dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et

$y$  la solution faible de ce problème.

La localisation du domaine  $\Omega$ , nous mène à montrer l'inégalité de Carleman globale pour le problème proposé dans les deux cas suivants :

1)  $\text{supp } y \subset \bar{\Omega}_0$  avec  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ .

2)  $\text{supp } y \subset B_\delta(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x} \in \Gamma$

où  $B_\delta(\tilde{x})$  la boule de centre  $\tilde{x}$  et de rayon  $\delta$ .

Nous nous limitons à l'étude du cas 2 qui constitue la principale nouveauté, le premier cas à été déjà traité dans l'article "Prolongement uniques des solutions de l'équation de Stokes" de C. Fabre et G. Lebeau.

La construction de la démonstration sera basée sur les opérateurs pseudo-différentiels et exige trois étapes principales :

- Changement de coordonnées.
- Factorisation.
- Estimation de Carleman.

Dans ce travail, on montrera aussi l'inégalité de Carleman pour le même problème elliptique avec  $g \equiv 0$  sur  $\Gamma$ .

Les résultats précédents seront eux-mêmes une motivation qui consiste d'une part, à donner un résultat de référence sur les inégalités de Carleman pour des opérateurs elliptiques et d'autre part, à obtenir une inégalité de Carleman globale pour les opérateurs de Stokes et à établir une estimation sur la pression en fonction de la vitesse et de la trace de la pression, cette estimation est une étape majeure qui consiste à obtenir des inégalités de Carleman globales pour les opérateurs de Navier-Stokes linéarisés.

Enfin, nous décrivons d'une manière très succincte et formelle le rôle des inégalités de Carleman globales pour les problèmes de contrôlabilité exacte sur les trajectoires ; Pour cela soit  $L$  un opérateur de type elliptique linéaire et  $N$  un opérateur non linéaire.

On considère une trajectoire  $\bar{Y}$  du problème d'évolution,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} + L\bar{Y} + N(\bar{Y}) &= F, \quad t \in (0, T), \\ \bar{Y}(0) &= \bar{Y}_0. \end{aligned}$$

On considère aussi une trajectoire effective du même opérateur mais sur laquelle on peut agir

à l'aide d'un contrôle qui s'exerce sur une partie  $w$  du domaine physique de travail,

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + LY + N(Y) = F + v\chi_\omega, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$Y(0) = Y_0. \quad (2)$$

Dans (1), on peut remplacer le second membre  $F$  par  $\bar{F}$  différent de  $F$  mais très voisin de  $F$  au voisinage de  $T$ . Le problème de contrôlabilité exacte sur les trajectoires consiste à chercher un contrôle  $v$  de façon à ce que l'on ait exactement au temps  $T$ ,

$$Y(T) = \bar{Y}(T). \quad (3)$$

Pour obtenir un résultat local (c'est à dire lorsque  $(Y_0 - \bar{Y}_0)$  est "petit") il est utile d'étudier le problème linéarisé autour de  $\bar{Y}$ .

Si  $Y \rightarrow L(\bar{Y})Y$  désigne le linéarisé de  $Y \rightarrow LY + N(Y)$  en  $\bar{Y}$ , on pose  $Z (Z \approx Y - \bar{Y})$  et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} + L(\bar{Y})Z = v\chi_\omega, & t \in (0, T), \\ Z(0) = Z_0 (= Y_0 - \bar{Y}_0). \end{cases}$$

On cherche  $v$  tel que,

$$Z(T) = 0.$$

Cette question est appelée problème de contrôlabilité à zéro. La solution de ce problème équivaut à l'obtention d'une inégalité d'observabilité pour le problème adjoint suivant :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + L^*(\bar{Y})\phi = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$\phi(T) = \phi_T. \quad (5)$$

L'inégalité d'observation s'écrit alors

$$\|\phi(0)\|^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt. \quad (6)$$

Les seules méthodes connues pour l'obtention d'inégalités de type (6) font appel aux inégalités de Carleman globales pour l'opérateur

$$-\frac{\partial}{\partial t} + L^*(\bar{Y}).$$

Nous donnons maintenant un aperçu sur le contenu des chapitres.

Le premier chapitre concerne des rappels sur des espaces fonctionnels et quelques propriétés, les opérateurs pseudo-différentiels et la minimisation des fonctionnelles.

On consacre le deuxième chapitre à la démonstration de l'inégalité de Carleman globale pour la solution faible d'un problème elliptique général de type Dirichlet non homogène, le cas homogène sera abordé dans le troisième chapitre.

Enfin dans le quatrième chapitre, on applique le résultat obtenu dans le deuxième chapitre pour un système de Navier-Stokes, et celui du troisième chapitre pour un système de Stokes.

# Chapitre 1

## Outils Mathématiques

### 1.1 Notations

On note :

$$\begin{aligned}x &= (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \\|\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \quad \partial x_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_x = \frac{1}{i} \partial_x \\D_{x_j} &= \frac{1}{i} \partial_{x_j}, \quad D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D_x^\alpha = (i)^{-|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n.\end{aligned}$$

### Introduction

Dans ce chapitre, on regroupe divers résultats qui sont spécifiques à l'étude des estimations de Carleman pour les solutions faibles des problèmes elliptiques. La première section concerne les espaces fonctionnels adaptés à la prise en compte des conditions initiales. La seconde section présente des outils d'analyse fonctionnelle qui concerne des rappels sur quelques égalités et inégalités fondamentales ainsi que l'inégalité de Garding. On énonce dans la troisième section des résultats relatifs aux critères de convergence. Dans la quatrième section, on introduit quelques notions sur les opérateurs pseudodifférentiels et on termine par des rappels sur la minimisation des fonctionnelles.

## 1.2 Rappels sur les espaces fonctionnels

### 1.2.1 Les espaces $L^p$

Ces espaces sont importants dans les problèmes linéaires ou non linéaires. Ils jouent un rôle décisif en particulier dans les démonstrations des chapitres qui viennent.

**Définition 1.1** Soit  $\mu$  une mesure borélienne sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $p \in [1, \infty]$ . Si  $p < \infty$ , l'espace  $L^p(d\mu)$  désigne les classes d'équivalence (modulo la relation d'égalité  $\mu$  presque par tout) de fonctions boréliennes  $f$  sur  $\Omega$  telles que  $|f|^p$  soit sommable.

On désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et qui est défini,

$$L^1(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable tels que } f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ et } \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

**Définition 1.2** Soit  $p \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq p < \infty$ , on a :

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; |f|^p \in L^1(\Omega) \},$$

où

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

### Définition 1.3

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$

La norme de  $f$  dans  $L^\infty$  est définie par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{Inf} \{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

**Théorème 1.1** L'espace  $L^p$  muni de la norme  $\|\cdot\|_p$  est un espace de Banach, pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ . ■

**Définition 1.4** On dit qu'un espace métrique  $E$  est séparable s'il existe un sous ensemble  $D \subset E$  dénombrable et dense dans  $E$ .

**Théorème 1.2** Soit  $E$  un espace de Banach tel que son espace dual  $E'$  soit séparable, alors  $E$  est séparable. ■

**Définition 1.5** Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $J$  l'injection canonique de  $E$  dans  $E''$ . On dit que  $E$  est réflexif si  $J(E) \approx E''$ .

Lorsque  $E$  est réflexif on identifie implicitement  $E$  et  $E''$ .

Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces  $L^p$ ,

L'espace	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p, 1 < p < \infty$	Oui	Oui	$L^{p'}$
$L^1$	Non	Oui	$L^\infty$
$L^\infty$	Non	Non	contient strictement $L^1$

**Théorème 1.3** Soit  $E$  un espace de Banach réflexif et soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $E$ . Alors il existe une sous suite extraite  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement. ■

**corollaire 1.1** Soit  $E$  un espace de Banach séparable et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $E'$ .

Alors il existe une sous suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge faible\*.

**Théorème 1.4** Soit  $E$  un espace de Banach, alors

$(E \text{ réflexif et séparable}) \Leftrightarrow (E' \text{ réflexif et séparable})$ . ■

**Théorème 1.5** Soit  $E$  un espace de Banach tel que  $E'$  soit séparable alors  $E$  est séparable. ■

### 1.2.2 Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert est une classe particulière d'espaces de Banach, il a des propriétés fondamentales qui jouent un rôle important en analyse et en physique mathématique.

**Définition 1.6** Soit  $H$  un espace vectoriel, on définit sur cet espace un produit scalaire qui est une forme bilinéaire de  $H \times H$  dans  $\mathbb{R}$  symétrique, définie positive et qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H.$$

**Définition 1.7** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $(u, v)$  et qui est complet pour la norme  $(u, u)^{\frac{1}{2}}$ .

### Exemples

L'espace  $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire,

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

est un espace de Hilbert.

L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  muni du produit scalaire,

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \end{aligned}$$

est aussi un espace de Hilbert.

### 1.2.3 Les espaces $L^p(0, T; \chi)$

Soit  $S$  espace localement compact muni d'une mesure  $\mu \geq 0$  et soit  $\chi$  un espace de Banach.

**Définition 1.8** L'espace  $L^p(S; \chi)$  est un espace de (classes de) fonctions  $f$  définies sur  $S$  à valeurs dans l'espace de Banach  $\chi$  et telles que :

$$\int_S \|f(t)\|_{\chi}^p d\mu(t) < \infty.$$

Pour  $S = (0, T)$  avec  $T > 0$  et  $d\mu(t) = dt$  on a :

$$L^p(0, T; \chi) = \left\{ f \in (0, T) \longrightarrow \chi \text{ mesurable; } \int_0^T \|f(t)\|_\chi^p dt < \infty, 1 \leq p < \infty \right\},$$

muni de la norme,

$$\|f\|_{L^p(0, T; \chi)} = \left( \int_0^T \|f\|_\chi^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Définition 1.9**  $L^\infty(0, T; \chi)$  est l'espace des (classes de) fonctions  $f$  définies sur  $(0, T)$  à valeurs dans  $\chi$  et bornées telles que :

$$\|f(t)\|_\chi \leq \|f\|_{L^\infty(0, T; \chi)} \quad p.p$$

et

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; \chi)} = \text{Inf} \{C > 0; \|f(t)\|_\chi \leq C \quad p.p\}.$$

## 1.2.4 Les espaces de Sobolev

Soit  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition 1.10** L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par,

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \nabla u \in L^p(\Omega)\}.$$

**Proposition 1.1** L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

**Définition 1.11** On définit l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  de la façon suivante :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\},$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Proposition 1.2** *L'espace  $H^1$  est un espace de Hilbert séparable.*

**Définition 1.12** *Soit  $1 \leq p < \infty$ ,  $W_0^{1,p}(\Omega)$  désigne la fermeture de  $C_c^1(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .*

On note par :

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable et il est réflexif si  $1 < p < \infty$ .  $H_0^1$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de  $H^1$ .

### 1.2.5 Opérateur de traces, espaces de traces

**Théorème 1.6** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et de bord lipschitzien de ,  $d \in \mathbb{N}$ . L'application*

$$\gamma_0 : u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega),$$

*se prolonge de manière unique et de façon continue à l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ . On appelle l'opérateur  $\gamma_0$  ainsi obtenu : l'application de trace. L'opérateur  $\gamma_0$  n'est pas surjectif sur  $L^2(\partial\Omega)$ . L'image de  $\gamma_0$  est un espace de Sobolev fractionnaire noté  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  et qui est un espace de Hilbert pour la norme,*

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = v} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

■

## 1.3 L'opérateur adjoint

**Théorème 1.7** *Soit  $T$  un opérateur linéaire borné de l'espaces de Hilbert  $H_1$  dans  $H_2$ . Il existe un seul opérateur borné  $T^*$  de  $H_2$  dans  $H_1$  vérifiant :*

$$\forall (f, g) \in H_1 \times H_2, \quad (T(f), g)_{H_2} = (f, T^*(g))_{H_1}.$$

*L'opérateur  $T^*$  est appelé adjoint de  $T$  et vérifie :*

$$\|T\|_{l(H_1; H_2)} = \|T^*\|_{l(H_2; H_1)}.$$

■

## 1.4 Opérateurs pseudodifférentiels

### 1.4.1 La représentation de l'intégrale de Fourier et classes du symbole

Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $m$  et  $n$  appartient à  $\mathbb{N}^*$  et soit  $\rho$  et  $\delta$  des paramètres tels que pour tout  $0 \leq \rho \leq 1$  et  $0 \leq \delta \leq 1$ , on a :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad (1.1)$$

où  $\hat{f} = (2\pi)^{-n} \int f(x) e^{-ix\xi} dx$  ( la transformation de Fourier d'une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  ).

Si on différencie (1.1), on obtient :

$$D^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Si  $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$  qui est un opérateur différentiel, on a :

$$P(x, D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

On appelle  $P(x, \xi)$  le symbole complet de  $P(x, D)$  tel que :

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$$

et on définit le symbole principal de l'opérateur  $P$  par :

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Ecrivons maintenant

$$P(x, \xi) = P_m(x, \xi) + Q(x, \xi),$$

où  $Q(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ .

On dit que  $P_m$  est "positivement homogène de degré  $m$ " si :

$$\forall \lambda > 0, \quad P_m(\lambda\xi) = \lambda^m P_m(\xi),$$

où  $(\lambda\xi)^\alpha = \lambda^{|\alpha|} \xi^\alpha = \lambda^m \xi^\alpha$ .

**Définition 1.13** On définit  $S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^N)$  comme l'ensemble des  $P \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$  tels que pour tous  $K \subset\subset X$  et tous  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  et  $\beta \in \mathbb{R}^N$  il existe une constante  $C = C_{K,\alpha,\beta}(P)$  telle que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}, (x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^N.$$

Si  $P \in S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^N)$ , on dit que  $P$  est un symbole d'ordre " $m$ " et de type  $(\rho, \delta)$ .

**Remarque 1.1** On dit que  $S_{\rho,\delta}^m \subset S_{\rho',\delta'}^{m'}$  si  $m \leq m'$ ,  $\delta \leq \delta'$  et  $\rho \geq \rho'$ .

Les "meilleurs" symboles sont ceux avec  $\rho = 1$  et  $\delta = 0$ .

Pour  $\rho > 1$  et  $m < 0$  on a :

$$S_{\rho,\delta}^m = S^{-\infty},$$

où

$$S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N) = \left\{ P \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N); \text{ pour } \forall K \subset\subset X, \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^N, M \in \mathbb{R}; \right. \\ \left. |\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x, \theta)| \leq C_{k,\alpha,\beta,M}(1 + |\theta|)^{-M} \right\}.$$

**Définition 1.14 (de l'opérateur pseudodifférentiel)** Soit  $\rho$  et  $\delta$  des paramètres tels que  $0 < \rho \leq 1$  et  $0 \leq \delta < 1$  et soit  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Un opérateur pseudodifférentiel est un opérateur qui va de  $C_0^\infty(X)$  à  $D'(X)$  et qui a la forme suivante :

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_X e^{i(x-y)\xi} p(x, y, \xi) u(y) dy d\xi,$$

où  $P \in S_{\rho,\delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}^N)$  et  $u \in C_0^\infty(X)$ .

**Notation** On note  $L_{\rho,\delta}^m(X)$  l'espace des opérateurs pseudodifférentiels.

### Exemple

Un opérateur différentiel est un opérateur pseudodifférentiel :

$$\begin{aligned} Au(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_X e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) dy \frac{d\xi}{(2\pi)^n} \\ a(x, \xi) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \in S_{1,0}^m(X \times \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

On va traiter plus tard un autre exemple sur des opérateurs pseudodifférentiels ( la famille "Mollifier de Friedrich" ).

### 1.4.2 L'adjoint d'un opérateur pseudodifférentiel

**Théorème 1.8** Soit  $P \in L_{\rho,\delta}^m$ ,  $\rho > \delta$ . Alors  $P^* \in L_{\rho,\delta}^m$  et  $\sigma_{P^*}(x, \xi) = \sum \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha \overline{D_x^\alpha \sigma_P(x, \xi)}$ . ■

**Preuve 1.1** Si  $P$  est donné par :

$$Pu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_X e^{i(x-y)\xi} p(x, \xi) u(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi)^n},$$

alors :

$$P^*u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_X p^*(x, y, \xi) e^{i(x-y)\xi} u(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi)^n}$$

où  $p^*(x, y, \xi) = \overline{p(y, x, \xi)}$ .

Pour calculer  $\sigma_{P^*}$  on peut supposer que  $p$  est proprement supporté et prendre

$p(x, y, \xi) = p(x, \xi) = \sigma_P(x, \xi)$ . Alors, d'après le théorème précédent, on a :

$$\sigma_{P^*}(x, \xi) = \sum \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha \overline{D_x^\alpha \sigma_P(x, \xi)},$$

qui est le développement voulu. ■

**Définition 1.15** Soit  $X$  un espace de Banach des fonction, telles que :

$$C_0^\infty \subset C^0.$$

On définit  $XS_{1,0}^m$  l'ensemble des symboles  $p(x, \xi)$  tels que,

$$\|D_\xi^\alpha p(\cdot, \xi)\|_X \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}, \quad \alpha \geq 0.$$

**Définition 1.16** On définit  $XS_d^m$  ou simplement  $XS^m$ , l'ensemble des symboles  $p(x, \xi)$  tels que  $p(x, \xi) \in XS_{1,0}^m$  et  $p(x, \xi)$  admet l'extension classique suivante :

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} p_j(x, \xi).$$

**Proposition 1.3** Soit  $B(x, \zeta) \in C^1 S_d^1$  tel que,

$$B(x, D) = \sum_l b_l(x) w_l(D) \Lambda \quad \text{et} \quad B^*(x, \zeta) = B(x, D)^*.$$

Alors,

$$B(x, D)^* - B^*(x, \zeta) : L^p \rightarrow L^p, \quad 1 < p < \infty.$$

**Proposition 1.4** Soit  $A(x, \zeta) \in C^1 S_{cl}^0$  tel que,

$$A(x, D) = \sum_l a_l(x) w_l(D)$$

Alors,

$$A(x, D)^* = A^*(x, D) + R$$

où

$$R : H^{s,p} \rightarrow H^{s+1,p}, \quad -1 \leq s \leq 0.$$

et

$$R = \sum_l [w_l(D), a_l(x)^*].$$

**Proposition 1.5** Soit  $A_j(x, \zeta) \in C^1 S_{cl}^j$  et  $B(x, \zeta) \in C^1 S_{cl}^\mu$ ,  $j = 0, \dots, 1$ ,

$$A_j(x, D)B(x, D) = C_j(x, D) + R_j,$$

où

$$C_j(x, \zeta) = A_j(x, \zeta)B(x, \zeta) \in C^1 S_{cl}^{\mu+j},$$

$$R_0 : H^{\mu+s,p} \rightarrow H^{s+1,p}, \quad -1 \leq s \leq 0,$$

$$R_0 = \sum_{l,m} a_l(x) [w_l(D), b_m(x)] \Lambda^\mu w_m(D)$$

et

$$R_1 : H^{\mu,p} \rightarrow L^p$$

$$R_1 = \sum_{l,m} b_m(x) [w_m(D) \Lambda, a_l(x)] w_l(D) \Lambda^\mu$$

### 1.4.3 La famille des opérateurs pseudodifférentiels Mollifiers de Friedrich

**Définition 1.17** Un Mollifier de Friedrich sur  $M$  est une famille  $J_\epsilon$  des opérateurs pseudo-différentiels scalaires  $J_\epsilon$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$ , tel que :

$J_\epsilon \in OPS^{-\infty}(M)$  pour chaque  $\epsilon \in [0, 1]$ ,

$J_\epsilon : 0 < \epsilon \leq 1$  est un sous-ensemble borné de  $OPS_{1,0}^0(M)$  et

$J_\epsilon u \rightarrow u$  dans  $L^2(M)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$  pour tout  $u \in L^2(M)$

**Proposition 1.6** *Soit  $A \in OPS_{\rho,\delta}^m(M)$ ,  $1 - \rho \leq \rho$ , Si  $J_\epsilon$  est un Mollifier de Friedrich sur  $M$ , alors  $[A, J_\epsilon] = AJ_\epsilon - J_\epsilon A$  a les propriétés suivantes :*

- 1)  $[A, J_\epsilon] \in OPS^{-\infty}(M)$ ,  $0 < \epsilon \leq 1$  .
- 2)  $[A, J_\epsilon] : 0 < \epsilon \leq 1$  est un sous ensemble borné de  $OPS_{\rho,\delta}^{m-\rho \wedge (1-\delta)}(M)$ .

### 1.4.4 Inégalité de Garding

Cette inégalité va jouer un rôle important dans la dérivation à priori des estimations des problèmes elliptiques avec condition au bord.

**Théorème 1.9** *Soit  $p(x, D) \in OPS_{\rho,\delta}^m(\Omega)$  et supposons que  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ .*

*Supposons aussi que  $ReP(x, \zeta) \geq C|\zeta|^m$  pour  $|\zeta|$  assez grand avec  $C > 0$ .*

*Alors, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , pour tout compact  $K \subset \Omega$  et pour tout  $u \in C_0^\infty(K)$ , on a :*

$$Re(P(x, D)u, u) \geq C_0 \|u\|_{H^{\frac{m}{2}}}^2 - C_1 \|u\|_{H^s}^2.$$

■

## 1.5 Rappel sur quelques inégalités fondamentales

**Inégalité de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz** ( l'inégalité précédemment connue comme " inégalité de Cauchy Schwarz " ).

$H$  est un espace de Hilbert, Soient  $x, y$  deux éléments de  $H$ , on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

### 1.5.1 Inégalité de Poincaré

**Lemme 1.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  (ou qui est au moins borné dans une direction), alors il existe  $C_\Omega$  ne dépendant que de  $\Omega$  tel que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

■

## 1.5.2 Inégalités fondamentales

### Inégalité de Gronwall

**Théorème 1.10** Soit  $X$  un espace de Banach et  $U \subset X$  un ensemble ouvert dans  $X$ . Soient  $f, g : [a, b] \times U \rightarrow X$  sont des fonctions continues et soient  $y, z : [a, b] \rightarrow U$  satisfont les problèmes à condition initiale,

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), & y(a) &= y_0 \\ z'(t) &= g(t, z(t)), & z(a) &= z_0 \end{aligned}$$

On suppose que  $C \geq 0$  une constante telle que :

$$\|g(t, x_2) - g(t, x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\|$$

et une fonction continue  $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  telle que :

$$\|f(t, y(t)) - g(t, y(t))\| \leq \varphi(t)$$

Alors

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{C|t-a|}\|y_0 - z_0\| + e^{C|t-a|} \int_0^t e^{-C|s-a|} \varphi(s) ds$$

pour tout  $t \in [a, b]$ . ■

## 1.6 Intégration par parties

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{N+1}$  de frontière  $\partial\Omega$  qui est de classe  $C^2$ . On pose  $n(x) = (n_0(x), \dots, n_N(x))$  alors, pour tout  $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$  la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} f g n_i d\sigma,$$

où  $d\sigma$  est la mesure de surface  $N$  dimensionnelle sur  $\partial\Omega$ . On écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \langle Du, n \rangle = \sum_{i=0}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i,$$

qui s'appelle la dérivée normale de  $u$  sur  $\partial\Omega$ .

**Formule de Green** : Soit  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  et soit  $v \in C^2(\overline{\Omega})$  on a :

$$-\int_{\Omega} u \Delta v dx = \int_{\Omega} \langle Du, Dv \rangle dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma,$$

( dans la formule précédente  $\langle Du, Dv \rangle = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$  )

## 1.7 Ensembles convexes et fonctions convexes

### 1.7.1 Ensembles convexes

$E$  est un espace de Banach,

**Définition 1.18** Soit  $C$  une partie non vide de  $E$ .

$C$  est convexe si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad \forall \theta \in [0, 1], \quad \theta x + (1 - \theta)y \in C.$$

**Exemples**, Espaces affines, segments, demi-espaces définies par hyperplans, boules  $l_p$  pour  $p \geq 1$  (inégalité triangulaire), ellipsoïdes.

### 1.7.2 Fonctionnelles convexes

**Définition 1.19** Une fonction  $f : C \subset E \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$  est convexe si :

$\forall (x, y) \in (C)^2$  et  $\forall \theta \in [0, 1]$ ,

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

### 1.7.3 Fonctionnelles coercives

**Définition 1.20** Une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , est coercive si :

$$\lim_{\|x\|_E \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

### 1.7.4 Minimisation d'une Fonctionnelle

Maintenant, il s'agit de chercher un  $x^*$  tel que

$$(p) \begin{cases} f(x^*) = \inf_{x \in C \subset E} f(x), \\ x^* \in C. \end{cases}$$

**Théorème 1.11** *Si  $C$  est un convexe fermé non vide de  $E$ , si  $f$  est continue, coercive et strictement convexe sur  $C$ , alors le problème (p) a une solution et une seule. La solution de (p) étant aussi solution de  $\nabla f_{x^*} = 0$ . ■*

## 1.8 Les équations elliptiques

Soit  $\Omega$  est un ouvert bornée de  $\mathbb{R}^{N+1}$ , de frontière  $\partial\Omega$ . On considère le problème :

$$\begin{cases} Ly = f & \text{dans } \Omega, \\ y = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  donnée,  $y : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  l'inconnu et  $L$  l'opérateur de dérivée partielle du second ordre qui a la forme :

$$Ly \equiv \sum_{i,j=0}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j=0}^N \left( c_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x)y) \right) + d(x)y, \quad (1.3)$$

ou la forme :

$$Ly \equiv \sum_{i,j=0}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^N b_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} + d(x)y. \quad (1.4)$$

Pour des coefficients  $a_{ij}, b_i, c_i$  et  $d$  donnés ( $0 \leq i, j \leq N$ ), on suppose aussi que  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $0 \leq i, j \leq N$ ). On dit que l'EDP est de forme divergentielle si  $L$  est donné par (1.3), et de forme non divergentielle si  $L$  est donné par la forme (1.4).

**Remarque 1.2** *Si les coefficients  $a_{ij}$  ( $0 \leq i, j \leq N$ ) sont des fonctions de classe  $C^1$ , alors chaque opérateur écrit sous une forme divergentielle peut être réécrit sous forme nondivergentielle, et vice versa.*

*Cependant, il y a des avantages pour considérer les deux formes différentes de  $L$  séparément :*

la forme divergente est plus naturelle pour les méthodes d'énergie, par contre la forme non divergente est plus adaptée pour les méthodes du principe du maximum.

**Définition 1.21** On dit que les équations (1.3) et (1.4) sont uniformément elliptiques s'il existe une constante positive  $\theta$  telle que :

$$\sum_{i,j=0}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2,$$

pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{N+1}$ .

## Chapitre 2

# Inégalité de Carleman globale pour les problèmes elliptiques non homogènes

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{N+1}$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^2$ . On considère le problème elliptique général du second ordre suivant :

$$Py = \sum_{i,j=0}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=0}^N b_j \frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i(x)y) + d(x)y \quad (2.1)$$

$$= f + \sum_{j=0}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \quad \text{dans } \Omega$$

$$y = g, \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.2)$$

où

$$\begin{cases} a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega}), \\ b_j, c_i \text{ et } d \in L^\infty(\Omega), \\ \text{pour } i, j = 0, \dots, N \end{cases} \quad (2.3)$$

et les coefficients  $a_{i,j}$  satisfont la condition d'ellipticité standard :

$$\exists \beta > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \sum_{i,j=0}^N a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \beta |\xi|^2. \quad (2.4)$$

D'autre part, on suppose que :

$$f \in L^2(\Omega), \quad f_j \in L^2(\Omega), \quad \forall j = 0, \dots, N \quad (2.5)$$

$$g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (2.6)$$

## 2.1 Existence et Régularité de la solution faible

On cherche une solution  $y$  du problème (2.1) et (2.2). Pour cela, il existe une fonction  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$  telle que  $\tilde{g} = g$  sur  $\Gamma$  et on introduit l'ensemble,

$$K = \{\theta \in H^1(\Omega) : \theta - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}$$

avec  $K$  est un convexe fermé non vide de  $H^1(\Omega)$  qui dépend seulement de  $g$ .

Une solution classique de (2.1) et (2.2) est une fonction  $y \in C^2(\overline{\Omega})$  vérifiant (2.1) et (2.2).

Une solution faible de (2.1) et (2.2) est une fonction  $y \in K$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} a(y, \theta) &= - \int_{\Omega} \sum_{i=0}^N \left( \sum_{j=0}^N a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} + c_i y \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sum_{j=0}^N \left( b_j - \sum_{i=0}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial y}{\partial x_j} \theta dx + \int_{\Omega} d(x) y \theta dx \\ &= \int_{\Omega} f \theta dx - \sum_{j=0}^N \int_{\Omega} f_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx \quad \forall \theta \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il est clair que toute solution classique est solution faible.

**Remarque 2.1** Comme  $\Omega$  est assez régulier (c a d de classe  $C^2$ ) il n'est pas nécessaire de supposer  $\tilde{g} \in C(\overline{\Omega})$ .

En appliquant la théorie des traces, il suffit de savoir que  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$  autrement dit  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

### 2.1.1 Existence et unicité de la solution faible

#### **Théorème 2.1 (Stampacchia)**

Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$ . Soit  $K$  un convexe fermé non vide.

Etant donné  $\varphi \in H'$ , il existe  $u \in K$  unique tel que :

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \quad \forall v \in K.$$

De plus si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

■ On pose,

$$F = f + \sum_{j=0}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad 0 \leq j \leq N$$

alors  $F \in H^{-1}(\Omega)$ .

**Proposition 2.1** *Pour tout  $F \in H^{-1}(\Omega)$ , il existe  $y \in K$  unique solution faible de (2.1) et (2.2). De plus,  $y$  s'obtient par :*

$$\frac{1}{2}a(y, \theta) - \langle F, y \rangle = \min_{\theta \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(\theta, \theta) - \langle F, \theta \rangle \right\}.$$

**Preuve 2.1** *Notons tout d'abord que  $y \in K$  est solution faible de (2.1) et (2.2) si et seulement si on a :*

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sum_{i=0}^N \left( \sum_{j=0}^N a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} + c_i y \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\Omega} \sum_{j=0}^N \left( b_j - \sum_{i=0}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial y}{\partial x_j} (\theta - y) dx \\ & + \int_{\Omega} d(x) y (\theta - y) \geq \int_{\Omega} f(\theta - y) dx - \sum_{j=0}^N \int_{\Omega} f_j \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) dx, \quad \forall \theta \in K \end{aligned} \quad (2.8)$$

*En effet, si  $y$  est solution faible de (2.1) et (2.2) il est clair que :*

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sum_{i=0}^N \left( \sum_{j=0}^N a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} + c_i y \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\Omega} \sum_{j=0}^N \left( b_j - \sum_{i=0}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial y}{\partial x_j} (\theta - y) dx \\ & + \int_{\Omega} d(x) y (\theta - y) = \int_{\Omega} f(\theta - y) dx - \sum_{j=0}^N \int_{\Omega} f_j \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) dx, \quad \forall \theta \in K \end{aligned}$$

*Inversement si  $y \in K$  et vérifie (2.8), on choisit  $\theta = y + w$  dans (2.8) avec  $w \in H_0^1(\Omega)$  et on obtient (2.7).*

*Maintenant, on montre la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire  $a(y, w)$ .*

$$\begin{aligned} |a(y, w)| & \leq \sum_{i,j=0}^N \|a_{ij}\|_{C^2(\bar{\Omega})} \|D_j y\|_{L^2(\Omega)} \|D_i w\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^N \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)} \|y\|_{L^2(\Omega)} \|D_i w\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + \sum_{j=0}^N (\|b_j\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=0}^N \|D_i a_{ij}\|_{C(\Omega)}) \|D_i y\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|d\|_{L^\infty(\Omega)} \|y\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \|y\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

où

$$C = \sum_{i,j=0}^N \|a_{ij}\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{j=0}^N (\|b_j\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=0}^N \|D_i a_{ij}\|_{C(\Omega)}) + \|d\|_{L^\infty}$$

Donc, il existe  $C > 0$  tel que  $a(y, w) \leq C\|y\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}$  d'où la continuité de  $a$ .

On notera que la coercivité de  $a(y, w)$  résulte de l'hypothèse d'ellipticité et de l'inégalité de Poincaré.

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_{\Omega} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} D_i w(x) D_j w(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=0}^N c_i w D_i(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_{j=0}^N \left( b_j - \sum_{i=0}^N D_i a_{ij} \right) D_j w(x) \cdot w(x) dx + \int_{\Omega} dw^2(x) dx \\ a(w, w) &\geq \alpha \|w\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Donc, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $a(w, w) \geq \alpha \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2$  pour tout  $w \in H_0^1(\Omega)$  ce qui implique la coercivité de  $a$ .

En appliquant le théorème de Stampacchia, on obtient :

Pour  $F \in H^{-1}$ , il existe  $y \in K$  unique telle que,

$$a(y, \theta - y) = \langle F, \theta - y \rangle \quad \forall \theta \in K.$$

De plus,  $y$  est caractérisée par la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\theta \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} - \sum_{i=0}^N \left( \sum_{j=0}^N a_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + c_i \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sum_{j=0}^N \left( b_j - \sum_{i=0}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \theta \right. \\ \left. + d(x) \theta^2 dx - \int_{\Omega} f \theta + \sum_{j=0}^N \int_{\Omega} f_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx \right\} \end{aligned}$$

■

### 2.1.2 La régularité de la solution faible

Sous les hypothèses (2.4) et d'après les résultats précédents, il existe une unique solution au problème (2.7). On cherche la régularité de cette solution en fonction des données du problème (2.1) et (2.2).

**Théorème 2.2** Soit les hypothèses (2.4) et soit  $y \in H^1(\Omega)$  solution de (2.1) et (2.2).

Si  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$  pour  $i, j = 0, \dots, N$  et  $\Omega$  de classe  $C^2$ , alors pour tout  $F \in H^{-1}(\Omega)$ ,

$y \in H^2(\Omega)$ . ■

## 2.2 Estimation de Carleman

Notre but est d'obtenir une inégalité de Carleman globale pour la solution de (2.1) et (2.2). Afin de formuler notre résultat principal, on introduit d'abord une fonction poids convenable.

### Fonction poids

On choisit une fonction poids  $\varphi$  qui pourrait exiger de longs arguments. On commence par le choix de la fonction poids basique qui dépend seulement de la variable de l'espace.

**Lemme 2.1** *Soit  $\omega$  un ensemble ouvert non vide arbitraire tel que  $\omega \subset \Omega$ . Alors il existe une fonction  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  telle que :*

$$\psi = 0, \quad \text{sur } \Gamma \tag{2.9}$$

$$\psi(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \tag{2.10}$$

$$|\nabla\psi(x)| > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega - \omega} \tag{2.11}$$

■ En utilisant  $\psi$ , on peut considérer la fonction poids :

$$\varphi(x) = e^{\lambda\psi(x)} \tag{2.12}$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \geq 1$ .

**Preuve du lemme 2.1** Comme  $\Omega$  est régulier, on choisit une fonction  $\theta \in C^2(\mathbb{R}^{N+1})$  telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^{N+1}, \theta(x) > 0\} \text{ et } |\nabla\theta(x)| \neq 0, \forall x \in \Gamma.$$

Ceci peut être fait localement et puis étendu globalement en utilisant la partition de l'unité. D'après le théorème de la densité de Morse, il existe une suite de fonctions de Morse  $(\theta_k)$  (dont le gradient s'annule seulement sur un nombre fini de points) telle que  $\theta_k \rightarrow \theta$  sur  $C^2(\overline{\Omega})$  quand  $k \rightarrow +\infty$  ( $\theta_k$  ne s'annule pas nécessairement sur le bord).

De plus, on peut prendre  $\theta_k > 0$  parce que  $\theta > 0$  sur  $\Omega$ .

On définit  $C = \{x \in \mathbb{R}^{N+1}, \nabla\theta(x) = 0\}$  comme l'ensemble des points critiques de  $\theta$ .

Puisque  $|\nabla\theta(x)| \neq 0$  alors, il existe un voisinage  $V$  de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^{N+1}$  et  $\delta > 0$  tels que,

$$\forall x \in \overline{V}, |\nabla\theta(x)| \geq \delta.$$

Soit  $\varphi \in D(V)$  tel que  $\varphi(x) = 1, \forall x \in \Gamma$  et  $0 \leq \varphi \leq 1$ . On met

$$\mu_k = \theta_k + \varphi(x)(\theta(x) - \theta_k(x))$$

alors  $\mu_k(x) = 0, \forall x \in \Gamma$  et  $\mu_k(x) > 0, \forall x \in \Omega$

de plus :

$$\forall x \in \overline{\Omega - V}, \quad \nabla \mu_k(x) = \nabla \theta_k(x).$$

Maintenant si  $x \in \Omega \cap V$ , on a :

$$\nabla \mu_k(x) = \nabla \theta_k(x) + \varphi(x)(\nabla \theta(x) - \nabla \theta_k(x)) + \nabla \varphi(x)(\theta(x) - \theta_k(x))$$

donc pour  $k \geq k_0$ ,  $k_0$  suffisamment large on a :

$$\begin{aligned} |\nabla \mu_k(x)| &\geq |\nabla \theta_k(x)| - 2\|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})}\|\theta - \theta_k\|_{C^2(\overline{\Omega})} \\ &\geq \delta - 2\|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})}\|\theta - \theta_k\|_{C^2(\overline{\Omega})} \\ &\geq \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

On choisit  $k \geq k_0$  et on pose  $\mu(x) = \mu_k(x)$ . Alors  $\mu$  est une fonction de Morse parce que les points où le gradient s'annule sont parmi ceux qui annulent  $\nabla \theta$ .

De plus  $\mu(x) = 0, \forall x \in \Gamma$ .

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_r$  les points critiques de  $\mu$ . Alors  $x_i \in \Omega - \overline{V}$  pour  $i = 1, \dots, r$  et il existe  $r$  chemins réguliers disjoints  $l_1, \dots, l_r$  tels que :

$$\begin{aligned} l_i &\in C^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^{N+1}), \\ l_i(t) &\in \Omega - \overline{V}, \quad \forall t \in [0, 1], \\ l_i(t_1) &\neq l_i(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 1], \quad t_1 \neq t_2, \\ l_i(1) &= x_i \quad \text{et} \quad l_i(0) \in \omega_0, \\ \forall s, t &\in [0, 1], \quad l_i(s) \neq l_j(t), \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Il existe aussi  $r$  fonctions  $f_1, \dots, f_r$  telles que pour  $i = 1, \dots, r$  :

$$f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R}^{N+1}) \quad \text{et} \quad \frac{dl_i(t)}{dt} = f_i(l_i(t)), \quad \forall t \in (0, 1).$$

On définit des voisinages ouverts  $W_i$  des ensembles  $\{l_i(t), t \in [0, 1]\}$  pour  $i = 1, \dots, r$  tels que :

$$W_i \subset \Omega - \bar{V} \text{ et } W_i \cap W_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

alors, on prend les fonctions  $e_i \in D(W_i)$  telles que  $e_i(l_i(t)) = 1, \forall t \in [0, 1]$  et on suppose

$$g_i(x) = e_i(x)f_i(x).$$

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= g_i(x(t)), \quad \forall t \in (0, 1) \\ x(0) &= x. \end{aligned}$$

On note par  $S_t^i : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$  l'opérateur qui associe  $x$  à  $x(t)$ . On a alors :

$$S_1^i(l_i(0)) = x_i, \quad i = 1, \dots, r$$

et on définit

$$S(x) = S_1^1 \circ S_1^2 \circ \dots \circ S_1^r(x).$$

Si  $x \in \Omega - (\cup_{i=1}^r W_i)$  alors  $S(x) = x$ , par conséquent :

$$\forall x \in V, S(x) = x.$$

D'autre part, chaque  $S_1^i$  est un difféomorphisme de  $\Omega$  vers lui-même, donc  $S$  l'est aussi et  $\nabla S$  est inversible.

On pose :

$$\psi(x) = \mu((S(x))).$$

Donc  $\psi(x) = 0, \forall x \in \Gamma$ . De plus, comme  $\nabla S$  est inversible si  $\nabla \psi(x) = 0$ , alors

$$S(x) \in \{x_1, \dots, x_r\}.$$

Sachant que  $S_1^i = Id$  sur  $\Omega - W_j$  c.a.d :

$$S(l_i(0)) = S_1^i(l_i(0)) = x_i$$

et comme  $S$  est un difféomorphisme, on a :

$$S(x) = \{x_1, \dots, x_r\} \Rightarrow x \in \{l_1(0), \dots, l_r(0)\} \Rightarrow x \in \omega_0.$$

De plus

$$\nabla\psi(x) \neq 0 \Rightarrow x \in \omega_0,$$

et  $\psi$  satisfait toute les conditions du lemme2.1, ceci finit la preuve du lemme2.1.

### 2.2.1 Théorème principal

**Théorème 2.3** *Sous les hypothèses (2.4) et (2.12) et soit  $y \in H^1(\Omega)$  une solution de (2.1) et (2.2). Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $s$  et de  $\lambda$ , et des paramètres  $\tilde{\lambda} > 1$  et  $\tilde{s} > 1$  tels que pour tout  $\lambda \geq \tilde{\lambda}$  et pour tout  $s \geq \tilde{s}$ ,*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx + s^2 \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx &\leq C \left( s^{\frac{1}{2}} e^{2s} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 + \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx \right. \\ &\left. + \sum_{i,j=0}^N s \int_{\Omega} |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx + \int_{\omega} (|\nabla y|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2) e^{2s\varphi} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

■

**Remarque 2.2** *Dans le calcul et sans perte de généralité, il est suffisant de considérer le cas où  $b_j = 0$ ,  $c_i = 0$  et  $d = 0$  comme on peut rajouter les termes d'ordre 1 et les termes d'ordre 0 de (2.1) dans le second membre. Les termes qui correspondent dans (2.13) peuvent être absorbés par le coté gauche en choisissant  $\tilde{s}$  et  $\tilde{\lambda}$  assez large.*

La preuve de ce Théorème (2.3) exige plusieurs étapes.

### 2.2.2 Preuve du théorème principal

#### Localisation

Pour tout  $\delta > 0$ , on considère un recouvrement de  $\overline{\Omega}$  comme suit :

$$\overline{\Omega} \subset \Omega_0 \cup (\cup_{i=0}^I \beta_{\delta}(\tilde{x}_i)) \quad (2.14)$$

où  $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ ,  $\tilde{x}_i \in \Gamma = \partial\Omega$  et  $\beta_\delta(\tilde{x}_i)$  la boule de centre  $\tilde{x}_i$  et de rayon  $\delta$ .

Soit  $(e_i)_{i=0,\dots,I}$  une partition de l'unité telle que :

$$\begin{cases} e_0 \in C_c^\infty(\Omega_0), \\ e_i \in C_c^\infty(\beta_\delta(\tilde{x}_i)), \quad i = 1, \dots, I \\ e_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \\ \sum_{i=0}^I e_i(x) = 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (2.15)$$

On définit :

$$\begin{cases} y_i = ye_i, \quad i = 0, \dots, I, \\ \sum_{i=0}^I y_i = \sum_{i=0}^I ye_i = y \sum_{i=0}^I e_i = y. \end{cases} \quad (2.16)$$

D'après la remarque 2.2 le problème (2.1) et (2.2) s'écrit :

$$Py = \sum_{i,j=0}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.17)$$

$$= f + \sum_{j=0}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \quad (2.18)$$

$$y = g \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.19)$$

En multipliant (2.17) et (2.19) par la fonction  $e_i(x)$ , on a pour tout  $i = 0, \dots, I$  :

$$\begin{cases} e_i Py = e_i \sum_{i,j=0}^N a_{ij} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ \quad = e_i f + e_i \sum_{j=0}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{dans } \Omega, \\ ye_i = ge_i \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.20)$$

Sachant que :

$$e_i \sum_{j=0}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial x_j} e_i f_j - \sum_{j=0}^N f_j \frac{\partial e_i}{\partial x_j}$$

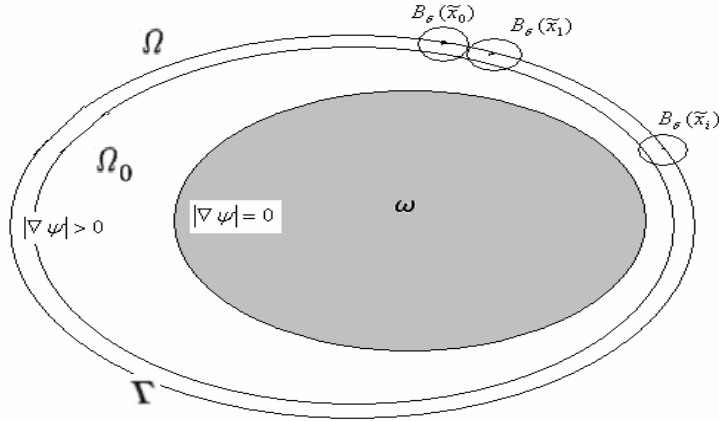
et

$$e_i Py = Pye_i + [P, e_i] y.$$

Donc, le problème (2.20) devient :

$$\begin{cases} P y_i = - [P, e_i] y + e_i f + \sum_{j=0}^N \frac{\partial e_i f_j}{\partial x_j} - \sum_{j=0}^N f_j \frac{\partial e_i}{\partial x_j} & \text{dans } \Omega, \\ y_i = g e_i & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $[P, Q] = QP - PQ$  définit le commutateur entre  $P$  et  $Q$ . Le commutateur  $[P, e_i]$  est un opérateur d'ordre 1,  $\text{supp } y_0 \subset \Omega_0$  et les fonctions  $e_i f_j$ ,  $f_j \left( \frac{\partial e_i}{\partial x_j} \right)$  et  $y_i$  ont un support compact dans  $\beta_\delta(\tilde{x}_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, I$ .



Comme  $y = \sum_{i=0}^I y_i$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla y|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2) e^{2s\varphi} dx &\leq C \sum_{i=0}^I \int_{\Omega} (|\nabla y_i|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y_i|^2) e^{2s\varphi} dx \\ &\leq C \left( \sum_{i=0}^I \left\{ s^{\frac{1}{2}} e^{2s} \|g e_i\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + \frac{1}{s \lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f e_i|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx \right. \right. \\ &\quad + \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} |f_j e_i|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{s \lambda^2} \sum_{j=0}^N \int_{\Omega} \frac{|f_j|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{s \lambda^2} \int_{\Omega} (|\nabla y|^2 + |y|^2) \frac{e^{2s\varphi}}{\varphi} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^I \int_{\omega} (|\nabla y_i|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y_i|^2) e^{2s\varphi} dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \left( s^{\frac{1}{2}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx \right. \\
 &\quad \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} (|\nabla y|^2 + |y|^2) \frac{e^{2s\varphi}}{\varphi} dx \\
 &\quad \left. + \int_{\omega} (|\nabla y|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2) e^{2s\varphi} dx \right)
 \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $s$  et  $\lambda$ .

Par la partition de l'unité (2.15) on se ramène à montrer l'inégalité (2.13) dans les deux cas suivants :

- ◇  $\text{supp } y \subset \Omega_0$  avec  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$
- ◇  $\text{supp } y \subset \beta_{\delta}(\hat{x})$ ,  $\hat{x} \in \Gamma$ .

Le premier cas à été déjà démontré dans [5], on s'intéresse au deuxième cas qui constitue la principale nouveauté.

### Changement de coordonnées

On prend  $\tilde{x} \in \Gamma$ ,  $\delta > 0$  et  $y$  une solution de (2.1) et (2.2) telle que  $\text{supp } y \subset \beta_{\delta}(\tilde{x})$ .

D'après (2.11), on suppose  $\delta$  assez petit pour que

$$\beta_{\delta}(\tilde{x}) \cap \omega = \emptyset \text{ et } \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{i_0}} \neq 0 \quad \forall x \in \beta_{\delta}(\tilde{x}).$$

Après rénumérotation des coordonnées et sans perte de généralité on fixe  $i_0 = 0$ , on a :

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_0} \neq 0 \quad \forall x \in \beta_{\delta}(\tilde{x}) \tag{2.22}$$

et on effectue le changement de coordonnées suivant :

$$\tilde{x}_0 = \psi(x), \quad \tilde{x}_i = x_i, \quad i = 1, \dots, N \tag{2.23}$$

$$\tilde{y}(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N) = y(x_0, x_1, \dots, x_N) \tag{2.24}$$

Dans le nouveau système de coordonnées on a :

$$\tilde{\Omega} = ]0, \delta[ \times \beta'_{\delta} \text{ et } \tilde{\Gamma} = \{0\} \times \beta'_{\delta}$$

où  $\beta'_\delta = \left\{ \tilde{x}' \in \mathbb{R}^N, \quad \|\tilde{x}'\| \leq \delta \right\}$ .

De (2.1) et (2.2), on obtient :

$$\tilde{P}\tilde{y} = \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_0^2} + \sum_{j=1}^N a_{0j} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_0 \partial \tilde{x}_j} + \tilde{A}\tilde{y} + \tilde{B}\tilde{y} \quad (2.25)$$

$$= \tilde{f} + \sum_{j=0}^N \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}_j}, \quad \text{dans } ]0, \tilde{\delta}[ \times \mathbb{R}^N, \quad (2.26)$$

$$\tilde{y}(0, \tilde{x}') = \tilde{g}(\tilde{x}') \quad \text{sur } \mathbb{R}^N.$$

où  $\tilde{B} = \sum_{j=0}^N \tilde{b}_j(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_j} + \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} (\tilde{c}_i(\tilde{x})\tilde{y}) + \tilde{d}\tilde{y}$  est un opérateur de premier ordre à coefficients dans  $L^\infty$  que l'on peut négliger, et  $\tilde{A}$  un opérateur de la forme

$$\tilde{A}\tilde{y} = \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{i,j} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j}.$$

De plus, on peut choisir la fonction poids suivante :

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = e^{\lambda \tilde{x}_0}. \quad (2.27)$$

On remarque que  $\tilde{\varphi}$  est indépendante de  $\tilde{x}_i, i = 1, \dots, N$ .

Maintenant, on montre qu'il existe une constante  $\tilde{c} > 0$  indépendante de  $s$  et  $\lambda$ , et des paramètres  $\tilde{\lambda} \geq 1$  et  $\tilde{s} \geq 1$  tels que pour tout  $\lambda \geq \tilde{\lambda}$  et pour tout  $s \geq \tilde{s}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \tilde{y}|^2 e^{2s\tilde{\varphi}} d\tilde{x} + s^2 \lambda^2 \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\varphi}^2 |\tilde{y}|^2 e^{2s\tilde{\varphi}} d\tilde{x} &\leq \tilde{c} \left( s^{\frac{1}{2}} e^{2s} \|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma})}^2 + \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\tilde{\Omega}} \frac{|\tilde{f}|^2}{\tilde{\varphi}} e^{2s\tilde{\varphi}} d\tilde{x} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=0}^N s \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{f}_j|^2 \tilde{\varphi} e^{2s\tilde{\varphi}} d\tilde{x} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dorénavant, on omettra la notation " $\tilde{\cdot}$ " pour les coordonnées et on normalise  $\tilde{\delta}$  à 1 pour des raisons de simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} Py &= \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} + \sum_{j=1}^N a_{0j} \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial x_j} + Ay \\ &= f + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \quad \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^N \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$y(0, x') = g(x'), \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \quad (2.30)$$

où  $y$ ,  $f$  et  $f_j$  sont négligeables dans le voisinage de  $[0, 1] \times \partial B'_\delta \cup (1 \times B'_\delta)$  et la fonction  $g$  est aussi négligeable dans le voisinage de  $B'_\delta$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}^{N+1}$  et  $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^N$ ,

$$a(\xi^1, \xi^2) = a(x, \xi^1, \xi^2) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i^1 \xi_j^2, \quad (2.31)$$

donc la condition d'ellipticité (2.3) s'écrit comme suit :

il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\tau^2 + \sum_{i=1}^N a_{0j} \tau \xi_j + a(\xi, \xi) \geq \beta(\tau^2 + |\xi|^2) \quad \forall (x_0, x') \in [0, \delta] \times \beta'_\delta. \quad (2.32)$$

Soit  $P$  l'opérateur défini par :

$$P(x, \tau, \xi) = \tau^2 + \sum_{i=1}^N a_{0j} \tau \xi_j + a(\xi, \xi)$$

et  $\Delta$  le discriminant de cet opérateur tel que :

$$\Delta = \left( \sum_{j=0}^N a_{0j} \xi_j \right)^2 - 4a(\xi, \xi).$$

Puisque le signe de l'opérateur  $P$  est strictement positif pour tout  $(x_0, x') \in [0, \delta] \times \beta'_\delta$ , et pour tout  $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^N$ , le signe de  $\Delta$  est négatif, donc  $-\Delta > 0$ , ce qui implique l'existence d'une constante  $\gamma > 0$  telle que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$  et  $|\xi| = 1$  on a

$$4a(\xi, \xi) - \left( \sum_{j=0}^N a_{0j} \xi_j \right)^2 \geq \gamma. \quad (2.33)$$

Si on note  $M = \{x' \in \mathbb{R}^N, \|x'\| < 1\}$  et  $G = ]0, 1[ \times M$ , on obtient

$$\begin{aligned} Py &= \frac{\partial^2 y}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^N a_{0j} \frac{\partial^2 y}{\partial x_0 \partial x_j} + Ay \\ &= f + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \quad \text{dans } G = ]0, 1[ \times M \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$y(0, x') = g(x'), \quad \text{sur } M. \quad (2.35)$$

### Factorisation

On rappelle que,

$$P(x, x_0, D) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_0} + i \sum_{i=1}^N a_{0j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_0 i \partial x_j} + i^2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{i \partial x_i i \partial x_j}$$

donc pour  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$  le symbole principal de l'opérateur  $P$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P(x, \tau, \xi) &= \tau^2 + i \sum_{i=1}^N a_{0j}(x) \tau \xi_j - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \\ &= \tau^2 + i \sum_{i=1}^N a_{0j}(x) \xi_j \tau - a(x, \xi, \xi). \end{aligned} \quad (2.36)$$

On remarque que  $P$  est un polynôme de second degré en  $\tau$ , et

$$\tau_{\pm}(x, \xi) = -\frac{i \sum_{j=1}^N a_{0j}(x) \xi_j \pm \sqrt{4a(x, \xi, \xi) - \left(\sum_{j=1}^N a_{0j}(x) \xi_j\right)^2}}{2} \quad (2.37)$$

sont les racines de ce polynôme qui seront régularisées près de  $\xi = 0$  par une fonction "cut-off"  $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$  telle que

$$\begin{aligned} \mu(t) &= 0, \quad \text{pour } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \mu(t) &= 1, \quad \text{pour } t > 1, \\ 0 &\leq \mu(t) \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (2.38)$$

On écrit :

$$r_{\pm}(x, \xi) = -\frac{i \sum_{j=1}^N a_{0j}(x) \xi_j \pm \mu(|\xi|) \sqrt{4a(x, \xi, \xi) - \left(\sum_{j=1}^N a_{0j}(x) \xi_j\right)^2}}{2}. \quad (2.39)$$

On définit  $R_{\pm}(x, D)$  les opérateurs pseudodifférentiels de symboles  $r_{\pm}(x, D)$ , tels que :

$$R_{\pm}(x, D)u(x') = \int_M r_{\pm} \tilde{u}(\xi) e^{i\langle x', \xi \rangle} d\xi \quad (2.40)$$

donc la factorisation de l'opérateur  $P$  peut être représenté par la forme suivante :

$$Py = \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - R_+(x, D) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - R_-(x, D) \right) y + Ky, \quad (2.41)$$

où  $K$  est un opérateur du premier ordre en variable  $x'$  uniformément borné en  $x_0$  et qui pourra être négligé ( $K = 0$ ) puisque le poids  $\varphi$  est indépendant de  $x'$  (voir la proposition 1.4).

$$Ky \in L^\infty([0, 1]; l(H^1(M), L^2(M))) \quad (2.42)$$

On utilise  $\varphi$  qui est donné par (2.27), on obtient :

$$\begin{aligned} e^{s\varphi}Py &= e^{s\varphi}f + e^{s\varphi} \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial x_j} f_j \quad \text{dans } G = ]0, 1[ \times M, \\ e^{s\varphi}y(0, x') &= e^{s\varphi}g(x'), \quad x' \in M. \end{aligned}$$

On considère la nouvelle fonction  $w$  telle que,

$$w = e^{s\varphi}y, \quad (2.43)$$

alors le problème précédent devient :

$$\begin{aligned} P_s w &= e^{s\varphi}P(e^{-s\varphi}w) \\ &= e^{s\varphi}f + e^{s\varphi} \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial x_j} f_j \quad \text{dans } G = ]0, 1[ \times M, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$w(0, x') = e^s g(x'), \quad x' \in M. \quad (2.45)$$

En développant les deux membre de problème (2.44), on trouve :

$$\begin{aligned} P_s w &= e^{s\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - R_+(x, D) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - R_-(x, D) \right) e^{-s\varphi} w. \\ &= e^{s\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - R_+(x, D) \right) e^{-s\varphi} e^{s\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - R_-(x, D) \right) e^{-s\varphi} w. \\ &= \left( e^{s\varphi} \frac{\partial e^{-s\varphi}}{\partial x_0} - e^{s\varphi} R_+(x, D) e^{-s\varphi} \right) \left( e^{s\varphi} \frac{\partial e^{-s\varphi}}{\partial x_0} - e^{s\varphi} R_-(x, D) e^{-s\varphi} \right) w \\ &= \left( \frac{\partial(e^{s\varphi} e^{-s\varphi})}{\partial x_0} - e^{-s\varphi} \frac{\partial e^{s\varphi}}{\partial x_0} - R_+(x, D) \right) \left( \frac{\partial(e^{s\varphi} e^{-s\varphi})}{\partial x_0} - e^{-s\varphi} \frac{\partial e^{s\varphi}}{\partial x_0} - R_-(x, D) \right) w \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_+(x, D) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-(x, D) \right) w \end{aligned} \quad (2.46)$$

et

$$\begin{aligned}
 e^{s\varphi} f + e^{s\varphi} \sum_{j=0}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_0} &= e^{s\varphi} f + \sum_{j=0}^N e^{s\varphi} \frac{\partial f_j}{\partial x_0} \\
 &= e^{s\varphi} f + \sum_{j=0}^N \frac{\partial(e^{s\varphi} f_j)}{\partial x_0} - \sum_{j=0}^N f_j \frac{\partial e^{s\varphi}}{\partial x_0} \\
 &= e^{s\varphi} f + \sum_{j=0}^N \frac{\partial(e^{s\varphi} f_j)}{\partial x_0} - f_0 s \lambda e^{s\varphi} \\
 &= e^{s\varphi} (f - f_0 s \lambda) + \sum_{j=0}^N \frac{\partial(e^{s\varphi} f_j)}{\partial x_0}.
 \end{aligned}$$

si on change la notation  $(f - f_0 s \lambda)$  par  $f$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 P_s w &= \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s \lambda \varphi - R_+(x, D) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s \lambda \varphi - R_-(x, D) \right) w \\
 &= e^{s\varphi} f + \sum_{j=0}^N \frac{\partial(e^{s\varphi} f_j)}{\partial x_0}, \quad \text{dans } G = ]0, 1[ \times M, \\
 w(0, x') &= e^s g(x'), \quad x' \in M,
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

où  $w \equiv 0$  pour  $x_0 \in v(1)$  ( $w$  a un support compact dans  $]0, 1[ \times M$  (revient à (2.43)).

Maintenant on veut montrer l'estimation de Carleman pour  $w$  :

Il existe une constante  $C$  indépendante de  $s$  et  $\lambda$ , et des paramètres  $\tilde{\lambda} \geq 1$  et  $\tilde{s} \geq 1$  tels que pour tout  $\lambda \geq \tilde{\lambda}$  et pour tout  $s \geq \tilde{s}$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_G (|\nabla w|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2 |w|^2) dx &\leq C \left( s^{\frac{1}{2}} e^{2s} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 + \frac{1}{s \lambda^2} \int_G \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=0}^N s \int_G |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx \right)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

### Estimation de Carleman

On définit  $z$  par :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s \lambda \varphi - R_-(x, D) \right) w = z. \tag{2.49}$$

Puisque  $w$  est à support compact dans  $[0, 1[ \times M$ , alors  $w$  est nulle au voisinage de  $x_0 = 1$  et  $z$  vérifie le problème suivant :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_+(x, D) \right) z = e^{s\varphi} f + \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{s\varphi} f_j) \quad \text{dans } G = ]0, 1[ \times M, \quad (2.50)$$

$$z(1, x') = 0 \quad x' \in M. \quad (2.51)$$

D'abord, on obtient des estimations sur  $z$  en termes du second membre de (2.50).

**Proposition 2.2** *Il existe une constante  $C$  indépendante de  $s$  et  $\lambda$  et il existe  $s_0 \geq 0$ , tels que pour tout  $\lambda \geq 1$  et pour tout  $s \geq s_0$ ,*

$$\int_G |z|^2 dx \leq C \left( \frac{1}{s^2 \lambda^2} \int_G \frac{|f|^2}{\varphi^2} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N \int_G |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx \right). \quad (2.52)$$

*Aussi, il existe une constante  $C$  indépendante de  $s$  et  $\lambda$ , et il existe  $s_1 > 0$ , tels que pour tout  $\lambda \geq 1$  et pour tout  $s \geq s_1$ ,*

$$\int_G \varphi |z|^2 dx \leq C \left( \frac{1}{s^2 \lambda^2} \int_G \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N \int_G |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx \right). \quad (2.53)$$

**Preuve 2.2** *Elle se fait par dualité, on considère le problème de Cauchy adjoint suivant :*

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_+^* \right) u = z \quad \text{dans } G, \quad (2.54)$$

$$u(0, x') = 0 \quad \text{sur } M. \quad (2.55)$$

*On rappelle que l'opérateur  $R_+^*(x, D)$  peut être décomposé en somme d'opérateurs pseudodifférentiels avec symbole  $\overline{r_+(x, \zeta)}$  et un opérateur qui appartient à  $C^1([0, 1]; l(L^2(M), L^2(M)))$  (voir la proposition 1.5).*

**Lemme 2.2** *Pour tout  $z \in L^2(G)$ , il existe une unique solution  $u \in H^1(G)$  du problème (2.54) et (2.55), et  $u$  satisfait l'estimation suivante : il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $s$  et  $\lambda$ , et  $s_0 \geq 0$ , tels que pour tout  $s \geq s_0$  et pour tout  $\lambda \geq 1$ ,*

$$\int_G (|\nabla u|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2 |u|^2) dx \leq C \int_G |z|^2 dx. \quad (2.56)$$

■ *On suppose pour le moment que le lemme 2.2 est démontré. En multipliant scalairement dans  $L^2(G)$  l'équation (2.50) par  $u$  et après intégration par parties, sachant que  $f_j$  a un*

support compact dans  $[0, 1] \times M$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_+(x, D) \right) z, u \right)_{L^2(G)} = \left( e^{s\varphi} f dx + \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{s\varphi} f_j), u \right)_{L^2(G)} \\
 & \int_G \frac{\partial zu}{\partial x_0} dx - \int_G s\lambda\varphi z u dx - \int_G R_+(x, D) z u dx = \int_G e^{s\varphi} f u dx + \sum_{j=0}^N \int_G \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{s\varphi} f_j) u dx \\
 & \int_{\partial G=M} z u dx - \int_G z \frac{\partial}{\partial x_0} u dx - \int_G s\lambda\varphi z u dx - \int_G R_+^*(x, D) u z dx = \\
 & \int_G e^{s\varphi} f u + \sum_{j=0}^N \left( \underbrace{\int_{\partial G} e^{s\varphi} f_j u dx}_{=0} - \int_G e^{s\varphi} f_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \right) \\
 & \int_G \underbrace{\left( -\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_+^*(x, D) \right) u z dx}_{=z} = \int_G e^{s\varphi} f u dx - \sum_{j=0}^N \int_G e^{s\varphi} f_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \\
 & \int_G |z|^2 dx = \int_G e^{s\varphi} f u dx - \sum_{j=0}^N \int_G e^{s\varphi} f_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx, \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

on utilise (2.56), on a :

$$\begin{aligned}
 \int_G |z|^2 dx &= \int_G \frac{1}{s\lambda\varphi} e^{s\varphi} f (s\lambda\varphi u) dx - \sum_{j=0}^N \int_G e^{s\varphi} f_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \\
 &\leq \left( \int_G \frac{1}{s^2\lambda^2\varphi^2} e^{2s\varphi} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_G s^2\lambda^2\varphi^2 |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=0}^N \left( \int_G e^{2s\varphi} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_G \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left( \int_G s^2\lambda^2\varphi^2 |u|^2 + |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{s^2\lambda^2} \int_G \frac{e^{2s\varphi}}{\varphi^2} |f|^2 + \sum_{j=0}^N \int_G e^{2s\varphi} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left( \int_G |z|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{s^2\lambda^2} \int_G \frac{e^{2s\varphi}}{\varphi^2} |f|^2 + \sum_{j=0}^N \int_G e^{2s\varphi} |f_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \int_G |z|^2 dx &\leq C \left( \frac{1}{s^2\lambda^2} \int_G \frac{|f|^2}{\varphi^2} e^{2s\varphi} + \sum_{j=0}^N \int_G |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx \right)
 \end{aligned}$$

Dans le but d'obtenir (2.53), on considère  $\tilde{z} = \sqrt{\varphi} z$ , donc  $\tilde{z}$  est solution de (2.50) avec  $f$  et  $f_j$  remplacées par  $\tilde{f} = \sqrt{\varphi} f + \left(\frac{\lambda}{2}\right)(\tilde{z}e^{-s\varphi} - \sqrt{\varphi}f_0)$  et  $\tilde{f}_j = \sqrt{\varphi}f_j$ . On applique (2.52) à ce

nouveau problème, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_G |\tilde{z}|^2 dx &\leq C \left( \frac{1}{s^2 \lambda^2} \int_G \frac{|\tilde{f}|^2}{\varphi^2} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N \int_G |\tilde{f}_j|^2 e^{2s\varphi} dx \right) \\
 \int_G |\sqrt{\varphi} z|^2 dx &\leq C \left( \frac{1}{s^2 \lambda^2} \int_G \frac{|\sqrt{\varphi} f + \frac{\lambda}{2} (\sqrt{\varphi} z e^{-s\varphi} - \sqrt{\varphi} f_0)|^2}{\varphi^2} e^{2s\varphi} dx \right) \\
 &\quad + \sum_{j=0}^N \int_G |\sqrt{\varphi} f_j|^2 e^{2s\varphi} dx \\
 \int_G \varphi |z|^2 dx &\leq C \left( \frac{1}{s \lambda^2} \int_G \frac{\varphi |f|^2}{\varphi^2} e^{2s\varphi} dx + \frac{\frac{\lambda^2}{4} (\sqrt{\varphi} z e^{-s\varphi} - \sqrt{\varphi} f_0)^2}{\varphi^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda \sqrt{\varphi} f (\sqrt{\varphi} z e^{-s\varphi} - \sqrt{\varphi} f_0)}{\varphi^2} e^{2s\varphi} \right) + \sum_{j=0}^N \int_G \varphi |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx
 \end{aligned}$$

afin d'absorber les termes contenant  $z$  dans le second membre, on choisit  $s$  suffisamment large et  $\varphi > 1$ , on obtient

$$\int_G \varphi |z|^2 dx \leq C \left( \frac{1}{s^2 \lambda^2} \int_G \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N \int_G \varphi |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx \right).$$

■ Ceci termine la démonstration de proposition 2.2.

### Preuve du lemme 2.2

Pour montrer la résolution de (2.54) et (2.55), on considère une famille de Friedrich Mollifier  $(J_\epsilon)$  pour  $\epsilon \in ]0, 1[$ , et soit le problème régularisé suivant :

$$- \left( \frac{\partial}{\partial x_0} + J_\epsilon^* (s\lambda\varphi + R_+^*(x, D)) J_\epsilon \right) u_\epsilon = z \quad \text{dans } G, \tag{2.58}$$

$$u_\epsilon(0, x') = 0, \quad x' \in M, \tag{2.59}$$

on pose :

$$B_\epsilon = J_\epsilon^* (s\lambda\varphi + R_+^*(x, D)) J_\epsilon, \tag{2.60}$$

sachant que :

$$\sup_{\epsilon \in ]0, 1[} \|J_\epsilon\|_{l(L^2, L^2)} \leq C \tag{2.61}$$

alors pour chaque  $\epsilon \in ]0, 1[$  on a  $B_\epsilon \in C([0, 1]; l(L^2(M), L^2(M)))$ .

Par conséquent, il existe une unique solution  $u_\epsilon$  du problème (2.58) et (2.59) avec

$u_\epsilon \in H^1(0, 1; L^2(M))$ .

Si on prend une régularisation de  $z$  par rapport à  $x_0$ , alors on peut donner une solution

$u_\epsilon \in C^1([0, 1]; L^2(M))$ .

Maintenant, on donne des estimations sur  $u_\epsilon$ ,  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_\epsilon}$ ,  $J_\epsilon u_\epsilon$  et  $J_\epsilon J_\epsilon u_\epsilon$  par la proposition suivante :

**Proposition 2.3** *Il existe  $c > 0$  indépendant de  $s$ ,  $\lambda$  et  $\epsilon$ , il existe  $s_0 \geq 0$  tels que pour tout  $s \geq s_0$  et pour tout  $\lambda \geq 1$*

$$\|u\|_{L^\infty(0,1;L^2(M))}^2 + s\lambda|\sqrt{\varphi}J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 \leq c|z|_{L^2(G)}^2, \quad (2.62)$$

*il existe  $c > 0$  indépendant de  $s$ ,  $\lambda$  et  $\epsilon$ , il existe  $s_1 \geq 0$  tels que pour tout  $s \geq s_1$  et pour tout  $\lambda \geq 1$*

$$\begin{aligned} s\lambda\|\sqrt{\varphi}J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;L^2(M))}^2 + \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 + s^2\lambda^2|\varphi J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(G)}^2 \\ + \|J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(0,1;H^1(M))}^2 \leq c(1 + \lambda)|z|_{L^2(G)}^2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

*il existe  $c > 0$  indépendant de  $s$ ,  $\lambda$  et  $\epsilon$ , il existe  $s_2 \geq 0$  tels que pour tout  $s \geq s_2$  et pour tout  $\lambda \geq 1$*

$$\left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0} \right|_{L^2(G)}^2 \leq c(1 + \lambda)|z|_{L^2(G)}^2. \quad (2.64)$$

### Preuve de la proposition 2.3

En prenant la partie réelle du produit scalaire de (2.58) par  $u$  dans  $L^2(M)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \operatorname{Re} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0} + B_\epsilon u_\epsilon, u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\ -\operatorname{Re}(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} &= +\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0}, u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + \frac{1}{2} \left( u_\epsilon, \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0} \right)_{L^2(M)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (B_\epsilon u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)} + \frac{1}{2} (u_\epsilon, B_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -\operatorname{Re}(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \int_M \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0} u_\epsilon + u_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0} d\hat{x} + \frac{1}{2} (B_\epsilon u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)} + \frac{1}{2} (B_\epsilon^* u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -\operatorname{Re}(z, u)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} \int_M |u_\epsilon|^2 d\hat{x} + \left( \left( \frac{B_\epsilon + B_\epsilon^*}{2} \right) u_\epsilon, u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\ -\operatorname{Re}(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} |u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + \left( \left( \frac{B_\epsilon + B_\epsilon^*}{2} \right) u_\epsilon, u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \end{aligned} \quad (2.65)$$

On note que :

$$\frac{B_\epsilon + B_\epsilon^*}{2} = J_\epsilon^* (s\lambda\varphi) J_\epsilon + J_\epsilon^* \left( \frac{R_+^*(x, D) + R_+(x, D)}{2} \right) J_\epsilon \quad (2.66)$$

D'après (2.39), le symbole principal de l'opérateur  $\frac{(R_+ + R_+^*)}{2}$  est :

$$\frac{r_+(x, \zeta) + r_+^*(x, \zeta)}{2} = \frac{\mu(|\zeta|)}{2} \sqrt{4a(x, \zeta, \zeta) - \left( \sum_{j=1}^N a_{0j} \zeta_j \right)^2}, \quad (2.67)$$

de (2.33) on a :

$$\begin{aligned} \exists \gamma > 0, \quad \forall (x, \zeta) \in G \times \mathbb{R}^N, \quad 4a(x, \zeta, \zeta) - \left( \sum_{j=1}^N a_{0j} \zeta_j \right)^2 &\geq \gamma \\ \exists \gamma > 0, \quad \forall (x, \zeta) \times \mathbb{R}^N, \quad 4a(x, \zeta, \zeta) - \left( \sum_{j=1}^N a_{0j} \zeta_j \right)^2 &\geq \gamma |\zeta|^2 \\ \exists \gamma > 0, \quad \forall (x, \zeta) \times \mathbb{R}^N, \quad \sqrt{4a(x, \zeta, \zeta) - \left( \sum_{j=1}^N a_{0j} \zeta_j \right)^2} &\geq \sqrt{\gamma} |\zeta| \\ \exists \gamma > 0, \quad \forall (x, \zeta) \times \mathbb{R}^N, \quad \frac{1}{2} \sqrt{4a(x, \zeta, \zeta) - \left( \sum_{j=1}^N a_{0j} \zeta_j \right)^2} &\geq \frac{\sqrt{\gamma}}{2} |\zeta| \end{aligned}$$

donc,

$$\exists C = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}, \quad \forall (x, \zeta) \in G \times \mathbb{R}^N, |\zeta| \geq 1, \quad \frac{r_+(x, \zeta) + r_+^*(x, \zeta)}{2} \geq C |\zeta|. \quad (2.68)$$

Pour chaque  $x_0 \in ]0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} -Re(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} |u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + \left( \frac{B_\epsilon + B_\epsilon^*}{2} u_\epsilon, u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\ -Re(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} |u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + (J_\epsilon^*(s\lambda\varphi) J_\epsilon u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)} + \left( \frac{R_+(x, D) + R_+^*(x, D)}{2} J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\ -Re(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} |u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + \int_M s\lambda\varphi |J_\epsilon u_\epsilon|^2 d\dot{x} + \frac{1}{2} (R_+(x, D) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (J_\epsilon u_\epsilon, R_+(x, D) J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -Re(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} |u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + \int_M s\lambda\varphi |J_\epsilon u_\epsilon|^2 d\dot{x} + Re(R_+(x, D) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

En appliquant l'inégalité de Garding sur  $Re(R_+(x, D) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)}$ , il existe  $C$  et  $C_0$  telles que :

$$Re(R_+(x, D) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \geq C \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 + C_0 \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(M)}^2 \quad (2.70)$$

D'autre part, on a :

$$-Re(z, u_\epsilon)_{L^2(M)} \leq \frac{1}{2} (|z|_{L^2(M)}^2 + |u_\epsilon|_{L^2(M)}^2). \quad (2.71)$$

De (3.1), (3.2) et (2.69) on déduit qu'il existe une constante  $C' > 0$  telle que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} |u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + \int_M s\lambda\varphi |J_\epsilon u_\epsilon|^2 dx' + C \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 \leq C' (|z|_{L^2(M)}^2 + |u_\epsilon|_{L^2(M)}^2). \quad (2.72)$$

Finalement

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;L^2(M))}^2 + s\lambda |\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(0,1;H^{\frac{1}{2}})}^2 \leq C |z|_{L^2(G)}^2, \quad (2.73)$$

où  $C$  est indépendant de  $s$ ,  $\epsilon$  et  $\lambda$ .

On note par  $S_\epsilon$  et  $T_\epsilon$  les opérateurs suivants :

$$S_\epsilon = \frac{B_\epsilon + B_\epsilon^*}{2} \quad \text{et} \quad T_\epsilon = \frac{B_\epsilon - B_\epsilon^*}{2} \quad (2.74)$$

On prend la partie réelle du produit scalaire de (2.58) avec  $-S_\epsilon u_\epsilon$  dans  $L^2(M)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (z, -S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \left( \frac{-\partial u_\epsilon}{\partial x_0}, -S_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + (-J_\epsilon^*(s\lambda\varphi + R_+(x, D)) J_\epsilon u_\epsilon, -S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -(z, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0}, S_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + (J_\epsilon^*(s\lambda\varphi + R_+(x, D)) J_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -(z, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0}, S_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0}, S_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + (B_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -(z, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0}, S_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + \frac{1}{2} \left( S_\epsilon^* \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0}, u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + (B_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -(z, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0}, S_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\epsilon S_\epsilon}{\partial x_0}, u_\epsilon \right)_{L^2(M)} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S_\epsilon}{\partial x_0} u_\epsilon, u_\epsilon \right)_{L^2(M)} + (B_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -(z, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} (u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} - \frac{1}{2} (u_\epsilon, \dot{S}_\epsilon u_\epsilon) + (B_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ -Re(z, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} (u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} - \frac{1}{2} Re(u_\epsilon, \dot{S}_\epsilon u_\epsilon) + Re(B_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \end{aligned} \quad (2.75)$$

où :

$$\begin{aligned} S_\epsilon^* &= S_\epsilon \\ S'_\epsilon &= \left( \frac{\partial}{\partial x_0} S_\epsilon \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{B_\epsilon + B_\epsilon^*}{2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left( J_\epsilon^*(s\lambda\varphi) J_\epsilon + J_\epsilon^* \left( \frac{R_+(x, D) + R_+(x, D)^*}{2} \right) J_\epsilon \right) \\ &= J_\epsilon^* \left( s\lambda \frac{\partial}{\partial x_0} \varphi(x_0) \right) J_\epsilon + J_\epsilon^* \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{R_+(x, D) + R_+(x, D)^*}{2} \right) J_\epsilon \\ &= J_\epsilon^* (s\lambda^2 \varphi) J_\epsilon + J_\epsilon^* \left( \frac{R_+(x, D) + R_+(x, D)^*}{2} \right)' J_\epsilon \end{aligned} \quad (2.76)$$

et  $\left(\frac{R_+(x, D) + R_+^*(x, D)}{2}\right)'$  est la somme d'un opérateur pseudodifférentiel avec le symbole principal

$\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{r_+(x, D) + \overline{r_+(x, D)}}{2}\right)$  et un opérateur qui appartient à  $L^\infty([0, 1]; l(L^2(M), L^2(M)))$ .

Pour  $x_0$  dans  $[0, 1]$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(u_\epsilon, S'_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \operatorname{Re}(J_\epsilon u_\epsilon, s\lambda^2 \varphi J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} + \operatorname{Re}\left(J_\epsilon u_\epsilon, \left(\frac{R_+(x, D) + R_+^*(x, D)}{2}\right)' J_\epsilon u_\epsilon\right)_{L^2(M)} \\ &= s\lambda^2 \int_M |\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon|^2 d\hat{x} + \operatorname{Re}\left(\left(\frac{R_+(x, D) + R_+^*(x, D)}{2}\right)' J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon\right)_{L^2(M)} \\ &\leq s\lambda^2 |\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + C \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

D'autre part, on prend le produit scalaire de  $u_\epsilon$  et  $S_\epsilon u_\epsilon$  dans  $L^2(M)$  et on utilise l'inégalité de Garding, on obtient :

$$\begin{aligned} (u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= (s\lambda \varphi J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} + \left(\frac{R_+ + R_+^*}{2} J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon\right) \\ &= (s\lambda \varphi J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} + \frac{1}{2} (R_+ J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (J_\epsilon u_\epsilon, R_+ J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ &= s\lambda |\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + \operatorname{Re}(R_+(x, D) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ (u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &\geq s\lambda |\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + C \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 - \dot{C} |J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Maintenant, on étudie le terme  $\operatorname{Re}(B_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)}$ , puisque  $B_\epsilon = S_\epsilon + T_\epsilon$ , alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(B_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \operatorname{Re}(S_\epsilon u_\epsilon + T_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ &= \operatorname{Re}(S_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} + \operatorname{Re}(T_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} \\ &= |S_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 + \operatorname{Re}(T_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Et on a,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(T_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= (T_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} + (S_\epsilon u_\epsilon, T_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)}, \\ &= (S_\epsilon^* T_\epsilon u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)} + (T_\epsilon^* S_\epsilon u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)}, \\ \operatorname{Re}(T_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} ((S_\epsilon T_\epsilon - T_\epsilon S_\epsilon) u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)}, \\ &= \frac{1}{2} ([S_\epsilon, T_\epsilon] u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)}, \\ \operatorname{Re}(T_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{2} (S_\epsilon T_\epsilon u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)} - \frac{1}{2} (T_\epsilon S_\epsilon u_\epsilon, u_\epsilon)_{L^2(M)}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} (T_\epsilon u_\epsilon, S_\epsilon u_\epsilon)_{L^2(M)} &= \frac{1}{8} \left( (2s\lambda\varphi + R_+ + R_+^*) J_\epsilon J_\epsilon^* (R_+^* - R_+) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\
&\quad - \frac{1}{8} \left( (R_+^* - R_+) J_\epsilon J_\epsilon^* (2s\lambda\varphi + R_+ + R_+^*) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\
&= \frac{1}{8} \left[ \left( J_\epsilon J_\epsilon^* (2s\lambda\varphi + R_+ + R_+^*) (R_+^* - R_+) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \right. \\
&\quad - \left( J_\epsilon J_\epsilon^* (R_+^* - R_+) (2s\lambda\varphi + R_+ + R_+^*) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\
&\quad + \left( [2s\lambda\varphi + R_+^* + R_+, J_\epsilon J_\epsilon^*] (R_+^* - R_+) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\
&\quad \left. - \left( [R_+^* - R_+, J_\epsilon J_\epsilon^*] (2s\lambda\varphi + R_+^* + R_+) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \right] \\
&= 1/8 \left[ \left( J_\epsilon J_\epsilon^* [2s\lambda\varphi + R_+^* + R_+, R_+^* - R_+] J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \right. \\
&\quad + \left( [R_+^* - R_+, J_\epsilon J_\epsilon^*] (R_+^* - R_+) J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \\
&\quad \left. + \left( [R_+^* - R_+, J_\epsilon J_\epsilon^*] (2s\lambda\varphi + R_+^* + R_+), J_\epsilon u_\epsilon, J_\epsilon u_\epsilon \right)_{L^2(M)} \right] \\
&= I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.81}
\end{aligned}$$

On sait que :

$$\|J_\epsilon^* J_\epsilon\|_{l(H^{-\frac{1}{2}}(M), H^{-\frac{1}{2}}(M))} \leq C, \tag{2.82}$$

où  $C$  est indépendant de  $\epsilon$ .

De plus, le commutateur  $[2s\lambda\varphi + R_+^*(x, D) + R_+(x, D), R_+^*(x, D) - R_+(x, D)] = [R_+^*(x, D) + R_+(x, D), R_+^*(x, D) - R_+(x, D)]$  appartient à  $L^\infty([0, 1], l(H^1(M), L^2(M)))$ , alors

$$\forall x_0 \in [0, 1] \quad I_1 \leq C \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2. \tag{2.83}$$

Les commutateurs  $[R_+^*(x, D) + R_+(x, D), J_\epsilon J_\epsilon^*]$  qui vont de  $H^{-\frac{1}{2}}(M)$  vers  $H^{-\frac{1}{2}}(M)$ , et  $[R_+^*(x, D) - R_+(x, D), J_\epsilon J_\epsilon^*]$  qui vont de  $L^2(M)$  vers  $L^2(M)$  sont aussi des opérateurs uniformément bornés, pour  $\epsilon \in ]0, 1]$  et  $x_0 \in [0, 1]$ .

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x_0 \in [0, 1] \quad , \quad I_2 &\leq C \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2, \\
\forall x_0 \in [0, 1] \quad , \quad I_3 &\leq C \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 + s\lambda |\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(M)}^2. \tag{2.84}
\end{aligned}$$

On substitue ces estimations avec (2.77), (2.78) et (2.79) dans (2.75), on obtient par l'inégalité de Gronwall et (2.73) :

$$\begin{aligned} s\lambda \|\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;L^2(M))}^2 + \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 + |S_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(M)}^2 \\ \leq C|z|_{L^2(M)}^2 + Cs\lambda^2 |\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(M)}^2, \end{aligned} \quad (2.85)$$

où  $C$  est indépendant de  $s$ ,  $\lambda$  et  $\epsilon$ .

Puisque,

$$S_\epsilon = J_\epsilon^* s\lambda \varphi J_\epsilon + J_\epsilon^* \frac{R_+^* + R_+}{2} J_\epsilon,$$

on a :

$$\begin{aligned} S_\epsilon u_\epsilon &= s\lambda \varphi J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon + J_\epsilon^* \frac{R_+^* + R_+}{2} J_\epsilon u_\epsilon, \\ |S_\epsilon u_\epsilon|^2 &= |s\lambda \varphi J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon + J_\epsilon^* \frac{R_+^* + R_+}{2} J_\epsilon u_\epsilon|^2, \\ |S_\epsilon u_\epsilon|^2 &\geq |s\lambda \varphi J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon|^2 + |J_\epsilon^* \frac{R_+^* + R_+}{2} J_\epsilon u_\epsilon|^2, \\ \int_G |S_\epsilon u_\epsilon|^2 dx &\geq s^2 \lambda^2 \int_G |\varphi J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon|^2 dx + \int_G |J_\epsilon^* \frac{R_+^* + R_+}{2} J_\epsilon u_\epsilon|^2 dx, \\ \|S_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(M)}^2 &\geq s^2 \lambda^2 \|\varphi J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(M)}^2 + \|J_\epsilon^* \frac{R_+^* + R_+}{2} J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^2(M)}^2. \end{aligned}$$

Le commutateur  $[R_+^* + R_+, J_\epsilon^*]$  qui va de  $L^2(M)$  dans lui-même est uniformément borné en  $\epsilon$  et  $x_0$ . En utilisant ceci, (2.72) et l'estimations (2.85), on obtient :

$$\begin{aligned} s\lambda \|\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;L^2(M))}^2 + \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 \\ + s^2 \lambda^2 |\varphi J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + \|J_\epsilon^* J_\epsilon\|_{L^2(0,1;H^1(M))}^2 \\ \leq C|z|_{L^2(G)}^2 + Cs\lambda^2 |\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(G)}^2, \end{aligned}$$

de l'estimation (2.73), on a :

$$\begin{aligned} s\lambda \|\sqrt{\varphi} J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;L^2(M))}^2 + \|J_\epsilon u_\epsilon\|_{L^\infty(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 \\ + s^2 \lambda^2 |\varphi J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + \|J_\epsilon^* J_\epsilon\|_{L^2(0,1;H^1(M))}^2 \\ \leq C|z|_{L^2(G)}^2 + C\lambda^2 |z|_{L^2(G)}^2 \\ \leq C(1 + \lambda) |z|_{L^2(G)}^2. \end{aligned} \quad (2.86)$$

En utilisant l'estimation pour le commutateur  $[R_+^*, J_+^*]$  dans (2.59) et d'après (2.86), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0} \right|_{L^2(G)}^2 &\leq C|z|_{L^2(G)}^2 + C\lambda^2|z|_{L^2(G)}^2 \\ &\leq C(1 + \lambda)|z|_{L^2(G)}^2 \end{aligned} \quad (2.87)$$

■ Ceci finalise la preuve de la proposition 2.3.

On peut maintenant extraire une sous suite toujours notée par  $\epsilon$  telle que :

$u_\epsilon$  converge vers  $u$  dans  $L^\infty(0, 1; L^2(M))$  faiblement\*,

$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_0}$  converge vers  $\frac{\partial u}{\partial x_0}$  dans  $L^2(G)$  faiblement,

$J_\epsilon^* J_\epsilon u_\epsilon$  converge vers  $u$  dans  $L^2(0, 1; H^1(M))$  faiblement,

$J_\epsilon u_\epsilon$  converge vers  $u$  dans  $L^\infty(0, 1; H^{\frac{1}{2}}(M))$  faiblement\*.

où  $u \in H^1(G)$  et  $u$  est une solution de (2.54) et (2.55). De plus, d'après les estimations (2.86) (première inégalité), (2.87) (première inégalité) et (2.73), on obtient :

$$\begin{aligned} &s\lambda \|\sqrt{\varphi}u\|_{L^\infty(0,1;L^2(M))}^2 + \|u\|_{L^\infty(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 + s^2\lambda^2|\varphi u|_{L^2(G)}^2 \\ &+ \|u\|_{L^2(0,1;H^1(M))}^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right|_{L^2(G)}^2 \leq C|z|_{L^2(G)}^2 + Cs\lambda^2|\sqrt{\varphi}u|_{L^2(G)}^2, \end{aligned} \quad (2.88)$$

pour  $s$  assez grand (indépendant de  $\lambda$ ), le dernier terme dans le second membre peut être absorbé par le premier membre, et on a :

$$s\lambda \|\sqrt{\varphi}u\|_{L^\infty(0,1;L^2(M))}^2 + \|u\|_{L^\infty(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 + s^2\lambda^2|\varphi u|_{L^2(G)}^2 + |\nabla u|_{L^2(G)}^2 \leq C|z|_{L^2(M)}^2, \quad (2.89)$$

alors :

$$s^2\lambda^2|\varphi u|_{L^2(G)}^2 + |\nabla u|_{L^2(G)}^2 \leq C|z|_{L^2(G)}^2.$$

En ce qui concerne l'unicité de la solution de (2.54) et (2.55) qui est immédiate, on choisit  $z = 0$  pour simplification et en prenant la partie réelle du produit scalaire de (2.54) avec  $u$  dans  $L^2(G)$ , on arrive à  $u = 0$ .

La preuve du lemme 2.2 est complète, ceci fini aussi la preuve de la proposition 2.2.

Maintenant on cherche à obtenir une estimation de  $w$  en fonction de  $z$ .

On sait que  $w$  satisfait :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-(x, D) \right) w = z \quad \text{dans } G, \quad (2.90)$$

$$w(0, x') = e^s g(x'), \quad w(1, x') = 0, \quad x' \in M. \quad (2.91)$$

D'abord, on obtient une estimation sur la semi-norme  $L^2$  du  $w$ . Le gradient de  $w$  va être obtenue plus tard.

On définit :

$$Lw = \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-(x, D) \right) w \quad (2.92)$$

et on sépare  $L$  de sorte que  $L = L_1 + L_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} Lw &= \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-(x, D) \right) w \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right) w - \left( s\lambda\varphi + \frac{R_-(x, D) + R_-^*(x, D)}{2} \right) w \end{aligned}$$

tels que,

$$\begin{aligned} L_1 &= - \left( s\lambda\varphi + \frac{R_-(x, D) + R_-^*(x, D)}{2} \right) \\ L_2 &= \frac{\partial}{\partial x_0} - \left( \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Donc le problème (2.90) pourrait être écrit de la manière suivante :

$$L_1w + L_2w = z \quad \text{dans } G, \quad (2.94)$$

$$w(0, x') = e^s g(x'), \quad w(1, x') = 0, \quad x' \in M. \quad (2.95)$$

On prend le  $L^2(G)$ -norme des deux cotés dans (2.94), on a :

$$|L_1w|_{L^2(G)}^2 + |L_2w|_{L^2(G)}^2 + 2\operatorname{Re}(L_1w, L_2w)_{L^2(G)} = |z|_{L^2(G)}^2, \quad (2.96)$$

sachant que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L_1w, L_2w)_{L^2(G)} &= \frac{1}{2} (L_1w, L_2w)_{L^2(G)} + \frac{1}{2} (L_2w, L_1w)_{L^2(G)} \\ &= \frac{1}{2} (L_1^*L_2w, w)_{L^2(G)} + \frac{1}{2} (L_1w, L_2w)_{L^2(G)} \end{aligned}$$

et  $L_1^* = L_1$ , on obtient :

$$2\operatorname{Re}(L_1w, L_2w)_{L^2(G)} = (L_1L_2w, w)_{L^2(G)} + (L_1w, L_2w)_{L^2(G)},$$

où

$$\begin{aligned} (L_1w, L_2w)_{L^2(G)} &= \int_G L_1w \left( \frac{\partial w}{\partial x_0} - \left( \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right) w \right) dx \\ &= \underbrace{\int_G L_1w \frac{\partial w}{\partial x_0} dx}_{I_1} - \underbrace{\int_G L_1w \left( \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right) w dx}_{I_2} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.97)$$

On développe chacun de  $I_1$  et  $I_2$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_G L_1 w \frac{\partial w}{\partial x_0} dx \\
 &= \int_G \left( \int_0^1 L_1 w \frac{\partial w}{\partial x_0} dx_0 \right) dx' \\
 &= \int_M \left[ \int_0^1 L_1 w(x_0, x') \cdot w(x_0, x') - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_0} (L_1 w) w dx_0 \right] dx' \\
 &= \int_M [L_1(1, \cdot) w(1, x') \cdot w(1, x') - L_1(0, \cdot) w(0, x') \cdot w(0, x')] dx' \\
 &\quad - \int_G \frac{\partial}{\partial x_0} L_1 w \cdot w dx
 \end{aligned}$$

d'après (2.95), on a :

$$I_1 = -e^{2s} \int_G L_1(0, \cdot) g(x') \cdot g(x') dx - \int_G \frac{\partial}{\partial x_0} L_1 w \cdot w dx \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= - \int_G L_1 w \left( \frac{R_- - R_-^*}{2} \right) w dx \\
 &= - \left( L_1 w, \frac{R_- - R_-^*}{2} w \right)_{L^2(G)} \\
 &= - \left( \frac{R_- - R_-^*}{2} L_1 w, w \right)_{L^2(G)} \\
 &= \left( \frac{R_- - R_-^*}{2} L_1 w, w \right)_{L^2(G)} \\
 &= \int_G \frac{R_- - R_-^*}{2} L_1 w \cdot w dx
 \end{aligned} \quad (2.99)$$

en injectant (2.98) et (2.99) dans (2.97), on obtient :

$$\begin{aligned}
 (L_1 w, L_2 w) &= - \int_G \frac{\partial}{\partial x_0} L_1 w \cdot w dx + \int_G \frac{R_- - R_-^*}{2} L_1 w \cdot w dx - e^{2s} \int_M L_1(0, \cdot) g(x') \cdot g(x') dx' \\
 &= - \left[ \int_G \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{R_- - R_-^*}{2} \right) L_1 w \cdot w dx - e^{2s} \int_M L_1(0, \cdot) g(x') g(x') dx' \right] \\
 &= - (L_2 L_1 w, w)_{L^2(G)} - e^{2s} (L_1(0, \cdot) g, g)_{L^2(M)}
 \end{aligned}$$

alors :

$$2\operatorname{Re} (L_1 w, L_2 w)_{L^2(G)} = (L_1 L_2 w, w)_{L^2(G)} - (L_2 L_1 w, w)_{L^2(G)} - e^{2s} (L_1(0, \cdot) g, g)_{L^2(M)} \quad (2.100)$$

en remplaçant (2.100) dans (2.96), on a :

$$\begin{aligned}
 |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + |L_2 w|_{L^2(G)}^2 + ((L_1 L_2 - L_2 L_1) w, w)_{L^2(G)} - e^{2s} (L_1(0, \cdot) g, g)_{L^2(M)} &= |z|_{L^2(G)}^2 \\
 |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + |L_2 w|_{L^2(G)}^2 + ([L_1, L_2] w, w)_{L^2(G)} - e^{2s} (L_1(0, \cdot) g, g)_{L^2(M)} &= |z|_{L^2(G)}^2 \quad (2.101)
 \end{aligned}$$

Maintenant, on calcule le commutateur  $[L_1, L_2]$

$$\begin{aligned}
 [L_1, L_2] &= L_1 L_2 - L_2 L_1 \\
 &= L_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - L_1 \left( \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_0} L_1 + \left( \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right) L_1 \\
 &= L_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_0} L_1 + \left( \frac{R_-(x, D) + R_-^*(x, D)}{2} \right) \left( \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right) \\
 &\quad - \left( \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right) \left( \frac{R_-(x, D) + R_-^*(x, D)}{2} \right) \\
 &= \left[ L_1, \frac{\partial}{\partial x_0} \right] + \frac{1}{4} [R_-(x, D) + R_-^*(x, D), R_-(x, D) - R_-^*(x, D)] \tag{2.102}
 \end{aligned}$$

et

$$\left[ L_1, \frac{\partial}{\partial x_0} \right] = -L_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{R_-(x, D) + R_-^*(x, D)}{2} \right) + s\lambda^2 \varphi.$$

On met

$$\begin{aligned}
 k(x_0) &= -L_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{R_-(x, D) + R_-^*(x, D)}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} [(R_-(x, D) + R_-^*(x, D)), R_-(x, D) - R_-^*(x, D)],
 \end{aligned}$$

où

$$[R_-(x, D) + R_-^*(x, D), R_-(x, D) - R_-^*(x, D)] \in L^\infty([0, 1]; l(H^1(M), L^2(M))), \tag{2.103}$$

donc :

$$[L_1, L_2] = s\lambda^2 \varphi + k(x_0), \tag{2.104}$$

où  $k \in L^\infty([0, 1]; l(H^1(M), L^2(M)))$ .

Finalement, l'équation (2.101) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 e^{2s} (L_1(0, \cdot)g, g)_{L^2(M)} &= |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + |L_2 w|_{L^2(G)}^2 + (s\lambda^2 \varphi w, w)_{L^2(G)} \\
 &\quad + (k(x_0)w, w)_{L^2(G)} - |z|_{L^2(G)}^2. \tag{2.105}
 \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à distinguer deux cas selon le signe du second membre de (2.105).

**cas 1** si  $(L_1(0, \cdot)g, g)_{L^2(M)} \leq 0$ , on a la proposition suivante :

**Proposition 2.4** *si  $(L_1(0, \cdot)g, g)_{L^2(M)} \leq 0$ , alors il existe  $\lambda_0 \geq 0$ , tel que pour chaque  $\lambda \geq \lambda_0$  et pour chaque  $s \geq 1$ ,*

$$\frac{1}{2}|L_1 w|_{L^2(G)}^2 + |L_2 w|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2}s\lambda^2 \int_G \varphi |w|^2 dx \leq |z|_{L^2(G)}^2 \quad (2.106)$$

*et il existe  $\lambda_1 > 0$  et  $s_1 > 0$ , tels que pour chaque  $\lambda \geq \lambda_1$  et pour chaque  $s \geq s_1$ ,*

$$\frac{1}{2}|L_1(\sqrt{\varphi}w)|_{L^2(G)}^2 + |L_2(\sqrt{\varphi}w)|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2}s\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx \leq 2|\sqrt{\varphi}z|_{L^2(G)}^2. \quad (2.107)$$

**Preuve de la proposition 2.4**

de (2.105) et comme  $(L_1(0, \cdot)g, g) \leq 0$ , on a :

$$|L_1 w|_{L^2(G)}^2 + |L_2 w|_{L^2(G)}^2 + s\lambda^2 \int_G \varphi |w|^2 dx + (k(x_0)w, w)_{L^2(G)} - |z|_{L^2(G)}^2 \leq 0 \quad (2.108)$$

$$|L_1 w|_{L^2(G)}^2 + |L_2 w|_{L^2(G)}^2 + s\lambda^2 \int_G \varphi |w|^2 dx \leq |z|_{L^2(G)}^2 + C\|w\|_{L^2(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2. \quad (2.109)$$

On prend le produit scalaire de  $L_1 w$  et  $w$  dans  $L^2(G)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (L_1 w, w)_{L^2(G)} &= (-s\lambda\varphi w, w)_{L^2(G)} + \left(-\frac{R_- + R_-^*}{2}w, w\right)_{L^2(G)} \\ &= -s\lambda \int_G \varphi |w|^2 dx + (Re(-R_-(x, D))w, w)_{L^2(G)}, \end{aligned}$$

on applique l'inégalité de Garding sur  $(Re(-R_-(x, D))w, w)_{L^2(G)}$ , on a :

$$\begin{aligned} (Re(-R_-(x, D))w, w)_{L^2(G)} &\geq C\|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(G)}^2 - C'|w|_{L^2(G)}^2 \\ &= C \int_0^1 \|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 dx' - C'|w|_{L^2(G)}^2, \end{aligned}$$

alors :

$$(L_1 w, w)_{L^2(G)} \geq -s\lambda \int_G \varphi |w|^2 + C \int_0^1 \|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 dx_0 - C'|w|_{L^2(G)}^2, \quad (2.110)$$

d'où

$$C\|w\|_{L^2(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 \leq (L_1 w, w)_{L^2(G)} + s\lambda \int_G \varphi |w|^2 dx + C'|w|_{L^2(G)}^2.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 (L_1 w, w)_{L^2(G)} &\leq (L_1 w, L_1 w)_{L^2(G)}^{\frac{1}{2}} (w, w)_{L^2(G)}^{\frac{1}{2}}, \\
 &= |L_1 w|_{L^2(G)} |w|_{L^2(G)}, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |L_1 w|_{L^2(G)} \sqrt{\lambda} |w|_{L^2(G)}, \\
 &\leq C \left( \frac{1}{\lambda} |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + \lambda |w|_{L^2(G)}^2 \right),
 \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive, donc :

$$\begin{aligned}
 \|w\|_{L^2(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 &\leq C \left( \frac{1}{\lambda} |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + \lambda |w|_{L^2(G)}^2 + s\lambda \int_G \varphi |w|_{L^2(G)}^2 dx + C' |w|_{L^2(G)}^2 \right) \\
 &= C \left( \frac{1}{\lambda} |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + s\lambda \int_G \varphi |w|^2 dx + (C' + \lambda) |w|_{L^2(G)}^2 \right). \quad (2.111)
 \end{aligned}$$

En choisissant  $\lambda$  assez grand et indépendant de  $s \geq 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 C \|w\|_{L^2(0,1;H^{\frac{1}{2}}(M))}^2 &\leq \frac{1}{\lambda} s\lambda^2 \int_G \varphi |w|^2 dx + \frac{1}{\lambda} |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + (\lambda + \dot{C}) |w|_{L^2(G)}^2, \\
 |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + |L_2 w|_{L^2(G)}^2 + s\lambda^2 \int_G \varphi |w|^2 dx &\leq |z|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{\lambda} s\lambda \int_G \varphi |w|^2 dx + \frac{1}{\lambda} |L_1 w|_{L^2(G)}^2, \\
 |L_2 w|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2} |L_1 w|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2} s\lambda^2 \int_G \varphi |w|^2 &\leq |z|_{L^2(G)}^2. \quad (2.112)
 \end{aligned}$$

Afin d'obtenir (2.107), on va juste appliquer (2.107) sur  $\tilde{w} = \sqrt{\varphi} w$  qui est une solution de (2.60) et (2.91) avec second membre,  $\tilde{z} = \sqrt{\varphi} z + \frac{\lambda}{2} \sqrt{\varphi} w$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} |L_1 \tilde{w}|_{L^2(G)}^2 + |L_2 \tilde{w}|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2} s\lambda^2 \int_G \varphi |\tilde{w}|^2 dx &\leq |\tilde{z}|_{L^2(G)}^2, \\
 \frac{1}{2} |L_1(\sqrt{\varphi} w)|_{L^2(G)}^2 + |L_2(\sqrt{\varphi} w)| + \frac{1}{2} s\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx &\leq |\sqrt{\varphi} z + \frac{\lambda}{2} \sqrt{\varphi} w|_{L^2(G)}^2, \\
 \frac{1}{2} |L_1(\sqrt{\varphi} w)|_{L^2(G)}^2 + |L_2(\sqrt{\varphi} w)| + \frac{1}{2} s\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx &\leq 2|\sqrt{\varphi} z|_{L^2(G)}^2 \\
 &\quad + 2|\frac{\lambda}{2} \sqrt{\varphi} w|_{L^2(G)}^2, \\
 \frac{1}{2} |L_1(\sqrt{\varphi} w)|_{L^2(G)}^2 + |L_2(\sqrt{\varphi} w)| + \frac{1}{2} s\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx - \frac{\lambda^2}{2} \int_G \varphi |w|^2 dx &\leq 2|\sqrt{\varphi} z|_{L^2(G)}^2.
 \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.4

**cas2** si  $(L_1(0, \cdot)g, g)_{L^2(G)} \geq 0$  : les résultat sont donnés par la proposition suivante :

**Proposition 2.5** *Il existe une constante  $C$  indépendante de  $s$  et  $\lambda$ , et il existe  $s_1 \geq 0$  et  $\lambda_1 \geq 0$  tels que pour tout  $s \geq s_1$  et pour tout  $\lambda \geq \lambda_2$ ,*

$$|\sqrt{\varphi}w|_{L^2(G)} \leq \frac{C}{\sqrt{s\lambda}}|z|_{L^2(G)} + \frac{C}{s^{\frac{3}{4}}\lambda}e^s\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)},$$

*aussi, il existe une constante  $C$  indépendante de  $s$  et  $\lambda$ , tels que pour tout  $\lambda \geq \lambda_2$  et  $s \geq s_2$ ,  $\lambda_2$  et  $s_2$  seront choisis suffisamment large, on a :*

$$|\varphi w|_{L^2(G)} \leq \frac{C}{\sqrt{s\lambda}}|\sqrt{\varphi}z|_{L^2(G)} + \frac{C}{s^{\frac{3}{4}}\lambda}e^s\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}.$$

**Preuve de la proposition 2.5**

comme  $\varphi(0) = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \left( -\left(s\lambda + \frac{R_- + R_-^*}{2}\right)g, g \right)_{L^2(M)} &= - (s, g)_{L^2(M)} - \left( \frac{R_- + R_-^*}{2}g, g \right)_{L^2(G)} \\ &= -s\lambda \int_M |g|^2 dx' - (Re(R_-(x, D))g, g)_{L^2(M)} \end{aligned}$$

et puisque  $(L_1(0, \cdot), g, g)_{L^2(G)} \geq 0$  on a :

$$s\lambda \int_M |g|^2 dx' \leq - (Re(R_-(x, D))g, g)_{L^2(M)},$$

on applique l'inégalité de Garding sur  $(Re(R_-(x, D))g, g)_{L^2(M)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} s\lambda \int_M |g|^2 dx' &\leq C_0|g|_{L^2(M)}^2 - C_1\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2, \\ s\lambda \int_M |g|^2 dx' &\leq C\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Considérant le problème adjoint,

$$L^*p = \left( -\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-^*(x, D) \right) p = \varphi w. \tag{2.114}$$

On a le lemme suivant :

**Lemme 2.3** *il existe  $C > 0$  et il existe  $\lambda_2 > 0$  telles que pour tout  $\lambda \geq \lambda_2$  et pour tout  $s \geq 1$ , il existe une solution  $p$  de (2.114) telle que,*

$$s\lambda^2 \int_G |p|^2 dx + \sqrt{s\lambda} \int_M |p(0, x')|^2 dx' \leq C \int_G \varphi |w|^2 dx. \tag{2.115}$$

■ Supposant pour l'instant que le lemme 2.3 est démontré afin d'utiliser la résultante, la démonstration se fera plus tard.

On prend le produit scalaire de (2.114) avec  $w$  dans  $L^2(G)$  et on utilise (2.90), on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\varphi w, w)_L^2(G) &= (L^*p, w)_L^2(G) = \left( \left( -\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-(x, D) \right) p, w \right)_{L^2(G)} \\
 \int_G \varphi |w|^2 dx &= (L^*p, w)_L^2(G) = -\left( \frac{\partial p}{\partial x_0}, w \right)_L^2(G) - (s\lambda\varphi p, w)_L^2(G) - (R_-(x, D)p, w)_L^2(G) \\
 &= \left( \frac{\partial p}{\partial x_0}, w \right)_L^2 - \int_M |{}_0p(x_0, x')w(x_0, x')dx' - (p, s\lambda\varphi w)_L^2(G) \\
 &\quad - (p, R_-(x, D))_L^2(G) \\
 &= \left( p, \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-(x, D) \right) w \right)_{L^2(G)} - \underbrace{\int_M p(1, x')w(1, x')dx'}_{=0} \\
 &\quad + \int_M p(0, x')w(0, x')dx'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_G \varphi |w|^2 dx &= (L^*p, w)_L^2(G) = (p, Lw)_L^2(G) + \int_M p(0, x')w(0, x')dx' \\
 \int_G \varphi |w|^2 dx &= (L^*p, w)_L^2(G) = (p, z)_L^2(G) + \int_M p(0, x')e^s g(x')dx'. \tag{2.116}
 \end{aligned}$$

D'après (2.115), on a :

$$\begin{aligned}
 \int_G \varphi |w|^2 dx &\leq \frac{1}{\sqrt{s\lambda}} \sqrt{s\lambda} (p, p)_{L^2(G)}^{\frac{1}{2}} (z, z)_{L^2(G)}^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \frac{1}{s^{\frac{1}{4}}\sqrt{\lambda}} \times s^{\frac{1}{4}}\sqrt{\lambda} \left( \int_M |p(0, x')|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \int_M |e^s g|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \int_G \varphi |w|^2 dx &\leq \frac{C}{\sqrt{s\lambda}} |\sqrt{\varphi}w|_{L^2(G)} |z|_{L^2(G)} + \frac{C}{s^{\frac{1}{4}}\sqrt{\lambda}} |\sqrt{\varphi}w|_{L^2(G)} |e^s g|_{L^2(M)}. \tag{2.117}
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.113), on obtient :

$$\begin{aligned}
 |\sqrt{\varphi}w|_{L^2(G)}^2 &\leq |\sqrt{\varphi}w|_{L^2(G)} \left( \frac{C}{\sqrt{s\lambda}} |z|_{L^2(G)} + \frac{C}{s^{\frac{3}{4}}\lambda} \times e^s \sqrt{s\lambda} |g|_{L^2(G)} \right) \\
 |\sqrt{\varphi}w|_{L^2(G)}^2 &\leq \frac{C}{\sqrt{s\lambda}} |z|_{L^2(G)} + \frac{C}{s^{\frac{3}{4}}\lambda} e^s \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}. \tag{2.118}
 \end{aligned}$$

On change  $w$  par  $\tilde{w} = \sqrt{\varphi}w$  qui est une solution de (2.90) et (2.91), et  $z$  par  $\tilde{z} = \sqrt{\varphi}z - \left(\frac{\lambda}{2}\right)$ , on peut obtenir aussi pour  $\lambda \geq \lambda_2$ ,  $s \geq s_2$ ,  $\lambda_2$  et  $s_2$  suffisamment large :

$$|\varphi w|_{L^2(G)} \leq \frac{C}{\sqrt{s\lambda}} |\sqrt{\varphi}z|_{L^2(G)} + \frac{C}{s^{\frac{3}{4}}\lambda} e^s \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}. \tag{2.119}$$

Ceci termine la démonstration de proposition 2.5

**Preuve du lemme 2.3**

Pour  $\epsilon > 0$ , on considère la fonctionnelle :

$$J_\epsilon(p) = \frac{1}{2}|p|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \left| \frac{\partial p}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p + R_-^*(x, D)p + \varphi w \right|_{L^2(G)}^2 \quad (2.120)$$

on note qu'il existe  $p$  tel que  $J_\epsilon(p)$  est finie, par exemple  $p = 0$ .

On considère le problème minimisé suivant :

$$\min_{p \in U} J_\epsilon(p), \quad (2.121)$$

où

$$U = \left\{ p \in L^2(G), \left( \frac{\partial p}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p + R_-^*(x, D)p + \varphi w \right) \in L^2(G) \right\}. \quad (2.122)$$

Il existe une suite minimisante  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$p_n \in U \text{ et } J_\epsilon(p_n) \rightarrow \inf_{p \in U} J_\epsilon(p), \quad (2.123)$$

donc  $|p_n|_{L^2(G)}^2$  est bornée et  $\left| \frac{\partial p_n}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p_n + R_-^*(x, D)p_n + \varphi w \right|_{L^2(G)}^2$  est bornée, par conséquent  $R_-^*(x, D)p_n$  et  $\frac{\partial p_n}{\partial x_0}$  sont bornés dans  $L^2(0, 1; H^{-1}(M))$ . Alors on peut extraire une sous suite toujours notée par  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\begin{aligned} p_n &\rightharpoonup p_\epsilon, \text{ dans } L^2(G) \text{ faiblement,} \\ \frac{\partial p_n}{\partial x_0} &\rightharpoonup \frac{\partial p_\epsilon}{\partial x_0} \text{ dans } L^2(0, 1; H^{-1}(M)) \text{ faiblement,} \\ \frac{\partial p_n}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p_n + R_-^*(x, D)p_n + \varphi w &\rightharpoonup \frac{\partial p_\epsilon}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p_\epsilon + R_-^*(x, D)p_\epsilon + \varphi w \text{ faiblement dans } L^2(0, 1; H^{-1}(M)). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Mais, comme  $\left| \frac{\partial p_n}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p_n + R_-^*(x, D)p_n + \varphi w \right|_{L^2(G)}^2$  reste bornée, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p_n + R_-^*(x, D)p_n + \varphi w &\rightharpoonup \frac{\partial p_\epsilon}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p_\epsilon + R_-^*(x, D)p_\epsilon + \varphi w \text{ faiblement dans } L^2(G) \end{aligned} \quad (2.125)$$

donc  $p_\epsilon$  est le minimiseur de  $J_\epsilon$ , c.a.d :

$$p_\epsilon \in U \text{ et } J_\epsilon(p_\epsilon) = \min_{p \in U} J_\epsilon(p). \quad (2.126)$$

En écrivant les conditions d'optimalité d'ordre 1, on obtient pour chaque  $r \in H^1(G)$ ,

$$\langle J'_\epsilon(p_\epsilon), r \rangle = 0. \quad (2.127)$$

où

$$J'_\epsilon(p_\epsilon) = \frac{\partial}{\partial p_\epsilon} \left( \frac{1}{2} |p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \left| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p_\epsilon + R_-(x, D)p_\epsilon + \varphi w \right|_{L^2(G)}^2 \right).$$

On définit  $q_\epsilon$  par :

$$q_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_0} p_\epsilon + s\lambda\varphi p_\epsilon + R_-(x, D)p_\epsilon + \varphi w \right) \quad (2.128)$$

alors d'après (2.127), on obtient pour chaque  $r \in H^1(G)$  :

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_G p_\epsilon dx + \frac{1}{\epsilon} \int_G \left( \frac{\partial}{\partial x_0} p_\epsilon + s\lambda\varphi p_\epsilon + R_-(x, D)p_\epsilon + \varphi w \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} + s\lambda\varphi + R_-(x, D) \right) dx, r \right\rangle = 0 \\ & \left\langle \int_G p_\epsilon dx + \int_G q_\epsilon \left( \frac{\partial}{\partial x_0} + s\lambda\varphi + R_-(x, D) \right) dx, r \right\rangle = 0 \\ & \int_G p_\epsilon \bar{r} dx + \int_G q_\epsilon \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_0} + s\lambda\varphi \bar{r} + \overline{R_-(x, D)r} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.129)$$

Donc  $q_\epsilon$  satisfait le problème suivant :

$$\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_0} - s\lambda\varphi q_\epsilon - R_-(x, D)q_\epsilon = p_\epsilon, \quad \text{dans } G \quad (2.130)$$

$$q_\epsilon(0, x') = 0, \quad q_\epsilon(1, x') = 0, \quad x' \in M. \quad (2.131)$$

On peut aussi écrire (2.130) et (2.131) comme suit :

$$\begin{aligned} Lq_\epsilon &= (L_1 + L_2)q_\epsilon = p_\epsilon \text{ dans } G, \\ q_\epsilon(0, x') &= 0, \quad q_\epsilon(1, x') = 0, \quad x' \in M. \end{aligned} \quad (2.132)$$

On utilise la proposition 2.2 et l'estimaton (2.106), alors il existe  $C > 0$  et  $\lambda_0 > 0$ , telles que pour chaque  $\lambda \geq \lambda_0$  et pour chaque  $s \geq 1$ ,

$$|L_1 q_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + |L_2 q_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + s\lambda^2 \int_G \varphi |q_\epsilon|^2 dx \leq C |p_\epsilon|_{L^2(G)}^2. \quad (2.133)$$

On note que si  $L_1 q_\epsilon \in L^2(G)$  alors  $q \in L^2(0, 1; H^1(M))$  et d'après (2.130) on a  $\frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_0} \in L^2(G)$ .  
De la définition de  $q_\epsilon$  donnée par (2.128) ,  $p_\epsilon$  satisfait :

$$\frac{\partial p_\epsilon}{\partial x_0} + s\lambda\varphi p_\epsilon + R_-^*(x, D)p_\epsilon = \epsilon q_\epsilon - \varphi w, \quad (2.134)$$

qui peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} \epsilon q_\epsilon - \varphi w &= \left( \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{R_-(x, D) - R_-^*(x, D)}{2} \right)}_{L_2} p_\epsilon - \underbrace{\left( -s\lambda\varphi - \frac{R_-(x, D) + R_-^*(x, D)}{2} \right)}_{L_1} p_\epsilon \right) \\ \epsilon q_\epsilon - \varphi w &= (L_2 - L_1) p_\epsilon \end{aligned} \quad (2.135)$$

En multipliant (2.135) par  $q_\epsilon$  dans  $L^2(G)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (L_2 p_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2(G)} - (L_1 p_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2(G)} &= (\epsilon q_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2(G)} - (\varphi w, q_\epsilon)_{L^2(G)}, \\ (p_\epsilon, L_2^* q_\epsilon)_{L^2(G)} - (p_\epsilon, L_1^* q_\epsilon)_{L^2(G)} &= (\epsilon q_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2(G)} - (\varphi w, q_\epsilon)_{L^2(G)}, \\ -(p_\epsilon, L_2 q_\epsilon)_{L^2(G)} - (p_\epsilon, L_1 q_\epsilon)_{L^2(G)} &= (\epsilon q_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2(G)} - (\varphi w, q_\epsilon)_{L^2(G)}, \\ -(p_\epsilon, (L_2 + L_1) q_\epsilon)_{L^2(G)} &= (\epsilon q_\epsilon, q_\epsilon)_{L^2(G)} - (\varphi w, q_\epsilon)_{L^2(G)}, \\ - \int_G p_\epsilon \overline{(L_2 + L_1) q_\epsilon} dx &= \epsilon \int_G |q_\epsilon|^2 dx - \int_G \varphi w \bar{q}_\epsilon dx, \end{aligned} \quad (2.136)$$

telle que :

$$\begin{aligned} - \int_G p_\epsilon (L_2 + L_1) q_\epsilon dx &= \epsilon \int_G |q_\epsilon|^2 dx - \int_G \varphi w q_\epsilon dx \\ - \int_G p_\epsilon L q_\epsilon dx &= \epsilon \int_G |q_\epsilon|^2 dx - \int_G \varphi w q_\epsilon dx \\ - \int_G |p_\epsilon|^2 dx &= \epsilon \int_G |q_\epsilon|^2 dx - \int_G \varphi w \bar{q}_\epsilon dx \\ \int_G \varphi w \bar{q}_\epsilon dx &= \epsilon \int_G |q_\epsilon|^2 dx + \int_G |p_\epsilon|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_G |p_\epsilon|^2 dx &\leq \int_G \varphi w \bar{q}_\epsilon dx, \\
 &\leq \left( \int_G |\sqrt{\varphi} w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_G |\sqrt{\varphi} q_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left( \int_G \varphi |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_G \varphi |q_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left( \int_G \varphi |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{s\lambda^2} s\lambda^2 \int_G \varphi |q_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{C}{\sqrt{s\lambda}} \left( \int_G \varphi |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_G |p_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

Par conséquent, on obtient la première estimation sur  $p_\epsilon$ ,

$$\begin{aligned}
 \left[ \left( \int_G |p_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 &\leq \frac{C}{\sqrt{s\lambda}} \left( \int_G \varphi |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int |p_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \left( \int_G |p_\epsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{C}{\sqrt{s\lambda}} \left( \int_G \varphi |w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 s\lambda^2 \int_G |p_\epsilon|^2 dx &\leq C \int_G \varphi |w|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

D'après (2.130) on a :

$$p_\epsilon(0, x') = \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_0}(0, x'). \tag{2.139}$$

Soit  $\theta(x_0) \in C^\infty([0, 1])$  telle que  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $\theta(0) = 0$ , et  $\theta(1) = 0$ . On a :

$$(L_2 - L_1)(L_2 + L_1)(\theta q_\epsilon) = \theta(L_1 + L_2)(q_\epsilon) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} q_\epsilon = \epsilon p_\epsilon + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} q_\epsilon \quad \text{dans } G, \tag{2.140}$$

$$\theta q_\epsilon(0, x') = 0, \quad (\theta q_\epsilon)(1, x') = 0, \quad \frac{(\partial \theta q_\epsilon)}{\partial x_0}(1, x') \quad x' \in M. \tag{2.141}$$

En appliquant l'opérateur  $(L_2 - L_1)$  à l'équation (2.140), on obtient :

$$\begin{aligned}
 (L_2 - L_1)(L_2 + L_1)(\theta q_\epsilon) &= (L_2 - L_1)(\theta p_\epsilon) + (L_2 - L_1)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_0} q_\epsilon\right), \tag{2.142} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + s\lambda\varphi + R_-^*(x, D)\right)(\theta p_\epsilon) \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + s\lambda\varphi + R_-^*(x, D)\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_0} q_\epsilon\right) \\
 &= \frac{\partial \theta}{\partial x_0} p_\epsilon + \frac{\partial p_\epsilon}{\partial x_0} \theta + s\lambda\varphi(\theta p_\epsilon) + R_-^*(x, D)(\theta p_\epsilon) \\
 &\quad + \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x_0} q_\epsilon + \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_0} + s\lambda\varphi\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_0} q_\epsilon\right) \\
 &\quad + R_-^*(x, D)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_0} q_\epsilon\right) \\
 &= \frac{\partial \theta}{\partial x_0} p_\epsilon + \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x_0} q_\epsilon + \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + s\lambda\varphi + R_-^*(x, D)\right) p_\epsilon \\
 &\quad + \frac{\partial \theta}{\partial x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + s\lambda\varphi + R_-^*(x, D)\right) q_\epsilon \\
 &= \frac{\partial \theta}{\partial x_0} p_\epsilon + \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x_0} q_\epsilon + \theta(L_2 - L_1)p_\epsilon + \frac{\partial \theta}{\partial x_0}(L_2 - L_1)q_\epsilon \\
 &= \frac{\partial \theta}{\partial x_0} p_\epsilon + \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x_0} q_\epsilon + \epsilon\theta q_\epsilon - \theta\varphi w + \frac{\partial \theta}{\partial x_0}(L_2 - L_1)q_\epsilon.
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (L_2 - L_1)(L_2 - L_1)(\theta q_\epsilon) &= (L_2^2 - L_1^2 + L_2 L_1 - L_1 L_2)(\theta q_\epsilon) \\
 &= (L_2^2 - L_1^2 + [L_2, L_1])(\theta q_\epsilon) \\
 &= L_2^2(\theta q_\epsilon) - L_1^2(\theta q_\epsilon) + [L_2, L_1](\theta q_\epsilon).
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 L_2^2(\theta q_\epsilon) - L_1^2(\theta q_\epsilon) + [L_2, L_1](\theta q_\epsilon) &= \frac{\partial \theta}{\partial x_0} p_\epsilon + \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x_0} q_\epsilon + \epsilon\theta q_\epsilon - \theta\varphi w \\
 &\quad + \frac{\partial \theta}{\partial x_0}(L_2 - L_1)q_\epsilon. \tag{2.144}
 \end{aligned}$$

On prend la partie réelle du produit scalaire de (2.144) avec  $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon})$  dans  $L^2(G)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( L_2^2(\theta_{q_\epsilon}) - L_1^2(\theta_{q_\epsilon}) + [L_2, L_1](\theta_{q_\epsilon}), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)} &= \operatorname{Re} \left( L_2^2(\theta_{q_\epsilon}), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)} \\ &- \operatorname{Re} \left( L_1^2(\theta_{q_\epsilon}), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)} \\ &+ \operatorname{Re} \left( [L_2, L_1](\theta_{q_\epsilon}), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)}, \end{aligned}$$

et on effectue ci-après les calculs des termes consécutifs,

$$\begin{aligned} \left( L_2^2(\theta_{q_\epsilon}), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)} &= \left( L_2(L_2(\theta_{q_\epsilon})), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_0}(L_2(\theta_{q_\epsilon})) - \left( \frac{R_- - R_-^*}{2} \right) (L_2(\theta_{q_\epsilon})), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_0}(L_2(\theta_{q_\epsilon})), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)} \\ &- \frac{1}{2} \left( (R_- - R_-^*)(L_2(\theta_{q_\epsilon})), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_0}(L_2(\theta_{q_\epsilon})), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right)_{L^2(G)} &= \int_G \frac{\partial}{\partial x_0}(L_2(\theta_{q_\epsilon})) \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right) dx \\ &= \int_M \left( \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_0} L_2(\theta_{q_\epsilon}) \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right) dx' \right) dx \\ &= \int_M |L_2(\theta_{q_\epsilon})|_0^2 dx \\ &- \int_M \int_0^1 L_2(\theta_{q_\epsilon}) \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta_{q_\epsilon}) \right) dx dx' \\ &= \int_M L_2(\theta_{q_\epsilon})(1, x') \frac{1}{\sqrt{e^\lambda}} L_2(\theta_{q_\epsilon})(1, x') dx' \\ &- \int_M L_2(\theta_{q_\epsilon})(0, x') L_2(\theta_{q_\epsilon})(0, x') dx' \\ &- \int_M \int_0^1 L_2(\theta_{q_\epsilon}) \frac{\partial}{\partial x_0} \left( L_2(\theta_{q_\epsilon}) \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \right) dx dx' \\ &= - \int_M |L_2(\theta_{q_\epsilon})(0)|^2 dx' - \int_G \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta_{q_\epsilon}) \frac{\partial}{\partial x_0} (L_2(\theta_{q_\epsilon})) dx \\ &- \int_G |L_2(\theta_{q_\epsilon})|^2 \left( -\frac{1}{2} \varphi' \varphi^{\frac{1}{2}} \varphi^{-1} \right) dx, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 \left( L_2^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} &= - \left| \frac{\partial}{\partial x_0} q_\epsilon(0) \right|_{L^2(M)}^2 + \frac{\lambda}{2} \int_G \left| \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{4}}} L_2(\theta q_\epsilon) \right|^2 dx \\
 &\quad - \int_G \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \frac{\partial}{\partial x_0} (L_2(\theta q_\epsilon)) dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon), (R_-(x, D) - R_-^*(x, D)) L_2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \\
 &= - \left| \frac{\partial q_\epsilon(0)}{\partial x_0} \right|_{L^2(M)}^2 - \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon), L_2^2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{2} \left| \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{4}}} L_2(\theta q_\epsilon) \right|_{L^2(G)}^2 \tag{2.145}
 \end{aligned}$$

alors :

$$\operatorname{Re} \left( L_2^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} = -\frac{1}{2} \left| \frac{\partial q_\epsilon(0)}{\partial x_0} \right|_{L^2(M)}^2 + \frac{\lambda}{4} \left| \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{4}}} L_2(\theta q_\epsilon) \right|_{L^2(G)}^2. \tag{2.146}$$

Maintenant pour le second terme :

$$\begin{aligned}
 2\operatorname{Re} \left( L_1^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} &= \left( L_1^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} + \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon), L_1^2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \\
 &= \frac{\lambda}{2} \left( L_1^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} (\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} - \left( L_2 L_1^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \theta q_\epsilon \right)_{L^2(G)} \\
 &\quad + \left( L_1^2 L_2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \theta q_\epsilon \right)_{L^2(G)} \\
 &= \frac{\lambda}{2} \left| \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{4}}} L_1(\theta q_\epsilon) \right|_{L^2(G)}^2 + \left( [L_1, L_2](\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_1(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \tag{2.147} \\
 &\quad + \left( \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_1(\theta q_\epsilon), [L_1, L_2](\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \\
 &= \frac{\lambda}{2} \left| \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{4}}} L_1(\theta q_\epsilon) \right|_{L^2(G)}^2 + 2\operatorname{Re} \left( [L_1, L_2](\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_1(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)}
 \end{aligned}$$

on note que :

$$\begin{aligned}
 \left( [L_1, L_2]u, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}v \right)_{L^2(G)} &= \left( L_1L_2u, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}v \right)_{L^2(G)} - \left( L_2L_1u, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}v \right)_{L^2(G)} \\
 &= - \left( u, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2L_1v \right)_{L^2(G)} + \left( u, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_1L_2v \right)_{L^2(G)} \\
 &= \left( u, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(L_1L_2 - L_2L_1)v \right)_{L^2(G)} \\
 &= \left( u, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}[L_1, L_2]v \right)_{L^2(G)}
 \end{aligned}$$

et on a déjà vu que :

$$[L_1, L_2] = s\lambda^2\varphi + K(x_0) \quad (2.148)$$

où  $K \in L^\infty([0, 1]; l(H^1(M), L^2(M)))$  est un opérateur qui est indépendant de  $s$  et de  $\lambda$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left( L_1^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} &= \operatorname{Re} \left( [L_1, L_2](\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_1(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} + \frac{\lambda}{4} \left| \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{4}}}L_1(\theta q_\epsilon) \right|_{L^2(G)}^2 \\
 &\leq \operatorname{Re} \left( s\lambda^2\varphi(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_1(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \\
 &\quad + \operatorname{Re} \left( K(x_0)(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_1(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} + \frac{\lambda}{4} \left| \frac{1}{\max_{0 \leq x_0 \leq 1}(\varphi^{\frac{1}{4}})}L_1(\theta q_\epsilon) \right|_{L^2(G)}^2 \\
 &\leq \operatorname{Re} (s\lambda^2\sqrt{\varphi}(\theta q_\epsilon), L_1(\theta q_\epsilon))_{L^2(G)} \\
 &\quad + \operatorname{Re} \left( K(x_0)\frac{(\theta q_\epsilon)}{\sqrt{\varphi}}, \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_1(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} + \frac{\lambda}{4}|L_1(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)}^2 \\
 &\leq |s\lambda^2\sqrt{\varphi}(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)}|L_1(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)} + \frac{\lambda}{4}|L_1(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)}^2 \\
 &\quad + C\left\| \frac{\theta q_\epsilon}{\sqrt{\varphi}} \right\|_{L^2(0,1;H^1(M))}|L_1(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)}. \quad (2.149)
 \end{aligned}$$

D'après (2.133), on sait que :

$$\begin{aligned}
 |L_1(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)} &\leq |L_1q_\epsilon|_{L^2(G)} \leq C|p_\epsilon|_{L^2(G)}, \quad (2.150) \\
 \left\| \frac{\theta q_\epsilon}{\sqrt{\varphi}} \right\|_{L^2(0,1;H^2(M))} &\leq \left\| \frac{q_\epsilon}{\sqrt{\varphi}} \right\|_{L^2(0,1;H^2(M))},
 \end{aligned}$$

et d'après la définition de  $L_1$ ,

$$\left\| \frac{q_\epsilon}{\sqrt{\varphi}} \right\|_{L^2(0,1;H^2(M))} \leq C|L_1q_\epsilon|_{L^2(G)} + s\lambda|\sqrt{\varphi}q_\epsilon|. \quad (2.151)$$

On utilise encore (2.133), on obtient :

$$\sqrt{s}\lambda|\sqrt{\varphi}q_\epsilon|_{L^2(G)} \leq C|p_\epsilon|_{L^2(G)} \Rightarrow s\lambda|\sqrt{\varphi}q_\epsilon|_{L^2(G)} \leq \sqrt{s}C|p_\epsilon|_{L^2(G)} \dots (A.1)$$

On a aussi :

$$|L_1q_\epsilon|_{L^2(G)} \leq C|p_\epsilon|_{L^2(G)} \dots (A.3)$$

De (A.1) et (A.3), on a :

$$\left\| \frac{q_\epsilon}{\sqrt{\varphi}} \right\|_{L^2(0,1;H^2(M))} \leq C|p_\epsilon|_{L^2(G)} + \sqrt{s}C|p_\epsilon|_{L^2(G)} \dots (A.4)$$

D'après (A.1), (A.3) et (A.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left( L_1^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \right| &\leq \sqrt{s}\lambda C|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + C\sqrt{s}|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + \frac{\lambda}{4}|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 \\ &\leq \sqrt{s}C(\lambda + 1)|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) \\ &\leq C\sqrt{s}(\lambda + 1)|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + C(\lambda + 1)|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 \end{aligned} \quad (2.152)$$

On choisit  $\lambda \geq \lambda_0$  et  $s \geq 1$ , on arrive à :

$$\left| \operatorname{Re} \left( L_1^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \right| \leq \sqrt{s}\lambda C|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 \quad (2.153)$$

Concernant le troisième terme, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( [L_2, L_1](\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}L_2(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} &\leq \left( [L_2, L_1] \frac{(\theta q_\epsilon)}{\sqrt{\varphi}}, [L_2, L_1] \frac{(\theta q_\epsilon)}{\sqrt{\varphi}} \right)_{L^2(G)}^{\frac{1}{2}} (L_2(\theta q_\epsilon), L_2(\theta q_\epsilon))_{L^2(G)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\varphi}} [L_2, L_1](\theta q_\epsilon)_{L^2(G)} |L_2(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)} \end{aligned} \quad (2.154)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left( [L_2, L_1](\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \right| &= \left| \operatorname{Re} \left( -[L_1, L_2](\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \right| \\ &\leq |s\lambda^2\sqrt{\varphi}(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)} |L_2(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)} \\ &\quad + C \left\| \frac{\theta q_\epsilon}{\sqrt{\varphi}} \right\|_{L^2(0,1;H^1(M))} |L_2(\theta q_\epsilon)|_{L^2(G)} \end{aligned} \quad (2.155)$$

et comme  $L_2(\theta q_\epsilon) = \theta L_2q_\epsilon + \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_0} q_\epsilon \right)$ , de (2.133) et (2.151) on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left( [L_2, L_1](\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(\theta q_\epsilon) \right)_{L^2(G)} \right| &\leq C\sqrt{s}\lambda|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + C\lambda|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 \\ &= C\sqrt{s}\lambda|p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 \end{aligned} \quad (2.156)$$

pour  $\lambda \geq \lambda_0$  et  $s \geq 1$ .

Maintenant, on a pour le côté droit de (2.144),

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left( \epsilon \theta q_\epsilon - \theta \varphi w + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} (L_2 - L_1) q_\epsilon + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_0^2} q_\epsilon, \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right) \right|_{L^2(G)} &\leq C \epsilon |q_\epsilon|_{L^2(G)} |p_\epsilon|_{L^2(G)} \\ &\quad + C |\sqrt{\varphi} w|_{L^2(G)} |p_\epsilon|_{L^2(G)} \\ &\quad + C |p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 \end{aligned} \quad (2.157)$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left( \epsilon \theta q_\epsilon - \theta \varphi w + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} (L_2 - L_1) q_\epsilon + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_0^2} q_\epsilon, \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right) \right|_{L^2(G)} &\leq C |p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + C |\sqrt{\varphi} w|_{L^2(G)} |p_\epsilon|_{L^2(G)} \end{aligned} \quad (2.158)$$

On met ensemble (2.146), (2.153), (2.156) et (2.158), on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \left( L_2^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right) \right|_{L^2(G)} &\leq \left| \operatorname{Re} \left( \epsilon \theta q_\epsilon - \theta \varphi w + \frac{\partial \theta}{\partial x_0} (L_2 - L_1) q_\epsilon + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_0^2} q_\epsilon, \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right) \right|_{L^2(G)} \\ &\quad + \left| \operatorname{Re} \left( L_1^2(\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right) \right| + \left| \operatorname{Re} \left( [L_2, L_1](\theta q_\epsilon), \frac{1}{\sqrt{\varphi}} L_2(\theta q_\epsilon) \right) \right|_{L^2(G)} \end{aligned}$$

On a :

$$\left| \frac{\partial q_\epsilon}{\partial x_0}(0) \right|_{L^2(M)}^2 \leq C \sqrt{s} \lambda |p_\epsilon|_{L^2(G)}^2 + C |\sqrt{\varphi} w|_{L^2(G)} |p_\epsilon|_{L^2(G)} \quad (2.159)$$

On combine (2.138), (2.139) et (2.159), on obtient facilement :

$$s \lambda^2 \int_G |p_\epsilon|^2 dx + \sqrt{s} \lambda \int_M |p_\epsilon(0, x')|^2 dx' \leq C \int_G \varphi |w|^2 dx \quad (2.160)$$

qui est l'estimation (2.115) pour  $p_\epsilon$ .

De (2.159) et (2.160) on déduit que  $p_\epsilon$  et  $\frac{\partial p_\epsilon}{\partial x_0} + s \lambda \varphi p_\epsilon + R_-^*(x, D) p_\epsilon$  sont bornées dans  $L^2(G)$  uniformément en  $\epsilon$ .

Après extraction d'une sous suite  $p_\epsilon$ , on peut assumer que :

$$\begin{aligned} p_\epsilon &\rightharpoonup p \text{ faiblement dans } L^2(G), \\ \frac{\partial p_\epsilon}{\partial x_0} &\rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial x_0}, \text{ faiblement dans } L^2(0, 1; H^{-1}(M)). \end{aligned} \quad (2.161)$$

tels que,

$$p_\epsilon(0) \rightharpoonup p(0), \text{ faiblement dans } H^{-\frac{1}{2}}(M) \quad (2.162)$$

Comme  $p_\epsilon(0)$  reste borné dans  $L^2(M)$ , on a aussi  $p_\epsilon(0) \rightharpoonup p(0)$  faiblement dans  $L^2(M)$ .

De (2.135),  $p$  satisfait :

$$L^*p = \left( -\frac{\partial}{\partial x_0} - s\lambda\varphi - R_-(x, D) \right) p = \varphi w \quad \text{dans } G \quad (2.163)$$

D'après (2.114) et (2.160), on a :

$$s\lambda^2 \int_G |p|^2 dx + \sqrt{s}\lambda \int_M |p(0, x')|^2 dx' \leq C \int_G \varphi |w|^2 dx \quad (2.164)$$

Ceci termine la preuve du lemme 2.3

De (2.119) et des propositions 2.2 et 2.4, on obtient la proposition suivante :

**Proposition 2.6** *Ils existent  $C > 0$ ,  $\bar{\lambda} > 0$ , et  $\bar{s} > 0$  tels que pour chaque  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  et pour chaque  $s \geq \bar{s}$ , la solution  $w$  de (2.90) et (2.91) satisfait,*

$$s^2\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx \leq C_5 \int_G \varphi |z|^2 dx + Ce^{2s} \sqrt{s} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)} \quad (2.165)$$

$$s^2\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx \leq Ce^{2s} \sqrt{s} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)} + C \left( \frac{1}{s\lambda^2} \int_G \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N s \int_G |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx \right) \quad (2.166)$$

Maintenant pour obtenir (2.48) et compléter la preuve de théorème 2.3, il reste seulement à donner une estimation sur  $\nabla w$ , on écrit (2.90) et (2.91) comme,

$$\frac{\partial w}{\partial x_0} - R_-(x, D)w = z + s\lambda\varphi w, \quad \text{dans } G. \quad (2.167)$$

$$w(0, x') = e^s g(x'), \quad x' \in M. \quad (2.168)$$

En utilisant le même argument comme dans le lemme (2.2), et en prenant en considération que la donnée initiale du problème de Cauchy (2.167) et (2.167) n'est pas nulle, on obtient d'abord :

$$\int_0^1 \|w\|_{H^1(M)}^2 dx_0 \leq C \int_G |z|^2 dx + Cs^2\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx + Ce^{2s} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 \quad (2.169)$$

et on utilise encore (2.167), on a :

$$\int_G |\nabla w|^2 dx \leq C \int_G |z|^2 dx + Cs^2\lambda^2 \int_G \varphi^2 |w|^2 dx + Ce^{2s} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 \quad (2.170)$$

Cette estimation avec (2.165) donne :

$$\begin{aligned} \int_G (|\nabla w|^2 + s^2\lambda^2\varphi^2|w|^2) dx &\leq C \left( s^{\frac{1}{2}} e^{2s} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(M)}^2 + \frac{1}{s\lambda^2} \int_G \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^N s \int_G |f_j|^2 \varphi e^{2s\varphi} dx \right) \end{aligned} \quad (2.171)$$

Ce qui donne (2.48) et par conséquent termine la preuve de Théorème 2.3

# Chapitre 3

## Inégalité de Carleman globale dans le cas homogène

Afin d'écrire l'estimation de Carleman globale relative au problème (2.1), (2.2) avec  $g \equiv 0$ , on rappelle que les conditions (2.4) et (2.5) restent vraies dans ce cas et la fonction poids  $\varphi$  est donnée par (2.9).

### 3.1 Théorème principal

**Théorème 3.1** *Il existe  $\tilde{s} > 1$  et  $\tilde{\lambda} > 1$  et il existe  $C > 0$  tels que pour tout  $y$  vérifiant (2.1) et (2.2) avec  $g \equiv 0$ , pour tout  $s \geq \tilde{s}$  et pour tout  $\lambda > \tilde{\lambda}$ ,*

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx + s^2 \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx \leq C \left( \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx \right) \quad (3.1)$$

■

### 3.2 Preuve du théorème 3.1

La démonstration de ce théorème est basée sur la proposition qui vient après, pour cela on considère le problème :

$$Pv = f \quad \text{dans } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.2)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ .

Soit  $v \in H^1(\Omega)$ . Avec les mêmes conditions (2.4), (2.5) et (2.12), il existe une constante  $C_1 > 0$  indépendante de  $s$  et de  $\lambda$ , et il existe des paramètres  $\tilde{\lambda} > 1$  et  $\tilde{s} > 1$  tels que pour tout  $\lambda > \tilde{\lambda}$  et pour tout  $s \geq \tilde{s}$ ,

$$\int_{\Omega} (|\nabla y|^2 + s^2 \lambda^2 \varphi^2 v^2) e^{2s\varphi} dx \leq C \left( \int_{\Omega} \frac{1}{s\lambda^2 \varphi} |f|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 v^2 e^{2s\varphi} dx \right) \quad (3.3)$$

On définit la fonctionnelle :

$$J(z, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi z^2 e^{-2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{|u|^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx. \quad (3.4)$$

Maintenant, on considère le problème extrêmeal suivant :

$$\inf_{(z,u) \in U} J(z, u) \quad (3.5)$$

où  $U$  est l'ensemble fermé convexe non vide des paires  $(z, u) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\omega)$  satisfaisant,

$$P^* z = (s\lambda\varphi)^2 y e^{2s\varphi} + \chi_{\omega} u, \quad z|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.6)$$

**Proposition 3.1** *Soit  $b_j \equiv c_i \equiv c \equiv 0$ ,  $0 \leq i, j \leq N$ , et soit les conditions (2.3) restent toujours vrai, alors il existe une unique solution  $(\tilde{z}, \tilde{u}) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\omega)$  du problème extrêmeal (3.5), et il existe  $\tilde{s}$  et  $\tilde{\lambda}$  tels que pour tout  $s \geq \tilde{s}$  et pour tout  $\lambda \geq \tilde{\lambda}$ ,*

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{(s\varphi)} |\nabla \tilde{z}|^2 e^{-2s\varphi} + s\lambda^2 \varphi |\tilde{z}|^2 e^{-2s\varphi} \right) dx + \int_{\omega} \frac{\tilde{u}^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \leq C_5 \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx. \quad (3.7)$$

### Preuve de la proposition 3.1

D'abord, on montre l'existence et l'unicité de la solution  $(\tilde{z}, \tilde{u}) \in U$  du problème (3.5).

On définit dans l'espace produit  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\omega)$  la norme suivante :

$$\|(z, u)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\omega)} = \sup \left\{ \|z\|_{H_0^1(\Omega)}, \|u\|_{L^2(\omega)} \right\}.$$

On a :

$$\lim_{\|(z,u)\| \rightarrow +\infty} J(z, u) = +\infty,$$

d'où la coercivité de la fonctionnelle  $J$ .

Soit  $(z, u)$  et  $(z', u')$  deux éléments de  $(H_0^1(\Omega) \times L^2(\omega))^2$ , et soit  $0 < \theta < 1$

$$\begin{aligned}
 J(\theta(z, u) + (1 - \theta)(z', u')) &= J(\theta z + (1 - \theta)z', \theta u + (1 - \theta)u') \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi |\theta z + (1 - \theta)z'|^2 e^{-2s\varphi} dx \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{|\theta u + (1 - \theta)u'|^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2s\lambda^2 \varphi \theta^2 z^2 e^{-2s\varphi} dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\omega} 2 \frac{\theta^2 u^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2s\lambda^2 \varphi (1 - \theta)^2 z'^2 e^{-2s\varphi} dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\omega} 2 \frac{(1 - \theta)^2 u'^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \\
 &\leq \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi z^2 e^{-2s\varphi} dx \\
 &\quad + \frac{\theta}{2} \int_{\omega} \frac{u^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \\
 &\quad + \frac{(1 - \theta)}{2} \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi z'^2 e^{-2s\varphi} dx \\
 &\quad + \frac{(1 - \theta)}{2} \int_{\omega} \frac{u'^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \\
 &\leq \theta J(z, u) + (1 - \theta) J(z', u')
 \end{aligned}$$

donc  $J$  est convexe.

Comme la fonctionnelle  $J$  est continue, strictement coercive et convexe, alors il existe un unique élément  $(\tilde{z}, \tilde{u})$  de  $U$  qui vérifie :

$$(\tilde{z}, \tilde{u}) = \inf_{(z, u) \in U} J(z, u).$$

Si on applique au problème (3.5) le principe de Lagrange, on obtient le système d'optimalité suivant :

$$P^* \tilde{z} = (s\lambda\varphi)^2 y e^{2s\varphi} + \chi_{\omega} \tilde{u}, \quad \tilde{z}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.8}$$

$$Pp = -s\lambda^2 \varphi \tilde{z} e^{-2s\varphi}, \quad p|_{\partial\Omega} = 0, \quad p|_{\omega} = \frac{\tilde{u}}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi}. \tag{3.9}$$

En appliquant à (3.8) l'estimation de Carleman (3.3), on obtient pour tout  $s \geq \tilde{s}$  et pour tout  $\lambda \geq \tilde{\lambda}$

$$\int_{\Omega} |\nabla p|^2 e^{2s\varphi} dx + s^2 \lambda^2 \int_{\Omega} \varphi^2 p^2 e^{2s\varphi} dx \leq C \left( \int_{\Omega} s \lambda^2 \varphi \tilde{z}^2 e^{-2s\varphi} dx + \int_{\omega} \frac{1}{(s\lambda\varphi)^2} \tilde{u}^2 e^{-2s\varphi} dx \right).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 p^2 e^{2s\varphi} &\leq C \left( \int_{\Omega} s \lambda^2 \varphi \tilde{z}^2 e^{-2s\varphi} + \int_{\omega} \frac{1}{(s\lambda\varphi)^2} \tilde{u}^2 e^{-2s\varphi} dx \right) \\ &= 2CJ(\tilde{z}, \tilde{u}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

On prend le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  de (3.8) avec  $p$ , il vient :

$$\begin{aligned} (P^* \tilde{z}, p)_{L^2(G)} &= ((s\lambda\varphi)^2 y e^{2s\varphi}, p)_{L^2(G)} + (\chi_{\omega} \tilde{u}, p)_{L^2(G)} \\ (\tilde{z}, Pp)_{L^2(G)} &- ((s\lambda\varphi)^2 y e^{2s\varphi}, p)_{L^2(G)} - (\chi_{\omega} \tilde{u}, p)_{L^2(G)} = 0 \\ \int_{\Omega} \tilde{z} Pp dx &- \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y p e^{2s\varphi} dx - \int_{\omega} \frac{\tilde{u}^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx = 0 \\ - \int_{\Omega} s \lambda^2 \tilde{z}^2 e^{-2s\varphi} dx &- \int_{\omega} \frac{\tilde{u}^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx - \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y p e^{2s\varphi} dx = 0 \\ &- 2J(\tilde{z}, \tilde{u}) - \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y p e^{2s\varphi} dx = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Puis, par l'inégalité de Cauchy Bunyakovskii, on a :

$$\begin{aligned} J(\tilde{z}, \tilde{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y p e^{2s\varphi} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 p^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pour tout  $s \geq \tilde{s}$ , et pour tout  $\lambda \geq \tilde{\lambda}$ ,

$$\begin{aligned} J(\tilde{z}, \tilde{u}) &\leq C \left( \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} (J(\tilde{z}, \tilde{u}))^{\frac{1}{2}} \\ (J(\tilde{z}, \tilde{u}))^{\frac{1}{2}} &\leq C \left( \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} J(\tilde{z}, \tilde{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} s \lambda^2 \varphi \tilde{z}^2 e^{-2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{\tilde{u}^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \\ &\leq C \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

On multiplie (3.8) par  $(s\varphi)^{-1}e^{-2s\varphi\tilde{z}}$  et on intègre par partie, on obtient pour tout  $s \geq \tilde{s}$  et pour tout  $\lambda > \tilde{\lambda}$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Delta \tilde{z} \tilde{z} (s\varphi)^{-1} e^{-2s\varphi} dx &= \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y e^{2s\varphi} (s\varphi)^{-2s\varphi} \tilde{z} dx + \int_{\omega} \tilde{u} (s\varphi)^{-1} e^{-2s\varphi} dx \\
 \int_{\Omega} |\nabla \tilde{z}|^2 (s\varphi)^{-1} e^{-2s\varphi} dx &= \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi (y e^{s\varphi}) (e^{-s\varphi} \tilde{z}) dx + \int_{\omega} \frac{\tilde{u}}{s\lambda\varphi} e^{-2s\varphi} \lambda \tilde{z} dx \\
 &\leq \left( \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi y^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi \tilde{z}^2 e^{-2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \int_{\omega} \frac{\tilde{u}}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\omega} e^{-2s\varphi} \lambda^2 |\tilde{z}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left( \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi \tilde{z}^2 e^{-2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \int_{\omega} \frac{\tilde{u}}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi |\tilde{z}|^2 e^{-2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left( \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\omega} \frac{\tilde{u}}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx + \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi |\tilde{z}|^2 e^{-2s\varphi} dx \right) \quad (3.14) \\
 &\leq C \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx.
 \end{aligned}$$

Les inégalités (3.13) et (3.14) impliquant (3.7),

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} |\nabla \tilde{z}|^2 (s\varphi)^{-1} e^{-2s\varphi} + \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi \tilde{z}^2 e^{-2s\varphi} dx + \int_{\omega} \frac{\tilde{u}}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \\
 &\leq C \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi \tilde{z}^2 e^{-2s\varphi} dx + \int_{\omega} \frac{\tilde{u}}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx \\
 &\leq C \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx + \dot{C} \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx \\
 &\leq C_5 \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx
 \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.1

On utilise l'estimation (3.7) dans le but de prouver (3.1). Pour cela on prend le produit

scalaire dans  $L^2(\Omega)$  de (3.8) par  $y$  et on intègre par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (P^* \tilde{z}, y)_{L^2(G)} &= ((s\lambda\varphi)^2 y e^{2s\varphi}, y)_{L^2(G)} + (\chi_\omega \tilde{u}, y)_{L^2(G)} \\
 (\tilde{z}, Py)_{L^2(G)} &= ((s\lambda\varphi)^2 y e^{2s\varphi}, y)_{L^2(G)} + (\chi_\omega \tilde{u}, y)_{L^2(G)} \\
 \int_\Omega \tilde{z} Py dx &= \int_\Omega (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx + \int_\omega \tilde{u} y dx \\
 \int_\Omega \tilde{z} f dx + \tilde{z} \sum_{j=0}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j} &= \int_\Omega (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx + \int_\omega \tilde{u} y dx \\
 \int_\Omega \tilde{z} f dx + \underbrace{\sum_{j=0}^N \int_{\partial\Omega} \tilde{z} f_j}_{=0} - \sum_{j=0}^N \int_\Omega f_j \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_j} - \int_\omega \tilde{u} y dx &= \int_\Omega (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx.
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_\Omega (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx = - \int_\omega \tilde{u} y dx + \int_\Omega \tilde{z} f dx - \sum_{j=0}^N \int_\Omega f_j \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_j}. \quad (3.15)$$

Par l'inégalité de Cauchy Bunyakovskii, et pour  $\epsilon > 0$ , il existe  $C(\epsilon) > 0$  tels que :

$$\begin{aligned}
 \int_\Omega (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx &= - \int_\omega \frac{\tilde{u}}{s\lambda\varphi} e^{-s\varphi} e^{s\varphi} s\lambda\varphi y dx + \int_\Omega \tilde{z} s^{\frac{1}{2}} \lambda \varphi^{\frac{1}{2}} e^{-s\varphi} e^{s\varphi} \frac{f}{s^{\frac{1}{2}} \lambda \varphi^{\frac{1}{2}}} dx \\
 &+ \sum_{j=0}^N \int_\Omega (s\varphi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_i} e^{-s\varphi} e^{s\varphi} (s\varphi)^{\frac{1}{2}} f_j dx \\
 &\leq \left( \int_\omega \frac{\tilde{u}^2}{s^2 \lambda^2 \varphi^2} e^{-2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\omega s^2 \lambda^2 \varphi^2 e^{2s\varphi} y dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \left( \int_\Omega s \lambda^2 \varphi |\tilde{z}|^2 e^{-2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega \frac{|f|^2}{s \lambda^2 \varphi} e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &+ \left( \sum_{j=0}^N \int_\Omega (s\varphi)^{-1} \left| \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_i} \right|^2 e^{-2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=0}^N \int_\Omega s \varphi |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \epsilon \left( \int_\omega \frac{|\tilde{u}|^2}{(s\lambda\varphi)^2} e^{-2s\varphi} dx + \int_\Omega \frac{|\nabla \tilde{z}|^2}{(s\varphi)} + s \lambda^2 \varphi |\tilde{z}|^2 e^{-2s\varphi} dx \right) \\
 &+ C(\epsilon) \left( \frac{1}{s \lambda^2} \int_\Omega \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N s \int_\Omega \varphi |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_\omega s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx \right). \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

On utilise (3.7) afin d'estimer la première et la deuxième intégrale dans le second membre de cette inégalité, et en choisissant  $\epsilon$  suffisamment petit, on obtient pour tout  $\lambda > \tilde{\lambda}$  et pour

tout  $s \geq \tilde{s}$  :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx &\leq C(\epsilon) \left( \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} \varphi |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx \right) \\
 &\quad + \epsilon C_5 \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx \\
 \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx (1 - \epsilon C_5) &\leq C(\epsilon) \left( \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} \varphi |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx \right) \\
 \int_{\Omega} (s\lambda\varphi)^2 y^2 e^{2s\varphi} dx &\leq C \left( \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} \varphi |f_j|^2 e^{2s\varphi} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx \right). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Il est facile d'avoir l'estimation pour  $\nabla y$  de (3.17) si on prend le produit scalaire de (2.1) par  $ye^{2s\varphi}$  dans  $L^2(G)$ , on choisit  $s$  suffisamment large afin d'absorber les termes contenant  $\nabla y$  dans le membre de droite, sachant que  $\varphi \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx &\leq \left( \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} s\lambda^2 \varphi |y|^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} |f_j|^2 e^{2s\varphi} \varphi dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{s\varphi} \left| \frac{\partial y}{\partial x_j} \right|^2 e^{2s\varphi} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2 e^{2s\varphi} dx \\
 &\quad + \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} |f_j|^2 e^{2s\varphi} \varphi dx + \int_{\Omega} \frac{1}{s\varphi} |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx \\
 \int_{\Omega} |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{s\varphi} |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx &\leq C \left( \frac{1}{s\lambda^2} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\varphi} e^{2s\varphi} dx + \sum_{j=0}^N s \int_{\Omega} |f_j|^2 e^{2s\varphi} \varphi dx + \int_{\omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 |y|^2 dx \right),
 \end{aligned}$$

où

$$\int_{\Omega} \left( 1 - \frac{1}{s\varphi} \right) |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx \approx \int_{\Omega} |\nabla y|^2 e^{2s\varphi} dx.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 3.1.

# Chapitre 4

## Application de l'estimation de Carleman globale

### Introduction

Ce chapitre est une application du travail précédent. On va voir comment on peut utiliser les estimations prouvées dans les **chapitres 2 et 3** pour établir l'inégalité de Carleman globale pour les opérateurs de Navier-Stokes linéarisés ainsi que pour les opérateurs de Stokes qui est essentielle dans l'étude de la contrôlabilité exacte.

On s'intéresse dans la première section à l'étude d'une partie de l'article intitulé " Local exact controlability of the Navier-Stokes system " de E.Fernández-Cara, S.Guerrero, O. Yu. Imanuvilov et J. P. Puel.

Cette partie présente la démonstration du théorème portant sur l'inégalité de Carleman pour le système de Stokes linéarisé autour d'une trajectoire  $\bar{y}$ . On va voir dans la deuxième étape de cette démonstration comment estimer la pression en utilisant l'inégalité de Carleman globale démontrée dans le chapitre 2.

Dans la deuxième section, on commence par rappeler l'inégalité de Carleman globale pour les problèmes paraboliques non homogènes, utilisant cette dernière ainsi que l'inégalité de Carleman globale pour les problèmes elliptiques homogènes, on donne l'inégalité de Carleman pour un système de Stokes non contrôlé.

## 4.1 Pour un système de Navier Stokes linéarisé

Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  ou  $3$ ) un ouvert borné de classe  $C^2$ , sa frontière  $\partial\Omega$ . Soit  $\omega \subset \Omega$  un sous-ensemble ouvert non borné, et soit  $T > 0$ , on pose  $Q = \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ .

On note  $n(x)$  le vecteur normal (extérieur) à  $\Omega$  au point  $x \in \partial\Omega$ .

On pose les espaces suivants,

$$V = \{ \varphi \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ dans } \Omega \}$$

et

$$H = \{ \varphi \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ dans } \Omega, \ y \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

On considère le système de Navier-Stokes contrôlé :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla \cdot (y \otimes y) + \nabla p = v 1_\omega & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $v$  est la fonction de contrôle qui agit sur  $\omega$  durant l'intervalle du temps  $(0, T)$  et

$$(\nabla \cdot (y^1 \otimes y^2))_i = \sum_{j=1}^N \partial_j (y_i^1 y_j^2), \quad i = 1, \dots, N.$$

Soit  $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$  une solution du système de Navier-Stokes non contrôlé :

$$\begin{cases} \bar{y}_t - \Delta \bar{y} + \nabla \cdot (\bar{y} \otimes \bar{y}) + \nabla \bar{p} = 0 & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot \bar{y} = 0 & \text{dans } Q, \\ \bar{y} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$\bar{y}^0 \in V, \quad \bar{y}_t \in L^2(0, T; L^\sigma(\Omega))^N \quad \text{et} \quad \sigma > \frac{6}{5} \text{ si } N = 3; \quad \sigma > 1 \text{ si } N = 2. \quad (4.3)$$

La notion de contrôlabilité exacte des trajectoires pour les équations de Navier-Stokes est de chercher l'existence d'un contrôle  $v$  tel que le système (4.1) admet au moins une solution qui satisfait,

$$y(T) = \bar{y}(T) \quad \text{dans } \Omega.$$

On considère ici les conditions aux limites de Dirichlet qui sont naturelles pour ces équations.

Un système de contrôle pertinent est la linéarisation de (4.1) autour de  $\bar{y}$ , c.a.d :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla \cdot (\bar{y} \otimes y + y \otimes \bar{y}) + \nabla p = f + v1_\omega & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $y_0 \in L^{2N-2}(\Omega)^N \cap H$  et  $v \in L^2(w, (0, T))^N$ . On considère le système adjoint associé à (4.4) suivant :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta \varphi - D\varphi \bar{y} + \nabla p = g & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

où

$$D_\varphi = \nabla \varphi + \nabla \varphi_t \quad \text{et} \quad \varphi_t \in L^2(\Omega)^N.$$

On donne par le théorème l'inégalité de Carleman globale pour la solution  $(\varphi, p)$  du système (eq5) telle que :

$$\varphi \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H) \quad \text{et} \quad p \in H^1(\Omega)$$

**Théorème 4.1** *On suppose que (4.3) est vérifiée. Alors, il existe des paramètres positifs  $\hat{s}$ ,  $\hat{\lambda}$  et une constante  $C$  dépendante de  $\Omega$  et  $\omega$  tels que pour chaque  $\varphi^0 \in H$  et  $g \in L^2(Q)^N$ , la solution correspondante à (4.5) vérifie :*

$$\begin{aligned} & s^3 \lambda^4 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt + s \lambda^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \varphi|^2 dxdt + s^{-1} \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} (|\varphi_t|^2 + |\Delta \varphi|^2) dxdt \\ & \leq C(1 + T^2) \left( s^{\frac{15}{2}} \lambda^{20} \int \int_Q e^{-4s\hat{\alpha} + 2s\alpha^* \xi^{\frac{15}{2}}} |g|^2 dxdt + s^{16} \lambda^{40} \int_\omega \int_{(0, T)} e^{-8s\hat{\alpha} + 6s\alpha^* \xi^{16}} |\varphi|^2 dxdt \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

■ pour tout  $\lambda \geq \tilde{\lambda} \left( 1 + \|\bar{y}\|_\infty + \|\bar{y}_t\|_{L^2(0,T;L^\sigma(\Omega)^N)}^2 + e^{\lambda T \|\bar{y}\|_\infty^2} \right)$  et  $s \geq \hat{s}(T^4 + T^8)$ .

Les fonctions  $\alpha, \xi, \hat{\alpha}, \alpha^*, \hat{\xi}$  sont des fonctions poids positives appropriées qui seront définies dans (4.7).

### 4.1.1 Une nouvelle inégalité de Carleman

Dans cette section et afin d'avoir l'inégalité de Carleman donnée dans le théorème 4.1, on va définir les fonctions poids qui vont être utilisables dans cette démonstration.

On rappelle que la fonction poids basique  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$  vérifie :  $\psi > 0$  dans  $\Omega$ ,  $\psi = 0$  sur  $\partial\Omega$ ,  $|\nabla\psi| > 0$  dans  $\overline{\Omega - \omega_1}$ .

où  $\omega_1 \subset \omega$  est un ouvert non vide.

Donc pour certains nombres réels positifs  $s$  et  $\lambda$ , on introduit :

$$\begin{aligned}
 \alpha(x, t) &= \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m \|\psi\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\psi\|_\infty + \psi(x))}}{t^4(T-t)^4}, \\
 \xi(x, t) &= \frac{e^{\lambda(m\|\psi\|_\infty + \psi(x))}}{t^4(T-t)^4}, \\
 \hat{\alpha}(t) &= \min_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x, t) = \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m \|\psi\|_\infty} - e^{\lambda(m+1)\|\psi\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}, \\
 \alpha^*(t) &= \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(x, t) = \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m \|\psi\|_\infty} - e^{\lambda m \|\psi\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}, \\
 \hat{\xi}(t) &= \underbrace{\max}_{x \in \bar{\Omega}} \xi(x, t) = \frac{e^{\lambda(m+1)\|\psi\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}, \\
 \xi^*(t) &= \underbrace{\min}_{x \in \bar{\Omega}} \xi(x, t) = \frac{e^{\lambda m \|\psi\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}, \\
 \hat{\theta}(t) &= s\lambda e^{-s\hat{\alpha}\hat{\xi}}, \\
 \theta(t) &= s^{\frac{15}{4}} e^{-2s\hat{\alpha} + s\alpha^* \hat{\xi}^{\frac{15}{4}}}, \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

où  $m > 4$  un nombre réel fixé.

Tout au long de la preuve, on va utiliser la notation :

$$\begin{aligned}
 I(s, \lambda; \varphi) &= s^{-1} \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} (|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2) dxdt + s\lambda^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla\varphi|^2 dxdt \\
 &+ s^3 \lambda^4 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt.
 \end{aligned}$$

**Preuve 4.1** *Pour une compréhension facile, la démonstration de ce théorème est divisée en 7 étapes. On s'intéresse à la deuxième étape qui est l'objectif de ce travail, or cette dernière nous exige de passer d'abord par la première étape. Pour le reste de la démonstration voir [17]*

**Etape 1 : Estimation de Carleman pour l'équation de la chaleur**

*Considérons le système (1.5) comme un système d'équations de la chaleur avec second membre  $G_i = g_i + (D\varphi\bar{y})_i - \partial p$ , et appliquons l'inégalité de Carleman usuelle pour l'équation de la chaleur avec second membre dans  $L^2(Q)$ .*

*Ceci peut être fait puisque  $G_i \in L^2(e^{-2s\hat{\alpha}}(0, T); L^2(\Omega))$  et  $e^{-2s\alpha} \leq e^{-2s\hat{\alpha}}$ .*

*Cette estimation de Carleman usuelle peut être trouvée dans [6] ( pour la démonstration explicite par rapport à  $\lambda$ ,  $s$  et  $T$  voir par exemple [22] ).*

*Par conséquent, il existe une constante positive  $C_1(\Omega, \omega)$  et deux nombres  $\lambda_0(\Omega, \omega) \geq 1$  et  $s_0(\Omega, \omega) > 0$  tels que pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$  et  $s \geq s_0(T^7 + T^8)$  :*

$$I(s, \lambda; \varphi) \leq C_1 \left( \int_Q \int_0^T e^{-2s\alpha} (|g|^2 + |D\varphi\bar{y}|^2 + |\nabla p|^2) dxdt + s^3 \lambda^4 \int_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt \right) \quad (4.8)$$

*où  $|\xi^{-1}| \leq CT^8$ ,  $|\alpha_t| \leq CT\xi^{\frac{5}{4}}$  et  $C > 0$  indépendant de  $\lambda$ .*

*Maintenant, on élimine le terme qui contient  $D\varphi\bar{y}$  dans le second membre de (4.8) en considérant que :*

$$C_1 |D\varphi\bar{y}|^2 \leq Cs \|\bar{y}\|_\infty^2 \xi |\nabla\varphi|^2 \leq \frac{1}{2} s \lambda^2 \xi |\nabla\varphi|^2$$

*pour  $\lambda \geq \lambda_1(\Omega, \omega) \|\bar{y}\|_\infty$  et  $s \geq s_1(\Omega, \omega) T^8$ , on obtient :*

$$I(s, \lambda; \varphi) \leq C_2 \left( \int_Q \int_0^T e^{-2s\alpha} (|g|^2 + |\nabla p|^2) dxdt + s^3 \lambda^4 \int_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt \right), \quad (4.9)$$

*pour tout  $\lambda \geq \lambda_2(\Omega, \omega)(1 + \|\bar{y}\|_\infty)$  et  $s \geq s_2(\Omega, \omega)(T^7 + T^8)$*

**Etape 2 : Estimation de la pression  $p$**

*Dans cette étape, on va estimer l'intégrale de  $|\nabla p|^2$  dans le second membre de (4.9) en terme d'une intégrale locale de  $|p|^2$ , un terme relatif à la trace de  $p$  et de deux autres termes globaux impliquant  $|g|^2$  et  $|\nabla\varphi|^2$ ; le dernier terme sera absorbé plus tard par l'intégrale correspondante apparaissant dans  $I(s, \lambda; \varphi)$ .*

Cette estimation sera faite par l'application d'une inégalité de Carleman elliptique (démontrée dans le chapitre 2) à une équation différentielle satisfaite par la pression.

En effet, en appliquant l'opérateur de divergence à la première équation dans (4.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &= \nabla \cdot (D\varphi\bar{Y} + g)(t) \quad \text{dans } \Omega, \\ p(t) &= p(t) \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.10}$$

pour tout  $t \in (0, T)$ .

Notant que le second membre de (4.10) appartient à  $H^{-1}(\Omega)$ . On sait aussi que  $p(t) \in H^1(\Omega)$ , alors on peut appliquer le résultat principal dans le chapitre 2 (voir l'inégalité (2.11)), donc il existe une constante  $\bar{C}_1(\Omega, \omega) > 0$  et deux nombres  $\bar{\lambda} > 1$ ,  $\bar{\tau} > 1$ , tels que pour tout  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  et  $\tau \geq \bar{\tau}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{2\tau\eta} |\nabla p(t)|^2 dx &\leq \bar{C}_1 \left( \tau \int_{\Omega} e^{2\tau\eta} \psi (|D\varphi\bar{y}|^2 + |g|^2)(t) dx + \tau^{\frac{1}{2}} e^{2\tau} \|p(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_1} e^{2\tau\eta} (|\nabla p|^2 + \tau^2 \lambda^2 \eta^2 |p|^2)(t) dx \right), \end{aligned} \tag{4.11}$$

où

$$\eta(x) = e^{\lambda\psi(x)}, \quad \forall x \in \Omega.$$

On peut éliminer l'intégrale locale de  $|\nabla p|^2$  dans (4.11) au prix de l'intégration  $|p|^2$  dans un ensemble ouvert  $\omega_2$  satisfaisant  $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega$ .

A ce niveau, on introduit une fonction  $\xi \in C_c^2(\omega_2)$  telle que,

$$\xi \equiv 1 \quad \text{dans } \omega_1, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

et en prenant l'intégration par partie sur  $\int_{\omega_1} e^{2\tau\eta} |\nabla p(t)|^2 dx$  plusieurs fois, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1} e^{2\tau\eta} |\nabla p(t)|^2 dx &\leq \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta} \xi \nabla p(t) \cdot \nabla p(t) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\omega_2} \nabla(e^{2\tau\eta} \xi) \cdot \nabla |p(t)|^2 dx \\ &\quad - \langle e^{2\tau\eta} \Delta p(t), \xi p(t) \rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega_2} \Delta(e^{2\tau\eta} \xi) |p(t)|^2 dx \\ &\quad - \langle e^{2\tau\eta} \nabla(D\varphi\bar{y} + g)(t), \xi p(t) \rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Puisque

$$|\Delta(e^{2\tau\eta}\xi)| \leq 2\bar{C}_2\tau^2\lambda^2\eta^2 e^{2\tau\eta} \quad \text{dans } \omega_2,$$

alors, pour  $\lambda \geq \bar{\lambda}_0(\Omega, \omega)$  et pour une certaine constante  $\bar{C}_2(\Omega, \omega) > 0$ , le premier terme dans le second membre peut être estimé par :

$$\bar{C}_2\tau^2\lambda^2 \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2 |p(t)|^2 dx.$$

On intègre par parties encore une fois l'autre terme, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \langle e^{2\tau\eta}\nabla \cdot (D\varphi\bar{y} + g)(t), \xi p(t) \rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} \\ & = \int_{\omega_2} \nabla(e^{2\tau\eta}\xi) \cdot (D\varphi\bar{y} + g)(t) p(t) dx + \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\xi (D\varphi\bar{y} + g)(t) \cdot \nabla p(t) dx \end{aligned}$$

comme

$$|\nabla(e^{2\tau\eta}\xi)| \leq \bar{C}_3(\Omega, \omega)\tau\lambda\eta e^{2\tau\eta} \quad \text{dans } \omega_2$$

pour  $\lambda \geq \bar{\lambda}_1(\Omega, \omega)$ , alors :

$$\begin{aligned} & - \langle e^{2\tau\eta}\nabla \cdot (D\varphi\bar{y} + g)(t), \xi p(t) \rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} \\ & \leq \bar{C}_4 \left( \tau^2\lambda^2 \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2 |p(t)|^2 dx + \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta} (|D\varphi\bar{y}|^2 + |g|^2)(t) dx \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\xi |\nabla p(t)|^2 dx, \end{aligned}$$

pour une constante  $\bar{C}_4(\Omega, \omega) > 0$ .

De (4.12), on a :

$$\int_{\omega_1} e^{2\tau\eta} |\nabla p(t)|^2 dt \leq \bar{C}_5 \left( \tau^2\lambda^2 \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2 |p(t)|^2 dx + \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta} (|D\varphi\bar{y}|^2 + |g|^2)(t) dx \right)$$

pour  $\lambda \geq \bar{\lambda}_2(\Omega, \omega)$ .

La dernière inégalité associée avec (4.11) donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{2\tau\eta} |\nabla p(t)|^2 dx & \leq \bar{C}_6 \left( \tau \int_{\Omega} e^{2\tau\eta}\eta (|D\varphi\bar{y}|^2 + |g|^2)(t) dx + \tau^{\frac{1}{2}} e^{2\tau} \|p(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \tau^2\lambda^2 \int_{\omega_2} e^{2\tau\eta}\eta^2 |p(t)|^2 dx \right) \end{aligned}$$

pour  $\lambda \geq \tilde{\lambda}_2$  et  $\tau \geq \bar{\tau}$ .

Pour lier cette estimation elliptique avec (4.9), on pose :

$$\tau = \frac{s}{t^4(T-t)^4} e^{\lambda m \|\psi\|_\infty}$$

et on multiplie ces deux membres par :

$$\exp \left\{ -2s \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m \|\psi\|_\infty}}{t^4(T-t)^4} \right\},$$

puis on intègre par rapport à  $t$  dans  $(0, T)$ . En choisissant  $\tau$  plus grand que  $\bar{\tau}$  et en prenant  $s \geq (\bar{\tau} > 2^8)T^8$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int \int_Q e^{-2s\alpha} |\nabla p(t)|^2 dx dt &\leq \bar{C}_7 \left( s \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |g|^2 dx dt + s \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |D\varphi \bar{y}|^2 dx dt \right. \\ &\quad + s^{\frac{1}{2}} \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^{\frac{1}{2}} \|p(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 dt \\ &\quad \left. + s^2 \lambda^2 \int_{\omega_2 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^2 |p|^2 dx dt \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

pour tout  $\lambda \geq \bar{\lambda}_2$  et  $s \geq \bar{s}_0 T^8$ .

### **Etape 3 : Estimation pour la trace de $p$**

Suivant les idées de [8] et en utilisant les résultats de régularité pour le système de Stokes, on peut également obtenir une estimation sur la trace de la pression.

Avec les résultats obtenus dans l'étape 1 et l'étape 2, on obtient une inégalité de Carleman comme suit :

$$\begin{aligned} I(s, \lambda, \varphi) &\leq C_4 \left( s^3 \lambda^4 \int_{\omega_1} \int_{(0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dx dt + s^2 \lambda^2 \int_{\omega_2} \int_{(0, T)} e^{-2s\alpha} \xi |p|^2 dx dt \right. \\ &\quad \left. + s \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |g|^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Cette inégalité contient de "bons" termes dans le premier membre, et des intégrales locales sur la pression et sur le champ de vecteur vitesse dans le second membre.

Le reste de preuve concerne l'élimination du terme local de la pression apparu dans le second membre de cette inégalité. Deux difficultés principales apparaissent :

1) L'obtention de l'estimation locale de la pression en fonction du terme local du champ de vecteur vitesse n'est pas un travail facile dans les systèmes de Stokes comme (4.5).

2) Le fait que la fonction poids soit multipliée par la pression qui dépend de  $x$  complique le problème d'avantage.

Par conséquent, la stratégie va être la suivante :

D'abord, on remplace le poids dans l'inégalité locale de la pression par un autre qui ne dépend pas de  $x$  mais seulement de  $t$ . Ceci va mener à réduire le problème afin de trouver une estimation de l'intégrale de  $|\nabla p|^2$  au lieu de  $|p|^2$ , ensuite on estime deux intégrales locales impliquant  $|\Delta\varphi|^2$  et  $|\varphi_t|^2$ . L'intégrale de  $|\Delta\varphi|^2$  est le but de l'étape 4, et l'intégrale de  $|\varphi_t|^2$  est traitée dans l'étape 5. ■

## 4.2 Pour un système de Stokes

Soit  $l \in C^\infty([0, T])$  telle que,

$$\begin{cases} l(x_0) > 0 \quad \forall x_0 \in ]0, T[, \\ l(x_0) = x_0 \quad \forall x_0 \in [0, \frac{T}{4}], \\ l(x_0) = T - x_0 \quad \forall x_0 \in ]\frac{3T}{4}, T[. \end{cases}$$

On définit les deux fonctions poids suivantes :

$$\varphi(x) = \frac{e^{\lambda(\psi(\tilde{x})+m_1)}}{l^k(x_0)} \quad (4.15)$$

$$\alpha(x) = \frac{e^{\lambda(\psi(\tilde{x})+m_1)} - e^{\lambda(\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}+m_2)}}{l^k(x_0)} \quad (4.16)$$

où  $\psi$  est la fonction poids donnée par le lemme 2.1,  $k \geq 2$ ,  $\lambda \geq 1$  et les constantes  $m_1$  et  $m_2$  sont choisis tels que  $m_1 \leq m_2$ .

Maintenant, on définit l'estimation de Carleman globale pour les équations paraboliques générales non homogènes, pour cela :

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\Gamma$ . On considère une solution  $y \in w(Q)$  de l'équation parabolique du second ordre :

$$\begin{aligned} L(x, D)y &= \frac{\partial y}{\partial x_0} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i(x)y) + d(x)y \\ &= f + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega. \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$y = g \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma. \quad (4.18)$$

où

$$a_{ij} \in C^2(\bar{Q}); \quad b_j, c_i, d \in L^\infty(Q) \quad \text{et} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{pour} \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (4.19)$$

de plus, les coefficients  $a_{ij}$  satisfont la condition d'ellipticité :

$$\exists \beta > 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \bar{Q}, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \eta_i \eta_j \geq \beta |\eta|^2. \quad (4.20)$$

On suppose

$$f \in L^2(Q), \quad f_j \in L^2(Q), \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (4.21)$$

**Théorème 4.2** *Supposons les hypothèses (4.19), (4.20) et (4.21), et soit  $y \in W(Q)$  une solution de (4.17) et (4.18). Alors, il existe  $s_0 \geq 1$  et  $\lambda_0 \geq 1$  et il existe une constante  $C > 0$  (indépendante de  $s$  et  $\lambda$ ) tels que pour chaque  $s \geq s_0$  et pour chaque  $\lambda \geq \lambda_0$ .*

$$\begin{aligned} \int_Q \left( \frac{1}{s\varphi} \sum_{i=0}^N \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^2 + s\lambda^2 \varphi |y|^2 \right) e^{2s\alpha} dx &\leq C \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \|\varphi^{-\frac{1}{4}} g e^{s\alpha}\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 + \int_Q \frac{1}{s^2 \lambda^2 \varphi^2} |f|^2 e^{2s\alpha} dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \int_Q |f_j|^2 e^{2s\alpha} dx + \int_{Q_\omega} s\lambda^2 \varphi |y|^2 e^{2s\alpha} dx \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

■ On considère le système de Stokes :

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} - \Delta y + \nabla p = f \quad \text{dans} \quad Q, \quad (4.23)$$

$$\operatorname{div} y = 0 \quad \text{dans} \quad Q,$$

$$y = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma,$$

$$y(0, \tilde{x}) = y_o(\tilde{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (4.24)$$

Il est bien connu que si  $y_0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ , il existe une unique solution

$y \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$  de (4.23) et (4.24).

De plus, on a un résultat de régularité suivant : pour  $y_0 \in V$  et  $f \in L^2(0, T; H)$ , la solution  $y$  vérifie,

$$y \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)^n), \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} \in L^2(0, T; H), \quad p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

et on a :

$$\|y\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}^2 + \|\nabla p\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| \frac{\partial y}{\partial x_0} \right\|_{L^2(0, T; H)}^2 \leq C \left( \|y_0\|_V^2 + \|f\|_{L^2(0, T; H)}^2 \right). \quad (4.25)$$

L'inégalité de Carleman globale pour le système (4.23) est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 4.3** *Soit  $\omega$  un ensemble ouvert non vide de  $\Omega$  et  $T > 0$ . On considère les fonctions poids  $\varphi$  et  $\alpha$  définies par (4.15) et (4.16). Alors il existe  $s_0 \geq 1$ ,  $\lambda_0 \geq 1$  et  $C > 0$  tels que pour chaque  $s \geq s_0$  et  $\lambda \geq \lambda_0$  : si  $y_0 \in V$  et  $f \in L^2(0, T; H)$  et si  $y \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)^n)$  est la solution de (4.23) et (4.24) on a l'estimation de Carleman suivante :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \left\| \frac{e^{s\alpha}}{\sqrt{\varphi}} \nabla(\text{rot} y) \right\|_{L^2(Q)}^2 + s\lambda^2 \left\| \sqrt{\varphi} e^{s\alpha} \text{rot} y \right\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda^2 \left\| e^{s\alpha} \nabla y \right\|_{L^2(Q)}^2 + s^2 \lambda^4 \left\| \varphi e^{s\varphi} y \right\|_{L^2(Q)}^2 \\ & \leq C \left( \left\| e^{s\alpha} f \right\|_{L^2(Q)}^2 + s^2 \lambda^4 \left\| \varphi e^{s\alpha} y \right\|_{L^2(Q_\omega)}^2 + s\lambda^2 \left\| \sqrt{\varphi} e^{s\varphi} \text{rot} y \right\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

■

**Remarque 4.1** *Pour des raisons de simplification, on remarque que le dernier terme du second membre de cette inégalité peut être absorbé par le premier membre et on obtient :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \left\| \frac{e^{s\alpha}}{\sqrt{\varphi}} \nabla(\text{rot} y) \right\|_{L^2(Q)}^2 + s\lambda^2 \left\| \sqrt{\varphi} e^{s\alpha} \text{rot} y \right\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda^2 \left\| e^{s\alpha} \nabla y \right\|_{L^2(Q)}^2 + s^2 \lambda^4 \left\| \varphi e^{s\varphi} y \right\|_{L^2(Q)}^2 \\ & \leq C \left( \left\| e^{s\alpha} f \right\|_{L^2(Q)}^2 + s^2 \lambda^4 \left\| \varphi e^{s\alpha} y \right\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

### Preuve du théorème 4.3

On définit

$$\omega = \text{rot} y.$$

En passant le rotationnel de l'équation (4.23), on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial x_0} - \Delta w = \text{rot} f \quad \text{dans } Q, \quad (4.28)$$

$$w(0, \tilde{x}) = w_0(\tilde{x}) = \text{rot} y_0(\tilde{x}) \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.29)$$

Comme  $\text{div} y = 0$ , on a pour chaque  $x_0 \in (0, T)$

$$\Delta y(x_0) = \text{rot} w(x_0) \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.30)$$

$$y(x_0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4.31)$$

On rappelle que si  $y = 0$  sur  $\Sigma$  on a  $\nabla y = \nabla y \cdot \nu$  sur  $\Sigma$ , par conséquent on obtient :

$$\left\| \varphi^{-\frac{1}{4}} e^{s\alpha} w \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 \leq C \left\| \varphi^{-\frac{1}{4}} e^{s\alpha} (\nabla y \cdot \nu) \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2.$$

En utilisant cette inégalité et en appliquant l'estimation de Carleman (4.22) pour le problème (4.28) et (4.29), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \left\| \frac{e^{s\alpha}}{\sqrt{\varphi}} \nabla w \right\|_{L^2(Q)}^2 + s\lambda^2 \left\| \sqrt{\varphi} e^{s\alpha} w \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \left( \left\| e^{s\alpha} f \right\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{\sqrt{s}} \left\| \varphi^{-\frac{1}{4}} e^{s\alpha} (\nabla y \cdot \nu) \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 \right. \\ \left. + s\lambda^2 \left\| \sqrt{\varphi} e^{s\alpha} w \right\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Pour  $x_0 \in (0, T)$ , on définit :

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{x}) &= e^{\lambda(\psi(\tilde{x})+m_1)}, \\ \alpha(x_0, \tilde{x}) &= \frac{\beta(\tilde{x})}{l^k(x_0)} - C(x_0) \end{aligned}$$

et on applique l'inégalité (3.1) prouvée dans le chapitre 3 pour obtenir une estimation de Carleman au problème elliptique (4.30) et (4.31), en effet :

Il existe  $\tau_0 \geq 1$ ,  $\lambda_0 \geq 1$  et  $C > 0$  tels que pour chaque  $x_0 \in (0, T)$ ,  $\tau \geq \tau_0$  et  $\lambda \geq \lambda_0$  on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{2\tau\beta} (|\nabla y(x_0)|^2 + \tau^2 \lambda^2 \beta^2 |y(x_0)|^2) d\tilde{x} \leq C \left( \tau \int_{\Omega} \beta e^{2\tau\beta} |w(x_0)|^2 d\tilde{x} \right. \\ \left. + \tau^2 \lambda^2 \int_{\omega} \beta^2 e^{2\tau\beta} |y(x_0)|^2 d\tilde{x} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Maintenant, on prend  $\tau = \frac{s}{l^k(x_0)}$  et on multiplie l'inégalité précédente par  $\lambda^2 e^{-2sC(x_0)}$ , en intégrant sur  $(0, T)$  par rapport à  $x_0$ , on obtient :

$$\lambda^2 \left\| e^{s\alpha} \nabla y \right\|_{L^2(Q)}^2 + s^2 \lambda^4 \left\| \varphi e^{s\alpha} y \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \left( s\lambda^2 \left\| \sqrt{\varphi} e^{s\alpha} w \right\|_{L^2(Q)}^2 + s^2 \lambda^4 \left\| \varphi e^{s\alpha} y \right\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \right) \quad (4.34)$$

Combinons les inégalités (4.32) et (4.34) on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \left\| \frac{e^{s\alpha}}{\sqrt{\varphi}} \nabla w \right\|_{L^2(Q)}^2 + s\lambda^2 \left\| \sqrt{\varphi} e^{s\alpha} w \right\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda^2 \left\| e^{s\alpha} \nabla y \right\|_{L^2(Q)}^2 + s^2 \lambda^4 \left\| \varphi e^{s\alpha} y \right\|_{L^2(Q)}^2 \\ \leq C \left( \left\| e^{s\alpha} f \right\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{\sqrt{s}} \left\| \varphi^{-\frac{1}{4}} e^{s\alpha} (\nabla y \cdot \nu) \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 + s\lambda^2 \left\| \sqrt{\varphi} e^{s\alpha} w \right\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \right. \\ \left. + s^2 \lambda^4 \left\| \varphi e^{s\alpha} y \right\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dans le but d'estimer le terme du bord  $\left\| \varphi^{-\frac{1}{4}} e^{s\alpha} (\nabla y \cdot \nu) \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2$ , on définit :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x_0) &= \varphi(x_0, \tilde{x})|_{\Gamma} = \frac{e^{\lambda m_1}}{l^k(x_0)}, \\ \hat{\alpha}(x_0) &= \alpha(x_0, \tilde{x})|_{\Gamma} = \frac{e^{\lambda m_1} - e^{\lambda(\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} + m_2)}}{l^k(x_0)} \end{aligned}$$

et

$$(u, q) = \frac{e^{s\hat{\alpha}(x_0)}}{\hat{\varphi}(x_0)^{\frac{1}{4}}}(y, p).$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_0} - \Delta u + \nabla q &= \frac{e^{s\hat{\alpha}(x_0)}}{\hat{\varphi}(x_0)^{\frac{1}{4}}}f + s\hat{\alpha}'(x_0)\frac{e^{s\hat{\alpha}(x_0)}}{\hat{\varphi}(x_0)^{\frac{1}{4}}}y - \frac{1}{4}\hat{\varphi}'(x_0)\frac{e^{s\hat{\alpha}(x_0)}}{\hat{\varphi}(x_0)^{1+\frac{1}{4}}}y && \text{dans } Q, \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{dans } Q, \\ u &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ u(0, \tilde{x}) &= 0 && \text{dans } Q. \end{aligned}$$

Pour  $k \geq 4$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in (0, T), \quad \frac{\hat{\alpha}'(x_0)}{\hat{\varphi}(x_0)^{\frac{1}{4}}} &\leq C\hat{\varphi}(x_0), \quad \frac{\hat{\varphi}'(x_0)}{\hat{\varphi}(x_0)^{1+\frac{1}{4}}} \leq C \\ \forall x_0 \in (0, T), \quad \forall \tilde{x} \in \Omega, \quad \hat{\alpha}(x_0) &\leq \alpha(x_0, \tilde{x}), \quad \hat{\varphi}(x_0) \leq \varphi(x_0, \tilde{x}). \end{aligned}$$

Utilisons les résultats de régularité classique de la solution pour l'équation de Stokes (voir [15], rappel (4.25)), on obtient :

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \left( \|e^{s\alpha} f\|_{L^2(Q)}^2 + s^2 \|\varphi e^{s\alpha} y\|_{L^2(Q)}^2 \right) \quad (4.36)$$

d'autre part, d'après [14] on sait que :

$$\|\nabla u \cdot \nu\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 = \left\| \frac{e^{s\hat{\alpha}}}{\hat{\varphi}^{\frac{1}{4}}}(\nabla y \cdot \nu) \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 \leq C \left( \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right). \quad (4.37)$$

Alors, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \|\varphi^{-\frac{1}{4}} e^{s\alpha}(\nabla y \cdot \nu)\|_{H^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 \leq C \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \|e^{s\alpha} f\|_{L^2(Q)}^2 + s^{\frac{3}{2}} \|\varphi e^{s\alpha} y\|_{L^2(Q)}^2 \right). \quad (4.38)$$

En remplaçant dans (4.35) et en prenant  $s$  suffisamment large pour que le terme  $s^{\frac{3}{2}} \|\varphi e^{s\alpha} y\|_{L^2(\Omega)}^2$  soit absorbé par le premier membre, on obtient (4.26). Dans le but d'obtenir (4.27) on va estimer le terme  $Cs\lambda^2 \|\sqrt{\varphi} e^{s\alpha} \operatorname{rot} y\|_{L^2(Q_\omega)}^2$  dans le second membre de (4.26). Tout d'abord, on sait qu'il existe un ensemble ouvert non vide  $\omega_0$  de  $\Omega$  tel que :

$$\overline{\omega_0} \subset \omega \quad (4.39)$$

et

$$|\nabla\psi| > 0 \quad \text{dans } \overline{\Omega - \omega_0}. \quad (4.40)$$

Par conséquent, on obtient (4.26) si on remplace  $\omega$  par  $\omega_0$ .

Pour éliminer le terme  $Cs\lambda^2\|\sqrt{\varphi}e^{s\alpha}rot y\|_{L^2(Q_{\omega_0})}^2$ , on prend  $\rho \in C_0^\infty(\omega)$  tel que :

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad \text{et} \quad \rho = 1 \quad \text{sur} \quad \omega_0.$$

On a :

$$\begin{aligned} Cs\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} \varphi e^{2s\alpha} |rot y|^2 dx &\leq Cs\lambda^2 \int_{Q_\omega} \rho \varphi e^{2s\alpha} |rot y|^2 dx \\ &= Cs\lambda^2 \int_{Q_\omega} rot(\rho \varphi e^{2s\alpha} rot y) y dx \\ &\leq Cs\lambda^2 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \varphi |y| (|rot y| + \lambda |rot y| + s\lambda \varphi |rot y|) dx \\ &\quad + Cs\lambda^2 \int_{Q_\omega} \varphi e^{2s\alpha} |\nabla(rot y)| |y| dx \\ &\leq \frac{1}{2} s\lambda^2 \|\sqrt{\varphi} e^{s\alpha} rot y\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{2s} \|\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \nabla(rot y)\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + Cs^3 \lambda^4 \|\varphi^{\frac{3}{2}} e^{s\alpha} y\|_{L^2(Q_\omega)}^2. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (4.26), on obtient facilement (4.27) ce qui termine la preuve du Théorème 4.3.

# Chapitre 5

## Conclusion

# Conclusion

L'étude de la contrôlabilité exacte pour les problèmes de Navier Stokes ainsi que pour les problèmes de Stokes repose sur les inégalités de Carleman globales.

La nouveauté dans ce travail est d'obtenir une inégalité de Carleman globale pour les équations elliptiques générales non homogènes avec second membre dans  $H^{-1}$ , celle ci joue un rôle important pour établir une estimation sur la pression en fonction de la vitesse et de la trace de la pression. Cette dernière constitue une étape majeure pour démontrer l'inégalité de Carleman globale pour le problème de Navier Stokes linéarisé.

# Chapitre 6

## Bibliographie

# Bibliographie

- [1] **O.Yu. Imanuvilov, J-P. Puel**, Global Carleman Estimates for Weak Solutions of Elliptic Nonhomogeneous Dirichlet Problems, IMRN 2003, no. 16, 883-913.
- [2] **T.Carleman**, sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, Ark. Mat. Astr. Fys. 26(1939), no. 17, 1-9 (French).
- [3] **L. Hormander**, Linear Partial Differential operators, DieGrundlehren der mathematischen wissenschaften, vol. 116, Academic Press, New York, 1963.
- [4] **J.-L. Lions**, Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Die Grundlehren der mathematischen wissenschaften, vol. 170, Sping-Verlag, New York, 1971.
- [5] **C. Fabre, G. Lebeau**, Prolongement unique des solutions de l'équation de Stokes, Comm.Partial Diferential Equations, vol 21, 1996, pp :573-596.
- [6] **A. Fursikov,O.Yu.Imanuvilov**, Controllability of Evolution Equation, Lecture Notes Series 34, RIM-GARC, Seoul National University, 1996.
- [7] **O. Yu. Imanuvilov**, On exact controllability for the Navier-Stokesequatics, ESAIM : Conteol, Optimisation and Calculus of Variations, [www.emath.fr/cocv/](http://www.emath.fr/cocv/),**3**,1998, 97-131.
- [8] **O. Yu. Imanuvilov**, Remarks on exact controllability for Navier-Stokes equation, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations,[www.emath.fr/cocv/](http://www.emath.fr/cocv/),**6**, 2001, 39-72.

- [9] **O. Yu. Imanuvilov, M. Yamamoto**, Carleman inequalities for parabolic equation in sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations, UTMS 98-46.
- [10] **G. Lebeau, L. Robbiano**, Contrôle exact de l'équation de la chaleur, Comm. Partial Differential Equation, **30**, (1995), 335-357.
- [11] **J-P. Puel**, Une approche non classique d'un problème d'assimilation de données, Note aux C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I, 334(2002).
- [12] **M. Taylor**, Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE Birkh ..auser, Berlin, 1991.
- [13] **Oleg Yu. Imanuvilov, Jean- Pierre Puel, Masahiro Yamamoto**, Carleman estimates for second order non homogeneous parabolic equations. Decembre 2010.
- [14] **J-L.Lions, E.Magenes**, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol.2, Paris, Dunad, 1968.
- [15] **R. Temam**, Navier- Stokes Equation, AMS, Providence, 2001.
- [16] **O. Imanuvilov, J-P. Puel**, Global Carleman estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems, IMRN, 2003, 883-913.
- [17] **E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov, J-P-Puel,** Local exact controllability of the Navier-Stokes system. J. Math. Pures Appl.83(2004)1501-1542.
- [18] **J-M. Coron**, On the controllability of the 2-D incompressible Navier- Stokes equations with the Navier slip boundary conditions, ESAIM Control Optim. Cala. Var. 1(1996) 35-75.
- [19] **C. Fabre**, Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 1(1995/96) 267-302.
- [20] **A.Fursiko, O. Yu. Imamuvilov**, Exact controllability of the Navier-Stokes and Boussinesq equations, Russian Math. Surveys 54(3)(1999)565-618.
- [21] **Haim Brézis**, Analyse fonctionnelle "Théorie et applications".
- [22] **E. Fernández-Cara, S. Guerrero**, Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to null controllability, in preparation.

- [23] **T. Carleman**, Sur une problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Ark. Mat. Astr. Fys., 26B(17), 19, 1939.
- [24] **L. Hörmander**, Linear Partial Differential Operators. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [25] **L. Hörmander**, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, volume IV. Springer-Verlag, 1985.
- [26] **C. Zuily**, Uniqueness and Non Uniqueness in the Cauchy Problem. Birkhauser, Progress in mathematics, 1983.