



**Université des Sciences et de la Technologie
HOUARI BOUMEDIENE**

**FACULTE DES SCIENCES, MATHEMATIQUES
DEPARTEMENT DE RECHERCHE OPERATIONNELLE**

THESE

**PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES**

par

Isma BOUCHEMAKH



**Sur quelques problèmes extrémaux dans
les ordres partiels finis**

DEVANT LE JURY

PRESIDENT	: A.E.K. KHELLADI	, PROFESSEUR , USTHB
RAPPORTEUR	: K. ENGEL	, PROFESSEUR , Rostock (Allemagne)
EXAMINATEURS	: J.M. LABORDE	, DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS (France)
	C. PAYAN	, DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS (France)
	M. ABBAS	, MAITRE DE CONFERENCES, USTHB
	M. AIDER	, MAITRE DE CONFERENCES, USTHB
	A. BERRACHEDI	, MAITRE DE CONFERENCES, USTHB
	M. BLIDIA	, MAITRE DE CONFERENCES, Blida

Dédicaces

A mes très chers parents pour leur amour, leurs sacrifices et leur compréhension sans limites.

A mes chères sœurs et à mes chers frères,

A ma nièce Myriame et à mes neveux Raouf et Amine,

A mon beau-frère,

A tous mes amis,

A tous ceux qui me sont chers,

J

je dédie ce travail .

Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements au Professeur Konrad ENGEL, mon Directeur de Thèse et Professeur à l'Université de Rostock (Allemagne), de m'avoir proposé un sujet de Recherche aussi passionnant, pour son suivi continu, pour les conseils qu'il m'a prodigués ainsi que pour la patience dont il a fait preuve tout au long de ces années.

Je remercie le Professeur Abdelkader KHELLADI pour l'honneur qu'il me fait en présidant le Jury de cette Thèse.

Que les Professeurs Jean Marie LABORDE et Charles PAYAN, Directeurs de Recherche au CNRS, à l'Université de Grenoble (France) trouvent ici mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et d'avoir bien voulu faire partie du Jury.

Je remercie également les Docteurs Moncef ABBAS, Méziane AIDER, Abdelhafid BERRACHEDI, Maîtres de Conférences à l'USTHB, ainsi que le Docteur Mostapha BLIDIA, Maître de Conférence à l'Université de Blida pour avoir accepté aimablement d'examiner le travail et de faire partie du Jury.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toute l'équipe de Professeurs, de Docteurs et du Personnel de l'Institut de Mathématiques, Université de Rostock. Je cite tout particulièrement les Professeurs Hans-Dietrich GRONAU et Roger LABAHN, les Docteurs Martin GRÜTTMÜLLER, Sven HARTMANN, Uwe LECK, Volker LECK et Christian BEY pour leur accueil chaleureux, leur amabilité et leur entière disponibilité à chacun de mes séjours à l'Université de Rostock.

Je voudrais également exprimer ma reconnaissance à l'Académie Allemande (DAAD) dont le support financier a été décisif dans l'aboutissement de la Thèse.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué, directement ou indirectement à la réalisation de la présente Thèse.

Sommaire

Introduction	4
1 Terminologie et concepts généraux	6
1.1 Concept de poset et notation	6
1.2 Exemples de posets classiques	10
1.3 Concepts généraux sur les hypergraphes	14
1.4 Hypergraphe des intervalles d'un poset	19
2 Complexité algorithmique	21
2.1 Introduction	21
2.2 NP-complétude de quelques problème relatifs à l'hypergraphe des intervalles d'un poset	24
2.2.1 Problème de stablilité et de recouvrement par arêtes	24
2.2.2 Problème de couplage	26
2.2.3 Problème de recouvrement par sommets	28
2.2.4 Problème de coloration	29
3 Quelques opérations sur les posets	32
3.1 La somme directe	32

3.2	La somme linéaire	33
3.3	Le produit direct	35
3.4	Le produit linéaire	37
3.5	Le produit direct par rangés	38
3.6	L'exponentiation	39
4	Hypergraphe des intervalles de sous-posets du treillis Booléen	41
4.1	Couplage et recouvrement par sommets	41
4.1.1	Nombres fractionnaires	44
4.1.2	Détermination de quelques bornes pour le nombre de couplage et de recouvrement	45
4.1.3	Quelques valeurs exactes pour les nombres de cou- plage et de recouvrement par sommets	48
4.2	Nombre de k -stabilité	49
4.3	Sur le nombre chromatique	57
5	Hypergraphe des intervalles de la classe des ordres d'intervalles	64
5.1	Propriété de König	65
5.2	Propriété duale de König	70
5.3	Sur le nombre chromatique et le nombre de k -stabilité	75
6	La propriété duale de König dans le cas général et pour les classes des ordres SSSC et SSC	77
6.1	Propriété duale de König dans le cas général	77
6.2	Propriété duale de König pour les classes des ordres SSSC et SSC	81

6.2.1	Propriété duale de König pour la classe des ordres SSSC	81
6.2.2	Propriété duale de König pour la classe des ordres SSC	86
6.3	Exemples d'ordres SSSC et SSC	86
6.4	Le poset $L(m, n)$	91
7	Hypergraphe des intervalles de la classe des ordres série- parallèles	94
7.1	Introduction	94
7.2	Propriété duale de König	95
7.3	Propriété de König	99
8	Nombre de stabilité pour l'hypergraphe des intervalles du treillis des faces du n-cube et du treillis linéaire	101
8.1	Hypergraphe des intervalles du treillis des faces du n -cube .	101
8.2	Hypergraphe des intervalles du treillis linéaire	104
	Conclusion générale	107
	Problèmes ouverts	108
	Bibliographie	109

Introduction.

En 1928, Sperner résolut le problème: quelle est la taille maximum d'une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ telle que aucun membre de la famille ne contienne un autre. Il prouva que $\max |\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Ce théorème a eu des répercussions bien au delà de ses attentes puisqu'il a été généralisé à un ordre quelconque ayant une fonction de rang et par suite le Théorème de Sperner en découlait comme un cas particulier dans le sens où l'ordre sera l'inclusion et la fonction de rang la cardinalité.

L'ampleur des résultats découverts a pris de telles proportions qu'une nouvelle théorie s'est imposée d'elle même: C'est la théorie de Sperner (voir par ex. [26] et [27]).

Notre contribution à cette théorie a été motivée par deux faits: D'abord à partir des travaux de Bernd Voigt et Ingo Wegener [78] qui, en 1988, avaient montré que la représentation d'une fonction Booléenne symétrique par un nombre minimum de monômes revient à la détermination d'un recouvrement minimum par des intervalles de certains niveaux consécutifs $\{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) : k_i \leq \sum_{j=1}^n x_j \leq l_i\}$ du treillis Booléen B_n . Ils ont prouvé que ce nombre vaut $\max\{\binom{n}{k_i}, \binom{n}{l_i}\}$. A partir de là, nous nous sommes intéressés à une généralisation de ce résultat, à savoir, la recherche du nombre minimum d'intervalles recouvrant un poset quelconque et bien sûr le cas dual. En parlant en termes d'hypergraphes, si nous notons par $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles de P dont les sommets sont les points de P et dont les arêtes sont ses intervalles maximaux, nous étudierons la relation $\max\{|F| : F \text{ est un stable de } \mathcal{H}(P)\} = \min\{|\mathcal{I}| : \mathcal{I} \text{ est un recouvrement par arêtes de } \mathcal{H}(P)\}$. Plus tard, l'étude du dual de $\mathcal{H}$ s'avère tout aussi intéressante.

La motivation à cette recherche est d'autant plus forte lorsqu'on voit la similitude qui existe avec le Théorème de Dilworth, en remplaçant antichaîne par stable et chaîne par intervalle, c.à.d. l'hypergraphe des chaînes maximales de P :

Théorème 0.1 [22] *Soit P un poset. Alors $\max\{|A| : A \text{ est une antichaîne de } P\} = \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ est une partition de } P \text{ en chaînes}\}$.*

Ce Théorème est à la base d'un bon nombre de travaux. Citons-en par exemple [28], [54], [74], [79],

Dans le premier Chapitre, nous rappelons les notions de base sur les posets et les hypergraphes, puis nous introduisons la classe des hypergraphes des intervalles d'un poset à laquelle notre intérêt s'est porté.

Au deuxième Chapitre, nous étudions la complexité des problèmes de recouvrement, de couplage, de stabilité et de coloration.

Le troisième Chapitre est consacré aux opérations définies sur les posets. Nous examinons pour certaines d'entre elles, la préservation ou la non-préservation des propriétés de König, duale de König ainsi que les propriétés fortes IS et IC.

Quant au quatrième Chapitre, il a pour objet l'étude de l'hypergraphe des intervalles du treillis Booléen. Dans la première partie, nous énonçons les résultats établis par Engel [25], puis dans la deuxième partie, nous donnons quelques valeurs du nombre de k -stabilité [14] et enfin, nous terminons ce chapitre par l'étude du nombre chromatique [12].

Dans le cinquième Chapitre, nous développons entre autres des algorithmes polynomiaux pour prouver que les hypergraphes des intervalles de la classe des ordres d'intervalles ont la propriété de König et la propriété duale de König [10].

Dans le sixième Chapitre, nous étudions essentiellement la propriété duale de König dans le cas général et pour les classes des ordres SSSC et SSC [9].

Dans le septième Chapitre, nous prouvons la propriété de König par la normalité et la propriété duale de König par construction pour les hypergraphes des intervalles des ordres série-parallèles [13].

Nous clôturons la thèse par le huitième Chapitre. La propriété forte IS est déterminée pour l'hypergraphe des intervalles du treillis linéaire et du treillis des faces du n -cube.

Chapitre 1

Terminologie et concepts généraux

Nous présentons dans ce Chapitre quelques notions sur les posets et sur les hypergraphes d'une manière générale puis nous introduisons les hypergraphes associés aux posets auxquels notre intérêt s'est porté.

1.1 Concept de poset et notation

Un ensemble partiellement ordonné $(P, \leq)$, en abrégé *poset*, est un ensemble P où la relation “ $\leq$ ” est réflexive, antisymétrique et transitive.

Dans tout ce qui suivra, nous noterons brièvement P au lieu de $(P, \leq)$ si aucun risque d'ambiguïté ne se pose et nous ne nous intéresserons qu'au cas où P est fini.

Un élément y de P *couvre* x et on note $y \succ x$ si $y > x$ et si $y \geq z > x$, alors $y = z$. Cette notion de couverture permet de représenter tout poset P sous forme d'un diagramme, appelé: *diagramme de HASSE* dont la représentation se fait comme suit:

- A chacun des éléments de P est associé, de façon injective, un point du plan.
- Si un élément y couvre un élément x , le point x sera relié au point y par un segment de droite ascendant.

On constate ainsi que deux éléments sont comparables ssi ils sont reliés par une ligne brisée ascendante.

Le *dual* de P , noté P^* est un poset ayant les mêmes sommets que P mais ordonné par la relation " $\leq_{P^*}$ " définie par: $x \leq_{P^*} y$ ssi $x \geq_P y$.

Un poset est appelé *treillis* si tout sous-ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ de P possède une borne inférieure et une borne supérieure. Par exemple le poset P de la Figure 1 est un treillis mais le poset Q ne l'est pas.

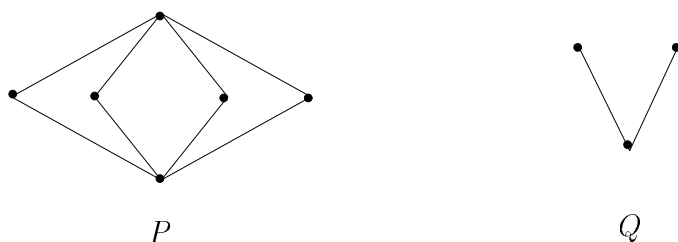


Figure 1.

Un sous-ensemble I de P de la forme $\{v \in P : p \leq v \leq q\}$ (noté par $[p, q]$) est appelé *intervalle*. Si en plus p est un élément minimal et q un élément maximal, alors I est appelé *intervalle maximal*.

Deux posets P et Q sont dits *isomorphes*, et on note $P \simeq Q$, s'il existe une application bijective φ de P dans Q vérifiant $x \leq_P y$ si et seulement si $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.

Une *fonction rang* est une fonction r de P dans $\mathbb{N}$ vérifiant $r(x) = 0$ si x est un élément minimal et $r(y) = r(x) + 1$ si $y \succ x$. S'il existe une telle fonction rang, on dira que P est rangé et la valeur $r(P) = \max_{x \in P} r(x)$ représente son *rang*.

Si P est rangé, on définit son *niveau* i par: $N_i(P) = \{x \in P : r(x) = i\}$. Le nombre $W_i(P) = |N_i(P)|$ est appelé: *i^{ème} nombre de Whitney* pour tout $i = 0, \dots, r(P)$.

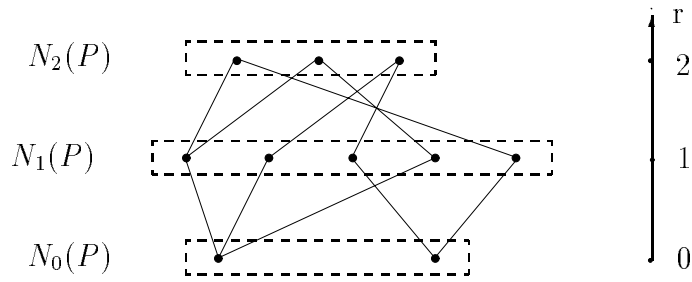


Figure 2.

Les nombres de Whitney sont dits *unimodaux* s'il existe un nombre entier h tel que: $W_i(P) \leq W_{i+1}(P)$ pour $i < h$ et $W_i(P) \geq W_{i+1}(P)$ pour $i \geq h$. Ils sont *symétriques* si $W_i(P) = W_{r(P)-i}(P)$ pour tout i . Dans ce cas P est dit de *rang unimodal* et de *rang symétrique* respectivement.

Les nombres de Whitney sont dits *logarithmiquement concaves* si pour tout i , $W_i^2(P) \geq W_{i-1}(P)W_{i+1}(P)$. Il est facile de vérifier que la concavité logarithmique implique l'unimodalité.

Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de P . On dit que $\mathcal{C}$ est une *chaîne* de P , si pour toute paire d'éléments c_1, c_2 de $\mathcal{C}$ on a $c_1 \leq c_2$ ou $c_2 \leq c_1$. Une chaîne est notée par: $\mathcal{C} = (c_0 < \dots < c_k)$. L'entier k représente sa *longueur*. Elle est *symétrique* si $r(c_0) + r(c_k) = r(P)$.

Une famille $\mathcal{L}$ de chaînes de P est une *partition de P en chaînes symétriques* si toute chaîne de $\mathcal{L}$ est symétrique et chaque élément de P est contenu dans une unique chaîne de $\mathcal{L}$. Par exemple, dans la Figure 3, les chaînes représentées en trait gras forment une partition en chaînes symétriques de P .

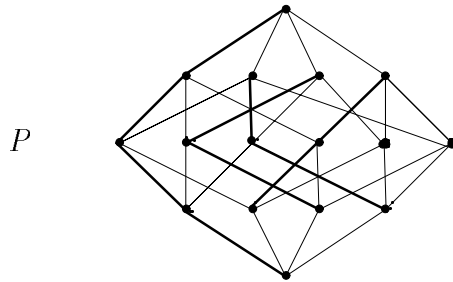


Figure 3.

Une *antichaîne* est un sous-ensemble d'éléments de P incomparables deux à deux. Une antichaîne est aussi appelée *famille de Sperner*. Plus généralement, une k -*famille* est une famille dans P ne contenant pas une chaîne de longueur k . Une 1-famille est une antichaîne. La taille maximum d'une antichaîne, notée $w(P)$ est appelée *largeur* de P .

La relation entre chaînes et antichaînes est donnée à travers le Théorème de Dilworth suivant.

Théorème 1.1 [22] *Soit P un poset, alors $\max\{|A| : A \text{ est une antichaîne de } P\} = \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ est une partition de } P \text{ en chaînes}\}$.*

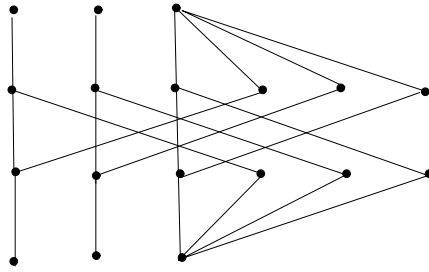


Figure 4.

P a la *propriété forte de Sperner* si pour tout k la taille maximum d'une k -famille est égale à la somme maximum de k nombres de Whitney. Un poset est appelé un *poset de Peck* si P est de rang unimodal, de rang symétrique et a la propriété forte de Sperner.

Si P possède une décomposition en chaînes symétriques alors P est un poset de Peck, mais la réciproque est fausse. Il suffit de voir le poset de la Figure 4 [27].

P est dit être de *LYM* si $\sum_{x \in A} \frac{1}{|N_r(x)|} \leq 1$ pour toute antichaîne A de P .

Un sous-ensemble F de P est appelé *filtre*, si $y \geq x$ et $x \in F$ alors $y \in F$. P est de *rang compressé*, si $\frac{\sum_{x \in F} r(x)}{|F|} \geq \frac{\sum_{x \in P} r(x)}{|P|}$ pour chaque filtre F de P .

1.2 Exemples de posets classiques

Nous proposons ici quelques exemples de posets qui ont un intérêt relativement grand dans la théorie de Sperner.

1.2.1. Le treillis Booléen.

Soit B_n le poset défini par $B_n = (\{0, 1\}^n, \leq)$ où la relation d'ordre est telle que

$$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \quad \text{ssi} \quad a_i \leq b_i \quad \text{pour tout } i.$$

B_n est appelé le *treillis Booléen*. Par exemple, pour $n = 3$, nous obtenons le poset de la Figure 5 et pour $n = 4$, celui de la Figure 3.

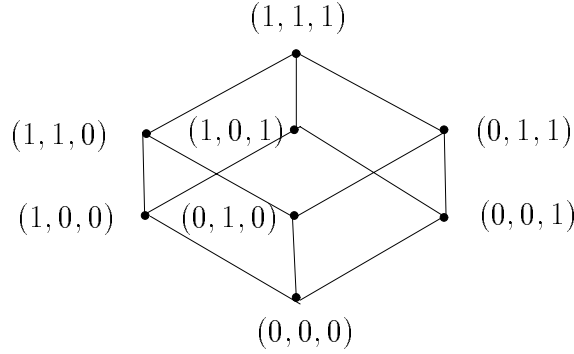


Figure 5.

Comme $B_n = (\{0, 1\}^n, \leq)$ et $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subseteq)$ sont isomorphes (en considérant l'application $\varphi(\underline{a}) = \{i : a_i = 1\}$), il est possible de définir le treillis Booléen comme étant le treillis de tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ ordonné par inclusion.

L'application qui à un élément de B_n associe sa cardinalité définit une fonction de rang sur B_n . Ainsi, on voit que le nombre de Whitney vaut $\binom{n}{i}$. Soient X et Y deux éléments de B_n de niveaux respectifs l et u . En supprimant tous les éléments de X dans chaque sous-ensemble qui se présente dans l'intervalle $[X, Y]$, nous obtenons l'isomorphisme entre $[X, Y]$ et B_{u-l} .

1.2.2. Le treillis $S(k_1, \dots, k_n)$.

Il est défini comme étant l'ensemble de tous les n -uplets $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$

tels que $0 \leq a_i \leq k_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. La relation d'ordre est telle que

$$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \leq \underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \quad \text{ssi} \quad a_i \leq b_i \quad \text{pour tout } i.$$

En particulier, le treillis B_n est isomorphe à $S(1, \dots, 1)$.

L'isomorphisme entre $S(k_1, \dots, k_n)$ et $\Pi_{i=1}^n (0 \prec 1 \prec \dots \prec k_i)$ lui confère le nom de *produit de chaînes*. Par exemple, pour $n = 2$, $n_1 = 3$ et $n_2 = 5$, nous obtenons le poset de la Figure 6.

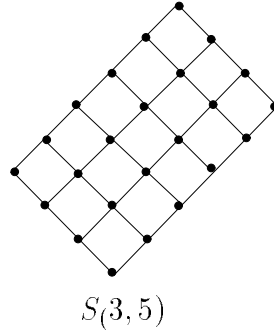


Figure 6.

$S(k_1, \dots, k_n)$ est rangé par la fonction de rang, $r(\underline{a}) = a_1 + \dots + a_n$ et son rang vaut $k_1 + \dots + k_n$.

Les éléments du niveau i sont tous les n -uples dont la somme des composantes est égale à i . Chacun de ces n -uples est en fait la décomposition de i en n parts où la $j^{\text{ème}}$ part vaut au plus k_j . On peut déduire de là que W_i est le coefficient relatif à t^i dans le produit:

$$(1 + t + t^2 + \dots + t^{k_1})(1 + t + t^2 + \dots + t^{k_2}) \dots (1 + t + t^2 + \dots + t^{k_n}) = \sum_{i=0}^s W_i t^i.$$

Par exemple pour $S(2, 4, 5)$, les nombres de Whitney sont donnés par:

$$(1 + t + t^2)(1 + t + t^2 + t^3 + t^4)(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5) = 1 + 3t + 6t^2 + 9t^3 + 11t^4 + 12t^5 + 11t^6 + 9t^7 + 6t^8 + 3t^9 + t^{10}.$$

De plus, il n'est pas difficile de voir que pour $\underline{a} \leq \underline{b}$, l'intervalle $[\underline{a}, \underline{b}]$ est isomorphe à $S(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$.

1.2.3. Le treillis des faces du n -cube.

Soit le n -cube suivant:

$$Q_n = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

Une face de Q_n est un sous-ensemble F de la forme suivante:

$F = \{\underline{x} \in Q_n : x_i = 0 \text{ pour } i \text{ dans } I, x_i = 1 \text{ pour } i \text{ dans } J \text{ et } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ sinon}\}$, où I et J sont des sous-ensembles de $[n]$, vérifiant $I \cap J = \emptyset$.

Le treillis C_n est l'ensemble des faces de Q_n (auquel on rajoute un élément qui soit inférieur à tous les éléments du niveau N_0) ordonné par inclusion.

La Figure 7 représente C_2 .

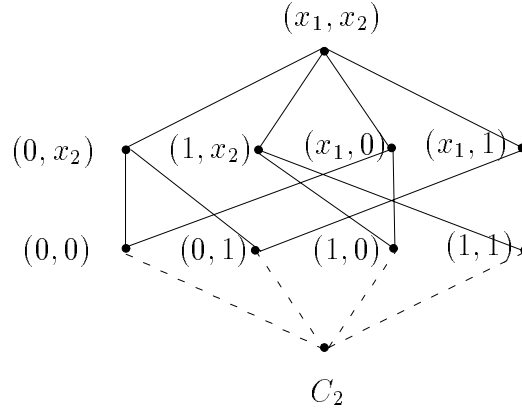
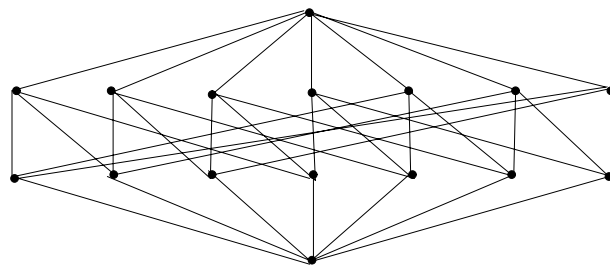


Figure 7.

C_n est rangé, puisque la fonction qui associe à une face F de Q_n , le nombre de ses composantes libres définit une fonction de rang. Le nombre de Whitney W_i vaut $2^{n-i} \binom{n}{i}$. En effet, le nombre de faces à i composantes libres fixées est égal à 2^{n-i} . Comme le nombre de choix pour les composantes libres est $\binom{n}{i}$, le résultat en découle.

Dans le Chapitre 8, nous montrons, entre autre, qu'un intervalle de C_n est isomorphe à un treillis Booléen.

1.2.4. Le treillis linéaire. Le treillis linéaire $L_n(q)$ est constitué de tous les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V de dimension n sur le corps de Galois $GF(q)$, ordonné par inclusion. La Figure 8 illustre $L_3(2)$.



$L_3(2)$

Figure 8.

Notons que si V et W sont deux espaces vectoriels de même dimension n sur le corps de Galois $GF(q)$ et si $L_n(V, q)$ (resp. $L_n(W, q)$) représente l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de V (resp de W) ordonné par inclusion alors $L_n(V, q)$ et $L_n(W, q)$ sont isomorphes. C'est cet isomorphisme qui permet de simplifier l'écriture en notant le treillis linéaire seulement par $L_n(q)$.

La fonction de rang représente la dimension. Le nombre de Whitney W_i est égal au nombre de sous-espaces vectoriels de dimension i sur V , c.à.d. la valeur du coefficient de Gauss $\binom{n}{i}_q$ [1] où

$$\binom{n}{i}_q = \frac{(q^n - 1) \cdots (q^{n-i+1} - 1)}{(q^i - 1) \cdots (q - 1)}$$

Dans le Chapitre 8, nous prouverons que tout intervalle $[X, Y]$ est isomorphe à $L_{\dim Y - \dim X}$.

1.2.5. L'ordre d'intervalles. Un poset P est appelé *ordre des intervalles* s'il existe une application φ de P dans l'ensemble des intervalles fermés de la droite réelle $\mathbb{R}$ telle que pour tous $p, q \in P$ on a $p < q$ ssi $\sup \varphi(p) < \inf \varphi(q)$. Par exemple le poset P de la Figure 9 est un ordre d'intervalles.

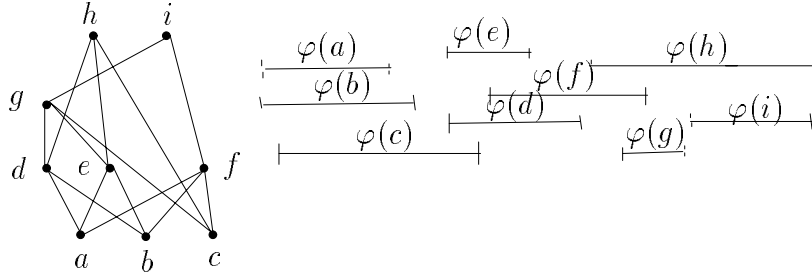


Figure 9.

On voit bien que l'ordre d'intervalles n'est pas rangé et que tout intervalle d'un ordre d'intervalles est isomorphe à un ordre d'intervalles.

1.3 Concepts généraux sur les hypergraphes

La théorie des hypergraphes est vaste (voir par exemple [3]), nous ne nous limiterons ici qu'aux définitions qui nous seront utiles. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini et $\mathcal{E} = \{E_i : i \in I\}$ une famille de parties de X vérifiant pour tout $i \in I$, $E_i \neq \emptyset$ et $\cup_{i \in I} E_i = X$.

Le couple $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ s'appelle *hypergraphe* de *sommets* $x_1, \dots, x_n$ et d'*arêtes* $E_1, \dots, E_m$. Son rang $r(\mathcal{H})$ est la valeur de $\max |E_j|$.

Si toute arête de $\mathcal{H}$ a au plus deux éléments, l'hypergraphe sera appelé un *graphe*. Deux sommets x et y de $\mathcal{H}$ sont dits *adjacents* s'il existe une arête de $\mathcal{E}$ qui les contienne et deux arêtes sont dites *adjacentes* si leur intersection est non vide.

La *matrice d'incidence* $(a_{i,j})$ de $\mathcal{H}$ a n lignes (représentant les sommets) et m colonnes (représentant les arêtes) et est définie par:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in E_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un hypergraphe est dit *unimodulaire* si la matrice d'incidence est totalement unimodulaire. Il est *équilibré* (resp. *totalement équilibré*) si sa matrice d'incidence ne contient pas la matrice d'incidence du graphe C_k où k est impair ≥ 3 (resp. $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$).

Le *dual* $\mathcal{H}^*$ de $\mathcal{H}$ est l'hypergraphe dont la matrice d'incidence est égale à la transposée de la matrice d'incidence de $\mathcal{H}$. Ses sommets sont les points $e_1, \dots, e_m$ (représentant respectivement les arêtes $E_1, \dots, E_m$ de $\mathcal{H}$) et ses arêtes sont les sous-ensembles $X_1, \dots, X_n$ (représentant respectivement les sommets $x_1, \dots, x_n$ de $\mathcal{H}$) où pour tout j , $X_j = \{e_i : E_i \ni x_j\}$.

L'*hypergraphe partiel* de $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ engendré par une famille $\mathcal{F}$ d'arêtes de $\mathcal{E}$ est l'hypergraphe $(X_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ où $X_{\mathcal{F}} = \cup_{E_i \in \mathcal{F}} E_i$. Le *sous-hypergraphe* de $\mathcal{H}$ induit par un ensemble $A \subset X$, est l'hypergraphe $\mathcal{H}_A = (A, \mathcal{E}_A)$ où $\mathcal{E}_A = \{E_i \cap A : E_i \in \mathcal{E} \text{ et } E_i \cap A \neq \emptyset\}$. Il est facile de vérifier que le dual d'un sous-hypergraphe de $\mathcal{H}$ est un hypergraphe partiel de l'hypergraphe dual $\mathcal{H}^*$.

Soit $x \in X$. Le *degré* de x , noté $\deg_{\mathcal{H}}(x)$, est le nombre d'arêtes de $\mathcal{H}$ contenant x et le *codegré* de x et y dans $\mathcal{H}$, noté $\text{codeg}_{\mathcal{H}}(x, y)$ est le nombre d'arêtes de $\mathcal{H}$ contenant x et y en même temps. Le degré maximum de $\mathcal{H}$ est noté par: $\Delta(\mathcal{H}) = \max_{x \in X} \deg_{\mathcal{H}}(x)$.

L'*indice chromatique* de $\mathcal{H}$, noté $\chi(\mathcal{H})$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de $\mathcal{H}$ de tel sorte que deux arêtes qui s'intersectent ont des couleurs différentes.

$\mathcal{H}$ est un hypergraphe *normal* si chaque hypergraphe partiel $\mathcal{H}'$ a la propriété des arêtes colorées, c.à.d.

$$\chi(\mathcal{H}') = \Delta(\mathcal{H}').$$

La normalité de $\mathcal{H}$ induit la même propriété pour tous ses hypergraphes partiels.

On dira qu'une famille d'ensembles $\mathcal{E}$ vérifie la *propriété de Helly* si pour $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, $E \cap E' \neq \emptyset$ pour tout $E, E' \in \mathcal{E}'$ alors: $\cap_{E \in \mathcal{E}'} E \neq \emptyset$. Un hypergraphe vérifie la *propriété de Helly* si la famille de ses arêtes possède la propriété de Helly.

Il est *arboré* s'il vérifie la propriété de Helly et tout cycle de longueur ≥ 3 admet 3 arêtes ayant une intersection non vide. Il est *conforme* si les arêtes

de $\mathcal{H}$ sont les cliques maximales d'un graphe.

Une caractérisation, due à Gilmore [3], pour la *conformité* d'un hypergraphe est: Pour toutes arêtes E_1, E_2, E_3 de $\mathcal{H}$, il existe une arête de $\mathcal{H}$ qui contienne l'ensemble

$$(E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_3).$$

Le lien existant entre la propriété de Helly et la conformité d'un hypergraphe est donné par le théorème suivant:

Théorème 1.2 [3] *Un hypergraphe $\mathcal{H}$ est conforme si et seulement si son dual $\mathcal{H}^*$ vérifie la propriété de Helly.*

Le *graphe représentatif* de l'hypergraphe $\mathcal{H}$ est un graphe simple, noté $L(\mathcal{H})$, dont les sommets $e_1, \dots, e_m$ représentent respectivement les ensembles $E_1, \dots, E_m$ et deux sommets e_i et e_j sont reliés par une arête si et seulement si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$.

Les graphes parfaits, introduits par Berge [4], sont les graphes G pour lesquels $\alpha(G') = \theta(G')$ pour tous les sous-graphes induits G' de G où $\alpha(G')$ représente la cardinalité maximum d'un ensemble stable de G' (c.à.d. un ensemble de sommets qui ne contient pas d'arêtes) et $\theta(G')$ la cardinalité minimum d'un recouvrement de G' par des cliques (c.à.d. un ensemble de sommets deux à deux adjacents).

Plusieurs conditions suffisantes existent pour la normalité d'un hypergraphe [3]. Nous ne mentionnerons ici que celle qui nous intéresse et qui est aussi une condition nécessaire.

Théorème 1.3 *Un hypergraphe $\mathcal{H}$ est normal si et seulement si $\mathcal{H}$ satisfait la propriété de Helly et $L(\mathcal{H})$ est un graphe parfait.*

$\mathcal{H}$ est dit Mengérien si pour tout $c \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\max\{< 1, y > / y \in Q(c) \cap \mathbb{N}^m\} = \min\{< c, t > / t \in P(l) \cap \mathbb{N}^n\},$$

où

$$Q(c) = \{y / y \in \mathbb{R}^m, y \geq 0, Ay \leq c\} \text{ et } P(l) = \{t / t \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, A^*t \geq l\}.$$

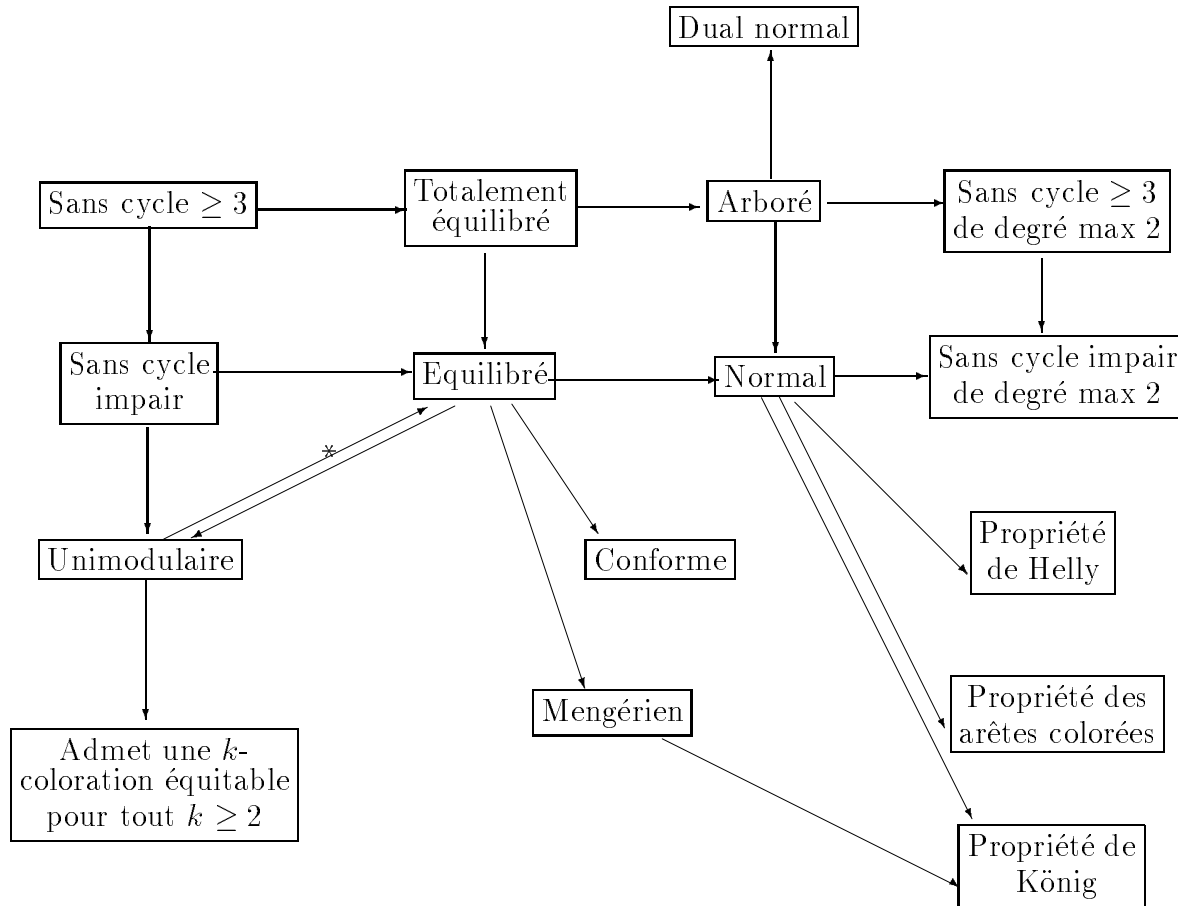


Schéma de quelques implications pour les principales classes d'hypergraphes

(* : si $\text{rg}(\mathcal{H}) \leq 3$).

Dans l'hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$, un sous-ensemble A (resp. T) de X est appelé *ensemble stable* ou *ensemble indépendant* (resp. *recouvrement par sommets* ou *ensemble transversal*) de $\mathcal{H}$ si chaque arête de $\mathcal{H}$ contient au plus un sommet de A (resp. au moins un sommet de T). Un sous-ensemble $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{R}$) de $\mathcal{E}$ est appelé un *couplage* (resp. un *recouvrement par arêtes* de $\mathcal{H}$) si chaque sommet de X est contenu dans au plus un membre de $\mathcal{M}$ (resp. au moins un membre de $\mathcal{R}$).

Une famille de sous-ensembles $\mathcal{C}$ de X est une *k-coloration forte des sommets* (que nous abrègerons par *k-coloration*) si $\mathcal{C}$ est une partition de X en k

ensembles stables $A_1, A_2, \dots, A_k$, chacun d'eux correspond à une couleur. Un hypergraphe pour lequel il existe une k -coloration est dit *k-colorable*. Posons,

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{H}) &:= \max\{|A| : A \text{ est un ensemble stable de } \mathcal{H}\}, \\ \tau(\mathcal{H}) &:= \min\{|T| : T \text{ est un recouvrement par sommets de } \mathcal{H}\}, \\ \nu(\mathcal{H}) &:= \max\{|\mathcal{M}| : \mathcal{M} \text{ est un couplage de } \mathcal{H}\}, \\ \rho(\mathcal{H}) &:= \min\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ est un recouvrement par arêtes de } \mathcal{H}\}, \\ \gamma(\mathcal{H}) &:= \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ est une coloration de } \mathcal{H}\}.\end{aligned}$$

Ces nombres sont appelés *nombre de stabilité*, *nombre de recouvrement par sommets*, *nombre de couplage*, *nombre de recouvrement par arêtes* et *nombre chromatique* de $\mathcal{H}$ respectivement.

Notons que tout hypergraphe $\mathcal{H}$, vérifie $\alpha(\mathcal{H}) \leq \rho(\mathcal{H})$ et $\nu(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H})$ puisque chaque arête d'un recouvrement par arêtes contient au maximum un élément d'un stable et chaque sommet d'un recouvrement par sommets appartient à au plus une arête d'un couplage.

$\mathcal{H}$ a la propriété de König si

$$\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}).$$

Bien sûr $\alpha(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H}^*)$ et $\rho(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}^*)$. En effet, $\alpha(\mathcal{H})$ représente le nombre maximum de lignes dans la matrice d'incidence M telles que les éléments qui se situent sur l'intersection de chaque colonne de M avec l'ensemble de toutes les lignes de la famille choisie sont tous égaux à zéros sauf peut être un élément qui vaut 1, ce qui est équivalent à dire que c'est le nombre maximum de colonnes dans la transposée de M telles que les éléments qui se situent sur l'intersection de chaque ligne de M^T avec l'ensemble de toutes les colonnes de la famille choisie sont tous égaux à zéros sauf peut être un élément qui vaut 1 et cela représente le couplage maximum de l'hypergraphe qui a la transposée de M comme matrice d'incidence, c.à.d le dual $\mathcal{H}^*$ de $\mathcal{H}$. La vérification de l'autre égalité se fera de façon analogue.

Ainsi, on dira que $\mathcal{H}$ a la propriété duale de König si

$$\alpha(\mathcal{H}) = \rho(\mathcal{H}).$$

Théorème 1.4 [3] *Tout hypergraphe normal a la propriété de König.*

1.4 Hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit P un poset et $\mathcal{I}$ l'ensemble de ses intervalles maximaux. L'hypergraphe $\mathcal{H}(P) = (P, \mathcal{I}(P))$ dont les sommets sont les éléments de P et dont les arêtes sont les intervalles maximaux de P est dit l'*hypergraphe des intervalles de P* , nous écrirons brièvement $\mathcal{H} = (P, \mathcal{I})$.

Pour un poset de rang $r(P)$, nous noterons par $P_{l,u}$ le sous-poset induit par l'union de niveaux consécutifs $\cup_{i=l}^u N_i$ de P où l, u sont deux entiers tels que $0 \leq l \leq u \leq r(P)$. L'hypergraphe de ses intervalles maximaux sera noté brièvement par $\mathcal{H}_{l,u}$.

Nous dirons que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte de König (resp. propriété forte duale de König) si $\mathcal{H}_{l,u}$ a la propriété de König (resp. duale de König) pour tous l, u .

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux propriétés de König et duale de König pour ces hypergraphes. L'exemple de la Figure 10 montre qu'en général, ces propriétés ne sont pas vérifiées.

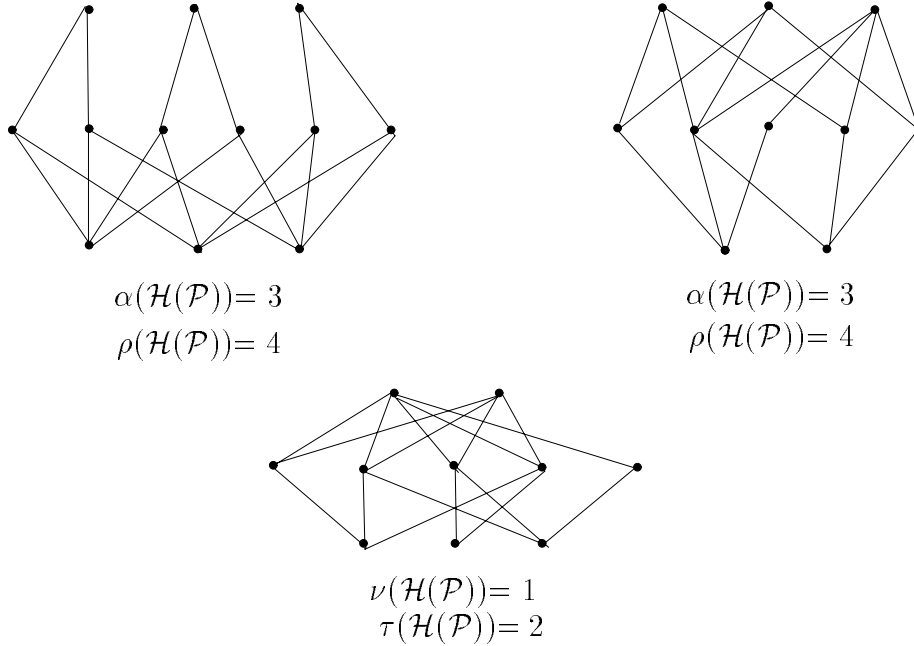


Figure 10.

Par contre, si on remplace intervalles maximaux par chaînes maximales dans nos définitions, alors l'hypergraphe obtenu a la propriété de König et la propriété duale de König. Les paramètres $\alpha = \rho$ (largeur de P) et $\nu = \tau$ (nombre d'articulation de P , qui est la cardinalité minimum d'un sous-ensemble qui intersecte toutes les chaînes maximales) peuvent être déterminés de manière polynomiale en utilisant les algorithmes de flût maximum (voir par ex. dans [26]).

Nous dirons que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété du (l, u) -stable (brièvement la propriété (l, u) -IS) si $\alpha(\mathcal{H}_{l,u}) = \max\{|N_l|, |N_u|\}$. De façon analogue, nous dirons que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété du (l, u) -recouvrement par arêtes (brièvement la propriété (l, u) -IC) si $\rho(\mathcal{H}_{l,u}) = \max\{|N_l|, |N_u|\}$.

Parceque les niveaux N_l et N_u représentent des ensembles stables dans $\mathcal{H}_{l,u}$, les inégalités $\max\{|N_l|, |N_u|\} \leq \alpha(\mathcal{H}_{l,u}) \leq \rho(\mathcal{H}_{l,u})$ sont toujours vraies. Ainsi, la propriété (l, u) -IC implique la propriété (l, u) -IS.

Nous dirons que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte IS (resp. propriété forte IC) si $\mathcal{H}(P)$ a la propriété du (l, u) -IS (resp. (l, u) -IC) pour tous l, u . La propriété forte IC implique aussi la propriété forte IS et en particulier la propriété forte duale de König.

Chapitre 2

Complexité algorithmique

2.1 Introduction

Le dénombrement de toutes les solutions réalisables d'un problème d'optimisation combinatoire conduit certes à la solution optimale en un temps fini mais sans doute rarement raisonnable. C'est pourquoi, le premier souci du chercheur face à son problème est de développer dans la mesure du possible un algorithme polynomial pour sa résolution, c'est à dire que le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille n est borné par un polynôme en n . Ce type de problème sera dit "*facile*".

La défaillance de la non-connaissance d'un algorithme polynomial et ceci ne signifie pas son inexistence a permis de voir naître et développer une riche théorie, appelée: théorie de la complexité algorithmique. Elle comprendra les problèmes faciles ainsi que d'autres, en particulier les problèmes NP-complets. Nous définirons brièvement ces notions un peu plus tard ainsi que l'utilité des réductions polynomiales. Le lecteur intéressé par une étude plus approfondie pourra se référer à l'ouvrage [35]. La théorie de la complexité algorithmique s'est restreinte à une classe de problèmes appelés "*problèmes de reconnaissance*": Un problème de reconnaissance est un problème dont les résultats ne peuvent prendre que l'une des deux valeurs VRAI ou FAUX. La solution n'étant pas donnée, on ne peut identifier les problèmes de reconnaissance aux problèmes d'optimisation combinatoire. Mais à tout problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de reconnaissance. Plus précisément, tout problème de minimisation (resp. maximisation), se ramène au problème d'existence d'une solution réalisable ayant une valeur au plus (resp. au moins) égale à un seuil donné.

Listons-en quelques uns:

STABLE MAXIMUM.

Soit $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k un entier $\leq |P|$. Le problème qui consiste à déterminer s'il existe un ensemble stable de cardinalité $\geq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème du stable maximum. Brièvement, il sera dit: Le problème de reconnaissance $\alpha(\mathcal{H}(P)) \geq k$ (avec P et k donnés).

RECOUVREMENT PAR ARETES MINIMUM.

Soit $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k un entier $\leq |N_0| \cdot |N_{r(P)}|$. Le problème qui consiste à déterminer s'il existe un recouvrement par arêtes de cardinalité $\leq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème de recouvrement par arêtes minimum. Brièvement, il sera dit: Le problème de reconnaissance $\rho(\mathcal{H}(P)) \leq k$ (avec P et k donnés).

COUPLAGE MAXIMUM.

Soit $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k un entier $\leq \min \{|N_0|, |N_{r(P)}|\}$. Le problème qui consiste à déterminer s'il existe un couplage de cardinalité $\geq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème de couplage maximum. Brièvement, il sera dit: Le problème de reconnaissance $\nu(\mathcal{H}(P)) \geq k$ (avec P et k donnés).

RECOUVREMENT PAR SOMMETS MINIMUM.

Soit $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k un entier $\leq |P|$. Le problème qui consiste à déterminer s'il existe un recouvrement par sommets de cardinalité $\leq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème de recouvrement par sommets minimum. Brièvement, il sera dit: Le problème de reconnaissance $\tau(\mathcal{H}(P)) \leq k$ (avec P et k donnés).

COLORATION MINIMUM.

Soit $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k un entier $\leq |P|$ le problème qui consiste à déterminer s'il existe une coloration des sommets de P de cardinalité $\leq k$ est le problème de reconnaissance associé au problème de coloration minimum. Brièvement, il sera dit: Le problème de reconnaissance $\gamma(\mathcal{H}(P)) \leq k$ (avec P et k donnés).

La restriction à la classe des problèmes de reconnaissance a été motivée par le résultat qui stipule que si le problème de reconnaissance associé à un problème d'optimisation combinatoire est difficile alors le problème d'optimisation combinatoire auquel il est associé est lui même difficile.

Il n'est pas clair que les problèmes cités ci-dessus soient faciles puisque la manière la plus évidente pour leur résolution est d'extraire tous les sous-

ensembles de cardinalité au plus (resp. au moins) égale à k (qui sont au nombre exponentiel) et de vérifier s'ils assurent la propriété traitée. Néanmoins, on verra qu'ils sont de la classe NP-complet.

Pour définir la classe NP de manière plus rigoureuse, il est nécessaire d'introduire le concept d'algorithmes non déterministes. Ceux-ci sont une construction abstraite et ne peuvent être mis sur ordinateur, contrairement aux algorithmes déterministes, à cause d'une instruction CHOIX. Cette instruction opère sur un ensemble fini, choisit un élément de cet ensemble sans spécifier comment ce choix est effectué. Les algorithmes non déterministes sont caractérisés par le fait que s'il existe une manière d'effectuer le choix qui conduise à la réponse VRAI, c'est suivant cette manière que le choix est fait. Les algorithmes non déterministes permettent, sur le plan théorique, de définir la classe NP. Un problème appartient à la classe NP s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe. En d'autres termes, si la solution est proposée, on peut vérifier en temps polynomial que la réponse correspondante est VRAI. Par exemple, le problème de couplage est de la classe NP car si on se donne un entier positif k tel que $k \leq \min\{|N_0|, |N_{r(P)}|\}$, et un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{I}$, on sait vérifier en temps polynômial si $|\mathcal{M}| \geq k$ et si l'hypergraphe $\mathcal{H}$ a ou n'a pas un sommet appartenant à plus d'une arête de $\mathcal{M}$. Il suffit de le vérifier sur tous les sommets de $\mathcal{H}$, c.à.d au maximum $|P|$.

Les algorithmes déterministes constituent un cas particulier des algorithmes non-déterministes mais la réciproque est une conjecture difficile, restée ouverte à ce jour. Cependant, en absence de preuve, des réductions polynômiales liant les problèmes entre eux, restent un outil efficace dans cette théorie.

On dit qu'un problème de reconnaissance $\mathcal{P}_1$ se réduit polynômialement à un autre problème de reconnaissance $\mathcal{P}_2$ s'il existe un algorithme pour $\mathcal{P}_1$ qui fait appel (comme un sous-programme) à un algorithme de résolution de $\mathcal{P}_2$ et si cet algorithme de résolution de $\mathcal{P}_1$ est polynomial lorsque la résolution de $\mathcal{P}_2$ est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de reconnaissance P est dit *NP-complet* si:

- 1- P appartient à la classe NP.
- 2- Tout problème de cette classe peut se réduire polynômialement à lui.

La propriété de NP-complétude est très forte puisqu'elle signifie que si on a un algorithme polynomial pour un problème NP-complet, alors on aurait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP.

Basés sur ces deux faits, beaucoup de chercheurs ont conjecturé qu'il ne pouvait exister un algorithme polynomial pour un problème connu être

NP-complet. La tendance est de croire à l'hypothèse que la solution d'un problème qui est connu être NP-complet ne peut être donnée par le biais d'un algorithme et que si l'algorithme existe, il serait forcément exponentiel (c.à.d que le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre son pire cas est exponentiel) et par suite impraticable sauf bien sûr pour de très petites valeurs de n . Ce n'est qu'en 1971 que S.Cook [21] prouva l'existence d'un problème NP-complet.

La notion de NP-complétude ne peut s'appliquer par définition qu'aux problèmes de reconnaissance. Le théorème qui suit nous donne le schéma général du type de raisonnement utilisé pratiquement (grâce à la transitivité de la réduction polynomiale), pour montrer qu'un problème est NP-complet:

Théorème 2.1 *Si le problème $\mathcal{P}$ est NP-complet et si on peut mettre en évidence une réduction polynomiale de $\mathcal{P}$ à un problème $\mathcal{P}'$ de la classe NP, alors $\mathcal{P}'$ est NP-complet.*

La réduction polynomiale utilisée est “la transformation polynomiale”: Les données de $\mathcal{P}$ sont transformées par un algorithme polynomial en les données de $\mathcal{P}'$ de telle sorte que la réponse à $\mathcal{P}'$ est VRAI ssi la réponse à $\mathcal{P}$ est VRAI.

2.2 NP-complétude de quelques problèmes relatifs à l'hypergraphe des intervalles d'un poset

Nous utiliserons le formalisme cité ci-dessus pour prouver la NP-complétude:

2.2.1 Problème de stabilité et de recouvrement par arêtes

Théorème 2.2 [9] *Les problèmes de reconnaissance $\alpha(\mathcal{H}(\mathcal{P})) \geq k$ et $\rho(\mathcal{H}(\mathcal{P})) \leq k$ où $\mathcal{P}$ et k sont donnés sont NP-complets.*

Preuve. Il n'est pas difficile de voir que ce sont des problèmes de la classe NP. Pour la NP-complétude, nous réduisons les problèmes de reconnaissance

du stable et du recouvrement par arêtes dans les hypergraphes quelconques à nos problèmes. Rappelons que pour un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, E)$, on définit:

$\alpha(\mathcal{H}) = \max\{|A| : A \subseteq V \text{ et il n'existe pas d'arête de } \mathcal{H} \text{ contenant deux points de } A\}$,

$\rho(\mathcal{H}) = \min\{r : \text{il existe un recouvrement de tous les sommets avec } r \text{ arêtes}\}$.

Il est bien connu [35], que les problèmes de reconnaissance $\alpha(\mathcal{H}) \geq k$ et $\rho(\mathcal{H}) \leq k$ sont NP-complets.

La construction de la réduction polynômiale se fera comme suit:

Soit $\mathcal{H} = (V, E)$ un hypergraphe quelconque, nous définissons un poset P sur trois niveaux N_0 , N_1 et N_2 par

$$N_0 = E, N_1 = V \cup \{1, \dots, m\} \text{ et } N_2 = \{m+1, \dots, 2m+1\}$$

et l'ordre par

$$\begin{aligned} e_i &< v_j && \text{si } v_j \in e_i, && i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ e_i &< i, && && i = 1, \dots, m, \\ v_j &< m+1, && && j = 1, \dots, n, \\ i &< m+1+i, && && i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Par exemple, si $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ et $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ où $e_1 = \{v_1, v_3\}$, $e_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$, $e_3 = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$, $e_4 = \{v_2, v_5\}$ et $e_5 = \{v_3, v_4, v_6\}$, nous obtenons le poset illustré dans la Figure 1:

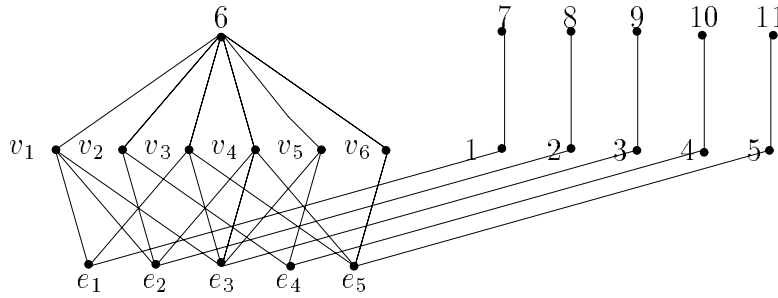


Figure 1.

Montrons que $\alpha(\mathcal{H}(P)) = \alpha(\mathcal{H}) + m$. L'inégalité $\alpha(\mathcal{H}(P)) \geq \alpha(\mathcal{H}) + m$ s'ensuit en remarquant que les éléments $1, \dots, m$ de P rajoutés à un ensemble stable de $\mathcal{H}$, produit un ensemble stable de l'hypergraphe $\mathcal{H}(P)$.

Puisque chaque utilisation de e_i peut être remplacée par i dans un ensemble stable de $\mathcal{H}(P)$, nous pouvons restreindre notre attention à de tels ensembles stables (de $\mathcal{H}(P)$) et obtenons alors $\alpha(\mathcal{H}(P)) - m \leq \alpha(\mathcal{H})$.

Similairement, nous pouvons vérifier que $\rho(\mathcal{H}(P)) = \rho(\mathcal{H}) + m$ puisque si $\mathcal{R}$ est un ensemble d'arêtes de $\mathcal{H}$ recouvrant tous les sommets de V , alors nous pouvons obtenir un recouvrement des sommets de $\mathcal{H}(P)$ par les arêtes de $\{[e_i, m + 1 + i] : 1 \leq i \leq m\} \cup \{[e_i, m] : e_i \in \mathcal{R}\}$. Comme chaque recouvrement de $\mathcal{H}(P)$ doit contenir un tel ensemble, l'égalité s'ensuit. ■

Notons que dans le cas du treillis Booléen, Paul [55] prouvait la NP-complétude du problème de recouvrement par arêtes.

2.2.2 Problème de couplage

Théorème 2.3 [10] *Le problème de reconnaissance $\nu(\mathcal{H}(P)) \geq k$ où P et k sont donnés est NP-complet.*

Preuve. Il n'est pas difficile de voir que c'est un problème qui appartient à la classe NP. Pour prouver la NP-complétude, nous réduisons le problème de reconnaissance $\alpha(\mathcal{H}(\mathcal{P})) \geq k$, qui est NP-complet d'après le Théorème 2.2, à notre problème. Soit P un poset, nous définissons un nouveau poset Q sur l'union disjointe $Q = P \cup \mathcal{I}(P) \cup P'$, où $P' = \{p' : p \in P\}$ (copie de P) et où l'ordre est la fermeture transitive des relations suivantes:

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } p \in P, I \in \mathcal{I}(P) & \text{on a } p <_Q I, \\ \text{pour } I \in \mathcal{I}(P), p' \in P & \text{on a } I <_Q p' \text{ ssi } p \in I. \end{array}$$

Ainsi, pour l'hypergraphe $\mathcal{H}(P) = (P, \mathcal{I}(P))$ où P est le poset illustré dans la Figure 2,

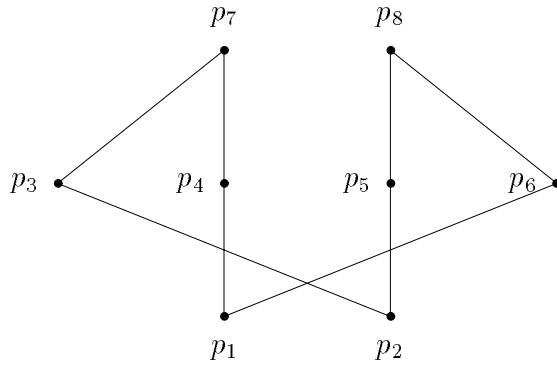


Figure 2.

nous obtenons le poset Q suivant:

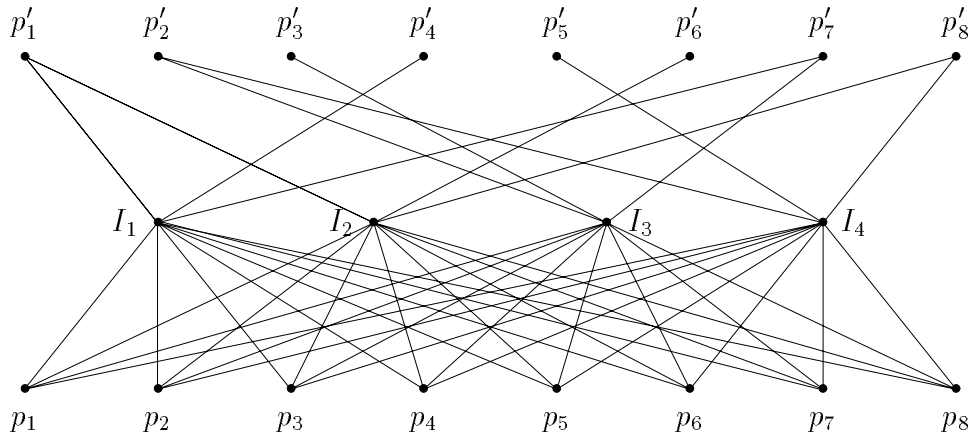


Figure 3.

$\alpha(\mathcal{H}(P)) = \nu(\mathcal{H}(Q))$ puisque pour un ensemble stable A de $\mathcal{H}(P)$ les intervalles $[p, p']$ avec $p \in A$ forment un couplage de $\mathcal{H}(Q)$ et pour un couplage donné, $\{[p_1, q'_1], \dots, [p_t, q'_t]\}$ de $\mathcal{H}(Q)$, les éléments $q_1, \dots, q_t$ forment un ensemble stable de $\mathcal{H}(P)$. ■

2.2.3 Problème de recouvrement par sommets

Théorème 2.4 [10] *Le problème de reconnaissance $\tau(\mathcal{H}(P)) \leq k$ où P et k sont donnés est NP-complet.*

Preuve. Il est facile de voir que le problème appartient à la classe NP. Pour prouver la NP-complétude, nous réduisons le problème de reconnaissance $\rho(\mathcal{H}(\mathcal{P})) \leq k$, qui est NP-complet d'après le Théorème 2.2 à notre problème. Soit P un poset, nous définissons un nouveau poset Q sur l'union disjointe $Q = P \cup \mathcal{I}(P) \cup \mathcal{I}'(P) \cup P'$, où $\mathcal{I}'(P) = \{I' : I \in \mathcal{I}(P)\}$ (copie de $\mathcal{I}(P)$) et $P' = \{p' : p \in P\}$ (copie de P) et où l'ordre est la fermeture transitive des relations suivantes:

Pour $p \in P, I \in \mathcal{I}(P)$ on a $p <_Q I$ ssi $p \in I$,
 pour $I \in \mathcal{I}(P), I' \in \mathcal{I}'(P)$ on a $I <_Q I'$,
 pour $I' \in \mathcal{I}'(P), p' \in P'$ on a $I' <_Q p'$ ssi $p \in I$.

Par exemple pour le poset P de la Figure 2, nous obtenons le poset Q ci-dessous.

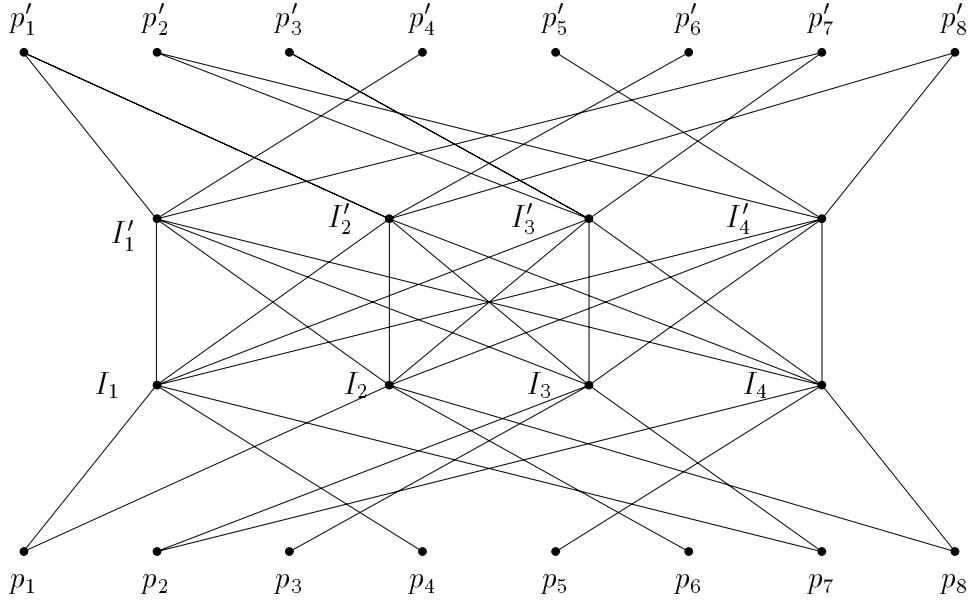


Figure 4.

Nous avons $\rho(\mathcal{H}(P)) = \tau(\mathcal{H}(Q))$. L'inégalité " $\geq$ " s'ensuit en observant que pour un recouvrement par arêtes $\mathcal{R}$ de $\mathcal{H}(P)$, le même ensemble $\mathcal{R}$ est un recouvrement par sommets de $\mathcal{H}(Q)$ puisque pour chaque $p \in P$ il existe un arête $I \in \mathcal{R}$ contenant p , et chaque intervalle $[p, q']$ dans Q contient ce I par construction.

Prouvons l'inégalité dans l'autre sens. Soit T un recouvrement par sommets de $\mathcal{H}(P)$. Construisons un ensemble $\mathcal{R}$ d'arêtes de $\mathcal{H}(P)$ comme suit:

Pour $p \in T \cap P$, prenons n'importe quel I_p contenant p , pour $I \in T \cap \mathcal{I}$ prenons ce I , pour $I' \in T \cap \mathcal{I}'$ prenons aussi ce I et pour $p' \in T \cap P'$ prenons n'importe quel $I_{p'}$ contenant ce p' . Il est clair que $|\mathcal{R}| \leq |T|$ (il se pourrait qu'il y ait une répétition des arêtes). Notre ensemble $\mathcal{R}$ est un recouvrement par arêtes de $\mathcal{H}(P)$ puisque pour $p \in T \cap P$ ou $p' \in T \cap P'$ nous avons $p \in I_p \in \mathcal{R}$ et pour $p \notin T \cap P$, $p' \notin T \cap P'$, il existe forcément $I \in T \cap \mathcal{I}$ ou $I' \in T \cap \mathcal{I}'$ tel que $p < I < p'$ resp. $p < I' < p'$ qui impliquent par construction que $p \in I \in \mathcal{R}$. ■

2.2.4 Problème de coloration

Notons tout d'abord que les hypergraphes des intervalles d'un poset de nombre chromatique égal à 2 peuvent être reconnus en temps polynômial puisque la relation $\gamma(\mathcal{H}(P)) \leq 2$ est équivalente à P est un poset biparti.

Théorème 2.5 [12] *Le problème de reconnaissance $\gamma(\mathcal{H}(\mathcal{P})) \leq k$ où P et k sont donnés est NP-complet.*

Proof. Il n'est pas difficile de voir que ce problème appartient à la classe NP. Nous prouverons la NP-complétude par une réduction polynômiale du problème de coloration dans les graphes à notre problème.

Pour un graphe $G = (V, E)$, le nombre chromatique $\gamma(G)$ est donné par $\gamma(G) = \min \{ k, \text{il existe une partition des sommets de } G \text{ en ensembles de sommets deux à deux non adjacents} \}$.

Il est connu (voir [35]) que le problème de reconnaissance $\gamma(G) \leq k$ est NP-complet pour $k > 2$. A présent, nous présentons une construction qui conduit à la relation $2\gamma(G) = \gamma(\mathcal{H}(P))$.

Notons les sommets de G par $v_1, \dots, v_n$ et les arêtes par $e_1, \dots, e_m$. Nous associons à G le poset $P = Q^* \oplus Q$ où Q est le poset d'incidence de G , c.à.d. $P = E \cup V \cup V' \cup E'$, où $V' = \{v' : v \in V\}$ (copie de V) et $E' = \{e' : e \in E\}$

(copie de E) et où l'ordre est donné de la manière suivante:

Pour $e \in E, v \in V$ on a $e < v$ ssi v est une extrémité de e dans G ,
 pour $v \in V, v' \in V'$ on a $v < v'$,
 pour $v' \in V', e' \in E'$ on a $v' < e'$ ssi v' est une extrémité de e' dans G .

Par exemple si $V = \{v_1, \dots, v_5\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_5\}$ avec $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$, $e_4 = \{v_4, v_5\}$ et $e_5 = \{v_5, v_1\}$, nous obtenons le poset illustré dans la Figure 5.

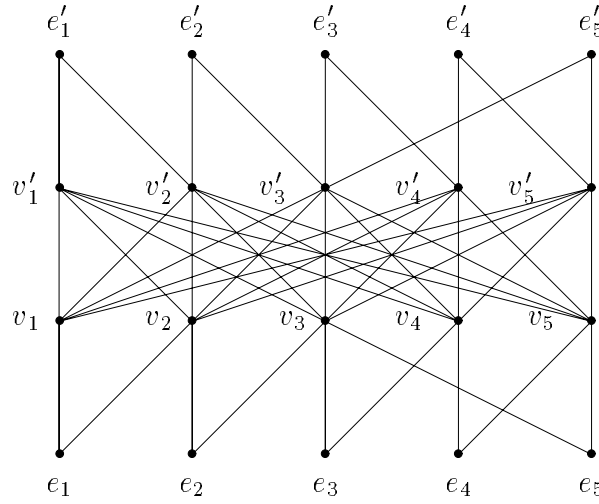


Figure 5.

Montrons que G est t -colorable ssi $\mathcal{H}(P)$ est $2t$ -colorable pour $t > 2$.

Pour une coloration $\{C_1, \dots, C_t\}$ de G dont les couleurs sont choisies parmi l'ensemble $\mathcal{C} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, nous attribuerons aux sommets de $\mathcal{H}$ les couleurs suivantes:

Pour $e \in E$, e prendra n'importe quelle couleur $\alpha \in \mathcal{C}$ pourvu qu'elle soit différente des couleurs de ses sommets adjacents dans G . Pour $v \in V$, v recevra la même couleur qu'il a dans G . Pour $v' \in V'$, v' recevra la couleur $\alpha' \in \mathcal{C}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_t\}$ (avec $\alpha'_i \neq \alpha'_j$ pour tout $i \neq j$) si α est la couleur de v . Pour $e' \in E'$, e' recevra la couleur $\alpha' \in \mathcal{C}'$ si e a la couleur α .

De cette manière, nous obtenons une $2t$ -coloration de $\mathcal{H}(P)$. Ainsi $\gamma(\mathcal{H}(P)) \leq$

$2\gamma(G)$.

Inversement, si $\mathcal{H}(P)$ admet une $2t$ -coloration, alors il existe soit dans le premier niveau de P soit dans le deuxième au plus t couleurs. D'où l'existence d'une k -coloration des sommets de G avec $k \leq t$. Ainsi, nous obtenons $2\gamma(G) \leq \gamma(\mathcal{H}(P))$. ■

Chapitre 3

Quelques opérations sur les posets

Différentes opérations peuvent être définies sur deux ou plusieurs posets. Dans ce chapitre, nous les rappelons et examinons pour quelques unes d'entre elles la préservation ou la non-préservation des propriétés de König et duale de König ainsi que les propriétés fortes IS et IC, c.à.d. nous répondons à la question suivante: Si $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{H}(Q)$ ont une des quatre propriétés, qu'en est-il de $\mathcal{H}(P \circ Q)$? ($\circ$ est une opération quelconque). A la fin de ce chapitre, nous reprenons le tableau récapitulatif de [6] dans lequel sont représentées les propriétés de: Sperner(S), la décomposition en chaînes symétriques (SC), Peck, LYM, rang compressé (RC) et sur lequel nous insérons nos propriétés. Dans ce qui suivra les posets sont supposés finis et rangés.

3.1 La somme directe

La *somme directe* ou *union disjointe* de deux posets P et Q est le poset $P + Q$ sur l'union $P \cup Q$ tel que $x \leq y$ dans $P + Q$ si $x, y \in P$ et $x \leq_P y$ ou $x, y \in Q$ et $x \leq_Q y$. La somme directe de P avec lui-même n fois est notée par nP . En particulier une antichaîne est isomorphe à $n \cdot 1$. Par exemple, si P et Q sont les posets illustrés dans la Figure 1

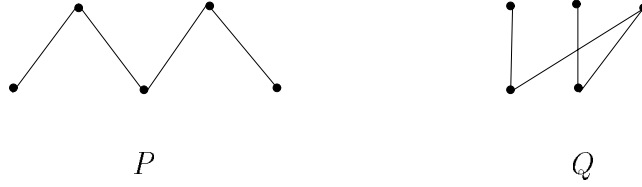


Figure 1.

nous obtenons ci-dessous, le diagramme de HASSE de $P + Q$

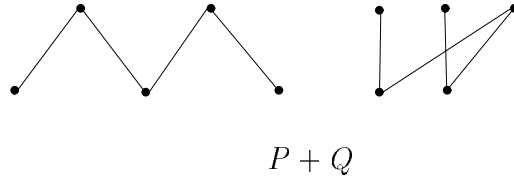


Figure 2.

La somme directe ne préserve ni la propriété forte IC, ni la propriété forte IS. Voir le poset de la Figure 2 où l'on a $\alpha(\mathcal{H}(P + Q)) = \rho(\mathcal{H}(P + Q)) = 6$. A partir des formules $\tau(\mathcal{H}(P + Q)) = \tau(\mathcal{H}(P)) + \tau(\mathcal{H}(Q))$, $\nu(\mathcal{H}(P + Q)) = \nu(\mathcal{H}(P)) + \nu(\mathcal{H}(Q))$, $\alpha(\mathcal{H}(P + Q)) = \alpha(\mathcal{H}(P)) + \alpha(\mathcal{H}(Q))$ et $\rho(\mathcal{H}(P + Q)) = \rho(\mathcal{H}(P)) + \rho(\mathcal{H}(Q))$, nous pouvons affirmer que la somme directe préserve la propriété de König et la propriété duale de König.

3.2 La somme linéaire

La *somme linéaire* de deux posets P et Q est le poset $P \oplus Q$ sur l'union $P \cup Q$ tel que $x \leq y$ dans $P \oplus Q$ si $x, y \in P$ et $x \leq_P y$, ou $x, y \in Q$ et $x \leq_Q y$, ou $x \in P$ et $y \in Q$. Par exemple, une chaîne de longueur n est isomorphe à $1 \oplus \dots \oplus 1$ (n fois). Pour tracer le diagramme de HASSE de $P \oplus Q$, on trace d'abord celui de P , puis au-dessus de lui celui de Q et on relie tous les éléments maximaux de P à tous les éléments minimaux de Q .

La Figure 3 représente le diagramme de HASSE de $P \oplus Q$ si P et Q sont les

posets de la Figure 1.

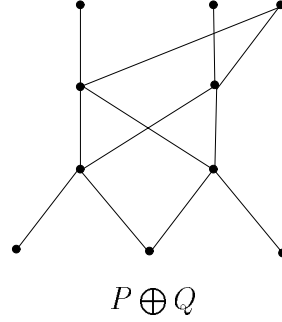


Figure 3.

Les posets construits seulement à partir de la somme directe et de la somme linéaire sont appelés posets *série-parallèles*. Nous les étudierons plus en détail dans le Chapitre 7.

Théorème 3.1 *Si $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{H}(Q)$ ont la propriété forte IC, alors $\mathcal{H}(P \oplus Q)$ a la propriété forte IC.*

Preuve. Soient $l, u \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq l \leq u \leq r(P \oplus Q)$. Si $u \leq r(P)$, alors $(P \oplus Q)_{l,u}$ est isomorphe à $P_{l,u}$ et par suite $\rho(\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \max\{|N_l(P)|, |N_u(P)|\} = \max\{|N_l(P \oplus Q)|, |N_u(P \oplus Q)|\}$. Si $l > r(P)$, alors $(P \oplus Q)_{l,u}$ est isomorphe à $Q_{l-r(P)-1, u-r(P)-1}$ et par suite $\rho(\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}((Q)_{l-r(P)-1, u-r(P)-1})) = \max\{|N_{l-r(P)-1}(Q)|, |N_{u-r(P)-1}(Q)|\} = \max\{|N_l(P \oplus Q)|, |N_u(P \oplus Q)|\}$.

Supposons maintenant que $l \leq r(P) < u$ et soit $N_l((P \oplus Q)_{l,u}) = \{a_1, \dots, a_s\}$ (resp. $N_u((P \oplus Q)_{l,u}) = \{b_1, \dots, b_t\}$ l'ensemble des éléments minimaux (resp. maximaux) de $(P \oplus Q)_{l,u}$. Considérons la famille d'arêtes $\mathcal{I}^{(k)}$ de $\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})$ telles que $\mathcal{I}^{(k)} = \{[a_j, b_j], j = 1, \dots, k\}$. Soit $\mathcal{R}$ égal à $\mathcal{I}^{(s)}$ si $s = t$, $\mathcal{I}^{(s)} \cup \{[a_s, b_j], j = s+1, \dots, t\}$ si $s < t$ et $\mathcal{I}^{(t)} \cup \{[a_j, b_t], j = t+1, \dots, s\}$ si $t < s$. Il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{R}$ est un recouvrement par arêtes de $\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})$ de taille $\max\{|N_l(P \oplus Q)|, |N_u(P \oplus Q)|\}$, c.à.d. $\mathcal{H}(P \oplus Q)$ a la propriété forte IC. ■

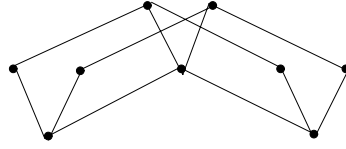
Remarque 3.1 De la preuve du Théorème 3.1, nous pouvons dire que si $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{H}(Q)$ ont la propriété duale de König, alors l'hypergraphe $\mathcal{H}(P \oplus Q)$ a la propriété duale de König.

Théorème 3.2 Si $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{H}(Q)$ ont la propriété forte IS, alors $\mathcal{H}(P \oplus Q)$ a la propriété forte IS.

Preuve. Soient $l, u \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq l \leq u \leq r(P \oplus Q)$. Si $u \leq r(P)$ ou $l > r(P)$, alors la conclusion est analogue à la preuve du Théorème 3.1. Soit $l \leq r(P) < u$ et A un ensemble indépendant de $\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})$. Parce que chaque élément de la copie de P est relié à chaque élément de la copie de Q (dans $P \oplus Q$), nous obtenons $A \subset (P \oplus Q)_{l,r(P)}$ ou $A \subset (P \oplus Q)_{r(P)+1,u}$. Supposons sans perte de généralité que $A \subset (P \oplus Q)_{l,r(P)}$. D'où $\alpha(\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})) \leq \alpha(\mathcal{H}(P_{l,r(P)}))$. Si $\alpha(\mathcal{H}(P_{l,r(P)})) = |N_l(P)|$, alors $\alpha(\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})) = |N_l(P)|$. Si $\alpha(\mathcal{H}(P_{l,r(P)})) = |N_{r(P)}(P)|$, alors on a aussi $\alpha(\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})) = |N_l(P)|$. En effet, supposons le contraire, c.à.d. il existe un ensemble indépendant de taille supérieure à $|N_l(P)|$. Donc, il existe $f_i, f_j \in A \cap (P \oplus Q)_{l,r(P)}$, $p \in N_l(P \oplus Q)$ tels que $p < f_i$ et $p < f_j$. Or, pour tout $q \in (P \oplus Q)_{r(P)+1,u}$, $f_i < q$ et $f_j < q$. Ainsi f_i et f_j sont dans la même arête $[p, q]$ de $\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})$, absurde et donc $\alpha(\mathcal{H}((P \oplus Q)_{l,u})) = |N_l(P)| = |N_l(P \oplus Q)|$. ■

3.3 Le produit direct

Le *produit direct* (ou *cartésien*) de deux posets P et Q est le poset $P \times Q$ sur l'ensemble $\{(x, y) : x \in P \text{ et } y \in Q\}$ tel que $(x, y) \leq (x', y')$ dans $P \times Q$ si $x \leq_P x'$ et $y \leq_Q y'$. Le produit direct de P avec lui-même n fois est noté par P^n . Pour tracer le diagramme de HASSE de $P \times Q$, on trace le diagramme de P , on remplace chaque élément x de P par une copie Q_x de Q , et on relie les éléments correspondant de Q_x et Q_y si x et y sont reliés dans P . Par exemple, si P et Q représentent respectivement les posets $(1 + 1) \oplus 1$ et $1 \oplus (1 + 1)$, nous obtenons le diagramme de $P \times Q$ ci-dessous:



$$P \times Q$$

Figure 4.

Le produit direct ne préserve ni la propriété forte IC ni la propriété forte IS. En effet, le poset $P \times Q$ illustré dans la Figure 4 vérifie $\alpha(\mathcal{H}(P \times Q)) = \rho(\mathcal{H}(P \times Q)) = 4$.

Soient $\mathcal{H}_1 = (V_1, \mathcal{E}_1)$ et $\mathcal{H}_2 = (V_2, \mathcal{E}_2)$ deux hypergraphes. Leur produit est définie par $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = (V_1 \times V_2, \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$ où $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 = \{E_1 \times E_2 : E_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, 2\}$. En remarquant que la transposée du produit de Kronecker de deux matrices (d'incidences) est égal au produit de Kronecker des transposées des deux matrices (d'incidences), nous pouvons déduire que pour tous hypergraphes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ nous avons

$$(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2)^* = \mathcal{H}_1^* \times \mathcal{H}_2^*.$$

D'autre part (voir [3])

$$\nu(\mathcal{H}_1) \nu(\mathcal{H}_2) \leq \nu(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2) \leq \tau(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2) \leq \tau(\mathcal{H}_1) \tau(\mathcal{H}_2).$$

De plus, dans le cas de nos hypergraphes d'intervalles nous avons encore

$$\mathcal{H}(P_1 \times P_2) = \mathcal{H}(P_1) \times \mathcal{H}(P_2).$$

Ces relations permettent d'établir le théorème qui suit:

Théorème 3.3 *Si $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{H}(Q)$ ont la propriété de König (resp. duale de König), alors $\mathcal{H}(P \times Q)$ a la propriété de König (resp. duale de König).*

Preuve.

1. Supposons que $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{H}(Q)$ ont la propriété de König. Des relations $\nu(\mathcal{H}(P)) = \tau(\mathcal{H}(P))$ et $\nu(\mathcal{H}(Q)) = \tau(\mathcal{H}(Q))$, nous déduisons

$$\nu(\mathcal{H}(P) \times \mathcal{H}(Q)) = \tau(\mathcal{H}(P) \times \mathcal{H}(Q)),$$

c.à.d.

$$\nu(\mathcal{H}(P \times Q)) = \tau(\mathcal{H}(P \times Q)).$$

2. Supposons que $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{H}(Q)$ ont la propriété duale de König. Comme $\nu(\mathcal{H}^*(P)) = \tau(\mathcal{H}^*(P))$ et $\nu(\mathcal{H}^*(Q)) = \tau(\mathcal{H}^*(Q))$, nous déduisons

$$\nu(\mathcal{H}^*(P) \times \mathcal{H}^*(Q)) = \tau(\mathcal{H}^*(P) \times \mathcal{H}^*(Q)),$$

c.à.d.

$$\nu((\mathcal{H}(P) \times \mathcal{H}(Q))^*) = \tau((\mathcal{H}(P) \times \mathcal{H}(Q))^*),$$

ou encore

$$\nu(\mathcal{H}^*(P \times Q)) = \tau(\mathcal{H}^*(P \times Q)).$$

■

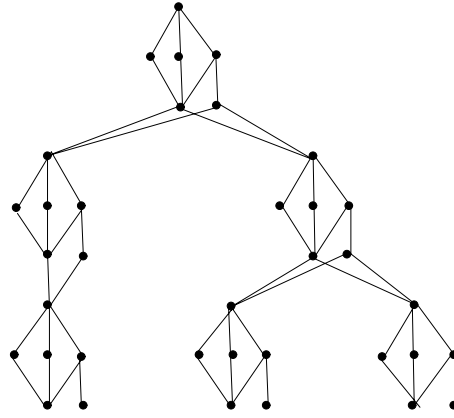
3.4 Le produit linéaire

Le *produit linéaire* de deux posets P et Q est le poset $P \otimes Q$ sur l'ensemble $\{(x, y) : x \in P \text{ et } y \in Q\}$ tel que $(x, y) \leq (x', y')$ dans $P \otimes Q$ si $x = x'$ et $y \leq_Q y'$, ou $x <_P x'$. Pour tracer le diagramme de HASSE de $P \otimes Q$, on trace le diagramme de P , on remplace chaque élément x de P par une copie Q_x de Q , et on relie chaque élément maximal de Q_x avec chaque élément minimal de Q_y si y couvre x dans P . Par exemple, si P et Q représentent les posets de la Figure 5



Figure 5.

nous obtenons le diagramme de $P \otimes Q$ qui suit



$$P \otimes Q$$

Figure 6.

Le produit linéaire ne préserve pas les propriétés fortes IS et IC. Il suffit de voir la Figure 6 où on a $\alpha(\mathcal{H}((P \otimes Q)_{0,4})) = \rho(\mathcal{H}((P \otimes Q)_{0,4})) = 7$

3.5 Le produit direct par rangés

Soient P et Q deux posets vérifiant $r(P) \geq r(Q)$ et $r(P) \equiv r(Q) \pmod{2}$ et soit Q' un poset obtenu à partir de Q en posant des chaînes de longueur $\frac{1}{2}(r(P) - r(Q))$ au-dessus (resp. au-dessous) de Q . Ainsi construit, Q' est de même rang que P . Le *produit direct par rangé* de P et Q est le poset $P \times_r Q$ induit par $\cup_{i=0}^m N_i(P) \times N_i(Q')$. Par exemple, si P et Q sont les posets représentés ci-dessous

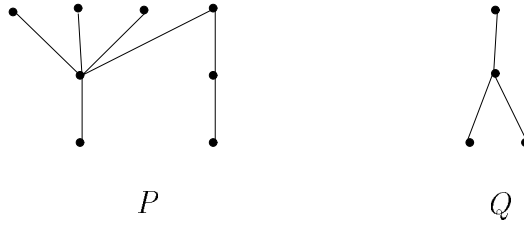


Figure 7.

le diagramme de $P \times_r Q$ sera

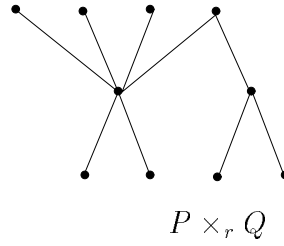
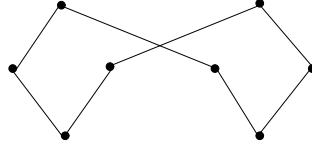


Figure 8.

Le produit direct par rangé ne préserve pas les propriétés fortes IS et IC. Voir la Figure 8 où on a $\alpha(\mathcal{H}(P \times_r Q)) = \rho(\mathcal{H}(P \times_r Q)) = 5$.

3.6 L'exponentiation

Soient P et Q deux posets. L'*exponentiel* Q^P est le poset sur l'ensemble de toutes les applications $f : P \mapsto Q$ préservant l'ordre (c.à.d. $x \leq_P y$ implique $f(x) \leq_Q f(y)$) et telles que $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in P$. Considérons à titre d'exemple, les posets $P = 1 \oplus 1$ et $Q = (1 + 1) \oplus (1 + 1)$. Le poset exponentiel Q^P est isomorphe au sous-poset de $Q \times Q$ induit par l'ensemble $\{(x, y) : x \leq_Q y\}$ (voir Figure 9).



Q^P
Figure 9.

De cet exemple, on peut déduire que l'exponentiation ne préserve pas les propriétés IS et IC puisque $\alpha(\mathcal{H}(Q^P)) = \rho(\mathcal{H}(Q^P)) = 4$.

Tableau récapitulatif.

Posons $m = r(P)$ et $n = r(Q)$.

	$P + Q$ $m = n$	$P \oplus Q$	$P \times Q$	$P \otimes Q$	$P \times_r Q$ $m = n$	Q^P
S	non [6]	oui	non [6]	oui [6]	non [62]	non [6]
SC	oui	non [6]	oui [18][44]	non [6]	oui [62]	non [6]
Peck	oui	non [6]	oui [19]	non [6]	oui [62]	non [6]
LYM	non [6]	oui	non [6]	oui [6]	oui [62]	non [6]
RC	non [6]	oui [6]	oui [24]	oui [6]	non [6]	non [6]
König	oui	?	oui	?	?	?
D. de König	oui	oui	oui	?	?	?
forte IS	non	oui	non	non	non	non
forte IC	non	oui	non	non	non	non

Notons que dans le cas des quatre dernières propriétés, il n'est pas nécessaire de supposer que P et Q soient de même rang. De plus, il est sous-entendu qu'on parle en termes d'hypergraphes, c.  .d répondre à la question: Si $\mathcal{H}(P)$ et $\mathcal{H}(Q)$ ont une de ces (quatre) propriétés, qu'en est-il de $\mathcal{H}(P \circ Q)$?

Chapitre 4

Hypergraphe des intervalles de sous-posets du treillis Booléen

Soit B_n le treillis Booléen et soient l, u deux entiers tels que $0 < l < u < n$. Désignons par

$$P = P_{n;l,u} = \{X \subseteq [n] : l \leq |X| \leq u\}$$

le sous-poset de B_n induit par l'union des niveaux consécutifs $N_l, \dots, N_u$. Dans [78] et dans le Chapitre 6, il est prouvé que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte duale de König. Dans la première section de ce chapitre, nous énonçons principalement les résultats établis par ENGEL [25]. La propriété forte de König n'est pas réalisée mais l'étude des paramètres τ et ν est autant intéressante que difficile du fait qu'elle se ramène aux problèmes extrémaux dans les ensembles. Dans la deuxième section, la notion de k -stabilité, qui n'est autre que la généralisation de la stabilité est introduite. Nous proposons dans certains cas des valeurs exactes et d'autres cas des bornes. Quant à la troisième section, nous la réservons à l'étude du nombre chromatique dans cette classe d'hypergraphes.

4.1 Couplage et recouvrement par sommets

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n;l,u} = (P, \mathcal{I})$ l'hypergraphe des intervalles de P . Notons brièvement $\tau_{n;l,u}$ (resp. $\nu_{n;l,u}$) au lieu de $\tau(\mathcal{H}_{n;l,u})$ (resp. $\nu(\mathcal{H}_{n;l,u})$). Au

courant de cette première section, nous aurons surtout affaire qu'à un type de recouvrement, nous écrirons brièvement recouvrement au lieu de recouvrement par sommets. La précision sera donnée dès qu'il y a un risque de confusion.

Proposition 4.1 *Il existe $m_0 \in \{l, \dots, u\}$ tel que*

$$\nu_{n;l,u} \leq \lfloor \frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}} \rfloor \leq \lceil \frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}} \rceil \leq \tau_{n;l,u}.$$

Preuve. Soit $\mathcal{M}$ un couplage de $\mathcal{H}_{n;l,u}$ et soit I une arête de $\mathcal{M}$. Pour $X \in P$ de rang m , considérons la fonction

$$f(X, I) := \begin{cases} 1 & \text{si } X \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Parce que I est isomorphe à B_{u-l} , nous avons

$$\sum_{I \in \mathcal{M}} \sum_{X \in P} f(X, I) = |\mathcal{M}| \binom{u-l}{m-l}$$

et

$$\sum_{X \in P} \sum_{I \in \mathcal{M}} f(X, I) \leq \binom{n}{m},$$

c.à.d.

$$|\mathcal{M}| \binom{u-l}{m-l} \leq \binom{n}{m} \quad \text{pour tout } m \in \{l, \dots, u\}.$$

ou encore,

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{\binom{n}{m}}{\binom{u-l}{m-l}} = f(m) \quad \text{pour tout } m \in \{l, \dots, u\}.$$

Etudions la séquence $\{f(m)\}$.

$f(m+1) \geq f(m)$ est équivalente à $\frac{m+1-l}{m+1} \geq \frac{u-m}{n-m}$ c.à.d. à $m \geq \frac{ln-n+u}{n+l-u}$. Si on pose $m_0 = \lceil \frac{ln-n+u}{n+l-u} \rceil$, alors $f(m) \geq f(m_0)$ pour tout $m \in \{l, \dots, u\}$. Ainsi,

$$|\mathcal{M}| \leq \lfloor \frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}} \rfloor.$$

D'où $\nu_{n;l,u} \leq \lfloor \frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}} \rfloor$.

Cette valeur représente aussi une borne pour $\tau_{n;l,u}$. Avant de le prouver, déterminons le nombre d'intervalles $g(m)$ de $\mathcal{I}_{n;l,u}$ contenant un élément X quelconque de $P_{n;l,u}$ du niveau m , $m \in \{l, \dots, u\}$. Nous avons

$$g(m) = |\{Y \in B_n : |Y| = l \text{ et } Y \leq X\}| |\{Y \in B_n : |Y| = u \text{ et } X \leq Y\}|.$$

Parce que $\{Y \in B_n : Y \leq X\}$ (resp. $\{Y \in B_n : X \leq Y\}$) est isomorphe à B_m (resp. B_{n-m}), nous déduisons que $g(m) = \binom{m}{l} \binom{n-m}{u-m}$.

Etudions la séquence $\{g(m)\}$.

L'inégalité $g(m+1) \geq g(m)$ est équivalente à $\frac{m+1}{m+1-l} \geq \frac{n-m}{u-m}$ et donc à $m \leq \frac{ln-n+u}{n+l-u}$. Par suite $g(m) \leq g(m_0)$ pour tout $m \in \{l, \dots, u\}$, ce qui signifie que tout élément d'un recouvrement T couvre au plus $\binom{m_0}{l} \binom{n-m_0}{u-m_0}$ arêtes. Or il y a exactement $\binom{n}{u} \binom{u}{l}$ arêtes, alors

$$|T| \geq \frac{\binom{n}{u} \binom{u}{l}}{\binom{n-m_0}{u-m_0} \binom{m_0}{l}} = \frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}}$$

et

$$\tau_{n;l,u} \geq \lceil \frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}} \rceil.$$

En conclusion,

$$\nu_{n;l,u} \leq \lfloor \frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}} \rfloor \leq \lceil \frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}} \rceil \leq \tau_{n;l,u}.$$

■

Remarque 4.1 Soit $m_0 = \lceil \frac{ln-n+u}{n+l-u} \rceil$. Si $\frac{\binom{n}{m_0}}{\binom{u-l}{m_0-l}}$ n'est pas entier, les paramètres $\nu_{n;l,u}$ et $\tau_{n;l,u}$ sont distincts et par suite la propriété forte de König n'est pas vérifiée.

Les nombres de couplage sont reliés par la relation de récurrence suivante:

Proposition 4.2 [72] Pour tous $0 \leq l < u \leq n$ nous avons:

$$\nu_{n;l,u} \geq \nu_{n-1;l,u} + \nu_{n-1;l-1,u-1}.$$

Ici, les problèmes relaxés sont résolus et les valeurs à l'optimum sont données. Ces dernières représentent naturellement des bornes pour les nombres de couplage et de recouvrement. Définissons ces problèmes:

4.1.1 Nombres fractionnaires

Un *couplage fractionnaire* de $\mathcal{H}$ est une fonction $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{I \in \mathcal{I}: X \in I} f(I) \leq 1 \quad \text{pour tout } X \in P$$

et un *recouvrement fractionnaire* de $\mathcal{H}$ est une fonction $g : P \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{X \in P: X \in I} g(X) \geq 1 \quad \text{pour tout } I \in \mathcal{I}.$$

Le *nombre de couplage fractionnaire* $\nu_{n;l,u}^*$ et le *nombre de recouvrement fractionnaire* $\tau_{n;l,u}^*$ sont définis par

$$\begin{aligned} \nu_{n;l,u}^* &:= \max\{\sum_{I \in \mathcal{I}} f(I) \quad : \quad f \text{ est un couplage fractionnaire de } \mathcal{H}\}, \\ \tau_{n;l,u}^* &:= \min\{\sum_{X \in P} g(X) \quad : \quad g \text{ est un recouvrement fractionnaire de } \mathcal{H}\}. \end{aligned}$$

Proposition 4.3 [25] *Nous avons*

$$\nu_{n;l,u}^* = \tau_{n;l,u}^* = \min_{l \leq m \leq u} \frac{\binom{n}{m}}{\binom{u-l}{m-l}}$$

Remarque 4.2 *Soit f un recouvrement par arêtes fractionnaire de $\mathcal{H}$ c.à.d. une fonction $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que*

$$\sum_{I \in \mathcal{I}: X \in I} f(I) \geq 1 \quad \text{pour tout } X \in P$$

et g un couplage fractionnaire de $\mathcal{H}$ c.à.d. une fonction $g : P \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{X \in P: X \in I} g(X) \leq 1 \quad \text{pour tout } I \in \mathcal{I}.$$

Le nombre de recouvrement par arêtes fractionnaire $\rho_{n;l,u}^*$ et le nombre de stabilité fractionnaire $\alpha_{n;l,u}^*$ sont définis par

$$\rho_{n;l,u}^* := \min\{\sum_{I \in \mathcal{I}} f(I) \quad : \quad f \text{ est un recouvrement fractionnaire de } \mathcal{H}\},$$

$$\alpha_{n;l,u}^* := \max\{\sum_{X \in P} g(X) \quad : \quad g \text{ est un stable de } \mathcal{H}\}.$$

Les mêmes fonctions f et g introduites dans la preuve de la Proposition 4.3

$$f(I) := \frac{1}{\binom{m_0}{l} \binom{n-m_0}{u-m_0}}$$

et

$$g(X) := \begin{cases} 0 & \text{si } |X| \neq m_0 \\ \frac{1}{\binom{u-l}{m_0-l}} & \text{si } |X| = m_0 \end{cases}$$

représentent respectivement un recouvrement par arêtes fractionnaire et un stable fractionnaire de $\mathcal{H}$. De plus une preuve similaire produit

$$\alpha_{n;l,u}^* = \rho_{n;l,u}^* = \max\left\{\binom{n}{l}, \binom{n}{u}\right\}.$$

Les nombres de couplages fractionnaires sont reliés par la relation de récurrence

Proposition 4.4 [25] *Nous avons $\nu_{n;l,u}^* \leq \nu_{n+1;l,u+1}^*$.*

Et entre le nombre de recouvrement et le nombre de recouvrement fractionnaire, nous avons

Proposition 4.5 [25] *Pour $\lambda < l$ et $\mu > u$, nous avons*

$$\tau_{n;l,u} \geq \tau_{n;\lambda,\mu}^* \tau_{\mu-\lambda;l-\lambda,u-\lambda}.$$

4.1.2 Détermination de quelques bornes pour le nombre de couplage et de recouvrement

Commençons par donner la formulation du couplage et du recouvrement sous forme de problèmes extrémaux dans les ensembles.

Le problème du couplage consiste à trouver le nombre maximum d'intervalles disjoints deux à deux. Deux intervalles $[X_1, Y_1]$ et $[X_2, Y_2]$ s'intersectent ssi il existe C tel que $X_1 \subseteq C \subseteq Y_1$ et $X_2 \subseteq C \subseteq Y_2$, c.à.d. ssi $X_1 \cup X_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2$. Par conséquent, $[X_1, Y_1]$ et $[X_2, Y_2]$ ont une intersection vide ssi $X_1 \not\subseteq Y_2$ ou $X_2 \not\subseteq Y_1$.

D'autre part, l'intervalle $[X_i, Y_i]$ est maximal ssi $X_i \subseteq Y_i$, $|X_i| = l$, $|Y_i| = u$, $i = 1, 2$. Posons $\overline{Y} = [n] \setminus Y$ le complémentaire de Y . Avec ces considérations, nous avons :

$[X_1, Y_1]$ et $[X_2, Y_2]$ forment une paire d'intervalles disjoints ssi $X_1 \cap \overline{Y_2} \neq \emptyset$ ou $X_2 \cap \overline{Y_1} \neq \emptyset$, et $X_i \cap \overline{Y_i} = \emptyset$, $|X_i| = l$, $|Y_i| = u$, $i = 1, 2$. En posant $p := l$ et $q := n - u$, la Proposition ci-dessous en découle :

Proposition 4.6 [25] $\nu_{n;p,n-q}$ est égal au nombre maximum v d'éléments dans deux familles ordonnées $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_v)$ et $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_v)$ de sous-ensembles de $[n]$ avec les propriétés $|A_i| = p$, $|B_i| = q$, $A_i \cap B_i = \emptyset$, $i = 1, \dots, v$, et $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ou $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ pour tous $1 \leq i < j \leq v$. ■

Dans [72], Tuza prouvait que le nombre maximum v ne peut excéder le nombre $\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$. Cette borne a été déterminée d'une manière tout à fait différente dans [25]. En remplaçant “ou” par “et”, dans la condition de la Proposition 4.6, Bollobás [8] puis plus tard Tarján [70] ont prouvé que ce maximum vaut $\binom{p+q}{p}$. Frankl [34] et Kalai [43] prouvaient, en utilisant des méthodes algébriques dûes à Lovász [49], que cette borne reste valable si on supprime “ou $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ ”. Pour un survey, voir [73].

Le problème de recouvrement consiste à trouver le nombre maximum t d'éléments de P tels que chaque intervalle maximal contient au moins un de ces éléments. Nous avons $X \subseteq C \subseteq Y$ ssi $X \subseteq C$ et $C \cap \overline{Y} = \emptyset$. D'où la proposition :

Proposition 4.7 [25] $\tau_{n;p,n-q}$ est égal au nombre minimum t d'éléments dans une famille $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_t\}$ de sous-ensembles de $[n]$ avec la propriété que pour tous sous-ensembles A et B de $[n]$ avec $|A| = p$, $|B| = q$, $A \cap B = \emptyset$, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $A \subseteq C$ et $C \cap B = \emptyset$.

On appelle une famille $\mathcal{C}$ satisfaisant les propriétés de la Proposition 4.7 une $(n, t; p, q)$ -corecouverture et l'hypergraphe $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = ([n], \mathcal{C})$ un hypergraphe de $(n, t; p, q)$ -corecouverture. De plus, on définit une famille de $(t, n; p, q)$ -Sperner par la famille $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ de n sous-ensembles de $[t]$ ayant

la propriété que pour tous sous-ensembles A, B de $[n]$ avec $|A| = p, |B| = q$, $A \cap B = \emptyset$, alors $\cap_{j \in A} D_j \not\subseteq \cup_{j \in B} D_j$. L'hypergraphe $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = ([t], \mathcal{D})$ est alors appelé un *hypergraphe de $(t, n; p, q)$ -Sperner*.

L'*hypergraphe dual* de $\mathcal{H} = ([n], \{C_1, \dots, C_t\})$ est l'hypergraphe $\mathcal{H}^* = ([t], \{D_1, \dots, D_n\})$ où $D_j = \{i \in [t] : j \in C_i\}$.

Soit $d_{t;p,q}$ le nombre maximum m pour lequel il existe une famille $(t, m; p, q)$ -Sperner.

Théorème 4.1 [25] *Nous avons $\tau_{n;p,n-q} = \min\{t : d_{t;p,q} \geq n\}$.*

En particulier pour $p = q = 1$, la famille $(t, m; 1, 1)$ -Sperner représente une famille de Sperner et donc le Théorème de Sperner produit $d_{t,1,1} = \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$. Par quelques efforts techniques et en s'aidant de l'approximation de Stirling, le Corollaire 4.1 en découle

Corollaire 4.1 [25] *Nous avons*

$$\tau_{n;1,n-1} \geq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + c.$$

où c est une constante.

Théorème 4.2 [25] *Soit $0 < p \leq q < p + q + 1 \leq n$. Alors*

$$\binom{p+q+1}{p} \leq \nu_{n;p,n-q} \leq \nu_{n;p,n-q}^* < \frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q}.$$

Si, en plus, $n \geq p + q + \max\{p, q\}$, alors

$$2 \binom{p+q}{p} - \binom{p+q-2}{p-1} \leq \nu_{n;p,n-q}.$$

Théorème 4.3 [25] *Nous avons pour tout $\epsilon > 0$,*

$$(1 - \epsilon) \frac{(p+q-2)^{p+q-2}}{(p-1)^{p-1} (q-1)^{q-1}} \log_2 (n - p - q + 1) \leq \tau_{n;p,n-q} \leq \frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q} ((p+q) \log n + 1)$$

où pour la borne inférieure, n est supposé suffisamment grand.

La borne inférieure peut être améliorée si p resp. q est égal à 1.

Théorème 4.4 [25] *Nous avons $\tau_{n,1,n-q} \geq q \log_2 n - q \log_2 q$.*

Une élégante preuve probabiliste produit le résultat

Théorème 4.5 [25]. *Il existe une constante c_1 telle que*

$$\tau_{n;p,n-q} \leq (p + q - 1)2^{p+q} \log n + c_1.$$

4.1.3 Quelques valeurs exactes pour les nombres de couplage et de recouvrement par sommets

Ici quelques valeurs exactes de nos deux paramètres sont donnés soit à travers une déduction des précédents théorèmes ou propositions soit à travers des constructions. Nous avons les résultats suivants:

Proposition 4.8 [25] *Si $u \leq \frac{n+l^2}{l+1}$, alors $\tau_{n;l,u} = \binom{n}{l}$.*

Proposition 4.9 [25] *Si $l \leq \frac{n-1}{2}$ et $u = l + 1$, alors $\nu_{n;l,u} = \binom{n}{l}$.*

Théorème 4.6 [25]

a) *Si $l \in \{1, 2\}$ et $u \leq \frac{n+l^2}{l+1}$, alors $\nu_{n;l,u} = \binom{n}{l}$.*

b) *Si $p \in \{1, 2\}$ et $n \geq p + q + \lfloor \frac{q}{p} \rfloor$, alors $\nu_{n;p,n-q} \geq \binom{p+q+\lfloor \frac{q}{p} \rfloor}{p}$.*

Supposons que $l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ et soit $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{\binom{n-1}{l}}\}$ une décomposition en chaînes symétriques de $(B_{n-1})_{l,l+1}$. Notons $C_i = (p_i \prec q_i)$ pour tout $i = 1, \dots, \binom{n-1}{l}$ et posons $C'_i = ((p_i \cup \{n\}) \prec (q_i \cup \{n\}))$. Parceque l'ensemble $\{[p_i, q_i \cup \{n\}], i = 1, \dots, \binom{n-1}{l}\}$ forme un couplage de $(\mathcal{H}(B_n))_{l,l+2}$, nous pouvons déduire l'inégalité $\nu_{n;l,l+2} \geq \binom{n-1}{l}$. D'autre part, chaque intervalle d'un couplage contient exactement deux éléments du niveau $N_{l+1}(B_n)$. D'où $\nu_{n;l,l+2} \leq \frac{1}{2} \binom{n}{l+1}$, c.à.d.

$$\binom{n-1}{l} \leq \nu_{n;l,l+2} \leq \frac{1}{2} \binom{n}{l+1}$$

pour tout $l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.

En particulier, les deux bornes sont égales si n est pair et $l = \frac{n}{2} - 1$ mais elles sont asymptôtiquement égales si n est impair et $l = \frac{n-1}{2} - 1$. Ainsi, le Théorème 4.7 en découle:

Théorème 4.7

- a) Si n est pair et $l = \frac{n}{2} - 1$, alors $\nu_{n;l,l+2} = \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}}$.
b) Si n est impair et $l = \frac{n-1}{2} - 1$, alors $\nu_{n;l,l+2} \sim \frac{1}{2} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$.

4.2 Nombre de k -stabilité

Dans cette partie, nous introduisons la notion de k -stabilité, qui généralise celle de la stabilité ($k = 1$) et l'étudions toujours dans notre hypergraphe $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n;l,u}$ des intervalles de $P = P_{n;l,u}$. Nous supposons encore ici que $l \geq n - u$.

Un ensemble de points A de $P = P_{n;l,u}$ est dit k -stable si chaque arête de $\mathcal{H}$ contient au plus k éléments de A . Désignons par

$$\alpha_{n,k;l,u} := \max\{|A| : A \text{ est un ensemble } k\text{-stable de } \mathcal{H}\}$$

le nombre de k -stabilité.

Pour $k = 1$, $\alpha_{n,1;l,u} = \max\{\binom{n}{l}, \binom{n}{u}\}$ [78].

Théorème 4.8 Si $k \leq 2^{u-l}$, alors

$$\alpha_{n,k;l,u} \leq k \max\left\{\binom{n}{l}, \binom{n}{u}\right\}.$$

Preuve. Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement de $\mathcal{H}$ par un nombre minimum d'arêtes. Parce que $|\mathcal{R}| = \max\{\binom{n}{l}, \binom{n}{u}\}$, nous pouvons déduire que

$$|A| = \sum_{I \in \mathcal{R}} |A \cap I| \leq k |\mathcal{R}| = k \max\left\{\binom{n}{l}, \binom{n}{u}\right\}.$$

■

Remarque 4.3 L'union des niveaux $N_l \cup N_u$ est un ensemble 2-stable de $\mathcal{H}$. Avec le Théorème 4.8, nous obtenons la relation

$$\alpha_{n,2;l,n-l} = 2 \binom{n}{l}.$$

Théorème 4.9 Si $k \leq n$, alors

$$\alpha_{n,k;1,n} \geq \lfloor \frac{n(k+1)}{2} \rfloor$$

Preuve. Considérons les deux familles

$A := \{\{i\} : i = 1, \dots, n\} \cup \{\{i, i+j\} : i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, p\}$ si $k = 2p+1$, et

$A' := \{\{i\} : i = 1, \dots, n\} \cup \{\{i, i+j\} : i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, p-1\} \cup \{\{i, i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} : i = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ si $k = 2p$

où l'addition est modulo n .

A et A' sont des ensembles k -stables dans $\mathcal{H}_{n;1,n}$. Nous examinerons seulement le cas impair. Le cas pair se fera d'une manière similaire.

Soit $k = 2p+1$ et $j \in \{1, \dots, p\}$. Ecrivons d'abord l'ensemble $\{\{i, i+j\}, i = 1, \dots, n\}$ sous la forme $A_j = \{\{1, j+1\}, \{2, j+2\}, \dots, \{n-j, n\}, \{1, n-j+1\}, \{2, n-j+2\}, \dots, \{j, n\}\}$ et montrons que dans A , les paires sont sans répétitions.

Supposons le contraire, alors il existe un élément $\{i_0, i_0 + j_0\}$ qui se répète au moins deux fois.

Cas 1. $\{i_0, i_0 + j_0\}$ se répète dans un certain A_j .

Alors $\{i_0, i_0 + j_0\} = \{i_0, n - j_0 + i_0\}$ et donc $j_0 = \frac{n}{2}$. Mais $j_0 \leq p$ implique $n \leq 2p < k$ et ainsi une contradiction.

Cas 2. $\{i_0, i_0 + j_0\} \in A_{j_1} \cap A_{j_2}$ avec $j_1 \neq j_2$.

Alors on a ou bien:

$\{i_0, i_0 + j_0\} \in \{\{1, j_1 + 1\}, \dots, \{n - j_1, n\}\} \cap \{\{1, j_2 + 1\}, \dots, \{n - j_2, n\}\}$
(resp. $\{\{1, n - j_1 + 1\}, \dots, \{j_1, n\}\} \cap \{\{1, n - j_2 + 1\}, \dots, \{j_2, n\}\})$

ou bien $\{i_0, i_0 + j_0\} \in \{\{1, j_1 + 1\}, \dots, \{n - j_1, n\}\} \cap \{\{1, n - j_2 + 1\}, \dots, \{j_2, n\}\}$
(resp. $\{\{1, j_2 + 1\}, \dots, \{n - j_2, n\}\} \cap \{\{1, n - j_1 + 1\}, \dots, \{j_1, n\}\})$.

Dans le premier cas, nous obtenons $j_0 = j_1 = j_2$ qui est en contradiction avec notre supposition et dans le second cas nous obtenons $j_0 = j_1 = n - j_2$ (resp. $j_0 = j_2 = n - j_1$) c.à.d., $j_1 + j_2 = n$. Mais $j_1 + j_2 \leq p + p = 2p < n$ et là encore une contradiction.

Par suite,

$$|A| = n + pn = \frac{n(k+1)}{2}.$$

A est un ensemble k -stable puisque chaque élément de $\{1, \dots, n\}$ apparaît exactement dans deux sous-ensembles de A_j . Par conséquent, cet élément

existe $1 + 2p = k$ fois dans les sous-ensembles de A . ■

Notons que pour $k > n$, l'inégalité $\alpha_{n,k;1,n} \geq \lfloor \frac{n(k+1)}{2} \rfloor$ peut être fausse puisque $\alpha_{4,7;1,4} = 14$.

Proposition 4.10 $\alpha_{n,k;l,u}$ est la taille maximum d'une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de $[n]$ avec la propriété que pour tous X, Y de $[n]$ avec $|X| = l$, $|Y| = n - u$ et $X \cap Y = \emptyset$ alors $X \cap (\cup_{i=1}^{k+1} \bar{F}_i) \neq \emptyset$ ou $Y \cap (\cup_{i=1}^{k+1} F_i) \neq \emptyset$ dès que $F_1, \dots, F_{k+1} \in \mathcal{F}$.

Preuve. En effet, A est un ensemble k -stable de $\mathcal{H}_{n;l,u}$ ssi chaque intervalle $[p, q]$ of $\mathcal{I}_{n;l,u}$ ne contient pas $k+1$ éléments de A . Ceci est équivalent à dire: Pour tous $p, q \in P$, $p \subset q$, $|p| = l$, $|q| = u$ et pour tous $F_{i_1}, \dots, F_{i_{k+1}} \in A$, il existe $j_0 \in [k+1]$ tel que $p \not\subseteq F_{i_{j_0}}$ ou $F_{i_{j_0}} \not\subseteq q$ c.à.d., $p \not\subseteq \cap_{j=1}^{k+1} F_{i_j}$ ou $\cup_{j=1}^{k+1} F_{i_j} \not\subseteq q$. Il s'ensuit alors que, A est un ensemble k -stable de $\mathcal{H}_{n;l,u}$ ssi, pour tous p, q dans P avec $p \cap \bar{q} = \emptyset$ on a $p \cap (\cap_{j=1}^{k+1} F_{i_j}) \neq \emptyset$ ou $(\cup_{j=1}^{k+1} F_{i_j}) \cap \bar{q} \neq \emptyset$ dès que $F_{i_1}, \dots, F_{i_{k+1}} \in A$. En posant $X = p$ et $Y = \bar{q}$, nous obtenons le résultat. ■

Théorème 4.10 Nous avons

$$\alpha_{n,k;l,n} \leq \lfloor \frac{k+l}{l+1} \binom{n}{l} \rfloor$$

Preuve.

Soit A un ensemble k -stable de $\mathcal{H}_{n;l,n}$. Définissons, pour chaque sous-ensemble X à l éléments de $[n]$ et chaque élément Y de A , la fonction

$$f(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \subseteq Y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons,

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{X \in A : |X| = l\}, \\ A_2 &:= \{X \in A : |X| \geq l+1\}. \end{aligned}$$

Comptons la somme $\sum_{X,Y} f(X, Y)$ de deux manières différentes.

Parceque chaque sous-ensemble à l éléments est contenu dans au plus k

éléments de A , nous avons d'une part

$$\sum_{X,Y} f(X,Y) = \sum_X \sum_{\substack{Y \\ (X \subseteq Y)}} 1 \leq \sum_X k = k \binom{n}{l}.$$

D'un autre part,

$$\sum_Y \sum_X f(X,Y) = \sum_{Y \in A_1} \sum_X f(X,Y) + \sum_{Y \in A_2} \sum_X f(X,Y),$$

où,

$$\sum_{Y \in A_1} \sum_X f(X,Y) = \sum_{Y \in A_1} 1 = |A_1|$$

et

$$\sum_{Y \in A_2} \sum_X f(X,Y) \geq \sum_{Y \in A_2} (l+1) = (l+1)|A_2|.$$

Comparant les deux expressions de $\sum_{X,Y} f(X,Y)$, nous déduisons

$$(l+1)|A_2| + |A_1| \leq k \binom{n}{l}$$

c.à.d.,

$$(l+1)|A| = (l+1)(|A_1| + |A_2|) \leq k \binom{n}{l} + l|A_1| \leq k \binom{n}{l} + l \binom{n}{l},$$

et donc, $|A| \leq \lfloor \frac{k+l}{l+1} \binom{n}{l} \rfloor$. ■

En combinant les Théorèmes 4.9 et 4.10, nous obtenons le corollaire ci-dessous.

Corollaire 4.2 *Pour $k \leq n$, nous avons*

$$\alpha_{n,k;1,n} = \lfloor \frac{n(k+1)}{2} \rfloor.$$

Remarque 4.4 $\alpha_{n,k;l,u}$ peut être interprété comme étant la taille maximum d'une séquence $\mathcal{F}$ de sous-ensembles distincts de $[n]$ avec la propriété que $|\cap_{i=1}^{k+1} F_i| < l$ ou $|\cup_{i=1}^{k+1} F_i| > u$ dès que $F_1, \dots, F_{k+1} \in \mathcal{F}$.

Ainsi, à partir du Corollaire 4.2, nous pouvons dire que $\max\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset [n] \text{ et il n'existe pas } k+1 \text{ éléments de } \mathcal{F} \text{ avec une intersection non vide}\} = \lfloor \frac{n(k+1)}{2} \rfloor$.

Cette valeur correspond aussi, d'après la Proposition 4.10 avec $u = n$, à la taille maximum d'une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de $[n]$ tels que chaque ensemble à l éléments de $[n]$ est contenu dans au plus k membres de $\mathcal{F}$, $k \leq n$.

Remarque 4.5 Considérons une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de $[n]$ à $l+1$ éléments avec la propriété:

$|\cap_{i=1}^k F_i| < l$ ou $|\cup_{i=1}^k F_i| > u$ dès que $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$. Il est facile de voir que $N_l \cup \mathcal{F}$ est un ensemble k -stable de $\mathcal{H}_{n;l,u}$. Ainsi,

$$\binom{n}{l} + \max |\mathcal{F}| \leq \alpha_{n,k;l,u}.$$

Pour $k = 2$ et $u = n$, il a été vu par Kirkman [45] dans les cas $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{6}$ et par Schönheim [63] dans les autres cas que si $l = 2$,

$$\max |\mathcal{F}| = \lfloor \frac{n}{3} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \rfloor - \varepsilon \text{ où}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 5 \pmod{6} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et si $l = 3$ Hanani [41] a prouvé dans les cas $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{6}$, Mills [52] et Brouwer [16] dans le cas $n \equiv 0 \pmod{6}$ et Best [5] pour $v \in \{5, 11\}$ que $\max |\mathcal{F}| = \lfloor \frac{n}{4} \lfloor \frac{n-1}{3} \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \rfloor \rfloor$.

D'un autre côté, Roedl [61] a montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \max |\mathcal{F}| (l+1) \binom{n}{l}^{-1} = 1$. Nous déduisons à partir du Théorème 4.10 que,

$$\begin{aligned} \alpha_{n,2;2,n} &= \lfloor \frac{4}{3} \binom{n}{2} \rfloor & \text{si } n \equiv 1, 3 \pmod{6}, \\ \alpha_{n,2;2,n} &\in \{ \lfloor \frac{4}{3} \binom{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{4}{3} \binom{n}{2} \rfloor - 1 \} & \text{si } n \equiv 5 \pmod{6}, \\ \alpha_{n,2;3,n} &= \lfloor \frac{5}{4} \binom{n}{3} \rfloor & \text{si } n \equiv 2, 4 \pmod{6}, \end{aligned}$$

et pour n suffisamment grand,

$$\binom{n}{l} + (1 - \varepsilon) \frac{\binom{n}{l}}{l+1} \leq \alpha_{n,2;l,n} \leq \binom{n}{l} + \lfloor \frac{\binom{n}{l}}{l+1} \rfloor \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Théorème 4.11 Pour $k \leq n$ nous avons

$$\alpha_{n,k;1,n-1} \geq \lfloor \frac{n(k+2)}{2} \rfloor \quad \text{et} \quad \alpha_{n,n;1,n-1} \geq 2n + \binom{n}{2}$$

Preuve. Il n'est pas difficile de voir que les familles

$B := \{\{i\}, i = 1, \dots, n\} \cup \{\{i, i+j\}, i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, p-1\} \cup N_{n-1}$ si $k = 2p$ et $B' := \{\{i\}, i = 1, \dots, n\} \cup \{\{i, i+j\}, i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, p-1\} \cup \{\{i, i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}, i = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \cup N_{n-1}$ si $k = 2p+1$ sont des ensembles k -stables $\mathcal{H}_{n,1,n-1}$ de cardinalité $\lfloor \frac{n(k+2)}{2} \rfloor$ (l'addition se fait modulo n).

De plus, pour $k = n$, l'union des niveaux N_1, N_2 et N_{n-1} est un ensemble n -stable de $\mathcal{H}_{n,1,n-1}$ de cardinalité $2n + \binom{n}{2}$. ■

Théorème 4.12 Pour $l < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, nous avons

$$\alpha_{n,k;l,n-l} \leq \lfloor \frac{k+l+1}{l+1} \binom{n}{l} + \frac{\binom{n}{l}}{l+1} \left(\frac{n(l-1) + kl - 2l^2}{n-2l} \right) \rfloor$$

Preuve. Soit A un ensemble k -stable de $\mathcal{H}_{n,l,n-l}$.

Pour un élément X de A et un intervalle I de $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{n,l,n-l}$, considérons la fonction f définie par

$$f(X, I) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons,

$$A_1 := \{X \in A : |X| = l\},$$

$$A_2 := \{X \in A : |X| = n-l\}.$$

$$A_3 := \{X \in A : l+1 \leq |X| \leq n-l-1\}.$$

Comme précédemment, nous comptons de deux manières différentes la quantité $\sum_{X,I} f(X, I)$.

A partir de la définition d'un ensemble k -stable, nous obtenons

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \sum_{X \in A} f(X, I) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \sum_{X \in A \cap \mathcal{I}} 1 \leq \sum_{I \in \mathcal{I}} k = k|\mathcal{I}| = k \binom{n}{l} \binom{n-l}{n-2l} = k \binom{n}{l} \binom{n-l}{l}.$$

Maintenant, parceque $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, nous déduisons

$$\sum_{X \in A} \sum_{I \in \mathcal{I}} f(X, I) = \sum_{X \in A_1} \sum_{I \in \mathcal{I}} f(X, I) + \sum_{X \in A_2} \sum_{I \in \mathcal{I}} f(X, I) + \sum_{X \in A_3} \sum_{I \in \mathcal{I}} f(X, I),$$

avec,

$$\sum_{X \in A_1} \sum_{I \in \mathcal{I}} f(X, I) = |A_1| \binom{n-l}{n-2l} = |A_1| \binom{n-l}{l},$$

$$\sum_{X \in A_2} \sum_{I \in \mathcal{I}} f(X, I) = |A_2| \binom{n-l}{l},$$

$$\sum_{X \in A_3} \sum_{I \in \mathcal{I}} f(X, I) = \sum_{X \in A_3} \binom{r(X)}{l} \binom{n-r(X)}{n-l-r(X)} = \sum_{X \in A_3} \binom{r(X)}{l} \binom{n-r(X)}{l}.$$

Les deux séquences $\left\{ \binom{i}{l} \right\}$ et $\left\{ \binom{n-i}{l} \right\}$ sont logarithmiquement concaves donc leur produit $\left\{ \binom{i}{l} \binom{n-i}{l} \right\}$ est aussi logarithmiquement concave et par conséquent il est unimodal c.à.d.,

$$\min \left\{ \binom{l+1}{l} \binom{n-(l+1)}{l}, \binom{n-l-1}{l} \binom{n-(n-l-1)}{l} \right\} \leq \binom{i}{l} \binom{n-i}{l}$$

pour tout $i, l+1 \leq i \leq n-l-1$.

Il s'ensuit,

$$|A_1| \binom{n-l}{l} + |A_2| \binom{n-l}{l} + |A_3| \binom{n-l-1}{l} (l+1) \leq k \binom{n}{l} \binom{n-l}{l}.$$

Puisque $|A_3| = |A| - |A_1| - |A_2|$, nous obtenons

$$|A| \binom{n-l-1}{l} (l+1) \leq k \binom{n}{l} \binom{n-l}{l} + (|A_1| + |A_2|) \left(\binom{n-l-1}{l} (l+1) - \binom{n-l}{l} \right)$$

qui conduit à

$$|A| \leq \left\lfloor \frac{k+l+1}{l+1} \binom{n}{l} + \frac{\binom{n}{l}}{l+1} \left(\frac{n(l-1) + kl - 2l^2}{n-2l} \right) \right\rfloor$$

puisque $|A_1| \leq \binom{n}{l}$ et $|A_2| \leq \binom{n}{n-l} = \binom{n}{l}$. ■

A partir du Théorème 4.11 et du Théorème 4.12, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_{n,n;1,n-1} &= 2n + \binom{n}{2}, \\ \alpha_{n,3;1,n-1} &= \frac{5n}{2} \quad \text{si } n \text{ est pair,} \\ \alpha_{n,3;1,n-1} &\in \left\{ \left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor + 1 \right\} \quad \text{si } n \text{ est impair,} \end{aligned}$$

et

$$\left\lfloor \frac{n(k+2)}{2} \right\rfloor \leq \alpha_{n,k;1,n-1} \leq \left\lfloor \frac{n(k+2)}{2} + \frac{k}{2} \right\rfloor \quad \text{si } k \leq n.$$

Un *k-couplage fractionnaire* resp. un *k-recouvrement par arêtes* de $\mathcal{H}$ est une fonction $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}: \\ X \in I}} f(I) \leq k \quad \text{pour tout } X \in P \quad \text{resp.} \quad \sum_{\substack{I \in \mathcal{I}: \\ X \in I}} f(I) \geq k \quad \text{pour tout } X \in P.$$

Un *k-stable fractionnaire* resp. un *k-recouvrement par sommets* de $\mathcal{H}$ est une fonction $g : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{\substack{X \in P: \\ X \in I}} g(X) \leq k \quad \text{pour tout } I \in \mathcal{I} \quad \text{resp.} \quad \sum_{\substack{X \in P: \\ X \in I}} g(X) \geq k \quad \text{pour tout } I \in \mathcal{I}.$$

Posons,

$$\begin{aligned} \nu_{n,k;l,u}^*(\mathcal{H}) &:= \max\left\{ \sum_{I \in \mathcal{I}} f(I) : f \text{ est un } k\text{-couplage fractionnaire de } \mathcal{H} \right\}, \\ \rho_{n,k;l,u}^*(\mathcal{H}) &:= \min\left\{ \sum_{I \in \mathcal{I}} f(I) : f \text{ est un } k\text{-recouvrement par arêtes de } \mathcal{H} \right\}, \\ \alpha_{n,k;l,u}^*(\mathcal{H}) &:= \max\left\{ \sum_{X \in P} g(X) : g \text{ est un } k\text{-stable fractionnaire de } \mathcal{H} \right\}, \\ \tau_{n,k;l,u}^*(\mathcal{H}) &:= \min\left\{ \sum_{X \in P} g(X) : g \text{ est un } k\text{-recouvrement par sommets de } \mathcal{H} \right\}. \end{aligned}$$

En multipliant par k le couplage, le recouvrement par sommets, le stable et le recouvrement par arêtes fractionnaires définis dans la première partie de ce chapitre, nous obtenons la proposition suivante

Proposition 4.11 *On a*

- a. $\alpha_{n,k;l,u}^*(\mathcal{H}) = \rho_{n,k;l,u}^*(\mathcal{H}) = k \max\left\{\binom{n}{l}, \binom{n}{u}\right\},$
- b. $\tau_{n,k;l,u}^*(\mathcal{H}) = \nu_{n,k;l,u}^*(\mathcal{H}) = k \min_{l \leq m \leq u} \frac{\binom{n}{m}}{\binom{u-l}{m-l}}.$

4.3 Sur le nombre chromatique

Dans le Chapitre 2, nous avons vérifié la NP-complétude du problème de coloration dans les hypergraphes des intervalles d'un poset. Nous proposons dans cette partie de donner quelques valeurs exactes ou asymptotiques du nombre chromatique $\gamma(\mathcal{H}(P_{n;l,u}))$ que nous notons brièvement par $\gamma_{n;l,u}$.

Rappelons qu'une famille de sous-ensembles de $P_{n;l,u}$ est une k -coloration de $\mathcal{H}_{n;l,u}$ si elle forme une partition de $P_{n;l,u}$ en k sous-ensembles stables $C_1, \dots, C_k$ où chacun d'eux correspond à une couleur. Par exemple l'hypergraphe $\mathcal{H}_{4;1,3}$ admet une 5-coloration. Elle est donnée par la partition $\{C_1, \dots, C_5\}$ où $C_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $C_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $C_3 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, $C_4 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, $C_5 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Plus précisément nous avons dans ce cas $\gamma_{4;1,3} = 5$.

Le problème du nombre chromatique dans le cas du treillis Booléen se ramène aux problèmes dans la théorie du "design". Rappelons-en quelques notions.

Un *système stable* $P(t, k, n)$ d'ordre n est une paire (Q, q) , où Q est un ensemble à n éléments et q est une collection de sous-ensembles à k éléments de Q appelés *blocs*, ayant la propriété que chaque sous-ensemble à t élément de Q doit être un sous-ensemble d'au plus un bloc de q . En particulier, $P(2, 3, n)$ est appelé *système triple stable PT* d'ordre n (brièvement $PT(n)$). Un PT est *optimal* s'il n'existe pas de PT de même ordre avec plus de blocs. Spencer [67] prouvait qu'un PT optimal a $\lfloor \frac{n}{3} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \rfloor$ triplets pour $n \not\equiv 5 \pmod{6}$ et $\lfloor \frac{n}{3} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \rfloor - 1$ triplets pour $n \equiv 5 \pmod{6}$.

Deux PTs , (Q, q_1) et (Q, q_2) , sont dits disjoints si $q_1 \cap q_2 = \emptyset$. Si nous remplaçons "au plus" par "exactement" dans la définition du système stable, nous dirons qu'il s'agit d'un *système de Steiner* $S(t, k, n)$. En particulier, un $S(2, 3, n)$ est appelé *système triple de Steiner STS* d'ordre n (brièvement $STS(n)$). De tels systèmes existent ssi $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$.

Par exemple, deux disjoints $STSs$ d'ordre 7 sont donnés par:

$$S_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}$$

$$S_2 = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}\}.$$

Il est facile de voir que le nombre maximum de STS d'ordre n disjoints deux à deux est au plus $n - 2$. Si ce nombre vaut exactement $n - 2$,

alors l'ensemble de tous les triplets peut être partitionné en $n - 2$ $STS(n)$. Cette partition est appelée *ensemble large d'un système triple de Steiner*, (brièvement $LTS(n)$). Un $LTS(n)$ existe ssi $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$, $n \neq 7$ (voir [50, 51, 71]).

Proposition 4.12 [12] *Nous avons $\gamma_{n;1,n} = 2^{n-1}$.*

Preuve. L'inégalité " $\geq$ " s'ensuit en observant que chaque arête de $\mathcal{H}_{n;1,n}$ a 2^{n-1} éléments. Maintenant, si nous appliquons la même couleur i à l'élément p_i et à son complémentaire $[n] \setminus p_i$ ($p_i \neq [n]$), pour tout $i = 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ et la couleur 2^{n-1} à l'élément $[n]$, nous obtenons l'inégalité $\gamma_{n;1,n} \leq 2^{n-1}$. ■

Lemme 4.1 [12] *Nous avons*

$$\max\{n - l + 1, \frac{\binom{n}{l+1}}{\lfloor \frac{n}{l+1} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor \dots \lfloor \frac{n-l+1}{2} \rfloor \dots}\} \leq \gamma_{n;l,l+2},$$

Proof. Procédant par induction sur l , Schönheim [63] prouvait que le système stable $P(l, l+1, n)$ ne contient pas plus que $\Psi(n, l) = \lfloor \frac{n}{l+1} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor \dots \lfloor \frac{n-l+1}{2} \rfloor \dots$ sous-ensembles à $(l+1)$ éléments. Puisque chaque classe pour une couleur donnée du niveau $N_{l+1} = \{X \subseteq [n] : |X| = l+1\}$ est un système stable, nous obtenons

$$\frac{\binom{n}{l+1}}{\Psi(n, l)} \leq \gamma_{n;l,l+2}.$$

En dehors de cette inégalité, nous avons aussi $\gamma_{n;l,l+2} \geq n - l + 1$ puisque les éléments $\{1, \dots, l\}$ et $\{1, \dots, l, i\}$ pour $i = l+1, \dots, n$ doivent être de couleurs différentes. ■

Lemme 4.2 [12] *Supposons qu'il existe une partition des sous-ensembles à $(l+1)$ éléments d'un ensemble à n éléments en $\varphi(n)$ systèmes stables disjoints $P(l, l+1, n)$.*

Si $\varphi(n) > \max\{n - l, \frac{(l+1)(l+2)}{2} + l + 2\}$, alors $\gamma_{n;l,l+2} \leq \varphi(n)$.

Si $\varphi(n) = n - l$ et $n > 2l + 2$, alors $\gamma_{n;l,l+2} \leq \varphi(n) + 1$.

Preuve. Soit $\{C_1, \dots, C_{\varphi(n)}\}$ une partition de $\binom{[n]}{l+1}$ en systèmes stables disjoints $P(l, l+1, n)$. Il est facile de voir que $\varphi(n) \geq n - l$. Attribuons

à chaque élément de C_i la couleur i . Si $\varphi(n) > n - l$, alors chaque sous-ensemble à l éléments a au moins $\varphi(n) - (n - l)$ choix pour sa couleur à travers les éléments de l'ensemble $[\varphi(n)]$. Après cela, nous observons que chaque sous-ensemble à $(l + 2)$ éléments peut recevoir au moins $\varphi(n) - \binom{l+2}{l} - \binom{l+2}{l+1}$ couleurs de $[\varphi(n)]$. Ainsi, nous obtenons une $\varphi(n)$ -coloration de $\mathcal{H}_{n;l,l+2}$ pour $\varphi(n) > \frac{(l+2)(l+1)}{2} + l + 2$.

Si $\varphi(n) = n - l$, alors tous les sous-ensembles à l éléments reçoivent une nouvelle couleur $\varphi(n) + 1$. Puisque chaque sous-ensemble à $(l + 2)$ élément a au moins $\varphi(n) - \binom{l+2}{l+1}$ choix pour sa couleur dans $[\varphi(n)]$, nous obtenons une $(\varphi(n) + 1)$ -coloration de $\mathcal{H}_{n;l,l+2}$ pour $\varphi(n) > l + 2$. ■

Une partition des arêtes d'un graphe en couplages parfaits (ou 1-facteurs) est appelée une *1-factorisation*. Si n est pair, une manière d'obtenir une 1-factorisation de K_n est de noter les $n - 1$ sommets d'un polygône régulier par $1, \dots, n - 1$ et au milieu, on pose le sommet n . On commence par un couplage parfait puis les $n - 2$ autres s'obtiennent par une rotation de la figure par des multiples de $\frac{2\pi}{n}$. Par exemple, pour $n = 6$, on obtient les 5 1-facteurs qui constituent les éléments de la 1-factorisation de K_n :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}, \\ F_2 &= \{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}, \\ F_3 &= \{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}, \\ F_4 &= \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}, \\ F_5 &= \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}. \end{aligned}$$

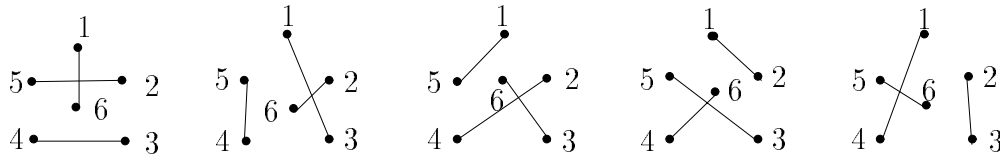


Figure 1.

Le théorème qui suit donne la valeur de $\gamma_{n;1,3}$ pour $n > 5$. Néanmoins, il est facile de vérifier que $\gamma_{3;1,3} = 4$, $\gamma_{4;1,3} = 5$ et $\gamma_{5;1,3} = 6$.

Théorème 4.13 [12] *Pour $n > 5$, nous avons $\gamma_{n;1,3} = n$.*

Preuve. L'inégalité " $\geq$ " se déduit du Lemme 4.1 ($l = 1$).

Si n est pair, la 1-factorisation $F = \{F_1, \dots, F_{n-1}\}$ du graphe complet K_n est une partition des sous-ensembles à deux éléments de $[n]$ en $n-1$ systèmes stables disjoints $P(1, 2, n)$.

Si n est impair, il suffit de considérer une 1-factorisation $F' = \{F'_1, \dots, F'_n\}$ de K_{n+1} et de supprimer tous les sous-ensembles à 2 éléments qui contiennent l'élément $n+1$. Ainsi, nous obtenons à partir du Lemme 4.2 l'inégalité " $\leq$ ". ■

Il n'est pas difficile de vérifier que $\gamma_{5;2,4} = 5$, $\gamma_{6;2,4} = 6$ et $\gamma_{7;2,4} = 7$. Pour les autres valeurs de n , nous avons

Théorème 4.14 [12] *Nous avons*

$$\gamma_{n;2,4} = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \equiv 0, 1, 2 \text{ ou } 3 \pmod{6} \\ n & \text{si } n \equiv 4 \pmod{6} \end{cases} \quad \begin{matrix} n \neq 6, 7, 8 \\ n \neq 10 \end{matrix}$$

et,

$$\gamma_{n;2,4} \in \{n-1, n\} \text{ si } n \equiv 5 \pmod{6}, n \neq 5.$$

Preuve. Par le Lemme 4.1 avec $l = 2$, nous avons

$$\gamma_{n;2,4} \geq \begin{cases} n-1 & \text{si } n \equiv 0, 1, 2, 3, 5 \pmod{6} \\ n & \text{si } n \equiv 4 \pmod{6}. \end{cases}$$

Déterminons une borne supérieure de $\gamma_{n;2,4}$. A partir du Lemme 4.2, il suffit d'obtenir une partition des triplets en systèmes stables disjoints $P(2, 3, n)$.

Cas 1. $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$ et $n \neq 7$.

A partir de la partition qui est définie par l'ensemble large $LTS(n)$ d'un système triple de Steiner, nous déduisons une $(n-1)$ -coloration de $\mathcal{H}_{n;2,4}$ et l'inégalité $\gamma_{n;2,4} \leq n-1$ s'en suit.

Cas 2. $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{6}$ et $n \neq 6, 8$.

Dans ce cas $n+1 \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$. Tous les triplets d'ordre $n+1$ peuvent être partitionné en $(n+1)-2 = n-1$ disjoints STSs dès que $n \neq 6$. En supprimant tous les triplets contenant l'élément $n+1$, nous obtenons une partition en $n-1$ systèmes stables $P(2, 3, n)$ et alors une $(n-1)$ -coloration de $\mathcal{H}_{n;2,4}$ pour $n > 11$.

Cas 3. $n \equiv 5 \pmod{6}$ et $n \neq 5$.

La condition $n \equiv 5 \pmod{6}$ est équivalente à $n + 1 \equiv 0 \pmod{6}$. Ainsi, $\gamma_{n+1;2,4} = (n + 1) - 1 = n$ pour $n \neq 5$. Si nous supprimons tous les sous-ensembles contenant l'élément $n + 1$, nous obtenons une n -coloration de $\mathcal{H}_{n;2,4}$, c.à.d $\gamma_{n;2,4} \leq n$.

Notons que cette inégalité peut être améliorée si la conjecture faible de Etzion [29] est prouvée. Elle stipule que pour chaque $n \equiv 5 \pmod{6}$, $n > 5$, il existe une partition des triplets d'ordre n en $n - 1$ PT s.

Plus précisément, nous aurons, $\gamma_{n;2,4} = n - 1$ si $n \equiv 5 \pmod{6}$, $n > 11$.

Cas 4. $n \equiv 4 \pmod{6}$ et $n \neq 10$.

Dans les articles de Etzion [30, 29], il est prouvé que pour $n \equiv 4 \pmod{6}$ il existe une partition des triplets en $n - 1$ PT s optimaux et un PT de taille $n - 1/3$. Ainsi, nous déduisons une n -coloration de $\mathcal{H}_{n;2,4}$ pour $n > 10$. ■

Dans le cas $l = 3$, il est connu [15] qu'un système stable optimal $P(3, 4, n)$ a la taille $\frac{n(n-1)(n-3)}{24}$ si $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$ et $\frac{n(n^2-3n-6)}{24}$ si $n \equiv 0 \pmod{6}$. Pour $n \equiv 5 \pmod{6}$, il a, par la borne de Johnson [42], au plus la valeur $\frac{(n-1)(n^2-3n-4)}{24} + \lfloor \frac{n-5}{12} \rfloor$. Par conséquent, le nombre minimum $\theta(n)$ de systèmes stables disjoints $P(3, 4, n)$ qui partitionnent tous les quadruplés d'un ensemble à n éléments vérifie $\theta(n) \geq n - 1$ si $n \equiv 5 \pmod{6}$ et $\theta(n) \geq n - 2$ sinon.

Dans [31], Etzion prouvait que $\theta(n) \leq n - 2$ si $n = 2^i$ ($i \geq 3$). L'égalité $\gamma_{n;3,5} = n - 2$ s'obtient donc à partir du Lemme 4.1 pour cette valeur de n . Graham et Sloane [36] prouvait que $\theta(n) \leq n$ pour tout n . Ainsi, nous obtenons $\gamma_{n;3,5} \in \{n - 1, n\}$ si $n \equiv 5 \pmod{6}$ et $\gamma_{n;3,5} \in \{n - 2, n - 1, n\}$ sinon. En particulier, il était prouvé par Van Paul et Etzion [76] que $\theta(n) \leq n - 1$ si $n = 3 \cdot 2^i$ et par Brouwer et al [17] que $\theta(n) \leq n - 1$ si $n = 5 \cdot 2^i$ ou $n = 7 \cdot 2^i$. Par suite, nous avons encore $\gamma_{n;3,5} \in \{n - 2, n - 1\}$ si $n = 3 \cdot 2^i$, $\gamma_{n;3,5} = n - 1$ si $n = 5 \cdot 2^i$ et $\gamma_{n;3,5} \in \{n - 2, n - 1\}$ si $n = 7 \cdot 2^i$.

Théorème 4.15 [12] *Pour tout l fixé, nous avons, $\gamma_{n;l,l+2} = n(1 + o(1))$ lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Dans l'ordre de prouver le théorème, énonçons un résultat de Spencer et Pippenger [56].

Rappelons que pour un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$, l'indice chromatique $\chi(\mathcal{H})$, est le plus petit nombre de couplages qui partitionnent l'ensemble de ses arêtes. $\mathcal{H}$ est dit k -uniforme si pour tout j , $|E_j| = k$.

Théorème 4.16 [56]

Soit k , $k \geq 2$, un nombre naturel fixé et soit $\mathcal{H}_n = ([n], E_n)$ une séquence d'hypergraphes k -uniformes tels que pour $n \rightarrow \infty$

$$\min_{x \in [n]} \deg(x) = (\max_{x \in [n]} \deg(x))(1 + o(1)),$$

$$\max_{x, y \in [n], x \neq y} \text{codeg}(x, y) = (\max_{x \in [n]} \deg(x))o(1).$$

Alors $\chi(\mathfrak{H}_n) = (\max_{x \in [n]} \deg(x))(1 + o(1))$.

Preuve du Théorème 4.15

Considérons l'hypergraphe uniforme $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ dont les sommets sont tous les sous-ensembles à l éléments de $[n]$ et dont les arêtes sont les $(l+1)$ sous-ensembles à l éléments d'un ensemble à $(l+1)$ éléments. $\mathcal{H}$ vérifie les deux hypothèses du précédent Théorème 4.16 puisque pour tout $x, y \in V$, $x \neq y$, $\deg(x) = n - l$ et $\text{codeg}(x, y) = 0$ si $|x \cap y| = l - 1$ et 1 sinon. Il s'ensuit que $\chi(\mathcal{H})$, qui n'est autre que le nombre minimum de systèmes stables disjoints $P(l, l+1, n)$ qui partitionnent l'ensemble de tous les sous-ensembles à $(l+1)$ éléments, est asymptotiquement égal à n . Ainsi, à partir du Lemme 4.1, nous obtenons pour $n \rightarrow \infty$,

$$n - l \leq \gamma_{n;l,l+2} \leq n(1 + o(1))$$

c.à.d, $\gamma_{n;l,l+2} = n(1 + o(1))$. ■

Théorème 4.17 [12]. Nous avons pour $n > 7$

$$\gamma_{n;1,4} = \begin{cases} 2n - 1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod{6} \\ 2n - 2 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } 3 \pmod{6} \end{cases}$$

et

$$\gamma_{n;1,4} \in \begin{cases} \{2n - 2, 2n - 1, 2n\} & \text{si } n \equiv 5 \pmod{6} \\ \{2n - 1, 2n\} & \text{si } n \equiv 4 \pmod{6}. \end{cases}$$

Preuve. Soit A un sous-ensemble de sommets de $\mathcal{H}_{n;1,4}$ dont les éléments contiennent 1. A n'a pas moins de $2n - 2$ couleurs si n est impair et $2n - 1$ si n est pair. En effet, il suffit de remarquer que l'ensemble $A_1 = \{\{1\}, \{1, i\}, i = 2, \dots, n\}$ utilise exactement n couleurs et l'ensemble $A_2 = \{\{1, i, j\}, i, j \in \{2, \dots, n\}, i \neq j\}$, qui est isomorphe à $\binom{[n-1]}{2}$, utilise au moins $n - 2$ couleurs si $n - 1$ est pair (à partir de la factorisation du graphe complet sur $\{2, \dots, n\}$) et $n - 1$ couleurs si $n - 1$ est impair. De plus,

une couleur dans A_1 ne peut pas apparaître dans A_2 car sinon, il existerait une arête contenant ces deux sommets de même couleur. Il s'ensuit, $\gamma_{n;1,4} \geq 2n - 2$ si n est impair et $\gamma_{n;1,4} \geq 2n - 1$ si n est pair.

Pour déterminer les bornes supérieures de $\gamma_{n;1,4}$, il suffit d'obtenir une coloration des sommets de $P_{n;1,3}$ puisque dans tous les cas la couleur de chaque quadruplet peut être choisie parmi celle des triplets.

Cas 1. $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$, $n \neq 7$.

Considérons une “presque” 1-factorisation $\{F_1, \dots, F_n\}$ de K_n (c.à.d., une 1-factorisation de K_{n+1} où les paires $\{i, n+1\}$ sont substituées par des sommets isolés $\{i\}$) et un ensemble large d'un systèmes triple de Steiner $LTS(n)$ $\{S_1, \dots, S_{n-2}\}$ (qui existe puisque $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$, ($n \neq 7$)). Si nous choisissons la couleur i (resp. $n+j$) pour les éléments de F_i (resp. S_j), nous obtenons immédiatement $\gamma_{n;1,4} \leq 2n - 2$.

Cas 2. $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{6}$, $n \neq 6$.

Utilisant la parité de n et le fait que $n+1 \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$, $n+1 \neq 7$, nous aurons d'une part une factorisation de $\binom{[n]}{2}$ en $n-1$ facteurs et d'autre part l'existence d'un ensemble large $LTS(n+1)$. La suppression des $n/2$ triplets contenant $n+1$ dans chaque $STS(n+1)$, et le rajout d'une couleur supplémentaire pour tous les singletons produit $\gamma_{n;1,4} \leq (n-1) + (n-1) + 1 = 2n - 1$.

Cas 3. $n \equiv 5 \pmod{6}$, $n \neq 5$.

A partir des articles de Etzion [29, 30], nous savons que $\binom{[n]}{3}$ peut être partitionné en n PTs , et avec une “presque” 1-factorisation de K_n nous déduisons que $\mathcal{H}_{n;1,4}$ est $2n$ -colorable pour $n > 5$.

Cas 4. $n \equiv 4 \pmod{6}$, $n \neq 4$.

La factorisation de $\binom{[n]}{2}$ et la partition de $\binom{[n]}{3}$ en n PTs [29, 30] produit $2n - 1$ couleurs. Si nous additionnons une nouvelle couleur pour l'ensemble des singletons, nous aurons $\gamma_{n;1,4} \leq 2n - 1$ dès que $n > 4$. ■

Chapitre 5

Hypergraphe des intervalles de la classe des ordres d'intervalles

Un poset P est appelé *ordre d'intervalles* s'il existe une application φ de P dans l'ensemble des intervalles fermés de la droite réelle $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p, q \in P$:

$$p < q \text{ dans } P \iff \sup \varphi(p) < \inf \varphi(q) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

En particulier, tout sous-poset d'un ordre d'intervalles est un ordre d'intervalles. La fonction φ est appelée *représentation par intervalles* du poset P . Dans ce qui suit, nous notons par $l(p)$ (resp. $r(p)$) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'intervalle $\varphi(p)$.

Par exemple dans la Figure 1, P est un ordre d'intervalles mais pas Q .

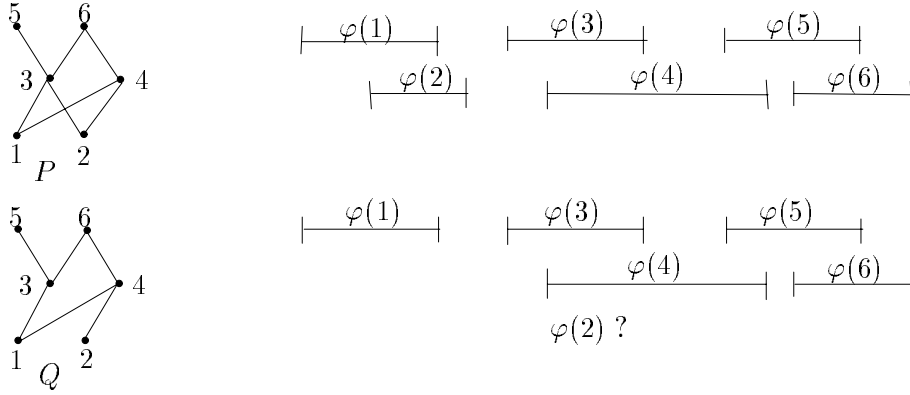


Figure 1.

L'ordre d'intervalles P a suscité l'attention d'un bon nombre de chercheurs. Entre autres, Fishburn [32] l'a caractérisé par la non-existence d'un sous-poset isomorphe à la somme disjointe de deux chaînes de longueur 1 et a proposé un procédé pour la détermination de sa magnitude (c.à.d. le nombre d'antichaînes maximales). Möhring [53] s'est intéressée à l'aspect algorithmique et dans [2], [7], [57], [58], on y trouve l'étude de la dimension de P (c.à.d. le plus petit entier positif t pour lequel il existe t extensions linéaires de P dont leur intersection vaut exactement P où une extension de P est un poset qui contient P).

Soit, brièvement $\mathcal{H} = (P, \mathcal{I})$ l'hypergraphe des intervalles maximaux de P .

5.1 Propriété de König

Théorème 5.1 [10] *Si P est un ordre d'intervalles, alors $\mathcal{H}$ a la propriété de König, c.à.d. $\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H})$.*

Preuve. Nous établirons la preuve par le biais d'un algorithme. Ce dernier consiste en deux phases. Dans la première phase, la *phase primale*, nous

construirons un couplage. Dans la seconde phase, la *phase duale*, nous déterminerons un recouvrement par sommets qui sera de même cardinalité que le couplage, ce qui signifiera qu'il s'agit d'un couplage maximum et d'un recouvrement minimum.

Soient $p_1, \dots, p_s$ les éléments minimaux de P où sans perte de généralité, $r(p_1) \geq \dots \geq r(p_s)$, et soient $q_1, \dots, q_t$ les éléments maximaux de P où sans perte de généralité, $l(q_1) \geq \dots \geq l(q_t)$. Nous pouvons supposer aussi que P n'a pas de points isolés (des points qui sont à la fois maximaux et minimaux), c.à.d. $r(p_1) < l(q_1)$ et $r(p_s) < l(q_t)$ car si de tels sommets existent, ils peuvent être supprimés itérativement et rajoutés à la fin de l'algorithme dans le recouvrement par sommets et, comme des arêtes à un élément, dans le couplage.

Définissons les fonctions $f : \mathcal{I}(P) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathcal{I}(P) \longrightarrow P$ de la manière suivante:

Pour $I = [p, q] \in \mathcal{I}(P)$ soient

$$\begin{aligned} f(I) &:= \begin{cases} l(q) & \text{si } p \prec q, \\ \min\{r(v) : p < v < q\} & \text{sinon,} \end{cases} \\ F(I) &:= \begin{cases} q & \text{si } p \prec q, \\ \text{n'importe quel } v \text{ vérifiant } p < v < q, r(v) = f(I) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Phase primale - Algorithme de couplage

Initialisation: Soient $j_1 := k_1 = 1$, $I_1 := [p_{j_1}, q_{k_1}]$, $\mathcal{M} := \{I_1\}$.

Itération i : Déterminer

$$\begin{aligned} k_{i+1} &:= \min\{h : k_i < h \leq t \text{ et } l(q_h) \leq f(I_i)\}, \\ j_{i+1} &:= \min\{g : j_i < g \leq s \text{ et } r(p_g) < l(q_{k_{i+1}})\}. \end{aligned}$$

Si un des deux minimums n'existe pas, alors stop. Sinon soit $I_{i+1} := [p_{j_{i+1}}, q_{k_{i+1}}]$, $\mathcal{M} := \mathcal{M} \cup \{I_{i+1}\}$, et retourner.

A la fin de cette phase, nous obtenons un ensemble d'arêtes $\mathcal{M} = \{I_1, \dots, I_\nu\}$ qui forme évidemment un couplage. La lettre ν est déjà introduite ici comme nombre d'arêtes du couplage mais sa valeur ne sera égale à $\nu(\mathcal{H})$ qu'après la vérification de la deuxième phase. Afin de rendre la description et la vérification de l'algorithme plus simple, introduisons un élément minimal fictif p_{s+1} et un élément maximal fictif $q_{t+1} \neq p_{s+1}$, et posons $j_{\nu+1} := s + 1$, $k_{\nu+1} := t + 1$.

Phase duale - Algorithme de recouvrement par sommets

Initialisation: Soit $c_{\nu+1} := p_{j_{\nu+1}}$, $T := \emptyset$.

Itération i ($i = \nu, \nu - 1, \dots, 1$): Si $j_{i+1} - j_i = 1$ et $c_{i+1} \neq q_{k_{i+1}}$ alors poser $c_i := p_{j_i}$, sinon poser $c_i := F(I_i)$;

Soit $T := T \cup \{c_i\}$, et retourner jusqu'à $i = 1$.

Soit à la fin de cet algorithme $T = \{c_\nu, c_{\nu-1}, \dots, c_1\}$. Vérifions que T est bien un recouvrement par sommets.

Tout d'abord, nous ferons deux observations préliminaires qui nous seront utiles pour le développement de la preuve.

Observation 1 Si $i < \nu$ et $j_i < g < j_{i+1}$, alors $r(p_g) \geq l(q_{k_{i+1}})$.

Preuve. En effet, si $r(p_g) < l(q_{k_{i+1}})$, on aurait une contradiction dans le choix de j_{i+1} dans la phase primale. ■

Observation 2 Si $c_{i+1} = q_{k_{i+1}} \in T$ mais $q_{k_{i+1}-1} \notin T$, alors $p_{j_i} \not\prec q_{k_i}$ et $c_i < q_m$ pour tout $m = 1, \dots, k_{i+1} - 1$.

Preuve. Par construction, $c_i = F(I_i)$. Si $k_i = k_{i+1} - 1$, la définition de F implique $p_{j_i} \not\prec q_{k_i}$ et $c_i < q_{k_i}$. Puisque $l(q_1) \geq \dots \geq l(q_{k_i})$, il s'ensuit aussi $c_i < q_m$, $m = 1, \dots, k_{i+1} - 1 = k_i$. Maintenant si $k_i < k_{i+1} - 1$, nous obtenons, d'après le choix de k_{i+1} dans la phase primale, $l(q_{k_i}) \geq l(q_{k_{i+1}-1}) > f(I_i) = r(c_i)$ qui implique $c_i < q_{k_{i+1}-1}$, c.à.d. $c_i < q_m$, pour $m = 1, \dots, k_{i+1} - 1$, et en particulier $p_{j_i} \not\prec q_{k_i}$. ■

Revenons à notre but initial, à savoir la vérification que T est un recouvrement par sommets. Soient $\mathcal{I}_i$ (resp. $\mathcal{I}^i$) une famille d'intervalles de $\mathcal{I}(P)$ dont les éléments minimaux (resp. maximaux) appartiennent à $\{p_{j_i}, p_{j_i+1}, \dots, p_{j_{i+1}-1}\}$ (resp. $\{q_{k_i}, q_{k_i+1}, \dots, q_{k_{i+1}-1}\}$) et dont les éléments maximaux (resp. minimaux) appartiennent à $\{q_1, \dots, q_{k_{i+1}-1}\}$ (resp. $\{p_1, \dots, p_{j_{i+1}-1}\}$). Il nous suffira seulement de vérifier que pour $i = \nu, \nu - 1, \dots, 1$ tous les intervalles de $\mathcal{I}_i \cup \mathcal{I}^i$ sont couverts par les éléments de T .

Cas 1. $j_{i+1} - j_i = 1$ et $c_{i+1} \neq q_{k_{i+1}}$.

Tous les intervalles de $\mathcal{I}_i$ sont couverts par $p_{j_i} = c_i$.

Considérons les intervalles de $\mathcal{I}^i$. Soit g le plus petit nombre entier tel que $p_{g+1}, p_{g+2}, \dots, p_{j_i} \in T$. Si $g = 0$, tous les intervalles de $\mathcal{I}^i$ sont couverts par $p_1, \dots, p_{j_i}$. Si $g > 0$, alors par construction, il existe $i' \in \{0, \dots, i - 1\}$

tel que $j_{i'} < g = j_{i'+1} - 1$. D'après l'Observation 1, $r(p_g) \geq l(q_{k_{i'+1}}) \geq l(q_{k_i})$. Donc les éléments minimaux des intervalles de $\mathcal{I}^i$ appartiennent à $\{p_{g+1}, p_{g+2}, \dots, p_{j_i}\}$ et ces intervalles sont tous couverts par T .

Cas 2. $j_{i+1} - j_i > 1$ ou $c_{i+1} = q_{k_{i+1}}$.

Nous distinguons deux sous-cas suivant que c_i et q_{k_i} sont égaux ou non.

Cas 2.1. $c_i = q_{k_i}$.

Alors $p_{k_i} \prec q_{k_i}$ et l'itération i de la phase primale implique $k_{i+1} - k_i = 1$. Tous les intervalles appartenant à $\mathcal{I}^i$ sont couverts par q_{k_i} . Considérons maintenant les intervalles de $\mathcal{I}_i$. Soit h le plus petit nombre naturel tel que $q_{h+1}, q_{h+2}, \dots, q_{k_i} \in T$. Si $h = 0$, tous les intervalles de $\mathcal{I}^i$ sont couverts par $q_1, \dots, q_{k_i}$. Si $h > 0$, alors, par construction, il existe $i' \in \{0, \dots, i-1\}$ tel que $h = k_{i'+1} - 1$. De l'Observation 2, nous déduisons que $c_i = F(I_i) < q_m$, $m = 1, \dots, h$. Par conséquent, les intervalles de $\mathcal{I}_i$ sont couverts par $q_{k_i}, \dots, q_{h+1}$ ou $c_{i'}$ (notons que $p_{j_{i'}} < c_{i'}$ et $r(p_{j_{i'}}) \geq r(p_{j_{i'}+1}) \geq \dots \geq r(p_s)$).

Cas 2.2. $c_i \neq q_{k_i}$.

Alors, par construction de k_{i+1} dans la phase primale, $r(c_i) = f(I_i) < l(q_{k_{i+1}-1})$. Ainsi tous les intervalles de $\mathcal{I}_i$ sont couverts par c_i . Il reste à étudier les intervalles de $\mathcal{I}^i \setminus \mathcal{I}_i$. Soit g le plus grand nombre naturel inférieur à k_i tel que $p_g \notin T$ (si $g < k_i - 1$, alors $p_{g+1}, \dots, p_{k_i-1} \in T$). Par construction, il existe $i' \in \{0, \dots, i-1\}$ tel que $j_{i'} < g = j_{i'+1} - 1$. Maintenant l'Observation 1 produit $r(p_g) \geq l(q_{k_{i'+1}}) \geq l(q_{k_i})$. Par suite, si $g = k_i - 1$, il n'existe pas d'autres intervalles dans $\mathcal{I}^i \setminus \mathcal{I}_i$ et si $g < k_i - 1$, tous ces intervalles sont couverts par $p_{g+1}, \dots, p_{k_i-1}$. ■

Considérons à titre d'application, l'ordre d'intervalles de la Figure 2. Dans le but de simplifier la figure, nous noterons brièvement sur chaque intervalle, p au lieu de $\varphi(p)$ et ne délimiterons pas leurs extrémités. Nous avons:

$$\begin{aligned} f([p_1, q_1]) &= l(q_1), f([p_2, q_1]) = l(q_2), f([p_2, q_2]) = l(q_3), f([p_2, q_3]) = r(v_4), \\ f([p_3, q_1]) &= r(v_3), f([p_3, q_2]) = r(v_3), f([p_3, q_3]) = r(v_3), f([p_3, q_4]) = l(q_4), \\ f([p_4, q_1]) &= r(v_3), f([p_4, q_2]) = r(v_3), f([p_4, q_3]) = r(v_3), f([p_4, q_4]) = l(q_4), \\ f([p_5, q_1]) &= r(v_3), f([p_5, q_2]) = r(v_3), f([p_5, q_3]) = r(v_3), f([p_5, q_4]) = l(q_4), \\ f([p_6, q_1]) &= r(v_7), f([p_6, q_2]) = r(v_7), f([p_6, q_3]) = r(v_7), f([p_6, q_4]) = r(v_7), \\ f([p_6, q_5]) &= l(q_4). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F([p_1, q_1]) &= q_1, & F([p_2, q_1]) &= q_2, & F([p_2, q_2]) &= q_3, & F([p_2, q_3]) &= v_4, \\
F([p_3, q_1]) &= v_3, & F([p_3, q_2]) &= v_3, & F([p_3, q_3]) &= v_3, & F([p_3, q_4]) &= q_4, \\
F([p_4, q_1]) &= v_3, & F([p_4, q_2]) &= v_3, & F([p_4, q_3]) &= v_3, & F([p_4, q_4]) &= q_4, \\
F([p_5, q_1]) &= v_3, & F([p_5, q_2]) &= v_3, & F([p_5, q_3]) &= v_3, & F([p_5, q_4]) &= q_4, \\
F([p_6, q_1]) &= v_7, & F([p_6, q_2]) &= v_7, & F([p_6, q_3]) &= v_7, & F([p_6, q_4]) &= v_7, \\
F([p_6, q_5]) &= q_4.
\end{aligned}$$

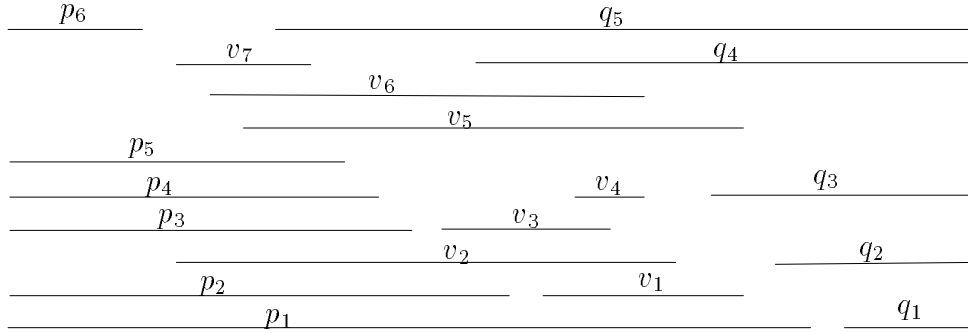


Figure 2.

L'algorithme du couplage donne:

1. $j_1 := k_1 := 1$; $I_1 := [p_1, q_1]$; $\mathcal{M} := \{I_1\}$.
2. $k_2 := \min\{h : 1 < h \leq 5 \text{ et } l(q_h) \leq l(q_1)\} = 2$, $j_2 := \min\{g : 1 < g \leq 6 \text{ et } r(p_g) < l(q_2)\} = 2$; $I_2 := [p_2, q_2]$; $\mathcal{M} := \{I_1, I_2\}$.
3. $k_3 := \min\{h : 2 < h \leq 5 \text{ et } l(q_h) \leq r(v_4)\} = 4$, $j_3 := \min\{g : 2 < g \leq 6 \text{ et } r(p_g) < l(q_4)\} = 3$; $I_3 := [p_3, q_4]$; $\mathcal{M} := \{I_1, I_2, I_3\}$.
4. $k_4 := \min\{h : 4 < h \leq 5 \text{ et } l(q_h) \leq l(q_4)\} = 5$, $j_4 := \min\{g : 3 < g \leq 6 \text{ et } r(p_g) < l(q_5)\} = 6$; $I_4 := [p_6, q_5]$; $\mathcal{M} := \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$.

L'algorithme s'arrête après trois itérations et le couplage est donné par la famille $\mathcal{M} = \{[p_1, q_1], [p_2, q_2], [p_3, q_4], [p_6, q_5]\}$.

Introduisons un élément minimal fictif p_7 et un élément maximal fictif q_6 tels que $p_7 \neq q_6$. Posons $j_5 = 7$ et $k_5 = 6$. L'algorithme du recouvrement par sommets produit:

1. $c_5 := p_7$, $T := \emptyset$
2. $j_5 - j_4 = 1$ et $c_5 \neq q_6$ donc $c_4 := p_6$; $T := \{p_6\}$.
3. $j_4 - j_3 = 3$ donc $c_3 := F([p_3, q_4]) := q_4$; $T := \{p_6, q_4\}$.

4. $c_3 = q_4$ donc $c_2 := F([p_2, q_2]) := v_4$; $T := \{p_6, q_4, v_4\}$.
 5. $j_2 - j_1 = 1$ et $c_2 := v_4 \neq q_2$ donc $c_1 := p_1$; $T := \{p_6, q_4, v_4, p_1\}$.

Remarque 5.1 *Si les éléments de P (comme intervalles sur la droite réelle) sont donnés par leur deux extrémités, alors notre algorithme est polynomial, de complexité $O(|P|^2)$ puisque après avoir ordonné les extrémités gauches et les extrémités droites, chaque itération peut être exécutée en un temps de $O(|P|)$.*

Comme cela a été déjà mentionné au premier chapitre, la normalité d'un hypergraphe $\mathcal{H}$, c.à.d. la réalisation de la propriété de Helly et la perfection du graphe $L(\mathcal{H})$, est une condition suffisante pour qu'il satisfasse la propriété de König. Si P est l'ordre des intervalles, alors $\mathcal{H}$ n'est pas nécessairement normal. En effet, si nous considérons l'ordre des intervalles donné dans la Figure 3.

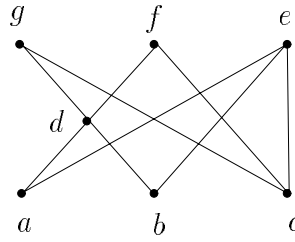


Figure 3.

et représenté par les intervalles $\varphi(a) = [0, 3], \varphi(b) = [1, 4], \varphi(c) = [2, 6], \varphi(d) = [5, 8], \varphi(e) = [7, 11], \varphi(f) = [9, 12], \varphi(g) = [10, 13]$, son graphe représentatif des arêtes $L(\mathcal{H})$ contient le cycle de longueur 5 $([a, e], [c, e], [c, g], [b, g], [a, f])$. D'où $L(\mathcal{H})$ n'est pas parfait. Concernant le dual de $\mathcal{H}$, nous verrons qu'au contraire, il est normal.

5.2 Propriété duale de König

Nous établirons deux preuves pour la propriété duale de König. La première repose sur la normalité de l'hypergraphe $\mathcal{H}^*$ et la seconde se fera à travers un algorithme. Un graphe G est *parfaitement ordonnable* s'il admet une orientation acyclique de ses arêtes telle qu'il n'existe pas de sous-graphe

induit isomorphe au graphe de la Figure 4. Chvátal introduisait les graphes parfaitement ordonnables et prouvait qu'ils étaient parfaits [20].

Théorème 5.2 *Si P est un ordre d'intervalles, alors le dual de l'hypergraphe des intervalles de P est normal, en particulier $\alpha(\mathcal{H}(P)) = \rho(\mathcal{H}(P))$.*

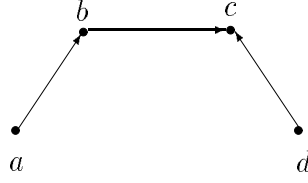


Figure 4.

Preuve. La première étape consiste à prouver la propriété de Helly. Nous utilisons le résultat de Gilmore (voir Chapitre 1) qui se traduit dans nos hypergraphes par: A chaque trois intervalles maximaux $[p_1, q_1]$, $[p_2, q_2]$, $[p_3, q_3]$, il existe un intervalle $[p, q]$ contenant $([p_1, q_1] \cap [p_2, q_2]) \cup ([p_1, q_1] \cap [p_3, q_3]) \cup ([p_2, q_2] \cap [p_3, q_3])$. Choisissons p (resp. q) un élément parmi $\{p_1, p_2, p_3\}$ (resp. $\{q_1, q_2, q_3\}$) qui apparaît au moins deux fois si $|\{p_1, p_2, p_3\}| \leq 2$ (resp. $|\{q_1, q_2, q_3\}| \leq 2$) et sous la condition $r(p) \leq r(p_i)$, $i = 1, 2, 3$ (resp. $l(q) \geq l(q_i)$, $i = 1, 2, 3$), sinon. Ainsi construit, l'intervalle $[p, q]$ satisfait la condition désirée.

La deuxième étape consiste à prouver la perfection du graphe $L(\mathcal{H}^*)$. Les sommets de $L(\mathcal{H}^*)$ sont les points de P et deux sommets v et w sont adjacents s'il existe un intervalle contenant v et w . Puisque P est fini, nous pouvons supposer sans perte de généralité que les $|P|$ extrémités droites $r(p)$, $p \in P$, sont deux à deux distincts (dans le cas où deux extrémités se trouvent confondues, une petite translation est toujours possible). A toute arête vw de $L(\mathcal{H}^*)$, nous lui associons l'orientation $\overrightarrow{vw}$ si $r(v) < r(w)$. Il s'agit bien d'une orientation acyclique. Supposons qu'il existe un sous-graphe induit isomorphe au graphe de la Figure 4. Donc $r(a) < r(b) < r(c)$, $r(d) < r(c)$, et il existe trois intervalles $[p_1, q_1]$, $[p_2, q_2]$, $[p_3, q_3]$ contenant a et b , b et c , c et d respectivement.

Cas 1. $a \neq p_1$.

Prenons $p \in \{p_1, p_2\}$ tel que $r(p) \leq r(p_i)$, $i = 1, 2$. Nous montrons que $[p, q_2]$ contient a et c . Bien sûr, $c \leq q_2$, et puisque $p_1 < a$, nous avons $p < a$. Si $c = p_2$, alors (puisque $b, c \in [p_2, q_2]$), $c < b$, c.à.d. $r(c) < l(b) \leq r(b)$, une contradiction. Par conséquent, $p_2 < c$, impliquant $p < c$. Si $c = q_2$, alors $b < c$ impliquant $a < c = q_2$. Si $c \neq q_2$, alors $c < q_2$ impliquant $a < q_2$.

Cas 2. $a = p_1$.

Alors $a < b$, c.à.d. $r(a) < l(b)$ et puisque ac et ad ne sont pas des arêtes, $r(a) \geq l(c), r(a) \geq l(d)$. De plus, $c < q_2$, c.à.d. $r(c) < l(q_2)$, puisque $c = q_2 > b$ est impossible du fait que $l(c) \leq r(a) < r(b)$. Nous verrons maintenant que l'intervalle $[p_3, q_2]$ contient b et d : Si $d \neq p_3$, alors $r(p_3) < l(d) \leq r(a) < l(b) \leq r(b) < r(c) < l(q_2), r(d) < r(c) < l(q_2)$. Si $d = p_3$, alors $r(d) < l(c) \leq r(a) < l(b) \leq r(b) < r(c) < l(q_2)$ et donc bd serait une arête, contradiction. ■

Passons maintenant à la preuve algorithmique de $\alpha = \rho$. Nous allons décrire un algorithme polynomial qui détermine $\alpha(\mathcal{H}(P))$ et $\rho(\mathcal{H}(P))$ et à partir duquel, la propriété duale de König est déduite. Supposons sans perte de généralité que P n'a pas de points isolés (sinon on démarre l'algorithme par leur suppression puis à la fin par leur insertion dans l'ensemble stable et comme intervalles à un élément dans le recouvrement par arêtes).

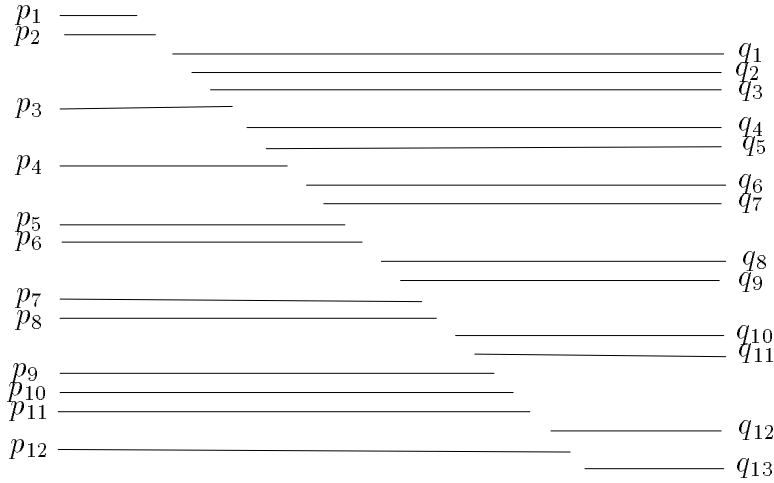
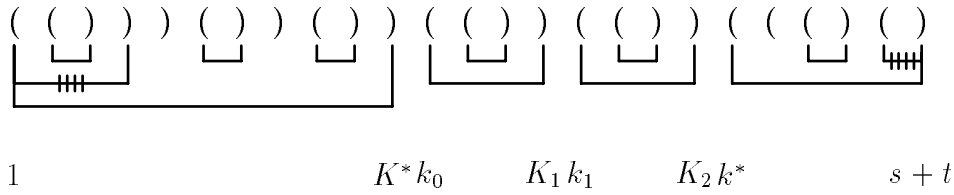


Figure 5.

Soient $p_1, \dots, p_s$ les éléments minimaux de P où $r(p_1) \leq \dots \leq r(p_s)$ et soient $q_1, \dots, q_t$ les éléments maximaux de P où $l(q_1) \leq \dots \leq l(q_t)$. Considérons r (resp. l) comme un vecteur à s éléments (resp. t éléments) où ses composantes sont les $r(p_i)$, $i = 1, \dots, s$ (resp. $l(q_j)$, $j = 1, \dots, t$). Maintenant nous utilisons la procédure “two-way merging” [64] pour obtenir un vecteur ordonné a à $s+t$ composantes, c.à.d. $a(1) \leq \dots \leq a(s+t)$ et chaque nombre $r(p_i), l(q_j)$ apparaît exactement une fois dans $(a(1), \dots, a(s+t))$. Si le cas $r(p_i) = l(q_j)$ se présente, alors $l(q_j)$ apparaît avant $r(p_i)$, c.à.d. que les nombres $l(q_j)$ seront prioritaires par rapport aux nombres $r(p_i)$. Sur la droite réelle, posons au point k , une parenthèse gauche “(” si $a(k)$ est un certain $r(p_i)$ et une parenthèse droite “)” si $a(k)$ est un certain $l(q_j)$. Ainsi pour l'exemple de la Figure 5, nous obtenons la séquence



Chaque séquence possède un unique parenthésage obtenu de la manière suivante: On ferme une parenthèse gauche avec une parenthèse droite si celles-ci sont soit adjacentes soit séparées par de telles paires. Nous répétons ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de couplage possible. Le parenthésage n'est en fait qu'une illustration puisqu'elle représente la procédure “two-way merging” utilisée simultanément avec la pile LIFO. A la fin, les parenthèses restantes, appelées *parenthèses libres* forment une séquence de parenthèses droites suivies de parenthèses gauches. Dans l'exemple de la Figure 5, c'est

))) ((

La première (resp. dernière) parenthèse est gauche (resp. droite) car sinon q_1 (resp. p_s) serait un point isolé. Soit au point K^* , la dernière parenthèse libre droite (qui provient de l'élément maximal q^*) et soit au point k^* la première parenthèse libre gauche (qui provient de l'élément minimal p^*). S'il n'existe pas de parenthèses libres droites, nous posons $K^* := 0$, $a(0) := -\infty$, et s'il n'existe pas de parenthèses libres gauches, nous posons $k^* := s+t+1$, $a(s+t+1) := +\infty$. Procédons à un petit changement dans le parenthésage. S'il existe des parenthèses libres droites, nous couplons la parenthèse gauche

au point 1 avec la parenthèse droite au point K^* et s'il existe des parenthèses libres gauches, nous couplons la parenthèse droite au point $s + t$ avec la parenthèse gauche au point k^* .

Entre les parenthèses aux points K^* et k^* , il existe des blocs complets de parenthèses fermées: $(k_0, K_1), (k_1, K_2), \dots, (k_{b-1}, K_b)$, où $k_0 = K^* + 1, k_1 = K_1 + 1, \dots, k_{b-1} = K_{b-1} + 1, k^* = K_b + 1, b \in \mathbb{N}$. Posons $K_0 := K^*$ et $k_b := k^*$. Pour $c \in \{0, \dots, b\}$, considérons l'ensemble

$$A_c := \{p \in \{p_1, \dots, p_s\} : r(p) \geq a(k_c)\} \cup \{q \in \{q_1, \dots, q_t\} : l(q) \leq a(K_c)\}.$$

A_c est un ensemble stable car si p et q sont dans A_c , nous obtenons $l(q) \leq a(K_c) < a(k_c) \leq r(p)$, c.à.d. $p \not\prec q$.

Soit $\mathcal{R}_1$ l'ensemble de tous les intervalles maximaux provenant des paires de parenthèses fermées. Nous définissons un autre ensemble $\mathcal{R}_2$ d'intervalles maximaux de la manière suivante: A chaque parenthèse libre gauche (resp. droite) correspondant à un certain p_i (resp. q_j), nous prenons un intervalle maximal quelconque ayant p_i (resp. q_j) comme élément minimal (resp. maximal). Ces intervalles formeront les éléments de $\mathcal{R}_2$.

Si nous regardons l'exemple de la Figure 5, $\mathcal{R}_1$ représente l'ensemble

$\{[p_1, q_7], [p_2, q_1], [p_3, q_4], [p_4, q_6], [p_5, q_9], [p_6, q_8], [p_7, q_{11}], [p_8, q_{10}], [p_9, q_{13}], [p_{11}, q_{12}]\}$ et $\mathcal{R}_2$ peut être donné par la famille

$$\{[p_{10}, q_{13}], [p_{11}, q_{13}], [p_1, q_2], [p_1, q_3], [p_1, q_5]\}.$$

Puisque les parenthèses libres droites (resp. gauche) sont avant k_0 (resp. après K_b), nous avons $|\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2| = |A_c|$ pour chaque $c = 0, \dots, b$ et tous les éléments minimaux et maximaux de P sont couverts par $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

Cas 1. $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est un recouvrement par arêtes de $\mathcal{H}(P)$.

Donc nous avons un recouvrement par arêtes $\mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ de même cardinalité que l'ensemble stable $A := A_0$. Ils sont par conséquent optimaux.

Cas 2. $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ n'est pas un recouvrement par arêtes.

Prouvons alors que $\mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \{[p_1, q_t]\}$ est un recouvrement par arêtes optimal. Comme $[p_1, q_t]$ couvre tous les éléments qui ne sont ni maximaux ni minimaux dans P , $\mathcal{R}$ représente un recouvrement par arêtes. Pour son optimalité, nous avons à construire un ensemble stable de taille $|A_c| + 1$ pour un certain c que l'on définira. Parceque $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ couvre les éléments minimaux et maximaux mais pas tous les éléments de P , il existe un élément v de P (v n'est ni un élément minimal ni un élément maximal) non couvert par $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Nous avons $r(v) \geq a(K_0)$: Ceci est clair si $K_0 = 0$ et si $K_0 > 0$, c.à.d. $a(K_0) = l(q^*)$, l'intervalle $[p_1, q^*]$ de $\mathcal{R}_1$ couvrirait v si $r(v) < a(K_0)$. Soit c le plus grand entier de l'ensemble $\{0, \dots, b\}$ vérifiant

$r(v) \geq a(K_c)$. Montrons que $l(v) \leq a(k_c)$: Supposons le contraire. Si $c < b$, alors $a(k_c) < l(v) < r(v) < a(k_{c+1})$ et par suite l'élément v serait couvert par l'intervalle de P défini par la paire fermée (k_c, K_{c+1}) . Si $c = b$, alors nécessairement $K_b < s + t$ (sinon v serait un élément maximal), c.à.d. $k^* = k_b \leq s + t$ et il existerait des parenthèses libres gauches. Ainsi v serait couvert par $[p^*, q_t]$.

En définitif, nous avons bien construit un ensemble stable $A_c \cup \{v\}$ car pour les éléments minimaux p de A_c , nous avons $l(v) \leq a(k_c) \leq r(p)$, c.à.d. $p \not\leq v$, et pour les éléments maximaux q de A_c , nous avons $l(q) \leq a(K_c) \leq r(v)$, c.à.d. $v \not\leq q$.

Remarque 5.2 *Si les éléments de P (comme intervalles sur la droite réelle) sont donnés par leurs deux extrémités, l'algorithme décrit ci-dessus est polynomial. Sa complexité est en $O(|P|^2)$ puisque l'ordre, la procédure "two-way merging" et le parenthésage sont exécutés en temps $O(|P| \log |P|)$ et pour tester si $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est un recouvrement par arêtes, nous avons besoin d'un temps en $O(|P|^2)$.*

5.3 Sur le nombre chromatique et le nombre de k -stabilité

Soit P un ordre d'intervalles à n éléments. Désignons par $\mathcal{M} = \{p_1, \dots, p_s\}$ l'ensemble des éléments minimaux de P où $r(p_1) \leq \dots \leq r(p_s)$ et par $\mathcal{N} = \{q_1, \dots, q_t\}$ l'ensemble des éléments maximaux de P où $l(q_1) \leq \dots \leq l(q_t)$.

Théorème 5.3 *Si P est un ordre d'intervalles, nous avons $\gamma(\mathcal{H}(P)) = n - s - t + 2$.*

Preuve. Puisque l'intervalle $[p_1, q_t]$ dans P doit contenir $n - s - t + 2$ différentes couleurs, nous obtenons $n - s - t + 2 \leq \gamma(\mathcal{H})$. D'autre part, si nous affectons aux éléments restants $p_2, \dots, p_s, q_1, \dots, q_{t-1}$ la couleur $c(p_i) = c(p_1)$ pour tout $i \geq 2$ et $c(q_j) = c(q_t)$ pour tout $j \leq t - 1$, l'inégalité $\gamma(\mathcal{H}) \leq n - s - t + 2$ en découle. Ainsi, $\gamma(\mathcal{H}) = n - s - t + 2$. ■

Nous avons introduit dans le Chapitre 4 la notion de k -stabilité qui généralise celle de stabilité. Rappelons qu'un ensemble A est appelé k -stable si chaque

intervalle maximum de P contient au plus k éléments de A . Le nombre de k -stabilité, noté $\alpha_k(\mathcal{H})$, représente la taille maximum d'un ensemble k -stable.

Théorème 5.4 *Si P est l'ordre des intervalles, nous avons $\alpha_k(\mathcal{H}(P)) = s + t + k - 2$ dès que $|P| \geq s + t + k - 2$ et $k > 1$.*

Preuve. “ $\geq$ ”. Soit Q un sous-ensemble de sommets de $P - (\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$ de taille $k - 2$. Il est clair que l'ensemble $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} \cup Q$ est un ensemble k -stable de $\mathcal{H}(P)$ de cardinalité $r + s + k - 2$.

“ $\leq$ ”. Soit A un ensemble k -stable de $\mathcal{H}(P)$.

Parce que l'intervalle $[p_1, q_t]$ de P ne peut avoir plus de k points de A , nous avons $|((P - \mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \cup \{p, q\}) \cap A| \leq k$. Ainsi, $|A| \leq k + (|\mathcal{M}| + |\mathcal{N}| - 2)$. ■

Chapitre 6

La propriété duale de König dans le cas général et pour les classes des ordres SSSC et SSC

Soient P un poset de rang $r(P)$ et $P_{l,u}$ le sous-poset induit par l'union des niveaux consécutifs $\cup_{i=l}^u N_i$ de P où $0 \leq l \leq u \leq r(P)$.

Dans [78], Voigt et Wegener prouvaient la propriété forte IC pour le treillis Booléen. Les intervalles provenant du recouvrement minimum permettent de construire le polynôme minimal représentant une fonction Booléenne symétrique. Nous déterminons cette propriété d'une manière tout à fait différente. Ce résultat conduit Voigt [77] à poser la question si le treillis linéaire $L_n(q)$ a la propriété forte IC. Malheureusement, cette question reste ouverte à ce jour. Néanmoins, nous prouvons dans le Chapitre 8 qu'il possède la propriété forte IS.

6.1 Propriété duale de König dans le cas général

Théorème 6.1 [9] $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König si une des conditions suivantes est réalisée.

- (a) $W_0 = 1$ ou $W_r(P) = 1$,
- (b) $r(P) = 1$,
- (c) le diagramme de HASSE de P est un arbre,
- (d) $W_0 = W_r(P) = 2$.

Preuve. L'égalité est évidente dans le cas de (a) et vaut $\max\{|W_0|, |W_{r(P)}|\}$. Dans les cas (b) et (c), l'égalité est aussi vérifiée et vaut $w(P)$ (la largeur de P) d'après le Théorème de Dilworth.

Prouvons (d). $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König ssi $\mathcal{H}^*(P)$ a la propriété de König. Or l'unimodularité [3] de l'hypergraphe $\mathcal{H}^*(P)$ en est une condition suffisante. Il faut donc que la matrice d'incidence de $\mathcal{H}^*(P)$ soit totalement unimodulaire (le déterminant de chaque sous-matrice carrée est égal à -1, 0 ou 1). Ce qui est équivalent à la vérification du critère de Ghouila-Houri (voir [3] page 438). Ceci se traduit dans notre cas par: Pour chaque $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$, on peut partitionner $\mathcal{I}'$ en $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ tels que pour chaque $x \in P$

$$-1 \leq |\{I \in \mathcal{I}_1 : x \in I\}| - |\{I \in \mathcal{I}_2 : x \in I\}| \leq 1.$$

Notons que le nombre d'arêtes de $\mathcal{H}(P)$ est au plus 4. Si $|\mathcal{I}'| = 1$, on prend $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}'$ et on aura $|\{I \in \mathcal{I}_1 : x \in I\}| - |\{I \in \mathcal{I}_2 : x \in I\}| = 1$ ou 0. Si $|\mathcal{I}'| = 2$, alors en prenant $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ chacun constitué d'une arête, le critère sera vérifié. Supposons maintenant que $|\mathcal{I}'| = 3$ (ou 4). $\mathcal{I}'$ a la forme $\mathcal{I}' = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_1, b_2], ([a_2, b_1])\}$ où $N_0 = \{a_1, a_2\}$ et $N_{r(P)} = \{b_1, b_2\}$.

Considérons la partition $\mathcal{I}_1 = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2]\}$, $\mathcal{I}_2 = \{[a_1, b_2], ([a_2, b_1])\}$.

Si le critère n'est pas vérifié alors nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'il existe $x \in P$ tel que

$$|\{I \in \mathcal{I}_1 : x \in I\}| = 2 \text{ et } |\{I \in \mathcal{I}_2 : x \in I\}| = 0.$$

La première égalité implique que $a_1 \leq x \leq b_1$ et $a_2 \leq x \leq b_2$. D'où $a_1 \leq x \leq b_2$, c'est à dire $x \in [a_1, b_2]$ qui est une contradiction avec la supposition $|\{I \in \mathcal{I}_2 : x \in I\}| = 0$. ■

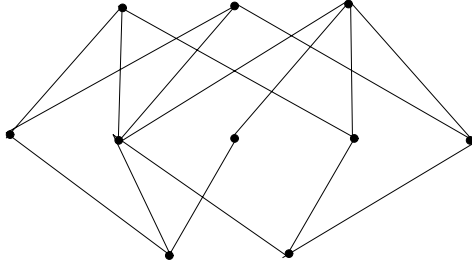


Figure 1.

Notons que si $\max\{W_0, W_{r(P)}\} > 2$, l'hypergraphe $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ n'a pas forcément la propriété duale de König. En effet pour le poset illustré dans la Figure 1, on a déjà pour $r(P) = 2$, $W_0 = 2$ et $W_2 = 3$, $\alpha(\mathcal{H}) = 3$ et $\rho(\mathcal{H}) = 4$. De plus ce poset est *normal* (c.à.d $\frac{|A|}{W_i} \leq \frac{|R^+(A)|}{W_{i+1}}$ pour tout $A \subseteq N_i$ où $R^+(A) = \{y \in N_{i+1} \mid x \prec y \text{ pour un certain } x \text{ dans } A\}$). La normalité est une condition forte impliquant entre autres, la propriété forte de Sperner [27].

Un poset est appelé *régulier* si le nombre d'éléments couvrant un élément fixé x et le nombre d'éléments couverts par x dépendent seulement du rang de x . Les posets réguliers de rang symétrique ont d'intéressantes propriétés telles que la normalité, la propriété forte de Sperner, possèdent une décomposition en chaînes symétriques, ... [27]. Malgré cela, si on examine les posets réguliers symétriques de la Figure 2, on remarque que l'hypergraphe $\mathcal{H}(P_1)$ n'a pas la propriété duale de König puisque $\alpha(\mathcal{H}(P_1)) = 3$ et $\rho(\mathcal{H}(P_1)) = 4$ et l'hypergraphe $\mathcal{H}(P_2)$ n'a ni la propriété forte IS ni la propriété forte IC puisque $\alpha(\mathcal{H}(P_2)) = 4$.

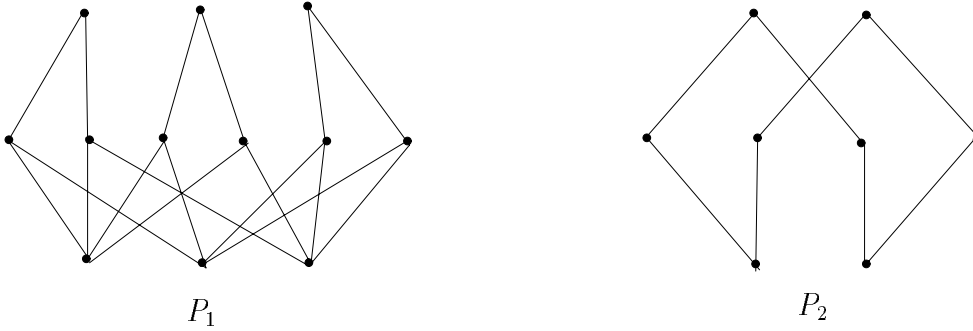


Figure 2.

Corollaire 6.1 $\mathcal{H}(P)$ a la propriété de König si une des conditions du Théorème 6.1 est vérifiée.

Preuve. Les trois premières conditions vérifient aisément la relation $\nu = \tau = \min\{|W_0|, |W_{r(P)}|\}$. Pour la condition (d), on a prouvé dans le Théorème 6.1 que la matrice d'incidence de $\mathcal{H}^*$ est totalement unimodulaire donc sa transposée qui est la matrice d'incidence de $\mathcal{H}$ reste totalement unimodulaire. ■

La remarque faite sur la non-conservation de la propriété duale de König, lorsque $\max\{|W_0|, |W_{r(P)}|\} > 2$ reste valable pour la propriété de König. En effet, le poset de la Figure 3 en est un exemple où l'on a $\nu(\mathcal{H}(P)) = 1$ et $\tau(\mathcal{H}(P)) = 2$.

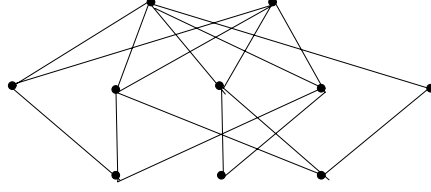


Figure 3.

Le théorème suivant prouve la propriété (l, u) -IC dans certains domaines de l et u dès que P est un poset de Peck. La décomposition de P en chaînes symétriques n'est pas une condition suffisante (voir l'exemple du poset P_2 de la Figure 2).

Théorème 6.2 [9] *Soit P un poset de Peck.*

- (a) $\mathcal{H}(P)$ a la propriété (l, u) -IC pour tous l, u avec $0 \leq l \leq u \leq r(P)/2$ ou $r(P)/2 \leq l \leq u \leq r(P)$.
- (b) Si $\mathcal{H}(P)$ a la propriété $(l, r(P)-l)$ -IC pour tout l avec $0 \leq l \leq r(P)/2$, alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte IC.

Preuve. (a) Nous considérons seulement le cas $0 \leq l \leq u \leq r(P)/2$. L'autre se déduit par dualité. Le niveau N_u est une antichaîne de taille maximum dans $P_{l,u}$. En effet, supposons le contraire c.à.d qu'il existe une antichaîne A dans $P_{l,u}$ de taille plus grande. L'ensemble $A \cup P_{u+1, r(P)-u}$ est une $(r(P) - 2u + 1)$ -famille de taille $|A| + |P_{u+1, r(P)-u}| > W_u + \dots + W_{r(P)-u}$. Comme $\sum_{i=u}^{r(P)-u} W_i$ représente la taille maximum de $(r(P) - 2u + 1)$ nombres de Whitney, nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse faite sur P . Ainsi, par le Théorème de Dilworth, $P_{l,u}$ peut être partitionné en W_u chaînes d'extrémités finales dans N_u . Ces chaînes définissent un recouvrement par arêtes de $\mathcal{H}_{l,u}$ de cardinalité $W_u = \max\{W_l, W_u\}$.

- (b) Puisque (a) est vérifiée, il nous suffira de montrer la propriété (l, u) -IC

pour $0 \leq l \leq r(P)/2 \leq u \leq r(P)$. Supposons sans perte de généralité, $l \leq r(P) - u$ (si P ne vérifie pas cette propriété, son dual P^* la vérifiera). Ainsi, $\max\{W_l, W_u\} = W_u$. Par hypothèse $\mathcal{H}_{r(P)-u, u}$ peut être couvert par W_u arêtes et dans P , ces intervalles ont leurs extrémités initiales dans le niveau $N_{r(P)-u}$. D'autre part, d'après (a), $\mathcal{H}_{l, r(P)-u}$ peut être couvert par $W_{r(P)-u} = W_u$ arêtes et dans P , ces intervalles ont leurs extrémités terminales dans le niveau $N_{r(P)-u}$. En fusionnant ces intervalles en leur points correspondants du niveau $N_{r(P)-u}$, nous obtenons un recouvrement de $\mathcal{H}_{l, u}$ par W_u arêtes. ■

6.2 Propriété duale de König pour les classes des ordres SSSC et SSC

Dans la théorie de Sperner, il existe des posets classiques qui sont en fait construits à partir d'un produit de posets. Citons-en par exemple les treillis B_n , $S(k_1, \dots, k_n)$, $NC(n)$, C_n , $W_{m,n}$, et les ordres $SM_{k,2}$, $M(k_1, \dots, k_n)$, Dans cette section, nous prouvons ou mentionons la conservation de la propriété SSSC (resp. SSC) par les produits $\times$ et $\times_r$. De plus, tout ordre SSSC (resp. SSC) a son hypergraphe des intervalles avec la propriété (l, u) -IC pour l, u tels que $0 \leq l \leq u \leq n - l$ (resp. forte IC). Ces résultats permettent de classer entre autres les exemples précédemment cités.

6.2.1 Propriété duale de König pour la classe des ordres SSSC

Soit P un poset rangé de rang n .

Une chaîne $C = (c_1 \prec \dots \prec c_h)$ est appelée *semi-symétrique* si $r(c_1) + r(c_h) \geq n$. Une chaîne symétrique est en particulier semi-symétrique.

On appelle un poset P un *ordre à chaînes semi-symétriques spéciales* (ordre SSSC) s'il existe une décomposition de P en chaînes semi-symétriques avec la propriété supplémentaire (*):

Si $C = (c_1 \prec \dots \prec c_h)$ est une chaîne de la décomposition où c_h n'est pas un élément maximal de P alors il existe une chaîne

D de la décomposition telle que $D = (d_0 \prec \cdots \prec d_{h+1})$ avec $d_0 \prec c_1$ et $c_h \prec d_{h+1}$.

Dans la Figure 4, P_1 et P_2 sont des ordres SSSC mais pas P_3 .

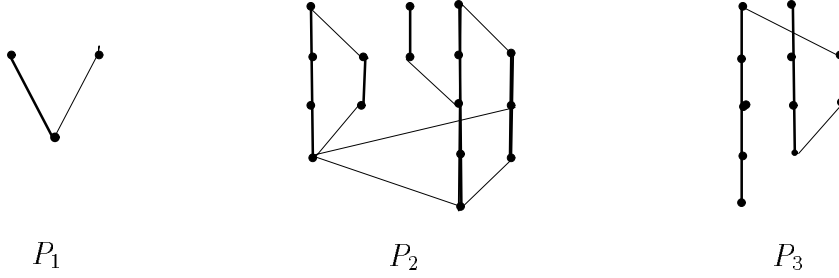


Figure 4.

Théorème 6.3 *Si P est un ordre SSSC alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété (l, u) -IC pour tous l, u avec $0 \leq l \leq u \leq n - l$.*

Preuve. Soit $u \geq \frac{n}{2}$. Nous déterminons d'abord un recouvrement de $\mathcal{H}_{n-u, u}$ par W_u arêtes.

Soit $\mathcal{C}$ une décomposition en chaînes semi-symétriques de P satisfaisant la propriété (*). Nous associons à chaque élément $x \in N_i$, avec $0 \leq i \leq \frac{n}{2}$, l'élément $f(x) \in N_{n-i}$ qui soit dans la même chaîne de $\mathcal{C}$. Ceci est possible puisque sinon nous aurions $c_1 \leq x \leq c_h < f(x)$, où $c_1 \prec \cdots \prec c_h$ est la chaîne qui contient x , et alors $r(c_1) + r(c_h) < r(x) + r(f(x)) = i + (n - i) = n$. Vérifions que l'ensemble des W_u intervalles $\{[x, f(x)], x \in N_{n-u}\} \cup \{[x, C \cap N_u], x = \min C \in P_{n-u+1, u} \text{ pour une certaine chaîne } C \in \mathcal{C} \text{ et } r(\max C) \geq u\}$ couvrent $\mathcal{H}_{n-u, u}$. Brièvement, nous appelons les intervalles de la première (resp. seconde) famille, “arêtes de type $\mathcal{I}_{1, u}$ (resp. $\mathcal{I}_{2, u}$)”.

Nous procédons par induction sur $n - 2u$: Les cas $n - 2u = 0$ ou $n - 2u = 1$ sont vérifiés.

Considérons un élément $y \in P_{n-u, u}$. Si $y \in N_{n-u}$ ou N_u , alors y est clairement couvert par une arête de type $\mathcal{I}_{1, u}$ ou $\mathcal{I}_{1, u} \cup \mathcal{I}_{2, u}$ respectivement. Supposons alors que $y \in P_{n-(u-1), u-1}$. Par induction, il existe soit une arête

$[z, f(z)]$ de type $\mathcal{I}_{1,u-1}$ où $z \in N_{n-u+1}$ soit une arête $[z, C \cap N_{u-1}]$ de type $\mathcal{I}_{2,u-1}$ où $z = \min C \in P_{n-u+2,u-1}$ et $r(\max C) \geq u-1$ qui couvre y .

Cas 1. y est couvert par une arête de type $\mathcal{I}_{1,u-1}$.

Soit C une chaîne de $\mathcal{C}$ contenant z et $f(z)$. Si $f(z)$ a sur C un successeur v alors $v = f(x)$ si z a un prédécesseur x sur C et par conséquent y est couvert par $[x, f(x)]$ de type $\mathcal{I}_{1,u}$. Sinon -c.à.d. z n'a pas de prédécesseur sur C - y est couvert par l'intervalle $[z, C \cap N_u]$ de type $\mathcal{I}_{2,u}$.

Si $f(z)$ n'a pas sur C un successeur, $f(z)$ est l'extrémité terminale de C et donc z est nécessairement son extrémité initiale. En vertu de la propriété (*), il existe une chaîne D de $\mathcal{C}$ de la forme $(x \prec \dots \prec f(x))$, où $x \in N_{n-u}$ et $x \prec z < f(z) \prec f(x)$. Ainsi, y est couvert par $[x, f(x)]$.

Cas 2. y est couvert par une arête de type $\mathcal{I}_{2,u-1}$.

Soit C une chaîne de $\mathcal{C}$ contenant z . Si $C \cap N_{u-1}$ a un successeur sur C alors y est couvert par $[z, N_u \cap C]$ de type $\mathcal{I}_{2,u}$. Si $C \cap N_{u-1}$ est une extrémité terminale de C alors, à partir de la propriété (*), il existe une chaîne D de $\mathcal{C}$ de la forme $(d_0 \prec \dots \prec d_{h+1})$ où $d_0 \prec \min C = z < \max C \prec d_{h+1}$. Par suite, y est couvert par l'arête $[d_0, d_{h+1}]$ de type $\mathcal{I}_{2,u}$.

Pour $l+u < n$, examinons le recouvrement de $\mathcal{H}_{l,u}$.

P est un ordre SSSC alors, $W_l \leq \dots \leq W_{n-u}$. $P_{l,n-u}$ peut être partitionné en W_{n-u} chaînes $\{C_1, \dots, C_{n-u}\}$ où chacune se termine au niveau N_{n-u} . En fait, il s'agit des chaînes de $\mathcal{C}$ restreinte à $P_{l,n-u}$. Nous joignons maintenant l'extrémité terminale de chaque chaîne C_i à un intervalle $[x, f(x)]$ de type $\mathcal{I}_{1,u}$ si $\max C_i = x$. De cette façon et après le rajout de toutes les arêtes de type $\mathcal{I}_{2,u}$, nous obtenons un recouvrement de $\mathcal{H}_{l,u}$ par W_u arêtes.

Notons que si $n-u < l \leq u \leq n$, la propriété (l, u) -IC n'est pas en générale vérifiée. En effet le poset P_2 de la Figure 4 vérifie $\alpha(\mathcal{H}_{1,4}) = \rho(\mathcal{H}_{1,4}) = 4 \neq 3$.

Soient $(P, \leq_P)$ et $(Q, \leq_Q)$ (brièvement P et Q) deux posets ayant des décompositions en chaînes semi-symétriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ respectivement. En utilisant la procédure de Bruijn et al [18] qui consiste à prendre tous les produits formés par une chaîne de $\mathcal{C}$ et une chaîne de $\mathcal{D}$, nous pouvons construire une décomposition en chaînes semi-symétriques de $P \times Q$. Plus précisément, pour chaque couple (C, D) de chaînes semi-symétriques où $C = (c_0 \prec \dots \prec c_h) \in \mathcal{C}$ et $D = (d_0 \prec \dots \prec d_k) \in \mathcal{D}$ et pour chaque j , $j = 0, \dots, \min(h, k)$, nous posons

$$E_j(C, D) = ((c_0, d_j) \prec \dots \prec (c_{h-j}, d_j) \prec (c_{h-j}, d_{j+1}) \prec \dots \prec (c_{h-j}, d_k)),$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 r(c_0, d_j) + r(c_{h-j}, d_k) &= r(c_0) + r(d_j) + r(c_{h-j}) + r(d_k) \\
 &= r(c_0) + r(d_0) + j + r(c_h) - j + r(d_k) \\
 &\geq r(P) + r(Q) = r(P \times Q).
 \end{aligned}$$

donc les chaînes $E_j(C, D)$ sont semi-symétriques et $\cup_j E_j(C, D)$ est une partition de $C \times D$ (voir Figure 5). Par suite $\mathcal{G} = \cup_{C \in \mathcal{C}} \cup_{D \in \mathcal{D}} \cup_j E_j(C, D)$ est une partition de $P \times Q$ en chaînes semi-symétriques.

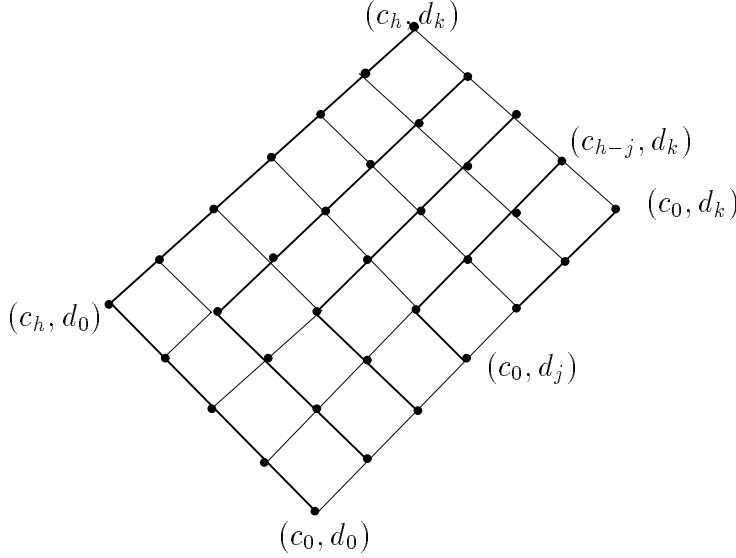


Figure 5.

Théorème 6.4 *Si P et Q sont des ordres SSSC, alors $P \times Q$ est aussi un ordre SSSC.*

Preuve. Il suffit de vérifier que la partition $\mathcal{G}$ vérifie la propriété (*).

Soit E une chaîne de $\mathcal{G}$ dont l'extrémité terminale n'est pas un élément maximal de $P \times Q$. Il existe une chaîne C de $\mathcal{C}$, une chaîne D de $\mathcal{D}$, $j_0 \in \{0, \dots, \min(h, k)\}$ tels que $E = E_{j_0}(C, D) = ((c_0, d_{j_0}) \prec \dots \prec (c_{h-j_0}, d_{j_0}) \prec (c_{h-j_0}, d_{j_0+1}) \prec \dots \prec (c_{h-j_0}, d_k))$.

Si $j_0 > 0$, alors la chaîne n'est pas maximale dans le "rectangle" (en particulier (c_{h-j_0}, d_k) n'est pas un élément maximal de $P \times Q$). La chaîne E' de $C \times D$, de la forme $E' = ((c_0, d_{j_0-1}) \prec \dots \prec (c_{h-j_0+1}, d_{j_0-1}) \prec (c_{h-j_0+1}, d_{j_0}) \prec \dots \prec (c_{h-j_0+1}, d_k))$, est la chaîne cherchée qui vérifie avec E la propriété (*).

Si $j_0 = 0$, cela signifie d'une part que E est maximale dans son "rectangle" mais comme d'autre part, son extrémité terminale n'est pas un élément maximal de $P \times Q$, on déduit alors que c'est soit c_h qui n'est pas un élément maximal dans P soit d_k qui n'est pas un élément maximal dans Q . Supposons sans perte de généralité que c_h n'est pas un élément maximal dans P . Comme P est un ordre SSSC, il existe une chaîne C' de $\mathcal{C}$ telle que $C' = (c'_0 \prec \dots \prec c'_{h+2})$ avec $c'_0 \prec c_0 < c_h \prec c'_{h+2}$. La chaîne $E' = ((c'_0, d_0) \prec \dots \prec (c'_{h+2}, d_0) \prec (c'_{h+2}, d_1) \prec \dots \prec (c'_{h+2}, d_k))$, de $C' \times D$ vérifie avec E la propriété (*) puisque $(c'_0, d_0) \prec (c_0, d_0) < (c_h, d_k) \prec (c'_{h+2}, d_k)$. ■

Théorème 6.5 *Si P et Q sont des ordres SSSC, alors $P \times_r Q$ est aussi un ordre SSSC.*

Preuve. Dans [62], Sali prouvait que si deux posets P et Q admettent une décomposition en chaînes symétriques et $P \times_r Q$ existe alors $P \times_r Q$ admet aussi une décomposition en chaînes symétriques. Ce résultat reste valable pour les chaînes semi-symétriques. Supposons sans perte de généralité que $r(P) = r(Q)$. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ les décompositions en chaînes semi-symétriques de P et Q respectivement ayant la propriété (*). Pour chaque chaîne C de $\mathcal{C}$ et D de $\mathcal{D}$, nous construisons une chaîne de $P \times_r Q$ de la manière suivante: Supposons $C = \{c_1, \dots, c_t\}$, $D = \{d_1, \dots, d_s\}$ et $t \geq s$. Soit $a = \frac{1}{2}(t - s)$. Posons

$$((c_{1+a}, d_1), (c_{2+a}, d_2), \dots, (c_{t-a}, d_s)).$$

C'est bien une chaîne de $P \times_r Q$ et de plus, elle est semi-symétrique puisque $r((c_{1+a}, d_1)) + r((c_{t-a}, d_s)) = (r(c_1) + a) + (r(c_t) - a) \geq r(P) = r(P \times_r Q)$. Comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des partitions de P et Q respectivement, l'ensemble $\mathcal{E}$ des chaînes construites ci-dessus forment une partition en chaînes semi-symétriques de $P \times_r Q$. Montrons que $\mathcal{E}$ vérifie la propriété (*).

Soit $((c_{1+a}, d_1), (c_{2+a}, d_2), \dots, (c_{t-a}, d_s))$ une chaîne telle que (c_{t-a}, d_s) n'est pas un élément maximal de $P \times_r Q$. Comme $t \geq s$, d_s n'est pas un élément maximal dans Q . Il existe, parceque Q est un ordre SSSC, une chaîne $D' = (d'_0, \dots, d'_{s+1})$ de $\mathcal{D}$ telle que $d'_0 \prec d_1$ et $d_s \prec d'_{s+1}$.

Si $t > s$, nous prenons la chaîne $((c_a, d'_0), (c_{1+a}, d'_1), \dots, (c_{t-a+1}, d'_{s+1}))$.

Si $t = s$, alors c_t n'est pas un élément maximal dans P qui est aussi un ordre SSSC et par conséquent, il existe une chaîne $C' = (c'_0, \dots, c'_{t+1})$ de $\mathcal{C}$ telle que $c'_0 \prec c_1$ et $c_t \prec c'_{t+1}$. Dans ce cas nous prenons la chaîne $((c'_0, d'_0), (c'_1, d'_1), \dots, (c'_{t+1}, d'_{s+1}))$. ■

6.2.2 Propriété duale de König pour la classe des ordres SSC

Dans [14] ou dans [9], nous avons prouvé que si nous imposons à P une condition plus forte que la propriété $(*)$, à savoir l'existence d'une décomposition de P en chaînes symétriques satisfaisant la nouvelle propriété $(*)'$ définie par

Si $C = (c_1 \prec \cdots \prec c_h)$ est une chaîne de la décomposition qui n'est pas de longueur maximum alors il existe une chaîne D de la décomposition telle que $D = (d_0 \prec \cdots \prec d_{h+1})$ avec $d_0 \prec c_1$ et $c_h \prec d_{h+1}$,

alors nous obtenions des théorèmes plus intéressants dans le sens où c'est la propriété forte IC qui est réalisée. Un tel poset est dit un *ordre à chaînes symétriques spéciales* (ordre SSC).

Théorème 6.6 *Si P est un ordre SSC alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte IC.*

Théorème 6.7 *Si P et Q sont des ordres SSC, alors $P \times Q$ est aussi un ordre SSC.*

D'autre part les constructions dans la démonstration du Théorème 6.5 produisent une partition en chaînes symétriques de $P \times_r Q$ avec la propriété $(*)'$. Ainsi, le Théorème 6.8 en découle aisément

Théorème 6.8 *Si P et Q sont des ordres SSC, alors $P \times_r Q$ est aussi un ordre SSC.*

6.3 Exemples d'ordres SSSC et SSC

6.3.1 Exemples d'ordres SSSC

Comme application des ordres SSSC, considérons les exemples suivants:

6.3.1.1 Le treillis C_n des faces du n -cube.

Soit Λ un poset à trois sommets $\{0, 1, 2\}$ tels que $0 < 2 > 1$. C_n est isomorphe au produit cartésien de n copies de Λ .

$$C_n \simeq \prod_{i=1}^n \Lambda.$$

Le dual de Λ est un ordre SSSC donc d'après le Théorème 6.4, le dual de C_n est un ordre SSSC et par suite, d'après le Théorème 6.3, $\mathcal{H}(C_n^*)$ a la propriété (l, u) -IC pour tous l, u avec $0 \leq l \leq u \leq n - l$. Finalement, $\mathcal{H}(C_n)$ a la propriété (l, u) -IC pour tous l, u avec $n - u \leq l \leq u \leq n$.

6.3.1.2 Le treillis $M(k_1, \dots, k_n)$.

Les éléments de ce poset sont les sous-ensembles de $S(k_1, \dots, k_n)$ de la forme $\{a \in S(k_1, \dots, k_n) : a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$ où les A_i sont des sous-ensembles non vides de $[k_i]$, $i = 1, \dots, n$. L'ordre est donné par l'inclusion.

$M(k_1, \dots, k_n)$ est isomorphe à $B'_{k_1+1} \times \dots \times B'_{k_n+1}$, où B'_{k_i+1} est le treillis Booléen auquel l'élément minimal est supprimé. Notons que dans le cas $n = 2$, ce poset peut être interprété comme le poset des sous-matrices d'une matrice avec (k_1+1) lignes et (k_2+1) colonnes, ordonnées par "contenance". Chaque dual de B'_{k_i+1} est un ordre SSSC et par conséquent, à partir des Théorèmes 6.3 et 6.4, $\mathcal{H}(M(k_1, \dots, k_n))$ a la propriété (l, u) -IC pour tous l, u avec $n - u \leq l \leq u \leq n$.

L'isomorphisme entre $M(k_1, k_2)$ et $B'_{k_1+1} \times B'_{k_2+1}$, nous permet de voir le dual de $M(k_1, k_2)$ comme étant le poset $B'_{k_1+k_2+2}$ auquel les éléments $\{A : A \supseteq \{1, \dots, k_2+1\}\} \cup \{A : A \supseteq \{k_2+2, \dots, k_2+k_1+2\}\}$ sont supprimés. Ainsi une idée similaire de coloration utilisée dans le Chapitre 4 nous conduit à la valeur du nombre chromatique $\gamma_{k_1, k_2; 1, 3}$ de l'hypergraphe des intervalles du sous-poset induit par les niveaux consécutifs N_1, N_2 et N_3 du dual de $M(k_1, k_2)$.

Le produit direct étant commutatif, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $0 \leq k_1 \leq k_2$. Si $k_1 = 0$, alors $M^*(0, k_2) \simeq (B'_{k_2+1})^*$ et donc $\gamma_{0, k_2; 1, 3}$ est égal à $k_2 + 1$ si $k_2 \geq 5$ et à $k_2 + 2$ si $k_2 \in \{3, 4\}$. Si $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$, alors par investigation de tous les cas, nous obtenons $\gamma_{1, 2; 1, 3} = 5$. Pour les autres valeurs de k_1 et k_2 , nous avons

Proposition 6.1 *Si $k_2 > 2$, nous avons*

$$\gamma_{k_1, k_2; 1, 3} = \begin{cases} k_2 + 2 & \text{si } k_1 = 1 \\ k_1 + k_2 + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve.

Cas 1. $k_1 = 1$ et $k_2 > 2$.

Puisque les $k_1 + k_2 + 2$ éléments $\{k_2 + 2\}$ et $\{k_2 + 2, i\}$, $i = 1, \dots, k_2 + 1$, doivent avoir des couleurs deux à deux distinctes, nous déduisons directement $\gamma_{1,k_2;1,3} \geq k_2 + 2$.

Intéressons nous maintenant à la borne supérieure.

Cas 1.1. k_2 est pair.

Considérons la factorisation $F = \{F_1, \dots, F_{k_2+1}\}$ du graphe complet K_{k_2+2} où F_i est le facteur contenant l'élément $\{i, k_2 + 2\}$. Posons $C_i := F_i \cup \{i, k_2 + 3\}$ pour $i = 1, \dots, k_2 + 1$ et $C_{k_2+2} = \{\{i\}, i = 1, \dots, k_2 + 3\}$. Avec la partition $\{C_1, \dots, C_{k_2+2}\}$, nous obtenons une $(k_2 + 2)$ -coloration de $\mathcal{H}((M^*(1, k_2))_{1,3})$ puisque chaque triplet a au moins $(k_2 + 2 - 3) - 1 = k_2 - 2 > 0$ choix pour sa couleur.

Cas 1.2. k_2 est impair.

Considérons la factorisation $F = \{F_1, \dots, F_{k_2+2}\}$ du graphe complet K_{k_2+3} où F_i est le facteur contenant l'élément $p_i = \{i, k_2 + 3\}$ et notons par q_i l'élément de F_i qui contient $k_2 + 2$. Posons

$$C_i = (F_i \setminus \{p_i\}) \cup \{q_i, (q_i \cup \{k_2 + 3\}) \setminus \{k_2 + 2\}\} \cup \{\{i\}\}$$

pour tout $i = 1, \dots, k_2 + 2$. Maintenant si nous assignons à chaque triplet une couleur de $\{1, \dots, k_2 + 2\}$, nous obtiendrons une $(k_2 + 2)$ -coloration de $\mathcal{H}((M^*(1, k_2))_{1,3})$.

Cas 2. $k_1 \geq 2$.

Si $k_2 \geq 3$, alors le sous-poset $(M^*(k_1, k_2))_{1,3}$ est isomorphe à $(B_{k_1+k_2+2})_{1,3}$ et alors $\gamma_{k_1,k_2;1,3} = k_1 + k_2 + 2$.

Si $k_2 = 2$, nous avons $\gamma_{2,2;1,3} = 6$ dont la partition est donnée par exemple par:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}\}, \\ C_2 &= \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}\}, \\ C_3 &= \{\{2, 3\}, \{1, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}\}, \\ C_4 &= \{\{3, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{3, 5, 6\}\}, \\ C_5 &= \{\{4, 5\}, \{1, 3\}, \{2, 6\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}\}, \\ C_6 &= \{\{i\}, i = 1, \dots, 6\}. \end{aligned}$$

6.3.2 Exemples d'ordres SSC

Comme application des ordres SSC, considérons les exemples suivants:

6.3.2.1 La chaîne $\mathcal{C} = (c_0 \prec \dots \prec c_n)$

6.3.2.2 Le treillis Booléen B_n .

Le treillis Booléen est isomorphe à n chaînes de longueur 1.

$$\alpha(\mathcal{H}((B_n)_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}((B_n)_{l,u})) = \max\left\{\binom{n}{l}, \binom{n}{u}\right\}$$

.

6.3.2.3 Le treillis des produits de chaînes $S(k_1, \dots, k_n)$.

$S(k_1, \dots, k_n)$ est isomorphe à n chaînes de longueurs respectives $k_1, \dots, k_n$.

$$\alpha(\mathcal{H}((S(k_1, \dots, k_n))_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}((S(k_1, \dots, k_n))_{l,u})) = \max\{W_l, W_u\}.$$

La manière d'obtenir W_i est donnée dans le Chapitre 1.

6.3.2.4 Le treillis des “shuffles” $W_{m,n}$ [37].

Il est défini comme suit: Soient $\mathbf{x} = x_1x_2 \cdots x_m$ et $\mathbf{y} = y_1y_2 \cdots y_n$ deux mots formés à partir de $m+n$ lettres distinctes. $W_{m,n}$ est l'ensemble de tous les mots $\mathbf{w}$ formés à partir des lettres de $\mathbf{x}$ et des lettres de $\mathbf{y}$ tels que la restriction de $\mathbf{w}$ aux lettres de $\mathbf{x}$ (resp. de $\mathbf{y}$) est un sous-mot de $\mathbf{x}$ (resp de $\mathbf{y}$) ordonné par la relation: $\mathbf{w} \leq \mathbf{w}'$ ssi $\mathbf{w}'$ s'obtient à partir de $\mathbf{w}$ en supprimant des lettres de $\mathbf{x}$ et en additionnant des lettres de $\mathbf{y}$. Par exemple si $\mathbf{x} = ABCDEFG$ et $\mathbf{y} = rstu$ alors $BrDFuG \leq rDsuG$ dans $W_{7,4}$. Une *interface* de $\mathbf{w}$ est l'ensemble de toutes les paires de lettres (y, x) où $x \in \mathbf{x}$ et $y \in \mathbf{y}$ et x suit immédiatement y dans $\mathbf{w}$. L'interface des mots précédants est $\{(r, D), (u, G)\}$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les mots ayant autant de lettres de $\mathbf{x}$ que de $\mathbf{y}$. Pour chaque mot de $\mathcal{G}$, notons par $W_{m,n}(S)$ l'ensemble formé de tous les mots de $W_{m,n}$ d'interface S . Greene [37] a prouvé que $W_{m,n}$ est l'union disjointe $W_{m,n} = \bigcup_{S \in \mathcal{C}} W_{m,n}(S)$ et le poset induit sur chaque $W_{m,n}(S)$ est isomorphe à un treillis Booléen. Montrons que $W_{m,n}$ est un ordre SSC. $W_{m,n}(S)$ est un ordre SSC d'après l'Exemple 6.3.2.2. Soit $\mathcal{C}(S)$ sa décomposition en chaînes symétriques satisfaisant la propriété $(*)'$. L'union disjointe $\bigcup_{S \in \mathcal{G}} \mathcal{C}(S)$ forme une décomposition en chaînes symétriques de $W_{m,n}$. Il reste à vérifier qu'elle assure la propriété $(*)'$. Nous avons à examiner que les chaînes maximales dans $\mathcal{C}(S)$. Soit C une chaîne non maximale dans $W_{m,n}$ mais maximale dans $\mathcal{C}(S)$, ($S \neq \emptyset$). Posons $S = \{y_{j_1}, x_{i_1}, \dots, y_{j_k}, x_{i_k}\}$. Il est clair que C a la forme suivante:

$$\begin{aligned} & x_1x_2 \cdots x_{i_1-1}y_{j_1}x_{i_1}x_{i_1+1} \cdots x_{i_2-1}y_{j_2}x_{i_2}x_{i_2+1} \cdots x_{i_k-1}y_{j_k}x_{i_k}x_{i_k+1} \cdots x_m \\ & \prec \cdots \prec y_1y_2 \cdots y_{j_1-1}y_{j_1}x_{i_1}y_{j_1+1} \cdots y_{j_2-1}y_{j_2}x_{i_2}y_{j_2+1} \cdots y_{j_k-1}y_{j_k}x_{i_k}y_{j_k+1} \cdots y_n. \end{aligned}$$

Soit $S' = \{y_{j_1}, x_{i_1}, \dots, y_{j_{k-1}}, x_{i_{k-1}}\}$. Dans $\mathcal{C}(S')$, la chaîne $x_1x_2 \cdots x_{i_1-1}y_{j_1}x_{i_1}x_{i_1+1} \cdots x_{i_2-1}y_{j_2}x_{i_2}x_{i_2+1} \cdots x_{i_{k-1}-1}y_{j_{k-1}}x_{i_{k-1}}x_{i_{k-1}+1} \cdots x_m \prec \cdots \prec y_1y_2 \cdots y_{j_1-1}y_{j_1}x_{i_1}y_{j_1+1} \cdots y_{j_2-1}y_{j_2}x_{i_2}y_{j_2+1} \cdots y_{j_{k-1}-1}y_{j_{k-1}}x_{i_{k-1}}y_{j_{k-1}+1} \cdots y_n$ est maximale. C'est la chaîne désirée pour la vérification de la propriété $(*)'$.

6.3.2.5 Le treillis des partitions non intersectantes $NC(n)$ [66].

Une partition de $[n]$ est non intersectante si à chaque fois que $1 \leq a < b < c < d \leq n$ avec a, c dans le même bloc et b, d dans le même bloc alors les quatre éléments sont dans le même bloc. La partition $123/57/46$ est intersectante. Le treillis $NC(n)$ est l'ensemble des partitions non intersectantes ordonnées par raffinement. Montrons par induction sur n que $NC(n)$ est un ordre SSC. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons que $NC(n)$ est un ordre SSC pour tout $k < n$. Dans [66], il est prouvé que $NC(n) = \cup_{i=1}^n R_i$ où $R_1 \cup R_2 \simeq NC(n-1) \times C_1$ (C_1 est une chaîne de longueur 1) et $R_i \simeq NC(i-2) \times NC(n-i+1)$ pour tout $i \geq 3$. D'après l'hypothèse d'induction et le fait que la chaîne est aussi un ordre SSC, on déduit d'après le Théorème 6.7 que les deux produits précédents sont des ordres SSC. L'union des chaînes de $R_1 \cup R_2$ et des R_i qui vérifient la propriété $(*)'$ conserve la propriété $(*)'$. En effet, il suffit seulement d'examiner les chaînes maximales de $R_1 \cup R_2$ et de R_i ($i \geq 3$), plus précisément celles de R_i car une chaîne maximale de $R_1 \cup R_2$ n'est autre qu'une chaîne maximale de $NC(n)$. Soit C une chaîne de R_i . C est de la forme: $1i/2/\dots/i-1/i+1/\dots/n \prec \dots \prec 1i(i+1)(i+2)\dots n/23\dots(i-1)$. La chaîne recherchée est la chaîne maximale $1/2/\dots/n \prec \dots \prec 123\dots n$ de $NC(n)$. D'où [23], [46]

$$\alpha(\mathcal{H}((NC(n))_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}((NC(n))_{l,u})) = \max\left\{\frac{\binom{n}{l} \cdot \binom{n}{l-1}}{n}, \frac{\binom{n}{u} \cdot \binom{n}{u-1}}{n}\right\}$$

6.3.2.6 Le poset des sous matrices carrées d'une matrice carrée.

Soit A une matrice carrée d'ordre n et $SM_{k,2}$ la famille de toutes ses sous-matrices carrées ordonnées par inclusion. Définissons un ordre sur le produit de deux treillis Booléen $B_n \times_r B_n$ par: $(\underline{X_1}, \underline{Y_1}) \leq (\underline{X_2}, \underline{Y_2})$ ssi $\underline{X_1} \subset \underline{X_2}$ et $\underline{Y_1} \subset \underline{Y_2}$. L'application qui associe à une sous-matrice M de $SM_{k,2}$, un couple (M_1, M_2) de $B_n \times_r B_n$, où M_1 (resp. M_2) représente l'ensemble des indices des lignes (resp. des colonnes) de M est un isomorphisme. Comme B_n est un ordre SSC (Exemple 6.3.2.2), on peut déduire du Théorème 6.8, que $SM_{k,2}$ est aussi un ordre SSC et par suite

$$\alpha(\mathcal{H}((SM_{k,2})_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}((SM_{k,2})_{l,u})) = \max\left\{\binom{n}{l} \cdot \binom{n}{l}, \binom{n}{u} \cdot \binom{n}{u}\right\}.$$

Ce poset est un cas particulier de l'ordre $SM_{k,n}$, appelé aussi le poset *des sous-matrices carrées d'une matrice carrée*, qui est défini comme suit:

Ses éléments sont des sous-ensembles de $S(k, \dots, k)$ de la forme $\{\underline{a} \in S(k, \dots, k) : a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$ où les A_i sont des sous-ensembles de

$[0, k]$ de même taille. L'ordre est donné par l'inclusion.
 $SM_{k,n}$ est isomorphe à $B_{k+1} \times_r \cdots \times_r B_{k+1}$. Par suite,

$$\alpha(\mathcal{H}((SM_{k,n})_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}((SM_{k,n})_{l,u})) = \max\left\{\underbrace{\binom{n}{l} \cdots \binom{n}{l}}_n, \underbrace{\binom{n}{u} \cdots \binom{n}{u}}_n\right\}.$$

6.4 Le poset $L(m, n)$

Les éléments de $L(m, n)$ sont les n -uples $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ avec $a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq m$ ordonnés par :

$$\underline{a} \leq \underline{b} \quad \text{ssi} \quad a_i \leq b_i \quad \text{pour tout } i.$$

$L(m, n)$ est rangé et $r(P) = mn$. L'application r définit par $r(\underline{a}) = a_1 + \cdots + a_n$ est une fonction de rang. Stanley [68] prouvait que $L(m, n)$ est un poset de Peck et conjecturait que $L(m, n)$ possède une décomposition en chaînes symétriques. La conjecture a été prouvée pour $\min\{m, n\} \leq 4$. Les décompositions en chaînes symétriques données par Lindstöm [47], West[81] et Riess [59] ne vérifient malheureusement pas la propriété $(*)'$ et par conséquent le Théorème 6.6 ne peut être appliqué.

Théorème 6.9 [9] $\mathcal{H}(L(m, n))$ a la propriété $(l, mn - l)$ -IC pour $0 \leq l \leq m$.

Preuve. Posons brièvement $P = L(m, n)$ et soit $0 \leq l \leq m$. Pour $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in N_l$, soit $f(\underline{a}) = (m - a_n, m - a_{n-1}, \dots, m - a_1)$. L'élément $f(\underline{a})$ est bien dans le niveau N_{mn-l} puisque la somme de ses composantes est égale à $\sum_{i=1}^n (m - a_i) = mn - \sum_{i=1}^n a_i = mn - l$.

De plus, $\underline{a} \leq f(\underline{a})$, en effet,

$$a_i \leq m - a_{n+1-i} \quad \text{ssi} \quad a_i + a_{n+1-i} \leq m,$$

et $a_i + a_{n+1-i} \leq a_{n-1} + a_n \leq r(\underline{a}) = l \leq m$.

Montrons que les intervalles $[\underline{a}, f(\underline{a})]$ constituent un recouvrement par arêtes de $\mathcal{H}_{l, mn-l}$.

Soit $\underline{b} \in P_{l, mn-l}$. Posons $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ avec $c_i = \min\{b_i, m - b_{n+1-i}\}$. $\underline{c}$ est bien un élément de P puisque $c_n \leq b_n \leq m$, $b_i \leq b_{i+1}$ et $m - b_{n+1-i} \leq m - b_{n-i}$ et par conséquent $c_i \leq c_{i+1}$. $\underline{c}$ est plus particulièrement dans

$\mathcal{H}_{l,mn-l}(P)$. En effet, il suffit de prouver que $l \leq r(\underline{c})$. Pour le voir, nous attribuons des couleurs aux composantes de $\underline{c}$ de la manière suivante: La couleur de c_i est bleue si $b_i \leq m - b_{n+1-i}$ et rouge sinon. Bien sûr, c_i et c_{n+1-i} ont la même couleur.

Si toutes les composantes sont bleues, alors $\underline{c} = \underline{b}$ et donc $l \leq r(\underline{c}) = r(\underline{b})$.

Si toutes les composantes sont rouges alors $r(\underline{c}) = mn - r(\underline{b})$ et donc $l \leq r(\underline{c})$.

Si les composantes n'ont pas la même couleur alors il existe un indice $i < n/2$ tel que c_i et c_{i+1} ont des couleurs distinctes. Distinguons les cas suivants:

Cas 1. c_i est bleue. Donc c_{i+1} est rouge et c_{n+1-i} est bleue. Par suite, $r(\underline{c}) \geq c_{i+1} + c_{n+1-i} = m - b_{n-i} + b_{n+1-i} \geq m \geq l$.

Cas 2. c_i est rouge. Donc c_{i+1} est bleue et c_{n+1-i} est rouge. Par suite, $r(\underline{c}) \geq c_{i+1} + c_{n+1-i} = b_{i+1} + m - b_i \geq m \geq l$.

Ainsi, dans tous les cas nous obtenons $l \leq r(\underline{c})$. D'où, il existe un élément $\underline{a} \in N_l$ tel que $\underline{a} \leq \underline{c}$. Comme $a_i \leq c_i \leq b_i \leq m - c_{n+1-i} \leq m - a_{n+1-i}$, nous aurons $\underline{b} \in [\underline{a}, f(\underline{a})]$. ■

Théorème 6.10 [9] $\mathcal{H}(L(m, 3))$ a la propriété forte IC.

Preuve. Posons brièvement $P := L(m, 3)$. D'après les Théorèmes 6.2 et 6.9, il suffira de prouver que $\mathcal{H}_{l, 3m-l}$ peut être couvert par $W_l(L(m, 3))$ arêtes pour $m \leq l < mn/2$. Procédons par induction sur m . Les cas $m = 0$ et $m = 1$ sont évidents. Considérons l'étape de $m - 2$ à m .

Soient P_1 et P_2 la partition de P définie par

$$P_1 := \{\underline{a} \in P : 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq m - 1\},$$

$$P_2 := \{\underline{a} \in P : a_1 = 0 \text{ ou } a_3 = m\}.$$

Notons par $A_i := P_i \cap N_l(L(m, 3))$, $i = 1, 2$ l'ensemble des éléments minimaux de P_i . Ce que nous avons à faire c'est de déterminer un recouvrement de $\mathcal{H}(P_i)$ par $|A_i|$ arêtes, $i = 1, 2$.

L'application φ qui associe à un élément $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ de P_1 l'image $\varphi(\underline{a}) = (a_1 - 1, a_2 - 1, a_3 - 1)$ de $(L(m - 2, 3))_{l-3, 3(m-2)-(l-3)}$ est un isomorphisme donc par hypothèse d'induction $\mathcal{H}(P_1)$ peut être couvert par $|A_1|$ arêtes.

D'autre part, l'application ψ qui associe à l'élément $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ de P_2 l'image $\psi(\underline{a}) = (a_2, a_1 + a_3)$ du poset $R = \{(b_1, b_2) : b_1, b_2 \in \mathbb{N}, 0 \leq b_1 \leq b_2, b_2 - m \leq b_1 \leq m, l \leq b_1 + b_2 \leq 3m - l\}$, ordonné par l'ordre usuel, est aussi un isomorphisme donc nous nous intéresserons au recouvrement de $\mathcal{H}(R)$.

Soit B l'ensemble des éléments minimaux de R . Les $|B|$ intervalles du recouvrement sont donnés comme suit :

Cas 1. m est pair.

$$\left[(b_1, b_2), \left(b_1 + \frac{3m}{2} - l, b_2 + \frac{3m}{2} - l \right) \right], \quad (b_1, b_2) \in B$$

Cas 2. m est impair et l est pair.

$$\left[(b_1, b_2), \left(b_1 + \frac{3m-1}{2} - l, b_2 + \frac{3m+1}{2} - l \right) \right], \quad (b_1, b_2) \in B$$

Cas 3. m est impair et l est impair.

$$\left[(b_1, b_2), \left(b_1 + \frac{3m+1}{2} - l, b_2 + \frac{3m-1}{2} - l \right) \right], \quad (b_1, b_2) \in B$$

Soit (c_1, c_2) un élément non minimal de R . On peut vérifier aisément, cas par cas, que (c_1, c_2) est couvert par au moins un des intervalles ci-dessus. Il suffit de choisir comme extrémité initiale de l'intervalle les couples définis ci-dessous:

Cas a. $c_1 + c_2 - l$ est pair.

$$\left(c_1 - \frac{c_1 + c_2 - l}{2}, c_2 - \frac{c_1 + c_2 - l}{2} \right)$$

Cas b. $c_1 + c_2 - l$ est impair et l est pair.

$$\left(c_1 - \frac{c_1 + c_2 - l - 1}{2}, c_2 - \frac{c_1 + c_2 - l + 1}{2} \right)$$

Cas c. $c_1 + c_2 - l$, l et m sont impairs.

$$\left(c_1 - \frac{c_1 + c_2 - l + 1}{2}, c_2 - \frac{c_1 + c_2 - l - 1}{2} \right)$$

Cas d. $c_1 + c_2 - l$ et l sont impairs et m est pair.

Les extrémités initiales données par le Cas b ou le Cas c conviennent. ■

Chapitre 7

Hypergraphe des intervalles de la classe des ordres série-parallèles

7.1 Introduction

Dans le Chapitre 4, nous avons vu que pour la classe des ordres des intervalles c.à.d. les ordres qui ne contiennent pas de sous-poset isomorphe à la somme directe de deux chaînes de longueur 1, $\mathcal{H}$ a la propriété de König et duale de König. Nous nous intéressons maintenant à une autre classe de posets, appelés posets *série-parallèles* et verrons que ces deux propriétés restent préservées. Un ordre est dit série-parallèle s'il peut être construit à partir des singletons en utilisant seulement la somme disjointe (+) et la somme linéaire ($\oplus$). Ce qui revient aussi à dire que P peut être décomposé en singletons en utilisant que ces deux opérations.

Le poset illustré dans la Figure 1 est un poset série-parallèle puisqu'il se décompose comme:

$$1 \oplus (((1 \oplus 1) + 1) \oplus (1 \oplus 1 \oplus 1)) + ((1 \oplus 1) + (1 \oplus 1)) \oplus ((1 \oplus 1) + (1 \oplus 1))$$

Les posets série-parallèles sont caractérisés par le fait de ne pas contenir de sous-poset isomorphe à N [60]. (N représente un sous-ensemble à quatre éléments $\{x, y, z, t\}$ tels que les seules relations de comparabilité sont: $x < y > z < t$). Cette caractérisation permet de dire que si P est en plus connexe, alors chaque élément maximal est au-dessus de chaque élément minimal. En effet, soit x (resp. y) un élément maximal (resp. minimal) dans P . Comme P est connexe, il existe un plus court 'zig-zag'

$x = p_0 > p_1 < p_2 > \cdots < p_{k-1} > p_k = y$, $k \geq 1$, connectant x à y . Or P ne contient pas de sous-poset induit isomorphe à N , donc $k = 1$ et par suite $x > y$.

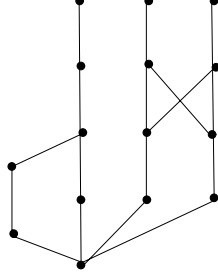


Figure 1.

7.2 Propriété duale de König

Soit P un poset série-parallèle et $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P)$ son hypergraphe des intervalles. Rappelons que l'hypergraphe dual $\mathcal{H}^*$ de $\mathcal{H}$ a la propriété duale de König ssi son graphe représentatif $L(\mathcal{H}^*)$ est parfait et $\mathcal{H}^*$ satisfait la propriété de Helly (c.à.d. $\mathcal{H}^*$ est normal) [3].

Les sommets de $L(\mathcal{H}^*)$ sont les points de P et deux sommets sont adjacents s'ils appartiennent à un même intervalle de P .

Si P est quelconque, le graphe $L(\mathcal{H}^*)$ n'est pas forcément parfait. Considérons à titre d'exemple le poset illustré dans la Figure 2. Le sous-graphe induit par $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ est un cycle impair sans corde et par conséquent $L(\mathcal{H}^*)$ n'est pas parfait.

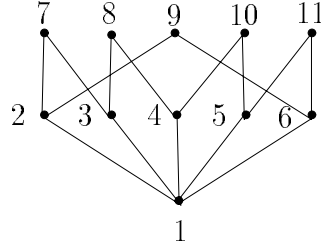


Figure 2.

Théorème 7.1 [13] *Si P est un poset série-parallèle, alors $L(\mathcal{H}^*)$ est un graphe parfait.*

Preuve. Nous prouvons la perfection de $L(\mathcal{H}^*)$ en utilisant un théorème de Seinsche [65] qui stipule que tout graphe qui ne contient pas P_4 (chaîne élémentaire à 4 sommets et sans corde) comme sous-graphe induit, est parfait. Supposons que notre graphe contienne une telle chaîne que l'on note par $\mu = [x_1, x_2, x_3, x_4]$. Dans P , nous avons $x_1 \parallel x_3$, $x_1 \parallel x_4$ et $x_2 \parallel x_4$. Soient $I_1 = [p_1, q_1]$ l'intervalle contenant x_1 et x_2 , $I_2 = [p_2, q_2]$ l'intervalle contenant x_2 et x_3 , et $I_3 = [p_3, q_3]$ l'intervalle contenant x_3 et x_4 . Nous distinguerons trois cas.

Cas 1. $x_1 < x_2$.

Puisque la chaîne μ est sans corde et les sommets x_2 et x_3 appartiennent à un même intervalle dans P , nous avons $x_2 \parallel x_3$ ou $x_2 > x_3$.

Cas 1.1. $x_2 \parallel x_3$.

Alors le poset induit par $\{x_1, x_2, p_2, x_3\}$ et $\mathbb{N}$ sont isomorphes. Il suffit de vérifier que $p_2 \parallel x_1$ qui est vrai car sinon x_1x_3 serait une corde de μ .

Cas 1.2. $x_2 > x_3$.

Alors le poset induit par l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $\mathbb{N}$ sont isomorphes si $x_3 < x_4$.

Mais si $x_3 \parallel x_4$, nous avons aussi l'isomorphisme entre $\{x_1, x_2, p_3, x_4\}$ et $\mathbb{N}$. En effet, $p_3 < x_2$ puisque $p_3 \leq x_3 < x_2$ et $x_1 \parallel p_3$ puisque $p_3 \leq x_1 < x_2$ implique l'existence de la corde x_1x_3 .

Cas 2. $x_2 < x_1$.

Ce cas est similaire au premier cas par dualité.

Cas 3. $x_1 \parallel x_2$. Nous avons trois possibilités:

Cas 3.1. $x_3 > x_2$.

Alors le poset induit par $\{x_1, q_1, x_2, x_3\}$ est isomorphe à $\mathbb{N}$ car x_1x_3 n'est pas une corde de μ et par conséquent $q_1 \parallel x_3$.

Cas 3.2. $x_3 < x_2$.

Alors le poset induit par $\{x_3, x_2, p_1, x_1\}$ est isomorphe à $\mathbb{N}$ puisque $p_1 \leq x_3$ implique $p_1 \leq x_3 < x_2 \leq q_1$ c.à.d. $x_1 x_3$ est une corde de μ .

Cas 3.3. $x_3 \parallel x_2$.

Parceque $x_1 > p_2$ et $x_1 < q_2$ ne peuvent se présenter simultanément, nous obtenons soit $\{p_2, x_2, p_1, x_1\}$ soit $\{x_1, q_1, x_2, q_2\}$ est isomorphe à $\mathbb{N}$. ■

Théorème 7.2 [13] *Si P est un poset série-parallèle, alors $\mathcal{H}^*$ satisfait la propriété de Helly.*

Preuve. Par un résultat de Gilmore [3], il est équivalent de montrer qu'à chaque trois arêtes I_1, I_2, I_3 de $\mathcal{H}$, il existe une arête (de $\mathcal{H}$) contenant l'ensemble $(I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_3) \cup (I_2 \cap I_3)$. Pour notre hypergraphe, nous affirmons que $I_1 \cap I_2 \subseteq I_3$ ou $I_1 \cap I_3 \subseteq I_2$ ou $I_2 \cap I_3 \subseteq I_1$. Pour le voir, supposons que ce n'est pas vrai. Donc $I_1 \cap I_2 \not\subseteq I_3$, $I_1 \cap I_3 \not\subseteq I_2$ et $I_2 \cap I_3 \not\subseteq I_1$. Soient a_1, a_2 et a_3 trois sommets de P tels que

$$\begin{aligned} a_1 &\in I_2 \cap I_3 & \text{et} & & a_1 &\notin I_1 \\ a_2 &\in I_1 \cap I_3 & \text{et} & & a_2 &\notin I_2 \\ a_3 &\in I_1 \cap I_2 & \text{et} & & a_3 &\notin I_3 \end{aligned}$$

c.à.d.

$$\begin{aligned} a_2, a_3 &\in I_1 & \text{et} & & a_1 &\notin I_1 \\ a_1, a_3 &\in I_2 & \text{et} & & a_2 &\notin I_2 \\ a_1, a_2 &\in I_3 & \text{et} & & a_3 &\notin I_3 \end{aligned}$$

Supposons sans perte de généralité que $I_1 = [p_1, q_1]$, $I_2 = [p_2, q_2]$ et $I_3 = [p_3, q_3]$ avec $p_3 \not\leq a_3$.

Cas 1. $a_1 \parallel a_3$.

Alors le poset induit par $\{p_3, a_1, p_2, a_3\}$ et $\mathbb{N}$ sont isomorphes. Il suffit de vérifier que $p_2 \neq p_3$. Cette dernière est réalisée car $a_3 \not\leq p_3$ mais $a_3 > p_2$.

Cas 2. $a_1 < a_3$.

Nous avons $p_3 \leq a_1 < a_3$, une contadiction.

Cas 3. $a_3 < a_1$.

Nous distinguons trois sous-cas:

Cas 3.1. $a_1 < a_2$.

Alors $a_1 \in I_1$, une contradiction.

Cas 3.2. $a_2 < a_1$.

Alors le poset induit par $\{p_3, a_2, p_1, a_3\}$ est isomorphe à N . En effet, nous avons $a_2 \parallel a_3$ puisque $a_2 < a_3$ implique $a_3 \in I_3$ et $a_3 < a_2$ implique $a_2 \in I_2$; $p_1 \neq p_3$ puisque $a_3 \not\geq p_3$ et $a_3 > p_1$.

Cas 3.3. $a_1 \parallel a_2$.

Alors le poset induit par $\{a_1, q_3, a_2, q_1\}$ est isomorphe à N . En effet, nous avons $a_1 \not\leq q_1$ parce que $p_1 \leq a_3 < a_1 \leq q_1$ implique $a_1 \in I_1$; $q_1 \neq q_3$ puisque $a_1 < q_3$ et $a_1 \not\leq q_1$. ■

Corollaire 7.1 [13] *Si P est un poset série-parallèle, alors chaque sous-hypergraphe de $\mathcal{H}$ a la propriété duale de König.*

Preuve. Le graphe $L(\mathcal{H}^*)$ est parfait d'après le Théorème 7.1 et $\mathcal{H}^*$ a la propriété de Helly d'après le Théorème 7.2. Ainsi, $\mathcal{H}^*$ est normal et par conséquent chacun de ses hypergraphes partiels est normal. Puisque le dual d'un hypergraphe partiel de $\mathcal{H}^*$ est un sous-hypergraphe de $\mathcal{H}$, nous déduisons que chaque sous-hypergraphe de $\mathcal{H}$ a la propriété duale de König. ■

Une autre caractérisation des hypergraphes de Helly, due à Berge et Duchet [3], est donnée par la propriété suivante:

Pour chaque trois sommets a_1, a_2, a_3 la famille des arêtes contenant au moins deux des sommets a_i a une intersection non vide. Cette caractérisation sera utilisée dans le théorème suivant:

Théorème 7.3 [13] *Si P est un poset série-parallèle, alors $\mathcal{H}$ satisfait la propriété de Helly.*

Preuve. Soit $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_m\}$ la famille des intervalles maximaux de P . Nous supposons qu'il existe trois sommets a_1, a_2, a_3 de P tels que $\bigcap_{j \in J} I_j = \emptyset$, où $J = \{j : |I_j \cap \{a_1, a_2, a_3\}| \geq 2\}$.

Alors $|J| \geq 3$ et il existe trois arêtes, disons sans perte de généralité $I_1 = [p_1, q_1]$, $I_2 = [p_2, q_2]$ et $I_3 = [p_3, q_3]$ tels que

$$\begin{aligned} a_2, a_3 \in I_1 & \quad \text{et} \quad a_1 \notin I_1 \\ a_1, a_3 \in I_2 & \quad \text{et} \quad a_2 \notin I_2 \\ a_1, a_2 \in I_3 & \quad \text{et} \quad a_3 \notin I_3 \end{aligned}$$

Mais, nous avons déjà vu dans la démonstration du Théorème 7.2 que ceci conduit à une contradiction. ■

7.3 Propriété de König

Dans le théorème suivant, nous établissons la propriété de König non pas à travers la normalité de $\mathcal{H}$ mais par la construction des posets série-parallèle.

Théorème 7.4 [13] *Si P est un poset série-parallèles, alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété de König.*

Preuve. Nous nous intéressons qu'au cas où P est connexe car s'il ne l'est pas, il se décomposera en k composantes connexes $P_1, \dots, P_k$ et les relations $\nu(\mathcal{H}(P)) = \nu(\mathcal{H}(P_1)) + \dots + \nu(\mathcal{H}(P_k))$, $\tau(\mathcal{H}(P)) = \tau(\mathcal{H}(P_1)) + \dots + \tau(\mathcal{H}(P_k))$ pourront être utilisées.

Soit donc P un poset série-parallèle connexe et non réduit à un singleton. P se décompose en sous-posets en utilisant seulement la somme linéaire, disons $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$, avec $k \geq 2$.

Le cas $k \geq 3$ implique directement $\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}) = 1$ parceque chaque singleton avec un élément de P_2 représente un recouvrement par sommets de $\mathcal{H}$.

Soit $k = 2$. Notons par $P_{11}, \dots, P_{1k_1}$ et $P_{21}, \dots, P_{2k_2}$ les composantes connexes de P_1 et P_2 , respectivement. Nous supposons sans perte de généralité que $k_1 \leq k_2$.

Soit $j_0 \in \{1, \dots, k_1\}$ et a_{ij_0} (resp. b_{ij_0}) un élément minimal quelconque (resp. maximal) de P_{ij_0} . Puisque P_{ij_0} est connexe et série-parallèle, chaque élément maximal (de P_{ij_0}) est au-dessus de chaque élément minimal (de P_{ij_0}). Il s'ensuit, $p < b_{1j_0}$ pour tout $p \in \min(P_{1j_0})$. Aussi, nous avons par l'opération $\oplus$, $b_{1j_0} < p'$ pour tout $p' \in \min(P_2)$. Ainsi, chaque arête de $\mathcal{H}(P_{1j_0} \oplus P_2)$ contient le point b_{1j_0} et plus généralement, pour $P = (P_{11} + \dots + P_{1k_1}) \oplus P_2$, l'ensemble $T = \{b_{1j}, j = 1, \dots, k_1\}$ représente un recouvrement par sommets de $\mathcal{H}(P)$. D'un autre côté, il n'est pas difficile de voir que la famille des arêtes $\{[a_{1j}, b_{2j}], j = 1, \dots, k_1\}$ forme un couplage de $\mathcal{H}$. Par suite, $\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}) = \min\{k_1, k_2\}$. ■

Remarque 7.1 *Un raisonnement analogue au Théorème 7.4 produit une autre preuve de la propriété duale de König. En effet, soit $P = P_1 + \dots + P_k$*

un poset série-parallèle où chaque composante P_i est construite à partir d'une opération $\oplus$, disons $P_i = P_{i1} \oplus P_{i2}$. Nous avons vu dans le Chapitre 3 que $\alpha(\mathcal{H}(P_i)) = \rho(\mathcal{H}(P_i)) = \max\{|\min(P_i)|, |\max(P_i)|\}$, $\alpha(\mathcal{H}(P_i + P_j)) = \alpha(\mathcal{H}(P_i)) + \alpha(\mathcal{H}(P_j))$ et $\rho(\mathcal{H}(P_i + P_j)) = \rho(\mathcal{H}(P_i)) + \rho(\mathcal{H}(P_j))$. Nous déduisons alors

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{H}(P)) &= \sum_{i=1}^k \alpha(\mathcal{H}(P_i)) = \sum_{i=1}^k \max\{|\min(P_i)|, |\max(P_i)|\} \text{ et} \\ \rho(\mathcal{H}(P)) &= \sum_{i=1}^k \rho(\mathcal{H}(P_i)) = \sum_{i=1}^k \max\{|\min(P_i)|, |\max(P_i)|\}.\end{aligned}$$

■

Chapitre 8

Nombre de stabilité pour l'hypergraphe des intervalles du treillis des faces du n -cube et du treillis linéaire

8.1 Hypergraphe des intervalles du treillis des faces du n -cube

Le treillis des faces du n -cube a été défini au Chapitre 1. Rappelons seulement que le rang d'une face est égal au nombre de ses composantes libres (c.à.d celles qui diffèrent de 0 et 1) et que le nombre de Whitney W_i vaut $2^{n-i} \binom{n}{i}$.

Afin de prouver que l'hypergraphe $\mathcal{H}(C_n)$ a la propriété forte IS, introduisons deux Lemmes.

Lemme 8.1 *Soient F_1 et F_2 deux faces de Q_n telles que $F_1 \leq F_2$. Si le rang de F_1 (resp. de F_2) est l (resp u), alors l'intervalle $[F_1, F_2]$ est isomorphe au treillis Booléen B_{u-l} .*

Preuve.

Parceque C_n est isomorphe au produit cartésien de n copies de $\wedge$, où $\wedge$ est un poset à trois éléments $\{0, 1, 2\}$ ordonné par $0 < 2 > 1$, nous pou-

vons le considérer comme l'ensemble des n -uples $\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ avec $f_i \in \{0, 1, 2\}$ pour tout i , ordonné de la manière suivante:

$$\underline{f} \leq \underline{g} \quad \text{ssi} \quad f_i = g_i \text{ ou } g_i = 2.$$

Soient $F_1 = (f_1, \dots, f_n)$ et $F_2 = (f'_1, \dots, f'_n)$ deux faces de Q_n .

Posons

$$I(F_1) = \{i \in \{1, \dots, n\} : f_i = 0\}, \quad I(F_2) = \{i \in \{1, \dots, n\} : f'_i = 0\};$$

$$J(F_1) = \{i \in \{1, \dots, n\} : f_i = 1\}, \quad J(F_2) = \{i \in \{1, \dots, n\} : f'_i = 1\};$$

$$K(F_1) = \{i \in \{1, \dots, n\} : f_i = 2\}, \quad K(F_2) = \{i \in \{1, \dots, n\} : f'_i = 2\}.$$

Comme $F_1 \leq F_2$, on déduit que $I(F_1) \supseteq I(F_2)$ et $J(F_1) \supseteq J(F_2)$.

Désignons

$$I(F_1) \setminus I(F_2) = \{i_1, \dots, i_s\} \quad \text{et} \quad J(F_1) \setminus J(F_2) = \{j_1, \dots, j_t\}$$

et considérons l'application φ définie par:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad [F_1, F_2] &\longmapsto B_{u-l} \\ F = (f_1, \dots, f_n) &\longrightarrow (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s, \delta_1, \dots, \delta_t) \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 0 & \text{si } f_{i_k} = 0 \\ 1 & \text{si } f_{i_k} = 2 \end{cases}$$

et

$$\delta_k = \begin{cases} 0 & \text{si } f_{i_k} = 1 \\ 1 & \text{si } f_{i_k} = 2 \end{cases}$$

φ représente bien un isomorphisme. ■

Lemme 8.2 *Les coefficients du binôme satisfont l'inégalité*

$$\binom{i}{l} \binom{n-i}{u-i} \geq \min \left\{ \binom{u}{l}, \binom{n-l}{u-l} \right\} \quad \text{pour tout } i = l, \dots, u.$$

Preuve. Etudions la séquence $\{c_i\} = \binom{i}{l} \binom{n-i}{u-i} \quad (i = l, \dots, u)$.

Parce que $\frac{\binom{i}{l}}{\binom{i-1}{l}} = \frac{i}{i-l}$ est une fonction décroissante en i donc la séquence $\{a_i\} = \left\{ \binom{i}{l} \right\}$ est logarithmiquement concave. La même chose est réalisée

pour la suite $\{b_i\} = \left\{\binom{n-i}{u-i}\right\}$. Donc le produit $\{c_i\} = \{a_i b_i\}$ est logarithmiquement concave et par suite unimodal c.à.d, il existe un entier h tel que

$$c_l \leq \dots \leq c_h \geq \dots \geq c_u \quad \text{et} \quad \min\{c_i, i = l, \dots, u\} = \min\{c_l, c_u\}.$$

On déduit

$$\binom{i}{l} \binom{n-i}{u-i} \geq \min \left\{ \binom{u}{l}, \binom{n-l}{u-l} \right\} \quad \text{pour tout } i = l, \dots, u.$$

■

Dans le Chapitre 6, nous avons prouvé la propriété (l, u) -IC de $\mathcal{H}(C_n)$ pour tous $l, u, n - u \leq l \leq u \leq n$. Dans le théorème qui suit, la propriété forte IS est donnée.

Théorème 8.1 [14] *L'hypergraphe des intervalles du treillis des faces du n -cube a la propriété forte IS.*

Preuve. Nous avons à montrer seulement que $\alpha(\mathcal{H}((C_n)_{l,u})) \leq \max\{|N_l|, |N_u|\}$. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles maximaux de $(C_n)_{l,u}$ et soit x un élément de C_n de rang i . Le nombre $f(x)$ d'intervalles de $\mathcal{I}$ contenant x vaut:

$$f(x) = |\{y \in N_l : y \leq x\}| |\{z \in N_u : x \leq z\}|.$$

D'après le Lemme 8.1, $\{y \in C_n : y \leq x\} = [0, x]$ est isomorphe au treillis Booléen B_i et $\{z \in C_n : x \leq z\} = [x, [n]]$ est isomorphe au treillis Booléen B_{n-i} . D'où

$$f(x) = \binom{i}{l} \binom{n-i}{u-i}.$$

Concernant la taille de $\mathcal{I}$, on a

$$|\mathcal{I}| = \sum_{x \in N_l} f(x) = \sum_{x \in N_u} f(x),$$

c.à.d,

$$|\mathcal{I}| = 2^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{u-l} = 2^{n-u} \binom{n}{u} \binom{u}{l}.$$

Soit A un ensemble stable de $\mathcal{H}_{l,u}$. Comptons, de deux manières différentes, les couples de l'ensemble

$$\{(x, I) : x \in A, I \in \mathcal{I} \text{ et } x \in I\}.$$

Nous obtenons

$$\sum_{x \in A} f(x) = \sum_{I \in \mathcal{I}} |A \cap I|$$

D'après le Lemme 8.2, nous avons

$$\sum_{x \in A} f(x) = \sum_{x \in A} \binom{r(x)}{l} \binom{n-r(x)}{u-r(x)} \geq |A| \min \left\{ \binom{u}{l}, \binom{n-l}{u-l} \right\},$$

et

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} |A \cap I| \leq |\mathcal{I}| = 2^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{u-l} = 2^{n-u} \binom{n}{u} \binom{u}{l}.$$

D'où

$$|A| \min \left\{ \binom{u}{l}, \binom{n-l}{u-l} \right\} \leq 2^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{u-l} = 2^{n-u} \binom{n}{u} \binom{u}{l}.$$

Ce qui donne par division

$$|A| \leq 2^{n-l} \binom{n}{l} \quad \text{si} \quad \binom{n-l}{u-l} \leq \binom{u}{l}$$

et

$$|A| \leq 2^{n-u} \binom{n}{u} \quad \text{si} \quad \binom{u}{l} \leq \binom{n-l}{u-l}.$$

Ainsi, nous obtenons bien

$$|A| \leq \max \left\{ 2^{n-l} \binom{n}{l}, 2^{n-u} \binom{n}{u} \right\}.$$

■

8.2 Hypergraphe des intervalles du treillis linéaire

Rappelons que $L_n(q)$ est le treillis de tous les sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension n sur le corps de Galois $GF(q)$, ordonné par inclusion.

Théorème 8.2 [9] *L'hypergraphe des intervalles du treillis linéaire a la propriété forte IS.*

Preuve. Mise à part quelques calculs techniques, la démonstration de ce résultat est analogue à celle du treillis des faces du n -cube. C'est pourquoi, il n'est pas nécessaire de la faire. Nous nous contenterons seulement de vérifier deux lemmes. ■

Lemme 8.3 *Soient X et Y deux sous-espaces de $L_n(q)$ tels que $\dim X = l$, $\dim Y = u$ et $X \subseteq Y$. Alors*

$$[X, Y] \simeq L_{u-l}(q).$$

Preuve. L'application φ définie comme suit:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : [X, Y] & \longmapsto & L_{\dim Y - \dim X}(Y/X, q) \\ U & \longrightarrow & U/X \end{array}$$

est un isomorphisme. ■

Lemme 8.4 *Les coefficients de Gauss satisfont l'inégalité suivante:*

$$\binom{i}{l}_q \binom{n-i}{u-i}_q \geq \min \left\{ \binom{u}{l}_q, \binom{n-l}{u-l}_q \right\} \quad \text{pour tout } i = l, \dots, u.$$

Preuve. Soit $\{c_i\}$ la suite définie par:

$$c_i = \left\{ \binom{i}{l}_q, \binom{n-i}{u-i}_q \right\} \quad \text{pour } i = l, \dots, u.$$

Parceque

$$\frac{\binom{i}{l}_q}{\binom{i-1}{l}_q} = \frac{q^i - 1}{q^{i-l} - 1}$$

décroît en i , la séquence $\{a_i\} = \left\{ \binom{i}{l}_q \right\}$ est logarithmiquement concave. De même pour la séquence $\{b_i\} = \left\{ \binom{n-i}{u-i}_q \right\}$. Donc le produit $\{c_i\} = \{a_i b_i\}$ est logarithmiquement concave et par suite unimodal. Il existera un entier h tel que $\min\{c_i, i = l, \dots, u\} = \min\{c_l, c_u\}$. Ce qui permet d'obtenir

$$\binom{i}{l}_q \binom{n-i}{u-i}_q \geq \min \left\{ \binom{u}{l}_q, \binom{n-l}{u-l}_q \right\} \quad \text{pour tout } i = l, \dots, u.$$

Remarque 8.1 Si $\mathcal{H}$ représente l'hypergraphe des intervalles de $(C_n)_{l,u}$, alors la fonction

$$f(I) = \frac{1}{\min \left\{ \binom{u}{l}, \binom{n-l}{u-l} \right\}}$$

est un recouvrement par arêtes fractionnaire de $\mathcal{H}((C_n)_{l,u})$ et le nombre de recouvrement par arêtes fractionnaire est donné par $\max\{2^{n-l} \binom{n}{l}, 2^{n-u} \binom{n}{u}\}$.

En effet,

$$\sum_{I \in \mathcal{I}: x \in I} f(I) = \frac{\binom{r(x)}{l} \binom{n-r(x)}{u-r(x)}}{\min \left\{ \binom{u}{l}, \binom{n-l}{u-l} \right\}} \geq 1 \quad \text{pour tout } x \in P.$$

D'autre part,

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} f(I) = \frac{1}{\min \left\{ \binom{u}{l}, \binom{n-l}{u-l} \right\}} 2^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{u-l} = \frac{1}{\min \left\{ \binom{u}{l}, \binom{n-l}{u-l} \right\}} 2^{n-u} \binom{n}{u} \binom{u}{l}$$

c.à.d,

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} f(I) = \begin{cases} 2^{n-l} \binom{n}{l} & \text{si } \binom{u}{l} \geq \binom{n-l}{u-l} \\ 2^{n-u} \binom{n}{u} & \text{si } \binom{u}{l} \leq \binom{n-l}{u-l} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} f(I) \leq \max\{2^{n-l} \binom{n}{l}, 2^{n-u} \binom{n}{u}\}.$$

Ainsi

$$\rho^*(\mathcal{H}(C_n)_{l,u}) = \max\{2^{n-l} \binom{n}{l}, 2^{n-u} \binom{n}{u}\}$$

De façon analogue, pour le treillis linéaire, la fonction

$$g(I) = \frac{1}{\min \left\{ \binom{u}{l}_q, \binom{n-l}{u-l}_q \right\}}$$

est un recouvrement par arêtes fractionnaire de $\mathcal{H}(L_n(q))_{l,u}$ et le nombre de recouvrement fractionnaire vaut

$$\rho^*(\mathcal{H}(L_n(q))_{l,u}) = \max\left\{ \binom{n}{l}_q, \binom{n}{u}_q \right\}.$$

Conclusion générale

L'essentiel de la thèse s'articulait principalement autour de deux propriétés: la propriété de König et la propriété duale de König pour une nouvelle classe d'hypergraphes. Un hypergraphe de cette classe, appelé hypergraphe des intervalles d'un poset P et est noté $\mathcal{H}(P)$, a comme sommets les éléments de P et comme arêtes ses intervalles maximaux.

Les hypergraphes des chaînes maximales d'un poset vérifient ces deux propriétés. Les égalités entre le nombre de couplage et le nombre de transversalité (représentant le nombre d'articulation) et entre le nombre de stabilité et le nombre de recouvrement par arêtes (représentant la largeur de P) sont déterminés de manière polynomiale en utilisant les algorithmes de flot maximum. L'hypergraphe des intervalles d'un poset ne vérifie pas en général ces propriétés mais son étude est intéressante vu le rôle que jouent les intervalles dans la théorie de Sperner. En '88, Voigt et Wegener prouvaient que la détermination d'un nombre minimum de monômes du polynôme représentant une fonction booléenne symétrique peut être exprimé par la plus petite cardinalité d'un recouvrement par intervalles maximaux d'un ordre induit par des niveaux consécutifs du treillis Booléen.

Nous avons d'abord examiné la complexité des problèmes de couplage, de transversalité, de stabilité, de recouvrement par arêtes et de la coloration dans les hypergraphes d'intervalles. Ensuite, et parceque plusieurs posets peuvent être construits à partir de la composition d'autres posets, nous avons examiné la préservation de différentes propriétés -propriétés fortes IS et IC, propriétés de König et duale de König- par le passage à la composée. Dans cette thèse, nous considérons plusieurs posets: Le treillis Booléen, les ordres d'intervalles, les ordres à chaînes symétriques spéciales (SSC), les ordres à chaînes semi-symétriques spéciales (SSSC), les ordres séries-parallèles, le treillis des faces du n -cube C_n et le treillis linéaire $L_n(q)$. Par la normalité, par l'établissement d'algorithmes polynomiaux ou encore par la simple structure de l'ordre donné, nous déduisons suivant la classe d'ordres choisie, les quatre propriétés précédemment mentionnées.

Comme perspectives, nous proposons d'étudier les problèmes suivants:

Problèmes ouverts

1. Etudier le problème de reconnaissance des hypergraphes d'intervalles d'un poset.
2. Caractériser les graphes représentatifs des hypergraphes d'intervalles d'un poset par des sous-graphes exclus.
3. Prouver que les opérations $\otimes$, $\times_r$ et l'exponentiation préservent les propriétés de König et duale de König.
4. Si $\mathcal{H}(P)$ a la propriété forte IS (resp. forte IC, de König ou dual de König) et $P = Q \circ R$. Qu'en est-il de $\mathcal{H}(Q)$ et $\mathcal{H}(R)$?
5. Prouver que l'hypergraphe d'un ordre série-parallèle est normal.
6. Décider si $L_n(q)$ est un ordre SSC [9].
7. Décider si $\mathcal{H}(L_n(q))$ a la propriété forte IC [77].
8. Prouver que $L(m, n)$ a la propriété $(l, mn - l)$ -IC pour $m < l < mn/2$ [9].
9. Décider si $\mathcal{H}(C_n)$ a la propriété (l, u) -IC pour tous l, u avec $l < n - u$.
10. Déterminer $\nu_{n;l,u}$ pour $u \leq \frac{n+l^2}{l+1}$ et $l \geq 3$. Est-il vrai que dans ce cas $\nu_{n;l,u} = \binom{n}{l}$ [25]?
11. Déterminer $\nu_{n;2,n-2}$. Est-il vrai que ce nombre vaut 10 [25]?
12. Trouver de meilleures bornes pour $\tau_{n;1,u}$ si $u > \frac{n+1}{2}$ [25].
13. Déterminer $\nu_{n;l,u}$ et $\tau_{n;l,u}$ pour $u - l = 2$ [25].
14. Etudier l'ordre des trapèzes.

Bibliographie

- [1] M.Aigner. *Combinatorial Theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York (1979).
- [2] K.A.Baker, P.C.Fishburn, and F.S.Roberts. Partial orders of dimension 2, interval orders and interval graphs, Paper P-4376, The rand Corporation (1970).
- [3] C.Berge. *Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam, Tokyo (1989).
- [4] V.Berge. Färbung von Graphen deren sämtliche bzw. ungerade kreise starr sind (Zusammenfassung), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Hahhe-Wittenberg Math.-Natur. Reihe, 114-115 (1961).
- [5] M.R.Best, A.E.Brouwer, F.J.MacWilliams, A.M.Odlyzko, and N.J.A.Sloane. Bounds for binary codes of length less than 25. *IEEE Trans. Information Theory*, **24**:81-93 (1978).
- [6] S.L.Bezrukov and K.Engel. Properties of graded posets preserved by some operation. In R.L.Graham and J.Nešetřil, editors, *Mathematics of Paul Erdős*, Springer-Verlag, Berlin. Algorithms Comb. **14**:79-85 (1997).
- [7] K.P.Bogart, I.Rabinovitch, W.T.,Jr.Trotter. A bound on the dimension of interval orders. *J. Combinatorial Theory*, **21**:319-328 (1976).
- [8] B.Bollobás. On generalized graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **16**:447-452 (1965).
- [9] I.Bouchemakh and K.Engel. Interval stability and interval covering property in finite posets. *Order*, **9**:163- 175 (1992).
- [10] I.Bouchemakh and K.Engel. The order-interval hypergraph of a finite poset and the König property. *Discrete Math.*, **170**:51-61 (1997).

- [11] I.Bouchemakh. Stabilité et recouvrement par intervalles dans les ordres partiels finis. Thèse de Magister, (1991).
- [12] I.Bouchemakh. On the chromatic number of order-interval hypergraphs. *Rostock. Math. Kolloq.*, **54**:81-89 (2000).
- [13] I.Bouchemakh. On the König and dual König properties of the order-interval hypergraphs of series-parallel posets. *Rostock. Math. Kolloq.*, **56**: (2001).
- [14] I.Bouchemakh. On the k -independence number in the Boolean lattice (soumis).
- [15] A.E.Brouwer. On the packing of quadruples without common triples. *Ars Combinatoria.*, **3**:271-276 (1977).
- [16] A.E.Brouwer. On the packing of quadruples without common triples. *Ars Combinatoria*, **5**:3-6 (1978).
- [17] A.E.Brouwer, J.B.Shearer, N.J.A.Sloane and W.D.Smith. A new table of constant weight codes. *IEEE Trans. on Information Theory* **IT-36**:1334-1380 (1990).
- [18] N.G.de Bruijn, C.A.v.E.Tengbergen, and D.Kruyswijk. On the set of divisors of a number. *Nieuw Arch. Wiskunde*, **23**:191-193 (1951).
- [19] E.R.Canfield. A Sperner property preserved by product. *Linear and Multilinear Algebra*, **9**:151-157 (1980).
- [20] V.Chvátal. Perfectly ordered graphs. In: C.Berge and V.Chvátal, eds., *Topics on Perfect Graphs* (North-Holland, Amsterdam), 63-65 (1984).
- [21] S.A.Cook. The complexity of theorem-proving procedures. Proc.3rd Ann. ACM Symp. On Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New York, 151-158 (1971).
- [22] R.P.Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann. of Math.*, **51**:161-166 (1950).
- [23] P.Edelman. Chain enumeration and non-crossing partition. *Discrete Math.*, **31**:171-180 (1980).
- [24] K.Engel. Optimal representations of partially ordered sets and a limit Sperner theorem. *European J. Combin.*, **7**:287-302 (1986).

- [25] K.Engel. Interval packing and covering in the Boolean lattice. *Comb. Probab. Comput.*, **5**:373-384 (1996).
- [26] K.Engel. Sperner Theory. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- [27] K.Engel and H.-D.O.F.Gronau. Sperner theory in partially ordered sets. *BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft*, Leipzig (1985).
- [28] K.Engel and G.Sauerbier. An application of Dilworth's theorem to a problem on free Lie-algebras *Rostock. Math. Kolloq.*, **49**:25-30 (1995).
- [29] T.Etzion. Partitions of triples into optimal packings. *J. Combin. Theory Ser. A.*, **59**:269-284 (1992).
- [30] T.Etzion. Optimal partitions of triples, *J. Combin. Theory Ser. A.*, **59**:161-176 (1992).
- [31] T.Etzion. Partitions of quadruples, *Ars. Combin.*, **36**:296-308 (1993).
- [32] P.C.Fishburn. Intransitive Indifference with Unequal Infierence Intervals. *J. Math. Psych.*, **7**:144-149 (1970).
- [33] P.C.Fishburn. Interval Orders and Interval Graphs. Wiley, New York, (1985).
- [34] P.Frankl. An extremal problem for two families of sets. *Europ. J. Comb.*, **3**:125-127 (1982).
- [35] M.R.Garey and D.S.Johnson. *Computers and Intractability: A guide to the Theory of N.P.-Completeness*, W.H.Freeman and Company, San Francisco (1979).
- [36] R.L.Graham, N.J.A.Sloane. Lower bounds for constant weight codes. *IEEE Trans. on Information Theory* **IT-26**:37-43 (1980).
- [37] C.Greene. Posets of shuffles. *J. Combin. Theory, Ser. A*, **47**:191-206 (1988).
- [38] C.Greene and D.J.Kleitman. Strong versions of Sperner's theorem. *J. Combin. Theory, Ser. A*, **20**:80-88 (1976).
- [39] J.R.Griggs. Sufficient conditions for a symmetric chain order. *SIAM J. Appl. Math.*, **32**:807-809 (1977).

- [40] J.R.Griggs and C.Zhu. Applications of the symmetric chain decomposition of the lattice of divisors. *Order*, **11**:41-46 (1994).
- [41] H.Hanani. On quadruple systems. *Canad. J. Math.*, **12**:145-157 (1960).
- [42] H.Hanani. On quadruple systems, *Canad.J.Math.* **15**:702-722 (1960).
- [43] G.Kalai. Intersection patterns of convex sets. *Isr. J. Math.*, **48**:161-174 (1984).
- [44] G.O.H.Katona. A generalisation of some generalizations of Sperner's theorem. *J. Combin. Theory, Ser. B*, **12**:72-81 (1972).
- [45] T.P.Kirkman. On a problem in combinations, *Cambridge and Dublin Math.J.*, **2**:191-204 (1847).
- [46] G.Kreweras. Sur les partitions noncroisées d'un cycle. *Discrete Math.*, **1**:333-350 (1972).
- [47] B.Lindström. A partition of $L(3, n)$ into saturated symmetric chains. *European J. Combin.*, **1**:61-63 (1980).
- [48] L.Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture *Discrete Math.*, **2**:253-267 (1972).
- [49] L.Lovász. Flats in matroids and geometric graphs. In Cameron, P.J. (Ed.) *Combinatorials surveys, Proc. 6th British Comb. Conf., Egham*, Acad. Press. London 45-86 (1977).
- [50] J.X.Lu. On large sets of disjoint Steiner triple systems I-III. *J. Combin. Theory Ser. A*. **34**:140-183 (1983).
- [51] J.X.Lu. On large sets of disjoint Steiner triple systems IV-VI. *J. Combin. Theory Ser. A*. **37**:136-192 (1984).
- [52] W.H.Mills. On the covering of triples by quadruples. In: *Proc. Fifth S-E Conf. on combin., Graph Th. and Comp.* (Boca Raton, Fa., F.Hoffman et.al., eds.), Utilitas, Winnipeg, 563-581 (1974).
- [53] R.H.Möhring. Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs. In: *I.Rival, ed., Graphs and Orders* (D.Reidel, Dordrecht), 41-101 (1985).
- [54] J.Pach and J.Toeröcsik. Some geometric applications of Dilworth's theorem. *Discrete Comput. Geom.*, **12**: No.1,1-7 (1994).

- [55] W.J.Paul. Boolesche Minimalpolynome und Überdeckungsprobleme. *Acta Informatica*, **4**:321-336 (1975).
- [56] N.Pippenger and J.Spencer. Asymptotic behaviour of the chromatic index for hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. A*, **51**:24-42 (1989).
- [57] I.Rabinovitch. The dimension of semiorders. *J. Comb. Theory, Ser. A*, **25**:50-61 (1978).
- [58] I.Rabinovitch. An upper bound on the “Dimension of interval orders”. *J. Comb. Theory, Ser. A*, **25**:68-71 (1978).
- [59] W.Riess. Zwei optimierungsprobleme auf Ordnungen, *Arbeitsber. Inst. Math. Datenvearb. (Inform.)*, **11**:41-59 (1978).
- [60] I.Rival. Stories about the letter N (en). In Combinatorics and Ordered Sets, ed., I.Rival. *Contemporary Mathematics*, **57**:263-285 (1986).
- [61] V.Roedl. On a packing and covering problem. *Europ.J.Combinatorics*, **5**:69-78 (1985).
- [62] A.Sali. Constructions of ranked posets. *Discrete Math.*, **70**:77-83 (1988).
- [63] J.Schönheim. On a maximal systems of k -tuples. *Studia Sci. Math. Hung.*, **1**:363-368 (1966).
- [64] R.Sedgewick. *Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA, (1988).
- [65] Seinsche. On a property of the class of n -colorable graphs. *J. Comb. Theory, Ser B*, **16**:191-193 (1974).
- [66] R.Simion and D.Ullman. On the structure of the lattice of noncrossing partitions. *Discrete Math.*, **98**:193-206 (1991).
- [67] J.Spencer. Maximal consistent families of triples. *J. Combin. Theory*, **5**:1-8 (1968).
- [68] R.P.Stanley. Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, **1**:168-184 (1980).
- [69] D.P.Sumner. Graphs indecomposable with respect to the X -join. *Discrete Math.*, **6**:281-298 (1973).
- [70] T.G.Tarján. Complexity of lattice-configurations. *Stud. Sci. Math. Hung.*, **10**:203-211 (1975).

- [71] L. Terlinck. A completion of Lu's determination of the spectrum for large sets of disjoint Steiner systems. *J. Combin. Theory Ser. A.*, **57**:302-305 (1991).
- [72] Z.Tuza. Inequalities for two set systems with prescribed intersections. *Graphs and Combinatorics*, bf 3:75-80 (1987).
- [73] Z.Tuza. Applications of the set-pair method in extremal hypergraph theory. In: Bolyai Society Mathematical Studies, bf 3:479-514 (1994).
- [74] I.Tomescu. Une démonstration du Théorème de Dilworth et applications à un problème de couverture de graphes. *Calcolo*, **7**:289-294 (1971).
- [75] J.Valdes, R.E.Tarjan, and E.L.Lawler. The recognition of series-parallel digraphs. *Siam J. Computing*, **11**:298-313 (1982).
- [76] C.L.M.van Paul and T.Etzion. New lower bounds for constant weight codes. *IEEE Trans. on Information Theory*, **IT-35**:1324-1329 (1989).
- [77] B.Voigt. Problem 12. *Rostock. Math. Kolloq.*, **41**:94 (1990).
- [78] B.Voigt and I.Wegener. A remark on minimal polynomials of Boolean functions. In E.Borger,H.Kleine Buning, and M.M.Richter,editors, CLS '88 *Proc. 2nd Workshop Computer, Science, Logic, Duisburg 1988*),vol. **385 of Lecture Notes in Comput. Sci.**, pp.372-383, Springer-Verlag, Berlin, New York (1989).
- [79] G.Wayne, M.Katchalski, and D.J.Kleitman. Forcing disjoint segments in the plane. *Eur. J. Comb.*, **17**:No.4,391-395 (1996).
- [80] D.Wagner and K.Weihe. A linear-time algorithm for edge-disjoint paths in planar graphs. *Combinatorica*, **15**:135-150 (1995).
- [81] D.B.West. A symmetric chain decomposition of $L(4,n)$. *European J. Combin.*, **1**:379-383 (1980).