

N° d'ordre : 15/2017-C/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene  
Faculté de Mathématiques



# THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de **Doctorat 3<sup>eme</sup> Cycle**

En : Mathématiques

Spécialité : Equations aux dérivées partielles et applications

Par : **Hichem KASRI**

**Titre**

**Stabilité et contrôlabilité d'un système de  
l'elasto-magnétisme avec conditions au bord  
de Ventcel par des feedbacks non linéaires**

Soutenue publiquement le 14/05/2017, devant le jury composé de :

<b>M. MOUSSAOUI</b>	Professeur,	à l'E.N.S. Kouba	Président
<b>A. HEMINNA</b>	Professeur,	à l'USTHB	Directeur
<b>A. KHEMMOUDJ</b>	Professeur,	à l'USTHB	Examinateur
<b>M.S. MOULAY</b>	Professeur,	à l'USTHB	Examinateur
<b>O. ZAIR</b>	Professeur,	à l'USTHB	Examinatrice
<b>F. AMMAR KHODJA</b>	HDR-Maître de conférences/A,	à l'U. de Franche-Comté	Examinateur
<b>H. RAMOUL</b>	Maître de conférences/A,	à l'U. de Abbès Laghrour, Khenchela	Examinateur



# Stabilité et contrôlabilité d'un système de l'elasto-magnétisme avec conditions au bord de Ventcel par des feedbacks non linéaires

Hichem KASRI

Directeur de thèse : Amar HEMINNA

Thèse préparée au  
Département de Mathématiques  
**Laboratoire AMNEDP**  
Université des Sciences et de la Technologie  
Houari Boumediene "USTHB"



# Remerciements

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mon directeur de thèse, Amar Heminna, pour m'avoir ouvert les portes du monde de la recherche et encouragé à le parcourir en long, en large et en travers. Je le remercie de la confiance qu'il m'a accordée durant ces six années. Je tiens ensuite à lui exprimer mes plus vifs remerciements pour m'avoir initié à la théorie du contrôle et de m'avoir transmis sa passion de la recherche.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mr. M. Moussaoui, qui m'a fait l'honneur de présider le jury. Je le remercie profondément pour l'aide qu'il m'a apporté.

Je remercie très sincèrement Mr. M. F. Ammar Khodja et Mr. H. Ramoul d'avoir bien voulu me faire honneur en acceptant d'être dans le jury . Leurs présences sont justifiées bien sûr par leurs grandes compétences dans les thèmes abordés dans cette thèse. Je suis également reconnaissant à Mr. A. Khemmoudj, Mr. M.S. Moulay et Mme. O. Zair, pour leur participation à mon jury. Je les remercie très chaleureusement. J'apprécie l'intérêt que tous ont porté à mon travail. C'est pour moi un grand honneur d'avoir un tel jury.

Mes sincères remerciements aux membres de l'équipe du Laboratoire de Mathématiques de l'USTHB, particulièrement à Mr. Djamel Teniou, le directeur du laboratoire AMNEDP, je le remercie de m'avoir accueilli et de m'avoir donné des conditions exceptionnelles pour réaliser ce travail.

Je profite aussi pour adresser mes remerciements à tous les miens qui m'ont soutenu par leur amour et leur confiance. À mes amis qui trouveront ici toute ma reconnaissance pour leurs aides et encouragements à terminer cette thèse

Bien sûr, je ne peux terminer ces remerciements sans remercier mes parents qui ont veillé depuis l'école primaire pour que je puisse arriver à ce niveau et je ne peux que leur exprimer toute ma gratitude et ma sincère reconnaissance. Je pense également à mes chers frères et soeurs pour leur présence à mes côtés. Finalement, un immense merci à ma fiancée qui m'a toujours soutenu, encouragé et m'avoir supporté ces dernières années.

# Résumé de la thèse

Ce travail s'articule autour de deux concepts importants de la théorie du contrôle : la stabilisation et la contrôlabilité exacte. Il est composé de deux parties indépendantes. Dans la première partie on traite la stabilisation frontière et la contrôlabilité exacte d'un système couplé entre le système de Maxwell et l'équation des ondes avec des conditions aux limites de type Ventcel par des feedbacks frontières non linéaires. On établit d'abord une "*estimation de stabilité*" qui est équivalente à la stabilité exponentielle du système linéaire associé dans un domaine strictement étoilé par rapport à l'origine. Ensuite, nous utilisons le principe de Russell pour établir des résultats de contrôlabilité exacte à partir des résultats de stabilisation précédemment démontrés. Le principe de Liu basé sur la stabilité exponentielle du problème inverse par des feedbacks linéaires, permet de donner une estimation du taux de décroissance de l'énergie par des feedbacks non linéaires.

Le second axe d'étude est la stabilisation frontière et la contrôlabilité exacte d'un système de l'elasto-magnétisme avec conditions au bord de Ventcel stationnaires soumis à deux fonctions feedbacks non linéaires.

En suivant la même approche que celle adoptée dans la première partie, on montre que la stabilité exponentielle du système linéaire est suffisante pour assurer une décroissance de l'énergie du système non linéaire.

---

**Mots-clés :** Système de l'élasticité, système de Maxwell, équation des ondes, conditions de Ventcel, stabilité, contrôlabilité exacte, feedbacks non linéaires.

# Summary of the thesis

This work is based on two important concepts of control theory : the stabilization and exact controllability. It consists of two independent parts.

In the first part, it treats the boundary stabilization and exact controllability of a coupled system between the Maxwell system and the wave equation with Ventcel's conditions by nonlinear boundary feedbacks. We first establish a "*stability estimate*" which is equivalent to the exponential stability for linear feedbacks in a strictly star-shaped domain with respect to the origin. Afterwards, we use the Russell's principle to establish exact controllability results from the previous stabilization results. Using Liu's principle, based on the exponential stability of the inverse problem with linear feedbacks, to deduce decay rate of the energy by nonlinear feedbacks.

The second part is devoted to study the stability and exact controllability of the electromagneto-elastic system with Ventcel's conditions and damped by two nonlinear boundary feedbacks.

We proceed exactly as in the first part, we prove that the exponential stability of the linear system is sufficient to ensure the decay rate of the energy of the nonlinear system.

---

**Key-words :** Elasticity system, Maxwell's system, wave equations, Ventcel's conditions, stability, exact controllability, nonlinear feedbacks.

# Table des matières

Introduction générale	1
<b>1 Rappels</b>	<b>11</b>
1.1 Rappels et notations générales . . . . .	11
1.1.1 Rappels sur les opérateurs non linéaires . . . . .	11
1.1.2 Quelques inégalités . . . . .	12
1.2 Quelques éléments de géométrie différentielle intrinsèque pour les surfaces . . . . .	14
1.2.1 La normale et le plan tangent . . . . .	14
1.2.2 Dérivée d'un champ tangentiel . . . . .	14
1.2.3 Dérivée d'un champ de vecteur sur $\Gamma$ . . . . .	15
1.2.4 Divergence tangentielle d'un champ d'endomorphisme sur $\Gamma$ .	16
1.2.5 Tenseurs des déformations et de contraintes . . . . .	16
1.2.6 Quelques espaces fonctionnels . . . . .	18
<b>I Stabilité et contrôlabilité d'un système couplé entre le système de Maxwell et l'équation des ondes avec conditions au bord de Ventcel</b>	<b>19</b>
Introduction	20
<b>2 Solution du problème non linéaire</b>	<b>23</b>
2.1 Formulation du problème . . . . .	23

2.2	Existence et unicité des solutions . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Stabilisation frontière du problème “Maxwell/onde”</b>	<b>37</b>
3.1	Stabilité exponentielle dans le cas linéaire . . . . .	37
3.2	Contrôlabilité exacte . . . . .	50
3.3	Stabilité non linéaire . . . . .	53
<b>II</b>	<b>Stabilisation frontière d’un système de l’elasto-</b>	
	<b>magnétisme avec conditions au bord de Ventcel</b>	<b>60</b>
<b>4</b>	<b>Stabilisation exponentielle</b>	<b>61</b>
4.1	Introduction . . . . .	61
4.2	Formulation en terme de problème . . . . .	62
4.3	Identité fondamentale . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Quelques résultats théoriques</b>	<b>85</b>
5.1	Application à la contrôlabilité exacte . . . . .	85
5.2	Stabilisation non linéaire . . . . .	88
	<b>Exemples</b>	<b>94</b>
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>96</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>98</b>

# Notations

Certaines notations seront utilisées tout au long de cette thèse que nous listons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^3$	espace vectoriel de dimension 3 construit sur le corps des réels
$\Omega$	ouvert de $\mathbb{R}^3$
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$
$\Gamma$	bord de l'ensemble $\Omega$
$x = (x_1, x_2, x_3)$	variable de l'espace
$t$	variable du temps
$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$
$d\sigma$	mesure superficielle sur $\Gamma$
$C^k(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles $k$ fois continûment différentiable
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\Omega$
$L^p(\Omega)$	l'espace de Lebesgue défini par $\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable telle que } \int_{\Omega}  f ^p dx < \infty\}$
$L^\infty(\Omega) =$	$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable telle que } \sup_{\Omega}  f  < \infty\}$
$W^{m,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev défini par $\{f \in L^p(\Omega), D^\alpha f \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ tel que }  \alpha  \leq m\}$
$L^p(\Gamma)$	ensemble des fonctions de puissance $p^{i\text{ème}}$ intégrable sur $\Gamma$ pour la mesure de $d\sigma$
$\partial_i f$	la dérivée partielle de $f$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante $x_i$
$\nabla f$	le gradient de $f$
$\mathbf{div} f$	la divergence de $f$
$\partial_\nu f$	la dérivée de $f$ dans la direction de $\nu$
$\nabla_T f$	le gradient tangentiel de $f$ à $\Gamma$
$\Delta_T f$	le Laplacien tangentiel de $f$ à $\Gamma$
$\mathbf{div}_T f$	la divergence tangentielle de $f$ à $\Gamma$ .

# Introduction générale

L'évolution au cours du temps de nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou mécaniques est modélisé par des équations aux dérivées partielles (EDP).

Dans le cas du contrôle des EDP les modèles étudiés prennent en compte les variations temporelles et spatiales des variables qui traduisent l'état du système et ces problèmes se posent alors dans le cadre des systèmes dynamiques en dimension infinie.

En pratique, du laboratoire de recherche jusqu'à la chaîne de production, pour étudier par exemple les moyens de limiter par auto-régulation les déformations de matériaux élastiques, ou d'agir extérieurement sur ces matériaux pour les ramener vers des états cibles souhaités, la question de la réponse d'un système dynamique à une action extérieure, ou une action auto-régulation (appelée communément *feedback*) est essentielle.

L'objectif de cette thèse est d'étudier les questions de la contrôlabilité exacte et de la stabilisation de problèmes avec des conditions au bord de type **Ventcel** (ou "Wentzell") soumis à deux fonctions *feedbacks* frontières non linéaires.

Les conditions de **Ventcel** sont obtenues par passage à la limite (quand  $\epsilon \rightarrow 0$ ), dans un problème de transmission posé dans l'ouvert formé de la jonction de  $\Omega$  et d'une coque mince  $\Omega_\epsilon$  posée sur son bord, infiniment rigide, lorsque l'épaisseur de la coque tend vers 0 ; ces conditions modélisent l'effet asymptotique de raidisseur  $\Omega_\epsilon$  (*cf.* [10,31]). La condition :  $\partial_\nu u - \Delta_T u = g$  sur  $\Gamma = \partial\Omega$ , pour l'équation des ondes  $-\Delta u + u = f$  dans  $\Omega$ , dite condition de Ventcel, où  $\Delta_T$  désigne le Laplacien tangentiel sur  $\Gamma = \partial\Omega$ , a été introduite par A.D. Ventcel pour des processus de diffusion, pour cela il a été convenu d'appeler problème de Ventcel toute équation ou système d'équations faisant intervenir des opérateurs (au bord) différentiels tangentiels de même ordre que l'opérateur principal. Ces problèmes interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes, en mécanique comme l'élasticité (*cf.* [10, 31]) en physique comme les processus de diffusion (*cf.* [32, 44]) ou la propagation d'ondes (*cf.* [11]).

Le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le com-

portement asymptotique de l'énergie, à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite tend vers zero de manière exponentielle ou pas, et à donner le taux de décroissance de l'énergie, c'est à dire :

$$\mathcal{E}(t) \leq Ce^{-\delta t}, \forall t > 0,$$

où  $C$  et  $\delta$  ("δ" est le taux de décroissance de l'énergie) sont des constantes positives avec  $C$  qui dépend des données initiales. Rappelons le résultat technique suivant ; qui nous sera utile par la suite

**Lemme 0.1.** *Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , décroissante et vérifiant la condition*

$$\exists \omega > 0, \int_t^\infty f(s) ds \leq \omega f(t), \forall t \geq 0,$$

alors on a

$$f(t) \leq f(0) e^{(1-\frac{t}{\omega})}. \tag{1}$$

Plusieurs techniques différentes ont été élaborées pour établir l'estimation (1) comme la méthode de multiplicateurs [8, 23, 36], l'analyse microlocale [41] ou l'analyse non harmoniques (*cf.* [25]). Dans certains cas la méthode des multiplicateurs permet de prouver qu'il y a stabilisation exponentielle du système, et donne même une estimation explicite sur le taux de décroissance de l'énergie.

De nombreux auteurs se sont intéressés aux problèmes de contrôle et de stabilisation de certaines classes des équations aux dérivées partielles comme : Le système de l'élasticité, élasto-magnétisme, les équations de Maxwell, l'équation des ondes,...etc, avec des conditions aux limites classiques comme : Dirichlet, Neumann, Robin, ...etc, par des feedbacks internes ou frontières. Cependant, la contrôlabilité exacte et la stabilisation de ces problèmes avec des conditions aux limites de Ventcel ont très peu étudiées. De tels problèmes ont été premièrement étudié par K. Lemrabet [31], ensuite par K. Lemrabet et D. Teniou [33]. Dans [33] les auteurs montrent l'existence et la régularité des solutions d'un problème d'évolution de type Ventcel avec un feedback linéaire.

Plus tard, A. Hemmina [10, 13] étudie la stabilisation frontière de problème de Ventcel pour le système linéaire isotrope de l'élasticité et pour l'équation des ondes. D'une part, il montre la décroissance vers zero de l'énergie pour le système de l'élasticité avec conditions au bord de Ventcel par un feedback non linéaire. D'autre part, pour l'équation des ondes, il donne un contre-exemple qui montre que le feedback "naturel" est insuffisant pour assurer la décroissance exponentielle de l'énergie.

Récemment, dans [7] les auteurs ont montré la stabilisation uniforme de l'équation des ondes à coefficient variable avec des conditions aux limites de type Ventcel dynamique. Leurs méthode de démonstration est basé sur la géométrie Riemannienne.

Dans ce contexte, le travail de cette thèse est divisée en deux parties principales. Dans la première partie on étudie la stabilisation frontière et la contrôlabilité exacte d'un système couplé entre le système de Maxwell et l'équation des ondes avec des conditions aux limites de type Ventcel par des feedbacks non linéaires. La deuxième partie est consacrée à l'étude de problèmes concernant la stabilité et la contrôlabilité d'un système de l'élasto-magnétisme avec conditions au bord de Ventcel stationnaires.

On termine notre thèse par une conclusion générale et problèmes ouverts liés au contenu de cette thèse.

Il est important de mentionner que la méthode des multiplicateurs développée par exemple dans [24, 34], utilisée systématiquement dans cette thèse est élémentaire et très efficace. En multipliant les équations par des multiplicateurs convenables, on obtient de différentes identités très importantes pour avoir de différentes estimations de la stabilisation exponentielle de l'énergie.

Dans la suite de cette introduction, nous présentons plus précisément le contenu de chaque chapitre.

## **Partie I. Stabilité et contrôlabilité d'un système couplé entre le système de Maxwell et l'équation des ondes avec conditions au bord de Ventcel**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné non vide dans  $\mathbb{R}^3$  ayant une frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de classe  $C^2$ . On considère le système couplé "Maxwell/ondes" suivant

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E = 0 \text{ dans } Q := \Omega \times ]0, \infty[, \quad (2)$$

$$\epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u = 0 \text{ dans } Q, \quad (3)$$

$$\mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0 \text{ dans } Q, \quad (4)$$

$$\mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0 \text{ dans } Q, \quad (5)$$

Dans le système ci-dessus, on note par :

$$u = (u_1, u_2, u_3) \text{ le champ de déplacement,}$$

$$E = (E_1, E_2, E_3) \text{ le champ électrique,}$$

$$H = (H_1, H_2, H_3) \text{ le champ magnétique,}$$

au point  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et à l'instant  $t$ ;  $\epsilon$  et  $\mu$  désignent, respectivement, la permittivité électrique et la perméabilité magnétique; elles sont supposées des fonctions réels positifs dans  $L^\infty(\Omega)$  et  $\xi$  est le paramètre de couplage.

Nous complétons ce système par les conditions au bord

$$H \times \nu + \xi \partial_t u \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0 \text{ sur } \Sigma := \Gamma \times ]0, \infty[, \quad (6)$$

$$\partial_\nu u - \Delta_T u + Au + g_2(\partial_t u) = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (7)$$

et les conditions initiales

$$(u, \partial_t u, E, H)_{t=0} = (u_0, u_1, E_0, H_0), \quad (8)$$

où  $A$  est une constante positive,  $\nu$  la normale unitaire sortante et  $\Delta_T$  désigne le Laplacien tangentiel sur  $\Gamma$ .

On suppose que les applications  $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$  sont continues et satisfont les propriétés suivantes

$$\begin{cases} |g_i(E)| \leq M(1 + |E|), \quad \forall E \in \mathbb{R}^3, \\ (g_i(E) - g_i(F)) \cdot (E - F) \geq 0, \quad \forall E, F \in \mathbb{R}^3, \\ g_i(0) = 0, \\ g_i(E) \cdot E \geq m|E|^2, \quad \forall E \in \mathbb{R}^3, |E| \geq 1 \end{cases}. \quad (9)$$

L'énergie de (2) – (8) à l'instant  $t$  est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2) dx \\ &\quad + \frac{A}{2} \int_{\Gamma} |u(x, t)|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\nabla_T u(x, t)|^2 d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon(x)|E(x, t)|^2 + \mu(x)|H(x, t)|^2). \end{aligned}$$

C'est un système dissipatif, qui vérifie :

$$\mathcal{E}'(t) = - \int_{\Gamma} \{g_1(E(t) \times \nu) \cdot E(t) \times \nu + g_2(\partial_t u(t)) \cdot \partial_t u(t)\} d\sigma \leq 0.$$

**Chapitre 2.** Dans ce chapitre, on montre l'existence et l'unicité des solutions du système (2) – (8). Pour cela, on écrit (2) – (8) comme un système du premier ordre

$$\begin{cases} \partial_t U + \mathcal{A}U = 0, \quad t > 0 \\ U(0) = U_0 = (u_0, v_0, E_0, H_0), \end{cases} \quad (10)$$

où  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur non linéaire et  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. L'outil principal est alors la théorie des semi-groupes non linéaires. On montre que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est maximal-monotone et en appliquant le Théorème de Hille-Yosida, on obtient alors le résultat suivant :

**Théorème 0.1.** *Pour toute donnée initiale  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$  le problème (2)–(8) admet une solution (faible) unique qui vérifie :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$$

*Pour tout donnée initiale  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$ , le problème (2) – (8) admet une solution (forte) unique qui vérifie :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A}))$$

**Chapitre 3.** Dans ce chapitre, on a étudié la stabilisation frontière du système (2)–(8). On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  strictement étoilé par rapport à l’origine de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^2$ , c’est à dire, on suppose qu’il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que

$$m \cdot \nu \geq \gamma^{-1}, \quad \forall x \in \Gamma,$$

où  $m(x) = x$  et  $\nu$  désigne le vecteur unitaire normal sortant en  $\Gamma$ . On pose  $R = \sup\{|m(x)|, x \in \overline{\Omega}\}$ .

Dans [8] M. Eller et *al.* étudient la stabilisation frontière du système de Maxwell avec condition aux limites de Silver-Müller soumis à un feedback non linéaire. Ils montrent que la stabilité exponentielle du système linéaire associé est suffisante pour assurer une décroissance de l’énergie ( $\mathcal{E}(t)$ ) du système non linéaire. Plus précisément, il établissent, par la méthode de multiplicateurs, l’estimation de stabilité suivante :

$$\exists T > 0, \quad \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq C_1 \mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \int_{\Gamma} |H(t) \times \nu|^2 d\sigma dt,$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes positives telle que  $C_1 < T$ , et par le principe de Russell, ils prouvent que le système est exactement contrôlable. Enfin, en utilisant le principe de Liu (basé sur le principe de Russell et une inégalité intégrale (*cf.* [24])); les auteurs donnent une estimation explicite de l’énergie du système non linéaire.

Cette approche a été adoptée également pour d’autres modèles : Dans [36] pour le système de l’elasto-magnétisme avec des conditions de Neumann-Dirichlet sur le bord. Dans [37] pour l’équation d’évolution abstraite de type hyperbolique et dans [15] pour le système de la thermoélasticité anisotrope.

Le but de ce chapitre est d’établir une estimation de stabilité, en utilisant la méthode des multiplicateurs introduite par V. Komornik [24] et J.L. Lions [34] et en montrant que l’approche introduites dans [8] s’adapte dans notre système. On obtient ainsi l’estimation de stabilité suivante :

$$\exists T > 0, \quad \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq C_1 \mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \int_{\Gamma} (|\partial_t u(t)|^2 + |E(t) \times \nu|^2) d\sigma dt, \quad (11)$$

pour toute solution  $(u, E, H)$  de (2) – (8) avec  $g_1(x) = g_2(x) = x$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes positives telle que  $C_1 < T$ .

Cette estimation est l’outil principale pour démontrer la contrôlabilité exacte et la stabilité non linéaire du système (2) – (8). En effet, à partir de l’estimation (11) et à l’aide de la méthode de Russell, on déduit que le système (2) – (8) est exactement contrôlable. Plus précisément, dans [39], D.L. Russell montre que la décroissance exponentielle de l’énergie d’un système linéaire réversible entraîne sa contrôlabilité exacte. Nous utilisons ce principe pour démontrer le résultat suivant.

**Théorème 0.2.** *Si  $\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité, alors pour tout  $T > 0$  suffisamment grand, et pour tout  $(u_0, u_1, E, H) \in \mathcal{H}$ , il existe deux contrôles  $J_1, J_2 \in L^2(\Gamma \times ]0, T[)^3$  avec :*

$$J_1 \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \quad (12)$$

tels que si  $(u, \partial_t u, E, H) \in C([0, T[, \mathcal{H})$  est la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q_T = \Omega \times ]0, T[, \\ \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ H \times \nu - \xi \partial_t u \times \nu = J_1, & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times ]0, T[, \\ \partial_\nu(u) - \Delta_T u + Au = J_2, & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (13)$$

alors on a :  $u(T) = \partial_t u(T) = E(T) = H(T) = 0$ .

où  $\mathcal{H}$  est l'espace de l'énergie (c'est un espace de Hilbert).

Il nous reste alors à examiner la stabilisation non linéaire de notre système. Cette étude est basée sur l'obtention de l'estimation (11), c'est-à-dire pour obtenir des taux de décroissance explicites pour le système non linéaire à partir de la stabilité exponentielle nous appliquons le principe de Russell et une inégalité intégral [9]. Pour cela, nous utilisons les résultats théoriques établis dans [37]. Les résultats de [37] garantissent en fait que, si le système linéaire a une décroissance exponentielle, alors le système non linéaire est automatiquement stable, le taux de décroissance pouvant être exprimé en fonction des propriétés de la non linéarité. Plus précisément, le principe de Liu consiste à estimer l'énergie du système direct (non linéaire) par des termes relatifs aux feedbacks en utilisant le système linéaire rétrograde avec donnée finale égale à la donnée finale du système direct. Ces termes sont alors estimés en utilisant la stabilité exponentielle du système linéaire rétrograde et une inégalité intégrale appropriée. On a alors le

**Théorème 0.3.** *On suppose que  $g_1$  et  $g_2$  satisfont les hypothèses (9), ainsi l'estimation :*

$$|E|^2 + |g_i(E)|^2 \leq G(g_i(E) \cdot E), \quad \forall |E| \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

où  $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction concave strictement croissante telle que  $G(0) = 0$ . Si  $\Omega$  vérifie **l'estimation de stabilité**, alors il existe des constantes  $c_2, c_3 > 0$  et  $T_1 > 0$  (dependant de  $T, \mathcal{E}(0)$  et  $|\Gamma|$ ) telles que :

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G \left( \frac{\psi^{-1}(c_2 t)}{c_2 T^2 t} \right), \quad \forall t \geq T_1, \quad (15)$$

pour toute solution  $(u(t), E(t), H(t))$  de (2) – (8), où  $\psi$  est donnée par :

$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\phi(t)} dt, \quad \forall t > 0, \quad (16)$$

et  $\phi$  définie par :

$$\phi(s) = T|\Gamma|G^{-1}\left(\frac{s}{c_3}\right). \quad (17)$$

La preuve de ce théorème est basée sur l'inégalité intégrale établie dans [9] (voir aussi [24], [8]).

## Partie II. Stabilisation frontière d'un système de l'elasto-magnétisme avec conditions au bord de Ventcel

Cette partie a été motivé par les travaux de S. Nicaise [36], de M. Eller et *al* [8] et de H. Kasri et A. Heminna [21]. Dans [36] l'auteur étudie la contrôlabilité exacte et la stabilisation frontière d'un système de l'elasto-magnétisme avec des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann avec des feedbacks frontières non linéaires. Sa démonstration est basée sur la technique des multiplicateurs pour établir la stabilité exponentielle. Nous étudions le même problème que dans [36] mais avec plutôt des conditions au bord de Ventcel stationnaires, c'est-à-dire, en remplaçant la condition de Neumann " $\sigma(u) \cdot \nu + au + g_2(\partial_t u) = 0$  sur  $\Sigma = \partial\Omega \times ]0, +\infty[$ " pour le système de l'élasticité par les conditions de Ventcel suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + au_T + g_{2T}(\partial_t u) &= 0, \quad \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times ]0, +\infty[, \\ \sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + au_\nu + g_{2\nu}(\partial_t u) &= 0, \quad \text{sur } \Sigma, \end{aligned}$$

où  $\sigma(u)$  est le tenseur des contraintes défini par :

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= 2\alpha\varepsilon(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon(u))I_3 \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_T(u) & \sigma_S(u) \\ \overline{\sigma_S}(u) & \sigma_\nu(u) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\alpha, \lambda$  sont les coefficients de Lamé,  $I_3$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^3$  et  $\varepsilon(u) = (\varepsilon(u))_{i=j=1}^3$  est le tenseur des déformations défini par :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

$\nabla\sigma(u)$  est le champ de vecteurs défini par :

$$\nabla\sigma(u) = (\partial_j \sigma_{ij}(u))_{i=1}^3.$$

$div_T \sigma_T^0(u)$  est la divergence tangentielle du champ d'endomorphisme du plan tangent  $\sigma_T^0(u)$  et  $\sigma_T^0(u) : \partial_m \nu = tr(\sigma_T^0(u) \cdot \partial_m \nu)$ , où :

$$\sigma_T^0(u) = 2\alpha \varepsilon_T^0(u) + \frac{2\lambda\alpha}{\lambda + 2\alpha} tr(\varepsilon_T^0(u)) I_2, \quad (18)$$

et

$$\varepsilon_T^0(u) = \varepsilon_T(u),$$

Alors le système de l'elasto-magnétisme avec des conditions au bord de Ventcel est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \nabla \sigma(u) + \xi \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q = \Omega \times ]0, \infty[, \\ \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u = 0, & \text{dans } Q, \\ \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q, \\ \mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0, & \text{dans } Q, \\ H \times \nu + \xi \partial_t u \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times ]0, \infty[, \\ \sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + au_T + g_{2T}(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ \sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + au_\nu + g_{2\nu}(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (19)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de classe  $C^3$ ,  $E(x, t)$ ,  $H(x, t)$  désignent respectivement le champ électrique et le champ magnétique au point  $x$  à l'instant  $t$ ,  $u(x, t)$  est le champ de déplacement,  $a$  est une constante positive et  $\epsilon$ ,  $\mu$  sont respectivement la permétabilité électrique et la perméabilité magnétique ; elles sont supposées des fonctions réelles positives dans  $L^\infty(\Omega)$ , c'est à dire, on suppose qu'il existe  $\epsilon_0, \epsilon_1 > 0$  tels que :

$$0 < \epsilon_1 \leq \epsilon(x) \leq \epsilon_0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (20)$$

On suppose, de plus, qu'il existe  $\mu_0, \mu_1 > 0$  tels que

$$0 < \mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (21)$$

On pose :  $g(x) = g_T(x) + g_\nu(x)\nu(x)$  et pour  $i = 1, 2$  l'application  $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est continue et satisfait :

$$(g_i(E) - g_i(F)) \cdot (E - F) \geq 0, \quad \forall E, F \in \mathbb{R}^3, \quad (22)$$

$$g_i(0) = 0, \quad (23)$$

$$g_i(E) \cdot E \geq m|E|^2, \quad \forall E \in \mathbb{R}^3, |E| \geq 1, \quad (24)$$

$$|g_i(E)| \leq M(1 + |E|), \quad \forall E \in \mathbb{R}^3. \quad (25)$$

Ces différentes hypothèses garantissent la décroissance de l'énergie du système (19), définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_t u(x, t)|^2 + \sigma(u)(x, t) : \varepsilon(u)(x, t)) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon(x)|E(x, t)|^2 + \mu(x)|H(x, t)|^2) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\sigma_T^0(u)(x, t) : \varepsilon_T^0(u)(x, t) + a|u(x, t)|^2) d\sigma\end{aligned}$$

Nous effectuons également dans cette partie la même approche à celle adoptée dans la première partie pour étudier ce système.

**Chapitre 4.** Comme pour la partie précédente, nous nous intéressons tout d'abord à l'existence et l'unicité des solutions de ce système et pour cela nous réécrivons notre système en un système du premier ordre, en utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires [42] et en appliquant le Théorème de Hille-Yosida nous prouvons que ce système est bien posé, on obtient le :

**Théorème 0.4.** *Supposons que les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  vérifient (22), (24) et (25).*

1. *Si  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$  alors le problème (19) admet une solution (faible) unique vérifiant :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$$

2. *Si  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$ , alors le problème (19) admet une solution (forte) unique vérifiant :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A}))$$

Une fois l'existence et l'unicité des solutions de notre système (19) prouvées ainsi que la décroissance de l'énergie, nous étudions la stabilité uniforme du problème linéaire associé au problème (19). Plus précisément, nous montrons que les feedbacks naturels " $E \times \nu$ " et " $\partial_t u$ " sont suffisantes pour assurer la décroissance exponentielle de l'énergie, cette décroissance est équivalente à l'estimation de stabilité. Pour cela, nous supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^3$  (pour donner un sens au tenseur de courbure) strictement étoilé par rapport à 0, ie.,  $m(x) \cdot \nu(x) > 0$  pour tout  $x \in \Gamma$ . Dans un premier temps, on établit l'identité fondamentale sur laquelle est basée la technique de multiplicateurs, en utilisant les multiplicateurs :  $2(q : \nabla u)$ ,  $2\mu(q \times H)$  et  $2\epsilon(E \times q) - 2\xi(q : \nabla u)$  pour le système d'équations dans  $\Omega$  et les multiplicateurs frontières non standards  $2(\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T$ ,  $2(\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T$ , (cf. [10]), pour les conditions de Ventcel sur  $\Gamma$ , où  $\pi \partial_T u_T$  désigne la dérivée covariante du champ  $u_T$ ,  $\partial_T \nu$  est l'opérateur de courbure et  $q = (q_1, q_2, q_3) \in W^{1,\infty}(\overline{\Omega})^3$ ; cela a conduit à des calculs longs et parfois

ardus pour établir l'identité fondamentale. On utilise ensuite cette identité obtenue et l'expression de l'énergie, en posant  $q(x) = m(x) = x$ . Après cela, on estime les différents termes, en procédant comme dans [10, 24], on en déduit l'estimation de stabilité suivante :

$$\exists T > 0, \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq C_1 \mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \int_{\Gamma} (|\partial_t u(t)|^2 + |E(t) \times \nu|^2) d\sigma dt, \quad (26)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes positives telle que  $C_1 < T$ .

**Chapitre 5.** Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de la contrôlabilité exacte et de la stabilité non linéaire du problème (19) ; la contrôlabilité exacte est une conséquence de principe de Russell. En effet, on adopte la même technique à celle utilisée dans [36], on montre que notre système est exactement contrôlable sous l'action de deux contrôles frontières. On obtient le théorème suivant :

**Théorème 0.5.** *Si  $\Omega$  satisfait l'estimation de EE-stabilité, alors pour tout  $T > 0$  suffisamment grand, et pour tout  $(u_0, u_1, E, H) \in \mathcal{H}$ , il existe deux contrôles  $J_1, J_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$  où  $J_2 = J_{2T} + J_{2\nu}$  sur  $\Sigma_T$ , et  $J_1 \cdot \nu = 0$  sur  $\Sigma_T$  tels que la solution  $(u, \partial_t u, E, H) \in C([0, T[, \mathcal{H})$  de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \nabla \sigma(u) + \xi \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q_T = \Omega \times ]0, T[, \\ \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ H \times \nu - \xi \partial_t u \times \nu = J_1, & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times ]0, T[, \\ \sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + a u_T = J_{2T}, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + a u_\nu = J_{2\nu}, & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (27)$$

vérifie  $u(T) = \partial_t u(T) = E(T) = H(T) = 0$  au temps  $T$ .

Hormis les résultats de contrôlabilité exacte établis dans ce chapitre, nous y établissons également la décroissance explicite de l'énergie pour le système non linéaire (19) en suivant la méthodologie développée dans [37].

Notons que les chapitres 3 et 4 de cette thèse correspondent à des articles qui ont été publiés ([21]) ou soumis (version révisée d'article soumise) ([22]).

# Chapitre 1

## Rappels

Nous présentons dans ce chapitre les principaux outils utilisés dans cette thèse. La première section est dévolue aux rappels d'analyse fonctionnelle dans les espaces de Hilbert, notamment des résultats sur la théorie des semi-groupes non linéaires et quelques inégalités élémentaires. La seconde section a pour objet de présenter quelques résultats sur la géométrie différentielle intrinsèque pour les surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , qui joueront un rôle essentiel dans les chapitres ultérieurs.

### 1.1 Rappels et notations générales

#### 1.1.1 Rappels sur les opérateurs non linéaires

Nous présentons ici certains concepts et outils classiques dans la théorie des opérateurs non linéaires qui nous seront utiles. Nous n'en donnons pas les démonstrations, elles pourront être lues dans l'ouvrage de R.-E. Showalter [42]. Nous n'avons pas l'intention de présenter ici la théorie des espaces de Sobolev. Pour plus de amples détails, nous renvoyons à l'abondante littérature consacrée à l'analyse fonctionnelle (*cf.* e.g. [1], [6]). On suppose que  $X$  est un espace de Hilbert réel muni de produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)$ .

**Définition 1.** *Soit  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  un opérateur non linéaire de domaine  $D(\mathcal{A})$ , on dit que  $\mathcal{A}$  est monotone si :*

$$(\mathcal{A}(u - v), u - v) \geq 0, \quad \forall u, v \in D(\mathcal{A}). \quad (1.1)$$

*On dit que  $\mathcal{A}$  est maximal-monotone si  $\mathcal{A}$  vérifie (1.1) et satisfait à  $R(I + \mathcal{A}) = X$ .*

**Définition 2.** On dit que  $\mathcal{A} : X \rightarrow X$  est héli-continue si l'application

$$t \rightarrow (\mathcal{A}(u + tv), w)_X$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ , pour tous  $u, v, w \in X$ .

**Définition 3.** On dit que  $\mathcal{A} : X \rightarrow X$  est coercif si

$$\frac{(\mathcal{A}u, u)}{\|u\|_X} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \|u\|_X \rightarrow +\infty.$$

**Théorème 1.1.** Soit  $\mathcal{A} : X \rightarrow X$  un opérateur non linéaire. Si  $\mathcal{A}$  est monotone, héli-continue, borné et coercif, alors  $\mathcal{A}$  est surjectif.

**Théorème 1.2** (Hille-Yosida). Soit  $\mathcal{A} : X \rightarrow X$  un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert  $X$ . Alors, pour tout  $u_0 \in D(\mathcal{A})$  il existe une fonction

$$u \in C^1(\mathbb{R}_+; X) \cap C^0(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{A}))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 \text{ dans } [0, +\infty[ \\ u(0) = u_0, \text{ donnée initiale.} \end{cases} \quad (1.2)$$

De plus, on a

$$\|u(t)\|_X \leq \|u(0)\|_X$$

et

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X = \|\mathcal{A}u(t)\|_X \leq \|\mathcal{A}u(0)\|_X.$$

## 1.1.2 Quelques inégalités

### Inégalité de Young

Soit  $a, b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$ , alors on a

$$ab \leq \theta a^2 + \frac{b^2}{4\theta}, \quad \forall \theta > 0.$$

### Inégalité de Korn

Il existe une constante positive  $C$  dépendant seulement de  $\Omega$  telle que

$$\sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i,j=1}^3 \|\varepsilon_{i,j}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

pour tout  $u \in H^1(\Omega)^3$ , où  $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{i,j}(u))_{1 \leq i,j \leq 3}$  est le tenseur des déformations défini par

$$\varepsilon_{i,j}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

### Inégalité de Jensen

**Définition 4.** Une fonction  $\varphi$  à valeurs réelles définie sur un intervalle  $]a, b[$  où  $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$  est dite convexe si l'inégalité

$$\varphi((1 - \omega)s + \omega t) \leq (1 - \omega)\varphi(s) + \omega\varphi(t), \quad (1.3)$$

est vérifiée pour tous nombres  $s, t, \omega$  tels que  $a < t < b$ ,  $a < s < b$  et  $0 \leq \omega \leq 1$ . La relation (1.3) est aussi équivalente à l'inégalité

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t},$$

pour tous  $a < s < t < \tau < b$ .

On a l'inégalité de Jensen suivante

**Lemme 1.1.** Soit  $f \in L^1(\Sigma)$  (où  $\Sigma = \Gamma \times ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}$  est une partie mesurable et  $\text{mes}(\Sigma) < \infty$ ), telle que  $a < f(x) < b$  pour tout  $x \in \Sigma$  et  $\varphi$  une fonction continue convexe de  $]a, b[$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\varphi \left( \frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} f(x) dx \right) \leq \frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} \varphi(f(x)) dx.$$

**Remarque 1.1.**  $\varphi$  est concave si et seulement si  $(-\varphi)$  est convexe, alors on a l'inégalité de Jensen pour les fonctions concaves :

$$\frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} \varphi(f(x)) dx \leq \varphi \left( \frac{1}{\text{mes}(\Sigma)} \int_{\Sigma} f(x) dx \right).$$

## 1.2 Quelques éléments de géométrie différentielle intrinsèque pour les surfaces

Dans ce paragraphe on donne quelques notations et quelques résultats préliminaires sur la géométrie différentielle intrinsèque pour les surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , qui seront utilisées de façon constante dans les chapitres suivants lors de l'étude de la stabilisation exponentielle de problèmes avec conditions au bord de Ventcel. Pour une présentation plus complète sur la formalisme intrinsèque de la théorie des surfaces, nous renvoyons le lecteur à [43], [31].

### 1.2.1 La normale et le plan tangent

Soit  $\Gamma$  une surface plongée dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  lui-même rapporté à une base orthonormée, on transforme un ouvert  $\widehat{\Gamma}$  du plan  $(O, \xi^1, \xi^2)$  en la surface  $\Gamma$  par une carte régulière  $\varphi$  (par exemple de classe  $C^2$ ). Les vecteurs  $a_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^1}(\varphi^{-1}(m))$  et  $a_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^2}(\varphi^{-1}(m))$  sont indépendants et engendrent en chaque point  $m$  de  $\Gamma$  un espace vectoriel appelé plan tangent en  $m$  à  $\Gamma$  et noté  $T_m(\Gamma)$ .

On définit également le vecteur unitaire  $\nu(m) = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|}$  orthogonal en  $m$  à  $\Gamma$  appelé normale unitaire en  $m$  à  $\Gamma$ . On a alors la décomposition suivante de  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = T_m(\Gamma) \oplus \mathbb{R}\nu(m),$$

que l'on peut encore écrire

$$I_3 = \pi(m) + \nu(m)\overline{\nu(m)}, \quad (1.4)$$

où  $\pi(m)$  représente la projection orthogonale sur  $T_m(\Gamma)$ ,  $I_3$  l'identité de  $\mathbb{R}^3$  et  $\overline{\nu(m)}$  est l'opérateur de transposition.

Tout champ  $q(m)$  défini sur  $\Gamma$ , peut être décomposé en une composante tangentielle  $q_T(m) = \pi(m)q(m)$  et une composante normale  $q_\nu(m) = \overline{\nu(m)} \cdot q(m)$ , on a alors

$$q(m) = q_T(m) + q_\nu(m)\nu(m).$$

### 1.2.2 Dérivée d'un champ tangentiel

Soit  $q_T$  un champ régulier de vecteur tangent à  $\Gamma$

$$m \in \Gamma \longrightarrow q_T(m) = q^\alpha(m)a_\alpha(m) \in T_m(\Gamma).$$

On définit la dérivée de  $q_T$  sur  $\Gamma$  par :

$$\partial_m q_T = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial q_T}{\partial \xi^\alpha} \cdot a^\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 q_{,\alpha} a^\alpha,$$

c'est un endomorphisme qui applique le plan tangent dans  $\mathbb{R}^3$  et non pas dans le plan tangent lui même.

On introduit les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  par :

$$\pi \cdot a_{\alpha,\beta} = \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda a_\lambda, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (1.5)$$

où

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} = a_{\beta,\alpha},$$

d'où

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda.$$

### 1.2.3 Dérivée d'un champ de vecteur sur $\Gamma$

Soit  $u$  un champ de vecteurs défini sur  $\Gamma$  ; on a (cf. [10], [31], [43]) :

$$\begin{aligned} \partial_m u &= \partial_m u_T + \partial_m(u_\nu \nu) \\ &= \partial_m u_T + \nu \partial_m u_\nu + u_\nu (\partial_m \nu). \end{aligned}$$

D'après (1.4), il vient :

$$\partial_m u = \pi \partial_m u_T \pi + \nu \bar{\nu} \partial_m u_T + \nu \partial_m u_\nu + u_\nu (\partial_m \nu),$$

où  $\pi \partial_m u_T$  désigne la dérivée covariante du champ  $u_T$ . De  $\bar{\nu} u_T = 0$  on obtient par dérivation

$$\bar{\nu} (\partial_m u_T) + \bar{u}_T (\partial_m \nu) = 0,$$

ce qui permet d'écrire la dérivée de  $u$  sous la forme :

$$\partial_m u = \pi \partial_m u_T \pi - \nu \bar{u}_T (\partial_m \nu) + \nu \partial_m u_\nu + u_\nu (\partial_m \nu).$$

où  $\partial_m \nu$  est l'opérateur de courbure  $\partial_m \nu = (\partial_\alpha \nu) a^\alpha$ , c'est un endomorphisme symétrique du plan tangent.

### 1.2.4 Divergence tangentielle d'un champ d'endomorphisme sur $\Gamma$

Soit  $\tau_T$  un champ régulier d'endomorphismes du plan tangent à  $\Gamma$  ; la divergence tangentielle de  $\tau_T$  est le champ de formes linéaires sur le plan tangent noté  $div_T \tau_T$  défini par (cf. [10]) :

$$\int_{\Gamma} div_T \tau_T u_T d\sigma = - \int_{\Gamma} (\tau_T : \pi \partial_m u_T \pi) d\sigma, \quad \forall u_T \in \mathcal{D}(\Gamma, T(\Gamma)), \quad (1.6)$$

où  $(\tau_T : \pi \partial_m u_T \pi) = tr(\tau_T \cdot \pi \partial_m u_T \pi)$  et  $\mathcal{D}(\Gamma, T(\Gamma))$  désigne l'espace des champs tangents à  $\Gamma$  dont les composantes dans une bases  $\{a_1, a_2\}$  de  $T_m(\Gamma)$  sont dans  $\mathcal{D}(\Gamma)$ .

Maintenant, on rappelle l'énoncé de divers résultats dont on va faire usage dans les chapitre 3 et 4. Nous commençons par rappeler les deux lemmes suivants. Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut se référer aux travaux [10, 11, 31] (et les références citées).

**Lemme 1.2.** *Soient  $f$  une fonction de classe  $C^2$  et  $q_T$  un champ tangent de classe  $C^1$  défini sur  $\Gamma$  ; alors*

$$\overline{\nabla_T f} \nabla_T (\overline{\nabla_T f} \cdot q_T) = \overline{\nabla_T f} (\pi (\partial_T q_T)) \nabla_T f + \frac{1}{2} \partial_T (|\nabla_T f|^2) q_T,$$

où  $\nabla_T$  est le gradient tangentiel.

**Lemme 1.3.** *Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ , on pose  $q = x - x_0 = q_T + q_\nu \nu$ , on a*

$$\begin{cases} \pi \partial_T q_T + q_\nu \partial_T \nu = i_2, \\ \partial_T q_\nu = \overline{q_T} \partial_T \nu, \\ \mathbf{div}_T q_T = 2 - q_\nu tr(\partial_T \nu), \end{cases}$$

où  $i_2$  est l'identité du plan tangent et "tr" désigne la trace d'une matrice.

### 1.2.5 Tenseurs des déformations et de contraintes

Soit  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ assez régulier ; on désigne par  $\nabla$  son gradient ; on écrit la différentielle de  $u$  (cf. [12, 13, 31])

$$\overline{\nabla u} = \pi(\partial_m u_T) \pi + u_\nu (\partial_m \nu) + (\partial_\nu u_T) \overline{\nu} + \nu ((\partial_m u_\nu) - \overline{u_T} (\partial_m \nu) + (\partial_\nu u_\nu) \overline{\nu}), \quad (1.7)$$

Dans le repère local la matrice représentant  $\overline{\nabla u}$  s'écrit :

$$\overline{\nabla u}_\Gamma = \begin{pmatrix} \pi \partial_m u_T \pi + u_\nu (\partial_m \nu) & \partial_\nu u_T \\ \partial_m u_\nu - \overline{u_T} \partial_m \nu & \partial_\nu u_\nu \end{pmatrix}.$$

## Rappels

---

Le tenseur des déformations est donné par :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon(u) &= \nabla u + \overline{\nabla u} \\ &= \begin{pmatrix} \pi \partial_m u_T \pi + \overline{\pi \partial_m u_T \pi} + 2u_\nu (\partial_m \nu) & \partial_\nu u_T - (\partial_m \nu) u_T + \overline{\partial_m u_\nu} \\ \overline{\partial_\nu u_T} - (\partial_m \nu) \overline{u_T} + \partial_m u_\nu & 2\partial_\nu u_\nu \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \varepsilon_T(u) & \varepsilon_S(u) \\ \overline{\varepsilon_S(u)} & \varepsilon_\nu(u) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors :

$$\varepsilon(u) = \varepsilon_T(u) + \nu \overline{\varepsilon_S(u)} + \varepsilon_S(u) \overline{\nu} + \varepsilon_\nu(u) \nu \overline{\nu}, \quad (1.8)$$

avec :

$$\varepsilon_T(u) = \frac{1}{2} (\pi \partial_m u_T \pi + \overline{\pi \partial_m u_T \pi}) + u_\nu (\partial_m \nu), \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_S(u) = \frac{1}{2} (\partial_\nu u_T - (\partial_m \nu) u_T + \overline{\partial_m u_\nu}), \quad (1.10)$$

et

$$\varepsilon_\nu(u) = \partial_\nu u_\nu. \quad (1.11)$$

Le tenseur des contraintes est donné par la loi de Hooke :

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= 2\alpha \varepsilon(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon(u)) I_3 \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_T(u) & \sigma_S(u) \\ \overline{\sigma_S(u)} & \sigma_\nu(u) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $\alpha, \lambda$  sont les coefficients de Lamé et  $I_3$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^3$ . On a alors :

$$\sigma(u) = \sigma_T(u) + \nu \overline{\sigma_S(u)} + \sigma_S(u) \overline{\nu} + \sigma_\nu(u) \nu \overline{\nu}, \quad (1.12)$$

avec :

$$\sigma_T(u) = 2\alpha (\varepsilon_T(u)) + \lambda [\text{tr}_2(\varepsilon_T(u)) + \varepsilon_\nu(u)] I_2, \quad (1.13)$$

$$\sigma_S(u) = 2\alpha \varepsilon_S(u), \quad (1.14)$$

et

$$\sigma_\nu(u) = (\lambda + 2\alpha) \varepsilon_\nu(u) + \lambda \text{tr}_2(\varepsilon_T(u)), \quad (1.15)$$

où "tr" symbolise la trace d'une matrice et  $I_2$  est la matrice identité du plan tangent. D'après (1.12), il vient alors :

$$\sigma(u) \cdot \nu = \sigma_S(u) + \sigma_\nu(u) \nu. \quad (1.16)$$

**Remaque 1.2.** Soit  $u \in H^1(\Omega)^3$ ; de (1.8) – (1.15), on a

$$\varepsilon(u) : \varepsilon(u) = \varepsilon_T(u) : \varepsilon_T(u) + 2|\varepsilon_S(u)|^2 + |\varepsilon_\nu(u)|^2 \text{ sur } \Gamma; \quad (1.17)$$

$$\sigma(u) : \varepsilon(u) = \sigma_T(u) : \varepsilon_T(u) + 2\overline{\sigma_S(u)} \varepsilon_S(u) + \sigma_\nu(u) \varepsilon_\nu(u) \text{ sur } \Gamma \quad (1.18)$$

$$= 2\alpha (\varepsilon_T(u) : \varepsilon_T(u) + |\varepsilon_\nu(u)|^2) + 4\alpha |\varepsilon_S(u)|^2 \text{ sur } \Gamma. \quad (1.19)$$

### 1.2.6 Quelques espaces fonctionnels

Soit  $u_T(m) = u^\alpha(m)a_\alpha(m)$  un champ régulier de vecteur tangent à  $\Gamma$ . On munit  $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$  de la norme

$$\|u_T\|_{L^2(\Gamma, T(\Gamma))} = \left( \int_{\Gamma} |u_T|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est équivalente à la norme :

$$u_T \rightarrow \left( \|u^1\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u^2\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On munit  $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$  de la norme

$$\|u_T\|_{H^1(\Gamma, T(\Gamma))} = \left( \|u^1\|_{H^1(\Gamma)}^2 + \|u^2\|_{H^1(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.20)$$

Un champ  $q_T : \Gamma \rightarrow \mathcal{L}_S(T(\Gamma))$  appartient à  $L^2(\Gamma, \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$  si  $(q_T : q_T)^{\frac{1}{2}} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$  appartient à  $L^2(\Gamma)$ . On pose

$$\|q_T\|_{L^2(\Gamma, \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))} = \|(q_T : q_T)^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Gamma)},$$

où  $\mathcal{L}_S(T(\Gamma))$  est l'espace des opérateurs symétriques de  $T(\Gamma)$ .

**Remaque 1.3.** Si  $u_T \in H^1(\Gamma, T(\Gamma))$  alors  $\varepsilon_T(u_T) \in L^2(\Gamma, \mathcal{L}_S(T(\Gamma)))$ .

**Proposition 1.1.** L'expression  $\|\cdot\|_{H^1(\Gamma, T(\Gamma))}^1$  définie par :

$$\|u_T\|_{H^1(\Gamma, T(\Gamma))}^1 = \left( \int_{\Gamma} \left( |u_T|^2 + \varepsilon_T^0(u_T); \varepsilon_T^0(u_T) \right) d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur  $H^1(\Gamma, T(\Gamma))$  équivalente à la norme définie en (1.20).

Pour la démonstration, le lecteur pourra se référer à [10], [12].

# Première partie

## Stabilité et contrôlabilité d'un système couplé entre le système de Maxwell et l'équation des ondes avec conditions au bord de Ventcel

---

<b>Introduction</b>	<b>20</b>
<b>2 Solution du problème non linéaire</b>	<b>23</b>
2.1 Formulation du problème . . . . .	23
2.2 Existence et unicité des solutions . . . . .	25
<b>3 Stabilisation frontière du problème “Maxwell/onde”</b>	<b>37</b>
3.1 Stabilité exponentielle dans le cas linéaire . . . . .	37
3.2 Contrôlabilité exacte . . . . .	50
3.3 Stabilité non linéaire . . . . .	53

---

# Introduction

Dans cette partie on se propose d'étudier la contrôlabilité exacte et la stabilisation frontière d'un problème couplé "Maxwell/ondes" avec des conditions au bord de type Ventcel. Cela consiste à exhiber des feedbacks frontières linéaires de sorte que l'énergie du système décroisse de manière exponentielle par rapport au temps. Ensuite, par le principe de Russell, cette décroissance exponentielle permet de contrôler exactement le problème (1.21) avec des contrôles dans  $L^2(\Gamma, ]0, T])^3$  (cf. Section 4.2). Après cela, on utilise les résultats publiés dans [37] on établit une estimation de l'énergie du système non linéaire, en appliquant le principe de Liu.

On considère alors le problème de Ventcel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E = 0 & \text{dans } Q := \Omega \times ]0, \infty[, \\ \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u = 0 & \text{dans } Q, \\ \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0 & \text{dans } Q, \\ H \times \nu + \xi \partial_t u \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0 & \text{sur } \Sigma := \Gamma \times ]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_T u + Au + g_2(\partial_t u) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.21)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^2$ . Ce système modélise le couplage entre le système de Maxwell et l'équation des ondes, i.e., pour  $\xi = 0$ , le système (1.21) donne deux systèmes indépendants qui sont le système de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H = 0, & \text{dans } Q := \Omega \times ]0, \infty[, \\ \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q, \\ \mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0, & \text{dans } Q, \\ H \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma := \Gamma \times ]0, \infty[, \\ E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.22)$$

et l'équation des ondes avec conditions au bord de Ventcel :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & \text{dans } Q := \Omega \times ]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_T u + Au + g_2(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \Sigma := \Gamma \times ]0, \infty[, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.23)$$

Nous citons à présent quelques travaux sur la stabilisation des systèmes hyperboliques par l'insertion directe des termes feedbacks frontières : La stabilisation frontière du système (1.23) a été considérée dans [11] (ici  $A \in C^1(\Gamma)$  est une fonction non négative), l'auteur a montré que l'énergie tend vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$  en utilisant le principe d'invariance de LaSalle [30] et le théorème d'unicité de Holmgren ([16], p.129, th. 5.3.3). En revanche, lorsque  $A \equiv 0$ , A. Heminna [13, 14] a prouvé, par une étude spectrale, que le système linéaire associé au système (1.23) n'est pas exponentiellement stable. Plus tard, K. Laoubi et S. Nicaise [29] ont étudié le même problème dans un domaine  $\Omega = (0, 1)^2$ , ils ont établi un taux de décroissance polynomial de l'énergie. Pour les systèmes de Maxwell avec des conditions au bord de type Silver-Müller et  $\epsilon = \mu = 1$ , V. Komornik [23] a prouvé, sous certaines conditions géométriques, que l'énergie associée à la solution du système (1.22) dans un domaine strictement étoilé, décroît de manière exponentielle quand  $t \rightarrow +\infty$ ; il a établi l'optimalité du taux obtenu. Récemment, M. Eller et *al.* [8] ont obtenu la stabilité uniforme du système (1.22) dans le cas où  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des fonctions positives (vérifiant certaines hypothèses relativement fortes). Par la technique des multiplicateur, il ont établi l'estimation de stabilité qui est équivalente à la stabilité exponentielle. Par la suite, ce résultat a été généralisé par S. Nicaise [36] pour le système de l'elastomagnétisme avec des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann soumis à deux feedbacks non linéaires. D'abord, il montre que l'énergie décroît de manière exponentielle avec des feedbacks linéaires si  $\Omega$  est strictement étoilé par rapport à l'origine, en supposant que les coefficients  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des constantes positives dans tout le domaine  $\Omega$ . Ensuite, par le principe de Liu [35], il établit une estimation du taux de décroissance de l'énergie par des feedbacks non linéaires.

Comme mentionné précédemment, A. Heminna a montré dans ses travaux [13, 14] que le feedback *naturel*  $\partial_t u$  est insuffisant pour assurer une décroissance exponentielle de l'énergie même s'il permet une stabilisation forte du système (1.23). L'objectif de ce travail est de montrer que le couplage entre l'équation des ondes avec des conditions de Ventcel et le système de Maxwell permet au feedback naturel d'assurer la décroissance exponentielle de l'énergie associée à la solution du système linéaire (1.21). Plus précisément, on montre, sous certaines conditions géométriques, que la décroissance exponentielle de l'énergie du système (1.21) est équivalente à l'estimation de stabilité (*cf.* Chapitre 3, Section 3.1). Pour cela, on établit dans le cas linéaire des inégalités intégrales comme dans [4, 11, 24, 35], ce qui permet d'obtenir une décroissance exponentielle et d'utiliser les résultats théoriques établis dans [37].

A l'issue de cette introduction, cette partie est articulée comme suit : Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions dans un espace de l'énergie convenable. Dans le chapitre 3, on commence d'abord par rappeler quelques résultats théoriques établit dans [8, 36, 37], ensuite on passe à l'étude de la stabilisation exponentielle. La section qui suit fait usage du principe de Russell pour la déduction de la contrôlabilité exacte à partir de la stabilisation obtenue, et on termine ce chapitre en prouvant la stabilisation non linéaire de notre système en utilisant le principe de Liu.

Notons que l'identité fondamentale (*cf.* Chapitre 3, Section 3.1) devient une inégalité intégrale qui permet d'établir une décroissance exponentielle de l'énergie.

# Chapitre 2

## Solution du problème non linéaire

### 2.1 Formulation du problème

Dans cette section on donne une formulation du problème (1.21) dans un espace de Hilbert. Pour cela, on introduit les espaces de Hilbert suivants, similaires à ceux introduit dans (*cf.* [38], [28], [10]). Ici et dans tout ce qui suit nous allons utiliser la notation  $\nabla u_1 : \nabla u_2 = \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}$  et  $\nabla_T u_1 : \nabla_T u_2 = \frac{\partial_T u_{1i}}{\partial x_j} \frac{\partial_T u_{2i}}{\partial x_j}$  (la convention de sommation pour les indices répétés est adoptée).

$$J(\Omega, \epsilon) = \{E \in L^2(\Omega)^3 / \mathbf{div}(\epsilon E) = 0 \text{ dans } \Omega\}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{U}(\Omega)^3 = \{u \in H^1(\Omega)^3, u|_\Gamma \in H^1(\Gamma)^3\}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3 \times J(\Omega, \epsilon) \times J(\Omega, \mu), \quad (2.3)$$

munis des produits scalaires suivants :

$$(E_1, E_2)_\epsilon = \int_\Omega \epsilon(x) E_1(x) \cdot E_2(x) dx, \quad \forall E_1, E_2 \in J(\Omega, \epsilon),$$

$$\begin{aligned} ((u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} &= (u_1, u_2)_{\mathcal{U}(\Omega)^3} + (v_1, v_2)_{L^2(\Omega)^3} + (E_1, E_2)_\epsilon + (H_1, H_2)_\mu, \\ &\forall (u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2) \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

avec

$$(u_1, u_2)_{\mathcal{U}(\Omega)^3} = \int_\Omega \nabla u_1 : \nabla u_2 dx + A \int_\Gamma u_1 \cdot u_2 d\sigma + \int_\Gamma \nabla_T u_1 : \nabla_T u_2 d\sigma,$$

et

$$(v_1, v_2)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v_1 \cdot v_2 dx,$$

où  $v = \partial_t u$ . Définissons maintenant l'opérateur non linéaire  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  comme suit : Pour tout  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$

$$\mathcal{A}(u, v, E, H) = \left( -v, -\Delta u + \xi \mathbf{curl} E, -\epsilon^{-1}(\mathbf{curl} H + \xi \mathbf{curl} v), \mu^{-1} \mathbf{curl} E \right). \quad (2.4)$$

de domaine :

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, v, E, H) \in \mathcal{H} \mid \Delta u, \mathbf{curl} E, \mathbf{curl} H \in L^2(\Omega)^3; v \in \mathcal{U}(\Omega)^3; \\ E \times \nu, H \times \nu \in L^2(\Gamma)^3 \text{ satisfont} : \quad (2.5)$$

$$H \times \nu + \xi v \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (2.6)$$

$$\partial_\nu u - \Delta_T u + Au + g_2(v) = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (2.7)$$

Le système (1.21) est équivalent à :

$$\begin{cases} \partial_t U + \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec  $U = (u, v, E, H)$  et  $U_0 = (u_0, v_0, E_0, H_0)$ .

De plus, on suppose que  $g_i, i = 1, 2$  vérifient :

$$|g_i(E)| \leq M(1 + |E|), \quad \forall E \in \mathbb{R}^3, \quad (2.9)$$

où  $M$  est une constante positive.

**Remaque 2.1.** Rappelons que si  $u \in H(\Delta, \Omega)$  où

$$H(\Delta, \Omega) = \{u \in H^1(\Omega)^3 / \Delta u \in L^2(\Omega)^3\},$$

alors  $\partial_\nu u$  appartient à  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$  et la formule de Green suivante est valable (voir par exemple section 1.5 de [18]) :

$$\langle \partial_\nu u, w \rangle = \int_{\Omega} (w \cdot \Delta u + \nabla u : \nabla w) dx.$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ . De plus, pour tout  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  et d'après la propriété (2.9) on a  $\partial_\nu u - \Delta_T u = Au + g_2(v) \in L^2(\Gamma)^3$ , donc :  $\Delta_T u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ ; la condition au bord (2.7) a un sens dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ . De même, en utilisant le fait que  $u, v \in H^1(\Omega)^3$  et la propriété (2.9) on peut définir la condition au bord (2.6) comme un élément de  $L^2(\Gamma)^3$ .

## 2.2 Existence et unicité des solutions

Dans ce paragraphe on montre un résultat d'existence et d'unicité des solutions de (1.21) en utilisant l'approche des semi-groupes non linéaires. Puis par un calcul classique on montre que l'énergie du système (1.21) est décroissante.

Commençons d'abord par présenter les résultats de densités suivants :

**Lemme 2.1.** Soit  $J_\tau^1(\Omega, \epsilon)$  l'espace défini par :

$$J_\tau^1(\Omega, \epsilon) = \{E \in J(\Omega, \epsilon) \mid \mathbf{curl} E \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } E \times \nu = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (2.10)$$

$J_\tau^1(\Omega, \epsilon)$  est dense dans  $J(\Omega, \epsilon)$ .

Pour la preuve, on peut se référer à l'article de Nicaise [38].

**Lemme 2.2.** Soit  $\tilde{\mathcal{U}}(\Omega)^3$  l'espace défini par :

$$\tilde{\mathcal{U}}(\Omega)^3 = \left\{ u \in \mathcal{U}(\Omega)^3 \mid \Delta u \in L^2(\Omega)^3, \partial_\nu(u) - \Delta_T u + Au = 0 \text{ sur } \Gamma \right\},$$

muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{U}}(\Omega)^3} = \left( \|u\|_{\mathcal{U}(\Omega)^3}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace  $\tilde{\mathcal{U}}(\Omega)^3$  est dense dans  $\mathcal{U}(\Omega)^3$ .

La démonstration de ce lemme peut être trouvée dans la Proposition 2.4 de [11].

**Lemme 2.3.** Si  $g_1(0) = g_2(0) = 0$ , alors  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

*Démonstration.* Pour montrer que  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$  il suffit d'établir l'inclusion suivante :

$$D_0 = \tilde{\mathcal{U}}(\Omega)^3 \times \mathcal{D}(\Omega)^3 \times P_\epsilon \mathcal{D}(\Omega)^3 \times P_\mu \mathcal{D}(\Omega)^3 \subset D(\mathcal{A})$$

car  $D_0$  est dense dans  $\mathcal{H}$ . Soit  $(u, v, E, H) \in D_0$ ; d'après le lemme 2.1 on a :  $P_\epsilon \mathcal{D}(\Omega)^3 \times P_\mu \mathcal{D}(\Omega)^3$  est dense dans  $J(\Omega, \epsilon) \times J(\Omega, \mu)$ , où  $P_\epsilon$  est la projection orthogonale sur  $J(\Omega, \epsilon)$  dans  $L^2(\Omega)$  muni de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\epsilon$ , alors  $E, H \in D(\mathcal{A})$ . De plus, pour tout  $u \in \tilde{\mathcal{U}}(\Omega)^3$ ,  $v \in \mathcal{D}(\Omega)^3$  et le fait que  $g_1(0) = g_2(0) = 0$  on a :  $\partial_\nu u - \Delta_T u + Au + g_2(v) = 0$  et  $H \times \nu + \xi v \times \nu + g_1(E \times \nu) = 0$  sur  $\Gamma$  alors  $u, v \in D(\mathcal{A})$ ; on conclut que  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  donc  $D_0 \subset D(\mathcal{A})$ , d'où  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**Lemme 2.4.** *Si pour  $i = 1, 2$ , l'application  $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est continue et satisfait la propriété (2.9) ainsi que les conditions suivantes :*

$$(g_i(E) - g_i(F)) \cdot (E - F) \geq 0, \quad \forall E, F \in \mathbb{R}^3, \quad (2.11)$$

$$g_i(0) = 0, \quad (2.12)$$

$$g_i(E) \cdot E \geq m|E|^2, \quad \forall E \in \mathbb{R}^3, |E| \geq 1, \quad (2.13)$$

où  $m$  est une constante positive, alors  $\mathcal{A}$  est un opérateur maximal monotone.

*Démonstration.*  $\therefore$   **$\mathcal{A}$  monotone :**

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est monotone si et seulement si :

$$(\mathcal{A}U_1 - \mathcal{A}U_2, U_1 - U_2)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall U_1, U_2 \in D(\mathcal{A}).$$

En utilisant la définition de  $\mathcal{A}$  et le produit scalaire dans  $\mathcal{H}$ , on trouve :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(u_1, v_1, E_1, H_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2, E_2, H_2), (u_1, v_1, E_1, H_1) - (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} \\ &= (-v_1 + v_2, u_1 - u_2)_{\mathcal{U}(\Omega)^3} - \int_{\Omega} \Delta (u_1 - u_2) \cdot (v_1 - v_2) dx \\ & \quad + \xi \int_{\Gamma} (v_1 - v_2) \times \nu \cdot (E_1 - E_2) d\sigma + \int_{\Gamma} (H_1 - H_2) \times \nu \cdot (E_1 - E_2) d\sigma \\ & \quad \forall (u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2) \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Une intégration par parties dans  $\Omega$  et la définition de produit scalaire dans  $\mathcal{U}(\Omega)^3$ , donnent :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(u_1, v_1, E_1, H_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2, E_2, H_2), (u_1, v_1, E_1, H_1) - (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} \\ &= \langle -\partial_{\nu} (u_1 - u_2) + \Delta_T (u_1 - u_2) - A(u_1 - u_2), (v_1 - v_2) \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \\ & \quad \xi \int_{\Gamma} (v_1 - v_2) \times \nu \cdot (E_1 - E_2) d\sigma + \int_{\Gamma} (H_1 - H_2) \times \nu \cdot (E_1 - E_2) d\sigma, \\ & \quad \forall (u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2) \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Utilisant les conditions au bord (2.6), (2.7) et la propriété (2.11) sur  $g_1$  et  $g_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(u_1, v_1, E_1, H_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2, E_2, H_2), (u_1, v_1, E_1, H_1) - (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ (g_1(E_1 \times \nu) - g_1(E_2 \times \nu)) \cdot (E_1 \times \nu - E_2 \times \nu) \right. \\ & \quad \left. + (g_2(v_1) - g_2(v_2)) \cdot (v_1 - v_2) \right\} d\sigma \geq 0, \end{aligned}$$

d'où la monotonie de  $\mathcal{A}$ .

$\therefore \mathcal{A}$  maximal :

Soit  $(f, g, F, G)$  quelconque dans  $\mathcal{H}$ . Cherchons un élément  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  vérifiant :

$$(\mathcal{I} + \mathcal{A})(u, v, E, H) = (f, g, F, G). \quad (2.14)$$

On a :

$$(\mathcal{I} + \mathcal{A})(u, v, E, H) = \left( u - v, v - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E, E - \epsilon^{-1}(\mathbf{curl} H + \xi \mathbf{curl} v), \right. \\ \left. H + \mu^{-1} \mathbf{curl} E \right),$$

c'est à dire :

$$u - v = f, \quad (2.15)$$

$$v - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E = g, \quad (2.16)$$

$$E - \epsilon^{-1}(\mathbf{curl} H + \xi \mathbf{curl} v) = F, \quad (2.17)$$

$$H + \mu^{-1} \mathbf{curl} E = G. \quad (2.18)$$

L'équation (2.15) (resp. (2.18)) donne :

$$u = v + f. \quad (2.19)$$

$$H = G - \mu^{-1} \mathbf{curl} E. \quad (2.20)$$

En substituant  $u$  (resp.  $H$ ) par sa valeur dans (2.16) et (2.7) (resp. dans (2.17), (2.6)), on obtient formellement

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} v - \Delta v + \xi \mathbf{curl} E = \Delta f + g, & \text{dans } \Omega \\ \epsilon E + \mathbf{curl} (\mu^{-1} \mathbf{curl} E) - \xi \mathbf{curl} v = \epsilon F + \mathbf{curl} G, & \text{dans } \Omega \\ -(\mu^{-1} \mathbf{curl} E) \times \nu + \xi v \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = -G \times \nu. & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu v - \Delta_T v + Av + g_2(v) = -\partial_\nu f \cdot \nu + \Delta_T f - Af, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

En multipliant la première et la seconde équation de  $(\mathcal{P})$  par  $v_1 \in \mathcal{U}(\Omega)^3$  et  $E_1 \in W_\epsilon$ , respectivement, en intégrant par parties dans  $\Omega$  et en tenant compte des conditions aux limites dans  $(\mathcal{P})$ , on déduit formellement que

$$\int_\Omega \{v \cdot v_1 + \nabla v : \nabla v_1\} dx + \int_\Omega \{\epsilon E \cdot E_1 + \mu^{-1} \mathbf{curl} E \cdot \mathbf{curl} E_1\} dx \\ + \xi \int_\Omega \{\mathbf{curl} v_1 \cdot E - \mathbf{curl} v \cdot E_1\} + \int_\Gamma \{Av \cdot v_1 + \nabla_T v : \nabla_T v_1 dx \\ + g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu\} d\sigma - \xi \int_\Gamma \{E \times \nu \cdot v_1 + v \times \nu \cdot E_1\} d\sigma \\ = \int_\Omega \{g \cdot v_1 - \nabla f : \nabla v_1 + \epsilon F \cdot E_1 + G \cdot \mathbf{curl} E_1\} dx \\ - \int_\Gamma \nabla_T f : \nabla_T v_1 d\sigma - A \int_\Gamma f \cdot v_1 d\sigma, \quad \forall (v_1, E_1) \in \mathcal{U}(\Omega)^3 \times W_\epsilon,$$

où

$$W_\epsilon = \left\{ E \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{curl} E \in L^2(\Omega)^3, \mathbf{div}(\epsilon E) \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } E \times \nu \in L^2(\Gamma)^3 \right\}, \quad (2.21)$$

muni de la norme :

$$\|E\|_{W_\epsilon}^2 = \int_{\Omega} (|E|^2 + |\mathbf{curl} E|^2 + |\mathbf{div}(\epsilon E)|^2) dx + \int_{\Gamma} |E \times \nu|^2 d\sigma, \quad (2.22)$$

Alors, la formulation variationnelle du problème ( $\mathcal{P}$ ) est :

Trouver  $(v, E) \in \mathcal{U}(\Omega)^3 \times W_\epsilon$  tel que :

$$a((v, E), (v_1, E_1)) = L(v_1, E_1), \quad \forall (v_1, E_1) \in \mathcal{V}, \quad (2.23)$$

avec  $\mathcal{V} = \mathcal{U}(\Omega)^3 \times W_\epsilon$ , où la forme bilinéaire  $a$  est définie sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  par :

$$\begin{aligned} a((v, E), (v_1, E_1)) &= \int_{\Omega} \{v \cdot v_1 + \nabla v : \nabla v_1\} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left\{ \epsilon E \cdot E_1 + \mu^{-1} \mathbf{curl} E \cdot \mathbf{curl} E_1 + s \mathbf{div}(\epsilon E) \mathbf{div}(\epsilon E_1) \right\} dx \\ &\quad + \xi \int_{\Omega} \{ \mathbf{curl} v_1 \cdot E - \mathbf{curl} v \cdot E_1 \} dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} \{ A v \cdot v_1 + \nabla_T v : \nabla_T v_1 + g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu \} d\sigma \\ &\quad - \xi \int_{\Gamma} \{ E \times \nu \cdot v_1 + v \times \nu \cdot E_1 \} d\sigma, \end{aligned}$$

et  $s$  est un paramètre qui sera choisi plus loin.

La forme  $L$  est définie sur  $\mathcal{V}$  par :

$$\begin{aligned} L(v_1, E_1) &= \int_{\Omega} \{ g \cdot v_1 - \nabla f : \nabla v_1 + \epsilon F \cdot E_1 + G \cdot \mathbf{curl} E_1 \} dx \\ &\quad - \int_{\Gamma} \nabla_T f : \nabla_T v_1 d\sigma - A \int_{\Gamma} f \cdot v_1 d\sigma. \end{aligned}$$

Maintenant on introduit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}' \\ (v, E) &\rightarrow \mathcal{B}(v, E) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{B}(v, E)((v_1, E_1)) = a((v, E), (v_1, E_1))$ . Comme  $L \in \mathcal{V}'$ , alors résoudre le problème (2.23) est équivalent à la surjectivité de  $\mathcal{B}$ . D'après le corollaire (2.2) de [42] il suffit de montrer que  $\mathcal{B}$  est monotone, hémicontinue, borné et coercif.

**$\therefore \mathcal{B}$  monotone :**

Soient  $(v, E), (v_1, E_1) \in \mathcal{V}$ ; on a

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathcal{B}(v, E) - \mathcal{B}(v_1, E_1), (v - v_1, E - E_1) \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \\
 &= a((v, E), (v - v_1, E - E_1)) - a((v_1, E_1), (v - v_1, E - E_1)) \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ |v - v_1|^2 + |\nabla(v - v_1)|^2 \right\} dx \\
 &+ \int_{\Omega} \left\{ \epsilon |E - E_1|^2 + \mu^{-1} |\mathbf{curl}(E - E_1)|^2 + s |\mathbf{div}(\epsilon(E - E_1))|^2 \right\} dx \\
 &+ \int_{\Gamma} A |v - v_1|^2 d\sigma + \int_{\Gamma} |\nabla_T(v - v_1)|^2 d\sigma \\
 &+ \int_{\Gamma} (g_1(E \times \nu) - g_1(E_1 \times \nu)) \cdot (E \times \nu - E_1 \times \nu) d\sigma \\
 &+ \int_{\Gamma} (g_2(v) - g_2(v_1)) \cdot (v - v_1) d\sigma. \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

La condition (2.11) nous permet de conclure que :

$$\langle \mathcal{B}(v, E) - \mathcal{B}(v_1, E_1), (v - v_1, E - E_1) \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \geq 0,$$

d'où la monotonie de l'opérateur  $\mathcal{B}$ .

**$\therefore \mathcal{B}$  hémicontinu :**

Soient  $(v, E), (v_1, E_1), (v_2, E_2) \in \mathcal{V}$ .

Montrer que  $\mathcal{B}$  est hémicontinu revient à montrer que l'application :

$$t \longrightarrow \langle \mathcal{B}(v + tv_1, E + tE_1), (v_2, E_2) \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}$$

est continue sur  $\mathbb{R}$  ce qui revient à dire que :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \langle \mathcal{B}(v + tv_1, E + tE_1), (v_2, E_2) \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = \langle \mathcal{B}(v + t_0v_1, E + t_0E_1), (v_2, E_2) \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{B}(v + tv_1, E + tE_1), (v_2, E_2) \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = a((v + tv_1, E + tE_1), (v_2, E_2)) \\
& = \int_{\Omega} \left\{ (v + tv_1) \cdot v_2 + \nabla(v + tv_1) : \nabla v_2 \right\} dx \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \epsilon(E + tE_1) \cdot E_2 + \mu^{-1} \mathbf{curl}(E + tE_1) \cdot \mathbf{curl} E_2 \right. \\
& + s \mathbf{div}(\epsilon(E + tE_1)) \mathbf{div}(\epsilon E_2) \left. \right\} dx \\
& + \xi \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{curl} v_2 \cdot (E + tE_1) - \mathbf{curl}(v + tv_1) \cdot E_2 \right\} dx \\
& + \int_{\Gamma} \left\{ A(v + tv_1) \cdot v_2 + \nabla_T(v + tv_1) : v_2 + g_2(v + tv_1) \cdot v_2 \right. \\
& \quad \left. + g_1((E + tE_1) \times \nu) \cdot E_2 \times \nu \right\} d\sigma \\
& - \xi \int_{\Gamma} \left\{ (E + tE_1) \times \nu \cdot v_2 + (v + tv_1) \times \nu \cdot E_2 \right\} d\sigma.
\end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que :

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Gamma} \left\{ g_2(v + tv_1) \cdot v_2 + g_1((E + tE_1) \times \nu) \cdot E_2 \times \nu \right\} d\sigma & = \int_{\Gamma} \left\{ g_2(v + t_0v_1) \cdot v_2 + \right. \\
& \left. g_1((E + t_0E_1) \times \nu) \cdot E_2 \times \nu \right\} d\sigma.
\end{aligned}$$

Puisque  $g_1$  et  $g_2$  sont continues, alors pour tous  $(v, E), (v_1, E_1), (v_2, E_2) \in \mathcal{V}$  on a :

$$g_1((E + tE_1) \times \nu) \cdot E_2 \times \nu \rightarrow g_1((E + t_0E_1) \times \nu) \cdot E_2 \times \nu. \quad \text{pp sur } \Gamma \text{ quand } t \rightarrow t_0$$

$$g_2(v + tv_1) \cdot v_2 = g_2(v + t_0v_1) \cdot v_2. \quad \text{pp sur } \Gamma \text{ quand } t \rightarrow t_0.$$

En outre, comme  $g_1$  et  $g_2$  vérifiant (2.9), alors en appliquant le théorème de la convergence monotone nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Gamma} \left\{ g_2(v + tv_1) \cdot v_2 + g_1((E + tE_1) \times \nu) \cdot E_2 \times \nu \right\} d\sigma \\
& = \int_{\Gamma} \lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ g_2(v + tv_1) \cdot v_2 + g_1((E + tE_1) \times \nu) \cdot E_2 \times \nu \right\} d\sigma \\
& = \int_{\Gamma} \left\{ g_2(v + t_0v_1) \cdot v_2 + g_1((E + t_0E_1) \times \nu) \cdot E_2 \times \nu \right\} d\sigma,
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \langle \mathcal{B}(v + tv_1, E + tE_1), (v_2, E_2) \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = \langle \mathcal{B}(v + t_0v_1, E + t_0E_1), (v_2, E_2) \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

donc  $\mathcal{B}$  est hémicontinu.

∴  **$\mathcal{B}$  coercif :**

$\mathcal{B}$  est coercif si on a :

$$\frac{\mathcal{B}(v, E)((v, E))}{\|(v, E)\|_{\mathcal{V}}} = \frac{a((v, E), (v, E))}{\|(v, E)\|_{\mathcal{V}}} \rightarrow +\infty \text{ quand } \|(v, E)\|_{\mathcal{V}} \rightarrow +\infty. \quad (2.25)$$

On fixe  $E \in L^2(\Omega)^3$ , et on pose :

$$\begin{aligned} \Gamma_E^+ &= \{x \in \Gamma; |(E \times \nu)(x)| > 1\}, \\ \Gamma_E^- &= \{x \in \Gamma; |(E \times \nu)(x)| \leq 1\}. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété (2.13) sur  $g_1$  et  $g_2$ , en on déduit que

$$\begin{aligned} a((v, E)(v, E)) &\geq \int_{\Omega} \{|v|^2 + |\nabla v|^2\} dx + \int_{\Gamma} \{A|v|^2 + |\nabla_T v|^2\} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \{\epsilon|E|^2 + \mu^{-1}|\mathbf{curl} E|^2 + s|\mathbf{div}(\epsilon E)|^2\} dx + m \int_{\Gamma_E^+} |E \times \nu|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \|(v, E)\|_{\mathcal{V}}^2 &= \|v\|_{\mathcal{U}}^2 + \|E\|_{W_\epsilon}^2 \\ &\leq \int_{\Omega} \{|v|^2 + |\nabla v|^2\} dx + \int_{\Gamma} \{A|v|^2 + |\nabla_T v|^2\} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \{|E|^2 + |\mathbf{curl} E|^2 + |\mathbf{div}(\epsilon E)|^2\} dx + \int_{\Gamma} |E \times \nu|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

La définition de  $\Gamma_E^-$  donne :

$$\begin{aligned} \|(v, E)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq \int_{\Omega} \{|v|^2 + |\nabla v|^2\} dx + \int_{\Gamma} \{A|v|^2 + |\nabla_T v|^2\} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \{|E|^2 + |\mathbf{curl} E|^2 + |\mathbf{div}(\epsilon E)|^2\} dx + \int_{\Gamma_E^+} |E \times \nu|^2 d\sigma + |\Gamma|. \end{aligned}$$

Puisque on a :

$$0 < \epsilon_1 \leq \epsilon(x) \leq \epsilon_0, \quad 0 < \mu_0^{-1} \leq \mu^{-1}(x) \leq \mu_1^{-1},$$

il vient :

$$\begin{aligned} a((v, E)(v, E)) &\geq \int_{\Omega} \{|v|^2 + |\nabla v|^2\} dx + \int_{\Gamma} \{A|v|^2 + |\nabla_T v|^2\} d\sigma \\ &\quad + \min(\epsilon_1, \mu_0^{-1}, s, m) \left[ \int_{\Omega} \{|E|^2 + |\mathbf{curl} E|^2 + |\mathbf{div}(\epsilon E)|^2\} dx + \right. \\ &\quad \quad \left. \int_{\Gamma_E^+} |E \times \nu|^2 d\sigma \right] \\ &\geq \min(1, \gamma) (\|(v, E)\|_{\mathcal{V}}^2 - |\Gamma|), \end{aligned}$$

Solution du problème non linéaire

---

avec  $\gamma = \min(\epsilon_1, \mu_0^{-1}, s, m)$ ; on obtient alors :

$$a((v, E), (v, E)) \geq \alpha(\|(v, E)\|_{\mathcal{V}}^2 - |\Gamma|)$$

où  $\alpha = \min(1, \gamma)$ , d'où (2.25).

**∴  $\mathcal{B}$  borné :**

Soient  $(v, E), (v_1, E_1) \in \mathcal{V}$ . On a :

$$\begin{aligned} |a((v, E), (v_1, E_1))| &\leq \int_{\Omega} |\nabla v : \nabla v_1| dx + \int_{\Omega} \left\{ |\epsilon(x)E \cdot E_1| + |\mu^{-1}(x)\mathbf{curl} E \cdot \mathbf{curl} E_1| + \right. \\ &\quad \left. \xi \int_{\Omega} \{ |\mathbf{curl} v_1 \cdot E| + |\mathbf{curl} v \cdot \mathbf{curl} E_1| \} dx + |s \mathbf{div}(\epsilon E) \mathbf{div}(\epsilon E_1)| \right\} dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left\{ A|v \cdot v_1| + |\nabla_T v : \nabla_T v_1| + |g_2(v) \cdot v_1| + \right. \\ &\quad \left. |g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu| \right\} d\sigma + \xi \int_{\Gamma} \left\{ |E \times \nu \cdot v_1| + |v \times \nu \cdot E_1| \right\} d\sigma \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, la propriété (2.9) et le fait que  $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon(x) \leq \epsilon_1$  et  $0 < \mu_0^{-1} \leq \mu^{-1}(x) \leq \mu_1^{-1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |a((v, E), (v_1, E_1))| &\leq \beta \|(v, E)\|_{\mathcal{V}} \|(v_1, E_1)\|_{\mathcal{V}} + 2M \|(v_1, E_1)\|_{\mathcal{V}}, \\ &\quad \forall (v, E), (v_1, E_1) \in \mathcal{V}, \end{aligned}$$

où  $\beta = \max(\gamma, 2M)$  et  $\gamma = \max(3, \epsilon_0, \mu_1^{-1}, s, 4\xi)$ .

D'autre part, soit  $\mathcal{X}$  une partie bornée pour la norme de  $\mathcal{V}$ .

$\mathcal{X} = \{(v, E) \in \mathcal{V}; \|(v, E)\|_{\mathcal{V}} \leq C\}$ , où  $C$  une constante positive; on a :

$$\begin{aligned} |a((v, E), (v_1, E_1))| &\leq \beta C \|(v_1, E_1)\|_{\mathcal{V}} + 2M \|(v_1, E_1)\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq K \|(v_1, E_1)\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall (v_1, E_1) \in \mathcal{V}, (v, E) \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

où  $K = \max(\beta C, 2M)$ , donc :

$$\|\mathcal{B}(v, E)\|_{\mathcal{V}} \leq K, \quad \forall (v, E) \in \mathcal{X},$$

ce qui prouve que  $\mathcal{B}$  est borné.

Il reste à montrer que la solution  $(v, E) \in \mathcal{V}$  de (2.23) et  $u, H$  données par (2.19), (2.20) vérifient  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  et satisfont (2.14).

Pour commencer on montre que  $\mathbf{div}(\epsilon E) = 0$ . Pour cela on prend  $v_1 = 0$  et  $E_1 = \nabla \phi$  avec  $\phi \in D(\Delta_\epsilon)$  où  $\Delta_\epsilon$  est l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} D(\Delta_\epsilon) &= \left\{ \phi \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta_\epsilon \phi = \mathbf{div}(\epsilon \nabla \phi) \in L^2(\Omega) \right\} \\ \Delta_\epsilon \phi &= \mathbf{div}(\epsilon \nabla \phi), \quad \forall \phi \in D(\Delta_\epsilon). \end{aligned}$$

(2.23) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \epsilon E \cdot E_1 + \mu^{-1} \mathbf{curl} E \cdot \mathbf{curl} E_1 + s \mathbf{div}(\epsilon E) \mathbf{div}(\epsilon E_1) \} dx \\ & - \xi \int_{\Omega} \mathbf{curl} E_1 \cdot v dx + \xi \int_{\Gamma} v \times \nu \cdot E_1 d\sigma + \int_{\Gamma} g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu d\sigma \\ & - \xi \int_{\Gamma} v \times \nu \cdot E_1 d\sigma = \int_{\Omega} \epsilon F \cdot E_1 dx + \int_{\Omega} G \cdot \mathbf{curl} E_1 dx. \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\int_{\Omega} \{ \epsilon E \cdot \nabla \phi + s \mathbf{div}(\epsilon E) \mathbf{div}(\epsilon \nabla \phi) \} dx = \int_{\Omega} \epsilon F \cdot \nabla \phi dx.$$

La formule de Green donne :

$$\int_{\Omega} \{ -\mathbf{div}(\epsilon E) \phi + s \mathbf{div}(\epsilon E) \Delta_{\epsilon} \phi \} dx = - \int_{\Omega} \mathbf{div}(\epsilon F) \phi dx.$$

Comme  $F \in J(\Omega, \epsilon)$ , alors  $\mathbf{div}(\epsilon E) = 0$ , d'où :

$$\int_{\Omega} \mathbf{div}(\epsilon E) \{ -\phi + s \Delta_{\epsilon} \phi \} dx = 0, \quad \forall \phi \in D(\Delta_{\epsilon}),$$

Puisque l'opérateur  $\Delta_{\epsilon}$  est négatif, auto-adjoint avec un spectre discret, alors en choisissant  $s > 0$  de telle sorte que  $s^{-1}$  ne soit pas une valeur propre de  $\Delta_{\epsilon}$ , on en déduit que

$$\mathbf{div}(\epsilon E) = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

En utilisant  $\mathbf{div}(\epsilon E) = 0$  et (2.19), (2.20) alors (2.23) sera équivalente à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v \cdot v_1 dx + \int_{\Omega} \{ \epsilon E \cdot E_1 - H \cdot \mathbf{curl} E_1 \} dx + \xi \int_{\Omega} \{ \mathbf{curl} v_1 \cdot E - \mathbf{curl} v \cdot E_1 \} dx \\ & + \int_{\Gamma} \{ g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu \} d\sigma - \xi \int_{\Gamma} \{ E \times \nu \cdot v_1 + v \times \nu \cdot E_1 \} d\sigma \\ & + \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v_1 dx + A \int_{\Gamma} u \cdot v_1 d\sigma + \int_{\Gamma} \nabla_T u : \nabla_T v_1 d\sigma = \int_{\Omega} \{ g \cdot v_1 + \epsilon F \cdot E_1 \} dx, \\ & \qquad \qquad \qquad \forall (v_1, E_1) \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

On prend  $v_1 \in \mathcal{D}(\Omega)^3$  et  $E_1 = 0$ , on obtient :

$$v - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^3,$$

d'où la relation (2.16).

Comme  $v$ ,  $\mathbf{curl} E$  et  $g$  sont des éléments de  $L^2(\Omega)^3$  alors  $\Delta u \in L^2(\Omega)^3$ .

Maintenant, on prend la fonction teste  $v_1 = 0$ ,  $E_1 = P_{\epsilon} \chi$  avec  $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)^3$  (voir Lemme 2.3 de [38]) et tenu compte de (2.20), on trouve

$$\epsilon E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} v = \epsilon F \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

ce qui donne (2.17).

Comme  $\epsilon E$ ,  $\mathbf{curl} E$  et  $\epsilon F \in L^2(\Omega)^3$  alors  $\mathbf{curl} H \in L^2(\Omega)^3$ .

Les relations (2.19), (2.20), (2.16), (2.17) et la remarque 2.1, montrent que (2.23) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \langle \partial_\nu u, v_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \int_\Gamma (H \times \nu) \cdot E_1 \, d\sigma + \xi \int_\Gamma (E \times \nu) \cdot v_1 \, d\sigma \\ & + \int_\Gamma \{ Au \cdot v_1 + \nabla_T u : \nabla_T v_1 + g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu \} \, d\sigma \\ & - \xi \int_\Gamma \{ E \times \nu \cdot v_1 + v \times \nu \cdot E_1 \} \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

En prenant  $v \in \mathcal{U}(\Omega)^3$  et  $E_1 = P_\epsilon \chi$  avec  $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})^3$  (cf. Remarque 2.4 de [8]), on aura :

$$\begin{aligned} & \langle \partial_\nu u, v_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \int_\Gamma (H \times \nu) \cdot \chi \, d\sigma - \xi \int_\Gamma v \times \nu \cdot \chi \, d\sigma \\ & + \int_\Gamma \{ Au \cdot v_1 + \nabla_T u : \nabla_T v_1 + g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot \chi \times \nu \} \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Finalement, pour  $v_1 = 0$  et  $\chi$  arbitraire dans  $C^\infty(\overline{\Omega})^3$  (resp.  $\chi = 0$  et  $v_1$  arbitraire dans  $\mathcal{U}(\Omega)^3$ ), on obtient la condition au bord (2.6) (resp. (2.7)). De plus, d'après la condition (2.20) et le fait que  $\mathbf{div}(\mu G) = 0$  (car  $G \in J(\Omega, \mu)$ ) on a  $\mathbf{div}(\mu H) = 0$ , d'où  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  et par conséquent  $\mathcal{A}$  est maximal, ce qui termine la preuve.  $\square$

La théorie des semi groupes non linéaires nous permet de déduire le théorème d'unicité et de régularité des solutions.

**Théorème 2.1.** *On suppose que  $g_1$  et  $g_2$  vérifient (2.9) ainsi que (2.11) et (2.13). Pour toute donnée initiale  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$  le problème (1.21) admet une solution (faible) unique qui vérifie :*

$$(u, \partial_t u, E, H) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} u & \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{U}(\Omega)^3), \\ E & \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \epsilon)), \\ H & \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)). \end{aligned}$$

Pour tout donnée initiale  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$ , le problème (1.21) admet une solution (forte) unique qui vérifie :

$$(u, \partial_t u, E, H) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A}))$$

*c'est à dire :*

$$u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{U}(\Omega)^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, H(\Delta, \Omega)),$$

$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \epsilon)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\epsilon),$$

$$H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\mu),$$

et satisfont (2.6), (2.7) où  $\mathcal{U}(\Omega)^3$  est défini par (2.2) et  $H(\Delta, \Omega)$  est défini dans la remarque 2.1.

**Remaque 2.2.** *D'après la remarque 2.1 on a  $\Delta_T u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$  donc  $u|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^3$  d'où  $u \in H^2(\Omega)^3$  alors la solution  $(u, \partial_t u, E, H)$  du problème (1.21) possède la propriété de régularité plus forte suivante :*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)^3),$$

$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \epsilon)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\epsilon),$$

$$H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\mu).$$

Nous terminons cette section en montrant que l'énergie du système (1.21) est décroissante et on a

**Lemme 2.5** (décroissance de l'énergie). *Si  $g_1$  et  $g_2$  sont continues et satisfont les propriétés (2.9), (2.11) et (2.13), l'énergie du système (1.21) donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2) dx \\ &+ \frac{A}{2} \int_{\Gamma} |u(x, t)|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\nabla_T u(x, t)|^2 d\sigma \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon(x)|E(x, t)|^2 + \mu(x)|H(x, t)|^2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

est décroissante et pour tout  $0 \leq S < T < \infty$ , on a :

$$\mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T) = \int_S^T \int_{\Gamma} \{g_1(E(t) \times \nu) \cdot E(t) \times \nu + g_2(\partial_t u(t)) \cdot \partial_t u(t)\} d\sigma dt. \quad (2.27)$$

De plus pour  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$  et pour tout  $t \geq 0$

$$\mathcal{E}'(t) = - \int_{\Gamma} \{g_1(E(t) \times \nu) \cdot E(t) \times \nu + g_2(\partial_t u(t)) \cdot \partial_t u(t)\} d\sigma \quad (2.28)$$

*Démonstration.* Comme  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , il suffit de montrer (2.27). Pour  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$ , d'après la régularité de  $u$ ,  $E$ ,  $H$  on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(t) &= \int_{\Omega} \{ \partial_t^2 u \cdot \partial_t u + \nabla u : \partial_t(\nabla u) \} dx \\ &\quad + A \int_{\Gamma} \partial_t u \cdot u \, d\sigma + \int_{\Gamma} \partial_t(\nabla_T u) : \nabla_T u \, d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \{ \epsilon E \cdot \partial_t E + \mu H \cdot \partial_t H \} dx. \end{aligned}$$

D'après (1.21), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(t) &= \int_{\Omega} \{ \partial_t u \cdot (\Delta u - \xi \mathbf{curl} E) + \partial_t(\nabla u) : \nabla u \} dx \\ &\quad + A \int_{\Gamma} \partial_t u \cdot u \, d\sigma + \int_{\Gamma} \partial_t(\nabla_T u) : \nabla_T u \, d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \{ E \cdot (\mathbf{curl} H + \xi \mathbf{curl} \partial_t u) - H \cdot \mathbf{curl} E \} dx \end{aligned}$$

La formule de Green et les conditions au bord (2.6) et (2.7), donnent

$$\mathcal{E}'(t) = - \int_{\Gamma} \{ g_1(E \times \nu) \cdot E \times \nu + g_2(\partial_t u) \cdot \partial_t u \} d\sigma,$$

ce qui donne l'identité (2.28). On en déduit que :

$$\mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(S) = - \int_S^T \int_{\Gamma} \{ g_1(E(t) \times \nu) \cdot E(t) \times \nu + g_2(\partial_t u(t)) \cdot \partial_t u(t) \} d\sigma dt$$

pour tout  $S$  et  $T$  vérifiant  $0 \leq S < T < \infty$ . Les hypothèses (2.11) et (2.12) conduisent à une décroissance de l'énergie pour les solutions faibles.  $\square$

# Chapitre 3

## Stabilisation frontière du problème “Maxwell/onde”

### 3.1 Stabilité exponentielle dans le cas linéaire

Dans cette section, on expose une méthode, direct et élémentaire, de stabilisation frontière du problème de Ventcel (1.21). Par la méthode de multiplicateurs [24] et sous certaines conditions géométriques, on montre que le feedback *naturel* assure la décroissance exponentielle de l'énergie du problème linéaire correspondant. Ce système a la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E = 0 & \text{dans } Q := \Omega \times ]0, \infty[, \\ \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u = 0 & \text{dans } Q, \\ \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0 & \text{dans } Q, \\ H \times \nu + \xi \partial_t u \times \nu + (E \times \nu) \times \nu = 0 & \text{sur } \Sigma := \Gamma \times ]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_T u + Au + \partial_t u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  strictement étoilé par rapport à l'origine de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^2$  :

$$m(x) \cdot \nu(x) = \sum_1^3 x_i \nu_i > 0 \text{ pour tout } x \in \Gamma.$$

On supposera aussi que les coefficients  $\epsilon$  et  $\mu$  sont constants dans tout le domaine. On rappelle que ce système est dissipatif ; son énergie définie par (2.26) vérifie

$$\mathcal{E}'(t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Afin de présenter le théorème fondamental de ce travail, on rappelle brièvement les résultats établis dans [8, 36, 37]. Commençons par la définition (inégalité intégrale) suivante :

**Définition 5** (Estimation de stabilité). *On dit que  $\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité s'il existe  $T > 0$  et deux constante positives  $C_1, C_2$  (qui dépendent de  $T$ ) avec  $C_1 < T$  telle que*

$$\int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq C_1 \mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \int_{\Gamma} (|\partial_t u(t)|^2 + |E(t) \times \nu|^2) d\sigma dt, \quad (3.2)$$

pour toute solution  $(u, E, H)$  de (3.1) avec  $g_1(x) = g_2(x) = x$ .

Cette définition est équivalente au lemme suivant :

**Lemme 3.1** (l'estimation d'observabilité).  *$\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité si et seulement s'il existe  $T > 0$  et une constante positive  $C$  (qui dépend de  $T$ ) telle que*

$$\mathcal{E}(T) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma} (|\partial_t u(t)|^2 + |E(t) \times \nu|^2) d\sigma dt \quad (3.3)$$

pour toute solution  $(u, E, H)$  de (3.1).

La preuve est similaire à celle du Lemme 3.2 de [8] (voir aussi Lemme 3.2 de [37]). Énonçons maintenant le théorème qui nous donne une équivalence entre la stabilité exponentielle du système (3.1) et l'estimation de stabilité.

**Théorème 3.1.**  *$\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité si et seulement si il existe deux constantes positives  $M$  et  $\omega$  telle que*

$$\mathcal{E}(t) \leq M e^{-\omega t} \mathcal{E}(0), \quad (3.4)$$

pour toute solution  $(u, E, H)$  de (3.1) avec  $g_1(x) = g_2(x) = x$

La preuve de ce théorème est analogue à celle du Théorème 3.3 de [8] (voir aussi Théorème 3.3 de [37]).

Pour établir la stabilisation exponentielle du système (3.1), nous allons montrer que  $\Omega$  vérifie l'estimation de stabilité (Voir Théorème 3.1). Commençons par démontrer le lemme suivant

**Lemme 3.2.** *Pour tout  $\eta \in (0, 1)$ , il existe une une constante  $C$  strictement positive (dépend de  $\alpha, \Omega$ , le coefficient  $\mu$  et du paramètre  $\xi$ ) telle que pour tout  $T > 0$*

$$\int_0^T \int_{\Gamma} \left( A|u|^2 + |\nabla_T u|^2 \right) d\sigma dt \leq \frac{C}{\eta} \mathcal{E}(0) + \eta \int_0^T \mathcal{E}(t) dt.$$

L’idée de la preuve est inspirée de [24].

*Démonstration.* On définit (pour chaque  $t \in \mathbb{R}_+$ )  $z = z(t)$  par

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{dans } \Omega, \\ z = u & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $u(t)$  est la solution du problème (3.1)

Cette solution est caractérisée par  $z = w + u$  où  $w \in H_0^1(\Omega)^3$  est l’unique solution de

$$\int_{\Omega} \nabla w : \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3.$$

On en déduit

$$\int_{\Omega} \nabla z : \nabla u \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Prenant  $v = z - u$  dans cette identité, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla z : \nabla u \, dx = \int_{\Omega} |\nabla z|^2 \, dx \geq 0. \quad (3.6)$$

De (2.27), il existe deux constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que

$$\int_{\Omega} |z|^2 \, dx \leq c_1 \int_{\Gamma} |u|^2 \, d\sigma \leq c_2 \mathcal{E}(t), \quad (3.7)$$

$$\int_{\Omega} |\partial_t z|^2 \, dx \leq c_1 \int_{\Gamma} |\partial_t u|^2 \, d\sigma \leq -c_1 \mathcal{E}'(t), \quad (3.8)$$

où  $c_2 = \frac{2c_1}{A}$ .

On pose  $Q_T := \Omega \times [0, T]$  and  $\Sigma_T := \Gamma \times [0, T]$ , pour tout  $0 < T < \infty$ .

Cela étant, multiplions (3.1) par  $z$ , intégrons par parties sur  $Q_T$ , et en tenant compte des conditions aux limites (3.1) et (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_T} \left( |\nabla_T u|^2 + A|u|^2 \right) \, d\sigma dt \\ &= - \int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t u \, d\sigma dt - \int_{Q_T} \left( z \cdot \partial_t^2 u + \nabla z : \nabla u + \xi z \cdot \mathbf{curl} E \right) \, dx dt. \end{aligned}$$

De (3.6), il vient

$$\int_{\Sigma_T} \left( |\nabla_T u|^2 + A|u|^2 \right) \, d\sigma dt \leq - \int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t u \, d\sigma dt - \int_{Q_T} z \cdot \left( \partial_t^2 u + \xi \mathbf{curl} E \right) \, dx dt.$$

En utilisant la troisième identité du système (3.1) et on intègre par partie par rapport à la variable  $t$ , on en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_T} \left( |\nabla_T u|^2 + A|u|^2 \right) \, d\sigma dt &\leq - \int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t u \, d\sigma dt + \int_{Q_T} \partial_t z \cdot \left( \partial_t u - \xi \mu H \right) \, dx dt \\ &\quad - \left[ \int_{\Omega} z \cdot (\partial_t u - \xi \mu H) \right]_0^T. \end{aligned}$$

En appliquant plusieurs fois (2.27), (3.7), (3.8) et l’inégalité de Young, on estime ces termes un par un comme suit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t u d\sigma dt \right| &\leq \alpha \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt + \frac{1}{4\alpha} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt \\ &\leq \frac{2\alpha}{A} \int_0^T \mathcal{E}(t) dt - \frac{1}{4\alpha} \int_0^T \mathcal{E}'(t) dt \\ &\leq \frac{2\alpha}{A} \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + \frac{1}{4\alpha} \mathcal{E}(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_T} \partial_t z \cdot (\partial_t u - \xi \mu H) d\sigma dt \right| &\leq \frac{1}{4\alpha} \int_{Q_T} |\partial_t z|^2 dx dt + \alpha \int_{Q_T} |\partial_t u - \xi \mu H|^2 dx dt \\ &\leq \frac{-c_1}{4\alpha} \int_0^T \mathcal{E}'(t) dt + (1 + \xi^2 \mu) \alpha \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \\ &\leq \frac{c_1}{4\alpha} \mathcal{E}(0) + (1 + \xi^2 \mu) \alpha \int_0^T \mathcal{E}(t) dt. \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\Omega} [z \cdot (\partial_t u - \xi \mu H) dx]_0^T \right| \leq c_3 (\mathcal{E}(0) + \mathcal{E}(T)) \leq 2c_3 \mathcal{E}(0),$$

pour tout  $\alpha > 0$ ; où  $c_3$  est une constante positive (dépend de  $\Omega$ ,  $\mu$  et  $\xi$ ). En combinant ces majorations, on achève la preuve du Lemme 3.2 en posant  $\alpha = \frac{\eta}{\left(\frac{2}{A} + 1 + \xi^2 \mu\right)}$  et  $C = \left(\frac{1 + c_1}{4} + 2c_3 \alpha\right) \left(\frac{2}{A} + 1 + \xi^2 \mu\right)$ .  $\square$

Maintenant on établit le résultat fondamental de cette section qui est le

**Théorème 3.2.** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  strictement étoilé par rapport à l’origine de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^2$ . Alors  $\Omega$  satisfait l’estimation de stabilité.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer l’estimation (3.2) pour tout solution forte  $(u, E, H)$  de (3.1). Pour cela, on applique la méthode de multiplicateurs [24, 34]. En effet, on peut le montrer en deux étapes.

• **1<sup>ère</sup> étape :** On commence par l’identité suivante

**Lemme 3.3.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^2$  et  $q = (q_1, q_2, q_3) \in$*

$W^{1,\infty}(\bar{\Omega})^3$ . Alors, pour tout solution forte  $(u, E, H)$  de (3.1) on a l'identité suivante

$$\begin{aligned}
 0 = & - \left[ \int_{\Omega} 2(q : \nabla u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu (q : \nabla u) \cdot H dx \right]_0^T \\
 & + \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot q dx \right]_0^T + \int_{Q_T} (\mathbf{div} q) (|\nabla u|^2 - |\partial_t u|^2) dx dt \\
 & - 2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dx dt - \int_{Q_T} \left\{ \epsilon Q E \cdot E + \mu Q H \cdot H \right\} dx dt \\
 & + 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u dx dt + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu \left( |\partial_t u|^2 + |\partial_\nu u|^2 - |\nabla_T u|^2 \right) d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \pi \frac{\partial_T q_{kT}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} (\mathbf{div}_T q_T) |\nabla_T u|^2 d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} (Au + \partial_t u) \cdot (q_T \cdot \nabla_T u) d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ q \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - \right. \\
 & \left. - 2\epsilon (q \cdot E) (E \cdot \nu) - 2\mu (q \cdot H) (H \cdot \nu) - 2\xi \mu (H \cdot \nu) (q \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt, \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

où  $Q = \mathbf{div} q I - 2\nabla q$  et  $I$  est la matrice identité dans  $\mathbb{R}^3$ .

Ici, nous avons utilisé la notation  $q : \nabla u = (q \cdot \nabla u_1, q \cdot \nabla u_2, q \cdot \nabla u_3)$  et  $q_T : \nabla_T u = (q_T \cdot \nabla_T u_1, q_T \cdot \nabla_T u_2, q_T \cdot \nabla_T u_3)$ , où  $q_T$  est la composante tangentielle de  $q$  et  $\mathbf{div}_T q_T$  la divergence tangentielle de  $q_T$ .

*Démonstration.* D'une part, on multiplie (3.1)<sub>1</sub> par  $2(q : \nabla u)$  puis on intègre sur  $Q_T$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_T} 2(q : \nabla u) \cdot \partial_t^2 u dx dt &= 2 \left[ \int_{\Omega} (q : \nabla u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T \\
 &\quad - \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \int_{Q_T} (\mathbf{div} q) |\partial_t u|^2 dx dt, \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{Q_T} \Delta u \cdot (q : \nabla u) dx dt \\
 &= 2 \int_{\Sigma_T} \partial_\nu u \cdot (q : \nabla u) d\sigma dt - 2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( q_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx dt \\
 &= -2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{div} q |\nabla u|^2 dx dt \\
 &\quad + 2 \int_{\Sigma_T} \partial_\nu u \cdot (q : \nabla u) d\sigma dt - \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu |\nabla u|^2 d\sigma dt. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Sur  $\Gamma$ , on a

$$q : \nabla u = q_T : \nabla_T u + q_\nu (\partial_\nu u),$$

et

$$|\nabla u|^2 = |\nabla_T u|^2 + |\partial_\nu u|^2.$$

Dans ce cas (3.11) devient

$$\begin{aligned} & 2 \int_{Q_T} \Delta u \cdot (q : \nabla u) \, dx dt \\ &= -2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \, dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{div} q |\nabla u|^2 \, dx dt \\ & \quad + 2 \int_{\Sigma_T} \partial_\nu u \cdot (q_T : \nabla_T u) \, d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu (|\partial_\nu u|^2 - |\nabla_T u|^2) \, d\sigma dt. \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième condition au bord de (3.1), plus une intégration par parties sur  $\Sigma_T$ , on tire

$$\begin{aligned} & 2 \int_{Q_T} \Delta u \cdot (q : \nabla u) \, dx dt \\ &= -2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \, dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{div} q |\nabla u|^2 \, dx dt \\ & \quad - 2 \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \frac{\partial_T}{\partial x_j} \left( q_{kT} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} \right) \, d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu (|\partial_\nu u|^2 - |\nabla_T u|^2) \, d\sigma dt \\ & \quad - 2 \int_{\Sigma_T} (q_T : \nabla_T u) \cdot (a u + \partial_t u) \, d\sigma dt. \end{aligned}$$

D’après le Lemme 1.2, il vient

$$\begin{aligned} & 2 \int_{Q_T} \Delta u \cdot (q : \nabla u) \, dx dt \\ &= -2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \, dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{div} q |\nabla u|^2 \, dx dt \\ & \quad - 2 \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \pi \frac{\partial_T q_{kT}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} \, d\sigma dt - \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T}{\partial x_k} \left( \left| \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \right|^2 \right) q_{kT} \, d\sigma dt \\ & \quad + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu (|\partial_\nu u|^2 - |\nabla_T u|^2) \, d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (q_T : \nabla_T u) \cdot (A u + \partial_t u) \, d\sigma dt. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\int_{\Sigma_T} \partial_T (|\nabla_T u|^2) \cdot q_T \, d\sigma dt = - \int_{\Sigma_T} \mathbf{div}_T q_T |\nabla_T u|^2 \, d\sigma dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q_T} 2(q : \nabla u) \cdot (\Delta u - \xi \mathbf{curl} E) dxdt \\
 &= -2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dxdt + \int_{Q_T} \mathbf{div} q |\nabla u|^2 dxdt \\
 &\quad - 2\xi \int_{Q_T} (q : \nabla u) \cdot \mathbf{curl} E dxdt - 2 \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \pi \frac{\partial_T q_{kT}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} d\sigma dt \\
 &\quad + \int_{\Sigma_T} \mathbf{div}_T q_T |\nabla_T u|^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu (|\partial_\nu u|^2 - |\nabla_T u|^2) d\sigma dt \\
 &\quad - 2 \int_{\Sigma_T} (q_T : \nabla_T u) \cdot (Au + \partial_t u) d\sigma dt. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Combinant (3.10) et (3.12) on obtient l'identité suivant

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{Q_T} 2(q : \nabla u) \cdot (\partial_t^2 u - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E) dxdt \\
 &= -2 \left[ \int_{\Omega} (q : \nabla u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T - 2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dxdt \\
 &\quad + \int_{Q_T} \mathbf{div} q (|\nabla u|^2 - |\partial_t u|^2) dxdt - 2\xi \int_{Q_T} (q : \nabla u) \cdot \mathbf{curl} E dxdt \\
 &\quad + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu (|\partial_t u|^2 + |\partial_\nu u|^2 - |\nabla_T u|^2) d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \mathbf{div}_T q_T |\nabla_T u|^2 d\sigma dt \\
 &\quad - 2 \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \pi \frac{\partial_T q_{kT}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (q_T : \nabla_T u) \cdot (Au + \partial_t u) d\sigma dt. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant l'équation (3.1)<sub>2</sub> et (3.1)<sub>3</sub> par  $2\mu(q \times H)$  et  $2\epsilon(E \times q) - 2\xi(q : \nabla u)$ , respectivement, et on intègre par partie sur  $Q_T$  (comme dans [8]), on trouve

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{Q_T} \left\{ 2\mu(q \times H) \cdot (\epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u) \right\} dxdt \\
 &\quad + \int_{Q_T} \left\{ (2\epsilon(E \times q) - 2\xi(q : \nabla u)) \cdot (\mu \partial_t H + \mathbf{curl} E) \right\} dxdt \\
 &= \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu H \cdot (q : \nabla u) dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot q dx \right]_0^T \\
 &\quad - \int_{Q_T} \{ \epsilon Q E \cdot E + \mu Q H \cdot H \} dxdt + 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u dxdt \\
 &\quad + 2\xi \int_{Q_T} (q : \nabla u) \cdot \mathbf{curl} E dxdt + \int_{\Sigma_T} \left\{ q \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\epsilon(q \cdot E)(E \cdot \nu) - 2\mu(q \cdot H)(H \cdot \nu) - 2\xi \mu (H \cdot \nu)(q \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt, \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

où  $Q = \mathbf{div}qI - 2\nabla q$ . Enfin, en regroupant judicieusement les termes (3.13) et (3.14), on déduit (3.9). Ce qui achève la preuve du Lemme 3.3.  $\square$

On est en mesure à présent d’établir la majoration (3.2). Pour cela on prend  $q(x) = m(x) = x$  dans (3.9); on trouve

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[ \int_{\Omega} -2(m : \nabla u) \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu H \cdot (m : \nabla u) \, dx \right]_0^T \\
 &+ \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot m \, dx \right]_0^T + \int_{Q_T} (|\nabla u|^2 - 3|\partial_t u|^2) \, dx dt \\
 &- \int_{Q_T} \{ \epsilon |E|^2 + \mu |H|^2 \} \, dx dt + 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \partial_t u \, dx dt \\
 &+ \int_{\Sigma_T} m \cdot \nu (|\partial_t u|^2 + |\partial_\nu u|^2 - |\nabla_T u|^2) \, d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \pi \frac{\partial_T m_{kT}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} \, d\sigma dt \\
 &+ \int_{\Sigma_T} \mathbf{div}_T m_T |\nabla_T u|^2 \, d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (Au + \partial_t u) \cdot (m_T : \nabla_T u) \, d\sigma dt \\
 &+ \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - 2\epsilon (m \cdot E)(E \cdot \nu) - 2\mu (m \cdot H)(H \cdot \nu) \right. \\
 &\quad \left. - 2\xi \mu (H \cdot \nu)(m \cdot \partial_t u) \right\} \, d\sigma dt. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

De plus, multiplions l’équation (3.1)<sub>1</sub> et (3.1)<sub>3</sub> par  $2u$  et  $2\xi u$  et intégrons par parties sur  $Q_T$  et  $\Sigma_T$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[ \int_{\Omega} -2u \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T + 2\xi \left[ \int_{\Omega} \mu H \cdot u \, dx \right]_0^T + 2 \int_{Q_T} (|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2) \, dx dt \\
 &- 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \partial_t u \, dx dt - 2 \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u|^2 \, d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (Au + \partial_t u) \cdot u \, d\sigma dt. \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

La somme de (3.15) et (3.16) donne le résultat suivant

$$\begin{aligned}
 0 &= - \left[ \int_{\Omega} 2(m : \nabla u + u) \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu H \cdot (m : \nabla u + u) \, dx \right]_0^T \\
 &+ \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot m \, dx \right]_0^T - \int_{Q_T} (|\nabla u|^2 + |\partial_t u|^2) \, dx dt \\
 &- \int_{Q_T} \{ \epsilon |E|^2 + \mu |H|^2 \} \, dx dt + \int_{\Sigma_T} m \cdot \nu (|\partial_t u|^2 + |\partial_\nu u|^2 - |\nabla_T u|^2) \, d\sigma dt \\
 &- 2 \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \pi \frac{\partial_T q_{kT}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} \, d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} (\mathbf{div}_T m_T - 2) |\nabla_T u|^2 \, d\sigma dt \\
 &- 2 \int_{\Sigma_T} (Au + \partial_t u) \cdot (m_T : \nabla_T u + u) \, d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\epsilon (m \cdot E)(E \cdot \nu) - 2\mu (m \cdot H)(H \cdot \nu) - 2\xi \mu (H \cdot \nu)(m \cdot \partial_t u) \right\} \, d\sigma dt. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

(3.17) se réécrit alors sous la forme

$$2 \int_0^T \mathcal{E}(t) dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (3.18)$$

on pose alors

$$\begin{aligned} I_1 &= - \left[ \int_{\Omega} 2(m : \nabla u + u) \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi\mu(m : \nabla u + u) \cdot H \, dx \right]_0^T + \\ &\quad 2 \left[ \int_{\Omega} \epsilon\mu(E \times H) \cdot m \, dx \right]_0^T, \\ I_2 &= \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu |\partial_t u|^2 + |\nabla_T u|^2 + A|u|^2 \right\} d\sigma dt, \\ I_3 &= \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu (\epsilon|E|^2 + \mu|H|^2) - 2\epsilon(m \cdot E)(E \cdot \nu) - 2\mu(m \cdot H)(H \cdot \nu) \right. \\ &\quad \left. - 2\xi\mu(H \cdot \nu)(m \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= -2 \int_{\Sigma_T} \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \pi \frac{\partial_T q_{kT}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} (\mathbf{div}_T m_T - 2 - m_\nu) |\nabla_T u|^2 d\sigma dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_T} m \cdot \nu |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (m_T : \nabla_T u + u) \cdot (au + \partial_t u) d\sigma dt. \end{aligned}$$

• **2<sup>eme</sup> étape** : Dans cette partie, on cherchera des estimations adéquates pour chaque terme  $I_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) dans le but de parvenir l'estimation (3.2).

On majore les termes intégrés de la relation (3.18) par la méthode de V. Komornik (cf. [24]).

D'après le Lemme 3.2 de [24] (voir aussi [4]) et l'identité (2.27), il existe deux constantes positives  $k_1$  et  $k_2$  telles que

$$\left[ \int_{\Omega} 2(m : \nabla u + u) \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T \leq k_1 \mathcal{E}(0),$$

et

$$\left[ \int_{\Omega} 2\mu(m : \nabla u + u) \cdot H \, dx \right]_0^T \leq k_2 \mathcal{E}(0).$$

Comme dans [8, 24], on a l'existence d'une constante positive  $k_3 > 0$  tel que

$$\left[ \int_{\Omega} 2\epsilon\mu(E \times H) \cdot m \, dx \right]_0^T \leq k_3 \mathcal{E}(0).$$

D'où

$$I_1 \leq k_4 \mathcal{E}(0), \quad (3.19)$$

où  $k_4$  est une constante positive indépendante de  $T$ .

On applique à ce niveau le résultat du Lemme 3.2, on en déduit

$$I_2 \leq \frac{C}{\eta} \mathcal{E}(0) + R \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \eta \int_0^T \mathcal{E}(t) dt. \quad (3.20)$$

où  $R = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)|$ .

Si on remarque que

$$2\epsilon(m \cdot E)(E \cdot \nu) = 2\epsilon(m_T \cdot E_T)E_\nu + 2\epsilon m \cdot \nu |E_\nu|^2,$$

et

$$2\mu(m \cdot H)(H \cdot \nu) = 2\mu(m_T \cdot H_T)H_\nu + 2\mu m \cdot \nu |H_\nu|^2.$$

Alors le terme  $I_3$  devient

$$I_3 = \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu (\epsilon |E_T|^2 + \mu |H_T|^2) - \epsilon m \cdot \nu |E_\nu|^2 - \mu m \cdot \nu |H_\nu|^2 \right. \\ \left. - 2\epsilon (m_T \cdot E_T)E_\nu - 2\mu (m_T \cdot H_T)H_\nu + 2\xi \mu (H \cdot \nu)(m \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt.$$

Par l'inégalité de Young on observe qu'il existe une constante  $k_5 > 0$  telle que, pour tout  $\theta > 0$

$$I_3 \leq \int_{\Sigma_T} \left\{ \left( m \cdot \nu + \frac{k_5}{\theta} \right) (\epsilon |E \times \nu|^2 + \mu |H \times \nu|^2) + (\theta - m \cdot \nu) \epsilon |E_\nu|^2 \right. \\ \left. + (2\theta - m \cdot \nu) \mu |H_\nu|^2 + \frac{k_5}{\theta} |\partial_t u|^2 \right\} d\sigma dt. \quad (3.21)$$

Le Lemme 1.3 permet d'obtenir

$$I_4 = - \int_{\Sigma_T} (2 + m_\nu + m_\nu \text{tr}(\partial_T \nu)) |\nabla_T u|^2 d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} m_\nu \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial_T \nu_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} d\sigma dt \\ + \int_{\Sigma_T} m_\nu |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (m_T : \nabla_T u + u) \cdot (Au + \partial_t u) d\sigma dt. \quad (3.22)$$

Nous allons maintenant estimer chaque terme de l'identité ci-dessus. A partir de maintenant et dans toute la suite la lettre  $C$  désignera une constante positive assez grand et indépendante de  $u$ .

Puisque  $m_\nu$  et  $\partial_T \nu$  sont bornés (cf. [4]), on déduit que

$$\left| \int_{\Sigma_T} (2 + m_\nu + m_\nu \text{tr}(\partial_T \nu)) |\nabla_T u|^2 d\sigma dt \right| \leq C \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u|^2 d\sigma dt, \quad (3.23)$$

$$\left| 2 \int_{\Sigma_T} m_\nu \frac{\partial_T u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial_T \nu_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial_T u_i}{\partial x_k} d\sigma dt \right| \leq C \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u|^2 d\sigma dt. \quad (3.24)$$

Puisque on a  $u \cdot (m_T : \nabla_T u) = \frac{1}{2} \nabla_T (|u|^2) \cdot m_T$ , le dernier terme de  $I_4$  se réécrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Sigma_T} (m_T : \nabla_T u + u) \cdot (Au + \partial_t u) d\sigma dt \\ &= A \int_{\Sigma_T} m_T \cdot \nabla_T (|u|^2) d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} (m_T : \nabla_T u) \cdot \partial_t u d\sigma dt \\ & \quad + 2A \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t u d\sigma dt. \end{aligned}$$

Par commodité, on commencera par numéroter les termes de cette identité, on pose alors

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= A \int_{\Sigma_T} m_T \cdot \nabla_T (|u|^2) d\sigma dt, \\ \mathcal{I}_2 &= 2 \int_{\Sigma_T} (m_T : \nabla_T u) \cdot \partial_t u d\sigma dt, \\ \mathcal{I}_3 &= 2A \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt, \\ \mathcal{I}_4 &= 2 \int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t u d\sigma dt. \end{aligned}$$

Appliquant la formule de Green, on obtient

$$\mathcal{I}_1 = -A \int_{\Sigma_T} \operatorname{div}_T m_T |u|^2 d\sigma dt,$$

d'où l'on déduit pour  $\mathcal{I}_1$  l'estimation

$$|\mathcal{I}_1| \leq C \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt.$$

Par l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_2| &\leq \theta \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \frac{C}{\theta} \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u|^2 d\sigma dt, \\ |\mathcal{I}_4| &\leq \theta \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \frac{C}{\theta} \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt, \end{aligned}$$

pour tout  $\theta > 0$ . On peut vérifier facilement que

$$|\mathcal{I}_3| \leq C \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt.$$

En combinant les estimations précédentes, on tire

$$\begin{aligned} & \left| 2 \int_{\Sigma_T} (m_T \cdot \nabla_T u + u)(Au + \partial_t u) d\sigma dt \right| \\ & \leq \frac{C}{\theta} \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u|^2 d\sigma dt + \left(2C + \frac{C}{\theta}\right) \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt + 2\theta \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le seul terme qu'il nous reste à estimer est  $\int_{\Sigma_T} m \cdot \nu |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt$ . On a

$$\left| \int_{\Sigma_T} m \cdot \nu |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt \right| \leq C \int_{\Sigma_T} |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt.$$

Comme  $\Gamma$  est de classe  $C^2$ , alors il existe un champ de vecteurs  $h \in (W^{1,\infty}(\bar{\Omega})^3)$  qui vérifie :

$$h = \nu \text{ sur } \Gamma.$$

(Voir Remarque 3.2 Chap I de [34]). On prend  $q(x) = h(x)$  dans la relation (3.9), on en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_T} |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt &= \left[ \int_{\Omega} 2(q : \nabla u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T - \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu H \cdot (q : \nabla u) dx \right]_0^T \\ &\quad - \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot q dx \right]_0^T + \int_{Q_T} \mathbf{div} q (|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\ &\quad + 2 \int_{Q_T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dx dt + \int_{Q_T} \left\{ \epsilon Q E \cdot E + \mu Q H \cdot H \right\} dx dt \\ &\quad - 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u dx dt + \int_{\Sigma_T} (|\nabla_T u|^2 - |\partial_t u|^2) d\sigma dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_T} \left\{ \epsilon |E_\nu|^2 + \mu |H_\nu|^2 + 2\xi \mu (H \cdot \nu)(\partial_t u \cdot \nu) - (\epsilon |E_T|^2 + \mu |H_T|^2) \right\} d\sigma dt, \end{aligned}$$

On procède comme ci-dessus ; on montre qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_T} |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt &\leq C\mathcal{E}(0) + C \int_0^T \mathcal{E}(t) dt - 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u dx dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u|^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ \epsilon |E_\nu|^2 + \mu |H_\nu|^2 + 2\xi \mu (H \cdot \nu)(\partial_t u \cdot \nu) \right\} d\sigma dt. \end{aligned}$$

Les termes restants sont estimés à l'aide de l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_T} |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt &\leq C\mathcal{E}(0) + C(\beta) \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + \frac{C}{\theta} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u|^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ \epsilon |E_\nu|^2 + (1 + \theta) \mu |H_\nu|^2 \right\} d\sigma dt, \end{aligned} \quad (3.26)$$

pour tout  $\beta, \theta > 0$  où  $C(\beta) = C + \max(\beta, \frac{C}{\beta})$ .

Finalement, avec les estimations (3.23), (3.24), (3.25) et (3.26),  $I_4$  devient

$$\begin{aligned} I_4 \leq & C\mathcal{E}(0) + C(\beta) \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + k_6 \int_{\Sigma_T} (|\nabla_T u|^2 + A|u|^2) d\sigma dt \\ & + \left(2\theta + \frac{C}{\theta}\right) \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ \epsilon |E_\nu|^2 + (1 + \theta) \mu |H_\nu|^2 \right\} d\sigma dt, \end{aligned}$$

où  $k_6 = \max \left\{ \frac{1}{A} \left(2C + \frac{C}{\theta}\right), \left(2C + \frac{C}{\theta} + 1\right) \right\}$ .

D’après le Lemme 3.2, on conclut que

$$\begin{aligned} I_4 \leq & \frac{k_7}{\eta} \mathcal{E}(0) + (k_6 \eta + C(\beta)) \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + \left(2\theta + \frac{C}{\theta}\right) \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt \\ & + \int_{\Sigma_T} \left\{ \epsilon |E_\nu|^2 + (1 + \theta) \mu |H_\nu|^2 \right\} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En insérant les estimations (3.19), (3.20), (3.21) et (3.27) dans (3.18), on obtient dans un premier temps l’estimation globale

$$\begin{aligned} \left[ 2 - \left( \eta(k_6 + 1) + C(\beta) \right) \right] \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq & \left( k_4 + \frac{k_7 + C}{\eta} \right) \mathcal{E}(0) \\ & \left( m \cdot \nu + \frac{k_5}{\theta} \right) \int_{\Sigma_T} \left( \epsilon |E \times \nu|^2 + \mu |H \times \nu|^2 \right) d\sigma dt \\ & + \int_{\Sigma_T} \left\{ \left( \theta + 1 - m \cdot \nu \right) \epsilon |E_\nu|^2 + \left( 3\theta + 1 - m \cdot \nu \right) \mu |H_\nu|^2 \right\} d\sigma dt \\ & + \left( 2\theta + \frac{k_5 + C}{\theta} + R \right) \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt, \end{aligned}$$

où  $k_4, k_5, k_6$  et  $k_7$  sont des constantes positive (dépend de plusieurs caractéristiques géométriques de  $\Omega$  “ $\theta, \eta, \mu, \xi$ ”).

Maintenant, si on suppose que le domaine  $(\Omega, \Gamma)$  vérifie la condition

$$k_m = \min\{m \cdot \nu, m \in \Gamma\} > 1, \quad (3.28)$$

dans ce cas là, en choisissant  $0 < \theta < \frac{k_m - 1}{3}$ , on arrive à l’estimation

$$\begin{aligned} \left[ 2 - \left( \eta(k_6 + 1) + C(\beta) \right) \right] \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq & \left( k_4 + \frac{k_7 + C}{\eta} \right) \mathcal{E}(0) \\ & \left( m \cdot \nu + \frac{k_5}{\theta} \right) \int_{\Sigma_T} \left( \epsilon |E \times \nu|^2 + \mu |H \times \nu|^2 \right) d\sigma dt \\ & + \left( 2\theta + \frac{C + k_5}{\theta} + R \right) \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la première condition au bord du système (3.1), on obtient le résultat recherché (3.2), en posant  $C_1 = \frac{k_4 + (k_7 + C)/\eta}{2 - [\eta(1 + k_6) + C(\beta)]}$ ,  $C_2 = \frac{k_9}{2 - [\eta(1 + k_6) + C(\beta)]}$

et en choisissant  $0 < \eta < \frac{2 - C(\beta)}{(1 + k_6)}$  et  $C(\beta) < 2$  (c'est à dire, on choisit  $\beta$  assez grand tel que  $\beta < 2 - C$  avec  $C < 2$ ). Ceci termine la preuve du Théorème 3.2.  $\square$

**Remaque 3.1.** Remarquons que la relation (3.28) est vérifiée par exemple pour une sphère de centre 0 et de rayon  $k_m$

**Remaque 3.2.** Les résultats de ce travail restent vrais dans le cas où,  $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $A$  sont des fonctions positives satisfont certaines conditions de régularité, en s'inspirant de [8, 10, 20, 38].

## 3.2 Contrôlabilité exacte

Dans ce paragraphe on applique le principe de Russell (cf. [39]) au problème de Ventcel (1.21) ; du résultat de stabilité exponentielle (Théorème 3.1), on déduit la contrôlabilité exacte.

La contrôlabilité exacte peut être formulée de la manière suivante : pour tout  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$ , on cherche un temps  $T > 0$  et un vecteur contrôle  $(J_1, J_2) \in L^2(\Gamma, ]0, T[)^3 \times L^2(\Gamma, ]0, T[)^3$  tel que la solution  $(u, E, H)$  du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \Delta u + \xi \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q_T = \Omega \times ]0, T[, \\ \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ H \times \nu - \xi \partial_t u \times \nu = J_1, & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times ]0, T[, \\ \partial_\nu(u) - \Delta_T u + Au = J_2, & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

vérifie :

$$u(T) = \partial_t u(T) = E(T) = H(T) = 0.. \quad (3.30)$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 3.3.** Si  $\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité, alors pour tout  $T > 0$  suffisamment grand, et pour tout  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$ , il existe deux contrôles  $J_1, J_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$  avec :

$$J_1 \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (3.31)$$

tels que la solution  $(u, \partial_t u, E, H) \in C([0, T[, \mathcal{H})$  de (3.29) vérifie (3.30) au temps  $T$ .

*Démonstration.* On applique le principe de Russell (cf. [39]) en résolvant le problème retrograde. Pour  $(y_0, y_1, P_0, Q_0) \in \mathcal{H}$ , on cherche  $K_1, K_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$ , où  $K_1$  vérifie (3.31) tels que la solution  $(y, \partial_t y, P, Q) \in C([0, T[, \mathcal{H})$  de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 y - \Delta y + \xi \mathbf{curl} P = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \epsilon \partial_t P - \mathbf{curl} Q - \xi \mathbf{curl} \partial_t y = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t Q + \mathbf{curl} P = 0, & \text{dans } Q_T \\ \mathbf{div}(\epsilon P) = \mathbf{div}(\mu Q) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ Q \times \nu + \xi \partial_t y \times \nu = K_1, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \partial_\nu(y) - \Delta_T y + A y = K_2, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(T) = y_0, \partial_t y(T) = y_1, P(T) = P_0, Q(T) = Q_0, & \text{dans } \Omega,, \end{array} \right. \quad (3.32)$$

vérifie :

$$y(0) = \partial_t y(0) = P(0) = Q(0) = 0. \quad (3.33)$$

Si le problème (3.32), (3.33) admet une solution, il suffit de poser :

$$u(t) = -y(T - t), \quad E(t) = -P(T - t), \quad H(t) = Q(T - t).$$

On prend  $(v_0, v_1, F_0, I_0)$  dans  $\mathcal{H}$  et on considère  $(v, \partial_t v, F, I) \in C([0, T[, \mathcal{H})$  l'unique solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 v - \Delta v + \xi \mathbf{curl} F = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \epsilon \partial_t F - \mathbf{curl} I - \xi \mathbf{curl} \partial_t v = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t I + \mathbf{curl} F = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon F) = \mathbf{div}(\mu I) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ I \times \nu + \xi \partial_t v \times \nu - (F \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \partial_\nu(v) - \Delta_T v + A v - \partial_t v = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ v(T) = v_0, \partial_t v(T) = v_1, F(T) = F_0, I(T) = I_0, & \text{dans } \Omega,, \end{array} \right. \quad (3.34)$$

avec le changement de fonctions :

$$\tilde{u} = -v(T - t), \quad \tilde{E} = -F(T - t) \quad \text{et} \quad \tilde{H} = I(T - t).$$

En appliquant le Théorème 3.1, on obtient

$$\mathcal{E}(v(t), \partial_t v(t), F(t), I(t)) \leq M e^{-\omega(T-t)} \mathcal{E}(v_0, v_1, F_0, I_0). \quad (3.35)$$

Ensuite on considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 w - \Delta w + \xi \mathbf{curl} G = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \epsilon \partial_t G - \mathbf{curl} J - \xi \mathbf{curl} \partial_t w = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t J + \mathbf{curl} G = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon G) = \mathbf{div}(\mu J) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ J \times \nu + \xi \partial_t w \times \nu - (G \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \partial_\nu(w) - \Delta_T w + Aw - \partial_t w = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ w(0) = v(0), \partial_t w(0) = \partial_t v(0), G(0) = F(0), J(0) = I(0), & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.36)$$

qui admet une solution unique  $(w, \partial_t w, G, J) \in C([0, T], \mathcal{H})$ .

On pose maintenant  $y = w - v$ ,  $P = G - F$  et  $Q = J - I$ . De (3.36) et (3.34), on déduit que  $(y, P, Q)$  vérifie (3.32) avec :

$$K_1 = - (G \times \nu) \times \nu - (F \times \nu) \times \nu, \quad (3.37)$$

$$K_2 = - \partial_t w - \partial_t v. \quad (3.38)$$

Soit  $\Lambda$  l'opérateur de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$  défini par :

$$\Lambda((v_0, v_1, F_0, I_0)) = (w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T)).$$

Pour  $T > 0$  assez grand, on pose  $d = Me^{-\omega T} < 1$  et on montre que  $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \sqrt{d} < 1$ .

On a :

$$\begin{aligned} \|\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T))\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= 2\mathcal{E}(w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T)), \\ &\leq 2\mathcal{E}(w(0), \partial_t w(0), G(0), J(0)). \end{aligned}$$

En utilisant les conditions initiales du problème (3.36) et l'estimation (3.35) on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2\mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)), \\ &\leq 2Me^{-\omega T} \mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)) \\ &= d \|(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \sqrt{d} < 1,$$

donc l'application  $\Lambda - I$  est inversible. Dès lors, pour tout  $(y_0, y_1, P_0, Q_0) \in \mathcal{H}$ , il existe un unique  $(v_0, v_1, F_0, I_0) \in \mathcal{H}$  tel que :

$$\begin{aligned} (y_0, y_1, P_0, Q_0) &= (\Lambda - I)(v_0, v_1, F_0, I_0), \\ &= (w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T)) - (v_0, v_1, F_0, I_0), \\ &= (y(T), \partial_t y(T), P(T), Q(T)). \end{aligned} \quad (3.39)$$

On termine la preuve en montrant que  $K_1, K_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$ . Pour cela, on remarque qu’avec l’identité (2.27) (appliquée à  $(\tilde{u}, \tilde{E}, \tilde{H})$  et  $(w, G, J)$ ) on a

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(v(T), \partial_t v(T), F(T), I(T)) - \mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)) = \\ & \int_{\Sigma_T} \left\{ |F(t) \times \nu|^2 + |\partial_t v(t)|^2 \right\} d\sigma dt, \\ & \mathcal{E}(w(0), \partial_t w(0), G(0), J(0)) - \mathcal{E}(w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T)) = \\ & \int_{\Sigma_T} \left\{ |G(t) \times \nu|^2 + |\partial_t w(t)|^2 \right\} d\sigma dt. \end{aligned}$$

En sommant ces deux identités et en considérant les données initiales du problème (3.36) et les conditions finales de (3.34), on tire donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_T} \{ |F(t) \times \nu|^2 + |G(t) \times \nu|^2 + |\partial_t v(t)|^2 + |\partial_t w(t)|^2 \} d\sigma dt \\ & = \mathcal{E}(v(T), \partial_t v(T), F(T), I(T)) - \mathcal{E}(w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T)) \\ & \leq \frac{1}{2} \|(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{3.40}$$

En utilisant (3.39) et le fait que  $(I - \Lambda)^{-1}$  soit borné, on arrive à l’estimation

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_T} \{ |F(t) \times \nu|^2 + |G(t) \times \nu|^2 + |\partial_t v(t)|^2 + |\partial_t w(t)|^2 \} d\sigma dt \\ & \leq \frac{1}{2} \|(I - \Lambda)^{-1}(y_0, y_1, P_0, Q_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \leq \frac{1}{2(1 - \sqrt{d})^2} \|(y_0, y_1, P_0, Q_0)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Ce qui prouve que  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) donné par (3.37) (resp. (3.38)) est dans  $L^2(\Sigma_T)^3$ .  $\square$

### 3.3 Stabilité non linéaire

Le principe de Liu (*cf.* [35]) consiste à estimer l’énergie du système non linéaire direct en utilisant le système retrograde linéaire avec donnée finale égale à la donnée finale du système non linéaire direct avec donnée initiale nulle. Cette estimation se déduit en utilisant la stabilité exponentielle du problème rétrograde linéaire. Pour notre système, l’application de ce principe est essentiellement basée sur la validité de l’estimation de stabilité. On a le théorème suivant

**Théorème 3.4.** *On suppose que  $g_1$  et  $g_2$  satisfont les hypothèses de lemme 2.4, ainsi que :*

$$|E|^2 + |g_i(E)|^2 \leq G(g_i(E) \cdot E), \quad \forall |E| \leq 1, \quad i = 1, 2, \tag{3.42}$$

où  $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est une fonction concave strictement croissante telle que  $G(0) = 0$ . Si  $\Omega$  vérifie l'estimation de stabilité, alors il existe des constantes  $c_2, c_3 > 0$  et  $T_1 > 0$  (dependant de  $T, \mathcal{E}(0)$  et  $|\Gamma|$ ) telles que :

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G \left( \frac{\psi^{-1}(c_2 t)}{c_2 T^2 t} \right), \quad \forall t \geq T_1, \quad (3.43)$$

pour toute solution  $(u(t), E(t), H(t))$  de (1.21), où  $\psi$  est donnée par :

$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\phi(t)} dt, \quad \forall t > 0, \quad (3.44)$$

pour  $\phi$  définie par :

$$\phi(s) = T|\Gamma|G^{-1}\left(\frac{s}{c_3}\right). \quad (3.45)$$

La preuve de ce théorème est basée sur l'inégalité intégrale suivante, (cf. [24]).

**Théorème 3.5.** Soit  $\mathcal{E} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction décroissante vérifiant l'inégalité

$$\int_S^{+\infty} \phi(\mathcal{E}(t)) dt \leq T\mathcal{E}(S), \quad \forall S \geq 0, \quad (3.46)$$

pour un  $T > 0$  est une fonction  $\phi$  convexe et strictement croissante de  $[0, +\infty)$  à  $[0, +\infty)$  telle que  $\phi(0) = 0$ . Alors, il existe un temps  $t_1 > 0$  et un réel  $c_1$  dependant de  $T$  et  $\mathcal{E}(0)$  tels que

$$\mathcal{E}(t) \leq \phi^{-1} \left( \frac{\psi^{-1}(c_1 t)}{c_1 T t} \right), \quad \forall t \leq t_1, \quad (3.47)$$

où  $\psi$  est définie par (3.44)

*Démonstration.* Voir par exemple M. Eller et al [8]. □

### Démonstration du Théorème 3.4

Comme le domaine  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , il suffit d'établir (3.43) pour des données dans  $D(\mathcal{A})$ . Dans ce cas,  $(u, E, H)$  est la solution (forte) de (1.21). On considère  $(y, P, Q)$  la solution du problème (3.32) et (3.33) avec  $y(T) = u(T), \partial_t y(T) = \partial_t u(T), P(T) = E(T)$  et  $Q(T) = H(T), T > 0$ , assez grand, (l'existence est assurée par le Théorème 3.3). A partir de (1.21) et (3.32) on peut écrire :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{Q_T} \left\{ \right. & \left( \partial_t y \cdot \partial_t^2 u + \partial_t u \cdot \partial_t^2 y \right) + \epsilon (P \cdot \partial_t E + E \cdot \partial_t P) \\ & + \mu (Q \cdot \partial_t H + H \cdot \partial_t Q) - (\partial_t y \cdot \Delta u + \partial_t u \cdot \Delta y) \\ & \xi (\partial_t y \cdot \mathbf{curl} E - E \cdot \mathbf{curl} \partial_t y) + \xi (\partial_t u \cdot \mathbf{curl} P - P \cdot \mathbf{curl} \partial_t u) \\ & \left. + (H \cdot \mathbf{curl} P - P \cdot \mathbf{curl} H) + (Q \cdot \mathbf{curl} E - E \cdot \mathbf{curl} Q) \right\} dx dt. \end{aligned}$$

En intégrant cette identité par partie par rapport à  $x$  (cf. Lemme 2.2 de [8]) et en utilisant les conditions au bord de (1.21) et (3.32), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Q_T} \partial_t \{ \partial_t y \cdot \partial_t u + \epsilon P \cdot E + \mu Q \cdot H + \nabla u : \nabla y \} dx dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_T} \partial_t \{ (\nabla_T u : \nabla_T y) + A(u \cdot y) \} d\sigma dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_T} \{ \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - \partial_t u \cdot K_2 - P \cdot (g_1(E \times \nu) \times \nu) + E \cdot K_1 \} d\sigma dt. \end{aligned}$$

En intégrant cette identité par partie pour  $t \in [0, T]$  et en tenant compte des conditions initiales et finales de (1.21) et (3.32), on arrive à :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \{ |\partial_t u(x, T)|^2 + \epsilon |E(x, T)|^2 + \mu |H(x, T)|^2 + |\nabla u(x, T)|^2 \} dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} \{ |\nabla_T u(x, T)|^2 + A|u(x, T)|^2 \} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Sigma_T} \{ \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - \partial_t u \cdot K_2 - P \cdot (g_1(E \times \nu) \times \nu) + E \cdot K_1 \} d\sigma dt. \end{aligned}$$

D’après la définition de l’énergie (2.26), il vient alors :

$$\mathcal{E}(T) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_T} \{ \partial_t u \cdot K_2 - \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - (P \times \nu) \cdot g_1(E \times \nu) + E \cdot K_1 \} d\sigma dt.$$

Comme  $K_1$  est un vecteur tangent, alors on peut écrire  $E \cdot K_1 = E_T \cdot K_1$ . Puisque  $|E_T| = |E \times \nu|$ , une application de l’inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^3$  donne :

$$\mathcal{E}(T) \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_T} \{ |\partial_t u| |K_2| + |\partial_t y| |g_2(\partial_t u)| |P \times \nu| |g_1(E \times \nu)| + |E \times \nu| |K_1| \} d\sigma dt.$$

L’inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $L^2(\Sigma_T)$  donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(T) &\leq \left( \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Sigma_T} |K_2|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\Sigma_T} |\partial_t y|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Sigma_T} |g_2(\partial_t u)|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\Sigma_T} |P \times \nu|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Sigma_T} |g_1(E \times \nu)|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\Sigma_T} |E \times \nu|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Sigma_T} |K_1|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Remarquons que l’estimation (3.41) et les conditions finales sur  $(y, \partial_t y, P, Q)$  entraînent :

$$\int_{\Sigma_T} \{ |F \times \nu|^2 + |G \times \nu|^2 + |\partial_t v|^2 + |\partial_t w|^2 \} d\sigma dt \leq \frac{1}{(1 - \sqrt{d})^2} \mathcal{E}(T).$$

Cette estimation, la définition de  $y$ , ( $y = w - v$ ), de  $P$ , ( $P = G - F$ ), la définition (3.37) (resp. (3.38)) de  $K_1$  (resp. de  $K_2$ ) et l’inégalité de Cauchy-Schwarz donnent :

$$\int_{\Sigma_T} |K_i|^2 d\sigma dt \leq \frac{2}{(1 - \sqrt{d})^2} \mathcal{E}(T), \quad i = 1, 2,$$

$$\int_{\Sigma_T} |P \times \nu|^2 d\sigma dt \leq \frac{2}{(1 - \sqrt{d})^2} \mathcal{E}(T),$$

$$\int_{\Sigma_T} |\partial_t y|^2 d\sigma dt \leq \frac{2}{(1 - \sqrt{d})^2} \mathcal{E}(T).$$

Si on insère ces estimations dans (3.48), on obtient :

$$\mathcal{E}(T)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{d}} \left\{ \left( \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Sigma_T} |g_2(\partial_t u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Sigma_T} |g_1(E \times \nu)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Sigma_T} |E \times \nu|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

d’où :

$$\mathcal{E}(T) \leq c_4 \int_{\Sigma_T} \left( |\partial_t u|^2 + |g_2(\partial_t u)|^2 + |g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2 \right) d\sigma dt, \quad (3.49)$$

où  $c_4$  une constante positive, (dépendant de  $d$  et  $T$ ).

Avec les propriétés des  $g_i$ ,  $i = 1, 2$ , on estime le membre de droite de l’inégalité (3.49). On pose :

$$\Sigma_T^+ = \{(x, t) \in \Sigma_T / |E(x, t) \times \nu(x)| > 1\},$$

$$\Sigma_T^- = \{(x, t) \in \Sigma_T / |E(x, t) \times \nu(x)| \leq 1\}.$$

D’après les propriétés (2.9), (2.13) sur  $g_1$  et la définition de  $\Sigma_T^+$ , on a :

$$|g_1(E)|^2 \leq \frac{4M^2}{m} g_1(E) \cdot E,$$

ce qui donne :

$$\int_{\Sigma_T^+} \left( |g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2 \right) d\sigma dt \leq c_5 \int_{\Sigma_T^+} (E \times \nu) \cdot g_1(E \times \nu) d\sigma dt,$$

avec  $c_5 = \frac{4M^2+1}{m}$  une constante positive. L’identité (2.27) et la propriété  $g_1(\xi) \cdot \xi \geq 0$ , donnent :

$$\int_{\Sigma_T^+} \left( |g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2 \right) d\sigma dt \leq c_5 (\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)). \quad (3.50)$$

De même, d’après l’inégalité (3.42) satisfaite par  $g_1$  dans  $\Sigma_T^-$ , on a :

$$\int_{\Sigma_T^-} (|g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2) d\sigma dt \leq \int_{\Sigma_T^-} G((E \times \nu) \cdot g_1(E \times \nu)) d\sigma dt.$$

Par l’inégalité de Jensen, on tire

$$\int_{\Sigma_T^-} (|g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2) d\sigma dt \leq \int_{\Sigma_T^-} |\Sigma_T| G \left( \frac{1}{|\Sigma_T|} \int_{\Sigma_T^-} (E \times \nu) \cdot g_1(E \times \nu) d\sigma dt \right).$$

En utilisant l’identité (3.42), la propriété  $g_1(\xi) \cdot \xi \geq 0$  et la monotonie de  $G$ , nous obtenons :

$$\int_{\Sigma_T^-} (|g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2) d\sigma dt \leq |\Sigma_T| G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right). \quad (3.51)$$

En sommant les deux estimations (3.50) et (3.51), on obtient :

$$\int_{\Sigma_T} (|g_1(E \times \nu)|^2 + |E \times \nu|^2) d\sigma dt \leq c_6 \left( \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T) + |\Sigma_T| G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right) \right), \quad (3.52)$$

avec  $c_6 = \max\{1, c_5\}$  : constante positive.

De la même façon, en utilisant les propriétés de  $g_2$ , la propriété  $g_2(\xi) \cdot \xi \geq 0$  et l’identité (2.27), on peut montrer que

$$\int_{\Sigma_T} (|g_2(E \times \nu)|^2 + |\partial_t u|^2) d\sigma dt \leq c_6 \left( \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T) + |\Sigma_T| G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right) \right), \quad (3.53)$$

où  $c_6 = \max\{1, c_5\}$ , constante positive.

En insérant les estimations (3.52) et (3.53) dans (3.49), on obtient :

$$\mathcal{E}(T) \leq c_7 \left( \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T) + G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right) \right),$$

avec  $c_7$  une constante positive qui dépend de  $T$  et de  $|\Gamma|$ .

De plus, on a :

$$\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T) + \mathcal{E}(T) \leq \max\{1, c_7\} \left( \mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T) + G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right) \right). \quad (3.54)$$

D’autre part :

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} = \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{\mathcal{E}(0)} \cdot \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|}.$$

Comme  $G$  est concave et  $G(0) = 0$ , alors on a :

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \leq \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \cdot \left( G \left( \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \right) \right)^{-1} \cdot G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right). \quad (3.55)$$

On distingue deux cas :

$\therefore$  Si  $\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \leq 1$ , d’après la concavité de  $G$  et  $G(0) = 0$ , on a

$$\left( G \left( \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \right) \right)^{-1} \leq \frac{|\Sigma_T|}{\mathcal{E}(0)} \cdot (G(1))^{-1}.$$

En insérant cette estimation dans (3.55), on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \leq (G(1))^{-1} \cdot G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right). \quad (3.56)$$

$\therefore$  Si  $\frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \geq 1$ , comme  $G$  est strictement croissante, on a alors

$$G \left( \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \right) \geq G(1).$$

Si on injecte cette inégalité dans l’estimation (3.55), on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \leq \frac{\mathcal{E}(0)}{|\Sigma_T|} \cdot (G(1))^{-1} \cdot G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right). \quad (3.57)$$

De (3.56) et (3.57), on déduit l’estimation :

$$\mathcal{E}(0) \leq \mathcal{E}(T) + c_8 |\Sigma_T| \cdot G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right),$$

où  $c_8$  est une constante positive qui dépend de  $\mathcal{E}(0)$ ,  $T$  et  $|\Gamma|$ . En injectant cette estimation dans (3.54), on arrive à :

$$\mathcal{E}(0) \leq c_3 G \left( \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{|\Sigma_T|} \right),$$

pour une constante positive  $c_3$  (dépendant de  $\mathcal{E}(0)$ ,  $T$  et  $|\Gamma|$ ).

En appliquant cet argument sur  $[t, t + T]$  (au lieu de  $[0, T]$ ), nous obtenons

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G \left( \frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t + T)}{|\Sigma_T|} \right) = \phi^{-1}(\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t + T)), \quad \forall t \geq 0,$$

où  $\phi$  est défini par (3.45). Comme  $\phi$  est décroissante, cette estimation implique que, pour tout  $0 \leq S < N$  avec  $N$  assez grand,

$$\begin{aligned} \int_S^N \phi(\mathcal{E}(t))dt &\leq \int_S^N (\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T))dt \\ &\leq \int_S^{S+T} \mathcal{E}(t)dt - \int_N^{N+T} \mathcal{E}(t+T)dt \leq T\mathcal{E}(S) - T\mathcal{E}(N+T). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $N$  vers l’infini on arrive à l’estimation (3.46) (voir Lemme 5.1 de [9]) et on conclut par le Théorème 3.5, ce qui termine la démonstration.  $\square$

## Deuxième partie

# Stabilisation frontière d'un système de l'elasto- magnétisme avec conditions au bord de Ventcel

---

<b>4</b>	<b>Stabilisation exponentielle</b>	<b>61</b>
4.1	Introduction . . . . .	61
4.2	Formulation en terme de problème . . . . .	62
4.3	Identité fondamentale . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Quelques résultats théoriques</b>	<b>85</b>
5.1	Application à la contrôlabilité exacte . . . . .	85
5.2	Stabilisation non linéaire . . . . .	88

---

# Chapitre 4

## Stabilisation exponentielle

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de la stabilité exponentielle d'un système de l'élasto-magnétisme avec conditions aux limites de type Ventcel stationnaires.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^3$  (pour donner un sens au tenseur de courbure). On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \nabla \sigma(u) + \xi \text{Rot } E = 0, & \text{dans } Q = \Omega \times ]0, \infty[, \\ \epsilon \partial_t E - \text{Rot } H - \xi \text{Rot } \partial_t u = 0, & \text{dans } Q, \\ \mu \partial_t H + \text{Rot } E = 0, & \text{dans } Q, \\ \text{div}(\epsilon E) = \text{div}(\mu H) = 0, & \text{dans } Q, \\ H \times \nu + \xi \partial_t u \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times ]0, \infty[, \\ \sigma_S(u) - \overline{\text{div}_T \sigma_T^0(u)} + a u_T + g_{2T}(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ \sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + a u_\nu + g_{2\nu}(\partial_t u) = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Ce système modélise le couplage entre le système de Maxwell [8], [9], [19], [23], [28], [38], [40] et le système de l'élasticité [5], [17]. Pour  $\xi = 0$  le système (4.1) donne deux systèmes indépendants qui sont le système de Maxwell et le système de l'élasticité avec conditions au bord de Ventcel.

Dans [10,13,14] A. Heminna a démontré la stabilisation forte pour le système isotope de l'élasticité avec des conditions de Ventcel **stationnaires**. L'auteur a prouvé également, sous des hypothèses géométrique convenables, que ce système avec des conditions aux limites de type Ventcel **évolutives** est exponentiellement stable ; il

a établi un taux de décroissance arbitrairement grand.

La stabilisation frontière d'un système couplé "l'élasto-magnétisme" avec conditions au bord de Dirichlet-Neumann à été analysée dans [36]. L'auteur a établi une estimation de stabilité qui est équivalente à la stabilité exponentielle du système linéaire associé; la stabilisation du système non linéaire s'en déduit grâce au principe de Russell et de Liu en utilisant la technique introduite dans [8].

L'objectif de ce travail est d'obtenir des résultats similaires pour le système (4.1) en remplaçant la condition de Neumann pour le système de l'élasticité (*cf.* [36]) par les conditions de Ventcel (*cf.* [10]). En effet, nous prouvons que la décroissance exponentielle du système linéaire associé au système (4.1) provient de l'estimation de stabilité. Ce travail est donc une généralisation des résultats publiés dans [8, 10, 21, 36].

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la première section, nous abordons quelques applications de la théorie des semi groupes non linéaires pour établir l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du système (4.1). On montre dans la section qui suit la stabilisation exponentielle du problème (4.1) avec des feedbacks linéaires. L'argument principal consiste à établir une estimation de stabilité qui repose sur la technique de multiplicateurs.

## 4.2 Formulation en terme de problème

On va formuler le problème (4.1) dans un espace de Hilbert. Pour cela, on définit les espaces suivants :

$$J(\Omega, \epsilon) = \left\{ E \in L^2(\Omega)^3 / \mathbf{div}(\epsilon E) = 0 \text{ dans } \Omega \right\}, \quad (4.2)$$

$$\mathbb{V} = \left\{ u \in H^1(\Omega)^3; u_{T|\Gamma} \in H^1(\Gamma, T(\Gamma))^3 \right\}. \quad (4.3)$$

L'espace de l'énergie est défini par :

$$\mathcal{H} = \mathbb{V} \times L^2(\Omega)^3 \times J(\Omega, \epsilon) \times J(\Omega, \mu), \quad (4.4)$$

muni de produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} ((u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} &= (u_1, u_2)_{\mathbb{V}} + (v_1, v_2)_{L^2(\Omega)} + (E_1, E_2)_{\epsilon} + (H_1, H_2)_{\mu}, \\ &\quad \forall (u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2) \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (E_1, E_2)_{\epsilon} &= \int_{\Omega} \epsilon(x) E_1(x) \cdot E_2(x) dx, \quad \forall E_1, E_2 \in J(\Omega, \epsilon), \\ (u_1, u_2)_{\mathbb{V}} &= \int_{\Omega} \sigma(u_1)(x) : \varepsilon(u_2)(x) dx + \int_{\Gamma} \sigma_T^0(u_1) : \varepsilon_T^0(u_2) d\sigma + a \int_{\Gamma} u_1 \cdot u_2 d\sigma, \end{aligned}$$

tel que :

$$\sigma(u_1) : \varepsilon(u_2) = \sigma_{ij}(u_1)\varepsilon_{ij}(u_2),$$

et

$$(v_1, v_2)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} v_1 \cdot v_2 \, dx.$$

Pour donner un sens convenable au système (4.1), on définit l'opérateur non linéaire  $\mathcal{A}$  par :

$$\mathcal{A}(u, v, E, H) = \left( -v, -\nabla\sigma(u) + \xi \mathbf{curl} E, -\epsilon(\mathbf{curl} H + \xi \mathbf{curl} v), \mu^{-1} \mathbf{curl} E \right), \quad (4.5)$$

de domaine :

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, v, E, H) \in \mathcal{H} \mid \nabla\sigma(u), \mathbf{curl} E \text{ et } \mathbf{curl} H \in L^2(\Omega)^3; v \in \mathbb{V};$$

$$E \times \nu, H \times \nu \in L^2(\Gamma)^3 \text{ satisfont :}$$

$$H \times \nu + \xi v \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (4.6)$$

$$\sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + au_T + g_{2T}(v) = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (4.7)$$

$$\sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + au_\nu + g_{2\nu}(v) = 0 \text{ sur } \Gamma \} \quad (4.8)$$

Maintenant, on va formuler le système (4.1) sous la forme d'une équation abstraite du premier ordre :

$$\begin{cases} \partial_t U + \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.9)$$

avec  $U = (u, v, E, H)$  et  $U_0 = (u_0, v_0, E_0, H_0)$ .

**Remaque 4.1.** Soit  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  ; d'après [2] on a  $\sigma(u) \cdot \nu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$  et par (1.16) on peut définir  $\sigma_S(u)$  (resp.  $\sigma_\nu(u)$ ) comme un élément de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))^3$  (resp. de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ ). Comme  $u, v \in \mathbb{V}$  et  $g_2$  satisfait la propriété (4.14) alors :  $au_T + g_{2T}(v) \in L^2(\Gamma)^3$  et  $au_\nu + g_{2\nu}(v) \in L^2(\Gamma)^3$ , ceci implique que  $\overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))^3$  et  $\sigma_T^0(u) : \partial_m \nu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ , par conséquence les conditions (4.7), (4.8) sont respectivement dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))^3$ ,  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ .

D'autre part, pour  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  on a  $E \times \nu \in L^2(\Gamma)^3$ ,  $H \times \nu \in L^2(\Gamma)^3$  et par la propriété (4.14), on conclut que  $g_1(E \times \nu) \times \nu \in L^2(\Gamma)^3$ . Ceci implique que la condition au bord (4.6) est une égalité dans  $L^2(\Gamma)^3$ .

Dans la suite, nous allons prouver l'existence et l'unicité des solutions du problème (4.9), en utilisant la théorie des semi groupes non linéaires [42]. Nous commençons d'abord par énoncer quelques résultats de densité suivants :

**Lemme 4.1** ([8] Lemme 2.2, p. 4). Soit  $(E, H) \in D(\mathcal{A})$  on a :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{curl} E \cdot H - \mathbf{curl} H \cdot E) \, dx = \int_{\Gamma} H \times \nu \cdot E \, d\sigma. \quad (4.10)$$

On montre comme dans [38], le lemme suivant :

**Lemme 4.2.** Soit  $J_\tau^1(\Omega, \epsilon)$  l'espace défini par :

$$J_\tau^1(\Omega, \epsilon) = \{E \in J(\Omega, \epsilon) \mid \mathbf{curl} E \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } E \times \nu = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

$J_\tau^1(\Omega, \epsilon)$  est dense dans  $J(\Omega, \epsilon)$ .

**Lemme 4.3.** Soit  $\tilde{\mathbb{V}}$  l'espace défini par :

$$\tilde{\mathbb{V}} = \{u \in \mathbb{V} \mid \nabla \sigma(u) \in L^2(\Omega)^3; \sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + au_T = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + au_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{\tilde{\mathbb{V}}} = \left( \|u\|_{\mathbb{V}}^2 + \|\nabla \sigma(u)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace  $\tilde{\mathbb{V}}$  est dense dans  $\mathbb{V}$ .

La preuve de ce lemme est similaire à celle du Proposition 3.2 de [14].

**Lemme 4.4.** Si  $g_1(0) = g_2(0) = 0$ , alors  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

*Démonstration.* On pose :  $D_0 = \tilde{\mathbb{V}} \times \mathcal{D}(\Omega)^3 \times P_\epsilon \mathcal{D}(\Omega)^3 \times P_\mu \mathcal{D}(\Omega)^3$ . Puisque  $D_0$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , il nous suffit de montrer que  $D_0 \subset D(\mathcal{A})$ .

D'après le Lemme 4.2, on a :  $P_\epsilon \mathcal{D}(\Omega)^3 \subset J_\tau^1(\Omega, \epsilon)$  et  $P_\mu \mathcal{D}(\Omega)^3 \subset J_\tau^2(\Omega, \mu)$  où  $P_\epsilon$  est la projection orthogonale sur  $J(\Omega, \epsilon)$  dans  $L^2(\Omega)$  muni de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\epsilon$ , alors  $E \in J_\tau^1(\Omega, \epsilon)$  et  $H \in J_\tau^2(\Omega, \mu)$ , ce qui implique que  $E \in J(\Omega, \epsilon)$  et  $H \in J(\Omega, \mu)$  donc  $E$  et  $H$  sont des éléments dans  $D(\mathcal{A})$ . D'autre part, pour tout  $u \in \tilde{\mathbb{V}}$ ,  $v \in \mathcal{D}(\Omega)^3$  et le fait que  $g_1(0) = g_2(0) = 0$  on a  $\sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + au_T + g_{2T}(v) = 0$  sur  $\Gamma$ ,  $\sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : (\partial_m \nu) + au_\nu + g_{2\nu}(v) = 0$  sur  $\Gamma$  et  $H \times \nu + \xi v \times \nu + g_1(E \times \nu) = 0$  sur  $\Gamma$ , il s'ensuit que  $u, v \in D(\mathcal{A})$  d'où  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  et par conséquent  $D_0 \subset D(\mathcal{A})$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

L'opérateur  $\mathcal{A}$  à les propriétés suivantes :

**Lemme 4.5.** Supposons que les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  vérifient les conditions suivantes

$$(g_i(E) - g_i(F)) \cdot (E - F) \geq 0, \quad \forall E, F \in \mathbb{R}^3, \quad (4.11)$$

$$g_i(0) = 0, \quad (4.12)$$

$$g_i(E) \cdot E \geq m|E|^2, \quad \forall E \in \mathbb{R}^3, |E| \geq 1, \quad (4.13)$$

$$|g_i(E)| \leq M(1 + |E|), \quad \forall E \in \mathbb{R}^3, \quad (4.14)$$

où  $m, M$  constantes positives. Alors  $\mathcal{A}$  est un opérateur maximal monotone.

*Démonstration.* L'opérateur  $\mathcal{A}$  est monotone. En effet, on a :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(u_1, v_1, E_1, H_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2, E_2, H_2), (u_1, v_1, E_1, H_1) - (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} = \\ & (-v_1 + v_2, u_1 - u_2)_{\mathbb{V}} - \int_{\Omega} \nabla \sigma (u_1 - u_2) \cdot (v_1 - v_2) dx + \xi \int_{\Omega} \mathbf{curl} (E_1 - E_2) \cdot (v_1 - v_2) dx \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{curl} (H_1 - H_2) \cdot (E_1 - E_2) dx - \xi \int_{\Omega} \mathbf{curl} (v_1 - v_2) \cdot (E_1 - E_2) dx \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{curl} (E_1 - E_2) \cdot (H_1 - H_2) dx, \quad \forall (u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2) \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité (4.10), la définition de produit scalaire de  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{V}}$  et la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(u_1, v_1, E_1, H_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2, E_2, H_2), (u_1, v_1, E_1, H_1) - (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} \\ & = - \int_{\Gamma} \sigma_T^0(u_1 - u_2) : \varepsilon_T^0(v_1 - v_2) d\sigma - a \int_{\Gamma} (u_1 - u_2) \cdot (v_1 - v_2) d\sigma \\ & - \langle \sigma(u_1 - u_2) \cdot \nu, (v_1 - v_2) \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \int_{\Gamma} (H_1 - H_2) \times \nu \cdot (E_1 - E_2) d\sigma; \\ & + \xi \int_{\Gamma} (v_1 - v_2) \times \nu \cdot (E_1 - E_2) d\sigma, \quad \forall (u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2) \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Les relations (1.9) et (1.6), donnent :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(u_1, v_1, E_1, H_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2, E_2, H_2), (u_1, v_1, E_1, H_1) - (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} = \\ & \left\langle -\sigma_S(u_1 - u_2) + \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u_1 - u_2)} - a(u_{1T} - u_{2T}), (v_{1T} - v_{2T}) \right\rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ & - \left\langle \sigma_{\nu}(u_1 - u_2) + \sigma_T^0(u_1 - u_2) : \partial_m \nu + a(u_{1\nu} - u_{2\nu}), (v_{1\nu} - v_{2\nu}) \right\rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ & + \xi \int_{\Gamma} (v_1 - v_2) \times \nu \cdot (E_1 - E_2) d\sigma + \int_{\Gamma} (H_1 - H_2) \times \nu \cdot (E_1 - E_2) d\sigma, \\ & \quad \forall (u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2) \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

En utilisant les conditions au bord (4.6), (4.7), (4.8), et en tenant compte de la propriété (4.11), on arrive à :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(u_1, v_1, E_1, H_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2, E_2, H_2), (u_1, v_1, E_1, H_1) - (u_2, v_2, E_2, H_2))_{\mathcal{H}} = \\ & \int_{\Gamma} \left\{ (g_1(E_1 \times \nu) - g_1(E_2 \times \nu)) \cdot (E_1 \times \nu - E_2 \times \nu) + \right. \\ & \left. (g_2(v_1) - g_2(v_2)) \cdot (v_1 - v_2) \right\} d\sigma \geq 0, \quad \forall (u_1, v_1, E_1, H_1), (u_2, v_2, E_2, H_2) \in D(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{A}$  est monotone.

- Il reste à montrer que  $\mathcal{A}$  est maximal.

Pour montrer que  $\mathcal{A}$  est maximal il suffit de montrer que  $\mathcal{I} + \mathcal{A}$  est surjectif de  $D(\mathcal{A})$  sur  $\mathcal{H}$ , c'est à dire que le système :

$$\begin{cases} u - v = f, \\ v - \nabla\sigma(u) + \xi \mathbf{curl} E = g, \\ E - \epsilon^{-1}(\mathbf{curl} H + \xi \mathbf{curl} v) = F, \\ H + \mu^{-1} \mathbf{curl} E = G, \end{cases} \quad (4.15)$$

a une solution  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  pour tout  $(f, g, F, G) \in \mathcal{H}$ .  
La première et la quatrième équation de (4.15) donnent :

$$u = v + f, \quad (4.16)$$

$$H = G - \mu^{-1} \mathbf{curl} E. \quad (4.17)$$

En substituant ces expressions dans la deuxième et la troisième équations de (4.15), on obtient formellement :

$$v - \nabla\sigma(v) + \xi \mathbf{curl} E = \nabla\sigma(f) + g, \text{ dans } \Omega \quad (4.18)$$

$$\epsilon E + \mathbf{curl} (\mu^{-1} \mathbf{curl} E) - \xi \mathbf{curl} v = \epsilon F + \mathbf{curl} G \text{ dans } \Omega. \quad (4.19)$$

Le système en  $(v, E)$  sera bien défini en ajoutant des conditions au bord sur  $v$  et  $E$ .  
En remplaçant (4.16), (4.17) dans (4.6), (4.7) et (4.8), on obtient formellement :

$$\sigma_S(v) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(v)} + av_T + g_{2T}(v) = -\sigma_S(f) + \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(f)} - af_T, \text{ sur } \Gamma \quad (4.20)$$

$$\sigma_\nu(v) + \sigma_T^0(v) : \partial_m \nu + av_\nu + g_{2\nu}(v) = -\sigma_\nu(f) - \sigma_T^0(f) : \partial_m \nu - af_\nu \quad (4.21)$$

$$- (\mu^{-1} \mathbf{curl} E) \times \nu + \xi v \times \nu + g_1(E \times \nu) \times \nu = -G \times \nu \text{ sur } \Gamma. \quad (4.22)$$

En multipliant l'équation (4.18) par  $v_1 \in \mathbb{V}$  et (4.19) par  $E_1 \in W_\epsilon$  avec

$$W_\epsilon = \left\{ E \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{curl} E, \mathbf{div}(\epsilon E) \in L^2(\Omega)^3 \text{ et } E \times \nu \in L^2(\Gamma)^3 \right\}, \quad (4.23)$$

muni de la norme :

$$\|E\|_{W_\epsilon}^2 = \int_\Omega (|E|^2 + |\mathbf{curl} E|^2 + |\mathbf{div}(\epsilon E)|^2) dx + \int_\Gamma |E \times \nu|^2 d\sigma, \quad (4.24)$$

et en intégrant par parties, on obtient formellement :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \{v \cdot v_1 + \sigma(v) : \varepsilon(v_1)\} dx + \int_\Omega \{\epsilon E \cdot E_1 + \mu^{-1} \mathbf{curl} E \cdot \mathbf{curl} E_1\} dx \\ & + \xi \int_\Omega \{\mathbf{curl} v_1 \cdot E - \mathbf{curl} v \cdot E_1\} dx - \langle \sigma(v) \cdot \nu, v_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \xi \int_\Gamma E \times \nu \cdot v_1 d\sigma \\ & - \langle (\mu^{-1} \mathbf{curl} E) \times \nu, E_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = - \int_\Omega \sigma(f) : \varepsilon(v_1) dx + \int_\Omega g \cdot v_1 dx + \int_\Omega \epsilon F \cdot E_1 dx \\ & + \int_\Omega G \cdot \mathbf{curl} E_1 dx - \langle G \times \nu, E_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \langle \sigma(f) \cdot \nu, v_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (1.16), en utilisant les conditions aux limites (4.20), (4.22) et les relations (1.6), (1.9), on trouve, pour tout  $(v_1, E_1) \in \mathbb{V} \times W_\epsilon$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \{v \cdot v_1 + \sigma(v) : \varepsilon(v_1)\} dx + \int_{\Omega} \{\epsilon E \cdot E_1 + \mu^{-1} \mathbf{curl} E \cdot \mathbf{curl} E_1\} dx \\
& + \xi \int_{\Omega} \{\mathbf{curl} v_1 \cdot E - \mathbf{curl} v \cdot E_1\} dx \\
& + \int_{\Gamma} \{av \cdot v_1 + \sigma_T^0(v) : \varepsilon_T^0(v_1) + g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu\} d\sigma \\
& - \xi \int_{\Gamma} \{E \times \nu \cdot v_1 + v \times \nu \cdot E_1\} d\sigma = \int_{\Omega} \{g \cdot v_1 - \sigma(f) : \varepsilon(v_1) + \epsilon F \cdot E_1 + G \cdot \mathbf{curl} E_1\} dx \\
& - \int_{\Gamma} \sigma_T^0(f) : \varepsilon_T^0(v_1) d\sigma - a \int_{\Gamma} f \cdot v_1 d\sigma; \quad \forall (v_1, E_1) \in \mathbb{V} \times W_\epsilon.
\end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème (4.18) – (4.19) avec les conditions au bord (4.20) – (4.22) est :

Trouver  $(v, E) \in \mathbb{V} \times W_\epsilon$  tel que :

$$a((v, E), (v_1, E_1)) = L(v_1, E_1), \quad \forall (v_1, E_1) \in \mathcal{V}, \quad (4.25)$$

avec  $\mathcal{V} = \mathbb{V} \times W_\epsilon$ , où la forme  $a$  est définie sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  par :

$$\begin{aligned}
a((v, E), (v_1, E_1)) &= \int_{\Omega} \{v \cdot v_1 + \sigma(v) : \varepsilon(v_1)\} dx \\
& + \int_{\Omega} \{\epsilon E \cdot E_1 + \mu^{-1} \mathbf{curl} E \cdot \mathbf{curl} E_1 + s \mathbf{div}(\epsilon E) \mathbf{div}(\epsilon E_1)\} dx \\
& + \xi \int_{\Omega} \{\mathbf{curl} v_1 \cdot E - \mathbf{curl} v \cdot E_1\} dx \\
& + \int_{\Gamma} \{av \cdot v_1 + \sigma_T^0(v) : \varepsilon_T^0(v_1) + g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu\} d\sigma \\
& - \xi \int_{\Gamma} \{E \times \nu \cdot v_1 + v \times \nu \cdot E_1\} d\sigma,
\end{aligned}$$

où  $s$  est un paramètre qui sera choisi plus loin. Enfin la forme  $L$  est définie sur  $\mathcal{V}$  par :

$$\begin{aligned}
L(v_1, E_1) &= \int_{\Omega} \{g \cdot v_1 - \sigma(f) : \varepsilon(v_1) + \epsilon F \cdot E_1 + G \cdot \mathbf{curl} E_1\} dx \\
& - \int_{\Gamma} \sigma_T^0(f) : \varepsilon_T^0(v_1) d\sigma - a \int_{\Gamma} f \cdot v_1 d\sigma.
\end{aligned}$$

Maintenant on va montrer que le problème (4.25) admet une solution unique, ceci équivalant à la surjectivité de l'application  $\Lambda : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ ,  $(v, E) \rightarrow \Lambda(v, E)$ , (puisque  $L \in \mathcal{V}'$ ), tel que  $\langle \Lambda(v, E), (v_1, E_1) \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = a((v, E), (v_1, E_1))$ . il nous suffit donc de montrer que  $\Lambda$  est monotone, hémicontinue, borné et coercif (voir [42]).

D'après l'hypothèse (4.11) sur  $g_1$  et  $g_2$ , nous pouvons facilement vérifier que  $\Lambda$  est

monotonie. De plus, la continuité de  $g_1$  et  $g_2$  nous conduit à l'hémicontinuité de  $\Lambda$ , et sa bornitude découle de la propriété (4.14) sur  $g_1$  et  $g_2$ . Il ne reste plus qu'à démontrer la coercivité de  $\Lambda$  pour pouvoir appliquer le corollaire 2.2 de [42]. C'est à dire nous montrons que :

$$\frac{\Lambda(v, E)((v, E))}{\|(v, E)\|_{\mathcal{V}}} = \frac{a(v, E)((v, E))}{\|(v, E)\|_{\mathcal{V}}} \rightarrow +\infty \text{ quand } \|(v, E)\|_{\mathcal{V}} \rightarrow +\infty, \quad (4.26)$$

On fixe  $E \in L^2(\Omega)^3$ , et on pose :

$$\Gamma_E^+ = \{x \in \Gamma; |(E \times \nu)(x)| > 1\}, \quad \Gamma_E^- = \{x \in \Gamma; |(E \times \nu)(x)| \leq 1\}.$$

En utilisant les propriétés (4.11), (4.13), on en déduit :

$$\begin{aligned} a((v, E)(v, E)) &\geq \int_{\Omega} \{\sigma(v) : \varepsilon(v) + \epsilon|E|^2 + \mu^{-1}|\mathbf{curl} E|^2 + s|\mathbf{div}(\epsilon E)|^2\} dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} \{a|v|^2 + \sigma_T^0(v) : \varepsilon_T^0(v)\} d\sigma + m \int_{\Gamma_E^+} |E \times \nu|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la définition de  $\Gamma_E^-$ , on a :

$$\begin{aligned} \|(v, E)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq \int_{\Omega} \sigma(v) : \varepsilon(v) dx + \int_{\Gamma} \{a|v|^2 + \sigma_T^0(v) : \varepsilon_T^0(v)\} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Omega} \{|E|^2 + |\mathbf{curl} E|^2 + |\mathbf{div}(\epsilon E)|^2\} dx + \int_{\Gamma_E^+} |E \times \nu|^2 d\sigma + |\Gamma|. \end{aligned}$$

Ces deux inégalités montrent qu'il existe une constante positive  $\alpha = \min(1, \gamma)$  où  $\gamma = \min(\epsilon_1, \mu^{-1}, s, m)$  tel que

$$a((v, E)(v, E)) \geq \alpha(\|(v, E)\|_{\mathcal{V}}^2 - |\Gamma|),$$

en utilisant le fait que  $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon(x) \leq \epsilon_0$  et  $0 < \mu_0^{-1} \leq \mu^{-1}(x) \leq \mu_1^{-1}$ . Ceci implique (4.26), donc  $\Lambda$  est coercif.

Montrons maintenant que la solution  $(v, E) \in \mathcal{V}$  de (4.25) et  $u, H$  donnés respectivement par (4.16), (4.17) vérifient  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$  et satisfont (4.15). Tout d'abord nous allons prouver que  $\mathbf{div}(\epsilon E) = 0$ . On prend  $v_1 = 0$  et  $E_1 = \nabla \phi$  avec  $\phi \in D(\Delta_\epsilon)$  où  $\Delta_\epsilon$  est l'opérateur défini par :

$$\Delta_\epsilon \phi = \mathbf{div}(\epsilon \nabla \phi), \quad \forall \phi \in D(\Delta_\epsilon),$$

de domaine :

$$D(\Delta_\epsilon) = \left\{ \phi \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta_\epsilon \phi = \mathbf{div}(\epsilon \nabla \phi) \in L^2(\Omega) \right\}$$

(4.25) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \epsilon E \cdot \nabla \phi + \mu^{-1} \mathbf{curl} E \cdot \mathbf{curl} \nabla \phi + s \mathbf{div}(\epsilon E) \mathbf{div}(\epsilon \nabla \phi) \} dx \\ & - \xi \int_{\Omega} \mathbf{curl} v \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Gamma} g_1(E \times \nu) \cdot \nabla \phi \times \nu d\sigma \\ & - \xi \int_{\Gamma} v \times \nu \cdot \nabla \phi d\sigma = \int_{\Omega} \epsilon F \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} G \cdot \mathbf{curl} \nabla \phi dx, \quad \forall \phi \in D(\Delta_{\epsilon}). \end{aligned}$$

En appliquant l'identité (4.10) la formule de Green et en tenant compte du propriété  $\mathbf{curl}(\nabla \phi) = 0$ , nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \{ -\mathbf{div}(\epsilon E) \phi + s \mathbf{div}(\epsilon E) \Delta_{\epsilon} \phi \} dx = - \int_{\Omega} \mathbf{div}(\epsilon F) \phi dx, \quad \forall \phi \in D(\Delta_{\epsilon}).$$

Comme  $F \in J(\Omega, \epsilon)$ , on déduit que  $\mathbf{div}(\epsilon F) = 0$ , et par conséquent :

$$\int_{\Omega} \mathbf{div}(\epsilon E) \{ -\phi + s \Delta_{\epsilon} \phi \} dx = 0, \quad \forall \phi \in D(\Delta_{\epsilon}),$$

Puisque l'opérateur  $\Delta_{\epsilon}$  est négatif, auto-adjoint avec un spectre discret, alors en choisissant  $s > 0$  de telle sorte que  $s^{-1}$  ne soit pas une valeur propre de  $\Delta_{\epsilon}$ , on en déduit que

$$\mathbf{div}(\epsilon E) = 0 \text{ sur } \Omega. \quad (4.27)$$

En utilisant  $\mathbf{div}(\epsilon E) = 0$  et (4.16), (4.17) alors (4.25) devient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v \cdot v_1 dx + \int_{\Omega} \{ \epsilon E \cdot E_1 - H \cdot \mathbf{curl} E_1 \} dx + \xi \int_{\Omega} \{ \mathbf{curl} v_1 \cdot E - \mathbf{curl} v \cdot E_1 \} dx \\ & + \int_{\Gamma} \{ g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu \} d\sigma - \xi \int_{\Gamma} \{ E \times \nu \cdot v_1 + v \times \nu \cdot E_1 \} d\sigma \\ & + \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v_1) dx + \int_{\Gamma} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(v_1) d\sigma + a \int_{\Gamma} u \cdot v_1 d\sigma \\ & = \int_{\Omega} \{ g \cdot v_1 + \epsilon F \cdot E_1 \} dx, \quad \forall (v_1, E_1) \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

D'une part, on prend  $v_1 \in \mathcal{D}(\Omega)^3$  et  $E_1 = 0$ , on obtient :

$$v - \nabla \sigma(u) + \xi \mathbf{curl} E = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^3,$$

Ceci implique la deuxième identité de (4.15) et on a  $\nabla \sigma(u) \in L^2(\Omega)^3$  car  $v$ ,  $\mathbf{curl} E$  et  $g$  sont des éléments de  $L^2(\Omega)^3$ .

D'autre part, on prend  $v_1 = 0$ , et  $E_1 = P_{\epsilon} \chi$  avec  $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)^3$  et on applique le Lemme 2.3 de [38], on trouve la troisième identité de (4.15) :

$$\epsilon E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} v = \epsilon F \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De plus, comme  $\epsilon E$ ,  $\mathbf{curl} E$  et  $\epsilon F \in L^2(\Omega)^3$  alors  $\mathbf{curl} H \in L^2(\Omega)^3$ .

Les relations (4.16), (4.17), (4.27), la formule de Green et l'identité (4.10), montrent que (4.25) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \langle \sigma(u) \cdot \nu, v_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \int_{\Gamma} (H \times \nu) \cdot E_1 \, d\sigma + \xi \int_{\Gamma} (E \times \nu) \cdot v_1 \, d\sigma \\ & + \int_{\Gamma} \{ au \cdot v_1 + \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(v_1) + g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot E_1 \times \nu \} \, d\sigma \\ & - \xi \int_{\Gamma} \{ E \times \nu \cdot v_1 + v \times \nu \cdot E_1 \} \, d\sigma = 0, \quad \forall (v_1, E_1) \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Ensuite, on prend  $v \in \mathbb{V}$  et  $E_1 = P_\epsilon \chi$  avec  $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})^3$  (voir remarque 2.4 de [8]), on obtient :

$$\begin{aligned} & \langle \sigma(u) \cdot \nu, v_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \int_{\Gamma} (H \times \nu) \cdot \chi \, d\sigma - \xi \int_{\Gamma} (v \times \nu) \cdot \chi \, d\sigma \\ & + \int_{\Gamma} \{ au \cdot v_1 + \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(v_1) + g_2(v) \cdot v_1 + g_1(E \times \nu) \cdot \chi \times \nu \} \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

En particulier, si  $v_1 = 0$  et  $\chi$  arbitraire dans  $C^\infty(\overline{\Omega})^3$ , on obtient la condition au bord (4.6). Puis, si  $\chi = 0$  et  $v_1$  arbitraire dans  $\mathbb{V}$ , on trouve :

$$\langle \sigma(u) \cdot \nu, v_1 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \int_{\Gamma} \{ au \cdot v_1 + \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(v_1) + g_2(v) \cdot v_1 \} \, d\sigma = 0, \quad \forall v_1 \in \mathbb{V}.$$

En utilisant les relations (1.16), (1.9) et (1.6), on déduit que

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + au_T + g_{2T}(v), v_{1T} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ & + \langle \sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + au_\nu + g_{2\nu}(v), v_{1\nu} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Ceci conduit aux conditions au bord (4.7) et (4.8) en prenant  $v_{1\nu} = 0$  et  $v_{1T}$  arbitraire dans  $\mathbb{V}$  (resp.  $v_{1T} = 0$  et  $v_{1\nu}$  arbitraire dans  $\mathbb{V}$ ).

Enfin, d'après l'identité (4.17) et le fait que  $\mathbf{div}(\mu G) = 0$  (car  $G \in J(\Omega, \mu)$ ) on a  $\mathbf{div}(\mu H) = 0$ , on conclut que  $(u, v, E, H) \in D(\mathcal{A})$ , d'où l'opérateur  $\mathcal{A}$  est maximal. Ceci achève la démonstration.  $\square$

Par la théorie des semi groupes non linéaires (cf. [42]), on a le théorème suivant :

**Théorème 4.1** (Existence et unicité). *supposons que les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  vérifient (4.14) ainsi que (4.11) et (4.13).*

1. *Si  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$  alors le problème (4.1) admet une solution (faible) unique vérifiant :*

$$\begin{aligned} u & \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{V}), \\ E & \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \epsilon)), \\ H & \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)). \end{aligned}$$

2. Si  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$ , alors le problème (4.1) admet une solution (forte) unique vérifiant :

$$u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{V}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\nabla\sigma, \Omega)),$$

$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \epsilon)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\epsilon),$$

$$H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\mu),$$

et satisfait (4.11), (4.12) et (4.13), où  $\mathbb{V}$  est défini par (4.3) et  $H^1(\nabla\sigma, \Omega)$  est défini par  $H^1(\nabla\sigma, \Omega)^3 = \{u \in H^1(\Omega)^3 / \nabla\sigma(u) \in L^2(\Omega)^3\}$ . Et son énergie, définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_t u(x, t)|^2 + \sigma(u)(x, t) : \varepsilon(u)(x, t)) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\sigma_T^0(u)(x, t) : \varepsilon_T^0(u)(x, t) + a|u(x, t)|^2) d\sigma \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon(x)|E(x, t)|^2 + \mu(x)|H(x, t)|^2) \end{aligned} \quad (4.28)$$

est décroissante et pour tout  $0 \leq S < T < \infty$ , on a :

$$\mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T) = \int_S^T \int_{\Gamma} \{g_1(E(t) \times \nu) \cdot E(t) \times \nu + g_2(\partial_t u(t)) \cdot \partial_t u(t)\} d\sigma dt. \quad (4.29)$$

**Remaque 4.2.** D'après la remarque 4.1, on a  $\overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))^3$ ; de  $\sigma_T^0(u) = \sigma_T^0(u_T) + \sigma_T^0(u_\nu \nu) = \sigma_T^0(u_T) + 2\mu(u_\nu \partial_m \nu) + \lambda^* u_\nu \text{tr}(\partial_m \nu) I_2$ , il vient alors  $\overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u_T)} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))^3$  et  $\overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u_\nu \nu)} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$  donc  $u_T \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma, T(\Gamma))^3$  et  $u_\nu \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^3$  implique que  $u_T \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)^3$  et donc  $u \in H^2(\Omega)^3$  alors la solution  $(u, \partial_t u, E, H)$  du problème (4.1) possède la propriété de régularité plus forte suivante :

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)^3),$$

$$E \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \epsilon)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\epsilon),$$

$$H \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, J(\Omega, \mu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\mu).$$

### 4.3 Identité fondamentale

Dans cette section nous allons donner une équivalence entre l'estimation de stabilité et la stabilité exponentielle du système (4.1) par des feedbacks frontières linéaires ( $g_1(x) = g_{2T}(x) = g_{2\nu}(x) = x$ ). Plus précisément, on suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^3$  strictement étoilé par rapport à l'origine, de frontière  $\Gamma$  de

classe  $C^3$  (pour donner un sens au tenseur de courbure sur  $\Gamma$ ). On considère le système linéaire associé au système (4.1) avec des conditions de Ventcel stationnaires. La méthode de multiplicateurs permet de montrer que l'on peut trouver un feedbacks  $(E \times \nu, \partial_t u)$  qui assure la décroissance exponentielle de l'énergie; le taux de décroissance ne dépend que des caractéristiques géométriques de  $\Omega$ . Les conditions de Ventcel sur le bord ont donné lieu à l'utilisation de multiplicateurs frontières non standard (cf. [13]); cela a conduit à des calculs lourds et crucial pour l'obtention d'une identité fondamentale.

Rappelons tout d'abord la définition de l'estimation de stabilité :

**Définition 6.** *On dit que  $\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité s'il existe  $T > 0$  et deux constantes positives  $C_1, C_2$  (qui dépendent de  $T$ ) avec  $C_1 < T$  telle que*

$$\int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq C_1 \mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \int_{\Gamma} (|\partial_t u(t)|^2 + |E(t) \times \nu|^2) d\sigma dt, \quad (4.30)$$

pour toute solution  $(u, E, H)$  de (4.1) avec  $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$ .

Cette définition est équivalente à l'estimation d'observabilité suivante :

**Lemme 4.6.**  *$\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité si et seulement si il existe  $T > 0$  et une constante positive  $C$  (qui dépend de  $T$ ) telle que*

$$\mathcal{E}(T) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma} (|\partial_t u(t)|^2 + |E(t) \times \nu|^2) d\sigma dt \quad (4.31)$$

pour toute solution  $(u, E, H)$  de (4.1).

La preuve est identique à celle du Lemme 3.2 de [8, 37].

On montre comme dans [8] le théorème suivant :

**Théorème 4.2.**  *$\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité si et seulement si il existe deux constantes positives  $M$  et  $\omega$  telle que*

$$\mathcal{E}(t) \leq M e^{-\omega t} \mathcal{E}(0), \quad (4.32)$$

pour toute solution  $(u, E, H)$  de (4.1) avec  $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \xi$ .

On a le résultat principale de stabilisation suivant :

**Théorème 4.3.** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  strictement étoilé par rapport à l'origine de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^3$ . On suppose de plus que les coefficients  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des constantes positives dans tout le domaine  $\Omega$ . Alors  $\Omega$  satisfait l'estimation (4.30).*

Afin de démontrer le Théorème 4.3, nous établissons tout d'abord les résultats suivants :

**Lemme 4.7.** *Soit  $(u, E, H)$  une solution forte de (4.1). Alors, pour tout  $t \geq 0$ , il existe une constante positive  $\gamma$  telle que*

$$\|2(m \cdot \nabla)u + u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \gamma \mathcal{E}(t).$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans [24].

**Lemme 4.8.** *Soit  $(u, E, H)$  une solution forte de (4.1). Alors il existe une constante strictement positive  $C$  (dépend de  $\beta$ , le domaine  $\Omega$ , le coefficient  $\mu$ , et du paramètre  $\xi$ ), telle que pour tout  $\eta \in (0, 1)$  et tout  $T > 0$ , on ait*

$$\int_0^T \int_{\Gamma} \left( a|u|^2 + \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) \right) d\sigma dt \leq \frac{C}{\eta} \mathcal{E}(0) + \eta \int_0^T \mathcal{E}(t) dt.$$

Pour la preuve, nous renvoyons à [4], [21].

**Démonstration du Théorème 4.3 :** Il suffit d'établir l'estimation (4.30) pour toute solution forte  $(u, E, H)$  de (4.1). Nous allons à présent mettre en oeuvre la méthode de multiplicateurs [24, 34]. La preuve se fera en deux étapes.

• **Étape 1 :** On commence par l'identité suivante

**Lemme 4.9.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^3$  et  $q = (q_1, q_2, q_3) \in W^{1,\infty}(\Omega)^3$ . Alors, pour toute solution  $(u, E, H)$  de (4.1) on a l'identité suivante*

$$\begin{aligned} 0 = & - \left[ \int_{\Omega} 2(q : \nabla u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu (q : \nabla u) \cdot H dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot q dx \right]_0^T \\ & + \int_{Q_T} (\mathbf{div} q) (\sigma(u) : \varepsilon(u) - |\partial_t u|^2) dx dt - 2 \int_{Q_T} \sigma(u) \cdot \nabla q \cdot \nabla u dx dt \\ & - \int_{Q_T} \left\{ \epsilon Q E \cdot E + \mu Q H \cdot H \right\} dx dt + 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u dx dt \\ & + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu \left( |\partial_t u|^2 + \alpha |\partial_\nu u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu|^2 \right) d\sigma dt \tag{4.33} \\ & - \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu [2\alpha \varepsilon_T^0(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon_T^0(u) i_2)] : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt - \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu (\alpha |\overline{\partial_T u_\nu} - (\partial_T \nu) u_T|^2) d\sigma dt \\ & - 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) (\pi \partial_T q_T \pi) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_T u_\nu (\sigma_T^0(u) (\partial_T \nu) q_T) d\sigma dt \\ & + \int_{\Sigma_T} (\mathbf{div}_T q_T) (\sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u)) d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) : \partial_T \nu) \overline{u_T} (\partial_T \nu) q_T d\sigma dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \int_{\Sigma_T} (\mathcal{R} \cdot \sigma_T^0(u)) : (u_T \otimes q_T) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (au_T + \partial_t u)(\pi \partial_T u_T \pi) q_T d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_\nu \partial_T \nu) q_T d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (au_\nu + \partial_t u)(\partial_T u_\nu) q_T d\sigma dt \\
 & + 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_T \partial_T \nu) q_T d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ q \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - 2\epsilon (q \cdot E)(E \cdot \nu) \right. \\
 & \quad \left. - 2\mu (q \cdot H)(H \cdot \nu) - 2\xi \mu (H \cdot \nu)(q \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt,
 \end{aligned}$$

où  $Q = \mathbf{div} q i_3 - 2\nabla q$ ,  $i_3$  est la matrice identité dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{R}$  est le tenseur de courbure de  $\Gamma$ , une fois contravariante et trois fois covariante de composantes :

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\nu}^\mu = \Gamma_{\gamma\alpha,\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\alpha,\gamma}^\mu + \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu - \Gamma_{\gamma\nu}^\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\nu,$$

avec  $1 \leq \alpha, \beta, \nu, \mu \leq 2$  et les  $\Gamma_{\lambda\eta}^\theta$  sont les symboles de Christoffel (cf. [10, 12, 31]).

Ici, nous avons utilisé la notation  $q : \nabla u = (q \cdot \nabla u_1, q \cdot \nabla u_2, q \cdot \nabla u_3)$  et  $q_T : \nabla_T u = (q_T \cdot \nabla_T u_1, q_T \cdot \nabla_T u_2, q_T \cdot \nabla_T u_3)$ , où  $q_T$  est la composante tangentielle de  $q$  et  $\mathbf{div}_T q_T$  la divergence tangentielle de  $q_T$ .

*Démonstration.* On multiplie la première équation de (4.1) par  $2(q : \nabla u)$  et on intègre par partie sur  $Q_T$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_T} 2(q : \nabla u) \cdot \partial_t^2 u \, dx dt &= 2 \left[ \int_{\Omega} (q : \nabla u) \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T \\
 &\quad - \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \int_{Q_T} (\mathbf{div} q) |\partial_t u|^2 \, dx dt, \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 2 \int_{Q_T} \nabla \sigma(u) \cdot (q : \nabla u) \, dx dt &= 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma(u) \cdot \nu) \cdot (q : \nabla u) \, d\sigma dt \\
 &\quad - 2 \int_{Q_T} \sigma(u) : \nabla q \cdot \nabla u \, dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{div} q (\sigma(u) : \varepsilon(u)) \, dx dt \\
 &\quad - \int_{\Sigma_T} (q \cdot \nu) (\sigma(u) : \varepsilon(u)) \, d\sigma dt. \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

En combinant (4.34) et (4.35) on déduit

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{Q_T} 2(q : \nabla u) \cdot \left( \partial_t^2 u - \nabla \sigma(u) + \xi \mathbf{curl} E \right) \, dx dt = -2 \left[ \int_{\Omega} (q : \nabla u) \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T \\
 &\quad + \int_{Q_T} \mathbf{div} q (\sigma(u) : \varepsilon(u) - |\partial_t u|^2) \, dx dt - 2 \int_{Q_T} \sigma(u) : \nabla q \cdot \nabla u \, dx dt \quad (4.36) \\
 &\quad - 2\xi \int_{Q_T} (q : \nabla u) \cdot \mathbf{curl} E \, dx dt + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu \left( |\partial_t u|^2 - \sigma(u) : \varepsilon(u) \right) \, d\sigma dt \\
 &\quad + 2 \int_{\Sigma_T} \sigma(u) \cdot \nu (q : \nabla u) \, d\sigma dt
 \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (4.1)<sub>2</sub> et (4.1)<sub>3</sub> par  $2\mu(q \times H)$  et  $2\epsilon(E \times q) - 2\xi(q : \nabla u)$ , respectivement, et on intègre par partie sur  $Q_T$  (comme dans [8]), on trouve

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{Q_T} \left\{ 2\mu(q \times H) \cdot \left( \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u \right) \right\} dx dt \\
&+ \int_{Q_T} \left\{ \left( 2\epsilon(E \times q) - 2\xi(q : \nabla u) \right) \cdot \left( \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E \right) \right\} dx dt = \\
&\left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu H \cdot (q : \nabla u) dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu(E \times H) \cdot q dx \right]_0^T \tag{4.37} \\
&- \int_{Q_T} \{ \epsilon Q E \cdot E + \mu Q H \cdot H \} dx dt + 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u dx dt \\
&+ 2\xi \int_{Q_T} (q : \nabla u) \cdot \mathbf{curl} E dx dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ q \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - 2\epsilon(q \cdot E)(E \cdot \nu) \right. \\
&\quad \left. - 2\mu(q \cdot H)(H \cdot \nu) - 2\xi \mu(H \cdot \nu)(q \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt,
\end{aligned}$$

Multipliant la seconde et la troisième condition au bord de (4.1) par  $2(\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T$  et  $2(\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T$ , respectivement, et on procède à des intégrations par parties sur  $\Sigma_T$ . Il vient

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + a u_T + \partial_t u) \cdot (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T d\sigma dt \\
&= 2 \int_{\Sigma_T} \overline{\sigma_S(u)} : (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T d\sigma dt + \\
&\quad 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \pi \partial_T ((\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T) \pi d\sigma dt + \\
&\quad 2 \int_{\Sigma_T} (a u_T + \partial_t u) \cdot (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T d\sigma dt, \tag{4.38}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
0 &= 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_T \nu + a u_\nu + \partial_t u) \cdot (\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T d\sigma dt \\
&= 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_\nu(u) \cdot (\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) : \partial_T \nu) \cdot (\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T d\sigma dt \\
&+ 2 \int_{\Sigma_T} (a u_\nu + \partial_t u) \cdot (\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T d\sigma dt. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

La somme des égalité (4.36), (4.37), (4.38) et (4.39) donne

$$\begin{aligned}
 0 = & -2 \left[ \int_{\Omega} (q : \nabla u) \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu H \cdot (q : \nabla u) \, dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot q \, dx \right]_0^T \\
 & + \int_{Q_T} \mathbf{div} q (\sigma(u) : \varepsilon(u) - |\partial_t u|^2) \, dx dt - 2 \int_{Q_T} \sigma(u) : \nabla q \cdot \nabla u \, dx dt \\
 & - \int_{Q_T} \{ \epsilon Q E \cdot E + \mu Q H \cdot H \} \, dx dt + 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u \, dx dt \\
 & + \int_{\Sigma_T} q \cdot \nu \left( |\partial_t u|^2 - \sigma(u) : \varepsilon(u) \right) \, d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} \sigma(u) \cdot \nu (q : \nabla u) \, d\sigma dt \quad (4.40) \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} \overline{\sigma_S(u)} : (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T \, d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_T \partial_T \nu) q_T \, d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \pi \partial_T ((\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T) \pi \, d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_\nu \partial_T \nu) q_T \, d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_\nu(u) (\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T \, d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) : \partial_T \nu) \cdot (\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T \, d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} (a u_T + \partial_t u) (\pi \partial_T u_T \pi) q_T \, d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (a u_\nu + \partial_t u) (\partial_T u_\nu) q_T \, d\sigma dt \\
 & + \int_{\Sigma_T} \left\{ q \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - 2\epsilon (q \cdot E) (E \cdot \nu) - 2\mu (q \cdot H) (H \cdot \nu) - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. 2\xi \mu (H \cdot \nu) (q \cdot \partial_t u) \right\} \, d\sigma dt.
 \end{aligned}$$

De (1.7), on a

$$\begin{aligned}
 (\sigma(u) \cdot \nu) (q : \nabla u) &= \overline{\sigma_S(u)} \cdot (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T \\
 &+ \sigma_\nu(u) (\partial_T u_\nu - \overline{u_T} \partial_T \nu) q_T + q_\nu (\sigma(u) \cdot \nu) \partial_\nu u. \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Maintenant, on procède comme dans [10,12], en explicitant le terme  $\sigma_T^0(u) : \pi \partial_T ((\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T) \pi$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \sigma_T^0(u) : \pi \partial_T ((\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) q_T) \pi = \\
 & \sigma_T^0(u) : (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) \pi \partial_T q_T \pi + \partial_T u_\nu (\sigma_T^0(u) (\partial_T \nu) q_T) + \\
 & \frac{1}{2} \partial_T (\sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u)) q_T - (\sigma_T^0(u) : \partial_T \nu) (\partial_T u_\nu) q_T + (\mathcal{R} : \sigma_T^0(u)) : (u_T \otimes q_T). \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

En utilisant les relations (1.8) – (1.15) et la remarque (1.2), on tire l'égalité

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_T} \{ 2(\sigma(u) \cdot \nu) \partial_\nu u - \sigma(u) : \varepsilon(u) \} \, d\sigma dt = \\
 & \int_{\Sigma_T} \left\{ \left( \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon_T^0(u) i_2) - (2\alpha \varepsilon_T^0(u)) \right) : \varepsilon_T^0(u) + \alpha |\partial_\nu u_T|^2 \right. \\
 & \left. - \alpha |\overline{\partial_T u_\nu} - (\partial_T \nu) u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu|^2 \right\} \, d\sigma dt. \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

En remplaçant les termes (4.41), (4.42) et (4.43) dans (4.40), on obtient (4.33).  $\square$

Maintenant, en utilisant (4.33) avec  $q(x) = m(x) = x$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 0 = & - \left[ \int_{\Omega} 2(m : \nabla u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu (m : \nabla u) \cdot H dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot m dx \right]_0^T \\
 & + \int_{Q_T} (\sigma(u) : \varepsilon(u) - 3|\partial_t u|^2) dx dt - \int_{Q_T} \left\{ \epsilon |E|^2 + \mu |H|^2 \right\} dx dt + 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \partial_t u dx dt \\
 & + \int_{\Sigma_T} m \cdot \nu \left( |\partial_t u|^2 + \alpha |\partial_\nu u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu|^2 \right) d\sigma dt \\
 & - \int_{\Sigma_T} m \cdot \nu [2\alpha \varepsilon_T^0(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon_T^0(u) i_2)] : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt - \int_{\Sigma_T} m \cdot \nu (\alpha |\overline{\partial_T u_\nu} - (\partial_T \nu) u_T|^2) d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) (\pi \partial_T m_T \pi) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_T u_\nu (\sigma_T^0(u) (\partial_T \nu) m_T) d\sigma dt \\
 & + \int_{\Sigma_T} (\mathbf{div}_T m_T) (\sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u)) d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) : \partial_T \nu) \overline{u_T} (\partial_T \nu) m_T d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} (\mathcal{R} \cdot \sigma_T^0(u)) : (u_T \otimes m_T) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (a u_T + \partial_t u) (\pi \partial_T u_T \pi) m_T d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_\nu \partial_T \nu) m_T d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (a u_\nu + \partial_t u) (\partial_T u_\nu) m_T d\sigma dt \\
 & + 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_T \partial_T \nu) m_T d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - 2\epsilon (m \cdot E) (E \cdot \nu) \right. \\
 & \quad \left. - 2\mu (m \cdot H) (H \cdot \nu) - 2\xi \mu (H \cdot \nu) (m \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt, \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

**Lemme 4.10.** *On a l'identité suivante*

$$\begin{aligned}
 0 = & - 2 \left[ \int_{\Omega} \partial_t u \cdot u dx \right]_0^T + 2 \left[ \xi \int_{\Omega} \mu H \cdot u dx \right]_0^T + 2 \int_{Q_T} \left\{ |\partial_t u|^2 - \sigma(u) : \varepsilon(u) \right\} dx dt \\
 & - 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \partial_t u dx dt - 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (a u_T + \partial_t u) \cdot u d\sigma dt \\
 & - 2 \int_{\Sigma_T} (a u_\nu + \partial_t u) \cdot u d\sigma dt. \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

*Démonstration.* On multiplie l'équation (4.1)<sub>1</sub> et (4.1)<sub>3</sub> par  $2u$  et  $2\xi u$ , respectivement, on intègre par parties sur  $Q_T$  et  $\Sigma_T$ , on obtient (4.45).  $\square$

En combinant (4.44) et (4.45), en utilisant l'expression de l'énergie (4.28), on

tire

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^T \mathcal{E}(t) dt &= - \left[ \int_{\Omega} 2(m : \nabla u + u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi\mu H \cdot (m : \nabla u + u) dx \right]_0^T \\
 &+ \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon\mu(E \times H) \cdot m dx \right]_0^T + \int_{\Sigma_T} (\mathbf{div}_T m_T - 2)(\sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0) d\sigma dt \\
 &+ \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \left[ |\partial_t u|^2 + \alpha |\partial_\nu u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu|^2 - \left( 2\alpha \varepsilon_T^0(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon_T^0(u)) i_2 \right) : \varepsilon_T^0(u) \right. \\
 &- \alpha \left| \overline{\partial_T u_\nu} - (\partial_T \nu) u_T \right|^2 \left. \right] d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) (\pi \partial_T m_T \pi) d\sigma dt \\
 &- 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) (\partial_T \nu) m_T) (\partial_T u_\nu) d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) : \partial_T \nu) \overline{u_T} (\partial_T \nu) m_T d\sigma dt \\
 &- 2 \int_{\Sigma_T} (\mathcal{R} : \sigma_T^0(u)) : (u_T \otimes m_T) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} (a u_T + \partial_t u) ((\pi \partial_T u_T \pi) m_T + u) d\sigma dt \\
 &- 2 \int_{\Sigma_T} (a u_\nu + \partial_t u) ((\partial_T u_\nu) m_T + u) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_\nu \partial_T \nu) m_T d\sigma dt \\
 &+ 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_T \partial_T \nu) m_T d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \left[ (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - 2\epsilon(m \cdot E)(E \cdot \nu) \right. \\
 &- \left. 2\mu(m \cdot H)(H \cdot \nu) - 2\xi\mu(H \cdot \nu)(m \cdot \partial_t u) \right] d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) + a|u|^2) d\sigma dt.
 \end{aligned}$$

Cette identité sera réécrite

$$2 \int_0^T \mathcal{E}(t) dt = \sum_{i=1}^7 I_i, \quad (4.46)$$

où

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \left[ \int_{\Omega} 2(m : \nabla u + u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T + \left[ \int_{\Omega} 2\xi\mu(m : \nabla u + u) \cdot H dx \right]_0^T + \\
 &\quad 2 \left[ \int_{\Omega} \epsilon\mu(E \times H) \cdot m dx \right]_0^T, \\
 I_2 &= \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu |\partial_t u|^2 + \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) + a|u|^2 \right\} d\sigma dt, \\
 I_3 &= \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) - 2\epsilon(m \cdot E)(E \cdot \nu) - 2\mu(m \cdot H)(H \cdot \nu) \right. \\
 &\quad \left. - 2\xi\mu(H \cdot \nu)(m \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt, \\
 I_4 &= \int_{\Sigma_T} (\mathbf{div}_T m_T - 2)(\sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : (\pi \partial_T u_T \pi + u_\nu \partial_T \nu) (\pi \partial_T m_T \pi) d\sigma dt \\
 &- 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) (\partial_T \nu) m_T) (\partial_T u_\nu) d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} (\sigma_T^0(u) : \partial_T \nu) \overline{u_T} (\partial_T \nu) m_T d\sigma dt \\
 &- 2 \int_{\Sigma_T} (\mathcal{R} : \sigma_T^0(u)) : (u_T \otimes m_T) d\sigma dt - \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \left( 2\alpha \varepsilon_T^0(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon_T^0(u)) i_2 \right) : \varepsilon_T^0(u),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_5 &= - \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \left( \alpha \left| \overline{\partial_T u_\nu} - (\partial_T \nu) u_T \right|^2 \right) d\sigma dt, \\
 I_6 &= -2 \int_{\Sigma_T} (a u_T + \partial_t u) \left( (\pi \partial_T u_T \pi) m_T + u \right) d\sigma dt - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_\nu \partial_T \nu) m_T d\sigma dt \\
 &\quad - 2 \int_{\Sigma_T} (a u_\nu + \partial_t u) \left( (\partial_T u_\nu) m_T + u \right) d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_T \partial_T \nu) m_T d\sigma dt, \\
 I_7 &= \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \left( \alpha |\partial_\nu u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu|^2 \right) d\sigma dt.
 \end{aligned}$$

• **Étape 2 :** Nous allons maintenant estimer les différents termes  $I_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ).

• **Estimation de  $I_1$  :**

Pour tout  $t \geq 0$  et  $\rho > 0$  fixés, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} 2(m : \nabla u + u) \cdot \partial_t u \, dx &\leq \frac{1}{\rho} \|\partial_t u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \rho \|(m : \nabla u + u)\|_{L^2(\Omega)^3}^2, \\
 \int_{\Omega} 2\xi\mu(m : \nabla u + u) \cdot H \, dx &\leq \frac{\xi^2\mu}{\rho} \|\mu H\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \rho \|(m : \nabla u + u)\|_{L^2(\Omega)^3}^2.
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 4.7 et l'identité (4.29), il existe deux constantes positives  $k_1$  et  $k_2$  telles que

$$\left[ \int_{\Omega} 2(m : \nabla u + u) \cdot \partial_t u \, dx \right]_0^T \leq k_1 \mathcal{E}(0),$$

et

$$\left[ \int_{\Omega} 2\xi\mu(m : \nabla u + u) \cdot H \, dx \right]_0^T \leq k_2 \mathcal{E}(0).$$

Comme dans [8, 24], on a l'existence d'une constante positive  $k_3 > 0$  tel que

$$\left[ \int_{\Omega} 2\epsilon\mu(E \times H) \cdot m \, dx \right]_0^T \leq k_3 \mathcal{E}(0),$$

d'où

$$I_1 \leq k_4 \mathcal{E}(0), \tag{4.47}$$

où  $k_4$  est une constante positive indépendante de  $T$ .

• **Estimation de  $I_2$  :**

Par le Lemme 4.8, on a

$$I_2 \leq \frac{C}{\eta} \mathcal{E}(0) + R_0 \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \eta \int_0^T \mathcal{E}(t) dt. \tag{4.48}$$

• **Estimation de  $I_3$  :**

On peut vérifier que

$$2\epsilon(m \cdot E)(E \cdot \nu) = 2\epsilon(m_T \cdot E_T)E_\nu + 2\epsilon m \cdot \nu |E_\nu|^2,$$

et

$$2\mu(m \cdot H)(H \cdot \nu) = 2\mu(m_T \cdot H_T)H_\nu + 2\mu m \cdot \nu |H_\nu|^2,$$

et par conséquent le terme  $I_3$  devient

$$\begin{aligned} I_3 = \int_{\Sigma_T} \left\{ m \cdot \nu (\epsilon |E_T|^2 + \mu |H_T|^2) - \epsilon m \cdot \nu |E_\nu|^2 - \mu m \cdot \nu |H_\nu|^2 \right. \\ \left. - 2\epsilon (m_T \cdot E_T)E_\nu - 2\mu (m_T \cdot H_T)H_\nu + 2\xi\mu(H \cdot \nu)(m \cdot \partial_t u) \right\} d\sigma dt, \end{aligned}$$

On applique la formule de Young ; il existe alors une constante positive  $k_5 > 0$  tel que pour tout  $\theta > 0$

$$\begin{aligned} I_3 \leq \int_{\Sigma_T} \left\{ \left( m \cdot \nu + \frac{k_5}{\theta} \right) (\epsilon |E \times \nu|^2 + \mu |H \times \nu|^2) + (\theta - m \cdot \nu) \epsilon |E_\nu|^2 \right. \\ \left. + (2\theta - m \cdot \nu) \mu |H_\nu|^2 + \frac{k_5}{\theta} |\partial_t u|^2 \right\} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.49)$$

• **Estimation de  $I_4$  :**

En utilisant les relations du Lemme 1.3 et en tenant compte de (1.9), on peut réécrire  $I_4$  comme suit

$$\begin{aligned} I_4 = & - \int_{\Sigma_T} \left( 2 - 2m_\nu (\partial_T \nu) + m_\nu \text{tr}(\partial_T \nu) \right) \left( \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) \right) d\sigma dt \\ & - 2 \int_{\Sigma_T} \left( \sigma_T^0(u) (\partial_T \nu) m_T \right) (\partial_T u_\nu) d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left( \sigma_T^0(u) : \partial_T \nu \right) \overline{u_T} (\partial_T \nu) m_T d\sigma dt \\ & - 2 \int_{\Sigma_T} \left( \mathcal{R} : \sigma_T^0(u) \right) : (u_T \otimes m_T) d\sigma dt \\ & - \int_{\Sigma_T} m_\nu \left( 2\alpha \varepsilon_T^0(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon_T^0(u)) i_2 \right) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 = & - \int_{\Sigma_T} \left( 2 - 2m_\nu (\partial_T \nu) + m_\nu \text{tr}(\partial_T \nu) \right) \left( \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) \right) d\sigma dt \\ \mathcal{I}_2 = & - 2 \int_{\Sigma_T} \left( \sigma_T^0(u) (\partial_T \nu) m_T \right) (\partial_T u_\nu) d\sigma dt \\ \mathcal{I}_3 = & \int_{\Sigma_T} \left( \sigma_T^0(u) : \partial_T \nu \right) \overline{u_T} (\partial_T \nu) m_T d\sigma dt \\ \mathcal{I}_4 = & - 2 \int_{\Sigma_T} \left( \mathcal{R} : \sigma_T^0(u) \right) : (u_T \otimes m_T) d\sigma dt \\ \mathcal{I}_5 = & - \int_{\Sigma_T} m_\nu \left( 2\alpha \varepsilon_T^0(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon_T^0(u)) i_2 \right) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant estimer les termes précédents. Dans toute la suite la lettre  $C$  désignera une constante générique positive assez grand et indépendante de  $u$ . Comme  $m_\nu$  et  $\partial_T \nu$  sont bornées, il vient alors

$$|\mathcal{I}_1| \leq C \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt.$$

On procède comme dans [10, 12], en utilisant l'inégalité de Young, la proposition 1.1 et en tenant compte de (1.9) et (18), on obtient

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_2| &\leq C \int_{\Sigma_T} \left( |\nabla_T u_\nu|^2 + |u_\nu|^2 + |u_T|^2 + \varepsilon_T^0(u_T) : \varepsilon_T^0(u_T) \right) d\sigma dt \\ &\leq C \int_{\Sigma_T} \left( |\nabla_T u_\nu|^2 + |u|^2 + \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) \right) d\sigma dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4| &\leq C \left( \|u_\nu\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}^2 + \|u_T\|_{L^2(0,T;H^1(\Gamma,T(\Gamma)))}^2 \right) \\ &\leq C \int_{\Sigma_T} \left( |u|^2 + \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) \right) d\sigma dt. \end{aligned}$$

De  $\sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) = 2\alpha\varepsilon_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) + \lambda^* \text{tr}(\varepsilon_T^0(u)) i_2 : \varepsilon_T^0(u)$ , où  $\lambda^* = (2\lambda\alpha)(\lambda + 2\alpha)^{-1}$ , on déduit que

$$|\mathcal{I}_5| \leq C \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt.$$

Les estimations précédentes conduisent à

$$I_4 \leq 4C \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt + C \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt + 2C \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt. \quad (4.50)$$

• **Estimation de  $I_5$  :**

Le terme  $I_5$  est équivalent à

$$I_5 = - \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \alpha |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt - \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) |\partial_T \nu u_T|^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \alpha \nabla_T u_\nu (\partial_T \nu) u_T d\sigma dt.$$

Par l'inégalité de Young, on a pour tout  $\beta > 0$

$$\begin{aligned} &\left| - \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) |\partial_T \nu u_T|^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \alpha \nabla_T u_\nu (\partial_T \nu) u_T d\sigma dt \right| \\ &\leq \beta \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt + \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

Donc

$$I_5 \leq \left( \beta - (m \cdot \nu) \alpha \right) \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt + \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt. \quad (4.51)$$

• **Estimation de  $I_6$  :**

Comme  $u = u_T + u_\nu \nu$  sur  $\Gamma$ , le terme  $I_6$  devient

$$\begin{aligned} I_6 &= -2a \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt - 2a \int_{\Sigma_T} u_T \cdot (\pi \partial_T u_T \pi) \cdot m_T d\sigma dt \\ &\quad - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u \cdot (\pi \partial_T u_T \pi) \cdot m_T d\sigma dt - 4 \int_{\Sigma_T} \partial_t u \cdot u d\sigma dt - 2a \int_{\Sigma_T} u_\nu (\partial_T u_\nu) \cdot m_T d\sigma dt \\ &\quad - 2a \int_{\Sigma_T} \partial_t u (\partial_T u_\nu) - 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_\nu (\partial_T \nu)) m_T d\sigma dt + 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_T (\partial_T \nu)) m_T d\sigma dt. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young et la proposition 1.1 donnent, pour tout  $\beta > 0$

$$\begin{aligned} \left| -2a \int_{\Sigma_T} u_T \cdot (\pi \partial_T u_T \pi) \cdot m_T d\sigma dt \right| &\leq \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |u_T|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} \varepsilon_T^0(u_T) : \varepsilon_T^0(u_T) d\sigma dt \\ &\leq \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| -2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u \cdot (\pi \partial_T u_T \pi) \cdot m_T d\sigma dt \right| &\leq \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} \varepsilon_T^0(u_T) : \varepsilon_T^0(u_T) d\sigma dt \\ &\leq \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Les termes restants sont aussi estimés à l'aide de l'inégalité de Young et on a

$$\begin{aligned} \left| -4 \int_{\Sigma_T} \partial_t u \cdot u d\sigma dt \right| &\leq \frac{4}{\beta} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt, \\ \left| -2a \int_{\Sigma_T} u_\nu (\nabla_T u_\nu) \cdot m_T d\sigma dt \right| &\leq \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt, \\ \left| -2a \int_{\Sigma_T} \partial_t u (\nabla_T u_\nu) \cdot m_T d\sigma dt \right| &\leq \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt, \\ \left| -2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_\nu (\partial_T \nu)) \cdot m_T d\sigma dt \right| &\leq \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt, \\ \left| 2 \int_{\Sigma_T} \partial_t u (u_T (\partial_T \nu)) \cdot m_T d\sigma dt \right| &\leq \frac{C}{\beta} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \beta \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt, \end{aligned}$$

pour tout  $\beta > 0$ . Il est claire que

$$\left| -2a \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt \right| \leq C \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt.$$

En regroupant les estimations précédentes, il vient

$$\begin{aligned}
 I_6 \leq & \left( \frac{2C}{\beta} + 3\beta + C \right) \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt + \left( \frac{4C + 4}{\beta} \right) \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt \\
 & 2\beta \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt + 2\beta \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

• **Estimation de  $I_7$  :**

Il reste à estimer le terme  $I_7$ , on a alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_T} (m \cdot \nu) \left( \alpha |\partial_\nu u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu| \right) d\sigma dt \leq \\
 & C \int_{\Sigma_T} \left( \alpha |\partial_\nu u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu| \right) d\sigma dt.
 \end{aligned}$$

On considère un champ de vecteur  $h \in W^{1,\infty}(\bar{\Omega})^3$  tel que  $h = q = \nu$  sur  $\Gamma$ , (cf. [34]). L'identité (4.33) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_T} \left( \alpha |\partial_\nu u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu| \right) d\sigma dt = \\
 & \left[ \int_{\Omega} 2(q : \nabla u) \cdot \partial_t u dx \right]_0^T - \left[ \int_{\Omega} 2\xi \mu (q : \nabla u) \cdot H dx \right]_0^T - \left[ \int_{\Omega} 2\epsilon \mu (E \times H) \cdot q dx \right]_0^T \\
 & - \int_{Q_T} (\mathbf{div} q) (\sigma(u) : \varepsilon(u) - |\partial_t u|^2) dx dt + 2 \int_{Q_T} \sigma(u) \cdot \nabla q \cdot \nabla u dx dt \\
 & + \int_{Q_T} \left\{ \epsilon Q E \cdot E + \mu Q H \cdot H \right\} dx dt - 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u dx dt - \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt \\
 & + \int_{\Sigma_T} \left[ 2\alpha \varepsilon_T^0(u) + \lambda \text{tr}(\varepsilon_T^0(u) i_2) \right] : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left( \alpha |\overline{\partial_T u_\nu} - (\partial_T \nu) u_T|^2 \right) d\sigma dt \\
 & + \int_{\Sigma_T} \left\{ (\epsilon |E_\nu|^2 + \mu |H_\nu|^2) + 2\xi \mu (H \cdot \nu) (\partial_t u \cdot \nu) - (\epsilon |E_T|^2 + \mu |H_T|^2) \right\} d\sigma dt.
 \end{aligned}$$

Comme précédemment, on déduit l'existence d'une constante positive  $C$  telle que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_T} \left( \alpha |\partial_\nu u_T|^2 + (2\alpha + \lambda) |\partial_\nu u_\nu| \right) d\sigma dt \leq C \mathcal{E}(0) + C \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + C \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt \\
 & - 2\xi \int_{Q_T} \mu H \cdot \nabla q \cdot \partial_t u dx dt + C \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt + \alpha \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt \\
 & - \int_{\Sigma_T} \alpha \nabla_T u_\nu \cdot (\partial_T \nu) \cdot u_T d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ (\epsilon |E_\nu|^2 + \mu |H_\nu|^2) + 2\xi \mu (H \cdot \nu) (\partial_t u \cdot \nu) \right\} d\sigma dt.
 \end{aligned}$$

Les autres termes sont estimés par l'inégalité de Young, on obtient pour tout  $\beta, \theta > 0$

$$\begin{aligned}
 I_7 \leq & C \mathcal{E}(0) + C(\beta) \int_0^T \mathcal{E}(t) dt + \left( C + \frac{C}{\beta} \right) \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt + C \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt \\
 & + (\alpha + \beta) \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt + \frac{C}{\theta} \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma_T} \left\{ \epsilon |E_\nu|^2 + (1 + \theta) \mu |H_\nu|^2 \right\} d\sigma dt,
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

où  $C(\beta) = C + \max\left(\beta, \frac{C}{\beta}\right)$ .

En insérant les estimations (4.47), (4.48), (4.49), (4.50), (4.51), (4.52) et (4.53) dans (4.46), on arrive à

$$\begin{aligned} & \left(2 - \eta - C(\beta)\right) \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq \left(k_4 + \frac{C}{\eta} + C\right) \mathcal{E}(0) \\ & + \left(m \cdot \nu + \frac{k_5}{\theta}\right) \int_{\Sigma_T} \left(\epsilon |E \times \nu|^2 + \mu |H \times \nu|^2\right) d\sigma dt \\ & + \int_{\Sigma_T} \left\{ \left(\theta + 1 - m \cdot \nu\right) \epsilon |E_\nu|^2 dt + \left(3\theta + 1 - m \cdot \nu\right) \mu |H_\nu|^2 \right\} d\sigma dt \\ & + \left(5C + 2\beta\right) \int_{\Sigma_T} \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(u) d\sigma dt + \left(4C + \frac{4C}{\beta} + 3\beta\right) \int_{\Sigma_T} |u|^2 d\sigma dt \\ & + \left(R_0 + \frac{k_5}{\theta} + \frac{4C + 4}{\beta}\right) \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \left(C + 4\beta + \alpha - \alpha(m \cdot \nu)\right) \int_{\Sigma_T} |\nabla_T u_\nu|^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

En choisissant  $0 < \theta < \frac{\gamma_m - 1}{3}$  et  $0 < \beta < \frac{\alpha\gamma_m - C - \alpha}{4}$  tel que  $\gamma_m = \min\{m \cdot \nu, m \in \Gamma\} > \frac{C - \alpha}{\alpha} > 1$  et en appliquant le Lemme 4.8, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left(2 - \eta(k_6 + 1) - C(\beta)\right) \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \leq \left(k_4 + \frac{C + k_6 C}{\eta} + C\right) \mathcal{E}(0) \\ & + \left(m \cdot \nu + \frac{k_5}{\theta}\right) \int_{\Sigma_T} \left(\epsilon |E \times \nu|^2 + \mu |H \times \nu|^2\right) d\sigma dt \\ & + \left(R_0 + \frac{k_5}{\theta} + \frac{4C + 4}{\beta}\right) \int_{\Sigma_T} |\partial_t u|^2 d\sigma dt, \end{aligned}$$

où  $k_4, k_5$ , et  $k_6$  sont des constantes positives (dépend de  $\theta, \beta, \eta, \rho$ , les coefficient  $\mu, \alpha, \lambda$  et du paramètre  $\xi$ ).

Finalement, en utilisant la première condition au bord du système (4.1), on déduit l'estimation recherchée (4.30), en posant  $C_1 = \frac{k_4 + \frac{C + k_6 C}{\eta} + C}{2 - \eta(1 + k_6) - C(\beta)}$  et  $C_2 = \frac{k_8}{2 - \eta(1 + k_6) - C(\beta)}$  où  $k_8 = \left(\left(m \cdot \nu\right) + \frac{k_5}{\theta}\right) \max\left\{\left(1 + \mu + \mu\theta\right), \left(\mu\xi^2 + \frac{\xi^2}{\theta}\right) + \left(R_0 + \frac{k_5}{\theta} + \frac{4C + 4}{\beta}\right)\right\}$ ; en choisissant  $0 < \eta < \frac{2 - C(\beta)}{(1 + k_6)}$  et  $C(\beta) < 2$  (i.e., on choisit  $\beta$  assez grand tel que  $\beta < 2 - C$  avec  $C < 2$ ). Ceci achève la démonstration du Théorème 4.3.  $\square$

# Chapitre 5

## Quelques résultats théoriques

### 5.1 Application à la contrôlabilité exacte

Dans cette section on s'intéresse à la contrôlabilité exacte du système (4.1) en adaptant la méthode de Russell (*cf.* [39]), c'est à dire qu'en exploitant le résultat de stabilisation exponentielle du système linéaire associé au système (4.1), on déduit la contrôlabilité exacte, résultat qui a été établi directement par S. Nicaise (*cf.* [36]), (*voir aussi* [8, 37]). Plus précisément : pour tout  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$ , on cherche un temps  $T > 0$  et un vecteur contrôle  $(J_1, J_2) \in L^2(\Gamma, ]0, T[)^3 \times L^2(\Gamma, ]0, T[)^3$  tel que la solution  $(u, E, H)$  de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \nabla \sigma(u) + \xi \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q_T = \Omega \times ]0, T[, \\ \epsilon \partial_t E - \mathbf{curl} H - \xi \mathbf{curl} \partial_t u = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t H + \mathbf{curl} E = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon E) = \mathbf{div}(\mu H) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ H \times \nu - \xi \partial_t u \times \nu = J_1, & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times ]0, T[, \\ \sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + a u_T = J_{2T}, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + a u_\nu = J_{2\nu}, & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, E(0) = E_0, H(0) = H_0, & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

vérifie :

$$u(T) = \partial_t u(T) = E(T) = H(T) = 0. \quad (5.2)$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 5.1.** *Si  $\Omega$  satisfait l'estimation de stabilité, alors pour tout  $T > 0$  suffisamment grand, et pour tout  $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in \mathcal{H}$ , il existe deux contrôles  $J_1, J_2 \in$*

$L^2(\Sigma_T)^3$  avec :

$$J_1 \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \quad (5.3)$$

tels que la solution  $(u, \partial_t u, E, H) \in C(]0, T[, \mathcal{H})$  de (5.1) vérifie (5.2) au temps  $T$ .

*Démonstration.* Nous procédons comme dans [36]. Pour  $(y_0, y_1, P_0, Q_0) \in \mathcal{H}$ , on cherche  $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Sigma_T)^3$ , où  $\psi_1$  vérifie (5.3) tels que la solution  $(y, \partial_t y, P, Q) \in C(]0, T[, \mathcal{H})$  de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 y - \nabla \sigma(y) + \xi \mathbf{curl} P = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \epsilon \partial_t P - \mathbf{curl} Q - \xi \mathbf{curl} \partial_t y = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t Q + \mathbf{curl} P = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon P) = \mathbf{div}(\mu Q) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ Q \times \nu + \xi \partial_t y \times \nu = \psi_1, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \sigma_S(y) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(y)} + ay_T = \psi_{2T}, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \sigma_\nu(y) + \sigma_T^0(y) : \partial_m \nu + ay_\nu = \psi_{2\nu}, & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(T) = y_0, \partial_t y(T) = y_1, P(T) = P_0, Q(T) = Q_0, & \text{dans } \Omega,, \end{array} \right. \quad (5.4)$$

vérifie :

$$y(0) = \partial_t y(0) = P(0) = Q(0) = 0. \quad (5.5)$$

Ceci fait, on pose alors

$$u(t) = -y(T-t), \quad E(t) = -P(T-t), \quad H(t) = Q(T-t).$$

On prend  $(v_0, v_1, F_0, I_0)$  dans  $\mathcal{H}$ , on considère le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 v - \nabla \sigma(v) + \xi \mathbf{curl} F = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \epsilon \partial_t F - \mathbf{curl} I - \xi \mathbf{curl} \partial_t v = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t I + \mathbf{curl} F = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon F) = \mathbf{div}(\mu I) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ I \times \nu + \xi \partial_t v \times \nu - (F \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \sigma_S(v) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(v)} + av_T - \partial_t v_T = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \sigma_\nu(v) + \sigma_T^0(v) : \partial_m \nu + av_\nu - \partial_t v_\nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ v(T) = v_0, \partial_t v(T) = v_1, F(T) = F_0, I(T) = I_0, & \text{dans } \Omega,, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

qui admet une solution unique  $(v, \partial_t v, F, I) \in C(]0, T[, \mathcal{H})$  (Il suffit de faire le changement de variable  $\tilde{u} = -v(T-t)$ ,  $\tilde{E} = -F(T-t)$  et  $\tilde{H} = I(T-t)$ ).

D'après le Théorème 4.2, on a l'existence d'une constante positive  $\omega$  telle que :

$$\mathcal{E}(v(t), \partial_t v(t), F(t), I(t)) \leq M e^{-\omega(T-t)} \mathcal{E}(v_0, v_1, F_0, I_0). \quad (5.7)$$

On utilise la solution  $(v, \partial_t v, F, I)$  du système (5.6) et on considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 w - \nabla \sigma(w) + \xi \mathbf{curl} G = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \epsilon \partial_t G - \mathbf{curl} J - \xi \mathbf{curl} \partial_t w = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mu \partial_t J + \mathbf{curl} G = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{div}(\epsilon G) = \mathbf{div}(\mu J) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ J \times \nu + \xi \overline{\partial_t w \times \nu} - (G \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \sigma_S(w) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(w)} + aw_T + \partial_t w_T = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ \sigma_\nu(w) + \sigma_T^0(w) : \partial_m \nu + aw_\nu + \partial_t w_\nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ w(0) = v(0), \partial_t w(0) = \partial_t v(0), G(0) = F(0), J(0) = I(0), & \text{dans } \Omega,, \end{array} \right. \quad (5.8)$$

qui admet une solution unique  $(w, \partial_t w, G, J) \in C([0, T[, \mathcal{H})$  car  $(v(0), v'(0), F(0), I(0)) \in \mathcal{H}$ .

On pose maintenant  $y = w - v$ ,  $P = G - F$  et  $Q = J - I$ . D'après (5.8) et (5.6), on a  $(y, P, Q)$  vérifie (5.4) avec :

$$\psi_1 = - (G \times \nu) \times \nu - (F \times \nu) \times \nu, \quad (5.9)$$

$$\psi_2 = \psi_{2T} + \psi_{2\nu} \nu = -\partial_t w - \partial_t v. \quad (5.10)$$

On fixe  $T > 0$  et on pose  $d = Me^{-\omega T}$  ; donc  $d \in ]0, 1[$ . On définit l'opérateur linéaire  $\Lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  par :

$$\Lambda((v_0, v_1, F_0, I_0)) = (w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T)).$$

On a :

$$\begin{aligned} \|\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T))\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= 2\mathcal{E}(w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T)), \\ &\leq 2\mathcal{E}(w(0), \partial_t w(0), G(0), J(0)). \end{aligned}$$

En utilisant les conditions initiales du problème (5.8) et l'estimation (5.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Lambda(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2\mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)), \\ &\leq 2Me^{-\omega T} \mathcal{E}(v(0), \partial_t v(0), F(0), I(0)) \\ &= d \|(v_0, v_1, F_0, I_0)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \sqrt{d} < 1.$$

Donc  $\Lambda - I$  est un isomorphisme de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ . Alors, pour tout  $(y_0, y_1, P_0, Q_0) \in \mathcal{H}$ , il existe un unique  $(v_0, v_1, F_0, I_0) \in \mathcal{H}$  tel que :

$$\begin{aligned} (y_0, y_1, P_0, Q_0) &= (\Lambda - I)(v_0, v_1, F_0, I_0), \\ &= (w(T), \partial_t w(T), G(T), J(T)) - (v_0, v_1, F_0, I_0), \\ &= (y(T), \partial_t y(T), P(T), Q(T)). \end{aligned} \tag{5.11}$$

De plus, les identités (4.29), (5.11) et la définition de  $\Lambda$  montrent que  $\psi_1$  et  $\psi_2$  appartiennent à  $L^2(\Sigma_T)^3$  et la preuve du Théorème 5.1 est terminée.  $\square$

## 5.2 Stabilisation non linéaire

On procède comme dans [37], on applique le principe de Liu (*cf.* [35]) pour estimer l'énergie du système non linéaire par des termes relatifs aux feedbacks, en utilisant le système linéaire rétrograde avec donnée finale égale à la donnée finale du système direct. Ces termes sont alors estimés en utilisant l'estimation de stabilité qui est équivalente à la stabilité exponentielle du système linéaire rétrograde et une inégalité intégrale appropriée.

On a le théorème suivant :

**Théorème 5.2.** *On suppose que  $g_1$  et  $g_2$  satisfaisant les conditions (4.11), (4.12) et (4.13) ainsi que :*

$$|E|^2 + |g_i(E)|^2 \leq G(g_i(E) \cdot E), \quad \forall |E| \leq 1, \quad i = 1, 2, \tag{5.12}$$

où  $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est une fonction concave strictement croissante telle que  $G(0) = 0$ . Si  $\Omega$  vérifie l'estimation de stabilité, alors il existe des constantes  $c_2, c_3 > 0$  et  $T_1 > 0$  (dependant de  $T, \mathcal{E}(0)$  et  $|\Gamma|$ ) telles que :

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G \left( \frac{\psi^{-1}(c_2 t)}{c_2 T^2 |\Gamma| t} \right), \quad \forall t \geq T_1, \tag{5.13}$$

pour toute solution  $(u(t), E(t), H(t))$  de (4.1), où  $\psi$  est donnée par :

$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\phi(s)} ds, \quad \forall t > 0, \tag{5.14}$$

pour  $\phi$  définie par :

$$\phi(s) = T |\Gamma| G^{-1} \left( \frac{s}{c_3} \right). \tag{5.15}$$

La preuve de ce théorème est basée sur l'inégalité intégrale suivante, établie dans ([24]) (voir aussi [9]).

**Théorème 5.3.** Soit  $\mathcal{E} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction décroissante vérifiant l'inégalité

$$\int_S^{+\infty} \phi(\mathcal{E}(t))dt \leq T\mathcal{E}(S), \quad \forall S \geq 0, \quad (5.16)$$

pour un  $T > 0$  est une fonction  $\phi$  convexe et strictement croissante de  $[0, +\infty)$  à  $[0, +\infty)$  telle que  $\phi(0) = 0$ . Alors, il existe un temps  $t_1 > 0$  et un réel  $c_1$  dépendant de  $T$  et  $\mathcal{E}(0)$  tels que

$$\mathcal{E}(t) \leq \phi^{-1} \left( \frac{\psi^{-1}(c_1 t)}{c_1 T t} \right), \quad \forall t \leq t_1, \quad (5.17)$$

où  $\psi$  est définie par (5.14)

### Démonstration du théorème 5.2

Grâce au Lemme 4.4, il suffit d'établir (5.13) pour des données dans  $D(\mathcal{A})$ . Dans ce cas,  $(u, E, H)$  est la solution (forte) de (4.1). On considère  $(y, P, Q)$  la solution du problème (5.4) et (5.5) avec  $y(T) = u(T)$ ,  $\partial_t y(T) = \partial_t u(T)$ ,  $P(T) = E(T)$  et  $Q(T) = H(T)$ ,  $T > 0$ , assez grand, (l'existence est assurée par le Théorème 5.1). A partir de (4.1) et (5.4) on peut écrire :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{Q_T} \{ \partial_t y \cdot (\partial_t^2 u - \nabla \sigma(u) + \xi \text{Rot} E) \\ & + \partial_t u \cdot (\partial_t^2 y - \nabla \sigma(y) + \xi \text{curl} P) \\ & + \epsilon P \cdot (\partial_t E - \epsilon^{-1}(\text{curl} H + \xi \text{curl} \partial_t u)) + \mu Q \cdot (\partial_t H + \mu^{-1} \text{curl} E) \\ & + \epsilon E \cdot (\partial_t P - \epsilon^{-1}(\text{curl} Q + \xi \text{curl} \partial_t y)) + \mu H \cdot (\partial_t Q + \mu^{-1} \text{curl} P) \} dx dt. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{Q_T} \{ (\partial_t y \cdot \partial_t^2 u + \partial_t u \cdot \partial_t^2 y) + \epsilon (P \cdot \partial_t E + E \cdot \partial_t P) \\ & + \mu (Q \cdot \partial_t H + H \cdot \partial_t Q) - (\partial_t y \cdot \nabla \sigma(u) + \partial_t u \cdot \nabla \sigma(y)) \\ & \xi (\partial_t y \cdot \text{curl} E - E \cdot \text{curl} \partial_t y) + \xi (\partial_t u \cdot \text{curl} P - P \cdot \text{curl} \partial_t u) \\ & + (H \cdot \text{curl} P - P \cdot \text{curl} H) + (Q \cdot \text{curl} E - E \cdot \text{curl} Q) \} dx dt. \end{aligned}$$

En intégrant cette identité par partie par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{Q_T} \{ (\partial_t y \cdot \partial_t^2 u + \partial_t u \cdot \partial_t^2 y) + \epsilon (P \cdot \partial_t E + E \cdot \partial_t P) \\ & + \mu (Q \cdot \partial_t H + H \cdot \partial_t Q) + (\sigma(u) : \varepsilon(\partial_t y) + \sigma(y) : \varepsilon(\partial_t u)) \} dx dt \\ & - \langle \sigma(u) \cdot \nu, \partial_t y \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \langle \sigma(y) \cdot \nu, \partial_t u \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ & + \int_{\Sigma_T} \{ (H \times \nu) \cdot P + (Q \times \nu) \cdot E + \xi ((\partial_t y \times \nu) \cdot E + (\partial_t u \times \nu) \cdot P) \} d\sigma dt. \end{aligned}$$

L'identité (1.16) donne :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{Q_T} \partial_t \{ \partial_t y \cdot \partial_t u + \epsilon P \cdot E + \mu Q \cdot H + \sigma(u) : \varepsilon(y) \} dxdt \\
&\quad - \langle \sigma_S(u), \partial_t y \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \langle \sigma_\nu(u), \partial_t y \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\
&\quad - \langle \sigma_S(y), \partial_t u \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \langle \sigma_\nu(y), \partial_t u \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} . \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} \{ (H \times \nu) \cdot P + (Q \times \nu) \cdot E + \xi ((\partial_t y \times \nu) \cdot E + (\partial_t u \times \nu) \cdot P) \} d\sigma dt.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

En utilisant les conditions au bord de (4.1) et (5.4) dans (5.18), on en déduit :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{Q_T} \partial_t \{ \partial_t y \cdot \partial_t u + \epsilon P \cdot E + \mu Q \cdot H + \sigma(u) : \varepsilon(y) \} dxdt \\
&\quad - \langle \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)}, \partial_t y_T \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \langle \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu, \partial_t y_\nu \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\
&\quad - \langle \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(y)}, \partial_t u_T \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \langle \sigma_T^0(y) : \partial_m \nu, \partial_t u_\nu \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\
&\quad + a \int_{\Sigma_T} u \cdot \partial_t y d\sigma + a \int_{\Sigma_T} y \cdot \partial_t u d\sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} \{ \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - \partial_t u \cdot K_2 - P \cdot (g_1(E \times \nu) \times \nu) + E \cdot K_1 \} d\sigma dt.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.9), ensuite l'identité (1.6), on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{Q_T} \partial_t \{ \partial_t y \cdot \partial_t u + \epsilon P \cdot E + \mu Q \cdot H + \sigma(u) : \varepsilon(y) \} dxdt \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} \{ \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(\partial_t y) + \sigma_T^0(y) : \varepsilon_T^0(\partial_t u) + a(u \cdot \partial_t y + y \cdot \partial_t u) \} d\sigma dt \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} \{ \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - \partial_t u \cdot K_2 - P \cdot (g_1(E \times \nu) \times \nu) + E \cdot K_1 \} d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Cette identité est équivalente à :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{Q_T} \partial_t \{ \partial_t y \cdot \partial_t u + \epsilon P \cdot E + \mu Q \cdot H + \sigma(u) : \varepsilon(y) \} dxdt \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} \partial_t \{ \sigma_T^0(u) : \varepsilon_T^0(y) + a u \cdot y \} d\sigma dt \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} \{ \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - \partial_t u \cdot K_2 - P \cdot (g_1(E \times \nu) \times \nu) + E \cdot K_1 \} d\sigma dt.
\end{aligned}$$

En intégrant cette identité par partie pour  $t \in [0, T]$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left\{ \partial_t y(x, T) \cdot \partial_t u(x, T) + \epsilon P(x, T) \cdot E(x, T) \right. \\
&\quad \left. + \mu Q(x, T) \cdot H(x, T) + \sigma(u)(x, T) : \varepsilon(y)(x, T) \right\} dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \left\{ \partial_t y(x, 0) \cdot \partial_t u(x, 0) + \epsilon P(x, 0) \cdot E(x, 0) \right. \\
&\quad \left. + \mu Q(x, 0) \cdot H(x, 0) + \sigma(u)(x, 0) : \varepsilon(y)(x, 0) \right\} dx \\
&\quad + \int_{\Gamma} \left\{ \sigma_T^0(u)(x, T) : \varepsilon_T^0(y)(x, T) + au(x, T) \cdot y(x, T) \right\} d\sigma \\
&\quad - \left\{ \sigma_T^0(u)(x, 0) : \varepsilon_T^0(y)(x, 0) + au(x, 0) \cdot y(x, 0) \right\} d\sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} \left\{ \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - \partial_t u \cdot K_2 - P \cdot (g_1(E \times \nu) \times \nu) + E \cdot K_1 \right\} d\sigma dt.
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions initiales et finales de (4.1) et (5.4), on arrive à :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left\{ |\partial_t u(x, T)|^2 + \epsilon |E(x, T)|^2 + \mu |H(x, T)|^2 + \sigma(u)(x, T) : \varepsilon(u)(x, T) \right\} dx \\
&\quad + \int_{\Gamma} \left\{ \sigma_T^0(u)(x, T) : \varepsilon_T^0(u)(x, T) + a|u(x, T)|^2 \right\} d\sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma_T} \left\{ \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - \partial_t u \cdot K_2 - P \cdot (g_1(E \times \nu) \times \nu) + E \cdot K_1 \right\} d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant l'expression de l'énergie, on obtient

$$2\mathcal{E}(T) = \int_{\Sigma_T} \left\{ \partial_t u \cdot K_2 - \partial_t y \cdot g_2(\partial_t u) - (P \times \nu) \cdot g_1(E \times \nu) - E \cdot K_1 \right\} d\sigma dt.$$

Ensuite, on procède comme dans [37] (le reste de la preuve est très similaire à celle du Théorème 3.4 du première partie, voir aussi Théorème 5.2 de [36], nous avons omis les détails de la preuve) et nous arrivons à

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G \left( \frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{|\Sigma_T|} \right) = \phi^{-1}(\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)), \quad \forall t \geq 0,$$

où  $\phi$  est défini par (5.15). Comme  $\phi$  est décroissante, cette estimation implique que, pour tout  $0 \leq S < N$  avec  $N$  assez grand,

$$\begin{aligned}
\int_S^N \phi(\mathcal{E}(t)) dt &\leq \int_S^N (\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)) dt \\
&\leq \int_S^{S+T} \mathcal{E}(t) dt - \int_N^{N+T} \mathcal{E}(t+T) dt \leq T\mathcal{E}(S) - T\mathcal{E}(N+T).
\end{aligned}$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini on arrive à l'estimation (5.16) (voir Lemme 5.1 de [9]) et on conclut par le Théorème 5.3, la démonstration est donc achevée.  $\square$



# Exemples

Dans ce Chapitre, Nous donnons quelques exemples pour illustrer nos résultats. Nous nous tenons à distinguer plusieurs degrés de stabilité, notamment la décroissance exponentielle, polynomiale, logarithmique, double logarithmique.

**Exemple 1.** On suppose que  $g_i$ ,  $i = 1, 2$  vérifient (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14) ainsi que :

$$\begin{aligned}\xi \cdot g(\xi) &\geq c_0 |\xi|^{p+1}, \quad \forall |\xi| \leq 1, \\ |g_i(\xi)| &\leq C_0 |\xi|^\alpha, \quad \forall |\xi| \leq 1,\end{aligned}$$

où  $c_0, C_0$  sont des constantes positives,  $\alpha \in (0, 1]$  et  $p \geq \alpha$ . Alors  $g_i$  vérifie (5.12) avec

$$G(s) = s^{2/q+1} \text{ et } q = \frac{p+1}{\alpha} - 1.$$

- Si  $p = \alpha = 1$  alors  $G(s) = s$ , dans ce cas  $\psi^{-1}(t) = e^{-t}$ , on obtient donc une décroissance exponentielle.
- Si  $p+1 > \alpha$ , alors  $\psi^{-1}(t) = t^{\frac{2}{1-q}}$  et on obtient une décroissance de l'ordre  $t^{-\frac{2\alpha}{p+1-2\alpha}}$ .

**Exemple 2.** Supposons que  $g_i(\xi) = \exp(-\frac{1}{|\xi|^{2p}}) \frac{\xi}{|\xi|^2}$  pour  $i = 1, 2$ ,  $|\xi|$  assez petit et  $p > 0$ ; alors :

$$\xi \cdot g_i(\xi) = f(|\xi|^2), \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } |\xi| \text{ assez petit,}$$

avec  $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^p})$  vérifie les conditions suivantes :

$$\xi \cdot g_i(\xi) \geq f(|\xi|^2), \quad |g_i(\xi)| \leq c_1 |\xi|, \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } |\xi| \leq 1, \quad (5.19)$$

où  $c_1$  est une constante positive et  $f$  est une fonction de  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, strictement croissante et convexe telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0. \quad (5.20)$$

De (5.19) et (5.12), on en déduit :

$$|\xi|^2 + |g_i(\xi)|^2 \leq (1 + c_1^2) |\xi|^2,$$

## Exemples

---

et comme  $f$  est une fonction croissante et convexe sur  $[0, 1]$ , alors  $f^{-1}$  est concave et on choisit la fonction  $G$  telle que :

$$G(f(x)) = (1 + c_1^2)x.$$

Ceci implique que :  $G(t) = (1 + c_1^2)f^{-1}(t)$ , où :

$$f^{-1}(t) = \frac{1}{|\log t|^{\frac{1}{p}}}.$$

Ce qui entraîne que :

$$G(t) = \frac{c_3}{|\log t|^{\frac{1}{p}}},$$

où  $c_3 = (1 + c_1^2)$  est une constante positive. En appliquant le Théorème 5.2 et 5.3, on obtient une décroissance de la forme :

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{c_3}{|\log t|^{\frac{1}{p}}}.$$

**Exemple 3.** Supposons que  $g_i(\xi) = \exp(-\exp(\frac{1}{|\xi|^{2p}})) \frac{\xi}{|\xi|^2}$ , pour  $i = 1, 2$ ,  $|\xi|$  assez petit et  $p > 0$ . Alors :

$$\xi \cdot g_i(\xi) = f(|\xi|^2) \text{ pour } |\xi| \text{ assez petit,}$$

avec  $f(x) = \exp(-\exp(\frac{1}{x^2}))$  vérifie les conditions (5.19) et (5.20). Comme dans l'exemple précédent on choisit la fonction  $G$  de sorte que :

$$G(f(x)) = (1 + c_1^2)x,$$

d'où :

$$G(t) = \frac{(1 + c_1^2)}{(\log |\log t|)^{\frac{1}{p}}}.$$

Par le Théorème 5.2 et 5.3, on obtient une décroissance de la forme :

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{c_3}{(\log |\log t|)^{\frac{1}{p}}}.$$

où  $c_3$  est une constante positive.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

La problématique de cette thèse était d'étudier la stabilisation frontière de certaines classes de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites de type Ventcel stationnaires soumis à deux fonctions feedbacks frontières non linéaires.

Dans la partie I, nous avons considéré la stabilisation d'un système hyperbolique, en dimension 3 d'espace, constitué d'une équation de type équation des ondes avec conditions au bord de Ventcel couplée avec un système de Maxwell. On a d'abord démontré, dans le chapitre 2, l'existence, l'unicité et la régularité des solutions en utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires.

Dans le troisième chapitre, nous avons réussi à établir l'estimation de stabilité qui est équivalente à la stabilité exponentielle du système linéaire associé en mettant en oeuvre la méthode de multiplicateurs ; le taux de décroissance ne dépend que des caractéristiques géométriques de  $\Omega$ . Ensuite, nous avons prouvé qu'on peut appliquer le principe de Russell pour déduire la contrôlabilité exacte. Après cela, nous avons exploité les résultats de stabilisation exponentielle du système linéaire associé et le principe de Russell, pour obtenir une décroissance explicite de l'énergie du système non linéaire, en donnant des conditions suffisantes sur les fonctions  $g_1$  et  $g_2$

Dans la deuxième partie de cette thèse nous avons étendu des résultats de stabilisation du système couplé Maxwell/ondes au système de l'élasto-magnétisme avec des conditions au bord de Ventcel.

Dans le chapitre 4, nous avons abordé, dans un premier lieu, l'existence, l'unicité et la régularité des solutions, ensuite nous avons prouvé que l'approche introduite dans [8], s'adapte également pour le système de l'élasto-magnétisme, en montrant que les feedbacks naturels assure une décroissance en exponentielle de l'énergie.

Enfin, à partir du principe de Russell et de Liu, nous avons montré, dans le chapitre 5, que la stabilité exponentielle du système linéaire est une condition suffisante

pour obtenir la stabilité du système non linéaire.

## Perspectives

Pour aller plus loin, les quelques pistes suivantes sont à prendre en compte :

1. Il serait intéressant de généraliser les résultats de ce travail au système de la thermoélasticité anisotrope :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \mathbf{div} \sigma(u) + \alpha \nabla \theta + f(\partial_t u) = 0 & \text{dans } Q := \Omega \times ]0, \infty[, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + \beta \mathbf{div} \partial_t u = 0 & \text{dans } Q, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Sigma := \Gamma \times ]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{dans } \Sigma_1 := \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \\ \sigma(u) \cdot \nu + au + g(\partial_t u) = 0 & \text{sur } \Sigma_2 := \Gamma_2 \times ]0, \infty[, \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1, \theta(0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.21)$$

en remplaçant la condition de Neumann dans le système (5.21) par les conditions de Ventcel suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_S(u) - \overline{\mathbf{div}_T \sigma_T^0(u)} + au_T + g_{2T}(\partial_t u) &= 0, \text{ sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times ]0, +\infty[, \\ \sigma_\nu(u) + \sigma_T^0(u) : \partial_m \nu + au_\nu + g_{2\nu}(\partial_t u) &= 0, \text{ sur } \Sigma_2. \end{aligned}$$

On note que la stabilisation du problème (5.21) a été considéré dans [15].

2. De même, nous envisageons d'étendre les résultats de stabilité et de contrôlabilité aux problèmes de Maxwell/ondes et de l'elasto-magnétisme mais avec plutôt des conditions au bord de Ventcel **évolutives**.
3. Plus généralement, nous pourrions également effectuer l'étude de la stabilisation frontière d'autres problèmes, en utilisant la même approche, comme :
  - Le bilaplacien
  - l'équation de la chaleur
  - ou d'opérateurs plus généraux comme : coefficients variables, ordre élevé, etc....

# Bibliographie

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, Pure and Applied Mathematics, New York-London, **65** (1975).
- [2] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE and V. GIRAULT *Vector potentials in tree-dimensional nonsmooth domains*, Math. Meth. Applied Sc., **21** (1998), 823–864.
- [3] F. BEN BELGACEM, C. BERNARDI, M. COSTABEL, M. DAUGE, *Un résultat de densité pour les équations de Maxwell*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **326** (1998), 1305-1310.
- [4] R. BEY, A. HEMINNA and J. P. LOHEAC, *Boundary stabilization of a linear elastodynamic system with variable coefficients*, Electronic Journal of Differential Equations, **78** (2001), 1–23.
- [5] R. BEY, A. HEMINNA, and J. P. LOHEAC, *Stabilisation frontière du système linéaire non isotrope de l'élasticité*, C.R. Acad. Sci. Paris, **333** (2001), 1083–1088.
- [6] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1993.
- [7] M. M. CAVALCANTI, A. KHEMMOUDJ, M. MEDJDEN, *Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel problem with variable coefficients and dynamic boundary condition*, J. Math. Anal. Appl **328** (2007), 900–930.
- [8] M. ELLER, J.-E. LAGNESE, S. NICAISE, *Stabilization of heterogeneous Maxwell's equations by linear or nonlinear boundary feedbacks*, Electronic journal of differential equations, **2002** (2002), 1–26.
- [9] M. ELLER, J.-E. LAGNESE, S. NICAISE, *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping*, Comp. and Appl. Math., **21** (2002), 135–165.
- [10] A. HEMINNA, *Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux limites modélisant des jonctions de multi-structures*, Thèse, U.S.T.H.B., Alger, 2000.
- [11] A. HEMINNA, *Stabilisation frontière de l'équation des ondes avec condition de Ventcel*, Maghreb Math. Rev., **11** (2002), 165–196.

- [12] A. HEMINNA, *Contrôlabilité exacte d'un problème avec conditions de Ventcel évolutives pour le système de l'élasticité*, Portugaliae Mathematica, **58** (2001), 271–315.
- [13] A. HEMINNA, *Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, **328** (1999), 1171–1174.
- [14] A. HEMINNA, *Stabilisation Frontière de Problèmes de Ventcel*, ESAIM Control Optim. Calc. Var, **5** (2000), 591–622.
- [15] A. HEMINNA, S. NICAISE, A. SENE, *Stabilisation d'un système de la thermoélasticité avec feedbacks non linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, série I Math. **339** (2004), 561–566.
- [16] , L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, 116, Springer Verlag Band (1969).
- [17] T. IKEDA, *Fundamentals of piezoelectricity*, Oxford Univ. Press, 1996.
- [18] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.
- [19] B.-V. KAPITANOV, *Stabilization and exact boundary controllability for Maxwell's equations*, SIAM J. Control Optim., **32** (1994), 408–420.
- [20] B. V. KAPITANOV and M. A. RAUPP, *Exact boundary controllability in problems of transmission for the system of electromagneto-elastic*, Math. Meth. Appl. Sci, **24** (2001), 193–207.
- [21] H. KASRI and A. HEMINNA, *Exponential stability of a coupled system with Wentzell conditions*, Evol Equat and Contr Theo, **5** (2016), 235–250.
- [22] H. KASRI and A. HEMINNA, *On the exponential stabilization of a electromagneto-elastic system with Wentzell conditions*, Math. Meth. Appl. Sci, to appear.
- [23] V. KOMORNIK, *Boundary stabilization, observation and control of Maxwell's equations*, PanAm. Math. J., **4** (1994), 47–61.
- [24] V. KOMORNIK, *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, RAM 36, Masson, Paris, 1994.
- [25] V. KOMORNIK, *Rapid boundary stabilization of Maxwell's equations*, Equation Aux Dérivées Partielles et Applications, Elsevier, Paris, 611–618 (1998). RAM 36, Masson, Paris, 1994.
- [26] J.-E. LAGNESE, *Decay of solution of wave equations in a bounded region with boundary dissipation*, J. Differential Equations, **50** (1983), 163–182.
- [27] J.-E. LAGNESE, *Boundary stabilization of linear elastodynamic systems*, SIAM J. Control Optim., **21** (1983), 968–984.
- [28] J.-E. LAGNESE, *Exact controllability of Maxwell's equations in a general region*, SIAM J. Control Optim., **27** (1989), 374–388.

- [29] , K. LAOUBI, S. NICAISE, *Polynomial stabilization of the wave equation with Ventcel's boundary conditions*, Math. Nachr., **283** (2010), 1428–1438.
- [30] , J.P. LASALLE, *Some extensions of Liapounov's second method*, (1960).
- [31] K. LEMRBET, *Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers*, Thèse, U.S.T.H.B., Alger, 1987.
- [32] K. LEMRABET, *Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier*, C. R. Acad. Sci. Paris Série. I Math, **300** (1985), 531–534.
- [33] K. LEMRBET et D. TENIOU, *Un problème d'évolution de type Ventcel*, Maghreb Math. Rev., **1** (1992), 15–29.
- [34] J. L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de système distribués*, tome1, Masson, 1988.
- [35] W.-J. LIU, *Partial exact controllability and exponential stability of higher dimensional linear thermoelasticity*, ESIAM : COCV, **3**, (1998), 23–48.
- [36] S. NICAISE, *Stability and controllability of the electromagneto-elastic system*, Portugaliae mathematica., **60** (2003), 37–70.
- [37] S. NICAISE, *Stability and controllability of and abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications*, Rendiconti di Matematica, serie VII., **23** (2003), 83–116.
- [38] S. NICAISE, *Exact boundary controllability of Maxwell's equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem*, SIAM J. Control and Opt., **38** (2000), 1145–1170.
- [39] D.-L. RUSSELL, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations*, Recent progress and open questions, SIAM Rev., **20** (1978), 639–739.
- [40] D.-L. RUSSELL, *The Dirichlet-Neumann boundary control problem associated with Maxwell's equations in a cylindrical region*, SIAM J. Control Opt., **24** (1986), 199–229.
- [41] K.D. PHUNG, *Contôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques*, ESIAM : COCV., **5** (2000), 87–137.
- [42] R.-E. SHOWALTER, *-Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Math. Surveys and Monographs, 49, AMS, 1997.
- [43] R. VALID, *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures*, Eyrolles, Paris (1977).
- [44] A. D. WENTZELL (VENTCEL), *On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes*, Theor. Probab. Appl, **4** (1959), 164–177.