

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Génie Civil



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

En **GENIE CIVIL**

Spécialité : **Construction**

Par : **Mr Hamli Benzahar Hamid**

Sujet

**Interaction entre une macro-fissure et des dislocations avoisinantes
dans le cas de matériaux composites**

Soutenu publiquement le 26 /06 /2014, devant le jury composé de :

Mme H. HADJAB	Professeur	à l'U.S.T.H.B	Présidente
M. M. CHABAAT	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de thèse
M. D. BENOUAR	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examineur
M. A. BALI	Professeur	à l'ENP Alger.	Examineur
M. Y. MEHANI	Maitre de Recherche	au CGS Alger	Examineur
M. M. TOUATI	Maitre de Conférence	à l'USTHB	Examineur

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté pour mener à terme ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon directeur de thèse Monsieur CHABAAT Mohamed, Professeur à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB, pour avoir dirigé ce travail et qui, malgré ses multiples obligations, n'a jamais ménagé aucun effort pour suivre de près cette étude. Il a toujours répondu présent à chaque fois que je le sollicite et pour cela, je lui voue un grand respect.

Je tiens à remercier Mme HADJAB H., Professeur à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB, qui me fait le grand honneur de présider le jury.

J'adresse également mes remerciements à Mr. BENOUAR Djillali, Professeur à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB, qui me fait l'honneur d'examiner ce modeste travail.

Mes remerciements vont également à Mr. BALI Abderrahim, Professeur au Département de Génie Civil de l'Ecole Nationale Polytechnique, Mr. TOUATI Mokhtar, Maître de Conférences à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB, et Mr. MEHANI Youcef, Maître de Recherche au CGS, pour avoir accepté la laborieuse tâche d'examiner ce travail.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce travail de recherche.

ملخص

التشقق يتأثر في اغلب الأحيان بالمكونات الدقيقة للمواد. هذه الأخيرة معتبرة غير متجانسة سلوكها بكون هش أو مرن، إذن حضور الجزيئات التي هي عبارة عن تشققات صغيرة أو ثغور.... الخ تؤثر على التشققات الكبيرة الموجودة في المواد. في دراسات حديثة الرؤى المهجرية برهنت أن المنطقة المتضررة التي تعتبر كمنطقة مكثفة بالجزيئات أو الثغرات تتطور بجوار الشق الكبير. هذه المنطقة خاضعة لتركيز جد مهم لحقول الاجهادات والتي تسمى المنطقة ذات الضرر الكبير، وبالتالي دراسة مسالة التشقق ترجع عامة إلى تحديد حقول الاجهادات والتنقلات حول الشق الكبير وذلك باحترام الشروط النهائية. مسالة التجاذب بين الشق الكبير و الشق الصغير المجاور تكون باستعمال نظرية الكمون المركب في حالة المادة المزدوجة التي تختلف فيها الخصائص كمقياس يونغ ومعامل بواسون. حقول الاجهادات والتنقلات هم كذلك معروفون بدلالة هذه الخصائص. النتائج المستخرجة قابلة للمقارنة مع النتائج المستخرجة من طرف باحثين آخرين في حالة المواد الهشة والمتجانسة. في حالة غياب الشق الصغير بجوار الشق الكبير. معامل تكثيف الاجهادات المحسوبة عدديا. تقبل المقارنة مع نتائج ايروين خلال انتشار الشق الكبير. حضور الشق الصغير بجوار الشق الكبير يسبب عاملين : عامل التضخم وبالتالي زيادة الاجهادات على مستوي حافة الشق الكبير وبالتالي يسرع انتشار هذا الشق. وعامل التخفيض الذي يسبب انخفاض في الاجهادات التي تخفض انتشار التشقق. من خلال الاستعانة بهذه الحقول، قيمة الطاقة الخطية المتبقية عرفت كطاقة محررة خلال انتشار التشقق.

Résumé

La rupture est généralement influencée dans la majorité des cas par la composition microstructurale des matériaux. Ces derniers sont considérés hétérogènes. Leur comportement est soit ductile ou fragile. Donc, la présence de particules telles une inclusion, une fissure, un défaut, un vide etc ... dans ces matériaux influence grandement la propagation des fissures déjà existantes. Dans des études récentes, les observations microscopiques ont montré que la zone d'endommagement, qui est essentiellement considérée comme étant une région intensive de dislocations ou de défauts, se développe au voisinage du front de la macro-fissure. Cette zone présente une concentration très importante des champs de contraintes d'où l'appellation de zone à fortes perturbations. Par conséquent, l'étude de problèmes de rupture revient généralement à la détermination des champs de contraintes et de déplacements autour de la fissure tout en tenant compte des conditions aux limites. Le problème d'interactions entre fissures et dislocations avoisinantes est formulé en utilisant la théorie des potentiels complexes pour le cas d'un bi-matériau dont les caractéristiques sont différentes : module d'élasticité de Young et le coefficient de Poisson. Les champs de contraintes et de déplacements sont ainsi déterminés en fonction de ces deux paramètres. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une comparaison avec ceux déterminés par d'autres chercheurs pour le cas d'un matériau fragile et homogène. Dans le cas d'absence la dislocation au voisinage de la fissure principale le facteur d'intensité de contrainte trouvé, numériquement, peut être comparé avec ce trouvé par Irwin. Durant la propagation de la macro-fissure, la présence de la dislocation au voisinage de cette dernière a induit deux effets : un effet d'amplification et par conséquent, une augmentation de la contrainte au niveau de la singularité accélérant la propagation de la fissure. Et un effet réducteur entraînant une diminution de la contrainte provoquant une décélération de propagation de macro-fissure. Sur la base de ces champs, le taux de l'énergie de restitution translationnelle a été défini comme étant une énergie libérée lors de la propagation de macro-fissure.

Abstract

In general, fracture of brittle materials is influenced in the majority of the cases by the microstructural composition of materials. For heterogeneous materials, the behavior is ductile or brittle and sometimes both. Therefore, the presence of particles such inclusions, cracks, defects, voids, a vacuum etc... in these materials influences the propagation of the already existing cracks. In recent studies, microscopic observations showed that the zone of damage, which is primarily regarded as being an intensive area of microscopic cracks or defects, develops in the vicinity of the face of the crack. This zone presents a very significant concentration of stress fields and it is known as being a zone at strong disturbances. Consequently, the study of problems dealing with fracture consider the determination of the displacement and stress fields around the crack taking into account prescribed boundary conditions. On the other hand, interactions problem between neighboring cracks and dislocations is formulated using the theory of the complex potentials in the case of a bi-material from which the characteristics of materials are different: Young's modulus and Poisson's ratio. In this research work, displacement and stress fields are determined according to these two parameters. Obtained results are compared with those determined by other researchers in the case of an homogeneous brittle material. In the case of absence of dislocations in the vicinity of the main crack, stress intensity factors found numerically, are compared with those obtained by Irwin. During the propagation of an initial crack, the presence of dislocations in the vicinity of the crack tip induced two effects: an effect of amplification leading to an increase in the stress intensity which accelerates the propagation of the crack while a reducing effect diminishes the stress intensity causing a deceleration in the propagation of the crack. On the basis of these fields, the rate of the energy release rate translational is defined as being an energy released during the propagation of the crack. In this research work, this parameter is the subject of a meticulous study regarding the resistance of bi-materials with defects.

NOTATIONS

Q_i	charges croissantes
q_i	déplacements généralisés
σ_y^{max}	contrainte maximale appliquée aux extrémités libres
a, b	dimensions de la fissure elliptique selon segment x et y respectivement
e	épaisseur de la plaque
J	intégrale de Rice
K_i	coefficient d'intensité de contrainte suivant le mode i
n_i	composantes de la normale sortante
[P]	matrice des fonctions de forme des contraintes
{q}	vecteur des déplacements nodaux
[S]	matrice de souplesse
S_{Jk1}	tenseur des souplesses
S_0	surface du triangle d'intégration
S_u	partie de la surface où les déplacements sont imposés
S_σ	partie de la surface où les contraintes sont imposées
a_0	distance intra-atomique.
σ_{th}	contrainte de rupture théorique
$f_{ij}(\theta)$	
C,D	caractéristiques orthotropes du matériau
A(x,y)	fonction d'Airy
I_H	intégrale hybride de contour
{ σ }	composantes du champ de contraintes
ϕ, χ, ψ	fonctions de variables complexes
λn	paramètre réel où n est un entier (n = 1,2,...).
A_n, B_n	constantes complexes
$f_{ij}(\theta), g_{ij}(\theta)$	représente les distributions angulaires de contraintes
E_x, E_y	module d'élasticité longitudinale suivant la direction (ox) et (oy) respectivement
k	paramètre dépendant de l'état plan
ξ, η	coordonnées intrinsèques du repère local
ρ	rayon ou la distance entre la fissure principale et la dislocation avoisinante.

β	angle d'orientation de rayon ρ autour de la fissure principale.
r	longueur de la dislocation.
θ	angle d'orientation de r
τ_t	contrainte tangentielle.
μ	module du cisaillement.
b	vecteur de burgers.
L	ligne de dislocation notée.
a	longueur de la fissure elliptique.
u_x, u_y, u_z	déplacements dans les directions x y et z respectivement.
ε_{ij}	déformation suivant la direction x_{ij} .
σ_{ij}	contrainte.
ν	coefficient de Poisson.
r_0	rayon du cylindre, d'approximation le coeur de dislocation.
U	énergie restituée au cours de la formation de la fissure.
W	énergie consommée pour la formation de la fissure.
γ	énergie de surface du matériau par unité de la fissure.
A	surface de la rupture.
\dot{G}	dérivée du taux de restitution d'énergie.
Z	nombre complexe.
$\text{Re}Z$	partie réelle du nombre complexe.
$\text{Im}Z$	partie imaginaire du nombre complexe.
z_d	point situation de dislocation.
\bar{Z}	conjuguée du nombre complexe Z .
f_1, f_2	forces d'image.
R_L, R_T	dureté longitudinale et transversale respectivement.
G_L	taux de rejets d'énergie de tension pour la rupture longitudinale de la fibre.
G_T	taux de rejets d'énergie de tension pour la rupture transversale de la fibre.
E_1, E_2	modules d'élasticité des matériaux 1 et 2 respectivement.
ν_1, ν_2	coefficient de Poisson des matériaux 1 et 2 respectivement.
u_i^A, u_i^B	déplacements des matériaux A et B dans la direction x_i respectivement.

$\sigma_{i2}^A, \sigma_{i2}^B$	contraintes des matériaux A et B dans la direction x_{i2} respectivement.
u_i	déplacement dans la direction x_i
b_1, b_2	composantes le vecteur de burgers.
x_{1d}	position de la dislocation dans l'interface (entre les deux matériau A et B).
μ^A, μ^B	modules de cisaillement de matériaux A et B, respectivement.
G^d, G^g	taux de restitution d'énergie, coté droit et coté gauche respectivement
$\phi_{fente}^A, \psi_{fente}^A$	potentiels analytiques complexes de la fissure principale de matériaux A et B respectivement.
$\psi_{mic}^A, \phi_{micr}^A$	potentiels analytiques complexes de dislocation des matériaux A et B respectivement.
ϕ_{tot}^A, ψ_{tot}	potentiels analytiques complexes globales de matériaux A et B respectivement.
K_1^{tip}	facteur d'intensité de contraintes au bout de la fissure principale en mode I.
ΔK	variation du facteur d'intensité de contraintes.
w_e	énergie dépensée par fissuration
E_e	énergie élastique
G	taux de restitution d'énergie lors l'interface.
b	distance de séparation entre deux atomes
b_0	distance initiale de séparation entre deux atomes
f	fonction continûment dérivable
Γ	contour d'intégration fermé.
$u_{i,x}$	dérivation du déplacement du point i par rapport à X.
σ_{max}	contrainte maximal nécessaire pour séparer deux atomes.
ΔJ	taux de restitution d'énergie dans la zone endommagée.

Liste des Figures

- Figure 1.1 Rupture fragile par clivage ; acier extra-doux rompu par choc à -196°C
- Figure 1.2 Zone limitant le voisinage d'une pointe de fissure
- Figure 1.3 a) Mode I (ouverture), b) Mode II (glissement), c) Mode III (déchirement)
- Figure 1.4 Rupture fragile et ductile.
- Figure 1.5 Concentration de contrainte.
- Figure 1.6 Présence d'une fissure
- Figure 1.7 Variation de la forme de la structure
- Figure 1.8 Variation du champ de contrainte due à la variation du domaine.
- figure1.9 Variation du champ de déplacement due à la variation du domaine
- Figure 2.1 Divers segments d'une courbe.
- Figure 2.2 Dislocation vis ($\mathbf{b} // \mathbf{L}$).
- Figure 2.3 Dislocation coin ($\mathbf{b} \perp \mathbf{L}$)
- Figure 2.4 Une fissure semi infinie d'interface] $-\infty, 0$] avec une dislocation en (z_d).
- Figure 2.5 Variation de la force d'image (f) en fonction de distance (x_{1d}).
- Figure 2.6 Une fissure finie d'interface, $x = [-a, +a]$, avec une dislocation en (z_d).
- Figure 3.1 Schéma du modèle proposé en bi-matériau en présence la dislocation
- Figure 3.2 Fissure n'ayant pas atteint l'interface.
- Figure 3.3 Fissure au droit de l'interface.
- Figure 3.4 Fissure ayant traversé l'interface
- Figure 3.5 Courbes d'isocotraines (σ_{11}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation. cas où ($\theta = 0$).
- Figure 3.6 Courbe d'isocotraines (σ_{22}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation. cas où($\theta = 0$).
- Figure 3.7 Courbe d'isocotraines (σ_{12}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation. cas où ($\theta = 0$).
- Figure 3.8 Courbe d'isocotraines (σ_{11}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation. cas où ($\theta = \pi/2$).
- Figure 3.9 Courbe d'isocotraines (σ_{22}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation.cas où ($\theta = \pi/2$).
- Figure 3.10 Courbe d'isocotraines(σ_{12}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation. cas où ($\theta = \pi/2$).

Figure 3.11 Variation du facteur d'intensité de contraintes ($\Delta K/K_0$) en fonction de l'angle β d'orientation de dislocation. cas où $\theta = 0^0$.

Figure 3.12 Variation du facteur d'intensité de contraintes ($\Delta K/K_0$) en fonction de l'angle β d'orientation de dislocation. cas où $\theta = 45^0$.

Figure 3.13 Variation du facteur d'intensité de contraintes ($\Delta K/K_0$) en fonction de l'angle β d'orientation de dislocation. cas où $\theta = 90^0$.

Figure 4.1 Vue générale d'un élément cassé en verre recuit

Figure 4.2 Dessins de faciès de rupture pour différentes causes de rupture

Figure 4.3 Raccordement du super élément avec des éléments classiques à 4 nœuds.

Figure 4.4 Raccordement du super élément avec des éléments classiques à 8 nœuds.

Figure 4.5 Super élément à 9 nœuds.

Figure 4.6 Super élément à 17 nœuds.

Figure 4.7 Le modèle de rupture proposé

Figure 4.8 les conditions aux limites et le type de chargement

Figure 4.9 Les valeurs de contraintes (σ_{22}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 5mm$).

Figure 4.10 Les valeurs de contraintes (σ_{12}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 5mm$).

Figure 4.11 Les valeurs de contraintes (σ_{11}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 5mm$).

Figure 4.12 Les valeurs de contraintes (σ_{11}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 30 mm$).

Figure 4.13 Les valeurs de contraintes (σ_{22}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 30 mm$).

Figure 4.14 Les valeurs de contraintes (σ_{12}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 30 mm$).

Figure 4.15 Variation de la contrainte (σ_{11}) en fonction de la longueur de la fissure principale.

Figure 4.16 Variation de la contrainte (σ_{12}) en fonction de la longueur de la fissure principale.

Figure 4.17 Variation de la contrainte (σ_{22}) en fonction de la longueur de la fissure principale.

Figure 4.18 Variation du facteur d'intensité de contraintes (FIC) en fonction de la longueur de la fissure.

Figure 5.1 Schématisation du modèle proposé

Figure 5.2 Condition aux limites et de chargement du modèle fissuré ayant une dislocation.

Figure 5.3 Cartographie des contraintes ((σ_{12})), en présence de la dislocation à l'extrémité libre.

Figure 5.4 Cartographie des contraintes ((σ_{11})), en présence de la dislocation à l'extrémité libre

Figure 5.5 Cartographie des contraintes ((σ_{22})), en présence de la dislocation à l'extrémité libre

Figure 5.6 Cartographie des contraintes ((σ_{22})), Cas de distance entre la fissure principale et la dislocation ($l=30\text{mm}$)

Figure 5.7 Cartographie des contraintes ((σ_{12})), Cas de distance entre la fissure principale et la dislocation ($l=30\text{mm}$)

Figure 5.8 Cartographie des contraintes ((σ_{11})), Cas de distance entre la fissure principale et la dislocation ($l=30\text{mm}$)

Figure 5.9 Variation de contrainte (σ_{22}) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm).

Figure 5.10 Variation de contrainte (σ_{12}) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm)

Figure 5.11 Variation de contrainte (σ_{11}) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm).

Figure 5.12 Variation du facteur d'intensité de contraintes (FIC) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation. l (mm).

Figure 5.13 Variation du facteur d'intensité de contrainte ($\Delta K/K$) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm)

Figure 6.1 Énergie de séparation de deux atomes dans les métaux [3].

Figure 6.2 Déformation ε_{22} (mm) pour une fissure de $a = 5\text{mm}$.

Figure 6.3 Déformation ε_{22} (mm) pour une fissure de $a = 30\text{mm}$.

Figure 6.4 Déplacement u_{22} (mm) pour une fissure de $a = 5\text{mm}$.

Figure 6.5 Déplacement u_{22} (mm) pour une fissure de $a = 30\text{mm}$.

Figure 6.6 Déformation ε_{22} en (mm) au bout de la fissure principale en absence de la dislocation

Figure 6.7 Energie de déformation W en 10^{-3} (Joules) au bout de la fissure principale en absence de la dislocation

Figure 6.8 Intégrale de contour

Figure 6.9 Cas d'un contour rectangulaire

Figure 6.10 Variation de l'énergie en fonction de longueur de fissure principale.

Figure 6.11 Déformation $\varepsilon_{22}(mm)$ pour une distance entre fissure-dislocation ($l = 45mm$).

Figure 6.12 Déformation $\varepsilon_{22}(mm)$ pour une distance entre fissure-dislocation ($l = 5mm$).

Figure 6.13 Déplacement $u_{22}(mm)$ pour une distance entre fissure-dislocation ($l = 45mm$).

Figure 6.14 Déplacement $u_{22}(mm)$ pour une distance entre fissure-dislocation ($l = 5mm$).

Figure 6.15 Variation du taux de restitution d'énergie d'interaction (J_{Int}) en fonction de la longueur de la distance entre fissure et dislocation $l(mm)$.

Figure 6.16 Variation du taux de restitution d'énergie ($\Delta J/J_0$) en fonction de la distance entre la fissure et la dislocation $l(mm)$.

Liste des tableaux

Tableau 3.1 Angles de limitation de zones d'amplification et de réduction.

Tableau 3.2 Résultats des différents chercheurs

Tableau 4.1 Caractéristique mécaniques et géométrique du modèle proposé.

Tableau 4.2 Résultats numériques des contraintes trouvés pour différentes longueurs de la fissure

Tableau 4.3 Résultants numériques et théoriques du facteur d'intensité de contraintes (FIC) en fonction de la longueur de la fissure.

Tableau 5.1 Résultats numériques des champs de contraintes en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm).

Tableau 5.2 Résultats numériques de champs de contraintes sans présence de la dislocation.
Cas ; longueur de la fissure principale ($a = 15m$).

Tableau 5.3 Valeurs du (FIC) en fonction de la distance entre la fissure et la dislocation

Tableau 5.4 Influence de dislocation sur la fissure principale en fonction de distance l (mm).

Tableau 6.1 Valeurs de déformations au voisinage de fissure principale.

Tableau 6.2 Valeurs d'énergie de déformations au voisinage de fissure principale.

Tableau 6.3 Valeurs d'énergie en fonction de la longueur de la fissure principale.

Tableau 6.4 Valeurs de l'énergie en fonction de la distance entre dislocation et fissure.

Tableau 6.5 Valeurs d'énergie d'interaction (J_{Int}) en fonction de la longueur de la fissure principale.

Sommaire

Remerciement	i
Résumé	iii
Notations	v
Liste des figures	viii
Liste des Tableaux	xii

Introduction générale	1
-----------------------	---

Chapitre I

Rupture des matériaux à comportement fragile

I.1 Introduction	4
I.2 Rupture dans un matériau fragile	5
1.3 Etude d'un milieu fissuré	6
I.3.1 Zone fissurée sans endommagement	6
I.3.2 Zone fissurée avec endommagement	7
I.4 Comportement local d'un matériau fragile	7
I.5 Modes de rupture	8
I.6 Modes de chargements et types de rupture	10
I.7 Théorie de la rupture Fragile	11
I.8 Facteurs d'intensité de contrainte	12
I.9 Théorie de Griffith	13
I.9.1 Modification de la théorie de Griffith par Irwin et Arowan	14
I.10 Solutions analytiques ; Cas de fissures planes	15
I.10.1 Cas de matériaux isotropes	15
I.10.2 Cas d'un matériau orthotrope	18
I.11 Solution Asymptotique par Westergaard	20
I.12 Variation des champs de contrainte et de déplacement	21

I.12.1 Equation de la contrainte virtuelle	22
I.13 Conclusion	25

Chapitre II

Théorie des Dislocations

II.1 Historique de dislocations	26
II.2 Définition	26
II.3 Types de dislocations	26
II.3.1. Cas d'une dislocation vis	28
II.3.2 Cas d'une dislocation coin	30
II.4 Populations de dislocations	31
II.5 Mouvement de dislocation	31
II.6 Présence de la dislocation dans un bi-matériau	32
II.6.1 Forces d'image sur la dislocation	33
II.6.2 Cas d'une dislocation située au voisinage d'une fissure semi-infinie	34
II.6.3 Cas d'une fissure finie	35
II.7 Taux de restitution d'énergie due à la force d'image	36
II.8 Conclusion	38

Chapitre III

Analyse théorique d'un bi-matériau en présence d'une dislocation

III.1 Introduction	39
III.2 Fissure principale – dislocations	39
III.3 Interactions fissure – interface	41
III.4.1 Mécanique de la rupture des structures multi matériaux	41
III.4.2 Critère de la mécanique de rupture	42
III.4.3 Conditions de frontière d'interface	43
III.5 Analyse du champ de contraintes généré par l'interaction fissure-dislocation	44
III.5.1 Formulation mathématique du problème	45
III.5.2 Fonctions analytiques complexes de dislocation	47

III.5.3 Interaction fissure et pole simple	48
III.5.4 Contraintes dans un bi matériau	48
III.6 Champs de contraintes générés par l'interaction fissure- dislocations	50
III.7 Analyse du facteur d'intensité de contrainte (FIC)	54
III.7.1 Facteur d'Intensité de Contraintes en présence d'une dislocation	56
III.7.2 Variation du facteur d'intensité de contrainte	57
III.8 Discussions et interprétation	61

Chapitre IV

Propagation de la fissure en absence de la dislocation

IV.1 Introduction	62
IV.2 Résistance théorique	62
IV.3 Observation de la rupture du verre	63
IV.4 Formulation d'éléments finis	64
IV.4.1 Choix d'une loi d'interpolation statique et d'un champ de déplacement pour l'élément fini	65
IV.4.2 Choix d'une loi d'interpolation statique	65
IV.5 Définition d'un champ de déplacement	66
IV.5.1 Interpolation pour un élément à 9 nœuds	67
IV.5.2 Interpolation pour un élément à 17 nœuds	68
IV.6 Dérivées du champ de contraintes	69
IV.6.1 Cas d'un matériau isotrope	69
IV.6.2 Cas d'un matériau orthotrope	71
IV.7 Modélisation de fissure sans présence de la dislocation	72
IV.8 Champs de contraintes	76
IV.9 Facteur d'intensité de contrainte (FIC)	78
IV.10 Facteur d'intensité de contrainte déterminé par Irwin	79
IV.11 Analyse et discussion	80
IV.12 Conclusion	81

Chapitre V

Propagation de la fissure en présence de la dislocation

V.1 Introduction	82
V.2 Défauts (Dislocations) du verre	82
V.2.1 Défauts volumiques	82
V.2.2 Défauts surfaciques	83
V.3 Champ de contraintes en absence de dislocation	83
V.4 Champ de contraintes en présence de dislocation	85
V.5 Modélisation de la fissure en présence d'une dislocation	85
V.6 Calcul de contraintes planes	86
V.7 Résultats de contraintes planes	88
V.8 Calcul du Facteur d'intensité de contraintes (FIC)	91
V.9 Influence de la dislocation sur la fissure principale ($\Delta K/K$)	92
V.10 Conclusion	94

Chapitre VI

Taux de restitution d'énergie

VI.1 Introduction	95
VI.2 Résolution par des approches énergétiques	95
VI.3 Energie de déformation	97
VI.4 Intégrale de Rice (J)	101
VI.5 Taux de restitution d'énergie en absence de dislocations J_0	104
VI.6 Taux de restitution d'énergie d'interaction en présence de la dislocation (J_{Int})	105
VI.7 Variation du taux de restitution d'énergie ($\Delta J/J_0$)	108
VI.8 Discussions et interprétation	110

Conclusion générale et recommandations

Conclusion générale	111
Recommandations	112

Annexes

Annexe A Calcul des dislocations	114
Annexe B Détermination du champ de contraintes	121
Annexe C Calcul du facteur d'intensité de contraintes	129
Annexe D Champ de contraintes en absence de dislocation	135
Annexe E Champ de contraintes en présence de dislocation	139
Annexe F Champ de déformation et de déplacement	147
Références bibliographiques	154

Introduction Générale

Introduction générale

L'analyse des interactions entre une macro-fissure et une dislocation avoisinante dans un matériau composite (un bi-matériau ayant un comportement fragile) est l'objectif principal du présent travail. L'idée fondamentale de ce travail repose principalement sur la détermination des zones de concentration de contraintes générées lors de ces interactions.

Ces champs des contraintes et des déplacements sont formulés en appliquant la théorie des potentiels complexes d'élasticité traitant des problèmes plans de contraintes [1]. L'utilisation de la mécanique linéaire de la rupture permet donc de prévoir le comportement d'un solide en prenant en considération ses défauts (fissures, inclusions, microfissures, dislocations, etc...). Cette théorie s'appuie sur la notion du paramètre intrinsèque du matériau exprimé sous la forme, soit d'un facteur d'intensité de contraintes K , soit d'un taux de restitution d'énergie. Par ailleurs, cette théorie a été conçue au départ pour les matériaux fragiles mais a connu de nombreux développements dans le cadre de la mécanique non linéaire de la rupture pour être appliquée à d'autres matériaux, notamment les métaux, les verres, céramiques et en particuliers ; les polymères. Parmi les plus importantes caractéristiques dans la conception d'un élément faisant partie d'une structure est la considération de la distribution des contraintes pouvant résulter lors de la formation de fissures sous l'action de charges externes, puisque le bout de la fissure est une singularité à forte concentration de contraintes.

Dans ce travail de recherche, nous sommes amenés à étudier l'influence de la dislocation sur la fissure principale et de permettre ainsi d'évaluer le taux de restitution d'énergie lors de la propagation de la macro-fissure. Dans notre cas, cette macro-fissure est représentée par une fissure semi-infinie soumise à un champ de contraintes sous le premier mode (I) de rupture. L'interaction entre la macro-fissure et une dislocation avoisinante est donc évaluée en termes du Facteur d'Intensité de Contraintes (FIC) amplifié ou réduit agissant au bout de la fissure. Le phénomène d'interaction est alors élucidé par l'utilisation des fonctions dites des potentiels complexes.

Ce travail de recherche s'appuie sur deux grandes phases (théorique et numérique) subdivisées elles-mêmes en cinq parties s'étalant comme suit :

Phase théorique

La première partie est consacrée à une étude détaillée des travaux de recherches récents (bibliographie élargie) sur des thèmes se rapportant aux interactions entre fissure-microfissures ou fissures-dislocations dans les matériaux fragiles ou quasi fragiles.

La deuxième partie consiste à formuler, théoriquement, le problème d'interactions entre une fissure et une dislocation avoisinante dans le cas de matériaux composites dénotés par A et B et puis ; à évaluer les champs de contraintes générés en présence d'une dislocation tout en homogénéisant les deux matériaux (même coefficient de Poisson et même module de cisaillement). Ces champs de contraintes sont caractérisés par un paramètre dénoté 'Facteur d'Intensité de Contraintes' (FIC). Les délimitations des zones d'amplification et de réduction induites en tenant compte de l'orientation et du positionnement de la dislocation autour de la macro-fissure sont comparées avec ceux trouvés par d'autres chercheurs.

Phase numérique

La première partie de cette phase est consacrée la modélisation du matériau fissuré sans la présence du défaut (ou dislocation) au voisinage de la fissure initiale. Tout en variant la longueur de la fissure, les champs de contraintes et les FIC sont déterminés. Finalement, les résultats obtenus sont comparés à ceux déterminés par A. Irwin où les résultats sont disponibles

La deuxième partie consiste à modéliser le matériau fissuré en présence d'une dislocation au voisinage de cette macro-fissure. En variant la distance entre la dislocation et la macro-fissure, les valeurs de contraintes trouvées sont supérieures et parfois inférieures à celle déterminées en comparaison à ceux où il y a absence de dislocation. Donc, la présence d'une dislocation au voisinage de la macro-fissure influence grandement la propagation de la fissure soit en amplifiant ou en réduisant l'intensité des champs de contraintes d'où une accélération ou décélération de cette propagation.

La troisième partie est consacrée à l'étude de l'évaluation du taux de restitution d'énergie translationnel durant l'interaction entre la macro-fissure et les dislocations avoisinantes. Ce

taux de restitution d'énergie est déterminé en utilisant l'intégrale de Rice et par la superposition des différents taux de restitution d'énergie tels : l'énergie due à la propagation de la fissure en absence de la dislocation et l'énergie due à l'interaction entre la dislocation et la macro-fissure.

Chapitre I

Rupture des matériaux à comportement fragile

I.1 Introduction

La rupture des matériaux à comportement fragile est causée par l'existence de défauts initiaux, ces matériaux peuvent aussi se rompre par choc due à l'abaissement de la température (voir figure 1.1) [2]. Avec le temps ces défauts conduisent à une rupture brutale dans le cas de composés monolithiques. Cette rupture est caractérisée par le développement, au bout de la fissure principale, d'une zone endommagée microfissurée appelée Fracture Processus Zone (FPZ). Bien que contrôlés, les matériaux à comportement fragile renferment des inclusions, des porosités, des retassures,... dont la présence est liée à la structure même du matériau et /ou au mode d'obtention. Ces défauts initiaux risquent ainsi de donner lieu à un amorçage et à la propagation catastrophique d'une fissure. Il apparaît donc nécessaire de construire des modèles mécaniques dans lesquels les aspects statistiques liés à la distribution aléatoire de ces défauts sont pris en considération. Cette prise en compte peut passer par l'analyse des mécanismes de détérioration et leur modélisation dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

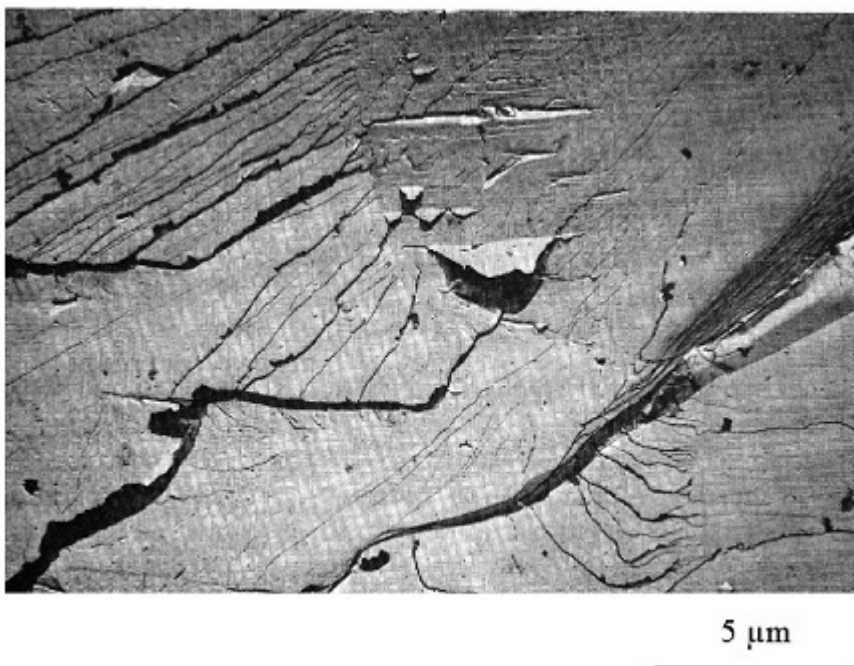


Figure.1.1 Rupture fragile par clivage ; acier extra-doux rompu par choc à -196°C [2]

I.2 Rupture dans un matériau fragile [3]

La rupture dans les solides a fait l'objet d'une attention particulière par des ingénieurs et des physiciens en raison de son intérêt technologique et scientifique intrinsèque [4]. Le principe énergétique dans le domaine de la mécanique de la rupture a été introduit par Griffith vers 1920 [5] et par conséquent, les premiers développements théoriques de l'analyse des champs de déplacements, de déformations et de contraintes au voisinage d'une fissure ont été déterminés par Westergaard vers 1940 [6], par contre, les paramètres définissant les facteurs d'intensité de contrainte pour les trois modes de rupture ont été l'œuvre du chercheur Irwin [7] vers 1960. Depuis, le développement de la mécanique de la rupture s'est étendu aux problèmes de matériaux non linéaires physiquement et géométriquement, aux problèmes de bifurcation des fissures en modes mixtes ainsi qu'à la propagation des fissures sous charges dynamiques. Des études récentes ont été menées pour l'étude à la rupture des laminés et composites, à l'utilisation d'approches numériques de résolution telles les différences finies, les éléments finis, les intégrales de frontière ainsi qu'à l'état de l'art relatif au dimensionnement de diverses structures complexes.

La rupture rapide est provoquée par la croissance à la vitesse de retentissement dans le matériau ce qui nous conduit à dire que les fissures existantes sont soudainement devenues instables [8]. Dans l'étude physique et mécanique du matériau présentant une singularité, on est limité à l'étude de trois zones dont les caractéristiques physiques intrinsèques sont différentes l'une de l'autre (voir figure 1.2).

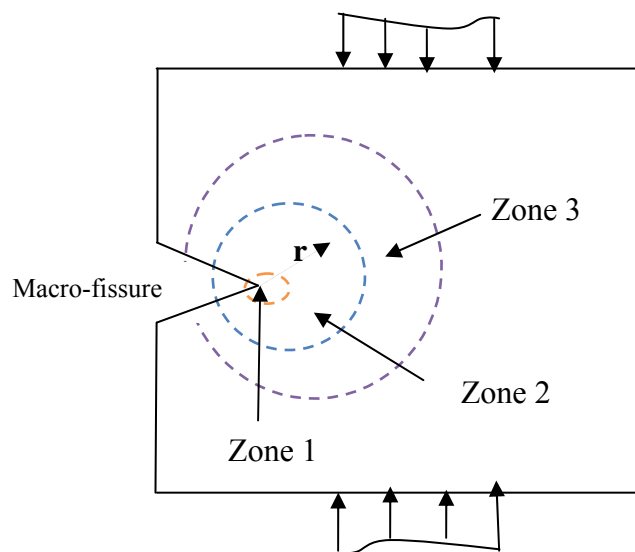


Figure.1.2 Zones limitant le voisinage d'une pointe de macro-fissure [3].

- Zone d'élaboration (zone 1) ; Cette zone se trouve à la pointe de la fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation [9]. L'étude de cette zone est très complexe à cause de contraintes importantes qui sont à l'origine de l'endommagement du matériau.
- Zone singulière (zone 2) ; C'est la zone dans laquelle les champs de déplacements, de déformations et de contraintes sont continus et indépendants de la géométrie lointaine de la structure.
- Zone extérieure (zone 3) ; Cette zone comprend les champs lointains qui se trouvent à la limite de la zone singulière, et qui satisfont les conditions aux limites en charges et en déplacements [3].

Dans le cas de notre recherche, la dislocation est considérée au niveau de la zone 3 et par conséquent, l'interaction entre cette dernière et la fissure initiale est plus simple à étudier du fait de la connaissance des conditions aux limites.

1.3 Etude d'un milieu fissuré

En général, la mécanique de la rupture étudie la fissure, son évolution dans le temps et surtout l'interaction avec le milieu continu. Schématiquement, on peut distinguer dans un milieu fissuré, deux zones successives :

I.3.1 Zone fissurée sans endommagement

C'est la zone dans laquelle les champs mécaniques sont continus et possèdent une certaine structure autonome, c'est-à-dire caractéristique de la géométrie lointaine du corps. Cette zone est petite vis-à-vis du solide, mais grande par rapport aux cristaux. Dans ce cas, la zone perturbée est négligée et le solide est considéré élastique linéaire. La structure appelée souvent «structure fine» est alors caractérisée par un champ de contraintes singulier comme $\rho^{1/2}$.

I.3.2 Zone fissurée avec endommagement

La taille microscopique de cette zone (zone d'élaboration) , de l'ordre de quelques cristaux et le caractère discontinu des processus physiques de rupture rend son étude très difficile.

Toute analyse de la rupture dépend de la bonne connaissance de la morphologie interne de cette zone. Généralement, par souci de simplification, bon nombre de chercheurs ont été conduits à réduire cette zone d'élaboration à un point donc sa non prise en considération dans l'étude de la rupture.

Les causes principales des divergences observées sur les résultats expérimentaux sont l'existence d'une zone micro fissurée dont l'effet est souvent négligé. Pour cela, certains chercheurs [5] jugent que la mécanique linéaire de la rupture ne peut être utilisée que pour des matériaux dits quasi-fragiles tels le béton, la céramique etc.. . Dans ce cas précis, la zone perturbée est suffisamment petite et confinée dans un grand volume de matière à comportement élastique. Il est donc impératif d'aborder l'étude de la propagation des fissures en tenant compte de cette zone perturbée. Des théories récentes réintroduisent cette zone autour de la fissure, qui est essentielle en rupture ductile.

I.4 Comportement local d'un matériau fragile

Généralement, la fragilité correspond aux matériaux qui sont considérées facilement cassables, ou fissurées [10]. Lors de la rupture d'une pièce, trois étapes se succèdent comme suit:

Dans un premier temps, les défauts (petites fissures transgranulaires, cavités inter granulaires...) se forment de façon diffuse dans les zones les plus sollicitées.

Dans un deuxième temps, ces mêmes défauts évoluent en coalescent et la fissure macroscopique apparaît.

Dans un troisième temps, la fissure se propage jusqu'à la rupture de la pièce.

Ce type de recherches est mené dans des laboratoires qui contrôlent la résistance et la durabilité des matériaux et des structures.

Lors de la phase d'amorçage, les défauts se forment sous l'effet des contraintes ou des déformations appliquées sur la pièce. Les effets d'environnement, du temps, de la température et les variations d'amplitude des cycles en fatigue jouent également un rôle important. Ces grandeurs indépendantes des dimensions sont utilisées pour prévoir l'amorçage des défauts, à l'aide des modèles d'endommagement. En revanche, durant la phase de propagation,

les mécanismes physiques d'endommagement ne se produisent plus de façon diffusée, mais localisée dans la zone de concentration de contraintes de la fissure macroscopique. Cette concentration de contraintes est liée à la contrainte appliquée, mais aussi aux dimensions de la fissure.

Les vitesses de fissuration sont généralement plus grandes si les fissures sont plus grandes et ce sous l'effet de l'application de la même contrainte.

Les modèles de prévision sont alors issus de la mécanique de la rupture. D'un point de vue expérimental, on cherche donc à identifier avec précision les barrières microstructurales, obstacles à la propagation des fissures courtes qui sont propres à chaque matériau et qui définissent la transition entre l'amorçage et la propagation des fissures.

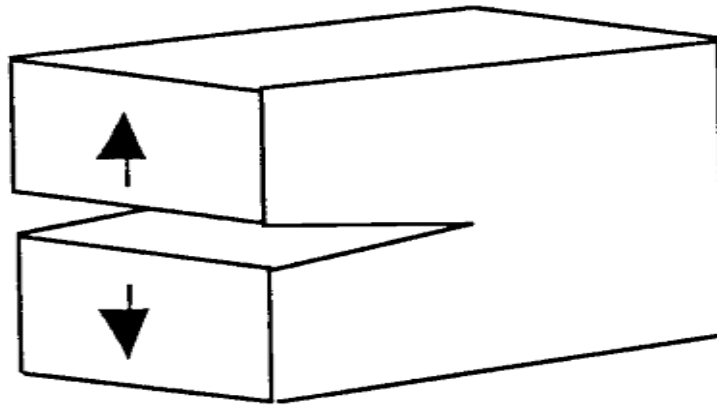
I.5 Modes de rupture

Le développement des fissures peut s'effectuer sous divers types de chargement. Irwin [11] a mis en évidence trois modes cinématiquement indépendants de la propagation des fissures comme illustrés sur figure 1.3.

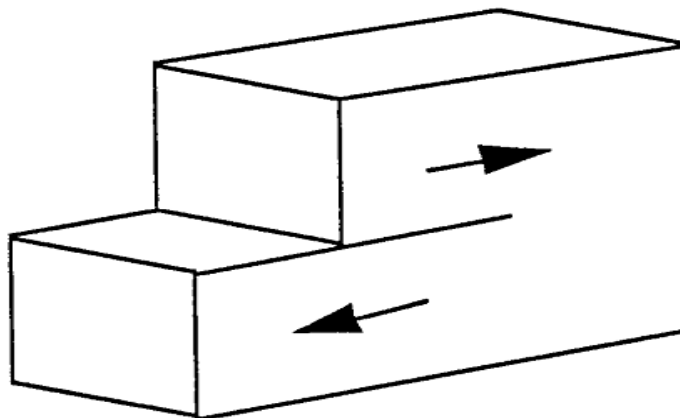
Pour le mode I, la contrainte agit perpendiculairement au plan de la fissure alors que pour les modes II et III, la contrainte est considérée dans le plan de la fissure. Donc, en chaque cas la fissure se propage dans le plan moyen de celle-ci.

L'expérience a toujours montré que le mode I est le mode le plus étudié en comparant les deux autres modes II et III. Les modes sont néanmoins nécessaires et suffisants pour décrire toutes les possibilités de propagation d'une fissure. Le mode le plus général de propagation est la superposition de ces trois modes simples. En d'autres termes, une combinaison des

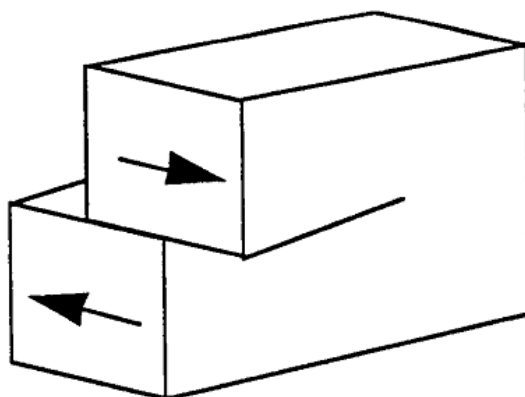
modes II et III donne une surface de rupture inclinée, alors que le mode I correspond à une surface de rupture plane.



(a)



(b)



(c)

Figure.1.3 Modes de rupture ; a) Mode I (ouverture), b) Mode II (glissement dans le plan), c) Mode III (glissement anti-plan).

1.6 Modes de chargements et types de rupture

La rupture des pièces se produit dans des conditions très variées. Un classement sommaire des phénomènes de rupture observés peut se baser sur la présence ou absence de déformation plastique. La rupture peut se produire ;

- Sans déformation appréciable dans la phase de propagation de la fissure. Il n'y a pas de plasticité macroscopique observable, sauf au niveau de la fissure. C'est la rupture fragile.

-Après déformation plastique importante de la structure pendant cette même phase de propagation. C'est la rupture ductile

La distinction macroscopique entre les types de rupture, ductile et fragile, est très claire lorsque l'on examine la réponse mécanique de la structure toute entière à des sollicitations extérieures, par exemple à des charges croissantes Q_i , forces généralisées, auxquelles correspondent les déplacements généralisés q_i .

Le point de rupture R (Figure 1.4) se trouve

- soit dans la partie élastique de la réponse, c'est la rupture fragile;
- soit dans la partie plastique, c'est la rupture ductile.

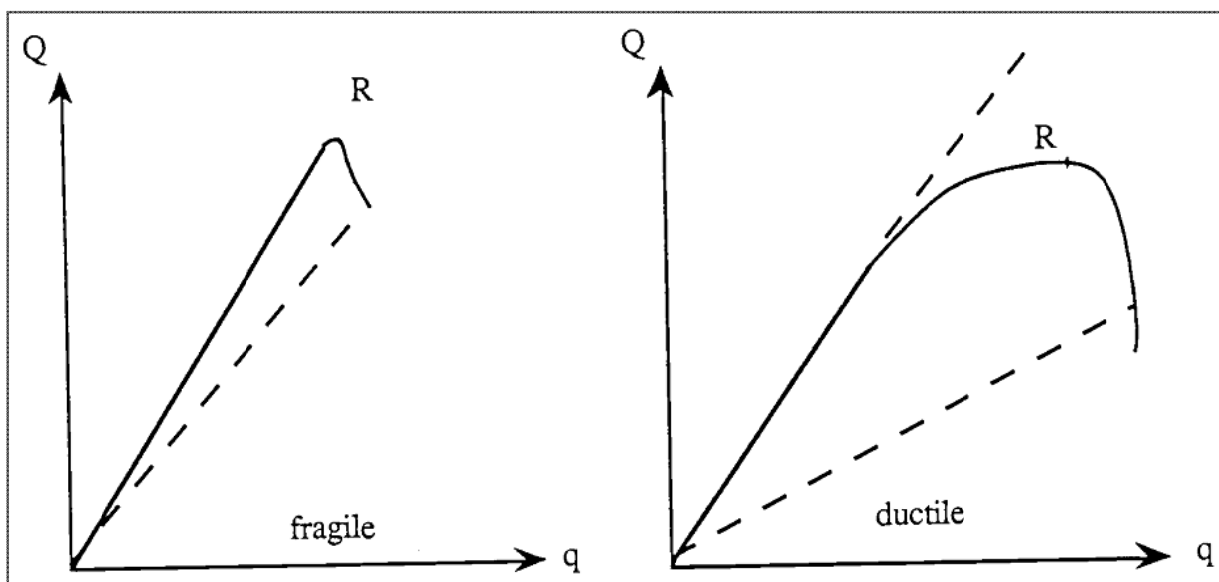


Figure 1.4 Rupture fragile et ductile.

L'étude de la rupture fragile dans le cas des matériaux élastiques linéaires constitue ce qu'on appelle la "mécanique linéaire de la rupture". La linéarité s'entend jusqu'au point de rupture R, tant que la fissure n'évolue pas, c'est-à-dire tant qu'il n'y a pas de changement de la géométrie du milieu continu.

Une nouvelle fissure dS équivaut, du point de vue mécanique, à un changement de conditions aux limites portant sur les deux lèvres créées dS^+ et dS^- . Les contraintes existant avant séparation s'annulent complètement après.

Par le fait même que la séparation a lieu pratiquement en l'absence de plasticité, l'hypothèse du comportement élastique pour le milieu continu est adoptée et par conséquent la mécanique de la rupture fragile peut être étudiée dans le cadre de la théorie de l'élasticité classique [12]

I.7 Théorie de la rupture Fragile

Si le point de départ de la mécanique de la rupture remonte à 1920 avec Griffith [5], c'est Inglis [13] qui a réussi à mettre en évidence l'accroissement des contraintes en tête de fissure. Pour cela, il a assimilé une fissure à une ellipse très aplatie et a étudié en théorie de l'élasticité le comportement d'une plaque de dimensions infinies comportant un trou elliptique de grand axe $2a$ parallèle à (Ox) et de petit axe $2b$ parallèle à (Oy) (voir figure 1.5); la plaque est soumise à une contrainte uniforme $\sigma_y = \sigma$ à l'infini, de part et d'autre de l'axe des y.

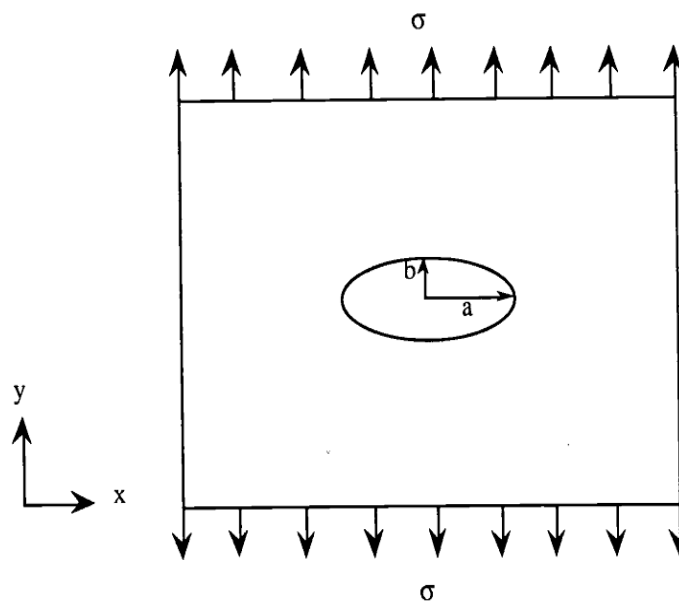


Figure 1.5 Concentration de contrainte.

Inglis [13] observe une concentration de contrainte au voisinage des extrémités du grand axe de l'ellipse ; il en déduit que la contrainte maximale en ces points vaut:

$$\sigma_y^{max} = \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \sigma = K \sigma \quad (1.1)$$

où K est appelé coefficient de concentration de contrainte.

I.8 Facteur d'intensité de contrainte

Soient une fissure aiguë dans un solide élastique et les axes de coordonnées cartésiennes Ox dans le prolongement de la fissure, Oz tangent au front de fissure et Oy perpendiculaire au plan de la fissure (Fig.1.6).

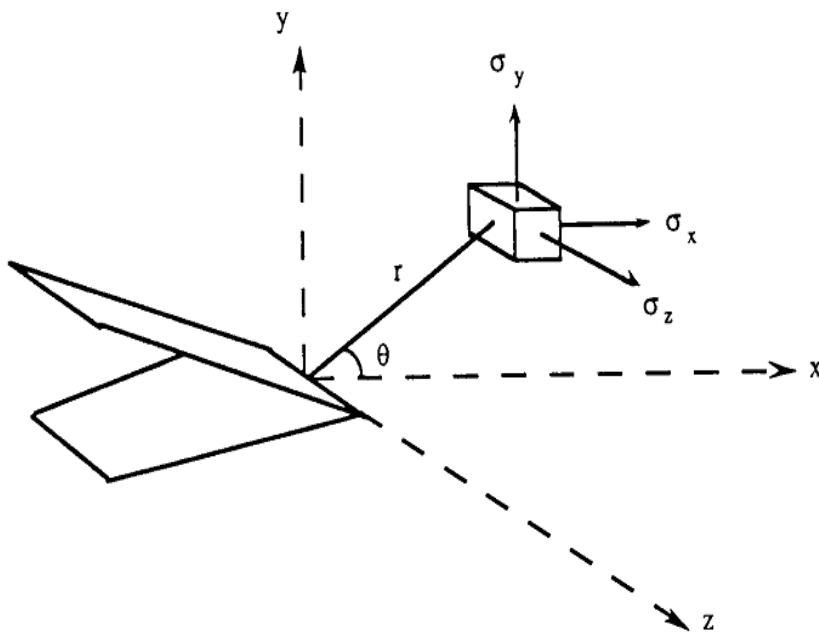


Figure 1.6 Présence d'une fissure

Dans un plan normal au front de fissure, un point M du solide est repéré par ses coordonnées polaires r et θ .

Dans ce cas la forme asymptotique du champ de déplacement dans le voisinage de r est donnée sous la forme suivante:

$$u_i = r^p g_i(\theta) \quad (1.2)$$

le système des équations de l'élasticité, en l'absence des forces volumiques et sous des conditions homogènes $T_i = \sigma_{ij} n_j$ sur la fissure et des contraintes nulles à l'infini, admet une solution non triviale pour $P = \frac{1}{2}$.

Il en résulte que les contraintes tendent vers l'infini avec $\frac{1}{\sqrt{r}}$ quand le point d'étude se rapproche du front de fissure. L'expression de la contrainte [11] s'écrit comme suit;

$$\sigma_{ij} = \frac{K_L}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad L = 1,2,3 \quad (1.3)$$

Les coefficients K_L , appelés facteurs d'intensité de contrainte, sont indépendants de r et θ ; ils contrôlent l'intensité du champ de contrainte pour chaque mode mais non la distribution de ces contraintes, ils ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs dans un solide donné et de la géométrie de la fissure qui se traduit par $f_{ij}(\theta)$. Les valeurs de ces coefficients, déterminés pour de nombreux problèmes typiques d'éléments de structures, ont été rassemblées par Tada [14] dans des formulaires élémentaires.

I.9 Théorie de Griffith

Griffith suppose que la rupture d'un matériau fragile tel que le verre, est due à la présence de fissures qui sont préexistantes. Ces dernières sont formées sous l'effet de l'application de la charge.

La rupture peut ainsi se produire lorsque au moins l'une de ces fissures se propage. Griffith a abordé le problème d'un point de vue énergétique et a proposé ainsi une théorie sur la rupture basée sur la consommation d'énergie lors du processus de propagation de la fissure.

Pour une fissure elliptique de longueur a sur une plaque d'épaisseur mince, et chargée de telle façon que dans les zone éloignées de la fissure, le champs de contraintes σ est uniforme et normal au plan de la fissure, on a les relations suivantes :

$$\frac{dU}{dA} = \frac{d}{da} \left(\frac{\pi \sigma^2 a^2}{2E} \right) = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (1.4)$$

$$\frac{dW}{dA} = \frac{d}{da} (2 \gamma a) = 2 \gamma \quad (1.5)$$

Griffith suppose que la fissure peut s'étendre rapidement, le matériau peut se casser quand le taux de restitution d'énergie est au moins égal à l'énergie de surface libérée au cours de la formation de nouvelles aires de fissures, en d'autres termes ;

$$\frac{dU}{dA} = \frac{dW}{dA} \quad (1.6)$$

et

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (1.7)$$

I.9.1 Modification de la théorie de Griffith par Irwin et Arowan

La théorie de Griffith a été au début applicable aux matériaux dont le comportement soit fragile ou quasi-fragile. Irwin [7] propose de remplacer, dans la formule précédente (1.4), le terme de l'énergie de surface par le travail total, ou l'énergie absorbée dans le processus de rupture afin de pouvoir l'appliquer aux matériaux plastiques. Irwin a montré qu'au niveau du fond de la fissure, particulièrement pour le mode I, il y a une relation entre le taux d'énergie de déformation et l'intensité des contraintes au voisinage du front de la fissure.

Dans le cas d'un point p proche d'une fissure située sur une surface infinie d'un matériau linéaire et isotrope; la contrainte de rupture est donnée par la relation suivante;

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{EG}{2\pi\rho}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \quad (1.8)$$

1.10 Solutions analytiques ; Cas de fissures planes

Les solutions analytiques pour des matériaux isotropes et orthotropes sont rappelées dans le cas de fissures planes. Nous utilisons ces solutions (les contraintes en particulier) pour construire un élément fini de fissure. En supposant l'existence d'une fonction de contraintes $A(x,y)$, dite aussi fonction d'Airy, les conditions locales de l'équilibre en élasticité plane $\sigma_{ij,j} = 0$ (les forces de volume étant négligées) peuvent être systématiquement vérifiées en posant:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}.$$

I.10.1 Cas de matériaux isotropes

Muskhelishvili [15] a montré qu'avec deux fonctions analytiques $\phi(z)$ et $\chi(z)$ de la variable complexe z , les contraintes et les déplacements peuvent s'écrire :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}\{\phi'(z)\} \quad (1.9)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + i\sigma_{xy} = 2\{\bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)\} \quad (1.10)$$

$$2\mu(u + iv) = k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \quad (1.11)$$

Où z est une variable complexe : $z = x + iy = re^{i\theta}$

$\phi'(z)$, $\phi''(z)$ et $\chi'(z)$, $\chi''(z)$ indiquent les fonctions analytiques complexes

Re représente la partie réelle de la fonction complexe, μ est le module de cisaillement,

k est un paramètre qui dépend de l'état plan, et s'exprime en fonction du coefficient de

Poisson ν avec :

$k = 3 - 4\nu$ pour la déformation plane.

$k = \frac{3+\nu}{1+\nu}$ pour la contrainte plane.

Ces types de fonctions ont été utilisées en premier par Goursat qui a présenté la suite de complexes:

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^N A_n z^{\lambda_n} \quad (1.12)$$

$$\chi(z) = \sum_{n=1}^N B_n z^{\lambda_n+1} \quad (1.13)$$

λ_n un paramètre réel où n est un entier ($n = 1, 2, \dots$).

A_n et B_n sont des constants complexes s'exprimant en fonction de constantes réelles $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(1)}$ et $b_n^{(2)}$ sous la forme :

$$\begin{cases} A_n = a_n^{(1)} + i a_n^{(2)} \\ B_n = b_n^{(1)} + i b_n^{(2)} \end{cases} \quad (1.14)$$

En faisant la somme des équations (1.9) et (1.10) et en remplaçant les fonctions complexes par les expressions (1.12) et (1.13), on aura:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = & \sum_{n=1}^N \lambda_n r^{\lambda_n-1} [A_n e^{i\theta(\lambda_n-1)} + \bar{A}_n e^{-i\theta(\lambda_n-1)} + A_n (\lambda_n - 1) e^{i\theta(\lambda_n-3)} \\ & + B_n (\lambda_n + 1) e^{i\theta(\lambda_n-1)}] \end{aligned} \quad (1.15)$$

D'après les conditions aux limites de la fissure ; la surface de la fissure doit être libre en traction, il vient ; $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$ pour $\theta = \pm\pi$, pour ces conditions aux limites on peut exprimer que ; $\lambda_n = \frac{n}{2}$

Après substitution et séparation des parties réelles et imaginaires, et en exprimant les constantes réelles $b_n^{(1)}$ et $b_n^{(2)}$ en fonction de $a_n^{(1)}$ et $a_n^{(2)}$, les équations de contraintes en mode I et mode II pour un matériau élastique, homogène et isotrope s'écrivent ;

$$\sigma_{xx} = \sum_{n=1}^N \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ \begin{array}{l} B_n \left[\left(2 + \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \right] \\ -B_{n+N} \left[\left(2 + \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \right] \end{array} \right\} \quad (1.16. a)$$

$$\sigma_{yy} = \sum_{n=1}^N \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ \begin{array}{l} B_n \left[\left(2 - \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \right] \\ -B_{n+N} \left[\left(2 - \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \right] \end{array} \right\} \quad (1.16. b)$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{n=1}^N \frac{n}{2} r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ \begin{array}{l} B_n \left[\left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta - \left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta \right] \\ -B_{n+N} \left[\left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta - \left(\frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta \right] \end{array} \right\} \quad (1.16. c)$$

$$\text{avec } B_n = a_n^{(1)} \text{ et } B_{n+N} = a_n^{(2)} \quad (1.17)$$

Les paramètres B_n et B_{n+N} sont des variables de nature statique et correspondent respectivement au mode d'ouverture de fissure et au mode de cisaillement plan. La même manière peut être appliquée aux équations de déplacements qui se mettent sous la forme:

$$u = \sum_{n=1}^N \frac{n}{2\mu} r^{\frac{n}{2}} \left\{ \begin{array}{l} B_n \left[k + \frac{n}{2} + (-1)^n \cos\frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \cos\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta \right] \\ -B_{n+N} \left[k + \frac{n}{2} - (-1)^n \sin\frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta \right] \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \frac{n}{2\mu} r^{\frac{n}{2}} \left\{ \begin{array}{l} B_n \left[k - \frac{n}{2} - (-1)^n \sin\frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta \right] \\ +B_{n+N} \left[k - \frac{n}{2} + (-1)^n \cos\frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2} \cos\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta \right] \end{array} \right\} \quad (1.19)$$

par conséquent, lorsque $n = 1$, les expressions au voisinage de la fissure fournissent:

$$\sigma_{xx} = \frac{B_1}{\sqrt{r}} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right) \cos\frac{\theta}{2} + \frac{B_2}{\sqrt{r}} \left(2 + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}\right) \sin\frac{\theta}{2} \quad (1.20. a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{B_1}{\sqrt{r}} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right) \cos\frac{\theta}{2} - \frac{B_2}{\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \quad (1.20. b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{B_1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{B_2}{\sqrt{r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.20.c)$$

$$u = \frac{B_1 \sqrt{r}}{4\mu} \left((2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{B_2 \sqrt{r}}{4\mu} \left((2k+3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.20.d)$$

$$v = \frac{B_1 \sqrt{r}}{4\mu} \left((2k+1) \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{B_2 \sqrt{r}}{4\mu} \left((2k-3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (1.20.e)$$

I.10.2 Cas d'un matériau orthotrope

Dans le cas d'une fissure en matériau orthotrope, une solution analytique existe sous la forme d'une série de termes en variables complexes. Les deux fonctions de base sont données par Tong [16].

$$\phi(\tau_1) = - \sum_{n=1}^N i b_n (\tau_1)^n \quad (1.21)$$

$$\chi(\tau_2) = - \sum_{n=1}^N i c_n (\tau_2)^n \quad (1.22)$$

$$\text{avec } b_n = B_n + B_{n+N}, \quad c_n = -A \bar{b}_n + B b_n \quad (1.23)$$

où B_n et B_{n+N} variables statiques. les coefficients A et B sont définis par les caractéristiques orthotropes du matériau:

$$\begin{cases} A = \frac{\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2} \\ B = \frac{\bar{\alpha}_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2} \end{cases} \quad (1.24)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_1 = i \sqrt{C} \\ \alpha_2 = i \sqrt{D} \end{cases} \quad (1.25)$$

Les valeurs α_1 et α_2 et leurs conjuguées et $\overline{\alpha_1} - \overline{\alpha_2}$ sont les racines de l'équation caractéristique résultant de la condition d'intégrabilité des déformations:

$$S_{11}\alpha^4 + (2S_{12} + S_{33})\alpha^2 + S_{22} = 0 \quad (1.26)$$

Les coefficients C et D peuvent être donnés sous la forme :

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2S_{11}} \left\{ 2S_{12} + S_{33} - \sqrt{(2S_{12} + S_{33})^2 - 4S_{11}S_{22}} \right\} \\ D = \frac{1}{2S_{11}} \left\{ 2S_{12} + S_{33} + \sqrt{(2S_{12} + S_{33})^2 - 4S_{11}S_{22}} \right\} \end{cases} \quad (1.27)$$

avec $S_{11} = \frac{1}{E_x}$; $S_{12} = \frac{\nu_{xy}}{E_x}$; $S_{22} = \frac{1}{E_y}$; $S_{33} = \frac{1}{\mu_{xy}}$

L'orthotropie rend nécessaire l'emploi de deux transformations conformes qui permettent d'exprimer les coordonnées x et y en fonction de τ_1 et τ_2 par :

$$\begin{cases} (\tau_1)^2 = -z_1 \\ (\tau_2)^2 = -z_2 \end{cases} \quad (1.28)$$

avec $z_i = x + \alpha_i y$ (1.29)

Le champ de contraintes peut être construit à partir de termes complexes suivant :

$$\sigma_{xx} = 2\text{Re}\{\alpha_1^2 \phi'(z_1) + \alpha_2^2 \chi'(z_2)\} \quad (1.30.a)$$

$$\sigma_{yy} = 2\text{Re}\{\phi'(z_1) + \chi'(z_2)\} \quad (1.30.b)$$

$$\sigma_{xy} = 2\text{Re}\{\alpha_1 \phi'(z_1) + \alpha_2 \chi'(z_2)\} \quad (1.30.c)$$

En posant $\tau_i = \rho_i (\cos \theta_i + i \sin \theta_i)$ et en appliquant la même démarche que pour le cas isotrope, le développement des expressions (1.30) données en fonction des séries complexes permet d'exprimer les contraintes pour le cas d'un matériau orthotrope comme suit

$$\sigma_{xx} = \sum_{n=1}^N n \left\{ \begin{array}{l} B_n [C (\rho_1)^{n-2} \sin(n-2)\theta_1 - \sqrt{CD} (\rho_2)^{n-2} \sin(n-2)\theta_2] \\ + B_{n+N} [C (\rho_1)^{n-2} \cos(n-2)\theta_1 - D (\rho_2)^{n-2} \cos(n-2)\theta_2] \end{array} \right\} \quad (1.31.a)$$

$$\sigma_{yy} = \sum_{n=1}^N n \left\{ \begin{array}{l} B_n \left[-(\rho_1)^{n-2} \sin(n-2)\theta_1 + \sqrt{\frac{C}{D}} (\rho_2)^{n-2} \sin(n-2)\theta_2 \right] \\ + B_{n+N} [-(\rho_1)^{n-2} \cos(n-2)\theta_1 + (\rho_2)^{n-2} \cos(n-2)\theta_2] \end{array} \right\} \quad (1.31.b)$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{n=1}^N n \left\{ \begin{array}{l} B_n [\sqrt{D} (\rho_1)^{n-2} \cos(n-2)\theta_1 - \sqrt{C} (\rho_2)^{n-2} \cos(n-2)\theta_2] \\ + B_{n+N} [-\sqrt{C} (\rho_1)^{n-2} \sin(n-2)\theta_1 + \sqrt{D} (\rho_2)^{n-2} \sin(n-2)\theta_2] \end{array} \right\} \quad (1.31.c)$$

I.11 Solution Asymptotique par Westergaard

Pour les cas de problèmes d'élasticité plane comportant des singularités, Westergaard [6] a démontré que la fonction d'Airy est déterminée à partir d'une fonction analytique $Z(z)$ et d'une constante. La fonction d'Airy peut s'exprimer sous la forme la plus simplifiée comme suit :

$$U(x,y) = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z} - \frac{A}{2} (x^2 - y^2) \quad (1.32)$$

Ainsi, les différentes contraintes sont obtenues en utilisant le principe de Westergaard sur la base de la fonction d'Airy et sont exprimées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z \\ \sigma_{yy} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z \\ \sigma_{xy} = -y \operatorname{Im} Z \end{array} \right. \quad (1.33)$$

En introduisant la fonction Z ,

$$Z(z) = \sigma \sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}} \quad (1.34)$$

On obtient les champs de contraintes correspondants à ce type de problème sous une forme plus simplifiable:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\beta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{yy} = \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\beta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{xy} = \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) \end{cases} \quad (1.35)$$

I.12 Variation des champs de contrainte et de déplacement

On considère un corps élastique occupant un volume V avec une frontière S . Pour une question de simplification un vecteur sera noté x, \vec{x} , sera noté x . Dans une référence x , les tractions à la surface sont notées $T^0 = \sigma n$ sur S_σ et les déplacements par $u = u^0$ sur S_u (Figure 1.7).

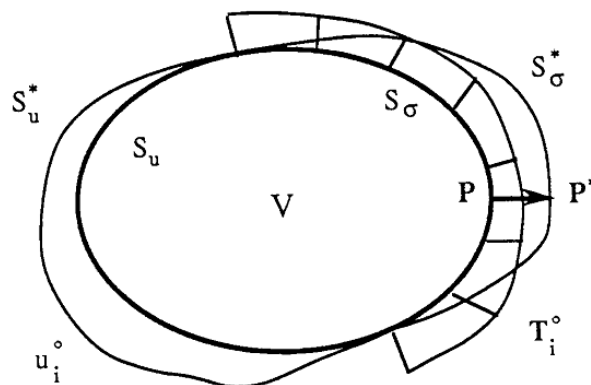


Figure 1.7 Variation de la forme de la structure

Sous l'application des charges, le corps passe de la configuration initiale C à la configuration déformée C_d définie par le champ de déplacement u tel que $x^d = x + u$.

Soit la configuration de référence qui correspond au champ de transformation donné $\varphi(x)$. On va considérer une transformation infinitésimale $\delta\varphi(x)$ de la structure et les variations associées $\delta\sigma(x)$, $\delta\varepsilon(x)$ et $\delta u(x)$. Les formes modifiées des équations de déplacement et de contrainte virtuels vont être utilisées dans l'expression de la variation de la fonctionnelle.

I.12.1 Equation de la contrainte virtuelle

Soit la variation simultanée des champs de contraintes (Fig.1.8), des forces de volume et de la transformation suggérée par Dems et Mroz.[17]

Selon la figure 1.8, si x^* décrit la position d'un point P, initialement placé à x , après une variation infinitésimale de $\varphi(x)$, il est possible d'écrire:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^*(x^*) = \sigma_{ij}(x) + \delta\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}(x) + \delta\bar{\sigma}_{ij}(x) + \sigma_{ij,k}(x)\delta\varphi_k \\ f_i^*(x^*) = f_i(x) + \delta f_i(x) = f_i(x) + \delta\bar{f}_i(x) + f_{i,k}(x)\delta\varphi_k \end{cases} \quad (1.36)$$

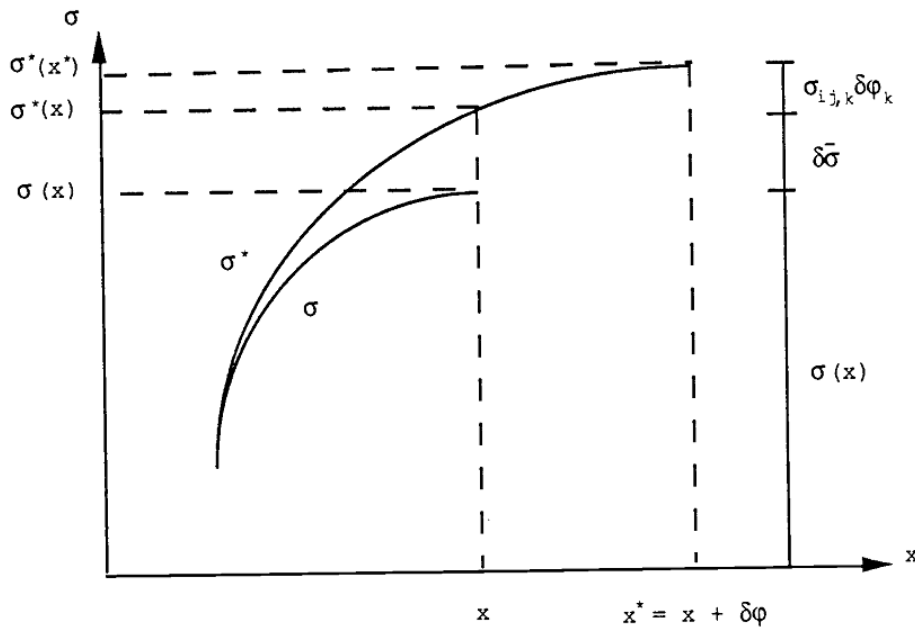


Figure 1.8 Variation du champ de contrainte due à la variation du domaine.

Les variations totales $\delta\sigma_{ij}(x)$ et $\delta f_i(x)$ résultent respectivement à la fois du changement de forme à configuration constante $\delta\bar{\sigma}_{ij}(x)$ et $\delta\bar{f}_i(x)$, et de l'influence de la transformation de x en x^* .

σ_{ij}^* contraintes statiquement admissibles, il vient dans V:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^* + f_i^* = \sigma_{ij,j} + \delta\bar{\sigma}_{ij,j} + \sigma_{ij,kj}\delta\varphi_k + f_i + \delta\bar{f}_i + f_{i,k}\delta\varphi_k = 0 \\ \delta\bar{\sigma}_{ij,j} + \delta\bar{f}_i = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

Le chargement sur la surface S_σ est transformé sur S_σ^* en :

$$T_i^* = \sigma_{ij}^*(x^*)n_j^* \quad (1.38)$$

où n_j^* est le vecteur sortant unitaire normal à S_σ^* .

Les champs de déplacement et de déformation permettent d'écrire (Figure 1.9) ;

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^*(x^*) = \varepsilon_{ij}(x) + \varepsilon_{ij,k}\delta\varphi_k \\ u_i^*(x^*) = u_i(x) + u_{i,k}\delta\varphi_k \end{cases} \quad (1.39)$$

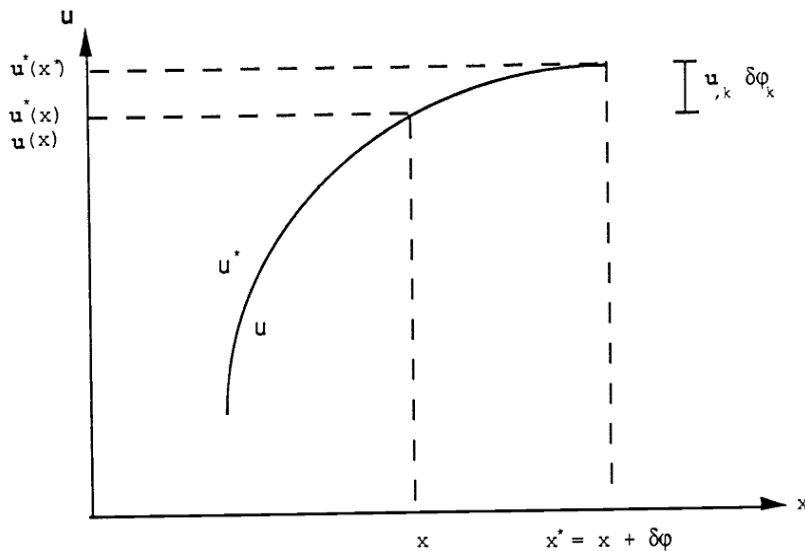


Figure 1.9 Variation du champ de déplacement due à la variation du domaine.

La frontière S_u est supposée invariante dans la transformation, ce qui entraîne:

$$\left. \begin{aligned} \delta u_i(x) = \delta \bar{u}_i = 0 \\ \delta \sigma_{ij}(x) = \delta \bar{\sigma}_{ij} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ sur } S_u \quad (1.40)$$

Pour la configuration transformée V^* , le bilan énergétique écrit:

$$\int_{V^*} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV^* = \int_{S_u} T_i u_i^0 dS_u + \int_{S_\sigma^*} T_i^* u_i^* dS_\sigma^* + \int_{V^*} f_i^* u_i^* dV^* \quad (1.41)$$

La transformation des intégrales sur V^* et sur S_σ^* en intégrales sur V et sur S_u s'exprime d'après Dems et Mroz [17] comme suit:

$$\left\{ \begin{aligned} dV^* &= (1 + \delta \varphi_{k,k}) dV \\ n_j^* dS_\sigma^* &= (n_j + n_j \delta \varphi_{k,k} - n_k \delta \varphi_{k,j}) dS \\ \delta n_j &= n_j^* - n_j = n_j n_k n_1 \delta \varphi_{k,1} - n_k \delta \varphi_{k,j} \\ \delta(dS) &= (\delta \varphi_{k,k} - n_k \delta \varphi_{k,1}) dS \end{aligned} \right. \quad (1.42)$$

où n représente le vecteur sortant unitaire normal à S_σ

En substituant les équations (1.38), (1.39) et (1.42) dans l'équation (1.41) on aura ce qui suit:

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ij} + \delta \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij,k} \delta \varphi_k) (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij,k} \delta \varphi_k) (1 + \delta \varphi_{k,k}) dV &= \int_{S_u} T_i u_i^0 dS_u \\ + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} + \delta \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij,k} \delta \varphi_k) (u_i + u_{i,k} \delta \varphi_k) (n_j + n_j \delta \varphi_{k,k} - n_k \delta \varphi_{k,j}) dS_\sigma & \quad (1.43) \\ + \int_V (f_i + \delta \bar{f}_i + f_{i,k} \delta \varphi_k) (u_i + u_{i,k} \delta \varphi_k) (1 + \delta \varphi_{k,k}) dV & \end{aligned}$$

I.13 Conclusion

Notre étude est basée sur la rupture des matériaux composites et à comportement fragile sous l'effet d'un chargement aux extrémités, mais la figure 1.1 montre que ce matériau peut aussi se casser sous l'effet de la basse température.

On constate qu'au voisinage de la macro-fissure l'existence de trois zones distinctes les unes des autres présentant des perturbations ; zone d'élaboration, zone singulière et zone extérieure. L'étude de la zone d'élaboration est très complexe à cause de contraintes importantes pouvant endommager le matériau, par contre la zone extérieure est la zone où la dislocation est considérée comme étant à la frontière où les champs sont déterminés à partir de la loi de l'élasticité. D'après la figure 1.4, le matériau fragile aura une rupture brutale juste après la phase élastique ; par conséquent, l'étude d'élasticité est plus importante pour les matériaux à comportement fragile.

Chapitre II

Théorie des Dislocations

II.1 Historique de dislocation

Au cours de ces dernières décennies, la théorie des dislocations a permis de comprendre les mécanismes à l'origine de la déformation plastique des matériaux cristallins, son élaboration est le résultat d'une intense activité théorique, couplée au développement de nouveaux moyens d'investigation comme la microscopie électronique à balayage.

Dans les cristaux, la description de dislocations en terme de défaut est postulée par Taylor [18], et celle de dislocation vis par Burgers [19] dans les années 30. Dans les années 50, Eshelby [20] et Nabarro [21] s'intéressent à l'interaction d'une dislocation vis avec une onde élastique en utilisant l'analogie électromagnétique. Nabarro suggère deux mécanismes pour la diffusion de l'onde par une dislocation. Le premier peut être qualifié de structurel, il est lié à la structure microscopique du matériau disloqué et on s'attend à ce qu'il décroisse avec la longueur d'onde. Le second mécanisme est dû au mouvement de la dislocation sous l'influence de l'onde incidente, la dislocation en mouvement réémettant alors une onde sphérique.

II.2 Définition

Les dislocations constituent l'une des classes de défauts cristallins. Ces défauts ou imperfections correspondent aux régions microscopiques du cristal dans lesquelles un atome est entouré d'autres atomes très proches situés à des positions différentes de celles qu'il possède dans le cristal parfait. L'intérêt que porte un bon nombre de chercheurs à cette théorie de dislocations, prouve que cette dernière a permis de résoudre certains problèmes de rupture là où la théorie linéaire de la mécanique n'a pas pu solutionner. Généralement, chaque dislocation est pourvue d'une certaine force d'action due aux mouvements des atomes et à leurs interactions. Donc, au niveau de la dislocation on considère un vecteur de translation noté par \mathbf{b} et qu'on appelle le vecteur de Burgers [22].

II.3 Types de dislocations

Par conséquent, on distingue essentiellement trois types de dislocations en fonction de la position relative du vecteur \mathbf{b} et de la ligne de dislocation notée L :

Si $\mathbf{b} // L$ alors la dislocation est vis comme schématisée sur la Figure 2. 2.

Si $\mathbf{b} \perp \mathbf{L}$ alors la dislocation est coin comme représenté sur la Figure 2. 3.

Si \mathbf{b} est quelconque alors la dislocation est mixte et l'angle entre \mathbf{b} et \mathbf{L} s'appelle caractère de la dislocation comme montrée sur la Figure 2. 1.

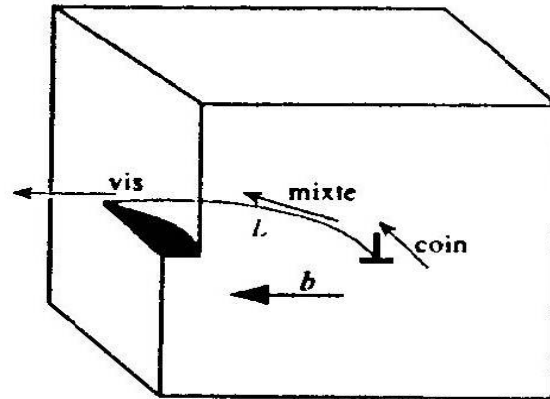


Figure 2.1 Divers segments d'une courbe.

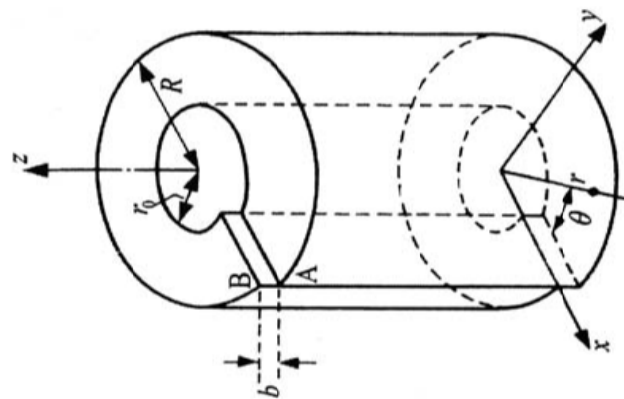


Figure 2.2 Dislocation vis ($\mathbf{b} // \mathbf{L}$).

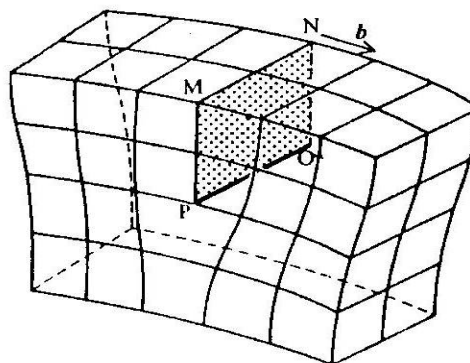


Figure 2.3 Dislocation coin ($\mathbf{b} \perp \mathbf{L}$).

II.3.1 Cas d'une dislocation vis

La dislocation vis est un défaut linéaire jouant un rôle dans la croissance cristalline ou dans la déformation plastique de certains matériaux. Le défaut peut être engendré dans un milieu continu en utilisant le processus de Volterra. On coupe pour cela un tuyau de ce milieu le long de la génératrice du cylindre, on décale les lèvres de la coupure par une distance b le long de Oz, et on recolle le tout. La ligne de dislocation est située le long de Oz, le cylindre est considéré infini. Le but de ce problème est de calculer l'énergie élastique emmagasinée dans ce défaut, par unité de longueur. Donc, on s'intéresse au vecteur déplacement au point M du cylindre, que l'on repèrera indifféremment par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindrique (r, θ, z) . On suppose que le vecteur de déplacement U du problème n'a qu'une composante telle que: $U = (0, 0, u_z)$ et on considère une dislocation vis située le long de l'axe d'un cylindre de rayon R et de vecteur de burger \mathbf{b} . Pour une dislocation vis, on considère que ;

$$U_z(A) = 0 \quad (2.1)$$

par conséquent, on a ;

$$U_z(B) = b \quad (2.2)$$

Soit un plan radial passant par la ligne de dislocation et θ l'angle entre ce plan et le plan (XOZ), alors on obtient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} U_z(\theta = 0) = 0 \\ U_z(\theta = 2\pi) = b \end{cases} \quad (2.3)$$

A partir de la Figure 2.2 et à l'aide de l'équation 2.3 on peut en déduire la relation suivante;

$$U_z(\theta) = b\theta/2\pi \quad (2.4)$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes, l'équation précédente (2.4) devient (se référer à l'Annexe A pour plus de détails) ;

$$U_z(x, y) = \frac{b}{2\pi} \text{Arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2.5)$$

Le tenseur de déformations est défini en termes de déplacements comme suit;

$$\varepsilon_{XX} = \varepsilon_{YY} = \varepsilon_{ZZ} = 0 \text{ ou bien, } \text{Tr}(\varepsilon) = 0 \quad (2.6)$$

et ainsi,

$$\varepsilon_{xy} = 0 \quad (2.7)$$

Finalement, on obtient les déformations suivantes;

$$\begin{cases} \varepsilon_{XZ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{YZ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.8)$$

En remplaçant l'équation (2.5) dans (2.8), on trouve ce qui suit :

$$\varepsilon_{XZ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-b}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{YZ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{b}{4\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (2.10)$$

En utilisant la loi de Hooke généralisée, on a :

$$\begin{cases} \sigma_{XX} = \sigma_{YY} = \sigma_{ZZ} = \sigma_{XY} = 0 \\ \sigma_{XZ} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \varepsilon_{XZ} = 2\mu \cdot \varepsilon_{XZ} \\ \sigma_{YZ} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \varepsilon_{YZ} = 2\mu \cdot \varepsilon_{YZ} \end{cases} \quad (2.11)$$

En substituant les équations (2.9) et (2.10) dans l'équation (2.11), on obtient;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz} = \frac{-\mu b}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \sigma_{yz} = \frac{\mu b}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

II.3.2 Cas d'une dislocation coin [22]

De la même manière et en utilisant un raisonnement similaire (cas d'une dislocation vis), on détermine les composantes du tenseur de contraintes sous la forme suivante;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -D \cdot \frac{y \cdot (3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_{yy} = D \cdot \frac{y \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_{xy} = D \cdot \frac{(x^3 - x y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

où;

$$D = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \quad (2.14)$$

En substituant la relation (2.14) dans l'équation, (2.13), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \cdot \left[\frac{3y \cdot x^2 + y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ \sigma_{yy} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \cdot \left[\frac{y \cdot x^2 - y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ \sigma_{xy} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \cdot \left[\frac{x^3 - y x^3}{(x^2 + y^2)^2} \right] \end{array} \right. \quad (2.15)$$

En d'autres termes, les champs de contrainte au voisinage de la dislocation prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)(x^2+y^2)^2} \cdot \begin{cases} -3y x^2 - y^3 \\ x^3 - x y^2 \\ y x^2 - y^3 \end{cases} \quad (2.16)$$

II.4 Populations de dislocations

Il semble donc naturel de distinguer deux populations de dislocations, d'une part les dislocations mobiles et d'autre part les dislocations immobiles [23]. Les dislocations immobiles, largement majoritaires, n'occupent qu'une fraction volumique faible du matériau car elles ont tendance à se rassembler en parois. Chacune de ces deux populations a ses propres cinétiques de création et de destruction. Les dislocations mobiles se multiplient par les mécanismes classiques de sources; elles peuvent s'annihiler mutuellement ou être immobilisées par le biais des interactions locales (formation de jonctions aux intersections, formation de configurations dipolaires). Les dislocations immobiles, quant à elles, sont sujettes à la restauration dynamique, par glissement dévié (ou montée) qui tend à limiter leur densité à une valeur maximale. Cette densité maximale est fonction du caractère des dislocations et elle est plus élevée pour les dislocations coin lorsque la température n'est pas suffisante pour activer la montée [24].

Lorsqu'on s'intéresse à l'arrangement spatial de la microstructure, une simple différenciation entre densités mobile et immobile peut paraître un peu sommaire. On définit alors des populations de dislocations constituées de sous-groupes qui partagent les mêmes propriétés de mouvement, de création ou d'annihilation. La densité totale de dislocations de la forêt peut ainsi être subdivisée en ensembles de dipôles, de multi-pôles ou de jonctions sessiles [25]

II.5 Mouvement de dislocation

Le mouvement des dislocations dans les solides est intrinsèquement difficile à discerner en raison de leurs liens inter atomiques au niveau des lattices [26]. Dans les matériaux fragiles, le mouvement est supposé limité à cause de l'empilement des dislocations les unes sur les autres (imperfections, discontinuités, vides, etc...). Cet empilement donne naissance à une

concentration des contraintes au niveau de la fissure existante et provoquant ainsi la rupture des matériaux.

Les frontières des imperfections et des vides dans le matériau agissent en tant qu'obstacles au mouvement des dislocations. Au début de la déformation en plastique des polycrystals, des dislocations mobiles sont créées sur le système de glissade avec le plus grand effort de cisaillement au niveau des atomes. Donc, les concentrations d'efforts de dislocation s'ajoutent au champ de contraintes externes au bout des fissures à l'intérieur du matériau.

Les cristaux peuvent subir des déformations plastiques sous l'effet d'efforts dont l'ordre de grandeur est de moindre intensité que la force de cisaillement trouvée théoriquement [27] :

$$\left(\tau_t = \frac{\mu b}{2\pi a} \right) \quad (2.17)$$

II.6 Présence de la dislocation dans un bi-matériau

La présence d'une dislocation dans un bi-matériau et pour une fissure semi-finie comme montrée par la Figure 2.4, les champs de contraintes dans le cas où cette dislocation émane de la fissure ont été déterminés par Zhang et Li [1]. Dans le cas où la dislocation émane d'une source autre que la fissure alors le vecteur de Burger est considéré comme étant égal à zéro.

Par ailleurs, Zhang et Li [1] ont utilisé la fonction d'images produite par l'interaction entre une dislocation vis et une fissure finie dont l'origine est montrée sur la Figure (2.4) Cette fonction d'image notée par $F(z)$ est donnée comme suit;

$$F(z) = \frac{b_e}{i\pi(z - x_{1d})} \left[\left(\frac{x_{1d}^2 - a^2}{z^2 - a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(x_{1d} - a)(z + a)}{(x_{1d} + a)(z - a)} \right)^{i\epsilon} - 1 \right] + m \frac{b_e}{i\pi(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{z + a}{z - a} \right)^{i\epsilon} \quad (2.18)$$

$$\text{avec } \epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{k^A \mu^B + \mu^A}{k^B \mu^A + \mu^B} \right)$$

Pour une dislocation située dans l'interface, on considère les cas suivants :

- Cas où $m = 0$ correspondant à la dislocation émanant de la fissure,
- cas où $m = 1$ correspondant où la dislocation émane d'une source autre que celle de la fissure.

II.6.1 Forces d'image sur la dislocation

Les forces d'image exercées sur la dislocation, dans un bi-matériau, ont un caractère oscillant (la position de dislocation). Si la dislocation est lancée d'une source autre que la fissure et ayant un mouvement à proximité de la fissure finie alors la force de rupture du matériau composite dépend des propriétés des matériaux fissurés.

Donc, il y a caractère oscillant dans le domaine d'efforts et de déplacements au bout de la fissure principale. Ce phénomène a été étudié par un nombre important de chercheurs qui ont ainsi formulé les champs des contraintes en prenant en considération le caractère oscillant des dislocations au voisinage de la fissure.

En d'autres termes, l'interaction entre les dislocations et les fissures joue un rôle important dans la rupture des matériaux. Donc, l'interaction produit des forces d'image sur les dislocations et des efforts autour de la fissure. Les premiers travaux se sont concentrés seulement sur les forces d'image jusqu'à ce que les chercheurs Gangadharan et Dundurs [28] ont introduit l'aspect oscillatoire de la dislocation, soit par l'émanation à partir de la fissure ou soit par l'émanation à partir d'une autre source.

Pour le cas des problèmes de contraintes planes où la dislocation est parallèle à l'axe des abscisses, la force d'image pour une dislocation comme suit [1];

$$f = f_1 + if_2 = (\sigma_{12}b_1 + \sigma_{22}b_2) - i(\sigma_{11}b_1 + \sigma_{12}b_2) \quad (2.19)$$

II.6.2 Cas d'une dislocation située au voisinage d'une fissure semi-infinie

Lin et Thomson [29], ont déterminé les forces d'images produites par la fissure dans le cas d'une fissure semi infinie dans un solide isotrope (voir figure 2.4) et où la dislocation se trouve au niveau de l'interface, comme suit :

$$\sigma_{22}^A = \sigma_{22}^B = -\frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 + 2\epsilon b_1) \quad (2.20)$$

$$\sigma_{12}^A = \sigma_{12}^B = -\frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_1 - 2\epsilon b_2) \quad (2.21)$$

$$\sigma_{11}^A = -\frac{j^A - 3h^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 + 2\epsilon b_1) \quad (2.22)$$

$$\sigma_{11}^B = -\frac{j^B - 3h^B}{2\pi x_{1d}} (b_2 + 2\epsilon b_1) \quad (2.23)$$

On constate que σ_{11}^A est différente de σ_{11}^B , et la force d'image f_1 est donnée par la relation suivante;

$$f_1 = f_1^A = f_1^B = -\frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_2^2 + b_1^2) \quad (2.24)$$

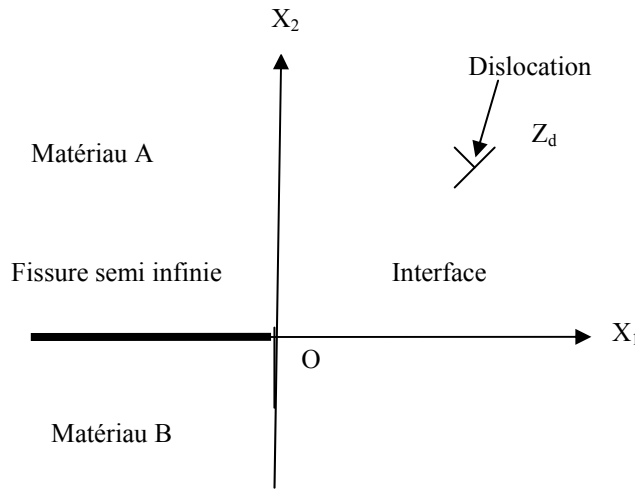


Figure 2.4 Une fissure semi infinie d'interface] $-\infty, 0$] avec une dislocation en (z_d) .

En substituant les équations précédentes (2.20) à (2.23) dans l'équation (2.19) et en prenant en considération que le matériau est homogène (voir Annexe A pour plus de détails), on trouve

$$f_1 = \frac{\mu (b_1^2 + b_2^2)}{\pi x_{1d} (1 + k)} \quad (2.25)$$

$$f_2 = \frac{-\mu}{\pi x_{1d} (1 + k)} [2 b_1 b_2 + 2 \epsilon (b_1^2 - b_2^2)] \quad (2.26)$$

La variation de la force d'image (f) en fonction de distance (x_{1d}) est représentée sur la figure suivante ;

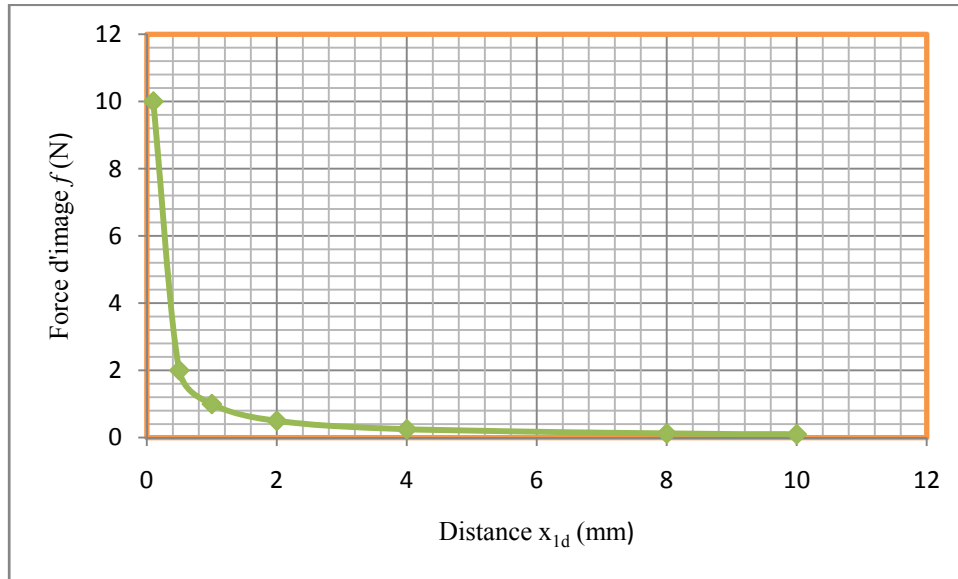


Figure 2.5 Variation de la force d'image (f) en fonction de distance (x_{1d}).

II.6.3 Cas d'une fissure finie

Dans le cas d'une fissure finie (voir figure 2.6), les forces d'image dues à une dislocation se trouvant à l'interface peuvent être calculées en utilisant l'équation (2.18). Donc, la force d'image suivant la direction x_1 est donnée par (voir Annexe A) :

$$f_1 = f_1^A = f_1^B = -\frac{h^A + j^A}{\pi} (b_2^2 + b_1^2) \left(\frac{x_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} - m \frac{\cos \{ \epsilon \ln (x_{1d} + a)/(x_{1d} - a) \}}{\sqrt{x_{1d}^2 - a^2}} \right) \quad (2.27)$$

A partir de l'Annexe A, l'équation (2.27) prend la forme suivante :

$$f_1 = -\frac{2\mu (b_2^2 + b_1^2)}{\pi (1+k) \sqrt{x_{1d}^2 - a^2}} \frac{x_{1d}}{\sqrt{x_{1d}^2 - a^2}} \quad (2.28)$$

à partir de l'équation (2.28), on déduit que la force d'image est toujours négative pour le cas où, $m = 0$, et $m = 1$.

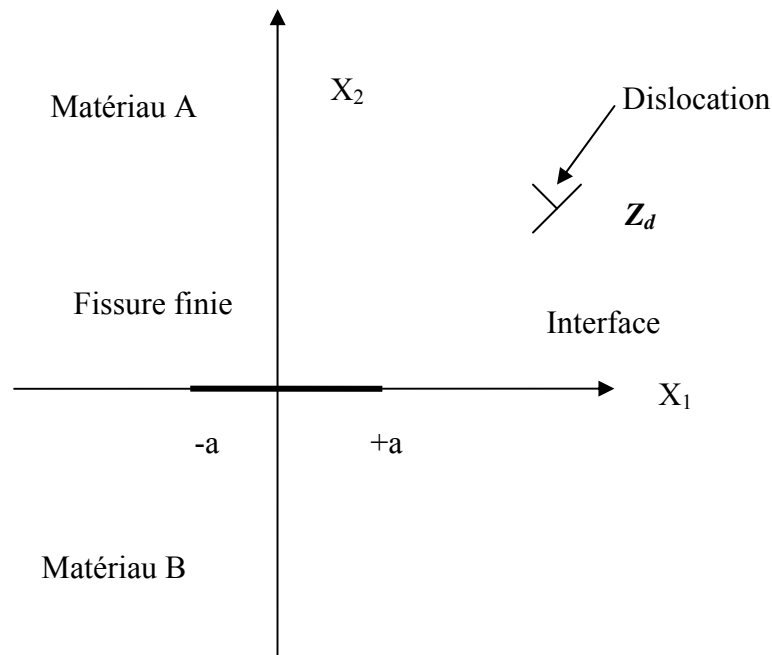


Figure 2.6 Une fissure finie d'interface, $x = [-a, +a]$, avec une dislocation en (z_d) .

II.7 Taux de restitution d'énergie due à la force d'image

La force exercée sur une dislocation est définie comme étant une variation de l'énergie libre du système par rapport aux champs de déplacement de la dislocation. Cette dernière est donnée sous la forme suivante;

$$f = \frac{\partial E}{\partial \lambda} \quad (2.29)$$

Il est à noter que le taux de restitution d'énergie est égal à la force d'image notée par (f_i) lorsque le système global est composé d'une fissure finie et d'une dislocation avoisinante et ce qui se traduit par la relation suivante [1];

$$f_1 = -(G^g - G^d) \quad (2.30)$$

G^d, G^g ; Taux de restitution d'énergie donnés au bout de la fissure du coté droit et gauche respectivement.

Le taux de restitution d'énergie pour une fissure peut être exprimé comme suit [30] :

$$G = \frac{k \bar{k} \left\{ \left[\frac{(1 - \gamma^A)}{\mu^A} \right] + \left[\frac{(1 - \gamma^B)}{\mu^B} \right] \right\}}{4 \cosh^2 \pi E} \quad (2.31)$$

Si la dislocation émane de la fissure alors les taux de restitution d'énergie pour les deux extrémités (droite et gauche) de la fissure principale sont formulés comme suit :

$$G^s = \frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4 \pi a} \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) \quad (2.32)$$

$$G^d = \frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4 \pi a} \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) \quad (2.33)$$

Si la dislocation émane d'une source autre que la fissure elle-même, alors il existe d'autres conditions à prendre en considérations pour les taux de restitution d'énergie comme suit;

$$G^g = \frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4 \pi a} \left[\left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) + 1 - 2 \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) \right] \right] \quad (2.34)$$

$$G^d = \frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4 \pi a} \left[\left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) + 1 - 2 \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) \right] \right] \quad (2.35)$$

Il est à noter que la substitution des équations (2.33) et (2.32) ou (2.34) et (2.35) dans l'équation. (2.30) nous amène aux mêmes résultats. (voir Annexe A pour plus de détails).

La substitution des équations (2.33) et (2.32) dans l'équation (2.30) et par simplification (voir annexe A), signifie que la dislocation émane de la fissure principale;

$$f_1 = - \frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{\pi} \left[\frac{x_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right] \quad (2.36)$$

Il est à noter que l'équation (2.36) est similaire à l'équation (2.27) dans le cas où $m = 0$.

Par ailleurs, la substitution des équations (2.34) et (2.35) dans l'équation (2.30) dans le cas où la dislocation émane d'une source autre que la fissure principale nous amène à la relation suivante;

$$f_1 = -\frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4\pi a} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) + 1 - 2 \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) \right] \\ - \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) - 1 + 2 \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) \right] \end{array} \right]$$

$$= -\frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{\pi} \left[\left(\frac{x_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right) - \frac{\cos \{ \epsilon \ln (x_{1d} + a)/(x_{1d} - a) \}}{\sqrt{x_{1d}^2 - a^2}} \right] \quad (2.37)$$

Il est à noter que l'équation (2.37) est similaire à l'équation (2.27) dans le cas où $m = 1$.

II.8 Conclusion

Nous remarquons que la force d'image exercée sur une dislocation à l'interface au voisinage d'une fissure semi-infinie tend vers zéro lorsque la distance entre la dislocation et la fissure principale augmente. Si la dislocation est située au bout de la fissure principale alors, la force d'image tend vers l'infinie. Par ailleurs, il est à noter que pour une fissure finie, la force d'image est plus grande si la dislocation émane de la fissure et contrairement, elle est plus petite si la dislocation émane d'une source autre que la fissure elle-même.

Chapitre III

Analyse théorique d'un bi-matériau en présence d'une
dislocation

III.1 Introduction

La présence de la dislocation dans un bi-matériau influence grandement la propagation de fissures. Dans ce chapitre, nous utilisons deux matériaux (M^A , M^B) ayant différentes caractéristiques mécaniques telles que les coefficients de Poisson (ν^A , ν^B) et les modules d'élasticité (E^A , E^B). Ces matériaux composites interagissent entre eux par une résine (une colle). Cette dernière joue un rôle d'interface (voir Figure.3.1). En appliquant les fonctions analytiques complexes, les champs de contraintes sont déterminés en fonction des paramètres des deux matériaux tels (ν^A , ν^B et E^A , E^B). L'homogénéisation de ces paramètres nous a permis de comparer les champs de contraintes obtenus avec ceux trouvés par d'autres chercheurs pour un matériau homogène et isotrope [31].

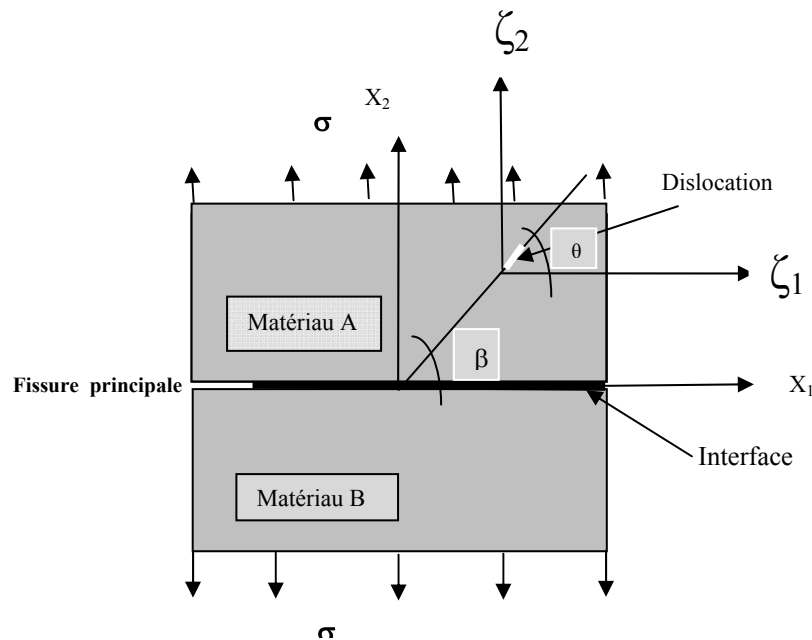


Figure 3.1 Schéma du modèle proposé en bi-matériau en présence de la dislocation [31]

III.2 Fissure principale - dislocations

Les champs de contraintes et de déplacements d'une dislocation près d'une fissure finie ou semi infinie sont formulés en appliquant la théorie des potentiels complexes d'élasticité en contrainte plane [1].

La force de rupture des solides multiphasés peut dépendre des propriétés des fissures incorporées dans les interfaces. Le comportement élastique des fissures a été étudié par un nombre important de chercheurs de diverses disciplines telles la physique, la mécanique, la métallurgie et mathématique appliquée, etc....et ce depuis plusieurs décennies [30].

On remarque l'existence du caractère oscillant dans les efforts et les déplacements près du bout de la fissure. Récemment, Suo [32] a étudié l'interaction des singularités avec les fissures. Hutchinson [33] a formulé les champs des contraintes d'une dislocation de bord près d'une fente.

Les champs de contraintes sont différents dans le cas où la dislocation émane d'une source autre que la fente elle-même sachant que ses mouvements sont considérés proches de cette dernière. Donc, l'interaction entre les dislocations et la fissure principale joue un rôle important dans la propagation de la fissure jusqu'à la rupture du matériau. Tamate et Kurihara [34, 35] ont respectivement étudié en détail le comportement d'une dislocation vis près de fissure située à l'interface. Anderson et Rice [36] ont par ailleurs formulé les champs des contraintes tridimensionnels d'un groupe de dislocations émanant d'une fissure.

Shiue, Hu et Lee [37] ont pris en considération l'effet de l'interaction entre une dislocation vis et l'interface extérieure d'une fissure dans un matériau d'épaisseur mince soumis à un chargement à l'infini. Par ailleurs, Zhang [32] a souligné l'importance de la force d'image sur la dislocation et du facteur d'intensité de contraintes produits par la dislocation émise soit par la fissure soit émanant d'une autre source.

Pour l'interaction avec des dislocations vis, on considère un solide est supposé homogène ayant un module du cisaillement μ . Au bout de la fissure, les champs de contrainte ont un caractère oscillant avec un facteur d'intensité de contraintes en modes mixtes I et II.

Par conséquent, le taux de restitution d'énergie pour la propagation de fissure est obtenu à partir du facteur d'intensité de contraintes par superposition de modes (modes mixtes).

III.3 Interactions fissure - interface

Il est évident que les composites dont les fibres et les matrices sont fragiles peuvent montrer une résistance assez élevée à la rupture lorsque cette dernière se produit le long de l'interface avant rupture des fibres. La plupart des mécanismes importants du durcissement sont un résultat de l'échec direct (cisaillement) de l'interface. Ce mécanisme est à l'origine d'absorption d'énergie avec une stabilité soutenue de la propagation de la fissure. Par ailleurs, le mode en tension induit la rupture instable avec des limites d'absorption d'énergie. Par conséquent, la résistance du composé peut être déterminée en optimisant les propriétés d'interface entre les fibres de renforcement et la phase de matrice [38].

III.4.1 Mécanique de la rupture des structures multi matériaux

La propagation d'une fissure se propageant dans une structure composite est influencée par de nombreux paramètres tels que le coefficient de Poisson, le module de Young des deux matériaux et la nature du contact entre ces derniers.

Sih et Erdogan [39,40] ont été parmi les pionniers à utiliser la mécanique de la rupture à l'analyse des champs de contraintes au voisinage d'interfaces dans le cas des matériaux composites. Ces champs de contraintes et de déformations obtenus analytiquement renferment en leur sein un terme représentatif de la singularité en pointe de fissure. Par conséquent, ces champs sont difficilement utilisables en raison de la géométrie des fissures existantes (les fissures à angles aigus ou obtus, les pores circulaires, les vides, etc. ...) dans les matériaux.

Lorsque l'on étudie la rupture dans des structures composites, on distingue deux types de fissures dont les comportements à la rupture sont différents :

Fissure se trouvant loin de l'interface dans un matériau composite comme montré sur la figure 3.2 ou aux alentours de l'interface comme montré sur la Figure 3.3.

Fissures situées dans le plan de l'interface, à la limite de deux matériaux dont les caractéristiques sont différentes (voir Figure 3.4).

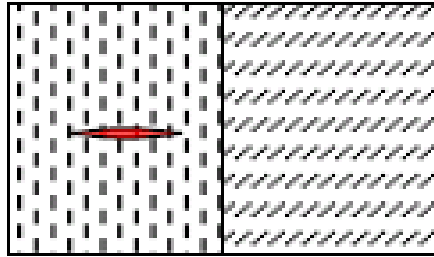


Figure 3.2 Fissure n'ayant pas atteint l'interface.

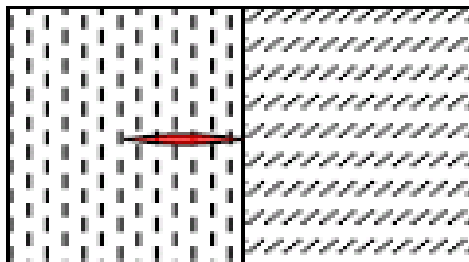


Figure 3.3 Fissure au droit de l'interface.

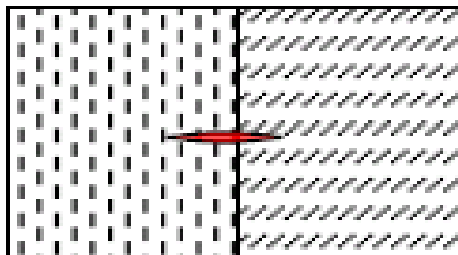


Figure 3.4 Fissure ayant traversé l'interface

III.4.2 Critère de la mécanique de rupture [38]

La transition entre la cohésion et l'adhésion dans un matériau composite a été étudiée par Kendall [41]. L'approche utilisée est basée sur le principe énergétique de Griffith. Le taux d'énergie est dérivé le long de l'interface pour une fissure finie dans un matériau isotrope comme suit;

$$\frac{R_L}{R_T} \leq \frac{1}{4\pi(1-\nu^2)} \quad (3.1)$$

L'équation (3.1) dépend principalement du rapport des énergies dues à l'extension longitudinale de la fissure par rapport à l'ouverture transversale. Cette énergie est relativement peu sensible à la longueur de la fissure et au module d'élasticité.

Le critère de la mécanique de rupture exige que le rapport du taux de restitution d'énergie sous tension (G_L/G_T) soit plus grand ou égal au rapport de la rigidité longitudinale sur la flexibilité transversale, en d'autres termes, on a;

$$\frac{R_L}{R_T} \leq \frac{G_L}{G_T} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G_{LT}}{E_L}} \quad (3.2)$$

où, G_L est le taux de restitution d'énergie sous tension pour la rupture longitudinale de la fibre et G_T est le taux de restitution d'énergie sous tension pour la rupture transversale de la fibre.

III.4.3 Conditions de frontière d'interface

On considère un solide composite ayant une interface dont la partie supérieure ($x_2 > 0$) correspond au matériau A, et celle de la moitié inférieure ($x_2 < 0$) au matériau B. Les deux matériaux A et B sont isotropes (voir Figure 3.1).

Dans la présente étude, on est amené à traiter le cas d'un problème bidimensionnel. Les conditions de frontière à l'interface sont définies comme suit;

$$u_i^A(x_1, x_2 = 0^+) = u_i^B(x_1, x_2 = 0^-), \quad (3.3)$$

$$\sigma_{i2}^A(x_1, x_2 = 0^+) = \sigma_{i2}^B(x_1, x_2 = 0^-), \quad i = 1, 2 \quad (3.4)$$

où u_i représente le déplacement dans la direction x_i et σ_{i2} est la composante d'effort, en état de contrainte plane, et le subscript i se réfère à $i = 1, 2$.

Pour une fissure finie comme montrée par la Figure 3.1, les champs de contraintes en présence d'une dislocation dans le cas où cette dernière émane de la fissure ont été déterminés par Zhang et Li [1]. Dans le cas où la dislocation émane d'une source autre que la fissure alors le vecteur de Burger est considéré comme étant égal à zéro.

III.5 Analyse du champ de contraintes généré par l'interaction fissure-dislocation

Le phénomène de la formation d'une fissure est la concentration très importante des champs de contraintes au front de la fissure appelée zone à fortes perturbations.

Ce phénomène a été observé expérimentalement par de nombreux chercheurs. L'existence d'inclusions, de dislocations, de vides, etc..., influence grandement la propagation de la fissure. Par conséquent, tout au long de cette étude, on propose d'évaluer quantitativement l'influence de cette zone formée principalement de dislocations et son effet sur la propagation de la fissure principale. Donc, il est impératif d'analyser ce phénomène sur la base d'une étude exacte de l'interaction élastique d'une fissure avec des dislocations avoisinantes pourvues d'une certaine force d'action et orientées d'une façon arbitraire. Dans le cas de notre étude, la fissure principale est présentée comme une fissure semi infinie, soumise à un champ de contraintes caractérisé par un Facteur d'Intensité de Contraintes (F.I.C.) en mode I et noté par K_I . Il est évident de considérer dans notre étude que l'interaction de la dislocation avec la fissure principale est évaluée en terme de F.I.C. amplifié ou (réduit) agissant au bout de la fissure principale.

Les observations microscopiques de la propagation de la fissure dans les matériaux fragiles [41, 42] ont montré que la zone d'endommagement se développe au voisinage du front de la fissure. Cette zone peut être identifiée dans certain cas comme une région intensive des dislocations. Le modèle de zone endommagée est celui proposé par Chudnovsky [43] connu comme étant «Crack Layer» theory. Cette dernière considère le processus de propagation de la fissure comme étant un développement et une coalescence subséquente de micro défauts au voisinage de la pointe de la fissure principale.

D'autres approches assez distinctes les unes des autres ont été développées par d'autres chercheurs dans le but de déterminer les champs de contraintes associés à la présence de

dislocations au voisinage de la fissure principale. Les approches les plus récentes sont telles suit:

La première étant celle où la dislocation est modélisée par une inclusion dans un milieu élastique effectif. Ce type de modèle a fait l'objet de recherche par plusieurs auteurs, il existe des insuffisances dans leur approche d'un point de vue physique. D'abord, les fluctuations locales des dislocations densités et longueurs paramètres importants dans le processus de rupture n'ont pas été prises en considération [44]

Dans la deuxième approche, l'interaction entre la fissure et les dislocations repose sur une description détaillée de localisation de chaque dislocation. Apparemment, l'approche en elle-même présente des limitations dans les calculs et devient peu pratique pour un nombre assez élevé de dislocations [45].

Dans la troisième approche, la zone de dislocations est caractérisée par une distribution statique de densité des dislocations [46]

III.5.1 Formulation mathématique du problème

Le problème est formulé en terme de potentiels complexes donnés par deux fonctions potentielles ϕ et ψ [1]. Pour la contrainte plane, le déplacement et le champ de contraintes peuvent généralement être exprimés par deux fonctions potentielles analytiques complexes comme suit:

$$u(z) = u_1 + iu_2 = \left(\frac{1}{\mu}\right) \left[k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right] \quad (3.5)$$

avec $k = 3 - 4\nu$, pour les contraintes planes ; ν est le coefficient de Poisson.

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 \left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] \quad (3.6)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 \left[z\overline{\phi''(z)} + \psi'(z) \right] \quad (3.7)$$

Dans les équations précédentes (3.6) et (3.7), la notation barre dénote le conjugué de nombre complexe et le nombre complexe est ;

$$Z = X_1 + iX_2 . \quad (3.8)$$

Pour des raisons de simplifications, les résultats sont exprimés en fonctions des deux potentiels complexes. Si la dislocation est considérée dans le milieu A alors les potentiels complexes sont donnés comme suit :

$$\phi_{fente}^A = \frac{1}{1-\beta^2} \left[\begin{aligned} & (1-\beta^2)\gamma^A \ln(z-z_d) + (\alpha+\beta^2)\gamma^A \ln(z-\bar{z}_d) \\ & -(1+\alpha)\beta\gamma^A \ln(z-\bar{z}_d) \end{aligned} \right] \\ - \frac{1}{1-\beta^2} \left[(\alpha-\beta)(1-\beta)\gamma^A \frac{\bar{z}_d - \bar{z}_d}{z - \bar{z}_d} \right] \quad (3.9)$$

$$\psi_{fente}^A = \frac{1}{1-\beta^2} \left[\begin{aligned} & (1-\beta^2) \left(\bar{\gamma}^A \ln(z-z_d) - \gamma^A \frac{\bar{z}_d}{z-\bar{z}_d} \right) \\ & + (\alpha+\beta^2) \left(\bar{\gamma}^A \ln(z-\bar{z}_d) - \gamma^A \frac{z_d}{z-\bar{z}_d} \right) \end{aligned} \right] \\ - \frac{1}{1-\beta^2} \left[(\alpha-\beta)(1-\beta) \left(\left(\bar{\gamma}^A - \gamma^A \right) \frac{z_d - \bar{z}_d}{Z - \bar{Z}_d} + \bar{\gamma}^A \frac{(z_d - \bar{z}_d)\bar{z}_d}{(z - \bar{z}_d)^2} \right) \right] \\ + \frac{1}{1-\beta^2} \left[(1+\alpha)\beta \left(\bar{\gamma}^A \ln(z-\bar{z}_d) + \gamma^A \frac{z_d}{z-\bar{z}_d} \right) \right] \quad (3.10)$$

Si la dislocation est située dans le milieu B alors les deux potentiels complexes sont obtenus en échangeant les indices supérieurs A et B dans les équations (3.9) et (3.10) pour avoir;

$$\phi^B = \frac{1+\alpha}{1-\beta^2} \left[\gamma^A \ln(z - z_d) + \beta \gamma^A \ln(z - z_d) \right] \quad (3.11)$$

$$\psi^B = \frac{1+\alpha}{1-\beta^2} \left[\left(\overline{\gamma^A} \ln(z - z_d) - \gamma^A \frac{\overline{z_d}}{z - z_d} \right) - \beta \left(\overline{\gamma^A} \ln(z - z_d) + \gamma^A \frac{2z_d - \overline{z_d}}{z - z_d} \right) \right] \quad (3.12)$$

Tout au long de notre travail, nous posons la dislocation au niveau du matériau A.

Dundurs [47] a exprimé le champ de contraintes en terme de fonction de Airy en utilisant deux paramètres dénotés par α et β sous la forme suivante;

$$\alpha = \frac{\Gamma(k^A + 1) - (k^B + 1)}{\Gamma(k^A + 1) + k^B + 1} \quad (3.13)$$

$$\beta = \frac{\Gamma(k^A - 1) - (k^B - 1)}{\Gamma(k^A + 1) + k^B + 1} \quad (3.14)$$

Avec $\Gamma = \mu^B / \mu^A$ et μ^A, μ^B sont les modules de cisaillement des matériaux A et B respectivement

III.5.2 Fonctions analytiques complexes de dislocation

La dislocation située au voisinage de la fissure principale (située dans la zone perturbée), est caractérisée par les fonctions analytiques complexes sous la forme suivante;

$$\phi_{mico}^A = \frac{\mu^A \mu^B b_e}{i \pi (\mu^A + \mu^B k^A)} \ln(z - z_{1d}) \quad (3.15)$$

$$\psi_{mic}^A = \frac{\mu^A \mu^B \overline{b_e}}{-i \pi (\mu^B + \mu^A k^B)} \ln(z - z_{1d}) - \frac{\mu^A \mu^B b_e z_{1d}}{i \pi (\mu^A + \mu^B k^A) (z - z_{1d})} \quad (3.16)$$

Où $\psi_{mic}^A, \phi_{mic}^A$ sont les potentiels analytiques complexes correspondants à la dislocation

$b_e = b_1 + i b_2$ est le vecteurs de Burgers, et $Z_{1d} = a_d + i b_d$ est la position de la dislocation.

III.5.3 Interaction fissure et pole simple

En présence de la dislocation, la solution donnée par les équations (3.9) (3.10) et (3.15), (3.16), en faisant la superposition des équations (3.9) avec (3.15) et (3.10) avec (3.16), on obtient les fonctions de potentiels complexes comme suit (voir Annexe B pour plus de détails) ;

$$\phi_{tot}(z) = \phi_{int}(z) + \phi_{fente}(z) \quad (3.17)$$

$$\psi_{tot}(z) = \psi_{int}(z) + \psi_{fente}(z) \quad (3.18)$$

Par conséquent ;

$$\begin{aligned} \phi_{tot} = & \gamma \ln(z - z_d) + \Delta \gamma \ln(z - \bar{z}_d) - \nabla \gamma \ln(z - \bar{z}_d) - \eta \frac{\bar{z}_d - \overline{\bar{z}_d}}{z - \overline{\bar{z}_d}} \\ & + \frac{\mu^A \mu^B b_e}{i \pi (\mu^A + \mu^B k^A)} \text{lin}(z - z_{1d}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \psi_{tot} = & \bar{\gamma} \ln(z - z_d) - \gamma \frac{\bar{z}_d}{z - z_d} + \Delta \left(\bar{\gamma} \ln(z - \bar{z}_d) - \gamma \frac{z_d}{z - \bar{z}_d} \right) + \\ & \nabla \left(\bar{\gamma} \ln(z - \bar{z}_d) + \gamma \frac{z_d}{z - \bar{z}_d} \right) - \eta \left((\bar{\gamma} - \gamma) \frac{(z_d - \bar{z}_d)}{z - \bar{z}_d} + \bar{\gamma} \frac{(z_d - \bar{z}_d) \bar{z}_d}{(z - \bar{z}_d)^2} \right) \\ & + \frac{\mu^A \mu^B \bar{b}_e}{-i \pi (\mu^B + \mu^A k^B)} \text{lin}(z - z_{1d}) - \frac{\mu^A \mu^B b_e z_{1d}}{i \pi (\mu^A + \mu^B k^A) (z - z_{1d})} \end{aligned} \quad (3.20)$$

III.5.4 Contraintes dans un bi matériau

On considère que la dislocation se situe toujours dans le milieu A, par conséquent les contraintes obtenues doivent comporter en leur sein des fonctions analytiques comme celles des expressions (3.19) et (3.20) [1]. Ce sont les fonctions d'interaction dislocation- fissure principale et sont données telles suit;

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 \left[\phi'_{tot}(z) + \overline{\phi'_{tot}(z)} \right] \quad (3.21)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 \left[\overline{z} \phi''_{tot}(z) + \psi'_{tot}(z) \right] \quad (3.22)$$

où;

$$\begin{cases} \phi'_{tot}{}^A = \phi'_{fente}{}^A + \phi'_{mic}{}^A \\ \phi''_{tot}{}^A = \phi''_{fente}{}^A + \phi''_{mic}{}^A \\ \psi'_{tot}{}^A = \psi'_{fente}{}^A + \psi'_{mic}{}^A \end{cases} \quad (3.23)$$

En substituant (3.23) dans (3.22) et (3.21) et en utilisant les équations (3.19) et (3.20) (voir démonstration bien détaillée dans l'annexe B), on obtient;

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= \frac{\gamma}{z - z_d} + \frac{(\Delta - \nabla)\gamma}{Z - \overline{Z}_d} + \eta\gamma \frac{-(z_d - \overline{z}_d)}{(z - \overline{z}_d)^2} + \frac{\mu^A \mu^B b_e}{i\pi(\mu^A + \mu^B k^A)(z - z_{1d})} \\ &+ \frac{\overline{\gamma}}{\overline{z} - \overline{z}_d} + \frac{(\Delta - \nabla)\overline{\gamma}}{\overline{z} - \overline{z}_d} + \eta\overline{\gamma} \frac{(\overline{z}_d - z_d)}{(\overline{z} - \overline{z}_d)^2} - \frac{\mu^A \mu^B \overline{b}}{i\pi(\mu^A + \mu^B k^A)(\overline{z} - \overline{z}_d)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2 \left(\frac{\overline{z}\gamma}{(z - z_d)} - \frac{(\Delta - \nabla)\overline{\gamma}\overline{z}}{(z - \overline{z}_d)^2} - 2\eta\overline{\gamma}\overline{z} \frac{(z - \overline{z}_d)(z_d - \overline{z}_d)}{(z - \overline{z}_d)^4} \right) \\ &+ 2 \left(+ \frac{\overline{\gamma}}{z - z_d} + \frac{\overline{\gamma}z_d}{(z - z_d)^2} + \frac{\Delta\overline{\gamma}}{z - z_d} + \frac{\Delta\overline{\gamma}z_d}{(z - \overline{z}_d)^2} + \frac{\nabla\overline{\gamma}}{z - \overline{z}_d} \right) \\ &+ 2 \left(- \frac{\nabla\overline{\gamma}z_d}{(z - z_d)^2} + \frac{\eta(\overline{\gamma} - \gamma)(z_d - \overline{z}_d)}{(z - \overline{z}_d)^2} \right) + 2 \left(+ 2\eta\overline{\gamma}\overline{z} \frac{(z_d - \overline{z}_d)(z - \overline{z}_d)}{(z - \overline{z}_d)^4} \right) \\ &+ 2 \left[- \frac{\mu^A \mu^B b_e \overline{z}}{i\pi(\mu^A + \mu^B k^A)(z - z_{1d})^2} + \frac{-\mu^A \mu^B \overline{b}_e}{i\pi(\mu^B + \mu^A k^B)(z - z_{1d})} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\mu^A \mu^B b_e z_{1d}}{i\pi(\mu^A + \mu^B k^A)(z - z_{1d})^2} \quad (3.25)$$

III.6 Champs de contraintes générés par l'interaction fissure- dislocations

La plupart des chercheurs ont été conduit à admettre que l'extension de la fissure s'élabore dans une petite zone voisine du front de la fissure. Irwin [11] cherchait une expression du champ de contraintes au voisinage du front de fissure, en admettant qu'on pourrait tenir compte de la zone plastique par un accroissement fictif de la fissure.

Irwin [11] montra ainsi par un développement limité des fonctions de Westergaard que ce qu'il avait précédemment remarqué était encore valable pour ces problèmes. Donc, après avoir homogénéisé le bi-matériau et l'avoir analysé mathématiquement et physiquement, on a pu déterminer le champ de contraintes d'un matériau homogène sous la forme suivante (voir Annexe B) ;

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \frac{2\mu r}{\pi(1+k)\rho} \begin{cases} 4\sin(\theta - \beta) - \sin(\beta + \theta) - \sin(\beta)c \cos(\theta - 2\beta) \\ \sin(\beta + \theta) + \sin(\beta)c \cos(\theta - 2\beta) \\ \cos(\theta + \beta) + \sin(\beta)\sin(\theta - 2\beta) - 2\sin(\theta - \beta) \end{cases} \quad (26)$$

Où;

ρ : Rayon ou la distance entre la fissure principale et la dislocation avoisinante.

β : L'angle d'orientation de la dislocation autour de la fissure principale.

r : Longueur de la dislocation.

θ : L'angle d'orientation de la dislocation autour d'elle-même.

Le champ de contraintes dans le cas où la dislocation est parallèle à la fissure principale ($\theta = 0$) est donné comme suit;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} = \frac{2\mu r}{\pi(1+k)\rho} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} -5\sin(\beta) - \sin(\beta)c \cos(2\beta) \\ \sin(\beta) + \sin(\beta)c \cos(2\beta) \\ \cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(2\beta) + 2\sin(\beta) \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Le champ des contraintes dans le cas où la dislocation est perpendiculaire à la fissure principale ($\theta = \pi/2$) est tel suit;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} = \frac{2\mu r}{\pi(1+k)\rho} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(2\beta) \\ \cos(\beta) + \sin(\beta)\sin(2\beta) \\ -\sin(\beta) + \cos(2\beta)[\sin(\beta) - 1] \end{array} \right. \quad (3.28)$$

La variation de champ de contrainte en fonction de l'angle d'orientation de dislocation autour de la fissure principale, est représentée sur les figures suivantes ;

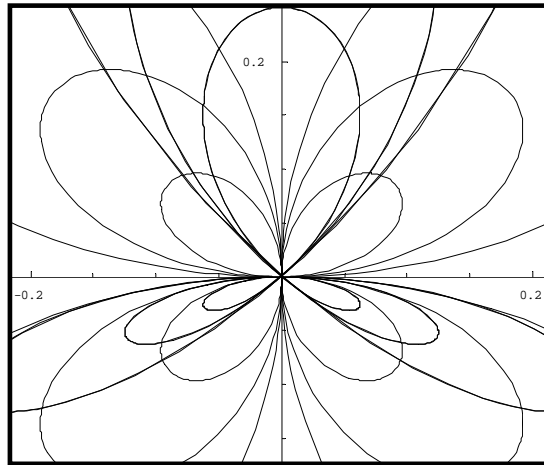


Figure 3.5 Courbes d'isocotraines (σ_{11}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation cas où ($\theta = 0$)

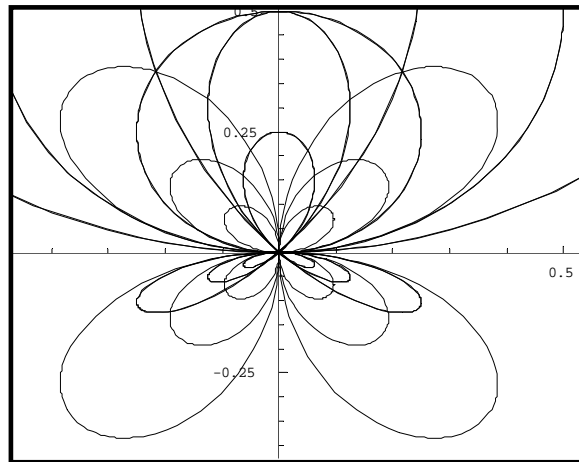


Figure 3.6 Courbe d'isocotraines (σ_{22}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation cas où $(\theta = 0)$

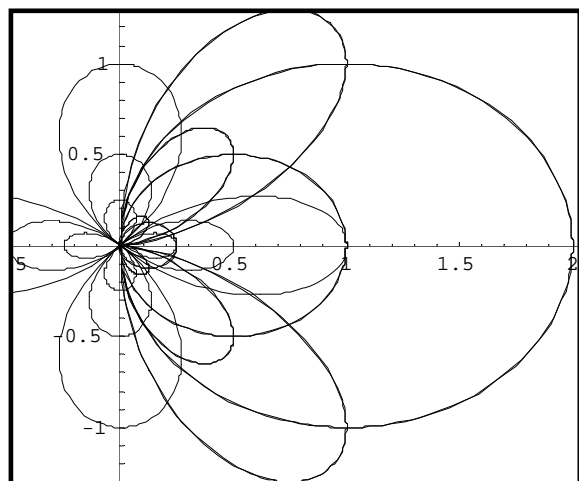


Figure 3.7 Courbe d'isocotraines(σ_{12}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation cas où $(\theta = 0)$.

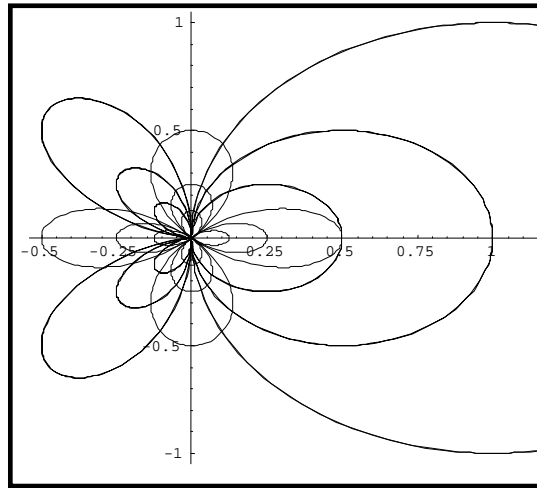


Figure 3.8 Courbe d'isocotraines (σ_{11}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation cas où ($\theta = \pi/2$).

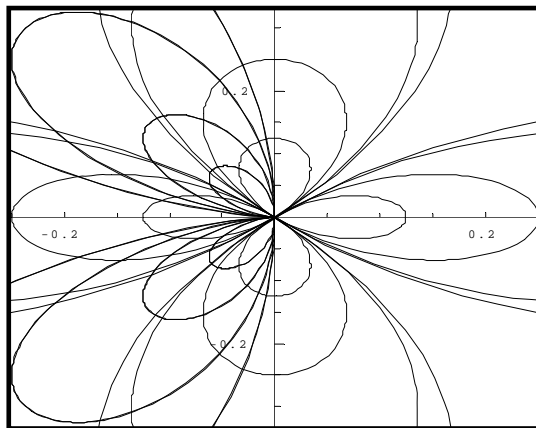


Figure 3.9 Courbe d'isocotraines (σ_{22}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation cas où ($\theta = \pi/2$)

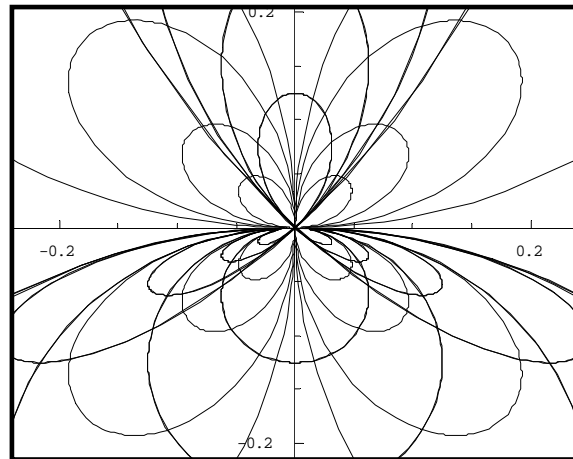


Figure 3.10 Courbe d'isocotraines (σ_{12}) provenant lors de l'interaction entre une fissure et une dislocation cas où ($\theta = \pi/2$)

III.7 Analyse du facteur d'intensité de contrainte (FIC)

Les contraintes trouvées précédemment n'ont d'intérêt que si elles sont caractérisées par des facteurs d'intensité de contraintes. Ces derniers sont considérés comme des paramètres essentiels pour l'étude de la résistance à la rupture des matériaux et par conséquent, de l'évolution de la fissure dans le matériau et surtout de l'état des différents champs de contraintes générés par les interactions entre la fissure et la zone avoisinante formée de dislocations.

La détermination des ces facteurs se fait selon deux approches distinctes l'une de l'autre et qui se résument comme suit:

La première approche est basée sur l'utilisation des fonctions à variables complexes de Mushkelishvili [48] et développée par Sih [39].

La deuxième approche considère les fonctions d'influences de Green [49]. D'autres méthodes analytiques et numériques ont été développées récemment. Parmi ces méthodes, on a:

Les méthodes basées sur les techniques expérimentales et l'observation par le biais de l'utilisation d'équipements électroniques récents tels le Microscope Electronique à Balayage et les capteurs/récepteurs d'ondes de surfaces [50]

Les méthodes numériques telles les Eléments Finis et les Intégrales de Frontières [45]. Toutes ces méthodes considèrent les mêmes hypothèses dans leur analyse de problèmes liés à la mécanique de la rupture à savoir :

- Le solide est considéré linéairement élastique.
- La zone micro fissurée est située au devant et au voisinage de la fissure initiale.
- La zone micro fissurée est symétrique par rapport à la ligne de la fissure principale.
- Les dimensions de la dislocation sont petites par rapport à celles de la fissure principale.
- Le mode I est considéré pour des raisons de simplicité.
- Les équations obtenues sont élaborées sans dimensions.

Toutes ces hypothèses ont été prises en considération dans notre travail pour la détermination du F.I.C. en mode I K_I et éventuellement pour le calcul du taux de restitution d'énergie translationnel J_I .

En mécanique linéaire de la rupture, le F.I.C. est formulé selon Irwin comme suit;

$$K = \sigma \sqrt{\pi a B} \quad (3.29)$$

où σ est la contrainte infinie, a est la longueur de la fissure principale et B est le facteur correspondant à la géométrie du modèle proposé.

Le paramètre K_I pour le mode I est proportionnel au champ de contrainte généré et au voisinage de la singularité (le bout de la fissure) il est donné par la relation suivante;

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2 \pi r}} \quad (3.30)$$

On remarque que cette relation est valide pour une distance assez proche de la fissure.

III.7.1 Facteur d'Intensité de Contraintes en présence d'une dislocation

Dans le cas d'un milieu bidimensionnel infini sollicité en mode I, le facteur d'intensité de contrainte K_I peut être déterminé par un développement au voisinage de la position de la dislocation par rapport à la fissure principale ($z \rightarrow 0$) [3]. En d'autres termes, les facteurs d'intensité de contraintes en mode I (K_I) et en mode II (K_{II}) sont reliés par la relation suivante :

$$K_I - i K_{II} = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} (\sigma_{yy} - i \sigma_{xy}) \quad (3.31)$$

où σ_{xx} , σ_{yy} sont les contraintes données par l'équation (3.26)

En substituant (Eq 3.26) dans (Eq3.31) et par conséquent (voir annexe), le facteur d'intensité de contrainte prend la forme suivante;

$$K_I = \frac{-2\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho(1+k)}} \left\{ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin(\theta - \beta) - \frac{1}{2} \sin\left(\theta - \frac{7\beta}{2}\right) + \sin\left(\theta - \frac{\beta}{2}\right) + \sin(\theta) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (3.32)$$

Donc, dans le cas où la dislocation est parallèle à la fissure principale ($\theta = 0$), le F.I.C. K_I est formulé comme suit;

$$K_I(\theta = 0) = \frac{\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho(1+k)}} \left\{ 2 \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin(\beta) - \sin\left(\frac{7\beta}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (3.33)$$

Par contre, dans le cas où la dislocation est perpendiculaire à la fissure principale ($\theta = \pi/2$), le F.I.C. K_I prend la forme suivante;

$$K_I = \frac{-2\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho(1+k)}} \left\{ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos(\beta) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{7\beta}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (3.34)$$

III.7.2 Variation du facteur d'intensité de contrainte ($\Delta K / K$)

La variation du facteur d'intensité de contraintes (ΔK) est ainsi déterminée et par conséquent étudiée en tenant compte de l'orientation arbitraire de la dislocation par rapport à la fissure principale. Pour le calcul de cette variation, on utilise le même procédé que pour le facteur d'intensité de contrainte. On constate que;

$$\Delta K_1 - i \Delta K_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} (\Delta \sigma_{22} - i \Delta \sigma_{12}) \quad (3.35)$$

Et par conséquent, les contraintes σ_{22} et σ_{12} sont en fonctions des potentiels complexes;

Par conséquent, les variations des F.I.C. ΔK_1 et ΔK_2 sont respectivement formulés sous la forme suivante (pour plus de détails se référer à l'annexe B);

$$\Delta K_1 = \frac{-\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho}(k+1)} \left\{ \sin\left(\theta - \frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\theta - \frac{5\beta}{2}\right) + 2\sin(\theta)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (3.36)$$

$$\Delta K_2 = \frac{-\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho}(k+1)} \left\{ \cos\left(\theta - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\theta - \frac{5\beta}{2}\right) + 2\sin(\theta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (3.37)$$

Si on considère que la dislocation est parallèle à la fissure principale ($\theta = 0$) alors la variation du F.I.C. le mode I, prend la forme suivante;

$$\Delta K_1 = \frac{-\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho}(k+1)} \left\{ \sin\left(\frac{5\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (3.38)$$

La variation du facteur d'intensité de contraintes ($\Delta K_I/K_0$) en fonction de l'angle d'orientation de dislocations β sera représentée sur les figures suivantes :

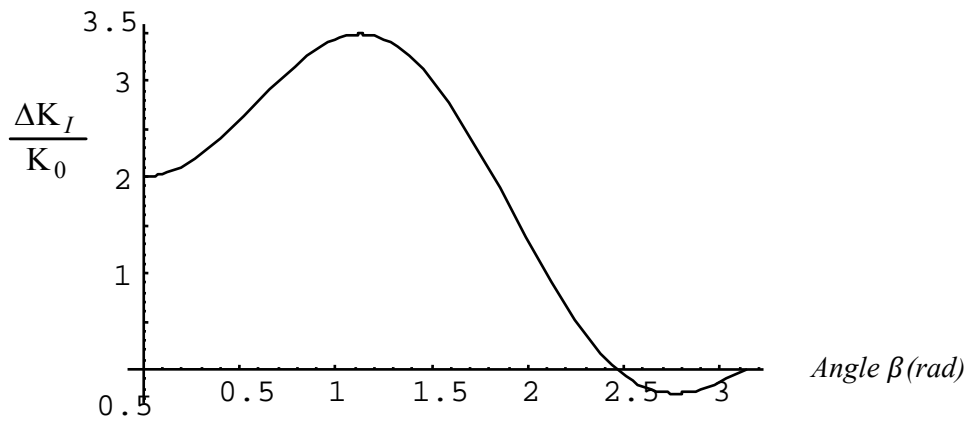


Figure 3.11 Variation du facteur d'intensité de contraintes ($\Delta K_I/K_0$) en fonction de l'angle (β) d'orientation de dislocations (cas où $\theta = 0^\circ$).

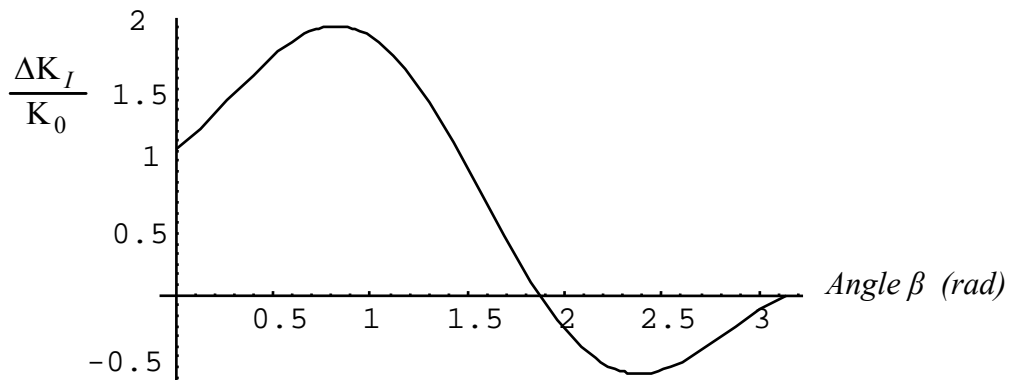


Figure 3.12 Variation du facteur d'intensité de contraintes ($\Delta K_I/K_0$) en fonction de l'angle β d'orientation de dislocations (cas où $\theta = 45^\circ$).

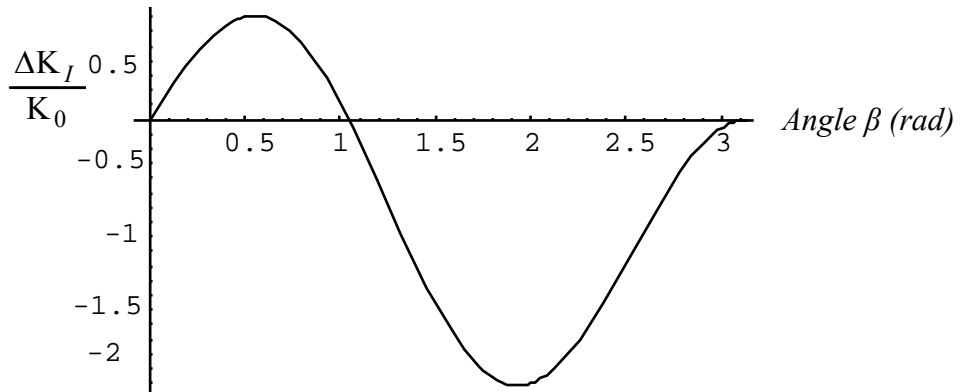


Figure 3.13 Variation du facteur d'intensité de contraintes ($\Delta K_I/K_0$) en fonction de l'angle d'orientation de dislocations β (cas où $\theta = 90^\circ$).

Les zones d'amplification et de réduction sont récapitulées dans le tableau suivant :

Tableau 3.1 Angles de limitation de zones d'amplification et de réduction.

Position de la dislocation par rapport la fissure principale.	Angle limitant les zones d'amplification et de réduction (en degrés)	
	Amplification (+)	Réduction (-)
$\theta = 0$	68	160
$\theta = 45$	60	140
$\theta = 60$	60	145
$\theta = 90$	36	120
$\theta = 120$	85	155
$\theta = 180$	120	36

Le tableau suivant récapitule les résultats des différents chercheurs limitant les zones d'amplification et de déduction :

Tableau 3.2 Résultats des différents chercheurs

Auteurs.	positionnement de la dislocation par rapport à la fissure principale.	Amplification (-) en degrés	Réduction (-) en degrés
L.R.F. Rose [46]	$\theta = 0^\circ$	$< 70^\circ$	$70^\circ < \theta < 125^\circ$
A. Chudnovsky [69] S. Wu	$\theta = 0^\circ$	$< 68^\circ$	$68^\circ < \theta < 155^\circ$
Y. lam. B. Cotterell [67]	$\theta = 0^\circ$	$< 51^\circ$	$51^\circ < \theta < 124^\circ$
S.Gong and H. Horii [68]	$\theta = 0^\circ$	$< 75^\circ$	$75^\circ < \theta < 155^\circ$
A. Chudnovsky [43]	$\theta = 0^\circ$	$< 69^\circ$	$69^\circ < \theta < 138^\circ$
	$\theta = 90^\circ$	$< 36^\circ$	$36^\circ < \theta < 138^\circ$
M. Chabaat H. Hadjab [50]	$\theta = 0^\circ$	$< 67^\circ$	$67^\circ < \theta < 142^\circ$
	$\theta = 90^\circ$	$< 37^\circ$	$37^\circ < \theta < 108^\circ$
M. Chabaat S. Djouder [49]	$\theta = 0^\circ$	$< 55^\circ$	$55^\circ < \theta < 138^\circ$
	$\theta = 90^\circ$	$< 25^\circ$	$25^\circ < \theta < 90^\circ$
M. Chabaat. H. Hamli Ben Zahar [31]	$\theta = 0^\circ$	$< 68^\circ$	$68^\circ < \theta < 160^\circ$
	$\theta = 90^\circ$	$< 36^\circ$	$36^\circ < \theta < 120^\circ$

III.8 Discussions et interprétation

Dans les Figures précédentes, il a été montré que la variation du facteur d'intensité de contraintes ($\Delta K_I/K_0$) dépend de la position des dislocations et de l'orientation de celles-ci. Il a été constaté que durant la propagation de la fissure, la présence de dislocations au voisinage de cette fissure principale induit deux effets distincts qui se résument à :

- Un effet d'amplification des champs de contrainte exprimé par le F.I.C. en mode I par conséquent, cela engendre une accélération de la propagation de la fissure principale.
- Un effet de réduction de ces champs de contraintes exprimé par le F.I.C. en mode I engendrant ainsi une décélération de la propagation de la fissure.

Il est évident que ces deux effets ont une influence dans la propagation de la fissure. Donc, la présence de dislocations joue un rôle important dans le processus de propagation de fissures.

Il a été montré que si la dislocation est dans une position parallèle à la fissure principale alors l'effet amplificateur est dominant d'où la valeur de l'orientation de ces dislocation est inférieure à 68° par contre, l'effet réducteur présente un angle d'orientation de ces dislocations inférieur à 160° .

Dans le cas où la dislocation est perpendiculaire par rapport à la fissure principale alors l'effet réducteur est prédominant. L'angle avoisine ainsi les 120° par contre, l'effet amplificateur a diminué jusqu'à atteindre un angle de 36° .

Le Tableau 3.1 récapitulatif donne les zones limitant les effets d'amplification et de réduction durant l'interaction entre la macro-fissure et les dislocations avoisinantes pour les différentes configurations des dislocations (position et orientation).

Chapitre IV

Fissuration du matériau verre sans présence de la dislocation

IV.1 Introduction

Le verre est un matériau de comportement fragile, une fibre de verre vierge (fibre très fine sans défaut) a une résistance à la traction de plusieurs Gigapascals [51]. Par contre, un élément de verre macroscopique a une résistance de traction comprise entre 10 et 100 MPa. La résistance du verre peut être augmentée après passage dans l'acide fluorhydrique. de même, si le verre est laissé inerte dans l'eau après abrasion, sa résistance augmente. Ces traitements modifient la surface du verre. Comme on peut le voir à travers ces exemples, la résistance du verre est directement liée à son état de surface. Voici quelques valeurs de résistance d'éléments de verre [52]

- Produit classique : 14 à 70 MPa
- Baguette de verre fraîchement réalisée : 70 à 140 MPa
- Baguette de verre après abrasion : 14 à 35 MPa
- Fibre humide, éraflée : 3 à 7 MPa
- Fibre de verre manipulée : 350 à 700 MPa
- Fibre de verre fraîchement réalisée : 0,7 à 2,1 GPa

IV.2 Résistance théorique

C'est Orowan en 1949 qui proposa un critère de rupture des matériaux fragiles en terme de paramètres atomiques [53]. La résistance théorique (contrainte de rupture théorique) s'écrit directement en fonction de la distance inter-atomique et de l'énergie de création d'une unité de surface :

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a_0}} \quad (4.1)$$

avec

E ; Module d'Young

γ ; Energie de création d'une unité de surface.

a_0 ; Distance intra-atomique.

Alors, avec $\gamma = 3.5 J/m^2$ et $a_0 = 0.2 nm$, la contrainte de rupture théorique atteint $\sigma_{th} = 35 GPa$ [52]. Griffith a expliqué (en 1920) [11] la différence entre la résistance de fibres de verre et les éléments macroscopiques par la présence de défauts à la surface du verre.

IV.3 Observation de la rupture du verre

Les faciès de rupture du verre sont caractéristiques du matériau. La rupture du verre est brutale ; son observation n'est en général pas possible sauf avec une caméra ultra-rapide. L'observation globale a posteriori permet de déterminer la cause de la rupture : choc mécanique, choc thermique... D'autre part, l'observation du faciès local de rupture (à partir de l'origine de la rupture) permet de retrouver la contrainte locale ayant conduit à la rupture. Le verre recuit se casse en gros morceaux pointus et très coupants (figure 4.1).

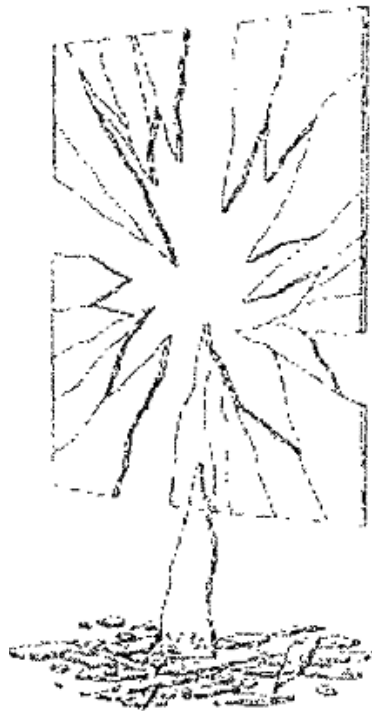


Figure 4.1 Vue générale d'un élément cassé en verre recuit [54]

Les schémas globaux de rupture (orientation, forme, bifurcation des macrofissures) sont différentes suivant le type de sollicitation auquel le verre a été soumis avant rupture. Plus l'énergie extérieure fournie pour la rupture est grande, plus le nombre de morceaux est grand [55] (voir Figure.4.2).

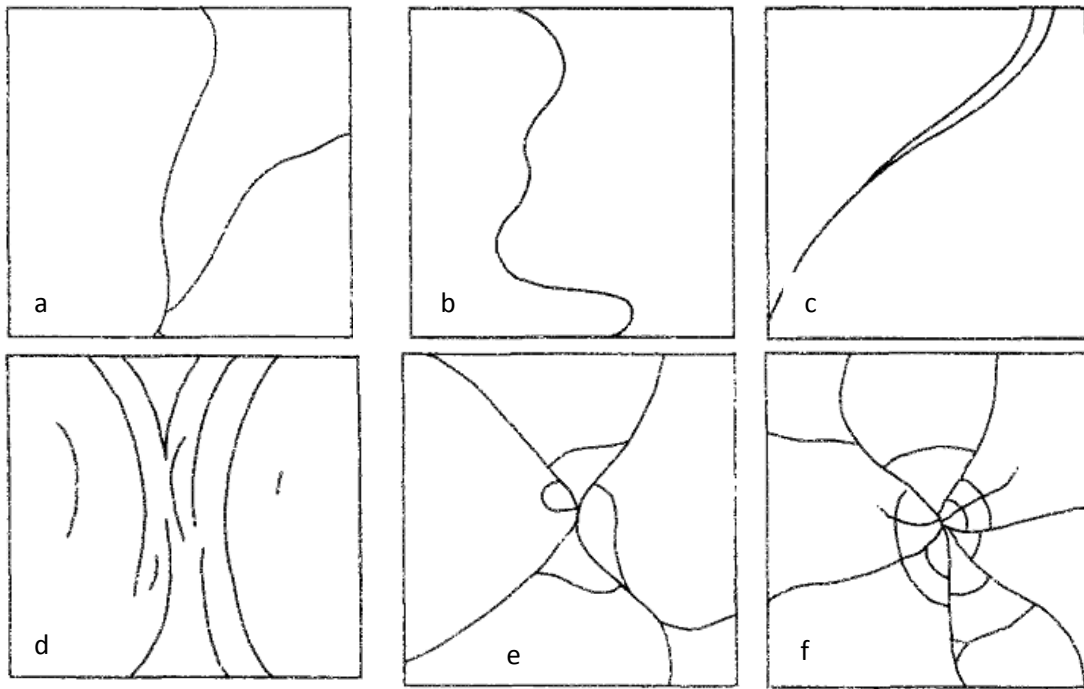


Figure 4.2 Dessins de faciès de rupture pour différentes causes de rupture ; a) contrainte mécanique b) choc thermique, c) choc périphérique, d) implosion, e) pression extérieure, f) choc au centre [55]

IV.4 Formulation d'éléments finis

La fissuration est l'une des principales causes de déformation et de dommage dans les structures. La méthode des éléments finis est la mieux adaptée pour la discrétisation d'un ensemble de matériaux à comportement très différents [56].

Deux techniques de modélisation des fissures sont utilisées:

La première est la modélisation continue des fissures, qui consiste à modéliser le matériau par un changement des propriétés constitutives des éléments finis.

La deuxième est la modélisation discrète des fissures, qui modélise la fissure comme une quantité géométrique.

Nombreux sont les travaux qui, dans la littérature, concernent des éléments finis construits à partir de fonctionnelles à plusieurs champs. L'avantage essentiel de ces éléments finis mixtes

est l'amélioration du calcul des contraintes ; c'est le cas par exemple dans le traitement des singularités [57, 58].

Les éléments finis que nous utilisons se fondent sur la formulation hybride de Pian [59], qui nécessite:

- 1) La continuité du champ de déplacement sur les frontières des domaines $\partial V^{(k)}$;
- 2) la continuité et l'équilibre du champ de contrainte à l'intérieur de chaque élément fini hybride. Le champ de contrainte n'est pas nécessairement continu d'un élément fini à l'autre.

Cette modélisation permet d'obtenir le champ de contraintes résidé dans l'élément et les coefficients de concentration de contraintes, qui contrôlent l'intensité du champ de contrainte; Il nous faudra donc définir, pour l'élément hybride, des lois d'interpolation du champ de contrainte et du champ de déplacement compatible aux frontières.

IV.4.1 Choix d'une loi d'interpolation statique et d'un champ de déplacement pour l'élément fini

Nous retiendrons les travaux de Pian et Tong [60] qui proposent d'utiliser un super élément à 9 ou à 17 nœuds, entourant la pointe de fissure, en employant une interpolation du champ de contraintes à l'intérieur de l'élément et une interpolation du champ de déplacement sur chaque demi côté de l'élément. Cet élément est constitué d'un matériau homogène isotrope ou orthotrope avec présence d'une fissure.

IV.4.2 Choix d'une loi d'interpolation statique

La solution des équations du champ de contrainte d'un problème plan de fissure sont données par Owen, Fawkes et Tong [61,16]

$$\begin{cases} \sigma_x = \sum_{i=1}^n SX_i \beta_i \\ \sigma_y = \sum_{i=1}^n SY_i \beta_i \\ \sigma_{xy} = \sum_{i=1}^n ST_i \beta_i \end{cases} \quad (4.2)$$

où les variables SX_i , SY_i , ST_i représentent les coefficients d'interpolation, n est le nombre de variables β choisi. Sous forme matricielle, ceci s'écrit:

$$\{\sigma\} = [P]\{\beta\} \quad (4.3)$$

où $[P]$ désigne la matrice d'interpolation:

$$[P] = \begin{bmatrix} SX_1(1) & SX_2(1) & \dots & SX_1(i) & SX_2(i) & \dots & SX_1\left(\frac{n}{2}\right) & SX_2\left(\frac{n}{2}\right) \\ SY(1) & SY_2(1) & \dots & SY_1(i) & SY(i) & \dots & SY_1\left(\frac{n}{2}\right) & SY_2\left(\frac{n}{2}\right) \\ ST_1(1) & ST_2(1) & \dots & ST_1(i) & ST_2(i) & \dots & ST_1\left(\frac{n}{2}\right) & ST_2\left(\frac{n}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$\{\beta\}$ est le vecteur des variables statiques ; $\{\beta\} = \langle \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \rangle$

qui définissent d'une part l'ouverture de la fissure et d'autre part le cisaillement plan.

IV.5 Définition d'un champ de déplacement

Un élément rectangulaire suggéré par Pian et Tong [60] est retenu ; seul le champ cinématique le long des côtés est nécessaire dans la formulation. Le sens d'orientation est préalablement choisi et devra être respecté dans la suite de la modélisation. La rigidité élémentaire sera établie suivant le sens choisi. Pour des raisons de compatibilité cinématiques, Pian et Tong ont choisi:

Soit une interpolation linéaire, cas de l'élément à 9 nœuds, si les éléments avoisinants sont de type linéaire (Figure 4.5);

Soit une interpolation quadratique pour le cas de l'élément à 17 nœuds, si les éléments entourant l'élément hybride sont de type quadratique (Figure. 4.6).

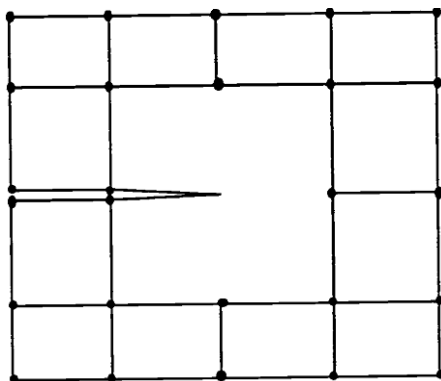


Figure 4.3 Raccordement du super élément avec des éléments classiques à 4 nœuds.

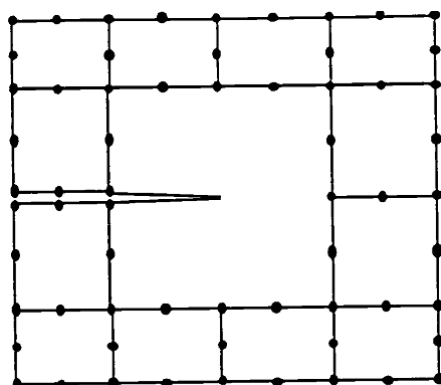


Figure 4.4 Raccordement du super élément avec des éléments classiques à 8 noeuds.

En notant U le champ de déplacement de bord, il vient

$$\{U\} = [L]\{q\} \quad (4.5)$$

avec

$$\{q\}^t = \langle u_1, v_1, \dots, u_m, v_m \rangle \quad (4.6)$$

où $\{q\}$ définit le vecteur des déplacements nodaux, m est le nombre de nœuds de l'élément hybride

IV.5.1 Interpolation pour un élément à 9 nœuds

Le déplacement U , pris linéaire entre deux nœuds voisins P et $P+1$ (9 et 1, 1 et 2, ..., 7 et 8) s'écrit (voir figure 4.5) :

$$\{U\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{h} & 0 & \frac{s}{h} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{h} & 0 & \frac{s}{h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ u_{p+1} \\ v_{p+1} \end{Bmatrix} = [L] \{q\} \quad (4.7)$$

où (u_p, v_p) est la valeur du déplacement U au nœud p , h décrit la longueur entre les deux nœuds p et $p+1$, S est la distance mesurée à partir de p .

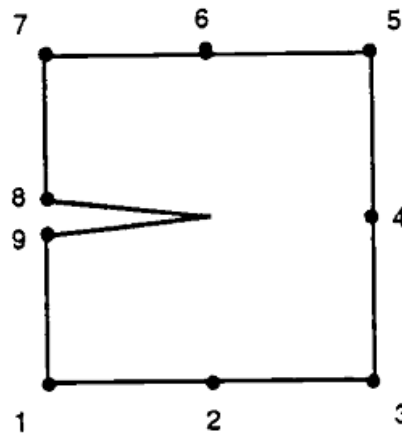


Figure 4.5 Super élément à 9 nœuds.

IV.5.2 Interpolation pour un élément à 17 nœuds

Dans ce cas, le déplacement est quadratique entre trois nœuds consécutifs p et $p+2$ 16 et 1, 1 et 3, ..., 13 et 15 (voir figure 4.6) et il s'exprime comme suit:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} \left(\frac{h-s}{h}\right)\left(\frac{h-2s}{h}\right) & 0 & 4\frac{s}{h}\left(\frac{h-s}{h}\right) & 0 & \frac{s}{h}\left(\frac{2s-h}{h}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{h-s}{h}\right)\left(\frac{h-2s}{h}\right) & 4\frac{s}{h}\left(\frac{h-s}{h}\right) & 0 & \frac{s}{h}\left(\frac{2s-h}{h}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ u_{p+1} \\ v_{p+1} \\ u_{p+2} \\ v_{p+1} \end{Bmatrix} = [L] \{q\} \quad (4.8)$$

où h représente dans ce cas, la mesure entre p et $p+2$, s est la distance à partir de p .

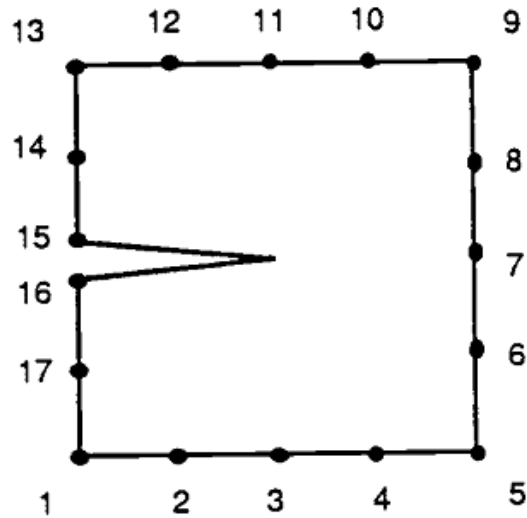


Figure 4.6 Super élément à 17 nœuds.

IV.6 Dérivées du champ de contraintes

A partir du champ d'interpolation des contraintes [P], nous pouvons exprimer le vecteur de dérivée des contraintes en fonction des variables statiques β sous la forme:

$$\{\sigma\}_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} [P] \{\beta\} \tag{4.9}$$

En remplaçant l'équation (4.4) dans cette dernière équation (4.9) on aura :

$$\{\sigma\}_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} SX_1(1) & SX_2(1) & \dots & SX_1(i) & SX_2(i) & \dots & SX_1\left(\frac{n}{2}\right) & SX_2\left(\frac{n}{2}\right) \\ SY(1) & SY_2(1) & \dots & SY_1(i) & SY(i) & \dots & SY_1\left(\frac{n}{2}\right) & SY_2\left(\frac{n}{2}\right) \\ ST_1(1) & ST_2(1) & \dots & ST_1(i) & ST_2(i) & \dots & ST_1\left(\frac{n}{2}\right) & ST_2\left(\frac{n}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{Bmatrix} \tag{4.10}$$

IV.6.1 Cas d'un matériau isotrope

Un changement des variables cartésiennes en variables polaires permet d'exprimer

Les dérivées du champ de contraintes par rapport à x en r et θ sous la forme matricielle
S suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx,x} \\ \sigma_{yy,x} \\ \sigma_{xy,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx,r} & \sigma_{xx,\theta} \\ \sigma_{yy,r} & \sigma_{yy,\theta} \\ \sigma_{xy,r} & \sigma_{xy,\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{,x} \\ \theta_{,x} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

le changement de variables est ;

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (4.12)$$

En substituant l'équation (4.12) dans l'équation (4.11) on aura alors ;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx,x} \\ \sigma_{yy,x} \\ \sigma_{xy,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx,r} & \sigma_{xx,\theta} \\ \sigma_{yy,r} & \sigma_{yy,\theta} \\ \sigma_{xy,r} & \sigma_{xy,\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Cette relation se réduit sous forme suivante ;

$$\{\sigma\}_{,x} = [P^*]_{iso} \{R^*\}_{iso} \{\beta\} \quad (4.14)$$

avec

$$[P^*]_{iso} = \begin{bmatrix} p_{xx,r}^n & p_{xx,\theta}^n \\ p_{yy,r}^n & p_{yy,\theta}^n \\ p_{xy,r}^n & p_{xy,\theta}^n \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

où $n=1, \dots, N_\beta$,

N_β est nombre de variables statiques choisi dans l'interpolation.

$$\{R^*\}_{iso} = \begin{Bmatrix} r_{,x} \\ \theta_{,x} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

IV.6.2 Cas d'un matériau orthotrope

Dans le cas d'un matériau orthotrope les expressions de contraintes s'expriment en fonction de (r_1, θ_1) et de (r_2, θ_2) . Le changement de variables permet d'écrire les dérivées du champ de contraintes (σ) en fonction des deux couples de variables polaires sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx,x} \\ \sigma_{yy,x} \\ \sigma_{xy,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx,r_1} & \sigma_{xx,\theta_1} & \sigma_{xx,r_2} & \sigma_{xx,\theta_2} \\ \sigma_{yy,r_1} & \sigma_{yy,\theta_1} & \sigma_{yy,r_2} & \sigma_{yy,\theta_2} \\ \sigma_{xy,r_1} & \sigma_{xy,\theta_1} & \sigma_{xy,r_2} & \sigma_{xy,\theta_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{1,x} \\ \theta_{1,x} \\ r_{2,x} \\ \theta_{2,x} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Le changement de variable s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt[4]{x^2 + Ay^2} \\ \theta_1 = \frac{1}{2} \text{Arctg} \left(y \frac{\sqrt[2]{A}}{x} \right) \\ r_2 = \sqrt[4]{x^2 + By^2} \\ \theta_2 = \frac{1}{2} \text{Arctg} \left(y \frac{\sqrt[2]{A}}{x} \right) \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\text{avec } A = \frac{1}{2S_{11}} \left\{ 2S_{12} + S_{33} - \sqrt{(2S_{12} + S_{33})^2 - 4S_{11}S_{22}} \right\}$$

$$B = \frac{1}{2S_{11}} \left\{ 2S_{12} + S_{33} + \sqrt{(2S_{12} + S_{33})^2 - 4S_{11}S_{22}} \right\}$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_x} \quad S_{12} = \frac{\nu_{xy}}{E_x}; S_{22} = \frac{1}{E_y}; S_{33} = \frac{1}{\mu_{xy}}$$

où S_{11} , S_{12} , S_{22} , S_{33} : Matrices de souplesse

E_x, E_y Module d'élasticité suivant (OX) et (OY) respectivement

Par le développement mathématique on aura :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx,x} \\ \sigma_{yy,x} \\ \sigma_{xy,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx,r_1} & \sigma_{xx,\theta_1} & \sigma_{xx,r_2} & \sigma_{xx,\theta_2} \\ \sigma_{yy,r_1} & \sigma_{yy,\theta_1} & \sigma_{yy,r_2} & \sigma_{yy,\theta_2} \\ \sigma_{xy,r_1} & \sigma_{xy,\theta_1} & \sigma_{xy,r_2} & \sigma_{xy,\theta_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\cos(2\theta_1) \\ \frac{2r_1}{2r_1^2} \frac{\sin(2\theta_1)}{2r_1^2} \\ -\cos(2\theta_2) \\ \frac{2r_2}{2r_2^2} \frac{\sin(2\theta_2)}{2r_2^2} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

IV.7 Modélisation de fissure sans présence de la dislocation

Le matériau proposé dans cette étude, est le verre, de forme carrée ayant une fissure principale dans l'une de ces extrémités, le matériau est soumis à des contraintes en en mode I (voir Fig4.7). Le problème de rupture est traité par la Méthode des Eléments Finis (MEF) en utilisant Logiciel de calcul (ABAQUS).

Le modèle proposé est discrétisé en éléments finis de forme carrée ($a = b = 2 \text{ mm}^2$). Le verre est considéré généralement comme étant un matériau fragile. Dans cette étude, nous considérons que ce dernier a un module d'élasticité équivalent E et un coefficient de poisson ν . Par ailleurs, le modèle de rupture est libre dans la direction (OY) et fixe suivant l'autre direction (OX) comme montré sur la Figure 4.7. Les contraintes appliquées sont des efforts de traction suivant le mode de rupture d'ouverture (le Mode I).

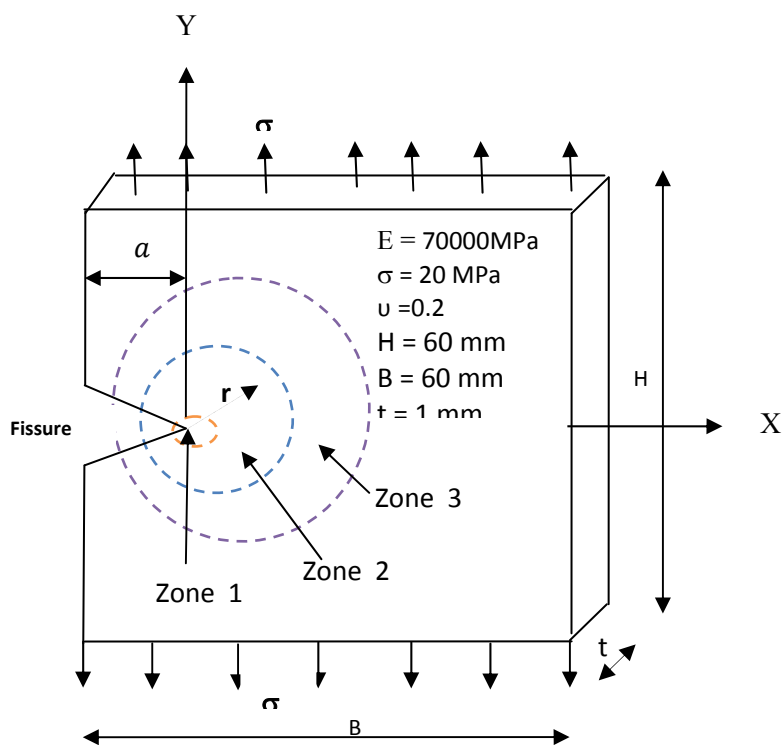


Figure 4.7 Modèle de rupture proposé

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du matériau modélisé (verre), sont récapitulées dans le tableau suivant ;

Tableau 4.1 Caractéristique mécaniques et géométrique du modèle proposé.

Hauteur H(mm)	Largeur B(mm)	Module d'élasticité Equivalent E (N/mm ²)	Coefficient de Poisson N	Contrainte appliquée aux extrémités libres σ (N/mm ²)	Epaisseur t (mm)
60	60	70000	0.2	20	1

La figure suivante (figure 4.8) représente les conditions aux limites et le type de chargement du modèle de rupture

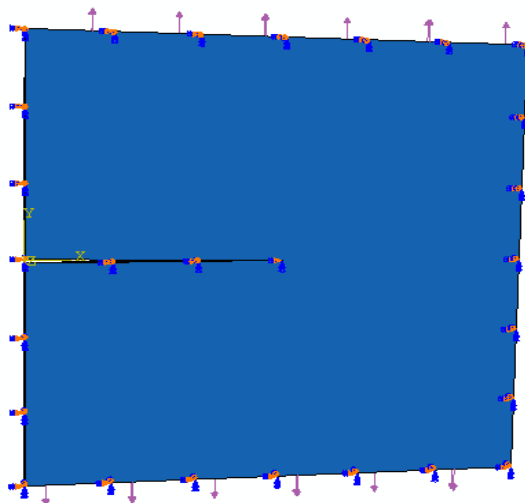


Figure 4.8 Type de chargement et conditions aux limites

D’après l’analyse numérique, les résultats de champ de contraintes trouvés pour les différentes longueurs de la fissure principale sont figurés sur les cartographies suivantes :

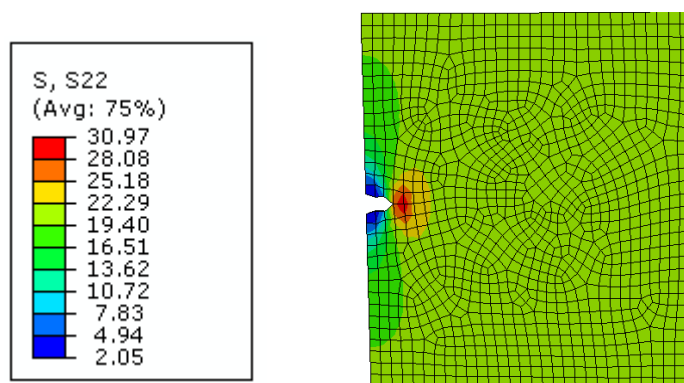


Figure 4.9 Valeurs de contraintes (σ_{22}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 5 \text{ mm}$).

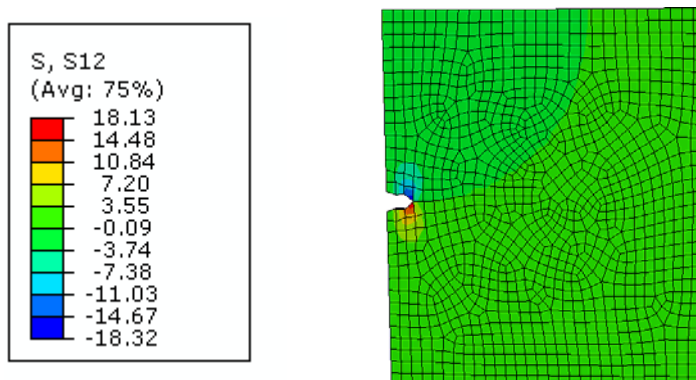


Figure 4.10 Valeurs de contraintes (σ_{12}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 5 \text{ mm}$).

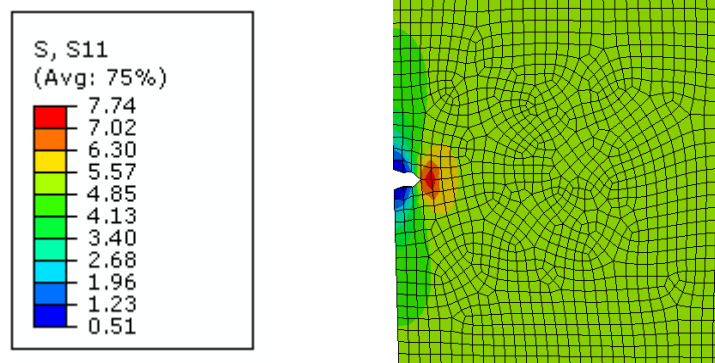


Figure 4.11 Valeurs de contraintes (σ_{11}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 5 \text{ mm}$).

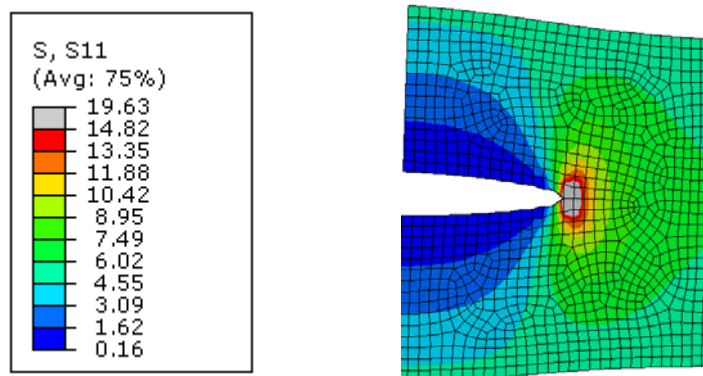


Figure 4.12 Valeurs de contraintes (σ_{11}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 30 \text{ mm}$).

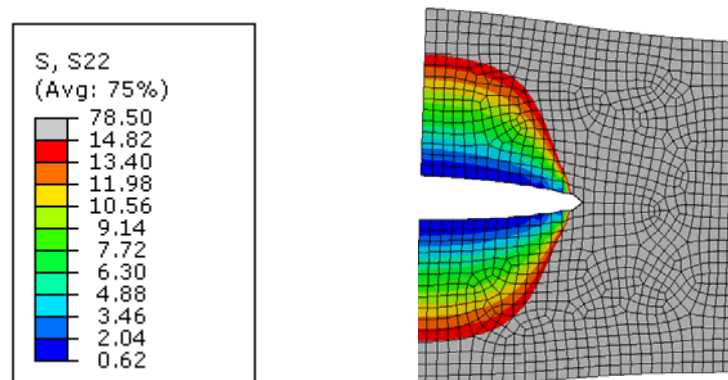


Figure 4.13 Valeurs de contraintes (σ_{22}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 30 \text{ mm}$).

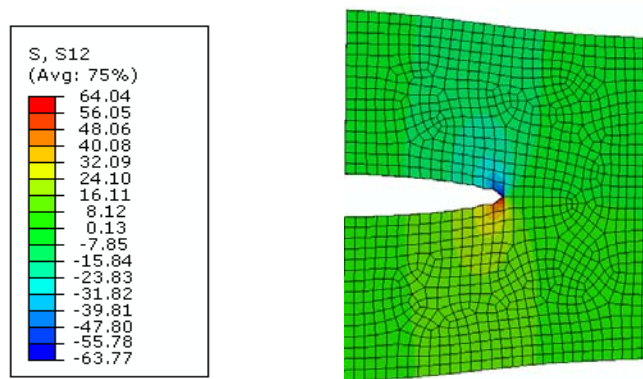


Figure 4.14 Valeurs de contraintes (σ_{12}) trouvées en différentes zones du matériau. pour une longueur de fissure ($a = 30 \text{ mm}$).

IV.8 Champs de contraintes

D’après l’analyse numérique du modèle du matériau choisi, les résultats des champs de contraintes pour différentes longueurs de la fissure principale sont récapitulés dans le tableau suivant :

Tableau 4.2 Résultats numériques des contraintes trouvées pour différentes longueurs de fissure

Langueur de la fissure principale $a(mm)$	0	5	10	15	20	25	30
σ_{11}	5.00	7.74	10.1	12.98	14.82	17.49	19.63
σ_{12}	0	18.13	26.91	38.21	46.09	56.34	64.04
σ_{22}	20	30.97	40.4	51.92	59.27	69.96	78.5

Les résultats récapitulés dans le tableau ci-dessus sont représentés en fonction de la longueur de la fissure principale dans les courbes suivantes :

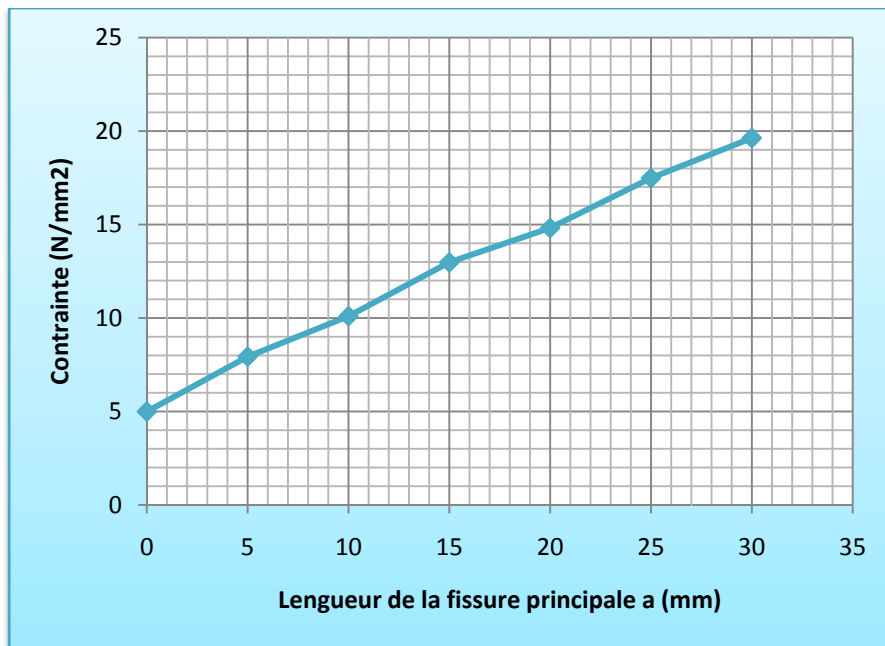


Figure 4.15 Variation de contrainte (σ_{11}) en fonction de la longueur de la fissure principale.

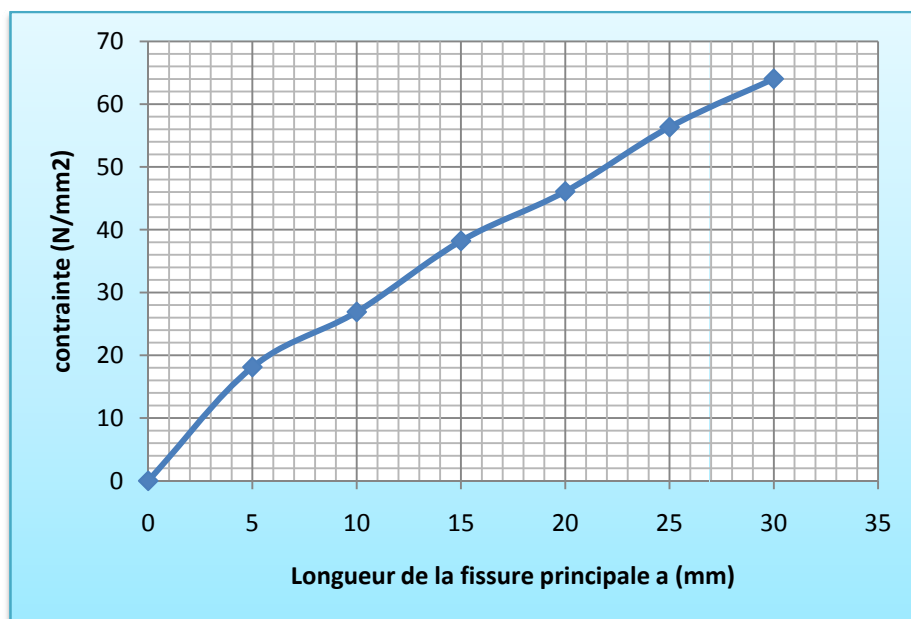


Figure 4.16 Variation de contrainte (σ_{12}) en fonction de la longueur de la fissure principale.

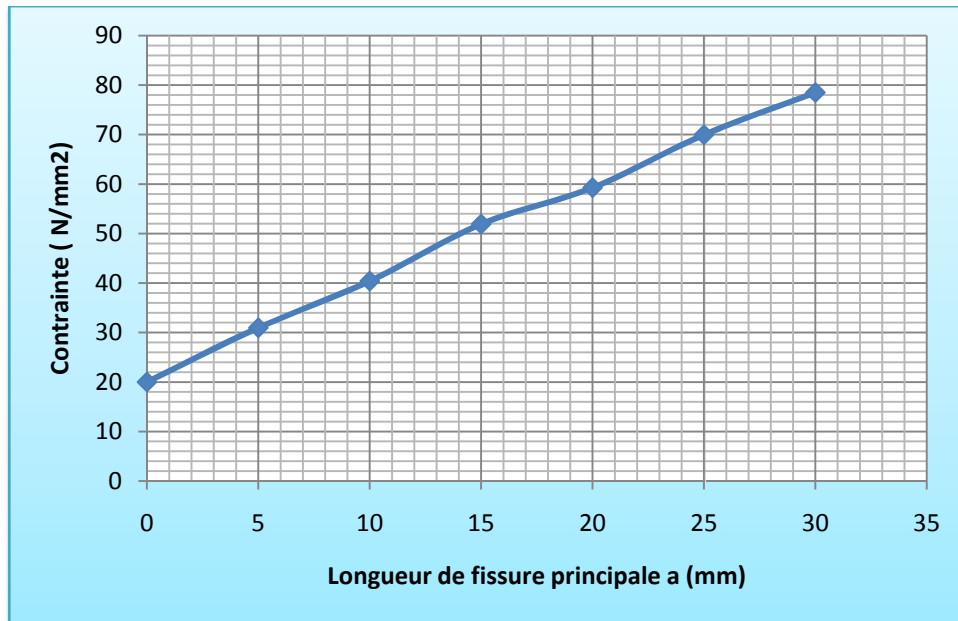


Figure 4.17 Variation de contrainte (σ_{22}) en fonction de la longueur de la fissure principale.

IV.9 Facteur d'intensité de contrainte (FIC)

Les champs de contraintes trouvées, sont caractérisés par un facteur d'intensité de contrainte (FIC), ce facteur est considéré comme étant un paramètre essentiel pour évaluer la résistance du matériau à la rupture. Il donne des informations sur l'évolution de la propagation de fissure dans des matériaux par l'intermédiaire de l'état des différents champs de contraintes générées. Pour établir un critère de propagation de la fissure, Irwin [11] a été le premier qui a examiné l'état de contrainte locale à la pointe de la fissure.

Les champs de contraintes près d'une fissure sont divisés en trois types ; mode I (Mode d'ouverture), Mode II (mode de glissement), Mode III (Mode de déchirure).

Le facteur d'intensité de contrainte en Mode I peut s'écrire comme suit ;

$$K_I = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} / \cos(\theta/2) \{1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)\} \quad (4.20)$$

Après avoir trouvé les contraintes au bout de la fissure principale, on peut déterminer le facteur d'intensité de ces contraintes en fonction de la longueur de la fissure. Les valeurs de ce dernier seront récapitulées dans le tableau 4.3 :

IV.10 Facteur d'intensité de contrainte déterminé par Irwin

Irwin [11] Considère une fissure droite de longueur a , dans une plaque de deux dimensions (2-D), cette fissure occupe le segment de l'axe X ; $0 \leq x \leq a$. Le champ des contraintes élastiques de la fissure principale est $\sigma_y = \sigma, \sigma_x = 0, \sigma_{xy} = 0, .$

Le facteur est donnée par Irwin comme suit ;

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (4.21)$$

Le tableau suivant récapitule les résultats numériques du facteur d'intensité de contraintes et autres trouvés par Irwin

Tableau 4. 3 Résultats numériques et théoriques du facteur d'intensité de contraintes (FIC) en fonction de la longueur de la fissure.

Longueur de la fissure a (mm)	0	5	10	15	20	25	30
SIF (N/mm ^{3/2}) numérique	0	77.61	101.24	130.11	148.59	175.32	196.72
SIF (N/mm ^{3/2}) Théorique	0	79.25	112.07	137.26	158.5	177.2	194.11

La variation du facteur d'intensité de contraintes en fonction de la longueur de la fissure est représentée sur la figure suivante:

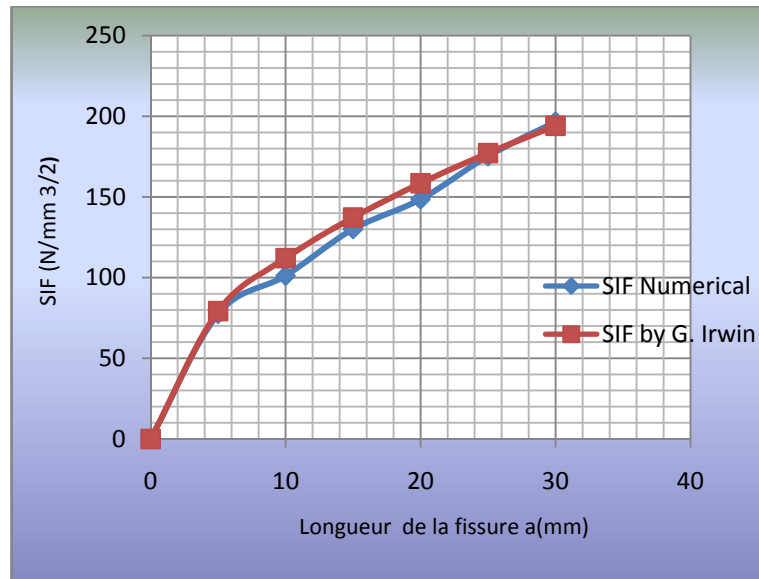


Figure 4.18 Variation du facteur d'intensité de contraintes (FIC) en fonction de la longueur de la fissure.

IV.11 Analyse et discussions

D'après les courbes des Figures 4.15, 4.16 et 4.17, on constate que les champs de contraintes ($\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$) augmentent proportionnellement par rapport à la longueur de fissure a . On remarque aussi que la contrainte σ_{22} ayant la même direction que la contrainte appliquée et par conséquent cette contrainte est toujours plus grande en valeurs que les autres contraintes. Par ailleurs, on remarque que quelque soit la longueur de la fissure, les valeurs de la contrainte σ_{22} trouvées à la pointe de la fissure dépassent la valeur de la contrainte appliquée qui est de l'ordre de 20MPa.

Les valeurs numériques du facteur d'intensité de contraintes (FIC) sont récapitulées dans le Tableau 4.3. Leurs représentations en fonction de la longueur de la fissure sont similaires avec celles trouvées par Irwin (voir Figure 4.18).

Les courbes tracées sont colinéaires dans les intervalles de la longueur d'une fissure $a \in [0, 4] \text{ mm}$ et $a \in [24, 30] \text{ mm}$. D'autre part, pour la longueur de l'intervalle $a \in [4, 24]$, il ya un petit décalage entre les points de deux courbes. Ce dernier est généré par l'effet de l'épaisseur de 1mm. Ensuite, l'analyse théorique de Irwin considère le modèle en sens 2-D sans épaisseur est prise en considération.

IV.12 Conclusion

Les champs de contrainte et facteurs d'intensité de contraintes (FIC) sont trouvés lors de la propagation de la fissure dans un matériau fragile tel que le verre. Ces champs de contraintes et les facteurs d'intensité de contraintes (FIS) sont obtenus pour le cas des modèles fissurés ayant des longueurs de fissure différentes. Il est démontré que pour toute longueur de fissure, le champ de contrainte maximal est prédominant à la pointe de la fissure. Les résultats des FIC trouvés numériquement sont comparés avec ceux trouvés théoriquement par Irwin. On remarque que les champs de contraintes augmentent au même rythme que la charge et la longueur de la fissure.

Chapitre V

Propagation de la fissure en présence d'une dislocation

V.1 Introduction

La présence de la dislocation au voisinage de la fissure principale influence grandement sur la propagation de cette fissure principale [61]. L'interaction entre les dislocations et la fissure principale joue un rôle important dans la propagation de la fissure jusqu'à la rupture du matériau. Tamate et Kurihara [35] ont respectivement étudié en détails le comportement d'une dislocation vis près de la fissure principale. Anderson et Rice [36] ont par ailleurs formulé les champs des contraintes tridimensionnels d'un groupe de dislocations émanant d'une fissure. Notre étude dans ce chapitre, est basée sur l'utilisation d'un matériau verre ayant un module d'élasticité équivalent ($E=70000\text{N/mm}^2$) et un coefficient de poisson ($\nu = 0.2$) on proposera même modèle de rupture qui était proposé dans le chapitre IV en mettant une dislocation qui varie sur le segment (OX). (voir figure 5.1).

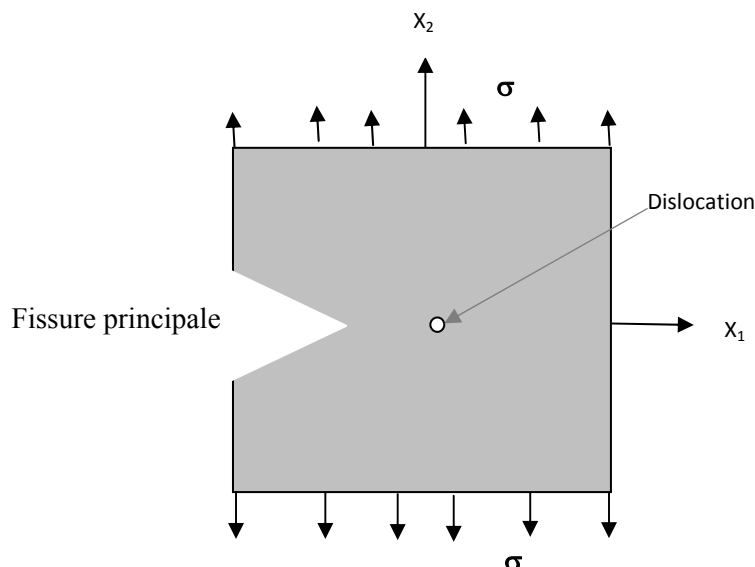


Figure 5. 1 Schéma du modèle proposé

V.2 Défauts (Dislocations) du verre

Dans le matériau verre il existe des défauts (dislocations) surfacique et autres volumiques ;

V.2.1 Défauts volumiques

Les défauts volumiques du verre [56] sont pratiquement toujours négligeables devant les défauts de surface. Cependant, le verre peut présenter des inclusions de sulfure de Nickel

(NiS). Ils peuvent conduire à la rupture spontanée d'éléments en verre trempé. En effet, lors d'un chauffage, par le soleil par exemple, le sulfure de Nickel change de phase, gonfle et entraîne une rupture brutale.

V.2.2 Défauts surfaciques

Les défauts de surface sont prépondérants pour l'étude de la résistance du verre. Ils peuvent être séparés en quatre groupes [57]

-Fissures longues ; se sont des fissures de plusieurs centièmes de millimètres de profondeur visibles à l'œil nu.

-Fissures microscopiques ; Ces défauts apparaissent lors de la fabrication du verre ou lors de contact avec d'autres objets. On en compte plusieurs milliers au centimètre carré.

-Particules adhérant à la surface : ces défauts constituent des points faibles du verre. Ces particules peuvent s'incorporer à cause d'un environnement poussiéreux lors de la fabrication.

- Changement à la surface : Attaque de la surface lors de la fabrication plus ces défauts sont profond, plus la résistance de l'élément est faible. La forme de ces fissures est également importante. Une forme très effilée conduit à une concentration de contrainte très importante en fond de fissure et à une résistance plus faible de l'élément.

Dans cette étude, des essais permettront de caractériser la résistance d'éléments de verre (c'est à dire leur état de surfaces). Le verre testé est non-endommagé et les défauts sont issus de la fabrication et du polissage des tranches (défauts technologiques).

V.3 Champ de contraintes en absence de dislocation

Lors de la formation d'une fissure, une zone entourant la fissure initiale est formée et où, d'une forte concentration de contrainte à lieu. Cette zone est considérée comme étant une zone à forte perturbation et communément appelé une zone d'endommagement ou d'une zone de processus de rupture. Un grand nombre de chercheurs admettent aujourd'hui que l'extension

d'une fissure est considérée dans une petite zone proche de la surface de la fissure dans laquelle, il existe des contraintes élevées et séparations. D'autre part, autour de cette zone, le reste du corps dont le comportement est préoccupations élastiques ou plastiques de la mécanique des milieux continus.

Le problème est formulé en termes de potentiels complexes en utilisant les fonctions à variables complexes. La distribution des contraintes au bout de la fissure principale est exprimée comme suit [62] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} f_{11}(\theta) & f_{12}(\theta) \\ f_{21}(\theta) & f_{22}(\theta) \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} g_{11}(\theta) & g_{12}(\theta) \\ g_{21}(\theta) & g_{22}(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & q_c \\ q_c & p_c \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

où les deux premiers termes de la forme de l'expansion sont singulières à la pointe de la fissure, K_I , K_{II} ; représentent le facteur d'intensité de contraintes en mode I et mode II respectivement. Fonctions $f_{ij}(\theta)$, $g_{ij}(\theta)$ représente les distributions angulaires de contraintes à la pointe de la fissure, le troisième terme est fini et borné. Le terme T est noté T-stress correspondant la contrainte agissant parallèlement aux fissures d'où : q_c , p_c sont deux contraintes régulières à proximité de la pointe de fissure.

Pour une fissure chargée en mode I sous contrainte extérieure σ , le champ de contrainte élastique autour de la pointe de fissure est égale [62], le second et le troisième terme peuvent être négligés.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} f_{11}(\theta) & f_{12}(\theta) \\ f_{21}(\theta) & f_{22}(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

La distribution angulaire peut être exprimée sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} f_{11}(\theta) \\ f_{12}(\theta) \\ f_{22}(\theta) \end{Bmatrix} = \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

V.4 Champ de contraintes en présence de dislocation

En présence de la dislocation au voisinage de la fissure principale, la superposition de fonctions analytiques complexes des équations (3.17) et (3.18) démontrés dans le chapitre III, nous permet de trouver le champ de contrainte globale ou d'interaction. Le problème de calcul des contraintes sera analysé numériquement par la méthode des éléments finis (MEF) en utilisant le logiciel (ABAQUS). Le modèle de rupture traité est à trois dimensions ayant une épaisseur infinitésimale par rapport aux deux autres dimensions, à cet effet, on peut négliger les contraintes suivant le troisième segment (OZ), par conséquent, nous considérons seulement les contraintes planes.

Quelque soit la position de la dislocation par rapport à la fissure principale, les contraintes trouvées à la pointe de la fissure sont des contraintes maximales par rapport aux autres points du matériau. Le type du chargement utilisé c'est des contraintes de traction appliquées aux extrémités libres (voir figure 5.1) faisant le premier mode de rupture (mode I).

V.5 Modélisation de la fissure en présence d'une dislocation

Pour cette étude on adopte même modèle de rupture proposé dans le chapitre IV en considérant une dislocation au voisinage de cette fissure principale. Dans ce cas on adopte une fissure principale de 15 mm, et on varie la position de la dislocation suivant le segment (OX) [63]. Chaque position de la dislocation nous amène un champ de contraintes qui peuvent être générées lors de l'interaction entre la fissure principale et cette dislocation avoisinante. Ces champs de contraintes sont caractérisés par le facteur d'intensité de contrainte qui nous permet d'évaluer l'influence de la présence de cette dislocation sur la propagation de fissure. Pour mieux déterminer cette influence sur la fissuration on adopte la même charge et des conditions aux limites similaires à celles appliquées sur le même modèle de chapitre IV n'ayant pas une dislocation (voir figure 5.2).

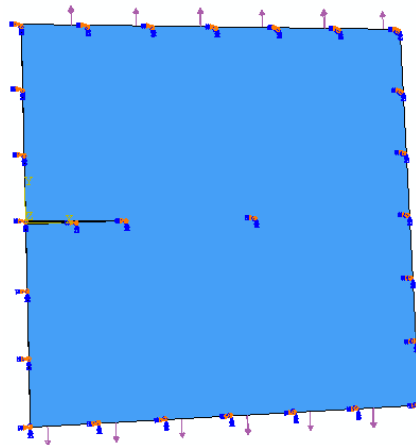


Figure 5.2 Type du chargement et conditions aux limites du modèle fissuré ayant une dislocation.

V.6 Calcul de contraintes planes

Les contraintes seront trouvées en variant la position de la dislocation par rapport à la fissure principale, ces dernières se sont des contraintes planes. Après l'analyse numérique traité par la méthode des éléments finis en utilisant logiciel de calcul (ABAQUS), On a déterminé ces contraintes planes figurées sur les cartographies suivantes ;

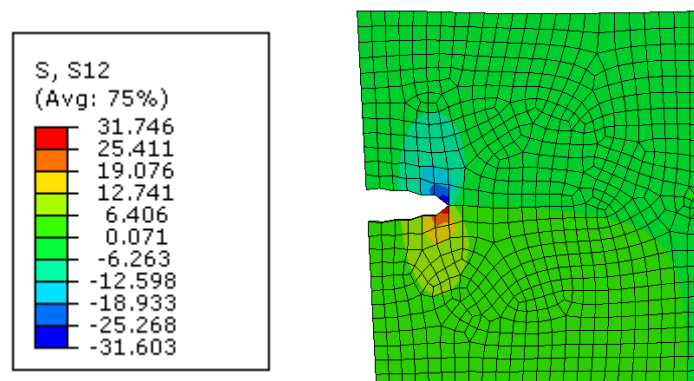


Figure 5.3 Cartographie des contraintes (σ_{12}), en présence de la dislocation à l'extrémité libre.

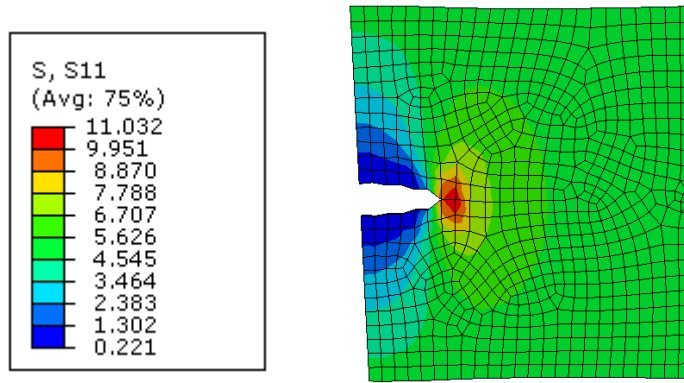


Figure 5.4 Cartographie des contraintes (σ_{11}), en présence de la dislocation à l'extrémité libre.

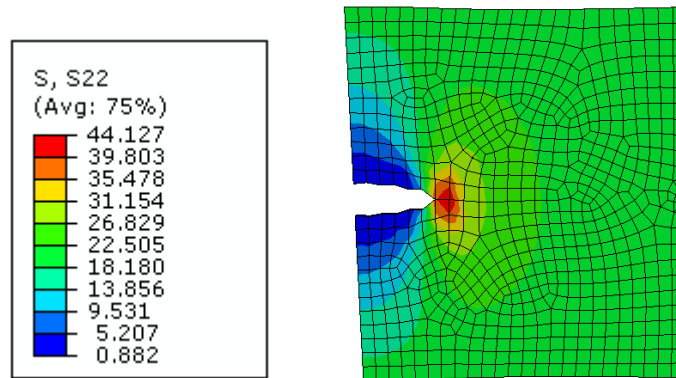


Figure 5.5 Cartographie des contraintes (σ_{22}), en présence de la dislocation à l'extrémité libre.

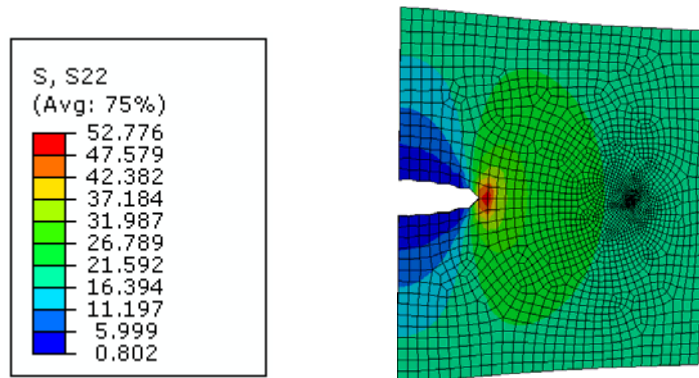


Figure 5.6 Cartographie des contraintes (σ_{22}), Cas de distance entre la fissure principale et la dislocation ($l = 30$ mm)

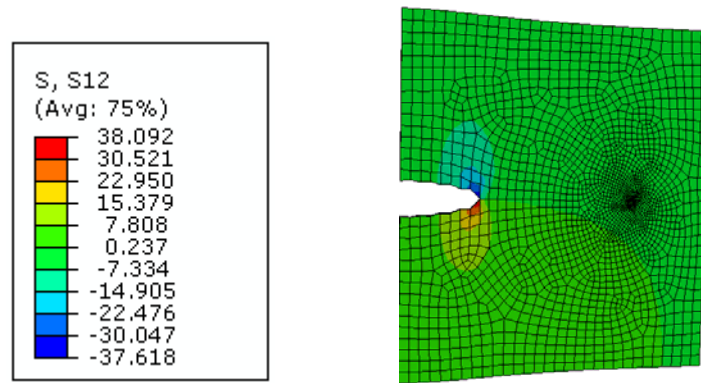


Figure 5.7 Cartographie des contraintes (σ_{12}), Cas de distance entre la fissure principale et la dislocation ($l = 30$ mm).

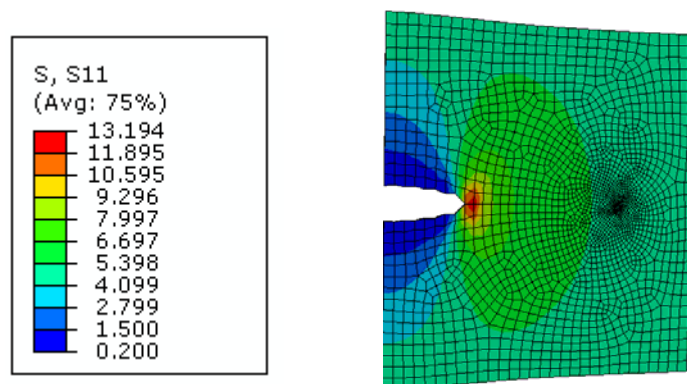


Figure 5.8 Cartographie des contraintes (σ_{11}), Cas de distance entre la fissure principale et la dislocation ($l = 30$ mm)

V.7 Résultats numériques de contraintes planes

Les résultats numériques de contraintes trouvées sont des contraintes tridimensionnelles, mais le modèle de rupture utilisé est mince, A cet effet les contraintes trouvées dans la direction (OZ), sont négligeables devant les autre contraintes suivant (OX) et (OY).

Nous remarquons que pour toutes les distances entre la fissure et la dislocation l (mm), la contraintes (σ_{22}) est la plus grande en valeur que les deux autres contraintes.

En variant la position de la dislocation par rapport à la fissure principale, Toutes les contraintes trouvées numériquement sont récapitulées dans le tableau suivant :

Tableau 5. 1 Résultats numériques des champs de contraintes en fonction de la distance entre
La fissure principale et la dislocation l (mm).

Distance l (mm) Contraintes (N/mm ²)	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
σ_{11}	11.03	12.67	13.01	13.19	14	14.4	14.58	15.02	14.48	49.26
σ_{12}	31.75	37.69	38.11	38.09	38.58	38.67	39.09	40.33	36.3	56.65
σ_{22}	44.13	50.7	52.02	52.78	55.99	57.59	58.32	60.09	57.92	197

Pour déterminer l'influence de la dislocation sur la fissure principale, on a adopté un modèle de rupture sans dislocation comme étant une référence, ce dernier ayant une fissure de 15mm. Les résultats de contraintes pour le modèle de rupture sont déjà trouvés dans le chapitre précédent, ces derniers sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 5. 2 Résultats numériques de champs de contraintes sans présence de la dislocation. Cas ; longueur de la fissure principale ($a = 15m$).

Contraintes	σ_{11}	σ_{12}	σ_{22}
Valeurs (N/mm ²)	12.98	38.21	51.92

La variation de contraintes planes en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation considérée, est représentée sur les trois figures suivantes :

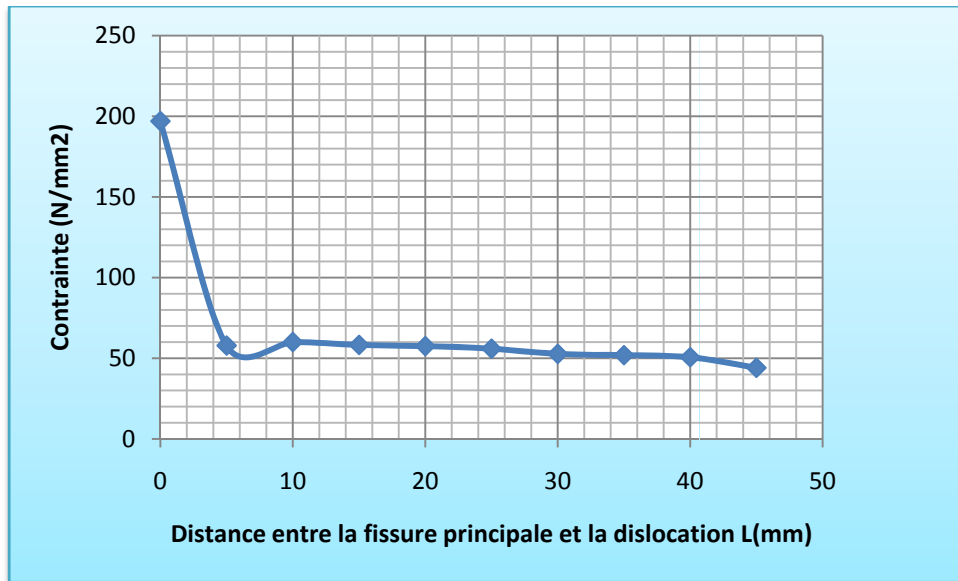


Figure 5.9 Variation de contrainte (σ_{22}) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm)

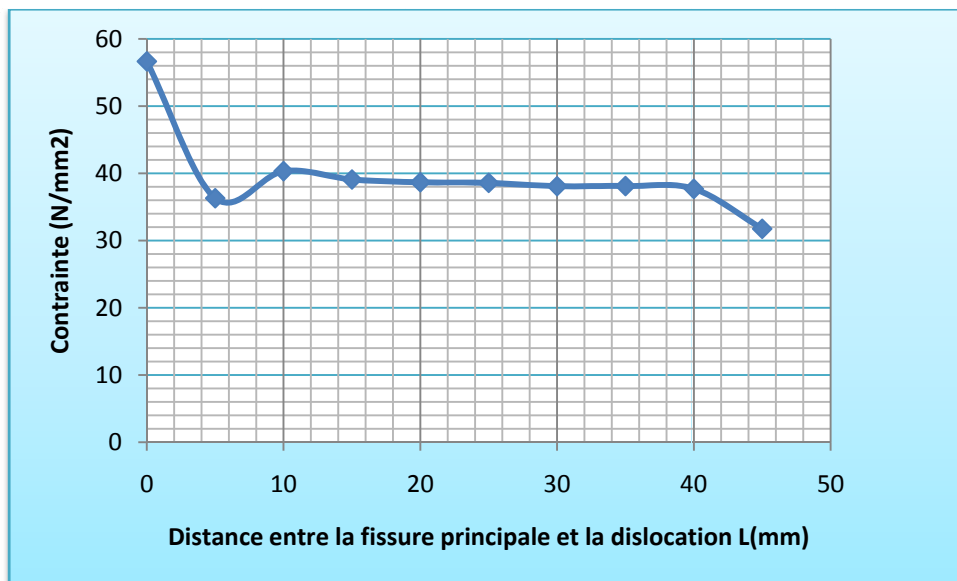


Figure 5.10 Variation de contrainte (σ_{12}) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm)

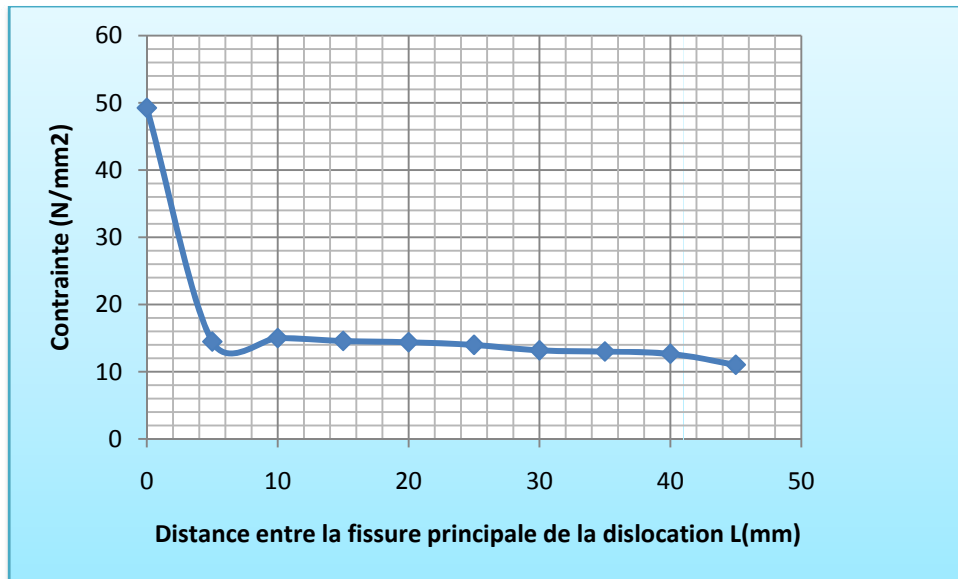


Figure 5.11 Variation de contrainte (σ_{11}) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm).

V.8 Calcul du Facteur d'intensité de contraintes (FIC)

Un grand nombre de solutions analytiques, obtenues de façon exacte ou approchée, sont disponibles pour (FIC) en Mode I et peuvent être trouvées dans le Handbook des facteurs d'intensité des contraintes [5], dans ce chapitre, par traitement numérique, le facteur d'intensité de contraintes est pris pour chaque distance entre la fissure principale la dislocation, les valeurs trouvées numériquement sont récapitulées dans le tableau suivant ;

Tableau 5.3 Valeurs du (FIC) en fonction de la distance entre la fissure et la dislocation

Distance l (mm).	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
FIC $(N/mm^{\frac{3}{2}})$	110.5 9	127.05	130.36	132.27	140.31	144.32	146,15	150.58	145.15	493.68

La variation du facteur d'intensité de contrainte (FIC) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation avoisinante, est représenté sur la figure suivante ;

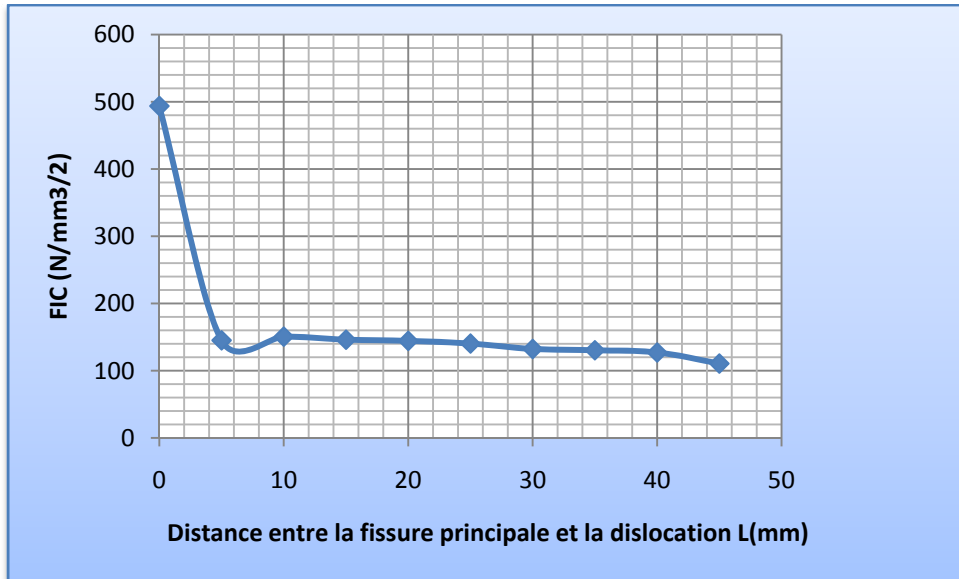


Figure 5.12 Variation du facteur d'intensité de contraintes (FIC) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation. l (mm) .

V.9 Influence de la dislocation sur la fissure principale ($\Delta K/K$)

L'influence de la dislocation sur la fissure principale est déterminée par la variation du facteur d'intensité de contraintes (ΔK), cette dernière est ainsi déterminée et par conséquent étudiée en tenant compte de positionnement arbitraire de la dislocation par rapport à la fissure principale. Pour calculer cette variation, on utilise le même procédé du chapitre III qui traite le facteur d'intensité de contrainte. Par conséquent on constate que;

$$\Delta K_I - i\Delta K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\Delta\sigma_{22} - i\Delta\sigma_{12}) \quad (5.4)$$

Où $\Delta K_I, \Delta K_{II}$; Facteurs d'intensité de contrainte générés par la dislocation en mode I et II respectivement, σ_{22}, σ_{12} contraintes planes générées par cette même dislocation.

Toute l'analyse théorique du facteur d'intensité de contrainte a été démontrée dans le chapitre III, le calcul numérique de contraintes planes nous a permis de déterminer le facteur d'intensité de contrainte généré lors de l'interaction entre la fissure principale et de la dislocation avoisinante. Le calcul du (FIC) de la dislocation (ΔK) est basé sur le calcul du

facteur d'intensité de contrainte en présence de la dislocation (facteur d'intensité de contrainte d'interaction) (K_{Int}) et le facteur d'intensité de contrainte sans présence de la dislocation K .

Tableau 5. 4 Influence de dislocation sur la fissure principale en fonction de distance l (mm).

Distance l (mm).	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Contrainte σ_{22} (MPa)	44.13	50.7	52.02	52.78	55.99	57.59	58.32	60.09	57.92	197
K_{Int} ($N/mm^{\frac{3}{2}}$)	110.59	127.05	130.36	132.27	140.31	144.32	146,15	150.58	145.15	493.68
K ($N/mm^{\frac{3}{2}}$)	130.11	130.11	130.11	130.11	130.11	130.11	130.11	130.11	130.11	130.11
ΔK ($N/mm^{\frac{3}{2}}$)	-19.52	-3.06	0.25	2.16	10.20	14.21	16.04	20.47	15.04	363.57
$(\Delta K/K)$	-0.15	-0.02	00.00	0.02	0.08	0.11	0.12	0.16	0.12	2.79

Les valeurs récapitulées dans le tableau 5.4, seront représentées sur la figure suivante ;

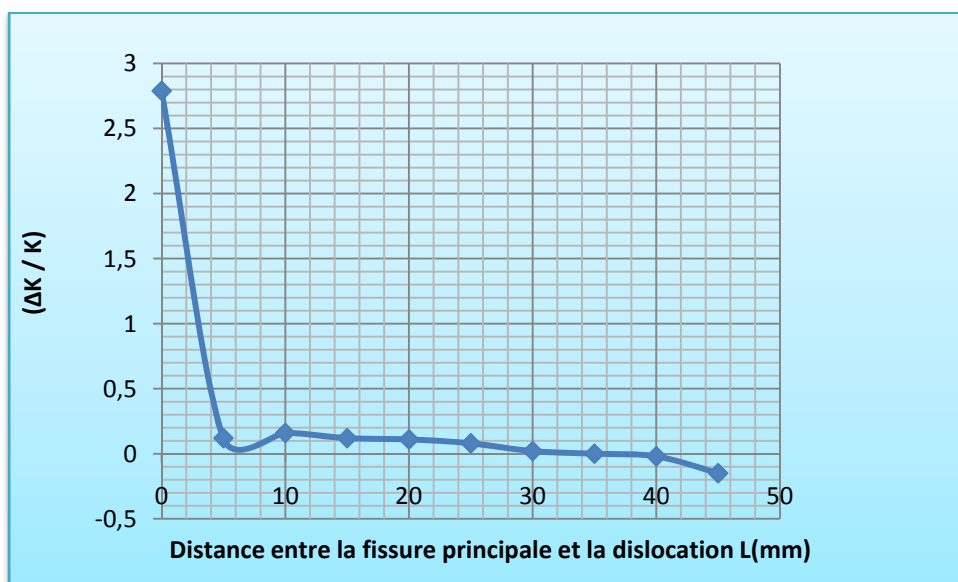


Figure 5.13 Variation du facteur d'intensité de contrainte ($\Delta K/K$) en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation l (mm)

V.10 Conclusion

Les contraintes planes et les facteurs d'intensité de contraintes (FIC) sont trouvés lors de l'interaction entre la fissure principale et une dislocation avoisinante dans un matériau fragile (le verre). Ces efforts sont obtenus en adoptant un modèle de rupture de 15 mm de longueur de la fissure en présence d'une dislocation variant le long de l'axe OX. Il est démontré que pour toute distance entre la fissure principale et la dislocation, les contraintes maximales se trouvent à la pointe de la fissure principale. Nous remarquons que les contraintes planes σ_{22} sont en tout point du matériau mais plus grandes en valeurs que les autres contraintes planes tels σ_{12} et σ_{11} .

En variant la position de la dislocation par rapport à la fissure principale, les contraintes augmentent et diminuent par rapports aux ceux trouvées pour le modèle n'ayant pas une dislocation (voir Tableau 5.4). D'après les courbes de contraintes représentées sur les Figures 5.9, 5.10 et 5.11, les contraintes planes sont très élevées pour une dislocation avoisinant la pointe de la fissure principale. Ces contraintes trouvées sont caractérisées par des facteurs d'intensité de contrainte (FIC). Afin de déterminer l'influence de la dislocation sur la fissure principale, il est plus judicieux de trouver les facteurs d'intensité de contrainte en absence ou présence de dislocations.

D'après la Figure 5.13, la variation du facteur d'intensité de contrainte dans les zones positives correspondent à l'effet d'amplification par contre, dans les zones à valeurs négatives c'est l'effet d'écran ou l'effet réducteur qui prédomine. Donc, il est évident que la présence de la dislocation au voisinage de la fissure principale influence grandement la propagation de cette dernière soit en amplifiant l'intensité des champs de contraintes ou en les réduisant.

Chapitre VI

Taux de restitution d'énergie

VI.1 Introduction

Le taux de l'énergie restituée est défini comme étant l'énergie libérée lors de la propagation de la fissure. Pour cela, plusieurs chercheurs utilisaient le principe d'intégrale de Rice (J) [64] afin d'étudier l'évolution de la fissure. Selon Griffith [5], la rupture est un phénomène consommateur d'énergie et la différence se situe entre l'état énergétique des atomes avant et après fissuration.

Irwin [11] a ouvert la voie à l'application de solutions élastiques et a ainsi défini le critère de rupture fragile en se basant sur une approche mathématique. D'un point de vue énergétique, les analyses de Griffith et Irwin [5, 11] ont montré que, si on néglige l'énergie cinétique alors l'énergie totale se résume à ce qui suit;

$$w_e = E_e + w_f \quad (6.1)$$

où E_e est l'énergie élastique et w_f est l'énergie dépensée par fissuration.

VI.2 Résolution par des approches énergétiques

Du point de vue atomique, la résistance d'un solide est basée sur la force nécessaire à séparer deux atomes dans une molécule. Cette force est exprimée par la relation suivante;

$$F = \frac{dU}{db} \quad (6.2)$$

où U est la résultante de l'énergie entre deux atomes nécessaires pour les séparer et b est la distance de séparation entre deux atomes.

En d'autres termes, l'équilibre correspond à une distance b_0 entre deux atomes pour lesquels l'énergie U présente un minimum U_0 . Si l'on cherche la force F en fonction de la distance b dans le cas des métaux alors on obtient la courbe F fonction de $(b-b_0)$ représentant l'énergie de séparation entre deux atomes comme montrés sur la Figure 6.1.

Soit la forme approchée sinusoïdale;

$$F = F_{\max} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (b - b_0) \quad (6.3)$$

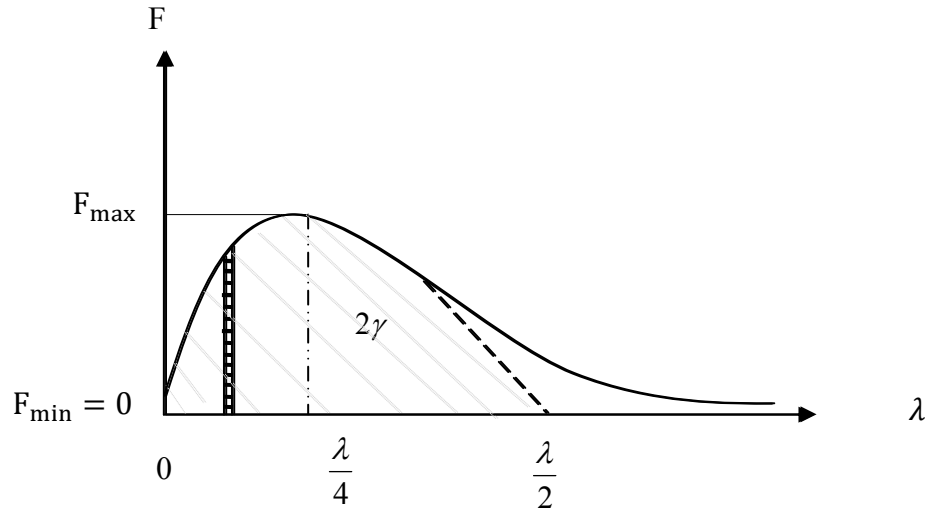


Figure 6.1 Energie de séparation de deux atomes dans les métaux [3].

Le travail provoquant la rupture (ou séparation) de deux atomes est égal à U et correspond à la surface hachurée de la Figure 6.1. En utilisant les équations (6.2) et (6.3), on obtient;

$$U = \int_0^{\lambda} F d(b - b_0) = \int_0^{\lambda} F_{\max} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (b - b_0) d(b - b_0) = 2 F_{\max} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.4)$$

où U équivaut à deux fois le travail (γ) correspondant à la séparation d'une surface libre par unité de surface. Pour une fissure ayant deux lèvres, on a;

$$2\gamma = 2 F_{\max} \frac{\lambda}{2\pi} \quad (6.5)$$

Si l'on note :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{F}{b_0^2} \\ \varepsilon = \frac{b-b_0}{b_0} \end{cases} \quad (6.6)$$

En supposant de petites déformations ($b - b_0$) dans le solide, on a en milieu unidimensionnel la relation;

$$\lambda = \frac{F_{\max} \cdot 2 \pi}{b_0 E} \quad (6.7)$$

En remplaçant (6.7) dans (6.5), on obtient :

$$\gamma = \frac{F_{\max}^2}{b_0 E} \quad \text{soit} \quad \sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma E}{b_0}} \quad (6.8)$$

où σ_{\max} est la contrainte maximale nécessaire pour séparer deux atomes, γ est l'énergie de surface et E est le module de Young.

En considérant des valeurs de γ et b_0 pour les métaux, on trouve que σ_{\max} est de l'ordre de ($E/10$), (pour le verre environ $E/20$)

Selon Griffith [10] et tout en se basant sur les résultats expérimentaux, les éprouvettes macroscopiques contiennent à un niveau microscopique de petits défauts qui génèrent des concentrations de contraintes locales provoquant la rupture.

Afin de mieux interpréter l'état de contraintes au voisinage d'une pointe de fissure [65], la fissure est représentée par un trou elliptique au milieu d'une plaque infinie soumise aux extrémités à une contrainte $\sigma_{22 \infty}$ sous la forme suivante;

$$\sigma_{22} = \sigma_{22 \infty} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (6.9)$$

Selon Griffith, cette relation conduit au critère de rupture basé sur le principe énergétique. Donc, la rupture se produit lorsque l'énergie restituée par l'extension de la fissure est supérieure à l'énergie nécessaire pour créer une autre surface relative à cette extension. En d'autres termes, l'énergie potentielle restituée est consommée en totalité par l'extension de la fissure.

VI.3 Energie de déformation

La propagation de la rupture se déclenche quand la diminution du taux de libération de l'énergie de déformation élastique stockée (énergie potentielle) est au moins égale au taux de

création d'énergie de formation de surface de fissure [5]. L'énergie de déformation est donnée par la formule suivante ;

$$W = \int \sigma_{ij} d \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (6.10)$$

en élasticité linéaire.

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12}) \quad (6.11)$$

Les analyses numériques du modèle de rupture traité dans le chapitre précédent, nous amènent les résultats de déformations et de déplacement comme suit ;

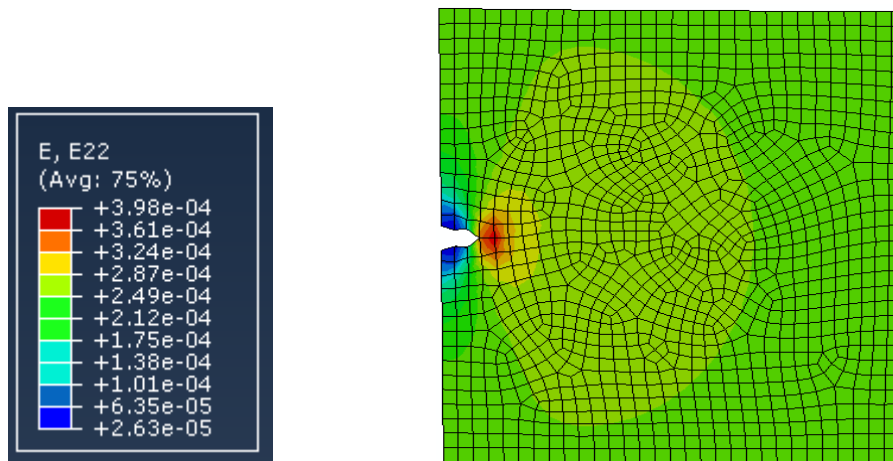


Figure 6.2 Déformation $\varepsilon_{22}(mm)$ pour une fissure de $a = 5mm$.

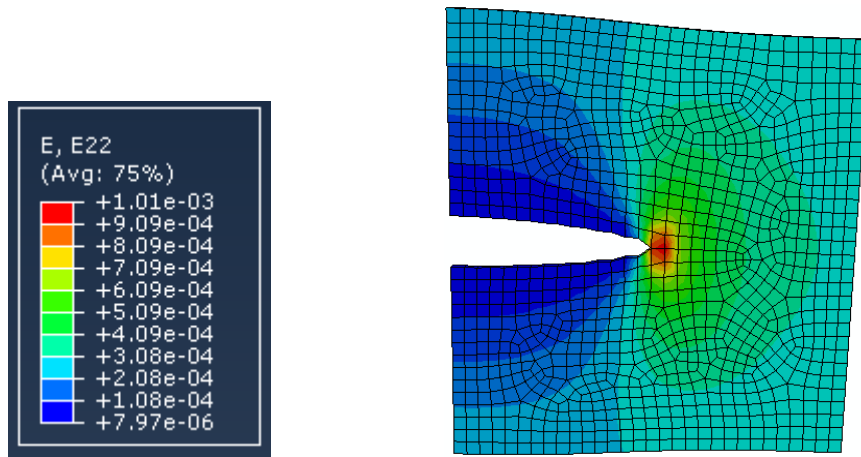


Figure 6.3 Déformation ε_{22} (mm) pour une fissure de $a = 30\text{mm}$.

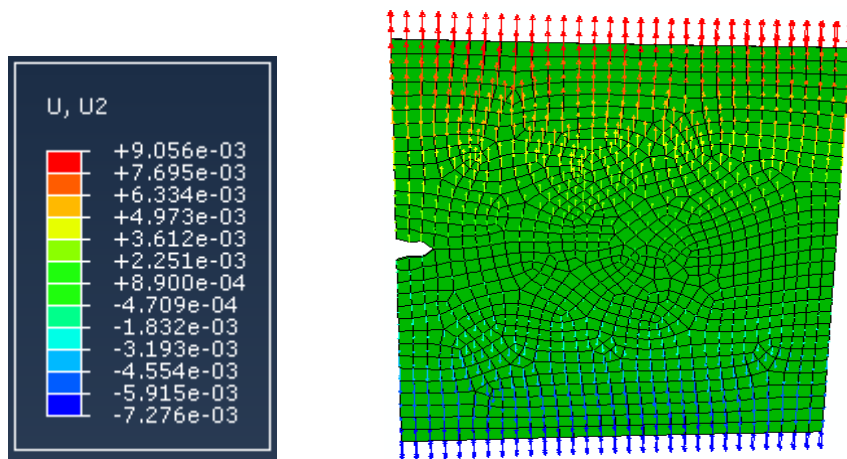


Figure 6.4 Déplacement u_{22} (mm) pour une fissure de $a = 5\text{mm}$.

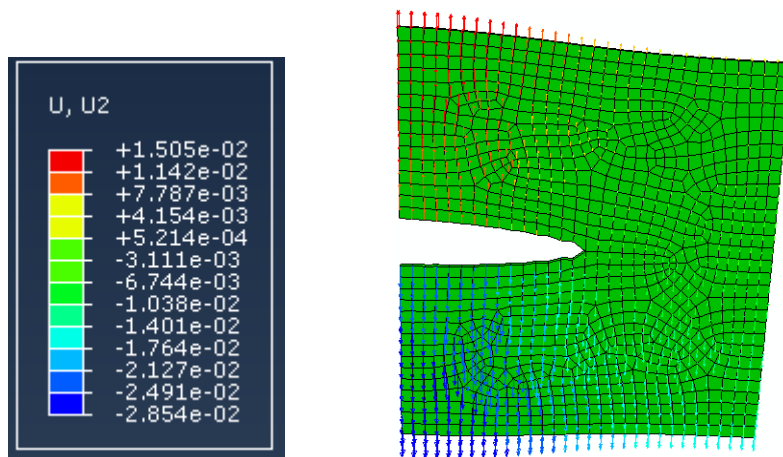


Figure 6.5 Déplacement u_{22} (mm) pour une fissure de $a = 30\text{mm}$.

Les valeurs de déformations des particules au voisinage de la fissure principale sont regroupées dans le tableau suivant :

Tableau.6.1, valeurs de déformations au voisinage de fissure principale.

Longueur de la fissure a (mm)	0	5	10	15	20	25	30
Déformation $\varepsilon_{22} 10^{-3}$ (mm)	0.26	0.40	0.52	0.67	0.76	0.9	1.01

La variation de déformations de particules au voisinage de la fissure principale, en fonction de la longueur cette fissure, est représentée dans la figure suivante :

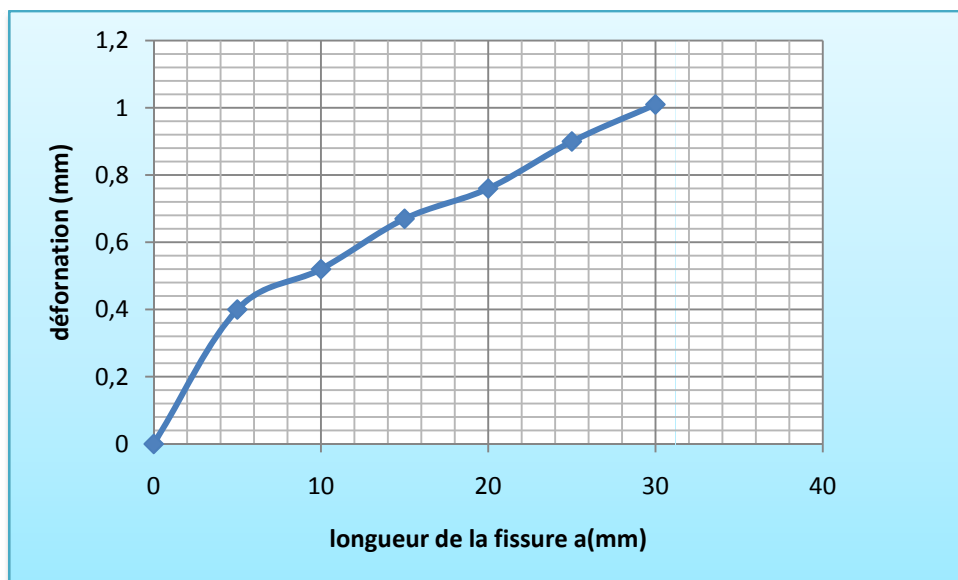


Figure 6.6 Déformation ε_{22} (mm) au bout de la fissure principale en absence de la dislocation

D'après les résultats de déformation trouvés dans le tableau 6.1. et résultat des contraintes situées au bout de la fissure principales trouvées dans le chapitre IV (Tableau 4.2), en utilisant l'équation (6.11) on peut déterminer l'énergie de déformation pour chaque longueur de la fissure. Les valeurs de cette dernière seront récapitulées dans le tableau suivant :

Tableau 6.2 Valeurs d'énergie de déformations au voisinage de fissure principale.

Longueur de la fissure a (mm)	0	5	10	15	20	25	30
Energie de déformation $W \cdot 10^{-3}$ (joules)	0	3	10.5	17.39	22.52	31.48	39.64

La variation de l'énergie de déformation en fonction de la longueur de la fissure principale est représentée sur la figure suivante :

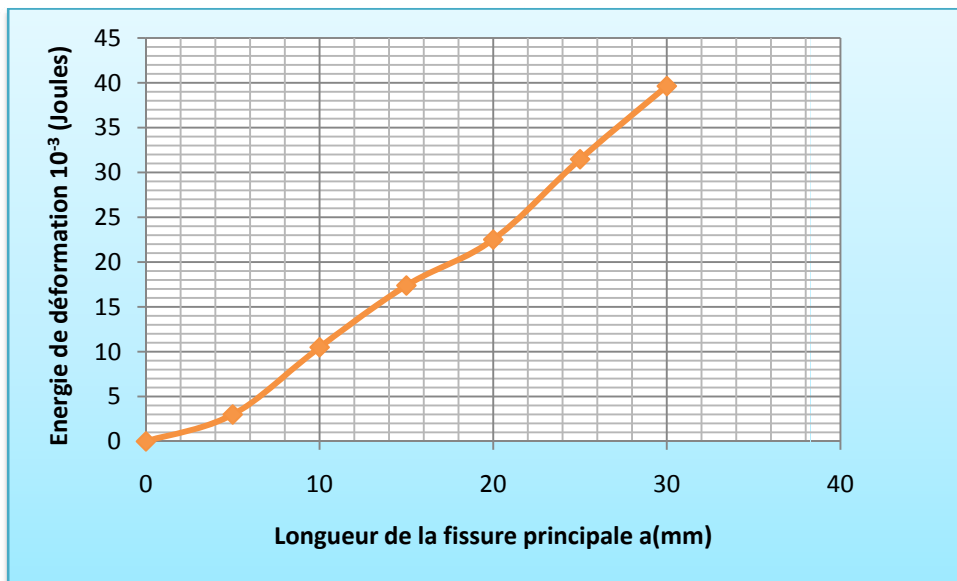


Figure 6.7 Energie de déformation W en 10^{-3} (Joules) au bout de la fissure principale en absence de la dislocation

VI.4 Intégrale de Rice (J)

L'intégrale (J) pour la rupture est due à Rice [64] et par conséquent, elle est dénommée par « l'intégrale de Rice » bien que quelques études sur cette intégrale ont été faites plutôt.

Cette intégrale est communément connue sous l'appellation de taux de restitution d'énergie liée à la déformation translationnelle de la zone de processus au voisinage de la fissure [43].

Cette énergie a été appliquée aux matériaux dits fragiles et elle a été considérée comme étant un paramètre essentiel de rupture à grande échelle. Rice trouvait l'application au sens large et l'utilisa pour caractériser la singularité au bout de la fissure en mécanique de la rupture plastique. Par ailleurs, il a été constaté que la zone endommagée évolue progressivement en engendrant des mouvements élémentaires définis par une translation, une rotation, une

expansion et une distorsion [43]. Dans cette étude, l'attention est donnée à la translation de la zone de processus de rupture et à la propagation de la fissure principale. Donc, l'intégrale est considérée comme étant une grandeur scalaire qui prévoit que le taux de restitution d'énergie augmente uniformément avec la propagation de la fissure en présence de la zone [42].

Le taux de restitution d'énergie peut s'écrire sous forme d'une intégrale de contour. Supposons un milieu bidimensionnel d'épaisseur unité, on écrit [64, 66] :

$$G = \frac{\partial W_{\text{pot}}(a)}{\partial a} = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial a} - \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial a} \quad (6.12)$$

$$\text{où } W_{\text{pot}} = W(\varepsilon) - W_{\text{ext}} \quad (6.13)$$

avec W_{pot} ; Energie potentielle d'un solide, $W(\varepsilon)$; densité de l'énergie de déformation et W_{ext} ; Travail des efforts extérieurs.

Considérons, pour un état donné de longueur de fissure, que la dérivée par rapport à (a) pour (x) donné est égale à la dérivée par rapport à (x) pour (a) donné, autrement dit :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_a = \left. \frac{\partial}{\partial a} \right|_x \quad (6.14)$$

L'équation (6.12) s'écrit, si l'on suppose que la fissure se propage selon x

$$G = \frac{\partial}{\partial a} \int_V W(\varepsilon) dV - \frac{\partial}{\partial a} \int_{S_F} T_i^d \cdot u_i \cdot dS \quad (6.15)$$

Compte tenu de (6.14) et puisque $W(\varepsilon)$ et u sont continus et dérivables, on a

$$G = \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) dV - \int_{S_F} T_i^d \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \cdot dS \quad (6.16)$$

Si l'on se place en milieu bidimensionnel, on peut écrire $dV = dx \cdot dy \cdot 1$. En utilisant la transformation de Green, l'intégrale sur V s'écrit :

$$\int_V \frac{\partial W}{\partial x} dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial x} dx dy = \int_{S_F} w dy \quad (6.17)$$

G s'écrit alors sous forme d'intégrale de contour appelée (J) sur S_F

$$G = J = \int_{S_F} w dy - T_i^d \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \cdot dS \quad (6.18)$$

Supposons Γ un contour continu partant de la lèvres inférieure à la lèvres supérieure de la fissure, (voir fig. 6.8) et S_F est la trace de ce contour pour tout x, y .

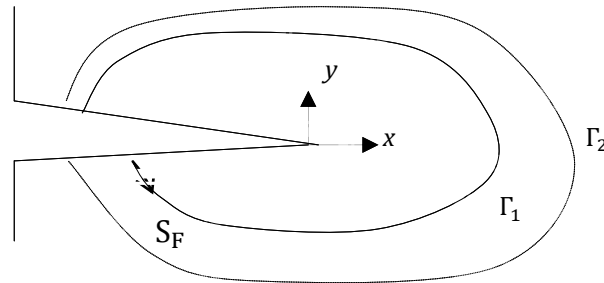


Figure 6.8 Intégrale de contour

Rice montre que cette intégrale J est indépendante du contour choisi. La valeur de l'intégrale peut changer entre deux contours à cause des termes correspondant aux faces extérieures des lèvres de la fissure mais puisque T_i^d d'une part et (dy) d'autre part sont nuls le long de ces faces, l'intégrale J demeure indépendante du contour. Raison pour laquelle Γ peut être différent de S_F . Afin de présenter un exemple spécifique considérons le contour symétrique porté sur la figure. 6.9. L'intégrale J s'écrit ;

$$J = 2 \int_{A(x,y)}^{B(x,y)} \left[W - \sigma_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma_{12} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dy + 2 \int_{B(x,y)}^{C(x,y)} \left[\sigma_{22} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx + 2 \int_{C(x,y)}^{D(x,y)} \left[W - \sigma_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma_{12} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dy \quad (6.19)$$

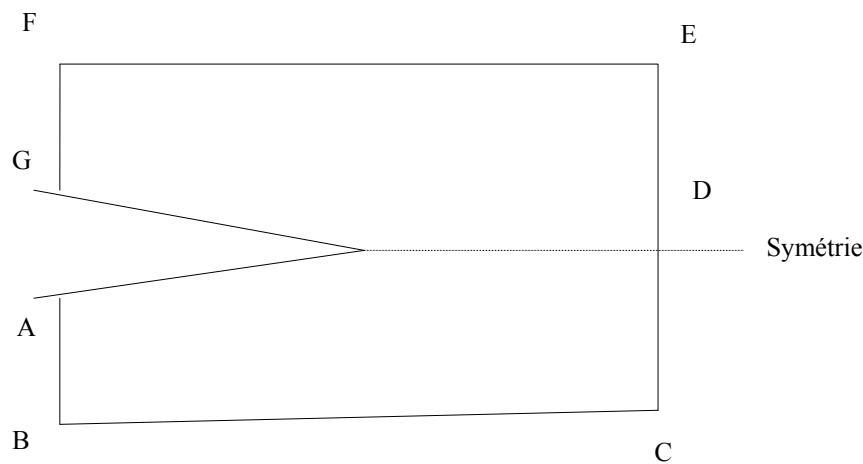


Figure 6.9 Cas d'un contour rectangulaire

VI.5 Taux de restitution d'énergie en absence de dislocations J_0

L'homogénéité du matériau dans la direction de l'axe des abscisses (OX) est considérée comme une hypothèse de base dans l'intégrale J_0 . Cette dernière est une mesure de la déformation au bout de la fissure lorsque le contour Γ est pris suffisamment proche du bout de la fissure. Pour les matériaux linéairement élastiques, J_0 peut être reliée au facteur d'intensité de contraintes par une substitution directe de la solution singulière en mode I. Pour le cas de contrainte plane, on a;

$$J_0 = \frac{K_I^2}{E} \quad (6.20)$$

Selon Les valeurs de contraintes trouvées dans le chapitre IV, on peut calculer le taux de restitution de l'énergie au bout de la fissure principale en absence de la dislocation. Les valeurs de cette énergie seront récapitulées dans le tableau suivant :

Tableau.6.3 Valeurs d'énergie en fonction de la longueur de la fissure principale.

Longueur de la fissure a (mm)	0	5	10	15	20	25	30
J (joules) Numérique	0	0.086	0.146	0.242	0.315	0.439	0.552
J (joules) théorique	0	0.089	0.179	0.269	0.358	0.448	0.538

La variation numérique et théorique de taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de la fissure principale, seront représentées sur la figure suivante :

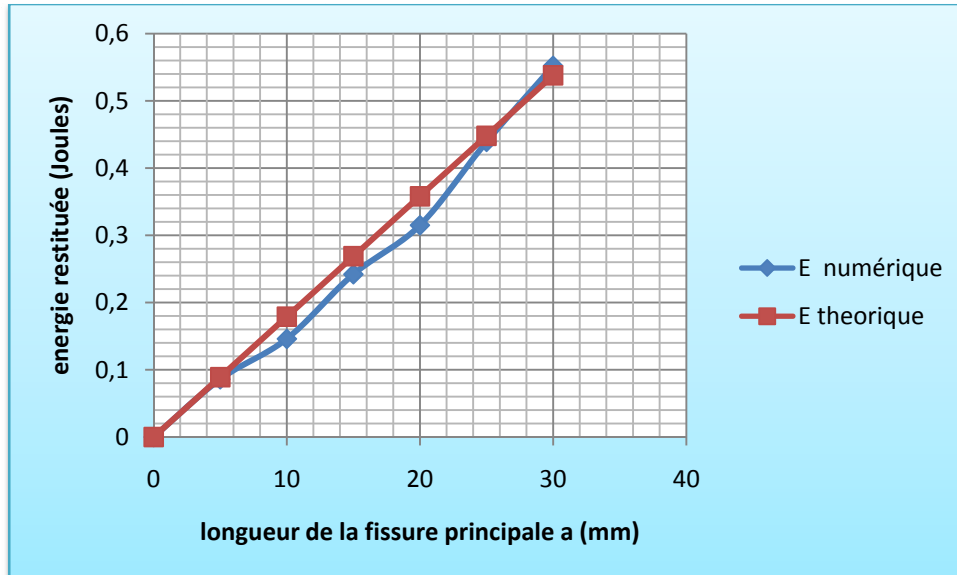


Figure 6.10 Variation de l'énergie en fonction de longueur de fissure principale.

VI.6 Taux de restitution d'énergie d'interaction en présence de la dislocation (J_{Int})

Lorsque il y a une interaction entre une fissure et une dislocation avoisinante le taux de restitution de l'énergie globale (J_{Int}) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$J_{Int} = J_0 + \Delta J \quad (6.21)$$

avec

J_0 : taux d'énergie sans présence de la dislocation.

ΔJ : le taux de restitution d'énergie de la dislocation.

L'analyse numérique du modèle de rupture traité dans le chapitre V, nous amène les déplacements et déformations des particules du matériau verre. Les résultats numériques de ces derniers seront figurés sur les cartographies suivantes :

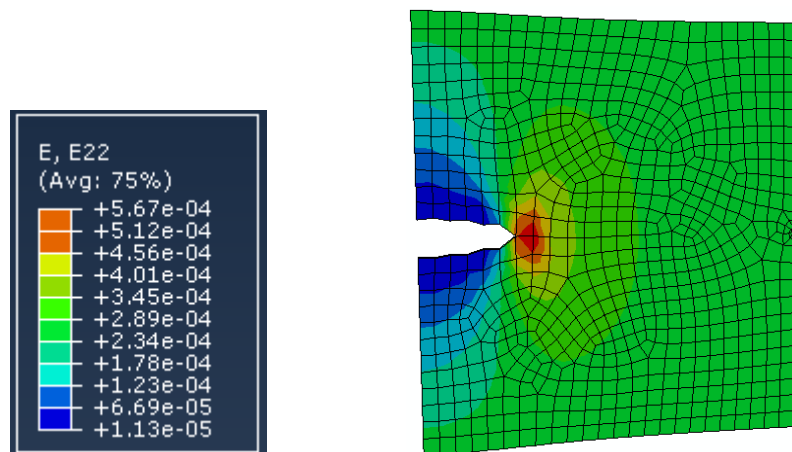


Figure 6.11 Déformation $\varepsilon_{22}(mm)$ pour une distance entre fissure-dislocation ($l = 45mm$).

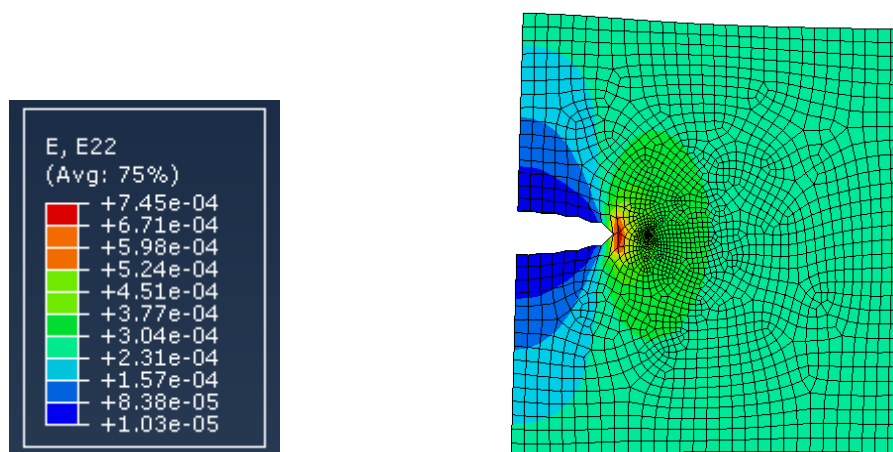


Figure 6.12 Déformation $\varepsilon_{22}(mm)$ pour une distance entre fissure-dislocation ($l = 5mm$).

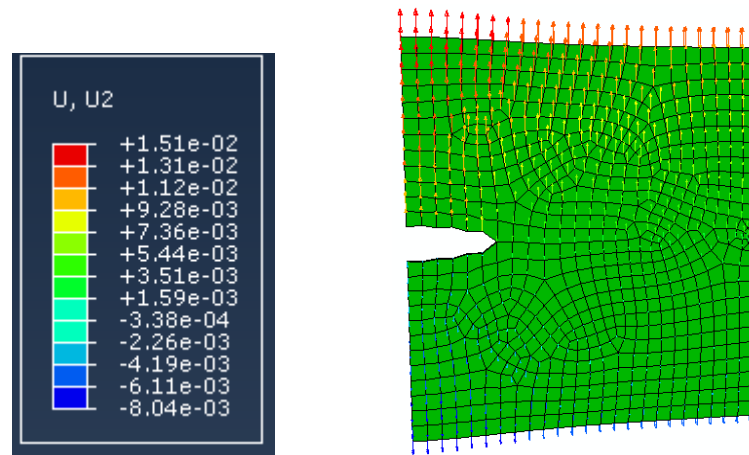


Figure 6.13 Déplacement $u_{22}(mm)$ pour une distance entre fissure-dislocation ($l = 45mm$).

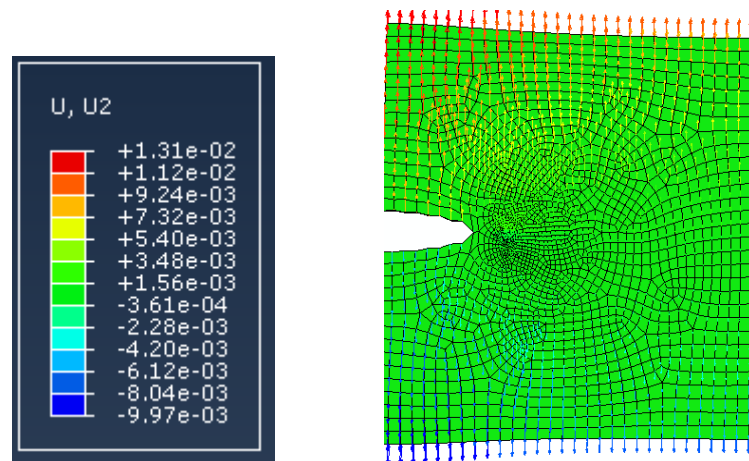


Figure 6.14 Déplacement $u_{22}(mm)$ pour une distance entre fissure-dislocation ($l = 5mm$).

Le calcul d'énergie d'interaction (J_{Int}) s'est basé sur les contraintes trouvées dans le chapitre V, tout en utilisant les relations (6.20) et (6.21). les résultats de cette énergie d'interaction en fonction de la distance entre la fissure principale et la dislocation avoisinante, seront récapitulés dans le tableau suivant :

Tableau 6.4 Valeurs d'énergie en fonction de la distance entre dislocation et fissure.

Distancel (mm).	0	10	20	30	40
J_{Int} (Joules)	3.481	0.324	0.297	0.25	3.23

La variation du taux de restitution d'énergie lors de l'interaction entre la fissure principale et la dislocation avoisinante, en fonction de la distance entre ces dernières, est représentée sur la figure suivante :

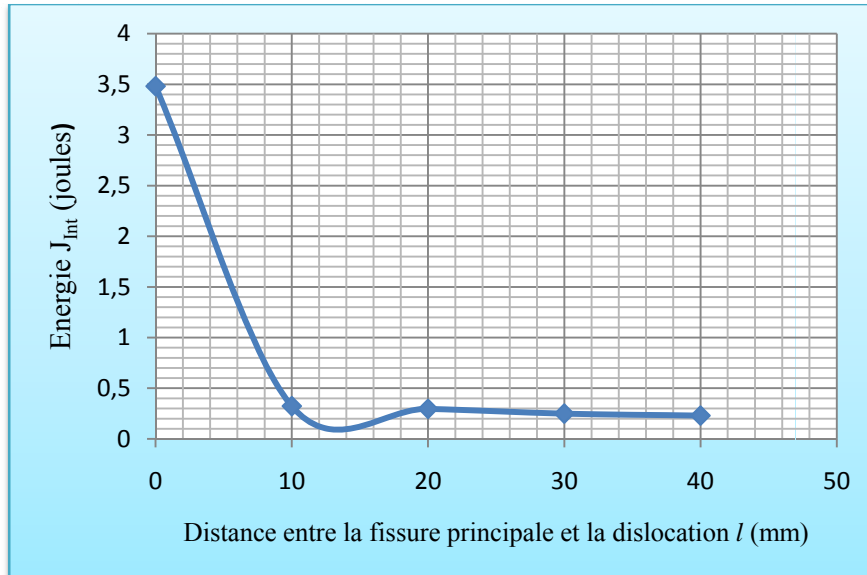


Figure 6.15 Variation du taux de restitution d'énergie d'interaction (J_{int}) en fonction de la longueur de la distance entre fissure et dislocation l (mm).

VI.7 Variation du taux de restitution d'énergie ($\Delta J/J_0$)

La présence de la dislocation au voisinage de la fissure principale, engendre deux effets ; positifs ou négatifs. Pour cela, la relation (6.21) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$J_{int} = \begin{cases} J_0 + \Delta J^+ \\ J_0 + \Delta J^- \end{cases} \quad (6.22)$$

Les valeurs du taux de restitution d'énergie engendrées par la dislocation(ΔJ), seront récapitulées dans le tableau suivant :

Tableau 6.5 Valeurs d'énergie d'interaction (J_{int}) en fonction de la distance (fissure / dislocation).

Distance $l(mm)$	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
ΔJ (Joules)	-0.068	-0.012	00	0.008	0.039	0.055	0.063	0.081	0.058	3.24
$\Delta J/J_0$	-0.281	-0.05	00	0.033	0.161	0.227	0.26	0.335	0.239	13.38

Les résultats numériques de la variation du taux de restitution d'énergie récapitulés dans le tableau ci-dessus (Tableau.6.5), seront représentés dans la figure suivante :

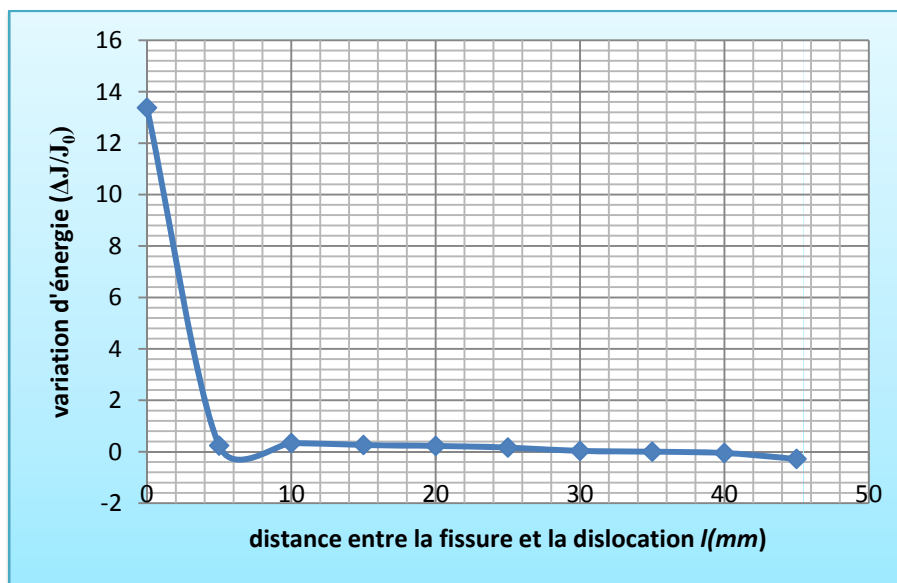


Figure 6.16 Variation du taux de restitution d'énergie($\Delta J/J_0$) en fonction de la distance entre la fissure et la dislocation $l(mm)$.

VI.8 Discussions et interprétation

Les différents taux de restitution d'énergie ont été déterminés dans le cas de la propagation de la fissure en absence et en présence d'une dislocation au voisinage de la fissure principale. On a constaté que l'existence de cette dislocation au voisinage de la fissure influe grandement sur la propagation de la fissure soit par une augmentation de son énergie engendrant une accélération de la propagation de la fissure soit par une diminution de l'énergie provoquant une décélération de cette dernière et peut être neutre. Ces taux ont fait l'objet d'une étude minutieuse en raison de la configuration géométrique de l'entité formée par la fissure, la dislocation et leurs interactions tout en tenant compte la position de la dislocation par rapport à la fissure principale. L'existence de la dislocation devant la fissure principale, a donné naissance à deux énergies J_0 et ΔJ par conséquent, a engendré deux effets assez distincts: l'effet amplificateur et l'effet de réduction. On constate que le rôle de cette dislocation est de retarder ou d'accélérer le processus de la propagation de la fissure. En d'autres termes, l'énergie se définit sous deux formes:

- Une énergie positive ΔJ^+ : son rôle est d'amplifier l'intensité des contraintes.
- Une énergie négative ΔJ^- : son rôle est de réduire l'intensité des contraintes jusqu'à l'arrêt de la propagation de la fissure.

Conclusion générale

et

Recommandations

VII.1 Conclusion générale

Le but de notre travail de recherche est de déterminer la distribution des champs de contraintes pouvant être générés lors de l'interaction entre une fissure existante et une dislocation avoisinante. L'influence de ce défaut sur la propagation de la fissure principale a fait l'objet d'une analyse minutieuse. Donc, le problème d'interactions entre ces deux éléments a été traité selon deux aspects : Etude théorique et analyse numérique. Pour la partie théorique, deux matériaux ayant des caractéristiques différents ont fait l'objet de cette recherche. En prenant en considération les caractéristiques des deux matériaux tels le module de cisaillement (μ_A, μ_B) et le coefficient de Poisson (ν_A, ν_B), les différents champs d'iso-contraintes ainsi que leurs effets (amplification et réduction) ont fait l'objet de comparaisons avec ceux trouvés par d'autres chercheurs. Pour la partie numérique, un modèle représentatif a été choisi en guise de comparaison avec l'analyse théorique. Dans ce cas, le problème à traiter est de considérer deux modèles de rupture : l'un en absence de dislocations et l'autre en présence d'une dislocation au voisinage de la fissure principale. Le modèle de rupture est un matériau composite (le verre) ayant un module d'élasticité équivalent $E = 70000 \text{ N/mm}^2$ et un coefficient de poisson $\nu = 0.2$. Ce matériau a été choisi en raison de son comportement fragile, sa transparence et surtout de sa disponibilité. Il est évident qu'en absence de dislocations, le Facteur d'Intensité de Contrainte (SIF) est directement dépendant la longueur de la fissure principale. La valeur du SIF trouvée numériquement est comparable à celle obtenue par la théorie de Irwin (voir Fig. 4.18 et le Tableau 4.3, dans le chapitre IV). D'après la Figure 4.18, les deux courbes sont colinéaires dans les intervalles $a \in [0,4] \text{ mm}$ et $a \in [24,30] \text{ mm}$. Pour l'intervalle $a \in [4,24]$ il y a un petit décalage entre les points de deux courbes, cette différence peut être générée à cause de l'épaisseur du modèle pris en considération que Irwin considère le modèle en 2-d (épaisseur $t = 0$) ou peut être générée de la difficulté de visualiser les valeurs exactes de contraintes au bout de la fissure principale. Et d'autre part, en présence de la dislocation au voisinage de cette fissure principale, la détermination de champs de contrainte a été en variant la distance entre la fissure principale et cette dislocation. Pour chaque distance on trouve un champ de contraintes ($\sigma_{22} > \sigma_{12} > \sigma_{11}$) et la contrainte maximale trouvée lors la dislocation située a la pointe de la fissure principale $\sigma_{22} = 197.03 \text{ MPa}$ (voir fig.5.9). Toutes les contraintes trouvées sont supérieures et parfois inférieure a celles trouvées en absence de la dislocation (voir tableau 5.1 et 5.2) . Pour cette

raison on conclut que la présence de la dislocation influence grandement sur l'amplification et la réduction de la propagation de la fissure.

Il a été montré à travers cette étude théorique et numérique que l'effet de l'orientation ainsi que celui de la position de la dislocation influencent d'une façon continue la propagation de la fissure principale, soit par une amplification des champs de contrainte au niveau de la singularité de la fissure, soit par une réduction de ces derniers. Il a été ainsi constaté que la présence de cette zone influence grandement le processus de la propagation et donne lieu à deux effets : l'effet d'amplification et l'effet de réduction. Il s'avère indispensable de prendre en considération la zone d'endommagement dans notre étude par l'introduction des effets d'interactions existant entre cette dernière et la fissure initiale.

VII.1 Recommandations

Les dislocations sont considérées comme un mécanisme qui modifie la résistance mécanique des matériaux fragiles et leur étude est difficile. Pour cela, le présent travail de recherche est basé essentiellement sur une approche mathématique en utilisant deux matériaux fragiles différents et une autre étude numérique basée sur la méthode des éléments finis. La méthode utilisée dans cette étude a abouti à des résultats probants et est destinée principalement aux matériaux où la propagation de fissures est accompagnée par la formation d'une zone d'endommagement. Cette dernière est composée principalement de dislocations empilées les unes sur les autres et pourvues d'une certaine force d'action. Ces dislocations sont orientées arbitrairement et positionnées au voisinage de la fissure. Donc, notre approche est de prendre en considération uniquement les paramètres ayant trait à l'orientation et le positionnement de ces dislocations à l'intérieur de la zone. Néanmoins, d'autres facteurs influencent la propagation de fissures et ne font pas l'objet de cette étude pour la simple raison qu'ils nécessitent de travaux expérimentaux avec des moyens matériels sophistiqués tels le microscope électronique à balayage et les différents appareils de capteurs d'ondes. Parmi ces paramètres, on cite par exemple;

- * Densité de la zone perturbée
- * Les effets de température
- * La forme de fissures
- * Le facteur temps, etc....

En sus de cela, il faut prendre en considération;

- Les dimensions de la fissure et de la zone endommagée (la largeur et la longueur) ainsi que les caractéristiques intrinsèques (propriétés du matériau) pouvant être des paramètres importants dans la caractérisation de la durabilité des matériaux fragiles.
- Ces paramètres pour pouvoir développer un modèle constructif et rationnel élucidant d'une façon claire le comportement des matériaux hétérogènes.
- L'Analyse expérimentale de la zone endommagée par l'utilisation d'émissions acoustiques et surtout par la visualisation en microscopie électronique à haute résolution des surfaces de la zone endommagée.

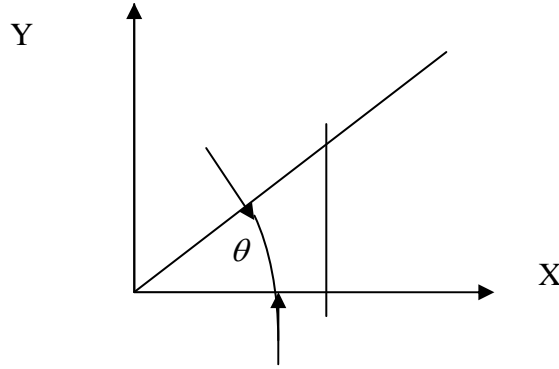
Annexe A

Calcul de dislocations

1. Passage de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes

Soit ;

$$u_z (\theta) = \frac{b \theta}{2 \pi} \quad (\text{A.1})$$



À partir de la figure ci-dessus, on peut mathématiquement écrire que;

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{A.2})$$

par conséquent, on a ;

$$\theta = \text{Arctg } \frac{y}{x} \quad (\text{A.3})$$

En substituant l'équation (A.2) dans (A.1), on trouve ce qui suit :

$$u_z (x, y) = \frac{b}{2 \pi} \cdot \text{Arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (\text{A.4})$$

2. Calcul des forces d'image (Cas d'une fissure semi infinie)

Les efforts d'images produits par une fissure semi infinie sont :

$$\sigma_{22}^A = \sigma_{22}^B = -\frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 + 2\epsilon b_1) \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{12}^A = \sigma_{12}^B = -\frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_1 - 2\epsilon b_2) \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_{11}^A = -\frac{j^A - 3h^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 + 2\epsilon b_1) \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_{11}^B = -\frac{j^B - 3h^B}{2\pi x_{1d}} (b_2 + 2\epsilon b_1) \quad (\text{A.8})$$

$$\text{avec } \epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{k^A \mu^B + \mu^A}{k^B \mu^A + \mu^B} \right)$$

La force d'image produite par la dislocation est :

$$f = f_1 + if_2 = (\sigma_{12} b_1 + \sigma_{22} b_2) - i (\sigma_{11} b_1 + \sigma_{12} b_2) \quad (\text{A.9})$$

Dont ;

$$j^A = \frac{\mu^A \mu^B}{\mu^B + \mu^A k^B} \quad (\text{A.10})$$

$$h^A = \frac{\mu^A \mu^B}{\mu^A + \mu^B k^A} \quad (\text{A.11})$$

En substituant les équations (A.5), (A.6) et (A.7) dans l'équation (A.9), On aura ce qui suit :

$$\begin{aligned} f &= \left[-\frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_1 - 2\epsilon b_2) b_1 - \frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 + 2\epsilon b_1) b_2 \right] \\ &\quad - i \left[-\frac{j^A - 3h^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 + 2\epsilon b_1) b_1 - \frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_1 - 2\epsilon b_2) b_2 \right] \\ &= \left[-\frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_1^2 + b_2^2) \right] - i \left[-\frac{j^A - 3h^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 b_1 + 2\epsilon b_1^2) - \frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 b_1 + 2\epsilon b_2^2) \right] \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

En comparant entre les équations (A.9) et (A.12) dont ; une partie imaginaire et l'autre réelle, on peut séparer deux forces d'images f_1 et f_2 comme suit :

$$f_1 = -\frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_1^2 + b_2^2) \quad (\text{A.13})$$

$$f_2 = -\frac{j^A - 3h^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 b_1 + 2\epsilon b_1^2) - \frac{h^A + j^A}{2\pi x_{1d}} (b_2 b_1 + 2\epsilon b_2^2) \quad (\text{A.14})$$

En substituant (A.10), (A.11) dans (A.13) et (A.14), nous aurons :

$$f_1 = \frac{\mu^A \mu^B (b_1^2 + b_2^2)}{2 \pi x_{1d}} \left[\frac{1}{\mu^A + \mu^B k^A} + \frac{1}{\mu^B + \mu^A k^B} \right] \quad (\text{A.15})$$

$$f_2 = \frac{\mu^A \mu^B}{2 \pi x_{1d}} \left[\frac{1}{\mu^B + \mu^A k^B} - \frac{3}{\mu^A + \mu^B k^A} \right] (b_2 b_1 + 2 \epsilon b_1^2) - \frac{\mu^A \mu^B}{2 \pi x_{1d}} \left[\frac{1}{\mu^B + \mu^A k^B} + \frac{1}{\mu^A + \mu^B k^A} \right] (b_2 b_1 - 2 \epsilon b_2^2) \quad (\text{A.16})$$

On prend même matériau ; $\mu^A = \mu^B$ et $k^A = k^B$, j'aurai :

$$f_1 = \frac{\mu (b_1^2 + b_2^2)}{\pi x_{1d} (1 + k)} \quad (\text{A.17})$$

$$f_2 = -\frac{\mu}{\pi x_{1d} (1 + k)} [2 b_2 b_1 + 2 \epsilon (b_1^2 - b_2^2)] \quad (\text{A.18})$$

Du chapitre II ;

1^{er} Cas : La dislocation est émise de la fissure. Donc, les équations sont comme suit :

$$f_1 = -(G^g - G^d) \quad (\text{A.19})$$

$$G^g = \frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4 \pi a} \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$G^d = \frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4 \pi a} \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) \quad (\text{A.21})$$

En substituant (A.20) et (A.21) dans l'équation (A.19) nous aurons comme suit :

$$\begin{aligned}
f_1 &= -(G^s - G^d) \\
&= -\frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4\pi a} \left[\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} - \frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right] \\
&= -\frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4\pi a} \left[\frac{x_{1d}^2 + a^2 + 2x_{1d}a - (x_{1d}^2 - 2x_{1d}a + a^2)}{x_{1d}^2 - a^2} \right] \\
&= -\frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{\pi} \left[\frac{x_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right] \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Donc, on constate que la dernière équation c'est l'équation (2.32) du chapitre II dans le cas où $m = 0$.

2^{ème} Cas : La dislocation est émise d'une source autre que la fissure, il y a limites supplémentaires dans les taux de restitution d'énergie, respectivement :

$$G^g = \frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4\pi a} \left[\left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) + 1 - 2 \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) \right] \right] \tag{A.23}$$

$$G^d = \frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4\pi a} \left[\left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) + 1 - 2 \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) \right] \right] \tag{A.24}$$

En substituant (A.23) et (A.24) dans (A.19) nous aurons comme suit :

$$f_1 = -\frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4\pi a} \left[\begin{aligned} &\left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) + 1 - 2 \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) \right] \\ &- \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) - 1 + 2 \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) \right] \end{aligned} \right]$$

$$= -\frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4\pi a} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{4\pi x_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right) - 2 \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} + a}{x_{1d} - a} \right) \right] \\ & + 2 \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{x_{1d} - a}{x_{1d} + a} \right) \right] \end{aligned} \right] \quad (\text{A.25})$$

À partir de théorèmes mathématique :

$$\ln \left(\frac{x}{y} \right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (\text{A.26})$$

Pour cela on pose

$$\begin{cases} x = x_{1d} + a \\ y = x_{1d} - a \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Donc, l'équation (A.25) sera comme suit :

$$f_1 = -\frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4\pi a} \left[\begin{aligned} & 2 \frac{\sqrt{x_{1d} - a}}{\sqrt{x_{1d} + a}} \cos \left[\epsilon \ln(x_{1d} - a) - \epsilon \ln(x_{1d} + a) \right] \\ & + \left(\frac{4a x_{1d}}{x_{1d}^2 + a^2} \right) \end{aligned} \right] \\ + \frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{4\pi a} \left[2 \frac{\sqrt{x_{1d} + a}}{\sqrt{x_{1d} - a}} \cos \left[\epsilon \ln(x_{1d} + a) - \epsilon \ln(x_{1d} - a) \right] \right] \quad (\text{A.28})$$

On pose :

$$\begin{cases} \alpha = E \ln(x_{1d} + a) \\ \beta = E \ln(x_{1d} - a) \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

on a :

$$\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}(\beta - \alpha) \quad (\text{A.30})$$

J'aurai comme suit :

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4\pi a} \left[\left(\frac{4ax_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right) - 2 \frac{\sqrt{x_{1d} + a}}{\sqrt{x_{1d} - a}} \cos(\alpha - \beta) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\sqrt{x_{1d} - a}}{\sqrt{x_{1d} + a}} \cos(\alpha - \beta) \right] \\
&= -\frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4\pi a} \left[\left(\frac{4ax_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right) + 2 \cos(\alpha - \beta) \left[\frac{\sqrt{x_{1d} - a}}{\sqrt{x_{1d} + a}} - \frac{\sqrt{x_{1d} + a}}{\sqrt{x_{1d} - a}} \right] \right] \\
&= -\frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{4\pi a} \left[\left(\frac{4ax_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \cos(\alpha - \beta) \sqrt{x_{1d}^2 - a^2} \left[\frac{1}{x_{1d} + a} - \frac{1}{x_{1d} - a} \right] \right] \\
&= -\frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{\pi} \left[\left(\frac{x_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right) - \cos(\alpha - \beta) \left[\frac{1}{\sqrt{x_{1d}^2 - a^2}} \right] \right] \tag{A.31}
\end{aligned}$$

Si en substituant α, β par ses valeurs, que nous avons proposées dans l'équation (A.29), la dernière équation prend la forme suivante :

$$f_1 = -\frac{(h^A + j^A)(b_2^2 + b_1^2)}{\pi} \left[\left(\frac{x_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right) - \left[\frac{\cos[\epsilon \ln(x_{1d} + a) - \epsilon \ln(x_{1d} - a)]}{\sqrt{x_{1d}^2 - a^2}} \right] \right] \tag{A.32}$$

Si on applique l'égalité (A.30), nous trouvons l'équation (2.32) trouvée dans le chapitre II (Cas où $m = 1$) que nous désirons, comme suit :

$$f_1 = -\frac{(h^A + j^A)(b_1^2 + b_2^2)}{\pi} \left[\left(\frac{x_{1d}}{x_{1d}^2 - a^2} \right) - \frac{\cos\{\ln(x_{1d} + a)/(x_{1d} - a)\}}{\sqrt{x_{1d}^2 - a^2}} \right] \tag{A.33}$$

Annexe B

Détermination de champs de contraintes

1- Fonctions Potentiels complexes

Les fonctions potentiels complexes de la fissure principale sont données telles suit [6] :

$$\phi_{fente} = \frac{1}{1-\beta^2} \left[(1-\beta^2) \gamma^A \ln(z - z_d) + (\alpha + \beta^2) \gamma^A \ln(z - \bar{z}_d) - (1+\alpha) \beta \gamma^A \ln(z - \bar{z}_d) \right]$$

$$\frac{-1}{1-\beta^2} \left[(\alpha - \beta)(1-\beta) \gamma^A \frac{\bar{z}_d - \bar{z}_d}{z - \bar{z}_d} \right] \quad (B.1)$$

$$\psi_{fente} = \frac{1}{1-\beta^2} \left[(1-\beta^2) \left(\bar{\gamma}^A \ln(z - z_d) - \gamma^A \frac{\bar{z}_d}{z - z_d} \right) + (\alpha + \beta^2) \left(\bar{\gamma}^A \ln(z - \bar{z}_d) - \gamma^A \frac{z_d}{z - z_d} \right) \right]$$

$$- \frac{1}{1-\beta^2} \left[(\alpha - \beta)(1-\beta) \left(\left(\bar{\gamma}^A - \gamma^A \right) \frac{z_d - \bar{z}_d}{z - \bar{z}_d} + \bar{\gamma}^A \frac{(z_d - \bar{z}_d) \bar{z}_d}{(z - \bar{z}_d)^2} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{1-\beta^2} \left[(1+\alpha) \beta \left(\bar{\gamma}^A \ln(z - \bar{z}_d) + \gamma^A \frac{z_d}{z - z_d} \right) \right] \quad (B.2)$$

Potentiels complexes de la dislocation sont comme suit :

$$\phi_{mic}^A = \frac{\mu^A \mu^B b_e}{i \pi (\mu^A + \mu^B k^A)} \ln(z - z_{1d}) \quad (B.3)$$

$$\psi_{mic}^A = \frac{\mu^A \mu^B \bar{b}_e}{-i \pi (\mu^B + \mu^A k^B)} \ln(z - z_{1d}) - \frac{\mu^A \mu^B b_e z_{1d}}{i \pi (\mu^A + \mu^B k^A) (z - z_{1d})} \quad (B.4)$$

Pour obtenir les fonctions de potentiels complexes de cette interaction, on doit faire la superposition de deux potentiels complexes comme suit :

$$\phi_{tot}(z) = \phi_{int}(z) + \phi_{fente}(z) \quad (B.5)$$

$$\psi_{tot}(z) = \psi_{int}(z) + \psi_{fente}(z) \quad (B.6)$$

En substituant les équations (B.1), (B.2), (B.3) et (B.4) dans deux dernières équations (B.5), (B.6) on trouve ce que suit :

$$\begin{aligned} \phi_{tot} = & \frac{1}{1-\beta^2} \left[(1-\beta^2)\gamma^A \ln(z-z_d) + (\alpha+\beta^2)\gamma^A \ln(z-\bar{z}_d) - (1+\alpha)\beta\gamma^A \ln(z-\bar{z}_d) \right] \\ & - \frac{1}{1-\beta^2} \left[(\alpha-\beta)(1-\beta)\gamma^A \frac{z_d - \bar{z}_d}{z - \bar{z}_d} \right] + \frac{\mu^A \mu^B b_e}{i\pi(\mu^A + \mu^B k^A)} \operatorname{lin}(z - z_{1d}) \end{aligned} \quad (B.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_{tot} = & \frac{1}{1-\beta^2} \left[(1-\beta^2) \left(\gamma^A \ln(z-z_d) - \gamma^A \frac{\bar{z}_d}{z-z_d} \right) + (\alpha+\beta^2) \left(\gamma^A \ln(z-\bar{z}_d) - \gamma^A \frac{z_d}{z-\bar{z}_d} \right) \right] \\ & - \frac{1}{1-\beta^2} \left[(\alpha-\beta)(1-\beta) \left(\left(\gamma^A - \gamma^A \right) \frac{z_d - \bar{z}_d}{z - \bar{z}_d} + \gamma^A \frac{(z_d - \bar{z}_d)\bar{z}_d}{(z - \bar{z}_d)^2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{1-\beta^2} \left[(1+\alpha)\beta \left(\gamma^A \ln(z-\bar{z}_d) + \gamma^A \frac{z_d}{z-\bar{z}_d} \right) \right] + \frac{\mu^A \mu^B \bar{b}_e}{-i\pi(\mu^B + \mu^A k^B)} \operatorname{lin}(z - z_{1d}) \\ & - \frac{\mu^A \mu^B b_e z_{1d}}{i\pi(\mu^A + \mu^B k^A)(z - z_{1d})} \end{aligned} \quad (B.8)$$

On considère tout au long de cette thèse que le nombre complexe Z s'écrit sous la forme algébrique comme suit ;

$$Z = A + iB \quad (B.9)$$

où A est la partie réelle et B est la partie imaginaire et on note par $\bar{z} = A - iB$ le conjugué de Z .

La position de la dislocation par rapport à la fissure principale est donnée par la relation suivante :

$$z_d = \rho e^{i\beta} = \rho (\cos \beta + i \sin \beta) \quad (B.10)$$

$$b_e = r e^{i\theta} = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{B.11})$$

Dundurs a utilisé deux paramètres, α et β

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\Gamma(k^A + 1) - (k^B + 1)}{\Gamma(k^A + 1) + k^B + 1} \\ \beta = \frac{\Gamma(k^A - 1) - (k^B - 1)}{\Gamma(k^A + 1) + k^B + 1} \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

Là où :

$\Gamma = \mu^B / \mu^A$ avec μ^B , μ^A Modules de cisaillement des matériaux A et B respectivement.

k^A , k^B : Sont égaux à $3 - 4\nu^A$, $3 - 4\nu^B$ respectivement, en cas des contraintes planes.

Pour raccourcir les deux formules des potentiels complexes on met :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \frac{\alpha + \beta^2}{1 - \beta^2} \\ \nabla = \frac{(1 + \alpha)\beta}{1 - \beta^2} \\ \eta = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \beta)}{1 - \beta^2} \end{array} \right. \quad (\text{B.13})$$

On a ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{\mu b}{i \pi (1 + k)} \\ \bar{\gamma} = \frac{-\mu \bar{b}}{i \pi (1 + k)} \end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

Donc, en substituant (B.13) dans (B.7) et (B.8) on trouve ce que suit :

$$\begin{aligned} \phi_{tot} = & \gamma \ln(z - z_d) + \Delta \gamma \ln(z - \bar{z}_d) - \nabla \gamma \ln(z - \bar{z}_d) - \eta \gamma \frac{\bar{z}_d - \bar{z}_d}{z - \bar{z}_d} \\ & + \frac{\mu^A \mu^B b_e}{i \pi (\mu^A + \mu^B k^A)} \operatorname{lin}(z - z_{1d}) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \psi_{tot} = & \bar{\gamma} \ln(z - z_d) - \gamma \frac{\bar{z}_d}{z - z_d} + \Delta \left(\bar{\gamma} \ln(z - \bar{z}_d) - \gamma \frac{z_d}{z - \bar{z}_d} \right) + \\ & \nabla \left(\bar{\gamma} \ln(z - \bar{z}_d) + \gamma \frac{z_d}{z - \bar{z}_d} \right) - \eta \left((\bar{\gamma} - \gamma) \frac{(z_d - \bar{z}_d)}{z - \bar{z}_d} + \bar{\gamma} \frac{(z_d - \bar{z}_d) \bar{z}_d}{(z - \bar{z}_d)^2} \right) \\ & + \frac{\mu^A \mu^B \bar{b}_e}{-i \pi (\mu^B + \mu^A k^B)} \operatorname{lin}(z - z_{1d}) - \frac{\mu^A \mu^B b_e z_{1d}}{i \pi (\mu^A + \mu^B k^A) (z - z_{1d})} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

On considère que les matériaux A et B, possèdent mêmes caractéristiques physiques

($K^A = K^B$ Et $\mu^A = \mu^B$), on aura, $\alpha = \beta = 0$

Donc, les fonctions des potentiels complexes pour un matériau homogène seront comme suites :

$$\phi_{tot} = 2 \gamma \ln(z - z_d) \quad (\text{B.17})$$

$$\psi_{tot} = 2 \bar{\gamma} \ln(z - z_d) - \frac{\gamma \bar{z}_d}{z - z_d} - \frac{\gamma z_d}{(z - z_{1d})} \quad (\text{B.18})$$

En dérivant les dernières équations par rapport à variable complexe (Z), on trouve ce qui suit :

$$\phi'_{tot} = \frac{2\gamma}{z - z_d} \quad (\text{B.19})$$

$$\bar{\phi}'_{tot} = \frac{2\bar{\gamma}}{\bar{z} - \bar{z}_d} \quad (\text{B.20})$$

$$\phi''_{tot} = \frac{-2\gamma}{(z - z_d)^2} \quad (\text{B.21})$$

$$\psi'_{tot} = \frac{2\bar{\gamma}}{z - z_d} + \frac{\gamma(\bar{z}_d + z_{1d})}{(z - z_{1d})^2} \quad (\text{B.22})$$

Les équations des contraintes en fonction des potentiels complexes sont comme suit :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 \left[\phi'_{tot}(z) + \overline{\phi'_{tot}(z)} \right] \quad (\text{B.23})$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 \left[\bar{z} \phi''_{tot}(z) + \psi'_{tot}(z) \right] \quad (\text{B.24})$$

En substituant les équations ((B.19) et (B.20) dans l'équation (B.23), et (B.21), (B.22) dans (B.24) on trouve :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 \left[\frac{\gamma}{z - z_d} + \frac{\bar{\gamma}}{z - z_d} \right] \quad (\text{B.25})$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 \left(\frac{\bar{z}\gamma + 2\bar{\gamma}}{(z - z_d)} \right) + 2 \left[\frac{\gamma z_{1d} - \gamma(\bar{z} - \bar{z}_d)}{(z - z_{1d})^2} \right] \quad (\text{B.26})$$

On prend le repère des axes xx et yy, au niveau de la pointe de fissure principale, c'est-à-dire ($z = \bar{z} = 0$).

Les dernière équations seront comme suit :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 \left[\frac{-\gamma}{z_d} - \frac{\bar{\gamma}}{z_d} \right] \quad (\text{B.27})$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -\frac{4\bar{\gamma}}{(z_d)} + 2 \left[\frac{\gamma z_{1d} + \gamma \bar{z}_d}{(z_{1d})^2} \right] \quad (\text{B.28})$$

En substituant l'équation (B.14) dans les équations (B.27) et (B.28), et en utilisant aussi les relations (B.10) et (B.11), on trouve ce qui suit :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} + \sigma_{22} &= \frac{4\mu r}{i\pi(1+k)\rho} [(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\beta) - i\sin(\beta))] \\ &\quad - \frac{4\mu r}{i\pi(1+k)\rho} [(\cos(\theta) - i\sin(\theta))(\cos(\beta) + i\sin(\beta))] \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Après avoir traité cette équation, mathématiquement et physiquement, on a trouvé ce qui suit :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{8\mu r}{\pi(1+k)\rho} [\sin(\theta - \beta)] \quad (\text{B.30})$$

On revient à l'équation (B.28) comportant les trois composantes des contraintes.

Pour faciliter les calculs, on pose ce qui suit :

$$a = -\frac{4\bar{\gamma}}{(z_d)} \quad (\text{B.31})$$

$$b = 2 \left[\frac{\gamma z_{1d} + \bar{\gamma} \bar{z}_d}{(z - z_{1d})^2} \right] \quad (\text{B.32})$$

Donc, après avoir substitué les équations (B.10), (B.11) et (B.14) dans l'équation (B.31) on a trouvé ce qui suit :

$$a = \frac{-4\mu r}{i\pi(1+k)} [\cos(\theta) - i\sin(\theta)] [\cos(\beta) - i\sin(\beta)] \quad (\text{B.33})$$

Cette dernière équation devient comme suit :

$$a = \frac{-4\mu r}{i\pi(1+k)} [\cos(\theta + \beta) - i\sin(\beta + \theta)] \quad (\text{B.34})$$

On revient à l'équation (B.32), en même traitement comme l'équation (B.31), on aura ce qui suit :

$$b = \frac{-4\mu r}{i\pi(1+k)} [c \cos(2\beta) - i\sin(2\beta)] [\sin(\beta) \sin(\theta) - i\sin(\beta) c \cos(\theta)] \quad (\text{B.35})$$

Donc, cette équation sera comme suit :

$$b = \frac{-4\mu r}{i\pi(1+k)} \left[\sin(\beta) \sin(\theta - 2\beta) - i \sin(\beta) c \cos(\theta - 2\beta) \right] \quad (\text{B.36})$$

pour rétablir l'équation (B.28), on doit additionner a à b , comme suit :

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = \frac{-4\mu r}{i\pi(1+k)} \left[\begin{array}{l} \cos(\theta + \beta) - i \sin(\beta + \theta) + \sin(\beta) \sin(\theta - 2\beta) \\ -i \sin(\beta) c \cos(\theta - 2\beta) \end{array} \right] \quad (\text{B.37})$$

On additionne la dernière équation à (B.30), j'aurais ce que suit :

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{-2\mu r}{i\pi(1+k)} \left[\begin{array}{l} \cos(\theta + \beta) - i \sin(\beta + \theta) + \sin(\beta) \sin(\theta - 2\beta) \\ -i \sin(\beta) c \cos(\theta - 2\beta) - 2\sin(\theta - \beta) \end{array} \right] \quad (\text{B.38})$$

Cette équation peut s'écrire en deux parties dont ; Imaginaire et réelle, comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + i\sigma_{12} &= \frac{2\mu r}{\pi(1+k)} \left[\sin(\beta + \theta) + \sin(\beta) c \cos(\theta - 2\beta) \right] \\ &+ i \frac{2\mu r}{\pi(1+k)} \left[\cos(\theta + \beta) + \sin(\beta) \sin(\theta - 2\beta) - 2\sin(\theta - \beta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Donc, par comparaison, on trouve les deux contraintes comme suit :

$$\sigma_{22} = \frac{2\mu r}{\pi(1+k)} \left[\sin(\beta + \theta) + \sin(\beta) c \cos(\theta - 2\beta) \right] \quad (\text{B.40})$$

$$\sigma_{12} = \frac{2\mu r}{\pi(1+k)} \left[\cos(\theta + \beta) + \sin(\beta) \sin(\theta - 2\beta) - 2\sin(\theta - \beta) \right] \quad (\text{B.41})$$

La troisième composante σ_{11} est déterminée en substituant l'équation (B.40) dans (B.30) comme suit :

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu r}{\pi(1+k)\rho} [4 \sin(\theta - \beta) - \sin(\beta + \theta) - \sin(\beta)c \cos(\theta - 2\beta)] \quad (\text{B.42})$$

Donc, après avoir traité mathématiquement et physiquement les fonctions des potentielles complexes, on exprime le champ de contraintes que nous désirons comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \frac{2\mu r}{\pi(1+k)\rho} \begin{cases} 4 \sin(\theta - \beta) - \sin(\beta + \theta) - \sin(\beta)c \cos(\theta - 2\beta) \\ \sin(\beta + \theta) + \sin(\beta)c \cos(\theta - 2\beta) \\ \cos(\theta + \beta) + \sin(\beta) \sin(\theta - 2\beta) - 2 \sin(\theta - \beta) \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

Annexe C

Calcul du facteur d'intensité de contrainte

Détermination du facteur d'intensité de contraintes

$$K_1 - i K_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} (\sigma_{22} - i \sigma_{12}) \quad (C.1)$$

Pour avoir la soustraction des contraintes $(\sigma_{22} - i \sigma_{12})$, on doit utiliser les fonctions (B.23) et (B.24), que nous avons déterminées dans l'annexe précédente, comme suit :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 \left[\phi'_{tot}(z) + \overline{\phi'_{tot}(z)} \right] \quad (C.2)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i \sigma_{12} = 2 \left[\overline{z} \phi''_{tot}(z) + \psi'_{tot}(z) \right] \quad (C.3)$$

Pour obtenir $(\sigma_{22} + i \sigma_{12})$, On additionne l'équation (C.2) à (C.3) comme suit :

$$2\sigma_{22} + 2i \sigma_{12} = 2 \left(\frac{\overline{z} \gamma + 2\overline{\gamma}}{(z - z_d)} \right) + 2 \left[\frac{\gamma z_{1d} - \gamma(\overline{z} - \overline{z_d})}{(z - z_{1d})^2} \right] + \frac{2\gamma}{z - z_d} + \frac{2\overline{\gamma}}{\overline{z} - \overline{z_d}} \quad (C.4)$$

En mettant $(z = \overline{z} = 0)$, le facteur d'intensité de contraintes regroupe toutes contraintes au bout de la fissure principale. Donc ; l'équation (C.4) devient comme suit ;

$$\sigma_{22} + i \sigma_{12} = - \left\{ \left(\frac{2\overline{\gamma} + \gamma}{(z_d)} \right) - \left[\frac{\gamma(\overline{z_d})}{(z_{1d})^2} \right] + \frac{\overline{\gamma}}{z_d} \right\} \quad (C.5)$$

En utilisant l'équation (B. 14) donnée par l'annexe précédente (Annexe B) dans la dernière équation, on trouve :

$$\sigma_{22} + i \sigma_{12} = \frac{\mu}{i \pi(1+k)} \left\{ - \left(\frac{-2\overline{b} + b}{(z_d)} \right) + \left[\frac{b(\overline{z_d})}{(z_{1d})^2} \right] + \frac{\overline{b}}{z_d} \right\} \quad (C.6)$$

En employant l'équations (B.10) et (B.11) données par l'annexe précédente dans l'équation (C.6) on aura ce que suit ;

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{\mu}{i\pi(1+k)} \left\{ \begin{aligned} & - \left(\frac{-2[\cos(\theta) - i\sin(\theta)] + [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]}{[\cos(\beta) + i\sin(\beta)]} \right) \\ & + \frac{[\cos(\theta) + i\sin(\theta)][\cos(\beta) - i\sin(\beta)]}{[\cos(\beta) + i\sin(\beta)]^2} \\ & + \frac{[\cos(\theta) - i\sin(\theta)]}{[\cos(\beta) - i\sin(\beta)]} \end{aligned} \right\} \quad (C.7)$$

En continuant le calcul en manière mathématique :

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{\mu r}{\pi(1+k)} \left\{ \begin{aligned} & [-4\sin(\theta - \beta) - 2\sin(\theta)\cos(\beta) + \sin(\theta - 3\beta)] \\ & -i [2\cos(\theta - \beta) + 2\sin(\theta)\sin(\beta) + \cos(\theta - 3\beta)] \end{aligned} \right\} \quad (C.8)$$

Donc, l'équation $(\sigma_{22} - i\sigma_{12})$ que nous avons besoin devient comme suit :

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \frac{\mu r}{\pi(1+k)} \left\{ \begin{aligned} & [-4\sin(\theta - \beta) - 2\sin(\theta)\cos(\beta) + \sin(\theta - 3\beta)] \\ & +i [2\cos(\theta - \beta) + 2\sin(\theta)\sin(\beta) + \cos(\theta - 3\beta)] \end{aligned} \right\} \quad (C.9)$$

On substitue la dernière équation dans (C.1) on aura ce que suit :

$$K_1 - iK_2 = \frac{\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho}(1+k)} \left\{ \begin{aligned} & [-4\sin(\theta - \beta) - 2\sin(\theta)\cos(\beta) + \sin(\theta - 3\beta)] \\ & +i [2\cos(\theta - \beta) + 2\sin(\theta)\sin(\beta) + \cos(\theta - 3\beta)] \end{aligned} \right\} z^{\frac{1}{2}} \quad (C.10)$$

On a ;

$$z^{\frac{1}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}} [\cos(\frac{\beta}{2}) + i\sin(\frac{\beta}{2})] \quad (C.11)$$

En substituant la dernière équation (C.11) dans (C.10), et en séparant la partie imaginaire et la partie réelle, on peut donc, avec combinaison, trouver les deux facteurs d'intensité de contraintes pour le mode I et II qui sont respectivement comme suit :

$$K_1 = \frac{\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho(1+k)}} \left\{ \begin{array}{l} -4 \cos(\beta/2) \sin(\theta - \beta) - 2 \cos(\beta/2) \sin(\theta) \cos(\beta) \\ + \cos(\beta/2) \sin(\theta - 3\beta) - 2 \sin(\beta/2) \cos(\theta - \beta) \\ -2 \sin(\beta/2) \sin(\theta) \sin(\beta) - \sin(\beta/2) \cos(\theta - 3\beta) \end{array} \right\} \quad (C.12)$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho(1+k)}} \left\{ \begin{array}{l} -2 \cos(\beta/2) \cos(\theta - \beta) - 2 \cos(\beta/2) \sin(\theta) \sin(\beta) \\ - \cos(\beta/2) \cos(\theta - 3\beta) - \sin(\beta/2) \sin(\theta - 3\beta) \\ +4 \sin(\beta/2) \sin(\theta - \beta) 2 \sin(\beta/2) \sin(\theta) \cos(\beta) \end{array} \right\} \quad (C.13)$$

On développe l'équation (C.12) à ce qui suit :

$$K_1 = \frac{-2\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho(1+k)}} \left\{ \cos(\beta/2) \sin(\theta - \beta) - \frac{1}{2} \sin(\theta - \beta/2) + \sin(\theta - \beta/2) + \sin(\theta) \cos(\beta/2) \right\} \quad (C.14)$$

Le facteur d'intensité de contraintes dans le cas où la dislocation est parallèle à la fissure principale ($\theta = 0$).

$$K_1(\theta = 0) = \frac{\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho(1+k)}} \left\{ 2 \cos(\beta/2) \sin(\beta) - \sin(\beta/2) + 2 \sin(\beta/2) \right\} \quad (C.15)$$

Le facteur d'intensité de contraintes dans le cas où la dislocation est perpendiculaire à la fissure principale, ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$K_1 = \frac{-2\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho(1+k)}} \left\{ \cos(\beta/2) \cos(\beta) - \frac{1}{2} \cos(\beta/2) + 2 \cos(\beta/2) \right\} \quad (C.16)$$

Calcul de variation du facteur d'intensité de contraintes ΔK :

On a trouvé que les facteurs d'intensité de contraintes ont été déterminés comme suit :

$$K_1 - i K_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} (\sigma_{22} - i \sigma_{12})$$

Donc, on peut dire que :

$$\Delta K_1 - i \Delta K_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} (\Delta \sigma_{22} - i \Delta \sigma_{12}) \quad (\text{C.17})$$

On a aussi, la formule des contraintes σ_{22} et σ_{12} en fonction des potentiels complexes :

$$\sigma_{22} - i \sigma_{12} = \phi'(z) + \omega'(z) + (z - \bar{z}) \overline{\phi''(z)}.$$

Donc, on peut déterminer la variation des contraintes comme suit :

$$\Delta \sigma_{22} - i \Delta \sigma_{12} = \Delta \phi'(z) + \Delta \omega'(z) + (z - \bar{z}) \Delta \overline{\phi''(z)} \quad (\text{C.18})$$

En substituant (C.18) dans (C.17), on trouve :

$$\Delta K_1 - i \Delta K_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} (\Delta \phi'(z) + \Delta \omega'(z) + (z - \bar{z}) \Delta \overline{\phi''(z)}) \quad (\text{C.19})$$

Les fonctions des potentiels que nous avons besoins [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi'(z) = \phi'_d(z) = \gamma \ln(z - z_d) \\ \Delta \phi''(z) = \phi''_d(z) = \frac{-\gamma}{(z - z_d)} \\ \Delta \overline{\phi''(z)} = \overline{\phi''_d(z)} = \frac{-\bar{\gamma}}{(\bar{z} - \bar{z}_d)} \\ \omega'(z) = \omega'_d(z) = z \phi'_d(z) + \phi'_d(z) + \psi'(z) \\ \Delta \psi'(z) = \psi'_d(z) = \frac{-\bar{\gamma}}{(z - z_d)} + \frac{\gamma \bar{z}}{(z - z_d)^2} \end{array} \right. \quad (\text{C.20, 21, 22, 23, 24})$$

En substituant les fonctions des potentiels complexes (C.20) (C.22) et (C.23) dans l'équation (C.19), on aura ce que suit :

$$K_1 - i \Delta K_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} \left(\frac{\gamma}{(z - z_d)} - \frac{\gamma(z - \bar{z}_d)}{(z - z_d)^2} + \frac{(\gamma + \bar{\gamma})}{(z - z_d)} - (z - \bar{z}) \frac{\bar{\gamma}}{(\bar{z} - \bar{z}_d)^2} \right) \quad (C.25)$$

On prend la variation du facteur d'intensité de contraintes au bout de la fissure principale ($z = \bar{z} = 0$). L'équation devient comme suit :

$$\Delta K_1 - i \Delta K_2 = \frac{\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho}(k+1)} \left(-\frac{(2\gamma + \bar{\gamma})}{z_d} + \frac{\gamma\bar{z}_d}{z_d^2} \right) \left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \quad (C.26)$$

En employant les équations de l'annexe précédente (B.10) et (B.11) dans (C.26) on trouve ce que suit :

$$\Delta K_1 - i \Delta K_2 = \frac{\sqrt{2}\mu r}{i\sqrt{\pi\rho}(k+1)} \begin{pmatrix} -\cos(\theta - \beta) - i \sin(\theta - \beta) \\ -2i \sin(\theta)(\cos(\beta) - 2\sin(\theta)\sin(\beta)) \\ +\cos(\theta - 3\beta) + i \sin(\theta - 3\beta) \end{pmatrix} \left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \quad (C.27)$$

Après avoir traité mathématiquement et physiquement (substitution, multiplication, séparation des parties réelles et imaginaires, combinaison), la dernière équation nous amène deux variations des facteurs d'intensité de contraintes comme suit :

$$\Delta K_1 = \frac{-\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho}(k+1)} \left\{ \sin\left(\theta - \frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\theta - \frac{5\beta}{2}\right) + 2\sin(\theta)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (C.28)$$

$$\Delta K_2 = \frac{-\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho}(k+1)} \left\{ \cos\left(\theta - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\theta - \frac{5\beta}{2}\right) + 2\sin(\theta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (C.29)$$

On prend la dislocation parallèle à la fissure principale ($\theta = 0$), la variation du facteur d'intensité de contraintes pour le mode I, devient comme suit ;

$$\Delta K_1 = \frac{-\sqrt{2}\mu r}{\sqrt{\pi\rho}(k+1)} \left\{ \sin\left(\frac{5\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (\text{C.30})$$

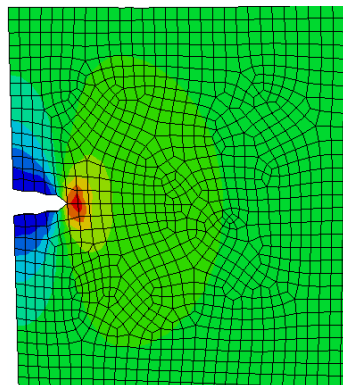
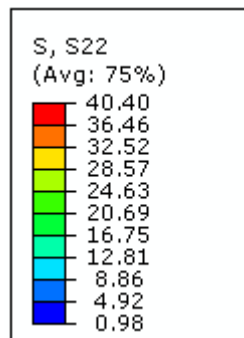
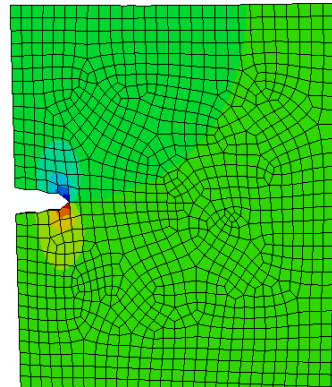
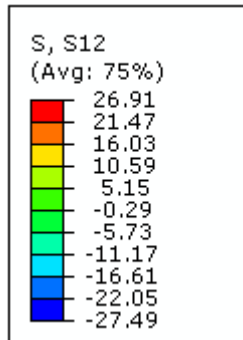
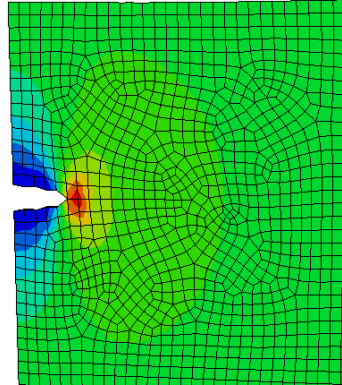
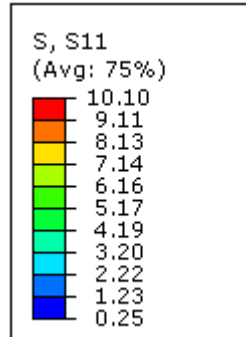
On a le facteur d'intensité de contraintes (K_1) et la variation du facteur d'intensité de contraintes, ΔK_1 , donc, on peut facilement déterminer le rapport ($\Delta K/K$), qui est comme suit :

$$\frac{\Delta K}{K_1}(\theta = 0) = \frac{\left\{ \sin\left(\frac{5\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\}}{\left\{ -\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin(\beta) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{7\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\}} \quad (\text{C.31})$$

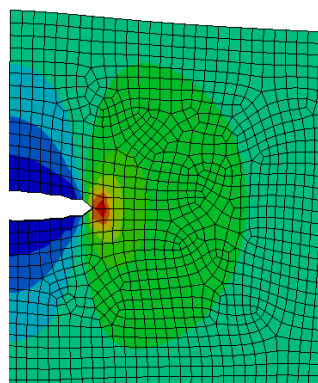
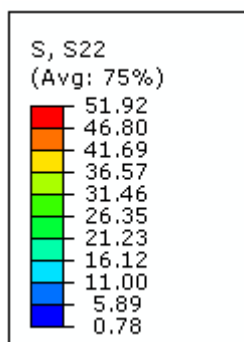
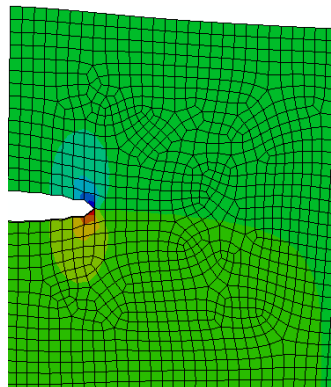
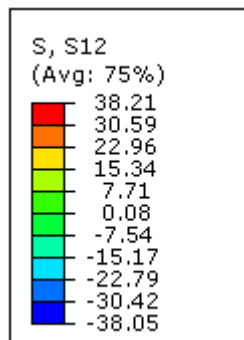
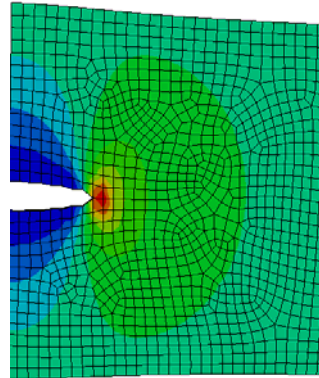
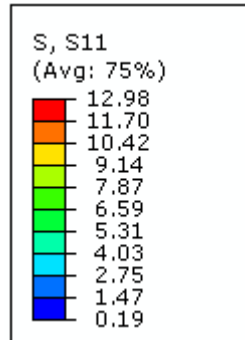
Annexe D

Champ des contraintes en absence de la dislocation

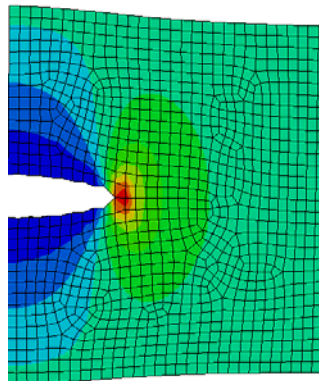
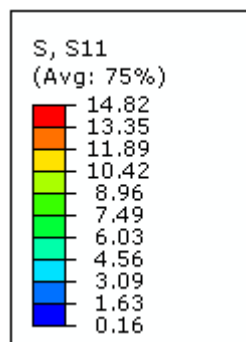
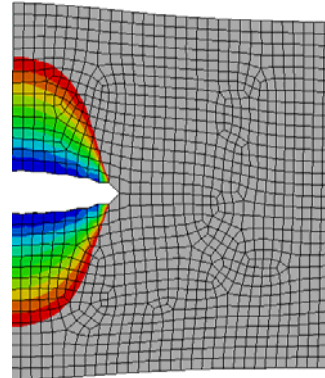
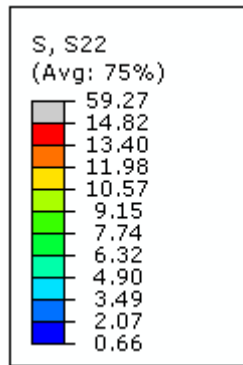
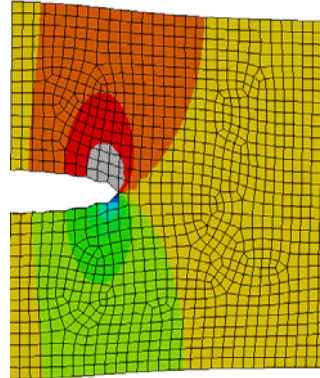
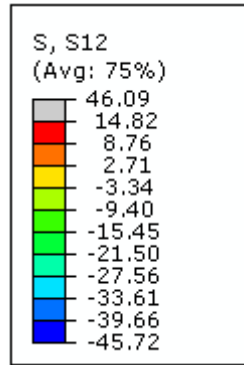
Champ des contraintes au bout de la fissure principale (cas où $a = 10$ mm)



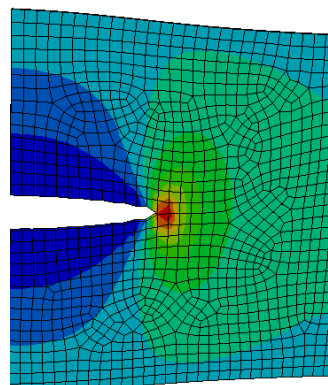
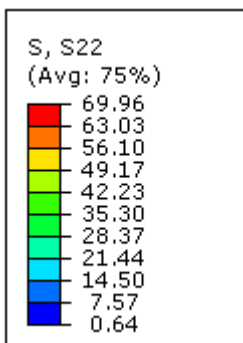
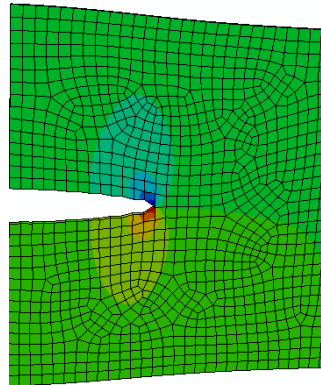
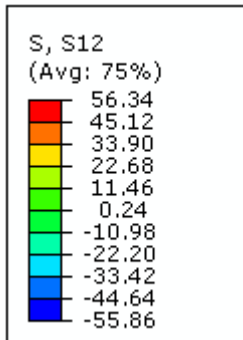
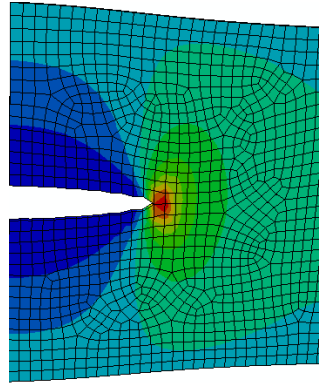
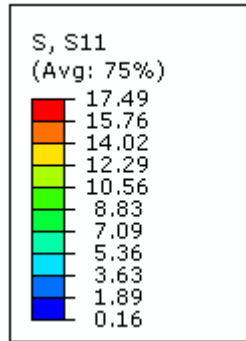
Champ des contraintes au bout de la fissure principale (cas où $a = 15\text{mm}$)



Champ des contraintes au bout de la fissure principale (cas où $a = 20$ mm)



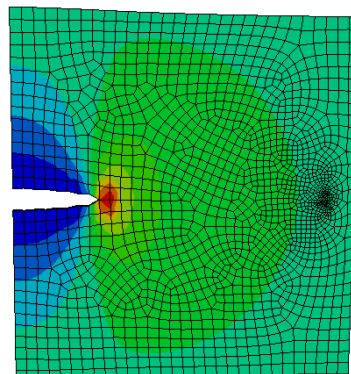
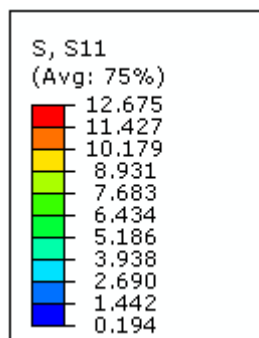
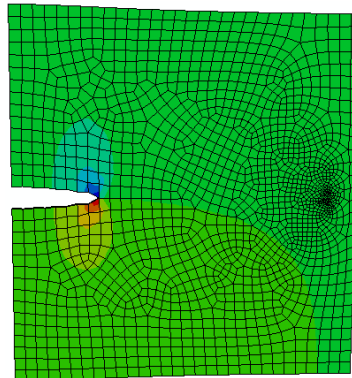
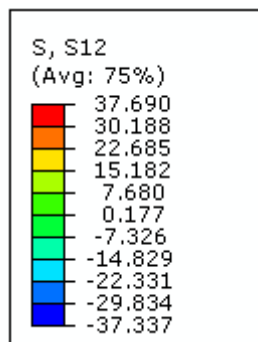
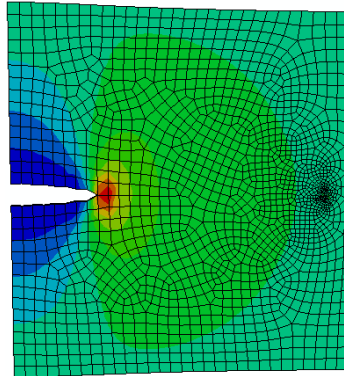
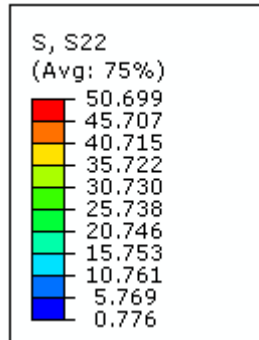
Champ des contraintes au bout de la fissure principale (cas où $a = 25$ mm)



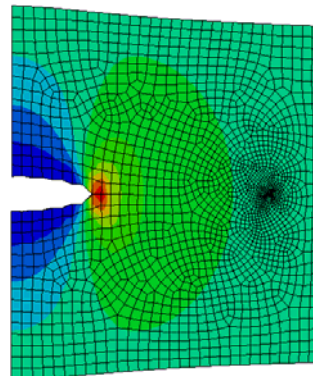
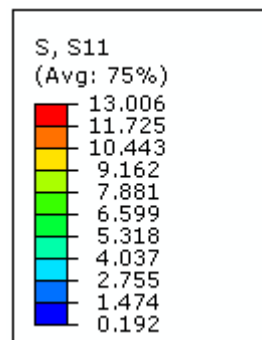
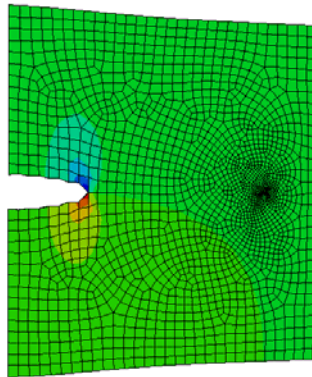
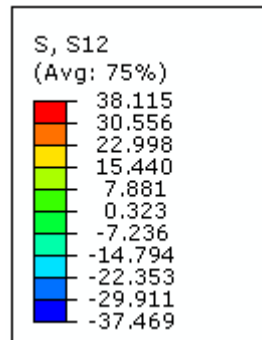
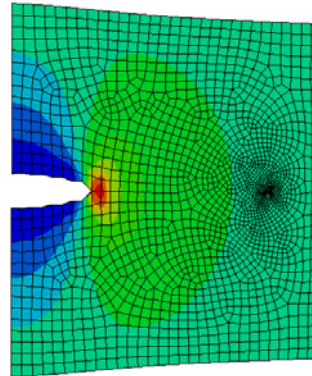
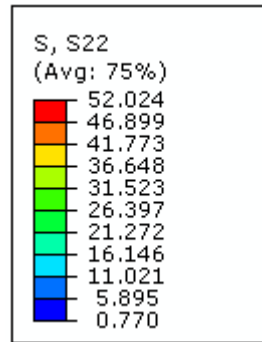
Annexe E

Champ des contraintes en présence de la dislocation

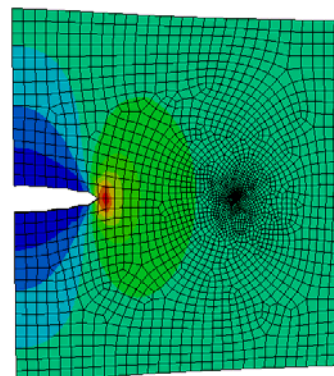
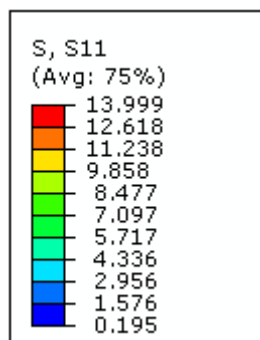
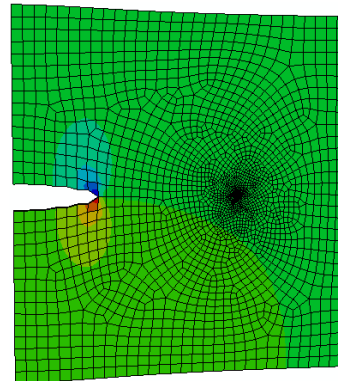
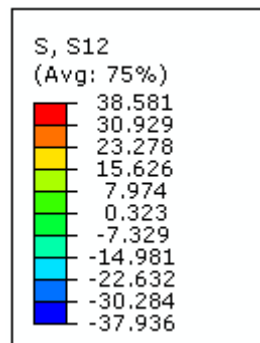
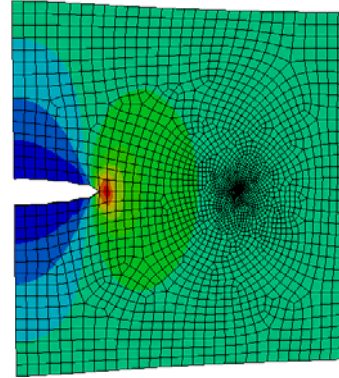
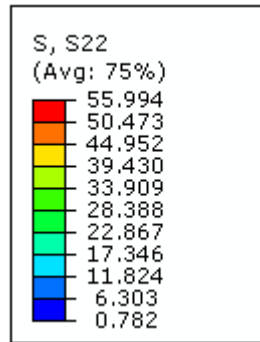
Champ des contraintes au bout de la fissure principale ($l=40\text{mm}$)



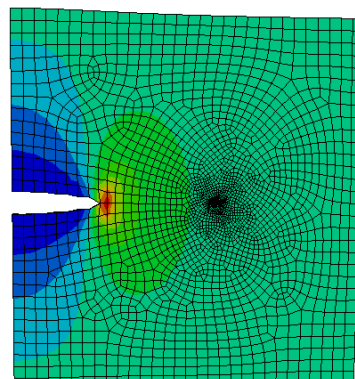
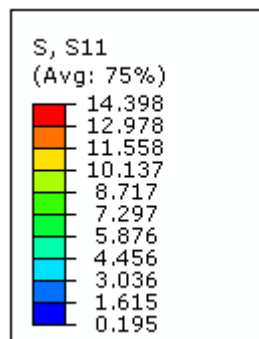
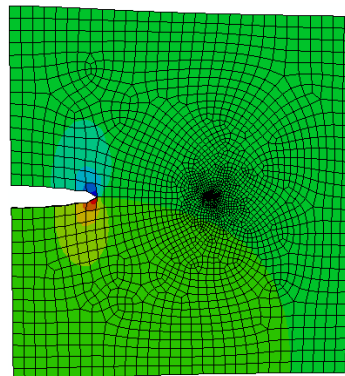
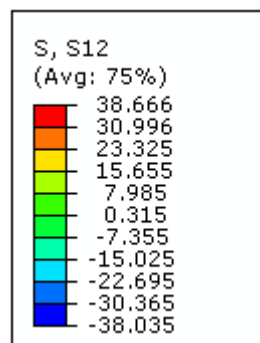
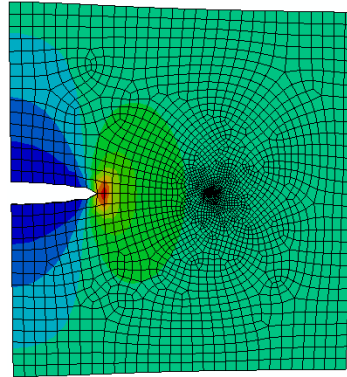
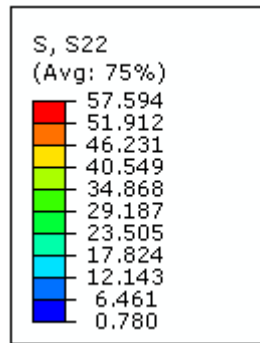
Champ des contraintes au bout de la fissure principale ($l=35\text{mm}$)



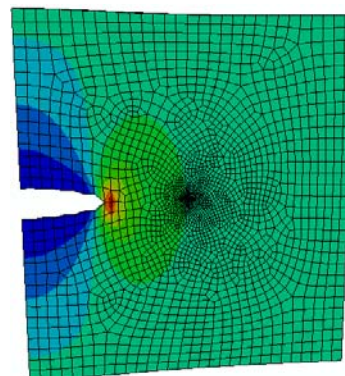
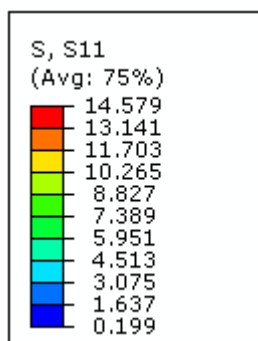
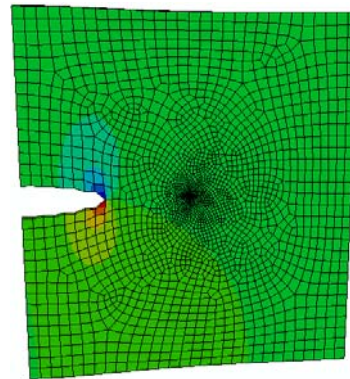
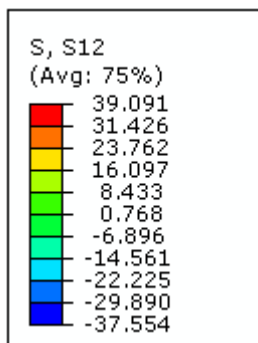
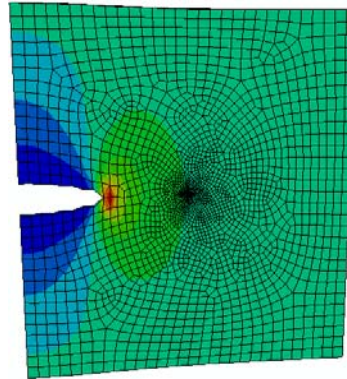
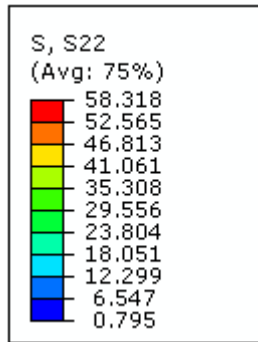
Champ des contraintes au bout de la fissure principale ($l=25\text{mm}$)



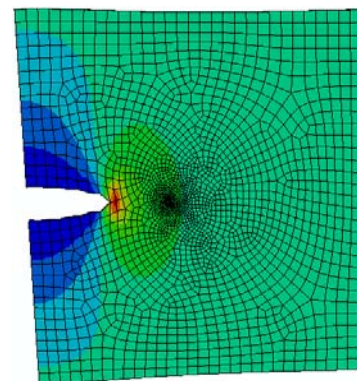
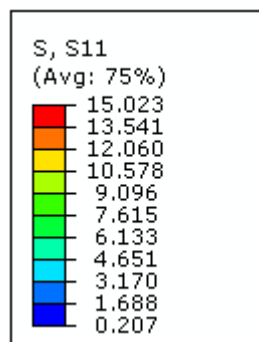
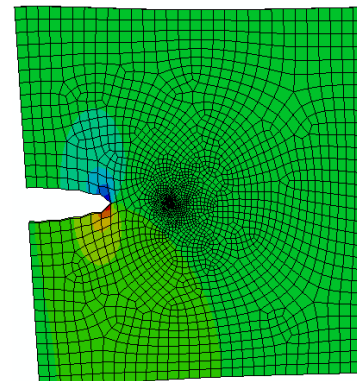
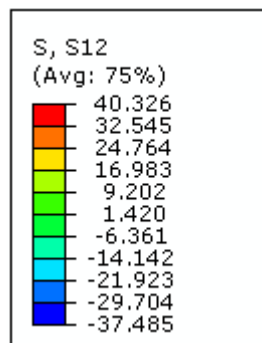
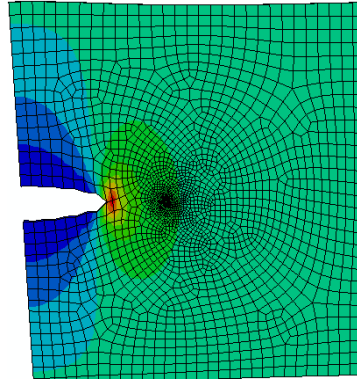
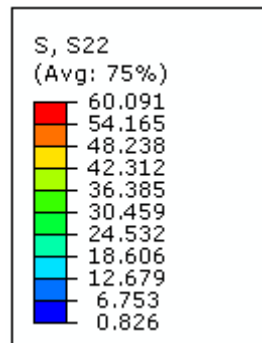
Champ des contraintes au bout de la fissure principale ($l=20\text{mm}$)



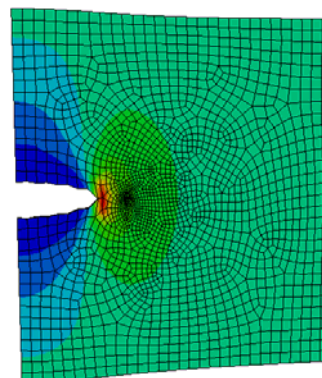
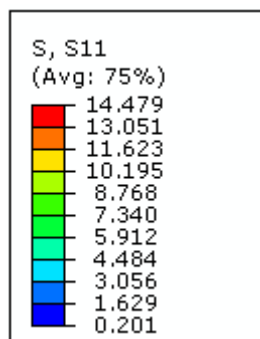
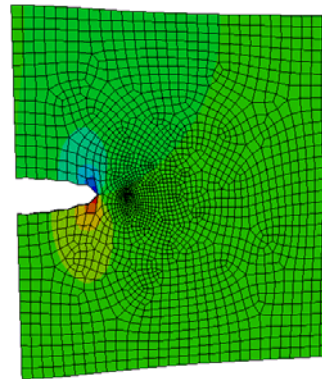
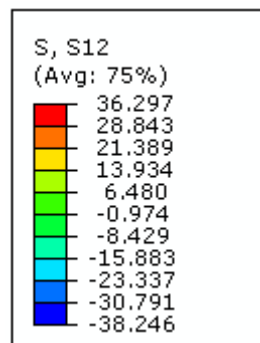
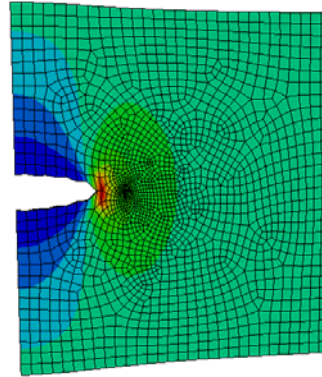
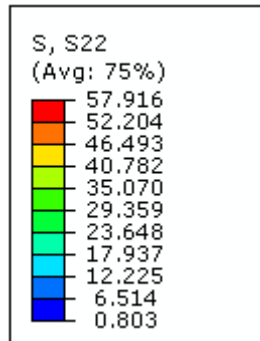
Champ des contraintes au bout de la fissure principale ($l=15\text{mm}$)



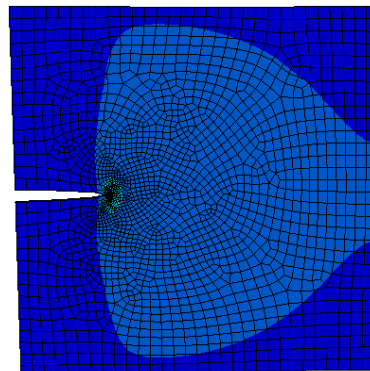
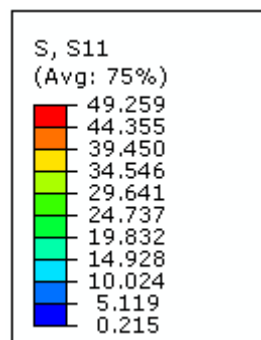
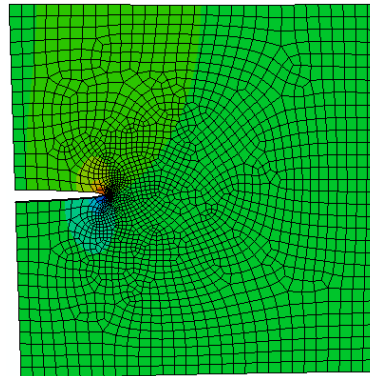
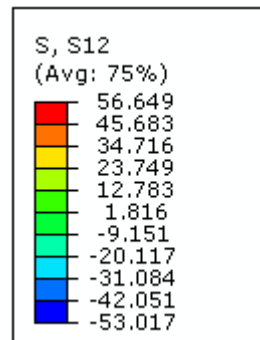
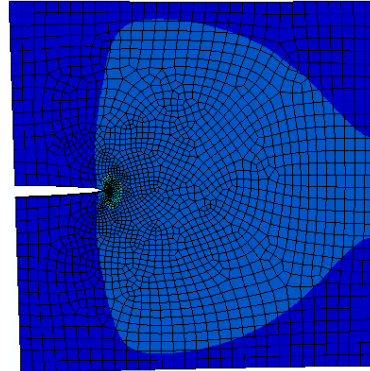
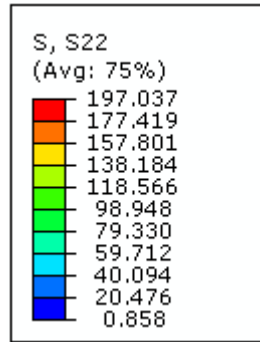
Champ des contraintes au bout de la fissure principale ($l=10\text{mm}$)



Champ des contraintes au bout de la fissure principale ($l=5\text{mm}$)

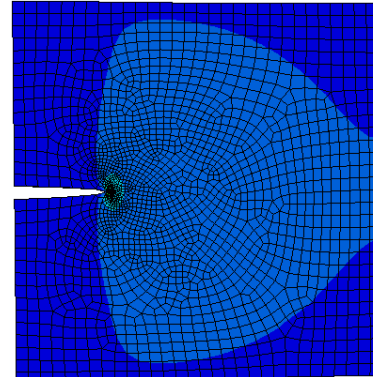
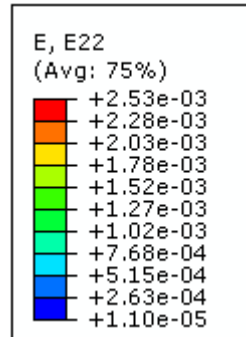
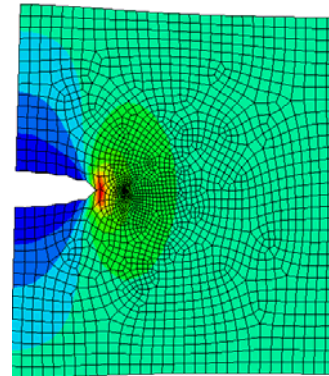
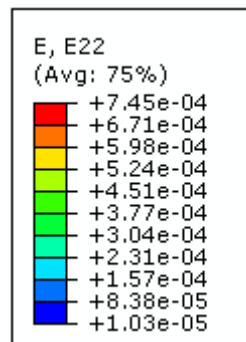
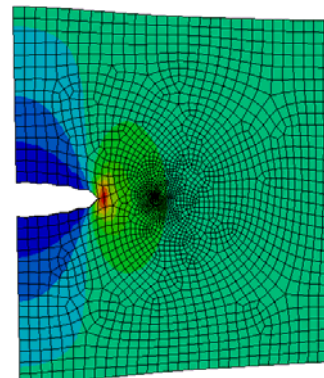
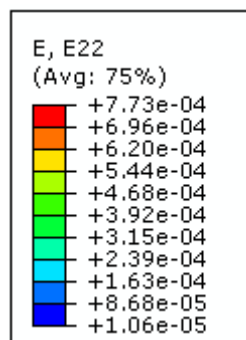


Champ des contraintes au bout de la fissure principale ($l=0$)

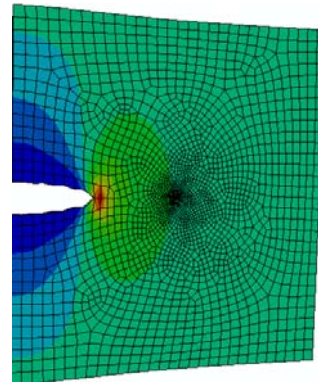
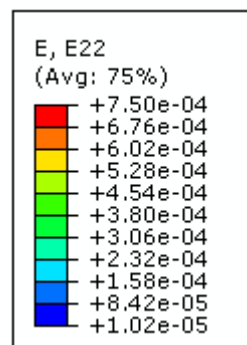


Annexe F

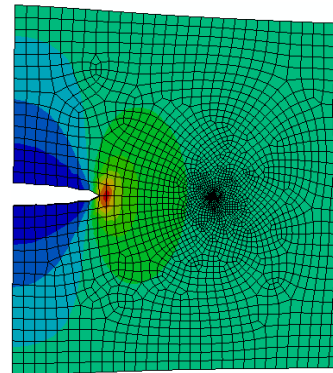
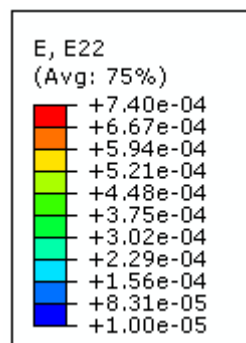
Champ de déformation et de déplacement en présence de
dislocation

Déformation ϵ_{22} (mm) cas ($l \rightarrow 0$)Déformation ϵ_{22} (mm) cas ($l = 5\text{mm}$)Déformation ϵ_{22} (mm) cas ($l = 10\text{mm}$)

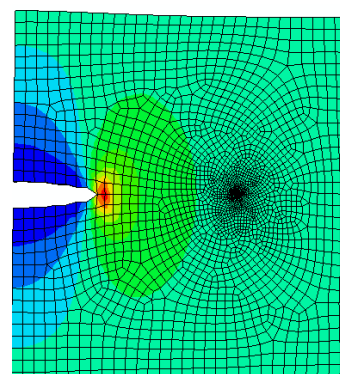
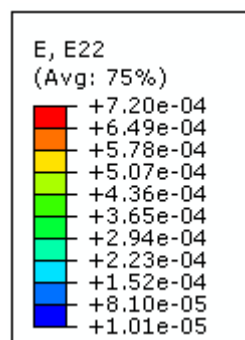
Déformation ε_{22} (mm) cas ($l = 15\text{mm}$)



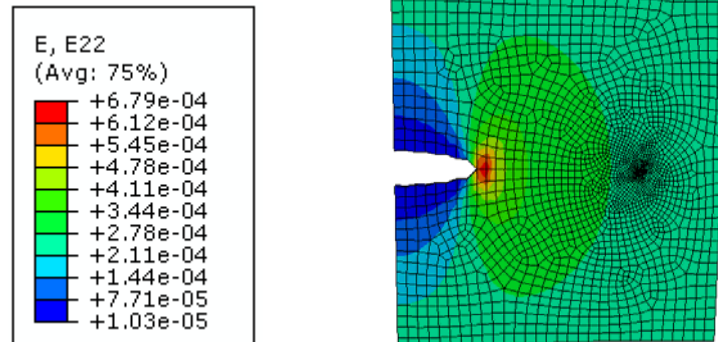
Déformation ε_{22} (mm) cas ($l = 20\text{mm}$)



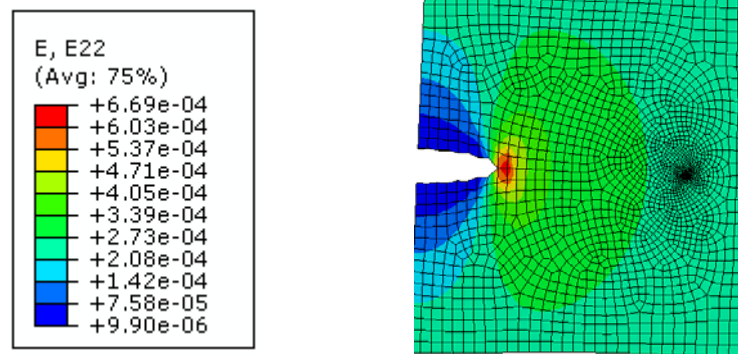
Déformation ε_{22} (mm) cas ($l = 25\text{mm}$)



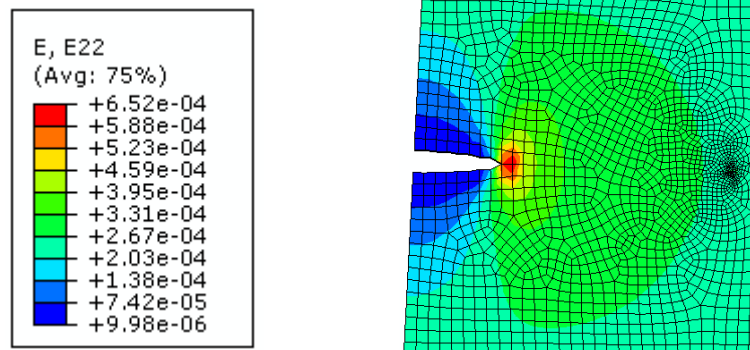
Déformation ϵ_{22} (mm) cas ($l = 30\text{mm}$)

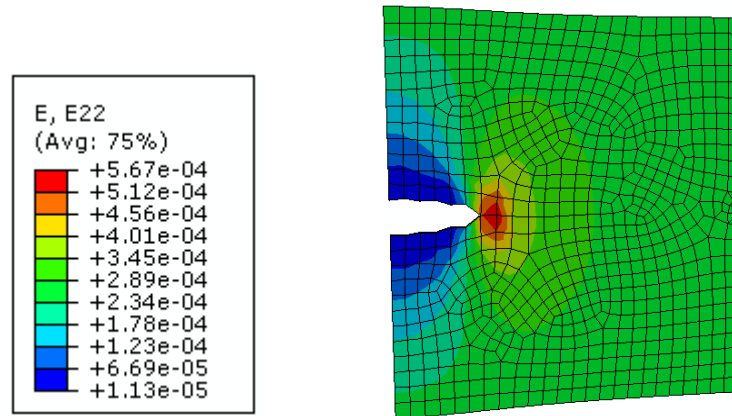
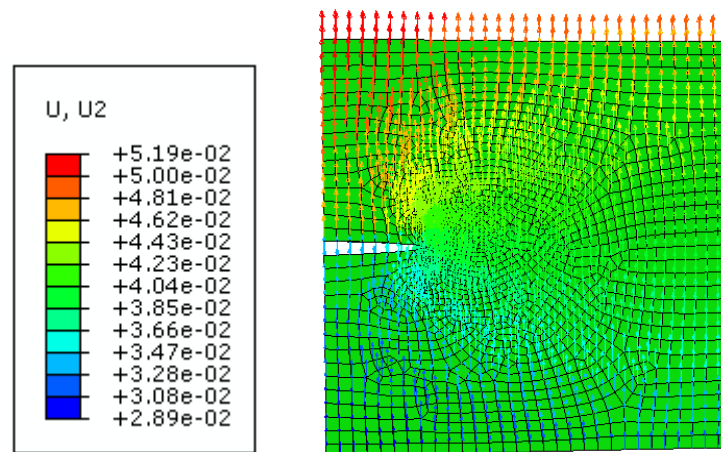
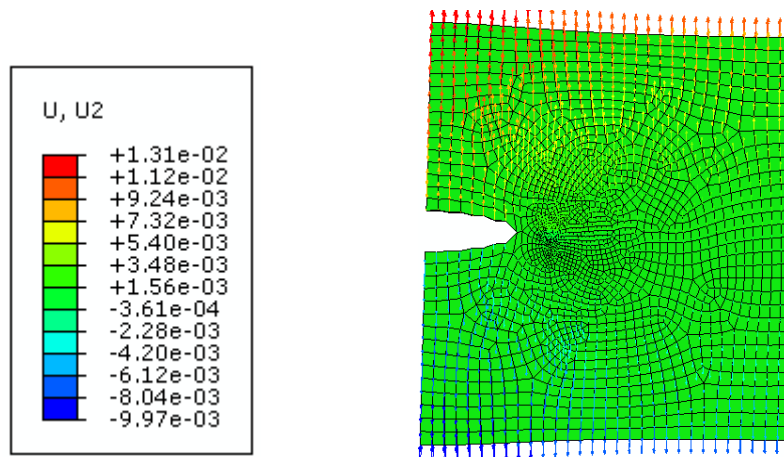


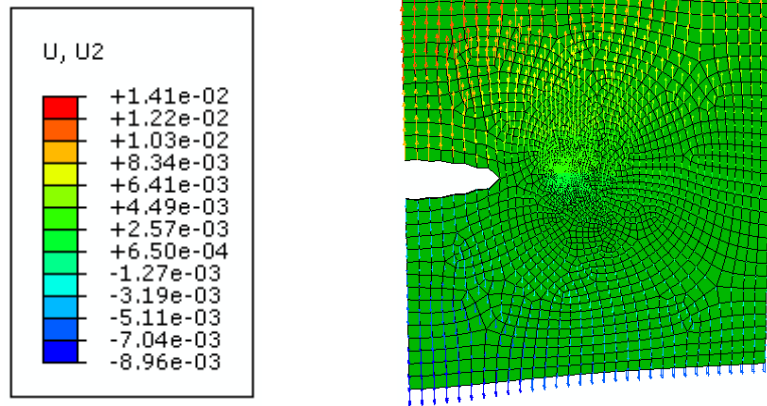
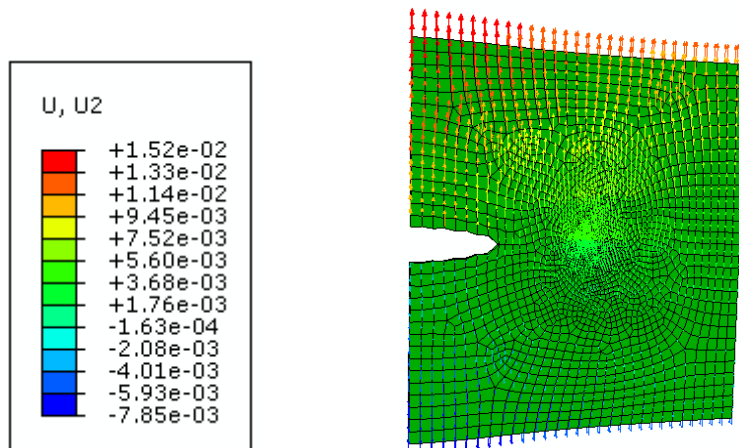
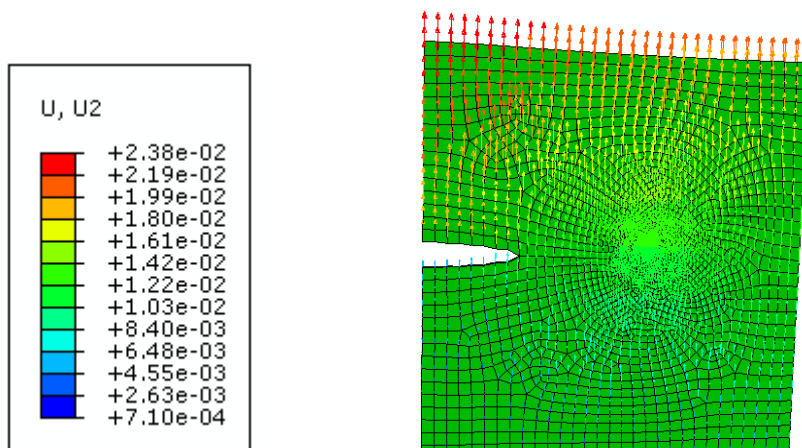
Déformation ϵ_{22} (mm) cas ($l = 35\text{mm}$)

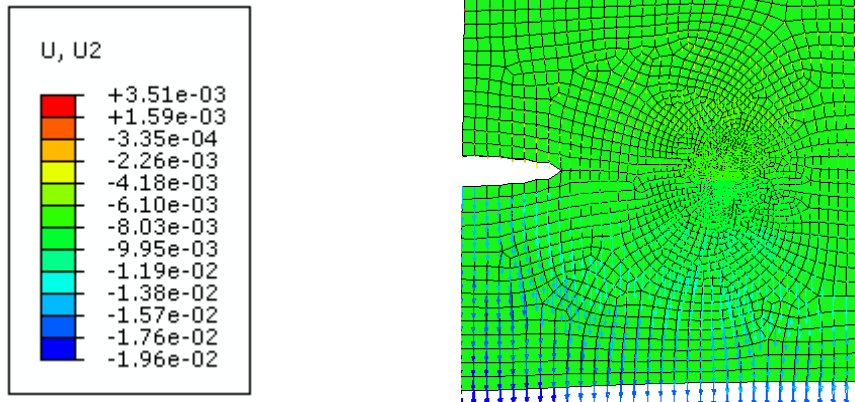
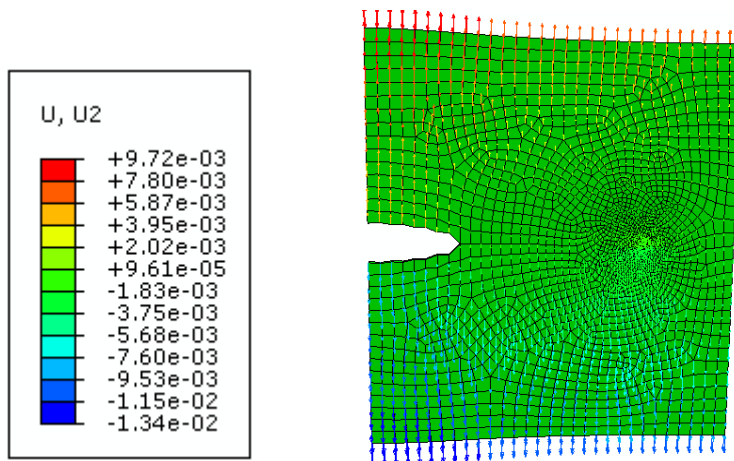
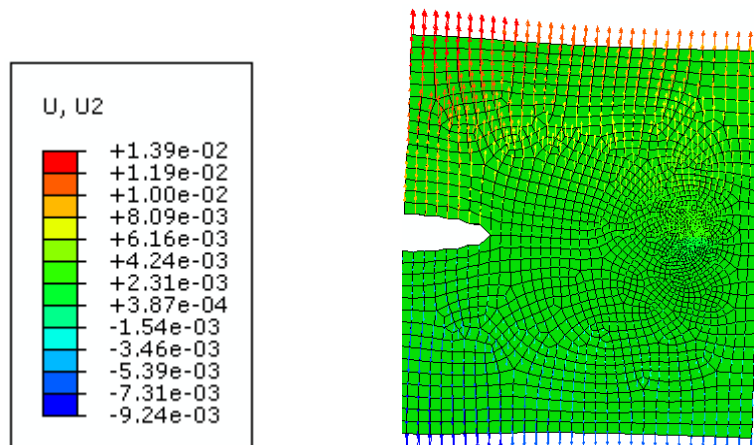


Déformation ϵ_{22} (mm) cas ($l = 40\text{mm}$)

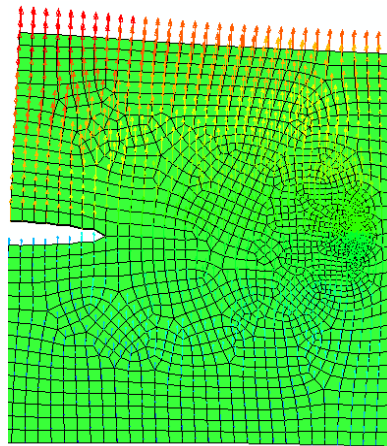
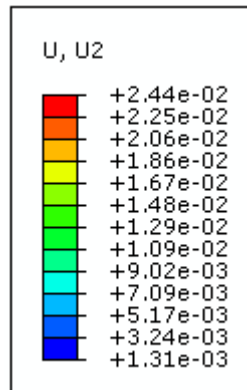


Déformation ϵ_{22} (mm) cas ($l = 40\text{mm}$)Déplacement u_{22} (mm) cas ($l \rightarrow 0\text{mm}$)Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 5\text{mm}$)

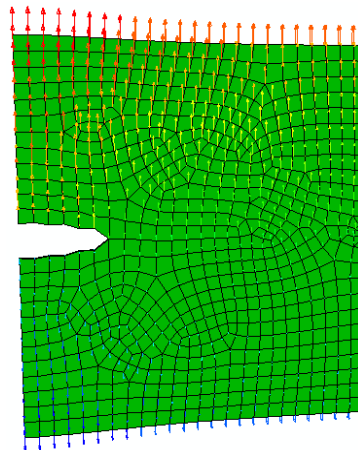
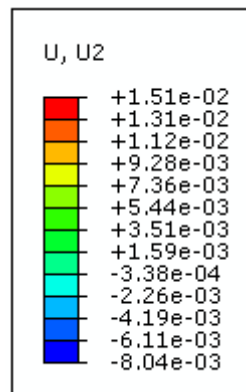
Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 10\text{mm}$)Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 15\text{mm}$)Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 20\text{mm}$)

Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 25\text{mm}$)Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 30\text{mm}$)Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 35\text{mm}$)

Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 40\text{ mm}$)



Déplacement u_{22} (mm) cas ($l = 40\text{ mm}$)



Références bibliographiques

- [1] T. Zhang and J. Li ; *Interaction of an edge dislocation with an interfacial Crack*, International Journal of Applied Physics, Vol. 72, pages 2226, (1992).
- [2] J. Bénard, A. Michel, and J. Talbot ; *Métallurgie générale*. Masson, 2^{em} édition. (1984)
- [3] N. Recho ; *Rupture par fissuration des structures*, Vol. 14, pages 384, éd. Hermès Paris (1995).
- [4] R. C. Krishnaswamy, K. Wolfgang, *Processes Controlling Fast Fracture of Brittle Solids*, Computing in Science and Engineering, vol. 1, pp. 24-31 (1999).
- [5] A .Griffith ; *The phenomana of rupture and flow in solid*, Philosophical translation, Royal Soc of London, Serie A, Vol.221, (1920).
- [6] H. Westergaard ; *Dependence on near stress and stress amplitude of the fatigue*, Journal of Applied Mechanics, Série A, Vol. 49 (1939).
- [7] G. Irwin ; *Analyses of stresses and strains near end of crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics, Série E, Vol. 24 (1957).
- [8] F. Ashby and R. David ; *An introduction to their Properties and applications*, Engineering Materials, Vol.1, Department of Engineering, University of Cambridge, UK (1980).
- [9] V. Mustoneny and K. Kaski ; *Molecular dynamic study of a single dislocation in a two-dimensional lennard Jones system*, International Journal of Modern Physics, Vol. 14, pages 407-421 (2003).
- [10] D. Rosato: *Plastics engineered product design*, Plastics Rubber Journal, Vol. 25, pages 59, Publishing (2004).
- [11] G. R. Irwin ; *Fracture*, Handbuch der Physik, Vol. 6, Springer, Berlin. (1958).
- [12] H. D. Bui and V. Dang ; *Généralisation de la théorie de la rupture*, J.M.A., Vol. 3, n° 2, pp. 205-225.(1979).
- [13] C. E. Inglis ; *Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Trans. Inst. Archit., Vol. 55, London. (1913).
- [14] H. D. Bui ; *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, Paris. (1978).
- [15] N. I. Muskhelishvili ; *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff International Publishing, Leyden, pages 732. (1975).
- [16] P. Tong ; *New displacement hybrid finite element models for solid continua*, international Journal of Numerical Methods in Engineering., Vol. 2, pp. 73-83. (1970)
- [17] K. Dems K. et Z. Mroz ; *Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis.II- Structure shape variation*, International Journal of Solids and Structures Vol. 20, pp. 527-552 (1984).

- [18] G. I. Taylor ; *The mechanism of plastic deformation of crystals*, Proc. Roy. Soc. A, (1934). Journal Vol. 145, No. 855 (Jul. 2, 1934), pp. 362-387
- [19] J. M. Burgers ; *Some considerations on the fields of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap, 42: 293–378, (1939).
- [20] J. D. Eshelby ; *Dislocation as a cause of mechanical damping in metals*. Proc. Roy. Soc. A., 197: 396–416, (1949).
- [21] F. Nabarro ; *The interaction of screw dislocations and sound wave*, Proc. Roy. Soc. A., 209: 278–290. (1951).
- [22] J. Martin ; *Dislocations et plasticité des cristaux*, Première Edition, ISBN, 2- 88074-447-4, Presses polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (2000).
- [23] J. Friedel ; *Dislocations*, Pergamon Press, London Oxford (1964).
- [24] H. Mughrabi, *Dislocation clustering and long-range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals*, Revue Phys. Appl., Vol. 23, pp. 367-379 (1988)
- [25] J. Kratochvil, *Dislocation pattern formation in metals*, Revue Phys. Appl., Vol. 23, pp. 419-429 (1988)
- [26] M. F. Ashby and D. Jones : *An Introduction to their properties and applications*, 2nd Edition, Butterworth-Heinemann, (1996).
- [27] R. Smallman and R. Bishop : *Science, Process, Applications*, Modern Physical Metallurgy and Materials Engineering, pages 207, 91, Boston (1999).
- [28] C. Gangadharan and J. Dundurs: *Edge dislocation near an interface crack in a two-phase material*, Indian Journal of Technology, vol. 11, page 410 (1973).
- [29] H. Lin and R. Thomson: *The influence of dislocation obstacles*, Acta Metallurgica, Vol. 34, pages 187-206 (1986).
- [30] C. Sih and R. Asaro : *Interaction of semi-infinite interface crack and multiple Finite*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pages 299 (1988).
- [31] H. Hamli Benzahar and M. Chabaat ; *Stress field and energy analysis during the fracture of Composite materials*, Journal of Applied Mechanics and Materials. pp 524. (2014).
- [32] S. Zhigang ; *Singularities interacting with interface and cracks*, International Journal of Solids and Structure, Vol. 25, pages 1133 (1989).
- [33] J. Hutchinson ; *Kinking of a crack out of an interface*, International Journal of Applied Mechanics, vol. 56, pages 270-278 (1989).
- [34] O. Tamate ; *Behavior of a screw dislocation near a partially bonded bimetallic interface*, International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 4, pp. 357-364 (1968).

- [35] O. Tamate and T. Kurihara ; Behavior of an edge dislocation near a partially bonded bimetallic interface, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 6, pp. 341-351 (1970).
- [36] P. Anderson and J. Rice ; The stress field and energy of a three-dimensional dislocation loop at a crack tip; Thermodynamic and mechanical models, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 35, pp. 743-769 (1987).
- [37] S. T. Shiue, C.T. Hu, and S. Lee; Elastic interaction between screw dislocations and a welded surface crack in composite materials; *Engineering of fracture mechanic*, Vol.33, pages 697-706 (1989).
- [38] A. Beker, L. Rose and R. Jones ; *Advances in the bonded composite repair of metallic aircraft structure*, Vol. 1, ISBN: 0-80-042699-9, Elsevier, Sciences, oxford, UK (2002).
- [39] G. Sih ; *Handbook of stress intensity factors for researchers and engineers*, Institute of Fracture and Solid of Mechanics, Lehigh university, Bethlehem, USA (1973).
- [40] F. Erdogan and G. Gupta ; *On the numerical solution of singular integral equations*, *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 29, pages 525-539 (1972).
- [41] K. Kendall ; *Transition between cohesive and interfacial failure in a laminate*, *Proceedings of Royal Society London A* 344, pages 287-302 (1975).
- [42] M. Chabaat ; *Comparison of minimal principal stress with crazes trajectories in a brittle material*, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 37, pages 47-54 (1988).
- [43] A. Chudnovsky ; *Crack Layer Theory*, *International Journal of Engineering and Sciences*, NASA. Report CR-174634 (1984).
- [44] A. Chudnovsky and A. Dolgopolsky ; *Semi-empirical crack tip analysis*, *International Journal of Solid and Structures*, Vol.23, pages 1-21 (1987).
- [45] A. Rubinstein and A. Sadegh ; *Stress Intensity Factors of a Crack Emanating*, *International Journal of Fracture*, Vol. 31, page 233-242 (1986).
- [46] L. Rose ; *Micro-crack interactions with a main crack*, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 31, pages 233-242 (1986).
- [47] J. Dundurs ; *Elastic interaction of dislocations with in homogeneity* , *Mathematical Theory of Dislocations*, Edition T. Mura, pages 7-115, A S M E, New York (1969).
- [48] N. Mushkelishvili ; *Some basic problems of mathematical theory of elasticity*, *International Journal of solids and Structure*, Noordhoff, Holland, (1953).
- [49] M. Chabaat and S. Djouder ; *Crack-microcracks interactions using a semi-empirical method*, *International Journal of Materials Science and Engineering A*, Vol. 387-389, (2004).

- [50] H. Hadjab ; *Zone de Processus de Rupture dans les matériaux quasi-fragiles, Investigations expérimentale et modélisation numérique*, Thèse de Doctorat d'Etat, Faculté de Génie Civil, USTHB (2007).
- [51] R. H. Doremus ; *Fracture in Glass Science*, 2^{ème} Edition., A. Wiley Inter science Publication, Science and Technology of Materials ser. (1994)
- [52] A. Varshneya ; *Fundamentals in organic glasses*, Harcourt Brace and Company, (1994)
- [53] R. Lawn and T. R. Wilshaw; *Atomistic aspects of crack propagation in Fracture of Brittle Solids*, Cambridge University Press, Cambridge Solid State Science ser. (1975)
- [54] R. A. McMaster, D. M. Shetterly, and A. G. Bueno ; *Annealed and tempered glass in Ceramics and Glasses*, ASM International, Engineered Materials Handbook, vol. 4.(1991)
- [55] E. Savoy ; *Traité technique du verre*, 2^{ème} édition, 301 p. (1989)
- [56] B. Yao and D.W. Murray ; *Study of concrete cracking and bond using a distributed discret crack finite element model*, ACI Materials Journal Technical paper, V92, N°1 (1994).
- [57] A. J. Fawkes and A. R. Luxmoore ; *Assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements*, Eng. Fracture Mechanics, Vol. 11, pp 143-159. (1979).
- [58] R. M. Courtade, M. Mikkola. and C. Surry ; *Variational methods for a non linear behavior of multilayered solids*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 22, n° 4.(1989)
- [59] T. H.H. Pian ; *Reflections and remarks on hybrid and mixed finite element methods, hybrid and mixed finite element methods*, Edited by S. N. Altury, S. Gallagher & O. C. Zienkiewicz, John Willey and Sons, New York, pp. 565-570. (1983)
- [60] T. H. H. Pian and P. Tong ; *Basis of finite element methods for soli continua*, International Journal for numerical method in engineering, Vol. 12, n° 5, pp. 891-892. (1978)
- [61] D. R. J. Owen and A. J. Fawkes ; *Engineering fracture mechanics*, Pineridge Press Ltd, Swansea. (1983)
- [62] H. Tada, P. Paris and G. Irwin ; *The stress analysis of crack, Handbook*. Del Research Corporation, Saint Louis. pp. 213. (1973).
- [63] H. Hamli Benzahar and M. Chabaat ; *Crack in brittle material at presence of a dislocation*. International Journal of Advanced Materials Research, Vol.921. pp 2043-2047 (2014).
- [64] J. Rice ; *A path-independent integral and the approximate analyses of strain concentration by notches and cracks*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, pages 379-386 (1968).
- [65] F. Knott ; *Fundamentals of fracture mechanics*, Butterworths Publisher, (1976).

[66] H.D. Buit : *Mécanique de la rupture fragile*". Editions Masson (1978).

[67] H. Hadjab, **M. Chabaat** & J.-Fr. Thimus: *Use of Scanning Electron Microscope and the Non local Isotropic Damage Model to Investigate Fracture Process Zone in Notched Concrete Beams*, International Journal of Experimental Mechanics, Vol. 47 N° 04, pp. 473 – 484, August 2007.

[68] S. Gong and H. Horii : *General solution to the problem of microcracks near the tip of a main crack*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 37, N°1, pages 27-46 (1989).

[69] A. Chudnovsky and S. Wu : *Elastic interaction of crack with a random array of fracture*, International Journal of Fracture, Vol. 49, pages 123-140 (1991).